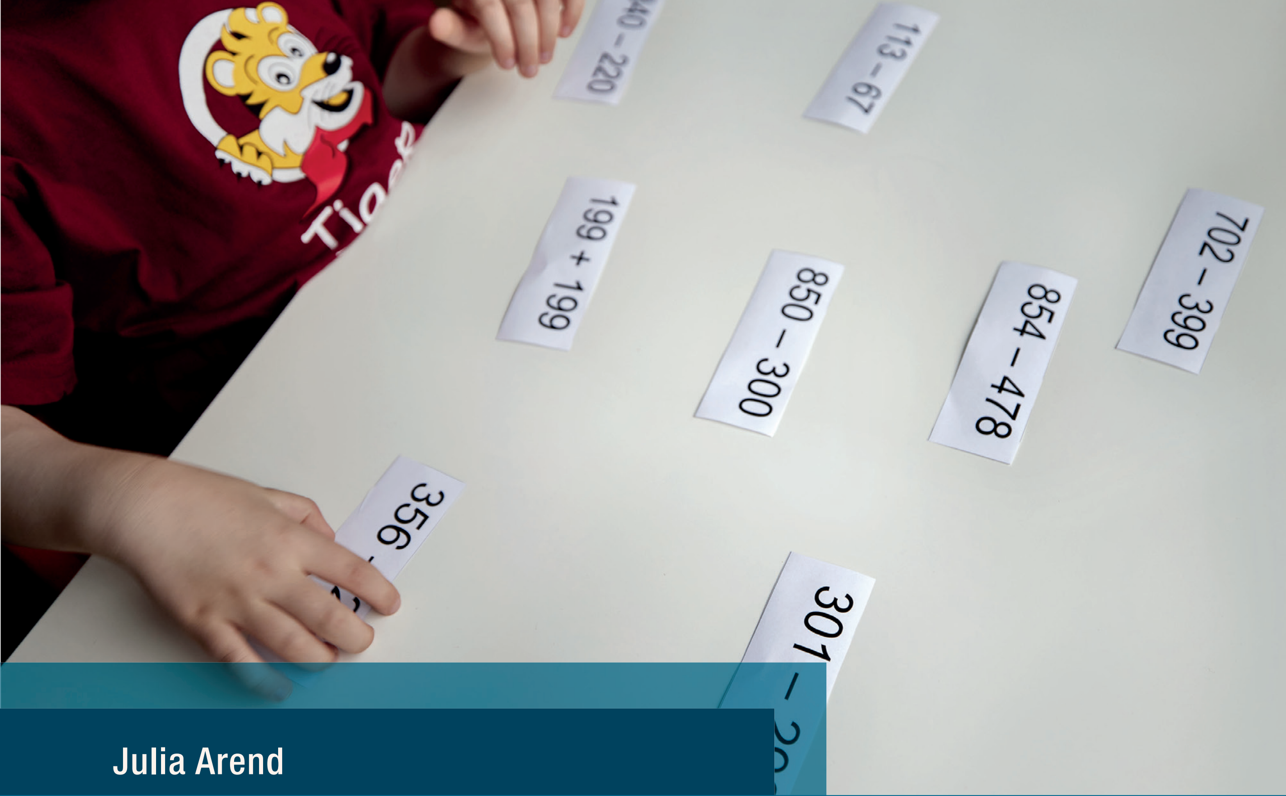


Julia Arend

Strategieflexibilität und -adaptivität in der Nutzung halbschriftlicher Additions- und Subtraktionsstrategien im 3. Schuljahr

Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze

kassel university press

Julia Arend

Strategieflexibilität und -adaptivität in der Nutzung halbschriftlicher Additions- und Subtraktionsstrategien im 3. Schuljahr

Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze

kassel
university
press

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Humanwissenschaften der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktorin der Philosophie (Dr. phil.) angenommen.

Gutachter: Prof. Dr. Frank Lipowsky
Prof. Dr. Aiso Heinze

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Januar 2019

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2019
ISBN 978-3-7376-0899-2
DOI: https://doi.org/doi:10.17170/kobra-202010262002

https://kup.uni-kassel.de

Printed in Germany

Für meine Familie

Zusammenfassung

Schülerinnen und Schüler sollen im Mathematikunterricht nicht nur in der Lage sein, Strategien korrekt einzusetzen, sondern darüber hinaus die beiden Kompetenzen besitzen, über eine Vielzahl an Strategien zu verfügen *(Strategieflexibilität)* und diese angemessen an unterschiedliche Aufgabenanforderungen anpassen zu können *(Strategieadaptivität)*.

Strategieflexibilität und Strategieadaptivität wurden in den letzten Jahrzehnten sowohl national als auch international in die Curricula aufgenommen. Im Mathematikunterricht der Grundschule eignen sich halbschriftliche Rechenstrategien besonders, um die Entwicklung dieser beiden Kompetenzen zu untersuchen, da zur Lösung einer Grundrechenaufgabe unterschiedliche, aber gleichermaßen zielführende Strategien existieren. Allerdings deuten zahlreiche Befunde darauf hin, dass der Mathematikunterricht in der Grundschule nach wie vor überwiegend einem routineorientierten Ansatz folgt, da die Schülerinnen und Schüler kaum Verkürzungsstrategien verwenden und vorwiegend auf Universalstrategien zurückgreifen, die unabhängig von Aufgabenkriterien eingesetzt werden können (z. B. Benz, 2005; Csíkos, 2016; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016; Torbeyns, Hickendorff & Verschaffel, 2017). Darüber hinaus zeigen unterschiedliche Befunde, dass die halbschriftlichen Rechenstrategien nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren häufig durch diese ersetzt werden (z. B. Csíkos, 2016; Selter, 2001; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). Studien zur Wirksamkeit von reformorientierter Unterrichtsansätzen deuten dagegen darauf hin, dass diese Schülerinnen und Schüler mehrheitlich dazu befähigen, ihre Strategien flexibel und adaptiv einzusetzen (z. B. Blöte, Van der Burg, Eeke & Klein, 2001; De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière & Verschaffel, 2010; Rathgeb-Schnierer, 2006). Der Vergleich unterschiedlicher reformorientierter Ansätze im Hinblick auf die Förderung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl stellt dabei ein Forschungsdesiderat dar. Hier knüpft die vorliegende Arbeit an.

In der in dieser Arbeit beschriebenen experimentellen Studie mit 79 Schülerinnen und Schülern der dritten Klasse wird der Frage nachgegangen, ob sich ein explizierender oder ein problemlöseorientierter Ansatz besser eignet, die Kompetenz zur flexiblen (Fragestellung 1) sowie adaptiven Wahl (Fragestellung 2) von Additions- und Subtraktionsstrategien zu fördern. Den Kern der Studie bildet eine außerschulische Intervention mit einem Umfang von 16 Unterrichtsstunden, die im Jahr 2011 durchgeführt wurde. Im explizierenden Ansatz ($N = 41$) wurden die zentralen halbschriftlichen Rechenstrategien vorgegeben, prozedural geübt und dabei auch konditionales Wissen zum Strategieeinsatz vermittelt. Im problemlöseorientierten Ansatz ($N = 38$) wurden hingegen keine Strategien vorgegeben, sondern von den Schülerinnen und Schülern selbst generiert und im Hinblick auf Effizienzkriterien stetig miteinander verglichen. Eine integrierte Zahlenblickschulung sollte die Schülerinnen und Schüler dieses Ansatzes darüber hinaus dazu befähigen, Zahl- und Aufgabenkriterien zu erkennen und zu beschreiben.

In den Analysen wird die flexible und adaptive Strategieverwendung zunächst auf deskriptiver Ebene dargestellt und anschließend experimentalgruppenspezifische Unterschiede in der Fähigkeitsentwicklung mit linearen gemischten Modellen geprüft. Die Ergebnisse zeigen, dass Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes im Zeitraum der Intervention einen größeren Zuwachs im Repertoire an Verkürzungsstrategien und in der Strategieadaptivität verzeichnen als Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes. Wird jedoch die Entwicklung nach der Intervention betrachtet, so kehrt sich der Vorteil um. D h. selbst generierte Strategien scheinen nachhaltiger verfügbar und stärker konzeptuell fundiert zu sein als prozedural erlernte Strategien. Im Zeitraum nach der Intervention weisen die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Unterrichts eine signifikant bessere Lernentwicklung in der Strategieflexibilität und der Anzahl verwendeter Verkürzungsstrategien auf.

In beiden Experimentalgruppen sinken die Strategieflexibilität und -adaptivität nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren. Dennoch liegt der Anteil an genutzten Verkürzungsstrategien in beiden Ansätzen am Ende des dritten Schuljahres deutlich über Referenzwerten aus anderen Studien.

Aus den Befunden ergeben sich sowohl Implikationen für den Mathematikunterricht als auch für weiterführende Forschungsvorhaben in diesem Themenfeld, welche in einer abschließenden Diskussion dargestellt werden.

Abstract

Students in mathematics instruction should not only be able to use strategies correctly, they should also be able to use a plurality of strategies flexibly and be able to adapt these strategies to task characteristics.

These two competences, the *flexible use of strategies* and the *adaptive use of strategies*, have been included in national and international curricula over the last decades. Number-based strategies in elementary mathematics instruction are especially suited to evaluate these competences since there are several different yet comparably productive approaches to perform basic arithmetic operations. However, several research studies indicate that elementary mathematics instruction is primarily based on a skills approach because students hardly use shortcut strategies and predominantly rely on default procedures which can be applied regardless of task characteristics (e. g. Benz, 2005; Csíkos, 2016; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016; Torbeyns et al., 2017). Furthermore, results show that as soon as written algorithms are introduced, number based strategies often get replaced by these procedures (e. g. Csíkos, 2016; Selter, 2001; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). Studies concerned with the evaluation of reform-based approaches indicate that these approaches help students to facilitate a flexible and adaptive use of strategies (e. g. Blöte et al., 2001; De Smedt et al., 2010; Rathgeb-Schnierer, 2006). The comparison of different reform-based approaches considering the promotion of flexible and adaptive use of strategies is a desideratum for research. This thesis deals with this question.

This experimental study which is the basis for this thesis evaluates whether an explicit or an implicit approach is better suited to enable flexible (research question no. 1) and adaptive (research question no. 2) use of addition and subtraction strategies. The sample consists of 79 third-grade students who participated in an extracurricular intervention in 2011 which comprised 16 lessons. In the explicit approach ($N = 41$), the central number-based strategies were provided and practiced in combination with the relevant conditional strategy knowledge. In the implicit approach ($N = 38$), strategies were not provided but generated by the students themselves who also continuously compared these strategies concerning their efficiency. Furthermore, the students in this condition received a number sense training in order to be able to notice and describe number as well as task characteristics.

The analyses display the flexible and adaptive use of strategies on a descriptive level before linear mixed models evaluate the differences in the competence development between the two experimental groups. Results show that students of the explicit approach gained a bigger repertoire of shortcut strategies and used more adaptive strategies during the intervention than students of the implicit approach. However, this advantage is reversed when the development after the intervention is regarded. This means that self-generated strategies last longer and seem to have a more profound conceptual basis than strategies which are learned procedurally. Students of the implicit condition possess a significantly better learning development regarding the flexible use of strategies and the amount of shortcut strategies after the intervention.

The flexible and the adaptive use of strategies diminish after the introduction of the written algorithms in both experimental groups. Nevertheless, the amount of shortcut strategies in both conditions exceeds the reference value at the end of third grade in other studies.

A concluding discussion illustrates implications for mathematics instruction and for further research in this area.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> *Cognitive flexibility can be described as the disposition to consider diverse context-specific information elements while deciding on how to solve a problem or to execute a (learning) task in a variety of domains and to adapt one's problem solving or task execution in case the context changes or new information becomes present.* (Elen, Stahl, Bromme & Clarebout, 2011, S. 2)

Flexibles Denken gilt domänenübergreifend als eine wichtige Eigenschaft menschlichen Denkens. Kognitive Flexibilität bezeichnet die Kompetenz, das eigene Verhalten an sich verändernde Bedingungen anpassen zu können (Elen et al., 2011). Dabei wird diese Eigenschaft als wichtige Voraussetzung für Problemlösefähigkeiten und Kreativität angesehen (zusf. Krems, 1995; Theurer, 2015). Wie Elen et al. (2011) im obigen Zitat hervorheben, erfordert kognitive Flexibilität eine Reihe an Denkprozessen, die systematisch, aber nicht mechanisch vollzogen werden.

Die Entwicklung des flexiblen Denkens stellt einen zentralen Forschungsgegenstand in der Instruktionsforschung dar. Insbesondere Studien aus der Forschergruppe um Siegler (2006, 2007) konnten zeigen, dass bereits Vorschülerinnen und -schüler in verschiedenen Anwendungskontexten eine Vielzahl unterschiedlicher Strategien nutzen. Gleichzeitig weisen einige Studien darauf hin, dass Kinder dabei nicht immer solche Strategien aus ihrem Strategierepertoire verwenden, die aus einem normativen Blickwinkel am besten zu den gegebenen Anforderungen passen, d. h. die Strategien werden nicht adaptiv verwendet (Siegler, 1996).

Die Strategieverwendung im Mathematikunterricht der Grundschule hat in den letzten Jahrzehnten besonderes Forschungsinteresse erfahren. Im zweiten und dritten Schuljahr werden dort die sogenannten halbschriftlichen Additions- und Subtraktionsstrategien behandelt. Unter dem Begriff wird eine Vielzahl unterschiedlicher, aber gleichermaßen zielführender Strategien, zusammengefasst. Halbschriftliche Rechenstrategien sollen einen verständnisorientierten, flexiblen Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen fördern. Die Befundlage zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl im Mathematikunterricht der Grundschule zeigt insgesamt, dass die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in diesem Bereich trotz der Integration dieser Kompetenzen in die Curricula gering ausgeprägt sind.

Zugleich besteht sowohl in der mathematikdidaktischen Literatur als auch in den verschiedenen Mathematikbüchern eine Vielzahl unterschiedlicher Instruktionsansätze, um die Strategieflexibilität zu fördern. Zahlreiche Studien konnten zeigen, dass die Strategieflexibilität durch unterschiedliche Instruktionsansätze, in denen der Vergleich von Strategien im Zentrum des Unterrichts steht, besser gefördert werden kann als durch die Vermittlung von nur einer oder wenigen Strategien (Blöte et al., 2001; De Smedt et al., 2010; Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009; Hiebert & Wearne, 1996; Klein, Beishuizen & Treffers, 1998; Woodward & Baxter, 1997). Allerdings existieren bisher keine Längsschnittstudien, welche die Wirksamkeit unterschiedlicher sogenannter reformorientierter Unterrichtsansätze für die flexible und adaptive Verwendung von Additions- und Subtraktionsstrategien unter experimentellen Bedingungen untersucht haben. An diese Forschungslücke knüpft die vorliegende Arbeit an, in der die Wirksamkeit zweier reformorientierter Instruktionsansätze zur Förderung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 untersucht wird. Die Studie wurde im Zeitraum 2011/2012 mit 79 Schülerinnen und Schülern der dritten Klasse durchgeführt, die während einer außerschulischen Intervention mit experimentellem Studiendesign entweder nach einem explizierenden oder nach einem problemlöseorientierten Unterrichtsansatz unterrichtet wurden. Beide Ansätze lassen sich den „reformorientierten Ansätzen" zuordnen, die sich dadurch auszeichnen, dass die flexible und adaptive Strategiewahl von Beginn an im Vordergrund des Mathematikunterrichts steht. Im explizierenden Ansatz wurden die zentralen halbschriftlichen Rechenstrategien prozedural zusammen mit konditionalem Strategiewissen vermittelt. Die Konzeptualisierung beruht dabei insbesondere auf Erkenntnissen zum Strategiewahlmodell und theoretischen Überlegungen aus der Cognitive-Load-Theorie. Schülerinnen und Schüler sollten im explizierenden Ansatz während der Intervention ein Strategierepertoire mit den zentralen halbschriftlichen Rechenstrategien aufbauen, aus dem sie basierend auf ihrem ebenfalls in der Intervention erworbenen konditionalen Wissen adaptive Strategien auswählen können. Dem problemlöseorientierten Ansatz wurden theoretische Überlegungen zum Generierungseffekt sowie Elemente konstruktivistischer Lerntheorien zugrunde gelegt. Ziel war es, die Schülerinnen und Schüler durch die in diesem Unterrichtsansatz integrierte Zahlenblickschulung im Sinne metakognitiver Stützstrategien (Kap. 3.3.4) dazu zu befähigen, Aufgaben- und Zahleigenschaften zu analysieren und diese für die Generierung individueller Lösungswege zu nutzen. Die Flexibilität und Adaptivität der Lösungswege sollte in diesem Unterrichtansatz zum einen durch die intensive Auseinandersetzung bei der Generierung eigener Lösungswege und zum anderen durch die Analogiebildung zu bereits ähnlich gelösten Aufgaben erreicht werden.

Die Fähigkeit zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl wurde dabei zu mehreren Messzeitpunkten vor und nach der Intervention erhoben, sodass zum einen die Entwicklung über das gesamte dritte Schuljahr und zum anderen messzeitraumspezifische Entwicklungen für die Zeit während der Intervention und nach der Intervention abgebildet werden können. Mit dem längsschnittlichen Design werden die zwei folgenden zentralen Fragestellungen der Arbeit untersucht:

Eignen sich verschiedene reformorientierte Unterrichtsansätze gleichermaßen, um die Strategieflexibilität (Fragestellung 1) und -adaptivität (Fragestellung 2) bei der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 zu fördern?

Dabei wird zunächst eine Begriffsdefinition vorgenommen, in der die Begriffe *Flexibilität* und *Adaptivität*, die in der Literatur häufig synonym verwendet werden, erläutert und voneinander abgegrenzt werden (Kap. 2.1). Außerdem wird dargestellt, weshalb sich halbschriftliche Rechenstrategien besonders für die Untersuchung der kognitiven Flexibilität von Grundschulkindern eignen und welche idealtypischen Strategien hierbei unterschieden werden (Kap. 2.2).

Die verschiedenen Instruktionsansätze, die zur Förderung der Strategieflexibilität existieren, lassen sich sowohl aus mathematikdidaktischer als auch aus lerntheoretischer bzw. instruktionspsychologischer Perspektive betrachten und jeweils sowohl mit theoretischen Modellen als auch empirischen Befunden stützen. In Kapitel 3 wird der Erwerb von Strategieflexibilität aus mathematikdidaktischer Perspektive beschrieben. Dabei werden unterschiedliche Strategieerwerbskonzepte und deren zugrunde liegende Vorstellungen zum mathematischen Wissenserwerb dargestellt. Daran schließt die Befundlage zur Wirksamkeit der einzelnen Strategieerwerbskonzepte an. In Kapitel 4 wird auf konstruktivistische Lerntheorien, die Cognitive-Load-Theorie, die Rolle metakognitiver Prozesse und das Strategiewahlmodell eingegangen.

Die zentralen Fragestellungen zum Erwerb von Strategieflexibilität und -adaptivität werden in Kapitel 5 in weitere Teilfragstellungen und Hypothesen untergliedert. Dabei wird unter anderem der Frage nachgegangen, ob sich die Schülerinnen und Schüler der beiden Instruktionsansätze in den verwendeten Strategien und in der Anpassung dieser Strategien an Aufgabenkriterien unterscheiden:

Zeigen sich zwischen den Schülerinnen und Schülern der beiden Instruktionsansätze Unterschiede in der Strategieflexibilität (Fragestellung 1a) und in der adaptiven Strategieverwendung (Fragestellung 2a)?

Aufgrund einer widersprüchlichen Befundlage ist unklar, inwiefern leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler von reformorientierten Unterrichtsansätzen profitieren können (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1997; Heinze et al., 2009; Heirdsfield & Cooper, 2004). Daher lauten weitere Fragestellungen:

Zeigen sich im Interventionszeitraum in der Entwicklung der Strategieflexibilität und in der Verwendung von Verkürzungsstrategien (Fragestellung 1b) sowie in der Entwicklung der Strategieadaptivität (Fragestellung 2b) in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen?

Die Fragestellungen 1b und 2b werden dabei ausschließlich für den Interventionszeitraum geprüft, da für diesen Zeitraum zusätzliche Prozessdaten vorliegen.

Dass Grundschülerinnen und Grundschüler, wie eingangs beschrieben, in vielen Studien keine flexible und adaptive Strategiewahl zeigten, lässt sich auf verschiedene Einflussfaktoren zurückführen. Neben dem Einfluss des Instruktionsansatzes wirken sich auch individuelle Lernermerkmale auf die Strategieverwendung aus. Hiermit beschäftigen sich die Fragestellungen 1c und 2c:

Wirken sich die individuellen Lernermerkmale Intelligenz, mathematische Fähigkeiten und Arbeitsgedächtnis sowie eine Auffrischung der Lerninhalte auf die Entwicklung des Strategierepertoires (Flexibilität) und die Verwendung von Verkürzungsstrategien (Fragestellung 1c) bzw. die Entwicklung der adaptiven Strategieverwendung (Fragestellung 2c) aus?

In Kapitel 5 wird das methodische Vorgehen bei der Datenauswertung beschrieben und dabei zunächst das Studiendesign (Kap. 6.1) und anschließend der Ablauf der Intervention dargestellt (Kap. 6.2). Daran knüpft die Beschreibung der für die Auswertung der Daten relevanten und im Projekt eingesetzten Erhebungsinstrumente an (Kap. 6.3). Durch den Einbezug multipel imputierter Daten konnten in den Analysen größtenteils fehlende Werte berücksichtigt werden (Kap. 6.4). Die Hypothesen der vorliegenden Arbeit wurden dabei sowohl deskriptiv als auch durch parametrische Verfahren mit linearen gemischten Modellen geprüft. Die Beschreibung der verwendeten Auswertungsverfahren ist Gegenstand des Kapitels 6.5. Die Stichprobenbeschreibung wird im Methodenkapitel nach der Beschreibung der Erhebungsinstrumente und Auswertungsverfahren dargestellt (Kap. 6.6), da die Experimentalgruppen nach der randomisierten Zuweisung – basierend auf den Leistungen in verschiedenen Tests – parallelisiert wurden.

Im Ergebnisteil werden zunächst Korrelationen für jede der drei abhängigen Variablen *Strategieflexibilität*, *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und *Strategieadaptivität* mit individuellen Lernermerkmalen berichtet (Kap. 7.1). Daran anschließend folgt die Beschreibung der Ergebnisse zur Entwicklung der *Strategieflexibilität*, des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1, Kap. 7.2) und der *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2, Kap. 7.3). Dabei erfolgt die Darstellung der Ergebnisse sowohl für die Entwicklung im gesamten dritten Schuljahr als auch jeweils separat für den Interventionszeitraum und die Entwicklung nach der Intervention.[1] Da zahlreiche Befunde bereits gezeigt haben, dass sich die Einführung der schriftlichen Normalverfahren negativ auf die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl auswirkt (Csíkos, 2016; Selter, 2000; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016), leistet die vorliegende Studie auch einen Beitrag zu der Frage,

[1] Ein Teil der Ergebnisse der Dissertation (Analysen zum Strategierepertoire in Kap. 7.2.1.1) ist bereits in ähnlicher Form im Artikel von Heinze, Arend, Grüßing und Lipowsky (2018) erschienen.

inwieweit die flexible und adaptive Strategiewahl durch gezieltes Training in den beiden Instruktionsansätzen nachhaltig beeinflusst werden kann.

Abschließend werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammenfassend betrachtet und diskutiert (Kap. 1). Dabei werden die Befunde in den aktuellen Forschungsstand eingeordnet (Kap. 8.1), Limitation der Studie und der Auswertungen beschrieben (8.2) sowie ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen und Forschungsvorhaben gegeben (Kap. 8.3).

2 Begriffsdefinitionen

2.1 Flexibilität und Adaptivität in der Strategiewahl

Die Expertise-Forschung nennt *Flexibilität* bzw. *Adaptivität* als eine Kompetenz, die Novizen und Experten in einem bestimmten Anwendungsfeld voneinander unterscheidet (Feldon, 2007; Hatano, 1988; Hatano & Oura, 2003; Star & Newton, 2009). Im mathematischen Bereich können die *flexible* und *adaptive Strategiewahl* als zentrale Kompetenzen betrachtet werden, die Kinder mit mathematisch sehr guten Fähigkeiten auszeichnen (zusf. Dowker, 2005). Dies wird auch an Definitionen mathematischer Kompetenz wie der folgenden von Kilpatrick, Swafford und Findell (2001) deutlich.

Mathematische Kompetenz umfasst nach Kilpatrick et al. (2001, S. 5; frei übersetzt):

1. konzeptuelles Verständnis für mathematische Konzepte, Operationen und Beziehungen,
2. prozedurale Fertigkeiten (Fähigkeit, Prozeduren flexibel, akkurat, effizient und angemessen auszuführen),
3. Strategiekompetenz (Fähigkeit, mathematische Probleme zu formulieren, darzustellen und zu lösen),
4. adaptives Begründen (Kompetenz zum logischen Denken, Reflektieren, Erklären und Begründen) sowie
5. motivationale und volitionale Einstellungen, Mathematik als bedeutungsvoll anzusehen und gleichzeitig eine angemessene Selbstwirksamkeitserwartung zu entwickeln.

Für eine flexible und adaptive Strategiewahl, die im Zentrum der vorliegenden Arbeit steht, sind alle in der Definition genannten mathematischen Fähigkeiten von Bedeutung.

Strategieflexibilität/-adaptivität wurde sowohl national (Kultusministerkonferenz [KMK], 2004) als auch international in die Bildungspläne für das Fach Mathematik aufgenommen (z. B. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2010, Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2010). Wie die internationale Forschung zu dem Thema zeigt, erfährt dies seitdem ein besonderes Forschungsinteresse (vgl. Kap. 3.4).

Wie im alltäglichen Sprachgebrauch werden die beiden Begriffe *Flexibilität* und *Adaptivität* auch in der wissenschaftlichen Literatur teilweise synonym verwendet (Threlfall, 2009), während sie in anderen Publikationen in zwei unterschiedliche Kompetenzen aufgeschlüsselt werden (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel & Van Dooren, 2007). Die erste dieser beiden Kompetenzen beschreibt dann die Verfügbarkeit unterschiedlicher Strategien zur Lösung einer Aufgabenstellung und die Fähigkeit, zwischen diesen Strategien zu wechseln. Die zweite Kompetenz umfasst die Anpassung vorhandener Strategien an Aufgabenkriterien. Beide Definitionen sind eng miteinander verknüpft. Die Anforderungen der zweiten Kompetenz gehen jedoch über die der ersten hinaus, da nicht nur ein Strategierepertoire mit unterschiedlichen Strategien, zwischen denen gewählt werden kann, vorausgesetzt wird, sondern vorhandene Strategien an neue Problemstellungen angepasst werden müssen, um diese zu bewältigen (zusf. Baroody et al., 2007). Letztere Beschreibung wird häufig auch unter dem Begriff *Adaptivität* geführt (Feldon, 2007; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2009).

Zur Begriffsabgrenzung wird im Folgenden von **flexibler Strategiewahl/Strategieflexibilität** gesprochen, wenn im Sinne eines Strategierepertoires, ungeachtet der Passung zu Aufgabenmerkmalen, unterschiedliche Strategien zur Lösung eines Aufgabentyps eingesetzt werden.
Der Begriff **adaptive Strategiewahl/Adaptivität** bezeichnet in der vorliegenden Arbeit über die flexible Strategiewahl hinaus die Anpassung von Strategien an Aufgabenkriterien.
Der Begriff **Strategiewahl** wird im Folgenden zunächst synonym mit **Strategiegebrauch** verwendet, sodass hierbei sowohl bewusst als auch unbewusst eingesetzte Strategien inbegriffen sind. In Kapitel 3.2 und Kapitel 4.4 wird dann im Zusammenhang mit unterschiedlichen Strategieerwerbsmodellen spezifiziert, inwieweit diesen die Vorstellung von bewussten oder unbewussten kognitiven Prozessen zugrunde liegt.

Die Strategiewahl ist von unterschiedlichen Faktoren abhängig. In der Literatur werden diese in **individuelle**, **aufgabenbezogene** und **soziokulturelle Faktoren** unterschieden (Ellis, 1997; Star & Madnani, 2004; Threlfall, 2009; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Van Dooren, 2011; Yackel & Cobb, 1996). Werden Aufgabenkriterien der Strategiewahl zugrunde gelegt, bezeichnet man dies als adaptive Strategiewahl (Feldon, 2007; Verschaffel et al., 2009).

Die oben beschriebenen Unterschiede zwischen Novizen und Experten beziehen sich allein auf die adaptive Strategiewahl, d. h. Experten sind eher als Novizen in der Lage, ihre Strategien effizient entsprechend der gegebenen Aufgabenkriterien einzusetzen und anzupassen (Heirdsfield & Cooper, 2004; Verschaffel et al., 2011). Dabei bleiben individuelle und soziomathematische Einflussfaktoren unberücksichtigt.

Eine Definition von adaptiver Strategiewahl, die alle drei Einflussvariablen berücksichtigt, geben Verschaffel et al. (2009), indem sie adaptive Strategiewahl als *„conscious or unconscious selection and use of the most appropriate solution strategy on a given mathematical item or problem, for a given individual, in a given context“* (S. 343) bezeichnen.

Auch Threlfall (2002) definiert *Flexibilität* (entspricht in der vorliegenden Arbeit dem Begriff *Strategieadaptivität*, vgl. S. 8) in Bezug auf das Anwendungsgebiet der halbschriftlichen Rechenstrategien als Manifestation des eingesetzten individuellen Zahl- und Operationswissens bei der Bearbeitung einer spezifischen Aufgabe, wobei die Lernerfahrung und die Erkennung der Zahl- und Aufgabeneigenschaften eine entscheidende Rolle spielen. Es werden somit sowohl individuelle als auch aufgabenbezogene Kriterien beschrieben.

Individuelle und soziokulturelle Faktoren besitzen einen starken Einfluss auf den Strategieerwerb und können bewirken, dass bestimmte Strategien nicht erworben werden oder Aufgabenkriterien bei der Strategiewahl aus unterschiedlichen Gründen nicht berücksichtigt werden. Zu diesen Gründen können im Bereich der individuellen Einflüsse Leistungsschwächen in den Teilfähigkeiten mathematischer Kompetenz (wie bei Kilpatrick et al., 2001 dargestellt), affektive Faktoren *(Beliefs)* oder mangelnde metakognitive Fähigkeiten (Blöte, Klein & Beishuizen, 2000; Heirdsfield & Cooper, 2004) gehören. Werden individuelle Faktoren in die Analysen einbezogen, so weisen auch Novizen eine gewisse Strategieflexibilität auf. Das bedeutet, sie verwenden unter Anwendung einer individuellen Bezugsnorm innerhalb ihres individuellen Strategierepertoires durchaus effiziente Strategien, jedoch findet dies bei einer rein aufgabenkriteriellen, normativen Sichtweise keine Berücksichtigung, da die Strategien nicht passend zu den Aufgabenkriterien eingesetzt werden. Das individuelle Strategierepertoire wird beispielsweise im Strategiewahlmodell nach Siegler (Kap. 4.4) berücksichtigt.

Ebenso wirken sich soziokulturelle Normen, d. h. Einflüsse des Lernumfeldes, auf den Strategieerwerb und die -wahl aus. Einige Autoren sprechen bezogen auf den Mathematikunterricht auch von soziomathematischen Normen (Harel & Sowder, 2007; Selter, 2001; Yackel & Cobb, 1996). Auch in der vorliegenden Arbeit wird im Folgenden dieser Begriff verwendet. Die Mathematiklehrperson transportiert im Unterricht bestimmte Wertvorstellungen und *Beliefs* über Mathematik und gibt Konventionen für den Diskurs vor (Yackel & Cobb, 1996). Damit wird, bezogen auf den Erwerb mathematischer Kompetenz nach Kilpatrick et al. (2001) (vgl. S. 7), insbesondere die Kompetenzfacette „Adaptives Begründen" wesentlich durch den Diskurs im Mathematikunterricht geprägt. Steht beispielsweise die akkurate, korrekte und schnelle Ausführung von Prozeduren im Vordergrund des Unterrichts, werden die Schülerinnen und Schüler wenig dazu angeregt, alternative Strategien zu beschreiben oder Argumente für und wider den Einsatz bestimmter Strategien darzulegen. Insbesondere in Instruktionsansätzen, in denen informelle Lösungsstrategien und der Austausch über Strategien eine große Rolle spielen, kommt soziomathematischen Normen eine hohe Bedeutung zu (Gravemeijer, 2001; Reusser, 2000; Yackel & Cobb, 1996). Dabei sind auch Interaktionen zwischen individuellen Faktoren und soziomathematischen Faktoren denkbar. So zeigte sich beispielsweise in einer australischen Fallstudie von Heirdsfield und Cooper (2004), dass flexible Rechner stärker auf eigene Rechenwege vertrauen und diese auch entgegen den unterrichtlichen Konventionen einsetzen. Wenig flexible Rechner, die in der Studie vorwiegend auf das im Unterricht erlernte Standardverfahren zurückgriffen, begründeten ihre Strategiewahl hingegen häufiger mit soziomathematischen Normen (Heirdsfield & Cooper, 2004).

Auf die Relevanz soziomathematischer Einflüsse wird im Rahmen der Befundlage zur Ausprägung der Adaptivität und Korrektheit in unterschiedlichen Instruktionsansätzen in Kapitel 3.4 eingegangen. Auch der empirische Teil der vorliegenden Arbeit behandelt diesen Aspekt, indem die Strategieentwicklung in unterschiedlichen Lernbedingungen miteinander verglichen wird.

Im Mathematikunterricht der Grundschule ist das Themengebiet der halbschriftlichen Rechenstrategien besonders geeignet, um Flexibilität zu fördern und darüber hinaus diese auch zu erfassen, da sich diese Strategien im Gegensatz zu standardisierten Algorithmen durch bewegliches Denken auszeichnen und – zumindest ihrer Grundidee entsprechend – frei von Notationskonventionen sind.

Da *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* in der vorliegenden Arbeit am Beispiel halbschriftlicher Rechenstrategien untersucht werden, wird im Folgenden dargestellt, was sich hinter dem Begriff *halbschriftliche Rechenstrategien* verbirgt.

2.2 Halbschriftliche Rechenstrategien

Das folgende Kapitel gibt einen Überblick darüber, was unter halbschriftlichen Rechenstrategien verstanden wird. Im Zusammenhang mit der Definition und möglichen Notationsformen, welche in Kapitel 2.2.1 dargestellt werden, wird bereits deutlich, dass halbschriftliche Rechenwege ihrer ursprünglichen Konzeption nach frei in der Notation sind und sich somit von standardisierten Verfahren wie den schriftlichen Normalverfahren abgrenzen. Das nachfolgende Kapitel 2.2.2 beschreibt, welche Bedeutung halbschriftlichem Rechnen zukommt und weshalb es sich eignet, daran exemplarisch den Erwerb von Strategieflexibilität und -adaptivität sowie die Einflussfaktoren hierauf zu untersuchen. Kapitel 2.2.3 gibt einen Überblick darüber, welche halbschriftlichen Rechenstrategien in Lehrbüchern und der Literatur häufig unterschieden werden.

2.2.1 Begriffsabgrenzung und Notationsform

Halbschriftliche Rechenstrategien basieren im Gegensatz zum Ziffernrechnen bei den schriftlichen Normalverfahren auf Rechenoperationen mit Zahlen, bei welchen Rechengesetze flexibel ausgenutzt werden, indem die Rechnungen in Teilschritte zerlegt bzw. auf einfachere Aufgaben zurückgeführt werden (Dowker, 2005; Kilpatrick et al., 2001).

Bei halbschriftlichen Rechenstrategien sind im Vergleich zu den schriftlichen Verfahren keine Notationsformen vorgeschrieben, da die Notation nur als Stütze für Teilrechenschritte und/oder Zwischenergebnisse dient. Die Abgrenzung zwischen Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechenstrategien ist fließend, da die Vereinfachung des Zahlenmaterials auch im Kopf vollzogen werden kann und eine Fixierung für den geübten Rechner dadurch überflüssig wird (Padberg & Benz, 2011; Schütte, 2004). Für Novizen dient die Notation von Zwischenschritten oder -ergebnissen der Entlastung des Arbeitsgedächtnisses. Radatz, Schipper, Dröge und Ebeling (1998) bezeichnen halbschriftliche Rechenstrategien deshalb auch als „gestütztes Kopfrechnen“ (S. 42). Die enge Verbindung zum Kopfrechnen wird auch in der englischen Bezeichnung *mental calculation/computation strategies* deutlich, bei welcher die im Deutschen vorhandene begriffliche Differenzierung der beiden Verfahren aufgehoben wird. Einige Mathematikdidaktiker wie Schütte (2004) plädieren dafür, dass halbschriftliche Rechenwege nur dann verschriftlicht werden sollten, wenn dies für die Schülerinnen und Schüler wirklich nötig ist und die Notation keine zusätzliche Bürde darstellt. Auch der hessische Rahmenplan für die Grundschule (Hessisches Kultusministerium, 1995) spricht sich explizit gegen Notationsvorgaben bei halbschriftlichen Rechenstrategien aus:

> *„Es muß offen und kreativ gehandhabt werden und darf nicht in einem festgelegten Algorithmus erstarren; jedes Kind soll seinen Lösungsweg und seine Darstellungsweise finden und verfolgen können und die Notation der Zwischenschritte so lange beibehalten, wie es sie selbst für nötig hält.“* (S. 154)

Schütte (2004) hebt hervor, dass die Notation von Rechenwegen hohe Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler stellt, da der eigene Rechenweg zunächst rekonstruiert und anschließend schematisiert werden muss. Durch die Notation in einer mathematischen Gleichung gehen unter Umständen auch Informationen verloren oder der notierte Rechenweg ist nicht mit der mental vollzogenen Operation kongruent, da Notationsformen nicht bekannt sind, sozial erwünscht notiert werden (Schütte, 2004) oder metakognitive Kompetenzen zur Reflexion des eigenen Lernprozesses nicht ausreichend ausgeprägt sind (vgl. Kap. 4.3). Gleichzeitig kommt der Notation von Rechenwegen eine wichtige Funktion zu, da sie in vielen Strategieerwerbsansätzen grundlegend für den Strategieerwerbsprozess bzw. die Schematisierung von Strategien ist (vgl. mathematikdidaktische Strategieerwerbskonzepte in Kap. 3.1.3).

2.2.2 Förderung von Strategieflexibilität und -adaptivität durch die Behandlung halbschriftlicher Rechenstrategien

Halbschriftliche Rechenstrategien sind in den Mathematiklehrplänen der Bundesländer als Bestandteil des Arithmetikunterrichts im zweiten und/oder dritten Schuljahr verankert (z. B. Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst, 2014; Hessisches Kultusministerium, 1995; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2008). Die Schwerpunktsetzung auf Flexibilität in Curricula kann auch als Manifestation eines modernen Mathematikbildes gesehen werden, das sich durch die Entdeckung von Mustern und Strukturen statt durch die Anwendung eines starren Regelwerks auszeichnet (Schoenfeld, 1992).

Auch in den Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule (KMK, 2004) wird die Anwendung halbschriftlicher Rechenstrategien als Lernziel im Bereich „Zahlen und

Operationen“ sowohl explizit genannt als auch die hierzu erforderlichen Teilkompetenzen erwähnt:

- *die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen*
- *mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden*
- *verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten*
- *Rechenfehler finden, erklären und korrigieren*
- *Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen. (KMK, 2004, S. 9)*

Halbschriftliche Rechenstrategien eignen sich für den Arithmetikunterricht der Grundschule besonders, um die in Kapitel 2.1 beschriebenen Teilkomponenten mathematischer Kompetenz zu fördern. Dabei stellen die Addition und Subtraktion zwei- und dreistelliger Zahlen zunächst eine Alltagsanforderung dar (Blöte et al., 2000; Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 2006; Thompson, 2010), zu deren effizienter Bewältigung Flexibilität und Adaptivität in der Strategiewahl beitragen können. Die Behandlung von Strategien im Sinne gestützten Kopfrechnens nach Radatz et al. (2006) kann außerdem den Übergang von schriftlich gestützten in mentale Rechenprozesse fördern. Der prozessorientierte Charakter halbschriftlicher Rechenstrategien stellt die Nutzung von Zahleigenschaften in den Vordergrund und trainiert daher auch das konzeptuelle Verständnis für arithmetische Operationen (z. B. Heirdsfield & Cooper, 2004). Indem mit Zahlen statt mit Ziffern operiert wird, können zudem das Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem sowie die Förderung von Zahl- und Größenvorstellungen unterstützt werden (Padberg & Benz, 2011; Radatz et al., 2006). Nach Thompson (2010) tragen (gestützte) Kopfrechenstrategien darüber hinaus zur Förderung von Problemlösefähigkeiten bei. Halbschriftliche Rechenstrategien können jedoch nicht nur als Vorbereitung für flexible, adaptive Kopfrechenprozesse, die effizient und schnell zu einer korrekten Lösung führen, betrachtet werden. Sie fördern darüber hinaus approximative Rechenfähigkeiten, wie Überschlagen oder Schätzen von Ergebnissen (Padberg & Benz, 2011; Radatz et al., 2006; Thompson, 2010). Dabei scheint ein enger Zusammenhang zwischen der Strategieflexibilität (im Sinne von Variabilität) und Schätzfähigkeiten zu bestehen (Baroody, 1999; Dowker, 1992; Kilpatrick et al., 2001; Lemaire & Lecacheur, 2011; Lemonidis, 2016). Die Fähigkeit, Ergebnisse zu überschlagen, hat eine hohe Alltagsrelevanz. Nach Dowker (2005) besteht ein Zusammenhang zwischen guter Performanz im Kopfrechnen und hohen Fähigkeiten im Schätzen bzw. Überschlagen von Ergebnissen. Dabei zeigt sich der Zusammenhang allerdings erst, wenn die Aufgabenanforderung eine bestimmte Schwierigkeitsstufe übersteigt, sodass die Aufgabe mental nicht zeiteffizient zu bewältigen ist, das Ergebnis jedoch trotzdem mit dem zur Verfügung stehenden Zahl- und Operationswissen näherungsweise geschätzt werden kann (Dowker, 2005). Schätzfähigkeiten werden in vielen Studien auch als eine Komponente des konzeptuellen Zahlwissens gefasst, welches eine zentrale Grundlage für eine adaptive Strategiewahl darstellt. Denkbar ist folglich auch, dass der enge Zusammenhang zwischen Strategieflexibilität und Schätzen durch konzeptuelles Wissen vermittelt wird. Auf den Einfluss des konzeptuellen Wissens für Strategieflexibilität und die adaptive Strategiewahl wird in Kapitel 3.1 näher eingegangen.

Einschränkend kann zur Relevanz halbschriftlicher Rechenstrategien angemerkt werden, dass heutzutage zur Bewältigung alltäglicher Aufgaben, welche die Addition und Subtraktion zwei- und dreistelliger Zahlen erfordern, zunehmend technische Hilfsmittel zum Einsatz kommen (Padberg & Benz, 2011; Radatz et al., 2006). Zudem merken Padberg und Benz (2011) an, dass halbschriftliche Rechenstrategien für den Zahlenraum über 1000 nur noch wenig ökonomisch sind. Auch der Zahlenraum bis 100 eignet sich für die Verdeutlichung von Effizienzunterschieden weniger als der Zahlenraum bis 1000, da sich die einzelnen Teilschritte der unterschiedlichen Strategien in ihrer Anzahl und Komplexität im Zahlenraum bis 1000 stärker unterscheiden. Ein Beispiel hierzu findet sich in Tabelle 2 (S. 16).

Insgesamt können, wie die oben genannten Vorteile veranschaulichen, durch die Auseinandersetzung mit halbschriftlichen Rechenstrategien grundlegende mathematische Kompetenzen geschult werden. Letztlich können halbschriftliche Rechenstrategien auch als Vorbereitung für schriftliche Rechenverfahren dienen (Schipper, 2009), welche dann nicht ablösend, sondern aufbauend thematisiert werden.

In der Unterrichtspraxis im Arithmetikunterricht der dritten Klasse zeigen sich national wie international Unterschiede in der Gewichtung halbschriftlicher und schriftlicher Rechenstrategien (Krauthausen, 2009). In den Bildungsstandards für die Grundschule (KMK, 2004) heißt es, dass Schülerinnen und Schüler schriftliche Normalverfahren „der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden“ (S. 9) sollen. An der zitierten Textstelle wird außer dem Wegfall der schriftlichen Division als Inhaltskompetenz im Grundschulbereich insbesondere der Fokus auf den adaptiven Einsatz dieser Strategien deutlich. Auch Schipper (2009) hebt hervor, dass es bei den schriftlichen Verfahren um Verständnis statt der bloßen Anwendung von Algorithmen gehen sollte. Er spricht sich dagegen aus, Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen und schriftliche Normalverfahren als aufeinander aufbauende Themengebiete im Unterricht zu behandeln. Vielmehr sollte „die Vielfalt möglicher Rechenwege und ihre flexible Nutzung durch die Schülerinnen und Schüler“ (Schipper, 2009, S. 125) im Vordergrund stehen. Spiegel und Selter (2006) bezeichnen die schriftlichen Normalverfahren bei verfrühter Thematisierung als „große[n] Feind der Ausbildung von Verständnis“ (S. 34). Auch der bayerische Lehrplan für die Grundschule (Bayerisches Staatsministerium für Bildung und

Kultus, Wissenschaft und Kunst, 2014) erwähnt implizit die Vernetzung dieser Strategien im Zusammenhang mit Adaptivität als wichtige Kompetenz:

> *„Die Schülerinnen und Schüler entscheiden passend zu einer gegebenen Aufgabe, welche Art der Berechnung zur Lösung angemessen ist (im Kopf, halbschriftlich, schriftlich) und erstellen sinnvolle und nachvollziehbare Notizen (z. B. Rechenstrich, Zwischenergebnisse, Teilrechnungen).“* (S. 282)

Zur Implementierung dieser integrativen Vermittlung im Mathematikunterricht gibt es allerdings bisher wenige theoretische und empirische Arbeiten (vgl. Kap. 8.1.3).

Krauthausen (2009) resümiert, dass eine „Aufwertung halbschriftlichen Rechnens in der fachdidaktischen Diskussion“ (S. 105) zu konstatieren sei, gleichzeitig aber Fragen zur konkreten Umsetzung weiter unklar blieben. Während die Relevanz halbschriftlicher Rechenstrategien in der Literatur einstimmig formuliert wird, bestehen in der fachdidaktischen Realisierung unterschiedliche Vermittlungskonzepte. Das Spektrum dieser Konzepte reicht von Umsetzungen, welche den rein informellen Charakter halbschriftlicher Rechenstrategien betonen bis hin zur Vorgabe halbschriftlicher Rechenstrategien in Form prozeduraler Algorithmen. Dazwischen findet man zahlreiche Variationen, die sich insbesondere im Grad der Schematisierung der halbschriftlichen Rechenstrategien unterscheiden. In Konzepten, in denen prozedurale Strategien – vorgegeben oder als Schematisierung zuvor selbst entdeckter Strategien – im Zentrum stehen, variiert darüber hinaus das Spektrum der thematisierten Strategien.

Zusammenfassend eignet sich der Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien besonders für die Untersuchung von *Strategieflexibilität* und *-adaptivität*, da zur Lösung einer vorgegebenen Aufgabe eine Bandbreite unterschiedlicher, aber gleichermaßen zielführender halbschriftlicher Rechenstrategien eingesetzt werden kann. Beim Lösungsprozess können Zahl- und Aufgabeneigenschaften ohne Notationsvorschriften genutzt werden, sodass die individuellen Rechenwegsnotationen einen Einblick in die Denkprozesse der Schülerinnen und Schüler geben.

Sowohl in mathematikdidaktischen Standardwerken Standardwerken (z. B. Padberg & Benz, 2011; Radatz et al., 1998; Wittmann & Müller, 1994) als auch in nationalen und internationalen Studien (vgl. Kap. 3.4) werden häufig sogenannte Hauptstrategien mithilfe von Klassifikationssystemen unterschieden. Das nächste Kapitel gibt hierzu einen Überblick.

2.2.3 Klassifikationssysteme

Klassifikationssysteme bilden Strategien ab, die entweder informell oder auch prozedural erlernt, im Unterricht behandelt bzw. als Schülerlösungen in Strategietests zahlreicher Studien gezeigt wurden. Die Klassifikationssysteme unterscheiden sich dabei im Grad der Ausdifferenzierung der Strategien. Im Folgenden werden nur die Hauptstrategien für die halbschriftliche Addition und Subtraktion vorgestellt (vgl. Tabelle 1), da sich der empirische Teil dieser Arbeit ausführlicher mit der Ausdifferenzierung dieser Strategien sowie auch typischen Fehlstrategien beschäftigt.

Tabelle 1: Idealtypische Strategien beim halbschriftlichen Addieren und Subtrahieren

Schrittweises Rechnen	Stellenweises Rechnen	Hilfsaufgabe	Gegen-/ Gleichsinniges Verändern	Ergänzen/ indirekte Addition
123 + 456 = 579 123 + 400 = 523 523 + 50 = 573 573 + 6 = 579	123 + 456 = 579 100 + 400 = 500 20 + 50 = 70 3 + 6 = 9	423 + 198 = 621 423 + 200 = 623 623 − 2 = 621	423 + 198 = 621 421 + 200 = 621	
456 – 123 = 333 456 – 100 = 356 356 – 20 = 336 336 – 3 = 333	456 – 123 = 333 400 – 100 = 300 50 – 20 = 30 6 – 3 = 3	423 − 198 = 225 423 − 200 = 223 223 + 2 = 225	423 − 198 = 225 425 − 200 = 225	701 – 698 = 3 698 + 3 = 701

Das *Schrittweise* - und das *Stellenweise Verfahren* in Tabelle 1 können dabei im Sinne von Universalstrategien (im Englischen *default procedures*) unabhängig von Aufgabenkriterien eingesetzt werden. Eine Ausnahme bildet das *stellenweise Verfahren* bei Subtraktionsaufgaben, bei welchen die Stellenwerte des Subtrahenden die Stellenwerte des Minuenden in den Teilrechnungen übersteigen, sodass negative Teildifferenzen entstehen. Um negative Teildifferenzen zu umgehen, kann sich bei Schülerinnen und Schülern eine Fehlstrategie etablieren, die in der englischsprachigen Literatur als *smaller-from-larger-bug* bezeichnet wird (Beishuizen, Van Putten & Van Mulken, 1997; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière & Verschaffel, 2013; Peters, De Smedt, Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2014). Ob und wie die Strategie *Stellenweise* für die beschriebenen Aufgabenkriterien im Mathematikunterricht der Grundschule behandelt werden sollte, wird kontrovers diskutiert (zusf. Padberg & Benz, 2011).[2] Die weiteren in Tabelle 1 dargestellten Strategien nutzen Zahl- und Aufgabeneigenschaften aus. Während sich die Strategien *Hilfsaufgabe* und *Gegen-/Gleichsinniges Verändern* dazu eignen, Zahlen in der Nähe des nächsten Zehners/Hunderters geschickt zu glätten, bietet sich bei kleiner Differenz zwischen Minuend und Subtrahend das *Ergänzen* an.

[2] Während für den Umgang mit der Strategie *Stellenweise* bei Subtraktionsaufgaben in einigen Schulbüchern für die 3. Klasse – wie beispielsweise bei den *Matheprofis* (Schütte, 2005a) oder im *Zahlenbuch* (Wittmann & Müller, 2010) – konkrete Handlungshilfen angeboten werden, wird die Strategie in anderen Werken wie *Flex und Flo* (Baur & Ziervogel, 2009) oder *Mathemathematikus* (Lorenz, 2008) für die Subtraktion nicht behandelt.

Da die Veränderung des Zahlenmaterials bei den Strategien *Hilfsaufgabe* und *Gegen-/Gleichsinniges Verändern* bzw. die Komplementbildung bei der Strategie *Ergänzen* im Vergleich zu Universalstrategien in wenigen Schritten vollzogen wird bzw. die Aufgabe vereinfacht wird, werden diese Strategien im Folgenden analog zum englischen Pendant „shortcut strategies“ unter dem Begriff **Verkürzungsstrategien** zusammengefasst.

Die nachfolgende Tabellenübersicht zeigt beispielhaft die Unterschiede in der Anzahl der Rechenschritte und im kognitiven Aufwand bei der Anwendung der Universalstrategie *Schrittweise* und der Verkürzungsstrategie *Hilfsaufgabe*, wobei das Hauptaugenmerk auf den Strategieeffizienzunterschieden in den verschiedenen Zahlenräumen liegt.

Tabelle 2: Strategieeffizienzvergleich im Zahlenraum bis 100 und im Zahlenraum bis 1000

ZR bis 100		**ZR bis 1000**	
Schrittweises Rechnen	**Hilfsaufgabe**	**Schrittweises Rechnen**	**Hilfsaufgabe**
83 − 47 = 83 − 40 = 43 43 − 7 = 36	**83 − 47 =** 83 − 50 = 33 33 + 3 = 36	**423 − 198 =** 423 − 100 = 323 323 − 90 = 233 233 − 8 = 225	**423 − 198 =** 423 − 200 = 223 223 + 2 = 225
23 + 39 = 23 + 30 = 53 53 + 9 = 62	**23 + 39 =** 23 + 40 = 63 63 − 1 = 62	**423 + 198 =** 423 + 100 = 523 523 + 90 = 613 613 + 8 = 621	**423 + 198 =** 423 + 200 = 623 623 − 2 = 621

Bei den Beispielaufgaben **83 – 47** und **23 + 39** im Zahlenraum bis 100 zeigen sich in der Anzahl und in der Komplexität der Rechenschritte vergleichsweise wenig Unterschiede zwischen den beiden Strategien *Schrittweise* und *Hilfsaufgabe*. Lediglich der Zehnerübergang im zweiten Lösungsschritt beim *schrittweisen Rechnen* birgt Fehlerpotenzial.

Bei den Beispielaufgaben **423 − 198** und **423 + 198** im Zahlenraum bis 1000 sind bei der Anwendung der Strategie *Schrittweise* im zweiten und dritten Lösungsschritt jeweils Überträge zu berücksichtigen, bei der *Hilfsaufgabe* hingegen kein einziger. Aus rein aufgabenkriterieller Sicht wäre hier die *Hilfsaufgabe* für beide Beispielaufgaben als adaptiveres Verfahren zu bewerten. Der Einsatz dieser Strategie setzt jedoch voraus, dass der Schüler oder die Schülerin erkennt, dass der Subtrahend bzw. der zweite Summand in der Nähe eines vollen Hunderters liegt. Darüber hinaus muss ihm/ihr über die Konstanz der Differenz bzw. die Konstanz der Summe bewusst sein, dass die Aufrundung des Subtrahenden bzw. des zweiten Summanden im zweiten Lösungsschritt wieder ausgeglichen werden muss. Beide Schritte stellen eine Anforderung an den Zahlenblick dar (Kap. 3.3.4), die nicht von allen Schülerinnen und Schülern bewältigt wird.

Informelle Strategien lassen sich oft keiner der in Tabelle 1 (S. 15) dargestellten Kategorien zuordnen, da sie als Mischstrategien, aber auch als Variationen der oben abgebildeten Strategien auftreten können. Kategoriensysteme können jedoch die Kommunikation über Rechenwege im Unterricht (und in der Forschung) erleichtern. In der vorliegenden Arbeit werden Kategoriensysteme sowohl zum besseren Vergleich von Befunden (vgl. Kap. 3.4) als auch für die Beschreibung der empirischen Ergebnisse dieser Arbeit (vgl. Kap. 7) sowie deren Einordnung in den Forschungsstand (Kap. 1) genutzt.

Ob im Mathematikunterricht ein großes Strategiespektrum (informeller Art oder schematisiert in Form von Hauptstrategien) thematisiert wird oder vor allem Universalstrategien (*Schritt-* und *Stellenweise*) behandelt werden, hängt sowohl von mathematikdidaktischen Strategieerwerbsmodellen als auch von den Vorstellungen über zugrunde liegende Wissenserwerbsprozesse ab. Diese sind Gegenstand der folgenden beiden Kapitel.

3 Strategieerwerb und -förderung aus mathematikdidaktischer Perspektive

Kapitel 3 beleuchtet den Strategieerwerb und dessen instruktionale Förderung aus mathematikdidaktischer Perspektive. Hierzu wird zunächst dargestellt, wie konzeptuelles und prozedurales Wissen in der fachdidaktischen Literatur voneinander abgegrenzt werden und welche Rolle den beiden Wissensanforderungen in verschiedenen theoretischen Modellen für den Strategieerwerb zukommt (Kap. 3.1). Im nachfolgenden Kapitel 3.2 werden unterschiedliche mathematikdidaktische Strategieerwerbskonzepte skizziert und in Kapitel 3.3 anhand des Erwerbs halbschriftlicher Rechenstrategien ausführlich erläutert. Die verschiedenen Strategieerwerbskonzepte unterscheiden sich in ihren theoretischen Annahmen zum Einfluss von prozeduralem und konzeptuellem Wissen auf den mathematischen Wissenserwerb und dadurch auch in ihren unterrichtlichen Konzeptualisierungen. Die Wirksamkeit dieser Strategieerwerbskonzepte war bereits Gegenstand zahlreicher Studien zum Erwerb bzw. zur Verwendung halbschriftlicher Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. Die Befunde zur Strategieflexibilität, -adaptivität und zur korrekten Strategieverwendung in den unterschiedlichen Unterrichtsansätzen werden in Kapitel 3.4 ausführlich dargestellt.

Schließlich wird der Forschungsstand in Kapitel 3.5 zusammengefasst und daraus Desiderate zum Strategieerwerb in der mathematikdidaktischen Forschung abgeleitet.

3.1 Der Einfluss konzeptuellen und prozeduralen Wissens auf die Strategieflexibilität und die adaptive Strategiewahl

Im Folgenden werden zunächst verschiedene Kategorien mathematischen Wissens beschrieben und voneinander abgegrenzt (Kap. 3.1.1). Anschließend werden unterschiedliche theoretische Modelle zum Erwerb von Strategieflexibilität und -adaptivität vorgestellt (Kap. 3.1.2). Die Modelle unterscheiden sich in ihren Annahmen darüber, welche Bedeutung den unterschiedlichen Kategorien mathematischen Wissens für den Strategieerwerb zukommt. Schließlich werden in Kapitel 3.1.3 zwei Modelle zum Erwerb von Strategieflexibilität differenzierter beschrieben und gegenübergestellt.

3.1.1 Begriffsabgrenzung

In der Mathematikdidaktik wird Wissen oft in prozedurales und konzeptuelles Wissen untergliedert (Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992). Darüber hinaus wird deklaratives Wissen in einigen Quellen, wie beispielsweise der Bloomschen Lernzieltaxonomie (Bloom, 1976), als weitere Wissenskategorie beschrieben. Während deklaratives Wissen Faktenwissen bezeichnet, beschreibt prozedurales Wissen die Beherrschung von Rechenroutinen. Die Ausdifferenzierung der beiden Wissenskategorien wird in der mathematikdidaktischen Literatur häufig nicht vorgenommen, wie das folgende Zitat von Hiebert und Lefevre (1986) zeigt:

> *„Procedural knowledge, as we define it here, is made up of two distinct parts. One part is composed of the formal language, or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of the algorithms, or rules, for completing mathematical tasks."* (S. 6)

Konzeptuelles Wissen beschreibt zusammenhängendes, flexibles Wissen, das auch häufig als „Verständniswissen" (Renkl, 1996, S. 82) bezeichnet wird.

> *„Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships."* (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3)

Dabei dient eine solche Begriffsdifferenzierung insbesondere der Vereinfachung und Kommunikation über die Konzeption von Instruktionsansätzen. Hiebert und Lefevre (1986), auf deren obige Definitionen in vielen Publikationen rekurriert wird, betonen selbst explizit, dass die Differenzierung nicht als Klassifikationsschema angedacht ist, das alle denkbaren Wissensanforderungen abbilden kann. Vielmehr müsse davon ausgegangen werden, dass beide Wissensarten stark miteinander vernetzt seien. Dies äußere sich auch darin, dass sich konzeptuelles Wissen in der Performanz oft erst in prozeduralem Output zeige. Dennoch wird der oben zitierten Begriffsdefinition nachgeschoben, dass für prozedurales Wissen in vielen Situationen das Erkennen von Oberflächenstrukturen genüge und kein wirkliches Verständniswissen nötig sei (Hiebert & Lefevre, 1986).

3.1.2 Das Verhältnis von prozeduralem und konzeptuellem Wissen beim Strategieerwerb

In der Literatur existieren vier verschiedene theoretische Annahmen zum Zusammenhang zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen beim mathematischen Strategieerwerb (zusf. Baroody, 2012; Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Die unterschiedlichen Theorien lassen sich dabei jeweils durch einzelne Befunde stützen. Die uneinheitliche Befundlage zum Einfluss von prozeduralem und konzeptuellem Wissen auf den Strategieerwerb resultiert insbesondere aus den unterschiedlichen methodischen Vorgehensweisen und Auswertungsverfahren, welche in den vorliegenden Studien angewandt wurden. Des Weiteren besteht auch Uneinigkeit darüber, was als prozedurale oder konzeptuelle Wissensanforderung eingeschätzt wird. Ob eine Aufgabe als Routineaufgabe oder als „Problem" im Sinne von Problemlösen eingeordnet werden kann, ist jedoch maßgeblich vom Vorwissen und der Erfahrung der Schülerinnen und Schüler abhängig, sodass nach Schneider, Rittle-Johnson und Star (2011) gerade bei längsschnittlichen Designs nicht von stabilen Konstrukten ausgegangen werden könne.

Die *concepts-first* Theorie postuliert, dass zunächst konzeptuelles Wissen erworben wird und sich erst im zweiten Schritt durch vermehrte Übungs- und Problemlöseaktivitäten prozedurales Wissen ausbildet (z. B. Gelman & Gallistel, 1978).

In der *procedures-first* Theorie wird hingegen davon ausgegangen, dass konzeptuelles Wissen erst durch die wiederholte Anwendung von Prozeduren und den daraus resultierenden Abstraktionsprozessen entsteht (z. B. Siegler & Stern, 1998). Diese Theorie liegt auch dem Strategiewahlmodell der Arbeitsgruppe um Siegler (Lemaire & Siegler, 1995; Shrager & Siegler, 1998) zugrunde (Kap 4.4).

Neben der dritten Theorie, dass sich konzeptuelles und prozedurales Wissen unabhängig voneinander entwickeln (*inactivation view*) (z. B. Resnick & Omanson, 1987), geht das *iterative Modell* davon aus, dass sich beide Konzepte gegenseitig beeinflussen. Das letztgenannte Modell wird u. a. durch die Befunde der Studie von Schneider et al. (2011) gestützt. Diese Studie wird im Folgenden näher vorgestellt.

Das uneinheitliche methodische Vorgehen wurde von Schneider et al. (2011) als Ausgangspunkt genommen, um den Zusammenhang der beiden Wissensarten in einer latenten Modellierung der beiden Konstrukte zu prüfen. In der Studie wurde der Zusammenhang zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen längsschnittlich anhand zweier Stichproben mit Siebt- und Achtklässlern amerikanischer Schulen untersucht, die sich im Vorwissen zum Thema „lineare Gleichungssysteme“ unterschieden. Die Siebtklässler werden in der Studie als Stichprobe für Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen, die Achtklässler als Stichprobe für Schülerinnen und Schüler mit höherem Vorwissen verwendet. Zwischen den beiden Messzeitpunkten nahmen die Gruppen an einer kurzen Intervention zum Lösen von linearen Gleichungen teil. Prozedurales und konzeptuelles Wissen sowie Strategieflexibilität wurden mit einem Mathematiktest zu zwei Messzeitpunkten erfasst. Das methodische Vorgehen der Studie zeichnet sich dadurch aus, dass die Konstrukte zusätzlich zur Kontrolle des Vorwissens latent modelliert wurden. Dies bedeutet, dass zu beiden Messzeitpunkten überprüft werden konnte, wie hoch die Items zu den Wissensfacetten prozedurales Wissen, konzeptuelles Wissen und Strategieflexibilität auf den jeweils übergeordneten latenten Faktoren luden und drüber hinaus mithilfe eines Cross-Lagged-Panel-Designs Einflüsse zwischen den Faktoren untersucht werden konnten. In älteren Studien konnte ein Großteil der Varianz bei der manifesten Faktorenbildung weder durch prozedurales noch durch konzeptuelles Wissen aufgeklärt werden, sondern stellte unsystematische Varianz dar. Der Fokus der Studie lag darauf, ob und in welcher Weise sich die beiden Wissensarten längsschnittlich beeinflussen und ob diese Beziehung durch Vorwissen moderiert wird. Zusätzlich war von Belang, wie sich die beiden Konstrukte auf die Strategieflexibilität auswirken. Strategieflexibilität beschreibt in der Studie die Fähigkeit, verfügbares Wissen an unbekannte Situationen anzupassen und meint somit gemäß obiger Definition (S. 8) für die vorliegende Arbeit eine adaptive Wahl von Strategien.

In beiden Gruppen kamen Schneider et al. (2011) bei latenter Modellierung im Vor- und Nachtest zu einer zweifaktoriellen Lösung, d. h. prozedurales und konzeptuelles Wissen waren klar voneinander abgrenzbar. Zum zweiten Messzeitpunkt ergab sich für die Gruppe mit geringem Vorwissen allerdings keine eindeutige Lösung, d. h. es waren sowohl gute Modellgütekriterien für ein einfaktorielles Modell als auch für ein zweifaktorielles Modell vorhanden. In beiden Gruppen wurde ein bidirektionaler Zusammenhang zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen festgestellt, sodass das *iterative Modell* in dieser Studie gestützt wurde. Die Strategieflexibilität/-adaptivität im Nachtest wurde in beiden Gruppen sowohl von prozeduralem als auch von konzeptuellem Wissen aus dem Vortest signifikant beeinflusst. Es wurde kein Moderationseffekt des Vorwissens gefunden.

Einige renommierte mathematikdidaktische Vertreter wie Baroody et al. (2007) und Dowker (2005) gehen von einem iterativen Konzept aus. Dowker (2005) fasst das iterative Konzept dabei wie folgt zusammen:

> *Once children begin to integrate the 'process' and 'concept' aspects of number, their arithmetic is likely to improve and to become more flexible. Children who do not make this integration, either as a result of inappropriate teaching or of their own cognitive limitations, are likely to find arithmetic difficult and to be restricted to the use of learned procedures, which they do not relate to concepts.* (S. 131)

Die Integration beider Wissensfacetten stellt folglich eine herausfordernde Aufgabe für die Wissensvermittlung im Mathematikunterricht dar. Nach Baroody und Tiilikainen (2012) seien konzeptuelles und prozedurales Wissen bei Vorschülern stärker vernetzt als bei Grundschülern, da diese informelle Strategien in realen Anwendungsbezügen erlernten und diese starke Vernetzung im Schulunterricht oft fehle. Eine weitere Zäsur für das Erlernen konzeptuell untermauerter Prozeduren stellt nach Hiebert und Lefevre (1986) die Einführung der schriftlichen Algorithmen im Arithmetikunterricht der Grundschule dar. Ab diesem Zeitpunkt werde dem prozeduralen Wissen zulasten des Verständniswissens eine größere Bedeutung beigemessen.

Einige mathematikdidaktische Vertreter äußern an der Einteilung in konzeptuelles und prozedurales Wissen Kritik, da die Zuordnung zu den beiden Wissenskategorien mit qualitativen Wertungen bezüglich des Anforderungsniveaus konfundiert ist (Baroody et al., 2007; Star, 2005). Baroody et al. (2007) und Star (2005) zeigen alternative, ausdifferenzierte theoretische Modelle auf, welche das Verhältnis der beiden Wissenskategorien zur Strategieflexibilität und -adaptivität deutlicher veranschaulichen. Diese werden im nächsten Abschnitt gegenübergestellt.

3.1.3 Strategieflexibilitäts-Modelle

In diesem Abschnitt werden die beiden Strategieflexibilitätsmodelle von Star (2005) und Baroody et al. (2007) skizziert.

Laut Star (2005) können die beiden Wissenskategorien *prozedurales Wissen* und *konzeptuelles Wissen* sowohl ein oberflächliches als auch ein tiefergehendes Anspruchsniveau beinhalten. In der klassischen Zuordnung lassen sich jedoch „deep procedural“ (Heuristiken im Gegensatz zu Algorithmen) und „superficial conceptual knowledge“ (wenig ausgeprägte Wissenskonzepte) nur schwer einordnen (Star, 2005). Hiebert und Carpenter (1992) vergleichen konzeptuelles Wissen mit einem Spinnennetz, das ganz unterschiedliche Strukturen aufweisen kann. Analog hierzu können auch Wissenskonzepte von Schülerinnen und Schülern auf unterschiedliche Art und in unterschiedlicher Ausprägung miteinander vernetzt sein. Daher sollten laut Star (2005) Wissensart und Wissensqualität separat voneinander betrachtet werden. Er schlägt die Ausdifferenzierung der beiden Wissenskategorien in jeweils zwei Qualitätsausprägungen vor. Dabei geht Star (2007) davon aus, dass eine hohe Strategieflexibilität auch ohne die Verknüpfung mit hohem konzeptuellem Wissen möglich und zugleich nicht notwendigerweise mit mechanischem Ausführen von Prozeduren gleichzusetzen ist. Er kritisiert insbesondere, dass prozedurales Wissen nur in Verbindung mit konzeptuellem Wissen als wichtig erachtet wird. Als Beispiele für Wissensfacetten, welche tiefgründige Wissenskonzepte prozeduralen Wissens beschreiben, nennt er:

> *(...) knowledge of procedures that might include such things as the order of steps, the goals and subgoals of steps, the environment or type of situation in which the procedure is used, the constraints imposed upon the procedure by the environment or situation, and any heuristics or common sense knowledge that are inherent in the environment or situation. Both of these examples illustrate procedural knowledge that is rich in relationships.* (Star, 2005, S. 409)

Strategieflexibilität lässt sich nach den von Star (2005) aufgestellten Kriterien der Kategorie „deep procedural knowledge“ zuordnen. Eine ähnliche Zuordnung wird auch in der Bloomschen Lernzieltaxonomie bzw. deren Revision durch Anderson et al. (2016) getroffen, indem Strategieflexibilität dort als eine Facette prozeduralen Wissens beschrieben wird:

> *„Experts know when and where to apply their knowledge. They have criteria that help them make decisions about when and where to use different types of subject-specific procedural knowledge (...).“* (S. 54–55)

Baroody et al. (2007) kritisieren allerdings an der Wissenskategorisierung in Stars Modell (2005), dass „deep procedural knowledge“ und „conceptual knowledge“ so eng miteinander verknüpft seien, dass sie kaum zwei Konstrukte abbilden. Im Modell der adaptiven Expertise von Baroody et al. (2007) – einem Gegenmodell zu Stars Modell (2005) – wird zum einen die Verknüpfung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen und zum anderen die Qualität des Wissens (oberflächliche oder tiefgründige Wissenskonzepte) dargestellt. Dabei veranschaulicht das Modell, in welchem Verhältnis prozedurales und konzeptuelles Wissen zueinander stehen. Die Modelle von Baroody et al. (2007) und Star (2005) unterscheiden sich, wie Star (2007) betont, insbesondere darin, dass im Modell der adaptiven Expertise nach Baroody et al. (2007) eine adaptive Strategiewahl *(extensive adaptive expertise)* nur durch die Verknüpfung mit konzeptuellem Wissen bestehen kann. Während das obige Zitat von Star (2005) nahelegt, dass Strategieflexibilität zusammen mit konditionalem Wissen als Facette tiefgründigen prozeduralen Wissens beschrieben werden kann, betonen Baroody et al. (2007), dass sich Strategieflexibilität/-adaptivität nicht durch eine Wahl geeigneter Prozeduren aus einem Repertoire auszeichne. Vielmehr beschreibe Strategieflexibilität, die Anpassung der Prozeduren an neue Problemstellungen, sodass damit sowohl eine prozedurale als auch eine konzeptuelle Wissensanforderung verbunden ist:

> *„Star's (2005) examples suggest that he equates flexibility with effective strategy choice-strategically choosing the most efficient method from among several procedures. But flexibility can also refer to creativity or transfer-adopting an extant procedure to meet new task demands."* (Baroody et al., 2007, S. 120)

Diese von Baroody et al. (2007) postulierte Verknüpfung der Wissensarten mit Wissensqualitätsausprägungen findet sich beispielsweise auch in der Begriffsdifferenzierung „Meaningful vs. Rote Learning“ (Hiebert & Lefevre, 1986) und im Modell adaptiver Expertise nach Hatano (1988) wieder. Hatano (1988) unterscheidet zwischen *„Adaptive Expertise“* und *„Routine Expertise“*. Adaptive Expertise, d. h. die flexible Anwendung bekannter Prozeduren auf neue Problemstellungen, ist nach Hatano (1988) eng mit konzeptuellem Wissen verknüpft. Können Prozeduren nur für Aufgaben desselben Aufgabentyps reproduziert werden *(Routine Expertise)*, fehlt das konzeptuelle Wissen für die Funktionsweise und Übertragbarkeit der erlernten Prozeduren auf ähnliche Problemstellungen. Hatano und Oura (2003) beschreiben die Merkmale adaptiver Expertise wie folgt:

> *However, a substantive number of studies (to be described below) strongly suggest that some experts can go beyond the routine competencies, and can be characterized by their flexible, innovative, and creative competencies within the domain, rather than in terms of speed, accuracy, and automaticity of solving familiar problems. These experts may apply their schemas in more adaptive and tuned ways (Lesgold, Glaser, Rubinson, Klopfer, Feltovich, & Wang, 1988). They may understand why their procedures work, modify known procedures, or even invent new procedures (Hatano, 1982). They may respond quite flexibly to contextual variations. They may also be able to cross a boundary between domains to find better solutions (Engeström, Engeström, & Kärkkäinen, 1995).* (S. 28)

Die wichtige Funktion, die den instruktionalen Bedingungen bei der Entwicklung von Strategieflexibilität und -adaptivität zukommt, ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

3.2 Mathematikdidaktische Strategieerwerbskonzepte

Wie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde, bestehen unterschiedliche theoretische Annahmen darüber, welche Bedeutung prozeduralem und konzeptuellem Wissen für den mathematischen Kompetenzerwerb beigemessen werden muss. Entsprechend haben sich verschiedene instruktionale Ansätze etabliert, welche die beiden Aspekte unterschiedlich gewichten. Darüber hinaus unterscheiden sich die Instruktionsansätze insbesondere in ihrer Vorstellung, wie Instruktionsprozesse gestaltet werden sollen. Dabei differenzieren Baroody und Tiilikainen (2012) zwischen *„skills, conceptual, problemsolving, and investigative approaches“* (S. 17).

Der *Skills Approach* fokussiert auf die Beherrschung von Prozeduren und Faktenwissen, sodass das mathematische Regelwerk im Sinne von Hatanos Begriff *„Routine Expertise“* (Hatano, 1988) vermittelt werden soll. Hiermit werden in der Literatur oft direktive Instruktionsformen assoziiert.

Alle anderen Instruktionsansätze (*conceptual approach, problemsolving approach und investigative approach*) zielen auf den Erwerb adaptiver Expertise ab. Da dem Aufbau konzeptuellen Wissens in diesen Ansätzen eine hohe Bedeutung beigemessen wird, werden sie auch unter dem Begriff der *schema-based-instructions* (Baroody, 2012) geführt.

> *According to the schema-based view, covert mental arithmetic processes include a variety of strategies, some of which entail inexact processes (estimation) and others of which involve exact processes (mental computation, mental reasoning, and memory production). All of these processes are tied to children's number sense and, hence, to their conceptual knowledge (at least to some degree).* (Baroody & Tiilikainen, 2012, S. 100)

Schemabasierte Instruktionen basieren auf der Theorie der Schemabildung nach Piaget, dem sozial-konstruktivistischen Lernen nach Vygotsky und der Theorie zur Informationsverarbeitung (Baroody, 2012) (vgl. Kap. 4.1). Häufig werden sie auch unter dem Begriff „reformorientierte“ Unterrichtsansätze subsumiert. Dabei wird berücksichtigt, dass der Erwerb von Strategieflexibilität/-adaptivität soziokulturellen Einflüssen unterliegt, welche wiederum affektive und motivationale Variablen beeinflussen. Diese umfassendere Sichtweise auf den Erwerb von Strategieflexibilität/-adaptivität wird auch im folgenden Zitat von Verschaffel et al. (2011) deutlich:

> *Because strategy flexibility is viewed not purely as a skill but rather as a disposition (involving also knowledge, beliefs, attitudes, and emotions), teaching for strategy flexibility cannot be conceived as a method that one can begin doing after routine expertise in the use of the strategies has been taught, but should be the goal from the beginning of the teaching and learning process and in an integrative way.* (S. 176)

Im *Conceptual Approach* wird die Vernetzung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen gefördert. Prozeduren sollen mit entsprechenden Grundvorstellungen vermittelt werden, sodass die Schülerinnen und Schüler ihre Strategien in neuen Situationen nicht nur einsetzen, sondern auch adaptiv anpassen können. Die Grundvorstellungen werden dadurch erworben, dass Strategien in Aufgaben mit konkretem Kontextbezug entwickelt werden. Wie Baroody (2012) betont, werden in diesem Ansatz zur Förderung adaptiver Expertise multiple Lösungswege unterstützt. Durch angeleitete Reflexionsprozesse werden effiziente Lösungswege durch die Lehrperson besonders hervorgehoben und in Folgeübungen weiter formalisiert und schematisiert. Zu bedenken gilt, dass einige Studien zur Entwicklung von mathematischen Alltagsstrategien, die nicht im Schulkontext erworben wurden, gezeigt haben, dass die Strategien nur kontextbezogen abgerufen und nicht variabel auf andere Situationen oder Repräsentationsformen angepasst werden können (zusf. Hiebert & Carpenter, 1992). Auch die Befunde von Blöte et al. (2000), welche in Kapitel 3.4.2 vorgestellt werden, deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler die im Unterricht erlernten Strategien nur bedingt auf ähnliche Problemstellungen übertragen können, da sie Textaufgaben flexibler lösen konnten als Zahlenaufgaben. Die Effizienz dieses Ansatzes zeichnet sich folglich vor allem darin aus, inwieweit die in Kontexten entwickelten Strategien abstrahiert und in allgemeinere Schemata überführt werden können.

Im *Problem-solving Approach* wird im Gegensatz zum *Skills Approach* das eigenständige Entdecken von Mustern und Strukturen hervorgehoben. Dabei wird unter Annahme konstruktivistischer Lernprinzipien davon ausgegangen, dass Lehrpersonen die Schülerinnen und Schüler durch die Konzeption passender Lerngelegenheiten (Problemlöseaktivitäten) zu Wissenskonstruktionen und weiterentwickelten Strategien anregen. Durch die Entdeckung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen Aufgaben können Problemlösestrategien durch konzeptuelles Wissen auf ähnliche Aufgaben angewendet bzw. an veränderte Anforderungen angepasst werden (Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992).

Im *Investigative Approach* werden, wie beim *Conceptual Approach*, konzeptuelles und prozedurales Wissen stark vernetzt vermittelt. Wissen soll wie beim *Problem-solving Approach* aktiv von den Schülerinnen und Schülern konstruiert werden, wobei die Lernprozesse im Vergleich zu letztgenanntem stärker durch die Lehrperson gesteuert werden. Die Lehrperson sorgt dafür, dass die Wissenserwerbsprozesse initiiert und reflektiert werden. Für den Primarbereich hebt Baroody (2012) hervor, dass informelle Strategien eine starke Gewichtung erhalten. Er betont dabei, dass der *Investigative Approach* durch seine moderat-konstruktivistische Ausrichtung durchaus die Vermittlung von Prozeduren unterstützt. Für einen flexiblen und adaptiven Einsatz von Strategien sei eine integrative Vermittlung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen notwendig.

Auch für den Themenbereich der halbschriftlichen Rechenstrategien finden sich die von Baroody (2012) beschriebenen Ansätze in mathematikdidaktischen Überblickswerken, als Untersuchungsgegenstand in einer Vielzahl von Studien und in Lehrbüchern für den Mathematikunterricht der Grundschule wieder. Das folgende Kapitel befasst sich hiermit.

3.3 Strategieerwerbskonzepte beim halbschriftlichen Rechnen

Im Folgenden werden verschiedene Strategieerwerbskonzepte skizziert, die für den Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien und flexibler Strategiewahl existieren. Insbesondere sollen hier die zentralen konzeptionellen Unterschiede der verschiedenen Unterrichtsansätze deutlich werden.

3.3.1 Skills Approach

Der *Skills Approach* wird oft auch als Routineansatz *(Routine Approach)* (z. B. Heinze et al., 2009) oder als traditioneller Ansatz (*Traditional Approach*) (z. B. Kilpatrick et al., 2001) bezeichnet. Im Sinne des Begriffs *„Routine Expertise"* nach Hatano (1988) liegt der Fokus in diesem Ansatz auf der effizienten Ausführung erlernter Prozeduren (vgl. Kap. 3.1). Liegen Strategien automatisiert als prozedurales Wissen vor, so können bekannte Aufgabenmuster zeiteffizient und korrekt bearbeitet werden. In Bezug auf halbschriftliche Rechenstrategien steht der Erwerb von Universalstrategien, die weitgehend unabhängig von Aufgabenkriterien eingesetzt werden können, im Vordergrund. Als Universalstrategien können bei Additions- und Subtraktionsaufgaben die Strategien *Stellenweise* und *Schrittweise* angesehen werden (vgl. Tabelle 1, S. 15). Während z. B. in den USA und Großbritannien überwiegend das *Stellenweise Verfahren* unterrichtet wird, das auf die schriftlichen Normalverfahren vorbereitet, ist in Deutschland und auch anderen Ländern, wie beispielsweise den Niederlanden, insbesondere das *schrittweise Verfahren* verbreitet (Blöte et al., 2000; Threlfall, 2002). Eine flexible und adaptive Strategiewahl wird im traditionellen Ansatz – falls überhaupt – additiv nach der Automatisierung von Universalstrategien thematisiert (Torbeyns et al., 2017).

3.3.2 Conceptual Approach

Im *Conceptual Approach* sollen mathematische Konzepte durch reale Anwendungsbezüge erlernt werden. Auch halbschriftliche Rechenstrategien werden diesem Ansatz zufolge in konkreten Anwendungsbezügen erlernt. In den Niederlanden existiert das Konzept der *Realistic Mathematics Education*, welches informellen Strategien einen hohen Stellenwert beimisst (Gravemeijer, 1994, 2004). Informelle Strategien werden durch Aufgabenstellungen mit konkreten Anwendungsbezügen zum Alltag der Kinder entwickelt und anschließend sukzessive in allgemeinere Schemata überführt, welche dann im Sinne prozeduralen Wissens verfügbar und in anderen Kontexten abrufbar sind. Da Strategieerwerb als aktiver Wissenserwerb aufgefasst wird, steht der soziale Austausch über Strategien in der Klassengemeinschaft im Vordergrund des Mathematikunterrichts. Die Austauschprozesse sollen dazu beitragen, dass aufgabenspezifische Lösungsprozesse formalisiert und durch metakognitive Reflexionsprozesse verallgemeinert werden können. Obwohl sich einige der noch im Folgenden vorgestellten Studien am Konzept der *Realistic Mathematics Education* orientieren (Blöte et al., 2000; Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998; Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen, Van Luit & Maas, 2004), wird in den untersuchten Unterrichtskonzepten oft eine moderate konstruktivistische Grundhaltung vertreten und Prozeduren werden stärker formalisiert als dies in der Grundidee dieses Ansatzes angedacht ist. Wurden bestimmte Strategien, die für den Erwerbsprozess zentral sind, in den Studien nicht selbstständig entdeckt, wurden diese von der Lehrperson eingeführt (z. B. Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998). Im *Realistic Program Design* der Studie von Klein et al. (1998) wurde beispielsweise angestrebt, den Schülerinnen und Schülern verschiedene Rechenstrategien vorzustellen, damit sie sich besser und vor allem an die Aufgabenkriterien angepasst zwischen ihnen entscheiden können:

> *„Because the (number) characteristics vary across problems, students have to adjust their strategy use according to the features of the problem. For this reason the students must be able to employ a range of arithmetic strategies and computation procedures among which they can choose flexibly.“* (S. 449)

3.3.3 Investigative Approach

Beim *Investigative Approach* werden informelle Strategien der Schülerinnen und Schüler sukzessive schematisiert, wodurch ein Strategierepertoire aufgebaut werden soll, das ihnen zur Verfügung steht.

Hiebert und Carpenter (1992) beschreiben, dass das Aufgreifen informeller Strategien und die weitere Schematisierung durch die Lehrperson (*Bottom-up Approach*) dazu beitragen können, dass neue Wissensstrukturen besser mit bestehenden Wissensstrukturen verknüpft und Inhalte auf diese Weise mit mehr Verständnis erlernt werden. Fehlt diese Verknüpfung, können sich leicht Fehlstrategien etablieren.

Die Autoren leiten daraus ab, dass die Förderung konzeptuellen Wissens, aber auch die Strukturierung und Schematisierung der Rechenwege durch die Lehrperson der Generierung informeller, zielführender Strategien zuträglich ist und daher als Prämisse in der Unterrichtskonzeption verfolgt werden sollte.

Dieser Ansatz findet sich in vielen deutschen Lehrbüchern wieder und wird auch von vielen fachdidaktischen Vertretern als vielversprechender Instruktionsansatz beschrieben, der den vernetzten Erwerb konzeptuellen und prozeduralen Wissens fördern soll (z. B. Krauthausen, 2018; Wittmann & Müller, 1994).

3.3.4 Problem-solving Approach

Im *Problem-solving Approach* werden in Rückbezug auf konstruktivistische Lerntheorien keine halbschriftlichen Rechenstrategien vorgegeben, sondern von den Schülerinnen und Schülern selbst entdeckt. In sozial-konstruktivistischen Interaktionsprozessen werden individuelle Lösungen im Hinblick auf Effizienzkriterien miteinander verglichen und schrittweise Metawissen über Lösungsstrategien aufgebaut. Fuson et al. (1997) beschreiben den Strategieerwerbsprozess dabei wie folgt:

> *The learning of multidigit concepts and procedures is perceived as a conceptual problem-solving activity rather than as the transmission of established rules and procedures. Teachers do not expect all children to use the same procedure and do not teach only a single expected algorithm. A great deal of lesson time is devoted to allowing children to work out their own procedures and then to share and discuss strategies for solving addition and subtraction problems […]. The intent is to convey to students the importance of working out a strategy for solving the problem and then sharing and reflecting on alternative strategies.* (S. 131)

Problemlösekompetenz erfordert den Abruf komplexer Wissensschemata, durch welche bekannte Strategien von bereits bearbeiteten, ähnlichen Problemstellungen auf neue Anforderungssituationen übertragen werden können (Feldon, 2007).

Die Distanzierung von einer Strategiewahl – sowohl begrifflich als auch als konzeptionell – wird am stärksten bei Threlfall (2002, 2009) deutlich. Aus diesem Grund wird sein Strategieerwerbskonzept zum Erwerb adaptiver Expertise bei der Beschäftigung mit halbschriftlichen Rechenwegen an dieser Stelle ausführlicher vorgestellt.

Threlfall (2002) äußert sich kritisch gegenüber Strategieerwerbskonzepten, welche die Wahl aus einem Strategierepertoire als real existente Wahl zwischen verschiedenen miteinander konkurrierenden Strategien darstellen. Seine Kritik zielt auf jegliche Instruktionsansätze ab, die Strategien kategorisieren und somit das Strategiespektrum informeller Rechenwege eingrenzen. Threlfall (2002) hält eine bewusste Abwägung zwischen unterschiedlichen Strategien für unwahrscheinlich, da zum einen zu viele Strategien parallel im Gedächtnis behalten werden müssten und zum anderen eine dem Rechenweg vorgeschaltete, bewusste Planung aller einzelnen Schritte des Rechenweges unwahrscheinlich erscheint.

> *„The solution path taken may be interpreted later as being the result of a decision or choice, and be called a ‘strategy’, but the labels are misleading. The ‘strategy’ (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges.”* (S. 42)

Threlfall (2002) kritisiert an der Reduktion auf wenige Hauptstrategien im Unterricht, wie sie in einigen Instruktionsansätzen (z. B im *Investigative Approach*) praktiziert wird, unter anderem, dass Lehrpersonen dazu neigen könnten, sich vor allem auf Strategien mit einfacherem Zugang zu konzentrieren oder diejenigen herauszusuchen, die einfach zu vermitteln sind. Dieses Argument ist stichhaltig, da Universalstrategien mit einer festen Abfolge der Lösungsschritte einfacher zu vermitteln sind als *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 1, S. 15). D. h. *Verkürzungsstrategien* lassen sich nicht rein prozedural ohne die Verbindung zu konzeptuellem Wissen und Zahlwissen vermitteln (Heirdsfield & Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013; Threlfall, 2002). An diesem Aspekt wird deutlich, dass Ansätze, die informelle Strategien bei Schülerinnen und Schülerinnen fördern sollen – insbesondere beim problemlöseorientierten Ansatz – ein hohes fachdidaktisches Wissen aufseiten der Lehrperson voraussetzen. Um Lösungswege und ggf. auch Fehlstrategien der Schülerinnen und Schüler, die informell und somit auch frei von Konventionen notiert oder mündlich geäußert werden, zu verstehen und für den weiteren Unterrichtsverlauf zu nutzen, muss die Lehrkraft eine hohe fachdidaktische Expertise aufweisen.

Ein weiteres Argument, das gegen eine bewusste Wahl spricht, ist nach Threlfall (2002), dass bei neuen Problemstellungen weder Kinder noch Erwachsene eine Vielzahl an Lösungswegen durchdenken, sondern sich zunächst explorativ dem Problem annähern. Threlfall (2009) unterscheidet *mental calculation strategies* in die beiden Subfacetten *approach strategy* und *number transformation strategy*.

Mit *approach strategy* ist die Herangehensweise an eine Aufgabe gemeint, d. h. ob beispielsweise ein erlernter Algorithmus verwendet oder eine graphische Lösung gewählt wird. Verschiedene Zugangswege bei der Aufgabenbearbeitung – sogenannte heuristische Strategien – sind besonders bei Problemlöseaktivitäten relevant, da sie dort als grundlegend für die Entwicklung von Flexibilität gelten (Kilpatrick et al., 2001). In der niederländischen Studie von Elia, den Heuvel-Panhuizen und Kolovou (2009) konnten leistungsstarke Viertklässler, die über eine Vielzahl an heuristischen Strategien verfügen, Problemlöseaufgaben effizienter bearbeiten als Schülerinnen und Schüler mit vergleichbaren allgemeinen mathematischen Kompetenzen, aber weniger verfügbaren heuristischen Strategien. Gleichzeitig zeigte sich in der Studie, dass die Schülerinnen und Schüler trotz ihrer überdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten – vermutlich aufgrund der fehlenden Förderung im Unterricht – mehrheitlich kaum in der Lage waren, unterschiedliche Heuristiken zu entwickeln, sondern auf das Trial-and-Error-Verfahren zurückgriffen. Die *approach strategy* steht somit auch eng mit soziomathematischen Unterrichtsnormen in Zusammenhang.

Number transformation strategy bezeichnet, in welcher Weise die Zahlen während des Lösungsprozesses zerlegt werden. *Number transformation strategies* werden von Threlfall (2009) wiederum in *calculation strategies* und *counting strategies* unterteilt. *Calculation strategies* beschreiben Rechenstrategien, die auf Zahlentransformationen beruhen. *Counting strategies* beschreiben unterschiedliche Zählstrategien. Diese Kategorisierung dient dazu, auch in der Flexibilität *approach-strategy-flexibility*, *calculation-strategy-flexibility* und *counting-strategy-flexibility* voneinander abgrenzen zu können. Die Begriffsunterscheidung resultiert unter anderem auch daraus, dass der Begriff *mental calculation* im Englischen nicht nur halbschriftliches Rechnen, sondern auch Zählen oder den Abruf von auswendig gelerntem Wissen (z. B. des Einmaleins) umfasst. Dabei wird gemäß Threlfalls (2002, 2009) Definition nur von flexiblem Rechnen (im Sinne von Adaptivität, vgl. Definition S. 8) gesprochen, wenn das Kind konzeptuelles Wissen, Zahlwissen und Kreativität für die Generierung seines Lösungsweges nutzt, nicht aber, wenn es einfach eine gelernte Methode (im Sinne von *approach strategy*) anwendet, ohne die Aufgabenkriterien einzubeziehen.

Nach Threlfall (2009) ist insbesondere die *calculation-strategy-flexibility* bedeutend, da hier die Nutzung von Zahleigenschaften für *Verkürzungsstrategien* (bei anderen Autoren sogenannte „shortcut strategies“; oder „wholistic strategies“ (z. B. Heirdsfield & Cooper, 2004, S. 456) im Vordergrund steht. Dabei entspringen diese Strategien weder der Anwendung rein prozedural erlernter Algorithmen noch werden sie angewendet, weil sie sozial erwünscht sind (z. B. weil die Strategie aktuell im Unterricht geübt und automatisiert wird). Durch die Unterscheidung zwischen *approach strategy* und *number transformation strategy* wird berücksichtigt, dass oberflächlich adaptiv erscheinende Rechenwege aus sozialer Erwünschtheit entstehen können und ebenso eine Nicht-Verwendung von *Verkürzungsstrategien* nicht zwingend auf mangelndes konzeptuelles Zahlwissen zurückzuführen ist. Threlfall (2009) merkt allerdings selbst an, dass die Grenze zwischen Anwendung einer Prozedur, die aufgrund sozialer Erwünschtheit eingesetzt wird, und der flexiblen, durch das Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen gekennzeichneten Anwendung, fließend ist.

Um Strategieflexibilität und -adaptivität zu fördern, können nach Threlfall (2002) Strategien zur Analyse und Beschreibung von Zahlbeziehungen sinnvoll sein, die dem eigentlichen Rechenprozess vorgeschaltet werden.

> *They are ways of thinking about mental calculations that do not describe the whole sequence to the solution, but concern just some of the steps, for example ways of beginning, ways of thinking about the numbers, and ways of relating the numbers to other knowledge. Examples of this are: looking for helpful ways of splitting one or both of the numbers (and not always into ‘tens and units’); looking for doubles or near doubles or other common factors; and looking for proximities (what ‘easy’ numbers the numbers in the problem are near to). These are strategies because they can be deployed deliberately as part of calculating, but they are not alternatives to choose from, as any can be used on any calculation.* (S. 42)

Einige reformorientierte Ansätze, in denen konzeptuelles Zahlwissen eine Voraussetzung für die Generierung eigener Strategien darstellt, beinhalten genau die von Threlfall (2002) beschriebenen Elemente zur Förderung des Zahlwissens bzw. des Zahlenblicks (z. B. Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013). In Kapitel 4.3 wird näher darauf eingegangen, inwiefern diese Zahlwissensförderung auch als metakognitive Komponente der Strategieförderung betrachtet werden kann.

Zahlwissen bzw. *number sense* wird in der Literatur uneinheitlich definiert. Berch (2005) unterscheidet in einen *lower order* und einen *higher order number sense*. Während es sich beim *lower order number sense* um basale numerische Fähigkeiten handelt (z. B. Unterscheidung von Anzahlen, Darstellung im Stellenwertsystem, Zählen und das Verständnis einfacher Rechenoperationen), umfasst der *higher order number sense* das Zahl- und Operationswissen, das in der deutschsprachigen Literatur mit den Begriffen

„Zahlensinn" (Lorenz, 1998) und „Zahlenblick" (Schütte, 2004, 2005a) beschrieben wird. Auch Schütte (2004, 2005a) hebt ähnlich wie Berch (2005) hervor, dass Zahl- und Operationsverständnis die Grundlagen für den Zahlenblick darstellen.

Zahlenblick nach Schütte (2005a) beschreibt vor allem die methodische Herangehensweise an die Bearbeitung mathematischer Aufgaben, welche die intensive Analyse von Zahl- und Aufgabeneigenschaften vor der Aufgabenbearbeitung beinhaltet, sodass vorhandenes Zahl- und Operationswissen für die Generierung eines Lösungsweges genutzt werden kann.

Zahlensinn umfasst nach Lorenz (2005) u. a. operative Kompetenzen im Umgang mit Zahlen wie das Zusammensetzen und Zerlegen von Zahlen, das Wissen und Nutzen von Rechengesetzen zur Manipulation von Rechenoperationen sowie „Zahlen und ihren Beziehungen Bedeutung zu verleihen" (S. 118), d. h. beispielsweise eine Subtraktionsaufgabe als Unterschiedsbestimmung zu interpretieren.

Es wird angenommen, dass die adaptive Anwendung von halbschriftlichen Rechenstrategien, wie beispielsweise der Strategie *Ergänzen*, nur erfolgen kann, wenn die zugrunde liegenden Grundvorstellungen zur Operation (hier: Differenzmodell der Subtraktion) verfügbar und in der jeweiligen Situation (hier: nahe beieinander liegende Zahlen in einer Subtraktionsaufgabe) abrufbar und nutzbar sind (Moser Opitz & Schmassmann, 2012).

> *„The features of noticing qualities of the numbers, manipulation of the numbers, how they can be partitioned, approximated, combined, amended, and so on mean that, in this account, calculation-strategy-flexibility is reliant on the extent of number knowledge."* (Threlfall, 2009, S. 548)

Die Annahme, dass grundlegendes Zahl- und Operationswissen für adaptive, also an die Aufgabeneigenschaften angepasste, Rechenwege notwendig ist, wird auch durch den Forschungsstand gestützt. Einige Studien konnten einen hohen Zusammenhang zwischen Zahlwissen und der Entwicklung eigener Strategien feststellen (Heirdsfield & Cooper, 2004, Hiebert & Wearne, 1996; Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013). In den Fallstudien von Heirdsfield und Cooper (2004) wiesen flexible Rechner ein besseres Faktenwissen auf, d. h. sie konnten besser Aufgaben des kleinen Einspluseins bzw. Einsminuseins abrufen und diese für die Generierung ihrer Rechenwege nutzen. Die Autoren heben hervor, dass sich Unterschiede im Zahlwissen/Zahlverständnis der Schülerinnen und Schüler beispielsweise darin zeigen, ob das Dezimalzahlsystem verstanden wurde, Zahlmanipulationen basierend auf arithmetischen Gesetzen durchgeführt werden können und zentrales Faktenwissen vorhanden ist. Heirdsfield und Cooper (2004) postulieren, dass Zahlwissen, welches für die Generierung informeller Strategien nötig ist, durch automatisierte Prozesse ersetzt werden kann. So haben einige Studien gezeigt, dass sich flexible und inflexible Rechner zwar in der Adaptivität ihrer eingesetzten Strategien, nicht jedoch in der Korrektheit unterscheiden (zusf. Heirdsfield & Cooper, 2004). In einer neueren Studie von Linsen, Verschaffel, Reynvoet und De Smedt (2015) fanden sich für die korrekte

Verwendung von sowohl schriftlichen Normalverfahren als auch Kopfrechenstrategien im Zahlenraum bis 100 Zusammenhänge zur basismathematischen Kompetenz der Mengenrelation, die von den Autoren mit Verweis auf Berch (2005) unter „lower order number sense“ eingeordnet wird. Die Ergebnisse weisen allerdings darauf hin, dass zwar bei beiden Lösungsverfahren eine Korrelation mit der Schnelligkeit der Zahlenverarbeitung/des Größenvergleichs besteht, jedoch nur für die Kopfrechenstrategien ein Zusammenhang zwischen der Korrektheit beim Größenvergleich und der Fähigkeit zur korrekten Lösung der Aufgaben im Zahlenraum bis 100 feststellbar ist.

Kritisch merkt Thompson (2010) zum Zusammenhang von Zahlwissen und Strategieflexibilität/-adaptivität an, dass nur durch ein vorhandenes Verständnis für Rechengesetze flexible Rechenkompetenz erreicht werden kann und nicht per se die Beschäftigung mit Rechenstrategien zu einer Verbesserung des Zahlwissens führt. Auch Carpenter et al. (1997) heben hervor, dass in der Studie von Hiebert und Wearne (1996) (vgl. Kap. 3.4.3) zwar deutlich wird, dass diejenigen Schülerinnen und Schüler mit höherem Stellenwertverständnis besser informelle Strategien entwickeln können, aber es bleibt unklar, ob Zahlwissen sich durch die Auseinandersetzung mit Strategien bzw. durch die Entwicklung von Strategien ausbildet oder eine Voraussetzung hierfür darstellt.

> *Because invented strategies are based on base-ten number concepts, it might be expected that students' use of invented strategies would be related to understanding of these concepts, but there is an ongoing debate whether children should master fundamental base-ten number concepts before they learn procedures for adding and subtracting multidigit numbers or whether learning of these concepts and procedures might be more integrated (Baroody, 1990; Fuson, 1990).* (Carpenter et al., 1997, S. 39)

Wie das Zitat von Carpenter et al. (1997) verdeutlicht, spielt an diesem Punkt erneut die Gewichtung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen in der theoretischen Fundierung der Instruktionsansätze eine Rolle, welche bereits in Kapitel 3.1 beschrieben wurde. Im folgenden Kapitel werden die zentralen Unterschiede der Unterrichtsansätze noch einmal herausgearbeitet und gegenübergestellt.

3.3.5 Konzeptionelle Unterschiede der Ansätze im Vergleich

3.3.5.1 Strategiewahl oder Strategiegenerierung

Die dargestellten Ansätze zum Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien – *Skills Approach, Conceptual Approach*, *Problem-solving Approach* und *Investigative Approach* – unterscheiden sich vor allem darin, wie stark halbschriftliche Rechenstrategien schematisiert oder sogar prozedural als Hauptstrategien vermittelt werden. Darüber hinaus werden im *Skills Approach*, im *Investigative Approach* und im *Conceptual Approach* (zumindest für halbschriftliche Rechenstrategien in einigen Unterrichtkonzepten, die auf der *Realistic Mathematics Education* basieren) der Erwerb eines Strategierepertoires angestrebt, sodass nur in diesen Ansätzen der Wortbedeutung nach von Strategiewahl gesprochen werden kann. Ein solches Strategiewahlkonzept äußert sich in Kompetenzdefinitionen, wie beispielsweise der folgenden von Kilpatrick et al. (2001):

> *„Students develop procedural fluency as they use their strategic competence to choose among effective procedures."* (S. 129)

Im *Problem-solving Approach* wird hingegen von keinem Strategierepertoire im Sinne verschiedener, alternativer Musterlösungen ausgegangen.

3.3.5.2 Informeller oder prozeduraler Strategieerwerb

Das Spannungsverhältnis zwischen der Entwicklung eigener Rechenwege und der Vorgabe von Hauptstrategien wird auch in der mathematikdidaktischen Literatur diskutiert (z. B. Padberg & Benz, 2011; Schütte, 2004). Insbesondere Vertreter problemlöseorientierter Instruktionsansätze erachten zu starke Schematisierungen von Strategien als problematisch (Schütte, 2004; Threlfall, 2002, 2009). Schütte (2004) kritisiert an der Thematisierung halbschriftlicher Rechenstrategien im Sinne von Hauptstrategien, dass eigene Zugangswege nicht berücksichtigt werden und selbstständiges Lösungsverhalten nicht unterstützt wird. Darüber hinaus bestehe die Gefahr, dass Teilschritte lediglich mechanisch ausgeführt werden, sodass die Automatisierung letztlich zu Inflexibilität führe. Außerdem wird bemängelt, dass das Spektrum informeller Strategien durch Hauptstrategien zu stark eingeschränkt wird und Strategien ggf. aus soziomathematischen Gründen in einer bestimmten Form notiert werden, sodass die mentalen Prozesse dabei nicht adäquat widergespiegelt werden (Padberg & Benz, 2011). Durch die Vorgabe von Hauptstrategien bekommt die Komponente des prozeduralen Wissens eine große Gewichtung. Krauthausen (2009) äußert sich hierzu wie folgt:

> *„Halbschriftliches Rechnen lediglich gehäuft durchzuführen und nahezu algorithmenmäßig zu »lehren« wird kaum die Erwartungen erfüllen." (S. 106)*

Andererseits zeigen beispielsweise die Ergebnisse von Elia et al. (2009), dass es für Schülerinnen und Schüler oft schwierig ist, ihre verwendeten Strategien überhaupt zu verschriftlichen. Insbesondere für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler könnten Hauptstrategien als Lösungsschemata dienen, die bei ähnlichen Aufgabenstellungen abgerufen werden können. An dieser Stelle ist auch die positive Befundlage zum Lernen aus Lösungsbeispielen zu nennen (zusf. Hattie, 2009; Renkl, 2014). Rittle-Johnson, Star und Durkin (2012) konnten zeigen, dass Sekundarschülerinnen und -schüler mit geringem Vorwissen beim Lösen von linearen Gleichungen in Bezug auf Flexibilität vor allem von einer Lernumgebung profitierten, in der Lösungswege kontinuierlich miteinander verglichen wurden. Sie entwickelten durch den kontinuierlichen Vergleich von Strategien eine höhere Strategieflexibilität als in einer Lernumgebung, in der eine Prozedur eingeführt und erst im Anschluss mit anderen Prozeduren verglichen wurde.

Als unterstützend erweist es sich, wenn Strategien mit Namen verbunden werden (z. B. Namy & Gentner, 2002). Die Benennung von halbschriftlichen Rechenstrategien kann dazu beitragen, dass Zahlcharakteristika hervorgehoben werden und somit die Abgrenzung der Strategien einfacher fällt (Scherer & Moser Opitz, 2010; Wittmann & Müller, 1994). Die Benennung trägt dabei in der fachdidaktischen Diskussion insbesondere zur Schematisierung zuvor informell entdeckter Strategien bei (vgl. *Investigative Approach*), d. h. es geht dabei nicht um eine Vorgabe von Algorithmen a priori:

> *Wie im 2. Schuljahr ist es unser Ziel, die Lösungsvielfalt dadurch zu "bändigen", daß wir gewisse Hauptstrategien benennen, die in sich wieder flexibel gehandhabt werden können. Die Benennung der Strategien hat den Vorteil, daß sie bewußter genutzt und zum Gegenstand der Diskussion gemacht werden können. Für die Kinder ist es in jeder Hinsicht lehrreich, Rechenwege zu beschreiben und zu vergleichen.* (Wittmann & Müller, 1994, S. 20)

Einige Autoren heben hervor, dass metastrategische Regeln, welche die Passung zwischen Aufgabenkriterien und automatisierten Strategien im Sinne konditionalen Strategiewissens hervorheben, nicht anzustreben seien (Threlfall, 2002, 2009; Verschaffel et al., 2011).

3.3.5.3 Schülerinnen und Schüler mit geringen mathematischen Lernvoraussetzungen

Vertreter der unterschiedlichen in Kapitel 3.3 vorgestellten Strategieerwerbskonzepte geben selbst Einschränkungen zur Wirksamkeit dieser Ansätze, wenn es um verschiedene mathematische Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler geht. Wie bereits in Kapitel 2.1 dargestellt, werden individuelle, aufgabenbezogene und soziokulturelle Determinanten der Strategieflexibilität/-adaptivität unterschieden. Betrachtet man die individuellen Einflüsse, so lässt sich aufgrund widersprüchlicher Befunde sowie voneinander abweichenden Empfehlungen in der mathematikdidaktischen Literatur keine abschließende Aussage darüber treffen, inwieweit Schülerinnen und Schüler mit geringen mathematischen Lernvoraussetzungen überhaupt von Instruktionsansätzen zur Förderung der Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl profitieren können. Dies liegt insbesondere darin begründet, dass die Begriffe „leistungsschwach“ oder „geringe Lernvoraussetzungen“ unscharf definiert sind, da darunter verschiedene Defizite gefasst werden. Sowohl in der fachdidaktischen Literatur als auch in empirischen Studien werden mit diesen beiden Begriffen Schülerinnen und Schüler beschrieben, die geringere allgemeine mathematische Kompetenzen aufweisen als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler. In einigen Studien wird die allgemeine kognitive Leistungsfähigkeit kontrolliert, während insbesondere in der sonderpädagogischen Forschung auch Schülerinnen und Schüler mit kognitiven Beeinträchtigungen einbezogen werden (Jitendra & Star, 2011; Milo, Seegers, Ruijssenaars & Vermeer, 2004; Woodward & Baxter, 1997). In der Literatur wird davon ausgegangen, dass nur ein kleiner Anteil der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler aufgrund neurologischer Defizite nicht in der Lage ist, vergleichbare mathematische Kompetenzen wie ihre Mitschülerinnen und Mitschüler auszubilden (zusf. Reusser, 2000). Sowohl bei Schülerinnen und

Schülern mit Defiziten im mathematischen Basiswissen als auch mit moderaten kognitiven Defiziten ist davon auszugehen, dass sie von unterstützenden Instruktionsansätzen profitieren können (Kroesbergen & Van Luit, 2002; Reusser, 2000). Dabei ist jedoch unklar, wie diese instruktionale Unterstützung aussehen kann.

Für die vorliegende Arbeit, die sich mit der Entwicklung von Strategieflexibilität und -adaptivität im Regelschulwesen befasst, sind vorwiegend die Schülerinnen und Schüler mit Defiziten in basalen mathematischen Kompetenzen, wie z. B. fehlendem Verständnis für das Stellenwertsystem (Geary, 2004; vgl. *„lower order number sense“* in Abschnitt 3.3.4) von Interesse. Wie bereits dargestellt wurde, setzt flexible und adaptive Strategiewahl konzeptuelles Zahl- und Operationswissen voraus (vgl. Kap. 3.1–3.3). Aus diesem Grund wird in der mathematikdidaktischen Literatur teilweise die Annahme einer generellen Überforderung leistungsschwächerer Lernender beim Strategieerwerb in reformorientierten Instruktionsansätzen vertreten. Während bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern die Generierung eigener Strategien und die Diskussion um die Adaptivität unterschiedlicher Lösungsstrategien im Vordergrund des Strategieerwerbs stehen sollte, wird für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler eine Begrenzung des Strategiespektrums empfohlen (Padberg & Benz, 2011). Auch Radatz et al. (1998) betonen, dass Schülerinnen und Schüler bei fehlenden basismathematischen Fähigkeiten durch das selbstständige Entdecken von Lösungswegen überfordert werden, da ihnen hierzu häufig das nötige Stellenwertverständnis sowie Zahlwissen fehlt. Dadurch besteht die Gefahr, dass sich Fehlstrategien etablieren (Radatz et al., 2006). Die Autoren merken an, dass bei rechenschwächeren Schülerinnen und Schülern mit verfestigten Zählstrategien als letzter Schritt – sofern alle Förder- und Unterstützungsmaßnahmen keine Wirkung zeigen – die schriftlichen Normalverfahren ins zweite Schuljahr vorgezogen werden können (Radatz et al., 1998; Schipper, 2009). Auch Padberg und Benz (2011) heben hervor, dass „die eigene Entdeckung verschiedener, sinnvoller Lösungswege beim halbschriftlichen Rechnen für viele leistungsschwache Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung oder sogar Überforderung“ (S. 213) sei. Die Autoren merken kritisch an, dass es auch für Schülerinnen und Schüler im mittleren Leistungsfeld effektiver sei, wenige Strategien tiefgründig zu behandeln, als eine Vielzahl von Strategien nur „oberflächlich“ kennenzulernen. Als Begründung führen sie den erhöhten Lernstoff an, auf den in dieser Arbeit im Zusammenhang mit den Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis der Schülerinnen und Schüler noch näher eingegangen wird (vgl. Kap. 4.2 zur Cognitive-Load-Theorie). Padberg und Benz (2011) resümieren, dass Strategievielfalt in Bezug auf halbschriftliche Rechenstrategien anzustreben sei, jedoch für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler unter Umständen nur eine Strategie vorgegeben werden sollte. Radatz et al. (1998) empfehlen für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler das *schrittweise Verfahren*, das wie bereits in Kapitel 2.2 gezeigt wurde, als universelle Strategie weniger fehleranfällig als andere halbschriftliche Rechenstrategien ist.

Andererseits kann gerade der Austausch über Rechenwege und Aufgabeneigenschaften (Zahlenblickschulung) das konzeptuelle Verständnis aller Schülerinnen und Schüler fördern und sich positiv auf deren Strategieflexibilität – wenn auch auf unterschiedlichen Kompetenzniveaus – auswirken (Threlfall, 2009). Carpenter et al. (1997) heben hervor, dass das explizite Unterrichten von Standardstrategien die Gefahr berge, dass Prozeduren rein mechanisch wie Algorithmen verwendet werden. Die Ergebnisse ihrer Studie zeigen, dass bei der Entwicklung informeller Rechenstrategien weniger Fehlstrategien auftreten als bei der Verwendung von Standardprozeduren. Dass sich informelle Strategien auf Basis von konzeptuellem Wissen entwickeln, ist auch ursächlich dafür, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler dieselben Strategien anwenden. Scherer und Moser Opitz (2010) betonen, dass zunächst alle Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit erhalten sollten, informelle Rechenstrategien zu entwickeln. Dabei ist aber die Balance zwischen informellen Rechenwegen und der Formalisierung/Schematisierung durch die Lehrperson für den Lernerfolg entscheidend (vgl. Tabelle 3). Die Autoren weisen darauf hin, dass auch die Benennung einzelner Strategien für Strategieflexibilität hilfreich sein kann. Jedoch ist es insbesondere für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler u. U. überfordernd, wenn sie mit allen idealtypischen halbschriftlichen Rechenstrategien zeitglich konfrontiert werden.

3.3.5.4 Zusammenfassung

Tabelle 3 veranschaulicht überblicksartig, inwieweit Strategien in den unterschiedlichen Strategieerwerbskonzepten informell entwickelt oder prozedural erworben werden und inwieweit die Strategien von der Lehrperson schematisiert werden. Während die Schematisierung im *Skills Approach* das Kernelement bei der Vermittlung von Strategien darstellt, zeigt sich zwischen den reformorientierten Unterrichtsansätzen ein großes Spektrum.

Tabelle 3: Vermittlung und Schematisierung von Rechenstrategien in unterschiedlichen Strategieerwerbskonzepten

		Strategieerwerb	
		Informell	**prozedural**
Grad der Schematisierung	**Niedrig**	Problem-solving Approach (Kap. 3.3.4)	
	Hoch	Conceptual Approach (Kap. 3.3.2) Investigative Approach (Kap. 3.3.3)	Skills Approach (Kap. 3.3.1)

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass in den reformorientierten Ansätzen, d. h. dem *Conceptual Approach*, dem *Problem-solving Approach* und dem *Investigative Approach,* der Erwerb zur Kompetenz der flexiblen und adaptiven Strategiewahl angestrebt wird, während der *Skills Approach* vor allem Rechenfertigkeiten trainiert.

Die Wirksamkeit der unterschiedlichen Ansätze war Gegenstand zahlreicher Studien, die im Folgenden vorgestellt werden. Da sich die vorliegende Arbeit mit dem Einfluss unterschiedlicher Instruktionsansätze auf den Erwerb halbschriftlicher Additions- und Subtraktionsstrategien beschäftigt, werden dabei nur ausgewählte Studien mit diesem Forschungsschwerpunkt vorgestellt.

3.4 Befunde zur Strategieflexibilität, -adaptivität und Korrektheit beim halbschriftlichen Rechnen

Die im Folgenden beschriebenen Studien zur Wirksamkeit unterschiedlicher Instruktionsansätze wurden insbesondere in solchen Ländern durchgeführt, in denen Strategieflexibilität/-adaptivität im Curriculum eine hohe Bedeutung beigemessen wird (vgl. Kap. 2.2). Entsprechend stammen die hier vorgestellten Befunde aus dem US-amerikanischen Raum (Baxter, Woodward & Olson, 2001; Carpenter et al., 1997; Hiebert & Wearne, 1996; Mabbott & Bisanz, 2008; Woodward & Baxter, 1997), Australien (Heirdsfield & Cooper, 2004; Heirdsfield, 2011), Belgien (De Smedt et al., 2010; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière & Verschaffel, 2012; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2004; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009a, 2009b; Torbeyns & Verschaffel, 2013; Torbeyns, Peters, Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2016; Torbeyns & Verschaffel, 2016; Torbeyns et al., 2017), den Niederlanden (Blöte et al., 2000; Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998; Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004), Ungarn (Csíkos, 2016) und Deutschland (Benz, 2005, 2007; Heinze et al., 2009; Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010; Selter, 2000, 2001).

Alle vorgestellten Studien (mit Ausnahme von Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004; Mabbott & Bisanz, 2008) untersuchen die Strategieflexibilität bzw. -adaptivität von Grundschülerinnen und Grundschülern bei der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 bzw. 1000.

Die Studien unterscheiden sich darin, ob in den Strategietests zur Erfassung von Strategieflexibilität/-adaptivität Textaufgaben, Zahlenaufgaben oder eine Mischung aus beiden Aufgabenformen eingesetzt wurden. Textaufgaben aktivieren dabei stärker Grundvorstellungen als Zahlaufgaben. Darüber hinaus unterscheiden sich auch die Aufgabenprompts der verschiedenen Studien, indem sie entweder eine schnelle oder eine geschickte Aufgabenbearbeitung verlangen. Die unterschiedlichen methodischen Vorgehensweisen sollten daher beim Vergleich der Befunde berücksichtigt werden.

Die Strategien der Schülerinnen und Schüler wurden dabei überwiegend mit Strategietests, teilweise aber auch mit Individualinterviews (z. B. Benz, 2005, 2007; Rathgeb-Schnierer, 2006) erhoben. Die Strategietests unterscheiden sich darin, ob sie mit freier Strategiewahl (z. B. Csíkos, 2016; Heinze et al., 2009; Selter, 2000; Torbeyns et al., 2009a) oder mit dem *Choice-/No-Choice*-Verfahren untersucht wurden (z. B. Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016).

Exkurs zur *Choice-/No-Choice*-Methodik

In Studien zur Erfassung der Strategiekompetenz wird die Vorstellung von einer Wahl zwischen verschiedenen Prozeduren deutlich, wenn die Flexibilität der Schülerinnen und Schüler durch sogenannte *Choice-/No-Choice*-Bedingungen überprüft wird (Siegler & Lemaire, 1997). Den Untersuchungen liegt die Annahme des Strategiewahlmodells zugrunde, dass individuelle Kompetenzparameter in der Strategiebeherrschung (wie Korrektheit oder Lösungszeit) der Schülerinnen und Schüler entscheidend darauf Einfluss nehmen, welche Strategie aus dem individuellen Strategierepertoire zum Einsatz kommt (vgl. Kap. 4.4).

Zum Themengebiet der halbschriftlichen Rechenstrategien sind insbesondere Studien der belgischen Arbeitsgruppe um Joke Torbeyns und Lieven Verschaffel mit einem solchen Design entstanden (z. B. Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2002, 2004, 2005, 2006; Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquière & Verschaffel, 2009). Hierbei werden Korrektheit, Lösungszeit, Strategierepertoire und -flexibilität in zwei unterschiedlichen Testbedingungen miteinander verglichen. In der ersten Testbedingung können Schülerinnen und Schüler die Aufgabe mit einer selbstgewählten Strategie lösen, während sie in der zweiten Testbedingung nach einer vorgegebenen Strategie gelöst werden muss. Die Anzahl der *No-Choice*-Bedingungen entspricht der Anzahl der zur Verfügung stehenden Strategien in der Testbedingung mit freier Strategiewahl. Zum Beispiel würde man bei der Fragestellung, ob Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 901 − 897 am Ende der dritten Klasse schriftlich oder halbschriftlich rechnen, die Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe mindestens dreimal bearbeiten lassen. In der *Choice*-Bedingung könnten sie dabei ihre Strategie frei wählen (z. B. „Löse die Aufgabe 901 − 897.“). In den beiden *No-Choice*-Bedingungen würde man die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe zum einen mit dem schriftlichen Normalverfahren und zum anderen mit mindestens einem halbschriftlichen Verfahren (z. B. *Schrittweise* oder *Ergänzen*) bearbeiten lassen.

Methodische Einschränkungen dieser Methode sind bei Luwel, Onghena, Torbeyns, Schillemans und Verschaffel (2009) dargestellt. Eine Schwierigkeit besteht darin, dass die Strategien in der Testbedingung mit freier Strategiewahl begrenzt werden müssen, da die Effizienz und Korrektheit jeder Strategie mit derjenigen aus der Testbedingung mit vorgegebener Strategie verglichen werden muss. Folglich wird entweder vorab das Strategierepertoire in der Testbedingung mit freier Strategiewahl begrenzt (z. B. Torbeyns et al., 2006; Torbeyns et al., 2009b, vgl. Kap. 3.4.3) oder es werden alternativ im Nachhinein solche Strategien ausgeschlossen, für die keine *No-Choice*-Bedingungen existieren.

Darüber hinaus wird die Wahl und Abgrenzung zwischen verschiedenen Strategien in der *Choice-Condition* umso schwieriger, je weniger sich die Wahl in tatsächlich beobachtbarem Verhalten zeigt (Luwel et al., 2009), d. h. die verwendete Strategie nur über Selbstauskunft der Schülerin bzw. des Schülers ermittelt werden kann. Beispielsweise mussten die Schülerinnen und Schüler in der Studie von Luwel, Torbeyns und Verschaffel (2003) die Anzahl eingefärbter Felder in einem quadratischen Gitternetz bestimmen und hinterher angeben, ob sie diese durch Addition oder Subtraktion ermittelt hatten. Die Ergebnisse der Studie, die in Kapitel 4.3 noch ausführlicher vorgestellt wird, legen nahe, dass die selbstberichteten Strategien nicht zwingend mit den wirklich verwendeten Strategien übereinstimmen.

Es kann darüber hinaus in den *No-Choice*-Bedingungen je nach Ähnlichkeit der zur Verfügung stehenden Strategien nicht ausgeschlossen werden, dass die Aufgaben mit einer anderen als der jeweils vorgegebenen Strategie gelöst wurden.

Demzufolge müssen die unterschiedlichen Erfassungsmethoden bei der Bewertung und dem Vergleich der in Kapitel 3.4 dargestellten Befunde berücksichtigt werden.

Einige der Studien haben neben der Flexibilität und Adaptivität auch die Korrektheit der Rechenwege untersucht. Auch dieser Aspekt wird in den folgenden Kapiteln näher beleuchtet. Zusätzlich zur Effizienz unterschiedlicher Unterrichtsansätze soll in der Zusammenfassung der Befundlage herausgearbeitet werden, inwieweit aus den Befunden abgeleitet werden kann, dass ein Kompetenzerwerb in der adaptiven und korrekten Strategiewahl für Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten grundsätzlich möglich ist. Deuten die Befunde darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten profitieren können, schließt die Frage an, welche Unterrichtskonzepte den Strategieerwerb unterstützen können. Denkbar ist, wie bereits an einigen geschilderten fachdidaktischen Positionen deutlich wurde (vgl. Kapitel 3.3.5.3), dass sich in Abhängigkeit des Leistungsniveaus für die unterschiedlichen Strategieerwerbskonzepte differenzielle Effekte zeigen. Wie bereits erwähnt, erschwert die uneinheitliche Definition von „leistungsschwach“ eine adäquate Einschätzung des Forschungsstands zur Effektivität unterschiedlicher Instruktionsansätze für diese Leistungsgruppe. Da viele Studien nicht klar zwischen kognitiven Defiziten, d. h. verminderter Intelligenz, und mathematischen Defiziten trennen, werden im Folgenden Ergebnisse ausgewählter Studien berichtet, die sich nicht ausschließlich auf Schülerinnen und Schüler mit kognitiven Defiziten beschränken (Baxter et al., 2001; Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004; Woodward & Baxter, 1997). Auch wenn eine Vielzahl an Faktoren, wie die allgemeinen kognitiven Grundfähigkeiten oder auch das Arbeitsgedächtnis, einen großen Einfluss auf den Erwerb mathematischer Kompetenz nehmen (zusf. Kaufmann, Handl, Delazer & Pixner, 2013), ist der Fokus im Folgenden nur auf solche Faktoren gerichtet, die im regulären Mathematikunterricht durch die fachdidaktische Qualität des Instruktionsansatzes direkt beeinflusst werden können.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst dargestellt, wie hoch die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven bzw. zur korrekten Strategiewahl im traditionellen, routineorientierten Mathematikunterricht ausgeprägt ist (Kap. 3.4.1). Diesen Befunden werden im darauffolgenden Abschnitt Ergebnisse aus reformorientierten Unterrichtskonzepten gegenübergestellt (Kap. 3.4.2). Schließlich werden Studien vorgestellt, welche die Effizienz eines reformorientierten Ansatzes (*Conceptual Approach, Investigative Approach* oder *Problem-solving Approach*) gegenüber einem Routineansatz untersucht bzw. vereinzelt auch unterschiedliche Reformansätze in ihrer Effektivität verglichen haben (Kap. 3.4.3).

3.4.1 Traditioneller Mathematikunterricht (Skills Approach)

Die Ergebnisse verschiedener Studien zeigen, dass die Fähigkeit zur adaptiven Anwendung von Rechenstrategien in einem eher routineorientierten Mathematikunterricht gering ausgeprägt ist (Benz, 2005; Carpenter et al., 1997; Csíkos, 2016; Heinze et al., 2009; Selter, 2001; Torbeyns et al., 2009a, 2009b; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). Im Folgenden werden einige dieser Befunde genauer vorgestellt. Zwei dieser Studien wurden in der zweiten Klasse im Zahlenraum bis 100 (Benz, 2007; Torbeyns et al., 2009a), die anderen beiden Studien in der dritten (Selter, 2000; Torbeyns et al., 2009b) bzw. vierten Klasse (Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016) und somit im Zahlenraum bis 1000 durchgeführt. Die Studien von Selter (2000) und Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) thematisieren dabei auch die adaptive und flexible Strategiewahl nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren.

3.4.1.1 Adaptive Strategiewahl – eine Frage des Alters und der Erhebungsmethode?

In der Studie von Torbeyns et al. (2009a) wurde der Forschungsfrage nachgegangen, ob Schülerinnen und Schüler eines prozedural-orientierten Unterrichts im Zahlenraum bis 100 neue, nicht im Unterricht erlernte Strategien anwenden und ob die Anzahl selbstentwickelter Strategien steigt, wenn Schülerinnen und Schüler explizit dazu aufgefordert werden, mehrere Strategien anzuwenden. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler hatten im Unterricht nur das *schrittweise Verfahren* erlernt. Der Ausgangspunkt für diese Vorgehensweise war die Hypothese, dass die Erfassungsmethode eine mögliche Ursache für die geringe Flexibilität und Adaptivität der Lösungswege von Schülerinnen und Schülern in Strategietests darstellen könnte. Bei schriftlichen Tests, die nur eine Lösung für jede Aufgabe verlangen, könnten Schülerinnen und Schüler konform mit den im Unterricht erwünschten Prozeduren antworten, obwohl ihr Strategierepertoire evtl. weitere geschickte Strategien aufweist. Die beiden Fragestellungen wurden in Abhängigkeit von der Schulstufe und der mathematischen Leistung untersucht. Die Strategienutzung wurde mit zwei unterschiedlichen Tests erfasst. Im ersten Test konnten die Aufgaben mit einer beliebigen Strategie gelöst werden, während im zweiten Test in Rückbezug auf das Verfahren bei Blöte et al. (2000) (vgl. Kap. 3.4.2) jede Aufgabe mit mindestens zwei unterschiedlichen Strategien gelöst werden sollte. Die Stichprobe bestand aus 195 Grundschülerinnen und -schülern des zweiten, dritten und vierten Schuljahres, die anhand eines standardisierten Tests zur Mathematikleistung in Leistungsterzile eingeteilt wurden. Die Rechenwege wurden in der Auswertung nach den Strategien *Stellenweise*, *Schrittweise* und *Verkürzungsstrategien* (shortcut strategies) kodiert. *Verkürzungsstrategien* wurden in der Studie in

Veränderungsstrategien (entspricht den Strategien *Hilfsaufgabe* und *Gegen-/Gleichsinniges Verändern* in Tabelle 1, S. 15) und *indirekte Addition* unterteilt. Die Ergebnisse des Tests mit freier Strategiewahl zeigen, dass die am häufigsten genutzte Strategie *Schrittweise* war, während die *indirekte Addition* und Veränderungsstrategien nur selten genutzt wurden. Wegen der geringen Vorkommenshäufigkeit war nur ein deskriptiver Vergleich zwischen den Leistungs- und Altersgruppen möglich. In den deskriptiven Auswertungen wird jedoch deutlich, dass ein höherer mathematischer Lernstand und eine höhere Klassenstufe zu einem höheren Einsatz von Veränderungsstrategien und *indirekter Addition* führen. Im zweiten Test, in welchem die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben mit mindestens zwei unterschiedlichen Strategien lösen sollten, zeigten sich für die genannten Strategien etwas höhere prozentuale Anteile in ihrer Verwendung. In der Tendenz nutzten aber die Kinder, die bereits im ersten Test geschickte Strategien verwendeten, diese auch im zweiten Test. Eine methodische Einschränkung des zweiten Tests besteht darin, dass die Strategien am Rechenstrich veranschaulicht werden sollten, welcher die Strategie *Stellenweise* aus Veranschaulichungsgründen ausschließt. Nur 17 % der Probanden nutzen bei Aufgaben, die eine Veränderungsstrategie nahelegten, in der vierten Klasse diese Strategie – in den niedrigeren Klassenstufen keiner der Probanden. Im offeneren Testformat bearbeiteten in der zweiten und dritten Klasse unter 5 % der Schülerinnen und Schüler die Aufgaben mit einer Veränderungsstrategie, während es in der vierten Klasse 66 % waren. Die *Indirekte Addition* wurde in der vierten Klassenstufe von nur 15 % der Schülerinnen und Schüler im Test mit freier Strategiewahl und von 21 % im zweiten Test (mit Prompt zur Nutzung unterschiedlicher Strategien) verwendet. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass ältere und leistungsstarke Kinder selbst *Verkürzungsstrategien* entdecken können, ohne hierzu eine gesonderte Instruktion erhalten zu haben. Jedoch ist der Anteil der Kinder, die diese Strategien – insbesondere die *indirekte Addition* – nutzen, sehr gering. Die deskriptiven Ergebnisse legen nahe, dass wenige Schülerinnen und Schüler informelle Strategien entwickeln, sondern überwiegend auf solche Strategien zurückgreifen, die sie im Unterricht erlernt haben. Allein die Erfahrung und das Alter der Kinder stellen keine hinreichenden Bedingungen für die Entwicklung adaptiver Rechenstrategien dar. *Verkürzungsstrategien* und die *Indirekte Addition* zeigten sich in der Studie erst in einem Setting, das die Kinder explizit dazu aufforderte, verschiedene Strategien zu nutzen, während die Schülerinnen und Schüler im spontanen Strategiegebrauch auf die erlernte Strategie *Schrittweise* zurückgriffen. Jüngere und leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler eines Routineansatzes waren in der Studie indes kaum in der Lage, informelle Strategien zu verwenden. Insbesondere leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler wendeten selbst im vierten Schuljahr kaum *Verkürzungsstrategien* an, obwohl sich die Aufgaben in der Studie auf den Zahlenraum bis 100 beschränkten.

In einer weiteren Studie von Torbeyns et al. (2009b) wurde die Strategieverwendung von Drittklässlern ($N = 60$) verschiedener Leistungsniveaus im Zahlenraum bis 100 in einem *Choice-/No-Choice-Design* untersucht. Die Schülerinnen und Schüler hatten im zweiten Schuljahr zunächst ausschließlich die Universalstrategie *Schrittweise* (vgl. Tabelle 1, S. 15) erlernt und erst Anfang des dritten Schuljahres die Strategie *Hilfsaufgabe* kennen gelernt. Die Schülerinnen und Schüler wurden basierend auf der Leistung in einem allgemeinen Mathematiktest in Leistungsquartile eingeteilt, wobei die ersten beiden Quartile zu einer Gruppe zusammengefasst wurden. Ein Lösungsweg wurde in der Studie als adaptiv bezeichnet, wenn er gemäß der Vorstellung des Strategiewahlmodells in den Bereichen Korrektheit und Schnelligkeit die effizienteste Strategie aus dem individuellen Strategierepertoire darstellte. Mit dem *Choice-/No-Choice-Design* wurden die Aufgaben der unterschiedlichen Tests jeweils einmal mit den vorgegebenen Strategien *Hilfsaufgabe* und *Schrittweise* und einmal mit der von den Schülerinnen und Schülern präferierten der beiden Strategien gelöst (zur Methodik vgl. S. 39). Die Strategiewahl wurde in Anlehnung an Siegler (2007) nach dem Strategierepertoire, der Strategieverwendung bzgl. des Aufgabentyps, der Korrektheit und der Schnelligkeit ausgewertet. In der freien Strategiewahl unterschieden sich die Leistungsgruppen in den vier Parametern nicht. Die *Hilfsaufgabe* wurde dabei unabhängig von Zahlkriterien, jedoch vermehrt bei Subtraktionsaufgaben und weniger bei Additionsaufgaben eingesetzt. Ob die Aufgaben mit der Strategie *Hilfsaufgabe* oder der Strategie *Schrittweise* gelöst wurden, hatte keinen Einfluss auf die Korrektheit der Lösungswege. Die Strategie *Hilfsaufgabe* konnte indes bei Subtraktionsaufgaben zeiteffizienter als die *schrittweise* Strategie ausgeführt werden, während sich bei der Addition kein Unterschied zeigte. Insgesamt verwendete nur die obere Leistungsgruppe diejenigen Strategien, die sie korrekter ausführen konnte. Für die Gesamtgruppe ließ sich weder für die Korrektheit noch für die Schnelligkeit ein Einfluss auf die Wahl der Strategie in der *Choice-Condition* nachweisen. Torbeyns et al. (2009b) führen als mögliche Erklärung an, dass die Unterschiede in der Korrektheit zwischen den Strategien zu klein waren, um sich in der Strategieperformanz zu manifestieren. Eine weitere mögliche Erklärung sind die geringen Effizienzunterschiede zwischen den verschiedenen Strategien im Zahlenraum bis 100 (vgl. Tabelle 2, S. 16). Eine Folgestudie von Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) im Zahlenraum bis 1000, die im Folgenden noch detaillierter vorgestellt wird (Kap. 3.4.1.2), konnte Zusammenhänge zwischen der Bearbeitungszeit, der Korrektheit und der Strategiewahl feststellen. Die Methodik der Studie von Torbeyns et al. (2009b) kann darin kritisiert werden, dass die Schülerinnen und Schüler in der *Choice-Condition* explizit zwischen den beiden Strategien *Schrittweise* und *Hilfsaufgabe* wählen müssen und unklar bleibt, ob sie im spontanen Strategiegebrauch tatsächlich auf eine dieser beiden Strategien zurückgegriffen hätten (vgl. Erläuterungen zur Methodik, S. 39).

Ein ähnliches Ergebnis wie bei Torbeyns et al. (2009b) zeigt sich in der belgischen Studie von Peters et al. (2012). Hier wurde die Strategiewahl zwischen *direkter Subtraktion* und der Strategie *Ergänzen* im Zahlenraum bis 20 an 279 Schülerinnen und Schüler aus der dritten bis sechsten Klasse untersucht. Die Aufgaben wurden in unterschiedlichen Aufgabenformaten präsentiert, welche jeweils eine der beiden Strategien nahelegten (z. B. $20 - 3 = \ldots$, $20 - 17 = \ldots$, $3 + \ldots = 20$, $17 + \ldots = 20$). Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler die eingesetzten Strategien nicht den Aufgabeneigenschaften anpassten, sondern bei Aufgaben in Additionsformaten das *Ergänzen* verwendeten und bei den Subtraktionsaufgaben die *direkte Subtraktion*. Erklärt wird dies von den Autoren unter anderem mit einem Mangel an konzeptuellem Verständnis bezüglich der inversen Relation der beiden Rechenarten. Als weitere mögliche Ursache wird die feste Verknüpfung der beiden Rechenarten mit bestimmten Grundvorstellungen (Subtraktion gleichbedeutend mit „wegnehmen") im Mathematikunterricht genannt. Als möglicher weiterer Grund wird die Begrenzung auf den Zahlenraum bis 20 angeführt, in dem sich die Strategien vermutlich weniger in der kognitiven Belastung, welche sie verursachen, unterscheiden als dies in einem größeren Zahlenraum der Fall wäre (z. B. $201 - 3 = \ldots$, $201 - 198 = \ldots$, $3 + \ldots = 201$, $198 + \ldots = 201$).

Dass die Operationen stark mit Grundvorstellungen verknüpft sind, zeigt sich auch in einer weiteren Studie von Torbeyns et al. (2016) zum Verständnis der Subtraktion durch Komplementaddition, welche mit 67 belgischen Dritt und Viertklässlern im Zahlenraum bis 100 durchgeführt wurde. Die Subtraktionsaufgaben wurden in zwei Bedingungen bearbeitet. Während die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben am ersten Tag ohne Hilfestellungen bearbeiten, wurde ihnen am zweiten Tag zu jeder Aufgabe (z. B. $83 - 38 = \_\_$) eine bereits korrekt gelöste Additionsaufgabe ($38 + 45 = 83$) angeboten, die in einigen Fällen über die Nutzung der Komplementaddition zur Lösung verwendet werden konnte. Auf diese Weise wurde jede Aufgabe in zwei Bedingungen bearbeitet. Anhand der Lösungszeit, der Korrektheit und der selbstberichteten Nutzung der Zusammenhänge konnte festgestellt werden, inwieweit die Schülerinnen und Schüler auf das Grundprinzip zurückgriffen.

In 40 % der Aufgabenbearbeitungen wurden die Zahlbeziehungen zur vorgegebenen Aufgabe in der Lösungsbedingung genutzt, wobei große Differenzen zwischen den Schülerinnen und Schülern festgestellt werden konnten. Die Ergebnisse offenbaren einerseits, dass viele Schülerinnen und Schüler Verständnis für das arithmetische Prinzip zeigen, andererseits nutzen auch viele Schülerinnen und Schüler das Prinzip nicht, obwohl in der Studie bereits sehr leistungsschwache Schülerinnen und Schüler aus den Analysen ausgeschlossen wurden.

In der Studie von Benz (2007) wurde die Entwicklung von Rechenwegen an 100 Schülerinnen und Schülern aus 20 unterschiedlichen Schulklassen während des ersten und zweiten Schuljahres untersucht. Es werden hier nur die Ergebnisse aus dem zweiten Schuljahr skizziert. Die Strategien wurden mit Interviews zu drei Messzeitpunkten am Anfang, in der Mitte und am Ende des zweiten Schuljahres sowohl mit Zahl- als auch mit Textaufgaben erfasst. Die Auswertungen der Studie zeigen, dass zu jedem Messzeitpunkt im Schuljahr sowohl die Universalstrategien *Schritt-* und *Stellenweise* als auch die *Misch-*

form aus den beiden Strategien und in wenigen Fällen auch Ableitungsstrategien (u. a. die Strategien *Gegen-/Gleichsinniges Verändern* und *Hilfsaufgabe*; vgl. Tabelle 1, S. 15) eingesetzt wurden. Dabei wurde vor der Einführung halbschriftlicher Rechenstrategien informell insbesondere die Strategie *Stellenweise* verwendet. Während des Schuljahres nahm die Verwendung der Strategie *Schrittweise* zu, die in den meisten verwendeten Schulbüchern thematisiert wird. Auch die *Mischform* wurde im Verlauf des zweiten Schuljahres immer häufiger angewendet. Bei separater Auswertung der Additions- und Subtraktionsaufgaben zeigte sich, dass Additionsaufgaben vorwiegend mit dem *stellenweisen Verfahren* gelöst wurden, während bei den Subtraktionsaufgaben insbesondere *schrittweise* gerechnet wurde. Dies zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Strategien aufgabenspezifisch flexibel einsetzten. Außerdem variierten sie ihre Strategien in Abhängigkeit von der Aufgabenbeschaffenheit (z. B. Aufgaben mit Zehnerübergang bei den Einern vs. kein Zehnerübergang). Das Ableiten als Strategie (d. h. Ableitung der Lösung aus einer anderen Aufgabe, z. B. *Hilfsaufgabe* oder Verdopplungsaufgabe) wurde während des zweiten Schuljahres kaum genutzt. Auch das *Ergänzen*, das bei einer Textaufgabe durch die hervorgerufene Differenzvorstellung induziert werden sollte, verwendeten zu allen Messzeitpunkten weniger als 10 % der Schülerinnen und Schüler.

3.4.1.2 Adaptive Strategiewahl nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren

Nur wenige Studien beschäftigen sich mit der Entwicklung halbschriftlicher Rechenstrategien im Zahlenraum bis 1000 nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren. In der Studie von Selter (2000) zeigte sich, dass Drittklässler nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren kaum noch halbschriftliche Rechenstrategien verwenden. Den 300 an der Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schülern wurden zu drei Messzeitpunkten (Mitte dritte Klasse, Ende dritte Klasse, Anfang vierte Klasse) Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 zur Bearbeitung vorgelegt. Dass die Schülerinnen und Schüler einen eher routineorientierten Unterricht besuchten, wurde aus den verwendeten Schulbüchern gefolgert, die insbesondere das Verfahren *Schrittweise* und mehrheitlich auch das Verfahren *Stellenweise* thematisierten. Weitere *Verkürzungsstrategien* wurden in den Schulbüchern nur am Rande thematisiert oder tauchten gar nicht auf. Die Ergebnisse der Studie veranschaulichen vor allem, dass die Schülerinnen und Schüler nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren diese bevorzugt verwendeten (ca. 50–60 % der Lösungswege) und halbschriftliche Rechenstrategien sowie Kopfrechenstrategien deutlich seltener eingesetzt wurden. Die verwendeten halbschriftlichen Rechenstrategien entsprachen den in den Schulbüchern thematisierten Strategien, d. h. es wurden vorwiegend die Strategien *Stellenweise*, *Schrittweise* sowie eine *Mischform* aus den beiden Strategien eingesetzt. In weniger als 10 % der Fälle wurde die Verkürzungsstrategie *Hilfsaufgabe* eingesetzt, die Strategie *Indirekte Addition* sogar nur in weniger als einem Prozent der Schülerlösungen.

Inwieweit Schülerinnen und Schüler, die bereits die schriftlichen Verfahren erlernt haben, Aufgabencharakteristika bei der Aufgabenbearbeitung einbeziehen und bei passendem Zahlenmaterial auf gestützte oder nicht gestützte Kopfrechenstrategien zurückgreifen, wurde auch in zwei Studien von Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) untersucht. An der ersten Studie nahmen 21 Viertklässler teil, an der Folgestudie 58 Viertklässler. Wie bereits in der Studie von Selter (2000) zeigte sich in beiden Studien, dass Schülerinnen und Schüler nach dem Erlernen schriftlicher Algorithmen in schriftlichen Tests im Zahlenraum bis 1000 kaum auf halbschriftliche Rechenstrategien zurückgreifen. Die Aufgabencharakteristika der Testaufgaben induzierten entweder die Verwendung halbschriftlicher Rechenstrategien oder schriftlicher Verfahren. Erstgenannte waren dabei so konstruiert, dass sie aufgrund der Aufgabenkriterien bestimmte halbschriftliche Rechenstrategien nahelegten. In der Studie von 2013 lösten 24 % der Schülerinnen und Schüler alle Testaufgaben mit dem schriftlichen Verfahren, in der Folgestudie waren es sogar 52 %. Die von den Schülerinnen und Schülern verwendeten halbschriftlichen Rechenstrategien waren jedoch in beiden Studien aus normativer, aufgabenkriterieller Sicht nicht adaptiv. Überwiegend kamen die Strategien *Stellenweise* und *Schrittweise* sowie die *Mischformen* der beiden Strategien zum Einsatz. D. h. selbst wenn die Testaufgaben halbschriftlich gelöst wurden, wurden *Verkürzungsstrategien* bei weniger als 15 % der Aufgabenlösungen verwendet. Dabei ließen sich keine Unterschiede zwischen den Leistungsgruppen feststellen (Torbeyns & Verschaffel, 2016).

In der ungarischen Studie von Csíkos (2016) wurde der Zusammenhang zwischen der Nutzung halbschriftlicher Additions- und Subtraktionsstrategien bzw. zwischen der Nutzung der schriftlichen Normalverfahren und der Bearbeitungszeit in Klasse 4 betrachtet ($N = 78$). Die schriftlichen Normalverfahren werden in Ungarn bereits im ersten Halbjahr des dritten Schuljahres eingeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler überwiegend die Normalverfahren und die Universalstrategien *Schritt-* und *Stellenweise* im Strategietest verwendeten. In den zwei Subtraktionsaufgaben wurde außerdem von einem geringen Anteil der Schülerinnen und Schüler (< 10 %) die *indirekte Addition* eingesetzt. Knapp die Hälfte der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler löste alle acht Aufgaben mit derselben Strategie.

Die Befunde der geschilderten Studien deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler im traditionellen Unterricht ihrer Strategiewahl anscheinend keine Aufgabenkriterien zugrunde legen. Weitere Analysen in der Studie von Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) konnten dabei zeigen, welche Faktoren stattdessen auf die Strategiewahl Einfluss nahmen. Durch das *Choice-No-Choice-Design* (vgl. S. 39) konnten individuelle Variablen, wie Korrektheit, Lösungszeit, Strategierepertoire und -flexibilität in Abhängigkeit von drei Testbedingungen (*Choice-Condition*: Bearbeitung der Aufgaben mit Strategie der Wahl, *No-Choice-Condition 1*: Bearbeitung aller Aufgaben mit einer halbschriftlichen Rechenstrategie, *No-Choice-Condition 2*: Bearbeitung der Aufgaben mit den schriftlichen

Normalverfahren) miteinander verglichen werden. Die Auswertungen der beiden *No-Choice*-Bedingungen ergaben, dass Schülerinnen und Schüler schriftliche Strategien schneller und korrekter ausführen konnten als halbschriftliche Rechenstrategien. Dies legt nahe, dass sich die Schülerinnen und Schüler in der Testbedingung mit freier Strategiewahl an der Lösungszeit und der Lösungsquote orientierten, was die Dominanz des schriftlichen Standardverfahrens in den Lösungswegen erklären könnte. Allerdings konnten diese Zusammenhänge nicht für die untere Leistungshälfte bestätigt werden, d. h. die Strategiewahl in dieser Gruppe scheint weder durch die Korrektheit noch durch die Schnelligkeit der Strategieausführung beeinflusst zu werden (Torbeyns & Verschaffel, 2016). Dieses Ergebnis bestätigt die Befunde aus der bereits geschilderten Studie von Torbeyns et al. (2009b), da auch dort der Zusammenhang zwischen individuellen Kompetenzparametern und den in der *Choice-Condition* eingesetzten Strategien nur für die Gruppe mit überdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten gezeigt werden konnte.

Dass die Schülerinnen und Schüler in der Studie von Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) die Aufgaben im Mittel korrekter und schneller mit den schriftlichen Normalverfahren als mit halbschriftlichen Normalverfahren lösen konnten, erscheint zunächst wenig plausibel. Die vergleichsweise längeren Bearbeitungszeiten mit den halbschriftlichen Rechenstrategien wurden jedoch dadurch verursacht, dass die Schülerinnen und Schüler nicht die in den Aufgabenformaten intendierten halbschriftlichen Rechenstrategien (*Hilfsaufgabe*, *Verändern*; vgl. Tabelle 1, S. 15) nutzten, sondern auf Universalstrategien zurückgriffen. Die Bearbeitung einer Aufgabe mit den Universalstrategien *Schritt-* oder *Stellenweise* ist im Zahlenraum bis 1000 zeitaufwendiger und ggf. auch fehleranfälliger als mit den automatisierten Normalverfahren, welche mit dem kleinen Einspluseins bzw. Einsminuseins gelöst werden können.

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Strategien aus dem Blickwinkel individueller Kompetenzen und Ressourcen durchaus flexibel eingesetzt wurden, da Schülerinnen und Schüler mit durchschnittlichen und überdurchschnittlichen Fähigkeiten diejenigen Strategien aus ihrem individuellen Strategierepertoire einsetzten, die am zeiteffizientesten zur korrekten Lösung führten. Auch in einer Studie von Linsen et al. (2015) zeigte sich, dass Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 mit dem schriftlichen Verfahren nicht nur schneller, sondern auch korrekter als mit Kopfrechenstrategien gelöst werden konnten.

Sowohl Selter (2000) als auch Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) diskutieren soziomathematische Normen im traditionellen Mathematikunterricht kritisch und sehen diese als eine mögliche Ursache für die aufgezeigten Leistungsschwächen in der adaptiven Strategiewahl. Die Ergebnisse aller hier vorgestellten Studien deuten darauf hin, dass sich Schülerinnen und Schüler bei der Strategieverwendung an soziomathematischen Normen orientieren (vgl. Kap. 2.1) und ungeachtet der Aufgabenkriterien das jeweils im Unterricht thematisierte, prozedural automatisierte Lösungsverfahren einsetzen. Die Befunde zeigen außerdem, dass *Verkürzungsstrategien* nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren kaum noch im Repertoire der Schülerinnen und Schüler vorhanden sind oder ggf. auch aufgrund fehlender Behandlung im Unterricht nie im Strategierepertoire vorhanden waren (Csíkos, 2016; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016).

In der Studie von Selter (2000) konnten große Unterschiede zwischen den Untersuchungsklassen festgestellt werden, sodass von einem starken Einfluss des Unterrichts und den damit verbundenen soziomathematischen Konventionen ausgegangen werden muss. Gleichwohl unterstreichen die Ergebnisse der Studien mit der *Choice-No-Choice*-Methodik, dass Schülerinnen und Schüler unter Berücksichtigung individueller Kriterien teilweise durchaus flexibel rechnen, indem sie Strategien verwenden, die schnell und korrekt zur Lösung führen. Insofern muss die Frage gestellt werden, ob eine sehr normative Definition von Adaptivität, wie sie auch in der hier vorliegenden Arbeit vorgenommen wird (vgl. Kap. 6.3.1), nicht zentrale Einflussfaktoren der Strategiewahl vernachlässigt.

3.4.1.3 Korrektheit

In allen hier beschriebenen Studien, in denen zusätzlich zur Strategieflexibilität/-adaptivität auch die Korrektheit untersucht wurde, nahm diese im Untersuchungszeitraum (Benz, 2007; Selter, 2000) bzw. über die untersuchten Klassenstufen hinweg zu (Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). In der Studie von Benz (2005, 2007) zeigte sich, dass die korrekte Verwendung der Strategie *Schrittweise* nach deren unterrichtlicher Einführung und Automatisierung im Vergleich zu den nicht im Unterricht behandelten Strategien stark anstieg. Die Strategie *Mischform*, die vermutlich in wenigen Schulklassen explizit thematisiert wurde und daher als informelle Strategie zu betrachten ist, erwies sich für Subtraktionsaufgaben fehleranfälliger als die restlichen Strategien. Bei der Subtraktion wurden mehr Fehlstrategien als bei der Addition verwendet.

Torbeyns et al. (2016) konnten in ihrer Studie nachweisen, dass diejenigen Schülerinnen und Schüler, die bei der Bearbeitung von Subtraktionsaufgaben (z. B. $83 - 38 = \_\_$) Zahlbeziehungen zu einer vorgegebenen, gelösten Additionsaufgabe ($38 + 45 = 83$) nutzen, diese signifikant schneller lösen konnten als diejenigen, die diese Zahlbeziehungen nicht nutzten. Zugleich unterschieden sich diese zwei Gruppen jedoch nicht in der Korrektheit der eingesetzten Lösungswege. Auch in der Studie von Csíkos (2016) konnte kein Zusammenhang zwischen den eingesetzten Strategien und der Korrektheit gezeigt werden.

Insgesamt deuten die Ergebnisse darauf hin, dass mangelnde Adaptivität/Flexibilität der Lösungswege nicht zwangsläufig mit Einbußen in der Korrektheit einhergeht.

3.4.1.4 Schülerinnen und Schüler mit geringen mathematischen Lernvoraussetzungen

Die Befundlage zum Strategieerwerb von Grundschülerinnen und Grundschülern mit geringeren mathematischen Fähigkeiten in traditionellen Strategieerwerbsansätzen soll an dieser Stelle um zwei Studien ergänzt werden (Mabbott & Bisanz, 2008; Torbeyns et al., 2004). In der Studie von Torbeyns et al. (2004) wurde die Strategiewahl von Kindern mit Rechenschwierigkeiten an Additions- und Subtraktionsaufgaben zum Zehnerübergang im

Zahlenraum bis 20 untersucht. Hierzu wurden zwei Gruppen mit Schülerinnen und Schülern aus den Klassenstufen 4–6 und zwei Gruppen der Klassenstufe 2 so gematcht, dass jeder Gruppe eine altersentsprechende und eine den mathematischen Fähigkeiten entsprechende Gruppe zugeordnet werden konnte. Das Matching mit den beiden Vergleichsgruppen aus den Klassenstufen 2 basierte auf den Testleistungen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler in einem standardisierten Mathematiktest für Zweitklässler. Dabei zeigten die Vergleichsgruppen im Mittel jeweils eine vergleichbare Testleistung wie die entsprechende Gruppe der Zweitklässler (unter dem 25. Perzentil: Viert- bis Sechstklässler mit gravierenden Rechenschwierigkeiten bzw. leistungsschwache Zweitklässler; über dem 75. Perzentil: Viert- bis Sechstklässler mit moderaten Rechenschwierigkeiten bzw. leistungsstarke Zweitklässler). Alle teilnehmenden Schülerinnen und Schüler wiesen im Intelligenztest altersentsprechende Durchschnittswerte auf, d. h. die altersentsprechenden Gruppen unterschieden sich jeweils allein in ihren mathematischen Fähigkeiten und nicht in ihren kognitiven Grundfähigkeiten.

Die Ergebnisse zeigen, dass die nach Fähigkeit gematchten Gruppen beim Strategieeinsatz vergleichbare Werte aufwiesen. Die altersentsprechenden Gruppen unterschieden sich in der Korrektheit, der Anwendungshäufigkeit der jeweiligen Strategien, der Bearbeitungszeit und der Adaptivität, wobei alle vier Gruppen die drei untersuchten Strategien (Faktenabruf, Zahlzerlegung zu 10 und Weiterzählen) verwendeten.

Die Autoren schlussfolgern aus den Ergebnissen, dass der vergleichbare Strategieeinsatz zwischen den Fähigkeitsgruppen für eine Verzögerung in der mathematischen Entwicklung im Vergleich zur altersentsprechenden Kontrollgruppe hindeutet. Unterschiede zwischen den altersentsprechenden und zusätzlich in den nach mathematischen Fähigkeiten gematchten Gruppen hätten indes auf ein fundamentales Kompetenzdefizit der Schülerinnen und Schüler mit Rechenschwierigkeiten hingewiesen.

Auch die Ergebnisse der Studie von Mabbott und Bisanz (2008), deren Design ein vergleichbares Alters-Fähigkeits-Matching wie die Studie von Torbeyns et al. (2004) aufweist, sprechen für eine Verzögerung des Kompetenzerwerbs leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen 3 bis 6 (hier bezogen auf den Themenbereich Multiplikation).

Allerdings ist fraglich, ob beide Befunde auf den Lernbereich der halbschriftlichen Rechenstrategien übertragen werden kann. Im Grunde lässt sich aus den Ergebnissen von Torbeyns et al. (2004) lediglich schlussfolgern, dass Schülerinnen und Schüler mit gravierenden Rechenschwierigkeiten in den Klassen 4–6 ein vergleichbares konzeptuelles Zahlwissen wie leistungsschwächere Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 2 aufweisen (was dem Zeitpunkt der ersten unterrichtlichen Thematisierung halbschriftlicher Rechenstrategien entspricht). Aus dem Befund lässt sich umgekehrt auch ableiten, dass bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern ein sehr niedriges konzeptuelles Zahlwissen vorhanden ist, welches den Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien sowie deren adaptive Verwendung erschwert. Da die halbschriftlichen Rechenstrategien erfahrungsgemäß im traditionellen Mathematikunterricht innerhalb weniger Monate durch die schriftlichen Normalverfahren ersetzt werden, wird leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern ein zeitverzögertes Erlernen halbschriftlicher Rechenstrategien mangels entsprechender Übungs- und Anwendungsmöglichkeiten kaum möglich sein.

3.4.1.5 Zusammenfassung

Die hier vorgestellten Studien weisen darauf hin, dass Strategieflexibilität und -adaptivität durch einen Routineansatz wenig gefördert werden. Obwohl ein Teil der Schülerinnen und Schüler in der Lage ist, selbst weitere als die von der Lehrperson eingeführten Standardprozeduren zu entwickeln, verwenden Schülerinnen und Schüler im spontanen Strategiegebrauch überwiegend die im Unterricht erlernten Strategien. Dabei zeigten sich in der Studie von Torbeyns et al. (2009a) vorwiegend Nachteile für jüngere und leistungsschwächere Grundschülerinnen und Grundschüler. Insbesondere nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren greifen Schülerinnen und Schüler ungeachtet der Aufgabenkriterien im spontanen Strategiegebrauch bevorzugt auf diese Verfahren zurück (Csíkos, 2016; Selter, 2000; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016).

In einigen Studien wurden reformorientierte Unterrichtskonzepte zur Förderung der adaptiven Strategiewahl untersucht. Im Folgenden werden die Befunde hierzu berichtet (Kap. 3.4.2). Im darauffolgenden Kapitel (Kap. 3.4.3) werden Studien vorgestellt, welche die Effizienz reformorientierter Konzepte zur Förderung der adaptiven Strategiewahl mit der eines Routineansatzes oder unterschiedliche reformorientierte Konzepte miteinander verglichen haben.

3.4.2 Reformorientierte Instruktionsansätze

Bei den im Folgenden vorgestellten Studien handelt es sich um Längsschnittstudien, die im zweiten Schuljahr (Blöte et al., 2000; Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010) und dritten Schuljahr (Baxter et al., 2001) bzw. über die Zeitspanne der ersten drei Schuljahre hinweg (Carpenter et al., 1997) durchgeführt wurden. Während die Schülerinnen und Schüler in der Studie von Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) von der Wissenschaftlerin selbst unterrichtet wurden, agierten die Mathematiklehrpersonen in der Untersuchung von Blöte et al. (2000) nach einem vorgegebenen Unterrichtsskript. In der Studie von Carpenter et al. (1997) hatten die Lehrpersonen an einer dreijährigen begleiteten Fortbildung teilgenommen, welche für Lern- und Denkprozesse im Mathematikunterricht sensibilisieren sollte. Die Studie untersuchte, inwieweit sich die in Kapitel 2.2 postulierten Vorteile im Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien in reformorientierten Unterrichtssettings tatsächlich nachweisen lassen. Die Lehrpersonen in der Studie von Baxter et al. (2001) verwendeten ein Lehrbuch, in welchem Strategien durch die Beschäftigung mit mathematischen Problemen in Alltagskontexten erworben werden sollen. In der Studie von Baxter et al. (2001)

wird dabei differenzierter auf Schwierigkeiten leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler in einem stärker problemlöseorientierten Unterrichtssetting eingegangen. Die Studien unterschieden sich darüber hinaus in ihren zugrunde liegenden reformorientierten Unterrichtskonzepten (vgl. Kap. 3.3). Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) konnte in ihrer qualitativen Untersuchung zum flexiblen Rechnen im zweiten Schuljahr zeigen, dass sich die Schülerinnen und Schüler in einer offenen Lernumgebung mit Angeboten zur Schulung des „Zahlenblicks" zu flexiblen Rechnern entwickelten. Die Lernumgebung kann innerhalb der problemlöseorientierten Ansätze (Kap. 3.3.4) verortet werden. Die Studie von Blöte et al. (2000) beschäftigt sich mit der Förderung der flexiblen Strategiewahl durch das sogenannte *Realistic Program Design*, das dem konzeptuellen Ansatz (Kap. 3.3.2) zugeordnet werden kann. In beiden Strategieerwerbskonzepten stehen die Förderung konzeptuellen Wissens, die Artikulation der Rechenwege sowie der permanente Austausch über Rechenwege im Vordergrund des Mathematikunterrichts. Die Ansätze unterscheiden sich aber wesentlich darin, wie Strategiewissen aufgebaut wird. In der Lernumgebung von Rathgeb-Schnierer wurden keine Rechenwege vorgegeben, da Strategieerwerb nicht als Strategiewahl aus einem vorgegebenen Repertoire betrachtet wird (vgl. Strategieerwerbsmodell nach Threlfall in Kap. 3.3.4). Auch im *Realistic Program Design* werden Rechenstrategien zunächst in Kontextaufgaben von den Schülerinnen und Schülern selbstentwickelt, jedoch später zunehmend von der Lehrperson schematisiert und benannt. Hier liegt der Fokus darauf, ein Repertoire mit klar abgrenzbaren Strategien aufzubauen. Das Zahlwissen dient dazu, Zahl- und Aufgabeneigenschaften zu analysieren und dadurch den effektivsten Lösungsweg aus dem Strategierepertoire auszuwählen.

3.4.2.1 Adaptive Strategiewahl unter Berücksichtigung verschiedener Lernvoraussetzungen

In der Studie von Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) wurde die Rechenwegsentwicklung mit Individualinterviews ($N = 20$) zu drei Messzeitpunkten während des zweiten Schuljahres erhoben. Rathgeb-Schnierer fokussiert dabei die Rechenwegsentwicklung bei Subtraktionsaufgaben, da andere Untersuchungen (z. B. Benz, 2005; Carpenter et al., 1997) nachweisen konnten, dass hier vermehrt Fehlstrategien verwendet werden, die auf fehlendes Zahl- und Operationswissen zurückgeführt werden können. In der Untersuchung wurde festgestellt, dass flexible Rechner u. a. Zahl- und Aufgabeneigenschaften erkennen und diese für die Aufgabenbearbeitung nutzen sowie verschiedene Rechenwege kennen und ihr Lösungsverhalten begründen können, was auch metakognitive Kompetenzen einschließt (zur Rolle der Metakognition vgl. Kap. 4.3). Dies entspricht auch den wesentlichen Merkmalen mathematischer Kompetenz, wie sie bei Kilpatrick et al. (2001) formuliert werden (vgl. S. 8). Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) konnte darüber hinaus anhand exemplarisch ausgewählter Interviewausschnitte zeigen, dass die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler gegen einen vorab „gewählten" Lösungsweg aus einem Strategierepertoire sprechen. So wechselten die Schülerinnen und Schüler während der Lösung einer Aufgabe mitunter ihre Strategie. Anhand ihrer Stichprobe konnte Rathgeb-Schnierer (2006) das Lösungsverhalten der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler in acht Typen untergliedern, die sich im Grad der Flexibilität ihrer eingesetzten Strategien und deren konzeptueller Fundierung unterscheiden. 17 von 20 Schülerinnen und Schülern konnten am Ende des Erhebungszeitraumes der höchsten Stufe zugeordnet werden und wiesen damit die oben genannten Eigenschaften flexibler Rechner auf. Die leistungsschwächsten Schülerinnen und Schüler erreichten eine Stufe, in der sie einen Hauptrechenweg einsetzten, „von dem bei manchen Aufgaben unbegründet abgewichen" wurde (Rathgeb-Schnierer, 2006, S. 268).

Andere Studien, wie die US-amerikanische Studie von Baxter et al. (2001), weisen auf Schwierigkeiten für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler in problemlöseorientierten Lernumgebungen hin. Die Studie von Baxter et al. (2001) knüpft hierbei an eine Vorgängerstudie (Woodward & Baxter, 1997, vgl. Kap. 3.4.3) an, in der herausgefunden wurde, dass sowohl durchschnittliche als auch überdurchschnittliche Schülerinnen und Schüler von einem reformorientierten, problemlöseorientierten Instruktionsansatz profitieren können, während dies für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler nicht bestätigt werden konnte. Leistungsschwächere Grundschülerinnen und -schüler aus fünf Klassen wurden bei Baxter et al. (2001) über das dritte Schuljahr hinweg begleitet. Durch Beobachtungen, regelmäßige Gespräche mit den Lehrpersonen und Interviews sollten mögliche Schwierigkeiten des Curriculums für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler identifiziert werden. Das Lernangebot zeichnete sich durch eine stark sozial-konstruktivistische Lernkonzeption aus, in welcher der Austausch über Lösungswege im Mittelpunkt des Unterrichts stand. Der Ansatz des Lehrbuches kann innerhalb der problemlöseorientierten Ansätze verortet werden. In den teilnehmenden Klassen wurde insbesondere beobachtet, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler – teilweise mit rein mathematischen Defiziten, teilweise aber auch mit anderen Beeinträchtigungen – zumindest augenscheinlich kaum aktiv am Austausch über Lösungswege teilnehmen konnten. Darüber hinaus benötigten sie in den Arbeitsphasen eine stärkere Unterstützung durch ihre Lehrpersonen. In Partner- und Gruppenarbeiten mit kompetenteren Mitschülerinnen und Mitschülern wurden die Aufgaben von den Schülerinnen und Schülern so aufgeteilt, dass die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler oft nur auf einem sehr niedrigen oder nichtmathematischem Niveau an der Aufgabenbearbeitung beteiligt wurden. An der Schilderung der Unterrichtsbeobachtungen wird deutlich, dass die verbalisierten Lösungswege im Grundschulalter teilweise noch unstrukturiert und für die anderen Mitschülerinnen und Mitschüler ohne Strukturierungshilfen der Lehrperson wenig nachvollziehbar waren. Die an der Studie teilnehmenden Klassen unterschieden sich auch darin, in welcher Weise didaktisches Material unterstützend eingesetzt wurde, um Rechenwege und Zusammenhänge in einer anderen Repräsentationsebene zu veranschaulichen. In einigen Klassen wurde beobachtet, dass Materialien wenig unterstützend eingesetzt wurden, sondern stattdessen –

mangels fehlender Verknüpfung der Bearbeitungsebenen – eine zusätzliche kognitive Belastung im Lernprozess darstellten (vgl. Cognitive-Load-Theorie in Kap. 4.2). Die Lehrpersonen merkten – wie auch schon in den Unterrichtsbeobachtungen festgestellt wurde – in den in der Studie durchgeführten Interviews zudem an, dass die Schülerinnen und Schüler teilweise noch große Probleme hätten, ihre Lösungswege elaboriert darzustellen. Ursächlich hierfür könnten neben einer hohen kognitiven Belastung auch zu gering ausgeprägte metakognitive Kompetenzen sein, auf die in Kapitel 4.3 ausführlicher eingegangen wird. Die Ergebnisse liefern einen wichtigen Beitrag zu der Frage, wie leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler von reformorientierten Ansätzen profitieren können, da sie auf eine mangelnde Differenzierung solcher Lernangebote hindeuten. Die beschriebenen Schwierigkeiten für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler beziehen sich dabei besonders auf Grundproblematiken stark problemlöseorientierter Lernansätze (Kap. 4.1). Auch der Mangel an konzeptuellem Wissen, auf den im Zusammenhang mit leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern an verschiedenen Stellen bereits verwiesen wurde (vgl. Kap. 3.3.5.3), dürfte für einen vergleichsweise geringen Kompetenzzuwachs dieser Schülerinnen und Schüler verantwortlich sein. Auf diesen Aspekt wird in der Studie von Carpenter et al. (1997) eingegangen.

Carpenter et al. (1997) untersuchten in einer amerikanischen Längsschnittstudie mit 82 Schülerinnen und Schülern, wie sich diese in den ersten drei Schuljahren in ihrem Stellenwertverständnis, in ihrem informellen Strategiegebrauch und dem Gebrauch von Standardstrategien unterscheiden. Darüber hinaus gingen sie der Forschungsfrage nach, welche Zusammenhänge zwischen dem Stellenwertverständnis und dem Operationsverständnis für Additions- und Subtraktionsaufgaben bestehen. Die teilnehmenden Lehrpersonen hatten an einem dreijährigen Interventionsprogramm teilgenommen, welches das Verständnis für mathematische Lern- und Denkprozesse fördern sollte. In den teilnehmenden Klassen nahm die Diskussion über Strategien einen hohen Stellenwert ein. Die Auseinandersetzung mit Strategien wurde dabei insbesondere durch Textaufgaben angeregt. Den Schülerinnen und Schülern standen zur Aufgabenbearbeitung Veranschaulichungsmaterialien zum Stellenwertsystem zur Verfügung. Halbschriftliche Rechenstrategien wurden in den teilnehmenden Schulklassen nicht eingeführt und die Standardalgorithmen bereits in der Mitte des zweiten Schuljahres thematisiert. Die Studie wird in diesem Unterkapitel beschrieben, da dem informellen Strategiegebrauch zumindest bis zur Einführung der Standardprozeduren in den teilnehmenden Klassen eine wichtige Bedeutung beigemessen wurde. Da, wie die Autoren selbst anmerken, wenig über die unterrichtliche Praxis bekannt ist, kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Unterrichtspraxis einiger teilnehmender Klassen auch Parallelen zum routineorientierten Unterricht aufwies. Die Ergebnisse der Studie weisen darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler ohne explizite Instruktion in der Lage sind, informelle halbschriftliche Rechenstrategien zu entwickeln. Über 90 % der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler nutzten selbstentwickelte Strategien. Die Schülerinnen und

Schüler wurden für Vergleiche nach bestimmten Spezifika ihres Strategieeinsatzes in Untersuchungsgruppen eingeteilt. Gruppe 1 zeichnete sich dadurch aus, dass sie während des Untersuchungszeitraums zunächst informelle Strategien entwickelte, bevor sie Standardprozeduren in den Tests und Interviews einsetzte. Gruppe 2 setzte erst informelle Strategien ein, nachdem sie in vorherigen Tests bereits Standardprozeduren verwendet hatte. Weitere Teilgruppen der Studie werden an dieser Stelle nicht vorgestellt, da sie für die zentralen Ergebnisse der Studie eine geringere Relevanz haben. In den Ergebnissen zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 1 auch nach der Einführung der schriftlichen Algorithmen noch informelle Strategien verwendeten. Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe wiesen darüber hinaus ein höheres Stellenwertverständnis auf und konnten Wissen besser als die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 2 auf neue Problemstellungen übertragen. So konnten nur 39 % der Schülerinnen und Schüler in Gruppe 2 eine vorgegebene Strategie (*Schrittweises Verfahren*) auf eine ähnliche Problemstellung übertragen, was auf Defizite im konzeptuellen Wissen hindeutet, während diese Aufgabe in Gruppe 1 von 89 % der Schülerinnen und Schüler erfolgreich bewältigt wurde. Die Ergebnisse stützen insgesamt die theoretischen Annahmen zu den positiven Zusammenhängen zwischen der flexiblen Anwendung halbschriftlicher Rechenstrategien und anderen Bereichen mathematischer Kompetenz (vgl. Kap. 2.2). Sie weisen zudem darauf hin, dass die sehr frühe Einführung von Standardalgorithmen dazu führen kann, dass viele Schülerinnen und Schülern – insbesondere zur Lösung von Subtraktionsaufgaben – keine informellen Strategien entwickeln, sondern gleich auf Standardalgorithmen zurückgreifen. Interessant ist, dass Schülerinnen und Schüler der Gruppe 2 zwar überwiegend Standardprozeduren einsetzten, jedoch immerhin 44 % dieser Schülerinnen und Schüler informelle Strategie nutzten, wenn keine Möglichkeit zur Verschriftlichung gegeben war. Dies zeigt, dass mentale Rechenstrategien gerade in Kontextsituationen eine hohe Relevanz besitzen und der flexible Einsatz dieser Strategien auch dann noch eine Rolle spielt, wenn Schülerinnen und Schüler in Schulkontexten fast ausschließlich auf die schriftlichen Standardverfahren zurückgreifen. Dieses Ergebnis stützt die Relevanz halbschriftlicher Rechenstrategien für den Gebrauch in Alltagskontexten (vgl. Kap. 2.2).

In der niederländischen Studie von Blöte et al. (2000) wurde die Entwicklung der Flexibilität von 60 Zweitklässlern in einem *Realistic Program Design (RPD)* im Zahlenraum bis 100 untersucht. Schülerinnen und Schüler wurden in diesem Instruktionsansatz dazu anregt, Problemstellungen auf möglichst vielen Wegen zu lösen und auf ihre Effizienz hin zu vergleichen. Die Lernumgebung sollte dazu beitragen, konzeptuelles Wissen aufzubauen, sodass die Rechenwege adaptiv, d. h. an die Zahl- und Aufgabeneigenschaften angepasst, gewählt werden können. Informelle Strategien werden im *Realistic Program Design* am leeren Zahlenstrahl veranschaulicht, an dem die Verknüpfung zwischen Zahlen und Prozeduren besonders deutlich werden soll. Die Veranschaulichung dient dabei zugleich als Grundlage für den Austausch von Strategien im Klassenverband. Strategien, die nicht von den Schülerinnen und Schülern selbst entdeckt wurden, wurden nicht von der Lehrperson eingeführt, sondern durch besondere Kontextaufgaben evoziert. Informell verwendete Strategien wurden jedoch in weiteren Schritten von der Lehrperson bezüglich der Schreibweise schematisiert und auch benannt.

> *„At the end of the curriculum verbal labels are introduced to differentiate procedures.“* (Blöte et al., 2000, S. 226)

Das *stellenweise Verfahren* wurde erst nach der Entdeckung aller anderen Hauptstrategien eingeführt. Dabei betonte die Lehrperson, dass dieses Verfahren wegen der Fehleranfälligkeit nur bei Additionsaufgaben angewendet werden sollte.

Die Entwicklung der Strategiewahl wurde in der Studie über vier Monate im zweiten Halbjahr des zweiten Schuljahres untersucht. Die Lehrpersonen nutzten das Unterrichtsmaterial zum *RPD*, das ihnen von der Forschergruppe ausgehändigt wurde. Die flexible Strategiewahl wurde durch schriftliche Strategietests und in einer Teilstichprobe ergänzend durch Interviews erfasst. Zusätzlich zur Erfassung des spontanen Strategiegebrauchs wurden die Schülerinnen und Schüler in einer weiteren Testbedingung aufgefordert, aus vorgegebenen Lösungswegen den geschicktesten auszuwählen. Dabei wird der Aspekt berücksichtigt, dass konzeptuelles Wissen allein nicht zwingend zu einer adaptiven Strategieperformanz führen muss, da Strategieerwerb und -gebrauch von weiteren Faktoren beeinflusst werden (vgl. Kap. 2.1).

Tatsächlich zeigten sich bei gleichem Zahlenmaterial der Aufgaben bei den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern Unterschiede zwischen der Bewertung vorgegebener Strategien und dem spontanen Strategiegebrauch. Vielen der Schülerinnen und Schüler gelang es, bei der Bewertung vorgegebener Strategien Aufgabenkriterien einzubeziehen, während diese im spontanen Strategiegebrauch augenscheinlich nicht zur Aufgabenlösung herangezogen wurden.

Gleichwohl variierte der Strategiegebrauch im Untersuchungszeitraum wenig. Allein die Einführung des *stellenweisen Verfahrens* führt zu einem vermehrten Gebrauch dieser Strategie bei Additionsaufgaben. Wie auch in anderen Untersuchungen wurde das *schrittweise Verfahren* am häufigsten verwendet. Jedoch wurden auch die anderen Strategien, wie die *Abstandsberechnung*, in passenden Kontextaufgaben genutzt. Es ließ sich eine höhere Flexibilität für die Aufgabenlösungen nachweisen, wenn die Aufgabe kontextuell eingebettet war als wenn diese als Zahlenaufgaben präsentiert wurde. Wie die Autoren selbst hervorheben, wird am Strategiegebrauch ersichtlich, welche Prozeduren im Unterricht ausführlicher behandelt wurden und somit welchen ggf. auch eine größere Beachtung geschenkt wurde. In den Ergebnissen der Studie von Blöte et al. (2000) deutet sich an, dass die erworbenen Strategien nur bedingt auf andere Repräsentationsformate (Zahlenaufgaben) übertragen werden konnten. Wie bereits in Kapitel 3.3.2 (*Conceptual Approach*) beschrieben wurde, könnte der Grad der Schematisierung und Abstraktion der kontextuell entwickelten, informellen Strategien folglich als Gütekriterium des konzeptuellen Ansatzes beschrieben werden.

3.4.2.2 Korrektheit

Nicht alle in diesem Kapitel vorgestellten Studien geben Hinweise darauf, welchen Einfluss reformorientierte Unterrichtsansätze auf die Entwicklung der Korrektheit der eingesetzten Additions- und Subtraktionsstrategien ausüben, da dieser Aspekt nicht das primäre Forschungsinteresse der Studien darstellte. Korrektheit wird bei Rathgeb-Schnierer (2006) in die Typenbildung der Flexibilität integriert, da Fehlstrategien ein Merkmal eher inflexiblen Strategiehandelns darstellen. Wie Rathgeb-Schnierer in ihrer Arbeit zeigt, zeichnet sich ein inflexibler Strategieeinsatz dadurch aus, dass Lösungswege mechanisch ausgeführt werden, ohne dass Schülerinnen und Schülern erklären können, weshalb sie zum Erfolg führen. Wie bereits oben erwähnt wurde, erreichten auch die leistungsschwächsten Schülerinnen und Schüler in der Studie von Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) eine Strategieperformanz, die sich durch zumindest eine zielführende Strategie auszeichnete, deren Funktionsweise begründet werden konnte und somit konzeptuell untermauert war. In der Studie von Carpenter et al. (1997) zeigte die Gruppe, welche informelle Strategien entwickelte bevor sie Standardalgorithmen verwendete, weniger Fehlstrategien als die Vergleichsgruppe. Auch in der Studie von Heirdsfield (2011) traten Fehlstrategien bei informellen Strategien seltener als bei der Verwendung von Standardprozeduren auf. Der Gruppenunterschied bei Carpenter et al. (1997) könnte auf das höher ausgeprägte Zahl- und Operationsverständnis zurückzuführen sein (Carpenter et al., 1997; Fuson et al., 1997). In der Studie traten, wie auch in der Studie von Benz (2005, 2007) (vgl. Kap. 3.4.1.1), bei der Subtraktion häufiger Fehlstrategien als bei der Addition auf, die zwangsläufig zum falschen Ergebnis führten.

3.4.2.3 Zusammenfassung

Insgesamt deuten die hier vorgestellten Studien darauf hin, dass reformorientierte Unterrichtsansätze prinzipiell geeignet sind, die Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl von Schülerinnen und Schülern zu fördern. Im Vergleich zur Strategieperformanz, die in traditionellen Unterrichtssettings beobachtet werden konnte (vgl. Kap. 3.4.1), zeigten die Schülerinnen und Schüler in den Studien von Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) und Blöte et al. (2000) ein vergleichsweise großes Strategiespektrum effizienter, adaptiver und zielführender Strategien. Die Differenzierung des Unterrichtsangebots (im Sinne unterschiedlicher Lerngelegenheiten, die sich am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler orientieren), zusätzliche instruktionale Unterstützung durch die Lehrperson (bspw. durch kognitive Strukturierungshilfen für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler), das individuelle Zahl- und Operationsverständnis sowie metakognitive Kompetenzen scheinen dabei den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler maßgeblich zu beeinflussen (Baxter et al., 2001; Carpenter et al., 1997). Diese Einflussfaktoren können zwar auch für traditionelle Unterrichtsansätze angenommen werden, jedoch dürfte ihnen in Lernumgebungen, in denen Wissen weniger schematisiert und Prozeduren weniger prozedural vermittelt werden, eine noch größere Bedeutung zukommen, da die Schülerinnen und Schüler ihren Lernprozess stärker selbst regulieren müssen.

Insbesondere die Befunde aus der Studie von Rathgeb-Schnierer (2006, 2010) weisen dabei darauf hin, dass auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler grundsätzlich von reformorientierten Ansätzen profitieren können, wenngleich sie nicht dasselbe Niveau in der Strategieflexibilität und -adaptivität wie ihre Mitschülerinnen und Mitschüler erreichen. Die Ergebnisse von Baxter et al. (2001) deuten zugleich darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten zusätzliche instruktionale Hilfestellungen benötigen, um von reformorientierten Unterrichtsätzen profitieren zu können.

Die Befundlage zum direkten Vergleich von reformorientierteren Ansätzen mit einem traditionellen Ansatz bzw. zum Vergleich verschiedener reformorientierter Ansätze untereinander ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

3.4.3 Vergleich unterschiedlicher Strategieerwerbskonzepte

Um zu vergleichen, ob reformorientierte Unterrichtsansätze tatsächlich besser als traditionelle Unterrichtsansätze geeignet sind, die Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl zu fördern, wurden diese in einigen Studien in ihrer Effektivität miteinander verglichen. Dabei werden in den im Folgenden beschriebenen Studien solche Instruktionsansätze als Routineansätze klassifiziert, bei denen Strategieflexibilität/-adaptivität nicht im Vordergrund des Unterrichts steht und der Fokus stattdessen auf der korrekten Ausführung universell einsetzbarer Strategien (insbesondere *Schritt-* und *Stellenweise*) liegt. Strategieflexibilität im Sinne einer Wahl zwischen verschiedenen Prozeduren wird entsprechend – falls überhaupt – erst dann thematisiert, wenn alle Strategien von der Lehrperson eingeführt wurden (Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998). Bei den Instruktionsansätzen, die dem Routineansatz gegenübergestellt werden, handelt es sich vorwiegend um Ansätze, bei denen Schülerinnen und Schüler zunächst informelle Strategien entwickeln, die dann anschließend je nach Ausrichtung des Ansatzes mehr oder weniger stark schematisiert werden. Die Unterrichtsansätze der reformorientierten Studien weisen Elemente aus dem *Conceptual Approach*, dem *Investigative Approach* und dem *Problem-solving Approach* auf. Da sich die Automatisierung von Prozeduren im Routineansatz positiv auf die Korrektheit auswirken sollte, wurde in den Studien überwiegend auch untersucht, ob sich dieser erwartete Effekt zwischen den Unterrichtsansätzen nachweisen lässt. Der Einfluss der Instruktionsansätze wurde dabei entweder über die ersten drei Schuljahre hinweg (Hiebert & Wearne, 1996), im zweiten Schuljahr (Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998) im dritten Schuljahr (De Smedt et al., 2010; Heinze et al., 2009; Woodward & Baxter, 1997) oder in den Klassenstufen 3–6 (Torbeyns et al., 2017) untersucht. In der Studie von Kroesbergen et al. (2004) besuchten die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler, die eine vergleichbare mathematische Kompetenz aufwiesen, Regelschulen der Klassen 2 und 3 oder Förderschulen der Klassenstufen 2–6.

Die Zuordnung von Schulklassen zu Instruktionsansätzen basiert in den vorgestellten Studien auf der Ausrichtung des verwendeten Lehrbuchs (Heinze et al., 2009; Woodward & Baxter, 1997) bzw. den zur Verfügung gestellten Unterrichtsmaterialien (Klein et al., 1998), dem zugrunde liegenden Curriculum (Torbeyns et al., 2017), der Zuweisung zu Interventionsansätzen (De Smedt et al., 2010; Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004) oder Zusatztrainings zur Förderung des konzeptuellen Verständnisses (Hiebert & Wearne, 1996).

Inwieweit auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler von den reformorientierten Ansätzen profitieren können, untersuchen die Studien von Woodward und Baxter (1997), Kroesbergen und Van Luit (2002) und Kroesbergen et al. (2004).

Der Fokus der alternativen Ansätze unterscheidet sich auch darin, wie stark Effizienzkriterien den Diskussionen über die von den Schülerinnen und Schülern entwickelten Strategien zugrunde gelegt werden. Dabei fokussieren alle reformorientierten Ansätze auf einen verständnisbasierten Strategieeinsatz. Durch den Kontextbezug im *Conceptual Approach* sollen die Schülerinnen und Schüler beispielsweise Strategien entwickeln, die im Sinne von Grundvorstellungen mit bestimmten mathematischen Konzepten verknüpft sind (Hiebert & Wearne, 1996). Der konzeptionellen Grundidee zufolge sind die individuellen Lösungswege der Schülerinnen und Schüler dann im Gegensatz zu rein prozedural erlernten Prozeduren mit Verständniswissen verknüpft und können somit flexibler eingesetzt werden. Die zusätzlichen Einheiten zur Förderung des konzeptuellen Verständnisses enthielten in der Studie von Hiebert und Wearne (1996) Übungen, die das Stellenwertverständnis und das Verständnis für Additions- und Subtraktionsaufgaben schulen sollten. In anderen Studien, wie beispielsweise bei Blöte et al. (2001) und Klein et al. (1998), sollten die Strategien der Schülerinnen und Schüler durch kontinuierliche Diskussionen über Lösungswege und deren Passung zu Aufgabenkriterien, d. h. nach einer aufgabenorientierten Norm, verbessert werden. Dabei trug die Lehrperson lenkend dazu bei, dass bestimmte Strategien favorisiert und andere vernachlässigt wurden. Sowohl in der niederländischen Studie als auch in der Studie von Hiebert und Wearne (1996) wurden nicht informell entwickelte Strategien von der Lehrperson eingeführt. In der Studie von Hiebert und Wearne (1996) betraf dies insbesondere das Normalverfahren für die Subtraktion, das von den Schülerinnen und Schülern nicht selbstständig entdeckt wurde. Somit sollte sichergestellt werden, dass alle Schülerinnen und Schüler mit dem gleichen Strategierepertoire vertraut gemacht wurden. Interessant ist dabei, dass die Strategien im *Realistic Program Design* benannt wurden, was für eine stärkere Schematisierung der zunächst individuell generierten Lösungswege spricht. Inwieweit informell entdeckte Strategien in der Unterrichtsstudie von Hiebert und Wearne (1996) weiter schematisiert und formalisiert wurden, geht aus ihrer Darstellung der beiden Unterrichtsansätze nicht hervor. Klein et al. (1998) heben hervor, dass die Benennung von Strategien die Kommunikation über Rechenstrategien erleichtert (vgl. Kap. 3.3.5.2). Außerdem sollte in der Studie der Blick für die Aufgaben und das Zahlenmaterial (vgl. Kap. 3.3.4) gefördert werden, indem die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert wurden, zunächst die Aufgabe zu betrachten und sich erst im Anschluss daran für eine bestimmte Lösung zu entscheiden. Es wird folglich in diesem Ansatz davon ausgegangen, dass Strategien als Prozeduren vorliegen und vorab gewählt werden können. Durch die Schematisierung der Strategien und Einführung von Strategien, die nicht informell entdeckt wurden, bestehen Parallelen zum *Investigative Approach* (vgl. Kap. 3.3.3).

3.4.3.1 Adaptive Strategiewahl unter Berücksichtigung verschiedener Lernvoraussetzungen

In der niederländischen Studie (Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998) wurde das *Realistic Program Design* (*RPD*, zur Konzeption vgl. Kap. 3.4.2) mit einem *Gradual Program Design (GPD)* anhand einer Stichprobe von 275 Schülerinnen und Schülern aus zehn unterschiedlichen Klassen im zweiten Halbjahr des zweiten Schuljahres verglichen. Den Lehrpersonen wurde entsprechend des zugewiesenen Instruktionsansatzes Lehrmaterial zur Verfügung gestellt, welches sie anstelle des normalen Lehrbuchs einsetzten. Im *GPD* wurde zunächst nur die Strategie *Schrittweise* eingeführt, um prozedurales Strategiewissen aufzubauen. Erst in den letzten drei Monaten des zweiten Halbjahres wurde der flexible Strategiegebrauch im Unterricht thematisiert. Der Ansatz entsprach folglich den Kriterien eines routineorientierten Unterrichtsansatzes. Das *Realistic Program Design* setzte hingegen auf eine vernetzte Vermittlung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen. Die Instruktion wies durch den realen Anwendungsbezug eine Nähe zum *Conceptual Approach* auf. Die Schülerinnen und Schüler sollten durch die Auseinandersetzung mit realistischen Kontexten informelle Strategien entwickeln (vgl. Kap. 3.3.2). Im Vergleich dazu spielten Textaufgaben im *GPD* nur eine untergeordnete Rolle. Sowohl in der Mitte des zweiten Halbjahres als auch am Schuljahresende, d. h. zu dem Zeitpunkt als Flexibilität auch im *GPD* behandelt worden war, wiesen die Schülerinnen und Schüler des *RPD* einen adaptiveren Strategiegebrauch auf. Die Schülerinnen und Schüler des *GPD* verwendeten hingegen ungeachtet der Aufgabenkriterien überwiegend das *schrittweise Verfahren*, das im Unterricht automatisiert worden war. Wie auch in der früheren Studie von Blöte et al. (2000) zeigten weitere Analysen in beiden Ansätzen Unterschiede zwischen dem spontanen Strategiegebrauch und der Bewertung vorgegebener Lösungsstrategien für ein und dieselbe Aufgabe. Im *RPD* wurde beispielsweise die Strategie *Schrittweise* am häufigsten verwendet, während die Strategie *Hilfsaufgabe* im Test zur Strategiebewertung von den Schülerinnen und Schülern am häufigsten als geeignetste Strategie identifiziert wurde. Der Gruppenunterschied in der Anzahl unterschiedlicher verwendeter Strategien für eine vorgegebene Aufgabe (gleiche Methodik wie bei Blöte et al., 2000, vgl. Kap. 3.4.2) wurde am

Ende des zweiten Halbjahres zugunsten der Schülerinnen und Schüler des *RPD* signifikant. Dabei gelang es den Schülerinnen und Schülern beider Ansätze, mehr unterschiedliche Additionsstrategien zu einer vorgegebenen Aufgabe zu finden als Subtraktionsstrategien zu einer vorgegebenen Aufgabe. Insgesamt zeigten die Schülerinnen und Schüler bei der Bewertung vorgegebener Prozeduren eine größere aufgabenbezogene Flexibilität als im spontanen Strategiegebrauch im schriftlichen Test, wobei sich auch hier Vorteile für das *RPD* ergaben. Neben dem höheren konzeptuellen Wissen, das die Autoren als Erklärungsansatz für die Überlegenheit des *RPD* liefern, könnten hier auch soziomathematische Einflüsse für die Bewertung der Strategien eine Rolle spielen. Schülerinnen und Schüler des *RPD* dürften aufgrund ihrer Lernerfahrung eher auf Strategieflexibilität/-adaptivität achten, während Schülerinnen und Schüler des *GPD* das Verfahren wählen könnten, das am schnellsten zum richtigen Ergebnis führt (vgl. Kap. 3.4.1 zu den Befunden von Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). Blöte et al. (2001) schlussfolgern aus ihren Ergebnissen, dass konzeptuelles und prozedurales Wissen im *RPD* stärker verknüpft sind als in einem eher routineorientierten Unterricht, der flexible Strategiewahl erst als Additum thematisiert.

Die Wirksamkeit zweier Instruktionsansätze mit ähnlicher Konzeption wie in der zuvor geschilderten Studie wurde von Torbeyns et al. (2017) untersucht. In der Studie wurden bei niederländischen und flämischen Schülern der Klassenstufen 3–6 basierend auf einem Strategietest zu Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 Strategieprofile gebildet. Als Informationskriterium für den erhaltenen Strategieunterricht wurden die länderspezifischen Curricula herangezogen, wobei das niederländische Curriculum eher reformorientierte Bezüge (*Conceptual Appoach*) aufweist und das flämische Curriculum eher dem traditionellen Ansatz zuzuordnen ist. Aufgrund dieser theoretischen Annahmen, die auch einen Bestandteil der Forschungsfragen darstellen, werden die Studienergebnisse in diesem Abschnitt zum Vergleich verschiedener Instruktionsstile berichtet.

Der Strategietest der Studie beinhaltete sowohl Zahl- als auch Textaufgaben zur Subtraktion, welche aufgrund ihrer Aufgabeneigenschaften entweder die Verwendung der *Hilfsaufgabe* oder des Normalverfahrens nahelegten. In den Strategieprofilen konnte dabei auch die Strategieflexibilität der Schülerinnen und Schüler zwischen den einzelnen Testaufgaben abgebildet werden, anstatt – wie üblich – einen Gesamtscore über alle Testaufgaben hinweg zu ermitteln. Darüber hinaus wurden neben dem Einfluss des Strategieprofils auf die Korrektheit auch das Geschlecht, die Jahrgangsstufe, das mathematische Vorwissen und das zugrunde liegende Curriculum als individuelle Faktoren in die Analysen einbezogen.

Mit einer latenten Klassenanalyse ergab sich eine Fünf-Clusterlösung. Dreiviertel der Schülerinnen und Schüler ließen sich einem der drei Cluster zuordnen, bei denen alle Aufgaben mit nur einer Strategie (dem Normalverfahren bzw. den Universalstrategien *Stellenweise* und *Schrittweise*) gelöst wurden. Ein Viertel der Schülerinnen und Schüler verteilte sich auf die restlichen beiden Cluster, welche einen Strategieeinsatz beschreiben, bei dem entweder hauptsächlich die *Hilfsaufgabe* ungeachtet der Aufgabenpassung verwendet wurde, oder aufgabenspezifisch zwischen dem Normalverfahren und der *Hilfsaufgabe* gewechselt wurde. Darüber hinaus stieg mit einer höheren Klassenstufe und mit besserem mathematischem Vorwissen die Wahrscheinlichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler den beiden letztgenannten Clustern angehörten. Zwischen den beiden Ländern zeigte sich entgegen den Erwartungen, dass die flämischen Schülerinnen und Schüler häufiger diesen beiden Clustern zugeordnet werden konnten als die niederländischen Schülerinnen und Schüler. Die Cluster unterschieden sich indes nicht in der Verteilung der Geschlechter und in der Verteilung der Intelligenz.

In der belgischen Studie von De Smedt et al. (2010) wurde untersucht, inwiefern zwei unterschiedliche Lernumgebungen im Zahlenraum bis 100 den Gebrauch der *indirekten Addition* (vgl. Tabelle 1, S. 15) bei Schülerinnen und Schülern fördern können. Die teilnehmenden 35 Drittklässler erhielten ein Training, das entweder explizit oder implizit die Verwendung der *indirekten Addition* fördern sollte. In der expliziten Lernumgebung wurde die Strategie der *indirekten Addition* prozedural vermittelt. Zudem mussten alle Subtraktionsaufgaben in der Lernumgebung sowohl mit der *direkten Subtraktion* als auch der *indirekten Addition* bearbeitet und ihre Effizienz verglichen werden. Der Effizienzvergleich verschiedener Strategien basiert auf den positiven Forschungsbefunden von Rittle-Johnson zum Vergleich verschiedener Lösungswege (vgl. Kap. 3.3.5.2). In der expliziten Lernumgebung wurde die Strategie rein prozedural vermittelt, ohne dass sicher gestellt wurde, dass diese konzeptuell untermauert war und das Differenzmodell der Subtraktion thematisiert wurde (*skills approach*, Kap. 3.3.1). In der impliziten Lernumgebung wurde das Aufgabenmaterial so gewählt, dass Subtraktionsaufgaben mit einer geringen Differenz des Minuenden und Subtrahenden bearbeitet werden mussten, was die Anwendung der *indirekten Addition* evozieren sollte. Es wurden nur solche Schülerinnen und Schüler in die Stichprobe einbezogen, die nicht bereits im Vortest die *indirekte Addition* genutzt hatten. In den Testaufgaben wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, die Aufgaben fehlerfrei und schnell zu lösen. Dabei mussten Zahlenaufgaben mit unterschiedlichen Abständen gelöst werden. Die Transferaufgaben beinhalteten entsprechende Zahlenaufgaben im Zahlenraum bis 1000 sowie Textaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler waren dazu aufgefordert, nach jeder Aufgabenbearbeitung die von ihnen genutzten Strategien zu erklären. Die Ergebnisse zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler der impliziten Lernumgebung die *indirekte Addition* bei den Zahlenaufgaben im Nachtest nicht und bei den Transferaufgaben lediglich zu einem geringen Prozentsatz der bearbeiteten Aufgaben verwendeten. Wie auch bei Blöte et al. (2000) konnten Schülerinnen und Schüler der impliziten Lernumgebung insbesondere bei den Textaufgaben spontan die *indirekte Addition* anwenden, da diese Aufgaben die Grundvorstellung des Differenzmodells ansprachen, während das Minuszeichen bei den Schülerinnen und Schülern in Zahlenaufgaben anscheinend mit der *direkten Subtraktion* verknüpft wurde. Auch in der expliziten Lernumgebung wurde die *indirekte Addition* in den Tests während des Treatments lediglich in 6 % und 11 % und im Follow-up-Test (einen Monat später) in 10 % der Lösungen genutzt. Dabei wurde die *indirekte Addition* erwartungskonform vorwiegend bei Aufgaben mit geringem Zahlenabstand eingesetzt. In den Auswertungen zeigte sich für alle Schülerinnen und Schüler ein Einfluss der Differenz des Zahlenmaterials auf die Effizienz der beiden Subtraktionsstrategien. So wurden Aufgaben mit großer Zahlendifferenz mit der *direkten Subtraktion* korrekter und schneller gelöst als solche mit einem mittleren oder kleinen Zahlenabstand. Zugleich konnten die Schülerinnen und Schüler auch Aufgaben mit kleinem Zahlenabstand korrekter und schneller mit der *direkten Subtraktion* lösen als Aufgaben mit mittlerem Zahlenabstand. Dieses erwartungswidrige Ergebnis weist darauf hin, dass hier ggf. eine Diskrepanz zwischen verwendetem und berichtetem Lösungsweg bestehen könnte. In der Gruppe des expliziten Ansatzes lösten die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben mit der *indirekten Addition* korrekter als mit der *direkten Subtraktion*. In den Transferaufgaben konnten bei den Zahlenaufgaben im Zahlenraum bis 1000 in der Korrektheit keine Unterschiede zwischen den beiden Lösungsstrategien festgestellt werden. Allerdings wurde die *indirekte Addition* signifikant schneller als die *direkte Subtraktion* ausgeführt. Das gleiche Ergebnis zeigte sich in der Studie von Torbeyns et al. (2016, vgl. Kap. 3.4.1.3). Auch für die Textaufgaben konnte eine ähnliche Tendenz festgestellt werden.

Die beiden Lehrbuchansätze, die in der Studie von Heinze et al. (2009) dem Routineansatz gegenübergestellt wurden, unterscheiden sich insbesondere in ihrem Grad der Schematisierung informeller Strategien. Während in der Konzeption des Zahlenbuchs (Wittmann & Müller, 2003) Hauptstrategien stärker schematisiert werden (*Investigative Approach*), liegt der Fokus bei den Matheprofis (Schütte, 2005b) auf der Analyse des Zahlenmaterials und dem Effizienzvergleich der unterschiedlichen Lösungswege (*Problem-solving Approach*). In der Studie erzielten die Schülerinnen und Schüler beider reformorientierter Ansätze signifikant höhere Adaptivitätswerte als die Schülerinnen und Schüler eines Routineunterrichts. Außerdem wiesen die Schülerinnen und Schüler aus der Matheprofis-Gruppe höhere Werte in der Adaptivität auf als die Zahlenbuchgruppe, sofern nur die zielführenden Lösungen einbezogen wurden.

In der Studie von Hiebert und Wearne (1996) wurde die Strategieverwendung von Schülerinnen und Schülern, die nach einem reformorientierten Unterrichtsansatz unterrichtet wurden, in dem sie Strategien informell selbstentwickelten, mit der Strategieverwendung von Schülerinnen und Schülern in einem Routineansatz über drei Schuljahre hinweg vergleichend untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass insbesondere solche Schülerinnen und Schüler in der Lage waren, eigene Prozeduren zu entwickeln, die am Ende des dritten Schuljahres auch ein hohes konzeptuelles Wissen zum Stellenwertverständnis und den verwendeten Prozeduren aufwiesen. Schülerinnen und Schüler mit höherem Verständniswissen konnten zudem häufiger die Funktionsweise und Bedeutung einer von der Lehrperson eingeführten Strategie erklären als Schülerinnen und Schüler mit niedrigem Verständniswissen. Schülerinnen und Schüler mit niedrigem Verständniswissen waren hingegen in der Studie auf Instruktionen angewiesen und profitierten eher von einem Routineansatz, da sie kaum in der Lage waren, Prozeduren selbst zu entwickeln.

Inwieweit leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler in einem reformorientierten im Vergleich zu einem traditionellen Unterrichtsansatz profitieren können, war auch Gegenstand der Studie von Woodward und Baxter (1997). In der Studie wurde über ein Jahr hinweg untersucht, unter welchen Bedingungen Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten bzw. -beeinträchtigungen in reformorientierten Konzepten einen Lernzuwachs erzielen können. Dabei wurde die Lernentwicklung von Schülerinnen und Schülern aus fünf Schulklassen, die einen reformorientierten Mathematikunterricht besuchten, mit dem Lernzuwachs von Schülerinnen und Schüler aus vier weiteren traditionell unterrichteten Klassen verglichen. Der reformorientierte Instruktionsansatz kann aufgrund seiner Konzeption innerhalb der problemlöseorientierten Ansätze verortet werden (vgl. Kap. 3.3.4). Entsprechend der mathematischen Fähigkeiten wurden drei Leistungsgruppen mit jeweils 6–7 Schülerinnen und Schülern pro Instruktionsansatz in den beiden Testbedingungen miteinander verglichen. Die Tests wurden sowohl qualitativ als auch quantitativ ausgewertet. In der Studie erzielten die Schülerinnen und Schüler der reformorientierten Unterrichtsansätze in allen drei Leistungsgruppen einen höheren Leistungszuwachs als die Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Vergleichsgruppe. Zwischen den Unterrichtsansätzen zeigten sich in der Gruppe mit hohen mathematischen Fähigkeiten signifikante Vorteile in den Untertests „concepts“ und „problem solving“ zugunsten des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes. Die Vorteile zugunsten des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes bestanden auch in der Gruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten im Bereich „concepts“, während sich für die Schülerinnen und Schüler mit unterdurchschnittlichen Fähigkeiten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Unterrichtsansätzen feststellen ließen.

Da sich für die letztgenannte Gruppe kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Bedingungen nachweisen ließ, kann von keinem generellen Nachteil leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler in diesem reformorientierten Ansatz ausgegangen werden kann. Aufgrund der kleinen Teilstichproben sind verallgemeinernde Rückschlüsse aus dieser Studie nur bedingt möglich.

In den Studien von Kroesbergen und Van Luit (2002, Pilotstudie) bzw. Kroesbergen et al. (2004, Hauptstudie) wurden die Lernzuwächse von Schülerinnen und Schülern mit mathematischen Schwierigkeiten und/oder Lernbehinderungen (kognitive inkludiert) in zwei unterschiedlichen Experimentalbedingungen sowie einer Kontrollgruppe miteinander verglichen ($N = 75$ in der Pilotstudie, $N = 265$ in der Hauptstudie). Unterrichtsgegenstand der drei Ansätze waren Multiplikationsstrategien. In den Experimentalbedingungen wurden die Schülerinnen und Schüler entweder nach einem „konstruktivistischen“ oder einem explizierenden Unterrichtsansatz unterrichtet. Die Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe erhielten während der Intervention von ihren regulären Lehrpersonen Unterricht zur Multiplikation.

Da in den Studien von Kroesbergen und Van Luit (2002) bzw. Kroesbergen et al. (2004) konstruktivistisch-orientierte Instruktionsansätze mit offenen, wenig schematisierten Lernangeboten gleichgesetzt werden, wird der Begriff „konstruktivistisch“ im Folgenden mit Anführungszeichen verwendet. Ein ausführlicher Exkurs hierzu folgt in Kapitel 4.1.

Im „konstruktivistischen“ Ansatz (Anlehnung an *RME*, vgl. Kap. 3.3.2) wurden keine Strategien seitens der Lehrperson eingeführt, sondern anregende Probleme gestellt, die multiple Bearbeitungswege der Schülerinnen und Schüler evozieren sollten. Die Rolle der Lehrperson bestand darin, die von den Schülerinnen und Schülern entwickelten Lösungswege aufzugreifen, zu strukturieren und zum Weiterdenken anzuregen. Im Gegensatz zum „konstruktivistischen“ Ansatz wurden im explizierenden Ansatz alle relevanten Lösungsstrategien von der Lehrperson eingeführt und die Passung zwischen den Aufgaben und den Strategien besprochen. Informelle Strategien der Schülerinnen und Schüler wurden in diesem Ansatz nicht aufgegriffen. Die Förderung in den beiden Experimentalgruppen erfolgte durch geschulte wissenschaftliche Mitarbeiter in Kleingruppen mit jeweils fünf Schülerinnen und Schülern über vier (Kroesbergen & Van Luit, 2002) bzw. fünf Monate (Kroesbergen et al., 2004) in zwei Einheiten zu je 30 Minuten pro Woche. Die Interventionszeit ersetzte an den beiden Tagen den regulären Mathematikunterricht. An den anderen Tagen besuchten die Schülerinnen und Schüler den regulären Mathematikunterricht, in welchem an diesen Tagen nicht die Multiplikation thematisiert wurde. Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe nahmen am regulären Mathematikunterricht teil, in welchem an den Interventionstagen unter Ausschluss der Interventionsteilnehmerinnen und -teilnehmer die Multiplikation behandelt wurde. Den Schülerinnen und Schülern der Kontrollgruppe stand folglich die gleiche Lernzeit wie den Interventionsteilnehmerinnen und -teilnehmern zur Verfügung, wobei wenige Details zum Instruktionsstil und -inhalt der regulären Lehrpersonen bekannt sind, sodass von einem Mischansatz der beiden Experimentalansätze auszugehen ist.

In die Stichprobe wurden solche Schülerinnen und Schüler einbezogen, deren Leistungen in einem allgemeinen, standardisierten Mathematiktest im untersten Quartil lagen sowie weiteren Kriterien entsprachen (vgl. Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004). Die ausgewählten Schülerinnen und Schüler besuchten die Klassen 2 und 3 in Regelschulen bzw. die Klassen 2–6 in Förderschulen. Die Schülerinnen und Schüler wurden randomisiert den beiden Experimentalbedingungen zugewiesen. Als abhängige Variablen wurden in der Studie die Automatisierung von Multiplikationsstrategien, der Einsatz von Problemlösestrategien, das Spektrum an Multiplikationsstrategien sowie motivationale Variablen im Fach Mathematik betrachtet.

In der Pilotstudie (Kroesbergen & Van Luit, 2002) zeigte sich, dass beide Experimentalgruppen im Fähigkeitstest signifikant besser als die Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe abschnitten. In der Hauptstudie (Kroesbergen et al., 2004) erwiesen sich die Leistung im Vortest und das allgemeine mathematische Vorwissen als wesentliche Prädiktoren für die Leistung im Test zum automatisierten Wissen (Faktenwissen zum Einmaleins) und in einem weiteren Test zu Problemlösekompetenzen. In den mehrebenenanalytischen Auswertungen wiesen die Schülerinnen und Schüler im Nachtest in der explizierenden Lernumgebung höhere Problemlösekompetenzen auf als in der „konstruktivistischen" Lernumgebung, wobei die Lernumgebung einen geringeren Einfluss als das mathematische Vorwissen und die Intelligenz keinen signifikanten Einfluss auf die Problemlösekompetenzen zeigte. Problemlösekompetenzen wurden sowohl mit Textaufgaben erfasst, bei denen das dargestellte Problem in eine symbolische Gleichung überführt werden musste als auch mit Zahlenaufgaben mit zweistelligen Faktoren, bei denen bekannte Hilfsstrategien (wie die wiederholte Addition) auf einen höheren Zahlenraum übertragen werden mussten. In der Pilotstudie (Kroesbergen & Van Luit, 2002) mit einer kleineren Probandenzahl ließ sich ein gegenteiliges Ergebnis feststellen. Dort waren die Problemlösekompetenzen der Schülerinnen und Schüler des „konstruktivistischen" Ansatzes höher als die der Kontrollgruppe ausgeprägt. Die Autoren weisen als möglichen Erklärungsansatz für das Ergebnis in der Hauptstudie darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler im „konstruktivistischen" Ansatz im Gegensatz zu den Schülerinnen und Schülern im explizierenden Ansatz sowohl zielführenden Strategien als auch Fehlstrategien ausgesetzt seien. Dieser Aspekt wird in Kapitel 4.2.1 im Kontext der Cognitive-Load-Theorie beleuchtet.

In der Hauptstudie zeigten sich im Test zum automatisierten Wissen keine Unterschiede zwischen den beiden Experimentalgruppen. Bezüglich des Strategiespektrums und der Effizienz eingesetzter Strategien ergaben sich Vorteile für den explizierenden Instruktionsansatz gegenüber der Kontrollgruppe, jedoch erneut keine Unterschiede zwischen den beiden Experimentalgruppen. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass Schülerinnen und Schüler auch im „konstruktivistischen" Ansatz neue, effiziente Strategien erlernen konnten. Der „konstruktivistische" Ansatz zeichnete sich darüber hinaus dadurch aus, dass die Schülerinnen und Schüler eine weniger stark ausgeprägte ego-orientierte Lernmotivation entwickelten als in den anderen beiden Lernumgebungen. Insgesamt zeigten sich in beiden Experimentalgruppen im Lernzuwachs Vorteile gegenüber einer Kontrollgruppe, wobei die kleine Lerngruppengröße im Vergleich zum Klassenunterricht zu beachten ist, d. h. vermutlich individueller und adaptiver auf die Bedürfnisse der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler eingegangen werden konnte. Die Forschergruppe folgert aus den Ergebnissen der Hauptstudie, dass explizierende Lernumgebungen für leistungsschwächere Schülerinnen und Schülern „konstruktivistischen" Lernumgebungen überlegen seien. Dieser weitreichende Schluss kann kritisch betrachtet werden, da sich, wie oben beschrieben, zwischen den Experimentalgruppen kaum Unterschiede feststellen ließen. Grundsätzlich kann festgehalten werden, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler in der Studie durchaus von der offeneren Lernumgebung profitieren konnten – wenn auch der Lernzuwachs in der Studie geringer ausfiel als in der explizierenden Lernbedingung.

3.4.3.2 Korrektheit

Die Ergebnisse der hier vorgestellten Studien zeigen für die Kompetenz zur korrekten Lösung halbschriftlich gelöster Additions- und Subtraktionsaufgaben in den verschiedenen Unterrichtsansätzen kein einheitliches Bild. Während sich die Lerngruppen in der niederländischen Studie in der Kompetenz zur korrekten Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben nicht unterschieden (Klein et al., 1998), weisen die Ergebnisse von Heinze et al. (2009) und Torbeyns et al. (2017) darauf hin, dass eine höhere Strategieflexibilität und -adaptivität auch mit Einbußen in der Korrektheit einhergehen kann. In der Studie von Heinze et al. (2009) wies die Zahlenbuch-Gruppe in der Korrektheit der Lösungen einen Vorteil gegenüber dem traditionellen Ansatz auf. Die Gruppe, die nach dem Lehrwerk „Matheprofis“ unterrichtet wurde, verwendete häufiger Fehlstrategien als die Routineansatz- und die Zahlenbuch-Gruppe. In der Studie von Torbeyns et al. (2017) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler, die alle Aufgaben mit dem Normalverfahren lösten, diese korrekter als Schülerinnen und Schüler, welche unterschiedliche Strategien anwendeten.

In den Befunden von Woodward und Baxter (1997) zeigte sich indes, dass auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler in reformorientierten Unterrichtsansätzen einen Leistungszuwachs erzielen konnten, was darauf hinweist, dass die Schülerinnen und Schüler in diesen Ansätzen durchaus zielführende Strategien entwickelten.

3.4.3.3 Zusammenfassung

Zusammenfassend deuten die dargestellten Studien darauf hin, dass sich reformorientierte Unterrichtskonzepte besser als traditionelle Unterrichtsansätze eignen, die Kompetenzen zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl zu fördern (Blöte et al., 2001; Heinze et al., 2009; Klein et al., 1998; Kroesbergen et al., 2004). Die Studienergebnisse geben insgesamt wenig Anhaltspunkte für negative Auswirkungen reformorientierter Unterrichtskonzepte auf die Kompetenz zur korrekten Ausführung von Rechenstrategien. Widersprüchlich ist hingegen die Befundlage für Schülerinnen und Schüler mit unterdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten. Während die Ergebnisse von Hiebert und Wearne (1996) darauf hindeuten, dass diese bei der Strategienutzung von reformorientierten Unterrichtsansätzen geringer als von traditionellen Ansätzen profitieren, zeigten sich für diese Leistungsgruppe in der Studie von Woodward und Baxter (1997) wenig Unterschiede zwischen den beiden Unterrichtsansätzen. Auch in den beiden Studien von Kroesbergen und Van Luit (2002) und Kroesbergen et al. (2004) konnten in verschiedenen Bereichen des Strategiewissens von Schülerinnen und Schülern mit geringen mathematischen Fähigkeiten zwar Vorteile für beide Interventionsansätze (explizierender Ansatz und „konstruktivistischer“ Ansatz) gegenüber der Kontrollgruppe, jedoch kaum Unterschiede zwischen den beiden Instruktionsansätzen festgestellt werden.

In vielen hier berichteten Studien wurden Instruktionsansätze im Klassenkontext erforscht (Blöte et al., 2001; Heinze et al., 2009; Klein et al., 1998; Torbeyns et al., 2017; Woodward & Baxter, 1997). Ein Vorteil dieser Studiendesigns ist, dass die Untersuchungen unter ökologisch validen Bedingungen durchgeführt wurden und somit gängiger Unterricht abgebildet wird. Da in den Studien das von den Lehrpersonen verwendete Schulbuch oder das zugrunde liegende Curriculum als Grundlagen für die Zuordnung der Schülerinnen und Schüler zu den beiden Ansätzen genutzt wurden, führt diese Vorgehensweise zugleich zu Schwierigkeiten bei der Interpretation der Ergebnisse. Inwieweit sich die Lehrpersonen in ihrem unterrichtlichen Handeln am eingesetzten Lehrbuch und am Curriculum orientiert haben, wurde in den Studien überwiegend nicht überprüft. Letztlich ist dadurch offen, ob die Schülergruppen tatsächlich nach dem konzeptionellen Ansatz unterrichtet wurden, dem sie in den Forschungsdesigns zugeordnet wurden, und es ist unklar, inwieweit sich diese Unterschiede im Handeln der Lehrpersonen auf die hier berichteten Ergebnisse ausgewirkt haben. Ein Anzeichen hierfür ist ein großer Anteil an Varianz in der Flexibilität zwischen den Schulklassen, die – gemäß Lehrbuch – nach einem traditionellen Ansatz unterrichtet werden (Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004; Selter, 2000).

Ein wichtiger Aspekt beim Vergleich reformorientierter Lernumgebungen mit Routineansätzen ist auch der Einfluss der Motivation auf das Lernverhalten und den Lernerfolg. So ist denkbar, dass im routineorientierten Unterricht mindestens eine Universalstrategie erworben wird, was sich auf die Selbstwirksamkeit der Schülerinnen und Schüler auswirken und letztlich zu einem höheren Lernzuwachs führen könnte. Auffällig bei den in diesem Unterkapitel beschriebenen Studien ist jedoch, dass mit Ausnahme der Studie von Kroesbergen et al. (2004) sehr wenige motivationale und affektive Kontrollvariablen einbezogen wurden. Falls diese erhoben wurden, werden sie häufig wie bei Woodward und Baxter (1997) zur Überprüfung von Gruppenunterschieden zum ersten Messzeitpunkt, nicht jedoch zur Kontrolle von Effekten auf den Lernprozess in den unterschiedlichen Instruktionsansätzen verwendet.

In den Studien zu offeneren Lernumgebungen, welche namentlich als problemlöseorientiert oder teilweise auch als „konstruktivistisch“ (Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004) bezeichnet werden, zeigen sich verschiedene theoretische und methodische Probleme, welche die Bedeutsamkeit der empirischen Ergebnisse einschränken.

Zum einen besteht die Grundproblematik beim Vergleich dieser Ansätze darin, dass unterschiedliche Unterrichtsaspekte, welche auf einzelnen Elementen konstruktivistischer Lerntheorien basieren, mit bestimmten Lehrmethoden gleichgesetzt werden. Dieser Schluss ist aus theoretischer Perspektive nicht korrekt, da es nicht die eine konstruktivistische Unterrichtsmethode gibt. Auf diese Problematik wird ausführlich an späterer Stelle eingegangen (vgl. Exkurs zur Verwendung des Begriffs „konstruktivistisch“, S. 76).

Zum anderen wird in verschiedenen Studien teilweise versucht, Unterschiede im Lernzuwachs der Schülerinnen und Schüler in einem eher routineorientierten Unterricht und einem weniger gelenkten Unterricht allein auf Oberflächenstrukturen des Unterrichts zurückzuführen. Insbesondere die Befunde von Baxter et al. (2001) geben Hinweise darauf, dass allein der Grad der Öffnung der Unterrichtsansätze für individuelle Lösungswege der Schülerinnen und Schüler nicht ausschlaggebend für den Lernerfolg zu sein scheint, sondern anderen Aspekten wie der fachdidaktischen und diagnostischen Kompetenz der Lehrperson eine bedeutende Rolle beigemessen werden muss. In der genannten Studie konstatieren die Autoren, dass es den teilnehmenden Lehrpersonen unterschiedlich gut gelingt, möglichst viele Schülerinnen und Schüler durch differenzierende Maßnahmen aktiv in den Unterricht einzubeziehen. Für aussagekräftigere Ergebnisse wäre es folglich wichtig, nicht allein Oberflächenmerkmale des Unterrichts zu beschreiben, sondern zusätzlich tiefenstrukturelle Merkmale, wie beispielsweise den Umgang mit Schülerfehlern oder die Aktivierung von Vorwissen, zu erfassen (Reusser & Pauli, 2010).

3.5 Zusammenfassung und Ausblick: Förderung der Strategieflexibilität und -adaptivität aus mathematikdidaktischer Perspektive

In Kapitel 3 wurden zunächst unterschiedliche Modelle zum Strategieerwerbsprozess dargestellt, welche prozedurales und konzeptuelles Wissen unterschiedlich stark gewichten (Kap. 3.1). Daraus ergeben sich je nach zugrunde liegendem Erwerbsmodell unterschiedliche Implikationen dafür, wie Unterrichtsansätze im Fach Mathematik gestaltet werden sollten, damit Schülerinnen und Schüler das erworbene Wissen flexibel und adaptiv einsetzen können (Kap. 3.2). Aufgrund des derzeitigen Forschungsstandes kann davon ausgegangen werden, dass beide Wissensarten, unabhängig vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, zentral sind und die Strategieflexibilität/-adaptivität beeinflussen (Schneider et al., 2011). Im Wesentlichen unterscheiden sich die verschiedenen Instruktionsansätze zum Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien dadurch, inwieweit Lösungswege von den Schülerinnen und Schülern im Unterricht informell entwickelt und wie stark diese dann im weiteren Erwerbsprozess von der Lehrperson schematisiert werden sollen (Kap. 3.3).

Der *Skills Approach*, der *Conceptual Approach*, aber auch der *Investigative Approach* gehen davon aus, dass Schülerinnen und Schüler ein Repertoire an Strategien erwerben, aus dem sie situativ die am besten geeignete Strategie auswählen können. Der *Problem-solving Approach* basiert hingegen auf der Annahme, dass konzeptuelles Zahlwissen vermittelt werden muss, auf dessen Basis informelle Rechenstrategien entwickelt und an neue Problemstellungen angepasst werden können.

Die Befundlage weist darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler in einem traditionellen Mathematikunterricht, der zumeist ein oder zwei Universalstrategien prozedural vermittelt, nur begrenzt in der Lage sind, selbst weitere Strategien zu entwickeln (vgl. Kap. 3.4.1). In den Strategietests der dargestellten Studien zeigten sie unabhängig von Aufgabenkriterien überwiegend die Universalstrategien, die sie im Unterricht erlernt hatten. Einerseits wird die Kompetenz zur adaptiven und flexiblen Strategiewahl im routineorientierten Unterricht nicht gefördert, da der Fokus darauf liegt, die erlernten Prozeduren automatisiert und korrekt einzusetzen. Andererseits veranschaulichen die Befunde, dass sich eine adaptive und flexible Strategiewahl nicht ohne instruktionale Unterstützung entwickelt.

Die Befunde zur Ausprägung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl in reformorientierten Unterrichtskonzepten deuten hingegen darauf hin, dass sich diese eignen, die Strategieflexibilität und -adaptivität zu fördern (vgl. Kap. 3.4.2). Auch Studien, welche die Effizienz eines reformorientierten Unterrichtsansatzes direkt mit der eines routineorientierten Unterrichtsansatzes verglichen haben, zeigen eine höhere Ausprägung der Strategieflexibilität und -adaptivität in reformorientierten Unterrichtsansätzen (vgl. Kap. 3.4.3). Die additive Thematisierung von Flexibilität/Adaptivität nach der Einführung von Universalstrategien in einem routineorientierten Unterricht führt nicht zu vergleichbaren Ergebnissen wie ein von Beginn an auf Flexibilität ausgerichteter Mathematikunterricht (Blöte et al., 2001; Klein et al., 1998; Torbeyns et al., 2009b). Einige der dargestellten Studien haben darüber hinaus untersucht, ob sich reformorientierte Unterrichtsansätze auch zur Förderung leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler eignen oder ob diese auf die prozedurale Vermittlung von Strategien (*Skills Approach*) angewiesen sind. Die Befunde deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler mit gering ausgeprägten mathematischen Kompetenzen im routineorientierten Unterricht weniger als Schülerinnen und Schüler mit höheren mathematischen Kompetenzen in der Lage sind, andere als die im Unterricht erlernten Strategien selbst zu entwickeln. In reformorientierten Unterrichtsansätzen konnten sie hingegen in ihrer Strategieflexibilität und -adaptivität profitieren, wobei der Leistungszuwachs für diese Leistungsgruppe im Vergleich zu Schülerinnen und Schülern mit höheren mathematischen Kenntnissen gering ausfiel. Einschränkend ist dabei anzumerken, dass nur wenige Studien die Strategiekompetenz von Schülerinnen und Schülern mit geringen mathematischen Kompetenzen in reformorientierten gegenüber routineorientierten Unterrichtsansätzen verglichen haben (Hiebert & Wearne, 1996; Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004; Woodward & Baxter, 1997).

Insgesamt ist die Befundlage zur möglichen Förderung der Strategieflexibilität und -adaptivitität leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler jedoch dürftig, was auch Torbeyns et al. (2005) konstatieren:

> *Taking into account the contrasting empirical results about the value of the reform of elementary mathematics education for children of the very lowest achievement level, future studies that focus on the differential effects of reform-based and traditionally oriented instruction on the strategy characteristics and strategy development of these children are needed.* (S. 18)

Auf Basis der dargestellten theoretischen Annahmen und Befunde können folgende Forschungsdesiderate formuliert werden.

1. Ein **Vergleich unterschiedlicher reformorientierter Unterrichtsansätze** – d. h. *Conceptual Approach* vs. *Investigative Approach* vs. *Problem-solving Approach* – steht in Bezug auf den Erwerb der Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000 aus. Bestehende Studien beschränken sich zumeist auf den Zahlenraum bis 100. Dabei werden insbesondere reformorientierte Unterrichtsansätze mit einem routineorientierten Unterricht, nicht aber unterschiedliche reformorientierte Unterrichtsansätze untereinander verglichen. Die wenigen bereits existierenden Studien, die diesen Vergleich vornehmen, beziehen sich fast ausschließlich (Ausnahme: Heinze et al., 2009) auf den Erwerb von Multiplikationsstrategien.
2. Es bleibt unklar, durch welche Unterrichtselemente Strategien und flexibles Wissen bestmöglich gefördert werden können. Aufgrund der Gemeinsamkeiten der Ansätze bietet sich hier ein **experimenteller Vergleich** (wie bei Kroesbergen & Van Luit, 2002; Kroesbergen et al., 2004) an, um die Ansätze in ihrer unterrichtlichen Umsetzung tatsächlich voneinander abgrenzen zu können.
3. Dabei ist ebenfalls unklar, inwieweit **Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten** in der Regelschule von diesen Ansätzen profitieren können und ob die instruktionale Förderung in reformorientierten Unterrichtsansätzen ausreicht, um diese Schülerinnen und Schüler in der Entwicklung zielführender Strategien zu unterstützen.
4. In den existierenden Studien wurden bisher kaum **affektive und motivationale Kontrollvariablen** einbezogen (abgesehen von Kroesbergen et al., 2004). Da die Studien überwiegend Querschnittsdesigns aufweisen, fehlen zudem Informationen über den Einfluss moderierender kognitiver Variablen, wie dem mathematischen Vorwissen, der kognitiven Grundfähigkeiten oder dem Arbeitsgedächtnis.

Den hier dargestellten Strategieerwerbsprozessen liegen unterschiedliche lerntheoretische Annahmen zugrunde, welche im Folgenden näher dargestellt werden. Zum einen basieren reformorientierte Unterrichtsansätze auf Grundannahmen konstruktivistischer Lerntheorien, welche im nächsten Kapitel vorgestellt werden. Zum anderen greifen die Ansätze auch auf die Cognitive-Load-Theorie zurück, die insbesondere bei der Frage nach der Effektivität reformorientierter Unterrichtsansätze in Abhängigkeit vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler als Erklärungsmodell dienen kann. In den vorgestellten Studien, welche ein *Choice-/No-Choice*-Verfahren einsetzen, wurde bereits ein anderer Blickwinkel auf Strategieflexibilität eröffnet, welcher auch dem Strategiewahlmodell von Siegler zugrunde liegt. Eine Strategie ist demnach flexibel, wenn sie zeiteffizient zur korrekten Lösung führt. Auch das Strategiewahlmodell wird nachfolgend näher vorgestellt und von mathematikdidaktischen Vorstellungen zum Strategieerwerb abgegrenzt.

4 Strategieerwerb und -förderung aus lerntheoretischer und instruktionspsychologischer Perspektive

In Kapitel 3 wurde beschrieben, wie sich die mathematikdidaktischen Strategieerwerbskonzepte in ihrer Gewichtung konzeptuellen und prozeduralen Wissens sowie im Grad an Schematisierung von Strategien unterscheiden. In den dargestellten Strategieerwerbskonzepten und dort formulierten Empfehlungen zur Gestaltung der Lernprozesse lassen sich dabei Bezüge zu unterschiedlichen lerntheoretischen und/oder instruktionspsychologischen Annahmen erkennen. In der pädagogisch-psychologischen Forschung bestehen verschiedene Theorien darüber, wie Lernprozesse ablaufen und durch welche unterrichtlichen Bedingungen sie effizient unterstützt werden können (Hasselhorn, Gold, Kunde & Schneider, 2017). Je nach zugrunde liegender Lerntheorie ergeben sich für die Gestaltung mathematischer Lernumgebungen unterschiedliche Implikationen, wie Strategien erworben werden können.

Im Folgenden werden zunächst zentrale Elemente verschiedener Lerntheorien für den Strategieerwerb skizziert (Kap. 4.1). Diese werden herangezogen, um die Effektivität der in Kapitel 3.3 beschriebenen Instruktionsansätze zu vergleichen. Den schemabasierten Lernvorstellungen, die den reformorientierten Instruktionsansätzen (Kap. 3.3.2–3.3.4) zugrunde liegen, steht die Cognitive-Load-Theorie gegenüber, welche postuliert, dass sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen vollständig vermittelt werden muss, um adaptive Expertise zu erlangen (Kap. 4.2.1). Erweiterungen dieser Theorie (Kap. 4.2.2) gehen davon aus, dass für die Anregung der inhaltlichen Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand eine Passung zwischen Schwierigkeitsgrad und Vorwissen nötig ist (Schnotz & Kürschner, 2007), wobei der Schwierigkeitsgrad im Sinne der Zone der proximalen Entwicklung (Vygotsky, 1978, 2002) über dem Lernstand des jeweiligen Schülers bzw. der Schülerin liegen sollte. Die aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand ist auch für den in diesem Kapitel beschriebenen Generierungseffekt zentral. Dieser postuliert, dass selbst generiertes Wissen nachhaltiger verfügbar ist als rezeptiv erworbenes Wissen.

Im Kontext von adaptivem und flexiblem Strategieeinsatz scheint auch metakognitiven Strategien eine entscheidende Funktion zuzukommen. Auf diese wird in Kapitel 4.3 näher eingegangen. Schließlich wird das Strategiewahlmodell von Siegler (Kap. 4.4) vorgestellt, das die Grundlage für einige bereits in Kapitel 3.4 beschriebene Studien bildet. Das Strategiewahlmodell berücksichtigt individuelle Einflussfaktoren auf die Strategiewahl und zeigt, wie sich diese auf die Wahl vorhandener und die Generierung neuer Strategien auswirken.

4.1 Konstruktivistische Lerntheorien

Den in Kapitel 3.3 vorgestellten reformorientierten Strategieerwerbskonzepten *Conceptual Approach*, *Investigative Approach* und *Problem-solving Approach* ist eine konstruktivistische Lernvorstellung gemein. Gemäß einer konstruktivistischen Lernvorstellung kann Wissen nur aktiv vom Lernenden selbst generiert und nicht einfach vermittelt werden. Reusser (2006) fasst die Annahmen über die Wirksamkeit von Lernprozessen in konstruktivistischen Lernumgebungen dabei wie folgt zusammen:

> *Je aktiver und selbstmotivierter, je problemlösender und dialogischer, aber auch je bewusster und reflexiver Wissen erworben resp. (ko-)konstruiert wird, desto besser wird es verstanden und behalten (Transparenz, Stabilität), desto beweglicher kann es beim Denken und Handeln genutzt werden (Transfer, Mobilität) und als desto bedeutsamer werden die mit dessen Erwerb verbundenen Lernerträge erfahren (Motivationsgewinn, Zugewinn an Lernstrategien, Selbstwirksamkeit).* (S. 159)

Im Folgenden werden einzelne Elemente konstruktivistischer Lerntheorien, welche in den drei reformorientierten Strategieerwerbskonzepten zum Erwerb adaptiver Expertise bei halbschriftlichen Rechenstrategien aufgegriffen werden (vgl. Kap. 3.1.3), kurz skizziert.

Ein wesentliches Element reformorientierter Ansätze stellt die *Schemabildung* nach Piaget dar. Dieser beschreibt Lernen als aktiven Prozess, in welchem der Lernende durch Äquilibrationsprozesse versucht, die Passung zwischen inneren Wissensschemata und den jeweiligen Anforderungen herzustellen. Durch ein Ungleichgewicht erzeugte *kognitive Konflikte* lösen Lernprozesse aus und bewirken durch eine Reorganisation des Wissens eine Veränderung innerer Schemata (Woolfolk, 2014). Der Lernprozess wird bei Piaget als natürlicher Prozess angenommen, der keiner gezielten Steuerung bedarf. In den mathematikdidaktischen schemabasierten Unterrichtsansätzen wird konzeptuellem Wissen eine hohe Bedeutung für den Lernprozess beigemessen (vgl. Kap. 3.1.3). Der Schemaerwerb, der die Grundlage von Lernprozessen darstellt, ist demnach eng mit konzeptuellem Wissen verbunden (Hiebert & Carpenter, 1992). So stellen die Verknüpfung von Vorwissen mit einem neuen Lerngegenstand, aber auch die Verknüpfung zwischen zwei bereits vorhandenen Wissenselementen, zentrale Schaltstellen des Schemaerwerbs dar. Für beide Prozesse ist konzeptuelles Wissen elementar. Es wird aus den Theorien zur Schemabildung abgeleitet, dass Schülerinnen und Schüler prinzipiell in der Lage sind, mathematische Gesetzmäßigkeiten und Strategien selbst zu entdecken. Bei Piaget (Piaget & Inhelder, 2004) verläuft der Wissenserwerb in Entwicklungsstadien und wird von verschiedenen Faktoren, wie beispielsweise auch Interaktionen mit der Umwelt, beeinflusst.

Nach einer sozial-konstruktivistischen Sichtweise, wie sie von Vygotsky (1978, 2002) vertreten wird, wird soziokulturellen Einflussfaktoren eine hohe Bedeutung beigemessen. Dabei wird angenommen, dass Wissenskonzepte durch Interaktionsprozesse ko-konstruiert werden, sodass neues Wissen erworben werden kann. Wie Piaget, nimmt auch Vygotsky eine stufenförmige Lernentwicklung an, jedoch weist er der Umwelt dabei einen entscheidenden Einfluss auf die Lernprozesse zu (Vygotsky, 1978, 2002). Lernen entsteht Vygotsky zufolge durch ein sozial konstruiertes gemeinsames Verständnis.

Ein zentrales Element stellt die *Zone der proximalen Entwicklung* nach Vygotsky (1978, 2002) dar.

> *We propose that an essential feature of learning is that it creates the zone of proximal development; that is, learning awakens a variety of internal developmental processes that are able to operate only when the child is interacting with people in his environment and in cooperation with his peers. Once, these processes are internalized, they become part of the child's independent developmental achievement.* (Vygotsky, 1978, S. 90)

Anforderungen in der Zone der proximalen Entwicklung liegen knapp über dem Lernstand des jeweiligen Schülers bzw. der Schülerin, können jedoch zugleich durch eine aktive Auseinandersetzung mit der sozialen Umwelt bewältigt werden und befördern somit Lernprozesse. Die Zone der proximalen Entwicklung wird in der vorliegenden Arbeit im Zusammenhang mit der Cognitive-Load-Theorie sowie deren Weiterentwicklung noch einmal aufgegriffen (vgl. Kap. 4.2.2).

Aus Vygotskys konstruktivistischer Theorie lassen sich konkrete Handlungsanweisungen für den Unterricht ableiten. Der Unterricht muss demzufolge sowohl an den Lernstand des Schülers/der Schülerin angepasst sein als auch genügend Herausforderung bieten, um in Rückbezug auf Piaget (Woolfolk, 2014) einen kognitiven Konflikt auszulösen. Unterrichtliche Aufgaben müssen daher möglichst innerhalb der Zone der nächsten Entwicklung gestellt werden (Vygotsky, 1978). Vygotsky geht davon aus, dass „kulturell relevante Konzepte, Denkweisen [sowie] kognitive und metakognitive Strategien“ (Pauli & Reusser, 2000, S. 425) durch sozialen Austausch erworben und verinnerlicht werden. Auch im *Conceptual Approach*, *Investigative Approach* und *Problem-solving Approach* wird davon ausgegangen, dass sich der Erwerb von Rechenstrategien und damit verbundener adaptiver Expertise durch die Entwicklung informeller Strategien sowie durch die Reflexion über Strategien und deren Vergleich im Klassenverband (z. B. in Form von Rechenkonferenzen, vgl. Kap. 6.2) fördern lässt. So heben beispielsweise Hiebert und Carpenter (1992) hervor:

> *„By thinking and talking about similarities and differences betweeen arithmetic procedures, students can construct relationships between them.“* (S. 68)

Durch die Auseinandersetzung mit den eigenen Strategien, den Vergleich von Strategien sowie das Begründen des eigenen Vorgehens werden zudem metakognitive Kompetenzen geschult, die in einem engen Zusammenhang mit dem mathematischen Kompetenzerwerb stehen. Auf diesen Aspekt wird in Kapitel 4.4 eingegangen. Die Auffassung, dass Strategien und adaptive Expertise durch aktive Auseinandersetzung erworben werden müssen, findet sich in der Literatur (z. B. Hatano, 1988) und insbesondere auch international in den Curricula wieder (ACARA, 2010; KMK, 2004; NCTM, 2000; Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2010).

Trotz gemeinsamer theoretischer Grundlagen unterscheiden sich die in Kapitel 3.3 dargestellten Unterrichtskonzepte in ihren daraus abgeleiteten didaktischen Schlussfolgerungen. Die zentralen Unterschiede bestehen in

a) einer unterschiedlichen Gewichtung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen bei der Strategievermittlung,
b) unterschiedlichen Sichtweisen auf die notwendige Eigenkonstruktion (Generierungsprozesse) der Strategien (informelle Strategien oder vorgegebene Prozeduren),
c) der mit diesem Punkt verbundenen Frage nach der notwendigen Schematisierung von Strategien (vgl. Abbildung 1, S. 78) sowie
d) unterschiedlichen Ansichten darüber, ob und falls ja, in welchem Maß Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten in der Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl von denselben Instruktionsbedingungen profitieren können wie leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler.

Exkurs zur Verwendung des Begriffs „konstruktivistisch" in der Literatur

Der wissenschaftliche Diskurs über die Effizienz unterschiedlicher Instruktionsansätze konzentriert sich in der pädagogisch-psychologischen Literatur zumeist auf den Aspekt der notwendigen Strukturierung von Lerninhalten (Clark, 2009; Kirschner, Sweller & Clark, 2006; Kuhn, 2007; Schmidt, Loyens, Van Gog & Paas, 2007), welcher offenen Lernumgebungen in vielen Publikationen zur Cognitive-Load-Theorie abgesprochen wird. Dabei erfolgt in der Literatur zur Cognitive-Load-Theorie häufig eine Gegenüberstellung von Lernumgebungen, in denen Wissensinhalte entweder komplett von der Lehrperson vorgegeben werden oder unangeleitet von den Lernenden selbst generiert werden müssen. Dies wird an folgendem Zitat deutlich:

> *While the procedures have differing titles depending on the era of their popularity (discovery learning, problem-based learning, inquiry learning, constructivist learning amongst others) it is not possible to distinguish between them and they should be considered as essentially identical. All assume that information should be withheld from learners during instruction (Sweller, 2009a).* (Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011, S. 11–12)

Im folgenden Kapitel 4.2 wird im Zusammenhang mit der Cognitive-Load-Theorie der Begriff „Problemlösen" (problem solving) wie von den Vertretern der CLT verwendet und beschreibt alle Instruktionsformen, die nicht auf eine ausschließlich explizite Wissensvermittlung gründen.

Vertreter der Cognitive-Load-Theorie bemängeln an problemlösenden Instruktionsansätzen, dass Schülerinnen und Schüler – insbesondere des unteren Leistungsniveaus – durch die fehlende Vermittlung von prozeduralem Wissen bzw. die fehlende Automatisierung relevanter Schemata mit einer Fülle an Informationen konfrontiert werden, welche sie selbst strukturieren müssen (Clark, 2009; Kirschner et al., 2006; Kuhn, 2007; Schmidt et al., 2007). Auf den Aspekt der kognitiven Überlastung wird in Kapitel 4.2 im Kontext der Cognitive-Load-Theorie eingegangen. Nicht alle reformorientierten Unterrichtsansätze negieren jedoch die Notwendigkeit, Strategien früher oder später im Lernprozess zu prozeduralisieren. Wie Baroody (2012) betont, liegt dem *Investigative Approach* eine moderate konstruktivistische Grundhaltung zugrunde, in welcher das Einüben von Prozeduren als wichtig erachtet und damit der Vermittlung von prozeduralem Wissen kein geringerer Wert als dem Aufbau von Verständniswissen zugesprochen wird. Dabei wird berücksichtigt, dass nicht sämtliche Prozeduren von allen Schülerinnen und Schülern selbst entdeckt werden können, sondern teilweise auch vorgegeben werden müssen (Baroody, 2012; Geary, 1996). Reusser (2000) spricht in diesem Kontext von wissensbasiertem Konstruktivismus, der durch einen strukturierten Aufbau sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen fördert und somit den Schemaerwerb unterstützt.

> *Only under intelligent support structures, where teachers act as structural and procedural role models, as domain experts, scaffolds and learning coachs [sic] – more generally, as impulse-givers and facilitators of learning – can (co-)constructive learning of nondisabled children as well as of children located in the lower segments of mathematical performance be expected to be productive.* (S. 18)

Die reformorientierten Strategieerwerbskonzepte unterscheiden sich in ihren Vorstellungen darüber, ob informelle Strategien in alltagsrelevanten Kontexten durch ihre Verknüpfung mit Grundvorstellungen besser erworben werden können und wie stark informell erworbene Strategien durch die Lehrperson strukturiert werden müssen.

Das Spannungsverhältnis zwischen der Entdeckung eigener Rechenwege und deren Schematisierung durch die Lehrperson wird in Abbildung 1 dargestellt, welche an eine Graphik von Reusser (2006) zur Öffnung und Begrenzung eigener Lernwege angelehnt ist. Das Maß an Steuerung durch die Lehrperson ist dabei maßgeblich mit den vier Merkmalsausprägungen (vgl. S. 76) der unterschiedlichen mathematikdidaktischen Strategieerwerbsansätze konfundiert. Für die unterrichtliche Gestaltung zwischen dem Problemstellungsraum und dem Lösungsraum einer Aufgabe (horizontale Ausrichtung der Graphik) existieren verschiedene unterrichtliche Realisierungsmöglichkeiten, welche sich im Grad der Öffnung für individuelle Bearbeitungswege der Schülerinnen und Schüler unterscheiden bzw. auch darin voneinander abweichen, wie sehr der Lösungsraum anschließend durch die Lehrperson begrenzt wird, indem individuelle Lösungswege schematisiert werden (vertikale Ausrichtung der Graphik).

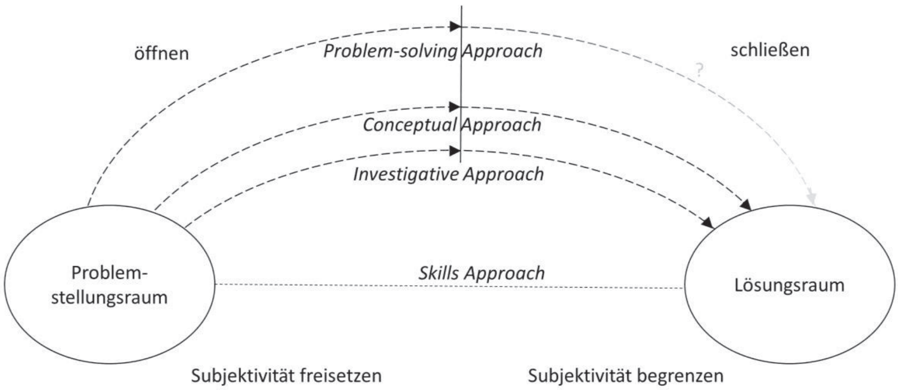


Abbildung 1: Instruktionsansätze im Mathematikunterricht (adaptiert nach Reusser, 2006, S. 166)

Bezugnehmend auf die in Kapitel 3.3 vorgestellten Strategieerwerbskonzepte steht der *Skills Approach* (bei Reusser „Lehrpfad für alle“) im Zentrum der Abbildung und ist dadurch gekennzeichnet, dass keine eigenen Rechenwege der Schülerinnen und Schüler möglich sind, da der Bearbeitungsweg vorgegeben ist. Kritik am *Problem-solving Approach* besteht, wie oben bereits dargestellt, darin, dass der Lösungsraum zu wenig oder nicht begrenzt wird (d. h. unter Umständen der rechte Teil der Graphik komplett fehlt). Sowohl der *Conceptual Approach* als auch der *Investigative Approach* berücksichtigen jedoch beide in der Graphik dargestellten Komponenten des Erwerbsprozesses und ermöglichen zunächst eine individuelle Auseinandersetzung mit dem gestellten Problem auf vielfältigen Wegen, welche dann von der Lehrperson prozeduralisiert und schematisiert werden.

Der Aspekt der mangelnden Strukturierung und damit verbundenen möglichen kognitiven Überlastung wird im folgenden Kapitel zur Cognitive-Load-Theorie vertiefend dargestellt.

4.2 Die Cognitive-Load-Theorie

Um die Effektivität unterschiedlicher Instruktionsansätze beurteilen zu können, ist die Kenntnis über kognitive Strukturen und Prozesse unverzichtbar. Eine zentrale kognitionspsychologische Theorie, die mentale Prozesse und die Bedingungen für eine optimale Lerngestaltung fokussiert, stellt die Cognitive-Load-Theorie von Paul Chandler und John Sweller dar (Chandler & Sweller, 1991; Sweller et al., 2011). Die Theorie wird seit den 1990er Jahren auf Basis aktueller wissenschaftlicher Erkenntnisse stetig erweitert. Im Folgenden werden zunächst die zentralen Grundannahmen der Theorie erläutert. Im Anschluss daran werden Kritikpunkte, Erweiterungen der Theorie sowie Implikationen für die in Kapitel 3.3 beschriebenen mathematikdidaktischen Instruktionsansätze zur Förderung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl dargestellt.

4.2.1 Die klassische Cognitive-Load-Theorie

Sweller et al. (2011) nehmen eine Unterscheidung zwischen primärem biologischen Wissen und sekundärem biologischen Wissen vor, die auf Geary (1995, 2007) zurückgeht. Primäres biologisches Wissen bezeichnet Wissen, das intuitiv ohne äußere Instruktion erworben werden kann, während sekundäres biologisches Wissen mithilfe expliziter Instruktion gelernt werden muss. Schulische Lerninhalte gehören nach dieser Definition zur Wissensgruppe zweiter Ordnung, auf welche sich auch die Cognitive-Load-Theorie (im Folgenden mit CLT abgekürzt) bezieht.

Die CLT orientiert sich an kognitiven Strukturen und Funktionsweisen. Aus diesen kann abgeleitet werden, welche Instruktionsmaßnahmen mit kognitiven Prozessen vereinbar sind und welche zu einer Überlastung der Lernenden führen können. Arbeits- und Langzeitgedächtnis bilden die Schaltstellen für den Lernprozess. Während im Arbeitsgedächtnis nur eine begrenzte Anzahl an Informationen verarbeitet wird, können aus dem Langzeitgedächtnis nahezu unbegrenzte Mengen an Informationen abgerufen werden. Nach der CLT sind Schemabildung und -automatisierung die zentralen Mechanismen des Lernens, da durch Lernprozesse die kognitive Belastung im Arbeitsgedächtnis verringert werden kann, indem zuvor einzelne, nicht bekannte Elemente miteinander verknüpft werden. Dadurch kann ein neues, einzelnes und zusammenhängendes Element gebildet werden, das zukünftig aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden kann. Lernen kann somit durch Veränderungen im Langzeitgedächtnis in Form von kognitiven Schemata beschrieben werden. Das Initiieren von Veränderungsprozessen, die zum Schemaerwerb beitragen, stellt somit die Anforderung eines jeden Instruktionsansatzes dar. Eine wesentliche Kritik an reformorientierten Unterrichtsansätzen besteht gemäß der CLT vor allem darin, dass die begrenzte Aufnahmefähigkeit des Arbeitsgedächtnisses in diesen Unterrichtsansätzen oft unzureichend berücksichtigt wird (Kirschner et al., 2006; Sweller et al., 2011).

Sweller et al. (2011) unterscheiden bei der Belastung des Arbeitsgedächtnisses die drei Komponenten *Intrinsic Load*, *Extrinsic Load* und *Germane Load*, welche durch Instruktionsbedingungen sowohl günstig als auch ungünstig beeinflusst werden können.

Der *Intrinsic Load* beschreibt die Interaktivität der Elemente, d. h. die Komplexität des Lerngegenstandes (Sweller et al., 2011). Dabei bestimmt insbesondere die Expertise, was als einzelnes Element angesehen wird (Kirschner et al., 2006; Sweller et al., 2011). Dies bedeutet, dass eine Aufgabe für Lernende mit geringem Vorwissen einen hohen *Intrinsic Load* darstellen kann, da viele neue Informationen miteinander verknüpft werden müssen, während die Informationen für Lernende mit hohem Vorwissen bereits bekannt sind und als ein einzelnes Element aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Für eine konkrete Aufgabe und einen klar bestimmten Wissensstand ist der *Intrinsic Load* hingegen nicht variabel, sondern allein durch die Komplexität des Lerngegenstandes bestimmt.

Der *Extrinsic Load* wird in der klassischen CLT nicht durch die Komplexität des Lerngegenstandes selbst bestimmt, sondern durch die Instruktionsbedingungen verursacht (Sweller & Chandler, 1994; Sweller et al., 2011). Damit sind insbesondere Darstellungselemente oder Aktivitäten gemeint, die für den Lernprozess irrelevant sind und weder Automatisierungsprozesse unterstützen noch zur Schemabildung beitragen (Schnotz & Kürschner, 2007). Der *Extrinsic Load* sorgt folglich dafür, dass weniger Kapazitäten vorhanden sind, um den *Intrinsic* und/oder *Germane Load* zu verarbeiten. Er sollte daher so weit wie möglich minimiert werden.

Die dritte Belastungskomponente stellt der *Germane Load* dar. Er bezeichnet kognitive Aktivitäten, die für Veränderungen im Langzeitgedächtnis und somit für Schemabildung verantwortlich sind. Der *Germane Load* hängt mit dem *Intrinsic Load*, d. h. der Komplexität des Lerngegenstandes zusammen. Die klassische CLT postuliert, dass der *Germane Load* so hoch wie möglich sein sollte. Nach Sweller et al. (2011) sind die drei Belastungskomponenten additiv.

Direkte Instruktion bezeichnet gemäß Sweller et al. (2011) die Vermittlung von sowohl konzeptuellem und prozeduralem Wissen als auch benötigten Lernstrategien, sodass der Lerngegenstand vollständig erschlossen werden kann. Durch direkte Instruktion wird die Belastung des Arbeitsgedächtnisses beim Wissenserwerb so gering gehalten, dass die relevanten Informationen verarbeitet werden können und zu Veränderungen im Langzeitgedächtnis führen. Demnach sind entdeckendes Lernen, problemlöseorientiertes Lernen und alle konstruktivistisch-orientierten Ansätze, die sich Sweller et al. (2011) zufolge nur namentlich, nicht jedoch in ihren lerntheoretischen Annahmen unterscheiden, mit den Grundgedanken der klassischen CLT unvereinbar. Die Annahmen der CLT und ihr Plädoyer für direkte Instruktion richten sich gemäß Kirschner et al. (2006) nicht gegen die konstruktivistische Lerntheorie, sondern vielmehr gegen die daraus abgeleiteten didaktischen Vermittlungskonzepte. Aus kognitionspsychologischer Sicht werden die Lernenden durch die geringere Strukturierung mit einer Fülle an Informationen belastet, aus welchen die relevanten herausgefiltert werden müssen. Diese Vorgehensweise ist nach Kirschner et al. (2006) nicht kongruent mit den Erkenntnissen der CLT. Besonders Lernenden mit geringem Vorwissen mangele es an ausgebildeten Schemata, um das neue Wissen integrieren zu können (Kirschner et al., 2006).

Unterschiede im Vorwissen verursachen Unterschiede in den drei Komponenten des *Cognitive Loads* und somit auch im Lernzuwachs. Die Theorie dient als Grundlage, um die Effektivität verschiedener Instruktionsansätze in Abhängigkeit vom Vorwissen zu erklären. Während direkte Instruktion bei geringem Vorwissen als weitere externe Gedächtnis“exekutive“ dienen kann und auf diese Weise das Arbeitsgedächtnis entlastet, dreht sich dieser Effekt ab einem bestimmten Vorwissensstand um, da die Informationen redundant sind. D. h. Informationen, die bereits aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können, werden zusätzlich von der Lehrperson präsentiert und erzeugen einen *Extrinsic Load*. Dies wird von Sweller als sogenannter *Expertise Reversal Effect* bezeichnet. Dieser wird herangezogen, um Forschungsbefunde zu erklären, nach denen sich bei Schülerinnen und Schülern mit geringem Vorwissen Vorteile für eine stark strukturierte Lernumgebung zeigten, während Schülerinnen und Schüler mit höherem Vorwissen von weniger strukturierten Lernumgebungen mindestens gleichermaßen wie von stärker strukturierten Lernumgebungen profitieren konnten.

Zu beachten ist, dass Vertreter der klassischen Cognitive-Load-Theorie konstruktivistisch-orientierte Instruktionsansätze mit hochgradig offenen und unangeleiteten Lernumgebungen gleichsetzen, in denen ein Maximum an selbstgesteuertem Lernen von den Schülerinnen und Schülern verlangt wird (vgl. S. 76). Dies zeigt exemplarisch das folgende Zitat von Kirschner et al. (2006):

> *The minimally guided approach has been called by various names including discovery learning (Anthony, 1973; Bruner, 1961); problem-based learning (PBL; Barrows & Tamblyn, 1980; Schmidt, 1983), inquiry learning (Papert, 1980; Rutherford, 1964), experiential learning (Boud, Keogh, & Walker, 1985; Kolb & Fry, 1975), and constructivist learning (Jonassen, 1991; Steffe & Gale, 1995).* (S. 75)

Was die verschiedenen mathematikdidaktischen Ansätze anbelangt, die im Zentrum der vorliegenden Arbeit stehen, so lässt sich konstatieren, dass der instruktionalen Unterstützung für das Gelingen aktiver Konstruktionsprozesse aufseiten der Schülerinnen und Schüler zumeist eine hoher Stellenwert beigemessen wird (vgl. Kap. 3.2). Zugleich lassen die Befunde einiger Studien zum problemlösenden Ansatz darauf schließen, dass die instruktionale Steuerung der Lernprozesse dort eine vergleichsweise geringere Rolle spielt (vgl. Kap. 3.4.2).

Wie Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) zusammenfassend in ihrer Metaanalyse darstellen, wirken sich offene Unterrichtskonzepte, die mit wenig Lehrerlenkung einhergehen, im Vergleich zu gelenkteren Instruktionsformen negativ auf den Lernprozess aus. Zugleich waren offene Unterrichtskonzepte mit instruktionaler Unterstützung anderen Unterrichtsformen in ihrer Lernwirksamkeit überlegen.

Weitere Einflussfaktoren auf den Lernprozess, wie beispielsweise motivationale und affektive Faktoren, werden in der klassischen Cognitive-Load-Theorie lediglich im Zusammenhang mit dem Schwierigkeitsgrad und der motivationsfördernden Gestaltung des *Germane Loads* berücksichtigt (Kalyuga, 2011).

Den Vorteil, der in vielen Studien für Experten oder leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler in problemlöseorientierten Lernbedingungen nachgewiesen werden konnte, erklären Kirschner et al. (2006) mit dem Rückgriff auf im Langzeitgedächtnis gespeicherte Erfahrung. Dies lässt sich jedoch nicht mit einer mathematikdidaktischen Definition von Problemlösen vereinbaren, da Problemlösen dort ein reines Abrufen und Anwenden von

Prozeduren ausschließt und stattdessen ein mehrschrittiges Vorgehen beschreibt, bei dem Prozeduren und bekannte Strategien zwar notwendig, aber nicht unmittelbar zielführend sind (vgl. Kap. 3.3.4). Anzumerken ist hierbei, dass die Autoren in Veröffentlichungen zur CLT im Zusammenhang mit der direkten Instruktion häufig das Lernen durch Lösungsbeispiele anführen. Wie der aktuelle Forschungsstand zeigt, sind es vielmehr einzelne Faktoren, welche zur aktiven Auseinandersetzung mit Lösungsbeispielen anregen und nicht allein die vollständige Präsentation prozeduraler Lösungswege. Beispielsweise können Selbsterklärungen dazu beitragen, dass der Lerneffekt noch verstärkt wird (zusf. Renkl, 2014).

Wie das folgende Zitat veranschaulicht, sollte das Lernen aus Lösungsbeispielen nach der klassischen CLT so angeleitet werden, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst möglichst viele Gelegenheiten zur Schemaautomatisierung erhalten, bevor die erworbenen Schemata von den Schülerinnen und Schülern eingesetzt werden (z. B., indem unvollständige Lösungsbeispiele bearbeitet werden):

> *Asking students to problem solve, particularly those learning new concepts and procedures (novices in the domain), creates an extraneous cognitive load that is detrimental to learning. Instead there should be a systematic process of using worked examples in the sense that worked examples should be programmed to include the alternation strategy (or a guidance fading strategy dicussed in Chapter 13) and consist of extensive practice prior to solving sets of problems unaided.* (Sweller et al., 2011, S. 108)

Die individuelle Arbeitsgedächtniskapazität wurde in vielen Studien als Einflussfaktor auf die Strategiewahl beschrieben (Imbo & Vandierendonck, 2007; LeFevre et al., 2013) und in diesem Zusammenhang als mögliche Ursache für die Leistungsdiskrepanz zwischen leistungsschwächeren und -stärkeren Schülerinnen und Schülern gesehen (Geary, Hoard & Nugent, 2012; Heine & Jacobs, 2011; Imbo & Vandierendonck, 2007; LeFevre et al., 2013; Lemaire & Lecacheur, 2011; Mabbott & Bisanz, 2003, 2008; Threlfall, 2009; Van der Ven, Boom, Kroesbergen & Leseman, 2012).

In der Längsschnittstudie von LeFevre et al. (2013) wurde der Einfluss der zentralen Exekutive als Bestandteil des Arbeitsgedächtnisses auf den Erwerb von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 20 untersucht. Die Testungen wurden zu zwei Messzeitpunkten (Klasse 2/3, Klasse 3/4) durchgeführt. Es zeigt sich, dass die zentrale Exekutive ein Prädiktor für die Ausprägung des mathematischen Wissens und der prozeduralen Flüssigkeit darstellt. Für die Automatisierung des kleinen Einspluseins/Einsminuseins ist folglich Arbeitsgedächtniskapazität notwendig und individuelle Unterschiede in der Arbeitsgedächtniskapazität können daher als wichtiges Kriterium für die Erklärung von Unterschieden in mathematischem Wissen und prozeduraler Fertigkeit dienen. Gleichzeitig konnte in der Studie kein Einfluss der zentralen Exekutive auf den Lernzuwachs nachgewiesen werden, sodass Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlicher Arbeitsgedächtniskapazität innerhalb verschiedener Fähigkeitsniveaus einen vergleichbaren Lernzuwachs erzielen können.

Auch in der Studie von Van der Ven et al. (2012), die in Kapitel 4.4 ausführlicher vorgestellt wird, konnte zwar ein genereller Einfluss des Arbeitsgedächtnisses auf die Verwendung von Multiplikationsstrategien, nicht jedoch auf den Lernzuwachs selbst festgestellt werden.

Zusammengefasst, deuten die Befunde von LeFevre et al. (2013) und Van der Ven et al. (2012) folglich darauf hin, dass die Arbeitsgedächtnisleistung zwar Unterschiede in den mathematischen Fähigkeiten (insbesondere im prozeduralen Wissen) der Schülerinnen und Schüler erklärt, zugleich aber – ausgehend von diesen unterschiedlichen Ausgangsbedingungen – alle Schülerinnen und Schüler einen ähnlichen Lernzuwachs verzeichnen können.

Im Folgenden werden Kritikpunkte an der klassischen CLT sowie die Modifikation dieser Theorie nach Schnotz und Kürschner (2007) dargestellt.

4.2.2 Erweiterung der Cognitive-Load-Theorie

Die Beschreibung problemlöseorientierter Ansätze in der klassischen CLT verdeutlicht, dass diese mit einer radikalkonstruktivistischen Unterrichtsgestaltung gleichgesetzt werden. Das bei Sweller et al. (2011) beschriebene Bild eines völlig unangeleiteten Unterrichts entspricht jedoch nicht moderat-konstruktivistischen Instruktionsansätzen (Pauli, Reusser & Grob, 2010; Schmidt et al., 2007). Vielmehr ist ein konstruktivistisch-orientierter Unterricht nicht zwangsläufig an ein bestimmtes Inszenierungsmuster gebunden und kann somit auch in einem stärker lehrerzentrierten Unterricht realisiert werden. Dabei hängt das Maß an Strukturierung und Öffnung einzelner Unterrichtsphasen in hohem Maße vom Lernziel ab. Auch Kuhn (2007) hebt hervor, dass der Wissenserwerb im Hinblick auf unterschiedliche Lernziele verglichen werden muss und problemlöseorientierter Unterricht insbesondere auf den Erwerb beweglichen Wissens abzielt, das auf neue Kontextsituationen übertragen werden kann. Durch Scaffolding und Fading in problemlöseorientierten Ansätzen soll der *Extrinsic Load* gesenkt werden (z. B. Sammeln von Vorwissen, Suche nach Analogien, Reflexionsprozesse, etc.). Insbesondere metakognitive Lernprozesse dienen im problemlöseorientierten Ansatz dazu, den *Extrinsic Load* zu verringern, indem der Lernprozess, angewendete Strategien und das erworbene Wissen reflektiert werden.

Bei Schnotz und Kürschner (2007) findet man eine Erweiterung der Cognitive Load Theorie, in der die Zusammenhänge der drei Belastungskomponenten und eine mögliche Einflussnahme durch Instruktionsbedingungen differenzierter erläutert werden. Schnotz und Kürschner (2007) nehmen im Gegensatz zu Sweller an, dass sekundäres Wissen auch implizit erworben werden kann und keiner direkten Instruktion bedarf. Entgegen der klassischen CLT gehen die Autoren zudem davon aus, dass die Belastung des Arbeitsgedächtnisses nicht per se gesenkt werden sollte, sondern eine differenzierte Betrachtungsweise erforderlich ist, die im Folgenden skizziert wird.

Nach Sweller et al. (2011) wird die Gesamtbelastung des Arbeitsgedächtnisses durch den *Intrinsic Load* und den *Extrinsic Load* bestimmt. Freie Arbeitsgedächtnisressourcen können zur Verarbeitung des *Germane Loads* genutzt werden, der verantwortlich für Lernprozesse ist und mit dem *Intrinsic Load* zusammenhängt. Schnotz und Kürschner (2007) plädieren dafür, den *Intrinsic Load* an den jeweiligen Lernstand anzupassen und ihn ggf. auch zu erhöhen. Der *Intrinsic Load* sollte demnach so gestaltet werden, dass er Vygotskis theoretischem Modell der Zone der proximalen Entwicklung entspricht (Vygotsky, 2002; vgl. Kap. 4.1). Eine Vereinfachung der Aufgaben ist demnach nur dann sinnvoll, wenn der Schwierigkeitsgrad einer zuvor nicht oder nur mit hoher Anstrengung lösbaren Aufgabe gesenkt werden kann. Dabei sind zwei Fälle suboptimaler Aufgabenpassung denkbar. Bei Novizen würde eine Aufgabe, deren Schwierigkeitsniveau oberhalb der Zone der proximalen Entwicklung angesiedelt ist, aufgrund des hohen *Intrinsic Loads* das Arbeitsgedächtnis so überlasten, dass weder Schemaerwerb noch die Umstrukturierung bereits erworbener Schemata möglich ist. Liegt der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe hingegen auf einem Reproduktionsniveau, können adäquate Schemata aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen und zur Aufgabenlösung herangezogen werden. In diesem Fall blieben die Ressourcen im Arbeitsgedächtnis für den Lernprozess folglich ungenutzt. Optimal ist eine moderate Auslastung des Arbeitsgedächtnisses, bei welcher der *Intrinsic Load* vom Arbeitsgedächtnis bewältigt werden kann und eine kognitive Beschäftigung mit einem zusätzlichen *Germane Load* noch möglich ist. Dies kann durch die Passung zwischen Aufgabe und Lernstand erreicht werden. Mit der vom Vorwissen abhängigen unterschiedlichen Auslastung des Arbeitsgedächtnisses wird auch der *Expertise Reversal Effect* (S. 81) erklärt, denn Wissenserwerb kann nur dann erfolgen, wenn Operationen im Arbeitsgedächtnis vorausgehen.

Germane Load und *Intrinsic Load* hängen nach Schnotz und Kürschner (2007) eng miteinander zusammen, da es bei niedrigem *Intrinsic Load* gar nicht möglich ist, vertieft über Zusammenhänge nachzudenken. Schnotz und Kürschner (2007) weisen darauf hin, dass die Lernumgebung zwar eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Initiierung von Lernprozessen darstellt, da frei gewordene Gedächtniskapazitäten nicht zwingend in gewünschter Weise für den *Germane Load* genutzt werden. Sowohl motivationale Aspekte als auch metakognitive Strategien spielen hierbei eine Rolle (Schnotz & Kürschner, 2007). Auch in der klassischen CLT beschreiben Kirschner et al. (2006), dass der *Expertise Reversal Effect* darauf zurückzuführen sein könnte, dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler in unstrukturierten Lernumgebungen besser Lernstrategien erwerben können als in stärker strukturierten Lernumgebungen. Folgende Aktivitäten fördern nach Schnotz und Kürschner (2007) die Nutzung des *Germane Load*s:

– *conscious application of learning strategies (i. e. strategies, which are not automated yet),*

- *conscious search for patterns in the learning material in order to deliberately abstract cognitive schemata (i. e. mindful abstraction) and create semantic macrostructures,*
- *restructuring of problem representations in order to solve a task more easily (i. e. by 'insight'),*
- *meta-cognitive processes that monitor cognition and learning.* (S.496)

Wie an den geschilderten Aktivitäten deutlich wird, ist die Nutzung freier Arbeitsgedächtnisressourcen insbesondere von selbstregulativen Fähigkeiten abhängig. In der Beschreibung möglicher Tätigkeiten, welche die Nutzung des *Germane Loads* fördern, zeigen sich Parallelen zum Unterrichtsmerkmal der kognitiven Aktivierung. Unter diesem Konstrukt wird die unterrichtliche Anregung zu einer vertieften Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand verstanden (zusf. Lipowsky, 2015).

Im Zusammenhang mit individuellen Lernvoraussetzungen, einem unterschiedlichen Maß an instruktionaler Anleitung und der mit beiden Aspekten verknüpften Arbeitsgedächtniskapazität kann auch der Generierungseffekt eingeordnet werden, der im folgenden Abschnitt skizziert wird.

Der Generierungseffekt

In verschiedenen Experimenten konnte nachgewiesen werden, dass selbst generiertes Wissen besser als vorgegebenes Wissen behalten werden kann. So konnten Probanden in Experimenten zur Generierung von Wörtern (McElroy & Slamecka, 1982; Slamecka & Graf, 1978) diese besser erinnern, wenn sie diese selbst konstruiert hatten, als wenn sie die Wörter nur gelesen hatten. Der Generierungseffekt zeigte sich mit einer mittleren bis hohen Effektstärke auch in anderen Experimenten in verschiedenen Anwendungsbereichen (Bertsch, Pesta, Wiscott & McDaniel, 2007). Die Ergebnisse der Metastudie von Bertsch et al. (2007) weisen jedoch darauf hin, dass die Effekte für intentionales Lernen deutlich geringer ausfallen als für inzidentelles Lernen. Der Generierungseffekt wird neben dem verteilten Lernen, dem verschachtelten Lernen und dem Testungseffekt auch als wünschenswertes (Lern)erschwernis (desirable difficulty) beschrieben (Dunlosky, Rawson, Marsh, Nathan & Willingham, 2013). Darunter werden verschiedene instruktionale Maßnahmen zusammengefasst, die kurzfristig den Lernprozess erschweren, jedoch langfristig zu nachhaltigerem Lernerfolg führen (Lipowsky, Richter, Borromeo Ferri, Ebersbach & Hänze, 2015).

Da die korrekte Wissensgenerierung zentral für die Wirksamkeit dieses Effekts ist, bleibt unklar, ob bzw. unter welchen Umständen sich dieser auch auf komplexere Lernmaterialien anwenden lässt. Chen, Kalyuga & Sweller (2015, 2016) konnten für den mathematischen Wissenserwerb von Sekundarschülerinnen und -schülern einen Zusammenhang zwischen der Elementinteraktivität *(Intrinsic Load)* und dem Erfolg des Generierungseffekts herstellen. So weisen viele Studien, die Vorteile für den Generierungseffekt im Vergleich zu einem eher rezeptiven Lernen zeigen konnten, eine geringe Elementinteraktivität auf (z. B. die Generierung von Wörtern, indem das Gegenwort vorgegeben wurde). Chen et al. (2015, 2016) gehen in ihren Studien der Frage nach, unter welchen Voraussetzungen bezüglich des Vorwissens (geringes/hohes Vorwissen) und der Aufgabenanforderung (Materialien mit niedriger/hoher Elementinteraktivität) die Generierung von Informationen dem Lernen aus komplett vorgegebenen Lösungsbeispielen überlegen ist. Bezogen auf das Aufgabenmaterial konnte gezeigt werden, dass komplexe Lernmaterialien eine Anleitung benötigen und damit das Lernen aus Lösungsbeispielen dem Generieren von Informationen bei hohem *Intrinsic Load* in Wissenstests unmittelbar nach der Intervention überlegen ist (Chen et al., 2015, 2016). Bei den Lernmaterialien mit niedriger Elementinteraktivität wurde hingegen sowohl für Kurz- als auch für Langzeiteffekte ein Vorteil für die Wissensgenerierung festgestellt, da die zusätzliche Anleitung in den Lösungsbeispielen den *Extraneous Load* erhöht. Wurde zusätzlich zur Aufgabenanforderung auch das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler in die Analysen einbezogen, so ergab sich ein differenzierteres Ergebnis. Gemäß des *Expertise Reversal Effects* (S. 81) konnte nachgewiesen werden, dass ein hohes Vorwissen dazu führt, dass auch bei komplexeren Lernmaterialien wenig Anleitung benötigt wird und die Generierungsbedingung in diesem Fall dem Lernen aus Lösungsbeispielen überlegen ist. In der Studie von 2016 zeigten sich die Vorteile der Generierungsbedingung gegenüber einer Bedingung, die mit Lösungsbeispielen arbeitete, für Schülerinnen und Schüler mit hohem Vorwissen sowohl kurz- als auch langfristig, während diese Vorteile für Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen erst langfristig nachgewiesen werden konnten.

In der Studie von Rittle-Johnson und Kmicikewycz (2008), die sich mit dem Vorteil des Generierens für Drittklässler auseinandersetzte, konnten Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen (unteres Leistungsterzil in der Korrektheit im Vortest) in der Generierungsbedingung im Post- und Follow-up-Test besser abschneiden als in einer Bedingung, in der sie die Lösung direkt vom Taschenrechner ablesen konnten. Dabei ging es im Gegensatz zu den Studien von Chen et al. (2015, 2016) nicht um komplexeres prozedurales Wissen, sondern um den Abruf von Faktenwissen.

Insgesamt ist unklar, inwieweit die Generierung von Strategien insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler sowie Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen und komplexere Wissensanforderungen tatsächlich einer prozeduralen Strategievermittlung überlegen ist. Zudem bieten sich im regulären Mathematikunterricht unterschiedliche instruktionale Maßnahmen an, um die Wissensgenerierung bei komplexeren Lernmaterialien und/oder geringem Vorwissen zu erleichtern. Feedback (Metcalfe & Kornell, 2007), Scaffolding bei unvollständigen Lösungsbeispielen (Renkl, 2014) oder die Anregung zu Selbsterklärungen (Wylie & Chi, 2014) können dazu beitragen, die Komplexität des Lerngegenstandes zu reduzieren und den Fokus auf zentrale Lerninhalte zu richten. Statt wie bei klassischen Lösungsbeispielen komplette Prozeduren vorzugeben, können auf diese Weise zentrale Lerninhalte mit instruktionalen Hilfestellungen selbst entdeckt werden. Hierdurch wird die Elementinteraktivität reduziert und der *Intrinsic Load* gesenkt. Gleichzeitig werden durch instruktionale Unterstützungen Anreize geschaffen, sich intensiver mit dem Lerngegenstand auseinanderzusetzen, was den *Germane Load* erhöhen dürfte.

Wie Chen et al. (2016) zusammenfassend darstellen, erweisen sich die Vorteile des Generierungseffekts in verschiedenen Studien insbesondere langfristig.

Metakognitive Strategien, die mit der Nutzung des *Germane Loads* verknüpft sind, gelten als ein entscheidender Faktor bei der Strategieentwicklung. Der Zusammenhang zwischen metakognitiven Prozessen und ihrer Bedeutung für die Strategieentwicklung in unterschiedlichen Strategieerwerbskonzepten ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

4.3 Metakognition

Metakognitives Wissen wird in der mathematikdidaktischen Literatur neben konzeptuellem und prozeduralem Wissen, Zahlwissen sowie affektiven Faktoren als wesentlicher Einflussfaktor für die flexible und adaptive Strategiewahl auf der Individualebene genannt (vgl. Kap. 2.1). Metakognition wird darüber hinaus neben anderen Einflussfaktoren als bedeutend für die Unterschiede zwischen Novizen und Experten in ihrer Problemlösekompetenz angesehen (Blöte et al., 2000; Dowker, 2005; Feldon, 2007; Girash, 2014; Heirdsfield & Cooper, 2004; Schoenfeld, 1992). Metakognitive Strategien umfassen dabei die Planung, Überwachung und Bewertung eigener Lernprozesse (z. B. Hasselhorn et al., 2017).

Je nach theoretischer Konzeption mathematischer Strategieerwerbskonzepte werden unterschiedliche Aspekte metakognitiven Wissens als Einflussfaktoren auf die flexible und adaptive Strategiewahl angenommen (vgl. Kap. 3.3.5.1). In Ansätzen, die von einem Repertoire an Strategien ausgehen, müssen bewusst oder unbewusst Strategien ausgewählt werden, sodass metakognitive Planungsprozesse und konditionales Wissen über den Strategieeinsatz im Vordergrund stehen (*Welche Strategie aus dem individuellen Repertoire wird unter welchen Aufgabenbedingungen gewählt?*). So weisen die Ergebnisse der Studie von Torbeyns und Verschaffel (2013, 2016) darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler diejenigen Strategien aus ihrem Strategierepertoire verwenden, die zeiteffizient und korrekt zur Lösung führen (vgl. Kap. 3.4.1). Auch das Strategiewahlmodell basiert auf diesen Annahmen. In problemlöseorientierten Unterrichtsansätzen (Kap. 3.3.4) sind hingegen insbesondere metakognitive Kontroll- und Überwachungsprozesse (Monitoring-Fähigkeiten) bedeutsam (*Wie wird der Lösungsweg überwacht und ggf. während des Bearbeitungsprozesses reguliert?)*. Dort müssen einzelne Schritte des Lösungsprozesses gezielt an neue Aufgabenstellungen angepasst werden, ggf. Teilschritte revidiert und das Ergebnis auf dessen Plausibilität hin überprüft werden. Aber auch selbstregulative Fähigkeiten, welche über die metakognitiven Kompetenzen hinaus auch kognitive Strategien sowie motivationale und volitionale Faktoren umfassen, sind in problemlöseorientierten Instruktionsansätzen in höherem Maße notwendig als in stärker fertigkeitsorientierten Instruktionsansätzen. Selbstregulative Prozesse sind in der Grundschule noch geringer ausgeprägt als bei älteren Schülerinnen und Schülern, sodass eine stärkere instruktionale Unterstützung notwendig ist (Stöger, Sontag & Ziegler, 2009).

In verschiedenen Publikationen wird auf den engen Zusammenhang zwischen konzeptuellem Wissen/Zahlwissen und metakognitiven Kompetenzen hingewiesen (Lorenz, 2005; Rathgeb-Schnierer, 2006; Schütte, 2004). Hiebert und Lefevre (1986) nehmen an, dass konzeptuelles mathematisches Wissen die Monitoringfähigkeiten bei der Strategieauswahl und ihrer -ausführung beeinflusst. Auch Dowker (2005) weist auf den Zusammenhang von mathematischem Wissen und metakognitiven Fähigkeiten hin:

> *As always, association does not mean cause and it could be that better arithmetical performance is leading to better metacognition, rather than the other way around. Those who are more experienced at arithmetic may be better at monitoring their own strategy use; and some metacognitive skills such as predicting and evaluating results would seem to depend in part on such arithmetical abilities as estimation and number sense.* (Dowker, 2005, S. 169)

In den Schulungen zum Zahlenblick, welche insbesondere in problemlöseorientierten Unterrichtsansätzen zur Förderung halbschriftlicher Rechenstrategien implementiert sind (vgl. Kap. 3.3.4), werden in gewissem Sinne metakognitive Strategien vermittelt, da die Analyse von Zahl- und Aufgabeneigenschaften zu Planungs-, Überwachungs- und Evaluationsprozessen des eigenen Lösungsweges anregt. Erst durch Zahlwissen wird die Anpassung von bereits bekannten Prozeduren an neue Zahl- und Aufgabeneigenschaften, aber auch das Überschlagen von Ergebnissen, möglich.

Allgemein können die Reflexion und das adaptive Begründen eingesetzter Strategien als wesentliche mathematische Teilkompetenzen aufgefasst werden (vgl. Definition mathematischer Kompetenz nach Kilpatrick et al., 2001, S. 7):

> *Often a solution strategy will require fluent use of procedures for calculation, measurement, or display, but adaptive reasoning should be used to determine whether the procedure is appropriate. And while carrying out a solution plan, learners use their strategic competence to monitor their progress toward a solution and to generate alternative plans if the current plan seems ineffective.* (Dowker, 2005, S. 131)

Der Einfluss metakognitiver Kompetenzen beim Selbstbericht verwendeter Strategien ist auch bei der Einschätzung des Forschungsstandes zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl zu bedenken (vgl. Kap. 3.4). Wie bereits bei der Beschreibung der Studienergebnisse angemerkt wurde, haben Schülerinnen und Schüler in der Grundschule oft noch Schwierigkeiten, ihre Lösungswege zu verbalisieren (Cooper, Heirdsfield & Irons, 1995; Schütte, 2004). Unbewusst ablaufende Prozesse könnten erst im Nachhinein als bewusst getroffene Entscheidungen deklariert werden und auf diese Weise eine bewusste Strategiewahl suggerieren (Feldon, 2007; Threlfall, 2002, 2009).

Verbalisierte Rechenwege unterliegen darüber hinaus auch immer soziokulturellen Einflüssen, sodass der mental vollzogene und der berichtete Rechenweg unter Umständen nicht übereinstimmen, sondern letztgenannter sozial erwünscht oder zumindest vereinfacht dargestellt wird (Schütte, 2004). Insbesondere Befunde aus der Expertiseforschung zeigen, dass auch Experten nur einen Bruchteil der von ihnen verwendeten Lösungsschritte in einer späteren Beschreibung des Lösungsweges erwähnten (Feldon, 2007). In der Literatur wird deshalb angezweifelt, dass metakognitive Prozesse und Monitoringprozesse zwangsläufig bewusst ablaufen (Cary & Reder, 2002). Hierauf deuten auch die Ergebnisse einer Studie von Luwel et al. (2003) hin, in der Schülerinnen und Schüler die Anzahl eingefärbter Felder in einem quadratischen Gitternetz bestimmen sollten. Je nach Anzahl der eingefärbten Felder war deren Bestimmung durch eine Additionsstrategie oder eine Subtraktionsstrategie effizienter. Anhand der Lösungsgeschwindigkeit konnte in Abhängigkeit von der Anzahl der eingefärbten Felder ein Strategiewechsel der Schülerinnen und Schüler registriert werden. Zweit- und Sechstklässler konnten einerseits in einer Interviewsituation ihr strategisches Vorgehen bei der Bestimmung der eingefärbten Felder reflektieren, andererseits zeigte sich ebenso wie in anderen Studien eine Diskrepanz zwischen verwendeter und berichteter Strategie. Den Schülerinnen und Schülern beider Altersgruppen gelang es, ihren Strategiewechsel anhand von Aufgabenkriterien zu begründen, was auf metakognitives Bewusstsein schließen lässt. Die Beschreibung der Sechstklässler wurde dabei als etwas präziser als die der Zweitklässler eingeschätzt. Allerdings gaben die Schülerinnen und Schüler dabei häufiger an, die Subtraktion verwendet zu haben als dies die Lösungszeiten indizierten. Die Autoren geben als mögliche Erklärung an, dass die Subtraktion weniger automatisiert vorlag als die Addition und daher bewusster verarbeitet wurde, was die Wahrnehmung der eigenen Strategieverwendung verzerren könnte. In einer weiteren Studie von Luwel, Foustana, Papadatos und Verschaffel (2011) wurden Parameter der Strategiewahl (Strategierepertoire, Lösungszeit, Korrektheit, Adaptivität) in verschiedenen Leistungsgruppen, basierend auf der Leistung in einem Intelligenztest, an Siebtklässlern untersucht. Wie in der Studie von 2003 sollte die Anzahl eingefärbter Felder in einem quadratischen Gitternetz bestimmt werden. Zwischen den beiden Testungen erhielten die Schülerinnen und Schüler eine kurze Intervention, in der sie entweder Feedback zur Korrektheit der Lösungen oder Feedback zu den verwendeten Strategien erhielten. Im Vortest nutzen die Schülerinnen und Schüler der Leistungsgruppe mit hoher Intelligenz in mehreren Versuchen mit variierender Anzahl sowohl die Addition als auch die Subtraktion zur Bestimmung der eingefärbten Felder. Dieser Anteil war in der Gruppe mit durchschnittlicher Intelligenz geringer ausgeprägt und in der Gruppe mit niedriger Intelligenz nutzte keine/r der Schülerinnen und Schüler beide Strategien. In den Analysen zeigte sich ein signifikanter Interaktionseffekt für die Nutzung der Subtraktionsstrategie in Abhängigkeit vom Intelligenzniveau, d. h. Schülerinnen und Schüler mit hohen kognitiven Grundfähigkeiten verwendeten häufiger die Subtraktion als Lösungsstrategie. Dabei zeigte das Strategiefeedback einen positiven Einfluss auf die Nutzung der *direkten Subtraktion* im Posttest und erwies sich wirksamer als ein Feedback zum korrekten Ergebnis. Auch für die Adaptivität ergab sich ein Haupteffekt der Intelligenz, d. h. je höher die kognitiven Grundfähigkeiten ausgeprägt waren, desto besser war die Passung zwischen Strategienutzung und Aufgabenkriterien (Anzahl der eingefärbten Felder). Insgesamt profitierten die Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren kognitiven Fähigkeiten am meisten vom Strategiefeedback. Die Autoren führen die hohen Leistungen in allen getesteten Parametern in der Gruppe mit hoher Intelligenz auf mögliche höhere metakognitive Fähigkeiten und selbstregulatorische Fähigkeiten zurück, die jedoch in den anderen Gruppen durch Feedback zum Lösungsprozess weitgehend kompensiert werden konnten.

Insgesamt scheint ein Zusammenhang zwischen metakognitiven Strategien und der Entwicklung adaptiver und flexibler Rechenstrategien zu bestehen. Dabei ist jedoch unklar, ob metakognitive Planungsprozesse im Sinne einer Bewusstheit über das eigene Strategierepertoire und die Passung einzelner Strategien zu bestimmten Aufgabenkriterien (konditionales Strategiewissen) hilfreich sind oder ob vielmehr Stützstrategien für die Aufgabenbearbeitung (Zahlenblickschulung) zu einer verbesserten Selbstregulation und adaptiveren Strategiewahl führen.

Dabei ist, wie bereits im vorangegangenen Kapitel dargestellt wurde, auch entscheidend, inwieweit das Arbeitsgedächtnis für metakognitive und selbstregulatorische Prozesse genutzt werden kann oder ggf. bereits durch einen hohen *Intrinsic* und/oder *Extrinsic Load* belastet ist.

Auch das Strategiewahlmodell von Siegler, das Gegenstand des folgenden Kapitels ist, beschreibt metakognitive Mechanismen als Schlüssel zur adaptiven Anpassung bereits vorhandener Strategien.

4.4 Strategiewahlmodell nach Siegler: Simulationstheorien

Das Strategiewahlmodell *(Strategy Choice Model)* von Lemaire und Siegler (1995) wird in unterschiedlichen Bereichen herangezogen, um die Strategieentwicklung von Schülerinnen und Schülern zu erklären. Es wurde insbesondere für den Erwerb mathematischer Strategien entwickelt, jedoch als entwicklungspsychologisches Modell auch an anderen Phänomenen (wie bspw. den Problemlösekompetenzen von Kleinkindern) überprüft und basierend auf Computersimulationen weiterentwickelt.

Siegler (1996, 2006) selbst hebt hervor, dass die Bezeichnung *Strategy **Choice** Model* im Sinne bewusster Entscheidungsprozesse missverstanden werden könnte und es sich vielmehr um unbewusste Prozesse handelt. Im Strategiewahlmodell wird postuliert, dass dem Lernen drei zentrale Prozesse zugrunde liegen: Variabilität, Wahl und Veränderung (Siegler, 2006). Veranschaulicht werden diese Prozesse im *Overlapping Waves Model,* in welchem die Häufigkeiten verwendeter Strategien zu aufeinanderfolgenden Messzeitpunkten dargestellt sind und einen wellenartigen Prozess in der Nutzung unterschiedlicher Strategien abbilden. Grundlage des Modells ist, dass Strategieentwicklung kein stufenförmiger Prozess ist, sondern zu jedem Messzeitpunkt ein breites Repertoire an Strategien vorliegt, das sich nur langsam verändert (Shrager & Siegler, 1998).

Eine zentrale Annahme des Modells ist, dass Kinder bewusst oder unbewusst zwischen verschiedenen Strategien wählen. Dabei verwenden sie laut Siegler (2006) adaptive Strategien, sofern zur Effizienzbeurteilung des Lösungsweges ausschließlich individuelle Kriterien (wie die benötigte Lösungszeit und die Korrektheit) herangezogen werden. Eine weitere Modellannahme ist, dass die Strategiewahl durch Erfahrung adaptiver wird. Als adaptivste Strategie wird in den Modellen der Abruf automatisierten Wissens betrachtet. Mit Erfahrung ist die zunehmende Konfrontation mit Problemen gleicher oder ähnlicher Art gemeint – nicht jedoch zwangsläufig die gezielte instruktionale Strategieförderung.

Unter Variabilität wird verstanden, dass Veränderungen – sowohl Fortschritte als auch Rückschritte – als Zeichen von Lernprozessen gedeutet werden können. Dabei tritt Variabilität nicht nur zwischen den Personen oder zwischen verschiedenen Messzeitpunkten auf, sondern zeigte sich beispielsweise in der Studie von Siegler und Shrager (1984) auch intraindividuell bei der gleichen Aufgabe, die zum gleichen Messzeitpunkt mehrfach bearbeitet wurde.

In einer Studie von Van der Ven et al. (2012) wurde versucht, das *Overlapping Waves Model* von Siegler zu replizieren, indem die Variablen Strategiewahl, Korrektheit sowie das Arbeitsgedächtnis der Schülerinnen und Schüler in ein latentes Wachstumskurvenmodell aufgenommen wurden. Wie bei der Originalstudie von Lemaire und Siegler (1995) wurde das Modell anhand der Strategieentwicklung von Multiplikationsstrategien im zweiten Schuljahr überprüft. Während Lemaire und Siegler (1995) die Strategieentwicklung bei der Multiplikation (kleines Einmaleins) zu drei Messzeitpunkten während eines Jahres erhoben hatten, wurde in dieser Studie die Strategiewahl von 79 Schülerinnen und Schülern in einem Zeitraum über acht Schulwochen wöchentlich erfasst. Die verwendeten Strategien wurden kategorial kodiert. Darüber hinaus waren Aussagen über die Effizienz der Strategien möglich. Durch die latente Modellierung gelang es Van der Ven et al. (2012) die Strategiewahl als Funktion mathematischer Fähigkeiten darzustellen. Wie bei Sieglers Strategiewahlmodell kann an den Wachstumskurven in Abhängigkeit von der individuellen Fähigkeit die Wahrscheinlichkeit für die Nutzung einer Strategie abgelesen werden. Je ausgeprägter die latente Fähigkeit, desto wahrscheinlicher wird die Nutzung effizienter, fortgeschrittener Rechenstrategien. Es wurden zunächst zwei separate Modelle für die Strategiewahl und die Korrektheit erstellt. In einem weiteren Schritt wurden die beiden Modelle kombiniert und das Arbeitsgedächtnis als Prädiktor für die mittlere Fähigkeit und den Zuwachs im Untersuchungszeitraum in das Modell aufgenommen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die effiziente Strategiewahl und die Korrektheit zusammenhängen. Schülerinnen und Schüler mit höherer Arbeitsgedächtniskapazität verfügten zwar im Mittel über bessere Fähigkeiten in der Strategiewahl und der Korrektheit, jedoch ließ sich wie in der

Studie von LeFevre et al. (2013) (vgl. Kap. 4.2.1) kein Einfluss des Arbeitsgedächtnisses auf den Lernzuwachs in beiden Variablen feststellen. Die Befunde zeigen, dass Schülerinnen und Schüler mit geringerer Arbeitsgedächtniskapazität weniger effiziente Strategien nutzen und eine zeitlich verzögerte Entwicklung im Vergleich zu Schülerinnen und Schülern mit höherer Arbeitsgedächtnisleistung aufweisen. Insgesamt gehen die Autoren jedoch von einer adaptiven Strategiewahl aus, da der Zusammenhang zwischen der Korrektheit und der effizienten Strategiewahl im Modell bestätigt wurde. Van der Ven et al. (2012) sehen in der Modellierung der Strategiewahl die Bestätigung des *Overlapping Waves Model*. Da sich jedoch eine niedrige Arbeitsgedächtnisleistung negativ auf die Korrektheit auswirkt und somit dazu führt, dass auch Fehlstrategien genutzt werden, besteht eine Einschränkung in der Gültigkeit des Modells. Die Autoren führen hierzu an, dass weitere Studien zum kausalen Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtnisleistung, Korrektheit und Strategiewahl notwendig sind.

Die Computersimulationen *ASCM (Adaptive Strategy Choice Model)* und in der Weiterentwicklung die Simulation *SCADS (Strategy Choice and Discovery Simulation)* wurden in der Arbeitsgruppe um Siegler entwickelt, um eigene Studienergebnisse zur Entdeckung von Rechenstrategien im Grundschulalter nicht nur zu replizieren, sondern mit ihrer Hilfe auch Mechanismen des Strategieerwerbs identifizieren zu können. Dies bedeutet, dass durch die Simulationen herausgefunden werden sollte, welche Faktoren dazu führen, dass Strategien weiterentwickelt oder durch neue, effizientere Strategien ersetzt werden. Die Simulationen basieren auf Theorien zum assoziativen Lernen und Informationsverarbeitungstheorien. Die Datengrundlage für die Simulationen stammt sowohl aus einer Studie zur Entdeckung von Additionsstrategien im Vorschulalter (Siegler & Robinson, 1982) als auch aus einer Studie zur Entdeckung der Inversion bei Zweitklässlern (Siegler & Stern, 1998). In der Studie von Siegler und Stern (1998) zur Inversion zeigte sich, dass 13 von 16 Kindern der Stichprobe die dort erfassten Strategien in derselben Reihenfolge ohne instruktionale Beeinflussung entdeckten.

Während das Simulationsmodell *ASCM* zwar schnellere und korrektere Antworten produzieren und Strategien durch assoziative Mechanismen auf ähnliche Aufgaben übertragen konnte, wurden in *SCADS* zusätzlich metakognitive Lernmechanismen integriert. Dadurch konnten auch neue Strategien generiert werden (Shrager & Siegler, 1998). Die Computersimulation *SCADS* bricht bestehende Strategien erst dann ab, wenn die Strategie korrekt ausgeführt und so schnell ausgeführt wird, dass der Prozess unterbrochen werden kann und genügend Arbeitsgedächtniskapazität für die Generierung neuer Strategien zur Verfügung steht (Siegler & Araya, 2005) (vgl. Kap. 4.2). Dies bedeutet konkret, dass eine im Strategierepertoire vorhandene Strategie erst dann durch eine neue, effizientere Strategie ersetzt werden kann, wenn die zuerst vorhandene Strategie durch erfolgte Automatisierungsprozesse schnell und korrekt ausgeführt werden kann, sodass neue Arbeitsgedächtnisressourcen frei sind.

Nach Siegler (2007) kann sich der Lernzuwachs in den vier Komponenten a) Erlernen neuer Strategien, b) gehäufte Verwendung der fortgeschritteneren Strategien im eigenen Strategierepertoire, c) schnellere Ausführung der Strategien oder d) verbesserte Wahl zwischen den Strategien (flexiblere Wahl) äußern.

Wie in Kapitel 2.1 dargestellt, werden individuelle, aufgabenbezogene und soziokulturelle Einflussfaktoren für die Entwicklung der flexiblen/adaptiven Strategiewahl unterschieden. In Sieglers Simulationsmodellen wird nur auf die individuellen Einflussfaktoren eingegangen, da die Strategiewahl als eine natürliche Entwicklung betrachtet wird, die keiner instruktionalen Förderung bedarf. Der Forschungsstand zur Entwicklung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl im Mathematikunterricht der Grundschule spricht indes nicht für eine natürliche Entwicklung dieser Kompetenzen (vgl. Kap. 3.4). Vielmehr scheint gerade der Einfluss des Instruktionsansatzes eine entscheidende Rolle zu spielen.

Siegler (2006) nennt als einen möglichen Grund für die oft nicht effiziente Nutzung einer neu entdeckten Strategie, dass diese oft wieder vergessen werde. Diese Aussage und die Hervorhebung der notwendigen Automatisierung bereits vorhandener Strategien betonen den prozeduralen Charakter, der Strategien im Strategiewahlmodell zugeschrieben wird. Es wird deutlich, dass die Simulationsmodelle den *Procedures-First*-Theorien zugeordnet werden können (vgl. Kap. 3.1) und demnach sowohl Einflüsse des konzeptuellen Wissens als auch soziomathematische Einflüsse keine Rolle spielen. Damit unterscheidet sich das Strategiewahlmodell wesentlich von schemabasierten Lerntheorien, wie sie in Kapitel 3.3 vorgestellt wurden. Ein weiterer von Siegler (2006) aufgeführter Grund für die ineffektive Nutzung neuer Strategien ist, dass diese in ihrer Ausführung mehr Zeit beanspruchen, fehleranfälliger sind und noch nicht in einer Weise durchdrungen wurden, dass sie allgemeingültig auf alle ähnlichen Problemstellungen angewendet werden können.

Dass konzeptuelles Wissen im Modell nicht als Einflussfaktor auf die Strategieentwicklung berücksichtigt wird, wird von Kritikern ebenso bemängelt wie die nur unzureichend aufgeklärte Varianz zwischen Schülerinnen und Schülern in ihrem Strategierepertoire (zusf. Baroody & Tiilikainen, 2012). Insbesondere für die Generalisierung einer Strategie sei konzeptuelles Wissen, wie Baroody und Tiilikainen (2012) betonen, unverzichtbar.

Siegler und Kollegen gehen außerdem davon aus, dass keine Fehlstrategien (*illegal strategies*) entwickelt werden (Siegler & Araya, 2005). Dies steht im Widerspruch zur Befundlage (Kap. 3.4). In vielen Studien – wie beispielsweise in der oben berichteten Studie von Van der Ven et al. (2012) – wurden Fehlstrategien beobachtet, die teilweise nicht nur kurzfristig, sondern über einen längeren Zeitraum angewendet wurden. Auch die Abfolge der bei Siegler und Stern (1998) entdeckten Strategien konnte in anderen Studien nicht repliziert werden (zusf. Baroody & Tiilikainen, 2012), was an den kleinen Stichproben der Originalstudien liegen könnte.

Wie bereits in Kapitel 3.4 deutlich wurde, wird in vielen Studien mittels einer *Choice-/No-Choice*-Bedingung auf das Strategiewahlmodell von Siegler zurückgegriffen. Threlfall (2009) hebt hervor, dass die Verwendung des Modells und auch die Simulationen allein nicht ausreichen, um die Wahl zwischen alternativ vorliegenden Strategien bei der Aufgabenbearbeitung zu beweisen. Fraglich ist auch, ob das *Overlapping Waves Model* auf den Erwerb komplexerer Strategien übertragen werden kann (Torbeyns, Arnaud, Lemaire & Verschaffel, 2010). Bei halbschriftlichen Rechenstrategien lässt sich für viele Aufgaben keine klar definierte Effizienzreihenfolge von Strategien aufstellen – vielmehr müssen für komplexere Aufgaben viele Strategien als gleichermaßen effizient eingestuft werden. Demnach kann der Faktenabruf (automatisiertes Wissen) bei komplexeren Aufgaben und damit verbundenen Strategieanforderungen auch nicht wie im Strategiewahlmodell als Ziel adaptiver Expertise beschrieben werden (Baroody & Tiilikainen, 2012), da somit Routineexpertise und nicht, wie die Namen der Simulationsmodelle nahelegen würden, adaptive Expertise angestrebt wird.

4.5 Zusammenfassung und Ausblick: Förderung der Flexibilität aus lerntheoretischer und instruktionspsychologischer Perspektive

In den verschiedenen Instruktionsansätzen zum Strategieerwerb spiegeln sich unterschiedliche lerntheoretische Annahmen wider, die von einer sehr konstruktivistischen Sichtweise auf Lernprozesse (Kap. 3.3.4 *Problem-solving Approach*) bis hin zu einer starken Strukturierung und Anleitung reichen (Kap. 3.3.1 *Skills Approach*). Weitere Ansätze lassen sich zwischen diesen beiden Extrempolen einordnen (Kap. 3.3.2 *Conceptual Approach* und Kap. 3.3.3 *Investigative Approach*). Die verschiedenen theoretischen Annahmen äußeren sich darüber hinaus in voneinander abweichenden Vorstellungen darüber, wie mathematische Schemata in den Ansätzen erworben werden, wobei prozedurales und konzeptuelles Wissen verschieden gewichtet werden (vgl. Kap 3.3.5.2). Entsprechend dieser Gewichtung ergeben sich auch unterschiedliche Implikationen für die lernförderliche Gestaltung von Lehr-/Lernprozessen. Mit der Cognitive-Load-Theorie können die Strategieerwerbsansätze danach beurteilen werden, inwieweit sie kognitive Prozesse und Lernmechanismen berücksichtigen. Da die explizite Wissensvermittlung für einen neuen Lerngegenstand nach Sweller et al. (2011) klar favorisiert wird, ist für die Aneignung eines Strategierepertoires aus Sicht der CLT ein Unterricht zu bevorzugen, der sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen vollständig vermittelt und durch Automatisierungsprozesse auf den Schemaerwerb abzielt, sodass die Strategien aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Ob die so erworbenen Schemata – auch, wenn sie mit konditionalem Strategiewissen untermauert sind – ausreichend sind, um die erworbenen Strategien tatsächlich flexibel anzuwenden, ist fraglich und wird in der Mathematikdidaktik, wie bereits in Kapitel 3.3 dargestellt, kontrovers diskutiert.

Sowohl die klassische CLT (Sweller et al., 2011) als auch Erweiterungen der CLT (Schnotz & Kürschner, 2007) beschäftigen sich intensiv damit, wie Lehr-/Lernprozesse unter Berücksichtigung des individuellen Vorwissens und entsprechender Unterschiede in der kognitiven Belastung gestaltet sein müssen. Bei einem hohen Vorwissensstand, müssten der *Intrinsic Load* und der *Germane Load* nach Schnotz und Kürschner (2007) erhöht werden, damit die Schülerinnen und Schüler optimal gefördert werden können. Ein hoher Vorwissensstand könnte für das Thema der halbschriftlichen Rechenstrategien bedeuten, dass eine Schülerin/ein Schüler bereits eine oder mehrere zielführende Lösungsstrategien kennt und ein gutes konzeptuelles Wissen über Zahlzerlegungen und -beziehungen aufweist. Nach Schnotz und Kürschner (2007) würde hier ein kleinschrittiges, instruktionales Vorgehen, d. h. beispielsweise das Erlernen von Strategien, die bereits zum Strategierepertoire gehören, einen *Extrinsic Load* erzeugen und es käme zum *Expertise Reversal Effect*. Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen hingegen würden durch dieses instruktionale Vorgehen in ihrem Arbeitsgedächtnis soweit entlastet, dass die Prozeduren automatisiert werden könnten und genügend Kapazitäten für Schemabildung frei blieben. Demnach wären Lernumgebungen zu bevorzugen, die Differenzierungsmöglichkeiten anbieten. Überträgt man die Annahmen der klassischen CLT auf den Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien, so sollte sich die Vermittlung halbschriftlicher Rechenstrategien als Prozeduren in Kombination mit bestimmten Aufgabenkriterien effizient auf den Kompetenzerwerb auswirken. Jedoch könnte nach den Beschreibungen bei Schnotz und Kürschner (2007) auch ein problemlöseorientierter Unterrichtsansatz (Kap. 3.3.4) bei einem gewissen Vorwissensstand erfolgreich sein, da hier Schemata auch ohne explizite Wissensvermittlung gebildet werden müssten. Als zentrales Element für Schemabildung und damit die vertiefte inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand wird der *Germane Load* angesehen. Dabei erhöhen u. a. solche Lernaufgaben den *Germane Load*, die selbstregulatorische und metakognitive Prozesse fördern. Für alle in Kapitel 3 dargestellten mathematikdidaktischen Instruktionsansätze zur Förderung der adaptiven Strategiewahl spielen metakognitive Prozesse eine zentrale Rolle. Sie unterscheiden sich jedoch darin, welche Art metakognitiver Strategien den Strategieerwerb beeinflusst. Wird davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler ein Strategierepertoire aufbauen sollen, aus welchem je nach Aufgabenanforderung passende, bereits automatisierte Strategien ausgewählt werden, stehen Planungsstrategien im Vordergrund. Dabei unterliegen die Entscheidungsprozesse im Strategiewahlmodell von Siegler und Kollegen Informationen über die individuelle Strategieperformanz, d. h. wie schnell und korrekt die einzelnen Strategien ausgeführt werden können. In Ansätzen, in denen Strategien zunächst informell von den Schülerinnen und Schülern selbstentwickelt (und ggf. anschließend weiter schematisiert) werden, spielt Monitoring der eigenen Strategien eine größere Rolle. Dabei wird davon ausgegangen, dass konzeptuelles Zahlwissen (vgl. Schulungen zum Zahlenblick/Zahlensinn in Kap. 3.3.4) eng mit Monitoringfähigkeiten zusammenhängt. Je eher

Aufgaben- und Zahleigenschaften erkannt werden, desto besser ist der Schüler/die Schülerin in der Lage, den Rechenweg diesen Eigenschaften im Lösungsprozess selbst anzupassen.

Das Strategiewahlmodell suggeriert, dass sich Adaptivität und Flexibilität allein durch Erfahrung der Schülerinnen und Schüler entwickeln, nicht jedoch zwingend instruktional gefördert werden müssen. Die Studienergebnisse zur Strategieflexibilität und -adaptivität in verschiedenen Unterrichtsansätzen (vgl. Kap. 3.4) weisen darauf hin, dass das Modell nur eingeschränkt generalisierbar ist. So zeigt beispielsweise die Studie von Torbeyns et al. (2009a), dass die Entdeckung und Verwendung adaptiver Strategien nicht allein durch Erfahrungsunterschiede erklärt werden können. Außerdem weisen die Ergebnisse vieler Studien darauf hin, dass offenbar große Unterschiede zwischen leistungsstarken und -schwachen Schülerinnen und Schülern bestehen, die durch das Strategiewahlmodell nicht ausreichend erklärt werden können. Auch die Verwendung von Fehlstrategien wird im Modell vernachlässigt.

Für jeden in Kapitel 3.3 vorgestellten Instruktionsansatz zum Erwerb von Strategieflexibilität und -adaptivität lassen sich einzelne der hier vorgestellten Theorien und Modelle heranziehen. Damit bestehen die in Kapitel 3.5 formulierten Forschungsdesiderate zur instruktionalen Förderung von Strategieflexibilität und -adaptivität auch aus lerntheoretischer/instruktionspsychologischer Perspektive.

Basierend auf der theoretischen und empirischen Befundlage (Kap. 3 und Kap. 4) werden im Folgenden die Fragestellungen der vorliegenden Arbeit dargestellt.

5 Fragestellungen und Hypothesen

Wie in den Kapiteln 3 und 4 aus mathematikdidaktischer, lerntheoretischer und instruktionspsychologischer Perspektive dargelegt wurde, besteht Unklarheit darüber, welche Instruktionsansätze besonders geeignet sind, die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl zu fördern. Die Befundlage zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl in den unterschiedlichen mathematikdidaktischen Instruktionsansätzen beschränkt sich mit wenigen Ausnahmen auf den Zahlenraum bis 100 (Kap. 3.4). Unterschiede in der Effizienz verschiedener Rechenwege (Anzahl der Rechenschritte und die daraus folgende Bearbeitungszeit) zeigen sich jedoch im Zahlenraum bis 1000 deutlicher (vgl. Tabelle 2, S. 16). Das dritte Schuljahr, in welchem zu Schuljahresbeginn die Zahlraumerweiterung im Zahlenraum bis 1000 und im zweiten Halbjahr die Einführung der schriftlichen Normalverfahren stattfindet, ist daher für die längsschnittliche Untersuchung von Flexibilität und Adaptivität besonders geeignet.

Daraus ergeben sich die beiden zentralen und übergeordneten Fragestellungen dieser Arbeit:

Eignen sich verschiedene reformorientierte Unterrichtsansätze gleichermaßen, um die Strategieflexibilität (Fragestellung 1) und -adaptivität (Fragestellung 2) bei der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 zu fördern?

Theoretischen Grundlagen und dem aktuellen Forschungsstand zufolge wirken sich individuelle, aufgabenbezogene und soziokulturelle Einflussfaktoren sowohl auf die Strategieentwicklung von Schülerinnen und Schülern als auch auf ihre Strategieperformanz aus. Dem Mathematikunterricht kommt demnach als soziokultureller Einflussfaktor eine entscheidende Schlüsselrolle zu. Darauf deutet auch der in Kapitel 3.4 vorgestellte Forschungsstand hin, der für die Förderung der Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl Vorteile für reformorientierte Unterrichtsansätze gegenüber einem traditionellen, routineorientierten Mathematikunterricht aufzeigt. Ein zentraler Unterschied zwischen den unterschiedlichen Instruktionsansätzen besteht in der Gewichtung von prozeduralen und konzeptuellen Anteilen in der Wissensvermittlung sowie der mit der prozeduralen Komponente verbundenen Frage nach der notwendigen Schematisierung von Strategien (vgl. Kap. 3.3.5.2). Dabei kann nach der klassischen Cognitive-Load-Theorie Schemaerwerb durch die Vermittlung von sowohl prozeduralem als auch dem nötigen konzeptuellen Wissen zu einer Verringerung der kognitiven Belastung führen (vgl. Kap. 4.2.1), da diese Schemata aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Auch wenn der Schemaerwerb dabei den Erwerb konzeptuellen Strategiewissens beinhaltet, ist offen, ob dieses Wissen ausreicht, um flexibel und adaptiv zwischen den automatisierten Strategien wählen zu können. Schemabasierte, reformorientierte Unterrichtsansätze gehen hingegen davon aus, dass für den Aufbau flexiblen und adaptiven Strategiewissens konzeptuelles Wissen basal ist. Die Effizienz dieser reformorientierten Ansätze wurde bisher vor allem durch den Vergleich einzelner Unterrichtsansätze mit einem traditionellen Unterricht untersucht (vgl. Kap. 3.4.3). Der Vergleich zwischen ausgewählten reformorientierten Ansätzen für den Kompetenzerwerb zur flexiblen und adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000 steht dabei aus (Ausnahme: Heinze et al., 2009). Der *Conceptual Approach* (Kap. 3.3.2) beruht im Vergleich zum *Investigative Approach* (Kap. 3.3.3) und zum *Problem-solving Approach* (Kap. 3.3.4) auf einem situativen Strategieerwerb, bei dem Strategien direkt mit bestimmten Grundvorstellungen verknüpft werden können. Der Forschungsstand zur Effizienz des niederländischen *Realistic Program Designs* (vgl. Kap. 3.4.2 und Kap. 3.4.3) deutet darauf hin, dass dieser Unterrichtsansatz Schülerinnen und Schüler dazu befähigt, im konkreten Kontext informelle Strategien zu entwickeln (vgl. Kap. 3.4: Blöte et al., 2000; De Smedt et al., 2010). Allerdings konnten die von den Schülerinnen und Schülern entdeckten Strategien nur begrenzt auf andere Bereiche, insbesondere Zahlenaufgaben, übertragen werden. Somit scheinen bei den reformorientierten Unterrichtsansätzen der *Investigative Approach* und der *Problem-solving Approach* besser vergleichbar zu sein, da hier Strategien nicht zwingend kontextsituiert erworben werden müssen. Zudem finden sich in deutschen Schulbüchern für den Mathematikunterricht in der Grundschule insbesondere diese beiden Ansätze wieder, sodass der Vergleich eine unterrichtspraktische Relevanz aufweist.

Die Mehrheit der bisher dargestellten Studien wurde im Schulkontext durchgeführt. Daher ist offen, inwieweit die gefundenen Effekte auf die zentralen Merkmalsunterschiede der Instruktionsansätze zurückgeführt werden können, da weitere Einflussfaktoren (Lehrer-, Klassen- und Schülermerkmale) selten in den Analysen kontrolliert wurden (z. B. durch Mehrebenenanalysen). Eine Ausnahme bilden die Interventionsstudien von Kroesbergen und Van Luit (2002) und Kroesbergen et al. (2004), die sich allerdings mit dem Erwerb von Multiplikationsstrategien beschäftigten (vgl. Kap. 3.4.3). Darüber hinaus weisen die vorliegenden Studien zum Strategieerwerb mehrheitlich ein querschnittliches Studiendesign auf. Bisher existieren keine längsschnittlichen Interventionsstudien, welche die Effizienz unterschiedlicher reformorientierter Unterrichtsansätze zur Förderung der adaptiven Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 miteinander vergleichen.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Ansätze miteinander verglichen, die auf den theoretischen Annahmen der beiden Ansätze *Investigative* und *Problem-solving Approach* aufbauen, jedoch nicht mit den in Kapitel 3.3 beschriebenen Strategieerwerbskonzepten identisch sind. Im Folgenden ist deshalb von einem *explizierenden* und einem *problemlöseorientierten* Ansatz die Rede. Insbesondere im explizierenden Ansatz steht die prozedurale Komponente des Strategieerwerbs, der auch in der Cognitive-Load-Theorie und im

Strategiewahlmodell eine besondere Bedeutung zukommt, viel stärker im Vordergrund als im *Investigative Approach*. So ist in diesem Ansatz im Gegensatz zum problemlöseorientierten Ansatz auch kein informeller Erwerb halbschriftlicher Rechenstrategien vorgesehen. Damit ähnelt der explizierende Ansatz dem Strategieerwerb in einem Routineansatz, der jedoch um den stetigen Vergleich der unterschiedlichen Strategien hinsichtlich ihrer Passung zu Aufgabenkriterien (konditionales Strategiewissen) ergänzt wird.

Tabelle 4 verdeutlicht die Unterschiede der beiden Instruktionsansätze.

Tabelle 4: Konzeptionelle Unterschiede zwischen explizierendem und problemlöseorientiertem Instruktionsansatz

	Explizierend	**Problemlöseorientiert**
Strategieerwerb	Strategien werden prozedural erworben, sind aber konzeptuell untermauert	Lösungswege werden basierend auf konzeptuellem Wissen generiert; Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Strategien führt langfristig zu Metawissen über Strategien
Strategieverwendung	Wahl aus einem Strategierepertoire	Lösungswege werden basierend auf konzeptuellem Wissen situativ generiert
Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl	Ein Strategierepertoire mit automatisiert vorliegenden Strategien führt in Verbindung mit konzeptuellem Wissen sowie Monitoringfähigkeiten bei der Strategiewahl (konditionales Strategiewissen) zu adaptivem Strategiegebrauch	Konzeptuelles Wissen und die Förderung von Monitoringfähigkeiten (Analyse von Aufgabenkriterien, Anpassung des Lösungsweges im Lösungsprozess sowie ein stetiger Effizienzvergleich) führen zu adaptiverem Strategiegebrauch

Die beiden Instruktionsansätze unterscheiden sich zunächst in ihren zugrunde liegenden Vorstellungen darüber, ob Strategien prozedural erworben werden und in Form eines Strategierepertoires vorliegen (vgl. Strategiewahlmodell in Kap. 4.4), sodass sie als automatisiertes Wissen aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können (vgl. Cognitive-Load-Theorie in Kap. 4.2) oder ob Lösungswege individuell und situativ auf Basis des konzeptuellen Wissens generiert werden und somit kein festes Repertoire an Strategien besteht. Während die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl im explizierenden Ansatz durch die prozedurale Vermittlung der zentralen halbschriftlichen Rechenstrategien in Verbindung mit konditionalem Strategiewissen *(Welche Strategien werden bei welchen Aufgabentypen verwendet?)* gefördert werden soll, steht im problemlöseorientierten Instruktionsansatz der Aufbau konzeptuellen Wissens zusammen mit dem stetigen Effizienzvergleich von individuellen Rechenwegen im Vordergrund. Eine dezidierte

Gegenüberstellung der beiden Instruktionsansätze und ihrer Implementation während einer außerschulischen Intervention mit zusätzlichen Auffrischungssitzungen sowie die Beschreibung der Testungen mit einem Prä-Post-Follow-up-Design erfolgt in Kapitel 6.2.

Die übergeordneten Fragestellungen nach der Entwicklung der *Strategieflexibilität* (Fragestellung 1) und *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2) werden im Folgenden durch weitere Teilfragestellungen und Hypothesen spezifiziert.

Tabelle 5 stellt die Zuordnung der Hypothesen zu den beiden Hauptfragestellungen sowie zu den thematischen Schwerpunkten der Teilfragestellungen überblicksartig dar.

Tabelle 5: Übersicht über die Zuordnung der Fragestellungen und Hypothesen

	Experimental-gruppenunterschiede (a)	**Experimental-gruppenunterschiede zwischen einzelnen Leistungsgruppen (b)**	**Einfluss individueller Lernermerkmale (c)**
Strategieflexibilität und Einsatz von Verkürzungsstrategien (Fragestellung 1)	H1a, H1b (kf) H2a, H2b, H3 (lf) H4, H5 (wT)	H6, H7 (kf)	H8a, H8c, H8e (kf) H9a, H9c, H9e (kf) H8b, H8d, H8f, H8g (lf) H9b, H9d, H9f, H9g (lf)
Strategieadaptivität (Fragestellung 2)	H10 (kf) H11, H12 (lf)	H13 (kf)	H14a, H14c, H14e (kf) H14b, H14d, H14f, H14g (lf)

Bezugszeiträume für die Hypothesen: kf = kurzfristig, wT = während des Treatments, lf = langfristig

Das Augenmerk bei der *Strategieflexibilität* liegt dabei nicht nur darauf, wie viele unterschiedliche Strategien verwendet werden, sondern auch welche Strategien verwendet und, ob *Verkürzungsstrategien* eingesetzt werden. Die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* steht im Fokus verschiedener Hypothesen, da diese auf ein hohes konzeptuelles Verständnis der Schülerinnen und Schüler hindeutet. Unterschiedliche Befunde zeigen, dass *Verkürzungsstrategien* im 3. Schuljahr sowohl vor der Einführung der schriftlichen Normalverfahren (Torbeyns et al., 2009a) als auch danach (Csíkos, 2016; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016) kaum eingesetzt werden.

Dabei sind zum einen **Experimentalgruppenunterschiede** in der *Strategieflexibilität* und im Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1a, H1–H5) sowie in der *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2a, H10–H12) von Interesse. Neben den Unterschieden zwischen den beiden Experimentalbedingungen interessiert auch, ob Schülerinnen und Schüler **mit unterschiedlichem mathematischem Vorwissen** in der *Strategieflexibilität* und im Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1b, H6–H7) sowie in der *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2b, H13) gleichermaßen von den beiden Bedingungen profitieren können. Zur Beantwortung der Fragestellungen werden basierend auf dem mathematischen Vorwissen der Schülerinnen und Schüler Leistungsgruppen gebildet.

Darüber hinaus soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden, wie sich **individuelle Lernermerkmale** auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* und den Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1c, H8–H9) sowie die *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2c, H14) auswirken. Zusätzlich wird in den Hypothesen zwischen Annahmen zu kurzfristigen Entwicklungen (Leistung im Nachtest bzw. im Zeitraum Vortest bis Nachtest) und langfristigen Entwicklungen (Leistungen in den Follow-up-Tests bzw. im Zeitraum Posttest bis letzter Follow-up-Test) sowie Entwicklungen während des Treatments (Leistungen an den einzelnen Tagen der Intervention) unterschieden. Die Hypothesen zur Entwicklung der einzelnen Leistungsgruppen beziehen sich dabei ausschließlich auf den unmittelbaren Interventionszeitraum (Prä-Posttest-Vergleich).

Die einzelnen Fragestellungen und Hypothesen werden im Folgenden näher erläutert.

Zeigen sich zwischen den Schülerinnen und Schülern der beiden Instruktionsansätze Unterschiede in der Strategieflexibilität? (Fragestellung 1a)

Im problemlöseorientierten Ansatz werden Schülerinnen und Schülern dazu angeregt, Strategien informell zu entwickeln, ohne dass diese anschließend von der Lehrperson weiter schematisiert werden. Die Lehrperson trägt durch die Steuerung der Gruppendiskussionen jedoch dazu bei, dass Lösungswege stetig im Hinblick auf Effizienzkriterien miteinander verglichen werden und sich durch vermehrte Aufgabenbearbeitung und Analogiebildungen Lösungsschemata aufbauen. Im explizierenden Ansatz wird hingegen ein festes Repertoire an Strategien prozedural vermittelt und entsprechende Strategien benannt. Dabei sollen Strategien soweit schematisiert und auch prozedural automatisiert werden, dass sie als festes Strategierepertoire abrufbar sind. Daher sollte die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler in diesem Ansatz kurzfristig über das vermittelte Strategierepertoire verfügen. Im problemlöseorientierten Ansatz muss einerseits durch die fehlende Schematisierung mit einer größeren Anzahl an Mischstrategien und verkürzten Notationsformen der im explizierenden Ansatz vermittelten Hauptstrategien gerechnet werden. Gleichzeitig wird angenommen, dass die Schülerinnen und Schüler in der kurzen Interventionszeit im Mittel nicht dasselbe Strategiespektrum generieren können, das im explizierenden Ansatz in derselben Zeit vermittelt und geübt wird. Deshalb wird erwartet, dass sich das *Strategierepertoire* zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden Unterrichtsansätze kurzfristig (im Interventionszeitraum) sowohl in der *Anzahl eingesetzter Strategien* **(Hypothese 1a)** als auch in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* **(Hypothese 1b)** zugunsten des explizierenden Ansatzes unterscheidet. Langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention, werden keine Gruppenunterschiede in der *Anzahl eingesetzter Strategien* **(Hypothese 2a)** und in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* erwartet (**Hypothese 2b**).

Zur Entwicklung von Fehlstrategien in den unterschiedlichen Instruktionsansätzen existiert eine widersprüchliche Befundlage. Die Ergebnisse von Carpenter et al. (1997) und

Heirdsfield und Cooper (2004) deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler bei informellem Strategiegebrauch weniger Fehlstrategien verwenden als bei expliziter Strategievermittlung, da sie vorwiegend solche Strategien nutzen, die sie selbst verstanden haben. Bei einer stärker explizierenden Strategievermittlung könnten erlernte Strategien durch fehlendes konzeptuelles Zahlwissen ggf. fehlerhaft generalisiert und auf andere Aufgabenstellungen übertragen werden. Im Widerspruch dazu steht der Befund von Heinze et al. (2009), der zeigt, dass Schülerinnen und Schüler, die nach einem Lehrwerk unterrichtet wurden, das den informellen Strategiegebrauch anregt, mehr Fehlstrategien verwenden als solche Schülerinnen und Schüler, die nach einem stärker explizierenden Lehrwerk unterrichtet wurden. Aufgrund der uneinheitlichen Befundlage werden zur Entwicklung von Fehlstrategien keine Hypothesen formuliert. Die Korrektheit der eingesetzten Strategien und eventuelle Experimentalgruppenunterschiede werden stattdessen im Zusammenhang mit der Strategieflexibilität für die einzelnen Messzeitpunkte berichtet.

Am Ende des dritten Schuljahres (letzter Follow-up-Test) wird durch die Dominanz der schriftlichen Normalverfahren, die sich in zahlreichen Befunden gezeigt hat (vgl. Kapitel 3.4), erwartet, dass beide Experimentalgruppen vorwiegend auf die Normalverfahren zurückgreifen und diese als Universalstrategie nutzen **(Hypothese 3)**.

Für den Einsatz von *Verkürzungsstrategien* während des Interventionszeitraums wird angenommen, dass sich die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz während des Strategieerwerbs im Unterricht der Intervention stärker an sozio-mathematischen Normen orientieren und die am jeweiligen Interventionstag thematisierte Strategie verwenden. Um prozessbezogene Entwicklungen und etwaige Unterschiede zwischen den beiden Experimentalbedingungen noch differenzierter abbilden zu können, wird dabei die Verwendung von Additions- und Subtraktionsstrategien jeweils separat betrachtet. Es wird angenommen, dass sich der Einsatz von *Verkürzungsstrategien* zur Lösung von Additionsaufgaben **(Hypothese 4a)** und Subtraktionsaufgaben **(Hypothese 4b)** im explizierenden Ansatz erst dann zeigt, wenn diese im Instruktionsansatz behandelt wurden. Für den problemlöseorientierten Ansatz wird hingegen durch den stetigen Austausch über individuell entwickelte Lösungswege ein kontinuierlicher Anstieg in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* zur Lösung von Additionsaufgaben **(Hypothese 5a)** und Subtraktionsaufgaben **(Hypothese 5b)** erwartet.

Wie bereits angedeutet, ist unklar, inwieweit Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Leistungsniveaus von den beiden Unterrichtsansätzen profitieren können. Daher lautet eine weitere Fragestellung:

Zeigen sich im Interventionszeitraum in der Entwicklung der Strategieflexibilität und in der Verwendung von Verkürzungsstrategien in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen? (Fragestellung 1b)

Für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher mathematischer Fähigkeitsniveaus wird erwartet, dass diese im explizierenden Unterrichtsansatz im Rahmen der kurzen Intervention ein größeres *Strategierepertoire* aufbauen können als Schülerinnen und Schüler der entsprechenden Referenzgruppen des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes **(Hypothese 6)**. D. h. es wird angenommen, dass sich der in Hypothese 1 beschriebene Vorteil für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes gegenüber den Schülerinnen und Schülern eines problemlöseorientierten Ansatzes in allen Leistungsgruppen zeigt.

Dabei werden auch in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* Vorteile für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes gegenüber den entsprechenden Referenzgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes erwartet **(Hypothese 7)**.

Im problemlöseorientierten Ansatz könnte ein Mangel an konzeptuellem Zahlwissen dazu führen, dass kurzfristig nur wenige Strategien informell entdeckt werden oder sich sogar Fehlstrategien etablieren. Auch beim explizierenden Ansatz könnte dieser Effekt auftreten, wenn erlernte Strategien nicht auf ähnliche Aufgabenstellungen übertragen werden können. Wie in Kapitel 4.2.2 beschrieben, ist der Forschungsstand zur Effektivität von Generierungsprozessen für Lernende mit geringem Vorwissen nicht eindeutig, da sich in den Befunden von Rittle-Johnson und Kmicikewycz (2008) auch kurzfristige Vorteile für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler in einer Generierungsbedingung zeigten, während sich diese Vorteile in der Studie von Chen et al. (2016) erst langfristig erwiesen.

Etwaige Unterschiede zwischen den Leistungsgruppen in der Anwendung zielführender Strategien werden bei der Darstellung des Strategierepertoires mitberichtet. Da für den Interventionszeitraum im Gegensatz zum Zeitraum nach der Intervention Prozessdaten vorliegen, wird die Fragestellung 1b lediglich im erstgenannten Zeitraum untersucht.

Die nachfolgende Fragestellung 1c beschäftigt sich mit den Einflüssen individueller Lernermerkmale auf das *Strategierepertoire* und die Verwendung von *Verkürzungsstrategien*.

Wirken sich die individuellen Lernermerkmale Intelligenz, mathematische Fähigkeiten und Arbeitsgedächtnis sowie eine Auffrischung der Lerninhalte auf die Entwicklung des Strategierepertoires (Flexibilität) und die Verwendung von Verkürzungsstrategien aus? (Fragestellung 1c)

Um Aussagen über die Wirksamkeit verschiedener Unterrichtsansätze treffen zu können, sind Einflussfaktoren auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* und insbesondere die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* in beiden Gruppen von großer Bedeutung.

Die in Kapitel 3.4 beschriebenen Befunde weisen darauf hin, dass sich sowohl die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten als auch die kognitiven Grundfähigkeiten positiv auf die *Strategieflexibilität* auswirken. Dabei wurden *Verkürzungsstrategien* insbesondere von Schülerinnen und Schülern mit höheren mathematischen Fähigkeiten eingesetzt (z. B.

Torbeyns et al., 2009a; Torbeyns et al., 2017). Allerdings stammen diese Befunde vorwiegend aus Studien, welche die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten oder die kognitiven Grundfähigkeiten als Grundlage für die Einteilung in Leistungsgruppen (wie in Fragestellung 1b) verwendeten (z. B. Luwel et al., 2011). In wenigen Studien wurde der Einfluss mathematischer und/oder kognitiver Fähigkeiten auf den Lernzuwachs in der Strategieflexibilität mit parametrischen Verfahren untersucht. Die Befunde von Schneider et al. (2011) legen nahe, dass sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen unabhängig vom mathematischen Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler die Strategieflexibilität beeinflussen. Auch in der Studie von Kroesbergen et al. (2004, vgl. Kap. 3.4.3) zeigte sich in Mehrebenenanalysen, dass sich insbesondere die allgemeinen mathematischen Leistungen, nicht aber der Intelligenzquotient auf die Strategieflexibilität auswirkt. Gestützt wird dies auch durch die Befunde aus der LOGIK-Studie, welche darauf hinweisen, dass dem Einfluss mathematischen Vorwissens eine etwas höhere Bedeutung als der Intelligenz zukommt, da dieses nicht durch höhere kognitive Grundfähigkeiten ausgeglichen werden kann (Stern, 1998, 2009).

Für den Einfluss der Prädiktoren auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* **(Hypothese 8)** und die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* **(Hypothese 9)** werden im Folgenden analoge Annahmen formuliert, die jedoch für beide abhängigen Variablen separat geprüft werden.

Basierend auf dem Forschungsstand wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig, d. h. im Interventionszeitraum **(Hypothesen 8a und 9a)**, sowie langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention **(Hypothesen 8b und 9b)**, positiv auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* und die *Verwendung von Verkürzungsstrategien* auswirken. Demnach müssten höhere mathematische Fähigkeiten sowohl kurz- als auch langfristig mit einem höheren *Zuwachs im Strategierepertoire* und insbesondere mehr *Verkürzungsstrategien* einhergehen.

Wie oben beschrieben, zeigte sich in einigen Befunden wie der LOGIK-Studie (Stern, 1998, 2009) für die Intelligenz im Vergleich zum mathematischen Vorwissen ein geringerer Einfluss auf die mathematische Lernentwicklung. Allerdings wiesen Schülerinnen und Schüler mit besseren kognitiven Grundfähigkeiten in der querschnittlich angelegten Studie von Luwel et al. (2011) in allen untersuchten Parametern der Strategiekompetenz höhere Fähigkeiten als Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren kognitiven Fähigkeiten auf. Gleichzeitig konnte in der Studie jedoch gezeigt werden, dass letztgenannte Schülerinnen und Schüler besonders stark von einem Feedback zum Strategieeinsatz profitierten und auf diese Weise ihre Kompetenz verbessern konnten.

Insgesamt existiert zum Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten auf die verschiedenen Parameter der Strategiewahl keine einheitliche Befundlage, was auch dadurch erklärt werden kann, dass mathematische Leistungen und kognitive Fähigkeiten zu einem hohen Anteil konfundiert sind (zusf. Schneider, Küspert & Krajewski, 2016). Für die Intelligenz wird sowohl kurzfristig **(Hypothesen 8c und 9c)** als auch langfristig **(Hypothesen 8d und 9d)** kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* und die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* erwartet.

Für den Einfluss des Arbeitsgedächtnisses liegen Befunde vor, die insgesamt darauf hindeuten, dass Arbeitsgedächtniskapazitäten insbesondere das Fähigkeitsniveau im prozeduralen Wissen, nicht jedoch den Lernzuwachs beeinflussen (LeFevre et al., 2013; Van der Ven et al., 2012). Daher wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis sowohl kurzfristig **(Hypothesen 8e und 9e)** als auch langfristig **(Hypothesen 8f und 9f)** kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* und die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* zeigt.

Darüber hinaus ist von Interesse, inwiefern eine Wiederholung der Interventionsinhalte nach der Intervention zu nachhaltigeren Lernerfolgen in der Strategieflexibilität führt und, ob sich diese in beiden Experimentalgruppen gleichermaßen auswirkt.

Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* und die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* auswirkt **(Hypothesen 8g und 9g)**. D. h. die Teilnahme an den Auffrischungssitzungen sollte dazu beitragen, dass auch nach der Intervention verschiedene Strategien genutzt werden und die erlernten *Verkürzungsstrategien* nicht in Vergessenheit geraten.

Die folgende Tabelle stellt im Überblick die zu testenden Hypothesen zur Strategieflexibilität bzw. zur Verwendung von *Verkürzungsstrategien* dar:

Tabelle 6: Hypothesen zur Strategieflexibilität und zur Verwendung von Verkürzungsstrategien

	Strategieflexibilität (Strategierepertoire, Fragestellung 1)
	Experimentalgruppenunterschiede (Fragestellung 1a)
H1	Das *Strategierepertoire* zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden Unterrichtsansätze unterscheidet sich kurzfristig (im Interventionszeitraum) in der *Anzahl eingesetzter Strategien* (H1a) und in der *Nutzung von Verkürzungsstrategien* (H1b) zugunsten des explizierenden Ansatzes.
H2	Langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention, werden keine Gruppenunterschiede in der *Anzahl* (H2a) und *Art eingesetzter Strategien* erwartet (H2b).
H3	Am Ende des dritten Schuljahres (letzter Follow-up-Test) wird durch die Dominanz der schriftlichen Normalverfahren, die sich in zahlreichen Befunden gezeigt hat, erwartet, dass beide Experimentalgruppen vorwiegend auf die *Normalverfahren* zurückgreifen und diese als Universalstrategie nutzen.
H4	In der Strategieentwicklung während des Unterrichts der Intervention wird angenommen, dass sich der *Einsatz von Verkürzungsstrategien* zur Lösung von Additionsaufgaben (H4a) und Subtraktionsaufgaben (H4b) erst dann zeigt, wenn diese im Instruktionsansatz behandelt wurden.
H5	Für den problemlöseorientierten Ansatz wird hingegen durch den stetigen Austausch über individuell entwickelte Lösungswege ein kontinuierlicher Anstieg in der *Verwendung von Verkürzungsstrategien* zur Lösung von Additionsaufgaben (H5a) und Subtraktionsaufgaben (H5b) erwartet.
	Experimentalgruppenunterschiede innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 1b)
H6	Für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher mathematischer Fähigkeitsniveaus wird erwartet, dass diese im explizierenden Unterrichtsansatz im Rahmen der kurzen Intervention ein *größeres Strategierepertoire* aufbauen können als Schülerinnen und Schüler der entsprechenden Referenzgruppen des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes.
H7	Dabei werden auch in der *Nutzung von Verkürzungsstrategien* Vorteile für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes gegenüber den entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes erwartet.
	Individuelle Lernermerkmale (Fragestellung 1c)
H8	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig, d. h. im Interventionszeitraum (H8a), sowie langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention (H8b), positiv auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* auswirken. Hingegen wird für die Intelligenz sowohl kurzfristig (H8c) als auch langfristig (H8d) kein Einfluss auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* erwartet. Ebenso wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis sowohl kurzfristig (H8e) als auch langfristig (H8f) kein Einfluss auf *die Entwicklung der Strategieflexibilität* zeigt. Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* auswirkt (H8g).
H9	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig, d. h. im Interventionszeitraum (H9a), sowie langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention (H9b), positiv auf die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* auswirken. Hingegen wird für die Intelligenz sowohl kurzfristig (H9c) als auch langfristig (H9d) kein Einfluss auf die *Verwendung von Verkürzungsstrategien* erwartet. Ebenso wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis sowohl kurzfristig (H9e) als auch langfristig (H9f) kein Einfluss auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zeigt. Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* auswirkt (H9g).

Neben der *Entwicklung der Strategieflexibilität* wird in der vorliegenden Arbeit mit den Fragestellungen 2a–2c die *Entwicklung der Strategieadaptivität* untersucht.

Zeigen sich zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden Instruktionsansätze Unterschiede in der adaptiven Strategieverwendung? (Fragestellung 2a)

In Hypothese 1 wird angenommen, dass sich das Strategierepertoire durch eine explizite Strategievermittlung (explizierender Unterrichtsansatz) während der 4-tägigen Intervention schneller als durch informelle Strategieentwicklung (problemlöseorientierter Unterrichtsansatz) aufbaut. Da das Strategierepertoire die Grundlage für einen adaptiven Strategieeinsatz darstellt, werden in der *Strategieadaptivität* kurzfristig Vorteile für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes erwartet **(Hypothese 10)**.

Aufgrund der angenommenen nachhaltigen Wirkung der Zahlenblickschulung auf das konzeptuelle Wissen der Schülerinnen und Schüler, welches die Basis für die Entwicklung von *Verkürzungsstrategien* und deren adaptiven Einsatz darstellt, wird für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes langfristig eine höhere *Adaptivität* als durch die Förderung in einem explizierenden Ansatz erwartet **(Hypothese 11)**. Die Hypothese zur langfristigen Überlegenheit des problemlöseorientierten Ansatzes stützt sich insbesondere auf Befunde zum Generierungseffekt (vgl. Kap. 4.2.2).

Zwar wird auch im explizierenden Ansatz die Passung zwischen Aufgabenkriterien und Strategien thematisiert, jedoch findet dies nicht in einem zeitlichen Äquivalent wie im problemlöseorientierten Ansatz statt. Für Schülerinnen und Schüler des stärker prozedural orientierten, explizierenden Ansatzes, werden hingegen größere Vergessenseffekte nach der Intervention erwartet.

Für beide Experimentalgruppen wird angenommen, dass die Einführung der schriftlichen Normalverfahren im zweiten Schulhalbjahr dazu führt, dass diese am Ende des Schuljahres (letzter Follow-up-Test) schematisch anstelle von halbschriftlichen Strategien und somit auch anstelle von Verkürzungsstrategien angewendet werden, was sich negativ auf die *Adaptivität* der Lösungswege in beiden Experimentalgruppen auswirken sollte **(Hypothese 12)**.

In einem nächsten Schritt wird der Frage nachgegangen, inwieweit Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Leistungsniveaus in der *Entwicklung der adaptiven Strategieverwendung* gleichermaßen von den beiden Instruktionsansätzen profitieren können oder ob sich differenzielle Effekte nachweisen lassen. Hiermit beschäftigt sich Fragestellung 2b.

Zeigen sich im Interventionszeitraum in der Entwicklung der Strategieadaptivität in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen? (Fragestellung 2b)

Abhängig vom mathematischen Vorwissen werden unterschiedliche Kurz- und Langzeitwirkungen der beiden Treatments auf die *Entwicklung der adaptiven Strategiewahl* angenommen. Aufgrund des Studiendesigns können jedoch wie bei Fragestellung 1b nur die kurzfristigen Entwicklungen, also während der Intervention, untersucht werden.

Es wird erwartet, dass sich der in Hypothese 10 formulierte kurzfristige Vorteil für den explizierenden Ansatz in der adaptiven Strategieverwendung in allen Leistungsgruppen zeigt. D. h., es wird angenommen, dass alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes kurzfristig ein größeres Strategierepertoire als die entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes aufbauen können und dadurch auch eine höhere *Strategieadaptivität* als diese aufweisen **(Hypothese 13)**.

Da sich eine Zahlenblickschulung nachhaltig auf die Förderung des konzeptuellen Wissens auswirken sollte (Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010), welches die Basis für die Entwicklung von *Verkürzungsstrategien* und deren adaptiven Einsatz darstellt (vgl. Kap. 3.3.4), wird hingegen für alle problemlöseorientierten Leistungsgruppen langfristig eine höhere Adaptivität als durch die Förderung in einem explizierenden Ansatz erwartet. Wie oben beschrieben, beschränken sich die Fragestellungen zur differenziellen Wirkung der beiden Instruktionsansätze in den einzelnen Leistungsgruppen auf den unmittelbaren Zeitraum der Intervention, sodass an dieser Stelle zur langfristigen Wirkung keine Hypothesen formuliert werden.

Fragestellung 2c beschäftigt sich mit individuellen Einflussmerkmalen der Lernenden für die *adaptive Strategieverwendung* und lautet:

Wirken sich die individuellen Lernermerkmale Intelligenz, mathematische Fähigkeiten und Arbeitsgedächtnis sowie eine Auffrischung der Lerninhalte auf die Entwicklung der adaptiven Strategieverwendung aus? (Fragestellung 2c)

Analog zu Fragestellung 1c sollen Einflussfaktoren auf die *Entwicklung des adaptiven Strategieeinsatzes* in beiden Gruppen identifiziert werden. Die in Kapitel 3.4 beschriebenen Befunde deuten darauf hin, dass sich insbesondere die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten auf die Strategieflexibilität und -adaptivität auswirken. Wie bereits im Zusammenhang mit Fragestellung 1c dargestellt wurde, stammen diese Befunde aus Studien, welche die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten als Grundlage für Leistungsgruppenvergleiche (wie in Fragestellung 2b) verwenden. Allerdings wurden in keiner der vorliegenden Studien parametrische Verfahren angewendet, um den Einfluss mathematischer Fähigkeiten auf den Lernzuwachs in der adaptiven Strategieverwendung zu prüfen. Der Einfluss mathematischer Fähigkeiten auf den adaptiven Strategieeinsatz und dessen Zuwachs sollte theoretischen Überlegungen zufolge noch etwas höher ausfallen als der Einfluss auf die Entwicklung des Strategierepertoires, d. h. die Anzahl der insgesamt verwendeten Strategien (vgl. Fragestellung 1c). Grundlage für diese Annahme sind verschiedene in Kapitel 3.4 dargestellte Befunde, die auf die Bedeutung konzeptuellen Wissens für den adaptiven Strategieeinsatz hinweisen. Insbesondere im problemlöseorientierten Ansatz sollte sich das konzeptuelle mathematische Wissen der Schülerinnen und Schüler entscheidend auf die Generierungsfähigkeit von Strategien und deren adaptiven Einsatz auswirken. Im explizierenden Ansatz ist konzeptuelles Wissen einerseits ebenfalls nötig, da Aufgabenkriterien erkannt und prozedural erlerntes sowie konditionales Strategiewissen situativ eingesetzt werden müssen. Andererseits kann in diesem Ansatz ggf. konzeptuelles Wissen kurzfristig durch konditionales Strategiewissen kompensiert werden. Denkbar ist beispielsweise, dass Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz wissen, dass das *Ergänzen* bei Aufgaben mit kleinem Zahlenabstand eine geschickte Strategie darstellt und diese Strategie anwenden, ohne jedoch die Funktionsweise erklären zu können. Demgegenüber können Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes diese Strategie nur verwenden, wenn sie diese selbst generieren oder, wenn diese von anderen Kindern im Unterricht in den Diskurs eingebracht wurde und anschließend auf Aufgaben mit ähnlichen Zahlcharakteristika übertragen werden kann. Sowohl für die Generierung der Strategie als auch für deren Anwendung auf ähnliche Aufgaben ist ein hohes konzeptuelles Wissen aufseiten der Schülerinnen und Schüler nötig, da im problemlöseorientierten Ansatz kein konditionales Strategiewissen (im Sinne von „Wenn-dann-Regeln") vermittelt wird.

Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig im Interventionszeitraum **(Hypothese 14a)** sowie langfristig im Zeitraum nach der Intervention **(Hypothese 14b)** positiv auf die *Entwicklung der Adaptivität* auswirken.

Auch der Einfluss kognitiver Grundfähigkeiten auf den Zuwachs in der adaptiven Strategieverwendung wurde in keiner der beschriebenen Studien mit parametrischen Verfahren untersucht. Für die Intelligenz wird sowohl kurzfristig **(Hypothese 14c)** als auch langfristig **(Hypothese 14d)** kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* erwartet.

Für die Bedeutung des Arbeitsgedächtnisses weisen die Befunde darauf hin, dass dieses insbesondere die prozeduralen Fähigkeiten, nicht jedoch den Lernzuwachs beeinflusst (LeFevre et al., 2013; Van der Ven et al., 2012). Daher wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis kurzfristig **(Hypothese 14e)** und langfristig **(Hypothese 14f)** kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* zeigt.

Für die Entwicklung des adaptiven Strategieeinsatzes ist darüber hinaus von Interesse, inwieweit eine Wiederholung der Interventionsinhalte im Rahmen einer kurzen Auffrischung die Nachhaltigkeit des Treatments unterstützen kann.

Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* auswirkt **(Hypothese 14g)**.

Die folgende Tabelle stellt im Überblick die zu testenden Hypothesen zur Entwicklung der Strategieadaptivität dar:

Tabelle 7: Hypothesen zur Strategieadaptivität

	Strategieadaptivität (Fragestellung 2)
	Experimentalgruppenunterschiede (Fragestellung 2a)
H10	Es wird angenommen, dass sich das Strategierepertoire durch eine explizite Strategievermittlung während der 4-tägigen Intervention schneller als durch informelle Strategieentwicklung aufbaut. Da das Strategierepertoire die Grundlage für einen adaptiven Strategieeinsatz darstellt, werden in der *Strategieadaptivität* kurzfristig Vorteile für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes erwartet.
H11	Da sich eine Zahlenblickschulung nachhaltig auf die Förderung des konzeptuellen Wissens auswirken sollte, welches die Basis für die Entwicklung von Verkürzungsstrategien und deren adaptiven Einsatz darstellt, wird für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes langfristig eine höhere *Adaptivität* als durch die Förderung in einem explizierenden Ansatz erwartet.
H12	Für beide Experimentalgruppen wird angenommen, dass die Einführung der schriftlichen Normalverfahren im zweiten Schulhalbjahr dazu führt, dass diese am Ende des Schuljahres (letzter Follow-up-Test) schematisch anstelle von halbschriftlichen Strategien und somit auch anstelle von Verkürzungsstrategien angewendet werden, was sich negativ auf die Adaptivität der Lösungswege in beiden Experimentalgruppen auswirken sollte.
	Experimentalgruppenunterschiede innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 2b)
H13	Es wird erwartet, dass alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes kurzfristig eine höhere *Strategieadaptivität* als die entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes zeigen.
	Individuelle Lernermerkmale (Fragestellung 2c)
H14	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig im Interventionszeitraum (H14a) sowie langfristig im Zeitraum nach der Intervention (H14b) positiv auf die *Entwicklung der Adaptivität* auswirken. Für die Intelligenz wird sowohl kurzfristig (H14c) als auch langfristig (H14d) kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* erwartet. Auch für das Arbeitsgedächtnis wird angenommen, dass sich kurzfristig (H14e) und langfristig (H14f) kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* zeigt. Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* auswirkt (H14g).

6 Methodisches Vorgehen

Die vorliegende Arbeit ist im Forschungsprojekt „Lehr-Lern-Prozesse im Mathematikunterricht der Grundschule: Instruktionsstrategien zur Förderung der individuellen Kompetenz zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000“ entstanden, in welchem der Vergleich zweier Instruktionsansätze zur Förderung der flexiblen und adaptiven Strategiewahl im Zentrum stand.[3] Die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Fragestellungen werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht. Das Studiendesign wird in Kapitel 6.1 dargestellt, während in Kapitel 6.2 erläutert wird, wie die zentralen Unterschiede der theoretischen Grundüberlegungen didaktisch umgesetzt wurden und wie die Unterrichtssequenzen in den beiden Unterrichtsansätzen gestaltet waren. Anschließend werden die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Erhebungsinstrumente vorgestellt (Kap. 6.3). Daran schließt sich die Beschreibung des Umgangs mit fehlenden Werten (Kap. 6.4) an. In Kapitel 6.5 werden die statistischen Auswertungsverfahren dargestellt, welche zur Beantwortung der Fragestellungen verwendet wurden. Die Beschreibung der Stichprobe (Kap. 6.6) bildet den Abschluss des Methodenkapitels, da für die kontrollierte Randomisierung der Schülerinnen und Schüler zu den beiden Instruktionsansätzen Kontrollvariablen aus Kapitel 6.3 herangezogen wurden.

6.1 Studiendesign

Für die am Projekt teilnehmenden Schülerinnen und Schüler wurde der Langtitel mit der Ergänzung „**Ti**pps zum **ge**schickten **R**echnen“ versehen und als TigeR-Projekt abgekürzt. Auf diese Weise konnte für die Schülerinnen und Schüler der „Tiger“ als Identifikationsfigur geschaffen werden.

Um die Wirksamkeit des explizierenden Unterrichtsansatzes und des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes in Reinform zu vergleichen (vgl. Tabelle 4, S. 99), war eine Minimierung von Störvariablen, wie sie bei Untersuchungen im Schulkontext zu finden sind, erforderlich. Daher wurde das Design der Studie experimentell angelegt und in einer außerschulischen Lernumgebung realisiert.

In den Herbstferien 2011 fand am Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel ein mathematisches Ferienprogramm statt, in welchem sich 79 Drittklässler aus 17 verschiedenen Kieler Schulklassen mit der adaptiven Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 beschäftigten. Die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten wurde interaktiv und abwechslungsreich gestaltet und fand im Wechsel mit Spiel- und Freizeitaktivitäten statt. Die Teilnahme am Ferienprogramm war freiwillig und kostenfrei. Die Eltern der teilnehmenden Schülerinnen

[3] Das Forschungsprojekt wurde von 2011 bis 2013 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert.

und Schüler meldeten ihre Kinder für eine der beiden Herbstferienwochen an. Die Schülerinnen und Schüler wurden in einer 5-tägigen Intervention in vier Lerngruppen nach dem *explizierenden Ansatz* (Kap. 6.2.1.1) oder dem *problemlöseorientierten Ansatz* (Kap. 6.2.1.2) unterrichtet. Die Gruppengröße der Experimentalteilgruppen variierte zwischen 16 und 25 Schülerinnen und Schülern, da sich die Teilnehmerzahl zwischen den beiden Ferienwochen unterschied.

Die 269 Mitschülerinnen und Mitschüler der Experimentalgruppenschüler, die nicht am Ferienprogramm teilnahmen, werden als unbehandelte Kontrollgruppe betrachtet, die zu T1, T3 und T4 an den Strategietesterhebungen und zu einem weiteren Messzeitpunkt (T0) an der DEMAT-Erhebung teilnahm.

Der Erhebungszeitraum der Studie erstreckte sich von Juni 2011 bis Juni 2012, sodass die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler über das gesamte dritte Schuljahr begleitet wurden. Wie Abbildung 2 zeigt, bildet die außerschulische Intervention im Oktober mit dem explizierenden (EA) und dem problemlöseorientierten Ansatz (PA) den Kern der Studie. Die Intervention wurde durch zwei Prätestmesszeitpunkte (T0 und T1), einen Posttest (T2) und zwei Follow-up-Tests (T3 und T4) während des Schuljahres gerahmt. Im Dezember und Februar fanden jeweils an einem Nachmittag pro Experimental(teil)gruppe Auffrischungen (mit Begleiterhebungen) statt, um die in der Intervention erworbenen Kompetenzen nachhaltig zu sichern.

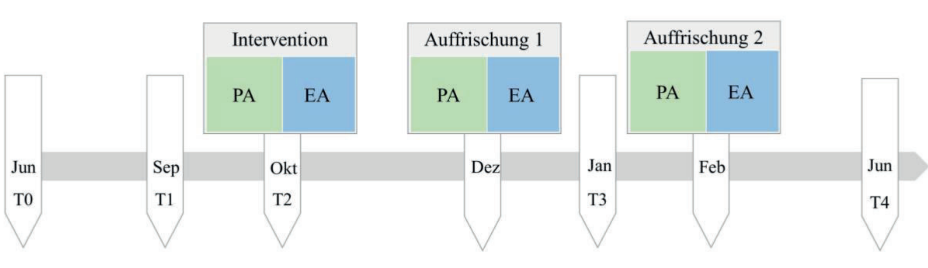


Abbildung 2: Ablauf der TigeR-Studie im 3. Schuljahr

Zu den verschiedenen Messzeitpunkten wurden zahlreiche Erhebungsinstrumente eingesetzt. Die Flexibilität und die Adaptivität der eingesetzten Strategien wurden dabei insbesondere durch Strategietests erfasst (Kap. 6.3.1). Mit dem informell angelegten Erhebungsinstrument *Post für den Tiger* (vgl. Kap. 6.3.2) konnten zusätzlich Prozessdaten für die beiden abhängigen Variablen generiert werden, da das Instrument jeden Tag während der Intervention und zusätzlich in den Auffrischungssitzungen zum Einsatz kam.

Mit Einzelinterviews konnten mathematische Basisfertigkeiten, Zahlwissen und subjektive Kriterien der Strategiewahl in den Experimentalgruppen erfasst werden.

Im Schülerfragebogen wurden affektiv-motivationale Einstellungen zum Fach Mathematik und zum mathematischen Ferienprogramm am ersten und letzten Tag jeder Interventionswoche mit einer 4-stufigen Skala (1 = „stimmt überhaupt nicht“ bis 4 = „stimmt genau“) erfragt.

Als Kontrollvariablen wurden allgemeines mathematisches Wissen (DEMAT 2^+, Krajewski, Liehm & Schneider, 2004a), kognitive Grundfertigkeiten (CFT 1, Cattell, Weiß & Osterland, 1997), der sozioökonomische Status der Eltern (HISEI im Elternfragebogen, Ganzeboom, De Graaf & Treiman, 1992) sowie die Arbeitsgedächtnisleistung (Test „Zahlen nachsprechen“, Petermann & Petermann, 2010) der Schülerinnen und Schüler erhoben.

Mit einem Lehrerfragebogen wurde vor der Intervention erfragt, welche Themen bis zu den Herbstferien im dritten Schuljahr behandelt und welche Lehr- und Anschauungsmaterialien darüber hinaus im Mathematikunterricht verwendet wurden, um in der Intervention hieran anknüpfen zu können.

Eine detailliertere Darstellung der eingesetzten und für die Fragestellungen der vorliegenden Arbeit relevanten Erhebungsinstrumente erfolgt in Kapitel 6.3. Zunächst wird im folgenden Kapitel dargestellt, wie die beiden konzeptionell unterschiedlichen Instruktionsansätze im Rahmen des Ferienprogramms umgesetzt wurden.

6.2 Inhalte und Ablauf der Interventionsstudie

In den folgenden Abschnitten wird beschrieben, wie die in Kapitel 5 zusammenfassend geschilderten konzeptionellen Überlegungen zu den beiden Unterrichtsansätzen im Rahmen der 5-tägigen Intervention (Kap. 6.2.1) und in den beiden Auffrischungssitzungen (Kap. 6.2.2) realisiert wurden.

6.2.1 Hauptintervention

Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler besuchten im Oktober 2011 für jeweils 5 Tage das Ferienprogramm, das neben den täglich insgesamt drei Zeitstunden umfassenden mathematischen Einheiten auch ein Freizeit- und Spielprogramm beinhaltete. Der zeitliche Umfang der Intervention entspricht mit 12 Zeitstunden etwa dem Umfang von drei bis vier Wochen schulischem Mathematikunterricht.

Basierend auf den in Kapitel 3 beschriebenen theoretischen Modellen zum Strategieerwerb wurden für beide Ansätze Verlaufspläne mit Unterrichtsmaterialien entwickelt. Die Konzepttreue der Verlaufspläne wurde im Sommer 2011 für beide Instruktionsansätze durch ein Rating von ausgewiesenen Expertinnen und Experten aus der Mathematikdidaktik validiert.

Die beiden Instruktionsansätze wurden von zwei Projektmitarbeiterinnen unterrichtet. Hierzu lagen für die beiden Interventionswochen sowie die Auffrischungstermine Unterrichtsskripte vor, welche von den beiden Mitarbeiterinnen streng befolgt wurden. Um die inhaltliche Umsetzung zu validieren, wurden die mathematischen Einheiten während des Ferienprogramms videographiert. Um Lehrpersoneneffekten vorzubeugen, wurde jeder

Ansatz zweimal unterrichtet, wobei die Mitarbeiterinnen in der zweiten Ferienwoche den jeweils anderen Ansatz unterrichteten.

Tabelle 8 gibt einen Überblick über die Inhalte der mathematischen Einheiten in den beiden Instruktionsansätzen während des Ferienprogramms. Im Folgenden wird anhand der Tabelle näher erläutert, wie die beiden Instruktionsansätze in der praktischen Umsetzung realisiert wurden.

Tabelle 8: Interventionsablauf und -inhalte in den beiden Instruktionsansätzen

	Explizierender Ansatz	**Problemlöseorientierter Ansatz**
Tag 1	• Orientierung im Zahlenraum bis 1000 • Kennenlernen einer Rechenkonferenz	• Orientierung im Zahlenraum bis 1000 • Kennenlernen einer Rechenkonferenz • 1. Rechenkonferenz
Tag 2	• Strategie Schrittweise • Strategie Stellenweise • 1. Rechenkonferenz • Spiel: „Strategien erkennen“	• Schulung des Zahlenblicks: Abstand zwischen Zahlen, Zerlegungen im Zahlenhaus (von einfach zu schwierig) • Aufgaben sortieren (schöne Aufgaben, Tiger-Aufgaben, sonstige Aufgaben)
Tag 3	• Strategie Hilfsaufgabe • Strategie Verändern • Strategie Ergänzen • Aufgabenkriterien und geschicktes Rechnen	• Aufgaben sortieren und Kriterien benennen • Erfinden von schönen Aufgaben und Tiger-Aufgaben • 2. Rechenkonferenz
Tag 4	• Wiederholung der Strategien, Aufgabenkriterien und geschicktes Rechnen • 2. Rechenkonferenz	• Aufgaben sortieren und Kriterien benennen • Geschicktes Rechnen • Übungsformate (Rechenpraxis)
Tag 5	[Abschließende Erhebungen, T2]	

Angaben der Mathematiklehrkräfte im Lehrerfragebogen zu den bis zu den Herbstferien behandelten Themen zeigten, dass ein Großteil der teilnehmenden Schulklassen noch nicht mit der Erweiterung des Zahlenraums begonnen hatte. Um eine gemeinsame Ausgangsbasis zu schaffen, wurde der erste Interventionstag in beiden Experimentalgruppen für allgemeine Orientierungsübungen im Zahlenraum bis 1000 genutzt. Dabei wurden beispielsweise Übungsformate zur Stellenwerttafel und zum Rechenstrich eingesetzt.

Außerdem wurde der Tiger als Protagonist des Ferienprogramms eingeführt. Dieser tauchte kontinuierlich sowohl in Arbeitsmaterialien als auch in diversen Videobotschaften an die Kinder auf und führte durch das Ferienprogramm. So stellte sich der Tiger in der ersten Videobotschaft persönlich vor und erzählte von seiner Vorliebe für kurze, geschickte Rechenwege. Gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern wurde in diesem Kontext erarbeitet, was unter geschickten Lösungswegen zu verstehen ist. Hierzu wurde festgehalten, dass sich ein geschickter Rechenweg durch wenige und einfache Rechenschritte auszeichnet.

Da effektiv nur drei Tage der Intervention für die Beschäftigung mit Strategien und Adaptivität bzw. mit Aufgabenkriterien und Rechenwegen zur Verfügung standen, war es erforderlich, den Lernstoff stark zu komprimieren und durch abwechslungsreiche Aufgabenvariationen die Motivation der teilnehmenden Kinder aufrecht zu erhalten. Die eingesetzten Materialien entstanden in Eigenentwicklung, sind jedoch wie in der Vorstudie (Heinze et al., 2009) für den explizierenden Ansatz in Anlehnung an Materialien aus dem Zahlenbuch 3 (Wittmann & Müller, 2003) und für den problemlöseorientierten Ansatz in Anlehnung an Materialien aus den Matheprofis 3 (Schütte, 2005b) konzipiert. Arbeitsblätter und Arbeitsformate wurden bezüglich der Arbeits- und Lernformen für beide Gruppen weitgehend parallel entwickelt, sodass sich die beiden Ansätze allein in ihren charakteristischen Kernelementen (explizites Thematisieren, Benennen und Automatisieren von Strategien vs. Zahlenblickschulung und Generierung eigener Strategien) unterscheiden sollten. Zu den Aufgaben, die nicht im Plenum besprochen oder verglichen wurden, lagen Musterlösungen zur Selbstkontrolle aus, um den Schülerinnen und Schülern ein Feedback über die richtige Lösung zu geben.

Befragungen der Mathematiklehrpersonen zu den vor den Herbstferien behandelten Themen sowie zu den eingesetzten Anschauungsmaterialien zeigten, dass die für beide Instruktionsansätze bedeutende Methode der Rechenkonferenz in keiner der teilnehmenden Klassen bisher im Unterricht eingesetzt wurde. In Rechenkonferenzen werden unterschiedliche Lösungswege der Schülerinnen und Schüler in einem mehrschrittigen Verfahren zunächst in Kleingruppen ausgetauscht und im Plenum anschließend eine Gruppenlösung vorgestellt (Selter & Sundermann, 1999; Spiegel & Götze, 2007; Wittmann & Müller, 1994). Rechenkonferenzen eignen sich für die Erarbeitung halbschriftlicher Rechenstrategien, weil Lösungswege sichtbar gemacht werden können und somit eine Basis für einen inhaltlichen Austausch geschaffen wird (Spiegel & Götze, 2007; Wittmann & Müller, 1994). Lösungswege können effizient verglichen und dabei alle Schülerinnen und Schüler in den inhaltlichen Austausch einbezogen werden (Selter & Sundermann, 1999). Wie Selter und Sundermann (1999) hervorheben, bieten Rechenkonferenzen darüber hinaus die Möglichkeit, Eigenproduktionen wertzuschätzen und gleichzeitig Schülerinnen und Schüler dazu anzuregen, effizientere Lösungswege zu finden. Somit können Eigenproduktionen auch dazu genutzt werden, diese zu schematisieren und allen Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen (Radatz et al., 2006). Die eigenen Rechenwege müssen dabei den anderen Kindern verständlich erklärt werden, sodass auch eine mathematische Sprachkultur etabliert wird.

Als Einführung der Methode wurde am Nachmittag des ersten Tages ein Video gezeigt, in dem eine idealtypische Rechenkonferenz mit Handpuppen präsentiert wurde. Im Sinne des Modell-Lernens (Bandura, 1976) wurden anhand des Videomaterials die einzelnen Phasen der Rechenkonferenz und zu beachtende Kommunikationsregeln gemeinsam mit den Kindern erarbeitet. Insbesondere im problemlöseorientierten Ansatz sollte durch die frühe Vermittlung von metakognitiven und sozialen Strategien die kognitive Belastung reduziert werden (vgl. Kapitel 4.3), welche sich andernfalls negativ auf den Lernprozess auswirken kann.

Schließlich wurde an Tag 1 im problemlöseorientierten Ansatz und an Tag 2 im explizierenden Ansatz die erste eigene Rechenkonferenz durchgeführt und die Kleingruppenergebnisse abschließend vor der Gesamtgruppe vorgestellt. Für die Rechenkonferenzen wurden Additions- oder Subtraktionsaufgaben gewählt, die aufgrund ihrer Aufgabenkriterien bestimmte halbschriftliche Rechenstrategien nahelegten, jedoch verschiedene geschickte Lösungswege ermöglichten. Nach der ersten Phase der Rechenkonferenz, in der die Kinder die Aufgaben in Einzelarbeit lösten, konnten sie ihr Endergebnis abgleichen. Dadurch konnten mögliche Rechenfehler der Kinder vor der Vorstellungs- und Diskussionsrunde in den Kleingruppen berichtigt und der Fokus auf die Effizienz der Rechenwege gerichtet werden.

In der Ergebnisvorstellung der einzelnen Kleingruppen lenkte die Lehrperson die Aufmerksamkeit zunächst auf die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der einzelnen Rechenwege. Hierbei wurden beispielsweise unterschiedliche Notationsformen oder Variationen derselben Strategie angesprochen, die insbesondere im problemlöseorientierten Ansatz relevant sind. Schließlich wurden die Gruppenergebnisse nach Effizienz der Lösungswege verglichen.

Ab dem zweiten Tag der Intervention unterschieden sich die instruktionalen Umsetzungen in den beiden Ansätzen voneinander. Zentrale Elemente jeden Ansatzes, welche auch an den Auffrischungsnachmittagen wiederholt wurden, werden im Folgenden näher beschrieben. Hierbei werden die wesentlichen Elemente beider Unterrichtsansätze beispielhaft dargestellt.

6.2.1.1 Explizierender Ansatz

Die theoretische Grundlage des explizierenden Ansatzes gründet u. a. auf Sieglers Modellen zum Strategieerwerb (Kap. 4.4). In Anlehnung an die Mechanismen des Strategieerwerbs nach Siegler wird das Strategierepertoire im explizierenden Instruktionsansatz aufgebaut, indem die einzelnen halbschriftlichen Rechenstrategien eingeführt, benannt und automatisiert werden. Wie in Kapitel 5 beschrieben, wird jedoch im explizierenden Ansatz im Gegensatz zum Strategiewahlmodell angenommen, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, ein breites Strategierepertoire aufzubauen und, dass instruktionale Unterstützung nötig ist, um die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl zu erlangen.

Durch die Automatisierung der Strategien im explizierenden Ansatz sollen, in Anlehnung an Erkenntnisse aus der Cognitive-Load-Theorie (Sweller et al., 2011), Gedächtnisressourcen für den adaptiven Einsatz der Strategien frei werden. Nachdem mehrere Strategien eingeführt worden sind, kann in diesem Unterrichtsansatz durch den Vergleich von Strategien und deren Effizienz bei spezifischen Aufgabencharakteristika Metawissen zur Strategieverwendung aufgebaut werden.

Während der Intervention waren die Benennung und Automatisierung von Strategien in den verschiedenen Aufgabenformaten wiederkehrende charakteristische Elemente des Ansatzes. Für jede Strategie wurde in einer öffentlichen Phase ein Plakat angefertigt, auf welchem die einzelnen Rechenschritte der Strategie abgebildet waren. Die Plakate hingen gut sichtbar im Raum.

Am zweiten Tag wurden im explizierenden Ansatz die beiden Strategien *Schrittweise* und *Stellenweise* eingeführt und eine erste Rechenkonferenz erprobt. Die beiden Strategien sind als Universalstrategien weitestgehend unabhängig von der Nutzung von Aufgabenkriterien einsetzbar und dienten somit als grundlegende Strategien, die aus dem Hunderterraum bereits bekannt sind. Eine Einschränkung stellt die Strategie *Stellenweise* bei negativen Teilergebnissen dar (vgl. Kap. 2.2.3). Auf einem Arbeitsblatt zur Automatisierung wurde als „Stolperfalle" deshalb eine Subtraktionsaufgabe integriert, bei der durch die Anwendung der Strategie *Stellenweise* negative Teilergebnisse entstehen. In der anschließenden Diskussion wurden mögliche Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler hierzu besprochen und von der Lehrperson bilanzierend festgehalten, dass Subtraktionsaufgaben, in denen einzelne Ziffern des Subtrahenden die entsprechenden Ziffern des Minuenden übersteigen, geschickter mit einer anderen Strategie als *Stellenweise* (wie bspw. mit der Strategie *Schrittweise*) zu lösen sind.

Zur Erkennung und Unterscheidung der beiden Strategien wurde am Ende des Tages das Spiel „Strategien erkennen" gespielt, bei welchem die Strategien dargestellter Lösungswege erkannt und benannt werden sollten. Zur Veranschaulichung von Rechenwegen wurde die Notation eines Rechenweges am Rechenstrich geübt.

Am dritten Tag wurden die adaptiven Strategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern* und *Ergänzen* eingeführt, die nur effizient angewendet werden können, wenn zuvor Aufgabenkriterien erkannt und für den Lösungsprozess genutzt wurden. Zur Strategie *Hilfsaufgabe* wurden in einer öffentlichen Phase zunächst Aufgabenkarten an der Tafel fixiert. Es wurde erläutert, dass es unter den Aufgaben Paare gibt, bei denen jeweils eine etwas einfachere Aufgabe hilft, eine schwierigere zu lösen. Die einzelnen Rechenschritte der Strategie wurden an Beispielen durchgesprochen. In weiteren Übungsformaten wurde die Strategie der *Hilfsaufgabe* dann geübt. Im anschließenden Plenumsgespräch wurde anhand ausgewählter Aufgaben besprochen, weshalb die Aufgaben bei der Lösung helfen. Hierbei waren die Schülerinnen und Schüler gefordert, die Aufgabenmerkmale genau zu untersuchen und anhand dieser ihr Vorgehen zu begründen (Nähe zum nächsten Zehner/Hunderter). Gemeinsam wurde herausgearbeitet, bei welchen Aufgabenkriterien die Strategie *Hilfsaufgabe* eine besonders geschickte Strategie ist.

Bei der Strategie *Verändern* lernten die Schülerinnen und Schüler die „Vereinfachungsmaschine" kennen, welche das Prinzip des *Gleich-* und *Gegensinnigen Veränderns* veranschaulicht, indem eine vorgegebene Aufgabe (434 – 198; 234 + 449) durch Verändern auf eine Aufgabe mit glattem Subtrahend (436 – 200) bzw. glattem 2. Summand (233 + 450) zurückgeführt wird (Schütte, 2005a).

Bei der Strategie *Ergänzen* wurde auf eine Sequenz aus dem Rechenkonferenz-Lehrvideo (Tag 1) zurückgegriffen, in welcher dieser Rechenweg bereits auftauchte. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich selbst Aufgabenbeispiele ausdenken, bei denen das *Ergänzen* eine geschickte Strategie darstellt.

An Tag 4 wurden alle behandelten Strategien im Zusammenhang mit Aufgabenkriterien wiederholt und in einer finalen Rechenkonferenz schließlich noch einmal im Hinblick auf ihre Effizienz verglichen. Darüber hinaus wurden diverse Aufgabenformate eingesetzt, in denen die Effizienz von Strategien in Bezug auf die jeweils gegebenen Aufgabenkriterien überprüft werden mussten.

Der letzte Tag der Intervention wurde für abschließende Erhebungen (Strategietest, Interview und Arbeitsgedächtnistest) genutzt.

6.2.1.2 Problemlöseorientierter Ansatz

Im problemlöseorientierten Ansatz stehen der Aufbau des konzeptuellen Zahlwissens und die stetige Diskussion über Lösungswege und ihre Adaptivität im Vordergrund (vgl. Kap. 3.3.4).

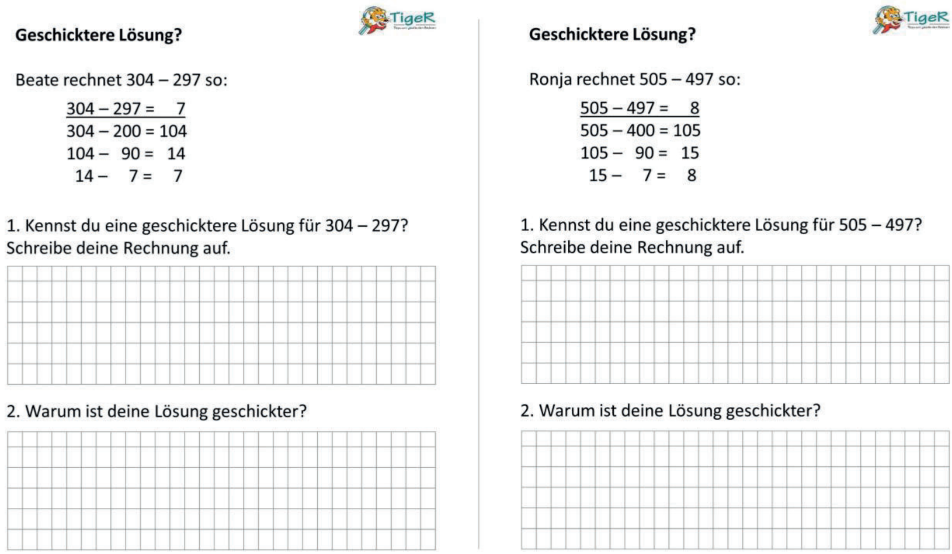
Statt vorgegebene Strategien anzuwenden, entwickelten die Schülerinnen und Schüler während der Intervention in diesem Unterrichtsansatz individuelle Lösungswege, welche an konkreten Beispielen diskutiert wurden. Theoretischen Überlegungen zufolge (vgl. Kap. 3.3.4) ist die Förderung des konzeptuellen Zahlwissens und die kontinuierliche Diskussion über Zahleigenschaften und über die Effizienz von Rechenwegen notwendig, um an Aufgabencharakteristika angepasste Lösungswege zu entwickeln.

Am zweiten Tag der Intervention standen insbesondere Aufgaben zur Zahlenblickschulung im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler lernten die Rechenwegsnotation am Rechenstrich kennen und führten verschiedene Übungen zur *Abstandsberechnung* durch. Hierbei wurde im Gegensatz zum explizierenden Ansatz nicht die *Ergänzungsstrategie* vorgegeben. Stattdessen sollten die Schülerinnen und Schüler beispielsweise analysieren, wann der Zahlenabstand schwierig oder leicht zu berechnen ist. Die Ergebnisse wurden in einer Plenumsphase gesammelt und gemeinsam diskutiert. Statt die Strategie des *Gleich- und Gegensinnigen Veränderns* wie im explizierenden Ansatz vorzugeben, wurden im problemlöseorientierten Ansatz Übungen zu Zahlzerlegungen im Zahlenhaus durchgeführt. Hierbei sollten die Schülerinnen und Schüler einfache und schwierigere Zahlzerlegungen einer Zahl finden. Auf Zusammenhänge zwischen den gefundenen Zerlegungen wurde eingegangen. Bei den Übungen stand im problemlöseorientierten Ansatz immer die Analyse des Zahlenmaterials und nicht die Vorgabe einer bestimmten Strategie im Vordergrund.

Darüber hinaus wurde in diesem Ansatz ein in Anlehnung an das Sortieren von Aufgaben bei den „Matheprofis 3“ (Schütte, 2004, 2005b) konzipiertes Aufgabenformat eingesetzt. Hierbei sollten Aufgaben den drei Kategorien „schöne Aufgaben", „Tigeraufgaben" und „sonstige Aufgaben" zugeordnet werden. „Schöne Aufgaben“ bezeichnen Aufgaben, die durch glatte Zehner oder Hunderter schnell im Kopf zu lösen sind (z. B. 420 – 200), während sich „Tigeraufgaben“ durch einen (oder mehrere) geschickte Rechentricks auf eine „schöne Aufgabe“ zurückführen lassen (z. B. 420 – 198). „Sonstige Aufgaben“ können keiner der beiden Kategorien zugeordnet werden und erfordern aufwendigere Rechenoperationen (z. B. 426 – 268). Bei diesem Aufgabenformat standen die Analyse des Zahlenmaterials und die begründete Zuordnung im Vordergrund.

Am dritten Interventionstag wurden vor allem Variationen des Sortierens von Aufgaben eingesetzt. Bei einer der Aufgaben sollten die Schülerinnen und Schüler selbst erfundene „Tiger-Aufgaben“ auf Karteikarten notieren und ihre Auswahl auf der Rückseite begründen. Am Ende des Tages fand eine Rechenkonferenz statt.

Am vierten Tag wurden neben Aufgaben zum Erkennen von Aufgabenkriterien diverse Übungsformate zum Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 eingesetzt, um den gleichen Anteil an Rechenpraxis wie im explizierenden Ansatz zu gewährleisten. Hierbei wurde beispielsweise das in Abbildung 3 dargestellte Aufgabenformat eingesetzt, bei welchem die Schülerinnen und Schüler zu einer Aufgabe eine geschicktere Lösung finden sollten als die vorgegebene Musterlösung. Die ausgewählten Aufgaben waren dabei parallel konstruiert (304 − 297 bzw. 505 − 497) und sollten die *Ergänzungsstrategie* induzieren.



Geschicktere Lösung?

Beate rechnet 304 – 297 so:

304 – 297 = 7
304 – 200 = 104
104 – 90 = 14
14 – 7 = 7

1. Kennst du eine geschicktere Lösung für 304 – 297? Schreibe deine Rechnung auf.

2. Warum ist deine Lösung geschickter?

Geschicktere Lösung?

Ronja rechnet 505 – 497 so:

505 – 497 = 8
505 – 400 = 105
105 – 90 = 15
15 – 7 = 8

1. Kennst du eine geschicktere Lösung für 505 – 497? Schreibe deine Rechnung auf.

2. Warum ist deine Lösung geschickter?

Abbildung 3: Aufgabenformat im problemlöseorientierten Ansatz (links) und im explizierenden Ansatz (rechts)

Dieses Aufgabenformat wurde am dritten Interventionstag (im explizierenden Ansatz) bzw. am vierten Interventionstag (im problemlöseorientierten Ansatz) eingesetzt. Lediglich die anschließende Besprechung unterschied sich in den Unterrichtsskripts, da im problemlöseorientierten Ansatz basierend auf der vorgegebenen Aufgabe verschiedene von den Schülerinnen und Schülern entwickelte Lösungswege miteinander verglichen wurden. Hierbei konnten nur solche Lösungen diskutiert werden, die auch von den Schülerinnen und Schülern entwickelt wurden, während im explizierenden Ansatz auf bereits thematisierte Strategien verwiesen und diese benannt werden konnten. Im problemlöseorientierten Ansatz wurde am vierten Interventionstag darüber hinaus in einer weiteren öffentlichen Phase im Sitzkreis eine Auswahl der am Vortag erfundenen „Tiger-Aufgaben“ besprochen. Hier konnte auch auf Fehlvorstellungen eingegangen werden, die sich in den Erklärungen der Schülerinnen und Schüler gezeigt hatten.

Typische Aufgabenformate beider Unterrichtsansätze wurden in den beiden Auffrischungen im Dezember 2011 und Februar 2012 wieder aufgegriffen. Der Ablauf und die Inhalte der beiden Auffrischungstermine werden im folgenden Kapitel beschrieben.

6.2.2 Auffrischungen

Im Dezember 2011 und Februar 2012 besuchte ein Großteil der Schülerinnen und Schüler, die am Ferienprogramm teilgenommen hatten, für jeweils einen Nachmittag erneut das IPN in Kiel. Die Auffrischungen hatten einen zeitlichen Umfang von jeweils 2,5 Zeitstunden, wobei diese Zeitfenster sowohl zur Wiederholung von Inhalten aus der Intervention als auch für Testdurchführungen genutzt wurden. Die Intervention im Dezember begann mit einem Strategietest. Dieser wurde als Follow-up-Test der Intervention vorangestellt, um die Nachhaltigkeit der Intervention zu überprüfen. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler hatten zu diesem Zeitpunkt nach der Intervention je nach besuchter Ferienwoche 6 bzw. 7 Wochen regulären Mathematikunterricht erhalten, der laut den Stoffverteilungsplänen verschiedener Lehrwerke (z. B. Schütte, 2005a; Wittmann & Müller, 2010) für diesen Zeitraum die Thematisierung halbschriftlicher Rechenstrategien vorsieht.

An den Auffrischungsnachmittagen wurden, wie in Tabelle 9 dargestellt, die zentralen Elemente der beiden Instruktionsansätze wiederholt.

Tabelle 9: Ablauf und Inhalte der ersten Auffrischung (zwischen T2 und T3)

<table>
<tr><th colspan="2">Auffrischung im Dezember</th></tr>
<tr><th>Explizierender Ansatz</th><th>Problemlöseorientierter Ansatz</th></tr>
<tr><td colspan="2">[Strategietest]</td></tr>
<tr><td>• Wiederholung der Strategien
○ Vergleich von Strategien an einer Beispielaufgabe
○ Was bedeutet „geschicktes Rechnen“?</td><td>• Wiederholung der Aufgabenkategorisierung
• Was sind Tiger-Aufgaben? Was sind schöne Aufgaben?
○ Thematisierung von Tiger-Tricks bei den Tiger-Aufgaben</td></tr>
<tr><td>• Strategien erkennen
• Geschicktere Strategien finden (Paula rechnet die Aufgabe so… . Findest du eine geschicktere Lösung?) und diese benennen</td><td>• Geschicktere Strategien finden (Paula rechnet die Aufgabe so… . Findest du eine geschicktere Lösung?)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rechenkonferenz</td></tr>
<tr><td colspan="2">[Post für den Tiger]</td></tr>
</table>

Im explizierenden Ansatz wurden zunächst alle im Ferienprogramm erlernten Strategien thematisiert. Hierbei wurden sowohl die einzelnen Rechenschritte der verschiedenen Strategien wiederholt als auch besprochen, bei welchen Aufgabenkriterien die einzelnen Strategien besonders geschickt einzusetzen sind (konditionales Strategiewissen). Bei einem anschließenden Spiel, das den Schülerinnen und Schülern ebenfalls aus dem Ferienprogramm bekannt war, mussten Strategien vorgegebener Lösungswege erkannt und benannt werden.

Im problemlöseorientierten Ansatz stand hingegen erneut das Sortieren von Aufgaben im Fokus. Die Schülerinnen und Schüler sollten „schöne Aufgaben“, „Tiger-Aufgaben“

und Aufgaben, die keiner dieser beiden Kategorien zuzuordnen sind, erkennen und ihre Zuordnung begründen.

Nach der gemeinsamen Wiederholung zentraler Elemente des Ferienprogramms sollten die Schülerinnen und Schüler beider Ansätze selbstständig geschicktere Lösungswege als die zu einer Aufgabe vorgegebene Musterlösung finden (vgl. Abbildung 3, S. 120). Der Unterschied in der Umsetzung der beiden Instruktionskonzepte bestand bei diesem Aufgabenformat darin, dass die vorgegebene Musterlösung und selbstentwickelte Strategien im explizierenden Ansatz konkret benannt werden konnten. Im problemlöseorientierten Ansatz hingegen mussten Strategien und ihre Passung zu Zahl- und Aufgabeneigenschaften von den Schülerinnen und Schülern am konkreten Zahlenmaterial der Aufgaben beschrieben werden.

Die Auffrischung im Dezember endete in beiden Gruppen mit einer Rechenkonferenz und dem Aufgabenformat *Post für den Tiger* (vgl. Kap. 6.3.2), das durch eine Videosequenz angeleitet wurde, in welcher der Tiger um mehr Post bat. Die Rückantwort des Tigers kam als Weihnachtspostkarte an alle Schülerinnen und Schüler, die an der Auffrischung teilgenommen hatten, nach Hause.

Da einige Schülerinnen und Schüler bereits in dem im Januar durchgeführten Strategietest (T3) die schriftlichen Normalverfahren anwendeten, wurden diese bei der Auffrischung im Februar kurz thematisiert (vgl. Tabelle 10).

Tabelle 10: Ablauf und Inhalte der zweiten Auffrischung (zwischen T3 und T4)

Auffrischung im Februar	
Explizierender Ansatz	**Problemlöseorientierter Ansatz**
• Wiederholung der Strategien • Thematisierung von Aufgabencharakteristika o Wann eignet sich welche Strategie am besten?	• Aufgaben kategorisieren o Schöne Aufgaben, Tiger-Aufgaben, sonstige Aufgaben
• Thematisierung der schriftlichen Normalverfahren o Wann ist schriftliches Rechnen geschickt und wann nicht?	
• Tiger-Zeitschrift gestalten: o Geschicktere Lösung finden o Viele verschiedene Lösungswege zu vorgegebenen Aufgabe finden (in Kleingruppen) o Rechenstrategien in Partnerarbeit erkennen (A zeigt Strategie zu einer Aufgabe, B benennt die Strategie) o Tiger-Steckbrief vervollständigen (z. B. *„Bei diesen Plus- und Minusaufgaben bis 1000 rechne ich am liebsten mit der Strategie Verändern“:…*) • Vorstellung der Resultate	• Tiger-Zeitschrift gestalten: o Geschicktere Lösung finden o Viele verschiedene Lösungswege zu vorgegebenen Aufgabe finden (in Kleingruppen) o Aufgabenkarten den Kategorien „Tiger-Aufgabe“, „schöne Aufgabe“ und „Restliche Aufgabe“ zuordnen o Tiger-Steckbrief vervollständigen (z. B. *„Bei diesen Plus- und Minusaufgaben bis 1000 sehe ich das Ergebnis auf den ersten Blick:“:…*) • Vorstellung der Resultate
[Post für den Tiger: Videobotschaft]	

Intendiert wurde hiermit vor allem, dass die schriftlichen Normalverfahren unter dem Blickwinkel der im Ferienprogramm formulierten Kriterien für geschickte Rechenwege betrachtet werden. Gemeinsam wurde mit den Schülerinnen und Schülern an einer Beispielaufgabe besprochen, wie die schriftlichen Verfahren funktionieren und bei welchen Aufgabenkriterien sie einen effektiven Rechenweg darstellen. Es wurde gemeinsam erarbeitet, dass die Verfahren effizient sind, wenn die Aufgaben mit keiner geschickten halbschriftlichen Rechenstrategien gelöst werden können (im explizierenden Ansatz) bzw. wenn die Aufgabe weder der Kategorie „schöne Aufgaben“ noch der Kategorie „Tiger-Aufgaben“ zugeordnet werden kann (Kategorie „sonstige Aufgaben“ im problemlöseorientierten Ansatz). Ziel dieser Sequenz war es, dass die schriftlichen Normalverfahren nicht als Algorithmus angesehen werden, der alle halbschriftlichen Rechenstrategien ablöst, sondern die schriftlichen Normalverfahren reflektiert eingesetzt werden.

Im Anschluss an diese Sequenz wurden bekannte Aufgabenformate aus der Intervention bearbeitet und am Ende zu einer *Tiger-Zeitschrift* zusammengestellt.

Die *Post für den Tiger* verband in der zweiten Auffrischung das schriftliche Aufgabenformat mit einer Art Kurzinterview, in dem die Schüler ihre Rechenwege für zwei ausgewählte Aufgaben zunächst notieren sollten und anschließend in einer Videobotschaft an den Tiger im Interview mit Hilfskräften erklären sollten, warum ihre Lösungswege geschickt sind.

6.3 Erhebungsinstrumente

Im Folgenden werden ausgewählte Testinstrumente aus der Studie vorgestellt. Dabei werden nur solche Testinstrumente beschrieben, die zur Erfassung der abhängigen und unabhängigen Variablen genutzt und somit in die statistischen Auswertungen (Kap. 6.4) einbezogen werden.

Tabelle 11 gibt einen Überblick über die verwendeten Erhebungsinstrumente und zeigt, zu welchen Messzeitpunkten sie eingesetzt wurden.

Tabelle 11: Studiendesign mit Erhebungsinstrumenten

	2011				**2012**		
	Juni T0	**September T1**	**Oktober T2 Interven-tion**	**Dezember Auffrisch-ung 1**	**Januar T3**	**Februar Auffrisch-ung 2**	**Juni T4**
Strategietest (Kap. 6.3.1)		X	X	(X)	X		X
Post für den Tiger (Kap. 6.3.2)			X	(X)		(X)	
DEMAT (Kap. 6.3.3)	X						
CFT 1 (Kap. 6.3.4)		X					
Test zur Merkfähigkeit (Kap. 6.3.5)			X				

(X) MZP wird in den Analysen aufgrund großer Stichprobenausfälle nicht berücksichtigt (vgl. Kap. 6.4)

Das Strategierepertoire (Fragestellung 1) und die Adaptivität eingesetzter Strategien (Fragestellung 2), die mit Strategietests zu verschiedenen Messzeitpunkten erfasst wurden, werden in Kapitel 6.3.1 vorgestellt. Mit der *Post für den Tiger* (Kap. 6.3.2) wurde darüber hinaus ein weiteres Instrument implementiert, das die Entwicklung beider abhängiger Variablen im Unterricht der Intervention abbilden soll.

Neben der Experimentalgruppenzugehörigkeit werden als mögliche weitere Prädiktoren für beide abhängigen Variablen (Fragestellung 1c bzw. 2c) im Rahmen der vorliegenden Arbeit aufgrund theoretischer Überlegungen und empirischer Befunde (vgl. Kapitel 3.4) die Erfassung allgemeiner mathematischer Leistungen durch den DEMAT 2^+ (Kap. 6.3.3), die Erfassung kognitiver Grundfähigkeiten durch den CFT 1 (Kap. 6.3.4) sowie die Erfassung der Arbeitsgedächtnisleistung über die Merkfähigkeit einer Ziffernfolge (Kap. 6.3.5) beschrieben.

6.3.1 Strategietests

Die Kompetenz zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl sowie die Korrektheit wurden durch Strategietests erfasst. Diese wurden, wie Tabelle 12 zeigt, zu drei Messzeitpunkten sowohl in den Experimentalgruppen als auch in der Kontrollgruppe (T1, T3 und T4) und zu zwei weiteren Messzeitpunkten ausschließlich in den Experimentalgruppen (T2 und während der Dezember-Auffrischung) eingesetzt.

Tabelle 12: Übersicht über die Messzeitpunkte zur Erfassung des Strategietests

	2011			2012		
	September T1	**Oktober T2 Intervention**	**Dezember Auffrischung**	**Januar T3**	**Februar Auffrischung**	**Juni T4**
Strategietest	X*	X	(X)	X*		X*

* Erhebungen wurden zusätzlich in der Kontrollgruppe (N = 269) durchgeführt

Die Strategietests enthielten zu jedem Messzeitpunkt acht Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Die Instruktion für die Schüler lautete: *„Löse möglichst geschickt! Schreibe deinen Rechenweg auf.“* Die Aufgaben waren aufgrund der Zahl- und Aufgabeneigenschaften so konstruiert, dass sie bestimmte halbschriftliche Rechenstrategien nahelegten. Auf Speedbedingungen wurde bewusst verzichtet, da die Adaptivität der Lösungsprozesse im Vordergrund stand.

Die Tests setzten sich zu jedem Messzeitpunkt aus vier Ankeritems sowie vier weiteren Items zusammen. Darüber hinaus waren aufeinanderfolgende Messzeitpunkte mit je sechs Aufgaben verbunden. Aufgrund der großen Zeitspannen zwischen den Messzeitpunkten (ein Monat, drei Monate und fünf Monate) sowie einer variierten Aufgabenreihenfolge und der Fokussierung des Aufgabenprompts auf der Adaptivität wird der Einfluss von Erinnerungseffekten auf die Aufgabenlösungen als gering eingeschätzt. Jeder Strategietest bestand aus vier Additions- und vier Subtraktionsaufgaben. Zu einem Messzeitpunkt erstmalig eingesetzte Aufgaben wurden überwiegend analog zu bereits vorab eingesetzten Aufgaben konstruiert (z. B. 788 − 299 ersetzte die Aufgabe 688 – 399). Eine Übersicht über alle eingesetzten Testaufgaben befindet sich im Anhang (vgl. Anhang A, S. 258).

Die Lösungswege wurden zunächst nach Korrektheit und eingesetzter Strategie kodiert. Die Kodierung der Lösungswege wurde an den beiden Projektstandorten von je zwei studentischen Mitarbeiterinnen auf Grundlage eines im Projekt entwickelten Manuals vorgenommen, indem Strategiecodes zugewiesen wurden. Die Schülerlösungen wurden pro Messzeitpunkt kodiert, wobei bei der Kodierung keine Informationen über die Experimentalgruppenzugehörigkeit des jeweiligen Schülers/der jeweiligen Schülerin vorlagen. Für jeden Messzeitpunkt erfolgte für einen Teil der Lösungen eine doppelte Kodierung, um die Beurteilerübereinstimmung für die Strategiekodierung auf Ebene 2 zu überprüfen (vgl. Tabelle 13, S. 127). Diese kann mit Kappa-Werten $\kappa > .70$ als zufriedenstellend beurteilt werden.

Tabelle 13 gibt einen Überblick über das Kategoriensystem. Dieses entstand zunächst deduktiv durch die Orientierung an bereits bestehenden Kategoriensystemen (vgl. Kap. 2.2.3) und wurde in einem zweiten Schritt induktiv um Strategien aus der Gesamtstichprobe zu einem komplexen Kategoriensystem erweitert. Das komplette Kategoriensystem differenziert die dargestellten Strategien noch weiter auf vier Ebenen, indem weitere Substrategien und typische Fehlstrategien zu den einzelnen Hauptstrategien ebenfalls als weitere Kategorien aufgenommen wurden. Beispielsweise werden auch nicht vollständige Lösungswege mit einem entsprechenden Code den übergeordneten Strategien zugeordnet (vgl. vollständiges Kategoriensystem in Anhang B, S. 259).

Tabelle 13: Überblick über das Kategoriensystem zur Strategiekodierung

Strategiecode Ebene 1		**Strategiecode Ebene 2**
1. Schriftliches Normalverfahren	1.1	Standardschreibweise
	1.2	Andere Schreibweise
2. Stellenweise	2.1	Standard (stellengerecht alle Stellen zerlegt)
	2.2	Verkürztes Verfahren (Zerlegung in zwei statt in drei Schritten)
	2.3	Stellenweise Subtraktion
3. Schrittweise	3.1	Stellengerechte Zerlegung
	3.2	Verkürztes Verfahren (Zerlegung in zwei statt in drei Schritten)
	3.3	Nicht stellengerechte Zerlegung
4. Hilfsaufgabe	4.1	1. Summanden bzw. Minuend geglättet
	4.2	2. Summanden bzw. Subtrahend geglättet
	4.3	Beide Summanden bzw. Minuend und Subtrahend geglättet
5. Abstandsberechnung	5.1	Ergänzen (schriftlich oder am Rechenstrich)
	5.2	Indirekte Subtraktion (schriftlich oder am Rechenstrich)
	5.3	Rechenrichtung nicht eindeutig
6. Verändern	6.1	Addition: Gegensinniges Verändern
	6.2	Subtraktion: Gleichsinniges Verändern
7. Mischformen	7.1	Kombination Schrittweise und Stellenweise
	7.2	Zehner Stellenweise, Einer Schrittweise angepasst
	7.3	Kombination Schrittweise und Hilfsaufgabe
8. Im Kopf gerechnet		keine schriftliche Lösung angegeben
9. Nicht zuzuordnen		

Die Strategiecodes stellen die Grundlage für die Berechnungen der Strategieflexibilität und -adaptivität dar.

6.3.1.1 Strategieflexibilität

Zur Berechnung der Strategieflexibilität wurde für jeden Messzeitpunkt auf Ebene 2 der Strategiekodierungen die Anzahl eingesetzter Strategien berechnet (Summenscore). Bei acht Testaufgaben pro Messzeitpunkt ergibt sich ein Maximum von acht möglichen Strategien. Tabelle 14 gibt einen Überblick über die Anzahl eingesetzter Strategien in den Strategietests (Summenscore *min* = 1, *max* = 8).

Tabelle 14: Deskriptive Statistiken für die Strategieflexibilität (Strategierepertoire gesamt, Rohdaten)

Strategieflexibilität				
MZP	*N*	*M*	*SD*	*Range*
T1	78	2.71	1.05	1–5
T2	79	3.46	1.16	1–6
T3	73	2.97	1.18	1–6
T4	74	2.82	1.51	1–6

Zusätzlich zur Einschätzung der Strategieflexibilität wurde das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zu den unterschiedlichen Messzeitpunkten ausgewertet (vgl. Tabelle 15). Als *Verkürzungsstrategien* galten im Kontext der eingesetzten Aufgaben die Strategien *Hilfsaufgabe*, (*Gleich-/Gegensinniges) Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis*. Wurde ein korrektes Ergebnis im Kopf ausgerechnet, sind keine Rückschlüsse auf die eingesetzte Strategie möglich. Es ist jedoch davon auszugehen, dass dem Kopfrechnen eine adaptive Strategie zugrunde liegt, da diese weniger Arbeitsgedächtnisressourcen erfordert. Das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* gibt die Anzahl der unterschiedlichen, zu einem Messzeitpunkt eingesetzten *Verkürzungsstrategien* wieder (Summenscore $min = 0$, $max = 4$). Im Gegensatz zum gesamten Strategierepertoire werden hier die *Verkürzungsstrategien* auf Ebene 1 der Strategiekodierung (vgl. Tabelle 13, S. 127) betrachtet, da von Interesse ist, inwiefern wirklich konzeptionell unterschiedliche *Verkürzungsstrategien* verwendet wurden (und nicht Variationen derselben Strategie).

Tabelle 15: Deskriptive Statistiken für das Repertoire an Verkürzungsstrategien (Rohdaten)

Repertoire an Verkürzungsstrategien				
MZP	*N*	*M*	*SD*	*Range*
T1	78	0.38	0.56	0–2
T2	79	1.43	1.01	0–3
T3	73	1.04	1.06	0–4
T4	74	0.88	0.99	0–3

6.3.1.2 Strategieadaptivität

In einem weiteren Schritt wurde für jede Aufgabe definiert, welche Strategien in Verbindung mit den jeweiligen Aufgabencharakteristika als effizient und somit als adaptiv einzuschätzen sind. Die Kodierung der Adaptivität erfolgte dabei kriteriumsbezogen. Als Kriterien für die Adaptivitätseinschätzung wurden pro Testaufgabe für jede Strategie des Kodiermanuals die Anzahl der Lösungsschritte, der kognitive Aufwand und die Fehleranfälligkeit beurteilt und anschließend die Ratingurteile 0 Punkte (nicht adaptiv), 0.5 Punkte (partiell adaptiv) oder 1 Punkt (adaptiv) vergeben. Bei der Aufgabe 403 – 396 wurden beispielsweise die Strategien *Abstandsberechnung* (*Ergänzen*, *Indirekte Subtraktion* oder *Abstandsberechnung ohne Angabe der Rechenrichtung*), *Hilfsaufgabe* (1. Summand oder 2. Summand geglättet) und *Gleichsinniges Verändern* als adaptiv gewertet. Als partiell adaptiv wurden eine verkürzte Version des *Schrittweisen Rechnens* (403 − 300 = 103; 103 − 96 = 7), die gleichzeitige Glättung von Minuend und Subtrahend (400 − 400 = 0; 0 + 3 + 4 = 7) sowie eine Kombination aus *Schrittweise* und *Hilfsaufgabe* (400 − 300 = 100; 100 − 96 = 4, 4 + 3 = 7) eingestuft. Alle anderen Strategien bekamen den Wert 0 zugewiesen. Eine Übersicht mit den Adaptivitätseinschätzungen der einzelnen Strategien zu den jeweiligen Strategietestaufgaben befindet sich im Anhang (vgl. Anhang C, S. 263). Die Beurteilerübereinstimmung für die Adaptivitätseinschätzung kann mit $\kappa = .91$ als ausgezeichnet beurteilt werden.

Die Skala Adaptivität besteht aus den zum jeweiligen Messzeitpunkt eingesetzten acht Aufgaben. Da die Testaufgaben parallel konstruiert wurden (s. o.) und die eingeschätzte Adaptivität der Gesamtskala jeweils sehr hoch mit der eingeschätzten Adaptivität der vier Ankeritems korreliert (T1 $r = .83$, T2 $r = .93$, T3 $r = .97$, T4 $r = .97$), werden für alle Analysen die Gesamtskalen verwendet. An dieser Stelle ist anzumerken, dass der Zusammenhang zwischen Ankeritems und Gesamtskala zu T1 zwar sehr hoch ist, zugleich aber niedriger als zu den folgenden Messzeitpunkten ausfällt. Dies liegt insbesondere daran, dass der Strategietest zu T1 auch Aufgaben im Zahlenraum bis 100 enthält und im Zahlenraum bis 100 tendenziell mehr Strategien als im Zahlenraum bis 1000 als adaptiv bewertet werden (vgl. auch Erläuterung zu Tabelle 2, S. 16). Unterschiede in der Adaptivitätseinschätzung der Rechenwege betreffen dabei nur die als adaptiv (1 Punkt) bewerteten Rechenwege (vgl. Anhang C, S. 263). So werden in den 4 Aufgaben im Zahlenraum bis 100 im Mittel 4–5 Strategien und in den 12 Aufgaben im Zahlenraum bis 1000 etwa 3 Strategien als adaptiv beurteilt. Hingegen werden sowohl im Zahlenraum bis 100 als auch im Zahlenraum bis 1000 im Mittel 3 Strategien als partiell adaptiv (0.5 Punkte) eingeschätzt. Dies bedingt, dass die Anforderungen an die Adaptivität im Prätest zu T1 geringer sind und die Adaptivitätswerte zu T1 dadurch im Vergleich zu den folgenden Messzeitpunkten höher ausfallen.

Tabelle 16 zeigt die Skalenkennwerte für die Adaptivität zu den unterschiedlichen Messzeitpunkten.

Tabelle 16: Deskriptive Statistiken für die Strategieadaptivität (Rohdaten)

Strategieadaptivität					
MZP	*N*	*M*	*SD*	*Range*	*Cronbachs* α
T1	78	.31	.23	0–0.94	.84
T2	79	.50	.32	0–1	.87
T3	73	.39	.34	0–1	.91
T4	74	.33	.36	0–1	.93

Wie zu erkennen ist, weist die Skala für die Adaptivität eine hohe Reliabilität auf ($\alpha \geq .84$). Die Korrelationen zwischen den Messzeitpunkten weisen für die Adaptivität auf eine zunehmende Stabilität im Laufe des dritten Schuljahres hin (T1–T2: $r = .44$, $p < .001$, T2–T3: $r = .65$, $p < .001$, T3–T4: $r = .84$, $p < .001$).

6.3.1.3 Korrektheit

Die Korrektheit wurde dichotom (0/1) kodiert, sodass die Mittelwerte in Tabelle 17 den prozentualen Anteil richtig gelöster Aufgaben pro Messzeitpunkt darstellen. Die Skala für die Korrektheit weist zu allen Messzeitpunkten ausreichende Reliabilitäten auf ($\alpha \geq .69$). Zudem weisen die Korrelationen zwischen den Messzeitpunkten auf die Stabilität des Konstrukts hin (T1–T2: $r = .78$, $p < .001$, T2–T3: $r = .59$, $p < .001$, T3–T4: $r = .51$, $p < .001$). Die gemittelten Lösungswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Aufgaben pro Messzeitpunkt (vgl. Anhang A, S. 258) zeigen darüber hinaus, dass die Strategietests für jeden Messzeitpunkt ausgewogen konzipiert waren, da sie jeweils einfacher und schwieriger zu lösende Aufgaben beinhalteten.

Tabelle 17: Deskriptive Statistiken für die Korrektheit (Rohdaten)

Korrektheit					
MZP	*N*	*M*	*SD*	*Range*	*Cronbachs* α
T1	78	.62	0.30	0–1	.78
T2	79	.67	0.31	0–1	.82
T3	73	.67	0.27	0–1	.76
T4	74	.74	0.24	0.13–1	.69

Der hohe Zusammenhang in der Korrektheit und nur mittlere Zusammenhang in der Adaptivität zwischen T1 und T2 weisen darauf hin, dass die Korrektheit zu T2 stärker als die Adaptivität von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler im Vortest abhängig ist.

6.3.2 Post für den Tiger

Um Unterschiede in der Strategieentwicklung in den beiden Experimentalgruppen während der Intervention analysieren zu können, wurde das Format *Post für den Tiger* implementiert. Hierzu wurden am Ende eines jeden Tages während der Intervention eine Additions- und eine Subtraktionsaufgabe gestellt. Die beiden Aufgaben waren so konstruiert, dass sie entweder die Strategie *Ergänzen* (104 – 98; 157 – 149; 204 – 197) oder die Strategien *Hilfsaufgabe/Gegensinniges Verändern* (158 + 299; 203 + 169; 278 + 99) induzierten. Das Format wurde durch eine Videosequenz eingeführt, in welcher der Tiger erneut seine Sammelleidenschaft für Rechentricks thematisierte und um Zusendung von Rechentricks bat. Die Kinder sollten dabei ganz genau beschreiben, wie der Trick funktioniert und bei welchen Aufgaben man ihn anwenden kann, damit der Tiger die Rechentricks selber verwenden könne.

Für jedes Kind wurde am jeweiligen Abend eine individuelle Rückmeldung zum eingesandten Rechentrick verfasst, welche die Kinder am Folgetag mit der Post vom Tiger erhielten. Wie Befunde zur Wirkung von Feedback zeigen, kann Feedback zum Bearbeitungsprozess oder zu den selbstregulatorischen Prozessen die Lernleistung verbessern (zusf. Hattie & Timperley, 2007). Insbesondere wird hierdurch erreicht, dass sich die Kinder erneut inhaltlich mit der Aufgabenbearbeitung auseinandersetzen, um das Feedback nachzuvollziehen und dieses für spätere Bearbeitungsprozesse nutzen zu können (Luwel et al., 2011). Durch das Aufgabenformat *Post für den Tiger* sollten die Begründungen der individuellen Strategiewahl durch gezieltes Feedback verbessert werden und zu einer höheren Quote aufgabenbezogener Begründungen führen. Entsprechend wurden Rückmeldungen wie „Warum eignet sich der Trick bei dieser Aufgabe besonders gut?“ oder positive Verstärkungen von eloquenten, aufgabenbezogenen Begründungen „Das ist ein toller Tiger-Trick!“/„Das hast du gut erklärt!“ formuliert.

Die verwendeten Strategien wurden mit dem gleichen Strategiemanual kodiert, das auch für die Strategietests verwendet wurde (vgl. Kategoriensystem in Anhang B, S. 259). Alle in der Tigerpost eingesetzten Strategien wurden von zwei studentischen Hilfskräften unabhängig voneinander kodiert. Die Beurteilerübereinstimmung auf Ebene 2 der Strategiekodierung kann mit $\kappa = .77$ als zufriedenstellend beurteilt werden. Da das Instrument nur zwei Aufgaben pro Tag umfasste, um prozessbezogene Entwicklungen zu erfassen, können an dieser Stelle keine Skalenkennwerte berichtet werden.

6.3.3 Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2^{+})

Der DEMAT 2^{+} (Krajewski et al., 2004a) wurde Ende des zweiten Schulhalbjahres in allen 17 teilnehmenden Grundschulklassen eingesetzt, um einen Indikator für die Mathematikleistung der teilnehmenden Kinder zu erhalten sowie rechenschwächere Kinder zu identifizieren. Als standardisierter, curriculum-valider Test eignet sich der DEMAT, um große

Stichproben ökonomisch zu testen. Die Normtabellen des Tests erlauben darüber hinaus weitere Aussagekraft über die Repräsentativität der ausgewählten Stichprobe.

Der Mittelwert der Stichprobe ($N = 68$) liegt bei 23.24 ($SD = 8.66$; *Range* 1–36) und damit über dem Mittelwert der Eichstichprobe ($N = 1716$, $M = 19.90$, $SD = 8.96$).

Das *Cronbachs Alpha* von $\alpha = .88$ weist auf eine hohe interne Konsistenz der Gesamtskala hin (interne Konsistenz in der 2. Klasse der Normstichprobe: $\alpha = .93$).

6.3.4 Culture Fair Intelligence Tests – Scale 1 (CFT 1)

Die kognitiven Grundfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler wurden mit dem CFT 1 (Cattell et al., 1997) erfasst. Der Test ist für die Altersspanne von fünf bis neun Jahren geeignet und wurde als Gruppentest mit jeweils den an der Intervention teilnehmenden Kindern einer Schulklasse durchgeführt. Die Durchführungsdauer ist normiert und beträgt für die zweite und dritte Klasse 11 Minuten (Subtests 3–5).

Die Skala „kognitive Grundfertigkeiten“ wurde aus den Subtests 3 („Klassifikationen“), 4 („Ähnlichkeiten“) und 5 („Matrizen“) gebildet. Im Anschluss an die dichotome Kodierung der Items wurde ein Summenscore gebildet, welcher mithilfe der Normwerttabelle für die dritte Klassenstufe in entsprechende IQ-Werte transformiert werden konnte.

Der mittlere IQ lag in der Stichprobe ($N = 77$) bei 105.29 ($SD = 13.36$, *Range* 73–136). In der Eichstichprobe liegt der mittlere IQ bei 100 ($SD = 15.00$).

Der Zuverlässigkeitskoeffizient des Summenwerts aus den Untertests 3–5 liegt nach Spearman-Brown-Berechnung in der 3. Klasse der Normstichprobe bei $r = .90$.

6.3.5 Test zur Merkfähigkeit (Arbeitsgedächtnis)

Das Arbeitsgedächtnis wurde in einer Individualtestung mit der Subskala „Zahlen nachsprechen rückwärts“ in Anlehnung an den HAWIK (Petermann & Petermann, 2010) erfasst. Diese Subskala misst neben der mentalen Rotation und dem visuell-räumlichen Vorstellungsvermögen insbesondere die zentral-exekutive Arbeitsgedächtnisleistung.

Während des Tests werden den Kindern Ziffernfolgen genannt, die in umgekehrter Reihenfolge wiederholt werden müssen. Dabei steigt der Schwierigkeitsgrad durch die Anzahl der zu wiederholenden Ziffern an ($min = 2$ Ziffern, $max = 9$ Ziffern). Pro Schwierigkeitsstufe (Länge der Ziffernfolge) werden zwei Versuche mit unterschiedlichem Zahlenmaterial durchgeführt. Das Kind muss mindestens eine der beiden Ziffernfolgen pro Schwierigkeitsstufe korrekt rückwärts wiedergeben, um die nächste Schwierigkeitsstufe zu erreichen. Bei inkorrekter Bearbeitung beider Versuche wird der Test abgebrochen.

Bei der Auswertung des Subtests wird sowohl ein Punktwert für die längste richtig wiedergegebene Ziffernspanne ($min = 0$, $max = 9$) als auch ein Gesamtrohwert für alle richtig durchgeführten Versuche (*min* = 0, *max* = 16) ermittelt (Petermann & Petermann, 2010).

Die mittlere längste Ziffernspanne liegt in der Stichprobe ($N = 78$) bei $M = 3.64$ ($SD = 0.99$; *Range* 1–7), während der mittlere Gesamtrohwert bei $M = 6.63$ liegt ($SD = 1.54$; *Range* 1–12). Der Mittelwert für die längste Zahlenspanne rückwärts wird in der Normstichprobe für die Altersgruppe der 9-Jährigen mit $M = 3.30$ ($SD = 2.20$; *Range* 1–6) angegeben (Petermann & Petermann, 2010). Für den mittleren Gesamtrohwert des Subtests existieren keine Vergleichswerte.

6.3.6 Sozioökonomischer Status (Highest Socio-Economic Index of Occupational Status, HISEI)

Der sozioökonomische Status der Experimentalgruppenschülerinnen und -schüler wurde mit dem International Socio-Economic Index (ISEI) nach Ganzeboom et al. (1992) berechnet, welcher mit dem Elternfragebogen erfasst wurde. Basierend auf Angaben zur schulischen und beruflichen Ausbildung sowie zum ausgeübten Beruf wird jedem Elternteil ein Wert zwischen 16 und 90 Punkten zugeordnet, welcher sowohl die Einkommenssituation als auch das Bildungsniveau berücksichtigt und somit die sozialhierarchische Position des Elternteils widerspiegelt. Ein ungelernter Hilfsarbeiter erhält beispielsweise den Wert 16 und ein Richter den Wert 90.

Für die Auswertungen wurde der höhere Wert der beiden Elternteile, der Highest Socio-Economic Index of Occupational Status (HISEI), in die Auswertungen einbezogen. Dieser liegt mit einem Mittelwert von 57.45 (*min* = 23, *max* = 90, $SD = 20.54$) höher als der repräsentative Referenzwert aus dem IQB-Ländervergleich 2012 ($M = 48.5$, $SD = 15.5$ für Deutschland; $M = 48.7$, $SD = 15.9$ für Schleswig-Holstein) (Richter, Kuhl & Pant, 2012).

Da das Ferienprogramm ein außerschulisches Bildungsangebot darstellt, ist nicht auszuschließen, dass die Attraktivität eines solchen Programms von bildungsnahen Elternteilen besonders stark wahr- und angenommen wurde. In der Konzeption des Ferienprogramms wurde versucht, der Stichprobenselektivität vorzubeugen, indem das Programm ganztägig und für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer kostenfrei angelegt wurde. Trotz dieser Maßnahmen weist der mittlere HISEI-Wert auf eine Einschränkung in der Repräsentativität der Stichprobe hin.

6.4 Umgang mit fehlenden Werten

Das TigeR-Projekt ist wie auch andere Längsschnittstudien zu einzelnen Messzeitpunkten von einem Stichprobenausfall betroffen. Für den Umgang mit fehlenden Werten ist entscheidend, ob fehlende Werte systematisch mit den Werten der Untersuchungsvariablen zusammenhängen oder zufällig entstanden sind (Lüdtke, Robitzsch, Trautwein & Köller, 2007; Rubin, 1976; Schafer & Graham, 2002). Fehlende Werte bedeuten in der hier beschriebenen Studie, dass vollständige Tests zu einzelnen Messzeitpunkten von einigen Schülerinnen und Schülern nicht vorliegen. Dass einzelne Items nicht beantwortet wurden, tritt hingegen nur vereinzelt auf. Dies liegt darin begründet, dass die Strategietests nicht als Speedtests angelegt wurden und die Itemschwierigkeit pro Messzeitpunkt nicht stark variierte. Daher ist von einem zufälligen Fehlen der Werte auszugehen („missing completely at random“).

Trotz intensiver Stichprobenpflege nahmen nur 51 Schülerinnen und Schüler an der ersten Auffrischung im Dezember teil, bei welcher zu Beginn ein Strategietest eingesetzt wurde (vgl. Tabelle 11, S. 124). Die geringe Teilnehmerzahl und die dadurch resultierenden fehlenden Werte für den Dezembertest können insbesondere auf Terminüberschneidungen zurückgeführt werden, da die Auffrischung nachmittags stattfand. Die Teilnahme an der zweiten Auffrischung war mit 36 Schülerinnen und Schüler noch geringer, wobei zu diesem Messzeitpunkt kein Strategietest, sondern lediglich das Testinstrument *Post für den Tiger* eingesetzt wurde (vgl. Tabelle 11, S. 124). Die an der ersten Auffrischung teilnehmenden und nicht teilnehmenden Schülerinnen und Schülern unterscheiden sich nicht signifikant in ihrem zu T2 erfassten mathematischen Interesse ($t(53.94) = -.04$, $p = .969$). Auch für die zweite Auffrischung zeigt sich zwischen den teilnehmenden und den nicht teilnehmenden Schülerinnen und Schülern kein Unterschied im mathematischen Interesse ($t(76) = -.57$, $p = .573$), sodass für beide Messzeitpunkte von einem zufälligen Fehlen der Werte ausgegangen werden kann.

Tabelle 18 zeigt, wie groß der Anteil fehlender Werte in den erhobenen Daten zum jeweiligen Messzeitpunkt ausfällt.

Tabelle 18: Anteil fehlender Werte in den Erhebungsinstrumenten

Erhebungsinstrument und -zeitpunkt	*N*	Fehlend absolut	Fehlend prozentual
Strategietest T1	78	1	1.27
Strategietest T2	79	0	0
Strategietest Auffrischung 1[4]	51	28	35.40
Strategietest T3	73	6	7.59
Strategietest T4	74	5	6.33
DEMAT T0	68	11	13.90
CFT T1	77	2	2.53
HISEI T1	75	4	5.06
Schülerfragebogen T1	78	1	1.27
Schülerfragebogen T2	78	1	1.27
Arbeitsgedächtnis T2	78	1	1.27

Die aus den Testinstrumenten gebildeten Skalen weisen überwiegend ein metrisches Skalenniveau auf. Eine Ausnahme, zugleich aber den zentralen Kern der Fragestellungen, bilden die in den Strategietests verwendeten Strategien (Kap. 6.3.1). Die Strategiecodes weisen eine nominale Datenstruktur auf.

Beim Umgang mit fehlenden Daten wird zwischen klassischen Analyseverfahren (in der Regel mit Fallausschluss), modelbasierten Verfahren und imputationsbasierten Verfahren unterschieden (Lüdtke et al., 2007).

Bei klassischen multivariaten Analyseverfahren werden Schülerinnen und Schüler, bei denen Tests zu einem oder mehreren Messzeitpunkten fehlen, per listenweisem Fallausschluss aus den Analysen ausgeschlossen. Nach Lüdtke et al. (2007) wirkt sich eine reduzierte Stichprobengröße nachteilig auf die Schätzung der Modellparameter aus. Da die Stichprobe in der hier beschriebenen Studie mit $N = 79$ vergleichsweise klein ist, ist der komplette Ausschluss von Schülerinnen und Schüler aus den Analysen möglichst zu vermeiden.

Eine weitere Möglichkeit, mit fehlenden Werten umzugehen, stellt die Schätzung fehlender Werte mit Imputationsverfahren dar. Durch mehrfache Schätzung der fehlenden

[4] Der Strategietest (Auffrischung 1, zwischen T2 und T3) wird nicht in die Analysen einbezogen, da zu viele Werte geschätzt werden müssten.

Werte werden sogenannte *plausible values* erzeugt, sodass mehrere Imputationsmodelle vorliegen. Die geschätzten Werte basieren auf Korrelationsmatrizen auf Itemebene, sodass die fehlenden Werte durch Werte aus anderen Items vorhergesagt werden können.

Im vorliegenden Projekt wurde die Imputation 2012 nach Abschluss aller Erhebungen mit dem Paket *MICE (multivariate imputation by chained equations)* im Programm *R* durchgeführt (Van Buuren & Groothuis-Oudshoorn, 2011). Alle vorhandenen und in Tabelle 18 dargestellten Daten der Experimentalgruppen wurden in das Imputationsmodell aufgenommen und geschätzt. Der Strategietest, der während der Auffrischung 1 durchgeführt wurde, wurde in das Imputationsmodell aufgenommen, die geschätzten Werte werden jedoch nicht für die in Kapitel 7 dargestellten Analysen verwendet. Stattdessen wird die Auffrischungsteilnahme in den Berechnungen kontrolliert.

Da aus der Kontrollgruppe vergleichsweise wenig Hilfsvariablen für die Schätzung vorliegen und der Vergleich mit der Kontrollgruppe in Bezug auf die Fragestellungen in der Studie und im vorliegenden Dissertationsprojekt sekundär war, wurden diese Daten nicht in die Imputation einbezogen.

Es liegen fünf Imputationsmodelle vor. Im statistischen Auswertungsprogramm SPSS (Version 23) werden zahlreiche Analyseverfahren mit multiplen Datensets unterstützt, in welchen die Analysen der fünf Imputationsmodelle zunächst getrennt berechnet und die Ergebnisse in einer anschließenden Poolingphase nach den Rubin-Formeln zusammengefasst werden.

In der vorliegenden Arbeit werden für alle deskriptiven und parametrischen Analyseverfahren die multipel imputierten Daten verwendet, sofern die einbezogenen abhängigen Variablen ein metrisches Skalenniveau aufweisen. Hingegen können nominale Daten, wie die Art der verwendeten Rechenstrategien, nicht geschätzt werden, sodass sich die Häufigkeitstabellen zur Strategieverwendung in Kapitel 7 auf die nicht imputierten Daten beziehen.

6.5 Statistische Auswertungsverfahren

Für die Auswertung der nominalen Daten wurden Chi-Quadrat-Homogenitätstests und mit den metrischen Daten lineare gemischte Modelle berechnet. Die beiden Auswertungsverfahren werden im Folgenden beschrieben.

6.5.1 Chi-Quadrat-Homogenitätstest

Um zur Beantwortung von Fragestellung 1 das Strategierepertoire in den beiden Experimentalgruppen zu vergleichen, ist es nicht ausreichend, allein die Anzahl verschiedener eingesetzter Strategien zu betrachten. Vielmehr ist zusätzlich von Interesse, welche Strategien die Schülerinnen und Schüler zu den unterschiedlichen Messzeitpunkten einsetzen, und ob sich die Experimentalgruppen dabei zu den einzelnen Messzeitpunkten unterscheiden. Da die Einschätzung der Strategien mit einem Kodiermanual erfolgte, mit welchem die Art der unterschiedlichen Strategien erfasst wurde, handelt es sich um Nominaldaten (vgl. Tabelle 13, S. 127).

Mithilfe von Chi-Quadrat-Homogenitätstests (formal übereinstimmend mit dem Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest, Bohley, 2000) kann zum einen überprüft werden, ob sich die Verteilung der Strategien zwischen beiden Experimentalgruppen zu einem Messzeitpunkt unterscheidet, und zum anderen, ob die Entwicklung des Strategieeinsatzes einer Experimentalgruppe zu unterschiedlichen Messzeitpunkten systematisch voneinander abweicht. Hierzu werden die entsprechenden Nullhypothesen geprüft, ob die Verteilung der Strategien zwischen den Experimentalgruppen zu einem Messzeitpunkt gleich ist bzw. ob die Verteilung jeweils einer Experimentalgruppe zwischen verschiedenen Messzeitpunkten gleich ist. Zusätzlich wird der Kontingenzkoeffizient *Cramers V* angegeben, um zu ermitteln, ob die Strategieverteilung von der Zugehörigkeit zur Experimentalgruppe abhängig ist (bzw. alternativ, ob die Strategieverteilungabhängig vom Messzeitpunkt abhängig ist). Dabei ist *Cramers V* als Maß für den Zusammenhang zwischen zwei nominalskalierten Variablen zu interpretieren. Fehlende Werte können bei diesem Auswertungsverfahren nicht berücksichtigt werden.

6.5.2 Lineare gemischte Modelle

Für die Beantwortung der Fragestellungen nach der Flexibilitäts- und Adaptivitätsentwicklung eingesetzter Additions- und Subtraktionsstrategien und Gruppenunterschieden in der Lernentwicklung (vgl. Kap. 5) müssen verschiedene Spezifika der Datenstruktur berücksichtigt werden. Zum einen sind die in dieser Arbeit verwendeten Daten längsschnittlich angelegt, wobei innerhalb des Längsschnitts ein experimentelles Treatment mit Wirkung auf die Strategieflexibilität und -adaptivität integriert ist (vgl. Projektdesign in Abbildung 2, S. 112). Dies ist von Bedeutung, da somit nicht von stabilen Konstrukten ausgegangen werden kann, was durch die in Kapitel 6.3.1 berichteten Korrelationen zwischen den Messzeitpunkten bestätigt wird.

Zum anderen weisen die Daten, wie in Kapitel 6.4 dargestellt wurde, fehlende Werte auf. Ein Ausschluss dieser Daten könnte sich aufgrund der kleinen Stichprobe sowohl negativ auf die Testpower als auch auf die Repräsentativität der Ergebnisse auswirken (Little & Rubin, 1987).

Zur Datenauswertung bieten sich sowohl Varianzanalysen mit Messwiederholung als auch lineare gemischte Modelle (LMM) an. Beide Verfahren eignen sich, um verbundene Messwerte in einer Stichprobe zu analysieren, und sind in der Statistiksoftware SPSS (Version 23) implementiert.

Die Sphärizitätsannahme stellt eine wichtige Voraussetzung für die Durchführung einer *ANOVA (Analysis of Variance)* mit Messwiederholung dar (Bühner & Ziegler, 2009). Dabei wird davon ausgegangen, dass sich zwischen den einzelnen Messzeitpunkten homogene Varianzen und Kovarianzen zeigen. In experimentellen Designs wie der vorliegenden Studie ist hingegen weder zu erwarten, dass die Kovarianzen in wiederholten Messungen korrelieren, noch dass die Korrelationen über die Zeit konstant sind (Smith, 2012). Dies trifft, wie oben ausgeführt, auch auf die hier beschriebene Datengrundlage zu. Bei Verletzung der Sphärizitätsannahme können allerdings in der *ANOVA* mit Messwiederholung Korrekturschätzer angewendet werden (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2014). Ein wesentlicher Nachteil der Varianzanalyse mit Messwiederholung ist, dass fehlende Daten einer Person zu einem einzelnen Messzeitpunkt in SPSS (Version 23) zu listenweisem Fallausschluss führen. Gerade in kleineren Stichproben und bei verschiedenen Experimentalgruppen, die ggf. unterschiedlich von einem Stichprobenausfall betroffen sind, kann diese Reduktion in der Stichprobe zu Verzerrungen in den Ergebnissen führen (Little & Rubin, 1987). Zum jetzigen Zeitpunkt liefert SPSS darüber hinaus keine Möglichkeit, um die Ergebnisse multipel imputierter Datensätze im Rahmen von Varianzanalysen mit Messwiederholung zu poolen. Um fehlende Werte in SPSS zu schätzen und anschließend in einer *ANOVA* mit Messwiederholung damit weiterarbeiten zu können, sind momentan nur Single-Imputationen möglich, die jedoch im Vergleich zu multiplen Imputationen mit einem deutlichen Informationsverlust einhergehen und zu Unterschätzung des Standardfehlers führen können (Lüdtke et al., 2007).

Die Anwendung linearer gemischter Modelle bietet einige methodische Vorteile gegenüber der Varianzanalyse mit Messwiederholung, die im Folgenden erläutert werden.

Zunächst werden in linearen gemischten Modellen feste und zufällige Effekte in den unabhängigen Variablen unterschieden (West, Welch & Gałecki, 2007). Während solche unabhängigen Variablen als feste Effekte gelten, deren mögliche Abstufungen bzw. für die Untersuchung relevanten Abstufungen im Design realisiert wurden, sind unabhängige Variablen mit einer Zufallsauswahl an möglichen Ausprägungen als zufällige Faktoren in das Modell einzubeziehen (Bühner & Ziegler, 2009).

Darüber hinaus wird in linearen gemischten Modellen mit dem (eingeschränkten) *Maximum-Likelihood*-Schätzer *(ML/REML)* zur Berechnung der Quadratsummen ein modellbasiertes Schätzverfahren angewendet, welches mit fehlenden Werten in den *abhängigen Variablen* umgehen kann und alle einbezogenen Parameter in die Schätzung der Parameter und der Standardfehler einbezieht. Dabei wird ein zufälliges Fehlen der Werte (missing at random/missing completely at random) vorausgesetzt (Lüdtke et al., 2007; vgl. auch Kap. 6.4).

> *„Beide Methoden* [ML/REML] *bestimmen nach Maximum Likelihood-Prinzip Parameterschätzungen so, dass die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Daten unter dem parametrisch spezifizierten Modell maximal wird."* (Baltes-Götz, 2013, S. 44)

Die Analysen mit einem linearen gemischten Modell und einer Varianzanalyse sind dabei identisch, sofern alle in die Berechnungen einbezogenen Variablen keine fehlenden Werte aufweisen und den beiden Verfahren die Sphärizitätsannahme zugrunde gelegt werden kann, d. h. die Kovarianzstruktur mit „compound symmetry“ modelliert werden kann (West et al., 2007). Wie oben beschrieben, sind beide Voraussetzungen bei messwiederholten Daten häufig nicht gegeben. Statt wie bei einer *ANOVA* mit Messwiederholung üblich, die Sphärizitätsannahme abzulehnen und auf Korrekturverfahren zurückzugreifen, kann die Kovarianzstruktur in linearen gemischten Modellen spezifiziert und somit besser an die Datenstruktur angepasst werden (West et al., 2007).

Fehlende Werte in den *unabhängigen Variablen* können im Gegensatz zu fehlenden Werten in den *abhängigen Variablen* in der Ermittlung der festen Effekte innerhalb der einzelnen Modelle nicht berücksichtigt werden, sodass dies auch mit dem linearen gemischten Modell zu einem Informationsverlust führt. Allerdings existiert für die Analyse mit imputierten Daten die Möglichkeit, die Ergebnisse der zusätzlich ausgegebenen Parameterschätzungen in den linearen gemischten Modellen – im Gegensatz zur Berechnung im Rahmen einer Varianzanalyse mit Messwiederholung – gepoolt auszugegeben. Durch die Möglichkeit der Poolung können alle Daten der *abhängigen* und *unabhängigen Variablen* ohne Informationsverlust einbezogen werden.

Die Informationskriterien der Modelle, die zur Beurteilung der Modellgüte und zur Anpassung der Kovarianzstruktur herangezogen werden können, stellen einen weiteren Vorteil dieses Verfahrens dar. Aufgrund der kleinen Stichprobe wurden nur statistisch bedeutsame Prädiktoren aufgenommen, welche den Modellfit verbessern, d. h. dazu beitragen, dass mehr Varianz in den Daten aufgeklärt werden kann. Damit werden die Modelle zum einen sparsamer gehalten und zum anderen wird auf diese Weise die Power des Modells verbessert. Grundlage für die Auswahl der Prädiktoren für die jeweiligen Analysemodelle stellten in einem ersten Schritt die in Kapitel 7.1 durchgeführten Korrelationen der einbezogenen Konstrukte dar. Mithilfe von Chi-Quadrat-Differenztests wurde anschließend in einem zweiten Schritt überprüft, inwiefern die Aufnahme von Prädiktoren zu einer Verbesserung des Modellfits führt (West et al., 2007). Dabei werden die Modellinformationskriterien allerdings für jedes Imputationsmodell einzeln berechnet und können nicht gepoolt ausgegeben werden. Anhand dieser Modellinformationskriterien kann eine Kovarianzstruktur ausgewählt werden, unter welcher das Modell einen möglichst geringen AIC (Akaines Information Index) und BIC (Bayesian Information Criterion) aufweist. Für die linearen gemischten Modelle in Kapitel 7 wurde eine unstrukturierte, korrelierte Kovarianzstruktur (UNR) modelliert, da hiermit in allen Berechnungen der beste Modellfit erzielt wurde.

Anhand der Parameterschätzer kann abgelesen, welche Parameter einen signifikanten Einfluss auf die abhängige Variablen ausüben und, ob dieser Einfluss positiv oder negativ ist. Da in den gepoolten Parameterschätzungen der festen Effekte nur unstandardisierte Parameterschätzer (B) ausgegeben werden, wurden die metrischen Variablen zunächst z-standardisiert, sodass diese einen Mittelwert von 0 und eine Standardabweichung von 1 aufweisen. Auf diese Weise sind die in den Ergebnissen dargestellten Parameterschätzungen mit dem standardisierten Regressionskoeffizienten β vergleichbar (West et al., 2007). Eine Änderung im jeweiligen Prädiktor um eine Standardabweichung führt zu einer Änderung in der abhängigen Variable um x Standardabweichungen, wobei x dem geschätzten Parameter (β) entspricht (Bühner & Ziegler, 2009).

Da durch die gepoolten Imputationsdatensätze in den Parameterschätzungen die Daten aller Schülerinnen und Schüler ($N = 79$) einbezogen werden können, geben diese zuverlässigere Informationen über den tatsächlichen Einfluss der einbezogenen Parameter und deren statistische Bedeutsamkeit als die Angabe der nicht gepoolten F-Werte (in den Analysen je nach einbezogenen Variablen $N = 66/68$).

Der Fokus der Analyse im linearen gemischten Modell liegt darauf, wie sich die jeweilige abhängige Variable (*Strategieflexibilität*, *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und *Adaptivität*) zwischen den einzelnen Messzeitpunkten verändert und wie sich die einzelnen unabhängigen Variablen (insbesondere die Experimentalgruppenzugehörigkeit) darauf auswirken. Um die Varianz zwischen den Versuchspersonen (Unterschiede im Ausgangsniveau der abhängigen Variable) von der Varianz innerhalb der Versuchspersonen zu trennen und bei insbesondere die Abhängigkeit der einzelnen Messungen innerhalb der Versuchspersonen zu berücksichtigen, werden die Versuchspersonen als zufälliger Faktor in das Modell aufgenommen (Heinze, Arend, Grüßing & Lipowsky, 2018).

In den Berechnungen in Kapitel 7 werden lineare gemischte Modelle für alle abhängigen Variablen der Fragstellungen (*Strategieflexibilität*, *-adaptivität* sowie das *Repertoire an Verkürzungsstrategien*) berechnet, die ein metrisches Skalenniveau aufweisen.

Da für alle linearen gemischten Modelle dieselben Prädiktoren verwendet werden, stellt Tabelle 19 diese im Überblick dar.

Tabelle 19: Prädiktoren für Strategieflexibilität und -adaptivität (lineare gemischte Modelle)

Prädiktoren	**Abhängige Variable im Modell**		
	Strategie-flexibilität (Kap. 7.2)	**Verkürzungs-strategien (Kap. 7.2**	**Adaptivität (Kap. 7.3)**
Instruktionsansatz[a]	X	X	X
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2$^+$)	X	X	X
Kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1)	-	-	-
Arbeitsgedächtnis	-	-	-
Zeit in Monaten des 3. Schuljahres (messwiederholt)	X	X	X
Auffrischungsteilnahme[b]	X	X	X
Instruktionsansatz[a]*Zeit	X	X	X
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2$^+$)*Zeit	-	(X)[c]	(X)[d]
Kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1)*Zeit	-	-	(X)[e]
Arbeitsgedächtnis*Zeit	-	-	-
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	X	X	X

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)
[c] Der Interaktionsterm DEMAT 2+*Zeit wird in das Modell für die Verwendung von Verkürzungsstrategien im gesamten Untersuchungszeitraum (Kap. 7.2.1.2) und im Interventionszeitraum (Kap. 7.2.2.3) einbezogen.
[d] Der Interaktionsterm DEMAT 2+*Zeit wird in das Modell für die Adaptivität im unmittelbaren Interventionszeitraum (Kap. 7.3.2) einbezogen.
[e] Der Interaktionsterm CFT 1*Zeit wird in das Modell für die Adaptivität im unmittelbaren Interventionszeitraum (Kap. 7.3.2) einbezogen.

Alle in Tabelle 19 dargestellten Prädiktoren werden als feste Faktoren aufgenommen und der Faktor Zeit (in Monaten des dritten Schuljahres) als messwiederholter Faktor berücksichtigt. Dadurch wird nicht nur die Abhängigkeit der Messungen beachtet, sondern darüber hinaus werden auch die unterschiedlichen Zeitintervalle zwischen den Messungen in das Modell aufgenommen (T1–T2 ein Monat, T2–T3 drei Monate, T3–T4 fünf Monate) und diese auch innerhalb der Interaktionsterme einbezogen. Interaktionsterme werden nicht automatisch generiert, sondern müssen für das jeweilige Modell spezifiziert werden. Für die Fragestellungen sind Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung der abhängigen Variablen in den Experimentalgruppen (Instruktionsansatz*Zeit; Fragestellungen 1a/2a) und der Einfluss individueller Lernermerkmale sowie der Auffrischungsteilnahme auf die Entwicklung der abhängigen Variablen (Allgemeine mathematische Leistungen*Zeit, Kognitive Grundfähigkeiten*Zeit, Arbeitsgedächtnis*Zeit, Auffrischungsteilnahme*Zeit, Fragestellungen 1c/2c) relevant. Diese Interaktionsterme, die den Zuwachs in der abhängigen Variable in Abhängigkeit vom jeweiligen Prädiktor und im jeweiligen Messzeitraum modellieren, werden in die entsprechenden Modelle einbezogen, sofern sie zu einer Verbesserung des Modellfits beitragen.

Der Instruktionsansatz und die Auffrischungsteilnahme stellen dichotome Variablen dar. In den Ergebnistabellen der Parameterschätzungen werden die Ergebnisse für die Ausprägung 1 der dichotomen Variablen, d. h. den explizierenden Ansatz und die Teilnahme an der Auffrischung bzw. die entsprechenden Interaktionsterme mit der Zeit, angegeben. So bedeutet beispielsweise ein positiver Wert für den Interaktionsterm Instruktionsansatz*Zeit, dass der explizierende Ansatz im betrachteten Zeitraum im Mittel einen höheren Lernzuwachs als der problemlöseorientierte Ansatz in der abhängigen Variable aufweist. Ein negativer Wert für den Interaktionsterm Instruktionsansatz*Zeit drückt hingegen aus, dass der explizierende Ansatz im betrachteten Zeitraum im Mittel einen niedrigeren Lernzuwachs als der problemlöseorientierte Ansatz in der abhängigen Variable aufweist (vgl. ausführliches Beispiel in Kap. 7.2.1.2, Tabelle 28, S. 156).

Aufgrund der vergleichsweise kleinen Stichprobe werden auch tendenziell signifikante Ergebnisse mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit < 10 % (mit $^{+}$ gekennzeichnet) als bedeutsam erachtet.

6.6 Stichprobe

Im Frühjahr 2011 wurden verschiedene Schulen im Kieler Stadtgebiet über das Angebot eines mathematischen Ferienprogramms informiert. 17 Mathematiklehrerinnen und -lehrer sicherten daraufhin ihre Teilnahme am Projekt zu.

Für das Ferienprogramm wurden alle 82 angemeldeten Schülerinnen und Schüler der teilnehmenden Klassen angenommen. Drei Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden nachträglich aus der Stichprobe ausgeschlossen, sodass die Stichprobe insgesamt aus 79 Drittklässlern (32 Jungen, 47 Mädchen) besteht.[5]

Die Schülerinnen und Schüler besuchten im Erhebungszeitraum die dritte Klasse und waren zwischen 7 und 9 Jahren alt.[6] Während der Intervention wurden sie in vier Gruppen mit 16 bis 25 Schülerinnen und Schülern entweder nach dem explizierenden Ansatz oder dem problemlöseorientierten Ansatz unterrichtet. Der nachträgliche Ausschluss von drei Schülerinnen und Schülern führte zu einer unterschiedlichen Gruppengröße der beiden Experimentalgruppen ($N_{explizierend} = 41$; $N_{problemlöseorientiert} = 38$).

Die Teilnahme an einem Ferienprogramm mit mathematischem Schwerpunkt wirft Fragen nach der Repräsentativität der Stichprobe in Motivations- und Interessensmerkmalen der Schülerinnen und Schüler auf. Die Skala „Interesse an Mathematik" (9 Items, $\alpha = .83$; Skala 1–4, vgl. Anhang D, S. 267) wurde im Rahmen des Schülerfragebogens in Anlehnung an Items aus den Projekten PERLE (Kastens, Lorenz & Lipowsky, 2013) und

[5] Gründe für den Ausschluss aus der Stichprobe waren zwei Rückversetzungen in Klasse 2 und der Schulwechsel eines weiteren Schülers.
Weitere Stichprobenausschlüsse aufgrund von unter- oder überdurchschnittlichen Leistungen in den Prä-Erhebungen werden in dieser Arbeit im Gegensatz zu den in Heinze, Arend, Grüßing und Lipowsky (2018) veröffentlichen Ergebnissen nicht vorgenommen, da die differenzielle Wirkung der beiden Unterrichtsansätze in Abhängigkeit vom Vorwissen Gegenstand von Fragestellung 1b und Fragestellung 2b ist.

[6] Aus Datenschutzgründen wurden keine Geburtsdaten erfasst, sondern nur das Alter der Schülerinnen und Schüler im Rahmen des CFT 1 zu T1.

IGLU (Bos et al., 2005) operationalisiert. Die Schülerinnen und Schüler des Ferienprogramms wiesen vor der Intervention (T1) im Mittel ein am theoretischen Skalenmittelwert gemessenes überdurchschnittliches Interesse an Mathematik auf $M = 3.69$ ($SE = 0.07$). Dabei zeigt sich kein Unterschied zwischen den beiden Experimentalgruppen $t(2837) = 0.76$, $p = .447$).

Die Gruppen wurden im Anschluss an eine randomisierte Zuweisung nach den drei Kriterien Vorleistung im Strategietest (Korrektheit), allgemeine mathematische Leistung (DEMAT) und sozioökonomischer Hintergrund (HISEI) parallelisiert. Darüber hinaus wurde darauf geachtet, dass sich teilnehmende Schülerinnen und Schüler aus einer Schulklasse gleichmäßig auf die beiden Instruktionsansätze verteilten, damit sich eine mögliche Nähe des jeweiligen Instruktionsstils der regulären Mathematiklehrperson zu einem der beiden Instruktionsansätze nicht multiplizierte und dadurch auch nicht den Gruppenvergleich zu den Follow-up-Messzeitpunkten verzerrte.

Da einzelne Vortests, zahlreiche DEMAT-Tests und Elternfragebögen zum Zeitpunkt der Gruppeneinteilung nicht vorlagen (vgl. Tabelle 18, S. 135) und zu Beginn der Intervention nacherfasst werden mussten sowie einzelne Schülerinnen und Schüler nachträglich aus der Stichprobe ausgeschlossen wurden, ergeben sich zwischen den Gruppen bezüglich der Zuteilungskriterien teilweise Differenzen in den Mittelwerten und den Standardfehlern (vgl. Tabelle 20, S. 144).

Fehlende Strategietests, Interviews und CFT-Tests konnten überwiegend am ersten Tag der Intervention nachgeholt werden. Alle weiteren fehlenden Daten der Experimentalgruppen, wie der DEMAT und Strategietests zu den Follow-up-Messungen (T3 und T4) wurden nach Abschluss aller Erhebungen durch ein multiples Imputationsverfahren geschätzt. Das Vorgehen bei der Imputation ist in Kapitel 6.4 beschrieben.

In Tabelle 20 sind die gepoolten deskriptiven Statistiken für den DEMAT (Rohpunkte; Skala 0–36), die Korrektheit im Vortest (Skala 0–1), den HISEI (Skala 16–90), den CFT (Rohpunkte; Skala 0–36) und den Test zur Merkfähigkeit (Rohpunkte, Skala 1–12) in den beiden Experimentalgruppen angegeben. Darüber hinaus wurden für die dargestellten Variablen mit den Imputationsdaten *t*-Tests auf Gruppenunterschiede durchgeführt. Die gepoolten Ergebnisse der *t*-Tests sind ebenfalls in Tabelle 20 aufgeführt.

Tabelle 20: Gepoolte deskriptive Statistiken und Experimentalgruppenunterschiede in den Kontrollvariablen

	Explizierender Ansatz (N = 38)		Problemlöseorientierter Ansatz (N = 41)		Prüfstatistik		
	M	*SE*	*M*	*SE*	*t*	*df*	*p*
Korrektheit Strategievortest	0.55	0.05	0.68	0.05	−2.03	960501.00	.042
DEMAT	20.83	1.47	24.47	1.41	−1.80	2948.00	.073
HISEI	56.06	3.35	58.83	3.29	−0.59	1849.00	.559
CFT (Rohwert)	27.99	0.69	30.13	0.42	−2.66	24014.50	.008
Test zur Merkfähigkeit (Rohwert)	6.46	0.26	6.76	0.23	−0.86	116406.00	.390

In den Kontrollvariablen, die für die Parallelisierung der Experimentalgruppen genutzt wurden (grau hinterlegt), ergeben sich sowohl in der Korrektheit im Strategievortest als auch in den allgemeinen mathematischen Fähigkeiten (DEMAT) auf dem 5 %- bzw. 10 %-Niveau Unterschiede zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes, während sich der sozioökonomische Hintergrund der Schülerinnen und Schüler in beiden Experimentalgruppen nicht signifikant unterscheidet.

Für die übrigen Kontrollvariablen zeigt sich auch im CFT ein signifikanter Experimentalgruppenunterschied zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes ($p < .01$). Im Test zur Merkfähigkeit unterscheiden sich die Experimentalgruppen nicht ($p > .10$).

Alle Gruppenunterschiede bestehen zugunsten der problemlöseorientierten Gruppe. Dieser Gruppenvorteil wird durch Einbezug dieser Kontrollvariablen und durch die Messwiederholung der abhängigen Variablen berücksichtigt (vgl. Kapitel 7).

Für die Fragestellungen nach der Lernentwicklung von Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Leistungsniveaus (Fragestellungen 1b und 2b) werden die DEMAT 2^{+}-Testwerte zur Gruppeneinteilung herangezogen. Besonders viele Schülerinnen und Schüler der Stichprobe sind im unteren und oberen Leistungsbereich angesiedelt, während vergleichsweise wenige Schülerinnen und Schüler durchschnittliche mathematische Fähigkeiten aufweisen. Die Verteilung der mathematischen Fähigkeiten weicht dabei gemäß dem Shapiro-Wilk-Test signifikant von einer Normalverteilung der Daten ab ($p < .01$). Um die tatsächliche Varianz in den mathematischen Leistungen der Stichprobe besser abbilden zu können, wurde bei der Einteilung der 79 Schülerinnen und Schüler in Leistungsgruppen von der in den Normtabellen des DEMAT (Krajewski, Liehm & Schneider, 2004b) vorgegebenen Leistungsbewertung abgewichen. Aus diesem Grund werden auch andere Bezeichnungen für die Leistungsgruppen gewählt. Die Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen wurden nach ihren im DEMAT erreichten Testleistungen in *geringere mathematische Leistungen* (PR < 50), *durchschnittliche mathematische Leistungen*

(50 ≤ PR ≤ 75) und *überdurchschnittliche mathematische Leistungen* (PR > 75) eingeteilt (vgl. Tabelle 21). Eine ähnliche Einteilung mit leicht abweichender Benennung der Leistungsgruppen hat sich bereits in anderen Analysen zur Strategieentwicklung bewährt (z. B. Torbeyns et al., 2009a, 2009b).

Tabelle 21: Einteilung der Leistungsgruppen im DEMAT (gepoolte Daten)

	Leistung im DEMAT	***N***	***M***	***SE***	***Min***	***Max***
Explizierend	gering (PR < 50)	19	12.65	1.37	1	20.5
	durchschnittlich (50 ≤ PR ≤ 75)	11	23.99	1.01	21	27
	überdurchschnittlich (PR > 75)	11	31.82	0.93	27.6	36
Problemlöseorientiert	gering (PR < 50)	11	13.95	2.12	4	20
	durchschnittlich (50 ≤ PR ≤ 75)	10	24.54	0.89	21	27
	überdurchschnittlich (PR > 75)	17	31.24	0.62	28	35

Die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die drei Leistungsgruppen zeigt, dass diese zwischen den Instruktionsansätzen nicht ausgewogen ist. Während im explizierenden Instruktionsansatz besonders viele Schülerinnen und Schüler geringe mathematische Fähigkeiten aufweisen, so ist im problemlöseorientierten Ansatz der Anteil an Schülerinnen und Schülern mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten höher als in der Referenzgruppe.

7 Ergebnisse

Um zu prüfen, welche Einflussfaktoren für die einzelnen Analysen Relevanz besitzen, werden vorab für jede der drei abhängigen Variablen *Strategieflexibilität* (AV 1), *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (AV 2) und *Strategieadaptivität* (AV 3) Korrelationen mit ausgewählten Lernermerkmalen berechnet (Kap. 7.1). Im Anschluss daran werden die Ergebnisse zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* bzw. zur Entwicklung des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1, Kap. 7.2) und zur Entwicklung der *Strategieadaptivität* (Fragestellung 2, Kap. 7.3) dargestellt. Die Beschreibung der Entwicklungen erfolgt dabei jeweils zunächst für den gesamten Untersuchungszeitraum. Der Messzeitraum erstreckt sich über das gesamte 3. Schuljahr und beinhaltet sowohl den Interventionszeitraum (T1–T2) mit laborähnlichen Bedingungen als auch einen Messzeitraum, in welchem die Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen den regulären Mathematikunterricht besuchten (T2–T4). Für beide Zeiträume wurden in den Hypothesen teilweise unterschiedliche Annahmen formuliert. Um die unterschiedlichen Lernbedingungen in den beiden Messzeiträumen in den Analysen zu berücksichtigen, werden die Analysen anschließend für den Interventionszeitraum und den Zeitraum nach der Intervention getrennt dargestellt. Ob sich zwischen den Schülerinnen und Schülern der einzelnen Leistungsgruppen Experimentalgruppenunterschiede in der *Flexibilitäts*- und *Adaptivitätsentwicklung* zeigen, wird ausschließlich für den unmittelbaren Interventionszeitraum betrachtet, da dort durch das experimentelle Treatment weitere als die erfassten Einflussfaktoren weitgehend minimiert werden konnten.

7.1 Zusammenhänge zwischen individuellen Lernermerkmalen und den abhängigen Variablen

In den Analysen in Kapitel 7 werden die *Strategieflexibilität*, das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (vgl. Kap. 7.2) und die *Strategieadaptivität* (Kap. 7.3) als abhängige Variablen betrachtet.

Um mögliche Einflussfaktoren (Fragestellungen 1c und 2c) für die Entwicklung der beiden Experimentalgruppen in den abhängigen Variablen zu identifizieren, wurden mit Pearson-Korrelationen Zusammenhänge zwischen den drei Lernermerkmalen allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+), kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1) und Arbeitsgedächtnisleistung (AG) mit den abhängigen Variablen *Strategieflexibilität* (Tabelle 22), *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Tabelle 23) und *Strategieadaptivität* (Tabelle 24) berechnet. Nach Cohen (1988) werden dabei Werte von $r > .10$ als kleiner Zusammenhang, Werte $r > .30$ als mittlerer Zusammenhang und Werte $r > .50$ als hoher Zusammenhang bezeichnet.

Wie Tabelle 22 zu entnehmen ist, zeigen die allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}), das Arbeitsgedächtnis (Merkspanne) und die kognitiven Grundfähigkeiten (CFT 1) paarweise untereinander jeweils einen mittleren Zusammenhang ($r > .30$, $p < .01$).

Zwischen der *Strategieflexibilität* zu den vier Messzeitpunkten einerseits und den Prädiktoren kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1) sowie Arbeitsgedächtnis (Merkspanne) andererseits lässt sich kein signifikanter Zusammenhang nachweisen. Lediglich mit den allgemeinen mathematischen Leistungen besteht über alle Messzeitpunkte hinweg ein mittlerer Zusammenhang.

Tabelle 22: Zusammenhänge zwischen individuellen Lernermerkmalen und der Strategieflexibilität[7] (Korrelation nach Pearson)

	CFT 1 (RW)	AG (RW)	Stratflex T1 (N = 78)	Stratflex T2 (N = 79)	Stratflex T3 (N = 73)	Stratflex T4 (N = 74)
DEMAT 2^{+} (RW)	.44 **	.39 **	.30 **	.26 *	.43 **	.30 *
CFT 1 (RW)	1	.42 **	.11	.16	.22 $^{+}$	.01
AG (RW)	.42 **	1	−.01	.10	.17	.14

$^{+}p < .10$, $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$, $^{***}p < .001$

Für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zeigen sich in Tabelle 23 im Vergleich zur *Strategieflexibilität* mit den individuellen Lernermerkmalen ab dem Nachtest T2 deutlich mehr signifikante Zusammenhänge. Zu T1 können hingegen keine signifikanten Zusammenhänge zwischen dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und den individuellen Lernermerkmalen nachgewiesen werden. Zu T2 zeigt sich ein mittlerer Zusammenhang mit den allgemeinen mathematischen Fähigkeiten (DEMAT 2^{+}) der Schülerinnen und Schüler und zu T3 und T4 ein hoher Zusammenhang. Die kognitiven Grundfähigkeiten hängen zu T2 und T3 signifikant mit dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zusammen, wobei ein geringer Zusammenhang besteht. Zu T4 zeigt sich kein Zusammenhang. Für den Zusammenhang zwischen dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und dem Arbeitsgedächtnis kann erst zu T3 und T4 ein geringer Zusammenhang nachgewiesen werden.

[7] Die Werte für die Strategieflexibilität und das Repertoire an Verkürzungsstrategien wurden nicht imputiert, sodass es sich um Rohdaten handelt, während für alle anderen Variablen die imputierten Daten genutzt wurden.

Tabelle 23: Zusammenhänge zwischen individuellen Lernermerkmalen und dem Repertoire an Verkürzungsstrategien[7] (Korrelation nach Pearson)

	Verkürzstrat T1 (*N* = 78)	Verkürzstrat T2 (*N* = 79)	Verkürzstrat T3 (*N* = 73)	Verkürzstrat T4 (*N* = 74)
DEMAT 2⁺ (RW)	.02	.41 **	.55 **	.52 *
CFT 1 (RW)	−.01	.23 *	.27 *	.18
AG (RW)	.04	.17	.29 *	.29 *

$^{+}p < .10$, $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$, $^{***}p < .001$

Noch deutlichere Zusammenhänge als zwischen dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und den individuellen Lernermerkmalen zeigen sich in Tabelle 24 für die *Strategieadaptivität*. Zwischen der *Strategieadaptivität* und den allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}) besteht zu T1 ein mittlerer Zusammenhang und zu allen folgenden Messzeitpunkten ein hoher Zusammenhang. Für die kognitiven Grundfähigkeiten (CFT 1) besteht zu T1 kein Zusammenhang mit der *Strategieadaptivität* und ab T2 ein mittlerer Zusammenhang. Für das Arbeitsgedächtnis zeigt sich ebenfalls im Prätest zu T1 kein Zusammenhang mit der *Strategieadaptivität*, zu T2 ein schwacher Zusammenhang und in den beiden Follow-up-Tests zu T3 und T4 ein mittlerer Zusammenhang.

Tabelle 24: Zusammenhänge zwischen individuellen Lernermerkmalen und der Strategieadaptivität (gepoolte Korrelation nach Pearson)

	Stratadap T1	Stratadap T2	Stratadap T3	Stratadap T4
DEMAT 2⁺ (RW)	.41 **	.65 **	.62 **	.55 **
CFT 1 (RW)	.11	.39 **	.37 **	.30 **
AG (RW)	.06	.24 *	.36 **	.31 **

$^{+}p < .10$, $^{*}p < .05$, $^{**}p < .01$, $^{***}p < .001$

Wie bereits in Kapitel 6.6 dargestellt wurde, unterscheiden sich die beiden Experimentalgruppen signifikant in ihren kognitiven Grundfähigkeiten und auf dem 10 %-Niveau signifikant in den allgemeinen mathematischen Fähigkeiten. Beide Prädiktoren werden bei der Modellbildung für alle drei abhängigen Variablen zunächst in die Analysen aufgenommen. Für die *Adaptivitätsentwicklung* und die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* wird, basierend auf den oben dargestellten Korrelationsanalysen, die Arbeitsgedächtnisleistung in die Modelle aufgenommen, sofern dies zu einer Verbesserung des jeweiligen Modellfits beiträgt. Sofern einer der Prädiktoren keinen signifikanten Einfluss auf die abhängigen Variablen zeigt, wird dieser in einem zweiten Schritt wieder aus dem Modell entfernt, um die Modelle möglichst sparsam zu halten (vgl. Kap. 6.5.2).

7.2 Entwicklung der Strategieflexibilität (Fragestellungen 1a-c)

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und zur Verwendung von *Verkürzungsstrategien* dargestellt. Hierfür werden die Daten aus den Strategietests herangezogen (Kap. 6.3.1). Gemäß der Fragestellungen werden sowohl experimentalgruppenspezifische (Fragestellung 1a) als auch vorwissensspezifische Unterschiede im *Strategierepertoire* der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 1b) betrachtet. Darüber hinaus soll der Einfluss individueller Lernermerkmale (allgemeine mathematische Fähigkeiten, kognitive Grundfähigkeiten und Arbeitsgedächtnis) sowie der Einfluss der Auffrischung auf die Entwicklung der beiden abhängigen Variablen untersucht werden (Fragestellung 1c).

In diesem Kontext wird auch die Korrektheitsentwicklung der eingesetzten Strategien berücksichtigt, indem zusätzlich zur Vorkommenshäufigkeit der eingesetzten Strategien jeweils der korrekte Anteil dieser Strategien angegeben ist. Auf diese Weise soll auch untersucht werden, ob die Generierung eigener Lösungswege, wie empirische Ergebnisse nahelegen (Heinze et al., 2009), häufiger zu Fehlstrategien führt. Umgekehrt ist ebenso plausibel, dass die Übernahme prozeduraler Strategien, welche nicht konzeptuell untermauert sind, zur Entstehung von Fehlkonzepten beiträgt (Carpenter et al., 1997; Heirdsfield & Cooper, 2004). Eine ausführlichere Darstellung der Entwicklung korrekter Strategien in den beiden Experimentalgruppen ist in Heinze et al. (2018) zu finden. Dort zeigt sich zwischen den beiden Experimentalgruppen über den gesamten Messzeitraum hinweg kein Unterschied in der Korrektheitsentwicklung.

Die Strategieentwicklung wird im Folgenden zunächst für den gesamten Untersuchungszeitraum (T1–T4, Kap. 7.2.1) und anschließend für den Interventionszeitraum (T1–T2, Kap. 7.2.2) und den Zeitraum nach der Intervention (T2–T4, Kap. 7.2.3) getrennt dargestellt. Auf diese Weise ist es auch möglich, die Analyse der verwendeten Strategien und die Auswahl der Prädiktoren den messzeitraumrelevanten Fragestellungen und Hypothesen anzupassen. Allerdings wird – wie bereits in der Einleitung zu Kapitel 7 beschrieben – bei der Frage nach Unterschieden im Strategiegebrauch und der Strategieentwicklung innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 1b) nur der unmittelbare Interventionszeitraum betrachtet. Im Interventionszeitraum konnten Störvariablen weitgehend minimiert werden, während im Zeitraum nach der Intervention für die Entwicklung in den Leistungsgruppen zusätzlich andere Faktoren wie die Teilnahme an der Auffrischung kontrolliert werden müssten. Die Untersuchung von langfristigen Entwicklungen innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen ist aufgrund des Studiendesigns und der kleinen Leistungsgruppen, welche verglichen werden, nicht möglich. Allerdings wird der Einfluss individueller Lernermerkmale in den Analysen zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und den Analysen zur Verwendung von *Verkürzungsstrategien* berücksichtigt, in denen sowohl kurzfristige (Kap. 7.2.2.3) als auch langfristige Entwicklungen (Kap. 7.2.3.2) betrachtet werden.

7.2.1 Entwicklung der Strategieflexibilität im gesamten Untersuchungszeitraum (T1–T4)

Im Folgenden wird in Kapitel 7.2.1.1 zunächst das *Strategierepertoire* der beiden Experimentalgruppen zu den vier Messzeitpunkten im 3. Schuljahr (T1 bis T4) dargestellt. Im anschließenden Kapitel 7.2.1.2 werden experimentalgruppenspezifische Unterschiede in der Strategieentwicklung sowie weitere Einflussfaktoren auf die Fähigkeitsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Zeitraum T1 bis T4 geprüft.

7.2.1.1 Strategierepertoire (T1–T4)

In Tabelle 25 ist dargestellt, wie häufig die verschiedenen Strategien zu den vier Messzeitpunkten T1 bis T4 in den beiden Experimentalgruppen eingesetzt wurden. Wie zu erkennen ist, findet während des dritten Schuljahres eine Verschiebung in der Verwendung der einzelnen Strategien statt. Während zu T1 die Universalstrategien *Schritt-* und *Stellenweise* sowie verkürzte Notationsformen dieser Strategien einen Großteil der eingesetzten Strategien ausmachen, werden am Ende der Intervention (T2) deutlich häufiger die Verkürzungsstrategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern* und *Abstandsberechnung* verwendet. Nach der Intervention steigt der Einsatz der Normalverfahren, welche zwischen T3 und T4 im regulären Mathematikunterricht eingeführt werden, erkennbar an, sodass diese am Schuljahresende den größten Anteil der eingesetzten Strategien ausmachen.

Tabelle 25: Strategieverwendung im Erhebungszeitraum T1 bis T4

Häufigkeiten der verwendeten Strategien pro Messzeitpunkt und Experimentalgruppe (in Klammern prozentualer Anteil)								
	T1		**T2**		**T3**		**T4**	
	Gruppe		**Gruppe**		**Gruppe**		**Gruppe**	
	EA	**PA**	**EA**	**PA**	**EA**	**PA**	**EA**	**PA**
Schriftliche Normalverfahren Standardschreibweise	8 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	20 (7)	13 (5)	120 (42)	110 (37)
Schriftliche Normalverfahren Andere Schreibweise	20 (7)	4 (1)	11 (3)	11 (4)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
Stellenweise STG	12 (4)	12 (4)	34 (11)	5 (2)	40 (14)	10 (4)	23 (8)	6 (2)
Stellenweise VK	7 (2)	7 (2)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	4 (1)	7 (2)	7 (2)
Stellenweise Subtraktion	14 (5)	9 (3)	21 (7)	4 (1)	19 (6)	4 (1)	14 (5)	3 (1)

Fortsetzung Tabelle 25: Strategieverwendung im Erhebungszeitraum T1 bis T4

Häufigkeiten der verwendeten Strategien pro Messzeitpunkt und Experimentalgruppe (in Klammern prozentualer Anteil)								
	T1		T2		T3		T4	
	Gruppe		Gruppe		Gruppe		Gruppe	
	EA	PA	EA	PA	EA	PA	EA	PA
Schrittweise STG	88 (29)	87 (29)	40 (13)	38 (13)	51 (17)	32 (11)	3 (1)	11 (4)
Schrittweise VK	42 (14)	54 (18)	23 (7)	49 (17)	30 (10)	70 (25)	9 (3)	21 (7)
Schrittweise NSTG	2 (1)	20 (7)	2 (1)	4 (1)	0 (0)	6 (2)	1 (0)	0 (0)
Hilfsaufgabe 1. Zahl	2 (1)	9 (3)	10 (3)	12 (4)	6 (2)	14 (5)	4 (1)	14 (5)
Hilfsaufgabe 2. Zahl	0 (0)	14 (5)	22 (7)	39 (13)	24 (8)	43 (15)	14 (5)	46 (15)
Hilfsaufgabe beide Zahlen	0 (0)	0 (0)	0 (0)	18 (6)	5 (2)	16 (6)	5 (2)	24 (8)
Ergänzen	4 (1)	4 (1)	51 (16)	8 (3)	15 (5)	15 (5)	6 (2)	7 (2)
Indirekte Subtraktion	1 (0)	0 (0)	7 (2)	12 (4)	5 (2	7 (2)	3 (1)	3 (1)
Abstandsberechnung (ohne Angabe der Rechenrichtung)	0 (0)	0 (0)	7 (2)	14 (5)	0 (0)	8 (3)	0 (0)	4 (1)
Gegensinniges Verändern	2 (1)	0 (0)	30 (9)	17 (6)	16 (5)	17 (6)	18 (6)	17 (6)
Gleichsinniges Verändern	1 (0)	1 (0)	19 (6)	3 (1)	7 (2)	0 (0)	11 (4)	7 (2)
Kopfrechnen	11 (4)	19 (6)	18 (6)	17 (6)	30 (10)	10 (4)	26 (9)	11 (4)
Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise	35 (12)	38 (13)	10 (3)	32 (11)	19 (6)	11 (4)	19 (7)	6 (2)
Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise mit Anpassung	1 (0)	4 (1)	0 (0)	2 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Mischstrategie Schrittweise/Hilfsaufgabe	0 (0)	0 (0)	2 (1)	5 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Nicht zuzuordnen	49 (16)	13 (4)	8 (3)	3 (1)	7 (2)	3 (1)	3 (1)	1 (0)
Gesamt	299	295	316	294	295	284	286	299

Anmerkung: STG stellengerechte Notation, VK verkürzte Notation der stellengerechten Schreibweise, NSTG nicht stellengerechte Notation

Der Strategieeinsatz in den beiden Experimentalgruppen zu den unterschiedlichen Messzeitpunkten wird in den folgenden Unterkapiteln noch einmal ausführlicher beschrieben, sodass an dieser Stelle auf eine detailliertere Ausführung verzichtet wird. Allerdings werden Substrategien (vgl. Tabelle 13, S. 127) in den nächsten Kapiteln zur besseren Übersichtlichkeit und um niedrige Zellbesetzungen bei der Durchführung von Chi-Quadrat-

Homogenitätstests zu vermeiden, zu übergeordneten Strategien zusammengefasst. Für Detailaspekte wird in den Folgekapiteln daher an einigen Stellen auf die oben dargestellte Tabelle 25 rückverwiesen.

Für die Fragestellung 1a werden sowohl die Entwicklung innerhalb der einzelnen Treatmentgruppen als auch unterschiedliche experimentalgruppenspezifische Entwicklungsverläufe dargestellt. Um zu prüfen, inwieweit sich die Verteilung der einzelnen Strategien während des dritten Schuljahres verändert, wurde die Strategieverteilung zu zwei aufeinanderfolgenden Messzeitpunkten zunächst für jede Experimentalgruppe separat betrachtet. Hierfür wurden die Substrategien zu den neun übergeordneten Strategien auf Ebene 1 (vgl. Tabelle 13, S. 127) zusammengefasst. Darüber hinaus wurde die Strategie *Schrittweise verkürzt* als separate Strategie aufgenommen, da diese Strategie zu allen Messzeitpunkten vergleichsweise hohe Häufigkeiten aufweist. Insgesamt wurde die Strategieverteilung folglich über 10 Strategien betrachtet.

Die Ergebnisse eines Chi-Quadrat-Homogenitätstests auf Gleichverteilung der eingesetzten Strategien zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Messzeitpunkten und für jede Experimentalgruppe separat zeigen, dass sich die stärksten Veränderungen im Interventionszeitraum (T1–T2) (explizierender Ansatz: $\chi^2(10, N = 615) = 198.24$, *Cramers V* = .57, $p < .001$; problemlöseorientierter Ansatz: $\chi^2(10, N = 589) = 104.98$, *Cramers V* = .42, $p < .001$) sowie zwischen den beiden Follow-up-Tests (T3–T4) vollziehen (explizierender Ansatz: $\chi^2(10, N = 880) = 172.73$, *Cramers V* = .44, $p < .001$; problemlöseorientierter Ansatz: $\chi^2(10, N = 869) = 208.71$, *Cramers V* = .49, $p < .001$). Hingegen verändert sich die Strategieverteilung zwischen Posttest (T2) und Follow-up-Test 1 (T3) in beiden Experimentalgruppen vergleichsweise wenig. Darüber hinaus deuten die Chi-Quadrat-Werte darauf hin, dass sich das *Strategierepertoire* im Zeitraum T2 bis T3 im problemlöseorientierten Ansatz ($\chi^2(10, N = 873) = 42.96$, *Cramers V* = .22, $p < .001$) weniger verändert als im explizierenden Ansatz ($\chi^2(10, N = 895) = 70.63$, *Cramers V* = .28, $p < .001$).

In den folgenden Kapiteln wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich zwischen den beiden Experimentalgruppen zu einzelnen Messzeitpunkten im 3. Schuljahr sowie in der Entwicklung über das 3. Schuljahr hinweg signifikante Unterschiede in der *Strategieflexibilität* sowie im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zeigen.

7.2.1.2 Strategieflexibilität und Verwendung von Verkürzungsstrategien (T1–T4)

In diesem Abschnitt werden zunächst die deskriptiven Statistiken für die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* in den beiden Experimentalgruppen dargestellt. Darüber hinaus werden mit *t*-Tests Experimentalgruppenunterschiede zu den einzelnen Messzeitpunkten berechnet.

Anschließend wird die Entwicklung in der *Strategieflexibilität* und im Einsatz von *Verkürzungsstrategien* mit linearen gemischten Modellen analysiert.

Deskriptive Statistiken und Testung auf Gruppenunterschiede

Tabelle 26 und Tabelle 27 beinhalten die deskriptiven Statistiken für das *Strategierepertoire* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* für beide Experimentalgruppen getrennt sowie die Ergebnisse von *t*-Tests auf Gruppenunterschiede zu den vier Messzeitpunkten. Die Experimentalgruppen unterscheiden sich zu keinem der Messzeitpunkte signifikant in der Anzahl insgesamt eingesetzter Strategien bzw. der Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien*. Allerdings geben die Gruppenmittelwerte zu den beiden Messzeitpunkten bereits Hinweise darauf, dass sich die Experimentalgruppen im Interventionszeitraum unterschiedlich entwickeln, da die explizierende Lerngruppe zu T1 in beiden abhängigen Variablen niedrigere Mittelwerte und zu T2 höhere Mittelwerte als die problemlöseorientierte Lerngruppe aufweist. In Kapitel 7.2.2.3 wird geprüft, ob sich die Experimentalgruppen in der *Entwicklung der Strategieflexibilität* (Hypothese 1a) zwischen Prä- und Posttest (T1–T2) voneinander unterscheiden.

Tabelle 26: Experimentalgruppenunterschiede in der Strategieflexibilität (Summenscore Strategierepertoire gesamt, *min* = 0 *max* = 8)

MZP	Explizierender Ansatz				Problemlöseorientierter Ansatz				Prüfstatistik		
	N	*M*	*SD*	*Range*	*N*	*M*	*SD*	*Range*	*t*	*df*	*p*
T1	40	2.58	1.06	1–5	38	2.84	1.03	1–5	−1.13	76.00	.262
T2	41	3.59	0.97	1–5	38	3.32	1.34	1–6	1.03	77.00	.307
T3	37	2.78	1.08	1–5	36	3.17	1.25	1–6	−1.40	71.00	.167
T4	36	2.97	1.31	1–5	38	2.97	1.68	1–5	−.088	69.40	.383

Tabelle 27: Experimentalgruppenunterschiede im Repertoire an Verkürzungsstrategien (Summenscore, *min* = 0 *max* = 4)

MZP	Explizierender Ansatz				Problemlöseorientierter Ansatz				Prüfstatistik		
	N	*M*	*SD*	*Range*	*N*	*M*	*SD*	*Range*	*t*	*df*	*p*
T1	40	0.35	0.53	0–2	38	0.42	0.60	0–2	−0.55	76.00	.581
T2	41	1.51	1.00	0–3	38	1.34	1.02	0–3	0.75	77.00	.458
T3	37	0.92	1.04	0–3	36	1.17	1.08	0–4	−1.00	71.00	.321
T4	36	0.72	0.91	0–3	38	1.03	1.05	0–3	−1.32	72.00	.190

Lineare gemischte Modelle

Im Folgenden werden die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* als abhängige Variablen betrachtet. Mit linearen gemischten Modellen sollen Gruppenunterschiede in der Entwicklung der *Strategieflexibilität* und im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Forschungsfrage 1a) sowie Einflussfaktoren auf beide abhängigen Variablen (Forschungsfrage 1c) im gesamten Untersuchungszeitraum untersucht werden. Dabei werden die beiden abhängigen Variablen jeweils separat in einem linearen gemischten Modell betrachtet. Die inhaltliche Interpretation der Parameterschätzung wird an dieser Stelle ausführlich dargestellt, um exemplarisch die Bedeutung der einzelnen Werte in den nachfolgenden Analysen zu erläutern. Daher wird an anderen Stellen zur Vereinfachung auf die nun folgende ausführliche Interpretation der Werte verwiesen.

Um Einflüsse auf die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* im gesamten Untersuchungszeitraum zu prüfen, wurden die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Prädiktoren in die linearen gemischten Modelle aufgenommen.

Ein Chi-Quadrat-Differenztest zeigt, dass die Aufnahme der Kovariaten DEMAT 2^+, der Auffrischungsteilnahme und der Interaktion Auffrischungsteilnahme*Zeit (sowie der Interaktion DEMAT 2^+*Zeit für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien*) im Vergleich zum jeweiligen Nullmodell zu einer deutlichen Verbesserung beider Modellfits beiträgt (*Strategieflexibilität*: $\Delta\chi^2 = 146.01$, $\Delta df = 3$, $p < .001$; *Repertoire an Verkürzungsstrategien*: $\Delta\chi^2 = 108.01$, $\Delta df = 4$, $p < .001$).

Wie in Kapitel 6.5.2 dargestellt wurde, werden bei der Berechnung linearer gemischter Modelle mit imputierten Datensätzen sowohl F-Werte für die einzelnen Faktoren als auch dazugehörige Parameterschätzungen ausgegeben. Wie im Rahmen einer Varianzanalyse können dort Informationen über signifikante Einflussfaktoren auf die Höhe der Ausprägung der abhängigen Variablen (Haupteffekte) als auch über Einflussfaktoren auf den Zuwachs in der abhängigen Variable (Interaktionseffekte) abgelesen werden. Die Angabe der Parameterschätzungen bietet im Gegensatz zur Angabe der F-Werte zwei Vorteile. Zum einen können die Parameterschätzungen für die verschiedenen Imuptationsmodelle gepoolt ausgegeben werden und zum anderen können dort bei voriger z-Standardisierung der metrischen Variablen Informationen über die Höhe der jeweiligen Einflüsse abgelesen und diese auch verglichen werden.

Tabelle 28 zeigt die gepoolte Schätzung der festen Parameter für das Modell der *Strategieflexibilität* im Zeitraum T1 bis T4. Da die Werte der metrischen Variablen z-standardisiert wurden, lässt sich sowohl die Einflusshöhe der einzelnen Parameter direkt miteinander vergleichen als auch deren statistische Bedeutsamkeit (Signifikanz) ablesen.

Die Parameter Auffrischungsteilnahme und Instruktionsansatz sind dichotom kodiert, sodass die abgebildeten standardisierten Koeffizienten für die Schülerinnen und Schüler mit Auffrischungsteilnahme/für die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz abgelesen werden können. Für Schülerinnen und Schüler der entsprechenden Referenzgruppen, d. h. ohne Auffrischungsteilnahme oder die Gruppe des problemlöseorientierten Ansatzes sind in die entsprechenden Zeilen eine 0 einzusetzen.

Tabelle 28: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Strategieflexibilität T1 bis T4

Parameter	Strategieflexibilität		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.02	.09	.845
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	.01	.08	.902
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^{+})	.29	.07	.000
Instruktionsansatz[a]	−.05	.13	.674
Auffrischungsteilnahme[b]	.06	.06	.302
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.17	.11	.132
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.15	.06	.006

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Auf die Höhe der mittleren *Strategieflexibilitä*t, also die durchschnittliche Ausprägung über alle vier Messzeitpunkte hinweg, wirken sich verschiedene Parameter in unterschiedlicher Höhe und mit unterschiedlicher Wirkrichtung aus, wobei sich nicht alle Parameter als statistisch bedeutsam erweisen.

Die Zeit (β = .01, $p > .10$) zeigt keinen signifikanten Einfluss auf die mittlere *Strategieflexibilität* im Messzeitraum. Dies bedeutet, dass sich zwischen den Messzeitpunkten (operationalisiert durch die Anzahl der Monate im 3. Schuljahr) für die mittlere Ausprägung der *Strategieflexibilität* kein Unterschied nachweisen lässt. Auch zwischen den beiden Instruktionsansätzen (β = −.05, $p > .10$) sowie zwischen den Schülerinnen und Schülern, die an der Auffrischung teilgenommen haben und denjenigen, die nicht teilgenommen haben (β = .06, $p > .10$), zeigen sich für die mittlere Ausprägung der *Strategieflexibilität* keine Unterschiede.

Jedoch wirken sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten signifikant auf die *Strategieflexibilität* aus. Je höher die allgemeinen mathematischen Leistungen der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto größer ist das mittlere *Strategierepertoire* im Zeitraum T1 bis T4 (β = .29, $p < .001$).

Um die *Entwicklung in der Strategieflexibilität* zu untersuchen, wurden die beiden Interaktionseffekte Auffrischungsteilnahme*Zeit und Instruktionsansatz*Zeit in das Modell einbezogen (s. o.). Die Experimentalgruppen weisen über das ganze dritte Schuljahr hinweg (September bis Juni) keine signifikant unterschiedliche *Entwicklung in der Strategieflexibilität* auf (β = −.17, $p > .10$). Die Richtung des Koeffizienten verweist jedoch darauf, dass die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz insgesamt eine etwas günstigere *Entwicklung* zeigen. Die Teilnahme an der Auffrischung wirkt sich positiv auf die *Fähigkeitsentwicklung* der Schülerinnen und Schüler aus (β = .15, $p < .01$). Dies bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler, die an der Auffrischung zwischen T2 und T3 teilgenommen haben, über das 3. Schuljahr hinweg eine günstigere *Lernentwicklung* aufweisen als Schülerinnen und Schüler, die keine Auffrischung erhalten haben.

Da aus den oben berichteten Ergebnissen keine Informationen über die *Entwicklung der Strategieflexibilität* innerhalb der beiden Interventionsgruppen zwischen den einzelnen Messzeitpunkten T1 bis T4 hervorgehen, werden diese durch die in Abbildung 4 dargestellten geschätzten Randmittel (unter Kontrolle des DEMAT 2^+ und der Auffrischungsteilnahme) ergänzt.

Abbildung 4 zeigt, wie viele unterschiedliche Strategien im Mittel in den beiden Experimentalgruppen zu den vier Messzeitpunkten eingesetzt wurden. Dabei ist ein theoretisches Maximum von acht Strategien möglich.

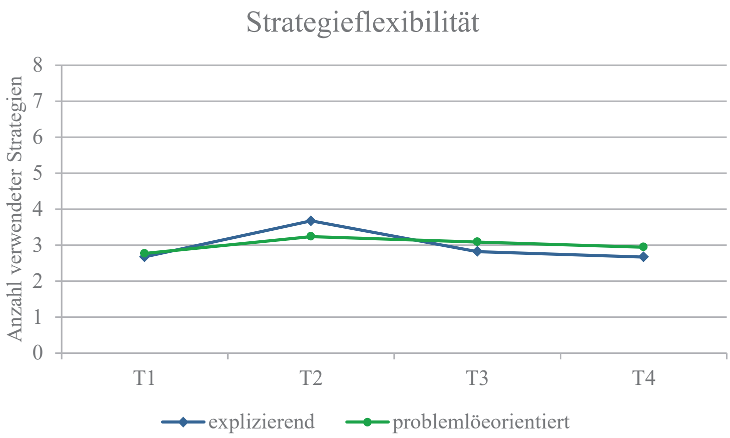


Abbildung 4: Entwicklung der Strategieflexibilität im 3. Schuljahr T1 bis T4 (geschätzte Randmittel)

Wie in der Abbildung zu sehen ist, werden im gesamten Zeitraum in beiden Experimentalgruppen im Mittel ca. drei verschiedene Strategien pro Messzeitpunkt genutzt (vgl. auch deskriptive Statistiken in Tabelle 26, S. 154). Darüber hinaus geht aus dem Schaubild hervor, dass sich für den unmittelbaren Interventionszeitraum (T1 bis T2) eine günstigere *Lernentwicklung* für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes ergibt, während sich diese *Entwicklung* für den Zeitraum nach der Intervention (T2 bis T3) zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes umkehrt. Wie auch die deskriptiven Statistiken zum *Strategierepertoire* in Tabelle 26 (S. 154) zeigen, variiert die Anzahl genutzter Strategien im problemlöseorientierten Ansatz über das ganze Schuljahr hinweg wenig. Im Zeitraum zwischen T3 und T4 deutet sich ein paralleler Verlauf der beiden Experimentalgruppen in der *Strategieflexibilität* an.

Für die *Fähigkeitsentwicklung* in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* zeigt sich in Tabelle 29 ein ähnliches Bild. Hier wurden die *Verkürzungsstrategien* auf Ebene 1 der

Strategiekodierung (vgl. Kap. 6.3.1) betrachtet, um noch deutlicher zu veranschaulichen, inwieweit tatsächlich verschiedene *Verkürzungsstrategien* angewendet wurden.[8]

Tabelle 29: Gepoolte Schätzung fester Parameter für das Repertoire an Verkürzungsstrategien T1 bis T4

Parameter	Repertoire an Verkürzungsstrategien		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.23	.09	.009
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	.07	.04	.136
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^{+})	.24	.06	.000
Instruktionsansatz[a]	−.07	.12	.554
Auffrischungsteilnahme[b]	.13	.06	.038
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^{+})*Zeit	.12	.03	.001
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.12	.06	.071
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.11	.03	.001

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Die Haupteffekte Zeit ($\beta = .07$, $p > .10$) und die Experimentalgruppenzugehörigkeit ($\beta = -.07$, $p > .10$) beeinflussen das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* nicht signifikant, d. h. im Zeitraum T1 bis T4 zeigen sich weder zwischen den Messzeitpunkten noch zwischen den Experimentalgruppen signifikante Unterschiede. Hingegen haben die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten und die Auffrischungsteilnahme einen signifikant positiven Einfluss auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien*. Schülerinnen und Schüler mit höheren mathematischen Fähigkeiten verfügen über das dritte Schuljahr hinweg im Mittel über ein größeres *Repertoire an Verkürzungsstrategien* als Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren mathematischen Leistungen ($\beta = .24$, $p < .001$). Ebenso weisen Schülerinnen und Schüler, die an der Auffrischung teilgenommen haben, über das dritte Schuljahr hinweg im Mittel ein größeres *Repertoire an Verkürzungsstrategien* als diejenigen Schülerinnen und Schüler auf, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben ($\beta = .13$, $p < .05$).

Für die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* erweisen sich innerhalb des dritten Schuljahres die allgemeinen mathematischen Leistungen ($\beta = .12$, $p < .001$) und die Auffrischungsteilnahme ($\beta = .11$, $p < .001$) als signifikante Prädiktoren. Beide Prädiktoren wirken sich in vergleichbarem Maße günstig auf die *Lernentwicklung* der Schülerinnen und Schüler in beiden Experimentalgruppen aus. Je höher die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten ausgeprägt sind, desto mehr *Verkürzungsstrategien* werden während des 3. Schuljahres dazugelernt. Zum anderen weisen Schülerinnen und Schüler, die an der Auffrischung teilgenommen haben, einen höheren *Zuwachs im Repertoire an Verkür-*

[8] Mit Kodierebene 2 würden dagegen u. U. Substrategien derselben übergeordneten Strategie erfasst.

zungsstrategien als diejenigen Schülerinnen und Schüler auf, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben.

Zwischen den beiden Experimentalgruppen zeigt sich im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* in der problemlöseorientierten Gruppe eine tendenziell bessere *Lernentwicklung* als in der explizierenden Gruppe ($\beta = -.12$, $p < .10$). Werden alle statistisch bedeutsamen Prädiktoren im Modell verglichen ($p < .10$), so besitzt die Experimentalgruppenzugehörigkeit auf die *zeitliche Entwicklung* des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* einen vergleichbar hohen Einfluss wie die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten und die Auffrischungsteilnahme.

In der Darstellung der geschätzten Randmittel für die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* in Abbildung 5 zeigt sich unter Kontrolle des DEMAT 2^+ und der Auffrischungsteilnahme (wie bereits in den deskriptiven Statistiken in Tabelle 27, S. 154), dass beide Experimentalgruppen am Ende der Intervention (T2) mehr *Verkürzungsstrategien* als noch im Prätest einsetzen.

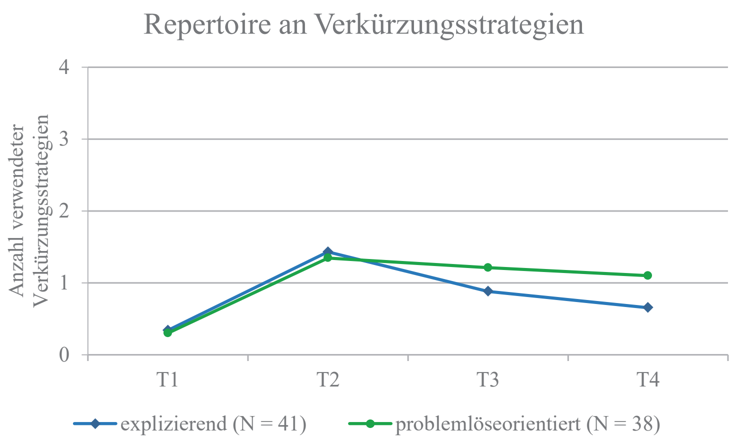


Abbildung 5: Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien im 3. Schuljahr T1 bis T4 (geschätzte Randmittel)

Im Interventionszeitraum ist die *Entwicklung* für die Schülerinnen und Schüler der beiden Experimentalgruppen vergleichbar. Ein Unterschied in der *Fähigkeitsentwicklung* lässt sich konform mit den Ergebnissen zur *Strategieflexibilität* (vgl. Abbildung 4, S. 157) im Zeitraum zwischen T2 und T3 erkennen. Während die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes in den Follow-up-Tests im Mittel nur geringfügig weniger *Verkürzungsstrategien* als direkt nach der Intervention verwenden, weisen die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz zu diesen Messzeitpunkten ein geringeres *Repertoire an Verkürzungsstrategien* auf. Allerdings zeigt sich in der *zeitlichen Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* im Zeitraum T1 bis T4 nur auf dem 10 %-

Niveau ein signifikanter Unterschied zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes (vgl. Tabelle 29, S. 158; Instruktionsansatz*Zeit: $\beta = -.12$, $p < .10$).

Die dargestellten Entwicklungen des gesamten *Strategierepertoires* (*Flexibilität*) und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* legen nahe, den Untersuchungszeitraum in zwei gesonderte Beobachtungszeiträume zu unterteilen. In den folgenden Kapiteln wird die Entwicklung der *Strategieflexibilität* und die Entwicklung des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* daher gesondert für a) den unmittelbaren Interventionszeitraum T1 bis T2 (Kap. 7.2.2) und b) den Zeitraum nach der Intervention T2 bis T4 (Kap. 7.2.3) dargestellt, wobei letzterer zusätzlich in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme betrachtet wird.

7.2.2 Entwicklung der Strategieflexibilität im Interventionszeitraum (T1–T2)

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur Strategieentwicklung im unmittelbaren Interventionszeitraum T1 bis T2 dargestellt. Dabei werden für die Darstellung der Strategieentwicklung in den beiden Experimentalgruppen während des Treatments sowohl die Daten aus den Strategietests zu T1 und T2 (Kap. 7.2.2.1) als auch die prozessbezogenen Daten aus dem Unterricht der Intervention *(Post für den Tiger)* (Kap. 7.2.2.2) genutzt. Nach der Auswertung auf deskriptiver Ebene der Daten wird die Entwicklung der *Strategieflexibilität* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* mit parametrischen Auswertungsverfahren (linearen gemischten Modellen) geprüft und hierbei weitere relevante Einflussfaktoren einbezogen (Kap. 7.2.2.3).

7.2.2.1 Strategierepertoire (T1–T2)

In den folgenden Abschnitten wird das *Strategierepertoire* in den beiden Experimentalgruppen zu T1 und T2 dargestellt. Dabei wird zunächst auf Unterschiede zwischen den beiden Experimentalgruppen und anschließend auf experimentalgruppenspezifische Unterschiede innerhalb der Leistungsgruppen eingegangen.

Entwicklungen in den Experimentalgruppen

Tabelle 30 zeigt die Verteilung der Strategien im Vor- (T1) und Nachtest (T2). Die Angaben in Klammern geben Auskunft über die Anzahl der Strategien mit korrektem Ergebnis. Als Verkürzungsstrategien werden die grau hinterlegten Strategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis* betrachtet (vgl. Kap. 6.3.1.1).

Die Strategien *Hilfsaufgabe* und *Abstandsberechnung* wurden zu T1 aufgrund der geringen Vorkommenshäufigkeit für die Berechnungen zusammengefasst und zu den nachfolgenden Messzeitpunkten als separate Strategien behandelt.

Tabelle 30: Strategieverwendung im Interventionszeitraum T1 bis T2

Häufigkeiten der verwendeten Strategien pro Messzeitpunkt und Experimentalgruppe (in Klammern davon korrekt)				
	T1		T2	
	Gruppe		Gruppe	
	EA	PA	EA	PA
Schriftliche Normalverfahren	28 (10)	4 (0)	11 (1)	11 (0)
Stellenweise stellengerecht* + verkürzt	19 (14)	19 (17)	35 (20)	6 (4)
Stellenweise Subtraktion	14 (7)	9 (2)	21 (2)	4 (3)
Schrittweise stellengerecht*	88 (76)	87 (78)	40 (28)	38 (33)
Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht	44 (21)	74 (58)	25 (18)	53 (40)
Hilfsaufgabe*	2 (1)	23 (17)	32 (27)	69 (54)
Verändern*	3 (2)	1 (0)	49 (33)	20 (17)
Abstandsberechnung*	5 (3)	4 (4)	65 (53)	34 (32)
Kopfrechnen	11 (7)	19 (8)	18 (5)	17 (15)
Mischformen	36 (23)	42 (23)	12 (9)	39 (24)
Nicht zuzuordnen	49 (16)	13 (2)	8 (4)	3 (2)
Gesamt	299 (178)	295 (208)	316 (200)	294 (224)
χ^2	$\chi^2(9, N = 594) = 62.75$		$\chi^2(10, N = 610) = 93.55$	
Cramers V	.33		.39	
p	< .001		< .001	

* im explizierenden Ansatz behandelte Strategien (vgl. Tabelle 8, S. 114)

Im Vortest kommen in beiden Experimentalgruppen in 55 % aller Schülerlösungen im explizierenden Ansatz und in 64 % der Schülerlösungen im problemlöseorientierten Ansatz die Universalstrategien *Schritt-* und *Stellenweise* in ausführlicher oder verkürzter Notationsform zum Einsatz. Auch *Mischformen* (insbes. *Schritt-* und *Stellenweise*) werden in beiden Gruppen zu etwa gleichen Anteilen eingesetzt. Die Normalverfahren werden zu diesem Zeitpunkt bereits von einigen Schülerinnen und Schülern verwendet, wobei hier häufig Fehlstrategien wie die ziffernweise Subtraktion (vgl. Erläuterung zur Fehlstrategie *smaller-from-larger-bug* auf S. 15) zum Einsatz kommen. Dies erklärt auch den niedrigen Anteil korrekter Lösungen mit dieser Strategie zu den ersten beiden Messzeitpunkten (im explizierenden Ansatz 36 % zu T1, 9 % zu T2; im problemlöseorientierten Ansatz 0 % zu T1 und 0 % zu T2).

Der Anteil der verwendeten Verkürzungsstrategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern, Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis*, welche eine Vereinfachung des Zahlenmaterials erfordern, beträgt zu T1 6 % im explizierenden Ansatz und 12 % im problemlöseorientierten Ansatz. Der Vorteil der problemlöseorientierten Lerngruppe lässt sich auf die häufigere Verwendung der *Hilfsaufgabe* zurückführen (8 % im problemlöseorientierten Ansatz vs. 1 % im explizierenden Ansatz).

Ein weiterer Gruppenunterschied manifestiert sich in der höheren Anzahl unelaborierter Strategien im explizierenden Ansatz (Kategorie *Nicht zuzuordnen;* 16 % im explizierenden Ansatz, 4 % im problemlöseorientierten Ansatz). Hierzu gehören Lösungswege, die nicht nachzuvollziehen sind und die keiner der anderen Kategorien zugeordnet werden konnten. Sofern es sich um nicht vollständige Lösungswege handelte, die aber Teilschritten der im Kategoriensystem erfassten Strategien entsprachen, wurden diese den entsprechenden Kategorien zugeordnet (vgl. Kategoriensystem in Anhang B, S. 259).

Die beschriebenen Experimentalgruppenunterschiede spiegeln sich auch im Ergebnis eines Chi-Quadrat-Homogenitätstests wider. Dieser zeigt, dass sich die Verteilung der Strategien in den beiden Experimentalgruppen bereits zum ersten Messzeitpunkt signifikant voneinander unterscheidet ($\chi^2(9, N = 594) = 62.75, p < .001$).

Zu T2 findet eine deutliche Veränderung im Strategieeinsatz beider Interventionsgruppen statt. Es werden insgesamt häufiger die Verkürzungsstrategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern, Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis* eingesetzt. Diese Strategien werden im explizierenden Ansatz in 48 % der Schülerlösungen und im problemlöseorientierten Ansatz in 47 % der Schülerlösungen eingesetzt. In beiden Ansätzen werden zu diesem Messzeitpunkt in über 60 % aller Schülerlösungen die Strategien verwendet, die Inhalt des explizierenden Treatments waren (in Tabelle 30 mit * gekennzeichnet). Auffällig ist, dass die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz (13 %) häufiger als die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz (3 %) auf das *stellenweise Verfahren* zurückgreifen, während die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz häufiger (31 %) *schrittweise* rechnen als im explizierenden Ansatz (21 %). Die Anwendung der *stellenweisen Strategie* bei Subtraktionsaufgaben führt dabei im explizierenden Ansatz in 90 % der Fälle zum falschen Ergebnis.

Ein weiterer Unterschied zeigt sich in den Strategien *Hilfsaufgabe* und *Verändern*, die sich beim gleichen Aufgabentypus anwenden lassen (vgl. Tabelle 1, S. 15). Die *Veränderungsstrategie* wird in 16 % der Lösungen im explizierenden Ansatz und nur in 7 % der Lösungen im problemlöseorientierten Ansatz eingesetzt. Hingegen wird die *Hilfsaufgabe* häufiger im problemlöseorientierten Ansatz (23 %) als im explizierenden Ansatz (10 %) verwendet.

Der Anteil der Nutzung von Mischstrategien im explizierenden Ansatz geht mit 4 % zu T2 im Vergleich zu 12 % im Prätest (T1) deutlich zurück, während er im problemlöseorientierten Ansatz vergleichsweise konstant bleibt (14 % zu T1 und 13 % zu T2). Die Experimentalgruppen unterscheiden sich im Posttest nicht in der Nutzung der schriftlichen Normalverfahren, wobei der Anteil im explizierenden Ansatz zurückgeht (9 % zu T1 und 3 % zu T2) und im problemlöseorientierten Ansatz leicht steigt (1 % zu T1 und 4 % zu T2).

Darüber hinaus treten nur noch wenige unelaborierte Strategien auf, die keiner Kategorie im Kodiersystem zugeordnet werden können.

Für beide Experimentalgruppen steigt der Anteil korrekter Lösungen im Interventionszeitraum von 60 % auf 63 % im explizierenden Ansatz und von 71 % auf 76 % im problemlöseorientierten Ansatz.

Das Ergebnis des Chi-Quadrat-Homogenitätstests ($\chi^2(10, N = 610) = 93.55$, $p < .001$) bestätigt die oben beschriebenen Experimentalgruppenunterschiede in der Strategieverteilung und weist darauf hin, dass sich die Verteilung der eingesetzten Strategien zwischen den beiden Experimentalgruppen zu T2 stärker als zu T1 unterscheidet. Wie oben im Rahmen der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* erläutert wurde, zeigt sich hierbei ein Vorteil für die explizierende Lerngruppe zu T2, die zu T1 noch deutlich weniger *Verkürzungsstrategien* als die problemlöseorientierte Lerngruppe verwendet. Ob sich dieser Vorteil in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* im Interventionszeitraum zugunsten der explizierenden Lerngruppe (Hypothese 1b) als statistisch bedeutsam erweist, wird in Kapitel 7.2.2.3 mit einem linearen gemischten Modell geprüft.

Im Folgenden werden deskriptive Statistiken für das *Strategierepertoire* und die *Strategieflexibilität* für die verschiedenen mathematischen Leistungsniveaus berichtet. Auf diese Weise soll der Frage nachgegangen werden, ob sich dabei im Interventionszeitraum in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen zeigen (Fragestellung 1b).

Entwicklungen in den Leistungsgruppen

Wie im vorigen Abschnitt dargestellt wurde, deutet sich in der Entwicklung des *Strategierepertoires* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* zwischen T1 und T2 für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes ein etwas größerer Lernzuwachs (Δ 42 % bei den Verkürzungsstrategien) als für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes an (Δ 35 %). Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, ob sich dieser Experimentalgruppenunterschied für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes im *Strategierepertoire* (Hypothese 6) und in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* (Hypothese 7) nachweisen lässt.

Um Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen mit ähnlichen Lernvoraussetzungen vergleichen zu können, wird im Folgenden die Entwicklung im unmittelbaren Interventionszeitraum dargestellt.

Da es sich in den einzelnen Leistungsgruppen um kleine Fallzahlen handelt, werden rein deskriptive Statistiken berichtet. Wie in Kapitel 6.6 beschrieben, wurde die Einteilung der 79 Schülerinnen und Schüler in drei Leistungsgruppen basierend auf den normierten Prozenträngen des DEMAT 2^{+} vorgenommen und dabei in *geringere mathematische Leistungen* (PR < 50), *durchschnittliche mathematische Leistungen* ($50 \leq \text{PR} \leq 75$) und *überdurchschnittliche mathematische Leistungen* (PR > 75) unterschieden.

Tabelle 31 zeigt, dass die drei Leistungsgruppen in beiden Instruktionsansätzen im Interventionszeitraum einen Zuwachs an Strategien verzeichnen. Wie viele Strategien dazugelernt werden, variiert hingegen zwischen den Leistungsgruppen und den Instruktionsansätzen.

Tabelle 31: Deskriptive Statistiken zum Strategierepertoire in den verschiedenen Leistungsgruppen T1 bis T2

	DEMAT 2$^+$-Prozentrang	*N*	T1				T2				Δ T1-T2	
			Min	*Max*	*M*	*SD*	*Min*	*Max*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
EA	PR < 50	18/19*	1	4	2.33	0.77	1	5	3.47	1.02	1.11	1.02
	50 ≤ PR ≤ 75	11	1	5	2.73	1.35	2	5	3.64	0.92	0.91	1.30
	PR > 75	11	1	5	2.82	1.17	2	5	3.73	1.01	0.91	1.64
PA	PR < 50	11	1	5	2.45	1.04	1	5	2.82	1.17	0.36	1.57
	50 ≤ PR ≤ 75	10	1	5	2.80	1.14	1	5	3.30	1.25	0.50	1.35
	PR > 75	17	2	5	3.12	0.93	1	6	3.65	1.46	0.53	1.97

*N = 18 zu T1, N = 19 zu T2

Zu T1 werden in allen Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes im Mittel weniger Strategien als in den jeweils entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes eingesetzt. Am Ende der Intervention (T2) kehrt sich das Bild um, sodass in allen Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes im Mittel mehr Strategien verwendet werden als in den jeweils entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes. Im explizierenden Ansatz können die Schülerinnen und Schüler mit geringen mathematischen Leistungen den größten Zuwachs an Strategien erzielen, während die Referenzgruppe im problemlöseorientierten Ansatz einen geringeren Leistungszuwachs erzielt als Schülerinnen und Schüler mit durchschnittlichem und höherem mathematischen Wissen. Die hohen Standardabweichungen deuten jedoch einschränkend darauf hin, dass die Leistungsgruppen in ihrem Leistungszuwachs nicht homogen sind. Weitere Einflussfaktoren, die innerhalb des Treatments eine Rolle spielen dürften und hier nicht einbezogen wurden, werden in Kapitel 8.2 diskutiert.

In Tabelle 32 ist das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zu T1 und T2 dargestellt. Die deskriptiven Statistiken beziehen sich auf die Verwendung der vier Verkürzungsstrategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis*.

Tabelle 32: Deskriptive Statistiken zum Repertoire an Verkürzungsstrategien in den verschiedenen Leistungsgruppen T1 bis T2

	DEMAT 2⁺-Prozentrang	*N*	T1				T2				Δ T1-T2	
			Min	*Max*	*M*	*SD*	*Min*	*Max*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
EA	PR < 50	18/19*	0	1	0.33	0.49	0	3	1.16	1.01	0.83	1.29
	50 ≤ PR ≤ 75	11	0	2	0.45	0.69	0	3	1.64	0.92	1.18	0.75
	PR > 75	11	0	1	0.27	0.47	0	3	2.00	0.89	1.73	1.01
PA	PR < 50	11	0	1	0.36	0.50	0	2	0.73	0.65	0.36	0.92
	50 ≤ PR ≤ 75	10	0	1	0.30	0.48	0	3	1.10	1.10	0.80	1.03
	PR > 75	17	0	2	0.53	0.72	0	3	1.88	0.93	1.35	1.11

*N = 18 zu T1, N = 19 zu T2

Es ist zu erkennen, dass alle Leistungsgruppen im Posttest (T2) deutlich mehr *Verkürzungsstrategien* als noch im Prätest verwenden. Je höher die mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto größer ist der Zuwachs im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* in beiden Experimentalgruppen. Der Lernzuwachs an *Verkürzungsstrategien* ist dabei in den Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes höher als in den entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes. Der bereits in Tabelle 30 (S. 161) erkennbare Vorteil für den explizierenden Ansatz in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* im Interventionszeitraum gilt folglich für alle Leistungsgruppen.

Insgesamt können auf deskriptiver Ebene der Daten alle Leistungsgruppen im explizierenden Ansatz im Interventionszeitraum hypothesenkonform einen größeren Zuwachs im *Strategierepertoire* (Hypothese 6) und im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 7) erzielen als die problemlöseorientierten Referenzgruppen.

Zusätzlich zur Entwicklung des *Strategierepertoires* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* sind in Tabelle 33 die gepoolten deskriptiven Statistiken zur Entwicklung der Korrektheit im Zeitraum T1 bis T2 dargestellt. Da die Skala den Mittelwert einer dichotomen Skala (0-1-Kodierung) abbildet, können die Angaben multipliziert mit 100 auch als Prozentanteil korrekter Lösungen interpretiert werden.

Tabelle 33: Gepoolte deskriptive Statistiken zur Korrektheit in den verschiedenen Leistungsgruppen T1 bis T2

	DEMAT 2⁺-Prozentrang	*N*	T1				T2				Δ T1-T2	
			Min	*Max*	*M*	*SE*	*Min*	*Max*	*M*	*SE*	*M*	*SE*
EA	PR < 50	19	0.00	0.88	0.38	0.06	0.00	1.00	0.38	0.07	0.00	0.04
	50 ≤ PR ≤ 75	11	0.13	0.75	0.52	0.06	0.25	1.00	0.72	0.08	0.19	0.06
	PR > 75	11	0.63	1.00	0.88	0.04	0.75	1.00	0.90	0.03	0.02	0.04
PA	PR < 50	11	0.00	0.75	0.41	0.09	0.00	0.88	0.48	0.09	0.07	0.06
	50 ≤ PR ≤ 75	10	0.13	1.00	0.64	0.08	0.25	1.00	0.76	0.08	0.13	0.09
	PR > 75	17	0.63	1.00	0.89	0.02	0.63	1.00	0.89	0.03	0.00	0.05

Zu beiden Messzeitpunkten ist erkennbar, dass die Spannweite innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen groß ist, wobei die beiden Leistungsgruppen mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten eine niedrigere Spannweite in den im Mittel erreichten Ergebnissen aufweisen. Zwischen den Leistungsgruppen der beiden Unterrichtsansätze zeigen sich lediglich in der Leistungsgruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten in der Korrektheit leichte Vorteile zugunsten der Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz. Im Zuwachs in der Korrektheit können Schülerinnen und Schüler in der explizierenden Leistungsgruppe mit geringeren mathematischen Fähigkeiten keinen Zuwachs erzielen, während in der Vergleichsgruppe im Mittel 7 % mehr korrekte Lösungen verwendet werden. Die Leistungsgruppen mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten lösen schon im Vortest im Mittel knapp 90 % der Aufgaben korrekt und können entsprechend kaum Zuwachs in der Korrektheit verzeichnen. Den deutlichsten Zuwachs weisen die beiden Leistungsgruppen mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten auf, die im Posttest im explizierenden Ansatz 19 % mehr korrekte Lösungen und im problemlöseorientierten Ansatz 13 % mehr korrekte Lösungen erzielen.

7.2.2.2 Strategierepertoire während des Unterrichts in der Intervention (Post für den Tiger)

Die Ergebnisse in Kapitel 7.2.2.1 weisen darauf hin, dass alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes im Interventionszeitraum (T1–T2) profitieren und deskriptiv einen höheren *Zuwachs im Strategierepertoire* insgesamt und in der *Anzahl verwendeter Verkürzungsstrategien* verzeichnen als die entsprechenden Referenzgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes.

Die nachfolgenden Analysen zu den prozessbezogenen Daten sollen die oben dargestellten Ergebnisse ergänzen, da sie einen Einblick in die Strategieentwicklung während des Unterrichts der Intervention geben. Dabei werden zum einen der Vergleich zwischen den beiden Experimentalgruppen und zusätzlich auch experimentalgruppenspezifische Unterschiede in den einzelnen Leistungsgruppen in den Blick genommen.

Entwicklungen in den Experimentalgruppen

Um die Entwicklung der Additions- und Subtraktionsstrategien zwischen T1 und T2 zu betrachten, wird die *Post für den Tiger* (Kap. 6.3.2) aus der Intervention herangezogen. Auf diese Weise kann überprüft werden, inwiefern sich in der Interventionswoche zwischen den beiden Experimentalgruppen Unterschiede in der Strategieverwendung und -entwicklung zeigen (Fragestellung 1a, Hypothesen 4 und 5). Dabei werden die Additions- und Subtraktionsaufgaben separat dargestellt. Wie bei der Analyse der Strategietests werden Chi-Quadrat-Homogenitätstests zur Überprüfung von Gruppenunterschieden in der Strategieverteilung verwendet.

Tabelle 34 stellt die Verteilung der Additionsstrategien in den beiden Experimentalgruppen während der Interventionstage 2–4 dar.

Tabelle 34: Verwendete Additionsstrategien während der Intervention (Post für den Tiger)

Additionsstrategien (Häufigkeiten, in Klammern davon korrekt)						
	Tag 2 158 + 299		**Tag 3** 203 + 169		**Tag 4** 278 + 99	
	EA	**PA**	**EA**	**PA**	**EA**	**PA**
Schriftliche Normalverfahren	2 (1)	2 (0)	2 (1)	2 (1)	1 (0)	1 (0)
Stellenweise[*2]	22 (12)	5 (4)	16 (10)	1 (1)	12 (5)	1 (0)
Schrittweise stellengerecht[*2]	11 (6)	4 (2)	9 (3)	5 (5)	3 (1)	6 (3)
Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht	2 (2)	8 (3)	5 (3)	11 (9)	3 (3)	7 (4)
Hilfsaufgabe[*3]	2 (2)	8 (8)	1 (0)	12 (11)	6 (6)	9 (9)
Abstandsberechnung[*3] (Fehlstrategie)	1 (0)	2 (0)	0 (0)	2 (0)	0 (0)	0 (0)
Gegensinniges Verändern[*3]	0 (0)	0 (0)	4 (3)	0 (0)	13 (12)	4 (4)
Kopfrechnen	1 (1)	2 (2)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	4 (3)
Mischformen	0 (0)	6 (4)	1 (0)	4 (4)	0 (0)	2 (2)
Nicht zuzuordnen	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	0 (0)
Gesamt	41 (24)	38 (23)	40 (21)	38 (32)	41 (28)	34 (25)
χ^2	$\chi^2(8, N = 79) = 28.77$		$\chi^2(9, N = 78) = 34.71$		$\chi^2(8, N = 75) = 22.62$	
Cramers V	.60		.67		.55	
p	< .001		< .001		.004	

[*2/*3] im explizierenden Ansatz eingeführte Strategien an Tag 2 bzw. Tag 3 (vgl. Tabelle 8, S. 114)

Wie anhand der Häufigkeiten in der Tabelle zu erkennen ist, unterscheiden sich die beiden Experimentalgruppen am zweiten Tag der Intervention insbesondere in der Verwendung der beiden Universalstrategien, die an diesem Tag im explizierenden Ansatz thematisiert wurden. Während 80 % der Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz die Aufgabe 158 + 299 mit den Strategien *Stellen-* oder *Schrittweise* gemäß der erlernten Notation bearbeiteten, wird im problemlöseorientierten Ansatz eine Vielzahl unterschiedlicher Strategien eingesetzt. Bemerkenswert ist, dass einige wenige Schülerinnen und Schüler in beiden Experimentalgruppen die *Abstandsberechnung* bei der Additionsaufgabe anwenden, was auf fehlendes konzeptuelles Verständnis zu dieser Strategie hindeutet. Am dritten Tag der Intervention, an welchem die *Verkürzungsstrategien Hilfsaufgabe* und *Verändern* im explizierenden Ansatz behandelt wurden, zeigt sich in der Verwendung dieser Strategien nur ein geringfügiger Unterschied zwischen den beiden Instruktionsansätzen zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes, in welchem diese Strategien bereits an Tag 2 häufiger verwendet werden. Insgesamt unterscheidet sich die Verteilung der Strategien in den beiden Experimentalgruppen jedoch signifikant voneinander. Dieser Unterschied kann insbesondere auf die unterschiedliche Verteilung der Strategien *Stellenweise* (40 % im explizierenden Ansatz, 3 % im problemlöseorientierten Ansatz), *Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht* (13 % im explizierenden Ansatz, 29 % im problemlöseorientierten Ansatz) und *Hilfsaufgabe* (3 % im explizierenden Ansatz, 32 % im problemlöseorientierten Ansatz) in den beiden Instruktionsansätzen zurückgeführt werden. Am vierten Tag der Intervention, an welchem die Strategien im explizierenden Ansatz wiederholt und deren adaptiver Einsatz thematisiert wurde, unterscheiden sich die beiden Gruppen vor allem in der Verwendung der Strategien *Schrittweise stellengerecht* (29 % im explizierenden Ansatz, 3 % im problemlöseorientierten Ansatz) und *Gegensinniges Verändern*, welche von einem großen Teil der Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes (32 %), jedoch von nur wenigen Schülerinnen und Schülern des problemlöseorientierten Ansatzes (12 %) eingesetzt werden.

Der Kontingenzkoeffizient *Cramers V* deutet darauf hin, dass zwischen dem Strategieeinsatz und der Experimentalgruppe ein starker Zusammenhang besteht. Gleichzeitig nimmt dieser Zusammenhang im Verlauf der Intervention ab. Dass sich die Experimentalgruppen bereits im Prätest in der Verteilung der Strategien unterscheiden, wurde bereits berichtet (vgl. Tabelle 30, S. 161). Allerdings zeigten sich die Unterschiede dort deskriptiv allein in den Kategorien *Hilfsaufgabe* und *Nicht zuzuordnen*.

Wird die Entwicklung der Strategieverwendung während des Unterrichts in der Intervention anhand der Additionsaufgaben in der *Post für den Tiger* und für beide Experimentalgruppen separat betrachtet, so besteht zwischen den drei Interventionstagen im explizierenden Ansatz ein signifikanter Unterschied im Strategieeinsatz ($\chi^2(18, N = 122) = 35.48$, $p = .008$, *Cramers* $V = .38$). Für den problemlöseorientierten Ansatz hingegen zeigt sich zwischen den drei Interventionstagen kein signifikanter Unterschied in der Strategieverwendung ($\chi^2(18, N = 110) = 23.37$, $p = .177$, *Cramers* $V = .33$). Dies weist darauf hin, dass sich die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz in ihrer Strategienutzung deutlich an den am jeweiligen Tag thematisierten Strategien orientieren.

Für den Einsatz von Additionsstrategien können die Hypothesen 4a und 5a bestätigt werden, da der Anteil von *Verkürzungsstrategien* an den insgesamt verwendeten Strategien im explizierenden Ansatz erst nach deren Einführung am dritten Interventionstag steigt

(Tag 2: 10 %, Tag 3: 15 %, Tag 4: 49 %), während im problemlöseorientierten Ansatz bereits am zweiten Tag (32 %) ein hoher Anteil an *Verkürzungsstrategien* verwendetet wird und dieser Anteil in den Folgetagen (Tag 3: 39 %, Tag 4: 47 %) kontinuierlich ansteigt.

Tabelle 35 stellt die Verteilung der Subtraktionsstrategien in den beiden Experimentalgruppen während des zweiten bis vierten Interventionstages dar.

Tabelle 35: Verwendete Subtraktionsstrategien während der Intervention (Post für den Tiger)

	Tag 2 104 – 98		**Tag 3 157 – 149**		**Tag 4 204 – 197**	
	EA	**PA**	**EA**	**PA**	**EA**	**PA**
Schriftliche Normalverfahren	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)
Stellenweise*2	12 (1)	1 (0)	6 (1)	1 (1)	5 (0)	0 (0)
Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht	0 (0)	0 (0)	3 (2)	10 (8)	3 (3)	8 (7)
Schrittweise stellengerecht*2	14 (11)	12 (12)	9 (4)	4 (4)	3 (2)	3 (3)
Hilfsaufgabe*3	1 (1)	7 (7)	2 (0)	6 (3)	6 (5)	6 (6)
Ergänzen*3	4 (3)	1 (0)	4 (4)	1 (1)	10 (9)	2 (2)
Indirekte Subtraktion	1 (1)	1 (1)	0 (0)	3 (2)	0 (0)	3 (3)
Abstandsberechnung ohne Angabe der Rechenrichtung	0 (0)	3 (2)	2 (2)	4 (3)	5 (3)	5 (4)
Gleichsinniges Verändern*3	0 (0)	0 (0)	4 (3)	0 (0)	3 (1)	0 (0)
Kopfrechnen	6 (3)	5 (5)	2 (0)	1 (0)	2 (0)	2 (1)
Mischformen	1 (1)	5 (3)	1 (1)	3 (3)	1 (1)	3 (2)
Nicht zuzuordnen	2 (0)	2 (1)	3 (0)	4 (2)	2 (1)	1 (1)
Gesamt	41 (21)	38 (31)	37 (17)	38 (27)	40 (25)	33 (29)
χ^2	$\chi^2(7, N = 79) = 17.63$		$\chi^2(9, N = 75) = 17.02$		$\chi^2(8, N = 73) = 12.05$	
Cramers V	.47		.48		.41	
p	.014		.048		.149	

*2/*3 im explizierenden Ansatz eingeführte Strategien an Tag 2 bzw. Tag 3 (vgl. Tabelle 8, S. 114)

In der Verwendung der Subtraktionsstrategien zeigt sich am zweiten Tag der Intervention ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Experimentalgruppen. Während im explizierenden Ansatz die Strategien *Stellenweise* (29 %) und *Ergänzen* (10 %) häufiger als im problemlöseorientierten Ansatz verwendet werden (jeweils 3 %), kommen im letztgenannten Unterrichtsansatz die Strategien *Hilfsaufgabe* (18 %)*, Abstandsberechnung* (8 %) sowie *Mischformen* (13 %) häufiger als im explizierenden Ansatz (2 %, 0 % und 2 %) zum Einsatz. Am dritten Tag der Intervention lässt sich zusätzlich zu den bereits für den zweiten Interventionstag beschriebenen Unterschieden die häufigere Verwendung der Strategie *Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht* im problemlöseorientierten Ansatz (26 % vs. 8 % im explizierenden Ansatz) sowie der nur im explizierenden Ansatz verwendeten Strategie *Gleichsinniges Verändern* (11 % vs. 0 % im problemlöseorientierten Ansatz), die dort an diesem Tag thematisiert wurde, feststellen. Am vierten Interventionstag unterscheiden sich die Experimentalgruppen nicht mehr signifikant in der Verwendung der Subtraktionsstrategien. Es zeigt sich jedoch ein Experimentalgruppenunterschied in der *Abstandsberechnung*. Während die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz, wie am dritten Interventionstag eingeführt, häufiger vom Subtrahenden zum Minuenden ergänzen (25 % der Lösungen im explizierenden Ansatz, 6 % der Lösungen im problemlöseorientierten Ansatz), subtrahieren die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz häufiger vom Minuenden zum Subtrahenden oder geben bei der *Abstandsberechnung* keine Rechenrichtung an (13 % der Lösungen im explizierenden Ansatz, 24 % der Lösungen im problemlöseorientierten Ansatz).

Wie der Kontingenzkoeffizient *Cramers V* zeigt, besteht zwischen dem Strategieeinsatz und der Experimentalgruppe ein starker Zusammenhang. Im Gegensatz zur Strategieverwendung in den Additionsaufgaben ist dieser Zusammenhang etwas geringer ausgeprägt und nimmt an Tag 4 (nach der Einführung aller Strategien im explizierenden Ansatz) leicht ab.

Wird die Entwicklung der Strategieverwendung in den Subtraktionsaufgaben der *Post für den Tiger* für beide Experimentalgruppen separat betrachtet, so besteht für den explizierenden Ansatz – wie bereits in der Verwendung der Additionsstrategien – ein signifikanter Unterschied in der Verteilung der Strategien zwischen den drei Interventionstagen ($\chi^2(18, N = 118) = 33.85$, $p = .013$, *Cramers* $V = .38$). Für den problemlöseorientierten Ansatz hingegen zeigt sich im Strategiegebrauch ein geringerer und nur auf dem 10 %-Niveau signifikanter Unterschied in der Verteilung der Strategien zwischen den drei Interventionstagen ($\chi^2(16, N = 109) = 25.90$, $p = .055$, *Cramers* $V = .35$). Der Anteil an *Verkürzungsstrategien* (*Hilfsaufgabe*, unterschiedliche Substrategien der *Abstandsberechnung*, *Gleichsinniges Verändern* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis*) steigt im explizierenden Ansatz nach deren Einführung am dritten Interventionstag deutlich an (Tag 2: 22 %, Tag 3: 32 %, Tag 4: 60 %). Hypothese 4b, nach der im explizierenden Ansatz ein Anstieg in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* nach deren Einführung erwartet wurde, kann folglich angenommen werden.

Im problemlöseorientierten Ansatz ist der Anteil an *Verkürzungsstrategien* an den insgesamt genutzten Strategien bereits an Tag 2 höher als in der Referenzgruppe ausgeprägt (45 %), sinkt danach an Tag 3 zunächst ab (37 %) bevor der Anteil an Tag 4 noch einmal ansteigt (52 %). Da der Anteil an *Verkürzungsstrategien* nicht wie in Hypothese 5b postuliert kontinuierlich ansteigt, muss diese verworfen werden.

Die Korrektheit der Strategien wird an dieser Stelle nicht weiter beschrieben, da im folgenden Abschnitt unter Berücksichtigung des mathematischen Vorwissens detaillierter dargestellt wird, inwiefern die Strategien in der *Post für den Tiger* auch zielführend eingesetzt wurden.

Entwicklungen in den Leistungsgruppen

Um qualitative Veränderungen in der Strategieverwendung im unmittelbaren Interventionszeitraum abbilden zu können (Hypothesen 6 und 7), wird im Folgenden die Strategieverwendung im Aufgabenformat *Post für den Tiger* (Tabelle 36 und Tabelle 37) nach den drei Leistungsgruppen und aus Übersichtsgründen für jede Experimentalgruppe getrennt dargestellt.

Als Verkürzungsstrategien werden die grau hinterlegten Strategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis* betrachtet (vgl. Kap. 6.3.1.1). Die Angaben in Klammern geben Auskunft über die Anzahl der Strategien mit korrektem Ergebnis.

Tabelle 36: Strategieverwendung im explizierenden Ansatz während der Intervention (Addition und Subtraktion)

Häufigkeiten der verwendeten Strategien in den Leistungsgruppen (in Klammern davon korrekt)									
	PR < 50 (*n* = 19)			50 ≤ PR ≤ 75 (*n* = 11)			PR > 75 (*n* = 11)		
	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 2	Tag 3	Tag 4
Schriftliche Normalverfahren	1 (0)	2 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)	0 (0)
Stellenweise*2	19 (4)	13 (6)	11 (3)	11 (5)	7 (4)	6 (2)	4 (4)	2 (1)	0 (0)
Schrittweise*2	11 (8)	9 (4)	7 (6)	8 (4)	6 (2)	2 (1)	8 (7)	9 (6)	3 (2)
Hilfsaufgabe*3	2 (2)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	1 (0)	1 (1)	1 (1)	2 (0)	8 (7)
Abstandsberechnung *3	1 (1)	1(1)	4 (3)	0 (0)	3 (3)	6 (5)	5 (3)	2 (2)	5 (4)
Verändern*3	0 (0)	1(1)	5 (3)	0 (0)	2 (1)	5 (4)	0 (0)	5 (4)	6 (6)
Kopfrechnen	2 (0)	4 (1)	2 (1)	3 (2)	1 (0)	1 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)
Mischstrategien	0 (0)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)	0 (0)
Nicht zuzuordnen	2 (0)	4 (0)	3 (1)	0 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Gesamt	38 (15)	34 (13)	37 (21)	22 (11)	21 (10)	22 (13)	22 (19)	22 (15)	22 (19)

*2/*3 im explizierenden Ansatz eingeführte Strategien an Tag 2 bzw. Tag 3 (vgl. Tabelle 8, S. 114)

Tabelle 36 veranschaulicht die Strategieverwendung in den verschiedenen Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes während der Interventionswoche. Es wird deutlich, dass die Verwendung der Universalstrategien *Stellen-* und *Schrittweise* während der Intervention rückläufig ist. Dieser Rückgang ist in allen drei Leistungsgruppen zu beobachten, zeigt sich jedoch besonders bei den Schülerinnen und Schülern mit geringeren mathematischen Fähigkeiten (PR < 50), die am zweiten Tag noch vorwiegend die Universalstrategien einsetzen.

Die Leistungsgruppe mit geringeren mathematischen Fähigkeiten (PR < 50) verzeichnet – gegenteilig zu den dargestellten Ergebnissen für den Zeitraum T1 bis T2 (vgl. Tabelle 33, S. 166) – während der Interventionswoche einen Zuwachs in der Korrektheit der

Additions- und Subtraktionsstrategien (Tag 2: 39 %, Tag 3: 38 %, Tag 4: 57 %), während die Gruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten an Tag 4 einen leichten Zuwachs in der Korrektheit zeigt (Tag 2: 50 %, Tag 3: 48 %, Tag 4: 59 %) und die Leistungsgruppe mit überdurchschnittlichen Leistungen bereits zu Beginn der Intervention eine sehr hohe Lösungsquote aufweist (Tag 2: 86 %, Tag 3: 60 %, Tag 4: 86 %). Auffällig ist beim Vergleich der Lösungsquoten, dass die Korrektheit in allen drei Leistungsgruppen an Tag 3 im Vergleich zu Tag 2 zunächst leicht bzw. in der Leistungsgruppe mit überdurchschnittlichen Leistungen sogar deutlich absinkt bevor sie an Tag 4 ansteigt. Eine mögliche Ursache hierfür könnte die Einführung der *Verkürzungsstrategien* an Tag 3 sein, die am selben Tag von den Schülerinnen und Schülern verwendet werden, aber gleichzeitig größtenteils nicht zu korrekten Ergebnis führen.

In allen Leistungsgruppen werden während der Intervention die vier *Verkürzungsstrategien* genutzt. Der Anteil an *Verkürzungsstrategien* steigt dabei sowohl in der Leistungsgruppe mit geringen mathematischen Fähigkeiten (Tag 2: 8 %, Tag 3: 9 %, Tag 4: 35 %) als auch in der Gruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten (Tag 2: 9 %, Tag 3: 29 %, Tag 4: 55 %) sowie in der Gruppe mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten (Tag 2: 36 %, Tag 3: 41 %, Tag 4: 86 %) im Verlauf der Intervention stark an. Dabei zeichnet sich die Tendenz ab, dass *Verkürzungsstrategien* in Abhängigkeit vom Niveau der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten von einer größeren Schüleranzahl bereits vor deren Einführung (Tag 2 in Gruppe $PR > 75$ %), am Tag der Einführung (Tag 3 in Gruppe $50 \leq PR \leq 75$) oder ein Tag nach der Einführung (Tag 4 in Gruppe $PR < 50$) eingesetzt werden. Dies bedeutet, je geringer die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto länger dauert es, bis die im explizierenden Ansatz eingeführten Strategien erstmals von den Schülerinnen und Schülern spontan in der Aufgabenbearbeitung genutzt werden.

Tabelle 37: Strategieverwendung im problemlöseorientierten Ansatz während der Intervention (Addition und Subtraktion)

Häufigkeiten der verwendeten Strategien in den Leistungsgruppen (in Klammern davon korrekt)									
	PR < 50 (n = 11)			50 ≤ PR ≤ 75 (n = 10)			PR > 75 (n = 17)		
	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 2	Tag 3	Tag 4
Schriftliche Normalverfahren	2 (0)	1 (1)	1 (0)	1 (0)	2 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Stellenweise*2	1 (1)	1 (1)	1 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	3 (1)	1 (1)	0 (0)
Schrittweise*2	8 (4)	10 (8)	8 (5)	7 (5)	7 (7)	6 (5)	9 (8)	13 (11)	7 (5)
Hilfsaufgabe*3	0 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	3 (3)	4 (4)	15 (15)	13 (9)	12 (12)
Abstandsberechnung*3	2 (0)	3 (0)	2 (2)	4 (2)	2 (2)	8 (8)	1 (1)	5 (4)	3 (3)
Verändern*3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	3 (3)
Kopfrechnen	2 (2)	2 (1)	4 (2)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	4 (4)	0 (0)	2 (2)
Mischstrategien	5 (2)	1 (1)	3 (2)	4 (4)	5 (5)	3 (3)	2 (1)	1 (1)	0 (0)
Nicht zuzuordnen	2 (1)	2 (2)	1 (1)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)
Gesamt	22 (10)	22 (16)	20 (12)	20 (14)	20 (17)	22 (21)	34 (30)	34 (26)	31 (28)

*2/*3 im explizierenden Ansatz eingeführte Strategien an Tag 2 bzw. Tag 3 (vgl. Tabelle 8, S. 114)

In der problemlöseorientierten Interventionsgruppe ist in Tabelle 37 im Vergleich zur explizierenden Interventionsgruppe eine weniger systematische Entwicklung während der Intervention zu erkennen.

Wie bereits in Tabelle 34 (S. 167) und Tabelle 35 (S. 169) dargestellt wurde, wird in allen drei Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes innerhalb der Universalstrategien vorwiegend auf das *schrittweise-* statt auf das *stellenweise Verfahren* zurückgegriffen. Darüber hinaus ist eine Tendenz erkennbar, dass die Vielfalt der Strategien in den oberen beiden Leistungsgruppen im Verlauf der Intervention stärker reduziert wird, sodass am letzten Tag der Intervention in diesen Gruppen überwiegend *Schrittweise* und die *Verkürzungsstrategien* eingesetzt werden.

Die Gruppe der Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten zeigt in den drei Tagen wenig Variation in den eingesetzten Strategien. Allerdings nutzen die Schülerinnen und Schüler dieser Leistungsgruppe während der Intervention deutlich seltener die Universalstrategien *Schritt-* und *Stellenweise* (Tag 2: 41 %, Tag 3: 50 %, Tag 4: 45 %) als die Referenzgruppe des explizierenden Unterrichtsansatzes (Tag 2: 79 %, Tag 3: 65 %, Tag 4: 49 %). Die *Verkürzungsstrategien* werden in der Leistungsgruppe an Tag 2 in 18 %, an Tag 3 in 27 % und an Tag 4 in 20 % der Lösungen eingesetzt.

Auffällig ist des Weiteren, dass die schriftlichen Normalverfahren nur von Schülerinnen und Schülern mit einem DEMAT-Prozentrang ≤ 75 zur Lösung von Subtraktionsaufgaben eingesetzt werden.

Im Gegensatz zu den in Tabelle 33 (S. 166) dargestellten Ergebnissen ist eine deutliche Zunahme in der Korrektheit der Lösungen erkennbar (Tag 2: 45 %, Tag 3: 73 %, Tag 4: 60 %).

Schülerinnen und Schüler mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten nutzen an Tag 4 mehr *Verkürzungsstrategien* als an den Vortagen (Tag 2: 25 %, Tag 3: 25 %, Tag 4: 55 %) und lösen die Aufgaben im Verlauf der Intervention insgesamt korrekter (Tag 2: 70 %, Tag 3: 85 %, Tag 4: 95 %).

In der Gruppe der Schülerinnen und Schüler mit überdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten werden *Verkürzungsstrategien*, insbesondere die *Hilfsaufgabe*, bereits an Tag 2 häufig eingesetzt. Wie bereits in Tabelle 30 (S. 161) dargestellt, wurde die Strategie *Hilfsaufgabe* von einigen Schülerinnen und Schülern auch bereits vor der Intervention im Prätest (T1) verwendet. Der Anteil an *Verkürzungsstrategien* wird an Tag 4 in dieser Leistungsgruppe noch leicht gesteigert (Tag 2: 59 %, Tag 3: 53 %, Tag 4: 65 %).

Die Veränderungsstrategie wird hingegen nur in den oberen beiden Leistungsgruppen und dort erst am vierten Tag der Intervention eingesetzt (einmal von einem Schüler in der Gruppe $50 \leq PR \leq 75$ und dreimal von zwei Schülerinnen in der Gruppe $PR > 75$ %). Der Anteil korrekter Strategien ist bereits am zweiten Interventionstag mit 88 % vergleichsweise hoch, sinkt an Tag 3 leicht auf 76 % ab und steigt dann an Tag auf 90 %. Die leichte Abnahme in der Korrektheit an Tag 3 hatte sich bereits in den Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes gezeigt (vgl. Tabelle 36, S. 171). Da der Rückgang in der Korrektheit an Tag 3 auch im problemlöseorientierten Ansatz mit einem Anstieg in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* einhergeht, liegen hier Hinweise auf ein Nutzungsdefizit der neu erworbenen Strategien vor (vgl. Diskussion in Kap. 8.3.1).

Obgleich sich in den Analysen zum *Strategierepertoire* zu T2 keine Unterschiede zwischen den Experimentalgruppen zeigen, deuten die Analysen zu den prozessbezogenen Daten darauf hin, dass der Strategieerwerb in den beiden Experimentalgruppen unterschiedlich verläuft. Im nachfolgenden Kapitel wird untersucht, ob sich diese experimentalgruppenspezifischen Unterschiede in der Strategieentwicklung zwischen T1 und T2 durch parametrische Verfahren nachweisen lassen. Dabei können auch Unterschiede in den Ausgangsbedingungen der beiden Experimentalgruppen kontrolliert werden.

7.2.2.3 Strategieflexibilität und Verwendung von Verkürzungsstrategien (T1–T2)

Anhand der Prüfstatistiken in Tabelle 26 (S. 154) und Tabelle 27 (S. 154) wurde bereits deutlich, dass sich die Experimentalgruppen zu den beiden Messzeitpunkten T1 und T2 einerseits nicht signifikant in der *Strategieflexibilität* und dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* unterscheiden. Andererseits zeichnet sich aber für beide abhängigen Variablen eine unterschiedliche Entwicklung der beiden Experimentalgruppen im Interventionszeitraum zugunsten der explizierenden Lerngruppe ab. Um diesen Experimentalgruppenunterschied in der Entwicklung für beide abhängigen Variablen auf Signifikanz zu prüfen und damit die Hypothesen 1a und 1b zu beantworten, werden im Folgenden lineare gemischte

Modelle für die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* im Interventionszeitraum berechnet. Dabei wurden die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Prädiktoren in die Modelle aufgenommen, um Einflüsse auf die *Strategieflexibilität* (Hypothesen 8a, 8c und 8e) sowie das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothesen 9a, 9c und 9e) im Interventionszeitraum zu prüfen.

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme der Kovariate DEMAT 2^+ (und für das Modell zum *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zusätzlich DEMAT 2^+*Zeit) im Vergleich zum jeweiligen Nullmodell zu einer deutlichen Verbesserung beider Modellfits beiträgt (*Strategieflexibilität*: $\Delta\chi^2 = 69.27$, $\Delta df = 1$, $p < .001$; *Repertoire an Verkürzungsstrategien* $\Delta\chi^2 = 59.92$, $\Delta df = 2$, $p < .001$).

Wie die Ergebnisse des linearen gemischten Modells für die *Strategieflexibilität* in Tabelle 38 zeigen, beeinflussen sowohl die Zeit als auch die allgemeinen mathematischen Leistungen signifikant positiv die *Strategieflexibilität*. Da sich die Analyse auf den Interventionszeitraum mit zwei Messzeitpunkten beschränkt, bedeutet dies für den Faktor Zeit, dass im Posttest (T2) im Mittel höhere Werte als im Prätest (T1) erreicht werden ($\beta = .19$, $p < .001$). Höhere allgemeine mathematische Leistungen gehen mit höheren Ausprägungen in der *Strategieflexibilität* einher ($\beta = .25$, $p < .001$).

Die Experimentalgruppenzugehörigkeit besitzt weder auf die durchschnittliche *Strategieflexibilität* ($\beta = .10$, $p > .10$) noch auf die *Entwicklung* der *Strategieflexibilität* einen signifikanten Einfluss ($\beta = .21$, $p > .10$).

Da sich die beide Experimentalgruppen nicht signifikant in der *Entwicklung der Strategieflexibilität* unterscheiden, muss Hypothese 1a, nach welcher Vorteile für den explizierenden Ansatz im Interventionszeitraum postuliert wurden, abgelehnt werden. Da sich die allgemeinen mathematischen Leistungen nicht signifikant auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* auswirken und daher bereits vor der Analyse aus dem Modell entfernt wurden, muss auch die Hypothese 8a verworfen werden. Für die kognitiven Grundfähigkeiten (Hypothese 8c) und das Arbeitsgedächtnis (Hypothese 8e) wurde kein Einfluss der beiden Prädiktoren auf die *Fähigkeitsentwicklung* angenommen. Diese Interaktionsterme wurden ebenfalls vorab aus dem Modell entfernt, da sich keine signifikanten Einflüsse zeigten, sodass die Hypothesen 8c und 8e angenommen werden können.

Tabelle 38: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Strategieflexibilität T1 bis T2

Parameter	Strategieflexibilität		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	.01	.10	.885
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	.19	.09	.047
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.25	.07	.001
Instruktionsansatz[a]	.10	.14	.464
Instruktionsansatz[a]*Zeit	.21	.13	.105

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zeigt sich in Tabelle 39 – wie bereits für die *Strategieflexibilität* – ein signifikanter Einfluss der Zeit, d. h. zu T2 verwenden die Schülerinnen und Schüler im Mittel mehr *Verkürzungsstrategien* als zu T1 ($\beta = .42$, $p < .001$). Ebenso wirken sich die mathematischen Fähigkeiten positiv auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategie*n auf ($\beta = .23$, $p < .001$). Die Zugehörigkeit zu einer der beiden Experimentalgruppen wirkt sich über beide Messzeitpunkte hinweg nicht signifikant unterschiedlich aus ($\beta = .14$, $p > .10$).

Betrachtet man den *Entwicklungsverlauf* des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* im Interventionszeitraum, so zeigt sich ein tendenziell günstigere *Lernentwicklung* für die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Unterrichtsansatz ($\beta = .21$, $p < .10$). Dies bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler des explizierenden Unterrichtsansatzes im Interventionszeitraum einen höheren *Zuwachs* an unterschiedlichen *Verkürzungsstrategien* aufweisen.

Die Höhe des Einflusses der Experimentalgruppenzugehörigkeit auf die *Fähigkeitsentwicklung* ist mit dem Einfluss der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten vergleichbar ($\beta = .22$, $p < .001$).

Hypothese 1b, nach der im Interventionszeitraum T1 bis T2 eine signifikant unterschiedliche *Entwicklung im Repertoire an Verkürzungsstrategien* zugunsten des explizierenden Instruktionsansatzes erwartet wurde, kann demnach angenommen werden. Die allgemeinen mathematischen Leistungen wirken sich signifikant auf den *Zuwachs im Repertoire an Verkürzungsstrategien* aus, sodass auch Hypothese 9a angenommen werden kann. Für die kognitiven Grundfähigkeiten (Hypothese 9c) und das Arbeitsgedächtnis (Hypothese 9e) wurde kein Einfluss auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* angenommen. Diese Interaktionsterme wurden vorab aus dem Modell entfernt, da sich keine signifikanten Einflüsse zeigten, sodass die beiden Hypothesen angenommen werden können.

Tabelle 39: Gepoolte Schätzung fester Parameter für das Repertoire an Verkürzungsstrategien T1 bis T2

Parameter	Repertoire an Verkürzungsstrategien		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.10	.09	.277
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	.42	.09	.000
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.23	.07	.001
Instruktionsansatz[a]	.14	.13	.277
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)*Zeit	.22	.06	.000
Instruktionsansatz[a]*Zeit	.21	.12	.075

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Entwicklung der *Strategieflexibilität* im Zeitraum nach der Intervention.

7.2.3 Entwicklung der Strategieflexibilität nach der Intervention (T2–T4)

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur Strategieentwicklung und zu Einflüssen auf die *Strategieflexibilität* sowie auf die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* in den Strategietests für den Zeitraum nach der Intervention (T2 bis T4) berichtet.

7.2.3.1 Strategierepertoire (T3–T4)

In Tabelle 40 ist die Strategieverwendung in den beiden Interventionsgruppen drei Monate (T3) und acht Monate (T4) nach der Intervention dargestellt. Als Verkürzungsstrategien werden die grau hinterlegten Strategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis* betrachtet (vgl. Kap. 6.3.1.1). Die Angaben in Klammern geben Auskunft über die Anzahl der Strategien mit korrektem Ergebnis.

Tabelle 40: Strategieverwendung nach der Intervention T3 bis T4

Häufigkeiten der verwendeten Strategien pro Messzeitpunkt und Experimentalgruppe (in Klammern davon korrekt)				
	T3		T4	
	Gruppe		Gruppe	
	EA	PA	EA	PA
Schriftliche Normalverfahren	20 (10)	14 (12)	120 (87)	111 (88)
Stellenweise stellengerecht* + verkürzt	41 (32)	14 (7)	30 (25)	13 (12)
Stellenweise Subtraktion	19 (1)	4 (0)	14 (2)	3 (0)
Schrittweise stellengerecht*	51 (27)	32 (21)	3 (2)	11 (8)
Schrittweise verkürzt/nicht stellengerecht	30 (22)	76 (55)	10 (6)	21 (18)
Hilfsaufgabe*	35 (30)	73 (55)	23 (22)	84 (66)
Abstandsberechnung*	20 (19)	30 (29)	9 (9)	14 (14)
Verändern*	23 (20)	17 (16)	29 (25)	24 (17)
Kopfrechnen	30 (14)	10 (7)	26 (16)	11 (6)
Mischformen	19 (6)	11 (7)	19 (9)	6 (2)
Nicht zuzuordnen	7 (4)	3 (0)	3 (1)	1 (1)
Gesamt	295 (185)	284 (209)	286 (204)	299 (232)
χ^2	$\chi^2(10, N = 579) = 78.23$		$\chi^2(10, N = 585) = 72.59$	
Cramers V	.37		.35	
p	< .001		< .001	

* im explizierenden Ansatz behandelte Strategien (vgl. Tabelle 8, S. 114)

Wie die Häufigkeiten in Tabelle 40 zeigen, geht die Einführung der Normalverfahren zwischen T3 und T4 mit Veränderungen in der Strategienutzung einher. Die Universalstrategien *Stellenweise* und *Schrittweise*, die zu T3 inklusive der verkürzten Notationsformen 42 % aller Strategien ausmachen, werden zu T4 nur noch in 15 % aller Lösungen beider Gruppen eingesetzt. Wie bereits in den Strategietests zu T1 und T2 sowie in der *Post für den Tiger* während der Intervention (vgl. Kap. 7.2.2.1 und Kap. 7.2.2.2), wird im explizierenden Ansatz zu T3 (20 %) und T4 (15 %) häufiger *stellenweise* gerechnet (problemlöseorientierter Ansatz: 10 % zu T3, 5 % zu T4), während im problemlöseorientierten Ansatz häufiger *schrittweise* gerechnet wird (explizierender Ansatz: 27 % zu T3, 5 % zu T4; problemlöseorientierter Ansatz: 38 % zu T3, 11 % zu T4).

Diese Universalstrategien werden zu T4 in beiden Experimentalgruppen weitgehend von den schriftlichen Normalverfahren abgelöst, die im explizierenden Ansatz in 42 % aller Lösungswege und im problemlöseorientierten Ansatz in 37 % der Lösungswege eingesetzt werden. Weitere Analysen zeigen jedoch, dass zu T4 nur ein kleiner Anteil der Schülerinnen und Schüler die Normalverfahren als Universalstrategie, d. h. zur Lösung aller Strategietestaufgaben nutzt ($N = 9$ im explizierenden Ansatz und $N = 10$ im problemlöseorientierten Ansatz). Hypothese 3 muss folglich verworfen werden, da die schriftlichen

Normalverfahren in den Schülerlösungen zwar dominieren, jedoch zugleich nur von wenigen Schülerinnen und Schülern als Universalstrategien genutzt werden.

Ein deutlicher Gruppenunterschied besteht in der Verwendung der Verkürzungsstrategien *Hilfsaufgabe*, *Verändern*, *Abstandsberechnung* und *Kopfrechnen mit richtigem Ergebnis*.

Diese Strategien werden zu T3 im explizierenden Ansatz in 31 % der Schülerlösungen und im problemlöseorientierten Ansatz in 45 % der Schülerlösungen eingesetzt. Zu T4 beträgt der Anteil an *Verkürzungsstrategien* im explizierenden Ansatz 27 % und im problemlöseorientierten Ansatz 43 %. Insgesamt besteht dadurch zu beiden Messzeitpunkten in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* ein Vorteil zugunsten der problemlöseorientierten Gruppe. Während der Einsatz dieser Strategien in der explizierenden Lerngruppe zwischen T3 und T4 deutlich sinkt, bleibt der Strategieeinsatz im problemlöseorientierten Ansatz nahezu konstant. Ob dieser deskriptive Experimentalgruppenunterschied in der Entwicklung zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes im Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) signifikant wird (Hypothese 2b), wird in Kapitel 7.2.3.2 mit einem linearen gemischten Modell geprüft.

Zwischen T3 und T4 steigt der Anteil korrekter Lösungen im explizierenden Ansatz von 63 % auf 71 % und im problemlöseorientierten Ansatz von 74 % auf 76 %.

Die oben beschriebenen Unterschiede in der Strategieverwendung werden auch durch die Ergebnisse der Chi-Quadrat-Homogenitätstests zu T3 und T4 gestützt. Dort zeigt sich, dass sich die Verteilung der Strategien zwischen den Gruppen unterscheidet, wobei der Unterschied drei Monate nach der Intervention (T3) etwas stärker ist ($\chi^2(10, N = 579) = 78.23$, $p = < .001$) als acht Monate nach der Intervention (T4) ($\chi^2(10, N = 585) = 72.59$, $p = < .001$).

7.2.3.2 Strategieflexibilität und Verwendung von Verkürzungsstrategien (T2–T4)

In den Prüfstatistiken in Tabelle 26 und Tabelle 27 (S. 154) zeigte sich bereits, dass sich die Experimentalgruppen zu den beiden Follow-up-Messzeitpunkten T3 und T4 nicht signifikant in der *Strategieflexibilität* und dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* unterscheiden. Allerdings weist die deskriptive Beschreibung des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* im Zeitraum T3 bis T4 (Kap. 7.2.3.1) für die Fähigkeitsentwicklung auf einen Vorteil zugunsten des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes hin. Während der Anteil an *Verkürzungsstrategien* an den insgesamt verwendeten Strategien zu T3 und T4 in der problemlöseorientierten Gruppe nahezu konstant bleibt, sinkt er im explizierenden Ansatz deutlich ab.

Im Folgenden werden zunächst lineare gemischte Modelle für die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* im Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) berechnet, um die Entwicklung für beide abhängigen Variablen und eventuelle Experimentalgruppenunterschiede auf Signifikanz zu prüfen und damit die Hypothesen 2a und 2b zu beantworten. Im darauffolgenden Abschnitt werden experimentalgruppenspezifische Entwicklungen in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme dargestellt.

Strategieentwicklung in den beiden Experimentalgruppen

In den in diesem Abschnitt geschilderten Analysen werden die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* als abhängige Variablen betrachtet. Mit linearen gemischten Modellen sollen die Einflüsse auf die *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* sowie auf die Entwicklung der beiden Variablen im Zeitraum nach der Intervention untersucht werden. Dabei werden die beiden abhängigen Variablen jeweils separat in einem linearen gemischten Modell betrachtet. Die Ergebnisse beider Modelle werden im Folgenden beschrieben.

Die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Prädiktoren wurden in beide lineare gemischte Modelle aufgenommen, um den Einfluss der individuellen Lernermerkmale auf die Entwicklung der *Strategieflexibilität* (Hypothesen 8b, 8d, 8f und 8g) und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 9b, 9d, 9f und 9g) im Zeitraum nach der Intervention zu prüfen. Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme der allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}), der Auffrischungsteilnahme und der Interaktion Auffrischungsteilnahme*Zeit als Kovariaten im Vergleich zum jeweiligen Nullmodell zu einer deutlichen Verbesserung beider Modellfits beiträgt (*Strategieflexibilität*: $\Delta\chi^2 = 109.23$, $\Delta df = 3$, $p < .001$; *Repertoire an Verkürzungsstrategien* $\Delta\chi^2 = 99.52$, $\Delta df = 3$ $p < .001$).

Wie die Ergebnisse des linearen gemischten Modells für die *Strategieflexibilität* in Tabelle 41 zeigen, wirken sich weder die Zeit ($\beta = -.10$, $p > .10$) noch die Experimentalgruppenzugehörigkeit ($\beta = -.03$, $p > .10$) noch die Auffrischungsteilnahme ($\beta = .11$, $p > .10$) signifikant auf die mittlere *Strategieflexibilität* im Zeitraum nach der Intervention aus. Die allgemeinen mathematischen Leistungen beeinflussen hingegen signifikant die *Strategieflexibilität*. Je höher die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto mehr verschiedene Strategien nutzen sie ($\beta = .34$, $p < .001$).

Im Zeitraum T2 bis T4 lässt sich für die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz eine signifikant bessere *Entwicklung der Strategieflexibilität* nachweisen als für die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz ($\beta = -.27$, $p < .05$). Das bis zum Ende der Intervention (T2) erworbene *Strategierepertoire* scheint folglich im problemlöseorientierten Ansatz nachhaltiger bestehen zu bleiben als im explizierenden Ansatz, sodass Hypothese 2a zurückgewiesen werden muss.

Da sich die allgemeinen mathematischen Leistungen im Zeitraum nach der Intervention nicht signifikant auf die *Entwicklung in der Strategieflexibilität* auswirken und daher bereits vor der Analyse aus dem Modell entfernt wurden, muss die Hypothese 8b verworfen werden. Die Hypothesen für den Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten (Hypothese 8d) bzw. des Arbeitsgedächtnisses (Hypothese 8f) auf die *Entwicklung der Strategiefle-*

xibilität können angenommen werden, da sich keine signifikanten Einflüsse der beiden Prädiktoren zeigen und die Interaktionsterme daher vorab aus dem Modell entfernt wurden.

Da sich die Teilnahme an der Auffrischungssitzung im Zeitraum nach der Intervention signifikant positiv auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* der Schülerinnen und Schüler auswirkt ($\beta = .16$, $p < .05$), kann die Hypothese 8g hingegen angenommen werden.

Tabelle 41: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Strategieflexibilität T2 bis T4

Parameter	Strategieflexibilität		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	.06	.11	.594
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.10	.09	.275
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2$^+$)	.34	.08	.000
Instruktionsansatz[a]	−.03	.15	.847
Auffrischungsteilnahme[b]	.11	.07	.144
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.27	.13	.044
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.16	.07	.019

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Die Ergebnisse des linearen gemischten Modells für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Tabelle 42) zeigen, dass sowohl die Zeit als auch die allgemeinen mathematischen Leistungen signifikant die Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien* beeinflussen. Die Zeit wirkt sich dabei negativ auf den Einsatz von *Verkürzungsstrategien* aus, d. h. mit zunehmendem zeitlichem Abstand zur Intervention nimmt die Nutzung von *Verkürzungsstrategien* ab ($\beta = -.11$, $p < .05$). Schülerinnen und Schüler mit höheren mathematischen Fähigkeiten setzen im Zeitraum nach der Intervention im Mittel mehr *Verkürzungsstrategien* als Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren mathematischen Fähigkeiten ein ($\beta = .51$, $p < .001$).

Für die Experimentalgruppenzugehörigkeit lässt sich kein signifikanter Einfluss auf die gemittelte Anzahl verwendeter *Verkürzungsstrategien* im Zeitraum T2 bis T4 nachweisen ($\beta = .03$, $p > .10$), während sich die Teilnahme an der Auffrischung signifikant positiv auswirkt ($\beta = .20$, $p < .05$).

In der zeitlichen *Entwicklung* zeigt sich – entgegen der Erwartung (Hypothese 2b) – in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* zwischen den beiden Experimentalbedingungen ein signifikanter Unterschied zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes ($\beta = -.17$, $p < .05$). Dieser Vorteil hatte sich bereits in den Häufigkeiten zur Verwendung von *Verkürzungsstrategien* in Tabelle 40 (S. 178) angedeutet. Hypothese 2b muss entsprechend verworfen werden.

Da sich die allgemeinen mathematischen Leistungen im Zeitraum nach der Intervention nicht signifikant auf die *Entwicklung im Repertoire an Verkürzungsstrategien* auswirken und daher bereits vor der Analyse aus dem Modell entfernt wurden, muss die Hypothese 9b verworfen werden. Für die kognitiven Grundfähigkeiten und das Arbeitsgedächtnis wurde gemäß der Hypothesen 9d und 9f kein Einfluss auf die *Fähigkeitsentwicklung* angenommen. Diese Interaktionsterme wurden ebenfalls vorab aus dem Modell entfernt wurden, da sich keine signifikanten Einflüsse nachweisen ließen, sodass beide Hypothesen angenommen werden können.

Da sich die Teilnahme an der Auffrischungssitzung im Zeitraum nach der Intervention signifikant positiv auf die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* der Schülerinnen und Schüler auswirkt ($\beta = .09$, $p < .05$), kann die Hypothese 9g hingegen angenommen werden.

Wie sich bereits für die *Strategieflexibilität* abgezeichnet hat, scheinen insbesondere die Teilnahme an der Auffrischung und die Zugehörigkeit zum problemlöseorientierten Ansatz dazu beizutragen, dass die in der Intervention erlernten Strategien auch im Zeitraum nach der Intervention verwendet werden.

Tabelle 42: Gepoolte Schätzung fester Parameter für das Repertoire an Verkürzungsstrategien T2 bis T4

Parameter	Repertoire an Verkürzungsstrategien		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	.16	.12	.187
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.11	.05	.041
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^{+})	.51	.09	.000
Instruktionsansatz[a]	.03	.17	.862
Auffrischungsteilnahme[b]	.20	.08	.014
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.17	.08	.024
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.09	.04	.026

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Zusammenfassend wirken sich weder die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten noch die Intelligenz oder das Arbeitsgedächtnis auf die *Fähigkeitsentwicklung* beider abhängigen Variablen aus und wurden daher als Interaktionsterme aus den Modellen entfernt, um diese sparsamer zu halten. Allerdings wirkt sich die Auffrischungsteilnahme in beiden Modellen positiv auf die *Fähigkeitsentwicklung* aus (Hypothesen 8g und 9g). Um zu prüfen, inwieweit sich die Auffrischungsteilnahme innerhalb der beiden Experimentalbedingungen unterschiedlich auf die *Lernentwicklung* auswirkt, ist es nötig, die Entwicklung des *Strategierepertoires* (*Strategieflexibilität*) und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* für jede Experimentalgruppe separat in Abhängigkeit von der Teilnahme an der Auffrischung zwischen T2 und T3 zu betrachten. Der Einfluss der Auffrischungsteilnahme auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* und die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* wird in den folgenden Analysen detaillierter betrachtet.

Strategieentwicklung in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme

Im Folgenden werden Einflüsse auf die Entwicklung der *Strategieflexibilität* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* im Zeitraum nach der Intervention (T2 bis T4) in Abhängigkeit von der Experimentalgruppe und der Auffrischungsteilnahme analysiert (vgl. Tabelle 43).

Hierzu wurde die Entwicklung der *Strategieflexibilität* und die Entwicklung des *Einsatzes von Verkürzungsstrategien* für die beiden Experimentalteilgruppen, die an der Auffrischung teilgenommen haben und die beiden Experimentalteilgruppen, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben, in zwei separaten linearen gemischten Modellen berechnet.

Tabelle 43: Überblick über die Teilnahme an der ersten Auffrischung

	Teilnahme an der Auffrischung	
Unterrichtsansatz	**Keine Teilnahme (= 0)**	**Teilnahme (= 1)**
Explizierender Ansatz	13	28
Problemlöseorientierter Ansatz	15	23

Trotz kleiner Gruppengröße werden im Folgenden wie in den Kapiteln zuvor lineare gemischte Modelle für beide Teilgruppen (keine Auffrischung/Auffrischung) getrennt berechnet, da die Vorteile dieses Verfahrens klar überwiegen (vgl. Kap. 7.1). Da die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten von einigen Schülerinnen und Schülern der Stichprobe nicht erhoben werden konnten und somit fehlen (vgl. Tabelle 18, S. 135) und die vier Experimentalteilgruppen unterschiedlich von diesem Stichprobenausfall betroffen sind, würden Auswertungsverfahren, die fehlenden Werten mit einem listenweisen Fallausschluss begegnen, möglicherweise zu verzerrten Ergebnissen führen. Mithilfe der linearen gemischten Modelle können die imputierten DEMAT-Werte bei den Parameterschätzungen einbezogen werden.

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass für beide Modelle die Aufnahme des DEMAT 2^+ im Vergleich Nullmodell zu einer Verbesserung des Modellfits beiträgt (*Strategieflexibilität*: $\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_0}} = 28.72/\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_1}} = 78.93$, $\Delta df = 1$, $p < .001$; *Repertoire an Verkürzungsstrategien*: $\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_0}} = 29.85/\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_1}} = 78.93$, $\Delta df = 1$, $p < .001$).

Für die *Strategieflexibilität* zeigt sich in Tabelle 44, dass im Modell für die beiden Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme weder der Faktor Zeit ($\beta = -.25$, $p > .10$) noch die Experimentalgruppenzugehörigkeit zum explizierenden Ansatz ($\beta = .26$, $p > .10$) einen signifikanten Einfluss auf das *Strategierepertoire* besitzt. Die *Strategieflexi-*

bilität wird in beiden Experimentalteilgruppen signifikant von den allgemeinen mathematischen Fähigkeiten beeinflusst ($\beta = .29$, $p < .01$).

Die beiden Experimentalteilgruppen, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben, unterscheiden sich im Zeitraum nach der Intervention nicht signifikant in der *Entwicklung der Strategieflexibilität* ($\beta = -.33$, $p > .10$).

Im Modell für die *Strategieflexibilität*, in das nur die beiden Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme einbezogen wurden, zeigt sich entsprechend zu den zuvor berichteten Ergebnissen, dass sich weder die Zeit ($\beta = -.01$, $p > .10$) noch die Experimentalgruppenzugehörigkeit zum explizierenden Ansatz ($\beta = -.19$, $p > .10$) signifikant auf die mittlere *Strategieflexibilität* im Messzeitraum auswirken. Wie im Modell zuvor gehen höhere allgemeine mathematische Leistungen mit einer höheren *Strategieflexibilität* einher ($\beta = .42$, $p < .001$).

Im Unterschied zum Vergleich der beiden Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme entwickeln sich die Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme signifikant unterschiedlich. Die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes weisen eine auf dem 10 %-Niveau signifikant schlechtere *Entwicklung des Strategierepertoires* auf, d. h. das in der Intervention erworbene *Repertoire* nimmt in diesem Instruktionsansatz stärker als in der problemlöseorientierten Referenzgruppe ab ($\beta = -.26$, $p < .10$).

Tabelle 44: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Strategieflexibilität T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme

Parameter	Strategieflexibilität					
	Keine Auffrischungsteilnahme			Auffrischungsteilnahme		
	β	*SE*	*p*	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.23	.14	.102	.23	.14	.109
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.25	.15	.100	−.01	.12	.960
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.29	.11	.006	.42	.11	.000
Instruktionsansatz[a]	.26	.23	.262	−.19	.19	.310
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.33	.23	.146	−.26	.16	.099

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Die graphische Darstellung der geschätzten Randmittel (unter Kontrolle des DEMAT 2^+) in Abbildung 6 veranschaulicht, dass insbesondere Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes von einer Auffrischungsteilnahme profitieren.

Abgesehen von den Schülerinnen und Schülern des problemlöseorientierten Ansatzes, die an der Auffrischung teilgenommen haben, nimmt das *Strategierepertoire* in allen Experimentalteilgruppen mit zunehmendem zeitlichen Abstand zur Intervention ab.

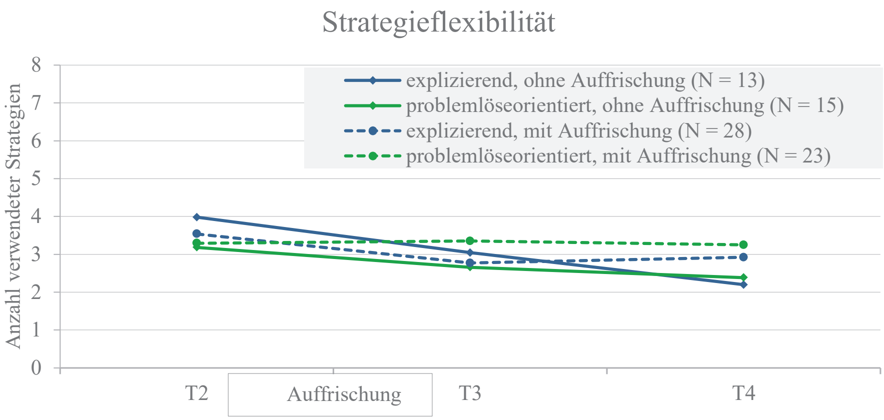


Abbildung 6: Entwicklung der Strategieflexibilität im Zeitraum T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme (geschätzte Randmittel)

Im Modell für die beiden Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme zeigt sich in Tabelle 45 ein negativer Einfluss der Zeit auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* ($\beta = -.20$, $p < .05$) und ein positiver Einfluss der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten ($\beta = .44$, $p < .001$). Die Experimentalgruppenzugehörigkeit wirkt sich hingegen nicht signifikant auf die mittlere Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien* im Zeitraum nach der Intervention aus ($\beta = .20$, $p > .10$).

Die beiden Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme entwickeln sich dabei im beobachteten Zeitraum signifikant unterschiedlich. Die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes weisen dabei einen signifikant schlechteren *Entwicklungsverlauf* auf als die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes auf ($\beta = -.29$, $p < .05$).

Tabelle 45: Gepoolte Schätzung fester Parameter für das Repertoire an Verkürzungsstrategien T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme

Parameter	Repertoire an Verkürzungsstrategien					
	Keine Auffrischungsteilnahme			Auffrischungsteilnahme		
	β	*SE*	*p*	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.35	.16	.032	.36	.16	.020
Instruktionsansatz[a]	.20	.26	.459	−.06	.21	.792
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2$^+$)	.44	.13	.001	.58	.11	.000
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.20	.09	.019	−.07	.07	.301
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.29	.13	.031	−.12	.10	.201

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Im Modell für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* in den beiden Experimentalteilgruppen, die an der Auffrischung teilgenommen haben, beeinflusst wie im zuvor beschriebenen Modell weder die Zeit (β = −.07, $p > .10$) noch die Zugehörigkeit zum explizierenden Ansatz (β = −.06, $p > .10$) signifikant den gemittelten Einsatz von *Verkürzungsstrategien* im Beobachtungszeitraum. Wie im zuvor berichteten Modell stellen die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten den Prädiktor mit dem größten Einfluss dar (β = .58, $p < .001$). Für die *zeitliche Entwicklung* zeigt sich zwischen den beiden Experimentalteilgruppen, die an der Auffrischung teilgenommen haben, kein signifikant unterschiedlicher Verlauf in der *Fähigkeitsentwicklung* (β = −.12, $p > .10$).

Die beiden Experimentalteilgruppen, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben, verzeichnen im Zeitraum zwischen T2 und T3 einen stärkeren Leistungsabfall (β = −.20, $p < .05$) als die entsprechenden Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme (β = −.07, $p > .10$). Der Vorteil in der *Fähigkeitsentwicklung* zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes ist zwischen den Experimentalteilgruppen ohne Auffrischung (β = −.29, $p < .05$) stärker ausgeprägt als in den Referenzgruppen mit Auffrischungsteilnahme (β = −.12, $p > .10$), d. h. die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes scheinen die *Verkürzungsstrategien* ohne Auffrischungsteilnahme schneller zu vergessen, während diese Vergessenseffekte in der problemlöseorientierten Referenzgruppe geringer ausfallen.

Insbesondere fällt jedoch auf, dass die *Anzahl eingesetzter Verkürzungsstrategien* (vgl. Abbildung 7) bei den Schülerinnen und Schülern des problemlöseorientierten Ansatzes, die eine Auffrischung erhalten haben, im Zeitraum nach der Intervention, d. h. über acht Monate, im Unterschied zu allen anderen Experimentalteilgruppen relativ konstant bleibt bzw. nach der Auffrischung zu T3 sogar im Mittel noch etwas mehr *Verkürzungsstrategien* als im Posttest gezeigt werden.

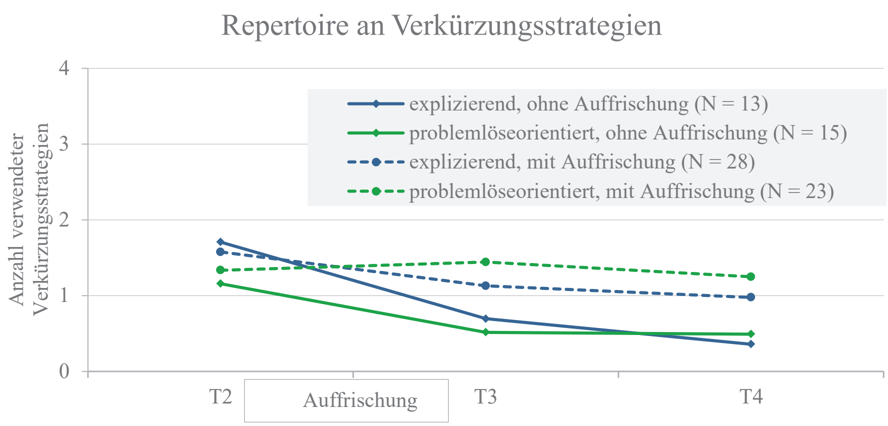


Abbildung 7: Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien im Zeitraum T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme (geschätzte Randmittel)

7.2.4 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Entwicklung der Strategieflexibilität

Um Unterschiede in der Anzahl und Art verwendeter Strategien zwischen den beiden Instruktionsansätzen (Fragestellung 1a) und darüber hinaus auch in den einzelnen Leistungsgruppen der beiden Experimentalgruppen (Fragestellung 1b) sichtbar machen zu können, wurden die Strategien in den vorangegangenen Kapiteln 7.1 bis 7.3 zunächst deskriptiv beschrieben und anschließend mit Chi-Quadrat-Homogenitätstests auf Unterschiede in der Verteilung getestet. Darüber hinaus konnte die Entwicklung eingesetzter Strategien (*Strategieflexibilität*) und die Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien* (Fragestellung 1a) sowie beeinflussende Prädiktoren (Fragestellung 1c) zusätzlich durch lineare gemischte Modelle und somit durch parametrische Verfahren überprüft werden.

Im Folgenden werden die drei Teilfragestellungen und die dazugehörigen Hypothesen zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* (Fragestellungen 1a-c) noch einmal separat voneinander beantwortet.

Zeigen sich zwischen den Schülerinnen und Schülern der beiden Instruktionsansätze Unterschiede in der Strategieflexibilität? (Fragestellung 1a)

In Kapitel 7.2 konnte gezeigt werden, dass die *Anzahl eingesetzter Strategien* und *Verkürzungsstrategien* in beiden Experimentalgruppen im Interventionszeitraum zwischen T1 und T2 ansteigt und anschließend tendenziell im Verlauf des dritten Schuljahres (zwischen T2 und T4) wieder abnimmt. Dies verdeutlichen sowohl die Analysen der eingesetzten Strategien zu den jeweiligen Messzeitpunkten (Kap. 7.2.1.1) als auch die Abbildungen zu den linearen gemischten Modellen (Kap. 7.2.1.2). Wird der Strategieeinsatz zu den vier Messzeitpunkten für jede Experimentalgruppe gesondert betrachtet, so verändert sich das *Strategierepertoire* im Interventionszeitraum (T1–T2) sowie zwischen den beiden Follow-up-Tests (T3–T4) am stärksten. Zwischen dem Posttest (T2) und dem drei Monate später stattfindenden Follow-up-Test 1 (T3) verändert sich die Verteilung der eingesetzten Strategien hingegen vergleichsweise wenig. Dies lässt sich sowohl an den deskriptiven Ergebnissen (Tabelle 26, S. 154 und Tabelle 27, S. 154) als auch an den Ergebnissen des Chi-Quadrat-Homogenitätstests erkennen (Kap. 7.2.1.1). Auch in den linearen gemischten Modelle im Zeitraum T1 bis T4 zeigt sich ein deutlicher *Zuwachs* in beiden abhängigen Variablen während der Intervention (vgl. Abbildung 4, S. 157 und Abbildung 5, S. 159).

Die Ergebnisse weisen darüber hinaus allerdings auf unterschiedliche *Entwicklungsverläufe* in den beiden Experimentalgruppen während des 3. Schuljahres (T1–T4) hin. Dies wird zum einen durch die deskriptiven Ergebnisse zur mittleren Ausprägung der *Strategieflexibilität* (Tabelle 26, S. 154) und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* (Tabelle 27, S. 154) gestützt und ist zum anderen in den Abbildungen zu den linearen gemischten Modellen erkennbar (Abbildung 4, S. 157 und Abbildung 5, S. 159).

In der Darstellung der *Entwicklungsverläufe für die Strategieflexibilität* (Abbildung 4, S. 157) und die Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien* (Abbildung 5, S. 159) zeigen sich in den beiden Experimentalgruppen zwei gegensätzliche Entwicklungen für den unmittelbaren Interventionszeitraum und den an die Intervention anschließenden Zeitraum bis zum Ende des dritten Schuljahres. Um die messzeitraumspefizischen Fragestellungen und Hypothesen zu beantworten, wurde der gesamte Messzeitraum in zwei Beobachtungszeiträume unterteilt. Auf diese Weise konnten für Fragestellung 1c messzeitraumrelevante Prädiktoren (wie die Auffrischungsteilnahme für die Entwicklung nach der Intervention) in die linearen gemischten Modelle einbezogen werden.

Für den Interventionszeitraum zeigt sich, dass sich die Experimentalgruppen in ihrem Strategiegebrauch bereits zu T1 signifikant unterscheiden (Tabelle 30, S. 161). Die Strategie *Hilfsaufgabe* wird dabei im problemlöseorientierten Ansatz im Prätest deutlich häufiger als im explizierenden Ansatz eingesetzt. Im explizierenden Ansatz wiederum findet sich zu T1 eine Häufung unelaborierter Strategien, d. h. Strategien, die keiner Kategorie im Kategoriensystem zugeordnet werden konnten. Darüber hinaus lösen die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz die Testaufgaben zu T1 bereits korrekter (71 %) als die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz (60 %). Werden alle *Verkürzungsstrategien* zu T1 zusammengefasst, zeigt sich im Anteil eingesetzter *Verkürzungsstrategien* an den insgesamt eingesetzten Strategien ein Vorteil für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes (12 %) gegenüber den Schülerinnen und Schülern im explizierenden Ansatz (6 %).

Für die *Strategieflexibilität* wurden die Strategien auf Ebene 2 des im Projekt entwickelten Kodiermanuals betrachtet (vgl. Tabelle 13, S. 127), um feinere Gruppenunterschiede im Strategieeinsatz (Mischstrategien, verkürzte Notationsformen etc.) zwischen den Experimentalgruppen messbar machen zu können. In den linearen gemischten Modellen deutet sich für den unmittelbaren Interventionszeitraum (T1–T2) sowohl für den *Zuwachs* an *insgesamt verwendeten Strategien* (vgl. Tabelle 38, S. 176) als auch für den *Zuwachs an Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 39, S. 177) eine tendenziell bessere *Entwicklung* im explizierenden Ansatz an, wobei die Gruppenunterschiede nur im Modell für das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* auf dem 10 %-Niveau signifikant werden, sodass Hypothese 1b angenommen werden kann. Da sich die Experimentalgruppen im Interventionszeitraum (T1–T2) entgegen der Erwartung jedoch nicht signifikant in ihrer *Lernentwicklung in der Strategieflexibilität* unterscheiden, muss Hypothese 1a, nach welcher Vorteile für den explizierenden Ansatz im Interventionszeitraum postuliert wurden, abgelehnt werden.

Die Ergebnisse zur Verteilung der Strategien im Erhebungsinstrument *Post für den Tiger* deuten darauf hin, dass sich das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* für Additions- und Subtraktionsaufgaben in den beiden Instruktionsansätzen zwischen den einzelnen Interventionstagen unterschiedlich verändert (Kap. 7.2.2.2). Im explizierenden Ansatz kann in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* nach deren Einführung an Interventionstag 3 sowohl für Additionsstrategien (Hypothese 4a) als auch für Subtraktionsstrategien (Hypothese 4b) wie erwartet ein starker Anstieg verzeichnet werden (Tabelle 34, S. 167 und Tabelle 35, S. 169). Zudem ergibt sich zwischen aufeinanderfolgenden Interventionstagen im explizierenden Ansatz sowohl für Additions- als auch für Subtraktionsaufgaben eine signifikant unterschiedliche Verteilung in den eingesetzten Strategien.

Im Gegensatz zur Entwicklung im explizierenden Ansatz nimmt der Anteil an *Verkürzungsstrategien* an den insgesamt verwendeten Strategien im problemlöseorientierten Ansatz nicht plötzlich, sondern während der Unterrichtstage bei den Additionsstrategien hypothesenkonform (Hypothese 5a) sukzessive zu und bei den Subtraktionsstrategien hypothesenwidrig (Hypothese 5b) zunächst ab und anschließend wieder zu. Die Strategieverteilung unterscheidet sich im problemlöseorientierten Ansatz zwischen den drei Interventionstagen in den Additionsaufgaben nicht und in den Subtraktionsaufgaben lediglich auf dem 10 %-Niveau signifikant.

Auf qualitativer Ebene zeigt sich darüber hinaus in der Analyse der *Post für den Tiger*, dass beim gleichen Aufgabentypus im problemlöseorientierten Ansatz insbesondere die *Hilfsaufgabe* eingesetzt wird, während Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz deutlich häufiger die Veränderungsstrategie verwenden. Das *Gleichsinnige Verändern* für die Subtraktion wird während der Intervention von keinem Schüler/keiner Schülerin in der problemlöseorientierten Gruppe eingesetzt, hingegen von einigen Schülerinnen und Schülern im explizierenden Ansatz, in welchem die Strategie explizit eingeführt und geübt wurde. Auch im Posttest nutzt keiner der Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes die Veränderungsstrategie (vgl. Tabelle 30, S. 161).

In der *Abstandsberechnung* sind ebenfalls auf der zweiten Ebene der Strategiekodierung Unterschiede zwischen der Strategieverwendung in den beiden Experimentalgruppen erkennbar. Während die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz tendenziell durch *Addition ergänzen*, was dem an Tag 3 der Intervention eingeführten Verfahren entspricht, verwenden die Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz häufiger die *indirekte Subtraktion* oder geben die Rechenrichtung nicht an (vgl. Tabelle 35, S. 169).

In der Nutzung der Universalstrategien zeigt sich für den gesamten Messzeitraum, dass im explizierenden Ansatz häufig auf das *stellenweise Verfahren* zurückgegriffen wird, welches für die Subtraktion sehr fehleranfällig ist, und im problemlöseorientierten Ansatz hingegen insbesondere das *schrittweise Verfahren* verwendet wird.

Für den Zeitraum nach der Intervention ergibt sich für die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* ein deutlicher Vorteil für die Gruppe des problemlöseorientierten Ansatzes. In den Häufigkeitsverteilungen der eingesetzten Strategien zu T3 und T4 (vgl. Tabelle 40, S. 178) ist erkennbar, dass die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes ihren im Treatment erzielten Lernzuwachs nahezu beibehalten, sodass sie drei (45 %) und acht Monate (43 %) nach der Intervention nur geringfügig weniger *Verkür-*

zungsstrategien einsetzen als am Ende der Intervention. Selbst die Einführung der Normalverfahren beeinträchtigt die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* in der problemlöseorientierten Experimentalgruppe hierbei nicht. Im explizierenden Ansatz ist der Einsatz von *Verkürzungsstrategien* nach der Intervention jedoch stark rückläufig, sodass zu T3 (31 %) und T4 (27 %) deutlich weniger *Verkürzungsstrategien* als im problemlöseorientierten Ansatz eingesetzt werden. Auch die Ergebnisse der linearen gemischten Modelle stützen die bereits deskriptiv erkennbaren Gruppenunterschiede, sodass sowohl für die *Strategieflexibilität* (vgl. Tabelle 41, S. 181) als auch für die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 42, S. 182) eine signifikant bessere *Lernentwicklung* im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz konstatiert werden kann.

Da für den Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) keine Experimentalgruppenunterschiede in der *Strategieflexibilität* (Hypothese 2a) und in der *Nutzung von Verkürzungsstrategien* (Hypothese 2b) erwartet wurden, müssen beide Hypothesen zurückgewiesen werden.

In beiden Experimentalgruppen werden die Universalstrategien zu T4 von den schriftlichen Normalverfahren abgelöst. Hierbei zeigen sich in der Häufigkeit der Verwendung der Normalverfahren nur geringe Unterschiede zwischen den Experimentalgruppen (vgl. Tabelle 40, S. 178: 42 % aller Strategien im explizierenden Ansatz, 37 % im problemlöseorientierten Ansatz).

Obgleich die Nutzung der schriftlichen Normalverfahren im Follow-up-Test 2 (T4) deutlich zunimmt (vgl. Tabelle 40, S. 178), nutzen nur wenige Schülerinnen und Schüler die schriftlichen Normalverfahren als Universalstrategie (9 von 36 Schülerinnen und Schülern im explizierenden Ansatz und 10 von 38 Schülerinnen und Schülern im problemlöseorientierten Ansatz), sodass Hypothese 3 verworfen werden muss.

Zu T4, d. h. nach der Einführung der Normalverfahren, lösen insbesondere die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Unterrichtsansatzes die Strategietestaufgaben korrekter als zu den vorangegangenen Messzeitpunkten.

Zeigen sich im Interventionszeitraum in der Entwicklung der Strategieflexibilität und in der Verwendung von Verkürzungsstrategien in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen? (Fragestellung 1b)

Die zu Fragestellung 1a beschriebenen zentralen Ergebnisse zur Entwicklung beider Experimentalgruppen im Interventionszeitraum (T1–T2) gelten für alle Leistungsgruppen, d. h. alle Leistungsgruppen setzen zu T2 insgesamt mehr *unterschiedliche Strategien* (Tabelle 31, S. 164) und mehr *Verkürzungsstrategien* (Tabelle 32, S. 165) ein. Wie bereits in den Ergebnissen zu Fragestellung 1a konstatiert wurde, zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler aller Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes bereits im Prätest (T1) insgesamt mehr unterschiedliche Strategien und mehr *Verkürzungsstrategien* einsetzen als die entsprechenden Vergleichsgruppen im explizierenden Ansatz. Allerdings erreichen alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes zu T2 im Mittel höhere Werte und somit auch einen höheren *Zuwachs in der Strategieflexibilität* (Hypothese 6) und im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 7) als die Vergleichsgruppen des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes, sodass beide Hypothesen auf deskriptiver Ebene angenommen werden können.

Die Auswertungen der *Post für den Tiger* weisen darüber hinaus darauf hin, dass die *Verkürzungsstrategien* in beiden Instruktionsansätzen den allgemeinen mathematischen Leistungen entsprechend bereits zu Beginn oder erst gegen Ende der Intervention eingesetzt werden.

Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten nutzen während der Intervention im explizierenden Ansatz deutlich häufiger Universalstrategien als die Referenzgruppe des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes.

In beiden Experimentalgruppen werden in allen Leistungsgruppen am vorletzten Tag der Intervention anteilig mehr korrekte Ergebnisse als zu deren Beginn erzielt. Damit unterscheidet sich die Entwicklung der Korrektheit im prozessbezogenen Instrument *Post für den Tiger* von der Entwicklung in den Strategietests (T1–T2), da sich dort abgesehen von den Leistungsgruppen mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten nur ein geringer oder sogar kein Zuwachs in der Korrektheit zeigt (Tabelle 33, S. 166). Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass der Strategietest zu T1 anteilig mehr Aufgaben im Zahlenraum bis 100 beinhaltete, während in der *Post für den Tiger* alle Aufgaben im Zahlenraum bis 1000 konzipiert waren.

Wirken sich die individuellen Lernermerkmale Intelligenz, mathematische Fähigkeiten und Arbeitsgedächtnis sowie eine Auffrischung der Lerninhalte auf die Entwicklung des Strategierepertoires (Flexibilität) und die Verwendung von Verkürzungsstrategien aus? (Fragestellung 1c)

In den linearen gemischten Modellen zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien* können sowohl Prädiktoren für das *mittlere Niveau* der jeweiligen abhängigen Variablen als auch Prädiktoren für den *Zuwachs* in der jeweiligen abhängigen Variablen identifiziert werden.

In den Analysen zur *Strategieflexibilität* (Tabelle 28, S. 156) und zum *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Tabelle 29, S. 158) im gesamten dritten Schuljahr (T1–T4) erweisen sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen als stärkster Prädiktor für das mittlere Niveau der abhängigen Variablen, d. h. je höher das mathematische Vorwissen der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt ist, desto breiter ist das *Repertoire an Strategien*.

Für die *Entwicklung der Strategieflexibilität* kann im Zeitraum T1 bis T4 kein Einfluss der allgemeinen mathematischen Leistungen in beiden Gruppen nachgewiesen werden, sodass die Interaktion der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten mit der Zeit als statistisch nicht bedeutsamer Prädiktor aus den Analysen ausgeschlossen wurde. Demnach setzen Schülerinnen und Schüler mit höheren mathematischen Fähigkeiten im Mittel insgesamt mehr Strategien ein. Jedoch können sie sowohl im gesamten Messzeitraum als auch in der separaten Betrachtung des Interventionszeitraums (T1–T2, vgl. Tabelle 38, S. 176) und des Zeitraums nach der Intervention (T2–T4, vgl. Tabelle 41, S. 181) keinen signifikant höheren *Lernzuwachs* erzielen als Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren allgemeinen mathematischen Fähigkeiten, sodass die Hypothesen 8a und 8b verworfen werden müssen.

Für den *Leistungszuwachs* im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* erweisen sich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen hingegen sowohl im Interventionszeitraum (T1–T2, vgl. Tabelle 39, S. 177) als auch im gesamten dritten Schuljahr (T1 bis T4, vgl. Tabelle 29, S. 158) als signifikanter Prädiktor, sodass Hypothese 9a angenommen werden kann. Dabei zeigen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen einen vergleichbar hohen Einfluss wie die Experimentalgruppenzugehörigkeit. Für den Zeitraum nach der Intervention (T2 bis T4, vgl. Tabelle 42, S. 182) lässt sich dieser Einfluss hingegen nicht nachweisen, da der Interaktionsterm bereits vor der Analyse aus dem Modell entfernt wurde, sodass Hypothese 9b verworfen werden muss.

Die Ergebnisse der linearen gemischten Modelle stehen in Einklang mit den deskriptiven Ergebnissen zur Lernentwicklung in den verschiedenen Leistungsgruppen (vgl. Fragestellung 1b), die zeigen, dass alle Leistungsgruppen im Interventionszeitraum (T1–T2) sowohl in der Gesamtzahl verwendeter Strategien (*Strategieflexibilität*) als auch in der Anzahl verwendeter *Verkürzungsstrategien* profitieren können. Zugleich zeichnet sich im gleichen Zeitraum in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* ein deutlicher Lernzuwachs in den Leistungsgruppen mit höherem mathematischem Vorwissen ab, was in den Ergebnissen der linearen gemischten Modelle belegt wird.

Die kognitiven Grundfähigkeiten weisen hypothesenkonform weder im Interventionszeitraum T1 bis T2 noch im Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) einen signifikanten Einfluss auf den *Zuwachs in der Strategieflexibilität* (Hypothesen 8c und 8d) und in der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* (Hypothesen 9c und 9d) auf, da der Interaktionsterm in allen Analysen bereits vorab aus den jeweiligen Modellen entfernt wurde. Auch das Arbeitsgedächtnis zeigt weder kurzfristig noch langfristig einen Einfluss auf die *Entwicklung beider abhängigen Variablen*, sodass die Hypothesen 8e, 8f sowie 9e und 9f angenommen werden können.

Für den Zeitraum nach der Intervention erweist sich neben der Experimentalgruppenzugehörigkeit lediglich die Auffrischungsteilnahme als signifikanter Prädiktor für den *Lernzuwachs* in der *Strategieflexibilität* (Hypothese 8g) und im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 9g).

In den differenziellen Analysen zur *Entwicklung der Strategieflexibilität* in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme und der Experimentalgruppe (vgl. S. 183) wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes unabhängig von der Auffrischungsteilnahme eine nachhaltigere *Lernentwicklung* aufweisen als die entsprechende Referenzgruppe des explizierenden Unterrichtsansatzes. In den Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme profitieren die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes in der *Strategieflexibilität* stärker von der Auffrischung als die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes. Das am Ende der Intervention zu T2 gemessene *Strategierepertoire* erweist sich im problemlöseorientierten Ansatz als nachhaltiger.

Für den Einsatz von *Verkürzungsstrategien* zeigt sich für die beiden Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme keine unterschiedliche *Entwicklung*, während sich die Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme signifikant unterscheiden. Auch ohne Auffrischung scheinen die erlernten *Verkürzungsstrategien* in der problemlöseorientierten Experimentalteilgruppe nachhaltiger als in der explizierenden Vergleichsgruppe verwendet zu werden.

Abbildung 7 (S. 187) veranschaulicht graphisch, was bereits im Zusammenhang mit den deskriptiven Analysen zum *Strategierepertoire* in Tabelle 40 (S. 178) beschrieben wurde: Die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatz, die an der Auffrischung teilgenommen haben, verwenden über einen Zeitraum von acht Monaten in etwa gleich viele *Verkürzungsstrategien* wie direkt nach der Intervention und verzeichnen somit im Unterschied zu allen anderen Experimentalteilgruppen keinen Vergessenseffekt der Interventionsinhalte.

Insgesamt deutet sich in den Ergebnissen zum *Strategierepertoire* und zum Einsatz von *Verkürzungsstrategien* für den Interventionszeitraum eine bessere *Lernentwicklung* der Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz an, während die Ergebnisse für die *Lernentwicklung* nach der Intervention für nachhaltigere Lernergebnisse im problemlöseorientierten Ansatz sprechen.

Die nachfolgende Tabelle gibt einen abschließenden Überblick über die geprüften Hypothesen zur *Strategieflexibilität* und die dazugehörigen Ergebnisse.

Tabelle 46: Übersicht über die Beantwortung der Hypothesen zur Strategieflexibilität[9]

	Strategieflexibilität (Strategierepertoire, Fragestellung 1)	
	Experimentalgruppenunterschiede (Fragestellung 1a)	
H1	Das *Strategierepertoire* zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden Unterrichtsansätze unterscheidet sich kurzfristig (im Interventionszeitraum) in der *Anzahl eingesetzter Strategien* (H1a)	–
	und in der *Nutzung von Verkürzungsstrategien* (H1b) zugunsten des explizierenden Ansatzes.	✓
H2	Langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention, werden keine Gruppenunterschiede in der *Anzahl* (H2a)	–
	und *Art eingesetzter Strategien* erwartet (H2b).	–
H3	Am Ende des dritten Schuljahres (letzter Follow-up-Test) wird durch die Dominanz der schriftlichen Normalverfahren, die sich in zahlreichen Befunden gezeigt hat, erwartet, dass beide Experimentalgruppen vorwiegend auf die *Normalverfahren* zurückgreifen und diese als Universalstrategie nutzen.	–
H4	In der Strategieentwicklung während des Unterrichts der Intervention wird angenommen, dass sich der Einsatz von Verkürzungsstrategien zur Lösung von Additionsaufgaben (H4a)	✓
	und Subtraktionsaufgaben (H4b) erst dann zeigt, wenn diese im Instruktionsansatz behandelt wurden.	✓
H5	Für den problemlöseorientierten Ansatz wird hingegen durch den stetigen Austausch über individuell entwickelte Lösungswege ein kontinuierlicher Anstieg in der *Verwendung von Verkürzungsstrategien* zur Lösung von Additionsaufgaben (H5a)	✓
	und Subtraktionsaufgaben (H5b) erwartet.	–
	Experimentalgruppenunterschiede innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 1b)	
H6	Für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher mathematischer Fähigkeitsniveaus wird erwartet, dass diese im explizierenden Unterrichtsansatz im Rahmen der kurzen Intervention ein *größeres Strategierepertoire* aufbauen können als Schülerinnen und Schüler der entsprechenden Referenzgruppen des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes.	✓
H7	Dabei werden auch in der *Nutzung von Verkürzungsstrategien* Vorteile für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes gegenüber den entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes erwartet.	✓
	Individuelle Lernermerkmale (Fragestellung 1c)	
H8	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig, d. h. im Interventionszeitraum (H8a),	–
	sowie langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention (H8b), positiv auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* auswirken.	–
	Hingegen wird für die Intelligenz sowohl kurzfristig (H8c)	✓
	als auch langfristig (H8d) kein Einfluss auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* erwartet.	✓
	Ebenso wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis sowohl kurzfristig (H8e)	✓
	als auch langfristig (H8f) kein Einfluss auf *die Entwicklung der Strategieflexibilität* zeigt.	✓
	Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* auswirkt (H8g).	✓

[9] ✓ Hypothese kann angenommen werden, – Hypothese muss verworfen werden

Fortsetzung Tabelle 46: Übersicht über die Beantwortung der Hypothesen zur Strategieflexibilität[9]

	Individuelle Lernermerkmale (Fragestellung 1c)	
H9	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig, d. h. im Interventionszeitraum (H9a),	✓
	sowie langfristig, d. h. im Zeitraum nach der Intervention (H9b), positiv auf die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* auswirken.	–
	Hingegen wird für die Intelligenz sowohl kurzfristig (H9c)	✓
	als auch langfristig (H9d) kein Einfluss auf die *Verwendung von Verkürzungsstrategien* erwartet.	✓
	Ebenso wird angenommen, dass sich für das Arbeitsgedächtnis sowohl kurzfristig (H9e)	✓
	als auch langfristig (H9f) kein Einfluss auf das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* zeigt.	✓
	Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf das Repertoire an Verkürzungsstrategien auswirkt (H9g).	✓

Im folgenden Kapitel 7.3 wird dargestellt, ob sich für die beiden Experimentalgruppen auch in der Entwicklung der *Adaptivität* ähnliche Ergebnisse zeigen. Da die Adaptivitätsausprägung auf der eingeschätzten Passung der jeweils eingesetzten Strategie zu den Aufgabenkriterien beruht, geben die hier dargestellten Ergebnissen zur Strategieentwicklung bereits Hinweise auf die *Adaptivitätsentwicklung*. Allerdings wurde die Passung zwischen Strategieeinsatz und Aufgabenkriterien in den in Kapitel 7.2 dargestellten Ergebnissen – weder in den deskriptiven Auswertungen noch in den Analysen mit parametrischen Verfahren – berücksichtigt. Darüber hinaus wurden für die Berechnung der Experimentalgruppenunterschiede in den Verteilungen der Strategien einige Substrategien der zweiten Kodierebene (vgl. Tabelle 13, S. 127) zusammengefasst. In der Adaptivitätszuweisung erhalten jedoch nicht zwingend alle Substrategien der übergeordneten Strategien den gleichen Adaptivitätswert. Beide genannten Aspekte werden in den Berechnungen zur *Entwicklung der Adaptivität* im folgenden Kapitel berücksichtigt.

7.3 Entwicklung der Strategieadaptivität (Fragestellungen 2a-c)

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse zur *Strategieadaptivität* dargestellt. Dabei wird die *Entwicklung der Strategieadaptivität* betrachtet (Fragestellung 2a), Unterschiede zwischen den Experimentalgruppen beschrieben (Fragestellung 2b) und Prädiktoren für die Entwicklung der *Strategieadaptivität* identifiziert (Fragestellung 2c).

Die *Adaptivitätsentwicklung* wird im Folgenden analog zum Vorgehen in Kapitel 7.2 zunächst für den gesamten Untersuchungszeitraum (Kap. 7.3.1) und anschließend für den Interventionszeitraum (Kap. 7.3.2) und den Zeitraum nach der Intervention (Kap. 7.3.3) getrennt dargestellt.

7.3.1 Entwicklung der Strategieadaptivität im gesamten Untersuchungszeitraum (T1–T4)

7.3.1.1 Deskriptive Statistiken und Testung auf Gruppenunterschiede (T1–T4)

Tabelle 47 enthält die gepoolten deskriptiven Statistiken sowie die Ergebnisse der *t*-Tests auf Gruppenunterschiede für die Skala *Adaptivität* zu den vier Messzeitpunkten. Wie der Tabelle zu entnehmen ist, unterscheiden sich die beiden Experimentalgruppen weder im Prä- noch im Posttest signifikant in ihrem adaptiven Einsatz der verwendeten Strategien. In den beiden Follow-up-Tests zeigt sich jedoch ein Vorteil zugunsten des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes. Dieser Vorteil in der adaptiven Strategieverwendung ist zu T3 auf dem 5 %-Niveau signifikant ($t(23569) = -2.11$, $p < .05$) und zu T4 auf dem 10 %-Niveau signifikant ($t(373346) = -1.83$, $p < .10$).

Tabelle 47: Experimentalgruppenunterschiede in der Strategieadaptivität (gepoolte Daten)

MZP	Explizierender Ansatz			Problemlöseorientierter Ansatz			Prüfstatistik		
	M	*SE*	*Range*	*M*	*SE*	*Range*	*t*	*df*	*p*
T1	.27	.03	0–0.69	.35	.04	0–0.94	−1.59	1070570.00	.111
T2	.49	.05	0–1	.51	.05	0–1	−0.26	77.00	.794
T3	.30	.05	0–1	.46	.05	0–1	−2.11	23569.00	.035
T4	.25	.05	0–0.94	.39	.06	0–1	−1.83	373346.00	.068

Hypothese 12, die postuliert, dass die *Adaptivität* nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren (zwischen T3 und T4) in beiden Experimentalgruppen abnimmt, kann basierend auf den dargestellten Mittelwerten für die *Adaptivität* zu T4 angenommen werden.

7.3.1.2 Lineare gemischte Modelle (T1–T4)

Für die Berechnungen zur Entwicklung der *Adaptivität* und ihren Einflussfaktoren im Zeitraum T1 bis T4 wurden die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Prädiktoren in das Modell aufgenommen.

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme der Kovariaten allgemeine mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}), Auffrischungsteilnahme sowie des Interaktionsterms Auffrischung*Zeit im Vergleich zum Nullmodell zu einer deutlichen Verbesserung des Modellfits beiträgt ($\Delta\chi^2 = 135.69$, $\Delta df = 3$, $p < .001$).

Wie das lineare gemischte Modell in Tabelle 48 zeigt, beeinflusst der Faktor Zeit negativ die *Adaptivität* der eingesetzten Strategien im Messzeitraum (T1 bis T4), d. h. die *Adaptivität* nimmt tendenziell über das dritte Schuljahr hinweg ab ($\beta = -.10$, $p < .10$).

Signifikant positiv auf die mittlere *Adaptivität* wirken sich hingegen die Teilnahme an der Auffrischung (zwischen T2 und T3) ($\beta = .13$, $p < .05$) sowie die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten aus ($\beta = .45$, $p < .001$).

Der Einfluss der Experimentalgruppenzugehörigkeit auf die im Mittel erreichten Adaptivitätsscores im Messzeitraum wird nicht signifikant ($\beta = -.15$, $p > .10$).

Zwischen den beiden Experimentalgruppen zeigen sich über den gesamten Messzeitraum betrachtet keine signifikanten Unterschiede in der *Adaptivitätsentwicklung* ($\beta = -.10$, $p > .10$). Allerdings wirkt sich die Teilnahme an der Auffrischung positiv auf die *Leistungsentwicklung* der Schülerinnen und Schüler aus ($\beta = .09$, $p < .05$).

Tabelle 48: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Adaptivität T1 bis T4

Parameter	**Adaptivität**		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.03	.09	.724
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.10	.05	.062
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^{+})	.45	.07	.000
Instruktionsansatz[a]	−.15	.13	.237
Auffrischungsteilnahme[b]	.13	.06	.037
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.10	.07	.177
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.09	.04	.016

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Da aus den oben berichteten Ergebnissen keine Informationen über den Verlauf der *Adaptivitätsentwicklung* innerhalb der beiden Experimentalgruppen zwischen den einzelnen Messzeitpunkten hervorgehen, werden diese durch die in Abbildung 8 dargestellten geschätzten Randmittel (unter Kontrolle des DEMAT 2^{+} und der Auffrischungsteilnahme) ergänzt.

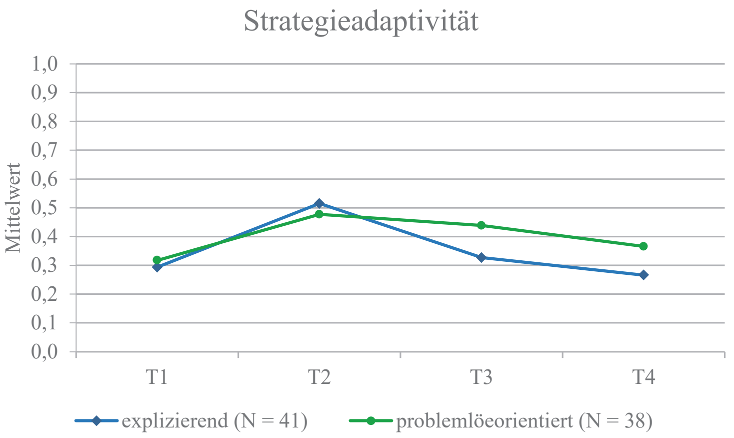


Abbildung 8: Entwicklung der Strategieadaptivität im 3. Schuljahr T1 bis T4 (geschätzte Randmittel)

Abbildung 8 zeigt, dass im Untersuchungszeitraum in der *zeitlichen Entwicklung der Adaptivität* in den beiden Interventionsgruppen zwei gegenläufige Entwicklungen auftreten.

Während die *Adaptivität* der eingesetzten Strategien in beiden Gruppen zwischen T1 und T2 ansteigt, verzeichnen beide Gruppen im Zeitraum nach der Intervention einen Leistungsabfall. Wie bereits anhand der deskriptiven Statistiken in Tabelle 47 (S. 197) deutlich wurde, lässt sich der negative Haupteffekt der Zeit auf die *Adaptivität* (vgl. Tabelle 48) auf die Entwicklung nach dem Treatment zurückführen. Der *Zuwachs* in der *Adaptivität* scheint dabei im explizierenden Ansatz weniger nachhaltig als in der Vergleichsgruppe zu sein. Im Zeitraum zwischen T3 und T4 deutet sich in Abbildung 8 ein paralleler Verlauf in der Abnahme der *Adaptivität* an.

Um die messzeitraumspezifischen Hypothesen zur *Adaptivitätsentwicklung* beantworten zu können, werden diese in den folgenden Kapiteln gesondert für a) den unmittelbaren Interventionszeitraum T1 bis T2 (Kap. 7.3.2) und b) den Zeitraum nach der Intervention T2 bis T4 (Kap. 7.3.3) sowie für den Zeitraum nach der Intervention zusätzlich in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme betrachtet.

7.3.2 Entwicklung der Strategieadaptivität im Interventionszeitraum (T1–T2)

In Kapitel 7.3.2.1 wird die *Entwicklung der Strategieadaptivität* in den beiden Experimentalgruppen dargestellt, während sich das nachfolgende Kapitel 7.3.2.2 experimentalgruppenspezifischen Unterschieden in der Fähigkeitsentwicklung in den einzelnen Leistungsgruppen widmet.

7.3.2.1 Entwicklungen in den Experimentalgruppen (T1–T2)

Wie an den Prüfstatistiken in Tabelle 47 (S. 197) zu erkennen ist, unterscheiden sich die beiden Experimentalgruppen weder im Prätest (T1) noch im Posttest (T2) signifikant in den Mittelwerten der *Strategieadaptivität*. Zugleich wird dort ersichtlich, dass die explizierende Gruppe in der *Strategieadaptivität* zu T1 niedrigere Werte aufweist und zu T2 nahezu vergleichbare Werte wie die problemlöseorientierte Gruppe erzielt. Mit einem linearen gemischten Model wird nachfolgend überprüft, ob sich im Interventionszeitraum (T1–T2) eine signifikant bessere *Lernentwicklung* zugunsten der explizierenden Experimentalgruppe zeigt (Hypothese 10). Als Prädiktoren für die *Entwicklung der Strategieadaptivität* (Hypothesen 14a, 14c und 14e) wurden die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Lernermerkmale in das Modell aufgenommen.

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme der allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}) und der kognitiven Grundfähigkeiten (CFT 1) sowie der Interaktionsterme DEMAT 2^{+}*Zeit und CFT 1*Zeit im Vergleich zum Nullmodell zu einer Verbesserung des Modellfits beiträgt ($\Delta\chi^2 = 89.58$, $\Delta df = 4$, $p < .01$).

Im Interventionszeitraum (T1–T2) wirkt sich der Faktor Zeit positiv auf die adaptive Strategieverwendung aus, d. h. insgesamt ist die *Adaptivität* im Posttest signifikant höher als im Prätest ausgeprägt ($\beta = .18$, $p < .01$). Dies zeigen auch bereits die deskriptiven Ergebnisse in Tabelle 47 (S. 197).

Für die gemittelte *Adaptivität* im Untersuchungszeitraum erweisen sich weder die kognitiven Grundfähigkeiten (CFT 1, $\beta = .04$, $p > .10$) noch die Experimentalgruppenzugehörigkeit ($\beta = .05$, $p > .10$) als statistisch bedeutsame Prädiktoren.

Die allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}) beeinflussen die mittlere *Adaptivität* hingegen signifikant ($\beta = .45$, $p < .001$), d. h. Schülerinnen und Schüler mit höheren mathematische Fähigkeiten können Strategien im Mittel adaptiver als Schülerinnen und Schüler mit niedrigeren mathematischen Fähigkeiten einsetzen.

Für den *Lernzuwachs* ergibt sich ein Vorteil zugunsten der Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes ($\beta = .23$, $p < .05$). Hypothese 10, nach der eine günstigere *Lernentwicklung* für die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Unterrichtsansatz erwartet wurde, kann folglich angenommen werden.

Darüber hinaus wirken sich, wie Tabelle 49 zeigt, sowohl die allgemeinen mathematischen Leistungen ($\beta = .14$, $p < .01$) als auch die kognitiven Grundfertigkeiten ($\beta = .12$, $p < .05$) positiv auf die *Lernentwicklung* im unmittelbaren Interventionszeitraum aus. Je höher die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten und die kognitiven Grundfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto höher ist der *Lernzuwachs* in der *Strategieadaptivität* im Interventionszeitraum. Beide Prädiktoren wirken sich dabei in vergleichbarer Höhe auf die *Adaptivitätsentwicklung* aus. Hypothese 14a, nach der ein positiver Einfluss der allgemeinen mathematischen Leistungen auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* im Interventionszeitraum erwartet wurde, kann folglich angenommen werden. Da sich die kognitiven Grundfähigkeiten entgegen der Erwartung (Hypothese 14c) signifikant auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* auswirken, muss Hypothese 14c verworfen werden. Hingegen kann Hypothese 14e, nach der kein Einfluss des Arbeitsgedächtnisses auf die *Fähigkeitsentwicklung* postuliert wurde, angenommen werden.

Insgesamt zeigt die Experimentalgruppenzugehörigkeit jedoch einen wesentlich höheren Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* als die mathematischen Fähigkeiten oder die Intelligenz.

Tabelle 49: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Adaptivität T1 bis T2

Parameter	**Adaptivität**		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	.06	.09	.546
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	.18	.07	.009
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.45	.08	.000
Kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1)	.04	.08	.582
Instruktionsansatz[a]	.05	.14	.705
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)*Zeit	.14	.05	.008
Kognitive Grundfähigkeiten (CFT 1)*Zeit	.12	.05	.021
Instruktionsansatz[a]*Zeit	.23	.10	.022

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Im nächsten Kapitel wird dargestellt, inwiefern Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichem mathematischem Vorwissen in der Entwicklung der *Strategieadaptivität* gleichermaßen von der Intervention profitieren können.

7.3.2.2 Entwicklungen in den Leistungsgruppen (T1–T2)

Wie bereits in den Analysen zur *Strategieflexibilität* (vgl. Kapitel 7.2.2), wird die Entwicklung der *Adaptivität* in den Leistungsgruppen deskriptiv berichtet, da die Gruppen zu klein sind, um hypothesenprüfende Verfahren durchzuführen.

Tabelle 50: Gepoolte deskriptive Statistiken zur Strategieadaptivität in den verschiedenen Leistungsgruppen T1 bis T2

	DEMAT 2⁺-Prozentrang	*n*	**T1**				**T2**				**Δ T1-T2**	
			Min	*Max*	*M*	*SE*	*Min*	*Max*	*M*	*SE*	*M*	*SE*
EA	PR < 50	19	0	0.50	0.19	0.04	0.00	0.75	0.27	0.05	0.08	0.06
	50 ≤ PR ≤ 75	11	0	0.56	0.32	0.07	0.00	1.00	0.52	0.08	0.20	0.10
	PR > 75	11	0	0.69	0.34	0.07	0.25	1.00	0.82	0.08	0.48	0.10
PA	PR < 50	11	0	0.50	0.23	0.07	0.00	0.63	0.30	0.06	0.07	0.06
	50 ≤ PR ≤ 75	10	0.13	0.50	0.30	0.04	0.06	0.81	0.41	0.08	0.11	0.11
	PR > 75	17	0	0.94	0.45	0.06	0.19	1.00	0.70	0.06	0.25	0.06

Wie die deskriptiven Statistiken in Tabelle 50 zeigen, können alle Leistungsgruppen im Zeitraum T1 bis T2 einen Zuwachs in der gemessenen *Adaptivität* verzeichnen. Je höher die mathematischen Fähigkeiten ausgeprägt sind, desto größer ist der Zuwachs in der *Adaptivität*. Gleichzeitig ist am Minimum der zu T2 erzielten Werte zu erkennen, dass in den Leistungsgruppen mit geringen mathematischen Fähigkeiten (PR < 50) und mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten (50 ≤ PR ≤ 75) auch Schülerinnen und Schüler dabei sind, die keinen Zuwachs im Interventionszeitraum erzielen. In der Leistungsgruppe mit geringen mathematischen Fähigkeiten lässt sich nur ein minimaler Unterschied im Zuwachs in der *Adaptivität* feststellen (8 % im explizierenden Ansatz und 7 % im problemlöseorientierten Ansatz).

Die Leistungsgruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten des explizierenden Ansatzes verzeichnet in der *Adaptivität* im Mittel einen Zuwachs von 20 % und die Leistungsgruppe mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten einen Zuwachs von 48 %. Die entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes weisen mit 11 % in der Gruppe mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten und 35 % in der Gruppe mit überdurchschnittlichen Fähigkeiten einen niedrigeren Leistungszuwachs auf.

Wenngleich sich in der Leistungsgruppe mit geringen mathematischen Fähigkeiten nur ein geringer Vorteil für die explizierende Leistungsgruppe zeigt, kann Hypothese 13, nach der für den unmittelbaren Interventionszeitraum Vorteile für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatz erwartet wurden, angenommen werden.

7.3.3 Entwicklung der Strategieadaptivität nach der Intervention (T2–T4)

Wie bereits in Tabelle 47 (S. 197) erkennbar wurde, unterscheiden sich der explizierende und der problemlöseorientierte Instruktionsansatz in der *Strategieadaptivität* in den beiden Follow-up-Tests auf dem 5 %- (T3) bzw. auf dem 10 %-Niveau (T4) signifikant zugunsten des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes voneinander. In Kapitel 7.3.3.1 wird mit einem linearen gemischten Modell geprüft, ob sich im Zeitraum T2 bis T4 eine signifikant bessere Lernentwicklung für den problemlöseorientierten Instruktionsansatz nachweisen lässt (Hypothese 11). Im anschließenden Kapitel 7.3.3.2 wird die experimentalgruppenspezifische Entwicklung der *Strategieadaptivität* in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme betrachtet.

7.3.3.1 Entwicklung in den Experimentalgruppen (T2–T4)

Für die Berechnung der Entwicklung der *Strategieflexibilität* nach der Intervention wurden die in Tabelle 19 (S. 141) dargestellten Prädiktoren in das Modell aufgenommen, um deren Einfluss auf die Entwicklung der abhängigen Variable zu prüfen (Hypothesen 14b,14d, 14f und 14g).

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme der allgemeinen mathematischen Leistungen (DEMAT 2^{+}), der Auffrischungsteilnahme und des Interaktionsterms Auffrischungsteilnahme*Zeit als Kovariaten im Vergleich zum Nullmodell zu einer deutlichen Verbesserung des Modellfits beiträgt ($\Delta\chi^2 = 125.77$, $\Delta df = 3$, $p < .001$).

Wie Tabelle 51 zeigt, wirkt sich die Zeit nach der Intervention tendenziell negativ auf den adaptiven Strategieeinsatz aus, d. h. die *Adaptivität* sinkt im Mittel mit zunehmendem zeitlichen Abstand zur Intervention ($\beta = -.15$, $p < .01$). Hingegen gehen höhere allgemeine mathematische Fähigkeiten (DEMAT 2^{+}) ($\beta = .63$, $p < .001$) und die Teilnahme an der Auffrischung ($\beta = .17$, $p < .05$) mit einer signifikant höheren durchschnittlichen *Strategieadaptivität* im Messzeitraum einher. Die Experimentalgruppenzugehörigkeit erweist sich weder für die mittlere *Strategieadaptivität* im Messzeitraum ($\beta = -.08$, $p > .10$) noch für die *zeitliche Entwicklung* als signifikanter Prädiktor ($\beta = -.10$, $p > .10$). D. h. die *Leistungsentwicklung* zwischen den beiden Experimentalgruppen unterscheidet sich zwischen T2 und T4 nicht signifikant.

Die Teilnahme an der Auffrischung, die zwischen T2 und T3 stattfand, wirkt sich positiv auf die *Leistungsentwicklung* der Schülerinnen und Schüler aus ($\beta = .08$, $p < .05$).

Zusammenfassend wird die *Adaptivität* wesentlich durch die allgemeinen mathematischen Leistungen, die Auffrischungsteilnahme und die Zeit beeinflusst, wobei der Zeit ein negativer Einfluss zukommt.

Auf die *Entwicklung der Adaptivität* wirken sich hingegen vor allem die Teilnahme an der Auffrischungssitzung günstig aus, während sich für die Zugehörigkeit zu einer der beiden Experimentalgruppen im betrachteten Zeitraum kein statistisch bedeutsamer Einfluss auf die *Lernentwicklung* zeigt. Die Parameterschätzer in Tabelle 51 weisen in der *Adaptivi-*

tätsentwicklung auf einen Vorteil zugunsten der problemlöseorientierten Lerngruppe hin, der jedoch nicht signifikant wird. In Abbildung 8 (S. 199) ist darüber hinaus zu erkennen, dass sich die *Entwicklung* der beiden Experimentalgruppen insbesondere zwischen T2 und T3 zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes umkehrt. Insgesamt muss Hypothese 11, nach der für die *Fähigkeitsentwicklung* im Zeitraum nach der Intervention ein Vorteil zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes erwartet wurde, abgelehnt werden.

Tabelle 51: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Adaptivität T2 bis T4

Parameter	**Adaptivität**		
	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	.13	.11	.268
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.15	.05	.004
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.63	.08	.000
Instruktionsansatz[a]	−.08	.16	.633
Auffrischungsteilnahme[b]	.17	.08	.031
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.10	.07	.163
Auffrischungsteilnahme[b]*Zeit	.08	.04	.028

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)
[b] Auffrischungsteilnahme (0 = keine Teilnahme an der Auffrischung, 1 = Teilnahme an der Auffrischung)

Allein die Auffrischungsteilnahme erweist sich im Zeitraum nach der Intervention als signifikanter Prädiktor für die *Fähigkeitsentwicklung* im adaptiven Strategieeinsatz, sodass Hypothese 14g zum Einfluss der Auffrischungsteilnahme auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* angenommen werden kann. Da alle anderen individuellen Lernermerkmale als nicht statistisch bedeutsame Prädiktoren vorab aus den Modellen entfernt wurden, können auch die Hypothesen 14d und 14f, nach denen kein Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten bzw. des Arbeitsgedächtnisses auf die *Fähigkeitsentwicklung* erwartet wurde, angenommen werden. Hingegen muss Hypothese 14b zum postulierten positiven Einfluss der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten abgelehnt werden.

Um zu prüfen, inwieweit sich die Auffrischungsteilnahme in den beiden Experimentalbedingungen unterschiedlich auswirkt, ist es nötig, die *Adaptivitätsentwicklung* beider Experimentalgruppen in Abhängigkeit von der Teilnahme zu analysieren und hierfür vier Experimentalteilgruppen zu betrachten (vgl. Erläuterungen zur Gruppenbildung in Kap. 7.2.3.2, S. 183).

7.3.3.2 Entwicklung in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme (T2–T4)

Analog zum methodischen Vorgehen in Kapitel 7.2.3.2 (S. 183) wurden zur Berechnung der Einflüsse auf die *Adaptivität* im Zeitraum nach der Intervention (T2 bis T4) diese in Abhängigkeit von der Experimentalgruppe und der Auffrischungsteilnahme in zwei separaten Modellen analysiert.

Im ersten Modell werden die Einflüsse auf die Entwicklung der *Adaptivität* zwischen den beiden Experimentalteilgruppen verglichen, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben (explizierender Ansatz $N = 28$, problemlöseorientierter Ansatz $N = 23$). In das zweite Modell werden analog dazu die beiden Experimentalteilgruppen aufgenommen, die an der Auffrischung teilgenommen haben (explizierender Ansatz $N = 13$, problemlöseorientierter Ansatz $N = 15$).

Ein Chi-Quadrat-Differenztest bestätigt, dass die Aufnahme des DEMAT 2^+ im Vergleich zum Nullmodell zu einer Verbesserung des Modellfits beiträgt ($\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_0}} = 42.50/\Delta\chi^2_{\text{Auffrisch\_1}} = 80.74$, $\Delta df = 1$, $p < .001$).

Tabelle 52: Gepoolte Schätzung fester Parameter für die Adaptivität T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme

Parameter	Adaptivität					
	keine Auffrischungsteilnahme			Auffrischungsteilnahme		
	β	*SE*	*p*	β	*SE*	*p*
Konstanter Term	−.26	.18	.153	.33	.15	.027
Zeit (in Monaten des 3. Schuljahres)	−.27	.08	.001	−.06	.07	.338
Allgemeine mathematische Leistungen (DEMAT 2^+)	.59	.14	.000	.67	.10	.000
Instruktionsansatz[a]	.10	.28	.733	−.20	.20	.316
Instruktionsansatz[a]*Zeit	−.00	.12	.968	−.15	.09	.086

[a] Instruktionsansatz (0 = problemlöseorientierter Ansatz, 1 = explizierender Ansatz)

Wie die Parameterschätzungen in Tabelle 52 zeigen, wird die *Strategieadaptivität* in den beiden Experimentalgruppen ohne Auffrischungsteilnahme im Zeitraum nach dem Treatment signifikant durch die Zeit beeinflusst. Je größer der Abstand zur Intervention, desto weniger adaptiv rechnen die Schülerinnen und Schüler ($\beta = -.27$, $p < .01$). Die mathematischen Fähigkeiten wirken sich im Messzeitraum signifikant positiv auf die mittlere *Adaptivität* aus ($\beta = .59$, $p < .001$). Die Experimentalgruppenzugehörigkeit beeinflusst weder signifikant die durchschnittliche *Adaptivität* im Zeitraum nach der Intervention ($\beta = .10$, $p > .10$) noch die *zeitliche Entwicklung der Adaptivität* ($\beta < -.01$, $p >.10$).

In den beiden Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme zeigt sich ein geringerer und nicht signifikanter Effekt der Zeit auf die *Strategieadaptivität* ($\beta = -.06$, $p > .10$), d. h. zwischen den drei Messzeitpunkten lassen sich im Zeitraum T2 bis T4 im Mittel keine signifikanten Unterschiede in der Ausprägung der *Adaptivität* nachweisen. Wie im zuvor berichteten Modell nehmen die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten am stärksten Einfluss auf die *Strategieadaptivität* ($\beta = .67$, $p <.001$). Die Experimentalgruppenzugehörigkeit wirkt sich nicht auf die mittlere *Adaptivität* der Rechenwege im Zeitraum nach der Intervention aus ($\beta = -.20$, $p >.10$), jedoch nimmt die *Strategieadaptivität* der

Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz tendenziell stärker ab als bei den Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz (β = −.15, *p* <.10). Dieser Interaktionseffekt wird allerdings nur auf dem 10 %-Niveau signifikant.

Wie Abbildung 9 zeigt, weisen die Schülerinnen und Schüler der problemlöseorientierten Experimentalteilgruppe im Zeitraum T2 bis T4, d. h. über etwa acht Monate, einen vergleichsweise konstanten adaptiven Strategieeinsatz auf. In allen anderen Experimentalteilgruppen nimmt der adaptive Strategieeinsatz hingegen mit zunehmendem zeitlichen Abstand zur Intervention ab.

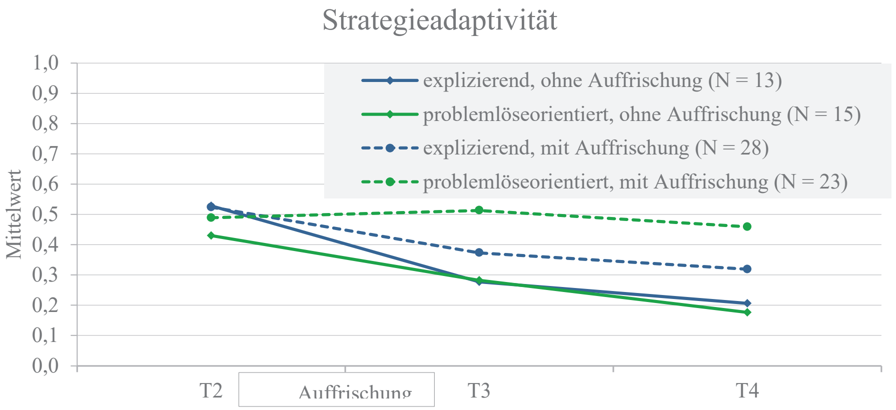


Abbildung 9: Entwicklung der Strategieadaptivität im Zeitraum T2 bis T4 in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme (geschätzte Randmittel)

7.3.4 Zusammenfassung der Ergebnisse zur Entwicklung der Strategieadaptivität

Im Folgenden werden die Ergebnisse zur *Adaptivitätsentwicklung* in den beiden Experimentalgruppen (Fragestellung 2a) und in den verschiedenen mathematischen Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler (Fragestellung 2b) sowie identifizierte Einflussfaktoren auf die *Adaptivität* (Fragestellung 2c) zusammengefasst.

Zeigen sich zwischen Schülerinnen und Schülern der beiden Instruktionsansätze Unterschiede in der adaptiven Strategieverwendung? (Fragestellung 2a)

In Kapitel 7.3 wurde dargestellt, wie sich die *Adaptivität* der beiden Experimentalgruppen während des dritten Schuljahres entwickelt. Insgesamt wird für die *zeitliche Entwicklung* erkennbar, dass die *Adaptivität* eingesetzter Strategien im Interventionszeitraum (T1–T2) zunächst deutlich ansteigt und nach der Intervention wieder absinkt (vgl. Abbildung 8, S. 199).

Für den *Lernzuwachs* im unmittelbaren Interventionszeitraum T1 bis T2 lässt sich konform zu Hypothese 10 ein signifikanter Vorteil für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes nachweisen (vgl. Tabelle 49, S. 201).

Im Zeitraum nach der Intervention kehrt sich dieser Vorteil zugunsten der Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatzes um, die im Mittel zu T3 signifikant und zu T4 auf dem 10 %-Niveau signifikant höhere Testwerte als die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz erzielen (vgl. Tabelle 47, S. 197). Dieser Gruppenunterschied in der *Entwicklung* im Zeitraum nach der Intervention wird jedoch nicht signifikant (vgl. Tabelle 51, S. 204), sodass Hypothese 11 abgelehnt werden muss.

Darüber hinaus zeigt sich jedoch in den deskriptiven Statistiken (Tabelle 47, S. 197), dass der Mittelwert des erzielten Adaptivitätsscores zum Schuljahresende (T4), d. h. nach Einführung der Normalverfahren, nicht nur in beiden Experimentalgruppen absinkt, sondern im explizierenden Ansatz dem Adaptivitätsscore zu Schuljahresbeginn (T1) entspricht und im problemlöseorientierten Ansatz nur geringfügig höher als zu T1 ausfällt. Entsprechend kann Hypothese 12, welche nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren (zwischen T3 und T4) eine Abnahme in der Adaptivität in beiden Experimentalgruppen postuliert, bestätigt werden.

Zeigen sich im Interventionszeitraum in der Entwicklung der Strategieadaptivität in den jeweiligen Leistungsgruppen Unterschiede zwischen den beiden Interventionsansätzen? (Fragestellung 2b)

Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen mit höheren mathematischen Fähigkeiten können in der *Adaptivitätsentwicklung* deutlich besser von der Intervention profitieren als Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten (vgl. Kap. 7.3.2.2).

In den beiden Experimentalgruppen erzielen Schülerinnen und Schüler der Leistungsgruppen mit geringeren mathematischen Fähigkeiten (PR < 50) zwischen Prä- und Posttest (T1–T2) einen nahezu vergleichbaren Zuwachs in der *Adaptivität* ihrer eingesetzten Strategien, welcher jedoch nur gering ausfällt (7 % im problemlöseorientierten Ansatz bzw. 8 % im explizierenden Ansatz). Zwischen den entsprechenden Leistungsgruppen mit durchschnittlichen und mit überdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten beider Unterrichtsansätze zeigt sich für den Zuwachs in der *Adaptivität* in den Mittelwerten ein deutlicher Vorteil zugunsten der Schülerinnen und Schüler des explizierenden Unterrichtsansatzes. Dabei erreichen die Schülerinnen und Schüler mit durchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten ($50 \leq PR \leq 75$) einen Zuwachs von 11 % im problemlöseorientierten Ansatz bzw. 20 % im explizierenden Ansatz, während die Schülerinnen und Schüler mit überdurchschnittlichen mathematischen Fähigkeiten (PR > 75) sogar einen Zuwachs von 25 % im problemlöseorientierten Ansatz bzw. 48 % im explizierenden Ansatz verzeichnen.

Insgesamt kann Hypothese 13, nach der für den unmittelbaren Interventionszeitraum Vorteile für alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes erwartet wurden, bestätigt werden. Einschränkend muss angemerkt werden, dass der Vorteil in der explizierenden Leistungsgruppe mit geringen mathematischen Fähigkeiten gegenüber der Referenzgruppe sehr gering ist.

Wirken sich die individuellen Lernermerkmale Intelligenz, mathematische Fähigkeiten und Arbeitsgedächtnis sowie eine Auffrischung der Lerninhalte auf die Entwicklung der adaptiven Strategieverwendung aus? (Fragestellung 2c)

Für die *Leistungsentwicklung* in der *Strategieadaptivität* während des gesamten dritten Schuljahres erweist sich die Auffrischungsteilnahme als einziger signifikanter Prädiktor (vgl. Tabelle 48, S. 198). Dabei zeigt sich in den Ergebnissen, dass eine Auffrischungsteilnahme in beiden Experimentalgruppen zu höheren Adaptivitätsscores zu T3 und T4 führt (vgl. Abbildung 9, S. 206). Werden die Lernverläufe im Zeitraum nach der Intervention nicht nur für die beiden Experimentalgruppen, sondern zusätzlich auch in Abhängigkeit von der Auffrischungsteilnahme betrachtet, wird deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes mit Auffrischungsteilnahme die beste *Lernentwicklung* aufweisen. In dieser Gruppe wird im ersten Follow-up-Test (T3) sogar ein leicht höherer mittlerer Adaptivitätsscore als im Posttest (T2) erreicht. Der beschriebene Vorteil in der *Entwicklung* gegenüber der explizierenden Experimentalteilgruppe ist auf dem 10 %-Niveau signifikant (vgl. Tabelle 52, S. 205). In den beiden Experimentalteilgruppen, die nicht an der Auffrischung teilgenommen haben, lassen sich hingegen keine signifikanten Entwicklungsunterschiede in der *Adaptivität* nachweisen.

Für den unmittelbaren Interventionszeitraum (T1–T2) und damit das experimentelle Treatment zeigt sich, dass in beiden Gruppen sowohl höhere mathematische Leistungen als auch höhere kognitive Grundfähigkeiten mit einem höheren *Lernzuwachs* in der *Adaptivität* einhergehen (vgl. Tabelle 49, S. 201). Hypothese 14a, nach der im Interventionszeitraum ein positiver Einfluss der allgemeinen mathematischen Leistungen auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* erwartet wurde, kann folglich angenommen werden. Hypothese 14c, welche keinen Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* postulierte, muss hingegen verworfen werden. Das Arbeitsgedächtnis wurde als nicht signifikanter Prädiktor aus dem Modell entfernt, sodass Hypothese 14e, nach der kein Einfluss des Arbeitsgedächtnisses auf die *Fähigkeitsentwicklung* erwartet wurde, angenommen werden kann. Insgesamt geben die standardisierten Parameterschätzer des linearen gemischten Modells im Interventionszeitraum (vgl. Tabelle 49, S. 201.) jedoch Hinweis darauf, dass die Experimentalgruppenzugehörigkeit einen wesentlich höheren Einfluss auf den *Zuwachs* in der *Strategieadaptivität* als die mathematischen Fähigkeiten oder die Intelligenz hat.

Im Zeitraum nach der Intervention erweisen sich mit Ausnahme der Auffrischungsteilnahme (Hypothese 14g) weder die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten (Hypothese 14b), noch die kognitiven Grundfähigkeiten (Hypothese 14d) oder die Arbeitsgedächtnisleistung (Hypothese 14f) als bedeutsame Prädiktoren für die *Lernentwicklung in der Strategieadaptivität*.

Tabelle 53 gibt einen Überblick über die in der vorliegenden Arbeit geprüften Hypothesen zur *Strategieadaptivität* und die dazugehörigen Ergebnisse.

Tabelle 53: Übersicht über die Beantwortung der Hypothesen zur Strategieadaptivität[10]

	Strategieadaptivität (Fragestellung 2)	
	Experimentalgruppenunterschiede (Fragestellung 2a)	
H10	Es wird angenommen, dass sich das Strategierepertoire durch eine explizite Strategievermittlung während der 4-tägigen Intervention schneller als durch informelle Strategieentwicklung aufbaut. Da das Strategierepertoire die Grundlage für einen adaptiven Strategieeinsatz darstellt, werden in der *Strategieadaptivität* kurzfristig Vorteile für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes erwartet.	✓
H11	Da sich eine Zahlenblickschulung nachhaltig auf die Förderung des konzeptuellen Wissens auswirken sollte, welches die Basis für die Entwicklung von Verkürzungsstrategien und deren adaptiven Einsatz darstellt, wird für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes langfristig eine höhere *Adaptivität* als durch die Förderung in einem explizierenden Ansatz erwartet.	–
H12	Für beide Experimentalgruppen wird angenommen, dass die Einführung der schriftlichen Normalverfahren im zweiten Schulhalbjahr dazu führt, dass diese am Ende des Schuljahres (letzter Follow-up-Test) schematisch anstelle von halbschriftlichen Strategien und somit auch anstelle von Verkürzungsstrategien angewendet werden, was sich negativ auf die *Adaptivität* der Lösungswege in beiden Experimentalgruppen auswirken sollte.	✓
	Experimentalgruppenunterschiede innerhalb der einzelnen Leistungsgruppen (Fragestellung 2b)	
H13	Es wird erwartet, dass alle Leistungsgruppen des explizierenden Ansatzes kurzfristig eine höhere *Strategieadaptivität* als die entsprechenden Leistungsgruppen des problemlöseorientierten Ansatzes zeigen.	✓
	Individuelle Lernermerkmale (Fragestellung 2c)	
H14	Es wird erwartet, dass sich die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten kurzfristig im Interventionszeitraum (H14a)	✓
	sowie langfristig im Zeitraum nach der Intervention (H14b) positiv auf die *Entwicklung der Adaptivität* auswirken.	–
	Für die Intelligenz wird sowohl kurzfristig (H14c)	–
	als auch langfristig (H14d) kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* erwartet.	✓
	Auch für das Arbeitsgedächtnis wird angenommen, dass sich kurzfristig (H14e)	✓
	und langfristig (H14f) kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* zeigt.	✓
	Für die Auffrischungssitzungen wird angenommen, dass sich die Teilnahme daran langfristig förderlich auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* auswirkt (H14g).	✓

[10] ✓ Hypothese kann angenommen werden, – Hypothese muss verworfen werden

8 Diskussion

In den folgenden Abschnitten werden die Befunde der vorliegenden Arbeit zusammenfassend dargestellt, interpretiert und in den bestehenden Forschungsstand eingeordnet (Kap. 8.1). Anschließend werden die Grenzen der Untersuchung und der durchgeführten Analysen aufgezeigt (Kap. 8.2) bevor abschließend die Relevanz für den Mathematikunterricht sowie Anknüpfungspunkte für weitere Forschungsvorhaben dargestellt werden (Kap. 8.3).

8.1 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Da sich zwischen den Schülerinnen und Schülern der beiden Experimentalgruppen in den kurzfristigen und langfristigen Lernentwicklungen Unterschiede feststellen lassen, werden die Ergebnisse im Folgenden für den unmittelbaren Messzeitraum (Kap. 8.1.1), den Messzeitraum nach der Intervention (Kap. 8.1.2) sowie für den Messzeitpunkt nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren (Kap. 8.1.3) getrennt dargestellt und diskutiert. Zusätzlich werden in den Unterkapiteln für die jeweiligen Messzeiträume relevante Einflussfaktoren auf die Strategieverwendung und ihre Entwicklung beschrieben.

8.1.1 Lernentwicklung im Interventionszeitraum (T1–T2)

Im Interventionszeitraum zeigt sich in beiden Experimentalgruppen in der *Strategieflexibilität*, der *Verwendung von Verkürzungsstrategien* und der *Strategieadaptivität* ein deutlicher Lernzuwachs. Damit eignen sich grundsätzlich beide Instruktionsansätze, um die *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* bei der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000 zu fördern. Zu keinem anderen Zeitpunkt im dritten Schuljahr als direkt nach der Intervention im Oktober werden in der *Strategieflexibilität,* dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und in der *Strategieadaptivität* höhere Testwerte erreicht.

Wenngleich Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen im Interventionszeitraum in den abhängigen Variablen im Mittel einen hohen Lernzuwachs erzielen können, so unterscheidet sich die *Lernentwicklung* zugunsten des explizierenden Unterrichtsansatzes. Unterschiedliche Entwicklungsverläufe, Einflussfaktoren und vorwissensabhängige Unterschiede im Lernzuwachs werden im Folgenden zusammengefasst und in die bestehende Forschungslage eingeordnet.

8.1.1.1 Experimentalgruppenunterschiede in der Fähigkeitsentwicklung

Werden ausschließlich die Fähigkeiten zum Einsatz *unterschiedlicher Strategien* (vgl. Tabelle 26, S. 154), zum Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 27, S. 154) und zum *adaptiven Strategieeinsatz* (vgl. Tabelle 47, S. 197) am Ende der Intervention (T2) betrachtet, so zeigen sich keine signifikanten Experimentalgruppenunterschiede. Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass sich die Experimentalgruppen, wie in der Stichprobenbeschreibung deutlich gemacht wurde, bereits vor der Intervention in ihren Lernvoraussetzungen unterscheiden (vgl. Kap. 6.6). Für die überwiegende Zahl der in der vorliegenden Arbeit behandelten Fragestellungen und Hypothesen steht die *Lernentwicklung* im Interventionszeitraum (T1–T2) im Zentrum, bei der die oben beschriebenen Unterschiede in den Lernvoraussetzungen kontrolliert werden können.

Der auf deskriptiver Ebene erkennbare Experimentalgruppenunterschied im *Zuwachs an verwendeten, unterschiedlichen Strategien* (vgl. Tabelle 26, S. 154) wird im Interventionszeitraum in den parametrischen Analysen nicht signifikant (vgl. Tabelle 38, S. 176). Dabei bezieht sich der gemessene Zuwachs allein auf die reine Anzahl genutzter, verschiedener Strategien, wie sie im Projekt auf Grundlage des eingesetzten Strategiemanuals gemessen wurde. Damit muss Hypothese 1a, nach der am Ende der Intervention im explizierenden Instruktionsansatz ein größeres *Strategierepertoire* als im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz erwartet wurde, zurückgewiesen werden.

Das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 1b, Tabelle 39, S. 177) und die *Adaptivität* (Hypothese 10, Tabelle 49, S. 201) entwickeln sich im Interventionszeitraum im explizierenden Ansatz jedoch hypothesenkonform signifikant besser als im problemlöseorientierten Ansatz.

Weitere Aussagen über die Qualität eingesetzter Strategien lassen sich anhand der in den Strategietests und in der *Post für den Tiger* genutzten Strategien treffen. Für beide Experimentalgruppen werden dabei auf unterschiedlichen Ebenen des Strategieerwerbs Vorteile deutlich. Je differenzierter die verwendeten Strategien betrachtet werden, desto mehr Unterschiede finden sich zwischen den Experimentalgruppen. Schülerinnen und Schülern des explizierenden Ansatzes gelingt es während und unmittelbar nach der Intervention die im Unterrichtsansatz eingeführten Strategien zu verwenden. Wie bereits in der Herleitung der Hypothesen dargestellt wurde, kann basierend auf Erkenntnissen der Cognitive-Load-Theorie angenommen werden, dass durch prozedurale Vermittlung der zentralen halbschriftlichen Rechenstrategien – insbesondere der relevanten *Verkürzungsstrategien* – diese in Verbindung mit konditionalem Strategiewissen in einer 4-tägigen Intervention schneller vermittelt als selbst generiert werden können. Dies zeigt sich auch in den im Mittel erreichten Leistungszuwächsen in Abhängigkeit vom mathematischen Vorwissen, die für alle abhängigen Variablen im Interventionszeitraum im explizierenden Ansatz höher als im problemlöseorientierten Ansatz ausfallen (vgl. Kap. 8.1.1.2). Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz brauchen hingegen länger, um anspruchsvolle Strategien wie die Veränderungsstrategie selbst zu entwickeln. Dabei generieren die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes nicht zwangsläufig dieselben Strategien, die im explizierenden Unterrichtsansatz vorgegeben und genutzt werden.

Zugleich finden sich in den verwendeten Strategien Hinweise auf ein besseres zugrunde liegendes konzeptuelles Verständnis bei der Generierung eigener Strategien im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz. Dies ist beispielsweise daran erkennbar, dass Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz innerhalb der eingesetzten Universalstrategien seltener auf das *stellenweise Verfahren* zurückgreifen, sondern vorwiegend das *schrittweise Verfahren* verwenden. Dies ist aus mathematikdidaktischer Sicht bemerkenswert, denn die Strategie *Schrittweise* stellt für alle Aufgaben eine geeignete Universalstrategie dar, während die Strategie *Stellenweise* für Subtraktionsaufgaben mit Überträgen ein hohes Fehlerpotential aufweist. In über 90 % der verwendeten *stellenweisen Lösungen* bei Subtraktionsaufgaben gelangen die Schülerinnen und Schüler zu einem falschen Ergebnis (vgl. Tabelle 30, S. 161 und Tabelle 35, S. 169). Die Thematisierung des *stellenweisen Verfahrens* im explizierenden Ansatz könnte folglich dazu verleitet haben, diese Strategie zu nutzen, während die Strategie im problemlöseorientierten Ansatz von den Schülerinnen und Schülern zugunsten des *schrittweisen Verfahrens* vernachlässigt wurde. Da die Verwendung des *stellenweisen Verfahrens* bei Subtraktionsaufgaben zu Fehlkonzepten führen kann, wird deren Thematisierung im Unterricht in der mathematikdidaktischen Literatur kontrovers diskutiert (Padberg & Benz, 2011). In der Studie von Blöte et al. (2000) wurde die Strategie aus diesem Grund erst nach der Einführung aller anderen Strategien und ausschließlich für den Gebrauch bei Additionsaufgaben behandelt.

Auch bei der Lösung von Subtraktionsaufgaben mit geringem Zahlenabstand (z. B. 701 − 698) zeigen sich kleine, aber bedeutsame Unterschiede zwischen den Experimentalgruppen. Insgesamt werden im Posttest in 21 % aller Lösungen in der explizierenden Lerngruppe und in 12 % der Lösungen in der problemlöseorientierten Lerngruppe Strategien zur Abstandsbestimmung eingesetzt. Damit wird die Strategie in beiden Experimentalgruppen wesentlich häufiger als in der Studie von De Smedt et al. (2010) genutzt, in der die Schülerinnen und Schüler – ähnlich zu den Instruktionsbedingungen im explizierenden und problemlöseorientierten Ansatz – entweder explizit oder nur implizit zur Verwendung der *indirekten Addition* angeregt wurden. Dabei verwendeten die Schülerinnen und Schüler in der Studie von De Smedt et al. (2010) in der impliziten Lernbedingung zu keinem Messzeitpunkt die *indirekte Addition*, während die Strategie in der expliziten Lernbedingung zu zwei Messzeitpunkten in der Interventionsphase in 6 % bzw. 11 % der Lösungen und einen Monat später in 10 % der Lösungen im Test eingesetzt wurde. Hierbei ist zu beachten, dass sich der Anteil der Strategien zur Abstandsbestimmung in den hier vorgestellten Daten auf den Strategietest insgesamt bezieht, während in der Studie von De Smedt et al. (2010) nur Subtraktionsaufgaben als Testaufgaben eingesetzt wurden, d. h. dort die Strategie potentiell für alle Aufgaben hätte angewendet werden können. Auch in anderen Studien wurden die Strategien im dritten Schuljahr vergleichsweise selten genutzt (Selter, 2000; Torbeyns et al., 2009a).

Einerseits zeigen die Ergebnisse konform mit den Befunden von De Smedt et al. (2010), dass die Verwendung der *indirekten Addition* bzw. *indirekten Subtraktion* durch eine explizite Strategievermittlung besser als durch implizite Strategieförderung angeregt werden kann. Andererseits lässt sich anhand der eingesetzten Strategien vermuten, dass die Strategieverwendung im problemlöseorientierten Ansatz stärker konzeptuell fundiert ist. Die Schülerinnen und Schüler subtrahierten dort bei Aufgaben mit geringem Abstand häufiger als im explizierenden Ansatz indirekt (701 – x = 698) oder ermittelten den Abstand zwischen den beiden Zahlen. Im explizierenden Ansatz verwendeten die Schülerinnen und Schüler vorwiegend die *indirekte Addition*, d. h. das klassische Ergänzungsverfahren (698 + x = 701). In Anlehnung an verschiedene Befunde zur Nutzung der *indirekten Addition* (De Smedt et al., 2010; Torbeyns et al., 2016), lässt sich vermuten, dass das Ergänzungsverfahren im explizierenden Ansatz zwar von den Schülerinnen und Schülern auf ähnliche Aufgabentypen übertragen werden konnte, jedoch die zugrunde liegende Komplementbildung teilweise nicht verstanden wurde. Dafür spricht auch, dass die Nutzung der Strategie in der explizierenden Lerngruppe in den Follow-up-Tests stark zurückgeht, wie in Abschnitt 8.1.2 noch ausführlicher erläutert wird.

Die Analysen des Aufgabenformats *Post für den Tiger* verdeutlichen außerdem, dass Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz vorwiegend diejenigen Strategien einsetzen, welche am jeweiligen Unterrichtstag der Intervention eingeführt und behandelt wurden. Wie erwartet, verwenden die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz *Verkürzungsstrategien* für die Addition (Hypothese 4a) und die Subtraktion (Hypothese 4b) erst nach deren Einführung.

Im problemlöseorientierten Ansatz, in welchem Strategien selbstentwickelt und auf ähnliche Aufgabenstellungen übertragen werden müssen, nimmt der Einsatz von *Verkürzungsstrategien* während der Intervention hingegen für Additionsstrategien hypothesenkonform sukzessive zu (Hypothese 5a), während sich bei der Verwendung von *Verkürzungsstrategien* für die Subtraktionsstrategien zunächst eine Abnahme und anschließend eine Zunahme konstatieren lässt, sodass Hypothese 5b abgelehnt werden muss. Dass sich das *Strategierepertoire* im explizierenden Ansatz signifikant zwischen den drei Interventionstagen unterscheidet, während sich dieser deutliche Unterschied im problemlöseorientierten Ansatz nicht zeigt, kann als Hinweis darauf gewertet werden, dass sich die Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz stark an sozio-mathematischen Normen zu orientieren.

Im folgenden Abschnitt wird zusammenfassend dargestellt, welche Rolle dem mathematischen Vorwissen für den Strategieerwerb in den beiden Experimentalbedingungen zukommt.

8.1.1.2 Vorwissensabhängige Unterschiede in der Strategie- und Adaptivitätsentwicklung

Das mathematische Vorwissen besitzt im Interventionszeitraum die höchste Vorhersagekraft dafür, wie viele unterschiedliche Strategien die Schülerinnen und Schüler im Untersuchungszeitraum im Mittel einsetzen, ob verschiedene *Verkürzungsstrategien* eingesetzt und diese adaptiv verwendet werden. Dies deckt sich mit den Befunden vieler anderer Studien, die in Kapitel 3.4 ausführlich vorgestellt wurden (Torbeyns et al., 2009a; Torbeyns et al., 2017).

Wie bereits im vorigen Abschnitt dargestellt, zeigt sich für die *Entwicklung der Strategieflexibilität* (vgl. Tabelle 38, S. 176), dass Schülerinnen und Schüler unabhängig von ihrem mathematischen Vorwissen einen vergleichbaren *Zuwachs an Strategien* aufweisen. Es gelingt ihnen folglich, ihr *Strategierepertoire* (Anzahl genutzter Strategien) in der Intervention unabhängig vom mathematischen Vorwissen zu erweitern, sodass Hypothese 8a zum erwarteten positiven Einfluss des mathematischen Vorwissens auf *das Strategierepertoire* abgelehnt werden muss. Für die Intelligenz (Hypothese 8c) und das Arbeitsgedächtnis (Hypothese 8e) lässt sich hypothesenkonform ebenso kein Einfluss auf die *Entwicklung der Strategieflexibilität* nachweisen.

Für die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 39, S. 177) erweisen sich im Interventionszeitraum die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten hypothesenkonform (Hypothese 9a) als stärkster Prädiktor, während sich die Intelligenz (Hypothese 9c) und das Arbeitsgedächtnis (Hypothese 9e) nicht signifikant auf die *Fähigkeitsentwicklung* auswirken und daher als Prädiktoren aus dem Modell entfernt wurden. Da Schülerinnen und Schüler mit geringerem Vorwissen zunächst grundlegende Universalstrategien entdecken und nutzen und die *Verkürzungsstrategien* (insbesondere im explizierenden Unterrichtsansatz) erst am Ende der Intervention oder (im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz) zu keinem Zeitpunkt der Intervention verwenden, weisen sie in beiden Experimentalgruppen einen niedrigeren *Zuwachs* in den *Verkürzungsstrategien* als Schülerinnen und Schüler mit höherem mathematischen Vorwissen auf (vgl. Tabelle 32, S. 165). Dieses Ergebnis wurde bereits in verschiedenen Befunden zum Einsatz von *Verkürzungsstrategien* im routineorientierten Unterricht beschrieben (vgl. Kap. 3.4.1.4). Auch dem Strategiewahlmodell liegt die Annahme zugrunde, dass die Wahrscheinlichkeit für die Nutzung effizienter, fortgeschrittener Rechenstrategien in Abhängigkeit von der latenten Fähigkeit steigt (Van der Ven et al., 2012).

Auf den *Lernzuwachs* in der *Strategieadaptivität* (vgl. Tabelle 49, S. 201) im unmittelbaren Interventionszeitraum wirken sich die allgemeinen mathematischen Leistungen (Hypothese 14a) und die kognitiven Grundfertigkeiten (Hypothese 14c) in vergleichbarer Höhe positiv aus. Der Einfluss der allgemeinen mathematischen Fähigkeiten auf die *Entwicklung der Strategieadaptivität* ist unter anderem dadurch zu erklären, dass die *Verkürzungsstrategien* auch diejenigen Strategien darstellen, die zu hohen Testwerten in der *Adaptivität* führen. Wie in der Studie von Luwel et al. (2011) waren Schülerinnen und Schüler mit höheren kognitiven Fähigkeiten besser in der Lage, ihre Strategien den Aufgabenkriterien anzupassen. Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich in ihrer *Strategieentwicklung* im Interventionszeitraum folglich insbesondere darin, *welche* Strategien dazugelernt werden und wie diese Strategien an Aufgabenkriterien angepasst werden können. Die Ergebnisse stützen somit Befunde, welche Vorteile von Experten gegenüber Novizen in der Strategieverwendung allein aus aufgabenkriterieller Perspektive, d. h. in der Passung der Strategien zu Aufgabenkriterien, beschreiben (Heirdsfield & Cooper, 2004; Verschaffel et al., 2011).

Die Ergebnisse zum Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten auf die Strategieverwendung bestätigen insgesamt Forschungsbefunde, nach denen für die Intelligenz im Vergleich zum mathematischen Vorwissen kein oder nur ein geringer Einfluss nachgewiesen werden konnte (Kroesbergen & Van Luit, 2003; Torbeyns et al., 2017). Das Arbeitsgedächtnis wurde in den Modellen für die *Strategieadaptivität* (Hypothese 14e), für die *Strategieflexibilität* (Hypothese 8e) und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 9e) als nicht signifikanter Prädiktor ausgeschlossen. Auch in anderen Studien zeigte sich kein Einfluss des Arbeitsgedächtnisses auf den mathematischen *Lernzuwachs* (LeFevre et al., 2013; Van der Ven et al., 2012).

In Abhängigkeit vom Vorwissen werden darüber hinaus experimentalgruppenspezifische Unterschiede in der Strategieentwicklung erkennbar. Im explizierenden Unterrichtsansatz können Schülerinnen und Schüler aller Leistungsgruppen im Interventionszeitraum (T1–T2) hypothesenkonform einen größeren *Zuwachs im Strategierepertoire* (Hypothese 6, Tabelle 31, S. 164) im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* (Hypothese 7, Tabelle 32, S. 165) und in der *Strategieadaptivität* (Hypothese 13, Tabelle 50, S. 202) erzielen als in den jeweiligen Referenzgruppen des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes. Einschränkend muss angemerkt werden, dass diese Hypothesen nur auf deskriptiver Ebene der Daten geprüft wurden. Der explizierende Instruktionsansatz ist in seiner Konzeption darauf ausgerichtet, dass alle Schülerinnen und Schüler, d. h. auch Schülerinnen und Schüler mit weniger ausgeprägtem Zahl- und Operationswissen, in kurzer Zeit ein großes *Strategierepertoire* erwerben. Durch die prozedurale Vermittlung der fünf idealtypischen halbschriftlichen Rechenstrategien zusammen mit konditionalem Wissen werden diese Strategien am Ende der Intervention von einer größeren Zahl an Schülerinnen und Schüler verwendet als durch implizite Strategieanregung.

Zusammenfassend geben die Ergebnisse einen differenzierten Einblick in den vorwissensabhängigen Strategieerwerb. In der Literatur ist eine Kontroverse zwischen zwei Positionen festzustellen. Dabei wird entweder postuliert, dass der Erwerb fortgeschrittener Strategien und deren adaptive Anwendung mit geringen mathematischen Kenntnissen nur begrenzt möglich sei (Padberg & Benz, 2011; Radatz et al., 1998; Schipper, 2009) oder, dass der Erwerb lediglich zeitverzögert verläuft (vgl. Befunde in Kap. 3.4.1.4). Die hier geschilderten Befunde zeigen, dass in Abhängigkeit von der Höhe des mathematischen Vorwissens im Interventionszeitraum (T1–T2) mehr *Verkürzungsstrategien* dazugelernt werden (vgl. Tabelle 39, S. 177) und diese adaptiver eingesetzt werden können (vgl. Tabelle 49, S. 201). Für den Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) lässt sich hingegen kein Einfluss des mathematischen Vorwissens auf die *Lernentwicklung* in allen drei abhängigen

Variablen feststellen (vgl. Kap. 8.1.2). Da die Strategieverwendung in der Kontrollgruppe nahelegt, dass *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* bei den Experimentalgruppenschülerinnen und -schülern nicht im Zentrum des regulären Mathematikunterrichts standen (Heinze et al., 2018), ist unklar, ob der Einfluss des mathematischen Vorwissens für die *Lernentwicklung* im Interventionszeitraum ggf. geringer ausfallen würde, wenn die Interventionsinhalte über einen längeren Zeitraum im regulären Mathematikunterricht implementiert worden wären. Die Annahme, dass die Implementierung über einen längeren Zeitraum vielversprechend sein könnte, beruht auch auf dem Ergebnis, dass die Experimentalgruppenzugehörigkeit im Interventionszeitraum T1 bis T2 für die *Entwicklung der Stategieflexibilität* (vgl. Tabelle 38, S. 176) und die *Entwicklung der Strategieadaptivität* (vgl. Tabelle 49, S. 201) eine größere bzw. für die *Entwicklung des Repertoires an Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 39, S. 177) eine vergleichbare Vorhersagekraft wie die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten und die kognitiven Grundfähigkeiten besitzt.

Wird die Entwicklung für den Zeitraum nach der Intervention betrachtet, so zeigen sich für das *Strategierepertoire* und das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz stabilere Lernergebnisse als im explizierenden Ansatz. Mögliche Ursachen hierfür werden im folgenden Abschnitt erläutert.

8.1.2 Lernentwicklung nach der Intervention (T2–T4)

Im Zeitraum nach der Intervention ist in beiden Experimentalgruppen ein Rückgang in den Fähigkeiten zur flexiblen und adaptiven Strategiewahl festzustellen. Insgesamt erweist sich jedoch der in der problemlöseorientierten Lerngruppe erzielte Lernzuwachs als nachhaltiger, wie im folgenden Abschnitt näher dargestellt wird (Kap. 8.1.2.1). Darüber hinaus wird auf die Bedeutung der Auffrischung und experimentalgruppenspezifische Unterschiede in der Strategieverwendung eingegangen (Kap. 8.1.2.2).

8.1.2.1 Experimentalgruppenunterschiede in der Fähigkeitsentwicklung

Im explizierenden Ansatz ist der Einsatz von *Verkürzungsstrategien* nach der Intervention stark rückläufig, sodass zu T3 und T4 deutlich weniger *Verkürzungsstrategien* als im problemlöseorientierten Ansatz eingesetzt werden. Auch die Ergebnisse der linearen gemischten Modelle stützen die bereits deskriptiv erkennbaren Gruppenunterschiede, sodass sowohl für die *Strategieflexibilität* (vgl. Tabelle 41, S. 181) als auch für die Verwendung von *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 42, S. 182) eine signifikant nachhaltigere *Lernentwicklung* im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz konstatiert werden kann. Somit müssen die Hypothesen 2a und 2b, in welchen für den Zeitraum nach der Intervention keine experimentalgruppenspezifisch unterschiedlichen *Entwicklungen im Strategierepertoire* postuliert wurden, zurückgewiesen werden.

Hypothese 11, nach der für den problemlöseorientierten Ansatz eine höhere *Adaptivität* im Zeitraum nach der Intervention erwartet wurde, wird zwar durch den zu T3 auf dem

5 %-Niveau signifikanten und zu T4 auf dem 10 %-Niveau signifikanten Gruppenunterschied gestützt (vgl. Tabelle 47, S. 197), jedoch zeigt sich zugleich keine signifikant unterschiedliche *Fähigkeitsentwicklung* im Zeitraum nach der Intervention (vgl. Tabelle 51, S. 204), sodass die Hypothese abgelehnt werden muss. Abbildung 8 (S. 199) verdeutlicht darüber hinaus, dass sich die *Fähigkeitsentwicklung* der beiden Experimentalgruppen in der *Strategieadaptivität* insbesondere zwischen T2 und T3 zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes umkehrt und sich anschließend im Zeitraum T3 bis T4 eine parallele Entwicklung abzeichnet.

Während sich das *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und die *Strategieadaptivität* im unmittelbaren Interventionszeitraum im explizierenden Ansatz schneller als im problemlöseorientierten Ansatz aufbauen, ist der am Ende der Intervention im problemlöseorientierten Ansatz erzielte Lernzuwachs im Zeitraum nach der Intervention nachhaltiger verfügbar. Dies ist konform mit Befunden zur Wirksamkeit des Generierungseffekts, der in einigen Studien zwar bereits im Post-Test, in der Mehrzahl der Studien jedoch erst in den Follow-up-Tests nachgewiesen werden konnte (zusf. Chen et al., 2016).

Für die Nachhaltigkeit spielt auch die Teilnahme an der Auffrischung eine bedeutende Rolle, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird.

8.1.2.2 Einfluss der Auffrischungsteilnahme auf die Strategie- und Adaptivitätsentwicklung

Für den Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) erweist sich neben der Experimentalgruppenzugehörigkeit die Auffrischungsteilnahme unter den einbezogenen Prädiktoren für die *Fähigkeitsentwicklung* im *Strategierepertoire* (vgl. Tabelle 41, S. 181), im Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 42, S. 182) und in der *adaptiven Strategieverwendung* (vgl. Tabelle 51, S. 204) als einziger signifikanter Prädiktor. Die Hypothesen 8g, 9g und 14g, nach denen im Zeitraum nach der Intervention ein positiver Einfluss der Auffrischung auf die *Entwicklung* in allen drei abhängigen Variablen erwartet wurde, können somit bestätigt werden.

Weder die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten (Hypothesen 8b, 9b, 14b) noch die Intelligenz (Hypothesen 8d, 9d, 14d) oder das Arbeitsgedächtnis (Hypothesen 8f, 9f, 14f) wirken sich in den drei Analysen hingegen auf die *Fähigkeitsentwicklung* aus und wurden daher als Prädiktoren aus den Modellen entfernt, um diese sparsamer zu halten.

Im Zeitraum T2 bis T4 entwickeln sich die Experimentalteilgruppen mit Auffrischungsteilnahme im *Strategierepertoire* (vgl. Tabelle 44, S. 184) und in der *Strategieadaptivität* (vgl. Tabelle 52, S. 205) auf dem 10 %-Niveau signifikant unterschiedlich zugunsten der problemlöseorientierten Lerngruppe. Diese Teilgruppe kann nach der Intervention ihr zu T2 gezeigtes *Repertoire an Strategien* besser erhalten und Strategien adaptiver einsetzen als die explizierende Experimentalteilgruppe. Der Unterschied in der *Entwicklung von Verkürzungsstrategien* (vgl Tabelle 45, S. 186) wird hingegen nicht signifikant. Jedoch lässt sich zwischen den Experimentalteilgruppen ohne Auffrischungsteilnahme im

Repertoire an Verkürzungsstrategien ein Vorteil zugunsten des problemlöseorientieren Ansatzes erkennen. Dieser Gruppe gelingt es trotz fehlender Auffrischung im Zeitraum nach der Intervention häufiger als der explizierenden Vergleichsgruppe *Verkürzungsstrategien* anzuwenden.

Die Befundlage, dass sich Auffrischungen positiv auf die Nachhaltigkeit von Trainings im schulischen Kontext auswirken (Möller & Appelt, 2001; Souvignier & Trenk-Hinterberger, 2010), wird durch die hier dargestellten Ergebnisse gestützt. Auch in der Studie von Souvignier und Trenk-Hinterberger (2010) profitierten insbesondere diejenigen Schülerinnen und Schüler nachhaltig von einem Programm zur Selbstregulation, die an einer Auffrischung teilgenommen hatten, wobei diese Gruppe im Vergleich zur Gruppe ohne Auffrischungssitzung ihre Leistung sogar noch steigern konnte. Auch die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes, die an der Auffrischung teilgenommen haben, können ihre Leistungen in allen drei abhängigen Variablen im Follow-up-Test 1 (einen Monat nach der Auffrischung) im Vergleich zum Posttest sogar noch verbessern, während dies der explizierenden Vergleichsgruppe nicht gelingt (vgl. Abbildung 6, S. 185, Abbildung 7, S. 187 und Abbildung 9, S. 206). Sowohl in der Studie von Souvignier und Trenk-Hinterberger (2010) als auch in der hier beschriebenen Studie haben die Teilgruppen ohne Auffrischung jedoch kein äquivalentes Zeitintervall an zusätzlicher Lernzeit erhalten, sodass die Frage aufgeworfen wird, ob die positiven Effekte beider Studien nicht ausschließlich auf die zusätzliche Lernzeit zurückgeführt werden können. In den hier beschriebenen Ergebnissen zeigt sich jedoch, dass sich die Auffrischungsteilnahme in den beiden Experimentalgruppen unterschiedlich auswirkt, sodass neben der zusätzlich zur Verfügung stehenden Lernzeit dem Auffrischungsinhalt eine bedeutende Rolle beigemessen werden muss.

Insgesamt scheint der problemlöseorientierte Unterrichtsansatz somit zu nachhaltigeren Lernergebnissen als der explizierende Ansatz zu führen. Darüber hinaus kann die Nachhaltigkeit durch eine Auffrischung im problemlöseorientierten Ansatz besser als im explizierenden Ansatz gefördert werden. Hierfür gibt es verschiedene Erklärungsansätze. Das *Strategierepertoire* wird in beiden Instruktionsansätzen auf unterschiedliche Weise aufgebaut. Während im explizierenden Ansatz die relevanten Hauptstrategien in nur vier Interventionstagen eingeführt und zusammen mit konditionalem Wissen vermittelt werden, setzt der problemlöseorientierte Ansatz auf eine intensive Zahlenblickschulung. Neue Strategien können also im problemlöseorientierten Ansatz nur durch Erkennen und Nutzen von Zahleigenschaften für den Lösungsprozess bzw. den Transfer ähnlicher Lösungsstrategien auf vergleichbare Aufgabenstellungen in das *Strategierepertoire* aufgenommen werden und erfordern somit konzeptuelles Wissen aufseiten der Schülerinnen und Schüler. Die Generierungsprozesse im problemlöseorientierten Ansatz bedürfen vermutlich ausreichend Anwendungsmöglichkeiten und nehmen hierdurch eine längere Lernzeit in Anspruch als wenn Strategien prozedural vorgegeben werden. Wie in Kapitel 3.3.4 beschrieben, könnte die im problemlöseorientierten Ansatz integrierte Diskussion über Zahl- und Aufgabeneigenschaften auch als metastrategische Wissensförderung betrachtet werden, welche nachhaltig auf das konzeptuelle Wissen der Schülerinnen und Schüler wirkt, während prozedural vermittelte Strategien, die im regulären Mathematikunterricht nicht geübt und verwendet werden, nicht mehr aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Durch die Zahlenblickschulung im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz könnten auch selbstregulative Fähigkeiten trainiert werden, welche die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, Aufgabencharakteristika für den Strategiegenerierungsprozess zu nutzen und den Lösungsprozess zu überwachen. Auch soziomathematische Normen könnten für die Schülerinnen und Schüler des explizierenden Ansatzes eine größere Rolle als für die Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes gespielt haben. Möglich ist beispielsweise, dass Schülerinnen und Schüler im explizierenden Ansatz die jeweils aktuell im Unterricht behandelten Strategien (teilweise ohne Reflexion) übernommen und angewendet haben, während Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Ansatzes auch im regulären Unterricht nach der Intervention auf ihre Generierungsfähigkeiten vertraut haben.

Wenngleich sich die Auffrischung positiv auf die *Fähigkeitsentwicklung* beider Experimentalgruppen im Zeitraum nach der Intervention auswirkt, so zeigt diese im Vergleich zur Experimentalgruppenzugehörigkeit einen deutlich geringeren Einfluss auf die *Lernentwicklung in der Strategieflexibilität* (vgl. Tabelle 41, S. 181), im Einsatz von *Verkürzungsstrategien* (vgl. Tabelle 42, S. 182) und in der *adaptiven Strategieverwendung* (vgl. Tabelle 51, S. 204).

Im folgenden Kapitel wird dargestellt und diskutiert, wie sich die *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* der Schülerinnen und Schüler beider Experimentalgruppen nach der Einführung der Normalverfahren verändert.

8.1.3 Strategieflexibilität und -adaptivität nach der Einführung der Normalverfahren (T4)

Da die *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* nach der Einführung der Normalverfahren bereits in vielen anderen Studien im Fokus stand, bieten sich zur Interpretation der hier dargestellten Befunde viele Referenzen. In den teilnehmenden Klassen der in dieser Arbeit genutzten Stichprobe wurden die schriftlichen Normalverfahren in der zweiten Hälfte des dritten Schuljahres zwischen T3 (Januar) und T4 (Juni) eingeführt.

Insgesamt liegen die Mittelwerte für die *Anzahl verwendeter Strategien* (vgl. Tabelle 26, S. 154) sowie für den *adaptiven Strategieeinsatz* (vgl. Tabelle 47, S. 197) am Ende des dritten Schuljahres (T4, Juni) nur geringfügig über den im Vortest (T1, September) erzielten Werten, während in der Anzahl eingesetzter *Verkürzungsstrategien* in beiden Experimentalgruppen am Ende des dritten Schuljahres höhere Werte als zu Schuljahresbeginn erreicht werden (vgl. Tabelle 27, S. 154). Zu T4 liegt der Anteil an *Verkürzungsstrategien* mit 27 % der Schülerlösungen im explizierenden Ansatz und 43 % der Schülerlösungen im problemlöseorientierten Ansatz deutlich höher als beispielsweise in der Studie von Torbeyns und Verschaffel (2016), in der zu einem vergleichbaren Messzeitpunkt weniger als 15 % der Schülerinnen und Schüler *Verkürzungsstrategien* anwendete (vgl. Kap. 3.4.1.2).

Von T3 zu T4, d. h. nach der Einführung der schriftlichen Normalverfahren, sinken die *Adaptivitätswerte* beider Experimentalgruppen stark ab (vgl. Tabelle 47, S. 197), sodass Hypothese 12, nach der eine negative Auswirkung der Nutzung schriftlicher Normalverfahren auf die *Adaptivität* in beiden Experimentalgruppen postuliert wurde, angenommen werden kann.

Wie bereits in anderen Studien zeigt sich der Einfluss der Einführung der Normalverfahren deutlich in den Ergebnissen zur Strategienutzung (Csíkos, 2016; Selter, 2000; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016). Die Normalverfahren werden zu T4 in 42 % aller Lösungen im explizierenden Ansatz und in 37 % der Schülerlösungen im problemlöseorientierten Ansatz eingesetzt (vgl. Tabelle 40, S. 178). Allerdings verwenden die Schülerinnen und Schüler in der Studie die schriftlichen Normalverfahren zum letzten Messzeitpunkt seltener als in der Studie von Selter (2000). Dort wurden die schriftlichen Normalverfahren in einem routineorientierten Unterricht am Ende des dritten Schuljahres sogar in 60 % der verwendeten Rechenwege eingesetzt.

Interessant ist hierbei, welche Strategien durch die Normalverfahren ersetzt werden. Während der Gebrauch der Normalverfahren im explizierenden Ansatz mit einem Rückgang in allen anderen Strategien, d. h. auch den *Verkürzungsstrategien* einhergeht, wird im problemlöseorientierten Ansatz vorwiegend die halbschriftlichen Universalstrategie *Schrittweise* durch die ziffernbasierten Normalverfahren ersetzt, während die Verwendung der *Verkürzungsstrategien* zwischen T3 und T4 nahezu konstant bleibt (vgl. Tabelle 40, S. 178). Aus mathematikdidaktischer Perspektive gelingt es den Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz somit erfolgreich, die Normalverfahren in das bestehende *Strategierepertoire* zu integrieren.

In beiden Experimentalgruppen nutzt ein Viertel der Schülerinnen und Schüler zu T4 die Normalverfahren als Universalstrategie, d. h. zur Lösung aller acht Aufgaben des Strategietests (vgl. Kap. 7.2.3.1). Hypothese 3, nach der zu T4 die Dominanz der schriftlichen Normalverfahren als Universalstrategie postuliert wurde, muss folglich verworfen werden. In der Studie von Torbeyns et al. (2017) wurden 34 % der Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen 3–6 einem Strategieprofil zugeordnet, bei dem alle Aufgaben mit den Normalverfahren gelöst wurden. Bei Torbeyns und Verschaffel (2013) nutzen 24 % der Schülerinnen und Schüler in der Aufgabenbearbeitung mit freier Strategiewahl die schriftlichen Normalverfahren als Universalstrategie, während es in der Folgestudie sogar 52 % waren (Torbeyns & Verschaffel, 2016). In Letzterer wurden allerdings ausschließlich Subtraktionsaufgaben bearbeitet. Die Ergebnisse sprechen insgesamt dafür, dass die Normalverfahren in der hier beschriebenen Studie in beiden Experimentalgruppen entgegen den Erwartungen reflektiert eingesetzt werden.

Wie auch in anderen Studien (Selter, 2000; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016) geht die Einführung der Normalverfahren in der Stichprobe mit einem Anstieg in der Korrektheit einher (vgl. Tabelle 17, S. 130). Aus einer stärker individuumsorientierten Sichtweise ist die Strategiewahl damit durchaus als adaptiv zu bewerten, da die Schülerinnen und Schüler aus ihrem *Strategierepertoire* solche Strategien verwenden, die zu einer korrekten Lösung führen (Siegler, 2006).

Wie bei Selter (2000) nutzen einige Kinder bereits zu Beginn des dritten Schuljahres (T1 und T2) die schriftlichen Normalverfahren. Allerdings werden die Normalverfahren in den Strategietests zu T1 und T2 sowie in der *Post für den Tiger* während der Intervention überwiegend nicht zielführend verwendet. Dabei zeigt sich in der Analyse der eingesetzten Strategien in der *Post für den Tiger*, dass die Normalverfahren vorwiegend von Schülerinnen und Schülern mit niedrigeren allgemeinen mathematischen Fähigkeiten eingesetzt werden (vgl. Tabelle 36 und Tabelle 37, S. 171 f.). Da die Normalverfahren für die Subtraktion zu diesem Messzeitpunkt als Fehlstrategie so verwendet werden, dass bei Subtraktionsaufgaben stets die kleinere von der größeren Ziffer abgezogen wird, um der Berücksichtigung von Überträgen zu entgehen, deutet die Verwendung der Normalverfahren in den Leistungsgruppen mit niedrigen mathematischen Fähigkeiten insbesondere auf einen Mangel an konzeptuellem Wissen hin. Diese Fehlstrategie erwies sich auch in anderen Studien als eine der häufigsten Fehlstrategien bei der Anwendung des Normalverfahrens für die Subtraktion (z. B. Gerster, 1982; Young & O'Shea, 1981). Dass die Normalverfahren von einigen Schülerinnen und Schülern bereits zu Beginn des dritten Schuljahres genutzt werden, spricht dafür, sie früher im dritten Schuljahr in den Mathematikunterricht zu integrieren und auf diese Weise früh konzeptuelles Wissen zu den Normalverfahren aufzubauen und die Verfahren in die Diskussion um *Adaptivität* einzubeziehen. Die Ergebnisse von Nemeth, Werker, Arend, Vogel und Lipowsky (2019) weisen darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler, welche das Normalverfahren für die Subtraktion vermischt mit halbschriftlichen Subtraktionsstrategien erlernten und dabei kontinuierlich zur Begründung ihrer Strategiewahl aufgefordert wurden, nicht nur im Posttest, sondern auch in den Follow-up-Tests flexibler und adaptiver rechnen konnten als Schülerinnen und Schüler, welche die Themenbereiche getrennt bearbeiteten und nicht zum Vergleich angeregt wurden.

Dass zu allen Messzeitpunkten unabhängig von der instruktionalen Förderung ein breites *Strategierepertoire* vorliegt, wie die Theorie des Strategiewahlmodells (Shrager & Siegler, 1998) suggeriert, kann mit den vorliegenden Daten nicht bestätigt werden. Der Faktor Zeit hat im Untersuchungszeitraum T2 bis T4 in allen durchgeführten parametrischen Analysen einen negativen Effekt auf die untersuchten abhängigen Variablen (vgl. Tabelle 41, S. 181, Tabelle 42, S. 182 und Tabelle 51, S. 204). Stattdessen zeigt sich in den

Modellen ein positiver Effekt des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes und der Auffrischung auf die *Entwicklung des Strategierepertoires* und des *Repertoires an Verkürzungsstrategien*. Die in dieser Arbeit beschriebenen Ergebnisse stützen daher die Befundlage (Csíkos, 2016; Selter, 2000; Torbeyns et al., 2009a; Torbeyns & Verschaffel, 2013, 2016), dass sich insbesondere *Verkürzungsstrategien* nicht ohne instruktionale Förderung (implizite Förderung durch Zahlenblickschulung inbegriffen) entwickeln, sondern sowohl die Entwicklung dieser Strategien als auch deren nachhaltige Verwendung gezielter Anregung bedürfen.

8.2 Limitationen

Für die Ableitung von Implikationen aus den im vorigen Kapitel dargestellten Ergebnissen müssen inhaltliche und methodische Einschränkungen bedacht werden. Diese betreffen sowohl die inhaltliche Konzeption der außerschulischen Intervention (Kap. 8.2.1) als auch das methodische Design der Studie (Kap. 8.2.2).

8.2.1 Implementierung der Unterrichtsansätze

Um die beiden Unterrichtsansätze in Reinform zu vergleichen und dabei auch vorwissensabhängige Unterschiede zu überprüfen, fand die Untersuchung unter unterrichtsnahen Bedingungen statt, die jedoch zugleich laborähnliche Rahmenbedingungen aufwiesen. Dadurch wurden einige Aspekte anders als in einem normalen Unterrichtssetting realisiert.

Im explizierenden Ansatz wurde aufgrund der kurzen Interventionszeit nur eine Auswahl an Strategien vorgegeben und diese durch prozedurales Training stark schematisiert. Wie in Kapitel 3.3.5.2 dargestellt, widerspricht die starke Schematisierung der Notationsformen einer didaktischen Konzeption halbschriftlicher Rechenstrategien, die ausdrücklich keine prozedurale Vermittlung vorsieht (z. B. Krauthausen, 2009 oder Schütte, 2004). Gleichzeitig ist diese starke Schematisierung in vielen Schulbüchern wie beispielsweise dem Zahlenbuch (Wittmann & Müller, 2003) zu finden, sodass die explizierende Bedingung als sehr unterrichtsnah betrachtet werden kann.

Eines der zentralen Ziele des Projekts war die Fragestellung nach vorwissensabhängigen Unterschieden in der Strategieentwicklung. Um zu prüfen, inwieweit Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichem Vorwissen von den beiden Instruktionsansätzen profitieren und ob sich gegebenenfalls differenzielle Effekte zeigen, wurde während der Intervention kein differenzierendes Lernmaterial zur Verfügung gestellt. Durch Differenzierungsmaterial hätten sich weitere zu kontrollierende Variablen und damit zu prüfende Interaktionsterme ergeben (z. B. Instruktionsansatz*Art/Qualität der Differenzierung*Zeit). Diese Interaktionsterme hätten jedoch anhand der kleinen Stichprobe nicht geprüft werden können. Lediglich für besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler gab es bei Bedarf Zusatzaufgaben, um Wartezeiten zwischen den einzelnen Unterrichtsphasen zu vermeiden.

Die in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse deuten darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler abhängig vom Vorwissen in unterschiedlichen Dimensionen des Strategieerwerbs von der Intervention profitieren konnten. Während die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler insbesondere neue, zielführende Universalstrategien dazulernten, konnten leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler ihr *Strategierepertoire* um *Verkürzungsstrategien* erweitern und lernen, diese adaptiv anzuwenden. Es bleibt daher unklar, inwieweit leistungsdifferenzierte Lernangebote den Strategieerwerb noch hätten verbessern können. Da sich die mathematischen Fähigkeiten im Interventionszeitraum (T1–T2) entscheidend auf den *Leistungszuwachs* im *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und in der *Strategieadaptivität* auswirken, könnten leistungsdifferenzierte Angebote insbesondere das konzeptuelle Zahlwissen der Schülerinnen und Schüler in den Blick nehmen und hier an das individuelle Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen. Basierend auf den Ergebnissen und bereits existierenden Arbeiten zum Strategieerwerb leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler (Rechtsteiner-Merz, 2013), könnte in Folgeuntersuchungen differenziertes Lernmaterial zur Verfügung gestellt werden.

8.2.2 Erhebungsdesign und Auswertung

8.2.2.1 Stichprobe

Wie bereits in Kapitel 6.6 angedeutet wurde, weist die Stichprobe Einschränkungen in ihrer Repräsentativität auf. Dies betrifft sowohl die Stichprobengröße als auch die Fähigkeiten der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler sowie deren sozialen Hintergrund.

Die Stichprobengröße von $N = 79$ ist einerseits recht klein, um Experimentalgruppenunterschiede in der Entwicklung der *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* zu identifizieren und dabei verschiedene Lernvoraussetzungen zu kontrollieren. Zugleich ist die betrachtete Fallzahl höher als in den meisten bereits durchgeführten experimentellen Studien in diesem Themenbereich (vgl. Kap. 3.4). Eine weitere Stärke der Ergebnisse besteht darin, dass durch ein multiples Imputationsverfahren alle Schülerdaten in die Analysen einbezogen werden konnten.

Einschränkend liegen die Mittelwerte der Experimentalgruppenschülerinnen und -schüler für die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten, die kognitiven Grundfähigkeiten, die Merkspanne (als Indikator für das Arbeitsgedächtnis) sowie den HISEI höher als die Referenzwerte der entsprechenden Normstichproben (vgl. Kap. 6.3). Obwohl die Teilnahme am mathematischen Ferienprogramm für die Schülerinnen und Schüler kostenfrei war, zeigen die deskriptiven Statistiken für den HISEI, dass eine gewisse Stichprobenselektivität vorliegt und insbesondere Schülerinnen und Schüler aus bildungsnahen Familien teilnahmen (vgl. Kap. 6.3.6). Daher ist unklar, inwieweit die Ergebnisse zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* tatsächlich repräsentativ sind.

Wie in Kapitel 6.6 bereits dargestellt wurde, waren die mathematischen Leistungen im standardisierten DEMAT-Test nicht normalverteilt, sodass bei der Bildung der Leistungsgruppen auf eine alternative Einteilung (PR < 50, 50 ≤ PR ≤ 75, PR > 75) zurückgegriffen wurde, um die tatsächliche Varianz in den mathematischen Leistungen der Stichprobe besser abzubilden und die Experimentalgruppen vergleichen zu können. Dabei muss die hier vorgenommene Gruppeneinteilung bei der Interpretation der Leistungen berücksichtigt werden, wenn die Ergebnisse mit anderen Studienergebnissen verglichen werden. Beispielsweise wurde die Leistungsgruppe mit DEMAT-Werten unter Prozentrang 50 in der vorliegenden Arbeit als Gruppe mit geringen mathematischen Fähigkeiten klassifiziert, während in der normierten Testauswertung lediglich Kinder mit einem Prozentrang < 25 % als unterdurchschnittlich in ihren Leistungen beschrieben werden.

Um die Wirksamkeit der beiden Experimentalbedingungen in Folgeuntersuchungen unter ökologisch validen Bedingungen zu prüfen, müssten die Experimentalbedingungen in den regulären Mathematikunterricht integriert werden und dabei in einer größeren Stichprobe untersucht werden (vgl. Implikationen in Kap. 8.3.1).

Auch in der Parallelisierung der beiden Experimentalgruppen bestehen Einschränkungen. Wie Tabelle 20 (S. 144) zeigt, unterscheiden sich die beiden Experimentalgruppen zu T1 signifikant in der Korrektheit und den kognitiven Grundfähigkeiten sowie auf dem 10 %-Signifikanzniveau zusätzlich in ihren allgemeinen mathematischen Fähigkeiten. In allen drei Variablen besteht ein Vorteil zugunsten der Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz, d. h. diese Schülerinnen und Schüler weisen bereits vor der Intervention ein höheres Vorwissen als die Referenzgruppe im explizierenden Ansatz auf. Diese Unterschiede im Vorwissen der Schülerinnen und Schüler könnten für die querschnittlichen Auswertungen der Leistungen (z. B. den Vergleich im Strategieeinsatz zu einzelnen Messzeitpunkten bzw. einzelnen Tagen während des Treatments) eine Relevanz besitzen. Dies betrifft jedoch nur wenige Hypothesen (Hypothesen 3, 6, 7, 12 und 13). Für die Beantwortung der Mehrzahl aller Hypothesen wurden etwaige Vorteile in den abhängigen Variablen im Vortest durch Messwiederholung berücksichtigt und die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten bzw. kognitiven Grundfähigkeiten als individuelle Lernermerkmale in alle Analysemodelle einbezogenen, sofern sich der Einfluss auf die jeweils untersuchte abhängige Variable als signifikant erwies.

8.2.2.2 Längsschnittliches Design

Da sich die Messung der abhängigen Variablen *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* über das gesamte dritte Schuljahr und somit eine Zeitspanne von insgesamt neun Monaten erstreckte (September 2010 bis Juni 2011), wirkt eine Reihe von Störvariablen auf die Langzeitmessungen ein.

Zum einen hat nur ein Teil der Schülerinnen und Schüler an der ersten Auffrischung (zwischen T2 und T3) teilgenommen. Da die zweite Auffrischung (zwischen T3 und T4) kaum besucht war, wurde sie in den Analysen nicht berücksichtigt. Die an der ersten Auffrischung teilnehmenden und nicht teilnehmenden Schülerinnen und Schülern unterscheiden sich dabei nicht signifikant in ihrem zu T2 (Ende der Intervention) erfassten mathematischen Interesse (vgl. Kap. 6.4).

Zum anderen kann der sozio-mathematische Einfluss des regulären Mathematikunterrichts auf die Entwicklung der *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* aufgrund der in Kapitel 3.4 dargestellten Befunde für den gesamten Untersuchungszeitraum als relativ hoch eingeschätzt werden. So ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler durch das Mathematikbild der regulären Mathematiklehrperson insgesamt stärker geprägt werden als durch eine 4-tägige Intervention. Für die Beibehaltung der in der Intervention erlernten Strategien in den Follow-up-Tests kann dem regulären Mathematikunterricht (insbesondere der Behandlung der schriftlichen Normalverfahren) eine entscheidende Rolle beigemessen werden. Obwohl die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler einer Schulklasse gleichmäßig auf beide Interventionsansätze verteilt wurden, ist nicht auszuschließen, dass sich sozio-mathematische Einflüsse in den beiden Unterrichtsansätzen unterschiedlich ausgewirkt haben. Ebenso ist denkbar, dass Instruktionsstile der regulären Mathematiklehrkraft besonders nahe am explizierenden oder problemlöseorientierten Ansatz orientiert waren, sodass Effekte der Intervention im Zeitraum nach der Intervention multipliziert worden sein könnten. Der in Kapitel 3.4 dargestellte Forschungsstand deutet jedoch darauf hin, dass ein problemlöseorientierter Unterrichtsansatz, so wie er im Ferienprogramm implementiert wurde, d. h. ohne prozedurale Vorgabe oder Schematisierung von Strategien von Strategien, nicht dem regulären Mathematikunterricht der Interventionsteilnehmerinnen und -teilnehmer entsprach. D. h. die positiven Effekte des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes konnten erhalten werden, obwohl die Inhalte dieses Ansatzes vermutlich in den meisten Klassen nicht im regulären Unterricht fortgeführt wurden.

Weder die Entwicklung der Korrektheit noch der Vergleich der Experimentalgruppen mit der Kontrollgruppe waren Gegenstand der Fragestellungen der vorliegenden Arbeit und wurden daher in den hier dargestellten Analysen vernachlässigt. Beide Aspekte wurden jedoch bereits in einer anderen Veröffentlichung (Heinze et al., 2018) beleuchtet. Die dort dargestellte positive Entwicklung der Korrektheit und zugleich konstant niedrig ausgeprägte *Adaptivität* der Kontrollgruppe über das gesamte dritte Schuljahr weist darüber hinaus darauf hin, dass die adaptive Strategiewahl in den meisten teilnehmenden Klassen keine zentrale Rolle im Mathematikunterricht spielte und daher die Nähe des regulären Mathematikunterrichts zu einem der beiden Instruktionsansätze unwahrscheinlich ist. Es ist anzunehmen, dass der Mathematikunterricht eher einem traditionellen Unterricht entsprach, welcher auf die korrekte Beherrschung der Universalstrategien fokussiert. Gleichwohl könnten Unterschiede zwischen den Klassen in weiterführenden Studien noch stärker berücksichtigt werden.

8.2.2.3 Strategieerfassung und Auswertungsverfahren

Bereits in Kapitel 2.2.1 wurde dargestellt, dass die Erfassung von Rechenwegen in vielerlei Hinsicht eine Herausforderung darstellt. Zum einen kann nicht sicher festgestellt werden, ob notierte Rechenwege immer mit den mental vollzogenen Rechenschritten kongruent sind. Zum anderen können auch Zwischenschritte lediglich aufgrund bestehender mathematischer Konventionen notiert werden. Allerdings lässt sich diese mögliche Diskrepanz zwischen Strategiekompetenz und Strategieperformanz auch durch andere Erfassungsmethoden, wie Interviews zur Strategieanwendung, nicht gänzlich aufheben.

Ob Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, ihre Rechenwege an Aufgabenkriterien anzupassen, wurde in der vorliegenden Arbeit aus aufgabenkriterieller Sicht bewertet. Die Betrachtung der Strategienutzung aus einer normativen Perspektive lässt sich auch damit begründen, dass die Bedeutung geschickter Rechenstrategien sowohl als zentraler Bestandteil der Intervention in beiden Bedingungen als auch im Aufgabenprompt der Strategietests thematisiert und somit transparent dargestellt wurde. Individuelle Faktoren wurden bei der Einschätzung der *Adaptivität* – im Gegensatz zu anderen Ansätzen wie dem Strategiewahlmodell – in der Messung der abhängigen Variable nicht berücksichtigt, sondern aufgrund der Fragestellungen zu vorwissensabhängigen Effekten sowie Einflussfaktoren als unabhängige Variablen berücksichtigt. Die Ergebnisse zeigen, dass das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler aus aufgabenkriterieller Sicht eine Voraussetzung für die *Strategieadaptivität* darstellt. Je niedriger das Vorwissen ausgeprägt ist, desto weniger *Verkürzungsstrategien* werden verwendet. Da die Beherrschung und Anwendung der *Verkürzungsstrategien* jedoch Voraussetzungen für hohe Testwerte in der *Strategieadaptivität* darstellen, sind die beiden Variablen konfundiert. Um Annahmen des Strategiewahlmodells (Siegler, 2006) zu überprüfen, könnte in weiteren Auswertungen betrachtet werden, ob Schülerinnen und Schüler aus ihrem individuellen *Strategierepertoire* (basierend auf den bis zum jeweiligen Messzeitpunkt eingesetzten Strategien in verschiedenen Instrumenten) die adaptivst mögliche Strategie wählen.

Auch die Testkonstruktion der Strategietests weist einige Nachteile auf, welche die Auswertungsverfahren und die Aussagekraft der daraus resultierenden Ergebnisse einschränken. Der Strategietest bietet mit acht Aufgaben pro Messzeitpunkt nur begrenzt Möglichkeiten, unterschiedliche Strategien einzusetzen. Mit einer höheren Aufgabenanzahl würde die Wahrscheinlichkeit steigen, dass Schülerinnen und Schüler eine größere Variation an Strategien zeigen und ihre Strategien an Aufgabenkriterien anpassen. Zudem wurden zu T1 vier Aufgaben und zu T2 zwei Aufgaben im Zahlenraum bis 100 eingesetzt. Wie in Kapitel 2.2.3 dargestellt, werden im Zahlenraum bis 100 tendenziell mehr Strategien als adaptiv eingeschätzt, da sich diese im kognitiven Aufwand und der Anzahl der Rechenschritte weniger als im Zahlenraum bis 1000 unterscheiden. Hierdurch ist die eingeschätzte *Adaptivität* der Gesamtskala zu T1 höher, als wenn lediglich die Ankeritems im Zahlenraum bis 1000 betrachtet werden.

Darüber hinaus wurden in die Auswertungen zur Entwicklung der *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* nur solche Einflussfaktoren in die Analysen einbezogen, die sich signifikant auf die jeweils betrachtete abhängige Variable bzw. deren Entwicklung in beiden Experimentalgruppen auswirkten. Da die beiden Unterrichtsansätze aber auch auf verschiedenen theoretischen Vorstellungen zum Strategieerwerb beruhen, ist denkbar, dass sich Einflussfaktoren wie beispielsweise das Arbeitsgedächtnis in beiden Experimentalgruppen unterschiedlich auswirken. Für die Überprüfung von Dreifachinteraktionen ist die Stichprobengröße jedoch nicht ausreichend. Inwieweit sich die Lernprozesse in beiden Experimentalgruppen tatsächlich unterscheiden und ggf. unterschiedliche Einflussfaktoren auf den Strategieerwerb auswirken, wurde in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht. Hier könnten Folgestudien anknüpfen (vgl. Kap. 8.3.2).

8.3 Implikationen

Basierend auf den dargestellten Ergebnissen ergeben sich sowohl für Unterrichtskonzepte (Kap. 8.3.1) als auch für weitere Auswertungen mit den vorliegenden Daten sowie für zukünftige Forschungsvorhaben in diesem Themenfeld (Kap. 8.3.2) verschiedene Anknüpfungspunkte, die im Folgenden skizziert werden.

8.3.1 Implikationen für den Mathematikunterricht

Betrachtet man die kurzzeitige Überlegenheit des explizierenden Instruktionsansatzes und langfristige Überlegenheit des problemlöseorientierten Instruktionsansatzes für den Strategieerwerb und den adaptiven Einsatz der erworbenen Strategien, so scheint für die Umsetzung im regulären Mathematikunterricht eine Integration beider Unterrichtsansätze am vielversprechendsten zu sein. Die Integration beider Ansätze könnte dabei am *Investigative Approach* (vgl. Kap. 3.3.3) orientiert sein. Dabei werden eigene Rechenwege durch anregende Lernangebote von den Schülerinnen und Schülern zunächst selbst generiert und erst in weiteren Schritten von der Lehrperson schematisiert und benannt. Insbesondere die Benennung der von den Schülerinnen und Schülern selbst generierten Strategien dürfte der Kommunikation über Rechenwege und dem Schemaerwerb zuträglich sein (vgl. Kap. 3.3.5.2).

Wie die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen, scheint den Generierungsprozessen der Schülerinnen und Schüler für den Strategieerwerb eine bedeutende Rolle zuzukommen, da die in der Intervention erworbenen Strategien in der problemlöseorientierten Lerngruppe im Gegensatz zur explizierenden Lerngruppe auch nach der Intervention von einem größeren Anteil an Schülerinnen und Schülern genutzt werden. Die nachhaltige Verfügbarkeit der Strategien im problemlöseorientierten Unterrichtsansatz könnte zudem auch auf die dort integrierte Zahlenblickschulung zurückgeführt werden. Dabei wird ein positiver Einfluss der Aktivitäten zur Analyse von Zahl- und Aufgabeneigenschaften im Sinne metastrategischen Wissens auf die Generierungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler angenommen. Auch im explizierenden Unterrichtsansatz wurde metastrategisches Wissen aufgebaut, indem für jede Strategie besprochen wurde, bei welchen Aufgabenkriterien die jeweilige Strategie geschickt angewendet werden kann. Allerdings ist dieses Wissen anscheinend wenig hilfreich, wenn die erlernten Prozeduren nicht mehr geübt und im Regelunterricht durch andere Prozeduren ersetzt werden. Die reine Vorgabe von Strategien scheint demnach zu trägem Wissen zu führen (Renkl, 1996), das langfristig nicht mehr abrufbar ist. Auch das Nutzungsdefizit könnte hier als Erklärung herangezogen werden. Dieses beschreibt ein Stadium in der Strategienutzung, in dem Strategien beherrscht und spontan angewendet werden, die Strategien jedoch nicht effizient genutzt werden, sodass es zu keiner Leistungsverbesserung kommt (Hasselhorn et al., 2017). Dieses Nutzungsdefizit zeigt sich für beide Experimentalgruppen kurzzeitig bereits in den prozessbezogenen Daten zur Strategieentwicklung während der Intervention (vgl. Kap. 7.2.2.2). Dort geht ein Anstieg in der Nutzung von *Verkürzungsstrategien* in den Leistungsgruppen mit durchschnittlichem und überdurchschnittlichem mathematischem Wissen (Tag 3 oder Tag 4) sowohl im explizierenden Ansatz (vgl. Tabelle 36, S. 171) als auch im problemlöseorientierten Ansatz (vgl. Tabelle 37, S. 173) zunächst mit einem leichten Rückgang in der Korrektheit einher. Nach Miller und Seier (1994) kann die ineffiziente Strategienutzung sowohl auf unzureichende Strategieautomatisierung als auch fehlendes konditionales Wissen zum Strategieeinsatz zurückzugeführt werden.

Hinweise auf die Bedeutung der Zahlenblickschulung findet man auch, wenn die eingesetzten Strategien in den beiden Unterrichtsansätzen näher betrachtet und verglichen werden. Dort ist erkennbar, dass *Verkürzungsstrategien* im problemlöseorientierten Ansatz stärker konzeptuell fundiert sind, während im explizierenden Ansatz einige Strategien zwar aufgrund erlernter Aufgabenmerkmale zum konditionalen Strategieeinsatz im Interventionszeitraum eingesetzt werden, aber zugrunde liegende Konzepte vermutlich nicht verstanden wurden (vgl. Kap. 7.2.2.1). Schülerinnen und Schüler des problemlöseorientierten Unterrichtsansatzes verwenden insgesamt häufiger Mischstrategien als im explizierenden Ansatz und nutzen die freie Notation ihrer Rechenschritte – so, wie es im ursprünglichen Konzept zu halbschriftlichen Rechenstrategien intendiert ist.

Unabhängig von der theoretischen Konzeption wird Vorwissen, also auch Zahl- und Operationswissen, für beide Unterrichtsansätze als grundlegend betrachtet, um Strategien zu generieren (vgl. *Expertise Reversal Effect*, S. 81) und diese an Aufgabeneigenschaften anzupassen (Threlfall, 2002, 2009) bzw. aus dem individuellen *Strategierepertoire* eine effiziente Strategie auszuwählen (Siegler, 1996; Siegler & Svetina, 2006). Da die mathematischen Leistungen in allen Analysen die höchste Vorhersagekraft für die *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* besitzen und mangelndes Zahl- und Operationswissen häufig als ursächlich für mangelnde Strategiekompetenz betrachtet wird, sind Unterrichtskonzepte vielversprechend, welche eine Zahlenblickschulung integrieren. Wie die Ergebnisse zeigen, ist Vorwissen insbesondere für den Erwerb von *Verkürzungsstrategien* und deren adaptiven Einsatz von Bedeutung, da Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Kenntnissen in diesem Bereich eine ungünstigere *Lernentwicklung* aufweisen (vgl. Diskussion in Kap. 8.1.1.2). Dies spricht dafür, dass Schülerinnen und Schüler mit geringem Vorwissen zusätzliche Lernhilfen benötigen. Wenngleich sich die mathematischen Fähigkeiten auch in anderen Studie als größter Einflussflussfaktor auf die mathematische Lernentwicklung erwiesen (vgl. Kap. 3.4), so sind die Ursachen für schwache mathematische Leistungen vielfältig und teilweise mit anderen Variablen, wie niedrigeren kognitiven Grundfähigkeiten und einer geringen Arbeitsgedächtniskapazität, konfundiert (vgl. Tabelle 22, S. 148).

Der positive Effekt der Auffrischungsteilnahme auf die *Lernentwicklung in der Strategieflexibilität*, dem *Repertoire an Verkürzungsstrategien* und der *Strategieadaptivität* im Zeitraum nach der Intervention könnte im Sinne des verteilten Lernens (zusf. Dunlosky et al., 2013) so interpretiert werden, dass sich eine Wiederholung der Inhalte nachhaltig auf die Lernleistung in beiden Experimentalgruppen auswirkt. Für die Unterrichtspraxis könnte dies bedeuten, dass sich eine Verteilung der Lerninhalte auf einen längeren Zeitraum anstelle von geblocktem Lernen günstig auf das Behalten der erlernten Inhalte auswirkt. Da es jedoch im Untersuchungsdesign keine Vergleichsgruppe zu den Experimentalteilgruppen gab, welche sich in gleichem zeitlichen Umfang mit den Unterrichtsinhalten beschäftigt hat, müsste in Folgeuntersuchungen geprüft werden, ob es sich tatsächlich um den Effekt verteilten Lernens oder lediglich um einen Effekt durch eine verlängerte Lernzeit handelt. Für die einzelnen Experimentalgruppen wurde bereits in Kapitel 8.1.2.2 näher auf die experimentalgruppenspezifischen Unterschiede im Zusammenhang mit der Auffrischungsteilnahme eingegangen.

Die dargestellten Ergebnisse werfen weiterführende Fragestellungen auf, die in weiteren Forschungsvorhaben in den Blick genommen werden könnten. Diese werden im folgenden Kapitel skizziert.

8.3.2 Implikationen für weitere Forschungsvorhaben

Das Strategiewahlmodell beschreibt für inzidentelle Lernsituationen, welche Mechanismen dem Strategieerwerb zugrunde liegen (Siegler, 2006). Wie in Kapitel 4.4 dargestellt wurde, werden dabei instruktionale Faktoren ausgeblendet. Die in der TigeR-Studie implementierten Unterrichtsansätze gründen auf unterschiedlichen theoretischen Annahmen zum Strategieerwerb und fokussieren daher unterschiedliche Schwerpunkte (prozeduraler Wissenserwerb vs. Zahlenblickschulung und Generierungsfähigkeit). Informationen über die dem Strategieerwerb zugrunde liegenden Lernprozesse können mit den vorliegenden Daten lediglich über die Strategieperformanz unter Kontrolle weiterer Variablen (wie der allgemeinen mathematischen Leistung) gewonnen werden. Dass sich einzelne Einflussfaktoren nicht im Gesamtmodell für die Entwicklung beider Gruppen als signifikante Prädiktoren erweisen, schließt nicht aus, dass sie nicht für eine der beiden Experimentalgruppen bedeutsam sind. Wie bereits oben angemerkt, ist die Stichprobengröße jedoch zu klein, um mittels Dreifachinteraktionen zu testen, ob dem Strategieerwerb in beiden Unterrichtsansätzen tatsächlich unterschiedliche Einflussfaktoren zugrunde liegen. Darüber hinaus wurden die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten/das Zahlwissen der Schülerinnen und Schüler nicht mehrfach erhoben, sodass mögliche experimentalgruppenspezifische Wirkungen mit den vorliegenden Daten nicht überprüft werden können. Zu den experimentalgruppenspezifischen Einflussfaktoren lassen sich aus den zugrunde liegenden theoriegeleiteten konzeptionellen Überlegungen unterschiedliche Annahmen ableiten, die in künftigen Untersuchungen mit einer ausreichend großen Stichprobe in Pfadmodellen überprüft werden könnten. Diese werden nachfolgend kurz skizziert.

Für den Zusammenhang zwischen der Arbeitsgedächtniskapazität und dem Abruf prozeduralen Wissens, der sich bereits in unterschiedlichen Befunden gezeigt hat (LeFevre et al., 2013; Van der Ven et al., 2012), bestehen verschiedene Annahmen. Zum einen ist zu erwarten, dass das Arbeitsgedächtnis im Zeitraum T2 bis T3 zusätzlich zur Auffrischung sowie in Interaktion mit der Auffrischungsteilnahme im explizierenden Ansatz einen wesentlichen Prädiktor für die *Entwicklung der Strategieflexibilität* darstellt. Dieser angenommene Zusammenhang im explizierenden Ansatz könnte dadurch zustande kommen, dass die Prozeduren, die nach Abschluss der Intervention nicht mehr wiederholt werden, vermutlich nur schwer aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Zum anderen könnte dem Arbeitsgedächtnis jedoch auch im problemlöseorientierten Ansatz eine entscheidende Rolle für die Regulierung metakognitiver Prozesse bei der Strategiegenerierung zukommen.

Im problemlöseorientierten Ansatz, in dem Zahlwissen die Grundlage für die Strategiegenerierung darstellt, dürfte diesem eine größere Bedeutung als im explizierenden Ansatz zukommen, da dort mangelndes Zahlwissen teilweise durch prozedurales und konditionales Wissens ersetzt werden kann. Darauf weisen beispielsweise die bereits oben beschriebenen Unterschiede in der Verwendung der *indirekten Addition/Subtraktion* in den beiden Experimentalgruppen hin. Die häufige Anwendung dieser Strategie im explizierenden Unterrichtsansatz im Posttest zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler das in der Intervention erlernte konditionale Strategiewissen (bspw. *Ergänzen*, wenn die Zahlen bei einer Subtraktionsaufgabe nahe beieinander liegen) korrekt anwenden können. Zugleich deutet der starke Rückgang in der Strategieverwendung darauf hin, dass dieses konditionale Wissen nicht mit konzeptuellem Wissen untermauert ist, d. h. zum Beispiel das Verständnis für die Lösung einer Subtraktionsaufgabe durch Komplementaddition fehlt. Offen ist also, ob der Rückgang von *Verkürzungsstrategien* im explizierenden Ansatz tatsächlich mangelndem Zahl- und Operationswissen geschuldet ist, oder ob Schülerinnen und Schüler eigentlich über das konditionale Strategiewissen verfügen, dieses jedoch mangels fehlenden prozeduralen Wissens in den Follow-up-Tests nicht mehr umsetzen können (vgl. Erläuterungen zum Nutzungsdefizit in Kap. 8.3.1).

Darüber hinaus könnte durch eine längsschnittliche Erfassung des Zahlwissens überprüft werden, ob sich die Zahlenblickschulung tatsächlich positiv auf das Zahl- und Operationswissen auswirkt und dieses wiederum als Moderator für die *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* zu späteren Messzeitpunkten fungiert.

Auch die Ergänzung durch qualitative Daten, z. B. durch Individualinterviews (wie bei Benz, 2005; Blöte et al., 2000; Carpenter et al., 1997; Luwel et al., 2003; Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013) oder Schülerbeobachtungen könnten den Erkenntnisgewinn zu kognitiven Prozessen, die dem Strategieerwerb zugrunde liegen, unterstützen. Darüber hinaus könnte mit diesen Daten die Entwicklung der Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen im Zeitraum nach der Intervention (T2–T4) besser erfasst und analysiert werden. Die Entwicklung der Leistungsgruppen wurde in der vorliegenden Arbeit nur im unmittelbaren Interventionszeitraum betrachtet, in welchem Einflussfaktoren auf die Strategieentwicklung weitgehend kontrolliert werden konnten. Qualitative Daten könnten weitere Einblicke in die individuellen Entwicklungsverläufe beider Experimentalgruppen im Zeitraum nach der Intervention geben. Im TigeR-Projekt liegen Interviewdaten vor, die in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurden, da sie für die zentralen Fragestellungen nicht relevant waren. Sie bieten unter anderem Zusatzinformationen dazu, inwieweit Schülerinnen und Schüler Aufgabenkriterien erkannt und genutzt haben. Die Verbindung der Interviewdaten mit den hier dargestellten Analysen stellt einen möglichen weiteren Anknüpfungspunkt für nächste Auswertungsschritte dar. Mit den Daten könnte beispielsweise auch überprüft werden, ob sich der in der Studie von Torbeyns et al. (2016) gefundene Zusammenhang zwischen der Lösungszeit einfacher Kopfrechenaufgaben im Zahlenraum bis 100 und dem Nutzen der *indirekten Addition/Subtraktion* mit den Daten der TigeR-Studie replizieren lässt. Auch Reflexionsprozesse zum Strategieeinsatz wurden im Interview angeregt und erfasst. Allerdings zeigt die Befundlage insgesamt, dass die Erfassung metakognitiver Prozesse bei Schülerinnen und Schülern eine anspruchsvolle Aufgabe darstellt. Je höher diese metastrategischen Fähigkeiten ausgeprägt sind, desto einfacher ist deren Erfassung. Befunde von Luwel et al. (2003) deuten darauf hin, dass dies bei älteren Schülerinnen und Schülern einfacher als bei jüngeren Schülerinnen und Schülern gelingt. Betrachtet man Zahlenblickschulung als metakognitive Förderung des Strategiewissens (vgl. Kap. 4.3), so könnte auch argumentiert werden, dass die Fähigkeit, eigene Strategien zu reflektieren, stark mit den Reflexionsprozessen im Unterricht zusammenhängt. D. h. die Erfassung solcher Reflexionsprozesse gelingt u. U. besser, wenn die Schülerinnen und Schüler über einen längeren Zeitraum (wie bei Rathgeb-Schnierer, 2006) hierzu angeregt werden.

Interessant wäre außerdem, inwieweit durch die Intervention in beiden Unterrichtsansätzen inhaltsübergreifendes Wissen zur *Strategieflexibilität* und *-adaptivität* erworben werden kann. Insbesondere für den problemlöseorientierten Unterrichtsansatz wird durch die Zahlenblickschulung ein positiver Effekt auf Transferwissen erwartet (Überblick in Kadosh, Dowker, Heine, Kaufmann & Kucian, 2013).

Wie bereits in Kapitel 8.3.1 beschrieben, könnten die individuellen Lernermerkmale durch einen personenzentrierten Ansatz in weiteren Auswertungsschritten noch stärker einbezogen werden. Die hier dargestellten Ergebnisse haben wenig Aussagekraft darüber, ob auch Schülerinnen und Schüler mit geringeren mathematischen Fähigkeiten aus ihrem individuellen *Strategierepertoire* effiziente Strategien wählen. Dieser Aspekt wurde allein aus einem normativen, aufgabenkriteriellen Blickwinkel betrachtet.

In diesem Zusammenhang wäre auch die Bildung von Strategieprofilen im Rahmen von Clusteranalysen wie bei Torbeyns et al. (2017) ein vielversprechender Ansatz. Hierbei könnte die Zugehörigkeit zu den Strategieprofilen in den beiden Experimentalgruppen untersucht und zusätzlich überprüft werden, inwieweit die Zugehörigkeit zu Strategieprofilen von weiteren individuellen Lernermerkmalen abhängig ist.

Studien, welche den Lerneffekt von Generierungsprozessen betrachten, sollten dabei immer langfristige Entwicklungen in den Blick nehmen. Die hier dargestellten Ergebnisse deuten konform mit der Befundlage (Chen et al., 2016) darauf hin, dass sich Vorteile von Generierungsprozessen gegenüber einer stärker prozeduralen Vermittlung nicht unmittelbar nach dem Treatment zeigen.

Außerdem sollten affektiv-motivationale Aspekte in weiteren Auswertungen und künftigen Untersuchungen stärker berücksichtigt werden. So ist anzunehmen, dass die Generierungsfähigkeit im problemlöseorientierten Ansatz stärker durch affektiv-motivationale Variablen beeinflusst wird als die Übernahme prozedural vorgegebener Strategien im explizierenden Ansatz. D. h. es wird erwartet, dass sich beispielsweise ein höheres mathematisches Interesse oder ebenso auch eine höhere kognitive Anstrengungsbereitschaft förderlich auf die Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler im problemlöseorientierten Ansatz auswirkt, selbstständig und fortwährend neue Lösungsstrategien zu entwickeln. Hingegen wird für den explizierenden Ansatz angenommen, dass sich diese Variablen geringer als im problemlöseorientierten Ansatz auf die Anwendung zielführender und adaptiver Strategien auswirken, da alle Schülerinnen und Schüler dieses Ansatzes gleichermaßen mit demselben *Strategierepertoire* vertraut gemacht werden und durch diverse Übungsformate zur Anwendung der einzelnen Strategien angehalten werden.

Insgesamt leistet die vorliegende Arbeit einen Beitrag zu der Frage, wie sich zwei unterschiedliche reformorientierte Instruktionsansätze sowohl kurz- als auch langfristig auf die adaptive und flexible Strategiewahl im dritten Schuljahr auswirken und welche individuellen Lernermerkmale dabei die Strategienutzung beeinflussen. Damit wurde in dieser Arbeit an alle in Kapitel 3.5 (S. 70) zusammengefassten Forschungsdesiderate angeknüpft. Dabei zeigen sich in der *Entwicklung der Strategieflexibilität* und *-adaptivität* kurzfristige Vorteile für einen explizierenden Ansatz, in welchem die halbschriftlichen Rechenstrategien prozedural zusammen mit konditionalem Wissen vermittelt wurden. Langfristig kehrt sich dieser Vorteil jedoch zugunsten des problemlöseorientierten Ansatzes um, in welchem Strategien während der Intervention ausschließlich von den Schülerinnen und Schülern selbst generiert wurden und die Schülerinnen und Schüler darüber hinaus durch eine begleitende Zahlenblickschulung sowie einen stetigen Effizienzvergleich zum Austausch über Lösungswege angeregt wurden. In den Analysen wird deutlich, dass es dabei lohnenswert ist, den Strategieerwerb mit unterschiedlichen Instrumenten zu erfassen und bei den Analysen auch prozessbezogene Daten einzubeziehen. Dabei geben die prozessbezogenen Daten Einblick in den Strategieerwerb, der sich in den beiden Experimentalgruppen während der Interventionstage unterscheidet. Experimentalgruppenunterschiede, die in den Tests zu einzelnen Messzeitpunkten auf den ersten Blick verborgen bleiben, werden durch die Auswertung dieser Daten auf den zweiten Blick sichtbar.

Künftige Forschungsvorhaben könnten die Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit nutzen, indem Forschungsdesigns realisiert werden, mit denen überprüft werden kann, ob den beiden Instruktionsansätzen tatsächlich zwei unterschiedlich Strategieerwerbsmodelle zugrunde liegen, d. h. der Strategieerwerbsprozess in beiden Instruktionsansätzen durch unterschiedliche Faktoren beeinflusst wird. Für die Unterrichtspraxis ist interessant, inwieweit die Implementation der beiden Instruktionsansätze bzw. eine integrative Form beider Ansätze im regulären Mathematikunterricht gelingen kann und insbesondere, wie nachhaltige Strategieflexiblität und *-adaptivität* – auch im Zeitraum nach Einführung der schriftlichen Normalverfahren – erreicht werden kann.

Literaturverzeichnis

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J. & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103,* 1–18.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R. et al. (2016). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom's Taxonomy of educational objectives*. Edinburgh: Pearson.

Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority (2010). *The Australian curriculum: Mathematics,* Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority. Zugriff am 15.11.2018.
Verfügbar unter http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/Curriculum/F-10

Baltes-Götz, B. (2013). *Analyse von hierarchischen linearen Modellen mit der SPSS-Prozedur MIXED,* Universität Trier. Zugriff am 15.11.2018. Verfügbar unter https://www.uni-trier.de/fileadmin/urt/doku/hlm/hlm.pdf

Bandura, A. (1976). Die Analyse von Modellierungsprozessen. In A. Bandura (Hrsg.), *Lernen am Modell. Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie* (S. 9–67). Stuttgart: Klett.

Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology, 74,* 157–193.

Baroody, A. J. (2012). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise* (Studies in mathematical thinking and learning, S. 1–33). New York: Routledge.

Baroody, A. J., Feil, Y. & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 115–131.

Baroody, A. J. & Tiilikainen, S. H. (2012). Two perspectives on addition development. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise* (Studies in mathematical thinking and learning, S. 75–125). New York: Routledge.

Baur, A. & Ziervogel, S. (2009). *Flex und Flo 3. Lehrermaterialien*. Braunschweig: Diesterweg.

Baxter, J. A., Woodward, J. & Olson, D. (2001). Effects of reform-based mathematics instruction on low achievers in five third-grade classrooms. *The Elementary School Journal, 101,* 529–547.

Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (2014). *LehrplanPLUS Grundschule. Lehrplan für die bayerische Grundschule.* Zugriff am 15.11.2018. Verfügbar unter
https://www.km.bayern.de/download/9528_lehrplanplus_grundschule.pdf

Beishuizen, M., Van Putten, C. M. & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7,* 87–106.

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100* (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 40). Hildesheim: Franzbecker.

Benz, C. (2007). Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE±ZE im Verlauf des zweiten Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28,* 49–73.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 333–339.

Bertsch, S., Pesta, B. J., Wiscott, R. & McDaniel, M. A. (2007). The generation effect. A meta-analytic review. *Memory & Cognition, 35,* 201–210.

Bloom, B. S. (Hrsg.). (1976). *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich*. Weinheim: Beltz.

Blöte, A. W., Klein, A. S. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10,* 221–247.

Blöte, A. W., Van der Burg, Eeke & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93,* 627–638.

Bohley, P. (2000). *Statistik. Einführendes Lehrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*. München: Oldenbourg.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R., Voss, A. et al. (Hrsg.). (2005). *IGLU - Skalenhandbuch zur Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.

Bühner, M. & Ziegler, M. (2009). *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (Pearson Studium - Psychologie). München: Pearson Studium.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 3–20.

Cary, M. & Reder, L. M. (2002). Metacognition in Strategy Selection. Giving consciousness too much credit. In P. Chambres, M. Izaute & P.-J. Marescaux (Hrsg.), *Metacognition* (S. 63–77). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cattell, R.B., Weiß, R. H. & Osterland, J. (1997). *Grundintelligenztest Skala 1. CFT 1*. Göttingen: Hogrefe.

Chandler, P. & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction, 8,* 293–332.

Chen, O., Kalyuga, S. & Sweller, J. (2015). The worked example effect, the generation effect, and element interactivity. *Journal of Educational Psychology, 107,* 689–704.

Chen, O., Kalyuga, S. & Sweller, J. (2016). Relations between the worked example and generation effects on immediate and delayed tests. *Learning and Instruction, 45,* 20–30.

Clark, R. E. (2009). How much and what type of guidance is optimal for learning from instruction? In S. Tobias & T. M. Duffy (Hrsg.), *Constructivist theory applied to instruction: Success or failure?* (S. 158–183). New York: Routledge.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M. & Irons, C. J. (1995). Years 2 and 3 children's strategies for mental addition and subtraction. *Mathematics Education Research Group in Australasia, 1,* 195–202.

Csíkos, C. (2016). Strategies and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 123–139.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20,* 205–215.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 45–55.

Dowker, A. (2005). *Individual Differences in Arithmetic: Implications for Psychology, Neuroscience and Education*. Hove: Psychology Press.

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J. & Willingham, D. T. (2013). Improving students' learning with effective learning techniques: Promising directions from cognitive and educational psychology. *Psychological Science in the Public Interest, 14,* 4–58.

Elen, J., Stahl, E., Bromme, R. & Clarebout, G. (2011). Introduction. In J. Elen, E. Stahl, R. Bromme & G. Clarebout (Hrsg.), *Links between beliefs and cognitive flexibility* (S. 1–6). Dordrecht: Springer Netherlands.

Elia, I., den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *The International Journal on Mathematics Education, 41,* 605–618.

Ellis, S. (1997). Strategy choice in sociocultural context. *Developmental Review, 17,* 490–524.

Feldon, D. F. (2007). The implications of research on expertise for curriculum and pedagogy. *Educational Psychology Review, 19,* 91–110.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I. et al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 130–162.

Ganzeboom, H. B., De Graaf, P. M. & Treiman, D. J. (1992). A standard international socio-economic index of occupational status. *Social Science Research, 21,* 1–56.

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist, 50,* 24–37.

Geary, D. C. (1996). *Children's mathematical development. Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 4–15.

Geary, D. C. (2007). Educating the evolved mind: Conceptual foundations for an evolutionary educational psychology. In J. S. Carlson & J. R. Levin (Hrsg.), *Educating the evolved mind. Conceptual foundations for an evolutionary educational psychology* (Psychological perspectives on contemporary educational issues, Bd. 2, S. 1–99). Charlotte, N.C.: Information Age Pub.

Geary, D. C., Hoard, M. K. & Nugent, L. (2012). Independent contributions of the central executive, intelligence, and in-class attentive behavior to developmental change in the strategies used to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 113,* 49–65.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren - Diagnose und Therapie*. Freiburg: Herder Verlag.

Girash, J. (2014). Metacognition and Instruction. In V. A. Benassi, C. E. Overson & C. M. Hakala (Hrsg.), *Applying science of learning in education. Infusing psychological science into the curriculum* (S. 152–168).

Gravemeijer, K. P. (1994). *Developing realistic mathematics education. Met een samenvatting in het Nederlands = Ontwikkelen van realistisch reken/wiskundeonderwijs*. Utrecht: CD-Beta Press.

Gravemeijer, K. P. (2001). Fostering a dialectic relation between theory and practice. In J. Anghileri (Hrsg.), *Principles and practices in arithmetic teaching. Innovative approaches for the primary classroom* (S. 147–161). Buckingham: Open University Press.

Gravemeijer, K. P. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6,* 105–128.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Bd. 2, S. 805–842). Charlotte, NC: Information Age.

Hasselhorn, M., Gold, A., Kunde, W. & Schneider, S. (2017). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren*. Stuttgart: Kohlhammer.

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child and Adolescent Development, 1988,* 55–70.

Hatano, G. & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational Researcher, 32,* 26–29.

Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Hattie, J. A. C. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research, 77,* 81–112.

Heine, A. & Jacobs, A. M. (2011). Basale Verarbeitungsdefizite und spezifische Rechenschwäche: Ein Brückenschlag zwischen neurokognitiven Funktionen und Leistung im Fach Mathematik. In A. Heine (Hrsg.), *Lehr-Lern-Forschung unter neurowissenschaftlicher Perspektive: Ergebnisse der zweiten Förderphase des Programms NIL: Neurowissenschaften - Instruktion - Lernen* (S. 57–79). Münster: Waxmann.

Heinze, A., Arend, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies. An experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. *Instructional Science, 46,* 869–891.

Heinze, A., Marschick, F. & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *The International Journal on Mathematics Education, 41,* 591–604.

Heirdsfield, A. M. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children, 66,* 96–102.

Heirdsfield, A. M. & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior, 23,* 443–463.

Hessisches Kultusministerium. (1995). *Rahmenplan Grundschule gemäß der 204. Verordnung über Rahmenpläne des hessischen Kultusministers vom 21.3.1995*. Wiesbaden.

Hiebert, J. C. & Carpenter, T. P. (1992). Learning an d teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65–97). New York: Macmillan.

Hiebert, J. C. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introducory analysis. In J. C. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. C. & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 14,* 251–283.

Imbo, I. & Vandierendonck, A. (2007). The development of strategy use in elementary school children: Working memory and individual differences. *Journal of Experimental Child Psychology, 96,* 284–309.

Jitendra, A. K. & Star, J. R. (2011). Meeting the needs of students with learning disabilities in inclusive mathematics classrooms: The role of schema-based instruction on mathematical problem-solving. *Theory Into Practice, 50,* 12–19.

Kadosh, R. C., Dowker, A., Heine, A., Kaufmann, L. & Kucian, K. (2013). Interventions for improving numerical abilities: Present and future. *Trends in Neuroscience and Education, 2,* 85–93.

Kalyuga, S. (2011). Cognitive load theory: Implications for affective computing. In McCarthy, P. M., & Murray, R. C. (Hrsg.), *Proceedings of the 24th International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference* (S. 105–110). Menlo Park, CA: Association for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI).

Kastens, C., Lorenz, A. & Lipowsky, F. (2013). *Dokumentation der Erhebungsinstrumente des Projekts „Persönlichkeits- und Lernentwicklung von Grundschulkindern" (PERLE) - Teil 4, Universität Kassel: Unveröffentlichtes Manuskript*, Kassel.

Kaufmann, L., Handl, P., Delazer, M. & Pixner, S. (2013). Wie Kinder rechnen lernen und was ihnen dabei hilft. Eine kognitiv-neuropsychologische Perspektive. In M. Von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 231–258). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kirschner, P. A., Sweller, J. & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41,* 75–86.

Klein, A. S., Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 443–464.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004a). *DEMAT 2+. Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen*. Göttingen: Beltz.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004b). *DEMAT 2+. Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen. Manual*. Göttingen: Beltz.

Krauthausen, G. (2009). Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (Pädagogik, S. 100–117). Weinheim: Beltz.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe). Berlin: Springer Spektrum.

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. In P. A. Frensch & J. Funke (Hrsg.), *Complex problem solving. The European perspective* (S. 201–218). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. H. (2002). Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science, 30,* 361–378.

Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 24,* 97–114.

Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H. & Maas, C. J. M. (2004). Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands. *The Elementary School Journal, 104,* 233–251.

Kuhn, D. (2007). Is direct instruction an answer to the right question? *Educational Psychologist, 42,* 109–113.

Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: Beschluss vom 15.10.2004*. Köln: Luchterhand.

LeFevre, J.-A., Berrigan, L., Vendetti, C., Kamawar, D., Bisanz, J., Skwarchuk, S.-L. et al. (2013). The role of executive attention in the acquisition of mathematical skills for children in grades 2 through 4. *Journal of Experimental Child Psychology, 114,* 243–261.

Lemaire, P. & Lecacheur, M. (2011). Age-related changes in children's executive functions and strategy selection: A study in computational estimation. *Cognitive Development, 26,* 282–294.

Lemaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology, 124,* 83–97.

Lemonidis, C. (2016). *Mental computation and estimation. Implications for mathematics education research, teaching, and learning*. New York: Routledge.

Linsen, S., Verschaffel, L., Reynvoet, B. & De Smedt, B. (2015). The association between numerical magnitude processing and mental versus algorithmic multi-digit subtraction in children. *Learning and Instruction, 35,* 42–50.

Lipowsky, F. (2015). Unterricht. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 69–105). Berlin: Springer.

Lipowsky, F., Richter, T., Borromeo Ferri, R., Ebersbach, M. & Hänze, M. (2015). Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen. *Schulpädagogik heute, 6,* 1–10.

Little, R. J. & Rubin, D. B. (1987). *Statistical analysis with missing data* (Wiley series in probability and mathematical statistics). New York: John Wiley & Sons.

Lorenz, J. H. (1998). Rechenstrategien und Zahlensinn. *Grundschulunterricht, 45,* 11–13.

Lorenz, J. H. (2005). Grundschulkinder rechnen anders – Die Entwicklung mathematischer Strukturen und des Zahlensinns von „Matheprofis". In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht* (S. 113–122). München: Oldenbourg.

Lorenz, J. H. (2008). *Mathematikus 3. Lehrermaterialien*. Braunschweig: Westermann.

Lüdtke, O., Robitzsch, A., Trautwein, U. & Köller, O. (2007). Umgang mit fehlenden Werten in der psychologischen Forschung. *Psychologische Rundschau, 58,* 103–117.

Luwel, K., Foustana, A., Papadatos, Y. & Verschaffel, L. (2011). The role of intelligence and feedback in children's strategy competence. *Journal of Experimental Child Psychology, 108,* 61–76.

Luwel, K., Onghena, P., Torbeyns, J., Schillemans, V. & Verschaffel, L. (2009). Strengths and weaknesses of the choice/no-choice method in research on strategy use. *European Psychologist, 14,* 351–362.

Luwel, K., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2003). The relation between metastrategic knowledge, strategy use and task performance: Findings and reflections from a numerosity judgement task. *European Journal of Psychology of Education, 18,* 425–447.

Mabbott, D. J. & Bisanz, J. (2003). Developmental change and individual differences in children's multiplication. *Child Development, 74,* 1091–1107.

Mabbott, D. J. & Bisanz, J. (2008). Computational skills, working memory, and conceptual knowledge in older children with mathematics learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 41,* 15–28.

McElroy, L. A. & Slamecka, N. J. (1982). Memorial consequences of generating nonwords. Implications for semantic-memory interpretations of the generation effect. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 21,* 249–259.

Metcalfe, J. & Kornell, N. (2007). Principles of cognitive science in education. The effects of generation, errors, and feedback. *Psychonomic Bulletin & Review, 14,* 225–229.

Miller, P. H. & Seier, W. L. (1994). Strategy utilization deficiencies in children. When, where, and why. In H. W. Reese (Hrsg.), *Advances in Child Development and Behavior* (Bd. 25, S. 107–156). New York: Academic Press.

Milo, B. F., Seegers, G., Ruijssenaars, W. A. & Vermeer, H. J. (2004). Affective consequences of mathematics instruction for students with special needs. *European Journal of Special Needs Education, 19,* 49–68.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.

Möller, J. & Appelt, R. (2001). Auffrischungssitzungen zur Steigerung der Effektivität des Denktrainings für Kinder I. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 15,* 199–206.

Moser Opitz, E. & Schmassmann, M. (2012). Grundoperationen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (Heil- und Sonderpädagogik, S. 266–279). Stuttgart: Kohlhammer.

Namy, L. L. & Gentner, D. (2002). Making a silk purse out of two sow's ears: Young children's use of comparison in category learning. *Journal of Experimental Psychology: General, 131,* 5–15.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Nemeth, L., Werker, K., Arend, J., Vogel, S. & Lipowsky, F. (2019). Interleaved learning in elementary school mathematics: Effects on the flexible and adaptive use of subtraction strategies. *Frontiers, 10*, Article 86.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Pauli, C. & Reusser, K. (2000). Zur Rolle der Lehrperson beim kooperativen Lernen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 22,* 421–442.

Pauli, C., Reusser, K. & Grob, U. (2010). Reformorientierter Mathematikunterricht in der Deutschschweiz. In K. Reusser, C. Pauli & M. Waldis (Hrsg.), *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht* (S. 309–340). Münster: Waxmann.

Petermann, F. & Petermann, U. (Hrsg.). (2010). *Hamburg-Wechsler-Intelligenztest für Kinder. Übersetzung und Adaptation der WISC-IV von David Wechsler*. Bern: Huber.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 335–349.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2013). Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems. *British Journal of Psychology,* 495–511.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2014). Subtraction by addition in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Instruction, 30,* 1–8.

Piaget, J. & Inhelder, B. (2004). *Die Psychologie des Kindes*. Stuttgart: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (2006). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W. & Naumann, E. (2014). *Quantitative Methoden 2. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler*. Berlin: Springer.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze* (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, Bd. 46). Hildesheim: Franzbecker.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31,* 257–283.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 19). Münster: Waxmann.

Renkl, A. (1996). Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau, 47,* 78–92.

Renkl, A. (2014). Learning from worked examples: How to prepare students for meaningful problem solving. In V. A. Benassi, C. E. Overson & C. M. Hakala (Hrsg.), *Applying science of learning in education. Infusing psychological science into the curriculum* (S. 118–130).

Resnick, L. B. & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Hrsg.), *Advances in instructional psychology* (Bd. 3, S. 41–95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Reusser, K. (2000). Success and failure in school mathematics: effects of instruction and school environment. *European Child & Adolescent Psychiatry, 9,* 17–26.

Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglister, K. Reusser & H. Wyss (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage* (S. 151–168). Bern: h.e.p.

Reusser, K. & Pauli, C. (2010). Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität – Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht: Einleitung und Überblick. In K. Reusser, C. Pauli & M. Waldis (Hrsg.), *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht* (S. 9–32). Münster: Waxmann.

Richter, D., Kuhl, P. & Pant, H. A. (2012). Soziale Disparitäten. In P. Stanat, Hans Anand Pant, Katrin Böhme & Dirk Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 191–208). Münster: Waxmann.

Rittle-Johnson, B. & Kmicikewycz, A. O. (2008). When generating answers benefits arithmetic skill. The importance of prior knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 101,* 75–81.

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Hrsg.), *The development of mathematical skills* (S. 75–110). Hove: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82,* 436–455.

Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika, 63,* 581–592.

Schafer, J. L. & Graham, J. W. (2002). Missing data: Our view of the state of the art. *Psychological Methods, Vol 7,* 147–177.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, W. (2009). Schriftliches Rechnen als neue Chance für rechenschwache Kinder. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (Pädagogik, S. 118–134). Weinheim: Beltz.

Schmidt, H. G., Loyens, S. M. M., Van Gog, T. & Paas, F. (2007). Problem-based learning is compatible with human cognitive architecture: Commentary on Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42,* 91–97.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology, 47,* 1525–1538.

Schneider, W., Küspert, P. & Krajewski, K. (2016). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen*. Paderborn: Schöningh.

Schnotz, W. & Kürschner, C. (2007). A reconsideration of Cognitive Load Theory. *Educational Psychology Review, 19,* 469–508.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: Macmillan.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25,* 130–148.

Schütte, S. (Hrsg.). (2005a). *Die Matheprofis 3. Lehrermaterialien*. München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

Schütte, S. (Hrsg.). (2005b). *Die Matheprofis 3. Ein Mathematikbuch für die Grundschule*. München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 227–258.

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 145–173.

Selter, C. & Sundermann, B. (1999). Vielfalt und Gemeinsamkeit – zur sozialen Dimension von Eigenproduktionen. In E. Hengartner (Hrsg.), *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht* (Spektrum Schule Beiträge zur Unterrichtspraxis, S. 60–65). Zug: Klett und Balmer.

Shrager, J. & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science, 9,* 405–410.

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds. The process of change in children's thinking*. New York, NY: Oxford Univ. Press.

Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon, R. M. Lerner, D. Kuhn & R. S. Siegler (Hrsg.), *Handbook of child psychology. Cognition, perception, and language* (Bd. 2, S. 464–510). Hoboken, NJ: Wiley.

Siegler, R. S. (2007). Cognitive variability. *Developmental Science, 10,* 104–109.

Siegler, R. S. & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In R. V. Kail (Hrsg.), *Advances in Child Development and Behavior* (Bd. 33, S. 1–42). San Diego, CA, US: Elsevier Academic Press.

Siegler, R. S. & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126,* 71–92.

Siegler, R. S. & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In L. P. Lipsitt & H. W. Reese (Hrsg.), *Advances in Child Development and Behavior* (Bd. 16, S. 241–312). New York: Academic Press.

Siegler, R. S. & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Hrsg.), *The origins of cognitive skills* (229–193). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S. & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: a microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General, 127,* 377–397.

Siegler, R. S. & Svetina, M. (2006). What leads children to adopt new strategies? A microgenetic/cross-sectional study of class inclusion. *Child Development, 77,* 997–1015.

Slamecka, N. J. & Graf, P. (1978). The generation effect: Delineation of a phenomenon. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4,* 592–604.

Smith, P. F. (2012). A note on the advantages of using linear mixed model analysis with maximal likelihood estimation over repeated measures ANOVAs in psychopharmacology. Comment on Clark et al. (2012). *Journal of Psychopharmacology, 26,* 1605–1607.

Souvignier, E. & Trenk-Hinterberger, I. (2010). Implementation eines Programms zur Förderung selbstregulierten Lesens. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 24,* 207–220.

Spiegel, H. & Götze, D. (2007). Rechenkonferenzen unter Kindern - Möglichkeiten, Chance und methodische Umsetzung. In J. H. Lorenz & W. Schipper (Hrsg.), *Hendrik Radatz. Impulse für den Mathematikunterricht* (S. 28–36). Braunschweig: Schroedel.

Spiegel, H. & Selter, C. (2006). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36,* 404–411.

Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 132–135.

Star, J. R. & Madnani, J. (2004). Which way is best? Students' conceptions of optimal strategies for solving equations. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Hrsg.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (S. 483–489). Toronto: University of Toronto.

Star, J. R. & Newton, K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *The International Journal on Mathematics Education, 41,* 557–567.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst.

Stern, E. (2009). Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (Pädagogik, S. 151–164). Weinheim: Beltz.

Stöger, H., Sontag, C. & Ziegler, A. (2009). Selbstreguliertes Lernen in der Grundschule. In F. Hellmich & S. Wernke (Hrsg.), *Lernstrategien im Grundschulalter* (S. 91–104). Stuttgart: Kohlhammer.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory* (Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies). New York: Springer.

Sweller, J. & Chandler, P. (1994). Why some material is difficult to learn. *Cognition and Instruction, 12,* 185–233.

Theurer, C. (2015). *Kreativitätsförderndes Klassenklima als Determinante der Kreativitätsentwicklung im Grundschulalter*. Dissertation. Universität Kassel, Kassel. Zugriff am 15.11.2018. Verfügbar unter https://d-nb.info/1068201959/34

Thompson, I. (2010). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Hrsg.), *Issues In Teaching Numeracy In Primary Schools* (S. 161–173). Buckingham: Open University Press.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 29–47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *The International Journal on Mathematics Education, 41,* 541–555.

Torbeyns, J., Arnaud, L., Lemaire, P. & Verschaffel, L. (2010). Cognitive change as strategy change. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Hrsg.), *Cognitive developmental change. Theories, models and measurement* (Cambridge studies in cognitive and perceptual development, Bd. 10, S. 186–216). Cambridge: Cambridge University Press.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009a). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 1–17.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009b). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *The International Journal on Mathematics Education, 41,* 581–590.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning, 11,* 79–91.

Torbeyns, J., Hickendorff, M. & Verschaffel, L. (2017). The use of number-based versus digit-based strategies on multi-digit subtraction. 9–12-year-olds' strategy use profiles and task performance. *Learning and Individual Differences, 58,* 64–74.

Torbeyns, J., Peters, G., Smedt, B. de, Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2016). Children's understanding of the addition/subtraction complement principle. *British Journal of Educational Psychology, 86,* 382–396.

Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: a choice/no-choice study. *Research in Mathematics Education, 15,* 129–140.

Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2016). Mental computation or standard algorithm? Children's strategy choices on multi-digit subtractions. *European Journal of Psychology of Education, 31,* 99–116.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2002). Strategic competence: Applying Siegler's theoretical and methodological framework to the domain of simple addition. *European Journal of Psychology of Education, 17,* 275–291.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2004). Strategy development in children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 119–131.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction, 23,* 1–21.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction, 24,* 439–465.

Van Buuren, S. & Groothuis-Oudshoorn, K. (2011). mice: Multivariate Imputation by Chained Equations in R. *Journal of Statistical Software, 45,* 1–67.

Van der Ven, S. H. G., Boom, J., Kroesbergen, E. H. & Leseman, P. P. M. (2012). Microgenetic patterns of children's multiplication learning: Confirming the overlapping waves model by latent growth modeling. *Journal of Experimental Child Psychology, 113,* 1–19.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24,* 335–359.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2011). Analyzing and developing strategy flexibility in mathematics education. In J. Elen, E. Stahl, R. Bromme & G. Clarebout (Hrsg.), *Links between beliefs and cognitive flexibility* (S. 175–197). Dordrecht: Springer Netherlands.

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology, 24,* 16–27.

Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming. (2010). *Informatie voor de onderwijspraktijk. Ontwikkelingsdoelen en eindtermen voor het gewoon basisonderwijs.* Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, Departement Onderwijs, Afdeling Informatie en Documentatie.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (2002). *Denken und Sprechen*. Weinheim: Beltz.

West, B. T., Welch, K. B. & Gałecki, A. T. (2007). *Linear mixed models. A practical guide using statistical software*. Boca Raton, FL: Chapmann & Hall/CRC.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2). Stuttgart: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2003). *Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr. Schülerbuch*. Stuttgart: Klett-Grundschulverlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2010). *Das Zahlenbuch. Lehrerband*. Stuttgart: Klett.

Woodward, J. & Baxter, J. A. (1997). The effects of an innovative approach to mathematics on academically low achieving students in mainstreamed settings. *Exceptional Children, 63,* 373–388.

Woolfolk, A. (2014). *Pädagogische Psychologie*. Hallbergmoos: Pearson.

Wylie, R. & Chi, M. T. H. (2014). The self-explanation principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 413–432). New York: Cambridge University Press.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.

Young, R. M. & O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science, 5,* 153–177.

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Anhangsverzeichnis

A Strategietestaufgaben

Testaufgaben T1 bis T4 mit mittlerer Lösewahrscheinlichkeit in der Experimentalgruppe (N = 79) (gepoolte Daten)[11]					
Aufgabe	**T1 Sept/Okt**	**T2* Oktober**	**Auffrischung 1* Dezember**	**T3 Januar**	**T4 Juni**
29 + 43	X (83 %)				
66 – 49	X (69 %)				
502 + 399	X (64 %)	X (68 %)	X	X (82 %)	X (92 %)
83 – 78	X (62 %)	X (75 %)			
398 + 441	X (58 %)	X (68 %)	X	X (77 %)	X (81 %)
51 – 19	X (60 %)	X (57 %)			
403 – 396	X (42 %)	X (62 %)	X	X (63 %)	X (55 %)
1000 – 991	X (53 %)	X (70 %)	X	X (70 %)	X (74 %)
242 – 239		X (61 %)	X	X (62 %)	
139 + 241		X (76 %)	X	X (79 %)	
166 + 197			X		
788 – 299			X		
266 + 397				X (73 %)	X (82 %)
688 – 399				X (30 %)	X (54 %)
429 + 231					X (79 %)
362 – 359					X (63 %)

[11] Für den Strategietest im Dezember liegen nur von einem Teil der Stichprobe Daten vor.
Die fehlenden Daten wurden, wie in Kapitel 6.4 beschrieben, für diesen Messzeitpunkt nicht imputiert.

B Übersicht über das Kategoriensystem zur Strategiebeurteilung

Stratetegiecodes	Strategie (bzw. Fehlstrategie)
1	Schriftliches Normalverfahren
11	• Standardschreibweise
111	○ Überträge nicht berücksichtigt
112	○ Spaltenweise Unterschiedsbildung
113	○ Rechenzeichen vertauscht
114	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
115	○ Falsche Zahlzerlegung
12	• Andere Schreibweise
121	○ Überträge nicht berücksichtigt
122	○ Spaltenweise Unterschiedsbildung
123	○ Rechenzeichen vertauscht
124	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
125	○ Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
126	○ Falsche Zahlzerlegung
2	Stellenweise
21	• Standardverfahren H, Z, E zerlegt
211	○ Falsche Zahlzerlegung
212	○ Rechenzeichen vertauscht
213	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
22	• Verkürztes Verfahren
221	○ Falsche Zahlzerlegung
222	○ Rechenzeichen vertauscht
223	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
23	• Stellenweise Subtraktion
231	• In Teilschritten stellenweise Unterschiedsbildung
2311	○ Falsche Zahlzerlegung
2312	○ Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
2313	○ Rechenzeichen vertauscht
2314	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
2315	○ Falsche Zahlzusammensetzung im Endergebnis
232	• Stellenweise Subtraktion mit negativen Teilergebnissen
2321	• Falsche Zahlzerlegung
2322	○ Teilergebnis = 0
2323	○ Rechenzeichen vertauscht

Stratetegiecodes				Strategie (bzw. Fehlstrategie)
			2324	o Lösungsweg nicht vollständig
			2325	o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
3				Schrittweise
	31			• Stellengerechte Zerlegung: H, Z, E oder E, Z, H
		311		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		312		o Falsche Zahlzerlegung
		313		o Rechenzeichen vertauscht
		314		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
	32			• Stellengerechte Zerlegung: verkürztes Verfahren
		321		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		322		o Falsche Zahlzerlegung
		323		o Rechenzeichen vertauscht
		324		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
	33			• Nicht stellengerechte Zerlegung: angepasstes schrittweises Rechnen mit Zusatzschritt
		331		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		332		o Falsche Zahlzerlegung
		333		o Rechenzeichen vertauscht
		334		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
4				Hilfsaufgabe
	41			• 1. Summanden bzw. Minuend geglättet
		411		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		412		o Falsche Zahlzerlegung
		413		o Rechenzeichen vertauscht
		414		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
	42			• 2. Summanden bzw. Subtrahend geglättet
		421		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		422		o Falsche Zahlzerlegung
		423		o Rechenzeichen vertauscht
		424		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
	43			• Beide Summanden bzw. Minuend und Subtrahend geglättet
		431		o Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
		432		o Falsche Zahlzerlegung
		433		o Rechenzeichen vertauscht
		434		o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt

Stratetegiecodes	Strategie (bzw. Fehlstrategie)
5	Abstandsberechnung
51	• Ergänzen
511	• Schriftliche Notation
5111	o Rechenzeichen vertauscht
5112	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt die Lösung)
512	• Notation am Rechenstrich
5121	o Falsche Zahlzerlegung
5122	o Rechenzeichen vertauscht
5123	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. die Lösung)
52	• Indirekte Subtraktion
521	• Schriftliche Notation
522	• Notation am Rechenstrich
5221	o Falsche Zahlzerlegung
5222	o Rechenzeichen vertauscht
5223	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. die Lösung)
53	• Rechenrichtung nicht eindeutig
531	• Schriftliche Notation
5311	o Falsche Zahlzerlegung
5312	o Rechenzeichen vertauscht
5313	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. die Lösung)
532	• Notation am Rechenstrich
5321	o Falsche Zahlzerlegung
5322	o Rechenzeichen vertauscht
5323	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. die Lösung)
6	Verändern
61	• Addition: Gegensinniges Verändern
611	o Rechenzeichen vertauscht
612	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
613	o Addition: Statt gegensinnig wurde gleichsinnig verändert
62	• Subtraktion: Gleichsinniges Verändern
621	o Rechenzeichen vertauscht
622	o Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
623	o Subtraktion: Statt gleichsinnig wurde gegensinnig verändert
7	Mischformen

Stratetegiecodes	**Strategie (bzw. Fehlstrategie)**
71	• Kombination Schritt- und Stellenweise
711	○ Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
712	○ Falsche Zahlzerlegung
713	○ Rechenzeichen vertauscht
714	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
72	• Z stellenweise, E schrittweise angepasst
721	○ Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
722	○ Falsche Zahlzerlegung
723	○ Rechenzeichen vertauscht
724	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
73	• Kombination Schrittweise + Hilfsaufgabe
731	○ Rechenrichtungsfehler in Teilschritten
732	○ Falsche Zahlzerlegung
733	○ Rechenzeichen vertauscht
734	○ Lösungsweg nicht vollständig (es fehlt bspw. der letzte Lösungsschritt)
8	Im Kopf gerechnet
9	Nicht zuzuordnen
91	• Schritt- oder Stellenweise; Aufgabe wurde in einem Schritt notiert

C Adaptivitätseinschätzung der Aufgaben im Strategietest und in der Post für den Tiger

Werte: 0 = nicht adaptiv, 0.5 = partiell adaptiv, 1 = adaptiv

Strategiecode Ebene 2[12]		Aufgaben Strategietest (T1 bis T4)					
		29 + 43	66 – 49	502 + 399	83 – 78	398 + 441	51 – 19
1.1	Schriftliches Normalverfahren, Standardschreibweise	0	0	0	0	0	0
1.2	Schriftliches Normalverfahren, Andere Schreibweise	0	0	0	0	0	0
2.1	Stellenweise STG	0.5		0		0	
2.2	Stellenweise VK			0.5		0	
2.3	Stellenweise Subtraktion		0		0		0
3.1	Schrittweise STG	1	0.5	0	0.5	0	0.5
3.2	Schrittweise VK			0.5		0	
3.3	Schrittweise NSTG	0	0	0.5	0	0	0
4.1	Hilfsaufgabe 1. Zahl	1	0	0.5	1	1	0
4.2	Hilfsaufgabe 2. Zahl	1	1	1	1	0	1
4.3	Hilfsaufgabe beide Zahlen	0.5	0.5	1	0	0.5	1
5.1	Ergänzen		1		1		0.5
5.2	Indirekte Subtraktion		1		1		0.5
5.3	Abstandsberechnung (ohne Angabe der Rechenrichtung)		1		1		0.5
6.1	Gegensinniges Verändern	1		1		1	
6.2	Gleichsinniges Verändern		1		1		1
7.1	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise	0	0	0	0	0	0
7.2	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise mit Anpassung	0	0	0	0	0	0
7.3	Mischstrategie Schrittweise/Hilfsaufgabe	0.5	0.5	0.5	0	0.5	0.5
8	Kopfrechnen[13]						
9	Nicht zuzuordnen	0	0	0	0	0	0

[12] Anmerkung: STG stellengerechte Notation, VK verkürzte Notation der stellengerechten Schreibweise, NSTG nicht stellengerechte Notation

[13] *Kopfrechnen* wurde, wie in Kapitel 6.3.1 beschrieben, in Abhängigkeit von der Korrektheit kodiert. In Kombination mit korrektem Ergebnis wurde *Kopfrechnen* als adaptiv kodiert (Wert 1), bei falschem Ergebnis wurde der Wert 0 zugewiesen.

Strategiecode Ebene 2[12]		Aufgaben Strategietest (T1 bis T4)				
		403 – 396	1000 – 991	242 – 239	139 + 241	166 + 197
1.1	Schriftliches Normalverfahren, Standardschreibweise	0	0	0	0	0
1.2	Schriftliches Normalverfahren, Andere Schreibweise	0	0	0	0	0
2.1	Stellenweise STG				0	0
2.2	Stellenweise VK				0.5	0
2.3	Stellenweise Subtraktion	0	0	0		
3.1	Schrittweise STG	0	0	0	0	0
3.2	Schrittweise VK	0.5	0.5	0.5	0.5	0
3.3	Schrittweise NSTG	0	0	0	0	0
4.1	Hilfsaufgabe 1. Zahl	1		0.5	1	0
4.2	Hilfsaufgabe 2. Zahl	1	0	0.5	0	1
4.3	Hilfsaufgabe beide Zahlen	0.5		0	0.5	0.5
5.1	Ergänzen	1	1	1		
5.2	Indirekte Subtraktion	1	1	1		
5.3	Abstandsberechnung (ohne Angabe der Rechenrichtung)	1	1	1		
6.1	Gegensinniges Verändern				1	1
6.2	Gleichsinniges Verändern	1	0.5	1		
7.1	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise	0	0	0	0	0
7.2	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise mit Anpassung	0	0	0	0	0
7.3	Mischstrategie Schrittweise/Hilfsaufgabe	0.5	0	0	0	0.5
8	Kopfrechnen[13]					
9	Nicht zuzuordnen	0	0	0	0	0

Strategiecode Ebene 2[12]		Aufgaben Strategietest (T1 bis T4)				
		788 – 299	266 + 397	688 – 399	429 + 231	362 – 359
1.1	Schriftliches Normalverfahren, Standardschreibweise	0	0	0	0	0
1.2	Schriftliches Normalverfahren, Andere Schreibweise	0	0	0	0	0
2.1	Stellenweise STG		0		0	
2.2	Stellenweise VK		0		0.5	
2.3	Stellenweise Subtraktion	0		0		0
3.1	Schrittweise STG	0	0	0	0	0
3.2	Schrittweise VK	0	0	0	0.5	0.5
3.3	Schrittweise NSTG	0	0	0	0	0
4.1	Hilfsaufgabe 1. Zahl	0	0	0	1	0.5
4.2	Hilfsaufgabe 2. Zahl	1	1	1	0	0.5
4.3	Hilfsaufgabe beide Zahlen	0.5	0.5	0.5	0.5	0
5.1	Ergänzen	0.5		0.5		1
5.2	Indirekte Subtraktion	0.5		0.5		1
5.3	Abstandsberechnung (ohne Angabe der Rechenrichtung)	0.5		0.5		1
6.1	Gegensinniges Verändern		1		1	
6.2	Gleichsinniges Verändern	1		1		1
7.1	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise	0	0	0	0	0
7.2	Mischstrategie Schrittweise/Stellenweise mit Anpassung	0	0	0	0	0
7.3	Mischstrategie Schrittweise/Hilfsaufgabe	0.5	0.5	0.5	0	0
8	Kopfrechnen[13]					
9	Nicht zuzuordnen	0	0	0	0	0

Strategiecode Ebene 2[12]		Post für den Tiger					
		158 + 299	104 − 98	203 + 169	157 – 149	278 + 99	204 − 197
1.1	Schriftliches Normalverfahren, Standardschreibweise	0	0	0	0	0	0
1.2	Schriftliches Normalverfahren, Andere Schreibweise	0	0	0	0	0	0
2.1	Stellenweise STG	0		0		0	
2.2	Stellenweise VK	0		0.5		0.5	
2.3	Stellenweise Subtraktion		0		0		0
3.1	Schrittweise STG	0	0	0	0	0	0
3.2	Schrittweise VK	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3.3	Schrittweise NSTG	0	0	0	0	0.5	0
4.1	Hilfsaufgabe 1. Zahl	0	1	0.5	0.5	0	1
4.2	Hilfsaufgabe 2. Zahl	1	1	1	0.5	1	1
4.3	Hilfsaufgabe beide Zahlen	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5.1	Ergänzen		1		1		1
5.2	Indirekte Subtraktion		1		1		1
5.3	Abstandsberechnung (ohne Angabe der Rechenrichtung)		1		1		1
6.1	Gegensinniges Verändern	1		1		1	
6.2	Gleichsinniges Verändern		1		1		1
7.1	Mischstrategie Schrittweise/ Stellenweise	0	0	0	0	0	0
7.2	Mischstrategie Schrittweise/ Stellenweise mit Anpassung	0	0	0	0	0	0
7.3	Mischstrategie Schrittweise/ Hilfsaufgabe	0.5	0	0	0	0	0
8	Kopfrechnen[13]						
9	Nicht zuzuordnen	0	0	0	0	0	0

D Interesse an Mathematik (Schülerfragebogen)

Itemkennwerte der Skala Interesse an Mathematik (gepoolte Daten, *N* = 79)					
Prompt: Was denkst du über Mathematik?					
	Item	**T1**		**T2**	
		M	*SE*	*M*	*SE*
Int1	Mathematik macht mir Spaß.	3.51	.08	3.57	.08
Int2	Was wir in Mathematik lernen, interessiert mich.	3.49	.07	3.42	.09
Int3	Mathematik ist langweilig. (invertiert)	3.54	.10	3.69	.09
Int4	Mathematik ist spannend.	3.27	.10	3.37	.09
Int5	Ich lerne in Mathematik viele interessante Sachen.	3.62	.08	3.60	.09
Int6	Ich überlege gerne, wie ich etwas möglichst geschickt ausrechnen kann.	3.31	.09	3.39	.10
Int7	Ich finde es spannend, in Mathematik Regeln oder Tricks selbst zu entdecken.	3.49	.10	3.54	.09
Int8	Ich löse gerne Knobelaufgaben und Rechenrätsel in Zeitschriften und Heften.	3.26	.12	3.15	.12
Int9	Ich rechne gerne Textaufgaben.	2.79	.14	2.64	.14

Antwortformat: stimmt überhaupt nicht (1), stimmt eher nicht (2), stimmt eher (3), stimmt genau (4)

ISBN 978-3-7376-0899-2

Die Fähigkeiten, über eine Vielzahl an Strategien zur Lösung einer Aufgabe zu verfügen und diese Strategien angemessen an unterschiedliche Aufgabenanforderungen anpassen zu können, gelten als wichtige mathematische Kompetenzen. Die vorliegende empirische Arbeit geht der Frage nach, durch welche unterrichtlichen Bedingungen diese Kompetenzen gefördert werden können. In einer außerschulischen Interventionsstudie mit Drittklässlern wurden relevante halbschriftliche Rechenstrategien entweder explizit vermittelt oder die Schülerinnen und Schüler zur Generierung eigener Strategien angeregt. Die Ergebnisse zeigen, dass eine explizite Vermittlung der relevanten halbschriftlichen Strategien kurzfristig zu einem höheren Lernzuwachs als in der Vergleichsbedingung führt. Allerdings sind die selbstgenerierten Strategien nachhaltiger verfügbar, sodass sich der Vorteil im Zeitraum nach der Intervention umkehrt.