Ansatzfunktionen auf dem logarithmischen Raum: die Log-FE-Methode

[1]Christian Schröppel, [1]Jens Wackerfuß

[1]Emmy-Noether-Gruppe „Mechanical Instabilities in Self-similar molecular structures“, Fachgebiet für Baustatik, Universität Kassel

Die Logarithmische Finite-Elemente-Methode (Log-FE-Methode, [1]) bietet einen neuartigen Ansatz zur Berechnung von FE-Modellen, insbesondere im Rahmen von Multigrid-Verfahren.

In Multigrid-Verfahren wird eine schnelle und robuste Konvergenz insbesondere durch die Entkopplung der Einflüsse der Freiheitsgrade auf den unterschiedlichen Längenskalen erreicht. Das Näherungsverfahren auf dem groben Netz sollte daher auf einer deutlich gröberen Skala arbeiten und (räumlich) hochfrequente Deformationsanteile vermeiden.

Die Log-FE-Methode verfolgt das Ziel, die (räumlich) niedrigfrequenten Anteile des Deformationsraums mit einer möglichst geringen Anzahl von Freiheitsgraden zu modellieren. Anders als bei gängigen Ansätzen in der Klasse der Ritz-Galerkin-Verfahren beziehen sich die Freiheitsgrade auf Ansatzfunktionen, die nicht auf dem Deformationsraum selbst, sondern auf seiner Lie-Algebra definiert sind.

Das Exponential eines Funktionswerts einer Ansatzfunktion für einen gegebenen materiellen Punkt stellt eine Abbildung dar, die die Transformation dieses materiellen Punkts aus der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration beschreibt. Sind die Ansatzfunktionen differenzierbar (und bleibt ihre Norm unter einem bestimmten Schwellenwert), so resultiert aus der Anwendung der Exponentialfunktion auf die Ansatzfunktionen ein differenzierbares Feld linearer Abbildungen. Diese linearen Abbildungen umfassen sowohl Translationen als auch Rotationen.

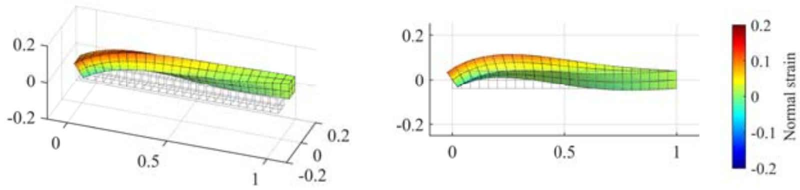

Abb. 1: Modellierung der Deformation eines 3D-Balkens, bestehend aus einem einzelnen finiten Element.

Die Interpolation mittels Ansatzfunktionen auf der Lie-Algebra führt zu einer engen Kopplung zwischen Rotations- und Transformationsanteilen der Deformation. Hierbei ist entscheidend, dass durch eine geeignete Wahl der Unterräume des Vektorraums der Lie-Algebra, auf denen die jeweiligen Ansatzfunktionen definiert sind, diese Kopplung nicht als Störeinfluss wirksam wird, sondern mit nur wenigen Freiheitsgraden eine sehr realitätsnahe Modellierung gerade solcher Deformationen ermöglicht, die nur eine geringe Veränderung des inneren Potentials nach sich ziehen.

Der Vortrag umfasst eine Darstellung der theoretischen Grundlagen der Logarithmischen Finite-Elemente-Methode sowie die Diskussion von Anwendungsbeispielen:

1. Balkenmodelle in 2D und 3D (siehe Abb. 1).
2. Einbettung der Methode in ein Multigrid-Verfahren auf Basis der Atomistischen Finite-Elemente-Methode [2].

Literatur:

[1] C. Schröppel, J. Wackerfuß. Isolating low-frequency deformation for efficient multigrid methods: a geometrically exact 2D beam model, PAMM 14, 2014, S. 561–562.

[2] J. Wackerfuß. Molecular mechanics in the context of the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 77(7), 2009, S. 969–997.