



Auswirkungen verschachtelten Lernens auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen von Lernenden über Zuordnungen

Rita Borromeo Ferri · Stella Pede · Frank Lipowsky

Eingegangen: 31. August 2018 / Angenommen: 21. Februar 2020 / Online publiziert: 6. April 2020
© Der/die Autor(en) 2020, korrigierte Publikation 2021

Zusammenfassung Häufig werden im Mathematikunterricht Lerninhalte eher separiert behandelt. Der Ansatz des sogenannten verschachtelten Lernens geht dagegen davon aus, dass es in vielen Fällen sinnvoll ist, die Lerninhalte abwechselnd und vermischt anzuordnen, um bei den Schülerinnen und Schülern lern- und verstehensförderliche Prozesse anzuregen sowie nachhaltiges Lernen zu fördern. Verschachteltes Lernen zählt zu den wünschenswerten Erschwernissen. Das Ziel der wünschenswerten Erschwernisse ist, durch eine Erhöhung des kognitiven Aufwandes beim Lernen einen langfristigen Lernerfolg zu erreichen. Die in diesem Artikel beschriebene Studie untersucht Effekte des verschachtelten Lernens gegenüber dem sogenannten geblockten Lernen, bei dem Inhalte nacheinander erarbeitet und geübt werden. Die Studie wurde mit Lernenden des Jahrgangs 7 durchgeführt, die in einer 8-stündigen Unterrichtseinheit das Thema „Zuordnungen“ entweder geblockt oder verschachtelt lernten. Das Design der experimentellen Studie sah die parallelisierte Zuweisung der Lernenden zu beiden Bedingungen und die Messung des Lernerfolgs zu drei Messzeitpunkten (Post- und zwei Follow-Up-Tests) vor. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass sich das verschachtelte gegenüber dem geblockten Lernen nachhaltig auf das konzeptuelle Wissen der Lernenden auswirkt, während in der Entwicklung des prozeduralen Wissens keine Unterschiede festzustellen waren.

Schlüsselwörter Wünschenswerte Erschwernisse · Verschachteltes Lernen · Geblocktes Lernen · Prozedurales Wissen · Konzeptuelles Wissen · Sekundarstufe I

Zusatzmaterial online Zusätzliche Informationen sind in der Online-Version dieses Artikels (<https://doi.org/10.1007/s13138-020-00162-3>) enthalten.

R. Borromeo Ferri (✉) · S. Pede

Didaktik der Mathematik, Universität Kassel, Heinrich-Plett-Str. 40, 34132 Kassel, Deutschland

E-Mail: borromeo@mathematik.uni-kassel.de

F. Lipowsky

Empirische Schul- und Unterrichtsforschung, Universität Kassel, Nora-Platiel-Str. 1, 34109 Kassel, Deutschland

MSC-Classification C30 · B20 · B50 · C70 · D40 · F80

Effects of Interleaved Learning on Procedural and Conceptual Knowledge of Learners About Proportionality

Abstract While in mathematics lessons the learning content is often treated rather separated, the approach of so-called interleaved learning assumes that in many cases it makes sense to arrange the learning contents alternately to stimulate learning and understanding processes among the learners as well as promoting sustainable learning. Interleaved learning belongs to the desirable difficulties. The goal of the desirable difficulties is to achieve a long-term learning success by increasing the cognitive effort during the learning. The study described in this paper examines the effects of the interleaved learning, when the learning content is treated alternately, versus the so-called blocked learning, when the learning content is arranged sequentially. The study was conducted with seventh graders who learned within an eight-hour lesson unit about proportionality either in a blocked or interleaved manner. The design of the experimental study provided the parallel assignment of learners to both conditions and the measurement of learning success at three measurement times (post- and two follow-up tests). The results of the study show that the interleaved learning in contrast to blocked learning has long-term effects on the conceptual knowledge of learners, whereas concerning the development of the procedural knowledge no differences could be found.

Keywords Desirable difficulties · Interleaved learning · Blocked learning · Procedural knowledge · Conceptual knowledge · Secondary school

1 Einleitung

In a rapidly changing and ever more complex world, the ultimate survival tool for individuals and organizations is knowing how to learn. (Bjork 1999, S. 454)

Wie das Zitat von Robert Bjork verdeutlicht, ist es in Beruf, Ausbildung und insbesondere in der Schule nicht nur wichtig, *dass* gelernt wird, sondern vor allem, *wie* gelernt wird. Die Nachhaltigkeit des Lernens spielt dabei eine große Rolle. Die Art und Weise, das Lernen so zu beeinflussen, dass ein möglichst hoher und nachhaltiger Lerneffekt erreicht wird, wirft die Frage nach geeigneten Lernmethoden auf, die einen solchen Effekt ermöglichen.

Ein Ansatz aus der kognitionspsychologischen Forschung sind die sogenannten „wünschenswerten Erschwernisse“ beim Lernen (Bjork und Bjork 2011). Damit sind didaktische Maßnahmen gemeint, welche das Lernen erschweren und das Behalten des Gelernten verbessern sollen (Dobson 2011; Dunlosky et al. 2013; Rohrer und Taylor 2007; Taylor und Rohrer 2010; Lipowsky et al. 2015). Der Ansatz der wünschenswerten Erschwernisse beruht auf theoretischen Überlegungen zur Funktionsweise des menschlichen Gedächtnisses, die im Abschn. 2.1 umrissen werden. Darauf folgend wird die Aufmerksamkeit auf eine bestimmte wünschenswerte Er-

schwernis, nämlich das sogenannte verschachtelte Lernen gerichtet, das im Rahmen der diesem Beitrag zugrundeliegenden Studie auf seine Wirksamkeit geprüft wurde. Konkret wurde untersucht, ob das verschachtelte Lernen dem geblockten Lernen im Hinblick auf den Erwerb prozeduralen und konzeptuellen Wissens zum Thema Zuordnungen überlegen ist. Die Unterrichtsstudie ist Teil des Forschungsprojektes „LIMIT“ (*Lernen im Mathematikunterricht durch wünschenswerte Erschwernisse*).

2 Theoretischer Hintergrund

Making things hard on yourself, but in a good way. (Bjork und Bjork 2011)

Der Begriff „wünschenswerte Erschwernisse“ („desirable difficulties“) bezeichnet spezifische didaktische Maßnahmen, die das Lernen zwar kurzfristig erschweren, langfristig das Behalten des Gelernten aber fördern und den Transfer erleichtern. Bjork (1994) entwickelte als erster einen theoretischen Rahmen für die wünschenswerten Erschwernisse, wozu auch das verschachtelte Lernen gehört, und forderte diese im Unterricht einzusetzen. Die wünschenswerten Erschwernisse bauen auf der „New Theory of Disuse“ auf (Bjork und Bjork 1992), die im Folgenden erläutert wird.

2.1 „New Theory of Disuse“

In der „New Theory of Disuse“ wird beschrieben, wie Informationen im Gedächtnis verarbeitet werden (Bjork und Bjork 1992). Laut der „New Theory of Disuse“ werden Informationen in unterschiedlicher Weise im Gedächtnis repräsentiert. Diese Repräsentation eines Inhalts basiert zum einen auf dessen Speicherstärke (storage strength), zum anderen auf dessen Abrufstärke (retrieval strength) (Bjork und Bjork 1992).

Die Stärke der Speicherung ist ein Maß dafür, wie gut ein Item¹ gelernt und im Langzeitgedächtnis vernetzt ist. Als eine latente Variable führt die storage strength zu keinem direkten Effekt der Lernleistung und beeinflusst nicht die Abrufleistung eines Items (Bjork und Bjork 1992). Bjork und Bjork (1992) gehen von einem kapazitätsunbegrenzten Langzeitgedächtnis aus: Alle Informationen werden unbegrenzt gespeichert und gehen nicht mehr aus dem Langzeitgedächtnis verloren.

Die Stärke des Abrufs ist ein Maß dafür, wie einfach auf ein Item aus dem Langzeitgedächtnis zugegriffen werden kann. Die Anzahl der zu einem bestimmten Zeitpunkt aus dem Gedächtnis abrufbaren Items ist jedoch begrenzt.

Nach Bjork und Bjork (1992) müssen die Speicher- und die Abrufstärke nicht aufeinander abgestimmt sein. Im Gegenteil: Bjork und Bjork (1992, 2006) postulieren, dass eine hohe Abrufstärke, die z.B. dann gegeben ist, wenn Lernende in der Mathematik immer wieder die gleiche Operation ausführen oder das gleiche

¹ In diesem Zusammenhang wird ein Item als eine Information bezeichnet, die sich in das Langzeitgedächtnis einfügt (Bjork und Bjork 1992, S. 36).

Verfahren anwenden, die Zunahme der Speicherstärke und damit die Vernetzung der Informationseinheiten im Gedächtnis eher hemmt.

Eine weitere Besonderheit des menschlichen Gedächtnisses als Informationsspeicher ist nach der „New Theory of Disuse“, dass das Abrufen von Informationen selbst schon ein Vorgang ist, der ein Lernereignis für diese Informationen darstellt. Es wird angenommen, dass ein solches „Abtesten“ von Informationen für deren zukünftige Erinnerbarkeit effektiver ist als Lernmöglichkeiten, die einen geringeren kognitiven Aufwand beim Abrufen von Items erfordern (wie z. B. das wiederholte Lesen). Wendet man viel Mühe und Anstrengung beim Abrufen von Informationen auf, was bei der Wiedererlangung von schlechter erinnerbaren Items der Fall ist, führt dies zu einer höheren Abruf- und Speicherstärke. Dadurch kommt es zu tieferen Verarbeitungsprozessen und zu nachhaltigerem Lernen (Bjork und Bjork 1992).

Die Annahme, dass eine hohe Abrufstärke nicht mit einer hohen Speicherstärke einhergeht und dass ein hoher kognitiver Aufwand beim Abrufen von Informationen für das langfristige Behalten und den Transfer der Informationen relevant ist, hat Konsequenzen für Strategien erfolgreichen Lehrens und Lernens (Bjork 1999). Wenn sich Lernende z. B. innerhalb kurzer Zeit und wiederholt mit immer dem gleichen Thema und der gleichen Art von Aufgaben auseinandersetzen, resultiert hieraus zwar eine hohe Abrufstärke, aber keine hohe Speicherstärke. Diese geringe Variation in schulbezogenen Anforderungen leistet wiederum dem Entstehen einer sogenannten Verstehens- und Kompetenzillusion Vorschub: Als Lernender glaubt man, weil man die gleiche schulische Anforderung innerhalb kurzer Zeit wiederholt ausführt, etwas zu können oder zu verstehen, obgleich man es nicht wirklich kann bzw. nicht wirklich verstanden hat (Bjork 1999).

Die Postulate von Elizabeth und Robert Bjork im Rahmen der „New Theory of Disuse“ bilden einen Rahmen für die Erklärung von Phänomenen, die unter dem Begriff der „wünschenswerten Erschwernisse“ erforscht werden.

2.2 Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen

Wie kann langfristig nachhaltiges Lernen gefördert werden? Nach Bjork (1994) sollten Lernbedingungen geschaffen werden, die den kognitiven Aufwand beim Abrufen von Informationen erschweren, was mit einer tieferen Verarbeitung des Lerngegenstands und mit stärkeren Vernetzungen der Lerninhalte im Gedächtnis einhergehen sollte. Didaktische Maßnahmen, die den Abruf und damit den Lernprozess kurzfristig erschweren, langfristig aber mit positiven Wirkungen auf das Lernen und Behalten verbunden sind, werden von Bjork (1994) auch als wünschenswerte Erschwernisse („desirable difficulties“) bezeichnet. Zu solchen „wünschenswerten Erschwernissen“ werden das Testen vs. das Wiederholen von Inhalten (Testungseffekt), das eigenständige Generieren vs. das Rezipieren von Informationen (Generierungseffekt), die Verteilung der Lerninhalte auf mehrere Portionen statt deren massierte Bearbeitung (verteiltetes Lernen) und die Verschachtelung der Lerninhalte statt deren geblockte Behandlung (verschachteltes Lernen) gezählt (Lipowsky et al. 2015). Durch den erhöhten kognitiven Aufwand und die tiefere Verarbeitung sollten die

Inhalte besser erinnert und damit nachhaltiger behalten werden (Bjork und Bjork 2011).

Die Befundlage zur Wirksamkeit der wünschenswerten Erschwernisse ist reichhaltig und kann daher nicht in ihrer Differenziertheit dargestellt werden. Insgesamt können die verfügbaren Studien die Effektivität der wünschenswerten Erschwernisse unterstreichen (zsf. Brunmair und Richter 2019; Cepeda et al. 2006; Dunlosky et al. 2013; Pashler et al. 2007; Pyc und Rawson 2009).

In diesem Artikel wird der Fokus nur auf eine dieser wünschenswerten Erschwernisse, nämlich auf das verschachtelte Lernen, gelegt. Im Folgenden findet daher eine genauere Auseinandersetzung mit dieser wünschenswerten Erschwernis statt.

2.3 Verschachteltes Lernen

Beim *verschachtelten Lernen* werden miteinander zusammenhängende Inhalte eines Themengebiets im Unterricht abwechselnd und vermischt behandelt, z. B. nach dem Schema „A-B-C, A-B-C, A-B-C“. Dies steht im Kontrast zum sogenannten geblockten Lernen, bei dem die Inhalte in einem Block zusammengefasst und sequentiell „abgearbeitet“ werden (Schema „A-A-A, B-B-B, C-C-C“). Nach Bjork und Bjork (2011) sollte verschachteltes Lernen im Vergleich zum geblockten Vorgehen eine bessere Erinnerbarkeit an die gelernten Inhalte nach sich ziehen.

Im Folgenden wird der Unterschied in der inhaltlichen Anordnung beim verschachtelten und geblockten Lernen am Beispiel des Themengebiets „Zuordnungen“ näher skizziert. Diesem mathematischen Inhalt lassen sich die Zuordnungstypen „Proportionale Zuordnungen“ (A), „Antiproportionale Zuordnungen“ (B) und „Sonstige Zuordnungen, die weder proportional noch antiproportional sind“ (C), als Teilthemen subsumieren. Ein verschachteltes Vorgehen sieht so aus, dass man sich abwechselnd mit proportionalen, antiproportionalen und sonstigen Zuordnungen beschäftigt, was z. B. auch eine abwechselnde Auseinandersetzung mit graphischen Eigenschaften der drei Zuordnungstypen einschließt. Wenn man dagegen zuerst mit proportionalen Zuordnungen beginnt und erst nach dem Erlernen und Festigen aller Eigenschaften, welche die direkte Proportionalität bedingen, zu den antiproportionalen Zuordnungen übergeht und danach zu den sonstigen Zuordnungen, handelt es sich um ein geblocktes Vorgehen. Beim verschachtelten Lernen werden demnach unterschiedliche Teilinhalte abwechselnd erarbeitet und geübt, anstatt ein Teilthema einzuführen, zu üben und abzuschließen, bevor der nächste Inhaltsbereich behandelt wird. Auf diese Weise werden die Lerninhalte jedes Teilthemas immer wieder aufgegriffen. Das erneute Aufgreifen der Lerninhalte beim verschachtelten Lernen kommt der Idee des Lernens nach dem Spiralprinzip (Bruner 1974; Krauthausen und Scherer 2007) zwar nahe, unterscheidet sich aber in wesentlichen Punkten davon. Beim Spiralprinzip wird den Lernenden der gleiche Inhalt immer wieder – auf verschiedenen Entwicklungsstufen – und in unterschiedlicher Komplexität zugänglich gemacht. Verschachteltes Lernen meint dagegen das abwechselnde Behandeln von miteinander in Zusammenhang stehenden Teilinhalten innerhalb einer Unterrichtseinheit, ohne dass sich die Komplexität der Teilthemen grundlegend ändert. Hinzu kommt, dass mit dem Spiralprinzip keine Aussagen darüber verbunden sind, wie

die jeweiligen Teilinhalte behandelt werden sollen. Denkbar ist bspw., dass trotz Spiralprinzip wiederaufgegriffene Inhalte geblockt dargeboten werden.

In vielen Mathematikschulbüchern werden Inhalte oft in geblockter Form präsentiert (z. B. Baum et al. 2007; Bluhm et al. 2008; Griesel et al. 2002, 2007; Rohrer et al. 2020; Schröder et al. 2003). Auch ge- oder vermischte Übungen, wie sie in Schulbüchern meistens am Ende eines Kapitels oder Abschnitts zu finden sind, lassen sich nicht als Anregungen zum verschachtelten Lernen begreifen, da die zugrundeliegenden Lerninhalte geblockt erlernt wurden und am Schluss lediglich noch einmal wiederholt werden sollen.

2.4 Forschungsstand zum verschachtelten Lernen

Der aktuelle Forschungsstand zum verschachtelten Lernen weist dahingehend Forschungsdesiderate auf (Dunlosky et al. 2013), dass die bisherigen Ergebnisse zu Effekten des verschachtelten Lernens vorwiegend auf Untersuchungen im Labor basieren (Dobson 2011; Rau et al. 2013; Rohrer und Taylor 2007). Es gibt kaum Studien an Schulen, die verschachteltes Lernen in der natürlichen Klassenzimmersituation mit Lerngruppen herkömmlicher Klassenstärke untersucht haben. Für jene Studien, die die Verschachtelung von Inhalten im Klassenzimmer überprüft haben, sind eher kurze Lernphasen und laborähnliche Bedingungen (wie etwa Verzicht auf Erklärungen der Lehrperson, selbständige Bearbeitung der Lernaufgaben etc.) charakteristisch (z. B. Rau et al. 2013; Ziegler und Stern 2014). Zudem weisen nur wenige der verfügbaren Studien zum verschachtelten Lernen einen Bezug zur Mathematik auf (Rau et al. 2013; Rohrer und Taylor 2007; Taylor und Rohrer 2010; Ziegler und Stern 2014, 2016).

Die Vorteile des verschachtelten Lernens wurden dabei meistens nicht sofort, sondern erst mit der Zeit sichtbar, wie z. B. in den Studien von Rohrer und Taylor (2007), Taylor und Rohrer (2010) und Ziegler und Stern (2016). Die bisher vorliegenden Studien fokussierten auf die Themengebiete „Bruchrechnung“ (Rau et al. 2013), „Algebra“ (Mayfield und Chase 2002; Ziegler und Stern 2014) und „Geometrische Körper“ (Rohrer und Taylor 2007), wobei als abhängige Variable zumeist die Leistungsentwicklung im Bereich des prozeduralen Wissens untersucht wurde. Unklar ist, ob sich Vorteile verschachtelten Lernens auch beim Thema „Zuordnungen“ zeigen, einem Themengebiet, bei dem viel Wert auf das konzeptuelle Verständnis der Begriffe gelegt wird, die später für Auseinandersetzungen mit Funktionen wichtig sind (vom Hofe et al. 2015). Im Lehrplan des Landes Hessen für Haupt- und Realschule sind für das Themengebiet „Zuordnungen“ Lerninhalte, wie z. B. die Begriffe „Zuordnungen“, „Ausgangsgröße“, „Zugeordnete Größe“, Merkmale proportionaler Zuordnungen (Quotientengleichheit der Wertepaare, Halbgerade, die im Ursprung beginnt, als Graph etc.), Merkmale antiproportionaler Zuordnungen (Produktgleichheit der Wertepaare, Hyperbel als Graph etc.), sonstige Zuordnungen, die weder proportional noch antiproportional sind, vorgesehen. Dabei erfordert eine Auseinandersetzung mit Zuordnungen Aktivitäten nicht nur im prozeduralen, sondern auch im konzeptuellen Wissensbereich, da es nicht nur um das Errechnen unbekannter Größen, wie z. B. die Berechnung des Proportionalitätsfaktors bei proportionalen Zuordnungen, sondern auch um die Ermittlung der vorliegenden Zuordnungsart mit

Hilfe des konzeptuellen Wissens über unterschiedliche Zuordnungstypen und deren Eigenschaften geht.

Vor diesem Hintergrund erscheint es lohnenswert zu prüfen, wie sich dabei prozedurales und konzeptuelles Wissen entwickelt, zumal die folgenden Überlegungen vermuten lassen, dass verschachteltes Lernen auch für den Erwerb des konzeptuellen Wissens gewinnbringend sein sollte.

Carvalho und Goldstone (2015) postulieren im Rahmen des attentional bias frameworks, dass verschachteltes Lernen insbesondere dann geblocktem Lernen überlegen ist, wenn die zu lernenden Inhalte bzw. Kategorien sehr ähnlich sind und wenn es auf die Unterschiede zwischen den Inhalten ankommt. Nach Birnbaum et al. (2013) sind verschachtelt Lernende demnach bei Anforderungen im Vorteil, welche das Unterscheiden von Lerninhalten erfordern. Dies liegt darin begründet, dass die unterschiedlichen Kategorien durch eine Verschachtelung gegenübergestellt und dadurch die Unterschiede zwischen den Kategorien hervorgehoben werden.

Das Erlernen von unterschiedlichen Inhaltskategorien kann demzufolge durch die Verschachtelung der Inhalte und die dadurch ausgelösten Kontrastierungs- und Vergleichsprozesse begünstigt werden. Dabei sollte man von der Verschachtelung nicht nur im prozeduralen Wissensbereich profitieren (Rohrer 2009; Rohrer und Taylor 2007) bei dem der Schwerpunkt auf dem Erlernen verschiedener Rechenmethoden und dem korrekten Anwenden von Algorithmen liegt, sondern auch im konzeptuellen Wissensbereich, bei dem es um das Erlernen von Zusammenhängen zwischen Elementen innerhalb einer größeren Struktur sowie um den Erwerb von Kenntnissen über Klassifizierungen, Kategorien, Prinzipien und Verallgemeinerungen geht (Krauthwohl 2002).

3 Fragestellungen des LIMIT-Projekts

Das Forschungsprojekt *LIMIT* untersucht in zwei Teilstudien, zum einen in der Sekundarstufe I und zum anderen in der Grundschule, die Wirkungen des geblockten und verschachtelten Lernens im Rahmen eines möglichst authentischen Mathematikunterrichts. Der Fokus in diesem Artikel ist auf die Teilstudie in der Sekundarstufe I gerichtet.

Die zentrale Fragestellung der LIMIT-Untersuchung in der Sekundarstufe I ist, ob die verschachtelte Anordnung der Lerninhalte in einer Unterrichtseinheit zum Thema „Zuordnungen“ im Vergleich zu einer geblockten Anordnung der gleichen Inhalte langfristiges Lernen fördert. Mit der Entwicklung des prozeduralen und des konzeptuellen Wissens über Zuordnungen werden zwei Zielkriterien mathematischen Lernens untersucht. Insbesondere vor dem Hintergrund der Überlegungen, dass die Vorteile des verschachtelten Lernens mit dem Vergleichen und Kontrastieren der Lerninhalte zusammenhängen, soll hier geprüft werden, wie sich eine Verschachtelung der drei verschiedenen Zuordnungstypen (proportionalen, antiproportionalen und sonstigen Zuordnungen) im Vergleich zu einer geblockten Anordnung auf den Erwerb prozeduralen und konzeptuellen Wissens auswirkt.

Da die korrekte Bearbeitung von Aufgaben, bei denen die Lernenden prozedurales Wissen zum Thema Zuordnungen anwenden müssen, nicht zwingend die Fähigkeit

der Lernenden voraussetzt, zwischen den drei Zuordnungsarten zu diskriminieren – schließlich können entsprechende Aufgaben z. B. auch über einen Dreisatz gelöst werden – wird für diese Studie kein Unterschied in der Entwicklung prozeduralen Wissens zwischen den beiden Untersuchungsbedingungen angenommen.

Die entsprechende Hypothese 1 lautet daher: Im Hinblick auf den Erwerb prozeduralen Wissens zum Thema „Zuordnungen“ ist kein Vorteil des verschachtelten Lernens zu erwarten.

Im Unterschied zum prozeduralen Wissen ist beim konzeptuellen Wissen ein Vorteil verschachtelten Lernens zu erwarten, da die Bearbeitung entsprechender Aufgaben ein vertieftes Verständnis der Eigenschaften der drei Zuordnungsarten erfordert, welches durch die Anregung zur Diskrimination der Zuordnungsarten gefördert werden sollte.

Hieraus ergibt sich die folgende Hypothese 2: Im Hinblick auf das konzeptuelle Wissen über Zuordnungen wird daher angenommen, dass verschachteltes Lernen mit entsprechenden Anregungen zur Diskrimination der Zuordnungsarten zu einem tieferen Verständnis der Lernenden beiträgt als geblocktes Lernen.

4 Methode

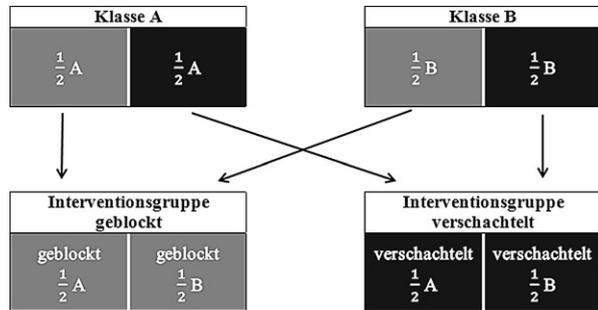
Unsere Studie in der Sekundarstufe I stellt ein Teilprojekt des hessischen LOEWE-Schwerpunkts „Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen“ an der Universität Kassel dar, in dem Arbeitsgruppen der Psychologie, der empirischen Schul- und Unterrichtsforschung sowie der Biologie- und Mathematikdidaktik zusammenarbeiten. Die Untersuchung im Rahmen der vorliegenden Studie wurden an drei Schulen mit Haupt- und Realschulklassen des 7. Jahrgangs in Kassel und Umgebung durchgeführt, die an der Interventionsstudie zum Thema „Zuordnungen“ teilnahmen. In einer achtstündigen Unterrichtseinheit wurden proportionale, antiproportionale und sonstige Zuordnungen behandelt. Die eine Hälfte der Schülerinnen und Schüler lernte verschachtelt, die andere geblockt. Die Lernleistungen wurden in einem Prä-, Post- und Follow-Up-Design erhoben. Die Nachhaltigkeit der beiden Lernbedingungen wurde anhand von zwei Follow-Up-Tests untersucht.

4.1 Stichprobe

Die Stichprobe setzte sich aus 124 Schülerinnen und Schülern des 7. Jahrgangs im Alter zwischen 12 und 15 Jahren zusammen. Eine Poweranalyse auf der Basis dieser Stichprobengröße mit α -Fehler = 0,05, β -Fehler = 0,05 und einer angenommenen Korrelation von $r = 0,45$ ergab, dass Effekte von mindestens $f = 0,25$ aufgedeckt werden können. Bei Bestätigung des Nulleffekts in Hypothese 1 heißt das, dass zumindest Effekte mittlerer Größenordnung ausgeschlossen werden können.

Vor dem Beginn der Intervention erfolgte in jeder Klasse eine Zuweisung der Schülerinnen und Schüler zu zwei Gruppen: Die Hälfte der Probandinnen und Probanden wurde der geblockten und die andere Hälfte der verschachtelten Lernbedingung zugewiesen. Die Bildung der Interventionsgruppen erfolgte parallelisiert, indem anhand der Mathematiknoten aus dem letzten Schuljahr darauf geachtet wur-

Abb. 1 Bildung der Interventionsgruppen aus zwei Parallelklassen



de, dass beide Gruppen eine möglichst ähnliche Anzahl leistungsstarker und leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler aufweisen, damit eventuelle Vor- oder Nachteile der einen oder der anderen Lernbedingung nicht auf die ursprünglichen Leistungsunterschiede der Gruppen zurückzuführen sind. Zusätzlich wurde auf eine möglichst ähnliche Geschlechterverteilung in beiden Gruppen geachtet, um eventuelle Auswirkungen der geschlechtsspezifischen Merkmale auf Untersuchungsergebnisse zu vermeiden. Damit auch differentielle Einflüsse der klasseneigenen Mathematiklehrperson sowie des Mathematikunterrichts nach der Intervention auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler der beiden Bedingungen in den Follow-Up-Tests ausgeschlossen sind, wurde jede Interventionsgruppe aus zwei halbierten Parallelklassen zusammengesetzt, wie es in der Abb. 1 dargestellt ist. Nach der Beendigung der Intervention gingen die Lernenden in ihren ursprünglichen Klassenverband zurück. Insgesamt lernten 62 Schülerinnen und Schüler das Thema „Zuordnungen“ geblockt, 62 Schülerinnen und Schüler verschachtelt.

Vor unserer Untersuchung hatten die Studienteilnehmerinnen und -teilnehmer das Thema „Zuordnungen“ noch nicht im Unterricht behandelt. Dies wies auf nahezu gleiche Lernvoraussetzungen der Studienbeteiligten hin, schloss aber mögliche Unterschiede in ihrem propädeutischen Wissen über Zuordnungen, das in den vorangegangenen Schuljahren und im Alltag erworben und zumindest auf einer intuitiven Ebene bereits genutzt werden könnte, nicht aus. Um diese möglichen Unterschiede zu kontrollieren, wurde das Vorwissen der Lernenden im Prätest erhoben und in den statistischen Analysen berücksichtigt.

4.2 Design der Studie

Wie oben erwähnt, wurde die Wirksamkeit des geblockten und verschachtelten Lernansatzes im Rahmen einer achtstündigen Intervention anhand von vier Messzeitpunkten untersucht. Die Intervention war doppelstündig getaktet und beinhaltete somit vier Unterrichtsdoppelstunden ($\hat{=}$ 90 min). Die Testungen zu den vier Messzeitpunkten dauerten jeweils 45 min. Abb. 2 gibt einen Überblick über das Studiendesign und die Messzeitpunkte mit der Angabe der jeweiligen Zeitintervalle.

Das Vorwissen der Lernenden wurde im Prätest erhoben. Dieser beinhaltete Aufgaben, die zwar für das Thema „Zuordnungen“ relevant waren, jedoch ohne Wissen über Zuordnungen bearbeitet werden konnten. Dies waren solche Aufgaben, bei

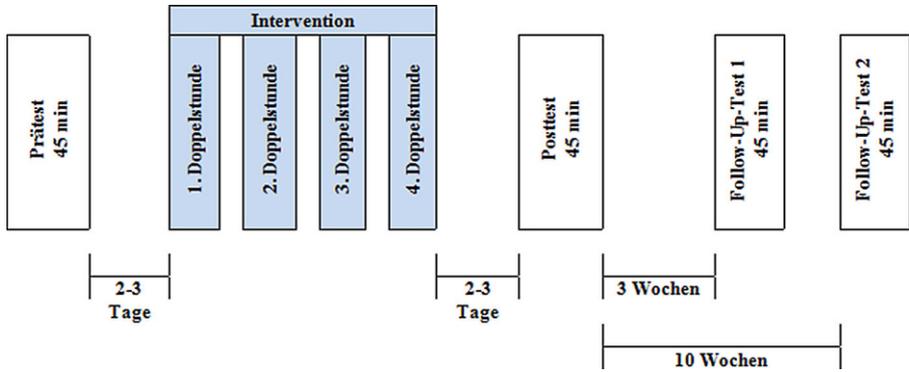


Abb. 2 Studiendesign

Abb. 3 Ein Item aus dem Prätest

Aufgabe 6: Apfel

1. Christian kauft 4 kg Apfel der Sorte „Boskoop“ und bezahlt dafür 6,00 €. Wie viel müsste er für 3 kg bezahlen? Kreuze an. Schreib deine Rechnung auf.

- 2,00 €
 2,50 €
 4,00 €
 4,50 €



Rechnung:

Antwort: _____

2. Für 5,00 € erhält Frau Müller 2,5 kg Äpfel der Sorte „Golden Delicious“. Wie viel kg dieser Sorte kann sie für 7,00 € kaufen? Kreuze an. Schreib deine Rechnung auf.

- 3,5 kg
 3,7 kg
 4,5 kg
 14 kg

Rechnung:

Antwort: _____

denen man anhand gegebener Informationen unbekannte Größen ermitteln sollte (s. Abb. 3).

Zusätzlich zu den Leistungserhebungen wurden Schülerbefragungen zur Erfassung affektiv-motivationaler Personenmerkmale (z.B. Interesse für das Fach Mathematik, Selbstkonzept usw.) durchgeführt. Da diese jedoch für das Thema dieses Beitrags nicht relevant sind, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

4.3 Intervention

Der Unterricht verlief in den beiden Gruppen nicht von Anfang an unterschiedlich. Die erste Unterrichtsstunde war einer Einführung des Zuordnungsbegriffs gewidmet und wurde in den beiden Unterrichtsbedingungen auf die gleiche Weise durchgeführt. Die Einführung erfolgte an Beispielen von allgemeinen Zuordnungen. Das Ziel war die Erarbeitung der Begriffe „Zuordnung“, „Ausgangsgröße“ und „zugeordnete

Verschachtelt	Geblockt		
Einführung in Zuordnungen allgemein	Einführung in Zuordnungen allgemein	1. Std.	1. Doppelstunde
PZ: Erarbeitung der Definition	PZ: Erarbeitung der Definition, graphische Eigenschaften	2. Std.	2. Doppelstunde
AZ: Erarbeitung der Definition			
SZ: Erarbeitung der Definition			
PZ: graphische Eigenschaften	PZ: Übungen zu Zuordnungseigenschaften, Quotientengleichheit/ Proportionalitätsfaktor, Prüfung auf Proportionalität	3. Std.	3. Doppelstunde
AZ: graphische Eigenschaften			
SZ: graphische Eigenschaften			
PZ: Übungen zu Zuordnungseigenschaften	PZ: Textaufgaben	4. Std.	4. Doppelstunde
AZ: Übungen zu Zuordnungseigenschaften			
SZ: Übungen zu Zuordnungseigenschaften			
PZ: Quotientengleichheit/ Proportionalitätsfaktor	AZ: Erarbeitung der Definition, graphische Eigenschaften	5. Std.	5. Doppelstunde
AZ: Produktgleichheit/ Gesamtgröße			
PZ: Prüfung auf Proportionalität			
AZ: Prüfung auf Antiproportionalität	AZ: Übungen zu Zuordnungseigenschaften, Produktgleichheit/ Gesamtgröße, Prüfung auf Antiproportionalität	6. Std.	6. Doppelstunde
SZ: Bestimmung der Zuordnungsart			
PZ: Textaufgaben	AZ: Textaufgaben	7. Std.	7. Doppelstunde
AZ: Textaufgaben			
PZ: Textaufgaben			
AZ: Textaufgaben	SZ: Erarbeitung der Definition, graphische Eigenschaften, Übungen zu Zuordnungseigenschaften, Bestimmung der Zuordnungsart	8. Std.	8. Doppelstunde
PZ: Textaufgaben			

Abb. 4 Inhaltsübersicht der Unterrichtsstunden in der geblockten und in der verschachtelten Bedingung

Größe“, die für die anschließenden Stunden, in denen die jeweilige Zuordnungsart thematisiert wurde, wichtig waren. Die Behandlung der jeweiligen Zuordnungsart war in der ersten Stunde ausgeschlossen, weshalb man für diese erste Stunde noch von keiner inhaltlichen Verschachtelung oder Blockung der Zuordnungsarten sprechen kann.

Erst ab der zweiten Unterrichtsstunde wurde der Unterricht in den beiden Gruppen unterschiedlich gestaltet. Im geblockten Unterricht wurden zuerst proportionale Zuordnungen, dann antiproportionale Zuordnungen und zum Schluss sonstige Zuordnungen behandelt. Im verschachtelten Unterricht wurden die Lernenden mit allen drei Zuordnungsarten abwechselnd konfrontiert. In beiden Bedingungen wurden folgende Teilinhalte behandelt: Erarbeitung der Definition, Analyse und Prüfung von Eigenschaften einzelner Zuordnungsarten sowie Bearbeitung von Textaufgaben im Kontext einer Proportionalität oder Antiproportionalität (s. Abb. 4). Diese inhaltlichen Lerngelegenheiten ergaben sich durch die curricularen Forderungen des Landes Hessen, die an das Thema „Zuordnungen“ gestellt werden. Aus Zeitgründen, bedingt durch die beschränkte Stundenzahl für die Intervention, wurden nur bestimmte Lerninhalte ausgewählt. So wurde beispielsweise auf das Dreisatzverfahren und die Thematisierung der Unterschiede im Dreisatzverfahren bei der Proportionalität und Antiproportionalität verzichtet.

Die methodische Unterrichtsgestaltung, die eingesetzten Lernmaterialien und Aufgaben sowie die Dauer der einzelnen Unterrichtsphasen waren in den beiden Bedingungen identisch. Erfolgte beispielsweise in der geblockten Bedingung die Hinführung auf die Quotientengleichheit der proportionalen Zuordnungen durch die Entdeckung dieser Eigenschaft an vorgegebenen Wertetabellen in Einzelarbeit und durch die anschließende Präsentation der Ergebnisse durch Lernende, so wurden dieselben Wertetabellen und Sozialformen für die Entdeckung der Quotientengleichheit in der verschachtelten Bedingung eingesetzt. Dabei wurde die Aufgabenbearbeitungs- und Präsentationszeit in den beiden Bedingungen gleich gehalten. Die Unterrichtsstunden in den beiden Bedingungen unterschieden sich nur in der Anordnung der Lerninhalte.

Der Unterricht wurde von zwei Lehrkräften gehalten, die dem Projektteam angehören. Die beiden Lehrkräfte befolgten auf der Basis eines Regiebuchs genaue Anweisungen zum Unterricht. So wurden sie darin geschult, die Inhalte auf die gleiche Weise zu vermitteln und die Übungsphasen auf die gleiche Weise zu leiten. Außerdem wurden sie darauf hingewiesen, dass sie die Lernenden nicht explizit zum Vergleichen oder Kontrastieren der Inhalte auffordern, um die rein sequentielle Stoffbehandlung in der geblockten Lernumgebung zu gewährleisten. Damit ein eventueller Einfluss der Lehrperson auf die Testergebnisse vermieden wird, fand innerhalb der jeweiligen Lernumgebung ein Wechsel der beiden Lehrkräfte statt. Die eine Lehrperson unterrichtete die 1. und 2. Doppelstunde geblockt und die 3. und 4. Doppelstunde verschachtelt. Bei der anderen Lehrperson war es umgekehrt: Sie übernahm die 1. und 2. Doppelstunde zuerst in der verschachtelten Bedingung, die letzten beiden Doppelstunden unterrichtete sie in der geblockten Bedingung. Um sicherzugehen, dass die Lernleistungen nicht durch Unterschiede in der Hausaufgabenbearbeitung bedingt werden, wurde während der Intervention auf Hausaufgaben

verzichtet. Die Arbeitsmaterialien aus dem Unterricht wurden nach jeder Doppelstunde eingesammelt und in der nächsten Stunde wieder ausgeteilt.

Die aus Gründen des Untersuchungsdesigns beschriebenen Besonderheiten der beiden Lernumgebungen (Lehrerwechsel, keine Hausaufgaben, Mitlernende aus einer Parallelklasse) implizierten zwar, dass es sich nicht um vollständig authentischen Unterricht handelte, dennoch kann die Studie auch aufgrund des Unterrichts in herkömmlicher Klassenstärke eine höhere ökologische Validität beanspruchen als eine Laborstudie.

4.4 Zur Messung der abhängigen Variablen: Aufgaben zum prozeduralen und konzeptuellen Wissen

Prozedurales und konzeptuelles Wissen wurden mit Hilfe unterschiedlicher Aufgaben während der Intervention vermittelt und in den Tests erhoben. Die Aufgabenkonstruktion war an jenen kognitiven Prozessen orientiert, die laut Maier et al. (2010) beim Erwerb und Nutzen des prozeduralen und konzeptuellen Wissens aktiviert werden. Da sich konzeptuelles Wissen durch Vernetzung von Fachbegriffen, Erlernen und Erkennen von Zusammenhängen, Erwerb von Kenntnissen über Kategorien und Klassifizierungen usw. auszeichnet, wurden die Lernenden in den Aufgaben zur Erfassung konzeptuellen Wissens aufgefordert, die gelernten Zuordnungseigenschaften bei gegebenen Zuordnungsbeispielen (z. B. Quotientengleichheit bei proportionalen, Produktgleichheit bei antiproportionalen Zuordnungen) zu erkennen und die gegebenen Zuordnungsbeispiele im Hinblick auf die gelernten Eigenschaften zu prüfen. Demgegenüber umfasst das prozedurale Wissen das Erlernen und Anwenden von bestimmten Handlungsmustern, Algorithmen, Rechenroutinen usw. Dementsprechend waren die Aufgaben zur Erfassung des prozeduralen Wissens eingekleidete Textaufgaben, bei denen die gelernten Zuordnungseigenschaften für die Ermittlung fehlender Größen (z. B. Nutzung des Proportionalitätsfaktors zur Preisberechnung) angewendet werden mussten.

Die Testaufgaben zum prozeduralen und konzeptuellen Wissen waren analog zu den Unterrichtsaufgaben konstruiert. Im nächsten Kapitel werden Aufgabenbeispiele aus den Tests dargestellt. Aus diesen Beispielen kann entsprechend auf einige Unterrichtsaufgaben geschlossen werden. Dabei verfügte jeder Test sowohl über Ankeritems, die zu jedem Messzeitpunkt identisch waren, als auch über Items, die für jeden Test neu waren.

Die Testitems zur Erfassung des prozeduralen Wissens stellten überwiegend Textaufgaben zur Berechnung unbekannter Größen bei proportionalen und antiproportionalen Beziehungen dar, die die Lernenden auch ohne Wissen über Zuordnungen lösen und daher bereits im Prätest bearbeiten konnten (s. Abb. 5).

Die Testitems zur Erfassung des konzeptuellen Wissens verlangten von den Lernenden, anhand von vorgegebenen Graphen und Wertetabellen zu entscheiden und zu begründen, welche Art der Zuordnung jeweils vorliegt (s. Abb. 6). Dieser Typ von Aufgaben konnte nicht im Prätest bearbeitet werden, da das dafür benötigte Wissen bei den Lernenden zu diesem Zeitpunkt noch nicht vorhanden war. Die Items zur Erhebung des konzeptuellen Wissens wurden daher nicht im Prätest eingesetzt, sondern waren nur im Posttest, Follow-Up-Test 1 und Follow-Up-Test 2 enthalten.

Abb. 5 Ein Testitem zum prozeduralen Wissen

Aufgabe 5: Katzenfutter

Katrin kauft Katzenfutter für ihre Katzen. Das Futter reicht ihren 3 Katzen für 18 Tage. Jede Katze bekommt jeden Tag gleich viel Futter.

- a. Wie lange würde das Futter reichen, wenn Katrin nur 2 Katzen hätte? Kreuze an. Schreib deine Rechnung auf.

- 6 Tage
 12 Tage
 24 Tage
 27 Tage

Rechnung: Antwort: _____ _____

Bei der Bewertung der Testitems wurde für jede korrekt gelöste Teilaufgabe 1 Punkt vergeben, für falsch gelöste oder unvollständig bearbeitete Teilaufgaben wurden 0 Punkte vergeben. Die Reliabilität der Testitems zum prozeduralen und konzeptuellen Wissen ist in der Abb. 7 dargestellt.

4.5 Auswertungsmethoden

Für die Auswertung der Daten wurden die Lösungen der Testaufgaben von zwei Kodierpersonen unabhängig voneinander bewertet. Cohens Kappa für die Interrater-Reliabilität betrug $\kappa=0,937$ für die Testitems zum prozeduralen Wissen und $\kappa=0,814$ für Testitems zum konzeptuellen Wissen.

Um die Leistungsentwicklung der Lernenden genauer zu untersuchen, wurden neben der deskriptiven Analyse Varianzanalysen mit Messwiederholung durchgeführt. Die Varianzanalysen wurden nur mit Ankeritems des jeweiligen Testpaares (z.B. Prä- und Posttest) und nur mit den Daten der zu allen vier Messzeitpunkten anwesenden Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Dabei wurde die Leistungsentwicklung für die einzelnen Zeitintervalle zum prozeduralen und konzeptuellen Wissen separat untersucht. Das bedeutet: Die Analyse der Leistungsentwicklung im prozeduralen Wissen wurde für die Untersuchungsintervalle Prä – Post, Post – Follow-Up 1 und Follow-Up 1 – Follow-Up 2 durchgeführt. Die Analyse der Leistungsentwicklung im konzeptuellen Wissen wurde für die Untersuchungsintervalle Post – Follow-Up 1 und Follow-Up 1 – Follow-Up 2 sowie über drei Messzeitpunkte (Post, Follow-Up 1, Follow-Up 2) durchgeführt. Die unterschiedliche Anzahl der Messzeitpunkte bei den Analysen der Leistungsentwicklung im prozeduralen und konzeptuellen Wissen lag darin begründet, dass die Items zum konzeptuellen Wissen erst nach der Intervention administriert wurden.

Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler wurde für alle Untersuchungsintervalle und für die beiden abhängigen Variablen (Leistung im prozeduralen und

Abb. 6 Ein Testitem zur Erfassung konzeptuellen Wissens

Aufgabe 7: Proportional, antiproportional oder keins von beiden?

Welche Art der Zuordnung liegt jeweils vor? Kreuze die richtige Antwort an. Begründe deine Entscheidung kurz.

a.

Zeit in h	Strecke in km
0,5	2
4	16
5	20
7	28

proportional
 antiproportional
 weder proportional noch antiproportional

Begründung:

b.

Stückzahl	Preis in €
1	3,50
3	10,50
6	18,00
8	24,00

proportional
 antiproportional
 weder proportional noch antiproportional

Begründung:

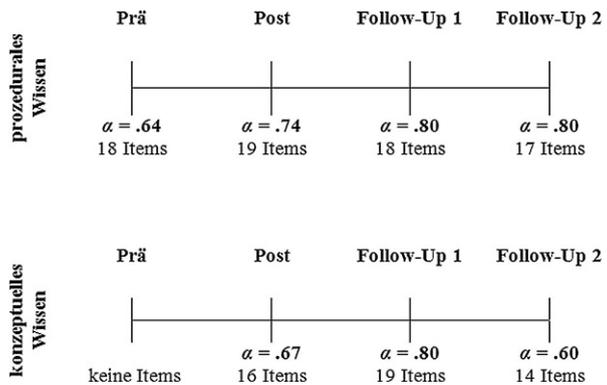
c.

Zeit in h	Temperatur in C°
5	10
10	5
15	7,5
16	8

proportional
 antiproportional
 weder proportional noch antiproportional

Begründung:

Abb. 7 Reliabilität der Testitems zum prozeduralen und konzeptuellen Wissen



Leistung im konzeptuellen Wissen) mit Hilfe der im Prätest erhobenen Daten kontrolliert. Zudem wurde die Anwesenheit im Unterricht als Kovariate für alle Analysen berücksichtigt. Zur Messung der Effektstärke wurde das partielle Eta Quadrat (η^2) ermittelt. Nach Cohen (1988) handelt es sich bei $\eta^2 < 0,06$ um schwache Effekte, bei $0,06 \leq \eta^2 < 0,14$ um mittlere Effekte und bei $\eta^2 \geq 0,14$ um starke Effekte.

5 Ergebnisse

Im Folgenden wird die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im prozeduralen und konzeptuellen Wissen für unterschiedliche Zeitintervalle dargestellt. Zunächst werden hierbei deskriptive Analysen durchgeführt. Mittels Varianzanalysen mit Messwiederholung werden dann die Entwicklungen der Lernenden auf Signifikanz geprüft. Dabei werden das Vorwissen und die Anwesenheit der Schülerinnen und Schüler – indiziert durch die Anzahl der Unterrichtsstunden, in denen die Lernenden an der Intervention teilgenommen haben – jeweils als Kovariaten kontrolliert.

5.1 Leistungsentwicklung der Lernenden im prozeduralen Wissen (Hypothese 1)

Betrachtet man zunächst die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im prozeduralen Wissen zwischen dem Prä- und Posttest, so zeigt die deskriptive Analyse eine ähnliche Entwicklung der Lernenden in den beiden Bedingungen (s. Tab. 1). Zu Beginn des Untersuchungszeitraums lösten die Schülerinnen und Schüler 26,2 % bzw. 28,3 % der Aufgaben, welche zur Erfassung des prozeduralen Wissens gestellt werden, korrekt, im Posttest waren die Lösungsquoten ca. 3 %–5 % höher.

Die Varianzanalyse mit Messwiederholung ergab keinen Haupteffekt der Zeit ($F(1,108) = 0,755$, $p = 0,387$, $\eta^2 = 0,007$), keinen Haupteffekt der Gruppe ($F(1,108) = 1,142$, $p = 0,288$, $\eta^2 = 0,010$) und keinen Interaktionseffekt zwischen Zeit und Lernbedingung ($F(1,89) = 0,772$, $p = 0,382$, $\eta^2 = 0,009$). Für das Untersuchungsintervall von Posttest zum Follow-Up-Test 1 (drei Wochen) deutet die deskriptive Analyse auf einen geringen Leistungsabfall in beiden Gruppen hin (s. Tab. 2).

Tab. 1 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im prozeduralen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung zwischen Prä- und Posttest

	Prätest (%)	Posttest (%)
Geblockt	$M = 28,33$, $SD = 15,76$	$M = 33,78$, $SD = 19,04$
Verschachtelt	$M = 26,23$, $SD = 13,08$	$M = 29,97$, $SD = 16,09$

Tab. 2 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im prozeduralen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung zwischen Posttest und Follow-Up 1

	Posttest (%)	Follow-Up 1 (%)
Geblockt	$M = 36,77$, $SD = 21,72$	$M = 28,62$, $SD = 22,09$
Verschachtelt	$M = 33,27$, $SD = 19,04$	$M = 30,41$, $SD = 24,15$

Tab. 3 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im prozeduralen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung zwischen Follow-Up 1 und Follow-Up 2

	Follow-Up 1 (%)	Follow-Up 2 (%)
Geblockt	$M=20,75, SD=23,23$	$M=25,75, SD=22,50$
Verschachtelt	$M=25,00, SD=22,66$	$M=23,55, SD=25,91$

Auch für dieses Intervall lässt sich jedoch kein Haupteffekt der Zeit ($F(1,93)=0,016, p=0,899, \eta^2=0,000$), kein Haupteffekt der Gruppe ($F(1,93)=0,149, p=0,700, \eta^2=0,002$) und kein Interaktionseffekt von Zeit und Lernbedingung ($F(1,89)=1,248, p=0,267, \eta^2=0,014$) statistisch nachweisen. Für die Leistungsentwicklung im prozeduralen Wissen im Zeitintervall zwischen Follow-Up 1 und Follow-Up 2 (sieben Wochen) offenbart die deskriptive Analyse unterschiedliche Leistungsentwicklungen der beiden Gruppen (s. Tab. 3).

Allerdings kann auch für dieses Zeitintervall weder ein statistisch signifikanter Haupteffekt der Zeit ($F(1,96)=0,011, p=0,918, \eta^2=0,000$) noch ein Effekt der Gruppe ($F(1,96)=0,064, p=0,800, \eta^2=0,001$) und ein Interaktionseffekt von Zeit und Gruppe ($F(1,89)=1,636, p=0,204, \eta^2=0,018$) ermittelt werden.

5.2 Leistungsentwicklung der Lernenden im konzeptuellen Wissen (Hypothese 2)

Betrachtet man nun die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im konzeptuellen Wissen über die drei Messzeitpunkte (Post, Follow-Up 1 und Follow-Up 2), so weist die deskriptive Analyse auf einen permanenten Leistungsabfall in der geblockten Bedingung hin, während in der verschachtelten Bedingung ein Leistungsanstieg sowohl zwischen Post- und Follow-Up-Test 1 als auch zwischen Post- und Follow-Up-Test 2 zu beobachten ist (s. Tab. 4).

Der Haupteffekt der Zeit wird hierbei ($F(2,89)=4,358, p=0,014, \eta^2=0,047$) signifikant, wobei es sich um einen schwachen Effekt handelt. Der Effekt der Gruppe wird mit $F(1,89)=1,219, p=0,273, \eta^2=0,014$ nicht signifikant. Bemerkenswert ist jedoch der signifikante Interaktionseffekt zwischen Zeit und Lernbedingung mit nahezu mittlerer Effektstärke ($F(2,178)=5,614, p=0,004, \eta^2=0,059$). Die Analyse der deskriptiven Daten verdeutlicht, dass in der geblockten Bedingung der Wissenserwerb weniger nachhaltig ist und die Leistungsentwicklung über die drei Messzeitpunkte rückläufig ist, während in der verschachtelten Bedingung zunächst ein deutlicher Anstieg, dann ein leichter Abfall zu beobachten ist. Über den gesamten Zeitraum sind mit einem Abfall der Leistungen in der geblockten Bedingung und einem Anstieg der Leistungen in der verschachtelten Bedingung zwei gegenläufige Entwicklungen feststellbar. Für die Leistungsentwicklung im konzeptuellen Wissen zwischen Posttest und Follow-Up 1 (drei Wochen) zeigt die deskriptive Analyse ebenfalls einen leichten Leistungsabfall der geblockt unterrichteten Schülerinnen und Schüler, jedoch einen Leistungsanstieg in der verschachtelten Bedingung (s. Tab. 5).

Wie die Ergebnisse der Varianzanalyse verdeutlichen, wird der Interaktionseffekt von Zeit und Bedingung mit einer mittleren Effektstärke ($F(1,89)=8,221, p=0,005, \eta^2=0,085$) signifikant. Zudem lässt sich mit $t(91)=2,750, p=0,007$ zeigen, dass

Tab. 4 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im konzeptuellen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung über die drei Messzeitpunkte

	Posttest (%)	Follow-Up 1 (%)	Follow-Up 2 (%)
Geblockt	$M = 13,33, SD = 17,96$	$M = 10,89, SD = 16,57$	$M = 6,67, SD = 10,77$
Verschachtelt	$M = 5,43, SD = 9,51$	$M = 10,08, SD = 14,51$	$M = 7,24, SD = 10,54$

Tab. 5 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im konzeptuellen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung zwischen Posttest und Follow-Up 1

	Posttest (%)	Follow-Up 1 (%)
Geblockt	$M = 16,46, SD = 17,92$	$M = 13,38, SD = 17,08$
Verschachtelt	$M = 7,87, SD = 10,68$	$M = 13,95, SD = 17,86$

die geblockt Lernenden im Posttest signifikant bessere Leistungen erzielen als die verschachtelt Lernenden. Die Haupteffekte der Zeit ($F(1,89) = 2,907, p = 0,092, \eta^2 = 0,032$) und der Gruppe ($F(1,89) = 1,726, p = 0,192, \eta^2 = 0,019$) werden nicht signifikant.

Betrachtet man den Zeitraum zwischen Follow-Up-Test 1 und Follow-Up-Test 2 (sieben Wochen), so deuten die deskriptiven Daten auf einen Leistungsabfall in den beiden Bedingungen hin (s. Tab. 6).

Die Varianzanalyse für dieses Zeitintervall weist aber keinen signifikanten Effekt der Zeit ($F(1,89) = 2,338, p = 0,130, \eta^2 = 0,026$) nach. Zudem ist weder ein Effekt der Gruppe ($F(1,89) = 0,079, p = 0,779, \eta^2 = 0,001$) noch einen Interaktionseffekt von Zeit und Gruppe ($F(1,89) = 0,007, p = 0,935, \eta^2 = 0,000$) feststellbar.

6 Diskussion und Ausblick

6.1 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Wie angenommen, ergab sich keine Auswirkung des verschachtelten Lernens auf die Entwicklung des prozeduralen Wissens (Hypothese 1). Auf der Basis der Poweranalyse sind damit zumindest Effekte mittlerer Größenordnung (oder größer) unwahrscheinlich.

Allerdings zeigte sich ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen hinsichtlich der Entwicklung des konzeptuellen Wissens: Mittels Varianzanalysen konnte gezeigt werden, dass sich die Leistung der Schülerinnen und Schüler in der verschachtelten Bedingung günstiger entwickelte als die Leistung der geblockt unterrichteten Lernenden (Hypothese 2). Dies bestätigte die Annahme, dass die verschachtelte Lernbedingung für den Erwerb des konzeptuellen Wissens von Vorteil ist. Außerdem bestätigte sich die langfristige Wirkung des verschachtelten Lernens, insbesondere durch den signifikanten Leistungsanstieg von Posttest zu Follow-Up-Test 1 bei den verschachtelt unterrichteten Schülerinnen und Schülern. Da andere potenziell relevante Einflussfaktoren kontrolliert wurden, ist dieser Effekt mit einer hohen Wahrscheinlichkeit auf die Lernbedingung zurückzuführen. So wurde beispielsweise ein möglicher Einfluss des herkömmlichen Mathematikunter-

Tab. 6 Deskriptive Analyse der Leistungsentwicklung im konzeptuellen Wissen in der geblockten und verschachtelten Bedingung zwischen Follow-Up 1 und Follow-Up 2

	Follow-Up 1 (%)	Follow-Up 2 (%)
Geblockt	$M = 15,64, SD = 15,48$	$M = 11,27, SD = 11,55$
Verschachtelt	$M = 15,86, SD = 14,86$	$M = 12,05, SD = 11,35$

richts nach Ende der Intervention auf eine der beiden Gruppen dadurch weitgehend ausgeschlossen, dass durch die Wiedervereinigung der beiden Klassenhälften nach dem Interventionsende Lernende beider Bedingungen am Unterricht der herkömmlichen Mathematiklehrperson teilnahmen. Nach dem Ende der Intervention wurde das Thema „Zuordnungen“ bis zum letzten Messzeitpunkt in keiner der an der Studie beteiligten Klassen behandelt, sodass auch eine mögliche Förderung der Schülerinnen und Schüler beispielsweise durch weitere Übungen bzw. Gelegenheiten zum Abrufen des Gelernten ausgeschlossen werden kann.

Der signifikante Leistungsanstieg beim verschachtelten Unterricht ist vermutlich auch darauf zurückzuführen, dass die Lernenden insbesondere durch die Präsenz aller drei Zuordnungstypen in den Übungsphasen immer wieder auf die zuvor gelernten Informationen im Gedächtnis zurückgreifen mussten. Hingegen konnte der Vorteil des geblockten Lernens im konzeptuellen Wissen nur im Posttest beobachtet werden. Eine mögliche Erklärung für die mangelnde Nachhaltigkeit des geblockten Lernens bezieht sich darauf, dass die Lernenden keine Gelegenheit hatten, die Inhaltskategorien zu vergleichen.

Das Potenzial von Diskriminations- und Vergleichsprozessen kommt auch als mögliche Erklärung für das – in Abhängigkeit von der Art des erfassten Wissens – differentielle Befundmuster in Betracht. Während sich die Aufgaben zur Erfassung des prozeduralen Wissens (meistens Textaufgaben zu der jeweiligen Zuordnungsart) auch ohne Vergleichen und Diskriminieren der Zuordnungsarten korrekt lösen ließen und somit auch von den Lernenden in der geblockten Bedingung ähnlich erfolgreich bearbeitet werden konnten, erforderten die Aufgaben zur Erfassung des konzeptuellen Wissens eher Abgrenzungswissen und damit Wissen über die Unterschiede zwischen den drei Zuordnungsarten (proportionale, antiproportionale und sonstige Zuordnungen). Diese Art von Wissen wurde – so eine mögliche Erklärung – durch die verschachtelte Lernumgebung in Kombination mit den immanenten Kontrastierungen, selbst wenn diese nicht explizit erfolgten, eher gefördert als durch die geblockte Bedingung.

Rückblickend auf die durchgeführte Studie und beziehend auf die Erkenntnisse von Birnbaum et al. (2013) und Taylor und Rohrer (2010) lässt sich vermuten, dass die hier ermittelten Effekte des verschachtelten Lernens hinsichtlich der Entwicklung des konzeptuellen Wissens stärker und deutlicher für alle Zeitintervalle hätten sein können, wenn die Lernenden während der Intervention explizit zum Vergleichen der Eigenschaften unterschiedlicher Zuordnungstypen aufgefordert worden wären. Diese Instruktion fehlte in den beiden Bedingungen.

Zudem lag der inhaltliche Schwerpunkt der Intervention vielmehr auf dem Erlernen der Eigenschaften der einzelnen Zuordnungstypen. Damit ist auch denkbar, dass die Ergebnisse dieser Studie die Schwerpunkte der Unterrichtseinheit reflektieren,

die eher auf dem Lernen der Zuordnungseigenschaften lagen als auf der korrekten Anwendung entsprechender Prozeduren.

6.2 Limitationen der Studie

Die vergleichsweise gering ausgeprägten Lösungsquoten im prozeduralen Wissen der Lernenden deuten darauf hin, dass es insgesamt – in beiden Lernumgebungen – zu wenig Lerngelegenheiten zum Erwerb und zur Festigung des entsprechenden Wissens gab. Dies stellt eine der Grenzen unserer Studie dar. Mathematische Prozeduren, mit deren Hilfe unbekannte Größen bei der jeweiligen Zuordnungsart berechnet werden können, wurden demzufolge zu selten thematisiert. Auch das Dreisatzverfahren bei proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen war aus Zeitgründen nicht Bestandteil der Intervention. Aufgrund der auch zeitlichen Gewichtungen im Rahmen der Unterrichtseinheit können die Ergebnisse der Studie nicht generalisiert werden. Denkbar ist einerseits, dass sich ein Vorteil des verschachtelten Lernens auch bei der Entwicklung des prozeduralen Wissens zeigt, wenn im Unterricht stärker auf die Bearbeitung entsprechender Aufgaben und explizit auf den Vergleich entsprechender Lösungsverfahren fokussiert wird. Eine abwechselnde und vergleichende Behandlung dieser Verfahren könnte dazu anregen, die verfahrensbezogenen Unterschiede bewusster wahrzunehmen und über ihre angemessene Verwendung zu reflektieren, was dann wiederum in einen nachhaltigeren Lernerfolg im prozeduralen Wissen im Vergleich zum geblockten Lernen resultieren könnte. Berücksichtigt man andererseits, dass ein Mindestmaß an Übungsgelegenheiten zur Konsolidierung eines Rechenverfahrens erforderlich ist, so ist umgekehrt auch denkbar, dass insbesondere geblockt Lernende von einer intensiveren Behandlung der Rechenverfahren im Unterricht und der Möglichkeit, sich auf jedes Verfahren mit ausreichendem Üben zu konzentrieren, profitieren.

Eine weitere Grenze unserer Studie liegt in der zeitlich begrenzten Unterrichtseinheit. Das Thema „Zuordnungen“ stellt ein sehr umfangreiches Inhaltsgebiet dar, welches viele Unterrichtsstunden in Anspruch nimmt. Bei der Organisation der Studie war es allerdings nicht möglich, von den Schulen mehr als acht Stunden für die Intervention zur Verfügung gestellt zu bekommen. Aus diesem Grund musste auf einige Inhalte (wie z. B. Dreisatzverfahren) und auf einige vertiefende Übungsphasen verzichtet werden. Eventuell war dies der Grund dafür, dass der nachhaltige Effekt des verschachtelten Lernens beim Erwerb konzeptuellen Wissens nicht bis zum letzten Follow-Up-Test erhalten blieb bzw. dass auch beim geblockten Lernen keinerlei Effekte festzustellen waren.

Unsere Studie stellt einen ersten Versuch dar, die Effekte des verschachtelten vs. des geblockten Lernens in einer längeren Unterrichtseinheit im Klassenzimmer unter weitgehend natürlichen Bedingungen zu untersuchen. Hierbei wurden wichtige Einflussfaktoren, die neben den Untersuchungsbedingungen einen Einfluss auf die abhängigen Variablen ausüben können, kontrollierend berücksichtigt. So hielten sich beide Lehrpersonen an das vorgegebene Skript und unterrichteten zudem beide Unterrichtsbedingungen. Auf Hausaufgaben wurde verzichtet, um keine Unterschiede in häuslichen Lerngelegenheiten hervorzurufen. Und schließlich wurden die Klassen für die Untersuchung randomisiert halbiert und die jeweiligen Hälften

den beiden Untersuchungsbedingungen zugewiesen, um auszuschließen, dass die herkömmlichen Mathematiklehrpersonen der Klassen durch ihre Art des Unterrichts nach Ende der Intervention eine der beiden Gruppen bevorzugen oder benachteiligen. Trotz dieser umfassenden Kontrollen kann nicht gänzlich ausgeschlossen werden, dass weitere Faktoren Einfluss auf die abhängigen Variablen ausüben.

6.3 Ausblick

Anknüpfend an die Ergebnisse dieser Studie halten wir die Durchführung einer weiteren Studie zu den Effekten des verschachtelten Lernens im Schulalltag für notwendig, bei der die Lernentwicklung in einer geblockten Unterrichtsbedingung, einer verschachtelten Bedingung ohne Aufforderung zum Vergleichen und einer verschachtelten Bedingung mit Aufforderung zum Vergleichen zusammenhängender Lerninhalte untersucht wird. So lässt sich annehmen, dass explizite Prompts zum Vergleichen und Kontrastieren der Inhaltskategorien über Prozesse des Diskriminierens den Lerneffekt der Verschachtelung erhöhen (Rittle-Johnson und Star 2011).

Ferner soll in nachfolgenden Analysen untersucht werden, ob die erfassten affektiv-motivationalen Personenmerkmale die Effekte des verschachtelten Lernens bei der Entwicklung des konzeptuellen Wissens moderieren. Annehmen lässt sich bspw., dass die Wirksamkeit der verschachtelten Bedingung von den motivationalen Voraussetzungen der Lernenden abhängig ist. Je günstiger die entsprechenden Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler ausgeprägt sind, desto eher dürften sie „am Ball bleiben“, wenn das Lernen anspruchsvoll und schwierig wird.

Darüber hinaus können die genaue Analyse der eingescannten Schülerlösungen, eine differenzierte Auswertung der Unterrichtsvideos sowie eine detaillierte Auseinandersetzung mit den Schülerfehlern in den Tests vertiefere Einblicke in die Lernprozesse der Lernenden in beiden Lernbedingungen bieten.

Förderung Die Studie wurde im Rahmen der Landes-Offensive zur Entwicklung wissenschaftlich-ökonomischer Exzellenz (LOEWE) vom Land Hessen im Projekt „Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen“ gefördert.

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen. Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

Verwendete Literatur

- Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Drüke-Noe, C., Dürr, R., Eisfeld, H., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Herd, E., Jürgensen, T., Lind, D., Reimer, R., Schmitt-Hartmann, R., Stühler, A., & Zimmermann, P. (2007). *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien 7 – Hessen*. Stuttgart: Klett.
- Birnbaum, M. S., Kornell, N., Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2013). Why interleaving enhances inductive learning. The roles of discrimination and retrieval. *Psychonomic Society*, *41*, 392–402. <https://doi.org/10.3758/s13421-012-0272-7>.
- Bjork, R. A. (1994). Memory and metamemory considerations in the training of human beings. In I. J. Metcalfe & A. Shimamura (Hrsg.), *Metakognition: Knowing about knowing* (S. 189–199). Cambridge: MIT Press.
- Bjork, R. A. (1999). Assessing our own competence: heuristics and illusions. In D. Gopher & A. Koriat (Hrsg.), *Attention and performance XVII. Cognitive regulation of performance: Interaction of theory and application* (S. 454). Cambridge: MIT Press.
- Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way: creating desirable difficulties to enhance learning. In *Psychology and the real world: Essays illustrating fundamental contributions to society* (S. 55–64).
- Bjork, R. A., & Bjork, E. L. (1992). A new theory of disuse and an old theory of stimulus fluctuation. In A. F. Healy, S. M. Kosslyn & R. M. Shiffrin (Hrsg.), *From learning processes to cognitive processes: essays in honor of William K. Estes* (Bd. 2, S. 36–43). Hillsdale: Erlbaum.
- Bjork, R. A., & Bjork, E. L. (2006). Optimizing treatment and instruction: Implications of a new theory of disuse. In L.-G. Nilsson & N. Ohta (Hrsg.), *Memory and society: psychological perspectives* (S. 116–140). New York: Psychology Press.
- Bluhm, S., Czernik, A., Frühholz, R., Lorenz, J., Pies-Hötzing, A., Roscher, M., & Zils, C. (2008). *Interaktiv Mathematik 7—Hessen*. Berlin: Cornelsen.
- Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.
- Brunmair, M., & Richter, T. (2019). Similarity matters: A meta-analysis of interleaved learning and its moderators. *Psychological Bulletin*, *145*, 1029–1051.
- Carvalho, P. F., & Glodstone, R. L. (2015). What you learn is more than what you see: what can sequencing effects tell us about inductive category learning? *Frontiers in Psychology*. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00505>.
- Cepeda, N. J., Pashler, H., Vul, E., Wixted, J., & Rohrer, D. (2006). Distributed practice in verbal recall tasks. A review and quantitative synthesis. *Psychological Bulletin*, *132*(3), 354–380.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences (second edition)*. Hillsdale: Erlbaum.
- Dobson, J. L. (2011). Effect of selected “desirable difficulty” learning strategies on the retention of physiology information. *Advances in Physiology Education*, *35*(4), 378–383.
- Dunlosky, J., Rawson, A., Marsh, E. J., Nathan, M. J., & Willingham, D. T. (2013). Improving students’ learning with effective learning techniques: promising directions from cognitive and educational psychology. *Psychological Science in the Public Interest*, *14*(1), 4–58.
- Griesel, H., Postel, H., & vom Hofe, R. (2002). *Mathematik heute 7 – Hessen – Bildungsgang Realschule*. Hannover: Schroedel.
- Griesel, H., Postel, H., & Suhr, F. (2007). *Elemente der Mathematik – Gymnasium Hessen – 7. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.
- Krathwohl, D. R. (2002) A Revision of Bloom’s Taxonomy: An Overview. *Theory into Practice*, *41*, 212–218. [https://doi.org/10.1016/S0164-1212\(98\)10055-9](https://doi.org/10.1016/S0164-1212(98)10055-9).
- Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.
- Lipowsky, F., Richter, T., Borromeo Ferri, R., Ebersbach, M., & Hänze, M. (2015). Wünschenswerte Erschwernisse beim Lernen. *Schulpädagogik heute*, *6*(11), 1–10. http://www.frank-lipowsky.de/wp-content/uploads/Lipowsky_et_al_2015_Wuenschenswerte_Erschwernisse_beim_Lernen.pdf. Gesehen 14. März 2020.
- Maier, U., Kleinknecht, M., Metz, K., & Bohl, T. (2010). Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *28*, 84–96.

- Mayfield, K. H., & Chase, O. N. (2002). The effects of cumulative practice on mathematics problem solving. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 35, 105–123.
- Pashler, H., Bain, P. M., Bottge, B. A., Graesser, A., Koedinger, K., McDaniel, M., & Metcalfe, J. (2007). *Organizing instruction and study to improve student learning*. IES Practice Guide. NCER 2007–2004. Washington: National Center for Education Research.
- Pyc, M. A., & Rawson, K. A. (2009). Testing the retrieval effort hypothesis: does greater difficulty correctly recalling information lead to higher levels of memory? *Journal of Memory and Language*, 60, 444.
- Rau, M. A., Alevan, V., & Rummel, N. (2013). Interleaved practice in multi-dimensional learning tasks: which dimension should we interleave? *Learning and Instruction*, 23, 98–114.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: learning outcomes supported by different types of comparisons. *Psychology of Learning and Motivation-Advances in Research and Theory*, 55, 199–225.
- Rohrer, D. (2009). The effects of spacing and mixing practice problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(1), 4–17.
- Rohrer, D., & Taylor, K. (2007). The shuffling of mathematics problems improves learning. *Instructional Science*, 35, 481–498.
- Rohrer, D., Dedrick, R. F., & Hartwig, M. K. (2020). The scarcity of interleaved practice in mathematics textbooks. *Educational Psychology Review*. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09516-2>.
- Schröder, M., Wurl, B., & Wynands, A. (2003). *Maßstab Mathematik 7*. Braunschweig: Schroedel.
- Taylor, K., & Rohrer, D. (2010). The effects of interleaved practice. *Applied Cognitive Psychology*, 24(6), 844–846.
- Ziegler, E., & Stern, E. (2014). Delayed benefits of learning elementary algebraic transformations through contrasted comparisons. *Learning and Instruction*, 1, 130–143.
- Ziegler, E., & Stern, E. (2016). Consistent advantages of contrasted comparisons: Algebra learning under direct instruction. *Learning and Instruction*, 41, 41–51.

Weiterführende Literatur

- vom Hofe, R., Lotz, J., & Salle, A. (2015). Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 149–184). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Lehrplan für Mathematik im Bildungsgang Hauptschule, Jahrgangsstufen 5 bis 9/10. 16. <https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/HKM/lphauptmathe.pdf>. Gesehen 7. Januar 2018.
- Lehrplan für Mathematik im Bildungsgang Realschule, Jahrgangsstufen 5 bis 10.13. <https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/HKM/lprealmathe.pdf>. Gesehen 7. Januar 2018.