Negative Größen bei Diophant?

Klaus Barner

In this paper we champion DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA and ISABELLA BAŠMAKOVA against NORBERT SCHAPPACHER. In two publications ([46] and [47]) he puts forward *inter alia* two propositions: Questioning DIOPHANTUS' originality he considers affirmatively the possibility, that the *Arithmetica* are the joint work of a team of authors like BOURBAKI. And he calls BAŠMAKOVA's claim (in [5]), that DIOPHANTUS uses negative numbers, a "nonsense", reproaching her for her "thoughtlessness". First, we disprove SCHAPPACHER's Bourbaki thesis. Second, we investigate the semantic meaning and historical significance of DIOPHANTUS' keywords λεῖψις and ὕπαρξις. Next, we discuss SCHAPPACHER's epistemology of the history of mathematics and defend BAŠMAKOVA's methods. Furthermore, we give 33 places where DIOPHANTUS uses negative quantities as intermediate results; they appear as differences $a - b$ of positive rational numbers, the subtrahend b being bigger than the minuend a; they each represent the (negative) basis (πλευρά) of a square number (τετράγωνος), which is afterwards computed by the formula $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b$. Finally, we report how the topic "DIOPHANTUS and the negative numbers" has been dealt with by translators and commentators from MAXIMUS PLANUDES onwards.

> *Und er kommt zu dem Ergebnis:*
> *≪Nur ein Traum war das Erlebnis.*
> *Weil≫, so schließt er messerscharf,*
> *≪nicht sein k a n n, was nicht sein d a r f.≫*
>
> CHRISTIAN MORGENSTERN: Palmström

In einer Besprechung aktueller Literatur zur Geschichte der Fermat-Vermutung in den Mathematischen Semesterberichten ([46], S. 120) übt NORBERT SCHAPPACHER Kritik an historischen Angaben in ANTHONY KNAPPs Monographie [34] über elliptische Kurven und *kann sich*, wie er selbst schreibt, *nicht enthalten*, unter anderem zwei kritische Bemerkungen zu machen. Diese lauten:

1. „Das von mir sehr geschätzte Buch von A.W. Knapp zum Beispiel (s.o.) beginnt mit folgenden Behauptungen (p.3): *„Diophantus lived in Alexandria around 250 A.D.“* [Das wird in der Tat allgemein vermutet. Unser dokumentiertes Wissen wäre freilich auch mit der Annahme verträglich, daß Diophantus ein Autorenkollektiv à la Bourbaki war.]“

Und über DIOPHANTs Hauptwerk, die Arithmetika:

2. „*... The early volumes introduced ... negative numbers* [Das wurde zwar sogar von der Historikerin Bashmakova behauptet, ist aber trotzdem Unsinn.]...“

1 Original oder Kompilation?

Soweit sich SCHAPPACHERs **erste Bemerkung** auf die Lebenszeit DIOPHANTs bezieht, nämlich daß diese vermutlich die zweite Hälfte des dritten nachchristlichen Jahrhunderts umfaßte und daß die meisten Mathematikhistoriker, wenngleich durchaus nicht alle, dies annehmen, braucht man sie nicht zu kritisieren. Gesichert ist nur, daß er zwischen 150 BC und 350 AD lebte. Aber zahlreiche Indizien sprechen übereinstimmend für die engere Zeitspanne. Und auch ich will diese als Arbeitshypothese zugrunde legen, wohl wissend, daß ich mich damit auf nicht völlig gesichertem Boden bewege.

Verwunderung aber muß die zweite Hälfte von SCHAPPACHERs erster Bemerkung hervorrufen. Will er allen Ernstes behaupten, unser Wissen über DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA lasse die Hypothese zu oder lege gar den Schluß nahe, hinter dem Namen DIOPHANTOS verberge sich ein Kollektiv anonymer Autoren des dritten Jahrhunderts, als deren Gemeinschaftswerk die Arithmetika anzusehen seien? Die lakonische Form, in der SCHAPPACHERs Notiz erscheint, erweckt zudem den Eindruck, als werde hier lediglich eine in der Forschung gängige Hypothese wiedergegeben. In der umfangreichen Sekundärliteratur zu den Arithmetika des DIOPHANTOS ist mir nicht eine einzige Belegstelle für eine solche These begegnet.

Vermutlich, so will es mir scheinen, handelt es sich bei der Wendung *Autorenkollektiv à la Bourbaki* um eine mißglückte Einkleidung einer anderen und in der Tat sehr verbreiteten These, nämlich DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA sei nicht, oder zumindest nicht allein, der geistige Vater der (im uns bekannten Teil 290 Probleme umfassenden) Aufgabensammlung Arithmetika, vielmehr handele es sich bei dieser um eine von DIOPHANTOS vorgenommene Kompilation aus den Werken vor ihm lebender, heute aber leider unbekannter antiker Autoren.

Für diese These findet sich in der neueren Literatur manches Zitat. So schreibt E.T. BELL in „The Last Problem“ ([8], p.173):

> *There are two questions the historians would like to have answered. Was Diophantos a Greek? If so, he was a sport. He does not think like any of his Greek predecessors, nor is the kind of problems he attacks one that interested them. Again, was his* Arithmetica *all his own, or was it, in the manner of Euclid's* Elements *at least partly a compilation from earlier works? There has been much inconclusive argument on both questions.*

Tatsächlich ist viel darüber spekuliert worden, ob die Aufgaben und Lösungen in den Arithmetika DIOPHANTs eigene sind, oder ob er sie ähnlich wie EUKLID in den Elementen größtenteils von seinen Vorgängern übernommen und nur systematisch zusammengestellt hat. Man möchte DAVID SWIFT zustimmen, wenn er schreibt ([52], p.166):

> *It is useless to try to guess what proportion of the advanced problems and methods are Diophantus' own.*

Aber gleichwohl fährt er fort:

> *Most modern historians postulate a continuous underlying tradition of oriental algebraic methods in Greek mathematics rather than a sudden invasion in the Roman period. If this be so, texts and problem lists would certainly have existed. It is probable that the* Arithmetic *was in good part a compilation of such a quality that the predecessors were no longer held in repute.*

Ursprung dieses Postulats der „meisten modernen Historiker" ist eine Stelle aus PAUL TANNERYs 1879 erschienenem Aufsatz „A quelle époque vivait Diophante?" ([53], p. 262 f). Zunächst zitiert TANNERY in zustimmender Absicht eine Stelle aus HERMANN HANKELs unsäglicher (und nach heutigem Erkenntnisstand völlig unhaltbarer) Diophant-Herabsetzung aus dem Jahre 1874 ([26], S. 157):

> *Wären seine Schriften nicht in griechischer Sprache geschrieben, Niemand würde auf den Gedanken kommen, dass sie aus griechischer Cultur entsprossen wären.*

Dann fährt TANNERY fort:

> *C'est une étrange hallucination; la forme caractéristique de la rédaction n'eût certes pas permis de méconnaître la véritable origine, même sous le déguisement d'une langue étrangère, pourvu que la traduction eût été littérale. La rareté des indices de travaux analogues à ceux de Diophante et remontant au premier âge de l'École d'Alexandrie est d'ailleurs suffisamment explicable par diverses circonstances sur lequelles il serait hors de propos de étendre ici; mais, si rares que soient ces indices, ils sufficent, avec l'étude des écrits de notre auteur, pour établir que c'est un esprit dans le genre de celui de Pappus, un mathématicien érudit plutôt qu'un génie inventeur. Les artifices de ses solutions ont été, comme ensemble, beaucoup trop vantés; leur valeur est trés-inégale, et, si aux uns il faut bien reconnaitre* la griffe d'un lion inconnu, *d'autres problèmes, à côté, sont, en comparaison, traités plus ou moins maladroitement. L'oeuvre apparait donc comme un recueil emprunté à diverses sources, recueil où l'auteur a pu d'ailleurs mettre beaucoup du sien.*

TANNERY ist in seinem zitierten Aufsatz nicht primär an der Frage „Original oder Kompilation?" interessiert, ihm geht es um Argumente, die seine Datierung des DIOPHANTOS in die zweite Hälfte des dritten Jahrhunderts stützen. Die etwas entlegene Zitatstelle wäre vielleicht auch nicht von solcher Wirkung gewesen, hätte nicht THOMAS HEATH diese zum Anlaß genommen, in beiden Auflagen seines Klassikers „Diophantus of Alexandria" jeweils ein ganzes Kapitel ([27], Chapter VII: „How far was Diophantos original?"; [28], Chapter VI: „The place of Diophantus") der Frage zu widmen, auf welche Leistungen seiner Vorgänger DIOPHANTOS zurückgreifen konnte.

In der ersten Auflage von 1885 ([27], p. 131 ff.) gibt er zunächst einen Überblick über die Positionen der Autoren CLAUDE GASPAR(D) BACHET DE MÉZIRIAC, HENRY THOMAS COLEBROOKE, PIETRO COSSALI, GEORG HEINRICH FERDINAND NESSELMANN und NICOLAS SAUNDERSON zu der genannten Frage, die alle mehr oder minder die

Originalität DIOPHANTs bejahen, und setzt sich dann ausführlich mit TANNERYs *completely opposite view* auseinander, *being entirely unwilling to credit Diophantos with being anything more than a learned compiler.* HEATH untersucht die Argumente für und wider DIOPHANTs Originalität. Da unbestritten ist, daß das erste Buch der Arithmetika, welches sich mit bestimmten algebraischen Gleichungen ersten und zweiten Grades befaßt, nur wenig Neues enthält, richtet er sein Augenmerk auf die diophantische Analysis (Arithmetische Algebraische Geometrie), die mit der achten Aufgabe des zweiten Buches beginnt und fast vollständig den übrigen uns bekannten Teil der Arithmetika ausmacht.

Nachdem HEATH ausschließen kann, daß DIOPHANT von den Arabern und Indern beeinflußt wurde, bemerkt er: *There is not, then, much doubt that, if we are to find any writers on algebra earlier than Diophantos to whom he was indebted, we must seek for them among his own countrymen.* Er setzt sich ausführlich mit den Werken von HYPSIKLES, NIKOMACHOS und THEON VON SMYRNA auseinander und stellt fest, daß keiner dieser Autoren als Ideenlieferant für DIOPHANTOS in Frage kommt. Sodann untersucht HEATH DIOPHANTs Sprache, Terminologie und algebraische Bezeichnungen, um zu sehen, ob sie eine Schlußfolgerung gestatten, daß irgendetwas, was er lehrt, neu ist. (Zu diesen gehören auch die Termini λεῖψις und ὕπαρξις, die uns weiter unten noch beschäftigen werden.) HEATHs Schlußfolgerung:

> *To assert, then, that Diophantos invented algebra is, to say the least, an exaggeration, as we can even now see from the indications above mentioned. His notation, so far it is a notation, is apparently new.*

Sodann setzt sich HEATH mit TANNERY auseinander und schreibt:

> *What remains to be said may, perhaps, be best arranged under the principle of Diophantos' methods as headings; and it will be advisable to take them in order, and consider in each case wether anything is anticipated by Greek authors whose works we know. For it would seem useless to speculate on what they might have written. If we once leave the safe ground of positive proveable fact, such an investigation as the present could lead to no useful result.*

Besondere Abschnitte widmet HEATH der Geschichte der pythagoreischen Tripel bei PYTHAGORAS, PLATON und EUKLEIDES sowie dem (ARCHIMEDES zugeschriebenen) Rinderproblem. In beiden Fällen läßt sich kein Einfluß auf DIOPHANTs Methoden der unbestimmten Analysis nachweisen. Vielmehr übernimmt HEATH NESSELMANNs Schlußfolgerung in [40], indem er schreibt:

> *We may therefore adopt, with little or no variation, Nesselmann's final result, that he is far from believing that Diophantos merely worked up the materials of others. On the contrary he is convinced that the greater part of his propositions and his ingenious methods are his own. There is moreover an "Individuum" running through the whole work which strongly confirms this conclusion.*

Noch 1908 kommt W. W. Rouse Ball ([2], p. 104), nachdem er Spuren von Diophants algebraischen Bezeichnungen bei Pappus und in einem griechischen Papyros unbekannter Herkunft für möglich gehalten hat, zu einem ganz ähnlichen Résumé:

> *... but no other direct evidence for the non-originality of Diophantus has been produced, and no ancient author gives any sanction to this opinion.*

In der zweiten Auflage [28] seines Werkes von 1910, welches gegenüber der ersten Auflage eine starke Überarbeitung erfahren hat, kommt Heath zu einer völlig anderen Schlußfolgerung. Die Darstellung der Positionen von Bachet, Colebrooke, Cossali, Nesselmann und Saunderson ist ersatzlos entfallen. Insbesondere Tannery wird im Kontext der Frage „Original oder Kompilation?“ nicht mehr erwähnt. Andererseits vergleicht Heath die Arithmetika nunmehr auch mit einem inzwischen von Heiberg herausgegebenen und von Zeuthen kommentierten anonymen Manuskript [30] aus dem 12. Jahrhundert, in dem 13 Aufgaben der unbestimmten Analysis behandelt werden und dessen Ursprung von Heath zwischen Euklid und Diophant datiert wird. Aber keines der darin behandelten Probleme kommt in den Arithmetika vor. *Nor do we find in the above problems any trace of Diophantus' peculiar methods* ([28], p. 121). Schließlich faßt er seine Untersuchungen wie folgt zusammen (a.a.O. p. 124):

> *Such are the very few and scattered particulars which we possess of problems similar to those of Diophantus solved or propounded before his time. They show indeed that the kind of problem was not invented by him, but that on the other hand they show little or no trace of anything like his characteristic algebraical methods. In the circumstances, and in default of discovery of fresh documents, the question how much of his work represents original contributions of his own to the subject must remain a matter of pure speculation.*

Man möchte meinen, daß Heath damit allen Spekulationen über Diophants Mangel an Originalität einen Riegel vorgeschoben hat, aber dann lesen wir (und reiben uns die Augen) ([28], p.124):

> *It is pretty obvious that one man could not have been the author of all the problems contained in the six books. There are also inequalities in the work; some problems are very inferior in interest to the remainder, and some solutions may be assumed to be reproduced from other writers of less calibre, since they reveal none of the mastery of the subject which Diophantus possessed. Again, it seems probable that the problem V. 30, which is exceptionally in epigrammatic form, was taken from someone else. The* Arithmetica *was no doubt a* collection, *much in the same sense as Euclid's* Elements *were.*

Heath gibt keinerlei Hinweis auf die Beweggründe für seinen erstaunlichen Sinneswandel. Es bleibt dem Verfasser nichts anderes übrig, als ihm entschieden zu widersprechen.

1. Es ist überhaupt nicht *pretty obvious*, daß ein Mann allein nicht der Autor der Arithmetika sein kann. Die Geschichte der Mathematik kennt genügend Beispiele genialer

Mathematiker, die Bücher mit fast vollständig neuem, revolutionärem Inhalt verfaßt haben, und diese müssen auch HEATH bekannt gewesen sein, wie etwa die Disquisitiones Arithmeticae des jungen GAUSS. Oder man denke an die Gesamtwerke NEWTONs und EULERs. Das gewaltige Opus des ARCHIMEDES beweist, daß schon die Antike in der Lage war, ein mathematisches Genie hervorzubringen. Nur wer, wie HANKEL oder TANNERY, die Methoden DIOPHANTs nicht versteht und die Arithmetika für ein unsystematisches Sammelsurium von mathematischen Tricks hält, kann auf die Idee kommen, daß es sich bei diesem Werk um eine Kollektion handelt, die von DIOPHANT im wesentlichen nur zusammengetragen wurde. Es ist das Verdienst ISABELLA BAŠMAKOVAs [5] und — in Fortsetzung ihrer Untersuchungen — ROSHDI RASHEDs ([44], vol. 1, chapitre I), daß jene, lange Zeit gängige, Auffassung heute von keinem ernst zu nehmenden Mathematikhistoriker mehr vertreten wird.

2. HEATH stützt seine neue Position mit dem bei TANNERY entlehnten Hinweis, es seien Niveauunterschiede in den Arithmetika zu beobachten und dies beweise, daß DIOPHANT Probleme von Autoren unterschiedlichen Kalibers reproduziert habe. In der ersten Ausgabe seiner Diophant-Monographie von 1885 hat HEATH diese These noch zurückgewiesen ([27], p. 139):

> *But we are not likely to admit that inequality in a work is any evidence against originality; for what great genius always equalled himself?*

Außerdem ist zu bedenken, daß die ältesten (byzantinischen) Handschriften der griechischen Bücher der Arithmetika aus dem 13. Jahrhundert stammen. Sie haben also in ihrer überlieferten Form eine tausendjährige Tradition des Kopierens und des Kommentierens hinter sich, und es ist so gut wie sicher, daß beim Prozeß des Abschreibens gelegentlich Aufgaben aus einem Kommentar in den Haupttext hineingekommen sind. So stammen zum Beispiel die ersten sieben Aufgaben des zweiten Buches, die im Niveau deutlich abfallen, aus dem Kommentar eines unbekannten Lesers zum ersten Buch. Keiner der mittelalterlichen Kommentatoren aber hat je das „Kaliber" DIOPHANTs wieder erreicht, oft haben sie ihn nicht einmal verstanden.

3. Vollkommen abwegig ist schließlich HEATHs Vergleich der Arithmetika mit den Elementen des EUKLID. Hier handelt es sich um einen durch nichts gerechtfertigten Analogieschluß. Schon im 19. Jahrhundert gehörte es zu den allgemein anerkannten Theorien der Mathematikhistoriker, daß die Elemente der Geometrie des EUKLEIDES größtenteils eine gelungene Kompilation älterer Quellen darstellen, sei es daß ihr Autor aus den verloren gegangenen Elementen des HIPPOKRATES, des LEON und des THEUDIOS schöpfte, sei es, daß er den gesamten Inhalt einzelner der dreizehn Bücher seines Hauptwerkes bei PYTHAGORAS und seinen Schülern, bei EUDOXOS, bei ARCHYTAS oder bei THEAITETOS entlehnte. Dabei ist das mathematische Niveau des jeweiligen Buches weitgehend von der Qualität seiner Vorlage bestimmt. VAN DER WAERDEN urteilt ([56], S. 323), EUKLEIDES sei *vor allem Didaktiker, kein schöpferisches Genie.* Genau das Gegenteil ist jedoch von DIOPHANTOS zu sagen. Und niemand anderes als THOMAS HEATH selbst hat den Nachweis erbracht, daß für die genialen Methoden der diophantischen Geometrie im Werk des Alexandriners nicht die geringste Spur bei irgendwelchen antiken Vorläufern zu finden ist. Eine besondere didaktische Begabung hingegen scheint eher nicht zu den herausragenden Talenten DIOPHANTs zu gehören.

Fazit: HEATHs These, bei den Arithmetika handele es sich um eine Kollektion nach dem Vorbild der Elemente des EUKLID, ist eine völlig willkürliche Spekulation über DIOPHANTs mathematische Kreativität. Man kann diese These aufstellen, jedoch es fehlt ihr an jeder nachvollziehbaren Begründung.

Aber nun zeigt sich ein für die Zunft der Mathematikhistoriker typisches Phänomen: Ist erst einmal ein Vorurteil in die Welt gesetzt, so wird es unkritisch wieder und wieder abgeschrieben. Hier eine kleine Auswahl. So schreibt OSKAR BECKER mit bezug auf DIOPHANTs Kunstgriffe ([7], S.90f):

> *Manches mag uns nur erstaunen, weil wir die zweifellos vorhandenen Vorgänger in der griechischen Logistik so wenig kennen.*

Bei OYSTEIN ORE lesen wir ([42], p.184):

> *It seems unlikely that the large collection of problems in the* Arithmetic *should be the creation of a single author, and some of them must have been gleaned from previous sources.*

DIRK STRUIK meint ([51], p.60f):

> *Die Berührung mit der orientalischen Wissenschaft ist noch ausgeprägter bei Diophant. ...Die geschickte Behandlung unbestimmter Gleichungen zeigt, daß die alte Algebra Babyloniens oder vielleicht Indiens nicht nur unter einem Anstrich von griechischer Kultur weiterlebte, sondern auch durch einige aktive Männer weiterentwickelt worden war. Wie und wann das geschah, ist nicht bekannt, ebenso wie wir nicht wissen, wer Diophant war — er kann ein hellenisierter Babylonier gewesen sein.*

Oder bei BOYER / MERZBACH ([9], p.206):

> *We do not know how many of the problems in the* Arithmetica *were original or whether Diophantus had borrowed from other similar collections. Possibly some of the problems or methods are traceable back to Babylonian sources.*

Auch VAN DER WAERDEN spricht von den *Vorgängern des Diophantos auf dem Gebiete der unbestimmten Gleichungen*, die größtenteils unbekannt seien ([56], S.460). Und PEIFFER / DAHAN–DALMEDICO stellen lapidar fest ([43], S.73):

> *Wahrscheinlich war die* Arithmetik *ein ähnliches Sammelwerk wie die* Elemente *des Euklid, das von einem Autor verfaßt wurde, aber das Ergebnis einer gemeinschaftlichen Tradition war.*

Es ist kaum zu glauben, aber wahr: Keine(r) der zitierten Autor(inn)en hält es für angebracht, die aufgestellten Behauptungen in irgendeiner Weise zu belegen. NORBERT SCHAPPACHER befindet sich also in illustrer Gesellschaft.

So erleben die Arithmetika eine seltsame Metamorphose von „der Klaue eines unbekannten Löwen" über die Kompilation aus den Werken unbekannter Vorgänger nach Art der Elemente des EUKLID, ja sogar in der Tradition Babylons, bis hin zum Opus eines „Autorenkollektivs à la Bourbaki"[1]. E.T. BELL, selber kein leuchtendes Vorbild für geschichtliche Genauigkeit, aber ein Mann von oft erstaunlich treffendem historischem Urteil, sagt über DIOPHANTOS (und man kann ihm nur herzlich zustimmen) ([8], p.173):

> *Possibly he was just a mathematical genius with new ideas. There have been such.*

2 Negative Zahlen bei Diophant?

In seiner **zweiten Bemerkung** bezeichnet NORBERT SCHAPPACHER die Behauptung der Mathematikhistorikerin ISABELLA BAŠMAKOVA, DIOPHANTOS habe in den Arithmetika negative Zahlen eingeführt, als *Unsinn.* In der Tat hat die russische Autorin dies in ihrer 1972 in Moskau erschienenen Schrift „Diophant und diophantische Gleichungen" ([5], S.17f) behauptet und begründet. Damit steht sie gegen ein seit dem Jahre 1880 bestehendes Zitierkartell. Der Verfasser möchte nachweisen, daß Frau BAŠMAKOVA im Recht ist und der *Unsinn* eher auf Seiten ihres Kritikers. Frau BAŠMAKOVA *argumentiert* in ihrer Schrift mit Bezug auf die negativen Zahlen ausschließlich philologisch. Wir wollen ihre Argumente aufnehmen und vertiefen. Im Definitionsteil des ersten Buches der Arithmetika findet sich die folgende vielzitierte Stelle ([18], vol.I. p.12):

> Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.

Partiell übersetzt, heißt die hier von DIOPHANT aufgestellte Rechenregel: „Leipsis mit leipsis multipliziert ergibt hyparxis, leipsis hingegen mit hyparxis ergibt leipsis." Was bedeuten die hier auftretenden Termini λεῖψις (leipsis) und ὕπαρξις (hyparxis), und wie sind sie zu übersetzen?

Wir ziehen führende Lexika und Wörterbücher (LIDDELL/SCOTT [35], CHANTRAINE [14], MONTANARI [39]) sowie die Anhänge bei den Übersetzungen von TANNERY [18] und HEATH [28] zu Rate.

Bei LIDDELL/SCOTT, auf die sich CHANTRAINE und MONTANARI häufig beziehen, finden wir unter λεῖψις folgenden Eintrag [35], S.1037: λεῖψις, εως, ἡ, omission, τοῦ ἄρθρου Apollonius Discolus (Grammaticus) de Syntaxi 79.9. 2. failure, lack, ἀγαθῶν Catalogus Codicum Astrologorum 8(1).182. II. Mathematics, negative term in an algebraic expression, opp. ὕπαρξις, λ. ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν a minus multiplied by a minus gives a plus, Dioph.1 Def.9: dat. λείψει c. gen., minus, Id.2.21

Bei der Übersetzung von Diophant 1, Definition 9, halten sich LIDDELL/SCOTT offensichtlich an die Übersetzung von HEATH, der, siehe weiter unten, auch eine andere, näher am ursprünglichen Wortsinn orientierte Übersetzung gegeben hat. Es interessieren daher zunächst die außermathematischen Fundstellen. Die älteste bekannte (im Sinne von LIDDELL/SCOTT) scheint daher die Verwendung bei dem Grammatiker APOLLONIOS

DISCOLOS (2. Jahrhundert n.Chr.) zu sein, wo λεῖψις soviel wie Auslassung (Unterlassung, Weglassen) bedeutet. Bei der zweiten (wesentlich späteren?) Fundstelle ist die Bedeutung nach LIDDELL/SCOTT das Fehlen (Abwesenheit, Nichtexistenz), der Mangel (an Gütern). Die angegebenen Fundstellen scheinen darauf hin zu weisen, daß das Wort λεῖψις erst relativ spät in Gebrauch kam und in der Mathematik ausschließlich von DIOPHANT verwendet wurde (jedenfalls kommt es nach LIDDELL/SCOTT in keinem anderen antiken mathematischen Text vor).

FRANCO MONTANARI ([39], S. 1175) gibt ganz ähnlich wie LIDDELL/SCOTT die Übersetzungen *omissione* bzw. *mancanza, difetto* unter Angabe derselben Fundstellen, sowie *mat. termini di segno negativo* Dioph. 1.9. al., und verweist ferner auf den Gebrauch von λεῖψις im Sinne von ἔκλειψις (Eklipse, Ausbleiben, Verschwinden), also von Mond- und Sonnenfinsternis, durch den Kirchenschriftsteller HIPPOLYTOS (3. Jahrhundert n. Chr.) in dessen *Refutatio Omnium Haeresium* 4.10.3.

PIERRE CHANTRAINE notiert: λεῖψις ≪*omission*≫, etc. (tardif), plus anciennement avec préverbes: ἀπό- ≪*abandon, désertion, manque*≫ (Empedocles, att., etc.), ἔκ- ≪*abandon, désertion*≫ (Hérodote), ≪*éclipse*≫ (Thucydites). Dies deutet darauf hin, daß λεῖψις mit den Vorsilben ἔκ und ἀπό schon im fünften vorchristlichen Jahrhundert in Gebrauch war, und zwar in derselben Bedeutung wie λεῖψις bei den spätantiken Autoren. Ein merklicher Bedeutungswandel von λεῖψις scheint somit nicht stattgefunden zu haben; und der erste mathematische Gebrauch ist bei DIOPHANT nachgewiesen.

Die Übersetzung von Dioph. Def. 1.9 durch LIDDELL/SCOTT dürfte, wie schon erwähnt, auf THOMAS HEATH ([28], p. 130) zurückgehen, der sich dabei wiederum auf BACHET DE MÉSIRIAC ([17], p. 9) stützt. Daß diese Übersetzung philologisch nicht korrekt ist, dürfte auch HEATH klar gewesen sein, denn er weist mehrfach darauf hin ([27], p. 137, [29], vol. II, p. 459), daß λεῖψις mit *wanting* und ὕπαρξις mit *forthcoming* zu übersetzen sei, sowie die Definition 9 daher wie folgt: *a wanting multiplied by a wanting makes a forthcoming, and a wanting multiplied by a forthcoming makes a wanting.* Wir könnten daher versuchsweise übersetzen: Fehlendes, mit Fehlendem multipliziert, ergibt Vorhandenes. Fehlendes hingegen mit Vorhandenem ergibt Fehlendes.

Die mögliche Bedeutung von λεῖψις bei DIOPHANT im Sinne von Fehlendes, Abhandenes, wird gestützt durch die Bedeutung seines Gegenteils ὕπαρξις, welches in der griechischen Literatur bei dem Redner DEMOSTHENES (384–322 v. Chr.), bei dem Philosophen PHILODEMOS (1. Jahrhundert n. Chr.), dem Biographen und Philosophen Plutarch (1./2. Jahrhundert n. Chr.), dem Arzt GALENOS (2. Jahrhundert n. Chr.) und bei dem schon erwähnten Grammatiker APOLLONIOS DYSCOLOS nachgewiesen ist ([35], p. 1853). Bei allen diesen Fundstellen bedeutet ὕπαρξις nach LIDDELL/SCOTT soviel wie *existence, reality.*

Besonders interessant ist jedoch die Verwendung des Wortes ὕπαρξις durch die neuplatonischen Philosophen PLOTINOS, PORPHYRIOS, DAMASKIOS, bei den chaldäischen Orakeln, und schließlich bei PROKLOS (siehe z.B. [37, 38], [45] und [50]). Dort wird das erste Glied der berühmten „Triade“ (Vater, Kraft, Geist) auch ὕπαρξις (Existenz) anstelle von ὄν (Sein) genannt. DIOPHANT, der sehr wahrscheinlich Zeitgenosse von PORPHYRIOS und JAMBLICHOS war (zwei den Neu-Pythagoreern und/oder den Neu-Platonikern zuzurechnenden oder nahestehenden Philosophen und Mathematiker)[2] und vermutlich in den höchsten philosophischen und theologischen Kreisen Alexandrias verkehrte, wird die neuplatonische Metaphysik, insbesondere die neuplatonische Zahlenlehre, gekannt haben. In letzterer gehören die (natürlichen) Zahlen zum κόσμος νοητός, der die Objekte des Denkens, die Ideen, umfaßt. Der von DIOPHANT in die Mathematik eingeführte Begriff für eine positive Größe, ὕπαρξις (Existenz), der mit dem Begriff λεῖψις (Nichtexistenz) einen Gegensatz bildet, ist nicht der Sprache des täglichen Lebens, sondern der philosophischen Fachsprache seiner Zeit entnommen.

Man muß Definition 9 des ersten Buches der Arithmetika nicht in die mathematische Terminologie der Neuzeit übersetzen. Man kann bei *forthcoming* und *wanting* beziehungsweise bei „Vorhandenes“ und „Fehlendes“ bleiben und es dem Leser anheimstellen, wie er die Worte mathematisch interpretieren will. Nichts spricht im übrigen dafür, daß diese berühmte Stelle verderbt ist (auch bei ANDRÉ ALLARD [1] findet sich kein diesbezüglicher Hinweis). Der Respekt vor einem bedeutenden Sprachdenkmal sollte es uns verbieten, den uns überlieferten Text aus Besserwisserei zurechtzubiegen, auch dann, wenn wir es nicht glauben können, daß DIOPHANT eine (erste, tastende) Idee von negativen Größen gehabt haben könnte. Wollen wir aber eine Übertragung in die Sprache der heutigen Mathematik vornehmen, so bleibt uns wohl nichts anderes übrig, als zu übersetzen: „Eine negative Zahl, multipliziert mit einer negativen Zahl, ergibt eine positive Zahl, eine negative Zahl hingegen mit einer positiven ergibt eine negative Zahl.“

Die zitierte Stelle der Arithmetika setzt sich fort mit den Worten: καὶ τῆς λεῖψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον, ⋔. (Das Zeichen für λεῖψις ist ⋔, ein auf den Kopf gestelltes, gestutztes Ψ). Nach HEATH ([29], Bd. 2, p. 459) ist diese Erklärung des Zeichens ⋔ eine spätere Einfügung eines Interpolators. Das Symbol kommt in ähnlicher Form, nämlich als ⋔, auch in HERONS Metrika vor. Die Bedeutung ist in beiden Fällen „vermindert um“ oder kurz: „minus“. Es handelt sich um den binären Operator der Subtraktion und nicht um ein Vorzeichen, jedenfalls habe ich keine Stelle in den Arithmetika gefunden, wo ⋔ im Sinne eines Vorzeichens gebraucht wird[3]. Vemutlich ist ⋔ durch wiederholtes Abschreiben durch die Kopisten aus dem Heronschen ⋔ entstanden, was die ältesten überlieferten Handschriften vermuten lassen, wo die Form des Zeichens keineswegs so eindeutig ist, wie es die gedruckte Version bei TANNERY suggeriert. Wir wollen daher im Folgenden das Heronsche Symbol zur Bezeichnung der binären Operation der Subtraktion verwenden. Das Zeichen ⋔ wird an verschiedenen Stellen der Arithmetika durch λείψει verbalisiert. Dies ist der Dativ von λεῖψις. HEATH weist darauf hin, daß diese Ersetzung mehrfach grammatikalisch inkorrekt vorgenommen wird, und bemerkt dann ([29], Bd. 2, p. 459): *It is therefore a question whether Diophantus himself ever used the dativ* λείψει *for* minus *at all.*

Häufig hingegen benutzt DIOPHANTOS Wendungen wie die folgende (aus der Lösung der berühmten achten Aufgabe des zweiten Buches): κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. „Ich füge auf beiden Seiten das Fehlende hinzu und Ähnliches zu Ähnlichem.“ (Das heißt: Ich beseitige auf beiden Seiten der Gleichung die negativen Glieder und fasse gleiche Potenzen der Variablen zusammen. Dies sind die beiden wichtigsten Techniken DIOPHANTs zur Umformung von Gleichungen.)

Schon aus philologischen Gründen dürfte eigentlich kein Zweifel bestehen daran, daß DIOPHANTOS negative Größen mit einem eigenen Terminus bezeichnet und auch mit ihnen rechnet. Gleichwohl ist es den Mathematikhistorikern (HEATH eingeschlossen) schwer gefallen, wenn nicht gar unmöglich gewesen, dies als Tatsache zu akzeptieren. Dafür werden im wesentlichen drei Gründe angegeben:

1. DIOPHANTOS läßt grundsätzlich als Lösungen seiner Aufgaben nur positive rationale Zahlen zu.
2. Negative Zahlen haben sich im Abendland erst während der Renaissance ganz allmählich durchgesetzt. Es erscheint daher unglaublich, daß DIOPHANT bereits mehr als ein Jahrtausend früher von ihnen Gebrauch gemacht haben soll.
3. Die von DIOPHANT aufgestellte Regel der Multiplikation negativer Faktoren läßt sich mit den Mitteln der antiken Mathematik nur herleiten, so glaubte man, wenn mit den Faktoren nicht wirklich negative Zahlen, sondern lediglich die Subtrahenden in zwei zu multiplizierenden Differenzen gemeint sind.

Es wird von niemandem ernsthaft bestritten, daß DIOPHANTOS als *Lösungen* seiner Aufgaben *nur positive* rationale Zahlen zuläßt. Dies ist aber überhaupt nichts Ungewöhnliches. Auch im christlichen Abendland wurden negative Lösungen von Aufgaben nicht zugelassen oder einfach ignoriert zu einer Zeit, als mit negativen Zahlen bereits durchaus gerechnet wurde [24]. Bei CARDANO zum Beispiel werden nur die positiven Lösungen der von ihm behandelten quadratischen Gleichungen angegeben. Und noch VIÈTE läßt negative Zahlen als Lösungen nicht zu, da sie für ihn keine geometrische Interpretation liefern ([24], S. 297ff). Der Grund für die Scheu, solche „fiktiven“, „uneigentlichen“ oder „absurden“ Zahlen als *Ergebnis* einer Rechnung zu akzeptieren, ist die unbewußte oder bewußte ontologische Bedeutung, die den vertrauten positiven (ganzen oder rationalen) Zahlen beigelegt wird. [4] Aus Anlaß der Besprechung der negativen Zahlen bei CARDANO macht GERICKE folgende Anmerkung ([24], S. 304):

> *Tatsächlich ist es wohl ein entscheidender Schritt in der Entwicklung der Mathematik, daß der Mathematiker sich neue Objekte verschafft (erfindet), die in der Wirklichkeit (anscheinend) nicht vorkommen. So mag es verständlich sein, daß man mit diesen neuen Objekten zunächst sehr vorsichtig umgeht, sie nur dort verwendet, wo es nicht anders geht, und daß man dann doch versucht, sie in der Wirklichkeit vorzufinden. Erst im 19. Jahrhundert hat man auf den Bezug zur Wirklichkeit grundsätzlich verzichtet.*

Ich kann dieser Anmerkung GERICKEs nur zustimmen (mit Einschränkung lediglich hinsichtlich des letzten Satzes). Aber ich frage mich, warum er das, was er CARDANO, VIÈTE und anderen einräumt, nicht auch DIOPHANTOS zugute hält. Sie gilt gerade für die griechischen Mathematiker und Philosophen. Auf die besondere Rolle, welche die natürlichen Zahlen in der Lehre der Pythagoreer und in der Philosophie PLATONs gespielt haben, ist bereits hingewiesen worden. Die Weigerung der Griechen, die Eins (μονάς) als Zahl (ἀριθμός) anzuerkennen, die Krise der pythagoreischen Kosmologie, welche die Entdeckung irrationaler Längenverhältnisse auslöste (noch DIOPHANTOS erkannte irrationalen Lösungen quadratischer Gleichungen nicht den Status von „Zahlen" zu [57], p, 72f), die konsequente Vermeidung von Bruchzahlen und ihre Ersetzung durch ganzzahlige Längenverhältnisse noch bei EUKLID zeigen, welche festen und grundlegenden ontologischen Vorstellungen die griechischen Philosophen und Mathematiker mit den Zahlen verbanden. Hier dürfte DIOPHANTOS sicher keine Ausnahme gemacht haben. Mit anderen Worten: Der Zahlbegriff, wie auch speziell der als Gegenteil zu λεῖψις verstandene Begriff ὕπαρξις, sind für den philosophisch gebildeten Alexandriner des dritten Jahrhunderts mit besonderer ontologischer Bedeutung befrachtet. Daß DIOPHANTOS nur solche Zahlen *als Lösungen* anerkannte, denen im Sinne der vorherrschenden Philosophie reale Existenz zuerkannt wurde, nicht hingegen solchen, *die man sich unterhalb von „Nichts" vorstellte* ([36], S. 20), kann kaum verwundern.

In beiden Auflagen des Standardwerkes von THOMAS HEATH finden sich dazu teils zutreffende, teils mißverständliche, teils falsche Anmerkungen, wobei sich die Bemerkungen beider Auflagen teilweise widersprechen. In der ersten Auflage heißt es ([27], p. 82):

> *It may be in some measure due to the defects of notation in his time that Diophantos will have in his solutions no numbers whatever except* rational *numbers, in which, in addition to surds and imaginary quantities, he includes* negative *quantities. Of a negative quantity* per se, *i.e. without some positive quantity to substract it from, Diophantos had apparently no conception.*

In der zweiten Auflage lesen wir ([28], p. 52f):

> *Diophantus will have in his solutions no numbers whatever except "rational" numbers; and in pursuance of this restriction he excludes not only surds and imaginary quantities, but also* negative *quantities. Of a negative quantity* per se, *i.e. without some positive quantity to substract it from, Diophantus had apparently no conception.*

Der erste Satz des ersten Zitats ist irgendwie verunglückt. Es trifft zu, daß DIOPHANT nur positive rationale Zahlen als Lösungen zuläßt. Daß DIOPHANT von einer negativen Größe *per se* keine Konzeption besaß, läßt sich allenfalls akzeptieren, wenn man damit meint, daß er mit einer negativen Größe keine ontologische Vorstellung verband (was wir möglicherweise auch nicht tun). Aber das hat HEATH nicht gemeint, denn er reduziert DIOPHANTs Konzeption einer negativen Größe *expressis verbis* auf den Subtrahenden in einer Differenz; und da tut er DIOPHANT Unrecht, wie wir zeigen werden.

Anstatt nämlich mit sophistischen Argumentationen die negativen Größen bei DIOPHANT hinweg zu interpretieren, werden wir uns lieber auf die Suche nach den Spuren der negativen Größen in den Arithmetika begeben. Dabei dürfen wir unsere Erwartungen nicht zu hoch schrauben und müssen stets folgendes mitbedenken: Die beiden ältesten griechischen Kodizes der Arithmetika stammen aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts, das heißt, sie wurden rund 1 000 Jahre, nachdem ihr Autor das Werk verfaßt hatte, im byzantinischen Reich von Hand kopiert. In diesem Jahrtausend mögen die Arithmetika manche Veränderung erfahren haben. Ursprünglich sollen sie aus dreizehn

Büchern, also aus 13 Papyrosrollen, bestanden haben. Bis zur ersten Zusammenfassung in einem Kodex (vermutlich durch HYPATIA) dürften bereits 100 bis 150 Jahre vergangen sein, in denen die Papyri mehrfach kopiert wurden, da dies die einzige Möglichkeit war, ihrem raschen Verfall und dem damit verbundenen Totalverlust zu entgehen. Wie oft die Arithmetika danach bis in das 13. Jahrhundert auf widerstandsfähigerem Material kopiert wurden, wissen wir nicht. Bis zur ersten gedruckten zweisprachigen griechisch-lateinischen Ausgabe von 1621 sind (siehe [1]) jedenfalls nochmals ca. 30 Abschriften gefertigt worden, mit 4 bis 5 „Tochtergenerationen“. Eine vorsichtige Schätzung ergibt damit, daß die ältesten byzantinischen Kodizes das Ergebnis von mindestens zehn auf einander folgenden handschriftlichen Kopierprozessen sind.

Im günstigsten Fall hatten die Kopisten vom Inhalt des von ihnen kopierten Materials keine Ahnung; die Fehler, die ihnen beim Abschreiben unterliefen, lassen sich vergleichsweise leicht und sicher beheben. Viel schlimmer, wenn die Kopisten mathematisch bewandert waren und sich für Experten hielten. Die meisten von ihnen (vielleicht mit Ausnahme HYPATIAS) dürften DIOPHANT kaum verstanden haben, denn er war eine singuläre Erscheinung unter den alexandrinischen Mathematikern. Maßstab für die byzantinische Mathematik waren die „Elemente“ des EUKLEIDES, deren Studium für die Gelehrten kanonisch war, die aber zum Verständnis der Arithmetika wenig beitragen konnten. Die uns überlieferten byzantinischen Kommentare beziehen sich durchweg nur auf das erste Buch, dessen Gegenstände zum Allgemeinwissen der alexandrinischen Mathematiker gehört haben dürften. Sie dienen lediglich zur Vorbereitung auf die Lösung der interesssanteren Probleme der folgenden Bücher, die mit der achten Aufgabe des zweiten Buches beginnen, neben welche nicht nur FERMAT seine berüchtigte Observatio notierte, sondern auch ein erzürnter byzantinischer Leser den tief empfundenen frommen Wunsch ([18], Vol. II, p. 260)[5]:

> Ἡ ψυχή σου, Διόφαντε, εἴη μετὰ τοῦ Σατανᾶ ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῶν τε ἄλλων σου θεωρημάτων καὶ δὴ καὶ τοῦ παρόντος θεωρήματος.

Diese Stelle markiert den Punkt, von dem an der durchschnittliche byzantinische Mathematiker die Segel streichen mußte. Lediglich der gelehrte Mönch MAXIMUS PLANUDES hat uns wenigstens noch einen umfangreichen, wenngleich wenig hilfreichen Kommentar zum zweiten Buch der Arithmetika hinterlassen.

Die mathematisch bewanderten Kopisten aber haben dort, wo sie es für nötig hielten, im Text der Arithmetika „Verbesserungen“ vorgenommen, Ergänzungen eingefügt, Kommentare an den Rand geschrieben oder auch Passagen, die sie nicht verstanden, einfach weggelassen. Kommentare wurden von späteren Kopisten in den laufenden Text übernommen. Welches Schicksal mögen dabei jene Textstellen erlitten haben, wo (gegebenenfalls) negative Größen als Zwischenwerte auftraten?

3 Hereditas in historiam versus?

In [47] setzt sich SCHAPPACHER erneut mit Frau BASHMAKOVA kritisch auseinander. Der Attacke geht ein längerer interessanter Abschnitt voraus, den wir zum Verständnis der Auseinandersetzung vollständig zitieren ([47], S. 151f):

> *Das für mich merkwürdigste Phänomen in der gegenwärtigen Phase ist das dubiose Zusammentreffen zweier eigentlich gegensätzlicher Tendenzen: auf den ersten Blick erscheint heute der historisch-philologische von dem mathematisch-kreativen Zugang zu den* Arithmetika *wohlgeschieden. Vergleicht man zum Beispiel die Ausgabe der arabischen Bücher durch Rashed [Rashed 1984]*[6] *mit der klassischen Tannery-Ausgabe [Tannery 1974]*[7] *der griechischen Bücher, so sieht man, daß heute die mathematische Aufbereitung des Textes von der reinen Übersetzung säuberlich getrennt wird, während Tannery in seiner lateinischen Übersetzung auch gleich die Umschrift in eine modernere Notation besorgte und sich somit der Aufgabe einer eigenen, als solchen gekennzeichneten mathematischen Interpretation enthob.*
>
> *Das deutet einerseits auf die große methodische Sorgfalt hin, die Historiker und Philologen heute alten Texten angedeihen lassen (so wie Archäologen von heute nicht mehr dem Beispiel von Evans folgen, der bei der Ausgrabung des Palastes von Knossos Scherben aus Schichten, die ihn nicht interessierten, häufig einfach wegschmiß). Es ist aber andererseits auch ein Zeichen dafür, daß der mathematische Interpretationsrahmen, in dem wir Diophant heute sehen — nämlich die Arithmetische Algebraische Geometrie, die sich ja besonders in den letzten Jahrzehnten stürmisch und erfolgreich entwickelt hat — konzeptuell deutlich weiter vom Diophant-Text entfernt ist als das bei früheren Lesarten der Fall war. So spielen z. B. in der heutigen Betrachtungsweise Begriffe wie das Geschlecht der algebraischen Kurve, deren Gleichung man hinter einem Problem aus den* Arithmetika *sehen kann, und die Sehnen-Tangenten-Methode, mit der man etwa aus einem rationalen Punkt der besagten Kurve durch Schneiden mit geeigneten Geraden andere ableiten kann, eine große Rolle. Der von Gilles Lachaud besorgte Kommentar zur Rashed-Ausgabe der arabischen Bücher geht sehr weit in dieser Richtung; ist übrigens in der Sprache der algebraischen Geometrie von André Weils* Foundations *abgefaßt, die ja in der Algebraischen Geometrie schon seit einiger Zeit durch Grothendiecks Theorie überholt sind.*

Sieht man vom Wort „dubiose“ im ersten Satz, dessen Bedeutung aus dem Kontext des zitierten Abschnitts noch nicht erkennbar wird, einmal ab, so können wir diesen Ausführungen SCHAPPACHERs ohne Einschränkung zustimmen, soweit sie sich auf die Diophant-Editionen von TANNERY und RASHED beziehen. Die völlige Trennung der historisch-philologischen von der mathematisch-kreativen Betrachtungsweise eines (antiken) mathematischen Dokuments stellt nun aber, so will es uns scheinen, die von SCHAPPACHER einzig als legitim akzeptierte epistemologische Position dar, wobei er den „mathematisch-kreativen Zugang“ kaum der mathematischen Historiographie als vielmehr ausschließlich der aktuellen mathematischen Forschung zuzurechnen bereit ist, in der „DIOPHANT als virtueller Kollege auf der Suche nach interessanten Problemen“ geschätzt wird. Sollten SCHAPPACHERs Ausführungen tatsächlich so gemeint sein, so würden sie eine unzulässige Verkürzung eines viel komplexeren Tatbestandes darstellen.

In [25] hat Ivor Grattan-Guinness die zwei unterschiedlichen Sichtweisen in der Historiographie der Mathematik beschrieben und ihr Verhältnis untersucht. Er verwendet die beiden Wörter „history" und „heritage" zur Beschreibung der beiden unterschiedlichen Perspektiven ([25], p. 2f):

> *I use the words 'history' and 'heritage' to name two interpretations of a mathematical theory (or definition, proof-method, algorithm or whatever), I shall use the word 'notion' as the umbrella term, and the letter 'N' to denote it ....*
> *By 'history' I refer to the details of the development of N: its pre-history and concurrent developments, the chronology of progress, as far as it can be determined ..., and maybe also the impact of the following years and decades. History addresses the question 'what happened in the past?', where false starts, missed opportunities (...), sleepers and repeats are noted. The (near-)absence of later notions from N is registered,* differences *between N and seemingly similar more modern notions are likely to be emphasised.*
> *By 'heritage' I refer to the impact of N upon later work, both at the time and afterwards, especially the forms which it may take, or embodied, in modern contexts. Some modern form of N is the main focus, but attention is also paid to the course of its development. Here the mathematical relationships will be noted, but not the historical ones in the above sense. Heritage addresses the question 'how did we get here?', and often the answer reads like 'the royal road to me'. The modern notion is thereby unveiled (a nice word proposed by Henk Bos),* similarities *between old and modern notions are likely to be emphasised. ...*
> Both kinds of activity are quite legitimate, *and indeed important in their own right, in particular, mathematical research often seems to be conducted in a heritage-like-way, although the predecessors may well be very recent (as far back as five years, say).* The confusion of the two kinds of activity is not legitimate, *either taking heritage to be history (mathematicians' common view) or taking history be heritage (the occasional burst of over-enthusiasm by an historian): indeed, such conflations may well mess up both categories, especially the historical record.*
> *A philosophical difference is that heritage tends to focus upon knowledge alone (theorems as such, and so on), while history also seeks causes and understanding in a more general sense.*

Ich kann mich mit der hier vorgeschlagenen Einteilung anfreunden. Gleichwohl läßt auch Grattan-Guinness einige Fragen offen oder unausgesprochen. Auch wenn wir seine Warnung, history und heritage nicht durcheinander zu bringen, beherzigen, und das heißt insbesondere, uns jederzeit bewußt zu sein, ob wir uns gerade im Feld der *historia* oder der *hereditas* bewegen, so ist zum Beispiel völlig offen, ob heritage etwas zur history beitragen kann, und wenn ja, worin dies bestehen könnte, oder ob wir, darin SCHAPPACHER folgend, beide Sicht- und Arbeitsweisen strikt getrennt halten wollen oder müssen. Man braucht sich nur an ANDRÉ WEILS berühmten Vortrag (History of mathematics: why and how) beim Internationalen Mathematikerkongress in Helsinki 1978 zu erinnern, um zu erahnen, daß es mit der fein säuberlichen Trennung von *historia* und *hereditas* nicht immer ganz leicht sein wird. Was ist etwa zu einem Text wie dem folgenden zu sagen ([58], p. 439):

> *Anyway, it is impossible for us to analyse properly the contents of Books V and VII of Euclid without the concept of group and even that of groups with operators, since the ratios of magnitudes are treated as a multiplicative group operating on the additive group of the magnitudes themselves. Once that point of view is adopted, those books of Euclid lose their mysterious character, and it becomes easy to follow the line which leads directly from them to Oresme and Chuquet, then to Neper and logarithms.*

Das damit angesprochene Problem wird im vorliegenden (zwischen SCHAPPACHER und mir streitigen) Fall offenkundig bei der Frage: Kann und darf die moderne Arithmetische Algebraische Geometrie etwas zum historischen Verständnis der Arithmetika beitragen, oder nicht? Da SCHAPPACHER einen Vergleich zu gewissen überholten Methoden der Archäologie gezogen hat, will ich es ihm gleich tun und ebenfalls ein Beispiel aus der Archäologie benutzen, um unsere Position zu illustrieren.

Es ist bekannt, daß die moderne Archäologie Luftbilder verwendet, um die im Boden verborgenen Reste antiker Bauwerke zu entdecken. Durch auffällige Farbabweichungen in Wiesen und Feldern, die auf unterschiedliche Bodenbeschaffenheiten zurückzuführen sind, glaubt man die Umrisse von Grundmauern oder Gräben zu erkennen, die man aus der Fußgängerperspektive nicht oder nur sehr schwer erkennen würde. Auf diese Weise sind keltische Oppida (große Ringwallanlagen) und Befestigungsanlagen aus der Römerzeit entdeckt worden. Wer wollte nun die Methode der Luftbild-Archäologie als a(prä)historisch verwerfen, nur weil die Kelten und die Römer noch nicht fliegen konnten? Die Vogelperspektive erlaubt es uns, Dinge zu sehen, die unseren Augen sonst verborgen blieben. Die Luftaufnahmen machen aber die klassische Methode der Ausgrabungen nicht entbehrlich. Ob nämlich ein in einer Wiese sich abzeichnendes dunkleres Rechteck auf die Grundmauern eines römischen Badehauses oder die einer Feldscheune des 18. Jahrhunderts hinweist, das kann nur durch eine Grabung festgestellt werden.

Um zur Anwendung der Arithmetischen Algebraischen Geometrie auf die Arithmetika zurückzukommen: Sie ist mit einem Blick aus der Vogelsperspektive zu vergleichen. Man wird auf Strukturen, Zusammenhänge oder auch Details aufmerksam, die man ohne sie nur schwer oder vielleicht überhaupt nicht bemerkt hätte. Und wir sollten auf diese Perspektive nicht deswegen verzichten, weil DIOPHANT keine Idee von einem kartesischen Koordinatensystem besaß, und schon garkeine Ahnung von der Möglicheit, seine Gleichungen als Kurven in der Ebene oder im Raum zu interpretieren. Dies enthebt uns aber nicht der Pflicht, da, wo wir etwas zu sehen glauben, genau hinzuschauen, ob dies der überlieferte griechische (oder arabische) Text auch hergibt, das heißt, ob es sich auch ohne den Rückgriff auf Arithmetische Algebraische Geometrie festmachen und begründen läßt. Nur so läßt sich das „messing up"von heritage und history vermeiden (und heritage wird so zur „Hilfswissenschaft“ von history).

Nun wenden wir uns SCHAPPACHERs Kritik an ISABELLA BASHMAKOVAs Behandlung der Arithmetika zu, und speziell ihrer Behauptung, DIOPHANT benutze auch negative Zahlen. Im unmittelbaren Anschluß an die oben zitierte Passage fährt er fort ([47], S. 153):

> *Trotz dieser zunächst glasklaren Trennung von historischem Text und moderner Deutung neigen nun aber sogar Mathematikhistoriker mitunter dazu, die Deutung mit den Gedanken Diophants zu verwechseln. Das krasseste Beispiel für diese gedankenlose Tendenz ist das Diophant-Buch der Moskauer Mathematikhistorikerin Bašmakova [1974]. Um nur ein Beispiel zu geben: Die Autorin behauptet — entgegen dem für jeden Leser offensichtlichen Befund, daß Diophant nur in positiven rationalen Zahlen rechnet —, daß Diophant auch negative Zahlen benutzt. Als Beweis dafür gibt sie ([Bašmakova 1974], 36) die Analyse eines Problems (II.9) in Termen der Sehnen-Tangenten-Methode, wonach Diophant "eine Gerade durch den Punkt* $(2,-3)$*“ zieht. Daß weder dieser Punkt noch die angebliche Gerade bei Diophant vorkommen, stört die Autorin offenbar nicht.*

Wenden wir uns diesen Kritikpunkten im Einzelnen zu:

1. Zu der „zunächst glasklaren Trennung“ ist nur noch zu sagen: Es gibt sie nur als puristische Forderung, nicht aber in der mathematikhistorischen Praxis. Wer noch Zweifel hat, lese WEIL's Vortrag [58] auf dem ICM-Kongress in Helsinki 1978. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß sich ANDRÉ WEIL in seiner meisterhaften Darstellung [59] der Geschichte der Zahlentheorie völlig zwanglos der von Frau BASHMAKOVA (erstmals übrigens in [4]) eingeführten Begriffe und Methoden der Arithmetischen Algebraischen Geometrie bedient, um die Aufgaben DIOPHANTs zu charakterisieren und zu klassifizieren ([59], pp. 25–30). [8]

2. SCHAPPACHER spricht von „dem für jeden Leser offensichtlichen Befund, daß Diophant nur in positiven rationalen Zahlen rechnet“. Offenbar gehöre ich nicht zu den „Lesern“ der Arithmetika, da mir dort nicht nur positive rationale Zahlen begegnet sind, sondern auch Terme, und zwar im überlieferten griechischen Text, die für die von DIOPHANT berechneten (positiven) Werte der darin auftretenden Unbestimmten ς negative Werte annehmen. Davon kann man sich ganz ohne Arithmetische Algebraische Geometrie überzeugen (siehe die Beispiele im folgenden Paragraphen).

3. SCHAPPACHERs Kritik an der Art, wie Frau BASHMAKOVA die Aufgabe II,9 der Arithmetika hinsichtlich des dort auftretenden Punktes $(2,-3)$ interpretiert, ist hingegen vollkommen berechtigt. [9] Zunächst: Es handelt sich nicht, wie SCHAPPACHER schreibt, um die Analyse eines Problems mit der Sehnen-Tangenten-Methode, sondern um die Parametrisierung einer Quadrik mittels einer Schar von Geraden mit rationaler Steigung, die durch einen rationalen Punkt der Quadrik „gezogen“ werden, eine Methode, die übrigens heute in zahlreichen Büchern zur Zahlentheorie/Algebraischen Geometrie unter Berufung auf DIOPHANT dargestellt wird. Natürlich weiß auch Frau

Bashmakova, daß Diophant mit seiner Argumentation keinerlei Vorstellung von einer Quadrik und schon garnicht von einem Punkt im kartesischen Koordinatensystem (mit einer negativen Koordinate) verbindet. Ihre „Beweisführung“ wäre aber nicht weiter zu beanstanden, wenn dem für uns „sichtbaren“ Punkt $(2, -3)$ im griechischen Text ein Term entspräche, der dort tatsächlich einen negativen Wert annähme. Jedoch, einen solchen Term sucht man an dieser Stelle vergebens. Damit aber löst sich das „Beispiel“ leider in Luft auf.

4. Es folgen bei Bashmakova [5], S.36, die frivolen Worte: *Überhaupt operiert* Diophant *bei Zwischenrechnungen gern mit negativen Zahlen, obwohl die endgültige Lösung immer rational und positiv sein muß.* Es läßt sich nicht bestreiten: Für diese Behauptung bleibt uns die Autorin jeden Beweis schuldig. Dies ist umso bedauerlicher, als sie im wesentlichen Recht hat. Sicher müßte man das Wort „gern“ streichen. Man gewinnt nämlich gelegentlich den Eindruck, daß es Diophant eher unheimlich wird, wenn bei seinen Rechnungen negative Werte auftauchen, und in den ersten Büchern der Arithmetika verschleiert er dies meist gegenüber seinen Lesern (mehr darüber im nächsten Paragraphen).

5. Das mißglückte Beispiel rechtfertigt es aber nicht, das Kind mit dem Bade auszuschütten und die von Frau Bashmakova auf die Arithmetika angewendeten Methoden in Bausch und Bogen zu verwerfen. Die von ihr eingenommene „Vogelperspektive“ liefert zahlreiche interessante Beobachtungen, die vor ihr niemand gemacht hat und die auch Bestand haben, wenn man sich auf den überlieferten griechischen Text beschränkt.

6. Man sollte Frau Bashmakova auch nicht generell unterstellen, ihre „Deutung [der Arithmetika mittels der Methoden der Arithmetischen Algebraischen Geometrie] mit den Gedanken Diophants zu verwechseln“. So schreibt sie zum Beispiel in dem von Schappacher kritisierten Buch ([5], S.39):

> *...Das ist aber gerade die von* Diophant *verwendete Substitution. Sie ist damit dem Ziehen einer beliebigen Geraden durch einen rationalen unendlich fernen Punkt der Kurve (9) äquivalent. Wir möchten hier betonen, daß wir keinesfalls annehmen,* Diophant *habe den Begriff der unendlich fernen Punkte einer Kurve gehabt. Er benutzte einfach äquivalente Überlegungen. In der Geschichte der Mathematik sind uns zahlreiche Beispiele dafür bekannt, daß grundlegende Tatsachen einer bestimmten Theorie schon vor der Entstehung der Theorie selbst und vor der Herausarbeitung ihrer Grundbegriffe gefunden worden waren.*

An anderer Stelle [6] macht die Autorin unzweifelhaft klar, daß Diophant *entirely solved in a purely algebraic way the problem concerning the rational points on curves of third degree* (p.394) und *that Diophantus' methods admit a simple geometric interpretation* (p. 398). Oder sie schreibt etwa: *What, now, is the geometric meaning of this substitution?* (p.401). Und auf p.415 stellt sie unmißverständlich klar: *It should be emphasized that it was Newton who offered the first geometric interpretation of the methods for calculating rational solutions of indeterminate equations of second and third degrees.*

7. Was speziell die negativen Größen betrifft, so argumentiert Frau Bashmakova im übrigen korrekt auf jener Ebene, nämlich der „historisch-philologischen“, die Schappa-

CHER eigentlich als die einzig legitime akzeptieren müßte ([5], S. 17f).

4 Verba docent, exempla trahunt

Es bleibt uns nun nichts anderes übrig, als die von DIOPHANT angegebenen Lösungen seiner Aufgaben nachzurechnen und zu analysieren, um auf Spuren der negativen Größen in den Arithmetika zu stoßen. Vorab müssen wir uns jedoch einige Gedanken hinsichtlich der Terminologie und der Bezeichnungen DIOPHANTs machen, um nicht falsche Erwartungen zu hegen und in selbstgestellte Fallen zu treten. Da den zum Reich der Ideen (das heißt zum κόσμος νοητός) gehörenden Zahlen von DIOPHANT im höchsten Maße Realität zugesprochen wird, steht bei ihm das Wort ἀριθμός, welches wir mit „Zahl" übersetzen, ausschließlich für eine positive rationale Zahl. Die Verwendung dieses Wortes für irrationale oder negative „Zahlen" (im modernen Wortsinne) wäre ihm nie in den Sinn gekommen. Er spricht zum Beispiel nur von irrationalen Größen*verhältnissen*. Daher verwenden wir, einem Vorschlag HEINZ LÜNEBURGs folgend, für Terme, die im Laufe von DIOPHANTs Rechnungen negative Werte annehmen, das Wort „Größe" und sprechen aus Respekt vor seinen ἀριθμοί nur von „negativen Größen" und behaupten daher nicht, daß er mit negativen Zahlen rechne, sondern daß er mit negativen Größen operiere.

Für ἀριθμός verwendet DIOPHANT das Schlußsigma ς, den einzigen Buchstaben, der unter den griechischen Buchstabenziffern nicht vorkommt. Das ς (von den Übersetzern meist mit x wiedergegeben) wird als Unbestimmte (nicht als Variable!) für eine noch zu bestimmende positive rationale Zahl verwendet. Peinlichst achtet DIOPHANT durch entsprechende Aufgabenformulierungen und Lösungsansätze darauf, daß sich für ς nie etwas anderes als eine positive rationale Zahl ergeben kann, und zwar nicht nur im Schlußresultat, sondern auch bei Zwischenergebnissen.

Von größter Wichtigkeit ist auch, daß DIOPHANT sein Minuszeichen ⋔ ausschließlich als *binären* Operator bei der Subtraktion positiver rationaler Zahlen verwendet. Ein Zeichen für die Addition besitzt er nicht; sie wird durch Juxtaposition zum Ausdruck gebracht. Bei ihm von „Vorzeichen" zu sprechen, ist ein Anachronismus. Daher können wir von vornherein nicht erwarten, daß er so etwas wie zum Beispiel ⋔ $\overset{o}{M}\bar{\varepsilon}$ schreibt; das wäre bei *monadischer* Verwendung des Operators ⋔ gleich -5. Daraus bereits zu schließen, daß bei ihm keine negativen Größen auftreten, wäre aber voreilig. Er könnte zum Beispiel $\overset{o}{M}\bar{\varepsilon}$⋔ $\overset{o}{M}\bar{\iota}$ (das ist $5-10$) schreiben oder, noch naheliegender, als Ergebnis einer Rechnung erhalten, die natürlichste Art, wie negative Größen erscheinen.

Wir analysieren nun zunächst jene Beispiele, die von den Anhängern der These, DIOPHANTOS habe *keine* negativen Zahlen gekannt, als Beweis angeführt werden. Dies erleichtert uns die Auswahl, denn davon gibt es nicht viele Beispiele[10]. Dabei verwenden wir die modernen Methoden der Arithmetischen Algebraischen Geometrie. Wir betonen aber ausdrücklich, daß wir diese nur als Hilfsmittel verwenden, insbesondere, um interessante Stellen zu finden. Nur wenn dann im griechischen Text auch ohne jede moderne Terminologie eine negative Größe auftreten sollte, etwa als Ergebnis einer Subtraktion, bei welcher der Subtrahend sich als größer herausstellt als der Minuend, wollen wir behaupten, in den Arithmetika eine negative Größe gefunden zu haben.

Im folgenden verwenden wir die Numerierung der griechischen Bücher des DIOPHANT und die Zählung der Aufgaben nach TANNERY [18]. So bedeute zum Beispiel **VI, xii**; 414, 19–22: sechstes Buch, Aufgabe 12, Seite 414, Zeilen 19–22, von [18], Band I. HEATH (z. B. [29], p. 462) und GERICKE (z.B. [24], S. 280) führen als Beweis dafür, daß DIOPHANT *echt negative Größen ablehnt*, eine Stelle aus der Lösung der zweiten Aufgabe des fünften (griechischen) Buches der Arithmetika an[11]:

> **V, ii.** *Drei Zahlen sind zu finden, die eine geometrische Reihe bilden derart, daß jede dieser Zahlen, vermehrt um eine gegebene Zahl, ein Quadrat ergibt.*

LÖSUNG. *Die gegebene Zahl sei* 20. *Ich frage wieder, welches Quadrat, um* 20 *vermehrt, ein Quadrat ergibt. Ein solches Quadrat ist* 16. *Ich setze also eine der äußeren Zahlen* 16, *die andere* x^2, *die mittlere daher* $4x$. *Es müssen also* $4x+20$ *und* x^2+20 *Quadrate sein. Die Differenz dieser Zahlen ist* $x^2-4x = x(x-4)$. *Das Quadrat der halben Differenz der Faktoren ist* 4. *Diese Zahl ist gleich der kleineren Zahl* $4x+20$ *zu setzen. Dies ist ἄτοπον (átopon), es soll nämlich* 4 *nicht kleiner sein als* 20.

Es ist aber $4 = \frac{1}{4}\cdot 16$ *und* 16 *ist nicht beliebig, sondern ein Quadrat, das um* 20 *vermehrt, ein Quadrat ergibt. Ich werde also dazu geführt, ein Quadrat zu finden, dessen vierter Teil größer ist als* 20, *und das, um* 20 *vermehrt, ein Quadrat ergibt. Ein solches Quadrat ist also größer als* 80.

Aber 81 *ist eine Quadratzahl größer als* 80. *Wenn wir also die Seite des gesuchten Quadrates in der Form* $x+9$ *ansetzen, so ist das Quadrat* $x^2+18x+81$, *und wenn man* 20 *addiert, muß ein Quadrat herauskommen. Also* $x^2+18x+101=\square$. *Dieses [Quadrat] möge die Seite* $x-11$ *haben. Folglich ist* $\square = x^2+18x+101 = x^2-22x+121$, *woraus sich* $x=\frac{1}{2}$ *ergibt. Es war aber die Seite des gesuchten Quadrates gleich* $x+9$. *Das Quadrat ist also* $90\frac{1}{4}$.

Nun kehre ich zur ursprünglichen Aufgabe zurück und setze die äußeren Zahlen $90\frac{1}{4}$ *und* x^2. *Die mittlere ergibt sich daher zu* $9\frac{1}{2}x$, *und ich muß nun* $x^2+20=\square$ *und* $9\frac{1}{2}x+20=\square$ *lösen. Die Differenz dieser beiden Quadrate ist* $x^2-9\frac{1}{2}x$, *welche durch* x *sowie durch* $x-9\frac{1}{2}$ *geteilt wird. Das Quadrat der halben Differenz dieser Faktoren ist* $\frac{361}{16}$, *diese ist gleich der kleineren der Zahlen, also gleich* $9\frac{1}{2}x+20$ *zu setzen, und das liefert* $x=\frac{41}{152}$. *Zurück zur Aufgabe. Es ergibt sich als erste Zahl* $90\frac{1}{4}$, *als zweite* $\frac{779}{304}$ *und als dritte* $\frac{1681}{23104}$. ■

ANALYSE. Die Aufgabe besteht in folgendem: Gegeben sei eine (positive rationale) Zahl d. Gesucht sind drei positive rationale Zahlen a, b und c derart, daß

$$ac=b^2,\quad a+d=\square,\quad b+d=\square,\quad c+d=\square.$$

Setzen wir $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q$, so haben wir

$$b=aq,\qquad c=aq^2.$$

Im Prinzip kommt es daher darauf an, a und q zu bestimmen. Es gehört nun zu den genialen Tricks DIOPHANTs, zu erkennen, daß die Aufgabe wesentlich erleichtert wird, wenn man zusätzlich annimmt, daß a eine Quadratzahl ist, sagen wir $a = \alpha^2$, für die $\alpha^2 + d = \square$ bereits erfüllt ist. (Den gleichen Trick hat er schon bei der Lösung der vorhergehenden Aufgabe verwendet.) Dann nämlich ist auch $c = (\alpha\, q)^2$ eine Quadratzahl, und setzen wir $x = \alpha\, q$, so haben wir

$$a = \alpha^2, \qquad b = \alpha\, x, \qquad c = x^2,$$

und es muß „nur noch“

$$\alpha\, x + d = \square, \qquad x^2 + d = \square$$

erfüllt werden. Es sei etwa $\alpha\, x + d = y^2$, $x^2 + d = z^2$ gesetzt. Dann haben wir

$$z^2 - y^2 = (z - y)\,(z + y) = x\,(x + \alpha)\ .$$

Es liegt daher nahe, den Ansatz $z - y = x$, $z + y = x + \alpha$ zu machen, woraus

$$y = \frac{\alpha}{2}, \qquad z = \frac{2\,x + \alpha}{2}$$

folgt. Nun muß

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha\, x + d$$

gelten, also

$$x = \frac{1}{4\,\alpha}\left(\alpha^2 - 4\,d\right)\ .$$

Wenn $x > 0$ sein soll (und nur dann sind alle drei gesuchten Zahlen a, b und c positiv), so muß $a = \alpha^2 > 4\,d$ sein. Die Aufgabe besteht also nun darin, eine Quadratzahl α^2 mit $\alpha^2 > 4\,d$ zu finden derart, daß $\alpha^2 + d = \square$ ist.

Da DIOPHANT keine Bezeichnung für eine beliebige Konstante frei hat, demonstriert er sein Vorgehen am Fall $d = 20$. (Seine Methode funktioniert aber für jede positive rationale Zahl d.) Eine Quadratzahl $a = \alpha^2$ mit $\alpha^2 + 20 = \square$ fällt ihm sofort ein, nämlich $a = 4^2$, da $4^2 + 20 = 6^2$ ist. Aber dies führt auf ein negatives x:

$$x = \frac{1}{4 \cdot 4}\left(4^2 - 4 \cdot 20\right) = -4\ ,$$

und das ist „fehl am Platze“ (ἄτοπος). Es würde auf die für DIOPHANT inakzeptable Lösung

$$a = 16, \qquad b = -16, \qquad c = 16$$

führen. Er benutzt hier die von ihm häufig verwendete Methode des „falschen Ansatzes“. Das Scheitern der Wahl $\alpha = 4$ gibt ihm die Gelegenheit, den nun folgenden (von seinen Zeitgenossen sicher als enorm empfundenen) Aufwand zu rechtfertigen.

Bevor wir diesen schildern, ein paar Worte zur Übersetzung des Wortes ἄτοπος. SCHULZ ([48], S. 218) übersetzt *„ungereimt“*, ebenso WERTHEIM ([60], S. 194), TANNERY ([18], Bd. I, p. 313) übersetzt *„absurdum“*, HEATH ([28], p. 200) übersetzt *„absurd“*, CZWALINA ([15], S. 76) übersetzt *„unmöglich“* und GERICKE ([24], S. 280) übersetzt — sehr vorsichtig — *„sinnlos (ohne Ort — sei es in der Algebra oder in der Wirklichkeit; “utopisch“ würde dem Wort nahekommen.“)* In der Tat ist *„absurd“* (das heißt, widersinnig) nur eine von vielen denkbaren Übertragungen des Terminus ἄτοπος, während *„unmöglich“* definitiv falsch übersetzt ist. In Wörterbüchern finden wir als mögliche Bedeutungen: [32] *nicht an seiner Stelle, daher: ungewöhnlich, auffallend, wunderbar, abenteuerlich, unziemlich, abgeschmackt, ungeschickt, ungereimt, widersinnig, widrig;* [35] *out of place, out of the way: hence, 1. unwonted, extraordinary, 2. strange, paradoxical, 3. unnatural, disgusting, foul.* Das von GERICKE vorgeschlagene *utopisch* (οὔ-τοπος) ist vielleicht nicht schlecht.

Da $\alpha^2 > 4\,d = 80$ sein muß und $9^2 = 81 > 80$ ist, macht DIOPHANTOS nun den Ansatz $\alpha = x + 9$ und sucht nach einer rationalen Lösung der diophantischen Gleichung

$$y^2 = (x+9)^2 + 20 = x^2 + 18\,x + 101 \tag{1}$$

mit positivem x. Diese beschreibt eine Quadrik (eine Hyperbel). Es ist nicht ganz leicht, auf dieser Kurve einen rationalen Punkt zu erraten, durch den wir dann Geraden mit rationaler Steigung hindurchlegen und damit die Kurve über $\mathbb{Q}$ parametrisieren könnten ([5], S. 36f).

Gehen wir aber zur projektiven Erweiterung der Kurve über (wir setzen $x = \frac{u}{w}$, $y = \frac{v}{w}$), das heißt, zu der projektiven Quadrik

$$v^2 = u^2 + 18\,u\,w + 101\,w^2,$$

so sehen wir, daß die beiden unendlich fernen Punkte auf dieser Kurve durch $\langle 1, 1, 0\rangle$ und $\langle 1, -1, 0\rangle$ gegeben sind, und dies sind rationale Punkte ([5], S. 37ff). Daher können wir durch einen von ihnen, sagen wir durch $\langle 1, 1, 0\rangle$, eine projektive Gerade mit rationaler Steigung legen. Eine solche Gerade hat die allgemeine Form

$$v = u - m\,w$$

mit $m \in \mathbb{Q}$, affin:

$$y = x - m.$$

DIOPHANT benötigt einen Schnittpunkt (x, y) mit der Hyperbel, wo $x > 0$ ist. Daher muß er m hinreichend groß wählen und wählt $m = 11$:

$$y = x - 11. \tag{2}$$

DIOPHANT berechnet x, indem er (2) in (1) substituiert (das Quadrieren einer Differenz bereitet ihm natürlich keine Probleme), und erhält

$$x^2 - 22\,x + 121 = x^2 + 18\,x + 101,$$

woraus $40\,x = 20$ folgt, also $x = \frac{1}{2}$. Es kann einem Könner wie DIOPHANT kaum entgangen sein, daß der zugehörige y-Wert in (2) (in heutiger Schreibweise)

$$y = -\frac{21}{2}$$

ist, also eine *negative* Größe, und diese ist *das Ergebnis einer Subtraktion*, und *nicht deren Subtrahend.* Anders formuliert: Er muß erkannt haben, daß er

$$\left(\frac{1}{2} - 11\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 18 \cdot \frac{1}{2} + 101 = \frac{441}{4}$$

erhalten hat (DIOPHANT kennt weder Vorzeichen, die auch wir hier vermieden haben, noch ein Symbol für die Multiplikation, die er stets verbalisiert, die wir aber in die Formel mit hineingenommen haben.) In moderner Terminologie könnten wir sagen: Als rationale Lösung der Gleichung (1) hat er das Paar $\left(\frac{1}{2}, -\frac{21}{2}\right)$ gefunden. Daß sich die Basis y des durch Addition von 20 zu $(9+x)^2$ entstehenden Quadrates y^2 als negative Größe ergibt, scheint DIOPHANT nicht zu stören. (Er hätte das negative y leicht vermeiden können, indem er seine Gerade durch den Punkt $\langle 1, -1, 0\rangle$ statt durch den Punkt $\langle 1, 1, 0\rangle$ gelegt hätte.) Aber gegenüber seinem im Vorwort der Arithmetika angeredeten Adressaten Dionysios (Διονύσιος) vermeidet er es, dies *expressis verbis* zu erwähnen. Es genügt ja, $\alpha = 9 + x = 9 + \frac{1}{2}$ anzugeben. Die Lösung

$$a = \frac{361}{4}, \qquad b = \frac{779}{304}, \qquad c = \frac{1681}{23104}$$

ergibt sich dann mittels der eingangs beschriebenen Methode.

Es bleibt noch zu fragen, wie die Wahl $m = 11$ zustandekommt. Wir spekulieren mal: durch Probieren. Es soll ja $x > 0$ sein. Es führt $m = 9$ auf $x = -\frac{5}{9}$, $m = 10$ führt auf $x = -\frac{1}{38}$, $m = 11$ führt auf $x = \frac{1}{2}$, $m = 12$ führt auf $\frac{43}{42}$, $m = 13$ führt auf $x = \frac{17}{11}$. Wer hätte nicht, wäre er an DIOPHANTs Stelle gewesen, spätestens hier abgebrochen und $m = 11$ gewählt. Selbst dann ist die Lösung kompliziert genug.

Ein Standard-Einwand lautet an dieser Stelle, die Variable y, die hier einen negativen Wert annimmt, komme nur in der modernen Einkleidung von DIOPHANTs Lösung vor, nicht jedoch bei DIOPHANT selbst. Daher könne dieser auch nicht bemerkt haben, daß sie den Wert $y = -\frac{21}{2}$ annimmt. Dies ist kein überzeugendes Argument, denn unser y steht ja für die Seite (πλευρά, in DIOPHANTs Stenographie: $\pi^{\lambda\cdot}$) eines von ihm in Zeile 6 von [18], I., p.314, eingeführten Quadrats, für die er in Zeile 7 den Ansatz ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{o}{M}\overline{\iota\alpha}$, d.i. $x - 11$, macht:

> ἔστιν ἄρα $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota\eta}$ $\overset{o}{M}\overline{\varrho\alpha}$ ἴς. $\Box^{\psi}$. ἔστω ἀπὸ $\pi^{\lambda\cdot}$ ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{o}{M}\overline{\iota\alpha}$. ὁ ἄρα $\Box^{o\varsigma}$ ἔσται
> $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ $\overset{o}{M}\overline{\varrho\kappa\alpha}$ ⋔ ς $\overline{\kappa\beta}$. ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota\eta}$ $\overset{o}{M}\overline{\varrho\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{o}{M}\angle'$.

Und bereits in der Zeile 9/10 erhält er für ς (x) den Wert $MM\angle'$, d.i. $\frac{1}{2}$. Und da sollte ein Mathematiker vom „Kaliber“ DIOPHANTs nicht bemerkt haben, daß die Seite des von ihm soeben hilfsweise eingeführten Quadrats λεῖψις ist? Natürlich kann DIOPHANT dies gegenüber einem unaufmerksamen Leser vertuschen, indem er nur den Wert $x = \frac{1}{2}$ verwendet, um ihn in den Term $x^2 + 18x + 101$ einzusetzen, was für das Quadrat den Wert $\frac{441}{4}$ ergibt, ein Quadrat dessen Seite er soeben zu $-\frac{21}{2}$ berechnet hat. [12]

KOMMENTAR. Diese Aufgabe läßt uns *in nuce* den ganzen DIOPHANT sichtbar werden: Den genialen Griff in seine Trickkiste; die Standardtechnik der Faktorisierung von $z^2 - y^2$; die Entschlossenheit, nur positive rationale Lösungen zu akzeptieren; die Methode des falschen Ansatzes; die Methode der Parametrisierung einer Quadrik über $\mathbb{Q}$, wenn einerseits im Endlichen kein rationaler Punkt auf der Quadrik bekannt ist, andererseits aber die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden rational sind; keine Hemmung, als Basis eines Quadrates auch eine *negative* Größe zu akzeptieren, wenn nur das Endergebnis positiv ist; eine gewisse Diskretion gegenüber dem Leser, was die Erwähnung negativer Zwischenresultate betrifft. [13] Eines jedenfalls ist klar: Das von HEATH und GERICKE angeführte Beispiel ist eher ein Beleg für die These ISABELLA BAŠMAKOVAS als ein Beweis für die Behauptung der beiden Herren.

GERICKE hat noch einen zweiten Pfeil im Köcher ([24], S. 287):

> *Sicher haben auch die griechischen Kaufleute und Steuerbeamten Rechenaufgaben gelöst, doch ist davon nichts überliefert. Diophant fragt nicht nach Einnahmen oder Ausgaben, sondern nach Zahlen, und eine Zahl ist [Euklid VII, Def. 2] "eine aus Einheiten zusammengesetzte Menge", da kommt der Gedanke an andere als positive Zahlen gar nicht auf. Eine Aufgabe, die keine positive Lösung hat, ist "unmöglich".*

Dazu ist zu bemerken, daß DIOPHANT an keiner Stelle der Arithmetika eine Aufgabe deswegen als "unmöglich" (ἀδύνατος) bezeichnet, weil sie keine positive Lösung hat. Einmal (IV, xxvii) nennt er die Aufgabe, $8\,x^3 - x^2 + 8\,x - 1$ gleich einem (positiven) Kubus zu setzen, "unmöglich", und da irrt er, wie TANNERY ihm nachgewiesen hat, und einmal (VI, xiv) behauptet er, es sei „unmöglich", daß $15\,x^2 - 36$ ein Quadrat sei, weil 15 sich nicht als Summe zweier Quadrate darstellen lasse (wahrscheinlich eines von DIOPHANTS Porismen), und da hat er Recht. (Unglücklicher Weise spricht HEATH ([28], p. 59) im Zusammenhang mit der Diskussion von Gleichungen der Gestalt $A\,x^m = B$ von „impossible": *Diophantus only recognises one value of x which satisfies this equation; thus, if m is even, he gives only the positive value, excluding a negative value as „impossible".* Dadurch entsteht beim Leser der Eindruck, DIOPHANTUS selbst habe das so formuliert. Aber dies ist nicht der Fall, die Worte werden ihm von HEATH lediglich in den Mund gelegt. Spätere Autoren aber wiederholen diese Formulierung, offenbar in der Annahme, HEATH habe DIOPHANT zitiert.) GERICKE fährt fort:

> *Diophants Aufgaben sind oft schematisch konstruiert, und da kann es bei Systemen linearer Gleichungen vorkommen, daß eine oder mehrere der gesuchten Zahlen negativ werden, was später bei Leonardo von Pisa und bei Chuquet tatsächlich vorgekommen ist. Kann man das vielleicht der Aufgabe von vornherein ansehen?*

Als Beweis für DIOPHANTs vermeintliche „Leipsiphobie“ führt GERICKE die 16. Aufgabe des ersten Buches der Arithmetika an ([15], S. 12):

> **I, xvi.** *Drei Zahlen von der Beschaffenheit sind zu finden, daß die Summen von je zweien von ihnen gegebenen Zahlen gleich sind. Es ist dabei notwendig, daß die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer ist als jede der gegebenen Zahlen.*

LÖSUNG. *Es soll die Summe der ersten und zweiten Zahl* 20*, die Summe der zweiten und dritten Zahl* 30*, die Summe der dritten und ersten Zahl* 40 *sein. Es werde die Summe aller drei gesuchten Zahlen* s *genannt. Es muß dann die erste Zahl* $s - 30$*, die zweite* $s - 40$ *und die dritte* $s - 20$ *sein. Es bleibt noch die Bedingung zu erfüllen, daß die Summe aller Zahlen* s *ist; diese Summe ist aber* $3\,s - 90$*. Also ist* $3\,s - 90 = s$, und es ergibt sich $s = 45$. Die drei Zahlen sind 15, 5 und 25. ■

ANALYSE. Zu der vorgeführten Rechnung ist nichts zu sagen. Interessant ist lediglich die angegebene (notwendige) Bedingung, daß jede der vorgegebenen Zahlen kleiner ist als die Hälfte ihrer Summe. Nennen wir die vorgegebenen Zahlen a, b und c sowie die gesuchten Zahlen x, y und z, so haben wir

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + x &= c\,. \end{aligned}$$

Addition dieser drei Gleichungen und Division des Ergebnisses durch 2 ergibt

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}\,.$$

Durch Subtraktion der drei ersten Gleichungen von der letzten erhalten wir

$$\begin{aligned} z &= \frac{a + b + c}{2} - a \\ x &= \frac{a + b + c}{2} - b \\ y &= \frac{a + b + c}{2} - c\,. \end{aligned}$$

Daraus lesen wir unmittelbar ab, daß die von DIOPHANT angegebene Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist dafür, daß die gesuchten Zahlen x, y und z sämtlich positiv sind. Hat man die vorgegebenen Zahlen a, b und c der Größe nach geordnet, so genügt es offenbar, nur die Ungleichung

$$\frac{a + b + c}{2} > c \qquad \text{beziehungsweise} \qquad c < a + b$$

nachzuprüfen.

KOMMENTAR. Dieses von GERICKE angeführte Beispiel beweist natürlich überhaupt nichts mit Bezug auf die Behauptung, DIOPHANT habe den Gebrauch negativer Größen abgelehnt, sondern belegt lediglich, daß er stets sicherstellt, daß die Lösungen seiner Aufgaben (hier eines linearen Gleichungssystems) positive rationale Zahlen sind, und das wird von niemandem, auch nicht von Frau BAŠMAKOVA, bestritten. Die Aufgaben aus dem ersten Buch dienen größtenteils zur Vorbereitung auf die Lösungen der anspruchsvolleren Aufgaben der nachfolgenden Bücher der Arithmetika. Eine ganze Reihe der Routineprobleme des ersten Buches enthält Bedingungen ähnlicher Art wie das vorliegende (zum Beispiel I, v; I, vi; I, viii; I, ix; I xiv; I, xvii; I, xix; II, vi), und auch in den Aufgaben zur Arithmetischen Algebraischen Geometrie tauchen immer wieder derartige Kriterien auf. Als drittes (und letztes ausführlich analysiertes) Beispiel suchen wir uns daher nun ein Problem heraus, in welchem die Bedingung aus I, xvi erneut auftritt, wobei DIOPHANT seine ganze Kunstfertigkeit aufbieten muß, um sie im Kontext der Aufgabenstellung zu erfüllen.

Dieses Beispiel behandelt ein Thema, welches die Mathematiker bis auf den heutigen Tag beschäftigt und sich wie ein roter Faden von DIOPHANT bis FERMAT durch die Geschichte der unbestimmten Analysis zieht: „Quadrate in arithmetischer Progression“ oder, wie DIOPHANT es nennt, „drei Quadrate von gleicher Differenz“. Darunter verstehen wir drei rationale Quadratzahlen x^2, y^2 und z^2 mit der Eigenschaft, daß

$$z^2 - y^2 = y^2 - x^2 > 0 \tag{3}$$

ist. Solche drei Quadratzahlen sind nicht schwer zu finden. Zunächst erinnern wir an zwei elementare Formeln, die in geometrisch eingekleideter Form schon EUKLID bekannt waren und die DIOPHANT in seinen Arithmetika mehrfach zitiert (II,xxx; III,xix; V,vii) und ständig verwendet:

$$a^2 + b^2 + 2\,a\,b = (a + b)^2\,, \qquad a^2 + b^2 - 2\,a\,b = (a - b)^2\,. \tag{4}$$

Wenn nun a und b mit $a > b$ die Katheten eines pythagoreischen Dreiecks sind, wenn also, sagen wir, (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel ist, so haben wir $c^2 + 2\,a\,b = (a + b)^2$, $c^2 - 2\,a\,b = (a - b)^2$ und somit

$$(a + b)^2 - c^2 = c^2 - (a - b)^2\,.$$

Die natürlichen Zahlen $x = a - b$, $y = c$ und $z = a + b$ erfüllen somit Gleichung (3). Diese Tatsache wird von DIOPHANTOS mehrfach geschickt ausgenutzt, die oben erwähnten Aufgaben zu lösen. Von ganz anderem Kaliber aber ist die folgende Aufgabe ([15], S.39):

> **III, vii.** *Es sind drei Zahlen von gleicher Differenz zu finden von der Art, daß die Summe von je zweien ein Quadrat ergibt.*

LÖSUNG. *Zunächst suche ich drei Quadrate von gleicher Differenz und von der Art, daß die halbe Summe der drei Quadrate größer ist als jedes von ihnen. Es werde das erste*

Quadrat x^2 *gesetzt, das zweite* $x^2+2\,x+1$. *Die Differenz ist* $2\,x+1$. *Wenn ich diese zu* $x^2+2\,x+1$ *addiere, erhalte ich* $x^2+4\,x+2$. *Wenn dieser Ausdruck gleich dem Quadrat von* $x-8$ *gesetzt wird, so erhalte ich* $x^2-16\,x+64 = x^2+4\,x+2$, *also* $x=\frac{62}{20}=\frac{31}{10}$. *Es ist also das erste Quadrat* 961, *das zweite* 1681, *das dritte* 2401. *So ist die gestellte Aufgabe gelöst, nämlich drei Quadrate von gleicher Differenz zu finden derart, daß die halbe Summe der drei Quadrate größer ist als jedes von ihnen.*
Jetzt komme ich zu der zuerst gestellten Aufgabe, das heißt, drei Zahlen von gleicher Differenz zu finden von der Art, daß die Summe von je zweien von ihnen ein Quadrat ergibt. Zuerst suche ich drei Quadrate von gleicher Differenz, wie es eben gezeigt wurde; es sind die Quadrate 961, 1681, 2401. *Es ist nun notwendig, daß* $x_1+x_2=961$, $x_2+x_3=2401$ *und, indem ich der Differenz wegen die Reihenfolge umändere,* $x_3+x_1=1681$ *ist. Es möge gesetzt werden* $x_1+x_2+x_3=x$. *Wenn ich* $x_1+x_2=961$ *abziehe, erhalte ich* $x_3=x-961$. *Wenn ich* $2401=x_2+x_3$ *von* x *subtrahiere, erhalte ich* $x_1=x-2401$, *und wenn ich* $1681=x_3+x_1$ *von* x *subtrahiere, erhalte ich* $x_2=x-1681$. *Es bleibt die Bedingung zu beachten, daß* $x=x_1+x_2+x_3$ *ist. Es ergibt sich* $x=2521\frac{1}{2}$. *Es ist also* $x_1=120\frac{1}{2}$, $x_2=840\frac{1}{2}$, $x_3=1560\frac{1}{2}$. ■

Analyse. Diophant stellt die Aufgabe, drei positive rationale Zahlen x_1, x_2, x_3 zu finden derart, daß mit einem positiven rationalen k und drei rationalen Quadraten y_1^2, y_2^2, y_3^2 gilt

$$x_2-x_1=x_3-x_2=k\,,$$
$$x_1+x_2=y_1^2\,,\quad x_1+x_3=y_2^2\,,\quad x_2+x_3=y_3^2$$

Was bedeutet dies für die Quadratzahlen y_1^2, y_2^2, y_3^2? Nun, es muß sein

$$y_2^2-y_1^2=x_3-x_2=k\,,\qquad y_3^2-y_2^2=x_2-x_1=k\,.$$

Es sind also drei Quadrate in arithmetischer Progression zu finden. Außerdem aber sollen die Zahlen x_1, x_2, x_3 sämtlich positiv sein, und da nun $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}\big(y_1^2+y_2^2+y_3^2\big)$ ist, folgt daraus die von Diophant schon in I.16 *expressis verbis* formulierte Bedingung

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}\big(y_1^2+y_2^2+y_3^2\big)-y_3^2>0\,,\\ x_2 &= \frac{1}{2}\big(y_1^2+y_2^2+y_3^2\big)-y_2^2>0\,,\\ x_3 &= \frac{1}{2}\big(y_1^2+y_2^2+y_3^2\big)-y_1^2>0\,.\end{aligned}$$

Wegen $y_1^2<y_2^2<y_3^2$ braucht nur die erste dieser Ungleichungen tatsächlich beachtet zu werden. Mittels eines pythagoreischen Tripels drei Quadrate von gleicher Differenz zu finden, ist für Diophant kein Problem; aber er muß die Nebenbedingung erfüllen, und zu diesem Zweck schlägt er einen völlig anderen Weg ein. Er macht den Ansatz

$$y_1=x\,,\qquad y_2=x+1\,,\qquad y_3=y\,,$$

und da $y_2^2-y_1^2=2\,x+1$ ist, also auch $y_3^2-y_2^2=2\,x+1$ sein muß, erhält er die diophantische Gleichung

$$y^2=x^2+4\,x+2\,. \tag{5}$$

Dies ist die Gleichung einer Quadrik, genauer, einer Hyperbel, und da der Koeffizient von x^2 ein Quadrat ist, kann DIOPHANT erneut sein zweites Verfahren für Quadriken anwenden, indem er wieder zum projektiven Abschluß der algebraischen Kurve (5) übergeht. Die Quadrik (5) geht dann über in die projektive Kurve

$$v^2 = u^2 + 4\,u\,w + 2\,w^2\,.$$

Wieder legt DIOPHANT durch einen der beiden unendlich fernen Punkte dieser Quadrik, nämlich durch $\langle 1, 1, 0\rangle$, eine projektive Gerade

$$v = u - m\,w\,,$$

affin

$$y = x - m\,, \tag{6}$$

und bringt sie mit der Hyperbel zum Schnitt, indem er (6) in (5) substituiert. DIOPHANT wählt dabei speziell $m = 8$. Diese Wahl wird von ihm nicht näher begründet; sie ist aber wiederum keineswegs willkürlich. Um das zu sehen, rechnen wir mit dem allgemeinen m weiter:

$$\begin{aligned} x^2 - 2\,m\,x + m^2 &= x^2 + 4\,x + 2\,, \\ 2\,(m+2)\,x &= m^2 - 2\,, \\ x &= \frac{m^2 - 2}{2\,(m+2)}\,. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$y_1 = \frac{m^2 - 2}{2\,(m+2)}\,, \quad y_2 = \frac{m^2 + 2\,m + 2}{2\,(m+2)}\,, \quad y_3 = -\frac{m^2 + 4\,m + 2}{2\,(m+2)}\,.$$

Nun muß aber noch m so gewählt werden, daß x_1, x_2, x_3 sämtlich positiv sind, wobei es genügt, darauf zu achten, daß $x_1 > 0$ wird. Das heißt aber, daß $y_3^2 < y_1^2 + y_2^2$ sein muß. Eine elementare Rechnung ergibt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$m^4 > 4\,m^3 + 16\,m^2 + 8\,m - 4$$

ist. Diese Ungleichung gilt für natürliches m genau dann, wenn $m \geq 7$ ist. Die Wahl $m = 7$ liefert $x = \frac{47}{18}$, und $m = 8$ liefert $x = \frac{31}{10}$. Vermutlich wegen der kleineren Zahlen in Zähler und Nenner hat DIOPHANT sich für den letzteren Wert entschieden. Damit erhält er

$$y_1 = \frac{31}{10}\,, \quad y_2 = \frac{41}{10}\,, \quad y_3 = -\frac{49}{10}\,.$$

Es kann DIOPHANTOS unmöglich entgangen sein, daß er hier einen *negativen* Wert für y_3 bekommen hat![14] Nachdem er die Quadrate gebildet hat, entschließt er sich, alles mit 100 zu multiplizieren, um ganze Zahlen zu bekommen:

$$31^2 = 961\,, \quad 41^2 = 1681\,, \quad 49^2 = 2401\,.$$

Die gemeinsame Differenz zwischen diesen Quadraten ist 720. Der Rest ist lineare Algebra.

KOMMENTAR. Konnte DIOPHANT in unserem ersten Beispiel das Auftreten einer negativen Größe als Basis eines gesuchten Quadrates gegenüber Dionysios noch elegant kaschieren, so ist dies im vorliegenden Fall wesentlich schwieriger. Im ersten Beispiel ist das Quadrat, dessen Seite negativ wird, eine reine Hilfsgröße und von flüchtiger Existenz — der Leser kann es schnell vergessen, da es im folgenden keine Rolle mehr spielt. Im vorliegenden Beispiel aber handelt es sich um das dritte von drei Quadraten, nach denen im ersten Teil der Aufgabe (die ja in Wahrheit aus zwei Aufgaben besteht, wobei die zweite auf der ersten aufbaut) ausdrücklich gefragt wird. Trotzdem kann natürlich nach dem Erhalt von $x = \frac{31}{10}$ statt mit $(x-8)^2$ mit x^2+4x+2 weiter gerechnet werden, und vermutlich werden dies die unkritischen Leser auch getan haben. Niemand aber kann den kritischen Leser (und schon garnicht DIOPHANT selbst) daran hindern, sich daran zu erinnern, daß das Ergebnis $x = \frac{31}{10}$ nur dadurch zustande gekommen ist, daß für die Seite des dritten gesuchten Quadrats der Ansatz $x-8$ gemacht worden ist, was nun mal $\frac{31}{10}-8$ ergibt, und das ist λεῖψις. Damit aber stellt sich unausweichlich die Frage: Ist etwa (man beachte, daß DIOPHANT keine Vorzeichen kannte!)

$$\left(\frac{31}{10}-8\right)^2 = \left(\frac{31}{10}\right)^2 + 4\cdot\frac{31}{10}+2 = \frac{2401}{100}\ ?$$

DIOPHANTs Antwort darauf lautet: Ja! Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν. Um erneut dem Einwand zu begegnen, unser Beispiel werde nur in der modernen Interpretation verständlich, lassen wir den griechischen Text folgen[15] ([18], p.150, Zeilen 11–16):

> τετάχθω οὖν ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\Delta^Y\overline{\alpha}$, ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ $\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\beta}\,M^o\overline{\alpha}$, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ $\varsigma\,\overline{\beta}\,M^o\overline{\alpha}$. ἐὰν δὲ προσθῶ τῶ β^{ω} τοὺς $\varsigma\,\overline{\beta}\,M^o\overline{\alpha}$, γίνεται ὁ $\gamma^{o\varsigma}$ $\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\delta}\,M^o\overline{\beta}$. ταῦτα ἴσα $\underline{\square^{\omega}}$ <u>τῶ ἀπὸ</u> $\underline{\pi^{\lambda\cdot}\ \varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork M^o\overline{\eta}}$. γίνεται ὁ $\square^{o\varsigma}$,
>
> $$\Delta^Y\overline{\alpha}\,M^o\overline{\xi\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\text{ϛ}}\ \text{ἴσος}\ \Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\delta}\,M^o\overline{\beta},$$
>
> καὶ <u>γίνεται ὁ</u> $\underline{\varsigma\ \frac{\kappa}{\xi\beta}}$<u>, τουτέστι</u> $\underline{\frac{\iota}{\lambda\alpha}}$.

Die Stelle, in der das Quadrat mit der Seite $x-8$ eingeführt wird, sowie die Stelle, wo sich $x = \frac{62}{20} = \frac{31}{10}$ ergibt, sind unterstrichen.

Daß DIOPHANT selbst die Verwendung negativer Größen bei Zwischenrechnungen nicht ganz geheuer gewesen ist, läßt sich vermuten. Ein gewisser „horror negati" wäre jedenfalls durchaus verständlich, wenn man die Geschichte der Zahlen verfolgt und bemerkt, wie zögerlich spätere Autoren bei der Einführung der negativen oder etwa der komplexen Zahlen vorgegangen sind. Wir müssen auch nicht annehmen, daß DIOPHANT für seine berühmte Regel der Multiplikation negativer Größen so etwas wie einen „Beweis" gehabt hätte (was ohnehin ohne eine axiomatische Einführung des Körpers der rationalen Zahlen kaum einen Sinn ergäbe). Man kann vermuten, daß er diese Regel experimentell gefunden hat, indem er feststellte, daß ihre Befolgung stets zu richtigen Ergebnissen führte, wovon sich ein Mathematiker mit seinem großen algebraischen Erfahrungsschatz hinreichend überzeugen konnte. [16]

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος	ταῦτα ἴσα	γίνεται
II, xi; 98, 17-21	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\iota\varepsilon}$
$\left(\frac{15}{8}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8\,x$	x^2+1	$x=\frac{15}{8}$
II, xii; 100, 11-17	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\beta}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\delta}$
$\left(\frac{1}{2}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8\,x$	x^2+12	$x=\frac{4}{8}$
II, xx; 114, 19-20	$\varsigma\,\overline{\beta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\varsigma\,\overline{\varepsilon}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\iota\gamma}{\gamma}$
$\left(2\cdot\frac{3}{13}-2\right)^2$	$2\,x-2$	$4\,x^2+4-8\,x$	$4\,x^2+5\,x+1$	$x=\frac{3}{13}$
II, xxii; 118, 1-2	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\beta}$
$\left(\frac{1}{4}-2\right)^2$	$x-2$	$x^2+4-4\,x$	$x^2+4\,x+2$	$x=\frac{2}{8}$
II, xxviii; 126, 12-13	$\varsigma\,\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\kappa\delta}{\zeta}$
$\left(3\cdot\frac{7}{24}-4\right)^2$	$3\,x-4$	$9\,x^2+16-24\,x$	$9\,x^2+9$	$x=\frac{7}{24}$
II, xxix; 128, 8-9	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\iota\zeta}$
$\left(\frac{17}{8}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8\,x$	x^2-1	$x=\frac{17}{8}$
II, xxxii; 132, 18-19	$\varsigma\,\overline{\delta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\iota\text{ϛ}}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\lambda\beta}$	$\Delta^Y\overline{\iota\text{ϛ}}\,\varsigma\,\overline{\kappa\varepsilon}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\nu\zeta}{\zeta}$
$\left(4\cdot\frac{7}{57}-4\right)^2$	$4\,x-4$	$16\,x^2+16-32\,x$	$16\,x^2+25\,x+9$	$x=\frac{7}{57}$
III, vii; 150, 13-16	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\xi\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\text{ϛ}}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	ς ἴς. $\frac{\iota}{\lambda\alpha}$
$\left(\frac{31}{10}-8\right)^2$	$x-8$	$x^2+64-16\,x$	$x^2+4\,x+2$	$x=\frac{31}{10}$
III, xiv; 170, 5-7	$\varsigma\,\overline{\delta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varepsilon}$	$\Delta^Y\overline{\iota\text{ϛ}}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\kappa\varepsilon}\pitchfork\varsigma\,\overline{\mu}$	$\Delta^Y\overline{\iota\text{ϛ}}\,\varsigma\,\overline{\lambda\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}$	ς ἴς. $\frac{o\gamma}{\vartheta}$
$\left(4\cdot\frac{9}{73}-5\right)^2$	$4\,x-5$	$16\,x^2+25-40\,x$	$16\,x^2+33\,x+16$	$x=\frac{9}{73}$
III, xvi; 178, 8-9	$\varsigma\,\overline{\beta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\eta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\varepsilon}$
$\left(2\cdot\frac{5}{8}-2\right)^2$	$2\,x-2$	$4\,x^2+4-8\,x$	$4\,x^2-1$	$x=\frac{5}{8}$
IV, xx; 234, 9-10	$\varsigma\,\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\varsigma\,\overline{\kappa\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\gamma}$	$\overset{o}{\mathrm{M}}$ ἑν. $\iota\text{ϛ}^{ov}$
$\left(3\cdot\frac{1}{16}-4\right)^2$	$3\,x-4$	$9\,x^2+16-24\,x$	$9\,x^2+24\,x+13$	$x=\frac{1}{16}$
V, ii; 314, 7-9	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\alpha}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varrho\kappa\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\beta}$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\iota\eta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varrho\alpha}$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\angle'$
$\left(\frac{1}{2}-11\right)^2$	$x-11$	$x^2+121-22\,x$	$x^2+18\,x+101$	$x=\frac{1}{2}$
V, iii; 316, 17-19	$\varsigma\,\overline{\beta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\text{ϛ}}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\varsigma\,\overline{\kappa\eta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\delta}$	$\overset{o}{\mathrm{M}}$ ἑν. $\kappa\text{ϛ}^{ov}$
$\left(2\cdot\frac{1}{26}-6\right)^2$	$2\,x-6$	$4\,x^2+36-24\,x$	$4\,x^2+28\,x+34$	$x=\frac{1}{26}$
V, iv; 318, 14-16	$\varsigma\,\overline{\beta}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\text{ϛ}}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^Y\overline{\delta}\,\varsigma\,\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\kappa\eta}{\iota\zeta}$
$\left(2\cdot\frac{17}{28}-6\right)^2$	$2\,x-6$	$4\,x^2+36-24\,x$	$4\,x^2+4\,x+19$	$x=\frac{17}{28}$

Tabelle 1: Beispiele von Quadratzahlen mit negativer Basis $ax-m$

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος	ταῦτα ἴσα	γίνεται
$\mathbf{V, v}$; 320, 16-18 $\left(\frac{2}{3}-3\right)^2$	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}$ $x-3$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\text{ϛ}}$ $x^2+9-6\,x$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}$ $x^3+3\,x+3$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\varpi$ $x=\frac{2}{3}$
$\mathbf{V, vi}$; 324, 4-6 $\left(\frac{3}{5}-2\right)^2$	$\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$ $x-2$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\delta}$ $x^2+4-4\,x$	$\Delta^Y\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$ x^2+x+1	ς ἴς. $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ $x=\frac{3}{5}$
$\mathbf{V, xv}$; 354, 10-11 $\left(3\cdot\frac{2}{15}-4\right)^2$	$\varsigma\,\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$ $3\,x-4$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϛ}}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\delta}$ $9\,x^2+16-24\,x$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\vartheta}$ $9\,x^2+14-9\,x$	ς ἴς. $\frac{\iota\varepsilon}{\beta}$ $x=\frac{2}{15}$
$\mathbf{V, xvii}$; 360, 8-9 $\left(3\cdot\frac{6}{5}-7\right)^2$	$\varsigma\,\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\zeta}$ $3\,x-7$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\mu\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\mu\beta}$ $9\,x^2+49-42\,x$	$\Delta^Y\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\zeta}$ $9\,x^2+31-27\,x$	ς ἴς. $\frac{\varepsilon}{\text{ϛ}}$ $x=\frac{6}{5}$

Tabelle 1: Fortsetzung

5 Fundstellen von Quadraten mit negativer Seite

Die beiden von uns ausführlich analysierten Beispiele des Auftretens negativer Terme/Größen in den Arithmetika gehören in den erhaltenen sechs griechischen Büchern zu dem am häufigsten auftretenden Typus. Ich habe, ohne Vollständigkeit für mich in Anspruch zu nehmen, achtzehn Beispiele gefunden, die in Tabelle 1 aufgeführt sind.[17] Bei diesen verlaufen DIOPHANTs Rechnungen im wesentlichen nach folgendem Schema: Im Verlaufe der Lösung erhält er ein Polynom der Gestalt $a^2x^2 + b\,x + c$, wobei $a > 0$ sowie b und c positive oder negative rationale Zahlen (im modernen Sinne) bezeichnen, und dieses soll zu einer Quadratzahl (τετράγωνος) gemacht werden. Dann wählt DIOPHANT stets ein Quadrat mit der Seite (πλευρά) $a\,x - m$, m positiv rational, und erhält so die Gleichung

$$a^2x^2 + m^2 - 2\,a\,m\,x = a^2x^2 + b\,x + c,$$

woraus

$$x = \frac{m^2 - c}{2\,a\,m + b}$$

folgt. Durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für den Parameter m erreicht DIOPHANT stets, daß der Bruch positiv ist. Für die Seite des Quadrats erhält er die Differenz

$$a\,\frac{m^2 - c}{2\,a\,m + b} - m,$$

welche sowohl positiv als auch negativ sein kann. In mindestens achtzehn Fällen ist sie jedoch negativ.

Fundstelle	Quadrat	Basis	Basis^2	Polynom	x
VI*, xiv; 60, 3–15	$\left(\frac{29}{25}-2\right)^2$	$\frac{5}{4}x-2$	$\frac{25}{16}x^2+4-5\,x$	$\frac{25}{16}x^2-\frac{16}{25}$	$\frac{116}{125}$
VI*, xvi; 64, 5–13	$\left(\frac{7}{2}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8\,x$	$x^2+2-4\,x$	$3\frac{1}{2}$
VII*, viii; 97, 14-23	$\left(\frac{1}{4}-2\right)^2$	$x-2$	$x^2+4-4\,x$	$x^2+4\,x+2$	$\frac{1}{4}$
VII*, x; 102, 10-17	$\left(\frac{5}{4}-3\right)^2$	$x-3$	$x^2+9-6\,x$	$x^2+2\,x-1$	$\frac{5}{4}$
VII*, xvi; 114, 11-19	$\left(\frac{5}{4}-2\right)^2$	$x-2$	$x^2+4-4\,x$	x^2-1	$\frac{5}{4}$

Tabelle 2: Beispiele in den arabischen Büchern

In den Büchern II und III scheint DIOPHANT elegant darüber hinwegzugehen, daß der von ihm gemachte Ansatz auf eine πλευρά geführt hat, deren Länge λεῖψις ist, indem er das gefundene x (ς) in das Polynom $a^2x^2+b\,x+c$ (oder in das Polynom $a^2x^2+m^2-2\,a\,m\,x$) einsetzt, ein Vorgehen, welches aber nur dann gerechtfertigt ist, wenn man annimmt, daß die sogenannte „zweite binomische Formel“ auch für negative Differenzen gültig ist.

In ihrem Kommentar zur 16. Aufgabe des dritten arabischen Buches (bei durchlaufender Zählung: des sechsten) schreiben GILLES LACHAUD und ROSHDI RASHED ([44], p. LXXV f):

> **(6.16)** *Diophante pose $x=t$, $x^2-y^2=2\,t-1$, d'où*
> $$y^2=t^2+1-2\,t.$$
> *La première equation est immédiatemement vérifiée, $z_1=y$; et la deuxième se réécrit:*
> $$t^2+2-4\,t=z_2^2.$$
> *Posons $z_2=t-u$, ($u=4$); il vient*
> $$z_2^2=t^2+16-8\,t,$$
> *d'où*
> $$x=t=(3+1/2)\,,\qquad x^2=(12+1/4)\,,$$
> $$y^2=(6+1/4)\,,\qquad z_1^2=(6+1/4)=(2+1/2)^2\,,$$
> $$z_2^2=(1/2)^2\,.$$
> *Remarquons que Diophante trouve $t=7/2$, qui ne vérifie pas $t>4$, et qui donne $z_2=-1/2$. Sans doute est-ce la raison pour laquelle Diophante ne calcule pas z_2, mais donne directement z_2^2. Il suffisait de poser $z_2=4-t$ pour trouver, sans la difficulté précédente, les mémes valeurs, qui donnent bien une solution particulière du problème.*

Dazu ist zu bemerken:

1. Natürlich könnte Diophant in allen achtzehn in Tabelle 1 aufgeführten Fällen (ebenso wie in dem von LACHAUD und RASHED diskutierten Fall) für die Seite des Quadrats den Ansatz $m - a\,x$ machen und damit negative Differenzen vermeiden. Aber der Ansatz $a\,x - m$ führt in mehreren Fällen auf eine *positive* Differenz. In diesen Beispielen ergäbe der Ansatz $m - a\,x$ eine negative Seite. Aus diesem Dilemma käme DIOPHANT nur heraus, wenn er nach Erhalt einer negativen Differenz den Ansatz *nachträglich* so abändern würde, daß die Differenz positiv würde. Das würde es dem aufmerksamen Leser ersparen, sich über das Quadrieren negativer Differenzen Gedanken zu machen. DIOPHANT würde jedoch damit etwas opfern, was ihm, wie ich glaube, wichtig ist, nämlich ein *systematisches* Vorgehen, eine stets anwendbare Methode[18].

2. Daran schließt sich eine zweite Bemerkung an: Führt DIOPHANT bei seinen Beispielen aus den Büchern II und III der Arithmetika die Rechnung an den kritischen Stellen selbst im Detail aus, dem Leser dabei über eine mögliche Schwierigkeit hinweghelfend, so ist dies bei den Aufgaben aus den „griechischen Büchern“ IV und V, die bei durchlaufender Zählung die Bücher 8 und 9 sind, nicht mehr der Fall. Offenbar in der Annahme, der Leser habe inzwischen die Methode, wie man ein quadratisches Polynom mit führendem Glied a^2x^2 oder konstantem Glied c^2 (siehe Beispiele der Tabelle 3) zu einem Quadrat macht, verinnerlicht, überläßt er ihm selbst die Ausführung im Detail. Dadurch wird dieser, wie wir unten zeigen werden, nahezu unausweichlich mit Quadraten negativer Seitenlängen konfrontiert.

3. Daß DIOPHANT keine negativen Differenzen explizit notiert, könnte auch daran liegen, daß einer der späteren gelehrten byzantinischen Kopisten der Arithmetika diese Stellen als „absurd“ oder „verstümmelt“ einfach weggelassen hat.

In der Tabelle 2 sind fünf Beispiele desselben Typs in den arabischen Büchern der Arithmetika aufgeführt[19]. Da sowohl RASHED [44] als auch SESIANO [49] diese Bücher durchgehend zählen (das heißt, sie erhalten die Nummern 4 bis 7), sind sie in der Tabelle durch ein hochgestelltes Sternchen von der traditionellen Numerierung der griechischen Bücher unterschieden: IV*, V*, VI*, VII*.

Der zweite, nur in den Büchern IV, V und VI (8, 9 und 10) auftretende Typus (siehe Tabelle 3) ist folgender: Gegeben ist ein Polynom der Gestalt $a\,x^2+b\,x+c^2$ mit rationalen Koeffizienten a, b und $c > 0$, und dies soll zu einem Quadrat gemacht werden. Für dessen Seite macht DIOPHANT den Ansatz $c - m\,x$ mit $m > 0$. Dann erhält er die Gleichung

$$m^2x^2 + c^2 - 2\,c\,m\,x = a\,x^2 + b\,x + c^2,$$

woraus

$$x = \frac{2\,c\,m}{m^2 - a}$$

folgt. Durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für den Parameter m wird sichergestellt, daß x positiv wird. In den in Tabelle 3 aufgeführten acht Fällen[20] wird dann die Seite $c - m\,x$ λεῖψις. Die Methode ist insofern etwas schwieriger (insbesondere, wenn ihre Durchführung weitgehend dem Leser überlassen wird), als zur Berechnung von x nach

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος	ταῦτα ἴσα	γίνεται
IV, viii; 202, 18-20 $(1-2\cdot 7)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\beta}$ $1-2\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\delta}$ $4\,x^2+1-4\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\varsigma\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$ $3\,x^3+3\,x+1$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\zeta}$ $x=7$
IV, ix; 206, 12-13 $\left(2-4\cdot\frac{10}{13}\right)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\delta}$ $2-x$	$\Delta^{Y}\overline{\iota\digamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\digamma}$ $16\,x^2+4-16\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\digamma}$ $3\,x^2+4-6\,x$	ς ἴς. $\frac{\iota\gamma}{\iota}$ $x=\frac{10}{13}$
IV, xi; 210, 13-15 $(1-2\cdot 7)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\beta}$ $1-2\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\delta}$ $4\,x^2+1-4\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\varsigma\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$ $3\,x^3+3\,x+1$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\zeta}$ $x=7$
IV, xiii; 214, 15-17 $(3-3\cdot 18)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\gamma}$ $3-3\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\eta}$ $9\,x^2+9-18\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\zeta}\,\varsigma\,\overline{\iota\eta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$ $7\,x^2+18\,x+9$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\eta}$ $x=18$
IV, xxxix; 304, 11-12 $\left(3-5\cdot\frac{21}{11}\right)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\varepsilon}$ $3-5\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\kappa\varepsilon}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\lambda}$ $25\,x^2+9-30\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\varsigma\,\overline{\iota\beta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$ $3\,x^2+12\,x+9$	ς ἴς. $\frac{\iota\alpha}{\kappa\alpha}$ $x=\frac{21}{11}$
V, x; 342, 6-8 $\left(3-\frac{7}{2}\cdot\frac{84}{53}\right)^2=$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\gamma}\angle'$ $3-3\frac{1}{2}x$	$\Delta^{Y}\overline{\iota\beta}\delta^{\times}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\kappa\alpha}$ $12\frac{1}{4}x^2+9-21\,x$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ $9-x^2$	ς ἴς. $\frac{\nu\gamma}{\pi\delta}$ $x=\frac{84}{53}$
VI, xii; 414, 19-22 $(3-3\cdot 4)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\,\overline{\gamma}$ $3-3\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\iota\eta}$ $9\,x^2+9-18\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\varsigma\,\overline{\digamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$ $3\,x^2+6\,x+9$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$ $x=4$
VI, xv; 428, 11-13 $(8-2\cdot 62)^2$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\eta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\beta}$ $8-2\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\xi\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\lambda\beta}$ $4\,x^2+64-32\,x$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\varsigma\,\overline{\lambda}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\xi\delta}$ $3\,x^2+30\,x+64$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\xi\beta}$ $x=62$

Tabelle 3: Beispiele von Quadratzahlen mit negativer Basis $c-m\,x$

Wegheben des konstanten Gliedes c^2 die entstandene Gleichung noch durch x gekürzt werden muß, um nach x auflösen zu können.

Ein besonders kunstvolles Beispiel, bei der man die Souveränität DIOPHANTs bei der Multiplikation von Polynomen mit abzuziehenden Gliedern bewundern kann, findet sich in der Lösung der 28. Aufgabe des vierten griechischen Buches (**IV,xxviii**; 254, 13-18). Hier ist das Polynom $9\,x^4+6\,x^2+1-4\,x^3-12\,x$ zu einem Quadrat zu machen. Es sei das Quadrat mit der Seite $3\,x^2+1-6\,x$:

γίνεται $\Delta^{Y}\Delta\overline{\vartheta}\,\Delta^{Y}\overline{\digamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\varsigma\,\overline{\iota\beta}$. ταῦτα ἴσα $\square^{\omega}$ τῶ ἀπὸ $\pi^{\lambda\cdot}$ $\Delta^{Y}\overline{\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\,\overline{\digamma}$.

Es ergibt sich $9\,x^4+42\,x^2+1-36\,x^3-12\,x=9\,x^4+6\,x^2+1-4\,x^3-12\,x$:

αὐτὸς ἄρα ἔσται $\Delta^{Y}\Delta\overline{\vartheta}\,\Delta^{Y}\overline{\mu\beta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\kappa^{Y}\overline{\lambda\digamma}\,\varsigma\,\overline{\iota\beta}$ ἴς. $\Delta^{Y}\Delta\overline{\vartheta}\,\Delta^{Y}\overline{\digamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\kappa^{Y}\overline{\delta}\,\varsigma\,\overline{\iota\beta}$.

Auf beiden Seiten wird das Weggenommene hinzugefügt und gleiche Terme werden zusammengefaßt:

καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Es bleibt $32\,x^3 = 36\,x^2$, und das gibt $x = \frac{9}{8}$:

καὶ λοιποὶ $\kappa^Y\overline{\lambda\beta}$ ἴσοι $\Delta^Y\overline{\lambda\varsigma}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{\eta}{\vartheta}$.

Kommentar. Wegen $3\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 1 - 6\cdot\frac{9}{8} = -\frac{125}{64}$ ist auch hier die Basis der Quadratzahl negativ, was vermutlich nur Diophant aufgefallen sein dürfte, zumal da anschließend zunächst $x+1 = \frac{17}{8}$ und $x-1 = \frac{1}{8}$ ausgerechnet wird, wovon dann die Kuben $\frac{4913}{512}$ und $\frac{1}{512}$ gebildet werden.

Zur Überzeugung von Zweiflern hingegen ist die folgende Aufgabe geeignet (**V, xxvii**, 378, 18-20, 380, 1-4):

Eine Zahl ist gegeben, Es sind drei Quadrate von der Art zu finden, daß die Summe je zweier von ihnen, vermehrt um die gegebene Zahl, Quadrate ergeben.

Diophant gibt sich die Zahl 15 vor und wählt das erste Quadrat x_1^2 gleich 9. Dann reduziert sich das Problem darauf, zwei Quadrate x_2^2 und x_3^2 zu finden derart, daß

$$x_2^2 + 24 = y_2^2, \quad x_3^2 + 24 = y_3^2, \quad x_2^2 + x_3^2 + 15 = y_1^2. \tag{7}$$

Er macht nun für x_2 den Ansatz $\frac{2}{x} - 3\,x$ und für x_3 den Ansatz $\frac{3}{2\,x} - 4\,x$, wodurch er wegen

$$\left(\frac{2}{x} - 3\,x\right)^2 + 24 = \left(\frac{2}{x} + 3\,x\right)^2, \qquad \left(\frac{3}{2\,x} - 4\,x\right)^2 + 24 = \left(\frac{3}{2\,x} + 4\,x\right)^2$$

die beiden ersten Gleichungen in (7) erfüllt:

ἔστο ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς $\varsigma^{\times}\overline{\beta}$ καὶ $\varsigma\overline{\gamma}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς $\varsigma^{\times}\overline{\alpha}\angle'$ καὶ $\varsigma\overline{\delta}$. καὶ μένει ἑκάτερος ἀυτων μετὰ $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\kappa\delta}$ ποιῶν $\square^{o\nu}$.

Es bleibt noch die Bedingung zu erfüllen, daß die Summe der beiden Quadrate, um 15 vermehrt, ein Quadrat ergibt. Es soll also $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 25\,x^2 - 9$ ein Quadrat sein. Es sei dieses Quadrat gleich $25\,x^2$. Dann ergibt sich $x = \frac{5}{6}$. So ist die Aufgabe gelöst:

λοιπόν ἐστι καὶ συναμφότερον μετὰ $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\varepsilon}$ ποιεῖν $\square^{o\nu}$. γίνεται δὲ $\Delta^{Y\times}\overline{\varsigma}\delta^{\times}\Delta^Y\overline{\kappa\varepsilon}$⋔ $\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$ ἴς. $\square^{\omega}$ ἴς. $\Delta^Y\overline{\kappa\varepsilon}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{o}{\mathrm{M}}\varsigma^{\omega\nu}\overline{\varepsilon}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Kommentar. Wie kann der Leser dieser Aufgabenlösung vermeiden zu erkennen, daß — in unserer Schreibweise — der Ansatz für x_2 auf die „defizitäre“ Größe $-\frac{1}{10}$ und der für x_3 auf $-\frac{38}{15}$ führt, also in beiden Fällen auf λεῖψις?[21]

Der Gebrauch des zweiten Teils der Definition IX, nämlich des „λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν“, scheint in den überlieferten griechischen Büchern sehr selten zu sein und keine besondere Rolle zu spielen. Ich habe nur zwei Stellen entdeckt, wo eine positive und eine negative Größe miteinander multipliziert werden, und zwar erstens in **V, i**; 310, 16-17, 312, 1-3, wo das Polynom $x^2 - 6\frac{1}{2}\,x$ zunächst in $x\left(x - 6\frac{1}{2}\right)$ faktorisiert wird. Für x wird sodann der Wert $\frac{361}{104}$ berechnet, was sowohl für $x - 6\frac{1}{2}$ als auch für $x^2 - 6\frac{1}{2}x$ eine negative Größe liefert. Zweitens finden wir ganz ähnlich in **VI, vi**; 404,1-3, daß das Polynom $x^2 - 14\,x$ in $x(x - 14)$ faktorisiert wird und anschließend für x der Wert $\frac{24}{7}$ bestimmt wird. Diese Aufzählung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

CONCLUSIO. Kein Zweifel, DIOPHANT operiert mit negativen Größen. Zwar erkennt er ihnen nicht den Status von „Zahlen“ (ἀριθμοί) zu, aber dies liegt an seinem (gegenüber dem unsrigen) eingeengten, ontologisch befrachteten Zahlbegriff, der auf positive rationale Größen beschränkt bleibt. Er hält die negativen Größen jedoch für so wichtig, daß er ihnen mit λεῖψις einen eigenen Namen gibt, der in Analogie zu ὕπαρξις gebildet ist, einem zentralen Begriff der neuplatonischen Ontologie. Ihr Gebrauch, das heißt, ihre Multiplikation, für die wir in den Arithmetika 33 (35) Belege gefunden haben, wird in Definition IX vorab unmißverständlich geklärt. Es handelt sich bei dieser *nicht* um eine „Vorzeichenregel“, denn DIOPHANT kennt keine Vorzeichen, weder ein Minus noch ein Plus. Das Zeichen ⋔ ist ein *binärer* Operator. Daher kann DIOPHANT negative Größen auch nicht dadurch notieren, daß er einer Zahl (ἀριθμός) ein Minuszeichen voranstellt. Negative Größen treten bei ihm ausschließlich als Differenzen positiver rationaler Zahlen auf, deren Subtrahend größer ist als ihr Minuend.

Hätten wir nur Definition IX und keine Beispiele für ihren Gebrauch, so stünden wir vor dem Rätsel, was DIOPHANT mit λεῖψις gemeint haben könnte. Hätten wir die 33 (35) Beispiele, aber nicht den Begriff λεῖψις und die Multiplikationsregeln, so bliebe ein letzter Zweifel, ob DIOPHANT gewußt hat, daß er mit negativen Größen operierte. So aber ist unzweifelhaft klar: Er rechnete mit negativen Größen, und er wußte, was er tat.

6 Verständnis- und Übersetzungsprobleme, Fälschungen, Zitierkartelle

Die Verständnis- und Übersetzungsprobleme mit Bezug auf DIOPHANTs negative Größen beginnen schon mit dem ältesten uns erhalten gebliebenen Diophant-Kommentar, mit den Scholien des byzantinischen Mönches MAXIMUS PLANUDES (1255–1305) zu den ersten beiden Büchern der Arithmetika. Diese sind im zweiten Band der Diophant-Ausgabe von TANNERY abgedruckt ([18], vol. II, pp. 125–255). Teile der Originalhandschrift befinden sich im Codex Mediolanensis Ambrosianus Et 157 sup., welcher im Jahre 1292 oder 1293 von MAXIMUS PLANUDES eigenhändig kopiert wurde. MAXIMUS PLANUDES, ein mediokrer Mathematiker, war, wie die meisten der byzantinischen Gelehrten, an den Elementen des EUKLEIDES geschult, von denen er eine Ausgabe besorgt hatte. Algebra hatte er als geometrische Algebra kennengelernt. Was Wunder, daß er mit „Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν“ seine Probleme hatte.

Sein Scholion zu dieser Stelle beginnt daher mit der Behauptung, DIOPHANTOS habe garnicht gemeint, was er geschrieben habe ([18], vol. II, p. 139): „Οὐχ ἁπλῶς λεῖψιν λέγει, μὴ καὶ ὑπάρξεώς τινος οὔσης, ἀλλὰ ὕπαρξιν ἔχουσαν λεῖψιν." („Er spricht nicht einfach von Fehlendem, als ob kein Vorhandenes da wäre, sondern von etwas Vorhandenem, welches eine Wegnahme enthält.") Nachdem er sich die anstößige Stelle bei DIOPHANT zurechtgebogen hat, beginnt er, im Stile EUKLIDs anhand geeignet gewählter Rechtecke die Formel

$$(a-b)(c-d) = a\,c - b\,c - a\,d + b\,d$$

zu beweisen. Seitdem ist dieses Scholion des MAXIMUS PLANUDES (nahezu) unzertrennlicher Begleiter der Bemühungen, die dubiose Stelle bei DIOPHANT zu übersetzen. Dem braven PLANUDES sind seine Verständnishürden nicht zu verübeln. Aber daß, bis in das zwanzigste Jahrhundert hinein, angesehene Mathematikhistoriker sich auf PLANUDES *berufen*, wenn sie den Nachweis antreten wollen, daß DIOPHANT negative Größen abgelehnt habe, ist schon grotesk.

WILHELM HOL(T)ZMANN, genannt XYLANDER, übersetzt 1575 in [16] aus dem Codex Vaticanus Reginensis gr. 128 nicht nur DIOPHANTs Text, sondern auch die Scholien des PLANUDES ins Lateinische und ist damit eines eigenen Kommentars zur Definition IX enthoben. Seine Übersetzung dieser Stelle ist zwar sehr umständlich, aber um Texttreue bemüht ([16], p.6):

> *Quod deesse dicitur (defectum uulgo usurpant) in id quod ipsum etiam deesse dicitur si multiplicetur, productum adesse & reliquis adijci debere scito. si uerò in id quod adest, id quod deest multiplicetur: productum ijs quae deesse dicuntur adnumerabis, signum eius uel* *.

CLAUDE-GASPAR(D) BACHET DE MÉZIRIAC übersetzt 1621 in seiner zweisprachigen Diophant-Ausgabe ([17], p.9):

> *Definitio IX — Minus per minus multiplicatum, producit Plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus.*

Dazu gibt er folgenden Kommentar (a.a.O.):

> *Ὕπαρξιν & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus visitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem ut significet Plus nulla utitur nota, sed coniunctione tantùm copulatina. Nos verò in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripterunt, imitati, Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto −.*

BACHET bemerkt also sehr wohl, daß ὕπαρξις mit *abundantia* und λεῖψις mit *defectus* zu übersetzen wäre. Leider läßt er sich jedoch durch den Zeitgeist dazu verführen, stattdessen *Plus* und *Minus* zu verwenden. Plus und Minus bezeichnen aber keine Größen oder Terme, sondern Operatoren, wobei unklar bleibt, ob BACHET Vorzeichen oder binäre Verknüpfungen meint. Seine Verwendung der seit der *Deutschen Algebra* von 1481 immer mehr in Gebrauch gekommenen Zeichen + und − ist nicht zu kritisieren. BACHET fährt dann fort:

> *Ceterùm si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat Plus, & huius rei demonstrationem requiret, legat Petrum Nonium parte 2. suae Algebrae, cap. 4.*

Dieser Hinweis auf die *Algebra* [41] des portugiesischen Gelehrten PEDRO NUÑEZ[22] SALACIENSE (1502–1578) erweist sich als höchst aufschlußreich. NUÑEZ hatte sein *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometrica* bereits 1532 in Portugiesisch geschrieben, später aber zum Zwecke besserer Verbreitung eine katalanische Übersetzung angefertigt und diese 1567 in Antwerpen drucken lassen. Im angegebenen Kapitel, *Multiplicar las dignidades* (das Multiplizieren der Potenzen), behandelt NUÑEZ zunächst die Multiplikation der Potenzen von x (*cosa*, abgekürzt: *co.*) bis zum Exponenten 10 und fährt dann fort ([41], p. 29):

> *Und weil wir diese Größen mit der Erklärung als Plus und Minus viele Male multiplizieren [werden], müssen wir wissen, daß plus mit plus multipliziert plus macht; und minus mit minus multipliziert macht ebenfalls plus. Aber plus mit minus, oder minus mit plus, macht minus. Zum Beispiel, wenn wir* $6\,x$ *mit* 5 *multiplizieren, das ist plus mit plus, macht es* $30\,x$. *Dies ist aufgrund der Definition des Multiplizierens evident. Und wenn wir* -5 *mit* $-2\,x$ *multiplizieren, erhalten wir* $+10\,x$. *Und wenn wir* 5 *mit* $-2\,x$ *multiplizieren, erhalten wir* $-10\,x$. *Der praktische Umgang damit wird im folgenden Beispiel klar werden, in dem* $15 - 4\,x$ *mit* $3\,x^2 - 5\,x$ *multipliziert wird.*

$$
\begin{array}{llll}
 & 15 & -\;4\,x & \\
 & 3\,x^2 & -\;5\,x & \\
\hline
 & 45\,x^2 & -12\,x^3 & \\
 & & -75\,x & +20\,x^2 \\
\hline
\text{Summe} & 65\,x^2 & -75\,x & -12\,x^3
\end{array}
$$

Schon aus diesen Zeilen wird klar, daß NUÑEZ hier die Vorzeichenregel bei Multiplikation behandelt und nicht von positiven und negativen Zahlen redet. Die Zeichen $+$ und $-$ ($\tilde{p}$. und $\tilde{m}$.) verwendet er sowohl als Zeichen für die binären Verknüpfungen als auch als Vorzeichen. Allerdings scheut er sich auch nicht, negative Zahlen hinzuschreiben, wie hier -5. Aber sie sind nicht das Thema dieses seines Paragraphen, der von der Multiplikation von Polynomen in x handelt. 47[23]

Es ist verwunderlich, daß GERICKE, der sich in mindestens vier Monographien [21, 55, 22, 23] sowie in einem Aufsatz [24] zur Geschichte der negativen Zahlen geäußert hat, die Algebra des PEDRO NUÑEZ sowie deren Verfasser mit keinem Wort erwähnt, nicht einmal in [23], wo man eine Behandlung des Werkes des Portugiesen eigentlich erwartet hätte.

Obwohl NUÑEZ Kontakte zu den italienischen Mathematikern seiner Zeit unterhielt und obwohl damals Manuskripte der Arithmetika in Italien bekannt und kopiert wurden, scheint NUÑEZ das Werk des DIOPHANTOS nicht gekannt zu haben. Gleichwohl hätte die von NUÑEZ verwandte Argumentation durchaus von DIOPHANT stammen können.

Für NUÑEZ allerdings sind die negativen Zahlen kein Problem mehr, und es geht ihm nur noch um eine algebraische Herleitung der umstrittenen Vorzeichenregel bei Multiplikation. Für DIOPHANT hingegen sind die von ihm eingeführten negativen Größen etwas „Unerhörtes“ und mit ontologischem Ballast Befrachtetes.

Vermutlich war es die von BACHET selbst angeführte Stelle in der Algebra des PEDRO NUÑEZ, die ihm bei der Übersetzung der analogen Stelle in den Arithmetika als Vorbild gedient hat. Auch wenn diese Übersetzung später von HEATH und TANNERY übernommen wurde, so stellt sie doch eine (gewollte oder ungewollte) Verfälschung dar.

Ein ausgesprochener Lichtblick hingegen ist die kommentierte Übersetzung [48] der Arithmetika durch OTTO SCHULZ von 1822. Definition IX übersetzt er völlig korrekt ([48], S.12):

> **IX.** *Eine negative Zahl mit einer negativen Zahl multiplicirt, giebt eine positive Zahl; eine negative Zahl mit einer positiven Zahl multiplicirt, giebt eine negative Zahl.*

Im Anmerkungsteil sagt SCHULZ dazu ([48], S.344):

> *Diophantus nennt eine negative Zahl λεῖψις d. i. eine* fehlende *Größe, oder eine Größe, welche man subtrahiren soll, eine positive Zahl aber nennt er ὕπαρξις d. i. eine* wirklich vorhandene, *die einen wirklichen bestimmten Werth hat.*

Und einige Zeilen später:

> *Obgleich Diophantus die negativen Größen in den Rechnungen selbst vielfältig gebraucht*[24]*, so läßt er doch für die gesuchte Größe nie einen negativen Werth zu, und mehre Einschränkungen, welche er seinen Aufgaben beifügt, haben ihren Grund bloß in der stillschweigenden Voraussetzung,* daß die gesuchte Größe einen positiven und rationalen Werth haben solle.

Im Anschluß an diese Bemerkung gibt SCHULZ den „Beweis“ aus den Scholien des PLANUDES wider. In seinem Vorbericht äußert sich SCHULZ jedoch ziemlich einschränkend mit Bezug auf PLANUDES ([48], S.XXXII), indem er XYLANDERS Einschätzung teilt, daß die Scholien des Byzantiners *von geringem Werthe* seien. *Dem größeren Theile nach enthalten die Scholien aber wirklich nichts, als bloße Umschreibungen des Textes, oder geometrische Beweise für arithmetische Sätze, die man viel leichter durch Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen beweist.*

Den richtigen und wohlbegründeten Darlegungen des Berliner Gymnasialprofessors ist kaum etwas hinzuzufügen, und man wundert sich nur, wie sich später eine gegenteilige und völlig unhaltbare Position durchsetzen konnte. Noch bis zur ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hatte keiner der Herausgeber, Übersetzer oder Kommentatoren der Arithmetika und kein Mathematikhistoriker ernsthaft behauptet, DIOPHANTOS habe keine Konzeption der negativen Größen besessen oder habe die Verwendung dieser Größen abgelehnt. MAXIMUS PLANUDES muß man hier ausnehmen. Er hatte selbst keine Ahnung von den negativen Größen und konnte sich daher zum Thema nicht kompetent äußern.

Das Kartell wird 1874 eröffnet von HERMANN HANKEL, der sich zum Thema wie folgt äußert ([26], S. 158):

> *Bei Producten wie* $(x-1)(x-2)$ *kam er auf das Gesetz: „Eine negative Zahl (λεῖψις) mit einer negativen Zahl multiplicirt gibt eine positive Zahl (ὕπαρξις)", welches die Multiplication von Differenzen lehren soll, ohne dass dabei Diophant nur im Entferntesten an Zahlen gedacht hätte, welche an sich negativ sind; nicht nur, dass der griechische Text keine Andeutung hievon enthält, die in der Übersetzung nicht zu vermeiden ist, so sieht er ausdrücklich rein negative Zahlen als unbrauchbar an.*

Dies sind die vollständigen Ausführungen HANKELS über negative Zahlen bei DIOPHANT. Sie zeigen, daß er die korrekte Übersetzung von SCHULZ noch übernimmt, sich im übrigen aber die Interpretation des PLANUDES zu eigen macht. Das unglaublich herabsetzende Diophant-Kapitel ([26], S. 157–171) HANKELS läßt uns zweifeln, ob sein Verfasser sich wirklich im Detail mit den Aufgaben des Alexandriners befaßt hat[25].

Die Quelle der ersten substanziellen Verfälschung aber läßt sich auch diesmal eindeutig bestimmen: Im Jahre 1880 erschien der erste Band der Vorlesungen von MORITZ BENEDIKT CANTOR über Geschichte der Mathematik [12]. Darin heißt es auf Seite 401:

> *Diophant unterscheidet* h i n z u z u f ü g e n d e und a b z ü g l i c h e Z a h l e n. *Die Addition nennt er ὕπαρξις, die Subtraktion λεῖψις und besitzt für erstere zwar nicht, wohl aber für letztere ein eigenes Abkürzungszeichen, nämlich, wie er selbst sagt, ein verstümmeltes umgekehrtes Ψ in der Gestalt* ⋔. *Ja er rechnet mit Differenzen, vervielfacht sie und spricht dabei ohne Weiteres die Regel aus: Eine abzügliche Zahl mit einer abzüglichen Zahl vervielfacht gibt eine hinzuzufügende, eine abzügliche mal einer hinzuzufügenden gibt eine abzügliche.*[2]) *Dass dabei von positiven und negativen Zahlen als Maasse entgegengesetzter Größen keine Rede ist, bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung. Nur mit* D i f f e r e n z e n *weiss Diophant umzugehen, mit solchen Differenzen, die einen wirklichen Zahlenwerth besitzen, d. h. deren Subtrahend kleiner ist als der Minuend.*
>
> Die Fußnote [2]) in CANTORS Text lautet: *Diophant (Schulz) S. 12–13.*

Es fällt mir schwer, hier nicht von einem „skrupellosen Fälscher" zu sprechen, wie ich dies in einem früheren Text [3] getan habe. Herr LEMMERMEYER hat mir aber folgendes zu bedenken gegeben:

> *Was hat Cantor denn verbrochen? Er hat bemerkt, dass Schulz seine Behauptung, D hätte mit negativen Zahlen gerechnet, nicht belegen kann, und er hat stattdessen den Teil zitiert, der sich begründen läßt: dass die fehlenden Größen Diophants nämlich solche sind, „welche man subtrahieren soll". Das*

Schweigen über Schulzens negative Zahlen würde ich eher unter der Rubrik „Höflichkeit des Sängers“ verbuchen.

Ich kann diesen Einwänden kaum zustimmen.

1. Es trifft zwar zu, daß SCHULZ seine Behauptung, DIOPHANT habe mit negativen Zahlen gerechnet, nicht belegt. Aber das bedeutet nicht, daß er dies nicht hätte tun *können*, wenn er dies hätte tun *wollen*. Im Jahre 1822 hatte nämlich noch niemand in Abrede gestellt, daß bei DIOPHANT negative Zahlen vorkommen. CANTOR hätte daher das Gegenteil zeigen müssen. Das aber wäre ihm wohl kaum gelungen. Denn daß die fehlenden Größen DIOPHANTs *stets* solche sind, "welche man subtrahieren soll“, ist einfach nicht wahr; einige muß man vielmehr quadrieren, wie wir gezeigt haben.

2. CANTORs Hinweis auf SCHULZ, S.12–13, bezieht sich nicht auf dessen Bemerkung auf Seite 344, das Vorhandensein negativer Zahlen bei DIOPHANT betreffend, sondern auf die korrekte Übersetzung von I, Definition 9, auf Seite 12 und einige nachfolgende Bemerkungen zum Umgang mit positiven und negativen Größen auf Seite 12f. Der Leser, der SCHULZens Monographie nicht notwendig zur Hand gehabt haben dürfte, mußte daher annehmen, an der angegebenen Stelle stütze SCHULZ CANTORs Behauptung. Und das ist falsch. Er wird an der Nase herumgeführt.

3. Selbst wenn CANTOR der festen Überzeugung war, mit λεῖψις habe DIOPHANT ausschließlich Subtrahenden gemeint (und warum er glaubte sich so sicher zu sein, darüber hätte er schon ein paar Worte verlieren müssen), hätte er das griechische Wort nicht einfach falsch übersetzen dürfen. Hier tut sich zwischen CANTOR und mir eine letztlich nicht zu überbrückende Kluft auf in der Frage, welchen Respekt ein Mathematikhistoriker vor dem geschriebenen Wort haben sollte.

Wenn auch CANTOR eine betrügerische Absicht letzten Endes nicht nachgewiesen werden kann, so läßt sich das Ergebnis seiner Übersetzung doch eindeutig kennzeichnen: Es handelt sich um eine sinnentstellende Verfälschung. Auf der nächsten Seite findet sich bei CANTOR dann die Formulierung: *Abgesehen von dem Nichtvorhandensein* n e g a t i v e r Z a h l e n a l s s o l c h e r *ist es aber eine hoch entwickelte Buchstabenrechnung, welcher wir uns bei Diophant gegenüber befinden* (Hervorhebung von mir). Dies wird dem Leser bekannt vorkommen ([27], p.82). Es *bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung*, daß CANTOR nicht die geringste Begründung seiner Behauptungen für angebracht hält. Wer *ex cathedra (Benedicti)* redet, hat so etwas nicht nötig. [26]

Nach dem Erscheinen der Monographien von HANKEL und CANTOR wagte es kein Autor mehr zu behaupten, DIOPHANT habe von negativen Größen gesprochen oder Gebrauch gemacht. HEATH erkennt in seiner Diophant-Monographie von 1885 zwar an ([27], p. 137), daß DIOPHANTs Definition IX eigentlich mit *a wanting multiplied by a wanting makes a forthcoming; and a wanting multiplied by a forthcoming makes a wanting* übersetzt werden müßte, nimmt dann aber doch lieber zu BACHETs Übersetzung Zuflucht ([28], p.130): *A minus multiplied by a minus makes a plus; a minus multiplied by a plus makes a minus.*

Im Jahre 1890 erscheint dann G. WERTHEIMs deutsche Übersetzung [60] der Arithmetika, welcher noch die Bachet-Edition [17] von 1621 zugrunde liegt. Er übersetzt die Definition IX folgendermaßen ([60], S.6):

Eine abzuziehende Zahl (λεῖψις), mit einer abzuziehenden multipliziert, giebt eine hinzuzufügende (ὕπαρξις); eine abzuziehende Zahl dagegen, mit einer hinzuzufügenden multipliziert, giebt eine abzuziehende Zahl.

Der Einfluß CANTORs ist nicht zu übersehen, aber WERTHEIM hätte schon erkennen müssen, daß seine Übersetzung unhaltbar ist. Frau BAŠMAKOVA weist mit Recht daraufhin, daß „abziehen" (im Sinne von subtrahieren) im Griechischen durch ἀφαιρέω (Aorist: ἀφεῖλον) wiederzugeben ist, was LIDDELL–SCOTT bestätigen; dort stehen auch Worte für „abzuziehend" (to be taken away) ([35], p. 285): ἀφαιρετός. und ἀφαιρούμεν-ος(-ον). DIOPHANT verwendet an zahlreichen Stellen den letzteren Begriff in der Bedeutung „Subtrahend" (siehe die Angabe der Fundstellen in [18], II, p. 264). WERTHEIM schreibt in einer Anmerkung zu dieser Stelle:

Übrigens sei hier schon bemerkt, daß Diophant n e g a t i v e Z a h l e n als solche nicht kennt. ... Aus diesem Grunde habe ich in der Übersetzung die Ausdrücke positiv und negativ vermieden und dafür — der Sache entsprechend — h i n z u z u f ü g e n d und a b z u z i e h e n d gesagt.

Ein derartiger Kotau vor einer Autorität ist schon peinlich. Hier passiert genau das, was wir den byzantinischen und anderen Kopisten heute vorwerfen und was der Forschung so viel Kopfzerbrechen bereitet: Man glaubt Experte zu sein und den antiken Autor besser zu verstehen als dieser sich selbst. Daher nimmt man sich das Recht heraus, ihn zu „verbessern"; und nachfolgende Autoren stützen sich dann auf den „verbesserten" Text.

Ein typisches Beispiel in WERTHEIMs Übersetzung ist eine Stelle aus der Lösung der 26. Aufgabe des vierten griechischen Buches der Arithmetika (in BACHETs und WERTHEIMs Zählung die 28.) ([60], S. 156):

Das um die zweite Zahl verminderte Produkt beider Zahlen ist aber $8\,x^3 + 8\,x - x^2 - 1$. *Dieser Ausdruck soll gleich einem Kubus werden. Das ist jedoch unmöglich [*x *würde negativ werden].*

Die in Klammern gesetzte Bemerkung ist ein Zusatz WERTHEIMs, der sich im griechischen Orignal nicht findet. Es handelt sich um eine der beiden Stellen, wo DIOPHANT behauptet, eine Aufgabe sei „unmöglich" (ἀδύνατος). WERTHEIM sieht hier eine Chance, dem Leser zu verdeutlichen, daß DIOPHANT eine Aufgabenstellung, bei der die Unbekannte x einen negativen Wert annehmen muß, als „unmöglich" betrachtet. Nur: WERTHEIM irrt, ebenso wie DIOPHANT. Das Problem besteht hier darin, auf der Kubik

$$y^3 = 8\,x^3 + 8\,x - x^2 - 1 \tag{8}$$

einen rationalen Punkt (x, y) mit positiven x, y zu finden. Wir verwenden DIOPHANTs Tangentenmethode. Ein „sichtbarer", das heißt, ein leicht zu erratender rationaler Punkt auf der Kurve (8) ist $(x, y) = (0, -1)$.[27] Die Tangente in diesem Punkt berechnen wir ohne Infinitesimalrechnung. Indem wir das Polynom

$$f(x, y) = y^3 - 8\,x^3 + x^2 - 8\,x + 1$$

im Punkt $(0, -1)$ in sein Taylorpolynom entwickeln:

$$f(x, y) = -8\,x + 3\,(y + 1) + x^2 - 3(y + 1)^2 - 8\,x^3 + (y + 1)^3 \,,$$

können wir die Gleichung der Tangente in diesem Punkt ablesen:

$$-8\,x + 3\,(y + 1) = 0$$

beziehungsweise

$$y = \frac{8}{3}\,x - 1\,. \tag{9}$$

Einen weiteren rationalen Punkt auf der Kubik (8) erhalten wir nun, indem wir die Tangente (9) mit der Kubik zum Schnitt bringen, indem wir also (9) in (8) substituieren und durch x^2 kürzen. Auflösung nach x liefert als rationalen Punkt auf der Kurve

$$x = \frac{549}{296}, \qquad y = \frac{146}{37}\,,$$

der offensichtlich im ersten Quadranten liegt. Das Beispiel taugt nicht für einen Beweis, daß Diophant eine Gleichung, die nur negative Werte als Lösung besitzt, als ἀδύνατος („unmöglich") bezeichnet. Andere Wörter der griechischen Sprache mit der Bedeutung „unmöglich" wie ἀμήχανος, ἄπορος, ἀνένδεκτος, ἀνεγχώρητος, kommen im übrigen in den griechischen Büchern der Arithmetika nirgends vor.

In den Jahren 1893/95 erschienen dann die beiden Bände der kritischen Diophant-Edition [18] von Paul Tannery, die neben dem griechischen Text eine lateinische Übersetzung enthalten. Obwohl diese Edition in manchen Details (insbesondere hinsichtlich der Tradition des griechischen Textes) überholt ist (vergleiche [1]), ist sie bis heute die einzige gedruckte kritische Ausgabe der Arithmetika geblieben. Die von André Allard seit langem angekündigte neue Diophant-Edition (bei Les Belles Lettres, Paris) ist bis heute leider nicht erschienen. Zu Tannery merkt Allard kritisch an ([1], p.132): *Nous ne croyons pas poser un judgement trop sévère en estiment que l'edition de notre illustre prédécesseur fut l'oeuvre d'un savant auquel l'intuition mathématique dictait certaines audaces.* Diese Bemerkung dürfte vornehmlich auf Tannerys lateinische Übersetzung gemünzt sein. Die Multiplikationsregel für negative Größen übersetzt er ähnlich wie Bachet ([18], Bd.I, S.13):

> *Minus multiplicatum in minus facit plus et minus in plus facit minus.*

Im folgenden aber übersetzt er die „positiven und negativen Ausdrücke" (εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα) stets mit *species positae et negatae.* Tannery trifft nur geringe Schuld an der Sprachverwirrung.

Gleichwohl hatte sich die Autorität Cantors durchgesetzt. Als typisches Beispiel mögen Johannes Tropfkes Ausführungen zu den negativen Größen bei Diophant in seiner 1902 erschienenen „Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung" dienen ([54], S.164):

> *Rein negative Größen haben die* Griechen *noch nicht gekannt. Der erste, bei dem wir sie vermuten könnten, wäre* Diophant *von* Alexandria *(drittes bis viertes Jahrhundert n. Chr.), derselbe, in dessen Werke wir zum erstenmal die Erweiterung des Zahlbegriffs von den ganzen zu den rationalen Zahlen fanden.* Diophant *unterscheidet zwar „hinzuzufügende“* (ὕπαρξις) *und „abzügliche“* (λεῖψις) *Zahlen; für die letzteren besitzt er sogar ein eigenes Zeichen* ⋔. *Ja er giebt die Multiplikationsregel positiver und negativer Größen miteinander. Nichtsdestoweniger ist der abstrakte Begriff wirklicher negativer Zahlen ihm fremd; er rechnet nur mit Differenzen, die einen positiven Wert haben, nie mit solchen, bei denen der Subtrahendus den Minuendus übersteigt. Noch klarer tritt dieser Mangel rein negativer Zahlen in der Behandlung der Gleichungen hervor.* Diophant *sieht negative Lösungen durchaus als unstatthaft* (ἀδύνατος) *an und trifft, wenn seine Gleichungen auf solche führen können, über die vorhandenen Koeffizienten derartige Bestimmungen* (προσδιορισμός), *daß sie vermieden werden.*

Es überrascht schon nicht mehr, daß auch Tropfke seine Behauptungen nicht näher begründet. Außerdem verwechselt er ἄτοπος mit ἀδύνατος, und „unstatthaft“ bedeutet keines von beiden. — In der dritten Auflage des ersten Bandes seiner Geschichte der Mathematik [13] von 1907 ersetzt Cantor seinen Hinweis auf die Übersetzung von Schulz schamhaft durch einen Hinweis auf die entsprechende Stelle bei Wertheim. — In seiner 1908 erschienenen History of Mathematics informiert Rouse Ball seine Leser ([2], p. 106):

> *Diophantus commences with some definitions which include an explanation of his notation, and giving the symbol for* minus *he states that a subtraction multiplied by a substraction gives an addition; by this he means that the product of $-b$ and $-d$ in the expansion of $(a-b)(c-d)$ is $+bd$, but in applying the rule he always takes care that the numbers a, b, c, d are so chosen that a is greater than b and c is greater than d.*

So schreiben die Autoren wieder und wieder voneinander ab, bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts, ja bis in die Gegenwart. So lesen wir etwa zum Beispiel bei E. T. Bell:

> Diophantus *and his successors were unacquainted with negative numbers, although it has been argued from such evidence as*
>
> $$(6-2)\times(5-3)=4\times 2=8,$$
>
> *that he knew the rules „Minus times minus is plus, minus times plus is minus, plus times minus is minus, plus times plus is plus“ as in*
>
> $$\begin{aligned}(6-2)\times(5-3) &= (6\times 5)-(6\times 3)-(2\times 5)+(2\times 3)\\ &= 30-18-10+6=8\,.\end{aligned}$$

His lack of negative numbers often made his problems harder to solve than they would be today, when positives and negatives are usually accorded equal status as numbers. ([8], p. 163)

BELL scheint nicht einmal zu wissen, daß DIOPHANTOS die Regeln zur Multiplikation negativer Größen *expressis verbis* formuliert hat. Das ist schon kraß. Bei anderen Autoren liest es sich etwa so:

It must be remarked, that Diophantus had no notion whatever of negative numbers standing by themselves. All he knew were differences, such as $(2x - 10)$*, in which* $2x$ *could not be smaller than 10 without leading to an absurdity* (CAJORI [11], p. 61).

Oder ähnlich:

Die Griechen kannten noch keine negativen Zahlen, dagegen schon die Operation der Subtraktion, die aber nur ausgeführt wurde, wenn die eine Zahl größer war als die andere. Man sieht dies auch bei dem Prinzip der Rückzählung. Man zeigt leicht, das findet man schon bei Diophantus (250 n. Chr.), daß $(a-b)\cdot(c-d) = ac + bd - (bc + ad)$ *ist, aber dabei sind die auftretenden Differenzen in unserer Sprechweise positiv. Dies faßte man in die Merkregeln zusammen:* $(+)\times(+) = (+)$, $(-)\times(+) = (-)$, $(-)\times(-) = (+)$. *Diese Regeln wurden rein mechanisch angewendet, wie das auch heute noch der Fall ist* (HLAWKA [31], p. 424f).

Im gleichen Sinne:

Diophantus had no concept of negative quantities, although he allowed for subtraction as an operation (BURTON [10], p. 225).

Wie hätte DIOPHANTOS auch ohne Subtraktion auskommen sollen! Andere wiederum wissen etwas von der oben zitierten Diophant-Stelle, bemühen sich aber sie im Stile des PLANUDES wegzuinterpretieren:

Diophantus was also aware of the rules for multiplying with the minus: „A minus multiplied by a minus makes a plus, a minus multiplied by a plus makes a minus". Of course, Diophantus is not here dealing with negative numbers, which do not exist for him. He is simply stating the rules necessary for multplying algebraic expressions involving substractions. (KATZ [33], p. 164).

Of course! Natürlich? Wieso eigentlich? GERICKE zieht sich aus der Affäre, indem er nach dem Vorbild CANTORs schon bei der Übersetzung des griechischen Textes mogelt:

Dazu kommt weiter die Regel: Das Produkt zweier abzuziehender Größen ist positiv, das Produkt einer abzuziehenden mit einer positiven Größe ist eine abzuziehende Größe. Und mit Bezug auf die oben zitierte griechische Originalstelle: *Es sind nicht negative Zahlen gemeint, sondern die „abzuziehenden" Zahlen etwa bei der Ausrechnung von* $(a-b)(c-d)$*; insgesamt müssen die Zahlen positiv sein* ([22], S. 144).

HELMUTH GERICKE ist wohl der Autor, der sich am häufigsten über DIOPHANT und die negativen Zahlen geäußert hat, nämlich in [21, 55, 22, 24]. So meint er 1970 in seiner „Geschichte des Zahlbegriffs“, noch mit einem letzten Rest an Vorsicht, ([21], S. 53):

> *Es ist ziemlich sicher, daß* DIOPHANT *nur an abzuziehende Zahlen, wie etwa in dem Ausdruck $(a-b)(c-d)$ gedacht hat, nicht an echte negative Zahlen.*

In seiner „Verbesserung“ der oben zitierten Darstellung TROPFKEs schreibt er 1980 in der überarbeiteten Neuauflage der „Geschichte der Elementarmathematik“ ([55], S. 144f):

> ***Diophant*** *gibt die Rechenregeln:* λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν. *(Minus mal minus gibt plus, plus mal minus gibt minus.) Dabei ist an die Ausrechnung von Ausdrücken der Form $(a-b)\cdot(c-d)$ gedacht und nicht an echte negative Zahlen. <u>Das geht aus einem **Scholion** des **Maximos Planudes** hervor</u>, der sagt:* Οὐχ ἁπλῶς λεῖψιν λέγει, μὴ καὶ ὑπάρξεώς τινος οὔσης, ἀλλὰ ὕπαρξιν ἔχουσαν λεῖψιν *(er spricht nicht einfach von λεῖψις (Wegnahme), als ob keine ὕπαρξις (nichts Positives) vorhanden wäre, sondern von etwas Positivem, das eine Wegnahme enthält.) Er gibt dort auch einen geometrischen Beweis (γραμμικῶς) für die genannte Rechenregel. Als Gleichungslösungen sieht* ***Diophant*** *negative Zahlen als unstatthaft (ἀδύνατος, ἄτοπος) an; er trifft für die vorhandenen Koeffizienten derartige Bestimmungen, daß Negatives vermieden wird.* (Unterstreichung von mir)

Ist es zu fassen: Ein angesehener Mathematikhistoriker des ausgehenden 20. Jahrhunderts beruft sich in der für die Geschichte des Zahlbegriffs so wichtigen Frage der negativen Größen bei DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA zur Begründung seiner eigenen Position auf ein Scholion des MAXIMUS PLANUDES, eines byzantinischen Mönches des 13. Jahrhunderts, der selber keine negativen Größen kannte! Und was GERICKE zu ἄτοπος und ἀδύνατος schreibt, darf einem Experten einfach nicht unterlaufen. Das Wort ἄτοπος kommt in den Arithmetika nur ein einziges Mal vor und ist etwa mit „fehl am Platz“ oder „ungereimt“ zu übersetzen (TROPFKEs falsche Übersetzung „unstatthaft“ für ἄτοπος hat GERICKE übernommen), und ἀδύνατος, „unmöglich“, tritt bei DIOPHANT nur zweimal auf und hat in keinem der Fälle mit negativen Größen irgendetwas zu tun. GERICKE ist seit HEATH der einzige Autor, der die Behauptung, DIOPHANT habe keine negativen Größen gekannt oder ihren Gebrauch abgelehnt, wenigstens zu begründen *versucht.*

Nach all dem ist es vielleicht nicht ohne Reiz zu lesen, wie der gestrenge Kritiker von Frau BAŠMAKOVA die berühmte Multiplikationsregel übersetzt oder interpretiert:

> *Allgemein formulierte, nicht auf bestimmte Zahlenwerte abgestellte Aussagen finden sich bei Diophant erstens zum Grundsätzlichen in den Einleitungen zu den Büchern I und IV. Z.B. gibt er ganz abstrakt die Zeichenregel*
>
> $$(-)\cdot(-)=+$$
>
> *an.* ([47], S. 147)

Das ist natürlich *Unsinn*. Dieser Anachronismus geht auf BACHET DE MÉZIRIAC zurück, wie wir gezeigt haben.

> *How much mathematical knowledge should one possess in order to deal with mathematical history? According to some, little more is required than what was known to the authors one plans to write about; some go so far as to say that the less one knows, the better one is prepared to read those authors with an open mind and avoid anachronisms. Actually the opposite is true. An understanding in depth of the mathematics of any given period is hardly ever to be achieved without knowledge extending far beyond its ostensible subject-matter. More often than not, what makes it interesting is precisely the early occurrence of concepts and methods destined to emerge only later into the conscious mind of mathematicians: the historian's task is to disengage them and trace their influence or lack of influence on subsequent developments.* (ANDRÉ WEIL, [58], p. 438)

Der entscheidende Fehler, den die meisten der in dieser Arbeit kritisierten Autoren begehen, besteht darin, daß sie DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA mit den Augen des EUKLEIDES lesen. Das große Verdienst ISABELLA BAŠMAKOVAs besteht darin, DIOPHANT mit den Augen POINCARÉs und MORDELLs gelesen zu haben. Der *Unsinn*, so will uns scheinen, liegt nicht auf ihrer Seite.

Ich bedanke mich bei den Herren BENNO ARTMANN, WILFRIED BARNER, GERHARD BETSCH, STEFAN DESCHAUER und MENSO FOLKERTS für die kritische Lektüre meines Preprints [3] und für zahlreiche Einwände und Verbesserungsvorschläge. Herr YANNIS THOMAIDIS hat mir freundlicher Weise die von mir übersehenen Beispiele II, xi und VI, xv mitgeteilt. Ganz besonders aber danke ich FRANZ LEMMERMEYER, der sich außerordentlich gründlich mit der von mir vertretenen Position auseinandergesetzt hat. Auch wenn es mir nicht gelungen ist, ihn zu überzeugen, so gehen die meisten Verbesserungen gegenüber [3] auf seine Gegenargumente zurück.

Anmerkungen

[1] Der Gedanke an ein „Autorenkollektiv à la Bourbaki“ scheint für SCHAPPACHER etwas Faszinierendes zu haben, denn auch in [47], S. 143, meint er mit Bezug auf DIOPHANTs Grabinschrift: *Durch das Gedicht müßte man sich also nicht von einer etwaigen Vermutung abbringen lassen, der Name Diophant stehe für ein Autorenkollektiv.* Zwar beruhigt er seine Leser mit dem Hinweis: *Freilich gibt es für eine solche Annahme keine positiven Anhaltspunkte,* nur um wenig später dieses Eingeständnis wieder halb zurückzunehmen: *Ich werde daher weiterhin von Diophant wie von einer einzelnen Person reden.*

[2] In seiner Heimatstadt Alexandria befand sich die von AMMONIOS SAKKAS (175–242) gegründete neuplatonische Schule, an welcher der bedeutendste Neuplatoniker, PLOTIN (204–270), und ORIGINES (185–252), der größte christliche Theologe des Altertums, studierten und der noch THEON VON ALEXANDRIA (330/340–400) und seine unglückliche Tochter HYPATIA (370–415) angehörten. Daß DIOPHANTOS mit der neuplatonischen Zahlenlehre keine Bekanntschaft gemacht haben sollte, ist kaum anzunehmen.

[3] Diese Tatsache wird gelegentlich als Argument gegen das Vorhandensein negativer Größen bei DIOPHANT benutzt: *Warum kommen in seinen* [DIOPHANTS] *Büchern keine* [*negativen Größen*] *vor, zumindest nicht explizit? Links von seinem Zeichen leipsis steht ja immer irgendetwas.* Dieser Einwand

übersieht, daß das Zeichen ⋔ bei Heron wie bei Diophant eben nur einen binären Operator bezeichnet. Die zusätzliche Verwendung unseres heutigen „-“-Zeichens als monadischen Operator zur Bezeichnung der Gegenzahl und (in dritter Bedeutung) zu Kennzeichnung negativer Größen ist ja keineswegs a priori geboten und führt, wie jeder Mathematiklehrer weiß, bei der Einführung der negativen Zahlen häufig zur Verwirrung in den Köpfen der Schüler.

[4]Das Gefühl dafür ist dem modernen Mathematiker mit seiner abstrakten und formalen Denkweise völlig verloren gegangen; bei Kindern aber kann man es jederzeit noch beobachten.

[5]*Deine Seele, Diophantos, möge beim Satan sein wegen der Vertracktheit sowohl der sonstigen deiner Probleme als auch ganz gewiß des hier behandelten Problems!*

[6]Siehe Roshdi Rashed [44]!

[7]Siehe Paul Tannery [18]!

[8]Ich kann mich des Eindrucks nicht erwehren, daß Schappacher den Esel meint und den Sack schlägt, wenn er zwar von Mathematikhistorikern im Allgemeinen spricht (und dabei offensichtlich Weil meint), seine Kritik aber ausschließlich gegen Frau Bashmakova richtet, vielleicht in der Annahme, daß sich für sie nicht so bald ein Verteidiger finden werde, wie für die Ikone André Weil.

[9]Diese Stelle ist mir schon 1975 bei der Lektüre ihres Diophant-Büchleins unangenehm aufgefallen.

[10]Unter den zahlreichen Mathematikhistorikern, die behaupten, Diophantos habe negative Zahlen abgelehnt, sind uns nämlich nur zwei bekannt, die wenigstens den Versuch unternehmen, ihre Behauptung auch zu belegen: Thomas Heath [27, 28, 29] und Helmuth Gericke [21, 55, 24].

[11]In ihrem Briefwechsel ([20], pp. 140–143) diskutieren Adolf Pawlowitsch Juschkewitsch und Kurt Vogel ebenfalls die Frage, ob Diophant die Existenz negativer Zahlen angenommen habe und sind sich gleichfalls einig darin, daß er dies *nicht* getan habe. Dabei beruft sich Vogel in seinem Brief vom 17.10.1969 ebenfalls auf das Beispiel der Aufgabe V, ii.

[12]Ich vermute, daß es solche Beobachtungen gewesen sein könnten, die Diophant zur Aufstellung seiner berühmten Regel der Multiplikation mit negativen Größen geführt haben. Und der aufmerksame Leser mag sich an dieser Stelle an diese Regel erinnert haben.

[13]By the way: Von wem soll Diophantos das abgeschrieben haben?

[14]Ein Kritiker hat hier eingewandt: *Aber schon die Bezeichnung y_3 sollte einen stutzig machen, da D bekanntlich nur eine unbekannte Variable verwenden konnte und keine drei.* Aber unser Beispiel hängt überhaupt nicht an der modernen Schreibweise, wie wir noch zeigen werden.

[15]Man beachte, daß in Diophants Schreibweise bei Brüchen der Zähler unter und der Nenner über dem Bruchstrich steht.

[16]Wir greifen der historischen Entwicklung ein wenig vor, indem wir bemerken, daß die Differenz der gefundenen Quadrate in arithmetischer Progression, 720, sich schreiben läßt in der Form $720 = 5 \cdot 12^2$. Dies ermöglicht es uns, alles wieder durch 12^2 zu teilen, und wir erhalten drei rationale Quadrate in arithmetischer Progression, deren Differenz 5 ist:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - \left(\frac{31}{12}\right)^2 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 - \left(\frac{41}{12}\right)^2 = 5\,.$$

Es ist keine besonders kühne Spekulation zu vermuten, daß Diophantos dies gewußt hat. Die Aufgabe, drei Quadrate in arithmetischer Progression zu finden, deren Differenz k gleich 5 ist, spielt in der Geschichte der Zahlentheorie eine interessante Rolle. Bei dem mathematischen Turnier 1224 in Pisa am Hofe des Kaisers Friedrich II. stellte Meister Johannes von Palermo dem größten abendländischen Mathematiker seiner Zeit, Leonardo Pisano, genannt Fibonacci, diese Aufgabe ([19], p.107). In kurzer Zeit fand Leonardo, der das Problem und seine Lösung vermutlich kannte, das Ergebnis zur allgemeinen Bewunderung seines Publikums. Leonardo nahm dies zum Anlaß, sein mathematisch anspruchsvollstes Werk, den *liber quadratorum*, zu verfassen und es dem Kaiser zu widmen. In diesem Buch wird erstmals (in der Sprache der *numeri congrui* in äquivalenter Form) die Behauptung aufgestellt ([19], p.83), daß es kein pythagoreisches Dreieck mit quadratzahligem Flächeninhalt gebe (daß keine Quadratzahl ein *numerus congruus* sein kann). Leonardos „Beweis“ ist leider falsch. Es ist die vielleicht größte zahlentheoretische Leistung Fermats, den Beweis dieser Behauptung mit seiner neuen Methode der *descente infinie* erbracht zu haben. Aus ihr folgt der große Fermatsche Satz für den Exponenten $n = 4$. Womöglich hat sich FERMAT davon zu seiner berühmten Vermutung inspirieren lassen.

[17]Das Beispiel II, xi, wurde mir von Herrn YANNIS THOMAIDIS mitgeteilt.

[18]Es gehört zu den Verdiensten von ISABELLA BAŠMAKOVA, als erste darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß die Arithmetika mehr sind als ein Sack voller algebraischer Tricks und daß DIOPHANT sehr wohl methodisch vorging, so weit dies zahlentheoretische Probleme überhaupt zulassen.

[19]In gänzlicher Ermanglung von Kenntnissen des Arabischen muß sich der Verfasser völlig auf ROSHDI RASHEDs französische Übersetzung [44] der „arabischen Bücher" der Arithmetika verlassen. Die (leider nicht wörtliche) Übersetzung JACQUES SESIANOs [49] ermöglicht eine gewisse Gegenkontrolle.

[20]Das Beispiel VI, xv, verdanke ich Herrn THOMAIDIS.

[21]Auch CZWALINA ist dies aufgefallen ([15], S. 132): *Bemerkenswert ist, daß die angegebenen Wurzelwerte* $\frac{2}{x} - 3\,x$ *und* $\frac{3}{2\,x} - 4\,x$ *sich für* $x = \frac{5}{6}$ *als negativ ergeben.*

[22]Portugiesisch: NUNES

[23]Im Anschluß an die zitierte Stelle führt NUÑEZ sodann einen rein algebraischen Beweis für die Regel, daß minus mit minus multipliziert plus macht, weil, wie er an einer Stelle sagt, darüber eine große Debatte stattgefunden habe. Bei diesem Beweis legt er das obige Beispiel zugrunde, betont aber (zu Recht), daß seine Argumentation allgemein sei. Setzt man die üblichen Axiome für einen kommutativen Ring als gegeben voraus, so ist sein Beweis vollkommen korrekt. NUÑEZ selbst erwähnt als einzige Voraussetzung die von EUKLEIDES geometrisch, von GIOVANNI CAMPANO (1210–1296) und JORDANUS DE NEMORE (um 1220) hingegen arithmetisch bewiesene Regel, wonach bei der Multiplikation additiv zusammengesetzter Ausdrücke jedes Glied des ersten Faktors mit jedem Glied des zweiten Faktors zu multiplizieren sei, also die (verallgemeinerte) Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition.

[24]Für diese Behauptung gibt freilich auch SCHULZ keinen Nachweis.

[25]Herr BETSCH hat mich dankenswerter Weise darauf aufmerksam gemacht, daß der mit 34 Jahren verstorbene HERMANN HANKEL seine Vorlesung „Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter" nicht mehr selbst zum Druck geben konnte. Das Werk wurde von HANKELs Vater postum veröffentlicht.

[26]Der Heidelberger Professor MORITZ BENEDIKT CANTOR (1829–1920), führender Mathematikhistoriker Deutschlands im 19. Jahrhundert, hat durch die von ihm gegründete wissenschaftliche Schule, durch die von ihm geleitete „historisch-literarische Abteilung" der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" (1875–1900), durch die von ihm herausgegebenen „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" (1877–1918) sowie durch das von ihm verfaßte vierbändige Hauptwerk „Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik" (1880–1908) einen überragenden und bestimmenden Einfluß auf alle Mathematikhistoriker seiner Zeit ausgeübt, dem sich kaum jemand entziehen zu können glaubte. Dieser Gelehrte hat sich um die Geschichte der Mathematik zweifellos große Verdienste erworben, aber durch seine Autorität auch schweren historischen Irrtümern für Jahrzehnte das Überleben gesichert. Seine apodiktischen Äußerungen zu DIOPHANT sind, verglichen etwa mit seinem Verdikt über die arabische Mathematik, nur ein kleineres Übel.

[27]Diesen „Punkt" konnte DIOPHANT natürlich *nicht* „sehen", und die „Steigung" $\frac{8}{3}$ in (9) zu finden, dürfte verständlicher Weise für ihn ein schwieriges Unterfangen gewesen sein.

Literatur

[1] **Allard, André**, *La tradition du texte grec des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie.* Revue d'histoire des textes **XII/XIII** (1982/83), 57–137

[2] **Ball, W. W. Rouse**, A Short Account of the History of Mathematics. Reprint of the 4th edition and the author's last revision of 1908. Dover Publications, New York, NJ, 1960

[3] **Barner, Klaus**, *Diophant und die negativen Zahlen. Zu zwei Bemerkungen Norbert Schappachers.* Mathematische Schriften Kassel. Preprint-Nr. 10/98, September 1998

[4] **Bašmakova, Isabella G.**, *Diophante et Fermat.* Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **19** (1968), 283-306. Ursprünglich in russischer Sprache erschienen in Istoriko-mathematicheskie issledovania **17** (1966)

[5] **Bašmakova, Isabella G.**, Diophant und diophantische Gleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin / Birkhäuser, Basel, 1974. Amerikanische Neuauflage: Diophantus and Diophantine Equations. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997. [Die russische Originalausgabe erschien 1972 bei Nauke in Moskau.]

[6] **Bashmakova, Isabella G.**, *Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré.* Historia Mathematica **8** (1981), 393–416

[7] **Becker, Oskar Joachim & Joseph Ehrenfried Hofmann**, Geschichte der Mathematik. Athenäum, Bonn, 1951

[8] **Bell, Eric Temple**, The Last Problem. Victor Gollancz, London ^{1}1962; aktualisierte und revidierte Fassung: Mathematical Association of America, Washington, ^{2}1990

[9] **Boyer, Carl & Uta C. Merzbach**, A History of Mathematics. John Wiley, New York, ^{2}1989

[10] **Burton, David M.**, Burton's History of Mathematics: An Introduction. Wm. C Brown, Dubuque, IA, ^{3}1995

[11] **Cajori, Florian**, A History of Mathematics. Macmillan, New York ^{2}1919

[12] **Cantor, Moritz**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 1. Erste Auflage, Teubner, Leipzig, 1880

[13] **Cantor, Moritz**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 1. Dritte Auflage, Teubner, Leipzig, 1907

[14] **Chantraine, Pierre**, Dictionnaire étymologique de Langue Greque. Éditions Klincksieck, Paris, 1974

[15] **Czwalina, Arthur**, Arithmetik des Diophantos aus Alexandria. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1952

[16] **Diophantus Alexandrinus**, Arithmeticorum libri sex, quorum primi duo adiecta habent Scholia Maximi Planudis. Item Liber de Polygonis seu Multangulis. Lateinische Übersetzung von Wilhelm Holtzmann (Xylander), Basel, 1575

[17] **Diophantus Alexandrinus**, Arithmeticorum libri sex, & De numeris multangulis liber unus. In Griechisch und Latein herausgegeben von Claude Gaspar(d) Bachet de Méziriac, Lutetiae Parisorum (Paris), 1621

[18] **Diophantus Alexandrinus**, Opera omnia cum graecis commentariis. Herausgegeben und ins Lateinische übersetzt von Paul Tannery. 2 Bände, Nachdruck der Ausgabe von 1893/95. Teubner, Stuttgart, 1974

[19] **Fibonacci, Leonardo Pisano**, The Book of Squares. An Annotated Translation into Modern English by L.E. Sigler. Academic Press, Boston, 1987

[20] **Folkerts, Menso u. a. (Hrsg.)**, Mathematikgeschichte ohne Grenzen. Die Korrespondenz zwischen K. Vogel und A. P. Juschkewitsch. Algorithmus **22**, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, München, 1997

[21] **Gericke, Helmuth**, Geschichte des Zahlbegriffs. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970

[22] **Gericke, Helmuth**, Mathematik in Antike und Orient. Springer, Heidelberg, 1984

[23] **Gericke, Helmuth**, Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Springer, Heidelberg, 1990

[24] **Gericke, Helmuth**, *Zur Geschichte der negativen Zahlen.* In: Joseph Dauben, Menso Folkerts, Eberhard Knobloch & Hans Wußing (Hrsg.), History of Mathematics. States of the Art. Academic Press, San Diego, Ca., 1996, p. 279–306

[25] **Grattan-Guinness, Ivor**, *History or heritage? A central question in the historiography of mathematics.* Überarbeitete und erweiterte Fassung eines auf der 6. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV in Zingst (7.5.–11.5.2001) gehaltenen Vortrags; erscheint voraussichtlich im Tagungsband

[26] **Hankel, Hermann**, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874

[27] **Heath, Thomas Little**, Diophantos of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. Cambridge University Press, erste Auflage, Cambridge, 1885

[28] **Heath, Thomas Little**, Diophantos of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. Cambridge University Press, zweite, stark überarbeitete Auflage, Cambridge, 1910

[29] **Heath, Thomas Little**, A History of Greek Mathematics. 2 Volumes. Clarendon Press, Oxford 1921[1]; Dover Publ., New York [2]1981

[30] **Heiberg, Johan Ludvig & Hieronymus Georg Zeuthen**, *Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik.* Bibliotheca Mathematica (3) VIII (1907–08), 118–134

[31] **Hlawka, Edmund**, *Zum Zahlbegriff.* Philosophia Naturalis **19** (1982), 413–470

[32] **Kaegi, Adolf**, Benselers Griechisch-Deutsches Wörterbuch. VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1981

[33] **Katz, Victor J.**, A History of Mathematics. An Introduction. HarperCollins, New York, 1993

[34] **Knapp, Anthony W.**, Elliptic Curves. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992

[35] **Liddell, Henry George & Robert Scott**, A Greek-English Lexicon, 9th ed. (1940), New Supplement added (1996), Oxford University Press, Oxford, 1996

[36] **Mainzer, Klaus**, *Natürliche, ganze und rationale Zahlen.* In. Ebbinghaus et al., Zahlen. Springer, Berlin–Heidelberg [3]1992, 9–22

[37] **Majercik, Ruth Dorothy**, *The existence-life-intellect triad in Gnosticism and Neoplatinism.* Classical Quarterly **42** (1992), 476–488

[38] **Majercik, Ruth Dorothy**, *Chaldean triads in Neoplatonic exegesis: some reconsiderations.* Classical Quarterly **51** (2001), 265–296

[39] **Montanari, Franco**, Greco–Italiano. Vocabolario della lingua Greca. Loescher Editore, Torino, 1996

[40] **Nesselmann, Georg Heinrich Ferdinand**, Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra der Griechen. Berlin, 1842

[41] **Nuñez, Pedro**, Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria. Birckman, Antwerpen, 1567

[42] **Ore, Oystein**, Number Theory and Its History. Dover Publ., New York, 1988

[43] **Peiffer, Jeanne & Amy Dahan-Dalmedico**, Une histoire des mathématiques. Routes et dédales. Editions du Seuil, Paris, 1986. (Deutsch: Wege und Irrwege — Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser, Basel, 1994)

[44] **Rashed, Roshdi (ed.)**, Diophantus, Les Arithmétiques. Livres IV–VII, zweisprachige Ausgabe (Griechisch–Französisch). (Oeuvres de Diophante, vol. III et IV), Les Belles Lettres, Paris, 1984

[45] **Rist, John M.**, *Mysticism and Transcendence in Later Neoplatonism.* Hermes **92** (1964), 213–225

[46] **Schappacher, Norbert**, *Der Beweis von Fermats Großem Satz — eine Literaturübersicht.* Mathematische Semesterberichte **45** (1998), S.113–123

[47] **Schappacher, Norbert**, *Wer war Diophant?* Mathematische Semesterberichte **45** (1998), S.141–156

[48] **Schulz, Otto**, Diophantus von Alexandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon=Zahlen. Schlesingersche Buch- und Musikhandlung, Berlin, 1822

[49] **Sesiano, Jacques**, Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusṭā Ibn Lūqā. Springer, New York, 1982

[50] **Smith, Andrew**, *Hypostasis and Hyparxis in Porphyry.* Hyparxis e Hypostasis nel Neoplatonismo. A cura die F. Romano e D.P. Raormina. Olschki, Firenze, 1994, pp.33–42

[51] **Struik, Dirk J.**, A Concise History of Mathematics. Dover, New York, 1948. (Deutsch: Abriß der Geschichte der Mathematik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963)

[52] **Swift, D.J.**, *Diophantus of Alexandria.* Amer. Math. Monthly **63** (1956), 163–170

[53] **Tannery, Paul M.**, *A quelle époque vivait Diophante?* Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2iéme série, **3** (1879), 261–269

[54] **Tropfke, Johannes**, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Von Veit, Leipzig, 1902

[55] **Tropfke, Johannes**, Geschichte der Elementarmathematik. 4. Auflage, Band 1. Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Walter de Gruyter, Berlin, 1980

[56] **Van der Waerden, Bartel Leendert**, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Birkhäuser, Basel, 1956

[57] **Van der Waerden, Bartel Leendert**, Geometry and Algebra in Ancient Civilzations. Springer, Berlin, 1983

[58] **Weil, André**, *History of mathematics: Why and how.* Collected Papers, Vol. III, 434–442, Springer, New York, 1979

[59] **Weil, André**, Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Birkhäuser, Boston, 1983

[60] **Wertheim, Gustav**, Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantos von Alexandria. Teubner, Leipzig, 1890

Fachbereich Mathematik–Informatik
Universität Kassel
D–34109 Kassel

klaus.barner@uni-kassel.de