KaDiSto Bd.5

Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit

-

Arbeitsmaterialien und didaktische Kommentare für den Themenbereich “Bayessche Regel”

für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I

Christoph Waßner
Rolf Biehler
Stefan Schweynoch

unter Mitwirkung von
Laura Martignon

Kassel, Januar 2007

KaDiSto: Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Band 5

Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel

Kurzbeschreibung der Schriftenreihe

In den Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto) werden vom Herausgeber und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Staatsexamensarbeiten, Dissertationen, Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten, Unterrichtsmaterialien und „Occasional Papers", die sich mit der Didaktik der Stochastik und dem Stochastikunterricht beschäftigen. Die Arbeiten werden oft zusammen mit weiteren elektronischen Materialien, z.B. Dateien von Computerprogrammen zur Stochastik verfügbar gemacht.

Die Reihe wurde ins Leben gerufen wurde, um Materialien zu veröffentlichen, die in der Arbeitsgruppe des Herausgebers oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind. Die Reihe steht grundsätzlich auch anderen Autorinnen und Autoren offen.

Kurzbeschreibung des Dokuments

Die vorliegende Unterrichtsreihe basiert auf zwei grundlegenden Vorstellungen zum Lernen und Lehren von Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger in der Sekundarstufe I.

Zum einen ist die grundsätzliche Überzeugung der Autoren, dass ein sinnvoller und gewinnbringender Unterricht in Stochastik über den aufwendigeren Weg möglichst authentischer und konkreter Anwendungen im täglichen Leben gehen sollte. Demzufolge reicht eine Einkleidung stochastischer Probleme in realistisch wirkende Kontexte nicht, sondern es sollte eine intensive Erarbeitung authentischer Problemstellungen, z.B. mit Hilfe von realen Medientexten, erfolgen. Die Schüler sollen vor allem lernen, reale Probleme mathematisch zu modellieren und gefundene mathematische Ergebnisse für die reale Situation zu interpretieren und kritisch zu diskutieren.

Eine weitere Besonderheit gegenüber traditionellen Zugängen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert auf kognitionspsychologischen Ergebnissen zur menschlichen Informationsverarbeitung. Durch eine Serie von Studien wurde gezeigt, dass Menschen – und natürlich auch Schüler – große Probleme haben, mit Wahrscheinlichkeiten (also auf 1 normierte Maße) umzugehen. Als viel einfacher und verständnisfördernder stellte sich die kognitive Verarbeitung von Häufigkeiten (bzw. Verhältnissen von natürlichen Zahlen) heraus. In dieser Reihe wird deshalb auf eine traditionelle formale Einführung der Bayesschen Regel verzichtet und es werden spezielle, auf Häufigkeiten basierende Hilfsmittel zur Lösungsfindung verwendet. Die erwähnten Studien belegen den Vorteil dieser Häufigkeitsdarstellungen gegenüber traditionellen Methoden im Hinblick auf den sofortigen und insbesondere den längerfristigen Lernerfolg (vgl. umfassend zu diesem Thema C. Wassner (2004). Förderung Bayesianischen Denkens, Hildesheim: Franzbecker, http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214705).

Die vorliegende Schrift wurde zuerst im Jahre 2004 als Anhang zur o.g. Schrift bei Franzbecker Hildesheim veröffentlicht. Der Verlag hat einer elektronischen Veröffentlichung in der KaDiSto-Reihe zugestimmt.

Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik:
https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006062213595
Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel.
biehler@mathematik.uni-kassel.de

Bd.5:
http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214718

c.wassner@gmx.de, biehler@mathematik.uni-kassel.de, stefan.blumenthal@fvsg-buende.de, martignon@ph-ludwigsburg.de

Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit –

Arbeitsmaterialien und didaktische Kommentare für den Themenbereich „Bayessche Regel“

für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I

Christoph Wassner
Rolf Biehler
Stefan Schweynoch

unter Mitwirkung von
Laura Martignon

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

Arbeitsblätter und Überblicke - Übersicht 2

AB 1: Wie sicher ist der AIDS-Test? 3
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 1 4

AB 2: Das AIDS-Testverfahren im Detail 5
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 2 6

AB 3: AIDS-Test positiv und dann? 7
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 3 8

AB 4: Einfluss der Basisrate 9
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 4 10

AB 5: Das AIDS-Test Problem aus umgekehrter Sicht 12
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 5 13

Überblick 1: Wahrscheinlichkeitsbegriffe 14

AB 6: Übungsaufgaben zum Überblick 1 15
Didaktische Kommentare zum Überblick 1 16

AB 7: Mordfall 17

Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 7 18

Überblick 2: Wahrscheinlichkeiten neu bewerten 19

AB 8: Übungsaufgaben zum Überblick 2 20
Didaktische Kommentare zum Überblick 2 21

AB 9: Schwangerschafts- und Vaterschaftstest 22
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 9 23

Zusatzmaterial zur Kontextvertiefung zu AB 9 24

AB 10: Mammografie 25
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 10 27

AB 11: BSE-Krise 29
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 11 30

Zusatzmaterial zur Kontextvertiefung zu AB 11 31

AB 12: Drogen im Straßenverkehr 32
Lösungen und didaktische Kommentare zu AB 12 33

AB 13: Übungsaufgaben 1 34
Lösungshinweise zu AB 13 36

AB 14: Übungsaufgaben 2 37
Lösungshinweise zu AB 14 38

Anhang: Vorschlag einer Klassenarbeit zur Unterrichtsreihe, Klasse 9 39

Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit –

Arbeitsmaterialien und didaktische Kommentare für den Themenbereich „Bayessche Regel“

für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I

Christoph Wassner
Rolf Biehler
Stefan Schweynoch

unter Mitwirkung von
Laura Martignon

Vorwort

Die vorliegende Unterrichtsreihe basiert auf zwei grundlegenden Vorstellungen zum Lernen und Lehren von Wahrscheinlichkeitsrechnung für Anfänger in der Sekundarstufe I (*).

Zum einen ist die grundsätzliche Überzeugung der Autoren, dass ein sinnvoller und gewinnbringender Unterricht in Stochastik über den aufwendigeren Weg möglichst authentischer und konkreter Anwendungen im täglichen Leben gehen sollte. Demzufolge reicht eine Einkleidung stochastischer Probleme in realistisch wirkende Kontexte nicht, sondern es sollte eine intensive Erarbeitung authentischer Problemstellungen, z.B. mit Hilfe von realen Medientexten, erfolgen. Die Schüler sollen vor allem lernen, reale Probleme mathematisch zu modellieren und gefundene mathematische Ergebnisse für die reale Situation zu interpretieren und kritisch zu diskutieren.

Eine weitere Besonderheit gegenüber traditionellen Zugängen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert auf kognitionspsychologischen Ergebnissen zur menschlichen Informationsverarbeitung. Durch eine Serie von Studien wurde gezeigt, dass Menschen – und natürlich auch Schüler – große Probleme haben, mit Wahrscheinlichkeiten (also auf 1 normierte Maße) umzugehen. Als viel einfacher und verständnisfördernder stellte sich die kognitive Verarbeitung von Häufigkeiten (bzw. Verhältnissen von natürlichen Zahlen) heraus. In dieser Reihe wird deshalb auf eine traditionelle formale Einführung der Bayesschen Regel verzichtet und es werden spezielle, auf Häufigkeiten basierende Hilfsmittel zur Lösungsfindung verwendet. Die erwähnten Studien belegen den Vorteil dieser Häufigkeitsdarstellungen gegenüber traditionellen Methoden im Hinblick auf den sofortigen und insbesondere den längerfristigen Lernerfolg

(vgl. umfassend zu diesem Thema C. Wassner (2004). Förderung Bayesianischen Denkens, Hildesheim: Franzbecker).

** Die Unterrichtsreihe wurde auf den Mathematik-Lehrplan von NRW (1993) für die gymnasiale Sekundarstufe I zugeschnitten, in dem in der 9./10. Klasse für das Themengebiet „Anwenden der Bayesschen Regel“ ca. 12 Schulstunden vorgesehen sind:*

> ***Alternative (a)***
>
> Probleme aus dem Themenkreis der Bayesschen Regel werden mit Hilfe von Baumdiagrammen bearbeitet. Dabei soll die Bayessche Regel weder formal behandelt noch bewiesen werden (das ist der gymnasialen Oberstufe vorbehalten). Hier geht es um ein inhaltliches Verständnis der Zusammenhänge, wobei der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit intuitiv verwendet wird. Für statistisches Denken wird die Regel relevant, wenn man studiert, wie sich die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Alternativen auf Grund von Beobachtungen ändern.

Kultusministerium NRW, 1993, S. 57

Arbeitsblätter und Überblicke - Übersicht

(jeweils mit Lösungshinweisen bzw. didaktischen Kommentaren)

Blatt Nr.	Name	Hauptziel
AB 1	Wie sicher ist der AIDS-Test?	Intuitive Problemlösung
AB 2	Das AIDS-Testverfahren im Detail	Ergebnisvertiefung
AB 3	AIDS-Test positiv und dann?	Kontextvertiefung
AB 4	Einfluss der Basisrate	Ergebnisvertiefung Darstellungsvertiefung
AB 5	Das AIDS-Test Problem aus umgekehrter Sicht	Darstellungsvertiefung
ÜBERBLICK 1	Wahrscheinlichkeitsbegriffe	Verallgemeinerung & Zusammenfassung 1
AB 6	Übungen zum ÜBERBLICK 1	Begriffsvertiefung Übung
AB 7	Mordfall (führt hin zu Überblick 2)	Anwendung zu Urteilen mit Indizien
ÜBERBLICK 2	Wahrscheinlichkeiten neu bewerten	Verallgemeinerung & Zusammenfassung 2
AB 8	Übungen zum ÜBERBLICK 2	Weitere Begriffsvertiefung Übung
AB 9	Schwangerschafts- und Vaterschaftstest	Anwendung
AB 10	Mammografie	Anwendung
AB 11	BSE-Krise	Anwendung
AB 12	Drogen im Straßenverkehr	Anwendung
AB 13	Übungsaufgaben 1	Übung
AB 14	Übungsaufgaben 2	Übung, abweichende Aufgaben

AB 1: Wie sicher ist der AIDS-Test?

Wie sicher ist der AIDS-Test ?

Der sogenannte AIDS-Test ist einer der zuverlässigsten Tests, die jemals entwickelt wurden. Er wird eingesetzt, um eine Infektion mit HIV festzustellen(*). Wegen der hohen Gefahr der Verbreitung der tödlichen HIV-Infektion war sogar lange Zeit in der Diskussion, ob nicht die gesamte Bevölkerung zum AIDS-Test gezwungen werden soll.

Der AIDS-Test ist aber nicht perfekt. Wenn jemand HIV-infiziert ist, soll der Test positiv sein. Zu 99,9% fällt er dann auch positiv aus. Andererseits wenn jemand nicht HIV-infiziert ist, soll der Test natürlich negativ sein. Zu 99,7% fällt er dann tatsächlich negativ aus.

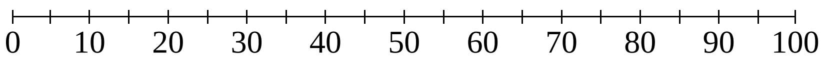
Nehmen wir mal an, dass für alle Menschen in NRW ein AIDS-Test durchgeführt werden soll. Laut Schätzung des Robert-Koch-Instituts sind bundesweit 0,05% der Bevölkerung HIV-infiziert, die Quote kann auch für NRW angenommen werden. Die Bevölkerungsstatistik sagt, dass in NRW 18.000.000 Menschen leben.

(*) Im Sprachgebrauch hat sich AIDS-Test eingebürgert. AIDS bezeichnet eigentlich die Krankheit, die man bekommen kann, wenn man mit HIV infiziert ist. HIV kommt vom engl. „human immunodeficiency virus“ = „Immunschwäche-Virus beim Menschen“.

1. Stell Dir vor, eine beliebige Person aus NRW bekommt mitgeteilt, dass ihr Test positiv ist. Wie sicher kann sie sein, dass sie tatsächlich HIV-infiziert ist?

   Schätzung: Wahrscheinlichkeit für HIV-Infektion, wenn der Test positiv ist: ______%

   Schätzungen der gesamten Klasse eintragen:



2. Was kann passieren, wenn ein HIV-Infizierter getestet wird? Was, wenn ein nicht HIV-Infizierter getestet wird? Schreibe alle Möglichkeiten auf! Welche würdest du als „Fehler des Tests“ bezeichnen und wo lag der Test richtig?

3. Verteile die Bevölkerung von NRW auf die vier Möglichkeiten. Wie viele Personen sind es jeweils?

4. Stelle die Häufigkeiten in einem Baumdiagramm dar.

5. Versuche mit Hilfe der Häufigkeiten aus dem Baumdiagramm die in Aufgabe 1 geschätzte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

6. Warum ist es trotzdem sinnvoll, einen AIDS-Test durchzuführen?

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 1

Die eigentliche Problematik beim AIDS-Test sind die Fehlertypen. Die Schüler sollen in der ersten Auseinandersetzung mit dem realen Problem erkennen, dass sich 4 mögliche „Ausgänge“ ergeben, von denen 2 verschiedene „Fehler des Tests“ darstellen. Ziel ist, die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Tests. Dass alle Menschen aus NRW getestet werden, ist natürlich nicht realistisch. Der „Trick“ mit dem Test für alle umgeht zunächst die schwierige Frage der Bestimmung der Basisrate (das wird erst anschließend in AB 4 vertieft).

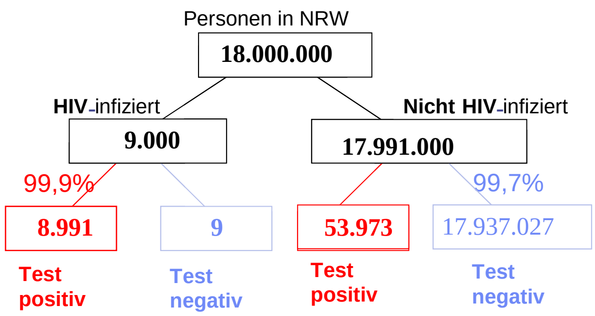
Zu 1.
Die Schätzungen auf jeden Fall notieren lassen. Meist sind sie viel zu hoch (70-90%). Das Diagramm sollen auf jeden Fall alle Schülerinnen und Schüler ausfüllen, damit später darauf zurückgegriffen werden kann.

Zu 2 und 3.

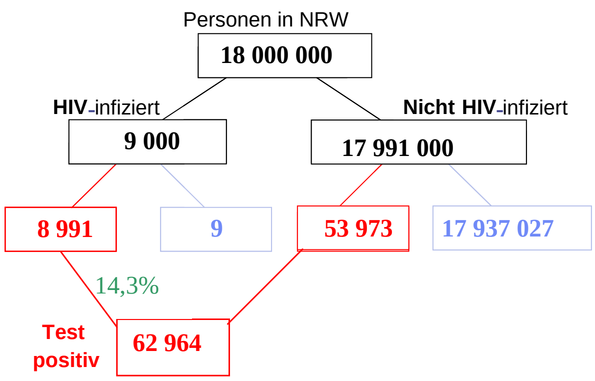
Testfehler	Anzahl	keine Testfehler	Anzahl
HIV-inf. und Test negativ	9	HIV-inf. und Test positiv	8991
Nicht HIV-inf. und Test positiv	53973	Nicht HIV-inf. und Test negativ	17937027

zu 4.

Das Baumdiagramm ist den Schülerinnen und Schülern in dieser Form unbekannt und sollte im Gespräch entwickelt werden.



zu 5.

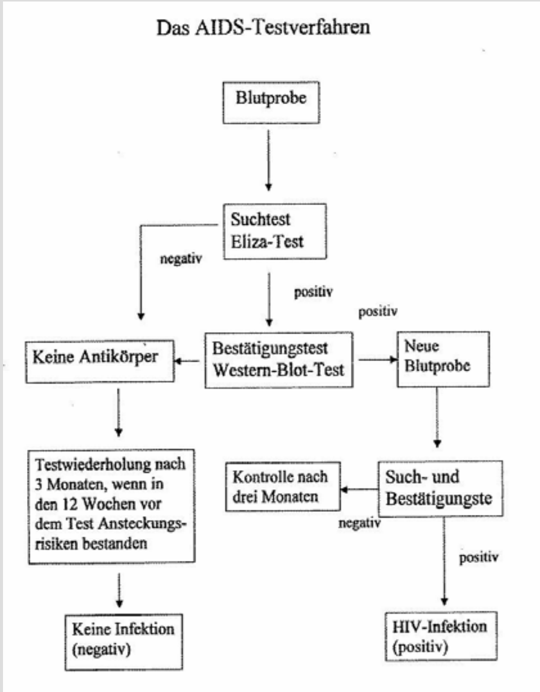


zu 6. Man weiß nach dem Test mehr als vorher. Vorher: 0,05% sind HIV-infiziert, nachher: 14,3% (der positiv Getesteten) sind HIV-infiziert. Als Wahrscheinlichkeit ausgedrückt spricht man von a priori (vorher) und A-posteriori (nachher) – Wahrscheinlichkeit.
Die Wahrscheinlichkeit hat sich immerhin um das 286-fache erhöht! → Informationsgewinn!

AB 2: Das AIDS-Testverfahren im Detail

Das AIDS-Testverfahren und Risiken in der heutigen Praxis

Ein HIV-Test umfasst heutzutage normalerweise mehrere Schritte: Zuerst wird ein Test namens ELISA (steht für engl. *enzyme-linked immunoabsorbent assay*) durchgeführt. Mit diesem Test lassen sich im Blut Antikörper gegen HIV feststellen. Ursprünglich diente er dazu, Blutspenden routinemäßig zu überprüfen. Eine möglichst hohe Rate positiver Testergebnisse bei einer vorliegenden HIV-Infektion war deshalb wichtig, auch wenn dies eine relativ höhere Rate falsch-positiver Ergebnisse mit sich brachte. Fällt ELISA negativ aus, wird der betroffenen Person mitgeteilt, dass sie keine HIV-Infektion hat. Wenn aber ELISA positiv ist, folgt zur Sicherheit ein sog. Western-Blot-Test, der teurer und langwieriger als der ELISA-Test ist. Fällt auch der Western-Blot-Test positiv aus, dann wird der betroffenen Person meist mitgeteilt, dass sie HIV-positiv ist. Meist wird jedoch eine zweite, separat entnommene Blutprobe nochmal dem Testverfahren unterzogen, bevor eine HIV-Infektion als sicher angenommen wird. Die Testwiederholung nach 3 Monaten wird gemacht, da sich HIV erst 4-8 Wochen nach der Ansteckung nachweisen lässt.



Fragen zum Text:

Was passiert, wenn eine Person beim ersten Mal positiv getestet wurde?

Was passiert, wenn eine Person beim ersten Mal negativ getestet wurde?

Warum ist bei negativem Ergebnis eine Kontrolluntersuchung nach 3 Monaten vorgesehen?

Aufgaben

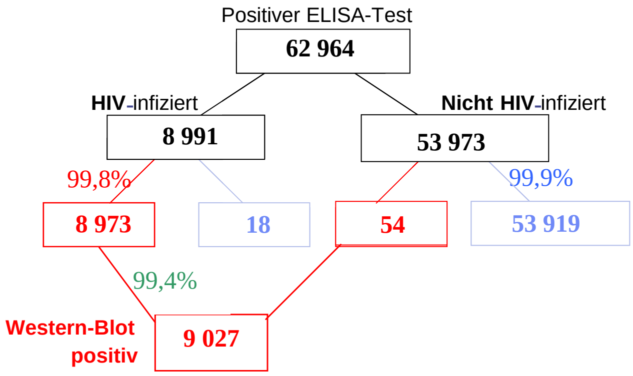
Der Test in unserem Beispiel war ein ELISA-Test. Wir hatten 62964 positive Testfälle, aber nur 8991 HIV-Infektionen. Die positiven Testfälle sollen mit einem Western-Blot-Test überprüft werden. Seine Werte sind etwas anders: Bei einem HIV-Infizierten ist er zu 99,8% positiv. Wenn einer nicht HIV-infiziert ist, ist er zu 99,9% negativ.

1. Erstelle ein Baumdiagramm zum Western-Blot-Test.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person HIV-infiziert, wenn auch der Western-Blot-Test positiv ist.
3. Ist das Ergebnis jetzt sicher genug? Was passiert nun weiter, wenn auch der Western-Blot-Test ein positives Ergebnis hatte?

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 2

Ziel in den folgenden Stunden ist zunächst eine sorgfältige Ergebnis- und Kontextvertiefung mit Übung der gelernten Darstellungsform, bevor Verallgemeinerungen, Formalisierungen oder andere Kontexte behandelt werden.

Zu 1. und 2.



Zu 3.

Absicherung durch einen weiteren Testdurchlauf (ELISA und Western-Blot) an einer neuen Blutprobe. Nun erfährt der Patient das positive (Doppel-)Testergebnis und muss mit hoher Wahrscheinlichkeit damit rechnen, HIV-infiziert zu sein. Immerhin besteht noch eine kleine Wahrscheinlichkeit, nicht infiziert zu sein.

AB 3: AIDS-Test positiv und dann ?

AUS FORSCHUNG UND PRAX IS
(von Prof. Dr.Gigerenzer, Max-Planck-Institut Berlin)

Die Fehleinschätzungen sind keine Überraschung. Es gibt einige Untersuchungen darüber, dass auch „Experten“ oft falsch liegen:
Es wurden 20 professionelle AIDS-Berater (14 Ärzte und 6 Sozialarbeiter) befragt. Ein Student ließ bei sich 20mal einen HIV-Test machen und fragte genau die obige Frage nach dem positiven Vorhersagewert. Das Ergebnis war erschreckend.
10 der Berater behaupteten fälschlich, dass bei einem Mann, der keiner Risikogruppe angehört, eine Infektion völlig (also zu 100%) sicher ist, wenn der HIV-Test positiv ausfällt. 5 weitere Berater erklärten, diese Wahrscheinlichkeit liege bei 99,9% oder darüber. 2 weitere Berater vermieden es erfolgreich, diese Frage zu beantworten. Nur 3 Berater schätzten, dass die Wahrscheinlichkeit unter 99,9% liegt, gaben aber sämtlich einen Wert über 90 Prozent an.

SELBSTMORD NACH POSITIVEM AIDS-TEST !
Bei der AIDS-Konferenz 1987 berichtete Lawton Chiles, der ehemalige Senator von Florida, dass von 22 Blutspendern in Florida, denen ein positives Resultat eines ELISA-Tests mitgeteilt wurde, sieben Selbstmord begangen hätten. Damals wurde schon nach einem Test das Ergebnis mitgeteilt. Heute ist das Verfahren glücklicherweise geändert.

Chicago Tribune
vom 5. März 1993
Leserbriefe an Dr. Ann Landers

Falscher HIV-Test beschert 18-monatige Hölle
Liebe Ann Landers,
im März 1991 suchte ich ein Zentrum für anonyme HIV-Tests auf. Nach zwei Wochen erfuhr ich, dass mein Test positiv ausgefallen war. Ich war am Boden zerstört: erst 20 Jahre alt und schon zum Tode verurteilt. In meiner Verzweiflung überlegte ich, wie ich am besten Selbstmord begehen könnte. Ermutigt von Verwandten und Freunden, entschied ich mich dann aber, zu kämpfen. Meine Arzte in Dallas sagten mir, in Kalifornien würden HIV-Patienten am besten betreut. Also packte ich meine Sachen und zog nach Westen. Ich brauchte drei Monate, um einen Arzt zu finden, zu dem ich Vertrauen hatte. Vor der Behandlung bestand er aber auf weiteren Tests. Stellen Sie sich vor, wie erschüttert ich war, als die neuen Ergebnisse negativ waren. Der Arzt ließ erneut testen - wieder eindeutig negativ.

Ich bin so dankbar, dass ich gesund bin, aber die 18 Monate, in denen ich glaubte, das Virus in mir zu tragen, haben mein Leben grundlegend verändert. Ich bitte alle Arzte inständig, noch vorsichtiger und sorgfältiger zu sein. Und Ihren Lesern möchte ich sagen: Lassen Sie das Ergebnis auf jeden Fall überprüfen und holen Sie mindestens ein zweites Gutachten ein, um sicherzugehen. Ich werde mich weiterhin alle sechs Monate auf HIV testen lassen, aber ich werde mich nicht mehr so schnell erschrecken lassen.
David aus Dallas

Frage zu den Texten:

Warum wurde wohl der Gedanke eines Pflicht-AIDS-Tests in Deutschland verworfen?

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 3

Diese Texte dienen der weiteren Vertiefung des Kontextes „AIDS-Test". Sie tragen zwar nicht unmittelbar zur Vertiefung der mathematischen Problemstellung bei, aber erhellen die Relevanz des Problems in der Realität: Schon ein positives Testergebnis wirkt sich massiv auf das Leben einer Person aus, selbst wenn keine HIV-Infektion vorliegt. Die Frage nach der Güte des Tests ist daher von zentraler Bedeutung für den Patienten, aber auch für den Diagnostiker.

Zur Frage:
Es gibt in Praxis keine solchen Plichttests, weil z.B. bei 18.000.000 aus NRW (auch mit Doppeltest) einige Leute falsch getestet würden, wie wir sahen. AIDS-Tests dürfen sowieso nur mit Einwilligung der Patienten erfolgen. Oft ist ein Grund vorhanden, warum bei Personen ein AIDS-Test durchgeführt wird, z.B. sexueller Kontakt ohne Kondom, Drogenabhängigkeit, Symptome der Krankheit AIDS, Blutspenden. Der Einfluss dieser Faktoren auf die Wahrscheinlichkeit von Testergebnissen folgt in AB 4. Diese Themen sind i.A. auch Gegenstand der Sexualaufklärung (evtl. begleitend).

AB 4: Einfluss der Basisrate

Aus dem HIV/AIDS-Bericht II/2002, Robert-Koch-Institut Berlin
HIV-Infektionen sind bei manchen Bevölkerungsgruppen deutlich häufiger als bei anderen, man spricht von unterschiedlichen **Basisraten**. Z.B. bei homosexuellen Männern, Drogenabhängigen, die ihren „Stoff" intravenös spritzen, heterosexuellen Partnern von Abhängigen, außerdem Blutern oder Kindern HIV-infizierter Frauen (sog. Risikogruppen) sind die HIV-Basisraten viel höher als bei anderen Bevölkerungsgruppen.
Nach Schätzung gibt es in Berlin 7500 intravenös Drogenabhängige (IVDA), davon sind 848(*) HIV-infiziert.
(*) *Stand 7/2002*

Aufgaben

Nehmen wir an, bei einer Person aus Berlin wird ein ELISA-AIDS-Test gemacht. Es stellt sich heraus, dass die Person regelmäßig Heroin intravenös spritzt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein IVDA aus Berlin HIV-infiziert, wenn der ELISA-Test (Werte aus AB1) positiv war?
2. Erkläre, warum diese Wahrscheinlichkeit viel höher ist als bei der Gesamtbevölkerung von NRW.
3. Fülle die abgebildete Tabelle mit Hilfe der Daten aus Text 6 soweit wie möglich aus.

	Gesamt	HIV-infiziert	Nicht HIV-infiziert
Gesamt			
TEST positiv			
TEST negativ			

4. Versuche nun die restlichen Felder auszufüllen, wenn ein ELISA-Test gemacht wurde.
5. Kannst du auch das Baumdiagramm so ergänzen, dass alle Daten aus der Tabelle enthalten sind?
6. Berechne mit Hilfe der Tabelle die Wahrscheinlichkeit für positive Testergebnisse.
7. Berechne mit Hilfe der Tabelle (bzw. dem Baum) die Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion, wenn der ELISA-Test negativ war.
8. Weitere Situationen zum Üben:

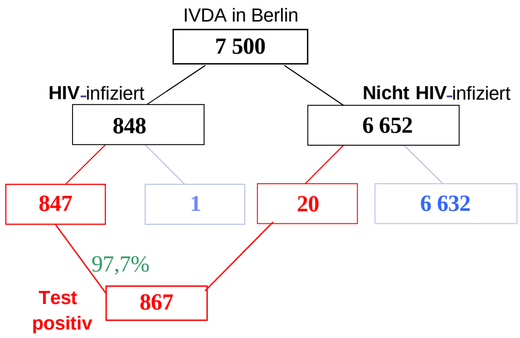
a) *Männer / Frauen*
Gibt es auch einen Unterschied, ob ich als Mann oder Frau einen AIDS-Test machen lasse?
Es gibt in NRW etwa 8 750 000 Männer und 9 250 000 Frauen. Nach einer aktuellen Schätzung des Robert-Koch-Institutes beträgt die Basisrate für HIV in Deutschland bei Männern 0,075% und bei Frauen 0,025%.

b) *Berlin / Thüringen*
In Berlin leben etwa 3 400 000 Menschen, in Thüringen 2 400 000. Die Basisrate für HIV in Berlin wird auf 0,2%, in Thüringen aber auf nur 0,0017% geschätzt. Vergleiche auch mit den Ergebnissen aus NRW.

9. In einer Stadt mit 100 000 Einwohnern ist die Basisrate für eine HIV-Infektion nicht bekannt. Es soll der Zusammenhang zwischen der Basisrate und der A-posteriori - Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion, wenn der ELISA-Test positiv war, untersucht werden. Zeichne einen Funktionsgraph, der diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Basisrate zwischen 0% und 1% darstellt.

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 4

zu 1.

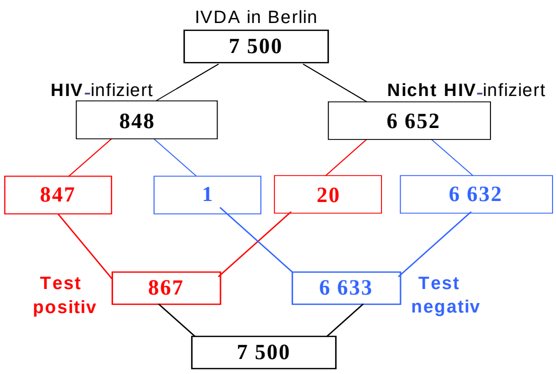


zu 2. Die Basisrate für HIV-Infektion ist viel höher (11,3%). Es gibt zwar immer noch mehr nicht HIV-infizierte als HIV-infizierte, aber der Unterschied ist nicht mehr so extrem wie im Anfangsbeispiel.

zu 3. / 4.

	Gesamt	HIV-infiziert	Nicht HIV-infiziert
Gesamt	7 500	848	6 652
TEST positiv	867	847	20
TEST negativ	6633	1	6632

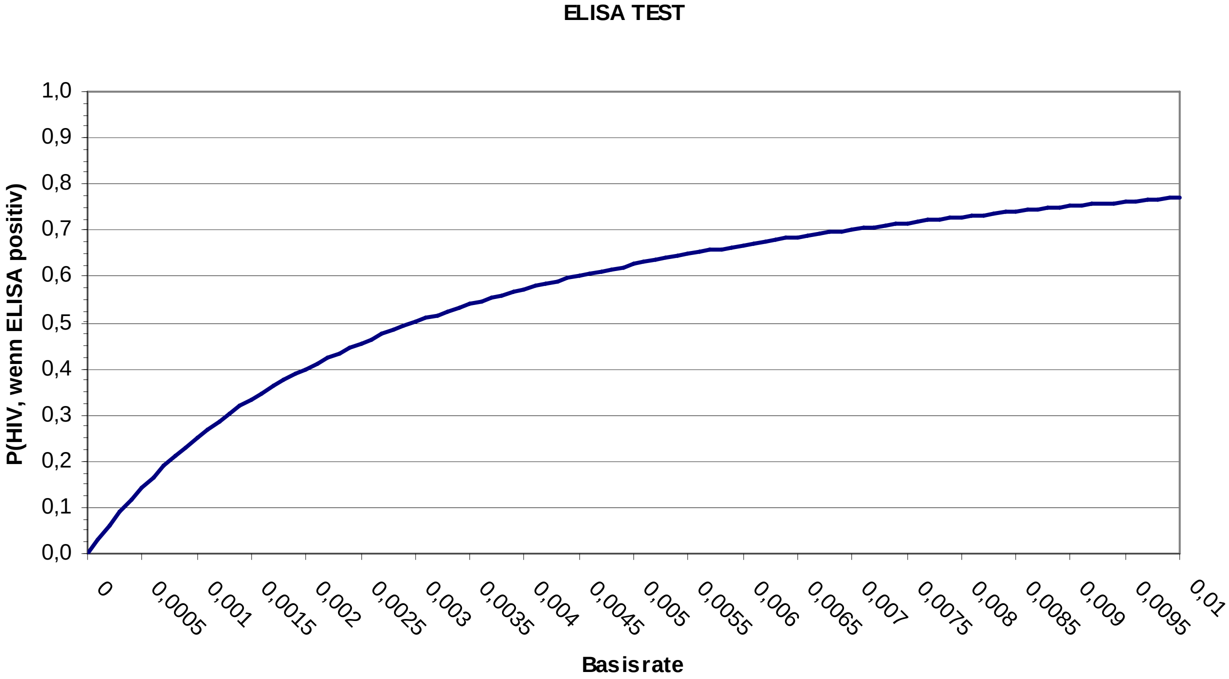
zu 5. Das komplette Baumdiagramm ist den Schülerinnen und Schülern noch unbekannt und sollte im Gespräch entwickelt werden.



zu 6. 867 / 7500 = 11,56%

zu 7. 1 / 6633 = 0,015%

zu 8. Mit den neuen Daten können Aufgabenstellungen wie in 1. bis 7. vertieft werden und die Ergebnisse bei verschiedenen Basisraten verglichen werden. Entsprechende aktuelle Daten zu HIV / AIDS sind auch im Internet verfügbar (Robert-Koch-Institut): http://www.rki.de/INFEKT/AIDS_STD/AZ.HTM zu 9.


ELISA TEST
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
P(HIV, wenn ELISA positiv)
0
0,0005
0,001
0,0015
0,002
0,0025
0,003
0,0035
0,004
0,0045
0,005
0,0055
0,006
0,0065
0,007
0,0075
0,008
0,0085
0,009
0,0095
0,01
Basisrate

AB 5: Das AIDS-Test Problem aus umgekehrter Sicht

VERBESSERTER AIDS-TEST von** NOVOPHARMA* ***?

Der Konzern *NOVOPHARMA* behauptet einen besseren AIDS-Test entwickelt zu haben (als den bewährten *ELISA*-Test). 1 000 000 Proben von Versuchspersonen wurden untersucht. Der neue Test war bei 1998 Proben positiv, sonst negativ. Die Proben durchliefen anschließend das bekannte Testverfahren (*ELISA* + *Western-Blot* + weitere Tests), so dass man genau weiß, welche tatsächlich HIV-infiziert waren und welche nicht. Von den positiv Getesteten waren wirklich 999 HIV-infiziert, von den negativ Getesteten waren wirklich 998 001 nicht HIV-infiziert.

Aufgaben

Wie gut ist der Test von *NOVOPHARMA* wirklich?

1. Zeichne eine Tabelle und fülle sie mit den neuen Werten aus.
2. Zeichne ein Baumdiagramm und fülle es mit den neuen Werten aus.
3. Berechne die neuen Testwerte:
   a) Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test, wenn tatsächlich HIV-Infektion vorliegt (richtig positiv)
   b) Die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Test, wenn keine HIV-Infektion vorliegt (richtig negativ)
4. Sollte man den neuen Test gegenüber dem alten ELISA-Test bevorzugen? (Begründung)
5. Berechne und unterscheide vom Ergebnis aus 3a):
   a) Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion, wenn der Test positiv war.
   b) Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion <u>und</u> einen positiven Test.

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 5

Das AIDS-Test-Problem in „umgekehrter Sichtweise“ ist z.B. für Testentwickler ebenfalls relevant. Von Informationen über die Testergebnisse, also die Folgen der HIV-Infektion, kann auf Wahrscheinlichkeiten für Fehler des Tests geschlossen werden.

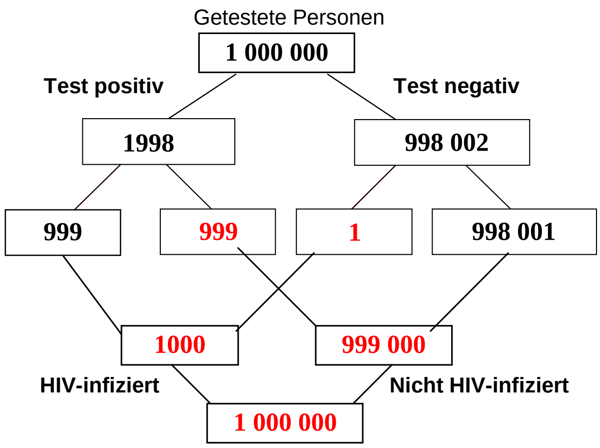
Zur Vertiefung der Darstellungsform soll deutlich werden, dass die Tabelle je nach Problemstellung spalten- oder zeilenweise bzw. auch das Baumdiagramm von oben oder unten benutzt werden kann.

zu 1.

	Gesamt	HIV-infiziert	Nicht HIV-infiziert
Gesamt	1 000 000	1 000	999 000
TEST positiv	1 998	999	999
TEST negativ	998 002	1	998 001

(rot: jeweils zu ergänzen)

zu 2.



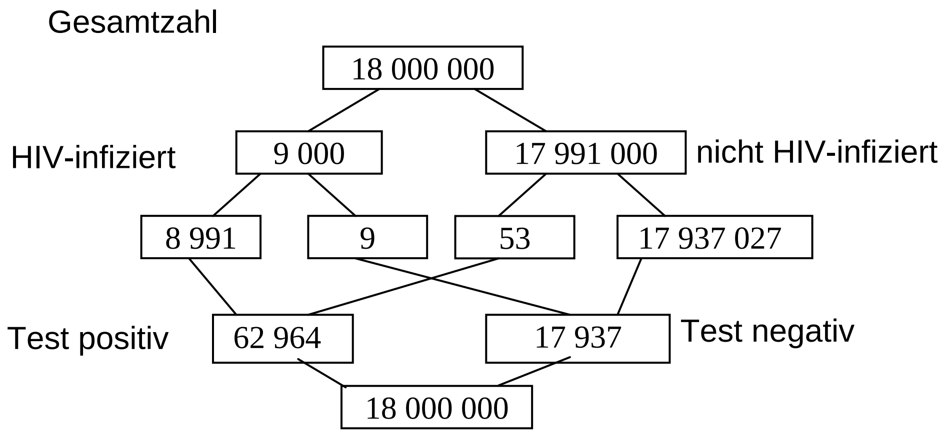
zu 3.
a) 999 / 1000 = 99,9%
b) 998001 / 999000 = 99,9%

zu 4.
Ja. Der neue Test liefert zwar den gleichen Anteil richtig positiver Ergebnisse wie der ELISA-Test („Trefferquote“), aber der Anteil der richtig negativen Ergebnisse ist höher. Er macht also weniger Fehler (bei negativen Ergebnissen).

zu 5.
a) 999 / 1998 = 50%
b) 999 / 1 000 000 = 0,0999%

ÜBERBLICK 1: Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Das AIDS-Test Beispiel für NRW:



Wir haben gesehen, dass es ganz unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten gibt. Wir unterscheiden:

1. Einzelwahrscheinlichkeit

Wir kennen schon die Einzelwahrscheinlichkeit. Sie gilt **nur für ein Merkmal.** z.B. „HIV-infiziert". Das trifft im Beispiel in 9 000 von 18 000 000 Fällen zu.

Man schreibt: P(HIV-infiziert)= $\frac{\text{Anzahl der Fälle, die das Merkmal erfüllen}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{9000}{18000000} = 0{,}05\%$

oder z.B. „Test positiv": P(Test positiv) = $\frac{62964}{18000000} = 0{,}3498\%$

2. UND-Wahrscheinlichkeit

Bei der UND-Wahrscheinlichkeit müssen **zwei Merkmale gleichzeitig** zutreffen: z.B. „HIV-infiziert" **und** „Test positiv". Das trifft in 8 991 von 18 000 000 Fällen zu.

Man schreibt: P(HIV-infiziert und Test positiv) =

$= \frac{\text{Anzahl der Fälle, die beide Merkmale erfüllen}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{8991}{18000000} = 0{,}04995\%$

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich nicht auf die Gesamtzahl, sondern nur auf die Fälle, die eine bestimmte Bedingung bereits erfüllen: z.B. „Test positiv" **unter der Bedingung** „HIV-infiziert". Das trifft für 8 991 von 9 000 Personen zu.

Man schreibt:

P(Test positiv | HIV-infiziert) = $\frac{\text{Anzahl der Fälle, die Merkmal und Bedingung erfüllen}}{\text{Anzahl der Fälle, die die Bedingung erfüllen}} = \frac{8991}{9000} = 99{,}9\%$

Merkmal **Bedingung**

Man liest: Die Wahrscheinlichkeit für „Test positiv" unter der Bedingung „HIV-infiziert" oder wenn „HIV-infiziert".

Beachte! P(HIV-infiziert | Test positiv) unterscheidet sich von P(Test positiv | HIV-infiziert).

P(HIV-infiziert | Test posit = $\frac{8991}{62964} \approx 14{,}28\%$

AB 6: Übungsaufgaben zum ÜBERBLICK 1

1.

a) Benenne (in der Kurzschreibweise) und berechne alle Einzelwahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

b) Benenne und berechne alle UND-Wahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

c) Benenne und berechne alle bedingten Wahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

d) Ordne den Wahrscheinlichkeiten vor dem Test die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nach positivem und negativem Test zu und erläutere jeweils, welchen „Informationsgewinn“ das Testergebnis brachte.

2.[1]

Ein Test zur Diagnose der Krankheit „Xelophantitis“ (XELO) ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% positiv, wenn man an XELO erkrankt ist. Wenn man nicht an XELO erkrankt ist, fällt das Testergebnis mit 94%iger Wahrscheinlichkeit negativ aus. Vor der Teilnahme an einem Test bei einer routinemäßigen Untersuchung hat man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1% XELO.

a) Übersetze die Wahrscheinlichkeitswerte aus dem Aufgabentext in einen Baum oder eine Tabelle mit Häufigkeitswerten und fülle sie komplett aus.

b) Welche Art von Wahrscheinlichkeit ist es jeweils? Schreibe die Wahrscheinlichkeiten auch in der Kurzform.

c) Benenne und berechne alle möglichen weiteren Wahrscheinlichkeitswerte für das XELO-Test Beispiel.

d) Bestimme zu den Wahrscheinlichkeiten **vor** dem Test die jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeiten **nach positivem** bzw. **negativem** Test und erläutere jeweils, welchen „Informationsgewinn“ das Testergebnis brachte.

[1] Der Aufgabentext stammt aus Schmid, A & Weidig, I. (1996, Hrsg.). Lambacher Schweizer 9 – Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe NRW. Stuttgart: Klett

Didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zum Überblick 1

Ziele dieses Überblicks und des dazugehörigen AB 6:

- Vertiefung und Abgrenzung von Wahrscheinlichkeitsarten, die bisher Verwendung fanden.
- Mathematisierung: Übersetzung von Wahrscheinlichkeitswerten in Häufigkeiten und entsprechende Darstellungen
- Bezeichnen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus den Häufigkeitsdarstellungen

Am Ende dieser Lerneinheit sollen die Schülerinnen und Schüler...

...das Modellieren und den Umgang mit den Häufigkeitsdarstellungen Baum und Tabelle sicher beherrschen.

...verschiedene Wahrscheinlichkeitsarten benennen und unterscheiden.

...die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Darstellungen berechnen können.

…den Sinn der mathematischen Modellierung als wichtige Erkenntnis für Mediziner, Patienten, sich selbst etc. erfahren haben.

…in kritischer Weise über AIDS-Testverfahren und Folgen nachgedacht haben.

AB 7: Mordfall

AKTENZEICHEN XY-(ungelöst):

An einem Sommerabend im Juni 1999 ging nahe Wuppertal die 37-jährige Frau C.S. im Wald spazieren. Die Frau wurde von einem vermummten Fremden angegriffen, der sie mit einer Pistole bedrohte und versuchte, sie zu vergewaltigen. Als sie sich wehrte, schoss der Mann kaltblütig auf die Frau und floh. Die Frau überlebte.

Drei Tage später wurde von der Polizei der 25-jährige Schornsteinfeger G.K. festgenommen, der zugab, öfter in dem Waldstück gewesen zu sein, jedoch angeblich nicht zur Tatzeit. Das Opfer war bei einer Gegenüberstellung völlig unsicher, ob der Schornsteinfeger der Täter sein könnte, v.a. natürlich wegen der Vermummung und der Geschwindigkeit des Angriffes.

Dennoch wird schließlich der Schornsteinfeger des versuchten Mordes und der versuchten Vergewaltigung angeklagt. Die Anklage stützt sich vor allem auf ein Indiz, nämlich das Blut des Täters, dass sich unter den Fingernägeln der Frau befunden hatte und dessen Blutgruppe der des Schornsteinfegers entsprach. Ein Sachverständiger sagte aus, dass nur etwa 4% der Deutschen diese seltene Blutgruppe hätten. Er folgerte, dass eine zufällige Übereinstimmung der Blutgruppe nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% auftritt und dass deshalb der Schornsteinfeger mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% der Täter sein muss.

Aufgaben

1. Du sollst die Verteidigung des Angeklagten übernehmen. Die Frage ist: Ist die Überlegung des Sachverständigen richtig? Wenn nicht, schätze einen anderen Wert.

2. Veranschauliche den Fall mit einem Baumdiagramm oder einer Tabelle und gehe von 10000 möglichen Tätern aus. Gib nun eine Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Schornsteinfeger der Täter ist.

3. Dass genau 10 000 Männer die Tat begangen haben könnten, ist natürlich lediglich eine Schätzung. Wenn es ein weiteres Indiz gäbe (z.B. der Täter hatte blaue Augen), müsste natürlich die Menge der potenziellen Täter entsprechend verkleinert werden. Was passiert mit dem Ergebnis, wenn die Menge der möglichen Täter kleiner wird?

Info: Indizien vor Gericht

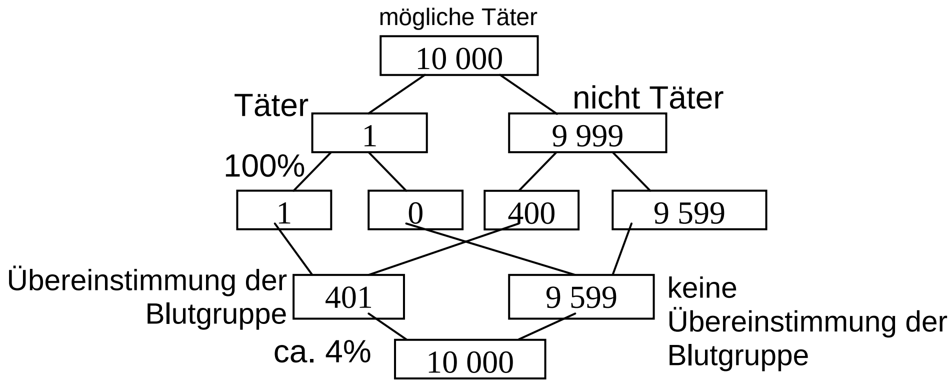
Die Annahme eines bestimmten Bevölkerungsteils als Grundmenge bleibt immer eine Schätzung. Indem man die Grundmenge verkleinert oder vergrößert, kann man eine obere und eine untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit für die Täterschaft angeben. Die Angabe eines konkreten Bevölkerungsteils und die Zerlegung in Häufigkeiten liefern eine vernünftige Abschätzung und vermeiden Trugschlüsse wie die des Sachverständigen im Mordfall von Wuppertal.

4. a) Überlege eine vernünftige untere und obere Grenze für die Grundmenge der möglichen Täter (Begründung).
   b) Gib jeweils die Wahrscheinlichkeit vor der Bestimmung der Blutgruppe an, dass der Angeklagte der Täter ist.
   c) Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angeklagte der Täter ist, wenn die Blutgruppe übereinstimmt.
   d) Überlege, welchen Informationsgewinn das Indiz „Übereinstimmung der Blutgruppe" jeweils bringt.

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 7

zu 1. Nein, das zufällige Übereinstimmen der Blutgruppe kommt nur bei Nicht-Tätern vor. Die Übereinstimmung der Blutgruppe des Täters mit dem Blut unter den Fingernägeln des Opfers gilt dagegen als sicher.

zu 2.



Richtig ist daher P(Täter | Übereinstimmung) = 1 / 401 ≈ 0,25%

Hinweis: Die Häufigkeitsabschätzung liefert hier keine exaktes Ergebnis, das aber für die Beurteilung der Situation völlig ausreicht. Im Modellunterricht wurde auch der umgekehrt geordnete Baum verwendet und von exakt 4% für „Übereinstimmung der Blutgruppe“ ausgegangen, so dass sich eine Lösung von 1/400 ergibt. Es erwies sich aber als völlig problemlos, wenn Ergebnisse gerundet wurden. Im Übrigen konnte so auch den Schülern vermittelt werden, dass eine übertriebene Genauigkeit bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in vielen Fällen sinnlos ist.

zu 3. Das Ergebnis wird **größer**! (mit Häufigkeitsbetrachtung leicht zu sehen)

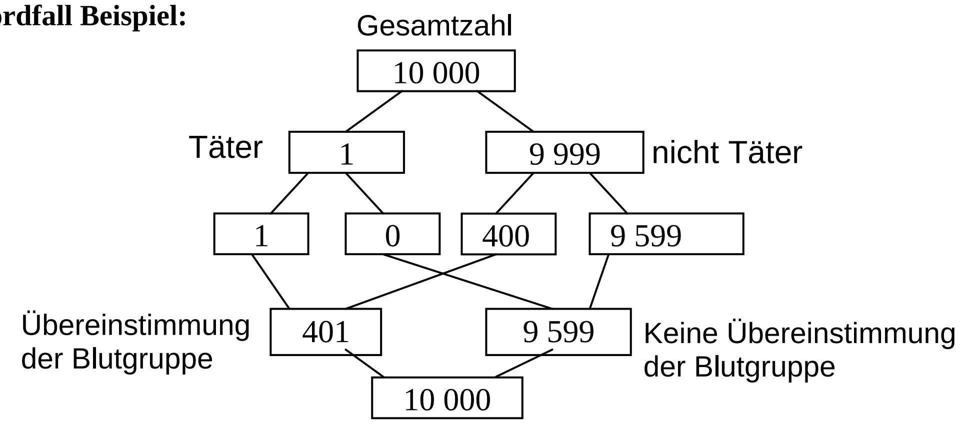
zu 4.a,b,c) Z.B.

Grundmenge der möglichen Täter	1 000	10 000	100 000
Wahrscheinlichkeit für Täterschaft vor der Bestimmung der Blutgruppe	0,1%	0,01%	0,001%
Wahrscheinlichkeit, wenn Übereinstimmung der Blutgruppe	1/41 ≈ 2,5%	1/401 ≈ 0,25%	1/4001 ≈ 0,025%

d) Absolut gesehen steigt die Wahrscheinlichkeit jeweils unterschiedlich an. Relativ gesehen liegt die Erhöhung beim Faktor 25.

ÜBERBLICK 2: Wahrscheinlichkeiten neu bewerten

Das Mordfall Beispiel:



Hypothesen und Indizien

Die Probleme, die wir behandelt haben, beinhalten ein Bewertung der Wahrscheinlichkeit und sind nach demselben Muster aufgebaut:

1. Zunächst gibt es verschiedene **Hypothesen**, ob etwas zutrifft oder nicht. Die Möglichkeiten werden jeweils mit einer **A-priori-Wahrscheinlichkeit** bewertet.

Bsp.: *Hypothese 1*: „Eine Person ist der Täter" bewertet mit P(Täter) = 1/10000 = 0,01%
Hypothese 2: „Eine Person ist nicht der Täter" bewertet mit
P(nicht Täter) = 9999/10000 = 99,99%

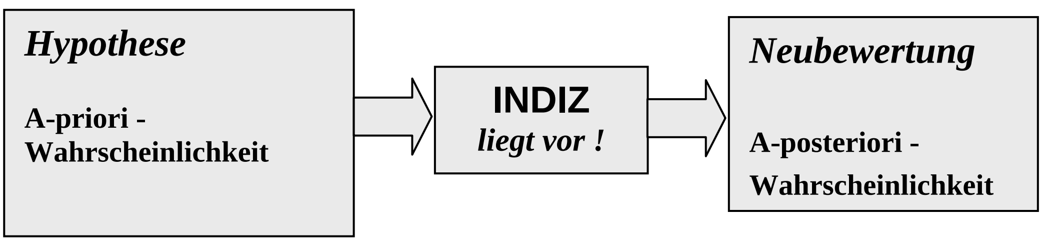
2. Es werden **neue Daten (Indiz)** gewonnen, mit denen die Hypothesen neu bewertet werden können.

Bsp.: *Indiz:* „Die Blutgruppe des Täters und des Blutes unter den Fingernägeln des Opfers stimmt überein."

3. Die Hypothesen werden durch die neuen Daten (Indiz) neu bewertet. Die Neubewertung wird jeweils mit der **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit** ausgedrückt.

Bsp.: *Hypothese 1:* „Eine Person ist der Täter" *neu bewertet* durch Indiz „Übereinstimmmung der Blutgruppe" ergibt P(Täter | Übereinstimmung der Blutgruppe) = 1 / 401 ≈ 0,25%

Hypothese 2: „Eine Person ist nicht der Täter" *neu bewertet* durch Indiz „Übereinstimmmung der Blutgruppe" ergibt P(nicht Täter | Übereinstimmung der Blutgruppe) = 400 / 401 ≈ 99,75%



AB 8: Übungsaufgaben zum ÜBERBLICK 2

1.
a) Überlege, wann im AIDS-Test Beispiel Wahrscheinlichkeiten neu bewertet wurden.
b) Was waren jeweils die Hypothesen und die möglichen Indizien?
c) Wann brachten die Neubewertungen keine ausreichende Sicherheit und was wurde dann getan?

Löse die folgenden Probleme mit den gelernten Methoden (Baum oder Tabelle mit Häufigkeiten). Formuliere jeweils Hypothese und Indiz und gib A-priori - und A-posteriori Wahrscheinlichkeit an.

2.
30% aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Laut einer repräsentativen Umfrage trinken 20% aller Amerikaner regelmäßig zum Frühstück Tomatensaft. Nur 2% der Nichtamerikaner trinken regelmäßig zum Frühstück Tomatensaft. Du siehst einen Konferenzteilnehmer Tomatensaft trinken.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Amerikaner ist?

3.
In einer amerikanischen Stadt gibt es zwei Taxiunternehmen, das eine hat nur grüne Taxis, die Taxis des anderen Unternehmens sind alle blau. Nachdem ein Taxi nachts einen Unfall verursachte und der Fahrer anschließend Fahrerflucht beging, kommt es zu einer Gerichts-verhandlung. Es gibt einen Zeugen, der das davonfahrende Taxi als blau identifizierte. Das Gericht untersucht nun die Fähigkeit des Zeugens, die Farbe eines Taxis bei Nacht richtig zu erkennen. Dazu geht ein Gerichtsdiener mit dem Zeugen an den Ort, von dem aus der Zeuge den Unfall beobachtet hat und lässt ihn die Farbe der zufällig vorbeifahrenden Taxis identifizieren.
Dabei ergibt sich folgendes:
- 15% der vorbeifahrenden Taxis waren blau.
- Wenn ein vorbeifahrendes Taxi blau ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge es als blau identifiziert, 80%.
- Wenn ein vorbeifahrendes Taxi grün ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge es als blau identifiziert, 20%.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorbeifahrendes Taxi blau ist, wenn der Zeuge es als blau identifiziert?

4.
Rauchsensoren eines bestimmten Typs bieten einen einigermaßen zuverlässigen Schutz, indem sie rechtzeitig bei Ausbrechen eines Brandes Alarm melden.
In 5 % aller Brandfälle gibt die Anlage allerdings keinen Alarm. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag. In der Fabrikationshalle, in der der Sensor installiert ist, beträgt das tägliche Brandrisiko 10%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Halle brennt, wenn der Alarm losgeht?

Didaktische Kommentare für Lehrerinnen und Lehrer zum Überblick 2:

Ziele dieses Überblicks:

- Begreifen der Problemsituationen als eine Neubewertung einer Wahrscheinlichkeit unter neuen Daten („Lernen aus Erfahrung"),

- Herausarbeitung des hypothetischen, vorläufigen Charakters einer Wahrscheinlichkeit

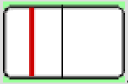
- Wichtige neue Begriffe einführen:
  A-priori – A-posteriori Wahrscheinlichkeit,
  Hypothese – Indiz (neue Daten)

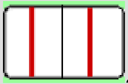
- Üben der Terminologie an Beispielen

Anmerkung:
Die Denkweise der Neubewertung von Hypothesen durch neue Daten in diesem Zusammenhang hat einen weiterführenden Sinn (curricularer Bezug zur Sek.II):
Bei der späteren Behandlung von „klassischen" Hypothesentests werden bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet (Signifikanz: P(Daten | Nullhypothese). Einem anderem Zugang zum Hypothesentestens („Bayes-Statistik") liegt die Neubewertungsdenkweise zugrunde (Berechnung von P(Hypothese | Daten)).
Vergleichende Gegenüberstellung beider Verfahrensweisen (zumindest grundsätzlich) wird im Lehrplan als sehr lehrreich angesehen.

AB 9: Schwangerschafts- und Vaterschaftstest

Schwanger oder nicht? Besonders einfach kann dies mit dem **expect®**-Schwangerschaftstest festgestellt werden, der mit 99% Sicherheit am Tag nach Ausbleiben der Menstruation feststellt, ob Sie schwanger sind oder nicht.


1 rote Linie: Nicht schwanger !


2 rote Linien: Schwanger !

Aufgaben

1. Was könnte die Sicherheitsangabe im Werbetext bedeuten? Warum ist sie ungenau?

2. Realistischerweise stehen bei solchen Tests Wahrscheinlichkeiten für **richtig positive** und **richtig negative** Ergebnisse zur Verfügung. Nehmen wir für beide Wahrscheinlichkeiten 99% an. Schätzungen gehen davon aus, dass nur 100 von 1000 Frauen, die einen Schwangerschaftstest machen, tatsächlich schwanger sind.
   a) Gib die A-priori -Wahrscheinlichkeit für Schwangerschaft an.
   b) Schätze die A-posteriori -Wahrscheinlichkeiten für „Schwanger, wenn der Test positiv ist“ und für „Nicht schwanger, wenn der Test negativ ist“
   c) Zeichne eine Darstellung mit Häufigkeiten.
   d) Berechne die A-posteriori -Wahrscheinlichkeiten.

Aus dem Internet:

Sie wollen wissen, wer der Vater ist? Der Vaterschaftstest ist ein aktuelles und ebenso brisantes Thema. Die Berichte über Vaterschaftsklagen häufen sich derzeit in den Medien. Das verwundert nicht, da nach Meinung der Sachverständigen ca. 10 Prozent aller Kinder von einem anderen Mann als dem Vermuteten abstammen. Damit Sie sicher sein können, bieten wir Ihnen den DNA-Test **papacheck®** mit einer Ergebnissicherheit von über 99,99% an. Sollte der Test negativ ausfallen, ist eine Vaterschaft ausgeschlossen. Darauf können sie sich 100-prozentig verlassen! Der lässt sich einfach von zu Hause aus durchführen, ohne Arztbesuch und ohne Blutentnahme. Der Test kann allein aus den Speichelproben von Kind und möglichem Vater durchgeführt werden.

Im Einsatz des Tests hat sich gezeigt, dass er zu 99,99% positiv ist, wenn eine Vaterschaft vorliegt (Die Probe von Kind und dem möglichen Vater stimmen überein). Er ist zu 0,001% negativ (keine Übereinstimmung), wenn keine Vaterschaft vorliegt.

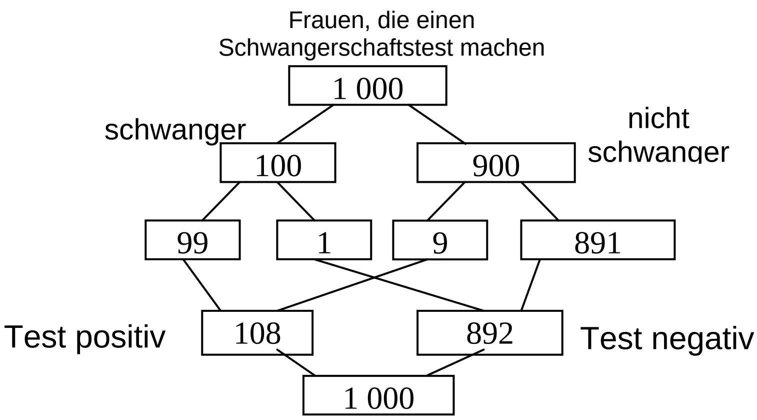
3. Überprüfe auch die Angaben zur Sicherheit des Vaterschaftstests „papacheck“!
   (gehe von 1.000.000 Untersuchungen aus)

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 9:

zu 1.
Mit 99% Sicherheit stellt der Test fest, ob man schwanger ist oder nicht - was soll das bedeuten?
Ist die Wahrscheinlichkeit für eine Schwangerschaft, wenn der Test positiv *(2 rote Linien)* ist, gemeint? Oder für „nicht schwanger“, wenn der Test negativ (*1 rote Linie*) ausfällt?
Genauerweise müssten 2 Wahrscheinlichkeitswerte angegeben werden, jeweils für positiven Test und für negativen Test.

zu 2.
a) a priori: P(Schwangerschaft vor dem Test) = 100 / 1000 = 10%

b)



c) P(schwanger | Test positiv) = 99 / 108 = 91,7%
P(nicht schwanger | Test negativ) = 891 / 892 = 99,9%

zu 3.
P(Vaterschaft | Test positiv) > 99,99% (Angabe stimmt!)
P(keine Vaterschaft | Test negativ) = 99,91% (Angabe 100% ist falsch!)

Zusatzmaterial zur Kontextvertiefung zu AB 9

Was ist ein Schwangerschaftstest?

Ihre Regel bleibt aus, Ihnen ist morgens beim Aufstehen schlecht und Sie verspüren ein Ziehen in den Brüsten? Dann sind das die ersten Symptome, die auf eine Schwangerschaft hinweisen können. Ob eine Schwangerschaft tatsächlich vorliegt, können Sie mit Hilfe eines Schwangerschaftstests feststellen. Er lässt sich mit Urin (Stäbchentest) oder Blut (Blutentnahme beim Arzt) durchführen. Urintests sind in der Apotheke und sogar in manchen Supermärkten erhältlich.

Wie funktioniert der Test?

Während sich die befruchtete Eizelle in die Gebärmutterschleimhaut einnistet, wird vom Mutterkuchen das schwangerschaftserhaltende Hormon HCG (Human Chorion Gonadotropin) hergestellt. HCG kommt im Körper einer gesunden Frau ausschließlich während der Schwangerschaft vor. Im Blut ist es bereits sechs bis neun Tage, im Urin erst zirka 14 Tage nach der Befruchtung nachweisbar. Der Schwangerschaftstest misst den HCG-Spiegel. Dadurch ist es möglich, bereits am ersten Tag nach Ausbleiben der Menstruation (bei einem regelmäßigen Zyklus) festzustellen, ob Sie schwanger sind oder nicht.

Wann muss man zum Arzt?

- Wenn der Schwangerschaftstest mit Urin-Stäbchen positiv ist.
- Wenn der Test negativ ist, die Blutungen jedoch ausbleiben.

Was kann der Arzt tun, um sicher zu gehen?

- Der Arzt kann bei einer Schwangerschaft HCG-Hormon im Blut nachweisen.
- Der Arzt kann mit Ultraschall feststellen, ob eine Schwangerschaft vorliegt.

Untersuchungsmethode von Vaterschaftstests

Die Fortschritte in der Molekularbiologie haben dazu geführt, dass sich biologische Verwandtschaftsverhältnisse auf der Ebene des Erbgutes (der DNA) kostengünstig und mit minimalen Probenmengen in einer Präzision klären lassen, die vor einigen Jahren noch undenkbar war. Das Verfahren, mit dem das Erbgut auf Unterschiede zwischen einzelnen Personen getestet wird, nennt man, da das Ergebnis so individuell wie ein Fingerabdruck ist, "genetischer Fingerabdruck.

Um den genetischen Fingerabdruck einer Person zu erhalten, muß zunächst die Erbsubstanz (DNA) isoliert werden. Die DNA findet sich in nahezu allen Körperzellen. Als schmerzfreie und einfach durchführbare Methode zur DNA-Gewinnung hat sich der Wangenschleimhautabstrich (oder auch Speicheltest) bewährt. Die wenigen Schleimhautzellen, die auf einem speziellen Wattestäbchen haften bleiben, wenn man mit ihm auf der Innenseite der Wange entlangschabt, reichen aus, um den genetischen Fingerabdruck durchzuführen.

Die Menge an DNA, die man aus einem Wangenabstrich erhält, genügt, um die DNA-Abschnitte, die Unterschiede zwischen einzelnen Individuen enthalten, mithilfe der PCR-Methode zu vermehren. Im Regelfall werden 15 verschiedene Abschnitte in der DNA vermehrt, um eine Aussage über das Verwandtschaftsverhätnis zu erhalten. Die vermehrte DNA wird dann mittels Gelelektrophorese ihrer Größe nach aufgetrennt. Der Unterschied zwischen einzelnen Individuen zeigt sich dann in der unterschiedlichen Größe der vermehrten DNA-Abschnitte.

Vergleicht man jetzt die Ergebnisse zwischen einem Kind und seinem möglichen Vater, so muß das Kind in jedem der 15 verschiedenen DNA-Abschnitte in einem Allel (jede Person hat ein Allel vom Vater und ein Allel von der Mutter) die gleiche Abschnittslänge wie der Vater besitzen. Ist dies nicht in allen 15 Abschnitten der Fall, so kann der Mann als Erzeuger des Kindes ausgeschlossen werden.

AB 10: Mammografie

MEDIZINISCHE RUNDSCHAU

Brustkrebs ist die häufigste Krebsart bei Frauen. Frauen wird eine routinemäßige Brustkrebs-Vorsorgeuntersuchung ab 35 Jahren empfohlen, um eine eventuelle Krebserkrankung frühzeitig zu erkennen und behandeln zu können. Zunächst wird dabei eine sogenannte „Mammografie“ durchgeführt. Bei der Mammografie wird ein „Bild“ von der Brust gemacht, es ist also kein operativer Eingriff nötig.

Aus der langjährigen Erfahrung weiß man: Wenn eine Frau Brustkrebs hat, liefert die Mammografie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,6% ein positives Ergebnis. Das Ergebnis der Mammografie ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% negativ, wenn kein Brustkrebs vorliegt. Bei 1 Million Frauen aus Deutschland, die jährlich routinemäßig an einer Vorsorgeuntersuchung für Brustkrebs teilnehmen, kommen tatsächlich im Durchschnitt 1500 Fälle von Brustkrebs vor.

Aufgaben:

1. a) Zeichne eine geeignete Darstellung mit Häufigkeiten zu diesem Sachverhalt.
   b) Schätze die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nach positivem und negativem Testergebnis.
   c) Nenne die Fälle, bei denen die Mammografie falsche Ergebnisse liefert. Wieviele sind es jeweils?
   d) Diskutiere kurz mögliche Folgen der Fehler bei der Mammografie.
2. a) Schreibe Wahrscheinlichkeiten aus dem Text abgekürzt in der gelernten Schreibweise. Welche Arten von Wahrscheinlichkeiten sind es jeweils?
   b) Gib P(Brustkrebs) für eine durchschnittliche Frau aus Deutschland, die routinemäßig zur Vorsorgeuntersuchung geht, an. Wie nennt man diese Wahrscheinlichkeit?
   b) Gib auch P(nicht Brustkrebs **und** positive Mammografie) an.

3. a) Berechne mithilfe der Darstellung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zur Vorsorgeuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn die Mammografie
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zur Vorsorgeuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, wenn die Mammografie ein negatives Ergebnis liefert.

4. Diskutiere kurz den Aussagewert einer Mammografie im Hinblick auf die Ergebnisse aus Aufgabe 3. Betrachte dazu die Situation vor und nach der Mammografie.

Fortsetzung des Textes aus „Medizinische Rundschau“:
…In der Realität würde aber kein Arzt eine Entscheidung, z.B. über eine Operation, treffen aufgrund eines positiven Ergebnissses bei der Mammografie. In der Regel wird nach einer positiven Mammografie auch eine Sonografie (Untersuchung mittels Ultraschall) durchgeführt. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, liefert die Sonografie zu 95% ein positives Ergebnis. Das Ergebnis der Sonografie ist zu 96% negativ, wenn kein Brustkrebs vorliegt.

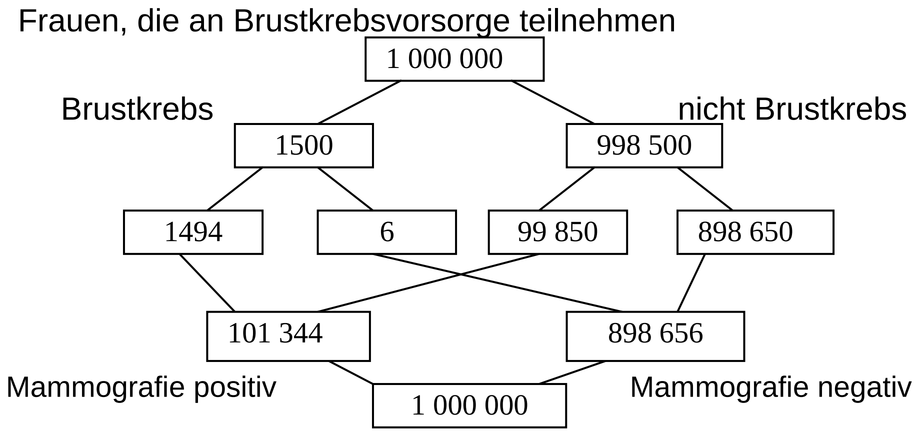
5. a) Zeichne eine neue Darstellung zu dem Sachverhalt, dass alle bei der Mammografie positiv Getesteten nun eine Sonografie erhalten.
   b) Berechne mithilfe der Darstellung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positiver Mammografie, Brustkrebs hat, wenn die Sonografie auch ein positives Ergebnis liefert.
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positiver Mammografie, keinen Brustkrebs hat, wenn die Sonografie ein negatives Ergebnis liefert.
   d) Beurteile kurz, ob ein positive Ergebnisse bei Mammografie **und** Sonografie bereits sicher genug Brustkrebs bei Frauen anzeigen.

…Bei Frauen, deren Mutter bereits an Brustkrebs erkrankt war, ist die Wahrscheinlichkeit ca. 4-mal höher als normalerweise (siehe Aufgabe 2b), Brustkrebs zu bekommen. Nehmen wir an, eine Frau, deren Mutter Brustkrebs hatte, erhält ein positives Mammografieergebnis.

6. a) Schätze, wie sich die A-posteriori -Wahrscheinlichkeit aus 3a) verändern wird.
   b) Zeichne eine neue Darstellung für Mammografie mit erhöhtem Brustkrebs-Risiko und gehe von 10.000 solchen untersuchten Frauen aus.
   c) Berechne für Frauen, deren Mutter bereits an Brustkrebs erkrankt war, die Wahrscheinlichkeit P(Brustkrebs | positve Mammografie).

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 10

1a.



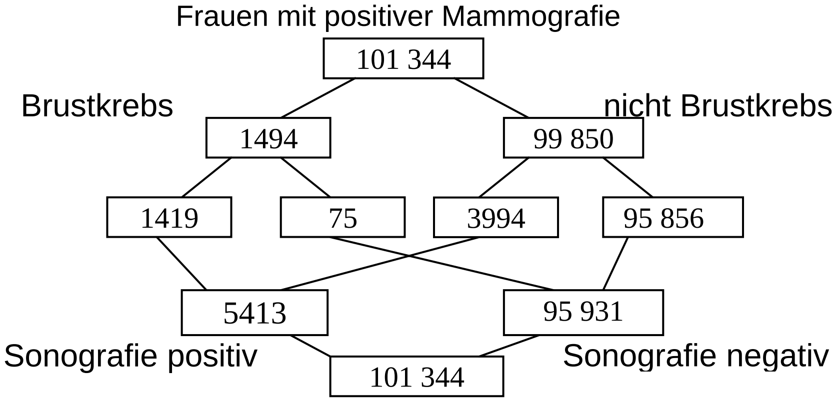
1c. Falsch-negativ Fehler: Es liegt Brustkrebs vor, aber die Mammografie ist negativ (6 Fälle)
Falsch-positiv Fehler: Es liegt nicht Brustkrebs vor, aber die Mammografie ist positiv (99.850 Fälle)
1d. Der falsch-negativ Fehler kann dazu führen, dass Brustkrebs nicht erkannt wird und keine wirksamen Gegenmaßnahmen eingeleitet werden. Das ist in jedem Fall zu vermeiden.
Der falsch-positiv Fehler kann dazu führen, dass fälschlich ein Brustkrebs diagnostiziert wird und eine Patientin sich unnötig Sorgen macht. Deshalb muss zunächst in weiteren Untersuchungen das Ergebnis der Mammografie bestätigt werden (z.B. Sonografie, Kernspinmammografie, Biopsie).

2a. P (positive Mammografie | Brustkrebs) = 99,6%,
P (negative Mammografie | kein Brustkrebs) = 90%
Es sind bedingte Wahrscheinlichkeiten.
2b. P(Brustkrebs) = 1500 / 1000000 = 0,15%. A-priori- bzw. Einzelwahrscheinlichkeit
2c. P(nicht Brustkrebs und positive Mammografie) = 99850 / 1000000 = 9,985%

3a. P(Brustkrebs | positive Mammografie) = 1494 / 101344 = 1,47%
Der Wert ist so gering, weil es so wenig Krebskranke im Vergleich zu den Gesunden gibt.
b. P(nicht Brustkrebs | negative Mammografie) = 898650 / 898656 > 99,999%

4. Vor der Mammografie kann nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15% angenommen werden, dass eine Frau Brustkrebs hat. Nach der Mammografie hat sich die Wahrscheinlichkeit für Brustkrebs im positiven Fall auf 1,5% erhöht, im negativen Fall ist aber so gut wie sicher (Wahrscheinlichkeit über 99,999%), dass kein Brustkrebs vorliegt.

5a.



5b. P(Brustkrebs | M+ und S+) = 1419 / 5413 = 26,2%

5c. P(kein Brustkrebs | M+ und S -) = 95856 / 95931 = 99,92%

5d. Nein, 26,2% ist noch viel zu unsicher, es sind weitere Untersuchungen nötig (z.B. Gewebeentnahme = Biopsie).

6a. [Schätzung]. qualitativ: sie wird ca. 4mal höher sein.

6b. ....Darstellung wie bei 1a mit geänderten Werten.

6c. P(Brustkrebs bei höherem Risiko | positive Mammografie) = 60 / 1054 = 5,7%

AB 11: BSE-Krise

Der Landwirt **vom 24.11.2002**

Auch 2 Jahre nach dem ersten (offiziellen) Fall von Rinderwahnsinn ist die BSE-Krise in Deutschland noch nicht beendet. Seither wurden in Deutschland 5,5 Millionen Rinder getestet. Dabei wurden bislang 232 BSE-Erkrankungen festgestellt. Es gebe „keinerlei Grund für eine Entwarnung“, sagte Verbraucher-Ministerin Renate Künast (Grüne) jetzt in Berlin. Der Rindfleisch-Konsum liegt aber heute wieder auf dem vorherigen Niveau. Zur Verbesserung des Schutzes der Verbraucher wurden BSE-Schnelltests eingeführt. Ziel der Ministerin ist es, dass in Deutschland nur noch BSE-getestetes Fleisch verkauft wird. Für den Verbraucher stellt sich nun die Frage, wie zuverlässig die verwendeten Schnelltests sind, und welche Aussagekraft die Bezeichnung „BSE-getestet“ hat.

Welche BSE-Tests gibt es? Wie funktionieren sie?

Derzeit verfügbare Schnelltests beruhen auf der Messung der Konzentration von krankhaften Prionen im Gehirn oder Rückenmark des Rindes. Da Gehirn und Rückenmark aber lebenswichtig sind, kann man den Schnelltest nur bei toten Rindern durchführen. Der Forschung ist es in den 2 Jahren aber noch nicht gelungen, einen Bluttest einzuführen, mit dem bereits am lebenden Tier sowie am Fleisch BSE nachgewiesen werden kann. Die Ungenauigkeit der Schnelltests erfordert derzeit noch, dass man Proben von Gewebe nimmt, das stark mit Prionen belastet ist, also aus dem Gehirn oder dem Rückenmark.

Wie sicher ist der Schnelltest?

Nach Angaben des Ministeriums für Umwelt und Naturschutz, Landwirtschaft und Verbraucherschutz in Nordrhein-Westfalen sind sog. Schnelltests (z.B. der Schweizer Firma Prionics) die beste existierende Möglichkeit. Fällt der Test positiv aus, so wird das Ergebnis mit Hilfe aufwendigerer Testverfahren bestätigt, und es ist sicher, dass das betreffende Rind BSE-infiziert ist. Fällt der Test negativ aus, dann lag die Konzentration der krankhaften Prionen unterhalb der Detektionsgrenze des Tests. Letzteres ist allerdings keine Garantie, dass das betreffende Rind nicht infiziert ist: "Es gibt keinen biochemischen Test, der eine 100-prozentige Sicherheit bietet", kommentiert Dr. Bruno Oesch, einer der Gründer von Prionics. In der derzeitigen Praxis werden allerdings negative Ergebnisse des Schnelltests ohne weitere Bestätigungstests akzeptiert.

Aufgaben

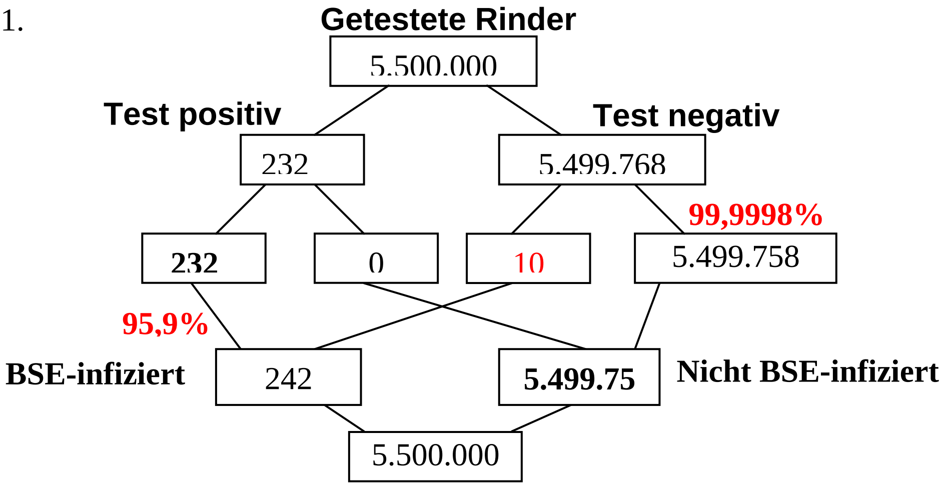
1. Zeiche ein Baumdiagramm oder eine Tabelle zum Problem der Sicherheit des BSE-Tests und trage die verfügbaren aktuellen Zahlen zu BSE-Tests in Deutschland ein (ausgehend von 5.500.000 getesteten Rindern). Formuliere mögliche Hypothesen und Indizien, A-priori – und A-posteriori Wahrscheinlichkeiten.

2. Welcher „Testfehler“ ist im Sinne des Verbrauchersschutzes schlimmer?

3. Wir haben gelesen, dass es aufgrund der Ungenauigkeit des Tests vorkommen kann, dass der Test negativ bleibt und trotzdem das Rind BSE-infiziert ist.
   a) Schreibe in das entsprechende Feld des Baumes bzw. der Tabelle eine selbstgewählte Zahl von Fällen (z.B. 10) ein.
   b) Gib für diese Zahl die Wahrscheinlichkeit für die „Sicherheit“ des Testes an, wenn er negativ ausging. (kurz: P(Nicht BSE-infiziert | Test negativ)
   c) Untersuche, wie sich diese Fälle auf die Trefferwahrscheinlichkeit auswirken, dass der Test positiv wird, wenn das Rind BSE-infiziert ist (Richtig-positiv-Rate).

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 11

zu 1.



zu 2.
Negatives Testergebnis, aber das Fleisch ist tatsächlich BSE-infiziert. Dann würde es an den Verbraucher gelangen, da keine Bestätigungstests erfolgen.

zu 3. a, b, c)
z.B.: Bei 10 Fällen ist immer noch P(Nicht BSE-infiziert | Test negativ) > 99,9998%, doch sinkt die Richtig-positiv-Rate (Sensitivität) auf 95,9%. (rot im Diagramm oben)

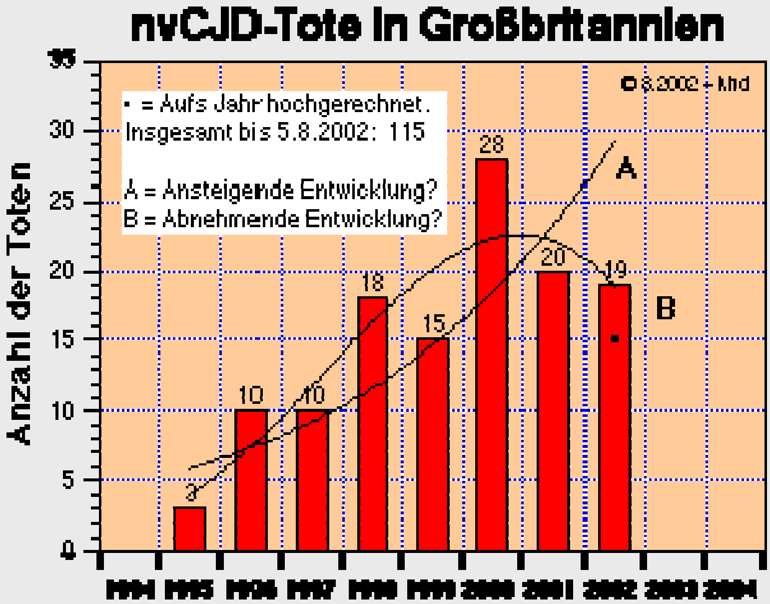
Zusatzmaterial zur Kontextvertiefung zu AB 11

Information der Verbraucherzentrale Berlin

Tödliche Gefahren für den Menschen durch BSE

Die beim Menschen auftretende Creutzfeldt-Jakob-Krankheit (CJK) gilt als Pendant der sogenannten schwammartigen Hirnkrankheit des Rindes (wissenschaftlich: *Bovine Spongiforme Enzephalopathie* – kurz BSE). Ob sie tatsächlich vom selben Erreger verursacht beziehungsweise über die Nahrung vom Tier auf den Menschen übertragen wird, ist sehr wahrscheinlich, aber noch nicht abschließend wissenschaftlich geklärt. Bei der CJK – wie bei BSE – wird die zentrale Informationsverarbeitung zerstört. Dabei sterben nach und nach die etwa 100 Milliarden Nervenzellen (Neuronen) des Gehirns ab, so daß dieses löchrig wird – wie ein Schwamm. Eine Heilung ist bislang nicht möglich. Ein Therapie ist nicht in Sicht, denn daran wird nicht geforscht.

Benannt ist die tödliche Krankheit nach dem Kieler Neurologen Hans G. Creutzfeldt (1885–1964) und dem Hamburger Neurologen Alfons M. Jakob (1884–1931). Diese beschreiben 1920 bzw. 1921 erstmals die absolut tödliche Krankheit des menschlichen Gehirns mit den Symptomen Depressionen, Bewegungsstörungen, Muskelstarre, Schluckstörungen. Haupterkennungszeichen ist jedoch ein sehr rascher Persönlichkeitsverfall mit Demenz. Mediziner beschreiben die Krankheit als „Alzheimer im extremen Zeitraffer".



Neue Creutzfeldt-Jakob-Erkrankungen auch in Deutschland ?

Die durch BSE beim Rind hervorgerufene Variante der Creutzfeldt-Jakob-Krankheit wird nach Meinung wissenschaftlicher Institute wahrscheinlich auch in Deutschland auftreten. „Mit dem Auftreten der neuen Variante der CJK in weiteren Ländern, insbesondere in der EU und damit auch in Deutschland, ist zu rechnen", betont das Robert Koch-Institut und das Bundesinstitut für gesundheitlichen Verbraucherschutz. Wegen des zeitlichen Zusammenhangs von BSE in Großbritannien und den dortigen neuen CJ-Erkrankungen müsse von einer Übertragbarkeit des BSE-Erregers auf den Menschen ausgegangen werden. Es gab bisher in Großbritannien ca. 183.000 festgestellte Fälle von BSE. Auf Grund der geringen BSE-Fallzahl in Deutschland und der getroffenen Maßnahmen sei hier allerdings die Übertragungswahrscheinlichkeit „viel geringer". Für Muskelfleisch und Milch wurde bislang kein Gefährdungspotential nachgewiesen, schreibt Prof. Hildebrandt von der Freien Universität Berlin. Bisher wurde in Deutschland wegen der langen Inkubationszeit noch kein Fall der neuen CJK beobachtet.

AB 12: Drogen im Straßenverkehr

Die Polizei informiert… (vom 29.10.2002)

Es sind immer mehr Autofahrer unterwegs, die unter Drogen stehen. Immer mehr Verkehrsunfälle gehen auf Drogenkonsum des Fahrers zurück. Seit einiger Zeit stehen der Polizei sogenannte Drogenschnelltests zur Verfügung. Die Beamten können nun unmittelbar vor Ort feststellen, ob die Verkehrsteilnehmer unter Einfluss illegaler Betäubungsmittel fahren. Kontrollen werden gezielt zum Beispiel in der Nähe von großen Diskotheken durchgeführt. Denn wenn am Wochenende die Party-Szene feiern geht, sind oft Haschisch und Ecstasy mit im Spiel. Gerade bei den 18 bis 25jährigen. Diese Gruppe haben die Beamten besonders im Visier.

Die neuen Drogenschnelltests

Eine aktuelle Beeinträchtigung durch Drogen lässt sich am besten über einen Bluttest nachweisen. Dieser lässt sich jedoch nicht unmittelbar vor Ort durchführen und verursacht erheblichen Aufwand.
Neue Drogenschnelltests sollen Abhilfe schaffen. Drei verschiedene Methoden wurden entwickelt, um einen Nachweis von Drogenkonsum vor Ort zu ermöglichen:

1. Urintest
2. Speicheltest im Mund
3. Schweißtest auf der Stirn (siehe Bild)

In einer EU-weiten Untersuchung ergab sich für den Nachweis von Cannabis- bzw. Ecstasykonsum mit den verschiedenen Testarten folgendes (*):

Cannabis / Haschisch	Urintest Syva	Speicheltest Oralscreen	Schweißtest Drugwipe
richtig-positive Testergebnisse	97%	25%	nicht
richtig-negative Testergebnisse	92%	84%	tauglich

Ecstasy	Urintest Syva	Speicheltest Oralscreen	Schweißtest Drugwipe
richtig-positive Testergebnisse	100%	90%	98%
richtig-negative Testergebnisse	88%	55%	67%

(*) Daten aus ROSITA-Projekt: “Evaluation of different roadside drug tests”

Aufgaben:

In einer großen Testaktion der Polizei werden Verkehrsteilnehmer an Freitag- und Samstagabenden auf Drogenkonsum getestet. Die oben angegebenen Drogenschnelltests (Urin, Speichel, Schweiß) werden jeweils bei 500 Autofahrern durchgeführt, die bei der Kontrolle den Beamten verdächtig erscheinen. Man kann davon ausgehen, dass in der Praxis von den Polizeibeamten ein Drogentest erst bei gewissen auffälligen Verhaltensanzeichen durchgeführt wird und die Beamten Übung im Erkennen von Verdächtigen haben.
Spätere Blutuntersuchungen zeigten, dass 60% der getesteten Fahrer tatsächlich Cannabis und 40% Ecstasy genommen hatten.

1. Formuliere Hypothesen und Indizien, A-priori – und A-posteriori Wahrscheinlichkeiten.
2. Gib jeweils für Urin- bzw. Speicheltest die Wahrscheinlichkeit an, dass vom Fahrer bei positivem Testergebnis tatsächlich Cannabis konsumiert wurde.
3. Gib auch jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass der Fahrer tatsächlich kein Cannabis konsumiert hat, wenn das Testergebnis negativ war.
4. Bewerte jeweils die Tests auf ihre Tauglichkeit bei Verkehrskontrollen
5. Berechne dieselben Wahrscheinlichkeiten bei Urin-, Speichel- bzw. Schweißtests für Ecstasykonsum.
6. Bewerte auch hier jeweils die Tests auf ihre Tauglichkeit bei Verkehrskontrollen

Lösungen und didaktische Kommentare für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 12

2. Urin: 94,8%, Speichel: 70,1%

3. Urin: 95,3%, Speichel: 42,7%

4. Fazit z.B.: Für das Erkennen von Cannabiskonsum ist der Urintest geeignet, aber der Speicheltest nicht, weil er zu viele Fehler macht.

5. Urin: 84,7% bzw. 100%
   Speichel: 57,1% bzw. 89,2%
   Schweiß: 66,4% bzw. 98%

6. Fazit z.B.: Der Urintest ist wieder am besten geeignet. Er entdeckt alle Ecstasy-Benutzer, aber wird auch bei einigen Nichtbenutzern positiv.
   Der Schweißtest entdeckt auch die meisten der Ecstasy-Benutzer,wird aber zu oft positiv bei Nicht-Benutzern.
   Der Speicheltest ist am schlechtesten. Er macht zu viele Fehler.

Zusatzmaterial zur Kontextvertiefung

Die gesetzlichen Regelungen in Deutschland
Im August 1998 trat die Änderung im §24a des Straßenverkehrsgesetzes (StVG) mit der Einführung der Ordnungswidrigkeit beim Fahren unter dem Einfluss von Cannabis ,Amphetaminen, Kokain und Heroin in Kraft. Als Beweis dieses Drogenkonsums wird der Nachweis dieser Substanzen im Blut herangezogen. Das heißt, der Gesetzgeber hat in diesem Fall die Wirkung mit dem Nachweis im Blut gleichgesetzt, wobei die Frage nach der „Fahruntüchtigkeit " hiermit nicht geklärt wird.
Mit dem novellierten §24a des Straßenverkehrsgesetzes wird nun das Fahren unter Drogeneinfluss auch ohne den Nachweis der Fahruntüchtigkeit als Ordnungswidrigkeit geahndet. Bei Verdacht auf Drogeneinfluss muss der Betroffene die Blutentnahme und die einfache körperliche Untersuchung dulden. Zu einer aktiven Mitwirkung ist er nicht verpflichtet; bei einem Drogen-Vortest ist eine vorherige Belehrung erforderlich.

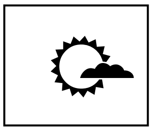
Untersuchungen geben Aufschluss über den Drogenkonsum
Seit vielen Jahren wird an Forschung und Industrie der Wunsch – ja die Forderung – herangetragen „geeignete Nachweisverfahren zum Drogenkonsum vergleichbar dem Atemalkoholtest" zu entwickeln und zur Verfügung zu stellen. Mittlerweile gibt es eine Reihe von leicht handhabbaren Testmöglichkeiten in Form sogenannter „Schnell- bzw. Screeningtests ", deren Zuverlässigkeit auch von Arbeitsgruppen wissenschaftlich positiv bewertet wurden. Die derzeit wichtigste Untersuchung ist die von Urinproben. Hierbei erhält man Aufschluss über den Drogenkonsum in den zurückliegenden 12-20 Stunden, im Einzelfall auch über mehrere Tage bis zu mehreren Wochen. Im Blut lassen sich die meisten Drogen nur über einen relativ kurzen Zeitraum von 10 bis 600 Minuten nach Konsum nachweisen. Danach setzt der Abbau der Wirkstoffe ein und sie werden relativ schnell nicht mehr nachweisbar. Die blutgestützte Untersuchung ist vor allem bei allen gesetzlich geregelten Fragestellungen wichtig. Die Haaranalytik erlaubt einen Blick in die Vergangenheit. Relativ neu sind die Untersuchungen von Drogenkonsum in Speichel- und Schweißproben.
Zahlreiche Institutionen und Organisationen, Juristen, Mediziner und Polizeibeamte werden sich auch weiterhin in Arbeits-und Forschungsgruppen bemühen, das Problem Drogen im Straßenverkehr zu lösen. Die bis heute aufgezeigten Fortschritte und Neuerungen reichen noch nicht aus.

AB 13: Übungsaufgaben 1

1.
Heutzutage ist bei der Konstruktion eines neuen Automobils die Sicherheit des Wagens oberstes Gebot. Eingebaute Airbags sollen bei einem Aufprall ab 20 km/h gegen ein stehendes Hindernis auslösen, da in der Regel ab dieser Geschwindigkeit bereits erhebliche Verletzungen auftreten können. Nach einer langen Serie von „Crashs-Tests“ bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten steht fest:
A) Bei einem Crash mit mindestens 20km/h löste der Airbag zu 95% aus.
B) Der Airbag löste auch zu 10% aus, wenn weniger als 20km/h gefahren wurde.
C) 40% der Crashs waren mit mindestens 20km/h (Das entspricht auch der Rate in der Realität).

a) Formuliere bei diesem Problem die Hypothese und ein Indiz.
Der Leiter der Konstruktionsabteilung möchte folgendes wissen:
b) Wie wahrscheinlich ist ein Crash mit mindestens 20 km/h passiert, wenn der Airbag auslöst?
c) Wie wahrscheinlich ist ein Crash mit mindestens 20km/h passiert, wenn der Airbag nicht auslöst?
d) Das Risiko ist noch zu hoch: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Crash mit mindestens 20km/h passiert, wenn der Airbag nicht auslöst muß natürlich verringert werden. Doch die Auslöserate des Airbags bei Crashs mit mindestens 20km/h (A) lässt sich nicht verändern.
Gibt es eine andere Möglichkeit, die Sicherheit zu erhöhen?

2.
Werner wettert über das Wetter. Kaum hat er seinen Schrebergarten in mühseliger Arbeit mit Wasser versorgt, fängt es an zu regnen. Es müßte eine Gerät geben, dass Regen vorhersagt. Kalle hat ein Gerät entwickelt, den Meteo-Propheten (MP). Das Gerät hat zwei Anzeigen:

REGEN  **KEIN REGEN** 

Kalle erklärt: „Wenn es tatsächlich regnen wird, zeigt der MP es zu 80% an. Wenn es nicht regnen wird, zeigt es der MP zu 95% an.“ Die Zeit, in der Werners Garten bewässert werden muss, beträgt durchschnittlich 200 Tage im Jahr.
Werner beschwert sich: „Diese Angaben nützen mir gar nichts, denn ich weiß ja nicht, wann es regnen wird und wann nicht. Das ist ja gerade mein Problem! Was ich wissen will ist vielmehr: Wie sicher wird es regnen, wenn der MP Regen anzeigt?“
Kalle entgegnet völlig ernst: „Das hängt vom Wetter ab. Kein Scherz!“

a) Was meint er wohl damit?
b) Zeichne einen Häufigkeitsbaum oder eine Tabelle zur Hypothese, daß es ungefähr so oft regnet wie nicht regnet.
c) Schätze zunächst und berechne dann die A-posteriori Wahrscheinlichkeiten für Regen, wenn der MP Regen anzeigt bzw. für kein Regen, wenn der MP kein Regen anzeigt.
d) Gib für das jeweilige Indiz an, welcher Informationsgewinn erreicht wurde.
e) Der MP soll auch in Melbourne (Australien) eingesetzt werden. Dort ist Regen selten: Nur an 10% der Tage regnet es. Schließlich soll der MP auch in Zentral-Monsunien getestet werden. Dort regnet es an 90% der Tage.
Berechne für Melbourne und Zentral-Monsunien die A-posteriori Wahrscheinlichkeiten und gib die unterschiedlichen Informationsgewinne an.
f) Beurteile, wann der MP am besten Regen vorhersagt.

3.

Die folgende unvollständige Tabelle entstammt der Jahresstatistik einer Kfz-Versicherung:

Versicherte	**alle**	**in Großstädten**	**außerhalb von Großstädten**
alle	100%		
ohne Schadensfall	79,3%	30,3%	
mit Schadensfall	20,7%		11,5%

a) Stelle eine neue Tabelle zu dieser mit Häufigkeiten auf. Gehe von 10 000 Versicherten aus.
b) Zeiche dazu auch einen Häufigkeitsbaum.
c) Formuliere die Hypothese bezüglich des Eintretens eines Schadensfalls, nenne A-priori-Wahrscheinlichkeiten und mögliche Indizien für die Neubewertung.
d) Gib Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass ein Versicherter in der Großstadt wohnt und einen Schadensfall hat bzw. dass ein Versicherter außerhalb der Großstadt wohnt und einen Schadensfall hat. Was sind das für Wahrscheinlichkeiten?
e) Schätze, wo die Schadenswahrscheinlichkeit (= P(mit Schadensfall | ….) höher ist, in Großstädten oder außerhalb von Großstädten.
f) Überprüfe deine Schätzung durch Rechnung.

4.

Es ist entdeckt worden, dass eine Gruppe von Angestellten eines Atomkraftwerks einer überhöhten Dosis radioaktiver Strahlung ausgesetzt war. Ein Arzt will den Angestellten eine Schätzung darüber geben, wie groß deren Gefahr ist, an Leukämie zu erkranken. Er sammelt die folgenden Informationen:
- Von den erwachsenen Deutschen, die nicht an Leukämie erkranken, sind 2,5% einer ungewöhnlich hohen Strahlendosis ausgesetzt gewesen.
- Von den erwachsenen Deutschen, die an Leukämie erkranken, sind 5% einer ungewöhnlich hohen Strahlendosis ausgesetzt gewesen.
- 4% aller erwachsenen Deutschen bekommen Leukämie.

a) Formuliere nochmal die Hypothese des Arztes, nenne A-priori-Wahrscheinlichkeit und das Indiz für die Neubewertung.
b) Erstelle eine Tabelle oder einen Baum mit Häufigkeiten zu diesem Problem.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein erwachsener Deutscher an Leukämie erkrankt, wenn er oder sie einer ungewöhnlich hohen radioaktiven Strahlung ausgesetzt war?
d) Um wieviel hat sich das Risiko, an Leukämie zu erkranken, durch die ungewöhnlich hohe Strahlung erhöht?

Lösungshinweise für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 13

1a. Die Hypothese ist „Crash mit mindestens 20km/h“, das Indiz ist „Airbag löst aus“.
1b. Z.B. bei 1000 Crashtests: 380/440 = 86,4%
1c. 20/560 = 3,6%
1d. ja, man muss B) verkleinern.

2. (aus: Beck-Bornholdt & Dubben, 2001: „Der Schein der Weisen – Irrtümer und Fehlurteile im tägliche Denken“, S.40)
2a. Es muss vorher eine (A-priori -) Wahrscheinlichkeit für Regen (Hypothese) gemacht werden: Z.B. An 50% der Tage (in Deutschland).
2c. Bei 200 Tagen: 80/85 = 94,1% bzw. 95/115 = 82,6%
2d. Die A-posteriori ist zur A-priori-Wahrscheinlichkeit 1,88fach bzw. 1,625fach höher.
2e. Melbourne:16/25 = 64% bzw. 171/175 = 97,7%, Zentral-M.: 144/145 = 99,3% bzw. 19/55 = 34,5%.
2f. Wenn die A-priori Wahrscheinlichkeit (oder Basisrate) für Regen vergleichsweise hoch ist, also in unserem Beispiel im Falle Zentral-Mosuniens.

3. (abgewandelt aus Schöningh, Abakus 9, S.182)
3a.

Versicherte	alle	in Großstädten	außerhalb von Großstädten
alle	10 000	3 950	6 050
ohne Schadensfall	7 930	3 030	4 900
mit Schadensfall	2 070	920	1 150

3c. Die Hypothese ist, dass ein Versicherter einen Schadensfall hat bewertet mit der A-priori-Wahrscheinlichkeit P(mit Schadensfall) = 20,7%. Neue Indizien zur Neubewertung der A-priori- Wahrscheinlichkeit sind „wohnt in Großstadt“ oder „wohnt außerhalb von Großstädten“.
3d. P(mit SF und in Großstädten) = 9,2% < P(mit SF und außerhalb von Großstädten).
3f. P(mit SF | in Großstädten) = 920 / 3950 = 23,3%
> P(mit SF | außerhalb von Großstädten) = 1150 / 6050 = 19%

4c. P(Leukämie | hohe Strahlung) = 7,7%
4d. Es hat sich fast verdoppelt. (a-priori 4% – a-posteriori 7,7%)

AB 14: Übungsaufgaben 2

5.
Ein Autohersteller produziert in einem seiner Werke drei Typen, die in der Tabelle mit „S“, „SL“ und „XL“ abgekürzt sind. Davon ist jeweils ein Teil für den Export bestimmt und wird entsprechend ausgerüstet. Die Tabelle zeigt die jeweiligen Anteile an der Gesamtproduktion des Werkes:

	S	SL	XL
Exportmodell	4,0%	13,5%	11,5%
kein Exportmodell	24,5%	26,5%	20,0%

a) Erstelle eine Tabelle und einen Baum mit Häufigkeiten. Gehe von einer Gesamtproduktion von 10 000 Autos aus.
b) Gib die jeweiligen Anteile der Exportmodelle unter den Autos vom Typ „S“, „SL“ und „XL“ an.
c) Schätze, ob das Modell „XL“ einen höheren Anteil unter den Exportmodellen oder den Nicht-Exportmodellen hat.
d) Berechne nun: Wieviel Prozent der Exportmodelle und wieviel Prozent der Nicht-Exportmodelle waren vom Typ „XL“?

6.
Das Wetter in Bielefeld ist an 30% heiter, an 50% wechselhaft und an 20% aller Tage regnerisch. Es hat sich herausgestellt, dass am Vorabend eines Tages mit heiterem Wetter die Wettervorhersage für Ostwestfalen zu 80% gut und zu 20% schlecht lautet. Bei wechselhaftem Wetter am nächsten Tag lautete sie zu 50% schlecht und zu 50% gut. Ein Regenwettertag wird zu 60% mit schlecht angekündigt und zu 40% mit gut.

a) Erstelle eine Tabelle und einen Baum mit Häufigkeiten. Betrachte 1000 zufällig ausgewählte Tage.
b) Welche Hypothesen über das Wetter gibt es? Gib die A-priori -Wahrscheinlichkeiten für das Wetter in Bielefeld an.
c) Nenne Indizien für eine Neubewertung und benenne die A-posteriori - Wahrscheinlichkeiten für das jeweilige Indiz.
d) Am Abend lautete die Vorhersage für das Wetter in Ostwestfalen „gut“.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist am nächsten Tag heiteres Wetter in Bielefeld?

7.
Du diskutierst mit Freunden über die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein durchschnittlicher Autofahrer in einen Verkehrsunfall verwickelt wird, wenn er Alkohol getrunken hat.
Aus der Verkehrsstatistik lassen sich realistischerweise folgende Wahrscheinlichkeiten ermitteln:

- Die Wahrscheinlichkeit für einen Verkehrsunfall (bei einer durchschnittlichen Fahrt und bei einem durchschnittlichen Autofahrer) wir mit 0,001% geschätzt.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer Alkohol getrunken hat, wenn ein Unfall passiert ist, beträgt 10%.

Aus Alkoholtests bei Verkehrskontrollen schätzt man, dass jede 100. Fahrt unter Alkoholeinfluß stattfindet.

a) Formuliere die Vermutung und gib die A-priori-Wahrscheinlichkeit an. Nenne die Indizien, die eine Neubewertung erfordern.
b) Kann man mit den gegebenen Informationen die Anfangsfrage beantworten? Wenn ja, gib einen Wert für die Wahrscheinlichkeit an. (Tip: Erstelle einen Häufigkeitsbaum oder -tabelle)
c) Beurteile das Risiko einer Fahrt mit Alkohol im Vergleich zu einer Fahrt ohne Alkohol (relative Risikoerhöhung).

Lösungshinweise für die Lehrerinnen und Lehrer zu AB 14

Aufgaben 5 und 6 haben jeweils eine 3x2 Struktur, Aufgabe 5 beinhaltet nur relative Häufigkeiten und Aufgabe 6 ist ein Beispiel für 3 Möglichkeiten bei der Hypothese (nicht dichotom).
Aufgabe 7 weicht davon ab, was üblicherweise als bekannt gegeben ist (hier: Beide Einzelwahrscheinlichkeiten) .

5b. „S“:14%, „SL“:21,3%, „XL“: 52,4%
5d. XL unter Exportmodellen: 39,7%. XL unter Nicht-Exportmodellen: 28,7%

6b. H1: heiter, P(heiter) = 30%; H2: „wechselhaft“, P(wechselhaft) = 50%; H3: „regnerisch“, P(regnerisch) = 20%
6c. Indiz 1: Vorhersage „gut“. P(heiter | „gut“), P(wechselhaft | „gut“), P(regnerisch | „gut“)
Indiz 2: Vorhersage „schlecht“. P(heiter | „schlecht“), P(wechselhaft | „schlecht“), P(regnerisch | „schlecht“)
6d. P(heiter | „gut“) = 240 / 570 = 42,1%

7b. 1 /1000 = 0,1% (ausgehend von 100.000 Fahrten)
7c. a-priori Risiko für Unfall = 0,001%.
a-posteriori Risiko für Unfall mit Alkoholeinfluss = 0,1%
Das Risiko ist 100mal höher mit Alkohol !

Anhang
Vorschlag einer Klassenarbeit zur Unterrichtsreihe, Klasse 9

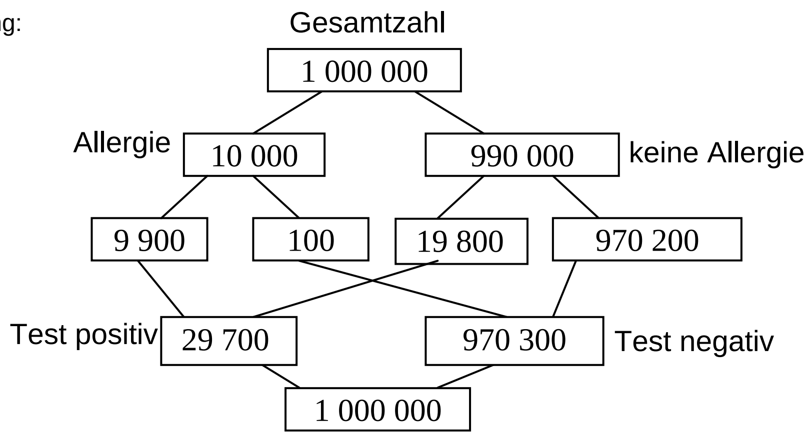
Klassenarbeit

Aufgabe 1 ***(27 Pkt.)***

Wenn jemand eine Katzhaarallergie hat, so fällt der entsprechende Test auch zu 99% positiv aus. Umgekehrt erhalten 98% der Personen, die keine Katzenhaarallergie haben, ein negatives Testergebnis. Man vermutet, dass ca. 1% der Bevölkerung allergisch gegen Katzenhaare ist. 1000000 Personen nehmen an einem Allergietest teil.

a) Vervollständige mit Hilfe der gegebenen Daten das abgebildete Doppelbaumdiagramm. Beschrifte alle Felder! (Struktur des Baumes ohne Beschriftung war vorgegeben)

Lösung:



Bewertung	*Modellierung (mit Baum): Beschriftung* *Häufigkeiten berechnen und einsetzen*	***2 Pkt.*** ***5 Pkt.***

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Person eine Katzenhaarallergie, wenn der Test positiv ausfällt?

Lösung	*P(Allergie | Test positiv) = 9900 / 29700 ≈ 33,3%*	
Bewertung	*1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.*	***3 Pkt.***

c) Berechne P(keine Allergie | Test negativ), P(Test negativ | keine Allergie) und P(keine Allergie und Test negativ).

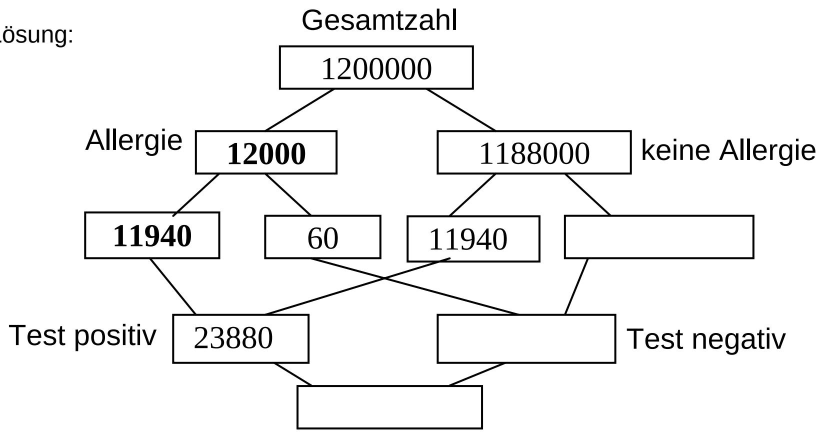
Lösung	*P(keine Allergie | Test negativ) = 970200 / 970300 ≈ 99,99%* *P(Test negativ | Keine Allergie) = 970200 / 990000 ≈ 98%* *P(Test negativ und keine Allergie) = 970200 / 1000000 ≈ 97,02%*	***2 Pkt.*** ***2 Pkt.*** ***2 Pkt.***
Bewertung	*jeweils 1P. 1P.*	

d) Berechne eine mögliche A-priori-Wahrscheinlichkeit zu dem Allergietest und eine dazugehörige a-posteriori-Wahrscheinlichkeit.

Lösung	*a priori: P(Allergie) = 10000 / 1000000 = 1%* *a posteriori: P(Allergie |Test positiv) = 9900 / 29700 ≈ 33,3%*	***3 Pkt.*** ***3 Pkt.***
Bewertung	*jeweils 1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.*	

e) Auf Blatt 2 siehst du den Baum eines Testdurchgangs, bei dem 50% der positiv Getesteten auch wirklich Allergiker waren. Wieviel Prozent der Nicht-Allergiker haben ein positives Ergebnis erhalten? (Baum mit den fett gedruckten Werten und Beschriftung war vorgegeben)

Lösung:



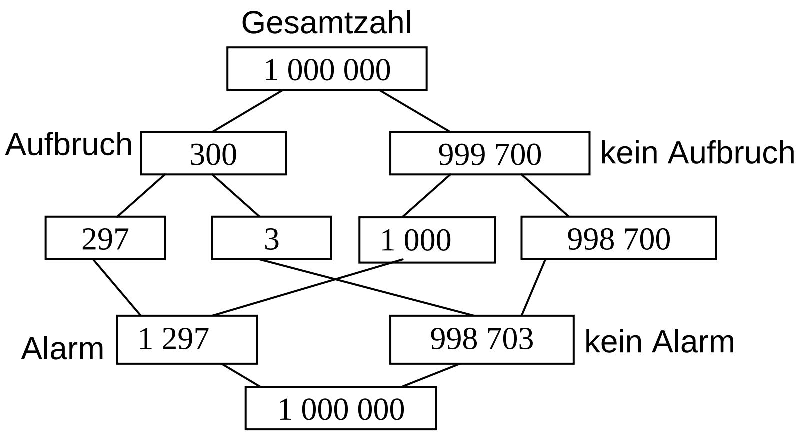
Bewertung	*Differenzbildung: Gesamtzahl – Allergie = Keine Allergie* *Anzahl Test positiv =23880 (=2·11940, da 50%)* *Anzahl Test pos. und Allergie = Anzahl Test pos. und keine Allergie* *11940 / 1188000 ≈ 1%*	***1 Pkt.*** ***1 Pkt.*** ***1 Pkt.*** ***2 Pkt.***

Aufgabe 2 *(21 Pkt.)*

In München liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein abgestellter PKW aufgebrochen wird, bei 0,03%. Wir gehen davon aus, dass alle PKWs mit einer Alarmanlage ausgestattet sind, die laut Hersteller mit 99%iger Wahrscheinlichkeit anschlägt, wenn der PKW aufgebrochen wird. Leider geht die Alarmanlage auch manchmal los, wenn sich niemand am Auto zu schaffen macht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlalarm beträgt laut Hersteller 0,1%. (Hinweis: Gehe von 1000000 abgestellter PKWs aus)

a) Ein PKW ist in München geparkt und die Alarmanlage aktiviert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der PKW aufgebrochen, wenn der Alarm ertönt?

Lösung



Bewertung	*Modellierung (mit Baum o. Tabelle): Beschriftung* *Häufigkeiten berechnen und einsetzen* *P(Aufbruch | Alarm) = 297 / 1297 ≈ 22,9%*	***2 Pkt.*** ***4 Pkt.*** ***3 Pkt.***

b) Wie müssen die Wahrscheinlichkeitsangaben des Herstellers jeweils geändert werden, damit sich der Wert aus a) erhöht? (Begründung, keine Rechnung!)

Lösung	*Die Wahrscheinlichkeit für Fehlalarme muss verringert* *oder P(Alarm | Aufbruch) erhöht werden*	***2 Pkt.*** ***2 Pkt.***
Bewertung	*jeweils 2 Pkt.*	

c) Vervollständige die in Berlin erhobene Statistik, für die sehr viele Autos über einen langen Zeitraum beobachtet wurden (Tabelle mit den fett gedruckten Werten und Beschriftung war vorgegeben).

Lösung:

	Gesamt	***Aufbruch***	***kein Aufbruch***
Gesamt	1000000	1000	**999000**
Alarm	1989	**990**	**999**
kein Alarm	998011	**10**	998001

Bewertung	*Modellierung (mit Tabelle): Häufigkeiten berechnen und einsetzen*	***3 Pkt.***

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde in Berlin ein PKW aufgebrochen, wenn der Alarm ertönt?

Lösung	*P(Aufbruch | Alarm) = 990 / 1989 ≈ 49,8%*	
Bewertung	*1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.*	***3 Pkt.***

e) Wie groß ist die Aufbruchswahrscheinlichkeit in Berlin?

Lösung	*P(Aufbruch) = 1000 / 1000000 = 0,1%*	
Bewertung	*1P. (Bez.) 1P.*	***2 Pkt.***