KaDiSto Bd.6

Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe

\-

Eine explorative Entwicklungsstudie

Thorsten Meyfarth

Kassel, Januar 2009

KaDiSto: Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Band 6

Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel

Kurzbeschreibung der Schriftenreihe

In den Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto) werden vom Herausgeber und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Staatsexamensarbeiten, Dissertationen, Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten, Unterrichtsmaterialien und „Occasional Papers", die sich mit der Didaktik der Stochastik und dem Stochastikunterricht beschäftigen. Die Arbeiten werden oft zusammen mit weiteren elektronischen Materialien, z.B. Dateien von Computerprogrammen zur Stochastik verfügbar gemacht.

Die Reihe wurde ins Leben gerufen, um Materialien zu veröffentlichen, die in der Arbeitsgruppe des Herausgebers oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind. Die Reihe steht grundsätzlich auch anderen Autorinnen und Autoren offen.

Kurzbeschreibung des Dokuments

Im Rahmen der Arbeit wird ein Unterrichtskonzept für den Leistungskurs Stochastik in der gymnasialen Oberstufe vorgestellt, bei welchem Computersimulationen und Lernumgebungen mit der Software FATHOM über das gesamte Kurshalbjahr unterstützend eingesetzt werden. Der experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit ergänzt den theoretischen Zugang und soll im Sinn eines handlungsorientierten Lernens die Motivation der Schülerinnen und Schüler fördern. Das Unterrichtskonzept enthält drei Schwerpunktsetzungen:

- Einstieg in den Stochastikkurs mit Simulationen
- Binomialverteilung
- Das Testen von Hypothesen

Die Arbeit konzentriert sich in der Darstellung und der Analyse auf den Einstieg in den Stochastikkurs mit Simulationen und computergestützten Lernumgebungen. Der Erwerb der Simulations- und Fathomkompetenzen in der Einstiegsphase wird auf inhaltlicher Seite verknüpft mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff, mit dem Gesetz der großen Zahl, sowie mit weiteren stochastischen Grundlagen. Das Unterrichtskonzept zum Einstieg in das Kurshalbjahr Stochastik wird ausführlich vorgestellt, zu den beiden anderen genannten Schwerpunkten werden die entwickelten Unterrichtskonzepte knapp erläutert. Die ausführlich kommentierten Unterrichtsmaterialien zu allen drei Schwerpunkten sind als Band 2 der KaDiSto-Schriftenreihe publiziert.

Im Rahmen unterrichtlicher Erprobungen wurden verschiedene empirische Untersuchungen durchgeführt. Bei diesen Untersuchungen liegt ein Schwerpunkt auf der Transkriptanalyse von Videos des Bildschirmgeschehens und der simultan hierzu aufgenommenen verbalen Kommunikation während der Schülerarbeitsphasen am Computer. Diese Videos ermöglichen tiefer gehende Einblicke in die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler, in auftretende Probleme bei der Erstellung der Computersimulationen und in den Umgang der Schülerinnen und Schüler mit den Aufgabenstellungen. Die Analyse ausgewählter Transkriptausschnitte wird eingebettet in die Schilderung des Unterrichtsverlaufs auf der Basis von Unterrichtsprotokollen.

Weiter wird die Bearbeitung einer komplexen Simulationsaufgabe in einer notenrelevanten Klausur nach Abschluss der Einstiegsphase analysiert. Es werden die Ergebnisse eines Eingangstests vor Beginn der Einstiegsphase und eines Ausgangstests im Anschluss an die Einstiegsphase geschildert. Ergänzend werden die Ergebnisse einer Schülerbefragung vorgestellt. Zum Abschluss der Arbeit wird eine Gesamtbetrachtung des Unterrichtskonzepts vorgenommen, bei der die Stärken aber auch zentrale Probleme des Konzepts beschrieben und teilweise verallgemeinert werden. Aus diesen Betrachtungen werden weitere Entwicklungsmöglichkeiten des geschilderten Projekts abgeleitet.

Die Arbeit verfolgt einen stark unterrichtspraktischen Ansatz. Das methodische Vorgehen ist im Bereich einer Design-Research-Studie angesiedelt. Der Autor selber ist Lehrer an dem Kasseler Oberstufengymnasium Jacob-Grimm-Schule und hat über einen längeren Zeitraum im Rahmen einer Abordnung in der Arbeitsgruppe Mathematik-Didaktik der Universität Kassel mitgearbeitet.

Die Arbeit stellt die Dissertation des Verfassers dar, die an der Universität Kassel von Prof. Dr. Rolf Biehler betreut wurde. Sie ist identisch mit der Erstveröffentlichung 2008 im Franzbecker Verlag, Hildesheim, der der elektronischen Veröffentlichung im Rahmen von KaDiSto zugestimmt hat.

Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik:
https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006062213595
Herausgegeben von Rolf Biehler, Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Kassel,
biehler@mathematik.uni-kassel.de

Bd.6:
http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hebis:34-2006100414792

thorsten.meyfarth@gmx.de

Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe

Eine explorative Entwicklungsstudie

Dissertation zur
Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
im Fachbereich Mathematik
der Universität Kassel

vorgelegt von:
Thorsten Meyfarth

im Mai 2008

Vorwort

Als Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik an dem Oberstufengymnasium Jacob-Grimm-Schule in Kassel beschäftige ich mich bereits seit längerer Zeit mit Fragen und Konzepten zum Computereinsatz im Mathematikunterricht. Seit dem Jahr 2002 besteht eine Kooperation zwischen der Jacob-Grimm-Schule und der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Rolf Biehler an der Universität Kassel, in deren Zentrum die didaktisch orientierte Erstellung und die Evaluation computerunterstützter Unterrichtskonzepte im Mathematikunterricht stehen.

Die vorliegende Arbeit ist im Zeitraum von 2003 bis 2008 entstanden. Innerhalb dieses Zeitraums war ich für dreieinhalb Jahre mit halber Stelle als „Lehrkraft für besondere Aufgaben“ an den Fachbereich Mathematik der Universität Kassel abgeordnet. Im Rahmen dieser Abordnung ergab sich die Gelegenheit zu eigenen fachdidaktischen Forschungen, aus denen die vorliegende Dissertation entstanden ist.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Rolf Biehler für die Initiierung der Arbeit und die dauerhafte Unterstützung. Er hat die Entstehung der Dissertation mit vielfältigen Anregungen und ermutigenden Diskussionen begleitet.

Weiter danke ich Frau Carmen Maxara, Herrn Tobias Hofmann, Herrn Andreas Prömmel und Herrn Dr. Dominik Leiß von der Arbeitsgruppe Mathematik-Didaktik der Universität Kassel für ihre wertvollen Ratschläge, Hilfestellungen und Diskussionen.

Herrn Arnulf Hill und Herrn Dr. Brübach aus der Schulleitung der Jacob-Grimm-Schule danke ich dafür, dass sie die Stellenabordnung an die Universität Kassel ermöglicht und organisatorisch unterstützt haben. Frau Sibylle Brinkmann und Frau Gabriele Dybowski von der Jacob-Grimm-Schule sowie Herrn Hans Schneider von der Albert-Schweitzer-Schule in Kassel danke ich dafür, dass sie das von mir erarbeitete Unterrichtskonzept in ihrem Unterricht erprobt haben und über persönliche Rückmeldungen sowie über die zugehörige Evaluation des Unterrichts zur Weiterentwicklung des Konzepts beigetragen haben.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie für die Unterstützung im privaten Bereich, insbesondere meiner Frau Margit, die mit viel Verständnis und viel Kraft zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Kassel, Mai 2008 Thorsten Meyfarth

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einführung in das Thema der Arbeit

Der Stochastikunterricht bietet eine Fülle interessanter und unverwechselbarer Lerngelegenheiten und kann aufgrund seiner natürlichen Anwendungsorientierung einen wichtigen Beitrag zur Allgemeinbildung liefern. Als „charakteristische Ideen" des Stochastikunterrichts benennt Schupp das *Schätzen* und das *Testen* sowie als Hilfsidee die *Simulation* (Schupp 2004, S. 7). Es „wird gegenwärtig nicht mehr bestritten, dass der sinnvolle Umgang mit Zufalls- und Massenerscheinungen […] unverzichtbarer Bestandteil eines genügend reichen und differenzierten Weltbildes sowie entsprechender Handlungskompetenz sein muss." (Schupp 2004, S. 4) Dennoch zeigt sich in der schulischen Praxis sowohl auf Lehrer- wie auch auf Schülerseite eine nur „mäßige Beliebtheit der Stochastik im mathematischen Unterrichtsangebot." (Wickmann 1998, S. 47)

Neue Möglichkeiten für die Gestaltung des Stochastikunterrichts ergeben sich durch den Computereinsatz. Speziell für den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist hier die Verwendung von dynamischen Lernumgebungen und Computersimulationen zu nennen. Die aktuelle Entwicklung geeigneter, an den Zielen und Erfordernissen der Statistik- und Stochastikausbildung orientierter Softwarelösungen wie z. B der Werkzeugsoftware FATHOM, korrespondiert hierbei mit der verbesserten technischen Ausstattung der meisten Sekundarstufenschulen in Deutschland. Die Simulation von Zufallsexperimenten bietet die Möglichkeit eines experimentellen Zugangs im Stochastikunterricht. Die Simulationen entlasten von Kalkül sowie von Theorie, so dass die wichtigen Tätigkeiten der Modellierung und der Interpretation in den Mittelpunkt rücken können. Es ist davon auszugehen, dass der Stochastikunterricht über den Einsatz von dynamischen Lernumgebungen und Simulationen inhaltsreicher, abwechslungsreicher und damit interessanter und motivierender gestaltet werden kann.

Durch die Unterstützung von Computern erlangen Simulationen im Bereich der Stochastik, aber auch in vielen anderen Bereichen der Wissenschaft und der Gesellschaft eine zunehmende Bedeutung. Dennoch kommen Computersimulationen im Schulunterricht derzeit kaum vor. Über die Integration von Computersimulationen wird der Stochastikunterricht der steigenden Bedeutung dieser Methode innerhalb der Mathematik wie auch in vielen anderen Bereichen der Wissenschaft gerecht. Damit liefert die Verwendung von Computersimulationen im Stochastikunterricht neben der methodischen und der lernpsychologischen Komponente auch einen wichtigen inhaltlichen Beitrag mit allgemein bildendem Charakter.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein Unterrichtskonzept für den Leistungskurs Stochastik in der gymnasialen Oberstufe entwickelt, bei welchem Computersimulationen und Lernumgebungen mit der Software FATHOM über das gesamte Kurshalbjahr unterstützend eingesetzt werden. Der experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit ergänzt den theoretischen Zugang und soll im Sinn eines handlungsorientierten Lernens die Motivation der Schülerinnen und Schüler fördern. Über den Computereinsatz sollen Unterrichtsphasen selbstständigen Lernens am Computer initiiert werden, welche den i. a. vorherrschenden lehrerzentrierten Unterricht im Fach Mathematik aufbrechen sollen.

Das vorgestellte Projekt benutzt Leitideen, Aufgabentypen und Untersuchungsmethoden, die zu großen Teilen im Rahmen der Zusammenarbeit in der Fachgruppe von Prof. Dr. Rolf Biehler an der Universität Kassel erarbeitet worden sind. In dieser Arbeitsgruppe werden bereits seit längerer Zeit Konzepte und Materialien für eine innovative Statistikausbildung entwickelt (Kombrink und Biehler 2002; Biehler 2003; Biehler und Kombrink 2004; Maxara 2006). Diese werden im Rahmen verschiedener Lehrveranstaltungen an der Universität Kassel erprobt und eingesetzt, insbesondere in der Vorlesung „Elementare Stochastik" für Lehramtsstudenten (Grund-, Haupt- und Realschule). Der Autor selber ist Lehrer für die Fächer Mathematik, Physik und Informatik an dem Kasseler Oberstufengymnasium Jacob-Grimm-Schule und hat über einen längeren Zeitraum im Rahmen einer Abordnung an die Universität Kassel in der Arbeitsgruppe mitgearbeitet.

Das erstellte Kurskonzept orientiert sich inhaltlich am Lehrplan des Landes Hessen für den Leistungskurs Stochastik (Kultusministerium Hessen 2003). Als weitere Grundlage für die Entwicklung des Unterrichtskonzepts dienen die Unterrichtsvorschläge und das Aufgabenmaterial etablierter deutscher Schulbücher für den Stochastikkurs in der gymnasialen Oberstufe (Barth und Haller 1983; Strick 1998; Bigalke, Köhler et al. 2002; Baum, Brandt et al. 2003; H. Griesel, H. Postel et al. 2003), sowie Aufgabenvorschläge und Gestaltungsvorschläge angelsächsischer Lehrbücher (Wild und Seber 2000; Rossman, Chance et al. 2001a; Erickson 2002). Neben der Einbettung des Computereinsatzes in den Stochastikunterricht werden aktuelle Erkenntnisse der deutschen Mathematikdidaktik aufgegriffen. Insbesondere wird versucht, die Aufgabenstellungen möglichst schüler- und anwendungsorientiert zu wählen. Mit der Verwendung von Computersimulationen wird eine zentrale Forderung des Arbeitskreises Stochastik zur Gestaltung des Stochastikunterrichts umgesetzt (vgl. Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003, S. 26).

Das Unterrichtskonzept enthält drei Schwerpunktsetzungen:

- Einstieg in den Stochastikkurs mit Simulationen
- Binomialverteilung
- Das Testen von Hypothesen

Zu den drei Schwerpunktthemen stehen unter den „Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik" kommentierte Unterrichtsmaterialien zur Verfügung (Meyfarth 2006a). Das Unterrichtskonzept wurde bereits mehrfach erfolgreich an den Kasseler Gymnasien Albert-Schweitzer-Schule und Jacob-Grimm-Schule unterrichtet und hierbei sukzessive verbessert. Den in dieser Arbeit geschilderten Durchgang hat der Autor selber unterrichtet.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich in der Darstellung und der Analyse auf den Einstieg in den Stochastikkurs mit Simulationen und computergestützten Lernumgebungen, im Folgenden stets als „Simulationsvorkurs" bezeichnet. Im Rahmen des Simulationsvorkurses sollen die Schülerinnen und Schüler in 15 Unterrichtsstunden die selbstständige Erstellung von Computersimulationen mit der Software FATHOM erlernen. Der Erwerb der Simulations- und Fathomkompetenzen wird auf inhaltlicher Seite verknüpft mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff, mit dem Gesetz der großen Zahl, sowie mit weiteren stochastischen Grundlagen. Bei der ausführlich vorgestellten Konzeption, Durchführung und Analyse des Simulationsvorkurses muss die Zielvorstellung eines durchgängig computerunterstützten Kurshalbjahres Stochastik stets mitgedacht werden. Die entwickelten Unterrichtskonzepte zur Binomialverteilung und zum Testen von Hypothesen werden in der Arbeit kurz vorgestellt.

Das Forschungsprojekt reiht sich ein in internationale Bemühungen zur Entwicklung einer computergestützten Statistikausbildung. Hierbei existieren insbesondere im angelsächsischen Bereich Lehrbücher, welche Vorschläge zum Einsatz von Computern in der Statistikausbildung an der High School oder am College machen (Rossman, Chance et al. 2001b; Erickson 2002). Thematisch werden in diesen Lehrbüchern die beschreibende Statistik, die Explorative Datenanalyse, die Wahrscheinlichkeitstheorie und die beurteilende Statistik erfasst. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der beurteilenden Statistik erfolgt der Computereinsatz über die Einbeziehung von Simulationen und vorbereiteten Lernumgebungen.

Die beiden genannten angelsächsischen Lehrwerke setzen die Software FATHOM ein. Diese Software erfüllt hervorragend die von Biehler (1997) formulierten Kriterien für eine didaktisch sinnvoll einsetzbare Software im Stochastikunterricht. Sie lässt sich leicht erlernen und verfügt über die Möglichkeit einer einfachen grafischen Darstellung statistischer Daten in verschiedenen Darstellungsarten. Vor allem ermöglicht sie die selbstständige Modellierung stochastischer Problemstellungen über Simulationen sowie die Verwendung von vorbereiteten Lernumgebungen, mit denen die Schülerinnen und Schüler interaktiv arbeiten können.

Während für die Gestaltung einer computergestützten Statistikausbildung bereits zahlreiche Entwicklungsvorschläge existieren, ist der Stand der empirischen Forschung über den Ablauf und die Wirksamkeit computerunterstützten Unterrichtens noch vergleichsweise gering (Biehler 1991; Mills 2002). Insbesondere fehlen kritische Untersuchungen zum computergestützten Lernen, welche zum einen die Probleme erfassen, die durch den Einsatz des Computers neu entstehen und zum zweiten die Auswirkungen des Computereinsatzes auf den Kompetenzerwerb der Schülerinnen und Schüler untersuchen.

Im nationalen Kontext stellt die vorliegende Arbeit zum Einsatz der Software FATHOM über Simulationen und dynamische Lernumgebungen im Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe eine Pilotstudie dar. Zum Computereinsatz im Stochastikunterricht der gymnasialen Oberstufe existieren in Deutschland einzelne Vorschläge, insbesondere zum Einsatz von Simulationen im Stochastikunterricht (Sedlmeier und Köhlers 2001; Biehler 2003). Zur Verwendung von Lernumgebungen und von eigenständig erstellten Computersimulationen mit der Software FATHOM in der gymnasialen Oberstufe unter den vom Lehrplan und von der Schulorganisation vorgegebenen Rahmenbedingungen gibt es bislang keine empirischen Untersuchungen.

Die Ziele der Arbeit liegen auf zwei miteinander verknüpften Ebenen:

1. Es soll ein praktisch umsetzbares Unterrichtskonzept mit geeigneten Unterrichtsmaterialien für den Simulationsvorkurs entwickelt werden. Dieses Unterrichtskonzept wird im Rahmen der Arbeit ausführlich vorgestellt sowie didaktisch und methodisch begründet. Auch für den weiteren Verlauf des Kurshalbjahres sollen Vorschläge gemacht werden, wie die erworbenen Kompetenzen im Umgang mit der Software FATHOM bei den Unterrichtsschwerpunkten „Binomialverteilung“ und „Testen von Hypothesen“ geeignet genutzt werden können.

2. Im Rahmen empirischer Untersuchungen soll die Wirksamkeit des Unterrichtskonzepts zum Simulationsvorkurs analysiert werden, um Stärken und gegebenenfalls weitere Entwicklungsmöglichkeiten des Unterrichtskonzepts und des Unterrichtsmaterials zu identifizieren.

   Die empirischen Untersuchungen sollen sich an folgenden, hier grob formulierten Fragestellungen orientieren:

   - Wie gelingt der Erwerb der Simulations- und Fathomkompetenzen im Simulationsvorkurs?

- Wie gelingt die Verknüpfung der Computersimulation mit der inhaltlichen Seite des Simulationsvorkurses?
- Welche Auswirkungen hat das Unterrichtskonzept auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler?
- Wie gestalten sich die Phasen des selbstständigen Lernens und Arbeitens am Computer?

Hiermit verfolgt die Arbeit einen stark unterrichtspraktischen Ansatz. Das methodische Vorgehen ist im Bereich einer Design-Research-Studie angesiedelt (Collins, Joseph et al. 2004, S. 18): „Design-Experiments were developed as a way to carry out formative research to test and refine educational designs based on principles derived from prior research." Die Methode der Design-Research-Studien geht zurück auf Brown (1992) und Collins (1992). Charakteristisch für Design-Research-Studien ist die Entwicklung, Erprobung und Untersuchung innovativer Lernarrangements im Praxiseinsatz. Die empirischen Untersuchungen und die dabei gewonnen Erkenntnisse werden wiederum zu einer Weiterentwicklung der Lernarrangements genutzt. Dieser Zirkel kann mehrfach durchlaufen werden. Neben der Weiterentwicklung der Lernarrangements werden im Rahmen der empirischen Untersuchungen auch theoretische Erkenntnisse über die Lernvorgänge entwickelt oder bereits bestehende Theorien verfeinert (Collins, Joseph et al. 2004, S. 19): „Design research should always have the dual goals of refining both theory and practice." Ähnliche Vorschläge zur unterrichtspraktischen Ausrichtung von Forschungsvorhaben in der Mathematik-Didaktik finden sich bei E. Wittmann (1995) sowie im Bereich der Aktionsforschung (Elliot 1981; Altrichter und Posch 1998).

Für die vorliegende Arbeit haben mehrere Voruntersuchungen stattgefunden, in denen sowohl das Unterrichtskonzept als auch die empirischen Untersuchungsmethoden weiterentwickelt wurden. Diese Voruntersuchungen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Ausführungen. Die Arbeit konzentriert sich auf die ausführliche Darstellung und Begründung des in der Hauptuntersuchung verwendeten Unterrichtskonzepts zum Simulationsvorkurs sowie auf die hierbei stattgefundenen empirischen Untersuchungen. Die Hauptuntersuchung hat stattgefunden in einem Mathematik-Leistungskurs des Autors sowie in einem parallelen Leistungskurs an der Jacob-Grimm-Schule in Kassel.

1.2 Zum Aufbau der Arbeit

In den *Kapiteln 2 bis 5* dieser Arbeit wird das entwickelte Unterrichtskonzept vorgestellt und begründet. Weiter wird das methodische Vorgehen dieser Arbeit dargestellt.

In *Kapitel 2* werden die Grundlagen und der Rahmen des zu entwickelnden Unterrichtskonzepts geschildert. Hierzu zählen Erkenntnisse der aktuellen didaktischen Diskussion zum Stochastikunterricht ebenso wie die Lehrpläne und die einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Da der Computereinsatz der Software FATHOM über Simulationen und Lernumgebungen die zentrale Innovation des Simulationsvorkurses darstellt, werden aktuelle Entwicklungen und Überlegungen zum Computereinsatz im Stochastikunterricht sowie zur Wahl der Software beschrieben. Die Ziele und die Probleme beim Einsatz von Computersimulationen in der Stochastikausbildung werden vor dem Hintergrund vorhandener Forschungen geschildert. Ferner werden die ebenfalls entwickelten Unterrichtskonzepte zu den Schwerpunkten Binomialverteilung und Testen von Hypothesen kurz vorgestellt. Hiermit wird eine Einordnung des Simulationsvorkurses in das gesamte Kurskonzept vorgenommen.

In *Kapitel 3* wird das Design der empirischen Untersuchung beschrieben. Zunächst wird die Arbeit forschungsmethodisch im Bereich der Design-Research-Studien und der Aktionsforschung eingeordnet. Weiter werden die Rahmenbedingungen der unterrichtlichen Durchführung in der Hauptuntersuchung geschildert.

In *Kapitel 4* wird das Kurskonzept des Simulationsvorkurses ausführlich beschrieben und didaktisch begründet. Hierbei wird zunächst erörtert, in welcher Form die Computersimulationen mit der Software FATHOM in dem Simulationsvorkurs verwendet werden sollen und welche Kompetenzen hierfür im Verlauf des Simulationsvorkurses aufgebaut werden müssen. Es wird gezeigt, wie sich die einzelnen Schritte eines Prozessmodells zur Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM realisieren lassen. Weiter werden die stochastischen Inhalte des Simulationsvorkurses geschildert und die Ziele angegeben, die mit dem Unterrichtskonzept erreicht werden sollen. Die für die Durchführung des Unterrichts erstellten Materialien und Aufgabenstellungen werden vorgestellt und ein Zeitplan für den unterrichtlichen Ablauf vorgeschlagen.

In *Kapitel 5* werden die zentralen Untersuchungsfragen für die empirischen Untersuchungen formuliert und die einzelnen Untersuchungsinstrumente geschildert.

In den *Kapiteln 6 und 7* werden die empirischen Untersuchungen ausführlich vorgestellt und ausgewertet: In *Kapitel 6* wird eine qualitative Analyse des Unterrichtsablaufs im Kurs des Autors vorgenommen. Zum einen wird der Unterricht auf der Basis von Unterrichtsprotokollen ausführlich beschrieben. Hiermit können Aussagen zur unterrichtlichen Umsetzbarkeit des Konzepts getroffen werden. Diese Schilderung des Unterrichtsverlaufs wird verknüpft mit der Auswertung beispielhafter Transkripte zu Schülerarbeitsphasen einer Arbeitsgruppe am Computer. Diese Transkripte ermöglichen tiefer gehende Einblicke in die Entwicklung der Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, in auftretende Probleme bei der Erstellung der Computersimulationen und in den Umgang der Schülerinnen und Schüler mit den Aufgabenstellungen. Über die Unterrichtsprotokolle erhält man einen globalen Blick auf das Unterrichtsgeschehen, über die Transkripte einen mikroskopischen Blick auf die Arbeitsweisen der Schülerinnen und Schüler am Computer. Beide Sichtweisen werden zusammengeführt. In *Kapitel 7* wird die Bearbeitung einer komplexen Simulationsaufgabe in einer notenrelevanten Klausur nach Abschluss des Simulationsvorkurses analysiert. Ferner werden die Ergebnisse eines Eingangstests vor Beginn des Simulationsvorkurses und eines Ausgangstests im Anschluss an den Simulationsvorkurs geschildert. Hiermit sollen Informationen über das Verständnis der stochastischen Inhalte gewonnen werden. Abschließend werden die Ergebnisse einer Schülerbefragung zum Simulationsvorkurs vorgestellt.

In *Kapitel 8* werden die einzelnen Ergebnisse der geschilderten empirischen Untersuchungen entlang den Untersuchungsfragen geordnet und zusammengefasst. Es wird eine Gesamtbetrachtung des Unterrichtskonzepts vorgenommen, bei der die Stärken aber auch zentrale Probleme des Konzepts beschrieben und teilweise verallgemeinert werden. Aus diesen Betrachtungen werden konkrete Verbesserungsvorschläge für eine weitere Entwicklung des Simulationsvorkurses postuliert. Abschließend werden weitere Entwicklungsmöglichkeiten des geschilderten Projekts sowohl auf der Konzeptebene als auch auf der forschungsmethodischen Ebene angedeutet.

2 Grundlagen

2.1 Stochastikunterricht in der gymnasialen Oberstufe

Inhaltliche Überlegungen

Nach den Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003) gehören zur stochastischen Allgemeinbildung in der Schule grundlegende Elemente der beschreibenden Statistik, der Explorativen Datenanalyse, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der beurteilenden Statistik. Für die Sekundarstufe II werden folgende Mindestziele genannt (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003, S. 25):

> „*1. Kompetenzen bei der Planung von statistischen Untersuchungen*
>
> Die Schüler verstehen, wie die Art der Planung von statistischen Untersuchungen die Qualität der Daten und der daraus möglichen Schlussfolgerungen maßgeblich beeinflussen kann.
>
> *2. Kompetenzen im Darstellen und Zusammenfassen von Daten*
>
> Die Schüler können zu Datenmengen geeignete Grafiken erstellen, statistische Kennzahlen ermitteln und damit in sinnvoller Weise Fragen beantworten. Sie kennen einfache Techniken zur Beschreibung und Modellierung von Zusammenhängen zwischen zwei Variablen. Sie verstehen, dass Daten durch Zufall bedingt variieren.
>
> *3. Kompetenzen im Modellieren zufälliger Vorgänge*
>
> Die Schüler sind in der Lage, vom Zufall beeinflusste Vorgänge mit Hilfe von Zufallsvariablen zu modellieren. Sie können durch Simulation Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte von Zufallsgrößen schätzen. Sie können eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im Sachkontext begründet und adäquat zur Modellierung einsetzen. Insbesondere verstehen sie das Konzept der Binomialverteilung.
>
> *4. Kompetenzen im Umgang mit dem Kalkül der Stochastik*
>
> Die Schüler kennen die Grundeigenschaften von Wahrscheinlichkeiten und können daraus einfache Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten ableiten und bei konkreten Problemen anwenden. Sie können Kenngrößen von Zufallsvariablen berechnen. Die Schüler erwerben ein inhaltliches Verständnis für den Begriff "bedingte Wahrscheinlichkeit", und für die Bayessche Formel und können sie in Sachsituationen verständig anwenden. Die Schüler kennen den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen und können ihn sachbezogen interpretieren. Sie können die Unabhängigkeit in einfachen Fällen als Modellannahme begründen.
>
> *5. Kompetenzen im begründeten Schließen in unsicheren Situationen*
>
> Die Schüler haben an Beispielen grundlegende Probleme stochastischer Schlussweisen kennen gelernt. Sie verstehen das prinzipielle Vorgehen bei einem Signifikanztest und können anhand eines Beispiels erklären, was eine signifikante Abweichung vom Erwartungswert ist. Insbesondere wissen sie, bei welchen Fragestellungen Signifikanztests ein angemessenes Werkzeug darstellen und bei welchen Problemen diese Tests keine brauchbaren Aussagen liefern. Sie sind imstande, Aussagen über Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art korrekt aufzustellen und zu interpretieren.“

Die ersten beiden Punkte betreffen die Erhebung und den Umgang mit empirischen Daten. Sie finden sich wieder in der Leitidee „Daten und Zufall“ aus den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK 2004). Auch die NCTM-Standards betonen mit den Begriffen „Data Analysis and Probability“ die Wichtigkeit einer Verknüpfung zwischen der Datenanlyse und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Biehler und Hartung (2006, S. 53) stellen den Zusammenhang zwischen der beschreibenden Statistik und der beurteilenden Statistik folgendermaßen her: „In vielen Anwendungen der statistischen Praxis wird mit Stichproben aus Grundgesamtheiten gearbeitet. Ist die Stichprobe nach einem Zufallsverfahren gezogen worden, so kann man Eigenschaften, die man mit der beschreibenden Statistik festgestellt hat, z. B. Mittelwerte, auf die Grundgesamtheit übertragen. Die beurteilende Statistik hat Verfahren entwickelt, mit denen man – grob gesagt – angeben kann, mit welchen möglichen Abweichungen vom Stichprobenergebnis man in der Grundgesamtheit rechnen muss. Die angewendeten Verfahren können dabei aber immer nur Aussagen mit gewissen vorgegebenen Sicherheiten z. B. von 95% oder 99% liefern.“

In der Mehrzahl der existierenden Vorschläge für Lehrgänge der Stochastik in der gymnasialen Oberstufe in Form von Lehrbüchern ist die beschriebene Datenorientierung nicht zu finden. Nach Wolpers und Götz (2002, S. 102 ff) lassen sich bei der Analyse der Publikationen zum Stochastikunterricht vier unterschiedliche Wege zur Behandlung der Stochastik in der gymnasialen Oberstufe identifizieren:

1. Der *klassische Aufbau* mit einem Schwerpunkt auf der ausführlichen Behandlung von Wahrscheinlichkeitsräumen, Zufallsvariablen und ihren Verteilungen als solidem Fundament für die Behandlung von Anwendungen, insbesondere aus dem Bereich der beurteilenden Statistik. Der Kombinatorik wird viel Raum eingeräumt, im Zentrum des Lehrgangs steht die Binomialverteilung. Das Exaktifizierungsiveau der mathematischen Begriffe „Wahrscheinlichkeitsraum“, „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufallsgröße“ ist sehr hoch. Ein typisches Lehrbuch für diesen Aufbau ist das von Barth und Haller (1983).

2. Der *anwendungsorientierte Aufbau*, welcher die Begriffe und Methoden der Stochastik problemorientiert an die Aufarbeitung von Sachsituationen der Statistik anhängt. Bezüglich des Stoffkanons zeigen sich Ähnlichkeiten mit dem klassischen Aufbau, allerdings werden die formal-mathematischen Betrachtungen sehr knapp gehalten. Begriffe und Methoden werden anhand interessanter Anwendungen eingeführt. Ein typisches Lehrbuch für diesen Aufbau ist das von Strick (1998).

3. Ein an der *Bayes-Statistik* orientiertes Vorgehen, welches dem Satz von Bayes und dem induktiven Schließen beim Hypothesentest einen großen Stellenwert einräumt. Der Ansatz modelliert das „Lernen aus Erfahrung“ und knüpft damit an intuitive Vorstellungen an. Für einen solchen „Bayesianischen Stochastikunterricht“ existiert noch kein geschlossener Lehrgang in Form eines Lehrbuchwerkes. Anregungen zur Schwerpunktsetzung im Bereich der Bayes-Statistik findet man bei Riemer (1985), bei Wickmann (1990), bei Rossman, Chance et. al. (2001c) sowie in den „Anregungen zum Stochastikunterricht“ (Borovcnik, Engel et al. 2001).

4. Ein *datenorientiertes Vorgehen*, bei dem man mit empirischen Daten beginnt und versucht, in diesen Daten Muster und Strukturen zu finden. „In einem datenorientierten Curriculum ist der Zufall in den "Daten versteckt". Zufallsbedingte Ereignisse selbst und deren Bewertung mit Wahrscheinlichkeiten werden nicht thematisiert.“ (Wolpers und Götz 2002, S. 109). Auch hier gibt es bislang keine Vorschläge für einen geschlossenen Lehrgang. Anregungen für einen solchen Zugang finden sich z. B. bei Biehler und Hartung (2006), bei Biehler (2006) sowie bei Engel (2007). Diese Anregungen beziehen sich allerdings auf die Sekundarstufe I, ein mögliches Vorgehen für die Sekundarstufe II ist bislang offen.

Nach Wolpers und Götz (2002) sind die ersten zwei Grundkonzeptionen derzeit Grundlage für die meisten Stochastik-Lehrgänge der gymnasialen Oberstufe in Deutschland. Sie haben ähnliche inhaltliche Curricula, welche aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und aus einem Bereich der beurteilenden Statistik als Anwendung der in der Wahrscheinlichkeitstheorie erarbeiteten Modelle bestehen. Der Bereich der beschreibenden Statistik ist hier unbedeutend.

Auch in den aktuellen Lehrplänen für die gymnasiale Oberstufe spiegelt sich die Verknüpfung zwischen den beiden Leitideen Daten und Zufall nicht wieder. In dem KMK-Beschluss über einheitliche Prüfungsanforderungen für die Mathematik (KMK 2003) wird als Leitidee nur noch der Begriff „Zufall", aber nicht mehr „Daten und Zufall" angegeben. Kaun (2006, S. 12) beschreibt die derzeitige Situation in deutschen Lehrplänen allgemein bildender Schulen folgendermaßen: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung macht neben der beurteilenden Statistik den wesentlichen Bestandteil der Stochastik in der Oberstufe aus. Nach den Vorgaben der KMK ist somit die beschreibende Statistik in der Sekundarstufe I, die beurteilende Statistik in der Sekundarstufe II vertreten. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung durchzieht beide Stufen."

In der nachfolgenden Tabelle ist der Lehrplan des Landes Hessen für den Leistungskurs Stochastik angegeben. Zwischen dem Leistungskurs und dem Grundkurs gibt es bezüglich des Stoffkanons kaum Unterschiede. Die Unterschiede liegen in Vertiefungen und Schwerpunktsetzungen des Leistungskurses gegenüber dem Grundkurs.

Unterrichtsinhalte	**Stichworte**
Grundlegende Begriffe der Stochastik	Zufallsexperimente und Ereignisse Absolute und relative Häufigkeit, Häufigkeitsverteilungen und deren graphische Darstellungen Lage- und Streumaße Wahrscheinlichkeitsbegriff (Laplace-Wahrscheinlichkeit soll als Sonderfall erkannt werden) Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	Additionssatz Pfadregeln (Summe, Produkt) Unabhängigkeit von Ereignissen Bedingte Wahrscheinlichkeiten
Kombinatorische Zählprobleme	Geordnete Stichprobe (mit/ohne Zurücklegen) Ungeordnete Stichprobe (ohne Zurücklegen) (Zählverfahren sollten nur so weit behandelt werden, wie sie für das Verstehen der nachfolgenden Fragestellungen nötig sind.)
Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen	Zufallsgröße, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung Wahrscheinlichkeitsverteilungen mehrerer Zufallsgrößen (Summe oder Produkt)
Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	Bernoullikette Binomialverteilung Normalverteilung (Dichte- und Verteilungsfunktion) Näherungsformeln für die Binomialverteilung

Hypothesentest	Ein- und zweiseitiger Test Annahmebereich, Ablehnungsbereich, Fehler erster und zweiter Art; die Binomialverteilung erlaubt, das Testen von Hypothesen ausführlich zu besprechen: Nullhypothese, Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau sind an Beispielen aus verschiedenen Gebieten zu formulieren Operationscharakteristiken dienen zur Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen dem Fehler erster Art und dem Fehler zweiter Art

Tab. 2.1: Lehrplan des Landes Hessen für den Leistungskurs Stochastik (Kultusministerium Hessen 2003).

Dieser Lehrplan kann als mögliches Beispiel eines inhaltlichen Curriculums für die ersten zwei von Wolpers und Götz identifizierten Typen von Stochastik-Lehrgängen angesehen werden. Er lässt sich sowohl im Sinn eines klassischen Aufbaus als auch eines anwendungsorientierten Aufbaus konkretisieren.

Im Lehrplan selber wird der Anwendungsbezug der Stochastik betont (Kultusministerium Hessen 2003, S. 24): „[Die Schülerinnen und Schüler] erfahren Mathematik als stark anwendungsbezogene Wissenschaft, es können auch in größerem Umfang aktuelle, reale Daten verwendet werden. Sie lernen, dass in Situationen, die anscheinend keine klaren Entscheidungen oder Beurteilungen gestatten, es durchaus sinnvoll sein kann, soweit es sich um stochastische Prozesse handelt, diese durch geeignete mathematische Modelle zu beschreiben und quantitative Aussagen über Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen bei Abläufen zu machen, deren jeweiliger Ausgang unbekannt ist.“ Selbstverständlich kann man in die inhaltlichen Vorgaben auch reale Daten integrieren: So lässt sich das Testen von Hypothesen z. B. über Geschmackstests (Riemer und Petzold 1997) oder das Auszählen der Anzahl unterschiedlich farbiger Gummibärchen (vgl. Engel und Vogel 2005) sogar mit handlungsorientiertem Unterricht verbinden. Eine enge Verknüpfung mit realen Daten im Sinn eines datenorientierten Zugangs ist jedoch in den angegebenen Inhalten des Lehrplans nicht angelegt. Die Schwerpunkte liegen auf den Begriffen Wahrscheinlichkeit, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung und auf dem Testen von Hypothesen als einem beispielhaften Anwendungsgebiet aus der beurteilenden Statistik.

Wolpers und Götz (2002) schlagen auf Basis ihrer Analyse der zur Zeit dominierenden Stochastik-Lehrgänge und der derzeitigen „Vorbildungen und Erfahrungen von Lehrern und Schülern in den Sekundarstufen II“ (S. 110) einen Rahmen für das Curriculum vor, welcher sich im Kern mit dem hessischen Lehrplan deckt. Allerdings fügen sie noch *Simulationen* und damit verbunden den *statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff* hinzu. Die Simulation von Zufallsexperimenten wird auch in der Leitidee „Modellieren“ der aktuellen Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung für das Fach Mathematik gefordert (KMK 2003). Hiermit erhält man simulierte Daten, die zu einer Verstärkung der „Kompetenzen im Darstellen und Zusammenfassen von Daten“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003, S. 25) genutzt werden können.

Biehler und Hartung (2006, S. 68) betonen die Bedeutung der gegenseitigen Ergänzung des frequentistischen und des theoretischen Zugangs zur Wahrscheinlichkeit: „Der Wahrscheinlichkeitsbegriff muss in der Schule in seinen zwei Aspekten, dem theoretischen wie dem experimentellen deutlich werden, auch in ihrem Wechselspiel zueinander. Wahrscheinlichkeiten können in Spezialsituationen berechnet werden als Anzahl der günstigen durch die Anzahl der möglichen Fälle, wenn man von einer endlichen Anzahl gleich möglicher Fälle ausgehen kann. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann experimentell durch die relative Häufigkeit geschätzt werden, indem man ermittelt, wie oft das Ereignis in einer langen Versuchsserie aufgetreten ist. Diese Möglichkeit kann man wesentlich durch computergestützte Simulation erweitern, mit der man genügend hohe Stichprobenumfänge erzeugen kann.“

Kognitionspsychologische Aspekte

Neben der inhaltlichen Betrachtung des Stoffkanons und der Leitideen berücksichtigen moderne didaktische Ansätze für den Stochastikunterricht eine kognitionspsychologische Sichtweise auf den Umgang mit dem Zufall. Hier geht es darum, Primärintuitionen der Lernenden zu kennen und im Unterricht zu berücksichtigen. Büchter, Hußmann, et al. (2005, S. 2) schreiben hierzu „Stochastische Situationen sind ein typischer Bereich, in dem Menschen vorrangig ihre vorunterrichtlichen intuitiven Vorstellungen nutzen, um außerschulische Situationen zu beurteilen, während die im Mathematikunterricht angestrebten Vorstellungen wenig aktiviert werden.“ Es zeigt sich allerdings, dass viele dieser im Alltag aufgebauten Primärintuitionen mit Fehlvorstellungen verknüpft sind. Ferner sind die Primärintuitionen meistens sehr hartnäckig (vgl. Bea 1995).

Ziel des Stochastikunterrichts muss es sein, die fehlerhaften Primärintuitionen in korrekte Sekundärintuitionen umzuwandeln. Die Schülerinnen und Schüler müssen die im Unterricht erarbeiteten Begriffe und Konzepte verinnerlichen und mit ihren Alltagserfahrungen verknüpfen können, damit deren Vorstellungswelt nicht in die zwei Bereiche des stochastischen Alltagswissens und des stochastischen Schulwissens zerfällt. Hierfür ist die Anwendungsorientierung des Unterrichts unerlässlich. Der Perspektivwechsel zwischen der Prognose eines Einzelergebnisses und dem sich ergebenden Muster bei der wiederholten Durchführung von Zufallsexperimenten ist ein zentrales Konzept, um tragfähige Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzubauen (vgl. NCTM 2001; Büchter, Hußmann et al. 2005).

Büchter, Hußmann, et al. (2005, S. 7) formulieren fünf „didaktische Leitideen für einen Vorstellungsorientierten Stochastikunterricht“:

- „Alltagsvorstellungen ernst nehmen und zum Ausgangspunkt des Lernens machen. […]
- Breite Erfahrungsmöglichkeiten durch Experimente schaffen.
- Erlebnisse durch Experimente systematisch reflektieren, um mitgebrachte Vorstellungen zu überdenken.
- Individuelle und fachliche Vorstellungen gezielt gegenüberstellen und Ursachen für Diskrepanzen finden.
- Notwendige Perspektivwechsel explizit machen.“

Biehler und Hartung (2006, S. 68) schlagen für den Aufbau adäquater Sekundärintuitionen die Verwendung von Simulationen im Stochastikunterricht vor: „Unterricht muss sich mit dem intuitiven Wissen und den intuitiven Strategien der Schüler auseinandersetzen und den Schülern Gelegenheit zur kognitiven Konstruktion adäquater Grundvorstellungen und Intuitionen bieten. Auch hier kann Simulation den Zufall erlebbar machen und Phänomen-Material für die Modellierung liefern.“

Methodische Aspekte

Auf der Ebene der Unterrichtsmethodik soll ein zeitgemäßer Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler fördern. Nach Borneleit, Danckwerts et al. (2001, S. 83) dienen hierzu die „Schaffung produktiver

Lernumgebungen, eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion sowie die Öffnung von Aufgaben.“ Bei der Schaffung produktiver Lernumgebungen muss es „das Ziel sein, durch selbst organisiertes Lernen sowohl automatisches Beherrschen grundlegender Techniken und Kalküle als auch die Ausbildung von Verständnis zu fördern.“

Als konstruktive und produktive Unterrichtsmethode wird ein unterrichtliches Vorgehen in vier Phasen vorgeschlagen (Borneleit, Danckwerts et al. 2001, S. 84):

1. „*Auftragsübergabe* (Die Problemstellung wird vom Lehrer erläutert, ohne aber irgendwelche Lösungs- oder Methodenhinweise zu geben)
2. *Selbstständig-produktives Erschließen* (einzeln oder in Gruppen arbeiten die Schüler an gestellten Problemen)
3. *Präsentations-Situation* (einzelne Schüler präsentieren ihre Ergebnisse, die verschiedenen Lösungswege werden diskutiert)
4. *Besprechungs-Situation* (der Lehrer fasst die Ergebnisse zusammen, ergänzt, klärt, vertieft, …)“

Als eine Möglichkeit zur Förderung der Eigenaktivitäten der Schülerinnen und Schüler wird die Einbeziehung von Computern in den Mathematikunterricht angesehen. Borneleit, Danckwerts et al. (2001, S. 86) schreiben hierzu: „Schülerbezogene Arbeitsformen wie Partner-, Gruppen- und Projektunterricht, Förderung von Selbstständigkeit und Selbstverantwortung, entdeckender Unterricht, umwelterschließender Unterricht, alles das sind Forderungen, die zumindest seit der Reformpädagogik an die Schule herangetragen werden. Erfahrungen zum Computereinsatz geben heute zu der Hoffnung Anlass, dass neue Technologien ein Katalysator für eine solche "neue Unterrichtskultur" sein können.“

2.2 Computereinsatz im Stochastikunterricht

2.2.1 Einsatzmöglichkeiten des Computers im Stochastikunterricht

Der Stochastikunterricht ist ein Gebiet des Mathematikunterrichts, in dem der Computer auf vielfältige Weise eingesetzt werden kann. Es ist zu erwarten, dass die Nutzung von Computern zu einer deutlichen Bereicherung des Stochastikunterrichts beitragen kann und wird (vgl. Wolpers und Götz 2002, S. 113 ff).

Das Potential computergestützten Stochastikunterrichts ist schon frühzeitig gesehen worden. Shaughnessy (1992, S. 484) schreibt „There is almost universal agreement among stochastics researchers, that computer simulations, computer spreadsheets and the use of computers to conduct Exploratory Data Analysis (EDA) are the directions in which stochastics education should be headed.” Schupp (1992) identifiziert vier Funktionen, in denen der Computer als Werkzeug zur Unterstützung des Stochastikunterrichts beitragen kann:

- Berechnungen
- Verwaltung von Daten
- Grafische Darstellungen
- Simulationen

Bei der Ausführung von Berechnungen entlastet der Computer von Routinearbeiten und schafft damit Raum für wichtigere Schülertätigkeiten. Im Unterricht ist es auf einfache Art möglich, durch den Einsatz geeigneter Taschencomputer komplett auf die Verwendung der Tabellen zur kumulierten Binomialverteilung und zur Normalverteilung zu verzichten (vgl. Kind 2001).

Eine große Bedeutung kommt der Erzeugung grafischer Darstellungen durch den Computer zu. Zum einen lassen sich große Datenmengen zeitsparend in verschiedenen Grafiktypen darstellen. Weiter bietet moderne Software die Möglichkeit interaktiver und dynamischer Grafiken. In der Kombination der Verwaltung großer Datenmengen mit der schnellen Realisierung zugehöriger dynamischer Grafiken eröffnet der Computer das Feld der Explorativen Datenanalyse (EDA) für den Schulunterricht.

Die Methode der Simulation ist eine Grundidee, die im Stochastikunterricht schon seit langem verwendet wird. Erst durch den Computereinsatz können Simulationen allerdings mit vertretbarem Zeitaufwand als kontinuierlich unterstützendes Werkzeug in den Stochastikunterricht aufgenommen werden.

In den einzelnen Bereichen der Statistik- und Stochastikausbildung ergeben sich die folgenden Neuorientierungen:

- In der *beschreibenden Statistik* können reale Datensätze verwendet und auch große Mengen an Daten mit der Methode der Explorativen Datenanalyse (EDA) ausgewertet werden (Biehler 1995; Biehler und Weber 1995). Hierbei ist die Darstellung der Daten auf verschiedenen Repräsentationsebenen und mit verschiedenen grafischen Darstellungstypen von großer Bedeutung.
- In der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* spielt die Simulation eine große Rolle. Über die Simulation stochastischer Situationen wird die stochastische Modellbildung gefördert. Die Simulation kann sowohl im Sinn der Repräsentation von Zufallsexperimenten eingesetzt werden als auch im Sinn eines Werkzeugs zur Lösung stochastischer Problemstellungen.
- In der *beurteilenden Statistik* kann auf den Begriffen und Methoden der Explorativen Datenanalyse aufgebaut werden. Ferner können Simulationen zur Veranschaulichung oder als Werkzeug im Sinn theoriearmer computerintensiver Methoden eingesetzt werden.

Neben den inhaltlichen Neuorientierungen sind mit dem Computereinsatz im Stochastikunterricht auch Erwartungen an eine Veränderung der Unterrichtsmethodik verknüpft:

- Der Einsatz des Computers soll einen experimentellen Umgang der Schülerinnen und Schüler mit der Mathematik fördern. Hierzu kann die Verwendung der Simulationen ebenso beitragen wie die Explorative Datenanalyse. Ein Kernelement dieses experimentellen Arbeitens ist die geeignete Verwendung dynamischer und interaktiver Grafiken.
- Der Einsatz des Computers soll die Arbeit in Kleingruppen unterstützen: Schupp (1992, S. 103) betont allerdings die wichtige Rolle einer geeigneten Einbettung dieser Schülerarbeitsphasen in den Unterricht: „Hinzu kommt der Vorteil, dass sich die Schüler zeitweise ganz individuell bzw. in Kleingruppen dem jeweiligen stochastischen Phänomen am Monitor widmen können; der übliche lehrerzentrierte Unterricht wird hier (zumindest äußerlich) unterbrochen. Doch werden sich solche Unterrichtsphasen nur dann positiv auswirken, wenn die Schüler mit klaren Arbeitsaufträgen in sie hineingehen und wenn die verschiedenen Beobachtungen bzw. Überlegungsansätze anschließend diskutiert, gewichtet und präzisiert werden.“

Auf dem Hintergrund der geschilderten Neuorientierungen und Erwartungen wird der Einsatz von Computern in der gymnasialen Oberstufe auch in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen zur Abiturprüfung empfohlen (KMK 2003, S. 3): „Neue Technologien können zur Unterstützung […] wirksam eingesetzt werden. Insbesondere können Rechner durch dynamische Visualisierungen den Aufbau von Grundvorstellungen mathematischer Begriffe unterstützen, als leistungsfähiges Werkzeug bei Modellbildungen und Simulationen verwendet werden und heuristisch-experimentelles Arbeiten fördern."

2.2.2 Wahl einer geeigneten Software

Zum Stochastikunterricht existiert eine Vielzahl dynamischer Applets im Internet, mit denen sich einzelne Zufallsversuche visualisieren lassen oder bestimmte Inhalte gezielt erarbeitet werden können. Diese Applets beziehen sich allerdings naturgemäß jeweils nur auf kleine Bereiche und können nicht durchgängig verwendet werden. Auch bieten die Applets i. a. nur wenige Freiräume für eigene Modellierungstätigkeiten.

Ferner gibt es eine wachsende Anzahl von Vorschlägen zum Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen wie z. B. Excel, von Computeralgebrasystemen wie z. B. Derive oder von grafischen und programmierbaren Taschenrechnern im Stochastikunterricht. Diese Werkzeuge haben den Vorteil, dass sie meistens in den Schulen verfügbar sind. Es handelt sich dabei allerdings um Produkte, die allesamt nicht für den didaktisch orientierten Einsatz im Statistik- oder Stochastikunterricht konzipiert wurden. Der Funktionsumfang dieser Werkzeuge deckt sich häufig nur wenig mit den Erfordernissen für die schulische Stochastikausbildung.

Biehler hat seit einigen Jahren Anforderungsprofile für Computersoftware entwickelt, welche den Stochastikunterricht optimal unterstützen kann (Biehler 1991; Biehler 1997). Zu den zentralen Anforderungen an didaktisch orientierte Softwareprodukte gehören folgende Punkte:

- Die drei Bereiche der Datenanalyse, der Simulation und der Wahrscheinlichkeitstheorie (Darstellungen und Berechnungen von Verteilungen) müssen in einem einzigen Softwarewerkzeug vereint sein. Hat man verschiedene Softwarewerkzeuge, so hat dies den Nachteil, dass man sich stets neu einarbeiten muss.
- Die Software muss Möglichkeiten der Erweiter- und Adaptierbarkeit an verschiedene Wünsche und Problemstellungen auf Lehrer- und Schülerseite bieten. Im optimalen Fall eröffnet sie sogar die Möglichkeit der eigenständigen Erstellung von dynamischen Lernumgebungen durch die Lehrperson.
- Die Software muss einfach zu erlernen und zu bedienen sein. Hierzu gehört eine übersichtliche grafische Benutzeroberfläche.
- Die Software muss multiple und verbundene Repräsentationen und Grafiken zur Verfügung stellen. Das interaktive Arbeiten muss durch die Verfügbarkeit eines „Sliders" zur dynamischen Variation von Daten und Grafiken unterstützt werden.

Die in dieser Arbeit verwendete Software FATHOM genügt diesen Anforderungen in hervorragender Weise. Die Arbeitsgruppe von R. Biehler hat die Software deshalb für deutsche Schulen und Hochschulen adaptiert und über einen Verlag zugänglich gemacht (Biehler, Hofmann et al. 2006).

Die Software FATHOM wurde in den USA mit öffentlicher Unterstützung entwickelt und wird dort an vielen Schulen und Colleges in der Statistikausbildung eingesetzt (Biehler und Kombrink 2002). Sie deckt die drei Gebiete der Datenanalyse, der Simulation und der Wahrscheinlichkeitstheorie ab und kann darüber hinaus im Schulunterricht zur grafischen Darstellung von Funktionen und Folgen verwendet werden. Aufgrund einer übersichtlichen grafischen Benutzeroberfläche ist die Software einfach zu bedienen. Man kann Datensätze aus dem Internet oder aus Tabellenkalkulationsprogrammen importieren. Biehler und Kombrink (2002, S. 115/116) schreiben: „FATHOM ist ein Werkzeug für interaktive, Explorative Datenanalyse, Modellierung und stochastische Simulation, beurteilende Statistik […] und die Untersuchung stochastischer Verteilungen. Für alle Bereiche der Stochastik wird eine wünschenswerte Werkzeugunterstützung angeboten. Darüber hinaus bestehen Experimentiermöglichkeiten mit Methoden und Grafiken durch multiple mehrstufig verbundene Fenster, "Slider" zur dynamischen Variation und Animation […]. Die Konstruktion eigener Methoden und Modelle wird u. a. durch einen Formeleditor unterstützt."

Für die Erstellung von Simulationen stellt FATHOM verschiedene Zufallsgeneratoren über Formeln zur Verfügung; es lassen sich sowohl Zufallsexperimente mit diskreten als auch mit kontinuierlichen Ergebnisräumen simulieren. Über die Verwendung dieser Zufallsgeneratoren lassen sich z. B. Würfel, Urnen und Glücksräder realisieren. Ferner kann man das Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen simulieren und hat die Möglichkeit der Modellierung von Zufallsexperimenten, die bei einem bestimmten Ergebnis abbrechen sollen (z. B. Wartezeitprobleme).

Die im Rahmen der Simulation erzeugten Daten lassen sich tabellarisch, grafisch und rechnerisch auswerten. Man kann die entstandenen Tabellen und Grafiken in Textverarbeitungsprogramme exportieren und dort im Sinn der Ergebnissicherung kommentieren.

2.3 Die Verwendung von Computersimulationen

„Unter Simulation versteht man in der Wissenschaft die Nachbildung eines realen Objektes oder Vorgangs als Modell und die Nutzung dieses Modells an Stelle des Originals." (Horton 2003, S. 45) Computersimulationen sind heute ein zentrales und anerkanntes Mittel zur Untersuchung und Lösung von Problemstellungen in vielen Bereichen der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik, aber auch im Bereich der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. „Die Simulation hat sich in den letzten 40 Jahren zu einem unentbehrlichen Werkzeug für die technisch-naturwissenschaftlich fortgeschrittene Gesellschaft entwickelt." (Horton 2003, S. 45) Doch neben der Wissenschaft und der Wirtschaft halten Computersimulationen über das Fernsehen und die modernen Medien zunehmend auch im Alltag Einzug. Gramelsberger (2003, S. 3) schreibt hierzu: „Mittlerweile ist die mediale Wirkung der animierten Simulationsbilder unübersehbar und nahezu in jeder der zahlreichen Wissenschaftssendungen gehören Simulationen zum Erklärungsinstrumentarium wissenschaftlicher Themen."

Bei der stochastischen Simulation eines Zufallsexperiments werden die Bestandteile durch geeignete einfache Zufallsgeräte (z. B. Würfel, Münze, Urne, Glücksrad, Galton-Brett) oder über Zufallszahlen abgebildet (vgl. Gnanadesikan, Schaeffer et al. 1987). Man kann dann ein reales Zufallsexperiment als Laborexperiment mehrfach nacheinander durchführen und über die mehrfache Wiederholung die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse oder die Kennzahlen von Zufallsgrößen (z. B. Mittelwert und Varianz) aus den aufgetretenen relativen Häufigkeiten schätzen.

Insbesondere die Verwendung des Computers ermöglicht den eleganten Einsatz von Simulationen im Unterricht (vgl. Biehler und Maxara 2007): Mit moderner Statistiksoftware wie Excel, SPSS oder FATHOM kann man vielfältige Arten von Zufallszahlen erzeugen. Weiter lassen sich die typischen Zufallsgeräte wie Würfel, Münze sowie das Ziehen aus der Urne mit und ohne Zurücklegen nachbilden. Die Zufallsexperimente lassen sich einfach und schnell 1000fach oder 10 000fach wiederholen. Hinzu kommt die einfache grafische Darstellung der entstehenden Häufigkeitsverteilungen.

2.3.1 Die Ziele beim Einsatz von Simulationen im Stochastikunterricht

Der Computersimulation von Zufallsexperimenten kommt eine hohe praktische Bedeutung zu. Viele insbesondere komplexe Problemstellungen können nur über Computersimulationen behandelt und gelöst werden. Diaconis und Efron (1983, S. 96) schreiben: „In the past few years there has been a surge in the development of new statistical theories and methods, that take advantage of the high-speed digital computer.” Szeby (2002, S. 12) schreibt bei der Vorstellung finanzmathematischer Aufgabenstellungen für den Stochastikunterricht: „In der Praxis ist häufig die Simulation an Stelle von unrealistischen Vereinfachungen die sinnvollere Alternative.“ Aufgrund der großen praktischen Bedeutung von Simulationen in vielen Bereichen der Wissenschaft und Technik ist es sinnvoll, Simulationen im Unterricht zu behandeln (vgl. Riemer 1985; vgl. Kütting 1994). Die Schülerinnen und Schüler sollen hierbei eine moderne und vielseitige Methode zur Lösung von Problemstellungen kennen lernen, die in abgewandelter Form auch jenseits der Stochastik eine hohe Bedeutung hat. Insbesondere die zunehmende Präsenz verschiedenster Formen von Computersimulationen in den Medien zeigt, dass der Umgang mit Computersimulationen in der Schule auch einen wichtigen Beitrag zur Allgemeinbildung darstellt.

Neben dem Kennenlernen von Simulationen als wissenschaftlicher Methode sind mit der Verwendung von Simulationen im Stochastikunterricht weitere Erwartungen verknüpft. Szeby (2002, S. 12) schreibt hierzu: „Im Unterricht tritt die Simulation sogar bei relativ einfachen Aufgaben in Konkurrenz zum analytischen Vorgehen, da sie als spielerische Variante zumeist anschaulicher und in der Regel motivierender ist.“

In den Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts (Arbeitskreis Stochastik der GDM 2003, S. 22) liest man zur Verwendung von Simulationen: „Der Stochastikunterricht sollte ferner durch einen hohen Stellenwert experimenteller Arbeiten […] charakterisiert sein. Dabei sind oft Computer zur Darstellung und Auswertung von Daten oder zur Simulation sinnvoll einsetzbar. […] Vom Zufallsgenerator erzeugte Daten können maßgeblich dazu beitragen, bei Schülern eine Intuition für zufallsbedingte Variabilität in empirischen Daten zu erzeugen“. Als erweitertes Lernziel für die Sekundarstufe II wird angegeben (S. 26): „Die Schüler können auf der Grundlage von selbst aufgestellten Modellen Simulationen von zufälligen Vorgängen komplexerer Natur durchführen und auswerten. Dabei machen sie sich geeignete technologische Hilfsmittel zu nutze. Sie gewinnen aus diesen Simulationen Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte. Sie sind in der Lage, die Genauigkeit der Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten zu beurteilen.“

Die Verwendung von Simulationen im Stochastikunterricht wird nach Biehler (1991) aus zwei verschiedenen Motivationen heraus verfolgt: Zum einen kann die Simulation als Werkzeug zur Lösung stochastischer Problemstellungen verwendet werden. Die Simulation dient hier als Ersatz oder Kontrolle für theoretische Berechnungen. Zum zweiten ermöglicht die Verwendung von Computersimulationen einen experimentellen Umgang mit stochastischen Problemstellungen. Hierüber werden Schülerinnen und Schüler vertraut mit stochastischen Situationen und man kann das intuitive Verständnis der Schülerinnen und Schüler fördern. Weiter kann man über den experimentellen Zugang zu stochastischen Problemstellungen zentrale stochastische Begriffe wie z. B. den Erwartungswert, die Varianz oder auch den Verteilungsbegriff vorbereiten. Für die beiden verschiedenartigen Anwendungen werden im Folgenden die Bezeichnungen „Simulation als Werkzeug“ und „Simulation als Gegenstand“ gewählt. Insbesondere bei Verwendung geeigneter Software erhält man die Möglichkeit zur einfachen grafischen Darstellung der simulierten Daten. Dies trägt zur Veranschaulichung der behandelten Inhalte bei.

Mit der Verwendung von Simulationen im Schulunterricht erhält man einen zweiten Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Neben dem in der Schule üblichen theoretischen Zugang erlernen die Schülerinnen und Schüler den frequentistischen Zugang zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten in vielfach wiederholten Simulationsdurchgängen. Dieses Vorgehen wird bereits von Engel (1975) vorgeschlagen. Auch bei weiteren zentralen Begriffen der Stochastik wie dem Erwartungswert und dem Verteilungsbegriff wird die Häufigkeitsinterpretation gefördert. Bei der Verwendung der Simulation als Gegenstand führt dieser zweite Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zu einem intuitiven Verständnis von Zufallsprozessen und ermöglicht die experimentelle Vorbereitung zentraler stochastischer Begriffe. Bei der Verwendung der Simulation als Werkzeug erhält man einen elementareren Zugang zur Lösung stochastischer Probleme, der mit weniger Formeln auskommt. Jedoch ist auch hier nicht an zielloses Experimentieren gedacht, sondern die stochastischen Problemstellungen müssen geeignet als Computersimulation modelliert werden.

Vom Gegenstandsaspekt her betrachtet kann man Simulationen auch in vorgefertigten Lernumgebungen einsetzen. So kann man z. B. die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bei einer großen Anzahl von Simulationsdurchgängen mit einer dynamischen Lernumgebung experimentell erarbeiten lassen, bei der die relative Häufigkeit von Wappen beim n-fachen Münzwurf nach 100, 200, 300, …, 10 000 Würfen sukzessive in einem Graphen aufgetragen wird. Bei jedem neuen Start der 10 000 Simulationsdurchgänge erhält man eine neue Auftragung, die von den Schülerinnen und Schülern beschrieben und interpretiert werden kann.

Aus lerntheoretischer Sicht erscheint es allerdings im Sinn konstruktivistischer Lerntheorien sinnvoll, den Gegenstandsaspekt und den Werkzeugaspekt miteinander zu verknüpfen. Einfache Simulationsumgebungen zum experimentellen Umgang mit stochastischen Problemstellungen können selbstständig erstellt werden. Umgekehrt müssen sich die Schülerinnen und Schüler bei der Umsetzung der stochastischen Problemstellungen in eine Simulationsumgebung mit der realen Situation auseinandersetzen, dies eröffnet die Möglichkeit, fehlerhafte Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler in adäquate Konzepte umzuwandeln. Auch der Verwendung von Simulationen als Werkzeug kommt somit eine lerntheoretische Bedeutung zu.

Wolpers und Götz (2002, S. 130) geben in einer Übersicht die folgenden Gründe an, aus denen heraus „Simulationen fester Bestandteil des gesamten Stochastikunterrichts sein sollten“:

- „Die Simulation ist ein wichtiges Verfahren zur Modellbildung in Theorie und Praxis.
- Die Modellkonstruktion durch Simulation vermittelt epistemologische Einsichten in die Rolle von Modellen bei der Mathematisierung von Ausschnitten der Realität, indem mit Hilfe von Simulationen Erfahrungen und Einsichten in den Zusammenhang

von stochastischer Theorie und den empirischen Entsprechungen gewonnen werden können. Für die Aufhellung der Wechselbeziehung zwischen Empirie und Theorie sind insbesondere solche Probleme geeignet, deren Lösung analytisch und empirisch-experimentell möglich ist.

- Simulationen fördern Fähigkeiten im Modellbilden.
- Simulationen sind wichtig für den Erwerb stochastischen Denkens: Dies gilt z. B. für den Erwerb und die Einschätzung zentraler probabilistischer Begriffe wie Zufall, Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Signifikanzintervall usw.
- Durch Simulationen lassen sich auch Probleme lösen, deren vollständige Lösung im Unterricht nicht möglich oder zu aufwändig wäre.
- Simulationen verlangen planerische, ausführende und beurteilende Tätigkeiten, also Projektarbeit. Eigentätigkeit hat positive Auswirkungen auf das Lernverhalten, weil die aktive Auseinandersetzung mit den Begriffen und Verfahren der Stochastik eine bessere Einbettung von deklarativem und operativem Wissen in die kognitive Struktur ermöglicht. Insbesondere sind positive Auswirkungen auf die Veränderung falscher primärer Intuitionen und die Entwicklung angemessener Sekundärintuitionen zu erwarten.
- Simulationen fördern die Motivation. Dies gilt besonders, wenn Probleme bearbeitet werden, deren Lösung ungewiss (z. B. Paradoxa der Statistik) oder überraschend ist (z. B. Geburtstagsproblem).“

Neben dem Werkzeugaspekt und dem Gegenstandsaspekt wird hier vor allem auf die Bedeutung von Simulationen bei der Modellbildung, auf den Motivationsaspekt sowie auf die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler im Sinn konstruktivistischer Lerntheorien hingewiesen.

Nickerson (1995, zitiert nach DelMas, Garfield, Chance, 1999, S. 4) gibt allgemeine methodische Richtlinien für einen Verständnis fördernden Mathematikunterricht an, welche die Bedeutung von Simulationen unterstreichen. Hiermit betont er vor allem die Bedeutung der Simulation als Gegenstand und hiermit verbunden die eigenständige kognitive Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten:

1. “View learning as a constructive process where the task is to provide guidance that facilitates exploration and discovery.
2. Use simulations to draw students attention to aspects of a situation or problem that can easily be dismissed or not observed under normal conditions.
3. Provide a supportive environment that is rich in resources, aids exploration, creates an atmosphere in which ideas can be expressed freely, and provides encouragement when students make an effort to understand.”

DelMas, Garfield und Chance (1999) sowie Snir, Smith und Grosslight (1995) weisen vor allem auf die einfache Möglichkeit der grafischen Darstellung in Verbindung mit Computersimulationen hin und betonen die hohe Bedeutung eines Wechsels der Repräsentationsformen zum Aufbau und zur Förderung des stochastischen Verständnisses.

Im Unterricht sollten Simulationen von Zufallsexperimenten zunächst an realen Zufallsgeräten eingeführt werden (vgl. delMas, J. Garfield et al. 1999; Wolpers und Götz 2002; Engel 2003). Dieses „echte Experimentieren“ fördert die Motivation bei den Schülerinnen und Schülern und erleichtert das Verständnis für Simulationen. Rossman und Chance

(1999, S. 2) betonen: „While modern technology performs simulations quickly and efficiently, we worry that students fail to connect the numbers and displays being produced with the process being simulated. We therefore advocate beginning with physical simulations, where students literally get a hands-on view of the process."

Gerade an Simulationen mit realen Zufallsgeräten lässt sich die stochastische Modellbildung gut verstehen. Weiter wird allerdings auch die Notwendigkeit für eine „Automatisierung" der Simulationen deutlich, da die händischen Simulationen bei einer großen Anzahl von Wiederholungen sehr zeitaufwändig und eintönig sind. Aus dieser natürlichen Motivation heraus können die Computersimulationen in einem zweiten Schritt eingeführt werden. Die Computersimulationen sind deutlich abstrakter und werden so durch die händischen Simulationen vorbereitet.

Engel (2003, S. 170) betont die Rolle der Simulation bei der stochastischen Modellbildung. Nach Engel „können Simulationen den Lernenden helfen, sich auf konzeptionelles Verstehen zu konzentrieren, und experimentell und spielerisch die Dynamik des zu untersuchenden Ausgangsproblems zu erkunden." Sánchez und Canal (2003, S. 1) schreiben hierzu: „Even though the simulation process cannot be conceived as a model by itself, it is clear, that in the computational domain it is an instrument to build models". Und weiter: "The possibility of generating sequences of random trials and the operations that could be made with them could be seen as a toolbox useful to build models of random situations".

Engel (2003) schlägt ein fünf-schrittiges Vorgehen vor, um ein anwendungsorientiertes Lernen im Bereich der Stochastik zu fördern: Nach der Einführung des realen Problems soll im zweiten Schritt ein Simulationsmodell erstellt werden und mit realen Zufallsgeräten simuliert werden. Hierfür sind entsprechende Modellannahmen notwendig. Im dritten Schritt erfolgen die Repräsentation des Simulationsmodells am Computer und die Interpretation der erhaltenen Ergebnisse einschließlich Schlussfolgerungen und Verallgemeinerungen. Im vierten Schritt sollen die Ergebnisse der Simulation kritisch hinterfragt werden. Insbesondere soll der Einfluss der Modellannahmen untersucht werden, gegebenenfalls verbunden mit einer nochmaligen Durchführung der Simulation. Erst im letzten Schritt soll das Problem auch theoretisch untersucht werden und die Ergebnisse mit der Simulation verglichen werden.

2.3.2 Untersuchungen zum Einsatz von Simulationen im Stochastikunterricht

Wie in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben, wird der Einsatz von Computersimulationen beim Erlernen stochastischer Inhalte vielfach und aus vielfältigen Gründen empfohlen. In Verbindung mit konkreten Simulationsbeispielen wird in der didaktischen Literatur vor allem auf die unterstützende Wirkung der Simulationen (mit oder ohne Computer) bei der Erarbeitung komplexer stochastischer Begriffe sowie auf die Möglichkeit der handlungsorientierten Einbettung von Simulationen in den Unterricht hingewiesen.

Allerdings finden sich in der Literatur nur wenige empirische Untersuchungen über den Verlauf und den Erfolg eines durch Computersimulationen unterstützten Stochastik- oder Statistikunterrichts. Insbesondere im deutschsprachigen Raum gibt es nur wenige Berichte über empirische Untersuchungen zum Einsatz von Simulationen in der Statistikausbildung.

Aber auch in einer Übersicht der angelsächsischen Literatur von Mills (2002) zum Einsatz von Simulationen in der Statistikausbildung zeigt sich ein deutlicher Mangel an empirischen Untersuchungen. Mills (2002, S. 9) schreibt in diesem Zusammenhang: „[…] one major disadvantage evident in the literature was the lack of empirical and theoretical research and support used to substantiate the recommendations.” DelMas, Garfield und Chance (1999, S. 3) weisen ebenfalls auf den Mangel an empirischen Untersuchungen in Bezug auf die Benutzung von Simulationssoftware hin: „Despite the accepted approach used to integrate simulation software into a statistics class, there is little published research describing and evaluating such an approach. While the motivation of these programs is to provide improved instructional experiences, most of the authors describe the nature of the program and demonstrate how it can be used in the classroom, but they do not report any evidence, that the program improves learning or understanding of sampling distributions.”

Die wenigen empirischen Untersuchungen deuten allerdings auf positive Effekte bei der Verwendung von Simulationen in der Statistikausbildung hin.

Eine Untersuchung von Wollring (Wollring 1992a; Wollring 1992b) mit Simulationen zum 3-Türen-Problem in der Jahrgangsstufe 6 (ohne Computereinsatz) zeigt einen deutlichen Abbau von Fehlvorstellungen durch das Modellieren der Spielsituation. Weiter wird von einer großen Akzeptanz der Simulationen bei den Schülerinnen und Schülern berichtet.

J. Engel (2003) berichtet über ein Seminar für Lehramtskandidaten zur stochastischen Modellierung, in dem unter anderem Computersimulationen eingesetzt wurden. Hierbei weist er darauf hin, dass die Studierenden die Rolle der Simulationen als positiv empfunden haben und keine Probleme mit dem konzeptionellen Vorgehen bei der Erstellung einer Simulation hatten. Weiter haben die Studierenden über die Ausführung der Simulationen das Ausgangsproblem besser verstanden. Allerdings verweist Engel auf Probleme bei der Erstellung einer Simulation am Computer. Er schreibt (S. 183): „Allerdings bereitete die Repräsentation und Umsetzung der Simulation am Computer (trotz intensiver Assistenz und Beratung durch den Seminarleiter) zum Teil erhebliche Probleme.“

Auch im angelsächsischen Bereich weisen die vorhandenen empirischen Untersuchungen zum Einsatz von Simulationen auf positive Effekte hin. So berichten Garfield und del Mas (1989; 1999), dass Computersimulationen zum besseren Verständnis komplexer stochastischer Konzepte beitragen. Auch weitere Studien berichten von positiven Effekten, wenn Simulationen und insbesondere die aktive Erkundung statistischer Prozesse in den Unterricht einbezogen werden (Romero, Ferrer et al. 1995; Sullivan 1995; Gnanadesikan, Schaeffer et al. 1997).

In der Literaturübersicht von Mills (2002, S. 9) wird ein positiver Effekt beim Einsatz von Simulationen insbesondere bei schwächeren Lernenden berichtet: „The results from empirical studies […] reviewed in this paper revealed, that computer simulation methodes appeared to be effective for lower-ability-students.“ Eine solche Unterstützung auch der schwächeren Lernenden durch den Einsatz von Computertechnologie im Unterricht wird bestätigt in einem Artikel von Cradler, McNabb et al. (2002, S. 48): “Using technology to build skills is not only for the best and the brightests students.”

Eine Vergleichsstudie von Lane-Getaz (2002) untersucht den Einsatz der Statistiksoftware FATHOM mit Verwendung von Simulationen in einem Statistik-Kurs an einer High-School in den USA. Thematisch werden die lineare Regression, das Testen von Hypothesen und Konfidenzintervalle behandelt. Bei den Ergebnissen wird zum einen auf die Unterstützung bei der unterrichtlichen Vermittlung der Inhalte durch den Computereinsatz hingewiesen (S. 72): „This study adds weight to the evidence, that technology can be a very effective aid in teaching.“ Diese methodische Unterstützung des Unterrichts wird gemäß der Studie verstärkt durch eine positive Einstellung der Lernenden gegenüber der Verwendung der Software FATHOM. Ferner wird von einer Vertiefung des Verständnisses für die vermittelten statistischen Konzepte berichtet (S. 72): „The results of this case study support the work of Mills and Garfield, delMas, and Chance (1998), who claimed computer simulation labs might deepen conceptual understanding.“ Wie bei Garfield, delMas und Chance (1998) wird insbesondere die Bedeutung der grafischen Darstellung in Verbindung mit Computersimulationen hervorgehoben (S. 72): „This FATHOM study, which is also rich in graphics, contributes to the empirical evidence of the effectiveness of graphical computer simulation, butt adds that dynamic graphics may be even more effective than static graphics.” Auch Lane-Getaz beobachtet, dass insbesondere mathematisch durchschnittlich begabte Schülerinnen und Schüler vom Einsatz der Software FATHOM profitieren (S. 74): “These bright but mathematically average students clearly benefited the most from FATHOM.“

Neben den positiven Auswirkungen des Einsatzes von Simulationen in der Statistikausbildung werden in der Literatur auch Probleme geschildert. Hodgson und Burk (2001) erklären in einem Übersichtsartikel zur Verwendung von Simulationen im Statistikunterricht (S. 26) „Trotz ihres intuitiven Reizes und zunehmender empirischer Stützung bietet der Einsatz von Simulationen keine Garantie, dass Schüler ein angemessenes Konzept für statistische Ideen entwickeln.“ Weiter führen sie aus (S. 26): „In unserer eigenen Forschung (Hodgson 1996) […] haben wir herausgefunden, dass Simulationen nicht immer immun gegen Fehlvorstellungen machen, sie können sogar zu ihrer Bildung beitragen“. Es wird von Fehlvorstellungen zum Stichprobenziehen berichtet, welche in Verbindung mit einer Simulationsumgebung zum empirischen Gesetz der großen Zahl auftreten. Nach Hodgson kommt der geeigneten Einbettung der Simulationen in den Unterricht eine entscheidende Rolle zu. Als wichtig werden angemessene Einführungen, informelle Zwischenauswertungen, Zusammenfassungen sowie die Gestaltung der Aktivitäten angesehen.

Shaughnessy betont die Rolle der Verknüpfung mit händischen Zufallsexperimenten (Shaughnessy 1992, S. 485): „It seems to be very important for many students, to have the experience of actually generating and gathering their own data physically, with random devices such as dice or spinners, before they can understand or accept computer simulations.”

Chance, Garfield und delMas (2000, S. 4) beschreiben ebenfalls, dass der Einbettung der Simulationen in das Unterrichtskonzept eine entscheidende Rolle zukommt: „[…] shifting the computational burden to computers and calculators allows more time to focus on conceptual understanding and other reform goals. However, recent research is illustrating that quality programs and simulations are not enough to ensure cognitive change.” Sie betonen ferner einen großen Einfluss des Vorwissens sowie des Engagements der Lernenden bei der Verwendung von Computerumgebungen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die vorliegenden Untersuchungen positive Auswirkungen auf die Gestaltung des Unterrichts, auf das Verständnis der Schülerinnen und Schüler sowie auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler erwarten lassen. Allerdings stellen sich diese positiven Auswirkungen nicht automatisch ein. Eine entscheidende Rolle für den Erfolg des Einsatzes von Simulationen im Stochastikunterricht kommt der Einbettung der Simulationen in das Kurskonzept zu. Hierzu gehören unter anderem die Gestaltung einer integrierten Einführung der verwendeten Software, die Gestaltung vorbereiteter Lernumgebungen, die Gestaltung der Arbeitsaufträge sowie das Aufgreifen und Sichern der in den Simulationsphasen vermittelten Kenntnisse und Fähigkeiten.

2.4 Einordnung des Simulationsvorkurses in das Kurshalbjahr

Im Rahmen der vom Lehrplan vorgegebenen Kursstruktur werden drei Schwerpunktsetzungen vorgenommen, für die ein aufeinander aufbauendes Unterrichtskonzept entwickelt wurde:

Das Kurshalbjahr beginnt mit einem so genannten **„Simulationsvorkurs“**. In diesem wird inhaltlich auf drei Ebenen gearbeitet: Die Schülerinnen und Schüler erwerben parallel „Werkzeugkompetenz“ im Umgang mit der Software FATHOM, sie erwerben „Simulationskompetenzen“ zur Modellierung stochastischer Probleme und sie erwerben grundlegende „stochastische Kompetenzen“.

Im Anschluss an den Simulationsvorkurs folgen nach dem Lehrplan in Hessen die zu den Unterrichtsinhalten „Berechnung von Wahrscheinlichkeiten“, „Kombinatorische Zählprobleme“ und „Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen“ angegebenen Stichworte (siehe Tab. 2.1, S. 9). Für diese Inhalte wurden im Rahmen der vorliegenden Studie keine Unterrichtsmaterialien ausgearbeitet. Die Lehrperson muss hier über das Vorgehen und den Computereinsatz selber entscheiden. Bei der Einführung des Erwartungswerts einer Zufallsgröße bietet sich der Einsatz von Computersimulationen an.

Den zweiten Schwerpunkt des Unterrichtskonzepts stellt die **Binomialverteilung** dar. Die Binomialverteilung ist die zentrale Wahrscheinlichkeitsverteilung der gymnasialen Oberstufe, an der der Verteilungsbegriff exemplarisch behandelt wird. Daher wird das Thema „Binomialverteilung“ über Simulationen und dynamische Lernumgebungen vertiefend behandelt.

Der dritte Schwerpunkt des Unterrichtskonzepts liegt auf dem Thema **„Testen von Hypothesen“**. Dieses für Schülerinnen und Schüler anspruchsvolle Thema aus dem Bereich der beurteilenden Statistik soll ebenfalls mit Unterstützung von Computersimulationen und Lernumgebungen behandelt werden.

Im folgenden Abschnitt wird die Idee zur Gestaltung eines Simulationsvorkurses im Rahmen des Kurshalbjahres Stochastik begründet. Im Anschluss hieran werden die Unterrichtskonzepte zur Binomialverteilung und zum Testen von Hypothesen kurz erläutert. Da sich die vorliegende Arbeit ausführlich mit der Entwicklung, Durchführung und Untersuchung des Simulationsvorkurses beschäftigt, ist der Darstellung und der didaktischen Analyse des Simulationsvorkurses ein eigenes Kapitel gewidmet.

Die Unterrichtsmaterialien zu allen drei Schwerpunkten sind in den Anhang aufgenommen (Anhang A, Anhang B, Anhang C). Hier finden sich die verwendeten Anleitungen, Arbeitsblätter und Aufgabenblätter. In den „Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik“ (kurz „KaDiSto“) werden die im Anhang dieser Arbeit vorhandenen Unterrichtsmaterialien bei jedem der drei Schwerpunkte ergänzt durch einen ausführlichen didaktischen Kommentar sowie durch die Musterlösungen zu den Aufgaben (Meyfarth 2006a). Ferner kann man die beschriebenen Fathom-Lernumgebungen online abrufen.

Der didaktische Kommentar zu den Unterrichtsmaterialien geht bei den Themen Binomialverteilung und Testen von Hypothesen teilweise über die Erläuterungen in den folgenden Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 hinaus. Die ausführliche Schilderung und Analyse des

Simulationsvorkurses in Kapitel 4 dieser Arbeit ist tiefer gehender als die Schilderung in KaDiSto.

2.4.1 Die Einführung von Simulationen in Form eines Simulationsvorkurses

Das vorliegende Kurskonzept ist so geplant, dass der Umgang mit Simulationen zu Beginn des Kurses erlernt wird. Hierzu gehören das Kennenlernen von händischen Simulationen sowie von Computersimulationen, der Umgang mit der Software FATHOM und die Erarbeitung theoretischer Grundbegriffe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für die Gestaltung der Einführung in den Stochastikkurs als Simulationsvorkurs sollen hier mehrere Argumente angegeben werden, deren Gültigkeit im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht werden soll. Eine ausführliche Schilderung und Analyse des Unterrichtskonzepts erfolgt in Kapitel 4.

a) Durch den Simulationsvorkurs sollen stochastische Intuitionen aufgebaut werden, auf die im weiteren Verlauf des Kurses zurückgegriffen werden kann.

Zu den zentralen Problemen des Stochastikunterrichts gehören fehlende oder falsche Intuitionen und fehlende Erfahrung im Umgang mit stochastischen Situationen. So wird „dem üblichen Zugang [zum Stochastikunterricht] […] als Mangel ausgelegt, dass er zu theorielastig ist und dass die intuitiven Ideen allzu sehr ausgeblendet werden“ (Borovcnik 1992, S. 92). Gerade der Aufbau von korrekten Intuitionen zur Beurteilung stochastischer Situationen stellt ein ebenso wichtiges wie schwieriges Themenfeld dar. Nach Bea (1995, S. 17) ist bereits das Erkennen einer stochastischen Situation als solche eine Schwierigkeit. Slovic, Kunreuter et al. betonen (1974, S. 192): „People have a very poor conception of randomness; they don’t recognize it, when they see it.”

Die mangelnde Erfahrung im Umgang mit stochastischen Situationen verbunden mit mangelnden oder falschen stochastischen Intuitionen ergibt sich für den halbjährigen Stochastikkurs der Sekundarstufe II insbesondere dann, wenn in der Mittelstufe die Stochastik gar nicht, nur sehr eingeschränkt oder in einer sehr deterministischen Form unterrichtet wurde. Dies ist allerdings in Deutschland sehr häufig der Fall. Im Rahmen einer Untersuchung von Strick (1997, S. 54) zu Schülervorstellungen über Zufallsvorgänge zu Beginn des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II schreibt dieser: „Andere Befragungen bestätigen diese Erfahrungen: Den Schüler/innen fehlen eigene intensive Erfahrungen mit Zufallsversuchen.“ Kütting (1994, S. 158) erwähnt zu diesem Problem: „Beginnt der Stochastikkurs erst in der Sekundarstufe II, so fehlen dem Schüler der intuitive Hintergrund und elementare Vorerfahrungen. Ein Nachholen dieser Versäumnisse kann aber auf der Sekundarstufe II schnell eine nicht mehr interessierende Unterforderung sein.“ Auch Winter (1976) ist skeptisch in Bezug auf einen erfolgreichen Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II, wenn keine ausreichenden Erfahrungen aus der Sekundarstufe I vorliegen. Wolpers und Götz (2002, S. 139) beschreiben: „Stochastikkurse im Sekundarstufen II- bzw. im tertiären Bereich, in denen nicht auf einem Fundament reflektierter und geordneter Erfahrungen aufgebaut werden kann, erweisen sich häufig als ineffektiv und für den Lerner als frustrierend.“

Wie bereits beschrieben stellt der Aufbau geeigneter intuitiver Vorstellungen zu stochastischen Situationen eines der zentralen Ziele dar, derentwegen man Simulationen im Stochastikunterricht einsetzen sollte. Hierzu wird vom Gegenstandsaspekt der Simulationen Gebrauch gemacht: Die Lernenden können anhand der Simulationen mit Zufallssituationen experimentieren und geeignete Vorstellungen zu stochastischen Vorgängen und zu stochastischen Grundbegriffen wie Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, der Variabilität stochastischer Daten und dem Begriff der Stichprobenverteilung aufbauen. Zentrale Begriffe des Stochastikkurses werden so im Rahmen des experimentellen Arbeitens mit den Simulationen bereits im Simulationsvorkurs vorbereitet und behandelt. Herget (1997, S. 4) schreibt hierzu: „Eine solide Grundlage sind eigene, sorgfältig und bewusst registrierte, ausgewertete und reflektierte Untersuchungen (Experimente). […] Ich muss […] den Schülerinnen und Schülern Zeit lassen, neue, andere, bewusste Erfahrungen mit dem Zufall zu machen."

Die Gestaltung des Simulationsvorkurses spricht nicht dagegen, auch im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres Simulationen zum Aufbau stochastischer Intuitionen einzusetzen. Die Verwendung der Simulationen ganz zu Beginn des Kurshalbjahres soll ein intuitives Grundverständnis für stochastische Situationen anlegen.

b) Die Einführung von Simulationen lässt sich gut mit den zu Beginn des Kurses vorgesehenen Grundbegriffen der Stochastik verbinden

Betrachtet man den Lehrplan des Landes Hessen für den Stochastikkurs der gymnasialen Oberstufe (Kultusministerium Hessen 2003), so beginnt der Stochastikkurs mit dem Themenbereich „Grundbegriffe der Stochastik". Hier werden die folgenden Inhalte angegeben: „Zufallsexperimente und Ereignisse, absolute und relative Häufigkeit, Häufigkeitsverteilungen und deren grafische Darstellungen, Lage- und Streumaße, Wahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit als Sonderfall), Empirisches Gesetz der großen Zahlen".

Es zeigt sich, dass die meisten dieser Inhalte mit Simulationen in Verbindung stehen und somit als stochastische Grundbegriffe im Rahmen des Simulationsvorkurses erarbeitet werden können: Bei der Verwendung von Simulationen zur Untersuchung stochastischer Probleme werden automatisch Zufallsexperimente und Ereignisse sowie die Begriffe der absoluten und relativen Häufigkeit behandelt und untersucht. Sowohl bei händischen Simulationen wie auch bei Computersimulationen spielt die grafische Auftragung der über die Simulation ermittelten Häufigkeitstabellen z. B. in Form von einfachen Balkendiagrammen oder Histogrammen eine zentrale Rolle. Die grafische Darstellung wird durch die Software FATHOM optimal unterstützt.

In Bezug auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff eröffnet der Simulationsvorkurs den Schülerinnen und Schülern gleich zu Beginn des Stochastikkurses den frequentistischen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die Schüler erhalten über die Verwendung von Simulationen als Werkzeug von Beginn des Kurses an die Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten angenähert zu bestimmen.

In Bezug auf die Einführung von Simulationen parallel zum Wahrscheinlichkeitsbegriff schlägt Biehler (2003, S. 111) im Rahmen einer unter Einbeziehung der Software FATHOM gestalteten Lehrveranstaltung für Studierende des Grund-, Haupt- und Realschullehramts eine ähnliche Vorgehensweise vor: „In der Vorlesung Elementare Stochastik lernen die Studierenden FATHOM zunächst als Werkzeug zur statistischen Datenanalyse kennen und können diese Kompetenzen dann nutzen, um simulierte Daten flexibel zu analysieren. Die Methode der Simulation wird praktisch zusammen mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt." In diesem Konzept sind die Studierenden allerdings bereits aufgrund des vorangegangenen Themenkomplexes zur statistischen Datenanalyse mit der Software FATHOM vertraut. Im Rahmen des hier beschriebenen Simulationsvorkurses müssen die Schülerinnen und Schüler zusätzlich zu den stochastischen Grundbegriffen und den Simulationen noch den Umgang mit der Software erlernen.

c) Vorbereitung zentraler stochastischer Begriffe, Ausblick auf den weiteren Verlauf des Kurses

Wie oben beschrieben werden im Rahmen des Simulationsvorkurses zentrale Begriffe des Stochastikkurses mit Hilfe von Simulationen vorbereitet oder eingeführt. Wittmann (1981, S. 9) schreibt zu einem solchen Vorgehen: „Es empfiehlt sich nicht, die Erlernung eines Gegenstandes aufzuschieben, bis in einem Zug eine endgültig-abschließende Klärung erfolgen kann. Vielmehr sollte die Behandlung gerade der wesentlichen Punkte bereits auf früheren Stufen in entsprechend einfacher Form eingeleitet werden."

Die Gestaltung des Simulationsvorkurses ermöglicht ferner bereits zu Beginn des Stochastikkurses die Behandlung komplexer Aufgabenstellungen. So werden im Rahmen der vorliegenden Planung bereits in den ersten Wochen das Geburtstagsproblem, das Sammelbildproblem und verschiedene Erwartungswertaufgaben mit Hilfe von Simulationen behandelt. Hierdurch erhalten die Schülerinnen und Schüler gleich zu Beginn des Kurses einen Ausblick auf typische Aufgabenstellungen der Stochastik, die teilweise im weiteren Verlauf noch einmal aufgegriffen und theoretisch gelöst werden.

Das gewählte Vorgehen entspricht der Beschreibung eines Spiralcurriculums nach Müller und Wittmann (1984, S. 158): „Grundlegende Ideen sollen im Unterricht in mehreren Durchgängen mit steigendem Niveau behandelt werden […]. Mit dem Fortschreiten auf der Spirale werden anfangs intuitive, ganzheitliche, undifferenzierte Vorstellungen zunehmend von formaleren, deutlicher strukturierten, analytisch durchdrungenen Kenntnissen überlagert."

Hieran zeigt sich, dass die gewählte Form der Einführung der Simulationen bereits im Einstieg des Stochastikkurses zu einem spiralcurricularen Aufbau des Gesamtkurses beiträgt, in dessen Verlauf zentrale Begriffe und Aufgabenstellungen an verschiedenen Stellen des Kurses erneut aufgegriffen und auf einem höheren Exaktifizierungsniveau behandelt werden. Diesem Konzept, welches von Bruner (1970) vorgeschlagen wurde, kommt gerade in der Mathematikdidaktik eine große Bedeutung zu. Dennoch sind Realisierungen im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe allzu selten.

d) Der Simulationsvorkurs ist gut geeignet für das Erlernen der Software FATHOM

Zur Methodik des Rechnereinsatzes im Mathematikunterricht spricht Köhler in einer Untersuchung über den Einsatz von Derive im Rahmen eines Kurskonzepts in der gymnasialen Oberstufe zur Einführung in die Analysis das Problem der Bedienerkompetenz der Schülerinnen und Schüler an (Köhler 1998, S. 69): „Daneben wurde auch immer wieder deutlich, dass die Unregelmäßigkeit des Rechnereinsatzes ein auf Kontinuität angelegtes Lernen behindern kann. Die benutzerfreundliche Gestaltung von DERIVE erlaubte zwar eine relative schnelle Einarbeitung, jedoch zeigte sich eine gewisse Sicherheit im Umgang mit dem System immer erst nach Phasen intensiveren Computereinsatzes. Umgekehrt führten Unterbrechungen von etwas mehr als zwei Wochen stets wieder zum Auftreten elementarer Bedienerfehler." Die Probleme resultieren offensichtlich aus einer mangelnden Kontinuität des Rechnereinsatzes.

Im vorliegenden Kurskonzept sollen die Schülerinnen und Schüler einen sicheren Umgang mit der Software FATHOM für den weiteren Verlauf des Stochastikkurses erlernen. Ziel ist der flexible Umgang mit der Software zur selbstständigen Erstellung von Computersimulationen. Neben den auch bei händischen Simulationen notwendigen Modellierungsfähigkeiten müssen sowohl Grundfertigkeiten in der Bedienung der Software wie auch die Verwendung geeigneter Befehle zur Erstellung von Computersimulationen in FATHOM erlernt werden. Gerade zum Erlernen der Software kommt der regelmäßigen

Verwendung im Unterricht und auch zu Hause eine entscheidende Bedeutung zu, um das von Köhler angesprochene Problem der Bedienerkompetenzen zu vermeiden. Diese kontinuierliche Verwendung von FATHOM zum Erlernen der Software wird durch das Konzept des Simulationsvorkurses gewährleistet: Dadurch, dass im Rahmen des Simulationsvorkurses über mehrere Wochen kontinuierlich mit Computersimulationen gearbeitet wird, ergibt sich die Gelegenheit zur Festigung und Vertiefung des Umgangs mit der Software.

Die Verknüpfung des Themas Simulationen mit der Erarbeitung stochastischer Grundbegriffe sowie mit einer Einführung in die Software FATHOM führt dazu, dass die Schülerinnen und Schüler auf einem für die gymnasiale Oberstufe geeigneten Anspruchsniveau über einen längeren Zeitraum mit Simulationen arbeiten. Die von Kütting (1994) angesprochene Unterforderung beim Aufbau geeigneter stochastischer Intuitionen in der Sekundarstufe II wird durch dieses Konzept vermieden.

2.4.2 Das Konzept zur Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist die zentrale Wahrscheinlichkeitsverteilung im Stochastikunterricht der gymnasialen Oberstufe. Im Grundkurs stellt sie i. a. sogar die einzige ausführlich behandelte Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Die Behandlung der Binomialverteilung im Unterricht eröffnet vielfältige Anwendungsbezüge. Dies wird im vorliegenden Kurskonzept durch eine durchgängige Anwendungsorientierung der gewählten Aufgabenstellungen genutzt. Im Vergleich zu dem in üblichen Schulbüchern vorgeschlagenen Vorgehen werden ferner folgende Schwerpunktsetzungen bzw. Änderungen vorgenommen:

1. Verwendung von Simulationen und dynamischen Lernumgebungen
2. Einstieg in die Einheit mit dem Galton-Brett
3. Abschluss der Unterrichtseinheit mit dem $1/\sqrt{n}$ – Gesetz

Durch die Verwendung von Simulationen wird den Schülerinnen und Schülern neben der Theorie ein zweiter Zugang zur Binomialverteilung eröffnet. In diesem Sinn sind mehrere Aufgaben so konzipiert, dass sich der frequentistische und der theoretische Zugang gegenseitig ergänzen. Insbesondere bei der Entwicklung der theoretischen Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung wird die Simulation als Kontrolllösung eingesetzt.

Da die Binomialverteilung in der gymnasialen Oberstufe als exemplarische Wahrscheinlichkeitsverteilung behandelt wird, müssen neben anwendungsorientierten Berechnungen auch weitergehende Betrachtungen zum Verteilungsbegriff erarbeitet werden, z. B. Kennzahlen von Verteilungen sowie die Beschreibung und Interpretation der Form einer Verteilung. Hier zeigen Untersuchungen, dass insbesondere die Betrachtung der Verteilung als Ganzes für Schülerinnen und Schüler problematisch ist (vgl. Saldanha und Thompson 2002). Zur Unterstützung dieses Verständnisprozesses werden dynamische Lernumgebungen eingesetzt, in denen man mit der Binomialverteilung experimentieren kann. Ebenfalls exemplarisch wird bei der Binomialverteilung das Gesetz der großen Zahl vertieft, indem die Stabilisierung der simulierten Häufigkeits*verteilungen* gegen die theoretisch berechnete Wahrscheinlichkeits*verteilung* für eine zunehmende Anzahl N von Simulationsdurchgängen betrachtet und interpretiert wird.

Am Beispiel des Galton-Bretts als Einstieg in die Unterrichtseinheit können bereits wichtige Begriffe der Binomialverteilung wie die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen der

Benoulli-Kette und die Mittenbevorzugung eingeführt werden. Auch die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kann vorbereitet werden. Insbesondere ermöglicht die Verwendung des Galton-Bretts im Unterricht eine Gegenüberstellung der experimentell bestimmten Häufigkeitsverteilung mit der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Auftretende Abweichungen bieten Gelegenheit zu Modellierungsüberlegungen.

Das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz zum Ende der Unterrichtseinheit überträgt die üblicherweise für die absolute Anzahl X an Erfolgen einer Bernoulli-Kette behandelten σ-Regeln auf den Fall der relativen Anzahl $Y = \frac{X}{n}$ an Erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler sollen das Gesetz mit Hilfe von Computersimulationen entdecken, theoretisch aus den bekannten σ-Regeln herleiten und auf Anwendungsbeispiele übertragen können.

Tab. 2.2 zeigt eine Übersicht der Unterrichtseinheit mit Zeitplanung.

Thema	**Inhalt**	**Stunden**
Galton-Brett	• Vorführung eines realen Galton-Bretts • Diskussion der Mittenbevorzugung • Modellierung der Häufigkeitsverteilung, Vergleich mit der realen Häufigkeitsverteilung	2
Simulation und Formel der Binomialverteilung	• Hinführung zur Binomialverteilung über die Simulation • Theoretische Verallgemeinerung der Formel der Binomialverteilung, Betrachtung als Wahrscheinlichkeitsverteilung	2
Übungen zu Bernoulli-Versuchen	• Anwendungsaufgaben zur Binomialverteilung • Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit dem TI89 • Vergleich von simulierter Häufigkeitsverteilung und theoretischer Binomialverteilung	6
Eigenschaften der Binomialverteilung	• Lage des Maximums, Höhe und Breite, Symmetrie der Binomialverteilung	3
Erwartungswert und Standardabweichung, σ- Umgebungen	• Herleitung der Formeln $\mu = n \cdot p$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ • Erarbeitung der σ- Umgebungen um den Erwartungswert einer Binomialverteilung	3
$1/\sqrt{n}$ – Gesetz	• Erarbeitung des $1/\sqrt{n}$ – Gesetzes am Problem der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten • Übungen zum $1/\sqrt{n}$ – Gesetz und zu den σ-Umgebungen. Anwendung auf die Genauigkeit von Simulationen	4

Tab. 2.2: Übersicht zur Unterrichtseinheit Binomialverteilung mit Zeitplanung.

Einführung mit dem Galton-Brett

Die Unterrichtseinheit zur Binomialverteilung beginnt mit der Betrachtung des Galton-Bretts als realem Experiment zur Erzeugung einer Binomialverteilung (vgl. Jäger und Schupp 1983; Schupp 1985a; Schupp 1985b). Das Galton-Brett hat im Rahmen dieser Unterrichtseinheit die Funktion der Vorbereitung und Veranschaulichung der Binomialverteilung. Weiter ermöglicht die Verwendung eines realen Galton-Bretts im Unterricht den Vergleich zwischen der experimentell erzeugten Häufigkeitsverteilung und der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Am Beispiel des Galton-Bretts soll die Mittenbevorzugung der Verteilung beobachtet werden. Ferner soll der Weg einer Kugel im Galton-Brett modellhaft als Bernoulli-Kette beschrieben werden und die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines bestimmten Kästchens des Galton-Bretts unter geeigneten Modellannahmen berechnet werden (siehe Anhang, S. 278).

Die Mittenbevorzugung als zentrale Eigenschaft von binomial- und normalverteilten Zufallsgrößen lässt sich am Galton-Brett anschaulich durch die große Anzahl von real existierenden Wegen in die mittleren Kästchen des Galton-Bretts erklären.

Die Modellierung der Verteilung am Galton-Brett läuft über drei Stufen, welche eng miteinander zusammen hängen: Zunächst betrachtet man das Verhalten der Kugel an einem einzigen Zapfen des Galton-Bretts. Die Wahrscheinlichkeit für rechts und links beträgt jeweils 0,5. Als zentrale Modellannahme wird das Verhalten an jedem Zapfen als unabhängig vom vorherigen Weg angenommen. Im zweiten Schritt betrachtet man einen bestimmten Weg beim Lauf der Kugel über das n-zeilige Galton-Brett. Unter der Modellannahme der Unabhängigkeit ergibt sich für jeden Weg die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^n$. Im dritten Schritt betrachtet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel in einem bestimmten Kästchen landet. Zählt man die Kästchen von links nach rechts mit 0 bis n durch, so gibt es für das Kästchen k genau $\binom{n}{k}$ mögliche Wege, nämlich alle Wege, bei denen k-mal eine Verzweigung nach rechts gewählt wird. Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit für eine Kugel, im Kästchen k zu landen: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{2})^n$.

Die im Unterricht experimentell ermittelte Verteilung sowie die mit dem theoretischen Ansatz berechnete Verteilung werden beide als Histogramm aufgetragen und miteinander verglichen. Differenzen zwischen der theoretischen Berechnung und der im Experiment gefundenen Verteilung motivieren eine Diskussion über die für die theoretische Berechnung getroffenen Modellannahmen. Als problematisch erweist sich hierbei die Unabhängigkeit der Teilexperimente, d. h. die Modellannahme, das Verhalten der Kugel an den einzelnen Zapfen sei unabhängig vom Weg, den die Kugel vorher genommen hat. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die Kugel stets wieder senkrecht von oben auf den nächsten Zapfen fällt. Die meisten realen Galton-Bretter sind so gefertigt, dass dies nicht in idealer Weise der Fall ist. Hier kann z. B. eine größere Mittenbevorzugung auftreten (vgl. Steinbring 1985).

Die Unabhängigkeit der Teilexperimente der Benoulli-Kette ist eine Modellierungsschwierigkeit, welche häufig bei anwendungsorientierten Aufgabenstellungen zur Binomialverteilung auftritt (vgl. Biehler 2005). Somit wird bei der Behandlung des Galton-Bretts auch das Hinterfragen eines zentralen Modellierungsschritts bei der Verwendung der Binomialverteilung in Anwendungssituationen vorbereitet.

Herleitung der Formel der Binomialverteilung und Übungen

Nach der Vorbereitung durch das Galton-Brett soll eine allgemeine Binomialverteilung am Beispiel der Anwendungsaufgabe „verwurmte Kirschen“ simuliert werden.

„Kirschernte“

Fritzchen pflückt 20 Kirschen vom Kirschbaum und verzehrt diese sofort. Nachdem er von seiner Mutter erfährt, dass bei der diesjährigen Kirschernte ca. 25% aller Kirschen „verwurmt“ sind, be-

kommt er einen großen Schreck. Er macht sich Gedanken, wie viele Würmer er wohl verzehrt hat, wenn jede der zwanzig gepflückten Kirschen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 25% verwurmt war.

A) Simulieren Sie die Auswahl der 20 Kirschen mit FATHOM.

Führen Sie die Simulation 10mal durch und schreiben Sie auf, wie viele verwurmte Kirschen bei den 10 Simulationen jeweils aufgetreten sind. Sie können die Simulation mit „Strg-y“ wiederholen.

B) Führen Sie die Simulation des Kirschexperiments mit „Messgrößen sammeln“ 10 000mal durch und stellen Sie die auftretenden Häufigkeiten für die Anzahl an verwurmten Kirschen grafisch dar.

Beantworten Sie mit Hilfe einer Auswertungs-Tabelle die folgenden Fragen:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen keinen Wurm verzehrt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen weniger als drei wurmstichige Kirschen verzehrt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen mehr als 10 wurmstichige Kirschen verzehrt?

Veranschaulichen Sie sich die Wahrscheinlichkeiten jeweils am Histogramm.

C) Bestimmen Sie auf theoretischem Weg die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 8 von den 20 Kirschen, die Fritzchen gegessen hat, verwurmt waren. Vergleichen Sie das Ergebnis Ihrer Berechnung mit dem Ergebnis Ihrer Simulation.

Hinweis:
Veranschaulichen Sie sich das Ereignis „8 von 20 Kirschen sind verwurmt“ über Pfade im Baumdiagramm.

Bei der Aufgabenstellung handelt es sich um eine eingekleidete Aufgabe. Probleme der Modellierung der Binomialverteilung mit der zugehörigen Untersuchung auf die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen und auf gleiche Erfolgswahrscheinlichkeiten für jede Stufe werden hier bewusst ausgeblendet, da die Aufgabe zur Einführung der Simulation einer allgemeinen Binomialverteilung und der Formel der Binomialverteilung dienen soll. Die Aufgabenstellung ist bewusst einfach strukturiert, so dass sich die Schülerinnen und Schüler gut in die Problematik hinein denken können.

In Teil A) soll mit der Simulation der Bernoulli-Kette experimentiert werden. Das Augenmerk wird hierbei auf die Anzahl an verwurmten Kirschen als Zufallsgröße gerichtet. Die zehnmalige Wiederholung des Zufallsexperiments soll die stochastische Variation der Ergebnisse verdeutlichen. Hier kommt der Gegenstandscharakter der Simulation zum Tragen.

In Teil B) der Arbeitsaufträge wird die Häufigkeitsverteilung der Binomialverteilung erzeugt und interpretiert. Anhand der Simulation werden verschiedene Wahrscheinlichkeiten über die relative Häufigkeit geschätzt.

In Teil C) der Arbeitsaufträge sollen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeit für genau 8 verwurmte Kirschen berechnen und mit dem Ergebnis der Simulation vergleichen. Die Formel ist ihnen für den Fall $p = \frac{1}{2}$ bereits vom Galton-Brett bekannt. Sie müssen erkennen, dass es sich um eine ähnliche Situation handelt und die geänderte Erfolgswahrscheinlichkeit geeignet berücksichtigen. Im Ergebnis haben die Schülerinnen und Schüler die Formel der Binomialverteilung an einem konkreten Beispiel selbstständig erarbeitet. Im Anschluss können der Begriff der Bernoulli-Kette und die Formel für die Binomialverteilung im Unterricht verallgemeinert werden.

Die Aufgabe vermittelt einen guten Einblick, wie vielseitig Computersimulationen im vorliegenden Unterrichtskonzept zur selbstständigen Erarbeitung von stochastischen Problemen verwendet werden: In Teil A nähern sich die Schülerinnen und Schüler dem Zufallsexperiment zunächst über die Computersimulation. Hiermit werden die Erfahrungen aus dem Simulationsvorkurs zum experimentellen Umgang mit stochastischen Situationen wieder aufgegriffen. In Teil B wird die Computersimulation zur grafischen Veranschaulichung der Verteilung und zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. In Teil C sollen die Schülerinnen und Schüler selbstständig die theoretische Berechnung einer Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung erarbeiten. Der frequentistische und der theoretische Zugang zur Wahrscheinlichkeit ergänzen sich hier gegenseitig. Die Schülerinnen und Schüler haben die Computersimulation im Simulationsvorkurs als Werkzeug zur Lösung stochastischer Problemstellungen kennen gelernt, so dass die Simulation hier eine Kontrollfunktion für die Ergebnisse der theoretischen Überlegungen erfüllen kann.

Der wichtige Begriffe der Bernoulli-Kette und der Umgang mit der Binomialverteilung werden im Folgenden anhand von anwendungsorientierten Aufgaben (siehe Anhang, S. 280-282) geübt und gefestigt. Im Rahmen dieser Aufgaben wird mehrfach die Modellierungsannahme der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen der Benuolli-Kette problematisiert. Bei den meisten Aufgaben ist der Einsatz von Simulationen nicht vorgesehen bzw. freigestellt. Zur Berechnung der kumulierten Wahrscheinlichkeiten sollte ein geeigneter Taschencomputer eingesetzt werden.

An einer Aufgabe wird die Stabilisierung der simulierten Häufigkeitsverteilungen gegen die theoretisch berechnete Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine zunehmende Anzahl N von Simulationsdurchgängen beobachtet und interpretiert, so dass das Gesetz der großen Zahl für eine Verteilung als Ganzes betrachtet wird. Theoretische Überlegungen hierzu finden nicht statt

Eigenschaften der Binomialverteilung, σ-Umgebungen

Nun wird der Blick auf die Form der Verteilung als Ganzes in Abhängigkeit von den Parametern n und p gelenkt. Anhand zweier dynamischer Lernumgebungen und zugehöriger Arbeitsanweisungen (siehe Anhang, S. 283) sollen die Schüler selbstständig Eigenschaften wie das Symmetrieverhalten, die Lage sowie die Höhe und Breite der Verteilung in Abhängigkeit von n und p untersuchen. Hierbei soll folgendes erkannt und formuliert werden:

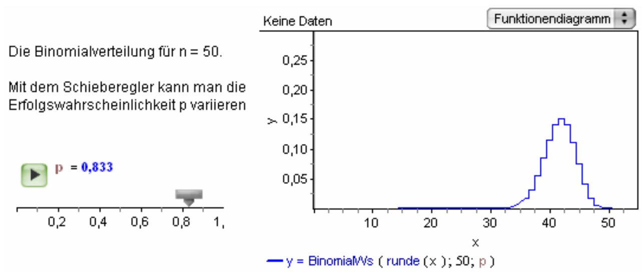


Abb. 2.1: Dynamische Lernumgebung zur Abhängigkeit der Binomialverteilung vom Parameter p.

- Die Verteilungen verschieben sich mit zunehmendem n bzw. mit zunehmendem p nach rechts. Das Maximum der Verteilung liegt stets etwa bei $n \cdot p$.
- Die Verteilungen sind für kleine Werte von p und für Werte von p nahe 1 sehr hoch und schmal sowie unsymmetrisch. Für $p = 0{,}5$ ist die Verteilung am flachsten und breitesten. Außerdem ist die Verteilung für $p = 0{,}5$ symmetrisch.
- Die Verteilungen werden mit zunehmendem n breiter und flacher. Auch für Werte von p ungleich 0,5 werden die Verteilungen mit zunehmendem n symmetrischer.

Im Anschluss werden die Formeln $\mu = n \cdot p$ für den Erwartungswert und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ für die Standardabweichung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Begründung der Formeln ist die folgende:

Man lässt die Schüler ausgehend von den allgemeinen Formeln für den Erwartungswert und für die Varianz den Erwartungswert und die Varianz jeweils für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ berechnen. Man erhält beim Erwartungswert $\mu = 1 \cdot p$, $\mu = 2 \cdot p$, $\mu = 3 \cdot p$ und bei der Varianz $Var = 1 \cdot p \cdot q$, $Var = 2 \cdot p \cdot q$, $Var = 3 \cdot p \cdot q$. Diese Formeln verallgemeinert man auf n Stufen der Bernoulli-Kette.

Vollständige Herleitungen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung finden sich in den gängigen Schulbüchern.

Um die Formeln für den Erwartungswert und für die Standardabweichung zu interpretieren, kann man bei der Binomialverteilung auf anschaulicher Ebene – grob gesagt – dem Erwartungswert die Lage des Maximums der Verteilung und der Standardabweichung die Breite der Verteilung zuordnen. Nun kann man zurückgreifen auf die Ergebnisse der beiden Lernumgebungen und die bereits formulierten Abhängigkeiten der Lage des Maximums und der Breite der Verteilung vergleichen mit der Abhängigkeit des Erwartungswerts und der Standardabweichung von den Parametern *n* und *p*.

Zur anschaulichen Deutung des Begriffs der Standardabweichung dienen die Regeln über die σ-Umgebungen des Erwartungswerts bei einer binomialverteilten Zufallsgröße (siehe Anhang, S. 284). Die Schülerinnen und Schüler sollen die Regeln anhand ihres Schulbuches selbstständig erarbeiten und dann an einem konkreten Beispiel rechnerisch überprüfen. Die verwendeten Beispiele zeigen, dass die Regeln bei der Binomialverteilung nur näherungsweise gelten. Die exakten Werte ergeben sich bei der Approximation durch die Normalverteilung, welche im weiteren Verlauf des Kurses noch behandelt wird. Neben einer Veranschaulichung des Begriffs der Standardabweichung können die Regeln über die σ-Umgebungen beim Testen von Hypothesen mit der Binomialverteilung sowie zur Konstruktion von Konfidenzintervallen eingesetzt werden. Der Umgang mit den $\sigma-$Umgebungen hat somit auch eine vorbereitende Funktion für die beurteilende Statistik.

Das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz

Betrachtet man die Zufallsgröße *X*: Anzahl der Erfolge einer Bernoulli-Kette, so erhält man als zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung die Binomialverteilung. Die Histogramme der Binomialverteilung werden mit zunehmender Anzahl *n* der Versuchsdurchführungen immer flacher und breiter. Mathematisch spiegelt sich dies wieder in der Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ für die Standardabweichung der Binomialverteilung.

Bei vielen Problemen der Stochastik betrachtet man jedoch nicht die absolute Anzahl an Erfolgen, sondern die relative Häufigkeit $Y = \frac{X}{n}$. Dies tritt insbesondere dann auf, wenn man durch eine Versuchsreihe die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die relative Häufigkeit des Auftretens dieses Ereignisses bestimmen möchte, z. B. bei Umfragen oder bei Simulationen. Die Histogramme der Zufallsgröße *Y* werden mit zunehmender Anzahl *n* der Versuchsdurchführungen bzw. mit zunehmender Anzahl *n* der Simulationsdurchgänge immer schmaler und höher. Für die Zufallsgröße *Y* werden die absoluten Werte durch *n* geteilt. Daher muss man auch die Standardabweichung durch *n* teilen: $\sigma_Y = \frac{\sigma_X}{n} = \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}{n} = \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}$. Die Standardabweichung des relativen Anteils der Anzahl der Erfolge ist somit proportional zu $1/\sqrt{n}$ (**„$1/\sqrt{n}$ – Gesetz“**). Das heißt, dass die Streuung der relativen Häufigkeit eines Ereignisses bei zunehmender Wiederholungszahl *n* des Experiments mit $1/\sqrt{n}$ abnimmt.

Anschaulich bedeutet dies, dass der relative Anteil an Erfolgen bei wenigen Wiederholungen stärker um die Erfolgswahrscheinlichkeit *p* schwankt als bei vielen Wiederholungen. Betrachtet man die 1σ-Umgebung als Schwankungsbreite, so halbiert sich die Schwankungsbreite, wenn man die Anzahl der Wiederholungen vervierfacht. Die Schwankung der „gemessenen“ relativen Häufigkeiten halbiert sich also bei Umfragen oder bei Simulationen, wenn man die Anzahl der Befragten oder die Anzahl der Wiederholungen vervierfacht.

Zum Ende der Unterrichtseinheit findet hiermit eine theoretische Präzisierung des schwachen Gesetzes der großen Zahl statt, da das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz angibt, wie schnell sich die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit eines Ereignisses bei zunehmender Anzahl n von Versuchsdurchführungen bzw. bei zunehmender Anzahl n von Simulationsdurchgängen stabilisiert.

Das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz soll von den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe von Computersimulationen entdeckt werden und über die Formel der Standardabweichung σ auch theoretisch erarbeitet werden (siehe Anhang, S. 285).

Als Anwendung wird eine Flugzeugüberbuchungsaufgabe behandelt (siehe Anhang, S. 288). Ferner wird die Genauigkeit von Wahrscheinlichkeitsschätzungen über Simulationen thematisiert: Zu einem gegebenen Ereignis mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit p sollen die Schülerinnen und Schüler über die σ-Regeln berechnen, in welchem Bereich die relative Häufigkeit für das Auftreten des betrachteten Ereignisses in einer Simulation mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt. Dieser Bereich lässt sich wiederum über eine geeignete Computersimulation experimentell überprüfen (siehe Anhang, S. 288). Hiermit schließt sich eine Lücke im Unterrichtsgang, da die Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzungen zu Beginn des Kurses nur mit Hilfe von über Ausprobieren ermittelten Faustregeln abgeschätzt wird. Allerdings handelt es sich bei dem beschriebenen Vorgehen um eine vereinfachende Betrachtung, bei der zu einer bereits bekannten Wahrscheinlichkeit p mit Hilfe der σ-Umgebungen untersucht wird, wie groß die Streuung der relativen Häufigkeiten im Experiment ist. Die umgekehrte Fragestellung nach den Wahrscheinlichkeiten, die mit einer in der Simulation erhaltenen relativen Häufigkeit verträglich sind, kann nur mit Hilfe von Konfidenzintervallen beantwortet werden (vgl. Kapitel 4.2.2). Eine genaue Behandlung von Konfidenzintervallen im Unterricht wäre wünschenswert, wird aber aus Zeitgründen weggelassen. Die beschriebene vereinfachende Betrachtung lässt sich dadurch rechtfertigen, dass man ähnliche Genauigkeitsschätzungen erhält.

Neben der geschilderten Präzisierung des Gesetzes der großen Zahl und der Faustregeln zur Genauigkeitsschätzung einer Computersimulation dient das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz als Vorbereitung für das Testen von Hypothesen, da es die Verbesserung der Testgüte z. B. bei einer Erhöhung der Anzahl n der Probanden oder der Anzahl n der gewählten Materialstücke erklären kann.

Die hohe Wichtigkeit des $1/\sqrt{n}$ – Gesetzes für den schulischen Stochastikunterricht bereits in der Sekundarstufe I wird auch von Riemer (1991) herausgestellt. Er erwähnt die allgemein bildende Bedeutung sowie die Möglichkeit zur Beseitigung von Fehlvorstellungen in Verbindung mit dem Stichprobenumfang eines stochastischen Experiments.

2.4.3 Das Konzept zum Testen von Hypothesen

Das Testen von Hypothesen wird in der kompletten Unterrichtseinheit am Beispiel der Binomialverteilung behandelt. Gegenüber den von Schulbüchern vorgeschlagenen Entwürfen ist die Unterrichtseinheit an drei Stellen deutlich verändert, die Änderungen zielen in erster Linie auf das Verständnis des Vorgehens beim Testen von Hypothesen:

1. Einführung über das Testen von Hypothesen mit P-Werten
2. Einsatz von Simulationen und FATHOM-Lernumgebungen
3. Aufgabenformen zur anschaulich-verbalen Interpretation der Berechnungen

Beim Hypothesentest geht man aus von einer Nullhypothese H_0. Man betrachtet eine statistische Untersuchung und beurteilt das Ergebnis der Untersuchung unter der Annahme, dass dieses Ergebnis unter Vorliegen der Nullhypothese aufgetreten ist.

In der Schule werden üblicherweise Signifikanztests behandelt. Hier teilt man die Menge der möglichen Ergebnisse über die Konstruktion des Verwerfungs- und Akzeptanzbereichs ein in typische Ereignisse und in Ereignisse, die bei Gültigkeit der Hypothese H_0 eher ungewöhnlich sind. Handelt es sich um ein ungewöhnliches Ereignis, so spricht das Ergebnis der Untersuchung gegen die Hypothese. Der Verwerfungsbereich wird so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis im Verwerfungsbereich kleiner als das Signifikanzniveau ist, unter der Voraussetzung, dass die Hypothese wahr ist. Typische Werte für das Signifikanzniveau sind 1%, 5% oder 10%.

Das gewählte Signifikanzniveau ist nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese richtig ist, obwohl man ein Ergebnis im Verwerfungsbereich erhält, sondern die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ein Ergebnis im Verwerfungsbereich erhält, wenn die Hypothese wahr ist. Dies wird von den Schülerinnen und Schülern im Unterricht häufig verwechselt (Danckwerts und Vogel 1993). Es zeigt sich, dass die dem Hypothesentest zu Grunde liegende Logik von vielen Schülerinnen und Schülern nicht verstanden wird. Eine Ursache hierfür kann darin liegen, dass das logische Vorgehen im Schulunterricht häufig durch eher technische Berechnungen zur Bestimmung des Verwerfungs- und des Akzeptanzbereichs mit Hilfe von σ-Umgebungen oder von Tabellen der kumulierten Binomialverteilung verdeckt wird.

Beim Hypothesentesten mit P-Werten lässt sich das logische Vorgehen gut veranschaulichen (vgl. Wild und Seber 2000): Zum Ergebnis einer statistischen Untersuchung wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit der das beobachtete Ergebnis oder ein noch extremeres Ergebnis unter Vorliegen der Nullhypothese auftritt. Diese Wahrscheinlichkeit wird als P-Wert bezeichnet. So wird bei der Einführungsaufgabe zur außersinnlichen Wahrnehmung (siehe Anhang, S. 289) die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass man bei einer Ratewahrscheinlichkeit von 25% mindestens 20 von 40 Karten richtig errät. Ist dieser P-Wert sehr klein, so ist das erhaltene Ergebnis unter Annahme der Nullhypothese ein sehr ungewöhnliches Ergebnis. Der P-Wert beträgt bei der Einführungsaufgabe $P_{0.25}(X \geq 20) = 0{,}00057$, das heißt mindestens 20 richtig bestimmte Karten kommen bei bloßem Raten nur in ca. 0,06% aller Fälle vor. Da das Ergebnis unter Annahme der Hypothese sehr unwahrscheinlich ist, spricht der Test gegen das Vorliegen der Nullhypothese.

Je kleiner der P-Wert ist, desto stärker spricht der experimentelle Befund gegen das Vorliegen der Nullhypothese. Man spricht auch von „Evidenz gegen die Nullhypothese“. Eine übliche Klassifikation ist die folgende (siehe Anhang, S. 292):

P-Wert $\leq$ 10%	schwache Evidenz
P-Wert $\leq$ 5%	mittlere Evidenz
P-Wert $\leq$ 1%	starke Evidenz
P-Wert $\leq$ 0,1%	sehr starke Evidenz

Im Vergleich zum eher technischen Vorgehen zur Bestimmung von Verwerfungs- und Akzeptanzbereichen beim üblichen Zugang zum Hypothesentest in der Schule wird beim

Testen von Hypothesen mit P-Werten stets die Wahrscheinlichkeit für den experimentellen Befund unter Annahme der Nullhypothese berechnet und beurteilt. Hierdurch wird der Kern des logischen Vorgehens deutlich: Das experimentelle Ergebnis wird über die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten als typisches oder eher ungewöhnliches Ergebnis unter Vorliegen der Nullhypothese bewertet.

Die zur Hypothese gehörende „Referenzverteilung" kann über die Simulation real erzeugt werden. Hiermit „erleben" die Schülerinnen und Schüler das Auftreten der typischen Fälle wie auch der ungewöhnlichen Fälle unter Annahme der Nullhypothese. Neben der Entlastung von Berechnungen trägt die Verwendung von Simulationen somit zur Veranschaulichung bei. Durch das selbstständige Arbeiten am Computer können sich die Schülerinnen und Schüler gut in die Aufgabenstellung hinein denken, die grafischen Darstellungen der simulierten Verteilungen tragen zusätzlich zur Anschaulichkeit bei. Daher lohnt es sich, die Computersimulation auch bei solchen Problemstellungen gezielt einzusetzen, die mit der bereits bekannten Binomialverteilung behandelt werden können. Biehler und Maxara (2007, S. 59) schreiben hierzu: „Auch wenn man bereits die Binomialverteilung behandelt hat, wird es sich didaktisch lohnen, die "Referenzverteilung" zunächst noch durch Simulation zu erzeugen, um die Grundidee des Hypothesentestens zu verstehen: Eine beobachtbare Größe […] wird beurteilt unter der Perspektive, was unter der Annahme der Nullhypothese alles hätte passieren können. Diese möglichen Fälle werden jetzt durch Simulation real erzeugt."

Darüber hinaus kann man das Testen von Hypothesen mit Hilfe von Computersimulationen auch auf solche Fragestellungen ausdehnen, bei denen andere Verteilungen als die Binomialverteilung benötigt werden. Über die Simulation kann man die zugehörige Referenzverteilung erstellen. Hiermit lassen sich z. B. Tests mit der t-Verteilung oder der χ^2-Verteilung ohne die theoretische Behandlung der Verteilungen bzw. ohne die Benutzung der zugehörigen Tabellen im „Black Box" – Verfahren in den Unterricht integrieren.

Im vorliegenden Unterrichtskonzept wird das Testen von Hypothesen zunächst mit P-Werten behandelt. Die Schülerinnen und Schüler sollen das logische Vorgehen bei einem Hypothesentest kennen lernen und verstehen. Im zweiten Schritt wird der Übergang zu den in der Schule üblichen Signifikanztests vollzogen. Hierfür werden solche Aufgabenstellungen gewählt, bei denen eine Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese getroffen werden muss, z. B. Wettsituationen oder Situationen aus dem Bereich der Qualitätskontrolle. Zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau werden der Verwerfungs- und der Akzeptanzbereich für die Nullhypothese konstruiert. Weiter werden gemäß dem in der Schule üblichen Verfahren die Fehler erster und zweiter Art eingeführt und interpretiert, im letzten Schritt die Operationscharakteristik zur Beurteilung der Güte eines Tests. Insbesondere am Ende der Unterrichtseinheit werden Aufgaben gegeben, die nochmals mit P-Werten bearbeitet werden können sowie Aufgaben, bei denen besonderer Wert auf die Interpretation der Berechnungen gelegt wird. Tab. 2.3 zeigt eine Übersicht des Unterrichtskonzepts mit Zeitplanung.

Thema	**Inhalt**	**Stunden**
Hypothesentest mit P-Werten	• Einführung in die Logik des Hypothesentestens • Anwendungsbeispiel Cola-Test • Übungsaufgaben zum Hypothesentesten mit P-Werten	6

Signifikanztest	• Erläuterung des Signifikanzniveaus eines Hypothesentests • Konstruktion von Hypothesentests zu gegebenem Signifikanzniveau α • Zweiseitige Hypothesentests	4
Fehler erster und zweiter Art	• Kennenlernen der Fehler erster und zweiter Art • Interpretation der zu den Fehlern erster und zweiter Art gehörenden Fehlerwahrscheinlichkeiten, gegenseitige Abhängigkeit der Fehler erster und zweiter Art	3
Operationscharakteristik beim Signifikanztest	• Operationscharakteristik zum einseitigen Hypothesentest • Abhängigkeit der Operationscharakteristik von der Anzahl n der Versuchsdurchführungen • Operationscharakteristik zum zweiseitigen Hypothesentest	4
Gemischte Aufgaben zum Hypothesentest	• Wiederholung der Konzeption und Interpretation des Hypothesentests mit P-Werten • Berechnung des Stichprobenumfangs eines Alternativtests zu vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeiten erster und zweiter Art	4

Tab. 2.3: Übersicht zur Unterrichtseinheit „Testen von Hypothesen" mit Zeitplanung.

Die Aufgabenstellungen sind so gestaltet, dass eine schematische Bearbeitung verhindert wird. Die Ergebnisse sollen häufig interpretiert und bei einigen Aufgaben in Form eines kurzen Reports verbalisiert werden. Über die Verbalisierung können Fehlvorstellungen aufgedeckt und damit im Unterricht thematisiert werden.

Die Aufgaben sind so ausgewählt, dass sie das Interesse der Schülerinnen und Schüler für den anwendungsorientierten Bereich der beurteilenden Statistik wecken sollen. Es wurden typische Aufgabenstellungen für die Einführung in das Testen von Hypothesen verwendet, an denen man die Grundprinzipien deutlich machen kann, ergänzt um realitätsnahe Aufgabenstellungen sowie um Aufgabenstellungen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler.

Der Computereinsatz in dieser Unterrichtseinheit ist auf wenige Stunden beschränkt, bei denen neue Inhalte eingeführt oder Inhalte vertieft werden. Die Einstiegsprobleme zum Testen von Hypothesen und zur Betrachtung der Fehler erster und zweiter Art werden komplett simuliert. Zum Thema Operationscharakteristik existiert eine dynamische Lernumgebung.

Hypothesentest mit P-Werten

Als Einstiegsaufgabe in das Testen von Hypothesen wird die folgende Problemsituation zur übersinnlichen Wahrnehmung gewählt. Es handelt sich um die Umformulierung einer Aufgabe von Rossman und Chance (2001a, S. 376). Ein ähnliches Experiment wurde von Pratt und Woodruff 1938 mit 60 000 Wiederholungen durchgeführt (vgl. Wild und Seber 2000, S. 368). Dieses Originalexperiment wird über die Näherung von de Moivre-Laplace in den Übungsaufgaben nochmals theoretisch aufgegriffen.

„Außersinnliche Wahrnehmung“

Bei einem Experiment zur Untersuchung der Existenz außersinnlicher Wahrnehmung sitzen sich der Versuchsleiter und die Testperson an einem Tisch gegenüber. Der Versuchsleiter deckt zufällig eine von vier verschiedenen Karten auf (z. B. Stern, Kreis, Welle oder Quadrat). Die Testperson kann die Karten nicht sehen und muss angeben, welches Muster gerade aufgedeckt ist. Der Versuch wird mit derselben Testperson 40mal wiederholt.

Nehmen Sie an, dass die Testperson keine außersinnlichen Fähigkeiten besitzt und simulieren Sie unter dieser Voraussetzung das Experiment mit den 40 Wiederholungen. Betrachten Sie hierbei die Anzahl richtig erratener Karten als Messgröße.

a) Führen Sie die Simulation 20mal durch und schreiben Sie auf, welche Anzahlen richtig bestimmter Karten in diesen 20 Versuchen durch reines Raten erreicht werden. Schätzen Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 12 Karten richtig geraten werden.

Wiederholen Sie die Simulation mit „Messgrößen sammeln“ 10 000mal. Stellen Sie die entstehende Häufigkeitsverteilung der Anzahl richtig geratener Karten als Histogramm dar und beantworten Sie mit der Häufigkeitsverteilung die folgenden Fragen:

b) In wie vielen von diesen 10 000 simulierten Testdurchgängen erhalten Sie genau 25% also 10 richtig geratene Karten? Haben Sie ein solches Ergebnis erwartet?

c) Wäre es überraschend, wenn jemand, der nur rät, mindestens 30%, d. h. mindestens 12 Karten richtig angibt?

d) Wäre es überraschend, wenn jemand, der nur rät, mindestens 45%, d. h. mindestens 18 Karten richtig angibt?

e) Nehmen Sie an, die Testperson gibt mindestens 50%, d. h. mindestens 20 der Karten richtig an. Wie überzeugt wären Sie, dass die Testperson tatsächlich nur geraten hat? Beziehen Sie sich bei Ihrer Antwort auf die Ergebnisse der Simulation.

f) Beantworten Sie Aufgabe e) für mindestens 32,5%, d. h. mindestens 13 richtig bestimmter Karten.

Die Aufgabe führt direkt zum Kern des Hypothesentestens: Die Aufgabenteile c) bis f) legen die Beurteilung der experimentellen Ergebnisse von mindestens 20 bzw. mindestens 13 richtig bestimmten Karten über die Berechnung und Interpretation der Wahrscheinlichkeit unter Annahme des reinen Ratens nahe. Damit wird genau der zu den Ergebnissen und der Hypothese des reinen Ratens gehörende P-Wert berechnet und interpretiert.

Das Grundprinzip des Hypothesentestens mit P-Werten muss im Anschluss an die Besprechung der Aufgabe nochmals deutlich herausgestellt werden. Hier wird auch der Begriff der „Evidenz“ eingeführt: Je kleiner der P-Wert, desto größer ist die Evidenz gegen die Nullhypothese (siehe Anhang, S. 292). Eine echte Entscheidung muss nicht getroffen werden.

Zur Festigung des Vorgehens wird die Durchführung eines Geschmackstests mit Cola vorgeschlagen (siehe Anhang, S. 290). Weiter gibt es verschiedene anwendungsorientierte Aufgaben zu einseitigen Hypothesentests (siehe Anhang, S. 291). Computersimulationen werden nicht weiter eingesetzt, die Aufgaben lassen sich alle über Berechnungen mit der Binomialverteilung oder der Näherungsformel von de-Moivre-Laplace lösen. Wiederholt werden Aufgabenteile zur verbalen Interpretation oder zur Erstellung kurzer Zeitungsartikel eingefordert.

Signifikanztests

Der Übergang zu Signifikanztests erfolgt im vorliegenden Unterrichtskonzept über Situationen, in denen man aufgrund des durchgeführten Tests eine Entscheidung treffen muss, z. B. ob ein bestimmtes Medikament verboten wird, ob ein Wetteinsatz ausgezahlt wird oder ob ein Preisnachlass gewährt wird. Anknüpfend an das Konzept der P-Werte wird vor dem Test festgelegt, ab welchem P-Wert man die Hypothese verwerfen möchte und der zugehörige Bereich an Ergebnissen bestimmt.

Als Einstiegsproblem wird die folgende Form der Aufgabe der Tea-Tasting-Lady gewählt (vgl. Fisher 1956):

> **„Tea-Tasting-Lady“**
> **Eine englische Lady behauptet, sie könne am Geschmack erkennen, ob zuerst der Tee in der Tasse war und dann die Milch hinzu gegeben wurde oder ob man umgekehrt den Tee auf die Milch gegossen habe. Auf einer Geburtstagsparty werden der Lady daher 20 Tassen mit Tee vorgesetzt, bei denen die Lady herausfinden soll, in welcher Reihenfolge Milch und Tee eingegossen wurden.**
>
> **Als Preis wird ein Kilogramm feinster Darjeeling-Tee ausgesetzt. Man legt fest, dass die Lady den Preis nur erhält, wenn das Ergebnis des Tests mindestens mittlere Evidenz gegen ein pures Raten der Tea-Tasting-Lady aufweist.**
>
> a) Wie viele Tassen Tee muss die Lady mindestens richtig bestimmen, um den Preis zu gewinnen? Erläutern Sie für einen „mathematischen Laien“, nach welchen Kriterien die Mindestanzahl an richtig bestimmten Tassen ermittelt wurde.
> b) Wie verändert sich die Berechnung in a), wenn man der Lady nur dann den Preis zuspricht, falls das Ergebnis des Tests mindestens starke Evidenz gegen ein pures Raten aufweist? Berechnen Sie und erläutern Sie anhand einer Grafik der Binomialverteilung.

Die Schülerinnen und Schüler können diese Aufgabe zunächst mit den ihnen vertrauten Evidenzbegriffen lösen. Die Computersimulation wird nicht eingesetzt, die Bestimmung des Verwerfungsbereichs für die Nullhypothese des reinen Ratens kann in einfacher Weise mit Hilfe der Binomialverteilung erfolgen. Der Test soll so konstruiert werden, dass die Nullhypothese des Ratens nur verworfen wird bei mindestens mittlerer Evidenz des Testergebnisses. In der Sprache des Signifikanztests bedeutet dies, dass ein Hypothesentest auf dem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ konstruiert wird. Die geforderte Erläuterung des konstruierten Tests für den „mathematischen Laien“ in Aufgabenteil a) dient dazu, dass sich die Schülerinnen und Schüler über die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ Gedanken machen und dies anschaulich verbalisieren können. In Aufgabenteil b) wird die Verwendung unterschiedlicher Signifikanzniveaus angeregt.

Bei der Besprechung der Aufgabe muss der neue Aufgabentyp einer Entscheidungssituation thematisiert werden und aufbauend auf dem Konzept der Evidenz der Begriff des Signifikanzniveaus und eines „statistisch signifikanten Ergebnisses“ eingeführt werden.

Im Rahmen der weiteren Aufgabenstellungen zu Signifikanztests wird auch der zweiseitige Hypothesentest eingeführt (siehe Anhang, S. 293, Aufgabe 3.)

Fehler erster und zweiter Art

Zur Einführung der beiden Fehlertypen erster und zweiter Art wird die folgende Situation aus dem Sport verwendet (siehe Anhang, S. 294). Es handelt sich um die Umformulierung einer Aufgabe von Rossman und Chance (2001a, S. 513).

> **„Torwart-Training“**
> **Ein Torwart hält seit Jahren Elfmeter mit einer Quote von 25%. Um dies zu verbessern und damit einen besseren Vertrag zu erhalten, nimmt er in der Sommerpause an einem speziellen Elfmetertraining teil. Er kommt nach der Sommerpause zurück und berichtet seinem Trainer und seinem Manager, dass er seine Elfmeterquote auf nun 33% gehaltene Elfmeter verbessert hat. Der Manager und der Trainer wollen vor dem neuen Vertragsabschluss ein Probetraining mit 30 Elfmeterschüssen durchführen.**

Die Situation liefert zwei alternative Hypothesen H_0: $p = 0{,}25$ und H_1: $p = 0{,}33$. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst von der Haltequote $p = 0{,}25$ als Nullhypothese ausgehen, die Situation simulieren und den Akzeptanz- sowie den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ konstruieren: Ab 13 gehaltenen Elfmetern wird die Nullhypothese verworfen. Im zweiten Schritt soll die Situation unter der Annahme einer Haltequote von 33% simuliert werden und die Wahrscheinlichkeit für die Nichtberücksichtigung einer tatsächlich verbesserten Haltequote bestimmt werden. Hiermit wird die Aufmerksamkeit auf den Fehler zweiter Art gelenkt. Durch die Anschaulichkeit der Aufgabenstellung lässt sich das Problem der möglichen Fehlertypen gut diskutieren und verstehen.

Durch die Simulation ergibt sich automatisch die Möglichkeit, die beiden zur Nullhypothese und zur Alternative gehörenden Verteilungen zu visualisieren und zu vergleichen. Hiermit können auch die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten im Fall der Gültigkeit der Nullhypothese bzw. im Fall der Gültigkeit der Alternative veranschaulicht werden:

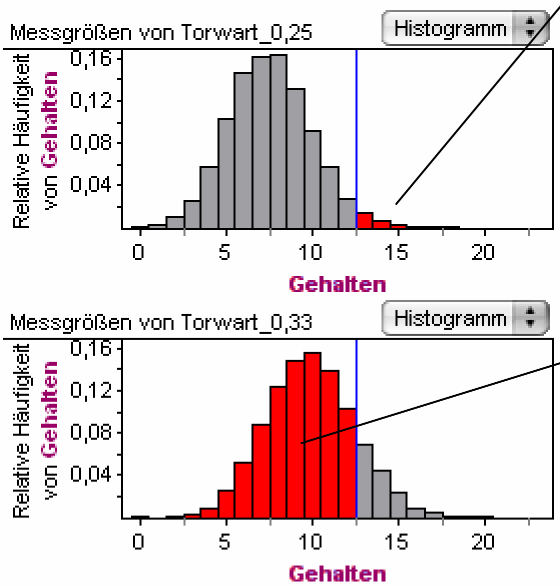
Wahrscheinlichkeit für ein erfolgreiches Probetraining, obwohl der Torwart eine unveränderte Haltefähigkeit von $p = 0,25$ besitzt.

Verteilung zu H_0:

$p = 0,25$

Verteilung zu H_1:

$p = 0,33$



Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg beim Probetraining, obwohl der Torwart tatsächlich ein verbessertes Haltevermögen von $p = 0,33$ besitzt.

Abb. 2.2: Visualisierung der Fehlerwahrscheinlichkeiten für die Fehler erster und zweiter Art bei der Aufgabe „Torwart-Training“.

In einem zweiten Teil der Aufgabe wird der Zusammenhang zwischen den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten thematisiert sowie die Möglichkeit einer Verbesserung des Tests durch eine Erhöhung der Anzahl n der Elfmeter. Eine weitere Aufgabe behandelt die Fehler erster und zweiter Art beim zweiseitigen Hypothesentest (siehe Anhang, S. 294).

Operationscharakteristik beim Signifikanztest

Für die Beurteilung der Güte eines Tests und die Erstellung einer Operationscharakteristik wurden Lernumgebungen entwickelt, die von den Rechnungen entlasten sollen und bei der Interpretation der Inhalte unterstützen sollen. Als Anwendungssituation wurde eine Medikamentenstudie gewählt (siehe Anhang, S. 295):

Medikamentenstudie

Die bislang auf dem Markt befindlichen Medikamente können eine bestimmte Krankheit nur bei höchstens 60% der Patienten heilen. Eine Firma hat ein neues Medikament entwickelt, von dem sie behauptet, dass die Patienten hiermit deutlich häufiger geheilt werden können (z. B. mit 80% Wkt.).

In einer klinischen Untersuchung wird das neue Medikament an 20 Patienten ausgetestet. Es wird festgelegt, dass die höhere Wirksamkeit des neuen Medikaments anerkannt wird, wenn mindestens 15 der 20 Patienten geheilt werden.

Diese Situation soll zunächst als Hypothesentest mit den zugehörigen Fehlern erster und zweiter Art beschrieben werden und die Fehlerwahrscheinlichkeiten sollen berechnet werden.

Weiter sollen die Schülerinnen und Schüler anhand vorgegebener Arbeitsaufträge mit der zugehörigen Lernumgebung experimentieren. Die Lernumgebung zeigt die zu $p = 0{,}6$ sowie die zur variablen Alternativwahrscheinlichkeit p_2 gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der geheilten Patienten. Ferner ist die Grenze $k = 15$ eingezeichnet, ab der die höhere Wirksamkeit des neuen Medikaments anerkannt wird, d. h. die Nullhypothese H_0 verworfen wird. Die beiden Grafiken visualisieren die Fehlerwahrscheinlichkeiten für die Fehler erster und zweiter Art. Die Wahrscheinlichkeiten werden nebenstehend auch berechnet.

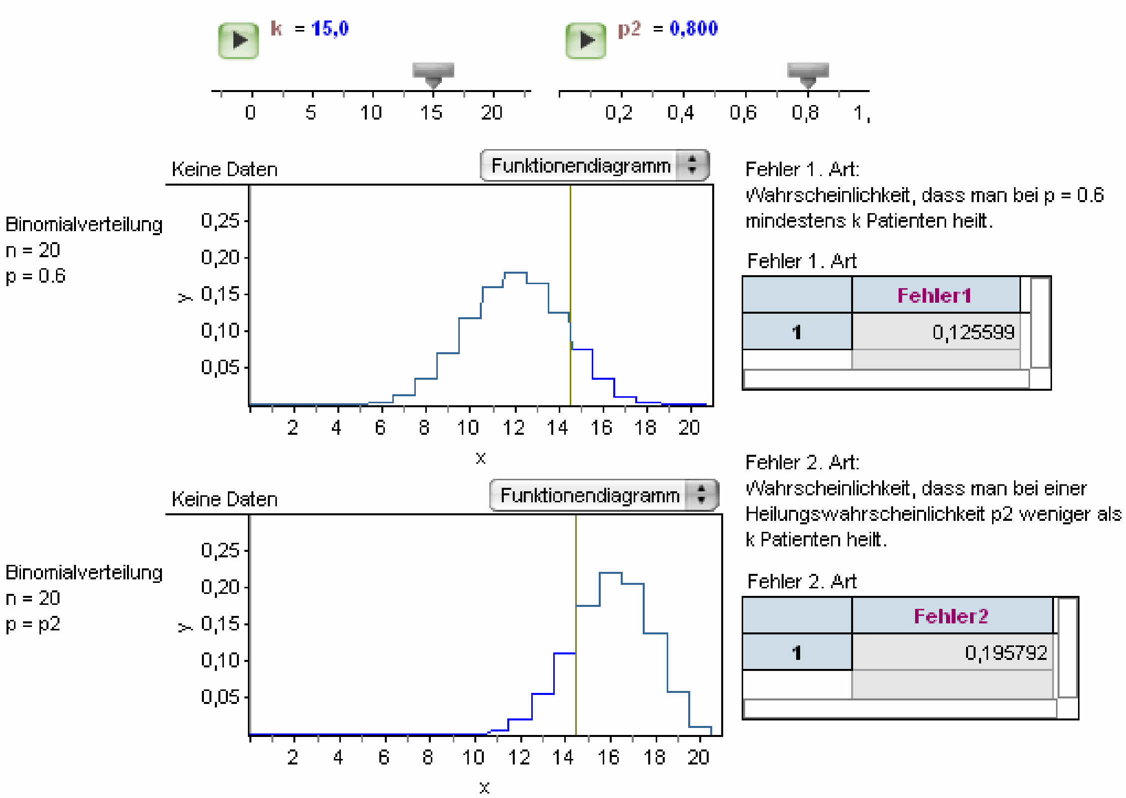


Abb. 2.3: Lernumgebung zur Medikamentenstudie.

Die Grenze k, ab der die höhere Wirksamkeit des neuen Medikaments anerkannt wird sowie die Alternativwahrscheinlichkeit p_2 sind variabel und können verändert werden. Über die Veränderung von k sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst die gegenseitige Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster und zweiter Art visualisieren und berechnen lassen. Dann soll k wieder auf $k = 15$ zurückgestellt werden. Über die Veränderung von p_2 sollen die Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art von dem Abstand zwischen $p = 0{,}6$ und p_2 bei konstantem Signifikanzniveau des Hypothesentests untersuchen. Über die Erstellung einer entsprechenden Tabelle kann in FATHOM die zugehörige Operationscharakteristik festgehalten und grafisch dargestellt werden. Die Lernumgebung existiert sowohl für einen Medikamententest mit $n = 20$ Patienten als auch für einen Medikamententest mit $n = 100$

Patienten. Die beiden entstehenden Operationscharakteristiken können miteinander verglichen und interpretiert werden (siehe Anhang, S. 296/297).

Zum Abschluss der Unterrichtseinheit wird die Operationscharakteristik eines zweiseitigen Hypothesentests betrachtet (siehe Anhang, S. 295, Aufgabe 2). Ferner gibt es noch ein Blatt mit gemischten Übungsaufgaben (siehe Anhang, S. 298). Hier haben die Schülerinnen und Schüler teilweise die Wahl zwischen dem P-Wert-Verfahren oder der Konstruktion eines Signifikanztests. Ferner wird erneut besonderer Wert auf die Interpretation der Berechnungen gelegt.

Mögliche Erweiterungen der Unterrichtseinheit: χ^2-Test und *t*-Test

Mit Hilfe von Computersimulationen lassen sich über die Binomialverteilung hinaus auch weitere für das Testen von Hypothesen benötigte Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Referenzverteilungen zur Beurteilung eines Testergebnisses erstellen, z. B. die *t*-Verteilung oder die χ^2-Verteilung. Somit ergibt sich die Möglichkeit, das vorliegende Kurskonzept zu erweitern und im Anschluss an das Testen von Hypothesen mit der Binomial- und der Normalverteilung auch Tests mit der *t*-Verteilung und der χ^2-Verteilung zu behandeln. Durch die durchgängige Verwendung der Computersimulationen lassen sich diese Themen in natürlicher Weise in das Unterrichtskonzept einfügen, da man aufgrund der aufgebauten Simulationskompetenzen der Schülerinnen und Schüler ohne die anspruchsvolle Theorie der *t*-Verteilung und der χ^2-Verteilung bzw. ohne die Benutzung der zugehörigen Tabellen im Sinn eines „Black-Box"-Verfahrens auskommen kann. Hiermit kann man bei nur geringem Zeitaufwand deutlich über den Lehrplan hinausgehende Vertiefungen des Testens von Hypothesen realisieren und dies für interessante Anwendungsprobleme sowie für eine Vertiefung des Verständnisses nutzen. Erste Unterrichtsexperimente mit Aufgabenstellungen zur χ^2-Verteilung sind im Rahmen der Voruntersuchungen in zwei Leistungskursen erfolgreich durchgeführt worden. Aus Zeitgründen ließ sich dies im Rahmen der hier geschilderten Hauptuntersuchung nicht realisieren.

Ähnliche Konzeptionen mit der Software Excel finden sich bei J. Meier (Meier 2006a; Meier 2006b). Meier verwendet die Simulationen zur Behandlung von *t*-Tests und nichtparametrischen Tests. Leuders (2005) stellt eine Einführung in das Testen von Hypothesen vor, bei der es thematisch um die Untersuchung von Zahlenfolgen auf Zufälligkeit geht. Die zur Beurteilung konkreter Zahlenfolgen benötigten Referenzverteilungen werden mit Hilfe der Software Excel über Simulationen erzeugt.

3 Das Untersuchungsdesign

3.1 Das methodische Konzept

Die vorliegende Arbeit verfolgt einen stark praxisorientierten Ansatz. Es handelt sich um eine Fallstudie zur computerunterstützten Gestaltung eines Kurshalbjahres Stochastik für den Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe. Die Entwicklung und die didaktische Analyse des Unterrichtskonzepts stellen einen wesentlichen Teil der Arbeit dar.

Das Kurskonzept wurde vom Autor über mehrere Jahre entwickelt und berücksichtigt neben dem Lehrplan des Landes Hessen und aktuellen deutschen Schulbüchern auch angelsächsische Lehrbücher, aktuelle Erkenntnisse der Mathematikdidaktik sowie aktuelle Erkenntnisse zum Computereinsatz im Stochastikunterricht. Bereits in der Entwicklungsphase wurden Teile des Konzepts in Vorstudien von erfahrenen Fachlehrern im Unterricht erprobt. Hierzu wurden Unterrichtsbeobachtungen im Rahmen schulpraktischer Studien protokolliert und in zugehörigen Seminarveranstaltungen ausgewertet. Vor dem Hintergrund dieser Unterrichtsbeobachtungen wurden die Materialien in der Fachgruppe von Prof. Dr. Biehler regelmäßig diskutiert und vom Autor sukzessive weiterentwickelt. Die kompletten Unterrichtsmaterialien als ein zentrales Ergebnis der vorliegenden Studie stehen in den „Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik“ (kurz „KaDiSto“) online zur Verfügung (Meyfarth 2006a).

Die Unterrichtsmaterialien wurden bereits mehrfach im Rahmen von Workshops oder im Rahmen längerer Veranstaltungsreihen in der Lehrerfortbildung verwendet und hier auch diskutiert. Diese Rückmeldung seitens der Lehrerinnen und Lehrer gehört zum praxisorientierten Ansatz der Arbeit. Über die Fortbildungen konnten mehrere Lehrerinnen und Lehrer zur Durchführung des Unterrichtskonzepts in ihren eigenen Kursen gewonnen werden.

Die ausführliche Darstellung in der vorliegenden Arbeit muss sich notwendiger Weise auf Teile des gesamten Unterrichtskonzepts beschränken. Da der dreiwöchige Simulationsvorkurs im Vergleich zum traditionellen Stochastikunterricht die meisten Innovationen aufweist, konzentriert sich die Darstellung in der Arbeit auf diesen Simulationsvorkurs.

Die Wirkung und die Funktionstüchtigkeit des Unterrichtskonzepts wurden im Rahmen der Hauptuntersuchung ausführlich untersucht. Das Unterrichtskonzept wurde hierfür in zwei parallelen Leistungskursen komplett eingesetzt, einer wurde vom Autor selber unterrichtet. Hiermit verbunden sind verschiedene Untersuchungsinstrumente, welche in Kapitel 5.2 genauer geschildert werden. Das hierbei zum Simulationsvorkurs erhobene Datenmaterial wird im Rahmen dieser Arbeit ausgewertet. Das Ziel dieser Untersuchungen ist es zum einen, ein klares Bild von den Auswirkungen des stattgefundenen Unterrichts auf die Vorstellungen und Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler zu erhalten. Weiter geht es aber auch darum, Informationen über Stärken und Schwächen des Unterrichtskonzepts zu erhalten mit dem Ziel, Hinweise auf die Weiterentwicklung im Rahmen nachfolgender praxisorientierter Forschungsarbeiten geben zu können.

Mit dem geschilderten praxisorientierten Ansatz erfüllt die Arbeit zentrale Vorschläge von E. Wittmann zur methodischen Ausrichtung von Forschungsvorhaben in der Mathematik-Didaktik. So schreibt Wittmann (1995, S. 364): „In the following the writer proposes a specific approach to empirical research, namely empirical research centered around teaching units.” Als Ziele solcher praxisorientierter Untersuchungen gibt Wittmann folgendes an (S. 368): “The data collected in these experiments have multiple uses:

They tell us something about the teaching/learning processes, individual and social outcomes of learning, childrens productive thinking, and childrens difficulties. They also help us to evaluate the unit and to revise it in order to make teaching and learning more efficient.”

Nach Wittmann kann die praxisorientierte Entwicklung und Erforschung von Unterrichtseinheiten einen wichtigen Beitrag zur Entstehung allgemeiner Lehr- und Lerntheorien liefern (Wittmann 1995, S. 368): „In the future we can certainly expect to derive theories covering a wide range of teaching and learning. But these theories cannot emerge before a variety of individual teaching units has been investigated in detail.” Weiter schreibt Wittmann zur Bedeutung solcher praxisorientierter Forschungsvorhaben (S. 369): „[…] the most important results of research in mathematics education are sets of carefully designed and empirically studied teaching units that are based on fundamental theoretical theories.” In Bezug auf den Simulationsvorkurs existieren bislang keine grundlegenden Lehr- und Lernthorien zum Einsatz von Computersimulationen im Stochastikunterricht der gymnasialen Oberstufe, so dass es ein zentrales Ziel der Arbeit ist, zur Entwicklung solcher Lehr- und Lerntheorien beizutragen.

Das in der vorliegenden Arbeit gewählte methodische Vorgehen ist im angelsächsischen Bereich bekannt unter der Bezeichnung „Design Research“. Design-Research-Studien bestehen typischerweise aus der praxisorientierten Entwicklung eines Unterrichtskonzepts oder einer Lernumgebung und der theoretisch orientierten Untersuchung des entwickelten Konzepts. In einem Übersichtsartikel zur Verwendung von Design-Studien in der erziehungswissenschaftlichen Forschung schreiben Cobb, Confrey et al. (2003, S. 9): „Design experiments have both a pragmatic bent – ‘engineering’ particular forms of learning – and a theoretical orientation – developing domain-specific theories by systematically studying those forms of learning and the means of supporting them.”

Die Design-Research-Methode geht zurück auf Brown (1992) und Collins (1992). Im Gegensatz zu Vergleichsstudien, bei denen es um die Untersuchung und Evaluation vorhandener Theorien oder Materialien geht, liegt bei Design-Studien ein Schwerpunkt auf der Entwicklung der Unterrichtskonzepte und Materialien. Diese werden dann theoriegeleitet untersucht. Bakker (2004, S. 38) schreibt hierzu im Rahmen einer Design-Studie zum Stochastikunterricht: “The objectives of design research are different from those of comparative empirical research. The main objective of design research is to develop theories together with instructional materials whereas the main objective of comparative research is to evaluate theories or materials. This does not mean that we separate developing and evaluating theories, because in design research the theory that is under development is evaluated during and after design experiments.”

Collins, Joseph et al. (2004) betonen auch die Schwierigkeiten bei der Durchführung von Design-Research-Studien: Da die Untersuchungen in realen Unterrichtskontexten stattfinden, gibt es eine Vielzahl von Variablen, die man nicht kontrollieren kann. Insbesondere hängt die Wirkung eines Unterrichtskonzepts immer auch von der konkreten Situation ab, z. B. von der Lerngruppe und von der Lehrperson. Das macht es schwierig, allgemeine Erkenntnisse über ein erprobtes Unterrichtskonzept zu gewinnen. Ein weiteres Problem ist die Komplexität von Unterrichtskonzepten. Im Sinn einer Weiterentwicklung ist nicht eindeutig vorherzusagen, welche Auswirkungen die Änderungen an bestimmten Stellen auf das Gesamtkonzept haben. Ferner wird das Problem der großen Datenmengen angesprochen, die i. a. bei einer Design-Research-Studie anfallen: „Design researchers usually end up collecting large amounts of data, such as video records of the intervention and outputs of students' work, in order to understand what is happening in detail. […] There is usually not enough time or resources to analyze much of the data collected." (Collins, Joseph et al. 2004, S. 19).

Nach Cobb, Confrey et al. (2003, S. 9) sind Design-Research-Studien ideal geeignet zur Entwicklung und Untersuchung komplexer Unterrichtskonzepte und Lernumgebungen im Rahmen von Fallstudien wie bei dem hier vorliegenden Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs: „Design experiments ideally result in greater understanding of a *learning ecology* – a complex, interacting system involving multiple elements of different types and levels – by designing its elements and by anticipating how these elements function together to support learning."

Cobb, Confrey et al. (2003, S. 9-11) identifizieren fünf zentrale Eigenschaften von Design Research-Studien:

Die erste Eigenschaft ist es, dass Theorien sowohl über den Lernprozess als auch über die Materialien und Rahmenbedingungen zur Unterstützung des Lernprozesses entwickelt werden. Die zweite Eigenschaft ist eine stark innovative Ausrichtung (S. 10): „Design studies are typically test-beds for innovation. The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them." Drittens haben Design-Research-Studien stets eine vorausplanende und eine reflektierende Seite (S. 10): „On the prospective side, designs are implemented with a hypothesized learning process and the means of supporting it in mind. […] On the reflective side, design experiments are conjecture-driven tests, often at several levels of analysis." Die vierte Eigenschaft ist der zyklische Charakter von Design-Research-Studien: Neukonzeptionen und Änderungen führen zu einem fortlaufenden Prozess. Die fünfte Eigenschaft ist die Praxisorientierung: Die entwickelten Theorien müssen so spezifisch sein, dass sie für die konkreten Unterrichtskonzepte und Lernumgebungen nutzbar werden, auf der anderen Seite müssen sie so allgemein sein, dass sie in den verschiedenen in der Praxis auftretenden Situationen verwendbar sind: „Rather than grand theories of learning that may be difficult to project into particular circumstances, design experiments tend to emphasize an intermediate theoretical scope that is located between a narrow account of a specific system (e.g., a particular school district, a particular classroom) and a broad account that does not orient design to particular contingencies."

In der vorliegenden Arbeit sind die Unterrichtskonzepte konkret für die Unterstützung des Stochastik-Leistungskurses mit der Software FATHOM entwickelt worden. Die Materialien sind allerdings so gestaltet, dass sie von den unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrern flexibel an die jeweilige schulische Situation und die zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmenbedingungen angepasst werden können.

Cobb, Confrey et al. (2003, S. 11-13) identifizieren drei Phasen einer Design Research-Studie:

1. Die Entwicklung des Konzepts und der Materialien (*„Preparing for a Design Experiment")*
2. Die Erprobung des Konzepts in der Praxis (*„Conducting a Design Experiment"*)
3. Die rückblickende Analyse (*„Conducting Retrospective Analysis"*)

Im Anschluss an die rückblickende Analyse folgt meistens eine neue Design-Phase. In der vorliegenden Untersuchung wurden im Anschluss an die Vorstudien mehrfach Änderungen im Konzept vorgenommen. Die Hauptuntersuchung soll Hinweise zu weiteren Entwicklungsmöglichkeiten des Konzepts liefern.

Wichtige Impulse für die vorliegende Arbeit gehen auch von der Methode der „Aktionsforschung“ aus (vgl. Elliot 1981), da Aktionsforschung die Lehrperson selber als Forscherin oder Forscher in den Blick nimmt. Mit Hilfe der Aktionsforschung sollen Lehrerinnen und Lehrer selber ihre berufliche Situation erforschen und so zu Verbesserungen gelangen. Altricher und Posch (1998, S. 15 ff) beschreiben charakteristische Merkmale der Aktionsforschung. Hier seien einige genannt:

- *Forschung der Betroffenen:* Im Fall von Unterrichtssituationen handelt es sich um Forschung von Lehrerinnen und Lehrern.
- *Fragestellungen aus der Praxis:* Aktionsforschung greift solche Fragestellungen auf, die Praktiker in der Schule als bedeutsam für ihre Tätigkeit ansehen.
- *In-Beziehung-Setzen von Aktion und Reflexion:* Bei der Aktionsforschung greifen Aktion und Reflexion eng ineinander. Die Reflexion steuert und leitet das Handeln, die Reflexionsergebnisse werden durch erneutes praktisches Handeln einer Überprüfung unterzogen.
- *Längerfristige Forschungs- und Entwicklungszyklen:* Aktionsforschung führt zu längerfristigen Forschungs- und Entwicklungszyklen. Aktion und Reflexion können mehrere Male nacheinander ablaufen, man kann mehrfach Zwischenanalysen durchführen, aus denen sich dann weitergehende Fragestellungen und neue Entwicklungen ergeben können.
- *Konfrontation unterschiedlicher Perspektiven:* Im Rahmen der Aktionsforschung werden Untersuchungen aus mehreren Perspektiven durchgeführt. Hierbei können sowohl Perspektiven anderer Personen als auch Perspektiven anderer Forschungsmethoden gemeint sein.
- *Einbettung der individuellen Forschung in eine professionelle Gemeinschaft:* Die forschenden Lehrerinnen und Lehrer diskutieren ihre Erkenntnisse mit Kollegen oder mit Ansprechpartnern von außen.
- *Veröffentlichung von Praktikerwissen:* Die Ergebnisse der Aktionsforschung werden in Fortbildungsveranstaltungen oder über Veröffentlichungen weitergegeben und damit der öffentlichen Diskussion ausgesetzt.
- *Ziele von Aktionsforschung:* Aktionsforschung hat ein doppeltest Ziel: Sie strebt gleichzeitig neue Erkenntnisse (als Ergebnis von Reflexion) wie auch die praxisorientierte Entwicklung (als Ergebnis von Aktion) an.

Die Aktionsforschung ist im Vergleich zur Design-Research-Methode dahingehend eingeschränkt, dass sie ausschließlich von der Lehrperson als Forscherin oder Forscher ausgeht. Ferner ist die Aktionsforschung stärker in Richtung einer Selbstevaluation der praktischen Arbeit von Lehrerinnen und Lehrern orientiert. Bei Design-Research-Studien haben die Entwicklung von Unterrichtskonzepten und Lernumgebungen sowie die Auswirkungen dieser Konzepte auf die Schülervorstellungen einen größeren Stellenwert. Es geht um deutliche Innovationen im Vergleich zu bisherigen Unterrichtskonzepten. Damit ist die vorliegende Arbeit mit dem Schwerpunkt auf der Entwicklung des Unterrichtskonzepts und dessen Auswirkungen auf die Schülervorstellungen als Design-Research-Studie anzusehen, sie erhält aber aus der Aktionsforschung wichtige Impulse für den Umgang der Lehrperson mit seiner eigenen Forschung.

Die Erforschung des eigenen Unterrichts durch die Lehrperson hat Vor- und Nachteile. Problematisch sind die eingeschränkte Perspektive und die subjektive Sichtweise des Forschenden. Prengel (1997, S. 611) schreibt hierzu: „Unsere durch Standort und Wahrnehmungsmodus beschränkte Perspektive ermöglicht und begrenzt zugleich unsere Erkenntnisse. Jenseits perspektivischer Begrenztheit und ohne das Bemühen um freilich immer vorläufig bleibende Begrenzungen ist keine Erkenntnis möglich.“ Die Aktionsforschung antwortet hierauf zum einen mit der *Einbettung der individuellen Forschung in eine professionelle Gemeinschaft*, mit der *Konfrontation unterschiedlicher Perspektiven* und mit der *Veröffentlichung von Praktikerwissen*.

Diese wichtigen Eigenschaften der Aktionsforschung sind auch in der vorliegenden Arbeit berücksichtigt: Das Forschungsprojekt wurde kontinuierlich in der Fachgruppe von Prof. Dr. Biehler diskutiert und dabei weiterentwickelt. Auch die weiteren an den Unterrichtsprojekten beteiligten Lehrerinnen und Lehrer wurden um Rückmeldungen gebeten und in die Diskussionen eingebunden. Über Lehrerfortbildungen, fachdidaktische Vorträge (vgl. Meyfarth 2006b) und die Veröffentlichung des gesamten Unterrichtsentwurfs (vgl. Meyfarth 2006a) wurde das Konzept einer breiten Öffentlichkeit zugänglich gemacht. Neben der Lehrerperspektive wird die Schülerperspektive berücksichtigt; im Rahmen schulpraktischer Studien wurden zusätzlich Studierende als unabhängige „Dritte“ einbezogen. Die unterschiedlichen Untersuchungsmethoden werden in Kapitel 5.2 genauer geschildert.

Ein Vorteil der Erforschung des eigenen Unterrichts ist die mit der Selbstbetroffenheit verbundene hohe Motivation der forschenden Lehrperson. Ferner ist die Lehrperson Experte für ihren eigenen Unterricht und kann die Praxiserfahrungen gewinnbringend in das Forschungsprojekt einbringen. Wittmann schreibt hierzu (1995, S. 369): „Only the teacher is in the position to determine the special conditions in his or her classroom. Therefore there should be no sharp seperation between the researcher and the teacher […].”

Die in der vorliegenden Arbeit verwirklichte enge Verzahnung zwischen schulischer Praxis und theoretisch orientierter Forschung wird in ähnlicher Weise auch in den Klagenfurter Programmen zur Professionalisierung von Lehrerinnen und Lehrern angestrebt (vgl. Kröpfl 2004; Peschek 2004). Der Fokus liegt bei diesen Programmen ebenfalls auf der Entwicklung von Unterrichtskonzepten und der praktischen Erprobung sowie der Evaluation dieser Konzepte. Zum sich hieraus ergebenden Problem, dass der Lehrer als Forscher und als Ausführender und somit als Beforschter auftritt, schreibt Kröpfl (2004, S. 3): „Dieser Dualismus von Forschung und Praxis in ein und derselben Person wird aufzulösen versucht, indem die fachdidaktische und pädagogische Forschung vornehmlich nach den Grundsätzen der Aktionsforschung erfolgt.“

Auch Peschek verweist bei der Beschreibung des „Klagenfurter Doktorand(inn)en-Kollegs“ auf die Methode der Aktionsforschung (Peschek 2004, S. 13): „In seinem globalen Ansatz der (auch personellen) Verbindung von Forschung und Praxis und der partnerschaftlichen Kooperation zwischen Wissenschaft und Praxis folgt unser Vorgehen den Grundsätzen der Aktionsforschung“. Im Klagenfurter Doktorand(inn)en-Kolleg wird im Beruf stehenden österreichischen Mathematiklehrern und –lehrerinnen die Promotion in der Didaktik der Mathematik ermöglicht. Die Promotion ist jeweils praxisorientiert angelegt und wird entlang der folgenden Schritte strukturiert:

(1) Analyse und Reflexion des Themengebietes

(2) Identifikation und Operationalisierung von Grund- und Reflexionswissen innerhalb des Themengebiets

(3) Entwicklung eines Curriculums

(4) Unterrichtspraktische Erprobung des entwickelten Curriculums

(5) Reflexion der Ergebnisse des entwickelten Curriculums

Fasst man die ersten drei Schritte zu einer Phase zusammen, so hat man eine ähnliche Struktur wie die drei Phasen einer Design-Research-Studie. Auch die praxisorientierten Promotionen des Klagenfurter Doktorand(inn)enkollegs gehen in ähnlicher Weise wie die vorliegende Arbeit über die Aktionsforschung hinaus (vgl. Peschek 2004, S. 13): „Neben Elementen der Aktionsforschung kommen aber auch andere Methoden der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung zum Einsatz: Stoffdidaktische Sachanalysen und Konstruktionen, historische Analysen, quantitative und vor allem qualitative Methoden der empirischen Unterrichtsforschung.“

3.2 Die Vorstudien

Einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung des Unterrichtskonzepts haben zwei Voruntersuchungen geliefert, in denen erste Versionen der Unterrichtsmaterialien und der Untersuchungsmethoden getestet wurden:

In einer ersten Voruntersuchung wurde der Einsatz von Simulationen und Lernumgebungen mit FATHOM für die Themenschwerpunkte Binomialverteilung und das Testen von Hypothesen erprobt. Der Unterricht fand im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2003/2004 über 10 Wochen in einem Mathematik-Leistungskurs der Jahrgangsstufe 12 an der Jacob-Grimm-Schule in Kassel statt und wurde im Rahmen schulpraktischer Studien von zwei Studentinnen der Universität Kassel begleitet. Zur Evaluation des Unterrichtskonzepts wurde der Unterricht im Rahmen der schulpraktischen Studien durchgängig protokolliert und diese Protokolle in zugehörigen Seminarveranstaltungen ausgewertet. Ferner wurde eine Schülerbefragung durchgeführt, in welcher die Schülereinstellungen gegenüber dem computergestützten Unterrichtskonzept erhoben wurden. Aus dem Unterricht selber konnte die Leistungskursklausur zur Evaluation herangezogen werden. Die persönliche Rückmeldung der unterrichtenden Lehrerin während des Unterrichtsprojekts sowie ein abschließendes Interview mit der unterrichtenden Lehrerin gaben zusätzliche Informationen über die Erprobung des Unterrichtskonzepts aus Lehrersicht.

In einer zweiten Voruntersuchung wurde das komplette Unterrichtskonzept mit den Themenschwerpunkten Simulationsvorkurs, Binomialverteilung und Testen von Hypothesen im ersten Halbjahr des Schuljahres 2004/2005 in einem Mathematik-Leistungskurs der Klasse 13 an der Albert-Schweitzer-Schule in Kassel erprobt. Über das gesamte Kurshalbjahr gab es persönliche Rückmeldungen des unterrichtenden Lehrers, ferner standen die beiden Leistungskursklausuren zur Evaluation zur Verfügung. Der Beobachtungsfokus dieser zweiten Untersuchung lag auf der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung über den Simulationsvorkurs. Der Verlauf der einzelnen Stunden des Simulationsvorkurses wurde erneut im Rahmen schulpraktischer Studien protokolliert und in Seminarveranstaltungen ausgewertet. Ferner wurden die erreichten Schülerkompetenzen im Anschluss an den Simulationsvorkurs im Rahmen eines Kompetenztests erhoben. Der Kompetenztest beinhaltete Items zu grundlegenden Begriffen der Stochastik, wie sie im Lehrplan gefordert werden, zum intuitiven Verständnis von stochastischen Problemstellungen, zum empirischen Gesetz der großen Zahl, sowie einen Praxisteil zur Modellierung einer Simulationsumgebung.

Einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts lieferten die Diskussionen mit den über die schulpraktischen Studien beteiligten Studierenden sowie die Rückmeldungen der beiden unterrichtenden Lehrkräfte. Weitere wichtige Impulse zur Optimierung des Konzepts stammen aus intensiven Diskussionen in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Biehler auf Basis der Unterrichtsmaterialien und der angefertigten Protokolle des durchgeführten Unterrichts.

Die Protokollierung des Unterrichts im Rahmen schulpraktischer Studien sowie die Diskussionen des Konzepts mit den Studierenden wurden für die Hauptuntersuchung beibehalten. Die in den Voruntersuchungen verwendete Schülerbefragung und der Kompetenztest wurden weiter entwickelt und ebenfalls in der Hauptuntersuchung verwendet.

3.3 Rahmenbedingungen der Hauptuntersuchung

Die in der vorliegenden Arbeit geschilderte Hauptuntersuchung hat stattgefunden im Rahmen der Erprobung des gesamten Kurskonzepts in zwei parallelen Mathematik-Leistungskursen an der Jacob-Grimm-Schule in Kassel. Die Jacob-Grimm-Schule ist ein Oberstufengymnasium mit einer Jahrgangsstärke von ca. 200 Schülerinnen und Schülern. Das Kurshalbjahr Stochastik wird stets im zweiten Halbjahr der Jahrgangsstufe 12 unterrichtet.

Einer der beiden Kurse („Kurs A“) wurde vom Verfasser selber unterrichtet. Der zweite Kurs („Kurs B“) fand parallel aber nicht zeitgleich statt, so dass beiden Kursen mit wenigen Einschränkungen über das gesamte Kurshalbjahr der Computerraum der Schule zur Verfügung stand. Der Computerraum der Schule ist mit 14 Schülerarbeitsplätzen und mit einem Lehrerarbeitsplatz ausgestattet, so dass alle Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit an den Computern arbeiten können. Der Lehrerarbeitsplatz ist mit einem Beamer verbunden. Da alle Computer des Raumes vernetzt sind, kann man Schülerlösungen einfach vom Lehrerarbeitsplatz aus über den Beamer präsentieren lassen. Den Schülerinnen und Schülern wurde die Software FATHOM auch für die Verwendung zu Hause zur Verfügung gestellt.

Kurs A bestand aus 19 Schülerinnen und Schülern, acht davon weiblich und elf männlich. Kurs B bestand aus 18 Schülerinnen und Schülern, vier davon weiblich und 14 männlich. Das Leistungsniveau ist für Leistungskurse in beiden Kursen als durchschnittlich einzustufen. Es ist breit gestreut und reicht in beiden Kursen vom mangelhaften Bereich bis in den sehr guten Bereich. Auch die Vorerfahrungen im Umgang mit dem Computer sind in beiden Kursen höchst unterschiedlich. Die meisten Schülerinnen und Schüler nutzen den Computer für private Zwecke sowie für Textverarbeitung. Es gibt in beiden Kursen allerdings auch Schülerinnen und Schüler mit umfangreicher Programmiererfahrung. In beiden Kursen wurde seit der Jahrgangsstufe 11 mit dem grafik- und computeralgebrafähigen Taschencomputer TI89 der Firma Texas Instruments gearbeitet, so dass alle Schülerinnen und Schüler mit computerunterstütztem Mathematikunterricht vertraut sind. Als Schulbuch wurde in beiden Kursen das Buch „Elemente der Mathematik – Leistungskurs Stochastik“ verwendet (H. Griesel, H. Postel et al. 2003).

Zum Zeitpunkt der Untersuchung im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2004/2005 war das Landesabitur in Hessen noch nicht eingeführt. Der betroffene Jahrgang war der letzte Jahrgang in Hessen, bei dem die Abituraufgaben dezentral von den jeweiligen Kurslehrern erstellt wurden. Allerdings ist es an der Jacob-Grimm-Schule im Fach Mathematik vor der Einführung des Landesabiturs üblich gewesen, dass die Leistungskurslehrer eines Jahrgangs gemeinsame Abiturvorschläge einreichen. Da ein dritter paralleler Mathematikleistungskurs dieses Jahrgangs nicht nach dem vorliegenden Kurskonzept und damit auch ohne den Einsatz der Software FATHOM unterrichtet wurde, haben sich auch die Abituraufgaben in Stochastik an den üblichen Abituraufgaben orientiert und entsprechen in vollem Maße den aktuellen Anforderungen des Landesabiturs in Hessen mit den zentralen Aufgabenstellungen.

Der vom Verfasser selber unterrichtete Kurs A wurde über das gesamte Halbjahr von Studierenden der Universität Kassel im Rahmen schulpraktischer Studien begleitet. Der Unterricht wurde komplett protokolliert. Ferner wurde die Gruppenarbeit am Rechner bei vier Schülergruppen aus Kurs A mit der Software Camtasia aufgezeichnet. Die Software zeichnet die Bildschirmaktivität und simultan hierzu die Gespräche der Gruppe am Computer als Video auf. Ausgewählte Unterrichtsstunden zur Binomialverteilung und zum Testen von Hypothesen wurden auf Video aufgenommen.

Von Kurs B gibt es keine protokollierten Unterrichtsstunden, allerdings hat der Autor über den gesamten Verlauf des Kurshalbjahres in persönlichen Gesprächen detaillierte Rückmeldungen von der den Kurs B unterrichtenden Kollegin erhalten.

In beiden Kursen wurde die Entwicklung der Schülerkompetenzen mit einem Eingangstest sowie mit drei Kompetenztests jeweils im Anschluss an die drei Unterrichtsschwerpunkte erhoben. Ferner wurden in beiden Kursen über das Halbjahr verteilt drei Einstellungsbefragungen durchgeführt.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf den Simulationsvorkurs. Es werden nur die im Zusammenhang mit dem Simulationsvorkurs erhobenen Daten ausgewertet. Zu den Schwerpunkten Binomialverteilung und Testen von Hypothesen wurden in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Biehler im Rahmen von Staatsexamens- und Diplomarbeiten Auswertungen von Teilen des gesammelten Datenmaterials durchgeführt (Keitzer 2006; Huge 2007; Podworny 2008).

4 Der Simulationsvorkurs

4.1 Computersimulationen mit FATHOM

In diesem Abschnitt soll die Verwendung von Computersimulationen mit der Software FATHOM im Rahmen des vorgestellten Unterrichtskonzepts beschrieben, analysiert und begründet werden.

Zunächst wird die Erstellung einer Computersimulation analysiert und ein vierschrittiges Prozessmodell als Strukturierungshilfe angegeben. Dann wird ein für das Unterrichtskonzept typisches Beispiel einer Computersimulation mit FATHOM ausführlich vorgestellt. Ferner werden die benötigten Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM identifiziert und analysiert. Hierauf aufbauend werden zentrale didaktische Entscheidungen für den Einsatz der Software Fathom im Simulationsvorkurs beschrieben und begründet, wie z. B. die Auswahl des Befehlsumfangs oder die Verwendung eines so genannten Simulationsplans zur Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM.

4.1.1 Ein einfaches Prozessmodell zur Entwicklung von Computersimulationen

Die Erstellung einer Simulation zur Modellierung und Lösung stochastischer Problemstellungen lässt sich entlang mehrerer Schritte strukturieren. Gnanadesikan, Schaeffer, et al. (1987) schlagen ein allgemeines achtstufiges Prozessmodell in der im Folgenden sinngemäß formulierten Form vor:

Stufe 1-4: Modellierung der stochastischen Situation als Simulation mit realen Zufallsgeräten in vier Schritten.

Stufe 5: Einmalige Durchführung der Simulation.

Stufe 6: Beobachtung der interessierenden Zufallsgrößen und Ereignisse.

Stufe 7: Vielfache Wiederholung der Simulation und Sammeln von Ergebnissen der definierten Zufallsgrößen und Ereignisse.

Stufe 8: Darstellung und Auswertung der Ergebnisse.

Weiterführungen dieser Vorgehensweise in Verbindung mit Computersimulationen werden z. B. von (Engel 2002; Engel 2003; Engel und Vogel 2004) vorgeschlagen.

Biehler (2003) passt dieses rudimentäre Prozessmodell an die Erstellung von Computersimulationen mit der Software FATHOM an. Er stellt in den einzelnen Schritten jeweils die stochastische Formulierung und die Umsetzung in die Software FATHOM gegenüber (Tabelle zitiert aus Biehler (2003, S. 1/2), vgl. auch (Biehler und Maxara 2007, S. 47 ff)):

Schritt Nr.	Stochastik	FATHOM
M	Reale Situation eines Vorganges mit zufälligem Ausgang; Modellierung dieser Situation durch ein Modell-Zufallsexperiment	
1	Festlegen des Modell-Zufallsexperiments	A: Definition einer zufallsabhängigen Kollektion B: Visualisierung von Eigenschaften der

		Kollektion C: Wiederholte Realisierungen
2	Festlegen interessierender Zufallsgrößen und Ereignisse	*„Definition der Messgröße"* als Eigenschaften der Zufallskollektion
3	Wiederholung des Experiments und Sammeln von Ergebnissen der definierten Zufallsgrößen/Ereignisse	*„Sammeln von Messgrößen"* über das Erzeugen einer neuen Kollektion mit Werten der Zufallsgröße
4	Auswertung der Ergebnisse: relative Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen; Verteilung von Zufallsgrößen	FATHOM als Datenanalysesoftware
5	Variation der Bedingungen, z. B. a) Wahrscheinlichkeitsannahmen des Zufallsexperiments b) Betrachten weiterer Zufallsgrößen	Fathomsheet als interaktives Arbeitsblatt mit multiplen verbundenen Repräsentationen, welche modifiziert werden können.
6	Wiederholen des Experiments	
I	Interpretation/Validierung	

Biehler (2003, S. 2) betont hierbei die gute Entsprechung der für eine Computersimulation mit FATHOM zu wählenden Werkzeuge mit den einzelnen Schritten des Prozessmodells und die damit verbundenen positiven Effekte für das Erlernen von Computersimulationen bei Verwendung der Software FATHOM: „Der Vorteil der Software FATHOM besteht darin, dass den verschiedenen Stufen immer wieder dieselben Typen von Softwareaktionen entsprechen. Dies kann das Erlernen des problemlösenden Werkzeuggebrauchs wesentlich stützen." In Maxara und Biehler (2006, S. 4) wird dies wie folgt beschrieben: „The steps easily transfer one to one in FATHOM. Each particular step corresponds to a certain action in FATHOM. This is an advantage of the software FATHOM because this supports the problem solving use of the software tool."

In Biehler, Hofmann et al. (2006, S. 135) wird das Prozessmodell in verkürzter Form als fünfschrittiges Vorgehen formuliert:

„Es wird zunächst 1) ein Zufallsexperiment festgelegt, dann 2) eine Zufallsgröße z. B. als Messgröße definiert, 3) wird das Zufallsexperiment n-mal wiederholt und 4) dann die empirische Verteilung der Zufallsgröße ermittelt. Aus der Verteilung der Zufallsgröße können schließlich 5) einzelne Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten oder einzelne Kennzahlen wie der Erwartungswert über das arithmetische Mittel geschätzt werden."

Ein zentrales Ziel des Simulationsvorkurses ist das Erlernen der Erstellung und Auswertung von Computersimulationen mit der Software FATHOM. Allerdings soll die Benutzung der Software parallel mit der Einführung des Prozessmodells zur Erstellung von Computersimulationen erlernt werden. Stochastische Grundlagen stehen den Schülerinnen und Schülern nicht zur Verfügung. In Anlehnung an das von Biehler vorgeschlagene Vorgehen wird in der vorliegenden Unterrichtskonzeption ein vereinfachtes Verfahren zur Strukturierung der Erstellung einer Computersimulation in vier Schritten eingeführt:

Vier-Schritt-Modell einer Computersimulation mit FATHOM:

1. Schritt:	Modellierung des Zufallsexperiments in FATHOM
2. Schritt:	Definition der interessierenden Zufallsgrößen oder Ereignisse als Messgrößen
3. Schritt:	Durchführung einer großen Anzahl dieser Zufallsversuche und Sammeln der Ergebnisse
4. Schritt	Visualisierung der Ergebnisse, Grafische, tabellarische und rechnerische Auswertung der Simulationsergebnisse

Die Aufgaben sind zu Beginn des Simulationsvorkurses meistens so gestellt, dass der Modellierungsschritt M bereits vorgenommen wurde oder gemeinsam im Unterrichtsgespräch erarbeitet wird. Auch der Interpretationsschritt I wird zunächst nicht explizit gefordert. Die von Gnanadesikan, Schaeffer, et al. (1987) vorgeschlagene Simulation mit realen Zufallsgeräten wie Würfel, Münze, Glücksrad oder auch mit Zufallszahlen soll an ausgewählten Stellen vorgeschaltet werden. Auch die genauere Betrachtung der interessierenden Zufallsgrößen oder Ereignisse bei wiederholter Realisierung des Zufallsexperiments im Sinn einer experimentellen Untersuchung der stochastischen Situation soll bei ausgewählten Simulationen hinzugezogen werden. So sollte man z. B. bei der Betrachtung der Augensumme eines fünffachen Würfelwurfs diesen fünffachen Würfelwurf mehrfach nacheinander durchführen und die Aufmerksamkeit auf das Verhalten der Augensumme nach jedem fünffachen Würfelwurf lenken, um ein intuitives Verständnis für die Unabhängigkeit und die stochastische Streuung zu vermitteln. Die Interpretation der Ergebnisse soll im Unterrichtsgespräch im Anschluss an die Vorstellung der Computersimulation erfolgen.

4.1.2 Ein einführendes Beispiel einer Computersimulation mit FATHOM

Als Beispiel für die Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM nach dem vorgestellten Vier-Schritt-Verfahren soll die folgende Problemstellung dienen, welche in dem vorliegenden Kurskonzept als Einführungsbeispiel in den Simulationsvorkurs gewählt wurde:

Betrachten Sie die folgenden beiden Tests:

Test 1 besteht aus 10 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Test 2 besteht aus 20 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind.

Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät?

Es wird die Simulation des Tests mit 10 Multiple-Choice-Fragen vorgestellt. Die Darstellung ist angelehnt an Maxara (2005):

1. Schritt: Modellierung des Zufallsexperiments in FATHOM

Um die Durchführung des 10-fachen Multiple-Choice-Tests in FATHOM zu simulieren, wird zunächst eine neue Kollektion erstellt. Dieser neuen Kollektion muss man einen Namen geben, wir wählen hier den Namen *Test1*. Dieser Kollektion wird eine Merkmalsspalte hinzugefügt, in der die zehn Aufgaben als einzelne Ergebnisse abgebildet sind. Wir bezeichnen die Merkmalsspalte daher mit *Aufgaben*. Um die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben zu simulieren, muss man einen geeigneten Zufallsgenerator wählen. Wir wählen den Zufallsgenerator `ZufallsWahl("erfolg"; "misserfolg")`. Der angegebene Zufallsgenerator funktioniert wie das Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne, in der die in der Klammer angegebenen Ausdrücke als Kugeln liegen. Somit wählt der Zufallsgenerator bei jedem der zehn Fälle des Merkmals *Aufgaben* mit gleicher Wahrscheinlichkeit „erfolg“ oder „misserfolg“ aus, so dass hierüber das rein zufällige Ankreuzen einer Multiple-Choice-Aufgabe simuliert wird. Durch das Einfügen von 10 Fällen bildet man zehn solcher Multiple-Choice-Fragen ab. Im Ergebnis erhält man in FATHOM eine Tabelle zur Kollektion *Test1* mit der Spalte *Aufgaben*, welche das zufällige Ankreuzen der zehn Testfragen über zehn Zeilen mit den Einträgen „erfolg“ und „misserfolg“ repräsentiert. Diese einfache Durchführung des Experiments lässt sich beliebig oft wiederholen, die Ergebnisse lassen sich auch grafisch darstellen.

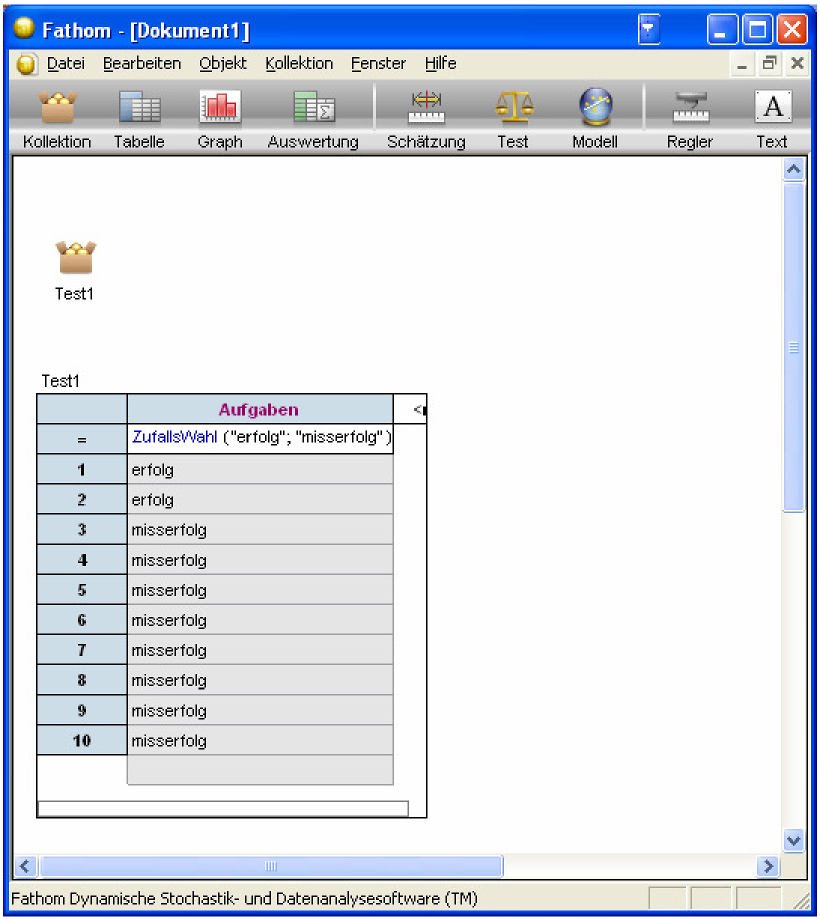


Abb. 4.1: Erstellung der Kollektion „Test1“ und des zugehörigen Merkmals „Aufgaben“.

2. Schritt: Definition der interessierenden Zufallsgrößen oder Ereignisse als Messgrößen

Die Tabelle des Zufallsexperiments muss nun ausgewertet werden. Hier besitzt FATHOM das Konzept der Messgröße, welches an die Erstellung einer Computersimulation entlang des beschriebenen vierschrittigen Prozessmodells angepasst ist. Man kann mit der Messgröße sowohl Ereignisse als auch Zufallsgrößen definieren. In unserem Beispiel bietet es

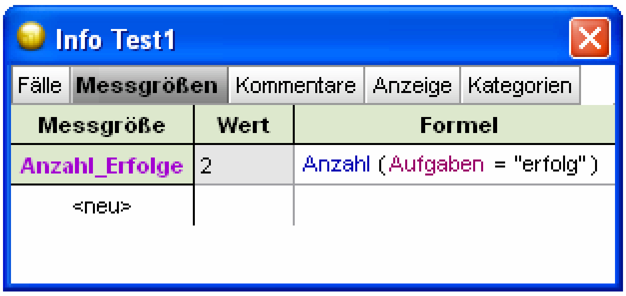


Abb. 4.2: FATHOM-Fenster zur Definition der Messgröße.

sich an, die Anzahl der erfolgreich angekreuzten Multiple-Choice-Fragen als Zufallsgröße zu untersuchen. Für das Zählen von Einträgen steht in FATHOM die Formel `Anzahl()` zur Verfügung. Zur Berechnung dieser Anzahl definieren wir nun eine Messgröße über die Formel `Anzahl(Aufgaben="erfolg")`. Mit dieser Formel wird gezählt, wie oft in der Spalte *Aufgaben* das Wort „erfolg“ auftritt. Als sinnvolle Bezeichnung der Messgröße wählen wir *Anzahl_Erfolge*.

3. Schritt: Durchführung einer großen Anzahl dieser Zufallsversuche und Sammeln der Ergebnisse

Abb. 4.3: FATHOM-Fenster zum Sammeln von 1000 Messgrößen.

Das Zufallsexperiment muss nun wiederholt durchgeführt werden und die nach jeder Durchführung auftretende Anzahl an Erfolgen gespeichert werden. Hierfür gibt es in FATHOM das Kommando „Messgrößen sammeln“. Je nach gewünschter Genauigkeit kann man einstellen, wie oft das Zufallsexperiment durchgeführt werden soll, typische Werte für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten sind 1000 oder 10 000mal. Wir wiederholen das Experiment hier 1000mal. FATHOM erstellt automatisch eine neue Kollektion, in der die Ergebnisse der Messgröße nach jeder Durchführung des Zufallsexperiments gesammelt werden. Die Bezeichnung der Kollektion und der zugehörigen Merkmalsspalte erfolgt ebenfalls automatisch. Im vorliegenden Beispiel werden die aufgetretenen Ergebnisse der Messgröße *Anzahl_Erfolge* in einer neu entstandenen Kollektion *Messgrößen von Test1* gesammelt. Man erhält eine Tabelle des Merkmals *Anzahl_Erfolge* mit 1000 Einträgen. Jeder Eintrag entspricht der Anzahl der Erfolge bei einer der 1000 Wiederholungen des Testexperiments. Übertragen auf die reale Situation entspricht jeder Eintrag der Anzahl richtig angekreuzter Aufgaben bei einem Durchgang des Multiple-Choice-Tests und einem rein zufälligen Ankreuzen der zehn Testfragen.

4. Schritt: Visualisierung der Ergebnisse, grafische, tabellarische und rechnerische Auswertung der Simulationsergebnisse

Die erzeugte Häufigkeitstabelle der Anzahl an Erfolgen bei 10 Testfragen kann nun auf verschiedene Weisen ausgewertet werden:

Für die grafische Darstellung stehen in FATHOM verschiedene Darstellungsformen wie z. B. Histogramm, Punktdiagramm und Boxplot zur Verfügung. Im vorliegenden Beispiel wird die Darstellung als Histogramm gewählt. Man kann bei den Einstellungen zum Histogramm auswählen, ob man auf der y-Achse absolute Zahlen oder relative Anteile aufträgt. Zur Veranschaulichung lassen sich die interessierenden Balken rot markieren.

Neben der grafischen Darstellung steht die tabellarische und rechnerische Auswertung zur Verfügung: Zur Bestimmung eines Schätzwerts für die Wahrscheinlichkeit, mindestens 60% der Fragen, d. h. mindesten sechs der zehn Fragen bei reinem Raten richtig zu beantworten, gibt es zum einen die Möglichkeit, sich eine Häufigkeitstabelle als kategoriale Auswertungstabelle ausgeben zu lassen und hieran die gesuchten Fälle auszuzählen.

Weiter besteht die Möglichkeit, die gesuchte relative Häufigkeit mit Hilfe einer Formel zu berechnen. Die relative Häufigkeit für mindestens sechs richtige Antworten erhält man mit der Formel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)` in einer

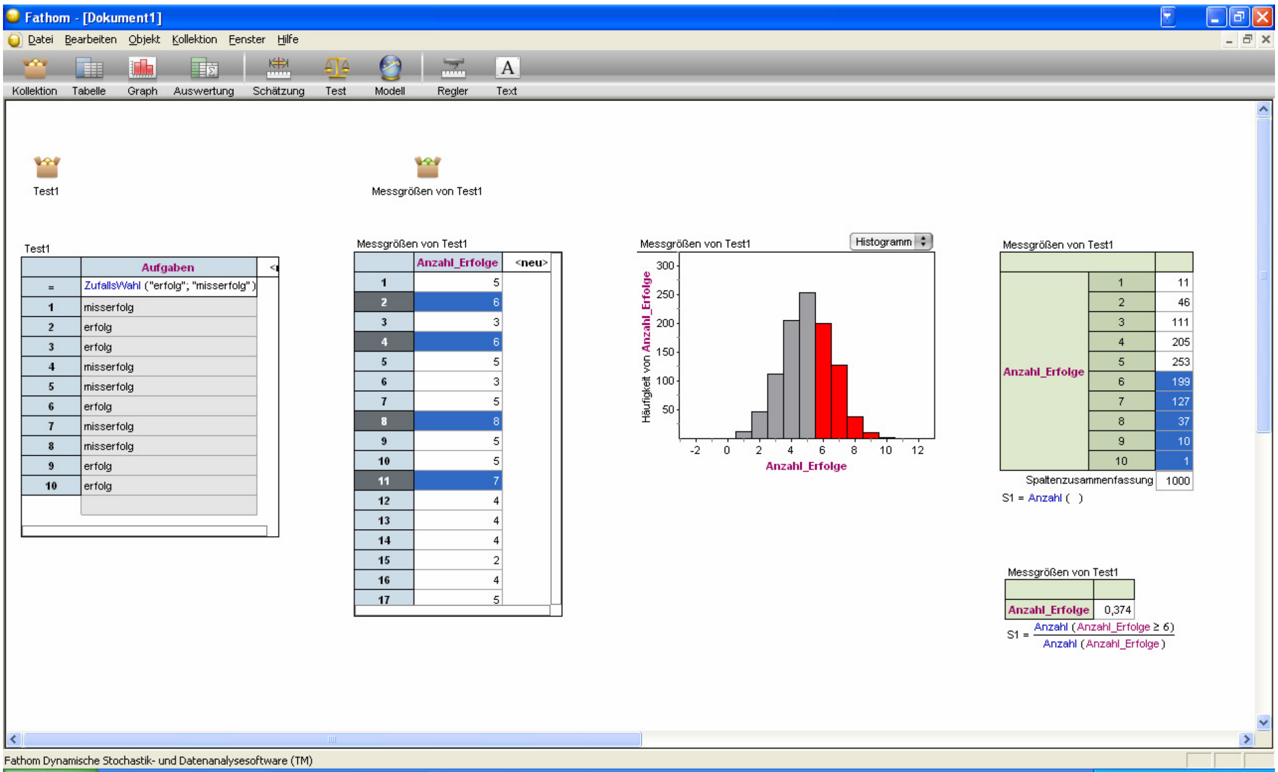


Abb. 4.4: Das gesamte FATHOM-Arbeitsblatt der Beispielsimulation mit der Ausgangskollektion Test1, der Kollektion der gesammelten Messgrößen und den Auswertungswerkzeugen Histogramm, kategoriale Auswertungstabelle (rechts oben) und numerische Auswertungstabelle (rechts unten).

numerischen Auswertungstabelle. Diese Formel zählt alle Einträge der Spalte *Anzahl_Erfolge* mit mindestens sechs Erfolgen und teilt dies durch die Anzahl aller Einträge von *Anzahl_Erfolge* in der Kollektion *Messgrößen von Test1*.

Je nach Aufgabenstellung können verschiedene Auswertungsmöglichkeiten geeignet sein. Die grafische Darstellung unterstützt stets das anschauliche Verständnis.

Genauere Beschreibungen der Funktionalität von FATHOM findet man für die deutsche Version z. B. in Biehler, Hofmann et al. (2006).

4.1.3 Kompetenzen für die Erstellung von Computersimulationen mit FATHOM

Die in diesem Kapitel geschilderten Kompetenzbegriffe wurden bei Vorauswertungen des in der Hauptuntersuchung entstandenen Datenmaterials unter Beteiligung des Autors in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Biehler erarbeitet und in einer Diplomarbeit von C. Keitzer (2006) erstmals angewandt. Die genannte Diplomarbeit von C. Keitzer ist an die vorliegende Dissertation angelagert und analysiert Kompetenzen und Schülerarbeitsweisen in den Computerarbeitsphasen beim Themenbereich Binomialverteilung. Die im Folgenden geschilderten Kompetenzbegriffe standen beim Design des Unterrichtskonzepts noch nicht zur Verfügung und stellen ein Ergebnis von Vorauswertungen des Datenmaterials der Hauptuntersuchung dar, auf das die weiteren Auswertungen der vorliegenden Arbeit aufbauen.

Die benötigten Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation mit der Software Fathom lassen sich in vier Bereiche einteilen (vgl. Maxara und Biehler 2007, S. 768): Die allgemeine Fathom-Kompetenz, Simulationskompetenz, die Formelkompetenz und strategische sowie generalisierende Fathom-Kompetenzen.

1. Die allgemeine Fathom-Kompetenz

Zur allgemeinen Fathomkompetenz, auch Werkzeugkompetenz genannt, zählen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit den Werkzeugen der Software FATHOM. In Bezug auf den Einsatz von FATHOM bei Computersimulationen sind dies zunächst die Erstellung und der Umgang mit den benötigten Elementen der Menüleiste, d. h. mit Kollektionen und den zugehörigen Tabellen, mit Graphen sowie mit Auswertungstabellen.

Neben dem Umgang mit den Elementen der Menüleiste gehören zur allgemeinen Fathomkompetenz noch weitere grundlegende Bedienkompetenzen. Exemplarisch seien hier das Arbeiten mit den Kontextmenüs, ein geschicktes Anordnen der einzelnen Fenster, sowie die Übertragung von Fensterinhalten in Textverarbeitungssoftware zum Zweck der Ergebnissicherung genannt.

2. Simulationskompetenz

Als Simulationskompetenz wird die Modellierung der stochastischen Situation als Computersimulation entlang des vierschrittigen Prozessmodells bezeichnet. Hierzu zählen der geeignet gewählte Aufbau der Simulation, die Modellierung des Einzelexperiments, die Wahl und Definition einer geeigneten Messgröße und die sinnvolle Auswertung der gesammelten Messgrößen. Zur Simulationskompetenz gehört ferner die Wahl von geeigneten Bezeichnungen auf den verschiedenen Stufen des Prozessmodells.

3. Die Formel-Kompetenz

Die Formelkompetenz teilt sich auf in drei hierarchisch angeordnete Unterstufen:

Auf unterster Ebene geht es um das *Bedienen des Formeleditors* zum Erstellen und Einfügen von Formeln. Hiermit wird die allgemeine Fathomkompetenz erweitert.

Ferner muss man die *Syntax einer Formel* beherrschen. Hier kann die FATHOM-Hilfe oder das Menü des Formel-Editors als Unterstützung benutzt werden.

Um die Formeln im Rahmen der Simulationskompetenz korrekt einsetzen zu können, muss man die *Semantik einer Formel* kennen, d. h. man muss wissen, welche Bedeutung eine Formel hat und wie man sie nutzen kann. Hierzu zählt z. B. auch die Verwendung von logischen Verknüpfungen oder das Verständnis für die „`Wenn()`–Funktion“ als Alternativanweisung.

Bei der Erstellung einer Computersimulation ergeben sich auf den einzelnen Stufen des Prozessmodells unterschiedliche Anforderungen an die Formelkompetenz. Diese Differenzierung nach den einzelnen Stufen des Prozessmodells wird nachfolgend genauer beschrieben.

4. Strategische und generalisierende Kompetenzen

Bei den strategischen und generalisierenden Kompetenzen handelt es sich um Meta-Kompetenzen im Umgang mit der Software und den angezeigten Ergebnissen.

Hierzu zählt die Kontrolle der angezeigten Ergebnisse, z. B. ein Abgleich zwischen verschiedenartigen Berechnungen oder zwischen der Berechnung und der grafischen Darstellung (*Kontroll-Strategie*). Weiter zählt hierzu ein konstruktiver Umgang mit aufgetretenen und erkannten Fehlern (*Debugging-Strategie*).

Die beiden genannten Strategien sind beim Erlernen einer neuen Software von hoher Wichtigkeit, da hier häufig Fehler in der Bedienung auftreten, die dann als solche erkannt werden müssen (Kontroll-Strategie) und deren Ursache erkannt werden muss, so dass man den Fehler beseitigen kann (Debugging-Strategie).

Die Vermittlung der Meta-Kompetenzen lässt sich nur schwer direkt in ein Unterrichtskonzept einbetten, da man vorher nicht weiß, an welchen Stellen entsprechende Fehler bzw. Probleme auftreten, so dass diese Kompetenzen benötigt werden. Es hängt sehr stark von der Lehrperson ab, ob an den entsprechenden Stellen auf die benötigten Meta-Kompetenzen hingewiesen wird. Hierbei spielt das Problembewusstsein der Lehrperson für die Bedeutung der Meta-Kompetenzen eine große Rolle.

Die drei anderen Kompetenzbereiche realisieren sich hingegen entlang des vierschrittigen Prozessmodells. Im Folgenden werden die benötigten Kompetenzen in jedem der vier Schritte des Prozessmodells konkretisiert:

1. Schritt: Modellierung des Zufallsexperiments in FATHOM

Auf der Ebene der allgemeinen Fathomkompetenz muss man für die Modellierung des Zufallsexperiments eine Kollektion erstellen können. Weiter muss man eine zugehörige Tabelle erzeugen können und dieser Tabelle ein Merkmal mit einer zugehörigen Formel und eine passende Anzahl von Fällen hinzufügen können.

Auf der Seite der Simulationskompetenz müssen das Merkmal und die Kollektion sinnvoll benannt werden sowie eine passende stochastische Modellierung des Zufallsexperiments vorgenommen werden. In dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Beispiel wird eine Tabelle zur Kollektion *Test1* mit der Spalte *Aufgaben* erstellt, welche das zufällige Ankreuzen der zehn Testfragen über zehn Fälle mit den Einträgen „erfolg" und „misserfolg" repräsentiert.

Auf der Formelseite muss in diesem ersten Schritt ein geeigneter Zufallsgenerator für das Zufallsexperiment gewählt werden und syntaktisch korrekt als Formel für das Merkmal eingegeben werden. Neben der Bedienung des Formeleditors und dem Wissen um die Syntax der Formel gehört hierzu die stochastische Modellierung des gegebenen Zufallsexperiments sowie das Wissen um die Semantik der in FATHOM als Zufallsgeneratoren vorhandenen Formeln, um die passende Formel auswählen zu können. Bei dem angegebenen Beispiel wird die stochastische Modellierung so gewählt, dass jede Frage unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit richtig oder falsch angekreuzt werden kann. Dies wird mit der Formel `ZufallsWahl("erfolg";"misserfolg")` realisiert. An dieser Stelle sind Simulations- und Formelkompetenz miteinander verknüpft.

2. Schritt: Definition der interessierenden Zufallsgrößen oder Ereignisse als Messgrößen

Auf der Ebene der allgemeinen Fathomkompetenz muss man mit dem Info-Fenster einer Kollektion umgehen können, über das unter anderem auch Messgrößen definiert werden. Hierbei ist zu betonen, dass in der Software Fathom kein eigenständiges Werkzeug existiert, welches die Messgröße repräsentiert. Die Messgröße wird über eine Karteikarte des Info-Fensters einer Kollektion realisiert. Hierdurch können auf der Seite der allgemeinen Fathom-Kompetenz Probleme beim Auffinden dieser Karteikarte entstehen.

Bei der Definition der Messgrößen zeigt sich wieder die Verknüpfung der Simulations- und der Formelkompetenz. Die Schwierigkeiten liegen in der stochastischen Modellierung in Verbindung mit deren Umsetzung mittels einer geeigneten Formel. So hat man häufig einen Entscheidungsspielraum, wie und welche Messgröße man definiert. Ferner hat man stets die Wahl der Bezeichnung. Beim vorgestellten Beispiel kann man sich für das Ereignis „mindestens sechs erfolgreiche Antworten“ oder aber für die Zufallsgröße „Anzahl der erfolgreichen Antworten“ entscheiden. Diese Entscheidung muss zunächst auf der Seite der stochastischen Modellierung getroffen werden, dann muss das Ereignis oder die Zufallsgröße mit einer geeigneten Formel als Messgröße definiert werden. Die hierfür benötigten Formeln unterscheiden sich zu den in Schritt 1 benötigten Zufallsgeneratoren dadurch, dass sie sich auf die erstellte Kollektion und damit auch auf die bislang verwendeten Bezeichnungen beziehen. Im Allgemeinen benötigt man hierfür Formeln zum Auszählen der Spalten einer Tabelle. Im vorgestellten Beispiel wurde die Messgröße *Anzahl_Erfolge* über die Formel `Anzahl(Aufgaben="erfolg")` definiert. Neben dem Auszählen der Merkmale können hier auch logische Verknüpfungen oder die „`Wenn()`-Funktion“ eingesetzt werden.

3. Schritt: Durchführung einer großen Anzahl dieser Zufallsversuche und Sammeln der Ergebnisse

Die wiederholte Durchführung des Zufallsexperiments und das Sammeln der Messgrößen erfolgen in FATHOM weitestgehend automatisch über den Befehl „Messgrößen sammeln“. Der Befehl zum Sammeln der Messgrößen befindet sich allerdings nicht direkt im Info-Fenster der Kollektion, in dem auch die Messgröße definiert wird, sondern im Kontextmenü oder im Pull-Down-Menü der Ausgangskollektion. In unserem Fall entsteht eine neue Kollektion *Messgrößen von Test1* mit dem Merkmal *Anzahl_Erfolge*. Im Info-Fenster der beim Sammeln der Messgrößen entstandenen neuen Kollektion kann man neben weiteren Einstellungen insbesondere die Anzahl der Wiederholungen wählen und das Sammeln der Messgrößen erneut durchführen lassen. Hierfür sind auf der Seite der allgemeinen FATHOM-Kompetenz somit der Umgang mit der Menüführung von FATHOM sowie der Umgang mit dem Info-Fenster von Bedeutung. Probleme können auftreten bei der Wahl der richtigen Kollektion zum Öffnen des Info-Fensters.

Formelkompetenz benötigt man in diesem dritten Schritt der Erstellung einer Computersimulation nicht. Auf der Seite der Simulationskompetenz muss man sich je nach gewünschter Genauigkeit für die Zahl der Wiederholungen entscheiden.

4. Schritt: Visualisierung der Ergebnisse, grafische, tabellarische und rechnerische Auswertung der Simulationsergebnisse

Für die Auswertung der Simulationsergebnisse muss man die entstandene Häufigkeitstabelle grafisch, tabellarisch und rechnerisch auswerten können. Dies setzt auf der Ebene der allgemeinen FATHOM-Kompetenz den Umgang mit Graphen in FATHOM und den Umgang mit Auswertungstabellen voraus:

Im Umgang mit Graphen muss man einen Graphen erzeugen können und den gewünschten Grafiktyp einstellen können (z. B. Säulendiagramm, Histogramm, Punktdiagramm). Bei geeigneten Diagrammtypen soll man zwischen absoluter und relativer Anzahl umschalten können. Zum fortgeschrittenen Umgang mit Graphen in FATHOM gehört das Einzeichnen von Werten und Funktionen.

Beim Arbeiten mit den Auswertungstabellen muss man zwei verschiedene Tabellentypen unterscheiden: Kategoriale und numerische Auswertungstabellen (vgl. Biehler, Hofmann et al. 2006, S. 33/34):

Zur tabellarischen Auswertung numerischer Merkmale steht in FATHOM die Möglichkeit zur Verfügung, die Auswertungstabelle als so genannte kategoriale Auswertungstabelle zu verwenden, in der zu jedem Wert des Merkmals der Anteil des Auftretens in absoluten oder in relativen Häufigkeiten angegeben wird. Diese Häufigkeitstabelle ist nicht dazu geeignet, Berechnungen mit Formeln durchzuführen. Man erhält ansonsten in der Regel Einträge, die nur für fortgeschrittene Nutzer der Software FATHOM zu interpretieren sind.

Für die statistische Auswertung mit Formeln wie z. B. für die Berechnung von Anteilen oder von statistischen Kenngrößen eines Merkmals steht die Verwendung einer Auswertungstabelle als numerische Auswertungstabelle zur Verfügung.

Auf der Ebene der Formelkompetenz müssen hier im Rahmen der statistischen Auswertung geeignete Formeln erstellt werden. Wie in Schritt 2 beziehen sich die Formeln auf bereits vorhandene Merkmale, in diesem Fall aus der Kollektion der gesammelten Messgrößen. Typische Anwendungen sind das Auszählen relativer Häufigkeiten von vorgegebenen Ereignissen oder die Verwendung statistischer Formeln wie der Formel zur Bestimmung des Mittelwerts. Hier spielt die Syntax der Formel eine Rolle in dem Sinn, dass die Ausdrücke korrekt aufgebaut und bezeichnet sein müssen. Es spielt aber auch die Semantik eine Rolle, da man die Bezüge zu den Merkmalen kennen muss. Ferner können auch logische Verknüpfungen in den Ausdrücken auftreten.

Im Sinn der stochastischen Modellierung muss man die grafische, die tabellarische und die rechnerische Auswertung aufeinander beziehen können und die Ergebnisse in Bezug auf die ursprüngliche Problemstellung interpretieren können. Ferner muss man in der Lage sein, Aussagen über die Genauigkeit der in der Simulation erhaltenen Ergebnisse zu treffen.

In Abb. 4.5 sind die beschriebenen Auswertungswerkzeuge am Beispiel der Auswertung der Testaufgabe aus Kapitel 4.1.2 gezeigt. Ganz rechts ist zur Demonstration eine „zweckentfremdete" kategoriale Auswertungstabelle eingefügt. Die numerische Berechnungsformel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)` erzeugt hier in jeder Zeile einen nicht gewollten zweiten Eintrag. Möchte man eine kategoriale Häufigkeitstabelle erzeugen, so muss man das betrachtete Merkmal mit gedrückter Shift-Taste in eine geöffnete Auswertungstabelle ziehen. Zieht man das betrachtete Merkmal ohne gedrückte Shift-Taste in eine geöffnete Auswertungstabelle, so erhält man eine numerische Auswertungstabelle.

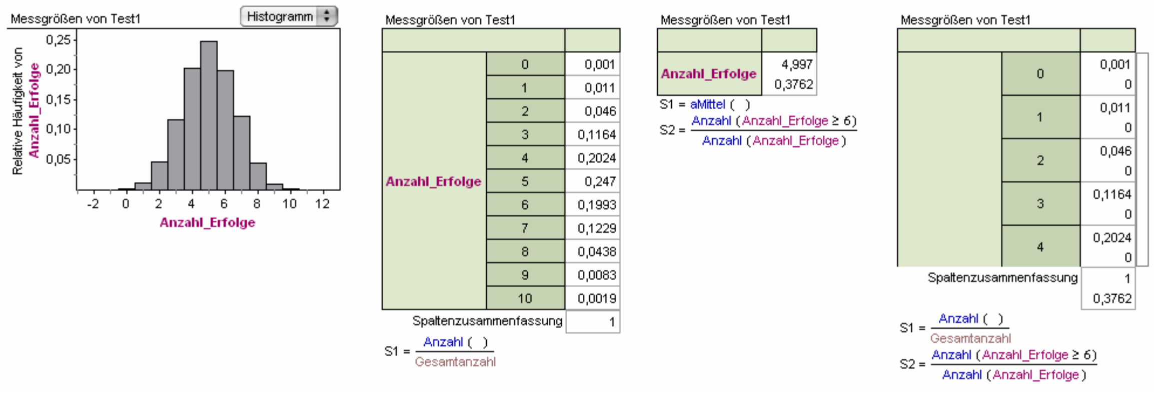


Abb. 4.5: Auswertungswerkzeuge in Fathom: Grafische Darstellung als Histogramm, tabellarische Auswertung mit der kategorialen Auswertungstabelle, rechnerische Auswertung mit der numerischen Auswertungstabelle, „zweckentfremdete" Verwendung einer kategorialen Auswertungstabelle in Kombination mit einer numerischen Auswertungsformel (von links nach rechts).

4.1.4 Der Simulationsplan als Mittel zur Reflexion und zur Ergebnissicherung

Als Strukturierungshilfe bei der Entwicklung von Computersimulationen in FATHOM steht den Schülerinnen und Schülern das vierschrittige Prozessmodell aus Kapitel 4.1.1 zur

Verfügung. Um die einzelnen Schritte und die Entscheidungen bei der Erstellung einer Simulation bewusst zu reflektieren, wird mit den Schülerinnen und Schülern die schriftliche Formulierung eines „Simulationsplans“ besprochen und vereinbart (vgl. Biehler und Maxara 2005, S. 3). Der Zeitpunkt der Formulierung des Simulationsplans (vor, während oder nach der Erstellung der Simulation am Computer) wird freigestellt.

In einem solchen „Simulationsplan“ werden die vier Schritte des vorgestellten Prozessmodells konkretisiert. Im Sinn der Förderung der Simulationskompetenz kommt es darauf an, dass der Simulationsplan nicht nur eine rein technische Anleitung zur Erstellung der Computersimulation darstellt, sondern dass in jedem Schritt die Verbindung zur stochastischen Situation hergestellt wird. Für das konkrete Beispiel der Einstiegsaufgabe wird den Schülerinnen und Schülern im Rahmen des vorliegenden Unterrichtskonzepts der folgende Simulationsplan als Beispiel zur Verfügung gestellt:

1. *Man erstellt eine Kollektion „Test1“, in der der Test nachgebildet wird. In der Tabelle zu Test1 gibt es eine Spalte „Aufgaben“, in der das Raten der 10 Aufgaben mit der Formel* `ZufallsWahl("erfolg", "misserfolg")` *simuliert wird.*
2. *Bei der Simulation von Test1 interessiert uns die Anzahl der Erfolge. Hierfür definieren wir im Info-Fenster von „Test1“ die Messgröße „Anzahl_Erfolge“ mit der Formel* `Anzahl(Aufgaben="erfolg")`.
3. *Um die relative Häufigkeit für das Auftreten einer bestimmten Anzahl an Erfolgen zu erhalten, muss man die Simulation sehr oft wiederholen. Mit „Messgrößen sammeln“ führen wir die Simulation 10 000mal durch. Die Anzahl der Erfolge ist jeweils in der neu entstandenen Kollektion „Messgrößen von Test1“ festgehalten.*
4. *Die gesammelten Simulationen müssen nun ausgewertet werden: Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten, mit denen man die Kollektion „Messgrößen von Test1“ auswerten kann:*
   - *Tabelle der Häufigkeitsverteilung*
     Auszählen der Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer „Auswertungstabelle“
   - *Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung*
     Grafische Darstellung der Verteilung der Anzahl der Erfolge
   - *Rechnerische Auswertung*
     Die relative Häufigkeit für mindestens 60% richtig beantworteter Aufgaben mit der Formel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)` *direkt bestimmen.*

Das im Simulationsplan abgebildete vierschrittige Verfahren zur Erstellung einer Computersimulation beschreibt den Prozess der sukzessiven Übertragung des stochastischen Modells in die Computersimulation. Hierbei müssen auf jeder Stufe des vierschrittigen Verfahrens Modellierungsentscheidungen getroffen werden.

Die Erstellung des stochastischen Modells und weitergehende Interpretationen der Ergebnisse werden im Simulationsplan nicht abgebildet. Im ersten Teil des Simulationsvorkurses ist das stochastische Modell bereits in den Aufgabenstellungen weitgehend vorgegeben oder es wird im Unterricht besprochen. Die Interpretation der Ergebnisse wird in starkem Maß im Unterrichtsgespräch vorgenommen. Im zweiten Teil des Simulationsvorkurses werden auch die Erstellung des stochastischen Modells und die Interpretation der Ergebnisse zunehmend in die Hände der Schülerinnen und Schüler gegeben.

Der Simulationsplan soll einerseits die einzelnen Schritte des Prozessmodells und die zugehörigen Modellierungsentscheidungen bewusst reflektieren. Ein zweites wichtiges

Argument für den Simulationsplan stellt die Ergebnissicherung im Sinn der ausführlichen und strukturierten Dokumentation des Lösungswegs dar. Mit dem Simulationsplan wird der gesamte Aufbau der Computersimulation festgehalten und erläutert. Damit dient der Simulationsplan im Unterrichtsgeschehen auch als Verschriftlichung des Gelernten. Dem beim Computereinsatz im Mathematikunterricht immer wieder auftretenden Problem der Ergebnissicherung kann hierdurch entgegengewirkt werden (vgl. Köhler 1998, S. 90).

4.1.5 Auswahlentscheidungen zum Softwareeinsatz im Simulationsvorkurs

Die Frage nach der Einbettung der Software FATHOM in den Simulationsvorkurs teilt sich in drei Bereiche auf: Zum einen muss man entscheiden, welchen Funktionsumfang der Software man mit den Schülerinnen und Schülern erarbeiten möchte. Zweitens muss man entscheiden, welches Verständnis über die Funktionsweise der Zufallsgeneratoren man weitergeben möchte. Beide Entscheidungen sollen im Folgenden erläutert werden. Drittens muss man überlegen, wie die einzelnen Softwarekomponenten aufeinander aufbauend eingeführt werden. Dies soll am konkreten Unterrichtsmaterial beschrieben werden (vgl. Kapitel 4.4).

Verwendung des sequentiellen Simulationstyps

Bei der Verwendung der Software FATHOM zur Erstellung von Computersimulationen unterscheiden Maxara und Biehler (2006) drei unterschiedliche Typen von Simulationen: Die *simultane Simulation*, die *sequenzielle Simulation* und die *Simulation durch Stichprobenziehen*. Eine ausführliche Darstellung der einzelnen Simulationstypen findet sich bei Maxara (2006). Der Unterschied sei hier am Beispiel des dreifachen Würfelwurfs erläutert (vgl. Abb. 4.6). Als Zufallsgröße wird die Würfelsumme beim dreifachen Würfelwurf betrachtet.

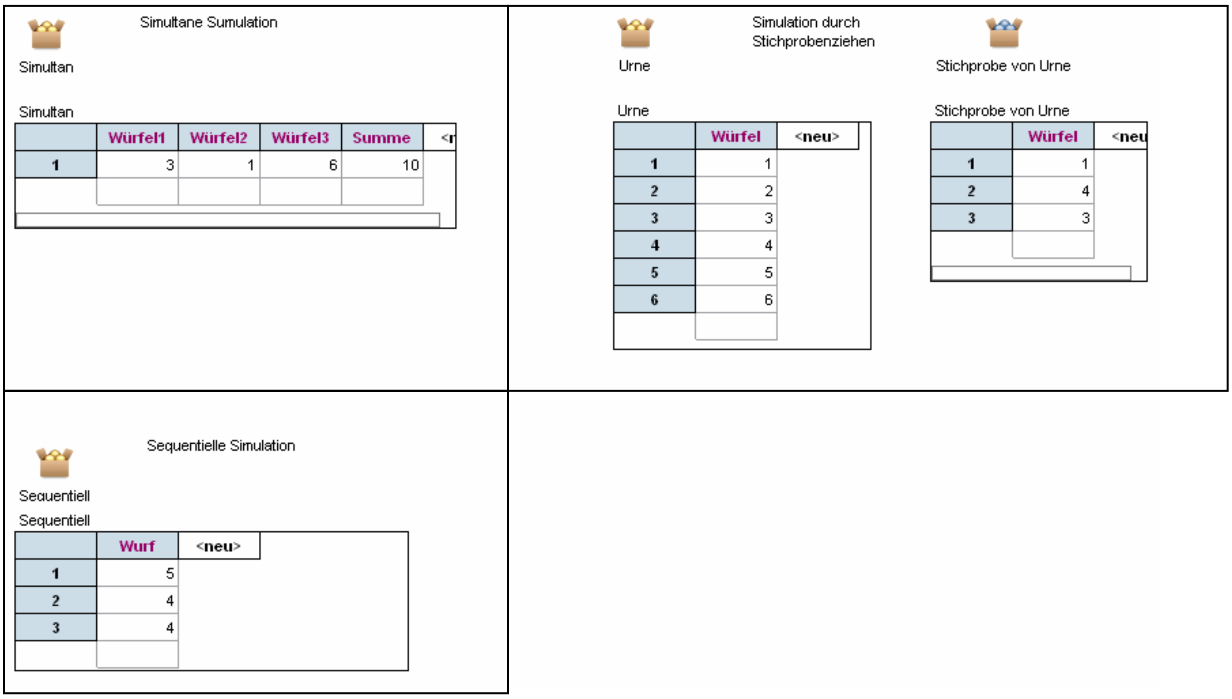


Abb. 4.6: Erstellung einer simultanen Simulation, einer sequentiellen Simulation und einer Simulation durch Stichprobenziehen in FATHOM.

Bei der simultanen Simulation werden die einzelnen Stufen des Zufallsversuchs als Spalten dargestellt. In unserem Beispiel gibt es drei Spalten „Würfel1“, „Würfel2“ und „Würfel3“ sowie eine weitere Spalte „Summe“. Jede Zeile entspricht der einmaligen Durchführung des dreifachen Würfelwurfs. Über die Erzeugung von 1000 Zeilen hat man den Zufallsversuch 1000-mal wiederholt und erhält in der vierten Spalte die Verteilung der Würfelsumme.

Bei der sequenziellen Simulation werden die einzelnen Stufen des Zufallsversuchs als Zeilen dargestellt. In unserem Beispiel gibt es eine Spalte „Wurf“ und der dreifache Würfelwurf wird über drei Zeilen repräsentiert. Zur Berechnung der Würfelsumme muss man analog zum Beispiel aus Kapitel 4.1.2 eine Messgröße „Summe“ definieren und erhält die Verteilung der Würfelsumme in einer neuen Kollektion. Das in Kapitel 4.1.2 vorgestellte Einführungsbeispiel ist als sequenzielle Simulation erstellt.

Bei der Simulation durch Stichprobenziehen wird das Zufallsexperiment als Urnenziehung erzeugt. In unserem Beispiel erstellt man zunächst eine Urne mit dem Inhalt „1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“. Dann wird hieraus dreimal mit Zurücklegen gezogen. In der neu entstandenen Kollektion wird der dreifache Würfelwurf über drei Zeilen repräsentiert. Auch hier muss man für die Würfelsumme eine Messgröße erstellen und erhält dann die Verteilung der Würfelsumme in einer weiteren Kollektion. Nur über die Methode der Simulation durch Stichprobenziehen lassen sich in FATHOM auch Zufallsexperimente realisieren, welche dem Ziehen ohne Zurücklegen entsprechen.

Aus Gründen der didaktischen Reduktion soll im vorliegenden Kurskonzept nur einer der drei Simulationstypen verwendet werden. Es ist offensichtlich, dass die simultane Simulation nur für mehrstufige Zufallsexperimente mit wenigen Stufen geeignet ist. Ein fünzigfacher Würfelwurf wäre durch die dafür benötigte Definition von 50 Merkmalen sehr umständlich. Da sich damit auch die Binomialverteilung nur schwer über eine simultane Simulation realisieren lässt, ist dieser Simulationstyp für den Stochastikkurs der gymnasialen Oberstufe nicht ausreichend. Auf der anderen Seite erfordert die Simulation durch Stichprobenziehen auch bei einfachen Problemstellungen stets die Modellierung des Zufallsexperiments über zwei Stufen: Definition der Urne und Erzeugung der Stichprobenkollektion. Dieser Simulationstyp führt bereits bei einfachen Problemstellungen zu relativ komplexen Simulationsumgebungen.

In dem vorliegenden Kurskonzept wird daher ausschließlich die sequenzielle Simulation eingeführt und verwendet. Die simultane Simulation kann unter Umständen durch die flexible Kombination der bekannten Komponenten von den Schülerinnen und Schülern selbstständig erarbeitet werden. Auf die Einführung der Simulation durch Stichprobenziehen wird völlig verzichtet. Allein die Simulation stochastischer Situationen, welche nur über das Ziehen ohne Zurücklegen modelliert werden können, ist somit im vorliegenden Kurskonzept nicht angelegt.

Die Methode der sequenziellen Simulation stellt bereits einen erheblichen Leistungsumfang zur Modellierung stochastischer Problemstellungen zur Verfügung. Viele der in der gymnasialen Oberstufe typischerweise vorkommenden Aufgabenstellungen können hiermit behandelt werden. Insbesondere stellt die Verwendung von Messgrößen auch die Möglichkeit zur Verfügung, eine Abbruchbedingung in die Simulation einzubauen, so dass man z. B. Wartezeitprobleme simulieren kann. Ferner ist die sequentielle Simulation das geeignete Mittel, um die Binomialverteilung zu simulieren, welche im weiteren Verlauf des Kurses als zentrale Wahrscheinlichkeitsverteilung eingeführt und auch zum Testen von Hypothesen verwendet wird.

Für die Beschränkung auf die sequentielle Simulation spricht außerdem die enge strukturelle Übereinstimmung mit dem in Kapitel 4.1.1 beschriebenen vierschrittigen Prozessmodell zur Erstellung einer Computersimulation. Die in der sequenziellen Simulation vorhandene klare Trennung zwischen dem Zufallsexperiment und der zugehörigen Messgröße auch auf Softwareebene entspricht der klaren Trennung der ersten beiden Schritte des Prozessmodells.

Die Auswahl des Befehlsumfangs

Die Auswahl des verwendeten Befehlsumfangs wird von zwei gegenläufigen Zielen bestimmt: Zum einen muss der Funktionsumfang so umfangreich gewählt werden, dass man mit den eingeführten Befehlen eine Reihe interessanter stochastischer Problemstellungen lösen kann. Damit die Schülerinnen und Schüler die Computersimulationen für den gesamten Kursverlauf als Werkzeug zur Lösung stochastischer Problemstellungen verwenden können, muss der vermittelte Funktionsumfang so umfangreich sein, dass die Mehrzahl der im Stochastikkurs der gymnasialen Oberstufe angesprochenen Problemstellungen mit Computersimulationen bearbeitet werden kann. Auch im Hinblick auf den Modellierungsgedanken sollte man den Funktionsumfang ausreichend groß wählen, so dass die Schülerinnen und Schüler bei der Erstellung einer Simulation einen eigenen Entscheidungsspielraum haben.

Andererseits muss man bei der Wahl des Befehlsumfangs darauf achten, dass das Erlernen des Umgangs mit Computersimulationen möglichst schnell und einfach gehen soll. Hierfür ist ein möglichst kleiner Befehlsumfang von Vorteil.

Im ersten Schritt der Computersimulation geht es um die Wahl des Zufallsgenerators: Im Rahmen des Einführungskurses werden hier nur die beiden Befehle `Zufallswahl()` und `GanzeZufallszahl()` verwendet. `Zufallswahl()` entspricht dem Ziehen aus einer Urne, in der alle in der Klammer angegebenen Ausdrücke als Urnenkugel vorkommen. Der Befehl `GanzeZufallszahl()` stellt eine Vereinfachung dar: So erzeugt man mit `GanzeZufallszahl(1;6)` ganze Zufallszahlen von eins bis sechs, wobei jede Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Die beiden gewählten Zufallsgeneratoren ermöglichen die Simulation einer großen Anzahl von Zufallsexperimenten mit diskretem Ergebnisraum. Erst in Verbindung mit der Binomialverteilung wird dann auch der Befehl `Zufall()` eingeführt, welcher gleichverteilt eine Zahl zwischen 0 und 1 simuliert. Hiermit lassen sich beliebige Wahrscheinlichkeiten p simulieren: So ergibt z. B. der logische Ausdruck `Zufall()≤0,6` mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}6$ `"wahr"`, ansonsten `"falsch"`.

Im zweiten Schritt der Simulation bei der Definition der Messgröße kann man sowohl eine Zufallsgröße als auch ein Ereignis definieren. Bei dem in Kapitel 4.1.2 geschilderten Testproblem hat man z. B. die Möglichkeit, über die Formel `Anzahl(Aufgaben="erfolg")` die Zufallsgröße „Anzahl gelöster Aufgaben“ oder über die Formel `Anzahl(Aufgaben="erfolg")≥6` das Ereignis „mindestens sechs gelöste Aufgaben“ zu definieren. Der Einführungskurs beschränkt sich auf solche Beispiele, in denen nur Zufallsgrößen definiert werden. Lediglich in einem Beispiel wird exemplarisch auch ein Ereignis definiert. An Befehlen werden Ausdrücke zum Auszählen der über den Zufallsgenerator erzeugten Tabellen benutzt. Eine Erhöhung der Schwierigkeit stellt die Verwendung des `Wenn()`-Befehls in einigen Aufgabenstellungen dar. Hierbei handelt es sich um eine Alternativanweisung und damit um eine der drei grundlegenden Kontrollstrukturen der Informatik (vgl. Gumm und Sommer 2004, S. 126 ff). Die Verwendung dieses Befehls erfordert ein vertieftes Verständnis der semantischen Struktur dieser Anweisung.

Im dritten Schritt der Simulation werden keine Befehle benötigt. Man muss sich die Anzahl der Wiederholungen in Verbindung mit der gewünschten Genauigkeit überlegen. Für die Schülerinnen und Schüler werden hier die Wiederholungszahlen meistens vorgegeben: entweder 1000 oder 10 000. Für 1000 bzw. 10 000 Wiederholungen werden Faustformeln zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung entwickelt.

Für den vierten Schritt wird ein Auswertungsverfahren der Häufigkeitsverteilung eingeführt, welches die grafische, die tabellarische und die rechnerische Ebene einbezieht, so dass die Ergebnisse auf den verschiedenen Repräsentationsebenen miteinander in Einklang gebracht werden können. Typische Befehle zur Auswertung sind `aMittel()` zur Berechnung des arithmetischen Mittelwerts einer Häufigkeitsverteilung als Schätzwert für den Erwartungswert oder `Anzahl()/Gesamtanzahl` zur Berechnung eines relativen Anteils als Schätzwert für eine gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Im Sinn einer inneren Differenzierung werden im Simulationsvorkurs für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler auch Wartezeitprobleme behandelt. Bei diesen Wartezeitproblemen muss bereits das einzelne Zufallsexperiment im ersten Schritt der Computersimulation mit einer Messgröße und einer Abbruchbedingung beim Sammeln der Messgrößen modelliert werden. Die weiteren Schritte verlaufen dann analog zur eingeübten Struktur. Allerdings wird die strukturelle Entsprechung des vierschrittigen Prozessmodells mit dem Aufbau der Fathom-Simulation im ersten Schritt des Prozessmodells aufgebrochen.

Die geschilderte Auswahl des Funktionsumfangs von FATHOM ermöglicht die Simulation der meisten in der gymnasialen Oberstufe vorkommenden Problemstellungen. Lediglich das Ziehen ohne Zurücklegen kann hierdurch nicht simuliert werden. Ferner ist der Funktionsumfang aber auch so gering, dass bereits nach wenigen Beispielen eine Routine im Erstellen von Computersimulationen mit der Software FATHOM zu erwarten ist.

Verständnis über die Funktionsweise der Zufallsgeneratoren

Die Zufallsgeneratoren von Fathom sollen in Analogie zu stochastischen Zufallsgeräten eingeführt werden. Die zu Grunde liegende Funktionsweise der Zufallsgeneratoren, also die Erzeugung von gleich verteilten Zufallszahlen, soll im Rahmen des vorliegenden Kurskonzepts nicht thematisiert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen mit den Zufallsgeneratoren arbeiten, eine Vertiefung kann bei Bedarf später erfolgen. Die Erzeugung von gleich verteilten Zufallszahlen stellt einen eigenen Themenbereich dar, dessen Verständnis für die Verwendung von Simulationen als Werkzeug und als Gegenstand nicht notwendig ist. Da die Erzeugung von Zufallszahlen derzeit nicht zum Themenkanon der gymnasialen Oberstufe gehört, wird auf die Behandlung hier verzichtet.

Gleichwohl kann man das interessante Thema bei entsprechender zeitlicher Verfügbarkeit zum Ende des Kurses im Rahmen des Testens von Hypothesen aufgreifen, indem man von Menschen und von Computern erzeugte Zufallsfolgen auf Zufälligkeit und Gleichverteilung testet. Vorschläge hierzu finden sich im Lehrbuch „Elemente der Mathematik – Leistungskurs Stochastik“ (H. Griesel, H. Postel et al. 2003, S. 256/257).

Da im Simulationsvorkurs mit den Befehlen `ZufallsWahl()` und `GanzeZufallszahl()` nur zwei Generatoren verwendet werden, welche beide dem stochastischen Modell der Gleichverteilung auf einem diskreten Ergebnisraum entsprechen, sind hier keine Verständnisschwierigkeiten zu erwarten. Der Befehl `Zufallswahl()` wird zunächst am Einstiegsbeispiel der Testaufgabe mit den zwei Auswahlmöglichkeiten „Erfolg“ und „Misserfolg“ in Analogie zum Wurf einer fairen Münze eingeführt. Bei mehr als zwei Auswahlmöglichkeiten wird das semantische Verständnis für beide Zufallsgeneratoren über die Analogie zum Würfel oder zum Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen erzeugt.

Der Befehl `Zufall()` für die Simulation beliebiger Erfolgswahrscheinlichkeiten p der Binomialverteilung muss mit den Schülerinnen und Schülern ausführlich besprochen werden. Es bietet sich an, die Funktionsweise dieses Befehls zunächst an konkreten Beispielen zu demonstrieren.

4.2 Die stochastischen Inhalte des Simulationsvorkurses

Im Rahmen des Simulationsvorkurses werden stochastische Inhalte auf verschiedenen Ebenen behandelt:

- Grundlegende stochastische Begriffe und Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Frequentistischer Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Modellierung einer stochastischen Situation als Computersimulation
- Intuitives Verständnis für stochastische Situationen und Begriffe

4.2.1 Grundlegende stochastische Begriffe und Laplace-Wahrscheinlichkeit

Auf der Seite des theoretischen Zugangs zum Wahrscheinlichkeitsbegriff sollen im Simulationsvorkurs die grundlegenden stochastischen Begriffe Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis und Laplace-Wahrscheinlichkeit behandelt werden. Diese Begriffe sollen in Anlehnung an schulbuchübliche Formulierungen in der folgenden Form eingeführt werden (vgl. Bigalke, Köhler et al. 2002; H. Griesel, H. Postel et al. 2003):

Zufallsexperiment: Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ausgang – auch im Wiederholungsfall – ungewiss, d. h. nicht mit Sicherheit vorhersagbar ist.

Vorgehen des Mathematikers:
Alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments angeben und die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der möglichen Ergebnisse bestimmen.

Ergebnisraum Ω: Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
Ereignis E: Eine Teilmenge von Ω

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Falls alle Ergebnisse des Ergebnisraums gleich wahrscheinlich sind, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{\textit{Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse}}{\textit{Anzahl aller Ergebnisse des Ergebnisraums}}$$

In einigen Schulbüchern für die gymnasiale Oberstufe wird auf eine explizite Definition des Begriffs Zufallsexperiment ganz verzichtet oder aber der Begriff des Zufallsexperiments ohne weitere Erläuterungen als „zufälliger Vorgang“ eingeführt (Diepgen, Kuypers et al. 1993; Baum, Brandt et al. 2003). Hierbei wird ein Alltagsverständnis für den Begriff vorausgesetzt. Da die Modellierung von Zufallsexperimenten und der Umgang mit stochastischen Vorgängen im Rahmen der Computersimulation im Simulationsvorkurs eine große Rolle spielt, wird der Begriff explizit thematisiert. Betont wird hierbei das Problem der Vorhersagbarkeit bei Zufallsexperimenten, welches implizit auch das Auftreten mehrerer möglicher Ergebnisse einschließt. In direktem Zusammenhang zu der gewählten Definition des Zufallsexperiments steht die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen möglichen Ergebnissen des Zufallsexperiments.

Da im Simulationsvorkurs anwendungs- und handlungsorientiert gearbeitet werden soll, wird in Übereinstimmung mit dem derzeit schulbuchüblichen Vorgehen auf abstrakte theoretische Grundlagen wie die Ereignisalgebra oder die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit durch Kolmogorov verzichtet (vgl. Kolmogorov 1933). Ferner wird im Simulationsvorkurs ausschließlich mit diskreten Ergebnisräumen gearbeitet.

Bezüglich der Ereignisalgebra sollten allerdings im Rahmen eines Stochastik-Leistungskurses der gymnasialen Oberstufe insbesondere der Schnitt ($\cap$), die Vereinigung ($\cup$) und das Komplement ($\bar{\ }$) von Ereignissen im Anschluss an den Simulationsvorkurs behandelt werden (vgl. Barth und Haller 1983). Kontinuierliche Ergebnisräume können in Verbindung mit der Normalverteilung zum Ende eines Stochastik-Leistungskurses thematisiert werden.

Zur Ausschärfung des Begriffs der Laplace-Wahrscheinlichkeit werden im Simulationsvorkurs auch Beispiele behandelt, bei denen sich die Wahrscheinlichkeit nicht über die Laplace-Formel berechnen lässt. Dies sind solche Beispiele, bei denen man den Ergebnisraum des Zufallsexperiments nicht in gleichwahrscheinliche Ergebnisse aufteilen kann, z. B. das Werfen einer Reißzwecke.

4.2.2 Der frequentistische Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im Rahmen des Simulationsvorkurses werden an vielen Stellen Wahrscheinlichkeiten über den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit geschätzt. Dieser Zugang soll über die Häufigkeitsinterpretation das Verständnis für den schwierigen Wahrscheinlichkeitsbegriff fördern. Weiter eröffnet der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit in Verbindung mit dem Erlernen von Computersimulationen eine zweite Möglichkeit zur Lösung stochastischer Problemstellungen.

Insbesondere die Besprechung des Gesetzes der großen Zahl in Verbindung mit Simulationen fördert ein vertieftes Verständnis für die Bedeutung des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Hierbei kann das Gesetz der großen Zahl zum einen mit Hilfe von Simulationen entdeckt und veranschaulicht werden (vgl. Wolpers und Götz 2002, S. 130). Weiter ist das Verständnis des Gesetzes der großen Zahl aber auch die Voraussetzung für einen verständigen Umgang mit den Ergebnissen einer Simulation. Das Gesetz der großen Zahl wird in dem vorliegenden Kurskonzept in Anlehnung an schulbuchübliche Formulierungen (vgl. Griesel und Postel 1990; Bigalke, Köhler et al. 2002) in der folgenden Form eingeführt:

Nach einer hinreichend großen Anzahl N von Durchführungen eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h(E) für ein Ereignis E gegen die Wahrscheinlichkeit P(E) für dieses Ereignis.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird das Gesetz der großen Zahl mit unterschiedlichen Konvergenzbegriffen allgemein für die Stabilisierung des Mittelwerts einer Zufallsgröße gegen den Erwartungswert formuliert (vgl. Krengel 1991). Da die unterschiedlichen Konvergenzbegriffe der Stochastik im schulischen Stochastikunterricht i. a. nicht behandelt werden, kann das Gesetz der großen Zahl im schulischen Rahmen nur empirisch behandelt und erkannt werden. Dies gilt umso mehr, als das Gesetz der großen Zahl zum verständigen Umgang mit Computersimulationen benötigt wird und somit im Rahmen des

Simulationsvorkurses bereits zu Beginn des Kurshalbjahres eingeführt werden muss. Im weiteren Verlauf des Kurses kann die Stabilisierung der relativen Häufigkeit *h* eines Ereignisses *E* gegen die Wahrscheinlichkeit *p* für dieses Ereignis über das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz theoretisch vertieft werden (siehe Kapitel 2.4.2):

Wiederholt man ein Zufallsexperiment in der Realität oder als Simulation *N*-fach, um hierüber die Wahrscheinlichkeit *p* des Ereignisses E zu bestimmen, so haben wir eine *N*-stufige Bernoulli-Kette, in der auf jeder Stufe das Ereignis E eintreten kann oder nicht. Die Anzahl *X* der Stufen der Bernoulli-Kette, auf denen das Ereignis E eingetreten ist, ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_X = N \cdot p$ und mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{N \cdot p \cdot q}$. Betrachtet man nun als Zufallsgröße die relative Häufigkeit $Y = \frac{X}{N}$, mit der das Ereignis eintritt, so streut diese um den Erwartungswert *p*, d. h. um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E. Für die zugehörige Standardabweichung gilt $\sigma_Y = \sqrt{\frac{p \cdot q}{N}}$. Da die Breite der σ-Umgebung proportional zu $1/\sqrt{N}$ ist, wird die Verteilung der Zufallsgröße Y bei zunehmender Anzahl *N* der Wiederholungen immer schmaler („$1/\sqrt{n}$ – Gesetz“). So beschreibt z. B. die 1,96σ-Umgebung den Bereich um die gesuchte Wahrscheinlichkeit *p* herum, in dem sich die relative Häufigkeit mit 95%iger Wahrscheinlichkeit befindet. Diese Umgebung wird mit zunehmender Anzahl *N* der Wiederholungen proportional zu $1/\sqrt{N}$ immer schmaler, d. h. der Bereich in dem die relative Häufigkeit für das Ereignis E als Schätzwert für *p* mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt, weicht mit zunehmendem *N* immer weniger von *p* ab. Dieses theoretische Verständnis zum Gesetz der großen Zahl soll den Schülerinnen und Schülern im Rahmen des Themenbereichs zur Binomialverteilung vermittelt werden.

Möchte man über die relative Häufigkeit *h* auf die zugehörige Wahrscheinlichkeit *p* schließen, so muss man streng genommen ein Konfidenzintervall angeben: Als 95%-Konfidenzintervall werden alle Wahrscheinlichkeiten berechnet, in deren 1,96σ-Umgebung die im Experiment oder in der Simulation ermittelte relative Häufigkeit *h* liegt. Als Näherungsformel für dieses 95%-Konfidenzintervall *I* ergibt sich für ausreichend große *N* mit $N \cdot p \geq 10$ und $N \cdot (1-p) \geq 10$ (Biehler, Hofmann et al. 2006, S. 284):

$$I = \left[h - 1{,}96 \frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{N}},\ h + 1{,}96 \frac{\sqrt{h(1-h)}}{\sqrt{N}} \right].$$

Die Bestimmung und Interpretation des Konfidenzintervalls erlaubt Aussagen zur Genauigkeit der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsschätzung. Solche Aussagen zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung über die relative Häufigkeit sind insbesondere im Rahmen des Simulationsvorkurses von großer Wichtigkeit. Allerdings kann der Weg über die Konfidenzintervalle im Rahmen des Simulationsvorkurses wegen der fehlenden theoretischen Grundlagen nicht beschritten werden. Auch zum Ende des Stochastikkurses werden keine Konfidenzintervalle behandelt, da diese im hessischen Lehrplan für den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe nicht vorgesehen sind (Kultusministerium Hessen 2003).

Im Rahmen des Simulationsvorkurses sollen mit den Schülerinnen und Schülern auf empirischem Weg Faustregeln für die Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung ermittelt werden. So kann man z. B. den Münzwurf simulieren und eine 1000fache Simulation mehrfach durchführen, um zu beobachten, welche relativen Häufigkeiten für „Zahl“ hierbei auftreten. Diese relativen Häufigkeiten kann man miteinander und mit dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitswert von $p = 0{,}5$ vergleichen. Bei einer 10fachen Durchführung dieser Simulation sieht man, dass „typische Werte“ für die relative Häufigkeit im Bereich von 0,47 bis 0,53 liegen, d. h. die Abweichung beträgt ungefähr ±3 Prozentpunkte. Bei einer 10 000fachen Simulation des Münzwurfs liegen typische Ergebnisse der relativen Häufigkeit für „Zahl“ zwischen 0,49 und 0,51, d. h. die Abweichung beträgt ungefähr ±1 Prozentpunkte.

Dem beschriebenen Vorgehen liegen zwei Elementarisierungen zu Grunde: Zum einen wird jeweils von nur 10 Werten auf eine allgemeine Faustregel geschlossen. Weiter handelt es sich im Gegensatz zum genauen Vorgehen zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls um einen Rückschluss von der Umgebung einer bekannten Wahrscheinlichkeit p auf das Konfidenzintervall. Beide Elementarisierungen lassen sich dadurch rechfertigen, dass sich ähnliche Werte ergeben wie bei der exakten Berechnung mit dem Konfidenzintervall: Über die Berechnung mit dem 95%-Konfidenzintervall erhält man ±3,1 Prozentpunkte bei N=1000 Wiederholungen und ±1,0 Prozentpunkte bei N=10 000 Wiederholungen. Diese theoretisch berechneten Werte werden den Schülerinnen und Schülern als Hintergrundinformation gegeben. Hierbei wird auch die „Sicherheitswahrscheinlichkeit“ von 95% angesprochen, um den Begriff der „typischen Werte“ zu präzisieren.

4.2.3 Die Verwendung des Gesetzes der großen Zahl bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Bei der Verwendung der Computersimulationen im Simulationsvorkurs wird stets sowohl der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet als auch der frequentistische Zugang. Die Basiswahrscheinlichkeiten der Computersimulation werden bei der Verwendung der Zufallsgeneratoren `ZufallsWahl()` und `GanzeZufallszahl()` mit der Laplace-Formel klassisch ermittelt. Da diese Zufallsgeneratoren in Analogie zur Urne eingeführt werden, wird hier ein intuitives Verständnis für die Laplace-Wahrscheinlichkeit im einfachen Fall des Ziehens aus einer Urne mit Zurücklegen vorausgesetzt. Erst die hiervon abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten werden über die Simulation frequentistisch geschätzt. Hierfür wird ein Grundverständnis des Gesetzes der großen Zahl benötigt.

Für die Verwendung im Unterricht kann das Gesetz der großen Zahl in Bezug auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Formen auftreten:

1. Kennt man die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E, so zeigt sich, dass sich die relative Häufigkeit h_N bei zunehmender Wiederholungsanzahl N der bekannten Wahrscheinlichkeit p annähert.

   Dieser Fall tritt z. B. beim N-fachen Münzwurf auf, bei dem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Zahl“ mit $p = 0{,}5$ durch einfache logische Überlegungen klar gegeben ist.

2. Kennt man die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses nicht, so zeigt sich bei zunehmender Wiederholungsanzahl N des Zufallsexperiments eine Stabilisierung der relativen Häufigkeit für dieses Ereignis. Führt man die Versuchsreihe mehrfach durch, so stabilisiert sich die relative Häufigkeit h_N stets gegen einen ähnlichen Wert. Hiermit kann man von einer Wahrscheinlichkeit p für das betrachtete Ereignis sprechen, welche durch die relative Häufigkeit abgeschätzt wird.

Dieser Fall tritt z. B. beim N-fachen Wurf einer Reißzwecke auf, bei dem sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Kopf“ durch einfache logische Überlegungen nicht erschließen lässt .

3. Hat man ein zu einem Zufallsexperiment gehörendes Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit p sich theoretisch berechnen lässt, so kann man die zugehörige Wahrscheinlichkeit p zum einen wie unter 2. rein empirisch bestimmen. Weiter hat man die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit p theoretisch zu berechnen und dann wie unter 1. die Approximation dieser Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit h_N zu beobachten.

   In diesem Fall kann der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit in Verbindung mit Computersimulationen dazu benutzt werden, die theoretische Berechnung als Kontrolle des Simulationsmodells oder umgekehrt die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit über eine Computersimulation als Kontrolle der theoretischen Berechnung zu verwenden.

Als Erweiterung gegenüber der in der Schule üblichen Verwendung tritt das Gesetz der großen Zahl im Simulationsvorkurs auch bei der Stabilisierung des Mittelwerts $\bar{x}$ einer Zufallsgröße X und bei der Stabilisierung einer ganzen Häufigkeitsverteilung auf:

4. Führt man ein Zufallsexperiment wiederholt durch und betrachtet den Mittelwert $\bar{x}$ einer zugehörigen Zufallsgröße X, so zeigt sich, dass sich dieser Mittelwert mit zunehmender Anzahl der Wiederholungen gegen den Erwartungswert E(X) der Zufallsgröße stabilisiert (Krengel 1991, S. 149).

   Im Unterricht lässt sich beobachten, dass sich der Mittelwert bei erneuten Durchführungen der Versuchsreihe stets gegen einen ähnlichen Wert stabilisiert. Dies erlaubt die Einführung des Begriffs „erwarteter Mittelwert“ bzw. „Idealwert“, obwohl der Erwartungswert im Simulationsvorkurs nicht theoretisch behandelt wird.

   Dieser Fall tritt z. B. bei Gewinnspielaufgaben auf.

5. Führt man ein Zufallsexperiment wiederholt durch und betrachtet die Häufigkeitsverteilung einer zugehörigen Zufallsgröße X, so zeigt sich, dass sich diese Häufigkeitsverteilung mit zunehmender Anzahl N der Wiederholungen stabilisiert. Bei erneuten Durchführungen der Versuchsreihe stabilisiert sich die Häufigkeitsverteilung stets ähnlich. Dies erlaubt die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße durch die Stabilisierung der Häufigkeitsverteilung bei zunehmender Wiederholungszahl N.

   Dieser Fall tritt z. B. bei der Binomialverteilung auf. Da es sich um eine Übertragung des Gesetzes der großen Zahl für die Stabilisierung der Häufigkeit eines Ereignisses gegen die zugehörige Wahrscheinlichkeit p auf alle zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gehörenden Ereignisse handelt, ist dieser Fall intuitiv klar.

Im Simulationsvorkurs kommen alle genannten Verwendungsarten des Gesetzes der großen Zahl vor:

Zu Beginn des Simulationsvorkurses wird mit dem Ziel eines das Schülerinteresse fördernden Unterrichts die in Kapitel 4.1.2 vorgestellte komplexe Testaufgabe gestellt. Hier tritt die in 3. beschriebene Situation auf: Man hat eine Wahrscheinlichkeit, die man theoretisch berechnen könnte. Allerdings ist den Schülerinnen und Schülern die theoretische Berechnung zu Beginn des Stochastikkurses nicht möglich. Das Problem wird somit über eine Simulation und damit über den frequentistischen Zugang behandelt. An dieser Stelle wird mit dem Zufallsgenerator `ZufallsWahl("erfolg";"misserfolg")` ein intuitives Verständnis für die Laplace-Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ des Basisexperiments vorausgesetzt. Ferner wird ein intuitives Verständnis für die Stabilisierung der relativen Häufigkeit und auch für den Begriff der Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt, da beides nicht explizit behandelt wurde.

Im weiteren Verlauf des Unterrichts wird das Gesetz der großen Zahl am Beispiel des Münzwurfs wie unter 1. beschrieben thematisiert und wie in Kapitel 4.2.2 angegeben ausformuliert. Ferner wird die Reißzwecke als Beispiel der Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit ohne eine theoretische Berechnungsmöglichkeit vorgestellt. Die Reißzwecke stellt gleichzeitig ein Gegenbeispiel zu einem Laplace-Experiment dar.

Bei einem Beispiel zum zweifachen Würfelwurf wird explizit die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit über die Laplace-Formel eingeführt: An diesem Beispiel einer ersten theoretischen Wahrscheinlichkeitsberechnung wird die Simulation als Kontrolllösung verwendet (vgl. Kapitel 4.4.3).

Bei der Mehrzahl der Simulationsaufgaben tritt die Situation 3. auf, bei der sich die Wahrscheinlichkeit theoretisch und über den frequentistischen Zugang bestimmen lässt. Allerdings ist den Schülerinnen und Schülern beim vorliegenden Kenntnisstand die theoretische Berechnung noch nicht möglich, so dass die Wahrscheinlichkeit allein durch die Simulation, also auf frequentistischem Weg bestimmt wird.

Neben der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten werden im Simulationsvorkurs auch Aufgaben zu Erwartungswerten und zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen gestellt. Die Begriffe „Erwartungswert“ und „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ werden allerdings nicht explizit verwendet. Bei Aufgabenstellungen, in denen der Erwartungswert eine Rolle spielt, wird in der Simulation mit dem Mittelwert der Verteilung der Zufallsgröße gearbeitet, bei Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Häufigkeitsverteilung. Im Sinn einer didaktischen Reduktion wird das Gesetz der großen Zahl nur für Wahrscheinlichkeiten explizit behandelt. Diese Reduktion ist insofern problematisch, als das Gesetz der großen Zahl für Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeitsverteilungen schwieriger ist als für Einzelwahrscheinlichkeiten. Insbesondere läuft die Stabilisierung sowohl beim Mittelwert als auch bei der Häufigkeitsverteilung als Ganzes langsamer ab als die Stabilisierung der relativen Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit. Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler das Gesetz der großen Zahl für die Stabilisierung der relativen Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit intuitiv auf den Mittelwert und auf die Häufigkeitsverteilung übertragen können.

4.2.4 Modellierung einer stochastischen Situation als Computersimulation

Die Vermittlung von Modellierungsfähigkeiten für stochastische Situationen stellt eines der Ziele für den Einsatz von Computersimulationen im Stochastikunterricht dar (vgl. Wolpers und Götz 2002; Engel 2003; Sanchez und Canal 2003). Auch Blum (1996, S. 27/28) weist auf die Möglichkeiten des Computereinsatzes zum Simulieren und dynamischen Modellieren hin, warnt aber auch vor Gefahren: „Die Verwendung fertiger Software beim angewandten Problemlösen kann zu routinemäßigem Modellieren verführen, wodurch wesentliche Aktivitäten wie Reflektieren über Bedeutung und Brauchbarkeit von Modellen vernachlässigt werden.“

Die Modellierung der stochastischen Problemstellungen als Computersimulation wird im vorliegenden Unterrichtskonzept durch das vierschrittige Vorgehen entlang des Prozessmodells strukturiert. Hierbei wird die stochastische Modellierung zunächst nur teilweise realisiert: Das vierschrittige Prozessmodell aus Kapitel 4.1.1 strukturiert die Schritte vom stochastischen Modell bis zur mathematischen Lösung. Die Aufgabenstellungen sind zu Beginn des Simulationsvorkurses in Sinn einer didaktischen Reduktion meistens so gewählt, dass die Erstellung des stochastischen Modells entweder in den Aufgabenstellungen vorgegeben ist oder im Unterricht besprochen wird. Die Interpretation wird in den meisten Aufgabenstellungen nicht explizit gefordert und muss ebenfalls im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung besprochen werden. Mit zunehmenden Simulations- und Fathomkompetenzen kann die stochastische Modellbildung zum Ende des Simulationsvorkurses vollständiger durchlaufen werden. Durch die Anwendungsorientierung der Aufgaben wird die Interpretation der Ergebnisse angeregt.

Beim bekannten Modellbildungskreislauf erfolgt zunächst eine Vereinfachung der realen Situation in ein reales Modell, dann die Übersetzung in das mathematische Modell und die Lösung auf mathematischer Ebene. Am Ende wird das Ergebnis in Bezug auf die reale Situation interpretiert und validiert (vgl. Blum 1995; Humenberger und Reichel 1995). Die eigentliche Modellierung findet statt bei der Vereinfachung der realen Situation in ein reales Modell und der Übersetzung in das mathematische Modell. Für die mathematische Lösung werden keine Modellierungsfähigkeiten benötigt. Dies ist bei der stochastischen Modellierung über eine Computersimulation anders: Wie in Kapitel 4.1.3 beschrieben, stehen auf allen vier Stufen des Prozessmodells Modellierungsentscheidungen an: Im ersten Schritt ist dies z. B. die Wahl eines geeigneten Zufallsgenerators, einer passenden Anzahl von Fällen sowie geeigneter Bezeichnungen. Im zweiten Schritt muss auf der Seite der stochastischen Modellierung eine geeignete Messgröße gefunden und benannt werden. Im dritten Schritt muss die Anzahl der Simulationsdurchgänge im Hinblick auf die gewünschte Genauigkeit gewählt werden. Im vierten Schritt stehen verschiedene Auswertungswerkzeuge und -formeln zur Verfügung, die je nach Problemstellung geeignet gewählt werden müssen. Die Ergebnisse müssen u. U. gegeneinander abgeglichen werden, hierbei spielen auch wieder Genauigkeitsüberlegungen eine Rolle.

Dies zeigt, dass bereits die Erstellung einer Computersimulation entlang des vierschrittigen Prozessmodells auch ohne eine Problematisierung des stochastischen Modells zur Vermittlung von Modellierungsfähigkeiten beitragen kann. Das vierschrittige Vorgehen des Prozessmodells wird über den Simulationsplan verbalisiert und dokumentiert. Um die stochastische Modellierung einer Computersimulation bewusst zu reflektieren, soll der Simulationsplan nicht nur als technische Anleitung, sondern auch als Erläuterung der einzelnen Schritte einer Computersimulation verfasst werden. Eine wichtige Bedeutung bei der Verknüpfung zwischen der stochastischen Situation und der Realisierung in FATHOM kommt der Wahl der Bezeichnungen zu, die sinnvoll an der stochastischen Situation orientiert gewählt werden sollen.

4.2.5 Intuitives Verständnis für stochastische Situationen und Begriffe

Der Umgang mit Computersimulationen soll ein intuitives Verständnis für stochastische Situationen und Begriffe fördern. Dies findet im Rahmen des Simulationsvorkurses auf mehreren Ebenen statt:

- Erfahrungen mit Zufallsfolgen
- Erfahrungen mit der statistischen Streuung
- Häufigkeitsinterpretation von Begriffen
- Inhaltliche Vorbereitung von Begriffen

Durch die Verwendung von Simulationen als Gegenstand sammeln die Schülerinnen und Schüler **Erfahrungen mit Zufallsfolgen**. Hierzu zählt insbesondere die Unabhängigkeit der Ereignisse auf den verschiedenen Stufen einer Zufallsfolge. Diese Erfahrungen mit Zufallsfolgen werden nicht explizit thematisiert, treten aber bei den verwendeten Beispielen wie Münzwurf und Würfel wiederholt auf.

Im Rahmen der aktiven Auseinandersetzung mit den Computersimulationen sammeln die Schülerinnen und Schüler **Erfahrungen mit der statistischen Streuung**. Nicholson (2002, S. 4) schreibt zur statistischen Streuung: „The role of variation is perhaps the most fundamental component in understanding and interpreting data. […] Variation exists in all measurable quantities.“ Die statistische Streuung von Ergebnissen wie auch das Gesetz der großen Zahl treten bei der wiederholten Durchführung der Computersimulationen im Rahmen des Simulationsvorkurses ständig auf. Die statistische Streuung wird bei den Computersimulationen über die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilungen visualisiert. Durch den ständigen Umgang mit den Computersimulationen können die Schülerinnen und Schüler ferner ein intuitives Verständnis für den Zusammenhang zwischen dem Stichprobenumfang und der statistischen Streuung der relativen Häufigkeit eines Ereignisses gewinnen. Dieser Zusammenhang wird über das Gesetz der großen Zahl im Simulationsvorkurs auch explizit thematisiert.

In Verbindung mit den Computersimulationen werden zentrale stochastische **Begriffe auf der Ebene der Häufigkeitsinterpretation** behandelt. Hierzu zählt zum einen der Wahrscheinlichkeitsbegriff. Der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit soll ein vertieftes Verständnis dieses Begriffs ermöglichen. Ferner zählt hierzu der Begriff des Erwartungswerts. Erwartungswerte werden im Simulationsvorkurs als Mittelwerte der Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei vielfacher Durchführung des Zufallsexperiments geschätzt. Hierdurch wird die korrekte Interpretation des Erwartungswerts vorbereitet: Der Erwartungswert macht eine Aussage über den mittleren Wert der Zufallsgröße eines Zufallsexperiments, wenn das Experiment häufig wiederholt wird. Der Begriff selber wird nicht eingeführt, es wird von einem „erwarteten Mittelwert“ oder einem „Idealwert“ gesprochen. Die exakte theoretische Einführung des Begriffs erfolgt erst im weiteren Verlauf des Kurses.

Im Simulationsvorkurs erfolgt ferner die **inhaltliche Vorbereitung von Begriffen**. Dies trifft vor allem auf die Begriffe Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung zu. Die durch die Software FATHOM vorgegebene Struktur zur Erstellung einer Computersimulation erfordert die Einführung des Begriffs der Messgröße. Als Messgröße kann man sowohl Ereignisse als auch Zufallsgrößen definieren. Im Simulationsvorkurs werden vor allem Zufallsgrößen verwendet. Der Begriff der Zufallsgröße wird zwar nicht explizit verwendet aber inhaltlich vorbereitet. Von zentraler Bedeutung bei der Verwendung von Computersimulationen mit FATHOM ist die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilungen. Die einfache Darstellbarkeit der Häufigkeitsverteilungen trägt dazu bei, dass die Schüler mit der Interpretation der Häufigkeitsverteilungen vertraut werden. Dies soll den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung vorbereiten.

4.3 Ziele des Simulationsvorkurses auf den Ebenen der Schülereinstellungen und der Unterrichtsmethodik

Die Ziele des Simulationsvorkurses liegen in mehreren Ebenen:

a) Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz

b) Ebene der stochastischen Kompetenz

c) Ebene der Schülereinstellungen – Motivation und Interesse

d) Ebene der Unterrichtsmethodik – Selbstständige Gruppenarbeitsphasen am Computer

Mit a) und b) werden die kognitiven Ziele des Unterrichts beschrieben, welche in den beiden vorangegangenen Abschnitten ausführlich dargestellt wurden. Hinzu kommen mit c) und d) Ziele bezüglich der Schülereinstellungen und der Unterrichtsmethodik, welche im Folgenden beschrieben werden:

Schülereinstellungen – Motivation und Interesse

Schülerinteresse und Schülermotivation stellen entscheidende Faktoren im Unterrichtsgeschehen dar. Sie tragen dazu bei, dass sich die Schülerinnen und Schüler aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen. Ferner unterstützt eine positive Einstellung das Erlernen und das Verständnis neuer mathematischer Begriffe. Bauer (1988) schlägt vor, Mathematikinteresse als eine wichtige mathematikdidaktische Grundkategorie anzusehen. Blum et al. (2002, S. 272) schreiben: „Beliefs, attitudes and emotions play important roles in the development of critical and creative senses in mathematics.” Bikner-Ahsbahs (2005, S. 1) formuliert: “Lernen mit Interesse ist mit erhöhten Gedächtnisleistungen, mit tiefgehenden Lernstrategien, mit positiven Gefühlen und mit dem Erleben von Sinn und Kompetenz verbunden. Mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler erfahren herausfordernde mathematische Aktivitäten als persönlich wertvoll und wenig anstrengend. […] Ob mit oder ohne Interesse gelernt wird ist also von zentraler Bedeutung für die Qualität von Lernerfahrungen und für die Qualität von Lernergebnissen.“

Um dieses Interesse zu fördern, wurden die Aufgabenstellungen des Simulationsvorkurses so gewählt, dass stets neue Aspekte auftreten und somit ein schematisches Bearbeiten der Aufgabenstellungen nicht möglich ist. Statt einfacher Aufgaben wurden teilweise komplexe anwendungsorientierte Aufgabenstellungen gewählt, die zu Beginn eines Stochastikkurses nur mit Hilfe von Simulationen lösbar sind.

Nach Krapp und Prenzel (1992) gibt es drei Grunderfahrungen, die bei der Interesseförderung berücksichtigt werden müssen: Kompetenzerfahrung, Autonomieerfahrung und die Erfahrung sozialer Eingebundenheit. Bauer (1988) kommt zu dem Schluss, dass ein „interesseorientierter“ Mathematikunterricht die Vielfalt aller mathematischen Phänomene berücksichtigen und dass er individualisiert gestaltet werden muss.

Eine erhöhte Schülermotivation soll im Simulationsvorkurs bereits durch die Verwendung des Mediums Computer im Mathematikunterricht erreicht werden. Über den Reiz des Mediums Computer hinaus trägt im Simulationsvorkurs das selbstständige Erarbeiten der Computersimulationen in Zweiergruppen zur Kompetenzerfahrung und Autonomieerfahrung bei. Durch den Einsatz des Computers ergibt sich die Möglichkeit individualisiert gestalteter Unterrichtsphasen, in denen die Schülerinnen und Schüler eigene Kompetenzerfahrungen sammeln sollen und in denen sie sich gegenseitig austauschen und unterstützen können. Bikner-Ahsbahs (2000, S. 34) bemerkt hierzu: „First of all, situational interest can be caught by group work, computer usage and puzzles, which means, that situational interest can be caught by social or cognitive stimulation.“ Genau diese soziale und kognitive Stimulation zur Erzeugung von Schülermotivation und -interesse soll im Rahmen des Simulationsvorkurses durch die geeignete Gestaltung der Lernumgebungen am Computer erzeugt werden.

Unterrichtsmethodik – Selbstständige Gruppenarbeitsphasen am Computer

Gruppenarbeitsphasen und Schüleraktivitäten im Unterricht werden generell als unterrichtsmethodisch sinnvoll angesehen. Nach Meyer (1987, S. 46) sollte es „ein übergeordnetes Ziel von Schule sein, die Schülerinnen und Schüler "zum aufrechten Gang" zu befähigen, also sie zum selbstständigen Denken und Handeln zu ermuntern.“ Nach Borneleit, Danckwerts et al. (2001, S. 76) „spielt die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler eine entscheidende Rolle [beim konstruktiven Lernprozess].“

Trotz der vielfältigen Argumente für schülerbezogene Arbeitsformen ist das Unterrichtsgeschehen in Deutschland vorwiegend von Frontalunterricht geprägt (vgl. Baumert, Lehmannn et al. 1997). Borneleit, Danckwerts et al. (2001, S. 80) schreiben: „Die Analysen zeigen, dass der traditionelle Mathematikunterricht […] von Interaktionsroutinen geprägt ist, die für die Beteiligten mehr oder weniger unbemerkt ablaufen (z. B. das ‚Trichter-Prinzip’). Mit Blick auf die Notwendigkeit der individuellen Sinnkonstruktion erscheint im derzeitigen Mathematikunterricht der Raum für Eigenaktivitäten der Lernenden viel zu eng […].“. Auch vielfältige didaktische Vorschläge haben hier bislang kaum zu einer Änderung geführt. Einen Ansatz zur Verstärkung der Handlungs- und Schülerorientierung im Mathematikunterricht bietet der Einsatz des Computers. Schupp (1992, S. 102) schreibt hierzu in Bezug auf den Stochastikunterricht: „Programme sollen nicht etwa an die Stelle unterrichtlicher Arbeit treten, sondern Schüleraktivitäten anregen und fördern. Es geht nicht um das schnelle Auswerfen von beeindruckenden Daten, nicht um das Vorführen schöner Bilder […], sondern einmal um die Bereicherung der Palette der Schülertätigkeiten und zum anderen um die Möglichkeit, an geeigneten Stellen schwierige oder zeitraubende rechnerische, datenverwaltende, zeichnerische oder simulative Aktivitäten dem Computer zu übertragen bzw. auf diesem Wege experimentierende Zugänge allererst zu schaffen […].“

Borneleit, Danckwerts et al. (2001, S. 86) schreiben „Schülerbezogene Arbeitsformen wie Partner-, Gruppen- und Projektunterricht, Förderung von Selbstständigkeit und Selbstverantwortung […], alles das sind Forderungen, die zumindest seit der Reformpädagogik an die Schule herangetragen werden. Erfahrungen zum Computereinsatz geben heute zu der Hoffnung Anlass (etwa Nocker 1996), dass neue Technologien ein Katalysator für eine solche "neue Unterrichtskultur" sein können“. Ähnliche Erwartungen zum Computereinsatz im Mathematikunterricht werden von E. Schneider (1997, S. 449) geäußert: „Der Einsatz von Computern ist oft auch von Veränderungen hinsichtlich der Lernformen begleitet. Diese Umorientierungen weisen in Richtung erhöhter Eigenaktivität und Selbstständigkeit der Schüler/innen sowie auf ein größeres Maß an Teamarbeit.“ Nocker (1996) bestätigt diesen erhofften Einfluss auf die Unterrichtskultur in einer Untersuchung zum Einsatz von Computeralgebrasystemen in Österreich. In dieser Studie findet man auf der Ebene der Aktivitäten eine deutliche Erhöhung der selbstständigen Schülertätigkeit verbunden mit einem Rückgang der Lehreraktivität, allerdings auch des Vorrechnens seitens der Schülerinnen und Schüler. Auf der Ebene der Sozialformen sinkt der Anteil des Frontalunterrichts zu Gunsten der Einzelarbeit und der Partnerarbeit.

Ein Ziel des Simulationsvorkurses ist die Erhöhung der Schüleraktivitäten in Form von Partner- und Gruppenarbeit am Computer sowie von Schülerpräsentationen als Ausgangspunkt für den weiterführenden Unterricht oder als Ergebnissicherung im Anschluss an die Erstellung von Computersimulationen in den Schülerarbeitsphasen.

Hierbei verfolgt das Unterrichtskonzept zum Simulationsvorkurs ein Vorgehen, bei dem in der ersten Phase beim Erwerb der Simulations- und Fathomkompetenzen zunächst eine enge Unterrichtsführung vorliegt. Im zweiten Teil des Simulationsvorkurses sollen die Schülerinnen und Schüler verstärkt selbstständig arbeiten.

Die Schülerinnen und Schüler sollen mehrfach Gelegenheit erhalten, in Zweier- oder Dreiergruppen am Computer zu arbeiten. Hierbei wird den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit gegeben, Mathematik selber konstruktiv zu erarbeiten und eigene Erfahrungen im Umgang mit den mathematischen Begriffen zu sammeln. Dies soll den Aufbau, das Verständnis und das Behalten der behandelten Inhalte fördern. Der Grad an Selbstständigkeit sowie die Länge der Schülerarbeitsphasen werden zum Ende der Unterrichtseinheit hin gesteigert.

Neben dieser lerntheoretischen Sichtweise kann man bei der Gruppenarbeit auch das „soziale Lernen“ in den Blick nehmen: Die Gruppenarbeit trägt zum sozialen Umgang und zur Förderung der Kommunikation der Schülerinnen und Schüler bei (vgl. Zech 1996). Hinzu kommen die bereits im vorherigen Abschnitt erwähnten positiven Auswirkungen schülerorientierter Lernsituationen auf die Motivation und das Interesse der Schülerinnen und Schüler.

Eine lernmethodische Blickrichtung auf den Mathematikunterricht wird auch von den in den USA entwickelten NCTM-Standards (2000) eingenommen, welche einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematikdidaktik in Deutschland haben (vgl. Weigand 1999). In diesen Standards werden fünf Prozessziele des Mathematikunterrichts angegeben: „Problem Solving“, „Reasoning and Proof“, „Communication“, „Connections“, „Representation“. Insbesondere die Punkte „Problem Solving“, „Communication“ und „Representation“ sind eng mit dem Konzept eines schüler- und selbstständigkeitsorientierten Unterrichts verknüpft. Diese Punkte finden sich auch in den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss unter den Kompetenzbegriffen „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematische Darstellungen verwenden“ und „Kommunizieren“ wieder (KMK 2004). Diese Kompetenzen sollen insbesondere im zweiten Teil des Simulationsvorkurses über die selbstständige Erstellung und anschließende Präsentation von Simulationsumgebungen in Gruppenarbeit realisiert werden.

4.4 Die Unterrichtsmaterialien

4.4.1 Das Einstiegsbeispiel

Der Simulationsvorkurs beginnt mit der in Kapitel 4.1.2 geschilderten Aufgabe:

Betrachten Sie die folgenden beiden Tests:

Test 1 besteht aus 10 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Test 2 besteht aus 20 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind.

Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät?

a) Die theoretische Lösung

Löst man die Aufgabe theoretisch, so hat man eine Binomialverteilung mit n = 10 Wiederholungen bzw. mit n = 20 Wiederholungen. Als Zufallsgröße X kann man die Anzahl der erfolgreich beantworteten Fragen wählen, die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt p = 0,5. Man erhält für n = 10 Testfragen eine Wahrscheinlichkeit von $P(X \geq 6) = 0{,}377$ und für $n = 20$ Testfragen eine Wahrscheinlichkeit von $P(X \geq 12) = 0{,}252$. Ein Prüfling, der nur rät, hat also bei dem Test mit 10 Testfragen größere Chancen zu bestehen als bei dem Test mit 20 Testfragen. Diese Lösung steht den Schülerinnen und Schülern zu Beginn des Schulhalbjahres allerdings nicht zur Verfügung.

Das Ergebnis lässt sich auch begründen anhand folgender Überlegung: Bei 20 Fragen liegt der relative Anteil richtig beantworteter Fragen typischerweise eher in der Nähe von $p = 0{,}5$ als bei 10 Fragen. Daher ist es bei 10 Fragen wahrscheinlicher, dass man eine Abweichung von mindestens 60% richtig beantworteter Fragen hat. Diese Überlegung entspricht einer Anwendung des Gesetzes der großen Zahl auf $n = 10$ und $n = 20$.

Bei der Aufgabe handelt es sich um eine typische Fragestellung zum intuitiven stochastischen Verständnis des Gesetzes der großen Zahl, welche mit dem gleichen mathematischen Hintergrund auch in anderen Anwendungskontexten auftritt (vgl. Sedlmeier 1999; Sedlmeier und Köhlers 2001). Psychologische Untersuchungen haben gezeigt, dass es Schülerinnen und Schülern schwer fällt, diesen komplexen Typ von Aufgaben intuitiv zu lösen (Kahneman und Tversky 1972; Sedlmeier und Gigerenzer 1997). Mit der Aufgabe wird gleich zu Beginn des Kurses der Zusammenhang zwischen der Stichprobengröße bzw. der Anzahl der Wiederholungen eines Experiments und der Streuung des relativen Anteils eines beobachteten Ereignisses thematisiert. Dieser Zusammenhang wird zum Abschluss des Themenbereichs der Binomialverteilung mit dem $1/\sqrt{n}$ – Gesetz präzisiert.

b) Die Unterrichtsgestaltung

Die Aufgabenstellung wird vom Lehrer zunächst vorgestellt und erläutert. Hieran kann sich eine Phase anschließen, in der die Situation besprochen und diskutiert wird. Um eine Erwartungshaltung aufzubauen, können Vermutungen geäußert und begründet werden. Die spätere Konfrontation der Ergebnisse mit den Erwartungshaltungen und den eingangs geäußerten Argumenten soll das Interesse und das inhaltliche Verständnis für die Aufgabenstellung fördern.

Die Aufgabe dient jedoch zunächst dazu, Simulationen zur Lösung stochastischer Problemstellungen einzuführen. Dies geschieht im ersten Schritt über eine händische Simulation: Der Multiple-Choice-Test mit 10 Testfragen kann mit einem zehnfachen Münzwurf simuliert werden, wobei die Anzahl der Würfe mit „Zahl“ der Anzahl der korrekt beantworteten Fragen entspricht. Diese Simulation kann im Kurs in Partnerarbeit jeweils mehrfach durchgeführt werden und die Ergebnisse des Gesamtkurses zusammengefasst werden. Auf diese Weise wird der Unterricht durch Schüleraktivitäten bereichert, was zur Förderung des Interesses und der Motivation beitragen soll.

Die Ergebnisse des Gesamtkurses werden zusammengefasst und anhand eines vorbereiteten Arbeitsblatts ausgewertet (vgl. Anhang, S. 271). Hier soll die Verteilung der Anzahl an Würfen mit „Zahl“ tabellarisch und zeichnerisch als Histogramm mit absoluten bzw. relativen Häufigkeiten ausgewertet werden. Das Vorgehen der Computersimulation wird mit der händischen Simulation vorbereitet.

In dieser Phase des Unterrichts ist der Wahrscheinlichkeitsbegriff noch nicht bekannt. Der relative Anteil an Wurfserien mit mindestens sechsmal „Zahl“ gegenüber dem relativen Anteil an Wurfserien mit höchstens fünfmal „Zahl“ zeigt das Chancenverhältnis für das Bestehen des Tests auf. Die relative Häufigkeit für den Anteil an Wurfserien mit „mindestens sechsmal Zahl“ wird hier als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit benutzt, den Test mit 10 Testfragen bei reinem Raten zu bestehen. Dies kann allerdings erst in Verbindung mit der anschließenden Computersimulation begründet werden, wenn man ohne großen Zeitaufwand zeigen kann, dass man auch bei wiederholter Durchführung einer

Simulation mit 1000 Testdurchgängen stets etwa dieselbe relative Häufigkeit für das Bestehen des Tests erhält (vgl. Kapitel 4.2.3).

Erst im Anschluss an die Simulation mit Hilfe des Münzwurfs soll dann die Computersimulation mit FATHOM eingeführt werden. Hierbei ergibt sich die Notwendigkeit für die Computersimulation in natürlicher Weise über die Arbeits- und Zeitersparnis, die der Computer liefert. Die einzelnen Schritte der Computersimulation werden am Beispiel des Tests mit 10 Fragen wie in Kapitel 4.1.2 in Analogie zur händischen Simulation demonstriert. Die Schülerinnen und Schüler erhalten im Anschluss eine ausführliche Anleitung für diese Simulation mit 10 Testfragen (vgl. Anhang, S. 273) und sollen die Simulation mit 20 Testfragen selber erstellen. Auch hier ist der Unterricht wieder von Schüleraktivitäten bei der selbstständigen Erstellung und Auswertung der Computersimulation geprägt.

Die Auswertungen der beiden Simulationen werden verglichen und somit der Bogen zur Eingangsfragestellung geschlagen. Insbesondere werden die beiden Verteilungen wie in Abb. 4.7 gezeigt grafisch geschickt normiert gegenübergestellt. Hieran erfolgt die inhaltliche Klärung der Problemstellung. Es zeigt sich, dass man bei reinem Raten für den Test mit 10 Fragen eine Erfolgswahrscheinlichkeit von ca. 38% erhält, bei dem Test mit 20 Fragen von ca. 25%. Ursache hierfür ist die engere Verteilung der relativen Anzahl der Erfolge bei dem Test mit 20 Fragen um den „erwarteten Mittelwert" von $p = 0{,}5$ herum, also das Gesetz der großen Zahl. Dies lässt sich veranschaulichen, indem man beide Verteilungen auf der x-Achse so normiert, dass der Bereich von 0 bis 10 Erfolgen beim 10er-Test dem Bereich von 0 bis 20 Erfolgen beim 20er-Test entspricht. Die vergleichende Interpretation der Ergebnisse der Simulation lässt sich über die grafische Darstellung mit der Computersimulation einfach realisieren und ist für die Förderung der stochastischen Intuition von großer Wichtigkeit.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten ein Blatt zur Ergebnissicherung (vgl. Anhang, S. 272), auf dem die grafische und tabellarische Auswertung der beiden Computersimulationen und die inhaltliche Argumentation über das Gesetz der großen Zahl festgehalten sind.

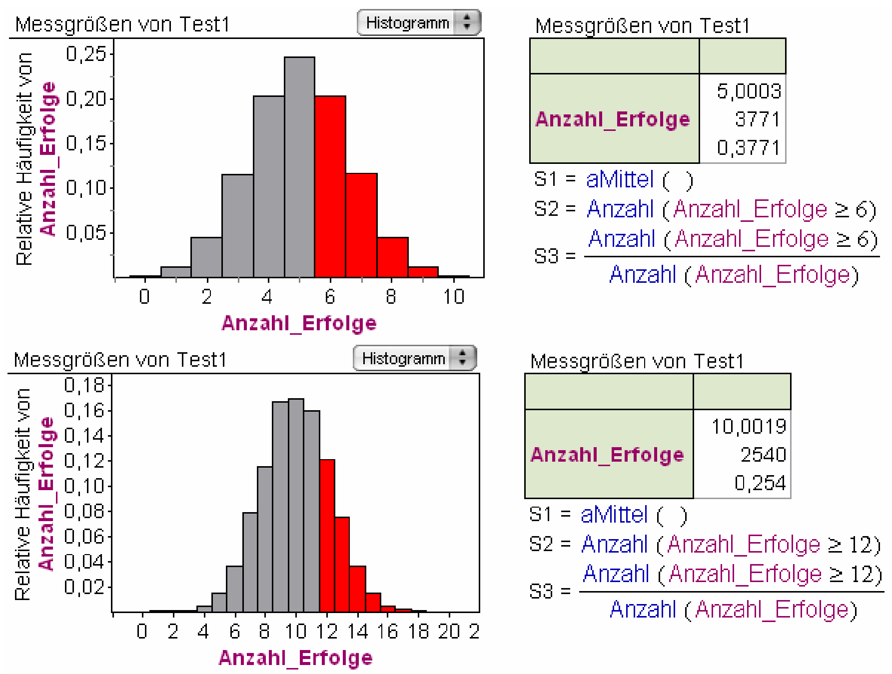


Abb. 4.7: Die grafische und tabellarische Auswertung der Ergebnisse der Computersimulation: Bei n = 10 Testfragen erhält man eine Erfolgsquote von ca. 38%, bei n = 20 Fragen eine Erfolgsquote von ca. 25%. Man erkennt deutlich die schmalere Form der Verteilung für n = 20 bei geeignet gewählter Normierung der x-Achse. Die Simulationen wurden beide mit N = 10 000 Wiederholungen durchgeführt.

Zur Abrundung der Einführungsaufgabe in die Computersimulationen soll das vierschrittige Prozessmodell einer Computersimulation als Strukturierungshilfe in Zusammenhang mit der Erstellung eines Simulationsplans besprochen werden. Die Schülerinnen und Schüler erhalten ein Merkblatt über das vierschrittige Prozessmodell ergänzt um einen beispielhaften Simulationsplan (vgl. Anhang, S. 275).

c) Simulations- und Fathomkompetenz

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst über die händische Durchführung des Münzwurfs das Verfahren der Simulation eines Zufallsexperiments kennen und verstehen lernen. An dem gewählten Einstiegsbeispiel wird dann in Anlehnung an die vorher besprochene händische Simulation zum ersten Mal eine Computersimulation vorgestellt.

Die Demonstration der Computersimulation am Beispiel von 10 Testfragen und die direkte Nachahmung am Beispiel von 20 Testfragen mit Hilfe der ausführlichen Simulationsanleitung soll die Kompetenzen zur Erstellung und Auswertung einer Computersimulation im Umfang der Darstellung in Kapitel 4.1.2 vermitteln.

In Verbindung mit der händischen Simulation wird das vierschrittige Verfahren zur Erstellung und Auswertung einer Simulation eingeführt und auf die Computersimulation mit FATHOM übertragen. Weiter werden die grundlegenden Bedienelemente der Software FATHOM demonstriert und die zugehörigen Befehle vermittelt und erläutert: Als Zufallsgenerator wird der Befehl `ZufallsWahl("Erfolg","Misserfolg")` in Analogie zur vorher verwendeten Münze gewählt. Es muss deutlich werden, dass der gewählte Zufallsgenerator dem stochastischen Modell der zu simulierenden Situation entsprechen muss. Als Messgröße wird die Anzahl der Erfolge mit der Formel `Anzahl(Aufgaben="erfolg")` gewählt. Zur Auswertung der Häufigkeitsverteilung wird die grafische Auswertung, die tabellarische Auswertung und die rechnerische Auswertung mit der Formel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)` zur Bestimmung der relativen Häufigkeit gewählt.

Da an dem Eingangsbeispiel die Erstellung einer Computersimulation zusammen mit den Bedienelementen von FATHOM erarbeitet wird, kommt der Demonstration der Computersimulation sowie der Anleitung für die Computersimulation in FATHOM eine wichtige Rolle zu.

d) Die stochastischen Inhalte der Einstiegsaufgabe

Die zentralen Inhalte der Einstiegsaufgabe sind die Einführung in die Simulation sowie das inhaltliche Verständnis für die Abhängigkeit der Streuung der relativen Anzahl der Erfolge von der Stichprobengröße.

Anhand der Aufgabe werden zusätzlich eine ganze Reihe weiterer stochastischer Inhalte vermittelt:

Die Schüler lernen die Erstellung und Auswertung einer Häufigkeitsverteilung mit absoluten und mit relativen Häufigkeiten kennen. Hierbei werden die tabellarische und die grafische Auswertung der Häufigkeitsverteilung als Histogramm eingeführt. Die analogen Auswertungen werden im Folgenden stets von der Software FATHOM übernommen. Die Bedeutung und die Interpretation der Histogramme soll explizit thematisiert werden.

Die Schüler verwenden die relativen Häufigkeiten als Schätzwert für Wahrscheinlichkeiten. Dieses Vorgehen beruht zunächst auf einem intuitiven Verständnis für das Verhältnis zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird in diesem Einstiegsbeispiel intuitiv als Erfolgschance eingeführt. Die wiederholte Durchführung der Simulation mit der Software zeigt, dass die relative Häufigkeit für das Bestehen des Tests stets etwa gleich bleibt, so dass man diese relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit auffassen kann (vgl. Kapitel 4.2.3). Erst im weiteren Verlauf des Simulationsvorkurses wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff über das Gesetz der großen Zahl und über die Laplace-Wahrscheinlichkeit präzisiert.

Implizit wird mit der Einstiegsaufgabe ein Zufallsexperiment eingeführt und ausführlich behandelt, es werden Ereignisse und Zufallsgrößen verwendet. Ferner wird bei der Interpretation der beiden entstehenden Häufigkeitsverteilungen die Verteilung als Ganzes in den Blick genommen: Als Histogramme entstehen zwei Binomialverteilungen, die miteinander verglichen werden. Hiermit wird der Verteilungsbegriff inhaltlich vorbereitet.

Insbesondere über die Schüleraktivitäten beim wiederholten Werfen der Münze werden intuitive Vorstellungen zur stochastischen Streuung sowie zur Irregularität von Zufallsfolgen gefördert. Aber auch die Computersimulation trägt zum intuitiven Verständnis der stochastischen Prozesse bei. Hierzu sollte man das Zufallsexperiment nicht sofort 1000fach wiederholen lassen, sondern sich die Ergebnisse nach jeder einzelnen Wiederholung anschauen. Dies verdeutlicht die stochastische Streuung der Ergebnisse sowie die Unabhängigkeit der einzelnen Durchgänge.

4.4.2 Das Gesetz der großen Zahl

Im geplanten Unterrichtskonzept wird das Gesetz der großen Zahl am Beispiel des Münzwurfs erarbeitet und von diesem Beispiel ausgehend verallgemeinert. Hier kennt man die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}5$ und kann beobachten, wie sich die relative Häufigkeit im Vergleich dazu entwickelt (vgl. Kapitel 4.2.3).

Der Münzwurf soll zunächst händisch durchgeführt werden und auch ausgewertet werden:

Die Schülerinnen und Schüler führen in Zweiergruppen je 50 händische Münzwürfe durch und notieren die hierbei aufgetretene Anzahl von „Zahl“. Die Ergebnisse werden im Kurs sukzessive zusammengezählt und die relativen Häufigkeiten für $N = 50$, 100, 150, 200, 250, 300, … Würfe bestimmt und grafisch aufgetragen.

Zur Vertiefung stehen zwei FATHOM-Lernumgebungen zur Verfügung, in denen der Münzwurf zusammen mit der sukzessiven grafischen Auftragung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ simuliert wird. Beide Lernumgebungen sind nach einem Vorschlag von Erickson (2002, S. 48) abgewandelt.

In der ersten Lernumgebung baut sich das Experiment „Wurf um Wurf“ auf. Nach jedem weiteren Münzwurf wird die Grafik automatisch ergänzt (vgl. Abb. 4.8):

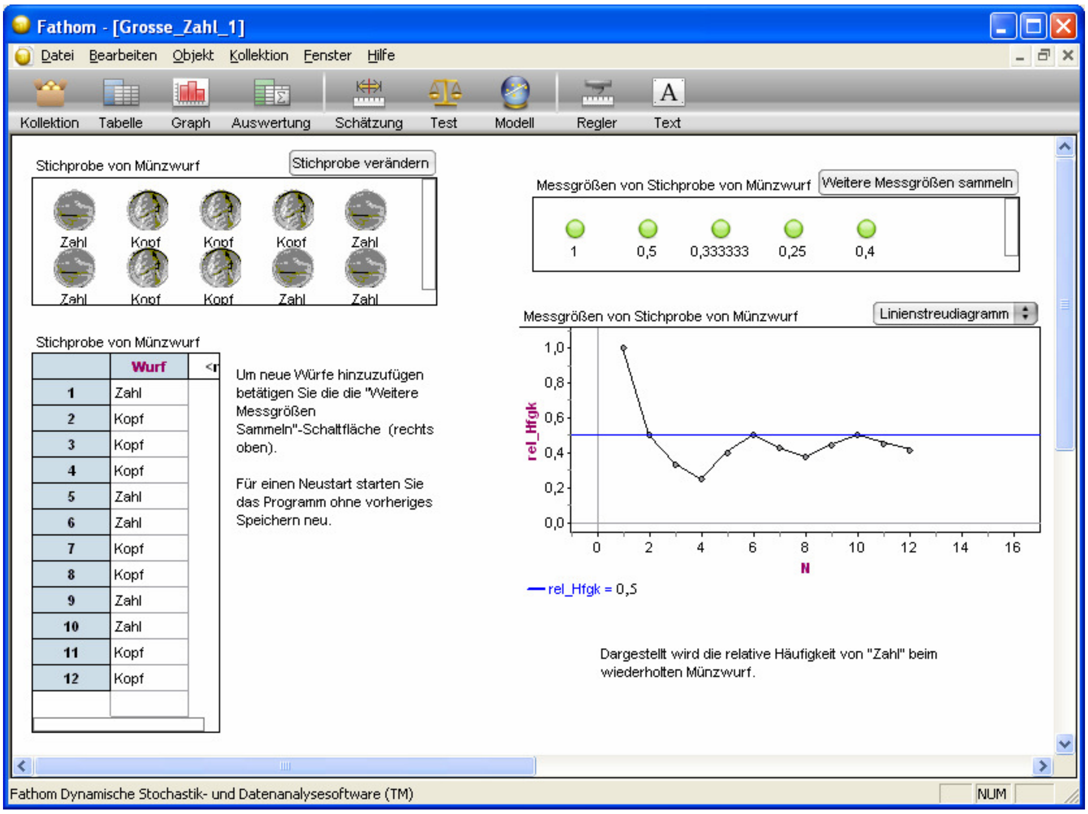


Abb. 4.8: Lernumgebung zum Gesetz der großen Zahl: Mit jeder Betätigung der Schaltfläche „Weitere Messgrößen sammeln“ wird ein weiterer Münzwurf hinzugefügt. Die Grafik baut sich parallel dazu auf.

In der zweiten Lernumgebung werden sofort 1000 Münzwürfe simuliert und die sukzessive Entwicklung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ grafisch“ dargestellt (vgl. Abb. 4.9).

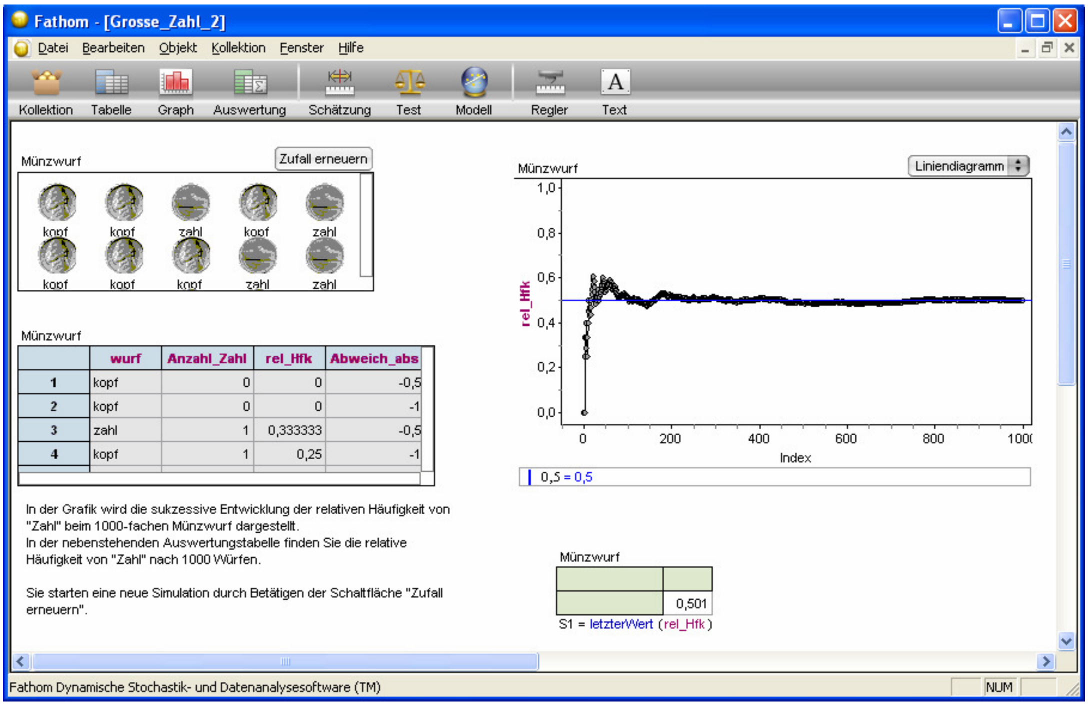


Abb. 4.9 Lernumgebung zum Gesetz der großen Zahl: Es wird die Entwicklung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ bei 1000 Münzwürfen dargestellt. Das Endergebnis nach dem 1000. Wurf wird in der Tabelle ausgegeben.

Die erste Lernumgebung lenkt den Blick auf den sukzessiven Aufbau und die Entstehung der Zufallsfolge. Hieran können erneut intuitive Vorstellungen zur Irregularität von Zufallsfolgen gefördert werden. Bei der zweiten Lernumgebung wird sofort eine 1000fache Simulation durchgeführt und die Entwicklung der relativen Häufigkeit grafisch aufgetragen. Die Schülerinnen und Schüler lernen so die typischen Graphen zur Entwicklung der relativen Häufigkeit kennen und sollen hierüber ein intuitives Verständnis für die Entwicklung der relativen Häufigkeit im Sinn des Gesetzes der großen Zahl aufbauen.

Neben der grafischen Darstellung der Entwicklung der relativen Häufigkeit kann man an der zweiten Lernumgebung eine „Faustregel" zur Genauigkeit erarbeiten, mit der die relative Häufigkeit bei 1000-facher Wiederholung des Zufallsexperiments die gesuchte Wahrscheinlichkeit annähert (vgl. Kapitel 4.2.2):

Über die mehrfache Wiederholung der 1000-fachen Münzwurfsimulation erhält man verschiedene Werte der relativen Häufigkeit für „Zahl" und kann diese miteinander und mit dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitswert von $p = 0{,}5$ vergleichen. Es zeigt sich, dass „typische Werte" für die relative Häufigkeit im Bereich von 0,47 bis 0,53 liegen, die Abweichung beträgt somit ±3 Prozentpunkte.

Als Präzisierung wird den Schülerinnen und Schülern das Ergebnis der exakten Berechnung mit einem 95%-Konfidenzintervall mitgeteilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt die tatsächliche Wahrscheinlichkeit im Intervall ±3,1 Prozentpunkte um die in der Simulation erhaltene relative Häufigkeit (vgl. Kapitel 4.2.2).

Beide Lernumgebungen sind bereits fertig vorbereitet, zur Benutzung werden keine Simulations- oder FATHOM-Fertigkeiten benötigt. Bei beiden Lernumgebungen lässt sich die Münzwurffolge einfach über die Betätigung eines Buttons erzeugen und man kann in kurzer Zeit viele Durchläufe betrachten. Die Lernumgebungen ermöglichen ein experimentelles Arbeiten und sollen ein intuitives Verständnis für die Entwicklung der relativen Häufigkeit und damit ein intuitives Verständnis für das Gesetz der großen Zahl aufbauen. Die Simulation wird eingesetzt im Sinn der Simulation als Gegenstand. Für die Schülerinnen und Schüler existiert ein Blatt zur Ergebnissicherung (vgl. Anhang, S. 276).

4.4.3 Die Würfelaufgaben

Die Würfelaufgaben dienen inhaltlich zum einen zur Festigung und zur Erweiterung der Simulations- und der Fathomkompetenzen, sie sollen aber über den experimentellen Umgang mit den Computersimulationen auch das intuitive Verständnis für stochastische Problemstellungen fördern und zentrale stochastische Begriffe vorbereiten. Ferner werden an Würfelaufgabe c) stochastische Grundbegriffe in Verbindung mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit erarbeitet. Die Aufgaben mitsamt ihrer Gestaltung wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit speziell für den Simulationsvorkurs konzipiert.

Die Würfelaufgaben können im Unterricht in Partnerarbeit am Computer und auch als Hausaufgaben eingesetzt werden.

Aufgabenblatt:

Simulieren Sie die folgenden Problemstellungen mit N=1000 Wiederholungen. Stellen Sie die Ergebnisse der Simulation jeweils grafisch dar und beantworten Sie mit Hilfe der grafischen Darstellung sowie einer gezielten tabellarischen Auswertung die zugehörigen Fragen.

a) Ein fairer Würfel wird fünfmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl X der verschiedenen Zahlen, die hierbei gewürfelt werden.
   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten mindestens drei verschiedene Zahlen auf?

- Wie viele verschiedene Zahlen treten im Mittel auf?
- Welche Ergebnisse treten mit weniger als 10% Wahrscheinlichkeit auf?

Anleitung:
1. Erstellen Sie eine Kollektion "Wuerfel" mit der Spalte "Wurf" (Formel `ganzeZufallszahl(1;6)`) und fügen Sie der Kollektion 5 Fälle hinzu.
2. Definieren Sie im Fenster "Info Wuerfel" die Messgröße "Anzahl_verschieden" zum Zählen der verschiedenen aufgetretenen Zahlen mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte(Wurf)`. Führen Sie das Zufallsexperiment nun 1000 mal durch, indem Sie 1000 mal die Messgröße sammeln.
3. Zeigen Sie die Tabelle zur Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" an und werten Sie die Ergebnisse grafisch (Histogramm) und mit einer Auswertungstabelle aus.
   Den Mittelwert der Anzahl verschiedener Zahlen können Sie sich mit der Formel `aMittel()` in der Grafik oder in der Auswertungstabelle anzeigen lassen.

b) Ein fairer Würfel wird 60mal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl X der Sechsen, die hierbei gewürfelt werden.

- Schätzen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau 10mal die „6“ geworfen wird. Bestimmen Sie dann diese Wahrscheinlichkeit mit der Simulation. Erstaunt?
- Bestimmen Sie die Anzahl $\bar{x}$ an Sechsen, die im Mittel bei 60 Würfen gewürfelt wird.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mindestens X_1 = 8mal und höchstens X_2 = 12mal eine „6“?
- Wie muss der Bereich von X_1 bis X_2 um $X = 10$ herum gewählt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 80 % ein Ergebnis in diesem Bereich erhält?
- Beschreiben Sie die Form der grafischen Häufigkeitsverteilung in Worten.

c) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dabei mindestens eine Sechs zu werfen.

- Welche Einzelergebnisse liefert die als Messgröße definierte Formel `Anzahl(wurf=6)≥1` ? Begründung?
- Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Simulation.
- Wie kann man diese Wahrscheinlichkeit ohne eine Simulation theoretisch bestimmen?

Anleitung:
1. Erstellen Sie eine Kollektion "Wuerfel" mit der Spalte "Wurf" (Formel `ganzeZufallszahl(1;6)`) und fügen Sie der Kollektion 2 Fälle hinzu.
2. Definieren Sie im Fenster "Info Wuerfel" die Messgröße "Mindest_einmal6" mit der Formel `Anzahl(Wurf=6)≥1`. Führen Sie das Zufallsexperiment nun 1000mal durch, indem Sie 1000 Messgrößen sammeln.
3. Zeigen Sie die Tabelle zur Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" an und werten Sie die Ergebnisse grafisch und mit einer Auswertungstabelle aus.

d) Ein Glücksspiel wird nach folgenden Regeln aufgebaut: Es wird mit zwei Würfeln gleichzeitig geworfen. Der Einsatz pro Spiel beträgt 10 Cent. Ist die Augensumme gleich sieben, so beträgt der Gewinn 50 Cent, bei allen anderen Augensummen gibt es keinen Gewinn.

Wir interessieren uns für den Nettogewinn („Gewinn“ – „Einsatz“), den man bei diesem Spiel erzielen kann.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man bei diesem Spiel?
- Welchen mittleren Nettogewinn kann man bei diesem Spiel auf lange Sicht erwarten?
- Ist dieses Spiel fair?

Anleitung:

1. Erstellen Sie eine Kollektion "Wuerfel" mit der Spalte "Wurf" (Formel `ganzeZufallszahl(1;6)`) und fügen Sie zwei Fälle hinzu.
2. Definieren Sie im Fenster "Info Kollektion" die Messgröße "Gewinn" mit der Formel
$$\texttt{Wenn(Summe(Wurf)=7)}\begin{cases} 40 \\ -10 \end{cases}.$$
Führen Sie das Zufallsexperiment nun 1000mal durch, indem Sie 1000 Messgrößen sammeln.
3. Werten Sie die Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" grafisch und rechnerisch aus.

e) Man wirft mehrmals nacheinander gleichzeitig zwei faire Würfel. Wir interessieren uns für die Anzahl der Würfe, bis ein Sechserpasch fällt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Sechserpasch nach höchstens drei Würfen?
- Wie viele Würfe muss man auf lange Sicht im Mittel machen, bis ein Sechserpasch fällt?
- Wie viele Würfe haben Sie bei Ihrer Simulation maximal gebraucht, bis ein Sechserpasch gefallen ist?
- Beschreiben Sie die Form der grafischen Häufigkeitsverteilung in Worten.

Anleitung:

1. Erstellen Sie eine Kollektion "Wuerfel" und definieren Sie im Fenster "Info Wuerfel" zwei Messgrößen "wurf1" und "wurf2"mit der Formel `ganzeZufallszahl(1;6)`.
2. Führen Sie das Zufallsexperiment mit "Messgrößen sammeln" nun so oft durch, bis ein Sechserpasch auftritt (Formel "`(wurf1=6) und (wurf2=6)`" im Feld "Bis zur Bedingung").
3. Definieren Sie im Info-Fenster der Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" eine weitere Messgröße "Anzahl" (Formel `Anzahl()`), welche die Zahl der benötigten Würfe zählt.
4. Sammeln Sie nun von der Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" 1000 Messgrößen und werten Sie die entstehende Kollektion "Messgrößen von Messgrößen von Wuerfel" aus.

f) Überlegen Sie sich mindestens ein eigenes Würfelproblem, welches Sie mit Hilfe einer Simulation lösen.

a) Die Konzeption der Würfelaufgaben

Die Würfelaufgaben sind stets so formuliert, dass zunächst ein bestimmtes Würfelproblem simuliert werden soll, z. B. geht es in Aufgabe a) um die Anzahl verschiedener Zahlen beim fünffachen Würfelwurf oder in Aufgabe c) um die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs beim zweifachen Würfeln. Zu dieser Simulation gibt es dann eine Reihe inhaltlicher Fragestellungen, die mit Hilfe verschiedener Auswertungswerkzeuge beantwortet werden können. Hiermit sollen zum einen die am Einstiegsbeispiel erlernten Simulationsfähigkeiten gefestigt und erweitert werden. Zum anderen werden bei jeder der Aufgaben neue Befehle oder FATHOM-Strukturen eingeführt. Dies geschieht, indem zu jeder Aufgabe eine Kurzanleitung vorhanden ist, in welcher die Verwendung der neuen Befehle und FATHOM-Strukturen angegeben ist. Weiter ist die Festigung und die Erweiterung der Simulations- und Fathomkompetenzen verknüpft mit den einzelnen inhaltlichen Fragestellungen. Thematisch werden in allen Aufgaben Würfelprobleme gestellt, da der

Würfel ein einfaches Zufallsgerät ist, welches allen Schülerinnen und Schülern bekannt ist.

Durch die angeleiteten Aufgabenstellungen sollen die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, die Aufgaben in Gruppenarbeit am Computer bzw. als Hausaufgabe selbstständig zu bearbeiten. Damit sollen die Schülerinnen und Schüler zwar inhaltlich eng geführt aber dennoch in selbstständiger Schülerarbeit ihre Kompetenzen in Verbindung mit den Computersimulationen vertiefen und erweitern. Bei der Verwendung neuer Befehle wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler im Sinn einer Kontroll-Strategie mit den Befehlen experimentieren, um das Verhalten zu verstehen und die Befehle sinnvoll einsetzen zu können.

Exemplarisch sei hier die **Würfelaufgabe b)** ausführlich vorgestellt. Es geht um die Anzahl X der Sechsen beim 60fachen Würfeln:

Diese für die Würfelaufgaben typische Aufgabenstellung zeigt die gewünschte Verknüpfung zwischen der Softwareebene und der inhaltlichen Ebene. Zum einen geht es um die Festigung der Simulations- und Fathomkompetenz, weiter aber auch um die inhaltliche Erarbeitung und Vorbereitung stochastischer Begriffe.

Auf der Seite der Simulations- und Fathomkompetenz kennen die Schülerinnen und Schüler aus der ersten Würfelaufgabe bereits die Simulation des fünffachen Würfelwurfs. Allerdings wird beim fünffachen Würfelwurf als Zufallsgröße die Anzahl verschiedener Werte betrachtet. Bei dieser Aufgabe muss zur Erstellung der Simulation ein Transfer bei der Definition der Messgröße geleistet werden.

Im ersten Schritt der Simulation wird eine Kollektion erstellt und z. B. mit „Wuerfel" benannt. In dieser Kollektion wird der 60-fache Würfelwurf modelliert. Hierfür wird ein Merkmal eingefügt und z. B. als „Wurf" benannt. Als zugehörige Formel kann man `GanzeZufallszahl(1;6)` wählen und dann der Kollektion 60 Fälle hinzufügen. Im zweiten Schritt der Simulation kann man als Messgröße die Anzahl der Sechsen über die Formel `Anzahl(Wurf=6)` bestimmen und z. B. als „Anzahl_6" benennen. Im dritten Schritt muss die Simulation 1000 oder 10 000mal wiederholt werden.

Im vierten Schritt muss die entstehende Häufigkeitsverteilung gemäß den einzelnen Aufgabenstellungen ausgewertet werden. Hier sind über die grafische, tabellarische und formelhafte Auswertung der Häufigkeitsverteilung verschiedene Lösungswege möglich:

- Die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit für genau 10mal die „Sechs" kann man einer kategorialen Auswertungstabelle entnehmen oder mit der Formel `Anzahl(Anzahl_6=10)/Gesamtanzahl` in einer numerischen Auswertungstabelle ermitteln.
- Den „erwarteten Mittelwert" der Anzahl an Sechsen erhält man über die Formel `aMittel(Anzahl_6)`.
- Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 8mal und höchstens 12mal eine „Sechs" kann man der kategorialen Auswertungstabelle entnehmen oder über die Formel `Anzahl(Anzahl_6≥8 und Anzahl_6≤12)/Gesamtanzahl` schätzen. Die Verwendung der „und"-Verknüpfung wird im Rahmen des Unterrichtskonzepts vorher nicht angesprochen, liegt aber bei dieser Aufgabenstellung intuitiv nahe.
- Zur Bestimmung des 80%-Bereichs um X=10 herum kann man die Häufigkeiten aus der kategorialen Auswertungstabelle addieren. Man kann aber auch ein Probierverfahren verwenden, bei dem man die Grenzen in der vorhergehend angegebenen Formel variiert. Auch ein solches Probierverfahren wird im Unterrichtskonzept vorher

nicht eingeführt. Die Verwendung der „und"-Verknüpfung und das Probierverfahren setzen einen kreativen Umgang mit der Software FATHOM voraus.

- Zur Beschreibung der Häufigkeitsverteilung in Worten muss man die Verteilung als Histogramm darstellen können. Im Idealfall vergleichen die Schülerinnen und Schüler die in den numerischen oder kategorialen Auswertungstabellen erhaltenen Ergebnisse im Sinn einer Kontrollstrategie stets mit der als Histogramm dargestellten Häufigkeitsverteilung.

Auf der inhaltlichen Ebene behandelt die Aufgabe ein Problem der Binomialverteilung. Über die Schätzaufgabe als Einstieg soll zunächst eine Erwartungshaltung aufgebaut werden: Eventuell wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des „erwarteten Mittelwerts" überschätzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen in Aufgabenteil a) beispielhaft für eine Binomialverteilung erkennen, dass man i. a. nicht exakt den „erwarteten Mittelwert" erhält, sondern dass es Abweichungen nach oben und unten gibt. Die Verteilung streut um den „Idealwert", der „Idealwert" selber tritt nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auf. Die Betrachtung der Verteilung als Ganzes wird mit den Umgebungen des „erwarteten Mittelwerts" sowie der Form der Verteilung inhaltlich vertieft. Als Eigenschaften der Verteilung sollen die Mittenbevorzugung mit einem Zentrum sowie der Abfall der Verteilung nach außen hin erkannt werden. Der Begriff der Binomialverteilung wird in der Aufgabe nicht verwendet, die Binomialverteilung wird aber inhaltlich auf verschiedenen Repräsentationsebenen vorbereitet.

Um das Erreichen der vielfältigen Ziele bei der Erarbeitung der Aufgabenstellung für alle Schülerinnen und Schüler zu gewährleisten, sind bei dieser Aufgabenstellung die Vorstellung und die Besprechung der verschiedenen Lösungswege im Gesamtkurs von großer Wichtigkeit.

Die weiteren Würfelaufgaben sind ähnlich aufgebaut: Stets wird die Festigung und Erweiterung der Simulationskompetenz verknüpft mit mehreren inhaltlichen Fragestellungen zur behandelten Problemstellung. Je nach Verlauf der Schülerarbeitsphase müssen die Aufgaben im Gesamtkurs mehr oder weniger ausführlich besprochen werden.

b) Die Simulations- und Fathomkompetenzen

Auf der Ebene der Simulations- und Fathomkompetenzen wird bei den Würfelaufgaben die Erstellung einer Computersimulation entlang der vier Schritte des Prozessmodells sowie die tabellarische und grafische Auswertung einer erzeugten Häufigkeitsverteilung gefestigt und geübt. Zu mindestens einer Würfelaufgabe soll ein Simulationsplan erstellt und besprochen werden.

Die Formelkompetenz wird erweitert durch die Einführung des neuen Zufallsgenerators `ganzeZufallszahl()` sowie durch verschiedene neue Befehle zur Definition einer Messgröße. Bei Würfelaufgabe a) kommt der Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` zur Bestimmung der Anzahl verschiedener Werte einer Merkmalsspalte hinzu, bei Aufgabe d) wird die `Wenn`-Bedingung eingeführt, spätestens bei Aufgabe e) wird die `und`-Verknüpfung als Beispiel einer logischen Verknüpfung benutzt.

Die Glücksspielaufgabe d) ließe sich einfacher auch als simultane Simulation programmieren. In der Anleitung wird aber bewusst eine sequentielle Simulation vorgegeben, um das erworbene Simulationsschema zu festigen (vgl. Kapitel 4.1.5). Bei der Wartezeitaufgabe e) muss das Schema zur Erstellung einer Simulation in FATHOM erweitert werden: Bereits für eine Einzelsimulation bis zum ersten Sechserpasch muss man mit dem Feld „Bis zur Bedingung" von „Messgrößen sammeln" arbeiten. Daher benötigt man für die wiederholte Durchführung dieser Simulation ein „Messgrößen von Messgrößen“, also drei Kollektionen.

Würfelaufgabe c) stellt exemplarisch die Möglichkeit vor, als Messgröße ein Ereignis zu definieren: Die als Messgröße vorgeschlagene Formel `Anzahl(wurf=6)≥1` liefert `wahr`, falls das Ereignis „mindestens eine Sechs“ eintritt, ansonsten liefert sie `falsch`. In der Kollektion „Messgrößen von Wuerfel“ kann man nun die relative Häufigkeit für das Ereignis „mindestens eine Sechs“ über den Anteil der Einträge mit `wahr` ermitteln. Bei allen anderen Würfelaufgaben wird die Messgröße als Zufallsgröße definiert.

Zusätzlich zu den in den Kurzanleitungen angegebenen Befehlen sollen die Schülerinnen und Schüler über die Demonstration durch den Lehrer weitere Werkzeugkompetenzen im Umgang mit der Software FATHOM erlernen. Hierzu gehören grundlegende Fertigkeiten wie eine strukturierte Anordnung der einzelnen FATHOM-Elemente auf dem Bildschirm oder die Übertragung der FATHOM-Elemente in Word, aber auch das Einzeichnen von statistischen Kennzahlen in die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung. Zum Ende der Würfelaufgaben bekommen die Schülerinnen und Schüler ein Merkblatt der erlernten FATHOM-Kommandos ausgeteilt, mit dem sie im weiteren Verlauf arbeiten sollen (vgl. Anhang, S. 277).

c) Die stochastischen Inhalte der Würfelaufgaben

Auf der inhaltlichen Ebene wird im Rahmen der Würfelaufgaben ein breiter Themenbereich erfasst:

Würfelaufgabe a)	Fünffacher Würfelwurf mit der Zufallsgröße „Anzahl verschiedener Zahlen“
Würfelaufgabe b)	60-facher Würfelwurf mit der Zufallsgröße „Anzahl an Sechsen“, Ereignis „genau 10mal sechs“, Binomialverteilung
Würfelaufgabe c)	Zweifacher Würfelwurf mit dem Ereignis „Mindestens eine Sechs“
Würfelaufgabe d)	Zweifacher Würfelwurf als Glücksspiel mit einer Gewinnvorschrift und der zugehörigen Zufallsgröße „Gewinn“, Erwartungswert des Gewinns
Würfelaufgabe e)	Wartezeit bis zur ersten Doppelsechs, Exponentialverteilung

Im Zentrum stehen hierbei die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie der Erwartungswert und die Verteilung einer Zufallsgröße. Verschiedenartige Aufgabenstellungen zum Umgang mit Häufigkeitsverteilungen sollen den Verteilungsbegriff vorbereiten. Die Schülerinnen und Schüler üben den Umgang mit den Häufigkeitsverteilungen und lernen die Formen der Binomialverteilung und der Exponentialverteilung kennen. Hierbei sind die Aufgaben so gestaltet, dass diese beiden Verteilungen explizit beschrieben werden sollen.

Bei Aufgabe c) werden vom konkreten Beispiel ausgehend die theoretischen Grundbegriffe Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis und Laplace-Wahrscheinlichkeit eingeführt. Für diese theoretischen Grundbegriffe wurde die Aufgabe c) gewählt, weil sie vom Schwierigkeitsgrad der theoretischen Lösung die leichteste der Würfelaufgaben ist. Die Aufgabe lässt sich einfach lösen über eine vollständige Auflistung des Ergebnisraums:

$$\text{Ergebnisraum}: \ E = \begin{matrix} \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{matrix}$$

Das Auszählen der Ergebnisse liefert eine Wahrscheinlichkeit von $P(E) = \frac{11}{36} = 0{,}306$.

Es ist allerdings zunächst nicht klar, dass bei dieser Darstellung des Ergebnisraums wirklich die Laplace-Annahme gerechtfertigt ist. So könnte man auch eine Darstellung wählen, in der z. B. die Ergebnisse (1,3) und (3,1) als ein einziges Ergebnis zusammengefasst werden.

Man hat hier ein erstes Beispiel, bei dem die Wahrscheinlichkeit sowohl über die Simulation als auch theoretisch bestimmt wird. Die Simulation kann hier als Kontrolle dienen, ob die theoretischen Überlegungen korrekt waren und die Wahl des geeigneten Laplace-Ergebnisraums beim Problem der Augensummen entscheiden (vgl. Müller 2005).

Bei den weiteren Würfelaufgaben sind die zugehörigen theoretischen Berechnungen schwieriger. Insbesondere die Aufgabe a) zur Anzahl verschiedener Zahlen beim fünffachen Würfelwurf sowie die Aufgabe e) zur Wartezeit lassen sich mit theoretischen Mitteln im Schulunterricht nur schwer bearbeiten (zu Würfelaufgabe e) siehe Henze 2001, S. 5 ff).

d) Die unterrichtliche Einbettung der Würfelaufgaben

Für die unterrichtliche Gestaltung bietet es sich an, die Behandlung der Würfelaufgaben in drei Abschnitte aufzuteilen:

Die ersten beiden Würfelaufgaben sollten direkt im Anschluss an das Einstiegsbeispiel behandelt werden, um die im Einstiegsbeispiel erworbenen Simulations- und Fathom-kompetenzen sowie die Formulierung eines Simulationsplans zu festigen. Die beiden Aufgaben sollten nach der Bearbeitung jeweils ausführlich im Gesamtkurs vorgestellt werden, um noch vorhandene Probleme im Umgang mit Computersimulationen zu besprechen und zu beheben.

In einem zweiten Abschnitt lassen sich in Verbindung mit der Würfelaufgabe c) grundlegende stochastische Inhalte einführen: Am Beispiel der Würfelaufgabe c) lernen die Schülerinnen und Schüler die Verbindung des theoretischen und des experimentellen Vorgehens kennen. Der theoretische und der experimentelle Zugang ergänzen sich gegenseitig. Beide Zugänge werden ausführlich behandelt und gegenübergestellt. Hierbei werden zum einen die Laplace-Wahrscheinlichkeit und weitere theoretische Grundbegriffe eingeführt (vgl. Kapitel 4.2.1). Weiter bietet es sich an dieser Stelle an, den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit zu vertiefen und das Gesetz der großen Zahl gemäß der Darstellung in Kapitel 4.4.2 zu besprechen. Mit dem Werfen der Reißzwecke kann man ein Beispiel zeigen, bei dem die Wahrscheinlichkeit nur frequentistisch und nicht über einen Laplace-Ergebnisraum bestimmt werden kann.

In einem dritten Abschnitt werden dann die Würfelaufgaben d), e) und f) zur Erweiterung der Simulations- und Fathom-Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet.

4.4.4 Die gemischten Aufgaben

Als Abschluss des Simulationsvorkurses soll eine längere Schülerarbeitsphase stehen, in der den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit gegeben wird, verschiedene stochastische Problemstellungen selbstständig mittels Computersimulationen zu lösen und die Ergebnisse in der Klasse zu präsentieren. Jede Schülergruppe soll mindestens drei von acht zur Verfügung stehenden Aufgaben auswählen und bearbeiten.

Bei den Aufgaben handelt es sich um anwendungsorientierte Aufgabenstellungen, wie sie typischerweise auch in Schulbüchern vorkommen: Die Aufgaben sind jeweils über ein eindeutig bestimmtes stochastisches Modell lösbar, welches von den Schülerinnen und Schülern gefunden und entlang des vierschrittigen Prozessmodells geeignet als Computersimulation modelliert werden muss.

Die Aufgabenstellungen sind abgesehen von dem Sammelbildproblem solche Problemstellungen, die im weiteren Verlauf des Kurses aufgegriffen und theoretisch behandelt werden können. Die Aufgaben dienen somit auch als Ausblick auf den weiteren Verlauf des Kurses. Es wurden Aufgaben gewählt, welche das Interesse an einer theoretischen Behandlung und damit die Motivation für den weiteren Verlauf des Kurses wecken sollen. Zum motivierenden Charakter der Aufgaben tragen unterschiedliche Eigenschaften bei: Zum einen gibt es Aufgaben mit einem authentischen Anwendungsbezug, wie z. B. das Sammelbildproblem, die beiden Gewinnspielaufgaben und die Ferienjob-Aufgabe. Weiter gibt es Aufgaben, deren Ergebnis intuitiv schwer einzusehen und damit erstaunlich ist, wie die Aufgabe zum Geburtstagsproblem oder die Goldmünzen-Aufgabe. Als drittes gibt es Aufgaben mit Rätsel-Charakter, der z. B. bei der Entenjagd-Aufgabe deutlich ausgeprägt ist.

Die Aufgaben sind in drei verschiedene Aufgabengruppen eingeteilt: Gruppe A enthält zwei Aufgaben, die sich relativ eng an den im vorherigen Unterricht behandelten Beispielen orientieren. In der Aufgabengruppe B sind zwei anspruchsvolle Gewinnspielspielaufgaben zusammengefasst. Die Aufgaben aus Gruppe C stellen deutlich höhere Ansprüche an die Modellierung der jeweiligen stochastischen Situation als Computersimulation und an die Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilungen. Die Schülerinnen und Schüler müssen aus jeder Aufgabengruppe jeweils mindestens eine Aufgabe bearbeiten.

Aufgabengruppe A

Multiple-Choice-Test

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 10 Fragen. Jede Frage hat vier mögliche Antworten, von denen jeweils nur eine richtig ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens fünf Fragen richtig zu beantworten, wenn man nichts gelernt hat und somit die Antworten zufällig ankreuzt?
b) Wie viele Fragen wird ein Schüler im Mittel richtig raten, wenn er zufällig auswählt?
c) Der Prüfer möchte, dass man seinen Test durch alleiniges Raten nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 1% bestehen kann. Ab wie viel richtig beantworteten Fragen darf er seine Prüflinge dann erst bestehen lassen?

Ferienjob

Sie wollen in den Ferien arbeiten und schreiben hierfür Bewerbungen. Aus Erfahrung schätzt man, dass die Chance, einen Ferienjob zu bekommen, pro Bewerbung bei 25 Prozent liegt.

a) Welche Erfolgsaussichten für einen Ferienjob haben Sie, wenn Sie vier Bewerbungen schreiben?
b) Wie viele Bewerbungen müssen Sie mindestens schreiben, damit Ihre Erfolgsaussichten auf einen Ferienjob bei über 90 Prozent liegen?

Goldmünze

Der königliche Münzpräger packt je 100 Goldmünzen in eine Kiste. Er erinnert sich zurück an seine Statistikausbildung und ist der Meinung, dass wenn er in jeder Kiste eine Goldmünze durch eine falsche Münze austauscht, sein Betrug nie auffallen wird, da es viel zu unwahrscheinlich ist, dass der König beim Inspizieren ausgerechnet die falsche Goldmünze erwischt. Der Münzpräger weiß nämlich, dass der König zu faul ist, sich die gesamte Münzladung anzusehen.

Der Münzpräger liefert 100 Kisten. Der König entnimmt jeder Kiste genau eine Münze.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Betrug des Münzprägers entdeckt?

b) Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn der Münzpräger in jeder Kiste zwei Goldmünzen durch je eine falsche Münze austauscht?

Aufgabengruppe B

Urnenziehung

Bei einem Glücksspiel befinden sich vier schwarze, drei weiße und eine rote Kugel in einer Urne. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.

Sie haben die Wahl zwischen zwei verschiedenen Spielregeln:

Spiel A: Sie gewinnen 3,- €, falls mindestens einmal die rote Kugel gezogen wird.

Spiel B: Sie gewinnen 5,- €, falls zweimal eine weiße Kugel gezogen wird.

Der Einsatz beträgt jeweils 1,- €.

Welches der beiden Spiele ist günstiger?

Münzspiel

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Der Einsatz beträgt 2,- €. Bei zweimal Wappen erhält der Spieler 3,- € zurück, bei dreimal Wappen erhält man 5,- € zurück.

a) Welche unterschiedlichen Nettogewinne können auftreten?

b) Bestimmen Sie zu jedem möglichen Nettogewinn die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Nettogewinn auftreten kann.

c) Welchen mittleren Nettogewinn pro Spiel kann man bei diesem Glücksspiel auf lange Sicht erwarten?

Aufgabengruppe C

Entenjagd

10 Jäger schießen gleichzeitig auf 10 aufsteigende Enten. Jeder Jäger sucht sich seine Zielente rein zufällig und ohne Absprache mit den anderen Jägern aus und trifft diese Ente dann auch ganz sicher.

Wie viele Enten überleben bei der geschilderten Situation im Mittel?

Geburtstagsproblem

Ein Mathekurs besteht aus 23 Schülern. Nehmen Sie an, dass alle Schüler unabhängig voneinander Geburtstag haben. Hierbei soll jeder der 365 Tage des Jahres mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Geburtstag auftreten können.

Wie wahrscheinlich ist es dann, dass mindestens zwei der Schüler am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben?

Sammelbildproblem

Eine Süßwarenfirma hat sich entschieden, ihren Schokoriegeln eine Sammelbildserie von insgesamt 12 Zeichentrickfiguren aus Asterix und Obelix beizulegen. Gehen Sie davon aus, dass jede Zeichentrickfigur mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem Schokoriegel enthalten ist.

a) Wie viele Schokoriegel muss man im Mittel kaufen, bis man eine vollständige Serie hat?

b) Wie viele Schokoriegel muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% alle Zeichentrickfiguren zu erhalten?

a) Die Unterrichtsgestaltung

Nachdem im bisherigen Unterricht der Aufbau der Simulationskompetenz über teilweise eng angeleitete Aufgaben eine große Rolle gespielt hat, ergibt sich nun die Gelegenheit zur Gestaltung einer längeren selbstständigen Schülerarbeitsphase:

Jede Schülergruppe soll sich aus jeder der drei Aufgabengruppen mindestens eine Aufgabe auswählen und diese selbstständig bearbeiten. Die Möglichkeit zur Auswahl von mindestens drei Aufgaben aus dem gegebenen Aufgabenpool unterschiedlich komplexer Problemstellungen erhöht die Schülerorientierung, ermöglicht eine innere Differenzierung je nach Leistungsfähigkeit der Arbeitsgruppen und kann somit zum Gelingen der selbstständigen Schülerarbeitsphase zum Abschluss des Simulationsvorkurses beitragen. Zu den Aufgabenstellungen existieren meistens unterschiedlich schwere Fragestellungen, so dass auch Teillösungen möglich sind. Zu jeder erstellten Simulation soll ein Simulationsplan formuliert werden. Im Anschluss an die Erarbeitung der Simulationen stellt jede Gruppe eine Aufgabe in Form einer kurzen Präsentation vor. Die zugehörenden Simulationspläne werden dem gesamten Kurs als Ergebnissicherung zur Verfügung gestellt.

Die Bearbeitung der gemischten Aufgaben soll somit sehr stark in die Hände der Schülerinnen und Schüler gelegt werden. Als Hilfsmittel steht ein Merkblatt mit den erarbeiteten FATHOM-Kommandos zur Verfügung (vgl. Anhang, S. 277). Die Schülerinnen und Schüler erhalten zusätzlichen Freiraum durch die Auswahlmöglichkeiten der Aufgaben und können somit weitestgehend selbst bestimmt arbeiten.

b) Die Simulationskompetenz und die stochastischen Inhalte der einzelnen Aufgaben

In Bezug auf die Simulationskompetenz handelt es sich bei den gemischten Aufgabenstellungen um eine Anwendungs- und Festigungsphase im Umgang mit Computersimulationen. Damit sind die Aufgaben gut für eine längere Schülerarbeitsphase geeignet (vgl. Hole 1997). Die ausgewählten Problemstellungen sollen von den Schülerinnen und Schülern ohne weitere Hilfen bearbeitet und mit Simulationen gelöst werden. Die hierfür benötigten Werkzeuge und Kommandos wurden vorher eingeführt und müssen jetzt flexibel eingesetzt werden.

Im Rahmen dieser Schülerarbeitsphase wird das Vier-Schritt-Verfahren zur Erstellung einer Computersimulation gefestigt und geübt. Im Vergleich zu den vorher behandelten Würfelaufgaben ist allerdings der Modellierungsanteil deutlich erhöht. Zum einen existieren zu den einzelnen Aufgaben keine Kurzanleitungen mehr. Weiter sind die Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der Stochastik gewählt, so dass bei jeder Aufgabe eine andere Umsetzung des Experiments als Computersimulation entlang den Schritten des Prozessmodells gefunden werden muss.

Die stochastischen Inhalte und die im Einzelnen benötigten Simulationskompetenzen der Aufgaben werden im Folgenden vorgestellt:

Aufgabe „Multiple-Choice-Test“

Inhaltlich ist die Aufgabe zum Multiple-Choice-Test ähnlich zur Einstiegsaufgabe in die Unterrichtseinheit. Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit n = 10 und der Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,25. Bei Teil a) wird ein Ereignis abgefragt, bei Teil b) geht es um den Erwartungswert der Anzahl der richtig beantworteten Items. Teil c) ist die Umkehraufgabe zu Teil a), hier muss man zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit das zugehörige Ereignis suchen. Alle drei Aufgabenteile können über den Umgang mit der Häufigkeitsverteilung der Anzahl der richtig beantworteten Items gelöst werden.

Zur Modellierung des Zufallsexperiments kann man z. B. den Zufallsgenerator `ZufallsWahl("erfolg","misserfolg","misserfolg","misserfolg")` wählen. Dies stellt einen abstrakten Modellierungsschritt dar, den die Schülerinnen und Schüler selbstständig finden müssen. In allen weiteren Schritten läuft die Simulation analog zum Einstiegsbeispiel.

Aufgrund der großen Ähnlichkeit der Aufgabenstellung zur ausführlich behandelten Einstiegsaufgabe sollte dieses Problem keine hohen Schwierigkeiten aufweisen. Lediglich die Umsetzung des Textes von Aufgabenstellung c) in die zugehörige Auswertung der Häufigkeitsverteilung kann problematisch sein.

Aufgabe „Ferienjob“

Inhaltlich handelt es sich bei dieser Aufgabe um einen mehrstufigen Zufallsversuch, wobei die einzelnen Stufen unabhängig voneinander sind. Bei beiden Teilaufgaben wird das Ereignis „mindestens eine erfolgreiche Bewerbung“ betrachtet. Bei Aufgabenteil b) ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis allerdings vorgegeben und es wird nach der Anzahl der hierfür nötigen Bewerbungen gefragt. Es handelt sich um eine typische Aufgabenstellung zu mehrstufigen Zufallsversuchen, die im weiteren Verlauf des Kurses auch theoretisch aufgegriffen wird.

Zur Modellierung des Zufallsexperiments kann der gleiche Zufallsgenerator wie bei der Multiple-Choice-Test-Aufgabe verwendet werden. Wählt man als Messgröße die Anzahl an Erfolgen, so lässt sich Aufgabenteil a) durch die Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilung lösen. Aufgabenteil b) kann mit Hilfe der Computersimulation nur über systematisches Probieren gelöst werden: Man erhöht sukzessive die Zahl der Bewerbungen und führt die Simulation dann komplett aus. Wenn die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg größer als 90% wird, so hat man die gesuchte Anzahl an Fragen gefunden.

Aufgabenstellung a) ist durch den vorherigen Unterricht gut vorbereitet, verlangt allerdings auch die Modellierung einer Bewerbung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$. Das Probierverfahren bei Aufgabenstellung b) ist für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt und stellt eine erhöhte Anforderung dar.

Aufgabe „Goldmünze“

Auch hier handelt es sich um einen mehrstufigen Zufallsversuch, wobei die einzelnen Stufen unabhängig voneinander sind. Bei beiden Aufgabenteilen wird das Ereignis „mindestens eine falsche Münze“ betrachtet. Bei Teil a) beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Münze in jeder der 100 Kisten 0,01, bei Teil b) in jeder der 100 Kisten 0,02. Man kann das Zufallsexperiment auch als Bernoulli-Kette auffassen mit $n = 100$ und $p = 0{,}01$ bzw. $p = 0{,}02$.

Zur Modellierung des Testens einer Münzkiste kann man in beiden Aufgabenteilen den Zufallsgenerator `GanzeZufallszahl(1;100)` benutzen. Bei Teil a) interpretiert man z. B. die „1“ als falsche Münze, bei Teil b) interpretiert man z. B. die Zahlen ≤ 2 als falsche Münzen. Damit simuliert man die Erfolgswahrscheinlichkeiten $p = 0{,}01$ bzw. $p = 0{,}02$.

Bei dieser Aufgabenstellung stellt die Modellierung des einzelnen Zufallsexperiments die zentrale Schwierigkeit dar. Hier muss von der realen Situation ausgehend zunächst das stochastische Modell gefunden werden und dann in FATHOM-Kommandos umgesetzt werden.

Aufgabe „Urnenziehung"

Die Aufgabe zur Urnenziehung ist eine typische Glücksspielaufgabe, bei der es um den Vergleich zweier Erwartungswerte geht. Als Messgröße kann man die Zufallsgröße „Nettogewinn" (Gewinn – Einsatz) wählen. Löst man die Aufgabe theoretisch, so stellt man fest, dass beide Spielregeln zum gleichen Erwartungswert des Gewinns führen.

Zur Simulation dieser Aufgabenstellung kann man zunächst eine Kollektion erstellen, in der das zweimalige Ziehen der Kugeln aus der Urne mit dem Befehl `Zufallswahl("s","s","s","s","w","w","w","r")` in der Merkmalsspalte *Farbe* simuliert wird. Hierzu kann man zwei verschiedene Messgrößen definieren mit den Formeln

$$\texttt{Wenn(Anzahl(Farbe="r")}\geq\texttt{1))}\begin{cases}2\\-1\end{cases} \quad \text{und}$$

$$\texttt{Wenn(Anzahl(Farbe="w")=2))}\begin{cases}4\\-1\end{cases}.$$

Führt man das Experiment 1000 mal aus, so erhält man zu jeder der beiden Messgrößen eine Häufigkeitsverteilung. Hiervon soll der jeweilige Mittelwert bestimmt werden.

Der Aufgabentyp ist bereits durch die Würfelaufgabe d) vorbereitet. Diese Aufgabe ist allerdings durch die zwei angegebenen Spielstrategien von der Problemstellung her komplexer, so dass es bei der Umsetzung in die Simulation im Vergleich zu den bislang behandelten Problemstellungen eines erheblichen Transfers bedarf.

Bei der Auswertung der Simulation tritt das Problem auf, dass beide Erwartungswerte in der Theorie gleich groß sind, was sich aber aufgrund des Schätzcharakters einer Simulation nicht exakt nachweisen lässt. Erst eine hohe Anzahl von Wiederholungen und eine mehrfache Durchführung der Simulation können zur Vermutung der Gleichwertigkeit beider Spielstrategien führen. Die Aufgabe macht die Grenzen der Simulation als Lösungswerkzeug stochastischer Problemstellungen deutlich und motiviert daher die Suche nach einem theoretischen Verfahren, mit dem man die Erwartungswerte exakt berechnen kann.

Aufgabe „Münzspiel"

Die Aufgabe zum Münzspiel ist eine weitere typische Glücksspielaufgabe. Die Aufgabe ist gestuft aufgebaut, so dass zunächst nur die möglichen Werte der Zufallsgröße „Nettogewinn" (Gewinn – Einsatz) angegeben werden sollen. Dann erst sollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Erwartungswert der Zufallsgröße berechnet werden.

Da es bei dieser Aufgabe drei mögliche Ergebnisse gibt, benötigt man für die Definition der Messgröße „Nettogewinn" einen geschachtelten `Wenn()`-Befehl. Der Befehl kann folgendermaßen aussehen:

$$\texttt{Wenn(Anzahl(Wurf="Wappen")=3))}\begin{cases}3\\ \texttt{Wenn(Anzahl(Wurf="Wappen")=2))}\begin{cases}1\\-2\end{cases}\end{cases}$$

Die nach dem Sammeln der Messgrößen entstehende Häufigkeitsverteilung wird grafisch und rechnerisch ausgewertet.

Wie schon die vorherige Aufgabe ist auch diese Aufgabe durch die Würfelaufgabe d) vorbereitet. Der geschachtelte `Wenn`-Befehl stellt in dieser Aufgabe allerdings einen anspruchsvollen Transfer dar, der von den Schülerinnen und Schülern geleistet werden muss.

Aufgabe „Entenjagd“

Die Aufgabe ist eine stochastische Problemstellung, bei der zunächst ein geeignetes stochastisches Modell entwickelt und als Simulation umgesetzt werden muss: In der Aufgabe ist bereits ein Teil der Modellierung vorgegeben, nämlich dass jeder Jäger unabhängig von den anderen Jägern schießt und mit Sicherheit trifft. Die Auswahl der Enten durch die Jäger ist nicht durch die Aufgabenstellung festgelegt. Im einfachsten stochastischen Modell wird jede Ente mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt.

In der Simulation kann man z. B. den zehn Enten die Zahlen eins bis zehn zuordnen und den Schuss eines jeden Jägers mit `GanzeZufallszahl(1;10)` simulieren. Da nur Zahlen von eins bis zehn erzeugt werden, wird stets eine Ente getroffen. Jede Ente ist gleich wahrscheinlich und die zehnfache Hintereinanderausführung dieses Befehls erfolgt unabhängig voneinander. Man erhält eine Tabelle mit zehn Einträgen.

Neben diesem ersten Schritt kann auch die Modellierung der Zufallsgröße ein Problem darstellen. Man muss nun herausbekommen, wie viele der zehn Enten überlebt haben bzw. getroffen wurden. Die Anzahl der verschiedenen Einträge gibt an, wie viele Enten getroffen wurden. Die zehn Einträge der Tabelle können somit ausgewertet werden über die Definition einer Messgröße *Tote_Enten* mit Hilfe des Befehls `AnzVerschiedeneWerte()`, der in der Würfelaufgabe a) eingeführt wird.

Diese Aufgabe stellt sowohl im ersten Schritt des Prozessmodells als auch im zweiten Schritt bei der Definition der Messgröße hohe Anforderungen bzgl. der Modellierung. Die Aufgabenstellung ist nicht vorbereitet, so dass die Lösung über die Computersimulation eines flexiblen Einsatzes der bisher erlernten FATHOM-Strukturen bedarf.

Aufgabe „Geburtstagsproblem“

Die Aufgabe zum Geburtstagsproblem stellt eine typische Problemstellung des gymnasialen Oberstufenkurses dar (vgl. Barth und Haller, 1983, S. 97; H. Griesel, H. Postel et al. 2003, S. 134). Die Aufgabe ist eine für Schülerinnen und Schüler interessante Problemstellung, da die Situation in Schulklassen tatsächlich nachvollzogen werden kann. Ferner ist das Ergebnis überraschend, weil die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage bereits bei 23 Personen über 50% liegt (vgl. Strick 2005).

Das stochastische Modell ist im Aufgabentext bereits komplett vorgegeben, da jeder Tag des Jahres als gleichwahrscheinlich für einen Geburtstag angenommen werden soll.

Im ersten Schritt der Simulation müssen die Geburtstage der 23 Schüler simuliert werden. Man kann hierfür in einer Kollektion „Geburtstagsproblem“ ein Merkmal „Geburtstag“ mit dem Zufallsgenerator `GanzeZufallszahl(1;365)` definieren. Nun fügt man der Kollektion 23 Fälle hinzu, welche den Geburtstagen der 23 Schüler entsprechen. Hierbei werden die 365 Tage des Jahres vom 1. Januar ab durchnummeriert. Im zweiten Schritt der Simulation kann man z. B. eine Messgröße *Anzahl_Verschiedene_Geburtstage* mit Hilfe der Formel `AnzVerschiedeneWerte()` definieren. Die Messgröße zählt, wie viele verschiedene Tage bei den 23 Geburtstagen aufgetreten sind. Bei 23 verschiedenen Tagen haben alle an verschiedenen Tagen Geburtstag, bei weniger als 23 verschiedenen Tagen müssen mindestens zwei Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben. Nach dem Sammeln der Messgrößen im dritten Schritt kann man die Häufigkeitsverteilung im vierten Schritt der Simulation auswerten. Trägt man die Häufigkeitsverteilung als Histogramm auf, so entspricht der Histogrammbalken zu X=23 dem Ereignis, dass alle 23 Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Alle übrigen Histogrammbalken zusammen entsprechen dem Ereignis, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag

Geburtstag haben. Bereits hier kann man abschätzen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei etwa 50% liegen muss. Den Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit kann man ferner über eine kategoriale Auswertungstabelle oder über die Formel `Anzahl(Anzahl_Verschiedene_Geburtstage≤22)/Gesamtanzahl` in einer numerischen Auswertungstabelle berechnen.

Die Modellierung der Situation im ersten Schritt der Simulation ist unproblematisch, da das stochastische Modell bereits vorgegeben ist. Die Definition der Messgröße und die Interpretation der entstehenden Häufigkeitsverteilung in den Schritten 2 und 4 der Simulation laufen ähnlich wie beim Entenjagd-Problem. Bei der Definition der Messgröße muss man die Idee haben, dass man mit dem Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` eine Aussage über die Anzahl der verschiedenen Geburtstage der 23 Personen treffen kann. Bei der Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilung muss man die möglichen Werte der Messgröße und damit die verschiedenen Säulen des Histogramms der Häufigkeitsverteilung geeignet interpretieren können. Beide Schritte sind von der Modellierung sehr anspruchsvoll. Ein Vergleich der über die Auswertungsformel erhaltenen Lösung mit der grafischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung ist im Sinn einer Kontrollstrategie aufgrund des erstaunlichen Ergebnisses wichtig.

Aufgabe „Sammelbildproblem“

Die Aufgabe zum Sammelbildproblem stellt ein Wartezeitproblem dar. Die Aufgabe ist interessant und motivierend durch ihre Anwendungsorientierung. Sie lässt sich mit theoretischen Berechnungen in der Schule nur schwer lösen und geht somit über den herkömmlichen Aufgabenkanon für die gymnasiale Oberstufe hinaus. Man kann die Aufgabe noch erweitern, wenn man davon ausgeht, dass die Bilder mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten vorkommen, so dass z. B. die Asterix-Bilder seltener auftreten als die anderen Bilder.

Ungewohnt und damit für die Schülerinnen und Schüler schwierig ist bei dieser Aufgabe die Realisierung des ersten Schrittes des Prozessmodells in FATHOM: Zunächst kann jedes gefundene Sammelbild mit dem Zufallsgenerator `GanzeZufallszahl(1;12)` direkt als Messgröße *Sammelbild* in einer leeren Kollektion definiert werden. Mit „Messgrößen sammeln“ wird das Ziehen eines Sammelbildes so lange durchgeführt, bis alle zwölf Sammelbilder auftreten. Hierfür muss im Info-Fenster der Messgrößenkollektion das Feld „Bis zur Bedingung“ mit der Bedingung `AnzVerschiedeneWerte(Sammelbild)=12` kombiniert werden. Erst hier ist der erste Schritt der Simulation im Sinn des Prozessmodells abgeschlossen. Über „Messgrößen von Messgrößen“ wird die Simulation dann wie üblich fortgesetzt.

Das Sammelbildproblem ist vorbereitet durch die Würfelaufgabe e). Allerdings ist der Aufbau der Simulation bei beiden Aufgaben ungewohnt, da bereits im ersten Schritt der Simulation Messgrößen in Verbindung mit einer Abbruchbedingung gesammelt werden müssen. Bei der Sammelbildaufgabe muss diese Abbruchbedingung noch dazu mit dem Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` kombiniert werden. Die Schwierigkeit liegt bei dieser Aufgabe in der ungewohnten Kombination komplexer Fathom-Komponenten und -Befehle.

4.5 Ein Zeitplan für den Ablauf des Simulationsvorkurses

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über den geplanten zeitlichen Verlauf des Simulationsvorkurses:

Thema	Inhalte	Stunden
1. Einstieg in Simulationen am Beispiel „Multiple-Choice-Test“	• Diskussion der Problemstellung „Multiple-Choice-Test“ • Lösen des Problems über Münzwurf- und Computersimulation • Einführung in Computersimulationen mit FATHOM • Erarbeitung des vierschrittigen Prozessmodells zur Erstellung einer Simulation, Simulationsplan	3
2. Würfelprobleme, Stochastische Grundbegriffe, Gesetz der großen Zahl	• Festigung und Erweiterung der FATHOM-Kompetenzen am Beispiel der Würfelprobleme • Erarbeitung stochastischer Grundbegriffe • Behandlung des Gesetzes der großen Zahl am Münzwurfbeispiel (realer Münzwurf und Simulationsumgebungen) • Genauigkeitsabschätzungen bei Simulationen	6
3. Selbstständige Simulation verschiedener stochastischer Probleme	• Modellierung anwendungsorientierter stochastischer Problemstellungen aus verschiedenen stochastischen Bereichen • Gestaltung als arbeitsteiliger Gruppenunterricht • Vorstellung der erarbeiteten Simulationen	5

Tab. 4.1: Geplanter zeitlicher Verlauf des Simulationsvorkurses.

Wie bereits bei der Erläuterung der unterrichtlichen Einbettung der Würfelaufgaben vorgeschlagen (siehe Kapitel 4.4.3, S. 85), wird in dieser Tabelle die ausführliche Behandlung des Gesetzes der großen Zahl in die Arbeitsphase zu den Würfelaufgaben integriert.

5 Die empirischen Untersuchungen: Untersuchungsfragen und Untersuchungsinstrumente

5.1 Die Untersuchungsfragen

I) Aus dem Design und der didaktischen Analyse des Simulationsvorkurses ergeben sich die folgenden Fragestellungen:

a) Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz

- Wie entwickelt sich das Verständnis für das vierschrittige Prozessmodell zur Erstellung einer Computersimulation?
- Wie weit sind die Schülerinnen und Schüler am Ende des Simulationsvorkurses in der Lage, die behandelten FATHOM-Komponenten und -befehle entlang dem vierschrittigen Prozessmodell flexibel zur Erstellung von Computersimulationen einzusetzen?
- Welche Kompetenzen beim Erstellen einer Computersimulation sind besonders schwer zu erlernen?

b) Ebene der stochastischen Kompetenz

- Welche stochastischen Grundbegriffe und Inhalte können im Rahmen des Simulationsvorkurses erfolgreich vermittelt werden?
- Welches Verständnis und welche Fehlvorstellungen für die Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten mittels relativer Häufigkeiten zeigen sich im Rahmen des Simulationsvorkurses?
- Wie weit können im Rahmen des Simulationsvorkurses Modellierungskompetenzen angeregt werden?
- Wie weit trägt der Simulationsvorkurs zu einem intuitiven Verständnis für stochastische Prozesse und Begriffe bei?

c) Ebene der Schülereinstellungen – Motivation und Interesse

- Welche Einstellung entwickeln die Schülerinnen und Schüler im Verlauf des Simulationsvorkurses in Bezug auf die intensive Verwendung der Software FATHOM zur Erstellung von Computersimulationen?
- Wie werden die anwendungsorientierten und teilweise interpretationsbezogenen Aufgabenstellungen von den Schülerinnen und Schülern angenommen?

d) Ebene der Unterrichtsmethodik – Selbstständige Gruppenarbeitsphasen am Computer

- In welcher Form gelingt das selbstständige Lernen und Arbeiten am Computer in den einzelnen Phasen des Simulationsvorkurses?

II) Quer zu den auf die Ziele der Unterrichtseinheit bezogenen Fragestellungen ergeben sich im Rahmen der Design-Research-Methode die Fragen nach dem Gesamtkonzept und den zugehörigen Unterrichtsmaterialien:

- Wie weit sind die vorhandenen Unterrichtsmaterialien zur Erreichung der Ziele der Unterrichtseinheit geeignet? Wo liegen Verbesserungsmöglichkeiten?

- Wie gut funktioniert das Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit? Welche Planungsentscheidungen tragen zum Gelingen bei? Wo liegen weitere Entwicklungsmöglichkeiten?

5.2 Die Untersuchungsinstrumente

In Bezug auf den Simulationsvorkurs sind im Rahmen der Hauptuntersuchung die folgenden Materialien entstanden, welche bei der rückblickenden Analyse Berücksichtigung finden sollen:

Der Eingangstest und der Ausgangstest

Der Eingangstest und der Kompetenztest im Anschluss an den Simulationsvorkurs wurde in beiden beteiligten Kursen geschrieben (vgl. Kapitel 7.1). Der Kompetenztest wird im Folgenden stets als „Ausgangstest“ (für den Simulationsvorkurs) bezeichnet. Beide Tests wurden nicht anonym durchgeführt, da sich die Schülerinnen und Schüler auf Nachfrage bereit erklärt hatten, ihre Namen anzugeben. Beide Tests haben in großen Teilen inhaltsgleiche oder ähnliche Items.

Der Eingangs- und der Ausgangstest können zur Beantwortung der Untersuchungsfragen zur stochastischen Kompetenz herangezogen werden. Die Tests erheben konkrete stochastische Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler vor und nach Durchführung des Simulationsvorkurses. Sie enthalten Aufgaben zu den Grundbegriffen der Stochastik wie z. B. dem Wahrscheinlichkeitsbegriff, dem Gesetz der großen Zahl oder zur Laplace-Wahrscheinlichkeit, Aufgaben zum intuitiven stochastischen Verständnis und Aufgaben zur Interpretation von Histogrammen. Der Eingangstest enthält zusätzlich eine Reihe von Ankreuzitems zum stochastischen Vorwissen der Schülerinnen und Schüler.

Die Einstellungsbefragung im Anschluss an den Simulationsvorkurs

In beiden Kursen der Hauptuntersuchung wurde im Anschluss an den Simulationsvorkurs eine anonyme Einstellungsbefragung durchgeführt (vgl. Anhang, S. 303):

Zu Beginn werden persönliche Daten wie Geschlecht und Computerkompetenzen erhoben. Im Hauptteil enthält die Einstellungsbefragung Items zum Konzept des Simulationsvorkurses, zur Motivation in Verbindung mit dem Computereinsatz und den gewählten Aufgabenstellungen, zum Unterrichtsmaterial, zur Unterrichtsmethodik sowie zur Selbsteinschätzung des Lernerfolgs. Beim überwiegenden Teil der Items handelt es sich um ein geschlossenes Aufgabenformat zum Ankreuzen mit einer fünfstufigen Ratingskala (z. B. 1 = “sehr gut“, 2 = gut“, 3 = „mittel“, 4 = „schlecht“, 5 = „sehr schlecht“). Einige Items sind in einem offenen Antwortformat formuliert. Hier werden Probleme im Umgang mit der Software, Verbesserungsvorschläge zu den Materialien, sowie Bewertungen und Verbesserungsvorschläge zum Unterrichtskonzept erfragt.

Die Einstellungsbefragung soll ein Bild des Unterrichtskonzepts aus Schülerperspektive liefern. Damit lässt sich die Einstellungsbefragung teilweise den Untersuchungsfragen auf der Ebene der Schülereinstellung zuordnen. Weiter lassen sich aus der Schülerbefragung aber auch Aussagen zum Gesamtkonzept und zu den Unterrichtsmaterialien ableiten. Insbesondere die offene Frage nach Verbesserungsmöglichkeiten des Unterrichtskonzepts soll Hinweise auf Probleme und zu weiteren Entwicklungsmöglichkeiten des Konzepts geben.

Die Unterrichtsprotokolle

Die Unterrichtsstunden des Simulationsvorkurses sind in dem vom Autor unterrichteten Kurs A komplett von Studierenden der Universität Kassel im Rahmen schulpraktischer Studien protokolliert worden. Ein Beispiel eines solchen Unterrichtsprotokolls findet sich im Anhang (S. 299). Die zwei anwesenden Studierenden haben sich beide während der Unterrichtsstunden Notizen gemacht. Jeweils ein Studierender hat dann den vorliegenden elektronischen Protokollbogen für eine Unterrichtsstunde oder eine Doppelstunde zeitnah auf Basis der Notizen ausgefüllt.

Der Aufbau und der Inhalt der Unterrichtsprotokolle gehen über eine einfache chronologische Protokollierung des Unterrichtsgeschehens hinaus. Der elektronische Protokollbogen hat folgende Grundstruktur:

- *Kopf des Protokolls*: Allgemeine Informationen zur Stunde und eine stichwortartige Beschreibung der Inhalte.
- *Teil A – Unterrichtsprotokoll*: Chronologische Auflistung der Aktivitäten in Tabellenform ergänzt durch das Tafelbild und eine Beschreibung der Softwareverwendung.
- *Teil B – Beobachterkommentare:* Die Bebachter sollen hier zu spezifischen Themenbereichen (z. B. Verständnisschwierigkeiten, besondere Schülerbeiträge, Umgang der Schülerinnen und Schüler mit dem Computer) auffällige Beobachtungen schildern.
- *Teil C – Lehrerkommentare:* Hier werden Anmerkungen der Lehrperson zu Besonderheiten der Unterrichtsstunde aufgenommen.

Die Unterrichtsprotokolle können zur Beantwortung der Untersuchungsfragen auf der Ebene der Unterrichtsmethodik herangezogen werden. Weiter sollen aber durch die genaue Dokumentation des unterrichtlichen Geschehens auch Schülerschwierigkeiten auf inhaltlicher Ebene wie auch beim Umgang mit der Software FATHOM identifiziert werden. Durch die Protokolle erhält man ein sehr genaues Bild des unterrichtlichen Geschehens, so dass man hierüber Aussagen zum Gesamtkonzept treffen kann.

Die Aufzeichnungen der Partnerarbeit am Computer

Mit einer speziellen Computersoftware („Camtasia“) kann man die verbale Kommunikation und den Bildschirm der Computerarbeitsphasen simultan als Video aufzeichnen. Diese Technik wurde bei der Hauptuntersuchung in dem vom Verfasser geleiteten Kurs A eingesetzt. In diesem Kurs haben sich vier Zweiergruppen bereit erklärt, ihre Computerarbeitsphasen mit „Camtasia“ aufnehmen zu lassen. Die Computerarbeitsphasen dieser vier Gruppen sind über das gesamte Halbjahr hinweg komplett aufgezeichnet worden.

Die entstandenen Videos liefern einen direkten Einblick in die Partnerarbeit am Computer unter originalen Unterrichtsbedingungen. Durch die kontinuierliche Aufzeichnung der Computerarbeitsphasen haben sich die aufgezeichneten Gruppen an die Aufnahmen gewöhnt, so dass keine Verfremdungseffekte zu befürchten sind.

Mit diesen Aufnahmen erhält man einen direkten Einblick in die Interaktion zwischen Schülern und Computer sowie in die Interaktion der Schülerpaare untereinander. Man kann direkt beobachten, welche Probleme und Stärken im Umgang mit der Software und bei der Erstellung der Simulationen auftreten. Weiter kann man beobachten, ob die Arbeitsaufträge zu den beabsichtigten Schülertätigkeiten führen. Die Aufnahmen können somit zur Beantwortung der Untersuchungsfragen auf der Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz herangezogen werden. Es können weiterhin Aussagen zum selbstständigen Arbeiten und zur Eignung der Materialien für die Initiierung der selbstständigen Lernprozesse getroffen werden.

Die Simulationsaufgaben in den Klausuren

In beiden Leistungskursen wurde etwa drei Wochen nach Ende des Simulationsvorkurses eine Klausur geschrieben. Der erste Teil besteht jeweils aus einer am Computer in Einzelarbeit zu lösenden Aufgabenstellung zur stochastischen Simulation. Der zweite Teil der Klausur bezieht sich auf die nachfolgend behandelten theoretischen Inhalte „Baumdiagramme und Pfadregeln“ sowie „Zufallsgrößen und Erwartungswert“. Da die beiden Klausuren nicht zeitgleich geschrieben wurden, unterscheiden sie sich in den Aufgabenstellungen.

Zur Klausur aus Kurs A liegen die Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler komplett vor. Für den Simulationsvorkurs ist die Analyse der Aufgabe zur stochastischen Simulation von Interesse. Daher sollen die Aufgabenbearbeitungen der Simulationsaufgabe aus Kurs A zur Beurteilung der Simulationskompetenz und der Fathomkompetenz nach Durchlaufen des Simulationsvorkurses herangezogen werden. Die vollständige Klausur von Kurs A findet sich im Anhang (S. 306).

Neben den dargestellten Untersuchungsinstrumenten werden die persönlichen Erfahrungen des Autors sowie die informellen Rückmeldungen der unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer zur Beurteilung des Gesamtkonzepts herangezogen.

Im Rahmen der Hauptuntersuchung haben die Schülerinnen und Schüler mit der alten englischen Version 1.1 der Software FATHOM gearbeitet. In den folgenden Kapiteln werden zur einfacheren Lesbarkeit alle Darstellungen einschließlich der verwendeten Transkriptausschnitte und der zitierten Simulationspläne auf die aktuelle deutsche Version 2.03 übertragen.

6 Qualitative Analyse des Unterrichtsverlaufs und ausgewählter selbstständiger Schülerarbeitsphasen

In diesem Kapitel soll der Verlauf des Unterrichts im Kurs des Autors während des Simulationsvorkurses geschildert und analysiert werden. Hierbei wird die „makroskopische Sicht“ auf den Unterricht auf der Basis der Unterrichtsprotokolle und der persönlichen Eindrücke und Aufzeichnungen des Autors verbunden mit einer „mikroskopischen Sicht“ auf die Schülerarbeitsphasen am Computer anhand ausgewählter Transkripte der aufgezeichneten Partnerarbeitsphasen. Im Sinn einer Design-Research-Studie sollen die Stärken und Schwächen des Unterrichtskonzepts aufgezeigt und Möglichkeiten der Weiterentwicklung angegeben werden.

Die Aufnahme von Videosequenzen des Bildschirmgeschehens mit der simultan hierzu aufgezeichneten verbalen Kommunikation der Schülergruppen mittels einer geeigneten Software stellt eine neue Methode für die empirische Untersuchung von Schülerarbeitsphasen am Computer dar. Aufgrund der zunehmenden Bedeutung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht kann davon ausgegangen werden, dass dieser Methode in Zukunft eine wichtige Rolle bei empirischen Untersuchungen in der Mathematikdidaktik zukommen wird.

Während des Simulationsvorkurses wurden in der Hauptuntersuchung vier unterschiedlich lange Gruppenarbeitsphasen aufgezeichnet. Im Rahmen einer an die vorliegende Dissertation angelagerten Staatsexamensarbeit von D. May (2007) wurden die Video-Sequenzen der Gruppenarbeit zweier Schülerinnen unter Beteiligung des Autors in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Biehler diskutiert und interpretiert. Die Staatsexamensarbeitensarbeit untersucht die Entwicklung der Schülerkompetenzen in den vier Gruppenarbeitsphasen am Computer. Auf Basis der hierbei entstandenen Vorauswertungen wurde die Methode der Auswertung und der Darstellung der Videosequenzen für die vorliegende Arbeit vom Autor weiter entwickelt. Auch die inhaltliche Analyse wurde vom Autor in enger Anlehnung an die Untersuchungsfragen aus Kapitel 5.1 weiter entwickelt und deutlich erweitert.

In diesem Kapitel wird der Verlauf des Unterrichts zum Konzept des Simulationsvorkurses komplett geschildert. An den passenden Stellen wird die Beschreibung und die Analyse des Unterrichts ergänzt durch die Darstellung und Analyse von drei Schülerarbeitsphasen der aus zwei Mädchen bestehenden Schülergruppe. Hierfür wurden die Computerarbeitsphasen zu den Würfelaufgaben a) und b) und zum Geburtstagsproblem gewählt, so dass man die Entwicklung der Schülerkompetenzen über den Simulationsvorkurs hinweg analysieren kann. Methodisch werden bei der Analyse der Videosequenzen zwei längere Transkripte der verbalen Kommunikation exemplarisch dargestellt und um die nachgebildete Bildschirmansicht ergänzt und ausführlich interpretiert. Ansonsten wird das Geschehen der drei Videosequenzen zusammenfassend beschrieben und an geeigneten Stellen um die Darstellung der Bildschirmansicht sowie bei zentralen Punkten um kurze Transkriptausschnitte ergänzt.

Die Analyse des Unterrichtsverlaufs und der Transkriptausschnitte orientiert sich eng an den Untersuchungsfragen aus Kapitel 5.1. Zur Orientierung für den Leser seien an dieser Stelle stichwortartig bereits zentrale Probleme benannt, die in der folgenden Analyse an unterschiedlichen Stellen des Simulationsvorkurses identifiziert werden. Einige der angegebenen Probleme können im Verlauf des Unterrichts beseitigt werden.

Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz

- Probleme bei der Definition von Messgrößen, diese Probleme lassen sich in drei unterschiedliche Bereiche einteilen:
  - Schwierigkeiten beim Auffinden des Werkzeugs Messgröße auf der FATHOM-Oberfläche („Lokalisierungsproblem")
  - Problem der stochastischen Modellierung, die Bedeutung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells ist unklar
  - Probleme bei der Umsetzung einer Messgröße über eine geeignete Formel
- Zweckentfremdung kategorialer Auswertungstabellen
- Verwechselung der Wiederholungsanzahl n eines mehrstufigen Zufallsversuchs mit der Anzahl N der Simulationsdurchgänge („n-N-Verwechselung")
- Wahl ungeeigneter Bezeichnungen
- Probleme beim semantischen Verständnis neu eingeführter Befehle
- Fehlende Verinnerlichung der Visualisierung der Häufigkeitsverteilungen im Sinn einer Kontrolle der Wahrscheinlichkeitsschätzungen

Ebene der stochastischen Kompetenz

- Problem der begrifflichen Verwechselung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit bei der Wahrscheinlichkeitsschätzung durch die Simulation
- Problem der Verbindung der Fathomkompetenz mit der stochastischen Kompetenz im Sinn einer mangelnden oder fehlenden stochastisch-inhaltlichen Interpretation der Ergebnisse

Designebene

- Problem des selbstständigen Arbeitens mit den Kurzanleitungen zu den Würfelaufgaben
- Problem der „Abarbeitung" von Teilaufgaben ohne eine stochastisch-inhaltliche Interpretation des in der Aufgabe behandelten Kontextes vorzunehmen

Der tatsächliche Verlauf des Simulationsvorkurses lässt sich in vier Abschnitte einteilen:

- Die Testaufgabe als Einstiegsbeispiel
- Festigung der Simulations- und Fathomkompetenzen anhand der Würfelaufgaben a) und b)
- Theoretische Grundbegriffe, Gesetz der großen Zahl und die übrigen Würfelaufgaben
- Die gemischten Aufgaben

Zu Beginn eines jeden Abschnitts wird der Unterrichtsverlauf tabellarisch geschildert. Die angegebenen Zeiten sind in Minuten seit Stundenbeginn gemessen. Bei den Unterrichtsmethoden wird unterschieden zwischen dem „Unterrichtsgespräch" und dem fragend-entwickelndem Unterricht". Unter dem Begriff „Unterrichtsgespräch" soll hier eine Unterrichtsform verstanden werden, bei der vom Lehrer Inhalte erläutert werden und die Schülerinnen und Schüler hierzu Rückfragen oder Ergänzungen beisteuern. Unter fragend-entwickelndem Unterricht soll hier eine Unterrichtsform verstanden werden, bei der der Lehrer die Schülerinnen und Schüler über entsprechende Fragen oder Impulse bewusst und zielgerichtet aktiv in das Unterrichtsgespräch einbindet.

6.1 Die Testaufgabe als Einstiegsbeispiel

6.1.1 Tabellarische Darstellung des Unterrichtsverlaufs

1./2. Stunde: Die Testaufgabe – Einführung in die händische und die computergestützte Simulation

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Begrüßung der Praktikanten, allgemeine Informationen zum geplanten Computereinsatz im Kurshalbjahr Stochastik, allgemeine Informationen darüber, dass der Kurs im Rahmen von Forschungsarbeiten an der Universität Kassel ausgewertet werden soll	Lehrervortrag
8	Vorstellung der Multiple-Choice-Test-Aufgabe (Aufgabentext siehe S. 50) , Austausch von Vermutungen und Argumenten, Hinführung zu einer händischen Simulation des 10er-Tests in Form eines 10-fachen Münzwurfs: „Zahl" bedeutet „richtig geraten" und „Wappen" bedeutet „falsch geraten"	fragend-entwickelnder Unterricht
27	Je zwei oder drei Schülerinnen und Schüler führen die Simulation des 10er-Tests als 10-fachen Münzwurf 10mal durch.	Gruppenarbeit
37	Sammeln der Ergebnisse: Insgesamt werden im Kurs 70 händische Simulationen durchgeführt, bei 24 davon ist das Ereignis „mindestens 6mal Zahl" eingetreten, Umrechnung in die relative Häufigkeit: $h = 34{,}28\%$	fragend-entwickelnder Unterricht
47	Pause	
52	Kurze Wiederholung des Vorgehens bei einer Simulation, Erläuterung der Begriffe „absolute Häufigkeit" und „relative Häufigkeit"	Unterrichts-gespräch
56	Bearbeitung des Arbeitsblatts „Multiple-Choice-Test" (vgl. Anhang, S. 271): Zeichnen der Histogramme mit absoluten und mit relativen Häufigkeiten	Einzelarbeit
65	Vorstellung der Computersimulation des 10er-Tests in FATHOM analog zur Darstellung in Kapitel 4.1.2., Mehrfaches Vorführen der Simulation und des entstehenden Histogramms mit nur 70 Wiederholungen analog zur händischen Simulation im Unterricht, Interpretation der Histogramme, Übergang zu einer 1000-fachen Simulation, Tabellarische Auswertung mit dem `Anzahl()`-Befehl in einer Auswertungstabelle, Mehrfache Durchführung der Simulation um die Schwankungen der relativen Häufigkeit zu zeigen.	Demonstration mit Computer und Beamer fragend-entwickelnder Unterricht

93 - 95	Hausaufgabe: Der 20er-Test soll zu Hause mit Hilfe der ausführlichen Anleitung (vgl. Anhang, S. 273) erstellt werden	Hausaufgabe

3. Stunde, 1. Teil: Abschluss der Testaufgabe: Vergleich 10er-Test und 20er-Test

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Frage nach Problemen bei der Programmierung des 20er-Tests als Hausaufgabe, Diskussion über Möglichkeiten des Datentransports zwischen Schule und zu Hause	Unterrichtsgespräch
8	Knappe Vorstellung der Hausaufgabe: Ein Schüler stellt sein fertiges Datenblatt zum 20er-Test am Lehrerrechner per Beamer vor.	Schülervortrag
11	Wiederholung der einzelnen Schritte der Simulation anhand des Anleitungsblatts aus der voran gegangenen Stunde	Unterrichtsgespräch
14	Vergleichende Interpretation der beiden Histogramme zum 10er-Test und zum 20er-Test, Abschließender Vergleich zwischen dem 10er- und dem 20er-Test, Austeilen eines Ergebnisblattes (vgl. Anhang, S. 272)	fragend-entwickelnder Unterricht
23 -32	Vorstellung weiterer FATHOM-Funktionen: Gegenüberstellung von kategorialer und numerischer Auswertungstabelle, Relative Häufigkeiten in Grafiken und Auswertungstabellen, Vorteil der Darstellung in relativen Häufigkeiten, Übertragung von Fathomtabellen und -grafiken in Word	Lehrervortrag
32 -45	Beginn mit der ersten Würfelaufgabe (die Darstellung erfolgt in Kapitel 6.2)	

6.1.2 Ausgewählte Beobachtungen zu den zentralen Punkten der Einführungsstunden

Bei der Vorstellung der Multiple-Choice-Test-Aufgabe wurden die Schülerinnen und Schüler zunächst aufgefordert, Vermutungen darüber anzustellen, welcher der beiden angebotenen Tests bei reinem Raten besser wäre. Hieraus entwickelte sich eine lebhafte Diskussion, in der beide Positionen vertreten wurden: Einige Schülerinnen und Schüler argumentierten für den Test mit 20 Fragen. Ein Argument lautete, dass man bei diesem Test mehr Möglichkeiten habe, richtig zu raten. Weiter wurde argumentiert, dass bei einer höheren Anzahl von Versuchen eher die „tatsächliche Wahrscheinlichkeit herauskommt“. Gerade dieses Argument wurde aber von anderen Schülerinnen und Schülern in korrekter Weise gegen den 20er-Test benutzt: Es müsse gerade verhindert werden, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit herauskommt, „schließlich liegt die Chance richtig zu liegen bei 50:50, man muss aber mindestens 60% der Fragen richtig beantworten.“[1] Bei einem Meinungsbild zum Abschluss dieser Diskussion entschieden sich 12 Schülerinnen und Schüler für den Test mit 10 Fragen, 4 entschieden sich für den Test mit 20 Fragen.

Auf den Impuls des Lehrers, das Experiment zur Lösung der Situation nachzubilden und auszuprobieren, kamen die Schülerinnen und Schüler schnell auf die Idee, den 10-fachen Multiple-Choice-Test als 10-fachen Münzwurf zu simulieren. An dieser Stelle wurde vom

[1] Schülerzitat aus dem Unterrichtsprotokoll zur 1./2. Unterrichtsstunde.

Lehrer erstmals der Begriff „Simulation" eingeführt. Der wichtige Punkt der Modellbildung, dass nämlich der einfache Münzwurf die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit haben muss wie das reine Raten bei einer Multiple-Choice-Aufgabe, wurde besonders hervorgehoben. Die Unabhängigkeit wurde nicht erwähnt. Das Vorgehen bei der Simulation wurde ausführlich besprochen. In Gruppenarbeit wurden insgesamt 70 Simulationen des 10er-Tests durchgeführt und diese über die Auszählung der Ergebnisse, die Bestimmung der relativen Häufigkeiten und das Zeichnen der zugehörigen Histogramme ausgewertet.

Im Anschluss an die händische Simulation wurde vom Lehrer die Computersimulation mit FATHOM eingeführt. Die Begründung für die Verwendung des Computers über den hohen Zeitaufwand einer händischen Simulation wurde sofort akzeptiert, die Schülerinnen und Schüler waren gespannt auf die Computersimulation. Nach einer kurzen Vorstellung der FATHOM-Oberfläche wurde die Computersimulation in FATHOM im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch analog zur händischen Simulation vorgeführt: Der einfache Münzwurf wird über den Befehl `Zufallswahl("erfolg","misserfolg")` realisiert, der zehnfache Münzwurf über eine Kollektion mit 10 Tabelleneinträgen und das Ergebnis einer Simulation des 10er-Tests mit der Messgröße *Anzahl_Erfolge* und der zugehörigen `Anzahl()`-Formel ausgewertet. Nun wird diese Simulation über *Messgrößen sammeln* mehrfach wiederholt. Vom Lehrer wurde bei jedem neuen Schritt gefragt, welche Funktionalität die Software besitzen muss, um die Testsituation analog zur Münzwurfsimulation abbilden zu können; die Schülerinnen und Schüler hatten hier meistens die richtigen Ideen. Im Unterricht wurden zunächst analog zur händischen Simulation 70 Simulationsdurchgänge gewählt und das Ergebnis erst als Punktdiagramm und dann als Histogramm mit absoluten Anzahlen aufgetragen. Die 70-fache Wiederholung wurde zur Demonstration der statistischen Schwankung mehrfach ausgeführt und die von FATHOM erzeugten Histogramme interpretiert. Von den Schülerinnen und Schülern selber kam der Impuls, die Zahl der Wiederholungen zu erhöhen, um die „richtige" Verteilung zu erhalten. Mit einer 1000-fachen Wiederholung der Simulation wurde anhand des entstehenden Histogramms mit absoluten Anzahlen die Wahrscheinlichkeit für mindestens 6mal „erfolg" abgeschätzt. Vom Lehrer wurde weiter eine numerische Auswertungstabelle eingeführt, in der man mit den Formeln `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)` und `aMittel()` die absolute Häufigkeit der Ergebnisse mit mindestens 6mal „erfolg" und den Mittelwert der Anzahl an Erfolgen direkt ausrechnen kann. Auch hier wurde die Simulation mehrfach wiederholt, um die noch immer vorhandenen Schwankungen deutlich zu machen.

Als Hausaufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler zur Festigung die analoge Simulation für den Multiple-Choice-Test mit 20 Testfragen mit Hilfe der ausführlichen Anleitung in FATHOM erstellen. Diese Hausaufgabe wurde von den meisten Schülerinnen und Schülern erfolgreich gelöst. Von einem Teil der Schülerinnen und Schüler kam allerdings die Rückmeldung, dass sie nur aufgrund der genauen Anleitung in der Lage waren, die Simulation selber zu erstellen. Die Simulation wurde zu Beginn der nächsten Stunde von einem Schüler kurz vorgestellt und die zentralen Schritte der Erstellung einer solchen Simulation nochmals wiederholt.

Im Anschluss wurde der Bogen zur Vermutungsphase zu Beginn der ersten Stunde geschlagen: Anhand der geeignet formatierten Histogramme der beiden Tests sieht man, dass die Verteilung der Anzahl der Erfolge bei der Simulation des 10er-Tests relativ betrachtet breiter ist als beim 20er-Test. Dies schließt an die intuitiven Vorerfahrungen einiger Schülerinnen und Schüler in der Vermutungsphase der ersten Unterrichtsstunde an und liefert eine über die rein zahlenmäßigen Simulationsergebnisse hinausgehende tiefere Begründung für das Ergebnis der Aufgabe.

6.1.3 Analyse der Einführungsstunden

Der **Unterrichtsverlauf** der drei Einführungsstunden ist nahezu identisch mit der in Kapitel 4.4.1 vorgestellten Planung. Aus Sicht des Autors ist lediglich anzumerken, dass der zeitliche Rahmen der ersten Doppelstunde mit der wichtigen längeren Vermutungsphase, mit der Planung, Durchführung und Auswertung der Münzwurfsimulation und mit der ausführlichen Demonstration einer Computersimulation mit der Software FATHOM sehr knapp war. Hierdurch konnte die Auswertung der Computersimulation zum Ende der Doppelstunde nur über absolute Häufigkeiten erfolgen. Die vollständigen Werkzeuge zur Auswertung der gesammelten Messgrößen wurden im Anschluss an die inhaltliche Interpretation der Ergebnisse in der dritten Unterrichtsstunde nachgeliefert.

Ferner wurden die Besprechung des vierschrittigen Prozessmodells und die Umsetzung in einen schriftlich ausformulierten Simulationsplan im Gegensatz zur ursprünglichen Planung nicht im Anschluss an das Testbeispiel eingeführt. Nach den Rückmeldungen zur Erstellung des 20er-Tests als Hausaufgabe schien es sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern möglichst bald Gelegenheit zu geben, die gerade erworbenen Werkzeugkompetenzen im Umgang mit der Software FATHOM zu festigen.

Insgesamt ist das komplexe Unterrichtskonzept mit der Verbindung von stochastischen Inhalten, der Einführung in die stochastische Simulation und der Einführung in die Software-Benutzung gut aufgegangen. Hierbei sind folgende Punkte hervorzuheben:

Die größte Schwierigkeit bezüglich der **stochastischen Inhalte** bereitete der Umgang mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit. Da der Begriff nicht explizit eingeführt war, musste in den Einführungsstunden auf das (geringe) Vorwissen aus der Mittelstufe und vor allem auf das intuitive Verständnis zurückgegriffen werden. An Stelle des Begriffs der Wahrscheinlichkeit wurde häufig der Begriff der Chance verwendet. Bei der einfachen Testaufgabe und dem einfachen Münzwurf wurde deutlich herausgestellt, dass hier eine Trefferwahrscheinlichkeit von jeweils 50% vorliegt. Den meisten Schülerinnen und Schülern war der Wahrscheinlichkeitsbegriff so weit intuitiv klar, dass man über die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses bei einer großen Anzahl von Wiederholungen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses treffen kann. Dies zeigt sich zum einen daran, dass die Schülerinnen und Schüler die Methode der händischen Münzwurfsimulation zur Lösung der Problemstellung sehr schnell eigenständig entwickeln konnten. Ferner wurde von den Schülerinnen und Schülern selbstständig vorgeschlagen, die Anzahl der Wiederholungen bei der Computersimulation zu erhöhen. Die Ähnlichkeit der Ergebnisse bei einer Wiederholung der 1000-fachen Simulation erhöhte das Vertrauen in die Wahrscheinlichkeitsschätzungen.

Eine saubere Trennung zwischen den Begriffen „Wahrscheinlichkeit“ und „relative Häufigkeit“ konnte im Rahmen dieser Einführungsstunden noch nicht erreicht werden. Dennoch hat sich gezeigt, dass der im vorliegenden Unterrichtskonzept vorgeschlagene frequentistische Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff tragfähig ist, da er an das intuitive Verständnis der Schülerinnen und Schüler anschließt.

Die Einführung der Computersimulation in FATHOM im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch hat sehr gut funktioniert. Eine wichtige Funktion zum Aufbau der **Simulationskompetenz** kommt hierbei der händischen Münzwurfsimulation und der zugehörigen Auswertung anhand des vorbereiteten Arbeitsblattes zu. Die Schülerinnen und Schüler konnten die zentralen Schritte einer Simulation, die Berechnung der relativen Häufigkeiten und das Zeichnen eines Histogramms zunächst eigenständig durchführen. Diese Schritte konnten sie in automatisierter Form in der FATHOM-Simulation wieder finden. Außerdem erzeugt das zeitaufwändige Werfen der Münzen und das Auszählen der Ergebnisse eine starke Motivation, die Simulation mit dem Computer zu automatisieren.

Weiter zeigt sich bei der Übertragung der händischen Simulation auf die Computersimulation die Stärke der gewählten Software: FATHOM ist gerade so konstruiert, dass für die natürlichen Stufen im Entwicklungsprozess einer stochastischen Simulation gerade die passenden Werkzeuge zur Verfügung stehen (vgl. Kapitel 4.1.1). Durch die Beschränkung des Befehlsumfangs und durch die Programmierung des 20er-Tests anhand der ausführlichen Anleitung zu Hause konnten die nötigen **Werkzeugkompetenzen** im Umgang mit der Software FATHOM eigenständig geübt werden.

Eine entscheidende Bedeutung für die Einführungsstunden kommt der **Aufgabenstellung** zu. Die gewählte Testsituation hat sich als komplexe und inhaltsreiche Aufgabenstellung erwiesen, welche über die drei Einstiegsstunden getragen hat. Durch die unterschiedlichen Meinungen im Kurs auch nach dem ausführlichen Austausch von Vermutungen in der ersten Unterrichtsstunde hat die Aufgabe entscheidend zur **Motivation** beigetragen. Das Einstiegsbeispiel konnte durch die inhaltliche Interpretation der beiden in FATHOM erzeugten Histogramme zum 10er-Test und zum 20er-Test auch auf inhaltlicher Ebene befriedigend abgeschlossen werden.

6.2 Festigung der Simulationskompetenz anhand der Würfelaufgaben a) und b)

In der vierten bis sechsten Unterrichtsstunde wurden die Würfelaufgaben a) und b) bearbeitet und besprochen. Ferner wurde das vierschrittige Prozessmodell zur Erstellung einer Computersimulation erarbeitet und der Simulationsplan eingeführt. Die sechste Stunde schließt mit Faustregeln zur Genauigkeit von Wahrscheinlichkeitsschätzungen aus Simulationen.

Zu den Würfelaufgaben a) und b) existieren Videoaufnahmen der Schülerarbeitsphasen. Die Aufnahmen einer Arbeitsgruppe sollen zur Beschreibung und zur Analyse der vierten bis sechsten Unterrichtsstunde hinzu gezogen werden.

Würfelaufgabe a)

Ein fairer Würfel wird fünfmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl X der verschiedenen Zahlen, die hierbei gewürfelt werden.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten mindestens drei verschiedene Zahlen auf?
- Wie viele verschiedene Zahlen treten im Mittel auf?
- Welche Ergebnisse treten mit weniger als 10% Wahrscheinlichkeit auf?

Anleitung:

1. Erstellen Sie eine Kollektion "Wuerfel" mit der Spalte "Wurf" (Formel `ganzeZufallszahl(1;6)`) und fügen Sie der Kollektion 5 Fälle hinzu.
2. Definieren Sie im Fenster "Info Wuerfel" die Messgröße "Anzahl_verschieden" zum Zählen der verschiedenen aufgetretenen Zahlen mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte(Wurf)`. Führen Sie das Zufallsexperiment nun 1000 mal durch, indem Sie 1000 mal die Messgröße sammeln.
3. Zeigen Sie die Tabelle zur Kollektion "Messgrößen von Wuerfel" an und werten Sie die Ergebnisse grafisch (Histogramm) und mit einer Auswertungstabelle aus.
   Den Mittelwert der Anzahl verschiedener Zahlen können Sie sich mit der Formel `aMittel()` in der Grafik oder in der Auswertungstabelle anzeigen lassen.

Würfelaufgabe b)

Ein fairer Würfel wird 60mal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl X der Sechsen, die hierbei gewürfelt werden.

- Schätzen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau 10mal die „6“ geworfen wird. Bestimmen Sie dann diese Wahrscheinlichkeit mit der Simulation. Erstaunt?
- Bestimmen Sie die Anzahl $\bar{x}$ an Sechsen, die im Mittel bei 60 Würfen gewürfelt wird.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mindestens $X_1 = 8$mal und höchstens $X_2 = 12$mal eine „6“?
- Wie muss der Bereich von X_1 bis X_2 um $X = 10$ herum gewählt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 80 % ein Ergebnis in diesem Bereich erhält?
- Beschreiben Sie die Form der grafischen Häufigkeitsverteilung in Worten.

Eine Analyse der Würfelaufgaben, insbesondere zu Würfelaufgabe b), findet sich in Kapitel 4.4.3.

6.2.1 Tabellarische Darstellung des Unterrichtsverlaufs

3. Stunde, 2. Teil: Beginn mit der ersten Würfelaufgabe

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
32	Austeilen eines Arbeitsblattes mit der ersten Würfelaufgabe a) und Vorlesen des Aufgabentexts, Beginn der Aufgabenbearbeitung in Partnerarbeit am Computer	Partnerarbeit am Computer
45	Als Hausaufgabe soll die Würfelaufgabe a) in Einzelarbeit zu Ende geführt werden	Hausaufgabe

4./5. Stunde: Vorstellung der Würfelaufgabe a) – Simulationsplan – Bearbeitung der Würfelaufgabe b)

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Organisatorische Angelegenheiten	
6	Ausführliche Demonstration der Hausaufgabe am Beamer: Die Simulation zur Würfelaufgabe a) wird von einem Schüler mit Erläuterungen komplett neu aufgebaut und entsprechend der gegebenen Aufgabenstellungen ausgewertet	Schülervortrag
27	Informationen zu Problemen bei der Verwendung von Formeln in kategorialen Auswertungstabellen, Vorstellung des `proportion()`-Befehls[2]	Lehrervortrag
31	Abstraktion der zentralen Schritte bei der Erstellung einer Computersimulation in FATHOM („vierschrittiges Prozessmodell“),	fragend-entwickelnder

[2] Dieser Befehl diente in der verwendeten alten Version 1.1 der Software FATHOM zur Berechnung der relativen Häufigkeit. Der Befehl heißt in der aktuellen deutschen Version 2.03 der Software FATHOM `Anteil()`, hat allerdings eine geänderte Bedeutung. Die ursprüngliche Bedeutung des `proportion()`-Befehls kann in der deutschen Version 2.03 über `Anzahl()/Gesamtanzahl` realisiert werden.

	Einführung des Simulationsplans, Ausgabe eines beispielhaften Simulationsplans zum Testproblem (vgl. Anhang, S. 275)	Unterricht
46	Pause	
52	Vorstellung der Würfelaufgabe b), Diskussion intuitiver Einschätzungen der Wahrscheinlichkeit, mit der bei 60mal Würfeln genau 10mal eine sechs fällt.	fragend-entwickelnder Unterricht
65	Bearbeitung der Würfelaufgabe b) in Partnerarbeit am Computer	Partnerarbeit am Computer
95	Als Hausaufgabe soll die Würfelaufgabe b) in Einzelarbeit zu Ende geführt werden, zusätzlich soll ein Simulationsplan erstellt werden	Hausaufgabe

6. Stunde: Vorstellung der Würfelaufgabe b) –Faustregeln zur Genauigkeit

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Ausführliche Demonstration der Hausaufgabe am Beamer: Erläuterung einer fertigen Schüler-Simulation zum 60-fachen Würfelwurf entlang der Schritte des Simulationsplans	Schülervortrag
14	Interpretation der Histogrammbalken um den „erwarteten Mittelwert“ von X=10 herum, Beschreibung der Form der Verteilung	Unterrichtsgespräch
21	Diskussion zum Einfluss der Anzahl N der Simulationsdurchgänge auf die Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung einer Simulation und auf die Form der Häufigkeitsverteilung, Entwicklung von Faustregeln zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung bei N=1000 und N=10 000 über mehrfaches Ausführen der Simulation. Bei 1000 Simulationsdurchgängen hat man eine Schwankungsbreite von ca. ±3 Prozentpunkten, bei 10 000 Simulationsdurchgängen von ca. ±1 Prozentpunkten	fragend-entwickelnder Unterricht
45	Als Hausaufgabe soll die Würfelaufgabe c) bearbeitet werden, hierzu soll ein Simulationsplan erstellt werden (Aufgabentext siehe S. 80)	Hausaufgabe

6.2.2 Ausgewählte Beobachtungen zu den zentralen Punkten des Unterrichtsverlaufs

Die erste Würfelaufgabe konnte am Ende der dritten Unterrichtsstunde nur kurz in Gruppenarbeit am Computer begonnen werden und musste dann als Hausaufgabe zu Ende geführt werden. Da es sich um die erste eigenständige Simulation der Schülerinnen und Schüler ohne komplette Anleitung handelt, sind in der Hausaufgabe Probleme aufgetreten. Einem Teil der Schülerinnen und Schüler ist es nicht gelungen, die Simulation vollständig fertig zu stellen. Die aufgetretenen Probleme konnten von den betroffenen Schülerinnen und Schülern nicht genau verbalisiert werden. Daher wurde die Simulation zu Beginn der vierten Unterrichtsstunde von einem Schüler komplett neu aufgebaut und erläutert. Der Schüler war in der Lage, die Simulation mit Auswertung vollständig vorzustellen. Schwierigkeiten hatte er beim Auffinden der Schaltfläche für die Erzeugung der 1000 Messgrößen. Der Schüler differenzierte sprachlich nicht zwischen der Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit. Da der Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` über die Kurzanleitung zur Würfelaufgabe a) neu eingeführt wird, wurde auf Wunsch des Lehrers besonderer Wert auf die Bedeutung und die Funktionsweise des Befehls gelegt.

Im Lehrervortrag wurde anschließend der Unterschied zwischen kategorialen und numerischen Auswertungstabellen erläutert. Insbesondere wurde vom Lehrer darauf hingewiesen, dass kategoriale Auswertungstabellen nicht in Verbindung mit Auswertungsformeln verwendet werden sollen (vgl. Kapitel 4.1.3).

Im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch konnten anschließend die zentralen vier Schritte zur Erstellung einer Simulation erarbeitet werden: Modellierung des Einzelexperiments – Definition einer Messgröße – Durchführung einer großen Anzahl an Simulationen – Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilung. Die Schülerinnen und Schüler konnten gut von den zwei vorhandenen Beispielsimulationen abstrahieren. Vom Lehrer wurde zum einen die Bedeutung der Messgröße betont und erläutert. Ferner wurde die Bedeutung der Anzahl der Simulationsdurchgänge in Bezug auf die Genauigkeit diskutiert. Der Simulationsplan wurde als Ergebnissicherung des Aufbaus einer Computersimulation mit der Software FATHOM eingeführt.

Vor der eigenständigen Behandlung der Würfelaufgabe b) – 60facher Würfelwurf – sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst intuitive Schätzungen angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau 10mal die „Sechs“ fällt. Das Ziel der Schätzungen sollte ein Aufbau von inhaltlichen Vorstellungen zum Verteilungsbegriff sein: Die Schülerinnen und Schüler sollten sich überlegen, dass 10mal „Sechs“ zwar dem „ideal erwarteten Wert“ entspricht, dass aber aufgrund der stochastischen Streuung auch geringe Abweichungen von diesem „Idealwert“ keineswegs ungewöhnlich sind, so dass die Histogrammbalken um $X = 10$ herum eine ähnliche Höhe aufweisen. Diese Überlegungen wurden durch die gewählte Fragestellung nicht angestoßen. Die Schülerinnen und Schüler gaben Schätzwerte im Bereich von 10 bis 15% an, einige Male wurde auch die Wahrscheinlichkeit von 16,67% angegeben, welches gerade der Wahrscheinlichkeit für eine „Sechs“ beim einmaligen Würfeln entspricht. Obgleich die Schätzungen nahe bei der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit von ca. 14% liegen, konnten keine sinnvollen Argumente für die genannten Werte angegeben werden.

Einige der Schülerinnen und Schüler verwechselten das 60-fache Würfeln mit der 1000-fachen Wiederholung der Simulation („n-N-Verwechselung“). Diese Verwechselung ging so weit, dass diese Schülerinnen und Schüler der Meinung waren, die gesuchte Wahrscheinlichkeit für genau 10mal die „Sechs“ wäre abhängig von der Anzahl N der Simulationsdurchgänge.

Nach der Vermutungsphase mit dem Ziel des Aufbaus einer Erwartungshaltung waren noch ca. 30 Minuten Zeit vorhandenen zur Bearbeitung der Würfelaufgabe b) in Partnerarbeit am Computer, die restliche Bearbeitung sowie die schriftliche Erstellung eines Simulationsplans wurden in die Hausaufgabe gegeben.

Zu Beginn der sechsten Unterrichtsstunde wurde eine zu Hause fertig gestellte FATHOM-Simulation zu Würfelaufgabe b) von einer Schülerin ausführlich entlang den vier Schritten des Simulationsplans vorgestellt. Im Anschluss wurde vom Lehrer der Bezug zur Wahrscheinlichkeitsschätzung der vorangegangenen Stunde hergestellt. Hierbei wurde die gewünschte inhaltliche Interpretation der Verteilung angestoßen: Die relativ geringe Wahrscheinlichkeit von 14% für den „Idealwert“ von $X = 10$ gewürfelten Sechsen wurde in Verbindung mit der grafischen Darstellung der Verteilung als Histogramm diskutiert. Es wurde darauf hingewiesen, dass zwar die Säule bei $X = 10$ die höchste Säule ist, dass aber die umliegenden Säulen aufgrund der zufallsbedingten Streuung zunächst nur wenig abfallen.

Die nach der Besprechung der Würfelaufgabe b) noch vorhandenen 25 Minuten der Unterrichtsstunde konnten genutzt werden, um die Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung in Abhängigkeit von der Anzahl N der Simulationsdurchgänge zu problematisieren. Hierbei zeigten sich erneut bei einigen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bei der Unterscheidung zwischen der Anzahl $n = 60$ an Würfelwürfen und der Anzahl $N = 1000$ an Simulationsdurchgängen. Dieser Fehlvorstellung wurde im Unterrichtsgespräch mit der Einordnung des 60-fachen Würfelns und der 1000 Simulationsdurchgänge in die einzelnen Schritte des Prozessmodells begegnet.

Zur Ermittlung von Faustregeln zur Genauigkeit wurden zehn Simulationen mit $N = 1000$ Wiederholungen durchgeführt und jeweils die relative Häufigkeit für $X = 10$ gewürfelte Sechsen notiert: 0,145, 0,153, 0,118, 0,148, 0,138, 0,131, 0,136, 0,127, 0,152, 0,130. Weiter wurden vier Simulationen mit $N = 10\,000$ Wiederholungen durchgeführt und auch hier jeweils die relative Häufigkeit für $X = 10$ gewürfelte Sechsen notiert: 0,1395, 0,1411, 0,1333, 0,1356. Im Unterrichtsgespräch wurde geklärt, dass die Wahrscheinlichkeitsschätzung mit einer zunehmenden Anzahl an Simulationsdurchgängen genauer wird. Im Ergebnis wurden folgende Faustregeln festgehalten: Die Schwankungsbreite der relativen Häufigkeit liegt für $N = 1000$ Wiederholungen bei ca. ±3 Prozentpunkten, für $N = 10\,000$ Wiederholungen bei ca. ±1 Prozentpunkten. Diese Faustregeln wurden anhand einer Information seitens des Lehrers über die exakte theoretische Berechnung mit einem Konfidenzintervall ergänzt (vgl. Kapitel 4.2.2) und präzisiert.

Einige Schüleräußerungen zur Abhängigkeit der Simulationsergebnisse von der Anzahl N der Simulationsdurchgänge bezogen die grafische Darstellung der gesamten Verteilung mit ein:

> „…die Kurve ist bei wenigen Versuchen weniger schön!“
>
> „…die Kurve ist bei wenigen Versuchen nicht mehr so symmetrisch!“[3]

6.2.3 Beschreibung der Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe a)

Zu Würfelaufgabe a) – Anzahl verschiedener Zahlen beim 5fachen Würfelwurf – liegt ein Transkript der Gruppenarbeit zweier Schülerinnen am Computer vor. Die beiden Schülerinnen werden hier mit den Pseudonamen Magdalena und Natascha bezeichnet. Die Schülerinnen hatten noch 9 Minuten Zeit, um mit der Aufgabenbearbeitung zu beginnen. Ein Transkriptausschnitt von der Umsetzung des 5-fachen Würfelwurfs als erstem Schritt der Computersimulation wird beispielhaft vorgestellt und interpretiert. Zu den Schüleräußerungen werden in der tabellarischen Darstellung Erläuterungen ergänzt, welche auch das Bildschirmgeschehen mit berücksichtigen.

Der zweite und der dritte Schritt der Computersimulation werden zusammenfassend beschrieben. Nach Schritt 3 ist die Unterrichtsstunde zu Ende und die Videoaufzeichnung bricht ab.

Vorstellung und Interpretation eines Transkriptausschnitts

<u>0:00 bis 2:58: Modellierung des 5-fachen Würfelwurfs</u>

Im ersten Abschnitt erarbeiten die beiden Schülerinnen den ersten Schritt zum Aufbau einer Simulation: Sie modellieren das Zufallsexperiment „5facher Würfelwurf“ in

[3] Schülerzitat aus dem Unterrichtsprotokoll zur 6. Unterrichtsstunde.

FATHOM. Anhand der Bezeichnungen und der Formulierungen zeigt sich, dass die Schülerinnen auf die ausführliche Anleitung (vgl. S. 273) zum Testproblem zurückgreifen.

Zeit	**Transkript**	**Erläuterung**
0:12	M.: Also, Schritt 1, was ist das? Da müssen wir dieses Ding da, hier diese Kollektion, ne? Und die muss markiert sein.	Die Schülerinnen öffnen eine neue Kollektion und ziehen eine zugehörige Tabelle ins Fenster.
0:22	N.: Nein, nein, nimm die rechte Maustaste!	
0:26	M.: Anders umbenennen, oder was? Nach rechts! Umbenennen willst Du das? Aber so geht das ja auch, aber egal.	Die Tabelle wird wieder gelöscht und die Kollektion mit *Würfel* benannt.
0:35	N.: Würfel?	
0.35	M. Würfel!	
0:39	M. Und dann: Doppelklick mit der Maus – Markieren – ist markiert – Tabelle	Die Schülerinnen lesen Teilanweisungen der in der vorherigen Stunde ausgeteilten Anleitung zum Testproblem laut vor. Hierbei erstellen sie erneut eine Tabelle und benennen eine Merkmalsspalte analog zum Testproblem mit *Aufgaben*.
0:58	M. So, klicken Sie mit der rechten Maustaste. N.: Lass uns doch erst mal lesen, was wir überhaupt machen müssen!	Magdalena möchte gleich mit der Definition der Formel des Merkmals fortfahren während Natascha zunächst den Aufgabentext lesen möchte.
1:02	M.: Ja, aber wir müssen doch – na, ja, ok	
1:05	N.: Ich meine, vielleicht brauchen wir das ja gar nicht.	
1:07	N.: Simulieren Sie die folgende Problemstellung mit $N = 1000$ Wiederholungen – stellen Sie die Ergebnisse jeweils grafisch dar. Ein fairer Würfel wird fünfmal gewürfelt, wir interessieren uns für die Anzahl X der verschiedenen Zahlen.	Natascha zitiert aus der Aufgabenstellung.
1:24	M.: Ja, also, das ist genau dasselbe.	Nach Magdalenas Meinung ist die Aufgabe genau dasselbe wie das Testproblem. Es werden fünf Fälle erzeugt.
1:39	N.: Welche Formel?	Die Schülerinnen geben die Formel `ZufallsWahl ("1Auge";"2Augen";"3Augen"; "4Augen";"5Augen";"6Augen")` als Zufallsgenerator für den Würfel ein.
1:41	M.: Ähh	
1:42	N.: Irgendwas war da mit `Zufall`…?	
1:43	M.: `ZufallsWahl`! Und `Wahl` groß – Klammer auf! Und dann machst Du „ein Auge“	
1:50	(N. lacht.)	
1:53	M. Ein – Nee, Mach doch ne Zahl! Oder geht das nicht mit ner’ Zahl? Ein Auge.	
2:03	M.: Ein Auge, Zwei Auge – Zwei Augen, drei Augen.	
2:09	N.: Das geht bis sechs?	
2:11	M.: Ja	
2:37	N.: Ein Auge, fünf Augen, vier Augen, fünf	Natascha liest die fünf entstande-

Zeit	Transkript	Erläuterung
	Augen, drei Augen, siehste.	nen Einträge der erzeugten Datentabelle vor.
2:41	M.: Das heißt doch, ach so, beim ersten Mal wurde der der – ein Auge gewürfelt. Und beim zweiten – ach so.	Die Schülerinnen überprüfen an dieser Stelle ihr Vorgehen!
2:51	M.: Oder wollen wir es doch besser mit Zahlen? Aber ich glaub', dann kommen wir durcheinander mit was was ist? Oder?	Die Schülerinnen überlegen, ob sie den Würfel nicht lieber mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 modellieren, sind dann aber mit ihrem bisherigen Vorgehen zufrieden.
2:58	N.: Ja, dann lass doch. Versteht man doch.	

Die Schülerinnen beginnen mit der Erstellung der Simulation, ohne den Aufgabentext und die zugehörige Kurzanleitung intensiv gelesen zu haben. Hierbei gehen sie nach der ausgeteilten ausführlichen Simulationsanleitung für das Testproblem vor. Dies zeigt sich an der im Videoausschnitt erkennbaren Bezeichnung der Merkmalsspalte als *Aufgaben* sowie an den im Gespräch gewählten Formulierungen: „Und dann: Doppelklick mit der Maus – Markieren" (vgl. 0:39) sowie „So, klicken Sie mit der rechten Maustaste" (vgl. 0:58). Die Orientierung an der gegebenen Anleitung ist sehr eng: Im Video kann man sehen, wie die bereits richtig erzeugte Tabelle zur Kollektion in 0:26 wieder gelöscht wird, um analog zur Anleitung zunächst den Namen der Kollektion zu ändern.

Erst bei der Definition der Formel des Zufallsgenerators möchte Natascha den Aufgabentext genauer lesen (vgl. 0:58). Offensichtlich lesen beide Schülerinnen auch jetzt nur die Aufgabe, aber nicht die Kurzanleitung. Daher wählen Sie als Zufallsgenerator für den Würfel nicht den vorgeschlagenen Befehl `GanzeZufallszahl(1;6)`, sondern sie wählen den Befehl `ZufallsWahl()` analog zur Simulation des Testproblems. An Stelle des gewählten Befehls `ZufallsWahl("1Auge";"2Augen";"3Augen";"4Augen";"5 Augen";"6Augen")` wäre auch die kürzere Formel `ZufallsWahl(1;2;3;4;5;6)` möglich gewesen. Magdalena überlegt zweimal, ob sie nicht die kürzere Alternative mit Zahlen wählen soll (vgl. 1:53 und 2:51). Beide Schülerinnen haben allerdings in 2:37 und 2:41 die Funktionstüchtigkeit des von Ihnen gewählten Modells bereits kontrolliert und bleiben bei ihrem bisherigen Vorgehen. Der erreichte Stand der Bearbeitung zum Zeitpunkt 2:58 ist in der nebenstehenden Abbildung ersichtlich.

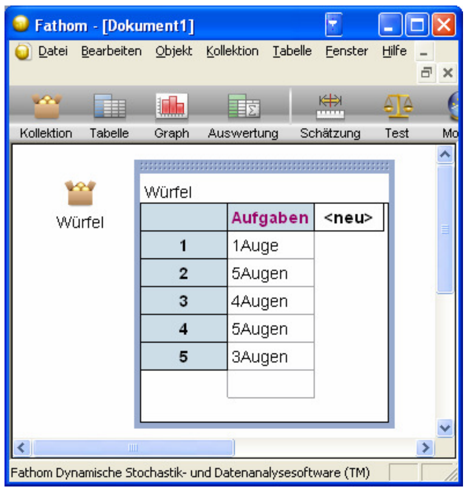


Abb. 6.1: Erreichter Stand der Bearbeitung der Würfelaufgabe a) zum Zeitpunkt 2:58

Es zeigt sich, dass die beiden Schülerinnen gut miteinander zusammen arbeiten. Zu Beginn scheint Magdalena die Eingaben am Computer zu tätigen, denn Natascha gibt in 0:22 die Anweisung „Nein, nein, nimm die rechte Maustaste!" Nach dem Lesen des Aufgabentextes scheint Natascha die Eingaben am Computer zu tätigen, in 1:43 und 1:53 gibt Magdalena Anweisungen. Die beiden Schülerinnen ergänzen sich gegenseitig: Magdalena möchte insgesamt etwas schneller vorgehen und bestimmt die Entwicklung der Formel für den Zufallsgenerator. Während Magdalena offensichtlich glaubt, den Aufgabentext im oberflächlichen Lesen ausreichend erfasst zu haben, beharrt Natascha auf dem genauen Lesen des Aufgabentextes (vgl. 1:07). Allerdings kann sie sich nicht so weit durchsetzen, dass auch die Kurzanleitung zur Aufgabe beachtet wird. In (2:37) initiiert Natascha die Kontrolle der Datentabelle.

Zusammenfassende Beschreibung der weiteren Gruppenarbeitsphase

3:00 – 5:22 Versuch der Definition einer geeigneten Messgröße

Im zweiten Abschnitt der Schülerarbeitsphase gelingt es den Schülerinnen nicht, die Messgröße geeignet zu definieren. Sie verwenden zunächst weiter die Anleitung aus der vorherigen Stunde und finden hiermit das richtige Menü zur Eingabe der Messgröße. Nun stellen Sie fest, dass die für die Testaufgabe vorgeschlagene Definition der Messgröße *Anzahl_Erfolge* bei Würfelaufgabe a) nicht passt. Anstatt die Kurzanleitung zur Aufgabe genau zu lesen, fragen sie an dieser Stelle den Lehrer um Rat. Der Lehrer weist sie auf den Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` hin. Diesen Befehl fügen die Schülerinnen zunächst als Name der Messgröße ein. Nun kommt es zu einem Missverständnis im Gespräch zwischen den Schülerinnen und dem Lehrer: Während der Lehrer den Schülerinnen verdeutlichen möchte, dass `AnzVerschiedeneWerte()` wie das bereits verwendete Kommando `ZufallsWahl()` ein Befehl ist und keine Bezeichnung, verstehen die Schülerinnen die Erklärung des Lehrers so, dass sie den beim Merkmal *Aufgaben* verwendeten Befehl `ZufallsWahl()` ersetzen sollen durch `AnzVerschiedeneWerte()`:

3:45: N:	Herr L., eine Frage: Bei der anderen sollten wir Anzahl der Erfolge zählen. Hier können wir keine Anzahl der Erfolge zählen.
3:53: L:	Ja, hier soll man die Anzahl der unterschiedlichen aufgetretenen Zahlen zählen, und das geht mit `AnzVerschiedeneWerte()`. Das ist aber der Befehl.
4:05: M:	Also nicht bei `ZufallsWahl()`, sondern?
4:07: L:	Das Ding heißt „AnzahlVerschiedene", das ist der Name.
4:12: N:	Und anstatt `ZufallsWahl()` müssen wir das eingeben?
4:15: L:	Ja genau.
4:18: M:	Gut.

Bei der Betrachtung des Bildschirmgeschehens sieht man, dass die Schülerinnen bei 4:12 die Bezeichnung *AnzahlVerschiedene* für die Messgröße eingeben. Der Lehrer bezieht die Frage in 4:12 auf das (noch leere) Befehlsfeld der Messgröße, während die Schülerinnen die Frage auf das Befehlsfeld des bereits definierten Merkmals *Aufgaben* beziehen. Sie löschen anschließend die richtige Formel des Zufallsgenerators für die Merkmalsspalte *Aufgaben* wieder und fügen hier die in der Kurzanleitung angegebene Formel `AnzVerschiedeneWerte(Wurf)` ein. Damit ist die Formel an der falschen Stelle eingefügt. Außerdem bezieht sie sich auf ein Merkmal *Wurf*, welches mit dieser Bezeichnung in der Simulation überhaupt nicht definiert wurde.

5:34 – 7:10 1000-fache Wiederholung der Simulation

Im dritten Abschnitt der Schülerarbeitsphase versuchen die Schülerinnen in der letzten Minute noch die Simulation mit *Messgrößen Sammeln* 1000mal zu wiederholen. Hierfür werden die richtigen Funktionen der Software gewählt, allerdings bleibt die Tabelle der entstandenen Kollektion *Messgrößen von Würfel* leer, da keine Formel für die Messgröße eingegeben wurde.

Zum Zeitpunkt 7:10 ist die Stunde zu Ende. Beide Schülerinnen müssen die Simulation zu Hause mit Hilfe der Kurzanleitung vervollständigen.

Analyse der Gruppenarbeit zur Würfelaufgabe a)

Auf der Ebene der **FATHOM-Kompetenzen** zeigen sich bei dieser ersten eigenständigen Simulationsaufgabe Unsicherheiten bei den Werkzeugkompetenzen im Umgang mit den einzelnen Bedienelementen von FATHOM. Dies sieht man an der engen Orientierung an der zur Testaufgabe ausgeteilten Anleitung. Allerdings sind die Schülerinnen mit dieser Anleitung in der Lage, die entsprechenden FATHOM-Elemente zu finden und zu bedienen.

Betrachtet man die Ebene der **Simulationskompetenz**, so stellt sich heraus, dass die beiden Schülerinnen das vierschrittige Vorgehen zum Aufbau einer Simulation mit der Software FATHOM nur teilweise umsetzten können. Die Modellierung des einzelnen Zufallsexperiments als erstem Schritt bereitet keine Probleme. Die Schülerinnen haben auch keine Probleme mit der Lokalisierung der Messgröße auf Werkzeugebene. Schwierigkeiten treten auf bei der Definition der Messgröße als zweitem Schritt der Simulation: Zunächst wird die Formel für die Messgröße als Bezeichnung verwendet. Als die Schülerinnen dann die Bezeichnung korrekt erstellt haben, fügen sie die Formel an der falschen Stelle als Formel des Merkmals *Aufgaben* ein. Hier zeigt sich auf der Ebene der Simulationskompetenz, dass den beiden Schülerinnen die Bedeutung und die Stellung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells nicht klar sind. Auch der Bezug der Formel `AnzVerschiedeneWerte(Wurf)` auf das mit dieser Bezeichnung nicht definierte Merkmal *Wurf* ist ein Indiz für ein mangelndes Verständnis des Aufbaus einer Simulation in Fathom. Es gelingt den Schülerinnen nicht, die Messgröße geeignet zu definieren, so dass die weiteren Schritte zur Erstellung einer Simulation nicht mehr erfolgreich durchgeführt werden können.

Das Problem der Definition der Messgröße ist eng verknüpft mit der **Formelkompetenz**. Im ersten Schritt der Simulation bei der Definition des Merkmals gibt es noch keine Schwierigkeiten, die Schülerinnen leisten bei der Erstellung der Formel `ZufallsWahl("1Auge";"2Augen";"3Augen";"4Augen";"5Augen";"6Augen")` sogar einen bemerkenswerten Transfer. Im zweiten Schritt bei der Definition der Messgröße ist den Schülern die Funktionsweise des hierfür benötigten Befehls `AnzVerschiedeneWerte()` nicht klar. Dies sieht man am fehlerhaften Einfügen der Formel als Bezeichnung sowie als Formel für das Merkmal. Es ist durchaus möglich, dass die angesprochenen Probleme bei der Definition der Messgröße hätten gelöst werden können, wenn den Schülerinnen die Bedeutung der Formel klar gewesen wäre.

Die fehlende Kenntnis der Funktionsweise der Formel ist im **Umgang mit dem Aufgabenmaterial** begründet: Es fällt auf, dass die beiden Schülerinnen mit der Aufgabenbearbeitung beginnen, ohne die Aufgabe genau gelesen zu haben und auch bei der weiteren Aufgabenbearbeitung die Kurzanleitung kaum beachten. Während die Schülerinnen bei der Modellierung des einzelnen Zufallsexperiments in der Lage sind, eine eigene Formel als Zufallsgenerator zu finden, schaffen sie es bei der Definition der Messgröße nicht mehr selbstständig, die Formel `AnzVerschiedeneWerte()` geeignet einzubauen. Die genaue Beachtung der Kurzanleitung hätte hier zum Erfolg führen können, der schriftliche Hinweis auf die Bedeutung der Formel wird aber von beiden Schülerinnen nicht wahrgenommen.

Positiv hervorzuheben ist die eigenständige Entwicklung der Formel des Zufallsgenerators für den Würfelwurf. Weiter hervorzuheben ist die Kontrolle der Ergebnisse bei der Erstellung des einzelnen Zufallsexperiments. Hier zeigen sich Ansätze von **kreativem Umgang mit der Software FATHOM** und von **Kontrollstrategien**.

Wie man am ausgewählten Transkriptabschnitt sehen kann, verläuft die **Interaktion der beiden Schülerinnen** untereinander reibungslos. Die beiden Schülerinnen ergänzen und unterstützen sich gegenseitig. Während Magdalena die Entwicklung vorantreibt, hakt Natascha an wichtigen Punkten ein und leitet die Kontrolle der entwickelten Datentabelle ein.

Auf der **Designebene** zeigt sich, dass die Hauptschwierigkeit der Würfelaufgabe a) in der Definition der Messgröße *Anzahl_Verschiedene* für die Anzahl der verschiedenen gewürfelten Zahlen liegt. Die oben beschriebene Schwierigkeit im Verständnis der Bedeutung der Messgröße im Rahmen des Prozessmodells fällt auf inhaltlicher Seite damit zusammen, dass es sich bei der Anzahl verschiedener Zahlen beim fünffachen Würfelwurf um eine ungewohnte Fragestellung handelt. Auf der Seite der Formelkompetenz ist der Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` im vorangegangenen Unterricht nicht eingeführt worden und sollte anhand der Kurzanleitung verstanden werden. Im Idealfall sollte man den Befehl nach dem Lesen der Kurzanleitung im Sinn einer Kontrollstrategie zunächst ausprobieren. In der vorliegenden Aufgabenbearbeitung wird die Kurzanleitung überhaupt nicht gelesen. Es ist allerdings in Verbindung mit den weiteren identifizierten Problemen bei der Erstellung der Simulation zu bezweifeln, ob die Schülerinnen in dieser frühen Phase des Simulationsvorkurses in der Lage sind, eine solche Meta-Strategie zur Erarbeitung des komplexen Befehls erfolgreich einzusetzen. Es wäre hilfreich gewesen, den neuen Befehl vor Bearbeitung der Aufgabe im Unterricht zu erläutern und auf dessen Bedeutung als Messgröße einzugehen.

Für die weitere Entwicklung des Unterrichtskonzepts kann man darüber nachdenken, ob man die Aufgabe zum fünffachen Würfelwurf als erste eigenständig erstellte Simulation mit einer anderen Art von Fragestellung verbindet, die einen einfacher zu verstehenden Befehl für die Messgröße benutzt. Dies könnte man auch verknüpfen mit einer inhaltlich attraktiveren Aufgabenstellung, die stärker zur Interpretation des stochastischen Inhalts anregt (z. B. eine Wettaufgabe zur Würfelsumme). Allerdings müsste man dann den wichtigen Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` an anderer Stelle einführen.

6.2.4 Beschreibung der Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe b)

Zu Würfelaufgabe b) (Aufgabentext und Aufgabenanalyse siehe S. 80 ff.) liegt ein Transkript der Partnerarbeit derselben Schülergruppe vor.

Zusammenfassung

Die beiden Schülerinnen modellieren im ersten Schritt der Simulation zunächst den 60-fachen Würfelwurf. Im zweiten Schritt definieren sie die Anzahl der Sechsen als Messgröße, führen dann aber nur 60 Simulationsdurchgänge aus („n-N-Verwechselung“). Mit dieser Simulation wird der erwartete Mittelwert an Sechsen bestimmt und die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht und höchstens zwölf Sechsen geschätzt. Bei einer Nachfrage an den Lehrer zur Berechnung der Bereichswahrscheinlichkeit erkennt dieser, dass die Schülerinnen nur 60 Simulationsdurchgänge ausführen. Daraufhin wird die Zahl der Simulationsdurchgänge im dritten Schritt der Simulation auf 1000 erhöht. Die Schülerinnen wiederholen die Schätzung der Bereichswahrscheinlichkeit mit der neuen Anzahl an Simulationsdurchgängen und bestimmen ferner den 80%-Bereich um X=10 herum. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für genau zehn Sechsen im ersten Aufgabenteil sowie die verbale Beschreibung der erzeugten Häufigkeitsverteilung im letzten Aufgabenteil fehlen in der Aufgabenbearbeitung.

Die einzelnen Abschnitte der Gruppenarbeitsphase werden im Folgenden geschildert.

Zusammenfassende Beschreibung der Gruppenarbeitsphase

<u>0:00 bis 2:44: Modellierung des 60-fachen Würfelwurfs</u>

Die Schülerinnen erstellen eine Kollektion *Wuerfel6* und definieren eine Merkmalsspalte *Wurf* mit der Formel `GanzeZufallszahl(1;6)`. Sie fügen dieser Kollektion zunächst 6 Fälle und dann nochmals 60 Fälle hinzu, womit insgesamt 66 Einzelwürfe simuliert werden. Da sie nicht wissen, wie man einzelne Fälle löscht, erstellen sie die gesamte Kollektion mit nun 60 Fällen nochmals von vorne.

<u>2:44 bis 9:20: Erstellung der Messgröße *Anzahl_6* und Sammeln von 60 Messgrößen</u>

Die Schülerinnen wissen nicht genau, wo das FATHOM-Element zur Erstellung der Messgröße in der Software lokalisiert ist. Sie versuchen es zunächst mit einer numerischen Auswertungstabelle zur Kollektion *Wuerfel6*, welche automatisch den Mittelwert der 60 Würfe angibt. Als nächstes probieren sie es mit einer (zweckentfremdeten) kategorialen Auswertungstabelle und ergänzen die Formel `Anzahl(wurf=6)`. Diese Formel liefert die gesuchte Anzahl der Sechsen bei 60 Würfen, allerdings nicht als Messgröße, so dass sich die Simulation nicht analog zu den vorherigen Beispielen fortsetzen lässt. Während Natascha mit den beiden erzeugten Auswertungstabellen bereits die ersten Aufgabenpunkte beantworten möchte, fällt es Magdalena auf, dass noch keine Messgröße definiert wurde:

> 4:39: M: Ja, aber kuck mal, das ist hier irgendwie schlecht, wo hast Du denn das reingefügt?
> […]
> 5:00: M: Wieso macht der das so? Bei mir war das anders. Vielleicht, weil wir nicht „Anzahl_6“ da drin stehen haben.
> […]
> 5:20: M Mach mal Messgrößen. Sollen wir das nur einmal sechzig mal machen?

Nach längerem Suchen findet Magdalena das richtige Menü zur Eingabe der Messgröße im Info-Fenster der Kollektion und es gelingt den Schülerinnen, die Messgröße *Anzahl_6* mit der Formel `Anzahl(wurf=6)` korrekt zu definieren.

Beim Sammeln der Messgrößen verwechselt Magdalena die angegebene Wurfanzahl $n = 60$ mit der Anzahl N der Simulationsdurchgänge („*n*-*N*-Verwechselung“). Natascha möchte hingegen 10 000 Messgrößen sammeln. Magdalena setzt sich gegen Natascha durch, so dass die Simulation nur 60fach wiederholt wird.

Am Ende dieser Phase sind mit der Simulation des 60fachen Würfelwurfs und der Definition der zugehörigen Messgröße *Anzahl_6* die ersten beiden Schritte zur Erstellung einer FATHOM-Simulation korrekt fertig gestellt. Allerdings werden nur 60 Wiederholungen durchgeführt, so dass zur weiteren Auswertung eine Tabelle *Messgrößen von Wuerfel6* mit nur sechzig Einträgen zur Verfügung steht. Jeder Eintrag gibt hierbei die Anzahl der gewürfelten Sechsen bei einem 60fachen Würfelwurf an.

<u>9:20 bis 13:03: Auslassen des Aufgabenteils zur Wahrscheinlichkeit für 10mal „6“, Bestimmung der mittleren Anzahl von Sechsen und der Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 und höchstens 12 Sechsen</u>

Die Schülerinnen erzeugen eine neue kategoriale Auswertungstabelle zur Kollektion *Messgrößen von Wuerfel6*, indem sie das Merkmal *Anzahl_6* bei gedrückter Shift_Taste in eine Auswertungstabelle ziehen. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für genau 10mal die „Sechs“ wird übergangen, damit findet auch keine Interpretation dieser Wahrscheinlichkeit bzw. ein Rückbezug auf die vorausgegangene Vermutungsphase im Unterricht statt.

Die Schülerinnen stellen in 9:35 fest, dass in der kategorialen Auswertungstabelle der Mittelwert nicht automatisch berechnet wird, löschen die Tabelle wieder in 9:53 und erzeugen (ohne Drücken der Shift-Taste!) eine neue numerische Auswertungstabelle. Als Ergebnis erhalten sie mit der automatisch vorhandenen Formel `aMittel()` in 10:09 den Wert 10,28. Dieser wird kommentarlos hingenommen. Auch hier findet keine stochastisch-inhaltliche Interpretation des Ergebnisses statt. Ohne das Ergebnis zu erwähnen und ohne Pause gehen die Schülerinnen in 10:09 zum nächsten Aufgabenteil weiter:

9:35: M:	Trotzdem, so! Anzahl Sechsen, und wo ist jetzt der Mittelwert?
9:47: N:	Ja, muss man erst mal eingeben.
9:49: M:	Wieso, macht er hier doch auch!
9:51: N:	Ja, dann darfst Du nicht die Shift-Taste drücken
9:53: M:	Eieiei
10:09: M:	Das haben wir. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mindestens gleich 8?

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 und höchstens 12 Sechsen wird eine neue kategoriale Auswertungstabelle erzeugt (geeignet wäre eine numerische Auswertungstabelle!) und über den Formeleditor die Formel `Anzahl(Anzahl_6≥8 und ?≤12)` eingegeben. Bei der Erstellung der Formel setzen die beiden Schülerinnen die im Unterricht nicht behandelte „und“-Verknüpfung intuitiv richtig ein:

11:04: M:	Und höchstens, mindestens und höchstens? Größer als acht, und und?
11:07: N:	Größer gleich acht, und kleiner gleich zwölf
11:15: M:	Größer gleich acht – größer gleich acht, soll ich dann ein *und* eintippen oder was?
11:20: N:	ähh, das steht hier, zwischen acht und zwölf
11:25: M:	Ja, ja, aber wieso hat er jetzt ein Fragezeichen da?

Das Fragezeichen wird vom Formeleditor selbst erzeugt. Für die korrekte Darstellung der Formel müsste nur noch das Fragezeichen durch das Merkmal *Anzahl_6* ersetzt werden. Die Schülerinnen sind durch das Fragezeichen verunsichert, schließen den Formeleditor wieder und löschen die Formel damit. Sie diskutieren nun weiter die richtige Formulierung der Formel. Mit Hilfe eines Praktikanten kommen Sie zu folgendem Ergebnis: `Anzahl(Anzahl_6≥8 und (Anzahl_6<12))`. Hier ist die obere Grenze 12 nicht mit eingeschlossen, ansonsten ist die Formel richtig. Das Ergebnis von 35 scheint Magdalena im Vergleich zu den 60 Wiederholungen zu groß zu sein. Sie versucht dieses Ergebnis inhaltlich zu verstehen, die Überlegungen brechen allerdings nach 13:03 ab:

12:55: M:	35, das ist ein bisschen viel, oder?
12:59: N:	Zwischen acht und zwölf, warum nicht?
13:03: M:	Aber wir haben hier, wir haben insgesamt nur sechzig mal – häh, peil ich nicht. […] Ja, aber wir haben jetzt den Versuch sechzig mal gemacht, wir haben sechzig mal sechzig mal gewürfelt.

Die selbstständige Aufgabenbearbeitung bis zu diesem Zeitpunkt ergibt das nebenstehend nachgebildete Desktop-Bild. Unten sind die numerische Auswertungstabelle für die Berechnung des Mittelwerts und die kategoriale Auswertungstabelle für die Berechnung der Bereichswahrscheinlichkeit zu erkennen (hierfür wäre eine numerische Auswertungstabelle geeignet!). Die Auswertungstabelle rechts oben ist eine nicht gelöschte überflüssige Auswertungstabelle, welche bei den Versuchen zur Definition der Messgröße erstellt wurde.

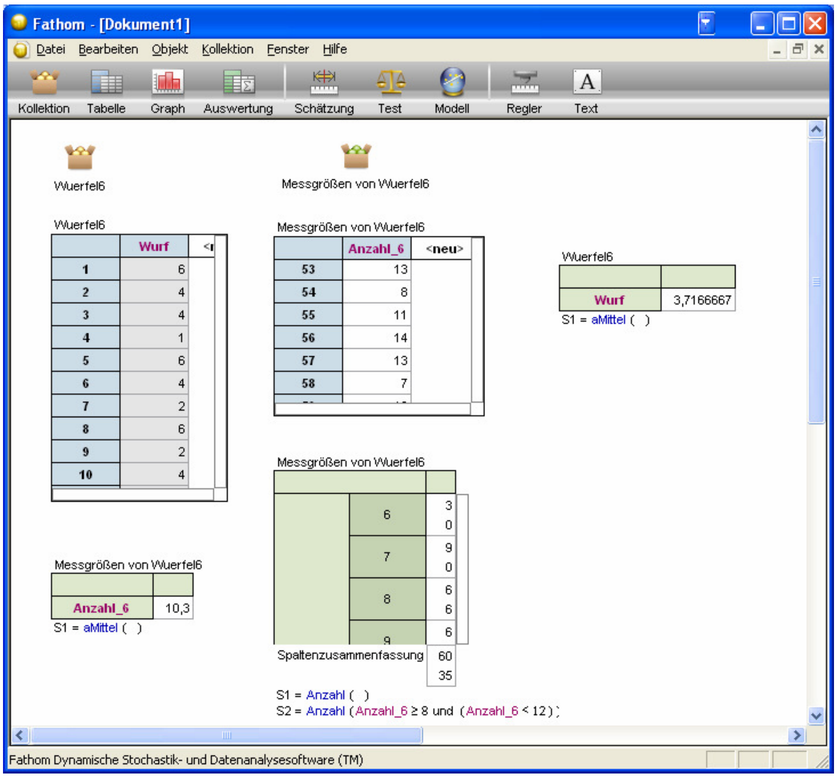


Abb. 6.2: Nachgebildete Desktop-Ansicht zum Stand der Aufgabenbearbeitung zum Zeitpunkt 13:03.

13:03 bis 18:55: Intervention des Lehrers

Der Lehrer kommt auf Anfrage von Schülerin N. hinzu. Es wird zunächst geklärt, dass bei der Formel `Anzahl(Anzahl_6≥8 und (Anzahl_6<12))` die obere Grenze mit eingeschlossen sein muss. Nun lässt sich der Lehrer die bisher erzeugten Kollektionen und deren Bedeutung erläutern. Hierbei fällt ihm auf, dass nur 60 Wiederholungen durchgeführt werden. Zunächst wird noch die Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 und höchstens 12 Sechsen durch die Gesamtanzahl an Wiederholungen geteilt, um nicht die absolute sondern die relative Häufigkeit zu erhalten. Dann erklärt der Lehrer ausführlich den Unterschied zwischen dem 60fachen Würfeln und der 1000fachen Wiederholung der Simulation („*n*-*N*-Verwechselung“). Die Schülerinnen geben als Wiederholungszahl 1000 ein. Mit den angegebenen Korrekturen können die Schülerinnen nun weiterarbeiten.

18:55 bis 19:42: Interpretation der Wahrscheinlichkeit

Nach der Berechnung von 1000 Messgrößen ergibt die Simulation nun eine Wahrscheinlichkeit von ca. 63% für mindestens 8 und höchstens 12 Sechsen. Die Schülerinnen versuchen diesen Wert zu verstehen:

19:03: N:	63% - ist das nicht ein bisschen viel?
19:05: M:	Muss der Bereich … Ja, das ist der Bereich von acht bis zwölf.
19:06: N:	So oft kommt die sechs ja auch nicht.
19:16: M:	Nee, aber es ist ja, es muss ja eigentlich zehn mal ´raus kommen, bei jedem mal. Aber die Wahrscheinlichkeit zwischen acht und zwölf ist es ja.
19:24: N:	Aber wenn es bei einem Experiment die Wahrscheinlichkeit um die 16% ist, dass eine sechs kommt, wenn man das 1000mal wiederholt, dann kann doch nicht die Wahrscheinlichkeit von 16 auf 60% steigen, ist doch Schwachsinn.

Hier bricht die Diskussion über die Wahrscheinlichkeit ab und die Schülerinnen gehen weiter zum nächsten Aufgabenteil.

Magdalena scheint die gewünschte Verteilungsvorstellung zu haben, mit deren Hilfe man verstehen kann, warum der Wert so hoch ist (vgl. 19:16). Ihr scheint klar zu, dass der „ideale Wert" bei $X = 10$ Sechsen liegt, dass aber aufgrund der stochastischen Streuung alle Ergebnisse im Bereich von 8 bis 12 Sechsen keineswegs ungewöhnlich sind und man die Wahrscheinlichkeiten für alle diese Ergebnisse addieren muss. Magdalena ist allerdings nicht in der Lage, dies auch Natascha zu erklären. Natascha scheint nicht ausreichend klar zu sein, welche Wahrscheinlichkeit überhaupt gefragt ist.

Die Interpretation des zugehörigen Histogramms der Häufigkeitsverteilung könnte bei der Erläuterung des Sachverhalts hilfreich sein. Das Histogramm wird allerdings nicht zur Erklärung herangezogen. Die gewünschte Verinnerlichung der Visualisierung der Häufigkeitsverteilung als Kontrolle der aus den Auswertungstabellen erhaltenen Wahrscheinlichkeitsschätzungen scheint bei der Schülergruppe noch nicht ausreichend gefestigt zu sein.

19:42 bis 25:03: Bestimmung des 80%-Bereichs und Erstellung des Histogramms der Häufigkeitsverteilung

Magdalena bearbeitet die beiden letzten Aufgabenpunkte in den letzten fünf Minuten der Unterrichtsstunde eigenständig zu Ende. Natascha tritt nur noch beim Abspeichern in Erscheinung.

Magdalena verwendet die bereits vorhandene Formel `Anzahl(Anzahl_6≥8 und (Anzahl_6≤12))/Anzahl(Anzahl_6)` und bestimmt hiermit die 80%-Umgebung über ein Probierverfahren: Sie ändert die Grenzen zunächst auf den Bereich von 7 bis 13 und erhält für diesen Bereich eine relative Häufigkeit von 0,792. Als nächstes ändert sie die Grenzen auf den Bereich von 7 bis 14 und erhält eine relative Häufigkeit von 0,849. Damit ist die Bestimmung des Bereichs, der mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit auftritt, beendet.

Als nächstes erzeugt Magdalena das Histogramm der Häufigkeitsverteilung des Merkmals *Anzahl_6*. Die in der Aufgabestellung geforderte Beschreibung in Worten erfolgt nicht.

Die Datei wird gespeichert. Für einen Ausdruck der Datei werden die einzelnen Kollektionen und Tabellen auf dem Desktop geordnet.

Im Ergebnis sieht die Simulationsumgebung wie in Abb. 6.3 nachgebildet aus. Man sieht links unten die numerische Auswertungstabelle für die Bestimmung des Mittelwerts und das erzeugte Histogramm, rechts befindet sich die (zweckentfremdete) kategoriale Auswertungstabelle zur Bestimmung der Bereichswahrscheinlichkeiten, in der Mitte befindet sich die noch immer nicht gelöschte überflüssige numerische Auswertungstabelle, welche bei den Versuchen der Definition der Messgröße erstellt wurde.

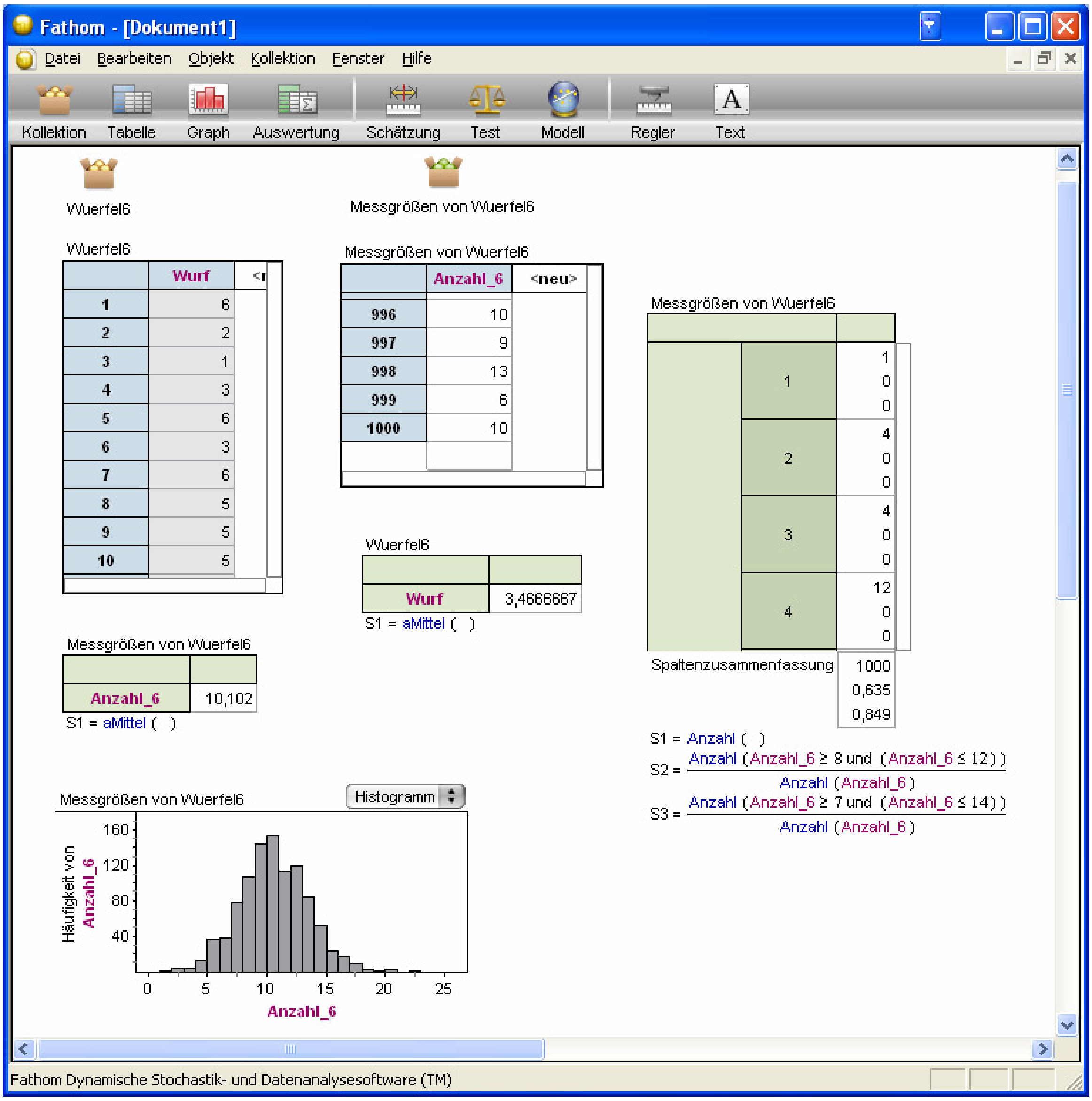


Abb. 6.3: Nachbildung der Desktopansicht der Simulationsumgebung zum Abschluss der Unterrichtsstunde.

Analyse der Gruppenarbeit zur Würfelaufgabe b)

Betrachtet man die **Simulationskompetenz** entlang der vier Schritte des Prozessmodells, so sieht man, dass die beiden Schülerinnen den ersten Schritt der Modellierung des einfachen Zufallsexperiments – hier des 60fachen Würfelwurfs – ohne Probleme und zügig innerhalb von drei Minuten bewerkstelligen können. Schwierigkeiten treten auf in Schritt 2 bei der Definition der Messgröße. Die Schülerinnen haben das richtige Menü zur Eingabe der Messgröße nicht gefunden, d. h. es liegt ein Lokalisierungsproblem auf der Ebene der Werkzeugkompetenz vor. Natascha verliert an dieser Stelle die Struktur zur Erstellung einer Simulation aus den Augen, es dauert es eine Weile, bis die Messgröße richtig definiert werden kann. Bei der Wiederholung der Simulation ist es nun Magdalena, welche die Wurfanzahl von n = 60 mit der Anzahl N der Simulationsdurchgänge verwechselt und sich mit diesem Fehler auch gegen Natascha durchsetzt. Erst nach Intervention des Lehrers kann die Auswertung der Häufigkeitsverteilung erfolgreich vorgenommen werden. Das vierschrittige Verfahren zur Erstellung einer FATHOM-Simulation ist den Schülerinnen prinzipiell klar, beim konkreten Erstellen der Simulationsumgebung zeigen sich jedoch Unsicherheiten in der konsequenten Umsetzung des Prozessmodells.

Es fällt auf, dass die Schülerinnen die Auswertung in Schritt 4 der Simulation vor allem über Formeln vornehmen. Ein Auszählen der Fälle anhand der Häufigkeitsverteilung oder ein Bezug zum Histogramm findet nicht statt, obwohl die Interpretation der grafischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung zum Verständnis der Bereichswahrscheinlichkeit hätte beitragen können. Die Visualisierung der erzeugten Häufigkeitsverteilung als Kontrollstrategie konnte von den Schülerinnen bislang noch nicht verinnerlich werden.

Im Bereich der **allgemeinen FATHOM-Kompetenzen** zeigen sich in der Videoanalyse Unsicherheiten im Umgang mit den Bedienelementen. So wissen die Schülerinnen z. B. nicht, wie man einzelne Fälle wieder löscht. Ferner wählen sie zweimal eine (zweckentfremdete) kategoriale Auswertungstabelle für eine formelhafte Auswertung (vgl. Kapitel 4.1.3). Da alle Auswertungen in der beobachteten Computerarbeitsphase über Formeln vorgenommen werden, wäre hier durchgängig die numerische Auswertungstabelle geeignet gewesen. Die Schülerinnen verlieren bisweilen den Überblick über die Vielfalt der vorhandenen FATHOM-Elemente, so löschen sie bis zum Ende nicht die überflüssige numerische Auswertungstabelle, welche bei den Versuchen der Definition der Messgröße erstellt wurde.

Andererseits zeigt sich phasenweise bereits ein routinierter Umgang mit der Software, so zu Beginn bei der zielgerichteten Erstellung des ersten Modellierungsschritts und beim Ordnen der einzelnen FATHOM-Elemente auf dem Desktop zum Abschluss der Aufgabenbearbeitung. Ferner besitzen die Schülerinnen bereits eine hohe **Formelkompetenz**, was sich in der fast selbstständigen Erstellung des komplexen Befehls zur Berechnung der Bereichswahrscheinlichkeit zeigt. Die Schülerinnen probieren die „und"-Verknüpfung einfach aus (vgl. 11:15). Weiter geling Magdalena bei dem Probierverfahren zur Bestimmung des 80%-Bereichs ein sehr flexibler Umgang mit dem erzeugten Befehl zur Berechnung der Bereichswahrscheinlichkeit. Hier zeigt sich auf der Ebene der Formelkompetenz ein kreativer und flexibler Umgang mit der Software Fathom.

Auf der **stochastischen Ebene** wird der Inhalt der Aufgabe von den Schülerinnen kaum wahrgenommen. Sie sind vor allem an der eher technischen Erarbeitung der Simulationsumgebung interessiert. Dies zeigt sich daran, dass der berechnete Mittelwert nicht einmal kommentiert wird. Der erste Aufgabenpunkt zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von 10 geworfenen Sechsen geht in der Suche nach dem Menü zur Definition der Messgröße unter. Die im Unterrichtsgespräch stattgefundene Phase zur intuitiven Vermutung dieser Wahrscheinlichkeit hat bei den beiden Schülerinnen offensichtlich keine Erwartungshaltung aufgebaut. Die Aufgabe zur verbalen Beschreibung der Häufigkeitsverteilung wird nicht beachtet. Einzig die Schätzung der Bereichswahrscheinlichkeit regt zur stochastisch-inhaltlichen Interpretation an. Insgesamt zeigt sich, dass die inhaltlichen Intentionen der Aufgabe von den beiden Schülerinnen und Schülern kaum erfasst werden. Die lebhaften Diskussionen drehen sich eher um die technische Gestaltung der Simulation als um die Interpretation der Ergebnisse. Eine solch oberflächliche Bearbeitung der Simulationsaufgaben in der Gruppenarbeitsphase sowie die Geringschätzung verbaler Aufgabenteile konnte teilweise im Rahmen von Diplom- und Staatsexamensarbeiten auch im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres beobachtet werden (vgl. Keitzer 2006, S. 259; Huge 2007, S. 94 ff; Podworny 2008, S. 80). Hier zeigt sich ein allgemeines Problem der Verbindung der Fathomkompetenzen mit der stochastisch-inhaltlichen Interpretation der Ergebnisse.

Zur **Interaktion der beiden Schülerinnen** lässt sich sagen, dass diese problemlos verläuft. Beide Schülerinnen tragen zum Gelingen der Aufgabe bei, es wird viel miteinander über die Erstellung der Simulation gesprochen. Allerdings zeigt sich, dass Magdalena in dieser Gruppenarbeitsphase die treibende Kraft ist. Sie bleibt hartnäckig beim Auffinden des Menüs zum Einrichten der Messgröße, sie steuert die Bearbeitung der einzelnen Aufgabenpunkte und sie setzt sich mit der zu geringen Anzahl von nur 60 Wiederholungen gegen den Willen von Natascha durch. Die letzten beiden Teilaufgaben werden von Magdalena alleine bearbeitet. Andererseits gibt es bei der Modellierung des Zufallsexperiments und bei der Erstellung der Formel für die Bereichswahrscheinlichkeit auch Phasen, in denen beide gleichberechtigt zusammen arbeiten.

Designebene – Rückblickende Analyse der Aufgabe

Eine Hauptschwierigkeit der Würfelaufgabe b) ist die mögliche Verwechselung der 60fachen Wiederholungszahl $n = 60$ des Würfelns mit der Anzahl N der Simulationsdurchgänge („n-N-Verwechselung“). Dies ist eine typische Schwierigkeit bei der Simulation mehrstufiger Zufallsversuche (vgl. Saldanha und Thompson 2002) und muss beim Aufgreifen dieser Aufgabe im Unterricht angesprochen und geklärt werden. Eine gute Möglichkeit zur inhaltlichen Klärung dieser Fehlvorstellung ist die klare Zuordnung der Wiederholungsanzahl n des mehrstufigen Zufallsversuchs und der Anzahl N der Simulationsdurchgänge zu den verschiedenen Schritten eins und drei des Prozessmodells.

Die beiden Aufgabenteile mit verbalen Anteilen (Vergleich mit der Vermutung zur Wahrscheinlichkeit für $X = 10$ gewürfelte Sechsen, Beschreibung der Verteilung) werden von den Schülerinnen ignoriert. Einzig die Bereichswahrscheinlichkeit regt zur Interpretation an. Auch die Vermutungsphase im Unterricht konnte keine Motivation zur Interpretation der Wahrscheinlichkeit für $X = 10$ gewürfelte Sechsen erzeugen. Bei den Interpretationsversuchen von Magdalena und Natascha zur Bereichswahrscheinlichkeit sieht man, dass die eigentliche Problemstellung inhaltlich teilweise überhaupt nicht vollständig erfasst wurde. Es zeigt sich das allgemeine Problem der „Abarbeitung“ von Teilaufgaben ohne eine stochastisch-inhaltliche Interpretation des in der Aufgabe behandelten Kontextes vorzunehmen.

Auf der Seite des Aufgabendesigns kann man zwei Ursachen vermuten, die diese Schülerhaltung unterstützen:

- Die Vermutungsphase zur Wahrscheinlichkeit von $X = 10$ gefallenen Sechsen führt nicht direkt zur intendierten Interpretation der Streuung der Verteilung, da die Verteilung als Ganzes in der Fragestellung nicht explizit angesprochen wird. Die Schülerinnen und Schüler sollten eigentlich im Rahmen der Aufgabe beispielhaft für eine Binomialverteilung erkennen, dass man i. a. nicht exakt den „erwarteten Mittelwert“ erhält, sondern dass es Abweichungen nach oben und unten gibt. Die Verteilung streut um den „Idealwert“, der „Idealwert“ selber tritt daher nur mit einer relativ geringen Wahrscheinlichkeit auf. Die Betrachtung der Verteilung als Ganzes wird mit den Umgebungen des „erwarteten Mittelwerts“ sowie über die Beschreibung der Form der Verteilung inhaltlich vertieft. Die Punktschätzung der Wahrscheinlichkeit von $X = 10$ gefallenen Sechsen trägt nicht hierzu bei.
- Der inhaltliche Zusammenhang (Streuung und Verteilungsbegriff) der einzelnen Aufgabenteile ist für die Schülerinnen nicht ersichtlich.

Auf diesen Beobachtungen aufbauend kann es sinnvoll sein, die Würfelaufgabe b) folgendermaßen zu ändern:

Ein fairer Würfel wird 60 mal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl X der Sechsen, die hierbei gewürfelt werden.

- Nehmen Sie an, Sie erstellen eine Simulation des 60-fachen Würfelwurfs und wählen die Anzahl an Sechsen als Messgröße. Mit dieser Simulation führen Sie 1000 Simulationsdurchgänge aus. Überlegen Sie sich, wie die Häufigkeitsverteilung der Messgröße der Anzahl der Sechsen näherungsweise aussehen muss und zeichnen Sie diese schematisch in Ihr Heft.
- Führen Sie die Simulation tatsächlich durch und beschreiben Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Ihrer vermuteten Verteilung und dem Histogramm der simulierten Verteilung.
- Markieren Sie im Histogramm der Simulation den Bereich von mindestens 8 und höchstens 12 Sechsen und schätzen Sie die zugehörige relative Häufigkeit. Beschreiben Sie in Worten, welche Wahrscheinlichkeit hiermit bestimmt wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit auch über eine Auswertungstabelle.
- Wie muss der Bereich von X_1 bis X_2 um $X = 10$ herum gewählt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 80 % ein Ergebnis in diesem Bereich erhält?

Im ersten Aufgabenteil wird direkt eine Erwartungshaltung zur Form der Verteilung als Ganzes aufgebaut. Die Schülerinnen und Schüler können sich überlegen, dass das Maximum der Verteilung vermutlich beim „idealen Wert“ von $X = 10$ liegen wird. Über die Berücksichtigung der möglichen Streuung kann ein prinzipiell richtiges Bild der Verteilung entstehen. Um diese Erwartungshaltung auch bei den schwächeren Schülerinnen und Schülern wirksam werden zu lassen, sollte man die Vermutungsphase im Unterrichtsgespräch ablaufen lassen. Der zweite Aufgabenteil greift die Erwartungshaltung direkt auf. Die in der Simulation erstellte Häufigkeitsverteilung wird direkt mit der vermuteten Verteilung verglichen. Im dritten und vierten Aufgabenteil wird der Blick auf die Umgebungen des „Idealwerts“ von $X = 10$ und damit auf eine quantitative Betrachtung des Begriffs der Streuung gelenkt. Im dritten Aufgabenteil wird eine Verbindung zwischen der grafischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung und den Berechnungen hergestellt. Hiermit wird die wichtige Kontrollstrategie des Vergleichs der rechnerischen Ergebnisse mit der visuellen Darstellung der Verteilung explizit eingefordert. Ferner soll im dritten Aufgabenteil über die Verbalisierung der bestimmten Wahrscheinlichkeit ein inhaltliches Verständnis für das berechnete Ergebnis hergestellt werden. Im vierten Aufgabenteil sollen die Schülerinnen und Schüler ein zielgerichtetes Probierverfahren im Umgang mit ihrer Computersimulation kennen lernen.

Auf der Ebene der Simulations- und Fathomkompetenzen ändern sich die Anforderungen im Vergleich zur ursprünglichen Aufgabenformulierung nicht. Damit ist die Aufgabenstellung wie bisher gut für eine Festigung und Vertiefung der Simulations- und Fathomkompetenzen geeignet. Auf der stochastisch-inhaltlichen Ebene werden die in der Analyse festgestellten Probleme aufgegriffen. Die Aufgabe zielt direkt auf das Verständnis des Verteilungsbegriffs und der Streuung um den „idealen Wert“ von 10 Sechsen. Die einzelnen Aufgabenteile sind inhaltlich eng miteinander verknüpft. Die stochastisch-inhaltliche Interpretation wird mehrfach direkt eingefordert, weiter ist die Kontrollstrategie der Visualisierung der Ergebnisse explizit in die Aufgabe integriert.

6.2.5 Analyse der vierten bis sechsten Unterrichtsstunde in Verbindung mit den Auswertungen der Schülerarbeitsphasen

Um die in den ersten drei Unterrichtsstunden angelegten Simulationskompetenzen und insbesondere die Werkzeugkompetenzen im Umgang mit der Software FATHOM zu festigen, wurden den Schülerinnen und Schülern direkt im Anschluss an die Testaufgabe die Würfelaufgaben a) und b) zur Bearbeitung gegeben. Der **Unterrichtsverlauf** zeigt einen typischen Wechsel zwischen der Schülerarbeit am Computer und einer ausführlichen

Vor- und Nachbesprechung der Aufgaben sowie weiterer Erarbeitungsphasen im Unterricht: Nach der ausführlichen Besprechung von Würfelaufgabe a) in der vierten Stunde wird das vierschrittige Prozessmodell erarbeitet und der Simulationsplan eingeführt. Die Schülerarbeitsphase zu Würfelaufgabe b) wird zunächst über eine Vermutungsphase vorbereitet und zu Beginn der sechsten Unterrichtsstunde mit einer ausführlichen Besprechung abgeschlossen. Die sechste Stunde wird mit Genauigkeitsbetrachtungen zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Computersimulationen fortgeführt.

Die Unterrichtsgestaltung zeigt auf der **Designebene** die flexible Verwendbarkeit der vorhandenen Unterrichtsmaterialien. Die Würfelaufgaben und die mit ihnen verbundenen theoretischen Inhalte wie die Struktur einer Simulation, der Simulationsplan, die Genauigkeitsabschätzungen und auch die zugehörigen theoretischen Grundbegriffe können gemäß der geforderten Praxisorientierung einer Design-Research-Studie je nach inhaltlichem Bedarf und zeitlicher Verfügbarkeit flexibel eingesetzt und erarbeitet werden.

Wie die Auswertung der beiden Schülerarbeitsphasen erkennen lässt, war die gewählte Strukturierung des Unterrichts durchaus sinnvoll: Die Auswertung der beiden Transkripte zu den Würfelaufgaben a) und b) zeigt, dass bei diesen beiden Aufgaben Unsicherheiten sowohl in der Strukturierung der Simulation als auch bei den allgemeinen Werkzeugkompetenzen und bei der Formelkompetenz aufgetreten sind. Eine inhaltliche Interpretation der Ergebnisse im Sinn eines stochastischen Verständnisses für die Aufgaben ist in den Transkripten kaum erkennbar. Diese Beobachtungen werden durch die in den Protokollen festgehaltenen Unterrichtsbeobachtungen zu den beiden Computerarbeitsphasen gestützt, so dass die Auswertungsergebnisse der Partnerarbeit von Magdalena und Natascha auch für andere Gruppen als repräsentativ angesehen werden können.

In der ausführlichen Besprechung der Würfelaufgabe a) zu Beginn der vierten Stunde werden die in der Partnerarbeitsphase geschilderten Problembereiche aufgegriffen: Die benötigten Werkzeugkompetenzen in FATHOM, die Definition der Messgröße und die Bedeutung des Befehls `AnzVerschiedeneWerte()` werden ausführlich erläutert.

Die nun folgende Würfelaufgabe b) wird inhaltlich vorbereitet durch die geschilderte Vermutungsphase zur Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von genau 10 Sechsen. Bereits im Unterrichtsgespräch tauchen hier erstmals Verwechslungen zwischen dem 60fachen Würfeln und der Anzahl *N* der Simulationsdurchgänge auf. Das Problem wird sofort aufgegriffen und diskutiert. Die Auswertung der folgenden Partnerarbeit von Magdalena und Natascha zeigt allerdings, dass die Schülerinnen die gerade im Unterricht besprochenen Inhalte nur teilweise umsetzen können: Es treten wieder Probleme auf bei der Definition der Messgröße und mit der Verwechselung der Anzahl *N* der Simulationsdurchgänge. Auf die Ergebnisse der Vermutungsphase im Unterricht wird kein Bezug genommen. Die sechste Unterrichtsstunde greift daher bei der ausführlichen Vorstellung einer Lösung von Würfelaufgabe b) genau diese Problempunkte nochmals auf. Die Besprechung schließt mit der Erarbeitung der gewünschten inhaltlichen Interpretation der Verteilung der Anzahl der Sechsen beim 60fachen Würfelwurf im Unterrichtsgespräch.

Aus Sicht der **Unterrichtsmethodik** ist der gewählte Wechsel von Gruppenarbeit, Hausaufgaben und gemeinsamen Besprechungs- und Erarbeitungsphasen sinnvoll. Die Schülerinnen und Schüler werden stets intensiv in die Erarbeitungsphasen einbezogen. Eine freiere Gestaltung der Unterrichtsmaterialien oder der Unterrichtsführung birgt in dieser Phase der ersten eigenständigen Erfahrungen mit Computersimulationen die Gefahr, dass Teile des Kurses ohne Orientierung sind und daher im Kompetenzaufbau zurückfallen.

Auf der Ebene der **Simulations- und Fathomkompetenz** lässt sich sagen, dass die beiden Würfelaufgaben und die gewählte unterrichtliche Gestaltung zur Festigung und Vertiefung beigetragen haben. Hierfür sprechen die erfolgreichen Aufgabenbearbeitungen der meisten Schülerinnen und Schüler in den Hausaufgaben, die erfolgreich zu Ende geführte Partnerarbeit von Magdalena und Natascha bei der Würfelaufgabe b) und die reibungslose Einführung des vierschrittigen Prozessmodells zur Erstellung einer Computersimulation. Damit ist das Hauptziel der drei Unterrichtsstunden erreicht worden.

Die Auswertungen der Gruppenarbeitsphasen zeigen aber auch deutlich, dass eine solche Festigungsphase im Anschluss an das Einstiegsbeispiel dringend benötigt wird. Die Gruppenarbeitsphasen am Computer haben den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler sich gegenseitig unterstützen können und dass sie gegebenenfalls beim Lehrer nachfragen können. Von großer Bedeutung ist auch die Möglichkeit der Erstellung der Simulationen als Hausaufgabe, da man sich nur hier individuell Zeit zum Erlernen und Festigen der Simulations- und Fathomkompetenzen nehmen kann. Die ausführlichen Nachbesprechungen dienen der Wiederholung und der Klärung aufgetretener Schwierigkeiten.

Aus der gemeinsamen Auswertung der Transkripte und der Unterrichtsstunden lassen sich folgende Problembereiche identifizieren, welche beim Aufbau der Simulations- und Fathomkompetenzen Schwierigkeiten bereiten:

- Probleme bei der Definition der Messgröße
  - Sowohl bei der Präsentation der Würfelaufgabe a) im Unterricht als auch bei der Schülerarbeitsphase zu Würfelaufgabe b) finden sich Probleme bzgl. der Lokalisierung der Messgröße auf Werkzeugebene.
  - Die Schwierigkeiten in der Gruppenarbeitsphase zu Würfelaufgabe a) deuten auf ein fehlendes Verständnis der Bedeutung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells hin. Die Probleme werden hier verstärkt durch Schwierigkeiten auf der Seite der Formelkompetenz im Umgang mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte()`.
- Zweckentfremdung kategorialer Auswertungstabellen

  Trotz einer Erläuterung des Problems in der 4. Unterrichtsstunde durch den Lehrer werden bei der Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe b) zweimal kategoriale Auswertungstabellen in Verbindung mit numerischen Auswertungsformeln eingesetzt (vgl. Kapitel 4.1.3).
- Verwechselung der Wiederholungsanzahl *n* eines mehrstufige Zufallsversuchs mit der Anzahl *N* der Simulationsdurchgänge („*n*-*N*-Verwechselung“)

  Sowohl im Unterrichtsgespräch als auch im Rahmen der Gruppenarbeit tritt die „*n*-*N*-Verwechselung“ auf, allerdings nur bei Würfelaufgabe b). Das Problem findet sich weder bei der Einführungsaufgabe mit dem 10er-Test und dem 20er-Test noch bei Würfelaufgabe a). Man kann vermuten, dass bei der Einführungsaufgabe sowohl der Anwendungskontext als auch die Vorbereitung durch eine händische Simulation zur Vermeidung des Problems beigetragen haben. Im Vergleich zur Würfelaufgabe a) scheint es ferner so, das die hohe Anzahl von 60 Würfen bei Würfelaufgabe b) zur Verwechselung beiträgt.
- Probleme beim semantischen Verständnis neu eingeführter Befehle

  Die Einführung des Befehls `AnzVerschiedeneWerte()` über die Kurzanleitung hat bei der analysierten Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe a) nicht funktioniert. Allerdings hat die Gruppe die Kurzanleitung auch nicht durchgelesen.

- Fehlende Verinnerlichung der Visualisierung der Häufigkeitsverteilungen im Sinn einer Kontrolle der Wahrscheinlichkeitsschätzungen

  Die Analyse der Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe b) zeigt, dass der Vergleich der rechnerischen Ergebnisse mit dem Histogramm der Häufigkeitsverteilung als Kontrollstrategie noch nicht verinnerlicht ist.

Positiv lässt sich festhalten, dass sich in der Gruppenarbeit zu Würfelaufgabe b) mehrfach auch ein sehr kreativer und sicherer Umgang bei der Erstellung von Formeln in Fathom zeigt.

Auf der Ebene der **stochastischen Kompetenz** sieht man, dass eine inhaltliche Interpretation der geschätzten Wahrscheinlichkeiten und der berechneten Verteilungen in dieser Phase des Unterrichts nur in Ansätzen stattgefunden hat. Die Schülerinnen und Schüler sind zu sehr mit der Erstellung der Computersimulationen beschäftigt. Der Versuch des Aufbaus einer Erwartungshaltung bei Würfelaufgabe b) hat nicht funktioniert. Die bei Würfelaufgabe b) vorhandenen Aufgabenteile zur verbalen Beschreibung der Verteilung oder zur Interpretation eines Ergebnisses wurden ignoriert. Vorschläge zur Modifizierung der Aufgabenstellungen aufgrund der geschilderten Beobachtungen finden sich bereits in den vorausgehenden Kapiteln 6.2.3 und 6.2.4.

Es lässt sich an dieser Stelle nur vermuten, dass auch eine inhaltlich interessantere Gestaltung der Aufgaben zu einer verstärkten stochastisch-inhaltlichen Interpretation anregen könnte. So könnte man die Würfelprobleme z. B. in Spiel- oder in Wettsituationen einbetten.

Betrachtet man die Besprechungen der beiden Würfelaufgaben im Unterricht, so fällt auf, dass auf sprachlicher Ebene die in den Simulationen erhaltenen relativen Häufigkeiten stets als Wahrscheinlichkeiten bezeichnet werden. Man kann vermuten, dass es sich hierbei eher um ein sprachliches Problem handelt. Die explizite Thematisierung der Ungenauigkeit der Wahrscheinlichkeitsbestimmung über den frequentistischen Zugang anhand der behandelten Faustregeln müsste den Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit deutlich gemacht haben. Um dennoch der Verwechselung der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit stärker entgegen zu wirken, sollte bei einer Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts stets von „Wahrscheinlichkeitsschätzungen“ gesprochen werden.

Auf der **Ebene der Motivation und des Schülerinteresses** zeigt sich auf Basis der Unterrichtsbeobachtungen des Autors und der Protokolle ein positives Bild: Der gesamte Kurs arbeitet in der geschilderten Phase des Unterrichts aktiv mit. Trotz der auftretenden Schwierigkeiten beim Erlernen der Simulations- und Fathomkompetenzen haben die meisten Schülerinnen und Schüler die Computersimulationen im Unterricht oder als Hausaufgabe erfolgreich zu Ende bringen können. Die beobachtete Partnerarbeit von Magdalena und Natascha zeigt bereits bei diesen ersten beiden eigenen Simulationsaufgaben eine große Hartnäckigkeit und Zielstrebigkeit bei der Arbeit am Computer.

6.3 Die theoretischen Grundbegriffe und die Würfelaufgaben c), d) und e)

In der siebten und achten Unterrichtsstunde wurden die vorgesehenen theoretischen Grundbegriffe (vgl. Kapitel 4.2.1) behandelt und das Gesetz der großen Zahl vertieft (vgl. Kapitel 4.2.2). In der neunten und zehnten Unterrichtsstunde war geplant, die beiden als Hausaufgabe aufgegebenen Würfelaufgaben d) und e) zunächst ausführlich zu besprechen. In der zehnten Stunde sollte Zeit in Partnerarbeit am Computer zur Verfügung stehen, um je nach individuellem Bedarf eigene Aufgaben zu vervollständigen oder sich gemäß Würfelaufgabe f) ein eigenes Würfelproblem auszudenken und zu lösen (vgl. Kapitel 4.4.3). Aufgrund kurzfristiger organisatorischer Schwierigkeiten stand der Computerraum jedoch in der neunten und zehnten Unterrichtsstunde nicht zur Verfügung. Daher wurden die Lösungen der Würfelaufgaben d) und e) ausführlich mit Laptop und Beamer im normalen Unterrichtsraum besprochen. In der zehnten Stunde wurde eine theoretische Übungsaufgabe aus dem Schulbuch (H. Griesel, H. Postel et al. 2003, S. 15, Aufgabe 4) behandelt und die allgemeine Summenregel $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ für Ereignisse analog zur Darstellung im Schulbuch erarbeitet (H. Griesel, H. Postel et al. 2003, S. 41). Da die Planung der zehnten Unterrichtsstunde aufgrund der kurzfristig aufgetretenen Raumprobleme unabhängig vom Konzept des Simulationsvorkurses erfolgen musste, wird die zehnte Unterrichtsstunde hier nicht weiter beschrieben und analysiert.

6.3.1 Tabellarische Darstellung des Unterrichtsverlaufs

7./8. Stunde: Vorstellung der Würfelaufgabe c) – Theoretische Grundbegriffe – Gesetz der großen Zahl

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Besprechung der als Hausaufgabe aufgegebenen Simulationspläne zu Würfelaufgabe c) (Aufgabentext siehe S. 80), Erstellung der Würfelaufgabe c) am Lehrerrechner entlang den Anweisungen des Simulationsplans eines Schülers, Diskussion der Bedeutung des Befehls `Anzahl(Wurf=6)≥1` zur Definition der Messgröße bei Würfelaufgabe c)	Unterrichtsgespräch
12	Erarbeitung der theoretischen Lösung für die Wahrscheinlichkeit, beim doppelten Würfelwurf mindestens eine Sechs zu werfen, Angabe des Ergebnisraums beim doppelten Würfelwurf, Vergleich mit dem Ergebnis der Simulation	fragend-entwickelnder Unterricht
31	Diskussion der Wahrscheinlichkeiten beim Werfen einer Reißzwecke als Gegenbeispiel zur Gleichwahrscheinlichkeitsannahme	fragend-entwickelnder Unterricht
39	Einführung der Begriffe Zufallsexperiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Ergebnisraum und Ereignis, Ergebnissicherung an der Tafel	Lehrervortrag
47	Pause	
52	Gegenüberstellung des frequentistischen und des theoretischen Zugangs zur Wahrscheinlichkeit über die Laplace-Wahrscheinlichkeit	Lehrervortrag

56	Experimentelle Untersuchung des Gesetzes der großen Zahl am Beispiel des Münzwurfs: Je zwei Schüler führen 50 Münzwürfe durch, die Ergebnisse werden im Kurs zusammengetragen und sukzessive zusammengezählt (vgl. Kapitel 4.4.2).	Partnerarbeit
69	Diskussion der Stabilisierung der relativen Häufigkeit, Einführung des Begriffs „Gesetz der großen Zahl“	fragend-entwickelnder Unterricht
80	Demonstration der beiden FATHOM-Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl (vgl. Kapitel 4.4.2) am Lehrer-PC, Diskussion zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung bei einer Simulation, Diskussion zur Unabhängigkeit der einzelnen Stufen eines mehrfachen Münzwurfs, Austeilen eines Ergebnisblattes (vgl. Anhang, S. 276)	Demonstration mit Computer und Beamer fragend-entwickelnder Unterricht
93 - 95	Kurze Erläuterung des `Wenn()`-Befehls durch den Lehrer, Als Hausaufgabe sollen die beiden noch ausstehenden Würfelaufgaben d) und e) bearbeitet werden.	Hausaufgabe

9. Stunde: Vorstellung der Würfelaufgaben d) und e)

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Aufbau von Laptop und Beamer im Unterrichtsraum	
9	Vorstellung der Glücksspielaufgabe: Ein Schüler stellt sein fertiges Datenblatt zu Würfelaufgabe d) per Laptop und Beamer vor (Aufgabentext siehe S. 80)	Schülervortrag
16	Ausführliche Erläuterung des `Wenn()`-Befehls, Interpretation des berechneten Erwartungswerts	Unterrichtsgespräch
23	Vorstellung der Wartezeitaufgabe: Ein Schüler stellt sein fertiges Datenblatt zu Würfelaufgabe e) per Laptop und Beamer vor (Aufgabentext siehe S. 81)	Schülervortrag
34	Ausführliche Erläuterung der Verwendung einer Abbruchbedingung und des Aufbaus der FATHOM-Simulation mit drei Kollektionen, Interpretation der Ergebnisse und Beschreibung der Verteilung in Worten	Unterrichtsgespräch
45	Die Würfelaufgabe e) soll von jedem Schüler zu Hause vervollständigt werden.	Hausaufgabe

6.3.2 Ausgewählte Beobachtungen zu den zentralen Punkten des Unterrichtsverlaufs

Hausaufgabenbesprechung der Simulation zu Würfelaufgabe c)

Bei der Besprechung der Simulationspläne zu Würfelaufgabe c) fällt auf, dass diese sehr technisch waren und kaum über die Kurzanleitung hinausgingen. Der Lehrer informierte darüber, dass der gewählte Aufbau der Simulation und die gewählten Formeln im Simulationsplan stets in Verbindung mit dem zu simulierenden Zufallsexperiment angegeben werden müssen. So soll bei jeder verwendeten Formel erläutert werden, welches Element des Zufallsexperiments durch die Formel beschrieben wird. Dies wurde beispielhaft an der Würfelaufgabe c) erläutert.

Die Simulation der Würfelaufgabe c) wurde vom Kurs als Hausaufgabe insgesamt gut bearbeitet. Die meisten Schülerinnen und Schüler waren in der Lage, die Simulation entlang der Kurzanleitung mit der Formel `Anzahl(Wurf=6)≥1` zu erstellen. Allerdings gab es von Schülerseite Nachfragen nach der Bedeutung des Befehls `Anzahl(Wurf=6)≥1`. Der Befehl liefert `wahr`, falls das Ereignis „mindestens eine Sechs“ eintritt, ansonsten liefert er `falsch`. Es kam der Vorschlag, statt dieses Befehls einfach die Anzahl der Sechsen als Messgröße zu verwenden und die entstehende Häufigkeitsverteilung hinterher auszuwerten. Man hat an dieser Stelle die Auswahl, ob man als Messgröße das Ereignis „mindestens eine Sechs“ oder die Zufallsgröße „Anzahl der Sechsen“ wählt. Beide Möglichkeiten wurden gegenüber gestellt und miteinander verglichen.

Theoretische Lösung der Würfelaufgabe c)

Bei der Frage nach einer theoretischen Lösung für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs beim doppelten Würfelwurf gab gleich die erste Schülerantwort die richtige Richtung vor: „Man sucht alle Würfelkombinationen und zählt diese.“[4] Kurz wurde von Schülerseite die Frage aufgeworfen, ob man beispielsweise die Tupel (6;1) und (1;6) getrennt zählen soll, diese Frage wurde aber durch entsprechende Schülerbeiträge schnell geklärt:

> „Es sind ja verschiedene Würfel.“,
> „Wenn man das gleichsetzen würde, dann würde man ja eine Kombination unter den Tisch fallen lassen.“
> „Wenn man sich denkt, dass die Würfel verschiedene Farben hätten, wird’s deutlich.“

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit als Anzahl der Tupel mit mindestens einer Sechs durch die Anzahl aller Tupel war dann schnell klar. Das Ergebnis $P(E) = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056$ wurde mit der Wahrscheinlichkeitsschätzung aus der vorher besprochenen Simulation (ca. 31%) verglichen.

Auf die Nachfrage des Lehrers, wie man die Wahrscheinlichkeit für die Kopfseite beim Werfen einer Reißzwecke bestimmt, argumentierten einige Schülerinnen und Schüler, die Wahrscheinlichkeiten für „Seite“ und „Kopf“ seien gleich, da es zwei Möglichkeiten gäbe. Als Reaktion hierauf gab es jedoch mehrere Beiträge, die aufgrund physikalischer Betrachtungen in Zweifel zogen, dass die beiden Möglichkeiten gleichberechtigt seien. Von Lehrerseite wurde daraufhin betont, dass sich die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit nur dann analog zum doppelten Würfelwurf durchführen lässt, wenn klar ist, dass alle betrachteten Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Als Möglichkeit zur Bestimmung der beiden Wahrscheinlichkeiten beim Wurf der Reißzwecke wurde von Schülerseite dann sofort die experimentelle Bestimmung vorgeschlagen.

Zum Abschluss der siebten Unterrichtsstunde wurden die theoretischen Grundbegriffe Zufallsexperiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Ergebnisraum und Ereignis kurz erläutert und an der Tafel gesichert.

[4] Schülerzitat aus dem Unterrichtsprotokoll zur 7./8. Unterrichtsstunde.

Gesetz der großen Zahl

Die händische Durchführung der Münzwürfe zur Betrachtung des Gesetzes der großen Zahl in der achten Unterrichtsstunde konnte zügig durchgeführt werden. Die sukzessive Berechnung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ ergab folgende Tabelle, welche auch grafisch an der Tafel dargestellt wurde:

Anzahl N der Würfe	50	100	150	200	250	300	350	400	450
Rel. Häufigkeit für „Zahl“	0,440	0,550	0,533	0,540	0,524	0,523	0,503	0,498	0,498

Tab. 6.1: Sukzessive Entwicklung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ beim Münzwurf in der im Unterricht durchgeführten experimentellen Münzwurfserie von Kurs A.

Die Schwankungen der Kurve und die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten gegen den bereits bekannten Wert von $p = 0{,}5$ wurden in Schülerbeiträgen beschrieben. Von Lehrerseite wurde als typisches Verhalten der stochastischen Konvergenz thematisiert, dass die Abweichung der relativen Häufigkeit von dem „Idealwert“ $p = 0{,}5$ bei einer weiteren Erhöhung der Wurfanzahl zwischenzeitlich auch wieder zunehmen kann. Als Problematisierung wurden die Schülerinnen und Schüler zum Vergleich mit den am Ende der sechsten Unterrichtsstunde ermittelten Faustregeln aufgefordert. In diesem Zusammenhang konnte erarbeitet werden, dass die relative Häufigkeit für „Zahl“ nach 450 Münzwürfen in den meisten Fällen weiter von der theoretischen Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ entfernt liegt als in der konkreten Messreihe erhalten.

Zur Vertiefung des Gesetzes der großen Zahl demonstrierte der Lehrer am Beamer mehrere Durchläufe der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl (vgl. Kapitel 4.4.2). Bei der Betrachtung der zweiten Lernumgebung mit $N = 1000$ Wiederholungen wurden nochmals Untersuchungen zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung nach 1000 Wiederholungen vorgenommen. Anhand der ersten Lernumgebung, die sich Wurf für Wurf aufbaut, wurde gezeigt, dass man den genauen Wahrscheinlichkeitswert von $p = 0{,}5$ manchmal bereits innerhalb der ersten zehn Würfe direkt trifft. Allerdings konnte man sehen, dass die Abweichung der relativen Häufigkeit bei einer weiteren Erhöhung der Wurfanzahl in den meisten Fällen zunächst wieder größer wird. Hiermit wurde eine Verbindung zum händisch durchführten Experiment hergestellt, bei dem nach 450 Würfen bereits eine hohe Genauigkeit erreicht war, die nach den Faustregeln typischerweise nicht zu erwarten gewesen wäre.

Bei den Durchläufen der sich Wurf für Wurf aufbauenden Simulationsumgebung traten teilweise sehr lange Runs auf, d. h. es fiel sehr oft nacheinander nur „Zahl“ oder nur „Kopf“. Dies war Anlass für eine Diskussion über die Irregularität von Zufallsfolgen. An dieser Stelle wurde der Begriff der Unabhängigkeit der einzelnen Münzwürfe eingeführt. Es wurde von der „Gedächtnislosigkeit“ der Münze gesprochen.

Vorstellung der Würfelaufgaben d) und e)

In der neunten Unterrichtsstunde wurden die Würfelaufgaben d) und e) besprochen. Während die meisten Schülerinnen und Schüler die Glücksspielaufgabe entlang der Kurzanleitung lösen konnten, gab es bei der Wartezeitaufgabe nur zwei komplett richtige Lösungen. Beide Aufgaben wurden im Kurs vorgestellt.

Bei der Vorstellung der Glücksspielaufgabe fällt auf, dass der präsentierende Schüler im Gegensatz zum Vorschlag der Kurzanleitung zwei Messgrößen verwendet hat. In der Kurzanleitung wird die Verwendung einer Messgröße *Gewinn* zur Berechnung des Nettogewinns aus den beiden im Merkmal *Wurf* erzeugten Würfelergebnissen vorgeschlagen. Hierfür kann man die folgende Formel verwenden:

$$\texttt{Wenn(Summe(Wurf)=7)}\begin{cases} 40 \\ -10 \end{cases}$$

Der Schüler hat eine erste Messgröße *Wuerfelsumme* mit der Formel `Summe(Wurf)` definiert. Die zweite Messgröße *Gewinn* greift über folgende Formel auf die erste Messgröße *Wuerfelsumme* zurück:

$$\texttt{Wenn(Wuerfelsumme=7)}\begin{cases} 40 \\ -10 \end{cases}$$

Hiermit wird die in der Kurzanleitung vorgeschlagene Schachtelung der Befehle vermieden. Bei der Besprechung der Ergebnisse wurde der mittlere Gewinn pro Spiel thematisiert und der Begriff des fairen Spiels eingeführt.

Bei der Wartezeitaufgabe ist die Modellierung des Einzelexperiments, d. h. in diesem Fall das Würfeln bis zum ersten Sechserpasch, die Hauptschwierigkeit. Hier wird in der Kurzanleitung vorgeschlagen, in einer leeren Ausgangskollektion zwei Messgrößen *wurf1* und *wurf2* zu definieren und in der Registerkarte *Messgrößen Sammeln* die Bedingung `(wurf1=6) und (wurf2=6)` einzugeben (vgl. Kurzanleitung zur Aufgabe, S. 81). Nach der Demonstration einer kompletten Schülerlösung wurde diese Modellierung von Schritt 1 des Prozessmodells vom Lehrer herausgegriffen und nochmals ausführlich vorgestellt. Ferner wurde die ungewohnte Struktur der Simulation mit drei Kollektionen ausführlich erläutert. Bei der Besprechung der Ergebnisse wurde vom Lehrer besonderer Wert auf die Beschreibung und Interpretation der Verteilung gelegt.

6.3.3 Analyse der siebten bis neunten Unterrichtsstunde

Der **Unterrichtsverlauf** ist gekennzeichnet durch einen Wechsel von Erarbeitungsphasen, händischem Experimentieren und Demonstrationsphasen am Computer. Eine ursprünglich geplante Partnerarbeit in der zehnten Stunde zum Abschluss der Würfelaufgaben konnte aufgrund der beschriebenen Raumprobleme nicht durchgeführt werden. Die gewählte Reihenfolge der Erarbeitung theoretischer Grundbegriffe, der Erarbeitung des Gesetzes der großen Zahl und der Besprechung der Würfelaufgaben zeigt auf der **Designebene** wieder die Möglichkeit der flexiblen Verwendung der Unterrichtsmaterialien gemäß der geforderten Praxisorientierung einer Design-Research-Studie (vgl. Kapitel 3.1). Die Probleme mit dem Computerraum zeigen allerdings auch, dass für eine reibungslose Umsetzung des Unterrichtskonzepts über die gesamte Dauer des Simulationsvorkurses ein Computerraum zur Verfügung stehen muss.

Auf der Ebene der **Simulations- und Fathomkompetenz** zeigt sich im Vergleich zur Bearbeitung der ersten beiden Würfelaufgaben eine deutliche Festigung der Kompetenzen bei der Erstellung einer FATHOM-Simulation entlang des eingeführten vierschrittigen Prozessmodells. Hierfür spricht die erfolgreiche Bearbeitung der beiden Würfelaufgaben c) und d) in der Hausaufgabe seitens der Mehrzahl des Kurses. Die Schülerinnen und Schüler haben offensichtlich bei der Verwendung der geeigneten FATHOM-Elemente und Formeln an Routine gewonnen. Die Strukturierung des Vorgehens wird bei den Würfelaufgaben gestützt durch die vorhandenen Kurzanleitungen. Bei den Simulationsplänen muss im Sinn einer bewussten Reflexion der Modellierungsschritte eine stärkere Verbindung zwischen der in der Aufgabenstellung geschilderten stochastischen Situation und der Umsetzung in FATHOM eingefordert werden (vgl. Kapitel 4.1.4).

Offensichtlich haben die Schülerinnen und Schüler jetzt auch den Begriff der Messgröße und damit einen zentralen Schritt bei der Erstellung einer sequentiellen Simulation mit der Software FATHOM besser verstanden. Dies sieht man daran, dass sowohl bei der Würfelaufgabe c) als auch bei der Glücksspielaufgabe d) von den Schülerinnen und Schülern alternative Messgrößen im Vergleich zur Kurzanleitung vorgeschlagen und diskutiert werden.

Die Verwendung des anspruchsvollen `Wenn()`-Befehls für die Fallunterscheidung bei Gewinnspielaufgabe d) hat mit Hilfe der Erläuterung des Befehls vor der Erteilung der Hausaufgabe gut funktioniert. Allerdings sollte man bei Würfelaufgabe d) überlegen, ob man die Kurzanleitung zur Würfelaufgabe entsprechend der von einem Schüler vorgeschlagenen Lösung mit der Verwendung von zwei Messgrößen ändert. Hiermit würde zum einen demonstriert, dass man auch mehrere Messgrößen verwenden kann, ferner wird die Schachtelung zweier Formeln vermieden.

Insgesamt zeigt sich auf der **Designebene** hinsichtlich der **Formulierung des Aufgabenmaterials**, dass die Kurzanleitungen zu den Würfelaufgaben ein geeignetes Mittel sind, um die Schülerinnen und Schüler bei der selbstständigen Festigung und Vertiefung der Simulations- und FATHOM-Kompetenzen zu unterstützen. Außerdem zeigt sich, dass die gewählten Auswahlentscheidungen zur ausschließlichen Verwendung der sequentiellen Simulation und zur Beschränkung des verwendeten Befehlsumfangs dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler bereits nach kurzer Zeit FATHOM-Simulationen mit kleinen Hilfen selbstständig erstellen können (vgl. Kapitel 4.1.5). Hiermit ist es gerechtfertigt, im Sinn einer inneren Differenzierung die komplexe Simulation des Wartezeitproblems mit der Abbruchbedingung als letzte Würfelaufgabe zu stellen.

Auf der Ebene der **stochastischen Kompetenz** lässt sich zunächst sagen, dass die theoretischen Grundbegriffe wie geplant eingeführt werden konnten (vgl. Kapitel 4.2.1). Bei der theoretischen Lösung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens eine geworfene Sechs beim doppelten Würfelwurf konnten die Schülerinnen und Schüler eigenständig den korrekten Ergebnisraum entwickeln. Die Frage nach der Berücksichtigung der Reihenfolge z. B. bei den Tupeln (1;6) und (6;1) konnte schnell gelöst werden. Die zitierten Schülerbeiträge, welche mit verschiedenartigen Würfeln argumentieren, deuten darauf hin, dass hier auf Wissen aus der Mittelstufe zurückgegriffen wurde, da es sich um eine typische Argumentation aus dem Schulunterricht handelt, die sich in vielen Schulbüchern der Mittelstufe findet (vgl. Griesel, Postel et al. 2002; Lergenmüller und Schmidt 2006; Schätz und Eisentraut 2006).

Bei Würfelaufgabe c) wurde die Wahrscheinlichkeitsschätzung der Simulation zum Vergleich herangezogen. Damit wurde hier erstmals im Simulationsvorkurs eine Aufgabe so bearbeitet, dass sich der frequentistische und der theoretische Zugang zur Wahrscheinlichkeit ergänzen. Auf die beiden möglichen Zugänge zur Wahrscheinlichkeit wurde zu Beginn der achten Unterrichtstunde noch einmal verallgemeinernd eingegangen. Die gegenseitige Ergänzung der beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe soll im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres zunehmend zur Unterstützung des Verständnisses genutzt werden.

Die ersten Schüleräußerungen zu den Wahrscheinlichkeiten beim Reißzweckenbeispiel zeigen die bekannte Fehlvorstellung des *„Equiprobability-Bias“*. Die Schüleräußerungen zeigen die Vorstellung, dass sich der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments immer aus gleich wahrscheinlichen Ereignissen zusammensetzt. Das gewählte Reißzweckenbeispiel soll als ein Gegenbeispiel zum Laplace-Ergebnisraum dieser Fehlvorstellung entgegen treten.

Positiv ist hervorzuheben, dass die Schülerinnen und Schüler nach Klärung der fehlenden Symmetrie des Reißzweckenversuchs sehr schnell und eigenständig den experimentellen Zugang zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten vorgeschlagen haben. Dies zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit bereits gut verinnerlicht haben.

Bei der Einführung des Gesetzes der großen Zahl konnten die beiden Lernumgebungen aus Zeitgründen nur zur Demonstration eingesetzt werden. Hier waren sie allerdings sehr hilfreich: Das Gesetz der großen Zahl wird durch die Lernumgebung mit $N = 1000$ Münzwürfen verknüpft mit den Faustregeln zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung von Simulationen. Die andere Lernumgebung zur schrittweisen Veränderung der relativen Häufigkeit trägt zur Visualisierung des Gesetzes der großen Zahl bei. Durch die genaue Betrachtung der Entwicklung der relativen Häufigkeit wurden ferner die Überlegungen zur „Gedächtnislosigkeit" der Münze angestoßen und die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen des Münzwurfs thematisiert. Das entspricht gerade einer der mit den Lernumgebungen beabsichtigten Wirkungen und zeigt, dass die Lernumgebungen geeignet sind, um ein intuitives Verständnis stochastischer Inhalte zu fördern (vgl. Kapitel 4.2.4).

Auf der **Designebene** wäre es sicherlich wünschenswert gewesen, die Lernumgebungen nicht nur zur Demonstration, sondern in Partnerarbeit am Computer einzusetzen. Damit sie ihre volle Wirkung entfalten können, müssen bei einer Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts zielgerichtete Arbeitsaufträge in Verbindung mit den Lernumgebungen entwickelt werden. Diese Arbeitsaufträge sollten die im Unterrichtsgespräch erarbeiteten Inhalte thematisieren, nämlich die verbale Beschreibung der grafischen Darstellungen zum Gesetz der großen Zahl, die Genauigkeitsabschätzungen und die Unabhängigkeit der Münzwürfe in der Zufallsfolge.

Zum **Verhältnis zwischen der Erarbeitung von Fathom-Kompetenzen und stochastisch-inhaltlichen Kompetenzen** lässt sich in dieser Phase des Unterrichts Folgendes sagen: Während die Würfelaufgabe c) direkt mit der Erarbeitung stochastischer Grundbegriffe verknüpft wird, zeigt sich auch bei der Besprechung der Glücksspielaufgabe und der Wartezeitaufgabe, dass die Beschreibung und die Interpretation der Ergebnisse in dieser Phase der Unterrichtseinheit eine größere Bedeutung erlangt: In beiden Aufgaben wird inhaltlich der Erwartungswert behandelt, zumindest bei der Glücksspielaufgabe wird dieser auch interpretiert, bei der Wartezeitaufgabe wird die Beschreibung der Form der Verteilung ausführlich diskutiert. Mit der zunehmenden Simulations- und FATHOM-Kompetenz der Schülerinnen und Schüler kann den stochastischen Inhalten mehr Raum gegeben werden.

6.4 Die selbstständige Arbeitsphase der gemischten Aufgaben

In der 11. bis 15. Unterrichtsstunde wurden die gemischten Aufgaben behandelt (vgl. Kapitel 4.4.4). Hierbei hatten die Schülergruppen drei Unterrichtsstunden Zeit, mindestens drei der acht zur Auswahl stehenden Aufgaben zu bearbeiten. Zu jeder Simulation musste ein Simulationsplan erstellt und beim Lehrer abgegeben werden. In der 14. und 15. Unterrichtsstunde wurde zu jeder bearbeiteten Aufgabe eine Lösung am Lehrer-PC vorgestellt.

Die vorgestellten Lösungen und die zugehörigen Simulationspläne wurden dem gesamten Kurs als Ergebnissicherung zur Verfügung gestellt.

Nach einer tabellarischen Übersicht des Unterrichtsverlaufs und ergänzenden Bemerkungen sollen in diesem Kapitel zwei der eingesammelten Simulationspläne zu den Aufgaben „Ferienjob“ und „Münzspiel“ sowie ein Transkript der Schülerarbeitsphase von Magdalena und Natascha zur Aufgabe „Geburtstagsproblem“ exemplarisch vorgestellt und in die Reflexion einbezogen werden. Mit der getroffenen Auswahl ist jeder Aufgabentyp der gemischten Aufgaben repräsentiert.

6.4.1 Tabellarische Darstellung des Unterrichtsverlaufs

11./12./13. Stunde: Partnerarbeit zu den gemischten Aufgaben am Computer

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Ausgabe des Arbeitsblatts „Gemischte Aufgaben“ (vgl. Kapitel 4.4.4) und einer Übersicht der erarbeiteten FATHOM-Kommandos und Formeln (vgl. Anhang, S. 277), Erteilung des Arbeitsauftrags: Jede Arbeitsgruppe soll jeweils mindestens eine Aufgabe der Typen A, B und C bearbeiten und einen zugehörigen Simulationsplan erstellen und abgeben. In Absprache mit dem Lehrer stellen die Gruppen in der 14./15. Unterrichtsstunde je eine Aufgabe am Lehrer-PC vor.	Lehrervortrag
10-135	Bearbeitung der gemischten Aufgaben in Partnerarbeit in der Schule und zu Hause	Partnerarbeit

14./15. Stunde: Vorstellung der Schülerlösungen zu den gemischten Aufgaben

Zeit	Thema/Inhalte/Aufgaben	Methode
0	Vorbereitung der Schülervorträge, Ausdrucken von Simulationsplänen	
12	Vorstellung der Aufgabe „Multiple-Choice-Test“: Zwei Schüler stellen die fertige Simulationsumgebung vor.	Schülervortrag und Diskussion
29	Vorstellung der Aufgabe „Ferienjob“: Zwei Schülerinnen entwickeln die Simulationsumgebung am Lehrer-PC mit Erläuterungen.	
41	Vorstellung der Erwartungswertaufgabe „Urnenziehung“: Zwei Schülerinnen stellen die fertige Simulationsumgebung vor.	
51	Pause	
56	Vorstellung der Erwartungswertaufgabe „Münzspiel“: Zwei Schülerinnen stellen die fertige Simulationsumgebung vor.	Schülervortrag und Diskussion
64	Vorstellung der Aufgabe „Entenjagd“: Zwei Schüler stellen die fertige Simulationsumgebung vor.	
71	Vorstellung der Erwartungswertaufgabe „Geburtstagsproblem“: Zwei Schülerinnen stellen die fertige Simulationsumgebung vor.	
79 -95	Vorstellung der Aufgabe „Sammelbildproblem“: Zwei Schüler entwickeln die Simulationsumgebung am Lehrer-PC mit ausführlichen Erläuterungen.	

6.4.2 Ausgewählte Beobachtungen zu den zentralen Punkten des Unterrichtsverlaufs

Von den insgesamt neun Arbeitsgruppen im Kurs sind die einzelnen Aufgaben wie folgt angewählt worden:

Typ A	Multiple-Choice-Test	6 Bearbeitungen
	Ferienjob	3 Bearbeitungen
	Goldmünze	0 Bearbeitungen
Typ B	Urnenziehung	6 Bearbeitungen
	Münzspiel	3 Bearbeitungen
Typ C	Entenjagd	5 Bearbeitungen
	Geburtstagsproblem	4 Bearbeitungen
	Sammelbildproblem	2 Bearbeitungen

Zwei Arbeitsgruppen haben vier statt drei Aufgaben bearbeitet. Die beiden zusätzlichen Aufgaben wurden jeweils vom Typ C gewählt.

Aus den Unterrichtsprotokollen zur 11. bis 13. Stunde sind folgende Beobachtungen über die Schülerarbeitsphase zu entnehmen: Die Schülerinnen und Schüler sind sehr motiviert an die selbstständige Bearbeitung der gemischten Aufgaben herangegangen. Die Partnerarbeit in den gewohnten Arbeitsgruppen hat gut funktioniert, die Schülerinnen und Schüler konnten sich in intensiven Diskussionen über die Aufgaben und ihre Lösungsansätze gegenseitig ergänzen. Im Anschluss an die 11. Unterrichtsstunde und teilweise auch an die 12./13. Unterrichtsstunde wurde der aktuelle Stand der Aufgabenbearbeitung per USB-Stick oder per Email nach Hause transportiert, um dort weiterarbeiten zu können. In Verbindung mit dieser Heimarbeit traten geringe Probleme auf bei der Zusammenführung unterschiedlicher Bearbeitungen zweier Partner in der nächsten Unterrichtsstunde.

Wie den Unterrichtsprotokollen weiter zu entnehmen ist, lagen die Hauptschwierigkeiten bei der Lösung der Aufgaben in der Formulierung der passenden Formeln für die Definition der Messgrößen und für die Auswertung der erzeugten Verteilungen. Insbesondere die Verwendung des `Wenn()`-Befehls bei den beiden Erwartungswertaufgaben vom Typ B sowie die Auswertungen der mit dem Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` erzeugten Verteilungen bei der Entenjagd und beim Geburtstagsproblem bereiteten Schwierigkeiten. An diesen Stellen musste der Lehrer häufig Hilfestellungen geben. Beim Aufbau der Simulationsumgebungen und bei den weiteren Schritten zur Erzeugung einer Computersimulation in FATHOM wurden kaum Hilfestellungen eingefordert.

Die Präsentationen der Schülerlösungen erfolgten sehr unterschiedlich: Die erste Präsentation zum Multiple-Choice-Test war schlecht vorbereitet und wurde stockend vorgetragen, obwohl hier eine bereits fertige Simulationsumgebung erläutert wurde.

Die weiteren Präsentationen waren alle gut vorbereitet und konzentrierten sich darauf, die zentralen Schritte entlang des Simulationsplans zu erläutern:

- Konstruktion des Einzelexperiments mit der Begründung für die Wahl des richtigen Zufallsgenerators
- Definition der Messgröße mit der passenden Formel
- Interpretation und Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilungen

Nachfragen der Schülerinnen und Schüler ergaben sich auf der Ebene der Formelkompetenz bei der Definition der Messgröße: Hier wurde die Semantik der `Wenn()`-Befehle zu den beiden Gewinnspielaufgaben diskutiert, ferner die stochastisch-inhaltliche Bedeutung der über die Formel `AnzVerschiedeneWerte()` definierten Messgröße *Anzahl_Verschiedene_Geburtstage* beim Geburtstagsproblem.

Die beiden Aufgaben „Ferienjob“ und „Sammelbildproblem“ wurden auf Veranlassung des Lehrers bei der Präsentation komplett neu aufgebaut. Beide Aufgaben erfordern einen flexiblen Umgang mit dem eingeführten Prozessmodell: In Teil b) der Ferienjob-Aufgabe muss ein Probierverfahren angewendet werden, bei dem man die Zahl der Bewerbungen und damit die Zahl der Fälle in der Ausgangskollektion ändern muss. Obwohl der Aufgabenteil b) zunächst wie eine einfache Auswertungsaufgabe aussieht, lässt er sich nicht mehr allein durch eine Auswertung der einmal erzeugten Häufigkeitsverteilung lösen. Bei der Aufgabe zum Sammelbildproblem lässt sich die Struktur des vierschrittigen Prozessmodells wie schon bei der Würfelaufgabe e) nicht mehr direkt auf die Fathom-Simulation übertragen.

Bei der ausführlichen Präsentation der beiden Aufgaben „Ferienjob“ und „Sammelbildproblem“ zeigten sich erfreuliche Kontroll-Strategien im Umgang mit der Software Fathom: Bei der Ferienjob-Aufgabe wurde das Einzelexperiment mit den vier Bewerbungen und den hierzu gezählten Erfolgen mehrfach wiederholt und die Ergebnisse der entstehenden Tabellen interpretiert. Ebenso wurde beim Sammelbildproblem das Einzelexperiment bis zum Sammeln *einer* vollständigen Serie mit Strg-y mehrfach wiederholt und die Ergebnisse sowie einzelne Tabelleneinträge interpretiert.

Bei der Interpretation der Ergebnisse der Erwartungswertaufgaben zeigt sich mehrfach ein intuitiver Widerspruch zwischen dem erhaltenen Dezimalbruch des berechneten Mittelwerts und dem kategorialen Charakter der Zufallsgröße: So wird der Mittelwert der erfolgreichen Bewerbungen bei der Ferienjob-Aufgabe auf „ca. 1“ gerundet, der Mittelwert der benötigten Schokoriegel bis zum Erreichen einer vollständigen Serie bei der Sammelbildaufgabe auf „ungefähr 37“. Bei den Gewinnspielaufgaben mit der numerischen Zufallsgröße Nettogewinn tritt dieses Problem nicht auf.

Bei allen Schülerpräsentationen zeigte sich eine gute Zusammenarbeit der beiden beteiligten Schülerinnen und Schüler. Die Vorträge wurden jeweils abwechselnd vorgeführt.

6.4.3 Zwei beispielhafte Simulationspläne

Die beiden folgenden Simulationspläne wurden im Rahmen der gemischten Aufgaben erstellt. Sie gehören zu den in der 14. und 15. Stunde vorgestellten Lösungen und wurden dem gesamten Kurs als Beispiele für gelungene Simulationspläne zur Verfügung gestellt.

Die aus FATHOM entnommenen Grafiken wurden mit der deutschen FATHOM-Version nachgebildet, die englischen Formeln wurden durch die zugehörigen deutschen Formeln ersetzt. Ansonsten wurden die Simulationspläne unverändert gelassen.

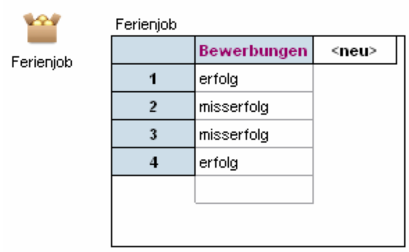
Simulationsplan Ferienjob

Sie wollen in den Ferien arbeiten und schreiben hierfür Bewerbungen. Aus Erfahrung schätzt man, dass die Chance, einen Ferienjob zu bekommen, pro Bewerbung bei 25 Prozent liegt.

a) Welche Erfolgsaussichten für einen Ferienjob haben Sie, wenn Sie vier Bewerbungen schreiben?

b) Wie viele Bewerbungen müssen Sie mindestens schreiben, damit Ihre Erfolgsaussichten auf einen Ferienjob bei über 90 Prozent liegen?

1. Man erstellt eine Kollektion „Ferienjob“, um die Situation nachzubilden. In der Tabelle zu Ferienjob erstellt man eine Spalte „Bewerbungen“ und vier Fälle (für die vier Bewerbungen). Dann gibt man die Formel ZufallsWahl(„erfolg“;“misserfolg“; “misserfolg“; “misserfolg“) ein, damit die Situation simuliert wird.



2. Bei dem Test interessiert uns die Anzahl der Erfolge. Deshalb definieren wir im Info-Fester von „Ferienjob“ die Messgröße „Zusagen“ mit der Formel
Anzahl (Bewerbungen = „erfolg“)

Messgrößen von Ferienjob

	Zusagen
1	0
2	0
3	2
4	2
5	1
6	2
7	1

3. Um die relative Häufigkeit für das Auftreten einer bestimmten Anzahl von Erfolgen zu erhalten, muss man die Simulation sehr oft wiederholen. Mit „Messgrößen sammeln“ führen wir die Simulation 10 000mal durch. Die Anzahl der Erfolge ist jeweils in der neu entstandenen Kollektion (Messgrößen von Ferienjob) enthalten.

4. Zur Auswertung der Simulation gibt es nun 3 Möglichkeiten:

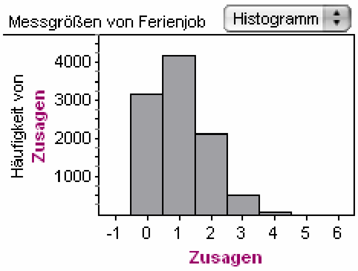
a) Man erstellt eine Auswertungstabelle und zieht die Spalte „Zusagen“ bei gedrückter Shift-Taste in die Auswertungstabelle. Dadurch erhält man die Anzahl der beim Test durchgeführten Erfolge.

Messgrößen von Ferienjob

	Zusagen					Zeilen-zusammenfassung
	0	1	2	3	4	
	3174	4176	2113	494	43	10000

S1 = Anzahl ( )

b) Man erstellt ein Grafik – Fenster und zieht die Spalte „Zusagen“ auf die x-Achse und stellt das Grafik-Fenster auf Histogramm. Dadurch erhält man eine grafische Darstellung der Anzahl der Erfolge.



c) Gibt man bei der Auswertungstabelle die Formel „Anzahl (Zusagen >=1)/Anzahl(Zusagen)*100“ an, erhält man die Wahrscheinlichkeit, einen Job zu bekommen, in % angegeben.

Messgrößen von Ferienjob

Zusagen	1,0056 68,26

S1 = aMittel ( )

$$S2 = \frac{\text{Anzahl (Zusagen} \geq 1)}{\text{Anzahl (Zusagen)}} 100$$

Ergebnisse:

Zu a) Die Erfolgsaussichten liegen bei ca. 68,62 %

Zu b) Man erhöht die Anzahl der Fälle bei der Tabelle zu Ferienjob. Jeder der Fälle entspricht hierbei einer Bewerbung. In der Auswertungstabelle erkennt man immer am Prozentwert die aktuelle Chance. Erhöht man die Anzahl der Fälle auf 9, hat man eine Chance von über 90%.

Der ausgewählte Simulationsplan ist ein Beleg für die erfolgreiche Bearbeitung der gegebenen Aufgabe. Die Formulierung des Simulationsplans zeigt die gewünschte Strukturierung entlang des vierschrittigen Prozessmodells und die gewünschte Verknüpfung zwischen der stochastischen Situation und der Modellierung in FATHOM: Die Zahl der Fälle in der Kollektion wird mit der Zahl der Bewerbungen identifiziert, die Formel für die Definition der Messgröße wird begründet und die Auswertung wird erläutert. Sehr schön ist ferner die Erklärung des Probierverfahrens zur Gewinnung des Ergebnisses von Aufgabenteil b) am Ende des Simulationsplans. Es fehlt einzig eine Begründung, dass der gewählte Zufallsgenerator die vorgegebene Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}25$ modelliert. Die Bezeichnungen sind sinnvoll gewählt.

Es zeigt sich sowohl von der Strukturierung als auch von der Wahl der Formulierungen eine sehr enge Orientierung am beispielhaft ausgegebenen Simulationsplan zur Einstiegsaufgabe (vgl. Anhang, S. 275). Die eng an der Vorlage angelehnten Formulierungen „Bei dem Test interessiert uns die Anzahl der Erfolge“ bei 2. und „Dadurch erhält man die Anzahl der beim Test durchgeführten Erfolge“ bei 4. sind in diesem Zusammenhang sogar falsch, da es bei der bearbeiteten Aufgabe keinen Test gibt. Im Vergleich zum vorgegeben Simulationsplan ist das ausgewählte Beispiel allerdings in geeigneter Weise um Grafiken und Tabellen aus der Simulationsumgebung sowie um eine Formulierung der Antwort erweitert. Obwohl bei der Beschreibung der rechnerischen Auswertung die relative Häufigkeit direkt mit der Wahrscheinlichkeit identifiziert wird, lässt der Zusatz „ca.“ bei der Formulierung der Antwort zu a) erkennen, dass die relative Häufigkeit als Schätzwert interpretiert wird.

Simulationsplan des Münzspiels

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Der Einsatz beträgt 2,- €. Bei zweimal Wappen erhält der Spieler 3,- € zurück, bei dreimal Wappen erhält man 5,- € zurück.

a) Welche unterschiedlichen Nettogewinne können auftreten?

b) Bestimmen Sie zu jedem möglichen Nettogewinn die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Nettogewinn auftreten kann.

c) Welchen mittleren Nettogewinn pro Spiel kann man bei diesem Glücksspiel auf lange Sicht erwarten?

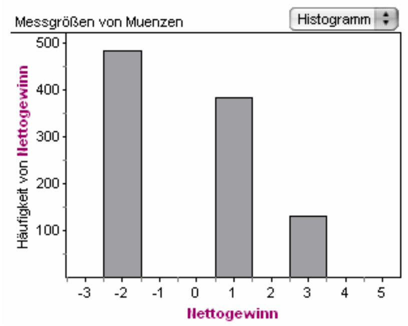
1. Es wird eine Kollektion mit dem Namen „Muenzen“, in der das Spiel simuliert wird, erstellt und in der Tabelle zu „Muenzen“ eine Spalte „Wurf“ hinzugefügt. Da es sich um 3 Würfe handelt, werden nun noch 3 Fälle hinzugefügt. Da entweder Wappen oder Zahl erscheinen kann, gibt man nun die Formel „Zufallswahl („Wappen“; „Zahl“)“ ein.
2. Da wir uns dafür interessieren, wie oft Wappen erscheint, wird nun im Info-Fenster der Kollektion die Messgröße „Anzahl_Wappen“ mit der Formel „Anzahl (Wurf = „Wappen“)“ definiert, womit nun gezählt wird, wie oft Wappen erscheint. Da man außerdem gerne wissen möchte, wie viel man gewinnt oder verliert, wird eine weitere Messgröße „Nettogewinn“ mit der Formel

$$\texttt{Wenn(Anzahl\_Wappen=2)}\begin{cases} 1 \\ \texttt{Wenn(Anzahl\_Wappen=3)}\begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

   eingegeben.

   Es handelt sich um eine geschachtelte Formel, da man bei keinem oder nur einem Wappen 2 Euro Verlust hat, und es bei zwei Wappen einen anderen Gewinn als bei 3 Wappen gibt.
3. Um die relative Häufigkeit für das Auftreten der unterschiedlichen Anzahlen von Wappen zu erhalten, muss man den Versuch sehr oft wiederholen. Darum lässt man den Versuch mit „Messgrößen Sammeln“ 1000 mal durchführen. In der neuen Kollektion „Messgrößen von Muenzen“ befinden sich nun die unterschiedlichen Nettogewinne.
4. Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, die in der Kollektion „Messgrößen von Muenzen“ enthaltenen Ergebnisse auszuwerten:

a) graphische Darstellung



Dieses Schaubild zeigt die Verteilung des Nettogewinns. Ungefähr 500 mal von den 1000 Durchführungen verliert man die 2 Euro, die man gesetzt hat, weil entweder kein oder nur ein Wappen geworfen wurde. Knapp unter 400 mal gewinnt man 3 Euro, nachdem 2 Wappen erzielt wurden, und dass 3 Wappen erzielt wurden, war nur etwa 100 mal der Fall.

b) Tabelle der Häufigkeitsverteilung

In dieser Tabelle wird mit der Formel „aMittel()“ der durchschnittliche Gewinn, der in diesem Fall -0,195 ist, angegeben. Außerdem wird mit der Formel „Anzahl()“ die relative Häufigkeit berechnet. Um die unterschiedlichen Möglichkeiten als relative Häufigkeit darzustellen, definiert man als erstes die Formel „Anzahl(Anzahl_Wappen=2)/Anzahl(Anzahl_Wappen)“, um die relative Häufigkeit anzugeben, wie oft man einen Gewinn von 3 Euro hat. Diese liegt bei 0,385, also bei einer Wahrscheinlichkeit von 38,5%. Mit „Anzahl(Anzahl_Wappen=3)/Anzahl(Anzahl_Wappen)“ wird die relative Häufigkeit für einen Gewinn von 5 Euro angegeben, wobei diese nur bei 0,13 liegt, also bei einer Wahrscheinlichkeit von 13%. Die relative Häufigkeit für 0 Mal Wappen liegt bei 0,115, also bei einer Wahrscheinlichkeit von 11,5%. Und zuletzt noch die relative Häufigkeit, dass 1 mal Wappen erscheint: diese liegt bei 0,37, also bei einer Wahrscheinlichkeit von 37%.

Messgrößen von Muenzen

Nettogewinn	-0,195 0,385 0,13 0,115 0,37

S1 = aMittel ( )

S2 = $\dfrac{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen = 2)}}{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen)}}$

S3 = $\dfrac{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen = 3)}}{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen)}}$

S4 = $\dfrac{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen = 0)}}{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen)}}$

S5 = $\dfrac{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen = 1)}}{\text{Anzahl (Anzahl\_Wappen)}}$

Auch dieser Simulationsplan zeigt zunächst, dass die Aufgabe erfolgreich bearbeitet werden konnte. Bei der Betrachtung des Vorgehens fällt auf, dass auch in dieser Simulation mit zwei Messgrößen *Anzahl_Wappen* und *Nettogewinn* gearbeitet wird, die man auch zu einer Messgröße hätte zusammenfassen können. Durch die Verwendung von zwei Messgrößen wird die Komplexität der `Wenn()`-Formel reduziert (vgl. Kapitel 6.3.2).

Die Formulierung des Simulationsplans erfolgt wie gewünscht entlang des vierschrittigen Prozessmodells. Alle Modellierungsschritte mit der Software FATHOM und insbesondere die Wahl der Formeln werden mit deutlichem Bezug zur Realsituation begründet. Die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung wird ebenfalls mit Bezug zur Realsituation interpretiert. Bei der Beschreibung der Ergebnisse der numerischen Auswertungstabelle lassen die Formulierungen allerdings nicht erkennen, dass die berechneten relativen Häufigkeiten als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Der Simulationsplan ist insgesamt sehr ausführlich und mit einem Auswertungsgraphen sowie einer Auswertungstabelle aus FATHOM ergänzt. Im Vergleich zum vorherigen Beispiel ist die Gestaltung keineswegs eng an der ausgegeben Vorlage orientiert und setzt sinnvolle Schwerpunkte bei der Beschreibung der Modellierung.

Die beiden gezeigten Simulationspläne können als beispielhaft gelten für die meisten der bei den gemischten Aufgaben abgegebenen Simulationspläne. Typisch sind die gewünschte klare Strukturierung entlang des vierschrittigen Prozessmodells und der Bezug zwischen der in den Aufgaben beschriebenen stochastischen Situation und der zugehörigen Modellierung mit der Software FATHOM in der gezeigten Weise. Nur wenige Simulationspläne haben noch den Charakter einer rein technischen Beschreibung des Vorgehens. Die meisten Simulationspläne sind in geeigneter Weise durch Grafiken und Tabellen in FATHOM ergänzt. Die Bezeichnungen sind sinnvoll gewählt. Bei der Formulierung der Ergebnisse zeigen sich Unsicherheiten bei der Interpretation der relativen Häufigkeiten als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit. Teilweise findet sich wie bei dem ersten gezeigten Beispiel eine sehr enge Orientierung der Formulierungen an der ausgegebenen Vorlage.

6.4.4 Beschreibung der Gruppenarbeit zum Geburtstagsproblem

Zum Geburtstagsproblem liegt ein Transkript der Gruppenarbeit von Natascha und Magdalena vor. Das Geburtstagsproblem wird von der Zweiergruppe in der 13. Unterrichtsstunde bearbeitet. Es handelt sich um die letzte Aufgabenbearbeitung der Zweiergruppe im Simulationsvorkurs. Die Aufgabenstellung lautet folgendermaßen (Aufgabenanalyse siehe S. 91):

Ein Mathekurs besteht aus 23 Schülern. Nehmen Sie an, dass alle Schüler unabhängig voneinander Geburtstag haben. Hierbei soll jeder der 365 Tage des Jahres mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Geburtstag auftreten können.

Wie wahrscheinlich ist es dann, dass mindestens zwei der Schüler am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben?

Zusammenfassung

Die beiden Schülerinnen modellieren in Schritt 1 der Simulation zunächst die Geburtstage der 23 Personen und wählen in Schritt 2 der Simulation die Anzahl der verschiedenen Geburtstage als Messgröße. Hiermit werden in Schritt 3 der Simulation Messgrößen gesammelt. Bei der Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilung als Schritt 4 der

Simulation gelingt es den Schülerinnen zunächst nicht, das Ereignis „mindestens zwei gleiche Geburtstage“ mit einer geeigneten Auswertungsformel zu modellieren. Über einen längeren Zeitraum probieren die beiden Schülerinnen mehrere falsche Auswertungsformeln aus. Erst nach einem direkten Hinweis des Lehrers können sie die Simulation zu Ende führen.

Im Folgenden wird ein Transkriptausschnitt vom Beginn der Gruppenarbeit vorgestellt und interpretiert, der weitere Verlauf der Gruppenarbeit wird in mehreren Abschnitten zusammenfassend beschrieben.

Vorstellung und Interpretation eines Transkriptausschnitts

<u>0:00 bis 1:57: Modellierung des Zufallsexperiments „23 unabhängige Geburtstage“</u>

Im ersten Abschnitt modellieren Magdalena und Natascha die voneinander unabhängigen Geburtstage der 23 Personen des Mathematikkurses:

Zeit	**Transkript**	**Erläuterung**
0:10	M.: Ein Mathekurs besteht aus 23... nehmen Sie an, dass alle Schüler unabhängig voneinander Geburtstag haben. Oh gott, oh gott.	Magdalena liest den Aufgabentext laut durch.
0:28	M.: Nehmen Sie an, dass alle Schüler unabhängig voneinander Geburtstag haben. Aha, ich weiß, wie das geht, so!...	Magdalena hat einen Einfall zur Modellierung des Problems und erzeugt eine Kollektion in FATHOM.
0:40	M: Geburtstag	Die Kollektion wird mit *Geburtstag* benannt.
0:46	N.: Dann berechnest Du einfach nur, ja, Du hast nur Zahlen von 1 bis 365 und dann berechnest Du einfach die gleichen Zahlen, ne?	Natascha denkt über einen geeigneten Zufallsgenerator nach.
0:58	M.: ZufallsWahl? Nein, das ist ja falsch. … GeburtstagTag	Magdalena gibt die Formel `ZufallsWahl()` als Namen der Merkmalsspalte ein, bemerkt ihren Fehler und benennt die Merkmalsspalte dann als *GeburtstagTag*.
1:28	M.: GanzeZufallszahl – wie viel Tage gibt's- 365?	Das Merkmal *GeburtstagTag* wird mit dem Zufallsgenerator `GanzeZufallszahl(1;365)` definiert und es werden 23 Fälle der Kollektion erzeugt.
1:33	N.:– von 1 Komma 365 so, und das wird dreiundzwanzig mal gemacht.	
1:47	N.: So, und jetzt musst Du nur einfach kucken …	Die entstandene Tabelle mit den 23 Einträgen wird betrachtet. Magdalena und Natascha stellen vorläufige Überlegungen an, wie diese Tabelle im Sinn der Aufgabe ausgewertet werden kann.
1:51	M.: Welche zwei mal vorkommt?	
1:54	N.: Ja, genau! Welche Zahl zwei mal vorkommt und davon die Wahrscheinlichkeit.	

Magdalena liest zunächst den Aufgabetext laut vor. Dann erstellen beide Schülerinnen sehr zügig und zielstrebig die Kollektion *Geburtstag* mit dem Merkmal *GeburtstagTag* und der Formel `GanzeZufallsZahl(1;365)`. Die beiden Schülerinnen zeigen in der ersten Phase der Simulation einen sehr sicheren Umgang mit der Software FATHOM. Die

Bezeichnungen sind sinnvoll gewählt. Die fehlerhafte Eingabe einer Formel als Bezeichnung des Merkmals wird sofort erkannt und korrigiert (vgl. 0:58). Der passende Zufallsgenerator wird gemäß der vorgegebenen Modellierung ausgewählt. Eine Reflexion dieser Modellierung im Sinn eines stochastisch-inhaltlichen Verständnisses findet nicht statt, wird aber in der Aufgabenstellung auch nicht gefordert.

Beide Schülerinnen arbeiten gut zusammen und ergänzen sich gegenseitig, wie man z. B. bei der Formulierung der Formel des Zufallsgenerators sieht (0:46 bis 1:33). Die Betrachtung der entstehenden Tabelle mit 23 verschiedenen Geburtstagen leitet automatisch über zur nächsten Phase.

1:57 bis 4:22: Erstellung der Messgröße *Anzahl_Verschiedene* für die Anzahl verschiedener Geburtstage

Im zweiten Abschnitt diskutieren Magdalena und Natascha darüber, wie sie die Tabelle der 23 Geburtstage auswerten:

<table>
<tr><th>Zeit</th><th>Transkript</th><th>Erläuterung</th></tr>
<tr><td>1:57</td><td>M.: Wie kann man sagen, welche Zahl zwei mal vorkommt?</td><td rowspan="7">Beide Schülerinnen diskutieren, wie man aus der Tabelle der 23 Geburtstage herausbekommen kann, ob ein Geburtstag doppelt vorkommt. Natascha schlägt eine Auswertungstabelle vor, Magdalena hingegen eine Messgröße. Beides sind zunächst sinnvolle Vorschläge. Allerdings kann die Simulation mit Hilfe einer Messgröße entlang des Prozessmodells weitergeführt werden.</td></tr>
<tr><td>2:00</td><td>N.: Also, ich würde erstmal die Auswertungstabelle machen.</td></tr>
<tr><td>2:09</td><td>M.: Wir müssen auch noch, wir müssen</td></tr>
<tr><td>2:14</td><td>N.: Du zählst einfach.</td></tr>
<tr><td>2:15</td><td>M.: Lass uns erstmal mit „Messgrößen sammeln“ machen. Wie wahrscheinlich ist es? Und wenn wir jetzt nur einen Durchgang haben, dann ist es …</td></tr>
<tr><td>2:24</td><td>N.: Stimmt. Du könntest es aber trotzdem schon mal so machen, dass er bei der Auswertungstabelle einfach jeden Tag zählt. Also 1 – 365 wie viel mal es vorkommt, das macht er ja sonst nicht.</td></tr>
<tr><td>2:39</td><td>M.: Aber das brauchen wir doch gar nicht. Wir brauchen so ´ne Durchschnitt- Messgröße … Anzahl</td></tr>
<tr><td>2:43</td><td>N.: Gleiche Geburtstage, oder? Gleiche Geburtstage.</td><td>Magdalena hat im Info-Fenster zur Kollektion Geburtstag die Registerkarte zur Erstellung der Messgröße geöffnet. Natascha schlägt Bezeichnungen für diese Messgröße vor.</td></tr>
<tr><td>2:50</td><td>M.: Oder muss das nicht erst in die Auswertungstabelle? Gehört das hierher?</td><td rowspan="2">Magdalena ist sich unsicher, ob nicht doch die Auswertungstabelle das geeignete Werkzeug wäre. Im Video kann man hören, wie in Unterlagen nachgeschlagen wird.
Danach benennt sie die Messgröße mit Anzahl_Verschiedene.</td></tr>
<tr><td>3:03</td><td>M: Gehört das in dieses Messgrößen-Dingsbums? Mal kucken – Anzahl verschiedene, Anzahl gleicher! Aber, nee verschiedene ist besser, der kann ja nicht</td></tr>
<tr><td>3:19</td><td>N.: Anzahl gleicher ist besser, die Verschiedenen interessieren doch nicht.</td><td>Natascha schlägt eine Modellierung eng an der inhaltlichen Fragestellung der „gleichen Geburtstage“ vor. Hier-</td></tr>
</table>

Zeit	Transkript	Erläuterung
		für gibt es in FATHOM aber keine Formel.
3:23	M.: Aber er kann nicht gleiche rechnen, Du musst dann schon, wie viele verschiedene Geburtstage hast Du, und weil Du insgesamt 23 hättest haben müssen, kannst Du 23 minus Dings rechnen. Aber er kann ja nicht gleich rechnen.	Magdalena erläutert Natascha, dass man in FATHOM nur die Anzahl der *verschiedenen* Einträge einer Tabelle bestimmen kann.
3:36	N.: Mit was?	Natascha fragt nach der Formel für die Anzahl der verschiedenen Geburtstage, Magdalena gibt `AnzVerschiedeneWerte(GeburtstagTag)` ein.
3:37	M.: AnzVerschiedeneWerte – das muss ich mir mal merken.	
3:43	N.: Was ist das noch mal?	Natascha hat offensichtlich die Bedeutung der Formel vergessen.
3:44	M.: Das ist halt, wie viel gleich ist. Von – GeburtstagTag – ok – 22 – siehst Du, also kommt einer doppelt vor.	Magdalena erläutert Natascha die Bedeutung der Formel am Beispiel des in FATHOM erzeugten Datensatzes mit 22 verschiedenen Geburtstagen. Sie verspricht sich zu Beginn, worauf sich Natascha in 4:06 bezieht. Natascha versteht die Bedeutung des Befehls durch Magdalenas Erläuterung.
3:58	N.: Noch mal! Was?	
4:01	M.: Man hat 22 gleiche Geburtstage gehabt, wir hätten aber eigentlich 23 haben müssen	
4:06	N.: Was meinst Du mit gleich jetzt	
4:10	M.: 22, es gab 22 unterschiedliche Daten, wo Leute Geburtstag haben.	
4:14	N.: Das heißt, es gibt nur einen gleichen, einen Doppelten.	
4:15	M.: Ja, ja	
4:18	N.: ich hatte jetzt verstanden, dass es 22 Doppelte gibt	
4:22	M.: Mein Gott, das wäre ja ein Zufall!	

Die beiden Schülerinnen möchten bei der Kollektion der 23 Geburtstage herausfinden, ob eine Zahl zweifach vorkommt (1:57). Während Natascha hierfür auf Werkzeugebene eine Auswertungstabelle vorschlägt, hat Magdalena die Struktur einer FATHOM-Simulation mit dem Element des Messgrößen-Sammelns im Blick und öffnet daher die Registerkarte zur Eingabe einer Messgröße. Aber auch Magdalena ist sich unsicher hinsichtlich der Entscheidung für eine Messgröße oder für eine Auswertungstabelle (2:50). Wie man im Video erkennen kann, schlägt sie in alten Unterlagen nach und scheint eine Vorlage zu finden, welche eine Messgröße *Anzahl_Verschiedene* mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte()` benutzt. Für diese Interpretation spricht auch die Äußerung in 3:37. Durch die Vorlage überzeugt, wird auch hier eine Messgröße *Anzahl_Verschiedene* mit der Formel `AnzVerschiedeneWerte(GeburtstagTag)` erstellt.

Die Idee zur Wahl der Messgröße *Anzahl_Verschiedene* ist die erste große Modellierungsschwierigkeit der Geburtstagsaufgabe. Die Aufgabenstellung legt zunächst einmal die Wahl einer Messgröße nahe, welche –vereinfacht ausgedrückt – die „Anzahl der gleichen Geburtstage" berechnet. Dies ist auch die Idee von Natascha in 3:19. Magdalena erkennt allerdings, dass man an Kommandos zur Lösung des Problems nur den Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` zur Verfügung hat. Die Aufgabe kann in Fathom nur gelöst werden, indem man die Simulation auf die Betrachtung der Anzahl der verschiedenen Geburtstage umstellt. Dies erkennt Magdalena in 3:03 und 3:23.

Abgesehen von der Unsicherheit bei der Wahl der geeigneten FATHOM-Komponente erfolgt der Umgang mit der Software auf der Ebene der Werkzeugkompetenz ohne Probleme. Das Desktopbild zu diesem Zeitpunkt 3:37 ist in Abb. 6.4 nachgebildet.

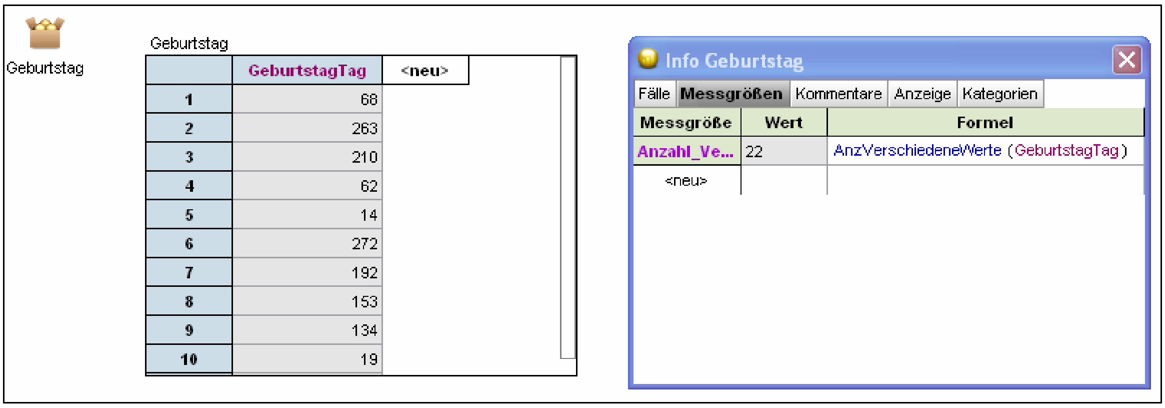


Abb. 6.4: Die nachgebildete Struktur der Simulationsumgebung zum Zeitpunkt 3:37.

Zum Ende dieses Abschnitts erläutert Magdalena die Bedeutung des Befehls `AnzVerschiedeneWerte()` anhand der in der Simulationsumgebung erhaltenen Tabelle mit 22 verschiedenen Werten. Diese Erklärung wird von Natascha explizit eingefordert (3:43). Damit leitet Natascha eine Kontrollstrategie ein, bei der das bisherige Vorgehen überprüft wird.

Im gesamten Abschnitt ist Magdalena deutlich dominant. Sie hat den weiterführenden Einfall der Definition einer Messgröße und findet eine geeignete Formel. Aus dem Video lässt sich entnehmen, dass Magdalena auch die Eingaben tätigt, da das Bildschirmgeschehen synchron zu ihren Äußerungen abläuft. Natascha bringt sich allerdings weiterhin ein und fordert von Magdalena Erläuterungen ihres Vorgehens. Damit ergänzen sich die beiden Schülerinnen weiterhin gut, auch wenn sie die Simulation in dieser Phase nicht gleichermaßen vorwärts bringen.

Zusammenfassende Beschreibung der weiteren Gruppenarbeitsphasen:

<u>4:22 – 5:51 10 000fache Wiederholung der Simulation und Versuch der Interpretation des Mittelwerts der entstehenden Häufigkeitsverteilung</u>

Im dritten Abschnitt dieser Schülerarbeitsphase werden 10 000 Messgrößen gesammelt, d. h. man erhält eine Kollektion der Anzahl verschiedener Geburtstage aus 10 000 Simulationsdurchgängen, was 10 000 Personengruppen mit jeweils 23 Personen entspricht. Zur Auswertung der entstehenden Häufigkeitsverteilung wird in einer numerischen Auswertungstabelle die Formel `23-aMittel(Anzahl_Verschiedene)` definiert. Magdalena beschreibt die Bedeutung dieser Formel folgendermaßen:

> 5:29: M: 23 minus aMittel – so viele Geburtstagskinder kommen im Schnitt doppelt vor

Da es in der Aufgabenstellung darum geht, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, kann man annehmen, dass sich die Äußerung von Magdalena auf die Geburtstagskinder bezieht, „die im Schnitt *[mindestens]* doppelt vorkommen“. Mit der Formel soll also die mittlere Anzahl von Personen in der 23er-Gruppe berechnet werden, die zusammen mit anderen Personen Geburtstag haben. Ebenso wie man nach Meinung von Magdalena aus der Anzahl der Personen mit verschiedenen Geburtstagen auf die Anzahl der Personen mit gleichen Geburtstagen schließen kann, kann man nach Magdalenas Meinung mit der Formel `23-aMittel(Anzahl_Verschiedene)` von der mittleren Anzahl verschiedener Geburtstage auf die mittlere Anzahl an Personen mit gleichen Geburtstagen schließen.

Diese Interpretation der Formel erweist sich bei einer genauen Betrachtung jedoch als falsch. Lässt sich das Ergebnis der Formel `aMittel(Anzahl_Verschiedene)` noch als mittlere Anzahl verschiedener Geburtstage bei einer wiederholten Durchführung der Simulation verstehen, so lässt sich die Differenz `23-aMittel(Anzahl_Verschiedene)` nicht so einfach interpretieren: Falls man 22 verschiedene Geburtstage hat, so muss es zwei Personen geben, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Falls man 21 verschiedene Geburtstage hat, so kann es einmal 3 Personen geben, die am gleichen Tag Geburtstag haben oder zweimal zwei Personen, die jeweils am gleichen Tag Geburtstag haben. Man kann bereits von der Anzahl der verschiedenen Geburtstage nicht einfach auf die Anzahl der Personen mit gleichen Geburtstagen schließen. Ebenso kann man von der mittleren Anzahl verschiedener Geburtstage nicht auf die mittlere Anzahl an Personen mit gleichen Geburtstagen schließen.

Den beiden Schülerinnen gelingt es in dieser Phase der Simulation nicht, das Ereignis „mindestens zwei gleiche Geburtstage" mit der hierfür geeigneten Formel `Anzahl_Verschiedene<23` zu modellieren. Die erzeugte Häufigkeitsverteilung kann zunächst nicht geeignet ausgewertet werden.

<u>5:51 – 19:05 Versuche der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage</u>

Im vierten Abschnitt versuchen Magdalena und Natascha über längere Zeit, die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage mit Hilfe ihrer Formel für die mittlere Anzahl verschiedener Geburtstage zu berechnen. Sie verwenden unterschiedliche Formeln zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit in Prozent:

$$\frac{\texttt{23-aMittel(Anzahl\_Verschiedene)}}{\texttt{23}} \cdot \texttt{100} \qquad \text{Ergebnis:} \quad 0{,}685\%$$

$$\frac{\texttt{23-aMittel(Anzahl\_Verschiedene)}}{\texttt{365}} \cdot \texttt{100} \qquad \text{Ergebnis:} \quad 0{,}187\%$$

Geht man von der (falschen) Interpretation aus, dass mit `23-aMittel(Anzahl_Verschiedene)` die mittlere Anzahl von Personen in der 23er-Gruppe berechnet wird, die zusammen mit anderen Personen Geburtstag haben, so lässt sich die erste angegebene Formel als mittlerer relativer Anteil der Personen in der 23er-Gruppe interpretieren, welche zusammen mit anderen Personen Geburtstag haben. Die zweite Formel lässt sich inhaltlich nicht sinnvoll interpretieren.

Prinzipiell ist es jedoch überhaupt nicht möglich, die gesuchte Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Schüler mit gleichem Geburtstag aus dem Mittelwert der Anzahl verschiedener Geburtstage zu berechnen. Dies ist den Schülerinnen offensichtlich nicht klar. Allerdings zweifeln sie an ihren bisherigen Ergebnissen, da sich die geringen Werte von nur 0,685% bzw. 0,187% nicht mit ihrem Vorwissen und ihren bisherigen Alltagserfahrungen decken:

18:32: N: Ja, in der Realität ist es so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Leute am selben Tag Geburtstag haben, ziemlich hoch ist.

18:35: M: Ja, aber es gibt aber auch mehr als 23 Leute irgendwo.

18:41: N: Ne, weil ähm… Nein, weil in einer Klasse kommt es sehr oft vor, dass zwei Leute Geburtstag haben. Bei uns zum Beispiel (…) zwar nicht am gleichen, aber ziemlich nah aneinander. Wir haben aus unserem Kurs, 15 Leute, 5 Leute im September. Auch schon ziemlich nah, ne. Einer am zweiten, einer am dritten, einer..

Innerhalb dieses längeren Abschnitts (5:51 – 19:05) lässt sich der Lehrer den Stand der Bearbeitung erläutern. Er erkennt, dass die verwendeten Formeln zur Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilung nicht zum Ziel führen können, möchte aber auch die Lösung nicht einfach vorgeben. Er gibt den Hinweis, dass die Schülerinnen die grafische Häufigkeitsverteilung der Anzahl verschiedener Geburtstage erzeugen und interpretieren sollen. Allerdings weist er die Schülerinnen nicht darauf hin, dass sie über den Mittelwert der Anzahl verschiedener Geburtstage nicht weiterkommen. Der Hinweis auf die grafische Häufigkeitsverteilung wird von den Schülerinnen nicht aufgegriffen. Nachdem der Lehrer gegangen ist, löschen sie das erstellte Histogramm wieder und denken weiter über geeignete Formeln mit der Verwendung des Mittelwerts nach.

19:05 – 21:10 Intervention des Lehrers

Im fünften Abschnitt der Schülerarbeitsphase kommt der Lehrer zur Arbeitsgruppe und greift nochmals seinen Vorschlag auf, die grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung der Anzahl verschiedener Geburtstage zu interpretieren. Er lenkt die beiden Schülerinnen mit gezielten Fragen zur gewünschten Interpretation:

19:32: L.: Also, was sagt mir die Säule über der 23, Natascha?
[…]
20:17: L.: Welche Säulen hier bilden denn den Fall ab, dass man an gleichen Tagen Geburtstag hat?
20:26: M: Ab der 23 nach unten. Also die 23 nicht mehr, aber drunter.
20:31: L.: Genau, die muss man bearbeiten, um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln. Eure Rechnung hier, die geht nicht, weil ihr über den Mittelwert gegangen seid. […]

21:10 – 25:55 Bestimmung der Wahrscheinlichkeit und Interpretation des Ergebnisses

Die Schülerinnen haben den Hinweis des Lehrers verstanden. Im letzten Abschnitt der Schülerarbeitsphase gelingt es sehr schnell, die richtige Formel zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu finden. Mit `Anzahl(Anzahl_verschiedene<23)/Anzahl(Anzahl_verschiedene)` erhalten sie eine relative Häufigkeit von 50,92%. Dieser Wert gibt besonders bei Magdalena Anlass zu großem Erstaunen. Natascha versucht, das Ergebnis mit ihren Alltagserfahrungen in Einklang zu bringen. Ein intuitiver Zugang zu dem Ergebnis ist bei beiden Schülerinnen nicht erkennbar.

23:26: N.: Ja, aber es ist wirklich sehr wahrscheinlich, das es so ist. Wir sind in der Klasse 15. Und wie viele Leute am selben Tag Geburtstag haben.
23:30: M.: 50 Prozent? Das ist aber ein bisschen viel oder? Bei 23? Es gibt 23 Schüler, ja vielleicht weil 23 Schüler. Das ist ja auch relativ viel, ne. Aber 356 Tage, an meinem Tag …
23:44: N.: Aber es ist ja theoretisch 23 von 365 verschiedenen Tagen, und davon zwei doppelt. Das ist eigentlich sehr wahrscheinlich, schon. […] Weißt Du wie viele Leute ich kenne, die am 16. Juni Geburtstag haben?

Zum Abschluss der Schülerarbeitsphase wird die Simulationsumgebung zum Ausdrucken und zum Speichern geordnet. Die Desktopansicht der Simulationsumgebung zum Ende der Aufgabenbearbeitung ist in Abb. 6.5 nachgebildet:

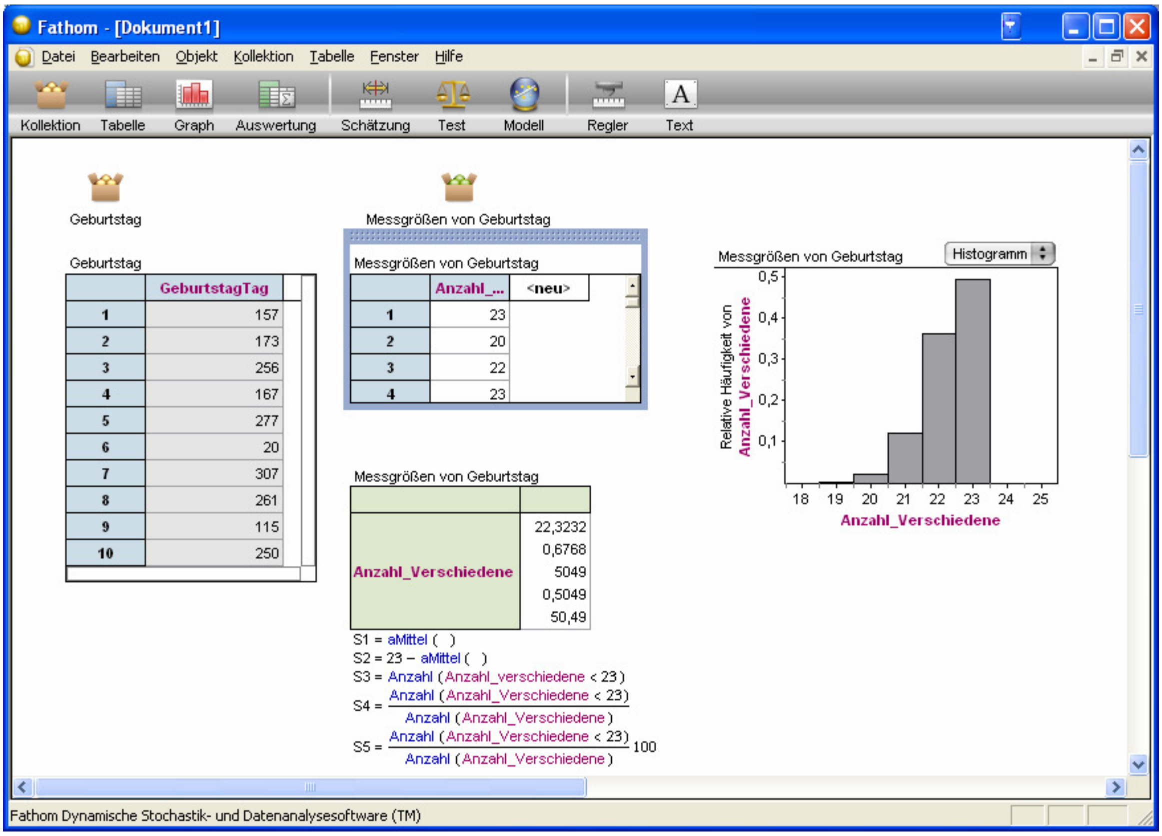


Abb. 6.5: Nachbildung der Desktopansicht der Simulationsumgebung zum Abschluss der Geburtstagsaufgabe.

Analyse der Gruppenarbeit zur Geburtstagsaufgabe

Betrachtet man die **Simulationskompetenz** entlang der vier Schritte des Prozessmodells, so lässt sich feststellen, dass die beiden Schülerinnen den ersten Schritt der Modellierung des einfachen Zufallsexperiments ohne Probleme und zügig in weniger als zwei Minuten durchführen können. Auch die Erstellung der korrekten Messgröße als zweitem Schritt dauert nicht mehr als zwei Minuten. Magdalena steuert hier das Vorgehen und definiert die Messgröße eigenständig. Natascha hätte die Auswertung der 23 Geburtstage lieber in einer Auswertungstabelle vorgenommen. Beides sind zunächst sinnvolle Vorschläge. Über die Verwendung der Messgröße wird allerdings bereits der zweite Schritt des Prozessmodells realisiert. Mit dem Sammeln von 10 000 Messgrößen wird auch der dritte Schritt des Prozessmodells ohne Probleme bewältigt. Im vierten Schritt gelingt es den Schülerinnen nicht, die Häufigkeitsverteilung der Anzahl verschiedener Geburtstage ohne Hilfe des Lehrers geeignet auszuwerten. Erst nach einem sehr direkten Hinweis zur Interpretation der grafischen Häufigkeitsverteilung verstehen die Schülerinnen, wie man das Ereignis „mindestens zwei gleiche Geburtstage“ modelliert. Hier zeigen sich Probleme im stochastisch-inhaltlichen Verständnis bei der Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilung. Zusammenfassend entsteht der Eindruck, dass beiden Schülerinnen das vierschrittige Verfahren zur Erstellung einer FATHOM-Simulation prinzipiell klar ist. Bei der konkreten Umsetzung der ersten drei Schritte gehen die beiden Schülerinnen sehr sicher vor. Bei der Auswertung der Häufigkeitsverteilung wirkt es sich für die beiden Schülerinnen als Nachteil aus, dass sie die Auswertung wie auch schon bei der Würfelaufgabe b) ausschließlich mit Formeln vornehmen und nicht auch die grafische Darstellung mit einbeziehen (vgl. Kapitel 6.2.4). Die Visualisierung des betrachteten Ereignisses im

Histogramm der erzeugten Häufigkeitsverteilung hätte zur richtigen Auswertung hinführen können.

Betrachtet man die Ebene der **Fathomkompetenz**, so zeigt sich bei den beiden Schülerinnen eine sichere Beherrschung der Werkzeug- und Formelkompetenzen. Hierfür sprechen die problemlose Durchführung der ersten drei Schritte zur Erstellung der Simulationsumgebung und die rasche Auswertung der Häufigkeitsverteilung, nachdem die entscheidende Idee klar war. Während der gesamten Aufgabenbearbeitung treten kaum syntaktische oder semantische Probleme mit den Formeln auf, die verwendeten FATHOM-Komponenten werden geeignet und zielsicher eingesetzt. Auch die Bezeichnungen der einzelnen Merkmale sind gut gewählt und zeigen Routine beim Aufbau einer Simulationsumgebung mit FATHOM.

Auf der Ebene der **stochastischen Kompetenz** sieht man bei der Geburtstagsaufgabe, dass die Modellierung der einzelnen Schritte des Prozessmodells und die Interpretation der Ergebnisse den größten Raum einnehmen. Die beiden Schülerinnen wählen mit `GanzeZufallszahl(1;365)` den geeigneten Zufallsgenerator für die Erzeugung der 23 Geburtstage. Die Auswertung der 23 Geburtstage mit `AnzVerschiedeneWerte()` wird von Magdalena nach einem Rückgriff auf eine frühere Aufgabe richtig durchgeführt. Während Natascha zunächst die nahe liegende Messgröße „Anzahl gleicher Geburtstage" einführen möchte, erkennt Magdalena, dass die Aufgabe in Fathom nur gelöst werden kann, indem man die Simulation auf die Betrachtung der Anzahl *verschiedener Geburtstage* umstellt. Damit wird dieser schwierige Modellierungsschritt erfolgreich vorgenommen. Magdalena kann die Bezeichnung und die Formel der Messgröße auf Nachfrage von Natascha erläutern. Die Auswertung der bei der 10 000-fachen Wiederholung entstehenden Häufigkeitsverteilung ist der zweite schwierige Modellierungsschritt dieser Simulation, da hier ein stochastisch-inhaltliches Verständnis der erzeugten Häufigkeitsverteilung benötigt wird. An dieser Stelle zeigen die fehlerhaften Versuche der Auswertung über eine Formel mit der mittleren Anzahl verschiedener Geburtstage, dass die beiden Schülerinnen diese mittlere Anzahl nicht korrekt interpretieren können. Allerdings erkennen sie aufgrund der geringen relativen Häufigkeiten ihrer Ergebnisse, dass ihre Formeln so nicht stimmen können. Hier zeigt sich eine wichtige Kontrollstrategie: Die Ergebnisse werden mit der realen Situation verglichen. Auch zum Abschluss der Aufgabenbearbeitung interpretieren die Schülerinnen das Endergebnis, indem sie die Größenordnung erneut an Beispielen aus ihrer Alltagserfahrung messen und eine anschauliche Begründung zu finden versuchen. Ausgehend vom vorgegebenen stochastischen Modell wird bei der analysierten Aufgabenbearbeitung die komplette Modellierung als FATHOM-Simulation bis hin zur Interpretation der Ergebnisse durchlaufen. Allein das stochastische Modell wird nicht hinterfragt.

Die **Interaktion der beiden Schülerinnen** verläuft erneut problemlos. In der Partnerarbeit findet eine lebhafte Diskussion über die Formulierung der Formeln und damit über die geeignete Modellbildung statt. Ferner wird im Zusammenhang mit den realen Bezügen der Aufgabe über die Interpretation der Ergebnisse diskutiert. Magdalena bestimmt in großen Teilen das Vorgehen und tätigt die Eingaben am Computer. Aber auch Natascha erfüllt eine wichtige Funktion in der Zusammenarbeit: Sie fragt an entscheidenden Stellen nach Begründungen für das Vorgehen und versucht die Simulation anschaulich zu verstehen. Damit regt sie stets Kontrollstrategien an: Magdalena muss aufgrund der Fragen die Simulation überdenken und erläutern. Die beiden Schülerinnen ergänzen sich in ihrer Zusammenarbeit gut und können voneinander profitieren.

Designebene – Rückblickende Analyse der Aufgabe

Da bei der Aufgabe außer dem stochastischen Modell keine Hilfestellungen vorgegeben sind, handelt es sich um eine anspruchsvolle Aufgabenstellung. Die Definition der Messgröße „Anzahl verschiedener Geburtstage" über die Formel `AnzVerschiedeneWerte()` ist die erste Modellierungsschwierigkeit der Aufgabe. Das stochastisch-inhaltliche Verständnis der Situation muss in Verbindung mit der Formelkompetenz gebracht werden: Man muss erkennen, dass man das Ereignis „mindestens zwei gleiche Geburtstage" nur über den Umweg der Betrachtung der Anzahl verschiedener Geburtstage modellieren kann, weil man nur die Formel `AnzVerschiedeneWerte()` zur Verfügung hat. Die zweite große Modellierungsschwierigkeit liegt darin, die erzeugte Häufigkeitsverteilung wiederum inhaltlich geeignet zu interpretieren, so dass man das Ereignis „mindestens zwei gleiche Geburtstage" identifizieren kann. Trotz dieser Schwierigkeiten zeigt die Analyse der insgesamt erfolgreichen Schülerarbeitsphase, dass die Aufgabenstellung offensichtlich gut zur Bearbeitung zum Ende des Simulationsvorkurses geeignet ist. Da die Aufgabe in einer Arbeitsphase mit der Möglichkeit der Hilfestellung durch den Lehrer verwendet wird, brauchen keine weiteren Hilfestellungen formuliert zu werden.

Die Modellierung der stochastischen Situation als FATHOM-Simulation wird bei vorgegebenem stochastischem Modell bis hin zur Interpretation der Ergebnisse vollständig durchlaufen. Nur die Problematisierung des stochastischen Modells findet ohne eine explizite Aufforderung im Aufgabentext natürlicher Weise nicht statt. Das Erstaunen über das Ergebnis der Aufgabe regt zur Diskussion und Interpretation an. Der Anwendungsbezug der Aufgabe führt in der ausgewerteten Gruppenarbeit zu zahlreichen Vergleichen mit realen Situationen und ermöglicht die Interpretation und die Kontrolle der Ergebnisse. Bei einer Weiterentwicklung des Kurskonzepts sollte die Aufgabe an der gleichen Stelle wieder verwendet werden. Als mögliche Verbesserungsvorschläge ergeben sich aus der Analyse der Schülerarbeitsphase zwei Punkte:

- Die Reflexion des stochastischen Modells sollte von den Schülerinnen und Schülern explizit verlangt werden. Hierzu kann man einen zweiten Aufgabenteil hinzunehmen, der dazu auffordert, die gegebenen Modellannahmen zu identifizieren und diese kritisch zu hinterfragen.
- Für das unerwartete und erstaunliche Ergebnis fehlt eine intuitiv verständliche Erklärung. Man sollte im Rahmen der Besprechung im Unterricht die erstaunlich hohe Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage auch auf intuitiver Ebene verständlich machen. Vorschläge hierzu finden sich bei H. Winter (1992).

6.4.5 Analyse der 11. bis 15. Unterrichtsstunde

Auf der **Ebene der Unterrichtsmethodik** sollte bei den gemischten Aufgaben Gelegenheit gegeben werden, über einen längeren Zeitraum selbstständig zu arbeiten und die Ergebnisse in Schülervorträgen vorzustellen. Wie der Unterrichtsverlauf zeigt, ist dieses Konzept gut aufgegangen. Alle Schülergruppen haben über drei Unterrichtsstunden die Gelegenheit genutzt, sich in Partnerarbeit mit mindestens drei Aufgaben zu beschäftigen. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Unterrichtsphasen waren die Schülerinnen und Schüler in der Lage, die gegebenen Aufgaben in großen Teilen selbstständig als FATHOM-Simulation umzusetzen. Hierbei wurden die Simulationsumgebungen weitgehend im Unterricht erstellt, die Simulationspläne wurden zu Hause formuliert. Hilfen von Seiten des Lehrers wurden nur wenige eingefordert, dann allerdings, wie bei der geschilderten Gruppenarbeit von Magdalena und Natascha, an zentralen Punkten der Aufgabenbearbeitung. Abgesehen von der nicht gewählten Aufgabe „Goldmünze“ konnten alle Aufgaben in der letzten Doppelstunde von Schülergruppen vorgestellt werden. Die Präsentationen haben in großen Teilen die wesentlichen Punkte entlang des vierschrittigen Prozessmodells erläutert. Der Kurs hat geeignete Fragen gestellt, so dass der Lehrer kaum in das Unterrichtsgeschehen eingreifen brauchte.

Auf der **Ebene der Motivation** lässt sich eine sehr aktive Mitarbeit der Schülerinnen und Schüler in dieser selbstständigen Arbeitsphase beobachten. Dies wird sowohl durch Äußerungen in den Unterrichtsprotokollen zur 11. bis 13. Stunde als auch durch eigene Beobachtungen des Autors gestützt. Auch die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben und die in großen Teilen gelungene Präsentation tragen zu diesem Eindruck bei. Die Motivation scheint zum einen durch die Unterrichtsform der selbstständigen Partnerarbeit am Computer bedingt zu sein: In den drei Unterrichtsstunden der Partnerarbeit herrschte eine sehr konzentrierte Arbeitsatmosphäre. Ferner zeigt sich an der Analyse der Partnerarbeit von Magdalena und Natascha aber auch, dass die Anwendungsorientierung der Aufgabenstellungen ein starkes Interesse hervorgerufen hat. Zwei Schülergruppen haben sogar noch jeweils eine zusätzliche Aufgabe aus dem Bereich der anspruchsvollen Anwendungsaufgaben vom Typ C behandelt.

Auf der Ebene der **Simulations- und Fathomkompetenz** verfügen die Schülerinnen und Schüler zum Abschluss des Simulationsvorkurses über die gewünschte Routine in der Erstellung von Simulationsumgebungen mit der Software FATHOM. Wie die Strukturierung der Präsentationen sowie die Auswertung der Schülerarbeitsphase zeigen, ist das vierschrittige Prozessmodell bei den meisten Schülerinnen und Schülern gut verinnerlicht. Dies zeigen auch die Simulationspläne. Zwei Schülergruppen haben sogar die Sammelbildaufgabe mit dem komplexen Aufbau der Simulationsumgebung lösen können. Trotz leichter Unsicherheiten bei der Definition einer Messgröße in der Partnerarbeitsphase scheint die Bedeutung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells von den Schülerinnen und Schülern weitgehend verstanden zu sein.

Der allgemeine Umgang mit der Software bereitete den Schülerinnen und Schülern offensichtlich keine Probleme mehr: In der selbstständigen Arbeitsphase gab es kaum Nachfragen zu den Werkzeugkompetenzen in FATHOM, auch bei den Präsentationen und den Simulationsplänen werden die Einzelheiten beim Umgang mit der Software nicht erwähnt.

Sehr erfreulich auf der Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz sind der flexible Einsatz der Software zur Modellierung der in großen Teilen anspruchsvollen Aufgaben sowie die verwendeten Kontrollstrategien. Diese zeigen sich z. B. in den Schülervorträgen und in der ausgewerteten Gruppenarbeitsphase daran, dass zunächst die Simulation des Einzelexperiments betrachtet und auf Plausibilität hin untersucht wird.

Die Hauptprobleme bei der Erstellung der Simulationsumgebungen liegen in der Formulierung komplexer Formeln sowie bei der geeigneten Auswertung der erzeugten Verteilungen: Bei den beiden Gewinnspielaufgaben bereitet die Formulierung des `Wenn()`-Befehls Probleme, welcher teilweise auch in geschachtelter Form oder in Kombination mit anderen Formeln auftritt. Bei den Aufgaben „Multiple-Choice-Test“ und „Sammelbildproblem“ sind die Probierverfahren zur Auswertung schwierig, bei den Aufgaben „Entenjagd“ und „Geburtstagsproblem“ die Auswertung der mit dem Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` erzeugten Verteilungen. Für diese Auswertung der Verteilungen benötigt man eine sichere stochastisch-inhaltliche Interpretation der Simulationsumgebungen.

Hieran sieht man, dass sich bei diesen anspruchsvollen Aufgabenstellungen die Simulationskompetenz nicht mehr von der **stochastischen Kompetenz** trennen lässt. Wie in der Analyse der Gruppenarbeit am Beispiel der Messgröße *Anzahl Verschiedene Geburtstage* gezeigt, muss die stochastische Modellierung bei komplexen Aufgabenstellungen stets in Bezug auf die in FATHOM zur Verfügung stehenden Formeln vorgenommen werden. Umgekehrt setzt die geeignete Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilung in FATHOM ein stochastisch-inhaltliches Verständnis der Simulation voraus.

Bei den gemischten Aufgaben hat sich der Schwerpunkt der Aufgabenbearbeitung im Vergleich zu den vorher behandelten Würfelaufgaben deutlich auf die Modellierung des Experiments mit geeigneten Formeln und FATHOM-Komponenten sowie auf die Interpretation der Ergebnisse verschoben. Dieses sind zentrale Kompetenzen im Bereich der mathematischen Modellbildung, welche durch die gewählten Aufgaben gefördert und angestoßen werden.

Probleme im stochastischen Verständnis zeigen sich an zwei Punkten:

- Unsicherheiten im Umgang mit den errechneten Mittelwerten: Auch bei kategorialen Variablen wie z. B. der *Anzahl verschiedener Geburtstage* beim Geburtstagsproblem oder der *Anzahl der Bewerbungen* bei der Ferienjob-Aufgabe treten als Mittelwerte der Häufigkeitsverteilung Dezimalbrüche auf. Diese sind intuitiv schwer zu verstehen. Das Problem zeigt sich bei der Interpretation zweier errechneter Mittelwerte in der Präsentationsphase und beim fehlerhaften Umgang der beiden Schülerinnen mit der mittleren Anzahl verschiedener Geburtstage in der Partnerarbeit zum Geburtstagsproblem. In Verbindung mit numerischen Variablen (z. B. *Nettogewinn*) tritt das Problem nicht auf.
- Manchmal tritt noch immer eine fehlende sprachliche Differenzierung zwischen den Begriffen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit auf.

Auf der **Designebene** lässt sich bezüglich des Aufgabenmaterials positiv feststellen, dass das Wahlverhalten der Schülerinnen und Schüler breit verteilt ist. Lediglich die Aufgabe „Goldmünze“ wird nicht angewählt. In den Voruntersuchungen und im Parallelkurs wurde jedoch auch diese Aufgabe mehrfach erfolgreich bearbeitet.

Wie oben bereits beschrieben sind die Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad für die selbstständige Schülerarbeitsphase gut geeignet. Gleichwohl muss angemerkt werden, dass auch die gezielten Hilfestellungen des Lehrers bei den ausgewählten anspruchsvollen Aufgabenstellungen eine wichtige Rolle gespielt haben. Möchte man die Schülerinnen und Schüler z. B. als reine Hausaufgabe völlig selbstständig arbeiten lassen, so müsste man die Aufgaben um Lösungshinweise ergänzen.

Die gewählten Aufgaben wecken das Interesse und regen die Schülerinnen und Schüler zur Interpretation der Ergebnisse an. Die thematische Wahl der Aufgaben (Aufgaben mit authentischem Anwendungsbezug, Aufgaben mit Rätselcharakter, Aufgaben mit erstaunlichen Ergebnissen) führt dazu, dass der stochastische Inhalt der Aufgaben stärker in den Vordergrund rückt. Damit erfüllen die Aufgaben auch die ihnen zugedachte Funktion, einen Einblick in typische Aufgabenstellungen des gesamten Stochastikkurses zu geben und damit die Motivation zur theoretischen Untersuchung dieser Aufgabenstellungen im weiteren Verlauf des Kurses zu wecken (vgl. Kapitel 4.4.4).

Um den stochastischen Gehalt der Aufgaben noch weiter zu betonen, kann man versuchen, die Interpretation der Ergebnisse durch geeignete Fragestellungen zum Aufbau einer Erwartungshaltung oder durch eine Verbindung zu intuitiven Vorstellungen zu verstärken. Bei der „Entenjagd“-Aufgabe und bei der Geburtstagsaufgabe sollte man das stochastische Modell problematisieren. Allerdings muss man aufpassen, dass die verbal-beschreibenden Anteile vom Umfang nicht dominieren, damit dies nicht zu einer Verringerung der Motivation führt.

6.5 Der Unterrichtsverlauf aus methodischer Sicht

Vergleicht man den tatsächlichen zeitlichen Ablauf des Simulationsvorkurses in der geschilderten unterrichtlichen Umsetzung mit der zeitlichen Planung aus Kapitel 4.5, so zeigt sich eine sehr gute Überstimmung in den einzelnen Unterrichtsphasen: Für die Festigung der Simulations- und Fathomkompetenzen anhand der Würfelaufgaben in Kombination mit der Erarbeitung theoretischer Grundbegriffe und des Gesetzes der großen Zahl sollte man eher sieben als 6 Unterrichtsstunden einplanen. Die 3 Unterrichtsstunden für die Einführungsaufgabe und die fünf Stunden für die gemischten Aufgaben sind genau passend.

Wertet man die tabellarischen Unterrichtsübersichten aus Kapitel 6 nach den eingesetzten Unterrichtsmethoden zeitlich aus, so ergeben sich die folgenden Anteile:

Unterrichtsmethode	Zeit in min	Anteil in %
Partnerarbeit am Computer	168	29
fragend-entwickelnder Unterricht	156	27
Schülervortrag	132	22
Unterrichtsgespräch	57	10
Lehrervortrag	43	7
Einzel- und Gruppenarbeit ohne Computer	32	5

Tab. 6.2: Tabelle zum zeitlichen Anteil der einzelnen Unterrichtsmethoden im durchgeführten Unterricht des Simulationsvorkurses.

Bei dieser zusammenfassenden Betrachtung aller tabellierten Unterrichtsstunden zeigt sich, dass ein zentrales methodisches Ziel des Simulationsvorkurses, nämlich die Erhöhung der Schüleraktivitäten in Form von Partner- oder Gruppenarbeit am Computer und in Form von Schülerpräsentationen in der unterrichtlichen Umsetzung des Konzepts erreicht werden konnte. Die im Mathematikunterricht i. a. vorherrschende Sozialform des lehrerzentrierten Unterrichts (vgl. Baumert, Lehmannn et al. 1997) konnte deutlich aufgebrochen werden:

Etwa 56% der Unterrichtszeit werden durch Schülerarbeitsphasen geprägt: 29% durch die Erstellung von Simulationsumgebungen in Partnerarbeit am Computer und 22% durch die Präsentation und Erläuterung der Simulationsumgebungen in Schülervorträgen mit anschließenden Diskussionen. Der aus Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch und fragend-entwickelndem Unterricht zusammengesetzte Anteil des lehrerzentrierten Unterrichts beträgt nur etwa 44% der verwendeten Unterrichtszeit. Über die Hälfte hiervon ist fragend-entwickelnder Unterricht, der für die Einführung neuer Begriffe und Methoden im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle einnimmt und kaum weiter reduziert werden kann.

An dieser methodischen Gestaltung haben die gezielt konzipierten Arbeitsmaterialien einen großen Anteil. Anhand der Arbeitsmaterialien konnten die Schülerinnen und Schüler ihre Simulations- und Fathomkompetenzen im Rahmen der eng formulierten Würfelaufgaben in kurzen selbstständigen Schülerarbeitsphasen und im Rahmen der Hausaufgaben mit ausführlichen Nachbesprechungen rasch festigen und Routine im Umgang mit der Software gewinnen. Bei den gemischten Aufgaben waren die Schülerinnen und Schüler dann in der Lage, über einen längeren Zeitraum selbstständig zu arbeiten, und ihre Ergebnisse zu präsentieren. Auch die Arbeitsmaterialien zur Ergebnissicherung tragen zu der gewünschten methodischen Gestaltung bei, da der Lehrer hierdurch von umfangreichem Tafelanschrieb entlastet wird.

Allerdings muss bemerkt werden, dass die stochastisch-inhaltlichen Erarbeitungs- und Interpretationsschritte und die Einführung neuer Begriffe vor allem im fragend-entwickelnden Unterricht stattgefunden haben. So hat die Interpretation der Ergebnisse der Würfelaufgaben weitgehend im Unterrichtsgespräch stattgefunden. Auch die beiden Lernumgebungen zum Gesetz der Großen Zahl wurden am Lehrer-PC vorgeführt und im Unterrichtsgespräch inhaltlich interpretiert. Im Rahmen einer Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts sollte versucht werden, bereits bei den Würfelaufgaben eine stärkere inhaltliche Orientierung der Computerarbeitsphasen zu erreichen und die Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl von den Schülerinnen und Schülern selbstständig erarbeiten zu lassen. Auch bei den gemischten Aufgaben kann die Ebene der inhaltlichen Interpretation während der Partnerarbeit am Computer noch verbessert werden. Vorschläge für eine entsprechende Umgestaltung des Aufgabenmaterials wurden bereits in den Kapiteln 6.2.4 und 6.4.4 erarbeitet.

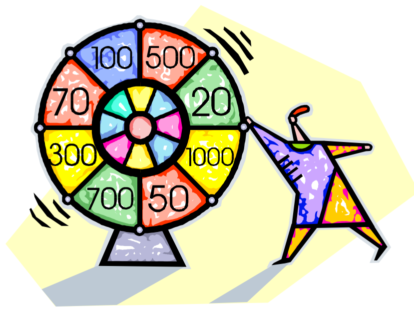
7 Auswertung der weiteren empirischen Untersuchungen

7.1 Die Simulationsaufgabe in der Kursarbeit

In diesem Kapitel wird die Bearbeitung der Simulationsaufgabe aus der ersten Kursarbeit im Kurs des Autors analysiert. An der Klausur haben 18 Personen teilgenommen. Den Schülerinnen und Schülern war vorab bekannt, dass die Klausur eine umfangreiche Simulationsaufgabe enthalten würde. Die gelösten Würfelaufgaben und die von den präsentierenden Gruppen erstellten Simulationspläne zu allen gemischten Simulationsaufgaben standen zur Vorbereitung zur Verfügung. Die Schülerinnen und Schüler konnten während der Klausur auf das ausgegebene Merkblatt verschiedener FATHOM-Befehle zurückgreifen (vgl. Anhang, S. 277). Ansonsten durften keine weiteren Hilfen verwendet werden. Den Schülerinnen und Schülern standen zur Bearbeitung der Simulationsaufgabe 50 Minuten zur Verfügung, die Aufgaben wurden in elektronischer Form (Diskette oder USB-Stick) beim Lehrer abgegeben. Die Bearbeitung erfolgte in Einzelarbeit.

Die Simulationsaufgabe lautet folgendermaßen:

Das nebenstehend abgebildete Glücksrad mit 8 gleich großen Sektoren wird zweimal gedreht. Der Spieler muss 1,-€ als Einsatz bezahlen.



Falls die Summe der beiden gedrehten Zahlen mindestens 1000 beträgt, so erhält der Spieler 1,50 € zurück. Falls die Summe der beiden gedrehten Zahlen 2000 beträgt, so erhält der Spieler 12,- € zurück.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme beim zweimaligen Drehen des Glücksrads mindestens 1000?

b) Welchen mittleren Nettogewinn pro Spiel erhält der Spieler bei diesem Glücksspiel auf lange Sicht?

c) Ein Spieler nimmt sich vor, das geschilderte Glücksspiel so lange zu spielen, bis die Summe seiner beiden gedrehten Zahlen mindestens 1000 beträgt. Wie viele Spiele muss man bei einer solchen Spieltaktik im Mittel machen?

Aufgabe:

1. Simulieren Sie das Glücksradproblem geeignet in FATHOM. Erstellen Sie zu jeder Teilaufgabe eine neue Simulation mit jeweils 1000 Wiederholungen und formulieren Sie in einem FATHOM –Textfenster einen Antwortsatz.
2. Können Sie mit Hilfe Ihrer Simulation Aussagen zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsbestimmung in a) machen? Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen in einem FATHOM-Textfenster.
3. Erstellen Sie zu Aufgabenstellung b) in einem FATHOM-Textfenster einen Simulationsplan.

Die Aufgabe wurde vor allem dazu konzipiert, die im Simulationsvorkurs erreichten Kompetenzen bei der Erstellung einer Computersimulation mit FATHOM zu überprüfen. Die beiden Aufgabenteile 2. und 3. zur Genauigkeitsabschätzung und zur Formulierung eines Simulationsplans können aufgrund des knappen zeitlichen Rahmens nur eine untergeordnete Bedeutung haben. Diese Schwerpunktsetzung wurde auch den Schülerinnen und Schülern mitgeteilt. Daher liegt der Schwerpunkt der Analyse der Simulationsaufgabe in diesem Kapitel auf Aufgabenteil 1. Aufgabenteil 1. wird quantitativ und qualitativ ausgewertet. Die beiden Aufgabenteile 2. und 3. werden bei der quantitativen Analyse der Simulationsaufgabe mit berücksichtigt.

7.1.1 Eine Beispiellösung für die Simulationsaufgabe

Aufgabenteil 1. a)

1. Schritt: Modellierung des Zufallsexperiments in FATHOM

Man erstellt eine Kollektion und benennt diese z. B. als *Glücksrad*. Zu dieser Kollektion kann man ein Merkmal *Drehergebnis* definieren mit dem Zufallsgenerator `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)`. Nun werden der Kollektion *Glücksrad* zwei Fälle hinzugefügt. Damit wird das zweifache Drehen des Glücksrads simuliert, jeder der beiden Fälle repräsentiert das Ergebnis eines Drehvorgangs.

2. Schritt: Definition eine geeigneten Messgröße

Man kann eine Messgröße *Drehsumme* mit der Formel `Summe(Drehergebnis)` definieren. Hiermit wird stets die Summe der beiden gedrehten Zahlen berechnet.

3. Schritt: Sammeln von 1000 Messgrößen

4. Schritt: Auswertung der Häufigkeitsverteilung der gesammelten Messgrößen

Mit der Formel `Anzahl(Drehsumme≥1000)/Anzahl(Drehsumme)` wird die relative Häufigkeit für das Auftreten einer Augensumme von mindestens 1000 in einer numerischen Auswertungstabelle berechnet.

Eine nach dieser Beispiellösung aufgebaute Simulationsumgebung mit Antwortsatz ist in Abb. 7.1 zu sehen:

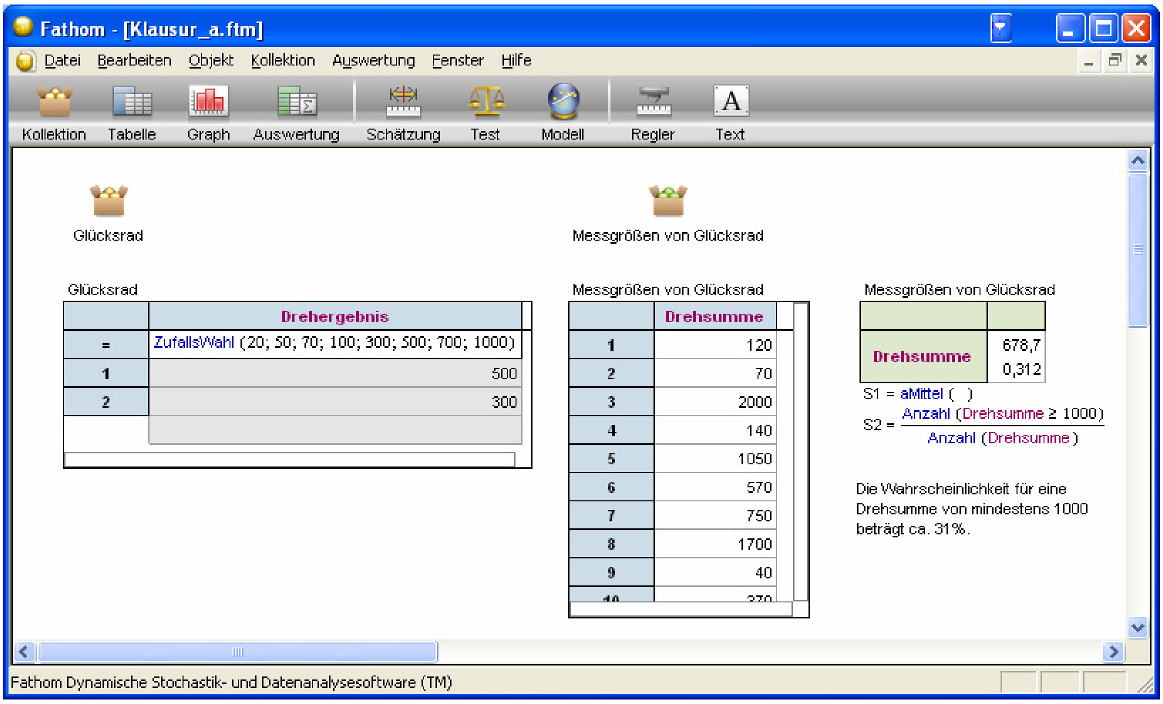


Abb. 7.1: Eine Beispiellösung zu Aufgabenstellung a) der Simulationsaufgabe in der Klausur.

Alternative Lösungsmöglichkeiten zu Aufgabenteil a)

In **Schritt 1** bei der Modellierung des Einzelexperiments hat man bei der Entscheidung für eine sequenzielle Simulation (vgl. Kapitel 4.1.5) keine sinnvollen Alternativen. In **Schritt 3** kann man lediglich die Anzahl der gesammelten Messgrößen variieren.

In **Schritt 2** bei der Definition der Messgröße kann man an Stelle der Zufallsgröße „Augensumme“ auch das Ereignis „mindestens Augensumme 1000“ mit der Formel `Summe(Drehergebnis)≥1000` wählen. Die Messgröße liefert dann entweder `wahr` für den Fall, dass die Augensumme mindestens 1000 beträgt, im anderen Fall liefert sie `falsch`. Hier muss man bei der Auswertung der gesammelten Messgrößen alle Fälle zählen, bei denen die Messgröße `wahr` ergibt.

Ferner gibt es in Schritt 2 die Möglichkeit, mit Blick auf die Aufgabenstellung b) als Messgröße die Zufallsgröße „Nettogewinn“ zu definieren. Dann liefert die Messgröße die drei Nettogewinne 11,-€, 0,5 € oder −1,-€. Bei der Auswertung der gesammelten Messgrößen muss man alle Fälle zählen, bei denen der Nettogewinn mindestens 0,50 € beträgt.

Messgrößen von Glücksrad

	1200	28 1
	1300	36 1
	1400	13 1
	1500	21 1
	1700	26 1
	2000	19 1
Spaltenzusammenfassung		1000 0,312

S1 = Anzahl ( )

S2 = $\frac{\text{Anzahl (Drehsumme} \geq 1000)}{\text{Anzahl (Drehsumme)}}$

Abb. 7.2: Kategoriale Auswertungstabelle

Verwendet man als Messgröße die Zufallsgröße „Augensumme“, so ist in **Schritt 4** bei der Auswertung der gesammelten Messgrößen die numerische Auswertungstabelle mit einer passenden Formel das geeignete Werkzeug. Das Auszählen der gesuchten Fälle in einer kategorialen Auswertungstabelle ist ungeeignet, da es viele verschiedene Augensummen ≥ 1000 gibt. Das Hinzufügen einer Formel zur Berechnung der gesuchten relativen Häufigkeit ist in der kategorialen Auswertungstabelle ebenfalls ungeeignet (vgl. Kapitel 4.1.3). Wie in Abb. 7.2 gezeigt wird, erhält man zwar als letzten Eintrag den gesuchten Wert, allerdings werden viele Einträge erzeugt, welche keine Information bringen.

Verwendet man als Messgröße das Ereignis „mindestens Augensumme 1000“ oder die Zufallsgröße „Nettogewinn“, so kann man in Schritt 4 die gesammelten Messgrößen mit einer geeigneten Formel in einer numerischen Auswertungstabelle auswerten. Man kann aber auch eine kategoriale Auswertungstabelle benutzen, da es nur wenige Merkmalsausprägungen gibt, die man auszählen kann. Beim Ereignis „mindestens Augensumme 1000“ braucht man nur die Fälle mit `wahr` zu berücksichtigen (vgl. Abb. 7.3). Bei der Zufallsgröße „Nettogewinn“ sind es nur die Fälle mit einem Nettogewinn von 0,50 € und 11,- €.

Messgrößen von Glücksrad

mindestens_1000	falsch	688
	wahr	312
Spaltenzusammenfassung		1000

S1 = Anzahl ( )

Abb. 7.3: Kategoriale Auswertungstabelle zur Auswertung der gesammelten Messgrößen des Ereignisses „mindestens Augensumme 1000“

Aufgabenteil 1.b)

Der erste Schritt läuft analog zu Aufgabenteil a) und kann entweder übernommen werden oder aber in einer neuen FATHOM-Umgebung analog aufgebaut werden.

2. Schritt: Definition einer geeigneten Messgröße

Man kann eine Messgröße *Nettogewinn* mit der folgenden Formel definieren:

$$\texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)=2000)}\begin{cases}11\\ \texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)}\geq\texttt{1000)}\begin{cases}0{,}50\\ -1\end{cases}\end{cases}$$

Hiermit wird zu zwei gedrehten Zahlen des Glücksrads stets der Nettogewinn berechnet.

3. Schritt: Sammeln von 1000 Messgrößen

4. Schritt: Auswertung der Häufigkeitsverteilung der gesammelten Messgrößen

Mit der Formel `aMittel(Nettogewinn)` kann man in einer numerischen Auswertungstabelle den mittleren Nettogewinn der 1000 Simulationsdurchläufe erhalten.

Eine nach dieser Beispiellösung aufgebaute Simulationsumgebung mit Antwortsatz ist in Abb. 7.4 zu sehen:

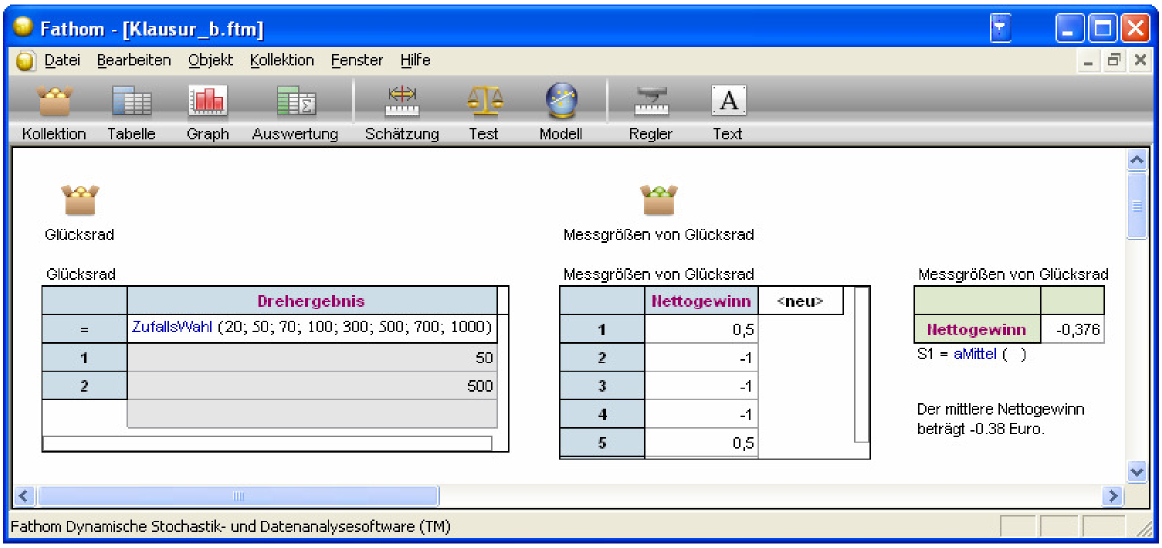


Abb. 7.4: Eine Beispiellösung zu Aufgabenstellung b) der Simulationsaufgabe in der Klausur.

Alternative Lösungsmöglichkeiten zu Aufgabenteil b)

In **Schritt 1** und in **Schritt 3** gibt es wie schon bei der Beispiellösung zu Aufgabenteil a) kaum Variationsmöglichkeiten. Auch die Auswertung der gesammelten Messgrößen in **Schritt 4** kann nur über die Formel `aMittel()` zur Berechnung des Mittelwerts durchgeführt werden. Dies sollte sinnvoller Weise in einer numerischen Auswertungstabelle erfolgen.

In **Schritt 2** bei der Definition der Messgröße kennen die Schülerinnen und Schüler nur den `Wenn()`-Befehl, welcher zunächst eine Unterscheidung von zwei verschiedenen Fällen ermöglicht. Der `Transform()`-Befehl, der auch eine direkte Verzweigung in drei oder mehr Fälle ermöglicht, wird im Rahmen des Simulationsvorkurses nicht behandelt. Da für die Berechnung des Nettogewinns eine Verzweigung in drei verschiedene Fälle benötigt wird, muss zur Definition der Messgröße *Nettogewinn* eine Schachtelung des `Wenn()`-Befehls vorgenommen werden. Hier gibt es alternative Vorgehensweisen im Vergleich zur Beispiellösung:

Zum einen kann man mit zwei Messgrößen arbeiten und damit die Komplexität der `Wenn()`-Anweisung reduzieren: Man definiert eine Messgröße *Drehsumme* mit der Formel `Summe(Drehergebnis)` und eine zweite Messgröße *Nettogewinn* mit der Formel

$$\texttt{Wenn(Drehsumme=2000)}\begin{cases} \texttt{11} \\ \texttt{Wenn(Drehsumme}\geq\texttt{1000)}\begin{cases} \texttt{0,50} \\ \texttt{-1} \end{cases} \end{cases}$$

Der hier gezeigte Befehl funktioniert, da die geschachtelte `Wenn()`-Anweisung von links nach rechts abgearbeitet wird. Bei einer Augensumme von 2000 wird über den ersten `Wenn()`-Befehl eine Messgröße von 11 bestimmt. Bei einer Augensumme von z. B. 1300 erhält man über den zweiten `Wenn()`-Befehl eine Messgröße von 0,50.

Die umgekehrte Schachtelung funktioniert nicht. Bei folgender `Wenn()`-Anweisung erhält man auch bei einer Augensumme von 2000 eine Messgröße von 0,5, da der Fall einer Augensumme von 2000 in der ersten `Wenn()`-Bedingung nicht herausgenommen wird:

$$\texttt{Wenn(Drehsumme}\geq\texttt{1000)}\begin{cases}\texttt{0,50}\\ \texttt{Wenn(Drehsumme=2000)}\begin{cases}\texttt{11}\\ \texttt{-1}\end{cases}\end{cases}$$

Möchte man dieses Problem vermeiden, so kann man die Formel mit einer logischen Verknüpfung ergänzen:

$$\texttt{Wenn((Drehsumme}\geq\texttt{1000)und(Drehsumme<2000))}\begin{cases}\texttt{0,50}\\ \texttt{Wenn(Drehsumme=2000)}\begin{cases}\texttt{11}\\ \texttt{-1}\end{cases}\end{cases}$$

In diesem Fall ist die Schachtelung der beiden `Wenn()`-Befehle austauschbar.

Ein prinzipiell anderer Lösungsweg kann so aussehen, dass man sich als Messgrößen drei Ereignisse „Augensumme kleiner 1000“, „Augensumme mindestens 1000 und kleiner 2000“ und „Augensumme gleich 2000“ mit den Formeln `Drehsumme<1000`, `Drehsumme≥1000 und Drehsumme<2000`, `Drehsumme=2000` definiert und dann die absoluten Häufigkeiten des Auftretens dieser drei Ereignisse in der Simulation bestimmt. Hieraus kann man den gesamten Nettogewinn bei 1000 oder 10000 Drehungen berechnen und erhält damit auch den mittleren Nettogewinn pro Spiel. Dies entspricht der Berechnung des Mittelwerts eines Merkmals mit Merkmalsausprägungen $x_1, \ldots, x_n$ und den zugehörigen absoluten Häufigkeiten $H_1, \ldots, H_n$ bzw. den zugehörigen relativen Häufigkeiten $h_1, \ldots, h_n$ über die Formel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i \cdot x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot x_i$. Damit bereitet dieser Lösungsweg die strukturell ähnliche Formel für die theoretische Berechnung des Erwartungswerts vor.

Aufgabenteil 1.c)

1. Schritt: Modellierung des Zufallsexperiments „Drehen, bis eine Augensumme von mindestens 1000 auftritt“

Analog zu Aufgabenteil 1.a) kann man eine Kollektion *Glücksrad* erstellen und mit dem Zufallsgenerator `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)` ein Merkmal *Drehergebnis* definieren. Der Kollektion *Glücksrad* werden zwei Fälle hinzugefügt.

Zu der Kollektion wird eine Messgröße *Drehsumme* mit der Formel `Summe(Drehergebnis)` definiert. Hiermit wird die Summe der beiden gedrehten Zahlen berechnet.

Nun muss man Messgrößen sammeln, und zwar so lange, bis eine Augensumme von mindestens 1000 auftritt. Hierfür trägt man in das Feld „Bis zur Bedingung“ des Info-Fensters der Kollektion *Messgrößen von Glücksrad* die Bedingung `Drehsumme≥1000` ein.

2. Schritt: Definition einer geeigneten Messgröße zur Kollektion *Messgrößen von Glücksrad*

Nun muss man zählen, wie viele Spiele bis zum Auftreten einer Augensumme von mindestens 1000 durchgeführt werden müssen. Hierfür definiert man in der Kollektion *Messgrößen von Glücksrad* eine Messgröße *Anzahl_Spiele* mit der Formel `Anzahl(Drehsumme)`. Hiermit wird gezählt, wie viele Einträge das Merkmal *Drehsumme* der Kollektion *Messgrößen von Glücksrad* besitzt.

3. Schritt: 1000faches Sammeln der Messgröße *Anzahl_Spiele*

4. Schritt: Auswertung der Häufigkeitsverteilung der gesammelten Messgrößen in der Kollektion *Messgrößen von Messgrößen von Glücksrad*.

Mit der Formel `aMittel(Anzahl_Spiele)` kann man in einer numerischen Auswertungstabelle zur Kollektion *Messgrößen von Messgrößen von Glücksrad* die mittlere Anzahl an Spielen in den 1000 Simulationsdurchläufen erhalten.

Eine nach dieser Beispiellösung aufgebaute Simulationsumgebung mit Antwortsatz ist in Abb. 7.5 zu sehen:

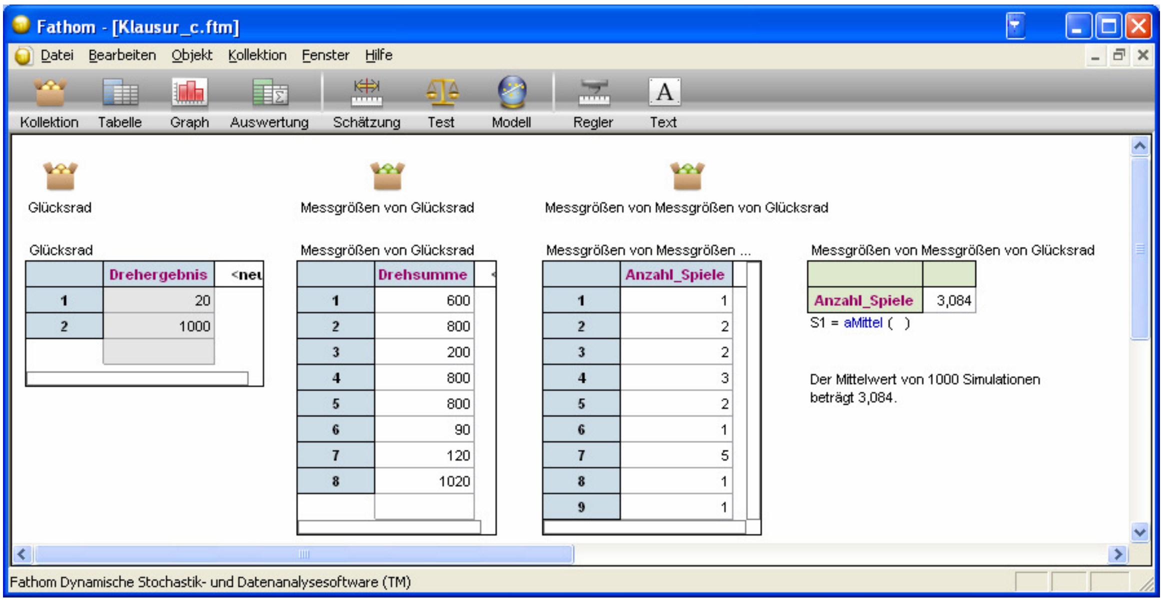


Abb. 7.5: Eine Beispiellösung zu Aufgabenstellung c) der Simulationsaufgabe in der Klausur. Die beiden Kollektionen „Glücksrad“ und „Messgrößen von Glücksrad“ repräsentieren das Zufallsexperiment „Drehen, bis eine Augensumme von mindestens 1000 auftritt“. Dieses Zufallsexperiment wird 1000mal wiederholt und jedes Mal wird gezählt, wie viele Drehversuche/Spiele benötigt werden. Die Ergebnisse finden sich in der Merkmalsspalte „Anzahl_Spiele“ der Kollektion „Messgrößen von Messgrößen von Glücksrad“.

Eine prinzipiell alternative Vorgehensweise zur Beispielsimulation wäre eine „Simulation durch Stichprobenziehen“. Aufgrund der Auswahlentscheidung zur ausschließlichen Verwendung der sequentiellen Simulation im Simulationsvorkurs ist den Schülerinnen und Schülern die Simulation durch Stichprobenziehen nicht bekannt (vgl. Kapitel 4.1.5). Daher gibt es keine prinzipiell alternativen Vorgehensweisen zum Aufbau der Beispiellösung. Es sind lediglich kleine Umgestaltungen möglich. So kann man z. B. bei der Wahl der Messgröße in Schritt 2 alternativ die Messgröße *Nettogewinn* aus Aufgabenteil b) wählen. Damit muss man auch die Abbruchbedingung bei der Modellierung des Einzelexperiments umgestalten: Man muss so lange Messgrößen sammeln, bis zum ersten Mal ein Nettogewinn von mindestens 0,5 auftritt. Das weitere Vorgehen verläuft analog zur vorgestellten Beispiellösung.

7.1.2 Die Analyse der Simulationsaufgabe

Die gewählte Aufgabe fordert auf der Ebene der **stochastisch-inhaltlichen Kompetenz** in Aufgabenteil a) die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines zweistufigen Zufallsexperiments. In Aufgabenteil b) wird die Aufgabe zu einer Gewinnspielaufgabe erweitert, bei der der Erwartungswert gesucht ist. In Aufgabenteil c) geht es um ein Wartezeitproblem. Diese grundlegenden stochastischen Problemstellungen werden an anderen Beispielen sowohl bei den Würfelaufgaben als auch bei den gemischten Aufgaben des Simulationsvorkurses behandelt. Bei der Formulierung der Antwort genügt jeweils ein kurzer Antwortsatz. Es wird keine tiefgehende Interpretation der Ergebnisse verlangt.

Auf der **Ebene der Simulationskompetenz** benötigt man bei den Aufgabenteilen a) und b) das Vorgehen entlang des vierschrittigen Prozessmodells, welches im Simulationsvorkurs ausführlich besprochen und geübt wird (vgl. Kapitel 4.1.1).

Bei Aufgabenteil c) muss dieses vierschrittige Vorgehen erweitert werden: Allein für die Modellierung des Einzelexperiments muss man eine Messgröße definieren und eine Abbruchbedingung für das Sammeln der Messgrößen formulieren. Aufbauend auf diesem Einzelexperiment muss man eine weitere Messgröße definieren, erneut Messgrößen sammeln und die hierbei entstehende Verteilung auswerten. Diese komplexe Struktur ist im Simulationsvorkurs an zwei Beispielen eingeführt worden: An der Würfelaufgabe e) (Aufgabentext S. 81) und am Sammelbildproblem aus den gemischten Aufgaben (Aufgabentext S. 87). Allerdings muss angemerkt werden, dass die Wartezeitaufgaben auf der Designebene im Sinn einer inneren Differenzierung speziell für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler in das Unterrichtskonzept aufgenommen worden sind (vgl. Kapitel 4.1.5). Im beobachteten Unterricht wurden beide Aufgaben nur von wenigen Schülerinnen und Schülern bearbeitet (vgl. Kapitel 6).

Auf der **Ebene der Fathomkompetenz** müssen die Schülerinnen und Schüler in allen drei Aufgabenteilen die Werkzeugkompetenzen im Umgang mit der Software beherrschen: Sie müssen sicher mit Kollektionen und den zugehörigen Tabellen umgehen können, sie müssen Messgrößen definieren können und die beim Sammeln der Messgrößen entstehenden Häufigkeitsverteilungen mit geeigneten Werkzeugen auswerten können (vgl. Kapitel 4.1.3).

Hinzu kommt die **Formelkompetenz**: In allen drei Simulationen müssen die Schülerinnen und Schüler in **Schritt 1** einen geeigneten Zufallsgenerator wählen. Das Glücksrad kommt als Zufallsgerät in keiner Aufgabe des Simulationsvorkurses vor. Der geeignete Zufallsgenerator `Zufallswahl()` wird im Simulationsvorkurs mehrfach verwendet, muss aber nun in Verbindung mit dem Glücksrad geeignet eingesetzt werden. Hier müssen die Schülerinnen und Schüler ein erstes (einfaches) Modellierungsproblem lösen.

Bei **Aufgabenteil 1.a)** muss gemäß der Beispiellösung in **Schritt 2** der Simulation die Drehsumme über die Formel `summe(Drehergebnis)` definiert werden. Diese intuitiv einfach verständliche Formel ist bei den Würfelaufgaben eingeführt worden. In **Schritt 4** der Simulation muss die Häufigkeitsverteilung der Drehsumme über die Formel `Anzahl(Drehsumme≥1000)/Anzahl(Drehsumme)` oder mit einer ähnlichen Formel ausgewertet werden. Auch diese Art der Auswertungsformel ist aus dem vorangegangenen Unterricht bekannt.

Bei **Aufgabenteil 1.b)** muss in **Schritt 2** der Simulation die Messgröße über die geschachtelte `Wenn()`-Bedingung definiert werden. Man kann hier entweder mit zwei Messgrößen *Drehsumme* und *Nettogewinn* arbeiten, oder aber man kann die Formel zur

Berechnung der Augensumme in die `Wenn()`-Anweisung zur Bestimmung des Nettogewinns integrieren. Als Hauptschwierigkeit muss man zwei `Wenn()`-Befehle ineinander schachteln. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, gibt es hierfür mehrere richtige und auch falsche Möglichkeiten. Der `Wenn()`-Befehl wurde bei der Würfelaufgabe d) (Aufgabentext S. 80) eingeführt und bei den gemischten Aufgaben „Urnenziehung“ und „Münzspiel“ (Aufgabentext S. 87) gefestigt. Im Simulationsvorkurs wird allerdings nur bei der „Münzspiel“-Aufgabe ein geschachtelter `Wenn()`-Befehl benötigt. Diese Aufgabe wurde aufgrund der Wahlmöglichkeiten bei den gemischten Aufgaben nur von drei Schülergruppen gewählt (vgl. Kapitel 6.4.2). Die übrigen sechs Schülergruppen haben sich für die andere Gewinnspielaufgabe entschieden. Die Schachtelung des `Wenn()`-Befehls ist einem Teil der Schülerinnen und Schüler somit nur über die Präsentation und die zur Verfügung gestellten Simulationspläne zu den gemischten Aufgaben bekannt. In **Schritt 4** der Simulation ist die Auswertung der gesammelten Messgrößen über den Befehl `aMittel()` unproblematisch.

In **Aufgabenteil c)** muss in Schritt 2 der Simulation eine Messgröße *Anzahl_Spiele* über die Formel `Anzahl(Drehsumme)` definiert werden. Die Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilung in **Schritt 4** der Simulation erfolgt über den Befehl `aMittel()`. Beide Formeln sind bekannt und ausreichend geübt.

Zusammenfassend betrachtet benötigt man zur Lösung von **Aufgabenteil a)** einen sicheren Umgang mit den Werkzeugkompetenzen in Fathom sowie mit dem Aufbau einer Simulation entlang den vier Schritten des eingeführten Prozessmodells. Die Schritte 1, 2 und 4 erfordern jeweils einfache Modellierungsüberlegungen, bei denen gut eingeübte Formeln verwendet werden können. Der Aufgabenteil testet die grundlegenden im Simulationsvorkurs vermittelten Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation ab.

Bei **Aufgabenteil b)** wird zusätzlich zu den in Aufgabenteil a) benötigten grundlegenden Kompetenzen ein komplexer Modellierungsschritt bei der Definition der Messgröße verlangt. Zunächst gibt es die Möglichkeit, hier mit zwei Messgrößen zu arbeiten oder aber den Befehl `Summe()` in die `Wenn()`-Bedingung zu integrieren. Weiter müssen zwei `Wenn()`-Bedingungen logisch korrekt ineinander geschachtelt werden. Hierfür benötigt man eine hohe Formelkompetenz. Bei der logisch-korrekten Schachtelung der `Wenn()`-Bedingung verbindet sich die Formelkompetenz mit dem stochastisch-inhaltlichen Verständnis der Problemstellung. Für die Verwendung zweier Messgrößen benötigt man ein vertieftes Verständnis der Bedeutung der Messgröße innerhalb des vierschrittigen Prozessmodells. Über die grundlegenden Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation hinaus wird hier ein sicherer und flexibler Umgang mit Formeln sowie ein vertieftes stochastisch-inhaltliches Verständnis verlangt.

Bei **Aufgabenteil 1.c)** werden zusätzlich zu den in Aufgabenteil a) benötigten grundlegenden Kompetenzen ein flexibler Umgang mit dem vierschrittigen Prozessmodell und die Verwendung einer Abbruchbedingung verlangt. Bereits für Schritt 1 der Simulation benötigt man die Definition einer Messgröße und das Sammeln der Messgrößen in Verbindung mit einer Abbruchbedingung. Dies führt zu einem Aufbrechen der üblichen Struktur des Simulationsaufbaus. Gemäß der Intention einer inneren Differenzierung sind diese Aufgabentypen vornehmlich den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern vorbehalten.

7.1.3 Die quantitative Analyse der Ergebnisse der Klausuraufgabe

In diesem Abschnitt wird eine Bepunktung der Schülerlösungen vorgenommen, so dass man eine quantitative Auswertung erhält. Da es sich um Schülerergebnisse aus einer notenrelevanten Klausur handelt, muss die Bepunktung vor allem nach dem Kriterium einer erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler haben hier unter Zeit- und Erfolgsdruck gearbeitet, dies muss auch bei der quantitativen Einordnung der Ergebnisse berücksichtigt werden. Die Bepunktung der Schülerlösungen erfolgt daher in diesem Abschnitt unabhängig von der qualitativen Analyse im nächsten Abschnitt. Das Vorgehen bei der Bepunktung wird zunächst für jede Teilaufgaben kurz erläutert.

Aufgabenteil 1.a)

Die zentralen Anforderungen von Aufgabenteil 1.a) liegen in den folgenden drei Schritten:

- Erstellung der Kollektion mit zwei Fällen und Definition eines geeigneten Merkmals
- Definition einer geeigneten Messgröße und Sammeln der Messgrößen
- Auswertung der gesammelten Messgrößen

Auf die erfolgreiche Durchführung jedes dieser drei Schritte werden zwei Punkte gegeben, wobei nicht berücksichtigt wird, ob es sich hierbei um eine elegante oder um eine umständliche Lösung handelt. Bei leichten Fehlern (z. B. kleine Fehler in der Formulierung der Formeln) wird ein Punkt abgezogen. Insgesamt sind sechs Punkte auf Aufgabenteil a) zu erreichen.

Mit diesem Bewertungsmuster ergibt sich folgende Ergebnisübersicht:

ereichte Punkte	6	5	4	3	2	1	0
Anzahl Personen	12	4	1	1	0	0	0

Tab. 7.1: Ergebnisübersicht zur Lösung von Aufgabenteil a) der Simulationsaufgabe aus der Klausur.

Durchschnitt: 5,5 Punkte $\hat{=}$ 92%

12 von 18 Schülerinnen und Schülern konnten die Aufgabe komplett richtig bearbeiten und haben sechs Punkte. Bei den vier Schülerinnen und Schülern mit nur fünf Punkten sind kleine Fehler aufgetreten. Der eine Schüler mit nur vier Punkten hat bei der Auswertung den Mittelwert an Stelle der Wahrscheinlichkeit berechnet. Die Schülerin mit nur drei Punkten hat bereits den Zufallsgenerator fehlerhaft formuliert und einen weiteren Fehler in der Auswertung.

Aufgabenteil 1.b)

Die über den Aufgabenteil 1.a) hinausgehenden Anforderungen liegen in den folgenden beiden Schritten:

- Definition einer geeigneten Messgröße zur Unterscheidung der drei verschiedenen Nettogewinne
- Auswertung der gesammelten Messgrößen

Auf die erfolgreiche Durchführung dieser beiden Schritte werden jeweils zwei Punkte gegeben. Falls die Formel zur Definition der Messgröße *Nettogewinn* einen Fehler enthält, so werden die beiden Punkte nicht gegeben, da die Erstellung dieser Formel das zentrale Element dieser Simulation ist. Bei leichten Fehlern in der Auswertung wird ein Punkt abgezogen. Insgesamt sind auf Aufgabenteil b) vier Punkte zu erreichen.

Mit diesem Bewertungsmuster ergibt sich folgende Ergebnisübersicht:

ereichte Punkte	4	3	2	1	0
Anzahl Personen	11	4	2	0	1

Tab. 7.2: Ergebnisübersicht zur Lösung von Aufgabenteil b) der Simulationsaufgabe aus der Klausur.

Durchschnitt: 3,3 Punkte $\triangleq$ 83%

11 von 18 Schülerinnen und Schülern konnten die Aufgabe komplett richtig bearbeiten und haben vier Punkte erreicht. Bei den 4 Schülerinnen und Schülern mit drei Punkten sind kleine Fehler in der Auswertung aufgetreten. Bei den zwei Schülerlösungen mit zwei Punkten ist die Formel zur Definition der Messgröße *Nettogewinn* fehlerhaft. Bei der einen Schülerlösung mit null Punkten ist die Aufgabenbearbeitung bereits im ersten Schritt bei der Wahl des Zufallsgenerators falsch, dadurch kommt keine sinnvolle Simulation zustande.

Aufgabenteil 1.c)

Die zentralen Anforderungen von Aufgabenteil c) liegen in den folgenden drei Schritten:

- Modellierung des Einzelexperiments „Drehen bis zum Auftreten einer Augensumme von mindestens 1000“ mit einer geeigneten Abbruchbedingung beim Sammeln der Messgrößen.
- Definition einer weiteren Messgröße, welche die benötigte Anzahl an Spielen zählt und Sammeln dieser Messgröße.
- Auswertung der gesammelten Messgrößen mit `aMittel()`.

Auf die erfolgreiche Durchführung des ersten Schritts als dem zentralen Modellierungsschritt werden zwei Punkte gegeben, ist die Abbruchbedingung falsch formuliert, so wird nur ein Punkt gegeben. Auf die beiden weiteren Schritte wird jeweils ein Punkt gegeben. Insgesamt sind 4 Punkte zu erreichen.

Mit diesem Bewertungsmuster ergibt sich folgende Ergebnisübersicht:

ereichte Punkte	4	3	2	1	0
Anzahl Personen	5	2	0	2	9

Tab. 7.3: Ergebnisübersicht zur Lösung von Aufgabenteil c) der Simulationsaufgabe aus der Klausur.

Durchschnitt: 1,6 Punkte $\triangleq$ 40%

Die Aufgabe ist von der Hälfte der Schülerinnen und Schüler bearbeitet worden. Die fünf Lösungen mit jeweils vier Punkten sind komplett richtig. Bei den zwei Lösungen mit drei Punkten tritt jeweils ein Fehler auf: Einmal wird die Abbruchbedingung falsch formuliert, einmal fehlt die Auswertung der gesammelten Messgrößen. Bei den zwei Lösungsversuchen mit nur einem Punkt lässt sich die Formel der Abbruchbedingung von der Software nicht auswerten. Beide Lösungen brechen an dieser Stelle ab. Neun Schülerinnen und Schüler haben die Aufgabe nicht bearbeitet.

Aufgabenteil 2. Die Genauigkeitsabschätzung zur Simulation a)

Das vom Lehrer intendierte Vorgehen zur Lösung dieser Aufgabenstellung war die Wiederholung des im Unterricht demonstrierten Verfahrens zur Erarbeitung der Faustregeln zur Genauigkeitsabschätzung (vgl. Kapitel 6.2.2). Eine beispielhafte Schülerlösung dieses Typs sieht folgendermaßen aus:

„Bei mehrmaligem Durchführen der Simulation mit FATHOM sieht man, dass die Werte immer eine gewisse Abweichung beinhalten:
1. Simulation: 31%
2. Simulation: 33,33%
3. Simulation: 32,6%
4. Simulation:34,44%
Man sieht also, dass ein deutlicher Spielraum zwischen den Ergebnissen vorhanden ist. Die Abweichung beträgt bei 1000 Simulationen etwa ± 2%.“

Diese Intention der Aufgabe ist der Aufgabenformulierung allerdings nicht eindeutig zu entnehmen. Daher muss man auch solche Lösungen als richtig anerkennen, bei denen die im Unterricht erarbeiteten Faustregeln mit Bezug auf die Wiederholungsanzahl der durchgeführten Simulation einfach angegeben werden. Eine beispielhafte Schülerlösung dieses Typs sieht folgendermaßen aus:

„Die Abweichung der Genauigkeit bei 1000 Wiederholungen einer bestimmten Simulation liegt bei ± 3%. Wenn ich die Simulation aber 10 000 mal durchgeführt hätte, dann wäre die Wahrscheinlichkeit genauer, da die Abweichung der Genauigkeit der Wahrscheinlichkeit bei 10 000 Wiederholungen nur ± 1% beträgt.“

Auf jede dieser beiden Lösungsmöglichkeiten werden zwei Punkte gegeben.

Es gibt vier (korrekte) Schülerlösungen, welche die passende Faustregel einfach angeben. Es gibt zwei (korrekte) Schülerlösungen, welche die Faustregel über die mehrfache Wiederholung der Simulation demonstrieren.

Die restlichen zwölf Schülerinnen und Schüler haben die Aufgabe nicht bearbeitet.

Aufgabenteil 3. Formulierung eines Simulationsplans zur Simulation b)

Bei den Anforderungen an die Formulierung des Simulationsplans muss man berücksichtigen, dass für die gesamte Aufgabenbearbeitung nur 50 Minuten zur Verfügung standen. Daher werden für die Bewertung der Simulationspläne die folgenden (niedrigen) Anforderungen gestellt:

- Der Simulationsplan muss nach den vier Schritten des Prozessmodells untergliedert sein. Mindestens die Schritte 1, 2 und 4 müssen explizit formuliert sein.
- Bei der Verwendung der Formeln in den Modellierungsschritten 1, 2 und 4 muss die verwendete Formel jeweils mit ihrer inhaltlichen Bedeutung in Bezug auf das Zufallsexperiment angegeben werden.

Längere Erläuterungen oder Interpretationen werden nicht verlangt. Die genaue Formulierung der geschachtelten `Wenn()`-Bedingung kann ebenfalls nicht verlangt werden, da sich diese (mit der Verzweigung über die großen geschweiften Klammern) im Fathom-Textfenster nicht darstellen lässt.

Genügt ein Simulationsplan den genannten Anforderungen, so wird er mit zwei Punkten bewertet. Die zwei Punkte werden auch dann verteilt, wenn in der zugehörigen Simulation von Aufgabenteil 1.b) kleine Fehler vorhanden sind.

Insgesamt wurden 15 Simulationspläne zu Aufgabenteil b) erstellt, die alle den genannten Anforderungen genügen und in der quantitativen Auswertung zwei Punkte erreichen. Drei Schülerinnen und Schüler haben keinen Simulationsplan formuliert.

Exemplarisch werden hier zwei Beispiele vorgestellt:

Simulationsplan 1:

1. Man erstellt eine Kollektion "Glücksrad", in der das Drehen am Glücksrad simuliert wird. In der Tabelle zu "Glücksrad" gibt es eine Spalte "Sektor", in der das Ergebnis des Drehens mit der Formel Zufalls-Wahl(700;50;1000;20;500;100;70;300) simuliert wird.

2. Bei der Simulation von "Glücksrad" interessiert uns die Summe der beiden gedrehten Zahlen. Dafür definieren wir die Messgröße "Summe" mit der Formel Summe(Sektor). Uns interessiert aber auch der Nettogewinn bei diesem Spiel. Dafür definieren wir eine zweite Messgröße "Nettogewinn" mit der zweifach-geschachtelten Wenn-Formel (siehe Info-Fenster „Glücksrad“, Messgröße). Diese besagt: Wenn die Summe der Spalte „Sektor“ = 2000 ist, bekommt man 11 Euro, oder wenn die Summe größer-gleich 1000 ist, bekomme ich 50 Cent, ansonsten verliere ich 1 Euro.

3. Um den mittleren Nettogewinn zu erhalten, muss ich dieses Experiment sehr oft (1000mal) durchführen. Mit "Messgrößen sammeln" führen wir die Simulation 1000mal durch. Die Summe der beiden gedrehten Zahlen, sowie die Nettogewinne sind in der so entstandenen Kollektion "Messgrößen von Glücksrad" festgehalten.

4. Die gesammelten Simulationen müssen nun ausgewertet werden: Hierfür gibt es die Möglichkeit einer Auswertungstabelle. Wenn man nun die Spalte „Nettogewinn“ in diese Auswertungstabelle einfügt (ohne gedrückte Shifttaste), erhält man den mittleren Nettogewinn pro Spiel auf lange Sicht.

Der gezeigte Simulationsplan orientiert sich an den vier Schritten des Prozessmodells. In allen vier Schritten wird die Verbindung zwischen der stochastischen Situation und der FATHOM-Ebene hergestellt. Insbesondere ist die `Wenn()`-Anweisung ausführlich erläutert. Die Bedeutung der zwei Spalten in der Tabelle zur Kollektion „Messgrößen von Glücksrad“ wird erklärt, weiter wird die Bedeutung des Ergebnisses angegeben. Die Bezeichnungen der Kollektionen, Merkmale und Messgrößen sind sinnvoll gewählt. Es handelt sich um einen Simulationsplan mit einer ausführlichen Beschreibung der einzelnen Formeln und Komponenten. Allein das Hinzufügen zweier Fälle zur Kollektion wird nicht erwähnt.

Simulationsplan 2:

Man erstellt eine Kollektion mit dem Namen „Glücksrad“.
In dieser erstellt man ein Attribut namens "Rad" und simuliert die gedrehten Sektoren mit der Formel Zufallswahl(20;50;70;100;300;500;700;1000).
Man simuliert dies zweimal, indem man in dem Attribut „Rad“ 2 Fälle einfügt.

Anschließend wird bei der Kollektion „Glücksrad“ eine Messgröße mit dem Namen „Gesamt“ erstellt. Diese soll die einzelnen Gewinne für die gedrehten Sektoren errechnen!
Hierzu wird eine zweifach geschachtelte Wenn-Formel verwendet.

Die Ergebnisse werden graphisch (Ziehen der Messgröße „Gesamt“ auf die x-Achse) und numerisch in einer Auswertungstabelle angezeigt, indem man wieder die Messgröße „Gesamt“ in die Tabelle zieht.
Ohne gedrückte Shifttaste wird automatisch der mittlere Nettogewinn angezeigt.

Auch dieser Simulationsplan orientiert sich an den vier Schritten des Prozessmodells. Auch hier sind die Bezeichnungen sinnvoll gewählt. Die Bedeutungen des Zufallsgenerators und der Messgröße werden angegeben, allerdings findet keine Erläuterung der Formeln statt. Das Sammeln der Messgrößen als Schritt 3 des Prozessmodells fehlt völlig. Die Auswertung wird vor allem auf der Ebene der Werkzeugkompetenzen beschrieben. Es handelt sich hier um einen Simulationsplan mit einer sehr knappen Beschreibung der einzelnen Modellierungsschritte.

Die beiden vorgestellten Simulationspläne sollen die Bandbreite der abgegebenen Simulationspläne zeigen: Alle Simulationspläne orientieren sich eng an dem eingeführten vierschrittigen Prozessmodell. Die Verknüpfung zwischen der Gewinnspielsituation und der FATHOM-Ebene wird in den meisten Fällen wie gewünscht hergestellt. Die Bezeichnungen sind in den meisten Fällen sinnvoll gewählt und unterstützen damit die Verknüpfung zwischen der Gewinnspielsituation und der FATHOM-Ebene. Die Simulationspläne unterscheiden sich in der Ausführlichkeit der Erläuterung der Formeln und der einzelnen Komponenten, wobei das erste Beispiel für einen eher ausführlichen Simulationsplan und das zweite Beispiel für einen eher knappen Simulationsplan steht. Bei manchen Simulationsplänen erfolgen die Formulierungen wie beim zweiten gezeigten Beispiel teilweise auf der Ebene der Werkzeugkompetenzen, was im Simulationsplan überflüssig ist.

Gesamtübersicht der Punkteverteilung

Die folgende Tabelle liefert eine nach den einzelnen Schülerinnen und Schülern aufgeschlüsselte Gesamtübersicht der quantitativen Ergebnisse der Klausuraufgabe. Die Schülerinnen und Schüler sind nach der erreichten Gesamtpunktzahl geordnet:

Aufgabe / **Schüler**	**a) (6 P)**	**b) (4P)**	**c) (4P)**	**Genauigkeit a) (2P)**	**Simulationsplan b) (2P)**	**Simulation gesamt (14 P)**	**Aufgabe gesamt (18 P)**
Schüler1	6	4	4	2	2	14	18
Schüler2	5	4	4	2	2	13	17
Schüler3	6	4	4	0	2	14	16
Schüler4	6	4	4	0	2	14	16
Schüler5	6	4	4	0	2	14	16
Schüler6	5	4	3	2	2	12	16
Schüler7	6	4	3	0	2	13	15
Schüler8	6	4	1	0	2	11	13
Schüler9	6	4	1	0	2	11	13
Schüler10	6	4	0	0	2	10	12
Schüler11	6	2	0	2	2	8	12
Schüler12	5	2	0	2	2	7	11
Schüler13	6	3	0	0	2	9	11
Schüler14	6	3	0	2	0	9	11
Schüler15	4	4	0	0	2	8	10
Schüler16	5	3	0	0	2	8	10
Schüler17	6	3	0	0	0	9	9
Schüler18	3	0	0	0	0	3	3
mittlere erreichte Punktzahl	**5,5** **(92%)**	**3,3** **(83%)**	**1,6** **(40%)**	**0,7** **35%**	**1,7** **(85%)**	**10,4** **(74%)**	**12,7** **(71%)**

Tab. 7.4: Eine nach den einzelnen Schülerinnen und Schülern aufgeschlüsselte Gesamtübersicht der quantitativen Ergebnisse der Klausuraufgabe.

Der mittlere erreichte Punktanteil der einzelnen Aufgabenteile ist nebenstehend nochmals grafisch aufgetragen. Man erkennt, dass die Aufgabenteile 1.a) und 1.b) zur Simulation mit im Mittel 92% bzw. 83% der erreichbaren Punkte von der großen Mehrheit der Schülerinnen und Schüler ohne Probleme bewältigt werden konnten. Von den Simulationsaufgaben ist Aufgabenteil 1.c) erwartungsgemäß der anspruchvollste Teil: Im Mittel wurden hier nur 40% der Punkte erreicht.

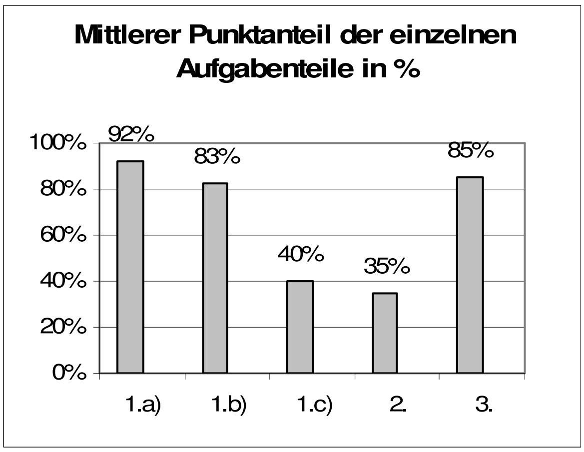


Abb. 7.6: Mittlerer Punktanteil der einzelnen Aufgabenteile in %.

Bei Aufgabenteil 2. zur Genauigkeitsabschätzung werden im Mittel nur 35% der Punkte erreicht. Dieser Aufgabenteil ist damit am schlechtesten bearbeitet. Bei Aufgabenteil 3. zum Simulationsplan sind es im Mittel 85%.

Betrachtet man die Punkteverteilung der erreichten Gesamtpunktzahl der einzelnen Schülerinnen und Schüler, so ergibt sich folgendes Bild:

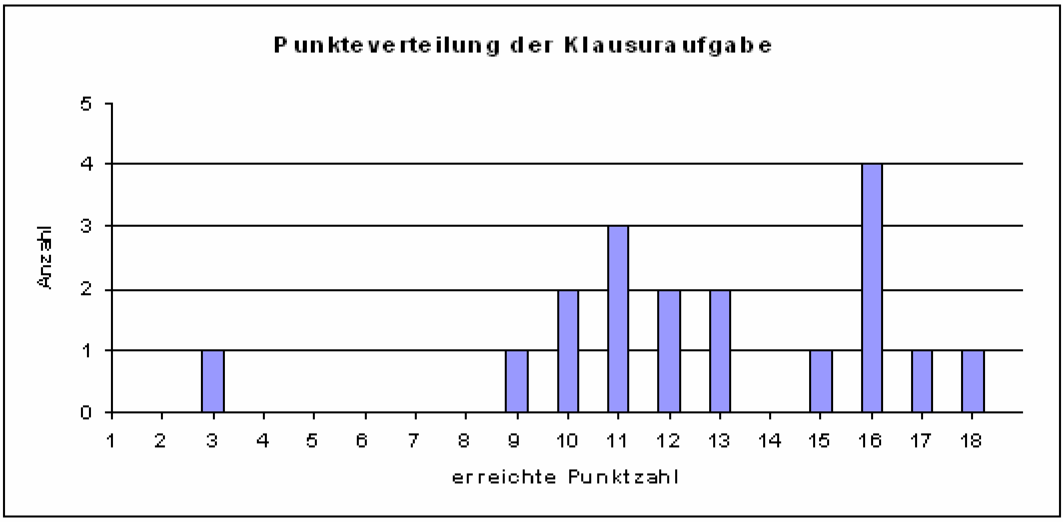


Abb. 7.7: Punkteverteilung der erreichten Gesamtpunktzahl der einzelnen Schülerinnen und Schüler in der Klausuraufgabe.

Sieben der 18 Schülerinnen und Schüler und damit mehr als ein Drittel haben in der Klausuraufgabe mindestens 15 von 18 Punkten erreicht. Betrachtet man die tabellarische Gesamtübersicht, so sieht man, dass es sich dabei genau um diejenigen Schülerinnen und Schüler handelt, die auch den Teil 1.c) der Wartezeitsimulation mit mindestens drei Punkten gelöst haben. Weiter gibt es 10 Schülerinnen und Schüler, welche im Bereich von 9 bis 13 Punkten liegen. Lediglich eine Person hat mit nur 3 Punkten ganz schwach abgeschnitten.

7.1.4 Die qualitative Analyse der Schülersimulationen

Aufgabenteil a)

Alle Aufgabenbearbeitungen orientieren sich erfolgreich am eingeführten vierschrittigen Prozessmodell. Die Bezeichnungen der Kollektionen, Merkmale und Messgrößen werden insgesamt sinnvoll gewählt. Beispiele hierfür sind im Folgenden angegeben:

- „Rad“, „Glücksrad“, „Glücksspiel“ (Kollektion)
- „Zahlen“, „Sektor“, „Ergebnis“ (Merkmal der Kollektion)
- „Gesamt“, „Summe“, „Nettogewinn“, „Gewinn“ (Messgrößen)

In Schritt 1 bei der Modellierung des Einzelexperiments ist es fast allen Schülerinnen und Schülern gelungen, den Zufallsgenerator geeignet zu wählen. Nur in einer Schülerlösung wird der Zufallsgenerator mit der Formel `ZufallsWahl(0;0;0;0;300;700;1000)` falsch gewählt.

Die Schülerlösungen unterscheiden sich ab Schritt 2 bei der Wahl unterschiedlicher Messgrößen. Da die Auswertung in Schritt 4 direkt von der Wahl der Messgröße in Schritt 2 abhängt, werden die unterschiedlichen Lösungswege nach dem Vorgehen in Schritt 2 in

Kategorien eingeteilt. Da es nur wenige fehlerhafte Schülerlösungen gibt, wird bei der Kategorisierung zunächst davon ausgegangen, dass die Simulation erfolgreich und mit den geeigneten Auswertungswerkzeugen durchgeführt wird. Auftretende Fehler werden nachfolgend analysiert. Es gibt vier unterschiedliche Kategorien:

Die erste Lösungskategorie **S** entspricht der in Kapitel 7.1.1 vorgestellten Beispiellösung. Bei dieser **S**tandardlösung **S** wird als Messgröße die Zufallsgröße „Augensumme“ gewählt. Die zweite Lösungskategorie **S_E** ist der Standardlösung sehr ähnlich, allerdings wird hier als Messgröße das Ereignis „Augensumme mindestens 1000“ gewählt. Die dritte Lösungskategorie **K** benutzt als Messgröße die Zufallsgröße „Nettogewinn“. Damit handelt es sich um eine **K**ombination von Aufgabenteil a) mit Aufgabenteil b). Man kann mit demselben Simulationsaufbau auch Aufgabenteil b) beantworten. Die vierte Lösungskategorie **K_einf** ist ähnlich zur Kategorie **K** aufgebaut, sie vereinfacht allerdings die Formel zur Berechnung des Nettogewinns zunächst auf zwei Fälle, indem für eine Augensumme von mindestens 1000 stets ein Nettogewinn von 0,50€ und für eine Augensumme von weniger als 1000 ein Nettogewinn von -1,-€ angenommen wird. Die Augensumme von 2000 wird zunächst nicht gesondert betrachtet. Dies ist für die Berechnung des Nettogewinns in b) eine falsche Modellierung, für die Problemstellung in a) ist die Modellierung jedoch ausreichend.

Das Sammeln der Messgrößen in Schritt 3 wird in allen Lösungen mit 1000 oder 10 000 Simulationsdurchgängen erfolgreich durchgeführt.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Schritte 2 und 4 der verschiedenen Lösungskategorien nochmals ausführlich beschrieben. Schritt 1 und Schritt 3 der Simulation verlaufen in allen Lösungskategorien analog:

Schritt 1: Es wird eine Ausgangskollektion mit zwei Fällen erstellt und mit der Formel `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)` ein Merkmal definiert und z. B. als *Drehergebnis* benannt.

Schritt 3: Es werden 1000 oder 10 000 Messgrößen gesammelt.

Code	Beschreibung	Anzahl
S	Schritt 2: Über die Formel `summe(Drehergebnis)` wird die Augensumme als Messgröße definiert und z. B. als *Drehsumme* benannt. Schritt 4: Die Verteilung der gesammelten Messgrößen wird in einer numerischen Auswertungstabelle mit der Formel `Anzahl(Drehsumme≥1000)/Anzahl(Drehsumme)` ausgewertet.	**9**
S_E	Schritt 2: Über die Formel `summe(Drehergebnis)≥1000` wird das Ereignis „Augensumme mindestens 1000“ als Messgröße definiert. Schritt 4: Die Auswertung kann durch Auszählen der Fälle `wahr` in einer kategorialen Auswertungstabelle erfolgen.	**2**
K	Schritt 2: Die Messgröße *Nettogewinn* wird über eine geschachtelte `Wenn()`-Formel realisiert, z. B. über $\texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)=2000)}\begin{cases}11\\ \texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)}\geq\texttt{1000)}\begin{cases}0{,}5\\ -1\end{cases}\end{cases}$ Schritt 4: Die Verteilung der gesammelten Messgrößen wird z. B. in einer kategorialen Auswertungstabelle über das Auszählen der Ergebnisse oder in einer numerischen Auswertungstabelle mit der Formel `Anzahl(Nettogewinn≥0,5)/Anzahl(Nettogewinn)` ausgewertet.	**5**
K_einf	Schritt 2: Als Messgröße wird eine vereinfachte Gewinnformel gewählt, die zunächst den Hauptgewinn für eine Würfelsumme von 2000 noch nicht berücksichtigt: $\texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)}\geq\texttt{1000)}\begin{cases}0{,}50\\ -1\end{cases}$ Schritt 4: Die Auswertung kann durch Auszählen der Ergebnisse in einer kategorialen Auswertungstabelle erfolgen.	**2**

Tab. 7.5: Kategorisierung der verschiedenen Schülerlösungen von Aufgabenteil a).

Es gibt 9 Lösungen der Standardkategorie **S**. Abgesehen von der Lösung mit dem falschen Zufallsgenerator sind alle diese Lösungen komplett richtig.

2 Lösungen gehören zur Kategorie **S_E**. In beiden Lösungen werden ungewöhnliche Formeln zur Definition des Ereignisses verwendet:
`Anzahl(summe(Rad)≥1000)/Anzahl()` bzw. `Anzahl(summe(Sektor)≥1000)≥1`.
Die erste Formel liefert 1 oder 0, die zweite `wahr` oder `falsch`, je nachdem, ob das interessierende Ereignis eintritt oder nicht. Bei beiden Lösungen werden die Ergebnisse mit Hilfe einer kategorialen Auswertungstabelle korrekt ausgezählt.

Es gibt 5 Lösungen der Kategorie **K**. Bei vier dieser Lösungen treten kleine Fehler auf, dreimal wird in der Auswertungsformel in Schritt 4 ein „=“ an Stelle des eigentlich richtigen „≥“ verwendet.

2 Lösungen gehören zur Kategorie **K_einf**. Bei einer dieser beiden Lösungen gelingt die Auswertung der gesammelten Messgrößen nicht, da der Mittelwert der Verteilung an Stelle der Wahrscheinlichkeit berechnet wird.

Die 9 Lösungen der Kategorie **S** gegenüber nur 2 Lösungen der Kategorie **S_E** zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler die Erzeugung einer Häufigkeitsverteilung und die anschließende Auswertung dieser Verteilung einer direkten Definition der Messgröße als Ereignis vorziehen. Dies entspricht dem im Simulationsvorkurs geübten Vorgehen. Hier wurde nur an einem einzigen Beispiel eine Messgröße als Ereignis definiert. Die Lösungen der Kategorie **K** zeigen ein Vorgehen, welches zunächst das Gesamtproblem – hier die Gewinnspielsituation – im Blick hat, und hierüber die Teilprobleme a) und b) löst.

Betrachtet man die Auswertung in Schritt 4 der Simulation unabhängig von den einzelnen Lösungskategorien, so zeigen sich interessante Beobachtungen bezüglich der Wahl der Auswertungswerkzeuge: Neben den geeigneten Werkzeugen der formelhaften Auswertung in einer numerischen Auswertungstabelle und dem Auszählen in einer kategorialen Häufigkeitstabelle treten auch die ungeeignete Verwendung einer kategorialen Auswertungstabelle in Verbindung mit einer Formel sowie die Verwendung von Messgrößen als Auswertungswerkzeuge auf. Die Häufigkeit ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Auswertungswerkzeug	Anzahl
Numerische Auswertungstabelle mit Formel	5
Kategoriale Auswertungstabelle mit Abzählen (geeignet)	3
Kategoriale Auswertungstabelle mit Formel (ungeeignet)	8
Auswertung durch Messgrößen von Messgrößen	2
Grafische Darstellung	4

Tab. 7.6: Häufigkeit der verschiedenen Auswertungswerkzeuge bei der Lösung von Aufgabenteil a).

Insgesamt überwiegt die formelhafte Auswertung. Allerdings zeigen sich hier zwei Probleme, welche bereits in der qualitativen Analyse des Unterrichts und der Schülerarbeitsphasen in Kapitel 6 zu beobachten waren. Zum einen tritt erneut das Problem der ungeeigneten Verwendung einer kategorialen Auswertungstabelle in Verbindung mit einer numerischen Auswertungsformel auf. In den acht aufgetretenen Fällen ist die Formel stets korrekt, eine numerische Auswertungstabelle wäre hier allerdings besser gewesen. Weiter zeigt sich auch hier, dass die Visualisierung der Ergebnisse als Kontrollstrategie von den Schülerinnen und Schülern kaum verinnerlicht ist. Nur in vier Fällen wird die entstehende Häufigkeitsverteilung als Ergänzung der Auswertungstabelle auch grafisch aufgetragen.

Die Verwendung einer Messgröße zur weiteren Auswertung bereits gesammelter Messgrößen wird im Simulationsvorkurs nicht eingeführt, ist aber auch geeignet. Ebenso wie bei den ungewöhnlichen Schülerlösungen vom Typ S_E zeigt sich hier ein kreativer Umgang mit der Software.

Betrachtet man in Schritt 4 der Simulation ferner die Formulierung der Antwortsätze, so zeigt sich zunächst, dass alle Schülerinnen und Schüler einen Antwortsatz formuliert haben. Allerdings wird in den meisten Fällen auf verbaler Ebene nicht zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit differenziert. Auch dieses Problem konnte bereits im Rahmen der qualitativen Analyse von Kapitel 6 identifiziert werden.

Aufgabenteil b)

Abgesehen von einer Schülerlösung orientieren sich alle Aufgabenbearbeitungen erfolgreich am eingeführten vierschrittigen Prozessmodell. Die Bezeichnungen der Kollektionen, Merkmale und Messgrößen werden wieder insgesamt sinnvoll gewählt. Die Modellierung des Einzelexperiments in Schritt 1 der Simulation erfolgt bei allen Schülerinnen und Schülern analog zu Aufgabenteil a).

Ebenso wie in Aufgabenteil a) wird die Kategorisierung der Schülerlösungen auch hier nach dem Vorgehen in Schritt 2 der Simulation vorgenommen. Die Auswertung in Schritt 4 richtet sich nach der Wahl der Messgröße in Schritt 2. Die Schülerlösungen lassen sich in zwei Grundkategorien einteilen:

Die **S**tandardkategorie **S** entspricht der in Kapitel 7.1.1 angegebenen Beispiellösung mit der Verwendung der Messgröße *Nettogewinn*. Hier gibt es noch die Unterkategorie **S2**, bei der mit zwei Messgrößen *Drehsumme* und *Nettogewinn* gearbeitet wird, die Unterkategorie **S_l**, bei der die Formel zur Definition der Messgröße mit einer „und"-Verknüpfung formuliert ist, sowie die Unterkategorie **S2_l** als Kombination von beidem.

Als zweite Grundkategorie **E** gibt es den Lösungsweg über die Bestimmung der absoluten Häufigkeiten für die einzelnen Gewinnmöglichkeiten mit drei Messgrößen und der weiteren händischen Berechnung des Mittelwerts.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Schritte 2 und 4 der verschiedenen Lösungskategorien nochmals ausführlich beschrieben. Schritt 1 und Schritt 3 der Simulation verlaufen in allen Lösungskategorien analog:

Schritt 1: Es wird eine Ausgangskollektion mit zwei Fällen erstellt und mit der Formel `Zufalls-Wahl(20;50;70;100;300;700;1000)` ein Merkmal definiert und z. B. als *Drehergebnis* benannt.

Schritt 3: Es werden 1000 oder 10 000 Messgrößen gesammelt.

Code	Beschreibung	Anzahl
S	Schritt 2: Es wird eine Messgröße *Nettogewinn* mit der folgenden Formel definiert: $\texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)=2000)}\begin{cases} 11 \\ \texttt{Wenn(Summe(Drehergebnis)}\geq\texttt{1000)}\begin{cases} 0{,}5 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$ Schritt 4: Die Verteilung der gesammelten Messgrößen wird in einer numerischen Auswertungstabelle mit der Formel `aMittel()` ausgewertet.	**10**
S2	Wie S, aber es werden zwei Messgrößen definiert: Eine Messgröße *Drehsumme* mit der Formel `Summe(Drehergebnis)` und eine zweite	**2**

	Messgröße *Nettogewinn* mit der Formel $\mathtt{Wenn(Drehsumme=2000)}\begin{cases} 11 \\ \mathtt{Wenn(Drehsumme\geq 1000)}\begin{cases} 0{,}5 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$	
S_l	Wie **S**, aber die Formel zur Berechnung der Messgrößegröße *Nettogewinn* ist umgekehrt aufgebaut und benötigt daher eine logische Verknüpfung: $\mathtt{Wenn((Summe(Drehergebnis)\geq 1000)und(Summe(Drehergebnis)<2000))}\begin{cases} 0{,}50 \\ \mathtt{Wenn(Summe(Drehergebnis)=2000)}\begin{cases} 11 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$	**3**
S2_l	Wie **S_l**, aber die *Drehsumme* wird als eigene Messgröße definiert.	**1**
E	Schritt 2: Es werden drei Messgrößen *Augensumme_kleiner_1000*, *Augensumme_mindestens_1000* und *Augensumme_gleich_2000* mit den Formeln `Drehsumme<1000`, `Drehsumme≥1000`, `Drehsumme=2000` definiert. Schritt 4: Mit den absoluten Anzahlen der drei Messgrößen (z. B. 665, 335, 23) wird der mittlere Nettogewinn händisch ausgerechnet: $(23\cdot 11+(335-23)\cdot 0{,}50+665\cdot(-1))/1000=-0{,}256$	**2**

Tab. 7.7: Kategorisierung der verschiedenen Schülerlösungen von Aufgabenteil b).

Insgesamt gibt es 16 Schülerlösungen der Kategorie **S** oder der stark ähnlichen Unterkategorien **S2**, **S_l** und **S2_l** mit der Definition einer Messgröße *Nettogewinn*. Hierbei wurde 3mal mit zwei Messgrößen gearbeitet (**S2** und **S2_l**), 4mal wurde die Formel zur Definition der Messgröße *Nettogewinn* mit einer logischen Verknüpfung aufgebaut (**S_l** und **S2_l**).

Alle Schülerlösungen der Kategorie **S** und der zugehörigen Unterkategorien bauen auf dem im Unterricht verwendeten Vorgehen bei den Gewinnspielaufgaben auf. Die Lösungen verlangen die Schachtelung der `Wenn()`-Bedingung und setzen damit eine hohe Formelkompetenz voraus. Bei der Unterkategorie **S2** braucht man im Gegensatz zur Kategorie **S** den Befehl `Summe()` nicht in die `Wenn()`-Anweisung zu integrieren, dafür werden allerdings zwei Messgrößen benötigt. Bei der Unterkategorie **S_l** braucht man die Reihenfolge der Schachtelung der `Wenn()`-Anweisung nicht zu beachten, dafür muss man eine logische Verknüpfung einführen.

Bei den Lösungen zur Kategorie **S** wurde zweimal die Formel für die Messgröße *Nettogewinn* falsch definiert, ferner gab es bei zwei Schülerlösungen kleine Fehler in der Auswertung der gesammelten Messgrößen. Eine Lösung ist komplett falsch.

2 Schülerlösungen gehören zur Kategorie **E** und berechnen den Mittelwert des Nettogewinns über die auftretenden Häufigkeiten für die einzelnen möglichen Nettogewinne. Diese Schülerlösungen vermeiden den Lösungsweg über die Schachtelung des `Wenn()`-Befehls. Die Lösungen sind im Unterricht nicht vorbereitet worden und zeigen einen flexiblen Umgang mit der Software. Auf der stochastisch-inhaltlichen Seite wird der Mittelwert der Verteilung direkt ausgerechnet.

Bei beiden Schülerlösungen vom Typ **E** tritt bei der Auswertung der Fehler auf, dass als Zufallsgröße der Gewinn und der Nettogewinn gemischt werden. So erhält man z. B. in einer Schülerlösung 665mal eine Augensumme von weniger als 1000, 335mal von mindestens 1000 und 23mal von 2000. Der durchschnittliche Nettogewinn wird dann berechnet über die Formel `23·12+(335-23)·0,5-665·1=-233`. Hierbei ist bei den 23 Fällen des Hauptgewinns der Einsatz von 1,-€ nicht abgezogen worden.

Betrachtet man die Auswertung in Schritt 4 der Simulation, so zeigt sich bei den 16 Lösungen der Kategorie **S** und der zugehörigen Unterkategorien, dass bei der Auswertung der gesammelten Messgrößen in geeigneter Weise 14mal eine numerische Auswertungstabelle und einmal eine Messgröße verwendet wird. Nur eine Auswertung bleibt bei der

Darstellung der Häufigkeitsverteilung in einer kategorialen Auswertungstabelle stehen. Die ungeeignete Kombination einer Auswertungsformel mit einer kategorialen Auswertungstabelle tritt nicht auf. Als Ursache hierfür kann man vermuten, dass bei der Verwendung einer numerischen Auswertungstabelle die Formel `aMittel()` für die Berechnung des Mittelwerts stets automatisch erzeugt wird. 6mal werden die grafische Darstellung der Verteilung des Nettogewinns und 4mal die Darstellung des Nettogewinns in einer kategorialen Auswertungstabelle zusätzlich zur Veranschaulichung herangezogen.

Die verbale Formulierung der Ergebnisse zeigt keine Besonderheiten. Eine typische Formulierung lautet: „Der mittlere Nettogewinn auf lange Sicht beträgt -0,3535€ pro Spiel.“ Diese korrekte Interpretation des Mittelwerts bei den Gewinnspielaufgaben konnte auch im Rahmen der qualitativen Analyse des Unterrichts in Kapitel 6 gezeigt werden.

Aufgabenteil c)

Zu Aufgabenteil c) liegen nur neun Aufgabenbearbeitungen vor. Diese Schülerlösungen unterscheiden sich in Schritt 1 der Simulation beim Aufbau des Einzelexperiments bis zur Abbruchbedingung. Hier lassen sich drei unterschiedliche Kategorien feststellen:

Die erste Lösungskategorie **S** entspricht der angegebenen Beispiellösung mit der Messgröße *Drehsumme* und der Abbruchbedingung `Drehsumme≥1000`. Die zweite Kategorie **N** unterscheidet sich von der Kategorie **S** nur dadurch, dass als Messgröße der *Nettogewinn* gewählt wird. Die Abbruchbedingung muss dann geeignet formuliert werden, z. B. `Nettogewinn≥0,5`. Die dritte Kategorie **M** verwendet eine leere Ausgangskollektion und definiert direkt zwei Messgrößen *Drehergebnis1* und *Drehergebnis2* jeweils mit dem Zufallsgenerator `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)`. Die Abbruchbedingung muss dann wieder geeignet gewählt werden, z. B. `Drehergebnis1+Drehergebnis2≥1000`.

In der nachfolgenden Tabelle ist das Vorgehen in Schritt 1 der Simulation für jede der drei Kategorien ausführlich beschrieben:

Code	Beschreibung	Anzahl
S	- Es wird eine Ausgangskollektion *Glücksspiel* mit zwei Fällen erstellt und mit der Formel `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)` ein Merkmal *Drehergebnis* definiert. Hierzu wird eine Messgröße *Drehsumme* mit der Formel `Summe(Drehergebnis)` definiert. - Sammeln der Messgrößen „bis zur Bedingung“ `Drehsumme≥1000`.	**4**
N	- Es wird eine Ausgangskollektion *Glücksspiel* mit zwei Fällen erstellt und mit der Formel `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)` ein Merkmal *Drehergebnis* definiert. Hierzu wird eine Messgröße *Nettogewinn* mit folgender Formel definiert: $\text{Wenn(Summe(Drehergebnis)=2000)}\begin{cases} 11 \\ \text{Wenn(Summe(Drehergebnis)}\geq\text{1000)}\begin{cases} 0{,}5 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$ - Sammeln der Messgrößen „bis zur Bedingung“ `Nettogewinn≥0,5`.	**2**
M	- Es wird eine leere Kollektion *Glücksspiel* erstellt und zu dieser Kollektion zwei Messgrößen *Drehergebnis1* und *Drehergebnis2* jeweils mit der Formel `ZufallsWahl(20;50;70;100;300;700;1000)` definiert. - Sammeln der Messgrößen „bis zur Bedingung“ `Drehergebnis1+Drehergebnis2≥1000`.	**3**

Tab. 7.8: Kategorisierung der verschiedenen Schülerlösungen von Aufgabenteil c).

Die Schritte 2, 3 und 4 der Simulation verlaufen bei allen Lösungskategorien wieder analog:

Schritt 2: Zur neuen Kollektion *Messgrößen von Glücksspiel* wird eine Messgröße *Anzahl_Spiele* mit der Formel `Anzahl()` definiert.
Schritt 3: Sammeln von 1000 Messgrößen.
Schritt 4: Die Verteilung der gesammelten Messgrößen wird z. B. in einer numerischen Auswertungstabelle mit der Formel `aMittel()` ausgewertet.

Alle drei Lösungskategorien orientieren sich an dem im Simulationsvorkurs verwendeten Vorgehen zur Lösung der Würfelaufgabe e) und des Sammelbildproblems. Während die Lösungskategorie **S** auf der Standardlösung aus Aufgabenteil a) aufbaut, kann die Lösungskategorie **N** als Weiterführung der Kombinationslösung K aus Aufgabenteil a) angesehen werden. Bei der Lösungskategorie **N** steht die Gewinnspielspielproblematik als Gesamtproblem im Vordergrund. Aus dieser Perspektive wird auch die Teilaufgabe c) gelöst. Die dritte Kategorie **M** orientiert sich offensichtlich sehr eng an der Würfelaufgabe e), bei der ein ähnliches Verfahren mit einer leeren Ausgangskollektion in der Kurzanleitung vorgeschlagen wird (vgl. Kapitel 4.4.3). Alle drei Lösungskategorien haben als Hauptschwierigkeit das Aufbrechen des eingeübten vierschrittigen Vorgehens zur Erstellung einer Simulation in Schritt 1 des Prozessmodells.

Es gibt vier Schülerlösungen vom Typ **S**, drei davon sind komplett richtig. Bei der vierten tritt folgender Fehler in der Formel der Abbruchbedingung auf: Mit den Bezeichnungen aus der Beispiellösung wird als Abbruchbedingung die Formel `Summe(Drehergebnis)`≥1000 verwendet. Diese Formel sieht sinnvoll aus, allerdings kann die Software bei Verwendung dieser Abbruchbedingung nicht auf das Merkmal *Drehergebnis* zugreifen, weil die Abbruchbedingung in der Kollektion *Messgrößen von Glücksspiel* formuliert wird. Das Merkmal *Drehergebnis* gehört jedoch zur Kollektion *Glücksspiel* und damit zu einer anderen Kollektion. Die Software kann die Abbruchbedingung nicht interpretieren. Die Schülerlösung bricht hier ab.

Es gibt zwei Schülerlösungen vom Typ **N**. Eine ist komplett richtig, bei der zweiten tritt folgender Fehler bei der Formulierung der Abbruchbedingung auf: Mit den hier getroffenen Bezeichnungen lautet die Abbruchbedingung `Nettogewinn=0,5`, d. h. der Fall des Nettogewinns von 11,-€ wird vergessen. Abgesehen von diesem Fehler wird die Simulation komplett zu Ende geführt.

Es gibt drei Schülerlösungen vom Typ **M**, bei denen das Drehen des Glücksrads direkt als Messgröße definiert wird. Eine dieser Lösungen ist komplett richtig, bei einer zweiten Lösung fehlt die Berechnung des Mittelwerts aus den gesammelten Messgrößen. Bei der dritten Schülerlösung vom Typ M tritt folgender Fehler bei der Formulierung der Formel der Abbruchbedingung auf: Mit den hier getroffenen Bezeichnungen lautet die Formel `Drehergebnis1 und Drehergebnis2≥1000`. Diese Formel sieht ebenfalls sinnvoll aus, ist aber syntaktisch falsch, da man die beiden Zahlen der Messgrößen *Drehergebnis1* und *Drehergebnis2* nicht mit dem logischen „und" verknüpfen kann. Ferner könnte ein hierbei entstehender logischer Ausdruck nicht mit 1000 verglichen werden. Die richtige Formel wäre `(Drehergebnis1+Drehergebnis2)≥1000`. Die Software kann die Abbruchbedingung nicht interpretieren. Die Schülerlösung bricht hier ab.

Das Ergebnis wird bei den meisten der zu Ende geführten Simulationen korrekt in einem Antwortsatz verbalisiert. Eine typische Formulierung lautet: „Durchschnittlich muss man 2,958 Spiele machen, um eine Summe von mindestens 1000 zu erreichen." Nur in einem Fall tritt der in Kapitel 6.4.2 identifizierte intuitive Widerspruch zwischen dem erhaltenen Dezimalbruch des berechneten Mittelwerts und dem kategorialen Charakter der Zufallsgröße auf: „Man muss im Mittel höchstens 3mal drehen".

7.1.5 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Quantitative Auswertung

Betrachtet man die Ergebnisse der Klausuraufgabe auf quantitativer Ebene, so zeigt sich insgesamt ein positives Bild. Im Mittel wurden 71% der Gesamtpunkte erreicht. Hierbei haben sieben Schülerinnen und Schüler mindestens 15 Punkte und 10 Schülerinnen und Schüler 9 bis 13 von 18 möglichen Punkten erreicht. Lediglich eine Aufgabenbearbeitung zeigt mit nur 3 Punkten ein ganz schwaches Ergebnis.

Zur genaueren Analyse sollen die Aufgabenteile getrennt betrachtet werden:

Die erste Simulation 1.a) konnte von 12 Schülerinnen und Schülern komplett gelöst werden, im Durchschnitt wurden 92% der Punkte erreicht. Bezieht man dieses Ergebnis auf die für die Lösung von Aufgabenteil 1.a) benötigten Kompetenzen, so zeigt sich, dass fast der gesamte Kurs die grundlegenden Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM auf dem im Simulationsvorkurs angestrebten Niveau besitzt. Hierzu gehören auf der stochastisch-inhaltlichen Ebene das Erfassen einer einfachen stochastischen Situation, auf der Ebene der Simulationskompetenz die Strukturierung der Simulation entlang den bekannten vier Schritten des Prozessmodells und die Umsetzung einfacher Modellierungsüberlegungen auf den einzelnen Stufen des Prozessmodells, sowie auf der Ebene der Fathom-Kompetenzen eine sichere Beherrschung der Werkzeugkompetenzen und ein sicherer Umgang mit bekannten und eingeübten Formeln.

Die zweite Simulation 1.b) konnte von 11 Schülerinnen und Schülern komplett gelöst werden, im Durchschnitt wurden 83% der Punkte erreicht. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht in der Definition einer auf der stochastisch-inhaltlichen Ebene anspruchsvollen Messgröße mit einer logisch-korrekt geschachtelten `Wenn()`-Bedingung. Hieran zeigt sich, dass die Mehrheit des Kurses über die grundlegenden Kompetenzen zur Erstellung einer Computersimulation hinaus ein vertieftes stochastisch-inhaltliches Verständnis auch komplexerer stochastischer Situationen in Verbindung mit einem sicheren und flexiblen Umgang mit Formeln erlangt hat. Auch die stochastisch–inhaltliche Bedeutung des Begriffs der Messgröße im Rahmen des Prozessmodells scheint von den meisten Schülerinnen und Schülern verinnerlicht zu sein.

Der anspruchsvolle Aufgabenteil c) wurde von der Hälfte des Kurses bearbeitet. Immerhin konnten 5 Schülerinnen und Schüler die Aufgabe komplett lösen, im Durchschnitt wurden 40% der Punkte erreicht. Dieses Ergebnis zeigt, dass das Konzept der inneren Differenzierung durch die Hinzunahme der Wartezeitaufgaben funktioniert hat. Diese Aufgaben konnten gerade von den Schülerinnen und Schülern erfolgreich bearbeitet werden, welche auch bei der Gesamtpunktzahl die Leistungsspitze bilden. Die Tatsache, dass etwa zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe nicht erfolgreich bearbeitet hat, zeigt aber auch, dass ein Aufbrechen der eingeübten Struktur des vierschrittigen Prozessmodells für die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler eine große Schwierigkeit darstellt. Hiermit wird die große Bedeutung des vierschrittigen Prozessmodells als Strukturierungshilfe für die Erstellung einer Computersimulation deutlich.

Der Aufgabenteil 2. zur Genauigkeitsabschätzung wurde nur von einem Drittel der Schülerinnen und Schüler überhaupt bearbeitet. Man kann vermuten, dass die fehlende Bearbeitung mit der unklaren Formulierung der Aufgabenstellung zusammenhängt. Da die für die gesamte Aufgabe zur Verfügung stehende Zeit insgesamt knapp war, werden sich viele Schülerinnen und Schüler dafür entschieden haben, sich auf die eindeutig formulierten Aufgabenteile zu konzentrieren.

Der Aufgabenteil 3. zur Erstellung des Simulationsplans wurde von 15 Schülerinnen und Schülern erfolgreich bearbeitet, wobei aufgrund der Zeitknappheit keine strengen Kriterien an die Beurteilung gelegt wurden. Die Bandbreite der erstellten Simulationspläne ist groß. Alle erstellten Simulationspläne orientieren sich an den vier Schritten des Prozessmodells. Die auf den einzelnen Stufen des Prozessmodells verwendeten Formeln werden jeweils mitsamt ihrer Bedeutung für die stochastische Situation angegeben. Je nach Ausführlichkeit der Simulationspläne werden die verwendeten Formeln genauer erläutert und begründet. Die Bezeichnungen sind i. a. sinnvoll gewählt, wodurch die Verknüpfung zwischen der FATHOM-Ebene und der stochastisch-inhaltlichen Ebene zusätzlich unterstützt wird.

Qualitative Auswertung

Auf der Ebene der **Simulations- und Fathomkompetenz** zeigt sich an der Bearbeitung der Aufgabenteile a) und b), dass die Schülerinnen und Schüler das vierschrittige Prozessmodell verinnerlicht haben und sicher zur Erstellung einer Computersimulation mit FATHOM nutzen können.

In Schritt 1 des Prozessmodells gelingt es bei den Aufgabenteilen 1.a) und 1.b) in fast allen Fällen, das Einzelexperiment des zweifachen Drehens des Glücksrads richtig zu modellieren. Die Lösungen unterscheiden sich nur in der Wahl der Bezeichnungen.

In Schritt 2 bei der Definition der geeigneten Messgröße zeigen sich in den Aufgabenteilen 1.a) und 1.b) große Unterschiede in den Lösungsansätzen, welche zu den beschriebenen unterschiedlichen Lösungskategorien führen. In Aufgabenteil 1.a) wird mit der Zufallsgröße „Augensumme“, mit dem Ereignis „Augensumme mindestens 1000“, mit der Zufallsgröße „Nettogewinn“ oder mit einer vereinfachten Zufallsgröße „Nettogewinn“ gearbeitet. In Aufgabenteil b) wird die Zufallsgröße „Nettogewinn“ über verschiedene Formeln realisiert, es gibt aber auch zwei Lösungen, welche die absoluten Häufigkeiten für die einzelnen Nettogewinne als Messgrößen auszählen lassen.

In Schritt 4 wird in den Aufgabenteilen 1.a) und 1.b) die formelhafte Auswertung der gesammelten Messgrößen bevorzugt. Es gibt kaum Schülerlösungen, welche Ergebnisse in einer kategorialen Tabelle auszählen. Auch die Visualisierung der Häufigkeitsverteilung im Sinn einer Kontrollstrategie wird nur wenig verwendet.

Bei der Wartezeitaufgabe stellt die Realisierung des ersten Schrittes des Prozessmodells erwartungsgemäß die größte Hürde dar, da man bereits das Einzelexperiment mit einer Messgröße und mit einer Abbruchbedingung beim Sammeln der Messgrößen modellieren muss. Dies gelingt nur in 6 Fällen komplett erfolgreich, einmal tritt ein kleiner Fehler in der Abbruchbedingung auf. Auch hier gibt es unterschiedliche Lösungsansätze: Als Messgröße wird die Zufallsgröße „Augensumme“ oder die Zufallsgröße „Nettogewinn“ gewählt. In drei Fällen wird das zweimalige Drehen des Glücksrads direkt über zwei Messgrößen realisiert. Die Abbruchbedingung muss jeweils entsprechend angepasst werden. Alle Schülerlösungen mit einem erfolgreich modellierten Einzelexperiment können auch zu Ende geführt werden.

Auf der Ebene der **Fathomkompetenz** zeigt sich ein sicherer Umgang mit den Werkzeugkompetenzen, die man zur Erstellung einer Computersimulation in FATHOM benötigt. Einzig die in Aufgabenteil a) mehrfach aufgetretene Verwendung einer kategorialen Auswertungstabelle zur formelhaften Auswertung ist ungeeignet. Ansonsten können die Schülerinnen und Schüler die einzelnen FATHOM-Komponenten sicher bedienen.

Auf der Ebene der **Formelkompetenz** zeigen sich eine Reihe kleinerer Fehler: Bei den Aufgabenteilen a) und b) treten diese zum einen in Schritt 2 bei der Definition der Messgröße und in Schritt 4 bei der Auswertung der Häufigkeitsverteilung auf. Es handelt sich meistens um kleine Probleme: Häufig wird „=“ und „≥“ verwechselt. Insgesamt zeigt sich ein relativ sicherer Umgang mit den eingeführten Formeln. Die Schachtelung des `Wenn()`-Befehls und die Verwendung von logischen Verknüpfungen in den Aufgabenteilen b) und c) sind hierfür ein deutlicher Beleg. Die Vermeidung der beiden beschriebenen Fehler in Aufgabenteil c), bei denen die Software die Abbruchbedingung nicht interpretieren kann, setzt ein vertieftes Verständnis der Software FATHOM voraus, welches nicht Ziel des Stochastikunterrichts sein kann.

Die große Lösungsvielfalt in allen drei Aufgabenteilen zeigt einen flexiblen und sicheren Einsatz der erworbenen Simulations- und Fathomkompetenzen. Die meisten Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, die im Simulationsvorkurs erarbeiteten FATHOM-Komponenten und -Formeln entlang des vierschrittigen Prozessmodells in kreativer Weise zur Lösung der gegebenen Problemstellungen einzusetzen. Damit ist ein zentrales Ziel des Simulationsvorkurses in großen Teilen erreicht (vgl. Kapitel 4.3).

Auf der Ebene der **stochastischen Kompetenz** zeigt sich bei Aufgabenteil 1.a), dass Messgrößen bevorzugt als Zufallsgrößen und nicht als Ereignisse definiert werden. Dies kann als Indiz dafür gedeutet werden, dass der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörige Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch den Simulationsvorkurs inhaltlich vorbereitet werden kann (vgl. Kapitel 4.2.5).

Wie bereits bei der qualitativen Analyse der Schülerarbeitsphase zum Geburtstagsproblem (vgl. Kapitel 6.4.5) zeigt sich in der Bearbeitung aller drei Simulationen, dass sich der Schwerpunkt der Erstellung einer Simulation zum Ende des Simulationsvorkurses auf die Modellierung der Schritte 2 und 4 des Prozessmodells in Verbindung mit der Auswahl der geeigneten Modellierungswerkzeuge und Formeln verschiebt. Die Werkzeugkompetenzen bereiten kaum Probleme.

Unverändert findet sich in den Schülerantworten zu Aufgabenteil 1.a) kaum eine Differenzierung zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit auf verbaler Ebene. Das in Kapitel 6.4.2 ebenfalls identifizierte Problem des intuitiven Widerspruchs zwischen dem erhaltenen Dezimalbruch des berechneten Mittelwerts und dem kategorialen Charakter der zugehörigen Zufallsgröße tritt bei der Lösung von Aufgabenteil 1.c) nur einmal auf.

7.2 Eingangstest und Ausgangstest

In beiden an der Untersuchung beteiligten Kursen wurden ein Eingangstest und ein Ausgangstest durchgeführt. Der Eingangstest wurde zwei Wochen vor Beginn des Simulationsvorkurses geschrieben, der Ausgangstest direkt im Anschluss an den Simulationsvorkurs. Der Eingangstests beginnt mit einem Fragenteil zu stochastischen Vorerfahrungen aus der Mittelstufe. Die Schülerinnen und Schüler sollen ihnen bekannte stochastische Begriffe und Inhalte ankreuzen. Erst danach folgen die inhaltlichen Aufgabenstellungen des Eingangstests. Im Ausgangstest wurden diese inhaltlichen Aufgabenstellungen in großen Teilen übernommen, einige wurden leicht geändert oder ergänzt.

Von den insgesamt 37 Schülerinnen und Schülern der beiden Kurse haben beim Eingangstest 35 und beim Ausgangstest 34 teilgenommen. 32 Schülerinnen und Schüler haben an beiden Tests teilgenommen, davon 9 Mädchen.

7.2.1 Die schulischen Vorerfahrungen

In einem ersten Teil des Eingangstests werden schulische Vorerfahrungen erfragt. Diese orientieren sich am Abschlussprofil der Jahrgangsstufe 10 des Hessischen Lehrplans Mathematik im Bereich Statistik (Kultusministerium Hessen 2003). Die Fragestellung lautet folgendermaßen:

Kreuzen Sie an, welche der aufgeführten Inhalte oder Begriffe Sie in der Mittelstufe im Mathematikunterricht behandelt haben:

- ☐ Auswerten von statistischen Daten
- ☐ Streifen- oder Säulendiagramme
- ☐ Mittelwert
- ☐ Berechnungen mit Münze/Würfel
- ☐ Simulieren von Zufallsversuchen
- ☐ Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
  - ☐ durch Experimentieren
  - ☐ durch Auszählen
  - ☐ mit Hilfe von Baumdiagrammen
  - ☐ mit Hilfe von Simulationen
- ☐ Kreisdiagramme
- ☐ Relative Häufigkeit
- ☐ Zufallsexperimente
- ☐ Eigenes Experimentieren mit Münze/Würfel
- ☐ Baumdiagramme

Wertet man jeden angekreuzten Begriff mit einem Punkt, so erhält man über die Summe ein Maß für die schulischen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler. Man kann entsprechend der Anzahl der gegebenen Begriffe maximal 15 Punkte erhalten. Diese Größe zur quantitativen Beschreibung der im Eingangstest per Befragung erfassten Vorerfahrungen wird im Folgenden als „EVorerfahrung“ bezeichnet. Trägt man deren Verteilung als Boxplot auf, so ergibt sich folgende Grafik:

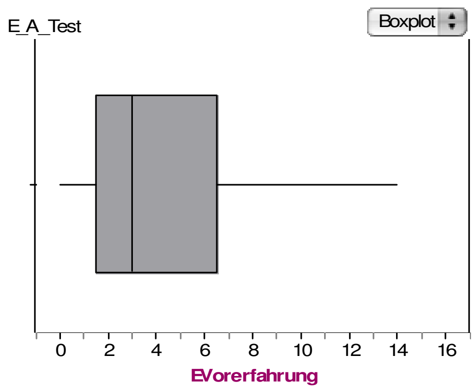


Abb. 7.8: Verteilung der Größe EVorerfahrung als Maß für die quantitative Beschreibung der im Eingangstest erfassten Vorerfahrungen.

Das erste Quartil liegt bei 1,5, der Median bei 3 und das dritte Quartil bei 6,5. D. h. dass mindestens die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler nur drei oder weniger Begriffe angekreuzt hat. Ein Viertel der Schülerinnen und Schüler hat sogar nur einen Begriff angekreuzt. Das obere Viertel hat von 7 bis 14 Begriffe angekreuzt.

Insbesondere die niedrigen Werte für das erste Quartil und den Median zeigen, dass man das Vorwissen zur Stochastik aus der Mittelstufe bei einem großen Teil der Schülerinnen und Schüler der beiden betrachteten Kurse als sehr gering einschätzen kann.

Betrachtet man die einzelnen abgefragten Begriffe genauer und ordnet man die Ergebnisse nach der relativen Häufigkeit des Ankreuzens, so ergibt sich folgendes Bild:

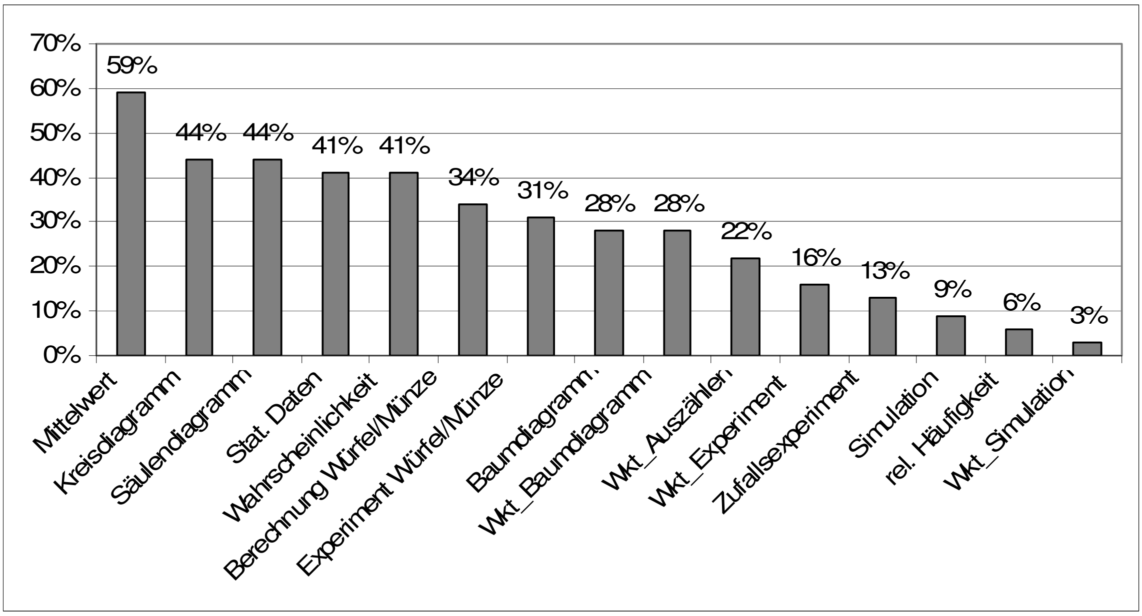


Abb. 7.9: Erfragung der schulischen Vorerfahrungen aus der Sekundarstufe I. Die Begriffe sind geordnet nach der relativen Häufigkeit, mit der die Begriffe nach Angaben der Schülerinnen und Schüler in der Mittelstufe behandelt wurden.

Die vorderen vier Begriffe gehören alle zum Bereich der beschreibenden Statistik. Hier liegen die relativen Häufigkeiten im Bereich von 41% bis 59%. Typische Begriffe zum Umgang mit Wahrscheinlichkeiten wie Baumdiagramme und Experimente mit Würfeln und Münzen liegen im Bereich von 28% bis 41%. Ganz am Ende der Skala finden sich Simulationen, relative Häufigkeiten und der Begriff des Zufallsexperiments.

Man muss bei dieser Befragung berücksichtigen, dass es sich um eine subjektive Einschätzung von Seiten der Schülerinnen und Schüler handelt und dass diese sich eventuell stärker an die Inhalte als an die verwendeten Begriffe erinnern können. Hierauf lässt z. B. der Anteil von 59% für die Behandlung des Mittelwerts oder der Anteil von 6% für die relative Häufigkeit schließen. Als Ursache für das Vergessen dieser Begriffe kann man eine fehlende Kontinuität der Behandlung statistischer und stochastischer Begriffe im Mathematik-Unterricht der Mittelstufe annehmen.

Die Ergebnisse deuten insgesamt auf ein sehr schwaches Bild des Stochastikunterrichts der Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I hin. Während die beschreibende Statistik noch von einem Schüleranteil im Bereich von etwa 45% angekreuzt wird, liegt dieser Wert bei den klassischen Inhalten der Stochastik wie Baumdiagramme, Wahrscheinlichkeiten durch Auszählen und Umgang mit Münze oder Würfel nur im Bereich von etwa 30%. Simulationen scheinen in der Mittelstufe kaum behandelt worden zu sein.

7.2.2 Die Testaufgaben des Eingangstests

1. a) Geben Sie drei Beispiele für ein Zufallsexperiment an.
   b) Was versteht man unter einem Zufallsexperiment?

2. Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Welche der beiden Versuchsfolgen I oder II halten Sie für wahrscheinlicher? („W“ steht für Wappen, „Z“ steht für Zahl)

   I: Z W Z W W Z **II:** W W W Z Z Z

☐ I ist wahrscheinlicher	☐ II ist wahrscheinlicher
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

3. In zwei Gefäßen liegen jeweils acht Kugeln, welche mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet sind. Aus beiden Gefäßen wird eine Kugel gezogen. Was ist wahrscheinlicher?

I: Eine der beiden Kugeln zeigt eine „4“, die andere eine „5“

II: Beide Kugeln zeigen eine „5“

☐ I ist wahrscheinlicher	☐ II ist wahrscheinlicher
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

4. Beim Werfen einer fairen Münze erscheint fünfmal nacheinander Wappen. Wird bei dem sechsten Wurf eher Wappen oder eher Zahl auftreten?

☐ Eher Wappen	☐ Eher Zahl
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

5. An einem großen Krankenhaus werden durchschnittlich jede Woche etwa 90 Kinder geboren. An einem kleinen Krankenhaus werden durchschnittlich jede Woche etwa 40 Kinder geboren. An welchem Krankenhaus ist es wahrscheinlicher, dass in einer Woche mehr als 65% der geborenen Kinder Jungen sind?

☐ Am großen Krankenhaus	☐ Am kleinen Krankenhaus
☐ An beiden gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

6. Eine Verbraucherzentrale behauptet, mindestens 50% aller in Deutschland lebenden Erwachsenen besitzen eine digitale Fotokamera. Bei einer Befragung von 1000 zufällig ausgewählten erwachsenen Personen geben 489 an, eine digitale Fotokamera zu besitzen.

Ist die Behauptung damit widerlegt?

☐ ja ☐ nein ☐ weiß ich nicht

Begründung:

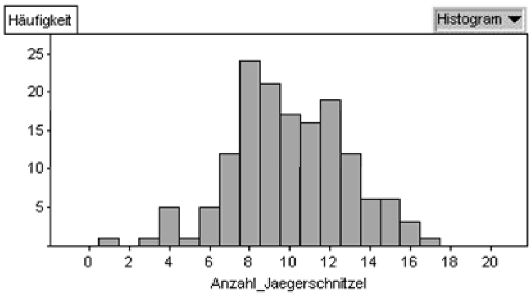
7. In einem Gefäß befinden sich drei schwarze und zwei rote Kugeln. Man zieht ohne Hinsehen eine Kugel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine schwarze Kugel zieht (mit Begründung).

8. In einem Eimer mit 500 Losen befinden sich 4 Hauptgewinne und zusätzlich 16 weitere Gewinne. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man beim einmaligen Ziehen einen Hauptgewinn erhält (mit Begründung).

9. Wie kann man beim Werfen einer Reißzwecke die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der die Reißzwecke auf ihren Kopf fällt?

10. Zur Verbesserung seiner Planung führt ein Gastwirt Statistik: Er schreibt 150 Werktage lang genau auf, wie viele Jägerschnitzel jeweils pro Tag bestellt werden.

Man betrachtet, an wie vielen Tagen (d. h. mit welcher Häufigkeit) 0 Jägerschnitzel, 1 Jägerschnitzel, 2 Jägerschnitzel, 3 Jägerschnitzel usw. bestellt werden und trägt diese Häufigkeiten grafisch als Säulen auf. Es ergibt sich die folgende Darstellung:



a) Was kann man aus der Säule bei $X = 10$ ablesen?

b) An wie vielen Tagen wurden 6 Jägerschnitzel bestellt?

c) An wie vielen Tagen wurden 8 bis 10 Jägerschnitzel bestellt?

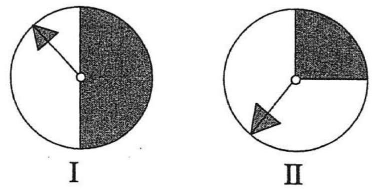
d) Wie viele Jägerschnitzel wurden maximal an einem Tag bestellt? Kam dies an mehreren Tagen vor?

Um sich die Arbeit während der Essenszeit zu erleichtern, überlegt sich der Gastwirt aufgrund der geführten Statistik, dass er demnächst jeden Tag 7 Jägerschnitzel vorbereitet, ohne zu wissen, wie viele dann auch bestellt werden. Falls weniger als 7 Jägerschnitzel bestellt werden, so will er die übrigen Schnitzel als Spende an eine soziale Einrichtung geben.

e) In wie viel Prozent der 150 im Graphen betrachteten Tage hätte der Gastwirt nach der neuen Regelung zu viele Jägerschnitzel gehabt? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Wie viele Jägerschnitzel hätte er in den 150 Tagen weggeben müssen, wenn er bereits täglich 7 Jägerschnitzel vorbereitet hätte? Begründen Sie Ihre Antwort.

11. Auf der Kirmes wird folgendes Glücksspiel angeboten: Man dreht nacheinander das Glücksrad I und das Glücksrad II. Das Glücksrad I zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% „schwarz", das Glücksrad II zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% „schwarz". Man hat gewonnen, wenn beide Glücksräder auf „schwarz" stehen geblieben sind.



a) Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.

b) Während der Kirmes wird das Glücksspiel von insgesamt 2000 Personen gespielt. Was kann man über die Anzahl der Personen sagen, die bei dem Glücksspiel gewonnen haben (mit Begründung)?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der bei dem Glücksspiel beide Glücksräder auf der gleichen Farbe stehen bleiben (mit Begründung).

12. Paul und Peter bilden am Schießstand auf der Kirmes ein Team. Paul trifft beim Schießen mit der Wahrscheinlichkeit von 20%, Peter mit der Wahrscheinlichkeit von 40%. Paul schießt zuerst, danach schießt Peter (ohne sich gegenseitig zu beeinflussen).

a) Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der beide treffen.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur einer von beiden trifft.

7.2.3 Die Testaufgaben des Ausgangstests

Im Vergleich zum Eingangstest werden die Aufgaben 1. und 4. in folgender Weise ergänzt:

1. a) Geben Sie drei Beispiele für ein Zufallsexperiment an. Wählen Sie drei Beispiele, die Sie bislang im Unterricht nicht behandelt haben.

   b) Was versteht man unter einem Zufallsexperiment?

4. a) Beim Werfen einer fairen Münze erscheint fünfmal nacheinander Wappen. Wird bei dem sechsten Wurf eher Wappen oder eher Zahl auftreten?

☐ Eher Wappen	☐ Eher Zahl
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

b) Sie haben das obige Ergebnis WWWWW nicht mit einer Münze sondern mit der FATHOM-Funktion `ZufallsWahl("W","Z")` erhalten. Beantworten Sie hierbei die Frage nach dem nächsten Ergebnis genauso wie bei der Münze oder anders?

☐ Genauso

☐ Anders, nämlich:

Um zu vermeiden, dass die Schülerinnen und Schüler bei Aufgabe 1. vor allem die im Unterricht behandelten Zufallsexperimente – insbesondere den Münzwurf und den Würfelwurf – als Beispiele anführen, sollen nur solche Beispiele genannt werden, die bislang im Unterricht nicht behandelt wurden. Bei Aufgabe 4. soll im Ausgangstest zusätzlich untersucht werden, welche Sicht die Schülerinnen und Schüler von dem Zufallsgenerator in FATHOM entwickelt haben.

Das Werfen einer Reißzwecke wurde im Unterricht als Beispiel für die experimentelle Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit und als Gegenbeispiel zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten behandelt. Daher wird die Aufgabe 9. des Eingangstests ersetzt durch folgende Aufgabenstellung:

9. In der Grundschule basteln die Schüler einen Würfel. Wie kann man bei einem solchen selbst gebastelten Würfel die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass eine „6“ geworfen wird?

Bei der Befragung der schulischen Vorerfahrungen und bei der Bearbeitung der Aufgaben 11. und 12. des Eingangstests hat sich heraus gestellt, dass nur wenige der Schülerinnen und Schüler Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsexperimente aus der Mittelstufe kennen. Da mehrstufige Zufallsversuche auch im Simulationsvorkurs nicht behandelt werden, wurde die Aufgabe 12. im Ausgangstest heraus genommen. Bei Aufgabe 11. wurde Teil a) zum Baumdiagramm entfernt, so dass Aufgabe 12. im Ausgangstest nur noch aus den zwei Aufgabenteilen b) und c) besteht.

Die verbleibenden sieben Aufgabenstellungen wurden unverändert in den Ausgangstest übernommen.

7.2.4 Zum Testdesign

Die in den beiden Tests benutzten Items sind teilweise in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. R. Biehler entwickelt worden und werden hier auch in anderen Untersuchungen verwendet (vgl. Biehler und Maxara 2005). Die drei Testfragen 2., 3. und 4. des Eingangstests gehen auf eine empirische Studie von P. Rasfeld (2004, S. 39-41) zum intuitiven stochastischen Denken zurück. Die Krankenhausaufgabe zum Gesetz der großen Zahl in Verbindung mit der Stichprobengröße ist ebenfalls der Literatur entnommen (vgl. Kahneman und Tversky 1972; Sedlmeier und Gigerenzer 1997; Sedlmeier 1999).

Der Eingangstest dient zur Erfassung der Vorerfahrungen und des stochastischen Vorwissens der Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Stochastikkurses in der Sekundarstufe II. Nach H. K. Strick (1997, S. 52) kann man erwarten, „dass die Vorstellungen über Zufallserscheinungen weit auseinander gehen und dass sich bei den Schülerinnen und Schülern ein zum Teil sehr diffuses Bild über Zufallsvorgänge entwickelt hat.“

Die zwölf Testaufgaben zum stochastischen Verständnis teilen sich in drei verschiedene Themenkomplexe auf:

Die sechs Items 1., 7., 8., 9., 11. und 12. des Eingangstests beschäftigen sich mit stochastischem Vorwissen, welches teilweise in der Mittelstufe behandelt wird. Abgefragt werden der Begriff des Zufallsexperiments, einfache Berechnungen zur Laplace-Wahrscheinlichkeit, die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Experimente und einfache Berechnungen zu zweistufigen Zufallsversuchen.

Item 10. testet die Interpretation von und den Umgang mit Häufigkeitsverteilungen in Form von Histogrammen.

Die fünf Items 2. bis 6. beschäftigen sich mit intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu Zufallsvorgängen. Hierzu gehören Fragen zur Unabhängigkeit der verschiedenen Stufen einer Zufallsfolge, zur geeigneten Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten über die korrekte Konstruktion von Laplace-Ergebnisräumen, zur statistischen Streuung sowie zum Gesetz der großen Zahl in Verbindung mit der Stichprobengröße.

Diese fünf Items zu intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler sind alle in zwei Stufen aufgebaut: Im ersten Teil stehen vier Antwortmöglichkeiten zur Verfügung, von denen man eine ankreuzen soll. Im zweiten Teil wird jeweils eine Begründung der Antwort verlangt. Insbesondere über die Begründungen sollen typische Denkmuster und Fehlvorstellungen erkannt werden.

Der Ausgangstest beinhaltet 11 Items. Sieben davon wurden unverändert aus dem Eingangstest übernommen. Wie in Kapitel 7.2.3 beschrieben wurden bei drei Items geringfügige Veränderungen oder Ergänzungen vorgenommen. Ein Item wurde komplett ersetzt, da die Frage aus dem Eingangstest im Unterricht behandelt worden war. Ein Item zu mehrstufigen Zufallsversuchen wurde herausgenommen. Da mehrstufige Zufallsversuche im Simulationsvorkurs nicht thematisiert werden, sind hier auch keine deutlichen Veränderungen der Lösungshäufigkeit zu erwarten.

Zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangstest liegt ein Zeitraum von 6 Wochen. Innerhalb dieses Zeitraums wurde der Eingangstest im Unterricht nicht thematisiert. Die Fragen standen den Schülerinnen und Schülern nicht mehr zur Verfügung. Ferner wurde nicht angekündigt, dass im Ausgangstest wieder gleiche oder ähnliche Fragestellungen wie im Eingangstest gestellt werden. Es ist somit nicht davon auszugehen, dass die Wiederholung der Fragestellungen im Ausgangstest einen wesentlichen Einfluss auf das Lösungsverhalten hat. Sowohl der zeitliche Abstand als auch die Einbehaltung der Fragebögen tragen hierzu bei.

Die Testfragen des Eingangstests dienen dazu, in einem breiten Umfang die Vorfahrungen und das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf das Basiswissen aus der Mittelstufe, auf ein intuitives stochastisches Verständnis und auf den Umgang mit der grafischen Darstellung einer Häufigkeitsverteilung zu ermitteln. Damit sind die Testaufgaben des Eingangs- und des Ausgangstests im Allgemeinen nicht speziell an den stochastischen Inhalten des Simulationsvorkurses orientiert. Der Zusammenhang zum Simulationsvorkurs ergibt sich daraus, dass im Simulationsvorkurs parallel zum Erlernen der Simulations- und Fathomkompetenzen auch grundlegende stochastische Begriffe erarbeiten werden. Weiter sollen das intuitive Verständnis und das Verständnis für die grafische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen durch den Umgang mit den Simulationen im Unterricht verbessert werden (vgl. Kapitel 4.2.5). Diesen Zusammenhang zwischen den Testfragen und dem Konzept des Simulationsvorkurses sowie die kurze Dauer des Simulationsvorkurses von nur 3 Wochen muss man bei der vergleichenden Interpretation der Ergebnisse der beiden Tests berücksichtigen.

7.2.5 Zur Auswertung

Um eine vergleichende Auswertung zwischen dem Eingangstest und dem Ausgangstest zu ermöglichen, werden zur Auswertung der beiden Tests nur die 32 Schülerinnen und Schüler berücksichtigt, die sowohl am Eingangs- wie auch am Ausgangstest teilgenommen haben. Eine nach den beiden teilnehmenden Kursen differenzierende Auswertung wird nicht vorgenommen, da keine ausreichenden Informationen über Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Unterrichts vorliegen, mit denen man eventuelle Differenzen der Ergebnisse begründen könnte. Ferner sind die Fallzahlen von jeweils 16 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern pro Kurs für eine solche Differenzierung sehr klein.

Die einzelnen Testaufgaben werden sowohl qualitativ als auch quantitativ ausgewertet:

Für die qualitative Erfassung werden die Begründungen und die Antworten bei offenen Aufgaben genauer analysiert. Zu den einzelnen Begründungen und Antworten wird eine grobe Kategorisierung vorgenommen, mit dem Ziel, typische Begründungs- und Antwortmuster sowie typische Fehlvorstellungen zu erkennen, und im Eingangs- und Ausgangstest miteinander vergleichen zu können.

Für eine quantitative Erfassung der Ergebnisse wird für jede Aufgabe eine Bepunktung erstellt. Diese ergibt sich bei den Multiple-Choice-Test-Items sowie bei den Berechnungsaufgaben aus der Richtigkeit der Antwort. Bei den Begründungen und den offenen Fragestellungen werden die qualitativen Kategorien bepunktet. Hierfür werden die Kategorien teilweise nach Vollständigkeit und Genauigkeit der Antworten verfeinert: Diese Verfeinerung der Kategorisierung findet sich im Anhang (S. 307 ff).

Im Folgenden werden zunächst die Ergebnisse der einzelnen Testaufgaben im Eingangs- und im Ausgangstest dargestellt, analysiert und verglichen. In einer knappen Interpretation wird jeweils versucht, einen Zusammenhang zum Konzept des Simulationsvorkurses herzustellen.

An die Einzelanalyse der Aufgaben schließt sich eine quantitative Gesamtanalyse an, in der die Ergebnisse der beiden Tests nach verschiedenen Themenbereichen gegenübergestellt werden. Für diese Gesamtanalyse werden nur die Ergebnisse der unverändert gebliebenen Aufgabenstellungen oder Aufgabenteile des Ein- und Ausgangstests berücksichtigt.

7.2.6 Die Ergebnisse der einzelnen Testaufgaben

Aufgabe 1

1. a) Geben Sie drei Beispiele für ein Zufallsexperiment an.
   b) Was versteht man unter einem Zufallsexperiment?

Der Begriff des Zufallsexperiments taucht im vorliegenden Unterrichtskonzept in Verbindung mit der Behandlung von Laplace-Experimenten auf. Am Beispiel des doppelten Würfelwurfs wird der Begriff eingeführt und es wird diskutiert, dass alle im Simulationsvorkurs behandelten Situationen Zufallsexperimente sind (vgl. Kapitel 6.3). Allerdings findet kein vertiefendes und wiederholendes Aufgreifen dieses Begriffes im weiteren Verlauf des Simulationsvorkurses statt. Es wird folgende Definition eines Zufallsexperiments benutzt (vgl. Kap. 4.2.1):

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ausgang – auch im Wiederholungsfall – ungewiss, d. h. nicht mit Sicherheit vorhersagbar ist.

Vorgehen des Mathematikers:

Alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments angeben und die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der möglichen Ergebnisse bestimmen.

Die Aufgabe soll im Eingangstest das Vorwissen testen, dass die Schülerinnen und Schüler zum Begriff des Zufallsexperiments haben. In Aufgabenteil a) sollen Beispiele zu Zufallsexperimenten angegeben werden, in Aufgabenteil b) wird eine allgemeine Charakterisierung erwartet. Im Ausgangstest wird die Aufgabenformulierung bei a) dahingehend abgewandelt, dass keine Beispiele aus dem Unterricht gewählt werden dürfen. Hiermit soll erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler ebenso wie im Eingangstest ihr Verständnis von Zufallsexperimenten anhand von Beispielen ausdrücken und nicht nur die gerade vom Unterricht im Gedächtnis gebliebenen Zufallsexperimente angeben. Anderenfalls wäre die Aufgabe im Ausgangstest deutlich einfacher zu bearbeiten und man könnte keine quantitative Gegenüberstellung von Eingangs- und Ausgangstest machen.

Bei der gewählten Variante ist die Anforderung im Ausgangstest etwas höher, da die einfachsten Zufallsexperimente wie der Würfelwurf und der Münzwurf wegfallen.

Für jedes richtige Beispiel eines Zufallsversuchs erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Punkt, d. h. man kann in Aufgabenteil a) maximal drei Punkte erhalten. Zur Charakterisierung des Begriffs „Zufallsexperiment" in Aufgabenteil b) kann man mehrere Aspekte angeben: „Verschiedene mögliche Ergebnisse", „Zufälligkeit/Vorhersagbarkeit", „Wiederholbarkeit" und „Wahrscheinlichkeitsaspekt". Wird nur ein Aspekt genannt, so gibt es einen Punkt, für mehrere Aspekte erhält man maximal zwei Punkte. Wird der Begriff des Zufallsexperiments auf die Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit verengt, so wird wieder ein Punkt abgezogen. Man erhält minimal 0 Punkte auf Aufgabenteil b).

Für die Aufgabenteile a) und b) ergeben sich im Eingangs- und im Ausgangstest die folgenden Ergebnisse:

	Arithmetisches Mittel Eingangstest	Arithmetisches Mittel Ausgangstest
1a) 3 P	1,75	2,25
1b) 2 P	0,25	0,91

Tab. 7.9: Arithmetisches Mittel der erreichten Punkte bei Aufgabe 1) im Eingangs- und im Ausgangstest.

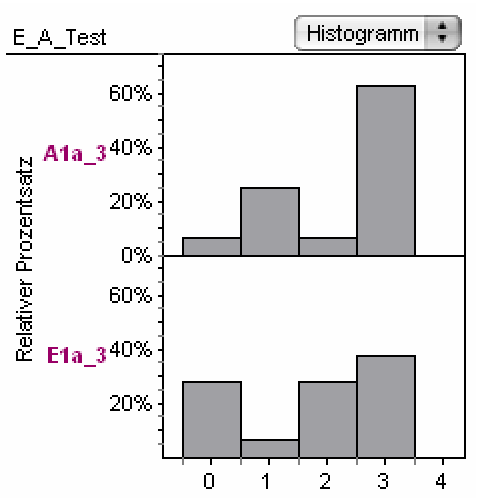


Abb. 7.10: Punkteverteilung bei Aufgabenteil 1a) im Eingangstest (unten) und im Ausgangstest (oben)

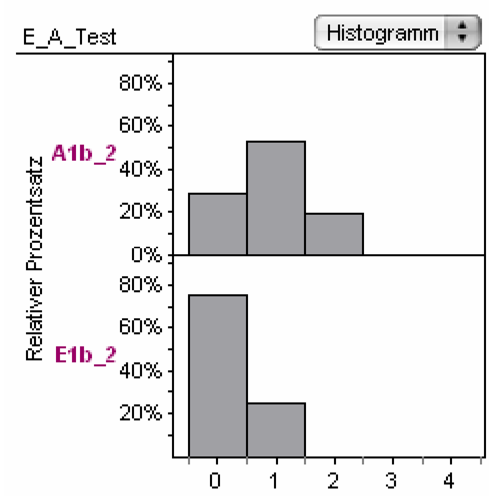


Abb. 7.11: Punkteverteilung bei Aufgabenteil 1b) im Eingangstest (unten) und im Ausgangstest (oben)

Im Eingangstest beträgt das arithmetische Mittel der erreichten Punkte in Aufgabenteil 1a) 1,75 von 3 Punkten. 28% der Teilnehmer erreichen keinen Punkt, diese haben alle gemeinsam keine Antwort angegeben. Nur 38% der Teilnehmer erreichen alle drei Punkte (vgl. Abb. 7.10). In Aufgabenteil 1b) werden im Eingangstest durchschnittlich 0,25 von 2 möglichen Punkten erreicht. 75% der Teilnehmer erreichen keinen Punkt, 34% haben überhaupt keine Antwort angegeben (vgl. Abb. 7.11).

Im Ausgangstest beträgt das arithmetische Mittel der erreichten Punkte in Aufgabenteil 1a) 2,25 von 3 Punkten. Nur noch 6% der Teilnehmer erreichen keinen Punkt. Hingegen hat sich der Anteil der Teilnehmer mit voller Punktzahl bei Aufgabe 1a) auf 63% erhöht.

In Aufgabenteil 1b) werden im Ausgangstest durchschnittlich 0,91 von 2 möglichen Punkten erreicht. Während im Eingangstest noch 75% der Teilnehmer keinen Punkt und niemand die volle Punktzahl erreicht, sind es im Ausgangstest nur noch 28% der Teilnehmer, die keinen Punkt erreichen. Ferner erreichen 19% der Teilnehmer beim Ausgangstest auch die volle Punktzahl.

Wie sehen die Schülerantworten im Einzelnen aus?

Die gegebenen Beispiele für Zufallsexperimente in der Aufgabenstellung 1a) lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Kein Zufallsexperiment, wichtige Voraussetzungen fehlen (z. B. die Angabe „Bowling“ oder „Naturgewalt“ jeweils ohne weitere Erläuterungen)
2. Typische Zufallsexperimente wie sie mit fiktiven Geräten oder in fiktiven Situationen im Stochastikunterricht angesprochen werden (z. B. Ziehen aus einer Urne, Galton-Brett, 100maliges Werfen einer Münze oder eines Würfels, Werfen einer Reißzwecke, Drehen eines Glücksrads, Ziehen einer Karte)
3. Reale Zufallsexperimente, die im Alltag auftreten und mit denen man Alltagsvorstellungen verbinden kann (z. B. Glücksspiele wie Roulette und Würfelspiele, zufällige Auswahl eines Schülers, Lottoziehung, Lose ziehen)

Im Eingangs- und im Ausgangstest kann jeder Schüler bis zu drei Experimente angeben. Bei 32 Schülerinnen und Schülern sind somit insgesamt 96 Nennungen möglich. Im Eingangstest wurden insgesamt 63 Beispiele genannt, im Ausgangstest insgesamt 75. Die angegebenen Zufallsexperimente teilen sich gemäß Tab. 7.10 auf die drei Kategorien auf. Die 63 Beispiele im Eingangstest bzw. die 75 Beispiele im Ausgangstest werden jeweils als 100% gewertet.

	Eingangstest	Ausgangstest
1. Kein Zufallsexperiment	11%	4%
2. Fiktive Zufallsexperimente	49%	25%
3. Alltagsbezogene Zufallsexperimente	40%	71%

Tab. 7.10: Aufteilung der in Aufgabe 1a) des Eingangs- und Ausgangstests angegebenen Zufallsexperimente auf die verschiedenen Kategorien.

Im Eingangstest zeigt sich eine unauffällige Verteilung der angegebenen Zufallsexperimente auf die verschiedenen Kategorien: Die fiktiven stochastischen Experimente sowie die alltagsbezogenen Zufallsexperimente kommen etwa in gleichen Anteilen vor. Die 11% der falschen oder unvollständigen Beispiele erklären sich durch die geringen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler.

Im Ausgangstest zeigt sich eine deutliche Verschiebung: Der Anteil der fiktiven stochastischen Experimente geht deutlich zurück, dafür sind im Ausgangstest über 70% aller Beispiele alltagsbezogene Beispiele.

Die Änderungen lassen sich teilweise damit erklären, dass die typischen fiktiven stochastischen Experimente wie der Würfelwurf und der Münzwurf in dieser einfachen Form im Ausgangstest nicht mehr angegeben werden dürfen. Weiter ist die deutliche Erhöhung des Anteils der alltagsbezogenen Beispiele plausibel in Verbindung mit dem anwendungsorientierten Konzept des Simulationsvorkurses: Hier lernen die Schülerinnen und Schüler mit der einführenden Testaufgabe wie auch bei den gemischten Aufgaben eine Vielfalt anwendungsorientierter Problemstellungen kennen.

Die Angabe der Beispiele erfolgt im Eingangstest meistens nur sehr knapp mit einem Stichwort bzw. einer kurzen Handlungsanweisung, z. B. *„Münzwurf“*, *„Würfelwurf“*, *„Karten aus einem Kartenspiel ziehen“*. Bei längeren Darstellungen wird das Zufallsexperiment häufig in ein Ereignis integriert, z. B. *„Man würfelt einen Würfel dreimal und es kommt einmal sechs ´raus“*.

Im Ausgangstest finden sich deutlich längere Darstellungen der Zufallsexperimente. Allerdings fällt auf, dass hier etwa die Hälfte aller Zufallsexperimente als Aufgaben formuliert werden, bei denen es um die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit geht, z. B. „*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Preisausschreiben zu gewinnen, bei dem 3 Autos verlost werden. Es machen ca. 20 000 Personen mit.*“ Das zugehörige Zufallsexperiment „20 000 Personen machen bei einem Preisausschreiben mit. Drei Personen werden zufällig gezogen und gewinnen ein Auto“ wird so in eine Aufgabe verpackt. Die Formulierung als Aufgabe ist im strengen Sinn keine korrekte Beschreibung eines Zufallsexperiments. Allerdings sind die im Simulationsvorkurs behandelten Zufallsexperimente vorwiegend mit Aufgabenstellungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verknüpft. Die einfache Beschreibung eines Zufallsexperiments wird nicht geübt. Man kann vermuten, dass dies bei vielen Schülerinnen und Schülern dazu führt, Zufallsexperimente automatisch mit der Berechnung einer Wahrscheinlichkeit zu verbinden.

Bei der Frage nach der Charakterisierung eines Zufallsexperiments in Aufgabenteil 1b) zeigen sich im Eingangstest vorwiegend unvollständige Lösungen, 34% geben überhaupt keine Antwort.

Im Ausgangstest finden sich deutlich bessere Antworten. Typische Darstellungen sehen folgendermaßen aus:

„Ein Experiment, bei dem das Ergebnis auch bei wiederholter Durchführung nicht sicher vorhergesagt werden kann. Wir haben bisher in der Unterrichtseinheit „Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ nur Zufallsexperimente behandelt.“

„Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, wo man vorher nicht voraussagen kann, was eintreten wird. Man kann nur bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit etwas eintreten wird.“

„Ein Experiment, bei dem mehrere Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind und so durch Zufall ermittelt wird, welches Ergebnis auftritt“

Die drei Beispiele verdeutlichen die verschiedenen Aspekte des Begriffs Zufallsexperiment, die sich in den Antworten beobachten lassen: „Verschiedene mögliche Ergebnisse“, „Vorhersagbarkeit/Zufall“, „Wiederholbarkeit“, „Wahrscheinlichkeitsaspekt“.

Bei den ersten beiden Beispielen wird der Vorhersagbarkeitsaspekt betont. Das erste Beispiel enthält zusätzlich den Wiederholbarkeitsaspekt eines Zufallsexperiments, das zweite Beispiel den Zusammenhang zur Wahrscheinlichkeit. Beide Beispiele sind offensichtlich stark durch die Definition des Unterrichts geprägt und stellen typische Schülerantworten dar.

Das dritte Beispiel enthält den Aspekt verschiedenartiger Ergebnisse. Ferner zeigt sich hier die bekannte Fehlvorstellung des *„equiprobability bias“* (Fischbein, Nello et al. 1991; Lecoutre 1992): Der Begriff des Zufallsexperiments wird synonym für ein Experiment mit gleich wahrscheinlichen Ergebnissen benutzt. 31% der Schülerinnen und Schüler erwähnen im Ausgangstest in Verbindung mit dem Begriff des Zufallsexperiments die Gleichwahrscheinlichkeit. Im Eingangstest lässt sich hierzu aufgrund der unvollständigen oder fehlenden Antworten keine Aussage machen.

Interpretation der Ergebnisse

Betrachtet man die Ergebnisse des Eingangstests, so zeigt sich, dass die meisten Schülerinnen und Schüler vor Beginn des Simulationsvorkurses kein adäquates Bild vom Begriff des Zufallsexperiments haben. Dies lässt sich festmachen an den beim Eingangstest erreichten Punktzahlen sowie daran, dass der Aufgabenteil 1a) im Eingangstest von 28% und der Aufgabenteil 1b) von 34% der Schülerinnen und Schüler überhaupt nicht bearbeitet wird. Die angegebenen Beispiele der Zufallsexperimente sind typische Beispiele, häufig in knapper Formulierung, die Charakterisierungen des Begriffs Zufallsexperiment sind häufig unvollständig.

Der Ausgangstest zeigt bei den erreichten Punktzahlen eine deutliche Verbesserung, insbesondere in Aufgabenteil b). Eine genauere Betrachtung der im Ausgangstest angegebenen Beispiele von Zufallsexperimenten zeigt die Betonung der alltagsbezogenen Experimente. Dies lässt sich zum einen auf die Umformulierung der Aufgabenstellung zurückführen: Fiktive Zufallsexperimente aus dem Unterricht wie der Würfelwurf oder der Münzwurf dürfen nicht mehr genannt werden. Eine weitere Ursache für die Betonung der alltagsbezogenen Experimente liegt sicher auch im anwendungsorientierten Konzept des Simulationsvorkurses.

Die Schülervorstellungen vom Begriff des Zufallsexperiments konnten offensichtlich im Rahmen des Simulationsvorkurses deutlich beeinflusst und verbessert werden. Viele Schülerinnen und Schüler verknüpfen den Begriff des Zufallsexperiments durch die Aufgabenorientierung des Simulationsvorkurses allerdings intuitiv mit der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

Im Ausgangstest zeigt sich die typische Fehlvorstellung des *„equiprobability bias“*: 31% der Schülerinnen und Schüler verbinden den Begriff des Zufallsexperiments mit der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse des Wahrscheinlichkeitsraums. Es lässt sich vermuten, dass diese Vorstellung durch die wiederholte Verwendung der Zufallsgeneratoren `GanzeZufallszahl()` und `Zufallswahl()`, welche sich stets auf einen Laplace-Ergebnisraum beziehen, gefördert wird. Die Behandlung des Reißzweckenwurfs als explizitem Gegenbeispiel zum Laplace-Ergebnisraum (vgl. Kapitel 6.3.2) trägt offensichtlich nicht bei allen Schülerinnen und Schülern zur Beseitigung der Fehlvorstellung bei. Man sieht, dass es sich um eine sehr hartnäckige Fehlvorstellung handelt, die immer wieder aufgebrochen werden muss. Für eine Verbesserung des Lernerfolgs sollte im weiteren Verlauf des Simulationsvorkurses eine deutliche Abgrenzung der Begriffe Zufallsexperiment und Laplace-Experiment erfolgen.

Aufgabe 2

2. Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Welche der beiden Versuchsfolgen I oder II halten Sie für wahrscheinlicher? („W“ steht für Wappen, „Z“ steht für Zahl)

I: Z W Z W W Z	**II:** W W W Z Z Z
☐ I ist wahrscheinlicher	☐ II ist wahrscheinlicher
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

Die richtige Lösung lautet: „Beide sind gleichwahrscheinlich“. Bei dem sechsfachen Münzwurf handelt es sich um einen sechsstufigen Zufallsversuch, wobei die Wahrscheinlichkeit für Wappen bzw. Zahl auf jeder Stufe 0,5 beträgt. Jede der beiden Versuchsfolgen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $0{,}5^6$ auf. Die Argumentation benutzt im Kern die Unabhängigkeit der Ergebnisse auf den einzelnen Stufen des Zufallsversuchs.

Die Aufgabe testet ein intuitives Verständnis der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen einer Zufallsfolge. Im Unterricht wurde die Unabhängigkeit bei der Interpretation einer der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl kurz behandelt. Es wurde von der „Gedächtnislosigkeit" der Münze gesprochen (vgl. Kapitel 6.3.2). Ferner wurden im Simulationsvorkurs wiederholt sowohl händische Münzwurfe als auch Computersimulationen des Münzwurfs durchgeführt.

Eine ähnliche Aufgabe erreichte im Test von P. Rasfeld zum intuitiven stochastischen Verständnis im Anschluss an den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I im Ankreuzteil eine Lösungshäufigkeit von nur 35% (Rasfeld 2004, S. 46).

Für das Ankreuzen der richtigen Antwort erhält man im Test einen Punkt, für die Begründung bis zu zwei Punkte (zur Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang, S. 307). Die Ergebnisse sind in Tab. 7.11 dargestellt.

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
2a) 1 P	59%	81%
2b) 2 P	34%	50%

Tab. 7.11: Durchschnittliche Lösungsquote zu Aufgabe 2) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

In der Tabelle wird zu jedem Aufgabenteil eine so genannte „durchschnittliche Lösungsquote" in Prozent angegeben. Die durchschnittliche Lösungsquote von 59% in Aufgabenteil 2a) des Eingangstests ist folgendermaßen zu interpretieren: Im Mittel werden 0,59 Punkte von einem Punkt erreicht, dies entspricht 59% der erreichbaren Punkte. Da in Aufgabenteil 2a) entweder ein Punkt oder kein Punkt gegeben wird, entspricht die durchschnittliche Lösungsquote zusätzlich dem relativen Anteil der Schülerinnen und Schüler, welche die richtige Antwort angekreuzt haben. Die durchschnittliche Lösungsquote von 34% in Aufgabenteil 2b) des Eingangstests ist wie folgt zu interpretieren: Im Mittel wurden 0,68 Punkte von 2 Punkten erreicht, dies entspricht 34% der erreichbaren Punktzahl. Da man auch einen von zwei Punkten geben kann, lässt sich hiervon nicht direkt auf den Anteil der richtigen Lösungen zurück schließen.

Im Eingangstest kreuzen 59% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die übrigen entscheiden sich für „I ist wahrscheinlicher". Die durchschnittlich erreichte Punktzahl bei den Begründungen liegt bei 34% der erreichbaren 2 Punkte.

Im Ausgangstest kreuzen 81% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die übrigen entscheiden sich für „I ist wahrscheinlicher". Die durchschnittlich erreichte Punktzahl bei den Begründungen liegt bei 50% der erreichbaren 2 Punkte. Es gelingt häufiger, die richtige Antwort auch zu begründen.

Wie sehen die Schülerbegründungen aus?

Im Folgenden werden die Schülerbegründungen in Kategorien eingeteilt und die Verteilung der einzelnen Begründungen auf die verschiedenen Kategorien angegeben. Für die vorwiegend aufgetretenen Begründungkategorien werden exemplarisch Beispielantworten gezeigt.

Zur richtigen Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich" gibt es vorwiegend zwei Begründungskategorien **S** und **Ged** sowie eine wenig vertretene Kategorie **Lap**:

- Kategorie **S** (Standard): Argumentation über die stets gleiche Wahrscheinlichkeit für Wappen und Zahl auf den einzelnen Stufen der Münzwurffolge.
- Kategorie **Ged**: Argumentation über die „Gedächtnislosigkeit" der Münze auf den einzelnen Stufen in Verbindung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit für Wappen und Zahl.
- Kategorie **Lap**: Berechnung der Wahrscheinlichkeit beider Münzwurffolgen von $0{,}5^6$ über den Laplace-Ansatz.

Beispiele für die Begründungskategorie **S**:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass Z oder W geworfen wird, liegt jeweils bei 50%. Es ist rein zufällig, wie die Konstellation der Z's und W's ist, da nach jedem Wurf erneut die Chance bei 50% liegt, W oder Z zu werfen." (Eingangstest)

„Beide sind gleich wahrscheinlich, da bei jedem Wurf die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht und dies bei jedem erneuten Wurf gleich bleibt." (Ausgangstest)

Der Kern der Argumentation ist, dass die Wahrscheinlichkeit für Wappen oder Zahl auf jeder Stufe gleich bleibt. Damit wird die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen als Argument benutzt. Dies wird ergänzt durch die Gleichwahrscheinlichkeit für Wappen und Zahl.

Beispiel für die Begründungskategorie **Ged**:

„Man kann es damit erklären, dass die Münze kein Gedächtnis hat, und sich somit die vorhergehenden Ereignisse nicht merken kann. Alle Ergebnisse (E={Zahl, Wappen}) sind dauerhaft gleich wahrscheinlich." (Ausgangstest)

Bei dieser Begründungskategorie wird die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen über den Begriff der Gedächtnislosigkeit direkt benannt. Diese Begründungskategorie kann erst im Ausgangstest auftreten, da der Begriff der Gedächtnislosigkeit erst im Simulationsvorkurs eingeführt wurde.

Zur falschen Antwort „I ist wahrscheinlicher" überwiegt eine Begründungskategorie:

- Kategorie **W**: Argumentation über häufige Wechsel in einer typischen Münzwurffolge.

Beispiele zur Begründungskategorie **W**:

„Weil die Erfahrung gezeigt hat, dass eine Abfolge von dreimal W und dreimal Z hintereinander seltener geschieht als I." (Eingangstest)

„Die Chance 3 mal hintereinander Kopf und dann dreimal hintereinander Zahl zu werfen ist sehr gering. Die Chance eine relativ gemischte Kombination zu werfen (Bsp I) ist zwar ebenfalls nicht sehr hoch, aber deutlich größer als bei II. Würde man den Versuch 1000 mal durchführen, würde sich häufig ein Ergebnis ZWZW… einstellen. Bei I ist nur eine kleine Abweichung vorhanden, weshalb I häufiger auftritt als II." (Ausgangstest)

Diese Begründungen argumentieren über typische Versuchsfolgen beim 6-fachen Münzwurf. Eine solche Fehlvorstellung wird von Kahnemann und Tversky mit „Representativeness" beschrieben (1982b). „Wenn man […] nach dem wahrscheinlichsten von mehreren möglichen Ergebnissen fragt, so wird ein Ergebnis gewählt, dass äußerlich repräsentativ erscheint." (Madsen 1996, S. 8) Die zweite Begründung geht mit dem Ausdruck „relativ gemischte Kombination" sogar explizit darauf ein, dass es um den Typ der Versuchsfolge geht und ist somit für sich betrachtet korrekt. Allerdings wird dann die Aufgabenstellung falsch interpretiert, bei der die beiden konkret angegeben Versuchsfolgen miteinander verglichen werden sollen.

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.12 dargestellt. Auch Begründungen, die aufgrund ungenauer oder unvollständiger Formulierungen Punktabzüge erhalten, werden den genannten Begründungskategorien zugeordnet. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest	Ausgangstest
S	34%	53%
Ged	0%	16%
Lap	9%	3%
W	31%	16%
Begründung fehlt oder weitere falsche Begründung	26%	12%

Tab. 7.12: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 2) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Zur richtigen Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich" treten die Schülerbegründungen **S**, **Lap** und **Ged** auf. Im Eingangstest argumentiert etwa ein Drittel aller Schülerinnen und Schüler über die Begründungskategorie **S**, 9% argumentieren über die Kategorie **Lap** und berechnen die Wahrscheinlichkeit, niemand argumentiert über die Gedächtnislosigkeit **Ged**. Im Ausgangstest argumentiert über die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler über die Begründungskategorie **S**, 16% argumentieren über die Gedächtnislosigkeit **Ged** und 3% argumentieren über die Berechnung der Laplace-Wahrscheinlichkeit **Lap**.

Bei den Begründungen für die falsche Antwort „I ist wahrscheinlicher" überwiegt die Kategorie **W**. Diese Argumentation tritt im Eingangstest bei 31% aller Schülerinnen und Schüler auf, im Ausgangstest bei 16% aller Schülerinnen und Schüler.

Als Einzelantwort oder als Ergänzung der korrekten Begründungen der Kategorien **S** und **Ged** fällt eine falsche Argumentation für die richtige Antwort „beide sind gleich wahrscheinlich" über die gleiche Anzahl von Wappen und Zahl in beiden vorgegebenen Münzwurffolgen auf. Diese Argumentation findet sich im Eingangstest wie auch im Ausgangstest bei etwa 15% der Antworten, wird allerdings im Eingangs- und im Ausgangstest überwiegend von unterschiedlichen Personen verwendet. Ein Beispiel ist im Folgenden angegeben:

„Wenn man sechsmal wirft, sollte idealtypisch dreimal Kopf und dreimal Zahl kommen. Dies ist bei beiden erfüllt und somit ist es gleich wahrscheinlich." (Ausgangstest)

Hier wird die gleiche Anzahl von Wappen und Zahl in beiden Versuchsfolgen als Argument benutzt. Rasfeld (2004, S. 46) interpretiert diese Fehlvorstellung wie folgt: „Dieser Fehler […] beruht auf einer Fehlinterpretation des Gesetzes der großen Zahlen. Dieses […] bedeutet im Kontext des Münzwurfs, dass sich mit wachsender Zahl von Würfen die relativen Häufigkeiten für Wappen bzw. Zahl bei 0,5 stabilisieren. Der Trugschluss, dem Schüler mit solchen Begründungen unterliegen, beruht auf einer Anwendung dieses Erfahrungssatzes auf kurze Serien." Kahneman und Tversky (1982a) sprechen bei dieser Fehlvorstellung vom „Gesetz der kleinen Zahlen".

Interpretation der Ergebnisse

Die Lösungshäufigkeit der Aufgabe ist bereits im Eingangstest mit 59% richtig angekreuzten Antworten gut. Die Begründung der richtigen Antworten erfolgt primär über das Gleichbleiben der Wahrscheinlichkeiten auf jeder Stufe des Münzwurfs und damit im Kern über die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen. Die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen scheint vielen Schülerinnen und Schülern bereits vor dem Simulationsvorkurs intuitiv klar zu sein.

Neben den richtigen Antworten und Begründungen finden sich aber auch die in der Literatur angegebenen typischen Fehlvorstellungen des „Gesetzes der kleinen Zahl" oder der „Representativeness".

Im Ausgangstest verbessert sich die Lösungshäufigkeit auf 81%. Die Zahl der richtigen Begründungen erhöht sich ebenfalls, die mit Fehlvorstellungen behafteten Begründungen gehen deutlich zurück.

Die Verbesserungen lassen sich verstehen in Verbindung mit dem Unterrichtskonzept des Simulationsvorkurses, da die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen am Beispiel des mehrfachen Münzwurfs im Unterricht explizit thematisiert wurde. Die erst im Ausgangstest aufgetretene Begründungskategorie **Ged**, welche mit der Gedächtnislosigkeit der Münze argumentiert, knüpft direkt an den Unterricht des Simulationsvorkurses an (vgl. Kapitel 6.3.2). Ferner kann auch der wiederholte experimentelle Umgang mit mehrstufigen Münzwürfen im Unterricht sowohl in händischer Form als auch über Computersimulationen zur Verbesserung des Verständnisses beigetragen haben.

Aufgabe 3

3. In zwei Gefäßen liegen jeweils acht Kugeln, welche mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet sind. Aus beiden Gefäßen wird eine Kugel gezogen. Was ist wahrscheinlicher?

   I: Eine der beiden Kugeln zeigt eine „4", die andere eine „5"

   II: Beide Kugeln zeigen eine „5"

☐ I ist wahrscheinlicher	☐ II ist wahrscheinlicher
☐ Beide sind gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

   Begründung:

Die richtige Lösung lautet: „I ist wahrscheinlicher". Dies lässt sich aufgrund der Unterscheidbarkeit der beiden Gefäße über die Anzahl der Kombinationen für die einzelnen Ereignisse begründen: Das Ereignis I erhält man sowohl mit der Kombination (4|5) als auch mit der Kombination (5|4). Für das Ereignis II gibt es nur die Kombination (5|5). Jede dieser Kombinationen ist gleich wahrscheinlich.

Die Aufgabe soll das intuitive Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu Ergebnisräumen und zur Gleichwahrscheinlichkeit von Ereignissen testen. Zur korrekten Begründung muss man den Laplace-Ergebnisraum sowie die Zusammensetzbarkeit von Ereignissen verstanden haben.

Eine ähnliche Aufgabe zum doppelten Münzwurf erreicht im Test von P. Rasfeld eine Lösungshäufigkeit von nur 16% (Rasfeld 2004, S. 42).

Im Unterricht des Simulationsvorkurses wurden der Begriff des Ergebnisraums, die Gleichwahrscheinlichkeit und das Laplace-Experiment am Beispiel des doppelten Würfelwurfs eingeführt. Die Zerlegung eines Ergebnisraums in gleichwahrscheinliche Elementarereignisse wurde kurz angesprochen. Urnen als Zufallsgeräte wurden nur im Rahmen einer Auswahlaufgabe bei den gemischten Aufgaben behandelt (vgl. Kapitel 4.4.4).

Für das Ankreuzen der richtigen Antwort erhält man einen Punkt, für die Begründung bis zu zwei Punkte (zur Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang, S. 309). Die Ergebnisse sind in Tab. 7.13 dargestellt:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
3a) 1 P	44%	34%
3b) 2 P	8%	19%

Tab. 7.13: Durchschnittliche Lösungsquote zu Aufgabe 3) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Im Eingangstest kreuzen 44% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die übrigen entscheiden sich für „beide sind gleich wahrscheinlich". Bei den Begründungen werden durchschnittlich 8% der insgesamt möglichen 2 Punkte erreicht.

Im Ausgangstest kreuzen 34% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die übrigen entscheiden sich für „beide sind gleich wahrscheinlich". Bei den Begründungen werden durchschnittlich 19% der insgesamt möglichen 2 Punkte erreicht.

Wie sehen die Schülerbegründungen aus?

Zu der richtigen Antwort „I ist wahrscheinlicher" gibt es die zwei inhaltlich korrekten Begründungskategorien **E** und **Wkt** sowie eine inhaltlich unzureichende Begründungskategorie **W**:

- Kategorie **E**: Korrekte Argumentation über die Anzahl der Elemente des Ergebnisraums.
- Kategorie **Wkt**: Das Experiment wird als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefasst. Es wird über die Wahrscheinlichkeit auf den beiden Stufen des Zufallsexperiments argumentiert.
- Kategorie **W**: Wechselargument: Es wird argumentiert, dass bei solchen zweistufigen Zufallsversuchen typischerweise eher unterschiedliche Zahlen als gleiche Zahlen zu erwarten sind.

Beispiel zur Kategorie **E**:

„Es gibt einen Ergebnisraum aller Ergebnisse, die vorkommen können. In diesem Ergebnisraum gibt es zweimal die Kombination 4,5 aber nur einmal die Kombination 5,5." (Ausgangstest)

Beispiel zur Kategorie **Wkt**:

„I ist wahrscheinlicher, da man in einem Gefäß eine 4 oder eine 5 ziehen kann. Also hat man in diesem Gefäß eine doppelte Chance. In dem zweiten Gefäß ist die Wahrscheinlichkeit so, wie wenn beide Kugeln eine 5 sein sollten." (Eingangstest)

Hier wird darüber argumentiert, dass man beim Ereignis „eine Kugel vier und die andere Kugel fünf" im ersten Gefäß zwei Möglichkeiten zum Ziehen der Kugel hat. Erst im zweiten Gefäß hat man nur noch eine Möglichkeit: Wenn man im ersten Gefäß eine Vier gezogen hat, muss es im zweiten Gefäß eine Fünf sein und umgekehrt. Damit hat man im Gegensatz zum Ereignis „beide Kugeln fünf" beim ersten Zug die doppelte Erfolgswahrscheinlichkeit.

Beispiele zur Kategorie **W**:

„Zwei unterschiedliche Kugeln zu ziehen ist viel wahrscheinlicher als zwei identische zu ziehen." (Eingangstest)

„Weil es einfach eher unwahrscheinlich ist, dass die gleiche Nummer gezogen wird. Natürlich gibt es immer Ausnahmen, aufgrund persönlicher Erfahrungen meine ich, dass I wahrscheinlicher ist." (Eingangstest)

Die Aussagen spiegeln die intuitive Vorstellung der Schülerinnen und Schüler wieder, dass bei zweistufigen Zufallsversuchen der genannten Art eher unterschiedliche Ergebnisse als gleiche Ergebnisse auftreten. Hier zeigt sich eine in vielen Situationen korrekte Intuition der Schülerinnen und Schüler. In der zweiten Antwort wird die persönliche Erfahrung sogar direkt angesprochen. Die Aussagen liefern jedoch keine Begründungen für den Sachverhalt. Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Schülererfahrungen. Je nach Formulierung der Aufgabenstellung können diese Aussagen sogar falsch sein: So wären beim vorliegenden Experiment die beiden Ereignisse „Eine Vier und eine Fünf" sowie „zwei Vieren oder zwei Fünfen" genauso wahrscheinlich.

In Verbindung mit der falschen Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich" treten zwei Begründungskategorien auf:

- Kategorie **E_f**: Hier wird über die Elemente des Ergebnisraums argumentiert. Allerdings wird beiden Ereignissen nur ein Element des Ergebnisraums zugeordnet.
- Kategorie **G**: Das Experiment wird als zweistufiger Zufallsversuch aufgefasst. Es wird argumentiert, dass das jede Kugel auf jeder der beiden Stufen die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Beispiel für die Kategorie **E_f**:

„Da die eine Ziehung von der anderen unabhängig ist, ist jede Kombination gleich wahrscheinlich. Ob 4 und 5 oder 5 und 5 oder 1 und 8." (Ausgangstest)

Beispiel für die Kategorie **G**:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine 4 und eine 5 zieht oder zweimal 5 ist gleich, weil für jede Kugel immer eine Wahrscheinlichkeit 1:8 besteht." (Ausgangstest)

Bei Kategorie **E_f** wird über den Ergebnisraum argumentiert, bei Kategorie **G** über die gleiche Wahrscheinlichkeit beim zweistufigen Ziehen der beiden Kugeln in den beiden Urnen. In beiden Fällen wird nicht berücksichtigt, dass es zwei verschiedene Kombinationen für „Vier und Fünf" gibt.

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.14 dargestellt. Auch Begründungen, die aufgrund ungenauer oder unvollständiger Formulierungen Punktabzüge erhalten, werden den genannten Begründungskategorien zugeordnet. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest	Ausgangstest
E	0%	19%
Wkt	9%	3%
W	28%	6%
E_f	6%	19%

G	28%	44%
Fehlende Begründung oder weitere falsche Begründung	29%	9%

Tab. 7.14: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 3) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Zur richtigen Antwort „I ist wahrscheinlicher" gibt es im Eingangstest nur drei richtige Begründungen, alle drei gehören zur Kategorie **Wkt** und argumentieren über die Wahrscheinlichkeiten auf den zwei Stufen des Zufallsexperiments. Im Ausgangstest gibt es sieben komplett oder teilweise richtige Begründungen. Hierbei sind sechs Begründungen von der Kategorie **E** und argumentieren vorwiegend formal über den Ergebnisraum. Das falsche Wechselargument **W** tritt im Eingangstest bei etwa einem Viertel aller Schülerinnen und Schüler und damit in über der Hälfte aller richtigen Antworten als Begründung auf. Im Ausgangstest tritt diese Begründungskategorie nur noch vereinzelt auf.

Bei den Begründungen zur falschen Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich" überwiegt die Begründungskategorie **G** im Eingangs- wie auch im Ausgangstest. Der Anteil beider Begründungskategorien **G** und **E_f** nimmt im Ausgangstest zu. Dafür nimmt der Anteil fehlender oder weiterer falscher Begründungen im Ausgangstest ab.

Interpretation der Ergebnisse

Im Eingangstest haben 44% der Schülerinnen und Schüler die richtige Intuition zur Beantwortung der Aufgabe. Aus persönlicher Erfahrung – wahrscheinlich mit Würfelspielen – wissen sie, dass unterschiedliche Ergebnisse bei einem solchen Experiment häufiger auftreten als gleiche Ergebnisse. Diese Verallgemeinerung wird auch bei über der Hälfte der richtigen Antworten als Begründung angegeben. Echte Begründungen über die unterschiedliche Anzahl der günstigen Ergebnisse finden sich im Eingangstest kaum. Ferner zeigt sich bei den 56% der falschen Antworten, dass die meisten Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe im Eingangstest keine geeigneten Vorstellungen zum Laplace-Ergebnisraum und zur Zusammensetzbarkeit eines Ereignisses aktivieren können.

Erstaunlich ist, dass die Lösungshäufigkeit im Ausgangstest weiter abnimmt. Hier geben nur noch 34% aller Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an. Allerdings nimmt der Anteil richtiger Begründungen der Kategorie **E** zu, der Anteil der verallgemeinernden Aussagen der Kategorie **W** deutlich ab.

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über den Laplace-Ansatz wird im Simulationsvorkurs am Beispiel des doppelten Würfelwurfs eingeführt. Der Transfer zur Urnensituation kann von der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler offensichtlich nicht geleistet werden. Den Schülerinnen und Schülern fehlt noch die Übung in der Konstruktion geeigneter Laplace-Ergebnisräume in ungewohnten Situationen und Problemstellungen.

In Bezug auf die Begründungen wird den Schülerinnen und Schülern durch den Stochastikunterricht offensichtlich klar, dass die verallgemeinernden Aussagen des Eingangstests keine echten Begründungen darstellen. Die korrekten Begründungen sind im Ausgangstest deutlich geprägt vom eingeführten Laplace-Formalismus. Durch den Simulationsvorkurs wird eine bessere Reflexion der Begründungen erreicht.

Aufgabe 4

4. Beim Werfen einer fairen Münze erscheint fünfmal nacheinander Wappen. Wird bei dem sechsten Wurf eher Wappen oder eher Zahl auftreten?

☐ Eher Wappen ☐ Eher Zahl

☐ Beide sind gleich wahrscheinlich ☐ Weiß ich nicht

Begründung:

Die korrekte Lösung dieser Aufgabe lautet „Beide sind gleich wahrscheinlich“. Da die einzelnen Würfe der Münze voneinander unabhängig erfolgen, hat die in den ersten fünf Würfen aufgetretene Münzwurfkombination keinen Einfluss auf den sechsten Wurf. In diesem sechsten Wurf sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen bzw. Zahl wie bei jedem Wurf gleich wahrscheinlich.

Die Aufgabe soll das intuitive Verständnis der Unabhängigkeit der verschiedenen Stufen einer Zufallsfolge testen. Im Unterricht wurde die Unabhängigkeit in Verbindung mit einer der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl unter dem Begriff „Gedächtnislosigkeit“ thematisiert (vgl. Kapitel 6.3.2).

Für das Ankreuzen der richtigen Antwort erhält man einen Punkt, für die Begründung bis zu zwei Punkte. Hierbei gibt es jeweils einen Punkt für die Argumentation über die Unabhängigkeit und einen Punkt für die Argumentation über die gleiche Wahrscheinlichkeit von „Wappen“ und „Zahl“ (zur genaueren Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang, S. 310). Die Ergebnisse sehen wie folgt aus:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
4a) 1 P	63%	94%
4b) 2 P	39%	69%

Tab. 7.15: Durchschnittliche Lösungsquote zu Aufgabe 4) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Im Eingangstest kreuzen 63% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die meisten übrigen entscheiden sich für „eher Zahl“, nur einer entscheidet sich für „eher Wappen“. Bei den Begründungen werden durchschnittlich 39% der insgesamt möglichen 2 Punkte erreicht.

Im Ausgangstest kreuzen 94% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, die übrigen entscheiden sich für „eher Zahl“. Bei den Begründungen werden durchschnittlich 69% der insgesamt möglichen 2 Punkte erreicht.

Wie sehen die Schülerbegründungen aus?

Zu der richtigen Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich“ gibt es eine komplett richtige Begründungskategorie **UW** und zwei inhaltlich unvollständige Begründungskategorien **U** und **W**:

- Kategorie **UW**: Es wird über die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen und über die gleiche Wahrscheinlichkeit von Wappen und Zahl argumentiert.
- Kategorie **U**: Es wird nur über die Unabhängigkeit der einzelnen Stufen argumentiert.
- Kategorie **W**: Es wird nur über die gleiche Wahrscheinlichkeit von Wappen und Zahl argumentiert.

Beispiel für die Kategorie **UW**:

„Die Wahrscheinlichkeit ist bei jedem Wurf 50% und von den vorherigen Würfen unabhängig.“ (Ausgangstest)

Zur falschen Antwort „eher Zahl“ gibt es zwei verschiedene Begründungskategorien:

- Kategorie **A**: Es wird argumentiert, dass sich die Fälle ausgleichen müssen.

- Kategorie **S**: Es wird argumentiert, dass sechsmal nacheinander Wappen ein sehr unwahrscheinliches Ereignis ist.

Beispiel für die Kategorie **A**:

„Da die Wahrscheinlichkeit 50% beträgt, entweder Wappen oder Zahl zu werfen, werden nach einer großen Anzahl von Würfen die gewürfelten W oder Z wieder gleich sein. 6 Würfe sind allerdings zu wenig, um eine genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Trotzdem wird es wahrscheinlicher sein, dass man Zahl würfelt. Es kann aber auch sein, dass erneut Wappen geworfen wird.“ (Eingangstest)

In diesem Beispiel wird mit dem Gesetz der großen Zahl argumentiert, welches sich hier aber nicht anwenden lässt. Auf die kleine Stichprobe von nur sechs Würfen wird in der Begründung auch explizit hingewiesen, dennoch wird aus dem Gesetz der großen Zahl eine Tendenz zum Ausgleich hergeleitet, welche zu einer höheren Wahrscheinlichkeit für „Zahl“ führen soll. Es handelt sich hierbei wie in Aufgabe 2) erneut um die Fehlvorstellung vom „Gesetz der kleinen Zahlen“ (vgl. Kahneman und Tversky, 1982a).

Beispiel für die Kategorie **S**:

„Die Chancen sind normalerweise 50:50, dass W bzw. Z geworfen wird. 5x nacheinander W ist sehr unwahrscheinlich, und dass auch noch beim 6ten Wurf Wappen geworfen wird, ist deshalb auch weniger wahrscheinlich als Zahl, da 6x nacheinander Wappen enorm unwahrscheinlich ist.“ (Eingangstest)

In diesem Beispiel wird über das seltene Eintreten des Ereignisses „6mal hintereinander Wappen“ argumentiert. Dieses Ereignis ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $(0{,}5)^6$ tatsächlich sehr unwahrscheinlich. Hieraus wird geschlossen, dass die Wahrscheinlichkeit für Wappen nach fünf bereits geworfenen Wappen im sechsten Wurf geringer wird. Es wird nicht erkannt, dass das Ereignis „sechsmal Wappen“ nur dann sehr unwahrscheinlich ist, wenn man zu Beginn der Versuchsserie steht, nicht aber, wenn man bereits fünfmal Wappen geworfen hat.

In beiden Begründungskategorien **A** und **S** zeigt sich ein fehlendes Verständnis des Begriffs der Unabhängigkeit. Büchter und Hußmann et al. schreiben hierzu (2005, S. 3): „Fallen bei einem Würfelspiel beispielsweise hintereinander immer wieder Sechsen, so vermuten viele, dass mit jeder weiteren Sechs auch die Wahrscheinlichkeit wächst, dass im nächsten Zug eine andere Zahl fällt. Mit dieser Einschätzung wird unterstellt, dass es eine Gesetzmäßigkeit zwischen den einzelnen Würfelereignissen gibt, die dafür sorgt, dass alle Ergebnisse letztendlich gleich häufig auftreten.“

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.16 dargestellt. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest	Ausgangstest
UW	19%	47%
U	13%	22%
W	30%	22%
A	16%	6%
S	13%	0%

Fehlende Begründung oder weitere falsche Begründung	9%	3%

Tab. 7.16: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 4) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Im Eingangstest geben 19% der Schülerinnen und Schüler eine komplett richtige Begründung an, 43% argumentieren nur über die Unabhängigkeit oder nur über die Wahrscheinlichkeit für Wappen und Zahl. Im Ausgangstest sind 47% der Begründungen komplett richtig, bei insgesamt 44% wird nur über die Unabhängigkeit oder nur über die Gleichwahrscheinlichkeit argumentiert.

Die falschen Begründungskategorien **A** und **S** tauchen vorwiegend im Eingangstest auf. Im Ausgangstest gibt es nur noch drei falsche Antworten und davon zwei falsche Begründungen der Kategorie **A**.

Bemerkenswert sind zwei der Schülerinnen und Schüler, die im Ausgangstest die richtige Antwort ankreuzen und korrekt über die Wahrscheinlichkeit argumentieren, allerdings intuitive Zweifel angeben. Stellvertretend wird hier eine der beiden Äußerungen genannt:

„Weil die Wahrscheinlichkeit 50% besteht, Wappen oder Zahl zu werfen, allerdings halte ich es für tendenziell realistisch, dass eher Zahl geworfen wird, die Wahrscheinlichkeit ist allerdings gleich.“ (Ausgangstest)

Die richtige Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich“ wird hier über die gleiche Wahrscheinlichkeit für Wappen und Zahl begründet. Allerdings wird ergänzt, dass es „tendenziell realistisch sei, dass eher Zahl geworfen wird.“

Interpretation der Ergebnisse

Die Lösungshäufigkeit ist mit 63% bereits im Eingangstest hoch. Wie in Aufgabe 2) zeigt sich, dass viele Schülerinnen und Schüler bereits vor dem Simulationsvorkurs ein intuitives Verständnis von der Unabhängigkeit der verschiedenen Stufen eines Zufallsversuchs mitbringen. Die Begründungen für die richtige Antwort sind in der Mehrzahl zutreffend, wenn auch teilweise unvollständig. Allerdings tauchen bei etwa einem Drittel der Schülerinnen und Schüler in Verbindung mit der falschen Antwort zwei typische Fehlvorstellungen auf: Die Anwendung des Gesetzes der großen Zahl auf eine kleine Stichprobe und die Argumentation über die geringe Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „sechsmal Wappen“.

Im Ausgangstest erhöht sich die Lösungshäufigkeit weiter auf den sehr hohen Wert von 94%, nur zwei Schülerinnen oder Schüler kreuzen die falsche Antwort an. Die Qualität der Begründungen steigert sich deutlich. Die Verbesserung lässt sich in Verbindung bringen mit dem wiederholten realen oder virtuellen Experimentieren mit Münzwürfen sowie mit der expliziten Thematisierung der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen einer Zufallsfolge im Unterricht.

Auffällig sind die zwei Begründungen mit den geäußerten Zweifeln an der richtigen Antwort. Sie deuten darauf hin, dass bei einigen Schülerinnen und Schülern das Problem zwar theoretisch verstanden aber nicht intuitiv verinnerlicht ist. Büchter und Hußmann et al. (2005, S. 5) beschreiben dies als eine „typische Situation, in der alltägliche Intuition und erworbenes Fachwissen auseinanderklaffen.“

Im Ausgangstest wird zusätzlich die folgende Frage gestellt:

Sie haben das obige Ergebnis WWWWW nicht mit einer Münze sondern mit der FATHOM-Funktion `ZufallsWahl("W","Z")` erhalten. Beantworten Sie hierbei die Frage nach dem nächsten Ergebnis genauso wie bei der Münze oder anders?

Eine Diskussion über die Funktionsweise des `ZufallsWahl()`–Befehls wurde im Unterricht bewusst ausgeklammert (vgl. Kapitel 4.1.5). Der Befehl wird im Unterrichtskonzept als Abbildung realer Zufallsgeneratoren eingeführt, z. B. in Analogie zur Münze und zum Würfel.

Mit der genannten Fragestellung soll untersucht werden, welche Sicht die Schülerinnen und Schüler von dem Zufallsgenerator in FATHOM entwickelt haben.

Fast alle Schülerinnen und Schüler haben „Genauso“ angekreuzt. Nur eine Antwort weicht hiervon ab mit folgender intelligenten Begründung:

„FATHOM kann sich merken, ob 5x W geworfen wurde oder nicht. Es könnte daher sein, dass Z wahrscheinlicher ist als W.“

Es zeigt sich, dass fast alle Schülerinnen und Schüler die gewählte Einführung des Zufallsgenerators `ZufallsWahl()` akzeptieren. Die Funktionsweise wird von Schülerseite nicht problematisiert. Die Schülerinnen und Schüler gehen offenbar davon aus, dass sich das Werfen einer Münze oder eines Würfels durch diesen Zufallsgenerator realitätsgetreu nachbilden lässt. Eine Problematisierung der Funktionsweise der Zufallsgeneratoren ist somit für die Verwendung von Simulationen im Mathematikunterricht nicht notwendig. Die Behandlung kann bei Interesse im späteren Verlauf des Kurses erfolgen.

Aufgabe 5

5. An einem großen Krankenhaus werden durchschnittlich jede Woche etwa 90 Kinder geboren. An einem kleinen Krankenhaus werden durchschnittlich jede Woche etwa 40 Kinder geboren. An welchem Krankenhaus ist es wahrscheinlicher, dass in einer Woche mehr als 65% der geborenen Kinder Jungen sind?

☐ Am großen Krankenhaus	☐ Am kleinen Krankenhaus
☐ An beiden gleich wahrscheinlich	☐ Weiß ich nicht

Begründung:

Die richtige Antwort lautet „Am kleinen Krankenhaus“. Das Ergebnis lässt sich begründen anhand folgender Überlegung: Bei 90 Kindern liegt der relative Anteil an Jungengeburten typischerweise eher in der Nähe von $p = 0{,}5$ als bei 40 Kindern. Daher ist es bei 40 Kindern wahrscheinlicher, dass man eine Abweichung von mehr als 65% Jungengeburten hat. Diese Überlegung entspricht einer Anwendung des Gesetzes der großen Zahl auf $n = 40$ und $n = 90$.

Es handelt sich um eine Aufgabe zum intuitiven Verständnis des Gesetzes der großen Zahl. Die Aufgabenstellung wurde wiederholt in psychologischen Studien eingesetzt. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass es Schülerinnen und Schülern schwer fällt, diesen komplexen Typ von Aufgaben intuitiv zu lösen und die mathematische Struktur auf ähnliche Kontexte zu übertragen (Kahneman und Tversky 1972; Sedlmeier und Gigerenzer 1997). Das Gesetz der großen Zahl wird im Simulationsvorkurs explizit thematisiert und tritt wiederholt in Verbindung mit der Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten auf. Die Aufgabe verlangt einen flexiblen Umgang mit dem Gesetz der großen Zahl. Die Aufgabe ist von der Struktur her ähnlich zur Multiple-Choice-Test-Aufgabe, die als Einführungsaufgabe in den Simulationsvorkurs ausführlich besprochen wird (vgl. Kapitel 4.4.1).

Für die richtige Beantwortung der Frage erhält man einen Punkt, für die Begründung bis zu zwei Punkte (zur genaueren Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang, S. 311). Die Ergebnisse sehen folgendermaßen aus:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
5a) 1 P	25%	66%
5b) 2 P	11%	55%

Tab. 7.17: Durchschnittliche Lösungsquote zu Aufgabe 5) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Im Eingangstest kreuzen 25% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, 66% entscheiden sich für die falsche Antwort „An beiden gleich wahrscheinlich". Die durchschnittlich erreichte Punktzahl bei den Begründungen beträgt 11% von zwei erreichbaren Punkten. Ein Viertel aller Schülerinnen und Schüler hat überhaupt keine Begründung angegeben.

Im Ausgangstest kreuzen 66% der Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort an, 28% entscheiden sich für die falsche Antwort „An beiden gleich wahrscheinlich". Die durchschnittlich erreichte Punktzahl bei den Begründungen liegt bei 55% von zwei erreichbaren Punkten.

Die genaue Verteilung der Antworten auf die vier Auswahlmöglichkeiten von Ankreuzitem 5a) ist in Abb. 7.12 zu sehen.

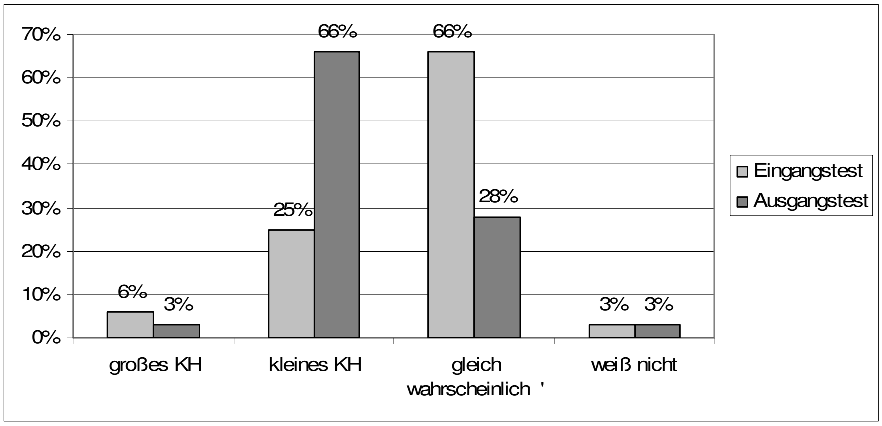


Abb. 7.12: Verteilung der Antworten auf die vier verschiedenen Auswahlmöglichkeiten des Ankreuzitems 5a). Die richtige Antwort lautet „Am kleinen Krankenhaus".

Wie sehen die Schülerbegründungen aus?

Zu der richtigen Antwort „Am kleinen Krankenhaus" gibt es zwei inhaltlich korrekte Begründungskategorien **kG** und **kM** sowie eine inhaltlich unvollständige Begründungskategorie **kA**:

- Kategorie **kG**: Es wird über das Gesetz der großen Zahl argumentiert.
- Kategorie **kM**: Verweis auf die Analogie zur Multiple-Choice-Test-Aufgabe im Unterricht.
- Kategorie **kA**: Es wird über die Unterschiede der absoluten Abweichung der mehr als 65% Geburten von den 50% Geburten im großen und im kleinen Krankenhaus argumentiert.

Beispiele für die Kategorie **kG**:

„Bei mehr Geburten ist es wahrscheinlich ausgeglichener, also 50% Jungen.“ (Eingangstest)

Diese Begründung zielt darauf ab, dass sich der Anteil der Jungen und der Mädchen mit zunehmender Anzahl an Geburten angleicht. Mit zunehmender Anzahl an Geburten nähert man sich den 50% Jungengeburten. Damit hat man bei weniger Geburten eine größere Wahrscheinlichkeit für „mehr als 65% Jungen“.

„*Das Verhältnis von Jungen und Mädchen ist allgemein gleich. Je mehr Geburten betrachtet werden, umso eher pendelt es sich bei 1:1 ein. Werden weniger Geburten betrachtet, umso wahrscheinlicher ist es, dass sich das Verhältnis in eine Richtung verschiebt. Deshalb ist es im kleinen Krankenhaus wahrscheinlicher.*“ (Ausgangstest)

Bei diesem Beispiel wird ebenfalls über das Gesetz der großen Zahl argumentiert. Die Begründung ist genauer als das vorherige Beispiel aus dem Eingangstest.

Beispiel für die Kategorie **kM**:

„*Man kann diese Aufgabe mit dem Multiple-Choice-Test vergleichen. Je mehr Fragen (Kinder) es gibt, desto wahrscheinlicher ist es, dass sich die zufällig richtig geratenen Antworten (Jungen) bei 50% anhäufen. Deshalb nimmt man den Fragebogen mit weniger Fragen bzw. das Krankenhaus mit weniger Kindern.*“ (Ausgangstest)

Bei diesem Begründungstyp wird die Problemstellung auf die bekannte Testaufgabe zurückgeführt. Diese Begründungskategorie kann erst im Ausgangstest auftreten. In dem angegebenen Beispiel wird zusätzlich über das dahinter liegende Gesetz der großen Zahl argumentiert.

Beispiel zur Begründungskategorie **kA**:

„65% wären im kleinen Krankenhaus 26 im großen 58 Jungen. Da die Wahrscheinlichkeit eigentlich 50% ist, liegen 26 näher bei 20 (50% von 40) als 58 bei 45.“ (Ausgangstest)

Hier wird darüber argumentiert, dass die absolute Abweichung zwischen 50% der Geburten und 65% der Geburten am großen Krankenhaus größer ist und eine Abweichung von über 65% daher am größeren Krankenhaus unwahrscheinlicher ist. Diese Kategorie von Begründungen klingt plausibel, ist aber nicht korrekt, da die Änderung der statistischen Streuung bei der Vergrößerung der Stichprobe nicht berücksichtigt wird.

Zu den falschen Antworten „An beiden gleichwahrscheinlich“ erhält man vorwiegend die Begründungskategorie **bP**:

- Kategorie **bP**: Es wird argumentiert, dass die Größe des Krankenhauses und damit die Anzahl der Geburten keinen Einfluss hat, da es sich um eine Angabe in Prozent also um einen relativen Anteil handelt.

Beispiele für die Kategorie **bP**:

„Damit an einem der Krankenhäuser 65% Jungen geboren werden können, müssten jeweils 15% Abweichung zum Durchschnitt vorhanden sein. Dabei ist es egal, wie viele Kinder geboren werden.“ (Eingangstest)

„Es ist egal wie oft, die Wahrscheinlichkeit beträgt immer 50%, wenn es sich nun häuft, ist es Zufall, und da die 65% Prozente sind, ist die Anzahl auch egal.“ (Eingangstest)

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.18 dargestellt. Auch Begründungen, die aufgrund ungenauer oder unvollständiger Formulierungen Punktabzüge erhalten, werden den genannten Begründungskategorien zugeordnet. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest	Ausgangstest
kG	9%	50%
kM	0%	9%
kA	3%	12%
bP	41%	12%
Fehlende Begründung oder weitere falsche Begründung	47%	17%

Tab. 7.18: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 5) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Im Eingangstest finden sich nur drei komplett richtige Begründungen (9%). Diese sind von der Kategorie **kG** und argumentieren wie im angegebenen Beispiel mit dem Gesetz der großen Zahl, ohne dieses so zu benennen. Über 40% der Begründungen sind von der inhaltlich falschen Kategorie **bP**, hinzu kommen 47% weitere falsche oder fehlende Begründungen.

Im Ausgangstest sind die Hälfte aller Begründungen von der Kategorie **kG**, hinzu kommen drei Begründungen der Kategorie **kM** (9%), welche auf die Analogie zur Multiple-Choice-Test-Aufgabe im Unterricht verweisen. 12% der Begründungen sind von der Kategorie **kA**. Der Anteil falscher Begründungen der Kategorie **bP** oder weiterer falscher bzw. fehlender Begründungen liegt bei unter einem Drittel. Neben dieser deutlichen Erhöhung des Anteils richtiger Begründungen fällt auf, dass die Begründungen im Ausgangstest wesentlich ausführlicher sind als im Eingangstest.

Interpretation

Die Quote von 25% korrekter Antworten im Eingangstest deckt sich mit anderen Untersuchungen (vgl. Biehler und Maxara 2005). Es zeigt sich, dass die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler vor Beginn des Unterrichts keine passende Intuition für diese Aufgabe hat. Es überwiegt die in vielen Zusammenhängen richtige Intuition, dass bei der Betrachtung des relativen Anteils die absoluten Anzahlen keine Rolle spielen. Dieses ist im vorliegenden Beispiel allerdings falsch. Auch bei den richtigen Antworten gibt es nur drei korrekte Begründungen mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahl.

Die Lösungshäufigkeit von 66% im Ausgangstest ist angesichts der Ergebnisse anderer Untersuchungen bei der Verwendung dieser Aufgabenstellung erfreulich. Die deutliche Verbesserung im Vergleich zum Eingangstest lässt sich verstehen in Verbindung mit dem durchgeführten Unterricht: Zum einen wird am Einstiegsbeispiel ein strukturell ähnliches Problem besprochen. Drei der Begründungen beziehen sich direkt auf diese Analogie zum Multiple-Choice-Test. In wie weit auch andere richtige Antworten auf die Behandlung des strukturell ähnlichen Testproblems zurückzuführen sind, lässt sich nicht sagen.

Die Mehrzahl der Begründungen im Ausgangstest bezieht sich nicht auf diese Analogie sondern argumentiert mit dem Gesetz der großen Zahl. Das im Unterricht wiederholt behandelte und angewendete Gesetz der großen Zahl wird hier korrekt zur Begründung verwendet. Das Gesetz der großen Zahl wird im Simulationsvorkurs inhaltlich verknüpft mit den Faustregeln zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung von Simulationen und mit dem Problem der Testaufgabe. Dies führt dazu, dass die Schülerinnen und Schüler das Gesetz der großen Zahl nicht nur isoliert betrachten, sondern es auch in Anwendungskontexten wieder erkennen können. Die Kombination der ausführlichen Besprechung des Gesetzes der großen Zahl mit einer zur Krankenhausaufgabe ähnlichen Problemstellung scheint bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler korrekte Intuitionen stabilisiert oder aufgebaut zu haben.

Aufgabe 6

6. Eine Verbraucherzentrale behauptet, mindestens 50% aller in Deutschland lebenden Erwachsenen besitzen eine digitale Fotokamera. Bei einer Befragung von 1000 zufällig ausgewählten erwachsenen Personen geben 489 an, eine digitale Fotokamera zu besitzen.

   Ist die Behauptung damit widerlegt?

   ☐ ja ☐ nein ☐ weiß ich nicht

   Begründung:

Die richtige Antwort lautet „nein“. Hierfür lassen sich zwei völlig unterschiedliche Begründungen angeben:

Aus statistischer Sicht lässt sich sagen, dass bei 1000 befragten Personen eine Abweichung um 1,1 Prozentpunkte vom tatsächlichen Wert aufgrund der statistischen Streuung nicht ungewöhnlich ist. Geben hingegen bei 10 000 befragten Personen 4890 Personen an, eine digitale Fotokamera zu besitzen, so spricht das Ergebnis aus statistischer Sicht bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ gegen die Aussage, dass mindestens 50% aller erwachsenen Personen eine digitale Fotokamera besitzen[5]. Bei einer solchen Aussage muss dann allerdings die Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% berücksichtigt werden.

Als formal logische Begründung kann man anführen, dass die angegebene Behauptung erst dann mit Sicherheit widerlegt ist, wenn in einer Befragung tatsächlich mehr als die Hälfte aller Deutschen angeben, keine digitale Fotokamera zu besitzen. Dafür müssten diese Personen auch alle (!) befragt werden. Nach dieser formal-logischen Argumentation würde selbst ein Ergebnis von 1000 Personen ohne Digitalkamera unter 1000 befragten Personen nicht die Behauptung widerlegen können, dass mindestens 50% aller erwachsenen Deutschen eine Fotokamera besitzen.

Die Aufgabe soll das intuitive Verständnis der Schülerinnen und Schüler zur statistischen Streuung testen. Die statistische Streuung ist die Ursache dafür, dass ein Ergebnis von 489 Personen ohne Digitalkamera unter 1000 befragten Personen auftreten kann, obwohl in der Gesamtheit mindestens 50% der erwachsenen Deutschen eine Digitalkamera besitzen. Antworten Schülerinnen und Schüler bei Aufgabenteil 6a) mit „ja“, so zeigt dies ein mangelndes Verständnis der statistischen Streuung. Bei den Begründungen sollen die statistischen Argumentationen Aufschluss geben über das intuitive Verständnis zur Streuung. Die formal-logischen Argumentationen sind inhaltlich korrekt, lassen aber keine Rückschlüsse auf das intuitive Verständnis zur statistischen Streuung zu.

Im Unterricht des Simulationsvorkurses werden keine zur gestellten Aufgabe ähnlichen Anwendungskontexte behandelt. Allerdings wird die statistische Streuung in Verbindung mit der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten behandelt. In

[5] Wählt man als Hypothese H_o: $p \geq 0{,}5$, so kann man die Grenze des Akzeptanzbereichs über einen einseitigen Hypothesentest näherungsweise mit der $1{,}64\sigma$-Umgebung bestimmen: $5000-1{,}64\sigma=4918$. Der Wert von 4890 Personen liegt darunter.

Verbindung mit dem Gesetz der großen Zahl werden Faustregeln für die Genauigkeit einer Simulation bei 1000 bzw. 10 000 Wiederholungen erarbeitet (vgl. Kapitel 4.4.2). Ferner taucht die statistische Streuung in Verbindung mit der Interpretation von Häufigkeitsverteilungen auf, wie sie im Rahmen des Simulationsvorkurses wiederholt in FATHOM erzeugt werden.

Für die richtige Beantwortung der Frage erhält man einen Punkt, für die Begründung bis zu zwei Punkte (zur Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang, S. 312). Die Ergebnisse sehen folgendermaßen aus:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
6a) 1 P	84%	84%
6b) 2 P	48%	70%

Tab. 7.19: Durchschnittliche Lösungsquote zu Aufgabe 6) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Die richtige Antwort wird im Eingangs- wie im Ausgangstest von 84% der Schülerinnen und Schüler angegeben. Im Eingangstest werden bei den Begründungen durchschnittlich 48%, im Ausgangstest durchschnittlich 70% der zwei möglichen Punkte erreicht.

Wie sehen die Schülerbegründungen aus?

Zu der richtigen Antwort „nein“ treten verschiedenartige Begründungskategorien auf. Hierbei handelt es sich bei den statistischen Begründungskategorien **R_Anz**, **G** und **F** um inhaltlich korrekte Argumentationen. Die weiteren statistischen Begründungskategorien **R_rel** und **S** sind inhaltlich unvollständig oder teilweise fehlerhaft:

- Kategorie **R_Anz**: Statistische Argumentation über die mangelnde Repräsentativität aufgrund einer zu geringen Stichprobenanzahl.
- Kategorie **G**: Statistische Argumentation über das Gesetz der großen Zahl.
- Kategorie **F**: Statistische Argumentation über die Schwankung statistischer Ergebnisse verbunden mit den im Unterricht erarbeiteten Faustregeln.
- Kategorie **R_rel**: Statistische Argumentation über die mangelnde Repräsentativität aufgrund einer zu geringen Stichprobenanzahl relativ zur Gesamtbevölkerung von 80 Mio. Einwohnern.
- Kategorie **S**: Statistische Argumentation über die geringe Abweichung von nur 1,1 Prozentpunkten ohne Berücksichtigung des Stichprobenumfangs.
- Kategorie **Log**: Formal logische Argumentation: Man müsste alle Personen in Deutschland befragen, um die Behauptung sicher widerlegen zu können.

Beispiele für die Kategorie **R_Anz**:

„Eine wissenschaftlich anerkannte Studie/Befragung gilt (glaube ich, hab’s vergessen) erst ab einer Befragtenzahl von 10 000. Dann ist die Befragung repräsentativ.“ (Eingangstest)

„489 entsprechen fast 50%. Außerdem müsste man mehr Personen befragen, um ein repräsentatives Ergebnis zu bekommen.“ (Eingangstest)

Diese Begründungen argumentieren über eine mangelnde Repräsentativität der Stichprobe, da die Anzahl 1000 der befragten Personen zu gering sei. In einigen Fällen wird hier zusätzlich auf die geringe Abweichung zwischen 48,9% und 50% hingewiesen.

Beispiel für die Kategorie **G**:

„Dafür dass nur 1000 Leute befragt worden sind, ist das Ergebnis ziemlich genau. Je mehr Leute man befragt, umso mehr nähert man sich dem wirklichen Ergebnis.“ (Ausgangstest)

Diese Begründung kann man so interpretieren, dass bei einer tatsächlichen Quote von 50% das Ergebnis einer Befragung nach dem Gesetz der großen Zahl umso näher bei 50% liegt, je mehr Personen man befragt. Bei 1000 Personen stellt die relative Häufigkeit von 48,9% keine ungewöhnliche Abweichung dar.

Beispiel für die Kategorie **F**:

„Es ist immerhin ein „Zufallsexperiment“, „Zufallsbefragung“. D. h. das Ergebnis kann durchaus von der wahrscheinlichen Häufigkeit abweichen. Zudem wurden 1000 Personen befragt. Dies bedeutet, es gibt meist eine Abweichung von 2-3% von der wahrscheinlichen Häufigkeit.“ (Ausgangstest)

Dieser Begründungstyp argumentiert über die im Unterricht für 1000 Simulationswiederholungen erarbeitete Faustregel zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung. Die Genauigkeitsschätzung für Simulationen wird hier auf das Problem der Streuung im Anwendungskontext der Produktbefragung übertragen. Diese Begründungskategorie kann erst im Ausgangstest auftreten.

Beispiele für die Kategorie **R_rel**:

„Es waren zwar nur 48,9%, aber 1000 für 80 Mio. Einwohner ist nicht repräsentativ“ (Eingangstest)

„Die Anzahl der Befragten reicht nicht aus, um dies zu widerlegen. Von den 80 Mio. Erwachsenen in Deutschland müssten mehr als 1000 befragt werden, um dies zu bestätigen. Außerdem ist die Differenz zwischen den 50% und den 489 Personen lediglich 1,1%.“ (Eingangstest)

Bei diesem Begründungstyp wird die Anzahl der befragten Personen im Verhältnis zur Gesamtpopulation betrachtet. Je ungleicher dieses Verhältnis ist, als desto weniger repräsentativ wird die Umfrage angesehen. Dies ist eine typische Fehlvorstellung in Bezug auf die Interpretation von Befragungen. Bei einer ausreichend großen Gesamtpopulation hängt die Repräsentativität der Befragung allein von der Anzahl der befragten Personen ab. Die Konfidenzintervalle zu einer Befragung von 1000 Personen hängen nicht davon ab, ob man eine Gesamtpopulation von 100 000, von 1 Mio. oder von 80 Mio. Personen hat.

Beispiele zur Kategorie **S**:

„48,9% sind fast 50%.“ (Eingangstest)

„Dies ist ein repräsentativer Wert, eine so geringe Abweichung ist akzeptabel.“ (Ausgangstest)

Die Begründungen argumentieren alle über die geringe Abweichung von nur 1,1 Prozentpunkten. Allerdings fehlt bei allen Antworten dieser Begründungskategorie der Zusammenhang zur Stichprobengröße.

Beispiele für die Kategorie **Log**:

„Es hätten auch, bei einer anderen Befragung, 1000 von 1000 Personen zufällig eine Digitalkamera haben können.“ (Eingangstest)

„Um einen 100%igen Nachweis führen zu können, müsste man alle Deutschen befragen." (Eingangstest)

Hierbei handelt es sich um Begründungen im Sinn der oben bereits ausgeführten formal-logischen Argumentation.

Zu den falschen Antworten „ja" erhält man vorwiegend die Begründungskategorie **E**:

- Kategorie **E**: Es wird argumentiert, dass man eine relative Häufigkeit von 48,9% erhalten habe und nicht von mindestens 50%. Die relative Häufigkeit von 48,9% in der Stichprobe wird auf die Gesamtheit übertragen.

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.20 dargestellt. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest	Ausgangstest
R_Anz	19%	28%
G	0%	9%
F	0%	19%
R_rel	13%	9%
S	25%	9%
Log	22%	9%
E	9%	3%
Fehlende Begründung oder weitere falsche Begründung	12%	14%

Tab. 7.20: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 6) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Im Eingangstest argumentieren 19% der Schülerinnen und Schüler korrekt über die Repräsentativität der Befragung in Verbindung mit dem Stichprobenumfang (**R_Anz**), 25% verweisen auf die geringe Abweichung von 1,1 Prozentpunkten ohne eine Verbindung zur Stichprobengröße herzustellen (**S**), bei 13% zeigt sich die Fehlvorstellung der mangelnden Repräsentativität aufgrund des geringen Stichprobenumfangs relativ zur Gesamtbevölkerung (**R_rel**). Dieses sind alles statistische Begründungen. Die formal-logische Argumentation **Log** wird von 22% der Befragten gewählt. 9% der Befragten übertragen den relativen Anteil in der Stichprobe auf die Gesamtbevölkerung (**E**). Diese 9% der Antworten deuten auf eine völlig fehlende Intuition zur stochastischen Streuung hin.

Im Ausgangstest tauchen weiterhin alle genannten Begründungstypen auf. Die Begründungen werden ausführlicher. Die Anzahl der wenig aussagekräftigen Antworten der Kategorie **S** und der formal-logischen Argumentation **Log** geht deutlich zurück. Auch die Anzahl der Begründungen der Kategorie **R_rel** mit der beschriebenen Fehlvorstellung zur Repräsentativität einer Stichprobe reduziert sich. Dafür erhöht sich der Anteil der korrekten Begründungen der Kategorie **R_Anz**. Die Mehrzahl dieser Begründungen verweist im Ausgangstest auch auf die geringe Abweichung zwischen 48,9% und 50%. Im Ausgangstest kommen zwei inhaltlich korrekte Begründungskategorien hinzu, welche auf die Unterrichtsinhalte des Simulationsvorkurses zurück gehen: 19% der Begründungen beziehen sich nun explizit auf die im Simulationsvorkurs erarbeiteten Faustregeln zur Genauigkeit

(Kategorie **F**), 9% der Begründungen argumentieren mit dem Gesetz der großen Zahl (Kategorie **G**). Die falsche Übertragung des relativen Anteils in der Stichprobe auf die Gesamtbevölkerung (Kategorie **E**) tritt nur noch einmal auf.

Interpretation

Die Lösungsquote dieser Aufgabe ist bereits im Eingangstest sehr hoch. Es gibt nur einen kleinen Anteil von 16% der Schülerinnen und Schüler, die bei dieser Aufgabenstellung überhaupt keine Vorstellung zur statistischen Streuung aktivieren können. Die anderen 84% begründen ihre Antwort überwiegend mit statistischen Argumentationen. 22% der Schülerinnen und Schüler verwenden das formal-logische Argument **Log**.

Im Ausgangstest bleibt die Lösungsquote auf hohem Niveau unverändert. Bei einer genauen Betrachtung der Begründungen zeigt sich deutlich der Einfluss des Simulationsvorkurses: Die Größe der Stichprobe wird viel häufiger genannt, in den meisten Fällen in Verbindung mit einem Hinweis auf die nur geringe Abweichung von 1,1 Prozentpunkten. Insbesondere die Übertragung der Faustregeln für die Genauigkeit der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Simulationen auf den ungewohnten Anwendungskontext stellt einen anspruchsvollen Transfer dar, der in sechs Begründungen gelingt. Der Begründungstyp über das Gesetz der großen Zahl kommt ebenfalls neu hinzu. Die Vorstellung der Schülerinnen und Schüler von der statistischen Streuung hat sich im Rahmen des Simulationsvorkurses verbessert. Bei den Ergebnissen kann man deutlich den Einfluss der Behandlung des Gesetzes der großen Zahl in Verbindung mit Simulationen erkennen.

Aufgabe 7 und Aufgabe 8

7. In einem Gefäß befinden sich drei schwarze und zwei rote Kugeln. Man zieht ohne Hinsehen eine Kugel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine schwarze Kugel zieht (mit Begründung).
8. In einem Eimer mit 500 Losen befinden sich 4 Hauptgewinne und zusätzlich 16 weitere Gewinne. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man beim einmaligen Ziehen einen Hauptgewinn erhält (mit Begründung).

Beide Aufgaben sollen das Grundwissen zur Laplace-Wahrscheinlichkeit testen. Die erste Aufgabe ist von den gewählten Zahlen her sehr einfach, die zweite Aufgabe ist etwas schwieriger, da mit größeren Zahlen gearbeitet wird und ferner die zum Lösen überflüssige Zusatzinformation über die 16 weiteren Gewinne gegeben wird.

Laplace-Experimente werden im Unterricht zusammen mit den Begriffen Ergebnisraum, Ereignis und Laplace-Wahrscheinlichkeit an einem Beispiel behandelt (vgl. Kapitel 4.4.3). Eine Vertiefung findet nicht statt.

Auf beide Aufgaben gibt es jeweils zwei Punkte. Die volle Punktzahl bekommt man, wenn auch eine kurze Begründung der Lösung oder die Rechnung angegeben wird. Die Ergebnisse sehen folgendermaßen aus:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
7) 2 P	80%	94%
8) 2 P	64%	89%

Tab. 7.21: Durchschnittliche Lösungsquote der Aufgaben 7) und 8) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Bei Aufgabe 7) werden im Eingangstest durchschnittlich 80% und im Ausgangstest 94% von jeweils 2 möglichen Punkten erreicht. Bei Aufgabe 8) werden im Eingangstest durchschnittlich 64% und im Ausgangstest 89% von jeweils 2 möglichen Punkten erreicht.

Bei der Lösung beider Aufgaben fällt auf, dass die Schülerinnen und Schüler drei verschiedene Darstellungsarten für die Wahrscheinlichkeit wählen: Die Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Bruch, die Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Prozentzahl und die Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Chance. Bei vielen Antworten werden zwei der drei Darstellungsarten parallel verwendet. Beispiele von Aufgabe 7) aus dem Eingangstest sehen folgendermaßen aus:

*„60% Es gibt 5 Kugeln, daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine dieser Kugeln zu ziehen 1/5 = 20%, da es drei schwarze gibt ist die Chance 3*1/5=3/5=60%“*

*„3:2, 100/5=20, 20*3 = 60, schwarze Kugel 60%, rote Kugel 40%“*

Im ersten Beispiel sieht man die Darstellung als Prozentzahl und als Bruch. Im zweiten Beispiel sieht man die Darstellung als Chance und als Prozentzahl. Bei der Umrechnung der Chance in die Prozentzahl tritt vereinzelt eine falsche Umrechnung auf:

„Es besteht eine Wahrscheinlichkeit von 3:2, dass ich einen schwarzen Ball ziehe. Also bei 66,6%“ (Eingangstest)

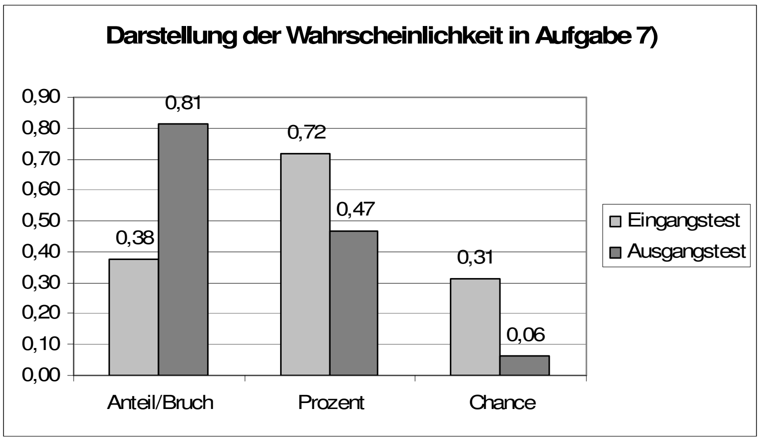


Abb. 7.13: Der relative Anteil der Antworten mit den verschiedenen Darstellungsarten Anteil/Bruch, Prozentzahl und Chance für die Wahrscheinlichkeit bei Aufgabe 7) im Eingangs- und im Ausgangstest. Antworten mit mehr als einer Darstellungsart werden mehrfach gezählt.

Bei Aufgabe 7) tritt im Eingangstest in 38% der Antworten die Darstellung als Anteil bzw. als Bruch auf, in 72% als Prozentzahl und in 31% als Chance. Da in vielen Antworten mehrere Darstellungsarten gewählt werden, ist die Summe der drei Anteile größer als 100%. Im Ausgangstest wird in 81% der Antworten die Darstellung als Anteil/Bruch gewählt, in 47% als Prozentzahl und in 6% als Chance. Sowohl im Eingangs- wie im Ausgangstest gibt es kaum fehlerhafte Antworten.

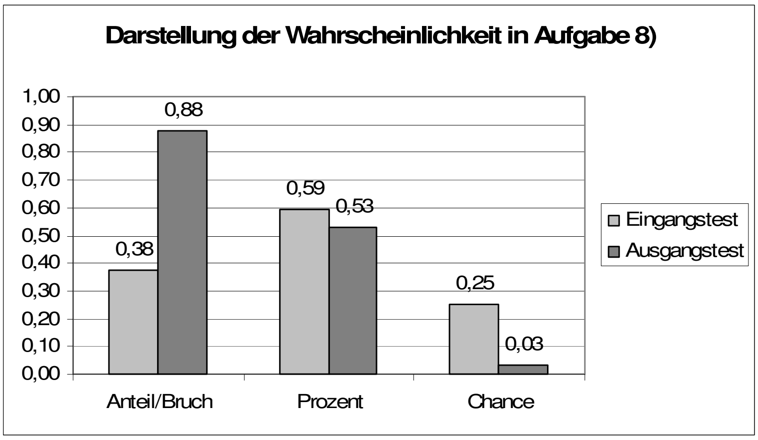


Abb. 7.14: Der relative Anteil der Antworten mit den verschiedenen Darstellungsarten Anteil/Bruch, Prozentzahl und Chance für die Wahrscheinlichkeit bei Aufgabe 8) im Eingangs- und im Ausgangstest. Antworten mit mehr als einer Darstellungsart werden mehrfach gezählt.

Bei Aufgabe 8) tritt im Eingangstest in 38% der Antworten die Darstellung als Anteil bzw. als Bruch auf, in 59% als Prozentzahl und in 25% als Chance. Im Ausgangstest wird in 88% der Antworten die Darstellung als Anteil/Bruch gewählt, in 53% als Prozentzahl und in 3% als Chance.

Es zeigt sich, dass die Darstellung als Chance in Aufgabe 8) überwiegend zu falschen Ergebnissen führt. Statt der korrekten Chance von 4:496 wird in der Mehrzahl der Fälle eine fehlerhafte Chance von 4:500 angegeben.

Betrachtet man im Ausgangstest die Lösungen genauer, so sieht man, dass sowohl in Aufgabe 7) als auch in Aufgabe 8) in etwa einem Drittel der Lösungen der im Unterricht eingeführte Laplace-Formalismus verwendet wird. Dieser tritt auf in Kombination mit der Bruchdarstellung der Wahrscheinlichkeit. Typische Lösungen sehen folgendermaßen aus:

„*S=* $\{S,S,S,R,R\}$ *3s, 2r, Laplace: 2/5=40% Wahrscheinlichkeit, mit der man eine rote Kugel zieht*" (Ausgangstest, Aufgabe 7.)

„S= $\{1,\ldots,500\}$, E= $\{1,2,3,4\}$, $P(E)=\frac{4}{500}=\frac{1}{125}$ " (Ausgangstest, Aufgabe 8.)

Interpretation:

Die durchschnittliche Lösungsquote von Aufgabe 7) ist bereits im Eingangstest mit 80% von 2 möglichen Punkten sehr hoch und steigert sich im Ausgangstest nochmals auf 94% der Punkte. Diese einfache Aufgabe zur Laplace-Wahrscheinlichkeit bereitet den Schülerinnen und Schülern offensichtlich wenige Probleme.

Die etwas schwierigere Aufgabenstellung 8) führt im Eingangstest mit durchschnittlich 64% von 2 möglichen Punkten zu einem schlechteren Ergebnis als Aufgabe 7). Hierzu tragen insbesondere die falschen Lösungen in Verbindung mit der Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Chance bei. Im Ausgangstest ist das Ergebnis mit 89% der Punkte ähnlich gut wie bei Aufgabe 7). Die Verbesserung lässt sich auf die Einführung des Laplace-Formalismus im Simulationsvorkurs zurückführen. Besonders deutlich zeigt sich dies an dem Drittel an Schülerlösungen, bei dem der Laplace-Formalismus explizit aufgeschrieben wird.

Die guten Ergebnisse dieser beiden einfachen Aufgaben zur Laplace-Wahrscheinlichkeit decken sich mit der Analyse der Unterrichtsbeobachtungen bei der Einführung der Laplace-Wahrscheinlichkeit. Der Eingangstest zeigt, dass ein grundlegendes Verständnis für Laplace-Versuche bei den meisten Schülerinnen und Schülern bereits vor Beginn des Simulationsvorkurses vorhanden war. Dies erklärt die problemlose Einführung der Laplace-Wahrscheinlichkeit in der siebten Stunde des beschriebenen Unterrichts (vgl. Kapitel 6.3.3). Die Sicherheit im Umgang mit einfachen Laplace-Experimenten konnte durch den Simulationsvorkurs nochmals erhöht werden.

Sowohl in Aufgabe 7) wie auch in Aufgabe 8) zeigt sich im Eingangstest, dass die Schülerinnen und Schüler vor dem Simulationsvorkurs mit sehr unterschiedlichen Darstellungsarten der Wahrscheinlichkeit gearbeitet haben. Insbesondere der relativ geringe Anteil an Antworten, welche die Bruchdarstellung verwenden (38%), und der für einen Leistungskurs Mathematik in der Jahrgangsstufe 12 relativ hohe Anteil an Antworten, welche die Darstellung als Chance verwenden (ca. 30%), weisen darauf hin, dass das Bild der Schülerinnen und Schüler zum Wahrscheinlichkeitsbegriff kaum von schulischen Vorerfahrungen geprägt ist. Dies bestätigt die Ergebnisse der Befragung zu den schulischen Vorerfahrungen im Eingangstest (vgl. Kapitel 7.2.1).

Im Ausgangstest wandelt sich dieses Bild deutlich: Bei beiden Aufgaben überwiegt nun mit über 80% die Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Anteil bzw. als Bruch, in etwa der Hälfte aller Fälle tritt die Darstellung als Prozentzahl auf.

Das Konzept der Chance für die Darstellung der Wahrscheinlichkeit erweist sich im Eingangstest häufig als Fehlerquelle. Im Anschluss an den Simulationsvorkurs wird dieses Konzept kaum noch verwendet.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 behandelt die experimentelle Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über eine Versuchsreihe. Die Grundlage hierfür ist der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit.

Die Fragestellung im Eingangstest lautet:

Wie kann man beim Werfen einer Reißzwecke die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der die Reißzwecke auf ihren Kopf fällt?

Die Fragestellung im Ausgangstest lautet:

In der Grundschule basteln die Schüler einen Würfel. Wie kann man bei einem solchen selbst gebastelten Würfel die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass eine „6“ geworfen wird?

Der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird im Simulationsvorkurs ausführlich besprochen und bei den Computersimulationen wiederholt verwendet. Das Beispiel der Reißzwecke wird explizit als Gegenbeispiel zur Laplace-Wahrscheinlichkeit behandelt: Im Unterricht wurde diskutiert, dass der Laplace-Ansatz zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit beim Reißzweckenbeispiel nicht geeignet ist. Als Alternative wurde der frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung über das mehrfache Werfen der Reißzwecke vorgeschlagen. Praktisch durchgeführt wurde das Experiment nicht (vgl. Kapitel 6.3).

Da das Reißzweckenbeispiel im Unterricht verwendet wurde, muss im Ausgangstest ein anderes Beispiel herangezogen werden. Hier wird das Beispiel eines in der Grundschule von Schülern selbst gebastelten Würfels verwendet. Da dieses Beispiel durch den Situationskontext schwieriger ist als das Reißzweckenbeispiel, sind die beiden Aufgaben nicht direkt miteinander vergleichbar. Beide Aufgaben werden quantitativ und qualitativ ausgewertet. Insbesondere die quantitativen Ergebnisse können allerdings nicht direkt gegenübergestellt und miteinander verglichen werden.

Das Reißzweckenbeispiel im Eingangstest

Um bei einer Reißzwecke die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ zu bestimmen, kann man eine lange Versuchsreihe durchführen und die relative Häufigkeit für das Auftreten von „Kopf“ nach dem Gesetz der großen Zahl als Schätzwert der Wahrscheinlichkeit benutzen. Physikalische Überlegungen führen bei diesem Beispiel praktisch nicht zum Ziel.

Für die richtige Beantwortung der Frage erhält man zwei Punkte (zur Bepunktung der Antworten vgl. Anhang S. 313). Im Mittel werden 0,84 Punkte erreicht, das entspricht 42% von 2 Punkten.

Wie sehen die Schülerantworten aus?

Im Eingangstest treten die folgenden Antwortkategorien auf:

- Kategorie **F**: Experimentelle Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage des frequentistischen Ansatzes.
- Kategorie **Ph**: Physikalische Argumentation.
- Kategorie **L**: Argumentation über einen falschen Laplace-Ansatz.

Beispiele für die Kategorie **F**:

„Man kann Versuche machen und den prozentualen Anteil der Wahrscheinlichkeit, dass die Reißzwecke auf den Kopf fällt, festhalten. Nach einigen Versuchen kann man den Durchschnitt der Wahrscheinlichkeit errechnen.“

„Ausprobieren!! Durch Werfen und Strichliste führen bestimmen.“

„Mit Experimenten.“

In der ersten Antwort wird zwar der Begriff der Wahrscheinlichkeit zweimal falsch verwendet. Hiervon abgesehen zeigt sich allerdings, dass der experimentelle Zugang verstanden ist. Eine korrigierte Version der Antwort könnte lauten: *Man kann Versuche machen und den prozentualen Anteil dafür festhalten, dass die Reißzwecke auf den Kopf fällt. Nach einigen Versuchen kann man die Wahrscheinlichkeit schätzen.*

Die beiden anderen Antworten verweisen auch auf das Experimentieren, allerdings ist die Erläuterung der Vorgehensweise deutlich kürzer, insbesondere wird nichts zu den nötigen Berechnungen gesagt.

Beispiel für die Kategorie **Ph**:

„Man müsste die Aufliege-Fläche der Reißzwecke berechnen und das Gewicht an verschiedenen Stellen betrachten. Dann kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen.“

In dieser Antwortkategorie wird ein physikalischer Ansatz vorgeschlagen. Obgleich physikalische Überlegungen bei diesem Beispiel praktisch nicht zum Ziel führen, wird bei diesen Antworten kein Zweifel an der Durchführbarkeit der Berechnungen geäußert.

Beispiel für die (inhaltlich falsche) Kategorie **L**:

*„Sie kann nur auf dem Kopf oder woanders landen. 100*0,5=50%“*

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.22 dargestellt. Auch Antworten mit ungenauen oder unvollständigen Formulierungen werden den genannten Begründungskategorien zugeordnet. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest
F	41%
Ph	22%
L	12%
Fehlende oder weitere falsche Begründung	25%

Tab. 7.22: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 9) im Eingangstest.

41% der Schülerinnen und Schüler beschreiben mehr oder weniger ausführlich den frequentistischen Ansatz **F**, 22% geben einen (praktisch nicht durchführbaren) physikalischen Ansatz an, 12% geben einen (falschen) Laplace-Ansatz an.

Das Beispiel des „gebastelten Würfels“ im Ausgangstest

Auch beim Beispiel des gebastelten Würfels lässt sich die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer „Sechs“ durch theoretische Überlegungen nicht genau angeben. Durch Symmetrieüberlegungen kommt man beim idealen Würfel auf eine Wahrscheinlichkeit von 16,7%, diese Wahrscheinlichkeit kann für den von kleinen Kindern gebastelten Würfel allerdings nur als grober Schätzwert angesehen werden. Physikalische Überlegungen führen ebenfalls nicht zum Ziel. Wie bereits bei der Reißzwecke lässt sich die Wahrscheinlichkeit über Versuchsreihen frequentistisch abschätzen.

Für die richtige Beantwortung der Frage erhält man zwei Punkte (zur Bepunktung der Begründungen vgl. Anhang S. 313). Im Mittel werden 1,32 Punkte erreicht, das entspricht 66% von 2 Punkten.

Wie sehen die Schülerantworten aus?

Im Eingangstest treten die folgenden Begründungskategorien auf:

- Kategorie **F**: Experimentelle Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf der Grundlage des frequentistischen Ansatzes.
- Kategorie **S**: Angabe der Wahrscheinlichkeit von 16,7% aufgrund von Symmetrieüberlegungen mit dem Zusatz, dass dieser Wert bei einem selbst gebastelten Würfel eine grobe Näherung darstellt.
- Kategorie **U**: Verweis auf den unfairen Würfel, verbunden mit der Auffassung, dass keine Wahrscheinlichkeit zu ermitteln ist.

Beispiele für die Kategorie **F**:

„Nur durch Ausprobieren, da es sein kann, dass der Würfel nicht absolut gleichmäßig ist, also nicht fair gebaut ist, und so zu einer Zahl mehr neigt.“

„Man müsste mit diesem Würfel viele Würfe machen, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Bei einem selbst gebastelten Würfel kann man davon ausgehen, dass es sich nicht um einen fairen Würfel handelt. Es müssen daher viele Versuche durchgeführt werden, um zu errechnen, wie oft die 6 vorkam und wie groß die Wahrscheinlichkeit ist.“

„Man würfelt einfach 10000mal. Die Anzahl der „6en“ durch 10000 ergibt die Wahrscheinlichkeit – aber genau bestimmen ist unmöglich. Je öfter man etwas macht, desto mehr nähert man sich der echten, wahren Wahrscheinlichkeit.“

Alle drei Antworten geben das Experimentieren und damit den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit als mögliches Vorgehen an. Hierbei erfolgt bei der ersten Antwort keine, bei der zweiten Antwort eine unpräzise (*“viele Würfe“*) und bei der dritten Antwort eine genaue Beschreibung des Vorgehens. Zu den ersten beiden Antworten wird begründet, wieso überhaupt der experimentelle Zugang gewählt werden muss. Dies entspricht dem Vorgehen im Unterricht, wo bei dem Reißzweckenbeispiel auch zunächst über die Laplace-Annahme diskutiert wurde. Bei der dritten Antwort wird die Anwendbarkeit des experimentellen Verfahrens über das Gesetz der großen Zahl begründet. Diese dritte Antwort zeigt ein gutes Verständnis der Anwendung des Gesetzes der großen Zahl bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel für die Kategorie **S**:

„Man kann die Wahrscheinlichkeit nicht genau bestimmen. Trotzdem wird sie in etwa 16,67% betragen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt nur dann 16,67%, wenn jede Seite des Würfels identisch ist. Das wird bei selbst gebastelten Würfeln wohl nicht der Fall sein.“

Bei dieser Antwortkategorie führt die übliche Symmetrieüberlegung beim Würfel zur Wahrscheinlichkeitsangabe von 16,7%. Allerdings wird stets hinzugefügt, dass es sich nur um eine grobe Schätzung handeln kann, da der Würfel selbst gebastelt ist.

Beispiel für die Kategorie **U**:

„Die Wahrscheinlichkeit eine sechs zu würfeln ist nicht vorher zu sagen. Der Würfel ist nicht fair, da Kinder den Würfel höchstwahrscheinlich auf einer Seite zusammen kleben. Dort ist der Würfel schwerer und somit spielen mehrere physikalische Phänomene eine Rolle. Es ist kein Laplace-Versuch.“

Bei dieser Antwortkategorie wird die Auffassung vertreten, dass man keine Wahrscheinlichkeit bestimmen kann, da es sich um einen unfairen Würfel handelt. Die Möglichkeit der experimentellen Wahrscheinlichkeitsbestimmung wird nicht in Betracht gezogen.

Die Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Begründungskategorien ist in Tab. 7.23 dargestellt. Auch Antworten mit ungenauen oder unvollständigen Formulierungen werden den genannten Begründungskategorien zugeordnet. Die Prozentangaben beziehen sich jeweils auf alle 32 Schülerinnen und Schüler.

Kategorie	Eingangstest
F	63%
S	22%
U	12%
Fehlende oder weitere falsche Begründung	3%

Tab. 7.23: Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Begründungskategorien zu Aufgabe 9) im Ausgangstest.

Im Ausgangstest geben in der Antwortkategorie **F** 63% der Schülerinnen und Schüler den experimentellen Zugang auf der Grundlage der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung an. 22% der Schülerinnen und Schüler geben in der Antwortkategorie **S** die Wahrscheinlichkeit von 1/6 als groben Schätzwert an. Die 12% der Schülerinnen und Schüler mit der Antwortkategorie **U** sehen keine Möglichkeit zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Interpretation

Im Eingangstest zeigt sich ein sehr gemischtes Bild: Der frequentistische Zugang wird von 41% der Schülerinnen und Schüler vorgeschlagen. Ferner gibt es 22%, die mit einem physikalischen Ansatz argumentieren, aber keinen konkreten Lösungsweg angeben können. Bei 12% der Schülerinnen und Schüler zeigt sich die Fehlvorstellung, einen Laplace-

Ansatz wählen zu können, bei den übrigen Schülerinnen und Schülern finden sich weitere falsche Antworten oder die Antworten fehlen völlig.

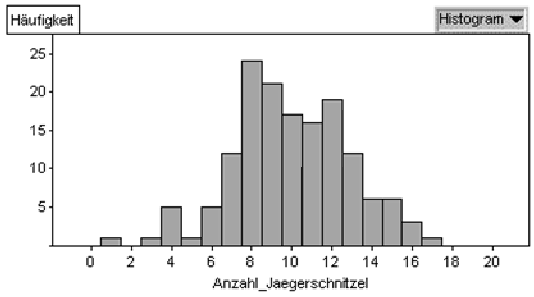
Bei der geänderten Fragestellung im Ausgangstest ist dieses Bild deutlich verändert: Der Anteil der Antworten, die den frequentistischen Zugang vorschlagen, hat sich auf 63% erhöht. In diesen Antworten wird teilweise auf die Unzulässigkeit der Laplace-Annahme hingewiesen, sowie auf das Gesetz der großen Zahl als Grundlage der frequentistischen Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten. Hier zeigt sich deutlich der Einfluss des Unterrichts im Simulationsvorkurs.

22% der Schülerinnen und Schüler geben aufgrund der üblichen Symmetrieüberlegung beim Würfel eine Wahrscheinlichkeit von 1/6 an, weisen aber darauf hin, dass dies nur einen groben Schätzwert darstellen kann. Hierbei handelt es sich um eine sinnvolle Argumentation. Ein Hinweis auf die Möglichkeit des experimentellen Zugangs fehlt allerdings. 12% der Schülerinnen und Schüler geben an, dass man keine Wahrscheinlichkeit bestimmen kann. Diese Schülerinnen und Schüler können den im Unterricht häufig angesprochenen frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit bei diesem Beispiel ebenfalls nicht abrufen. Die Fehlvorstellung der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit über den einfachen Laplace-Ansatz findet sich im Ausgangstest nicht mehr.

Aufgabe 10

10. Zur Verbesserung seiner Planung führt ein Gastwirt Statistik: Er schreibt 150 Werktage lang genau auf, wie viele Jägerschnitzel jeweils pro Tag bestellt werden.

    Man betrachtet, an wie vielen Tagen (d. h. mit welcher Häufigkeit) 0 Jägerschnitzel, 1 Jägerschnitzel, 2 Jägerschnitzel, 3 Jägerschnitzel usw. bestellt werden und trägt diese Häufigkeiten grafisch als Säulen auf. Es ergibt sich die folgende Darstellung:



    a) Was kann man aus der Säule bei $X = 10$ ablesen?
    b) An wie vielen Tagen wurden 6 Jägerschnitzel bestellt?
    c) An wie vielen Tagen wurden 8 bis 10 Jägerschnitzel bestellt?
    d) Wie viele Jägerschnitzel wurden maximal an einem Tag bestellt? Kam dies an mehreren Tagen vor?

    Um sich die Arbeit während der Essenszeit zu erleichtern, überlegt sich der Gastwirt aufgrund der geführten Statistik, dass er demnächst jeden Tag 7 Jägerschnitzel vorbereitet, ohne zu wissen, wie viele dann auch bestellt werden. Falls weniger als 7 Jägerschnitzel bestellt werden, so will er die übrigen Schnitzel als Spende an eine soziale Einrichtung geben.

    e) In wie viel Prozent der 150 im Graphen betrachteten Tage hätte der Gastwirt nach der neuen Regelung zu viele Jägerschnitzel gehabt? Begründen Sie Ihre Antwort.
    f) Wie viele Jägerschnitzel hätte er in den 150 Tagen weggeben müssen, wenn er bereits täglich 7 Jägerschnitzel vorbereitet hätte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die gesamte Aufgabenstellung ist in einen anschaulichen und leicht verständlichen Anwendungskontext eingebettet. In Aufgabenteil a) muss die Säulenhöhe bei $X = 10$ abgelesen und die Bedeutung der Säule im Anwendungskontext verbalisiert werden. Eine mögliche Antwort wäre: „An 17 Tagen werden 10 Jägerschnitzel bestellt.“ In Aufgabenteil b) muss man die Höhe der Säule bei $X = 6$ ablesen. Zur Lösung von Aufgabenteil c) muss man die Höhen der drei Säulen von $X = 8$ bis $X = 10$ ablesen und die Werte addieren. Zur Lösung von Aufgabenteil d) muss man die Säule ablesen, die sich auf der X-Achse ganz rechts befindet.

Die Aufgabenteile e) und f) sind in einen komplexeren Anwendungskontext eingebettet. Diesen Anwendungskontext muss man mit der Interpretation des Histogramms verknüpfen. Zur Lösung von Aufgabenteil e) muss man die Höhen der Säulen betrachten, welche zu $X < 7$ gehören, diese addieren und das Ergebnis in eine Prozentzahl umrechnen. Es ergeben sich 13 Tage, dies entspricht 8,7%. Zur Lösung von Aufgabenteil e) muss man ausrechnen, wie viele Schnitzel an den Tagen mit weniger als sieben verkauften Schnitzeln insgesamt bestellt wurden. Hierfür muss man bei jeder Säule, die zu $X < 7$ gehört, die Anzahl X der bestellten Schnitzel mit der Säulenhöhe als Häufigkeit multiplizieren und diese Werte addieren. Man erhält 59 Jägerschnitzel, die an den 13 Tagen mit weniger als sieben Bestellungen verkauft wurden. Hätte der Wirt an jedem der 13 Tage sieben Jägerschnitzel vorbereitet, so wären dies 91 und damit 32 Jägerschnitzel zu viel gewesen.

Die Aufgabe soll das Verständnis der Schülerinnen und Schüler zum Ablesen und zur Interpretation von Histogrammen testen. Hier wurde ein einfaches Beispiel mit der Klassenbreite 1 gewählt, wie die Histogramme auch im Simulationsvorkurs und im weiteren Kursverlauf der gymnasialen Oberstufe bei der Binomialverteilung verwendet werden.

Im Unterricht des Simulationsvorkurses werden Histogramme bereits in Verbindung mit der Einführungsaufgabe verwendet. Die Schülerinnen und Schüler zeichnen zwei Histogramme zunächst selber (vgl. Kapitel 6.1.1). Im weiteren Verlauf des Simulationsvorkurses tauchen die Histogramme wiederholt bei der grafischen Darstellung der bei den Simulationen erzeugten Häufigkeitsverteilungen auf.

Das Begriffsverständnis im Umgang mit Diagrammen und Graphen lässt sich nach Friel, Curcio et al. (2001, S. 130) in drei Stufen einteilen: „Elementary (extract information from data)“, „Intermediate (find relationships in the data)“, „Overall (move beyond the data)“. In der ersten Stufe geht es allein um das Ablesen von Informationen, in der zweiten Stufe um die Verbindung und die Interpretation der Informationen im Graphen, in der dritten Stufe um Generalisierungen, Zusammenfassungen und Vorhersagen. Ähnliche Einteilungen finden sich auch bei anderen Autoren (vgl. Bertin 1983; Carswell 1992).

Bei der vorgegebenen Testaufgabe liegt das benötigte Begriffsverständnis der Aufgabenstellungen a) bis d) auf der ersten Stufe. Hier müssen jeweils nur einfache Ablesungen gemacht werden. Bei Aufgabenstellung c) müssen im Vergleich zu a) und b) mehrere Säulen abgelesen und die Werte addiert werden. Bei Aufgabenstellung d) muss die richtige Säule gefunden und dann abgelesen werden.

Bei den Aufgabenstellungen e) und f) liegt das Verständnis zum Umgang mit Histogrammen auf der zweiten Stufe. Hier müssen die Informationen aus dem Diagramm über geeignete Berechnungen kombiniert werden. Das Verständnis der Anwendungssituation stellt in allen Aufgabenteilen eine Voraussetzung für den richtigen Umgang mit dem Diagramm dar.

Die Aufgabenstellungen a) bis c) werden jeweils mit einem Punkt bewertet, die Aufgabenstellungen d) bis f) jeweils mit bis zu zwei Punkten. Im Ein- und im Ausgangstest zeigen sich folgende Ergebnisse:

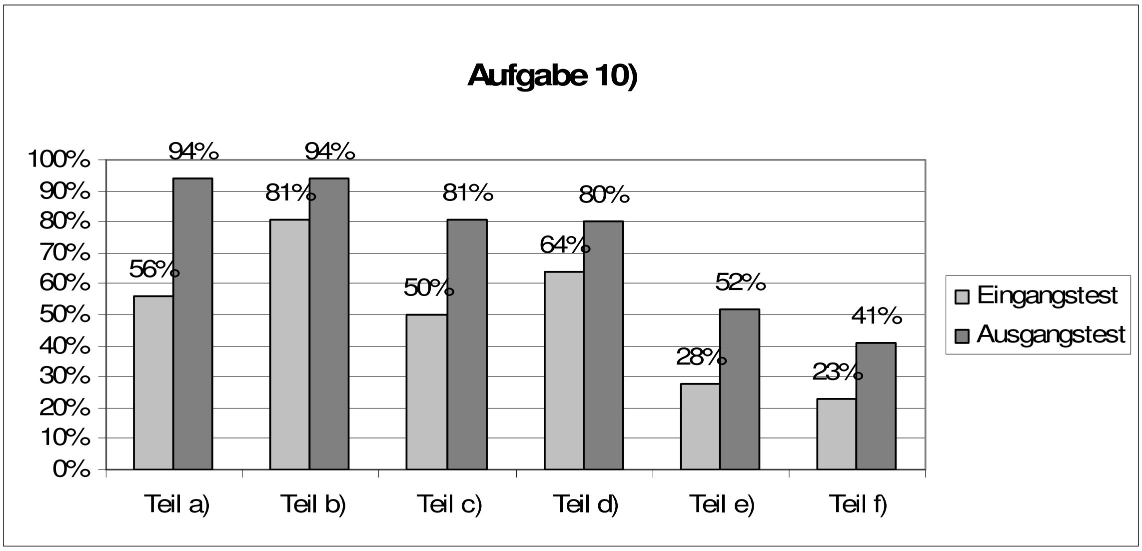


Abb. 7.15: Durchschnittliche Lösungsquote der einzelnen Aufgabenteile von Aufgabe 10) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Im Eingangstest werden in Aufgabenteil a) 56%, in Teil b) 81%, in Teil c) 50%, in Teil d) 64%, in Teil e) 28% und in Teil f) 23% der Punkte erreicht. In allen Aufgabenteilen zusammen werden durchschnittlich 47% der Punkte erreicht. Die geringe Lösungsquote von 56% im einfachen Aufgabenteil a) ist auffällig. Hier zeigen sich bei etwa 20% der Antworten Probleme in der Verbalisierung. So gibt es mehrere Antworten, die nur die Höhe der Säule „17“ angeben, aber nicht, was diese Säule und der Wert bedeuten. In Aufgabenteil d) wird in 20% der Antworten die Anzahl der Tage weggelassen, obwohl die richtige Säule genannt ist. Bei Aufgabenstellung e) wird in etwa 45% der Antworten die korrekte Anzahl der Tage berechnet, in der Mehrzahl dieser Antworten gelingt die Umrechnung in den geforderten prozentualen Anteil allerdings nicht oder fehlt. Zwei Schülerinnen und Schüler vertauschen durchgängig in allen Aufgabenteilen die Bedeutung der beiden Achsen.

Im Ausgangstest werden in Aufgabenteil a) 94%, in Teil b) 94%, in Teil c) 81%, in Teil d) 80%, in Teil e) 52% und in Teil f) 41% der Punkte erreicht. In allen Aufgabenteilen zusammen werden durchschnittlich 69% der Punkte erreicht. Die Verbalisierung in Aufgabenteil a) bereitet keine Probleme mehr. Die fehlende oder falsche Umrechnung der Anzahl der Tage in einen Prozentanteil bei Aufgabenstellung e) tritt nur noch vereinzelt auf. Es gibt noch einen Fall, in dem durchgängig die Bedeutung der Achsen falsch herum interpretiert wird.

Interpretation

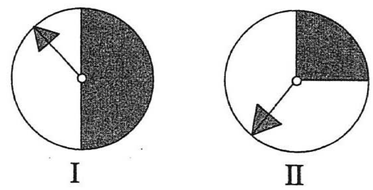
Im Eingangstest zeigt sich ein gemischtes Bild. Die Schülerinnen und Schüler haben lediglich bei Aufgabenstellung b) kaum Probleme. Bei Aufgabenstellung a) gibt es Schwierigkeiten mit der Verbalisierung der Bedeutung eines Histogrammbalkens, bei Aufgabenstellung c) scheint die gleichzeitige Berücksichtigung mehrerer Histogrammbalken Schwierigkeiten zu bereiten und bei Aufgabenstellung d) gelingt es einigen Schülerinnen und Schülern nicht, die Höhe der korrekt gefundenen Säule geeignet zu interpretieren. Die Aufgabenstellungen e) und f) werden erwartungsgemäß schwach bearbeitet.

Im Ausgangstest haben sich die Ergebnisse deutlich verbessert. In allen Aufgabenteilen a) bis d) werden durchschnittlich mindestens 80% der Punkte erreicht. Auch bei den beiden deutlich komplexeren Aufgabenteilen e) und f) liegt die durchschnittlich erreichte Punktzahl nun bei 52% bzw. 41%. Die Probleme bei Aufgabenteil e) mit der Umrechnung in einen Prozentanteil haben deutlich abgenommen.

Den meisten Schülerinnen und Schülern bereitet das einfache Ablesen von Daten aus Histogrammen wie auch die Verbalisierung der inhaltlichen Bedeutung der abgelesenen Daten im Anschluss an den Simulationsvorkurs keine Probleme mehr. Etwa die Hälfte der Schülerinnen und Schüler kommt auch mit den komplexen Aufgabenstellungen e) und f) gut zurecht, deren Schwierigkeiten nicht allein im Umgang mit dem Diagramm sondern auch im Verständnis des Anwendungskontextes liegen.

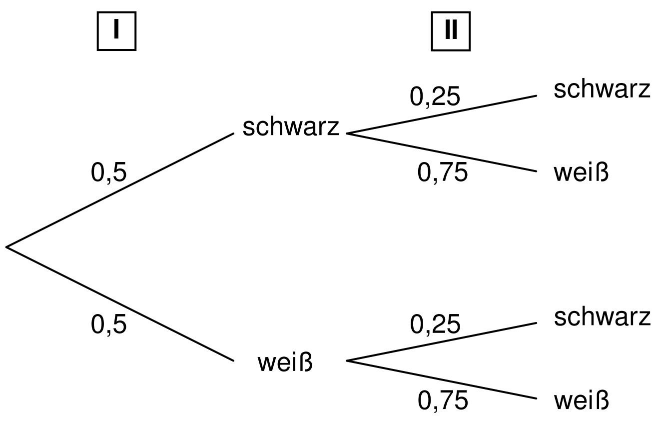
Aufgabe 11

11. Auf der Kirmes wird folgendes Glücksspiel angeboten: Man dreht nacheinander das Glücksrad I und das Glücksrad II. Das Glücksrad I zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% „schwarz", das Glücksrad II zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% „schwarz". Man hat gewonnen, wenn beide Glücksräder auf „schwarz" stehen geblieben sind.



   a) Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.
   b) Während der Kirmes wird das Glücksspiel von insgesamt 2000 Personen gespielt. Was kann man über die Anzahl der Personen sagen, die bei dem Glücksspiel gewonnen haben (mit Begründung)?
   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der bei dem Glücksspiel beide Glücksräder auf der gleichen Farbe stehen bleiben (mit Begründung).

Das Baumdiagramm in Aufgabenteil a) lässt sich mit Wahrscheinlichkeiten oder mit absoluten Häufigkeiten (z. B. ausgehend von den 2000 Personen aus Aufgabenteil b)) angeben. Ein Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten sieht folgendermaßen aus:



Die Wahrscheinlichkeit für „zweimal schwarz" beträgt 0,125. Bei 2000 Personen auf der Kirmes kann man mit ca. 250 Personen rechnen, die bei dem Glücksspiel gewonnen haben. Die Wahrscheinlichkeit für die gleiche Farbe in Aufgabenteil c) beträgt 0,5. Je nach Vorwissen kann man in den Aufgabenteilen b) und c) über absolute Häufigkeiten argumentieren oder Wahrscheinlichkeitsberechnungen in Verbindung mit den Pfadregeln verwenden.

Mit dieser Aufgabe soll das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu mehrstufigen Zufallsversuchen und zu Baumdiagrammen untersucht werden. Baumdiagramme dienen in der Schule als zentrales Visualisierungs- und Strukturierungsmittel mehrstufiger Zufallsversuche, da hier der Ergebnisraum und die Wahrscheinlichkeitsverteilung gleichzeitig dargestellt werden (vgl. Hefendehl-Hebeker 2003, S. 90 ff). Mehrstufige Zufallsversuche und Baumdiagramme werden gemäß dem Lehrplan Mathematik des Landes Hessen bereits in der Sekundarstufe I behandelt (Kultusministerium Hessen 2003).

Im Unterricht des Simulationsvorkurses werden mehrstufige Zufallsversuche und Baumdiagramme nicht behandelt. Im Eingangstest konnten nur 3 Schülerinnen und Schüler ein Baumdiagramm zeichnen. Dieser Aufgabenteil wurde im Ausgangstest nicht mehr verlangt.

Auf die Aufgabenstellungen b) und c) wird für die korrekte Lösung jeweils ein Punkt gegeben. Die Ergebnisse sehen folgendermaßen aus:

	Durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	Durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
11 b) 1 P	59%	66%
11 c) 1 P	28%	38%

Tab. 7.24: Durchschnittliche Lösungsquote in den Aufgabenteilen 11b) und 11c) im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Bei Aufgabenteil b) werden im Eingangstest durchschnittlich 59% und im Ausgangstest durchschnittlich 66% der Punkte erreicht. In Aufgabenteil c) liegen die durchschnittlichen Punktzahlen bei 28% im Eingangstest und bei 38% im Ausgangstest.

Wie sehen typische Schülerlösungen aus?

Die korrekten Lösungen zu **Aufgabenteil b)** teilen sich im Eingangs- wie im Ausgangstest in zwei verschiedene Kategorien: Bei dem ersten Lösungstyp wird zunächst mit Hilfe der Pfadmultiplikationsregel die Wahrscheinlichkeit berechnet und daraus die erwartete Anzahl der Personen, z. B.:

*„Wahrscheinlichkeit, dass man gewinnt: 100*0,5*0,25=12,5%.*
$P = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{2000 \cdot 12{,}5}{100} = 250$ *Menschen müssten gewonnen haben."* (Eingangstest)

„Es werden ca. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ *von 2000 = 250 Personen gewinnen. Die Chance beim ersten Rad ist 50%=1/2. Beim zweiten 25%=1/4. Beide hintereinander müssen auf schwarz stehen, daher* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$*."* (Ausgangstest)

Bei dem zweiten Lösungstyp wird mit absoluten Zahlen gerechnet. Es werden Anteile der absoluten Fallzahlen berechnet, z. B.:

*„0,25*2000=500, 0,5*2000=1000, 0,5*500=250, ca. 12.5% der Teilnehmer können gewinnen."* (Eingangstest)

„Es sind ungefähr 250 Personen, die gewinnen. 1000 bestehen sozusagen das erste Rad, von denen 250 auch das zweite Rad." (Ausgangstest)

Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Vergleich der Anteile der unterschiedlichen Lösungstypen von Aufgabe 11 b) im Eingangs- und im Ausgangstest:

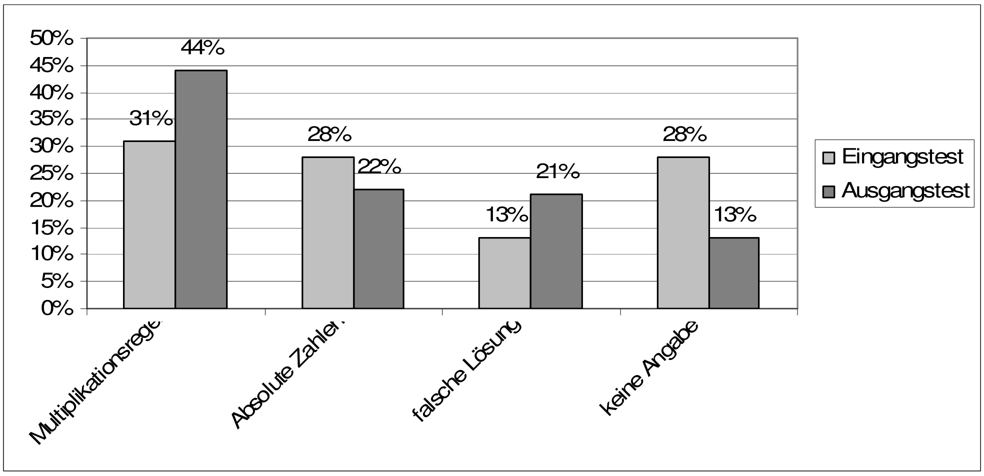


Abb. 7.16: Vergleich der Anteile der unterschiedlichen Lösungstypen von Aufgabe 11 b) im Eingangs- und im Ausgangstest.

Während der Anteil der beiden unterschiedlichen Lösungstypen „Multiplikationsregel" und „absolute Zahlen" im Eingangstest mit jeweils ca. 30% etwa gleich ist, erhöht sich im Ausgangstest der Anteil der Lösungen über die Pfadmultiplikationsregel auf 44%, während der Anteil der Lösungen über absolute Häufigkeiten leicht auf 22% zurück geht. Der Anteil der falschen Lösungen erhöht sich von 13% im Eingangstest auf 21% im Ausgangstest. Dafür reduziert sich der Anteil der Schülerinnen und Schüler ohne Angabe eines Lösungsansatzes von 28% im Eingangstest auf nur noch 13% im Ausgangstest.

Eine genaue inhaltliche Analyse der korrekten Schülerantworten zu Aufgabenteil b) liefert folgende interessante Beobachtung: Während der Erwartungswert von 250 Gewinnern im Eingangstest bei allen korrekten Antworten als feste Zahl angegeben wird, wird wie bei den gezeigten Zitaten im Ausgangstest bei etwa einem Drittel der korrekten Antworten noch der Zusatz „ca." oder „ungefähr" ergänzt, welcher den Erwartungswertcharakter herausstellt.

Die korrekten Lösungen zu **Aufgabenteil c)** werden im Eingangs- wie im Ausgangstest vorwiegend von denjenigen Schülerinnen und Schülern geliefert, welche die Aufgabenstellung b) bereits über die Pfadmultiplikationsregel gelöst haben. Diese verwenden zur Lösung von Aufgabenstellung c) erneut die Pfadmultiplikationsregel kombiniert mit der Pfadadditionsregel. Im Eingangs- wie im Ausgangstest wird Aufgabenteil c) von 28% der Schülerinnen und Schüler über die Pfadregeln gelöst.

Im Ausgangstest gibt es für Aufgabenteil c) zusätzlich zwei Lösungen der folgenden Art, welche über die absoluten Fallzahlen argumentieren:

„Weiß: 2000→1000→750 =37,5%, für Schwarz 12,5%, die Wahrscheinlichkeit, dass man die gleiche Farbe erhält, liegt bei 50%" (Ausgangstest)

Ferner gibt es einen korrekten Laplace-Ansatz:

S={ WW,WW,WW,WS, WW,WW,WW,WS, SW,SW,SW,SS, SW,SW,SW,SS}

E={ WW, SS}

P(E)=8/16=1/2

Von den Schülerinnen und Schülern, die bei c) keine korrekten Ergebnisse haben, haben die meisten diesen Aufgabenteil nicht bearbeitet. Bei den übrigen zeigt sich ein fehlendes Wissen über die Pfadmultiplikationsregel: An Stelle der Multiplikation wird der Mittelwert der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades gebildet, in einzelnen Fällen sogar die Summe bzw. die Differenz.

Interpretation

Die Ergebnisse im Eingangstest zeigen, dass nur knapp ein Drittel aller Schülerinnen und Schüler die Pfadmultiplikations- und -additionsregel kennt. Teilweise werden an Stelle der Multiplikation der beiden Wahrscheinlichkeiten Mittelwerte oder sogar die Summe bzw. die Differenz gebildet. Das Baumdiagramm kann nur von 10% der Schülerinnen und Schüler abgerufen werden. Dies ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Befragung am Anfang des Eingangstests zum Vorwissen aus der Sekundarstufe I. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass mehrstufige Zufallsversuche und Baumdiagramme in der Mittelstufe nur unzureichend behandelt wurden.

Die meisten Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabenstellung b) über die Pfadmultiplikationsregel korrekt lösen können, können diese in Aufgabenteil c) auch kombiniert mit der Pfadadditionsregel anwenden.

Einem Drittel der Schülerinnen und Schüler gelingt im Eingangstest bei Aufgabenteil b) eine Lösung über absolute Häufigkeiten. Im Ausgangstest gibt es sogar zwei Schülerlösungen, welche die Argumentation über absolute Häufigkeiten auch auf den Aufgabenteil c) übertragen können, obwohl dieser Aufgabenteil ausschließlich mit Wahrscheinlichkeiten formuliert ist. Hieran zeigt sich, dass die Verwendung der absoluten Zahlen eine weitere anschauliche Lösungsmöglichkeit dieser Aufgabe eröffnet (vgl. Wassner, Biehler et al. 2007).

Die Ergänzungen einiger Antworten in Aufgabenteil b) des Ausgangstests um den Zusatz „ungefähr“ bzw. „ca.“ sind bemerkenswert. Die Schwankung des tatsächlichen Ergebnisses um den Erwartungswert ist im Rahmen des Simulationsvorkurses wiederholt aufgetreten und führt hier zu einer genaueren Interpretation der berechneten Gewinneranzahl.

Zwischen den mittleren Lösungsquoten des Eingangs- und des Ausgangstests gibt es nur geringe Veränderungen. Dies ist auch so zu erwarten, da mehrstufige Zufallsversuche im Simulationsvorkurs nicht behandelt werden. Die (geringen) Verbesserungen in Aufgabenteil c) lassen sich zurückführen auf einen Laplace-Ansatz und auf zwei Lösungen über die Verwendung der absoluten Häufigkeiten. Eine deutliche Verbesserung der durchschnittlichen Lösungsquoten aufgrund des Wiederholungseffekts der Aufgabe im Ausgangstest lässt sich nicht beobachten. Dies stützt die Annahme, dass die Wiederholung der Fragestellungen im Ausgangstest aufgrund des großen zeitlichen Abstands sowie aufgrund der Einbehaltung der Fragebögen des Eingangstests keinen wesentlichen Einfluss auf das Lösungsverhalten hat (vgl. Kapitel 7.2.4).

Aufgabe 12

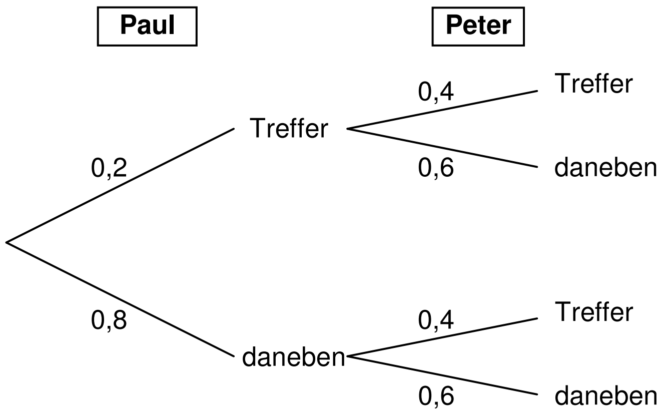
12. Paul und Peter bilden am Schießstand auf der Kirmes ein Team. Paul trifft beim Schießen mit der Wahrscheinlichkeit von 20%, Peter mit der Wahrscheinlichkeit von 40%. Paul schießt zuerst, danach schießt Peter (ohne sich gegenseitig zu beeinflussen).

    a) Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.

    b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der beide treffen.

    c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur einer von beiden trifft.

Ein korrektes Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten sieht folgendermaßen aus:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „beide treffen" beträgt nach der Pfadmultiplikationsregel 0,08. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der beiden trifft, beträgt nach der Pfadmultiplikations- und der Pfadadditionsregel 0,44.

Die Aufgabe 12) testet wie auch Aufgabe 11) das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu mehrstufigen Zufallsversuchen und zu Baumdiagrammen. Sie unterscheidet sich von Aufgabe 11) dadurch, dass Aufgabe 12) ausschließlich mit Wahrscheinlichkeiten und nicht mit absoluten Häufigkeiten formuliert ist. Die Aufgabe wurde im Ausgangstest nicht wiederholt. Veränderungen in Bezug auf mehrstufige Zufallsversuche sind aufgrund des Unterrichts im Simulationsvorkurs kaum zu erwarten und zeigen sich gegebenenfalls in ähnlicher Weise in Aufgabe 11). Interessant ist der Vergleich der Ergebnisse von Aufgabe 11) und Aufgabe 12) im Eingangstest:

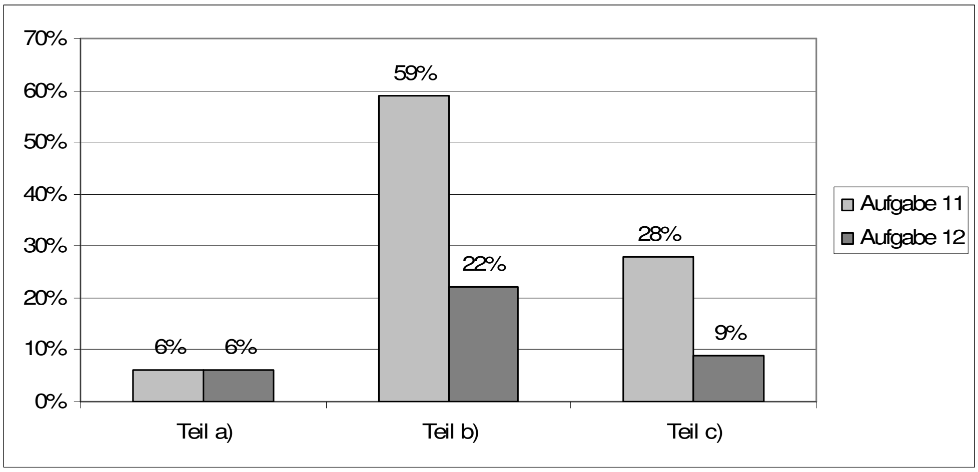


Abb. 7.17: Vergleich der durchschnittlichen Lösungsquoten der Aufgaben 11) und 12) im Eingangstest in Prozent.

Die Ergebnisse bezüglich des Baumdiagramms in Teil a) unterscheiden sich nicht. Bei den beiden rechnerischen Aufgabenteilen b) und c) treten jedoch deutliche Unterschiede auf: Die beiden rechnerischen Aufgabenteile b) und c) sind bei Aufgabe 11) deutlich besser gelöst. Dies kann zum einen an der Veranschaulichung in Aufgabe 11) mit den Zeichnungen von Glücksrädern wie auch an den einfacher gewählten Wahrscheinlichkeiten $p = 0{,}5$ und $p = 0{,}25$ liegen. Wie sich aber bereits bei der genaueren Analyse von Aufgabe 11) gezeigt hat, ist eine Ursache auch in der Formulierung von Aufgabenteil 11b) mit absoluten Häufigkeiten zu suchen. Im Eingangstest erhält man bei Aufgabe 11b) einen erheblichen Anteil an Lösungen, welche über absolute Häufigkeiten argumentieren. Bei den Lösungen zu Aufgabe 12b) gibt es keine Lösungsansätze über absolute Anzahlen. Die

Formulierung der Aufgabenstellung mit absoluten Häufigkeiten trägt offensichtlich zur Veranschaulichung der Situation und damit zur besseren Lösbarkeit von Aufgabe 11) gegenüber Aufgabe 12) bei. Wassner (2005, S. 66) schreibt hierzu: „Generell liegt der schlagende Vorteil der Häufigkeitsdarstellungen im Vergleich zu den Wahrscheinlichkeitsdarstellungen in der Einfachheit und Anschaulichkeit."

7.2.7 Eine quantitative Gesamtauswertung

Für die quantitative Bewertung werden nur die Aufgaben herangezogen, welche sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangstest vertreten sind. Aufgabe 9) wird nicht in die Gesamtauswertung einbezogen, da sich die Fragestellung im Eingangs- und im Ausgangstest deutlich unterscheidet. Von Aufgabe 11) werden die Teile b) und c) des Eingangstests einbezogen. Insgesamt ergeben sich 35 Punkte für die Gesamtauswertung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	Σ
Erreichbare Punkte	5	3	3	3	3	3	2	2	9	2	35

Tab. 7.25: Erreichbare Punkte der sowohl im Eingangs- wie im Ausgangstest vertretenen Aufgaben.

Das Gesamtergebnis

Für den Eingangstest berechnet man einen arithmetischen Mittelwert von 15,5 Punkten (44% der Gesamtpunktzahl), für den Ausgangstest von 22,8 Punkten (65% der Gesamtpunktzahl). Dies ist eine deutliche Steigerung um 21 Prozentpunkte.

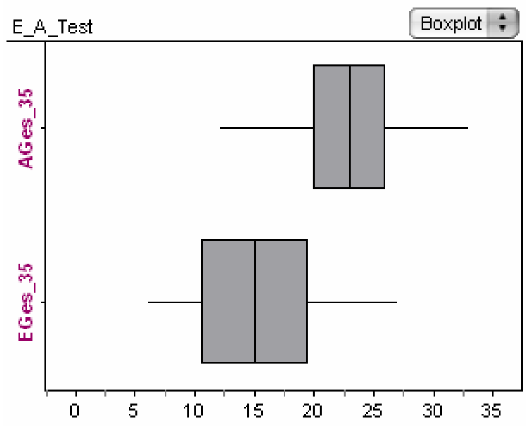


Abb. 7.18: Die Verteilung der erreichten Punkte im Eingangstest (EGes_35) und im Ausgangstest (Ages_35).

Die Punkteverteilung im Eingangs- und im Ausgangstest ist in Abb. 7.18 als Boxplot dargestellt. Hier zeigt sich deutlich die Verschiebung zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangstest: Im Eingangstest erreichen weniger als 25% der Schülerinnen und Schüler Ergebnisse von mindestens 20 Punkten, im Ausgangstest sind dies mindestens 75% der Schülerinnen und Schüler.

In Abb. 7.19 wurde zu jedem Testteilnehmer die Differenz zwischen der erreichten Punktzahl im Eingangs- und im Ausgangstest berechnet und die Verteilung als Boxplot aufgetragen. Bei den mittleren 50% der Schülerinnen und Schüler zeigen sich Steigerungen von 4,5 bis 10,5 Punkten. Der Median liegt bei einer Steigerung von 8 Punkten.

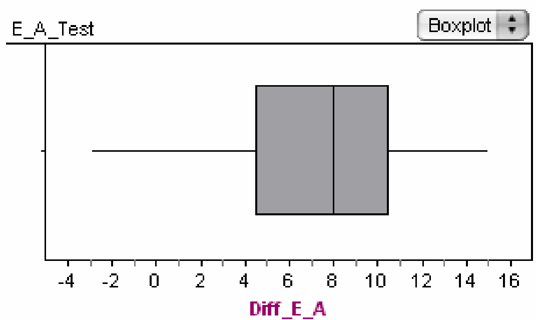


Abb. 7.19: Die Verteilung der Punktedifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangstest (Ages_35–EGes_35).

Beim Vergleich der Punkteverteilungen im Eingangs- und im Ausgangstest in Abb. 7.18 fällt auf, dass sich der Interquartilsabstand von 9 Punkten im Eingangstest zu 6 Punkten im Ausgangstest deutlich verringert hat. Dies bedeutet, dass der Simulationsvorkurs dazu beiträgt, die unterschiedlichen Eingangsvoraussetzungen in Bezug auf das im Test abgefragte Grundlagenwissen zu kompensieren.

In Abb. 7.20 sind die Ergebnisse des Ausgangstests in Abhängigkeit von der Punktzahl des Eingangstests aufgetragen. Jeder Datenpunkt entspricht einem Testteilnehmer. Es ergibt sich eine Korrelation von $r^2 = 0{,}41$. Vier Datenpunkte liegen knapp unter oder auf der Geraden $y = x$. Bei diesen vier Personen tritt keine Verbesserung bzw. eine geringfügige Verschlechterung auf. Bei den anderen 28 Schülerinnen und Schülern sind die Ergebnisse im Ausgangstest verbessert. Die Grafik zeigt, dass die im Eingangstest schwächeren Schülerinnen und Schüler überdurchschnittliche Verbesserungen aufweisen. In Abb. 7.21 ist die Steigerung der Ergebnisse vom Eingangs- zum Ausgangstest für jeden Testteilnehmer in Abhängigkeit von der Punktzahl des Eingangstests angegeben. Auch

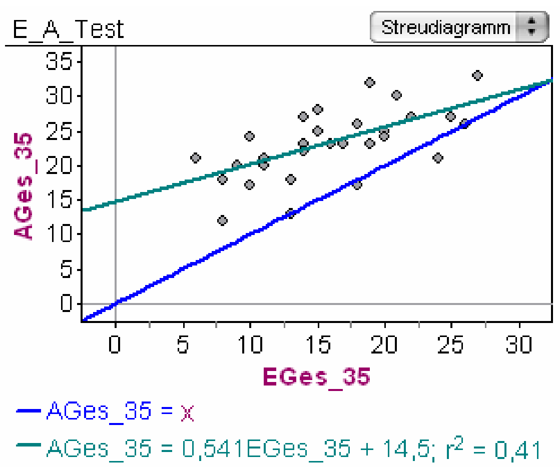


Abb. 7.20: Die Ergebnisse des Ausgangstests (AGes35) in Abhängigkeit von der Punktzahl des Eingangstests (EGes35). Die obere Gerade stellt die Regressionsgerade dar, die untere Gerade hat die Gleichung y = x.

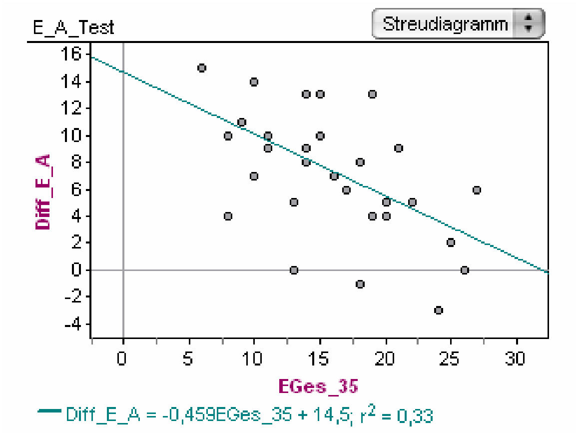


Abb. 7.21: Die Steigerung der Ergebnisse vom Eingangs- zum Ausgangstest (Diff_E_A) in Abhängigkeit von der Punktzahl des Eingangstests (EGes_35).

hier zeigt sich, dass die im Eingangstest schwächeren Schülerinnen und Schüler überdurchschnittliche Steigerungen aufweisen. Dies führt zur bereits erwähnten Verringerung des Interquartilsabstands der Punkteverteilungen vom Eingangstest zum Ausgangstest.

Die unterschiedlichen Eingangsvoraussetzungen, die sich in dem großen Interquartilsabstand der Ergebnisse des Eingangstests zeigen, lassen sich kaum auf die unterrichtlichen Vorerfahrungen in der Sekundarstufe I zurückführen: Die aus der Befragung gewonnene Variable *EVorerfahrung* stellt ein subjektives Maß für die schulischen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Statistik und Stochastik dar (vgl. Kap. 7.2.1). In Abb. 7.22 ist die Gesamtpunktzahl des Eingangstests für jeden Testteilnehmer über der Variablen *EVorerfahrung* aufgetragen. Es zeigt sich, dass mit $r^2 = 0{,}17$ nur eine geringe Korrelation zwischen diesen beiden Variablen besteht.

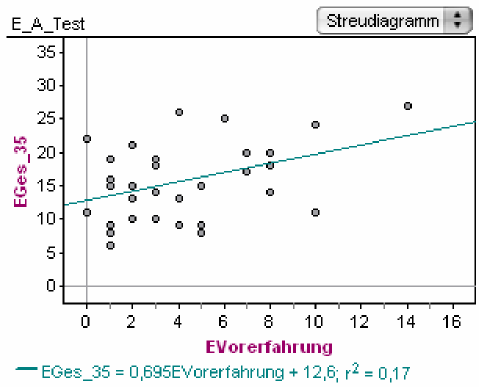


Abb. 7.22: Zusammenhang zwischen der subjektiven Einschätzung der schulischen Vorerfahrungen und dem Ergebnis EGes_35 des Eingangstests.

Die Ergebnisse der einzelnen Testaufgaben

Stellt man die Ergebnisse des Ein- und Ausgangstests nach den einzelnen Testaufgaben getrennt dar, so ergibt sich das folgende Bild. Die Aufgaben sind absteigend nach dem relativen Anteil der im Eingangstest erreichten Punktzahl sortiert.

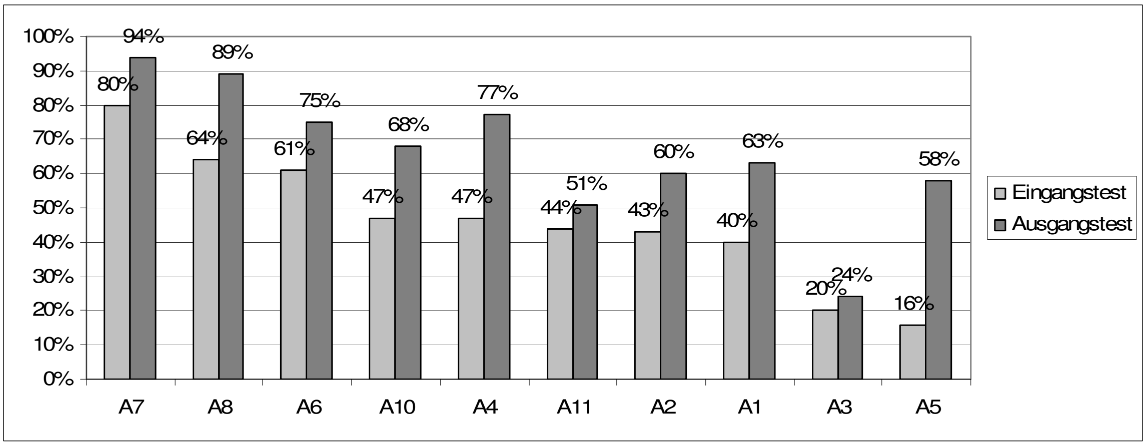


Abb. 7.23: Ergebnisse der einzelnen Aufgaben im Ein- und im Ausgangstest, sortiert nach dem relativen Anteil der im Eingangstest erreichten Punktzahl.

Im Eingangstest am besten gelöst wurden mit 80% und 64% der erreichbaren Punkte die beiden einfachen Aufgaben 7) und 8) zur Laplace-Wahrscheinlichkeit. Mit 61% wurde auch die Aufgabe zur statistischen Streuung überdurchschnittlich gut gelöst. Am schlechtesten gelöst wurde mit nur 16% der erreichbaren Punkte die Krankenhausaufgabe 5). Ähnlich schlecht mit 20% der erreichbaren Punkte liegt die Aufgabe 3) zur Urnenziehung zweier Kugeln. Die übrigen Aufgaben liegen mit 40% bis 47% dazwischen.

Im Ausgangstest haben sich die Ergebnisse aller Aufgaben verbessert. Abgesehen von Aufgabe 3) werden nun in allen anderen Testaufgaben mindestens 50% der Punkte erreicht. Am besten werden mit 94% und 89% erneut die beiden einfachen Aufgaben zur Laplace-Wahrscheinlichkeit gelöst.

Bei Aufgabe 7) werden im Eingangstest im Mittel 80% der möglichen Punkte erreicht, im Ausgangstest 94%. Dies entspricht einer Verbesserung um 14 Prozentpunkte. Berechnet man diese Verbesserungen für alle Aufgaben und trägt dies sortiert nach der Verbesserung auf, so ergibt sich Abb. 7.24:

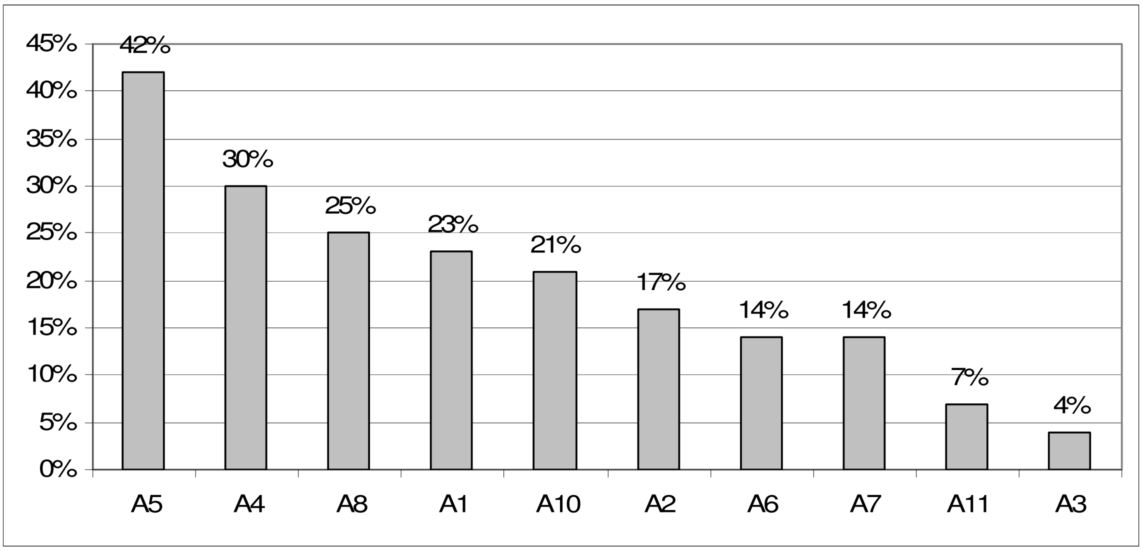


Abb. 7.24: Verbesserung der einzelnen Aufgaben zwischen dem Eingangs- und Ausgangstest in Prozentpunkten, absteigend sortiert.

Die mit 42 Prozentpunkten deutlichste Verbesserung zeigt sich bei der Krankenhausaufgabe 5). Danach folgt mit 30 Prozentpunkten die Aufgabe 4) zum intuitiven Verständnis der Unabhängigkeit zweier aufeinander folgender Ereignisse. Mit 25 Prozentpunkten folgt die Aufgabe 8) zur Laplace-Wahrscheinlichkeit, mit 23 Prozentpunkten die Aufgabe 1) zum Begriff des Zufallsexperiments und mit 21 Prozentpunkten die Aufgabe 10) zur Interpretation der Häufigkeitsverteilung. Diese Aufgaben beziehen sich alle auf Inhalte, die im Simulationsvorkurs – teilweise an anderen Beispielen – direkt angesprochen wurden. Die Ergebnisse von Aufgabe 11) zur Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsversuchen verbessern sich erwartungsgemäß kaum. Diese Inhalte wurden im Simulationsvorkurs nicht behandelt. Die geringe Steigerung der Ergebnisse der Aufgabe 3) zum Ergebnisraum beim zweistufigen Urnenziehen kann auf die fehlende Übung in der Konstruktion geeigneter Laplace-Ergebnisräume in unbekannten Situationen zurückgeführt werden (vgl. Kapitel 7.2.6).

Auswertung nach Aufgabengruppen

Man kann die Aufgaben aufteilen in drei Aufgabengruppen:

- Schulische Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I. Hierzu zählen die Aufgaben 1), 7), 8) und 11) zum Begriff des Zufallsexperiments, zur Laplace-Wahrscheinlichkeit und zu zweistufigen Zufallsversuchen. Insgesamt kann man hier 11 Punkte erreichen.
- Die Aufgaben 2), 3), 4), 5) und 6) zur stochastischen Intuition. Insgesamt kann man hier 15 Punkte erreichen.
- Die Aufgabe 10) zur Interpretation einer Häufigkeitsverteilung. Insgesamt kann man hier 9 Punkte erreichen.

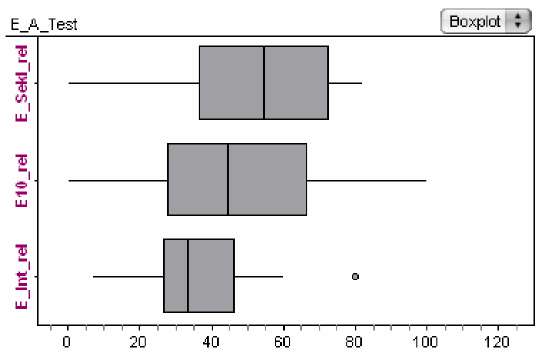


Abb. 7.25: Die Verteilung der erreichten Punkte in den Aufgabengruppen „Intuitives Verständnis“ (E_Int_rel), „Häufigkeitsverteilung“ (E10_rel), „Schulische Aufgaben Sek I“ (E_SekI_rel) im Eingangstest, angegeben als relativer Anteil in Prozent.

In Abb. 7.25 sind die Verteilungen der im Eingangstest in den jeweiligen Aufgabengruppen erreichten Punkte als Boxplot aufgetragen, berechnet als relativer Anteil der jeweils erreichbaren Punkte in Prozent. Die Aufgabentypen zum intuitiven Wissen zeigen die niedrigsten Werte. Es folgen die Aufgabentypen zur Interpretation einer grafisch dargestellten Häufigkeitsverteilung. Am besten wurden die Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I bearbeitet. Dies lässt sich allerdings auf die beiden sehr einfachen Aufgaben zur Laplace-Wahrscheinlichkeit zurückführen.

Die gleiche Tendenz zeigen die arithmetischen Mittelwerte: Bei den Aufgaben zum intuitiven Verständnis werden im Eingangstest im Mittel 37% der Punkte erreicht, bei der Aufgabe zur Häufigkeitsverteilung 47% und bei den Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I sind es 52%.

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
Aufgabentypen „Sek I“	52%	71%
Aufgabe 10 „Interpretation einer Häufigkeitsverteilung“	47%	69%
Aufgabentypen „Intuitives Verständnis“	37%	59%

Tab. 7.26: Durchschnittliche Lösungsquoten der einzelnen Aufgabengruppen im Eingangs- und im Ausgangstest in Prozent.

Betrachtet man die Steigerung der durchschnittlichen Lösungsquoten vom Eingangs- zum Ausgangstest, so sind kaum Unterschiede zwischen den drei Aufgabengruppen feststellbar: Die mittlere Steigerung beträgt bei den Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I 19 Prozentpunkte, in den beiden anderen Aufgabengruppen werden im Mittel 22 Prozentpunkte an Steigerungsrate erreicht.

Bei der Betrachtung der Boxplots zum Eingangstest in Abb. 7.25 fällt auf, dass die Verteilung der Ergebnisse zum intuitiven Verständnis nur eine geringe Streuung aufweist. Die Schülerinnen und Schüler sind sich hier offensichtlich sehr ähnlich. Bei den beiden anderen Aufgabengruppen zeigt sich eine größere Streuung.

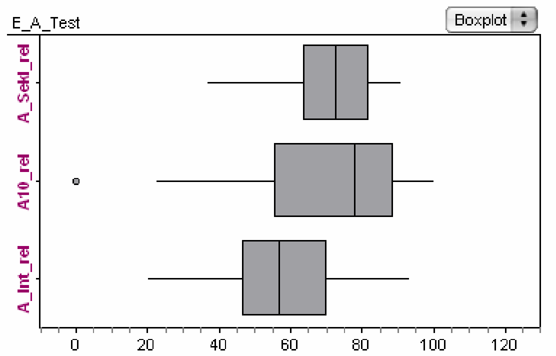


Abb. 7.26: Die Verteilung der erreichten Punkte in den Aufgabengruppen „Intuitives Wissen“ (A_Int_rel), „Häufigkeitsverteilung“ (A10_rel), „Schulische Aufgaben Sek I“ (A_SekI_rel) im Ausgangstest, angegeben als relativer Anteil in Prozent.

Vergleicht man die Boxplots des Ausgangstests in Abb. 7.26 mit denen des Eingangstests, so zeigt sich, dass sich der Interquartilsabstand bei den Aufgaben zum intuitiven Verständnis und bei der Aufgabe zur Interpretation einer Häufigkeitsverteilung nur wenig ändert. Bei den Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I hingegen halbiert sich der Interquartilsabstand. Im Ausgangstest weisen sowohl die Ergebnisse der Aufgaben zum intuitiven Verständnis als auch die Ergebnisse der Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I eine geringe Streuung auf.

Unterscheidet man in der Aufgabengruppe zum intuitiven Verständnis nach den Ankreuzitems (insgesamt 5 erreichbare Punkte) und den zugehörigen Begründungen (insgesamt 10 erreichbare Punkte), so zeigen sich deutliche Unterschiede, die in der folgenden Tabelle abzulesen sind:

	durchschnittliche Lösungsquote Eingangstest	durchschnittliche Lösungsquote Ausgangstest
Ankreuzitems	55%	72%
Begründungen	28%	53%

Tab. 7.27: Durchschnittliche Lösungsquote der erreichten Punkte der Aufgaben zur stochastischen Intuition in Prozent, unterschieden nach Ankreuzitems und nach Begründungen.

Bei den Ankreuzaufgaben werden bereits im Eingangstest im Mittel 55% der Punkte erreicht. Dies liegt noch über dem Durchschnittswert für die schulischen Aufgaben aus der Sekundarstufe I. Wie in Kapitel 7.2.6 beschrieben, sind die Begründungen gerade im Eingangstest teilweise falsch oder fehlen völlig. Dies zeigt sich in dem Wert von 28% der erreichbaren Punkte auf die Begründungen. Nach dem Simulationsvorkurs erhält man bei den Ankreuzitems einen Wert von 72% der erreichbaren Punkte, bei den Begründungen von 53%. Im Mittel treten in beiden Kategorien deutliche Steigerungen auf, bei den Ankreuzitems um 17 Prozentpunkte, bei den Begründungen um 25 Prozentpunkte.

Interpretation

Im Eingangstest erhält man eine breite Streuung der Ergebnisse. Diese Streuung tritt vor allem auf bei den Aufgabengruppen zu Aufgaben aus der Sekundarstufe I und zur Interpretation der Häufigkeitsverteilung. Im Ausgangstest ist diese Streuung der Ergebnisse deutlich geringer. Insbesondere die Streuung der Ergebnisse zu den Aufgabentypen aus der Sekundarstufe I hat sich verringert. Im Simulationsvorkurs wird eine Kompensation der unterschiedlichen Voraussetzungen in Bezug auf das erfragte Grundlagenwissen erreicht. Es zeigt sich, dass die im Eingangstest schwächeren Schülerinnen und Schüler überdurchschnittliche Verbesserungen aufweisen. Dieses Ergebnis bestätigt die Berichte angelsächsischer Studien, die von einem positiven Effekt des Einsatzes der Computertechnologie insbesondere bei schwächeren Lernenden berichten (vgl. Kapitel 2.3.2).

Vergleicht man die Ergebnisse des Eingangs- und des Ausgangstests miteinander, so zeigen sich in allen drei Aufgabengruppen deutliche Verbesserungen. Die Kompetenzen erhöhen sich im Bereich des stochastischen Grundlagenwissens, im Bereich der Interpretation einer Häufigkeitsverteilung sowie im Bereich der stochastischen Intuition. Bei der Interpretation der Ergebnisse muss berücksichtigt werden, dass der Unterrichtszeitraum des Simulationsvorkurses nur bei ca. 3 Wochen liegt.

Besondere Verbesserungen zeigen sich bei den Aufgabentypen, deren Inhalte im Simulationsvorkurs explizit behandelt wurden. Hierzu gehören die Krankenhausaufgabe, die Aufgaben zur Unabhängigkeit der einzelnen Stufen einer Zufallsfolge und die einfachen Aufgaben zur Laplace-Wahrscheinlichkeit. Kaum Effekte lassen sich bei den Aufgaben nachweisen, die im Rahmen der Problemstellungen des Simulationsvorkurses nicht in ähnlicher Weise besprochen wurden. Hierzu zählen die Urnenaufgabe und die Aufgabe zur Wahrscheinlichkeit bei zweistufigen Zufallsversuchen. Erfreulich sind die deutlichen Verbesserungen bei den Begründungsanteilen der Aufgaben zum intuitiven Verständnis. Die Schülerinnen und Schüler erwerben im Simulationsvorkurs die Fähigkeit, stochastische Sachverhalte verbal zu erfassen und zu formulieren. Dies lässt sich mit der Unterrichtsmethodik in Verbindung bringen, welche die Interaktion und die Diskussion zwischen den Schülerinnen und Schülern im Rahmen der Partnerarbeit und im Rahmen von Präsentationen vor der Klasse fördert.

7.3 Die Schülerbefragung

An der Schülerbefragung (siehe Anhang, S. 303) im Anschluss an den Simulationsvorkurs haben aus beiden beteiligten Leistungskursen insgesamt 34 Schülerinnen und Schüler teilgenommen, davon 12 weiblich und 22 männlich. Wegen der geringen Fallzahlen wird auf eine nach Geschlechtern getrennte Auswertung verzichtet. Es wird auch auf eine Trennung zwischen den beiden Kursen verzichtet, da keine ausreichenden Informationen über Unterschiede im Verlauf des Unterrichts vorliegen. Gegebenenfalls auftretende Differenzen zwischen beiden Kursen in der Auswertung können somit nicht interpretiert werden.

Bei dem überwiegenden Teil der Items handelt es sich um geschlossene Items mit einer Ratingskala (z. B. 1 = „sehr gut“, 2 = „gut“, 3 = „mittel“, 4 = „schlecht“, 5 = „sehr schlecht“). Diese lassen sich in Anlehnung an die in Kapitel 5.1 formulierten Untersuchungsfragen folgenden Bereichen zuordnen:

- Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit
- Motivation und Interesse in Verbindung mit dem Softwareeinsatz
- Motivation und Interesse in Verbindung mit den Aufgabenstellungen
- Selbstständiges Lernen und Arbeiten
- Selbsteinschätzung bzgl. der Simulations- und Fathomkompetenz sowie der stochastischen Kompetenz

7.3.1 Die geschlossenen Items

Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit	**Häufigkeiten**						
Item	N	1	2	3	4	5	Mittel Median
5. Die computergestützte Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ hat mir (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig gefallen.	34	10	15	5	3	1	2,2 2
7. In der Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ habe ich (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig gelernt.	34	3	16	11	2	2	2,5 2
8. Man sollte den Anteil der Theorie in dieser Unterrichtseinheit (1) sehr stark (2) stark (3) mittel (4) wenig (5) gar nicht erhöhen.	33	1	6	13	7	6	3,3 3
14. Wir haben uns in dieser Unterrichtseinheit (1) viel mehr (2) mehr (3) genauso (4) weniger (5) viel weniger mit Softwareeinsatz als mit mathematischen Inhalten beschäftigt.	34	10	14	9	1	0	2,0 2

Es zeigt sich eine hohe Akzeptanz des Unterrichtskonzepts. Bei der zentralen Frage 5 geben 74% der Schülerinnen und Schüler an, dass ihnen das Unterrichtskonzept „gut“ oder „sehr gut“ gefallen hat, nur 12% kreuzen „wenig“ oder „sehr wenig“ an. Die Häufigkeitsverteilung dieses zentralen Items ist in Abb. 7.27 grafisch dargestellt.

56% der Schülerinnen und Schüler geben bei Frage 7 an, dass sie „viel“ oder „sehr viel“ gelernt haben, nur 12% sind der Meinung, dass sie „wenig“ oder „sehr wenig“ gelernt haben. Allerdings liegt der Schwerpunkt des Simulationsvorkurses nach Meinung vieler

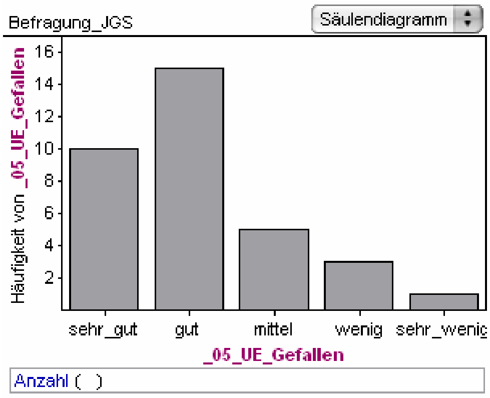


Abb. 7.27: Ergebnisse von Item 5 zum Gesamteindruck der Unterrichtseinheit

Schülerinnen und Schüler auf der Ebene des Softwareeinsatzes: Gemäß Frage 14 sind 71% der Meinung, sich in der Unterrichtseinheit „viel mehr" oder „mehr" mit Softwareeinsatz als mit mathematischen Inhalten beschäftigt zu haben. Gemäß Frage 8 möchten 22% den Anteil an Theorie „stark" oder „sehr stark" erhöhen, 39% der Schülerinnen und Schüler möchten diesen Anteil „mittel" erhöhen, nochmals 39% möchten den Anteil nur „wenig" oder „gar nicht" erhöhen. Bei genauerer Betrachtung kann man den in Frage 14 aufgeworfenen Gegensatz zwischen Softwarenutzung und der Behandlung mathematischer Inhalte nicht aufrecht erhalten, da auch im Rahmen der Softwarenutzung mathematische Inhalte erarbeitet werden. Ferner stellen die Simulationskompetenz und die damit verbundene Modellierungskompetenz wichtige mathematische Kompetenzen dar. Wie man an der hohen Akzeptanz des gesamten Unterrichtskonzepts sieht, scheint die gewählte Art des Softwareeinsatzes in Verbindung mit dem Gesamtkonzept des Simulationsvorkurses bei den meisten Schülerinnen und Schülern positiv aufgenommen zu werden.

Motivation und Interesse in Verbindung mit dem Softwareeinsatz	**Häufigkeiten**						
Item	N	1	2	3	4	5	Mittel Median
9. Das Arbeiten mit der Software FATHOM hat mir (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig Spaß gemacht.	34	5	13	9	4	3	2,6 2
10. Ich hatte (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig Probleme beim Umgang mit der Software FATHOM.	34	0	5	9	14	6	3,6 4
11. Mit den Würfelproblemen bin ich (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) schlecht (5) sehr schlecht zurecht gekommen.	34	14	16	3	0	1	1,8 2
12. Mit dem letzten Arbeitsblatt zu gemischten Simulationen bin ich (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) schlecht (5) sehr schlecht zurecht gekommen.	33	7	13	11	1	1	2,2 2
13. Die ausgeteilten Materialien und Anleitungen zum Umgang mit FATHOM waren (1) sehr hilfreich (2) hilfreich (3) mittel (4) schlecht (5) sehr schlecht.	34	14	11	6	2	1	2,0 2
18. Ich habe mit der Software (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) nichts ausprobiert.	34	1	9	13	7	4	3,1 3

Die Fragen zur Motivation und zum Interesse in Verbindung mit dem Softwareeinsatz werden hier auf die Software Fathom bezogen, da im Unterricht keine andere Software eingesetzt wurde. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen auch Aussagen dazu getroffen werden, wie gut die Software Fathom zur Verwendung im Stochastikunterricht der gymnasialen Oberstufe geeignet ist.

Insgesamt 53% der Schülerinnen und Schüler geben in Frage 9 an, „sehr viel" oder „viel" Spaß beim Arbeiten mit der Software FATHOM gehabt zu haben, 21% geben an, dass ihnen das Arbeiten mit der Software nur „wenig“ oder „sehr wenig“ Spaß gemacht hat. Diese tendenziell positive Auswirkung des Softwareeinsatzes auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler kann man in Zusammenhang sehen mit der positiven Einschätzung zu aufgetretenen Problemen beim Arbeiten mit der Software. In Frage 10 geben 59% an, „wenig“ oder „sehr wenig“ Probleme beim Umgang mit der Software gehabt zu haben, nur 15% hatten „viele“ Probleme, keiner hatte „sehr viele“ Probleme. Betrachtet man genauer, in welchem Abschnitt des Simulationsvorkurses die Probleme aufgetreten sind, so zeigt sich an den Fragen 11 und 12, dass die Schülerinnen und Schüler mit der Bearbeitung der gemischten Aufgaben im Vergleich zu den Würfelaufgaben tendenziell etwas weniger gut zurecht gekommen sind. Bei den Würfelaufgaben geben 88% an, „sehr gut“ oder „gut“ zurecht gekommen zu sein, bei den gemischten Aufgaben sind es 61%. Auch bei den gemischten Aufgaben geben allerdings nur 6% an, große Probleme gehabt zu haben.

Nach Meinung der meisten Schülerinnen und Schüler haben die ausgeteilten Materialien und Anleitungen einen großen Anteil am reibungslosen Erwerb der Simulations- und Fathomkompetenzen: 41% bezeichnen die ausgeteilten Materialien und Anleitungen als „sehr hilfreich“ und 32% als „hilfreich“. Die Häufigkeitsverteilung der Ergebnisse von Frage 13 ist in Abb. 7.28 grafisch aufgetragen.

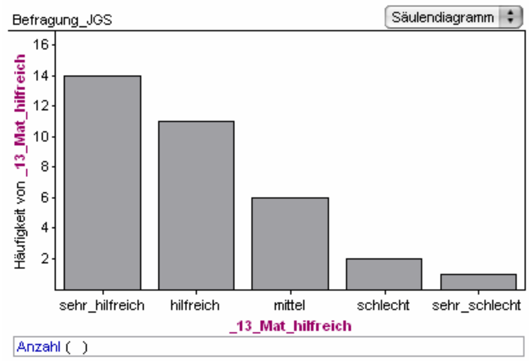


Abb. 7.28: Ergebnisse von Item 13 zu den ausgeteilten Materialien und Anleitungen.

Zum Ausprobieren und zum Experimentieren hat die Software in Verbindung mit den Aufgabenstellungen gemäß Frage 18 tendenziell eher mittelmäßig beigetragen.

Ergänzend zu diesen Schülereinschätzungen zum Umgang mit der Software FATHOM kann man Frage 4 zur wöchentlichen Nutzungsdauer der Software FATHOM zu Hause heranziehen:

4. Meine durchschnittliche wöchentliche Nutzungsdauer der Software FATHOM zu Hause während der Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ betrug: _______ (in Stunden)

Mit dieser Frage soll der Arbeitsaufwand erfasst werden, den die Schülerinnen und Schüler zu Hause für das Erlernen der Werkzeugkompetenzen und der Simulationskompetenzen eingesetzt haben. Zu hohe Zeiten können sich negativ auf die Motivation auswirken. Die Darstellung als Boxplot zeigt, dass die mittleren 50% der Befragten wöchentliche Nutzungsdauern von zwei bis fünf Stunden angeben. Der Maximalwert liegt bei 8 Stunden. Dies sind für die beiden untersuchten Leistungskurse nach Einschätzung des Autors und nach Rückmeldung der unterrichtenden Kollegin aus Kurs B keine unüblichen Hausaufgabenzeiten. Diese Ergebnisse decken sich mit den oben berichteten Aussagen über geringe Probleme in Verbindung mit der Softwarenutzung.

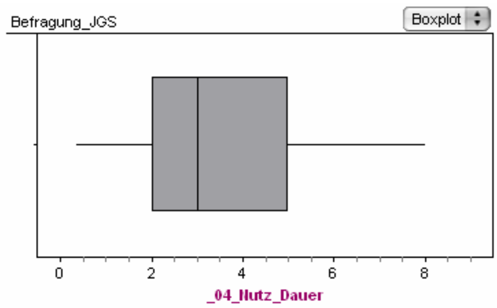


Abb. 7.29: Ergebnisse von Item 4 zur wöchentlichen Nutzungsdauer der Software FATHOM zu Hause.

Motivation und Interesse in Verbindung mit den Aufgabenstellungen	**Häufigkeiten**						
Item	N	1	2	3	4	5	Mittel Median
19. Die Einstiegsaufgabe mit den zwei unterschiedlichen Typen von Multiple-Choice-Tests hat mir (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig gefallen.	33	6	22	5	0	0	2,0 2
21. Durch die Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" ist mir (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig klar geworden, womit sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.	34	13	13	6	2	0	1,9 2
22. Die Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" hat mein Interesse an Wahrscheinlichkeitsrechnung (1) sehr stark (2) stark (3) mittel (4) wenig (5) gar nicht geweckt.	34	4	11	13	4	2	2,7 3

Die für die Motivation wichtige Einstiegsaufgabe in den Simulationsvorkurs wird von den Schülerinnen und Schülern gemäß Frage 19 durchweg als positiv angesehen. Es gibt niemanden, dem diese Aufgabe „wenig“ oder „sehr wenig“ gefallen hat.

Insgesamt glauben die meisten Schülerinnen und Schüler, durch die im Simulationsvorkurs behandelten Themen und Aufgabenstellungen einen guten Einblick in die Stochastik gewonnen zu haben: 76% der Schülerinnen und Schüler geben in Frage 21 an, dass ihnen durch die Unterrichtseinheit „sehr gut“ oder „gut“ klar geworden ist, womit sich Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.

Der Simulationsvorkurs trägt bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler mittelmäßig bis stark zur Förderung des Interesses an der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei: 71% der Schülerinnen und Schüler geben in Frage 22 die beiden Kategorien „mittel“ und „stark“ an.

Selbstständiges Lernen und Arbeiten	**Häufigkeiten**						
Item	N	1	2	3	4	5	Mittel Median
15. In der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" mit FATHOM haben wir (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig selbständig gearbeitet.	34	14	16	4	0	0	1,7 2
16. In den Computerarbeitsphasen habe ich mir (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig von Mitschülern zeigen lassen.	34	0	6	11	12	5	3,5 3,5
17. In den Computerarbeitsphasen habe ich meinen Mitschülern (1) sehr viel (2) viel (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig gezeigt.	34	1	7	18	6	2	3,0 3

Der Anteil des selbstständigen Arbeitens im Simulationsvorkurs wird von den Schülerinnen und Schülern offensichtlich als sehr hoch eingeschätzt. 88% geben an, „sehr viel“ oder „viel“ selbstständig gearbeitet zu haben. Die Häufigkeitsverteilung zu Frage 15 ist in Abb. 7.30 grafisch dargestellt.

Bei den Fragen 16 und 17 nach den von Mitschülern eingeforderten und den selbst geleisteten Hilfestellungen überwiegt bei den Schülerinnen und Schülern der Eindruck, eher mehr Hilfestellungen gegeben als eingefordert zu haben.

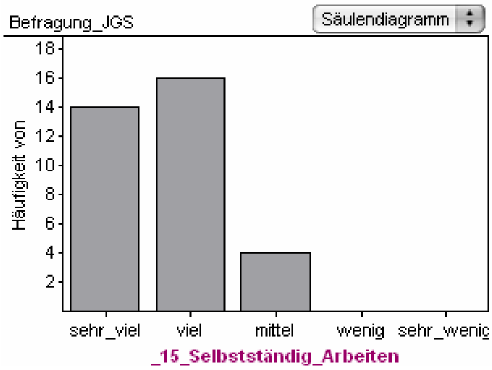


Abb. 7.30: Ergebnisse von Item 15 zur Selbstständigkeit des Arbeitens.

Selbsteinschätzung der Simulations- und stochastischen Kompetenz	Häufigkeiten						
Item	N	1	2	3	4	5	Mittel Median
6. Ich habe die Inhalte der Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ folgendermaßen verstanden: (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig.	34	13	12	7	2	0	1,9 2
20a. Das Simulieren von Zufallsversuchen mit FATHOM habe ich folgendermaßen verstanden: (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig.	34	16	12	5	0	1	1,8 2
20b. Die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten habe ich folgendermaßen verstanden: (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig.	34	13	13	7	0	1	1,9 2
20c. Die Grundbegriffe Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis habe ich folgendermaßen verstanden: (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig.	34	8	13	11	0	2	2,3 2
20d. Den Grundbegriff des Laplace-Experiments habe ich folgendermaßen verstanden: (1) sehr gut (2) gut (3) mittel (4) wenig (5) sehr wenig.	34	13	11	7	2	1	2,0 2

Zur besseren Übersicht sind die Häufigkeiten der Tabelle in Abb. 7.31 nochmals grafisch dargestellt. Die Selbsteinschätzung zum Verständnis der gesamten Unterrichtseinheit ist gemäß Frage 6 deutlich positiv. 74% der Schülerinnen und Schüler geben an, die Unterrichtsinhalte „sehr gut“ oder „gut“ verstanden zu haben, nur 6% geben an, „wenig“ verstanden zu haben. Bei der Differenzierung nach verschiedenen Inhalten in Frage 20 zeigt sich,

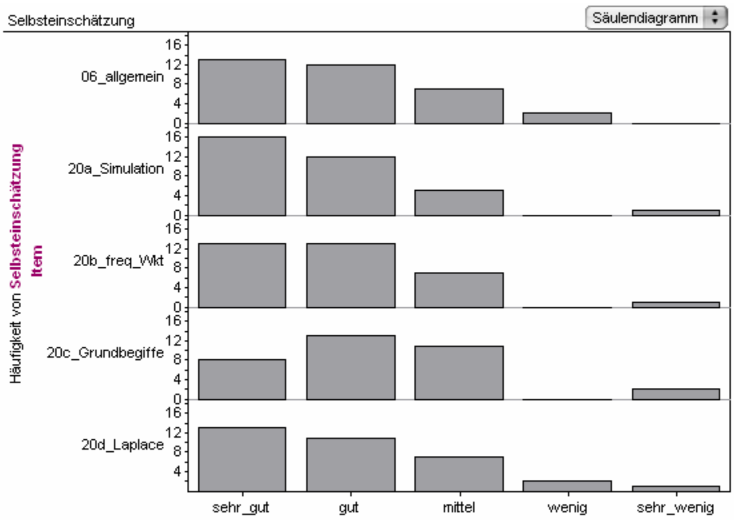


Abb. 7.31: Ergebnisse der Items 6 und 20 zur Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler.

dass das Verständnis für die Simulationen und damit eng verbunden für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten von den Schülerinnen und Schülern besonders hoch eingeschätzt wird. Das Verständnis für die Grundbegriffe Zufallsexperiment, Ergebnisraum und Ereignis wird etwas niedriger eingeschätzt. Bei allen Fragen zur Selbsteinschätzung des Verständnisses geben stets maximal 9% der Schülerinnen und Schüler an, „wenig“ oder „sehr wenig“ verstanden zu haben.

7.3.2 Die offenen Frageitems

Mit den **offenen Items 23 und 24** („An der Unterrichtseinheit hat mir gut gefallen / hat mir nicht gefallen“) hatten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, den Unterricht differenziert zu beurteilen. Die vielfältigen Schülerantworten wurden in Anlehnung an die Untersuchungsfragen in Kapitel 5.1 nach den Kategorien „Inhaltliches Konzept“, „Interesse und Motivation durch den Computereinsatz“, „Interesse und Motivation durch die Aufgabenstellungen“, „Unterrichtsmethodik“ und „Unterrichtsmaterial“ geordnet und gegenübergestellt. In der folgenden Übersicht sind alle konstruktiven Äußerungen der Schülerinnen und Schüler erfasst. Bei mehreren inhaltlich gleichen Antworten wird nur eine Schüleräußerung beispielhaft aufgeführt und in Klammern angegeben, wie oft diese Art von Antwort auftritt.

Kategorie	23. An der Unterrichtseinheit hat mit gut gefallen…	24. An der Unterrichtseinheit hat mit nicht gefallen…
Inhaltliches Konzept	• *„Gelungene Abwechslung zwischen Theorie und Simulation am Computer.“* **(3x)** • *„Die Möglichkeit, sich der Wahrscheinlichkeit mit Versuchen zu nähern und nicht nur mit Theorie, hat mich angesprochen.“* **(2x)** • *„…dass es eine Abwechslung zur Theorie war.“* • *„…dass man viele Experimente in kurzer Zeit durchführen konnte und dadurch anschauliche Beispiele hat.“* • *„Eigentlich alles“* • *„Guter Unterrichtsaufbau“*	• *„Zu wenig Theorie.“* **(3x)** • *„…dass man sich mehr mit dem Programmieren beschäftigt hat als mit dem eigentlichen Thema.“* **(3x)** • *„Ergebnisse ohne mathematische Begründung hinnehmen zu müssen. Die Frage „Warum ist das so?“ schien nicht zu existieren!“* • *„Wenig theoretische Sachen. Besser, wenn man nach dem Simulieren gleich errechnet hätte.“*
Interesse und Motivation durch den Computereinsatz	• *„Die Arbeit mit dem Computer (und FATHOM) hat sehr viel Spaß gemacht.“* **(6x)** • „Das *schnelle Simulieren von Tests (Zeiteinsparung).“* • *„Endlich mal Ausschöpfung der modernen Technik.“* • *„Gut wahrnehmbare grafische Darstellung per PC-Beamer.“*	• *„Ich habe Probleme beim Umgang mit FATHOM. Dadurch habe ich teilweise / zwischenzeitlich den Spaß an der Sache verloren.“* **(2x)** • *„Mir hat nicht gefallen, dass man die Hausaufgaben immer vor dem Computer machen musste.“* **(3x)** • *„…dass keine Rücksicht auf Personen genommen wurde, die keinen PC haben, bzw. nicht mit einem PC zurechtkommen.“*
Interesse und Motivation durch die Aufgabenstellungen	• *„Dass es nicht so theoretisch war und die Aufgaben interessant gestellt wurden.“* **(2x)** • *„Die Aufgaben waren zum größten Teil sehr interessant, man hat öfters mal sehr unerwartete Ergebnisse bekommen.“* • *„Interessant gestellte Aufgaben.“*	
Unterrichtsmethodik	• *„Viel selbstständiges Arbeiten.“* **(3x)** • *„Die selbständige Arbeit und die Möglichkeit, die Versuche zum Teil selber auszuprobieren.“* **(3x)** • *„Das selbstständige Arbeiten am Computer.“* **(2x)**	• *„Dass nicht gemeinsam (gleichzeitig) mit dem Lehrer am PC (FATHOM) gearbeitet wurde.“* **(2x)** • *„Wenige Erklärungen und wenig Betreuung.“* **(2x)** • *„Gruppenarbeit“*

	• *„Die selbstständige Arbeit in kleinen Gruppen.“* **(2x)** • *„…dass meistens in Zweiergruppen gearbeitet wurde, wodurch man besser vorankommt, weil man sich gegenseitig hilft.“* **(2x)** • *„Freie Selbsteinteilung der Zeit.“* • *„Viele Möglichkeiten sich im Unterricht zu melden“*	• *„Zu wenig Gruppenarbeit (bei Gruppenarbeit lernt man am meisten und auch viel mehr als bei Hausaufgaben).“* • *„Es ging alles viel zu schnell. Es wurde allerdings Rücksicht darauf genommen, ob man es verstanden hat oder nicht. Außerdem fand ich es nicht gut, dass man vorne erklären sollte.“*
Unterrichtsmaterial	• *„…dass man viel alleine arbeiten konnte, nachdem man die Anleitung erhalten hat, hat mir sehr gut gefallen. Die vorgegebenen Anleitungen waren auch nötig.“* **(2x)** • *„Auf den Aufgabenblättern war gut erklärt, was man machen muss.“*	• *„Man konnte sehr schlecht etwas herausarbeiten, ohne vorher die Formeln zu kennen, da man selber nie auf die Idee käme, welche es sein könnte.“*

Tab. 7.28: Freie Schülerantworten zu den Items 23 und 24: „An der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" …hat mir gut gefallen. / …hat mir nicht gefallen.“

Zum **inhaltlichen Konzept der Unterrichtseinheit** wird neben allgemeinen positiven Äußerungen mehrfach die Abwechslung zwischen der Theorie und der Simulation am Computer positiv hervorgehoben. Der experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird mehrfach gelobt und als Abwechslung zur Theorie beschrieben. Demgegenüber gibt es ähnlich viele Äußerungen, die einen Mangel an Theorie und ein zu großes Übergewicht des Softwareeinsatzes beklagen. Bei diesen Äußerungen wird der Wunsch nach einer stärkeren inhaltlichen Verknüpfung der Simulationen deutlich.

In Bezug auf das **Interesse und die Motivation durch den Computereinsatz** wird das Arbeiten mit dem Computer und mit der Software FATHOM in mehreren Antworten explizit gelobt. In einzelnen Äußerungen werden ferner die schnelle Erstellung von Simulationen mit der Software sowie die technische Seite mit der Projektion per Beamer positiv erwähnt. Demgegenüber gibt es allerdings auch Schüleräußerungen, welche über Probleme im Umgang mit der Software berichten, die sich negativ auf die Motivation auswirken. Auch die softwareorientierten Hausaufgaben werden mehrfach kritisiert.

Die verwendeten **Aufgabenstellungen** werden als „interessant“ bezeichnet. Hierbei werden die praktische Orientierung der Aufgaben und das Auftreten überraschender Ergebnisse erwähnt. Direkte Kritik an den Aufgabenstellungen gibt es nicht.

Auf der Ebene der **Unterrichtsmethodik** stehen insgesamt 14 positiven Äußerungen nur 7 negative Äußerungen gegenüber. Hierbei werden das selbstständige Arbeiten allgemein, dass selbstständige Arbeiten in Verbindung mit dem Computer bzw. mit der Gruppenarbeit und die Möglichkeit des praktischen Arbeitens jeweils mehrfach positiv hervorgehoben. In Bezug auf die Gruppenarbeit wird der Aspekt der gegenseitigen Unterstützung betont. Die Möglichkeit der freien Zeiteinteilung und die vielfältigen Möglichkeiten zur aktiven Teilnahme an Unterrichtsgesprächen werden positiv erwähnt. Bei den negativen Äußerungen wird über zu wenig Erklärung und zu wenig Betreuung geklagt. Weiter wird vorgeschlagen, Simulationen gemeinsam mit dem Lehrer zu erarbeiten, d. h. die Simulationen parallel zur Erarbeitung am Beamer auch an den Schülerrechnern einzugeben. In einzelnen Äußerungen werden die Gruppenarbeit und das Vortragen der Ergebnisse kritisiert, in einer Äußerung wird allerdings noch mehr Gruppenarbeit eingefordert.

Die **Unterrichtsmaterialien** werden mehrfach als gut verständlich und hilfreich für das selbstständige Arbeiten bezeichnet. In einer Äußerung wird von Schwierigkeiten berichtet, wenn die benötigten Formeln zu den Aufgabenstellungen nicht angegeben sind.

Die **offenen Items 13 und 26** erfragen Verbesserungsvorschläge zu den Materialien und Anleitungen für den Umgang mit FATHOM sowie zur Unterrichtseinheit insgesamt. Da es zwischen diesen beiden Items Überschneidungen gibt, werden die Antworten gemeinsam ausgewertet. Alle konstruktiven Schüleräußerungen wurden analog zum Vorgehen bei den Items 23 und 24 in die dort geschilderten Kategorien eingeteilt. In Tab. 7.29 sind die Schüleräußerungen aufgeführt, für inhaltlich gleiche Beiträge wird nur eine Antwort beispielhaft mit der Anzahl der Nennungen angegeben.

Kategorie	**13. u. 26.: Verbesserungsvorschläge zur Unterrichtseinheit insgesamt sowie zu den Materialien und Anleitungen für den Umgang mit FATHOM**
Inhaltliches Konzept	• *„Theorie – Rechnen – Simulieren - bei jeder Aufgabe!“* **(3x)** • *„Mehr Theorie mit einbringen.“* **(3x)** • *„Ich würde zuerst mit dem theoretischen Teil beginnen, wie z.B. das Klären von Begriffen wie Ereignis, Ergebnis etc. Dies würde meiner Meinung nach wesentlich zum Verständnis beitragen, was wir eigentlich berechnet haben bzw. welche Arbeitsschritte das Programm für uns gemacht hat.“* **(2x)** • *„Mehr Berechnungen mit FATHOM.“* • *„Weniger Theorie.“*
Interesse und Motivation durch den Computereinsatz	• *„Formeln intensiver erläutern.“* **(3x)** • *„Ich hätte gern mehr Befehle kennen gelernt.“* • *„Verschiedene Stochastik-Software verwenden / vergleichen.“*
Interesse und Motivation durch die Aufgabenstellungen	• *„Mehr Aufgaben stellen.“* **(2x)** • *„Auch ein paar komplexere und schwierigere Aufgaben verteilen, damit man auch herausgefordert wird.“*
Unterrichtsmethodik	• *„Vielleicht ein wenig länger, damit man das Gelernte verinnerlicht. Vermehrte Begriffserklärung, verstärktes Eingehen auf eventuell aufkommende Probleme.“* **(3x)** • *„Vielleicht könnte man versuchen, dass was auf den ausgeteilten Blättern stand, zusätzlich gemeinsam am PC (so, dass jeder mitmacht an seinem PC) zu wiederholen, um Praxis zu bekommen.“* **(2x)** • *„Mehr in Gruppen arbeiten, statt per Hausaufgabe, da man dort mehr und besser lernt, da Partner und andere Leute anderer Gruppen einem Fragen stellen.“*
Unterrichtsmaterial	• *„Mehr Erklärungen zu den einzelnen Befehlen & darstellen wo man sie eingibt, nicht nur in Worten.“* **(4x)** • *„Mehr Blätter verteilen, unbedingt ideale Lösungen ausgedruckt austeilen.“* **(2x)** • *„Die Anleitung schemahafter machen, weil es unübersichtlich ist, wenn man für jede Kleinigkeit so viel Text hat.“* • *„Ausführliche Erklärungen.“* • *„Manchmal nicht sehr gut verständlich formuliert.“*

Tab. 7.29: Freie Schülerantworten zu den Items 13 und 26: Verbesserungsvorschläge zur Unterrichtseinheit insgesamt sowie zu den Materialien und Anleitungen für den Umgang mit FATHOM.

Auf der Ebene des **inhaltlichen Konzepts** finden sich in Entsprechung zu den Kritikpunkten aus den Items 23 und 24 mehrere Vorschläge, den Anteil der Theorie im Simulationsvorkurs zu erhöhen, bzw. die Theorie und die Computersimulationen enger zu verknüpfen. Hierzu wird angeregt, jede Aufgabe sowohl über die Simulationen als auch theoretisch zu behandeln. Ferner gibt es den Vorschlag, zuerst mit theoretischen Grundlagen zu beginnen und dann auf dieser Basis die Simulationen mit einzubinden. Allerdings gibt es auch zwei Äußerungen, welche eine Erhöhung des Anteils an Berechnungen mit FATHOM bzw. weniger Theorie fordern.

In Bezug auf die **Motivation und das Interesse durch den Computereinsatz** wird in mehreren Äußerungen vorgeschlagen, die Formeln in FATHOM sorgfältiger einzuführen und intensiver zu erläutern. In einzelnen Schüleräußerungen wird der Bedarf nach einer

Erhöhung des verfügbaren Befehlsumfangs sowie nach der Verwendung unterschiedlicher Statistiksoftware artikuliert.

In Bezug auf die **Motivation und das Interesse aufgrund der Aufgabenstellungen** wird zum einen vorgeschlagen, mehr Aufgaben zu stellen, ferner wird vorgeschlagen, den vorhandenen Aufgabenpool durch weitere anspruchsvolle Aufgaben zu ergänzen.

Auf der Ebene der **Unterrichtsmethodik** gibt es mehrere Schüleräußerungen, die ein langsameres Vorgehen und intensivere Erläuterungen vorschlagen. Hierzu passt die Idee, parallel zur Erarbeitung einer Simulation per Beamer gleichzeitig an den Schülercomputern zu arbeiten. In einer Schüleräußerung wird eine weitere Ausdehnung der Gruppenarbeit gefordert.

In Bezug auf das **Unterrichtsmaterial** und die Anleitungen schlagen mehrere Antworten ausführlichere Erklärungen zur Funktion und zum Einsatz der Formeln in FATHOM vor. Ferner gibt es den Wunsch nach ausgedruckten Musterlösungen zu den Simulationen. In einzelnen Äußerungen wird sowohl der Wunsch nach mehr Ausführlichkeit der Anleitungen wie auch nach einer stärker schematischen Darstellung geäußert.

In **Item 10** werden Beispiele für Probleme im Umgang mit der Software FATHOM erfragt. Die Schülerantworten lassen sich gemäß der in Tab. 7.30 angegebenen Kategorien einteilen. Zu jeder Kategorie sind alle Schülerantworten aufgenommen. Nicht in diese Tabelle aufgenommen wurden acht Schüleräußerungen, welche Probleme im Umgang mit dem Formeleditor schildern sowie vier Schüleräußerungen, welche die englische Sprache der Software beklagen. In der aktuellen deutschen Version 2.03 ist das Sprachproblem behoben, auch die Bedienung des Formeleditors wurde erheblich verbessert, so dass die beiden genannten Problemkategorien nicht mehr relevant sind.

Kategorie	10. Beispiele für Probleme beim Umgang mit der Software FATHOM:
Geeignete Auswahl und Formulierung der Formeln	• *„Befehle waren manchmal unbekannt oder seltsam nachvollziehbar.“* • *„Die Formeln zum Berechnen verschiedener Sachen.“* • *„Wir kannten anfangs einige Befehle nicht.“* • *„Es war schwer für mich, die richtige Formel (z.B. "GanzeZufallszahl") zur passenden Aufgabenstellung zu finden.“* • *„Sich die richtigen Formeln auszudenken, fand ich schwer.“* • *„Richtige Formeln zu finden.“* • *„Nicht gewusst, welche Formel die richtige ist.“* • *„Nicht klar, welchen Befehl ich nehmen sollte.“*
Werkzeugkompetenzen	• *„Ich habe nicht gewusst, wieso "Messgrößen sammeln" nicht anklickbar war.“* • *„Unterscheidung der verschiedenen Tabellen zu Beginn sowie die allgemeine Funktionsweise.“*
Unterscheidung von Merkmalen und Messgrößen	• *„Ich habe nicht gewusst, welche Formel in „Fälle“ und welche in „Messgrößen“ gehört.“* • *„Außerdem war es schwer für mich, „Fälle“ und „Messgrößen“ auseinander zu halten.“*
Aufbau einer Simulation	• *„Ich hatte Probleme mir zu merken, wie man vorgeht.“* • *„Ohne Merkblatt nacheinander die richtigen Schritte zu machen.“*
Verwendung einer Abbruchbedingung	• *„Wann ich die Funktion "Bis zur Bedingung" benutzen muss und wann ich den Versuch einfach 1000 mal wiederholen muss, war nicht einfach.“* • *„Eingabe der Formel bei "Bis zur Bedingung" war zum Beispiel nicht eindeutig.“*

Tab. 7.30: Freie Schülerantworten zu Item 10: Probleme beim Umgang mit der Software FATHOM.

Die Hälfte aller geäußerten Probleme steht in Verbindung mit der geeigneten Auswahl und Formulierung von Formeln. Nur jeweils zwei Äußerungen berichten von Problemen auf der Ebene der Werkzeugkompetenzen und beim prinzipiellen Vorgehen zum Aufbau einer Simulation. Speziell werden jeweils zweimal Schwierigkeiten mit der Verwechselung von Messgrößen und Merkmalen sowie bei der Verwendung einer Abbruchbedingung angegeben.

Dies lässt darauf schließen, dass die Aneignung der Werkzeugkompetenzen sowie des Aufbaus einer Simulation in FATHOM entlang des vierschrittigen Prozessmodells gut funktioniert hat. Nachdem man sich die Werkzeugkompetenzen sowie die Struktur einer Simulation angeeignet hat, stellt die Formelkompetenz offensichtlich das Hauptproblem bei der Erstellung einer Computersimulation dar. Hierzu gehört es zunächst, eine Auswahl geeigneter Formeln zu kennen und syntaktisch verstanden zu haben. Aber auch bei genauer Kenntnis geeigneter Formeln muss eine Auswahl getroffen werden und die Formulierung der Formeln muss an die Problemstellung angepasst werden. Diese Schwierigkeit wird in den letzten fünf aufgeführten Äußerungen zur Auswahl und Formulierung der Formeln beschrieben. Hierbei muss eine Verknüpfung der Formelkompetenz mit der stochastischen Kompetenz geleistet werden. Im Hinblick auf den Erwerb von Modellierungskompetenzen ist dies die gewünschte Anforderungsebene für den Einsatz von Simulationen im Mathematikunterricht: Die Schülerschwierigkeiten sollen nicht auf der Ebene der Werkzeugkompetenzen liegen, sondern auf der Ebene der Modellbildung. Sobald ein flexibler Umgang mit der Software beim Erstellen einer Computersimulation erreicht ist, kann die Verwendung von Simulationen effektiv zur Ausbildung von Modellierungskompetenzen im Stochastikunterricht beitragen.

In **Item 25** wurde gefragt, welche der verwendeten Aufgabenstellungen besonders interessant sind. Hierbei waren auch Mehrfachnennungen möglich. Es gibt insgesamt 41 Nennungen. Die Verteilung auf die einzelnen Aufgabentypen ist in Tab. 7.31 dargestellt:

25. Die folgenden Aufgabenstellungen fand ich besonders interessant.		
Aufgabe	**Anzahl Nennungen**	
Würfelaufgaben allgemein	3	5 (12%)
Würfelprobleme d) und e)	2	
Gemischte Aufgaben allgemein	1	33 (81%)
A Multiple-Choice-Test	0	
A Ferienjob	4	
A Goldmünze	6	
B Urnenziehung	4	
B Münzspiel	4	
C Entenjagd	6	
C Geburtstagsproblem	3	
C Sammelbildproblem	5	
„Glücksspielaufgaben“	3	3 (7%)
insgesamt	41	41

Tab. 7.31: Die Verteilung der insgesamt 41 Nennungen in den freien Schülerantworten zu Item 24: „Die folgenden Aufgabenstellungen fand ich besonders interessant.“ auf die einzelnen Aufgabentypen.

Von den insgesamt 41 Nennungen entfallen 5 Nennungen, d. h. 12%, auf die Würfelaufgaben. Hiervon geben drei Nennungen allgemein „Würfelaufgaben“ an, zweimal werden die Würfelaufgaben d) und e) explizit genannt. Es zeigt sich, dass die Würfelaufgaben in der vorliegenden Form nur bei wenigen Schülerinnen und Schülern ein inhaltliches Interesse wecken können.

Die gemischten Aufgaben werden 33mal genannt, dies entspricht 81% der Nennungen. Hierbei muss noch beachtet werden, dass es sich bei den gemischten Aufgaben um Auswahlaufgaben handelt, so dass gar nicht jeder jede Aufgabe bearbeitet hat. Abgesehen von der Multiple-Choice-Test-Aufgabe fällt hier keine der Aufgaben heraus. Die Multiple-Choice-Test-Aufgabe mit der engen Anlehnung an die Einstiegsaufgabe soll vor allem den schwachen Schülergruppen mindestens eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung ermöglichen. Sie wurde im Rahmen der Hauptuntersuchung häufig bearbeitet (vgl. Kapitel 6.4.2). Die übrigen gemischten Aufgaben scheinen alle ein inhaltliches Interesse zu wecken.

Drei Nennungen geben allgemein „Glücksspielaufgaben“ an, zusätzlich werden die beiden Glücksspielaufgaben „Urnenziehung“ und Münzspiel“ von Aufgabengruppe B der gemischten Aufgaben insgesamt 8mal genannt. Diese Aufgabentypen scheinen für die Schülerinnen und Schüler besonders motivierend zu sein.

7.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Schülerbefragung

Die Ergebnisse der Schülerbefragung werden hier in Anlehnung an das bisherige Vorgehen nach den Kategorien „Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit“, „Interesse und Motivation durch den Computereinsatz“, „Unterrichtsmaterialien“, „Interesse und Motivation durch die Aufgabenstellungen“ und „Unterrichtsmethodik“ geordnet und zusammengefasst.

Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit

Die Ergebnisse von Item 5 zum Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit zeigen tendenziell eine große Zustimmung. Bei der Frage zur Erhöhung des Theorieanteils in Item 8 gehen die Meinungen allerdings auseinander: 22% wünschen sich eine starke oder sehr starke Erhöhung des Theorieanteils, 39% nur eine geringe oder keine Erhöhung des Theorieanteils. Dieses Bild aus den geschlossenen Items lässt sich anhand der offenen Fragen 23 und 24 zur Beurteilung des gesamten Unterrichtskonzepts präzisieren. Als besondere Stärken des Unterrichtskonzepts werden der Wechsel von Theorie und Simulationen am Computer sowie der experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit mehrfach explizit betont. Ähnlich viele Äußerungen fordern allerdings eine Erhöhung des Theorieanteils. Es gibt auch mehrere Verbesserungsvorschläge, in denen der Wunsch nach einer stärkeren inhaltlichen Verknüpfung der Computersimulationen deutlich wird.

Insgesamt zeigt sich, dass der gewählte experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit von einem großen Teil der Schülerinnen und Schüler positiv aufgenommen wird. Die Lösung von Problemstellungen allein durch die Verwendung von Simulationen ist heute eine anerkannte wissenschaftliche Arbeitsweise. Der Wunsch nach einer Erhöhung des Theorieanteils zeigt, dass ein solches Vorgehen im Mathematikunterricht für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt ist. Es muss betont werden, dass im Rahmen des Softwareeinsatzes über die zugehörigen Simulations- und Modellierungskompetenzen auch wichtige mathematische Kompetenzen erarbeitet werden.

Betrachtet man die geschlossenen Items 6, 7 und 20 zur subjektiven Einschätzung des Lernerfolgs und des Verständnisses, so geben die meisten Schülerinnen und Schüler an, viel gelernt zu haben und die Inhalte gut verstanden zu haben. Es zeigt sich allerdings, dass die Selbsteinschätzung des Verständnisses bei den stochastischen Grundbegriffen Zufallsexperiment, Ergebnisraum und Ereignis sowie bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit etwas schlechter ist als bei den Simulationskompetenzen und dem frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit. Hierin kann ein weiterer Grund für den Wunsch nach einer Erhöhung des Theorieanteils bei einigen Schülerinnen und Schülern liegen. Diese Grundbegriffe werden im vorliegenden Unterrichtskonzept im Simulationsvorkurs eingeführt, aber erst im Anschluss intensiv genutzt und damit gefestigt.

Interesse und Motivation durch den Computereinsatz

Die Auswirkungen des Computereinsatzes auf das Interesse und die Motivation müssen gemäß Item 9 differenziert betrachtet werden: 53% der Schülerinnen und Schüler äußern sich positiv, 21% äußern sich eher negativ. Dieses Bild zeigt sich auch in den offenen Items 23 und 24 zur Beurteilung des gesamten Unterrichtskonzepts: Mehrere Schülerinnen und Schüler geben an, dass der Umgang mit dem Computer und mit der Software Spaß gemacht hat, der Einsatz der modernen Technik wird positiv erwähnt. Andererseits gibt es einige Schülerantworten, welche sich über die Hausaufgaben am Computer beklagen oder von Problemen mit der Software berichten.

Die erfragten Zeiten der häuslichen Arbeit am Computer in Item 4 ergeben keine besonders hohen Werte, so dass anzunehmen ist, dass die ungewohnte Art der Hausaufgaben am Computer zu den genannten Äußerungen geführt hat.

Insgesamt zeigt sich, dass es aus Schülersicht nur wenige Probleme im Umgang mit der Software gibt. 85% der Schülerinnen und Schüler geben in Item 10 an, „mittel“, „wenig“ oder „sehr wenig“ Probleme gehabt zu haben. Auch die sehr positive Selbsteinschätzung der Simulationsfähigkeiten in Item 20a deutet in diese Richtung. Bei der offenen Frage nach aufgetretenen Schwierigkeiten mit der Software in Item 10 zeigt sich, dass die Werkzeugkompetenzen und das prinzipielle Vorgehen beim Aufbau einer Simulation in FATHOM kaum als Probleme genannt werden. Lediglich die Verwechselung von Merkmalen und Messgrößen sowie die Verwendung einer Abbruchbedingung fallen als Schwierigkeiten auf. Die Hauptprobleme liegen im Bereich der Formelkompetenz: Sowohl die Kenntnis und das Verständnis der Formeln als auch die richtige Wahl und der geeignete Einsatz bekannter Formeln im Sinn der Modellierungskompetenz werden hier genannt. In diese Richtung zielen auch die wenigen Verbesserungsvorschläge zur Verwendung der Software FATHOM, welche eine bessere Erläuterung der Formeln wünschen. Die hier geschilderte Schülersicht deckt sich mit den Ergebnissen der Unterrichtsbeobachtungen und der Transkriptanalysen zum Ende des Simulationsvorkurses (vgl. Kapitel 6.4).

Die Unterrichtsmaterialien

Gemäß Item 13 werden die Materialien und Anleitungen zum Umgang mit FATHOM tendenziell sehr positiv beurteilt. Bei den offenen Items 23 und 24 zur Beurteilung des gesamten Unterrichtskonzepts wird der Beitrag der Unterrichtsmaterialien zum selbstständigen Lernen hervorgehoben. Bei dem offenen Frageteil in Item 13 nach Verbesserungsvorschlägen gibt es nur wenige Antworten. Diese knüpfen an die geschilderten Probleme im Umgang mit den Formeln an. Es wird mehrfach vorgeschlagen, die einzelnen Befehle besser zu erklären und zu erläutern, wie man sie geeignet verwendet. Hiefür muss man allerdings das Zusammenspiel der Materialien mit den Erläuterungen während des Unterrichts als Ganzes in den Blick nehmen. Zwei Schülervorschläge fordern Musterlösungen zu allen Aufgaben. Allerdings wurden im Unterricht zu allen gemischten Aufgaben Musterlösungen in elektronischer Form zur Verfügung gestellt. Zu den Würfelaufgaben existieren bereits die Kurzanleitungen.

Interesse und Motivation durch die Aufgabenstellungen

In den beiden offenen Items 23 und 24 zur Beurteilung des gesamten Unterrichtskonzepts werden die Aufgabenstellungen mehrfach als „interessant“ bezeichnet. Positiv werden das Auftreten überraschender Ergebnisse und die praktische Orientierung erwähnt. Betrachtet man die einzelnen Aufgabentypen genauer, so zeigt sich in den Items 19 und 25, dass vor allem die Einstiegsaufgabe mit den zwei unterschiedlichen Multiple-Choice-Tests und die anwendungsorientierten gemischten Aufgaben positiv aufgenommen werden. Die Würfelaufgaben werden von den Schülerinnen und Schülern im Gegensatz zu den gemischten Aufgaben kaum als „interessante Aufgabenstellungen“ genannt.

Die Vielfalt der behandelten Aufgabenstellungen trägt offensichtlich dazu bei, dass die meisten Schülerinnen und Schüler gemäß Item 21 im Anschluss an den Simulationsvorkurs der Meinung sind, einen guten Einblick in die Wahrscheinlichkeitsrechnung bekommen zu haben. Das Interesse an Wahrscheinlichkeitsrechnung wird nach den Ergebnissen von Item 22 tendenziell mittelmäßig bis stark geweckt.

Unterrichtsmethodik

Gemäß Item 15 sind 88% der Schülerinnen und Schüler der Meinung, während des Simulationsvorkurses „viel“ oder „sehr viel“ selbstständig gearbeitet zu haben. Das arithmetische Mittel aller Antworten auf der Ratingskala ergibt bei diesem Item mit 1,7 den geringsten Wert aller geschlossenen Fragestellungen, was bedeutet, dass dies das Item mit der größten Zustimmung ist. Insgesamt wird das Lernen und Arbeiten im Simulationsvorkurs offensichtlich als sehr selbstständig empfunden. Dies wird auch bei den offenen Items 23 und 24 zur Beurteilung des gesamten Unterrichtskonzepts als positiv angesehen: Hier gibt es 14 Schüleräußerungen, welche die Unterrichtsmethodik und insbesondere das selbstständige Arbeiten in Verbindung mit dem Computereinsatz und der Gruppenarbeit positiv bewerten. Dem gegenüber gibt es nur wenige Schüleräußerungen, in denen über eine mangelnde Betreuung und zu wenige Erklärungen geklagt wird. Bei den Verbesserungsvorschlägen werden mehrfach eine Reduzierung des Unterrichtstempos sowie intensivere Besprechungen gefordert. Ferner wird vorgeschlagen, mehr gemeinsam an den Schülerrechnern zu erarbeiten. Hier zeigt sich bei einer Minderheit der Schülerinnen und Schüler der Wunsch nach einer engeren Unterrichtsführung.

8 Fazit und Ausblick

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

In Kapitel 6 wurde der Unterrichtsverlauf des Simulationsvorkurses auf Basis der Unterrichtsprotokolle geschildert und in Zusammenhang mit drei Transkripten von Schülerarbeitsphasen einer Arbeitsgruppe analysiert. In Kapitel 7 wurden die Ergebnisse der Simulationsaufgabe in der notenrelevanten Klausur des vom Autor unterrichteten Kurses, die Ergebnisse des Eingangs- und des Ausgangstests und die Ergebnisse der Schülerbefragung ausführlich geschildert und analysiert. In diesem Abschnitt sollen die zentralen Untersuchungsergebnisse entlang den Untersuchungsfragen aus Kapitel 5.1 zusammengestellt werden. Die Frage nach dem Gesamtkonzept der Unterrichtseinheit auf der Designebene und damit verbunden nach der Eignung der erstellten Materialien soll im nächsten Abschnitt aufgegriffen werden.

Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz

Wie entwickelt sich das Verständnis für das vierschrittige Prozessmodell zur Erstellung einer Computersimulation?

Wie die Unterrichtsbeobachtungen zeigen, kann das Vorgehen zur Erstellung einer Simulation am Einstiegsbeispiel gut demonstriert werden. Die einzelnen Schritte der zunächst händisch durchgeführten Simulation werden auf die Computersimulation übertragen. Der Einstieg über die händische Simulation sorgt dafür, dass das prinzipielle Vorgehen nicht von den ebenfalls neu zu erlernenden Werkzeugkompetenzen und den Formeln in FATHOM überdeckt wird. Bereits nach einem zweiten Beispiel einer Computersimulation kann das vierschrittige Prozessmodell als allgemeines Vorgehen im Unterrichtsgespräch abstrahiert werden. In diesem Zusammenhang wird auch der Simulationsplan eingeführt.

Die weiteren Unterrichtsbeobachtungen und die Analyse der Transkripte zu den Würfelaufgaben a) und b) zeigen allerdings, dass das eigenständige Erarbeiten einer Computersimulation in FATHOM bei den ersten beiden Würfelaufgaben noch große Probleme bereitet. Während die Erstellung des Einzelexperiments als erstem Schritt des Prozessmodells gut funktioniert, gibt es Schwierigkeiten bei der Definition der Messgrößen. Die Schwierigkeiten liegen sowohl auf der Werkzeugebene (Problem der Lokalisierung in Fathom) als auch im begrifflichen Verständnis der Bedeutung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells. Als weiteres Problem bei der Erstellung der ersten eigenständigen Computersimulationen tritt die Unterscheidung zwischen der Wiederholungsanzahl n eines mehrstufigen Zufallsversuchs und der Anzahl N der Simulationsdurchgänge auf („n-N-Verwechselung“). Dieses Problem zeigt sich mehrfach bei der Würfelaufgabe b) zum 60fachen Würfelwurf.

Bereits bei den letzten Würfelaufgaben festigt sich das vierschrittige Vorgehen zur Erstellung einer Computersimulation. Zum Ende des Simulationsvorkurses haben die meisten Schülerinnen und Schüler das vierschrittige Prozessmodell gut verinnerlicht, so dass es als Strukturierungshilfe bei der Erstellung einer Computersimulation dient. Dies zeigt sich in den Untersuchungen zu den gemischten Aufgaben sowie in den Schülerlösungen der Klausuraufgabe. Auch die zugehörigen Simulationspläne spiegeln die deutliche Strukturierung entlang des vierschrittigen Prozessmodells wieder. Das prinzipielle Vorgehen zur Erstellung einer Computersimulation wird somit von fast allen Schülerinnen und Schülern nach kurzer Zeit verstanden und kann als Strukturierungshilfe bei der Erstellung einer Computersimulation mit der Software FATHOM eingesetzt werden.

Wie weit sind die Schülerinnen und Schüler am Ende des Simulationsvorkurses in der Lage, die behandelten FATHOM-Komponenten und -befehle entlang dem vierschrittigen Prozessmodell flexibel zur Erstellung von Computersimulationen einzusetzen?

Wie die Ergebnisse der Simulationsaufgabe in der Klausur zeigen, können die im Simulationsvorkurs erworbenen Simulations- und Fathomkompetenzen geeignet auf neue stochastische Problemstellungen übertragen werden. Die Schülerinnen und Schüler haben zum Ende des Simulationsvorkurses kaum noch Probleme mit den Werkzeugkompetenzen in FATHOM. Die Bedienung der einzelnen Menüpunkte und FATHOM-Komponenten erfolgt in großen Teilen sicher und routiniert. Auch die eingeführten und geübten Formeln werden i. a. gut beherrscht. Dies zeigt sich an der erfolgreichen Bearbeitung der gemischten Aufgaben. Die in der Klausuraufgabe zu beobachtende Vielfalt unterschiedlicher Lösungswege lässt auf einen flexiblen Einsatz der verfügbaren Formeln bei der Erstellung der Computersimulationen schließen. Sehr hilfreich für die erfolgreiche Erstellung der Computersimulationen sind die in den meisten Fällen zu beobachtenden sinnvollen Bezeichnungen der Merkmale, Messgrößen und Kollektionen.

Zum Ende des Simulationsvorkurses stellt die Auswahl und die Formulierung der Formeln und die Auswahl der Auswertungswerkzeuge im Hinblick auf eine geeignete Modellierung der Schritte 2 und 4 des Prozessmodells die Hauptschwierigkeit bei der Erstellung einer Computersimulation dar, nachdem das vierschrittige Prozessmodell verinnerlicht werden konnte und auch die Werkzeugkompetenzen keine Probleme mehr bereiten. Dies zeigt, dass die Hauptanforderungen bei der Erstellung einer Computersimulation zum Ende des Simulationsvorkurses im Bereich einer vertieften Formelkompetenz in Verbindung mit dem stochastisch-inhaltlichen Verständnis der einzelnen Modellierungsschritte liegen.

Die geschilderten Einschätzungen werden auch von den Schülerinnen und Schülern geteilt. In der Schülerbefragung zeigt sich deutlich eine positive Selbsteinschätzung in Bezug auf die Simulations- und Fathomkompetenzen. Bei den geschilderten Problemen werden vor allem Schwierigkeiten im Verständnis oder beim geeigneten Einsatz der Formeln angegeben. Es wird der Wunsch nach ausführlicheren Erklärungen zur Funktionsweise und zum Einsatz der Formeln in FATHOM geäußert. Somit identifizieren auch die Schülerinnen und Schüler die vertiefte Formelkompetenz als eine zentrale Anforderung zur Weiterentwicklung ihrer Simulationskompetenzen.

Bei der Bearbeitung der gemischten Aufgaben zeigen sich bei den Schülerinnen und Schülern hilfreiche Kontrollstrategien: Das Einzelexperiment wird häufig zunächst mehrfach wiederholt und die Ergebnisse werden auf Plausibilität hin untersucht. Diese Überprüfung des Einzelexperiments als erstem Schritt der Simulation zeigt einen verständnisvollen Umgang mit den Computersimulationen.

Die Schülerinnen und Schüler sind zum Ende des Simulationsvorkurses in der Lage, eine große Anzahl stochastischer Problemstellungen auf dem Niveau der im Simulationsvorkurs verwendeten Aufgabentypen über Computersimulationen mit der Software FATHOM zu modellieren und zu lösen. Hierzu tragen die erworbenen Simulations- und Fathomkompetenzen wie auch Kontrollstrategien im Umgang mit Fehlern und bei der Überprüfung des richtigen Vorgehens bei.

Welche Kompetenzen beim Erstellen einer Computersimulation sind besonders schwer zu erlernen?

Nach Angaben der Schülerinnen und Schüler in der Schülerbefragung sind kaum Probleme mit der Software FATHOM aufgetreten. Es werden auch in den offenen Items kaum Probleme geschildert. Diese Einschätzung bezieht sich aber eher auf die Erstellung von Computersimulationen zum Ende des Simulationsvorkurses. In der Analyse des Unterrichtsverlaufs und der Transkripte zu den Schülerarbeitsphasen zeigen sich mehrere Problembereiche beim Erlernen der Simulations- und Fathomkompetenzen:

- Die Messgröße

  Der Umgang mit Messgrößen bereitet zu Beginn des Simulationsvorkurses große Probleme. Die Schwierigkeiten liegen auf drei Ebenen:

  - Auf der Ebene der Werkzeugkompetenz ist es schwierig, das richtige Menü für die Definition der Messgröße zu finden („Lokalisierungsproblem"). Während die Tabelle einer Kollektion dauerhaft sichtbar ist, wird das Menü zur Definition der Messgröße im Info-Fenster der Kollektion nur temporär aufgerufen.
  - Auf der Ebene der Simulationskompetenz ist vielen Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Messgröße im Rahmen des vierschrittigen Prozessmodells nicht klar. Im vorliegenden Unterrichtskonzept werden als Messgrößen vor allem Zufallsgrößen verwendet, d. h. zu einem simulierten Zufallsexperiment muss eine geeignete Zufallsgröße gefunden und als Messgröße definiert werden. Die Werte dieser Messgröße werden dann bei der wiederholten Durchführung der Simulation gesammelt und können ausgewertet werden. Diese Bedeutung der Messgröße ist offensichtlich schwer zu verstehen.
  - Zusätzlich zu diesen beiden für die Messgröße spezifischen Problemen muss auf der Ebene der Formelkompetenz für jede Messgröße eine geeignete Formel gefunden und syntaktisch sowie semantisch korrekt formuliert werden.

  Bereits nach drei oder vier eigenständig erstellten Simulationen und der Erläuterung des Vorgehens im Unterrichtsgespräch können das Lokalisierungsproblem und das Problem der Bedeutung der Messgröße im Rahmen des Prozessmodells deutlich reduziert werden.

- Die Auswertungswerkzeuge

  Die Vielfalt der möglichen Auswertungswerkzeuge mit den Möglichkeiten der formelhaften Auswertung über eine numerische Auswertungstabelle, der Auswertung über eine kategoriale Auswertungstabelle und der grafischen Darstellung wird von den Schülerinnen und Schülern nicht optimal genutzt. In den Transkripten und den Aufgabenbearbeitungen der Klausuraufgabe zeigt sich mehrfach, dass die Verwendung der Auswertungswerkzeuge auch zum Ende des Simulationsvorkurses hin bei den meisten Schülerinnen und Schülern noch verbesserungsfähig ist.

  So werden kategoriale Auswertungstabellen zweckentfremdet, indem sie in Verbindung mit Formeln zur numerischen Auswertung genutzt werden. Ferner werden auch Messgrößen zur Auswertung eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler kommen damit zum richtigen Ergebnis, allerdings wäre in beiden Fällen die numerische Auswertungstabelle geeignet. Als mögliche Ursache für die häufige Verwechselung von kategorialen und numerischen Auswertungstabellen kann man vermuten, dass sich die beiden Tabellentypen auf der Werkzeugebene nur durch das Betätigen der „Shift-Taste" bei der Erstellung der Tabelle unterscheiden.

Ferner zeigt sich, dass die Kombination von mehreren Auswertungswerkzeugen im Sinn einer Kontrolle und Veranschaulichung der Ergebnisse kaum genutzt wird. Die meisten Schülerinnen und Schüler wählen einseitig die numerisch-formelhafte Auswertung. Gerade die Visualisierung der Häufigkeitsverteilung hat jedoch eine wichtige Bedeutung. Über die Betrachtung und Interpretation der grafischen Darstellung der Häufigkeitsverteilung können die mit Hilfe von Formeln gewonnenen Ergebnisse kontrolliert und interpretiert werden. Ferner können auch Ideen zur formelhaften Auswertung angestoßen werden. Als Ursache für die mangelnde Verwendung der grafischen Darstellung kann man vermuten, dass die Visualisierung und die Interpretation der Häufigkeitsverteilung im Unterricht zwar mehrfach demonstriert wurde, aber nie explizit als Metastrategie zur Kontrolle der Ergebnisse eingeführt worden ist.

- Die Formeln

  Es zeigt sich, dass die Wahl des Zufallsgenerators bei der Modellierung des Einzelexperiments in Schritt 1 der Simulation eher unproblematisch ist. Dies erklärt sich durch die Verengung der Auswahl möglicher Zufallsgeneratoren im Unterrichtskonzept des Simulationsvorkurses. Hier werden nur die einfach verständlichen Befehle `ZufallsWahl()` und `GanzeZufallszahl()` eingeführt, welche allerdings bereits die Modellierung einer großen Anzahl stochastischer Problemstellungen ermöglichen.

  Die Hauptschwierigkeiten im Umgang mit Formeln treten auf in den Schritten 2 und 4 einer Simulation bei der Definition der Messgröße und bei der Auswertung der gesammelten Messgrößen. An diesen Stellen müssen die Formeln geeignet ausgewählt und an die Problemstellung angepasst werden. Im beobachteten Unterricht sind Verständnisprobleme mit dem Befehl `AnzVerschiedeneWerte()` aufgetreten. Ferner hat sich der Umgang mit logischen Verknüpfungen und mit dem `Wenn()`-Befehl als schwierig erwiesen. Da die Probleme an den ohnehin schwierigen Schritten der Definition der Messgröße und der Auswertung der Häufigkeitsverteilung auftreten, muss durch eine gute Erläuterung der verwendeten Formeln für eine ausreichende Formelkompetenz gesorgt werden.

  Auch bei einem sehr guten Verständnis der Funktionsweise der Formeln bleibt die richtige Verwendung innerhalb der Simulation schwierig, da die Ebene der Formelkompetenz eng verknüpft ist mit der Modellierungskompetenz zur Erstellung einer Computersimulation. Die Realisierung der einzelnen Modellierungsschritte in Verbindung mit den zur Verfügung stehenden Formeln stellt stets eine kognitive Hürde dar. Über die Anforderungen bei der richtigen Auswahl und Formulierung der Formeln auf den einzelnen Stufen des Prozessmodells trägt die Verwendung von Simulationen entscheidend zur Förderung von Modellierungskompetenzen im Stochastikunterricht bei.

- Verwendung einer Abbruchbedingung

  Bei den Wartezeitaufgaben wird das vierschrittige Vorgehen zur Erstellung einer Computersimulation auf der Softwareebene aufgebrochen. Hier muss bereits für die Modellierung des Einzelexperiments eine Messgröße definiert werden und mit einer Abbruchbedingung beim Sammeln der Messgrößen gearbeitet werden. Damit geht die gefestigte Struktur zur Erstellung einer Simulation auf der Softwareebene verloren. Dieser Aufgabentyp ist im Sinn einer inneren Differenzierung für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler geeignet.

Die Ebene der stochastischen Kompetenz

Welche stochastischen Grundbegriffe und Inhalte können im Rahmen des Simulationsvorkurses erfolgreich vermittelt werden?

Der zentrale Begriff der **Wahrscheinlichkeit** wird im Simulationsvorkurs sowohl über den **frequentistischen Zugang** als auch über den **Laplace-Zugang** erschlossen. Beide Zugänge ergänzen sich gegenseitig. Am Beispiel des Münzwurfs und am Beispiel der Augensumme beim zweifachen Würfeln werden beide Zugänge gegenübergestellt und verglichen. Die problemlose Erarbeitung der Laplace-Wahrscheinlichkeit beim doppelten Würfelwurf im Unterricht wie auch die Ergebnisse der beiden Items 7 und 8 des Ausgangstests zeigen, dass der Laplace-Zugang zur Wahrscheinlichkeit bei einfachen stochastischen Situationen für die Schülerinnen und Schüler kein Problem darstellt.

In Zusammenhang mit dem frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird im Simulationsvorkurs das **Gesetz der großen Zahl** ausführlich behandelt. Durch den ständigen Umgang mit der Stabilisierung der relativen Häufigkeit eines Ereignisses gegen die zugehörige Wahrscheinlichkeit tritt das Gesetz der großen Zahl im Simulationsvorkurs in natürlicher Weise wiederholt in Erscheinung. Das Gesetz der großen Zahl wird am Beispiel des Münzwurfs explizit als Grenzprozess thematisiert. In Verbindung mit der Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung einer Computersimulation wird die Rolle der Wiederholungsanzahl genauer untersucht und in einer „Faustformel“ festgehalten. Bereits beim Einstiegsbeispiel zum Multiple-Choice-Test tritt das Gesetz der großen Zahl in der Form auf, dass bei einer kleineren Anzahl an Versuchsdurchführungen die Schwankung um den Erwartungswert der relativen Häufigkeit größer ist als bei einer großen Anzahl an Versuchsdurchführungen. Diese Behandlung des Gesetzes der großen Zahl als Grenzprozess, das Auftreten bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Simulationen und die Verknüpfung mit dem Problem der Multiple-Choice-Test-Aufgabe führen dazu, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem Gesetz der großen Zahl vertraut werden und dieses flexibel auch auf andere Situationen anwenden können. Die Krankenhausaufgabe (Item 5) zum intuitiven Verständnis des Gesetzes der großen Zahl zeigt die deutlichste Steigerung aller Aufgaben des Ausgangstests im Vergleich zum Eingangstest.

Als weiterer zentraler Begriff wird das **Zufallsexperiment** eingeführt. Wie der Vergleich der Ergebnisse des Eingangs- und des Ausgangstests zeigt, ergeben sich im Anschluss an den Simulationsvorkurs deutliche Verbesserungen des Verständnisses. Insbesondere bei der Definition eines Zufallsexperiments verbessern sich die Ergebnisse. Bei den Beispielen zeigt sich der Einfluss des Simulationsvorkurses darin, dass im Ausgangstest vermehrt alltagsbezogene Zufallsexperimente genannt werden. Dies entspricht dem Konzept des Simulationsvorkurses, schülernahe und anwendungsorientierte Problemstellungen zu verwenden. Allerdings taucht im Kompetenztest häufig die Fehlvorstellung des **Equiprobability-Bias** auf: Der Begriff des Zufallsexperiments wird auf Laplace-Experimente verengt. Diese bekannte Fehlvorstellung kann auch durch die explizite Thematisierung der Reißzwecke als Gegenbeispiel zu einem Laplace-Experiment nicht völlig beseitigt werden. Man kann vermuten, dass sich hier der Einfluss der durchgängigen Verwendung der beiden jeweils auf einem Laplace-Ergebnisraum beruhenden Zufallsgeneratoren `ZufallsWahl()` und `GanzeZufallszahl()` widerspiegelt.

Die **Interpretation der Häufigkeitsverteilungen und der grafischen Darstellungen** tritt im Simulationsvorkurs wiederholt auf und wird dabei geübt und gefestigt. Dies führt gemäß Item 10 des Ausgangstests zu einer deutlichen Kompetenzsteigerung bei der Interpretation grafischer Darstellungen, speziell von Histogrammen.

Probleme zeigen sich in Item 3 des Kompetenztests beim Begriff des **Ergebnisraums**. Die Konstruktion von Laplace-Ergebnisräumen wurde im Simulationsvorkurs nur am Beispiel des zweifachen Würfelns eingeführt und anschließend nicht weiter gefestigt. Dies reicht offensichtlich nicht aus, um die Konstruktion geeigneter Ergebnisräume auch auf unbekannte Situationen übertragen zu können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die theoretischen Grundbegriffe Laplace-Wahrscheinlichkeit und Zufallsexperiment, der Umgang mit Häufigkeitsverteilungen und grafischen Darstellungen sowie insbesondere das Gesetz der großen Zahl im Rahmen des geschilderten Unterrichtskonzepts erfolgreich vermittelt werden können. Probleme zeigen sich beim Begriff des Ergebnisraums sowie bei der Fehlvorstellung des Equiprobability-Bias. Die Konstruktion eines Laplace-Ergebnisraums muss an weiteren Beispielen geübt und gefestigt werden. Der Fehlvorstellung des Equiprobability-Bias muss man über das gesamte Kurshalbjahr wiederholt gegenübertreten.

Welches Verständnis und welche Fehlvorstellungen für die Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten mittels relativer Häufigkeiten zeigen sich im Rahmen des Simulationsvorkurses?

Beim Konzept des Simulationsvorkurses wird die Wahrscheinlichkeit über den frequentistischen Zugang eingeführt. In den ersten Unterrichtsstunden hat sich gezeigt, dass bei einigen Schülerinnen und Schülern bereits ein intuitives Verständnis für das Gesetz der großen Zahl vorhanden war, auf das man bei der händischen Simulation als Lösungsansatz des Multiple-Choice-Test-Problems aufbauen konnte. Dieses intuitive Verständnis für die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit über die relative Häufigkeit bei der mehrfachen Durchführung des Zufallsexperiments wird bei dem gewählten Unterrichtseinstieg benötigt, da man sich in der Situation befindet, dass man eine unbekannte Wahrscheinlichkeit über die relative Häufigkeit schätzen möchte. Mit der Einführung der Software lässt sich die Simulation mehrfach wiederholen und darüber nachweisen, dass die relative Häufigkeit für das Auftreten eines Ereignisses bei einer großen Anzahl N an Simulationsdurchgängen stets etwa denselben Wert annimmt, so dass es Sinn macht, die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit zu wählen.

Dieser frequentistische Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird im Simulationsvorkurs durch die häufige Verwendung der Computersimulationen gefestigt und es werden Faustregeln für die Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzung über Simulationen erarbeitet. Insbesondere wird das Gesetz der großen Zahl explizit als Grenzprozess bei der bekannten Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ des Münzwurfs behandelt. Wegen der zentralen Bedeutung des Gesetzes der großen Zahl werden hier sowohl händische Münzwürfe als auch fertige Lernumgebungen in FATHOM eingesetzt.

Die Schülerinnen und Schüler akzeptieren den experimentellen Zugang zur Wahrscheinlichkeit bereits nach kurzer Zeit. Der experimentelle Zugang wird in der Schülerbefragung mehrfach ausdrücklich begrüßt, die meisten Schülerinnen und Schüler sprechen sich selber ein hohes oder ein sehr hohes Verständnis für den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit zu. Für die hohe Akzeptanz des frequentistischen Zugangs zur Wahrscheinlichkeit sprechen auch die im Eingangs- und im Ausgangstest sowie die im Unterricht mehrfach geäußerten Vorschläge zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Zufallsgeräten über Experimente, z. B. beim Werfen einer Reißzwecke.

Allerdings fällt bei der Analyse der Schülerarbeitsphasen und der Unterrichtsbeobachtungen auf, dass das Problem der Genauigkeit bei der frequentistischen Bestimmung von

Wahrscheinlichkeiten für einen Teil der Schülerinnen und Schüler offenbar von geringer Bedeutung ist. Zumindest auf sprachlicher Ebene wird meistens keine Differenzierung zwischen der Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit vorgenommen. Auch der Aufgabenteil zur Genauigkeitsabschätzung von Simulationsergebnissen in der Klausur wurde nur teilweise bearbeitet. Andererseits findet sich bei den Antwortsätzen zur Angabe der über die Computersimulation bestimmten Wahrscheinlichkeit in der Klausur mehrfach der Zusatz „ungefähr" bzw. „circa" und damit ein Hinweis auf den Schätzcharakter des frequentistischen Zugangs. Insbesondere in Item 6 des Ausgangstests zur statistischen Streuung werden auch mehrfach die Faustformeln erwähnt und die Streuung wird in Verbindung zur Größe der Stichprobe gesetzt. Man kann daher davon ausgehen, dass das Problem der Genauigkeitsschätzung bei den meisten Schülerinnen und Schülern eher ein sprachliches Problem als ein Verständnisdefizit ist.

Insgesamt zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler den frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit akzeptieren und zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Computersimulationen verinnerlicht haben. Ein vertieftes Verständnis dieses Zugangs im Zusammenhang mit einer Problematisierung der Genauigkeit scheint bei einem Teil der Schülerinnen und Schüler nicht erreicht worden zu sein.

Wie weit können im Rahmen des Simulationsvorkurses Modellierungskompetenzen angeregt werden?

Bei der Einstiegsaufgabe sowie bei den Würfelaufgaben liegt das Unterrichtsziel vor allem in der Einführung und Festigung der Simulations- und Fathomkompetenzen.

Bei den Würfelaufgaben ist die Modellierung sehr einfach gewählt, um die selbstständige Erarbeitung weiterer Softwarekompetenzen zu ermöglichen. Die in den Kurzanleitungen vorgegebenen Modellierungsschritte müssen nur verstanden und umgesetzt werden. Allerdings sind eine Reihe von Fragen zur Interpretation der Ergebnisse und der entstehenden Häufigkeitsverteilungen integriert. Bei den ersten beiden Computersimulationen zeigt sich, dass sich die Schülerinnen und Schüler fast ausschließlich mit Software-Problemen beschäftigen. Die Aufgaben werden technisch bearbeitet, eine inhaltliche Interpretation der Ergebnisse findet nicht statt. Bereits bei den letzten beiden Würfelaufgaben treten die Probleme mit den Werkzeugkompetenzen in den Hintergrund, so dass zunehmend Raum bleibt für die Interpretation der Ergebnisse im Unterrichtsgespräch: Bei Würfelaufgabe d) wurde die Interpretation des Erwartungswerts der Gewinnspielaufgabe besprochen, bei der Wartezeitaufgabe e) wurde die Form der Verteilung beschrieben, interpretiert und als typische Verteilung für Wartezeitaufgaben gekennzeichnet.

Bei den gemischten Aufgaben am Ende des Simulationsvorkurses zeigt sich bei den meisten Schülerinnen und Schülern, dass nicht mehr die Werkzeugkompetenzen im Mittelpunkt stehen, sondern die Strukturierung der Simulation, die geeignete Auswahl und Formulierung von Formeln sowie die Auswertung und die Interpretation der Ergebnisse. Dieses sind alles Kompetenzen auf der Modellierungsebene. Die meisten Simulationspläne erläutern die gewählten Befehle und Strukturen und stellen damit die gewünschte Verbindung zwischen der stochastisch-inhaltlichen Ebene und der Softwareebene her. Auch an den meistens sinnvoll gewählten Bezeichnungen zeigt sich die stochastisch-inhaltliche Reflexion der einzelnen Modellierungsschritte.

Die analysierte Gruppenarbeit zum Geburtstagsproblem ist ein schönes Beispiel, wie durch den Anwendungsbezug der Aufgabe die Interpretation der Ergebnisse angeregt werden kann: Die beiden betrachteten Schülerinnen vergleichen ihre Ergebnisse mit ihren

Erfahrungen aus dem Alltag. Diese Kontrollstrategie zeigt ihnen, dass die ersten Ergebnisse aufgrund der unpassenden Größenordnung falsch sein müssen. Auch das erstaunliche richtige Endergebnis regt zu intensiven Diskussionen an und fordert die Schülerinnen und Schüler zu einem intuitiven Verständnis der Situation heraus.

Die vielfältigen Lösungsansätze bei der Simulationsaufgabe der Klausur zeigen, dass innerhalb der Struktur des vierschrittigen Prozessmodells zur Erstellung einer Computersimulation bei den Schritten 2 und 4 genügend Raum für Modellbildungsüberlegungen vorhanden ist. Mit zunehmender Sicherheit bei den Werkzeugkompetenzen und zunehmender Sicherheit bei der Erstellung einer Computersimulation entlang des vierschrittigen Prozessmodells verlagern sich die Anforderungen auf die geeignete Modellierung einer stochastischen Problemstellung als FATHOM-Simulation.

Wie weit trägt der Simulationsvorkurs zu einem intuitiven Verständnis für stochastische Prozesse und Begriffe bei?

Die Auswirkungen des Simulationsvorkurses auf das intuitive Verständnis für stochastische Prozesse und Begriffe lassen sich nur schwer empirisch nachweisen. Aufgrund der vielfältigen durchgeführten stochastischen Experimente sowohl in händischer Form als auch in Form von Computersimulationen kann man einen positiven Effekt auf das intuitive stochastische Verständnis erwarten. Die Schülerinnen und Schüler haben hierbei Erfahrungen im Umgang und mit der systematischen Beobachtung von Zufallsexperimenten gesammelt.

Die Eignung von stochastischen Experimenten und Computersimulationen zur Unterstützung des intuitiven Verständnisses zeigt sich am Beispiel einer der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl, welche im Unterricht eine spontane Diskussion über die Irregularität von Zufallsfolgen angestoßen hat und anschließend zum Begriff der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen eines mehrfachen Münzwurfs geführt hat.

Die Ergebnisse des Ausgangstests deuten auf positive Auswirkungen hin: Die Items 2 und 4 zum intuitiven Verständnis der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen einer Zufallsfolge zeigen bereits im Eingangstest gute Ergebnisse, die sich im Ausgangstest nochmals deutlich steigern. Insbesondere gehen die Fehlvorstellungen der „Representativeness“ und des „Gesetzes der kleinen Zahl“ deutlich zurück. Hierzu trägt sicherlich die Kombination aus der expliziten Thematisierung des Begriffs der Unabhängigkeit und den gesammelten Erfahrungen im Rahmen realer Experimente und von Computersimulationen bei. Das Item 5 zum intuitiven Verständnis des Gesetzes der großen Zahl bei der Krankenhausaufgabe zeigt eine deutliche Leistungssteigerung. Hierbei handelt es sich um einen anspruchsvollen Transfer. Psychologische Untersuchungen haben gezeigt, dass es Schülerinnen und Schülern schwer fällt, diesen komplexen Typ von Aufgaben intuitiv zu lösen (Kahneman und Tversky 1972; Sedlmeier und Gigerenzer 1997). Auch in Item 6 zur statistischen Streuung zeigt sich der Einfluss des Simulationsvorkurses. Hier wird im Ausgangstest mit den Faustregeln zur Genauigkeit argumentiert.

Im Sinn eines spiralcurricularen Aufbaus des Kurshalbjahres Stochastik sollen bei der Verwendung von Computersimulationen die Begriffe der Zufallsgröße, des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeitsverteilung vorbereitet werden. Die im Verlauf des Simulationsvorkurses zunehmende Sicherheit der Schülerinnen und Schüler beim Umgang mit dem Begriff der Messgröße auf Softwareebene lässt vermuten, dass hiermit auch ein inhaltliches Vorverständnis für den entsprechenden stochastischen Begriff der Zufallsgröße angelegt werden kann. Ebenso kann man davon ausgehen, dass der wiederholte

Umgang und die wiederholte Interpretation der Histogramme der Häufigkeitsverteilungen zu einem inhaltlichen Vorverständnis für den Umgang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen führt.

Über die mehrfache Berechnung von Mittelwerten einer Häufigkeitsverteilung wird die frequentistische Interpretation des Erwartungswerts vorbereitet. Im Unterricht zeigt sich mehrfach ein intuitiver Widerspruch im Denken der Schülerinnen und Schüler, wenn der Mittelwert der Häufigkeitsverteilung bei einer kategorialen Variable ein Dezimalbruch ist. So werden die Mittelwerte der Wartezeiten häufig auf ganze Zahlen aufgerundet. Bei der Verwendung numerischer Merkmale im Rahmen der Gewinnspielaufgaben tritt dieses Problem in natürlicher Weise nicht auf. Auf die frequentistische Interpretation der berechneten Mittelwerte sollte bei zukünftigen Durchführungen des Kurskonzepts großer Wert gelegt werden.

Ebene der Schülereinstellungen – Motivation und Interesse

Welche Einstellung entwickeln die Schülerinnen und Schüler im Verlauf des Simulationsvorkurses in Bezug auf die intensive Verwendung der Software FATHOM zur Erstellung von Computersimulationen?

Betrachtet man die Unterrichtsbeobachtungen, so zeigen sich insgesamt positive Auswirkungen des Softwareeinsatzes auf die Motivation und das Interesse der Schülerinnen und Schüler. Zu Beginn der Unterrichtseinheit ist eine große Neugier auf die Software festzustellen, allerdings gibt es auch einzelne Stimmen, welche einen zusätzlichen Arbeitsaufwand befürchten. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten über den gesamten Zeitraum des Simulationsvorkurses konzentriert und engagiert mit. Insbesondere in den drei Unterrichtsstunden der selbstständigen Schülerarbeitsphase zu den gemischten Aufgaben zeigt sich eine hohe Konzentration bei der Arbeit am Computer. Die in den Präsentationen und den Simulationsplänen sichtbar werdenden guten Ergebnisse dieser Phase bestätigen den positiven Eindruck.

Die Transkriptanalyse der Schülerarbeitsphasen zeigt ebenfalls ein engagiertes Arbeiten am Computer. Die beiden beobachteten Schülerinnen arbeiten sehr hartnäckig und zielorientiert an der Lösung der gestellten Simulationsaufgaben.

Dieses positive Bild kann durch die Schülerbefragung bestätigt werden: Die intensive Verwendung der Software FATHOM im Simulationsvorkurs wird von den meisten Schülerinnen und Schülern begrüßt. Nur etwa 20% der Schülerinnen und Schüler äußern sich negativ zur Verwendung der Software, über 50% hingegen positiv. Als besondere Stärken der Unterrichtseinheit werden in den offenen Items mehrfach die Abwechslung zwischen der Theorie und der Verwendung des Computers, das Arbeiten mit der Software FATHOM selber sowie die selbstständigen Arbeitsphasen genannt. Auf negativer Seite wird mehrfach ein Mangel an Theorie kritisiert. Den vielen positiven Äußerungen zur Software stehen nur wenige Äußerungen gegenüber, in denen der Softwareeinsatz direkt kritisiert wird. Hier werden Probleme im Umgang mit der Software insbesondere in Verbindung mit den Hausaufgaben geäußert.

Aus den Schülerantworten in der Befragung lassen sich in Bezug auf den Softwareeinsatz drei Faktoren ableiten, welche die Motivation positiv beeinflussen:

- Das Arbeiten mit dem Computer

  Das Arbeiten mit dem Computer und der Umgang mit modernen Technologien scheint auf einen Teil der Schülerinnen und Schüler eine große Faszination auszuüben und damit zu einer positiven Grundeinstellung beizutragen. Vielen Schülerinnen und Schülern macht der Umgang mit dem Computer einfach Spaß. Diese Motivation wird beeinträchtigt, wenn Probleme bei der Verwendung der Software auftreten und nicht selbstständig gelöst werden können. Daher muss bei der Gestaltung des Simulationsvorkurses darauf geachtet werden, dass die selbstständig zu lösenden Aufgaben in der Phase des Aufbaus der Fathomkompetenzen geeignet vorbereitet und eingebettet werden. Insbesondere die Erteilung von Hausaufgaben muss gut vorbereitet sein, da hier keine Hilfe in Anspruch genommen werden kann.

- Der experimentelle Zugang im Mathematikunterricht

  Das Experimentieren im Mathematikunterricht wird bei vielen Schülerinnen und Schülern als Abwechslung zur Theorie begrüßt. Dieser experimentelle Zugang ist eine spezielle Stärke der Stochastik gegenüber anderen Bereichen der Mathematik und lässt sich durch Computersimulationen systematisch in den Schulunterricht integrieren. Die flexible Modellierung vielfältiger Problemstellungen als Computersimulationen macht die Verwendung der Software FATHOM für die gymnasiale Oberstufe gewinnbringend. Der vielfach geäußerte Schülerwunsch nach einer Erhöhung des Theorieanteils zeigt aber auch, dass der Verknüpfung zwischen der experimentellen und der theoretischen Seite eine hohe Bedeutung zukommt. Erst die gegenseitige Ergänzung beider Zugänge kann auf Dauer zur Erhöhung der Motivation beitragen.

- Die Gruppenarbeit am Computer

  Die Verwendung der Software FATHOM im Stochastikunterricht eröffnet die Möglichkeit der Partner- oder Gruppenarbeit am Computer zur Erstellung der Computersimulationen. Diese Erhöhung des Anteils selbstständiger Arbeit im Vergleich zu „normalem“ Stochastikunterricht in der gymnasialen Oberstufe trägt zur Erhöhung der Motivation bei. Zur Förderung dieser Motivation ist das Verhältnis zwischen selbstständigen Erarbeitungsphasen und Besprechungen im gesamten Kurs von großer Wichtigkeit. Gerade im Interesse der schwächeren Schülerinnen und Schüler ist es wichtig, Probleme im Unterrichtsgespräch zu klären und die Ergebnisse zu sichern.

Wie werden die anwendungsorientierten und teilweise interpretationsbezogenen Aufgabenstellungen von den Schülerinnen und Schülern angenommen?

In der Schülerbefragung gibt es mehrere Schüleräußerungen, welche die verwendeten Aufgaben insgesamt als interessant bezeichnen. In einzelnen Äußerungen werden als Begründungen hierfür der Anwendungscharakter und das Auftreten erstaunlicher Ergebnisse genannt. Nach Meinung der Schülerinnen und Schüler gewähren die verwendeten Aufgaben einen guten Einblick in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Interesse an Wahrscheinlichkeitsrechnung wird mittelmäßig bis stark geweckt.

Betrachtet man die einzelnen Aufgabenblöcke genauer, so ergibt sich folgendes Bild:

Die Einstiegsaufgabe mit der Auswahl zwischen zwei verschiedenen Arten eines Multiple-Choice-Tests erweist sich als inhaltsreiche und komplexe Problemstellung, welche die Schülerinnen und Schüler zu Diskussionen und zu Vermutungen herausfordert und einen wichtigen Beitrag zum Gelingen des Unterrichts in den Einstiegsstunden liefert. Die Interpretation des Ergebnisses der Aufgabe über die unterschiedlich große Streuung der relativen Häufigkeit stellt die inhaltliche Verknüpfung zum Gesetz der großen Zahl her. Wie die Ergebnisse der strukturgleichen Krankenhausaufgabe im Ausgangstest zeigen, wird das intuitive Verständnis durch diese Aufgabe gestärkt.

Die Würfelaufgaben zur Festigung und Erweiterung der Simulations- und Fathomkompetenzen werden von den Schülerinnen und Schülern auf inhaltlicher Seite nicht gut angenommen. In der Schülerbefragung gibt es kaum Nennungen der Würfelaufgaben als „interessante“ Aufgabenstellungen. Insbesondere die interpretationsbezogenen Aufgabenteile müssen vor allem im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden. Die Transkriptanalyse der beobachteten Gruppenarbeit zeigt einen stark technisch orientierten Umgang mit diesen Aufgabenstellungen: Bei der ersten Würfelaufgabe wird der Aufgabentext zunächst überhaupt nicht gelesen. Es wird gleich versucht, die Simulation analog zur vorgegebenen Anleitung der Multiple-Choice-Test-Aufgabe zu erstellen. Bei der zweiten Würfelaufgabe sieht man ebenfalls einen oberflächlichen Umgang mit der Aufgabenstellung: Die Aufgabe wird auf der technischen Ebene gelöst, eine inhaltliche Interpretation der Ergebnisse findet kaum statt. Bei der Auswertung der Häufigkeitsverteilung wird die grafische Darstellung nicht herangezogen, sondern es wird rein auf Formelebene gearbeitet. Die geforderte verbale Beschreibung der Verteilung wird weggelassen.

Bei den anwendungsorientierten gemischten Aufgaben zeigt sich ein anderes Bild. Diese Aufgaben werden in der Schülerbefragung häufig als „interessante“ Aufgabenstellungen genannt. Die thematische Wahl der Aufgaben führt dazu, dass die Inhalte und die Ergebnisse der Aufgaben stärker in den Vordergrund rücken. In der Transkriptanalyse zur Bearbeitung der Geburtstagsaufgabe sieht man, dass gerade die inhaltliche Ebene und das erstaunliche Ergebnis zur Interpretation, zu Kontrollstrategien und zu lebhaften Diskussionen anregen. Insbesondere die gemischten Aufgaben erfüllen damit offensichtlich die gewünschte Funktion, das Interesse an stochastischen Problemstellungen zu wecken und einen Einblick in verschiedene typische Aufgabenstellungen des Stochastikkurses zu gewähren. Allerdings finden sich gerade bei den gemischten Aufgaben bislang kaum verbalbeschreibende oder interpretationsorientierte Aufgabenteile. Durch die Ergänzung solcher Aufgabenteile kann man versuchen, diese Aufgaben auf inhaltlicher Ebene noch wirkungsvoller zu gestalten.

Ebene der Unterrichtsmethodik – Selbstständiges Arbeiten und handlungsorientierter Unterricht

In welcher Form gelingt das selbstständige Lernen und Arbeiten am Computer in den einzelnen Phasen des Simulationsvorkurses?

Gemäß der globalen Auswertung der zeitlichen Anteile der einzelnen Unterrichtsmethoden in Kapitel 6.5 zeigt sich, dass die im Mathematikunterricht im allgemeinen vorherrschende Form des lehrerzentrierten Unterrichts in der durchgeführten Unterrichtseinheit aufgebrochen werden konnte. Dies liegt vor allem an dem großen Anteil der Gruppenarbeit am Computer und den zugehörigen Präsentationen der erarbeiteten Simulationen im Schülervortrag.

Dieses Bild deckt sich mit den subjektiven Schülereindrücken: Die meisten Schülerinnen und Schüler geben an, in der durchgeführten Unterrichtseinheit „viel“ oder „sehr viel“ selbstständig gearbeitet zu haben. Ferner wird dieses selbstständige Arbeiten gemäß vieler Äußerungen als positiv empfunden. Es gibt nur wenige Schüleräußerungen, in denen sich der Wunsch nach einer engeren Unterrichtsführung zeigt.

Betrachtet man den analysierten Unterrichtsverlauf differenziert nach den einzelnen Phasen des Simulationsvorkurses, so sieht man, dass sich die Anteile und die Art der selbstständigen Schülerarbeit deutlich unterscheiden:

In den Einstiegsstunden findet fast ausschließlich lehrerzentrierter Unterricht statt. Die Erstellung einer Computersimulation wird in einer Mischung aus Demonstration und fragend-entwickelndem Unterricht in Analogie zur händischen Simulation eingeführt. Aus der Erfahrung des Autors als Informatiklehrer ist dieses „Lernen am Modell“ eine sehr effektive Art, in eine neue Software einzuführen. Nolting und Paulus (1992, S. 51) schreiben hierzu: „Durch Modelle kann man außerordentlich ökonomisch - sozusagen mit einem Schlage – recht komplexe Verhaltensweisen erwerben. […] Das Lernen am Modell ermöglicht den Erwerb von Verhaltensweisen, die für das Individuum völlig neu sind […].“ Die erfolgreiche Bearbeitung der Multiple-Choice-Test-Aufgabe mit 20 Testfragen als Hausaufgabe im Anschluss an die Einstiegsstunden bestätigt das gewählte Vorgehen.

Bei der Festigung der Simulations- und Fathomkompetenzen anhand der Würfelaufgaben konnten die Schülerinnen und Schüler aufgrund der Kurzanleitungen bereits eigenständig in Partnerarbeit am Computer arbeiten. Die ersten beiden Würfelaufgaben wurden teilweise im Unterricht und teilweise als Hausaufgabe bearbeitet. Im Sinn der Unterstützung schwächerer Schüler wäre es rückblickend wünschenswert gewesen, diese beiden Aufgaben komplett im Unterricht erarbeiten zu lassen. Die letzten drei Würfelaufgaben wurden jeweils als Hausaufgabe aufgegeben. Alle Aufgaben wurden im Anschluss an die Bearbeitung ausführlich in Form von Schülerpräsentationen im Unterricht vorgestellt. Aufgetretene Probleme wurden besprochen. Damit wird die Festigung der Simulations- und Fathomkompetenzen in einer Mischung aus Schülerarbeit am Computer, Schülerpräsentationen im Gesamtkurs und der Besprechung von Problemen und wichtigen Eigenschaften von Simulationen im Unterrichtsgespräch erreicht.

Die selbstständige Erstellung der FATHOM-Simulationen wird in dieser Phase des Unterrichts allerdings sehr stark durch die Anleitungen und durch Hilfestellungen der Lehrperson gelenkt. Wie die geringe Beachtung der inhaltlichen Seite der Würfelaufgaben im Rahmen der Schülerarbeit zeigt, handelt es sich bei der selbstständigen Arbeit am Computer bei den Würfelaufgaben keinesfalls um ein selbstständiges Lernen im Sinn konstruktivistischer Lerntheorien. Dies ist aber in dieser Phase des Unterrichts auch nicht zu erwarten, da sich die Schülerinnen und Schüler zunächst die Werkzeugkompetenzen im Umgang mit der Software aneignen und das strukturelle Vorgehen zur Erstellung einer Computersimulation verinnerlichen müssen. Das lässt sich anhand der Würfelaufgaben sehr zügig und mit großen Anteilen an selbstständiger Schülerarbeit im oben beschriebenen Sinn erreichen.

Die Erarbeitung der theoretischen Grundbegriffe und die explizite Behandlung des Gesetzes der großen Zahl als Grenzprozess konnten im geschilderten Unterricht innerhalb einer Doppelstunde mit überwiegend lehrerzentrierten Anteilen erfolgen. Die Möglichkeit zum Einsatz der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl im Rahmen selbstständiger Schülerarbeit wurde nicht genutzt.

Bei der Bearbeitung der gemischten Aufgaben waren die Schülerinnen und Schüler in der Lage, die erlernten Simulations- und Fathomkompetenzen selbstständig und flexibel zur Modellierung und Lösung der Aufgabenstellungen einzusetzen. In dieser Phase des Unterrichts gibt es den Freiraum der Auswahl zwischen verschiedenen Aufgabenstellungen sowie eine große zeitliche Flexibilität. Die Lösungen sind in keinem Fall vorstrukturiert und müssen modelliert werden. In diesen fünf Unterrichtsstunden wurde sehr selbstständig gearbeitet. Die Lehrperson brauchte nur wenig einzugreifen. Auch bei den Präsentationen wurden die zentralen Punkte und Interpretationen meistens von Schülerseite angesprochen. In dieser Phase des Unterrichts findet somit eine selbstständige Erarbeitung der

Computersimulationen, der mit den Aufgaben verbundenen Inhalte und auch der Präsentationen statt. Hier werden auf mehreren Ebenen selbst gesteuerte Lernprozesse angestoßen.

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Erarbeitung der zentralen Begriffe und Inhalte in den ersten neun Unterrichtsstunden des Simulationsvorkurses bis zum Abschluss der Würfelaufgaben vorwiegend im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch stattgefunden hat. Die selbstständigen Arbeitsphasen am Computer dienen hier der Übung, dem Kompetenzaufbau in der Verwendung der Software und der Festigung des vierschrittigen Prozessmodells. Erst mit zunehmenden Simulations- und Fathomkompetenzen tragen die Computersimulationen im Rahmen der gemischten Aufgaben zu selbstständigen Modellierungs-, Interpretations- und Präsentationstätigkeiten bei. Der zum Ende des Simulationsvorkurses erreichte Stand der Simulations- und Fathomkompetenzen soll auch im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres zur selbstständigen Erarbeitung und Modellierung stochastischer Begriffe und Aufgabenstellungen genutzt werden.

Um im Rahmen des Simulationsvorkurses bereits früher eine selbstständige inhaltliche Erarbeitung zu erreichen, müssen die Würfelaufgaben so umformuliert oder geändert werden, dass hier ein stärkerer Fokus auf der Interpretation der Ergebnisse und eine stärkere Motivation zur inhaltlichen Beschäftigung mit den Aufgaben entsteht. Auch die Verwendung der beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl in Partnerarbeit am Computer ist geeignet, selbstständige Entdeckungen und Begriffsbildungen im Sinn der Verwendung der Simulation als Gegenstand anzustoßen. Hierfür müssen zugehörige Arbeitsaufträge entwickelt werden.

8.2 Gesamtbetrachtung des Unterrichtskonzepts

In diesem Abschnitt soll das Gesamtkonzept auf der Designebene betrachtet werden, der Einfluss des Arbeitsmaterials zusammenfassend beschrieben werden und zentrale Planungsentscheidungen identifiziert werden, denen eine wichtige Rolle für das Gelingen des Simulationsvorkurses zukommt. Ferner sollen zentrale Probleme des Unterrichtskonzepts identifiziert werden. Abschließend werden allgemeine Hinweise zur Formulierung von Aufgabenstellungen für selbstständige Schülerarbeitsphasen angegeben und konkrete Verbesserungsmöglichkeiten für die Gestaltung des Simulationsvorkurses vorgeschlagen. Bei diesen allgemeinen Hinweisen und Verbesserungsvorschlägen handelt es sich um Hypothesen, welche im Rahmen weiterer Projekte untersucht werden sollten.

Das Gesamtkonzept

Das Gesamtkonzept des Simulationsvorkurses kann auf zwei Ebenen betrachtet werden: Auf der **Ebene der unterrichtspraktischen Umsetzbarkeit** des Konzepts und auf der **Ebene der erreichbaren Ziele**.

Bezüglich der **Umsetzbarkeit** lässt sich sagen, dass sich die Durchführung des Unterrichts im Kurs des Autors sowohl inhaltlich wie auch vom zeitlichen Rahmen her sehr eng am Unterrichtskonzept orientiert hat. Die Rückmeldungen der an der Hauptuntersuchung beteiligten Kollegin deuten darauf hin, dass dies im parallelen Leistungskurs ebenso gelungen ist. Damit konnte die gewünschte Praxisorientierung der vorliegenden Arbeit im Sinn einer Design-Research-Studie in der Hauptuntersuchung gezeigt werden. Für die einfache unterrichtliche Umsetzbarkeit sind insbesondere die Möglichkeit des flexiblen

Einsatzes der Würfelaufgaben und der Mischung dieser Aufgaben mit der Behandlung des Gesetzes der großen Zahl und der theoretischen Grundbegriffe von großer Bedeutung. Hierdurch konnten die Unterrichtsinhalte an den 45- bzw. 90-Minuten-Rhythmus des Schulunterrichts angepasst werden. Als wichtige organisatorische Faktoren für die praktische Umsetzbarkeit des Konzepts haben sich die Verfügbarkeit der Software FATHOM für die Schülerinnen und Schüler zu Hause und die ständige Verfügbarkeit eines mit Projektionsmöglichkeiten ausgestatteten Computerraums während der gesamten Zeit des computergestützten Unterrichts erwiesen.

Auf der **Ebene der erreichbaren Ziele** konnte bereits im vorherigen Abschnitt gezeigt werden, dass sich die geschilderten Ziele des Simulationsvorkurses in großen Teilen verwirklichen lassen: Zum Ende des Simulationsvorkurses sind fast alle Schülerinnen und Schüler in der Lage, die erworbenen Simulations- und Fathomkompetenzen flexibel zur Lösung stochastischer Problemstellungen einzusetzen. Auch auf inhaltlicher Ebene zeigt sich, dass zentrale stochastische Grundbegriffe in Kombination mit den Computersimulationen eingeführt werden konnten. Dies ist zum einen der Begriff der Wahrscheinlichkeit, der sowohl über den frequentistischen Zugang als auch über den Laplace-Zugang erschlossen werden konnte. Beim Gesetz der großen Zahl und dem Begriff der Unabhängigkeit zeigen sich positive Effekte auf das intuitive Verständnis. Die Schülerinnen und Schüler wurden über die anwendungsorientierten Aufgaben zu Modellierungstätigkeiten angeregt. Ferner zeigen sich deutlich positive Effekte des Einsatzes der Computersimulationen und der anwendungsorientierten Aufgaben auf die Motivation und das Interesse der Schülerinnen und Schüler. In Verbindung mit der selbstständigen Schülerarbeit am Computer konnte das im Mathematikunterricht häufig vorherrschende Muster des lehrerzentrierten Unterrichts aufgebrochen werden.

Das Arbeitsmaterial

Das Arbeitsmaterial besteht aus Anleitungen und Hilfen für den Aufbau der Simulations- und Fathomkompetenzen, aus Blättern zur Ergebnissicherung und aus den Aufgabenstellungen. Diese Materialien lassen sich in Form von Arbeitsblättern sehr flexibel im Unterricht einsetzen und tragen damit entscheidend zur praktischen Umsetzbarkeit des Konzepts bei.

Die Anleitungen und Hilfen sind insgesamt gut geeignet zum Aufbau der Simulations- und FATHOM-Kompetenzen. Die ausführliche Anleitung zur Erstellung einer Computersimulation in FATHOM wird ergänzt durch die Kurzanleitungen zu den Würfelaufgaben, durch die Befehlsübersicht und durch das Beispielblatt zum Simulationsplan. Allerdings wird in der Schülerbefragung der Wunsch nach einer besseren Erläuterung der Formeln deutlich. Ferner zeigt sich in der Unterrichtsbeobachtung und in den Transkripten der beobachteten Schülerarbeitsphasen, dass die ausführliche Anleitung zur Erstellung einer Computersimulation für den Einstieg gut geeignet ist, mit zunehmenden Werkzeugkompetenzen allerdings umständlich ist.

Die Ähnlichkeit vieler abgegebener Simulationspläne der Schülerinnen und Schüler zu dem beispielhaft ausgeteilten Simulationsplan zeigt, welche zentrale Bedeutung der Gestaltung der Arbeitsmaterialien und insbesondere den ausgeteilten Vorlagen und Lösungen zukommt. Neben der Vorbildfunktion entlasten die Blätter zur Ergebnissicherung zusätzlich von langwierigem Tafelanschrieb. Damit bleibt mehr Freiraum für Schülertätigkeiten, so dass diese Form der Ergebnissicherung zu einer größeren Flexibilität im Unterricht führt und auch zum selbstständigen Arbeiten beiträgt.

Wie der Verlauf des Unterrichts, die Bearbeitung der gemischten Aufgaben und die Ergebnisse der Klausur zeigen, sind die gewählten Aufgabenstellungen vom Anspruchsniveau für einen Leistungskurs in Mathematik offensichtlich geeignet gewählt. Die Einstiegsaufgabe und die gemischten Aufgaben motivieren durch ihren Anwendungscharakter. Die Würfelaufgaben können kein inhaltliches Interesse wecken. Dennoch hat sich gezeigt, dass die Würfelaufgaben mit ihren Kurzanleitungen in Kombination mit der ausführlichen Anleitung zur Erstellung einer FATHOM-Simulation dazu geeignet sind, die gewünschten Simulations- und Fathomkompetenzen in kurzer Zeit aufzubauen. Die Wartezeitaufgaben erfüllen die ihnen zugedachte Funktion einer inneren Differenzierung.

Zentrale Planungsentscheidungen für den Aufbau der Simulations- und Fathomkompetenzen

Wahl der Software FATHOM

Die Software FATHOM hat sich als geeignete Software erwiesen, um Computersimulationen im Unterricht zu behandeln. Der Umgang mit der Software zur Erstellung von Computersimulationen lässt sich in kurzer Zeit erlernen. Hierbei erweist es sich als großer Vorteil, dass die einzelnen Schritte des Prozessmodells stets durch die gleichen Typen von Softwareaktionen in FATHOM realisiert werden können. Die Behandlung der Wartezeitaufgaben zeigt, dass bereits ein teilweises Aufbrechen dieser strukturellen Entsprechung bei einer Reihe von Schülerinnen und Schülern zu Problemen führt.

Die meisten Schülerinnen und Schüler akzeptieren die Software. Einige Schüleräußerungen zu aufgetretenen Problemen stehen in Zusammenhang mit der alten englischen Version 1.1. Es ist zu erwarten dass die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler bei der deutschen Version 2.03 mit dem verbesserten Formeleditor noch etwas positiver ausfallen.

Für die Akzeptanz wie auch für das Erlernen der Software ist die Verfügbarkeit zu Hause von großer Bedeutung. Hier können sich die Schülerinnen und Schüler Zeit nehmen, sich intensiv mit den Anleitungen zu beschäftigen und die Aufgaben zu wiederholen.

Das vierschrittige Prozessmodell und der Simulationsplan

Das vierschrittige Prozessmodell kann von den Schülerinnen und Schülern nach kurzer Zeit verinnerlicht werden und unterstützt die Erstellung der Computersimulationen mit der Software FATHOM durch seine strukturierende Wirkung.

Ein wichtiges Ergebnis der Untersuchungen ist es, dass das vierschrittige Prozessmodell genügend Raum lässt für den flexiblen und kreativen Einsatz einer Vielzahl von FATHOM-Formeln und –Komponenten bei der Realisierung des Einzelexperiments, bei der Definition der Messgrößen und bei der Auswertung, so dass mit der Erstellung der Computersimulationen vielfältige Modellierungstätigkeiten angeregt werden können.

Die Einführung des Simulationsplans soll zunächst vor allem einer Reflexion der einzelnen Strukturierungsschritte und der Ergebnissicherung dienen. Über die verbale Erläuterung der einzelnen Schritte wird ferner eine Verknüpfung zwischen der stochastisch-inhaltlichen Ebene und der Softwareebene hergestellt, so dass der Simulationsplan auch zur Reflektion der Modellierungsschritte beiträgt.

Insgesamt hat sich die Einführung des vierschrittigen Prozessmodells in Verbindung mit dem Simulationsplan als wichtige Hilfestellung bei der Erstellung der Computersimulationen erwiesen. Um das Instrument des Simulationsplans verstärkt zur Anregung von Modellierungskompetenzen zu nutzen, kann man für die Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts überlegen, den Simulationsplan in einer zweiten Stufe analog dem Vorschlag von Biehler (2003, S. 1/2) um einen Schritt **M** zur Modellierung des stochastischen Modells und einen Schritt **I** zur Interpretation der Ergebnisse zu ergänzen (vgl. Kapitel 4.1.1).

Auswahlentscheidungen zum Softwareeinsatz

Sowohl die Entscheidung einer Beschränkung auf den sequentiellen Simulationstyp als auch die getroffene Auswahl des Befehlsumfangs haben sich als geeignet erwiesen, um bei fast allen Schülerinnen und Schülern einen sicheren Umgang mit den Computersimulationen zu erreichen. Die Beschränkung auf den sequentiellen Simulationstyp führt dazu, dass sich die einzelnen Schritte des Prozessmodells stets in den gleichen Softwareaktionen realisieren lassen. Allerdings lassen sich keine Zufallsexperimente realisieren, welche dem Ziehen ohne Zurücklegen entsprechen. Es zeigt sich jedoch an den gemischten Aufgaben, dass man mit den getroffenen Entscheidungen eine große Auswahl interessanter stochastischer Aufgabenstellungen des Stochastikkurses der gymnasialen Oberstufe über Computersimulationen bearbeiten kann. Ferner ist der gewählte Umfang an eingeführten Befehlen und Komponenten so umfangreich, dass innerhalb des vierschrittigen Prozessmodells verschiedene Lösungswege möglich sind und somit die Modellierungsfähigkeiten angeregt werden.

Die Einführung der verwendeten Zufallsgeneratoren in Analogie zu den stochastischen Zufallsgeräten Münze, Würfel und Urne hat sich sowohl auf der Verständnisebene als auch auf der Akzeptanzebene als unproblematisch erwiesen. Auch ohne die Thematisierung der Erzeugung von Zufallszahlen als Grundlage der Funktionsweise eines Zufallsgenerators wurden die gewählten Zufallsgeneratoren von den Schülerinnen und Schülern akzeptiert und konnten geeignet eingesetzt werden.

Gestaltung des Simulationsvorkurses als Block

Der intensive Umgang mit der Software in den drei Wochen des Simulationsvorkurses ist eine wichtige Voraussetzung dafür, dass die Simulations- und Fathomkompetenzen in der gewünschten Form aufgebaut werden können. Wie die Schwierigkeiten mit den Werkzeugkompetenzen und der Struktur einer Computersimulation bei den ersten eigenständig erzeugten Simulationen zeigen, benötigt man zu Beginn Übungs- und Festigungsphasen im Umgang mit Computersimulationen. Gerade in dieser Phase des Aufbaus der Simulations- und Fathomkompetenzen ist ein kontinuierliches Lernen ohne große Unterbrechungen sinnvoll und wichtig.

Zentrale Probleme des Simulationsvorkurses

Umgang mit den Aufgabenstellungen in den selbstständigen Schülerarbeitsphasen

Die Transkriptanalyse hat gezeigt, dass beim Umgang der Schülerinnen und Schüler mit den Aufgabenstellungen drei Tendenzen auftreten, welche den gewünschten Effekten der selbstständigen Arbeitsphasen im Sinn einer selbstständigen Erarbeitung stochastischer Begriffe und Inhalte entgegenstehen:

1. Die Aufgabenstellungen werden teilweise rein technisch bearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler konzentrieren sich insbesondere zu Beginn des Simulationsvorkurses bei der Erstellung einer Computersimulation stark auf die softwaretechnische Ebene. Dies führt dazu, den eigentlichen Sinn oder den Inhalt der Aufgabenstellung teilweise aus dem Auge zu verlieren.

2. Die Schülerinnen und Schüler zeigen eine Tendenz zu einer rein formalen und damit oberflächlichen Abarbeitung der rechnerischen Aufgabenteile. Die einzelnen Aufgabenteile werden möglichst schnell nacheinander bearbeitet, die Ergebnisse werden teilweise „abgehakt“ und nicht inhaltlich interpretiert. Die formale Erfüllung der rechnerischen Aufgabenteile überwiegt häufig das inhaltliche Verständnis der Ergebnisse.
3. Verbal-beschreibende oder interpretierende Aufgabenteile werden teilweise überhaupt nicht beachtet. Es werden vor allem solche Aufgabenteile bevorzugt, bei denen rechnerische Ergebnisse gefordert werden.

Diese Beobachtungen werden durch Auswertungen von Schülerarbeitsphasen zu den Themen „Binomialverteilung“ und „Testen von Hypothesen“ im weiteren Verlauf des Kurses gestützt (Keitzer 2006; Huge 2007; Podworny 2008). In einem Artikel zum Einsatz von Schülerexperimenten im Physikunterricht (Duit und Tesch 2006) werden ähnliche Ergebnisse zum Umgang mit den gegebenen experimentellen Arbeitsaufträgen berichtet. Dies zeigt, dass es sich bei den beobachteten Tendenzen einer eher technischen und formal-oberflächlichen Abarbeitung der Arbeitsaufträge bei einer gleichzeitigen Vernachlässigung der verbal-beschreibenden und interpretierenden Aufgabenteile um ein verbreitetes und computerunabhängiges Problem bei der Initiierung selbst gesteuerter Lernprozesse durch experimentell orientierte Schülerarbeitsphasen handelt.

Die geschilderten Tendenzen treten bei den Würfelaufgaben deutlicher in Erscheinung als bei den gemischten Aufgaben. Hierzu trägt sicher die Kleinschrittigkeit der Aufgabenstellungen bei den Würfelaufgaben bei. Diese lässt sich allerdings zu Beginn des Simulationsvorkurses kaum vermeiden. Eine wichtige Bedeutung kommt auch dem Anwendungscharakter der Aufgabenstellungen zu. Kann man über den Anwendungscharakter oder über erstaunliche Ergebnisse eine Betroffenheit der Schülerinnen und Schüler erreichen, so sind sie eher bereit, sich in den selbstständigen Schülerarbeitsphasen auch inhaltlich mit den Aufgaben zu beschäftigen.

Um der Tendenz entgegen zu wirken, die verbal-beschreibenden und interpretierenden Aufgabenteile nicht zu beachten, müssen diese explizit schriftlich eingefordert werden. Auch dem Umgang mit diesen Aufgabenteilen im Unterricht kommt eine große Bedeutung für die Wertschätzung solcher Aufgabenteile zu. Im Unterrichtsgespräch müssen die verbal-beschreibenden und interpretierenden Aufgabenteile ausführlich behandelt werden.

Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz

Auf der Ebene der Simulations- und Fathomkompetenz zeigen sich zwei Bereiche, welche auch zum Ende des Simulationsvorkurses Probleme bereiten:

- Die Formelkompetenz
- Die geeignete Auswertung der gesammelten Messgrößen

Beide Bereiche wurden im vorherigen Abschnitt ausführlich dargestellt. Der Erwerb der Formelkompetenz stellt eine der Hauptanforderungen beim Aufbau der Simulationskompetenz mit der Software FATHOM dar. Die meisten Schülerinnen und Schüler erreichen zum Ende des Simulationsvorkurses einen sicheren und flexiblen Umgang mit den eingeübten Formeln. Allerdings stellt die richtige Wahl und Formulierung der Formeln bei der Modellierung insbesondere der Stufen 2 und 4 des Prozessmodells auch bei einer sicheren Beherrschung der zur Verfügung stehenden Formeln stets eine kognitive Hürde dar.

Bei der Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilungen treten Probleme bei der Wahl der geeigneten Auswertungswerkzeuge auf. Hier ist zum einen die Zweckentfremdung der kategorialen Häufigkeitstabellen für die formelhaft-numerische Auswertung zu nennen, weiter die mangelnde Berücksichtigung der grafischen Darstellung der Häufigkeitsverteilungen als Mittel zur Veranschaulichung und als Metastrategie zur Kontrolle der Ergebnisse.

Ebene der stochastischen Inhalte

Auf der Ebene der stochastischen Inhalte beklagt etwa die Hälfte der Schülerinnen und Schüler den geringen Anteil an theoretischen Inhalten in der Unterrichtseinheit. Tatsächlich sind die inhaltlichen Anteile mit den theoretischen Grundbegriffen Zufallsexperiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit und Ergebnisraum, mit dem Gesetz der großen Zahl, mit dem frequentistischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit sowie mit der Interpretation der Häufigkeitsverteilungen und der Einführung der grafischen Darstellung als Histogramm so gering nicht. Allerdings werden insbesondere die genannten theoretischen Grundbegriffe im Simulationsvorkurs nur kurz behandelt und nicht gefestigt. Außerdem werden viele Aufgaben nur über Simulationen gelöst. Dies entspricht allerdings gerade dem gewünschten Zugang zur Wahrscheinlichkeit über Computersimulationen und wird von vielen Schülerinnen und Schülern auch begrüßt.

In der Analyse der Unterrichtsbeobachtung zeigen sich Unklarheiten im Verhältnis zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit. Weiter ergeben sich bei der Interpretation eines Dezimalbruchs als Mittelwert der Häufigkeitsverteilung eines kategorialen Merkmals Verständnisschwierigkeiten auf intuitiver Ebene. Bei erneuten Durchführungen des Kurskonzepts muss darauf geachtet werden, dass das Verhältnis zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit im Unterricht direkt problematisiert wird. Man sollte den Begriff der „Wahrscheinlichkeitsschätzung“ einführen. Auch auf die sorgfältige Interpretation des Mittelwerts der Häufigkeitsverteilung eines kategorialen Merkmals muss im Sinn der Vorbereitung des Erwartungswertbegriffs großer Wert gelegt werden.

Allgemeine Hinweise zur Formulierung von Aufgabenstellungen für selbstständige Schülerarbeitsphasen

1. Um einen rein technischen und formal-oberflächlichen Umgang mit den Aufgabenstellungen zu vermeiden, müssen die Aufgabenstellungen so gewählt sein, dass sie bei den Schülerinnen und Schülern eine inhaltliche Betroffenheit herstellen. Hierzu sollten anwendungsorientierte Problemstellungen aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler gewählt werden. Überraschende Ergebnisse regen zu Interpretationen und zu Diskussionen an.
2. Weiter sollten verbal-beschreibende und interpretierende Aufgabenteile in die Aufgabenstellungen integriert werden. Diese Aufgabenteile sollten auf den inhaltlichen Kern der Aufgabe zielen. Über Aufgabenstellungen zur intuitiven Schätzung von Ergebnissen kann eine Erwartungshaltung aufgebaut werden, die Ergebnisse können dann mit dieser Erwartungshaltung vergleichen werden.
3. Die verbal-beschreibenden und interpretierenden Aufgabenteile müssen explizit schriftlich eingefordert werden. Die Wichtigkeit dieser Aufgabenteile muss durch eine ausführliche Besprechung im Unterricht untermauert werden.

Verbesserungsvorschläge für den Simulationsvorkurs

Der positive Gesamteindruck des Simulationsvorkurses spricht dafür, die Grundstruktur im Aufbau der Unterrichtseinheit beizubehalten. Aus der Analyse des Unterrichtsverlaufs und aus den oben genannten Problembereichen lassen sich Verbesserungsvorschläge postulieren, die im Folgenden dargestellt werden:

1. Bei den Unterrichtsmaterialien sollte das Übersichtsblatt (vgl. Anhang, S. 277) zu den Formeln und Bedienelementen in FATHOM ersetzt werden. Zum einen sollte eine schematische Übersicht zur Realisierung der einzelnen Schritte einer Computersimulation in FATHOM erstellt werden. Aus dieser schematischen Übersicht muss hervorgehen, welche Bedienelemente von FATHOM die einzelnen Schritte des Prozessmodells realisieren und an welchen Stellen die Formeln zu integrieren sind. Hier muss vor allem mit grafischen Abbildungen der einzelnen FATHOM-Komponenten gearbeitet werden. Ferner sollte ein Übersichtsblatt zu den behandelten FATHOM-Formeln mit einer ausführlichen Beschreibung jeder Formel und mit Beispielen erstellt werden, um die Formelkompetenz hiermit zu unterstützen.

2. Um die beiden Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl im Rahmen selbstständiger Schülerarbeitsphasen gewinnbringend einsetzen zu können, sollten Arbeitsaufträge zu diesen Lernumgebungen erstellt werden (z. B. Genauigkeitsabschätzungen erarbeiten, verbale Beschreibung der grafischen Darstellungen, Auffälligkeiten der grafischen Darstellungen beschreiben und Begründungen finden lassen). In Verbindung mit den Genauigkeitsabschätzungen sollte das Verhältnis zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit explizit thematisiert werden.

3. Die Würfelaufgaben sollten auf der Ebene der Aufgabenformulierung so gestaltet werden, dass Erwartungshaltungen aufgebaut werden, dass verbal-beschreibende und interpretierende Aufgabenteile zum inhaltlichen Kern der Aufgaben vorhanden sind und schriftlich eingefordert werden, und dass bei der Auswertung der Simulationen verschiedene Auswertungswerkzeuge eingesetzt werden. Insbesondere sollte die grafische Darstellung als Kontrollinstrument eingeführt werden. Eine beispielhafte Formulierung einer nach diesen Gesichtspunkten geänderten Aufgabenstellung findet sich auf Seite 121.

4. Das vorliegende Aufgabenmaterial sollte um mehrere Aufgabenstellungen erweitert werden, bei denen die Berechnung der Wahrscheinlichkeit sowohl über den frequentistischen Zugang als auch über den Laplace-Zugang erfolgen soll. Damit werden die theoretischen Grundbegriffe Ergebnisraum und Laplace-Wahrscheinlichkeit gefestigt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten weitere Beispiele, bei denen sich der theoretische und der experimentelle Zugang zur Wahrscheinlichkeit ergänzen.

5. Die Würfelaufgaben sollten auf inhaltlicher Ebene dahingehend überarbeit werden, dass sie für die Schülerinnen und Schüler ansprechender werden. Dies kann z. B. geschehen, indem man die Würfelprobleme in Gewinnspiel- und Wettkontexte einbettet. Man kann aber auch versuchen, die Würfelaufgaben durch andere Kontexte zu ersetzen. Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass die einfache Modellierung bei den Würfelaufgaben dazu beiträgt, dass die Schülerinnen und Schüler anhand der Würfelaufgaben in kurzer Zeit ihre Simulations- und Fathomkompetenzen in selbstständigen Schülerarbeitsphasen erweitern können. Dieser Grundcharakter der Aufgaben sollte auch bei der Wahl anderer Kontexte erhalten bleiben.

6. Einige der gemischten Aufgaben sollten ebenfalls um verbal-beschreibende und interpretierende Aufgabenteile ergänzt werden. Insbesondere können das stochastische Modell und die Interpretation der Ergebnisse stärker betont werden. Hierfür eignen sich vor allem die Aufgaben aus den Gruppen B und C. Bei der Interpretation der Ergebnisse dieser Aufgaben muss dem Mittelwert der Häufigkeitsverteilung bei kategorialen Merkmalen besondere Beachtung geschenkt werden.
7. Beim Umgang mit den Auswertungswerkzeugen sollte man die Visualisierung der Häufigkeitsverteilung explizit als Mittel zur Veranschaulichung und als Metastrategie zur Kontrolle der numerisch-formelhaft berechneten Ergebnisse einführen.
8. Möchte man noch größeren Wert auf die Modellbildung legen, so kann man überlegen, den Simulationsplan bei den gemischten Aufgaben um die beiden Schritte **M** für Modellbildung und **I** für Interpretation zu ergänzen.

8.3 Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Pilotstudie wurde ein simulationsintensiver Einstieg in das Kurshalbjahr Stochastik entwickelt und in der Praxis erprobt. Das Kurskonzept wurde in dieser Arbeit ausführlich begründet und dargestellt. Es wurden umfangreiche Untersuchungen geschildert und ausgewertet. Die entwickelten Untersuchungsinstrumente liefern einen detaillierten Einblick in das Unterrichtsgeschehen und in die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler. In den beiden vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels wurden die Untersuchungsfragen der Arbeit in großen Teilen beantwortet, es wurden zentrale Ergebnisse zum Gesamtkonzept des Simulationsvorkurses geschildert und in Zusammenhang mit den Arbeitsmaterialien und den Planungsentscheidungen gebracht. Die Ergebnisse zeigen auf der Ebene der Konzeptentwicklung, dass sich das vorgelegte Konzept erfolgreich im Unterricht einsetzen lässt. Auf der forschungsmethodischen Ebene zeigt sich, dass die gewählten Untersuchungsinstrumente für die vorliegende Pilotstudie angemessen sind.

Das nun vorliegende Konzept eröffnet die Möglichkeit zu weiteren Entwicklungs- und Erprobungszyklen im Sinn der Design-Research-Methode. Auf der Basis der gewonnenen Ergebnisse und Hypothesen können begründete Weiterentwicklungen des Unterrichtskonzepts vorgenommen werden. In den beiden vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels wurden bereits konkrete Vorschläge für gezielte Verbesserungen am Konzept des Simulationsvorkurses postuliert. Im Folgenden sollen weitere Anregungen für eine Fortführung des geschilderten Projekts sowohl auf der forschungsmethodischen Ebene als auch auf der Ebene der Konzeptentwicklung gegeben werden.

Auf der **forschungsmethodischen Ebene** kann auf den in dieser Arbeit erfolgreich verwendeten Untersuchungsinstrumenten aufgebaut werden. In weiterführenden Untersuchungen können zum einen die in dieser Arbeit identifizierten spezifischen Probleme bei der Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler genauer analysiert werden. Ferner sollten bei einer Weiterentwicklung des Konzepts die Auswirkungen der vorgenommenen Änderungen am Unterrichtskonzept gezielt untersucht werden. Hierfür können spezifische Ergänzungen und Erweiterungen der bisherigen Untersuchungsinstrumente sinnvoll sein:

1. Auf der Basis der vorliegenden Untersuchungsergebnisse lässt sich ein an den im Simulationsvorkurs erworbenen Kompetenzen orientierter **spezifischer Kompetenztest** erstellen. Hier sollten die folgenden Themen behandelt werden:
   - Modellierung einer stochastischen Situation entlang den vier Schritten des Prozessmodells
   - Die Formulierung und Zuordnung geeigneter Befehle auf den verschiedenen Stufen des Prozessmodells in konkreten Simulationsbeispielen
   - Die Abhängigkeit der Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsschätzungen einer Computersimulation von der Anzahl N der Simulationsdurchführungen
   - Die Beschreibung und Interpretation der grafischen Darstellung von Häufigkeitsverteilungen
   - Das Gesetz der großen Zahl
   - Die im Simulationsvorkurs erworbenen stochastischen Grundbegriffe
   - Das intuitive stochastische Verständnis zur Irregularität einer Zufallsfolge und zur statistischen Streuung

   Für die letzten vier der genannten Punkte kann teilweise auf Items des in dieser Arbeit verwendeten Eingangs- und Ausgangstests zurückgegriffen werden (vgl. Kapitel 7.2). Insbesondere für die ersten drei der genannten Punkte müssen geeignete, an den spezifischen Anforderungen des Unterrichtskonzepts orientierte Items entwickelt werden.
2. Für gezielte qualitative Untersuchungen zu den Wirkungen des Simulationsvorkurses auf das inhaltliche und auf das intuitive stochastische Verständnis können ergänzend **Schülerinterviews** eingesetzt werden. Anknüpfend an die Ergebnisse dieser Arbeit sind hier z. B. Fragen zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, zum Verhältnis zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit beim frequentistischen Zugang und zur Interpretation des Erwartungswerts von Interesse.

   Schülerinterviews können auch in Kombination mit der in dieser Arbeit erstmals eingesetzten Methode der softwaregestützten Aufzeichnung der Partnerarbeitsphasen am Computer sinnvoll sein. Zum einen kann man sich die Aufnahmen direkt nach den Unterrichtsstunden ansehen und hieraus Fragen für die Interviews ableiten. Man kann die Schülerinnen und Schüler mit Ausschnitten ihrer eigenen Partnerarbeitsphasen konfrontieren und Fragen dazu stellen. Anknüpfend an die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit könnten hier z. B. die zu Beginn des Simulationsvorkurses identifizierten Probleme im Umgang mit dem Begriff der Messgröße, die Verwechselung der Wiederholungsanzahl n innerhalb eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit der Anzahl N der Simulationsdurchgänge und Probleme mit der Modellierung der Simulation über geeignete Formeln auf den einzelnen Stufen des Prozessmodells genauer untersucht werden.
3. Zur genaueren Untersuchung des Unterrichtsgeschehens kann man ergänzend eine **Videoanalyse zentraler Unterrichtsstunden** vornehmen. Solch ein Vorgehen kann im Simulationsvorkurs bei der Einführungsstunde zum Testproblem, bei der Besprechung der Lernumgebungen zum Gesetz der großen Zahl und bei der Besprechung der Faustregeln für die Genauigkeitsabschätzungen sinnvoll sein. In Verbindung mit der vorliegenden Arbeit wurden im Kurs des Autors im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres ausgewählte Unterrichtsstunden innerhalb der Unterrichtseinheiten „Binomialverteilung“ und „Testen von Hypothesen“ per Video aufgezeichnet und im

Rahmen der an diese Arbeit angelagerten Staatsexamens- und Diplomarbeiten ausgewertet (Keitzer 2006; Huge 2007; Podworny 2008). Hiermit lassen sich z. B. auftretende Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler sowie die Interaktion in Unterrichtsgesprächen gezielt analysieren.

Die Methoden der Schülerinterviews und der Videoanalyse sind sehr aufwändig und stellen nur dann eine sinnvolle Ergänzung dar, wenn sie ganz gezielt zur Untersuchung von eng eingegrenzten Fragestellungen oder von einzelnen zentralen Unterrichtsstunden eingesetzt werden. Insgesamt muss man bei der Verwendung verschiedenartiger Untersuchungsinstrumente darauf achten, dass die Untersuchungen von den Schülerinnen und Schülern nicht als „Störfaktor“ empfunden werden.

Auf der **Ebene der Weiterentwicklung des Unterrichtskonzepts** sind im vorherigen Abschnitt verschiedene Entwicklungsmöglichkeiten im Rahmen der bestehenden Struktur des Unterrichtskonzepts angegeben worden, welche in Richtung einer besseren inhaltlichen Verknüpfung der Computersimulationen und in Richtung einer stärkeren Betonung des Modellbildungsaspekts gehen.

Eine deutlich über den bisherigen arbeitsblattgestützten Ansatz hinaus gehende Weiterentwicklung bezieht die neuen Medien stärker ein. An Stelle der Arbeitsblätter können multimediale Lernumgebungen treten, in denen das selbst gesteuerte Lernen durch Videoanleitungen, Aufgaben mit Musterlösungen, Tests zur Selbsteinschätzung des Lernerfolgs u. ä. gefördert wird. Im Rahmen solcher multimedialer Lernumgebungen können für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler auch offenere Aufgabenstellungen als Wahlaufgaben verwendet werden. Beispiele solcher multimedialer Lernumgebungen im Mathematikunterricht existieren in Verbindung mit dem BLK-Modellversuch SelMa (Preussler und Schulz-Zander 2004; Weber 2004) oder bei MathePrisma (Krivsky 2003). Im Rahmen einer solchen Erweiterung des Konzepts wird automatisch die enge Führung der Schülerinnen und Schüler in der ersten Phase des Simulationsvorkurses aufgehoben. Dies birgt Risiken und Chancen. Die enge Orientierung an den Unterrichtsmaterialien im bisherigen Konzept ermöglicht fast allen Schülerinnen und Schülern das systematische Erlernen der Simulations- und Fathomkompetenzen in kurzer Zeit. Die Arbeitsblätter dienen insbesondere für die schwächeren Schülerinnen und Schüler als Merkhilfe und als Ergebnissicherung. Wenn diese Vorteile des bisherigen Arbeitsmaterials mit den Chancen einer multimedialen Lernumgebung verknüpft werden, so kann der Unterricht durch eine stärkere Selbststeuerung nochmals interessanter und motivierender werden. Erste Umsetzungen zur Unterstützung des Stochastikunterrichts mit der Software FATHOM über multimedialen Lernumgebungen werden bereits im Schulunterricht erprobt (Hofmann 2007).

Die vorliegende Arbeit hat sich auf die Beschreibung, Durchführung und Analyse des Simulationsvorkurses als Einführung in das Kurshalbjahr Stochastik konzentriert. Dieser Simulationsvorkurs gehört zu dem in Kapitel 2.4 beschriebenen Gesamtkonzept eines computergestützten Unterrichts im Kurshalbjahr Stochastik mit den beiden weiteren Schwerpunkten „Binomialverteilung“ und „Testen von Hypothesen“. Weitere Untersuchungen zur Unterstützung des Unterrichts durch Computersimulationen und Lernumgebungen sollten sich auch mit dem weiteren Verlauf des Kurshalbjahres beschäftigen. Zu den im Kurs des Autors durchgeführten Unterrichtseinheiten „Binomialverteilung“ und „Testen von Hypothesen“ gibt es bereits Untersuchungen in Form von drei Diplom- und Staatsexamensarbeiten (Keitzer 2006; Huge 2007; Podworny 2008). In diesen Arbeiten wurden die Transkripte zur aufgezeichneten Partnerarbeit am Computer in Verbindung mit den Videoaufnahmen ausgewählter Unterrichtsstunden ausgewertet. Hierbei wurden u. a. die auch im Rahmen dieser Arbeit geschilderten Probleme beim Umgang der Schülerinnen und Schüler mit den Aufgabenstellungen identifiziert.

In Anlehnung an die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen zum Simulationsvorkurs sind für weitere empirische Untersuchungen zum Gesamtkonzept des Kurshalbjahres die folgenden Fragestellungen von großem Interesse:

- Welche Einstellung entwickeln die Schülerinnen und Schüler im Rahmen des langfristigen Einsatzes über das gesamte Kurshalbjahr gegenüber der Software FATHOM?
- Stehen die erworbenen Simulations- und Fathomkompetenzen nachhaltig zur Verfügung, so dass sie im weiteren Verlauf des Kurshalbjahres bei der Einführung neuer Begriffe und bei der stochastischen Modellierung im Rahmen selbstständiger Schülerarbeitsphasen genutzt werden können?
- Kann man Belege für die Hypothese finden, dass sich die Begriffe der Zufallsgröße, des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Sinn eines spiralcurricularen Aufbaus des Kurshalbjahres durch das Konzept des Simulationsvorkurses auf intuitiver Ebene vorbereiten lassen?

Die vorliegende Arbeit hat in Form einer Pilotstudie gezeigt, dass sich Computersimulationen mit der Software FATHOM erfolgreich in den Unterricht der Sekundarstufe II integrieren lassen. Die geschilderten Untersuchungen unterstützen bisherige empirische Erkenntnisse, nach denen der Einsatz von Computersimulationen positive Auswirkungen auf die Motivation, auf das inhaltliche und das intuitive stochastische Verständnis sowie auf das selbstständige Lernen haben kann. Die Computersimulationen lassen sich mit den für die gymnasiale Oberstufe vorgeschlagenen Inhalten verbinden. Das vorgelegte Konzept zeigt einen praktisch umsetzbaren Weg zur effizienten Einführung der Computersimulationen in der Schule. Die Arbeit liefert Hinweise für weitere Entwicklungsmöglichkeiten. Aus Sicht des Autors ist es im Sinn eines erfolgreichen und lebendigen Stochastikunterrichts unbedingt wünschenswert, weitere Entwicklungsprojekte zum Computereinsatz im Stochastikunterricht durchzuführen und hiermit die Einbeziehung von Computersimulationen und Lernumgebungen in den Stochastikunterricht zu optimieren.

9 Literaturverzeichnis

Altrichter, H. und P. Posch (1998). Lehrer erforschen ihren Unterricht - Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung. Bad Heilbrunn, Verlag Julius Klinkhardt.

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). "Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts." Stochastik in der Schule **23 (3)**: 21-26.

Bakker, A. (2004). Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Utrecht, CD-ß Press, Center for Science and Mathematics Education.

Barth, F. und R. Haller (1983). Stochastik Leistungskurs. München, Ehrenwirth.

Bauer, L. (1988). Mathematik und Subjekt, Deutscher Universitätsverlag.

Baum, M., D. Brandt, et al. (2003). Lambacher Schweizer Stochastik. Stuttgart, Klett.

Baumert, J., R. Lehmannn, et al. (1997). TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen, Leske+Budrich.

Bea, W. (1995). Stochastisches Denken : Analysen aus kognitionspsychologischer und didaktischer Perspektive. Frankfurt a. M., Lang.

Bertin, J. (1983). Semiology of graphics. Madison, University of Wisconsin Press.

Biehler, R. (1991). Computers in Probability Education. Chance Encounters: Probability in Education. R. Kapadia und M. Borovcnic. Dordrecht, Kluwer**:** 169-211.

Biehler, R. (1995). "Explorative Datenanalyse als Impuls für fächerverbindende Datenanalyse in der Schule." Computer + Unterricht **Heft 17**: 56-66.

Biehler, R. (1997). "Software for Learning and for Doing Statistics." International Statistical Review **65(2)**: 167-189.

Biehler, R. (2003). Simulation als systematischer Strang im Stochastikcurriculum. Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim, Franzbecker**:** 109-112.

Biehler, R. (2005). Authentic Modelling in stochastics education - the case of the binomial distribution. Festschrift für Werner Blum. W. Henn und G. Kaiser. Hildesheim, Franzbecker**:** 19-30.

Biehler, R. (2006). Leitidee "Daten und Zufall" in der didaktischen Konzeption und im Unterrichtsexperiment. Anregungen zum Stochastikunterricht, Bd. 3. J. Meyer. Hildesheim, Franzbecker**:** 111-142.

Biehler, R. und R. Hartung (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I. W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung und O. Köller, Cornelsen Scriptor**:** 51-80.

Biehler, R., T. Hofmann, et al. (2006). Fathom 2 Eine Einführung. Heidelberg, Springer.

Biehler, R. und K. Kombrink (2002). Alternativen zu CAS und EXCEL - Interaktiv dynamisches Mathematiklernen mit innovativer Werkzeugsoftware. Beiträge zum Mathematikunterricht. W. Peschek. Hildesheim, Franzbecker**:** 115-118.

Biehler, R. und K. Kombrink (2004). Elementare Stochastik interaktiv - Einführende Stochastikausbildung mit Unterstützung didaktisch orientierter Werkzeugsoftware. Neue Medien und innermathematische Vernetzungen in der Stochastik. Anregungen zum Stochastikunterricht, Band 2. R. Biehler, J. Engel und J. Meyer. Hildesheim, Franzbecker**:** 151-168.

Biehler, R. und C. Maxara (2005). Eingangstest Stochastik - Vorkenntnisse von Lehramtsstudierenden. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim, Franzbecker.

Biehler, R. und C. Maxara (2007). "Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware." Der Mathematikunterricht **53** (**3**): 45-62.

Biehler, R. und W. Weber (1995). "Entdeckungsreisen im Daten-Land." Computer + Unterricht **17**: 4-9.

Bigalke, A., N. Köhler, et al. (2002). Mathematik 13.1 Leistungskurs Hessen. Berlin, Cornelsen.

Bikner-Ahsbahs, A. (2000). Interest Density - A Concept for an Interactionist View of Interest in Maths Classes. Development in Mathematics Education in Germany. Hildesheim, Franzbecker**:** 33-43.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen - Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim, Franzbecker.

Blum, W. (1995). Applications and Modelling in Mathematics Teaching and Mathematics Education - Some Important Aspects of Practice and of Research. Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications. C. Sloyer, W. Blum und I. Huntley. Yorklyn, Water Street Mathematics**:** 1-20.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23. G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz und E. Schneider. Wien, Hölder-Pichler-Tempsky**:** 15-38.

Blum, W., et al. (2002). "ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document." Journal für Mathematikdidaktik **23 (2002), Heft 3/4**: 262-280.

Borneleit, P., R. Danckwerts, et al. (2001). "Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe." Journal für Mathematikdidaktik **22** (**1**): 73-90.

Borovcnik, M. (1992). Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. Mannheim, BI-Wissenschaftsverlag.

Borovcnik, M., J. Engel, et al., Eds. (2001). Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich. Hildesheim, Franzbecker.

Brown, A. L. (1992). "Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings." Journal of the Learning Sciences **2 (2)**: 141–178.

Bruner, J. (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin, Berlin-Verlag.

Büchter, A., S. Hußmann, et al. (2005). "Den Zufall im Griff? - Stochastische Vorstellungen fördern." Praxis der Mathematik **47. Jg. Heft 4**: 1-7.

Carswell, C. M. (1992). "Choosing specifiers: An evaluation of the basic tasks model of graphical perception." Human Factors **34**: 535-554.

Chance, B., J. Garfield, et al. (2000). Developing Simulation Activities To Improve Students' Statistical Reasoning. Proceedings of the International Conference in Mathematics Education, Auckland University of Technology.

Cobb, P., J. Confrey, et al. (2003). "Design Experiments in Educational Research." Educational Researcher **32 (1)**: 9-13.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. New directions in educational technology. E. Scanlon und T. O'Shea. New York, Springer-Verlag**:** 15-22.

Collins, A., D. Joseph, et al. (2004). "Design research: Theoretical and methodological issues." Journal of the Learning Sciences **13 (1)**: 15-42.

Cradler, J., M. McNabb, et al. (2002). "How does technology influence students learning?" Learning and Leading with Technology **29(8)**: 46-56.

Danckwerts, R. und D. Vogel (1993). "Das Testen von Hypothesen - Mißverständnisse und Perspektiven." DdM **1 (1993)**: 51-65.

delMas, R. C., J. Garfield, et al. (1999). "A model of classroom research in action." Journal of Statistics Education (electronic journal) **7(3)**.

Diaconis, P. und B. Efron (1983). "Computer-Intensive Methods in Statistics." Scientific American **248**: 96-110.

Diepgen, R., W. Kuypers, et al. (1993). Mathematik Sekundarstufe II Stochastik. Berlin, Cornelsen.

Duit, R. und M. Tesch (2006). Eigenständiges Experimentieren im naturwissenschaftlichen Unterricht - Theorie, empirische Forschungsergebnisse, Unterrichtspraxis. Wissenschaftliche Fachtagung "Selbstständiges Lernen im Fachunterricht" der Kasseler Forschergruppe "Empirische Bildungsforschung: Lehrer - Lernen - Literacy", Kassel.

Elliot, J. (1981). Action-research: A framework of self-evaluation in schools. TIQL-Working Paper No. 1, Cambridge: Institute of Education.

Engel, A. (1975). Computing and Probability. Statistics at the School Level. Proceedings of the 3rd ISI Round Table Conference on the Teaching of Statistics. L. Rade. New York, Wiley**:** 95-120.

Engel, J. (2002). Activity-based Statistics, Computer Simulation and Formal Mathematics. Proceedings of ICoTS 6. Phillips, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/5a3_enge.pdf.

Engel, J. (2003). Stochastisches Modellieren in computergestützten Lernumgebungen. Neue Medien und innermathematische Vernetzungen in der Stochastik - Anregungen zum Stochastikunterricht, Band 2. R. Biehler, J. Engel und J. Meyer. Hildesheim, Franzbecker.

Engel, J. (2007). "Daten im Mathematikunterricht: Wozu? Welche? Woher?" Der Mathematikunterricht **53 (3)**: 12-22.

Engel, J. und M. Vogel (2004). Mathematical Problem Solving as Modelling Activity. ICMI-Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education. H.-W. Henn und W. Blum. Dortmund, Universität Dortmund**:** 83-88.

Engel, J. und M. Vogel (2005). "Von M&Ms und bevorzugten Farben: ein handlungsorientierter Unterrichtsvorschlag zur Leitidee "Daten & Zufall" in der Sekundarstufe I." Stochastik in der Schule **25 (2)**: 11-18.

Erickson, T. (2002). Fifty Fathoms. Oakland, eeps media.

Fischbein, E., M. S. Nello, et al. (1991). "Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents." Educational Studies in Mathematics **22**: 523-549.

Fisher, R. (1956). Mathematics of a Lady Tasting Tea. The World of Mathematics. J. Newman. New York, Simon and Schuster. **Vol. III:** 1512-1521.

Friel, S. N., F. R. Curcio, et al. (2001). "Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications." Journal for Research in Mathematics Education **32(2)**: 124-158.

Garfield, J. B. und R. del Mas (1989). Reasoning about chance events: assisting and changing students' conception of probability. Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. C. Maher, G. Goldin und R. B. Davis. New York, Rutgers University Press**:** 189-195

Garfield, J. B., R. C. delMas, et al. (1998). Assessing The Effects Of A Computer Microworld On Statistical Reasoning. Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics , Volume 3, Nanyang Technological University, Singapore: International Statistical Institute**:** 1083-1089.

Gnanadesikan, M., R. L. Schaeffer, et al. (1987). The Art and Techniques of Simulation. Palo Alto, Dale Seymour.

Gnanadesikan, M., R. L. Schaeffer, et al. (1997). "An activity-based statistics course." Journal of Statistics Education **5 (1)**.

Gramelsberger, G. (2003). Computersimulationen – Neue Instrumente der Wissensproduktion. Transdisziplinarität und Heterogenität der Computational Science, Expertise im Rahmen des Themenfelds „Politik, Wissenschaft und Gesellschaft“ zum Themenbereich „Neue Formen der Wissensproduktion“. Berlin. http://www.sciencepolicystudies.de/publikation/expertise.htm.

Griesel, H. und H. Postel (1990). Grundkurs Stochastik. Hannover, Schroedel.

Griesel, H., H. Postel, et al., Eds. (2002). Mathematik heute 8, Realschule Hessen. Hannover, Schroedel Verlag.

Gumm, H. P. und M. Sommer (2004). Einführung in die Informatik. München, Oldenbourg-Verlag.

H. Griesel, H. Postel, et al., Eds. (2003). Leistungskurs Stochastik. Elemente der Mathematik. Hannover, Schroedel Verlag.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Stochastik I: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vorlesungsausarbeitung. Duisburg.

Henze, N. (2001). "Muster in Bernoulli-Ketten." Stochastik in der Schule **21 (2001) 2**: 2-10.

Herget, W. (1997). "Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall ..." mathematik lehren **85**: 4-8.

Hodgson, T. (1996). The effects of hands-on-activities on students' understanding of selected statistical concepts. Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. E. Jakubowski, D. Watkins und H. Biske. Columbus, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education**:** 241-246.

Hodgson, T. und M. Burke (2001). "Simulationen im Statistikunterricht." (Übersetzung und Bearbeitung von Joachim Engel, Ludwigsburg). Stochastik in der Schule **21 (2)**: 24-28

Hofmann, T. (2007). Multimediale Lernumgebung zur Unterstützung problemlösender Anwendung von Werkzeugsoftware am Beispiel der Stochastik. Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim, Franzbecker.

Hole, V. (1997). Schüler unterrichten Schüler - Eine wenig verbreitete Methode beim Einsatz des Computers im Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim, Franzbecker**:** 235-238.

Horton, G. (2003). "Simulation: Das virtuelle Labor." Magdeburger Wissenschaftsjournal **1-2**: 45-52.

Huge, P. (2007). Analysen zur Unterrichtseinheit Hypothesentesten eines computergestützten Stochastik-Leistungskurses - Auswertungen von Unterrichtsgesprächen und Dokumenten selbstständiger Schülerarbeit -, Universität Kassel.

Humenberger, J. und H. C. Reichel (1995). Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Jäger, J. und H. Schupp (1983). Curriculum "Stochastik 7". Curriculum Stochastik in der Hauptschule. Paderborn, Ferdinand Schöningh**:** 23-41.

Kahneman, D. und A. Tversky (1972). "Subjective Probability: A judgement of representativeness." Cognitive Psychology **3**: 430-454.

Kahneman, D. und A. Tversky (1982a). 2. Belief in the law of small numbers. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. D. Kahneman, P. Slovic und A. Tversky. Cambridge, Cambridge University Press**:** 23-31.

Kahneman, D. und A. Tversky (1982b). 3. Subjective Probability: A judgment of representativeness. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. D. Kahneman, P. Slovic und A. Tversky. Cambridge, Cambridge University Press**:** 32-47.

Kaun, A. (2006). "Stochastik in deutschen Lehrplänen allgemeinbildender Schulen." Stochastik in der Schule **26 (3)**: 11-15.

Keitzer, C. (2006). Selbständig-kooperative Bearbeitung von stochastischen Simulationsaufgaben am Computer - Qualitative Analysen zu Schülerkompetenzen und Arbeitsweisen, Universität Kassel.

Kind, R. (2001). "Rationelles Arbeiten mit Binomialverteilungen." TI-Nachrichten **1/01**: 4-5.

KMK, Ed. (2003). Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Mathematik. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i. d. Fassung vom 24.05.2002. Neuwied, Luchterhand.

KMK, Ed. (2004). Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss - Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003. München, Wolters Kluwer.

Köhler, R. (1998). Eine explorative Studie zu den fachdidaktischen, curricularen und informationstechnischen Implikationen des längerfristigen Einsatzes moderner mathematischer Standardsoftware in der Analysis, Universität Kassel.

Kolmogorov, A. (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, Springer.

Kombrink, K. und R. Biehler (2002). Neue Wege in der Lehrerausbildung - ein Kurs in computerintensiver Stochastik. Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. W. Peschek. Hildesheim, Franzbecker**:** 283-286.

Krapp, A. und M. Prenzel (1992). Interesse, Lernen, Leistung. Münster, Aschendorff.

Krengel, U. (1991). Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Braunschweig, Vieweg.

Krivsky, S. (2003). Multimediale Lernumgebungen in der Mathematik - Konzeption, Entwicklung und Erprobung des Projekts MathePrisma. Hildesheim, Franzbecker.

Kröpfl, B. (2004). "Professionalisierung durch Wissenschaftlichkeit." Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **36 (1)**: 3-7.

Kultusministerium Hessen (2003). Lehrplan für die Bildungsgänge Hauptschule, Realschule, Gymnasium. Wiesbaden, HeLP.

Kütting, H. (1994). Didaktik der Stochastik. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Lane-Getaz, S. J. (2002). Simulate and stimulate to understand: Learning statistics with fathom. Minnesota, Hamline University.

Lecoutre, M. P. (1992). "Cognitive Models and Problem Spaces in "Purely Random" Situations." Educational Studies in Mathematics **23**: 557-568.

Lergenmüller, A. und G. Schmidt, Eds. (2006). Mathematik Neue Wege 6, Arbeitsbuch für Gymnasien. Braunschweig, Schroedel-Verlag.

Leuders, T. (2005). "Darf das denn wahr sein? - Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens mit Tabellenkalkulation." Praxis der Mathematik **47. Jg. Heft 4**: 8-16.

Madsen, R. und M. Borovcnik (1996). "Vorstellung von Wahrscheinlichkeit bei Schülern der Sekundarstufen." Stochastik in der Schule **16 (2)**: 7-15.

Maxara, C. (2006). Band 1: Einführung in die stochastische Simulation mit Fathom. KaDiSto. R. Biehler, Universität Kassel.

Maxara, C. und R. Biehler (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modelling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. Proceedings of ICoTS 7. A. Rossman und B. Chance, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7C1_MAXA.pdf.

Maxara, C. und R. Biehler (2007). Constructing stochastic simulations with a computer tool – Students' competencies and difficulties. Proceedings of CERME 5. D. Pitta-Pantazi und G. Philippou. Cyprus, ERME [http://ermeweb.free.fr/]**:** 762-771.

May, D. (2007). Eine Fallstudie zur Entwicklung von Schülerinnenkompetenzen zur stochastischen Simulation an Hand von Transkriptionsanalysen zu selbständigen Arbeitsphasen am Computer, Universität Kassel.

Meyer, J. (2006a). Ein einfacher Zugang zu nichtparametrischen Tests. ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht - Band 9**:** 153-165.

Meyer, J. (2006b). Ein einfacher Zugang zu t-Tests. ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht - Band 9**:** 141-152.

Meyer, H. (1987). Unterrichtsmethoden I: Theorieband. Frankfurt a. M., Cornelsen Scriptor.

Meyfarth, T. (2006a). Band 2: Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom - Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien. KaDiSto. R. Biehler, Universität Kassel.

Meyfarth, T. (2006b). Die kontinuierliche Verwendung von Simulationen im Stochastik-Leistungskurs – Ein Kurskonzept. Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Hildesheim, Franzbecker**:** 385-388.

Mills, J. D. (2002). "Using Computer Simulation Methods to Teach Statistics: A Review of the Literature." Journal of Statistics Education (electronic journal) **10(1)**.

Müller, G. und E. Wittman (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig, Vieweg.

Müller, J. H. (2005). "Die Wahrscheinlichkeit von Augensummen." Praxis der Mathematik **47. Jg. Heft 4**: 17-22.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

NCTM (2001). Prinzipien und Standards für Schulmathematik: Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit. (Übersetzt von Christine Bescherer und Joachim Engel, Ludwigsburg). Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000. Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich. M. Borovcnik, J. Engel und D. Wickmann. Hildesheim, Franzbecker**:** 11-42.

Nicholson, J., G. Mulhern, et al. (2002). Wizardry or Pedagogy? What is the driving force in the use of the new technology in teaching statistics? ICOTS 6, South Africa, IASE.

Nickerson, R. S. (1995). Can Technology Help Teaching for Understanding? Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West und M. S. Wiske. New York, Oxford University Press.

Nocker, R. (1996). Der Einfluss von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivitäten. Beiträge zum Mathematikunterricht 1996. K. P. Müller. Hildesheim, Franzbecker**:** 325-329.

Nolting, H.-P. und P. Paulus (1992). Pädagogische Psychologie. Stuttgart, Kohlhammer.

Peschek, W. (2004). "Lehrer(innen) als Forscher(innen) - Das Klagenfurter Doktorand(inn)enkolleg." Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **36 (1)**: 9-14.

Podworny, S. (2008). Hypothesentesten mit P-Werten im Stochastikunterricht der gymnasialen Oberstufe. Eine didaktische Analyse konkreten Unterrichts - basierend auf einem Kurskonzept für Leistungskurse, Universität Kassel.

Prengel, A. (1997). Perspektiven anerkennen - Zur Bedeutung von Praxisforschung in der Erziehung und Erziehungswissenschaft. Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. B. Friebertshäuser und A. Prengel. Weinheim, Juventa**:** 599-627.

Preussler, A. und R. Schulz-Zander (2004). Selbstreguliertes Lernen im Mathematikunterricht – Empirische Ergebnisse des Modellversuchs SelMa. Innovativer Unterricht mit neuen Medien. Ergebnisse wissenschaftlicher Begleitung von SEMIK-Einzelprojekten. F. Schumacher. Grünwald, FWU Institut für Film und Bild in Wissenschaft und Unterricht**:** 119-141.

Rasfeld, P. (2004). "Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie." Journal für Mathematik-Didaktik **Jg. 25, Heft 1**: 33-61.

Riemer, W. (1985). Neue Ideen zur Stochastik. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Riemer, W. (1991). "Das 'Eins durch Wurzel aus n'-Gesetz. Einführung in statistisches Denken auf der Sekundarstufe I." Stochastik in der Schule **11 (1991), Heft 3**: 24-36.

Riemer, W. und W. Petzold (1997). "Geschmackstests. Spannende und verbindende Experimente." mathematik lehren **85**: 16-19.

Romero, R., A. Ferrer, et al. (1995). "Teaching statistics to engineers: an innovative pedagogical experience." Journal of Statistics Education **3(1)**.

Rossman, A., B. Chance, et al. (2001a). Workshop Statistics: Discovery with Data. New York, Key College Publishing.

Rossman, A., B. Chance, et al. (2001b). Workshop Statistics: Discovery with Data and Fathom. New York, Key College Publishing.

Rossman, A., B. Chance, et al. (2001c). Workshop Statistics: Discovery with Data, a Bayesian Approach. New York, Key College Publishing.

Rossman, A. J. und B. L. Chance (1999). "Teaching the Reasoning of Statistical Inference, A "Top Ten" List " College Mathematics Journal **30(4)**: 297-305.

Saldanha, L. und P. Thompson (2002). "Conceptions of Sample and their Relationship to Statistical Inference." Educational Studies in Mathematics **51**: 257-270.

Sanchez, E. S. und G. Y. Canal (2003). Computational Simulation and Conditional Probability Problem Solving. ISI 54th session, Berlin, IASE.

Schätz, U. und F. Eisentraut, Eds. (2006). Delta 6, Mathematik für Gymnasien, Hessen. Bamberg, C.C.Buchner.

Schneider, E. (1997). Veränderungen des Mathematikunterrichts durch Computeralgebrasysteme (CAS). Beiträge zum Mathematikunterricht 1997. K. P. Müller. Hildesheim, Franzbecker**:** 447-450.

Schupp, H. (1985a). "Kugeln, Zapfen, Kästchen: Das Galton-Brett." mathematik lehren **Heft 12**: 4-7.

Schupp, H. (1985b). "Das Galton-Brett im stochastischen Anfangsunterricht." mathematik lehren **Heft 12**: 12-16.

Schupp, H. (1992). "Computereinsatz im Stochastikunterricht." mathematica didactica **15**: 96-104.

Schupp, H. (2004). "Allgemeinbildender Stochastikunterricht." Stochastik in der Schule **24 (3)**: 4-13.

Sedlmeier, P. (1999). Improving statistical reasoning: theoretical models and practical implications. New Jersey, Lawrence Earlbaum.

Sedlmeier, P. und G. Gigerenzer (1997). "Intuitions about Sample-Size: The Empirical Law of Large Numbers." Journal of Behavioural Decision Making **10**: 33-51.

Sedlmeier, P. und P. Köhlers (2001). Wahrscheinlichkeiten im Alltag, Statistik ohne Formeln. Braunschweig, Westermann Schulbuchverlag.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. D. A. Grouws. New York, Macmillan Publishing Company**:** 465-490.

Slovic, P., H. Kunreuter, et al., Eds. (1974). Decision processes, rationality and adjustment to natural hazards. Natural hazards, local, national and global. New York, Oxford University: 187-205.

Snir, J., C. Smith, et al. (1995). Conceptually Enhanced Simulations: A Computer Tool for Science Teaching. Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West und M. S. Wiske. New York, Oxford University Press.

Steinbring, H. (1985). "Wie verteilen sich die Kugeln beim Galton-Brett wirklich?" mathematik lehren **Heft 12**: 31-38.

Strick, H. K. (1997). "Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern über Zufallsvorgänge." mathematik lehren **Heft 85**: 52-54.

Strick, H. K. (1998). Einführung in die Beurteilende Statistik. Hannover, Schroedel.

Strick, H. K. (2005). "Bei Zufallsversuchen wiederholen sich die Ergebnisse eher als man vermutet." Praxis der Mathematik **47. Jg. Heft 4**: 23-29.

Sullivan, M. M. (1995). Development of conceptual understanding in descriptive statistics. Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. D. T. Owens, M. K. Reed und G. M. Millsap. Columbus, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Szeby, S. (2002). "Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement." Stochastik in der Schule **22 (3)**: 12-22.

Wassner, C. (2005). Förderung Bayesianischen Denkens, Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim, Franzbecker.

Wassner, C., R. Biehler, et al. (2007). "Das Konzept der natürlichen Häufigkeiten im Stochastikunterricht." Der Mathematikunterricht **53 (3)**: 33-44.

Weber, W. (2004). SelMa: Selbstgesteuertes Lernen erfordert erweiterte Kompetenzen bei Lehrenden und Lernenden. Innovativer Unterricht mit neuen Medien. Ergebnisse wissenschaftlicher Begleitung von SEMIK-Einzelprojekten. F. Schumacher. Grünwald, FWU Institut für Film und Bild in Wissenschaft und Unterricht**:** 97-118.

Weigand, H.-G. (1999). Mathematikdidaktik in den USA - Ein Erfahrungsbericht über gegenwärtige Entwicklungen. Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Hildesheim, Franzbecker**:** 582-585.

Wickmann, D. (1990). Bayes-Statistik: Einsicht gewinnen und entscheiden bei Unsicherheit. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Wickmann, D. (1998). "Zur Begriffsbildung im Stochastikunterricht." Journal für Mathematik-Didaktik **19 (1)**: 46-80.

Wild, C. und G. A. F. Seber (2000). Chance Encounters: A First Course in Data Analysis and Inference. New York, J. Wiley.

Winter, H. (1976). "Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6)." Didaktik der Mathematik **1**: 22-37.

Winter, H. (1992). "Zur intuitiven Aufklärung stochastischer Paradoxien." Journal für Mathematikdidaktik **13(1)**: 23-53.

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig, Vieweg.

Wittmann, E. (1995). "Mathematics Education as a 'Design Science'." Educational Studies in Mathematics **29**: 355-374.

Wollring, B. (1992a). Schülerversuche zur Wahrscheinlichkeit. Simulationen zum Drei-Türen-Problem - erste Evaluation. Beiträge zum Mathematikunterricht 1992. Hildesheim, Franzbecker.

Wollring, B. (1992b). "Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Aus der Vorbereitung einer Unterrichtsreihe für die Jahrgangsstufe 6." Stochastik in der Schule **12(3)**: 2-25.

Wolpers, H. und S. Götz (2002). Didaktik der Stochastik, Band 3. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. H.-P. Tietze, M. Klika und H. Wolpers. Braunschweig, Vieweg.

Zech, F. (1996). Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, Beltz-Verlag.

Anhang A: Arbeitsmaterial „Simulationsvorkurs“

Arbeitsblatt „Multiple-Choice-Test“

Betrachten Sie die folgenden beiden Tests:

Test 1 besteht aus 10 Fragen, bei denen der Prüfling entweder „ja“ oder „nein“ ankreuzen kann. Test 2 besteht aus 20 Fragen, bei denen der Prüfling entweder „ja“ oder „nein“ ankreuzen kann. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind.

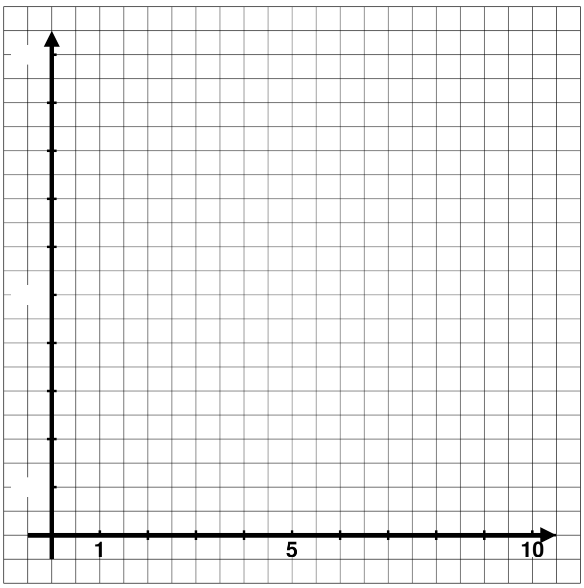
Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät?

Simulation von Test 1 mit einem 10-fachen Münzwurf: „Zahl“ ↔ „richtige Antwort“
Wie oft kommen die einzelnen möglichen Ergebnisse 0 mal „Zahl“, 1 mal „Zahl“, …, 10 mal „Zahl“ vor?

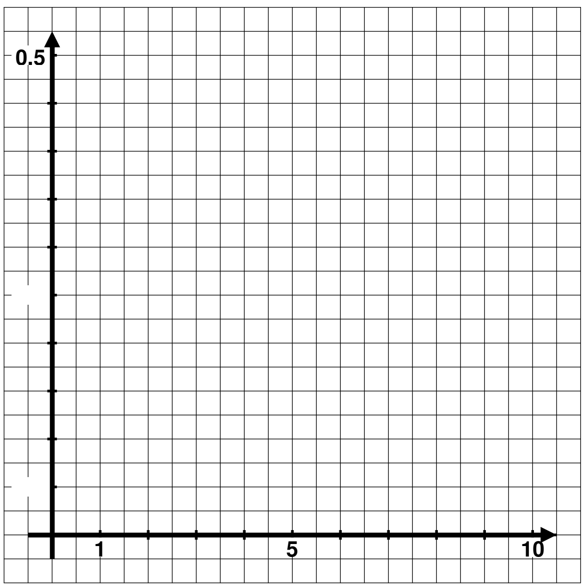
Anzahl richtiger Antworten	Absolute Häufigkeit H	Relative Häufigkeit $h = \frac{H}{n}$	Relative Häufigkeit in %
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Grafische Darstellung als Histogramm

Auftragung als absolute Häufigkeit



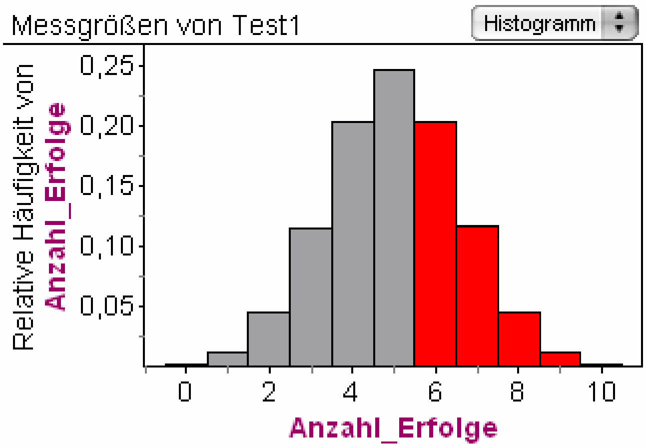
Auftragung als relative Häufigkeit



Ergebnisse der Simulation der beiden Testsituationen

Jeweils N = 10 000 Simulationsdurchgänge

Aufgetragen ist die relative Häufigkeit für die Anzahl erfolgreich gelöster Aufgaben.



Messgrößen von Test1

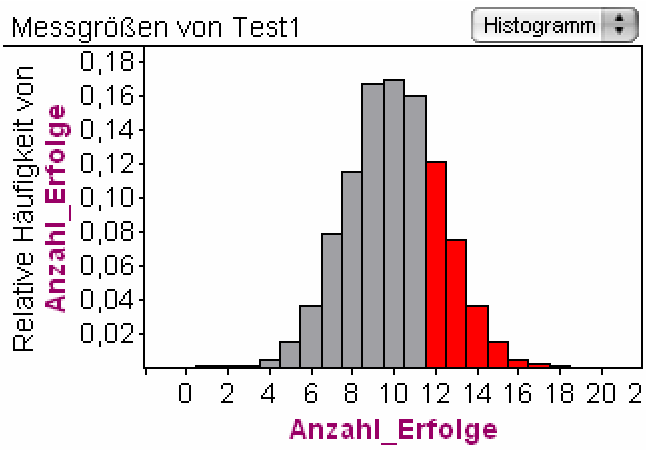
Anzahl_Erfolge	5,0003 3771 0,3771

S1 = aMittel ( )

S2 = Anzahl (Anzahl_Erfolge ≥ 6)

$$S3 = \frac{\text{Anzahl (Anzahl\_Erfolge} \geq 6)}{\text{Anzahl (Anzahl\_Erfolge)}}$$

Test1 ***n* = 10**



Messgrößen von Test1

Anzahl_Erfolge	10,0019 2540 0,254

S1 = aMittel ( )

S2 = Anzahl (Anzahl_Erfolge ≥ 12)

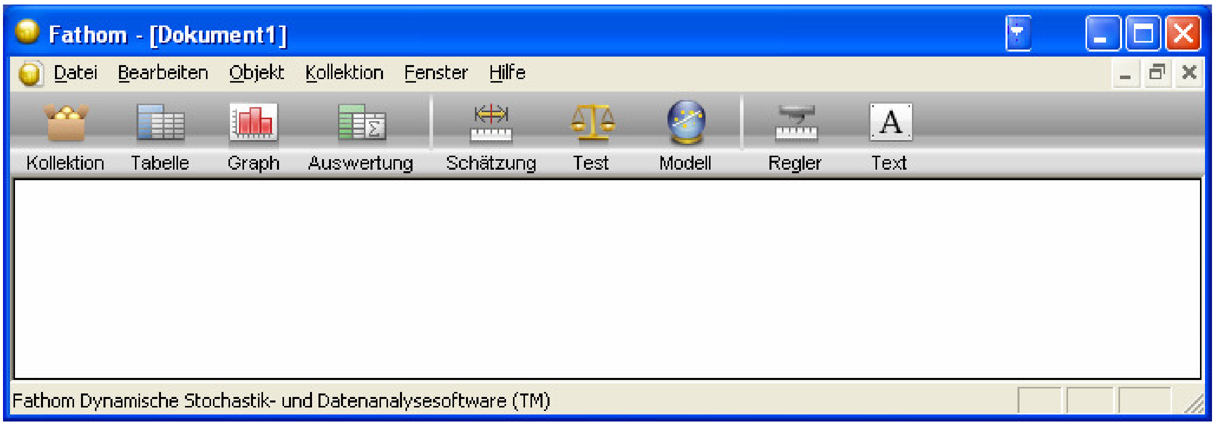
$$S3 = \frac{\text{Anzahl (Anzahl\_Erfolge} \geq 12)}{\text{Anzahl (Anzahl\_Erfolge)}}$$

Test2 ***n* = 20**

Bei Test 1 mit n = 10 Testfragen ist die Verteilung breiter um die Mitte (X = 5 richtige Antworten) gestreut. Der Bereich mit mindestens 60% richtigen Antworten hat eine größere Häufigkeit als bei Test 2 mit n = 20 Testfragen.

Bei Test 2 mit n = 20 Testfragen ist die Verteilung stärker um die Mitte (X = 10 richtige Antworten) konzentriert. Daher kommt es bei Test 2 seltener vor, dass man nur durch Raten mindestens 60% richtige Antworten erhält.

Anleitung: Erstellung der Simulation „Multiple-Choice-Test“ in FATHOM



1. Schritt: Simulation eines Testdurchgangs mit 10 Fragen

Ziehen Sie mit der Maus eine Kollektion ins Fenster. Doppelklicken Sie mit der Maus auf den Namen „Kollektion 1“ und benennen Sie die Kollektion im sich öffnenden Fenster in „Test1“ um.

Markieren Sie die Kollektion indem Sie darauf klicken. Ziehen Sie nun eine Tabelle ins Fenster. Durch Klick auf <neu> können Sie den Namen eines neuen Merkmals „Aufgaben“ als Tabellenspalte hinzufügen.

Formel für das Merkmal „Aufgaben“
Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf die Zelle „Aufgaben“ → Formel bearbeiten
Direkte Eingabe der Formel : `ZufallsWahl("erfolg";"misserfolg")`

oder Suchen der `Zufallswahl()`-Funktion über
Funktionen → Zufallszahlen → ZufallsWahl()

Hinzufügen von Fällen
Klick mit der rechten Maustaste auf die Tabelle → *Neue Fälle* → Eingabe von „10“ im sich öffnenden Fenster

Mit „Strg-y“ wird die Simulation des Tests wiederholt.

2. Schritt: Zählen der Anzahl der Erfolge als Messgröße der Simulation

Durch Doppelklick auf die Kollektion „Test1“ öffnet man das Info-Fenster zu Test1:

→ Messgrößen → „Anzahl_Erfolge“ in die Zelle <neu> eintragen → Eingeben der Formel durch Doppelklick auf die Formel-Spalte: `Anzahl(Aufgaben="erfolg")`

3. Schritt (Simulation 10 000fach wiederholen)

Klick mit der rechten Maustaste auf die Kollektion „Test1“ → Messgrößen sammeln

Sie erhalten eine neue Kollektion „Messgrößen von Test1“. Ziehen Sie bei markierter Kollektion „Messgrößen von Test1“ eine Tabelle ins Fenster. Sie sehen hier die Anzahl der Erfolge bei fünf Simulationsdurchgängen des Tests.

Einstellen der Anzahl der Simulationsdurchgänge:

Durch Doppelklick auf die Kollektion „Messgrößen von Test1“ öffnet man das Info-Fenster zu „Messgrößen von Test1“:

→ Messgrößen sammeln → *Animation* ausschalten, *Vorhandene Fälle ersetzen* einschalten, 10 000 Messgrößen einstellen → Weitere Messgrößen sammeln

4. Schritt (Auswertung der Simulation)

Grafische Darstellung

Ziehen Sie mit der Maus einen Graphen ins Fenster. Ziehen Sie das Attribut „Anzahl_Erfolge“ aus der Tabelle zu „Messgrößen von Test1“ auf die *x*-Achse. Ändern Sie den Diagramm-Typ auf Histogramm.

Durch Doppelklick auf die Achsen des Diagramms können Sie die Breite der Histogrammbalken sowie die Bereiche der Achsen ändern.

Durch Klick auf die einzelnen Balken oder durch das Aufziehen eines Rechtecks über den Balken werden die zugehörigen Histogrammbalken markiert. Wenn Sie mit der Maus auf die Kollektion „Messgrößen von Test1“ fahren, so können Sie die Anzahl der markierten Fälle links unten in der Fußleiste ablesen.

Tabellarische Darstellung

Ziehen Sie mit der Maus eine Auswertungstabelle in das Fenster. Ziehen Sie das Merkmal „Anzahl_Erfolge“ bei gedrückter Shift-Taste aus der Tabelle zu „Messgrößen von Test1“ in eine freie Zelle der Auswertungstabelle (zuerst „Anzahl_Erfolge“ anklicken, dann die Shift-Taste drücken, dann das Merkmal in die Tabelle ziehen).

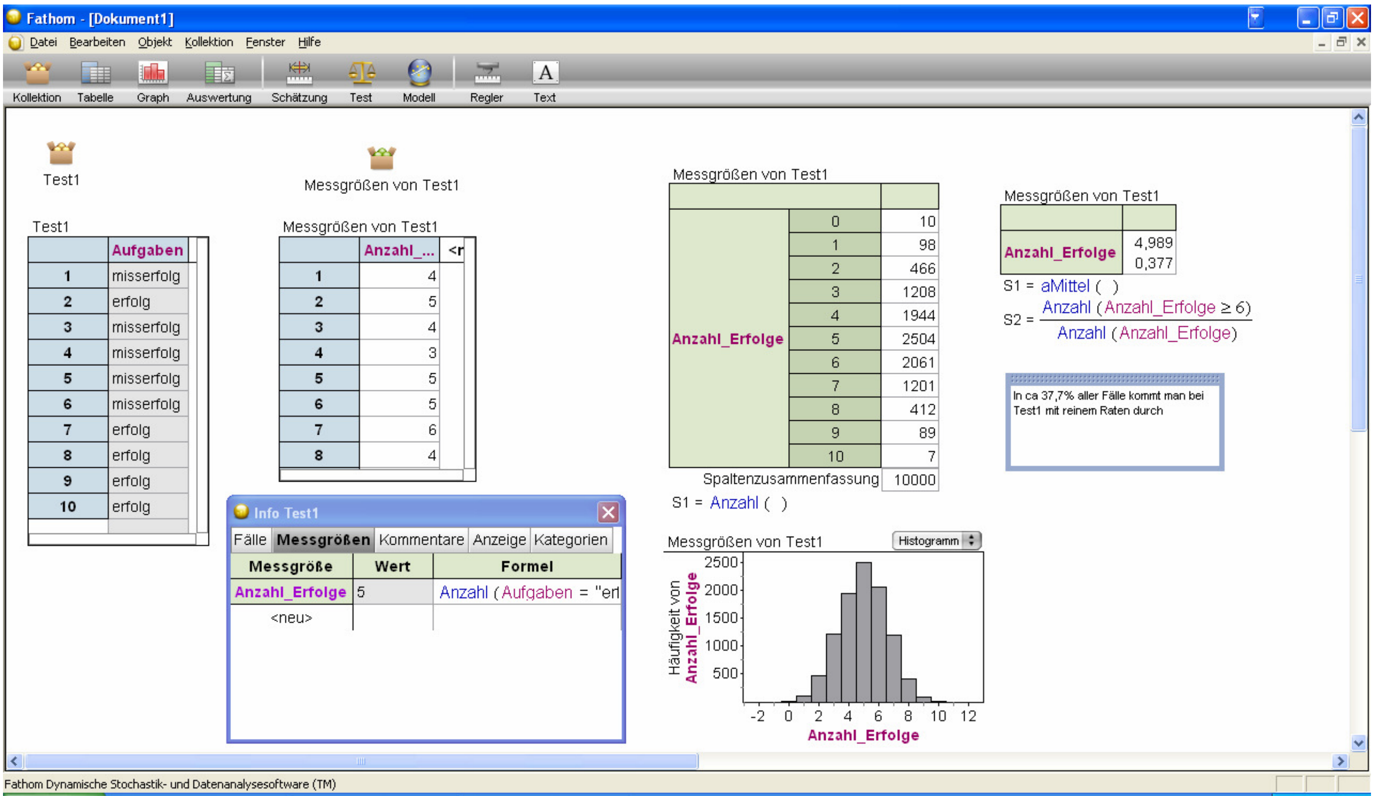
Berechnung der relativen Häufigkeit

Ziehen Sie mit der Maus eine Auswertungstabelle in das Fenster. Ziehen Sie das Merkmal „Anzahl_Erfolge“ (ohne Shift-Taste) aus der Tabelle zu „Messgrößen von Test1“ in eine freie Zelle der Auswertungstabelle.

Klick mit rechter Maustaste auf die Auswertungstabelle → Formel hinzufügen → eingeben der Formel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)`

(Für ≥ müssen Sie im Formeleditor die Strg-Taste drücken !!)

Die relative Häufigkeit steht dann als zweite Zahl in der Auswertungstabelle. (Die erste Zahl, der Mittelwert, wird automatisch erzeugt).



Prinzipieller Aufbau einer Simulation in vier Schritten

1. Modellierung des einzelnen Zufallsversuchs
   (hier: Modellierung einer Testaufgabe mit
   `ZufallsWahl("erfolg","misserfolg")`,
   über 10 Fälle werden 10 Testaufgaben simuliert)
2. Festlegen einer Messgröße (hier: „Anzahl Erfolge“)
3. Durchführung einer großen Anzahl dieser Zufallsversuche
   N = 1 000 oder N = 10 000
4. Auswertung der erzeugten Häufigkeitsverteilung der Messgröße
   (grafische, tabellarische und rechnerische Auswertung,
   relative Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis)

Simulationsplan zur Computersimulation des Testproblems:

Ein Test hat 10 Fragen, von denen jede entweder mit „ja“ oder mit „nein“ beantwortet werden muss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht man den Test, wenn man nur rät?

1. *Man erstellt eine Kollektion „Test1“, in der der Test nachgebildet wird. In der Tabelle zu Test1 gibt es eine Spalte „Aufgaben“, in der das Raten der 10 Aufgaben mit der Formel `ZufallsWahl("erfolg","misserfolg")` simuliert wird.*
2. *Bei der Simulation von Test1 interessiert uns die Anzahl der Erfolge. Hierfür definieren wir im Info-Fenster von „Test1“ die Messgröße „Anzahl_Erfolge“ mit der Formel*
   `Anzahl(Aufgaben="erfolg")`.
3. *Um die relative Häufigkeit für das Auftreten einer bestimmten Anzahl an Erfolgen zu erhalten, muss man die Simulation sehr oft wiederholen. Mit „Messgrößen sammeln“ führen wir die Simulation 10 000mal durch. Die Anzahl der Erfolge ist jeweils in der neu entstandenen Kollektion „Messgrößen von Test1“ festgehalten.*
4. *Die gesammelten Simulationen müssen nun ausgewertet werden: Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten, mit denen man die Kollektion „Messgrößen von Test1“ auswerten kann:*
   - Tabelle der Häufigkeitsverteilung
     Auszählen der Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer „Auswertungstabelle“ (Spalte „Anzahl_Erfolge“ bei gedrückter Shift-Taste in die Auswertungstabelle ziehen)
   - Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung
     Grafische Darstellung der Verteilung der Anzahl der Erfolge (Spalte „Anzahl_Erfolge“ auf die x-Achse eines Graphen ziehen und die Einstellung „Histogramm“ wählen)
   - Rechnerische Auswertung
     Die relative Häufigkeit für mindestens 60% richtig beantworteter Aufgaben mit der Formel `Anzahl(Anzahl_Erfolge≥6)/Anzahl(Anzahl_Erfolge)` direkt bestimmen. (Spalte „Anzahl_Erfolge“ in eine Auswertungstabelle ziehen und über „Formel hinzufügen“ die Formel eingeben)

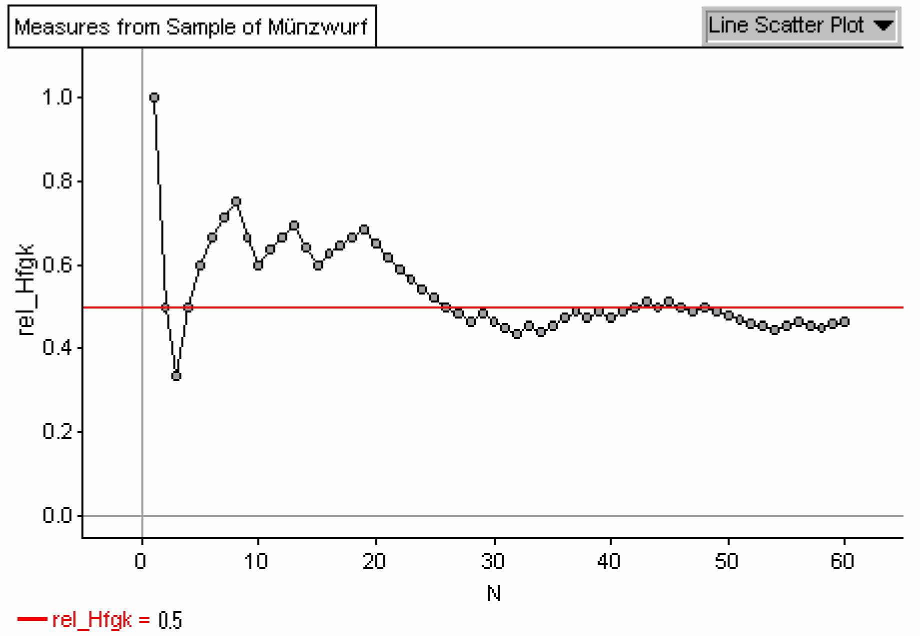
Ergebnisblatt: Empirisches Gesetz der großen Zahl

Nach einer hinreichend großen Anzahl N von Durchführungen eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten h(E) für ein Ereignis E gegen die Wahrscheinlichkeit P(E) für dieses Ereignis.

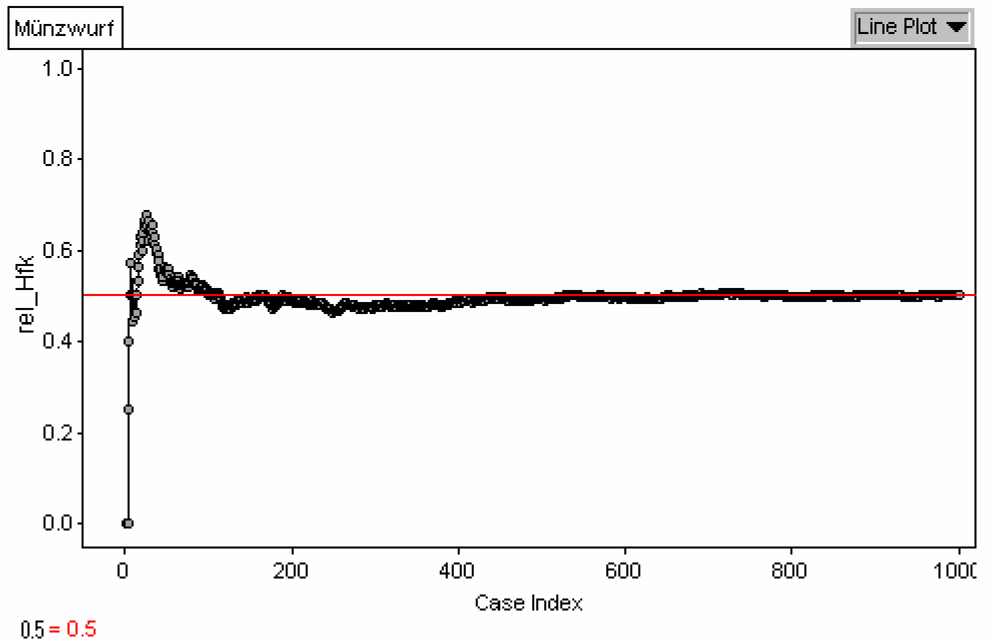
Beispiel Münzwurf:

Auftragung der relativen Häufigkeit für das Ereignis „Zahl“

N = 60



N = 1 000



Faustregeln für die Genauigkeit der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Simulationen (ermittelt durch Probieren):

N =   1 000:

N = 10 000:

Simulationen mit FATHOM: Befehlsübersicht

Zufallsgenerator:

`ZufallsWahl(1;3;5;7)`	liefert eine Zufallszahl aus der Menge {1,3,5,7}
`ZufallsWahl("r";"s";"w")`	liefert eine zufällige Auswahl aus der Menge {"r","s","w"}
`ganzeZufallszahl(1;6)`	liefert eine natürliche Zufallszahl von 1 bis 6
`ZufallsZahl()`	liefert eine Zufallszahl im Intervall [0,1], gleichverteilt

Beispiel:

`ganzeZufallszahl(1;6)`	simuliert einen Würfel
`ZufallsZahl()≤0,2`	ergibt `wahr`, wenn die erzeugte Zufallszahl $\leq 0{,}2$ ist. Da dies mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ passiert, wird hiermit ein Teilversuch der Binomialverteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ simuliert

Erstellen der Tabellen

Hinzufügen einer Formel zu einer Tabellenspalte:
mit rechter Maustaste auf den Kopf der Spalte klicken → „Formel bearbeiten“ → Formel eingeben

Hinzufügen neuer Fälle:
mit rechter Maustaste auf die Tabelle klicken → „Neue Fälle...“

Wiederholung der Simulation:
Strg-y

Umgang mit der grafischen Darstellung

Relative/absolute Skalierung eines Histogramms:
Diagramm markieren → „Graph“ in der Menüleiste wählen → „Skala“

Formatierung des Histogramms:
Doppelklick auf eine der Achsen

Hinzufügen einer Funktion:
Mit rechter Maustaste auf das Diagramm klicken → „Funktion einzeichnen“ → Funktion eingeben

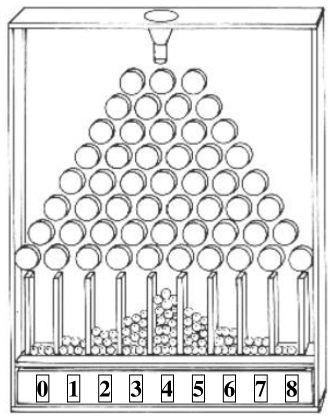
Hinzufügen eines statistischen Wertes:
Mit rechter Maustaste auf das Diagramm klicken → „Wert einzeichnen“ → Funktion eingeben

Funktionen / Statistische Kennzahlen:

`Summe(Wurf)`	liefert die Summe der Spalte „Wurf“
`Anzahl(Summe>2)`	liefert die absolute Anzahl aller Elemente der Spalte „Summe“, die größer sind als 2
`Anzahl(Summe>2)/Anzahl(Summe)`	liefert die relative Anzahl aller Elemente der Spalte „Summe“, die größer sind als 2
`AnzVerschiedeneWerte(Werte)`	liefert die Anzahl verschiedener Einträge der Spalte „Werte“
`aMittel(Gewinn)`	liefert den Mittelwert der Spalte “Gewinn“
`PopStdAbw(Gewinn)`	liefert die Standardabweichung der Spalte “Gewinn“
`Perzentil(10;Summe)`	liefert den kleinsten Wert x, so dass mindestens 10% aller Einträge der Spalte „Summe“ $\leq x$ sind
`Wenn(Summe(Wurf)=7)` $\begin{cases} 40 \\ -10 \end{cases}$	Verzweigung: Wenn die Bedingung in der Klammer erfüllt ist, ergibt der Befehl 40, sonst liefert er −10.

Anhang B: Arbeitsmaterial „Binomialverteilung“

Arbeitsblatt zur Modellierung des Galton-Bretts:



Bildquelle:
BLK - Modellversuch SelMa
www.learn-line.nrw.de

1. Eine Kugel hat an jedem Zapfen des Galton-Bretts zwei Möglichkeiten: rechts oder links.
2. Die Wahrscheinlichkeit für rechts oder links beträgt an jedem Zapfen jeweils $p = 0{,}5$, *unabhängig* vom bisherigen Verlauf des Weges.
3. Die Nummer X des Kästchens ist identisch mit der Anzahl der Wegentscheidungen nach rechts.

Das gegebene Galton-Brett hat 8 Zeilen. Eine Kugel kann somit auf acht Stufen jeweils nach rechts oder nach links fallen. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Weg im 8-zeiligen Galton-Brett beträgt somit $0{,}5^8$.

Zu Kästchen $X = k$ gibt es $\binom{8}{k}$ Wege, nämlich alle Wege, bei denen die Kugel k-mal nach rechts gefallen ist.

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit für eine Kugel, im Kästchen k zu landen:

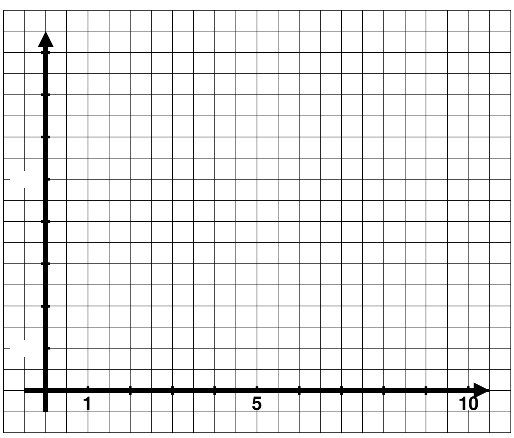
$$P(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0{,}5^8$$

Vergleich der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Experiment:

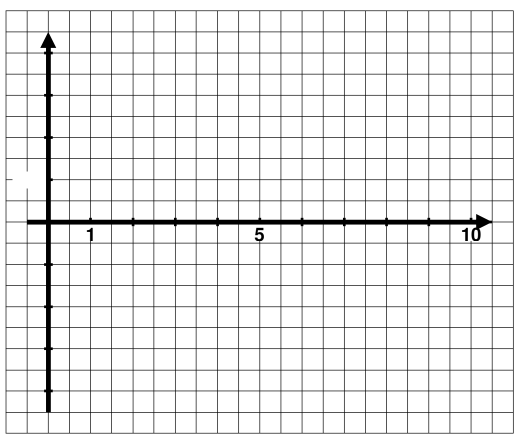
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0{,}5^8$									
Zählung der Kugeln im Experiment: Absolute Anzahl $H_{\exp}(X = k)$									
Zählung der Kugeln im Experiment: Relative Häufigkeit $h_{\exp}(X = k)$									
Relative Abweichung: $\frac{P(X=k) - h_{Exp}(X=k)}{P(X=k)}$									

Grafische Darstellung als Histogramm

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = k)$



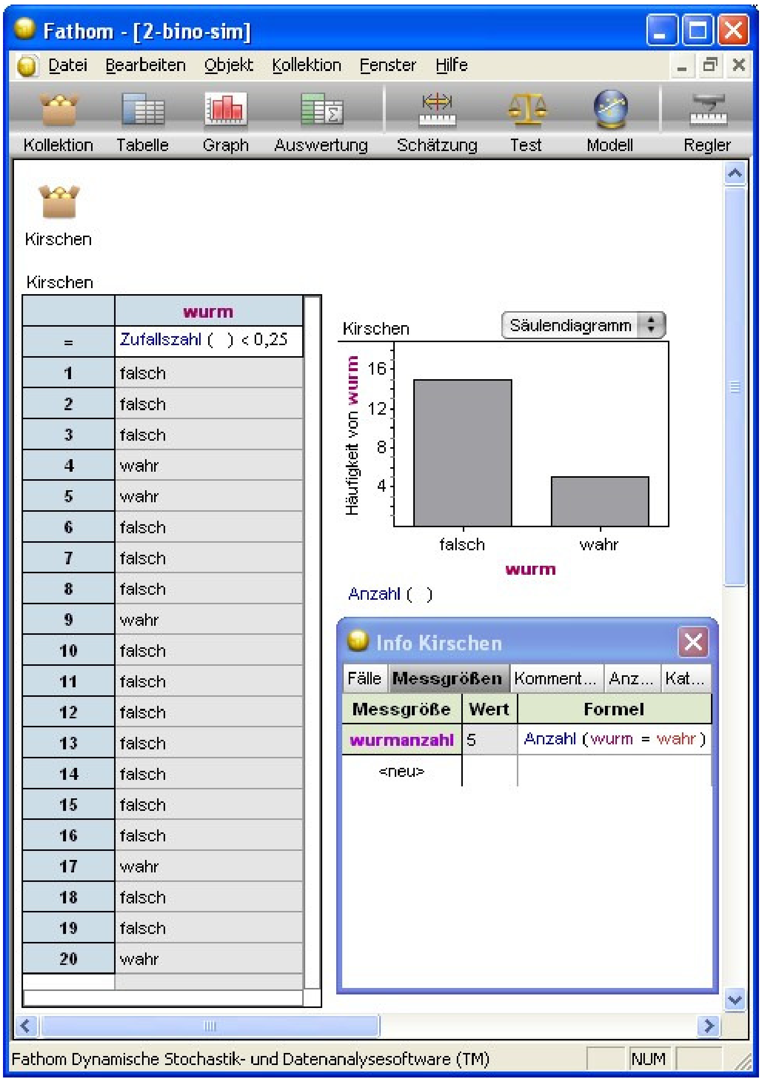
relative Abweichung: $\frac{P(X=k) - h_{Exp}(X=k)}{P(X=k)}$



Aufgabenblatt: Simulation einer Binomialverteilung

Kirschernte

Fritzchen pflückt 20 Kirschen vom Kirschbaum und verzehrt diese sofort. Nachdem er von seiner Mutter erfährt, dass bei der diesjährigen Kirschernte ca. 25% aller Kirschen „verwurmt“ sind, bekommt er einen großen Schreck. Er macht sich Gedanken, wie viele Würmer er wohl verzehrt hat, wenn jede der zwanzig gepflückten Kirschen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 25% verwurmt war.



A) Simulieren Sie die Auswahl der 20 Kirschen mit FATHOM.

Führen Sie die Simulation 10mal durch und schreiben Sie auf, wie viele verwurmte Kirschen bei den 10 Simulationen jeweils aufgetreten sind.

Sie können die Simulation mit „Strg-y“ wiederholen.

B) Führen Sie die Simulation des Kirschexperiments mit „Messgrößen sammeln“ 10 000mal durch und stellen Sie die auftretenden Häufigkeiten für die Anzahl an verwurmten Kirschen grafisch dar.

Beantworten Sie mit Hilfe der Auswertungs-Tabelle die folgenden Fragen:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen keinen Wurm verzehrt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen weniger als drei wurmstichige Kirschen verzehrt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Fritzchen mehr als 10 wurmstichige Kirschen verzehrt?

Veranschaulichen Sie sich die Wahrscheinlichkeiten jeweils am Histogramm.

C) Bestimmen Sie auf theoretischem Weg die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 8 von den 20 Kirschen, die Fritzchen gegessen hat, verwurmt waren. Vergleichen Sie das Ergebnis Ihrer Berechnung mit dem Ergebnis Ihrer Simulation.

Hinweis:

Veranschaulichen Sie sich das Ereignis „8 von 20 Kirschen sind verwurmt“ über Pfade im Baumdiagramm.

Übungsaufgaben zur Binomialverteilung I

Aufgabe 1)
Eine Reißzwecke fällt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ auf den Kopf (***K***) und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 0{,}6$ auf die Seite (***S***). Die Reißzwecke wird 10mal geworfen.

a) Erläutern Sie, dass der Versuch eine Bernoulli-Kette darstellt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Reißzwecke 0mal, 1mal, 2mal, 3mal, …, 10mal auf dem Kopf landet.

c) Tragen Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung grafisch als Histogramm auf.

d) Wie oft fällt die Reißzwecke beim zehnfachen Werfen im Mittel auf den Kopf?

Aufgabe 2)
Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen bzw. eines Mädchens beträgt ca. $p = 0{,}5$.

a) In einem Krankenhaus werden an einem Tag 12 Kinder geboren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 6 Jungen und 6 Mädchen sind?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in einer Familie mit 6 Kindern mehr Jungen als Mädchen?

Aufgabe 3)
Nach Angaben der Telefongesellschaft „Tele8“ kommen nur 75% aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand möchte bei „Tele8“ fünf Telefongespräche erledigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) jedes Mal direkt durchkommt?

b) jedes Mal nicht direkt durchkommt?

c) genau einmal nicht direkt durchkommt?

Aufgabe 4)

Jemand spielt gegen einen gleichwertigen Gegner. Was ist wahrscheinlicher:

a) 3 von 4 oder 5 von 8 Spielen zu gewinnen?

b) Mindestens 3 von 4 oder mindestens 5 von 8 Spielen zu gewinnen?

Überlegen Sie sich, unter welchen Bedingungen man hier mit der Binomialverteilung rechnen darf.

Aufgabe 5)

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 50 Items mit jeweils 5 Antworten, von denen jeweils nur eine richtig ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei reinem Raten

a) mehr als 20 Items richtig?

b) zwischen 10 und 20 Items richtig?

c) weniger als 10 Items richtig?

d) genau 15 Items richtig?

Übungsaufgaben zur Binomialverteilung II

Aufgabe 1)
Bei der Erdbeerernte haben ca. 15% der Erdbeeren faulige Stellen. Jemand pflückt zufällig 80 Erdbeeren.

a) Unter welchen Bedingungen kann man diesen Versuch als Binomialverteilung auffassen?
b) Simulieren Sie die Situation als Binomialverteilung und stellen Sie die relative Häufigkeit der Anzahl fauler Erdbeeren grafisch dar. Die relative Häufigkeit erhält man, indem man in der Menüleiste *Graph* → *Skala* → *relative Häufigkeit* wählt (Grafik markieren).
c) Bestimmen Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man weniger als 10, weniger als 15 bzw. weniger als 20 faule Erdbeeren erwischt hat. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Ihrer Simulation des Experiments.
d) Über die Funktion *BinomialWs(x,n,p)* kann man mit FATHOM die theoretischen Werte der Binomialverteilung berechnen.
Ergänzen Sie die theoretisch berechnete Binomialverteilung in dem Histogramm der simulierten Häufigkeitsverteilung:
rechte Maustaste → *Funktion einzeichnen* → *Funktionen* → *Verteilungen* → *Binomial* → *BinomialWs(runde(x); 80; 0,15)*

   Vergleichen Sie die simulierte Häufigkeitsverteilung mit der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Fall, dass man mit 1000 bzw. 10 000 Wiederholungen simuliert.

e) Wie viele Erdbeeren muss man mindestens pflücken, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95% mindestens 80 Erdbeeren erhält, die nicht faul sind? Lösen Sie das Problem rechnerisch und überprüfen Sie mit Hilfe einer geeigneten Simulation, ob Sie das optimale *n* gefunden haben.

Aufgabe 2)
Ein Verein hat 25 Mitglieder. 5 haben sich verschworen, einen bestimmten Vorschlag durchzubringen, die anderen wählen zufällig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Vorschlag angenommen?

Aufgabe 3) (Biathlon)
Beim Biathlon wird auf fünf nebeneinander liegende Scheiben geschossen. Ein Teilnehmer habe bei jedem Schuss unabhängig von den vorherigen Ergebnissen eine Trefferquote von 90%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) trifft er alle fünf Scheiben?
b) trifft er mindestens drei Scheiben?
c) trifft er nur die beiden letzten Scheiben?
d) trifft er zum ersten Mal beim dritten Schuss?
e) braucht er weniger als drei Schüsse bis zum ersten Treffer?
f) wechseln Treffer und Fehlschuss ab?
g) trifft er genau zwei Scheiben, die nebeneinander liegen?

Aufgabe 4)
Bei einem Karaokeabend treten acht Teams gegeneinander an. Jedes Team besteht aus drei Männern und drei Frauen. Für die erste Spielrunde werden aus jedem Team zwei Personen zufällig ausgelost, die ein Duett singen sollen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich bei der Auslosung für die erste Spielrunde mehr als drei reine Männerpaare?

Übungsaufgaben zur Binomialverteilung III

Aufgabe 1) *(Quelle: Mathe-Treff, Bezirksregierung Düsseldorf)*

Feste Bindung nicht gefragt – Umfrage unter jungen Männern: Ernährerrolle wird abgelehnt

Hamburg, 26. November (AP).

Junge Männer von heute haben anscheinend ein völlig anderes Rollenverständnis als ihre Väter. Das jedenfalls zeigt das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage der Zeitschrift 'Brigitte' unter 4000 Personen ab 14 Jahren durch das Sample-Institut. Danach wird von vielen jungen Leuten abgelehnt, was für ihre Väter noch eine Selbstverständlichkeit war, nämlich heiraten, eine Familie gründen und diese ernähren. 40 Prozent der jungen Männer unter 25 geben an, keine feste Bindung zu suchen. Mehr als die Hälfte finden es nicht wichtig, einmal eine Familie zu ernähren.

Ganz anders die Männer über 55. In großer Mehrheit stimmen sie für die dauerhafte Beziehung. Nur 14 Prozent der über 55-jährigen Männer halten es nicht mehr für erstrebenswert, sich auf Dauer fest zu binden.

Die Erwartungen der jungen Frauen decken sich weitgehend mit den Wünschen der jungen Männer. Die feste Bindung ist auch für 35 Prozent der Frauen unter 25 nicht erstrebenswert. Noch weniger Frauen (35 Prozent) als Männer (41 Prozent) unter 25 erwarten, dass der Mann die Rolle des Familienernährers übernimmt.

Unterdessen sind junge Männer auch bereit, die Frauen im Haushalt zu unterstützen. Nur jeder fünfte Mann unter 25 lehnt es ab, die Hälfte der Hausarbeit zu übernehmen, was von fast allen Frauen (93 Prozent) erwartet wird. Hausfrauentätigkeit wird aber von Frauen durchweg höher bewertet als von Männern. Während 63 Prozent der jungen Männer und 79 Prozent der über 55-jährigen Männer angaben, Hausfrauentätigkeit sei für sie genauso viel Wert wie Berufstätigkeit, meinten dies 69 Prozent der jungen Frauen und 88 Prozent der Frauen über 55 Jahre.

(Frankfurter Rundschau vom 27.11.1984)

Der Leistungskurs Mathematik hat 11 junge Männer und 8 junge Frauen.
Legen Sie für diesen Leistungskurs die in dem Zeitungsartikel angegebenen relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zugrunde.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

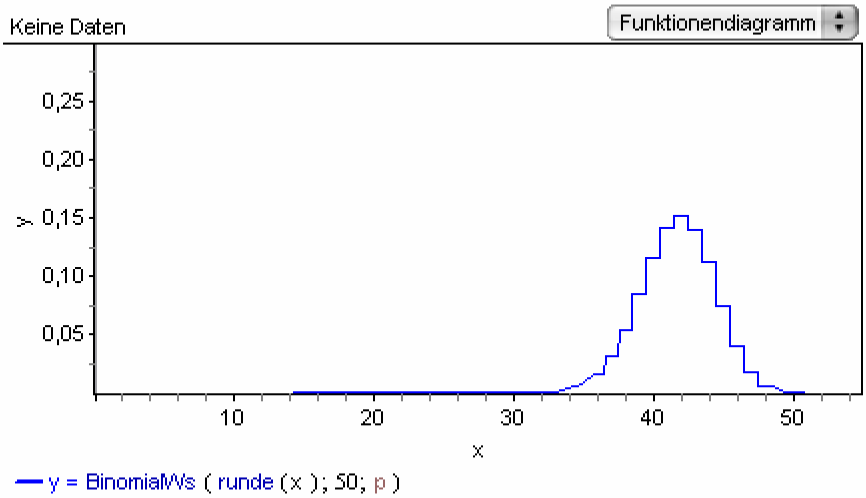
... mindestens die Hälfte der männlichen Kursteilnehmer keine feste Bindung sucht;
... maximal die Hälfte der männlichen Kursteilnehmer die Teilung der Hausarbeit ablehnt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwarten mehr als die Hälfte der weiblichen Kursteilnehmerinnen von den Männern eine Teilung der Hausarbeit?

c) Wie viele junge Männer müssten in dem Leistungskurs vorhanden sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95% mindestens 8 Männer mit einer Teilung der Hausarbeit einverstanden wären?

Aufgabe 2)
Bei einer schweren Operation besteht für Frauen die Chance 0,8 und für Männer die Chance 0,7, danach noch mindestens 1 Jahr zu leben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 2 Frauen und 3 Männern, die diese Woche operiert werden mussten, in einem Jahr noch genau 2 Personen am Leben? Lösen Sie das Problem theoretisch oder mit Hilfe einer geeigneten Simulation.

Arbeitsblatt: Eigenschaften der Binomialverteilung



Die FATHOM-Umgebung „Bino1.ftm“ zeigt die grafische Darstellung einer Binomialverteilung mit $n = 50$, bei der man die Erfolgswahrscheinlichkeit p variieren kann.

Die FATHOM-Umgebung „Bino2.ftm“ zeigt die grafische Darstellung einer Binomialverteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$, bei der man die Anzahl n der Versuche variieren kann.

1. Untersuchen Sie anhand der FATHOM-Umgebung „Bino1.ftm“ wie sich die Binomialverteilung ändert, wenn man die Erfolgswahrscheinlichkeit p variiert.
   Betrachten Sie die Lage des Maximums, die Breite und die Höhe der Verteilung sowie Symmetrieeigenschaften.

   Formulieren Sie Ihre Beobachtungen unter Einbindung aussagekräftiger FATHOM-Diagramme in einem Word-Dokument.

2. Untersuchen Sie anhand der FATHOM-Umgebung „Bino2.ftm“ wie sich die Binomialverteilung ändert, wenn man die Anzahl n der Versuche variiert.

   Betrachten Sie die Lage des Maximums, die Breite und die Höhe der Verteilung sowie Symmetrieeigenschaften.

   Formulieren Sie Ihre Beobachtungen unter Einbindung aussagekräftiger FATHOM-Diagramme in einem Word-Dokument.

3. Versuchen Sie eine Formel zu finden, welche die Lage des Maximums der Verteilung beschreibt. Überprüfen Sie Ihre vermutete Formel, indem Sie den zugehörigen Wert über *Wert einzeichnen* in die Verteilung eintragen.

4. Begründen Sie die folgende Eigenschaft der Binomialverteilung anschaulich an einem Beispiel sowie mathematisch formal mit Hilfe der Formel für die Binomialverteilung.

   Histogramme der Binomialverteilung sind für $p = 0{,}5$ *symmetrisch.*

5. Veranschaulichen Sie die folgende Eigenschaft der Binomialverteilung. Fügen Sie der Grafik in der FATHOM-Umgebung „Bino1.ftm“ hierfür ein geeignetes Histogramm hinzu:

   Spiegelt man ein Histogramm der Binomialverteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p an der Gerade $x = \frac{n}{2}$, *so erhält man das Histogramm der Binomialverteilung mit der Erfolgswahrscheinlichkeit* $1 - p$.

   Begründen Sie dies anschaulich an einem Beispiel sowie mathematisch formal mit Hilfe der Formel für die Binomialverteilung.

σ- Umgebungen der Binomialverteilung

Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie stark die Werte einer Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ streuen.

Für binomialverteilte Zufallsgrößen besitzt die Standardabweichung eine ganz besonders anschauliche Bedeutung:

Wahrscheinlichkeiten von Umgebungen des Erwartungswerts bei Binomialverteilungen

Für die σ-Umgebungen des Erwartungswerts gelten bei Binomialverteilungen näherungsweise die folgenden „σ-Regeln“:

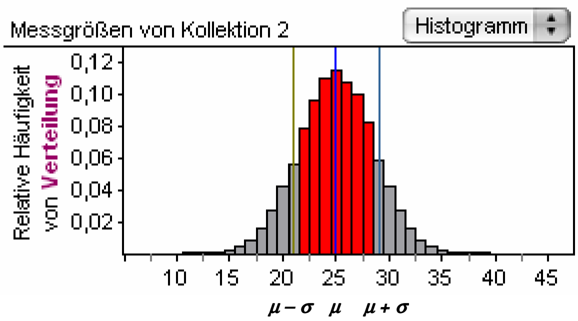
Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung
1σ	0,68
2σ	0,955
3σ	0,997

Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
0,90	$1{,}64\sigma$
0,95	$1{,}96\sigma$
0,99	$2{,}58\sigma$

Diese „σ-Regeln“ gelten umso genauer, je größer n ist, insbesondere muss die **Laplace-Bedingung** erfüllt sein: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$

Beispiel: $n = 50,\ p = 0{,}5,\ \mu = n \cdot p = 25,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \approx 3{,}54$

1σ-Umgebung:



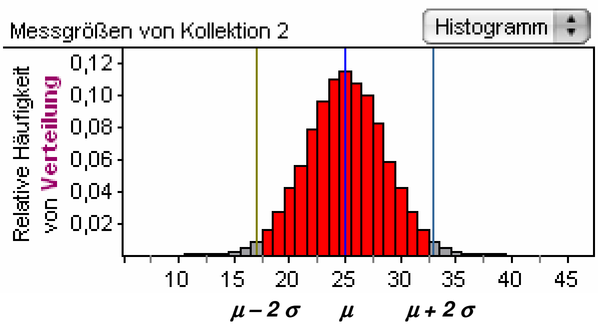
$[25 - 1 \cdot 3{,}54;\, 25 + 1 \cdot 3{,}54] = [21{,}46;\, 28{,}54]$

$P(22 \le X \le 28) = 0{,}6778 \approx 68\%$

2σ- Umgebung:

$[25 - 2 \cdot 3{,}54;\, 25 + 2 \cdot 3{,}54] = [17{,}92;\, 32{,}08]$

$P(18 \le X \le 32) = 0{,}9672 \approx 96\%$



3σ- Umgebung:

$[25 - 3 \cdot 3{,}54;\, 25 + 3 \cdot 3{,}54] = [14{,}38;\, 35{,}62]$

$P(15 \le X \le 35) = 0{,}9974 \approx 99{,}7\%$

Aufgabe:
Betrachten Sie die Zufallsgröße X: „Anzahl der Sechsen beim 300-maligen Werfen eines Würfels“.
Bestimmen Sie die 1σ-, die 2σ-, und die 3σ-Umgebung des Erwartungswerts und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für diese Umgebungen.

Arbeitsblatt:
Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten

Wir wollen am Beispiel des Münzwurfs untersuchen, wie genau man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe von in Versuchsreihen ermittelten relativen Häufigkeiten bestimmen kann. Hierfür simulieren wir mit FATHOM die folgenden drei Versuchsreihen:

1. Eine faire Münze wird 100mal geworfen und die relative Häufigkeit von „Wappen“ bestimmt.
2. Eine faire Münze wird 400mal geworfen und die relative Häufigkeit von „Wappen“ bestimmt.
3. Eine faire Münze wird 1600mal geworfen und die relative Häufigkeit von „Wappen“ bestimmt.

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl des Auftretens von „Wappen“

Wir betrachten die relative Häufigkeit und damit die Zufallsgröße Y:

$$Y = \frac{X}{n} \text{ : relative Häufigkeit des Auftretens von „Wappen“}$$

Überlegen Sie sich jeweils 10 Schätzwerte der erhaltenen relativen Häufigkeiten:

100 Würfe:

____

400 Würfe:

____

1600 Würfe:

____

a) Führen Sie die folgende Simulation für den 100-fachen Münzwurf, für den 400-fachen Münzwurf und für den 1600-fachen Münzwurf durch. Füllen Sie anhand der Simulationsergebnisse die unten folgende Tabelle aus und übertragen Sie die zugehörigen Histogramme in eine Word-Datei.

Anleitung für den 100-fachen Münzwurf:

- Erstellen Sie eine Kollektion „Muenze_100“. Erzeugen Sie in der zugehörigen Tabelle ein Attribut „Wurf“ mit der Formel `ZufallsWahl("Wappen","Zahl")`. Füllen Sie die Tabelle mit 100 Fällen.
- Berechnen Sie die Messgröße „rel_Anzahl_Wappen“ mit der Formel `Anzahl(Wurf="Wappen")/Anzahl(Wurf).`
- Sammeln Sie 1000 Messgrößen und werten Sie die entstandene Tabelle zu „Messgrößen von Muenze_100“ folgendermaßen aus:
  1. Stellen Sie die Daten als Histogramm im Bereich von 0 bis 1 dar und zeichnen Sie das arithmetische Mittel ein. (Formel `aMittel(rel_Anzahl_Wappen)`)
  2. Bestimmen Sie in einer Auswertungs-Tabelle die Standardabweichung σ der simulierten Verteilung (Formel `PopStdAbw(rel_Anzahl_Wappen)`).
  3. Berechnen Sie das Intervall der 1σ-Umgebung um das arithmetische Mittel und berechnen Sie mit FATHOM die relative Häufigkeit, mit der das Simulationsergebnis innerhalb der 1σ-Umgebung liegt.
  4. Zeichnen Sie das Intervall der 1σ-Umgebung in das Histogramm ein.

n =	Mittelwert	Standard-abweichung σ	1σ-Umgebung	Relative Häufigkeit der 1σ-Umgebung
100				
400				
1600				

b) Wie verhält sich die Standardabweichung bei einer zunehmender Anzahl n von Münzwürfen?

c) Zeigen Sie mathematisch, dass die Standardweichung der relativen Häufigkeit $Y = \frac{X}{n}$ an Erfolgen proportional zu $1/\sqrt{n}$ ist.

d) Welche Bedeutung hat die 1σ-Umgebung des Erwartungswerts p = 0,5 für die Vorhersage des Ergebnisses eines einzigen realen 100-fachen Münzwurfs mit einer fairen (d. h. ungezinkten) Münze?

e) Welche allgemeinen Aussagen zur Übereinstimmung der relativen Häufigkeit von „Wappen“ beim n-fachen Münzwurf mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,5 für „Wappen“ kann man in Abhängigkeit von n treffen?

Ergebnisblatt: Das $^1\!/\!_{\sqrt{n}}$ – Gesetz

Simuliert man den n-fachen Münzwurf für n = 100, n = 400 und n = 1600 mit je 1000 Wiederholungen, so erhält man für die Zufallsgröße Y:

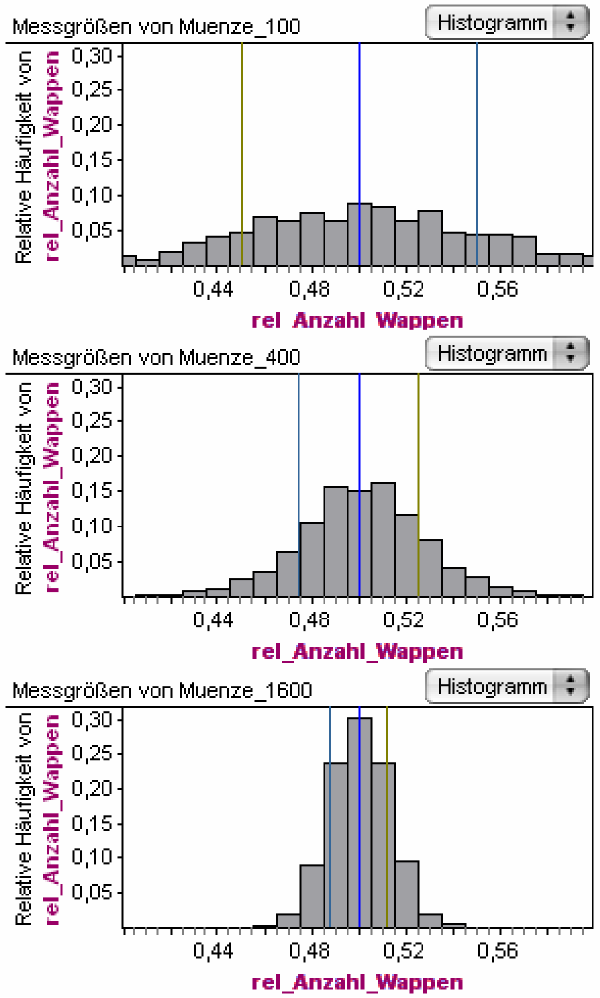
$Y = \frac{X}{n}$: relative Häufigkeit des Auftretens von „Wappen“

die folgenden Verteilungen:

n = 100:
σ = 0,051

n = 400:
σ = 0,026

n = 1600:
σ = 0,012



In der grafischen Darstellung der Verteilungen wurde jeweils die Wahrscheinlichkeit p = 0,5 für das Auftreten von „Wappen“ sowie die 1σ-Umgebung ergänzt.

Während die absolute Anzahl von „Wappen“ (Zufallsgröße X) binomialverteilt ist mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, so wird bei der relativen Häufigkeit des Auftretens von „Wappen“ (Zufallsgröße $Y = \frac{X}{n}$) die X-Achse mit dem Faktor $^1\!/\!_n$ gestaucht. Auch die Standardabweichung muss daher durch n geteilt werden:

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_X}{n} = \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}{n} = \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}$$

Bei der Betrachtung der relativen Häufigkeit der Anzahl der Erfolge einer Bernoulli-Kette mit n Wiederholungen berechnet sich die Standardabweichung der zugehörigen Verteilung als $\sigma_Y = \frac{\sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}$.

Damit halbiert sich die Breite der σ-Umgebungen um den Erwartungswert p, wenn man die Anzahl n der Versuchsdurchführungen vervierfacht.
Anschaulich: **Man muss die Anzahl n der Wiederholungen vervierfachen, damit die relativen Häufigkeiten nur noch halb so stark um den Erwartungswert p schwanken.**

Aufgabenblatt: Binomialverteilung und $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz

Aufgabe 1)

Ein fairer Spielwürfel wird 100mal bzw. 400mal hintereinander geworfen. Man interessiert sich für den relativen Anteil aufgetretener Einsen.

a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der relative Anteil aufgetretener Einsen größer als 0,2 ist. Begründen Sie das Ergebnis anschaulich.

b) Wie groß ist der symmetrische Bereich um $p = \frac{1}{6}$ herum zu wählen, damit der relative Anteil aufgetretener Einsen mit etwa 95% Wahrscheinlichkeit in diesem Bereich liegt?

Aufgabe 2) („Überbuchung von Flugzeugen“)

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass durchschnittlich 12% der Passagiere den Flug kurzfristig absagen. Daher überbucht sie alle Flüge mit 10%, d. h. es werden für jeden Flug 10% mehr Buchungen angenommen als Plätze im Flugzeug zur Verfügung stehen. Probleme treten auf, wenn nur sehr wenige Passagiere kurzfristig absagen.

Betrachten Sie die drei folgenden Flugzeugtypen:

Canadjet: 50 Plätze
Airbus A320: 150 Plätze
Airbus A380: 555 Plätze

1. Bei welchem der drei Flugzeugtypen kommt es bei oben genanntem Buchungsverfahren am häufigsten vor, dass die Plätze im Flugzeug nicht ausreichen? Stellen Sie zunächst Vermutungen an und begründen Sie diese mit Bezug auf das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ – Gesetz.
2. Mit wie vielen Passagieren, die den gebuchten Flug auch wahrnehmen, kann die Fluggesellschaft bei den drei Flugzeugtypen jeweils in 90% aller Fälle rechnen?
3. Ermitteln Sie bei jedem Flugzeugtyp die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Plätze im Flugzeug nicht ausreichen.

Aufgabe 3) „Die Genauigkeit von Simulationsergebnissen“

Für die Untersuchung der Genauigkeit von Simulationsergebnissen wird die folgende Problemstellung betrachtet:

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dabei mindestens eine sechs zu werfen.

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „mindestens eine Sechs“ beträgt $p = \frac{11}{36} = 0{,}306$. Bestätigen Sie dies durch eine FATHOM-Simulation mit 1000 Wiederholungen.

b) Führt man eine solche FATHOM-Simulation mit jeweils 1000 Wiederholungen mehrfach durch, so schwanken die relativen Häufigkeiten für das Ereignis „mindestens eine Sechs“ um die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{11}{36} = 0{,}306$.

Erklären Sie, wieso die 1000-fache Wiederholung der Simulation eine Bernoulli-Kette darstellt, so dass sich die Schwankungen der resultierenden relativen Häufigkeiten über die Streuung der Binomialverteilung erklären und berechnen lassen.

c) In welchem Bereich um die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}306$ herum liegen ca. 90% der über die Simulation ermittelten relativen Häufigkeiten, wenn man mit $n = 1000$ Wiederholungen simuliert? Berechnen Sie den Bereich theoretisch über eine geeignete σ-Umgebung.

d) Betrachten Sie die folgende Simulationsanleitung und begründen Sie über die inhaltliche Erläuterung der einzelnen Schritte, dass man hiermit die Genauigkeit der Simulationsergebnisse am Beispiel der gegebenen Problemstellung untersuchen kann.

1. Erstellen Sie eine Kollektion „Wuerfel“ mit einem Merkmal „Wurf“ und der zugehörigen Formel *GanzeZufallszahl(1;6)*. Fügen Sie der Kollektion zwei Fälle hinzu.
2. Definieren Sie in der Kollektion „Wuerfel“ eine Messgröße E mit der Formel *Anzahl(Wurf=6) ≥ 1*.
3. Sammeln Sie 1000 Messgrößen in der Kollektion „Messgrößen von Wuerfel“.
4. Definieren Sie in der Kollektion „Messgrößen von Wuerfel“ die Messgröße „rel_Anzahl_E“ mit der Formel *Anzahl(E=wahr)/Anzahl( )*.
5. Sammeln Sie nun hiervon 100 Messgrößen in der Kollektion „Messgrößen von Messgrößen von Wuerfel“ und werten Sie die Kollektion geeignet aus.

Erstellen Sie die Simulation gemäß der Anleitung und werten Sie die Ergebnisse so aus, dass Sie die Ergebnisse mit dem in c) berechneten 90%-Bereich für die relative Häufigkeit vergleichen können.

Anhang C:
Arbeitsmaterial „Testen von Hypothesen“

Arbeitsblatt: Einführung in das Testen von Hypothesen

„Außersinnliche Wahrnehmung“
Bei einem Experiment zur Untersuchung der Existenz außersinnlicher Wahrnehmung sitzen sich der Versuchsleiter und die Testperson an einem Tisch gegenüber. Der Versuchsleiter deckt zufällig eine von vier verschiedenen Karten auf (z. B. Stern, Kreis, Welle oder Quadrat). Die Testperson kann die Karten nicht sehen und muss angeben, welches Muster gerade aufgedeckt ist. Der Versuch wird mit derselben Testperson 40mal wiederholt.

Nehmen Sie an, dass die Testperson keine außersinnlichen Fähigkeiten besitzt und simulieren Sie unter dieser Voraussetzung das Experiment mit den 40 Wiederholungen. Betrachten Sie hierbei die Anzahl richtig erratener Karten als Messgröße.

a) Führen Sie die Simulation 20mal durch und schreiben Sie auf, welche Anzahlen richtig bestimmter Karten in diesen 20 Versuchen durch reines Raten erreicht werden. Schätzen Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 12 Karten richtig geraten werden.

Wiederholen Sie die Simulation mit Messgrößen sammeln 10 000mal. Stellen Sie die entstehende Häufigkeitsverteilung der Anzahl richtig geratener Karten als Histogramm dar und beantworten Sie mit der Häufigkeitsverteilung die folgenden Fragen:

b) In wie vielen von diesen 10 000 simulierten Testdurchgängen erhalten Sie genau 25% also 10 richtig geratene Karten? Haben Sie ein solches Ergebnis erwartet?

c) Wäre es überraschend, wenn jemand, der nur rät, mindestens 30%, d. h. mindestens 12 Karten richtig angibt?

d) Wäre es überraschend, wenn jemand, der nur rät, mindestens 45%, d. h. mindestens 18 Karten richtig angibt?

e) Nehmen Sie an, die Testperson gibt mindestens 50%, d. h. mindestens 20 der Karten richtig an. Wie überzeugt wären Sie, dass die Testperson tatsächlich nur geraten hat? Beziehen Sie sich bei Ihrer Antwort auf die Ergebnisse der Simulation.

f) Beantworten Sie Aufgabe e) für mindestens 32,5%, d. h. mindestens 13 richtig bestimmte Karten.

Quelle: Rossmann, A., B. Chance, et al. (2001). Workshop Statistics. New York, Key College Publishing.

Arbeitsblatt „Cola-Test“: Kann man Coca-Cola am Geschmack erkennen?

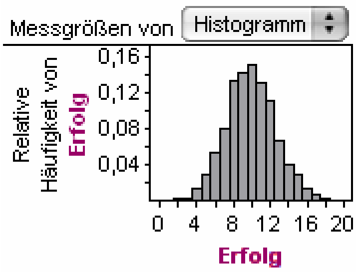
Es soll getestet werden, ob man Coca-Cola am Geschmack erkennen kann. Hierfür bekommen die Testpersonen jeweils drei Becher mit Cola vorgesetzt. Die Becher enthalten drei verschiedene Sorten (z. B. Coca-Cola, Pepsi-Cola und Afri-Cola). Die Testpersonen probieren jeweils alle drei Becher und müssen hiermit den Becher herausfinden, in dem sich die Coca-Cola befindet.

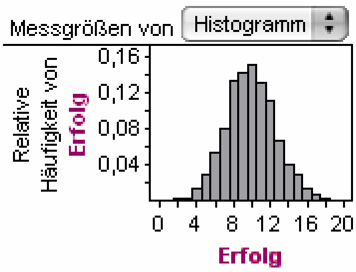
Ergebnis der Klasse:

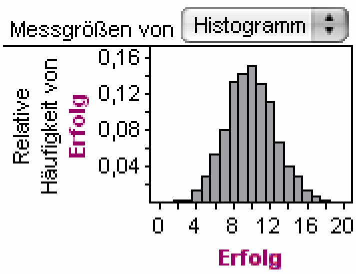
a) Wie wahrscheinlich ist es, dass man unser Ergebnis oder ein noch besseres erhält, wenn man annimmt, dass man die Coca-Cola nicht aus den anderen beiden Sorten herausschmecken kann? Was kann man aufgrund der Berechnung über das geschmackliche Erkennen von Coca-Cola in unserer Klasse aussagen?

b) Formulieren Sie unseren Test mathematisch formal mit Hypothese, Alternative, p-Wert und Evidenz.

c) Nehmen wir an, Alicia, Brenda und Celia wiederholen den Test jeder jeweils 30mal. Alicia bestimmt hierbei 10mal den richtigen Becher, Brenda 12mal und Celia 15mal. Visualisieren Sie den p – Wert von Alicia, Brenda und Celia in den drei unten dargestellten Binomialverteilungen und interpretieren Sie die Grafiken.







Bestimmen Sie den p – Wert jeweils rechnerisch und formulieren Sie mit ein paar Sätzen, wie Sie die Fähigkeiten von Alicia, Brenda und Celia zur geschmacklichen Erkennung von Coca-Cola jeweils beurteilen.

Quelle: Rossmann, A., B. Chance, et al. (2001). <u>*Workshop Statistics*</u>*. New York, Key College Publishing.*

Übungsaufgaben: Hypothesentest mit P-Werten

Aufgabe 1)

In einem Fernsehbericht wird behauptet, dass 70% der Bevölkerung für die Beibehaltung der Sommerzeit sind. Eine Regionalzeitung führt in ihrer Stadt eine Befragung durch, weil sie nach Eingang einiger Leserbriefe zum Thema Sommerzeit vermutet, dass der Prozentsatz von 70% zu hoch ist. In der Befragung stellt sich heraus, dass 62% der befragten Personen für die Beibehaltung der Sommerzeit sind.
Formulieren Sie die Situation als Hypothesentest und bestimmen Sie P-Wert und Evidenz unter der Voraussetzung, dass 100 bzw. 400 Personen befragt wurden.
Schreiben Sie zu Ihren Berechnungen mit 400 befragten Personen einen kurzen Zeitungsartikel, der die Befragung und Ihre Folgerungen beschreibt und begründet.

Aufgabe 2)

In der Hinrunde der Fußball-Bundesliga 2004/2005 gab es 71 Heimsiege, 46 Auswärtssiege und 36 Unentschieden. Kann man hieraus allgemein schließen, dass die Siegchancen einer Mannschaft bei einem Heimspiel größer sind als bei einem Auswärtsspiel?
Formulieren Sie die Situation als Hypothesentest.

Aufgabe 3)

In Deutschland ist Blutgruppe A bei 42,5% der Bevölkerung vorhanden. Aufgrund von verschiedenen Untersuchungen hat man die Vermutung, dass in dieser Bevölkerungsgruppe Magenkarzinome häufiger auftreten als bei Personen mit anderer Blutgruppe.

In einer Untersuchung hat man festgestellt, dass von 2380 Patienten mit Magenkarzinom 1109 die Blutgruppe A hatten.

a) Beurteilen sie das Ergebnis der Untersuchung. Welche Aussage kann man aufgrund der Untersuchung treffen? Lösen Sie das Problem mit einer Simulation oder rechnerisch.
b) Welche Beurteilung der Untersuchung ergibt sich, wenn von 238 untersuchten Patienten mit Magenkarzinom 111 die Blutgruppe A haben? Lösen Sie das Problem mit einer Simulation oder rechnerisch. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus a).
c) Beschreiben Sie in Worten, welche Wahrscheinlichkeit mit dem P-Wert in b) berechnet wird.

Quelle: SELMA-Online-Materialien, www.learn-line.nrw.de

Aufgabe 4) („Pratt-Woodruff-Experiment“)

In dem berühmten Originalexperiment zur Untersuchung der Existenz außersinnlicher Wahrnehmung sitzen sich der Versuchsleiter und die Testperson an einem Tisch gegenüber. Der Versuchsleiter deckt nacheinander zufällig sogenannte Rhine-Karten auf, auf denen fünf verschiedene Muster abgebildet sein können (vgl. Abbildung). Die Testperson kann die Karten nicht sehen und muss jeweils angeben, um welches Muster auf der Karte es sich handelt.
Bei der von Pratt und Woodruff 1938 durchgeführten Versuchsserie wurden mit mehreren Studenten als Testpersonen insgesamt 60.000 Karten aufgedeckt. Von diesen 60.000 Karten wurden 12.489 richtig bestimmt.
Beurteilen Sie das Ergebnis.

Quelle: Seber, G. A. F. and C. Wild (2000). A First Course in Data Analysis and Inference. New York, J. Wiley.

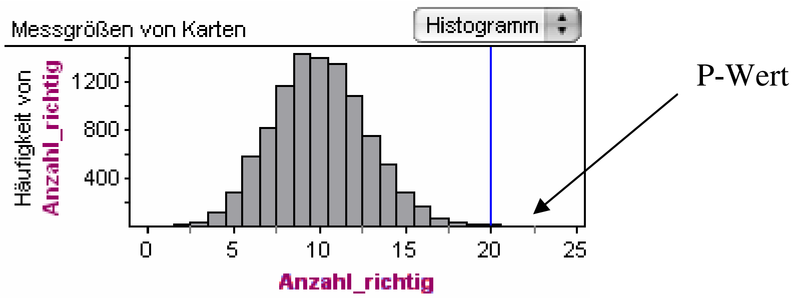
Merkblatt: Hypothesentest mit P-Werten

Nullhypothese H_0: $p = 0{,}25$ (die Testperson rät nur)

Alternativhypothese H_1: $p > 0{,}25$ (die Person ist besser als reines Raten)

Test 1: 20 von 40 vorgelegten Karten wurden richtig bestimmt

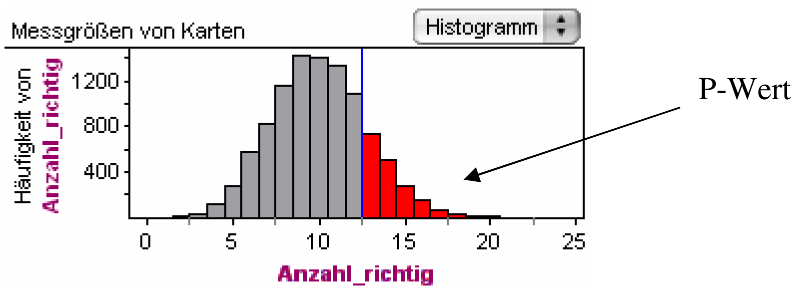
Wahrscheinlichkeit für ein solches oder ein noch stärker abweichendes Ergebnis, falls nur geraten wurde: $P_{0,25}(X \geq 20) = 0{,}00057$ (P-Wert)



Interpretation:
„Entweder die Person hat nicht geraten. Oder die Person hat geraten, dann ist aber etwas extrem Seltenes passiert.“
Da der P-Wert kleiner als 0,1% ist, spricht man in diesem Fall von „sehr starker Evidenz“ gegen die Nullhypothese.

Test 2: 13 von 40 vorgelegten Karten wurden richtig bestimmt

Wahrscheinlichkeit für ein solches oder noch ein stärker abweichendes Ergebnis, falls nur geraten wurde: $P_{0,25}(X \geq 13) = 0{,}179$ (P-Wert)



Das beobachtete Ergebnis tritt bei reinem Raten in 17,9% aller Fälle auf, ist also auch bei reinem Raten nicht ungewöhnlich.
Das Experiment liefert keine Evidenz gegen die Nullhypothese des reinen Ratens.

Allgemein:
Für die Berechnung des P-Wertes geht man davon aus, dass die Nullhypothese wahr ist und berechnet unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ein Ergebnis erhält, welches mindestens so stark vom Erwartungswert abweicht wie das im Versuch beobachtete Ergebnis. Je kleiner der P-Wert ist, desto stärker spricht der experimentelle Befund gegen das Vorliegen der Nullhypothese. Man spricht auch von „Evidenz gegen die Nullhypothese“. Eine übliche Klassifikation ist die folgende:

P-Wert $\leq$ 10%	schwache Evidenz
P-Wert $\leq$ 5%	mittlere Evidenz
P-Wert $\leq$ 1%	starke Evidenz
P-Wert $\leq$ 0,1%	sehr starke Evidenz

Übungsaufgaben: Hypothesentest mit Signifikanzniveau

Aufgabe 1) „Tea-Tasting-Lady“

Eine englische Lady behauptet, sie könne am Geschmack erkennen, ob zuerst der Tee in der Tasse war und dann die Milch hinzu gegeben wurde oder ob man umgekehrt den Tee auf die Milch gegossen habe. Auf einer Geburtstagsparty werden der Lady daher 20 Tassen mit Tee vorgesetzt, bei denen die Lady herausfinden soll, in welcher Reihenfolge Milch und Tee eingegossen wurden. Als Preis wird ein Kilogramm feinster Darjeeling-Tee ausgesetzt. Man legt fest, dass die Lady den Preis nur erhält, wenn das Ergebnis des Tests mindestens mittlere Evidenz gegen ein pures Raten der Tea-Tasting-Lady aufweist.

a) Wie viele Tassen Tee muss die Lady mindestens richtig bestimmen, um den Preis zu gewinnen? Erläutern Sie für einen „mathematischen Laien“, nach welchen Kriterien die Mindestanzahl an richtig bestimmten Tassen ermittelt wurde.
b) Wie verändert sich die Berechnung in a), wenn man der Lady nur dann den Preis zuspricht, falls das Ergebnis des Tests mindestens starke Evidenz gegen ein pures Raten aufweist? Berechnen Sie und erläutern Sie anhand einer Grafik der Binomialverteilung.

Aufgabe 2) „verwurmte Äpfel“

Ein Landwirt bietet Bio-Äpfel an, die nach seinen Angaben höchstens zu 10% verwurmt sind. Ein Händler behauptet, dass die Äpfel mindestens zu 20% verwurmt sind und verlangt einen Preisnachlass. Es werden 100 Äpfel untersucht.

a) Formulieren Sie den Hypothesentest, wenn Sie aus Sicht des Landwirts argumentieren. Wann ist das Ergebnis des Tests statistisch signifikant (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$)?
b) Formulieren Sie den Hypothesentest, wenn Sie aus Sicht des Händlers argumentieren. Wann ist das Ergebnis des Tests statistisch signifikant (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$)?

Quelle: Baum, M., D. Brandt, et al. (2003). Lambacher Schweizer Stochastik. Stuttgart, Klett.

Aufgabe 3) „gezinkte Münze“

Um zu untersuchen, ob eine Münze gezinkt ist, wird diese mehrfach hintereinander geworfen und gezählt, wie oft hierbei „Wappen“ fällt.

a) Beschreiben Sie die Situation als Hypothesentest. Was ist hier die Hypothese und was die Alternative?
b) Die Münze wird 200mal geworfen. Für welche Häufigkeiten von „Wappen“ weicht das Ergebnis statistisch signifikant vom Verhalten einer ungezinkten Münze ab (Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$)? Berechnen Sie die Häufigkeiten absolut und relativ.
c) Beantworten Sie b) für 1000 Münzwürfe.
d) Beschreiben Sie in Worten, wie die in b) und c) berechneten Bereiche für das Werfen von „Wappen“ mit dem Begriff der Evidenz eines Hypothesentests gegen die Nullhypothese zusammenhängen.
e) Vergleichen Sie die Ergebnisse von b) und c).

Aufgabe 4)

Beurteilen Sie den nebenstehenden Sachverhalt jeweils mit einem Signifikanztest und mit dem P-Wert-Verfahren.
Vergleichen Sie die beiden Verfahren.

Quelle: Strick, H. K. (1998). Einführung in die Beurteilende Statistik. Hannover, Schroedel.

Rechts oder links

An den niederländischen Stränden würden mehr linke als rechte Schuhe angespült; in Schottland sei es umgekehrt. Das habe eine Untersuchung niederländischer Biologen ergeben, teilte das Institut für Wald- und Naturforschung in Wageningen am Freitag mit. Die Wissenschaftler hätten auf der holländischen Nordseeinsel Texel 68 linke und 39 rechte Schuhe gefunden, auf den schottischen Shetlandinseln dagegen 63 linke und 93 rechte Schuhe. Mit der Untersuchung wollte der Biologe Mardik Leopold beweisen, dass zwei ähnliche Gegenstände mit unterschiedlicher Form im Meer in verschiedenen Richtungen treiben. Deswegen spülten an bestimmten Stränden auch mehr rechte und an anderen mehr linke Muschelhälften an. Als seiner Theorie angezweifelt wurde, bat Leopold andere Wissenschaftler, die Probe aufs Exempel zu machen. Mit besagtem Ergebnis.

(aus „Frankfurter Rundschau“)

Arbeitsblatt: Hypothesentest – Fehler 1. und 2. Art

Teil A) „Torwart-Training“

Ein Torwart hält seit Jahren Elfmeter mit einer Quote von 25%. Um dies zu verbessern und damit einen besseren Vertrag zu erhalten, nimmt er in der Sommerpause an einem speziellen Elfmetertraining teil. Er kommt nach der Sommerpause zurück und berichtet seinem Trainer und seinem Manager, dass er seine Elfmeterquote auf nun 33% gehaltene Elfmeter verbessert hat. Der Manager und der Trainer wollen vor dem neuen Vertragsabschluss ein Probetraining mit 30 Elfmeterschüssen durchführen.

a) Simulieren Sie das Probetraining in FATHOM 10 000mal unter der Annahme, dass die Haltequote des Torwarts beim Elfmeter unverändert bei 25% liegt. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung der gehaltenen Elfmeter grafisch als Histogramm dar.

b) Welche Mindestanzahl gehaltener Elfmeter muss vor dem Probetraining vereinbart werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Torwart mit einer unveränderten Trefferquote von 25% ein solches Ergebnis aus reinem Zufall erhält, kleiner als 5% ist?

c) Simulieren Sie nun das Probetraining mit FATHOM nochmals 10 000mal unter der Annahme, dass die Erfolgsquote des Torwarts beim Halten eines Elfmeters nun tatsächlich bei 33% liegt. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung grafisch als Histogramm dar. Tragen Sie beide Histogramme aus a) und c) mit gleicher Achsenskalierung übereinander auf.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Torwart mit einer 33%igen Haltequote bei den nach b) getroffenen Vereinbarungen das Probetraining?

   Wie wahrscheinlich ist es, dass der Torwart trotz einer tatsächlichen Leistungsverbesserung auf 33% seinen Manager in dem vereinbarten Probetraining mit 30 Elfmeterschüssen nicht von seiner Leistungsverbesserung überzeugen kann?

d) Übertragen Sie die Zeichnungen in Ihr Heft und veranschaulichen Sie alle berechneten Wahrscheinlichkeiten mit Erläuterungen in den Grafiken.

   Welche Bedeutung hat die Überlappung der beiden Verteilungen?

e) Schreiben Sie eine zusammenfassende Beurteilung über die Qualität der bei dem Probetraining getroffenen Vereinbarungen über die Mindestanzahl zu haltender Elfmeter. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Fehler ein, die bei der Beurteilung der Ergebnisse des Probetrainings auftreten können.

Teil B) „Torwart-Training“

f) Wie würde sich die Qualität der bei dem Probetraining getroffenen Vereinbarungen über die Mindestanzahl gehaltener Elfmeter aus Teil A) ändern, wenn man in b) mit einem Signifikanzniveau von 10% gerechnet hätte?

g) Wiederholen Sie die Aufgabenteile aus Teil A) unter der Voraussetzung, dass der Torwart ein Probetraining mit 100 Elfmeterschüssen absolviert (Signifikanzniveau 5%).

Quelle: Rossmann, A., B. Chance, et al. (2001). Workshop Statistics. New York, Key College Publishing.

“Spielcasino”

Ein Spielcasinobesitzer bekommt aus Insiderkreisen einen „heißen Tipp“: Es wurden gefälschte Spielwürfel eingeschmuggelt, bei denen die „Sechs“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% fällt. Der Casinobesitzer beschließt, alle Würfel durch jeweils 100 Testwürfe zu prüfen. Er möchte möglichst sicher gehen, dass die Würfel nicht gezinkt sind.

a) Entwerfen Sie einen Hypothesentest, der auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ sicherstellt, dass die Würfel nicht in der vermuteten Weise gezinkt sind.

b) Beschreiben Sie die möglichen Fehler 1. und 2. Art und berechnen Sie die zugehörigen Fehlerwahrscheinlichkeiten. Was bedeuten Ihre Berechnungen für den Casinobesitzer?

c) Ist es bei diesem Problem freigestellt, was man als Hypothese H_0 wählt oder gibt es hier eine eindeutige Priorität?

d) Nehmen Sie an, bei einem bestimmten Spielwürfel wird nach dem in a) berechneten Verfahren festgestellt, dass er nicht gezinkt ist. Können Sie eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit machen, dass dieser Spielwürfel doch zu den gezinkten Spielwürfeln gehört? Nehmen Sie schriftlich Stellung.

Quelle: Bigalke, A, N. Köhler, et al. (2002), Mathematik 13.I Leistungskurs Hessen, Berlin, Cornelsen.

Arbeitsblatt: Hypothesentest – Operationscharakteristik

Teil A) „Medikamentenstudie“

Die bislang auf dem Markt befindlichen Medikamente können eine bestimmte Krankheit nur bei höchstens 60% der Patienten heilen. Eine Firma hat ein neues Medikament entwickelt, von dem sie behauptet, dass die Patienten hiermit deutlich häufiger geheilt werden können.

In einer klinischen Untersuchung wird das neue Medikament an 20 Patienten ausgetestet. Es wird festgelegt, dass die höhere Wirksamkeit des neuen Medikaments anerkannt wird, wenn mindestens 15 der 20 Patienten geheilt werden.

a) Beschreiben Sie das Vorgehen mathematisch als Hypothesentest und formulieren Sie die Fehler, die bei dem Test auftreten können.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster und zweiter Art. Gehen Sie zur Berechnung des Fehlers zweiter Art aus von einer Heilungschance des neuen Medikaments von 80%.
c) Betrachten Sie die FATHOM-Umgebung „Medikament20.ftm“. Hier sind die Binomialverteilungen zu n = 20 und p_1=0,6 bzw. p_2=0,8 aufgetragen. Die Wahrscheinlichkeit p_2 sowie die Grenze k für die Anerkennung der besseren Wirksamkeit des neuen Medikaments sind veränderbar. Interpretieren Sie die einzelnen Bestandteile der Umgebung und vergleichen Sie mit Ihren Berechnungen aus b). Übertragen Sie die beiden Verteilungen in Ihr Heft und kennzeichnen Sie die berechneten Fehlerwahrscheinlichkeiten.
d) Variieren Sie die Grenze k für die Anerkennung des neuen Medikaments. Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten der bei der Studie möglichen Fehler? Begründen Sie!
Welche Festlegung zur Anerkennung der höheren Wirksamkeit des neuen Medikaments muss man treffen, damit das neue Medikament bei einer tatsächlichen Heilungschance von 80% nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\leq 5\%$ fälschlicherweise abgelehnt wird?
e) Setzen Sie k wieder auf 15 zurück und variieren Sie die Heilungswahrscheinlichkeit p_2 des neuen Medikaments. Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten der bei der Studie möglichen Fehler? Begründen Sie!
f) Variieren Sie die tatsächliche Heilungswahrscheinlichkeit p_2 des neuen Medikaments mit den Werten p_2 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9, 1.0 und tragen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 2. Art in die vorbereitete Tabelle ein. Stellen Sie die Tabelle grafisch dar und übertragen Sie die Tabelle und die Grafik in Ihr Heft. Was kann man dem Diagramm entnehmen?

Teil B) „Medikamentenstudie“

In einer verbesserten Studie wird das neue Medikament an 100 Patienten ausgetestet. Es wird festgelegt, dass die höhere Wirksamkeit des neuen Medikaments anerkannt wird, wenn mindestens 70 der 100 Patienten geheilt werden.

Die Verteilungen sind in der FATHOM-Umgebung „Medikament100.ftm“ dargestellt.

g) Variieren Sie die tatsächliche Heilungswahrscheinlichkeit p_2 des neuen Medikaments mit den Werten p_2 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9, 1.0 und tragen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 2. Art in die vorbereitete Tabelle ein. Stellen Sie die Tabelle grafisch dar und übertragen Sie die Tabelle und die Grafik in Ihr Heft. Vergleichen Sie mit dem Diagramm aus Teil A) f).
h) Wie müsste die Operationscharakteristik eines idealen Tests aussehen? Begründen Sie!

Aufgabe 2)

In einem Casino werden Münzen geworfen. Um zu testen, ob die Münzen „ungezinkt“ sind, wird mit jeder Münze eine Testreihe von 50 Würfen durchgeführt.

a) Konstruieren Sie einen zu dieser Situation passenden Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5%.
b) Berechnen Sie zu diesem Test die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler zweiter Art für p = 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8 und stellen Sie die Operationscharakteristik grafisch dar. Interpretieren Sie die Kurve.

Folie: Medikamententest 20

***n* = 20:**

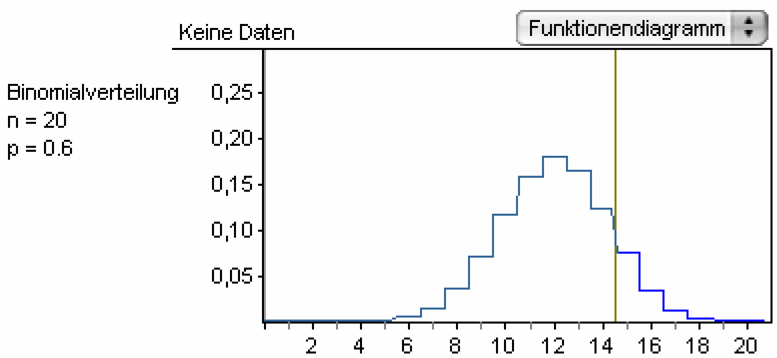
Hypothese H_0: $p \leq 0{,}6$ „die Wirksamkeit des neuen Medikaments beträgt unverändert höchstens 60%“

Alternative H_1: $p > 0{,}6$ „die Wirksamkeit des neuen Medikaments hat sich erhöht“

Entscheidungsregel:

Das neue Medikament wird nur dann als besser anerkannt, wenn mindestens $k = 15$ der 20 Patienten geheilt werden.

$p_1 = 0{,}6$

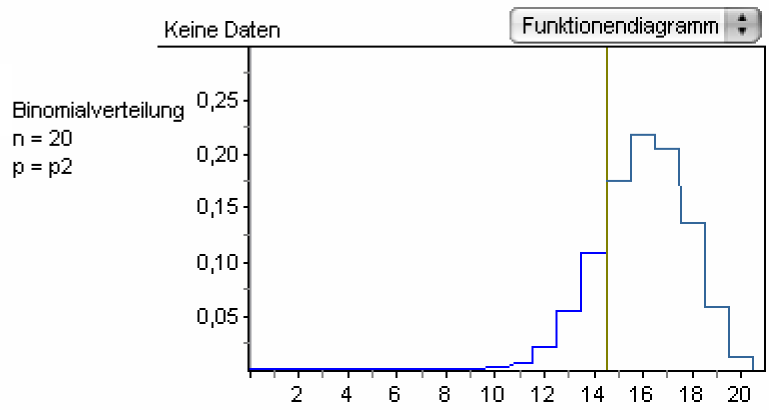


Fehler 1. Art:
Wahrscheinlichkeit, dass man bei p = 0.6 mindestens k Patienten heilt.

Fehler 1. Art

	Fehler1
1	0,125599

$p_2 = 0{,}8$



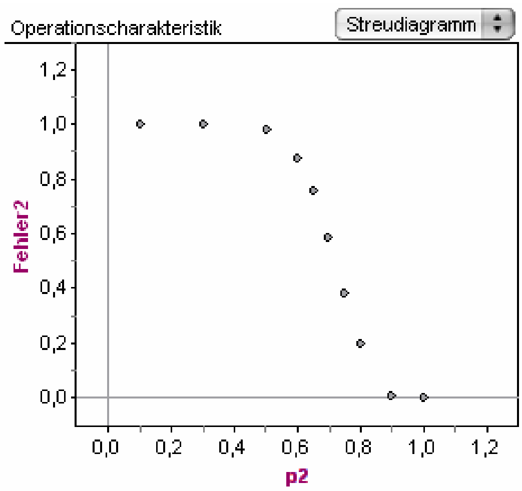
Fehler 2. Art:
Wahrscheinlichkeit, dass man bei einer Heilungswahrscheinlichkeit p2 weniger als k Patienten heilt.

Fehler 2. Art

	Fehler2
1	0,195792

Operationscharakteristik

	p2	Fehler2
1	0,1	1,000
2	0,3	1,000
3	0,5	0,979
4	0,6	0,874
5	0,65	0,755
6	0,7	0,584
7	0,75	0,383
8	0,8	0,196
9	0,9	0,011
10	1	0,000



Folie: Medikamententest 100

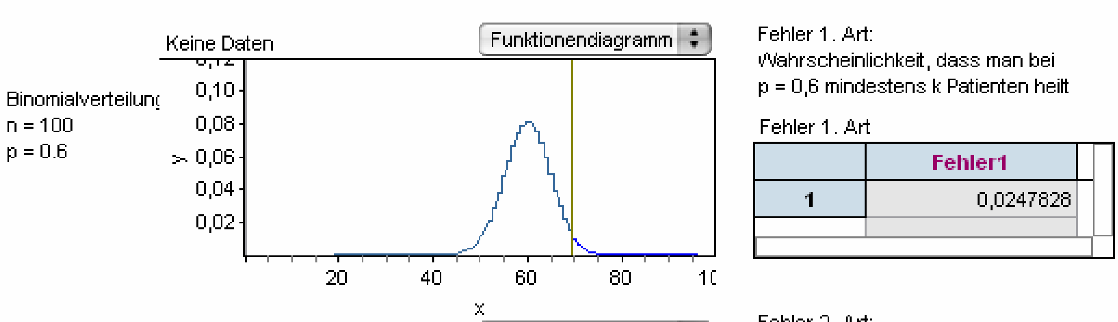
***n* = 100:**

Hypothese H_0:	$p \leq 0{,}6$	„die Wirksamkeit des neuen Medikaments beträgt unverändert höchstens 60%“
Alternative H_1:	$p > 0{,}6$	„die Wirksamkeit des neuen Medikaments hat sich erhöht“

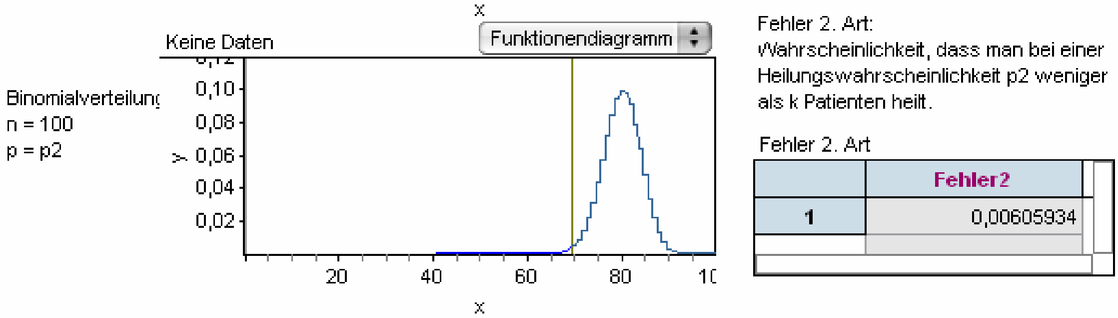
Entscheidungsregel:

Das neue Medikament wird nur dann als besser anerkannt, wenn mindestens $k = 70$ der 100 Patienten geheilt werden.

$p_1 = 0{,}6$

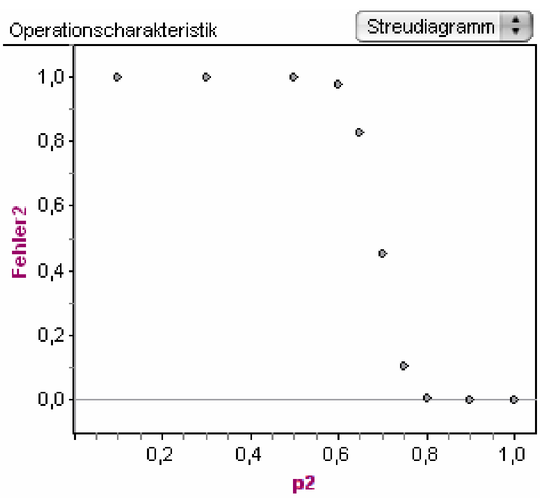


$p_2 = 0{,}8$



Operationscharakteristik

	p2	Fehler2
1	0,1	1,000
2	0,3	1,000
3	0,5	1,000
4	0,6	0,975
5	0,65	0,827
6	0,7	0,451
7	0,75	0,104
8	0,8	0,006
9	0,9	0,000
10	1	0,000



Hypothesentest – Gemischte Aufgaben

Aufgabe 1)

Bei Reihenuntersuchungen in der Schule wurden früher bei durchschnittlich 20% der Jugendlichen Zahnschäden festgestellt, die eine weitere Behandlung beim Zahnarzt erforderlich machten. Nach langjähriger Werbung für eine bessere Zahnpflege wurden in diesem Jahr nur 128 von 738 Jugendlichen zum Besuch eines Zahnarztes aufgefordert.
Beurteilen Sie dieses Ergebnis. Schreiben Sie einen genauen und begründeten Report über den untersuchten Sachverhalt.

Quelle: SELMA-Online-Materialien, www.learn-line.nrw.de

Aufgabe 2)

Um zwei Kartoffelsorten A und B hinsichtlich ihrer Erträge zu vergleichen, werden 60 Versuchsfelder in je zwei gleich große Parzellen aufgeteilt; auf der einen Seite wird Sorte A, auf der anderen die Sorte B angebaut. Man erhält 22 Versuchsfelder mit einem größeren Ertrag der Sorte A und 38 Felder mit einem größeren Ertrag der Sorte B.
Beurteilen Sie das Ergebnis und interpretieren Sie Ihre Berechnungen.

Aufgabe 3) „absolute Mehrheit“

a) Bei einer Wahlumfrage werden 800 zufällig ausgewählte Personen befragt. Die Partei A hofft auf die absolute Mehrheit. Bei welchen Umfrageergebnissen (in Prozent) muss Partei A diese Hoffnung auf einem Signifikanzniveau von 5% aufgeben? Wie groß ist der Fehler 2. Art, wenn man alternativ von einer Zustimmungsquote von $p = 0{,}45$ ausgeht?

b) Betrachten und interpretieren Sie die FATHOM-Umgebung „Umfrage.ftm“:
   - Wo sind die Verteilungen zur Nullhypothese und zur Alternative dargestellt?
   - Welche Bedeutung hat die Gerade $x = k$? Vergleichen Sie mit a).
   - Wo finden sich in den Verteilungen die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Fehler erster und zweiter Art?

c) Verändern Sie die Anzahl n der befragten Personen so lange, bis Sie einen Test erhalten, bei dem die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler erster wie auch für den Fehler zweiter Art kleiner als 5% sind.

d) Berechnen Sie theoretisch, wie viele Personen mindestens befragt werden müssen, damit beide Fehlerwahrscheinlichkeiten kleiner als 5% sind.

Aufgabe 4)

Ein Arzneimittelhersteller wirbt für ein neues Medikament A mit dem Hinweis, dass es im Gegensatz zu dem vergleichbaren Medikament B eines anderen Herstellers besser verträglich sei. Nur bei 15% der Patienten würden Allergien auftreten. Bei Medikament B treten in 20% der Fälle Allergien auf. In einer Klinik soll das neue Medikament A an 120 Personen getestet werden

a) Konstruieren Sie einen Hypothesentest, der auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ testet, ob bei dem neuen Medikament weniger Allergien auftreten als bei dem alten Medikament. Beschreiben Sie die möglichen Fehler erster und zweiter Art und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Fehlerwahrscheinlichkeit.

b) An wie vielen Patienten müsste das Medikament getestet werden, damit sowohl der Fehler erster wie auch der Fehler zweiter Art kleiner als 5% sind?

c) Schreiben Sie einen Brief an den Klinikmanager, in dem Sie ausführlich und verständlich erläutern, wie ein solcher Test konstruiert wird, wieso ein Test mit 120 Personen nicht ausreichend ist und wie viele Personen Sie zur Durchführung des Tests benötigen.

Anhang D: Die Untersuchungsinstrumente

Unterrichtsprotokoll zur dritten Unterrichtsstunde vom 10.02.05

Name der Lehrperson	Klasse	Datum	Stunde	Lfd. Nr. der Stunde in der UE
Thorsten Meyfarth	LK12	10.02.05	3.	3.

Kurzthema der Stunde: Ergebnisse der Testaufgabe

Inhalte:

Aufgaben	Vergleich 10er-Test/20er-Test (Fortsetzung der letzten Stunde); Würfelproblem a) mit FATHOM simulieren
Begriffe	Absolute und relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, Histogramm
Darstellungsmittel Grafiken/Tabellen u. a.	Fathomprojektion

A. Unterrichtsprotokoll

Aktivität	*Zeit (min)*	*Thema/Inhalte/Aufgaben*	*Methoden*
	3	*Zu Anfang der Stunde ruft Herr M. die Hausaufgabe der letzten Stunde auf und erkundigt sich nach Problemen mit dieser. Größtenteils bereitete diese der Gruppe keine Probleme. Allein die Art und Weise, wie die Fathom-Dateien in den Unterricht gebracht werden sollen, ergibt eine Diskussion. Herr. M. empfiehlt den Kauf eines USB-Datensticks, was viele Schülerinnen und Schüler als zu teuer ansehen.*	
Überprüfung der Hausaufgaben	*8*	*Zur Vorstellung der Hausaufgabe geht einer der Schüler mit der Hausaufgabe an den Lehrerarbeitsplatz, dessen Bild an die Wand projiziert wird. Dieser gibt an, die Simulation stark an der Anleitung des Arbeitsblattes der vergangenen Stunde orientiert zu haben. Die korrekte Erläuterung dessen, was er gemacht hat, fällt ihm sichtlich schwer. Dies betrifft zum einen das Verständnis dafür, was einzelne Arbeitsschritte für die Simulation bedeuten, zum anderen fehlen die Fachausdrücke von FATHOM, bzw. Befehle des Fathom-Formeleditors werden nicht richtig verstanden.*	*Schülervortrag*
	11	*Was hier offen bleibt, wird im Unterrichtsgespräch geklärt. Zum einen indem Herr M. die Begriffe und Elemente der FATHOM Arbeitsoberfläche, die projiziert sind, benennen und erläutern lässt. Zum anderen geht er mit dem Kurs noch kurz die Anweisungen und Schritte des Arbeitsblattes durch.*	*Fragend-entwickelnder Unterricht*

Aktivität	*Zeit (min)*	*Thema/Inhalte/Aufgaben*	*Methoden*
Wiederholung und Festigung	*14*	*Anhand der fertigen FATHOM - Simulationsumgebung wiederholt Herr M. die Begriffe relative Häufigkeit und Durchschnittswert. Vor allem beim Begriff der relativen Häufigkeit zeigen sich die Schüler noch unsicher. Die Interpretation der Bedeutung der Säulen eines Histogramms, welches die nächste Aufgabe an den Kurs ist, verläuft hingegen problemlos. Bei der Frage danach, wie man anhand des Histogramms zur Wahrscheinlichkeit komme, zeigt sich wieder, dass die Schülerinnen und Schüler die relative Häufigkeit mit der Wahrscheinlichkeit gleichsetzen. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler anhand der beiden gegeneinander gestellten Verteilungsformen erklären, wieso der 10er-Test günstiger ist. Eine Schülerantwort hierauf ist, dass beim 10er-Test „weniger Werte im Mittelbereich sind“. Herr M. lässt den Schüler, der in der letzten Stunde eingangs argumentiert hatte, der 20er-Test sei günstiger, da sich dann die Verteilung „der wirklichen Wahrscheinlichkeit angleiche“, diese Aussage weiter präzisieren.* *Herr M. fasst im Anschluss zusammen, dass die Verteilung bei wenigen Versuchen „sehr stark streut“ und dass dieser Effekt bei einer höheren Anzahl von Versuchen geringer werde (Visualisierung anhand von projizierten FATHOM-Grafiken). Ein Ergebnisblatt wird ausgeteilt.*	*Fragend-entwickelnder Unterricht*
Vorstellung weiterer FATHOM-Funktionen	*23*	*Anschließend stellt Herr M. noch einige Funktionen der Software vor:* - *Kontinuierliches Merkmal als kategoriales Merkmal in Grafik oder Tabelle importieren (Shift-Taste gedrückt halten).* - *„Anzahl“ – Befehle einsetzen.* - *Grafische Darstellung auf relative Häufigkeiten umschalten*	*Lehrervortrag*
	27	*Die Umstellung auf die Darstellung in relativen Häufigkeiten in FATHOM nimmt Herr M. zum Anlass, die Frage zu stellen, welchen Vorteil diese Darstellung gegenüber den absoluten Häufigkeiten habe. Es wird erst im Gespräch klar, dass nur wenn die Anzahl der Simulationswiederholungen einer 10er Potenz entspricht, ein einfacher Rückschluss auf die relative Häufigkeit möglich ist, dass ansonsten aber die Darstellung in relativen Häufigkeiten praktikabler ist.*	*Unterrichtsgespräch*
	30	*Im Anschluss stellt Herr M. noch folgende Funkti-*	

		onen der Software vor: - *Berechnung relativer Häufigkeiten in einer numerischen Auswertungstabelle* - *Übertragung von Fathomgrafiken in Word-Dokumente und Einschränkungen hiervon.*	*Lehrervortrag*
Eigenständige Simulation	*32*	*Nun wird ein Aufgabenblatt mit dem ersten Würfelproblem ausgeteilt, das die Schülerinnen und Schüler anschließend selbst simulieren sollen. Nach einigen kurzen technischen Hinweisen starten die Schüler die Rechner und verwenden die restliche Zeit der Stunde für die Aufgabe.*	*Partnerarbeit am Computer*
	45	*Hausaufgabe ist es, die Aufgabe zu Ende zu bearbeiten.*	

Tafelbild
Kein Tafelbild

Softwareverwendung
(Wie geplant oder Dateiname für vom Konzept abweichende Softwareverwendung)
Die Software wurde bei der Demonstration und Interpretation der Ergebnisse der Hausaufgabe eingesetzt. Herr Meyfarth hat weitere Software-Funktionen erläutert.
Am Ende der Stunde haben die Schülerinnen und Schüler in Gruppenarbeit mit der Software gearbeitet.

B. Beobachterkommentare

1	Gab es inhaltliche Verständnisschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern?
2	Gab es besondere inhaltliche Beiträge der Schülerinnen und Schüler?
3	Gab es Probleme beim Umgang mit dem Computer? Nicht mit FATHOM; jedoch bereitete die Anmeldung im Netzwerk und das Anlegen von Ordnern Probleme.
4	Wie funktioniert die Partnerarbeit am Computer? Welche Art der Unterstützung (Lehrer, Mitschüler) findet statt oder wäre notwendig gewesen? Vereinzelt wurden Hilfestellungen von Seiten des Lehrers oder der Studenten angefragt. Die Partnerarbeit funktionierte sonst gut, da die Schüler bereits in der Vergangenheit viel in Partnerarbeit gearbeitet haben.
5	Wie werden die Ergebnisse der Partner- und Computerarbeit im Unterricht aufgegriffen und gesichert? Ergebnissicherung der Hausaufgabe/Testaufgabe mit Ergebnisblatt.
6	Sonstige wichtige Anmerkungen und Kommentare

7	Wie beurteilen Sie den Einsatz des Computers in der Unterrichtsstunde? Dem Einsatz des Computers wurde viel Zeit eingeräumt. Der größere Teil hiervon wurde zur Unterstützung des Lehrervortrags eingesetzt. Meiner Meinung nach ist diese Gewichtung in dieser Phase des Unterrichts unumgänglich, da die Schülerinnen und Schüler noch mit der Funktion der für sie neuen Software vertraut gemacht werden müssen.
8	Gibt es Verbesserungsvorschläge für das Arbeitsblatt und die Lernumgebungen aufgrund der Unterrichtserfahrungen?

C. Lehrerkommentare
Gibt es Anmerkungen seitens des Lehrers/der Lehrerin zum Verlauf und zum Ergebnis der Unterrichtsstunde?

Dass viele Schülerinnen und Schüler den Begriff der relativen Häufigkeit vermeiden und statt dessen dies mit Wahrscheinlichkeit gleichsetzen, wird von Herrn M. als tolerierbar eingeschätzt, da durch die Demonstration verschiedener Simulationen mit leicht abweichenden Ergebnissen klar werde, dass dies nur ungefähre Werte seien. Dennoch will er eine der kommenden Unterrichtsstunden zur Klärung der beiden Begriffe verwenden.
Zur Hausaufgabe „Test mit 20 Fragen" wurde aus Zeitproblemen bewusst nur eine bereits fertige Simulationsumgebung vorgestellt. Eine ausführliche Vorstellung der Entwicklung einer kompletten Simulation soll an einem neuen Problem erfolgen.

Anlagen

Nr.		*Vorhanden (X)*
1	Kopien der ausgeteilten Arbeitsblätter, Grafiken, Tabellen mit Daten	X
2	Computerbasierte Materialien (Dateien, präsentierte Darstellungen)	X

Die Schülerbefragung im Anschluss an die Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik"

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen (ankreuzen oder kurze Sätze)

1. ☐ männlich ☐ weiblich
2. Meine durchschnittliche wöchentliche Nutzungsdauer des Computers in Stunden insgesamt (schulische Nutzung, Spiele, Internet, Programmieren, …): _______
3. Meine Fähigkeiten im Programmieren schätze ich wie folgt ein:
   ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ gering ☐ gar nicht
4. Meine durchschnittliche wöchentliche Nutzungsdauer der Software FATHOM zu Hause während der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" betrug:
   _______ (in Stunden)
5. Die computergestützte Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" hat mir ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig gefallen.
6. Ich habe die Inhalte der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik"
   ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
   verstanden.
7. In der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" habe ich
   ☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
   gelernt.
8. Man sollte den Anteil der Theorie in dieser Unterrichtseinheit
   ☐ sehr stark ☐ stark ☐ mittel ☐ wenig ☐ gar nicht
   erhöhen.
9. Das Arbeiten mit der Software FATHOM hat mir
   ☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
   Spaß gemacht.
10. Ich hatte ☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
    Probleme beim Umgang mit der Software FATHOM.

Beispiele für Probleme beim Umgang mit der Software:

____

____

____

11. Mit den Würfelproblemen bin ich
    ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ schlecht ☐ sehr schlecht
    zurecht gekommen.
12. Mit dem letzten Arbeitsblatt zu den gemischten Simulationen bin ich
    ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ schlecht ☐ sehr schlecht
    zurecht gekommen.

13. Die ausgeteilten Materialien und Anleitungen zum Umgang mit FATHOM waren
☐ sehr hilfreich ☐ hilfreich ☐ mittel ☐ schlecht ☐ sehr schlecht.

Verbesserungsvorschläge:

____

____

____

14. Wir haben uns in dieser Unterrichtseinheit
☐ viel mehr ☐ mehr ☐ genauso ☐ weniger ☐ viel weniger
mit Softwareeinsatz als mit mathematischen Inhalten beschäftigt.

15. In der Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ mit FATHOM haben wir ☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
selbstständig gearbeitet.

16. In den Computerarbeitsphasen habe ich mir
☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
von Mitschülern zeigen lassen.

17. In den Computerarbeitsphasen habe ich meinen Mitschülern
☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
gezeigt.

18. Ich habe mit der Software
☐ sehr viel ☐ viel ☐ mittel ☐ wenig ☐ nichts
ausprobiert.

19. Die Einstiegsaufgabe mit den zwei unterschiedlichen Typen von Multiple-Choice-Tests hat mir ☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
gefallen.

20. Die folgenden Inhalte der Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ habe ich folgendermaßen verstanden:

Simulieren von Zufallsversuchen mit FATHOM
☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten
☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig

Grundbegriffe: Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis
☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig

Grundbegriffe: Laplace-Experiment
☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig

21. Durch die Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ ist mir
☐ sehr gut ☐ gut ☐ mittel ☐ wenig ☐ sehr wenig
klar geworden, womit sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt.

22. Die Unterrichtseinheit “Simulationen als Einstieg in die Stochastik“ hat mein Interesse an Wahrscheinlichkeitsrechnung
☐ sehr stark ☐ stark ☐ mittel ☐ wenig ☐ gar nicht
geweckt.

23. An der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" hat mir gut gefallen:

24. An der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" hat mir nicht gefallen:

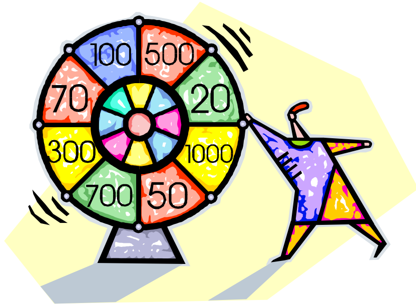
25. Die folgenden Aufgabenstellungen der Unterrichtseinheit "Simulationen als Einstieg in die Stochastik" fand ich besonders interessant:

26. Verbesserungsvorschläge für die Unterrichtseinheit:

Die Kursarbeit von Kurs A

Aufgabe 1)
Betrachten Sie das folgende Glücksspiel mit den zugehörigen Fragestellungen a), b) und c):

Das nebenstehend abgebildete Glücksrad mit 8 gleich großen Sektoren wird zweimal gedreht. Der Spieler muss 1,-€ als Einsatz bezahlen.



Falls die Summe der beiden gedrehten Zahlen mindestens 1000 beträgt, so erhält der Spieler 1,50 € zurück. Falls die Summe der beiden gedrehten Zahlen 2000 beträgt, so erhält der Spieler 12,- € zurück.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme beim zweimaligen Drehen des Glücksrads mindestens 1000?

b) Welchen mittleren Nettogewinn pro Spiel erhält der Spieler bei diesem Glücksspiel auf lange Sicht?

c) Ein Spieler nimmt sich vor, das geschilderte Glücksspiel so lange zu spielen, bis die Summe seiner beiden gedrehten Zahlen mindestens 1000 beträgt. Wie viele Spiele muss man bei einer solchen Spieltaktik im Mittel machen?

Teil A)

1. Simulieren Sie das Glücksradproblem geeignet in FATHOM. Erstellen Sie zu jeder Teilaufgabe eine neue Simulation mit jeweils 1000 Wiederholungen und formulieren Sie in einem FATHOM –Textfenster einen Antwortsatz.
2. Können Sie mit Hilfe Ihrer Simulation Aussagen zur Genauigkeit der Wahrscheinlichkeitsbestimmung in a) machen? Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen in einem FATHOM-Textfenster.
3. Erstellen Sie zu Aufgabenstellung b) in einem FATHOM-Textfenster einen Simulationsplan.

Speichern Sie jede Teilaufgabe als einzelnes FATHOM-Dokument mit folgendem Format für den Dateinamen:

Name_aufgabenteil.ftm
Beispiel: MarieHarmes_a.ftm , MarieHarmes_b.ftm , MarieHarmes_c.ftm

Teil B)
Lösen Sie die Aufgabenstellung b) theoretisch unter Verwendung einer geeigneten Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Aufgabe 2) *Begründen Sie Ihre Rechnung!*

Etwa 12,5 % der Bevölkerung sind Linkshänder.

a) Für eine Befragung werden 5 Personen zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den fünf Personen genau ein Linkshänder?

b) Wie viele Personen muss man auswählen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 98% mindestens einen Linkshänder ausgewählt hat?

c) Wie groß müsste der Anteil der Linkshänder in der Bevölkerung mindestens sein, damit bereits bei zehn zufällig ausgewählten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von über 98% mindestens ein Linkshänder darunter ist.

Aufgabe 3)
Ein Würfel wird so lange geworfen, bis sich eine Augenzahl wiederholt. Wir interessieren uns für die Anzahl X der benötigten Würfe.

a) Stellen Sie das Experiment in einem geeigneten Baumdiagramm dar.

b) Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, bis sich eine Augenzahl wiederholt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsgröße X.
Welche anschauliche Bedeutung hat der berechnete Erwartungswert der Zufallsgröße X?

Zusatzaufgabe:

c) Erstellen Sie eine geeignete Simulation des Problems in FATHOM und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsgröße X mit Hilfe der Simulation.

Anhang E: Begründungskategorien und Bepunktung des Ein- und Ausgangstests

Aufgabe 2) Begründungskategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Begründungen für die richtige Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich“

Kat.	Erläuterung	Pkte.
S	Wahrscheinlichkeit für Wappen/Zahl ist auf jeder Stufe gleich	2
S-	Argumentation über Stufen ungenau	1
S-g	Argumentation über die gleiche Wahrscheinlichkeit pro Stufe und die gleiche Anzahl Wappen und Zahl	1
g	Argumentation über die gleiche Anzahl Wappen und Zahl	0
Ged	Argumentation über die Wahrscheinlichkeit pro Stufe und die Gedächtnislosigkeit	2
Ged-	Argumentation über die Gedächtnislosigkeit unvollständig	1
Ged -g	Argumentation über die Gedächtnislosigkeit und die gleiche Anzahl Wappen/Zahl	1
Lap	Berechnung als Laplace-Experiment über die Anzahl möglicher Kombinationen	2
Lap-	Berechnung als Laplace-Experiment unvollständig	1
f	Falsche oder sinnlose Begründung	0

Begründungen für die falsche Antwort „I ist wahrscheinlicher“

Kat.	Erläuterung	Pkte.
W	Typische Folge hat in der Realität Wechsel. Die Wahrscheinlichkeit für dreimal dasselbe nacheinander ist gering.	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

Begründungen für die richtige Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich“

S: „Beide sind gleich wahrscheinlich, da bei jedem Wurf die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht und dies bei jedem erneuten Wurf gleich bleibt.“

„Da bei jedem neuen Wurf die Wahrscheinlichkeit wieder bei 0,5 liegt, sind beide gleich wahrscheinlich.“

„Weil bei jedem Wurf eine Wahrscheinlichkeit von 50% besteht, entweder Wappen oder Zahl zu werfen. Daher ist beides gleich wahrscheinlich.“

S-: „Bei beiden Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit bei 50%. Die Reihenfolge ist Zufall.“

Ged: „Man kann es damit erklären, dass die Münze kein Gedächtnis hat, und sich somit die vorhergehenden Ereignisse nicht merken kann. Alle Ergebnisse (E={ Zahl, Wappen }) sind dauerhaft gleich wahrscheinlich.“

„Beide sind gleich wahrscheinlich, da eine Münze kein Gedächtnis besitzt und daher die Wahrscheinlichkeit der Kombinationen gleich ist.“

Begründungen für die falsche Antwort „I ist wahrscheinlicher“

W: „Die Chance 3mal hintereinander Kopf und dann dreimal hintereinander Zahl zu werfen ist sehr gering. Die Chance eine relativ gemischte Kombination zu werfen (Bsp I) ist zwar ebenfalls nicht sehr hoch, aber deutlich größer als bei II. Würde man den Versuch 1000mal durchführen, würde sich häufig ein Ergebnis ZWZW… einstellen. Bei I ist nur eine kleine Abweichung vorhanden, weshalb I häufiger auftritt als II.“

„Weil die Erfahrung gezeigt hat, dass eine Abfolge von dreimal W und dreimal Z hintereinander seltener geschieht als I.“

Aufgabe 3) Begründungskategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Richtige Begründungen für die richtige Antwort „I ist wahrscheinlicher"

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
Wkt	Argumentation über die Wahrscheinlichkeit auf beiden Stufen des Zufallsexperiments	2
E	Zwei gleichwahrscheinliche Elemente des Ergebnisraums gegenüber einem	2
E-	Begründung über die Elemente des Ergebnisraums mit Mängeln	1

Falsche Begründungen für die richtige Antwort „I ist wahrscheinlicher"

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
W	Wechselargument: Zwei gleiche Kugeln sind unwahrscheinlicher	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Begründungen für die falsche Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich"

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
E_f	Beide Kombinationen entsprechen einem Element des Ergebnisraums → gleich wahrscheinlich	0
G	Jede Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

Richtige Begründungen für die richtige Antwort „I ist wahrscheinlicher"

Wkt: „I ist wahrscheinlicher, da man in einem Gefäß eine 4 oder eine 5 ziehen kann. Also hat man in diesem Gefäß eine doppelte Chance. In dem zweiten Gefäß ist die Wahrscheinlichkeit so, wie wenn beide Kugeln eine 5 sein sollten."

E: „Es gibt einen Ergebnisraum aller Ergebnisse, die vorkommen können. In diesem Ergebnisraum gibt es zweimal die Kombination 4,5 aber nur einmal die Kombination 5,5."

E-: „Es ist wahrscheinlicher eine 4 und eine 5 zu ziehen, da nicht angegeben ist, in welcher Urne man eine 4 und eine 5 ziehen soll."

Falsche Begründungen für die richtige Antwort „I ist wahrscheinlicher"

W: „Weil erstens gleiche Werte in der Praxis nicht oft vorkommen. Zweitens ist die Wahrscheinlichkeit für jede Kugel 12,5%. Es ist einfach gewöhnlicher, dass verschiedene Fälle herauskommen."

Begründungen für die falsche Antwort „Beide sind gleich wahrscheinlich"

E_f: „Da die eine Ziehung von der anderen unabhängig ist, ist jede Kombination gleich wahrscheinlich. Ob 4 und 5 oder 5 und 5 oder 1 und 8."

G: „Weil die Wahrscheinlichkeit pro Kugel bei 12,5% liegt. Man zieht aus zwei Urnen und deshalb bleibt die Wahrscheinlichkeit gleich. Bei jedem Zug bleibt die Wahrscheinlichkeit für die Kugeln bei 12,5% und deshalb ist beides gleich wahrscheinlich."

Aufgabe 4) Begründungskategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Begründungen für die richtige Antwort „gleich wahrscheinlich“

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
UW	Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit erwähnt	2
U	Unabhängigkeit: Die Würfe sind unabhängig/ die Münze hat kein Gedächtnis	1
W	Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Wurf für W und Z jeweils 0,5	1
W_Z	Begründung über die Wahrscheinlichkeit mit intuitiven Zweifeln an der richtigen Antwort.	1
f	Falsche oder sinnlose Begründung	0

Begründungen für die falsche Antwort „eher Zahl“

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
A	Die Fälle müssen sich ausgleichen.	0
S	6mal Wappen ist ein seltener Fall	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

Begründungen für die richtige Antwort „gleich wahrscheinlich“

UW: „Die Wahrscheinlichkeit ist bei jedem Wurf 50% und von den vorherigen Würfen unabhängig.“

„Die Wahrscheinlichkeit für Wappen oder Zahl ist immer 50%, egal was vorher geworfen wurde, da die Münze kein Gedächtnis hat.“

U: „Da das vorherig Geworfene keinen Einfluss auf den Wurf hat.“

„Münze hat kein Gedächtnis“

W: „Da die Wahrscheinlichkeit bei jedem neuen Wurf 50% für beides ist. Alle möglichen Ergebnisse sind also gleich wahrscheinlich. Das ist ein Laplace-Versuch.“

W_Z: „Weil die Wahrscheinlichkeit 50% besteht, Wappen oder Zahl zu werfen, allerdings halte ich es für tendenziell realistisch, dass eine Zahl geworfen wird, die Wahrscheinlichkeit ist allerdings gleich.“

Begründungen für die falsche Antwort „eher Zahl“

A: „Da die Wahrscheinlichkeit 50% beträgt, entweder Wappen oder Zahl zu werfen, wird nach einer großen Anzahl von Würfen die gewürfelten W oder Z wieder gleich sein. 6 Würfe sind allerdings zu wenig, um eine genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Trotzdem wird es wahrscheinlicher sein, dass man Zahl würfelt. Es kann aber auch sein, dass erneut Wappen geworfen wird.“

S: „Die Chancen sind normalerweise 50:50, dass W bzw. Z geworfen wird. 5x nacheinander W ist sehr unwahrscheinlich, und dass auch noch beim 6ten Wurf Wappen geworfen wird ist deshalb auch weniger wahrscheinlich als Zahl, da 6x nacheinander Wappen enorm unwahrscheinlich ist.“

Aufgabe 5) Begründungskategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Begründungen für die richtige Antwort „Am kleinen Krankenhaus“:

Kat.	Erläuterung	Pkte
kG	Argumentation über das Gesetz der großen Zahl	2
kG-	Ungenaue Argumentation über Gesetz der großen Zahl	1
kM	Verweis auf die Analogie zum Multiple-Choice-Test im Unterricht	2
kA	Argumentation über die größere absolute Abweichung im großen Krankenhaus	1
f	Falsche oder sinnlose Begründung	0

Begründungen für die falsche Antwort „An beiden gleich wahrscheinlich“:

Kat.	Erläuterung	Pkte
bP	Der prozentuale Anteil ist in beiden Krankenhäusern gleich	0
bM	Falscher Verweis auf den Multiple-Choice-Test	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

Begründungen für die richtige Antwort „Am kleinen Krankenhaus“:

kG: „Bei mehr Geburten ist es wahrscheinlich ausgeglichener, also 50% Jungen.“

„Das Gesetz der großen Zahlen. Am kleinen Krankenhaus werden weniger Kinder geboren, also ist der Streuwert größer, als an dem großen Krankenhaus, da sich der Wert, je größer die Zahlen sind, der 50 annähert.“

„Das Verhältnis von Jungen und Mädchen ist allgemein gleich. Je mehr Geburten betrachtet werden, umso eher pendelt es sich bei 1:1 ein. Werden weniger Geburten betrachtet, umso wahrscheinlicher ist es, dass sich das Verhältnis in eine Richtung verschiebt. Deshalb ist es im kleinen Krankenhaus wahrscheinlicher.“

kM: „Man kann diese Aufgabe mit dem Multiple-Choice-Test vergleichen. Je mehr Fragen (Kinder) es gibt, desto wahrscheinlicher ist es, dass sich die zufällig richtig geratenen Antworten (Jungen) bei 50% anhäufen. Deshalb nimmt man den Fragebogen mit weniger Fragen bzw. das Krankenhaus mit weniger Kindern.“

„Wie bei dem Multiple-Choice-Test mit dem 10er/-20er-Fragebogen.“

kA: „65% wären im kleinen Krankenhaus 26 im großen 58 Jungen. Da die Wahrscheinlichkeit eigentlich 50% ist, liegen 26 näher bei 20 (50% von 40) als 58 bei 45.“

Begründungen für die falsche Antwort „An beiden gleich wahrscheinlich“:

bP: „Damit an einem der Krankenhäuser 65% Jungen geboren werden können, müssten jeweils 15% Abweichung zum Durchschnitt vorhanden sein. Dabei ist es egal, wie viele Kinder geboren werden.“

„Es ist egal wie oft, die Wahrscheinlichkeit beträgt immer 50%, wenn es sich nun häuft, ist es Zufall, und da die 65% Prozente sind, ist die Anzahl auch egal.“

Aufgabe 6) Begründungskategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Begründungen für die richtige Antwort „nein“:

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
R_Anz	Mangelnde Repräsentativität wegen zu geringer Anzahl	2
G	Begründung über das Gesetz der großen Zahl	2
F	Begründung über die Schwankungsbreite mit Faustregel	2
R_rel	Zu kleiner Stichprobenumfang relativ zur Gesamtbevölkerung	1
S	Geringe Abweichung von 50% ohne Berücksichtigung des Stichprobenumfangs	1
Log	Formal-logisches Argument: Nur bei der Befragung aller Personen in Deutschland erhält man ein aussagefähiges Ergebnis	1
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Begründungen für die falsche Antwort „ja“:

Kat.	**Erläuterung**	**Pkte**
E	Übertragung des Anteils in der Stichprobe auf die Gesamtbevölkerung	0
f	Weitere falsche oder sinnlose Begründung	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

Begründungen für die richtige Antwort „nein“:

R_Anz: „Eine wissenschaftlich anerkannte Studie/Befragung gilt (glaube ich, hab’s vergessen) erst ab einer Befragtenzahl von 10 000. Dann ist die Befragung repräsentativ.“

„489 entsprechen fast 50%. Außerdem müsste man mehr Personen befragen, um ein repräsentatives Ergebnis zu bekommen.“

G: „Dafür dass nur 1000 Leute befragt worden sind, ist das Ergebnis ziemlich genau. Je mehr Leute man befragt, umso mehr nähert man sich dem wirklichen Ergebnis.“

F: „Es ist immerhin ein „Zufallsexperiment“, „Zufallsbefragung“. D. h. das Ergebnis kann durchaus von der wahrscheinlichen Häufigkeit abweichen. Zudem wurden 1000 Personen befragt. Dies bedeutet es gibt meist eine Abweichung von 2-3% von der wahrscheinlichen Häufigkeit.“

„Die Zahl 1000 ist zu gering, um sagen zu können, dass die Behauptung nicht stimmt. Denn wir haben herausbekommen, dass bei einem Versuch mit der Anzahl 1000 eine Abweichung von bis zu 3% möglich sein kann.“

R_rel: „Es waren zwar nur 48,9%, aber 1000 für 80 Mio. Einwohner ist nicht repräsentativ“

„Die Anzahl der Befragten reicht nicht aus, um dies zu widerlegen. Von den 80 Mio. Erwachsenen in Deutschland müssten mehr als 1000 befragt werden, um dies zu bestätigen. Außerdem ist die Differenz zwischen den 50% und den 489 Personen lediglich 1,1%.“

Log: „Um einen 100%igen Nachweis führen zu können müsste man alle Deutschen befragen.“

„Es hätten auch, bei einer anderen Befragung, 1000 von 1000 Personen zufällig eine Digitalkamera haben können.“

Aufgabe 9) Antwortkategorien mit Bepunktung (max. 2 Punkte)

Antwortkategorien zum Eingangstest:

Wie kann man beim Werfen einer Reißzwecke die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der die Reißzwecke auf ihren Kopf fällt?

Kat.	Erläuterung	Pkte
F	Frequentistischer Ansatz mit Erläuterung	2
F-	Frequentistischer Ansatz unvollständig oder ungenau	1
Ph	Physikalischer Ansatz	1
L	Falscher Laplace Ansatz	0
f	Weitere falsche oder fehlende Lösungsansätze	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

F: „Man kann Versuche machen und den prozentualen Anteil der Wahrscheinlichkeit, dass die Reißzwecke auf den Kopf fällt, festhalten. Nach einigen Versuchen kann man den Durchschnitt der Wahrscheinlichkeit errechnen."

„Ausprobieren!! Durch Werfen und Strichliste führen bestimmen."

F-: „Mit Experimenten."

Ph: „Man müsste die Aufliege-Fläche der Reißzwecke berechnen und das Gewicht an verschiedenen Stellen betrachten. Dann kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen."

L: „Sie kann nur auf dem Kopf oder woanders landen. 100*0,5=50%"

Antwortkategorien zum Ausgangstest:

In der Grundschule basteln die Schüler einen Würfel. Wie kann man bei einem solchen selbst gebastelten Würfel die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass eine „6" geworfen wird?

Kat.	Erläuterung	Pkte
F	Frequentistischer Ansatz mit Erläuterung	2
F-	Frequentistischer Ansatz unvollständig oder ungenau	1
S	Angabe der Wahrscheinlichkeit von 16,67% mit dem Zusatz, dass dieser Wert aufgrund des Bastelns nur geschätzt werden kann.	1
U	Verweis auf den unfairen Würfel verbunden mit der Auffassung, dass keine Wahrscheinlichkeit zu ermitteln ist.	0
f	Weitere falsche oder fehlende Lösungsansätze	0

Beispiele der gewählten Kategorien:

F: „Man würfelt einfach 10000mal. Die Anzahl der „6en" durch 10000 ergibt die Wahrscheinlichkeit – aber genau bestimmen ist unmöglich. Je öfter man etwas macht, desto mehr nähert man sich der echten, wahren Wahrscheinlichkeit."

F-: „120 mal Werfen. Wenn es ca. 20mal eine sechs war, dann ist er in Ordnung (1/6 Chance). Normaler Würfel hat eine Chance von 1/6."

S: „Man kann die Wahrscheinlichkeit nicht genau bestimmen. Trotzdem wird sie in etwa 16,67% betragen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt nur dann 16,67%, wenn jede Seite des Würfels identisch ist. Das wird bei selbst gebastelten Würfeln wohl nicht der Fall sein."

U: „Die Wahrscheinlichkeit eine sechs zu würfeln ist nicht vorher zu sagen. Der Würfel ist nicht fair, da Kinder den Würfel höchstwahrscheinlich auf einer Seite zusammen kleben. Dort ist der Würfel schwerer und somit spielen mehrere physikalische Phänomene eine Rolle. Es ist kein Laplace-Versuch."