

Künstliche Randbedingungen  
und  
Algebraische Äquivalenzen  
in der Elastizitätstheorie

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Mathematik (Dr. rer. nat.)  
im Fachbereich Mathematik/Informatik  
der Universität Kassel

vorgelegt von  
Susanne Langer

Kassel, im Mai 2006

Erste Gutachterin: Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Werner Varnhorn

Tag der Disputation: 19. Juli 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Bezeichnungen und grundlegende Definitionen . . . . .	7
2.2	Elliptische Differentialoperatoren . . . . .	9
2.3	Randwertprobleme in einem Gebiet mit kegelförmigem Ausgang . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Konstruktion der künstlichen Randbedingungen</b>	<b>35</b>
3.1	Weitere Voraussetzungen für das Randwertproblem . . . . .	35
3.2	Die geometrische Beschreibung der Abschneidefläche . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Die Lösung des Approximationsproblems</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Die Fehlerabschätzung</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Beispielklassen</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>Anwendungen in der Elastizitätstheorie</b>	<b>65</b>
7.1	Eine kurze Einführung in die Elastizitätstheorie . . . . .	65
7.1.1	Spannung . . . . .	65
7.1.2	Deformation . . . . .	66
7.1.3	Grundgleichung der Elastizitätstheorie (Verallgemeinertes Hookesches Gesetz) . . . . .	67
7.1.4	Elastizitätstypen . . . . .	69

7.2	Das Elastizitätsproblem . . . . .	70
7.3	Die Polarisationsmatrix für Außenraumprobleme . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Algebraische Äquivalenzen</b>	<b>79</b>
8.1	Transformation des Elastizitätsproblems . . . . .	79
8.2	Transformation der Fundamentalmatrix . . . . .	83
8.3	Algebraisch äquivalente Materialien . . . . .	84
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>91</b>

# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Approximation von Lösungen formal selbstadjungierter Randwertprobleme auf unbeschränkten Gebieten. Die hier betrachteten Randwertprobleme haben die Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) &= \mathcal{D}^*(-\nabla_x)\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega,\end{aligned}\tag{1.1}$$

wobei  $\Omega$  ein unbeschränktes Gebiet mit kegelförmigem Ausgang im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  ist. Probleme dieses Typs tauchen unter anderem in der linearen Elastizitätstheorie auf. Da die Berechnung der Lösungen von (1.1) auf unbeschränkten Gebieten nicht möglich ist, muss das Gebiet auf ein endliches Gebiet reduziert werden. Dazu kann die Methode der künstlichen Randbedingungen genutzt werden, um approximative Lösungen zu erhalten. Die Grundidee dabei ist die folgende. Ist  $\Omega_R$  der Durchschnitt von  $\Omega$  mit einem beschränkten Gebiet, z.B. einer Kugel vom Radius  $R$ , so betrachtet man das Problem (1.1) eingeschränkt auf  $\Omega_R$ . Auf dem zusätzlich entstandenen Abschneiderand muss ebenfalls eine Randbedingung gestellt werden, die sogenannte künstliche Randbedingung. Diese sollte so gewählt werden, dass die Lösung  $u^R$  auf dem abgeschnittenen Gebiet die Lösung  $u^\infty$  des Problems (1.1) möglichst gut annähert.

Bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt wurden für die Reduktion der Gebiete im allgemeinen Fall immer Kugeln zum Abschneiden des Gebietes benutzt (s. z.B. [6], [29], [9]). Das Ziel dieser Arbeit ist es, das Verfahren aus [29] dahingehend zu verändern, dass das abschneidende Gebiet ein Polyeder ist. Der Vorteil von Polyedern gegenüber Kugeln als Abschneidegebiete liegt darin, dass die Gebiete für numerische Berechnungen wesentlich besser trianguliert und damit bessere Ergebnisse erwartet werden können. Zu Beginn dieser Arbeit werden die wichtigsten funktionalanalytischen Begriffe und Ergebnisse der Theorie elliptischer Differentialoperatoren vorgestellt. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels wird das obige Randwertproblem auf Gebieten mit kegelförmigem Ausgang betrachtet. Hierbei liefert die Betrachtung des Problems in gewichteten Sobolevräumen Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Die nachfolgenden drei Kapitel bilden den Kern dieser Arbeit. Als erstes wird eine formale Konstruktion der künstlichen Randbedingungen hergeleitet, wobei die abschneidenden Gebiete nicht, wie allgemein üblich, Kugeln sondern Polyeder sind. Im vierten Kapitel wird die eindeutige Lösbarkeit des Approximationsproblems auf den Abschneidegebieten  $\Omega_R$  bewiesen, und anschließend wird eine Abschätzung für den Abschneidefehler  $u^\infty|_{\Omega_R} - u^R$

hergeleitet. Dabei ist  $u^\infty$  die Lösung des Ausgangsproblems, und  $u^R$  ist die Lösung des Approximationsproblems. In den nächsten Kapiteln werden nun spezielle Randwertprobleme der obigen Form untersucht. Im Abschnitt der Beispielklassen werden sowohl Außenraumprobleme aus der Elastizitätstheorie, wie sie z.B. bei der Berechnung von Polarisationsmatrizen für Löcher in elastischen Materialien vorliegen, wie auch ebene Rissprobleme betrachtet. Kapitel 7 behandelt eine weitere wichtige Beispielklasse der vorher untersuchten elliptischen Randwertprobleme. Nachdem in diesem Kapitel einige physikalische Grundlagen vorgestellt wurden, wird, wie in der Grundlagenliteratur üblich, das Elastizitätsproblem aus dem verallgemeinerten Hooke'schen Gesetz hergeleitet. Da sich die elastischen Materialien in unterschiedliche Klassen einteilen lassen, werden hier kurz die verschiedenen Symmetrieklassen beschrieben. Anschließend wird anhand der Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel eine Formel für die Berechnung der Polarisationsmatrix bereitgestellt und die zugehörige Fehlerabschätzung hergeleitet.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird die Idee der algebraischen Äquivalenz von elastischen Materialien vorgestellt. Das Ziel dabei ist, durch bestimmte Koordinatentransformationen die Symmetrieklasse des gegebenen Problems zu verändern. So ist z.B. eine explizite Grundlösungsmatrix nur für Elastizitätsprobleme bekannt, die wenigstens transversal isotrop sind. Durch Reduktion auf diese Symmetrie kann die Klasse der Probleme vergrößert werden, für die eine explizite Grundlösung gefunden werden kann. Bei der Berechnung von Lösungen mit Hilfe von künstlichen Randbedingungen kann diese Idee dazu genutzt werden, die Klasse der möglichen Abschneidegebiete zu erweitern.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Bezeichnungen und grundlegende Definitionen

In diesem ersten Abschnitt werden die benötigten mathematischen Grundlagen vorgestellt. Wir bezeichnen mit  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen und mit  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  die reellen bzw. komplexen Zahlen. Außerdem sei  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Für  $z \in \mathbb{C}$  stellt  $\bar{z}$  das komplex konjugierte Element dar. Sind  $x := (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , so bezeichnet  $\langle x, y \rangle_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  und  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  die euklidische Norm. Im Folgenden sei  $n \geq 2$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, also eine offene und zusammenhängende Menge mit Rand  $\partial\Omega$  und Abschluss  $\bar{\Omega}$ . Der Rand  $\partial\Omega$  heißt „von der Klasse  $C^m$ “, kurz  $\partial\Omega \in C^m$ , falls für jedes  $x_0 \in \partial\Omega$  eine offene Umgebung  $U(x_0)$  existiert, so dass  $U(x_0) \cap \partial\Omega$  eine Darstellung als Graph einer  $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktion besitzt.

Die Menge der  $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  wird mit  $C^m(\Omega)$  bezeichnet und  $C^\infty(\Omega)$  ist die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen. Wir verwenden hier die übliche Multiindex-Schreibweise für die Ableitungen. Ist  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , so ist  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  und

$$\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} := \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (2.1)$$

$C_0^m(\Omega)$  bzw.  $C_0^\infty(\Omega)$  sind die Räume der Funktionen  $u \in C^m(\Omega)$  bzw.  $u \in C^\infty(\Omega)$ , die kompakten Träger in  $\Omega$  haben, d.h. die nur auf einer kompakten Teilmenge von  $\Omega$  von Null verschieden sind.

Mit  $C^{m,1}(\Omega)$  bezeichnen wir die Menge der  $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren  $m$ -te Ableitung Lipschitz-stetig ist.

Die Menge aller fast überall in  $\Omega$  definierten, Lebesgue-messbaren Funktionen, die zur  $p$ -ten Potenz,  $1 \leq p < \infty$ , über  $\Omega$  integrierbar sind, wird mit  $L^p(\Omega)$  bezeichnet. Hierbei werden messbare Funktionen als identisch angesehen, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Außerdem verwenden wir die Bezeichnung  $L_{loc}^p(\Omega)$  für die Menge aller messbaren Funktionen  $u$ , für die  $u|_K \in L^p(K)$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \Omega$  gilt.

Im Nachfolgenden betrachten wir hauptsächlich den Raum  $L^2(\Omega)$ . Versehen wir diesen mit der Norm

$$\|u; L^2(\Omega)\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

so erhalten wir den Banachraum  $(L^2(\Omega), \|\cdot; L^2(\Omega)\|)$ , der mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} u(x) \cdot \overline{v(x)} dx, \quad u, v \in L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

zu einem Hilbertraum wird. Außerdem sei erwähnt, dass  $C_0^{\infty}(\Omega)$  dicht in  $L^2(\Omega)$  liegt.

Bevor wir zur Darstellung der Sobolevräume kommen, erinnern wir an den Begriff der schwachen Ableitung.

**Definition 2.1.** *Es seien  $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Gilt für alle  $w \in C_0^{\infty}(\Omega)$*

$$(w, v) = (-1)^{|\alpha|} (\partial_x^{\alpha} w, u), \quad (2.4)$$

so heißt  $v := \partial_x^{\alpha} u$  die schwache Ableitung von  $u$  mit der Ordnung  $|\alpha|$ .

**Definition 2.2.** *Für  $k \in \mathbb{N}$  sei der Sobolevraum  $H^k(\Omega)$  die Menge aller Funktionen  $u \in L^2(\Omega)$ , deren schwache Ableitungen  $\partial_x^{\alpha} u$  für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  in  $L^2(\Omega)$  liegen.*

Die Norm in  $H^k(\Omega)$  ist gegeben durch

$$\|u; H^k(\Omega)\| := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial_x^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

Mit  $H_0^k(\Omega)$  bezeichnen wir den Abschluss der Menge  $C_0^{\infty}(\Omega)$  in der  $H^k(\Omega)$ -Norm.

Alle  $H^k$ -Räume sind Hilberträume, und für beliebige Gebiete  $\Omega$  ist die Einbettung

$$H^{k_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{k_2}(\Omega), \quad k_1 > k_2, \quad (2.6)$$

stetig.



Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  und  $k-m > \frac{n}{2}$ ,  $k, m \in \mathbb{N}$ , dann ist die Einbettung

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \quad (2.7)$$

stetig (Lemma von Sobolev). Ist  $\Omega$  zusätzlich beschränkt, so sind die Einbettungen (2.6) und (2.7) kompakt.

Ist  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, so existiert für  $k \geq 1$  zu jeder Funktion  $u \in H^k(\Omega)$  die Spur auf  $\partial\Omega$ . [1] Der Spurraum von  $H^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ , auf  $\partial\Omega$  wird mit  $H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  bezeichnet, und die Norm in diesem Raum ist gegeben durch

$$\|u; H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\| = \inf \{ \|v; H^k(\Omega)\| : v \in H^k(\Omega), v|_{\partial\Omega} = u \}. \quad (2.8)$$

Äquivalent dazu ist die folgende Norm ([1], S. 214):

$$\begin{aligned} \|u; H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\| &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k-1} \|\partial_x^\alpha u; L^2(\partial\Omega)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha|=k-1} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|\partial_x^\alpha u(x_1) - \partial_x^\alpha u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{n-1}} dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.2 Elliptische Differentialoperatoren

In Anlehnung an Wloka [35] stellen wir in diesem Abschnitt die notwendigen Grundbegriffe zu elliptischen Differentialoperatoren vor. Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Wir betrachten einen Differentialoperator  $L(x, \partial_x)$  in der Form

$$L(x, \partial_x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (2.10)$$

mit glatten Koeffizienten  $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Der Operator sei von Ordnung  $k$ , d.h. für mindestens ein  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$  ist  $a_\alpha \neq 0$ . Da vorausgesetzt wird, dass alle Koeffizienten glatt sind, ist die Abbildung

$$L : H^{l+k}(\Omega) \rightarrow H^l(\Omega), \quad u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x) \quad (2.11)$$

für alle  $l \in \mathbb{N}_0$  stetig.

Sind  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ , so erhalten wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
(Lu, v)_\Omega &= \int_\Omega Lu(x) \overline{v(x)} dx \\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x) \overline{v(x)} dx \\
&= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} u(x) \overline{\partial_x^\alpha (a_\alpha(x) v(x))} dx \\
&= \int_\Omega u(x) \overline{\sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) v(x))} dx \\
&:= \int_\Omega u(x) \overline{L^* v(x)} dx = (u, L^* v)_\Omega.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Der Operator

$$L^*(x, \partial_x)u(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha \left( \overline{a_\alpha(x)} u(x) \right), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.13}$$

heißt der formal adjungierte Operator zu  $L$ . Auch der formal adjungierte Operator (2.13)

$$L^* : H^{l+k}(\Omega) \rightarrow H^l(\Omega) \tag{2.14}$$

ist stetig. Gilt  $L = L^*$ , so heißt  $L$  formal selbstadjungiert.

**Definition 2.3.** Für  $x \in \overline{\Omega}$  ist der Hauptteil  $L^H$  des Operators  $L$  definiert als

$$L^H(x, \partial_x)u(x) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x). \tag{2.15}$$

Für  $x \in \overline{\Omega}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$  wird durch

$$L^H(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{2.16}$$

das Hauptteilmopolynom  $L^H(x, \xi)$  oder auch Hauptsymbol an der Stelle  $x$  definiert.

**Definition 2.4.** Der Differentialoperator  $L$  heißt elliptisch in einem Punkt  $x \in \overline{\Omega}$ , wenn  $L^H(x, \xi) \neq 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Ist  $L$  in allen Punkten  $x \in \overline{\Omega}$  elliptisch, so heißt  $L$  elliptisch in  $\overline{\Omega}$ .

**Definition 2.5.** Der Differentialoperator  $L$  heißt stark elliptisch in einem Punkt  $x \in \bar{\Omega}$ , wenn es eine Konstante  $\gamma$  gibt, so dass

$$\operatorname{Re}(\gamma L^H(x; \xi)) \neq 0 \quad (2.17)$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ist  $L$  in allen Punkten  $x \in \bar{\Omega}$  stark elliptisch und ist die Konstante unabhängig von  $x$ , so heißt  $L$  stark elliptisch in  $\bar{\Omega}$ .

Aus dieser Definition folgt direkt

**Lemma 2.6.** a) Ist  $L$  in  $x \in \bar{\Omega}$  stark elliptisch, so ist  $L$  auch elliptisch in  $x \in \bar{\Omega}$ .

b)  $L$  ist genau dann (stark) elliptisch in  $x \in \bar{\Omega}$ , wenn  $L^*$  (stark) elliptisch in  $x \in \bar{\Omega}$  ist.

Eine wichtige Eigenschaft von (stark) elliptischen Operatoren ist, dass sie für  $n \geq 3$  von gerader Ordnung sind (vgl. [35], S. 147).

**Satz 2.7.** Es sei  $n \geq 3$  und der Differentialoperator  $L$  sei elliptisch in  $x \in \Omega$ , dann ist die Ordnung von  $L$  gerade.

Außerdem gilt für elliptische bzw. stark elliptische Differentialoperatoren von Ordnung  $2m$  (vgl. [35], S. 148):

**Satz 2.8.** Sei  $L(x, \partial_x)$  ein elliptischer bzw. stark elliptischer Differentialoperator in  $\bar{\Omega}$ . Dann existiert zu jeder kompakten Teilmenge  $K \subset\subset \bar{\Omega}$  ein Konstante  $c > 0$ , so dass

$$|L^H(x; \xi)| \geq c |\xi|^{2m}, \quad (2.18)$$

bzw.

$$|\operatorname{Re}(\gamma L^H(x; \xi))| \geq c |\xi|^{2m} \quad (2.19)$$

für alle  $x \in K$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Weiterhin gilt der in [35] (S. 149) bewiesene Satz:

**Satz 2.9.** Ist ein Differentialoperator  $L$  formal selbstadjungiert und elliptisch, dann ist er auch stark elliptisch.

Wir betrachten jetzt nicht nur eine Differentialgleichung, sondern Systeme von Differentialgleichungen. In diesem Fall ist der Differentialoperator  $L(x, D_x) := (L_{ij}(x, D_x))_{i,j=1}^k$  eine Matrix. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass die Operatoren  $L_{ij}$  homogene Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten sind, insbesondere gilt  $L_{ij} = L_{ij}^H$ . Wir nehmen an, dass es ganze Zahlen  $s_i, t_j, i, j = 1, \dots, k$ , gibt, so dass für die Ordnung der Differentialoperatoren  $L_{ij}$  gilt

$$\text{ord } L_{ij} \leq s_i + t_j \quad (2.20)$$

und schreiben  $L_{ij}$  in der Form

$$L_{ij}(D) = \sum_{|\alpha|=s_i+t_j} a_\alpha^{ij} D^\alpha \quad (2.21)$$

mit  $D = -i\nabla$  und  $D_i = -i\partial_i$ . Für  $s_i + t_j < 0$  sei  $L_{ij} = 0$ .

**Definition 2.10.** Ein Matrix-Differentialoperator  $(L_{ij})_{i,j=1}^k$  mit

$$L_{ij}(D) = \sum_{|\alpha|=s_i+t_j} a_\alpha^{ij} D^\alpha \quad (2.22)$$

heißt *elliptisch im Sinne von Agmon-Douglis-Nirenberg (ADN-elliptisch)*, wenn der skalare Differentialoperator  $\det(L_{ij})$  elliptisch ist.

Insbesondere folgt dann für  $n \geq 3$  aus Satz 2.7, dass  $\sum_{i=1}^k s_i + t_i = \text{ord } \det(L_{ij}) = 2m$  mit einem geeigneten  $m \in \mathbb{N}$ , und in jeder Spalte und Zeile von  $L$  gibt es wenigstens ein  $L_{ij} \neq 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass  $\max_{1 \leq j \leq k} s_j = 0$  gilt, was aus  $s_i + t_j = (s_i - l) + (t_j + l)$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  folgt.

**Definition 2.11.** (vgl. [32], S.324) Ein elliptischer Operator heißt *elliptisch im Sinne von Petrovski*, wenn  $s_1 = \dots = s_k = 0$  gewählt werden kann. Solche Systeme bezeichnen wir auch als *Petrovski-Systeme*.

**Definition 2.12.** Ein Operator  $L(D)$ , wie oben definiert, heißt *stark elliptisch*, falls  $t_j = \tau_j + \max_{1 \leq i \leq k} \tau_i, s_j = \tau_j - \max_{1 \leq i \leq k} \tau_i$  mit geeigneten  $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathbb{N}$  gilt. Außerdem muss für ein geeignetes  $\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| = 1$  und  $C > 0$

$$\text{Re} \{ \gamma \zeta \cdot L(\xi) \cdot \zeta^\top \} = \text{Re} \left\{ \gamma \sum_{i,j=1}^k L_{ij}(\xi) \zeta_i \bar{\zeta}_j \right\} \geq C \sum_{j=1}^k |\xi|^{2\tau_j} |\zeta_j|^2 \quad (2.23)$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{C}^k, \xi \in \mathbb{R}^n$  gelten.

Um die angeführten Definitionen etwas zu verdeutlichen, betrachten wir nun einige spezielle Differentialgleichungssysteme. Als erstes betrachten wir das Stokes-System

$$-\Delta u + \nabla p = h, \quad -\operatorname{div} u = g. \quad (2.24)$$

im  $\mathbb{R}^3$ . Dieses System beschreibt in der Strömungsmechanik die stationäre Strömung eines inkompressiblen Mediums unter Vernachlässigung der Trägheitsterme, hierbei ist  $u = (u_1, u_2, u_3)$  das Geschwindigkeitsfeld und  $p$  der Druck. Wir wollen nun herausfinden, ob das System ADN-elliptisch ist.

Im dreidimensionalen Fall haben wir hier ein System von vier Differentialgleichungen und schreiben dies als  $Lu = f$  mit  $u = (u_1, u_2, u_3, p)$ ,  $f = (h_1, h_2, h_3, g)$  und

$$L = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & -\Delta & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & -\Delta & \partial_3 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Für die Ordnung der Differentialoperatoren gilt für  $j \leq 3$

$$\begin{aligned} \operatorname{ord} L_{jj} &= 2, \\ \operatorname{ord} L_{j3} &= \operatorname{ord} L_{3j} = 1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

und für die restlichen Operatoren  $\operatorname{ord} L_{ij} = 0$ . Wählen wir  $t_1 = t_2 = t_3 = 2$ ,  $t_4 = 1$ ,  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$  und  $s_4 = -1$ , dann ist für alle  $i, j = 1, \dots, 4$  die Ungleichung (2.20) erfüllt. Da es sich bei den Operatoren um homogene Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten handelt, gilt für die Hauptteilpolynome  $L_{ij}(\xi)$  für  $j \leq 3$

$$\begin{aligned} L_{jj}(\xi) &= +|\xi|^2, \\ L_{j3}(\xi) &= -L_{3j}(\xi) = i\xi_j \end{aligned} \quad (2.27)$$

und sonst

$$L_{ij}(\xi) = 0. \quad (2.28)$$

Damit ist

$$\det L(\xi) = \det \begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 & 0 & i\xi_1 \\ 0 & |\xi|^2 & 0 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & |\xi|^2 & i\xi_3 \\ -i\xi_1 & -i\xi_2 & -i\xi_3 & 0 \end{pmatrix} = -|\xi|^6 \neq 0 \quad \text{für } \xi \neq 0, \quad (2.29)$$

und es ist gezeigt, dass das Stokes-System ADN-elliptisch ist.

Als nächstes betrachten wir den Matrix-Differentialoperator

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & \partial_1 \Delta \\ 0 & \partial_1 \Delta & -\Delta^2 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Für die Ordnung der Differentialoperatoren gilt

$$\text{ord } L_{11} = \text{ord } L_{22} = 2, \quad \text{ord } L_{33} = 4, \quad \text{ord } L_{23} = \text{ord } L_{32} = 3 \quad (2.31)$$

und sonst  $\text{ord } L_{ij} = 0$ . Setzen wir nun  $t_1 = t_2 = 3$ ,  $t_3 = 4$ ,  $s_1 = s_2 = -1$  und  $s_3 = 0$ , so ist die Ungleichung (2.20) für alle  $i, j = 1, 2, 3$  erfüllt. Die nichtverschwindenden Hauptteilpolynome lauten

$$L_{11}(\xi) = L_{22}(\xi) = -|\xi|^2, \quad L_{33}(\xi) = -|\xi|^4, \quad L_{23}(\xi) = L_{32}(\xi) = -i \xi_1 |\xi|^2, \quad (2.32)$$

und damit ist für  $\xi \neq 0$

$$\det L(\xi) = \det \begin{pmatrix} -|\xi|^2 & 0 & 0 \\ 0 & -|\xi|^2 & -i \xi_1 |\xi|^2 \\ 0 & -i \xi_1 |\xi|^2 & -|\xi|^4 \end{pmatrix} = -|\xi|^8 - \xi_1^2 |\xi|^6 < 0. \quad (2.33)$$

Also ist  $L$  elliptisch.

Um zu zeigen, dass  $L$  auch stark elliptisch ist, wählen wir  $\tau_1 = \tau_2 = 1$  und  $\tau_3 = 2$ . Damit erfüllen die  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , die Eigenschaften für  $t_j$  und  $s_j$  aus Definition 2.12. Können wir zeigen, dass die Aussage (2.23) für  $\gamma = -1$  erfüllt ist, so haben wir starke Elliptizität. Es gilt für  $\xi \in \mathbb{R}^3$  und  $\zeta \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 L_{ij}(\xi) \zeta_i \bar{\zeta}_j &= \sum_{j=1}^3 L_{jj}(\xi) |\zeta_j|^2 + L_{23}(\xi) \zeta_2 \bar{\zeta}_3 + L_{32}(\xi) \zeta_3 \bar{\zeta}_2 \\ &= -|\xi|^2 (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\xi|^2 |\zeta_3|^2) - i \xi_1 |\xi|^2 \zeta_2 \bar{\zeta}_3 - i \xi_1 |\xi|^2 \zeta_3 \bar{\zeta}_2 \\ &= -|\xi|^2 (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\xi|^2 |\zeta_3|^2) - i \xi_1 |\xi|^2 \cdot 2 \text{Re}(\zeta_3 \bar{\zeta}_2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Multiplizieren wir nun (2.34) mit  $\gamma = -1$  und betrachten nur noch den Realteil, so erhalten wir

$$\text{Re} \left( -1 \cdot \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}(\xi) \zeta_j \bar{\zeta}_k \right) = |\xi|^2 (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\xi|^2 |\zeta_3|^2), \quad (2.35)$$

und es gilt somit

$$\text{Re} \left( \gamma \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}(\xi) \zeta_j \bar{\zeta}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 |\xi|^{2\tau_i} |\zeta_i|^2, \quad (2.36)$$

womit die starke Elliptizität gezeigt ist.

Betrachten wir als abschließendes Beispiel noch ein wichtiges System aus der Elastizitätstheorie. Wir können zeigen, dass das Lamé-System

$$\begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.37)$$

mit  $\mu, \lambda > 0$  ein stark elliptisches Petrovski-System ist.

Für die Einträge der  $3 \times 3$ -Operatormatrix  $L$  gilt mit dem Kroneckersymbol  $\delta_{jk}$

$$L_{jk} = \delta_{jk} \mu \Delta + (\lambda + \mu) \partial_j \partial_k, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (2.38)$$

Somit haben die Hauptpolynome für  $\xi \in \mathbb{R}^3$  die Darstellung

$$L_{jk}(\xi) = -(\delta_{jk} \mu |\xi|^2 + (\lambda + \mu) \xi_j \xi_k), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (2.39)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \det L(\xi) &= \prod_{j=1}^3 (-\mu |\xi|^2 - (\mu + \lambda) \xi_j^2) \\ &\quad + (\mu + \lambda)^2 \mu |\xi|^2 (\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_3^2 \xi_1^2) \\ &\quad + (\mu + \lambda)^3 \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 \\ &= -\mu^3 |\xi|^6 - \mu^2 |\xi|^4 (\mu + \lambda) \sum_{j=1}^3 \xi_j^2 \\ &= -\mu^3 |\xi|^6 - \mu^2 (\mu + \lambda) |\xi|^6 \\ &= -\mu^2 (\lambda + 2\mu) |\xi|^6 < 0 \quad \text{für } \xi \neq 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Also ist das Lamé-System ADN-elliptisch.

Alle Einträge der Differentialoperatormatrix  $L$  haben Ordnung 2. Wählen wir  $t_i = 2$  und  $s_i = 0$  für  $i = 1, 2, 3$ , so ist (2.20) für alle  $i, j = 1, 2, 3$  erfüllt, und nach Definition 2.11 haben wir ein Petrovski-System. Abschließend zeigen wir die starke Elliptizität des Lamé-Systems. Für  $\tau_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sind die Eigenschaften für  $t_i$  und  $s_i$  aus Definition 2.12 erfüllt. Es gilt für  $\xi \in \mathbb{R}^3$  und  $\zeta \in \mathbb{C}^3$

$$\sum_{j,k=1}^3 L_{jk}(\xi) \zeta_j \bar{\zeta}_k = \sum_{j=1}^3 -\mu |\xi|^2 |\zeta_j|^2 - (\lambda + \mu) \sum_{j,k=1}^3 \xi_j \xi_k \zeta_j \bar{\zeta}_k. \quad (2.41)$$

Wir wählen nun  $\gamma = -1$ . Da

$$\sum_{j,k=1}^3 \xi_j \xi_k \zeta_j \bar{\zeta}_k = \sum_{j=1}^3 \xi_j^2 |\zeta_j|^2 + 2 (\xi_1 \xi_2 \operatorname{Re}(\zeta_1 \bar{\zeta}_2) + \xi_2 \xi_3 \operatorname{Re}(\zeta_2 \bar{\zeta}_3) + \xi_3 \xi_1 \operatorname{Re}(\zeta_3 \bar{\zeta}_1)) \quad (2.42)$$

reellwertig ist, ist die Ungleichung (2.23) erfüllt, d.h. starke Elliptizität liegt vor, wenn gezeigt werden kann, dass für alle  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}^3$

$$\sum_{j,k=1}^3 \xi_j \xi_k \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq 0 \quad (2.43)$$

gilt. Mit  $|\zeta_j|^2 = \operatorname{Re}(\zeta_j)^2 + \operatorname{Im}(\zeta_j)^2$  und  $\operatorname{Re}(\zeta_i \bar{\zeta}_j) = \operatorname{Re}(\zeta_i) \operatorname{Re}(\zeta_j) + \operatorname{Im}(\zeta_i) \operatorname{Im}(\zeta_j)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \xi_j \xi_k \zeta_j \bar{\zeta}_k &= \sum_{j=1}^3 \xi_j^2 (\operatorname{Re}(\zeta_j)^2 + \operatorname{Im}(\zeta_j)^2) \\ &\quad + 2 \xi_1 \xi_2 (\operatorname{Re}(\zeta_1) \operatorname{Re}(\zeta_2) + \operatorname{Im}(\zeta_1) \operatorname{Im}(\zeta_2)) \\ &\quad + 2 \xi_2 \xi_3 (\operatorname{Re}(\zeta_2) \operatorname{Re}(\zeta_3) + \operatorname{Im}(\zeta_2) \operatorname{Im}(\zeta_3)) \\ &\quad + 2 \xi_3 \xi_1 (\operatorname{Re}(\zeta_3) \operatorname{Re}(\zeta_1) + \operatorname{Im}(\zeta_3) \operatorname{Im}(\zeta_1)), \end{aligned} \quad (2.44)$$

und da  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$  für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \xi_j \xi_k \zeta_j \bar{\zeta}_k &= (\xi_1 \operatorname{Re}(\zeta_1) + \xi_2 \operatorname{Re}(\zeta_2) + \xi_3 \operatorname{Re}(\zeta_3))^2 \\ &\quad + (\xi_1 \operatorname{Im}(\zeta_1) + \xi_2 \operatorname{Im}(\zeta_2) + \xi_3 \operatorname{Im}(\zeta_3))^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}^3$ . Somit ist also gezeigt, dass das Lamé-System ein stark elliptisches Petrovski-System ist.

Wir betrachten nun elliptische Randwertprobleme, d.h. dem elliptischen Differentialgleichungssystem werden Randbedingungen hinzugefügt. Hierzu sei  $B(D)$  eine  $M \times k$ -Differentialoperatormatrix mit konstanten Koeffizienten.



Wir setzen voraus, dass  $L(D)$  stark elliptisch ist und betrachten für ein beliebiges Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \left( \sum_{j=1}^k L_{ij}(D)u_j \right)_{i=1}^k = f && \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u &= \left( \sum_{j=1}^k B_{lj}(D)u_j \right)_{l=1}^M = g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ist  $\Omega$  der Halbraum  $\mathbb{R}_+^n := \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ , so können wir das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachten:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k L_{ij}(\xi', D_n) u_j(\xi', x_n) &= 0, && i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^k B_{lj}(\xi', D_n) u_j(\xi', 0) &= g, && l = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ein solches System erhalten wir für  $f = 0$  nach Fouriertransformation von (2.46) entlang der tangentialen Variablen  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

**Definition 2.13.** *Der Operator  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  heißt elliptisch auf  $\mathbb{R}_+^n$ , falls  $\mathcal{L}$  elliptisch ist und das Anfangswertproblem (2.47) für jedes  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$  eine eindeutig bestimmte Lösung im Raum der exponentiell abklingenden Funktionen hat.*

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beliebiges Gebiet, wobei  $\partial\Omega \in C^m$ , so können wir für jedes  $x_0 \in \partial\Omega$  ein lokales Koordinatensystem  $y = \Phi(x)$  wählen, so dass  $\Phi(x_0) = 0$  gilt, und die innere Normale auf  $\partial\Omega$  in  $x_0$  auf der  $y_n$ -Achse liegt. Transformieren wir nun die Operatoren  $L(D)$ ,  $B(D)$  auf die  $y$ -Koordinaten, so erhalten wir Operatoren  $L(x_0, D_y)$ ,  $B(x_0, D_y)$ . Wir setzen wieder voraus, dass  $L$  stark elliptisch ist, dann gilt dies auch für  $L(x_0, D_y)$ .

**Definition 2.14.** *Der Operator  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  heißt elliptisch auf  $\Omega$ , falls für jedes  $x_0 \in \partial\Omega$  der Operator  $(L(x_0, D_y), B(x_0, D_y))$  im Sinne von Definition 2.13 elliptisch ist.*

Wir spezialisieren nun den Operator  $\mathcal{L}$  in (2.46)<sub>1</sub> zu einem  $k \times k$ -Matrix-Differentialoperator 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x) = \mathcal{D}(\nabla_x)^* \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x). \quad (2.48)$$

Hierbei ist  $\mathcal{A}$  eine symmetrische und positiv definite  $N \times N$ -Matrix,  $N \in \mathbb{N}$  fest.  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  ist eine  $N \times k$ -Matrix von homogenen Differentialoperatoren 1. Ordnung, d.h. es gilt beim Übergang von  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  zum Symbol  $\mathcal{D}(\xi)$ : Die Einträge  $D_{ij}(\xi)$  sind homogene Polynome 1. Ordnung, insbesondere ist  $\mathcal{D}(0) = 0$ . Unter  $\mathcal{D}(\nabla_x)^*$  verstehen wir den formal adjungierten Matrixdifferentialoperator, d.h.  $\mathcal{D}(\nabla_x)^* = \overline{\mathcal{D}(-\nabla_x)}^\top$ . Damit ist  $\mathcal{D}(\nabla_x)^*$  eine  $k \times N$ -Matrix von Differentialoperatoren erster Ordnung, und es gilt

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\nabla_x) u \cdot \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \overline{\mathcal{D}(\nabla_x)^* v} \, dx$$

für alle  $u \in C_0^\infty(\Omega)^k$ ,  $v \in C_0^\infty(\Omega)^N$ .

Bezeichnet  $\nu(x)$  die äußere Normale auf  $\partial\Omega$ , so folgt analog zu (2.12) die erste Greensche Formel:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_\Omega &= \int_{\Omega} (\mathcal{D}(\nabla_x)^* \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x)) \cdot \overline{v(x)} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x)) \cdot \mathcal{D}(\nabla_x)^{\top} \overline{v(x)} \, dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\mathcal{D}(\nu(x))^* \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x)) \cdot \overline{v(x)} \, ds \\ &= - \int_{\Omega} (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x)) \cdot \overline{\mathcal{D}(-\nabla_x) v(x)} \, dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left( \overline{\mathcal{D}(-\nu(x))}^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) \right) \cdot \overline{v(x)} \, ds \\ &= \int_{\Omega} (\mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x)) \cdot \overline{\mathcal{D}(\nabla_x) v(x)} \, dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left( \overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) \right) \cdot \overline{v(x)} \, ds \\ &=: (\mathcal{A} \mathcal{D}u, \mathcal{D}v)_\Omega - (\mathcal{N}u, v)_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

die wir abkürzend schreiben können als

$$(\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{N}u, v)_{\partial\Omega} = a(u, v; \Omega) \quad (2.50)$$

mit der Sesquilinearform

$$a(u, v; \Omega) = (\mathcal{A} \mathcal{D} u, \mathcal{D} v)_\Omega. \quad (2.51)$$

Den Operator

$$\mathcal{N}(x, \nabla_x) = \overline{\mathcal{D}(\nu(x))}^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) \quad (2.52)$$

bezeichnen wir als den mit der Greenschen Formel (2.49) assoziierten Neumann-Operator.

Da  $\mathcal{A}$  symmetrisch ist, definiert  $a(u, v; \Omega)$  für  $u, v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^k$  eine sesquilineare quadratische Form, d.h.  $a(u, v; \Omega) = \overline{a(v, u; \Omega)}$ .

Außerdem lässt sich analog zur Herleitung der ersten Greenschen Formel zeigen, dass

$$(u, \mathcal{L}v)_\Omega + (u, \mathcal{N}v)_{\partial\Omega} = \overline{a(v, u; \Omega)} \quad (2.53)$$

gilt, und somit folgt

$$(\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{N}u, v)_{\partial\Omega} = (u, \mathcal{L}v)_\Omega + (u, \mathcal{N}v)_{\partial\Omega}. \quad (2.54)$$

Wir betrachten im Folgenden gemischte Dirichlet-Neumann-Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  und definieren Randdifferentialoperatoren  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{I}$  auf  $\partial\Omega$  durch

$$\mathcal{B}_q u = \mathcal{N}_q u, \quad \mathcal{I}_q u = u_q, \quad \text{oder} \quad \mathcal{B}_q u = u_q, \quad \mathcal{I}_q u = -\mathcal{N}_q u. \quad (2.55)$$

Bei dieser Wahl der Randoperatoren folgt aus (2.54) die zweite Greensche Formel

$$(\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{B}u, \mathcal{I}v)_{\partial\Omega} = (u, \mathcal{L}v)_\Omega + (\mathcal{I}u, \mathcal{B}v)_{\partial\Omega}, \quad (2.56)$$

und das Randwertproblem (2.46) ist formal selbstadjungiert.

Um ein elliptisches Randwertproblem zu erhalten, müssen wir den Operator  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  weiter spezifizieren.

**Definition 2.15.** Sei  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  eine  $N \times k$ -Matrix von homogenen Differentialoperatoren erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  heißt algebraisch vollständig, falls ein  $\rho_0$  existiert mit folgenden Eigenschaften:

Ist  $\rho > \rho_0$  und  $P(\xi) = (P_1(\xi), \dots, P_k(\xi))$  ein Zeilenvektor von  $\rho$ -homogenen Polynomen, so existiert ein Zeilenvektor  $Q(\xi) = (Q_1(\xi), \dots, Q_N(\xi))$  von weiteren Polynomen mit  $P(\xi) = Q(\xi) \cdot \mathcal{D}(\xi)$ .

Ist  $\mathcal{D}$  algebraisch vollständig und  $\mathcal{L} = \mathcal{D}(\nabla_x)^* \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x)$  mit einer positiv definiten Matrix  $\mathcal{A}$ , so heißt  $\mathcal{L}$  formal positiv.

Verdeutlichen wir die Begriffe an einem kleinen Beispiel: Sei  $k = 1$ ,  $N = n$  und  $\mathcal{D}(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ , so kann man  $\rho_0 = 0$ , und zu gegebenem  $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=\rho} a_\alpha \xi^\alpha$  für  $\rho \geq 1$  immer  $Q_1(\xi), \dots, Q_n(\xi)$  wählen mit

$$\sum_{j=1}^n Q_j(\xi) \cdot \xi_j = P(\xi). \quad (2.57)$$

Also ist  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  algebraisch vollständig. Ist zusätzlich  $\mathcal{A}$  eine positiv definite Matrix, so ist  $\mathcal{L} = -\nabla_x \cdot \mathcal{A} \cdot \nabla_x^\top$  ein stark elliptischer skalarer Differentialoperator in Divergenz-Form.

In [27], S. 954, wurde ein hinreichendes Kriterium für die Elliptizität von Randwertproblemen vorgestellt.

**Definition 2.16.** Sei  $a(u, v; \Omega) = (\mathcal{A}\mathcal{D}u, \mathcal{D}v)_\Omega$  die durch (2.49) definierte Sesquilinearform. Wir sagen:  $a$  besitzt die Polynomeigenschaft, falls für jedes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  folgendes gilt:

$$u \in C^\infty(\Omega), a(u, u; \Omega) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}, \quad (2.58)$$

hierbei ist  $\mathcal{P}$  ein endlichdimensionaler Raum von Polynomen.

In [27], S. 954, wurde gezeigt, dass für einen formal positiven Operator, wie in Definition 2.15, die zugehörige Sesquilinearform aus (2.51) die Polynomeigenschaft besitzt. Ferner gilt:

**Lemma 2.17.** Besitzt die Form  $a(u, v; \Omega)$  aus (2.51) die Polynomeigenschaft, und ist  $\mathcal{B}$  definiert wie in (2.55), so ist das Randwertproblem (2.46) elliptisch.

Der Vollständigkeit halber geben wir hier eine entsprechende Modifikation des Beweises aus [26].

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass der Operator  $\mathcal{L}$  elliptisch ist. Angenommen, dies ist nicht so, dann gibt es ein  $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , so dass das Symbol  $\mathcal{L}(\theta)$  eine singuläre

$k \times k$ -Matrix darstellt, und wegen  $\mathcal{L}(\theta) = |\theta|^2 \mathcal{L}\left(\frac{\theta}{|\theta|}\right)$  können wir  $|\theta| = 1$  voraussetzen. Sei  $H \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  eine nichttriviale Lösung des linearen Gleichungssystems  $\mathcal{L}(\theta)H = 0$ . Wir fixieren eine beliebige nichttriviale Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$  und setzen  $w(x) = (w_1(x), \dots, w_k(x))^\top$  mit

$$w_l(x) = H_l \varphi(y), \quad y = \langle \theta, x \rangle_n. \quad (2.59)$$

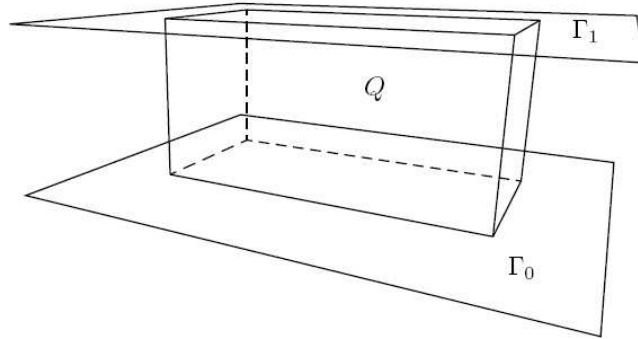
Dann gilt

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} w_l(x) = H_l \theta_i \theta_j \varphi''(y), \quad y = \langle \theta, x \rangle_n, \quad (2.60)$$

und somit folgt

$$\mathcal{L}(\nabla_x)w(x) = (\mathcal{L}(\theta) \cdot H) \varphi''(y) = 0. \quad (2.61)$$

Jetzt wählen wir einen Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , für den zwei Begrenzungsflächen auf den Hyperebenen  $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \theta, x \rangle_n = 0\}$  und  $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \theta, x \rangle_n = 1\}$  liegen. Da  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , gilt  $w|_{\partial Q \cap \Gamma_0} = w|_{\partial Q \cap \Gamma_1} = 0$ , und somit  $(w, \mathcal{N}w)_{\partial Q \cap \{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\}} = 0$ .



Ist  $\Gamma$  eine weitere Hyperebene, die parallel zu  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  liegt, so gilt:  $w, \partial_i w$  sind konstant auf  $\Gamma$ . Deswegen folgt, dass auch  $(w, \mathcal{N}w)_{\partial Q \setminus \{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\}} = 0$  gilt. Sind nämlich  $\Gamma_+, \Gamma_- \subset \partial Q \setminus \{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$  zwei weitere sich gegenüberliegende Begrenzungsflächen des Quaders, so gilt für die zugehörigen äußeren Normalenvektoren:  $\nu_+ = -\nu_-$ , daher  $\mathcal{D}^*(\nu_+) = -\mathcal{D}^*(\nu_-)$ , und somit  $(w, \mathcal{N}w)_{\Gamma_+} + (w, \mathcal{N}w)_{\Gamma_-} = 0$ . Mit der Greenschen Formel (2.50) und (2.61) folgt also:

$$a(w, w; Q) = 0. \quad (2.62)$$

Da für  $a$  die Polynomeigenschaft vorausgesetzt wird, muss  $w_l$  für  $l = 1, \dots, k$  ein Polynom sein. Dies ist aber nach Wahl von  $w_l$  nicht möglich. Also ist  $\mathcal{L}$  elliptisch.

Damit ist der Operator  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  elliptisch, wenn das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi', D_n) u(x_n) &= 0 & \text{für } x_n > 0, & \quad u = (u_1, \dots, u_k), \\ \mathcal{B}(\xi', D_n) u(x_n) &= c \end{aligned} \tag{2.63}$$

für jedes  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $|\xi'| = 1$  und  $c \in \mathbb{C}^N$  in der Klasse der exponentiell abklingenden Funktionen eindeutig lösbar ist. Da  $\mathcal{L}$  elliptisch ist, ist dies äquivalent dazu, dass für  $c = 0$  nur die triviale Lösung  $u = 0$  existiert (vgl. Satz 4.2 [20], S. 129). Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann existieren  $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $|\theta| = 1$  und ein exponentiell abklingendes  $u_\theta \neq 0$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, D_z) u_\theta(z) &= 0 & \text{für } z > 0, \\ \mathcal{B}(\theta, D_z) u_\theta(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Wir definieren

$$U(x) = U(x', x_n) = e^{i\theta^\top \cdot x'} u_\theta(x_n). \tag{2.65}$$

Da

$$\begin{aligned} D_j U(x) &= -i \partial_{x_j} U(x) = \theta_j e^{i\theta^\top \cdot x'} u_\theta(x_n) & \text{für } j = 1, \dots, n-1, \\ D_n U(x) &= e^{i\theta^\top \cdot x'} D_n u_\theta(x_n), \end{aligned} \tag{2.66}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U(x', x_n) &= e^{i\theta^\top \cdot x'} \mathcal{L}(\theta, D_n) u_\theta(x_n) = 0 & \text{für } x_n > 0, \\ \mathcal{B}U(x', 0) &= e^{i\theta^\top \cdot x'} \mathcal{N}(\theta, D_n) u_\theta(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Betrachten wir nun  $U$  in dem Halbzylinder

$$Z = \{x = (x', x_n) : x_n > 0, 0 \leq x_j \leq y_j, j = 1, \dots, n-1\} \quad (2.68)$$

mit  $y_j = \frac{2\pi}{\theta_j}$  für  $\theta_j \neq 0$  und  $y_j = 1$  für  $\theta_j = 0$ . Da  $u_\theta$  für  $x_n \rightarrow \infty$  exponentiell abklingt, können wir die erste Greensche Formel (2.50) mit  $u = v = U$  auf  $Z$  benutzen. Es gilt  $(\mathcal{N}U, U)_{\partial Z} = 0$ , denn wegen (2.67) verschwindet das Randintegral auf der Grundfläche des Halbzylinders  $Z$ , also für  $x_n = 0$ , und die Randintegrale für  $x_j = 0$  und  $x_j = y_j$  heben sich aufgrund der Periodizität von  $U$  gegenseitig auf. Da außerdem  $\mathcal{L}U = 0$  für  $x_n > 0$  gilt, erhalten wir

$$a(U, U; Z) = 0. \quad (2.69)$$

Wie eben folgt aus der Polynomeigenschaft von  $a$ , dass, im Widerspruch zur obigen Wahl,  $u$  ein Polynom ist.  $\square$

Es gilt der folgende Satz aus [31], S. 192.

**Lemma 2.18.** (i) *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $\partial G$  Lipschitz-stetig. Ist  $\mathcal{L}$  ein formal positiver Operator wie in Definition 2.15, dann gilt*

$$\|u; H^1(G)\|^2 \leq C(\mathcal{A}, \Omega) (a(u, u; G) + \|u; L^2(G)\|^2). \quad (2.70)$$

(ii) *Ist  $F : H^1(G)^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , eine stetige lineare Abbildung mit der Eigenschaft*

$$\mathcal{P} \cap \ker F = 0, \quad (2.71)$$

*wobei  $\mathcal{P}$  der endlichdimensionale Raum von Polynomen ist mit  $\mathcal{D}(\nabla_x)p(x) = 0$ , dann gilt*

$$\|u; H^1(G)\|^2 \leq C \left( \|\mathcal{D}u; L^2(G)\|^2 + |F(u)|^2 \right). \quad (2.72)$$

Es sei  $\mathcal{B}$  der Randoperator aus (2.55), und  $\sigma_q \in \{0, 1\}$  sei die Ordnung des jeweiligen Differentialoperators  $\mathcal{B}_q$ . Die Abbildung  $u \mapsto (\mathcal{L}u, \mathcal{B}u)$  definiert einen linearen stetigen Operator

$$\mathfrak{A}^l : \mathcal{D}^l H(\Omega) := H^{l+1}(\Omega)^k \rightarrow \mathcal{R}^l H(\Omega, \partial\Omega) := H^{l-1}(\Omega)^k \times \prod_{q=1}^k H^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega). \quad (2.73)$$

Aus den Ergebnissen in [27], [26] erhalten wir

**Lemma 2.19.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein formal positiver Operator, wie in Definition 2.15, und  $\mathcal{B}$  sei der durch (2.55) definierte Randoperator, dann ist das Randwertproblem (2.46) elliptisch. Insbesondere besitzt der Operator (2.73) die Fredholm-Eigenschaft und unser Randwertproblem hat genau dann eine Lösung, wenn*

$$(f, v)_\Omega + (g, \mathcal{T}v)_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{für alle } v \in \ker \mathfrak{A}^l. \quad (2.74)$$

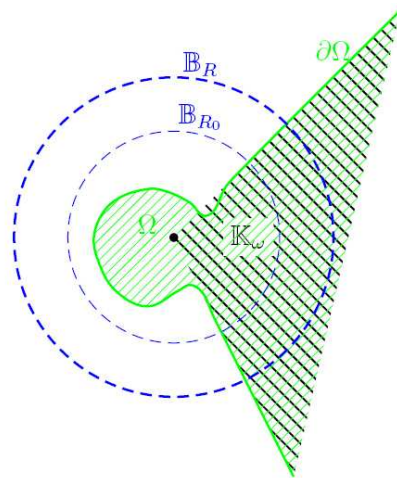
*Ist die Sesquilinearform  $a(u, v; \Omega)$  wie in (2.50) definiert, dann stimmt die Menge der glatten Funktionen, für die  $a(u, u; \Omega) = 0$  gilt, mit dem endlichdimensionalen Polynomraum  $\mathcal{P} = \{p \text{ Polynom} : \mathcal{D}(\nabla_x)p(x) = 0, x \in \Omega\}$  überein.*

### 2.3 Randwertprobleme in einem Gebiet mit kegelförmigem Ausgang

Um die Geometrie unserer unbeschränkten Gebiete zu beschreiben, erinnern wir an die Notation der Kugelkoordinaten, insbesondere  $r = |x|$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ . Es sei  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitssphäre und  $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$  ein Gebiet mit glattem Rand  $\partial\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ . Mit  $\omega$  assoziieren wir den Kegel  $\mathbb{K}_\omega = \{x \in \mathbb{R}^n : r^{-1}x \in \omega\}$ , und  $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : r < R\}$  ist eine Kugel um 0 vom Radius  $R$ .

Ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  besitzt einen kegelförmigen Ausgang, falls es  $R_0 > 0$  und ein Gebiet  $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$  gibt, so dass nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems

$$\Omega \setminus \mathbb{B}_{R_0} = \mathbb{K}_\omega \setminus \mathbb{B}_{R_0}. \quad (2.75)$$





Falls  $\omega = \mathbb{S}^{n-1}$  und  $\partial\omega = \emptyset$  gilt, ist  $\Omega$  ein sogenannter Außenraum oder  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Da  $\omega$  mit  $\Omega$  einmal fest gewählt wird, schreiben wir im Folgenden nur noch  $\mathbb{K}$  statt  $\mathbb{K}_\omega$ . Außerdem sei  $\Omega_0 := \Omega \cap \mathbb{B}_{2R_0}$ .

Wir wollen nun ein analoges Ergebnis zu Lemma 2.19 auf einem Gebiet mit kegelförmigem Ausgang erhalten. Es ist bekannt, dass für die Untersuchung der Lösungen in Gebieten, die außerhalb einer Kugel mit einem Kegel übereinstimmen, spezielle gewichtete Sobolevräume, nämlich die Kondratiev-Räume  $V_\beta^l(\Omega)$  aus [11] ein nützliches Hilfsmittel sind.

**Definition 2.20.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit kegelförmigem Ausgang,  $l \in \mathbb{N}_0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ . Der Raum  $V_\beta^l(\Omega)$  ist die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$  bezüglich der Norm

$$\|u; V_\beta^l(\Omega)\| := \left( \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} \rho^{2(\beta-l+|\alpha|)} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.76)$$

Hierbei ist  $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Es gilt:  $V_\beta^l(\Omega) = \{u \in H_{\text{loc}}^l(\bar{\Omega}) : \|u; V_\beta^l(\Omega)\| < \infty\}$ . Damit ist klar, dass ein  $u \in V_\beta^l(\Omega)$  für  $l \geq 1$  eine Spur auf  $\partial\Omega$  besitzt, und wir setzen

$$V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u|_{\partial\Omega} : u \in V_\beta^l(\Omega)\}, \quad (2.77)$$

versehen mit der natürlichen Norm

$$\|u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\| = \inf \{\|v; V_\beta^l(\Omega)\| : v = u \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (2.78)$$

In [13], S. 193, Lemma 6.1.2, wird gezeigt, dass die natürliche Norm des Spurraumes (2.78) zu der Norm

$$\|u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\| = \left\{ \sum_{p=0}^{l-1} \|(1+r)^{\beta-(l-\frac{1}{2})+p} \nabla_s^p u; L^2(\partial\Omega)\|^2 + \int_{\partial\Omega} \int_{\substack{y \in \partial\Omega \\ 2|x-y| < r=|x|}} (1+r)^{2\beta} |\nabla_s^{l-1} u(x) - \nabla_s^{l-1} u(y)|^2 \frac{ds_x ds_y}{|x-y|^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.79)$$

äquivalent ist. Dabei bezeichnet  $\nabla_x^p u$  die Menge aller Ableitungen  $p$ -ter Ordnung der Funktion  $u$ ,  $\nabla_s^{l-1} u$  die tangentialen Ableitungen der Ordnung  $l-1$  von  $u$  auf  $\partial\Omega$  und  $ds_x$  das Oberflächenmaß auf  $\partial\Omega$ .

Offensichtlich gilt für  $l \geq \tilde{l}$  und  $\beta \geq \tilde{\beta}$ :

$$V_\beta^l(\Omega) \subset V_{\beta+\tilde{l}-l}^{\tilde{l}}(\Omega) \subset V_{\tilde{\beta}+\tilde{l}-l}^{\tilde{l}}(\Omega), \quad (2.80)$$

wobei die Einbettungsoperatoren stetig sind. Weiterhin gilt nach [4], S. 131,

**Lemma 2.21.** *Sei  $l > \tilde{l}$  und  $\beta > \tilde{\beta}$ , so ist die Einbettung  $V_\beta^l(\Omega) \hookrightarrow V_{\tilde{\beta}}^{\tilde{l}}(\Omega)$  kompakt.*

Ist  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^{l+2}$ , so definiert das Randwertproblem (2.46) eine stetige lineare Abbildung

$$\mathfrak{A}_\beta^l : \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega) := \prod_{j=1}^k V_\beta^{l+1}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega) := \prod_{j=1}^k V_\beta^{l-1}(\Omega) \times \prod_{q=1}^k V_\beta^{l-\sigma_q+\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad (2.81)$$

wobei  $\sigma_q$  die Ordnung des Differentialoperators  $\mathcal{B}_q$  (s. (2.55)) ist. Aus der allgemeinen Theorie [28] wissen wir, dass der Operator  $\mathfrak{A}_\beta^l$  (2.81) für alle  $\beta$  außerhalb einer diskreten abzählbaren Menge  $I$  einen Fredholm-Operator definiert.

Außerdem lassen sich die Greenschen Formeln

$$(\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{N}u, v)_{\partial\Omega} = a(u, v; \Omega), \quad (2.82)$$

$$(\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{B}u, \mathcal{T}v)_{\partial\Omega} = (\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{T}u, \mathcal{B}v)_{\partial\Omega} \quad (2.83)$$

mit einem Stetigkeitsargument von  $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^k$ ,  $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^k$  auf  $u \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$ ,  $v \in V_{2l-\beta}^{l+1}(\Omega)^k$  fortsetzen. In diesem Fall sind wegen der Cauchy-Schwartz-Ungleichung alle auftretenden Integrale konvergent.

Die Menge  $I$  bezeichnen wir als verbotene Werte für  $\beta$  (bei gegebenem  $l$ ). Die verbotenen Werte für  $\beta$  werden bestimmt durch die Lösungen vom Potenztyp für das homogene Modellproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U &= 0 && \text{in } \mathbb{K}, \\ \mathcal{B}U &= 0 && \text{auf } \partial\mathbb{K} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

**Definition 2.22.** Eine Lösung vom einfachen Potenztyp ist eine nichttriviale Lösung von (2.84) der Form

$$U(x) = r^\lambda \mathcal{U}(\theta) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{U} \in C^\infty(\bar{\omega})^k, \quad (2.85)$$

wobei wieder  $r = |x|$  und  $\theta = r^{-1}x$ .

Eine nichttriviale Lösung von (2.84) der Form

$$U(x) = r^\lambda v(\ln r, \theta), \quad (2.86)$$

wobei  $v$  polynomial von  $\ln r$  abhängt, bezeichnen wir als Lösung vom verallgemeinerten Potenztyp.

Bei der Untersuchung des Modellproblems werden die Kondratiev-Räume  $V_\beta^l(\mathbb{K})$  definiert als die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\bar{\mathbb{K}} \setminus \{0\})$  bezüglich der Norm

$$\|u; V_\beta^l(\mathbb{K})\|^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|r^{\beta-l+k} \partial^\alpha u; L^2(\mathbb{K})\|^2. \quad (2.87)$$

Die Gewichtsfunktionen kontrollieren hier also sowohl das asymptotische Verhalten der Funktionen im Nullpunkt, als auch im Unendlichen. Hier gilt, im Gegensatz zu den Einbettungseigenschaften (2.80), immer:  $V_\beta^l(\mathbb{K}) \not\subseteq V_{\tilde{\beta}}^l(\mathbb{K})$  falls  $\beta \neq \tilde{\beta}$ , lediglich die Einbettung  $V_\beta^l(\mathbb{K}) \hookrightarrow V_{\beta+\tilde{l}-l}^{\tilde{l}}(\mathbb{K})$  ist stetig für  $\tilde{l} \leq l$ , allerdings ist die Einbettung nicht kompakt für  $\tilde{l} < l$ .

Randwertprobleme von der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{in } \mathbb{K}, \\ \mathcal{B}u &= g \quad \text{auf } \partial\mathbb{K} \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (2.88)$$

mit Operatoren der Form (2.48) und Randoperatoren wie in (2.55) definieren wieder einen stetigen linearen Operator analog zu (2.81), wenn man  $V_\beta^l(\Omega)$  durch  $V_\beta^l(\mathbb{K})$  ersetzt.

Das Modellproblem (2.88) lässt sich mit Hilfe der Mellin-Transformation

$$u(r, \theta) \rightarrow \mathcal{M}u(\lambda, \theta) =: \int_0^\infty r^{-\lambda-1} u(r) dr \quad (2.89)$$

analysieren. Mit Stetigkeitsargumenten lässt sie sich von  $C_0^\infty(\bar{\mathbb{K}} \setminus \{0\})$  auf  $V_\beta^l(\mathbb{K})$  fortsetzen (vgl. z.B. [13], S. 193ff).

Transformiert man den Operator  $\mathcal{L}$  und den Neumann-Operator in Polarkoordinaten, so gilt für den Operator  $\mathcal{L}$  und den Neumann-Operator  $\mathcal{N}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\nabla_x) &= r^{-2}L(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r) \\ \mathcal{N}(\nabla_x) &= r^{-1}N(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r),\end{aligned}\tag{2.90}$$

entsprechend gilt für den Randoperator

$$\mathcal{B}_q(\nabla_x) = r^{-\sigma_q}B_q(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r), \quad \sigma_q \in \{0, 1\}.\tag{2.91}$$

Mit  $\mathcal{M}(r\partial_r u) = \lambda \mathcal{M}u$  wird das Modellproblem (2.88) überführt in eine Familie von elliptischen Randwertproblemen

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\lambda)V &= L(\theta, \nabla_\theta, \lambda)V = F \quad \text{auf } \omega, \\ \mathbf{B}(\lambda)V &= B(\theta, \nabla_\theta, \lambda)V = G \quad \text{auf } \partial\omega\end{aligned}\tag{2.92}$$

auf der Mannigfaltigkeit  $\omega \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ . Hierbei definiert das Problem (2.92) für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  einen stetigen linearen Operator ( $\partial\omega \in C^{l+2}$  vorausgesetzt)

$$\mathfrak{A}(\lambda) : H^{l+1}(\omega)^k \rightarrow H^{l-1}(\omega)^k \times \prod_{q=1}^k H^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\omega).\tag{2.93}$$

$\mathfrak{A}(\lambda)$  heißt das zu dem Modellproblem (2.88) assoziierte elliptische Operatorbündel. Die Abbildung  $\lambda \rightarrow \mathfrak{A}(\lambda)$  ist ein quadratisches Polynom in  $\lambda$  mit operatorwertigen Koeffizienten. Eine komplexe Zahl  $\lambda$  heißt verallgemeinerter Eigenwert von  $\mathfrak{A}(\lambda)$ , falls eine nichttriviale Lösung  $\Phi(\theta)$  des homogenen Problems  $\mathfrak{A}(\lambda)\Phi = 0$  existiert.  $\Phi$  heißt (verallgemeinerter) Eigenvektor.

Wir setzen

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist verallgemeinerter Eigenwert von } \mathfrak{A}(\lambda)\}.\tag{2.94}$$

Ist  $\lambda \in \mathcal{S}$  und  $\Phi$  ein verallgemeinerter Eigenvektor, so ist  $U(r, \theta) = r^\lambda \Phi(\theta)$  eine Potenzlösung des homogenen Modellproblems. Umgekehrt kann man das Spektrum  $\mathcal{S}$  formal bestimmen, indem man einen Ansatz der Form (2.85) in das homogene Modellproblem einsetzt.

Ist  $\lambda \in \mathcal{S}$ ,  $\Phi \in H^{l+1}(\omega)$  ein zugehöriger Eigenvektor, so kann man die zugehörige Jordan-Kette betrachten. Mit  $\Phi^0 = \Phi$  betrachtet man sukzessiv die Probleme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\lambda)\Phi^0 &= 0, \\
\frac{d}{d\lambda}\mathfrak{A}(\lambda)\Phi^0 + \mathfrak{A}(\lambda)\Phi^1 &= 0, \\
\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\mathfrak{A}(\lambda)\Phi^0 + \frac{d}{d\lambda}\mathfrak{A}(\lambda)\Phi^1 + \mathfrak{A}(\lambda)\Phi^2 &= 0, \\
&\vdots \\
\sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathfrak{A}(\lambda)\Phi^{\nu-q} &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Falls Lösungen  $\Phi^\nu$ ,  $\nu > 0$ , existieren, so heißen diese zum Eigenwert  $\lambda$  und Eigenvektor  $\Phi^0$  assoziierte Vektoren. Assoziierte Vektoren führen auf Lösungen des homogenen Modellproblems (2.84) vom verallgemeinerten Potenztyp, und zwar mit

$$u(r, \theta) = r^\lambda \sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!} (\ln r)^q \Phi^{\nu-q}(\theta) \tag{2.96}$$

(z.B. [13] S. 203). Es gilt der folgende Satz (z.B. [28], S. 11ff).

**Satz 2.23.** *Ist  $\mathfrak{A}(\lambda)$  definiert wie in (2.93), so gilt:*

- (i) *Für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist  $\mathfrak{A}(\lambda)$  ein Fredholm-Operator vom Index 0.*
- (ii) *Für  $\lambda \notin \mathcal{S}$  ist  $\mathfrak{A}(\lambda)$  ein Isomorphismus.*
- (iii) *Das Spektrum  $\mathcal{S}$  besteht aus diskreten Eigenwerten von endlicher Vielfachheit, d.h. zu jedem Eigenwert gehören endlich viele linear unabhängige Eigenvektoren, und alle zugehörigen Jordan-Ketten sind endlich. Ferner liegen alle Eigenwerte bis auf endlich viele Ausnahmen in einem Bereich  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| > c|\operatorname{Re} \lambda|\}$  mit einem  $c > 0$ .*

**Bemerkung 2.24.** *Satz 2.23 gilt mit entsprechenden Modifikationen in (2.92) und (2.93) auch für den Hauptteil von ADN-Systemen. Sind  $\Phi^1, \dots, \Phi^\kappa$  eine Basis der Eigenvektoren zu einem Eigenwert  $\lambda$  und  $\mathfrak{m}(j)$  die Längen der zugehörigen Jordan-Ketten, so ist  $\sum_{j=1}^{\kappa} \mathfrak{m}(j)$  die totale Multiplizität der Eigenwerte.*

Aus (iii) folgt insbesondere auch, dass auf jeder Geraden  $\operatorname{Re} \lambda = \text{const}$  nur endlich viele Eigenwerte liegen können, und die Menge  $\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \mathcal{S}\}$  ist eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlen. Mit anderen Worten: Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Wert, so dass auf der Geraden  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$  Eigenwerte liegen, so gibt es rechts und links davon Streifen, die frei von Eigenwerten sind. In diesen Streifen lässt sich die inverse Mellin-Transformation anwenden, und man erhält folgenden Satz (z.B. [28], S. 66, Theorem 5.12, S. 68, Theorem 5.6, [13], S.197):

**Satz 2.25.** (i) *Ist die Gerade  $\operatorname{Re} \lambda = l + 1 - \beta - \frac{n}{2}$  frei von Eigenwerten des Operatorbündels  $\mathfrak{A}(\lambda)$ , so ist die Abbildung*

$$(\mathcal{L}, \mathcal{B}) : V_{\beta}^{l+1}(\mathbb{K})^k =: \mathcal{D}_{\beta}^l V(\mathbb{K}) \rightarrow V_{\beta}^{l-1}(\mathbb{K})^k \times \prod_{q=1}^k V_{\beta}^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\mathbb{K}) =: \mathcal{R}_{\beta}^l V(\mathbb{K}),$$

$$u \mapsto (\mathcal{L}u, \mathcal{B}u)$$
(2.97)

ein Isomorphismus.

(ii) *Sind für  $\beta_1 < \beta_2$  beide Geraden  $\operatorname{Re} \lambda = l + 1 - \beta_i - \frac{n}{2}$ ,  $i = 1, 2$ , frei von Eigenwerten,  $(f, g) \in \mathcal{R}_{\beta_1}^l V(\mathbb{K}) \cap \mathcal{R}_{\beta_2}^l V(\mathbb{K})$ , und sind  $u_1 \in V_{\beta_1}^{l+1}(\mathbb{K})^k$  und  $u_2 \in V_{\beta_2}^{l+1}(\mathbb{K})^k$  zwei Lösungen des Modellproblems (2.88), so gilt:  $u_1 = u_2$ , falls der Streifen  $l + 1 - \beta_2 - \frac{n}{2} < \operatorname{Re} \lambda < l + 1 - \beta_1 - \frac{n}{2}$  frei ist von Eigenwerten des Operatorbündels. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\kappa}$  die Eigenwerte des Operatorbündels in diesem Streifen und bilden  $U_1^j, \dots, U_{m(j)}^j$  eine Basis der Lösungen vom Potenztyp zum Eigenwert  $\lambda_j$ , so gilt*

$$u_1(x) - u_2(x) = \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{p=1}^{m(j)} c_{jp} U_p^j(x)$$
(2.98)

mit geeigneten Koeffizienten  $c_{jp}$ .

**Bemerkung 2.26.** *Aus diesem Satz ergibt sich die Menge  $I$  der verbotenen Werte. Bei festem  $l$  sind dies genau die Werte  $\beta$ , für die eine Lösung  $U = r^{\lambda} \Phi(\theta)$  vom einfachen Potenztyp existiert, so dass  $\|U; V_{\beta-l-1}^0(\mathbb{K})\|$  logarithmisch divergiert, d.h.*

$$\int_0^1 r^{2 \operatorname{Re} \lambda} r^{2(\beta-l-1)} r^{n-1} dr = \infty$$
(2.99)

und

$$\int_1^{\infty} r^{2 \operatorname{Re} \lambda} r^{2(\beta-l-1)} r^{n-1} dr = \infty.$$
(2.100)

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$2(\operatorname{Re} \lambda + \beta - l - 1) + n - 1 = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda = l + 1 - \beta - \frac{n}{2} \quad (2.101)$$

gilt.

Betrachten wir jetzt wieder das Gebiet  $\Omega$  mit einem kegelförmigen Ausgang, so gilt das folgende Resultat ([28], S. 99ff).

**Satz 2.27.** *Sei  $l \in \mathbb{N}$  fest, die Menge  $I$  sei definiert wie in Bemerkung 2.26. Dann gilt:*

(i) *Für jedes  $\beta \notin I$  definiert die Abbildung (2.81) einen Fredholm-Operator.*

*Für  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$  besitzt das Problem (2.46) eine Lösung  $u \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$  genau dann, wenn gilt:*

$$(f, v)_\Omega + (g, \mathcal{T}v)_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{für alle } v \in \ker \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l. \quad (2.102)$$

*Hierbei ist  $\mathcal{T}$  wieder durch (2.55) definiert. (vgl. Lemma 2.19)*

(ii) *Sind  $\beta_1, \beta_2 \notin I$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ , und  $(f, g) \in \mathcal{R}_{\beta_2}^l V(\Omega)$  gegeben, so dass das Randwertproblem  $(\mathcal{L}u, \mathcal{B}u) = (f, g)$  eine Lösung  $u \in V_{\beta_1}^{l+1}(\Omega)^k$  besitzt, so gilt mit den Bezeichnungen von Satz 2.25 die asymptotische Darstellung:*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{p=1}^{m(j)} \chi \cdot c_{jp} U_p^j(x) + \tilde{u}(x), \quad \tilde{u} \in V_{\beta_2}^{l+1}(\Omega)^k. \quad (2.103)$$

*Hierbei ist  $\chi \in C^\infty(\Omega)$  eine Abschneidefunktion mit  $\chi(x) = 0$  für  $x < R_0$  (vgl. (2.75)) und  $\chi(x) = 1$  für  $x > 2R_0$ , und es gilt die Abschätzung*

$$\|\tilde{u}; V_{\beta_2}^{l+1}(\Omega)\| + \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{p=1}^{m(j)} |c_{jp}| \leq c \{ \|(f, g); \mathcal{R}_{\beta_2}^l V(\Omega)\| + \|u; L^2(\Omega_{R_0})\| \}. \quad (2.104)$$

*Ist  $u$  eindeutig, so kann der letzte Summand weggelassen werden.*

**Bemerkung 2.28.** Ist  $\beta \geq 2l - \beta$ , also  $\beta - l \geq 0$ , dann folgt aus  $u \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$  auch  $u \in V_{2l-\beta}^{l+1}(\Omega)^k$ . Ist  $u$  eine Lösung des homogenen Problems, so folgt mit der Greenschen Formel (2.82):  $a(u, u; \Omega) = 0$ . Somit ist  $u$  wegen unserer Voraussetzungen an  $\mathcal{L}$  ein Polynom. Da aber

$$\|1; V_\beta^{l+1}(\Omega)\|^2 \geq c \int_1^\infty r^{2(\beta-l-1)} r^{n-1} dr = \infty \quad (2.105)$$

für  $\beta - l \geq 0$ , muss  $u = 0$  gelten. Also ist  $\mathfrak{A}_\beta^l$  für  $\beta - l \geq 0$  injektiv, selbst wenn  $\beta - l = 0$  verboten ist. Dies entspricht genau dem Fall  $\nabla u \in L^2(\Omega)^k$ . Falls  $\beta = l \notin I$ , so erhalten wir ein Intervall von zulässigen Exponenten  $\beta$ , für die  $\mathfrak{A}_\beta^l$  einen Isomorphismus definiert.

Wegen der speziellen Voraussetzungen an den Operator  $\mathcal{L}$  erhalten wir mit den in [27], § 2, aufgeführten Ergebnissen zusätzliche Informationen.

**Satz 2.29.** ([27], Satz 2.7) Ist  $\mathcal{L} = \mathcal{D}^* \mathcal{A} \mathcal{D}$  ein formal positiver Operator, und  $\mathcal{B}$  definiert wie in (2.55), dann ist das Spektrum des zum Modellproblem (2.88) zugehörigen elliptischen Operatorbündels radialsymmetrisch bzgl. des Punktes

$$\lambda_0 := 1 - \frac{n}{2}. \quad (2.106)$$

Der Durchschnitt von  $\mathcal{S}$  mit der durch  $\operatorname{Re} \lambda = 1 - \frac{n}{2}$  festgelegten Geraden besteht höchstens aus dem Punkt  $\lambda_0$ . Ist  $\lambda_0$  ein Eigenwert, so gilt für die totale Multiplizität

$$d_0 = 2 \dim\{p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}p = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{K}, \operatorname{grad} p = \lambda_0\}, \quad (2.107)$$

und alle Jordan-Ketten haben die Länge 2, wobei  $\mathcal{P}$  durch (2.58) definiert ist.

Da wir nur Polynome mit  $\operatorname{grad} p = 1 - \frac{n}{2}$  zu betrachten brauchen – deren Spuren auf  $\omega$  den Eigenraum zu  $\lambda = 1 - \frac{n}{2}$  erzeugen – erhalten wir unmittelbar:

**Folgerung 2.30.** Der Wert  $\lambda_0$  ist kein Eigenwert, falls entweder  $n \geq 3$  oder  $\mathcal{B}u = u$  (Dirichlet-Operator) auf  $\partial\mathbb{K}$  gilt. In diesem Fall ist  $\beta = l$  ein erlaubter Wert, und es existiert ein  $\delta_0 > 0$ , so dass  $\mathfrak{A}_\beta^l$  für alle  $\beta$  mit  $-\delta_0 < \beta - l < \delta_0$  einen Isomorphismus definiert, wobei  $\beta = l \pm \delta_0$  verbotene Werte sind.

Ist  $n = 2$  und enthält der Randoperator  $\mathcal{B}$  Neumann-Anteile, so sind die zum Eigenwert  $\lambda_0 = 0$  gehörigen Lösungen vom einfachen Potenztyp konstante Vektoren  $c \in \mathbb{C}^k$ , wobei  $c_q = 0$ , falls  $\mathcal{B}_q u = u_q$ . Die Lösungen vom verallgemeinerten Potenztyp haben die Form

$$U = c \cdot \ln r + U^1(\theta). \quad (2.108)$$



In diesem Fall ist  $\beta = l$  ein verbotener Wert, und es existiert kein Intervall, für das  $\mathfrak{A}_\beta^l$  einen Isomorphismus darstellt. Wie bei  $n = 3$  gibt es aber ein  $\delta_1 > 0$ , so das  $\beta - l = \pm\delta_1$  verbotene Werte sind, aber alle Werte  $\beta - l \in (0, \delta_1)$  und  $\beta - l \in (-\delta_1, 0)$  erlaubt. Wir setzen in diesem Fall  $\delta_0 = 0$ .

Nach Bemerkung 2.28 ist  $\mathfrak{A}_\beta^l$  injektiv für  $\beta - l \in (0, \delta_1)$  und surjektiv mit endlichdimensionalem Kern für  $\beta - l \in (-\delta_1, 0)$ . Die Dimension des Kerns lässt sich in diesem Fall wie folgt ausrechnen: Bezeichnet

$$\text{ind } \mathfrak{A}_\beta^l = \dim \ker \mathfrak{A}_\beta^l - \text{codim Bild } \mathfrak{A}_\beta^l \quad (2.109)$$

den Index des Operators  $\mathfrak{A}_\beta^l$ , und ist  $\beta - l \in (0, \delta_1)$ , so ist  $2l - \beta \in (-\delta_1, 0)$ , und es gilt (vgl. [28], S. 112)

$$\text{ind } \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l - \text{ind } \mathfrak{A}_\beta^l = \kappa. \quad (2.110)$$

Hierbei ist  $\kappa = 2J$  die totale Multiplizität des Eigenwertes  $\lambda = 0$  und  $J \leq k$  die Anzahl der linear unabhängigen konstanten Vektoren  $c \in \mathbb{C}^k$  mit  $\mathcal{B}c = 0$  auf  $\partial\mathbb{K}$ . Wir wissen außerdem, dass  $\dim \ker \mathfrak{A}_\beta^l = 0 = \text{codim Bild } \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l$  und  $\dim \ker \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l = \text{codim Bild } \mathfrak{A}_\beta^l$ , daher folgt aus der Formel (2.110):

$$\dim \ker \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l = J, \quad (2.111)$$

Also ist  $\ker \mathfrak{A}_{2l-\beta}^l = \{c \in \mathbb{C}^k : \mathcal{B}c = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ .

Diese Überlegungen gelten insbesondere auch, wenn  $\omega = \mathbb{S}^{n-1}$ , d.h. im Fall eines Außenraumproblems (vgl. [28], S. 241ff). Die Lösungen vom Potenztyp sind entweder Polynome oder Ableitungen der Spalten der Grundlösungsmatrix. Damit sind die verbotenen Werte für  $\beta$  bekannt: Für  $n = 2$  gilt  $I = l + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ . Für  $n \geq 3$  sind die Eingänge der Grundlösungsmatrix von der Form  $u(x) = r^{2-n}U(\theta)$ , daher erhalten wir hier:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \beta : \beta - l = 1 - \frac{n}{2} - m, m \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ \beta : \beta - l = \frac{n}{2} - 1 + m, m \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &=: I_+ \cup I_-, \end{aligned} \quad (2.112)$$

$I_+$  enthält gerade die von den Polynomen erzeugten verbotenen Werte und  $I_-$  die von den Ableitungen der Grundlösungsmatrix.

Somit haben wir folgendes Resultat:

**Folgerung 2.31.** *Ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  im Gebiet mit kompaktem Komplement und  $\partial\Omega \in C^{l+2}$ , so gilt:*

(i) *Ist  $n \geq 3$  und  $\beta - l \in (1 - \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1)$ , dann existiert für  $f \in V_{\beta}^{l-1}(\Omega)^k$ ,  $g \in \prod_{q=1}^k H^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega)$  immer eine eindeutig bestimmte Lösung des Randwertproblems (2.46).*

(ii) *Gilt  $n = 2$ ,  $\beta - l \in (-1, 0)$  und  $(f, g) \in V_{\beta}^{l-1}(\Omega)^k \times \prod_{q=1}^k H^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega)$ , so existiert eine Lösung  $u \in V_{\beta}^{l+1}(\Omega)^k$ . Die Lösungen des homogenen Problems bilden einen Unterraum  $V$  der Dimension  $k$ . Insbesondere gilt im Fall des äußeren Neumann-Problems, also  $\mathcal{B} = \mathcal{N} : V = \mathbb{C}^k$ .*

*Für  $\beta - l \in (0, 1)$  gilt: Erfüllt  $(f, g)$  die Kompatibilitätsbedingung (2.102) für alle  $u \in V$ , so existiert eine eindeutig bestimmte Lösung des Randwertproblems.*

### 3 Formale Konstruktion der künstlichen Randbedingungen

#### 3.1 Weitere Voraussetzungen für das Randwertproblem

Wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden, können wir künstliche Randbedingungen mit guten Fehlerabschätzungen für folgende Situation konstruieren:

Gegeben seien  $f \in V_\gamma^0(\Omega)^k$  und  $g \in V_{\gamma^{\frac{1}{2}}}(\partial\Omega)^k$ . Aus technischen Gründen sei  $g_q = 0$ , falls die  $q$ -te Randbedingung eine Dirichlet-Bedingung ist, d.h.  $\mathcal{B}_q u = u_q$ .

Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u^\infty \in V_\beta^l(\Omega)^k$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^\infty &= f && \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u^\infty &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Lösung  $u^\infty$  habe für  $|x| \rightarrow \infty$  die asymptotische Darstellung

$$u^\infty = \chi U^\infty + \tilde{u}^\infty, \tag{3.2}$$

wobei  $U^\infty(x) = r^\lambda \Phi(\theta)$  eine Lösung des Modellproblems (2.84) ist mit  $\operatorname{Re} \lambda < 1 - \frac{n}{2}$ ,  $\tilde{u}^\infty$  genüge der Abschätzung

$$\|\tilde{u}^\infty; V_\gamma^2(\Omega)\| \leq C \left( \|f; V_\gamma^0(\Omega)\| + \|g; V_{\gamma^{\frac{1}{2}}}(\partial\Omega)\| \right), \tag{3.3}$$

$\chi$  sei eine Abschneidefunktion wie in Satz 2.27 und für die Gewichtsindizes  $\beta, \gamma$  gelte  $\gamma > 2 - \frac{n}{2} - \operatorname{Re} \lambda > \beta$ . In diesem Fall gilt gerade:  $\chi u^\infty \in V_\beta^2(\Omega)^k$ , aber  $\chi u^\infty \notin V_\gamma^2(\Omega)^k$ .

Aus den Überlegungen des vorangegangenen Paragraphen wissen wir, dass es ein  $\delta_1 > \delta_0$  gibt, so dass  $\beta = l + \delta_1$  ein verbotener Index ist, aber alle Werte  $\beta = l + \delta$ ,  $\delta \in (\delta_0, \delta_1)$  erlaubt sind. Sind jetzt  $\gamma - l \in (\delta_0, \delta_1)$  und  $(f, g) \in \mathcal{R}_\gamma^l V(\Omega)$ , so erhalten wir wegen der Einbettungseigenschaft (2.80):  $(f, g) \in \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$  für alle  $\beta < \gamma$ , also insbesondere für  $\beta - l \in (-\delta_0, \delta_0)$ , falls  $\delta_0 > 0$ . Für die Lösung  $u \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$  erhalten wir die asymptotische Darstellung (2.103), wobei hier genau die Lösungen vom Potenztyp (2.86) auftauchen mit  $\operatorname{Re} \lambda = 1 - \delta_0 - \frac{n}{2}$ . Analog erhalten wir im Fall  $n = 2$ , d.h.  $\delta_0 = 0$ , ein  $\delta_2 > \delta_1$ , so dass  $\gamma - l \in (\delta_1, \delta_2)$  erlaubt ist. Sind  $(f, g) \in \mathcal{R}_\gamma^l V(\Omega)$ ,  $\gamma - l \in (\delta_1, \delta_2)$  und existiert eine Lösung  $u \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$  mit  $\beta - l \in (0, \delta_1)$ , so erhalten wir einen Term in der asymptotischen Darstellung, der zu Eigenwerten auf der Geraden

$$\operatorname{Re} \lambda = 1 - \delta_1 - \frac{n}{2} = -\delta_1 \tag{3.4}$$

gehört.

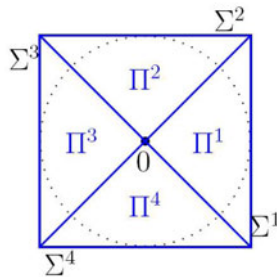
Wie bekannt ist, können wir nur dann eine gute Abschätzung für den Abschneidefehler erwarten, falls der zugehörige Randoperator auf dem ersten asymptotischen Term der Lösung verschwindet. Dies lässt sich dann mit der hier vorgestellten Methode erreichen, wenn der erste asymptotische Term die Form einer Lösung vom einfachen Potenztyp mit einer festen Potenz  $r^\lambda$  hat. Daher machen wir folgende Zusatzannahme:

- (A1) Ist  $\delta_* > 0$  der kleinste positive verbotene Wert für  $\beta - l$ , so darf auf der Geraden  $\operatorname{Re} \lambda = 1 - \frac{n}{2} - \delta_*$  nur ein Eigenwert  $\mu$  liegen, dessen Vielfachheit mit der Dimension des zugehörigen Eigenraumes übereinstimmt, das heißt, es gibt in der asymptotischen Darstellung nur Lösungen vom einfachen Potenztyp.

Diese Bedingung stellt sicher, dass eine Lösung  $u^\infty$ , wie oben beschrieben, existiert, wobei für  $\delta_0 = 0$  die Daten  $(f, g)$  endlich viele Kompatibilitätsbedingungen erfüllen müssen.

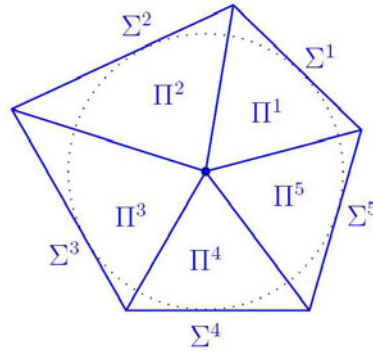
### 3.2 Die geometrische Beschreibung der Abschneidefläche

Sei  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexes Polyeder mit  $\partial\Pi = \bar{\Sigma}^1 \cup \dots \cup \bar{\Sigma}^J$ , wobei jede Begrenzungsfläche  $\bar{\Sigma}^j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , in einer Tangentialhyperebene der Einheitssphäre liegen soll. Als Beispiel für ein solches Polyeder kann man den Würfel mit den Ecken  $a \in \{1, -1\}^n$  betrachten. Dann lässt sich  $\Pi$  darstellen als Vereinigung von abgeschlossenen Pyramiden  $\bar{\Pi}^1, \dots, \bar{\Pi}^J$ , deren Spitzen jeweils im Nullpunkt liegen.



Die Flächen  $\bar{\Sigma}^j$  bilden jeweils die Basis von  $\bar{\Pi}^j$ . Ferner nehmen wir an, dass  $\bar{\Sigma}^i \cap \bar{\Sigma}^j$  für  $i \neq j$  höchstens aus einer  $(n - 2)$ -dimensionalen „Kante“ besteht. Dann gilt für die offenen Pyramiden  $\Pi^i \cap \Pi^j = \emptyset$ , falls  $i \neq j$ , und der Durchschnitt  $\bar{\Pi}^i \cap \bar{\Pi}^j$  besteht höchstens aus einer gemeinsamen  $(n - 1)$ -dimensionalen Begrenzungsfläche der Pyra-

miden  $\Pi^i$  und  $\Pi^j$ . Ferner soll  $\Sigma^j$  das Innere (bzgl. der Topologie auf den entsprechenden Tangentialhyperebenen) der Basisflächen darstellen und  $\Sigma = \Sigma^1 \cup \dots \cup \Sigma^J$ .

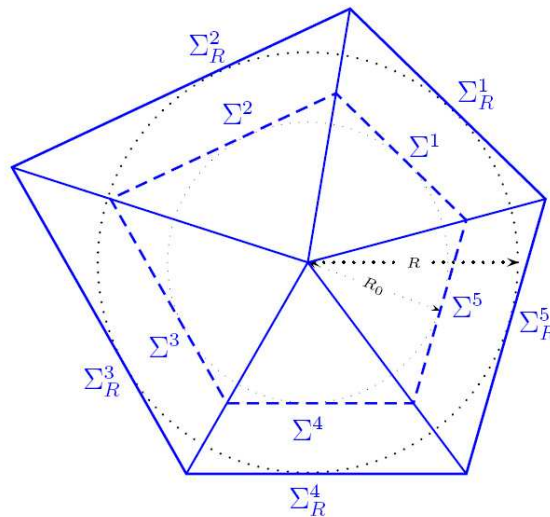


Für  $R > 0$  sei

$$\Pi_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{R} \in \Pi \right\}, \quad \Sigma_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{R} \in \Sigma \right\}, \quad (3.5)$$

analog

$$\Pi_R^j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{R} \in \Pi^j \right\}, \quad \Sigma_R^j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{R} \in \Sigma^j \right\}. \quad (3.6)$$



Für  $R > R_0$  setzen wir  $\Omega_R = \Omega \cap \Pi_R$ ,  $\Gamma_R = \Sigma_R \cap \Omega$ . Den gemeinsamen Rand  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_R$  des unbeschränkten Gebietes  $\Omega$  und des abgeschnittenen Gebietes  $\Omega_R$  bezeichnen wir mit  $\partial\Omega(R)$ . Unser Ziel ist es, eine gegebene Lösung  $u^\infty$  des Randwertproblems (2.46)

durch eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u^R &= f|_{\Omega_R} && \text{in } \Omega_R, \\ \mathcal{B}u^R &= g|_{\partial\Omega(R)} && \text{auf } \partial\Omega(R), \\ \mathcal{B}^R u^R &= 0 && \text{auf } \Gamma_R\end{aligned}\tag{3.7}$$

zu approximieren, wobei der Randoperator  $\mathcal{B}^R$  noch geeignet zu wählen ist.

Da zu  $g \in \prod_{p=1}^k V_\beta^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega)$  immer eine Fortsetzung  $u_0 \in V_\beta^{l+1}(\Omega)^k$  existiert mit

$$\|u_0; V_\beta^{l+1}(\Omega)\| \leq c \left\| g; \prod_{p=1}^k V_\beta^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega) \right\| \tag{3.8}$$

und  $\mathcal{B}u_0 = g$  auf  $\partial\Omega$ , können wir sowohl das Problem (2.46) als auch (3.7) auf den Fall  $g = 0$  reduzieren. Daher nehmen wir im Folgenden zunächst an, dass

$$g = 0. \tag{3.9}$$

Wir nehmen wieder an, dass  $u^\infty$  die asymptotische Entwicklung

$$u^\infty = \chi U^\infty + \tilde{u}^\infty \tag{3.10}$$

besitzt, wobei  $U^\infty(x) = r^\lambda \mathcal{U}(\theta)$  eine Lösung von (2.84) ist.

Da  $\Omega_R$  ein Gebiet mit Lipschitz-Rand ist, formulieren wir das approximierende Problem gleich in Variationsform. Unabhängig von der Wahl des Randoperator  $\mathcal{B}^R$  wissen wir: Ist  $u^R$  eine Lösung von (3.7)<sub>1,2</sub>, von der wir zunächst annehmen, dass sie hinreichend regulär ist, so folgt aus der Greenschen Formel (2.82), angewandt auf  $\Omega = \Omega_R$  und  $w \in H^2(\Omega_R)^k$

$$(f, w)_{\Omega_R} = a(u^R, w; \Omega_R) - (\mathcal{N}u^R, w)_{\partial\Omega_R}. \tag{3.11}$$

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass  $w_q = 0$  auf  $\partial\Omega(R)$  gilt, für alle  $q$  mit  $\mathcal{B}_q u^\infty = u^\infty$ , dann reduziert sich das Randintegral auf das Integral über  $\Gamma_R$ . Wir wollen jetzt dieses Randintegral durch eine hermitesche Form  $b(u^R, w; \Gamma_R)$  ersetzen, so dass wir eine Variationsformulierung des Approximationsproblems in der Form

$$(f, w)_{\Omega_R} = a(u^R, w; \Omega_R) + b(u^R, w; \Gamma_R) \tag{3.12}$$

für alle  $w$  aus einem geeigneten Raum  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  von Testfunktionen erhalten. Formal folgt aus (3.12) und (3.11) für  $w \in \mathcal{H}(\Omega_R)$

$$b(u^R, w; \Gamma_R) + (\mathcal{N}u^R, w)_{\Gamma_R} = 0. \tag{3.13}$$

Dies kann man als schwache Form einer Randbedingung (3.7)<sub>3</sub> interpretieren. Die Form  $b$  sollte nicht negativ sein, d.h.  $b(w, w; \Gamma_R) \geq 0$  für alle  $w \in \mathcal{H}(\Omega_R)$ . Außerdem muss  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  so gewählt werden, dass  $u^\infty|_{\Omega_R} \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  gilt, und  $(\mathcal{N}u^\infty, w)_{\Gamma_R} + b(u^\infty, w; \Gamma_R)$  sollte von möglichst hoher Ordnung mit  $R \rightarrow \infty$  für alle  $w \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  verschwinden. Warum dies sinnvoll ist, sieht man mit folgendem Argument: Analog zu (3.11) gilt natürlich auch (unter Beachtung von  $g = 0$ )

$$(f, w)_{\Omega_R} = a(u^\infty, w; \Omega_R) - (\mathcal{N}u^\infty, w)_{\Gamma_R}. \quad (3.14)$$

Subtrahieren wir (3.12) von (3.14), dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= a(u^\infty, w; \Omega_R) - a(u^R, w; \Omega_R) - (\mathcal{N}u^\infty, w)_{\Gamma_R} - b(u^R, w; \Gamma_R) \\ &= a(u^\infty - u^R, w; \Omega_R) + b(u^\infty - u^R, w; \Gamma_R) - (\mathcal{N}u^\infty, w)_{\Gamma_R} - b(u^\infty, w; \Gamma_R) \end{aligned} \quad (3.15)$$

und setzen wir  $u^\infty - u^R$  als Testfunktion  $w$  ein, so ergibt dies

$$\begin{aligned} a(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Omega_R) + b(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Gamma_R) \\ = (\mathcal{N}u^\infty, u^\infty - u^R)_{\Gamma_R} + b(u^\infty, u^\infty - u^R; \Gamma_R). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit  $u^\infty = U^\infty + \tilde{u}^\infty$  wird die rechte Seite von (3.16) zu

$$(\mathcal{N}U^\infty, u^\infty - u^R)_{\Gamma_R} + b(U^\infty, u^\infty - u^R; \Gamma_R) + (\mathcal{N}\tilde{u}^\infty, u^\infty - u^R)_{\Gamma_R} + b(\tilde{u}^\infty, u^\infty - u^R; \Gamma_R). \quad (3.17)$$

Ist  $b$  so gewählt, dass

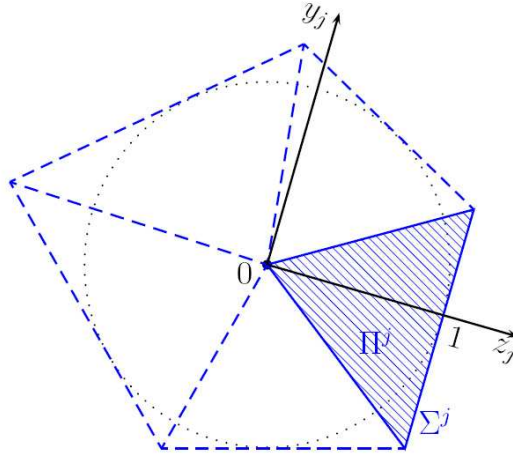
$$(\mathcal{N}U^\infty, w)_{\Gamma_R} + b(U^\infty, w; \Gamma_R) = 0 \quad (3.18)$$

für alle  $w \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  gilt, liefert die linke Seite von (3.16), wie wir später sehen werden, zusammen mit einem Absorptionsargument eine Abschätzung für den Abschneidefehler  $u^\infty - u^R$ .

Hierzu legen wir zunächst folgendes fest:

**Definition 3.1.** Ein  $w \in C^2(\overline{\Omega_R})^k$  heißt eine dem Randoperator  $\mathcal{B}$  angepasste Testfunktion auf  $\overline{\Omega_R}$ , falls  $w_q = 0$  auf  $\partial\Omega(R)$  gilt für alle Dirichlet-Komponenten von  $u$  in der Randbedingung (2.55), d.h. wenn dort  $\mathcal{B}_{qu} = u_q$  gilt. Analog verwenden wir die Bezeichnung für  $w \in C^2(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ .

Ist  $\Pi^j \subset \Pi$  eine Pyramide gemäß obiger Definition, so können wir jeweils ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $(y^j, z_j)$  wählen, so dass die Basis  $\Sigma^j$  in einer Hyperebene  $z_j = 1$  liegt, wobei die Spitze weiterhin im Nullpunkt ist.

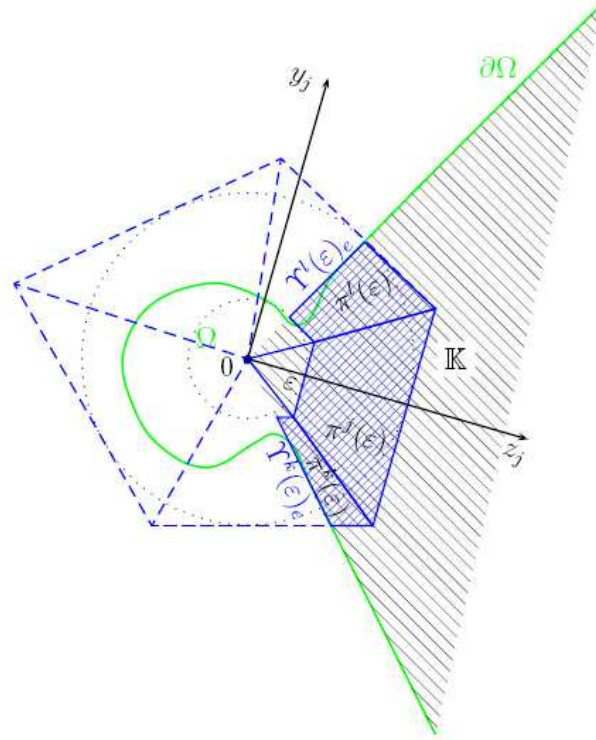


Ist jetzt  $U = r^\lambda \Phi(\theta)$  mit  $\Phi \in C^{l+1}(\omega)$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ , eine homogene Funktion vom Grad  $\lambda$  auf  $\mathbb{K}$ , dann gilt:

$$U(x) = z_j^\lambda \mathbf{U}^j \left( \frac{y^j}{z_j} \right), \quad (3.19)$$

wobei  $\mathbf{U}^j \in C^{l+1}(\sigma^j)^k$  gilt, hierbei ist  $\sigma^j = \Sigma^j \cap \mathbb{K}$  eine offene Teilmenge der Hyperebene  $\{(y^j, z_j) : z_j = 1\}$ . Weiterhin betrachten wir für jedes  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $j = 1, \dots, J$ , den Pyramidenstumpf  $\Pi^j(\varepsilon) = \{x = (y^j, z_j) \in \Pi^j : \varepsilon < z_j < 1\}$ . Den Durchschnitt  $\Pi^j(\varepsilon) \cap \mathbb{K}$  bezeichnen wir mit  $\pi^j(\varepsilon)$  und nennen ihn krummlinigen Pyramidenstumpf, da die zugehörigen Basen  $\sigma^j(\varepsilon) = \{x = (y^j, \varepsilon) : (y^j, \varepsilon) \in \mathbb{K}\}$  und  $\sigma^j(1) = \sigma^j$  auch krummlinige Vielecke sein können. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\pi^j(\varepsilon)$  nicht komplett in  $\mathbb{K}$  liegt. Außerdem gehört die Mantelfläche  $\Upsilon^j(\varepsilon)$  zu  $\pi^j(\varepsilon)$ . Die Mantelfläche selbst besteht aus einem inneren Anteil  $\Upsilon^j(\varepsilon)_i = \Upsilon^j(\varepsilon) \cap \mathbb{K}$  und einem äußeren Anteil  $\Upsilon^j(\varepsilon)_e = \Upsilon^j(\varepsilon) \cap \partial\mathbb{K}$ , der auch leer sein kann.





Ist jetzt  $V$  eine dem Randoperator  $\mathcal{B}$  angepasste Testfunktion auf  $\mathbb{K}$ , und  $V$  homogen vom Grad  $\lambda$ , d.h.

$$V = z_j^\lambda \mathbf{V}^j \left( \frac{y^j}{z_j} \right), \quad \mathbf{V}^j \in C^2(\sigma^j)^k, \quad (3.20)$$

und ist  $U = r^\lambda \Phi(\theta)$  eine Lösung vom einfachen Potenztyp des Problems (2.84), so können wir in dem Gebiet  $\pi(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^J \pi^j(\varepsilon)$  die Greensche Formel (2.50) auf  $U, V$  anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \mathcal{D}U, \mathcal{D}V)_{\pi(\varepsilon)} &= (\mathcal{L}U, V)_{\pi(\varepsilon)} + \sum_{j=1}^J (\mathcal{N}U, V)_{\mathbf{r}_\varepsilon^j(\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^J ((\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(1)} + (\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(\varepsilon)}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da  $\mathcal{L}U = 0$  auf  $\mathbb{K}$ , außerdem  $(\mathcal{N}U)_q = 0$ , falls  $V_q \neq 0$ , und umgekehrt  $V_q = 0$ , falls  $(\mathcal{N}U)_q \neq 0$  gilt, (da  $V$  eine angepasste Testfunktion ist,) verschwinden die beiden ersten Summanden von (3.21).

Für die Behandlung des dritten Summanden beachten wir: Auf  $\sigma^j(1)$  ist der Normalenvektor gerade  $e_{z_j}$ , der Einheitsvektor in  $z_j$ -Richtung, auf  $\sigma^j(\varepsilon)$  gilt  $\nu(x) = -e_{z_j}$ .

Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= +\mathcal{D}(e_{z_j})^* \mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x) \quad \text{auf } \sigma^j(1), \\ \mathcal{N} &= -\mathcal{D}(e_{z_j})^* \mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x) \quad \text{auf } \sigma^j(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Wir zerlegen nun ebenfalls die linke Seite von (3.21):

$$(\mathcal{A}\mathcal{D}U, \mathcal{D}V)_{\pi(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^J (\mathcal{A}\mathcal{D}U, \mathcal{D}V)_{\pi^j(\varepsilon)}.\tag{3.23}$$

Um diese Terme genauer zu analysieren, beachten wir zunächst, dass  $(y^j, z_j)^\top = \mathcal{O}^j x$  gilt mit einer geeigneten Orthogonalmatrix  $\mathcal{O}^j$ . Ist  $\mathcal{D}^j(\nabla_{y^j}, \partial_{z_j})$  der entsprechend transformierte Differentialoperator  $\mathcal{D}(\nabla_x)$ , so gilt

$$(\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x)U, \mathcal{D}(\nabla_x)V)_{\pi^j(\varepsilon)} = \int_{\varepsilon}^1 \int_{\sigma^j(z_j)} \mathcal{A}\mathcal{D}^j(\nabla_{y^j}, \partial_{z_j})U \cdot \overline{\mathcal{D}^j(\nabla_{y^j}, \partial_{z_j})V} dy^j dz_j.\tag{3.24}$$

Mit Hilfe der Koordinaten-Transformation

$$(\eta^j, \zeta_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ z_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^j \\ z_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y^j, z_j) = (\zeta_j \eta^j, \zeta_j)\tag{3.25}$$

transformieren wir den krummlinigen Pyramidenstumpf  $\pi^j(\varepsilon)$  auf das krummlinige Prisma  $\sigma^j \times (\varepsilon, 1)$ .

Aus (3.25) folgt

$$\begin{aligned}\nabla_{y^j} &= \frac{1}{\zeta_j} \nabla_{\eta^j}, \\ \frac{\partial}{\partial z_j} &= \left( \nabla_{\eta^j}^\top, \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z_j^2} y^j \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{(y^j, z_j) = (\zeta_j \eta^j, \zeta_j)} = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \frac{1}{\zeta_j} (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j}\end{aligned}\tag{3.26}$$

und  $dy^j dz_j = \zeta_j^{n-1} d\eta^j d\zeta_j$ . Unter Beachtung der Homogenität von  $\mathcal{D}^j$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x)U, \mathcal{D}(\nabla_x)V)_{\pi^j(\varepsilon)} &= \int_{\varepsilon}^1 \left( \mathcal{A}\mathcal{D}^j \left( \frac{1}{\zeta_j} \nabla_{\eta^j}, \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \frac{1}{\zeta_j} (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j} \right) U, \mathcal{D}^j \left( \frac{1}{\zeta_j} \nabla_{\eta^j}, \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \frac{1}{\zeta_j} (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j} \right) V \right)_{\sigma^j} \zeta_j^{n-1} d\zeta_j \\ &= \int_{\varepsilon}^1 \zeta_j^{n-3} \left( \mathcal{A}\mathcal{D}^j \left( \nabla_{\eta^j}, \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j} \right) U, \mathcal{D}^j \left( \nabla_{\eta^j}, \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j} \right) V \right)_{\sigma^j} d\zeta_j.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Da

$$V(x) = V(\zeta_j \eta^j, \zeta_j) = \zeta_j^\lambda \mathbf{V}^j(\eta^j), \quad U(x) = \zeta_j^\lambda \mathbf{U}^j(\eta^j) \quad (3.28)$$

gilt, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j \left( \nabla_{\eta^j}, \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j} \right) V(\zeta_j \eta^j, \zeta_j) &= \zeta_j^\lambda \mathcal{D}^j (\nabla_{\eta^j}, \lambda - (\eta^j)^\top \nabla_{\eta^j}) \mathbf{V}^j(\eta^j) \\ &=: \zeta_j^\lambda \mathbf{D}^j(\lambda) \mathbf{V}^j(\eta^j), \end{aligned} \quad (3.29)$$

entsprechendes gilt für  $U$ . Mit dieser Bezeichnung wird aus (3.27)

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x)U, \mathcal{D}(\nabla_x)V)_{\pi^j(\varepsilon)} &= \int_\varepsilon^1 \zeta_j^{n-3+\lambda+\bar{\lambda}} (\mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{V}^j)_{\sigma_j} d\zeta_j \\ &= \frac{1 - \varepsilon^{n-2+2\operatorname{Re}\lambda}}{n-2+2\operatorname{Re}\lambda} (\mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{V}^j)_{\sigma_j}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Benutzen wir die Darstellung (3.22) für den Neumann-Operator, sowie noch einmal die Formel (3.26) und die Homogenität von  $\mathcal{D}$ , dann berechnet sich das Integral auf der Basisfläche  $\sigma^j(\varepsilon)$  als

$$(\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(\varepsilon)} = -\varepsilon^{n-2+2\operatorname{Re}\lambda} (\mathcal{D}^j(e_{z_j})^* \mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{V}^j)_{\sigma_j}. \quad (3.31)$$

Damit gilt

$$(\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(1)} + (\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(\varepsilon)} = (1 - \varepsilon^{n-2+2\operatorname{Re}\lambda}) (\mathcal{D}^j(e_{z_j})^* \mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{V}^j)_{\sigma_j} \quad (3.32)$$

und nach Summation über  $j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J ((\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(1)} + (\mathcal{N}U, V)_{\sigma^j(\varepsilon)}) &= (1 - \varepsilon^{n-2+2\operatorname{Re}\lambda}) \sum_{j=1}^J (\mathcal{D}^j(e_{z_j})^* \mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{V}^j)_{\sigma_j} \\ &= (\mathcal{N}U, V)_\Gamma, \end{aligned} \quad (3.33)$$

hierbei ist  $\Gamma = \Sigma \cap \mathbb{K}$ , und  $\mathcal{N}$  wieder der Neumann-Operator, jetzt bezogen auf das Gebiet  $\mathbb{K} \cap \Pi$ .

Summieren wir in (3.30) ebenfalls über  $j$ , so erhalten wir

**Folgerung 3.2.** *Sind  $U, V \in C^2(\overline{\mathbb{K}} \setminus \{0\})^k$  homogen vom Grad  $\lambda$ , weiterhin  $U$  eine Lösung von (2.84) und  $V$  eine dem Operator  $\mathcal{B}$  angepasste Testfunktion, dann gilt mit  $\Gamma = \partial\Pi \cap \mathbb{K}$ :*

$$(\mathcal{N}U, V)_\Gamma = \frac{1}{n-2+2\operatorname{Re}\lambda} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A}\mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{U}^j, \mathbf{D}^j(\lambda)\mathbf{V}^j)_{\sigma_j}. \quad (3.34)$$

Die Formel (3.34) werden wir nun benutzen, um die Schlüsselidentität für die Bestimmung der Randsesquilinearform  $b$  auf  $\Gamma_R$  herzuleiten. Hierzu beachten wir, dass auf der Teilfläche  $\Sigma_R^j$  sich der Neumann-Operator wieder in der Form

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}^j(e_{z_j})^* \mathcal{A} \mathcal{D}^j(\nabla_{y^j}, e_{z_j}) \quad (3.35)$$

darstellen lässt.

**Lemma 3.3.** *Ist  $U(x) = r^\lambda \Phi(\theta)$  eine Lösung vom einfachen Potenztyp wie in Folgerung 3.2 und  $v \in C^2(\overline{\Omega}_R)^k$  eine angepasste Testfunktion wie in Definition 3.1, dann gilt:*

$$(\mathcal{N}U, v)_{\Gamma_R} = \frac{R}{n-2+2\operatorname{Re}\lambda} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A} \mathbf{D}_R^j(\lambda)U, \mathbf{D}_R^j(\lambda)v)_{\sigma^j(R)}, \quad (3.36)$$

wobei

$$\mathbf{D}_R^j(\lambda) = \mathcal{D}^j \left( \nabla_{y^j}, \frac{\lambda}{R} - \frac{(y^j)^\top}{R} \cdot \nabla_{y^j} \right) = \frac{1}{R} \mathbf{D}^j(\nabla_{\eta^j}, \lambda), \quad \eta^j = \frac{y^j}{R}. \quad (3.37)$$

**Bemerkung 3.4.** *Der Operator  $\mathbf{D}_R^j(\lambda)$  ist ein Differentialoperator auf der Fläche  $z_j = R$ . Formal entsteht er aus dem Operator  $\mathcal{D}$ , indem man  $\mathcal{D}$  zuerst in den Koordinaten  $(y^j, z_j)$  ausdrückt und dann die folgende Substitution vornimmt:*

$$\partial_{z_j} \rightarrow \frac{\lambda}{R} - \frac{(y^j)^\top}{R} \cdot \nabla_{y^j}. \quad (3.38)$$

*Beweis.* (von Lemma 3.3) Ist  $v \in C^2(\overline{\Omega}_R)^k$  eine Testfunktion wie angegeben, so definiert  $\hat{v}(\eta^j, 1) =: v(R\eta^j, R)$  für jedes  $j = 1, \dots, J$  eine Funktion auf der Fläche  $\overline{\sigma^j}$ . Setzen wir

$$v^j(x) = \frac{z_j^\lambda}{R^\lambda} \hat{v}(\eta^j) \quad \text{für } j = 1, \dots, J, \quad x = (z_j y^j, z_j), \quad (3.39)$$

und definieren  $V^0$  durch  $V^0|_{\overline{\sigma^j}} = v^j$ , so ist  $V^0$  eine  $\lambda$ -homogene Funktion auf  $\mathbb{K}$ , die die Voraussetzungen von 3.2 erfüllt. Außerdem gilt nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} V^0|_{\Gamma_R} &= v|_{\Gamma_R}, \\ \nabla_{y^j} V^0 &= \nabla_{y^j} v|_{\sigma^j(R)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Beachten wir ferner, dass für jede glatte  $\lambda$ -homogene Funktion  $w$  und  $(y^j, R) = R(\eta^j, 1)$  aus  $\sigma^j(R)$  gilt:

$$\begin{aligned} (y^j)^\top \cdot \nabla_{y^j} w(x) &= R^\lambda (R\eta^j)^\top \cdot \nabla_{\eta^j} w(\eta^j, 1) \cdot \frac{1}{R}, \\ \mathbf{D}_R^j(\lambda) w(x) &= R^{\lambda-1} \mathbf{D}^j(\lambda) w(\eta^j, 1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}D_R^j(\lambda)U, D_R^jV^0)_{\sigma^j(R)} &= R^{\lambda-1}R^{\bar{\lambda}-1}R^{n-1} (\mathcal{A}D^j(\lambda)U(\cdot, 1), D^jV^0(\cdot, 1))_{\sigma^j}, \\ (\mathcal{N}U, V^0)_{\sigma^j(R)} &= R^{\lambda-1}R^{\bar{\lambda}}R^{n-1} (\mathcal{N}U(\cdot, 1), V^0(\cdot, 1))_{\sigma^j}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

und daher folgt (3.36) aus (3.34). □

## 4 Die Lösung des Approximationsproblems

Wir legen jetzt fest, was eine schwache Lösung unseres Approximationsproblems sein soll und beweisen die eindeutige Lösbarkeit.

Hierzu definieren wir den Hilbertraum  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  als den Abschluss der an  $\mathcal{B}$  angepassten Testfunktionen bezüglich der Norm

$$\|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|^2 = \|\nabla u; L^2(\Omega_R)\|^2 + \sum_{j=1}^J \left( R \|\nabla_{y^j} u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + \frac{1}{R} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right). \quad (4.1)$$

Diese Definition liefert einen abgeschlossenen Unterraum von  $H^1(\Omega_R)^k$ , der auch noch alle Funktionen  $H^2(\Omega_R)^k$  enthält, mit  $\mathcal{B}_q u = 0$ , falls  $\mathcal{B}_q$  ein Dirichlet-Anteil der Randbedingungen ist. Wegen der zusätzlichen Glattheitseigenschaften, nämlich  $H^1(\sigma_R^j)^k$  auf den Flächen des Abschneiderandes besitzt ein  $u \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  auch Spuren auf den Kanten der Polyederflächen und auf  $\partial\mathbb{K} \cap \Sigma_R$ , wobei die von verschiedenen Polyederflächen stammenden Spuren von  $u$  übereinstimmen.

Für  $u, v \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  setzen wir

$$b(u, v; \Gamma_R, \lambda) = -\frac{R}{2 \operatorname{Re} \lambda + n - 2} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A} \mathbf{D}_R^j(\lambda) u, \mathbf{D}_R^j(\lambda) v)_{\sigma^j(R)}. \quad (4.2)$$

**Definition 4.1.** Ein  $u^R \in \mathcal{H}(\Omega_R)$  heißt schwache Lösung des Approximationsproblems, falls

$$(f, w)_{\Omega_R} = a(u^R, w; \Omega_R) + b(u^R, w; \Gamma_R, \lambda) \quad (4.3)$$

gilt für alle  $w \in \mathcal{H}(\Omega_R)$ , wobei

$$a(u^R, w; \Omega_R) = (\mathcal{A} \mathcal{D} u^R, \mathcal{D} w)_{\Omega_R}. \quad (4.4)$$

Um die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung zu zeigen, können wir analog zu [29] vorgehen. Hierzu müssen wir zeigen, dass die rechte Seite von (4.3) eine stetige und koerzive Sesquilinearform bzgl. der Norm (4.1) darstellt.

Die Stetigkeit ist dabei klar. Für die Koerzivität benötigt man neben der Kornschen Ungleichung (2.70) auch noch eine Art Kornsche Ungleichung auf den Abschneiderflächen  $\sigma^j(R)$ . Hierbei muss man beachten, dass die Konstante in (2.70) von  $G$  insbesondere

auch von der Größe von  $G$  abhängt. In Analogie zu den Bezeichnungen in Abschnitt 3.2 definieren wir zu  $\varepsilon \geq 0$  und  $R > 0$  den krummlinigen Pyramidenstumpf

$$\pi^j(\varepsilon, R) = \{x = (y^j, z_j) \in \Pi^j \cap \mathbb{K} : \varepsilon < z_j < R\}. \quad (4.5)$$

Dann haben wir

**Lemma 4.2.** (vgl. [29], Satz 3.5) Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , für alle  $u \in H^1(\pi^j(\varepsilon, R))^k$  mit  $0 \leq \varepsilon < R$  gilt dann

$$\left\| \frac{u}{z_j}; L^2(\pi^j(\varepsilon, R)) \right\|^2 \leq C(n) \left( \|\nabla u; L^2(\pi^j(\varepsilon, R))\|^2 + R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right). \quad (4.6)$$

Für  $n = 2$  gilt die Variante

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u}{z_j} (\ln z_j)^{\frac{t-1}{2}}; L^2(\pi^j(\varepsilon, R)) \right\|^2 \\ & \leq C(t) (\ln R)^t \left( \ln R \|\nabla u; L^2(\pi^j(\varepsilon, R))\|^2 + R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

für jedes  $t > 0$  und  $1 < \varepsilon < R$ .

*Beweis.* Da  $C^1(\overline{\pi^j(\varepsilon, R)}) \subset H^1(\pi^j(\varepsilon, R))$  dicht liegt, reicht es, die beiden Ungleichungen für  $u \in C^1(\overline{\pi^j(\varepsilon, R)})^k$  zu beweisen. Die Integrale über die Pyramidenstümpfe lassen sich mit der Koordinatentransformation (3.25) wieder auf Integrale über krummlinige Prismen der Form  $\sigma^j \times (\varepsilon, R)$  transformieren.

Wir betrachten zuerst den Fall  $n = 3$ :

Mit  $x = (y, z) =: (z\eta, z)^1$  haben wir  $x \in \pi^j(\varepsilon, R)$  genau dann, wenn  $(\eta, z) \in \sigma^j \times (\varepsilon, R)$ , und für  $\hat{u}(\eta, z) =: u(z\eta, z)$  gilt:  $\hat{u} \in C(\overline{\sigma^j} \times [\varepsilon, R])^k$ .

Mit partieller Integration und der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^R \hat{u}(\eta, z)^2 \cdot z^{n-3} dz \\ & = \frac{1}{n-2} (\hat{u}(\eta, R)^2 R^{n-2} - \hat{u}(\eta, \varepsilon)^2 \varepsilon^{n-2}) - \frac{2}{n-2} \int_{\varepsilon}^R \partial_z \hat{u}(\eta, z) \hat{u}(\eta, z) z^{n-2} dz \\ & \leq \frac{1}{n-2} \left[ \hat{u}(\eta, R)^2 R^{n-2} + 2 \left( \int_{\varepsilon}^R |\partial_z \hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-1} dz \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\varepsilon}^R |\hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-3} dz \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>Hier und in den folgenden Beweisen lassen wir den Index  $j$  bei den Koordinaten weg.

Mit der Young-Ungleichung

$$2a \cdot b \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2, \quad a, b \geq 0, \quad \epsilon > 0, \quad (4.9)$$

folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^R |\hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-3} dz \\ & \leq C(n) \left[ \hat{u}(\eta, R)^2 R^{n-2} + \int_{\epsilon}^R |\partial_z \hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-1} dz \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Integrieren wir nun über  $\sigma^j$ , vertauschen die Integrationsreihenfolge und benutzen

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma^j} |\partial_z \hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-1} d\eta = \int_{\sigma^j} |\nabla u(y, z)|^2 dy, \\ & \int_{\sigma^j} |\hat{u}(\eta, z)|^2 z^{n-2} d\eta = z^{-2} \int_{\sigma^j} |u(y, z)|^2 dy, \end{aligned} \quad (4.11)$$

so folgt die erste Ungleichung.

Für  $n = 2$  führt eine analoge Rechnung auf

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^R \hat{u}(\eta, z)^2 \frac{(\ln z)^{t-1}}{z} dz \\ & = \frac{1}{t} \left( \hat{u}(\eta, R)^2 (\ln R)^t - \hat{u}(\eta, \epsilon)^2 (\ln \epsilon)^t \right) + \frac{2}{t} \int_{\epsilon}^R \hat{u}(\eta, z) \partial_z \hat{u}(\eta, z) (\ln z)^t dz \\ & \leq \frac{1}{t} \left[ \hat{u}(\eta, R)^2 (\ln R)^t \right. \\ & \quad \left. + 2 \left( \int_{\epsilon}^R |\hat{u}(\eta, z)|^2 \frac{(\ln z)^{t-1}}{z} dz \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\epsilon}^R |\partial_z \hat{u}(\eta, z)|^2 z (\ln z)^{t+1} dz \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beachten wir außerdem, dass  $(\ln z)^{t+1} \leq (\ln R)^{t+1}$  für  $1 < z \leq R$  gilt, so folgt mit der Young-Ungleichung

$$\int_{\epsilon}^R |\hat{u}(\eta, z)|^2 \frac{(\ln z)^{t-1}}{z} dz \leq \frac{(\ln R)^t}{t} \left( \ln R \int_{\epsilon}^R |\partial_z \hat{u}(\eta, z)|^2 z dz + |\hat{u}(\eta, z)|^2 \right). \quad (4.13)$$

Dieselben Argumente wie eben liefern jetzt (4.7).  $\square$



Die Ungleichung vom Kornschen Typ auf der Abschneidefläche muss hier wie folgt formuliert werden (vgl. [29], Lemma 3.7):

**Lemma 4.3.** *Für  $U \in H^1(\sigma^j(R))^k$  gilt*

$$R^{-1} \|U; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + R \|\nabla_y U; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \leq CR \|\mathbf{D}_R^j(\lambda)U; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \quad (4.14)$$

mit einer Konstanten unabhängig von  $R$  und  $U$ .

*Beweis.* Seien  $U \in H^1(\sigma^j(R))^k$  und  $\hat{U}(\eta, z)$  wieder definiert durch  $U(y, z) = \hat{U}(\eta, z)$  mit  $y = R\eta$ , dann ist  $\hat{U} \in H^1(\sigma^j)^k$ . Da

$$\begin{aligned} \|\hat{U}; L^2(\sigma^j)\|^2 &= R^{1-n} \|U; L^2(\sigma^j(R))\|^2, \\ \|\nabla_\eta \hat{U}; L^2(\sigma^j)\|^2 &= R^{3-n} \|\nabla_y U; L^2(\sigma^j(R))\|^2, \\ \|\mathbf{D}^j(\lambda)\hat{U}; L^2(\sigma^j)\|^2 &= R^{3-n} \|\mathbf{D}_R^j(\lambda)U; L^2(\sigma^j(R))\|^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

reicht es zu zeigen: Für alle  $u \in H^1(\sigma^j)^k$  gilt

$$\|u; L^2(\sigma^j)\|^2 + \|\nabla_\eta u; L^2(\sigma^j)\|^2 \leq C(\lambda, \sigma^j) \|\mathbf{D}^j(\lambda)u; L^2(\sigma^j)\|^2. \quad (4.16)$$

Sei also  $u \in H^1(\sigma^j)^k$  und  $v(y, z) = z^\lambda u\left(\frac{y}{z}, 1\right)$ . Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Beweis gilt dann  $v \in H^1(\pi^j(1, 4))^k$  und  $v|_{\sigma^j} = u$ . Weiterhin folgt aus der speziellen Form von  $v$

$$\|u; H^1(\sigma^j)\|^2 = \|u; L^2(\sigma^j)\|^2 + \|\nabla_\eta u; L^2(\sigma^j)\|^2 \leq C \|v; H^1(\pi^j(1, 4))\|^2 \quad (4.17)$$

mit (vgl. (3.26))

$$\mathcal{D}^j(\nabla_y, \partial_z) v(y, z) = \frac{1}{z} \mathcal{D}^j(\nabla_\eta, z\partial_z - \eta^\top \nabla_\eta) v(z\eta, z) = z^{\lambda-1} \mathbf{D}^j(\lambda) u(\eta, 1) \quad (4.18)$$

und

$$\|\mathcal{D}^j v; L^2(\pi^j(1, 4))\|^2 = \int_1^4 z^{2\operatorname{Re}\lambda-2} z^{n-1} dz \|\mathbf{D}^j(\lambda)u; L^2(\sigma^j)\|^2. \quad (4.19)$$

Wir verwenden nun den 2. Teil von Lemma 2.18. Dazu wählen wir eine Basis  $\{p^1, \dots, p^h\}$  von  $\mathcal{P}$ , wobei der Polynomraum  $\mathcal{P} = \{p \text{ Polynom} : \mathcal{D}(\nabla_x)p(x) = 0\}$ . Natürlich gilt  $\mathcal{D}(\nabla_x)p(x) = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{D}^j(\nabla_y, \partial_z)p(y, z) = 0$  mit  $x = (y, z)$ . Wir können weiterhin annehmen, dass die Polynome  $q_\nu$ -homogen sind.

Jetzt wählen wir  $\psi^\mu \in L^2(\sigma^j)^k$  mit der Orthogonalitätseigenschaft

$$(p^\nu|_{\sigma^j}, \psi^\mu) = \delta_{\nu\mu}. \quad (4.20)$$

Mit Hilfe dieser  $\psi^\mu$  konstruieren wir jetzt ein  $F$ , dass die Voraussetzungen von Lemma 2.18 (ii) erfüllt. Dazu setzen wir  $\psi^\mu$  auf  $\pi^j(1, 4)$  wie folgt fort:

Wir wählen ein  $\epsilon < |\operatorname{Re} \lambda|$  und setzen

$$\Psi^\mu(y, z) = \begin{cases} z^{\epsilon-n} \psi^\mu\left(\frac{y}{z}\right), & 1 \leq z < 2, \\ a_j z^{\epsilon-n} \psi^\mu\left(\frac{y}{z}\right), & 2 \leq z < 4. \end{cases} \quad (4.21)$$

Dann ist  $\Psi^\mu \in L^2(\pi^j(1, 4))^k$ , und für jedes  $\mu$  wird durch  $F^\mu(w) = (w, \Psi^\mu)_{\pi^j(1,4)}$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H^1(\pi^j(1, 4))^k$  definiert. Ist  $v$  wie oben, so ist

$$F^\mu(v) = \left( \int_1^2 z^{\lambda+\epsilon-1} dz + a_j \int_2^4 z^{\lambda+\epsilon-1} dz \right) (v, \psi^\mu)_{\sigma^j} = 0, \quad (4.22)$$

falls

$$a_j = \frac{-\int_1^2 z^{\lambda+\epsilon-1} dz}{\int_2^4 z^{\lambda+\epsilon-1} dz} = -2^{-(\lambda+\epsilon)}, \quad (4.23)$$

denn nach Wahl von  $\epsilon$  gilt  $\lambda + \epsilon \neq 0$ . Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned} F^\mu(p^\nu) &= \left( \int_1^2 z^{q_\nu+\epsilon-1} dz - 2^{-(\lambda+\epsilon)} \int_2^4 z^{q_\nu+\epsilon-1} dz \right) (p^\nu|_{\sigma^j}, \psi^\mu)_{\sigma^j} \\ &= \frac{1}{q_\nu + \epsilon} (2^{q_\nu+\epsilon} - 1) (1 - 2^{q_\nu-\lambda}) \delta_{\mu\nu} \neq 0, \quad \text{falls } \mu = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Setzen wir also  $F(v) = (F^1(v), \dots, F^h(v))$ , so folgt (4.16) aus (4.17), (4.19) und (2.72).  $\square$

Speziell auf der Pyramide  $\pi^j(0, R)$  gilt auch noch folgende Variante der Kornschen Ungleichung (vgl. [29], Korollar 3.8) für jedes  $v \in H^1(\pi^j(0, R))^k$

$$\|\nabla_x v; L^2(\pi^j(0, R))\|^2 \leq C \left( \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v; L^2(\pi^j(0, R))\|^2 + \frac{1}{R} \|v; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right), \quad (4.25)$$

wobei  $C$  unabhängig von  $v$  und  $R$  ist. Mit der Transformation  $x = R\xi$  ist (4.25) äquivalent zu

$$\|\nabla_\xi v; L^2(\pi^j)\|^2 \leq C \left( \|\mathcal{D}^j(\nabla_\xi)v; L^2(\pi^j)\|^2 + \|v; L^2(\sigma^j)\|^2 \right). \quad (4.26)$$

Diese Ungleichung folgt genauso wie das Lemma 4.3 aus Lemma 2.18, wenn wir  $F^\mu(v) = \int_{\sigma^j} v \Psi^\mu dy^j$  setzen und die Ungleichung

$$|F^\mu(v)| \leq C_\mu \|v; L^2(\sigma^j)\| \quad (4.27)$$

benutzen. Mit Hilfe dieser Resultate erhalten wir das folgende

**Lemma 4.4.** *Seien  $R_0, R \geq 2R_0$  und  $\Omega_R$  definiert wie in Abschnitt 3.2. Ist  $n \geq 3$ , dann gilt für alle  $v \in H^1(\Omega_R)^k$  die Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v; L^2(\Omega_R)\|^2 + \|(1+r)^{-1}v; L^2(\Omega_R)\|^2 &= \|v; V_0^1(\Omega_R)\|^2 \\ &\leq C \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L^2(\Omega_R)\|^2 + R^{-1} \|v; L^2(\Gamma_R)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ist  $n=2$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v; L^2(\Omega_R)\|^2 + (\ln R)^{-2} \|(1+r)^{-1}v; L^2(\Omega_R)\|^2 \\ \leq C(\ln R)^2 \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L^2(\Omega_R)\|^2 + R^{-1} \|v; L^2(\Gamma_R)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

*Beweis.* Wegen der speziellen Geometrie von  $\Omega$  und  $\Omega_R$  gilt für  $r \leq R_0$  und  $x = (y^j, z_j)$ :  $r \sim |z_j|$ . Da wir ein  $x = (y^j, z_j) \in \pi^j$  immer als  $x = (z_j \eta^j, z_j)$  mit  $\eta^j = \frac{y^j}{z_j} \in \sigma_j$  darstellen können, haben wir  $r^2 = |x|^2 = |z_j|^2(1 + |\eta^j|^2)$ , und daher gilt

$$|z_j|^2 \leq |x|^2 \leq c_j |z_j|^2. \quad (4.30)$$

Daher können wir  $r$  in (4.28) und (4.29) jeweils durch  $z_j$  ersetzen. Sei wieder  $\{p^1, \dots, p^h\}$  eine Basis von  $\mathcal{P}$ . Für jedes  $j = 1, \dots, J$  und  $\mu = 1, \dots, h$  wählen wir  $\Psi_j^\mu$  mit  $(p^\nu, \psi_j^\mu)_{\sigma^j(R_0)} = \delta_{\nu\mu}$  und setzen dann

$$F^\mu(v) = \sum_{j=1}^J (v, \Psi_j^\mu)_{\sigma^j(R_0)}, \quad F(v) = (F^1(v), \dots, F^h(v)). \quad (4.31)$$

Dann können wir wieder die Kornsche Ungleichung (2.72), diesmal für  $G = \Omega_{R_0}$  verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \|v; H^1(\Omega_{R_0})\|^2 &\leq C \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L^2(\Omega_{R_0})\|^2 + |F(v)|^2 \right) \\ &\leq C \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)v; L^2(\Omega_{R_0})\|^2 + \|v; L^2(\Gamma_{R_0})\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Da wir weiterhin die Spurabschätzung

$$\|v; L^2(\Gamma_{R_0})\|^2 = \sum_{j=1}^J \|v; L^2(\sigma^j(R_0))\|^2 \leq C \sum_{j=1}^J \|v; H^1(R_0, R_0 + 1)\|^2 \quad (4.33)$$

zur Verfügung haben, müssen wir nur noch zeigen:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v; L^2(\pi^j(R_0, R))\|^2 + l(n)^2 \|(1 + |z|)^{-1} v; L^2(\pi^j(R_0, R))\|^2 \\ \leq C l(n)^2 \left( \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v; L^2(\pi^j(R_0, R))\|^2 + R^{-1} \|v; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

mit  $l(n) = 1$  für  $n \geq 3$  und  $l(n) = \ln R$  für  $n = 2$ . Die Ungleichung (4.34) beweisen wir, indem wir zu  $v \in H^1(\Omega_R)^k$  ein spezielles  $V \in H^1(\pi^j(0, R))^k$  konstruieren mit  $v|_{\pi^j(R_0, R)} = V|_{\pi^j(R_0, R)}$ .

Dazu zerlegen wir  $v = v^\perp + \sum_{\mu=1}^h c_\mu p^\mu$ , wobei  $F(v^\perp) = 0$  mit  $F$  wie in (4.31).

Mit (2.72) angewandt auf  $G = \pi^j(R_0, 2R_0)$  folgt

$$\begin{aligned} \|v^\perp; H^1(\pi^j(R_0, 2R_0))\| &\leq C \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v^\perp; L^2(\pi^j(R_0, 2R_0))\| \\ &= C \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v; L^2(\pi^j(R_0, 2R_0))\|, \end{aligned} \quad (4.35)$$

da  $\mathcal{D}^j(\nabla_x)p^\mu(x) = 0$  für  $\mu = 1, \dots, h$ .

Zu  $v^\perp$  existiert eine Fortsetzung  $V^\perp \in H^1(\pi^j(0, 2R_0))^k$  mit

$$\|V^\perp; H^1(\pi^j(0, 2R_0))\| \leq C \|v^\perp; H^1(\pi^j(R_0, 2R_0))\|. \quad (4.36)$$

Wir setzen jetzt

$$V = \begin{cases} v & \text{auf } \pi^j(R_0, R), \\ V^\perp + \sum_{\mu} c_\mu p^\mu & \text{auf } \pi^j(0, R_0). \end{cases} \quad (4.37)$$

Dann gilt mit (4.36) und (4.35)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)V; L^2(\pi^j(0, R))\| &\leq \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v; L^2(\pi^j(R_0, R))\| + \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)V^\perp; L^2(\pi^j(0, R))\| \\ &\leq C \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)v; L^2(\pi^j(R_0, R))\| \end{aligned} \quad (4.38)$$

und aus (4.25) folgt dann

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v; L^2(\pi^j(R_0, R))\| &\leq \|\nabla_x V; L^2(\pi^j(0, R))\| \\ &\leq C \left( \|\mathcal{D}^j(\nabla_x)V; L^2(\pi^j(0, R))\| + \frac{1}{R} \|v; L^2(\sigma^j(R))\| \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Somit erhalten wir (4.34) mit (4.38) und den Hardy-Ungleichungen aus Lemma 4.2.  $\square$

Bevor wir zu dem zentralen Satz dieses Abschnitts kommen, zeigen wir, dass die rechte Seite von (4.3) eine koerzive Sesquilinearform ist.

**Lemma 4.5.** *Es seien  $\operatorname{Re} \lambda < 1 - \frac{n}{2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{D}_R^j$  aus (3.37) und*

$$a(u, w; \Omega_R) = (\mathcal{A}\mathcal{D}u, \mathcal{D}w)_{\Omega_R}, \quad (4.40)$$

$$b(u, w; \Gamma_R, \lambda) = -\frac{R}{2\operatorname{Re} \lambda + n - 2} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A}\mathbf{D}_R^j(\lambda)u, \mathbf{D}_R^j(\lambda)w)_{\sigma^j(R)}. \quad (4.41)$$

Dann gilt

$$a(u, u; \Omega_R) + b(u, u; \Gamma_R, \lambda) \geq C \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|^2. \quad (4.42)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} & a(u, u; \Omega_R) + b(u, u; \Gamma_R, \lambda) \\ &= (\mathcal{A}\mathcal{D}u, \mathcal{D}u)_{\Omega_R} - \frac{R}{2\operatorname{Re} \lambda + n - 2} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A}\mathbf{D}_R^j(\lambda)u, \mathbf{D}_R^j(\lambda)u)_{\sigma^j(R)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

wobei  $2\operatorname{Re} \lambda + n - 2 < 0$ . Somit ist der Faktor  $-\frac{R}{2\operatorname{Re} \lambda + n - 2}$  positiv.

Die Norm auf  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|^2 &= \|\nabla_x u; L^2(\Omega_R)\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^J \left( R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + R \|\nabla_y u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mit Lemma 4.4 schätzen wir den ersten Summanden der rechten Seite von (4.44) ab, fassen dann einige Summanden zusammen und wenden zum Schluss Lemma 4.3 an.

$$\begin{aligned} \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|^2 &\leq C \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L^2(\Omega_R)\|^2 + R^{-1} \|u; L^2(\Gamma_R)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^J \left( R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + R \|\nabla_y u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right) \right) \\ &\leq C \left( \|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L^2(\Omega_R)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^J \left( R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + R \|\nabla_y u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \right) \right) \\ &\leq C \|\mathcal{D}(\nabla_x)u; L^2(\Omega_R)\|^2 + C R \sum_{j=1}^J \|\mathbf{D}_R^j(\lambda)u; L^2(\sigma^j(R))\|^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hiermit folgt (4.42). □

Jetzt können wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen.

**Satz 4.6.** *Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda < 1 - \frac{n}{2}$ , und  $\mathbf{D}_R^j(\lambda)$  auf  $\sigma^j(R)$  definiert durch (3.37),*

$$a(u, w; \Omega_R) = (\mathcal{A}\mathcal{D}u, \mathcal{D}w)_{\Omega_R}, \quad (4.46)$$

$$b(u, w; \Gamma_R, \lambda) = -\frac{R}{2\operatorname{Re} \lambda + n - 2} \sum_{j=1}^J (\mathcal{A}\mathbf{D}_R^j(\lambda)u, \mathbf{D}_R^j(\lambda)w)_{\sigma^j(R)}, \quad (4.47)$$

dann existiert für jedes stetige lineare Funktional  $F$  aus  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u$  des Problems

$$\langle F, w \rangle = a(u, w; \Omega_R) + b(u, w; \Gamma_R, \lambda). \quad (4.48)$$

Insbesondere existiert zu  $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)^k$  immer eine eindeutig bestimmte Lösung des Approximationsproblems im Sinne der Definition 4.1.

Für diese Lösung gilt im Fall  $n \geq 3$  die Abschätzung

$$\|\nabla u; L^2(\Omega_R)\| + \|(1+r)^{-1}u; L^2(\Omega_R)\| \leq C \|F; \mathcal{H}'(\Omega_R)\| \quad (4.49)$$

mit einer Konstanten  $C$  unabhängig von  $R$ .

Ist  $n = 2$ , so gilt:

$$\|\nabla u; L^2(\Omega_R)\| + \ln R \|(1+r)^{-1}u; L^2(\Omega_R)\| \leq C \ln R \sup_{\|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2 \leq 1} |\langle F, u \rangle| \quad (4.50)$$

mit

$$\begin{aligned} \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2^2 &= \|\nabla u; L^2(\Omega_R)\|^2 + (\ln R)^{-2} \|(1+r)^{-1}u; L^2(\Omega_R)\|^2 \\ &\quad + (\ln R)^2 R \left( \sum_{j=1}^J \|\nabla_{y^j} u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 + R^{-2} \|u; L^2(\Gamma_R)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

*Beweis.* Da  $\operatorname{Re} \lambda < 1 - \frac{n}{2}$  vorausgesetzt ist, folgt mit Lemma 4.5, dass die rechte Seite von (4.3) eine stetige, koerzive Sesquilinearform auf  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  definiert, d.h.

$$a(u, w; \Omega_R) + b(u, w; \Gamma_R, \lambda) \leq C_1 \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\| \cdot \|w; \mathcal{H}(\Omega_R)\| \quad (4.52)$$

$$a(u, u; \Omega_R) + b(u, u; \Gamma_R, \lambda) \geq C_2 \|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|^2. \quad (4.53)$$

Daher folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung aus dem Satz von Lax-Milgram (z.B. [8], S. 297, [7], S.23).

Für  $n = 2$  betrachten wir statt der Norm (4.1) die äquivalente Norm  $\|\cdot\|; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2$ , dann gilt weiterhin (4.52), und statt (4.42) gilt

$$\|u; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2^2 \leq C_2 (\ln R)^2 (a(u, u; \Omega_R) + b(u, u; \Gamma_R, \lambda)), \quad (4.54)$$

und damit folgt die Ungleichung (4.50) ebenfalls aus dem Satz von Lax-Milgram.  $\square$

**Bemerkung 4.7.**

(i) Der Satz gilt für jedes  $\lambda$ , für das die Bedingung  $-(2 \operatorname{Re} \lambda + n - 2) > 0$  erfüllt ist, unabhängig davon, ob  $\lambda$  ein Eigenwert des elliptischen Operatorbündels (2.93) ist.

(ii) Auf  $\Omega_R$  können wir ebenfalls die Norm

$$\|u; V_\beta^l(\Omega_R)\| = \left( \sum_{|\alpha| \leq l} \|\rho^{\beta-l+|\alpha|} |\partial^\alpha u|; L^2(\Omega_R)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.55)$$

betrachten. Da  $\Omega_R$  beschränkt ist, liefert dies für jedes  $\beta \in \mathbb{R}$  eine zu  $\|\cdot\|; \mathcal{H}(\Omega_R)\|$  äquivalente Norm, allerdings hängen die Konstanten in den Abschätzungen von  $R$  ab.

(iii) Ist jetzt  $u^R$  eine schwache Lösung des Approximationsproblems wie in Definition 4.1 und erfüllt (4.48) mit  $\langle F, w \rangle = (f, w)_{\Omega_R}$ , dann ist für  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} |\langle F, w \rangle| &= |(f, w)_{\Omega_R}| \\ &\leq \|\rho f; L^2(\Omega_R)\| \|\rho^{-1} w; L^2(\Omega_R)\| \\ &\leq \|f; V_1^0(\Omega)\| \|w; \mathcal{H}(\Omega_R)\|, \end{aligned} \quad (4.56)$$

und analog für  $n = 2$

$$\begin{aligned} |\langle F, w \rangle| &\leq \frac{1}{\ln R} \|f; V_1^0(\Omega)\| \cdot \ln R \|w; V_{-1}^0(\Omega_R)\| \\ &\leq \|f; V_1^0(\Omega)\| \|w; \mathcal{H}(\Omega_R)\| \end{aligned} \quad (4.57)$$

unabhängig von  $R$ . Bei nicht homogenen Neumann-Randbedingungen gilt Satz 4.6 auch, und es ist  $\langle F, w \rangle = (f, w)_{\Omega_R} + (g, w)_{\partial(\Omega_R)}$ .

## 5 Die Fehlerabschätzung

Wie in der Einleitung schon erwähnt, werden für die Fehlerabschätzungen einer gleichmäßigen Abschätzung der Lösungen des Randwertproblems auf  $\Omega_R$  Informationen über die Lösungen  $u^\infty$  des ursprünglichen Randwertproblems benötigt.

Ist  $u \in \mathcal{H}(\Omega_R)$ , so gilt auf  $\Gamma_R$  die Spurabschätzung (vgl. [31], S. 84)

$$\|u; L^2(\Gamma_R)\| \leq C_1 \|u; H^1(\Omega_R)\|. \quad (5.1)$$

Da  $\Gamma_R$  nur Lipschitz stetig ist, können wir hier nicht global zu beliebig hohen Sobolev-Normen auf  $\Gamma_R$  übergehen. Allerdings haben wir

$$\|u; L^2(\Gamma_R)\|^2 = \sum_{j=1}^J \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2, \quad (5.2)$$

wobei hier auch gilt

$$\|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \leq \|u; H^{\frac{1}{2}}(\sigma^j(R))\|^2 \leq C_2 \left\| u; H^1 \left( \pi^j \left( \frac{R}{2}, R \right) \right) \right\|^2. \quad (5.3)$$

Die Ungleichung (5.3) lässt sich natürlich auf jede Ableitung von  $u$  anwenden, insbesondere haben wir auch

$$\|\partial_{y^j} u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \leq C_2 \left\| u; H^2 \left( \pi^j \left( \frac{R}{2}, R \right) \right) \right\|^2. \quad (5.4)$$

Die Konstanten in (5.1) - (5.4) hängen allerdings von  $R$  ab.

Um von  $R$  unabhängige Abschätzungen zu erhalten, beachten wir, dass mit

$$x = R\xi = (y, z) = (R\eta, R\zeta) \quad (5.5)$$

auch

$$\hat{u}(\eta, \zeta) = u(R\eta, R\zeta), \quad \partial_\xi^\alpha \hat{u}(\eta, \zeta) = \partial_x^\alpha u(R\eta, R\zeta) \cdot R^{|\alpha|} \quad (5.6)$$

gilt, sowie

$$\begin{aligned} \left\| \hat{u}; L^2 \left( \pi^j \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \right) \right\|^2 &= R^{-n} \left\| u; L^2 \left( \pi^j \left( \frac{R}{2}, R \right) \right) \right\|^2, \\ \left\| \partial_\xi^\alpha \hat{u}; L^2 \left( \pi^j \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \right) \right\|^2 &= R^{2|\alpha|-n} \left\| u; L^2 \left( \pi^j \left( \frac{R}{2}, R \right) \right) \right\|^2, \\ \left\| \hat{u}; L^2(\sigma^j(1)) \right\|^2 &= R^{1-n} \left\| u; L^2(\sigma^j(R)) \right\|^2, \\ \left\| \nabla_\eta \hat{u}; L^2(\sigma^j(1)) \right\|^2 &= R^{3-n} \left\| \nabla_y u; L^2(\sigma^j(R)) \right\|^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$



Daher folgt:

$$\begin{aligned}
\|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 &= R^{n-1} \|\hat{u}; L^2(\sigma^j(1))\|^2 \\
&\leq C \cdot R^{n-1} \left\| \hat{u}; H^1\left(\pi^j\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) \right\|^2 \\
&= C \cdot R^{n-1} \left( R^{-n} \left\| u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + R^{2-n} \left\| \nabla u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 \right), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

also

$$R^{-1} \|u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \leq C \left( \left\| R^{-1} u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 + \left\| \nabla u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 \right) \tag{5.9}$$

und analog

$$R \|\nabla_y u; L^2(\sigma^j(R))\|^2 \leq C \left( \left\| \nabla_y u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 + \left\| R \nabla^2 u; L^2\left(\pi^j\left(\frac{R}{2}, R\right)\right) \right\|^2 \right). \tag{5.10}$$

Hier sind die Konstanten unabhängig von  $R$ . Beachten wir, dass für  $R > 2R_0$  aus (4.30) außerdem folgt:  $R < C_1 \rho < C_2 R$  mit Konstanten  $C_1, C_2$  unabhängig von  $R$ , so ist die rechte Seite von (5.9) äquivalent zu  $\|u; V_0^1(\pi^j(\frac{R}{2}, R))\|^2$ , entsprechend die rechte Seite von (5.10) äquivalent zu  $\|\nabla u; V_1^1(\pi^j(\frac{R}{2}, R))\|^2$ .

Multiplizieren wir diese beiden Ungleichungen noch mit  $R^{2\beta}$  und vergrößern das zu betrachtende Gebiet, so erhalten wir

**Folgerung 5.1.** *Für jedes  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $u \in H^2(\Omega_R)$  gilt*

$$\begin{aligned}
R^{\beta-\frac{1}{2}} \|u; L^2(\sigma^j(R))\| + R^{\beta+\frac{1}{2}} \|\nabla_y u; L^2(\sigma^j(R))\| &\leq C \|u; V_{\beta+1}^2(\pi^j(R_0, R))\| \\
&\leq C \|u; V_{\beta+1}^2(\Omega_R)\|, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

wobei  $C$  unabhängig von  $R$  ist.

**Bemerkung 5.2.** Ist  $u \in H^l(\Omega_R)^k$ , so ist  $u|_{\sigma^j(R)} \in H^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R))^k$ . Gehen wir in  $H^l(\Omega_R)^k$  zur äquivalenten gewichteten Norm  $\|\cdot; V_\beta^l(\Omega_R)\|$  über, so erhalten wir Spurbeschätzungen mit Konstanten unabhängig von  $R$ , wenn wir auf  $H^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R))$  zu der gewichteten Norm  $\|u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R))\|$  übergehen, wobei

$$\begin{aligned} \left\| u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R)) \right\|^2 &= \sum_{|\alpha| \leq l-1} R^{2(\beta-l+|\alpha|)-1} \left\| \partial_y^\alpha u; L^2(\sigma^j(R)) \right\|^2 \\ &+ R^{2\beta} \sum_{|\alpha|=l-1} \int_{\sigma^j(R)} \int_{\sigma^j(R)} \frac{|\partial^\alpha u(y_1) - \partial^\alpha u(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^n} dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar

$$\left\| u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R)) \right\| = R^\beta \left\| u; V_0^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R)) \right\| \quad (5.13)$$

und damit

$$\left\| u; V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R)) \right\| = R^{\beta-\gamma} \left\| u; V_\gamma^{l-\frac{1}{2}}(\sigma^j(R)) \right\| \quad (5.14)$$

für  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Erfüllt  $u^\infty$  die in 3.1 beschriebenen Voraussetzungen, so können wir folgende Fehlerabschätzung beweisen.

**Satz 5.3.** Sei  $u^R$  die eindeutig bestimmte schwache Lösung des Approximationsproblems aus Satz 4.6 bzw. Bemerkung 4.7 (iii), dann gilt für den Abschneidefehler im Fall  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} \left\| \rho^{-1}(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R) \right\| + \left\| \nabla(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R) \right\| \\ \leq C_1 R^{1-\gamma} \left( \left\| f; V_\gamma^0(\Omega) \right\| + \left\| g; V_\gamma^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

und für  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln R} \left\| \rho^{-1}(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R) \right\| + \left\| \nabla(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R) \right\| \\ \leq C_2 (\ln R) R^{1-\gamma} \left( \left\| f; V_\gamma^0(\Omega) \right\| + \left\| g; V_\gamma^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

*Beweis.* Wegen der Voraussetzungen an  $g$  und da  $u^\infty \in H_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega})^k$  gilt, ist  $u^\infty|_{\Omega_R}$  aus  $\mathcal{H}(\Omega_R)$ , ebenso  $\chi U^\infty$ , und damit auch der Restterm  $\tilde{u}^\infty$ .

Daher ist  $u^\infty - u^R$  eine schwache Lösung von (vgl. (3.15))

$$\begin{aligned} a(u^\infty - u^R, w; \Omega_R) + b(u^\infty - u^R, w; \Gamma_R, \lambda) &= (\mathcal{N}u^\infty, w)_{\Gamma_R} + b(u^\infty, w; \Gamma_R, \lambda) \\ &= (\mathcal{N}\tilde{u}^\infty, w)_{\Gamma_R} + b(\tilde{u}^\infty, w; \Gamma_R, \lambda). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, da die Sesquilinearform so gewählt wurde, dass (3.18) gilt.

Setzen wir  $w = u^\infty - u^R$  in (5.17), so erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} a(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Omega_R) + b(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Gamma_R, \lambda) \\ \leq R^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{N}\tilde{u}^\infty; L^2(\Gamma_R)\| R^{-\frac{1}{2}} \|u^\infty - u^R; L^2(\Gamma_R)\| \\ + R \|\mathbf{AD}_R(\lambda)u^\infty; L^2(\Gamma_R)\| \|\mathbf{D}_R(\lambda)(u^\infty - u^R); L^2(\Gamma_R)\|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Benutzen wir jetzt die Definition der Norm auf  $\mathcal{H}(\Omega_R)$  sowie die Ungleichungen

$$\begin{aligned} R^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{D}_R(\lambda)(u^\infty - u^R); L^2(\Gamma_R)\| &\leq C R^{\frac{1}{2}} \|\nabla_y(u^\infty - u^R); L^2(\Gamma_R)\| \\ &\leq C \|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\|, \end{aligned} \quad (5.19)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} a(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Omega_R) + b(u^\infty - u^R, u^\infty - u^R; \Gamma_R, \lambda) \\ \leq C \left( \|\mathcal{N}\tilde{u}^\infty; V_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)\| + R^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^J \|\nabla_y \tilde{u}^\infty; L^2(\sigma^j(R))\| \right) \|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\|. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Weiterhin haben wir für  $n = 3$  die Ungleichung (4.42). Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\| &\leq C \left( \|\mathcal{N}\tilde{u}^\infty; V_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)\| + R^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^J \|\nabla_y \tilde{u}^\infty; L^2(\sigma^j(R))\| \right) \\ &\leq C \sum_{j=1}^J \left( \|\mathcal{N}\tilde{u}^\infty; V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma^j(R))\| + \|\tilde{u}^\infty; V_1^{\frac{3}{2}}(\sigma^j(R))\| \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Beachten wir jetzt (5.14) und die Spurabschätzungen (5.1) und (3.3), so erhalten wir

$$\|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\| \leq C R^{1-\gamma} \|\tilde{u}^\infty; V_\gamma^2(\Omega)\|, \quad (5.22)$$

hieraus folgt (5.15) mit (3.3).

Für  $n = 2$  benutzen wir (4.54) für die Abschätzung nach unten und erhalten dann

$$\begin{aligned} & \|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2^2 \\ & \leq C \ln R \left( \left\| \mathcal{N}\tilde{u}^\infty; V_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R) \right\| + R^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^J \left\| \nabla_y \tilde{u}^\infty; L^2(\sigma^j(R)) \right\| \right) \|u^\infty - u^R; \mathcal{H}(\Omega_R)\|_2. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Hieraus folgt (5.16). □

## 6 Beispielklassen

Beispiele für formal positive Operatoren  $\mathcal{L}$  finden wir in der linearen Elastizitätstheorie, auf die wir später noch eingehen werden.

Unabhängig davon ist für formal positive Operatoren wie in Definition 2.15 die Voraussetzung (A1) in Abschnitt 3.1 bei Außenraumproblemen immer erfüllt, und es gilt (vgl. Folgerung 2.31)  $\delta_* = 1$  für  $n = 2$  und  $\delta_* = \frac{n}{2} - 1$  für  $n \geq 3$ .

Betrachten wir zuerst den Fall  $n \geq 3$ . Beim Außenraumproblem müssen die Dirichlet-Randbedingungen nicht als homogen vorausgesetzt werden. Sei  $g \in H^{l+\frac{1}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega)^k$ . Ist  $f \in V_\gamma^{l-1}(\Omega)^k$  mit  $\gamma - l \in (\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1)$ , dann ist die eindeutig bestimmte Lösung  $u^\infty$  des Außenraumproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f && \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

aus  $V_l^{l+1}(\Omega)^k$ , und sie hat die asymptotische Darstellung

$$u^\infty(x) = r^{2-n} U^\infty(\theta) + \tilde{u}^\infty(x), \quad \tilde{u}^\infty \in V_\gamma^{l+1}(\Omega)^k. \tag{6.2}$$

Hat  $f$  einen kompakten Träger, dann gilt  $f \in V_\gamma^{l-1}(\Omega)^k$  für alle  $\gamma \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall gilt  $\tilde{u}^\infty \in V_\gamma^{l+1}(\Omega)^k$  für  $\gamma - l = \frac{n}{2} - 1 - \delta$ , wobei  $\delta > 0$  beliebig klein werden kann. Tatsächlich haben wir dann sogar für jedes  $N \in \mathbb{N}_0$

$$u(x) = \sum_{p=0}^N r^{2-n-p} \tilde{U}_p^\infty(\theta) + \tilde{u}^\infty(x), \quad \tilde{u}^\infty \in V_{l+N+1}^{l+1}(\Omega)^k \tag{6.3}$$

mit  $\gamma - l \in (\frac{n}{2} - 1 + N, \frac{n}{2} + N)$ .

Erfüllen die Daten  $f, g$  zusätzlich die Kompatibilitätsbedingungen, so dass die Lösung  $u^\infty$  nicht nur in  $V_l^{l+1}(\Omega)^k$ , sondern in  $V_{l+N+1}^{l+1}(\Omega)^k$  für irgendein  $N \in \mathbb{N}_0$  gilt, d.h. die ersten  $N$  Terme in (6.3) verschwinden, dann muss in der künstlichen Randbedingung  $\lambda = 1 - n - N$  gewählt werden. Insgesamt erhalten wir aus Satz 5.3 die

**Folgerung 6.1.** *Ist  $n \geq 3$ ,  $g \in \prod_{p=1}^k H^{\frac{3}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)^k$  mit kompaktem Träger, ist ferner  $V^\infty(x) = r^{1-n-N} U^\infty(\theta)$  der erste nicht verschwindende Term in der asymptotischen Entwicklung von  $u^\infty$ , so erhalten wir mit  $\lambda = 1 - n - N$  und  $\gamma = \frac{n}{2} + N + 1 - \delta$*

$$\begin{aligned} & \|\nabla(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R)\| + \|\rho^{-1}(u^\infty - u^R); L^2(\Omega_R)\| \\ & \leq C R^{\delta - \frac{n}{2} - N} \left( \|f; V_\gamma^0(\Omega)\| + \left\| g; \prod_{p=1}^k H^{\frac{3}{2}-\sigma_q}(\partial\Omega) \right\| \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei  $C = C(\Omega, \delta)$  ist.

Außenraumprobleme mit solchen Eigenschaften entstehen zum Beispiel beim Berechnen der sogenannten Polarisationsmatrizen für Materialinklusionen und Löcher in elastischen Materialien (vgl. [25]).

Für  $n = 2$  betrachten wir speziell das äußere Neumann-Problem, d.h.  $\mathcal{B} = \mathcal{N}$  auf  $\partial\Omega$ . In diesem Fall gilt (vgl. [28], Kapitel 6): Für  $\beta - 1 \in (-1, 0)$  sind die konstanten Vektoren die Lösungen des homogenen Problems, die in  $V_\beta^2(\Omega)$  liegen. Umgekehrt existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u^\infty \in V_\beta^2(\Omega)$  für  $\beta - 1 \in (0, 1)$ , falls

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) do = 0. \quad (6.5)$$

Ist zusätzlich  $f \in V_\gamma^2(\Omega)$  für  $\gamma - 1 \in (1, 2)$ , dann gilt

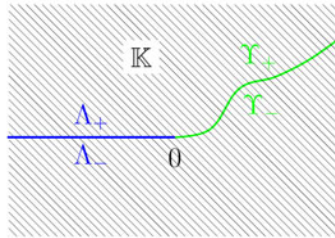
$$u^\infty(x) = r^{-1} U^\infty(\theta) + \tilde{u}^\infty(x), \quad (6.6)$$

und wir müssen in der künstlichen Randbedingung  $\lambda = -1$  wählen.

Eine weitere Klasse von Beispielen sind ebene Rissprobleme. Hier ist  $\omega$  der Einheitskreis ohne den Punkt  $(-1, 0)$ , d.h. das Modellproblem wird auf der geschlitzten Ebene

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-r, 0) : 0 < r \in \mathbb{R}\} = \{(r, \phi) : \phi \in (-\pi, \pi), r \in \mathbb{R}\} \quad (6.7)$$

betrachtet. Als  $\partial\mathbb{K}$  ist hier die Linie  $\Lambda = \{(-r, 0) : 0 < r \in \mathbb{R}\}$  einmal für  $\theta \rightarrow -\pi + 0 =: \Lambda_-$  und einmal für  $\theta \rightarrow \pi - 0 =: \Lambda_+$  aufzufassen. Sei für  $x_1 \in [0, l)$  eine Funktion  $H \in C^2[0, l)$  gegeben mit  $H(0) = 0$ . Setzen wir  $\Upsilon = \text{graph } H = \Upsilon_+ \cup \Upsilon_-$ , so ist  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Lambda \cup \Upsilon\}$  ebenfalls ein Gebiet mit einem kegelförmigen Ausgang.



Wir betrachten das Neumann Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}u &= g \quad \text{auf } \Lambda_{\pm} \cup \Upsilon_{\pm}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Hier ist  $u = (u_1, u_2)$ , und  $\mathcal{L}$  ist ein Differentialoperator der ebenen linearen Elastizitätstheorie wie in Definition 2.15, so sind die Eigenwerte des elliptischen Operatorbündels ebenfalls bekannt, es gilt  $\lambda_{\pm m} = \pm \frac{2m+1}{2}$ . Bei diesen Eigenwerten existieren je zwei linear unabhängige Lösungen vom einfachen Potenztyp. Es gibt weiterhin zum Eigenwert 0 zwei lineare unabhängige Lösungen (vom einfachen Potenztyp) – die konstanten Vektoren  $e_1, e_2$ , und zwei linear unabhängige Lösungen mit einem logarithmischen Anteil.

Sind  $X^j(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \Phi^j(\theta)$ ,  $j = 1, 2$ , die beiden linear unabhängigen Lösungen des homogenen Modellproblems zum Eigenwert  $\lambda$ , so existierten Lösungen des Problems (6.8) mit  $f = 0$ , für die gilt:

$$u^j(x) \sim X^j(x) \quad \text{mit } |x| \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Diese Lösungen werden in der Bruchmechanik bei der Formulierung von Rissausbreitungskriterien benötigt. Man erhält sie, indem man das Problem (6.8) mit  $f = [\mathcal{L}, \chi]_\Omega$ ,  $g = [\mathcal{N}, \chi]$  löst. Hierbei sind  $[\mathcal{L}, \chi]$ ,  $[\mathcal{N}, \chi]$  Kommutatoren mit einer geeigneten Abschneidefunktion,  $f$ ,  $g$  haben kompakten Träger, und es gilt:

$$u^\infty(x) = r^{-\frac{1}{2}}U^\infty(\theta) + \tilde{u}^\infty(x). \quad (6.10)$$



## 7 Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Wir werden nun die in den vorherigen Kapiteln vorgestellte Theorie auf einen speziellen Fall aus der Elastizitätstheorie anwenden, auf das verallgemeinerte Hookesche Gesetz. Bevor wir jedoch genauer auf das Problem eingehen, werden wir erst einige physikalische Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie liefern.

### 7.1 Eine kurze Einführung in die Elastizitätstheorie

In der Elastizitätstheorie wird das Verhalten eines kontinuierlichen Festkörpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  unter dem Einfluss von äußeren Kräften untersucht. Wir beschränken uns hier auf hinreichend kleine Beanspruchungen, so dass wir nur kleine Verschiebungsfelder und somit nur eine lineare Deformations-Spannungs-Abhängigkeit haben.

Wir betrachten den Festkörper  $\Omega$  in einem kartesischen Koordinatensystem mit der Koordinatendarstellung  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ . Durch Deformation erhält dieser Festkörper ein neues Volumen, welches durch  $x \mapsto x + u(x)$  beschrieben wird. Dabei bezeichnen wir  $u = (u_1, u_2, u_3)$  als Verschiebungsvektor. Die Komponenten  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sind die Projektionen des Verschiebungsvektors auf die  $x_i$ -Achse.

#### 7.1.1 Spannung

Als (mechanische) Spannung  $\sigma$  bezeichnen wir die Kraft pro Flächeneinheit, die in einer gedachten Schnittfläche durch den Körper wirkt. Damit ist sie ein Maß für die Beanspruchung eines Festkörpers.

Sei  $\sigma(x)$  die Spannung in einem Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  auf der Oberfläche  $S$ . Um die Spannung für ein in beliebiger Weise orientiertes Flächenstück zu berechnen, müssen die Spannungen für drei senkrecht aufeinander stehende, durch  $x$  gehende Flächen bekannt sein. Wir wählen die Flächen als Ausgangsflächen, die durch den Punkt  $x$  gehen und parallel zu den  $x_1x_2$ -,  $x_2x_3$ - und  $x_1x_3$ -Ebenen unseres kartesischen Koordinatensystems liegen. Die Normalen auf den Ausgangsflächen zeigen in positive Richtung der entsprechenden Achsen unseres Koordinatensystems. Auf jedem Flächenstück wirkt ein Spannungsvektor  $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ . Der Index  $i$  bezeichnet die Normalenrichtung

des jeweiligen Flächenstücks, zu dem der Vektor gehört. Die Komponenten  $\sigma_{ii}$  geben die Normalspannung an, während die Komponenten  $\sigma_{ij}$ ,  $i \neq j$ , die Tangentialspannungskomponenten (auch Schubspannungskomponenten genannt) sind.

Damit lässt sich der Spannungszustand des betrachteten Punktes  $x$  durch die Größen

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

charakterisieren. Wir bezeichnen (7.1) als Spannungstensor.

Mit Hilfe einiger physikalischer Eigenschaften, den Gleichgewichtseigenschaften zwischen Oberflächen- und Volumenkräften, lässt sich für deformierbare Körper zeigen, dass die Tangentialspannungskomponenten symmetrisch sind:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j. \quad (7.2)$$

Die genaue Herleitung findet man unter anderem in [33], Kapitel 3.6.

Somit wird also bei der Deformation (bzgl. der linearen Elastizität) der Spannungszustand in einem Punkt durch sechs Größen angegeben.

### 7.1.2 Deformation

Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so kann diese sowohl eine Verschiebung als auch eine Form- und Volumenänderung des Körpers hervorrufen. Da eine Verschiebung des gesamten Körpers für weitere Betrachtungen nicht von Interesse ist, wenden wir uns gleich der Deformation zu.

Bei einer Deformation erfahren die Punkte des Körpers eine Verschiebung, bei der sich die gegenseitigen Abstände verändern. Da wir als Körper ein Kontinuum betrachten, verlaufen diese Änderungen stetig ab, so dass mindestens eine kleine Umgebung eines gegebenen Punktes vor der Verformung auch während der Deformation immer eine Umgebung dieses Punktes bleibt.

Für die Beschreibung der Deformation betrachten wir ein beliebig kleines rechteckiges Flächenstück mit Mittelpunkt  $x$  in der  $x_i x_j$ -Ebene, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Die Verformung lässt sich dann mittels der Streckungen

in Richtung der Koordinatenachsen  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , und Scherung in den jeweiligen zugehörigen  $x_i x_j$ -Ebenen beschreiben, wobei es sich bei der Streckung um eine relative Längenänderung

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (7.3)$$

in Richtung der Koordinatenachse und bei der Scherung um eine Winkeländerung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.4)$$

handelt. [34] Aufgrund dieser Darstellung für die Scherung gilt

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (7.5)$$

Diese Betrachtung kann in jedem Punkt  $x \in \Omega$  für alle drei Raumrichtungen gemacht werden, so dass wir für jeden Punkt neun Deformationskomponenten erhalten. Diese Deformationskomponenten  $\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  bilden einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

der somit den Verformungszustand des Körpers im Punkt  $x$  beschreibt.

### 7.1.3 Grundgleichung der Elastizitätstheorie (Verallgemeinertes Hookesches Gesetz)

Zur Charakterisierung eines elastischen Körpers benötigen wir eine Darstellung, die den Zusammenhang zwischen den Spannungen im Festkörper  $\Omega$  und seiner (sehr kleinen) Deformation liefert. Eine erste solche Darstellung lieferte Robert Hooke schon 1660. Hooke sah einen proportionalen Zusammenhang zwischen der Deformation eines elastischen Körpers und der auf ihn wirkenden Kraft und beschrieb das Phänomen mit der Tensorgleichung  $\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ , dem Hookeschen Gesetz, wobei  $A$  der Elastizitätstensor 4. Stufe mit 81 Komponenten ist. Aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und des Deformationsensors reduziert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten jedoch auf 36. Wie wir in den vorangegangenen Abschnitten festgestellt haben, beschreiben in jedem Punkt des Körpers sechs Größen die Deformation und sechs Größen

die Spannung. Damit lässt sich das Hookesche Gesetz in eine einfache Matrixgleichung schreiben. Die elastischen Komponenten werden dabei in einer  $6 \times 6$ -Matrix  $A = (A_{ij})_{i,j=1,2,\dots,6}$  und die Deformation und die Spannung jeweils in den sechskomponentigen Vektoren

$$\varepsilon(u) = \left( \varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \varepsilon_{33}(u), \sqrt{2} \varepsilon_{23}(u), \sqrt{2} \varepsilon_{13}(u), \sqrt{2} \varepsilon_{12}(u) \right)^\top, \quad (7.7)$$

$$\sigma(u) = \left( \sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sigma_{33}(u), \sqrt{2} \sigma_{23}(u), \sqrt{2} \sigma_{13}(u), \sqrt{2} \sigma_{12}(u) \right)^\top \quad (7.8)$$

dargestellt, dabei ist der Faktor  $\sqrt{2}$  notwendig, damit die Tensor- und die Vektornorm übereinstimmen. Außerdem nutzen wir für die neue Indizierung die Voigtnotation, so dass für die paarweisen Indizes  $ij$  bzw.  $kl$  gilt

$$mn \rightarrow \begin{cases} m & \text{für } m = n, \\ 9 - m - n & \text{für } m \neq n. \end{cases} \quad (7.9)$$

Wir erhalten dann als verallgemeinertes Hookesches Gesetz, dass in jedem Punkt des Körpers  $\Omega$  jeweils die Spannungskomponenten lineare und homogene Funktionen der Deformationskomponenten sind und benutzen die mathematische Darstellung

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 A_{ij} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (7.10)$$

Zur Vereinfachung der Notation wählen wir die Darstellung

$$\sigma = A \varepsilon \quad (7.11)$$

mit der Koeffizientenmatrix  $A = (A_{ij})_{i,j=1,2,\dots,6}$ . Die Koeffizienten beschreiben die elastischen Eigenschaften des Körpers. Liegt für den gesamten Körper die gleiche Koeffizientenmatrix vor, so spricht man von einem homogenen Körper, anderenfalls ist der Körper inhomogen, und die Koeffizienten sind ortsabhängige Funktionen. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung von homogenen Körpern. Außerdem gehen wir von isothermen Vorgängen bei der Deformation aus, d.h. dass während der Deformation in jedem Körperelement die Temperatur konstant bleibt.

Mit Hilfe von Überlegungen, die auf dem Gesetz der Energieerhaltung und auf Betrachtungen der Verformungsenergie beruhen, wird unter anderem in [3], Kapitel 3.3, gezeigt, dass zwischen den Elastizitätskonstanten die Beziehung

$$A_{ij} = A_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (7.12)$$

gilt, d.h. die Koeffizientenmatrix  $(A_{ij})_{i,j=1,2,\dots,6}$  ist symmetrisch, und es sind somit nicht 36, sondern nur 21 Elastizitätskonstanten erforderlich.

#### 7.1.4 Elastizitätstypen

Betrachtet man elastische Materialien etwas genauer, so stellt man fest, dass diese bzgl. der Elastizität unterschiedliche strukturelle Eigenschaften aufweisen. So sind z.B. bei Holz oder Knochen, die Deformationseigenschaften von den Richtungen abhängig, während bei homogenen Metallen oder Glas die Deformationseigenschaften richtungsunabhängig sind. Sind die strukturellen Eigenschaften eines Materials in alle Raumrichtungen unterschiedlich, so spricht man von Anisotropie und hat 21 unabhängige Elastizitätskonstanten. Ist dagegen Richtungsunabhängigkeit gegeben, so heißen die Materialien isotrop und es gibt nur noch 2 unabhängige Elastizitätskonstanten. Beim Übergang von anisotropen zu isotropen Materialien findet man noch fünf weitere strukturelle Typen von elastischen Materialien (monoklin, orthotrop, tetragonal, transversalisotrop und kubisch). Diese unterschiedlichen strukturellen Typen ergeben sich aus Spiegel- und Drehsymmetrien bzgl. der Elastizitätseigenschaften. Mit zunehmender Symmetrie erhalten wir eine Reduzierung der unabhängigen Materialkonstanten. (vgl. [19], Kapitel 1.4)

Bei *monoklinen* Materialien gibt es bzgl. der Elastizität eine Symmetrieebene. Nehmen wir an, dies sei im kartesischen Koordinatensystem die  $x_2x_3$ -Ebene, dann sind in die positive und die negative  $x_1$ -Richtung die Elastizitätseigenschaften gleich. Dies liefert, dass

$$A_{15} = A_{16} = A_{25} = A_{26} = A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{46} = 0. \quad (7.13)$$

D.h. die Anzahl der unabhängigen Materialkonstanten bei monoklinen Materialien reduziert sich auf 13.

Materialien der nächst höheren Symmetrie heißen *orthotrop*. Sie besitzen zwei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen bzgl. der Elastizität. Wir nehmen an, dass dies zusätzlich zur  $x_2x_3$ -Ebene noch die  $x_1x_3$ -Ebene ist. Dies liefert zusätzlich, dass

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{56} = 0. \quad (7.14)$$

Somit haben wir bei orthotropen Materialien noch 9 unabhängige Materialkonstanten.

Bei *tetragonalen* Materialien handelt es sich um orthotrope Materialien, die entlang von zwei Achsen die gleichen Elastizitätseigenschaften haben, während entlang der dritten Achse andere Elastizitätseigenschaften vorliegen, so dass für die Elastizitätskonstanten

$$A_{33} = A_{22}, \quad A_{13} = A_{12}, \quad A_{66} = A_{55} \quad (7.15)$$

gilt und somit noch 6 unabhängige Materialkonstanten vorliegen.

Liegen nur noch 5 unabhängige Materialkonstanten vor, so handelt es sich um *transversalisotrope* Materialien. Also tetragonale Materialien, die in einer Ebene schon Isotropie aufweisen. In diesem Fall gilt

$$A_{44} = \frac{1}{2}(A_{22} - A_{23}). \quad (7.16)$$

Betrachtet man dagegen *tetragonale* Materialien, für die zusätzlich noch

$$A_{22} = A_{11}, \quad A_{23} = A_{12}, \quad A_{44} = A_{55} \quad (7.17)$$

gilt, so erhalten wir 3 unabhängige Materialkonstanten und sprechen von *kubischen* Materialien. Gilt außerdem

$$A_{55} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}), \quad (7.18)$$

so handelt es sich um ein *isotropes* Material, also ein Material, das zwei unabhängige Elastizitätskonstanten besitzt. Im Allgemeinen werden die Konstanten mit

$$A_{12} = \lambda, \quad A_{11} = \lambda + 2\mu, \quad A_{55} = \mu \quad (7.19)$$

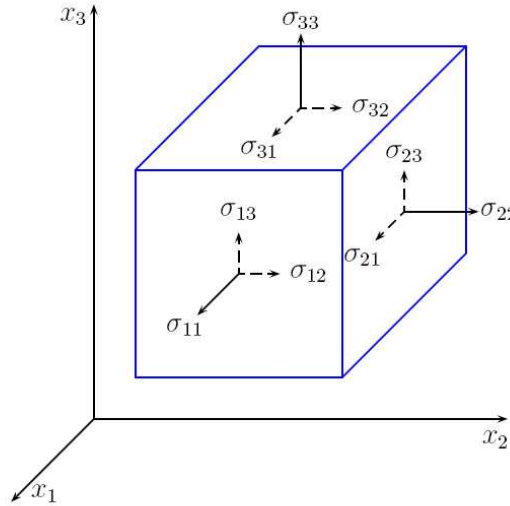
bezeichnet, wobei  $\lambda$  und  $\mu$  Lamé-Konstanten genannt werden.

## 7.2 Das Elastizitätsproblem

Für die Herleitung der mathematischen Darstellung des Elastizitätsproblems wählen wir aus unserem Körper  $\Omega$  ein Volumenelement in Form eines Würfels aus, dessen Seiten parallel zu den  $x_i x_j$ -Ebenen,  $i, j = 1, 2, 3$  mit  $i < j$ , unseres kartesischen Koordinatensystems liegen.

Falls alle Kräfte, die wirken, lokal sind, müssen sich die an den unterschiedlichen Flächen des Würfels angreifenden Kräfte gegenseitig aufheben. Es ergibt sich also eine

Gleichgewichtsbedingung. Für die Formulierung des Problems betrachten wir das Ganze erstmal nur in eine Koordinatenrichtung, z.B. in die  $x_1$ -Richtung. So wirkt auf jeder Seite des Volumenelements eine Normal- bzw. Schubspannung in diese ausgewählte Richtung.



Da die Kräfte sich kompensieren, muss gelten

$$(\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(6)})\Delta x_2\Delta x_3 + (\sigma_{21}^{(2)} - \sigma_{21}^{(5)})\Delta x_1\Delta x_3 + (\sigma_{31}^{(3)} - \sigma_{31}^{(4)})\Delta x_1\Delta x_2 = 0, \quad (7.20)$$

wobei der obere Index der Spannung die Würfelseite, auf der die Spannung wirkt, angibt. Entsprechende Darstellung erhalten wir für die anderen zwei Koordinatenrichtungen, so dass wir aus den drei Gleichgewichtsbedingungen die differentielle Form

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.21)$$

erhalten. Existiert zusätzlich noch eine Volumenkraft  $f$ , so muss diese von den resultierenden Spannungen kompensiert werden, d.h.

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.22)$$

Für die Oberfläche des Körpers gilt, dass sich die Spannungen kompensieren müssen. Da die Schubspannungen sich in der Oberfläche gegenseitig aufheben, müssen nur die Normalspannungen kompensiert werden, und es gilt

$$\sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \cdot \sigma_{ij}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.23)$$

Hierbei bezeichnet  $\nu(x)$  wieder den Normalenvektor der Oberfläche im Ort  $x$ . Wirkt außerdem eine äußere Kraft  $g$  auf die Oberfläche, so muss auch diese kompensiert werden, und es gilt

$$\sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \cdot \sigma_{ij}(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.24)$$

Somit hat das Elastizitätsproblem unter der Wirkung einer äußeren Kraft  $g$  und der Volumenkraft  $f$  die Darstellung

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma^{(j)}(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ \sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \cdot \sigma^{(j)}(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (7.25)$$

wobei  $\sigma^{(j)}$  die  $j$ -te Spalte des Spannungstensors ist.

Wir benutzen nun für die weitere Darstellung unseres Elastizitätsproblems die Matrix

$$\mathcal{D}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}, \quad (7.26)$$

mit  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\top}$ . Damit können mit der  $6 \times 3$ -Differentialoperatormatrix  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  alle Zusammenhänge

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.27)$$

von Deformation und Verschiebung in der Form

$$\varepsilon(u) = \mathcal{D}(\nabla_x)u \quad (7.28)$$

dargestellt werden, und das verallgemeinerte Hookesche Gesetz lautet mit der Koeffizientenmatrix  $A = \mathcal{A}$

$$\sigma(u) = \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x)u. \quad (7.29)$$

Mit Hilfe der Matrix  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  lassen sich nun die linken Seiten unseres elastischen



Problems (7.25) schreiben als

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma^{(j)}(u) = \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \sigma(u), \quad (7.30)$$

$$\sum_{j=1}^3 \nu_j \cdot \sigma^{(j)}(u) = \mathcal{D}(\nu)^\top \sigma(u), \quad (7.31)$$

und somit hat das Elastizitätsproblem die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7.32)$$

### 7.3 Die Polarisationsmatrix für dreidimensionale Außenraumprobleme der Elastizitätstheorie

Es sei  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$  ein anisotroper homogener elastischer Raum mit einem Einschluss  $G$ , der glatt berandet ist. Der Einfachheit halber liege  $G$  um den Ursprung. Wir betrachten das Außenraumproblem mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \nabla_x) u(x) &= \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) = 0, & x \text{ in } \Omega, \\ \mathcal{N}(x, \nabla_x) u(x) &= \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) = g(x), & x \text{ auf } \partial\Omega = \partial G \end{aligned} \quad (7.33)$$

mit dem Verschiebungsvektor  $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$  und dem auf  $\partial G$  stehenden in  $G$  gerichteten Einheitsnormalenvektor  $\nu(x)$ .  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  habe die Darstellung, wie in (7.26).

Das Elastizitätsproblem (7.33) beschreibt die Deformation von  $\Omega$  bzgl. der Oberflächenspannung  $g = (g_1, g_2, g_3)^\top$ , die von dem Einschluss her wirkt. Ziel ist es, die zu dem Problem gehörende Polarisationsmatrix zu bestimmen.

Die Matrix  $\mathcal{D}(\nabla_x)$  aus (7.26) ist algebraisch vollständig [27], S. 958, daher ist der Operator  $\mathcal{L}$  aus (7.33)<sub>1</sub> formal positiv und die Bilinearform besitzt die Polynomeigenenschaft. Dabei ist der Vektorraum der Polynome der Raum der Starrkörperbewegungen (Translation und Rotation)

$$\mathcal{P} = \{d(x)^\top c : c \in \mathbb{R}^6\}, \quad \dim \mathcal{P} = 6, \quad (7.34)$$

mit

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & 0 \end{pmatrix}^\top. \quad (7.35)$$

Der Operator (7.33)<sub>2</sub> ist der Neumann-Operator, der die Kraftwirkung auf dem Rand angibt.

Aufgrund der oben erwähnten mathematischen Eigenschaften existiert zu dem Problem (7.33) für beliebiges  $g$  aus  $H^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , eine Lösung  $u \in H_{\text{loc}}^{l+1}(\bar{\Omega})^3$ . Im Allgemeinen hat diese Lösung die asymptotische Darstellung

$$u(x) = \sum_{j=1}^6 \left( (d_j(-\nabla_x) \Phi(x))^\top b_j + (\mathcal{D}_j(-\nabla_x) \Phi(x))^\top a_j \right) + \tilde{u}(x), \quad (7.36)$$

wobei  $\Phi = [\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3]$  die Fundamentalmatrix des Operators  $L(\nabla_x)$  in  $\mathbb{R}^3$  ist, d.h. es gilt

$$L(\nabla_x)\Phi(x) = \delta(x) \mathbb{I}_3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (7.37)$$

mit der Dirac-Delta-Distribution  $\delta(x)$ ;  $a = (a_1, \dots, a_6)^\top$  und  $b = (b_1, \dots, b_6)^\top$  sind Koeffizientenvektoren aus  $\mathbb{R}^6$ , und  $\mathcal{D}_j$  und  $d_j$  sind die  $j$ -ten Spalten der  $3 \times 6$ -Matrizen  $\mathcal{D}^\top$  und  $d^\top$ . Außerdem gilt für  $\tilde{u}$  mit  $r \rightarrow \infty$  die Abschätzung

$$|\nabla_x \tilde{u}(x)| \leq c_p r^{-3-p}, \quad p \in \mathbb{N}_0. \quad (7.38)$$

Da (7.33)<sub>1</sub> homogen ist, sind  $u$  und  $\tilde{u}$  außerhalb einer Umgebung von  $G$  unendlich oft differenzierbar. Außerdem gilt für die Fundamentalmatrix  $\Phi(t x) = t^{-1}\Phi(x)$  für alle positiven reellen  $t$ .

Die Matrizen  $d$  und  $\mathcal{D}$  erfüllen die Normalisierungs- und Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nabla_x)\mathcal{D}(x)^\top &= \mathbb{I}_6, & \mathcal{D}(\nabla_x)d(x)^\top &= \mathbb{O}_6, \\ d(\nabla_x)d(x)^\top|_{x=0} &= \mathbb{I}_6, & d(\nabla_x)\mathcal{D}(x)^\top|_{x=0} &= \mathbb{O}_6, \end{aligned} \quad (7.39)$$

wobei  $\mathbb{I}_n$  bzw.  $\mathbb{O}_n$  die Einheits- bzw. die Nullmatrix der Größe  $n \times n$  ist.

Die Spalten  $d_1, \dots, d_6$  und  $D_1, \dots, D_6$  der Matrizen  $d^\top$  und  $\mathcal{D}^\top$  bilden eine Basis im Raum der linearen Funktionen. Für das Verschiebungsfeld  $v$  liefert die Taylorformel die Darstellung

$$v(x) = d(x)^\top c_1 + \mathcal{D}(x)^\top c_2 + O(|x|^2), \quad |x| \rightarrow +0. \quad (7.40)$$

Aufgrund der Normalisierungseigenschaften aus (7.39) gilt für die Koeffizienten aus (7.40)

$$c_1 = d(\nabla_x)v(0), \quad c_2 = \mathcal{D}(\nabla_x)v(0), \quad (7.41)$$

wobei  $c_1$  die Starrkörperbewegung und  $c_2$  der Deformationsvektor im Ursprung sind.

Die Verschiebungen  $D_1(x), \dots, D_6(x)$ , für die  $D(\nabla_x) D_j(x) = e_j \in \mathbb{R}^6$  gilt, bilden eine Basis der konstanten Deformation. Analog dazu wird durch die Verschiebungen

$$v_j(x) = D(x)^\top \mathcal{A} e_j, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (7.42)$$

eine Basis im Raum der konstanten Spannungen erzeugt.

Aufgrund der Methoden aus [28] und infolge der Orthogonalitäts- und Normalitätsbedingungen (7.39), können Integraldarstellungen der Koeffizienten  $a_j$  and  $b_j$  aus (7.36) hergeleitet werden.

Die Spalten der Matrix (7.35) erfüllen das homogene Problem (7.33). Wendet man die Greensche Formel auf  $\Omega \cap \mathbb{B}_R$  an, so gilt mit  $R \rightarrow +\infty$

$$b = \int_{\partial\Omega} d(x)^\top g(x) ds_x. \quad (7.43)$$

Die Vektoren  $d_k(x)^\top$  können als nicht-abfallende Lösung des homogenen Problems (7.33) gesehen werden. Lösungen von derselben Art können auch aus den Spalten der Matrix (7.26) konstruiert werden. Hierzu sei  $z^k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , eine abfallende Lösung des Problems (7.33) mit der rechten Seite

$$g^k(x) = -\mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} e_k. \quad (7.44)$$

Aufgrund von (7.39), erfüllt die Summe

$$\zeta^k(x) = \mathcal{D}_k(x)^\top + z^k(x) \quad (7.45)$$

das homogene Problem (7.33).

Mit der  $3 \times 6$ -Matrix  $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^6)$  kann die Integraldarstellung

$$a = \int_{\partial\Omega} \zeta(x)^\top g(x) ds_x \quad (7.46)$$

mit den Bedingungen (7.39) und dem selben Trick wie für (7.43) hergeleitet werden.

Wir wollen nun zu der Lösung  $z^k$  die Koeffizienten aus der Darstellungen (7.36) bestimmen. Es gilt aufgrund der Bedingungen (7.39) und der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned}
b &= - \int_{\partial\Omega} d(x) \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \mathbb{I}_6 dx \\
&= - \int_{\partial G} d(x) \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \underbrace{\mathcal{D}(\nabla_x) \mathcal{D}(x)^\top}_{=\mathbb{I}_6} - \mathcal{D}(x) \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \underbrace{\mathcal{D}(\nabla_x) d(x)^\top}_{=\mathbb{O}_6} ds_x \\
&= - \int_G \underbrace{d(x) \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top}_{=\mathbb{O}_6} \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) \mathcal{D}(x)^\top - \mathcal{D}(x) \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathcal{A} \underbrace{\mathcal{D}(\nabla_x) d(x)^\top}_{=\mathbb{O}_6} dx \\
&= \mathbb{O}_6 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}.
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Damit verschwinden die Koeffizienten  $b_j$  aus der Darstellung (7.36) von  $z^k$ , und wir erhalten

$$z^k(x) = \sum_{j=1}^6 (\mathcal{D}_j(\nabla_x) \Phi(x))^\top P_{kj} + \tilde{z}^k(x) \tag{7.48}$$

mit  $a_j = -P_{kj}$ , d.h.  $z^k(x)$  hat die Form  $z^k(x) = r^{-2} U(\theta) + \tilde{z}^k$ , und es gilt

$$|\nabla_x^p \tilde{z}^k(x)| \leq c_p r^{-3-p}, \quad p \in \mathbb{N}_0. \tag{7.49}$$

Aus den Koeffizienten  $P_{kj}$  können wir die  $6 \times 6$ -Matrix

$$P = P(\mathcal{A}, G) \tag{7.50}$$

konstruieren und nennen  $P$  Polarisationsmatrix. Die Matrix  $P$  wird durch die Elastizitätsmatrix  $\mathcal{A}$  und durch den Einschluss  $G$  bestimmt und ist immer symmetrisch und negativ definit, wenn  $\text{mes}_3 G > 0$  (siehe z.B. [25], S. 99).

Benutzen wir nun die Formel (7.46), um die Koeffizienten der Polarisationsmatrix zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_{kj} &= - \int_{\partial\Omega} \zeta^j(x)^\top g^k(x) ds_x \\
&= - \int_{\partial\Omega} z^j(x)^\top g^k(x) ds_x - \int_{\partial\Omega} \mathcal{D}_j(x) \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} e_k ds_x \\
&= - \int_{\partial\Omega} z^j(x)^\top g^k(x) ds_x + \int_G \underbrace{(\mathcal{D}(\nabla_x) \mathcal{D}_j(x)^\top)^\top}_{=e_j^\top} \mathcal{A} e_k dx \\
&= \int_{\partial\Omega} z^j(x)^\top \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} e_k ds_x + \mathcal{A}_{jk} \text{mes}_3 G,
\end{aligned} \tag{7.51}$$

und somit

$$P = (\mathcal{D}(\nu(x))z, \mathcal{A})_{\partial\Omega} + \mathcal{A} \operatorname{mes}_3 G. \quad (7.52)$$

Um  $P$  zu ermitteln, muss nur die Spur der  $3 \times 6$ -Matrix  $z = (z^1, \dots, z^6)$  auf der Oberfläche  $\partial\Omega = \partial G$  berechnet werden. Da  $z$  nicht bekannt ist, kann  $P$  mit  $z^R$  nur approximativ mit Hilfe von künstlichen Randbedingungen ermittelt werden, so dass man anstatt  $P$  nur  $P^R$  erhält.

Für die Fehlerabschätzung benutzen wir Folgerung 6.1 bzgl. unseres Problems (7.33), und erhalten aus (6.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\nabla(z^j - z^{j,R}); L^2(\Omega_R)\| + \|(1 + |x|)^{-1}(z^j - z^{j,R}); L^2(\Omega_R)\| \\ \leq C(\mathcal{A}, G, \delta) R^{\delta - \frac{3}{2} - N} \left\| g; \prod_{p=1}^k H^{\frac{1}{2}}(\partial G) \right\| \end{aligned} \quad (7.53)$$

mit  $|\delta| < \frac{1}{2}$ . Und mit dem speziellen  $g^j$  aus (7.44) folgt

$$\|\nabla(z^j - z^{j,R}); L^2(\Omega_R)\| + \|(1 + |x|)^{-1}(z^j - z^{j,R}); L^2(\Omega_R)\| \leq C(\mathcal{A}, G, \delta) R^{\delta - \frac{5}{2}}. \quad (7.54)$$

Ist nun  $P^R$  die Polarisationsmatrix aus (7.48) bzgl.  $z^R = (z^{1,R}, \dots, z^{6,R})$  des Approximationsproblems

$$a(z^{j,R}, v; \Omega_R) + b(z^{j,R}, v; \Gamma_R, -2) = (-\mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} e_j, v)_{\partial\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{H}(\Omega_R)^3, \quad (7.55)$$

dann gilt mit der Hölderungleichung und der Spurabschätzung (5.1) mit genügend großem, festen  $R_0$ , so dass  $\bar{G} \subset \Omega_{R_0}$ ,

$$\begin{aligned} |P_{kj} - P_{kj}^R|^2 &= |(\mathcal{A} e_k, \mathcal{D}(\nu(x))(z^j - z^{j,R}))_{\partial\Omega}|^2 \\ &\leq C \left( \int_{\partial\Omega} |z^j - z^{j,R}|_x \right)^2 \\ &\leq C \|z^j - z^{j,R}; L^2(\partial\Omega)\|^2 \\ &\leq C \|z^j - z^{j,R}; H^1(\Omega_{R_0})\|^2 \\ &\leq C \|z^j - z^{j,R}; V_0^1(\Omega_{R_0})\|^2. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Hieraus erhalten wir für beliebiges  $R > R_0$  und mit (7.54)

$$|P_{kj} - P_{kj}^R|^2 \leq C \|z^j - z^{j,R}; V_0^1(\Omega_R)\|^2 \leq \left( C(\mathcal{A}, G, \delta) R^{\delta - \frac{5}{2}} \right)^2. \quad (7.57)$$

Da

$$\|P - P^R; \mathbb{R}^{6 \times 6}\| = \left( \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 (P_{kj} - P_{kj}^R) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.58)$$

ergibt sich

**Folgerung 7.1.** *Sei  $P^R$  die Polarisationsmatrix aus (7.48) bzgl. der Lösungen  $z^{j,R}$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , zu dem jeweiligen  $g = g^j = -\mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A}e_j$ , dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|P - P^R; \mathbb{R}^{6 \times 6}\| \leq C(\mathcal{A}, G, \delta) R^{\delta - \frac{5}{2}} \quad (7.59)$$

mit  $|\delta| < \frac{1}{2}$ .

## 8 Algebraische Äquivalenzen

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie man bereits bekannte Ergebnisse von elastischen Problemen verwenden kann, um durch einfache algebraische Operationen Ergebnisse äquivalenter Probleme zu erhalten.

Kröner hat in [14] die Fundamentalmatrix für transversalisotrope Materialien direkt bestimmt. Die Idee ist nun einen Weg zu finden, um das Ergebnis auch für andere elastische Materialien nutzen zu können.

### 8.1 Transformation des Elastizitätsproblems

Wir betrachten also das Elastizitätsproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8.1)$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein homogener elastischer Körper mit stückweise glattem Rand  $\partial\Omega$  ist und wenden auf die Koordinaten  $x \in \bar{\Omega}$  die affine Transformation

$$x \mapsto \mathbf{x} = m x \quad (8.2)$$

an. Dabei ist  $m = (m)_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix mit  $\det m = 1$ . Mittels der Koordinatentransformation wird aus der Menge  $\Omega$  die Menge

$$\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = m^{-1} \mathbf{x} \in \Omega\} \quad (8.3)$$

mit Rand  $\partial\mathbf{\Omega}$ , und die Transformation des Nabla-Operators  $\nabla_x$  liefert

$$\nabla_x = m^\top \nabla_{\mathbf{x}}. \quad (8.4)$$

Bleibt noch die Normale zu transformieren. Sei dazu  $q(x) = 0$  eine Ebenendarstellung, dann gilt für den Normaleneinheitsvektor

$$\nu(x) = \frac{\nabla_x q(x)}{|\nabla_x q(x)|} \quad (8.5)$$

und für die Normale in den transformierten Koordinaten

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} q(m^{-1} \mathbf{x})}{|\nabla_{\mathbf{x}} q(m^{-1} \mathbf{x})|}. \quad (8.6)$$

Mit  $\nabla_{\mathbf{x}}q(m^{-1}\mathbf{x}) = (m^\top)^{-1}\nabla_xq(x)$  erhalten wir

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{(m^\top)^{-1}\nabla_xq(x)}{|(m^\top)^{-1}\nabla_xq(x)|} = \frac{(m^\top)^{-1}\nu(x) |\nabla_xq(x)|^{-1}}{|(m^\top)^{-1}\nu(x)| |\nabla_xq(x)|^{-1}} = \frac{(m^\top)^{-1}\nu(x)}{|(m^\top)^{-1}\nu(x)|}, \quad (8.7)$$

also

$$\nu(\mathbf{x}) = |(m^\top)^{-1}\nu(m^{-1}\mathbf{x})|^{-1} (m^\top)^{-1} \nu(m^{-1}\mathbf{x}). \quad (8.8)$$

Betrachten wir nun die Matrix  $\mathcal{D}(x)$ , so liefern elementare Umformungen die Darstellung

$$\mathcal{D}(m\mathbf{x}) = M \mathcal{D}(x) m^{-1}, \quad (8.9)$$

wobei  $M = M(m)$  eine  $6 \times 6$ -Matrix ist, deren Elemente sich aus den Elementen der Matrix  $m$  ergeben, und die die Darstellung

$$\begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 & \sqrt{2} m_{12}m_{13} & \sqrt{2} m_{11}m_{13} & \sqrt{2} m_{11}m_{12} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & m_{23}^2 & \sqrt{2} m_{22}m_{23} & \sqrt{2} m_{21}m_{23} & \sqrt{2} m_{21}m_{22} \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & m_{33}^2 & \sqrt{2} m_{32}m_{33} & \sqrt{2} m_{31}m_{33} & \sqrt{2} m_{31}m_{32} \\ \sqrt{2} m_{21}m_{31} & \sqrt{2} m_{22}m_{32} & \sqrt{2} m_{23}m_{33} & m_{23}m_{32} + m_{22}m_{33} & m_{23}m_{31} + m_{21}m_{33} & m_{22}m_{31} + m_{21}m_{32} \\ \sqrt{2} m_{11}m_{31} & \sqrt{2} m_{12}m_{32} & \sqrt{2} m_{13}m_{33} & m_{13}m_{32} + m_{12}m_{33} & m_{13}m_{31} + m_{11}m_{33} & m_{12}m_{31} + m_{11}m_{32} \\ \sqrt{2} m_{11}m_{21} & \sqrt{2} m_{12}m_{22} & \sqrt{2} m_{13}m_{23} & m_{13}m_{22} + m_{12}m_{23} & m_{13}m_{21} + m_{11}m_{23} & m_{12}m_{21} + m_{11}m_{22} \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

hat. Für die Matrix  $M(m)$  lassen sich einige nützliche Aussagen machen:

**Lemma 8.1.** *Seien  $m$  eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix mit  $\det m = 1$  und  $M(m)$  die in (8.10) dargestellte Matrix, so gilt:*

(i)  $\det M(m) = (\det m)^4 = 1$

(ii)  $M(m^{-1}) = M^{-1}(m)$

(iii)  $M(m^\top) = M^\top(m)$

(iv) Sind  $m_1, m_2$  reelle  $3 \times 3$ -Matrizen mit  $\det m_1 = \det m_2 = 1$ , so gilt

$$M(m_1) \cdot M(m_2) = M(m_1 \cdot m_2).$$

(v) Ist  $m$  eine orthogonale Matrix, d.h.  $m^{-1} = m^\top$ , so ist auch die zugehörige Matrix  $M(m)$  orthogonal.



Die Aussagen (i)-(iv) können durch elementare, aber längliche Rechnungen gezeigt werden. Aussage (v) ergibt sich aus (ii) und (iii).

Außerdem sieht man sofort, dass  $M(\mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_6$  gilt. Es sei nun  $\mathfrak{N}_n$  eine Gruppe bzgl. des Produkts von  $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1. Die Abbildung  $M : \mathfrak{N}_3 \rightarrow \mathfrak{N}_6$  mit  $m \mapsto M(m)$  bildet dann, aufgrund der Eigenschaften (i), (ii) und (iv) aus Lemma 8.1, eine Untergruppe  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{N}_6$ . Diese Gruppenstruktur werden wir später noch benötigen. Kommen wir jetzt aber wieder auf die Transformation unseres Problems zurück.

Unter Verwendung der Aussage (iii) erhalten wir aus (8.9)

$$\mathcal{D}(m^\top \cdot x) = M^\top \cdot \mathcal{D}(x) \cdot (m^\top)^{-1}. \quad (8.11)$$

Ziel ist es nun, das Elastizitätsproblem (8.1) in neuen Koordinaten darzustellen. Für die Gleichung (8.1)<sub>1</sub> gilt unter Verwendung von (8.4) und (8.11)

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) \\ &= \mathcal{D}(-m^\top \nabla_x)^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(m^\top \nabla_x) u(x) \\ &= (M^\top \mathcal{D}(-\nabla_x) (m^\top)^{-1})^\top \mathcal{A} M^\top \mathcal{D}(\nabla_x) (m^\top)^{-1} u(x) \\ &= m^{-1} \mathcal{D}(-\nabla_x)^\top M \mathcal{A} M^\top \mathcal{D}(\nabla_x) (m^\top)^{-1} u(x) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Somit hat (8.1)<sub>1</sub> die Form

$$\mathcal{D}(-\nabla_x)^\top \mathbf{A} \mathcal{D}(\nabla_x) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (8.13)$$

mit  $\mathbf{A} = M \mathcal{A} M^\top$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (m^\top)^{-1} u(m^{-1}\mathbf{x})$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = m f(m^{-1}\mathbf{x})$ .

Mit der Darstellung des Normaleneinheitsvektors (8.8) und mit (8.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nu(x)) &= \mathcal{D}(m^\top |(m^\top)^{-1} \nu(x)| \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \\ &= M^\top \mathcal{D}(|(m^\top)^{-1} \nu(x)| \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) (m^\top)^{-1} \\ &= |(m^\top)^{-1} \nu(x)| M^\top \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) (m^\top)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Wenden wir nun (8.14) und wiederum (8.11) auf die Randbedingungen unseres Problems (8.1)<sub>2</sub> an, so gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{D}(\nu(x))^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_x) u(x) \\ &= |(m^\top)^{-1} \nu(x)| (M^\top D(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) (m^\top)^{-1})^\top \mathcal{A} M^\top D(\nabla_x) (m^\top)^{-1} u(x) \\ &= |(m^\top)^{-1} \nu(x)| m^{-1} D(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))^\top M \mathcal{A} M^\top D(\nabla_x) (m^\top)^{-1} u(x). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Und (8.1)<sub>2</sub> hat in den neuen Koordinaten die Darstellung

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}))^\top \mathbf{A} \mathcal{D}(\nabla_{\boldsymbol{x}}) \mathbf{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}) \quad (8.16)$$

mit  $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{m}{|(m^\top)^{-1} \boldsymbol{\nu}(x)|} g(m^{-1} \boldsymbol{x})$ .

Damit haben wir unser elastisches Ausgangsproblem (8.1) in ein „virtuelles elastisches Problem“

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(-\nabla_{\boldsymbol{x}})^\top \mathbf{A} \mathcal{D}(\nabla_{\boldsymbol{x}}) \mathbf{u}(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{f}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \mathcal{D}(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}))^\top \mathbf{A} \mathcal{D}(\nabla_{\boldsymbol{x}}) \mathbf{u}(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{g}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8.17)$$

umgewandelt, wobei  $\mathbf{u}(\boldsymbol{x})$  im Allgemeinen die „nicht physikalische“ Verschiebung ist und  $\mathbf{A} \mathcal{D}(\nabla_{\boldsymbol{x}}) \mathbf{u}(\boldsymbol{x})$  im Allgemeinen die „nicht physikalische“ Spannung. Nur wenn  $m$  eine orthogonale Matrix ist, die somit eine Rotation des kartesischen Koordinatensystems beschreibt, handelt es sich wieder um physikalische Komponenten. Ansonsten ist dies hier nicht der Fall. (Bei einer Transformation, die die physikalischen Komponenten betrifft, würde sich die Struktur des Differentialoperators ändern, so dass dieser nicht mehr durch  $\mathcal{D}(\nabla_{\boldsymbol{x}})$  dargestellt werden könnte.) Trotzdem handelt es sich bei (8.17) weiterhin um ein Elastizitätsproblem, allerdings mit anderen elastischen Eigenschaften, die durch die Matrix  $\mathbf{A}$  beschrieben werden. Wir können hier also sagen, dass das Problem nicht in einen anderen Raum transformiert wird, sondern dass die Materialeigenschaften verändert werden.

Sei nun  $\mathfrak{S}$  die Menge aller symmetrischen  $6 \times 6$ -Matrizen.  $\mathfrak{S}$  bildet, wie in [17] dargestellt, bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum, und die Abbildung  $\mathcal{A} \mapsto M^\top \mathcal{A} M$  ist für festes  $M \in \mathfrak{N}_6$  ein Isomorphismus auf  $\mathfrak{S}$ . Außerdem bilden alle Elemente mit positiver Determinante aus  $\mathfrak{S}$  einen konvexen offenen Kegel  $\mathfrak{S}_+$ , der durch die obige Abbildung auf sich selbst abgebildet wird.

Die Menge  $\mathfrak{M}$  bestimmt für jedes Element  $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}_+$  eine Klasse  $\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{S}_+$  in der alle algebraisch äquivalenten Elemente enthalten sind. Damit heißen zwei Materialien mit den Elastizitätsmatrizen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  algebraisch äquivalent, wenn  $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}_2)$  gilt.

Da für die Lösung des Problems (8.1) und für die Lösung des Problems (8.17) die Beziehung

$$u(x) = m^\top \mathbf{u}(mx) \quad (8.18)$$

gilt, handelt es sich hier um Probleme, die für algebraisch äquivalente Materialien gestellt sind.

## 8.2 Transformation der Fundamentalmatrix

Wie bereits erwähnt, hat Kröner in [14] die Fundamentalmatrix für transversalisotrope Materialien direkt bestimmt. Wir zeigen nun, dass für elastische Materialien mit einer Anzahl von mehr als 5 Elastizitätskonstanten, die wir durch Transformation auf transversalisotrope Elastizitätseigenschaften (5 Elastizitätseigenschaften) bringen können, die Fundamentalmatrix  $\Phi$  dieses Materials durch Rücktransformation aus der Fundamentalmatrix von Kröner bestimmt werden kann.

Es gilt

$$\mathcal{D}(-\nabla_{\mathbf{x}})^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_{\mathbf{x}}) \Phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \mathbb{I}_3, \quad (8.19)$$

wobei  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$  die Fundamentalmatrix und  $\delta$  die Dirac-Delta-Distribution ist. Für die Dirac-Delta-Distribution gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(0) \quad (8.20)$$

und nach der Transformation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(m^{-1} \mathbf{x}) \varphi(m^{-1} \mathbf{x}) \frac{1}{\det m} d\mathbf{x} = \varphi(0). \quad (8.21)$$

Da  $(\det m)^{-1} = 1$  erhalten wir  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) = \delta(m^{-1} \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ , so dass die Dirac-Delta-Distribution durch die Transformation nicht verändert wird. Damit folgt mit (8.11) aus (8.19)

$$\begin{aligned} & m^{-1} \mathcal{D}(-\nabla_{\mathbf{x}})^\top M \mathcal{A} M^\top \mathcal{D}(\nabla_{\mathbf{x}}) (m^\top)^{-1} \Phi(m^{-1} \mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \mathbb{I}_3 \\ \Leftrightarrow & m m^{-1} \mathcal{D}(-\nabla_{\mathbf{x}})^\top M \mathcal{A} M^\top \mathcal{D}(\nabla_{\mathbf{x}}) (m^\top)^{-1} \Phi(m^{-1} \mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) m \mathbb{I}_3 \\ \Leftrightarrow & \mathcal{D}(-\nabla_{\mathbf{x}})^\top M \mathcal{A} M^\top \mathcal{D}(\nabla_{\mathbf{x}}) (m^\top)^{-1} \Phi(m^{-1} \mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \mathbb{I}_3 m \\ \Leftrightarrow & \mathcal{D}(-\nabla_{\mathbf{x}})^\top \mathcal{A} \mathcal{D}(\nabla_{\mathbf{x}}) (m^\top)^{-1} \Phi(m^{-1} \mathbf{x}) m^{-1} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \mathbb{I}_3, \end{aligned} \quad (8.22)$$

und somit hat die transformierte Fundamentalmatrix die Darstellung

$$\Phi(\mathbf{x}) = (m^\top)^{-1} \Phi(m^{-1} \mathbf{x}) m^{-1}, \quad (8.23)$$

d.h. also, dass die Fundamentalmatrix des transformierten Problems die Fundamentalmatrix des Ausgangsproblems liefert.

### 8.3 Algebraisch äquivalente Materialien

Während es kein Problem ist, aus Matrizen, die transversalisotrope Elastizitätseigenschaften beschreiben, durch Transformation Matrizen zu erhalten, die mehr als 5 Elastizitätskonstanten besitzen, können wir leider nicht so einfach alle elastischen Materialeigenschaften auf Transversalisotropie transformiert werden. Allerdings ist es bei einigen Materialien durch bestimmte Zusatzannahmen möglich die Transformation durchzuführen.

Betrachten wir dies anhand der Transformation von orthotropen Materialien. Hier stellt man fest, dass  $3 \times 3$ -Matrizen, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag ungleich Null haben, bei der Transformation unter einigen Zusatzbedingungen Matrizen liefern, die transversalisotrope Eigenschaften beschreiben.

Eine Elastizitätsmatrix für orthotrope Materialien besitzt 9 Unbekannte und hat die Darstellung

$$\mathcal{A}_{\text{orthotrop}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

während eine Elastizitätsmatrix für transversalisotrope Materialien nur 5 Unbekannte besitzt und folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$\mathcal{A}_{\text{transversalisotrop}} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{12} & e_{11} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(e_{11} - e_{12}) \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

Da für die Transformationsmatrizen  $m$  die Einschränkung  $\det m = 1$  gegeben ist, haben die oben beschriebenen Transformationsmatrizen mit  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  die Form

$$\begin{aligned}
 m_{\mu\nu}^{123} &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu\nu} \end{pmatrix}, & m_{\mu\nu}^{213} &= \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu\nu} \end{pmatrix}, \\
 m_{\mu\nu}^{312} &= \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu\nu} \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, & m_{\mu\nu}^{132} &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu\nu} \\ 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, \\
 m_{\mu\nu}^{231} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mu\nu} \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}, & m_{\mu\nu}^{321} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\mu\nu} \\ 0 & \nu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Führen wir nun die Transformation  $M(m_{\mu\nu}^{123}) \mathcal{A}_{\text{orthotrop}} M(m_{\mu\nu}^{123})^\top$  durch, so erhalten wir aus der Elastizitätsmatrix für orthotrope Materialien die Darstellung

$$\begin{pmatrix} c_{11} \mu^4 & c_{12} \mu^2 \nu^2 & c_{13} \nu^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} \mu^2 \nu^2 & c_{22} \nu^4 & c_{23} \mu^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} \nu^{-2} & c_{23} \mu^{-2} & c_{33} \mu^{-4} \nu^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \mu^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \nu^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \mu^2 \nu^2 \end{pmatrix}. \tag{8.27}$$

Da wir

$$M(m_{\mu\nu}^{123}) \mathcal{A}_{\text{orthotrop}} M(m_{\mu\nu}^{123})^\top = \mathcal{A}_{\text{transversalisotrop}} \tag{8.28}$$

erhalten wollen, müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= e_{13} \nu^2, & c_{23} &= e_{13} \mu^2, \\
 c_{55} &= e_{44} \nu^2, & c_{44} &= e_{44} \mu^2, \\
 c_{22} &= e_{11} \nu^{-4}, & c_{11} &= e_{11} \mu^{-4}, \\
 c_{12} &= e_{12} \mu^{-2} \nu^{-2}, \\
 c_{33} &= e_{33} \mu^4 \nu^4, \\
 c_{66} &= 2(e_{11} - e_{12}) \mu^{-2} \nu^{-2}.
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Die ersten sechs Gleichungen liefern die Einschränkung

$$\frac{c_{23}}{c_{13}} = \frac{c_{44}}{c_{55}} = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, \quad (8.30)$$

und die letzte Gleichung ergibt die Einschränkung

$$c_{66} = 2(\sqrt{c_{11} c_{22}} - c_{12}). \quad (8.31)$$

Sind die Einschränkungen erfüllt, so ist die Matrix nach der Transformation eine Elastizitätsmatrix für transversalisotrope Materialien. Analog dazu müssen bei der Transformation mit  $m_{\mu\nu}^{213}$  genau die gleichen Bedingungen erfüllt sein.

Bei der Transformation mit  $m_{\mu\nu}^{132}$  bzw. mit  $m_{\mu\nu}^{312}$  haben wir zusätzlich die Bedingungen

$$\frac{c_{23}}{c_{12}} = \frac{c_{44}}{c_{66}} = \sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}, \quad c_{55} = 2(\sqrt{c_{11} c_{33}} - c_{13}) \quad (8.32)$$

und bei der Transformation mit  $m_{\mu\nu}^{231}$  bzw. mit  $m_{\mu\nu}^{321}$  die Bedingungen

$$\frac{c_{13}}{c_{12}} = \frac{c_{55}}{c_{66}} = \sqrt{\frac{c_{33}}{c_{22}}}, \quad c_{44} = 2(\sqrt{c_{22} c_{33}} - c_{23}). \quad (8.33)$$

Haben wir also ein orthotropes Material, dessen Elastizitätskonstanten eine der obigen Bedingungen erfüllen, so können wir mit Hilfe der zugehörigen Transformationsmatrix  $m$  die Fundamentalmatrix des orthotropen Material aus der Fundamentalmatrix für transversalisotrope Materialien bestimmen.

Da Kröner in [14], S. 404, gezeigt hat, dass für nicht transversalisotrope Materialien die Fundamentalmatrix nicht explizit bestimmt werden kann, liefert das Verfahren über die algebraischen Äquivalenzen eine Möglichkeit weitere Fundamentalmatrizen für spezielle Materialien zu ermitteln.

Allerdings stoßen wir bei diesem Verfahren noch schnell an die Grenzen, denn es ist im dreidimensionalen Fall zur Zeit noch nicht möglich, alle Klassen von algebraisch äquivalenten Materialien allgemein anzugeben, so dass wir gegenwärtig nur einzelne Transformationsmatrizen bestimmen können. Außerdem bleibt die Frage offen, ob man mit dem Verfahren auf interessante, real existierende Materialeigenschaften kommt. Sobald die Ingenieurwissenschaften Messergebnisse bzgl. Elastizitätskonstanten realer, relevanter nicht-isotroper Materialien liefern können, ist es sinnvoll, an dieser Stelle weiter zu arbeiten.

Daher ist das Verfahren der Algebraischen Äquivalenzen zum gegenwärtigen Zeitpunkt ein eher theoretischer Ansatz. Aber wie wir in dieser Arbeit auch gesehen haben, kommen wir bei der Behandlung der hier dargestellten Randwertprobleme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) &= \mathcal{D}^*(-\nabla_x)\mathcal{A}\mathcal{D}(\nabla_x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega,\end{aligned}\tag{8.34}$$

auf kegelförmigen Gebieten  $\Omega$  auf einem anderen Weg zu besseren Ergebnissen, der Abschneidefehler verschwindet von höherer Ordnung in  $\mathbb{R}$  als dies bei der Dirichlet- oder Neumann-Randbedingung als künstliche Randbedingung der Fall wäre. Mit Hilfe der künstlichen Randbedingungen können wir gerade in der Elastizitätstheorie, wie die Fehlerabschätzung zeigt, gute Ergebnisse erzielen. Dabei ist das hier entwickelte und analysierte Verfahren eine Weiterentwicklung des Verfahrens der künstlichen Randbedingungen aus [29]. Während unter anderem in [29] als Abschneidegebiet eine Kugel gewählt wurde, ist hier ein Verfahren der künstlichen Randbedingungen für abschneidende Polyeder konstruiert worden. Der Vorteil dabei ist, dass Polyedergebiete für die numerischen Berechnungen wesentlich besser geeignet sind als Kugeln. Um numerische Lösungen solcher Probleme zu bekommen, z.B. mittels Finite-Elemente-Verfahren, ist es erforderlich, das Gebiet zu triangulieren. Ein Polyeder lässt sich offensichtlich wesentlich besser triangulieren als z.B. eine Kugel, und damit ist zu erwarten, dass der Fehler, der durch numerische Berechnung entsteht, kleiner wird, so dass das hier vorgestellte Verfahren der künstlichen Randbedingungen einen Fortschritt für die Praxis bietet.

## Literatur

- [1] Adams, R.A.; *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
- [2] Alfutov, N.B., A.B. Movchan, S.A. Nazarov; *Algebraic Equivalence of plane Problems for orthotropic and anisotropic Media*, *Mekhanika, Vestnik Leningradskogo Universiteta*, 24:3, p. 64-68, 1991
- [3] Atanackovic, T.M., A. Guran; *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 2000
- [4] Choquet-Bruhat, Y., D. Christodoulou; *Elliptic systems in  $H_{s,\delta}$ -Spaces on manifolds which are Euclidian at infinity*, *Acta math.* 146, p. 129-150, 1981
- [5] Deuring, P.; *Finite element methods for the Stokes system in three-dimensional exterior domains*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20, p. 245-269, 1997
- [6] Deuring, P., S. Kracmar; *Artificial boundary conditions for the Oseen system in 3D exterior domain*, *Analysis*, 20:1, 65-90, 2000
- [7] Egorov, Y., V., Kondratiev; *Operator Theory, Advances and Applications, Vol. 89: On Spectral Theory of Elliptic Operators*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1996
- [8] Evans, L.C.; *Partial Differential Equations*, AMS, USA, 1998
- [9] Han, H., C. He, X. Wu; *Analysis of artificial boundary conditions for exterior boundary value problems in three dimensions*, *Numerische Mathematik*, 85, 367-386, 2000
- [10] Triebel, H.; *Höhere Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972
- [11] Kondratiev, V.A.; *Boundary value Problems for elliptic Equations in Domains with conical or angular Points*, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 16, p. 227-313, 1967
- [12] Kozlov, V.A., V.G. Maz'ja; *Differential Equations with Operator Coefficients with Applications to Boundary Value Problems for Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1999



- [13] Kozlov, V.A., V.G. Maz'ja, J. Rossmann; *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, AMS, USA, 1997
- [14] Kröner E., *Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen*, Zeitschrift der Physik, 136, p. 403-410, 1953
- [15] Kupradze, V.D., T.G. Gegeliya, M.O. Basheleishvili, T.V. Burchuladzu; *Three-dimensional Problems of the mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1976
- [16] Kufner, A.; *Weighted Sobolev Spaces*, Teubner Verlag, Leipzig 1980
- [17] Langer, S., S.A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer; *Affine Transforms of three-dimensional anisotropic Media and explicit Formulas for Fundamental Matrices*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 72:2, p. 229-235, 2006
- [18] Langer, S., S.A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer; *Artificial boundary conditions on polyhedral truncation Surfaces for three-dimensional elasticity systems*, Comptes Rendus Mecanique 332, Elsevier, p. 591-596, 2004
- [19] Lekhnitskii, S.G; *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981
- [20] Lions, J.L., E. Magenes; *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer, Berlin, 1972
- [21] Love, A.E.H; *A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944
- [22] Mußchelischwili, N.I; *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*, Carl Hanser Verlag, München, 1971
- [23] Maz'ja V.G., B.A. Plamenevsky; *Estimates in  $L_p$  and Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*, Mathematische Nachrichten, 81, p. 25-82, 1978
- [24] Nazarov, S.A.; *Damage Tensor and Measure. 1. Asymptotic Analysis of anisotropic Media with Defects.*, Mechanics of Solids, 35:3, p. 96-105, 2000
- [25] Nazarov, S.A.; *Damage Tensor and Measure. 3. Characteristics of damage associated with an invariant integral.*, Mechanics of Solids, 36:3, p. 65-73, 2001

- [26] Nazarov, S.A.; *Self-adjoint elliptic boundary-value problem. The polynomial property and formally positive operators*, J. Math. Sciences, 92:6, p. 4338-4353, 1998
- [27] Nazarov, S.A.; *The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes*, Russian Math. Surveys, 54:5, p. 947-1014, 1999
- [28] Nazarov, S.A., B.A. Plamenevsky; *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 13*, Walter de Gruyter and Co, Berlin, New York, 1994
- [29] Nazarov, S.A., M. Specovius-Neugebauer; *Artificial boundary conditions for Petrovsky systems of second order in exterior domains and in other domains of conical type*, Math. Meth. Appl. Sci, 17, p. 1507-1544, 2004
- [30] Nazarov, S.A, J. Sokolowski; *Asymptotic analysis of shape functionals*, J. Math. Pures Appl. 82:2, p. 125-196, 2003
- [31] Necas, J; *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967
- [32] Roitberg, Y.; *Elliptic Boundary Value Problems in the Space of Distribution*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1996
- [33] Sadd, M.H.; *Elasticity. Theory, Applications and Numerics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, USA, 2005
- [34] Timoshenko, S.P., J.N. Goodier; *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 3.Ed, 1970
- [35] Wloka, J.; *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben*, Teubner, Stuttgart, 1982



# Stichwortverzeichnis

- Ableitung
  - schwache, 8
- Abschneidefunktion, 31
- algebraisch vollständig, 19
- Ausgang
  - kegelförmiger, 24
- Außenraum, 25
  
- Deformation, 66
- Differentialgleichungssystem, 12
- Differentialoperator, 9
  - elliptischer, 10
- Dirac-Delta-Distribution, 83
- Dirichlet-Neumann-Randbedingungen, 19
  
- Eigenvektor
  - verallgemeinerter, 28
- Eigenwert
  - verallgemeinerter, 28
- Einbettung, 8, 26, 27
- Einheitssphäre, 24
- Elastizitätstensor, 67
- elliptisch, 10, 17
  - ADN-, 12
  - Petrovski-, 12
  - stark, 11, 12
  
- formal adjungiert, 10, 18
- formal positiv, 20
- formal selbstadjungiert, 10
- Fredholm-Eigenschaft, 24
  
- Gebiet, 7
- Greensche Formel, 26
  - erste, 18
  - zweite, 19
  
- Halbraum, 17
- Halbzylinder, 23
- Hauptsymbol, 10
- Hauptteil, 10
- Hauptteiltonom, 10
- Hilbertraum, 8
- Hookesches Gesetz, 67
  
- Jordan-Kette, 29
  
- Kegel, 24
- Kondratiev-Raum, 25, 27
  
- Lösung
  - schwache, 46
- Lamé-System, 15
- Lemma von Sobolev, 9
  
- Mantelfläche, 40
- Mellin-Transformation, 27
- Modellproblem, 26, 27
- Multiindex, 7
  
- Neumann-Operator, 19
- Norm
  - euklidische, 7
  
- Operatorbündel, 28
- Ordnung, 9
- Orthogonalmatrix, 42
  
- Petrovski-System, 12
- Polarisationsmatrix, 76
- Polyeder, 36
- Polynomeigenschaft, 20

Polynomraum, 23, 49  
Potenzlösung, 28  
Potenztyp  
    einfacher, 27  
    verallgemeinerter, 27  
Prisma  
    krummliniges, 42  
Pyramidenstumpf, 40  
    krummliniger, 40  
  
Randwertproblem, 16  
Rissproblem, 63  
  
sesquilineare quadratische Form, 19  
Sesquilinearform, 19, 20  
Skalarprodukt, 7, 8  
Sobolevraum, 8  
    gewichteter, 25  
Spannungstensor, 66  
Spektrum, 28, 29  
Spur, 9, 25  
Spurabschätzung, 56  
Spurraum, 9, 25  
Stokes-System, 13  
  
Testfunktion  
    angepasste, 39  
totale Multiplizität, 29  
  
verbotene Werte, 30  
Voigtnotation, 68

## Symbolverzeichnis

$\mathcal{A}$	18	$H_0^k(\Omega)$	8
$\mathbf{A}$	81	$H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	9
$A$	67	$\mathcal{H}(\Omega_R)$	39, 46
$a(u, v; \Omega)$	19	$I$	26
$\alpha$	7	$\text{ind } \mathfrak{A}_\beta^l$	33
$\mathfrak{A}(\lambda)$	28	$\mathbb{K}$	25
$\mathfrak{A}_\beta^l$	26	$\mathbb{K}_\omega$	24
$\mathfrak{A}^l$	23	$\mathcal{L}$	17
$\mathbb{B}_R$	24	$\mathcal{L}(x, \nabla_x)$	18
$\mathcal{B}$	17	$L(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r)$	28
$\mathcal{B}^R$	38	$L(x, \partial_x)$	9
$B(D)$	16	$L(x, D_x)$	12
$B(x_0, D_y)$	17	$L(x_0, D_y)$	17
$B_q(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r)$	28	$L^*(x, \partial_x)$	10
$\mathbf{B}(\lambda)$	28	$L^H(x, \partial_x)$	10
$b(u, v; \Gamma_R, \lambda)$	46	$L^H(x, \xi)$	10
$\mathbb{C}$	7	$L^p(\Omega)$	7
$C^m$	7	$L_{loc}^p(\Omega)$	7
$C^\infty(\Omega)$	7	$\mathbf{L}(\lambda)$	28
$C_0^\infty(\Omega)$	7	$\mathcal{M}$	27
$C^{m,1}(\Omega)$	7	$\mathfrak{m}(j)$	29
$C^m(\Omega)$	7	$m$	79
$C_0^m(\Omega)$	7	$M(m)$	80
$\chi$	31	$\mathfrak{M}$	81
$\mathcal{D}(\nabla_x)$	18	$\mathfrak{m}(\mathcal{A})$	82
$\mathcal{D}(\nabla_x)^*$	18	$\mathbb{N}$	7
$\mathcal{D}(\xi)$	18	$\mathbb{N}_0$	7
$\mathcal{D}^l H(\Omega)$	23	$\mathcal{N}(x, \nabla_x)$	19
$\mathbf{D}^j(\lambda)$	43	$N(\theta, \nabla_\theta, r\partial_r)$	28
$\delta$	83	$\mathfrak{N}_n$	81
$\delta_{jk}$	15	$\nu$	18
$F^\mu$	50	$\nu$	80
$\Gamma_R$	37	$\Omega$	7
$H^k(\Omega)$	8	$\Omega_0$	25

$\Omega_R$	37	$r$	24
$\Omega$	79	$\mathcal{R}^l H(\Omega, \partial\Omega)$	23
$\omega$	24	$\rho(x)$	25
$\mathcal{O}^j$	42	$\Sigma$	37
$\partial^\alpha$	7	$\Sigma^j$	36
$\partial\Omega$	7	$\Sigma_R$	37
$\partial\Omega(R)$	38	$\Sigma_R^j$	37
$\partial\omega$	24	$\sigma_q$	23
$\partial\Pi$	36	$\sigma^j$	40
$\Phi^\nu$	29	$\sigma^j(\varepsilon)$	40
$\Pi$	36	$\sigma_{ij}$	66
$\Pi^j$	36	$\mathbb{S}^{n-1}$	24
$\Pi^j(\varepsilon)$	40	$\mathcal{S}$	28
$\Pi_R$	37	$\mathfrak{G}$	82
$\Pi_R^j$	37	$\mathfrak{G}_+$	82
$\pi(\varepsilon)$	41	$\theta$	27
$\pi^j(\varepsilon)$	40	$\Upsilon^j(\varepsilon)$	40
$\pi^j(\varepsilon, R)$	47	$\Upsilon^j(\varepsilon)_e$	40
$P$	76	$\Upsilon^j(\varepsilon)_i$	40
$\mathcal{P}$	20	$V_\beta^l(\Omega)$	25
$\Psi^\mu$	50	$V_\beta^l(\mathbb{K})$	27
$\mathbb{R}$	7	$V_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	25
$\mathbb{R}_+^n$	17	$Z$	23
$R$	24	$(\cdot, \cdot)_\Omega$	8
$R_0$	24	$\langle \cdot, \cdot \rangle_n$	7





# Danksagung

Die vorliegende Dissertation wäre nicht zustande gekommen, wenn ich nicht breite Unterstützung und Hilfe gehabt hätte.

An erster Stelle sei Frau Professor Dr. M. Specovius-Neugebauer herzlichst gedankt für die Vergabe und die hervorragende Betreuung meiner Arbeit. Sie hatte jederzeit ein offenes Ohr für mein Anliegen und stand mir immer geduldig mit Rat und Tat zur Seite.

Ein großer Dank gilt auch Herrn Diplom-Mathematiker Martin Steigemann für die kreativen Diskussionen und fachlichen Hinweise, sowie die jederzeit freundliche Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei Herrn PD Dr. Andreas Klein und Herrn Diplom-Mathematiker Peter Horn für die zahlreichen Ratschläge bzgl. der graphischen Darstellungen und der Textgestaltung bedanken.

Ebenso sei allen denen ein Dankeschön ausgesprochen, die nicht namentlich Erwähnung fanden, aber zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zum Schluss sei meinen Freunden und besonders meinen Eltern für die Geduld, Unterstützung und Aufmunterung während der gesamten Promotionsphase gedankt.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, 23. Mai 2006