



**Institut  
für  
Mechanik**

**U N I K A S S E L  
V E R S I T Ä T**

## **Numerische Behandlung plastischer Inkompressibilität bei finiter Viskoplastizität**

Dipl.- Ing. Karsten J. Quint  
Matrikel Nr.20007928

Institute of Mechanics  
University of Kassel

Mitteilung des Instituts für Mechanik Nr.1/2007  
Report of the Institute of Mechanics No.1/2007

Der Inhalt dieser Arbeit muss nicht das eingereichte oder publizierte Original sein, sondern kann Änderungen beinhalten.  
The content of this work might contain changes and is therefore different to a possible submitted or otherwise published original.

*Herausgeber/editor*

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Mechanik  
Universität Kassel

*Organisation und Verwaltung/organization and administration*

Priv.-Doz. Dr.-Ing. Stefan Hartmann  
Institut für Mechanik  
Universität Kassel  
Mönchebergstr.7  
34125 Kassel  
Germany

© 2007

Institut für Mechanik  
Universität Kassel  
Mönchebergstr. 7  
34125 Kassel  
Germany

[www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de](http://www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de)





Numerische Behandlung plastischer  
Inkompressibilität bei finiter Viskoplastizität

Im Fachbereich Maschinenbau der

**Universität Kassel**

am Institut für Mechanik

durchgeführte

**Diplomarbeit II**

von

Dipl.-Ing. Karsten J. Quint

Matrikel Nr. 20007928

Kassel, den 26. September 2006

1. Gutachter: PD Dr.-Ing. habil. Stefan Hartmann, Universität Kassel
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Thomas Böhlke, Universität Karlsruhe (TH)



## **Vorwort**

Die Diplomarbeit widme ich meiner Familie. Sie hat mich während meines gesamten Studiums unterstützt und ermutigt Herausforderungen anzunehmen, sowie neue Wege zu beschreiten.

Bei der Erstellung dieser Arbeit konnte ich mich auf den Rat und die freundliche Unterstützung meiner Kollegen und Betreuer verlassen. Von diesen möchte ich hier einige besonders hervorheben. Bülent Yagimli lenkte den Blick auf interessante Aspekte und fand immer wieder neue Perspektiven. Neben inhaltlichen Anmerkungen trugen Ahmad-Wahadj Hamkar, Roman Koch und Matthias Krebs vor allem durch das mühsame Korrekturlesen zu der Arbeit bei. Bedanken möchte ich mich auch bei Thomas Böhlke, der so freundlich war die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen, sowie bei meinem Betreuer Stefan Hartmann. Er hat diese Arbeit mit regem Interesse begleitet und war stets überaus hilfsbereit.

Hiermit versichere ich, Karsten Jens Quint, diese Arbeit selbstständig angefertigt zu haben. Dabei wurden nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Kassel, den 26. September 2006

Dipl.-Ing. Karsten Jens Quint





# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>2 Grundlagen aus der Kontinuumsmechanik</b>	<b>15</b>
2.1 Kinematik der großen Deformationen . . . . .	15
2.2 Objektive Tensoren . . . . .	20
2.3 Objektive Zeitableitungen objektiver Tensoren . . . . .	22
<b>3 Materialmodellierung</b>	<b>23</b>
3.1 Anforderungen an Materialmodelle . . . . .	23
3.2 Konzept der dualen Variablen und objektive Ableitungen . . . . .	24
<b>4 Materialmodell der Plastizität für finite Deformationen</b>	<b>27</b>
4.1 Beschreibung der elastischen und plastischen Deformation . . . . .	27
4.2 Thermodynamische Konsistenz . . . . .	31
4.3 Fließfunktion und Fließregel . . . . .	33
4.4 Armstrong & Frederick Ansatz . . . . .	34
4.5 Dissipative Zwischenkonfiguration . . . . .	35
4.6 Elastizitätsbeziehung . . . . .	39
4.7 Transformation in die Referenzkonfiguration . . . . .	42
4.8 Erweiterung des Materialmodells um viskose Eigenschaften . . . . .	46
<b>5 Methode der finiten Elemente</b>	<b>49</b>
5.1 Impulsbilanz . . . . .	49
5.2 Variationsprinzip . . . . .	51
5.3 Raumdiskretisierung . . . . .	52
5.4 Zeitdiskretisierung . . . . .	55
5.4.1 Diagonalimplizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	56
5.4.2 Anwendung auf Algebro-Differentialgleichungssysteme . . . . .	57
5.5 Umsetzung auf Gauß-Punktebene . . . . .	62
5.5.1 Lokales Newton-Verfahren . . . . .	63
5.5.2 Berechnung der konsistenten Tangente . . . . .	63
<b>6 Zur Implementierung</b>	<b>65</b>

6.1	Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften . . . . .	65
6.2	Berechnung der Komponenten der konsistenten Tangente . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Strukturerhaltende Algorithmen</b>	<b>69</b>
7.1	Zur mathematischen Struktur . . . . .	69
7.2	Standard Projektionsverfahren . . . . .	70
7.3	Anwendung der Projektionsmethode auf das Integrationsverfahren des Materialmodells . . . . .	72
7.4	Korrekturverfahren nach Helm . . . . .	74
7.5	Korrekturverfahren nach Lührs . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>77</b>
8.1	Einfacher Zug . . . . .	77
8.2	Einfache Scherung . . . . .	79
8.3	Zugprobe . . . . .	86
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Ableitung des elastischen Anteils der spezifischen freien Energie <math>\hat{\psi}_e</math></b>	<b>91</b>
A.1	Ableitung nach $\hat{\Gamma}_e$ . . . . .	91
A.2	Ableitung nach $\hat{C}_e$ . . . . .	91
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

# Symbolverzeichnis

Formel- zeichen	Bedeutung
$\psi$	Spezifische freie Energie
$\psi_e$	Elastischer Anteil der spezifischen freien Energie
$\psi_p$	Plastischer Anteil der spezifischen freien Energie
$\partial\mathcal{B}$	Rand des Körpers
$\partial\mathcal{B}_u$	Rand des Körpers auf dem Verschiebungen vorgegeben sind
$\partial\mathcal{B}_\sigma$	Rand des Körpers auf dem Spannungen vorgegeben sind
$\mathcal{B}$	Materieller Körper
$\vec{D}$	Drehimpulsvektor
$\vec{I}$	Impulsvektor
$\vec{F}$	Kraftvektor
$I_{\mathbf{T}}, II_{\mathbf{T}}, III_{\mathbf{T}}$	Invarianten des Tensors $\mathbf{T}$ , Seite 40
$m$	Masse des Körpers
$\mathcal{P}$	Materieller Punkt
$\mathcal{R}(\mathcal{P})$	Referenzkonfiguration
$\varrho_{\mathcal{R}}$	Massendichte in der Referenzkonfiguration $\mathcal{R}$
$\partial\mathcal{R}[\mathcal{B}]$	Rand des Körpers in der Referenzkonfiguration
$\partial\mathcal{R}_u[\mathcal{B}]$	Rand des Körpers auf dem Verschiebungen vorgegeben sind in der Referenzkonfiguration
$\partial\mathcal{R}_\sigma[\mathcal{B}]$	Rand des Körpers auf dem Spannungen vorgegeben sind in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{C}_p$	Rechter Cauchy-Green Tensor relativ zur plastischen Zwischenkonfiguration
$\dot{\mathbf{C}}_p$	Materielle Zeitableitung des rechten Cauchy-Green Tensors relativ zur plastischen Zwischenkonfiguration
$\mathbf{C}_r$	Rechter Cauchy-Green Tensors relativ zur dissipativen Zwischenkonfiguration
$\dot{\mathbf{C}}_r$	Materielle Zeitableitung des rechten Cauchy-Green Tensors relativ zur dissipativen Zwischenkonfiguration
$\mathbf{C}$	Rechter Cauchy-Green Tensor
Div	Divergenzoperator in Bezug auf die Koordinaten der Referenzkonfiguration
$\mathbf{D}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$d\vec{A}$	Materielles Flächenelement in der Referenzkonfiguration
$\det \mathbf{F}$	Determinante des Deformationsgradienten
$dV$	Materielles Volumenelement in der Referenzkonfiguration
$d\vec{X}$	Materielles Linienelement in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{E}$	Greenscher Verzerrungstensor
$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$	Kartesische Einheitsvektoren in der Momentankonfiguration
$\mathbf{F}_r$	Deformationsgradient der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\mathbf{F}^{-1}$	Inverse des Deformationsgradienten
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{F}_p$	Deformationsgradient der plastischen Zwischenkonfiguration
$\mathbf{F}^{-T}$	Transponierte des inversen Deformationsgradienten
$\mathbf{F}^T$	Transponierte des Deformationsgradienten
Grad	Gradient in Bezug auf die Koordinaten der Referenzkonfiguration
$\dot{\mathbf{F}}$	Materieller Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{L}$	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{P}$	Erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$\mathbf{R}$	Rotationsanteil des Deformationsgradienten
$\mathbf{R}_p$	Rotationsanteil des plastischen Deformationsgradienten
$\mathbf{R}_r$	Rotationsanteil des Deformationsgradienten $\mathbf{F}_r$
$\mathbf{U}_p$	Rechter Strecktensor des plastischen Deformationsgradienten
$\mathbf{U}_r$	Rechter Strecktensor des Deformationsgradienten $\mathbf{F}_r$
$\mathbf{V}_e$	Linker Strecktensor des elastischen Deformationsgradienten
$\mathbf{V}_k$	Linker Strecktensor des Deformationsgradienten $\mathbf{F}_k$
$\mathbf{S}$	Zweiter Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$\vec{t}_R$	Spannungsvektor dargestellt in der Referenzkonfiguration
$(\ )_{\nabla}$	Kontravariante Oldroyd-Ableitung
$(\ )_{\Delta}$	Kovariante Oldroyd-Ableitung
$\mathbf{U}$	Rechter Strecktensor
$\mathbf{V}$	Linker Strecktensor
$\vec{v}(\vec{X}, t)$	Momentangeschwindigkeit dargestellt in Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\mathbf{W}$	Wirbeltensor, schiefssymmetrische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten
$\vec{X}$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{Z}$	Tensor $\hat{\mathbf{Z}}$ in die Referenzkonfiguration transformiert
$\chi_t(\mathcal{P})$	Momentankonfiguration
$\chi_R(\vec{X}, t)$	Momentankonfiguration dargestellt in Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\rho(\vec{x}, t)$	Massendichte in der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyscher Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}$	Gewichteter Cauchy Spannungstensor

$\mathbf{a}$	Almansischer Verzerrungstensor
$\mathbf{B}$	Linker Cauchy-Green Tensor
$\text{div}$	Divergenzoperator in Bezug auf die Koordinaten der Momentankonfiguration
$d\vec{a}$	Materielles Flächenelement in der Momentankonfiguration
$(d\vec{a})^\cdot$	Geschwindigkeit des materiellen Flächenelements
$dv$	Materielles Volumenelement in der Momentankonfiguration
$(dv)^\cdot$	Geschwindigkeit des materiellen Volumenelements
$d\vec{x}$	Materielles Linienelement in der Momentankonfiguration
$(d\vec{x})^\cdot$	Geschwindigkeit des materiellen Linienelements
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	Kartesische Einheitsvektoren in der Momentankonfiguration
$\vec{\text{grad}}$	Gradient in Bezug auf die Koordinaten der Momentankonfiguration
$\vec{k}$	Volumenkraftdichte
$\vec{n}$	Normalenvektor der Oberfläche
$\vec{t}$	Spannungsvektor (Oberflächenkraftdichte)
$\vec{v}(\vec{x}, t)$	Momentangeschwindigkeit dargestellt in Bezug auf die Momentankonfiguration
$\partial\chi_t[\mathcal{B}]$	Oberfläche des Körpers $\mathcal{B}$
$\vec{x}(t)$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
$\lambda$	Plastischer Multiplikator
$\hat{f}(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\xi})$	Fließfunktion
$k$	Isotrope Verfestigungsvariable, hier konst. (Fließflächenradius)
$\dot{s}$	Plastische Bogenlänge
$\hat{\mathbf{B}}_p$	Linker Cauchy-Green Tensor der elastischen Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{C}}_e$	Rechter Cauchy-Green Tensor der elastischen Zwischenkonfiguration
$\hat{\Gamma}$	Greenscher Verzerrungstensor transformiert in die plastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\Gamma}_e$	Elastischer Anteil des Tensors $\hat{\Gamma}$
$\hat{\Gamma}_p$	Plastischer Anteil des Tensors $\hat{\Gamma}$
$\hat{\mathbf{D}}_p$	Verzerrungsgeschwindigkeitsgradient der plastischen Zwischenkonfiguration, $\hat{\mathbf{D}}_p = \hat{\hat{\Gamma}}_p$
$\hat{\mathbf{L}}_p$	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient der plastischen Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{W}}_p$	Wirbeltensor der plastischen Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{M}}$	Mandelsche Spannungstensor in Bezug auf die elastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\xi}$	Kinematische Verfestigungstensor in der plastischen Zwischenkonfiguration
$\overset{\vee}{(\ )}$	Kontravariante Oldroyd-Ableitung in Bezug auf die plastische Zwischenkonfiguration

	schenkonfiguration
$\overset{\Delta}{(\ )}$	Kovariante Oldroyd-Ableitung in Bezug auf die plastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\Gamma}_k$	Verzerrungstensor $\tilde{\gamma}_k$ transformiert in die plastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\chi}$	Plastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{C}}_e$	Unimodularer Anteil des Tensors $\hat{\mathbf{C}}_e$
$\hat{\mathbf{F}}_e$	Deformationsgradient der elastischen Zwischenkonfiguration
$\hat{J}_e$	Determinante des elastischen Deformationstensors
$\hat{\mathcal{K}}^4$	Tensor vierter Stufe, siehe Gleichung (4.45), Seite 34
$\hat{\mathcal{N}}^4$	Tensor vierter Stufe, siehe Gleichung (4.72), Seite 39
$\hat{\mathbf{R}}_e$	Rotationsanteil des elastischen Deformationsgradienten
$\hat{\mathbf{U}}_e$	Rechter Strecktensor des elastischen Deformationsgradienten
$\hat{\mathbf{V}}_p$	Linker Strecktensor des plastischen Deformationsgradienten
$\hat{\mathbf{S}}$	Zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor in Bezug auf die elastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{Y}}$	Innere Variable, Verzerrungstensor in Bezug auf die plastische Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{Z}}$	Gewichtete Ableitung des plastischen Anteils der spezifischen Energie
$\tilde{\chi}(\mathcal{P})$	Dissipative Zwischenkonfiguration
$\tilde{\gamma}_k$	Verzerrungstensor der energiespeichernden Zwischenkonfiguration
$\tilde{\gamma}_p$	Verzerrungstensor der plastischen Zwischenkonfiguration dargestellt in der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\tilde{\gamma}_r$	Verzerrungstensor der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{B}}_r$	Linker Cauchy-Green Tensor der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{C}}_k$	Rechter Cauchy-Green Tensor der energiespeichernden Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{F}}_k$	Deformationsgradient der energiespeichernden Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{L}}_r$	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{D}}_r$	Symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten der dissipativen Zwischenkonfiguration
$\tilde{\mathbf{R}}_k$	Rotationsanteil des Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{F}}_k$
$\tilde{\mathbf{U}}_k$	Rechter Strecktensor des Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{F}}_k$
$\tilde{\mathbf{V}}_r$	Linker Strecktensor des Deformationsgradienten $\tilde{\mathbf{F}}_r$
$\overset{\sim}{(\ )}$	Kontravariante Oldroyd-Ableitung in der R-Zwischenkonfiguration
$\overset{\Delta}{(\ )}$	Kovariante Oldroyd-Ableitung in der R-Zwischenkonfiguration

$\tilde{\mathbf{V}}_r$	Linker Strecktensor des Deformationsgradienten $\mathbf{F}_r$
$\tilde{\mathbf{Z}}$	Tensor $\hat{\mathbf{Z}}$ transformiert in die dissipative Zwischenkonfiguration
$c_1$	Materialkonstante des Verzerrungstensors der plastischen Zwischenkonfiguration
$c_2$	Materialkonstante des Verzerrungstensors der plastischen Zwischenkonfiguration
$K$	Kompressionsmodul
$\beta_1$	Materialkonstante des Verzerrungstensors $\tilde{\gamma}_k$
$\beta_2$	Materialkonstante des Verzerrungstensors $\tilde{\gamma}_k$
$c_{10}$	Materialkonstante der Elastizitätsbeziehung
$\tau_{jkl}^e$	Gewichteter Cauchy Spannungstensor am Gauß-Punkt $\xi_{jkl}$ des $e$ -ten Elements
$\Omega^e$	Elementgebiet der Momentankonfiguration
$\Omega^{\text{ref}}$	Normiertes Elementgebiet
$a_{ij}$	Wichtungsfaktoren des DIRK Verfahrens
$\mathbf{B}_a^e$	Verzerrungsverschiebungsmatrix des $e$ -ten Elements
$b_i$	Wichtungsfaktoren des DIRK Verfahrens
$c_i$	Wichtungsfaktoren des DIRK Verfahrens
$\delta\mathbf{E}$	Virtuelle Greensche Verzerrungen
$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t))$	Diskretisiertes Prinzip der virtuellen Verschiebungen
$\mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni})$	Diskretisiertes Prinzip der virtuellen Verzerrungen bei Anwendung des DIRK Verfahrens
$\delta\mathbf{h}$	Gradient der virtuellen Verschiebungen
$\mathbf{J}_t^e(\xi_{jkl})$	Jacobi-Matrix der Transformation vom normierten Elementgebiet in das Elementgebiet der Momentankonfiguration
$\mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni})$	Diskretisierte Evolutionsgleichungen bei Anwendung des DIRK Verfahrens
$\mathbf{N}$	Matrix der Ansatzfunktionen für die unbekanntenen Knotenverschiebungen
$\mathbf{N}_a$	Matrix der Ansatzfunktionen
$\bar{\mathbf{N}}$	Matrix der Ansatzfunktionen für die bekannten Knotenverschiebungen
$N_j(\mathbf{x})$	$j$ -te Ansatzfunktion der Approximation des Verschiebungsfeldes
$\mathbf{A}$	Matrix des Algebro-Differentialgleichungssystems
$\bar{\mathbf{p}}(t)$	Vektor der äußeren Kräfte im Prinzip der virtuellen Verschiebungen, siehe Gleichung (5.25), Seite 53
$\mathbf{Q}_{ni}$	Innere Variablen an der Stützstelle $T_{ni}$
$\mathbf{q}$	Vektor der inneren Variablen
$\mathbf{q}_{jkl}^e$	Vektor der inneren Variablen am Gauß-Punkt $\xi_{jkl}$ des $e$ -ten Elements
$\mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t))$	Rechte Seite der Evolutionsgleichungen des Gesamtsystems
$\mathbf{R}_{ni}$	Nichtlineares Gleichungssystem des DIRK Verfahrens

$\mathbf{y}_{ni}^{qS}$	Startvektor im DIRK Verfahren an der Stützstelle $T_{ni}$
$\mathbf{S}_{jkl}^e$	Zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor am Gauß-Punkt $\xi_{jkl}$ des $e$ -ten Elements
$\text{tol}_Q$	Toleranz des Abbruchkriteriums bei Anwendung des Mehrebenen-Newton Verfahrens
$T_{nj}$	Stützstellen des DIRK Verfahrens
$\delta \mathbf{u}^h$	Ansatz für die virtuellen Verschiebungen
$\delta \mathbf{u}_j$	Virtuelle Verschiebung des $j$ -ten Knoten
$\delta \mathbf{u}^e$	Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen des $e$ -ten Elements
$\delta \mathbf{u}_a$	Vektor aller virtuellen Knotenverschiebungen
$\delta \bar{\mathbf{u}}$	Virtuelle Verzerrungen
$\delta \mathbf{u}$	Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen
$\mathbf{u}^h$	Approximation des Verschiebungsfeldes
$\mathbf{u}_j(t)$	Verschiebung des $j$ -ten Knotens
$\mathbf{U}_{ni}$	Verschiebungen an der Stützstelle $T_{ni}$
$\mathbf{u}^e$	Vektor der Knotenverschiebungen des $e$ -ten Elements
$\mathbf{u}(t)$	Vektor aller unbekanntenen Knotenverschiebungen
$\mathbf{u}_a(t)$	Vektor aller Knotenverschiebungen
$\bar{\mathbf{u}}(t)$	Vektor aller bekannten Knotenverschiebungen
$w_{jkl}^G$	Wichtungsfaktoren in $\xi$ -, $\eta$ - und $\zeta$ -Richtung der Gaußintegration
$\mathbf{y}$	Vektor aller unbekanntenen
$\bar{\mathbf{Z}}^e$	Zuordnungsmatrix zwischen dem Vektor aller unbekanntenen Knotenverschiebungen und den unbekanntenen Knotenverschiebungen des $e$ -ten Elements
$\mathbf{Z}^e$	Zuordnungsmatrix zwischen dem Vektor aller bekannten Knotenverschiebungen und den bekannten Knotenverschiebungen des $e$ -ten Elements
$\mathbf{Z}^e$	Zuordnungsmatrix
$\mathbf{Z}_a^e$	Zuordnungsmatrix zwischen dem Vektor aller Knotenverschiebungen und den Knotenverschiebungen des $e$ -ten Elements
$\mathbf{Z}_q^{e(jkl)}$	Zuordnungsmatrix der inneren Variablen am Gauß-Punkt $\xi_{jkl}$ des $e$ -ten Elements
$\alpha$	Abkürzung in der Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, siehe Gleichung (6.2), Seite 65
$\delta$	Abkürzung in der Darstellung des inneren Spannungstensor $\mathbf{Z}$ , siehe Gleichung (6.5), Seite 65
$\varepsilon$	Abkürzung in der Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, siehe Gleichung (6.2), Seite 65
$\gamma$	Abkürzung in der Darstellung des inneren Spannungstensor $\mathbf{Z}$ , siehe Gleichung (6.5), Seite 65
$\tau_1, \dots, \tau_9$	Abkürzungen für Spurterme, Seite 66



# 1 Einleitung

Seit Jahrtausenden werden Metalle wie Gold, Kupfer und Eisen handwerklich bearbeitet. Diese handwerkliche Formgebung wurde um 1800 mit den ersten Walzwerken durch industrielle Verfahren abgelöst. Heutzutage spielt die Umformtechnik eine zentrale Rolle im Maschinenbau. So umfasst die spanlose Formgebung die Herstellung von Halbzeugen sowie die Blech- und Massivumformung [H<sup>+</sup>98]. An moderne Fertigungsverfahren und -maschinen werden dabei hohe Anforderungen gestellt. Die hohe Produktqualität, Zuverlässigkeit, Ressourcenschonung und Anlagenverfügbarkeit aktueller Maschinen wird mit Simulationsverfahren, insbesondere mit der Methode der finiten Elemente, weiter verbessert. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zum besseren Verständnis und zur weiteren Verbesserung dieses numerischen Verfahrens leisten.

Da bei Umformvorgängen große Deformationen auftreten, werden die zur Beschreibung der Kinematik und Kinetik notwendigen Größen erläutert. Das Fundament hierfür liefert die Kontinuumsmechanik und auf diesem basiert auch das verwendete Materialmodell. Dieses orientiert sich an den Arbeiten [Lio00], [Lüh97] und [TW04].

Beim Umformen wird das Formänderungsvermögen des Werkstoffes ausgenutzt. Metallische Werkstoffe können durch äußere Kräfte bleibend ihre Form ändern ohne, bei makroskopischer Betrachtung, dabei den Stoffzusammenhang zu verlieren [Hor02]. Diese Eigenschaft wird als Plastizität bezeichnet. Das verwendete Materialmodell enthält eine wesentliche Annahme, welche aus Beobachtungen motiviert ist. Es wird angenommen, dass plastische Dehnungen inkompressibel sind. Daraus folgt, dass die Determinante des plastischen Deformationsgradienten konstant ist.

Problemstellungen aus der Praxis können oftmals nur numerisch gelöst werden. In der Festkörper- und Strukturmechanik hat sich dabei die Methode der finiten Elemente durchgesetzt. Die meisten der bisher verwendeten Verfahren verletzen die Bedingung der plastischen Inkompressibilität. Andererseits hat man festgestellt, siehe [HWL02], dass die Erhaltung von Invarianten oftmals entscheidend für die Stabilität und Qualität eines numerischen Verfahrens ist. Daher sollten solche Bedingungen zur Erhaltung von Zwängen durch das numerische Verfahren berücksichtigt werden. Hierzu finden sich Ansätze in [Lüh97], [TW03] und [Hel06]. In dieser Arbeit werden die Ansätze vorgestellt, in dem Programm TASA-FEM implementiert und die Ergebnisse mit einem Korrekturvorschlag aus [HWL02] verglichen.



# 2 Grundlagen aus der Kontinuumsmechanik

## 2.1 Kinematik der großen Deformationen

In der Kontinuumsmechanik wird davon ausgegangen, dass ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  aus einer infiniten Anzahl materieller Punkte  $\mathcal{P}$  besteht. Der molekulare Aufbau des Materials wird ignoriert und idealisierend eine kontinuierliche Verteilung der Materie angenommen. Diese Annahme erscheint im Maschinenbau gerechtfertigt, da die Bauteilabmessungen in der Regel ein Vielfaches der atomaren Größen sind.

Die momentane Lage des Körpers  $\mathcal{B} = \{\mathcal{P}\}$  im euklidischen Vektorraum  $\mathbb{V}^3$  zur Zeit  $t$  wird durch die eineindeutige Abbildung<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\chi_t : \mathcal{B} &\rightarrow \chi_t[\mathcal{B}] \subset \mathbb{V}^3 \\ \mathcal{P}, t &\mapsto \chi_t(\mathcal{P}) = \vec{x}(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

beschrieben. Die Abbildungen  $\vec{\chi}$  werden allgemein als Konfigurationen und  $\chi_t$  als Momentankonfiguration bezeichnet. Eine Bewegung des materiellen Körpers kann nun als eine kontinuierliche Folge von Konfigurationen aufgefasst werden, siehe Abb.2.1.

Um sich von dem abstrakten Begriff des materiellen Punktes zu lösen, wird eine beliebige Konfiguration als Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$  gewählt. Der Körper muss diese Konfiguration zu keinem Zeitpunkt einnehmen. Sie dient lediglich dazu dem materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  eindeutig einen Referenzvektor  $\vec{X}$  zuzuordnen.

Nun kann die Momentankonfiguration in Bezug auf die Referenzkonfiguration dargestellt werden

$$\chi_t(\mathcal{P}) = \chi_t(\mathcal{R}^{-1}(\vec{X})) = \chi_{\mathcal{R}}(\vec{X}, t).\tag{2.2}$$

Dies ist in Abb. 2.2 zusammengefasst.

Neben der Idealisierung des Körpers als Kontinuum werden als weitere vereinfachende Annahme sogenannte einfache Materialien erster Stufe eingeführt. Bei

---

<sup>1</sup>Es ist möglich diese Definition noch allgemeiner zu halten und vorerst auf ein Basissystem zu verzichten, [Hau00]. Da dies für die vorliegende Arbeit jedoch unerheblich ist, wird hiervon abgesehen.

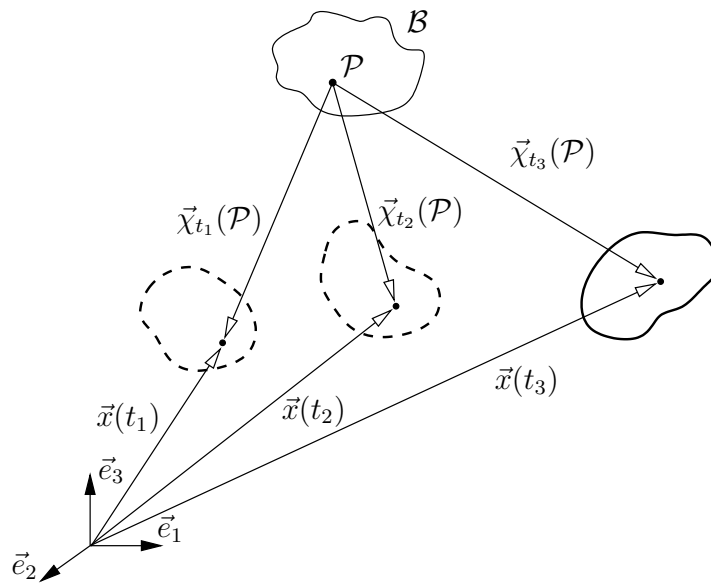


Abbildung 2.1: Bewegung als Konfigurationenschar mit dem Scharparameter  $t$

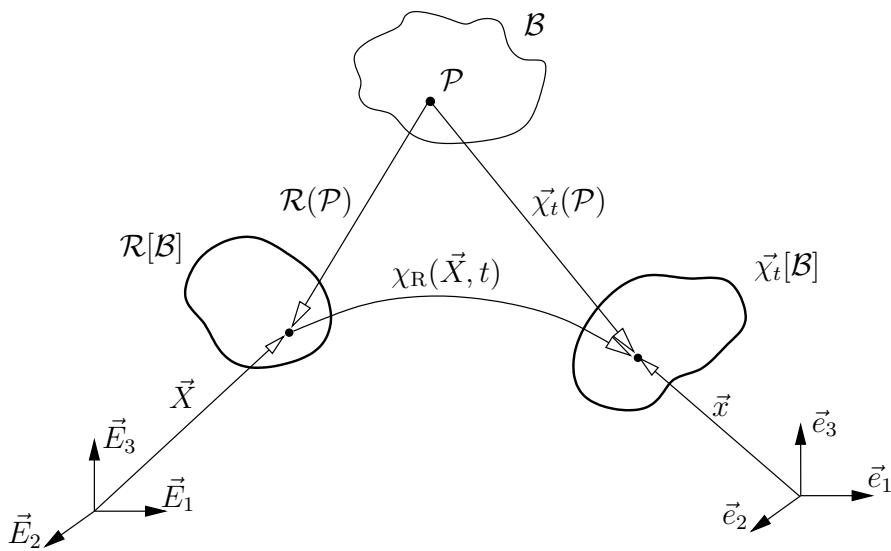


Abbildung 2.2: Referenzkonfiguration

ihnen wird von dem Prinzip der lokalen Wirkung ausgegangen. Somit reicht es aus, eine Näherung erster Ordnung für die Bewegung anzugeben.<sup>2</sup>

Die Bewegung des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  wird lokal durch den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \text{Grad } \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) \quad (2.3)$$

charakterisiert. Dieser entspricht dem linearen Term der Taylor-Reihe des Verschiebungsfeldes

$$\vec{x} = \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) = \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}_0 + d\vec{X}, t) = \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}_0, t) + \mathbf{F}d\vec{X} + \left\|d\vec{X}\right\| \vec{r}(\vec{X}_0, t, d\vec{X}) \quad (2.4)$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{\|d\vec{X}\| \rightarrow 0} \left\| \vec{r}(\vec{X}_0, t, d\vec{X}) \right\| = \vec{0}. \quad (2.5)$$

Der Vektor  $d\vec{X}$  kann als ein Tangentenvektor einer glatten Kurve<sup>3</sup> in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$  aufgefasst werden. Er wird dann materielles Linienelement genannt. Beim Übergang von der Referenz- zur Momentankonfiguration  $\chi_t$  ändert sich der Betrag und die Richtung des materiellen Linienelementes

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}. \quad (2.6)$$

Siehe auch Abb. 2.3.

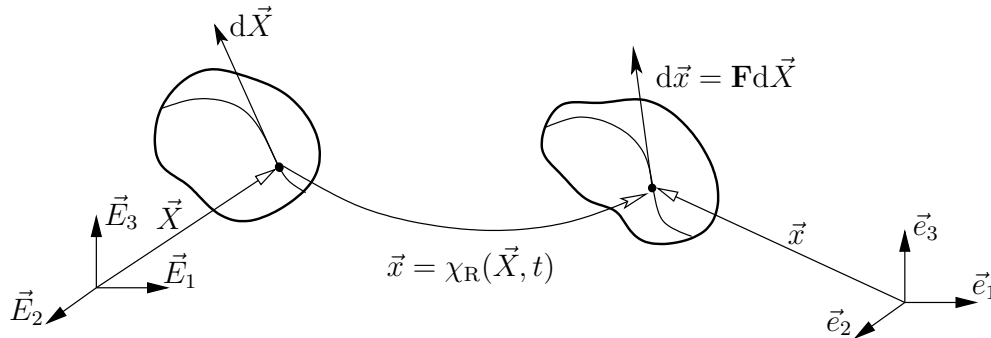


Abbildung 2.3: Transformation des materiellen Linienelementes durch den Deformationsgradienten

Aus dieser geometrischen Interpretation des Deformationsgradienten folgen direkt die Zusammenhänge von materiellen Flächen- und Volumenelementen der Referenz- und Momentankonfiguration

$$d\vec{a} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\vec{A} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Siehe hierzu und zu den weiteren Axiomen der Materialtheorie Kap. 3.

<sup>3</sup>Die Kurve soll aus materiellen Punkten  $\mathcal{P}$  bestehen und wird im Folgenden materielle Kurve genannt.

und

$$dv = (\det \mathbf{F})dV. \quad (2.8)$$

Da elasto- und viskoplastische Prozesse zeitabhängig sind, werden für die Formulierung der Materialmodelle die Zeitableitungen oder Geschwindigkeiten benötigt.

Der Gradient des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$  kann auf zwei Arten berechnet werden. Je nachdem, ob es in materieller Darstellung<sup>4</sup> oder räumlicher Darstellung gegeben ist, ergibt sich der materielle Geschwindigkeitsgradient<sup>5</sup>

$$\text{Grad } \vec{v}(\vec{X}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) \quad (2.9)$$

oder der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t) = \mathbf{L}. \quad (2.10)$$

Der Zusammenhang der Gradienten folgt aus der Differentiation der Identität

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \vec{v}(\chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t), t), \quad (2.11)$$

wobei die Kettenregel angewendet wird

$$\begin{aligned} \text{Grad } \vec{v}(\vec{X}, t) &= \text{grad } \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ Grad } \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t), \\ \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{L}\mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Daher gilt

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.13)$$

impliziert. Wird (2.13) in (2.6) bis (2.8) eingesetzt, so ergeben sich die Geschwindigkeiten der materiellen Elemente zu

$$(\text{d}\vec{x})^\cdot = \mathbf{L}\text{d}\vec{x}, \quad (2.14)$$

$$(\text{d}\vec{a})^\cdot = \left[ (\text{div } \vec{v})\mathbf{1} - \mathbf{L}^T \right] \text{d}\vec{a}, \quad (2.15)$$

$$(\text{d}v)^\cdot = (\text{div } \vec{v}) \text{d}v. \quad (2.16)$$

---

<sup>4</sup>Eine Funktion  $f(\mathcal{P}, t)$  kann entweder in Bezug auf die materiellen Koordinaten  $\vec{X}$  oder die räumlichen Koordinaten  $\vec{x}$  dargestellt werden. Es gilt  $f(\mathcal{P}, t) = \hat{f}(\vec{X}(\mathcal{P}), t) = \bar{f}(\vec{x}(\mathcal{P}, t), t)$ . Die Form  $f = \hat{f}(\vec{X}, t)$  wird materielle oder Lagrangesche Darstellung genannt. Die andere Darstellungsform  $f = \bar{f}(\vec{x}, t)$  wird als räumliche oder Eulersche Darstellung bezeichnet.

<sup>5</sup>Grad bezeichnet den Gradienten in Bezug auf die materiellen Koordinaten  $\vec{X}$  und grad den Gradienten in Bezug auf die räumlichen Koordinaten  $\vec{x}$ .

Der symmetrische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad (2.17)$$

er beschreibt die Änderungsrate des Skalarprodukts zweier materieller Linienelemente. Der schiefsymmetrische Anteil heißt Wirbeltensor

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.18)$$

Der Wirbeltensor beschreibt die Änderungsrate der Richtung eines materiellen Linienelements.

Außerdem wird die Kinematik des Körpers lokal mit sogenannten Verzerrungstensoren beschrieben. Sie enthalten nur den von einer Starrkörperbewegung abweichenden Anteil der Gesamtbewegung. Dies ist z.B. essentiell zur Formulierung von Materialmodellen. Der Spannungszustand in einem Körper ist üblicherweise nur von der Verzerrung des Körpers abhängig. Eine Starrkörperbewegung soll daher keinen Einfluss auf den Verzerrungs- und somit Spannungszustand haben.

Der Verzerrungszustand kann mit dem Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.19)$$

beschrieben werden. Der Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.20)$$

heißt rechter Cauchy-Greentensor und ist auch in der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \text{ mit } \mathbf{C} = \mathbf{U}^2. \quad (2.21)$$

enthalten. Der Deformationsgradient wird hierbei multiplikativ in einen Rotationsanteil  $\mathbf{R}$  und einen Streckanteil  $\mathbf{U}$  zerlegt. Es kann gezeigt werden, dass diese Zerlegung eindeutig ist.

Das Gegenstück hierzu ist die ebenfalls eindeutige Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \text{ mit } \mathbf{B} = \mathbf{V}^2. \quad (2.22)$$

Folglich wird der Tensor  $\mathbf{B}$  linker Cauchy-Greentensor genannt.

Die Forderung, dass der Verzerrungstensor bei reinen Starrkörperbewegungen verschwindet, kann leicht nachvollzogen werden. Eine Starrkörperbewegung ist allgemein gegeben durch die Translation  $\vec{x}_0(t)$  eines Referenzpunktes  $\vec{X}_0$  und eine Rotation, dargestellt durch den orthogonalen<sup>6</sup> Tensor  $\mathbf{Q}(t)$ . Die Gleichung der Bewegung lautet somit

$$\vec{x}(t) = \chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) = \mathbf{Q}(t)(\vec{X} - \vec{X}_0) + \vec{x}_0(t). \quad (2.23)$$

---

<sup>6</sup>Tensoren mit der Eigenschaft  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$  werden als orthogonal bezeichnet.

Der Deformationsgradient dieser Bewegung ist ortsunabhängig

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{Q}(t).$$

Hieraus ergibt sich der rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{1}$$

womit der Greensche Verzerrungstensor, wie gefordert, verschwindet

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Der Greensche Verzerrungstensor beschreibt den Verzerrungszustand in Bezug auf die Referenzkonfiguration. Der Verzerrungszustand kann auch in Bezug auf die Momentankonfiguration formuliert werden. Dies führt auf den Almansischen Verzerrungstensor

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (2.24)$$

## 2.2 Objektive Tensoren

Materialmodelle müssen bestimmte Anforderungen erfüllen, vgl. Kap. 3. Eine wichtige Rolle spielt dabei der Begriff der Objektivität. Dieser wird hier für Tensoren nullter bis zweiter Stufe erläutert.

Die Position der materiellen Punkte  $\mathcal{P}$  wird durch Ortsvektoren  $\vec{x}$  beschrieben. Diese Vektoren hängen von der Wahl des Bezugssystems ab. Hierbei ist anzumerken, dass nicht alle Bezugssysteme gleichwertig sind. So gelten die Bilanzgleichungen der Mechanik nicht in gleicher Form in jedem Bezugssystem. Beispiele sind die Impuls- und die Drehimpulsbilanz, welche für Inertialsysteme formuliert sind.

Wird von einem Bezugssystem zu einem anderen gewechselt, so muss dies berücksichtigt werden. Besteht der Wechsel in einer reinen Translationsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit, so spricht man von einer Galilei-Transformation. In diesem Fall bleiben die Bilanzgleichungen der klassischen Mechanik von dem Wechsel unberührt.

Ist ein Inertialsystem bekannt, so können alle Gleichungen in Bezug auf dieses System aufgestellt und in ein beliebiges System transformiert werden. Anhand der Transformationsvorschrift werden alle Größen in objektive und nicht-objektive Größen unterteilt. Ein Wechsel des Bezugssystems ist allgemein gegeben durch

$$\vec{x}^* = \mathbf{Q}(t)\vec{x} + \vec{c}(t) \text{ und } t^* = t - a. \quad (2.25)$$

$\mathbf{Q}(t)$  ist hierin eine tensorwertige Funktion mit den Eigenschaften  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$  und  $\det \mathbf{Q} = 1$ ,  $\vec{c}(t)$  ist eine vektorwertige Funktion und  $a \in \mathbb{R}$  eine Konstante.



Eine skalarwertige Funktion heißt objektiv, wenn sie invariant gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems ist

$$\varphi(\mathcal{P}, t) = \varphi^*(\mathcal{P}, t). \quad (2.26)$$

Objektive Vektoren sollen durch den Wechsel des Bezugssystems lediglich gedreht werden

$$\vec{v}^*(\mathcal{P}, t) = \mathbf{Q}(t)\vec{v}(\mathcal{P}, t). \quad (2.27)$$

Aufgrund dieser Forderung ist zwar die Differenz zweier Ortsvektoren objektiv, die Ortsvektoren selbst jedoch nicht. Dies ist an (2.25) zu sehen.

Mit dem Begriff des objektiven Vektors kann die Objektivität für Tensoren definiert werden. Gefordert wird, dass ein objektiver Tensor objektive Vektoren wiederum in objektive Vektoren abbildet. Gilt  $\vec{w} = \mathbf{T}\vec{v}$ , so muss außerdem  $\vec{w}^* = \mathbf{T}^*\vec{v}^*$  gelten, wobei  $\vec{w}^* = \mathbf{Q}\vec{w}$  und  $\vec{v}^* = \mathbf{Q}\vec{v}$  sind. Einsetzen der Beziehungen liefert unmittelbar das Transformationsverhalten objektiver Tensoren zweiter Stufe

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T. \quad (2.28)$$

Das Transformationsverhalten der in der Kontinuumsmechanik definierten Größen ergibt sich aus ihrer Definition. Für den Deformationsgradienten und den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten soll dies exemplarisch bestimmt werden. Ausgegangen wird von der Transformationsvorschrift eines Ortsvektors

$$\vec{x}^* = \mathbf{Q}(t)\chi_{\mathbf{R}}(\vec{X}, t) + \vec{c}(t). \quad (2.29)$$

Wird der Deformationsgradient gebildet, so folgen

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \text{ und } d\vec{x}^* = \mathbf{Q}d\vec{x}. \quad (2.30)$$

Einsetzen dieser Beziehung in die Definition des Geschwindigkeitsgradienten (2.13) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* &= (\mathbf{F}^*) \cdot (\mathbf{F}^*)^{-1} \\ &= (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da weder (2.30) noch (2.31) das Transformationsverhalten (2.28) haben, sind der Deformationsgradient und der räumliche Geschwindigkeitsgradient nicht-objektive Tensoren.

## 2.3 Objektive Zeitableitungen objektiver Tensoren

Die materielle Zeitableitung einer objektiven Tensorfunktion

$$(\mathbf{T}^*)' = (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)' = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (2.32)$$

ist offensichtlich nicht mehr objektiv. Durch Addition oder Subtraktion geeigneter Terme kommt man jedoch wieder auf objektive Größen. Beispiele für objektive Ableitungen sind die sogenannte Oldroyd-Ableitungen

$$\overset{\Delta}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{L} \quad (2.33)$$

und

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T. \quad (2.34)$$

Für die kontravariante Oldroyd-Ableitung (2.34) ergibt sich

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{T}}^* &= (\mathbf{T}^*)' - \mathbf{L}^*\mathbf{T}^* - \mathbf{T}^*\mathbf{L}^{*T} \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T - \left(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\right)\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \\ &\quad - \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{Q}\mathbf{L}^T\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T\right) \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{L}^T\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\overset{\nabla}{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Analog ergibt sich die Beziehung für die kovariante Oldroyd-Ableitung (2.33), wobei hier die Beziehung  $\dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$  ausgenutzt wird.

# 3 Materialmodellierung

## 3.1 Anforderungen an Materialmodelle

Materialmodelle werden, im Gegensatz zu den allgemeingültigen Bilanzgleichungen, individuell für ein bestimmtes Material sowie die zu beschreibenden Phänomene formuliert. Sollen z.B. zyklische Prozesse berechnet werden, so sollte dies bereits beim Erstellen des Materialmodells berücksichtigt werden. Im Laufe der Zeit ist ein ganzer Katalog von Material-Modellen entstanden, aus denen der Ingenieur auswählen kann. Abgeschlossen ist die Theorie jedoch noch nicht und die Forschung wird in diesem Bereich weiter voran getrieben. Die Materialmodelle müssen bestimmten Anforderungen genügen. Drei Prinzipien haben sich hierbei als sehr nützlich oder sogar unerlässlich herauskristallisiert. Dies sind

1. der Determinismus,
2. die lokale Wirkung und
3. die materielle Objektivität.

Nach dem Prinzip der Determiniertheit wird gefordert, dass der momentane Spannungszustand  $\sigma(\mathcal{P}, t)$  eindeutig durch die Bewegungsgeschichte des Körpers definiert ist. Mathematisch wird dies durch den Begriff des Funktionals ausgedrückt.

Das Prinzip der lokalen Wirkung relativiert den ersten Punkt. Der Spannungszustand des materiellen Punktes  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  soll nur von der Geschichte der lokalen Umgebung, jedoch nicht von der Bewegung aller materieller Punkte abhängen. Erst diese Einschränkung macht es möglich allgemeine Materialmodelle zu formulieren und anzuwenden.

Das Prinzip der materiellen Objektivität geht noch über den zuvor definierten Begriff der Objektivität hinaus. Die Beschreibung des Materialverhaltens muss unabhängig von der willkürlich gewählten Darstellungsform sein, wie dem gewählten Koordinatensystem, den Basisvektoren oder dem Bezugssystem.

Eine unverzichtbare Forderung ist die Beobachter-Unabhängigkeit. Dieser genügt beispielsweise die Impulsbilanz, formuliert mit der Absolutbeschleunigung  $\vec{a}_{\text{abs}}$ , der Masse  $m$  und der Kraft  $\vec{F}$

$$m\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{F}. \quad (3.1)$$

Da alle enthaltenen Größen objektiv sind<sup>1</sup>, geht (3.1) für ein bewegtes Bezugssystem in

$$m^* \vec{a}_{\text{abs}}^* = \vec{F}^*, \quad (3.2)$$

$$m \mathbf{Q} \vec{a}_{\text{abs}} = \mathbf{Q} \vec{F} \quad (3.3)$$

über. Die Beziehung gilt somit für alle Bezugssysteme.

Neben den Forderungen 1 bis 3 müssen Materialmodelle die Bilanzgleichungen erfüllen. Während die Drehimpulsbilanz einfach durch einen symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor gewährleistet ist, ist es nicht einfach zu zeigen, dass die anderen Bilanzgleichungen für jeden Prozess erfüllt werden. Dies gelingt nur für Spezialfälle.

Für die Entropie-Bilanz ist es oftmals möglich, das Materialmodell so zu formulieren, dass die Entropie-Bilanz a priori erfüllt wird. Dieser Ansatz wird auch in Kap. 4 verfolgt.

## 3.2 Konzept der dualen Variablen und objektive Ableitungen

Oftmals ist es vorteilhaft Materialmodelle weder in der Momentan- noch in der Referenzkonfiguration zu formulieren. Stattdessen werden eine oder mehrere gedachte Zwischenkonfigurationen  $\hat{\chi}$ , mit der Abbildung

$$(\vec{X}, t) \mapsto \Psi(\vec{X}, t), \quad \det \Psi \neq 0. \quad (3.4)$$

eingeführt. Das Tensorfeld führt auf eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = (\mathbf{F}\Psi^{-1}) \Psi = \Phi \Psi. \quad (3.5)$$

Das Feld ist im Allgemeinen inkompatibel, d.h. es ist nichteuklidisch. Somit ist  $\Psi$  allgemein auch kein Gradient eines Verschiebungsfeldes, wird aber häufig als solcher bezeichnet.

Als nächstes wird analog zum räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  die relative Änderungsrate des Tensorfeldes  $\hat{\chi}$  eingeführt

$$\mathbf{\Lambda} = \dot{\Psi}\Psi^{-1}. \quad (3.6)$$

Genau wie im Fall der Momentan- und Referenzkonfiguration kann auch für die Zwischenkonfiguration ein Spannungs- und Verzerrungstensor angegeben werden. Der Spannungstensor der Zwischenkonfiguration wird mit  $\mathbf{\Sigma}$  und der Verzerrungstensor mit  $\mathbf{\Pi}$  bezeichnet.

---

<sup>1</sup>Siehe z.B. [Hau00], S. 175ff.

Für den Verzerrungstensor ergibt sich analog zum Almansi Tensor (2.24)

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (3.7)$$

und für den Spannungstensor erhält man in Analogie zum gewichteten Cauchy Tensor

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Psi} \mathbf{S} \mathbf{\Psi}^T. \quad (3.8)$$

Der transformierte Verzerrungstensor  $\mathbf{\Pi}$  ist ein Greenscher Tensor, der auf der Zwischenkonfiguration operiert

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \mathbf{\Psi} d\vec{X} \quad \Rightarrow \quad d\vec{X} = \mathbf{\Psi}^{-1} d\vec{x}, \\ d\vec{x} \cdot \mathbf{\Pi} d\vec{x} &= d\vec{x} \cdot \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{\Psi}^{-1} d\vec{x} \\ &= d\vec{X} \cdot \mathbf{E} d\vec{X} = \frac{1}{2}(d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der Greensche Verzerrungstensor in der Zwischenkonfiguration lässt sich additiv zerlegen

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{\Psi}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{\Psi}^{-T} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \mathbf{\Psi}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Psi}^{-T} (\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{\Psi} - \mathbf{1}) \mathbf{\Psi}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{\Psi}^{-1}) \\ &= \mathbf{\Pi}_a + \mathbf{\Pi}_b \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit

$$\mathbf{\Pi}_a = \frac{1}{2} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} - \mathbf{1}), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{\Pi}_b = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{\Psi}^{-1}). \quad (3.13)$$

In den Bilanzgleichungen der Mechanik treten Produkte von Spannungs- und Verzerrungstensoren, sowie deren Ableitungen auf. Ein Beispiel ist die spezifische Spannungsleistung  $l_i$ , welche als Produkt des zweiten Piola-Kirchhoff Tensors  $\mathbf{S}$  und der materiellen Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  geschrieben werden kann

$$l_i = \frac{1}{\varrho_R} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.14)$$

Die Tensoren  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{E}$  sind auf natürliche Art miteinander verknüpft und werden als duale Variablen bezeichnet.

Nach dem Konzept der dualen Variablen<sup>2</sup> wird nun gefordert, dass die Skalarprodukte der neu eingeführten Tensoren  $\mathbf{\Sigma}$  und  $\mathbf{\Pi}$ , sowie ihrer Ableitungen auf die gleichen Werte wie  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{E}$  führen. Für  $\mathbf{\Sigma}$  und  $\mathbf{\Pi}$  ist dies bereits gewährleistet

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Psi} \mathbf{S} \mathbf{\Psi}^T \cdot \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

<sup>2</sup>Siehe [HT89].

Die Zeitableitungen können so definiert werden, dass sie dasselbe Transformationsverhalten wie die Größen selbst haben. Dann sind alle Skalarprodukte automatisch identisch. Die Verzerrungs- und Spannungsgeschwindigkeiten werden definiert als

$$\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{\Pi}}} = \mathbf{\Psi}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (3.16)$$

und

$$\overset{\nabla}{\dot{\mathbf{\Sigma}}} = \mathbf{\Psi} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{\Psi}^T. \quad (3.17)$$

Aus  $\mathbf{E} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{\Psi}$  folgt mit der Produktregel

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{\Psi}^T \dot{\mathbf{\Pi}} \mathbf{\Psi} + \dot{\mathbf{\Psi}}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{\Psi}} \quad (3.18)$$

und damit

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{\Pi}}} &= \dot{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{\Psi}^{-T} \dot{\mathbf{\Psi}}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{\Psi}} \mathbf{\Psi}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für die Spannungsgeschwindigkeit errechnet sich

$$\overset{\nabla}{\dot{\mathbf{\Sigma}}} = \dot{\mathbf{\Sigma}} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda}^T. \quad (3.20)$$

Die in Kap.3.2 definierten Oldroyd-Ableitungen (2.33) und (2.34) stimmen mit den hier berechneten Ableitungen (3.19) und (3.20) überein. Sie sind objektiv und ergeben sich auf natürliche Weise.

Aufgrund der Definition gelten für die dualen Variablen die Beziehungen

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Pi}, \quad \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{E} = \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{\Sigma}}} \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{\Sigma} \cdot \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{\Pi}}}, \quad \dot{\mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{\Sigma}}} \cdot \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{\Pi}}}, \quad (3.22)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{E})' = \overset{\nabla}{\dot{\mathbf{\Sigma}}} \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Sigma} \cdot \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{\Pi}}}. \quad (3.23)$$

Das Konzept der dualen Variablen wird in der folgenden Herleitung des Materialmodells fortlaufend benutzt und dort nicht mehr explizit erwähnt.

# 4 Materialmodell der Plastizität mit kinematischer Verfestigung für finite Deformationen

Materialmodelle für große Verzerrungen können aus den umfassend erforschten Modellen kleiner Verzerrungen abgeleitet werden. Diese Erweiterung ist jedoch nicht eindeutig. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik liefert eine zusätzliche Gleichung und verringert so die Anzahl aller Möglichkeiten. Trotzdem müssen weitere Annahmen getroffen werden, [TW04].

Das in dieser Arbeit verwendete Materialmodell orientiert sich an dem Modell A aus [TW04], siehe auch [Lio00]. Es ist eine Erweiterung des Armstrong & Frederick Ansatzes, siehe [AF66], auf den Fall der großen Verzerrungen zur Beschreibung kinematischen Verfestigungsverhaltens.

## 4.1 Beschreibung der elastischen und plastischen Deformation

Eine Grundidee der Elastoplastizität ist die Aufteilung des Materialmodells in zwei Teile. Der erste Teil besteht aus der Elastizitätsbeziehung, welche auf einer spannungsfreien Zwischenkonfiguration basiert. Der zweite Teil beschreibt die Entwicklung dieser Zwischenkonfiguration in Abhängigkeit des Deformationsprozesses.

Ein mögliches Konzept, welches diesen Gedanken bei finiten Deformationen umsetzt, ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , siehe [Lio00]. Dieser wird zerlegt in einen elastischen  $\hat{\mathbf{F}}_e$  und einen plastischen Anteil  $\mathbf{F}_p$

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}}_e(t)\mathbf{F}_p(t), \quad (4.1)$$

mit  $\det \hat{\mathbf{F}}_e > 0$ ,  $\det \mathbf{F}_p > 0$ .  $\hat{\mathbf{F}}_e$  entspricht somit  $\Phi$  und  $\mathbf{F}_p$  entspricht  $\Psi$  aus Kap. 3.2. Alle Ergebnisse des Kapitels gelten entsprechend.

$\mathbf{F}_p$  führt auf die sogenannte plastische Zwischenkonfiguration  $\hat{\chi}$  und erfüllt im Allgemeinen nicht mehr die Kompatibilitätsanforderungen.  $\hat{\mathbf{F}}_e$  und  $\mathbf{F}_p$  können somit nicht als Gradienten eines Ortsvektors berechnet werden. Sie werden trotzdem häufig als elastischer und plastischer Deformationsgradient bezeichnet. Die Zwischenkonfiguration ist ein nichteuklidischer Raum, siehe [Hau00]. Dargestellt ist die Zwischenkonfiguration in Abb. 4.1.

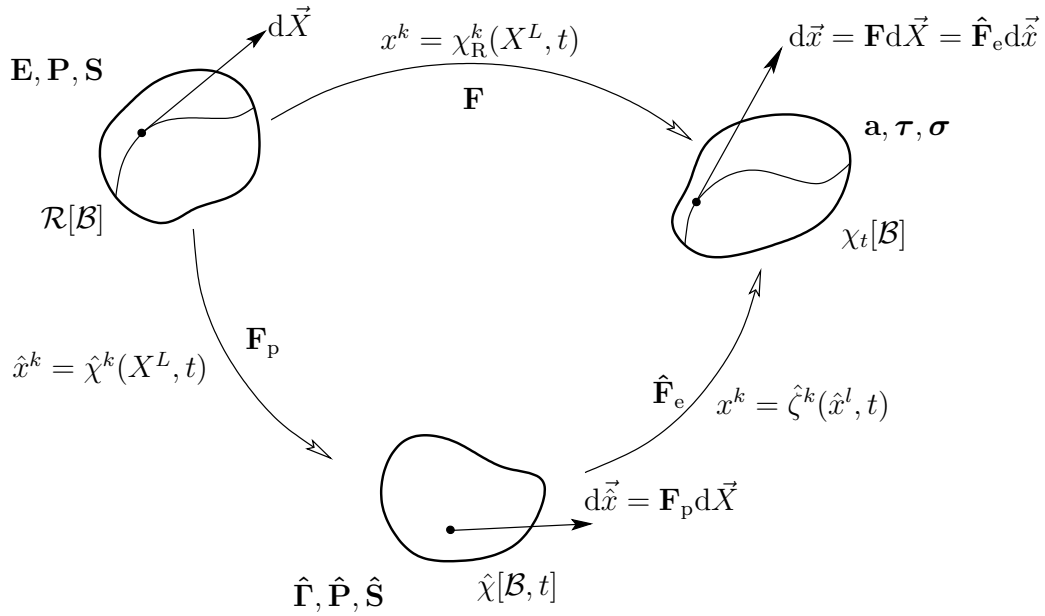


Abbildung 4.1: Plastische Zwischenkonfiguration und zugeordnete Größen

Der elastische Anteil  $\hat{\mathbf{F}}_e$  bestimmt den momentanen Spannungszustand mit einer Elastizitätsbeziehung der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{F}}_e). \quad (4.2)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  ist hierin der Cauchysche Spannungstensor. Die materielle Funktion erfüllt die Bedingung

$$\mathbf{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

D.h. die Zwischenkonfiguration, definiert durch  $(\vec{X}, t) \mapsto \mathbf{F}_p(\vec{X}, t)$ , ist lokal spannungsfrei.

Zu beachten ist auch, dass die multiplikative Zerlegung (4.1) nicht eindeutig ist

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{1} \mathbf{F}_p = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{Q}^{*T} \mathbf{Q}^* \mathbf{F}_p = \hat{\mathbf{F}}_e^* \mathbf{F}_p^*. \quad (4.4)$$

$\mathbf{Q}^*$  ist darin ein beliebiger orthogonaler Tensor. Die freie Wahlmöglichkeit der Rotation  $\mathbf{Q}^*$  muß beim Aufstellen der Elastizitätsbeziehungen berücksichtigt werden. Alle konstitutiven Gleichungen der Elastoplastizität, insbesondere (4.2), müssen invariant gegenüber Drehungen der Zwischenkonfiguration  $\mathbf{Q}^*$  als auch des Bezugssystems  $\mathbf{Q}$  sein.<sup>1</sup>

Mit  $\mathbf{F}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_e$  und  $\mathbf{F}_p$  können die folgenden kinematischen Beziehungen formuliert werden. Hierbei werden alle Größen der plastischen Zwischenkonfiguration  $\hat{\chi}$  mit

<sup>1</sup>Die Funktion (4.2) muss somit isotrop sein, d.h. es muss gelten  $\mathbf{f}(\mathbf{Q}^* \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{Q}^{*T}) = \mathbf{Q}^* \mathbf{f}(\hat{\mathbf{F}}_e) \mathbf{Q}^{*T}$ .



dem hochgestellten Symbol  $\wedge$  gekennzeichnet. Zunächst wird die polare Zerlegung der Deformationsgradienten definiert

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_e = \hat{\mathbf{R}}_e \hat{\mathbf{U}}_e = \mathbf{V}_e \hat{\mathbf{R}}_e, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p = \hat{\mathbf{V}}_p \mathbf{R}_p. \quad (4.7)$$

$\mathbf{R}_x$  bezeichnet hierin einen orthogonalen Tensor und beschreibt den Rotationsanteil der Deformation.  $\mathbf{U}_x$  und  $\mathbf{V}_x$  heißen rechter bzw. linker Strecktensor der jeweiligen Konfiguration.

Der Greensche Verzerrungstensor der Gesamtdeformation ist gegeben durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_p - \mathbf{1}) \quad (4.8)$$

Transformiert in die plastische Zwischenkonfiguration führt er auf

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}_p^{-1}. \quad (4.9)$$

Dieser Verzerrungstensor kann additiv in einen rein elastischen Anteil

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}}_e - \mathbf{1}) \quad (4.10)$$

und einen rein plastischen Anteil

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}_p^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{B}}_p^{-1}) \quad (4.11)$$

zerlegt werden

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p. \quad (4.12)$$

Die Größen  $\hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{U}}_e^2$  und  $\hat{\mathbf{B}}_p = \hat{\mathbf{V}}_p^2$  werden rechter elastischer bzw. linker plastischer Cauchy-Green Tensor genannt.

Mit diesen Bezeichnungen können die Geschwindigkeitstensoren (2.13), (2.17) und (2.18) definiert werden

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} = \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\mathbf{W}}_p, \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T) \quad (4.14)$$

und

$$\hat{\mathbf{W}}_p = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{L}}_p^T). \quad (4.15)$$

Die Oldroyd-Ableitungen (3.19) und (3.20) in Bezug auf  $\hat{\chi}$  lauten

$$\overset{\Delta}{(\hat{\cdot})} = \overset{\cdot}{(\hat{\cdot})} + \hat{\mathbf{L}}_p^T(\hat{\cdot}) + (\hat{\cdot})\hat{\mathbf{L}}_p \quad (4.16)$$

sowie

$$\overset{\nabla}{(\hat{\cdot})} = \overset{\cdot}{(\hat{\cdot})} - \hat{\mathbf{L}}_p(\hat{\cdot}) - (\hat{\cdot})\hat{\mathbf{L}}_p^T. \quad (4.17)$$

Wird von plastischer Inkompressibilität ausgegangen ( $\det \mathbf{F}_p = 1$ ), so folgt

$$(\det \mathbf{F}_p)^\cdot = (\det \mathbf{F}_p) \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p = (\det \mathbf{F}_p) \text{Sp} \left( \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right) = 0 \quad (4.18)$$

und somit

$$\text{Sp} \left( \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right) = \text{Sp} \hat{\mathbf{L}}_p = \text{Sp} \hat{\mathbf{D}}_p = 0. \quad (4.19)$$

Das Materialmodell wird formuliert mit dem Spannungstensor vom Typ zweiter Piola-Kirchhoff Tensor in Bezug auf  $\hat{\chi}$

$$\hat{\mathbf{S}} = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} = \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \quad (4.20)$$

und dem Mandelschen Spannungstensor

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{F}}_e^T \left( \hat{\mathbf{F}}_e \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{F}}_e^T \right) \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \\ &= \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{T}}_e \right) \hat{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Darin wurde der gewichtete Cauchy Tensor

$$\boldsymbol{\tau} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \quad (4.22)$$

eingeführt. Zwischen diesem und dem Mandelschen Spannungstensor besteht der Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{F}}_e^T \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T}. \quad (4.23)$$

## 4.2 Thermodynamische Konsistenz

Um die thermodynamische Konsistenz zu gewährleisten und die erwähnte Mehrdeutigkeit zu verringern, wird der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ausgewertet. Dieser ist für isotherme Deformationen mit gleichmäßiger Spannungsverteilung äquivalent zur Clausius-Duhem Ungleichung

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\psi} \geq 0. \quad (4.24)$$

$\varrho_{\mathcal{R}}$  bezeichnet darin die Massendichte in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}$  und  $\psi$  die spezifische freie Energie.

Wie in Kap. 3.2 gezeigt wird, kann das Produkt  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}$  mit  $\hat{\mathbf{S}}$  und  $\hat{\dot{\Gamma}}$  ausgedrückt werden

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\dot{\Gamma}}. \quad (4.25)$$

(4.24) geht damit über in

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\dot{\Gamma}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\psi} \geq 0. \quad (4.26)$$

Für die spezifische freie Energie wird angenommen, dass sie sich additiv aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammensetzt

$$\psi(t) = \psi_e(t) + \psi_p(t). \quad (4.27)$$

Einsetzen von (4.27) in (4.26) führt auf

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\dot{\Gamma}} - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\psi}_e - \varrho_{\mathcal{R}} \dot{\psi}_p \geq 0. \quad (4.28)$$

Weiterhin wird angenommen, dass  $\psi_e$  eine isotrope Funktion von  $\hat{\Gamma}_e$  ist,

$$\psi_e = \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e) = \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T). \quad (4.29)$$

In diesem Fall ergibt sich die Ableitung<sup>2</sup> von (4.29) zu

$$\frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} = \frac{\partial \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)}{\partial \hat{\Gamma}_e} = \mathbf{Q}^T \frac{\partial \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)}{\partial (\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)} \mathbf{Q}. \quad (4.30)$$

Somit ist die Ableitung (4.30) eine isotrope Tensorfunktion

$$\frac{\partial \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)}{\partial (\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)} = \mathbf{Q} \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} \mathbf{Q}^T \quad (4.31)$$

<sup>2</sup>Siehe hierzu Anh. A.1

und daher koaxial zu  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ .

Nun kann die Zeitableitung der spezifischen freien Energie berechnet werden

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_e &= \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e \\
 &= \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \left( \hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e - \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{D}}_p \right) \\
 &= \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} - \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \underbrace{\left( \hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T \right)}_{2\hat{\mathbf{D}}_p} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_e. \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Da die Ableitung (4.30) koaxial zu  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$  ist, kann (4.32) noch weiter vereinfacht werden

$$\dot{\psi}_e = \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} - \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p. \tag{4.33}$$

Die Clausius-Duhem Ungleichung (4.28) erhält mit diesem Ergebnis die Form

$$\left( \hat{\mathbf{S}} - \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} + \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \varrho_R \dot{\psi}_p \geq 0. \tag{4.34}$$

Für den plastischen Anteil der spezifischen freien Energie  $\psi_p$  wird angenommen, dass er von inneren Zustandsvariablen abhängt. Diese sollen die Verfestigungsantwort des Materials beschreiben. Der Spannungstensor  $\hat{\mathbf{S}}$  wird als Funktion dieser inneren Variablen jedoch nicht ihrer Geschwindigkeiten definiert. Die Entwicklung der inneren Variablen soll von den Variablen selbst und der Deformationsgeschwindigkeit abhängen. Für rein elastische Prozesse werden die plastischen Dehnungen und Verfestigungsvariablen als konstant definiert. D.h.  $\hat{\mathbf{D}}_p$  und  $\dot{\psi}_p$  verschwinden für diese Belastung. Außerdem sind isotherme elastische Prozesse reversibel und in (4.34) gilt somit das Gleichheitszeichen. Daher gilt für solche Prozesse die Elastizitätsbeziehung

$$\hat{\mathbf{S}} = \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e}. \tag{4.35}$$

Es wird angenommen, dass die Elastizitätsbeziehung auch während elastisch-plastischen Prozessen gilt. Aus (4.34) zusammen mit (4.21) und (4.35) folgt dann die sogenannte Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} := \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_e} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \varrho_R \dot{\psi}_p = \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \varrho_R \dot{\psi}_p \geq 0. \tag{4.36}$$

## 4.3 Fließfunktion und Fließregel

Um zwischen dem elastischen und plastischen Bereich zu unterscheiden, wird die sogenannte Fließfunktion  $f(t)$  eingeführt. Sie ist im Mandelschen Spannungsraum definiert

$$f(t) = \hat{f}(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (4.37)$$

und mit ihr werden auch die Evolutionsgleichungen bestimmt. Der Tensor  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  ist der kinematische Verfestigungstensor, welcher vom Mandel-Typ sein soll.

Die Fließfläche gegeben durch

$$\hat{f}(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = 0 \quad (4.38)$$

teilt den Spannungsraum in zwei Bereiche. Alle Zustände innerhalb der Fließfläche sind elastisch, da für jedes  $\hat{\mathbf{M}}$  ein entsprechendes  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_e$  existiert. Zustände auf der Fließfläche sind plastisch und außerhalb der Fließfläche ausgeschlossen. Für die Fließfunktion wird die Form

$$\hat{f}(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D} - k \quad (4.39)$$

angenommen. Die Größe  $k$  kann hierin die isotrope Verfestigung beschreiben, wird zunächst jedoch als konstant angenommen.

Plastisches Fließen tritt ein, sobald sich ein Zustand für  $\mathbf{F}_p = \text{konst.}$  außerhalb der Fließfläche befinden würde. Dieses Kriterium wird in der Belastungsbedingung für den Fall der plastischen Belastung

$$\text{Plastische Belastung} \iff f = 0 \wedge \dot{f}|_{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p, \hat{\boldsymbol{\xi}}=\text{konst.}} \geq 0 \quad (4.40)$$

zusammengefasst.

Für die Evolutionsgleichung von  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p$  wird eine Normalenregel<sup>3</sup> angesetzt

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p = \begin{cases} \dot{s} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{M}}} = \frac{3}{2k} \dot{s} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D, & \text{bei plastischer Belastung} \\ \mathbf{0}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.41)$$

Da  $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p$  deviatorisch ist, folgt mit (4.19)

$$\det \mathbf{F}_p = 1. \quad (4.42)$$

Aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f} = 0$  bei plastischer Belastung kann die plastische Bogenlänge

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \hat{\mathbf{D}}_p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \quad (4.43)$$

berechnet werden.

<sup>3</sup>Zur Normalenregel siehe [Lub02]. Oftmals wird die Normalenregel postuliert, sie ergibt sich aber auch aus dem Postulat von Il'iusin. Dies wird z.B. in [Tsa94] diskutiert.

## 4.4 Armstrong & Frederick Ansatz

Als nächstes soll der Armstrong & Frederick Ansatz, [AF66], auf finite Deformationen verallgemeinert werden. Die kinematische Verfestigung soll durch die innere Variable  $\hat{\mathbf{Y}}$ , welche ein Verzerrungstensor in Bezug auf  $\hat{\chi}$  ist, beschrieben werden. Die spezifische freie plastische Energie ist somit eine Funktion von  $\hat{\mathbf{Y}}$  und wird definiert als

$$\psi_p = \hat{\psi}_p(\hat{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{2\varrho_R} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \overset{\Delta}{\mathcal{K}} \hat{\mathbf{Y}} \quad (4.44)$$

mit

$$\overset{\Delta}{\mathcal{K}} = c_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + c_2 \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{1}} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right]. \quad (4.45)$$

Die Ableitung von  $\psi_p$  ist

$$\hat{\mathbf{Z}} = \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} = \overset{\Delta}{\mathcal{K}} \hat{\mathbf{Y}} = c_1 (\text{Sp } \hat{\mathbf{Y}}) \mathbf{1} + c_2 \hat{\mathbf{Y}}^D. \quad (4.46)$$

$\psi_p$  und  $\hat{\mathbf{Z}}$  werden nun in die Dissipationsungleichung eingesetzt. Zunächst ergibt sich für die materielle Zeitableitung von  $\psi_p$

$$\varrho_R \dot{\psi}_p = \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}}. \quad (4.47)$$

Für (4.36) folgt dann

$$\mathcal{D} = \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} = (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p + \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} \geq 0. \quad (4.48)$$

Im plastischen Bereich gilt außerdem (4.41)<sub>1</sub> und das erste Skalarprodukt in (4.48) führt damit auf

$$(\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p = (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \frac{3\dot{s}}{2k} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D = \frac{3\dot{s}}{2k} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D. \quad (4.49)$$

Aus der Fließbedingung  $\hat{f} = 0$  folgt mit (4.39) für plastische Belastungen

$$\frac{3}{2} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D = k^2. \quad (4.50)$$

Damit vereinfacht sich das Skalarprodukt (4.49) zu

$$(\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p = \dot{s}k. \quad (4.51)$$

Die Dissipationsungleichung hat somit die Form

$$\mathcal{D} = \dot{s}k + \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} \geq 0. \quad (4.52)$$

Da  $\dot{s}k$  immer positiv ist, ist die Bedingung

$$\mathcal{D}_k := \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} \geq 0 \quad (4.53)$$

hinreichend.

## 4.5 Dissipative Zwischenkonfiguration

In der Kristallplastizität wird davon ausgegangen, dass die plastischen Verzerrungen mit Versetzungsbewegungen in Zusammenhang stehen, [TW04]. Um eine dementsprechende Interpretation des inneren Verzerrungstensors  $\hat{\mathbf{Y}}$  zu erhalten, wird der plastische Deformationsgradient multiplikativ zerlegt

$$\mathbf{F}_p = \tilde{\mathbf{F}}_k \mathbf{F}_r, \quad (4.54)$$

mit  $\det \mathbf{F}_r > 0$ .  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  steht hierbei im Zusammenhang mit den Effekten der kinematischen Verfestigung und der Energie, welche im Material gespeichert wird. Die gespeicherte Energie kommt hauptsächlich aus der Entstehung, Behinderung und Aufhebung von Versetzungen. Hierdurch ändert sich die Versetzungsdichte und -verteilung. Der aus dem Deformationsgradienten  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  abgeleitete Verzerrungstensor wird daher im Folgenden mit  $\hat{\mathbf{Y}}$  gleichgesetzt. Der Anteil  $\mathbf{F}_r$  hingegen ruft die Spannungsleistung hervor, welche als Wärme dissipiert wird.

Die Größen der neu eingeführten Konfiguration  $\tilde{\chi}$  werden mit dem Symbol  $\sim$  gekennzeichnet. In Abb. 4.2 sind alle vier Konfigurationen dargestellt.

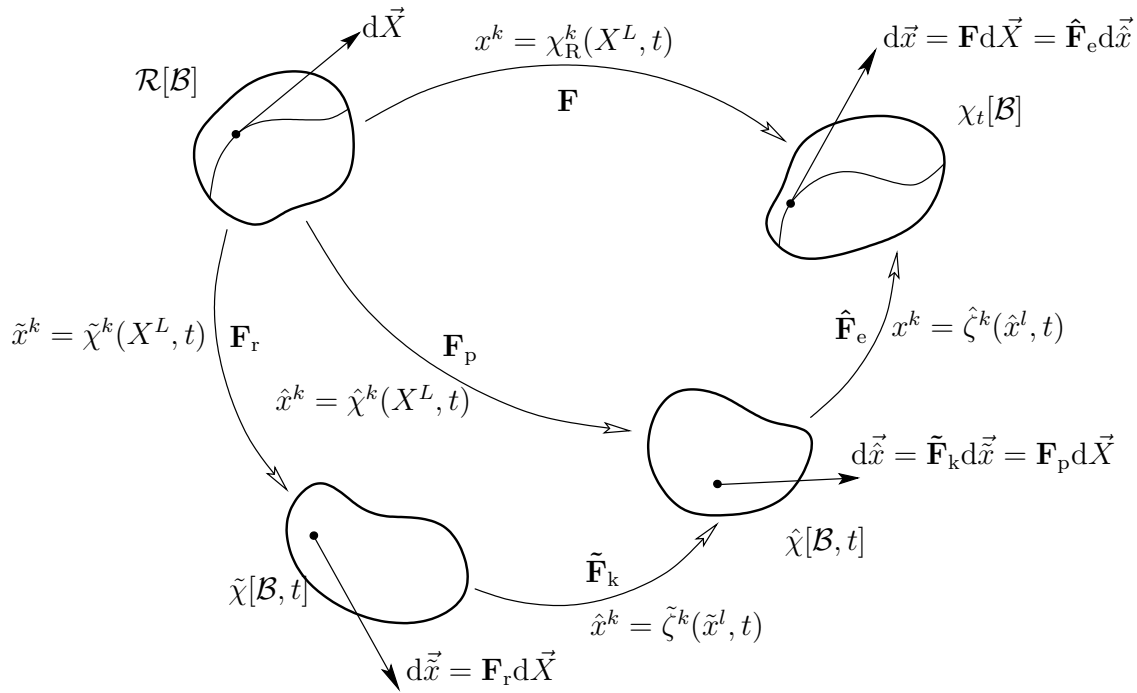


Abbildung 4.2: Dissipative Zwischenkonfiguration und zugeordnete Größen

In Analogie zu den zuvor eingeführten Größen werden für die neue Zwischenkonfiguration die folgenden Abkürzungen definiert

- die polare Zerlegung von  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  und  $\mathbf{F}_r$

$$\tilde{\mathbf{F}}_k = \tilde{\mathbf{R}}_k \tilde{\mathbf{U}}_k = \mathbf{V}_k \tilde{\mathbf{R}}_k, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{U}_r = \tilde{\mathbf{V}}_r \mathbf{R}_r, \quad (4.56)$$

- der Verzerrungstensor

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}}_k - \mathbf{1}), \quad \tilde{\mathbf{C}}_k = \tilde{\mathbf{F}}_k^T \tilde{\mathbf{F}}_k = \tilde{\mathbf{U}}_k^2, \quad (4.57)$$

- der Verzerrungstensor

$$\tilde{\gamma}_r = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}_r^{-1}), \quad \tilde{\mathbf{B}}_r = \mathbf{F}_r \mathbf{F}_r^T = \tilde{\mathbf{V}}_r^2, \quad (4.58)$$

- der transformierte Verzerrungstensor

$$\tilde{\gamma}_p = \tilde{\mathbf{F}}_k^T \hat{\Gamma}_p \tilde{\mathbf{F}}_k = \tilde{\gamma}_k + \tilde{\gamma}_r \quad (4.59)$$

- und der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\tilde{\mathbf{L}}_r = \dot{\mathbf{F}}_r \mathbf{F}_r^{-1}, \quad (4.60)$$

- sowie der symmetrische Anteil davon

$$\tilde{\mathbf{D}}_r = \overset{\Delta}{\tilde{\gamma}}_r = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{L}}_r + \tilde{\mathbf{L}}_r^T). \quad (4.61)$$

Die Oldroyd-Ableitungen (3.19) und (3.20) sind für die neue Zwischenkonfiguration

$$\overset{\Delta}{(\dot{\tilde{\gamma}})} = \overset{\cdot}{(\tilde{\gamma})} + \tilde{\mathbf{L}}_r^T(\tilde{\gamma}) + (\tilde{\gamma})\tilde{\mathbf{L}}_r \quad (4.62)$$

sowie

$$\overset{\nabla}{(\dot{\tilde{\gamma}})} = \overset{\cdot}{(\tilde{\gamma})} - \tilde{\mathbf{L}}_r(\tilde{\gamma}) - (\tilde{\gamma})\tilde{\mathbf{L}}_r^T. \quad (4.63)$$



Die Transformation des Verzerrungstensors  $\hat{\Gamma}_p$  in die Konfiguration  $\tilde{\chi}$  ist

$$\tilde{\gamma}_p = \tilde{\mathbf{F}}_k^T \hat{\Gamma}_p \tilde{\mathbf{F}}_k. \quad (4.64)$$

Und seine Oldroyd-Ableitung lautet

$$\hat{\tilde{\gamma}}_p = \tilde{\mathbf{F}}_k^T \hat{\tilde{\Gamma}}_p \tilde{\mathbf{F}}_k = \hat{\tilde{\gamma}}_k + \hat{\tilde{\gamma}}_r. \quad (4.65)$$

Ebenso können die Gleichungen für  $\tilde{\gamma}_p$  und  $\hat{\tilde{\gamma}}_p$  in der Konfiguration  $\hat{\chi}$  ausgedrückt werden. Die Beziehungen und Formeln sind in den Abb. 4.3 und 4.4 zusammengefasst.

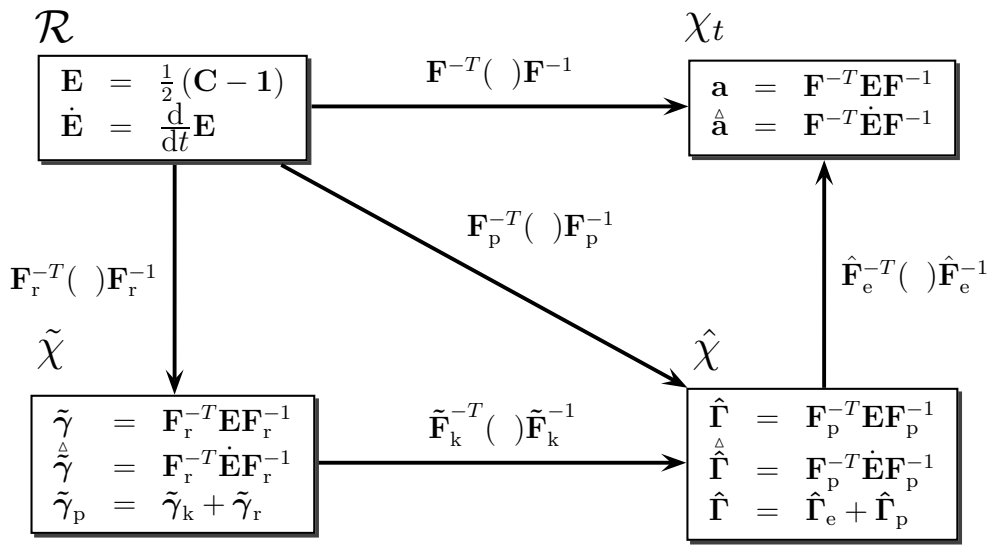


Abbildung 4.3: Transformation der Verzerrungsgrößen

Da der Verzerrungstensor  $\hat{\Gamma}_k$  die kinematischen Verfestigungen beschreibt, wird er mit  $\hat{\mathbf{Y}}$  identifiziert

$$\hat{\mathbf{Y}} := \hat{\Gamma}_k. \quad (4.66)$$

Weiterhin wird von Inkompressibilität für die Konfiguration  $\tilde{\chi}$  ausgegangen, d.h.  $\det \mathbf{F}_r = 1$  oder äquivalent  $\text{Sp } \tilde{\mathbf{D}}_r = 0$ .

Der innere Spannungstensor (4.46)

$$\hat{\mathbf{Z}} = c_1(\text{Sp } \hat{\Gamma}_k)\mathbf{1} + c_2\hat{\Gamma}_k^D \quad (4.67)$$

transformiert sich in Bezug auf  $\tilde{\chi}$  zu

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1}\hat{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{F}}_k^{-T}. \quad (4.68)$$



Dies kann gewährleistet werden, indem z.B.

$$\hat{\tilde{\gamma}}_r = \hat{\tilde{\gamma}}_p - \hat{\tilde{\gamma}}_k = \dot{s}\mathcal{N}^4\tilde{\mathbf{Z}}^D = \dot{s}\beta_1\tilde{\mathbf{Z}}^D \quad (4.72)$$

gewählt wird, mit

$$\mathcal{N}^4 = \beta_1 \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right].$$

(4.72) kann nach  $\hat{\tilde{\gamma}}_p$  umgestellt werden

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\gamma}}_p &= \hat{\tilde{\gamma}}_k + \dot{s}\beta_1\tilde{\mathbf{Z}}^D \\ &= \hat{\tilde{\gamma}}_k + \dot{s}\beta_1 \left[ \tilde{\mathbf{Z}} - \frac{1}{3}(\text{Sp } \tilde{\mathbf{Z}})\mathbf{1} \right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

In Bezug auf die Konfiguration  $\hat{\chi}$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_k &= \tilde{\mathbf{F}}_k^{-T} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{F}}_k^T \tilde{\mathbf{F}}_k - \mathbf{1})}_{\tilde{\gamma}_k} \right] \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{F}}_k^{-T} \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}_k^{-1}). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Auflösen von (4.74) nach  $\tilde{\mathbf{B}}_k^{-1}$  ergibt

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^{-1} = \mathbf{1} - 2\hat{\Gamma}_k. \quad (4.75)$$

Damit hat der Verfestigungstensor (4.70) die Form

$$\hat{\xi} = \tilde{\mathbf{B}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}. \quad (4.76)$$

## 4.6 Elastizitätsbeziehung

Die Elastizitätsbeziehung (4.35) ergibt sich aus der Formänderungsenergie  $\hat{\psi}_e$ . Da  $\hat{\Gamma}_e$  eine Funktion des elastischen rechten Cauchy-Green Tensors  $\hat{\mathbf{C}}_e$  ist, führt die Kettenregel auf

$$\hat{\mathbf{S}} = \varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \hat{\Gamma}_e} = 2\varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e}. \quad (4.77)$$

Es wird angenommen, dass sich die Formänderungsenergie additiv aus zwei Anteilen zusammensetzt

$$\hat{\psi}_e(\hat{J}_e, \overline{\hat{\mathbf{C}}}_e) = U(\hat{J}_e) + \bar{w}(\overline{\hat{\mathbf{C}}}_e). \quad (4.78)$$

Der erste Anteil  $U(\hat{J}_e)$  resultiert aus dem volumenändernden Deformationsanteil und ist somit eine Funktion von  $\hat{J}_e = \sqrt{\det \hat{\mathbf{C}}_e} = \det \hat{\mathbf{F}}_e = \varepsilon_{v,e}$ . Da plastische Inkompressibilität angenommen wird, folgt außerdem

$$\hat{J}_e = \det \hat{\mathbf{F}}_e = \det \mathbf{F} = J. \quad (4.79)$$

Der zweite Anteil  $\bar{w}(\bar{\mathbf{C}}_e)$  in (4.78) kommt aus dem gestaltsändernden Deformationsanteil. Er hängt nur von dem unimodularen rechten Cauchy-Green Tensor

$$\bar{\mathbf{C}}_e = (\det \hat{\mathbf{C}}_e)^{-\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{C}}_e \quad (4.80)$$

ab. Für diesen gilt offensichtlich  $\det \bar{\mathbf{C}}_e = 1$ .

Für den volumenändernden Anteil wird nun der Ansatz

$$U(\hat{J}_e) = \frac{K}{2}(\hat{J}_e - 1)^2 \quad (4.81)$$

gewählt. Die Variable  $K$  bezeichnet den Kompressionsmodul.

Die Formänderungsenergie des volumenerhaltenden Anteils  $\bar{w}(\bar{\mathbf{C}}_e)$  wird gemäß dem Ansatz von Rivlin & Saunders, siehe [Har03] und die dort zitierte Literatur, als Polynom in den ersten beiden Invarianten<sup>4</sup> angesetzt

$$\bar{w}(\bar{\mathbf{C}}_e) = w(\bar{\mathbf{I}}_{\bar{\mathbf{C}}_e}, \bar{\mathbf{II}}_{\bar{\mathbf{C}}_e}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} (\bar{\mathbf{I}}_{\bar{\mathbf{C}}_e} - 3)^i (\bar{\mathbf{II}}_{\bar{\mathbf{C}}_e} - 3)^j. \quad (4.82)$$

Das einfachste Modell dieser Klasse ist das Neo-Hooke Modell. Hierbei werden alle Koeffizienten bis auf  $c_{10}$  auf Null gesetzt. Es folgt

$$w(\bar{\mathbf{I}}_{\bar{\mathbf{C}}_e}) = c_{10}(\bar{\mathbf{I}}_{\bar{\mathbf{C}}_e} - 3). \quad (4.83)$$

Die Formänderungsenergie wird insgesamt als

$$\hat{\psi}_e(\hat{J}_e, \bar{\mathbf{C}}_e) = \frac{K}{2}(\hat{J}_e - 1)^2 + c_{10}(\bar{\mathbf{I}}_{\bar{\mathbf{C}}_e} - 3) \quad (4.84)$$

angesetzt.

Für den zweiten Piola-Kirchhoff Tensor ergibt sich damit<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} &= 2\varrho_R \frac{\partial \hat{\psi}_e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \\ &= \varrho_R K (\hat{J}_e - 1) \hat{J}_e \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} + 2\varrho_R c_{10} (\det \hat{\mathbf{C}}_e)^{-\frac{1}{3}} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\text{Sp } \bar{\mathbf{C}}_e) \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

---

<sup>4</sup>Als Invarianten eines Tensors  $\mathbf{T}$  werden häufig

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathbf{T}} &= \text{Sp } \mathbf{T}, \\ \mathbf{II}_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} \left( \text{Sp } \mathbf{T}^2 - (\text{Sp } \mathbf{T})^2 \right), \\ \mathbf{III}_{\mathbf{T}} &= \det \mathbf{T} \end{aligned}$$

gewählt. Andere Kombinationen sind selbstverständlich auch möglich.

<sup>5</sup>Siehe Anh. A.2.

## Zusammenfassung der wichtigsten Gleichungen

Additive Zerlegung der Deformation in der P-Zwischenkonfiguration

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \hat{\mathbf{\Gamma}}^T \quad (4.12)$$

Mandelsche Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{M}}^T \quad (4.21)$$

Fließfunktion

$$\hat{f} = \sqrt{\frac{3}{2}(\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D} - k \quad (4.39)$$

1. Fließregel (impliziert  $\det \mathbf{F}_p = 1$ )

$$\dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_p = \frac{3}{2k} \dot{s} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \quad (4.41)$$

Innerer Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{Z}} = c_1 (\text{Sp } \hat{\mathbf{\Gamma}}_k) \mathbf{1} + c_2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_k^D = \hat{\mathbf{Z}}^T \quad (4.67)$$

Additive Zerlegung der Deformation in der R-Zwischenkonfiguration

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_p = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_k + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_r \quad (4.59)$$

Verfestigungstensor

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{1} - 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_k) \hat{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{B}}_k^{-1} \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^T \quad (4.70)$$

2. Fließregel (impliziert  $\det \mathbf{F}_r = 1$ )

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}_r = \dot{s} \mathcal{N} \tilde{\mathbf{Z}}^D = \dot{s} \beta_1 \tilde{\mathbf{Z}}^D \quad (4.72)$$

Hyperelastizitätsbeziehung

$$\hat{\mathbf{S}} = \varrho_R K (\hat{J}_e - 1) \hat{J}_e \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} + 2\varrho_R c_{10} (\det \hat{\mathbf{C}}_e)^{-\frac{1}{3}} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\text{Sp } \overline{\hat{\mathbf{C}}_e}) \overline{\hat{\mathbf{C}}_e}^{-1} \right] \quad (4.85)$$

## 4.7 Transformation in die Referenzkonfiguration

Um bei der späteren Integration der Fließregeln keine zusätzlichen Terme beachten zu müssen, werden alle Größen in die Referenzkonfiguration transformiert.

Der zweite Piola-Kirchhoff Tensor  $\mathbf{S}$  ergibt sich aus (4.85) mit der Transformationsvorschrift (3.8) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{F}_p^{-T} \\ &= \varrho_R K (J - 1) J \mathbf{C}^{-1} + 2 \varrho_R c_{10} J^{-\frac{2}{3}} \left[ \mathbf{C}_p^{-1} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) \mathbf{C}^{-1} \right].\end{aligned}\quad (4.86)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass

$$\text{Sp}(\hat{\mathbf{C}}_e) = \text{Sp}(\mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{C}}_e \mathbf{F}_p^{-T}) = \text{Sp}(\mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{-T}) = \text{Sp}(\mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) \quad (4.87)$$

und

$$\mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} = \mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \mathbf{F}_p^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{C}^{-1} \quad (4.88)$$

gilt.

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch der innere Spannungstensor  $\hat{\mathbf{Z}}$  aus (4.67). Er hat in der Referenzkonfiguration die Darstellung

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p^{-T} \quad (4.89)$$

$$= \mathbf{F}_p^{-1} \left[ c_1 \text{Sp}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_k) \mathbf{1} + c_2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_k^D \right] \mathbf{F}_p^{-T} \quad (4.90)$$

$$= \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right) \text{Sp}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_k) \mathbf{C}_p^{-1} + c_2 \mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{\Gamma}}_k \mathbf{F}_p^{-T}. \quad (4.91)$$

Da (4.74) gilt, folgt für die Spur des Verzerrungstensors  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$

$$\begin{aligned}\text{Sp} \hat{\mathbf{\Gamma}}_k &= \frac{1}{2} \text{Sp} \left( \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{F}}_k^{-T} \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 3 - \text{Sp} \left( \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \mathbf{F}_p^{-1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 3 - \text{Sp} \left( \mathbf{C}_r \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \right) \right)\end{aligned}\quad (4.92)$$

und für den Verzerrungstensor selbst folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{\Gamma}}_k \mathbf{F}_p^{-T} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{F}_p^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_k^{-T} \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \right).\end{aligned}\quad (4.93)$$

Insgesamt ergibt sich somit für den inneren Spannungstensor

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right) \left( 3 - \text{Sp}(\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right) \mathbf{C}_p^{-1} + \frac{c_2}{2} \left( \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \right). \quad (4.94)$$

Die Transformation des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$  führt auf

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \mathbf{F}_p &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_p^T \left( \hat{\mathbf{L}}_p^T + \hat{\mathbf{L}}_p \right) \mathbf{F}_p \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_p^T \left( \mathbf{F}_p^{-T} \dot{\mathbf{F}}_p^T + \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right) \mathbf{F}_p \\
 &= \left( \dot{\mathbf{F}}_p^T \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^T \dot{\mathbf{F}}_p \right) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_p^T \dot{\mathbf{F}}_p \right) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_p.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Sie stimmt daher mit der Hälfte der materiellen Zeitableitung des rechten Cauchy-Green Tensors relativ zur plastischen Konfiguration  $\hat{\chi}$  überein. Für diese folgt

$$\dot{\mathbf{C}}_p = 2 \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \mathbf{F}_p. \tag{4.96}$$

Dasselbe ergibt sich für den rechten Cauchy-Green Tensor relativ zur dissipativen Konfiguration  $\tilde{\chi}$

$$\dot{\mathbf{C}}_r = 2 \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_r \mathbf{F}_p. \tag{4.97}$$

Um (4.96) berechnen zu können, müssen noch die Transformationen des Mandel-schen Spannungstensors und des Verfestigungstensors bekannt sein.

Für den Mandelschen Spannungstensor (4.21) berechnet sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{C}}_e \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p \mathbf{S} \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \\
 &= \mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{C}_p.
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Und der Verfestigungstensor (4.70) hat in der Referenzkonfiguration die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^T \hat{\mathbf{\xi}} \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_p^T \tilde{\mathbf{B}}_k^{-1} \hat{\mathbf{\xi}} \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p^T \tilde{\mathbf{F}}_k^{-T} \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1} \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_r^T \tilde{\mathbf{F}}_k^{-1} \mathbf{F}_p \mathbf{Z} \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p \\
 &= \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{Z} \mathbf{C}_r.
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

Die Differenz der beiden transformierten Tensoren ist

$$\mathbf{F}_p^T \left( \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{\xi}} \right) \mathbf{F}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p. \tag{4.100}$$

Darüber hinaus wird noch die Spur der Differenz benötigt, für diese folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Sp} \left( \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{\xi}} \right) &= \text{Sp} \left[ \mathbf{F}_p^{-T} \left( \mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p \right) \mathbf{F}_p^{-1} \right] \\
 &= \text{Sp} \left( \mathbf{F}_p \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{F}_p^{-1} \right) - \text{Sp} \left( \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{F}_p^T \right) \\
 &= \text{Sp} \left( \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \right).
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Jetzt sind alle benötigten Größen bekannt und die Zeitableitung von  $\mathbf{C}_p$  ergibt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_p &= \lambda \frac{\sqrt{6}}{k} \mathbf{F}_p^T \left[ (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) - \frac{1}{3} \text{Sp} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{1} \right] \mathbf{F}_p \\ &= \lambda \frac{\sqrt{6}}{k} \left[ \mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p - \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \mathbf{C}_p \right].\end{aligned}\quad (4.102)$$

Zur Transformation der zweiten Fließregel sind bereits alle benötigten Größen bekannt und es folgt direkt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_r &= 2\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 \mathbf{F}_r^T \left[ \tilde{\mathbf{Z}} - \frac{1}{3} \text{Sp} (\tilde{\mathbf{Z}}) \mathbf{1} \right] \mathbf{F}_r \\ &= \lambda \sqrt{\frac{8}{3}} \beta_1 \mathbf{F}_r^T \left[ \mathbf{F}_r \mathbf{Z} \mathbf{F}_r^T - \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{F}_r \mathbf{Z} \mathbf{F}_r^T) \mathbf{1} \right] \mathbf{F}_r \\ &= \lambda \sqrt{\frac{8}{3}} \beta_1 \left[ \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_r - \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{Z} \mathbf{C}_r) \mathbf{C}_r \right].\end{aligned}\quad (4.103)$$

Um die Fließfunktion in der Referenzkonfiguration zu formulieren, wird das Skalarprodukt von der Differenz  $\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}$  mit sich selbst benötigt. Zusammen mit (4.100) folgt

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}) &= \mathbf{F}_p^{-T} (\mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p) \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-T} (\mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p) \mathbf{F}_p^{-1} \\ &= (\dots) \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} (\dots) \\ &= (\dots) \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} (\dots) \\ &= (\mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p).\end{aligned}\quad (4.104)$$

Die Fließfunktion hat in  $\mathcal{R}$  die Form

$$\begin{aligned}f &= \sqrt{\frac{3}{2} (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^{\text{D}} \cdot (\hat{\mathbf{M}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^{\text{D}} - k} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \left[ (\mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p) \right.} \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left[ \text{Sp} (\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - k.\end{aligned}\quad (4.105)$$



## Zusammenfassung der Gleichungen in der Referenzkonfiguration

Hyperelastizitätsbeziehung

$$\mathbf{S} = \varrho_{\text{R}} K (J - 1) J \mathbf{C}^{-1} + 2\varrho_{\text{R}} c_{10} J^{-\frac{2}{3}} \left[ \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{C} \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1}) \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (4.86)$$

Innerer Spannungstensor

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right) \left( 3 - \text{Sp}(\mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1}) \right) \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} + \frac{c_2}{2} \left( \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} - \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} \right) \quad (4.94)$$

1. Fließregel (impliziert  $\det \mathbf{C}_{\text{p}} = 1$ )

$$\dot{\mathbf{C}}_{\text{p}} = \lambda \frac{\sqrt{6}}{k} \left[ \mathbf{C}_{\text{p}} \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z} \mathbf{C}_{\text{p}} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z}) \mathbf{C}_{\text{p}} \right] \quad (4.102)$$

2. Fließregel (impliziert  $\det \mathbf{C}_{\text{r}} = 1$ )

$$\dot{\mathbf{C}}_{\text{r}} = \lambda \sqrt{\frac{8}{3}} \beta_1 \left[ \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z} \mathbf{C}_{\text{r}} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{Z} \mathbf{C}_{\text{r}}) \mathbf{C}_{\text{r}} \right] \quad (4.103)$$

Fließfunktion

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ (\mathbf{C}_{\text{p}} \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} - \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z}) \cdot (\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{p}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z} \mathbf{C}_{\text{p}}) - \frac{1}{3} \left[ \text{Sp}(\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\text{r}} \mathbf{Z}) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - k \quad (4.105)$$

Die Gleichungen haben die allgemeine Form

$$\mathbf{S} = \mathbf{h}(\mathbf{C}, \mathbf{C}_{\text{p}}), \quad (4.106)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\text{p}} = \lambda \mathbf{r}_{\text{p}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}_{\text{p}}, \mathbf{C}_{\text{r}}), \quad (4.107)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\text{r}} = \lambda \mathbf{r}_{\text{r}}(\mathbf{C}_{\text{p}}, \mathbf{C}_{\text{r}}), \quad (4.108)$$

$$f = r_{\text{f}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}_{\text{p}}, \mathbf{C}_{\text{r}}). \quad (4.109)$$

Werden noch die rechten Cauchy-Green Tensoren der Zwischenkonfigurationen  $\mathbf{C}_{\text{p}}$  und  $\mathbf{C}_{\text{r}}$  in dem Vektor der inneren Variablen  $\mathbf{q}$  zusammengefasst, so kann das

System kompakt geschrieben werden als

$$\mathbf{S} = \mathbf{h}(\mathbf{C}, \mathbf{q}), \quad (4.110)$$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}(\mathbf{C}, \mathbf{q}), \quad (4.111)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0, \quad \text{für } t = t_0. \quad (4.112)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat die Form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.113)$$

Das Gleichungssystem (4.111) ist ein sogenanntes Algebro-Differentialgleichungssystem. Die Differentialgleichungen sind hierbei mit einer algebraischen Nebenbedingung gekoppelt.

## 4.8 Erweiterung des Materialmodells um viskose Eigenschaften

Zur Erweiterung des Materialmodells werden in [Hau00] zwei Möglichkeiten vorgeschlagen. Bei der ersten Möglichkeit wird der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  in einen Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{S}_{\text{eq}}$  und einen Überspannungsanteil  $\mathbf{S}_{\text{ov}}$  aufgeteilt

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{eq}} + \mathbf{S}_{\text{ov}}. \quad (4.114)$$

Für sehr langsame Prozesse oder verschwindende Viskosität geht der Überspannungsanteil  $\mathbf{S}_{\text{ov}}$  gegen Null. Es bietet sich an, den Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{S}_{\text{eq}}$  mit dem elasto-plastischen Materialmodell gleichzusetzen. Für den Überspannungsanteil kann ein Materialmodell aus der Klasse der visko-elastischen Materialien gewählt werden. Bei diesem werden die Materialparameter der Elastizität zu Null gesetzt.

Eine andere Möglichkeit ist den plastischen Multiplikator  $\lambda$  neu zu definieren. Im Fall der Elastoplastizität wird  $\lambda$  derart bestimmt, dass die Bedingung  $f = 0$  erfüllt wird. Für die Viskoplastizität wird diese Forderung fallen gelassen. Der plastische Multiplikator wird definiert als

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{f}{\sigma_0} \right\rangle^r. \quad (4.115)$$

Darin ist die Klammer  $\langle \rangle$  die sogenannte Föppel oder MacCauley Klammer. Für diese gilt

$$\langle x \rangle^r = \begin{cases} x^r, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}. \quad (4.116)$$

Für  $f \leq 0$  verschwindet  $\lambda$  und die inneren Variablen bleiben konstant. Somit teilt  $f = 0$  auch hier den Spannungsraum in einen elastischen und inelastischen Bereich. Die Konstante  $\sigma_0$  normiert und enddimensionalisiert den Wert von  $f$ . Der Parameter  $\eta$  hat die Bedeutung einer Viskosität und der Exponent  $r$  ist eine Materialkonstante, welche die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit beschreibt.

Zusätzlich muss die Fließregel (4.102) angepasst werden, da im Fall der Viskoelastizität  $f \neq 0$  gilt. Es folgt somit

$$\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda \frac{\sqrt{6}}{f + k} \left[ \mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z} \mathbf{C}_p - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \mathbf{C}_p \right]. \quad (4.117)$$

In [Hau00] wird gezeigt, dass für  $r = 1$  und  $\eta \rightarrow 0$  als Grenzfall das Modell der Elastoplastizität folgt. Der zweite Ansatz, der auch in [Lüh97] angewendet wird, wird im Folgenden gewählt. In diesem Fall ist die Matrix  $\mathbf{A}$  gleich der Einheitsmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (4.118)$$

und der Vektor der inneren Variablen hat die Form

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{C}_r \end{array} \right\}. \quad (4.119)$$



# 5 Methode der finiten Elemente

Der Zustand eines Körpers wird durch die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik beschrieben. Das daraus resultierende Gleichungssystem ist jedoch unvollständig und muss durch die Materialgleichungen geschlossen werden. Zusammen mit geeigneten Anfangswerten und Randbedingungen bilden die Gleichungen ein sogenanntes Anfangsrandwertproblem (ARWP), siehe [Har93], [Lüh97]. Dieses wird hier zunächst entwickelt, danach wird die Lösung mit der Methode der finiten Elemente skizziert.

## 5.1 Impulsbilanz

Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  eines Körpers  $\mathcal{B}$ , mit der spezifischen Dichte  $\varrho(\vec{x}, t)$  bzw.  $\varrho_{\text{R}}(\vec{X})$  in der Referenzkonfiguration, wird durch den Impulsvektor  $\vec{I}$  und den Drehimpulsvektor  $\vec{D}$  charakterisiert. Der Impuls

$$\vec{I}(\mathcal{B}, t) = \iiint_{\chi_t[\mathcal{B}]} \vec{v}(\vec{x}, t) \varrho(\vec{x}, t) dv = \iiint_{\mathcal{R}[\mathcal{B}]} \vec{v}(\vec{X}, t) \varrho_{\text{R}}(\vec{X}) dV \quad (5.1)$$

steht im Zusammenhang mit den äußeren Kräften

$$\vec{F}(\mathcal{B}, t) = \iint_{\partial\chi_t[\mathcal{B}]} \vec{t} da + \iiint_{\chi_t[\mathcal{B}]} \vec{k} \varrho dv, \quad (5.2)$$

welche auf den Körper wirken. Diese setzen sich aus zwei Anteilen zusammen. Der Erste resultiert aus den an der Oberfläche des Körpers angreifenden Kräften,  $\vec{t} da$ . Die Oberflächenkraftdichte  $\vec{t}$  wird als Spannungsvektor bezeichnet. Der zweite Anteil ergibt sich aus den volumenverteilten Kräften,  $\vec{k} \varrho dv$ . Ein Beispiel für die Volumenkraftdichte  $\vec{k}$  ist die Gravitationsbeschleunigung.

Der Zusammenhang zwischen dem Impuls eines Körpers und der auf ihn wirkenden resultierenden Kraft ist gegeben durch die Impulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \vec{I}(\mathcal{B}, t) = \vec{F}(\mathcal{B}, t). \quad (5.3)$$

In der Kontinuumsmechanik wird üblicherweise vom Cauchyschen Spannungsprinzip ausgegangen. Nach diesem hängt der Spannungsvektor  $\vec{t}$  neben dem Ort  $\vec{x}$

und der Zeit  $t$  nur vom Normalenvektor  $\vec{n}$  der Oberfläche ab. Es folgt dann<sup>1</sup> das Cauchysche Fundamentaltheorem

$$\vec{t}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t)\vec{n}. \quad (5.4)$$

Mit diesem Zusammenhang und dem Divergenztheorem können nun das Oberflächenintegral und das Volumenintegral in (5.2) zusammengefasst werden

$$\vec{F}(\mathcal{B}, t) = \iiint_{\chi_t[\mathcal{B}]} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \vec{k}) \, dv. \quad (5.5)$$

Der Impulssatz kann somit geschrieben werden als

$$\iiint_{\chi_t[\mathcal{B}]} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \vec{k} - \varrho \dot{\vec{v}}) \, dv = \vec{0}. \quad (5.6)$$

Wenn der Integrand stetig und hinreichend glatt ist, so ist die integrale Formulierung gleichwertig mit der lokalen Formulierung in der Momentankonfiguration

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \vec{k} - \varrho \dot{\vec{v}} = \vec{0} \quad (5.7)$$

oder in der Referenzkonfiguration

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \varrho_R \vec{k} - \varrho_R \dot{\vec{v}} = \vec{0}. \quad (5.8)$$

Der Tensor  $\mathbf{P}$  ist der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und ist definiert als

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \mathbf{S}. \quad (5.9)$$

Der Rand des Körpers  $\partial \mathcal{B}$  kann in zwei Bereiche aufgeteilt werden  $\partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}_\sigma + \partial \mathcal{B}_u$ . Auf dem Rand  $\partial \mathcal{B}_\sigma$  sind die Spannungen vorgegeben und auf dem Rand  $\partial \mathcal{B}_u$  sind die Verschiebungen bekannt. Die Randbedingungen werden als dynamische (Neumann) Randbedingungen bzw. geometrische (Dirichlet) Randbedingungen bezeichnet.

Für Problemstellungen der isothermen, quasistatischen Festkörpermechanik ergibt sich somit in der Referenzkonfiguration das ARWP

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Div} \mathbf{P} + \varrho_R \vec{k} = \vec{0}, \\ \mathbf{P} = \mathbf{h}(\mathbf{E}, \mathbf{q}), \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}), \\ \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}(\mathbf{C}, \mathbf{q}), \\ \mathbf{q}(\vec{X}, t) = \mathbf{q}_0(\vec{X}), \quad \text{für } t = t_0, \\ \vec{x} = \mathcal{R}(\vec{X}, t) = \vec{r}(\vec{X}, t), \quad \text{für } \vec{X} \in \partial \mathcal{R}_u[\mathcal{B}], \\ \mathbf{P} \vec{n}_R = \vec{s}(\vec{X}, t), \quad \text{für } \vec{X} \in \partial \mathcal{R}_\sigma[\mathcal{B}]. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

---

<sup>1</sup>Siehe z.B. [AA94] oder [Hau00].

## 5.2 Variationsprinzip

In der Methode der finiten Elemente wird die Impulsbilanz weder in der integralen Form (5.6), noch der differentiellen Form (5.7) ausgewertet. Stattdessen wird von der äquivalenten<sup>2</sup> Variationsformulierung, der sogenannten schwachen Form, ausgegangen. Im Fall der finiten Deformationen gelangt man so zur Total-Lagrange Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen<sup>3</sup>

$$\pi(t, \vec{u}, \delta\vec{u}, \mathbf{q}) = \iiint_{\mathcal{R}[\mathcal{B}]} \delta\mathbf{E}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{C}(\vec{X}, t), \mathbf{q}(\vec{X}, t)) \, dV - \pi_{\text{ext}}(\delta\vec{u}, t) = 0. \quad (5.11)$$

Die virtuellen Greenschen Verzerrungen

$$\delta\mathbf{E}(\vec{X}, t) := \mathbf{D}_{\vec{u}} \mathbf{E}(\vec{u})[\delta\vec{u}] = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{H}^T \mathbf{F}) \quad (5.12)$$

müssen hierbei den Randbedingungen genügen. In (5.12) wurde der Gradient der virtuellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{H} = \text{Grad } \delta\vec{u}(\vec{X})$  eingeführt. Die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten ist bei einem konservativen System

$$\pi_{\text{ext}}(t, \delta\vec{u}) = \iint_{\partial\mathcal{R}[\mathcal{B}]} \delta\vec{u}(\vec{X}) \cdot \vec{t}_{\text{R}}(\vec{X}, t) \, dA + \iiint_{\mathcal{R}[\mathcal{B}]} \delta\vec{u}(\vec{X}) \cdot \varrho_{\text{R}}(\vec{X}) \vec{k} \, dV. \quad (5.13)$$

Wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Momentankonfiguration formuliert, so gelangt man zu einer effizienteren Elementformulierung, [Har03]. Das Produkt  $\delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$  wird hierzu mit den entsprechenden Größen der Momentankonfiguration ausgedrückt

$$\delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^T) \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (5.14)$$

Die Größe  $\delta\mathbf{h}$  bezeichnet darin den Gradienten der virtuellen Verschiebungen

$$\delta\mathbf{h} = \text{grad } \delta\vec{u}(\vec{x}). \quad (5.15)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lautet jetzt

$$\begin{aligned} \pi(t, \vec{u}, \delta\vec{u}, \mathbf{q}) &= \iiint_{\mathcal{R}[\mathcal{B}]} \frac{1}{2} (\delta\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^T) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV - \pi_{\text{ext}} \\ &= \iiint_{\chi_t[\mathcal{B}]} \frac{1}{2} (\delta\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}^T) \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv - \pi_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

<sup>2</sup>Die Variationsformulierung ist unter Voraussetzung von geeigneten Stetigkeitseigenschaften äquivalent zur differentiellen Form, siehe [JF02].

<sup>3</sup>Siehe [Har03] und die dort zitierte Literatur.

### 5.3 Raumdiskretisierung

Zur numerischen Lösung wird eine Näherung für das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  und das Feld der virtuellen Verschiebungen  $\delta\vec{u}(\vec{x})$  eingeführt. Das Gebiet wird hierzu diskretisiert, wobei  $n_{\text{nodes}}$  die Anzahl aller Knoten angibt. Als Näherung wird eine Linearkombination der Ansatzfunktionen  $N_j(\mathbf{x})$  gewählt

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_{\text{nodes}}} N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(t), \quad \mathbf{u}^h \in \mathbb{R}^3, \quad (5.17)$$

$$\delta\vec{u}(\vec{x}) \approx \delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_{\text{nodes}}} N_j(\mathbf{x}) \delta\mathbf{u}_j, \quad \delta\mathbf{u}^h \in \mathbb{R}^3. \quad (5.18)$$

Die Ansatzfunktionen  $N_j(\mathbf{x})$  sind gebietsweise ungleich Null und haben am  $j$ -ten Knoten den Wert eins. An den übrigen Knoten  $i \neq j$  verschwinden die Ansatzfunktionen  $N_j(\mathbf{x}_i) = 0$ . Die realen bzw. virtuellen Knotenverschiebungen des  $j$ -ten Knotens werden mit  $\mathbf{u}_j(t) \in \mathbb{R}^3$  und  $\delta\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet.

(5.17) und (5.18) können in die Matrixschreibweise übertragen werden. Dies führt auf die Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times n_{\text{dof}}}$ , den Gesamtvektor der Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$  und der virtuellen Knotenverschiebungen  $\delta\mathbf{u}_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}}$ . Es folgt

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \mathbf{u}_a(t), \quad (5.19)$$

$$\delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \delta\mathbf{u}_a. \quad (5.20)$$

Der Gesamtvektor der Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_a$  wird in den Vektor der unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  und den Vektor der bekannten Knotenverschiebungen  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{n_p}$  aufgeteilt

$$\mathbf{u}_a(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{array} \right\}. \quad (5.21)$$

Für die Dimensionen der Vektoren gilt  $n_{\text{dof}} = n_u + n_p$ . Die Anzahl der Freiheitsgrade  $n_{\text{dof}}$  ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten, bei 3D-Elementen gilt daher  $n_{\text{dof}} = 3 \times n_{\text{nodes}}$ .

Mit der Partitionierung (5.21) lautet der Verschiebungsansatz (5.19)

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{[\mathbf{N}(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})]}_{\mathbf{N}_a(\mathbf{x})} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}_a(t)} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(t). \quad (5.22)$$

Da die virtuellen Verschiebungen die kinematischen Randbedingungen erfüllen,



verschwinden sie an den Stellen, an denen die Verschiebungen bekannt sind

$$\delta \mathbf{u}_a = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_a = [\mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}. \quad (5.24)$$

Einsetzen des Ansatzes in (5.16) führt auf<sup>4</sup> das diskretisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{z}^{eT} \left[ \sum_{j=1}^{n_\xi} \sum_{k=1}^{n_\eta} \sum_{l=1}^{n_\zeta} w_{jkl}^G \mathbf{B}^{eT}(\boldsymbol{\xi}_{jkl}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{b}_{jkl}^e, \mathbf{q}_{jkl}^e) \det \mathbf{J}_t^e(\boldsymbol{\xi}_{jkl}) \right] - \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Darin ist  $\mathbf{J}_t^e$  die Jacobi-Matrix der Transformation vom normierten Elementgebiet  $\Omega^{\text{ref}}$  in das Elementgebiet der Momentankonfiguration

$$\mathbf{J}_t^e(\boldsymbol{\xi}_{jkl}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\chi}^e}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{jkl}}, \quad (5.26)$$

siehe Abb. 5.1. Die mit  $jkl$  indizierten Größen sind an dem Gauß-Punkt  $\boldsymbol{\xi}_{jkl}$  aus-

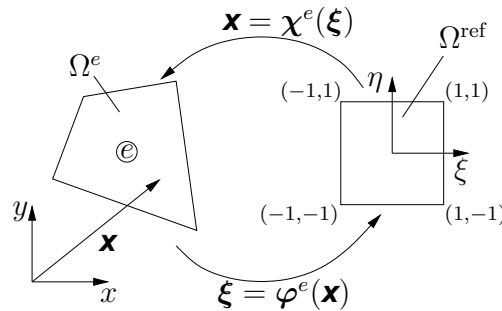


Abbildung 5.1: Koordinatentransformation in das Referenzgebiet

zuwerten und  $w_{jkl}^G$  sind die Wichtungsfaktoren der Gauß-Integration. Die Matrix  $\mathbf{Z}^e$  ist die Zuordnungsmatrix<sup>5</sup> des  $e$ -ten Elements. Mit ihr ergibt sich der Vektor der Knotenverschiebungen des Elements

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{Z}_a^e \mathbf{u}_a = \mathbf{Z}^e \mathbf{u} + \bar{\mathbf{Z}}^e \bar{\mathbf{u}} \quad (5.27)$$

<sup>4</sup>Zur Herleitung siehe [Har03].

<sup>5</sup>Die Einführung dieser Größe hat lediglich formalen Charakter, um die Assemblierungsroutinen mathematisch zu beschreiben. Im Programm wird die Zuordnung mit Inzidenztabelle gelöst.

und der virtuellen Knotenverschiebungen

$$\delta \mathbf{u}^e = \mathbf{Z}_a^e \delta \mathbf{u}_a = \mathbf{Z}^e \delta \mathbf{u}. \quad (5.28)$$

Die Matrix  $\mathbf{B}^e$  ist die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix mit  $\mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_1^e \dots \mathbf{B}_{n_{\text{en}}}^e]$  sowie

$$\mathbf{B}_a^e = \begin{bmatrix} n_{a,x}^e & & & \\ & n_{a,y}^e & & \\ & & n_{a,z}^e & \\ n_{a,y}^e & n_{a,x}^e & & \\ & n_{a,z}^e & n_{a,y}^e & \\ n_{a,z}^e & n_{a,x}^e & & \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, n_{\text{en}}. \quad (5.29)$$

$n_{\text{en}}$  ist die Anzahl der Elementknoten und  $\mathbf{B}_a^e$  ergibt sich für jeden Knoten  $a$  des Elements  $e$  aus den Ableitungen<sup>6</sup> der Ansatzfunktionen. Diese sind jetzt auf Elementebene definiert. In dem Vektor  $\bar{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$  ist die Belastung aller äußeren Kräfte zusammengefasst.

Der gewichtete Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  ergibt sich durch Transformation des zweiten Piola-Kirchhoff Tensors

$$\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau}_{jkl}^e \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}_{jkl}^e = \mathbf{h}(\mathbf{C}_{jkl}^e, \mathbf{q}_{jkl}^e). \quad (5.30)$$

Die Spannungen sind neben dem aktuellen Verzerrungszustand, ausgedrückt durch den rechten Cauchy-Green Tensor  $\mathbf{C}_{jkl}^e$ , auch von den inneren Variablen  $\mathbf{q}$  abhängig. Diese entwickeln sich entsprechend den Evolutionsgleichungen. Neben dem diskretisierten Prinzip der virtuellen Verschiebungen (5.25) ist somit zusätzlich das Algebro-Differentialgleichungssystem (4.111) am Gauß-Punkt auszuwerten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_{jkl}^e(t) - \mathbf{r}(\mathbf{C}_{jkl}^e(t), \mathbf{q}_{jkl}^e(t)) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{q}_{jkl}^e(t) &= \mathbf{q}_{jkl}^e(t_0), \quad \text{für } t = t_0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die inneren Variablen aller  $n_i$  Gauß-Punkte<sup>7</sup> können in einem Vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_Q}$ ,  $n_Q = n_i \times n_q$  zusammengefasst werden. Der Zusammenhang ist wieder über eine Zuordnungsmatrix gegeben

$$\mathbf{q}_{jkl}^e(t) = \mathbf{Z}_q^{e(jkl)} \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{q}_{jkl}^e \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (5.32)$$

und

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{e,j,k,l} \mathbf{Z}_q^{e(jkl)T} \mathbf{q}_{jkl}^e(t). \quad (5.33)$$

---

<sup>6</sup>In (5.29) wurde die abgekürzte Schreibweise  $n_{a,x}^e = \partial n_a^e / \partial x$  eingeführt.

<sup>7</sup> Es gibt insgesamt  $n_i = n_e \times n_\xi \times n_\eta \times n_\zeta$  Gauß-Punkte.

Die Evolutionsgleichungen auf Gauß-Punktebene führen somit auf das globale Algebro-Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0, \quad \text{für } t = t_0, \quad (5.35)$$

mit

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) = \sum_{e,j,k,l} \mathbf{z}_q^{e(jkl)T} \mathbf{r}(\mathbf{C}_{jkl}^e(t), \mathbf{q}_{jkl}^e(t)). \quad (5.36)$$

Zusammen bilden (5.25) und (5.34) das Gesamtsystem

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \end{array} \right\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_u+n_q}, \quad (5.37)$$

mit

$$\mathbf{y}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{array} \right\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}, \quad (5.38)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{y}(t_0) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{array} \right\} = \mathbf{y}_0. \quad (5.39)$$

## 5.4 Zeitdiskretisierung

Algebro-Differentialgleichungssysteme (DAE) besitzen ein Lösungsverhalten, das sich wesentlich von dem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen unterscheidet, [SW95]. Das Diskretisierungsverfahren, welches zur numerischen Lösung angewendet wird, sollte dies berücksichtigen. Das DAE (5.37) wird hier mit diagonalimpliziten Runge-Kutta-Verfahren (DIRK) gelöst. Hierdurch können Verfahren höherer Ordnung eingesetzt werden, wobei die Struktur aktueller finite Elemente Programme erhalten bleibt, siehe [Har03].

Der Algorithmus der DIRK-Verfahren wird im folgenden erläutert. Hierzu wird von dem impliziten (nichtlinearen) Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^m \quad (5.40)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \quad (5.41)$$

ausgegangen. Ist die Jacobi-Matrix  $\partial\mathbf{F}/\partial\dot{\mathbf{y}}$  in einer Umgebung der Lösung  $\mathbf{y}(t)$  regulär, so ist (5.40) lokal nach  $\dot{\mathbf{y}}$  auflösbar und (5.40) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in impliziter Form. Ist dagegen  $\partial\mathbf{F}/\partial\dot{\mathbf{y}}$  singular, so enthält das System auch algebraische Gleichungen und wird DAE genannt, [SW95]. Dies ist der Fall in (5.37), welches die spezielle Struktur eines semi-expliziten DAEs hat.

### 5.4.1 Diagonalimplizite Runge-Kutta-Verfahren

Durch mehrmalige Differentiation und algebraische Umformungen gelangt man von dem impliziten Gleichungssystem (5.40) auf das dem DAE zugrundeliegenden Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (5.42)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0, \quad t = t_0, \quad (5.43)$$

siehe [SW95]. Zur Herleitung des Verfahrens wird zunächst von der expliziten Form (5.42) ausgegangen. Das Zeitintervall  $[t_0, T]$  wird in  $N$  Unterintervalle zerlegt. Die Grenzen lauten  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < t_N = T$  mit den Schrittweiten  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung [Gre98] folgt

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \quad (5.44)$$

Mit der Substitution  $t = t_n + \tau \Delta t_n$  werden die Integrationsgrenzen normiert

$$dt = \Delta t_n d\tau, \quad \tau(t = t_n) = 0, \quad \tau(t = t_n + \Delta t_n) = 1,$$

und es folgt

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \int_0^1 \mathbf{f}(t_n + \tau \Delta t_n, \mathbf{y}(t_n + \tau \Delta t_n)) d\tau. \quad (5.45)$$

Das Integral in (5.45) wird mit einem Quadraturverfahren der Form  $\int_0^1 f(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^s b_i f(c_i)$  numerisch gelöst

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) \approx \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{f}(t_n + c_j \Delta t_n, \mathbf{y}(t_n + c_j \Delta t_n)). \quad (5.46)$$

Dabei sind  $c_i$  die Integrationspunkte und  $b_i$  sind Wichtungsfaktoren. Diese können der Literatur, z.B. [SW95], entnommen werden. Auf der rechten Seite stehen neue Unbekannte, welche wiederum mit einem Quadraturverfahren berechnet werden. Hierfür werden die gleichen Stützstellen  $T_{nj} = t_n + c_j \Delta t_n$  und neue Wichtungsfaktoren  $a_{ij}$  gewählt. (5.46) lautet somit

$$\mathbf{y}(t_n + c_i \Delta t_n) \approx \mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(T_{nj}, \mathbf{Y}_{nj}). \quad (5.47)$$

Mit den Abkürzungen  $\mathbf{y}(t_n) =: \mathbf{y}_n$  und  $\mathbf{f}(T_{nj}, \mathbf{Y}_{nj}) =: \dot{\mathbf{Y}}_{nj}$  folgt

$$\mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj}. \quad (5.48)$$

Beim DIRK-Verfahren werden die neuen Gewichte für  $j > i$  zu Null gesetzt,  $a_{ij} = 0$  für  $j > i$ . Dadurch läuft die Summe in (5.48) nur noch bis  $i$

$$\mathbf{Y}_{ni} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj} + \Delta t_n a_{ii} \dot{\mathbf{Y}}_{ni}. \quad (5.49)$$

Die ersten beiden Terme sind bereits bekannt bzw. können aus den bisherigen Ergebnissen berechnet werden. Sie werden in dem Startvektor

$$\mathbf{Y}_{ni}^S := \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Y}}_{nj} \quad (5.50)$$

zusammengefasst. (5.49) wird nach der unbekanntenen Stufenableitung  $\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$  aufgelöst

$$\dot{\mathbf{Y}}_{ni} = \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{Y}_{ni}^S}{\Delta t_n a_{ii}}. \quad (5.51)$$

Die so ermittelte Stufenableitung  $\dot{\mathbf{Y}}_{ni}$  wird jetzt in das implizite Differentialgleichungssystem (5.40) eingesetzt

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{Y}_{ni}) := \mathbf{F} \left( T_{ni}, \mathbf{Y}_{ni}, \frac{\mathbf{Y}_{ni} - \mathbf{Y}_{ni}^S}{\Delta t_n a_{ii}} \right) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (5.52)$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem muss für jede Stützstelle  $T_{ni}$  erfüllt sein. Die numerische Lösung liefert die Werte  $\mathbf{Y}_{ni}$ . Mit diesen ergibt sich die Lösung für den nächsten Zeitschritt

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i \dot{\mathbf{Y}}_{ni}. \quad (5.53)$$

### 5.4.2 Anwendung auf Algebro-Differentialgleichungssysteme

Die Raumdiskretisierung in der Methode der finiten Elemente führt auf das Algebro-Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{r}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t)) \end{array} \right\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_u + n_q}, \quad (5.37)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{y}(t_0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t_0) \\ \mathbf{q}(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{y}_0. \quad (5.39)$$

In diesem Fall ergibt sich<sup>8</sup> das System

$$\mathbf{R}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ \mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (5.54)$$

Darin ist  $\mathbf{G}_{ni}$  der Anteil, welcher entsprechend (5.25) aus dem diskretisierten Prinzip der virtuellen Verschiebungen resultiert und auf globaler Ebene ausgewertet werden muss

$$\mathbf{G}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \mathbf{g}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \mathbf{0}. \quad (5.55)$$

$\mathbf{L}_{ni}$  enthält die nichtlinearen Evolutionsgleichungen. Diese sind entkoppelt und können daher lokal, d.h. auf Element- bzw. Gauß-Punktebene, gelöst werden

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ni}(\mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) &= \mathbf{A} \dot{\mathbf{Q}}_{ni} - \mathbf{r}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) \\ &= \mathbf{A} \frac{\mathbf{Q}_{ni} - \mathbf{Y}_{ni}^{qS}}{\Delta t_n a_{ii}} - \mathbf{r}(T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}, \mathbf{Q}_{ni}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Der Startvektor (5.50) lautet in diesem Fall

$$\mathbf{Y}_{ni}^{qS} = \mathbf{q}_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{\mathbf{Q}}_{nj}. \quad (5.57)$$

Die gesuchten Größen für den nächsten Zeitschritt ergeben sich nach (5.53). Wird zusätzlich noch  $a_{sj} = b_j$  gesetzt, so spricht man von steif-genauen Verfahren. Die Größen für den nächsten Zeitschritt stimmen in diesem Fall mit den Stufengrößen überein

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{U}_{ns}, \quad (5.58)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{Q}_{ns}. \quad (5.59)$$

Das System (5.54) wird mit einem Mehrebenen-Newton-Verfahren (MLNA) gelöst. Dieses wird in [Har03] und [Qui04] beschrieben. In der zuletzt genannten Referenz wird ein Vergleich des Standard MLNA und eines verbesserten Verfahrens durchgeführt. Außerdem wird das Verfahren anhand des Beispiels einer zweidimensionalen Funktion in zwei Veränderlichen illustriert. An dieser Stelle wird lediglich der Algorithmus in Tab. 5.1 angegeben, um die Lücke zwischen diesem und den nachfolgenden Kapiteln zu schließen.

Die Methode der finiten Elemente für nichtlineare Kontinua ist in Abb. 5.2 zusammengefasst.

---

<sup>8</sup>Siehe [EH01].

Tabelle 5.1: Mehrebenen-Newton Verfahren für den Zeitschritt  $t_n \rightsquigarrow t_{n+1}$  und die Stufe  $i$ , entnommen aus [Har03]

<b>Gegeben:</b> $\mathbf{U}_{ni}^{(0)} = \mathbf{u}_n$ , $\mathbf{Q}_{ni}^{(0)} = \mathbf{q}_n$ , $\Delta t_n$ , $T_{ni}$ , $a_{ii}$ , $\mathbf{Y}_{ni}^S$ , $\text{tol}_Q^{(0)}$	
<b>Wiederhole</b> $m = 0, \dots$	
<i>Lokale Ebene</i> (Gegeben: $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$ , Argumentvektor $\mathbf{y} = (T_{ni}, \mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)})$ )	
Lokaler Integrationsschritt	
$\mathbf{L}(\mathbf{U}_{ni}^{(m)}, \mathbf{Q}_{ni}^{(m)}) = \mathbf{0}$	$\rightsquigarrow \mathbf{Q}_{ni}^{(m)}$
Konsistente Linearisierung	
$\left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{y}} \right] \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \Big _{\mathbf{y}} = - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{y}}$	$\rightsquigarrow \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \Big _{\mathbf{y}}$
<i>Globale Ebene</i>	
Löse lineares Gleichungssystem	
$\left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big _{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \Big _{\mathbf{y}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \Big _{\mathbf{y}} \right] \Delta \mathbf{U}_{ni} = -\mathbf{G}(\mathbf{y})$	$\rightsquigarrow \Delta \mathbf{U}_{ni}$
Speichere globale Variablen	
$\mathbf{U}_{ni}^{(m+1)} \leftarrow \mathbf{U}_{ni}^{(m)} + \Delta \mathbf{U}_{ni}$	$\rightsquigarrow \mathbf{U}_{ni}^{(k+1)}$
(bei Anwendung des verbesserten Mehrebenen-Newton Verfahrens berechne $\text{tol}_Q^{(m)} = \min(\text{tol}_Q^{(0)}, \ \Delta \mathbf{U}_{ni}\ ^2)$ )	
<b>Bis</b> Konvergenzkriterium erfüllt ist	

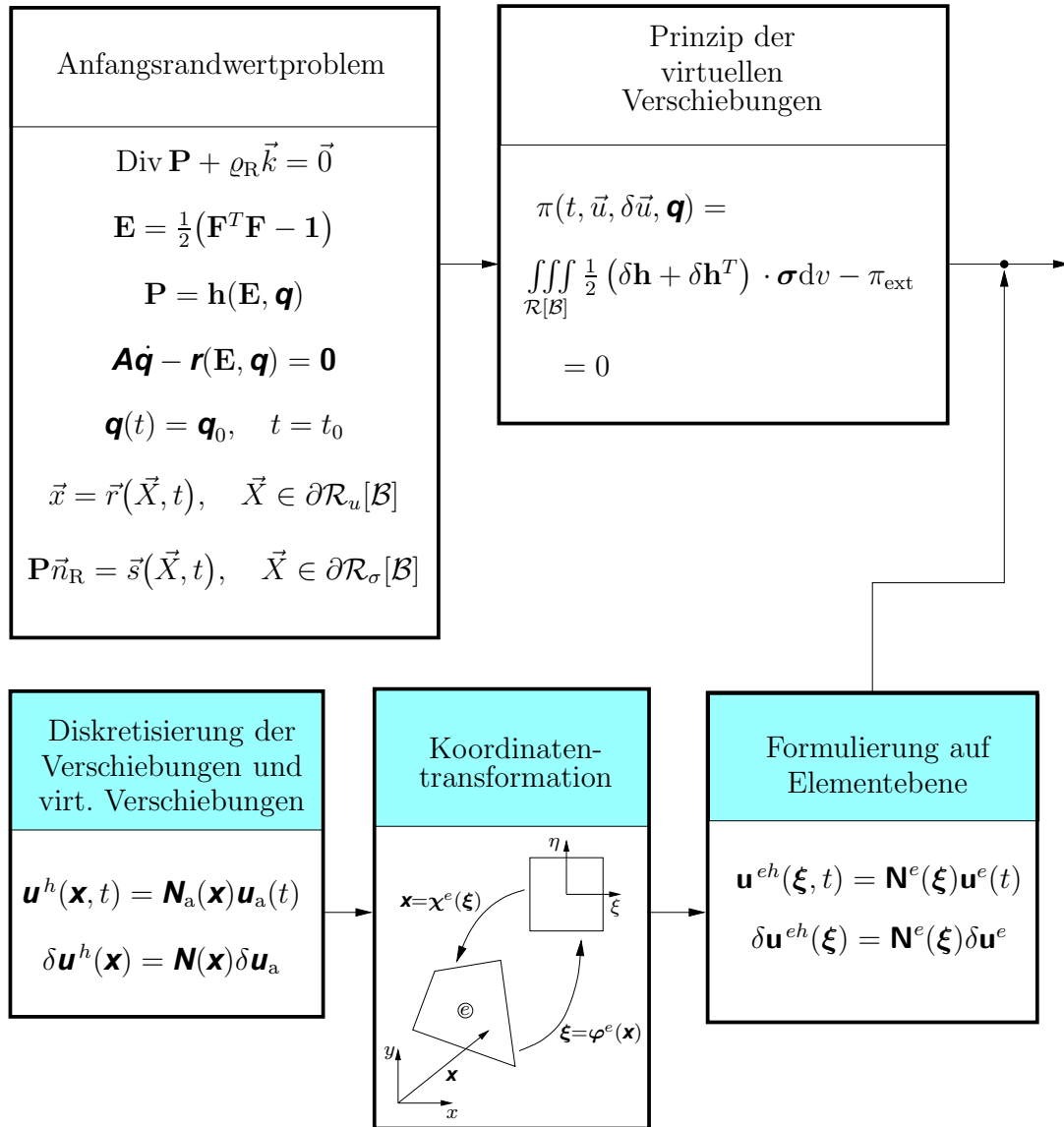
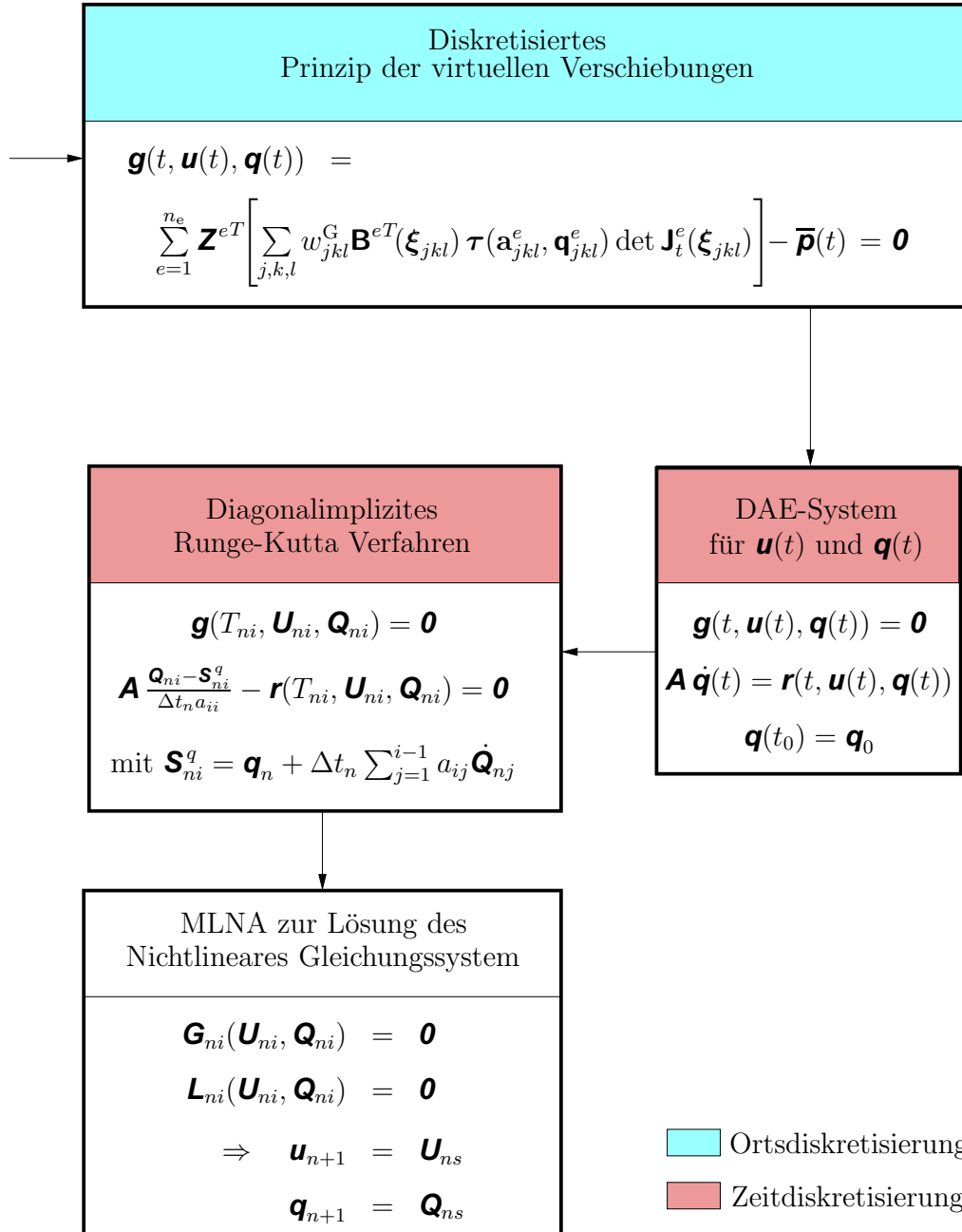


Abbildung 5.2: Methode der finiten Elemente für nichtlineare Kontinua





## 5.5 Umsetzung auf Gauß-Punktebene

Als Anfangswert ist der Verschiebungszustand  $\mathbf{U}_{ni}^{(m)}$  gegeben. Damit ist auch am Gauß-Punkt der rechte Cauchy-Green Tensor  $\mathbf{C}_{ni}$  bekannt.<sup>9</sup> Mit diesem und den inneren Variablen von der vorigen Stufe

$$\mathbf{q}_s = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_{ps} \\ \mathbf{C}_{rs} \end{array} \right\} \quad (5.60)$$

wird die Fließfunktion (4.109) ausgewertet. Ist der Wert der Fließfunktion

$$f = r_f(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{C}_{ps}, \mathbf{C}_{rs}) < 0,$$

so befindet sich der Spannungszustand innerhalb der Fließfläche und die inneren Variablen verändern sich nicht

$$\mathbf{C}_{pni} = \mathbf{C}_{ps} \text{ und } \mathbf{C}_{rni} = \mathbf{C}_{rs}.$$

In dem Fall, dass

$$f = r_f(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{C}_{ps}, \mathbf{C}_{rs}) \geq 0,$$

gilt, würde sich der Spannungszustand auf oder sogar außerhalb der Fließfläche befinden. Letzteres wird in der Elastoplastizität ausgeschlossen. Daher müssen sich die inneren Variablen entwickeln, plastisches Fließen tritt ein. Es gelten die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda \mathbf{r}_p(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r), \quad (4.107)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_r = \lambda \mathbf{r}_r(\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r). \quad (4.108)$$

Zusätzlich muss im Fall der Elastoplastizität die Nebenbedingung

$$f = r_f(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r) = 0 \quad (4.109)$$

erfüllt werden. Auch im Fall der Viskoplastizität gelten (4.107) und (4.108) falls sich der Zustand auf oder außerhalb der Fließfläche befindet ( $f \geq 0$ ). Im Fall der Viskoplastizität gilt für den plastische Multiplikator (4.115) und führt auf die Bestimmungsgleichung

$$\left( \frac{f}{\sigma_0} \right)^r - \lambda \eta = 0. \quad (5.61)$$

Das DAE bestehend aus (4.107), (4.108) sowie (4.109), bzw. (5.61) wird mit Diagonalimpliziten Runge-Kutta-Verfahren integriert. Die diskretisierte Form ist in (5.56) zusammengefasst.

---

<sup>9</sup>Der Index des äußeren Newton-Verfahrens ( $m$ ) wird zu Gunsten der Übersichtlichkeit fortgelassen.

### 5.5.1 Lokales Newton-Verfahren

Explizit lautet das Gleichungssystem

$$\mathbf{L}(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{q}_{ni}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{pni} - \mathbf{C}_{ps} - \Delta t_n a_{ii} \lambda \mathbf{r}_p(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{C}_{pni}, \mathbf{C}_{rni}) \\ \mathbf{C}_{rni} - \mathbf{C}_{rs} - \Delta t_n a_{ii} \lambda \mathbf{r}_r(\mathbf{C}_{pni}, \mathbf{C}_{rni}) \\ \left(\frac{f}{\sigma_0}\right)^r - \lambda \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.62)$$

Mit dem Newton-Verfahren [SK04] wird die Nullstelle

$$\mathbf{q}_{ni} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_{pni} \\ \mathbf{C}_{rni} \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

des nichtlinearen Gleichungssystems (5.62) bestimmt. Darin ist als Abkürzung  $\zeta := \Delta t_n a_{ii} \lambda$  eingeführt. Diese Größe wird nicht abgespeichert und zu Beginn der Iteration mit dem Wert  $\zeta^{(0)} = 0$  initialisiert. In jedem lokalen Newton-Schritt ist das linearisierte System

$$\left. \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{q}_{ni}^{(\nu)})} \Delta \mathbf{q}^{(\nu)} = -\mathbf{L}(\mathbf{C}_{ni}, \mathbf{q}_{ni}^{(\nu)}) \quad (5.64)$$

zu lösen. Die neue Näherung für die inneren Variablen ist

$$\mathbf{q}_{ni}^{(\nu+1)} = \mathbf{q}_{ni}^{(\nu)} + \Delta \mathbf{q}^{(\nu)}. \quad (5.65)$$

Sobald  $\mathbf{q}^{(\nu)}$  kleiner als eine definierte Grenze  $\text{tol}_{\mathbf{q}}$  ist, wird die Iteration beendet. Die Funktionalmatrix in (5.64) hat die Komponentendarstellung

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \mathbf{C}_p} & \frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \mathbf{C}_r} & \frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \mathbf{C}_p} & \frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \mathbf{C}_r} & \frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_f}{\partial \mathbf{C}_p} & \frac{\partial \mathbf{L}_f}{\partial \mathbf{C}_r} & \frac{\partial \mathbf{L}_f}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Sie wird im nächsten Abschnitt auch für die Berechnung der konsistenten Tangente benötigt.

### 5.5.2 Berechnung der konsistenten Tangente

Für die globale Iteration wird die totale Ableitung

$$\mathbf{C}_T := \frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{C}} \quad (5.67)$$

benötigt. Diese wird als konsistente Tangente bezeichnet. Nach dem Satz über implizite Funktionen<sup>10</sup> [BHW06] können auch die inneren Variablen als Funktionen der Verschiebung angesehen werden. Die totale Ableitung ergibt somit

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}_p} \frac{d\mathbf{C}_p}{d\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}_r} \frac{d\mathbf{C}_r}{d\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{d\mathbf{C}}. \quad (5.68)$$

Da der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor nicht explizit von  $\mathbf{C}_r$  und  $\zeta$  abhängt, vereinfacht sich der Ausdruck (5.68) zu

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}_p} \frac{d\mathbf{C}_p}{d\mathbf{C}}. \quad (5.69)$$

Befindet sich der Spannungszustand zudem im elastischen Bereich, so sind die inneren Variablen konstant und es folgt

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} =: \mathbf{C}_T^{\text{el}}. \quad (5.70)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}_T^{\text{el}}$  kann bereits aus den vorhandenen Gleichungen berechnet werden. Dies kann numerisch oder analytisch geschehen.

Im plastischen Bereich ist die Berechnung aufwendiger. Da  $\mathbf{C}_p$  nicht als Funktion von  $\mathbf{C}$  bekannt ist, kann die Ableitung  $d\mathbf{C}_p/d\mathbf{C}$  nicht direkt berechnet werden. Stattdessen wird die totale Ableitung von (5.62) nach  $\mathbf{C}$  berechnet

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{C}_p} \frac{d\mathbf{C}_p}{d\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{C}_r} \frac{d\mathbf{C}_r}{d\mathbf{C}} + \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{d\mathbf{C}} = \mathbf{0}. \quad (5.71)$$

Das Ergebnis ist ein lineares Gleichungssystem für die Ableitungen der inneren Variablen, welches die Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{L}_p}{\partial\mathbf{C}_p} & \frac{\partial\mathbf{L}_p}{\partial\mathbf{C}_r} & \frac{\partial\mathbf{L}_p}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial\mathbf{L}_r}{\partial\mathbf{C}_p} & \frac{\partial\mathbf{L}_r}{\partial\mathbf{C}_r} & \frac{\partial\mathbf{L}_r}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial\mathbf{L}_f}{\partial\mathbf{C}_p} & \frac{\partial\mathbf{L}_f}{\partial\mathbf{C}_r} & \frac{\partial\mathbf{L}_f}{\partial\zeta} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{q}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{C}_p}{d\mathbf{C}} \\ \frac{d\mathbf{C}_r}{d\mathbf{C}} \\ \frac{d\zeta}{d\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{\frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{C}}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{L}_p}{\partial\mathbf{C}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}_r}{\partial\mathbf{C}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}_f}{\partial\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{C}}} \quad (5.72)$$

hat, vgl. auch Tab. 5.1. Die erste Matrix ist darin identisch mit der Funktionalmatrix im lokalen Newton-Verfahren. Im Fall der Viskoplastizität ist sowohl die Funktionalmatrix  $\partial\mathbf{L}/\partial\mathbf{q}$  als auch die rechte Seite  $\partial\mathbf{L}/\partial\mathbf{C}$  voll besetzt.

Für die Berechnung der konsistenten Tangente wird lediglich  $\frac{d\mathbf{C}_p}{d\mathbf{C}}$  benötigt. Trotzdem muss das Gesamtsystem gelöst werden und nur bei der Rücksubstitution nach der LU-Zerlegung können ein paar Operationen eingespart werden.

<sup>10</sup>Auf dieser Annahme beruht auch das MLNA.

# 6 Zur Implementierung

## 6.1 Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften

Die Materialgleichungen für den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , den inneren Spannungstensor  $\mathbf{Z}$  sowie die rechten Cauchy-Green Tensoren  $\mathbf{C}_p$  und  $\mathbf{C}_r$  sind symmetrisch. Sie haben somit jeweils nur sechs unabhängige Komponenten. Diese Eigenschaft sollte bei der numerischen Umsetzung ausgenutzt werden, da sie eine signifikante Rechen- und Speicherersparnis bietet. Hierzu werden zunächst alle Tensoren mit den symmetrischen Tensoren  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}_p$ ,  $\mathbf{C}_r$  sowie deren Inversen dargestellt. Anschließend folgt der Übergang in die Vektorschreibweise. Damit in den Gleichungen nur symmetrische Terme stehen, werden die Gleichung des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{C}^{-1} + \varepsilon \mathbf{C}_p^{-1} \quad (6.1)$$

mit

$$\varepsilon = 2\varrho_R c_{10} J^{-\frac{2}{3}}, \quad (6.2)$$

$$\alpha = \varrho_R K (J - 1) J - \frac{1}{3} \varepsilon \text{Sp}(\mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) \quad (6.3)$$

und des inneren Spannungstensors

$$\mathbf{Z} = \gamma \mathbf{C}_p^{-1} - \delta \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \quad (6.4)$$

mit

$$\delta = \frac{c_2}{2}, \quad (6.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right) \left[ 3 - \text{Sp}(\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right] + \delta \quad (6.6)$$

in die Fließregeln (4.102), (4.103) und die Fließfunktion (4.105) eingesetzt. Für die erste Fließregel folgt

$$\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda \frac{\sqrt{6}}{f+k} \left\{ \left[ \alpha - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{S} \mathbf{C} - \mathbf{C}_r \mathbf{Z}) \right] \mathbf{C}_p + \varepsilon \mathbf{C} - \gamma \mathbf{C}_r + \delta \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \right\}. \quad (6.7)$$

Der darin auftretende Spurterm kann aufgelöst werden zu

$$\begin{aligned}\tau_9 &= \text{Sp}(\mathbf{S}\mathbf{C} - \mathbf{C}_r\mathbf{Z}) \\ &= 3\alpha + \varepsilon \text{Sp}(\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}) - \gamma \text{Sp}(\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r) + \delta \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}).\end{aligned}\quad (6.8)$$

Die zweite Fließregel lautet

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_r &= \lambda\sqrt{\frac{8}{3}}\beta_1\left\{-\frac{1}{3}\left[\gamma \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}) - \delta \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1})\right]\mathbf{C}_r\right. \\ &\quad \left.+ \gamma\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r - \delta\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\right\}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Einsetzen der Größen in die Fließfunktion führt auf

$$\begin{aligned}f &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left[3\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon\tau_1 - 2\alpha\gamma\tau_2 + (\gamma^2 + 2\alpha\delta)\tau_3 + \varepsilon^2\tau_4 - 2\varepsilon\gamma\tau_5\right. \\ &\quad \left.+ 2\varepsilon\gamma\tau_6 - 2\gamma\delta\tau_7 + \delta^2\tau_8 - \frac{1}{3}\tau_9^2\right]^{\frac{1}{2}} - k.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Hierin wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt

$$\tau_1 = \text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}), \quad (6.11)$$

$$\tau_2 = \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}), \quad (6.12)$$

$$\tau_3 = \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}), \quad (6.13)$$

$$\tau_4 = \text{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}), \quad (6.14)$$

$$\tau_5 = \text{Sp}(\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}), \quad (6.15)$$

$$\tau_6 = \text{Sp}(\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r), \quad (6.16)$$

$$\tau_7 = \text{Sp}(\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r), \quad (6.17)$$

$$\tau_8 = \text{Sp}(\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r), \quad (6.18)$$

$$\tau_9 = 3\alpha + \varepsilon\tau_1 - \gamma\tau_2 + \delta\tau_3. \quad (6.19)$$

Mit diesen Abkürzungen lauten die Evolutionsgleichungen (6.7) und (6.9)

$$\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda\frac{\sqrt{6}}{f+k}\left[\left(\alpha - \frac{1}{3}\tau_9\right)\mathbf{C}_p + \varepsilon\mathbf{C} - \gamma\mathbf{C}_r + \delta\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\right] \quad (6.20)$$

und

$$\dot{\mathbf{C}}_r = \lambda\sqrt{\frac{8}{3}}\beta_1\left[-\frac{1}{3}(\gamma\tau_2 - \delta\tau_3)\mathbf{C}_r + \gamma\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r - \delta\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_r\right]. \quad (6.21)$$

Um die Symmetrieeigenschaften auszunutzen, werden die Tensoren zweiter Stufe in Vektoren mit sechs Komponenten gespeichert und Tensoren vierter Stufe werden

in  $(6 \times 6)$  Matrizen gespeichert. So ist z.B.  $\mathbf{S}$  der Vektor des Tensors  $\mathbf{S}$ . Es folgen

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{C}^{-1} + \varepsilon \mathbf{C}_p^{-1}, \quad (6.22)$$

$$\alpha = \varrho_R K (J - 1) J - \frac{1}{3} \varepsilon \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_p, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{Z} = \gamma \mathbf{C}_p^{-1} - \delta (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \mathbf{C}_r \quad (6.24)$$

und

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right) \left[ 3 - \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \right] + \delta. \quad (6.25)$$

Analog ergeben sich die Darstellungen für die Evolutionsgleichungen. Zur Definition der Produkte zwischen den Tensoren in Vektorschreibweise und Details der Implementierung siehe [Har03], S. 158ff.

## 6.2 Berechnung der Komponenten der konsistenten Tangente

Die Funktionalmatrix  $\partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{q}$  wird sowohl für das lokale Newton-Verfahren, als auch für die Berechnung der konsistenten Tangente  $\mathbf{C}_T$  benötigt. Sie kann entweder numerisch oder analytisch berechnet werden. Der hohe manuelle Aufwand der analytischen Berechnung wird belohnt durch erheblich reduzierte numerische Kosten. Außerdem ist die analytische Lösung genauer und verbessert daher das Konvergenzverhalten.

Die Terme, mit denen  $\mathbf{C}_T$  aufgebaut wird, entsprechen den Fréchet-Ableitungen. Diese werden praktisch mit der Gateaux-Ableitung berechnet oder aus bekannten Differentiationsregeln abgeleitet, [Hel03],[JF02], [Kli66]. Für die vorliegende Arbeit werden vor allem die folgenden drei Differentiationen benötigt

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_A \mathbf{f}(\mathbf{A})[\delta \mathbf{A}] = - (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{-T})^{T_{23}} \delta \mathbf{A}, \quad (6.26)$$

$$f(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_A f(\mathbf{A})[\delta \mathbf{A}] = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} \cdot \delta \mathbf{A}, \quad (6.27)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_A \mathbf{f}(\mathbf{A})[\delta \mathbf{A}] = \left[ (\mathbf{A} \mathbf{B} \otimes \mathbf{1})^{T_{23}} + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{A} \mathbf{B})^{T_{23}} \right] \delta \mathbf{A}. \quad (6.28)$$

Für den elastischen Anteil der konsistenten Tangente folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_T^{\text{el}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} &= \left[ K \left( J - \frac{1}{2} \right) J + \frac{1}{9} \varepsilon \tau_1 \right] (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) - \alpha (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1})^{T_{23}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \varepsilon (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Um den plastischen Anteil der konsistenten Tangente berechnen zu können, wird  $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{C}_p$  benötigt. Hierfür ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}_p} = \frac{1}{3} \varepsilon (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) - \varepsilon (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}}. \quad (6.30)$$

Die Fundamentalmatrix  $\partial \mathbf{L} / \partial \mathbf{q}$  ist aufgebaut aus den komponentenweisen Ableitungen der Elemente  $\mathbf{L}_p$ ,  $\mathbf{L}_r$  und  $L_f$ . Im Fall der Elastoplastizität ergeben sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \mathbf{C}_p} = & \left[ 1 - \zeta \frac{\sqrt{6}}{k} (\alpha - \frac{1}{3} \tau_9) \right]^4 \mathbf{1} + \zeta \frac{\sqrt{6}}{k} \left[ \delta (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r)^{T_{23}} (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \right. \\ & + \nu (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) - \frac{1}{3} \varepsilon (\mathbf{C}_p \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_p^{-1}) \\ & \left. - \frac{2}{3} \delta (\mathbf{C}_p \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) - \frac{1}{3} (\gamma - \tau_2 \nu) (\mathbf{C}_p \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \mathbf{C}_r} = & -\zeta \frac{\sqrt{6}}{k} \left[ -\frac{1}{3} (\tau_2 \nu - \gamma) (\mathbf{C}_p \otimes \mathbf{C}_p^{-1}) - 2\delta (\mathbf{C}_p \otimes \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right. \\ & \left. + \nu (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_p^{-1}) - \gamma \mathbf{1} + \delta (\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_p}{\partial \zeta} = -\mathbf{r}_p (\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r) \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \mathbf{C}_p} = & -\zeta \sqrt{\frac{8}{3}} \beta_1 \left[ -\frac{1}{3} [(\tau_2 \nu - \frac{3}{2} c_1) (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r) (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \right. \\ & - 2\delta (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_p^{-1}) (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r)^{T_{23}} (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}}] \\ & + \nu (\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r) - \gamma (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r)^{T_{23}} (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \\ & \left. - \delta (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r)^{T_{23}} (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} (\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \mathbf{C}_r} = & (1 - \zeta \frac{1}{3} (\gamma + \delta) \tau_2) \mathbf{1} - \zeta \sqrt{\frac{8}{3}} \beta_1 \left[ -\frac{1}{3} [c_1 + \frac{c_2}{6} - \nu \tau_2] (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_p^{-1}) \right. \\ & + 2\delta (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r) (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} - \nu (\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_p^{-1}) \\ & \gamma (\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) + \delta (\mathbf{C}_r \otimes \mathbf{C}_r)^{T_{23}} (\mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{C}_p^{-1})^{T_{23}} \\ & \left. \delta (\mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{C}_r \mathbf{C}_p^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_r}{\partial \zeta} = -\mathbf{r}_r (\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r) \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial \mathbf{C}_p} = \sqrt{\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{C}_p} \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial \mathbf{C}_r} = \sqrt{\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{C}_r} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial L_f}{\partial \zeta} = 0 \quad (6.39)$$

Hierin wurden zusätzlich die Abkürzungen

$$\nu = \frac{1}{2} \left( c_1 - \frac{c_2}{3} \right), \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} g = & 3\alpha^2 + 2\alpha\varepsilon\tau_1 - 2\alpha\gamma\tau_2 + (\gamma^2 + 2\alpha\delta)\tau_3 + \varepsilon^2\tau_4 - 2\varepsilon\gamma\tau_5 + 2\varepsilon\gamma\tau_6 \\ & - 2\gamma\delta\tau_7 + \delta^2\tau_8 - \frac{1}{3}\tau_9^2 \end{aligned} \quad (6.41)$$

eingeführt.



# 7 Strukturertehaltende Algorithmen

Viele praktische Probleme und deren L6sungen besitzen eine inhärente Struktur. Bekannte Beispiele dafür sind die konstante Gesamtenergie eines konservativen Systems und die Länge eines Pendels, welche beim Hin- und Herschwingen gleich bleibt. Das Materialmodell aus Kap. 4 hat die Eigenschaft, dass die plastischen Verzerrungen volumentreu sind. D.h. es gilt zu jedem Zeitpunkt  $\det \mathbf{C}_p = \det \mathbf{C}_r = 1$ .

Es hat sich gezeigt [HWL02], dass die Erhaltung geometrischer Eigenschaften (des Flußes) nicht nur qualitativ besseres Verhalten bringt. Es gewährleistet darüber hinaus eine genauere Langzeitintegration, als dies mit general-purpose methods möglich ist. Es kann gezeigt werden [HWL02], dass kein Runge-Kutta Verfahren eine invariante Determinante der Lösung erhalten kann. Um dies zu gewährleisten müssen entweder neue Integrationsverfahren entwickelt werden, oder die Lösung muss durch ein geeignetes Projektionsverfahren korrigiert werden. Um die Struktur aktueller Finite-Elemente Programme zu erhalten und um auf der vorhandenen Software aufbauen zu können, wird der zweite Ansatz gewählt. Hierzu gibt es bereits erste Untersuchungen in [Lüh97], [TW03] und [Hel06].

Zunächst werden die Projektionsmethoden allgemein erläutert. Anschließend werden sie auf die Methode der finiten Elemente unter Berücksichtigung der DAE-Struktur und der zeitadaptiven Lösung mit DIRK-Verfahren übertragen.

## 7.1 Zur mathematischen Struktur

Angenommen werden die Sub-Mannigfaltigkeit vom  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}, \quad (7.1)$$

mit  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , und die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (7.2)$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{y}_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{y}(t) \in \mathcal{M} \forall t. \quad (7.3)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{y})$  wird hier als schwache Invariante bezeichnet und  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  ist eine Differentialgleichung auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Ein Beispiel für eine solche schwache

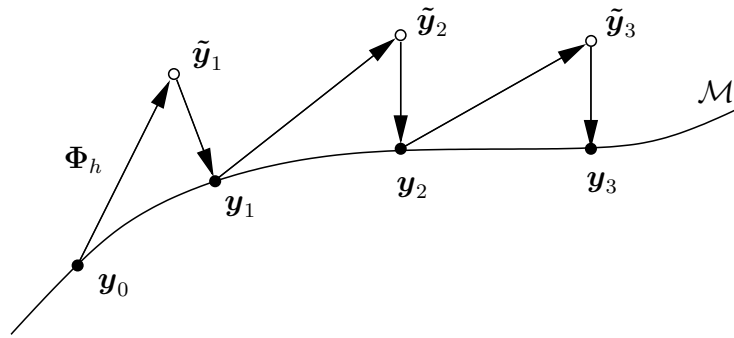


Abbildung 7.1: Illustrierung des Standard Projektionsverfahrens, nach einer Vorlage aus [HWL02]

Invariante ist die schon erwähnte Länge eines Pendels. Diese Invariante wird bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung nicht automatisch erhalten. Von keinem numerischen Verfahren, dem gestattet wird das Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  außerhalb der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  auszuwerten, ist zu erwarten, dass die schwachen Invarianten erhalten bleiben, [HWL02]. Eine natürliche Herangehensweise zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten sind daher Projektionsverfahren.

## 7.2 Standard Projektionsverfahren

Es wird angenommen, dass  $\mathbf{y}_n$  ein Element der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist,  $\mathbf{y}_n \in \mathcal{M}$ . Ein Integrationsschritt  $\mathbf{y}_n \mapsto \mathbf{y}_{n+1}$  wird definiert als

- Berechne  $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} = \Phi_h(\mathbf{y}_n)$ ,  $\Phi_h$  ist hierbei ein beliebiges Einschrittverfahren, welches auf  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  angewendet wird.
- Projiziere den Wert  $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$  auf die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , um  $\mathbf{y}_{n+1} \in \mathcal{M}$  zu erhalten.

Für  $\mathbf{y}_n \in \mathcal{M}$  ist der Abstand von  $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$  zur Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  von der Größenordnung des lokalen Fehlers, d.h.  $\mathcal{O}(h^{p+1})$ . Die im Exponenten stehende Größe  $p$  gibt darin die Ordnung des Verfahrens an. Die Projektion verschlechtert somit nicht die Konvergenzordnung des Verfahrens, [HWL02].

Um  $\mathbf{y}_{n+1}$  zu berechnen, ist das Minimierungsproblem mit Nebenbedingung

$$\|\mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}\| \rightarrow \min, \quad (7.4)$$

$$\text{NB: } \mathbf{g}(\mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (7.5)$$

zu lösen.

Ein Standardverfahren zur Lösung ist die Einführung der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}\|^2 - \mathbf{g}(\mathbf{y}_{n+1})^T \mathbf{\Lambda} \quad (7.6)$$

mit den Lagrange Multiplikatoren

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)^T. \quad (7.7)$$

Die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (7.8)$$

führt auf

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{y}} \mathcal{L}(\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{\Lambda})[\mathbf{h}] &= (\mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}) \cdot \mathbf{h} - D_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}_{n+1})[\mathbf{h}] \cdot \mathbf{\Lambda} \\ &= \left( \mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n+1}}^T \mathbf{\Lambda} \right) \cdot \mathbf{h} \end{aligned} \quad (7.9)$$

und somit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{y}_{n+1}} = \mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n+1}}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}. \quad (7.10)$$

Zu lösen ist daher das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_{n+1}}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Um Auswertungen zu sparen und den Algorithmus zu beschleunigen, wird in [HWL02] vorgeschlagen, das Argument von  $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$  durch  $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$  zu ersetzen. (7.11)<sub>1</sub> kann dann nach  $\mathbf{y}_{n+1}$  aufgelöst und in (7.11)<sub>2</sub> eingesetzt werden. Die verbleibende nichtlineare Gleichung für den Vektor  $\mathbf{\Lambda}$  kann effektiv durch die Newton-Iteration

$$\Delta \mathbf{\Lambda}_i = - [\mathbf{g}'(\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}) \mathbf{g}'(\tilde{\mathbf{y}}_{n+1})^T]^{-1} \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} + \mathbf{g}'(\tilde{\mathbf{y}}_{n+1})^T \mathbf{\Lambda}_i), \quad (7.12)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{i+1} = \mathbf{\Lambda}_i + \Delta \mathbf{\Lambda}_i \quad (7.13)$$

berechnet werden.

Für den Startwert  $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{0}$  ist das erste Inkrement  $\Delta \mathbf{\Lambda}_0$  von der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^{p+1})$ , so dass das Verfahren extrem schnell konvergiert, vgl. [HWL02].

## 7.3 Anwendung der Projektionsmethode auf das Integrationsverfahren des Materialmodells

Für die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{C}}_p = \lambda \mathbf{r}_p(\mathbf{C}, \mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r), \quad (4.107)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_r = \lambda \mathbf{r}_r(\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_r) \quad (4.108)$$

gelten die Nebenbedingungen

$$\det \mathbf{C}_p = 1 \quad (7.14)$$

und

$$\det \mathbf{C}_r = 1. \quad (7.15)$$

Das Projektionsverfahren erfolgt für beide Gleichungen analog und wird anhand von (4.107) entwickelt. Das Minimierungsproblem lautet

$$\left\| \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right\| \rightarrow \min \quad (7.16)$$

mit der Nebenbedingung

$$g(\mathbf{C}_p^{ni}) = \det \mathbf{C}_p^{ni} - 1 = 0. \quad (7.17)$$

Es folgt die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}_p^{ni}, \Lambda) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right\|^2 - g(\mathbf{C}_p^{ni}) \Lambda \quad (7.18)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right) \cdot \left( \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right) - g(\mathbf{C}_p^{ni}) \Lambda. \quad (7.19)$$

Daraus ergibt sich das Differential mit

$$D\mathcal{L}(\mathbf{C}_p^{ni})[\mathbf{H}] = \left( \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right) \cdot \mathbf{H} - \Lambda Dg(\mathbf{C}_p^{ni})[\mathbf{H}] \quad (7.20)$$

mit

$$Dg(\mathbf{C}_p^{ni})[\mathbf{H}] = (\det \mathbf{C}_p^{ni}) (\mathbf{C}_p^{ni})^{-T} \cdot \mathbf{H}. \quad (7.21)$$

Einsetzen von (7.21) in (7.20) und Berücksichtigen von (7.8) führen auf

$$D\mathcal{L}(\mathbf{C}_p^{ni})[\mathbf{H}] = \left[ \mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} - \Lambda (\det \mathbf{C}_p^{ni}) (\mathbf{C}_p^{ni})^{-T} \right] \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (7.22)$$

Da dieser Ausdruck für jedes beliebiges  $\mathbf{H}$  erfüllt sein muss, ist der Klammerausdruck in (7.22) gleich Null

$$\mathbf{C}_p^{ni} - \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} - \Lambda (\det \mathbf{C}_p^{ni}) (\mathbf{C}_p^{ni})^{-T} = \mathbf{0}. \quad (7.23)$$

Wird das vereinfachte Verfahren verwendet, so wird in dem Term mit  $\Lambda$  der Tensor  $\mathbf{C}_p^{ni}$  durch  $\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}$  ersetzt. Die resultierende Gleichung kann explizit nach  $\mathbf{C}_p^{ni}$  aufgelöst werden

$$\mathbf{C}_p^{ni} = \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda (\det \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}) (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-T}. \quad (7.24)$$

Einsetzen dieser Beziehung in die Nebenbedingung (7.14) ergibt die skalare Gleichung

$$\tilde{h}(\Lambda) := \det \left[ \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda (\det \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}) (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-T} \right] - 1 = 0. \quad (7.25)$$

Wird darin die Abkürzung  $\mu := \Lambda \det \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}$  eingeführt so folgt

$$h(\mu) := \det \left[ \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \mu (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-T} \right] - 1. \quad (7.26)$$

Diese nichtlineare Gleichung für  $\mu$  wird mit dem Newton-Verfahren [SK04] gelöst. Für den  $\nu$ -ten Iterationsschritt ergeben sich

$$\Delta\mu^{(\nu)} = - \left. \left[ \frac{dh}{d\mu} \right]^{-1} \right|_{\mu=\mu^{(\nu)}} h(\mu^{(\nu)}) \quad (7.27)$$

und

$$\mu^{(\nu+1)} = \mu^{(\nu)} + \Delta\mu^{(\nu)}. \quad (7.28)$$

Die darin enthaltene Ableitung lautet

$$\frac{dh}{d\mu} = \det \left[ \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \mu (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-1} \right] \left[ \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \mu (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-1} \right]^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni})^{-1}. \quad (7.29)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems kann mit dem Satz von Cayley-Hamilton [Hel03] in ein Polynom dritten Grades in  $\mu$  überführt werden. Dadurch werden die Funktionsauswertung weiter vereinfacht und somit der Aufwand reduziert. Auf die Darstellung wird hier verzichtet.

## 7.4 Korrekturverfahren nach Helm

In [Hel06] wird, ausgehend vom impliziten Euler-Verfahren, ein neuer Integrationsoperator  $\bar{\mathcal{I}}_{n+1}$  hergeleitet. Mit diesem ergibt sich aus  $\mathbf{y}_n$  der neue Wert

$$\mathbf{y}_{n+1} = \bar{\mathcal{I}}_{n+1} \mathbf{y}_n. \quad (7.30)$$

Der Integrationsoperator ändert sich mit jedem Zeitschritt und hängt selbst von  $\mathbf{y}_{n+1}$  ab. Da der Operator unimodular ist, bleiben alle Lösungen auf der Mannigfaltigkeit. Die Bedingung  $\det \mathbf{y} = 1$  wird für jeden beliebig großen Zeitschritt exakt erfüllt. Die in [Hel06] vorgeschlagene Konstruktion des Integrationsoperators führt auf

$$\bar{\mathcal{I}}_{n+1} = [\det \mathcal{I}_{n+1}]^{-\frac{1}{3}} \mathcal{I}_{n+1} \quad (7.31)$$

$$= \Lambda \mathcal{I}_{n+1}. \quad (7.32)$$

Wird dies in (7.30) eingesetzt, so ergibt sich

$$\mathbf{y}_{n+1} = \Lambda \mathcal{I}_{n+1} \mathbf{y}_n. \quad (7.33)$$

Im Hinblick auf das Projektionsverfahren kann (7.33) als eine Projektion durch skalare Multiplikation auf die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  interpretiert werden. Im ersten Schritt wird mit einem impliziten Euler-Verfahren der Wert von  $\mathbf{y}$  zum neuen Zeitschritt berechnet

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathcal{I}_{n+1} \mathbf{y}_n. \quad (7.34)$$

Die berechnete Lösung  $\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$  verletzt die Bedingung  $\det \mathbf{y} = 1$  und wird durch Multiplikation mit einem Skalar auf die Mannigfaltigkeit projiziert

$$\mathbf{y}_{n+1} = \Lambda \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}, \quad (7.35)$$

$$\det \mathbf{y}_{n+1} = 1. \quad (7.36)$$

Die Umsetzung dieses Konzeptes erfordert nur einen minimalen rechnerischen Aufwand, da im Gegensatz zu den anderen Korrekturverfahren kein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Zur Stufe  $T_{ni}$  wird die Lösung  $\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}$  entsprechend (7.35) korrigiert und führt auf

$$\mathbf{C}_p^{ni} = \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni}. \quad (7.37)$$

Dies kann direkt in die Nebenbedingung (7.14) eingesetzt

$$\det \mathbf{C}_p^{ni} = \Lambda^3 \det \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} = 1 \quad (7.38)$$

und somit nach  $\Lambda$  aufgelöst werden

$$\Lambda = \left( \det \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (7.39)$$

## 7.5 Korrekturverfahren nach Lührs

Eine weitere Möglichkeit zur Korrektur ist in [Lüh97] angegeben und wurde in [TW03] auf zwei verschiedene Arten implementiert. In [Lüh97] wird vorgeschlagen eine additive Korrektur der Form

$$\mathbf{C}_p^{ni} = \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda \mathbf{1} \quad (7.40)$$

mit

$$\det \mathbf{C}_p^{ni} = 1 \quad (7.41)$$

anzuwenden. Auch in diesem Fall kann (7.40) direkt in (7.41) eingesetzt werden und führt auf eine skalare nichtlineare Gleichung für den Faktor  $\Lambda$

$$h(\Lambda) = \det (\mathbf{C}_p^{ni} + \Lambda \mathbf{1}) - 1 = 0. \quad (7.42)$$

Diese wird analog zum Standard-Projektionsverfahren mit dem Newton-Verfahren gelöst. Die Inkremente ergeben sich hier zu

$$\Delta \Lambda_n = \left\{ \det (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda_n \mathbf{1}) \operatorname{Sp} \left[ \left( \tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda_n \mathbf{1} \right)^{-1} \right] \right\}^{-1} \left[ \det (\tilde{\mathbf{C}}_p^{ni} + \Lambda_n \mathbf{1}) - 1 \right]. \quad (7.43)$$





# 8 Numerische Beispiele

Das Materialmodell sowie die strukturerhaltenden Algorithmen sind in dem Finite Elemente Programm TASA-FEM, siehe [Har06], implementiert. Dieses ist mit dem Intel Fortran Compiler Vers. 9.1 unter dem Betriebssystem Linux übersetzt worden. Für die Arithmetik werden die optimierten Routinen des GotoBLAS Vers. 1.07, siehe hierzu [GVdGeda] und [GVdGedb], eingesetzt. Die linearen Gleichungssysteme werden mit den LAPACK Vers. 3.0 und UMFPACK Vers. 2.2 Routinen gelöst. Alle Rechnungen werden mit den Variablen des Typs *double precision* (real, kind = 2) auf Intel Itanium2 IA64 Prozessoren durchgeführt.

## 8.1 Einfacher Zug

Der Probekörper aus Abb. 8.1(a) wird mit einem einzigen Element vernetzt und auf Zug beansprucht. Es werden hierzu die Verschiebungsrandbedingungen aus Abb. 8.1(a) und Abb. 8.1(c) aufgebracht. Die gewählten Materialparameter sind

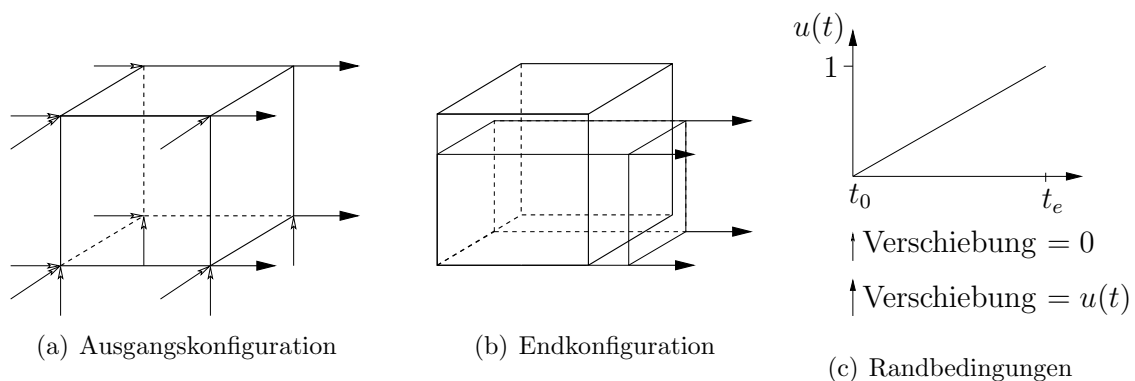


Abbildung 8.1: Einfacher Zug

in Tab. 8.1 zusammengefasst. Für die Elastizitätsbeziehung entsprechen sie bei kleinen Deformationen einem Elastizitätsmodul von  $E = 200\,000$  MPa und einer Querkontraktionszahl von  $\nu = 0.3$ .

Zunächst wird das Konvergenzverhalten studiert. Hierzu wird die maximale Verschiebung innerhalb von  $t_e - t_0 = 1$  s aufgebracht. Die konstante Schrittweite  $\Delta t_0$  wird vorgegeben und das Ergebnis mit einer Referenzlösung verglichen. Diese

Tabelle 8.1: Materialparameter

$c_1$	$c_2$	$\beta_1$	$k$	$K$	$\mu$	$r$	$\eta$
MPa	MPa	–	MPa	MPa	MPa	–	s
6 666.67	20 000	0.0025	200	166 666.67	76 923.08	1.0	0.0

wird mit dem Verfahren von Cash und der Schrittweite  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$  s ermittelt. Betrachtet werden die Fehlernorm des Vektors der inneren Variablen  $\|\mathbf{q}^{\text{ref}} - \mathbf{q}\|$ , siehe Abb. 8.2(a), sowie die Abweichung von der plastischen Inkompressibilität  $E = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} |\det \mathbf{C}_{p(j)} - 1|$  ( $n_i$  : Anzahl aller Gauß-Punkte, siehe Anmerkung S. 54), siehe Abb. 8.2(b). Verglichen werden drei Verfahren der Zeitintegration, dies sind das implizite Euler-Verfahren (BE: Backward-Euler), das Verfahren von Ellsiepen, [Ell99], und das Verfahren von Cash, [Cas79]. Die Verfahren sind ein-, zwei- bzw. dreistufig und haben die Konvergenzordnungen  $\mathcal{O}(h)$ ,  $\mathcal{O}(h^2)$ , bzw.  $\mathcal{O}(h^3)$ , siehe [Har03]. In Abb. 8.2(a) und Abb. 8.2(b) ist zu erkennen, dass die Verfahren von Ellsiepen und Cash keinen wesentlichen Unterschied zeigen. Im Vergleich zum impliziten Euler-Verfahren habe ihre Graphen jedoch eine größere Steigung.

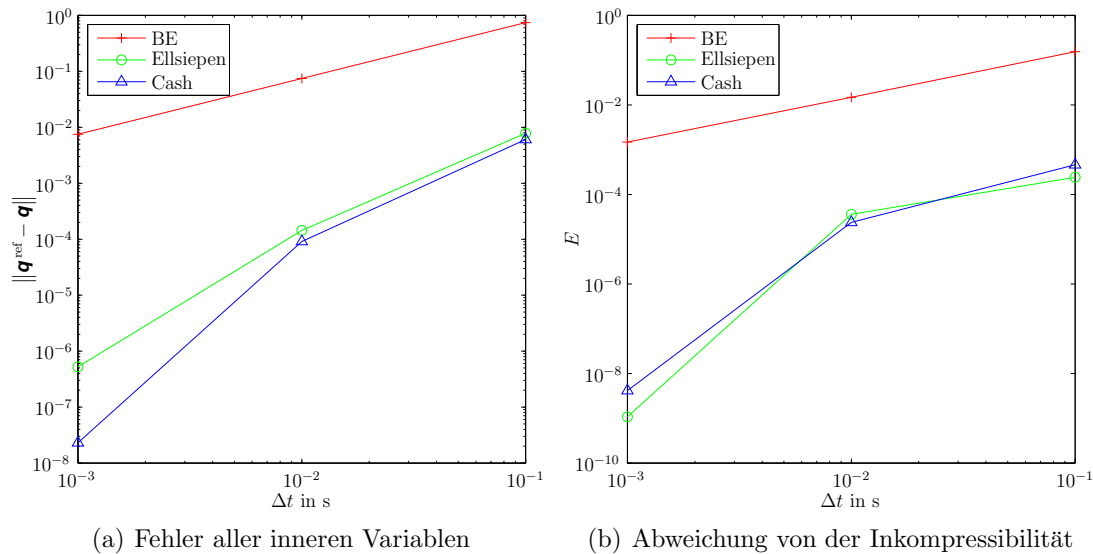


Abbildung 8.2: Konvergenzverhalten beim einfachen Zug

Als nächstes wird der Einfluss des Materialparameters  $\eta$  auf die Spannungsantwort betrachtet. Mit steigender Viskosität  $\eta$  wächst der geschwindigkeitsabhängige Überspannungsanteil, siehe Abb. 8.3. Hierbei haben erst Werte ab der Größenord-

nung  $\eta = 10$  s einen merklichen Einfluss. In Kap. 8.2 wird bei Simulation eines Scherversuchs ein ähnliches Ergebnis erhalten. Zusätzlich wird dort der Einfluss der Viskosität auf das Konvergenzverhalten studiert.

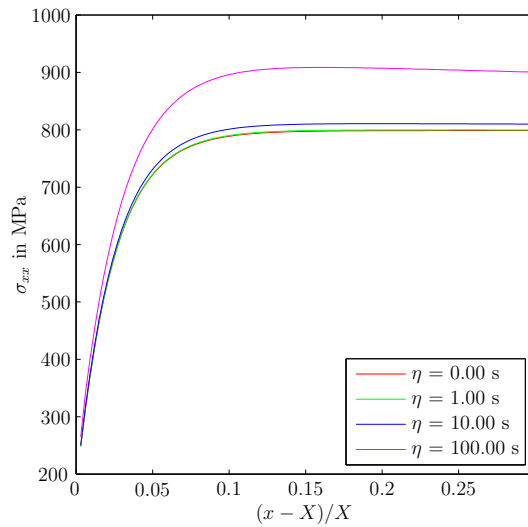


Abbildung 8.3: Einfluss der Viskosität auf die Spannung beim einfachen Zug

## 8.2 Einfache Scherung

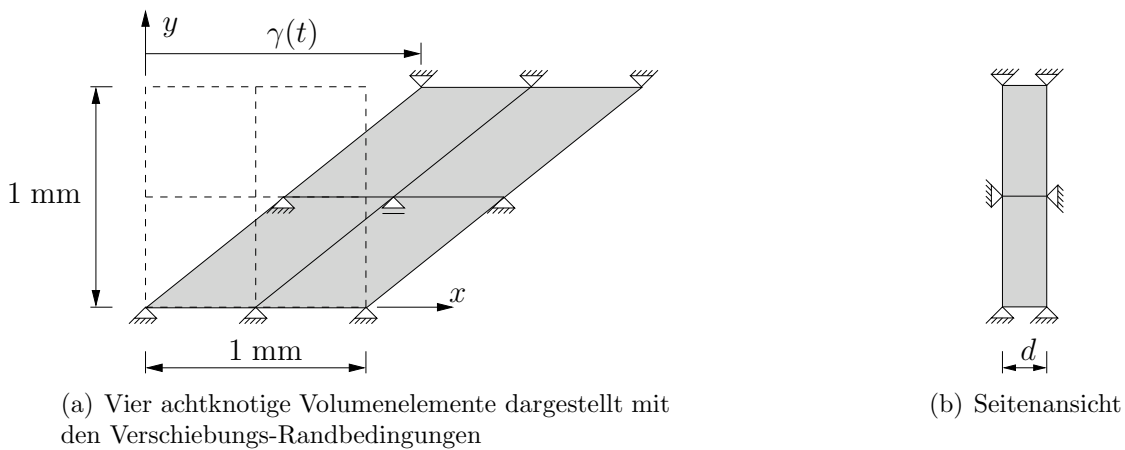


Abbildung 8.4: Einfache Scherung, entnommen aus [Har03]

Bei der einfachen Scherung wird das Verschiebungsfeld

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X + \gamma Y \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \vec{X} + \gamma \begin{Bmatrix} Y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

angenommen, siehe Abb. 8.4. Aus (8.1) ergibt sich der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \gamma(t)\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y. \quad (8.2)$$

Dabei besteht zwischen  $\gamma$  und dem Scherwinkel  $\theta$  die Beziehung  $\gamma(t) = \tan \theta(t)$ .

Die Geometrie wird mit vier achtknotigen Volumenelementen diskretisiert und die Randbedingungen aus Abb. 8.4 aufgebracht. Als Dicke wird der Wert  $d = 1.0$  mm gewählt. Der Körper wird innerhalb von  $t = 1.0$  s um  $\gamma = 0.2$  mm ausgelenkt. Für diesen Prozess und den Fall der Elastoplastizität ist das Konvergenzverhalten in Abb. 8.5 dargestellt. Das Konvergenzverhalten ist ähnlich zu dem Ergebnis beim Zugversuch. Auch hier ist kein signifikanter Unterschied zwischen dem Verfahren von Ellsiepen und dem Verfahren von Cash erkennbar. D.h. die Ordnung 3 des Verfahrens von Cash wird nicht erreicht, was als Ordnungsreduktion bezeichnet wird.

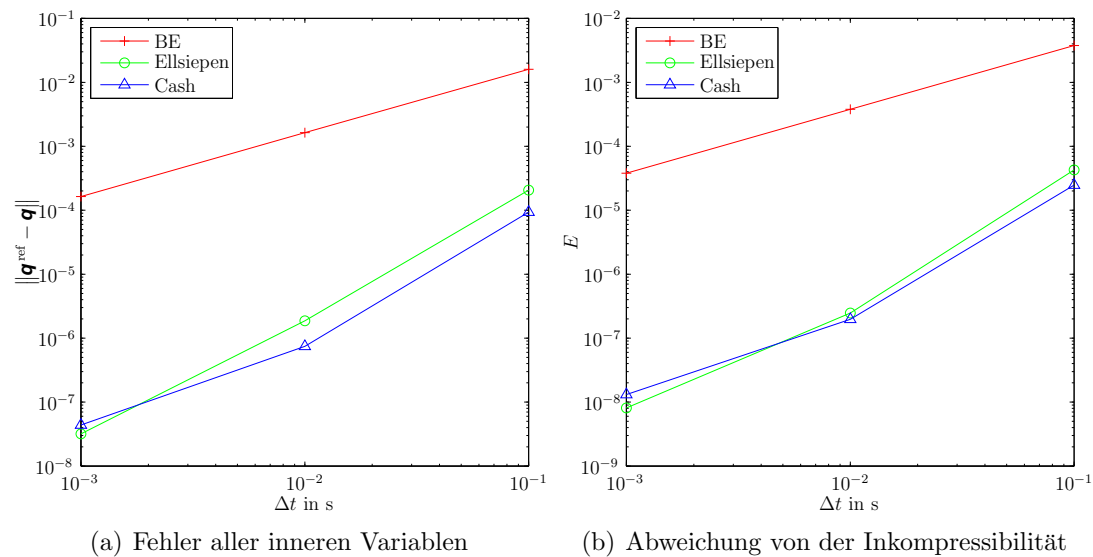


Abbildung 8.5: Konvergenzverhalten bei der einfachen Scherung

Werden die Projektionsverfahren aus Kap. 7 angewendet, so wird die plastische Inkompressibilität gewährleistet. Zu jedem Integrationsschritt gilt  $\det \mathbf{C}_p = \det \mathbf{C}_r = 1$ . Der Einfluss der Projektionsverfahren auf den Fehler der inneren Variablen ist in Abb. 8.6 dargestellt. In Bezug auf den Fehler der inneren Variablen

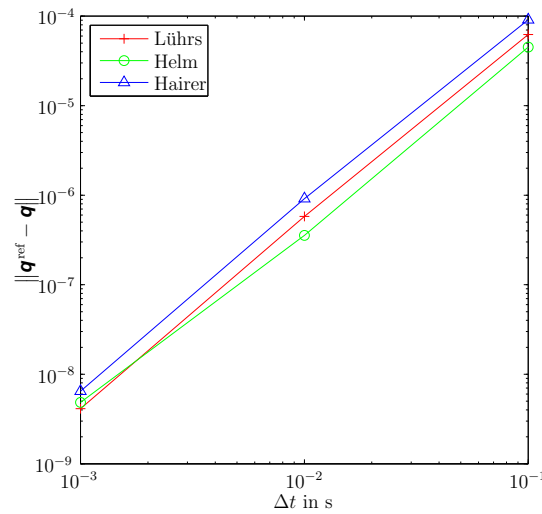


Abbildung 8.6: Konvergenzverhalten der Projektionsverfahren bei der einfachen Scherung und Verwendung des Verfahrens von Cash

unterscheiden sich die drei betrachteten Verfahren nur wenig.

In Abb. 8.7 ist der Einfluss der Viskosität auf die Komponenten des Cauchy'schen Spannungstensors dargestellt. Viskositäten in der Größenordnung  $\eta = 10$  s haben bei den gewählten Materialparametern und der vorgegebenen Belastungsgeschwindigkeit noch keinen großen Einfluss auf die Spannungsantworten. Kleine Werte von  $\eta$  können somit zur Approximation der geschwindigkeitsunabhängigen Elastoplastizität gewählt werden. Da die Einführung der Viskosität eine glättende Wirkung hat, ist ein Einfluss auf das Konvergenzverhalten zu erwarten, [HBed]. In Abb. 8.8(a) ist zu erkennen, dass das Konvergenzverhalten des impliziten Euler-Verfahrens von der Viskosität unbeeinflusst ist. Erst beim Verfahren von Ellsiepen, Abb. 8.8(b), und beim Verfahren von Cash, Abb. 8.8(c) wird ein Einfluss sichtbar. Dieser ist bei dem Verfahren von Cash besonders deutlich. Anzumerken ist, dass die Verbesserung des Konvergenzverhaltens erst bei hohen Viskositäten  $\eta$  nennenswert ist. Dieses Ergebnis wurde auch im Zusammenhang mit Metallpulvern in [HBed] gefundenen.

In [TW03] wird ein drei-viertel Scherzyklus, Abb. 8.9, berechnet. Dort wird festgestellt, dass bei Nichtberücksichtigung der plastischen Inkompressibilität Abweichungen in den Spannungsantworten sichtbar werden. Es wird angemerkt, dass  $\det \mathbf{F}_p$  während des Zyklus nur minimal von eins abweicht. Trotzdem werden große Abweichungen bei den Spannungen beobachtet. Darüber hinaus wird angemerkt, dass die Spannungsantworten bei Berücksichtigung der plastischen Inkompressibilität den analytischen Lösungen entsprechen.

Die Spannungsantworten sind für das Verfahren von Ellsiepen mit großer, konstanter Schrittweite  $\Delta t_0$  und das schrittweitenkontrollierte Verfahren von Ellsiepen

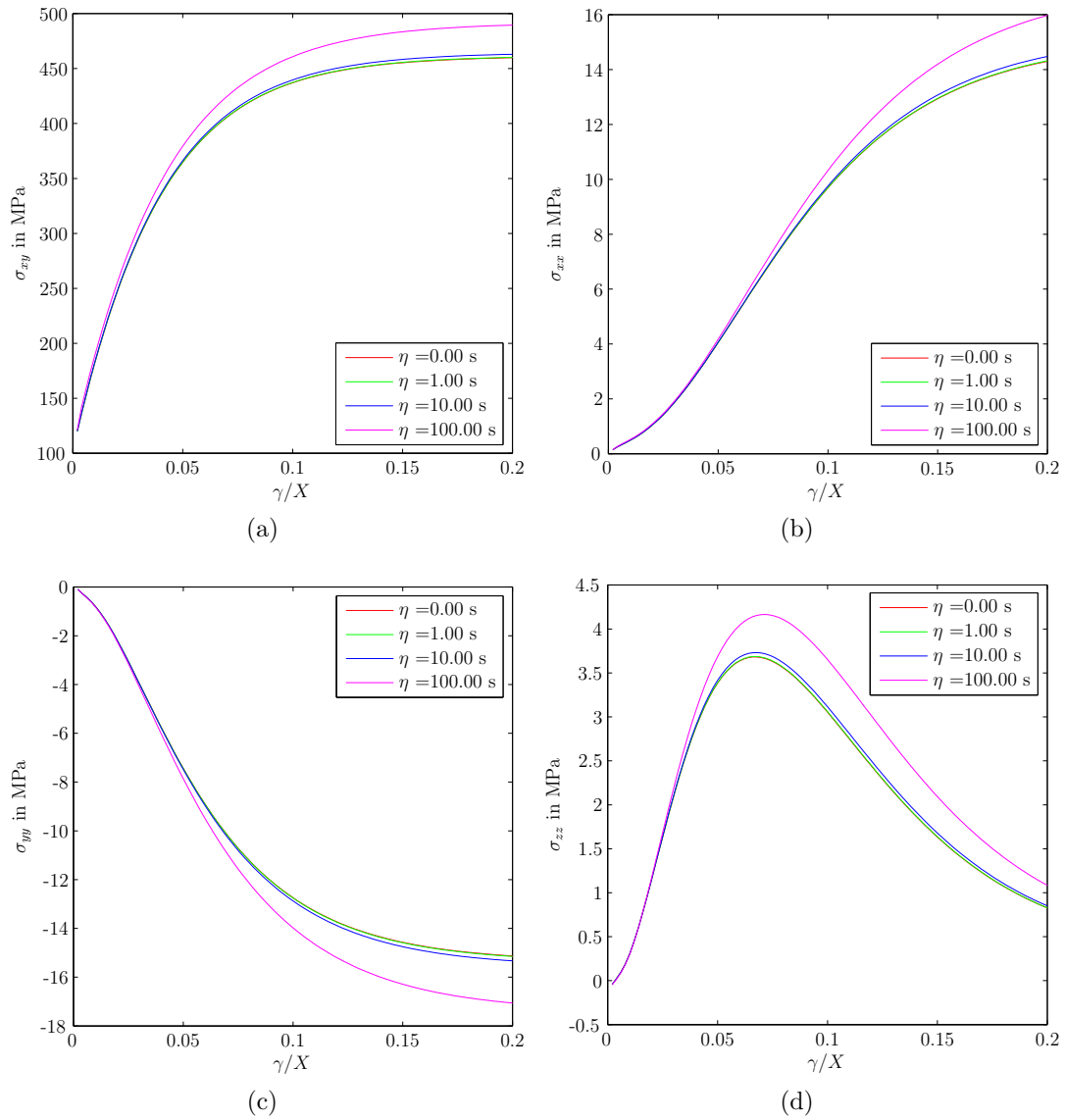


Abbildung 8.7: Einfluss der Viskosität  $\eta$  auf die Spannungen bei der einfachen Scherung

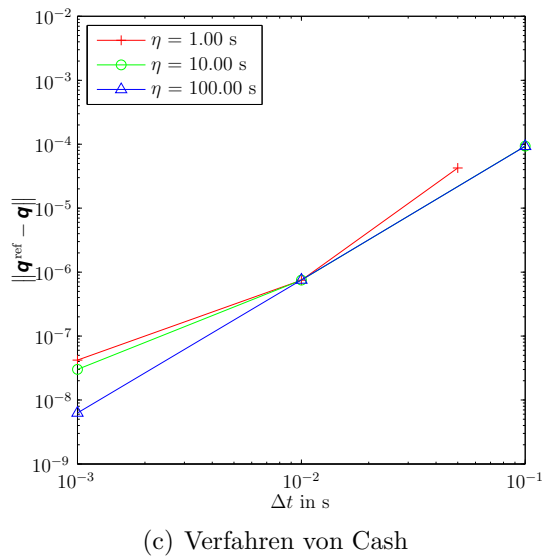
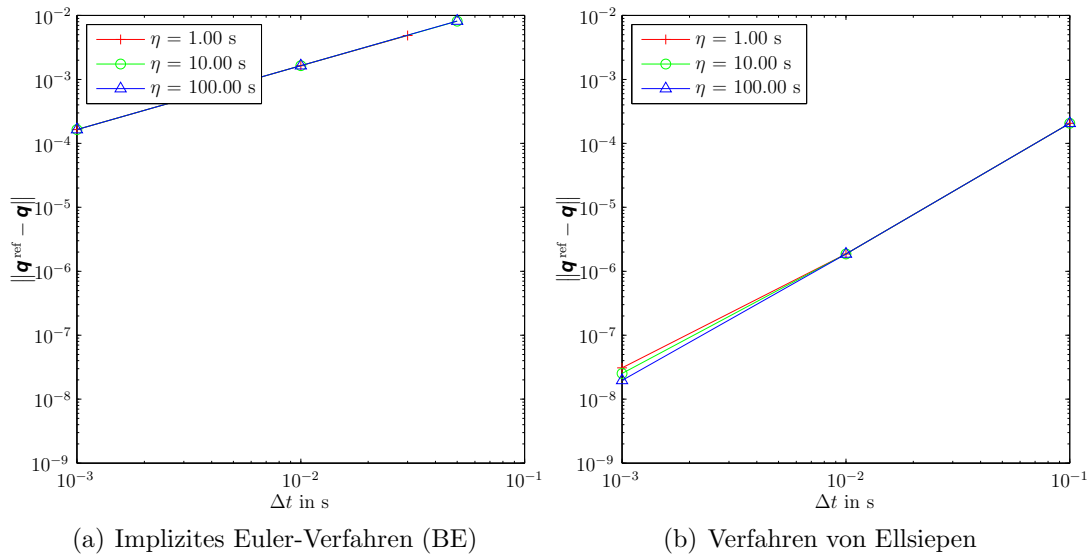


Abbildung 8.8: Einfluss der Viskosität  $\eta$  auf das Konvergenzverhalten bei der einfachen Scherung

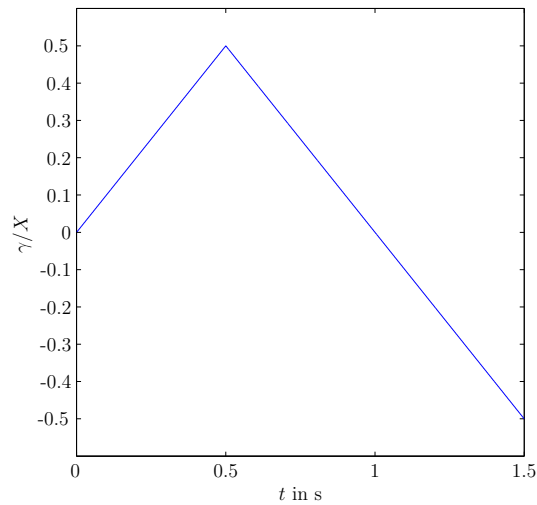


Abbildung 8.9: Verschiebung bei der einfachen Scherung

mit niedrig gewählten Toleranzen in Abb. 8.10 dargestellt.

Die Lösung, welche mit dem Verfahren von Ellsiepen und kleiner Toleranz erhalten wird, entspricht dem Ergebnis aus [TW03], bzw. [TW04]<sup>1</sup> mit Berücksichtigung der plastischen Inkompressibilität. Bemerkenswert ist, dass selbst bei der großen Schrittweite  $\Delta t_0$  des Verfahrens von Ellsiepen der Verlauf qualitativ richtig wiedergegeben wird. Dies gilt sowohl für die Effekte erster Ordnung als auch die zweiter Ordnung. Die Anwendung der Projektionsverfahren zeigt hier keine weitere Verbesserung der Ergebnisse.

---

<sup>1</sup>Da in [TW03] ein etwas anderes Materialmodell verwendet wird, sind die Ergebnisse mit denen aus [TW04] Modell A zu vergleichen. Allerdings wird dort die plastische Inkompressibilität nicht weiter beachtet.



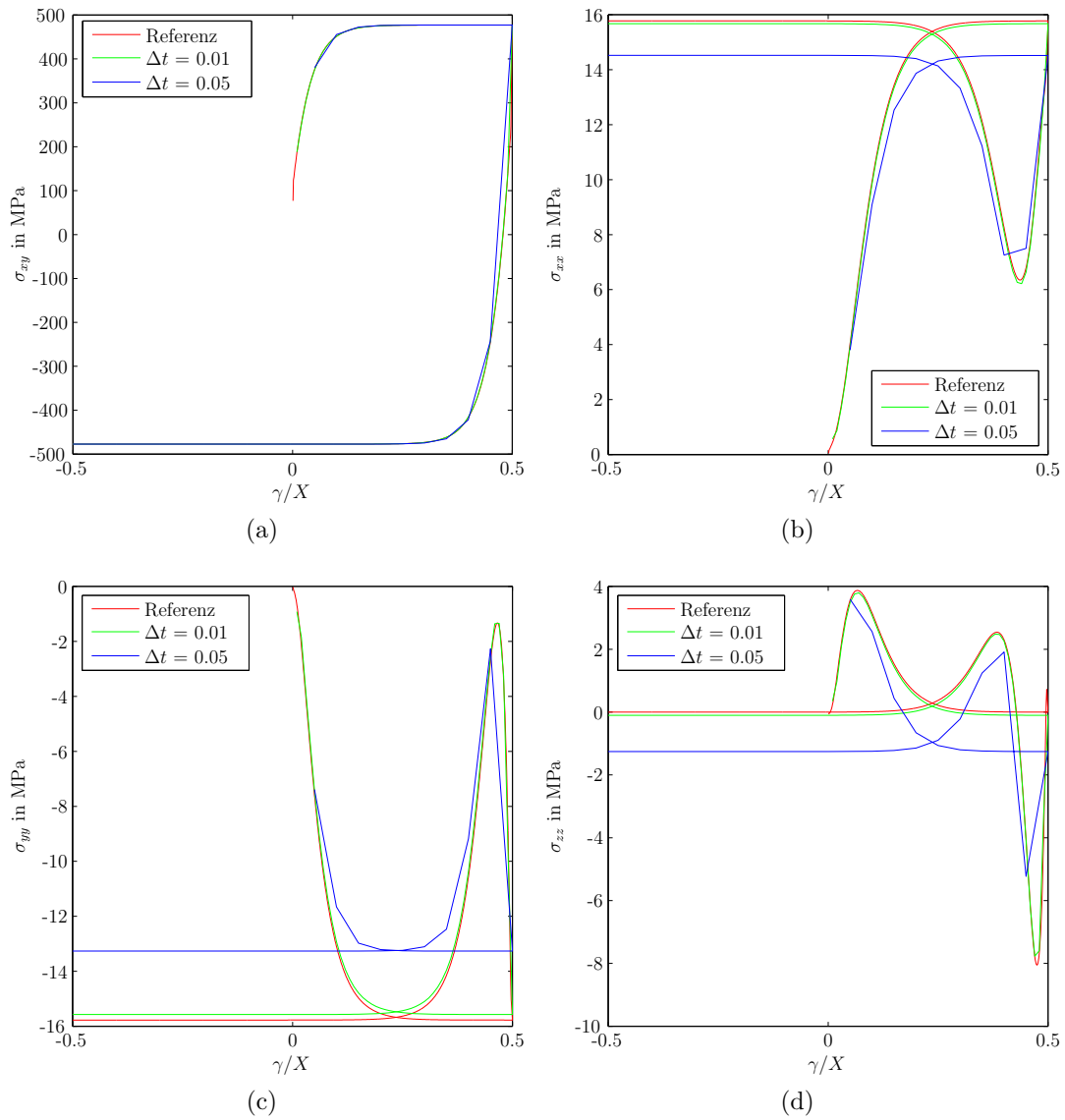


Abbildung 8.10: Einfluss der Schrittweite  $\Delta t_0$  auf die berechnete Spannung bei der einfachen Scherung, ( $\eta = 10\text{s}$ )

### 8.3 Zugprobe

Die Probe aus Abb. 8.11(a) besitzt eine mehrfache Symmetrie. Dies wird bei der Berechnung ausgenutzt und es wird nur ein Achtel des Körpers modelliert und vernetzt, siehe bezüglich der Randbedingungen Abb. 8.11(b).

Wird die Probe auf Zug belastet, so stellt sich im mittleren Bereich ein hauptsächlich homogener Deformations- und Spannungszustand ein. Im Bereich des Übergangs ist dies nicht der Fall. In [Har03] wird in diesem Bereich ein stark inhomogener Deformationszustand festgestellt. Dieser führt bei schrittweitenkontrollierten Rechnungen zu geringeren Schrittweiten als beim einfachen Zug.

Die Berechnungen werden mit den Materialparametern aus Tab. 8.1 durchgeführt. Die Probe wird innerhalb von  $t = 1.0$  s um 30% gedehnt, siehe Abb. 8.12. In Abb. 8.13 wird das Konvergenzverhalten der schon beim einfachen Zug und bei der einfachen Scherung studierten Verfahren untersucht. Es zeigt sich, dass die Verwendung der Verfahren von Ellsiepen und Cash ein ähnliches Konvergenzverhalten haben und etwas höhere Konvergenzordnungen als das implizite Euler-Verfahren erreichen.

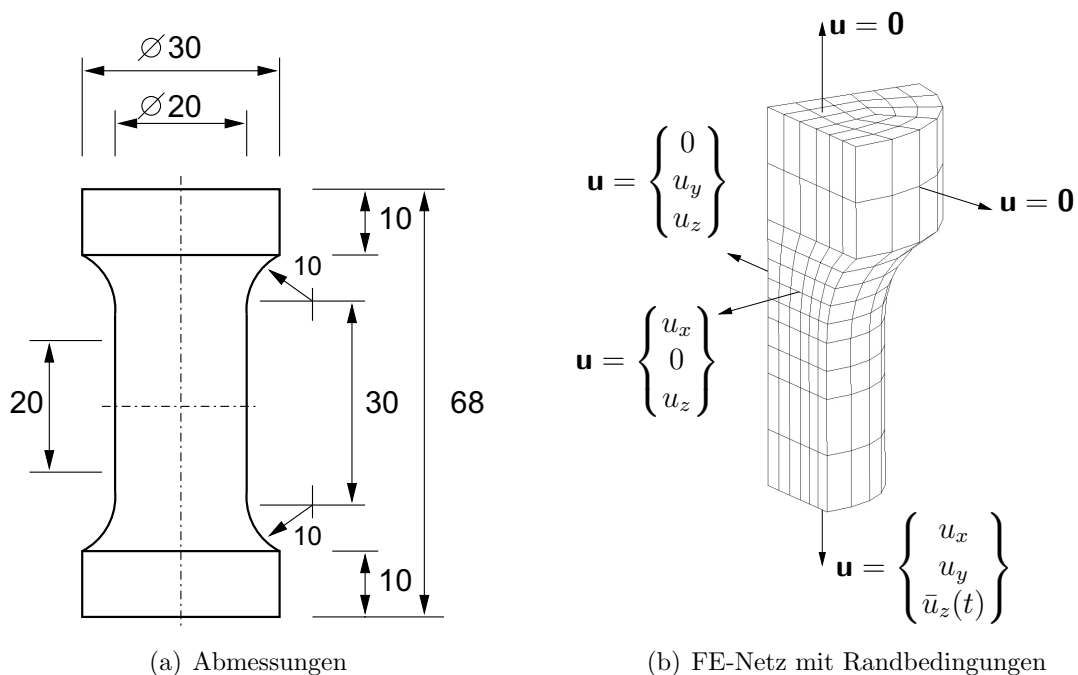


Abbildung 8.11: Rotationssymmetrische Zugprobe

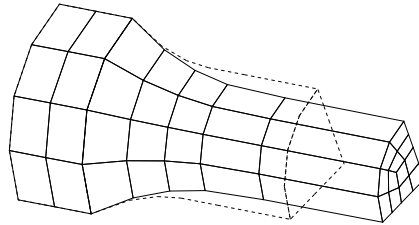
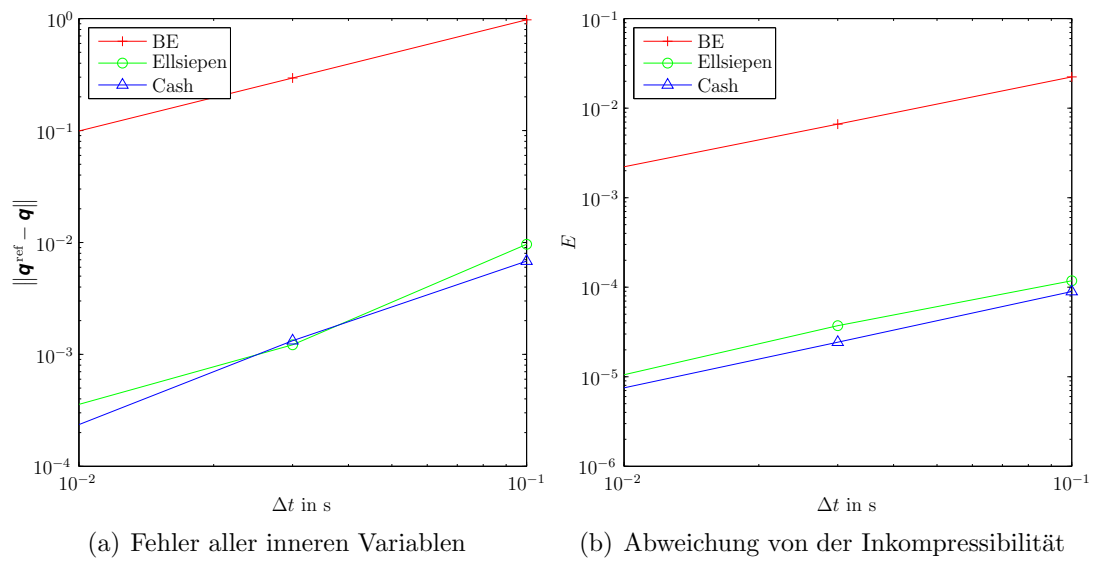


Abbildung 8.12: Deformiertes und undeformiertes Netz der Zugprobe



(a) Fehler aller inneren Variablen

(b) Abweichung von der Inkompressibilität

Abbildung 8.13: Konvergenzverhalten beim Zug



## 9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Materialmodell der finiten Elastoplastizität, welches auf den Arbeiten [Lio00], [TW04] und [Lüh97] beruht, vorgestellt und um viskoplastische Eigenschaften erweitert. Das Materialmodell basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und inelastischen Anteil. Der inelastische Anteil kann wiederum multiplikativ in einen dissipativen und einen energiespeichernden Anteil zerlegt werden. Das Materialmodell ist für große Deformationen formuliert und enthält eine Verallgemeinerung des Armstrong & Frederick Ansatzes auf finite Deformationen. Dabei wird die Annahme getroffen, dass die plastischen Deformationen inkompressibel sind.

Das erarbeitete Materialmodell ist in das Programm TASA-FEM, [Har06], implementiert worden. Dabei wird auf das Algebra-Differentialgleichungssystem, welches sich aus der Methode der finiten Elemente ergibt, eingegangen. Gelöst wird das DAE-System mit diagonal-impliziten Runge-Kutta Verfahren und dem Mehrebenen-Newton Verfahren. Die Materialgleichungen werden auf Elementebene in der Referenzkonfiguration ausgewertet und integriert. Anschließend werden der zweite Piola-Kirchhoff Tensor und die konsistente Tangente in die Momentankonfiguration vortransformiert und an die globale Routine übergeben. Da alle Tensoren zweiter Stufe auf Elementebene symmetrisch sind, wird diese Eigenschaft ausgenutzt und so Speicher und Rechenzeit gespart.

Oftmals ist die Erhaltung von Invarianten, wie der plastischen Inkompressibilität, entscheidend für die Stabilität und Qualität eines numerischen Verfahrens. Im Allgemeinen können numerische Verfahren Invarianten jedoch nicht erhalten. Daher werden drei Projektionsverfahren vorgestellt, mit welchen die plastische Inkompressibilität wieder hergestellt wird.

Im Anschluß werden drei numerische Beispiele vorgestellt. Anhand des einfachen Zugs, der einfachen Scherung und des Zugs eines rotationssymmetrischen Körpers werden einige Eigenschaften des Materialmodells und der Algorithmen untersucht. Dabei wird eine Ordnungsreduktion beobachtet. Der Einsatz von Verfahren der Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$  und größer erscheint somit nicht sinnvoll. Die Einführung einer Viskosität verringert diesen Effekt wieder. Allerdings müssen relativ große Werte für die Viskosität gewählt werden, damit die Konvergenzordnung der Verfahren höherer Ordnung erhalten bleibt.

In [TW03] wird der Einfluss der plastischen Inkompressibilität und ein mögliches Korrekturverfahren untersucht. Die Autoren stellen dort bei der einfachen Scherung signifikante Abweichungen der Spannungen fest, wenn die Inkompressibilität

nicht erfüllt wird. Bei der in dieser Arbeit gewählten Implementierung ist dieser Effekt nicht aufgetreten. Selbst bei großen Schrittweiten und dem impliziten Euler-Verfahren werden Spannungen berechnet, die qualitativ der analytischen Lösung aus [TW03] entsprechen. Der Einsatz der Projektionsverfahren bringt in diesem Zusammenhang keine wesentlichen Verbesserungen.

In weiterführenden Arbeiten sollte die Einbeziehung der plastischen Inkompressibilität als Nebenbedingung in die Lösung des Nullstellenproblems auf lokaler Ebene untersucht werden. Dies würde auf ein Minimierungsproblem führen, wie es z.B. in [SK04] dargestellt ist. Um den Spannungsalgorithmus noch robuster zu gestalten, könnten darüber hinausgehende Zwänge eingebaut werden. Dies wird z.B. in [HBed] für Metallpulver angewendet. Wünschenswert ist auch eine Parameterstudie des Materialmodells, sowie die Validierung des Modells mit einer analytischen Lösung.

# A Ableitung des elastischen Anteils der spezifischen freien Energie $\hat{\psi}_e$

## A.1 Ableitung nach $\hat{\Gamma}_e$

$$\hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T) = F(\mathbf{g}(\hat{\Gamma}_e)) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} DF(\hat{\Gamma}_e|\mathbf{H}) &= DF(\mathbf{g}(\hat{\Gamma}_e)|D\mathbf{g}(\hat{\Gamma}_e|\mathbf{H})) \\ &= DF(\mathbf{g}(\hat{\Gamma}_e)|\mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T) \\ &= \frac{\partial \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)}{\partial(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \frac{\partial \hat{\psi}_e(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)}{\partial(\mathbf{Q}\hat{\Gamma}_e\mathbf{Q}^T)} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$D\hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e|\mathbf{H}) = \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} \cdot \mathbf{H} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} DF(\hat{\Gamma}_e|\mathbf{H}) &= D\hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e|\mathbf{H}) \\ \Rightarrow \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} &= \mathbf{Q} \frac{\partial \hat{\psi}_e(\hat{\Gamma}_e)}{\partial \hat{\Gamma}_e} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Ableitung nach $\hat{\mathbf{C}}_e$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \left[ \frac{K}{2} (\hat{J}_e - 1)^2 \right] = K (\hat{J}_e - 1) \frac{\partial \hat{J}_e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \underbrace{\sqrt{\det \hat{\mathbf{C}}_e}}_{\hat{J}_e} = \frac{1}{2} (\det \hat{\mathbf{C}}_e)^{-\frac{1}{2}} \det \hat{\mathbf{C}}_e \quad \hat{\mathbf{C}}_e^{-T} = \frac{1}{2} \hat{J}_e \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \left[ \frac{K}{2} (\hat{J}_e - 1)^2 \right] = \frac{K}{2} (\hat{J}_e - 1) \hat{J}_e \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \left[ c_{10} \left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{C}}_e \cdot \mathbf{1} \right] = c_{10} \left\{ -\frac{1}{3} \left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \text{Sp} \hat{\mathbf{C}}_e \right) \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} + \left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{1} \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$= c_{10} \left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3} \text{Sp} \hat{\mathbf{C}}_e \underbrace{\hat{\mathbf{C}}_e^{-1}}_{\left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{C}}_e^{-1}} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$= c_{10} \left( \det \hat{\mathbf{C}}_e \right)^{-\frac{1}{3}} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3} \left( \text{Sp} \bar{\mathbf{C}}_e \right) \bar{\mathbf{C}}_e^{-1} \right] \quad (\text{A.10})$$



# Literaturverzeichnis

- [AA94] ALTENBACH, J. und H. ALTENBACH: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [AF66] ARMSTRONG, P.J. und C.O. FREDERICK: *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. Technischer Bericht, G.E.G.B. Report RD/B/N731, Berkeley Nuclear Laboratories, UK, 1966.
- [BHW06] BURG, K., H. HAF und F. WILLE: *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 1. Analysis*. Teubner-Verlag, 2006.
- [Cas79] CASH, J.R.: *Diagonally implicit Runge-Kutta formulae with error estimates*. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 24:293–301, 1979.
- [EH01] ELLSIEPEN, P. und S. HARTMANN: *Remarks on the interpretation of current non-linear finite element analyses as differential-algebraic equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:679–707, 2001.
- [Ell99] ELLSIEPEN, P.: *Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien*. Doktorarbeit, Institute of Mechanics II, University of Stuttgart, 1999.
- [Gre98] GREENBERG, M.: *Advanced Engineering Mathematics*. Prentice Hall, 1998.
- [GVdGeda] GOTO, K. und R. VAN DE GEIJN: *Anatomy of High-Performance Matrix Multiplication*. ACM Transactions on Mathematical Software, submitted.
- [GVdGedb] GOTO, K. und R. VAN DE GEIJN: *High-Performance Implementation of the Level-3 BLAS*. ACM Transactions on Mathematical Software, submitted.
- [H<sup>+</sup>98] HOFFMANN, H. et al.: *Metal Forming Handbook*. Springer Berlin, 1998.

- [Har93] HARTMANN, S.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität: Ein Finite Elemente Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Doktorarbeit, Institut für Mechanik, Universität Kassel, 1993.
- [Har03] HARTMANN, S.: *Finite-Elemente Berechnung inelastischer Kontinua: Interpretation als Algebro-Differentialgleichungssysteme*. Habilitationsschrift, 2003.
- [Har06] HARTMANN, S.: *TASA-FEM: Ein Finite-Elemente Programm für raum-zeitadaptive gekoppelte Strukturberechnungen, Version 1.0*. Mitteilung des Instituts für Mechanik 1/ 06, Institut für Mechanik, Universität Kassel, 2006.
- [Hau00] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [HBed] HARTMANN, S. und W. BIER: *High-order time integration applied to metal powder plasticity*. International Journal of Plasticity, submitted.
- [Hel03] HELM, DIRK: *Kontinuumsmechanik I, Skript zur Vorlesung des WS 2003/04 Institut für Mechanik, Universität Kassel*, 2003.
- [Hel06] HELM, D.: *Stress computation in finite thermoviscoplasticity*. International Journal of Plasticity, 22:1699–1727, 2006.
- [Hor02] HORNBOGEN, E.: *Werkstoffe*. Springer, Berlin, 2002.
- [HT89] HAUPT, P. und CH. TSAKMAKIS: *On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics*. Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics, 1:165–196, 1989.
- [HWL02] HAIRER, E., G. WANNER und C. LUBICH: *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin, 2002.
- [JF02] JELTSCH-FRICKER, R.: *Variationsrechnung*. Skript zur Vorlesung in den Technikstudiengängen der Universität Kassel, 2002.
- [Kli66] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1966.
- [Lüh97] LÜHRS, G.: *Randwertaufgaben der Viskoplastizität: Modellierung, Simulation und Vergleich mit experimentellen Daten aus zyklischen Prozessen und Umformvorgängen*. Doktorarbeit, Universität Kassel, Institut für Mechanik, 1997.

- [Lio00] LION, A.: *Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models*. International Journal of Plasticity, 16:469–494, 2000.
- [Lub02] LUBARDA, V. A.: *Elastoplasticity Theory*. CRC Press, 2002.
- [Qui04] QUINT, K. J.: *Vergleichende Studien unterschiedlicher Newton-Verfahren in der Methode der finiten Elemente nichtlinearer Kontinua*. Studienarbeit, 2004.
- [SK04] SCHWARZ, H. R. und N. KÖCKLER: *Numerische Mathematik*. Teubner-Verlag, 2004.
- [SW95] STREHMEL, K. und R. WEINER: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Teubner Stuttgart, 1995.
- [Tsa94] TSAKMAKIS, CH.: *Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen*. Habilitationsschrift, 1994.
- [TW03] TSAKMAKIS, C. und A. WILLUWEIT: *Use of the Elastic Predictor-Plastic Corrector Method for Integrating Finite Deformation Plasticity Laws*. In: HUTTER, KOLUMBA und H. BAASER (Herausgeber): *Deformation and Failure of Metallic Materials*, Seiten 79–106. Springer, 2003.
- [TW04] TSAKMAKIS, CH. und A. WILLUWEIT: *A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 39:539–554, 2004.