



**Institut  
für  
Mechanik**

**U N I K A S S E L  
V E R S I T Ä T**

## **Thermoviskoplastizität: Modellierung, Implementierung und Simulation**

Dipl.- Ing. Christoph Bröcker

Institute of Mechanics  
University of Kassel

Mitteilung des Instituts für Mechanik Nr.5/2007  
Report of the Institute of Mechanics No.5/2007

Der Inhalt dieser Arbeit muss nicht das eingereichte oder publizierte Original sein, sondern kann Änderungen beinhalten.  
The content of this work might contain changes and is therefore different to a possible submitted or otherwise published original.

*Herausgeber/editor*

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Mechanik  
Universität Kassel

*Organisation und Verwaltung/organization and administration*

Priv.-Doz. Dr.-Ing. Stefan Hartmann  
Institut für Mechanik  
Universität Kassel  
Mönchebergstr.7  
34125 Kassel  
Germany

© 2007

Institut für Mechanik  
Universität Kassel  
Mönchebergstr. 7  
34125 Kassel  
Germany

[www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de](http://www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de)

U N I K A S S E L  
V E R S I T Ä T

Fachbereich Maschinenbau  
Institut für Mechanik  
Fachgebiet Numerische Methoden der Mechanik

# Thermoviskoplastizität: Modellierung, Implementierung und Simulation

von:  
Christoph Bröcker

17. Januar 2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Materialmodell</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Dehnstabformulierung</b>	<b>6</b>
3.1	Element in globalen Koordinaten . . . . .	9
3.2	Stabkraft und Wärmestrom im Element . . . . .	11
3.3	Zeitintegration der Evolutionsgleichungen . . . . .	13
3.4	Berechnung der Elementtangentialmatrix . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Implementierung</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Berechnungen</b>	<b>41</b>
5.1	Variation der Viskosität . . . . .	42
5.2	Belastung mit Haltezeiten . . . . .	45
5.3	Berechnungen nach LION . . . . .	48
5.3.1	Variation der Dehnungsgeschwindigkeit . . . . .	50
5.3.2	Lastzyklus mit Haltezeiten . . . . .	52
5.3.3	Zyklische Belastung . . . . .	55
	<b>Literatur</b>	<b>56</b>

## 1 Einleitung

Das Thermoviskoplastizitätsmodell aus BRÖCKER [1] wird in das FE-Programm FEAP implementiert.

Zunächst wird das Materialmodell kurz aufgeführt, anschließend wird die Elementformulierung für den linearen Dehnstab in direkter Anlehnung an BRÖCKER [1] hergeleitet. Dabei beziehen sich die Verweise der Form (\*\*.\*) auf die Gleichungsnummern aus BRÖCKER. Es folgen die Beschreibung der Elementroutine mit dem Programmcode sowie einige Beispielrechnungen.

## 2 Materialmodell

Die Gleichungen der Thermoviskoplastizität ergeben sich aus denen der Thermoplastizität, wenn in die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen für  $\lambda$  der Ansatz

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \\ &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{2k_0} (f + |f|) \right)^m \\ &= \dot{s}_{vp}\end{aligned}\tag{1}$$

verwendet wird. Außerdem sind nun für die Fließfunktion  $f$  auch Werte größer null zugelassen.

Fließfunktion:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \geq 0\tag{2}$$

Evolutionsgleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|}\tag{3}$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \left( a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right)\tag{4}$$

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right)\tag{5}$$

Freie Energie:

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon_{el}, \theta, \varepsilon_{vp}, y, s_{vp}, r) &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} E \varepsilon_{el}^2 - E \alpha (\theta - \theta_0) \varepsilon_{el} - \frac{1}{2\theta_0} \rho c_d (\theta - \theta_0)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a (\varepsilon_{vp} - y)^2 + \frac{1}{2} \gamma (s_{vp} - r)^2 \right)\end{aligned}\tag{6}$$

Spannung nach Gl. (2.46):

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{el}} \\ &= E \varepsilon_{el} - E \alpha (\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (7)$$

Entropie nach Gl. (2.47):

$$\begin{aligned}s &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} E \alpha \varepsilon_{el} + \frac{1}{\theta_0} c_d (\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (8)$$

Mechanische Dissipation nach Gl. (2.51):

$$\begin{aligned}\delta_M &= \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vp}} \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \psi}{\partial s_{vp}} \dot{s}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} - \underbrace{a(\varepsilon_{vp} - y)}_{\xi} \dot{\varepsilon}_{vp} + \underbrace{a(\varepsilon_{vp} - y)}_{\xi} \dot{y} - \underbrace{\gamma(s_{vp} - r)}_{\kappa} \dot{s}_{vp} + \underbrace{\gamma(s_{vp} - r)}_{\kappa} \dot{r} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

Damit ergeben sich die beiden Potentialbeziehungen:

$$\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = a(\varepsilon_p - y)\quad (10)$$

$$\kappa = \frac{\partial \psi}{\partial s_p} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \gamma(s_p - r)\quad (11)$$

Einsetzen der Fließregel (3) führt zu:

$$\begin{aligned}\delta_M &= \frac{1}{\rho} \left( (\sigma - \xi) \dot{\varepsilon}_{vp} + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_{vp} + \kappa \dot{r} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( (\sigma - \xi) \dot{s}_{vp} \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_{vp} + \kappa \dot{r} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( |\sigma - \xi| \dot{s}_{vp} - \kappa \dot{s}_{vp} + \xi \dot{y} + \kappa \dot{r} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( (|\sigma - \xi| - \kappa - \kappa_0 + \kappa_0) \dot{s}_{vp} + \xi \dot{y} + \kappa \dot{r} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( (f + \kappa_0) \dot{s}_{vp} + \xi \dot{y} + \kappa \dot{r} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

Mit den Evolutionsgleichungen (3.177) und (3.178) für  $y$  und  $r$

$$\dot{y} = \frac{b}{a} \dot{s}_{vp} \xi\quad (13)$$

$$\dot{r} = \frac{\beta}{\gamma} \dot{s}_{vp} \kappa\quad (14)$$

folgt:

$$\begin{aligned}\delta_M &= \dot{s}_{vp} \left( f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \\ &= \frac{1}{\rho \eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \left( f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \geq 0\end{aligned}\quad (15)$$

Wärmeleitungsgleichung nach Gl. (2.82):

$$c_d \dot{\theta} = -\frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D \quad (16)$$

mit  $D$  nach Gleichung (2.83):

$$\begin{aligned}D &= -\frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_{vp} + \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial \varepsilon_{vp}} \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial y} \dot{y} \\ &\quad - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial s_{vp}} \dot{s}_{vp} - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial r} \dot{r} \\ &= \frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon}_{vp} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vp}} \dot{\varepsilon}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \psi}{\partial s_{vp}} \dot{s}_{vp} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r}}_{\hat{=} \delta_M} \\ &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \frac{1}{\rho} \left( \theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \\ &= \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{1}{\rho} \left( \theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right)\end{aligned}\quad (17)$$

### Energieumsetzung

Zur Auswertung der Energieumsetzung wird das Verhältnis gespeicherte Energie  $e_s$  zur plastischen Arbeit  $a_p$  gebildet:

$$\varphi = \frac{e_s}{a_p} \quad (18)$$

Die plastische Arbeit ergibt sich als Integral der plastischen Spannungsleistung  $w_p$  über der Zeit:

$$a_p = \int_0^t w_p(\tau) d\tau \quad (19)$$

Damit folgt

$$\dot{a}_p = w_p \quad (20)$$

und mit der plastischen Spannungsleistung:

$$\dot{a}_p = \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} \quad (21)$$

Die Integration wird nach dem Backward-Eulerverfahren ausgeführt:

$$\begin{aligned}
 a_p^{n+1} &= a_p^n + \Delta t \dot{a}_p \\
 &= a_p^n + \Delta t \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_{vp} \\
 &= a_p^n + \lambda \Delta t \frac{1}{\rho} \sigma \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Die gespeicherte Energie ergibt sich als das Integral der gespeicherten Spannungsleistung  $w_s$  über der Zeit:

$$e_s = \int_0^t w_s(\tau) d\tau \tag{23}$$

Hieraus folgt:

$$\dot{e}_s = w_s \tag{24}$$

Nach Gleichung (2.73) mit Gl. (6) lautet die gespeicherte Spannungsleistung:

$$w_s = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vp}} \dot{\varepsilon}_{vp} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \psi}{\partial s_{vp}} \dot{s}_{vp} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} \tag{25}$$

Dies ist genau die Zeitableitung des plastischen Anteils der freien Energie:

$$w_s = \dot{\psi}_p \tag{26}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 e_s &= \int_0^t \dot{\psi}_p d\tau \\
 &= \psi_p
 \end{aligned} \tag{27}$$

Mit Gleichung (6) unter Verwendung von Gl. (10) und (11) lautet die gespeicherte Energie:

$$e_s = \psi_p = \frac{1}{2\rho} \left( \frac{1}{a} \xi^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa^2 \right) \tag{28}$$

Daraus kann direkt eine Aussage über eine mögliche Energiefreisetzung der gespeicherten Energie gemacht werden: eine Energiefreisetzung bei Entlastung ist nur für die aufgrund kinematischer Verfestigung gespeicherte Energie möglich, da sich nur  $\xi$  bei Entlastung zurück entwickeln kann. Dagegen kann die aufgrund isotroper Verfestigung gespeicherte Energie nie wieder freigesetzt werden, denn  $\kappa$  ist eine monoton wachsende Funktion.

Das Verhältnis  $\varphi$  von gespeicherter Energie  $e_s$  zur plastischen Arbeit  $a_p$  lautet schließlich:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{e_s}{a_p} \\
 &= \frac{\psi_p}{\int_0^t w_p(\tau) d\tau}
 \end{aligned} \tag{29}$$



### 3 Dehnstabformulierung

Die Spannung der Thermoviskoplastizität nach (7) mit den Ansätzen (5.24) und (5.27) für Dehnung und Temperaturänderung lautet:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \mathbf{B}^T \mathbf{u} - E \varepsilon_{vp} - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta \quad (30)$$

Einsetzen der Spannung in  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma})$  nach (5.69) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) &= A \int_{-1}^1 \mathbf{B} (E \mathbf{B}^T \mathbf{u} - E \varepsilon_{vp} - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta) J d\zeta \\ &= \underbrace{EA \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{uu}} \mathbf{u} \\ &\quad - \underbrace{EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{u\Theta}} \Theta - \underbrace{E \varepsilon_{vp} \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta}_{\mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp})} \end{aligned} \quad (31)$$

Aufgrund des linearen Elementansatzes ist die Dehnung im Element konstant. Damit sind auch die plastische Dehnung sowie die anderen inneren Variablen konstant im Element. Deshalb konnte  $\varepsilon_{vp}$  aus dem Integral gezogen werden. Somit gilt:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta - \mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp}) \quad (32)$$

mit:

$$\mathbf{K}_{uu} = EA \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta} = EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta \quad (34)$$

$$\mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp}) = E \varepsilon_{vp} \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta \quad (35)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}_{uu}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{K}_{u\Theta}$  die Kopplungsmatrix für thermische Dehnungen. Der Vektor  $\mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp})$  sorgt dafür, dass durch die plastischen Dehnungen kein Spannungsbeitrag entsteht.

Entsprechend dem thermoplastischen Dehnstabelement ergeben sich diese Terme zu:

$$\mathbf{K}_{uu} = EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta} = \frac{EA \alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp}) = EA \varepsilon_{vp} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Der Dissipationsterm (17) der Wärmeleitungsgleichung ist:

$$D = \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{1}{\rho} \left( \theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (39)$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} = \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) \quad (40)$$

folgt:

$$D = \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{1}{\rho} \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (41)$$

Einsetzen von  $D$  in  $\dot{\mathbf{Q}}(D)$  nach (5.70) ergibt:

$$\dot{\mathbf{Q}}(D) = A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) J \, d\zeta \quad (42)$$

Da die Spannung und die inneren Variablen beim linearen Element konstant sind, können all diese Größen aus dem Integral gezogen werden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(D) &= \lambda(\sigma, \xi, \kappa) A \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \int_{-1}^1 \mathbf{N} J \, d\zeta \\ &= \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{AL}{2} \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \end{aligned} \quad (43)$$

Die Ausdrücke  $\mathbf{F}(\sigma)$  nach (32) und  $\dot{\mathbf{Q}}(D)$  nach (43) eingesetzt in die Gleichungen (5.44) und (5.45) ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{0} \\ &= \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp}) - \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta \\ &= \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta \end{aligned} \quad (44)$$

mit

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{vp}(\varepsilon_{vp}) \quad (45)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \mathbf{0} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta \\ &= \dot{\mathbf{Q}} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta \end{aligned} \quad (46)$$

mit

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \quad (47)$$

bzw. in Matrixform:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \\
 &= \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_p(\varepsilon_p) \\ \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \end{Bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} & \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{K}_{u\Theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Theta \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{48}$$

### 3.1 Element in globalen Koordinaten

Die Koordinatentransformation erfolgt in völliger Analogie zu BRÖCKER [1] Kap. 6.2 und führt zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} &= \mathbf{0} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \end{array} \right\} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g & \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^g & -\mathbf{K}_{u\Theta}^g \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Theta \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{49}$$

Komponentenform:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g} &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -c_x P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ -c_y P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ -c_z P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ c_x P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ c_y P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ c_z P_{vp}(\varepsilon_{vp}) \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \end{Bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{50}$$

mit

$$K_1 = \frac{EA}{L} \quad (51)$$

$$K_2 = \frac{EA\alpha}{2} \quad (52)$$

$$K_3 = \frac{kA}{L} \quad (53)$$

$$D_1 = \theta_0 \frac{EA\alpha}{2} \quad (54)$$

$$D_2 = \frac{\rho ALc_d}{6} \quad (55)$$

$$P_{vp}(\varepsilon_{vp}) = EA\varepsilon_{vp} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_D &= \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) \\ &= \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{AL}{2} \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \\ &= \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \tilde{D} \end{aligned} \quad (57)$$

mit

$$\tilde{D} = \frac{AL}{2} \left( f + \kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (58)$$

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{2k_0} (f + |f|) \right)^m \quad (59)$$

### 3.2 Stabkraft und Wärmestrom im Element

Für die Stabnormalkraft  $N$  und die resultierenden Stabkräfte  $S_{R1}$  und  $S_{R2}$  gilt analog zum thermoplastischen Dehnstabelement:

$$N = S_{R2} = -S_{R1} \quad (60)$$

$$= A \sigma \quad (61)$$

Mit der Spannungsbeziehung folgt:

$$\begin{aligned} N &= A (E(\varepsilon - \varepsilon_{vp}) - E \alpha \Theta) \\ &= EA (\varepsilon - \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{th}) \end{aligned} \quad (62)$$

Mit der Dehnung nach Gleichung (6.77)

$$\varepsilon = \frac{1}{L} (c_x (v_4 - v_1) + c_y (v_5 - v_2) + c_z (v_6 - v_3)) \quad (63)$$

und der thermischen Dehnung nach (6.80)

$$\varepsilon_{th} = \alpha \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} \quad (64)$$

lautet die **Normalkraft**:

$$\begin{aligned} N &= \frac{EA}{L} (c_x (v_4 - v_1) + c_y (v_5 - v_2) + c_z (v_6 - v_3)) \\ &\quad - EA \varepsilon_{vp} - \frac{EA \alpha}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \\ &= K_1 (c_x (v_4 - v_1) + c_y (v_5 - v_2) + c_z (v_6 - v_3)) \\ &\quad - P_{vp}(\varepsilon_{vp}) - K_2 (\Theta_1 + \Theta_2) \end{aligned} \quad (65)$$

Entsprechend lautet die **Spannung**:

$$\sigma = \frac{E}{L} (c_x (v_4 - v_1) + c_y (v_5 - v_2) + c_z (v_6 - v_3)) - E \varepsilon_{vp} - \frac{E \alpha}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) \quad (66)$$

Für den **Wärmestrom**  $\dot{Q}_E$  im Element gilt nach (6.83):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_E &= \frac{kA}{L} (\Theta_1 - \Theta_2) \\ &= K_3 (\Theta_1 - \Theta_2) \end{aligned} \quad (67)$$

### Umformung des GLS

An dem Gleichungssystem (50) können in Analogie zum thermoplastischen Dehnstabelement aus BRÖCKER [1] einige Vereinfachungen im Bezug auf den numerischen Berechnungsaufwand vorgenommen werden:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) - \dot{Q}_E \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (68)$$

### Umsortierung für die Implementierung in FEAP

Vertauschen der Matrixelemente, sodass sie der Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade  $[v_1 v_2 v_3 \Theta_1 v_4 v_5 v_6 \Theta_2]^T$  entsprechen:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dot{Q}_1 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) - \dot{Q}_E \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \dot{Q}_D(\sigma, \mathbf{n}, \xi, \kappa, f) + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & 2D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (69)$$

### 3.3 Zeitintegration der Evolutionsgleichungen

Die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \quad (70)$$

$$\dot{\xi} = \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \left( a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \quad (71)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (72)$$

werden mit dem impliziten Eulerverfahren integriert:

$$\varepsilon_{vp} = \varepsilon_{vp}^n + \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t \mathbf{n} \quad (73)$$

$$\xi = \xi^n + \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t (a \mathbf{n} - b\xi) \quad (74)$$

$$\kappa = \kappa^n + \lambda \Delta t \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (75)$$

Dabei bedeutet die Abkürzung:

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} = \text{sgn}(\sigma - \xi) \quad (76)$$

### 3.4 Berechnung der Elementtangente

**Elastischer Prädiktor:**

Ausgehend vom Lösungsvektor der Verschiebung/Temperaturänderung  $\mathbf{y}$  des vorangegangenen Iterationsschritts sowie der plastischen Dehnung  $\varepsilon_p^n$  wird die Trail-Spannung berechnet:

$${}^T\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_{vp}^n) - E\alpha \Theta \quad (77)$$

Anschließend werden die Trail-Spannung und die inneren Variablen  $\xi^n$ ,  $\kappa^n$  in die Fließfunktion (2) eingesetzt. Wenn nun gilt

$$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) = |{}^T\sigma - \xi^n| - (\kappa_0 + \kappa^n) \leq 0 \quad (78)$$

so befindet man sich im elastischen Bereich. Das bedeutet die inneren Variablen entwickeln sich nicht

$$\varepsilon_{vp}^{n+1} = \varepsilon_{vp}^n \quad (79)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n \quad (80)$$



$$\kappa^{n+1} = \kappa^n \quad (81)$$

und die aktuelle Spannung ist gleich der Trail-Spannung:

$$\sigma^{n+1} = {}^T\sigma \quad (82)$$

Da die inneren Variablen konstant bleiben, gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (83)$$

Somit ergibt sich die Elementtangente (4.19) zu:

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \quad (84)$$

### Plastischer Korrektor:

Gilt jedoch

$$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) = |{}^T\sigma - \xi^n| - (\kappa_0 + \kappa^n) > 0 \quad (85)$$

so müssen sich die inneren Variablen entwickeln.

Die in der Zeit integrierten Evolutionsgleichungen (73) – (75) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem

$$l_1 = \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{vp}^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t \mathbf{n} = 0 \quad (86)$$

$$l_2 = \xi - \xi^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t (a \mathbf{n} - b\xi) = 0 \quad (87)$$

$$l_3 = \kappa - \kappa^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) = 0 \quad (88)$$

bzw.

$$\mathbf{l}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{vp}^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t \mathbf{n} \\ \xi - \xi^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t (a \mathbf{n} - b\xi) \\ \kappa - \kappa^n - \lambda(\sigma, \xi, \kappa) \Delta t \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (89)$$

zur Bestimmung der drei unbekannt inneren Variablen:

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p \\ \xi \\ \kappa \end{array} \right\} \quad (90)$$

Nun werden die Schritte 1, 2 und sowie die Bestimmung der Elementtangente aus Schritt 3 des Multilevel-Newton Verfahrens aus BRÖCKER [1] Kap. 4.3 ausgeführt.

**Schritt 1**

Das nichtlineare Gleichungssystem (4.15)

$$\mathbf{l}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (91)$$

wird mit dem Newton-Verfahren für gegebene  $\mathbf{y}$  gelöst

$$-\underbrace{\left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{l}^m \quad (92)$$

mit

$$\mathbf{q}^{m+1} = \mathbf{q}^m + \Delta \mathbf{q} \quad (93)$$

Die Funktionalmatrix  $\mathbf{F}$  ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (89) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (94)$$

Es gilt

$$\frac{\partial |ax + b|}{\partial x} = a \operatorname{sgn}(ax + b) \quad (95)$$

und

$$\frac{\partial (\operatorname{sgn}(ax + b))}{\partial x} = 0 \quad (96)$$

Damit folgt die Funktionalmatrix  $\mathbf{F}$  zu:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 - E\tilde{c}_1 & -\tilde{c}_1 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \\ -E\tilde{c}_1\tilde{c}_2 & -1 - \tilde{c}_1\tilde{c}_2 - \lambda\Delta t b & -\mathbf{n} \tilde{c}_1\tilde{c}_2 \\ -E\mathbf{n} \tilde{c}_1\tilde{c}_3 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1\tilde{c}_3 & -1 - \tilde{c}_1\tilde{c}_3 - \lambda\Delta t \beta \end{bmatrix} \quad (97)$$

Dabei sind:

$$\tilde{c}_1 = \tilde{\lambda}\Delta t \quad (98)$$

$$\tilde{c}_2 = a - b\xi \mathbf{n} \quad (99)$$

$$\tilde{c}_3 = \beta \left( \frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (100)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\partial \lambda(\sigma, \xi, \kappa)}{\partial f} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{2k_0} \right)^m m (f + |f|)^{m-1} (1 + \operatorname{sgn}(f)) \quad (101)$$

Somit lautet das zu lösende GLS mit Gleichung (89)

$$\begin{bmatrix} -1 - E\tilde{c}_1 & -\tilde{c}_1 & -n\tilde{c}_1 \\ -E\tilde{c}_1\tilde{c}_2 & -1 - \tilde{c}_1\tilde{c}_2 - \lambda\Delta t b & -n\tilde{c}_1\tilde{c}_2 \\ -E n \tilde{c}_1\tilde{c}_3 & -n\tilde{c}_1\tilde{c}_3 & -1 - \tilde{c}_1\tilde{c}_3 - \lambda\Delta t \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \xi \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{vp} - \varepsilon_{vp}^n - \lambda\Delta t n \\ \xi - \xi^n - \lambda\Delta t n \tilde{c}_2 \\ \kappa - \kappa^n - \lambda\Delta t \tilde{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (102)$$

mit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{vp} \\ \xi \\ \kappa \end{Bmatrix}^{m+1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{vp} \\ \xi \\ \kappa \end{Bmatrix}^m + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{vp} \\ \Delta \xi \\ \Delta \kappa \end{Bmatrix} \quad (103)$$

## Schritt 2

Nun muss das lineare Gleichungssystem mit 8 rechten Seiten (4.16) gelöst werden:

$$\underbrace{-\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}}}_{\mathbf{F}} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} \quad (104)$$

bzw.

$$\mathbf{F} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} \quad (105)$$

Dabei ist  $\mathbf{F}$  die Funktionalmatrix aus Schritt 1. Die zu berechnende Matrix hat folgende Gestalt:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dy} = \begin{bmatrix} \frac{d\varepsilon_p}{dv_1} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_2} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_3} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_4} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_5} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_6} & \frac{d\varepsilon_p}{d\Theta_1} & \frac{d\varepsilon_p}{d\Theta_2} \\ \frac{d\xi}{dv_1} & \frac{d\xi}{dv_2} & \frac{d\xi}{dv_3} & \frac{d\xi}{dv_4} & \frac{d\xi}{dv_5} & \frac{d\xi}{dv_6} & \frac{d\xi}{d\Theta_1} & \frac{d\xi}{d\Theta_2} \\ \frac{d\kappa}{dv_1} & \frac{d\kappa}{dv_2} & \frac{d\kappa}{dv_3} & \frac{d\kappa}{dv_4} & \frac{d\kappa}{dv_5} & \frac{d\kappa}{dv_6} & \frac{d\kappa}{d\Theta_1} & \frac{d\kappa}{d\Theta_2} \end{bmatrix} \quad (106)$$

Die Matrix der rechten Seite folgt mit Gl. (89) zu:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial l_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_2}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial l_3}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_3}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (107)$$

Die einzelnen Koeffizienten ergeben sich zu:

$$\frac{\partial l_1}{\partial \mathbf{v}} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z] \quad (108)$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Theta} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \frac{\alpha L}{2} [-1 \quad -1] \quad (109)$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \mathbf{v}} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \Theta} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \frac{\alpha L}{2} \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial \mathbf{v}} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \mathbf{n} \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial \Theta} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \frac{\alpha L}{2} \mathbf{n} \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Damit ergibt sich die Matrix der rechten Seite zu:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z & -\frac{\alpha L}{2} & -\frac{\alpha L}{2} \\ -\tilde{c}_2 c_x & -\tilde{c}_2 c_y & -\tilde{c}_2 c_z & \tilde{c}_2 c_x & \tilde{c}_2 c_y & \tilde{c}_2 c_z & -\tilde{c}_2 \frac{\alpha L}{2} & -\tilde{c}_2 \frac{\alpha L}{2} \\ -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_x & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_y & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_z & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_x & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_y & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_z & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 \frac{\alpha L}{2} & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 \frac{\alpha L}{2} \end{bmatrix} \quad (114)$$

Das zu lösende lineare GLS lautet somit:

$$-\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 - E\tilde{c}_1 & -\tilde{c}_1 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \\ -E\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 & -1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \lambda \Delta t b & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 \\ -E \mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 & -1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 - \lambda \Delta t \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z & -\frac{\alpha L}{2} & -\frac{\alpha L}{2} \\ -\tilde{c}_2 c_x & -\tilde{c}_2 c_y & -\tilde{c}_2 c_z & \tilde{c}_2 c_x & \tilde{c}_2 c_y & \tilde{c}_2 c_z & -\tilde{c}_2 \frac{\alpha L}{2} & -\tilde{c}_2 \frac{\alpha L}{2} \\ -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_x & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_y & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 c_z & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_x & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_y & \mathbf{n} \tilde{c}_3 c_z & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 \frac{\alpha L}{2} & -\mathbf{n} \tilde{c}_3 \frac{\alpha L}{2} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Da sich die 8 rechten Seiten des GLS jeweils nur um einen Faktor unterscheiden, kann das GLS für eine rechte Seite gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} -1 - E\tilde{c}_1 & -\tilde{c}_1 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \\ -E\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 & -1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \lambda \Delta t b & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_2 \\ -E \mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 & -\mathbf{n} \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 & -1 - \tilde{c}_1 \tilde{c}_3 - \lambda \Delta t \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = -\tilde{c}_1 \frac{E}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tilde{c}_2 \\ \mathbf{n} \tilde{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (116)$$

Die anderen Lösungen ergeben sich dann durch Multiplikation mit den entsprechenden Faktoren:

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -c_x h_1 & -c_y h_1 & -c_z h_1 & c_x h_1 & c_y h_1 & c_z h_1 & -\frac{\alpha L}{2} h_1 & -\frac{\alpha L}{2} h_1 \\ -c_x h_2 & -c_y h_2 & -c_z h_2 & c_x h_2 & c_y h_2 & c_z h_2 & -\frac{\alpha L}{2} h_2 & -\frac{\alpha L}{2} h_2 \\ -c_x h_3 & -c_y h_3 & -c_z h_3 & c_x h_3 & c_y h_3 & c_z h_3 & -\frac{\alpha L}{2} h_3 & -\frac{\alpha L}{2} h_3 \end{bmatrix} \quad (117)$$

**Schritt 3:**

Im dritten Schritt wird die Elementtangente Matrix nach Gleichung (4.19)

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} \quad (118)$$

bestimmt. Mit Gleichung (48) folgt die Matrix:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (119)$$

Diese enthält die Ableitungen von Verschiebungsfeld- und Wärmeleitungsgleichung nach den Knotenfreiheitsgraden.

Dabei ergibt sich die Ableitung der Verschiebungsfeldgleichung (44) nach den Verschiebungsfreiheitsgraden zu

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{K}_{uu}^g \quad (120)$$

und die Ableitung der Verschiebungsfeldgleichung nach den Temperaturfreiheitsgraden zu:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \Theta} = \mathbf{K}_{u\Theta}^g \quad (121)$$

Die Ableitung der Wärmeleitungsgleichung (46) nach den Verschiebungsfreiheitsgraden wird unter Verwendung von Gl. (66) wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial f} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial f} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \frac{1}{\Delta t} + \left\{ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial f} + \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial f} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (122)$$

Dabei wird als Zeitintegrationsverfahren das implizite Eulerverfahren verwendet. Aus Gleichung (43) ergibt sich

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} = \tilde{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (123)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial f} = \tilde{\lambda} \quad (124)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial f} = \lambda \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (125)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{n} \frac{E}{L} [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z] \quad (126)$$

Unter Verwendung von Gleichung (49) bzw. (50) folgt nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} &= -\theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \frac{1}{\Delta t} + \left\{ \tilde{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\} \mathbf{n} \frac{E}{L} [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z] \\
&= -\frac{1}{\Delta t} D_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\
&\quad + K_4 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\
&= -\bar{K}_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \tag{127}
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung:

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 \tag{128}$$

$$K_4 = \left( \tilde{D} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \right) \mathbf{n} \frac{E}{L} \tag{129}$$

Die Ableitung der Wärmeleitungsgleichung (46) nach den Temperaturfreiheitsgraden ergibt sich unter Verwendung des impliziten Eulerverfahrens sowie mit Gleichung (49) bzw. (50) zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \dot{\Theta}} \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial f} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial f} \right\} \frac{\partial \lambda}{\partial \Theta} \\
&= -\mathbf{K}_{\Theta\Theta} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \frac{1}{\Delta t} + \left\{ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial f} + \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial f} \right\} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \tag{130}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Theta} = -\mathbf{n} \frac{E\alpha}{2} [1 \quad 1] \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} &= -\mathbf{K}_{\Theta\Theta} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \frac{1}{\Delta t} + \left\{ \tilde{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right\} (-1) \mathbf{n} \frac{E\alpha}{2} [1 \quad 1] \\
&= -K_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} D_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - K_5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \\ \bar{K}_3 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \tag{132}
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen:

$$\bar{K}_2 = K_3 + 2 \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \tag{133}$$

$$\bar{K}_3 = -K_3 + \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \tag{134}$$

$$K_5 = \left( \tilde{D} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \right) \mathbf{n} \frac{E\alpha}{2} \tag{135}$$

Damit lautet die Matrix mit den Ableitungen der Feldgleichungen nach den Knotenfreiheitsgraden:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = - \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ -c_x \bar{K}_1 & -c_y \bar{K}_1 & -c_z \bar{K}_1 & c_x \bar{K}_1 & c_y \bar{K}_1 & c_z \bar{K}_1 & \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \\ -c_x \bar{K}_1 & -c_y \bar{K}_1 & -c_z \bar{K}_1 & c_x \bar{K}_1 & c_y \bar{K}_1 & c_z \bar{K}_1 & \bar{K}_3 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Mit Gleichung (48) ergibt sich die Matrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \varepsilon_{vp}} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \varepsilon_{vp}} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_{vp}(\varepsilon_{vp})}{\partial \varepsilon_{vp}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \varepsilon_{vp}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (137)$$

Diese enthält die Ableitungen von Verschiebungsfeld- und Wärmeleitungsgleichung nach den inneren Variablen.

Die einzelnen Ableitungen ergeben sich mit Gleichung (38) und (43) zu:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{vp}(\varepsilon_{vp})}{\partial \varepsilon_{vp}} = EA \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \varepsilon_{vp}} &= - \left( \tilde{\lambda} \tilde{D} + \lambda \frac{AL}{2} \right) E \mathbf{n} \\ &= \dot{Q}_{D1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} &= \left( -\tilde{\lambda} \tilde{D} \mathbf{n} - \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} + \lambda AL \frac{b}{a} \xi \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \kappa} &= \left( -\tilde{\lambda} \tilde{D} - \lambda \frac{AL}{2} + \lambda AL \frac{\beta}{\gamma} \kappa \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (141)$$

mit den Abkürzungen:

$$\dot{Q}_{D1} = - \left( \tilde{\lambda} \tilde{D} + \lambda \frac{AL}{2} \right) E \mathbf{n} \quad (142)$$

$$\dot{Q}_{D2} = -\tilde{\lambda} \tilde{D} \mathbf{n} - \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} + \lambda \frac{ALb}{a} \xi \quad (143)$$

$$\dot{Q}_{D3} = -\tilde{\lambda} \tilde{D} - \lambda \frac{AL}{2} + \lambda \frac{AL\beta}{\gamma} \kappa \quad (144)$$

Damit lautet die Matrix mit den Ableitungen der Feldgleichungen nach den inneren Variablen:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -c_x EA & 0 & 0 \\ -c_y EA & 0 & 0 \\ -c_z EA & 0 & 0 \\ c_x EA & 0 & 0 \\ c_y EA & 0 & 0 \\ c_z EA & 0 & 0 \\ \dot{Q}_{D1} & \dot{Q}_{D2} & \dot{Q}_{D3} \\ \dot{Q}_{D1} & \dot{Q}_{D2} & \dot{Q}_{D3} \end{bmatrix} \quad (145)$$

Aus (145) und (117) folgt die Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} c_x^2 H_1 & c_{xy} H_1 & c_{xz} H_1 & -c_x^2 H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_{xz} H_1 & c_x H_2 & c_x H_2 \\ c_{xy} H_1 & c_y^2 H_1 & c_{yz} H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_y^2 H_1 & -c_{yz} H_1 & c_y H_2 & c_y H_2 \\ c_{xz} H_1 & c_{yz} H_1 & c_z^2 H_1 & -c_{xz} H_1 & -c_{yz} H_1 & -c_z^2 H_1 & c_z H_2 & c_z H_2 \\ -c_x^2 H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_{xz} H_1 & c_x^2 H_1 & c_{xy} H_1 & c_{xz} H_1 & -c_x H_2 & -c_x H_2 \\ -c_{xy} H_1 & -c_y^2 H_1 & -c_{yz} H_1 & c_{xy} H_1 & c_y^2 H_1 & c_{yz} H_1 & -c_y H_2 & -c_y H_2 \\ -c_{xz} H_1 & -c_{yz} H_1 & -c_z^2 H_1 & c_{xz} H_1 & c_{yz} H_1 & c_z^2 H_1 & -c_z H_2 & -c_z H_2 \\ -c_x H_3 & -c_y H_3 & -c_z H_3 & c_x H_3 & c_y H_3 & c_z H_3 & H_4 & H_4 \\ -c_x H_3 & -c_y H_3 & -c_z H_3 & c_x H_3 & c_y H_3 & c_z H_3 & H_4 & H_4 \end{bmatrix} \quad (146)$$

mit den Abkürzungen:

$$H_1 = EA h_1 \quad (147)$$

$$H_2 = \frac{EA\alpha}{2} L h_1 \quad (148)$$



$$H_3 = \dot{Q}_{D1} h_1 + \dot{Q}_{D2} h_2 + \dot{Q}_{D3} h_3 \quad (149)$$

$$H_4 = -\frac{\alpha L}{2} H_3 \quad (150)$$

Nun kann aus Gleichung (136) und (146) die Elementtangente matrix  $\mathbf{k}_t$  zusammengesetzt werden

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}}$$

$$= \begin{bmatrix} c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 & c_x \hat{K}_2 \\ c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 & c_y \hat{K}_2 \\ c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 & c_z \hat{K}_2 \\ -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 & -c_x \hat{K}_2 \\ -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 & -c_y \hat{K}_2 \\ -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 & -c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 & \hat{K}_5 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 & \hat{K}_4 \end{bmatrix} \quad (151)$$

mit den Abkürzungen:

$$\hat{K}_1 = K_1 - H_1 \quad (152)$$

$$\hat{K}_2 = K_2 - H_2 \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_3 &= \bar{K}_1 - H_3 \\ &= \frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 - H_3 \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_4 &= \bar{K}_2 - H_4 \\ &= K_3 + 2\frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 - H_4 \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_5 &= \bar{K}_3 - H_4 \\ &= -K_3 + \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 - H_4 \end{aligned} \quad (156)$$

sowie

$$H_1 = EA h_1 \quad (157)$$

$$H_2 = \frac{EA\alpha}{2} L h_1 \quad (158)$$

$$H_3 = \dot{Q}_{D1} h_1 + \dot{Q}_{D2} h_2 + \dot{Q}_{D3} h_3 \quad (159)$$

$$H_4 = -\frac{\alpha L}{2} H_3 \quad (160)$$

$$K_4 = \left( \tilde{D} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \right) \mathbf{n} \frac{E}{L} \quad (161)$$

$$K_5 = \left( \tilde{D} \tilde{\lambda} + \lambda \frac{AL}{2} \right) \mathbf{n} \frac{E\alpha}{2} \quad (162)$$

und

$$\dot{Q}_{D1} = -\left( \tilde{\lambda} \tilde{D} + \lambda \frac{AL}{2} \right) E \mathbf{n} \quad (163)$$

$$\dot{Q}_{D2} = -\tilde{\lambda} \tilde{D} \mathbf{n} - \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} + \lambda \frac{ALb}{a} \xi \quad (164)$$

$$\dot{Q}_{D3} = -\tilde{\lambda} \tilde{D} - \lambda \frac{AL}{2} + \lambda \frac{AL\beta}{\gamma} \kappa \quad (165)$$

$$\mathbf{n} = \text{sgn}(\sigma - \xi) \quad (166)$$

### Umsortierung für die Implementierung in FEAP

Vertauschen der Matrixelemente, sodass sie der Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade  $[v_1 v_2 v_3 \Theta_1 v_4 v_5 v_6 \Theta_2]^T$  entsprechen:

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 & -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 \\ c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 \\ c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 \\ -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 & c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 \\ -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 \\ -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 \end{bmatrix} \quad (167)$$

<p>Gegeben ist die Lösung zur Zeit <math>t^n</math>: <math>\mathbf{Y}^n, \mathbf{Q}^n</math>  Übertrage: <math>\mathbf{Y}^m = \mathbf{Y}^n</math> mit <math>m = 0</math></p>	
<p><b>Globale Ebene:</b>  Gegeben: <math>\mathbf{Y}^m, \mathbf{Q}^n, t = t^{n+1}</math></p>	
<p><b>Elementebene:</b></p>	
<p>Gegeben: <math>\mathbf{y}^m, \mathbf{q}^n = [\varepsilon_{vp}^n \ \xi^n \ \kappa^n]^T</math></p> <p>Trail-Spannung: <math>{}^T\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_{vp}^n) - E\alpha \Theta</math></p> <p><b>Elastischer Prädiktor:</b>  <math>f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) =  {}^T\sigma - \xi^n  - (\kappa_0 + \kappa^n)</math></p>	
<p><math>f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) &lt; 0</math>  <math>\implies</math> <b>Elastischer Bereich</b></p>	<p><math>f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) &gt; 0</math>  <math>\implies</math> <b>Plastischer Bereich</b></p>
<p>Aktualisiere:  <math>\mathbf{q} = \mathbf{q}^n</math></p>	<p><b>Plastischer Korrektur:</b>  Löse:  <math>\mathbf{l}(\mathbf{y}^m, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{q}</math></p> <p>Löse:  <math>-\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y} \implies \frac{d\mathbf{q}}{dy}</math></p>
<p>Berechne:  <math>\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}</math></p>	<p>Berechne:  <math>\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dy}</math></p>
<p><b>Globale Ebene:</b>  Löse:  <math>\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}^m, \mathbf{Q})</math>  <math>\mathbf{Y}^{m+1} = \mathbf{Y}^m + \Delta \mathbf{Y}</math>  <math>m = m + 1</math></p>	
<p>Wiederhole bis Konvergenz erzielt</p>	

Tabelle 1: Darstellung des Lösungsschritts von  $t^n$  zu  $t^{n+1}$

## 4 Implementierung

Zunächst werden die Variablen der Elementroutine beschrieben. Weitere Informationen zur Programmierung und der Funktionsweise der Elementroutine können in BRÖCKER [1] sowie den dort angegebenen Quellen gefunden werden.

Variable/Feld	Beschreibung
d(*)	enthält die Materialparameter
ndf	(maximale) Anzahl der Knotenfreiheitsgrade
ndm	Dimension der Berechnung
nst	Größe der Elementmatrizen, $nst = ndf * nen$ , nen... (maximale) Anzahl Knoten pro Element
ul(ndf, nen, j)	Lösungsdaten eines Elements j = 1: Verschiebung $u_{n+a}^{(k)}$ j = 2: Inkrement $u_{n+a}^{(k)} - u_n$ j = 3: Inkrement $u_{n+1}^{(k)} - u_{n+1}^{(k-1)}$ j = 4: Geschwindigkeit $v_{n+a}^{(k)}$ j = 5: Beschleunigung $a_{n+a}^{(k)}$ j = 6: Geschwindigkeit $v_n$ mit $0 \leq a \leq 1$ je nach Integrationsverfahren
xl(ndm, nen)	Knotenkoordinaten des Elements
ix(nen)	globale Knotennummer
tl(nen)	Knotentemperatur
s(nst, nst)	Elementtangentialmatrix
p(ndf, nen)	Residuenvektor, auch als $p(nst)$ nutzbar
isw	Funktionsparameter zur Steuerung der Elementroutine

Tabelle 2: Beschreibung der Variablen(-felder) aus Routinenkopf

Nun werden die eingegebenen COMMON-Blöcke aufgelistet und die davon verwendeten Variablen beschrieben:

```

character*4      o, head
common /bdata/  o, head(20)

integer         numnp, numel, nummat, nen, neq, ipr
common /cdata/  numnp, numel, nummat, nen, neq, ipr

real*8          dm
integer         n, ma, mct, iel, nel
common /eldata/ dm, n, ma, mct, iel, nel

real*8          tt
common /elplot/ tt(200)

integer         ior, iow, ilg
common /iofile/ ior, iow, ilg

```

```

integer          istv, iste, istp
common /strnum/ istv, iste, istp

integer          nh1,nh2,nh3,nlm
common /hdata/  nh1,nh2,nh3,nlm

real*8          ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5, chi
common /tdata/  ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5, chi

real*8          hr
integer          mr
common          hr(1),mr(1)

```

Listing 1: Verwendete COMMON-Blöcke

Der letzte dargestellte COMMON-Block gehört zur Datei comblk.h.

Variable/Feld	Beschreibung
head	enthält Berechnungstitel
nen	Anzahl der Knoten pro Element
n	Elementnummer
ma	Materialnummer
mct	Zählvariable für Ergebnisausgabe
iel	Userelementnummer
tt	STREss-Datenfeld für TPLOt Befehl
ior, iow	Variablen für Datenein- und Ausgabe
iste	Variable für Spannungsprojektion auf Knoten
nh1	Adresse <sup>1</sup> der History-Variablen im Feld hr(*) zur Zeit $t^n$
nh2	Adresse der History-Variablen in hr(*) zur Zeit $t^{n+1}$
nh3	Adresse <sup>1</sup> der zeitunabhängigen History-Variablen in hr(*)
dt	Zeitschritt
hr(*)	Feld zur Speicherung der History-Variablen

Tabelle 3: Beschreibung der verwendeten Variablen der COMMON-Blöcke

<sup>1</sup>Enthält unter isw=1 nicht die Adresse der History-Variablen, sondern deren Anzahl.

Weitere lokal in der Elementroutine verwendete Variablen und Felder sind:

Variable/Feld	Beschreibung
i, j, YY	Hilfsvariablen
tdof	Nummer des thermischen Freiheitsgrades
count	Iterationszähler für Newtonverfahren
marke, ipiv(3), dum(3)	Hilfsvariablen für Gausslöser
xlen, dx, du	Elementlänge, Hilfsvariablen zur Dehnungsberechnung
xx(3)	Koordinaten des Elementmittelpunkts
ta	mittlere Temperaturänderung im Element
body(4)	resultierende Volumenkraft/Wärmequelle am Knoten
area, E	Querschnittsfläche, Elastizitätsmodul
alpha, rho	thermischer Ausdehnungskoeffizient, Dichte
xk, c	Wärmeleitzahl, spezifische Wärmekapazität
Temp0	Referenztemperatur
bf(4)	spezifische Volumenkräfte/Wärmequelle
kap0	Anfangsfließspannung
beta, gamma	Parameter für isotrope Verfestigung
kina, kinb	Parameter für kinematische Verfestigung
eta, m, k0	Parameter für viskoses Verhalten
evpn, xin, kapn, vplbln	$\varepsilon_{vp}^n, \xi^n, \kappa^n, s_{vp}^n$
evp, xi, kap, lambda	$\varepsilon_{vp}^{n+1}, \xi^{n+1}, \kappa^{n+1}$ , plastischer Multiplikator $\lambda$
sigtr, ff, nn	Trailspannung, Fließfunktion $f$ , $\text{sgn}(\sigma - \xi)$
lambs, cc1, cc2, cc3	Hilfsvariablen für plast. Korrektor
ll(3), dldq(3,3), dq(3)	Felder zur Berechnung der inneren Variablen
tol, norml	Variablen für Konvergenzprüfung
h(3)	Variablen für Matrix $d\mathbf{q}/d\mathbf{y}$
K1 - K5, KK1 - KK5	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
D1, D2, HH1,- HH4	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
DS, QD, QD1,- QD3	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
rcos(8)	Richtungscosinus
eps, epsth	Dehnung, therm. Dehnung
sig, forc, flux	Spannung, Stabkraft, Wärmestrom
es	spezifische im Material gespeicherte Energie
apn, ap	spezifische plastische Arbeit bei $t^n, t^{n+1}$
verh	Verhältnis gesp. Energie zu plast. Arbeit
noconv	Variable für Konvergenzprüfung

Tabelle 4: Beschreibung lokale Variablen elmt05

Nun folgt der Quellcode des thermoviskoplastischen Dehnstabelements. Vorgelagert ist die Beschreibung der Elementroutine. Dabei wird ggf. die entsprechende Gleichungsnummer aus der zuvor gemachten Herleitung angegeben.

Zeile	Beschreibung
2	Routinenkopf mit Variablenübergabe
24 - 34	Einbindung der COMMON-Blöcke
37, 38	Deklaration/Dimensionierung der Variablen aus Routinenkopf
41 - 61	Deklaration/Dimensionierung der lokalen Variablen
67 - 99	isw=1 Funktion:
71, 72	Ausgabe der Elementbezeichnung
74	Einlesen Materialparameter $d^{(*)}$ und tdof in Subroutine inmate
77	Anzahl der History-Variablen auf 5 erhöhen
79 - 83	Ausgabe der Plastizitätsmaterialparameter
85 - 95	Überprüfung der Knotenfreiheitsgrade auf Fehler
99	Routinenaufruf pltln2(iel)
102 - 124	isw=2 Funktion:
106 - 110	Test auf Element ohne Knoten
111 - 124	Test auf Element ohne Länge
127 - 440	isw=3 und isw=6 Funktionen:
131 - 155	relevante Materialparameter aus $d^{(*)}$ übernehmen
157 - 164	Einlesen der inneren Variablen plast. Dehnung, kin. und isotr. Verfestigung sowie der plast. Bogenlänge und der spezifischen plast. Arbeit der Zeit $t^n$
167 - 177	Berechnung von Dehnung nach Gl. (63) und Elementlänge
179 - 181	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element und der thermischen Dehnung nach (64)
185	Berechnung der Trailspannung nach (77)
188	Elast. Prädiktor: Berechnung der Fließfunktion (78)
191 - 316	Plastischer Korrektor:
194 - 270	Berechnung der inneren Variablen durch Lösung von (102)
198 - 205	Startwerte setzen für Newtonverfahren
207 - 270	Newtonverfahren
211 - 220	Berechnung von Fließrichtung (76), Fließfunktion (2), $\lambda$ (1) und weiterer Hilfsgrößen (98) - (101)
222 - 225	Aufbau der rechten Seite von (102)
227 - 231	Norm der rechten Seite für Konvergenzprüfung
233 - 242	Aufbau der Koeffizientenmatrix von (102)
244 - 248	Lösung von (102) mit Gaussverfahren
250 - 253	Update der inneren Variablen nach (103)
255 - 270	Prüfung der Konvergenz, ggf. Ausgabe einer Warnung bei fehlender Konvergenz
273	Spannung mit aktualisierter plast. Dehnung
278 - 301	Lösung von Gl. (116)
280 - 291	Aufbau der Koeffizientenmatrix von (116)
294 - 297	Aufbau der rechten Seite von (116)
301	Lösung von (116) mit Gaussverfahren

Tabelle 5: Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 1

Zeile	Beschreibung
304-313	Berechnung von DS (58), QD1 - QD4 (163) - (165)
315-319	Berechnung von HH1 - HH4 nach (157) - (160)
323-343	Elastischer Prädiktor:
327-330	Umschreiben der inneren Variablen nach (79) - (81)
334-335	Nullsetzen des plast. Multiplikators und dessen Ableitung nach f
337-341	Nullsetzen von HH1 - HH4 um (83) zu erreichen
345-349	Abspeichern der inneren Variablen, plast. Bogenlänge in hr()
351-353	Berechnung Stabkraft, Spannung
355-360	Konstanten nach (51) - (55)
362-363	Konstanten nach (161) und (162)
365-370	Konstanten für Tangentenmatrix nach (152) - (156)
373	Wärmestrom nach (67)
374	QD nach (57)
377-390	Berechnung der Energieumsetzung
381	spezifische plast. Arbeit nach (22)
384	Abspeichern der spezifischen plast. Arbeit in hr()
387	spezifische gespeicherte Energie nach (28)
390	Verhältnis gespeicherte Energie zu plast. Arbeit (29)
392-408	Speichern von Spannung, Dehnung, thermischer Dehnung, Stabkraft, Wärmestrom, plast. Dehnung, kin. und isotr. Verfestigungsvariable, plast. Bogenlänge, plast. Arbeit, gespeicherte Energie, Verhältnis gespeich. Energie zu plast. Arbeit im STREss-Feld tt(*) für TPLOT-Kommando
411-417	Erstellung des Richtungscosinusfeldes
419-422	Berechnung Volumenkraft-/Wärmequellvektor nach (69)
424-443	Berechnung der Residuen nach (69)
447-480	isw=3 Funktion:
451-478	Erstellung der Tangentenmatrix nach Gl. (167)
484-522	isw=4 und isw=8 Funktionen:
488-492	relevante Materialparameter aus d(*) übernehmen
494-497	Einlesen der inneren Variablen zur Zeit $t_{n+1}$
499-510	Berechnung von Dehnung und Elementlänge
513	Konstante für Wärmestrom
516	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element
518-522	Berechnung von therm. Dehnung, Spannung, Stabkraft und Wärmestrom
524-536	isw=4 Funktion:
	Ausgabe von Element-, Materialnummer, Koordinaten der Elementmitte, Stabkraft, Spannung, Dehnung, thermischer, plastischer Dehnung, kinematischer und isotroper Verfestigungsvariable, Wärmestrom
537-551	isw=8 Funktion:
	Projektion von Spannung und Wärmestrom auf die Knoten
558-603	FORMAT-Anweisungen

Tabelle 6: Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 2



```

1 c-----
2   subroutine elmt06(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
3
4 c   Autor: Christoph Broecker
5 c           Institut fuer Mechanik
6 c           Universitaet Kassel 12/2006
7
8 c-----[--.---+---.---+---.-----]
9 c   3 dimensional thermoviskoplastic truss element routine
10
11 c   Outputs: (isw = 4)
12
13 c       xx    - Coordinates at mid-length of truss bar
14 c       forc  - force on truss bar
15 c       sig   - stress on truss bar
16 c       eps   - Strain on truss bar
17 c       epsth - thermal strain
18 c       evp   - viskoplastic strain
19 c       xi    - internal variable xi for kinematic hardening
20 c       kap   - internal variable kappa for isotropic hardening
21 c       flux  - Flux on truss bar
22 c
23 c-----[--.---+---.---+---.-----]
24   implicit none
25
26   include 'bdata.h'
27   include 'cdata.h'
28   include 'eldata.h'
29   include 'elplot.h'
30   include 'iofile.h'
31   include 'strnum.h'
32   include 'hdata.h'
33   include 'tdata.h'
34   include 'comblk.h'
35
36
37   integer ix(*),ndf,ndm,nst,isw
38   real*8 d(*),ul(ndf,nen,*),xl(ndm,nen),tl(*),p(ndf,*),S(nst,nst)
39
40
41   integer i, j, tdof, count, marke, ipiv(3)
42
43   real*8 xlen, dx, du, xx(3), ta, body(4)
44
45   real*8 area, E, alpha, rho, xk, c, Temp0, bf(4)
46   real*8 kap0, beta, gamma, kina, kinb, eta, m, k0
47
48   real*8 evpn, xin, kapn, vplbln, evp, xi, kap, lambda
49   real*8 sigtr, ff, nn, lambs, cc1, cc2, cc3
50   real*8 ll(3), dldq(3,3), dq(3), dum(3),tol, norml, h(3)
51
52   real*8 K1,K2,K3,K4,K5,KK1,KK2,KK3,KK4,KK5,D1,D2
53   real*8 HH1,HH2,HH3,HH4,Ds,QD,QD1,QD2,QD3
54   real*8 rcos(8), YY
55
56   real*8 eps, epsth, sig, forc, flux

```

```
57     real*8     es, apn, ap, verh
58
59     logical   noconv
60
61     data     tol /1.d-08/
62
63
64     save
65
66
67 c     INPUT MATERIAL PROPERTIES
68
69     if(isw.eq.1) then
70
71         write(iow,2000)
72         if(ior.lt.0) write(*,2000)
73 c     Input material parameters
74         call inmate(d,tdof,ndm*2,2)
75
76 c     Anzahl der History Variablen erhoehen
77         nh1 = nh1 + 1
78
79 c     Materialparameter ausgeben
80         write(iow,2003) d(41), (d(230+i), i=1,7)
81         if(ior.lt.0) then
82             write(*,2003) d(41), (d(230+i), i=1,7)
83         endif
84
85 c     check if ndm=3 and ndf=tdof=4
86         if(ndm.lt.3) then
87             write(iow,3003)
88             if(ior.lt.0) write(*,3003)
89         elseif(ndf.ne.4) then
90             write(iow,3004)
91             if(ior.lt.0) write(*,3004)
92         elseif(tdof.ne.4) then
93             write(iow,3005)
94             if(ior.lt.0) write(*,3005)
95         endif
96
97
98 c     Set plot sequence
99         call pltln2(iel)
100
101
102 c     CHECK FOR ZERO LENGTH ELEMENTS
103
104     elseif(isw.eq.2) then
105
106         if(ix(1).eq.0 .or. ix(2).eq.0) then
107             write(iow,4000) n,ix(1),ix(2)
108             if(ior.lt.0) then
109                 write(*,4000) n,ix(1),ix(2)
110             endif
111         else
112             xlen = 0.0d0
```

```
113         eps = 0.0d0
114         do i = 1,3
115             eps = max(eps , abs(xl(i,1)), abs(xl(i,2)))
116             xlen = max(xlen, abs(xl(i,2) - xl(i,1)))
117         end do
118         if(xlen.eq.1.0d-10*eps) then
119             write(iow,4001) n
120             if(ior.lt.0) then
121                 write(*,4001) n
122             endif
123         endif
124     endif
125
126
127 c      COMPUTE ELEMENT STIFFNESS AND RESIDUAL ARRAYS
128
129     elseif(isw.eq.3 .or. isw.eq.6) then
130
131 c.....Materialparameter
132         area = d(32)
133         E = d(1)
134         alpha = d(3)
135         rho = d(4)
136         xk = d(61)
137         c = d(64)
138         Temp0 = d(9)
139 c      isotrope Verfestigung
140         kap0 = d(41)
141         beta = d(231)
142         gamma = d(232)
143 c      kinematische Verfestigung
144         kina = d(233)
145         kinb = d(234)
146 c      viskose Parameter
147         eta = d(235)
148         m = d(236)
149         k0 = d(237)
150
151 c      Volumenkraefte / Waermequelle
152         do i = 1,3
153             bf(i) = d(10+i)
154         end do
155         bf(4) = d(66)
156
157 c.....Einlesen der inneren Variablen zur Zeit t_n
158         evpn = hr(nh1)
159         xin = hr(nh1+1)
160         kapn = hr(nh1+2)
161 c.....viskoplastische Bogenlaenge
162         vplbln = hr(nh1+3)
163 c.....spezifische plastische Arbeit
164         apn = hr(nh1+4)
165
166
167 c      Compute strain and length
168         xlen = 0.0d0
```

```

169     eps = 0.0d0
170     do i = 1,3
171         dx = x1(i,2) - x1(i,1)
172         du = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)
173         eps = eps + dx*du
174         xlen = xlen + dx**2
175     end do
176     eps = eps/xlen
177     xlen = sqrt(xlen)
178
179 c     Compute temperature change and thermal strain
180     ta = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
181     epsth = alpha*ta
182
183
184 c.....Trail stress
185     sigtr = E*(eps - evpn - epsth)
186
187 c.....Elastischer Praediktor
188     ff = abs(sigtr - xin) - (kap0 + kapn)
189
190
191 c.....viskoplastischer Bereich
192     if (ff.gt.0.0d0) then
193
194 c.....Loesen des nichtlin. GLS
195 c     l(y,q)=0
196 c     mit Newton-Verfahren zur Berechnung der inneren Variablen
197
198 c     Startwerte
199     evp = evpn
200     xi = xin
201     kap = kapn
202     sig = sigtr
203
204     noconv = .true.
205     count = 0
206
207     do while (noconv)
208
209         count = count + 1
210
211         nn = (sig - xi)/abs(sig - xi)
212         ff = abs(sig - xi) - (kap0 + kap)
213
214         lambda = 1.0d0/eta*((1.0d0/2.0d0/k0*(ff + abs(ff)))**m)
215         lambs = 1.0d0/eta*m*((1.0d0/2.0d0/k0*(ff + abs(ff)))**
216 &         (m - 1.0d0))/2.0d0/k0*(1.0d0 + ff/abs(ff))
217
218         cc1 = lambs*dt
219         cc2 = kina - kinb*xi*nn
220         cc3 = beta*(gamma/beta - kap)
221
222 c     Aufbau der rechten Seite
223     ll(1) = evp - evpn - lambda*dt*nn
224     ll(2) = xi - xin - lambda*dt*nn*cc2

```

```

225         ll(3) = kap - kapn - lambda*dt*cc3
226
227 c      Norm der rechten Seite fuer Pruefung der Konvergenz
228         norml = 0.0d0
229         do i=1,3
230             norml = norml + abs(ll(i))
231         enddo
232
233 c      Aufbau der Koeffizientenmatrix F = dl/dq
234         dldq(1,1) = -1.0d0 - E*cc1
235         dldq(1,2) = -cc1
236         dldq(1,3) = -nn*cc1
237         dldq(2,1) = -E*cc1*cc2
238         dldq(2,2) = -1.0d0 - cc1*cc2 - lambda*dt*kinb
239         dldq(2,3) = -nn*cc1*cc2
240         dldq(3,1) = -E*nn*cc1*cc3
241         dldq(3,2) = -nn*cc1*cc3
242         dldq(3,3) = -1.0d0 - cc1*cc3 - lambda*dt*beta
243
244 c      Gaussloeser
245         call fgauss(3,dldq,3,ll,dq,marke,dum,ipiv)
246         if (marke.eq.0) then
247             write(*,*) ' *Warnung* Koeffizientenmatrix singulaer'
248         endif
249
250 c      Update der inneren Variablen
251         evp   = evp   + dq(1)
252         xi    = xi    + dq(2)
253         kap   = kap   + dq(3)
254
255 c      Pruefung der Konvergenz
256         if ( (norml.le.tol)
257             & .and. ( abs(dq(1)).le.tol*abs(evp) )
258             & .and. ( abs(dq(2)).le.tol*abs(xi ) )
259             & .and. ( abs(dq(3)).le.tol*abs(kap) ) ) then
260             noconv = .false.
261
262         elseif (count.gt.30) then
263             if(ior.lt.0) then
264                 write(*,3000) count
265                 write(*,3001) norml, evp,dq(1),xi,dq(2),kap,dq(3)
266             endif
267             write(iow,3000) count
268             write(iow,3001) norml, evp,dq(1),xi,dq(2),kap,dq(3)
269             noconv = .false.
270         endif
271
272 c      Berechnung der neuen Spannung
273         sig = E*(eps - evp - epsth)
274
275         enddo ! while (noconv)
276
277
278 c.....Berechnen der Werte h1, h2, h3 und h4
279
280 c      Aufbau der Koeffizientenmatrix F = dl/dq

```

```

281         nn = (sig - xi)/abs(sig - xi)
282
283         dldq(1,1) = -1.0d0 - E*cc1
284         dldq(1,2) = -cc1
285         dldq(1,3) = -nn*cc1
286         dldq(2,1) = -E*cc1*cc2
287         dldq(2,2) = -1.0d0 - cc1*cc2 - lambda*dt*kinb
288         dldq(2,3) = -nn*cc1*cc2
289         dldq(3,1) = -E*nn*cc1*cc3
290         dldq(3,2) = -nn*cc1*cc3
291         dldq(3,3) = -1.0d0 - cc1*cc3 - lambda*dt*beta
292
293
294 c         Aufbau der rechten Seite
295         ll(1) = -cc1*E/xlen
296         ll(2) = ll(1)*cc2
297         ll(3) = ll(1)*nn*cc3
298
299
300 c         Loesen des lin. GLS
301         call fgauss(3,dldq,3,ll,h,marke,dum,ipiv)
302
303
304 c.....Berechnen der Werte DS, QD1, QD2, QD3
305         ff = abs(sig - xi) - (kap0 + kap)
306         Ds = area*xlen/2.0d0*
307         &         ( Temp0*E*alpha*nn + ff + kap0 + kinb/kina*xi*xi
308         &         + beta/gamma*kap*kap )
309         QD1 = - (lambs*Ds + lambda*area*xlen/2.0d0) *E*nn
310         QD2 = - lambs*Ds*nn
311         &         + lambda*area*xlen*(kinb/kina*xi - nn/2.0d0)
312         QD3 = - lambs*Ds
313         &         + lambda*area*xlen*(beta/gamma*kap - 1.0d0/2.0d0)
314
315 c.....berechnen der Konstanten fuer dg/dq * dq/dy
316         HH1 = E*area*h(1)
317         HH2 = E*area*alpha/2.0d0*xlen*h(1)
318         HH3 = QD1*h(1) + QD2*h(2) + QD3*h(3)
319         HH4 = -alpha*xlen/2.0d0*HH3
320
321
322
323         else
324
325 c.....elastischer Bereich
326
327 c.....Update der inneren Variablen q_(n+1) = q_n
328         evp = evpn
329         xi = xin
330         kap = kapn
331
332 c.....plastischen Multiplikator sowie dessen Ableitung nach f
333 c         auf null setzen
334         lambda = 0.0d0
335         Ds = 0.0d0
336

```

```

337 c.....setzen der Konstanten fuer dg/dq * dq/dy auf null
338     HH1 = 0.0d0
339     HH2 = 0.0d0
340     HH3 = 0.0d0
341     HH4 = 0.0d0
342
343     endif
344
345 c.....Abspeichern der inneren Variablen q_(n+1)
346     hr(nh2)   = evp
347     hr(nh2+1) = xi
348     hr(nh2+2) = kap
349     hr(nh2+3) = vplbln + lambda*dt
350
351 c     Compute force, stress
352     forc = E*area*(eps - evp - epsth)
353     sig  = forc/area
354
355 c.....Konstanten berechnen
356     K1  = E*area/xlen
357     K2  = E*area*alpha/2.0d0
358     K3  = xk*area/xlen
359     D1  = Temp0*K2
360     D2  = rho*area*xlen*c/6.0d0
361
362     K4  = (Ds*lambs + lambda*area*xlen/2.0d0)*nn*E/xlen
363     K5  = (Ds*lambs + lambda*area*xlen/2.0d0)*nn*E*alpha/2.0d0
364
365 c.....Konstanten fuer Tangentenmatrix
366     KK1 = K1 - HH1
367     KK2 = K2 - HH2
368     KK3 = 1.0d0/dt*D1 - K4 - HH3
369     KK4 = K3 + 2.0d0/dt*D2 + K5 - HH4
370     KK5 = -K3 + 1.0d0/dt*D2 + K5 - HH4
371
372 c     Compute flux, QD(nn,xi,kap)
373     flux = K3*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
374     QD   = lambda*Ds
375
376
377 c.....Energieumsetzung
378
379
380 c     spezifische plastische Arbeit
381     ap = apn + 1.0d0/rho*sig*lambda*nn*dt
382
383 c     abspeichern der gesamten spezifischen plastischen Arbeit
384     hr(nh2+4) = ap
385
386 c     spezifische im Material gespeicherte Leistung
387     es = 1.0d0/rho/2.0d0*(xi*xi/kina + kap*kap/gamma)
388
389 c     Verhaeltnis gespeicherte Energie / plastische Arbeit
390     verh = es / ap
391
392 c     Save stress, strain, strain_th, force, flux for tplot

```

```

393         tt(1) = sig
394         tt(2) = eps
395         tt(3) = epsth
396         tt(4) = forc
397         tt(5) = flux
398 c      Save plastic strain, xi, kappa and accumulated plastic strain
399         tt(6) = evp
400         tt(7) = xi
401         tt(8) = kap
402         tt(9) = vplbln + lambda*dt
403 c      speichere spezifische plastische Arbeit, spezifische im
404 c      Material gespeicherte Energie und Verhaeltnis gespeicherter
405 c      Energie / plastische Arbeit fuer tplot
406         tt(10) = ap
407         tt(11) = es
408         tt(12) = verh
409
410
411 c.....Richtungscosinusfeld
412         DO i=1,3
413             rcos(i) = (xl(i,2) - xl(i,1)) / xlen
414             rcos(i+4) = -rcos(i)
415         END DO
416         rcos(4)=0.0d0
417         rcos(8)=0.0d0
418
419 c      Volumenkraefte/Waermequellvektor
420         do i = 1,4
421             body(i) = rho*area*xlen/2*bf(i)
422         end do
423
424 c.....Residuenvektor p(4,2)
425 c      Residuentermine aus Vektor mit N, Q_D und Q_E
426         do i = 1,3
427             p(i,1) = rcos(i) * forc
428             p(i,2) = -p(i,1)
429         end do
430         p(4,1) = QD - flux
431         p(4,2) = QD + flux
432 c      Residuentermine aus Volumenkraft/Waermequellenvektor
433         do i = 1,4
434             p(i,1) = p(i,1) + body(i)
435             p(i,2) = p(i,2) + body(i)
436         end do
437 c      Residuenanteile von Daempfungsmatrix * Geschwindigkeiten
438         DO i=1,3
439             p(4,1) = p(4,1) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
440             p(4,2) = p(4,2) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
441         END DO
442         p(4,1) = p(4,1) - 2*D2*ul(4,1,4) - D2*ul(4,2,4)
443         p(4,2) = p(4,2) - D2*ul(4,1,4) - 2*D2*ul(4,2,4)
444
445
446
447 c      Compute element stiffness
448

```



```

449         if(isw.eq.3) then
450
451 c.....Tangentenmatrix K_t
452 c      6x6 Tangentenmatrixterme mit KK1
453         DO i=1,8
454             YY=rcos(i)*KK1
455             DO j=i,8
456                 S(j,i)=rcos(j)*YY
457                 S(i,j)=S(j,i)
458             END DO
459         END DO
460 c      6x2 Tangentenmatrixterme mit KK2
461         DO i=1,3
462             S(i,4) = KK2*rcos(i)
463             S(i,8) = KK2*rcos(i)
464             S(i+4,4)=-KK2*rcos(i)
465             S(i+4,8)=-KK2*rcos(i)
466         END DO
467 c      2x6 Tangentenmatrixterme von KK3
468         DO i=1,3
469             S(4,i) =-KK3*rcos(i)
470             S(8,i) =-KK3*rcos(i)
471             S(4,i+4)= KK3*rcos(i)
472             S(8,i+4)= KK3*rcos(i)
473         END DO
474 c      2x2 Tangentenmatrixterme mit KK4 und KK5
475         S(4,4)= KK4
476         S(4,8)= KK5
477         S(8,4)= KK5
478         S(8,8)= KK4
479
480         endif
481
482
483
484 c      OUTPUT STRESS AND STRAIN IN ELEMENT
485
486         elseif(isw.eq.4 .or. isw.eq.8) then
487
488 c.....Materialparameter
489         area = d(32)
490         E     = d(1)
491         alpha = d(3)
492         xk    = d(61)
493
494 c      Einlesen der inneren Variablen
495         evp = hr(nh2)
496         xi  = hr(nh2+1)
497         kap = hr(nh2+2)
498
499 c      Compute strain and length
500         xlen = 0.0d0
501         eps  = 0.0d0
502         do i = 1,3
503             dx = x1(i,2) - x1(i,1)
504             du = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)

```

```

505         eps   = eps + dx*du
506         xlen  = xlen + dx**2
507         xx(i) = (xl(i,2) + xl(i,1))*0.5d0
508     end do
509     eps = eps/xlen
510     xlen = sqrt(xlen)
511
512 c     Konstante
513     K3  = xk*area/xlen
514
515 c     Compute temperature change
516     ta  = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
517
518 c     Compute strain_th, force, stress and flux
519     epsth = alpha*ta
520     forc  = E*area*(eps - evp - epsth)
521     sig   = forc/area
522     flux  = K3*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
523
524 c     Output element results
525
526     if(isw.eq.4) then
527         mct = mct - 1
528         if(mct.le.0) then
529             write(iow,2001) o,head
530             if(ior.lt.0) write(*,2001) o,head
531             mct = 20
532         endif
533         write(iow,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,evp,xi,kap,flux
534         if(ior.lt.0) then
535             write(*,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,evp,xi,kap,flux
536         endif
537     else
538
539 c.....Stress projections
540 c     (aus subroutine trcnd uebernommen und angepasst)
541 c     plot,stre,1 -> Spannung ploten
542 c     plot,stre,2 -> Flux ploten
543     do i = 1,2
544         p(i,1) = p(i,1) + 1.d0
545         s(i,1) = s(i,1) + sig
546         s(i+2,1) = s(i+2,1) + flux
547     end do ! i
548     iste = 2
549 c     siehe programmer manual S.48
550
551     endif
552
553
554
555 endif
556
557
558 c     FORMATS
559
560 2000 format(///

```

```

561 & ' ----- USER ELEMENT 06 : -----',//
562 & '          3D Thermoviscoplastic',//
563 & '          Truss Element',//
564 & ' -----',//)
565 2001 format(a1,20a4//9x,'3D Thermoviscoplastic Truss Element'//
566 & ' Elmt Matl ', '1-coord 2-coord 3-coord',
567 & 8x,'Force',7x,'Stress',7x,'Strain',3x,'th. Strain',
568 & 2x,'vpl. Strain',11x,'xi',8x,'kappa',9x,'Flux')
569 2002 format(2i5,1p,3e11.3,1p,8e13.5)
570
571 2003 format(//
572 & ' -----',/
573 & '          4x,'Viscoplasticity Parameters'//
574 & '          USER ELEMENT 06 ',//)
575 & '          8x,'Nonlinear isotropic hardening '/
576 & '          10x,'Initial Yield stress ',1p,1e15.5,' (kappa_0)'//
577 & '          10x,'1. Parameter ',1p,1e15.5,' (beta)'//
578 & '          10x,'2. Parameter ',1p,1e15.5,' (gamma)'//
579 & '          8x,'Nonlinear kinematic hardening '/
580 & '          10x,'1. Parameter ',1p,1e15.5,' (a)'//
581 & '          10x,'2. Parameter ',1p,1e15.5,' (b)'//
582 & '          8x,'Visco Parameter '/
583 & '          10x,'Viscosity ',1p,1e17.5,' (eta)'//
584 & '          10x,'Exponent ',1p,1e17.5,' (m)'//
585 & '          10x,'Parameter k0 ',1p,1e17.5,' (k0)'//
586 & ' -----',//)
587
588 3000 format(' *WARNING* No convergence at Determination of
589 & internal variable,',/
590 & '          Number of iterations: ',i4,/)
591 3001 format(10x,' Norm l =',e13.5,/
592 & '          10x,' evp =',e13.5,' devp =',e13.5,/
593 & '          10x,' xi =',e13.5,' dxi =',e13.5,/
594 & '          10x,' kappa =',e13.5,' dkappa =',e13.5,/)
595
596 3003 format(' *ERROR* 3D Element -> ndm must be EQUAL 3')
597 3004 format(' *ERROR* ndf must be EQUAL 3')
598 3005 format(' *ERROR* tdof must be EQUAL 3')
599
600 4000 format(' *ERROR* Element',i7,' has nodes',2i8)
601 4001 format(' *ERROR* Element',i7,' has zero length')
602
603 end

```

Listing 2: Quellcode Elementroutine elmt06

## 5 Berechnungen

Die Abbildung zeigt das FE-Modell des Dehnstabs der folgenden Berechnungen. Der Stab hat die Länge  $L$  und die Querschnittsfläche  $A$ . Alle  $y$ - und  $z$ -Freiheitsgrade sowie der  $x$ -Freiheitsgrad am Knoten 1 sind gesperrt.

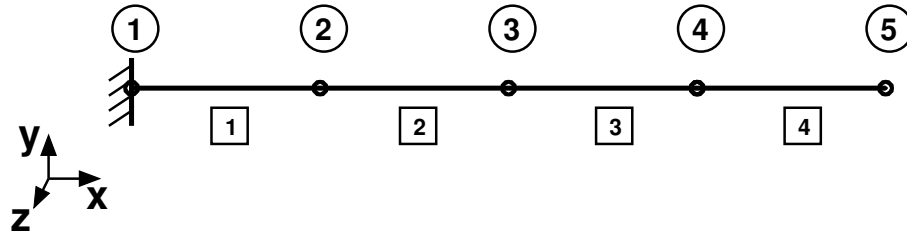


Abbildung 1: FE-Modell der Berechnungen

### Materialdaten:

Die Materialparameter wurden in Anlehnung an Stahl gewählt.

Thermoelastische Parameter:

$$\begin{aligned}
 E &= 210\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \rho &= 7.8 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 c &= 0.46 \cdot 10^9 \text{ mJ/tK} & k &= 60.0 \text{ W/mK} \\
 \alpha &= 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} & T_0 &= 293.0 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Viskoplastische Parameter:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 75\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \beta &= 850.0 \\
 a &= 75\,000.0 \text{ N/mm}^2 & b &= 8502.0 \\
 \kappa_0 &= 200.0 \text{ N/mm}^2 & m &= 3 \\
 \eta &= 1.0 \dots 2 \cdot 10^{10} \text{ s} & k_0 &= 1.0 \text{ mm}^2/\text{N}
 \end{aligned}$$

### Geometrie:

$$\begin{aligned}
 L &= 90.0 \text{ mm} \\
 A &= 50.0 \text{ mm}^2
 \end{aligned}$$

### Materialdefinition für FEAP:

```

MATERIal 1
  elmt 6
    ELASTic ISOTropic 210000.0          ! E
    CROSS SECTION 50.0                  ! area
    THERmal ISOTropic 1.6e-5 293.0      ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic 60.0 0.46e9       ! k c
    DENSity MASS 7.8e-9                  ! rho
    PLASTic MISEs 200.0                  ! kappa_0
    UPARAMeter PLASTic 850.0 75000.0 75000.0 850.0 2.0e5 3 1
    ! beta, gamma, a, b, eta, m k0
  
```

## 5.1 Variation der Viskosität

Es folgt eine Parameterstudie, bei der nur die Viskosität  $\eta$  variiert wird:

$$\eta = 1.0, \quad 2.0 * 10^6, \quad 2.0 * 10^7, \quad 2.0 * 10^8, \quad 2.0 * 10^9, \quad 2.0 * 10^{10} [s]$$

Eine Erhöhung der Viskosität hat bezogen auf die sich einstellende Spannung die gleiche Auswirkung die Erhöhung der Belastungsgeschwindigkeit.

### Belastung:

Durch die Verschiebungsteuerung am Knoten 5 wird folgende Dehnung vorgegeben:

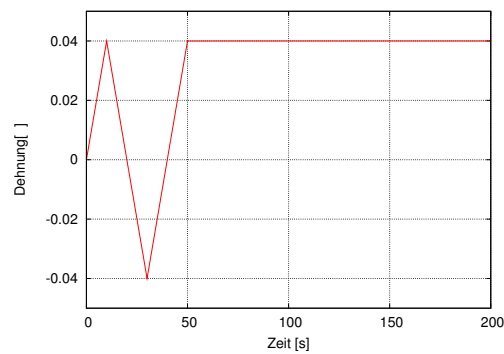


Abbildung 2: Dehnungsgesteuerter Belastungspfad

### Weitere Angaben:

Thermische RB: keine (adiabat)

Zeitschritt:  $\Delta t = 0.2$  s

Berechnungsdauer:  $t = 200$  s

## Ergebnisdiagramme:

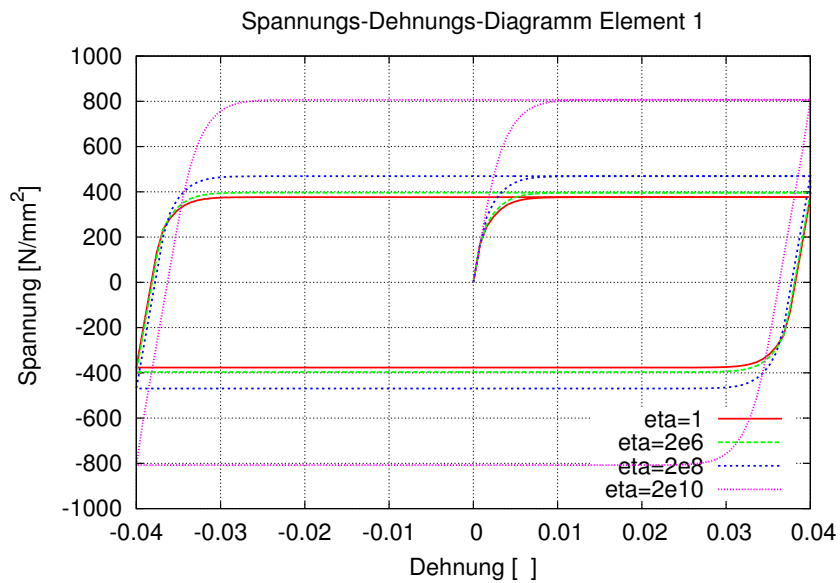


Abbildung 3: Spannungs- Dehnungsdiagramm

Die Berechnung mit  $\eta = 1s$  entspricht dem Fall der Thermoplastizität. Je größer der Wert von  $\eta$  ist, desto größer wird auch die Überspannung.

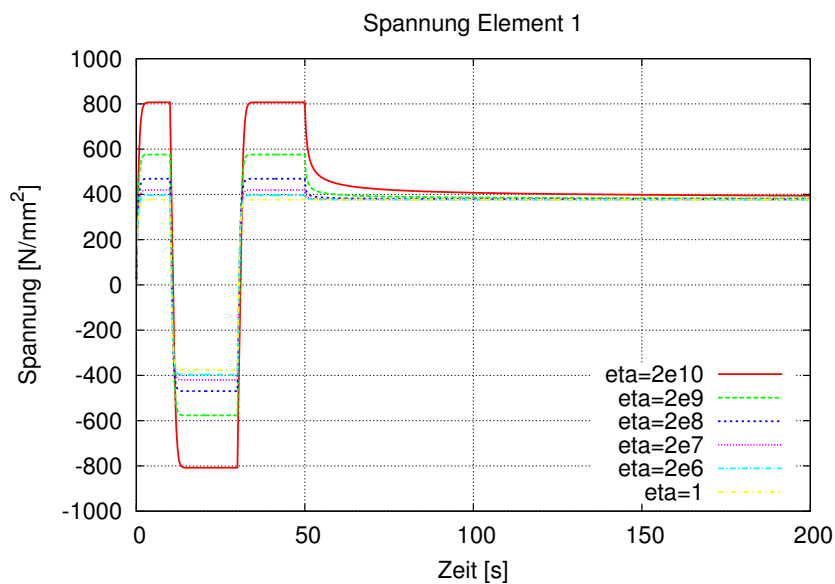


Abbildung 4: Spannung über der Zeit

Bei der konstant gehaltenen Dehnung ab  $t = 50s$  relaxiert die Spannung gegen der Spannungswert der Thermoplastizität.

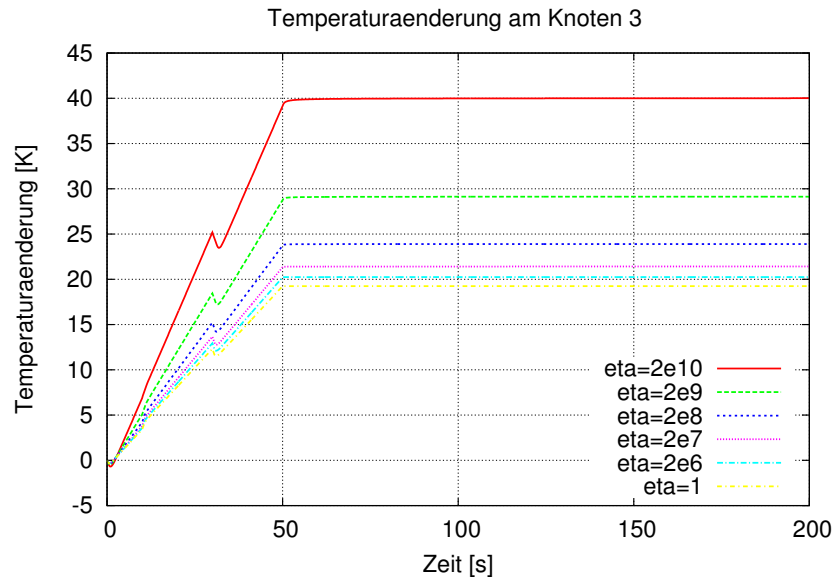


Abbildung 5: Temperaturentwicklung

Aufgrund der Überspannung ist die verrichtete plastische Spannungsleistung höher als im Falle der Thermoplastizität, somit ist auch die Wärmeentwicklung größer. Folglich stellen sich mit steigender Viskosität  $\eta$  höhere Temperaturen ein.

An der obersten Kurve ist ab der Zeit  $t = 50\text{ s}$  erkennbar, dass auch bei der Spannungsrelaxation Wärme produziert wird, was zu einer weiteren, wenn auch geringen, Temperaturerhöhung führt.

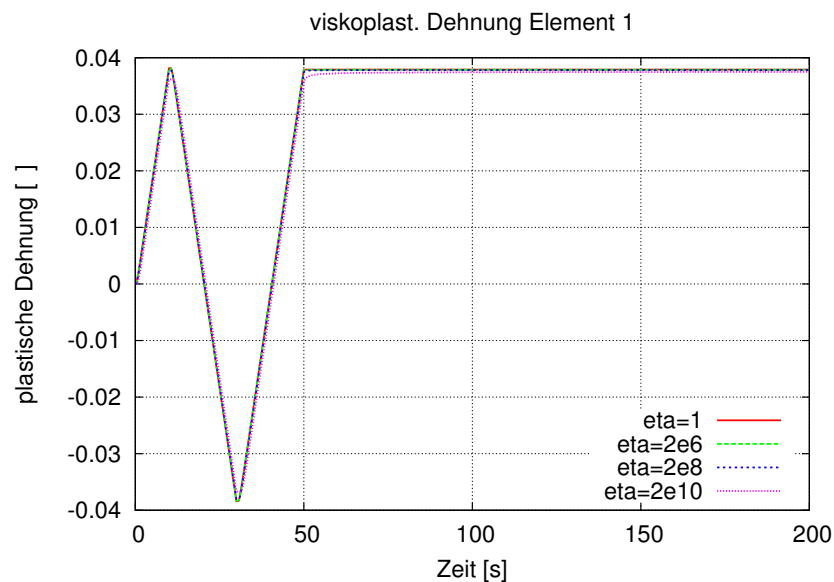


Abbildung 6: Entwicklung der plast. Dehnung

Während der Spannungsrelaxation bei  $t = 50\text{ s}$  entwickeln sich die Überspannungsanteile der elastischen Dehnung zurück. Da die Gesamtdehnung konstant bleibt, erhöht sich dementsprechend die plastische Dehnung.

Aufgrund der größeren therm. Dehnung bei der Rechnung mit  $\eta = 2.0 \cdot 10^{10}\text{ s}$  liegt hier der Endwert der plastischen Dehnung etwas niedriger als bei den anderen Rechnungen.

## 5.2 Belastung mit Haltezeiten

Es wird eine stufenförmige Dehnungsbelastung entsprechend der Abbildung vorgegeben. Die Dehnungsänderung wird in  $t_1 = 1\text{s}$  bzw. in  $t_2 = 0.1\text{s}$  aufgebracht, damit ergibt sich eine Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\epsilon}_1 = 0.002\frac{1}{\text{s}}$  bzw.  $\dot{\epsilon}_2 = 0.02\frac{1}{\text{s}}$ . Auf jede Dehnungserhöhung folgt eine Haltezeit von ca.  $10\text{s}$ .

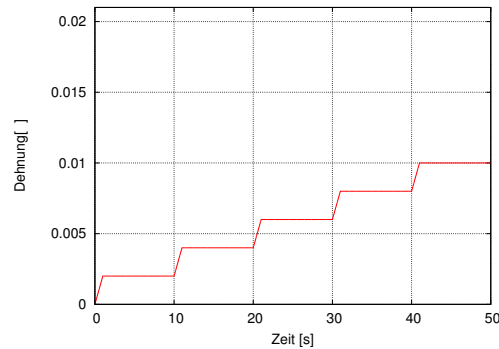


Abbildung 7: Belastungspfad für  $\dot{\epsilon}_1 = 0.002\frac{1}{\text{s}}$

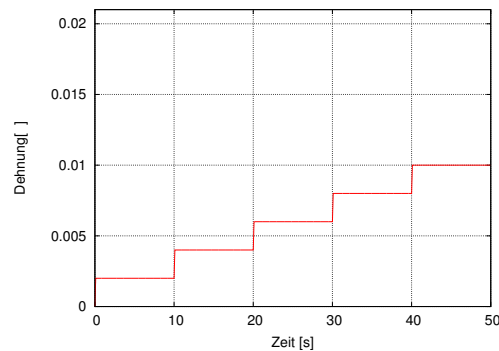


Abbildung 8: Belastungspfad für  $\dot{\epsilon}_1 = 0.02\frac{1}{\text{s}}$

### Weitere Angaben:

Viskosität:	$\eta = 2 * 10^6 \text{ s}$
Thermische RB:	keine (adiabat)
Zeitschritt:	$\Delta t = 0.005 \text{ s}$
Berechnungsdauer:	$t = 50 \text{ s}$



## Ergebnisdiagramme:

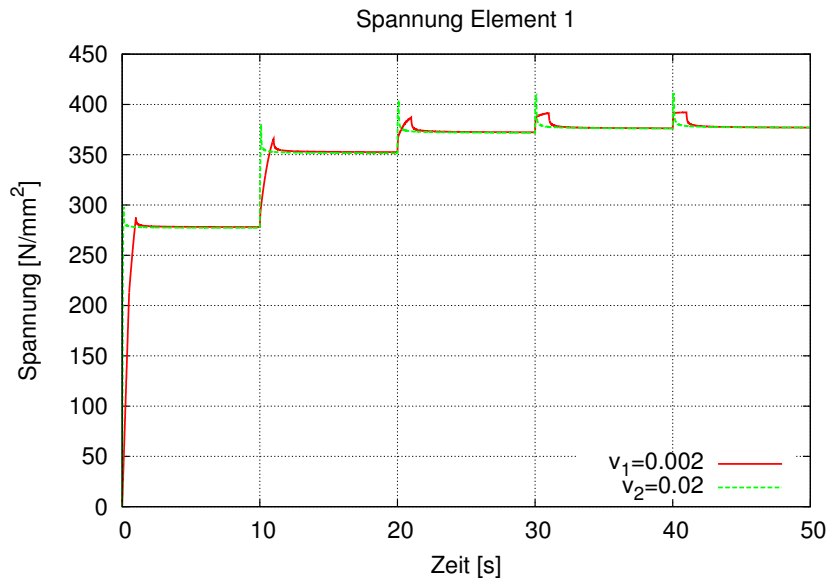


Abbildung 9: Spannung über der Zeit

Entsprechend der höheren Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_2 = v_2$  stellt sich auch eine größere Überspannung ein. Die Überspannung relaxiert während der Haltezeit gegen null.

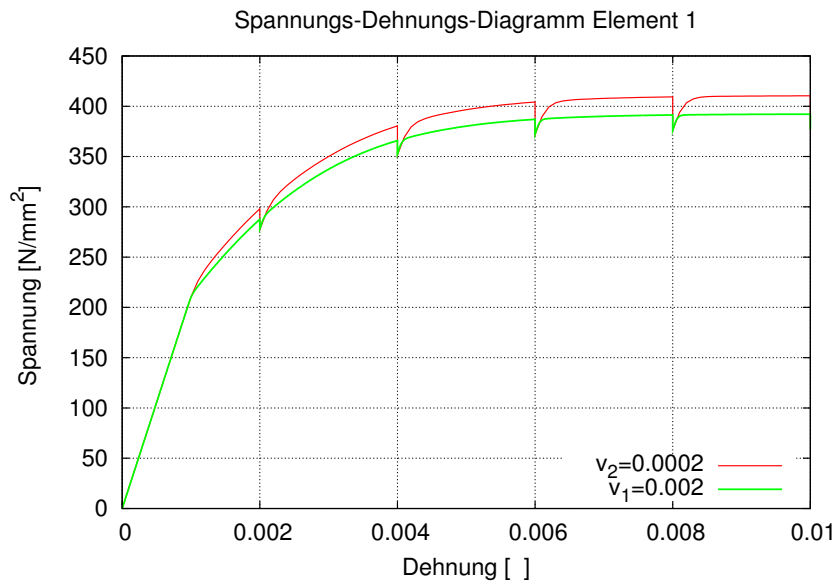


Abbildung 10: Spannungs- Dehnungsdiagramm

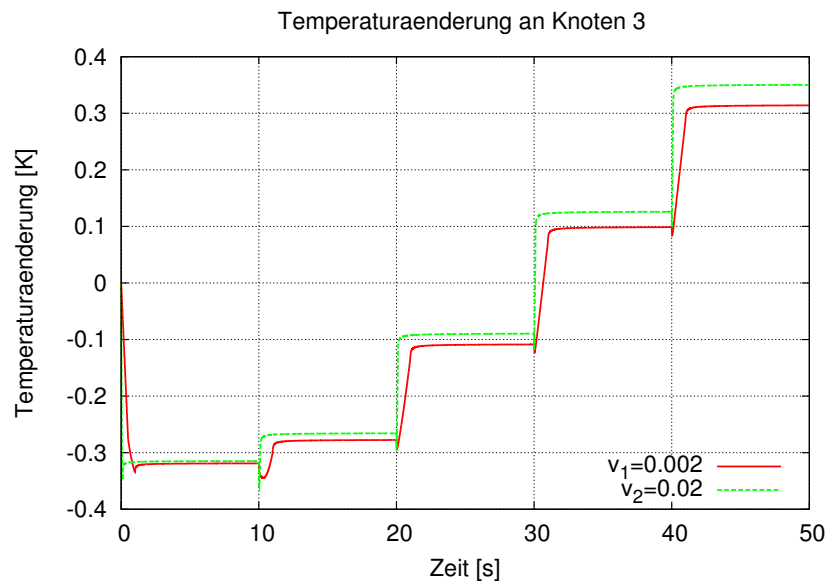


Abbildung 11: Temperaturentwicklung

Aufgrund der thermoelastischen Kopplung tritt zu Beginn der Belastung eine negative Temperaturänderung auf. Beim Auftreten der viskoplastischen Deformationen wird Wärme dissipiert, somit steigt die Temperatur wieder an. Da bei der höheren Belastungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_2 = v_2$  die plastische Spannungsleistung größer ist, findet hier auch ein größerer Temperaturanstieg statt.

### 5.3 Berechnungen nach LION

In LION [2] wurden Zug-/Druckversuche für den stark dehnratenabhängigen Stahl XCrNi18.9 durchgeführt.

In Abbildung 12 sind die von LION ermittelten Spannungs-Dehnungskurven für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten dargestellt.

Abbildung 13 zeigt das Spannungs-Dehnungsdiagramm eines zyklischen Belastungsprozesses mit 50 Lastzyklen und einer Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\epsilon} = 0.0012 \frac{1}{s}$ . Während des ersten Zugbereichs sowie im letzten Lastzyklus wurden Haltezeiten von  $t_H = 2000 s$  gemacht. Dabei tritt Spannungsrelaxation auf.

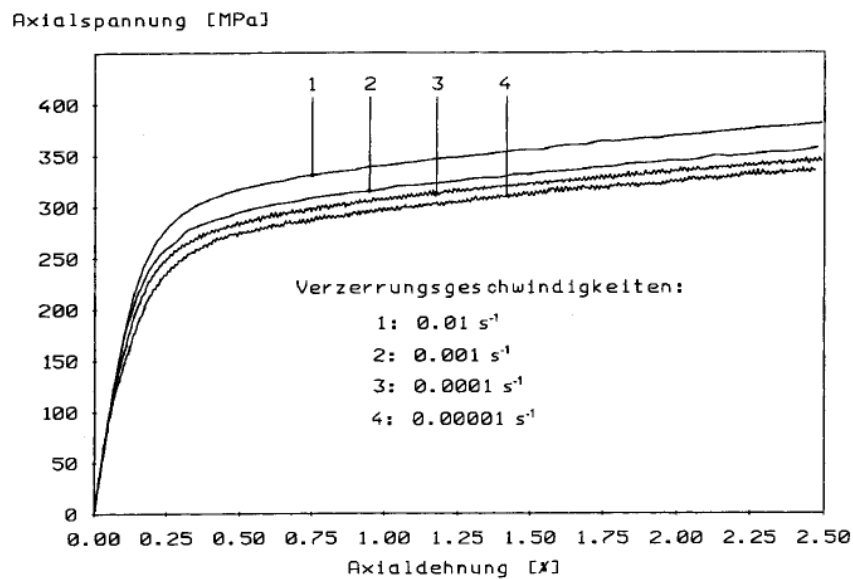


Abbildung 12: Spannungs-Dehnungsdiagramm für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

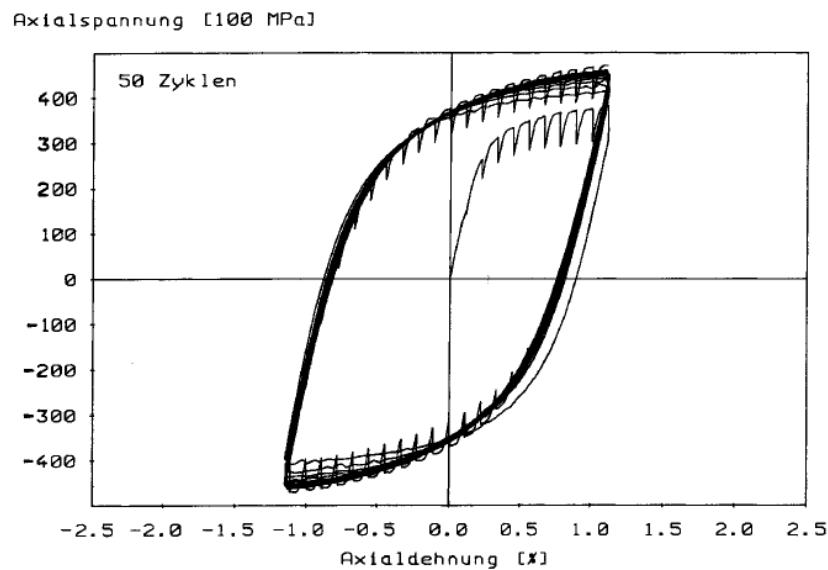


Abbildung 13: 50 Lastzyklen bei  $\dot{\epsilon} = 0.0012 \frac{1}{s}$ , erster Zugbereich und letzter Lastzyklus mit Haltezeiten von  $t_H = 2000 \text{ s}$

### Materialdaten:

Die thermoelastischen Materialparameter wurden in Anlehnung an Stahl gewählt, die Verfestigungsparameter wurden aus Abbildung 12 und 13 identifiziert.

Thermoelastische Parameter:

$$\begin{aligned}
 E &= 210\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \rho &= 7.8 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 c &= 0.46 \cdot 10^9 \text{ mJ/tK} & k &= 60.0 \text{ W/mK} \\
 \alpha &= 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} & T_0 &= 293.0 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Viskoplastische Parameter:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 45\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \beta &= 30.0 \\
 a &= 100\,000.0 \text{ N/mm}^2 & b &= 1000.0 \\
 \kappa_0 &= 140.0 \text{ N/mm}^2 & m &= 5 \\
 \eta &= 5.0 \cdot 10^{11} \text{ s} & k_0 &= 1.0 \text{ mm}^2/\text{N}
 \end{aligned}$$

### Materialdefinition für FEAP:

```

MATERial 1
  elmt 6
    ELASTic ISOTropic 210000.0          ! E
    CROSS SECTION    50.0              ! area
    THERmal ISOTropic 1.6e-5 293.0      ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic 60.0 0.46e9      ! k c
    DENSITY MASS     7.8e-9            ! rho
    PLASTic MISEs    140.0              ! kappa_0
    UPARAMeter PLASTic 30.0 4500.0 100000.0 1000.0 4.0e11 5 1
    !                beta, gamma, a,      b,      eta,      m      k0

```

Die Berechnungen erfolgen mit adiabaten Randbedingungen, somit sind die Ergebnisgrößen im Stab konstant.

### 5.3.1 Variation der Dehnungsgeschwindigkeit

In der ersten Rechnung wird die Dehnungsgeschwindigkeit entsprechend dem Experiment von LION von  $\dot{\epsilon} = 0.00001 \frac{1}{s}$  bis  $\dot{\epsilon} = 0.01 \frac{1}{s}$  in Zehnerpotenzen variiert. Zum Vergleich wurde außerdem eine Rechnung mit  $\eta = 1 s$  zur Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie durchgeführt.

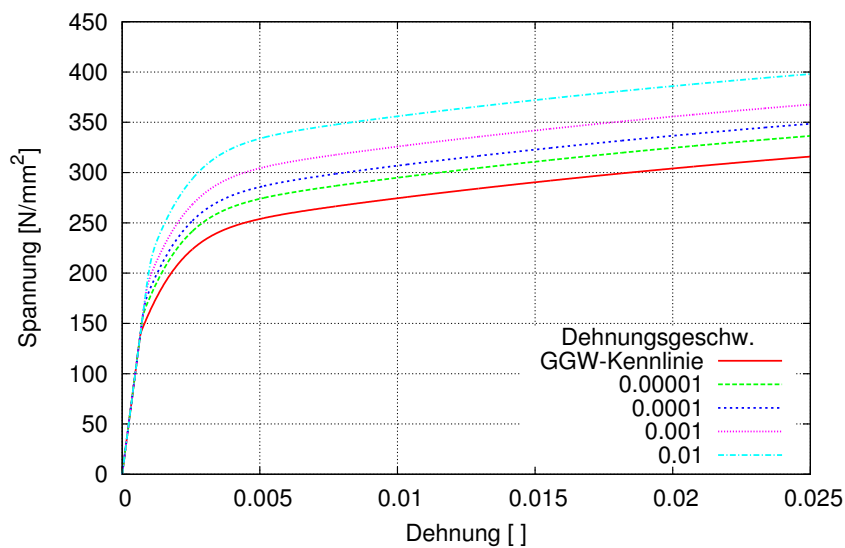


Abbildung 14: Spannungs-Dehnungsdiagramm: Vergleich zwischen unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten mit der Gleichgewichtskennlinie

Die Spannungs-Dehnungskennlinien der unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten aus Abbildung 14 zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von LION aus Abbildung 12.

Abbildung 15 zeigt den Zusammenhang zwischen Dehnungsgeschwindigkeit und Temperaturentwicklung. Bei steigender Dehnungsgeschwindigkeit wird aufgrund der sich einstellenden Überspannung die plastische Spannungsleistung größer, was zu einer höheren Wärmeproduktion und damit zu einem stärkeren Temperaturanstieg führt. Der Temperaturabfall zu Beginn begründet sich im thermoelastischen Koppungseffekt.

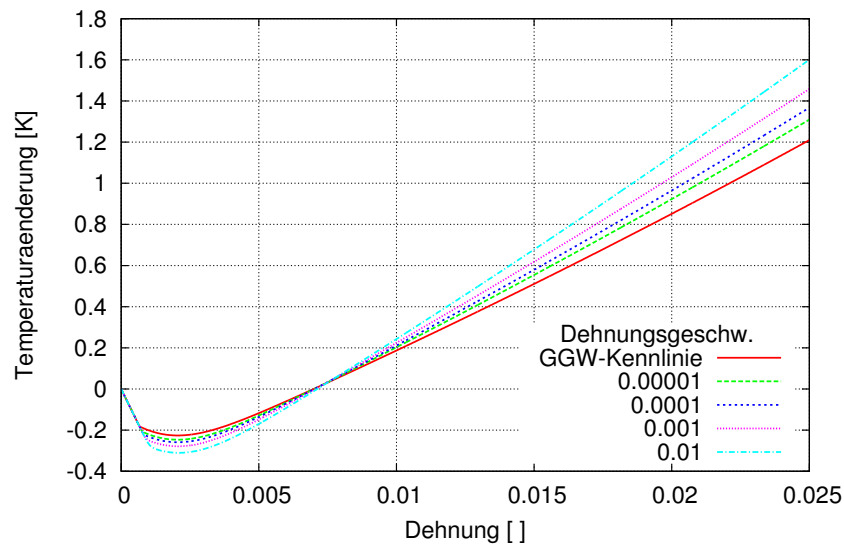


Abbildung 15: Temperaturentwicklung über der Dehnung: Vergleich zwischen unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten mit der Gleichgewichtskennlinie

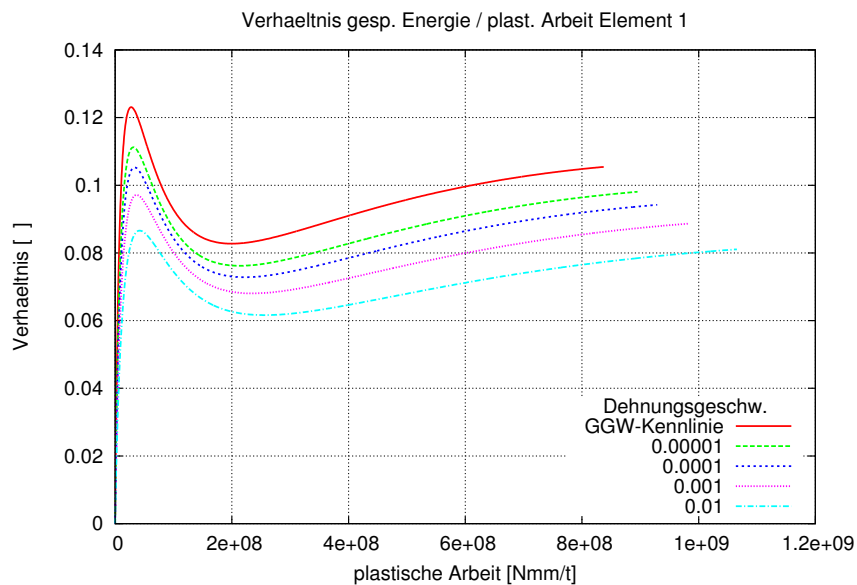


Abbildung 16: Element 1: Verhältnis der gespeicherten Energie zur gesamten verrichteten plastischen Arbeit, aufgetragen über der gesamten verrichteten plastischen Arbeit

Die verrichtete plastische Arbeit nimmt mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit aufgrund der sich einstellenden Überspannung zu. Dagegen nimmt die gespeicherte Energie geringfügig ab. Somit wird das Verhältnis gespeicherte Energie zu plastischer Arbeit (Abbildung 16) mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit kleiner.

### 5.3.2 Lastzyklus mit Haltezeiten

Bei dieser Rechnung wird die Dehnung stufenförmig entsprechend Abbildung 17 aufgebracht. Dabei werden 50 Haltezeiten mit einer Dauer von  $t_H = 2000 \text{ s}$  gemacht. Die Dehnungsgeschwindigkeit bei der Lastaufbringung beträgt  $\dot{\varepsilon} = 0.0012 \frac{1}{\text{s}}$ .

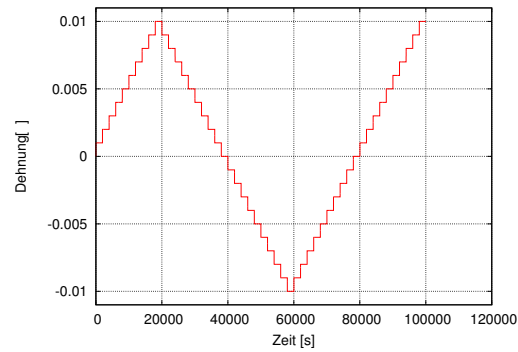


Abbildung 17: Stufenförmig aufgebrachte Dehnung

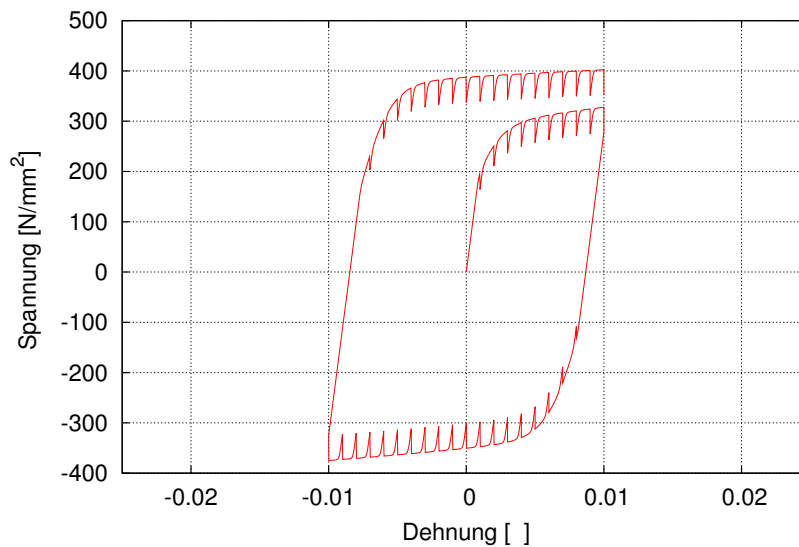


Abbildung 18: Spannungs-Dehnungsdiagramm

Das Spannungs-Dehnungsdiagramm Abbildung 18 zeigt eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von LION aus Abbildung 13.

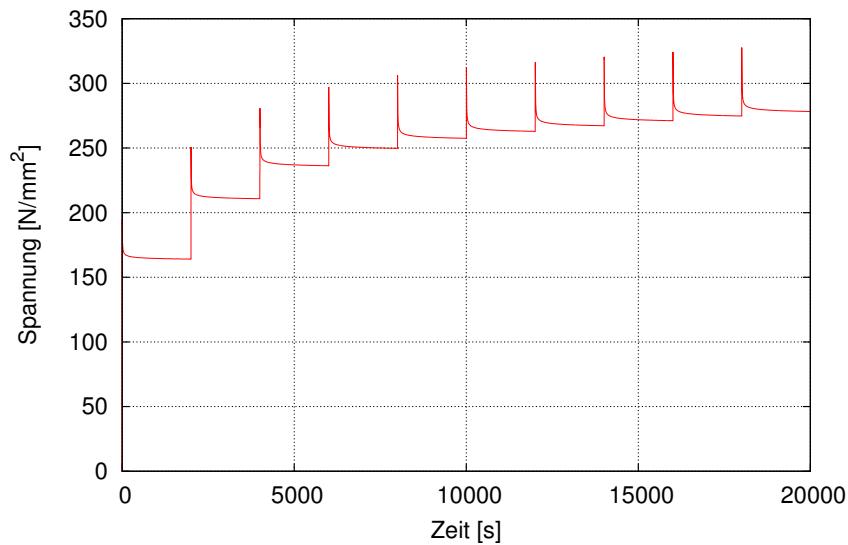


Abbildung 19: Spannung über der Zeit im ersten Zugbereich

Abbildung 19 zeigt das Relaxationsverhalten während des ersten Zugbereichs. Der größte Teil der Überspannung relaxiert innerhalb sehr kurzer Zeit. Deutlich ist jedoch zu erkennen, dass auch nach der Haltezeit von 2000 s der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht ist.

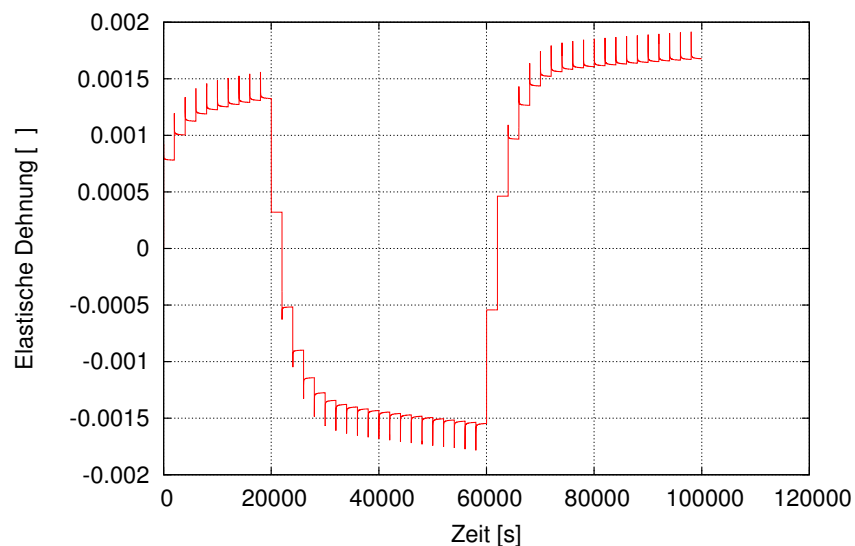


Abbildung 20: Elastische Dehnung über der Zeit

Die Überspannung beruht auf elastischen Dehnungen. Relaxiert nun die Spannung, so bilden sich die elastischen Dehnungen um den entsprechenden Betrag zurück. Diese Änderung der elastischen Dehnung hat aufgrund der thermoelastischen Kopplung wiederum Einfluss auf die Temperaturverhalten. So erklärt sich das scheinbar seltsa-



me Verhalten der Temperaturentwicklung aus Abbildung 21 mit dem Zusammenspiel von thermoelastischer Kühlung bzw. Erwärmung und viskoplastischer Erwärmung.

Im Zugbereich tritt bei Belastung thermoelastische Kühlung und viskoplastische Erwärmung auf, während der jeweiligen Spannungsrelaxation tritt dann aber thermoelastische Erwärmung und viskoplastische Erwärmung auf.

Dagegen findet im Druckbereich bei Belastung thermoelastische Erwärmung und viskoplastische Erwärmung statt, bei der Spannungsrelaxation aber treten thermoelastische Kühlung und viskoplastische Erwärmung auf.

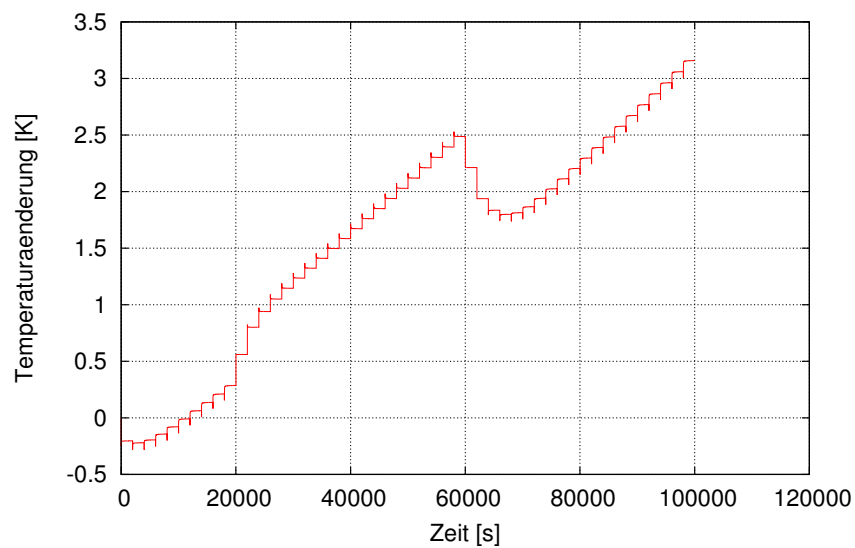


Abbildung 21: Temperaturentwicklung

### 5.3.3 Zyklische Belastung

Nun wird eine Berechnung mit 5 Lastzyklen durchgeführt. Die Dehnungsgeschwindigkeit beträgt wieder  $\dot{\varepsilon} = 0.0012 \frac{1}{s}$ .

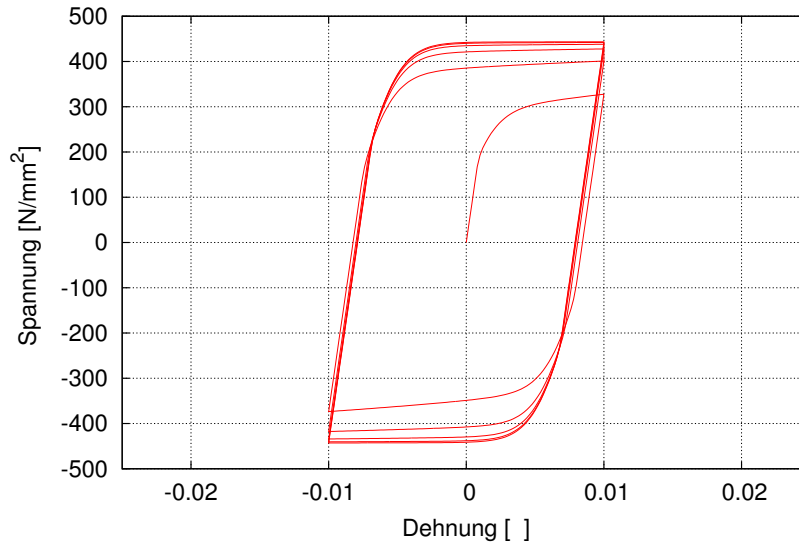


Abbildung 22: Spannungs-Dehnungsdiagramm

Auch hier kann eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment Abbildung 13 erzielt werden. Nach den 5 Lastzyklen hat die isotrope Verfestigung etwa ihre Sättigung erreicht, dies ist auch im Experiment der Fall. Ein Unterschied besteht allerdings bei der kinematischen Verfestigung, welche in der Rechnung ihren Sättigungswert schneller erreicht als im Experiment. Hier stößt das Materialmodell an seine Grenzen, denn dieses Verhalten kann es nicht wiedergeben.

LION verwendet bei seinen Simulationsrechnungen ein Materialmodell mit einer verallgemeinerten Bogenlänge, welches das experimentelle Verhalten wiedergeben kann.

## Literatur

- [1] Bröcker, C.: *Thermoviskoelastizität und Thermoplastizität: Modellierung, Implementierung und Simulation*. Diplomarbeit 2 (Mitteilung 4/2007) am Institut für Mechanik der Universität Kassel, 2006
- [2] Lion, Alexander: *Materialeigenschaften der Viskoplastizität. Experimente, Modellierung, und Parameteridentifikation*. Dissertation (Bericht 1/1994) am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.

## Danksagung

Diese Veröffentlichung basiert auf Forschungsarbeiten des Sonderforschungsbereichs SFB/TR TRR 30 „Prozessintegrierte Herstellung funktional gradierter Strukturen auf der Grundlage thermo-mechanisch gekoppelter Phänomene“, der von der deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert wird.