In: Erziehungswissenschaft und Beruf, Vierteljahresschrift für Unterrichspraxis und Lehrerbildung, unter ständiger Mitarbeit des Bundesarbeitskreises der Seminar- und Fachleiter e.V. (BAK), Hrsg.: Speth, 33. Jahrgang, 1985, Merkur Verlag, Rinteln, S. 55-66

Werner Blum

Einige allgemeine Fragen des Mathematikunterrichts an beruflichen Schulen am Beispiel des Themas Exponentialfunktionen

1 Einleitung

Dieser Beitrag verfolgt zwei *Ziele: Erstens* soll beispielhaft aufgezeigt werden, wie ein wichtiges Unterrichts-Thema (nämlich *exponentielle Prozesse* und die sie beschreibenden *Exponentialfunktionen*) im Sinne des *Spiralprinzips* (siehe dazu etwa [9, Kap. C. 3]) in adäquater Weise auf verschiedenen Niveaus innerhalb des berufsbildenden Schulwesens behandelt werden kann. *Zweitens* sollen anhand der jeweiligen Beispiel-Sequenzen zum Thema Exponentialfunktionen einige *allgemeine Fragen des Mathematikunterrichts an beruflichen Schulen* erörtert werden. Ich betrachte dabei *vier Stufen*:

- Exponentielle Prozesse im Fachrechenunterricht der Teilzeit-Berufsschule (Abschnitt 2);
- Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht der „beruflichen Sek. I" (Abschnitt 3);
- Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht in Grundkursen der beruflichen Sek. II (Abschnitt 4);
- Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht in Leistungskursen der beruflichen Sek. II (Abschnitt 5).

Das Vorgehen ist dabei jeweils wie folgt: Zuerst gebe ich eine *Skizze* einer konkret durchgeführten *Unterrichtseinheit.* Dann arbeite ich hieran drei für mich wichtige *allgemeine Aspekte* des Mathematikunterrichts an beruflichen Schulen heraus: Die in der jeweiligen Stufe von mir angestrebten *Ziele*, die *Rolle*, die außermathematische *Anwendungen* dabei spielen, und *methodische Gesichtspunkte*, die mir in dieser Stufe wesentlich erscheinen.

Ich verzichte im folgenden stets auf Details (hierzu sei auf die jeweils angegebene Literatur verwiesen), da es mir nur auf einen *Überblick* und *Problemaufweis* ankommt. In diesem Sinne versuche ich, in einem *zusammenfassenden Rückblick* (Abschnitt 6) eine *gemeinsame allgemeine Konzeption* für den Mathematikunterricht an beruflichen Schulen zu formulieren.

2 Exponentielle Prozesse im Fachrechenunterricht der Teilzeit-Berufsschule

2.1 Skizze einer Unterrichtseinheit für die Teilzeit-Berufsschule

Beispiel: Thema *Zinseszins* in einer **kaufmännischen Teilzeit-Berufsschule**

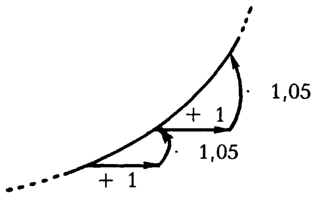
Die folgende *Unterrichtseinheit*[1] (konzipiert für die Grundstufe der Berufsschule) orientiert sich an den Vorschlägen [7] und [12] (vgl. auch [10b]):

- Problemstellung: Jährliches Wachstum eines Anfangs-Kapitals von 1000,— DM um 5 %
- Berechnung sowie tabellarische und graphische Darstellung einiger Kapital-Werte
- Erarbeitung von: „5 % hinzu" bedeutet „mal 1,05"

1 u. a. von Herrn StR Rohleder in Mainz durchgeführt; diese sowie die in den Abschnitten 3 und 4 skizzierten Unterrichtseinheiten sind enthalten im Film „Elementare Behandlung exponentieller Prozesse", der 1980 beim FWU Grünwald/Berlin erschienen ist (Best.-Nr. 41 0110).

- Arbeitsteilige Berechnung weiterer Kapital-Werte mittels Taschenrechner, Ergänzung von Tabelle und Graph
- Formulierung der Grundregel „Zu gleichlangen Zeiten stets gleicher Wachstumsfaktor", Veranschaulichung an Tabelle und Graph:

	4	1215,50...	
+ 1	5	1276,28...	· 1,05
+ 1	6	1340,09...	· 1,05



- Anwendung auf weitere Beispiele zu prozentualen Zu- bzw. Abschlägen, z.B. Mehrwertsteuer, Rabatt, Bevölkerungswachstum; stets Einsatz des Taschenrechners; dabei auch Aufklären additiver Trugschlüsse, z.B.: 15% MWSt und 5% Rabatt ergeben (unabhängig von der Reihenfolge!) „9,25% hinzu", nicht „10% hinzu":

$$100 \xrightarrow{\cdot\ 1{,}15} 115 \xrightarrow{\cdot\ 0{,}95} 109{,}25; \qquad 100 \xrightarrow{\cdot\ 0{,}95} 95 \xrightarrow{\cdot\ 1{,}15} 109{,}25$$

- Vergleich von linearem Wachstum (mit additiven Zuschlägen) und exponentiellem Wachstum (mit multiplikativen Zuschlägen) am Beispiel von Zins und Zinseszins, Veranschaulichung an Tabellen und Graphen
- Erarbeitung der verallgemeinerten Grundregel „Zur n-fachen Zeit stets die n-te Potenz des Wachstumsfaktors"
- Weitere Anwendungen, u.a. auch „Simulation" exponentieller Prozesse (wie Seerosenwachstum) mittels Taschenrechner; Bewußtmachen der wesentlichen Charakteristika
- Berechnung von (Näherungswerten für) Verdopplungs- bzw. Halbierungszeiten exponentieller Prozesse mittels Taschenrechner, tabellarisches Festhalten:

Prozentsatz p des Wachstums	Ungefähre Verdopplungszeit d
5	14
2	35
4	17

- Beispielgebundene Erarbeitung der „p · d-Regel" bzw. der „p · h-Regel": „Für kleine p ist das Produkt aus Prozentsatz p und Verdopplungszeit d bzw. Halbierungszeit h stets ungefähr 70".

Bei diesem Beispiel sind mir die folgenden *allgemeinen Aspekte* wichtig.

2.2 Zu den Zielen des mathematischen Unterrichts in der Teilzeit-Berufsschule

Der „mathematische Unterricht" bzw. Fachrechenunterricht in der Berufsschule sollte, wie auch beim Beispiel in *2.1* erkennbar ist, m.E. folgende allgemeinen *Ziele* anstreben (vgl. dazu [4], [5], [6]):

(1) Mathematik (hier: Prozentrechnung, geometrische und arithmetische Folgen, deren tabellarische und graphische Darstellung) soll zum *Beschreiben*, zum

besseren *Verstehen* und ggf. zum besseren *Bewältigen* schülerrelevanter, insbesondere berufsbezogener *Probleme* beitragen (hier z. B.: Wachstumsprozesse, Preise).

(2) Der mathematische Unterricht soll *„formale"* Qualifikationen bei den Schülern fördern, die nicht der unmittelbaren Hilfe für bestimmte im Unterricht behandelte Probleme dienen müssen, die aber beim Problemlösen allgemein von Bedeutung sind und die übertragbar sein sollen; Beispiele: Förderung der Fähigkeit zum *Argumentieren* (hier z. B. beim multiplikativen Charakter prozentualer Zuschläge), der Fähigkeit zum *Übersetzen* zwischen Realität und Mathematik (hier, ausgehend vom Problem des Kapital-Wachstums, durch Entwickeln oder Wiederholen zugehöriger mathematischer Inhalte wie insbesondere geometrische Folgen und durch Interpretieren bzw. Anwenden dieser Inhalte in der gegebenen oder auch in neuen Situationen) oder auch Förderung einer *offenen Haltung* gegenüber Problemsituationen.

(3) Der mathematische Unterricht soll einen (wenn auch bescheidenen) Beitrag zur *Chancengerechtigkeit* leisten, indem Übergänge der Schüler zu Vollzeitschulen nicht verbaut werden (hier z. B. durch eine adäquat vereinfachte, nicht verfälschte und ausbaufähige Behandlung des Themas Exponentialfunktionen) und Bildungsmotivation der Schüler wie auch Fähigkeiten zum Um- und Weiterlernen gefördert werden (hier z. B. durch Förderung einer adäquaten Problemlöse-Atmosphäre bei der Aufklärung additiver Trugschlüsse).

Traditionell ist Ziel 1, beschränkt auf eine Hilfe für berufsbezogene Probleme, das einzige Ziel des Fachrechenunterrichts (vgl. die Analysen in [3]). Auch für mich ist Ziel 1 zentral und im wesentlichen inhaltsbestimmend. Diese starke Betonung des *Hilfscharakters* der Mathematik unterscheidet den mathematischen Unterricht in der Teilzeit-Berufsschule deutlich vom Mathematikunterricht in allen anderen Schularten des allgemeinen und des beruflichen Schulwesens. Wesentlich ist dabei aber, auch wegen der Ziele 2 und 3, daß der Schüler mit der Mathematik nicht nur blind-mechanisch und rezepthaft umgeht, sondern daß er lernt, das mathematische „Handwerkszeug" in Anwendungssituationen möglichst *verständig* zu *handhaben*. Dies mag recht anspruchsvoll klingen und ist sicher nicht auf voller Breite erreichbar. Doch den Fachrechenunterricht von vornherein auf eine rezeptologische Unterstützung der Fachkunde zu beschränken, ist gerade bei der derzeitigen Situation auf dem Arbeitsmarkt, die Ziele wie 2 und 3 immer wichtiger werden läßt, nicht mehr zu verantworten.

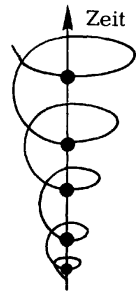
2.3 Zur Rolle von Anwendungen im mathematischen Unterricht der Teilzeit-Berufsschule

Die mathematischen Inhalte sollen, wie auch das Beispiel in *2.1* zeigt, in der Teilzeit-Berufsschule stets *praxis- und anwendungsbezogen* vermittelt werden, denn (vgl. auch [11]):

A. Mathematik soll primär eine *Hilfe* für gewisse außermathematische Probleme sein (siehe *2.2*, Ziel 1).

B. Schüler sollen (auch) anhand von geeigneten außermathematischen Beispielen *formale* Fähigkeiten erwerben (siehe *2.2*, Ziel 2) sowie Wesentliches über das Anwenden von Mathematik lernen.

2.4 *Methodische Gesichtspunkte zum mathematischen Unterricht in der Teilzeit-Berufsschule*



Die mathematischen Begriffe, Methoden und Resultate müssen natürlich, wie es auch beim Beispiel in *2.1* geschieht, in *vereinfachter*, aber nicht verfälschter Form vermittelt werden, sozusagen auf einer der „tiefer liegenden Spiral-Windungen". Dabei soll an das *Vorverständnis* der Schüler bewußt angeknüpft werden. *Beispiele* für solche Vereinfachungen in der Unterrichtseinheit aus *2.1* sind (stichwortartig):

- Verzicht auf Allgemeinheit durch *Beschränkung* auf zugängliche *Spezialfälle* (hier z.B.: Beschränkung auf Exponentialfunktionen mit $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich und mit rationalen Basen der Form $1 + \frac{p}{100}$)
- *Ikonische* statt symbolische *Darstellungen* (hier z.B.: Arbeiten mit Tabellen und mit Graphen statt mit Termen; Nicht-Explizieren des Funktions-Charakters der Exponentialfunktionen)
- *Verbale* statt formale *Formulierungen* (hier z.B. bei der Grundeigenschaft exponentiellen Wachstums)
- Beschränkung auf *beispielgebundene Begründungen* (hier z.B. bei der $p \cdot d$-Regel oder bei der Erarbeitung des multiplikativen Charakters prozentualer Zu- bzw. Abschläge); dabei auch Einsatz des *Taschenrechners*

In der *traditionellen* und auch heute noch dominanten Fachrechen-Methodik wird zwar auch vereinfacht, aber oft so, daß bloß Rechen-Schemata vermittelt und vom Schüler unverstanden angewandt werden. Dabei werden die Begriffe und Methoden der Hauptschul-Mathematik der 50er Jahre unreflektiert tradiert. Der Hauptgrund hierfür ist wohl der, daß man glaubt, auf diese Weise die Fähigkeiten des „durchschnittlichen" Berufsschülers (der in der Regel stärker sach- und beispielgebunden denken und schwerer theoretisch motivierbar sein wird als „durchschnittliche" Gymnasiasten gleichen Alters) adäquat zu berücksichtigen. Vereinfachungen wie die oben aufgezählten berücksichtigen jedoch die Voraussetzungen und auch die Fähigkeiten der Schüler angemessener und entsprechen zudem den anzustrebenden Zielen (siehe *2.2*). Derartige methodische Vorschläge sind übrigens (neben anderen, weniger brauchbaren) für die Sekundarstufe I seit längerem bekannt und im dortigen Mathematikunterricht auch bewährt (vgl. dazu auch [1]). Sie sollten m.E. auch im Fachrechenunterricht der Teilzeit-Berufsschule eine Bewährungs-Chance erhalten.[2]

3 Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht der „beruflichen Sek. I"

3.1 *Skizze einer Unterrichtseinheit für die Berufsfachschule*

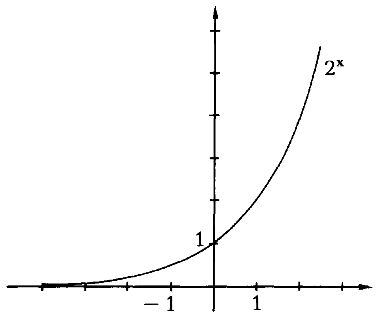
Beispiel: Einführung der Exponentialfunktionen auf $\mathbb{Q}$ und auf $\mathbb{R}$ anhand des Themas *Bakterienwachstum* in einer **Berufsfachschule** (Klasse 10), Fachrichtung *Gesundheitswesen*

Auch die folgende *Unterrichtseinheit*[3] (konzipiert für die Abschlußklassen der zu einem mittleren Bildungsabschluß führenden beruflichen Schulen) orientiert sich an den Vorschlägen [7] und [12]. *Voraussetzungen* bei den Schülern sind dabei Kenntnisse über Potenzen mit rationalen Exponenten und Kenntnis der reellen Zahlen, insbesondere als Dezimalbrüche.

2 Methodische Vorschläge zu den Bereichen „Rechnen mit Größen/Dreisatzrechnen, Prozent-/Näherungsrechnen, Zinsrechnen und Verhältnisrechnen/Umgehen mit Formeln" finden sich in [10].

3 u.a. von Herrn OStR Wanger in Mainz durchgeführt.

- Problemstellung: Wachstum einer Bakterienkultur, Verdopplung (z.B.) alle halbe Stunde
- Messen und tabellarisches Festhalten von Werten für den Inhalt der von der Kultur bedeckten Fläche; Mathematisierung des Problems mittels $x \to 2^x$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$; graphische Darstellung
- Formulierung und Veranschaulichung der Grundregel (siehe *2.1*)
- Erweiterung von $x \to 2^x$ auf den Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ durch Frage nach Flächeninhaltswerten vor Beobachtungs-Beginn, z.B. für $x = -3$; entsprechende Erweiterung von Tabelle und Graph
- Erweiterung von $x \to 2^x$ auf den Definitionsbereich $\mathbb{Q}$ durch Frage nach Zwischenwerten, z.B. für $x = \frac{1}{2}$; Verallgemeinerung der Grundregel auf rationalzahlige Schrittweiten; Berechnung von Funktionswerten 2^x, $x \in \mathbb{Q}$, mittels Taschenrechner und Erweiterung von Tabelle und Graph; Bezug zu gemessenen Werten im Ausgangs-Problem
- Verbales Festhalten wesentlicher Eigenschaften von $x \to 2^x$ auf $\mathbb{Q}$: Strenge Monotonie („Je größer x desto größer 2^x" oder „Für wachsende x-Werte wachsen auch die 2^x-Werte"), asymptotisches Verhalten („Der Graph schmiegt sich an den negativen Teil der 1. Achse an"), Grundeigenschaft („Jedesmal, wenn x um s wächst, wird der Funktionswert 2^x mit 2^S multipliziert")
- Erweiterung von $x \to 2^x$ auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ durch naives „Durchzeichnen", d.h. durch „stetiges Schließen" der „Lücken", die der Graph von $x \to 2^x$, $x \in \mathbb{Q}$, an allen irrationalen Stellen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hat



- Verbales Festhalten derselben Eigenschaften von $\exp_2$: $x \to 2^x$ auf $\mathbb{R}$ wie eben sowie Wertebereich $\mathbb{R}^+$ („Jede positive reelle Zahl y kommt als Funktionswert $y = 2^x$ vor")
- Exemplarische näherungsweise Bestimmung von Funktionswerten 2^x, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, z.B. von $2^{\ 2}$, durch Ablesen am Graphen und mittels Intervallschachtelungen; Bestimmung weiterer Funktionswerte mittels Taschenrechner ($\boxed{y^x}$ -Taste)
- Behandlung weiterer Exponentialfunktionen inklusive Anwendungen, Bewußtmachen von deren Aktualität und Relevanz

An diesem Beispiel will ich folgende *allgemeinen Aspekte* aufzeigen.

3.2 Zu den Zielen des Mathematikunterrichts in der „beruflichen Sek. I"

Der Mathematikunterricht in der „beruflichen Sek. I", d.h. in der Berufsfach- bzw. der Berufsaufbauschule, sollte, wie auch beim Beispiel in *3.1* erkennbar ist, aufgrund des Bildungsauftrags dieser Schulen m.E. folgende allgemeinen *Ziele* anstreben:

(1) Mathematik (hier: Exponentialfunktionen) soll als *Hilfe* für schülerrelevante, auch berufsbezogene Probleme dienen (hier z.B.: Wachstumsprozesse).

(2) Der Mathematikunterricht soll *„formale"* Qualifikationen der Schüler fördern (siehe *2.2*), u.a. die Fähigkeit zum *Mathematisieren* realer Situationen (hier beim Herauspräparieren der Exponentialfunktion zur Basis 2 aus dem Beispiel Bakterienwachstum) oder die Fähigkeit zum *Argumentieren* (hier z.B. bei der Bestimmung von Zweierpotenzen mit irrationalen Hochzahlen).

Primär, aber nicht allein inhaltsbestimmend, ist Ziel 1. Der Stellenwert dieses Ziels ist hier deutlich höher als in den vergleichbaren Schulen der allgemeinen Sek. I. Wesentlich ist wieder, daß Schüler lernen, mit den mathematischen Gegenständen in außer- und innermathematischen Situationen verständig umzugehen.

3.3 Zur Rolle von Anwendungen im Mathematikunterricht der „beruflichen Sek. I"

Auch hier sind außermathematische *Anwendungen* wichtig. Zu der „pragmatischen" Rolle A und der „formalen" Rolle B (siehe 2.3) tritt eine *„lernpsychologische"* Rolle hinzu:

C. Geeignete Anwendungen können den Prozeß des Lernens von Mathematik unterstützen, u. a. indem sie Inhalte der Schulmathematik motivieren oder veranschaulichen, Lernsequenzen strukturieren, zum besseren Verstehen und längeren Behalten von mathematischen Inhalten beitragen (hier jeweils beim Thema Exponentialfunktionen) oder die Einstellung von Schülern zur Mathematik beeinflussen können.

Dabei ist für mich auf dieser Stufe A wichtiger als B und B wiederum wichtiger als C.

3.4 Methodische Gesichtspunkte zum Mathematikunterricht in der „beruflichen Sek. I"

Auch hier ist wichtig, daß Schülern die mathematischen Stoffe auf geeigneten *Stufen* der Strenge zugänglich gemacht werden, unter Berücksichtigung ihres Vorverständnisses; *Beispiele* aus der Unterrichtseinheit von *3.1*:

- Wiederum (vgl. 2.4) Verzicht auf Allgemeinheit durch Beschränkung auf zugängliche *Spezialfälle* (hier allerdings nur noch Beschränkung auf Exponentialfunktionen mit einfachen rationalen Basen)
- Wiederum (vgl. 2.4) *ikonische* statt symbolische *Darstellungen* (hier allerdings z. T. auch Arbeiten mit Termen)
- Wiederum (vgl. 2.4) *verbale* statt formale *Formulierungen* (hier auch bei weiteren Eigenschaften der Exponentialfunktionen)
- Beschränkung auf beispielgebundene oder *anschauliche Begründungen* (hier z. B. bei den Eigenschaften der Exponentialfunktionen); dabei auch Einsatz des *Taschenrechners*
- Betonung von *Berechnungs-* statt von Existenz- und Definitionsfragen (hier z. B. bei Potenzen mit irrationalen Hochzahlen)

Unterschiede zwischen der beruflichen und der allgemeinen Sek. I gibt es für mich übrigens nicht bezüglich dieser am genetischen Prinzip (vgl. dazu etwa [9, Kap. C. 1]) orientierten *globalen* methodischen Konzeption, sondern bezüglich klassen- oder gar schülerspezifischen *einzelnen* methodischen Maßnahmen wie etwa

- Art und Umfang der Beispiele,
- Art und Umfang der Aufgaben,
- Sprachliches Niveau bei der Formulierung von Definitionen und Resultaten,
- Ausmaß des Arbeitens auf formaler Ebene.

Auch das bisher in *3.4* Gesagte stellt zunächst einmal nur meine Zielvorstellung dar und weniger eine Beschreibung der Schulrealität. Denn faktisch wird in Berufsfach- und Berufsaufbauschulen oft die traditionelle Hauptschul-Mathematik in verkürzter und anwendungsarmer Form im „Kusch-Stil" vermittelt, eventuell noch „modernisiert" durch isolierte Abschnitte über „Mengen". Daher ist auch hier m. E. eine Öffnung gegenüber neueren methodischen Vorschlägen wünschenswert.

4 Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht in Grundkursen der beruflichen Sek. II

4.1 Skizze einer Unterrichtseinheit für die Fachoberschule

Beispiel: Ableitung der Exponentialfunktionen anhand des Themas *Abkühlung* in einer **Fachoberschule** (Klasse 12), Fachrichtung *Elektrotechnik*

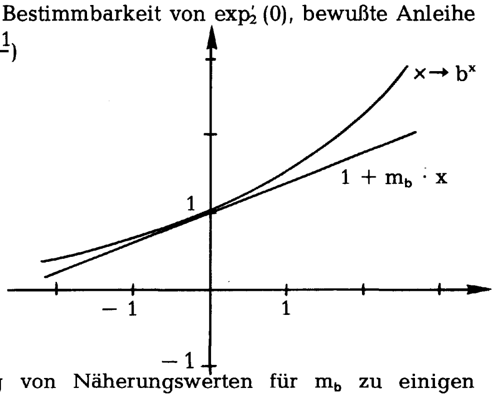
Die folgende *Unterrichtseinheit*[4] (konzipiert für die Klasse 12 der Fachoberschule bzw. des Gymnasiums) orientiert sich am Vorschlag [8] (vgl. auch [9, Kap. A. 6]). *Voraussetzungen* bei den Schülern sind dabei Kenntnis der wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktionen sowie Kenntnis des Ableitungsbegriffs inklusive dessen geometrische Deutung.

- Ausgangsproblem: Abkühlung von auf 50°C erhitztem Wasser auf 0°C
- Messen, tabellarisches Festhalten und graphische Darstellung von Temperaturwerten; Mathematisierung mittels $t \rightarrow 50 \cdot 0{,}6^t$ auf $\mathbb{R}_0^+$
- Frage nach Änderungsgeschwindigkeiten der Temperatur; Mathematisierung mittels mittleren und lokalen Änderungsraten der zugrundeliegenden Funktion sowie geometrische Deutungen; Probleme somit: Ableitung einer Exponentialfunktion, hier $\exp_{0,6}: x \rightarrow 0{,}6^x$
- Vereinfachung des Problems: Ableitungsbestimmung für $\exp_2: x \rightarrow 2^x$; graphisches Differenzieren an einigen Stellen; näherungsweise Berechnung der Ableitung $\exp_2'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$ mittels Approximation (Taschenrechner!) durch Differenzenquotienten, etwa

h	......	$\frac{1}{2^5}$	...	$\frac{1}{2^{10}}$	...	$\frac{1}{2^8}$	......
$\frac{2^h - 1}{h}$	......	0,700...	...	0,693...	...	0,692...	......

  Diskussion über prinzipielle und praktische Bestimmbarkeit von $\exp_2'(0)$, bewußte Anleihe bei der Anschauung (Existenz von $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$)
- Ableitung von $\exp_2$ durch Rückführung auf die Stelle 0
- Analoge Ableitung von $\exp_b: x \rightarrow b^x$ für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $\exp_b'(a) = b^a \cdot \exp_b'(0)$, wobei $\exp_b'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = m_b$;

  Resultat also: Proportionalität von Ableitung und Ausgangsfunktion, mit Ableitungswert an der Stelle 0 als Proportionalitätsfaktor



- Graphische und rechnerische Bestimmung von Näherungswerten für m_b zu einigen Basen b, insbesondere $m_{0,6} \approx -0{,}51$ als Rückbezug zum Ausgangsproblem, u. a. auch $m_{2,5} \approx 0{,}91$ und $m_3 \approx 1{,}10$
- Definition der Eulerschen Zahl e über $m_e = 1$, d. h. als diejenige Basis b, für die $\exp_b'(a) = b^a$, d. h. $\exp_b' = \exp_b$ gilt; näherungsweise Berechnung von e in mehreren Stufen, unter Verwendung eines Rechners
- Definition der e-Funktion als $\exp_e$; inner- und außermathematische Anwendungen der e-Funktion, Bewußtmachen von deren Aktualität und Relevanz

4 u. a. von Herrn StR Keppler in Wetzlar durchgeführt.

Auch dieses Beispiel läßt einige *allgemeine Aspekte* erkennen, die mir wichtig sind.

4.2 Zu den Zielen des Mathematikunterrichts in Grundkursen der beruflichen Sek. II

Auch im Mathematikunterricht in der Fachoberschule und in Grundkursen des beruflichen Gymnasiums stehen entsprechende *Ziele* wie 1 und 2 aus *3.2* im Vordergrund (vgl. auch [9, Kap. B. 1]); die Lernsequenz aus *4.1* läßt dies am Beispiel der Exponentialfunktionen und deren Ableitung erkennen. Hinzu kommt ein Ziel, das allerdings nur ansatzweise verfolgt werden sollte:

(3) Mathematische Inhalte (hier z.B.: die Zahl e und die e-Funktion) sollen den Schülern exemplarisch als Beispiele für *„kulturelle Errungenschaften"* vermittelt werden, die in Vergangenheit und Gegenwart in vielen Bereichen eine Rolle gespielt haben und spielen.

Wesentlich ist wieder, daß Schüler der beruflichen (ebenso wie der allgemeinen) Sek. II adäquate Grundvorstellungen von den wichtigsten Begriffen, Methoden und Resultaten aufbauen, die ihnen ein verständiges Umgehen hiermit in inner- und außermathematischen Situationen ermöglichen.

4.3 Zur Rolle von Anwendungen im Mathematikunterricht in Grundkursen der beruflichen Sek. II

Auch für die berufliche Sek. II gelten die in *3.3* genannten Begründungen A, B und C für die Wichtigkeit von *Anwendungen.* Dabei scheint mir nun B gleichberechtigt neben A zu stehen. Hinzu kommt, wenn auch deutlich hinter C, eine *„wissenschaftstheoretische"* Komponente:

D. Geeignete Anwendungen sollen mithelfen, den Schülern zumindest exemplarisch ein ausgewogeneres Gesamtbild von Mathematik als kulturelles und gesellschaftliches Gesamtphänomen zu vermitteln.

4.4 Methodische Gesichtspunkte zum Mathematikunterricht in Grundkursen der beruflichen Sek. II

Auch hier muß im Sinne des Spiralprinzips *vereinfacht* werden; *Beispiele* aus der Unterrichtseinheit in *4.1* (genaueres in [9, Kap. A. 4–6]):

- *Verzicht* auf inhaltliche *Vollständigkeit* (hier: Nicht-Thematisieren der Vollständigkeit des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen)
- *Ikonische, verbale* und *operative* statt bzw. vor formalen *Fassungen* von Begriffen (hier: beim Grenzwert- und beim Ableitungsbegriff)
- Behandlung von *Berechnungs-* statt bzw. vor Existenz- und Definitionsfragen (hier: bei der Ableitung von $\exp_b$ an der Stelle 0 oder bei der Definition der Eulerschen Zahl e); dabei auch *Rechner*einsatz
- *Numerische, geometrisch-anschauliche* oder *plausible* statt bzw. vor formalen *Begründungen* (hier: bei der Existenz und Eindeutigkeit von e)

Die letzten beiden Arten des Zugänglich-Machens kann man mit Kirsch [13] als „Ausgliedern plausibler Tatsachen" charakterisieren. Exemplarisch sollen auch einige der Vereinfachungen an späterer Stelle bewußt aufgehoben werden, soll *exaktifiziert* und das Argumentationsniveau schrittweise *gesteigert* werden (hier: bei der Behandlung von e).

Auch bzgl. Grundkursen der Sek. II sehe ich keine „globalen", sondern nur „lokale" Unterschiede zwischen beruflichen und allgemeinen Schulen[5] (vgl. *3.4*).

5 Daher habe ich die Lernsequenz aus *4.1* parallel in einer Fachoberschule und in einem Grundkurs eines allgemeinen Gymnasiums in Kassel unterrichtet.

Im Gegensatz zum eben Gesagten werden in vielen Fachoberschulen oder beruflichen Gymnasien mathematische Begriffe, Fakten und Verfahren rein schematisch und höchstens mit vereinzelten schein-plausiblen Argumenten vermittelt; in einigen Schulen und vor allem in zahlreichen für die berufliche Oberstufe geschriebenen Schulbüchern findet man auch eine verkürzte und unkritische Anlehnung an den überzogen „verwissenschaftlichten" Gymnasialunterricht der 70er Jahre, geprägt von einem Streben nach formaler Exaktheit und strenger Begrifflichkeit schon im ersten Anlauf (vgl. dazu die Skizze der Geschichte des Analysisunterrichts in [9, Kap. B. 1]). Daher erscheinen auch hier *Änderungen* in bezug auf Ziele und Methoden des Mathematikunterrichts wünschenswert. Nach meinen Beobachtungen haben sich solche wünschbaren Änderungen in den letzten Jahren in vielen Schulen bzw. Klassen schon vollzogen, nicht zuletzt dank einer verbesserten *Lehrerausbildung*, insbesondere auch im Fach Mathematik unter Einbeziehung seiner Didaktik.

5 Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht in Leistungskursen der beruflichen Sek. II

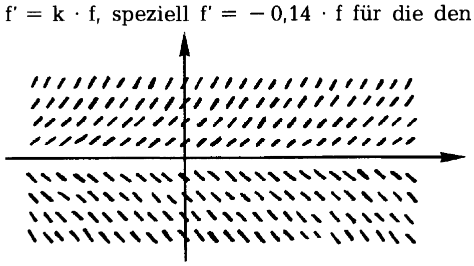
Ich kann mich hier kürzer fassen, da alles in *4* für Grundkurse Gesagte im wesentlichen auch für Leistungskurse gültig bleibt und da hier nur wenige für das berufliche Schulwesen spezifische Aussagen gemacht werden können.

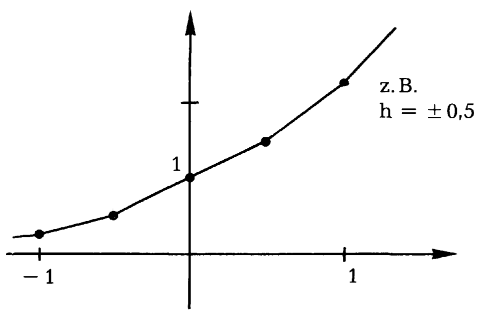
5.1 Skizze einer Unterrichtseinheit für das berufliche Gymnasium

Beispiel: Differentialgleichung der Exponentialfunktionen in einem Leistungskurs eines **Wirtschaftsgymnasiums** (Klasse 12)

Für die folgende *Unterrichtseinheit*[6] (konzipiert für die Klasse 12 des Gymnasiums) benötigen Schüler dieselben Voraussetzungen wie für die Sequenz aus *4.1.*

- Ausgangsproblem: Radioaktiver Zerfall, speziell von Xenon 133
- Mathematisierung zur Differentialgleichung $f' = k \cdot f$, speziell $f' = -0{,}14 \cdot f$ für die den Zerfall beschreibende reelle Funktion f
- Vereinfachen des Problems: Spezialisierung auf $k = 1$, d.h. Suche nach Lösungen der Differentialgleichung $f' = f$; erste (vergebliche) Lösungsansätze mittels ganzrationaler oder rationaler Funktionen
- Erarbeiten graphischer Näherungslösungen im Richtungsfeld; geometrische Begründung einiger Eigenschaften von Lösungen (u.a. Monotonie) bzw. der Lösungsmenge (Verschieben, Spiegeln); Vermutung über Lösungen (Exponentialfunktionen!)
- Näherungsweise numerische Berechnung von Lösungen (Ausgehen von z.B. $(0|1)$ und sukzessives Ausnutzen der linearen Approximation: $f(a + h) \approx f(a) + h \cdot f'(a) = (1 + h) \cdot f(a)$ für betraglich kleines h) mit (ggf. programmierbaren) Rechnern; Erhärtung der Vermutung





6 u.a. 1983 von mir in Kassel durchgeführt; ich danke Herrn StD Wagner (Kaufungen) für die Ermöglichung dieses Unterrichtsversuchs.

- Reaktivierung sowie Ableitung der Exponentialfunktionen wie in *4.1*: $\exp_b' = m_b \cdot \exp_b$ mit $m_b = \exp_b'(0)$
- Wie in *4.1* Spezialisierung auf Basis e mit $m_e = 1$ und somit $\exp_e: x \to e^x$ als (eine) Lösung von $f' = f$; näherungsweise Berechnung der Eulerschen Zahl e
- Erkennen von $a \cdot \exp_e: x \to a \cdot e^x$ $(a \in \mathbb{R})$ als Lösungen von $f' = f$; Eindeutigkeitsbeweis für diese Lösungen (Quotientenregel und Satz über Konstante!)
- Erkennen von $x \to e^{kx}$ und allgemeiner $x \to a \cdot e^{kx}$ als Lösungen von $f' = kf$; Eindeutigkeitsbeweis; Rückbezug zum Ausgangsproblem: $t \to a \cdot e^{-0,14t}$ als den Zerfall von Xenon 133 beschreibende Funktion
- Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für e (Herleitung von $m_b = \log_2 b \cdot m_2$ aus $b^x = 2^x \cdot \log_2^b$ und dann wegen Eigenschaften von $\log_2$ eindeutige Charakterisierung von e über $\log_2 e = \frac{1}{m_2}$, also $m_e = 1$)

Auch hier einige *allgemeine Aspekte*:

5.2 *Zu den Zielen des Mathematikunterrichts in Leistungskursen der beruflichen Sek. II*

Für Leistungskurse sehe ich dieselben *Ziele* 1, 2 und 3 wie in *4.2* für Grundkurse, wobei Ziel 3 nun einen größeren, gegenüber 2 und 1 aber weiterhin nachgeordneten Stellenwert hat. Hinzu kommt noch ein eher *innermathematisch* orientiertes Ziel:

(4) Schüler sollen ansatzweise einen Einblick in den strukturellen Aufbau eines mathematischen Gebiets (hier: der Differentialrechnung mit den elementaren Funktionen) mit dessen wesentlichen Begriffen, Methoden und Resultaten erhalten.

5.3 *Zur Rolle von Anwendungen im Mathematikunterricht in Leistungskursen der beruflichen Sek. II*

Anwendungen lassen sich in Leistungskursen mit denselben Argumenten rechtfertigen wie in *4.3* für Grundkurse, wobei für mich nun B am wichtigsten ist und A, C und D ungefähr untereinander gleichrangig nachfolgen.

5.4 *Methodische Gesichtspunkte zum Mathematikunterricht in Leistungskursen der beruflichen Sek. II*

Auch in Leistungskursen sind adäquate *Vereinfachungen* im Vergleich zum hochschulüblichen Niveau sinnvoll und notwendig; *Beispiele* aus der Unterrichtseinheit in *5.1*:

- Behandlung von *Berechnungs-* vor Existenz- und Eindeutigkeitsfragen (hier: beim Lösen der gegebenen Differentialgleichung), mit Verwendung von *Taschenrechnern* oder *Computern*
- *Verzicht* auf inhaltliche *Vollständigkeit* (hier: exemplarische Vermittlung eines Grundverständnisses für Phänomene und Methoden bei Differentialgleichungen statt systematischer und umfassender Behandlung dieses Themas)

Vertiefungen, Präzisierungen, Exaktifizierungen, Erweiterungen sind in Leistungskursen noch wichtiger als in Grundkursen und sollen einen festen Platz im Unterricht haben (hier: beim Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von $f' = k \cdot f$ oder beim Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit von e).

6 Zusammenfassender Rückblick

Ich habe in den Abschnitten 2 bis 5 das Thema Exponentialfunktionen dazu benutzt, exemplarisch zu zeigen, wie ein Stoffgebiet aus dem Mathematikunterricht auf verschiedenen Niveaus innerhalb des beruflichen Schulwesens behandelt werden kann. Dabei habe ich jeweils dieselben allgemeinen Aspekte thematisiert, um skizzenhaft eine globale konzeptionelle Sichtweise vom Mathematikunterricht an beruflichen Schulen entwickeln zu können, die hier nochmals zusammengefaßt werden soll.

In allen Schularten des berufsbildenden (wie auch des allgemeinbildenden) Schulwesens

- soll Mathematik unmittelbar oder mittelbar ein *Hilfsmittel* bei realen Situationen sein; dies schließt auch den im engeren Sinne *„berufsbildenden"* Aspekt der Mathematik mit ein;
- sollen durch Beschäftigung mit Mathematik bei den Schülern *formale* Qualifikationen gefördert werden.

In höheren Klassen

- soll Mathematik auch ein Gebiet von *eigenständigem* Interesse sein.

Außermathematische *Anwendungen* spielen für all diese Ziele eine in mehrfacher Hinsicht wichtige Rolle. Dabei ist die Situation in beruflichen Schulen günstiger als in allgemeinen Schulen, da zusätzlich auch *berufsbezogene* Anwendungsbeispiele zur Verfügung stehen.

Die genannten *Ziel-Komponenten* müssen je nach Schulart *unterschiedlich gewichtet* werden. Hierdurch ergibt sich auch (in unterschiedlichem Ausmaß) ein – bezogen auf allgemeine Schulen – *eigenständiger* Charakter des Mathematikunterrichts an beruflichen Schulen in seinen Zielen, (dadurch) seinen Inhalten sowie auch in methodischen Details. Dies darf aber *nicht* eine *einseitige* Ausrichtung an nur einer Ziel-Komponente bedeuten, d.h. *nicht* eine bloße *Anbindung* des mathematischen Unterrichts an die berufskundlichen Fächer, und andererseits ebensowenig eine unkritische *Anlehnung* des Mathematikunterrichts an fachsystematisch orientierten gymnasialen Vorbildern der 70er Jahre. Die *gemeinsame Konzeption*, die ich für den Mathematikunterricht an allen Arten beruflicher Schulen vorschlage, beinhaltet eine *„allgemeinbildende"* Ausrichtung des Mathematikunterrichts insofern, als Schüler befähigt werden sollen, mathematische Inhalte in gegenwärtigen oder zukünftigen Lebenssituationen *verständig handhaben* zu können; dabei schließt „handhaben" mit zunehmender Schulstufe verstärkt auch allgemeine formale Fähigkeiten mit ein.

Um dies zu erreichen, müssen die (begründet ausgewählten) mathematischen Inhalte den Schülern in *bildungsgangs-* (d.h. ziel-, stoff-, schüler- und lehrer-) *adäquat vereinfachter* Weise zugänglich gemacht werden. Hierfür sind u.a. die Wahl geeigneter *Ebenen der Darstellung* mathematischer Begriffe und Resultate, ein Verzicht auf Vollständigkeit durch *Ausgliedern* plausibler Tatsachen oder die vielfältige Verwendung von *Rechnern* wertvolle Hilfsmittel. Vereinfachung darf *nicht resignierende Beschränkung* auf Vermittlung schematischer Verfahren in Rezepte-Form bedeuten.

Die skizzierte Konzeption für den Mathematikunterricht soll letztendlich beitragen zur Förderung allgemeiner *Bildungsziele* für berufliche Schulen, nämlich (in der Formulierung der DGE[7]) „den Schüler zu befähigen, komplexe berufliche Situationen zu bewältigen sowie im betrieblichen, gesellschaftlichen und privaten Leben . . . verantwortungsbewußt zu handeln."

---

7 Deutsche Gesellschaft für Erziehungswissenschaft, Sektion Berufs- und Wirtschaftspädagogik: Empfehlung zur Neuordnung der Ausbildung von Lehrern für das berufliche Schul- und Ausbildungswesen, 14. 11. 1980.

Literatur:

[1] Appelrath, K.-H. u.a.: Der Übergang von der Hauptschule zur Berufsbildenden Schule – Hilfen zum Abbau von Schwierigkeiten im Fach Mathematik/Fachrechnen. Studienmaterial des SIL, Bd. 47, Speyer 1982.

[2] Bardy, P. (Hrsg.): Taschenrechner im Unterricht beruflicher Schulen. Freiburg 1982.

[3] Bardy, P./Blum, W./Sträßer, R. u.a.: Mathematik in der Teilzeit-Berufsschule. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 12 (1980), Heft 3 und 4, S. 75ff.

[4] Blum, W.: Mathematik in der Berufsschule – Curriculare Probleme, diskutiert am Beispiel des Berufsfeldes Elektrotechnik. In: Die Deutsche Berufs- und Fachschule 72 (1976), Heft 9, S. 671–686.

[5] Blum, W.: Berufliches Schulwesen. In: Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht (Hrsg.: Volk, D.), München 1979, S. 15–32.

[6] Blum, W.: Fachrechnen/Technische Mathematik. In: Beiträge zur Fachdidaktik Maschinenbau (Hrsg.: Bonz, B./Lipsmeier, A.), Stuttgart 1981, S. 85–106.

[7] Blum, W. (mit Ahlborn, R.): Elementare Behandlung exponentieller Prozesse. Beiheft zum gleichnamigen FWU-Film, Grünwald/Berlin 1980.

[8] Blum, W./Kirsch, A.: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. In: Didaktik der Mathematik 5 (1977), Heft 4, S. 274–288.

[9] Blum, W./Törner, G.: Didaktik der Analysis. Göttingen 1983.

[10] Deutsches Institut für Fernstudien: Studienbriefe Sachrechnen für Lehrer an Berufsschulen, Tübingen 1983–85;
  [a] BS1: Rechnen mit Größen, Dreisatzrechnen
  [b] BS2: Prozentrechnen, Näherungsrechnen
  [c] BS3: Zinsrechnen
  [d] BS4: Verhältnisrechnen, Umgehen mit Formeln.

[11] Kaiser, G./Blum, W./Schober, M.: Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Karlsruhe 1982.

[12] Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. In: Didaktik der Mathematik 4 (1976), Heft 4, S. 257–284.

[13] Kirsch, A.: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik 5 (1977), Heft 2, S. 87–101.