In: Didaktik der Mathematik, 2. Jahrgang, 1974, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, S. 305-313

Werner Blum

Bemerkungen zum Analysisunterricht am Beispiel des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir den Stellenwert des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung im Analysisunterricht bestimmen und hierbei auf einige Ziele und Prinzipien dieses Unterrichts hinweisen[1]. Die folgenden Gedanken sollen also nicht nur lokal auf den Mittelwertsatz bezogen, sondern sinngemäß auf andere Gebiete der Analysis in der Schule übertragen werden.

1. Kritische Bestandsaufnahme und Problemstellung

1.1. Zur innermathematischen Bedeutung des Mittelwertsatzes[2]

Der auf Lagrange zurückgehende

Mittelwertsatz der Differentialrechnung $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ stetig $\wedge$ f in $(a;b)$ differenzierbar $\Rightarrow$

$$\bigvee_{\xi\in(a;b)} f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ist nach Dieudonné [5, S. 148] der „wahrscheinlich nützlichste Satz der Analysis". Er läßt sich am einfachsten als Folgerung aus dem

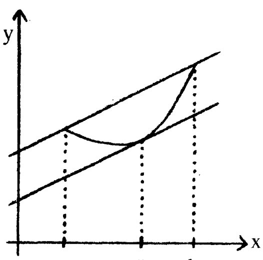

Fig. 1

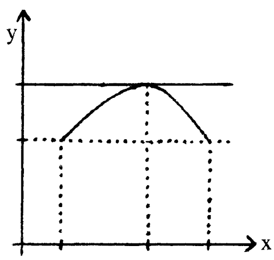

Fig. 2

Satz von Rolle $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ stetig $\wedge$ f in $(a;b)$ differenzierbar $\wedge$ $f(a)=f(b)\Rightarrow$

$$\bigvee_{\xi\in(a;b)} f'(\xi)=0$$

1 Die Anregung zur Beschäftigung mit diesem Thema erhielt ich durch Fragen von Schülern anläßlich der unterrichtlichen Behandlung des Mittelwertsatzes nach [26] in einer 12. Klasse meines Kasseler Kollegen W. Heist.

2 Siehe etwa [6, S. 146ff.].

beweisen, welch letzterer sich wiederum z. B. aus dem Satz von Weierstraß über Extrema stetiger Funktionen ergibt. Die Bedeutung des Mittelwertsatzes liegt in seinen *vielfältigen Anwendungen.* So sind z. B. das *Kriterium für strenge Monotonie* oder die für die Integralrechnung grundlegend wichtige Aussage, daß *nur konstante Funktionen eine verschwindende Ableitung* haben, unmittelbare Korollare des Mittelwertsatzes (genauer sind alle genannten Sätze in angeordneten Körpern zum Vollständigkeitsaxiom äquivalent, siehe etwa [3]). Weiter folgen Funktionswertabschätzungen, die Regeln von L'Hospital u. v. a. m. aus dem Mittelwertsatz.

1.2. Der Mittelwertsatz in Schulbüchern

Der Mittelwertsatz hat in den letzten Jahren Einzug in den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe gehalten (siehe etwa [10]) und wird heute in jedem Schulbuch behandelt. In neuerer Zeit trifft dies auch auf einige Bücher für den beruflichen Zweig der Sekundarstufe II zu (etwa [22, S. 172]). Nun ist zwar in manchen Büchern zwischen einem ersten Durchgang der Differential- und Integralrechnung (ohne Mittelwertsatz) und einer Vertiefung und Erweiterung (mit Mittelwertsatz) unterschieden, jedoch wird der Beweis des Mittelwertsatzes im Zuge der „Modernisierung" in sämtlichen Schulbüchern in einer formalen Weise geführt. Der Mittelwertsatz wird nämlich mittels (von Buch zu Buch leicht variierender) Hilfsfunktionen, die meist ohne genügende Motivation „vom Himmel fallen", *formal aus dem Satz von Rolle deduziert,* wobei dieser nur zum Zwecke der geschilderten Deduktion bewiesen wird.

1.3. Zu einigen Prinzipien des Analysisunterrichts

An dieser Stelle ist es angebracht, an Prinzipien des Analysisunterrichts zu erinnern, die zwar wohlbekannt, jedoch als Folge der „Modernisierung" etwas in den Hintergrund getreten sind. Und zwar scheint dies vor allem auf das Mittel der *geometrischen Veranschaulichung* zuzutreffen. In den meisten der „modernen" Schulbücher und Aufsätze zur Analysis liegt das Schwergewicht unter Vernachlässigung der ikonischen eindeutig bei der symbolischen Ebene (im Sinne von Bruner [2]), obwohl die moderne Mathematik und gerade die Analysis von der geometrischen Anschauung geradezu „durchdrungen" ist (s. [8, S. 48ff.]). Die didaktischen Argumente zugunsten eines „fruchtbaren Miteinander" (s. [20, S. V]) von Analysis und Geometrie in der Schule, wie sie etwa von Freund [9] dargestellt worden sind, sind jedoch keineswegs veraltet. Sie gelten unverändert auch heute noch und lassen sich sogar ausbauen:

- erstens *fördern* geometrische Hilfsmittel *Einsicht und Verständnis*;
- zweitens dient die Anschauung zur *Belebung, Konkretisierung und Motivation* im Mathematikunterricht;
- drittens ist die Anschauung eine wichtige Hilfe beim Unterrichtsgang, indem sie *weiterführende Ideen* signalisiert und Wege für das weitere Vorgehen aufzeigt.

Von besonderer Bedeutung ist hierbei, daß, im Gegensatz zu einem formalen Vorgehen, wo die entscheidenden Ideen oftmals vom Lehrer gegeben oder aus dem Buch entnommen werden, durch eine anschauliche Verankerung viel stärker *Kreativität und Eigen-*

aktivität der Schüler gefördert werden[1]. Dies ist insbesondere auch beim Beweisen wichtig und wird begründet durch das Prinzip „Auffindbarkeit geht vor Eleganz und Kürze" aus [12, S. 171].

Mit all dem soll keinesfalls einem „unmathematischen" Vorgehen das Wort geredet werden (s. a. [9]). Exaktheit ist auf jeder Ebene möglich. Dies wird in Abschnitt 3.2., für welchen obige Überlegungen in erster Linie relevant sind, deutlich werden.

1.4. Ziele dieses Aufsatzes

Der Stellenwert des Mittelwertsatzes für die Schule entspricht seinem innermathematischen: Er ist lediglich Hilfsmittel zum Beweis anderer Sätze und hat kaum eine eigenständige Bedeutung. Insofern ist der Mittelwertsatz für einen *Grundkurs*[2] in Analysis, der obige Prinzipien berücksichtigen sowie u. a. in die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung einführen und schnell zu den Anwendungen vorstoßen will, *völlig entbehrlich.* Dies soll in Abschnitt 2. näher begründet werden.

In *Leistungskursen* zur Analysis, in denen u. a. die Resultate des Grundkurses fundiert und ausgebaut werden sollen, erscheint dagegen eine Thematisierung des Mittelwertsatzes sinnvoll, und zwar im Sinne eines *lokalen Ordnens*, was jetzt näher erläutert werden soll.

Der Mittelwertsatz kann in bekannter Weise im Themenkreis Funktionsuntersuchungen oder im Themenkreis Stammfunktionen behandelt werden (s. 1.1.). Unabhängig hiervon läßt er sich auch durch physikalische Probleme motivieren (s. 3.1.). Zurückgeführt wird der Mittelwertsatz auf den Satz von Rolle. Dieser sollte auf jeden Fall nicht wie in den Schulbüchern als bloßes Hilfsmittel für den Mittelwertsatz bereitgestellt, sondern unabhängig hiervon bereits vorher (etwa beim Themenkreis Extremwertaufgaben im Grundkurs) behandelt und an entsprechender Stelle in den Beweis des Mittelwertsatzes eingebracht werden. Diesen Beweis wollen wir nun problematisieren. Ohne Zweifel sind formale Deduktionen unentbehrlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts in Leistungskursen der Oberstufe. Doch erstens sind Schüler bei evidenten Tatsachen (wie etwa beim Mittelwertsatz) erfahrungsgemäß nicht leicht für einen rein formalen Beweis zu motivieren, und zweitens ist der formale Beweis in diesem Falle nicht ohne weiteres zu durchschauen. Daher ist es aufgrund der geometrischen Bedeutung der in Rede stehenden Sätze gerechtfertigt, für die unterrichtliche Behandlung alternativ oder auch parallel zu einem formalen Beweis einen die Prinzipien aus Abschnitt 1.3. berücksichtigenden *anschaulich motivierten geometrischen Beweis* des Mittelwertsatzes auf der Grundlage des Satzes von Rolle vorzuschlagen[3]. Dies geschieht in Abschnitt 3. Der mathematische Kern dieses Beweises ist wohlbekannt; er beruht auf *affinen Abbildungen* (im wesentlichen

1 Über die Vorzüge eines „aktiven Lernens" braucht nichts gesagt zu werden (s. a. [8]).

2 Obwohl hier und im folgenden, anlehnend an [25], nur von Grund- und Leistungskursen gesprochen wird, können sämtliche Überlegungen sinngemäß ohne weiteres auf unser derzeitiges Schulsystem übertragen werden.

3 In diesem Zusammenhang sei auf einen anderen geometrischen Weg für einen Spezialfall des Mittelwertsatzes in [1, S. 39] verwiesen.

Scherungen[1]) und geht schon auf Bonnet 1868 zurück. Es soll hier also nicht der Eindruck erweckt werden, als werde ein neuer Beweisgedanke publiziert; genau genommen zeigt es sich sogar, daß der Bonnetsche Beweis substantiell mathematisch von den üblichen Beweisen gar nicht wesentlich abweicht. Auch wird die Bedeutung des Mittelwertsatzes für die Schule keineswegs überschätzt. Vielmehr ist es eines der Ziele dieser Note, einen anderen Blickwinkel einzunehmen und die Gesichtspunkte aus 1.3., d. h. vor allem

– das „*Miteinander*" *von Analysis und Geometrie* sowie

– die Möglichkeit der *Selbsttätigkeit der Schüler*

am Beispiel des Mittelwertsatzes wieder mehr in die heutige didaktische Diskussion einzubringen. Damit wird gleichzeitig ein kleiner Beitrag zu der Aufforderung von Fletcher [7, S. 397] geleistet, dem Lehrer zu zeigen, was aus der zunehmend neu entdeckten Bedeutung der Geometrie für die Unterrichtspraxis folgt.

1.5. Schrankensatz statt Mittelwertsatz?

Wenn das Thema Mittelwertsatz behandelt wird, so muß der Vollständigkeit halber ein Aspekt erwähnt werden, der in der neueren didaktischen Diskussion zur Analysis eine Rolle spielt. Die „wahre Natur" des Mittelwertsatzes ist nach Dieudonné [5, S. 148] die einer Ungleichung. Zum Mittelwertsatz äquivalent (siehe etwa [3]) ist nämlich der von Lorenzen [21, S. 113] so genannte

Schrankensatz, der in einer seiner Formulierungen lautet

$$f\colon [a;b] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \wedge f \text{ in } (a;b) \text{ differenzierbar } \wedge \bigwedge_{\xi \in (a;b)} m \leqq f'(\xi) \leqq M \Rightarrow$$
$$\bigwedge_{\xi,\eta \in (a;b)} m \leqq \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \leqq M.$$

Von Karcher [14, S. 67] wird als Konsequenz aus der Beschränkung auf „gutartige" (= Lipschitz-stetige) Funktionen vorgeschlagen, im Unterricht nur diesen Schrankensatz als „Ersatz für den Mittelwertsatz" zu behandeln. Nun treffen unsere Argumente gegen den Mittelwertsatz im Grundkurs und für einen geometrischen Beweis im Leistungskurs genauso auf den Schrankensatz zu. Doch erstens scheint der Mittelwertsatz der Veranschaulichung um einiges leichter zugänglich zu sein, und zweitens hat er nicht den Charakter des Schrankensatzes, bei dem von den Eigenschaften der Ableitung in (a; b) auf solche der Funktion selbst geschlossen wird. Aus diesen Gründen behandeln wir in unserem Vorschlag, welcher den Aspekt der Verbindung von Analysis und Geometrie betont, den Mittelwertsatz und nicht den Schrankensatz[2].

1 Das Wort „Scherung" wird übrigens in [18, S. 252] wenigstens erwähnt.

2 Dies besagt noch nichts für oder gegen eine unterrichtliche Behandlung des Schrankensatzes in anderem Zusammenhang. Dieser Satz hat nämlich (wie übrigens auch der Mittelwertsatz) eine unmittelbar einleuchtende physikalische Bedeutung (siehe etwa [3, S. 85]: Wenn die Momentangeschwindigkeit innerhalb einer Zeitspanne nie unter einen Wert m fällt, dann liegt die Durchschnittsgeschwindigkeit in jedem Zeitabschnitt sicher auch nicht unter m). Daher lassen sich sicherlich didaktische Rechtfertigungen für eine Behandlung des Schrankensatzes im Mathematikunterricht finden. Die Argumente in [14] scheinen jedoch rein innermathematischer Natur zu sein.

2. Der Mittelwertsatz in einem Grundkurs zur Analysis?

2.1. Ziele eines solchen Grundkurses

Zu den wichtigsten Grundkursen des mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeldes der reformierten gymnasialen Oberstufe zählt ein solcher in Analysis. Insbesondere bei Berücksichtigung der Empfehlungen der Bildungskommission des Deutschen Bildungsrates, im Sekundarbereich II die curriculare und organisatorische *Integration des allgemeinen und beruflichen Schulwesens* voranzutreiben, sollte ein solcher Grundkurs polyvalent angelegt sein, d. h. für verschiedene Schwerpunktprofile wie etwa auch Physik, Technik- und Wirtschaftswissenschaften verwendbar sein (siehe dazu vor allem [17]). Primärer Adressat ist dabei der spätere Nicht-Mathematiker. Zu den globalen *Zielen* für einen so verstandenen Grundkurs gehören z. B. die folgenden[1]:

- Kennenlernen und verständiges Handhaben der grundlegenden Begriffe und Methoden sowie des Kalküls der Differential- und Integralrechnung;
- Gewinnung von Einsicht und Verständnis für die grundlegenden Gedanken und Probleme der Differential- und Integralrechnung;
- Rasche Gewinnung (wenigstens vorläufig) abgeschlossener Resultate;
- Schneller Vorstoß zu den Anwendungen der Analysis, vor allem in Natur- und Wirtschaftswissenschaften;
- Offenheit für eine vertiefende und erweiternde Beschäftigung mit der Analysis.

2.2. Zur Bedeutung des Mittelwertsatzes

Auch ohne genauere Erörterung der mit diesen Zielen korrespondierenden didaktischen Prinzipien, zu denen an zentraler Stelle diejenigen aus 1.3. gehören, dürfte es klar sein, daß es durchaus legitim, ja sachnotwendig und vernünftig ist, in einem Grundkurs zur Analysis evidente Tatsachen wie die in 1.1. genannten Sätze ohne formalen Beweis bewußt (vom Lehrer und vom Schüler aus gesehen) aus der Anschauung zu entnehmen. Dies ist keine neuartige Erkenntnis, sie wurde in älteren Schulbüchern durchweg und wird in neueren noch teilweise berücksichtigt. Analoges findet sich in vielen neueren Vorschlägen der Curriculum-Kommissionen der Bundesländer. Dann sollte jedoch konsequenterweise auf denjenigen evidenten Satz, dessen Daseinsberechtigung nur in seiner Bedeutung als Beweishilfe besteht (siehe 1.1. und 1.4.), ganz verzichtet werden! Daß diese These trotz allem nicht selbstverständlich ist und deshalb eindeutig formuliert werden muß, zeigt ein Blick auf einige Curriculum-Entwürfe, z. B. [23] oder [24].

3. Eine Lernsequenz zum Mittelwertsatz in Leistungskursen

In Abschnitt 1.4. haben wir zu begründen versucht, weshalb es sinnvoll erscheint, den Mittelwertsatz auch in Leistungskursen nicht rein formal, sondern unter Zuhilfenahme

1 Man vergleiche dazu die unter ähnlicher, aber nicht identischer Zielsetzung geschriebene Arbeit [16] oder das zu unseren Zielen recht gut passende Buch [19].

der Anschauung geometrisch zu beweisen. Eine Lernsequenz hierzu soll im folgenden skizziert werden. Als Grundlage stehe der Satz von Rolle zur Verfügung, geometrisch interpretiert als Existenz einer waagrechten Tangente.

3.1. Physikalische Einstiegsbeispiele

Die einfachste physikalische Deutung des Mittelwertsatzes besagt, daß es im Verlaufe einer Fahrt sicherlich einen Zeitpunkt gab, an dem die Momentangeschwindigkeit gleich der gesamten Durchschnittsgeschwindigkeit war. Ein anderes Problem führt ebenfalls direkt auf den Mittelwertsatz[1]: Ein Beobachter in einem anfahrenden D-Zug sieht einen mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorüberfahrenden Güterzug, der nach einer gewissen Zeitspanne wieder eingeholt ist, und stellt fest, daß (bzw. falls er nicht genau aufgepaßt hat, fragt sich, ob) es einen Zeitpunkt gab, an dem der Güterzug vom Schnellzug aus betrachtet stillzustehen schien. Dies entspricht genau der Behauptung des Mittelwertsatzes. Mathematisierung und graphische Darstellung lassen die Verwandtschaft zum Satz von Rolle offenbar werden, so daß der Versuch einer Rückführung auf diesen Satz naheliegt, und dieses Beispiel suggeriert auch schon den Scherungsgedanken. Aus diesen beiden Gründen und vor allem wegen der Wichtigkeit von *Problemaufgaben im Mathematikunterricht* überhaupt (siehe etwa [13]) erscheint ein gewisser Zeitaufwand für dieses Problem vertretbar, doch lassen sich die folgenden Überlegungen unabhängig hiervon auch beim Auftreten des Mittelwertsatzes in anderen Themenkreisen durchführen.

3.2. Durchführung des Beweises

Gegeben sei also eine in [a; b] stetige und in (a; b) differenzierbare (oder wie in [4, S. 197] vereinfacht eine in [a; b] differenzierbare) Funktion f. Das Problem besteht darin, die Endpunkte (a, f(a)) und (b, f(b)) der Sehne $\left(\text{welche die Steigung } m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ hat}\right)$

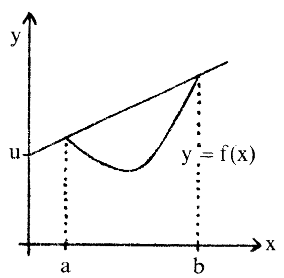

Fig. 3

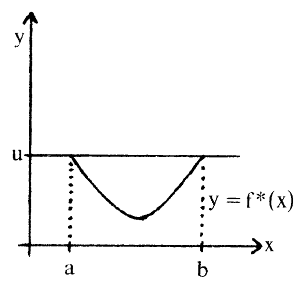

Fig. 4

„auf gleiche Höhe zu bringen". Je nach Art und Intensität der vorherigen Behandlung geometrischer Abbildungen (insbesondere in ihrer Wirkung auf Funktionsgraphen) erfolgt nun das weitere Vorgehen. Da es in diesem Aufsatz primär auf die Herausstellung der Prinzipien aus 1.3. ankommt, fassen wir uns hier aus Gründen der Übersichtlichkeit

1 Vergleiche für eine andere Fragestellung ein analoges Problem in [20, S. 70].

etwas kürzer, als dies beim Unterrichtsgang der Fall sein wird. Sofern Scherungen schon etwas bekannt sind, ist es klar, daß f(x) durch die Scherung $y \mapsto y - mx$ mit der Achse $x = 0$ in

$$f^*(x) = f(x) - mx \quad \text{mit} \quad f^*(a) = f^*(b) \left(= u = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \right)$$

transformiert wird. Im anderen Fall wird man schrittweise vorgehen, indem man zuerst das Problem mittels

$$\bar{f}(x) = f(x) - f(a)$$

auf die x-Achse transformiert (was der Situation des Einstiegsproblems aus 3.1. entspricht) und dann aufgrund der Beobachtung, daß die Differenz zwischen $\bar{f}(x)$ und der Sekanten-Ordinate $\bar{s}(x) = m(x - a)$ an beiden Endpunkten 0 ist, diese Differenz

$$f^*(x) = \bar{f}(x) - \bar{s}(x)$$

bildet, was geometrisch eine Scherung mit der Achse $x = a$ bedeutet.

In jedem Fall ist unmittelbar einsichtig, daß mit f auch f* differenzierbar ist (s. [15]). Nach Rolle gibt es nun eine waagerechte Tangente $y = v$ an die Kurve $y = f^*(x)$. Wenn wir unsere Transformation rückgängig machen, was durch

$$f(x) = f^*(x) + mx \quad \text{im ersten bzw.}$$

$$f(x) = f^*(x) + m(x - a) + f(a) \quad \text{im zweiten Fall}$$

geschieht, so ist wiederum unmittelbar einsichtig, daß diese Scherung Tangenten in Tangenten überführt (s. [15]) und Parallelität erhält (zur Steigung jeder Geraden tritt m als Summand hinzu). Weiter wird die waagerechte Sekante durch (a, f*(a)) und (b, f*(b))

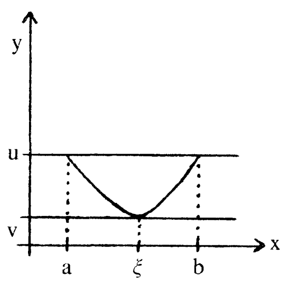

Fig. 5

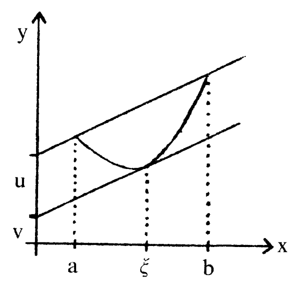

Fig. 6

auf die Sekante $y = s(x)$ durch (a, f(a)) und (b, f(b)) zurücktransformiert. Infolgedessen existiert eine zu $y = s(x)$ parallele Tangente an $y = f(x)$ und der Mittelwertsatz ist bewiesen.

Ein Vergleich zeigt nun deutlich, an welchen Stellen sich dieser Weg von anderen unterscheidet und wie unsere Prinzipien zum Tragen kommen. Natürlich mag ein formaler Beweis, bei dem die Hilfsfunktion f* einfach ohne Begründung gegeben und differenziert wird, mathematisch eleganter und sicher auch schneller sein, doch darauf kommt es nicht an. Andererseits darf nicht etwa (überspitzt formuliert) die ganze Theorie der affinen Abbildungen speziell für die Anwendungen beim Mittelwertsatz behandelt werden, weil dann die Veranschaulichungs-„Hilfe“ schwieriger als das Thema selbst wäre.

Es sei noch bemerkt, daß wir bei diesem Beweis noch (mindestens) zwei *Stufen der Strenge* unterscheiden können. In einer ersten Stufe können die mit dem Hinweis „siehe [15]“ versehenen Eigenschaften der Scherungen als evident übernommen werden. In einer zweiten Stufe werden auch diese Tatsachen exakt begründet. In dieser zweiten Stufe könnte auf der nun bereitgestellten Grundlage anstelle der Beweise entsprechend [15] auch die Summenregel für Ableitungen eingebracht werden.

3.3. Ausbau der geometrischen Betrachtungen

Das „Miteinander“ von Analysis und Geometrie läßt sich noch ausbauen. Beispielsweise kann einer der formalen Beweise in Schulbüchern auf seine affin-geometrische Bedeutung untersucht werden, sofern diese sich von obiger unterscheidet. So wird in [26, S. 144] ohne Motivation die Hilfsfunktion

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} - \frac{x - a}{b - a} \qquad (f(a) \neq f(b))$$

benutzt. Man erhält f* aus f durch Verkettung elementarer affiner Abbildungen, etwa

$$\begin{array}{llll}
f(x) & \mapsto & f_1(x) = f(x) - f(a) & \text{(y-Translation)} \\
f_1(x) & \mapsto & f_2(x) = f_1(x + a) & \text{(x-Translation)} \\
f_2(x) & \mapsto & f_3(x) = \dfrac{b - a}{f(b) - f(a)} f_2(x) & \text{(y-Streckung)} \\
f_3(x) & \mapsto & f_4(x) = f_3(x) - x & \text{(Scherung mit Achse } x = 0\text{)} \\
f_4(x) & \mapsto & f_5(x) = \dfrac{1}{b - a} f_4(x) & \text{(y-Streckung)} \\
f_5(x) & \mapsto & f_6(x) = f_5(x - a) & \text{(x-Translation)}
\end{array}$$

deren jede geometrisch gedeutet und umgekehrt werden kann. Solche zusätzlichen Betrachtungen würden jedoch nicht mehr zum Thema „Mittelwertsatz der Differentialrechnung“ gehören (wie ja alle Ausführungen dieser Note nicht nur lokal für den Mittelwertsatz gedeutet werden sollen, siehe Einleitung), sondern auf Lernziele zum Themenbereich „Anwendung elementargeometrischer Abbildungen auf Funktionsgraphen“ (siehe etwa [15]) abheben.

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. Werner Blum. Gesamthochschule, 35 Kassel, Heinrich-Plett-Str. 40

Eingangsdatum: 4. 7. 1974

Literatur

[1] Baur, A.: Anschaulichkeit und Strenge als methodische Prinzipien. In: Der Mathematikunterricht 4 (1957), S. 25–48.

[2] Bruner, J.S.: Toward a Theory of Instruction. Cambridge 1966.
[3] Coers, H.: Lokales Ordnen um den sogenannten Schrankensatz der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 4 (1969), S. 83–93.
[4] Corbach, W. et al.: Mathematikwerk für Gymnasien, Oberstufe, Analysis I. Düsseldorf: Schwann ^{5}1973.
[5] Dieudonné, J.: Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press 1969.
[6] Endl, K. und W. Luh: Analysis I. Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft 1973.
[7] Fletcher, T.J.: The Teaching of Geometry – Present Problems and Future Aims. In: Educ. Studies 4 (1971), S. 395–412.
[8] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe 1. Stuttgart: Klett 1973.
[9] Freund, H.: Einführung zu „Geometrische Hilfsmittel in der Analysis". In: Der Mathematikunterricht 2 (1960), S. 4.
[10] Griesel, H.: Analysis I/II. Hannover: Schrödel ^{2}1972/^{5}1973.
[11] Griesel, H.: Einführung in die Analysis. Vortragsmanuskript Kassel 1974.
[12] Häußler, M.: Primat der Didaktik – aber Vetorecht der Methodik? In: Didaktik der Mathematik 3 (1973), S. 165–173.
[13] Jones, P.S.: The role of problems in secondary school mathematics. In: The role of axiomatics and problems solving in mathematics. In: The conference Board of the Mathematical Sciences, 1966, S. 106–112.
[14] Karcher, H.: Analysis auf der Schule. In: Didaktik der Mathematik 1 (1973), S. 46–69.
[15] Kirsch, A.: Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung. In: Der Mathematikunterricht 2 (1960), S. 5–21.
[16] Koch, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. In: Der Mathematikunterricht 5 (1968), S. 12–37.
[17] Kollegstufe NW. Strukturforderung im Bildungswesen des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 17. Ratingen: Henn 1972.
[18] Lambacher, T. und W. Schweizer: Analysis. Stuttgart: Klett ^{7}1972.
[19] De Leeuw, K.: Calculus. New York, Chicago, Burlingame: Harcourt, Brace & World 1966.
[20] Lietzmann, W., P. Zühlke, H. Freund: Leitfaden der Arithmetik. Algebra und Analysis (Oberstufe). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1956.
[21] Lorenzen, P.: Differential und Integral. Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft 1973.
[22] Schärf, J., u. E. Seidl: Mathematik für Fachoberschulen 12. München: Oldenbourg 1973.
[23] Schulreform in Bayern, Band 2. München: Bayer. Staatsministerium f. Unterricht und Kultus 1972.
[24] Senator für Schulwesen: Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe. Berlin o.J.
[25] Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland: Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II. Bonn 1972.
[26] Wörle, K., J. Kratz, K.-A. Keil: Infinitesimalrechnung. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag ^{8}1972.