In: Die Berufsbildende Schule, Zeitschrift des Bundesverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen, 27. Jahrgang, 1975, Heckners Verlag, Wolfenbüttel, S. 290-301

WERNER BLUM

Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberstufe

1. Einleitung

Die viel zitierte Diskriminierung von beruflicher gegenüber „allgemeiner" Bildung läßt sich u. a. auch daran ablesen, daß es für die wenigsten Disziplinen an beruflichen Schulen theoretisch begründete Fachdidaktiken gibt. Das in [20, S. 324] für die Technik ausgesprochene „eklatante didaktische Defizit und ungewöhnliche Mißverhältnis zwischen Ausbildungsrealität und curricularer Rechtfertigung" gilt entsprechend auch für die Mathematik. Während einerseits das Fachrechnen an den Teilzeit-Berufsschulen ein von didaktischen Überlegungen weitgehend ausgespartes Eigendasein führte (vgl. [6, S. 195 ff]) und großenteils noch führt[1]), orientiert sich andererseits die Mathematik an den übrigen beruflichen Schulen (Berufsfach-, Berufsaufbau-, Fach-, Fachoberschulen und beruflichen Gymnasien) meist recht unreflektiert am allgemeinbildenden Schulwesen.

Erst in jüngster Zeit wird versucht, das Fachrechnen didaktisch zu durchdringen und den die Durchlässigkeit im Bildungssystem verhindernden und den Lernprozeß der Schüler hemmenden „didaktischen Modernitätsrückstand" (vgl. [24, S. 418 ff]) zu überwinden (für den technischen Bereich siehe [11], [12], [22] und [24]). Darüberhinaus gibt es jedoch noch keine nennenswerte fachdidaktische Diskussion über die Mathematik im beruflichen Schulwesen. Dies ist gerade im Hinblick auf die Bestrebungen zur Reform der Sekundarstufe II ein gravierender Mangel, da eine notwendige Bedingung für das Gelingen solcher Versuche — genannt seien die Integration von beruflicher und allgemeiner Bildung in der integrierten Oberstufe (siehe etwa [16]) oder die Binnenintegration im beruflichen Schulwesen (siehe etwa [13]) — die *curriculare Integration* ist.

Der vorliegende Aufsatz will nun versuchen, dieses didaktische Defizit auf einem Teilgebiet zu mindern, indem ein Curriculum-Vorschlag für einen Grundkurs in *Analysis* entwickelt wird[2]). Ein solcher Kurs ist besonders wichtig, da die Analysis das zentrale Gebiet der Oberstufen-Mathematik ist. Er sollte möglichst früh einsetzen und kann nach Erarbeitung einiger Voraussetzungen schon ab 2. Halbjahr Klasse 11 (je nach für den Vorkurs zur Verfügung stehenden Zeit natürlich auch später) beginnen (Zeitaufwand etwa 60 Stunden). Der Kurs ist polyvalent im Sinne von [16]. Er ist für die integrierte Oberstufe ebenso wie für die Oberstufe beruflicher Schulen geeignet[3]). Wir machen in Abschnitt **2** einige grundsätzliche Bemerkungen zu diesem Kurs und stellen ihn in Abschnitt **4** mit seinen Inhalten, Zielen und Methoden vor. Abschnitt **3** umreißt die hierzu notwendigen Voraussetzungen.

Es würde den Rahmen dieses Aufsatzes sprengen, wenn die grundsätzlichen Fragen einer Didaktik der Mathematik für das berufliche Schulwesen erörtert würden. Der hier unterbreitete Vorschlag für einen Analysis-Kurs soll die diesbezügliche Diskussion, die ja erst begonnen hat, ein Stück weiterbringen; weitere Beiträge müssen folgen.

---

[1]) Dies gilt genauso, wenn (wie z. B. in Hessen) das Fachrechnen in die berufskundlichen Fächer integriert ist.

[2]) Für wertvolle Anregungen danke ich vor allem Herrn Prof. Dr. A. Kirsch von der Gesamthochschule Kassel; weiter bin ich den Mathematiklehrern an beruflichen Schulen in Kassel für viele Diskussionen und Verbesserungsvorschläge zu Dank verpflichtet.

[3]) Bei Zeitmangel sind natürlich einige Abstriche zu machen. Dies gilt in erster Linie für Fachoberschulklassen, bei denen — insbesondere bei nur 1 Stunde Mathematik in Klasse 11 — sicherlich oft eine Lücke zwischen dem hier vorgetragenen Anspruch und der Realität klaffen wird. Trotzdem sind die folgenden Ausführungen auch für die Fachoberschule gedacht.

2. Prinzipien eines Grundkurses in Analysis

Zu den wesentlichen Gründen für die Bedeutung der Analysis gehört ihre *Anwendbarkeit* in außermathematischen Disziplinen, vor allem in Natur- und Wirtschaftswissenschaften. Daher muß die Analysis in enger Verbindung zu den Anwendungen unterrichtet werden (vgl. [7a, S. 75 ff] und [7b, S. 470 ff]). Damit ist nicht ein Kapitel „Anwendungen" im Anschluß an die mathematische „Theorie" gemeint, wie dies in den Schulbüchern üblich ist, (in [17ab] [4]), einem der Standardwerke, fehlen die Anwendungen sogar fast gänzlich, ebenso in [8]). Vielmehr müssen Anwendungen aus verschiedenen Gebieten integraler Bestandteil des Unterrichts sein. Diese Wirklichkeitsnähe soll auch zur Förderung intrinsischer Motivation beitragen. Beispiele für in der Analysis wichtige „Größen" aus Natur- und Wirtschaftswissenschaften (von denen natürlich nur ein kleiner Ausschnitt wird behandelt werden können) sind Geschwindigkeiten, Stromstärken, Dichten, spezifische Wärme, Grenzkosten, Elastizität, kontinuierliche Tilgung, Arbeiten, Impulse, Momente, Kapazitäten, Spannung, Ladung, biologisches und ökonomisches Wachstum bzw. Zerfall u. a. m.

Eine erste Konsequenz des Unterrichtens solch „beziehungshaltiger" Mathematik ist die Verwendung des in den Anwendungen äußerst erfolgreichen Kalküls mit *Differentialen* (dx, dy, ...) und *Größen*, im Gegensatz zum abstrakten Trend in der heutigen Schulmathematik. Allerdings darf dieser Kalkül nicht so unsauber angewandt werden, wie dies in denjenigen Disziplinen, die Analysis benötigen, meist der Fall ist. Vielmehr *kann und muß anwendbare Mathematik sauber betrieben werden.* Hierzu werden in Abschnitt **4** einige Vorschläge gemacht.

Selbstverständlich wird hier nicht einem bloßen Utilitarismus das Wort geredet. Unser Kurs soll grundlegende Einsichten in die Analysis vermitteln, die gerade im Zusammenhang mit deren Anwendung am ehesten zu gewinnen sind. Ziel ist also eine *verständige Handhabung der Begriffe, Methoden und Regeln der Differential- und Integralrechnung*, insbesondere als *Mittel zur adäquaten Erfassung von Problemen aus Natur- und Wirtschaftswissenschaften.* Der Nachdruck liegt dabei auf der Förderung von *Verständnis.* Dies läßt sich weder dadurch erreichen, daß man auf mathematische Überlegungen weitgehend verzichtet und die Analysis als Rezeptesammlung mit vielen Einübungsbeispielen auffaßt — wie etwa [17 ab] — oder Empirie betreibt — wie etwa [15] —, noch dadurch, daß man aus dem Wunsch nach perfekter mathematischer Exaktheit heraus faktisch eine Universitäts-Analysis kopiert, wie dies bei den „modernen" Schulbüchern für das allgemeinbildende Schulwesen und im Zuge der in der Einleitung erwähnten unkritischen Anlehnung auch bei Büchern für die beruflichen Schulen — wie etwa [21] — mehr und mehr der Fall ist. Dieser *„Alles-oder-Nichts-Standpunkt"* ist heutzutage (nicht nur in der Analysis) leider weit verbreitet. Er zeigt sich z. B. beim Grenzwertbegriff, beim Tangentenbegriff, beim Integralbegriff oder bei der Definition transzendenter Funktionen.

Hier wird statt dessen ein *genetischer Aufbau* (vgl. [25, S. 97 ff]) vorgeschlagen, in welchem *aktive Mathematik* getrieben werden soll, kein stumpfsinniges Rezeptanwenden und kein steriles Klären von Begriffen. Die Begriffe und Methoden der Analysis entwickeln sich hierbei aus Problemkontexten und sind deshalb oft intuitiv und noch nicht endgültig gefaßt, insbesondere da sie in möglichst großem Umfang *von den Schülern selbst erarbeitet* werden sollen. Aktivität und Selbstän-

[4]) [17] wird noch öfter zitiert werden, und zwar stets als Negativ-Beispiel. Als Positiva dieses Werkes sind die Fülle von Beispielen und die Feingliederung der Lernschritte anzusehen. Hieraus erklärt sich auch die weite Verbreitung von [17]. Was hier allerdings gelernt wird, steht meist im Gegensatz zu den Anliegen unseres Grundkurses. Deshalb sind die vielen Negativ-Zitate notwendig.

digkeit sind Voraussetzung jeden Lernvorgangs, was im Unterricht wohl nicht immer beachtet wird. Auf dieser Basis werden Motivation und Kreativität gefördert. Weiter werden einige Resultate mit auf der Anschauung basierenden geometrischen Methoden gewonnen. Stets wird jedoch nur didaktisch *vereinfacht, nicht verfälscht*. D. h., sämtliche Überlegungen können so geführt werden, daß kein Zerrbild der Mathematik gezeichnet wird (was z. B. für sehr viele Stellen aus [17 ab] leider zutrifft), sondern daß echt mathematisch — wenn auch oft anschaulich oder auf der Grundlage noch nicht endgültiger Begriffe — argumentiert wird, wobei der Schüler zwischen strengen Beweisen und Plausibilitätsargumenten unterscheiden können soll. Ein Ausbau zur exakten mathematischen Fassung wäre jederzeit möglich, wenn dies auch im Grundkurs nicht geschehen soll. Ein solcher Ausbau im Sinne des Brunerschen Spiralprinzips[5]) kann in Leistungskursen (an beruflichen Gymnasien oder integrierten Oberstufen) erfolgen.

Die eben schon angesprochene *Verbindung von Analysis und Geometrie* ist ein weiteres Prinzip dieses Grundkurses. Der Schüler soll spüren, daß Analysis in weiten Bereichen eine anschauliche Disziplin ist, was obendrein motivierend wirkt. Außerdem können Argumente auf ikonischer Ebene[6]) solche auf symbolischer Ebene[6]) vorbereiten.

Ein wesentliches Charakteristikum des hier geschilderten Aufbaus der Analysis ist der vollständige Verzicht auf die sonst durchweg übliche einleitende Behandlung von Folgen[7]), Grenzwerten und Stetigkeit. Für die Schule steht nämlich erstens die *Bedeutung von Ableitung und Integral weit über der Stetigkeit*, welche primär innermathematische Relevanz hat. Zweitens kann der *Grenzwertbegriff* in natürlicher Weise im Rahmen der Differential- und Integralrechnung eingeführt und *erst im Anschluß an den Grundkurs präzisiert* und eingehender behandelt werden. Deshalb beginnt unser Grundkurs sofort mit dem Tangentenproblem, was eine enorme Zeitersparnis bringt und einen schnellen Vorstoß zu den Anwendungen ermöglicht. Dieser zeitliche Vorteil muß hoch eingeschätzt werden.

In einem anderen Punkt nehmen wir hingegen einen Standpunkt ein, welcher der heute üblichen fachmathematischen Auffassung entspricht. Und zwar wird — aus didaktischen Gründen — von Beginn an auf die Bedeutung differenzierbarer Funktionen als „im Kleinen linearer Funktionen" abgehoben. Dieser Gesichtspunkt der *lokalen Approximation* entspricht nämlich genau der Intention, die man bei Anwendungsproblemen verfolgt (z. B. Momentangeschwindigkeit: Ersetzung einer beliebigen Bewegung in einem kleinen Zeitintervall durch eine gleichförmige), und trifft genau die Charakterisierung differenzierbarer Funktionen als „glatt"; weiter bildet er die Grundlage für die wichtige Fehler- und Näherungsrechnung.

Zu den unverzichtbaren Inhalten des Grundkurses gehören die grundlegenden Begriffe und Methoden sowie der Kalkül der Differential- und Integralrechnung (siehe **4.1** und **4.2**). Dagegen treten innermathematische Anwendungen der Differentialrechnung wie Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben dem Umfang nach etwas zurück. Natürlich müssen sie ebenfalls innerhalb des Grundkurses behandelt werden (siehe **4.3**), nicht zuletzt auch deshalb, weil Kurvendiskussionen gerade dem mehr praktisch denkenden Schüler ein überschaubares und handliches Stück Mathematik bieten, welches mit Erfolgsergebnissen verbundene Eigenaktivitäten ermöglicht. Wenn die Grundbegriffe verständig erarbeitet sind,

---

5) Siehe [4].
6) Im Sinne von Bruner [5].
7) Der Verzicht auf Folgen ist natürlich kein Dogma. Es ist auch mit unseren Prinzipien vereinbar, wenn Folgen (z. B. in der Wirtschaftsarithmetik) schon vor der Analysis behandelt werden, sofern dies notwendig ist.

fallen diese Anwendungen jedoch leichter, so daß die selbstverständlich notwendige Übung im Untersuchen von Kurven und Aufsuchen von Extrema weniger Platz als üblich (vgl. etwa [17a]) einnehmen kann.

Es ist zu hoffen, daß diese allgemeinen Bemerkungen in Verbindung mit den folgenden Abschnitten die Prinzipien unseres Kurses hinreichend deutlich machen. Nur auf dem geschilderten Niveau kann bei der Mehrzahl der Schüler Verständnis für die Gedanken und Probleme der Analysis erreicht werden, ein Verständnis, welches nachher sowohl für innermathematische Vertiefungen als auch für außermathematische und berufspraktische Anwendungen notwendig ist. Ein Anpassung an die oft abwegige Strenge heutiger Oberstufenbücher wird den Ansprüchen des beruflichen Schulwesens (nebenbei bemerkt auch denen des Gymnasiums) nicht gerecht, und eine Rezeptvermittlung auf empirischem Niveau widerspricht emanzipatorischen Lernzielen und diskriminiert die Schüler beruflicher Schulen in besonderem Maße.

Im weiterem fassen wir uns meist recht kurz, erstens aus Platzgründen und zweitens, da die methodische Feinausarbeitung eines solchen Kurses dem jeweiligen Lehrer überlassen bleiben muß. Außerdem ist es legitim und notwendig, Zielvorstellungen und Forderungen zu artikulieren, auch ohne den Anspruch zu erheben, diese im Detail abschließend zu erfüllen. Vielmehr sind die folgenden Ausführungen als Anregung für den Lehrer gedacht. Es ist gut möglich, daß viele der hier gemachten Aussagen und Vorschläge nicht detailliert genug dargestellt sind und so ihre beabsichtigte Wirkung nicht erreichen[8]). Hier kann nur eine weitere Diskussion zur genaueren Klärung beitragen.

Der hier vorgeschlagene Grundkurs stellt wohl das Maximum dessen dar, was innerhalb 50—60 Stunden erarbeitet werden kann. Unabdingbare Voraussetzung für diesen Zeitansatz ist ein Vorkurs, in dem das Umgehen mit Funktionen eingehend geübt wird (siehe **3**). Des weiteren muß beachtet werden, daß die hier vertretene Art etwa der Herleitung der Ableitungsregeln oder der Gewinnung der Ableitung spezieller Funktionen weniger Zeit erfordert als üblich. Wenn der Kurs jedoch mehr Zeit benötigen würde, als (etwa für einen halbjährigen 3stündigen Grundkurs in einer integrierten Oberstufe) zur Verfügung steht, so wäre es mit obigen Prinzipien natürlich nicht vereinbar, wenn nur um Zeit zu gewinnen Schüleraktivität durch Lehrervortrag ersetzt würde. Vielmehr müßten dann eben Kürzungen vorgenommen werden, wozu an mehreren Stellen Möglichkeiten aufgezeigt werden. Notfalls müßte auf die Integralrechnung verzichtet werden.

3. Voraussetzungen

Das Rechnen im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sollte von der Sekundarstufe I her zur Verfügung stehen; je nach Bedarf können einige Abschnitte (etwa Gleichungen) zu Beginn von Klasse 11 wiederholt werden. Eine Problematisierung etwa der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gehört nicht an den Anfang der Analysis.

Die wichtigsten Vorkenntnisse für die Infinitesimalrechnung betreffen die Funktionenlehre. Der Schüler muß vertraut sein mit dem *Funktionsbegriff*: Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ als eindeutige Zuordnung (und nicht als spezielle Relation), Charakterisierung durch Definitionsbereich D und Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$, Unterscheidung von Funktion f und Funktionsterm f(x) bzw. Funktionswert $f(x_0)$ an einer Stelle $x_0 \in D$, Graph, Wertebereich, Umkehrfunktion. Er muß geübt sein im Zeichnen von Funktionsgraphen bei gegebener Funktion und — in einfachen Fällen — im Aufstellen der Funktionsgleichung bei gegebenem Graphen. Weiter

[8]) Vgl. auch das zu Beginn von Abschnitt **4** Gesagte.

sollen ihm Addition (Superposition) und Verkettung von Funktionen sowie die Wirkung einfacher geometrischer Abbildungen (Translationen und Streckungen in Achsenrichtung) auf Funktionsgraphen bekannt sein.

Als *„Grundfunktionen"* sollen zur Verfügung stehen die Potenzfunktionen pot_s: $x \mapsto x^s$ ($s \in \mathbb{R}$, vor allem $s \in \{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$), die Exponentialfunktionen exp_a: $x \mapsto a^x$ ($a \in \mathbb{R}_{>0}$, vor allem $a \in \{2, 10\}$), die Logarithmusfunktionen log_a: $x \mapsto log_a x$ als deren Umkehrungen, die Winkelfunktion sin (möglichst auch cos), die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ und eine weitere spezielle Funktion wie etwa die Vorzeichenfunktion $x \mapsto \mathrm{sign}(x)$.

Eine Beschränkung auf ganzrationale Funktionen ist auch bei großem Zeitmangel mit den Prinzipien aus **2** nicht verträglich[9]).

Als Voraussetzung für die Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionsuntersuchungen (siehe **4.3**) soll der Schüler die Definition und anschauliche Bedeutung von Monotonie und Extrema einer Funktion kennen und in einfachen Fällen Extrema auch bestimmen können.

Schließlich werden elementare Kenntnisse in Analytischer Geometrie benötigt (Geradensteigung, -gleichungen).

4. Lernziele

Wir geben nun Lernziele für unseren Grundkurs an und erläutern sie im Kontext. Ihre Reihenfolge entspricht nicht ihrer Wichtigkeit, sondern ihrem ungefähren Auftreten im Kursverlauf. Ihre Gültigkeit ist aber nicht auf die Stelle beschränkt, an der sie von uns festgehalten werden, sondern bezieht sich auf größere Abschnitte oder gar (wie z. B. bei den Lernzielen 1.5 und 2.2) auf den gesamten Kurs. Man muß sich also stets vor Augen halten, daß im folgenden ein Katalog von Lernzielen nebst methodischen Bemerkungen gegeben wird, an dem sich eine unterrichtliche Lernsequenz zur Differential- und Integralrechnung orientieren muß, nicht jedoch eine Beschreibung dieses zeitlichen Verlaufs selbst[10]).

Es sollte nicht von Lernzielen die Rede sein, wenn nicht die damit verbundene Problematik mitbedacht würde. Hier können nur einige stichwortartige Bemerkungen gemacht werden (genaueres siehe etwa [19]), die der Leser aber stets beachten möge. Zum ersten werden unsere Lernziele nicht weiter differenziert und operationalisiert, da Unterricht nicht im Detail vorgeplant werden kann und auch komplexere Ziele angestrebt werden, die nicht „atomisierbar" sind. Zweitens sagen Lernziele über die Lernprozesse, die zu ihnen hinführen, i. a. nicht viel aus. Drittens kommen affektive Lernziele, die für den Unterricht ebenso wichtig sind wie kognitive, im folgenden zu kurz. Viertens entscheiden nicht die Lernziele über die Inhalte, sondern werden Inhalte zum größten Teil auf andere Weise vorentschieden (siehe **2**) und dann in Lernziele gefaßt. Schließlich müßten zu allen Lernzielen Testaufgaben angegeben werden, was hier aus Platzgründen nicht geschehen kann (hierzu sei auf die Schulbücher oder auf [3] verwiesen).

---

[9]) Es ist auch möglich und aus Zeitgründen vielleicht zweckmäßig, die transzendenten Funktionen erst im Verlaufe der Differentialrechnung zu behandeln. Natürlich erhöht sich dann die in **1** angegebene ungefähre Stundenzahl für den Grundkurs.

[10]) Der interessierte Lehrer mag dies auf den ersten Blick bedauern. Es würde jedoch den Umfang dieser Abhandlung sprengen, wenn hier zusätzlich ein Kurs im Detail beschrieben würde, und es wäre unwissenschaftlich, wenn nur dies (an Stelle von Abschnitt **4**) geschehen würde. In [3] wird exemplarisch eine Lernsequenz zum Einstieg in die Differentialrechnung genauer ausgeführt.

4.1. *Einführung in die Differentialrechnung*

Fragen nach dem Wachstum von Funktionen führen auf das *Tangentenproblem*. Ein geeignetes Einstiegsbeispiel ist etwa $x \mapsto x^2$. Auch Beispiele wie $x \mapsto x^3$, wo Tangenten die Kurve noch in weiteren Punkten schneiden, müssen früh behandelt werden, da bisher nur Kreistangenten bekannt waren. Problematisch ist dabei keineswegs die Existenz von Tangenten, sondern es interessiert nur ihre *Bestimmung*. Dies geschieht zweckmäßigerweise wie üblich durch Betrachtung von „benachbarten" Sekanten. Hier stellen wir das erste Lernziel auf:

1.1. Die Begriffe Sekante und Differenzenquotient kennen. Sekantensteigungen zeichnerisch und rechnerisch bestimmen können.

Sodann führen wir den Grenzübergang zur Tangente durch, zuerst an speziellen Stellen, dann allgemein. Als geeignete Präzisionsstufe im Sinne von **2** erscheint dabei die folgende (oder eine entsprechende) Form des Grenzwertbegriffs[11]):

$$f \text{ hat an der Stelle } x_0 \text{ die Ableitung (Tangentensteigung) } m = f'(x_0)$$
$$:\Longleftrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ strebt gegen } m \text{, wenn } h \text{ gegen } 0 \text{ geht.}$$

Die Tangente in $P_0 = (x_0 \mid f(x_0))$ ist dann die Gerade durch P_0 mit der Steigung m.

Die scheinbare didaktische Schwierigkeit, daß Zähler und Nenner des Differenzenquotienten gleichzeitig gegen 0 gehen, ist dadurch kein Problem, daß in den ersten konkreten Beispielen $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ durch h kürzbar ist. Es ist jedoch darauf zu achten, daß nicht einfach $h = 0$ gesetzt wird, da obiger Ansatz ja nur unter der Voraussetzung $h \neq 0$ gültig ist, sondern daß wirklich ein Grenzübergang im Sinne einer „immer besseren Annäherung" deutlich wird.

Im Gegensatz hierzu sind sowohl eine sofortige „ε-Fassung" des Grenzwertbegriffs, die allein zur Beruhigung des mathematischen Gewissens des Lehrers dienen würde, als auch ein rein empirischer Tangentenbegriff oder ein unreflektiertes Umgehen mit „unendlich kleinen Größen" abzulehnen. In diesem Sinne formulieren wir die nächsten Lernziele:

1.2. Die Begriffe Tangente und Differentialquotient kennen. Die Methode des Grenzübergangs vom Differenzen- zum Differentialquotienten kennen und in einfachen Fällen ausführen können. Wissen, daß der Differentialquotient als Tangentensteigung gedeutet werden kann.

1.3. Den Begriff der Differenzierbarkeit kennen; Beispiele und Gegenbeispiele[12]) hierfür angeben können.

Aus $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ läßt sich die einprägsame Differential-Schreibweise $y' = \frac{dy}{dx}$ motivieren und deuten. Sie ist insbesondere bei Anwendungsproblemen äußerst zweckmäßig. Sprechweisen wie „Differentiale sind unendlich kleine Größen" ([17a, S. 93]) sollten jedoch der Vergangenheit angehören. Sie behindern das Verständnis für die Infinitesimalrechnung viel mehr als sie nützen. Was Differentiale tatsächlich sind, siehe etwa [21, S. 116].

---

[11]) Eine ähnliche Fassung hat der große Mathematiker Artin [1, S. 23] für Anfänger schon 1957 vorgeschlagen.

[12]) Die Behandlung von Gegenbeispielen auf der Basis unseres Ableitungsbegriffs ist natürlich nicht unproblematisch. Der Aspekt der lokalen Approximation ist hier eine große Hilfe, um den Differenzierbarkeitsbegriff zu erfassen.

Im Sinne des in **2** Gesagten soll der Akzent von Anfang an auf der Tangente als „lokal möglichst gut passender Geraden“ und nicht auf der Tangente als Stützgerade liegen. Beim Schüler soll diese *lokale Approximationseigenschaft* mit der besonders bei Anwendungen nützlichen Vorstellung

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) \text{ für kleine } |h|$$

verbunden werden, d. h. in der Umgebung von x_0 wird f durch die Tangentenfunktion $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ ersetzt. Dies kann bei genügender Zeit schon im Grundkurs zu Anfängen der *Fehler- und Näherungsrechnung* ausgebaut werden (siehe etwa [21, S. 119 ff]). Jene Vorstellung darf jedoch noch intuitiv sein, so daß wir auf die Formulierung eines Lernziels zur linearen Approximation verzichten.

Selbstverständlich ist:

1.4. Die Funktionsgleichung der Tangente (für eine Funktion an einer Stelle) aufstellen können.

Da die Analysis in engem Zusammenhang mit außermathematischen Anwendungen entwickelt werden soll, werden möglichst frühzeitig Problemkontexte aus Physik, Wirtschaft u. a. miteinbezogen. Insofern bietet sich (insbesondere für den technischen Schulbereich) direkt nach der Behandlung des Tangentenproblems eine analoge Behandlung des Geschwindigkeitsproblems (Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten) an. Hier kann exemplarisch verdeutlicht werden, wie der Größen-Kalkül sauber angewandt wird (vgl. **2**): Der Weg s hängt von der Zeit t ab; die Zuordnung $f: t \mapsto s = f(t)$ ist also eine Funktion (nicht „$s = s(t)$ ist eine Funktion“; $s = f(t)$ ist der Funktionswert an der Stelle t!). Ihre Ableitungsfunktion (siehe Lernziel 1.6) f' ordnet jedem Zeitpunkt t die Momentangeschwindigkeit v zu, das heißt $f': t \mapsto v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$ (nicht „$v = s'(t)$“ o. ä.). Diese kleine Präzision kostet nichts und trägt viel zum Verständnis bei.

Im Hinblick auf den gesamten ersten Teil unseres Kurses fassen wir das fünfte Lernziel wie folgt:

1.5. Einige wichtige außermathematische Anwendungen der Differentialrechnung kennen. Bei geeigneter Interpretation von x bzw. f(x) als (geometrische, physikalische oder sonstige) Größen die jeweilige Bedeutung des Differentialquotienten erläutern können.

Welche Anwendungen in welchem Umfang behandelt werden, soll hier offen bleiben. Jedenfalls darf man sich nicht nur auf die Geschwindigkeit beschränken. Anregungen sind in jedem Schulbuch zu finden, dort allerdings säuberlich vom „mathematischen“ Teil getrennt (siehe etwa [9], [18], [23] u. a.; siehe auch [7b, S. 470 ff] und [10]). Dies gilt für die Integralrechnung entsprechend. Erst bei den Anwendungen erhält die Differential-Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ ihre wahre Berechtigung und zeigt ihre Tragweite (siehe [7b, S. 499 ff]).

Zu unterscheiden vom lokalen Ableitungsbegriff ist der globale:

1.6. Den Begriff der Ableitung kennen: Wissen, daß die Ableitung die Funktion ist, die jeder Stelle die betreffende Tangentensteigung zuordnet. Ableitungen graphisch gegebener Funktionen näherungsweise graphisch bestimmen können.

Hierzu gehört:

1.7. Stellen von vorgegebener Tangentensteigung (bei gegebener Funktion) bestimmen können.

Unsere „Grundfunktionen" werden im Verlaufe des Grundkurses sämtlich abgeleitet:

1.8. Die Ableitungen der Funktionen pot_s, exp_a, log_a, sin angeben können.

Die Ableitung des Sinus kann geometrisch ermittelt werden (siehe [18, S. 170]). Spätestens hier muß der Cosinus auftauchen (siehe 3). Die Ableitungen der Exponentialfunktionen können bis auf spezifische (vorerst unbekannte) konstante Faktoren bestimmt werden:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}, \text{ also } \lim_{h \to o} \frac{exp_a\,(x+h) - exp_a\,(x)}{h} = C \cdot exp_a\,(x),$$

wobei die Existenz des Limes $C = \lim\limits_{h \to o} \frac{a^h - 1}{h}$ unproblematisch ist. Dabei kann noch ganz einfach festgestellt werden, daß $C = 1$ ist für ein bestimmtes a zwischen 2 und 3. An dieser Stelle erst kann die Sonderstellung der Basis $a = e = 2{,}71828\ldots$ (Eulersche Zahl) verstanden werden! Die Ableitung von log_a ergibt sich dann einfach geometrisch durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Zur Erleichterung der Differentiation werden nach und nach Ableitungsregeln benötigt:

1.9. Die Ableitungsregeln für $(af)'$, $(f \pm g)'$, $(fg)'$, $(\frac{f}{g})'$ und $(f_{\circ}g)'$ kennen, begründen und anwenden können. Die Regeln für $(af)'$, $(f+a)'$, $(x \mapsto f(x+a))'$ und $(x \mapsto f(ax))'$ geometrisch interpretieren können.

Diese Interpretationen lassen sich zu geometrischen Beweisen ausbauen (siehe [14]). Die übrigen Regeln müssen rechnerisch bewiesen werden. Dies wird bei der Kettenregel besonders einfach, wenn die Tangente als lokale Approximierende aufgefaßt wird.

Beim Beweis der Produktregel wird erstmals die Eigenschaft

$$f(x+h) \to f(x) \text{ für } h \to o,$$

das heißt die *Stetigkeit* der betrachteten Funktion f, benötigt. Hier tritt also dieser Begriff auf ganz natürliche Weise auf und kann festgehalten werden. Es genügt für den Grundkurs jedoch, „stetig" mit „ohne abzusetzen zeichenbar" zu assoziieren. Daß jede differenzierbare Funktion stetig ist, ist sofort klar. Deshalb spielt die Stetigkeit bei uns praktisch keine Rolle.

Bei Zeitmangel kann die Kettenregel auf die geometrisch evidenten Spezialfälle $(f(x+a))'$ und $(f(ax))'$ beschränkt werden. Im Notfall kann auch noch auf Produkt- und Quotientenregel verzichtet werden, ohne daß dies gravierende Auswirkungen hätte.

4.2. Einführung in die Integralrechnung

Als die beiden gängigsten Möglichkeiten zum Einstieg in die Integralrechnung bieten sich an das Flächenproblem *(bestimmtes Integral)* oder das Problem der Umkehrung des Differenzierens *(unbestimmtes Integral)*. Bei zweiterem ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung quasi eine Definition, was zwar ein schnelles Berechnen von Integralen und dadurch den schnellsten Vorstoß zu den Anwendungen erlaubt, jedoch einem Verständnis für die Analysis wenig zuträglich ist. Daher entscheiden wir uns für die erste Alternative. Dabei steuern auch wir schnell den Hauptsatz an und halten uns nur ganz kurz bei der Integralberechnung mittels Ober- und Untersummen auf. Deshalb haben die Lernziele 2.1, 1. Teil, und 2.4 (insbesondere bei Zeitknappheit) nicht dieselbe Bedeutung wie die übrigen[13]).

Wir beginnen also mit dem *Flächenproblem* bei nichtnegativen und stetigen[14]) Funktionen, etwa bei $x \mapsto x^2$. Analog **4.1** ist dabei nicht die Existenz eines Flächeninhalts problematisch, sondern seine *Berechnung*. Dies geschieht etwa durch Approximation mittels Ober- und Untersummen (bei äquidistanter Unterteilung). Durch Grenzübergang (vgl. dazu das in **4.1** Gesagte) läßt sich dann in Beispielen die Fläche berechnen:

2.1. Bestimmte Integrale in einfachen Fällen (elementargeometrisch oder mittels Ober- und Untersummen) berechnen können. Wissen, daß das bestimmte Integral für nichtnegative Funktionen als Flächeninhalt gedeutet werden kann.

Aus $\int_a^b f = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \sum\limits_{i=1} f(x_i)\triangle x$ $(\triangle x = \frac{b-a}{n})$ läßt sich wieder die zweckmäßige Differential-Schreibweise $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$ deuten. Das in **4.1** zu Differentialen Gesagte gilt analog.

Direkt nach dem Flächenproblem kann etwa das Arbeitsproblem (variable Kraft längs eines Weges) behandelt werden. Wir formulieren entsprechend 1.5 das folgende Lernziel, welches für die gesamte Integralrechnung gilt und erst am Ende dieses Abschnitts voll zum Tragen kommt:

2.2. Einige wichtige außermathematische Anwendungen der Integralrechnung kennen. Bei geeigneter Interpretation von x bzw. f(x) als (geometrische, physikalische oder sonstige) Größen die jeweilige Bedeutung des bestimmten Integrals erläutern können.

Zur Vereinfachung der Integral-Berechnung werden Integrationsregeln benötigt:

2.3. Die Regeln für $\int_a^b f + \int_b^c f$, $\int_a^b cf$ und $\int_a^b (f \pm g)$ kennen, geometrisch begründen und anwenden können.

Schon zu Beginn sollten Beispiele auftreten, bei denen die obere Grenze des bestimmten Integrals variabel ist, um den Hauptsatz zu präfigurieren:

2.4. Den Begriff der Integralfunktion kennen: Wissen, daß die Integralfunktion $x \mapsto \int_a^x f$ einer Funktion f als Flächenfunktion beschrieben werden kann. Die Integralfunktion in einfachen Fällen bestimmen können[15]).

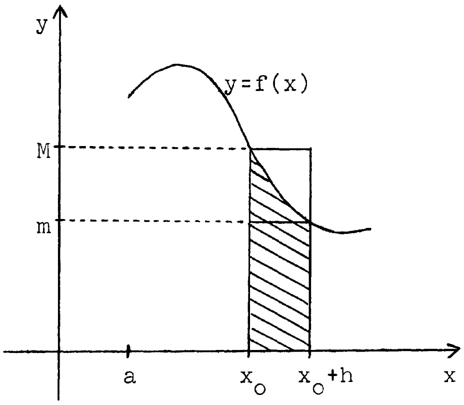
[13]) Es gibt eine dritte Möglichkeit des Einstiegs, nämlich das Flächenproblem bei variabler oberer Grenze (Integralfunktion; vgl. Artin [1, S. 47 ff]). Diese (Lernziel 1.5 entsprechende) Art würde vielleicht noch besser zu den Intentionen dieses Grundkurses passen. Dennoch gehen wir den Weg über das bestimmte Integral, u. a. da hier größere Erfahrungen vorliegen.

[14]) Stetigkeit im anschaulichen Sinne. Der Begriff wird hier nicht problematisiert.

[15]) Auch elementargeometrisch!

Bisher hatten Differential- und Integralrechnung noch nichts miteinander zu tun. Nun läßt sich durch Bestimmung der Flächenfunktion $F\colon x \mapsto \int_a^x f$ in konkreten Beispielen der Hauptsatz in seiner ersten Form $F' = f$ schon vermuten. Der Beweis kann in bekannter Weise geführt werden:

Es ist $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f$, und mit



$m\colon = \min\limits_{x \in [x_0;\, x_0+h]} f(x)$ und

$M\colon = \max\limits_{x \in [x_0;\, x_0+h]} f(x)$

gilt für $h > o$ offenbar

$$hm \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f \leq hM,$$ so daß der

Differenzenquotient von F für $h \to o$ gegen $F'(x_0) = f(x_0)$ strebt ($h < o$ ebenso). Hierbei muß nur für $h \to o$ auch $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ gehen, das heißt f stetig sein, was bei unseren Funktionen stets der Fall ist:

2.5. Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner ersten Form kennen: Wissen und begründen können, daß die Ableitung der Integralfunktion die gegebene Funktion ist (Differenzieren als Umkehrung des Integrierens).

Der Hauptsatz ist zum einen die „Krönung" der Analysis. Zum anderen und vor allem ist er aber ungemein praktisch, indem er in seiner zweiten Form die Integral- auf die Ableitungsberechnung zurückführt. Dies geschieht folgendermaßen: Ist F eine Stammfunktion zu f und ist $G(x) = \int_a^x f$, so gilt $F' = G'$, oder $(F - G)' = o$. Aus der Anschauung ist unmittelbar klar, daß Funktionen mit verschwindender Ableitung konstant sein müssen, so daß sich also F und G nur um eine Konstante unterscheiden, die sich schnell zu F(a) bestimmt. Mathematisch liegt hier der Mittelwertsatz der Differentialrechnung zugrunde, der im Grundkurs nicht behandelt werden soll, doch diese bewußte Anleihe aus der Anschauung ist notwendig und erlaubt (vgl. [2]). Damit können wir die nächsten Lernziele aufstellen:

2.6. Den Begriff der Stammfunktion kennen: Wissen und anschaulich begründen können, daß sich zwei Stammfunktionen derselben Funktion (definiert auf einem Intervall) nur um eine Konstante unterscheiden.

2.7. Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner zweiten Form kennen: Wissen und begründen können, daß das bestimmte Integral einer

Funktion f mittels einer Stammfunktion F als $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ berechnet werden kann (Integrieren als Umkehrung des Differenzierens).

2.8. Den Hauptsatz (zweite Form) zur Integralberechnung anwenden können. Die Integralfunktionen der Funktionen pot_s, exp_a, sin angeben können.

4.3. Innermathematische Anwendungen der Differentialrechnung

Wir kommen nun zu *Funktionsuntersuchungen* und *Extremwertaufgaben.* Bei Zeitmangel kann dieser Abschnitt im Rahmen des Grundkurses noch weiter gekürzt werden.

Bei Funktionsuntersuchungen ist zu beachten, daß der Schüler Monotonie und Extrema mittels Funktionstermen *definieren* kann (siehe **3**) und die Ableitung zu *Kriterien* für das Vorliegen oder Nicht-Vorliegen von Monotonie oder Extrema verwendet. Es geht hier also (eigentlich entgegen der Überschrift) vor allem um ein vernünftiges Umgehen mit Funktionen, wozu die Differentialrechnung nur ein Hilfsmittel darstellt:

3.1. Auf der 1. Ableitung basierende hinreichende Kriterien für strenge Monotonie kennen, geometrisch interpretieren und an geeigneten Beispielen verifizieren können.

Ein exakter Beweis würde wiederum den Mittelwertsatz erfordern, so daß auch hier Tatsachen bewußt der Anschauung entnommen werden.

3.2. Hinreichende Kriterien für relative Extrema kennen, geometrisch begründen und auf geeignete Beispiele anwenden können.

Anstelle des bekannten Kriteriums mittels der 2. Ableitung ($f'(x_0) = o \neq f''(x_0)$), das schneller mechanisierbar ist, kann dabei auch das weniger geläufige mittels der 1. Ableitung (f' hat bei x_0 einen Vorzeichenwechsel) verwendet werden, welches mehr das Verständnis fördert.

3.3. Wissen und geometrisch interpretieren können, daß an relativen Extrema die 1. Ableitung verschwindet, und dies auf Funktionsbestimmungen anwenden können.

3.4. Einfache Funktionen und deren Graphen nach folgenden Gesichtspunkten diskutieren können: a) Symmetrie, b) Achsenschnittpunkte, c) Monotonie, d) Extrema.

Teile solcher Kurvendiskussionen gehören schon in den Vorkurs (siehe **3**). Bei ausreichender Zeit können noch Untersuchungen über asymptomisches Verhalten oder Wendepunkte hinzukommen.

Extremwertaufgaben können auf wenige und wirklichkeitsnahe Beispiele (etwa aus Physik oder Geometrie) beschränkt werden. Um stures Rezepteanwenden zu verhindern, sollten auch Beispiele mit Randextrema behandelt werden. Auch elementar lösbare Aufgaben sollten eingestreut werden, um das Urteilsvermögen für die Verwendung angemessener mathematischer Werkzeuge zu schärfen:

3.5. Geeignete Extremwertaufgaben (elementar oder mittels Differentialrecnnung) lösen können.

Literaturverzeichnis:

[1] Artin, E.: A Freshman Honors Course in Calculus and Analytic Geometry. Princeton 1957.

[2] Blum, W.: Bemerkungen zum Analysisunterricht am Beispiel des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Didaktik der Mathematik **2** (1974), H. 4, S. 305—313.

[3] Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis. Erscheint in Didaktik der Mathematik **3** (1975).

[4] Bruner, J. S.: The Process of Education. Cambridge 1960.

[5] Bruner, J. S.: Toward a Theory of Instruction. Cambridge 1966.

[6] Drenckhahn, F. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht für die 6- bis 15jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Göttingen 1958.

[7 a/b] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1/2. Stuttgart 1973.

[8] Füssel, K. / Jansen, R. / Schwermann, K.: Mathematik für Fachoberschulen. Porz am Rhein 1974.

[9] Gößwein, A. / Vogl, K.: Funktionen im Reellen. Hamburg 1973.

[10] Greger, K.: Einige mathematische Modelle biologischen Wachstums. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **26** (1973), H. 5, S. 279—284.

[11] Heidrich, W.: Die empirische Funktion als wesentlicher Bestandteil einer technischen Mathematik für konstruierende Berufe. Die berufsbildende Schule **25** (1973), H. 11, S. 699—714.

[12] Heidrich, W.: Mögliche Lernzieldifferenzierungen in einer technischen Mathematik für Metallberufe. Die berufsbildende Schule **26** (1974), H. 7/8, S. 495—501.

[13] Jahn, F.: Die Binnenintegration an beruflichen Schulen. Hessische Lehrerzeitung **27** (1974), H. 5, S. 20—23.

[14] Kirsch, A.: Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung. Der Mathematikunterricht **6** (1960), H. 2, S. 5—21.

[15] Koch, A.: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. Der Mathematikunterricht **14** (1968), H. 5, S. 12—37.

[16] Kollegstufe NW. Strukturförderung im Bildungswesen des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 17, Ratingen 1972.

[17 a/b] Kusch, L. / Rosenthal, H.-J.: Mathematik für Schule und Beruf, Teil 3: Differentialrechnung / Teil 4: Integralrechnung. Essen ^{4}1972 / ^{2}1974.

[18] Lambacher, T. / Schweizer, W.: Analysis. Stuttgart ^{9}1974.

[19] Messner, R.: Funktionen der Taxonomien für die Planung von Unterricht. Zeitschrift für Pädagogik **16** (1970), S. 755—779.

[20] Nölker, H.: Didaktik der Technik — Grundprobleme, Widerstände, Chancen. Die Deutsche Berufs- und Fachschule **69** (1973), H. 5, S. 323—345.

[21] Schärf, J. / Seidl, E.: Mathematik für Fachoberschulen 12. München 1973.

[22] Schröter, G.: Vom „Formelumstellen" zur „Gleichungslehre". Die berufsbildende Schule **25** (1973), H. 11, S. 691—698.

[23] Sommer, E. / Sommer, D.: Mathematik für Wirtschaftsgymnasien, Teil 1, Analysis. Bad Homburg ^{3}1973.

[24] Tollkötter, B.: Technische Mathematik für die Grundstufe Berufsfeld Metall. Die berufsbildende Schule **26** (1974), H. 6, S. 416—423.

[25] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974.