In: Die Deutsche Berufs- und Fachschule, Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik, Hrsg.: Berke (u.a.), 72. Jahrgang, 1976, Franz Steiner Verlag GmbH, Wiesbaden, S. 643-656

WERNER BLUM

Exponentialfunktionen in einem anwendungsbezogenen Analysis-Unterricht der beruflichen Oberstufe

1. *Einleitung*

Die Analysis war und ist das zentrale Gebiet der Oberstufen-Mathematik. Im Zuge der Umstellung der Schulen innerhalb der beruflichen Oberstufe (Fachoberschulen und Berufliche Gymnasien) auf das *Kurssystem* von Beginn des Schuljahres 1977/78 an stellt sich daher als wichtigstes Problem die inhaltliche und methodische Ausgestaltung der Analysis-Kurse.

In diesem Aufsatz sollen nun Vorschläge zur Lösung dieses Problems gemacht werden. Dies geschieht in erster Linie in Abschnitt 4, wo eine *didaktische Konzeption* für einen „Grundkurs" zur Analysis vorgeschlagen wird; unter einem „Grundkurs" zur Analysis verstehen wir dabei bzgl. der Fachoberschule diejenigen Kurse bzw. Kurs-Teile zur Analysis, welche die Differential- und Integralrechnung beinhalten und für alle Schüler verbindlich sind[1], bzw. bzgl. dem beruflichen Gymnasium einen Grundkurs zur Analysis im Sinne der KMK-Empfehlungen für die reformierte gymnasiale Oberstufe[2].

Ein wesentliches Element unserer didaktischen Konzeption ist der *Anwendungsbezug;* diese Forderung nach Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts wird in Abschnitt 2 allgemein begründet.

Die Realisierbarkeit unserer didaktischen Konzeption und unserer Forderung nach Anwendungsbezug wird am Beispiel der *Exponentialfunktionen* aufgezeigt. Während in Abschnitt 2 die Wichtigkeit dieser Funktionen begründet und in Abschnitt 3 ihre Behandlung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I diskutiert wird, machen wir in Abschnitt 5 einen methodischen Vorschlag zur Behandlung dieser Funktionen innerhalb eines „Grundkurses" zur Analysis.

2. *Bemerkungen zu einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe*

In der didaktischen Diskussion zur Mathematik in der Sekundarstufe zeigt sich seit einiger Zeit ein starker Trend zur Forderung nach *Anwendungsbezug*[3]. Der Anwendungsgedanke wird in jüngster Zeit derart herausgestellt, daß bereits die Befürchtung geäußert wird, es handle sich hierbei nur um einen — mehr oder weniger kurzlebigen — Modetrend. In der Tat ist wohl die Gefahr nicht von der Hand zu weisen, daß nach der abebbenden, weil nicht praktikablen *Exaktheits- und Begrifflichkeits-Welle* nun unreflektiert und quasi als Ersatz eine *Anwendungs-Welle* über die Schulen hereinbricht.

[1] Diese Kurse umfassen real etwa 60 Unterrichtsstunden; vgl. die KMK-Empfehlungen [13] für die Fachoberschule.
[2] Ein solcher Grundkurs liegt in der Regel im 2. Halbjahr Klasse 11 und umfaßt real etwa 50 Unterrichtsstunden; vgl. [12].
[3] Vgl. den Übersichts-Artikel von Luschberger/Winkelmann [15] in diesem Heft.

Um zu verhindern, daß das *Prinzip der Anwendungsorientierung* nur als Modeerscheinung in der didaktischen Diskussion auftritt, sich so verschleißt und von einem neuen Mode-Trend abgelöst wird und um statt dessen den Anwendungsgedanken zu einem integralen Bestandteil des Mathematikunterrichts zu machen, muß zweierlei getan werden:

— Erstens muß stets *begründet* werden, weshalb Anwendungsbezug so wichtig ist, d. h., es muß geklärt werden, welche Ziele mit einem „beziehungshaltigen“[4] Mathematikunterricht erreicht werden sollen,
— zweitens müssen *überzeugende Beispiele* gefunden werden, mit denen diese Ziele tatsächlich erreicht werden können.

Hier soll nun zuerst eine Begründung für das Prinzip der Anwendungsorientierung gegeben werden, indem ein *allgemeines Ziel* genannt wird, welches der Mathematikunterricht in der — allgemeinen und beruflichen — Sekundarstufe verfolgen sollte und welches nur über Anwendungsbezüge erreicht werden kann:

Vermittlung derjenigen mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die
a) zum Verstehen
bzw.
b) zur Bewältigung
von relevanten außermathematischen Problemen notwendig sind.

Dabei sind die Teile a) und b) eng aufeinander bezogen: Einerseits gehört zur Bewältigung von Problemen ein Verstehen derselben; andererseits soll das Verstehen von Problemen eine Handlungskompetenz eröffnen, d. h. der Schüler soll befähigt werden, in derzeitigen oder zukünftigen realen Problemsituationen angemessen zu handeln.

„Relevant“ heißt ein Problem dann, wenn es aus der derzeitigen oder absehbar zukünftigen *beruflichen oder alltäglichen Umwelt* der Schüler stammt (unser Ziel beinhaltet also auch eine *Vorbereitung auf den späteren Beruf*, insbesondere im Mathematikunterricht der beruflichen Oberstufe).

Es gibt selbstverständlich noch weitere wichtige allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts, die in der curricularen Diskussion beachtet werden müssen[5]. Nur eine Ausrichtung am vorhin genannten Ziel gewährleistet jedoch, daß der Schüler Mathematik als ein Instrument erfahren kann, mit dem er seine berufliche und alltägliche Umwelt besser verstehen und bewältigen kann. Hierzu ist Anwendungsorientierung eine notwendige Bedingung[6]. Daher müssen *Anwendungsprobleme integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts* in der Sekundarstufe sein. Sie müssen eine wesentliche Rolle bei der *Auswahl mathematischer Inhalte für den Unterricht* spielen. Dabei sind jedoch nicht beliebige Anwendungen (und damit beliebige Inhalte) gemeint, sondern im obigen Sinne *relevante* Anwendungen. Des weiteren ist nicht oder wenigstens nicht in erster Linie ein Anwenden einer im

[4] Von „beziehungshaltigem“ statt „anwendungsbezogenem“ Mathematikunterricht spricht Freudenthal [10].

[5] Vgl. Abschnitt 4.2. Vgl. auch die in [5] genannten Ziele für den mathematischen Unterricht der Berufsschule.

[6] Vgl. auch die Untersuchungen von Nägerl u. a. [17].

Unterricht fertig entwickelten Mathematik auf außermathematische Probleme gemeint, sondern vor allem eine *Mathematisierung* realer Problemsituationen[7].

Es ist wohl klar geworden, daß Anwendungsprobleme nach unseren Intentionen nicht einfach nur dazu dienen sollen, die Mathematik zu motivieren, d. h. für den Schüler schmackhaft zu machen; diese *motivierende Funktion* geeigneter Anwendungsbeispiele ist jedoch ein positiv zu vermerkender Nebeneffekt.

Schließlich kann zugunsten einer Anwendungsorientierung gesagt werden, daß gerade die aktive Auseinandersetzung mit Anwendungsproblemen zu einem *tieferen Verständnis der zugehörigen mathematischen Inhalte* führt.

Es sind hier nun wohl genügend gute Gründe genannt worden, einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu fordern. Wesentlich ist nun, *welche* außermathematischen Probleme im Mathematikunterricht behandelt werden. Viele realen Probleme involvieren wenig oder gar keine Mathematik, und viele realen Probleme erfordern zu ihrem Verstehen bzw. Bewältigen so viel Mathematik, daß sie für die Schule unbrauchbar sind. Es kommt also darauf an, *reale, schülerrelevante, außermathematisch faßliche* und *innermathematisch zugängliche* Probleme zu finden, die zudem noch möglichst *mit den Richtlinien* für den Mathematikunterricht *verträglich* sind. Hier liegt eine große didaktische Aufgabe, die — abgesehen vom traditionell im Mathematikunterricht vertretenen Bereich „klassischer" physikalischer Anwendungsbeispiele — bisher nur ungenügend gelöst ist.

Wir können uns im Rahmen dieses Aufsatzes nicht auf allgemeiner Ebene damit beschäftigen, wie derartige Probleme gefunden werden können. Vielmehr beschränken wir uns im folgenden darauf, eine Klasse von Beispielen, nämlich *Wachstums- und Zerfallsprozesse,* im Hinblick auf ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht, insbesondere in der beruflichen Oberstufe, genauer zu diskutieren.
Beispiele für solche Wachstums- und Zerfallsprozesse sind:

Bevölkerungswachstum,
Zellteilung,
Bakterienvermehrung,
Wachstum von Tierpopulationen,
Ansteigen des Energieverbrauchs in der BRD bzw. auf der Erde,
Abnahme des Rohstoffvorrats der Erde,
Zunahme der Umweltverschmutzung,
Radioaktiver Zerfall,
Ansteigen radioaktiver Abfälle auf der Erde,
Vermehrung eines Kapitals auf der Bank,
Preisanstieg,
Verfall des Geldwertes,
Zunahme der Pkw-Anzahl auf der Erde

usw. Viele dieser Probleme werden seit einiger Zeit lebhaft in der Öffentlichkeit diskutiert, wie Fernsehsendungen oder der Erfolg von Büchern wie die von *Braunbek* [7] oder von *Meadows* und Mitarbeitern [16] beweisen.

[7] Hier muß einem öfter genannten Einwand begegnet werden: Anwendungsorientierung bedeutet nicht Behandlung einer losen Folge isolierter Einzelprobleme, sondern Unterrichten in größeren Problemkreisen.

Bei den genannten Beispielen handelt es sich durchweg um reale, relevante und faßliche Probleme. Zu prüfen bleibt die mathematische Zugänglichkeit und die „Richtlinienverträglichkeit".

Sehr viele dieser Prozesse verlaufen bekanntlich genau oder wenigstens annähernd *exponentiell*, d. h. die Funktionen, die den Verlauf dieser Prozesse beschreiben, sind genau oder annähernd *Exponentialfunktionen* bzw. aus diesen auf einfache Weise entstehende Funktionen. Exponentialfunktionen haben deshalb in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht einen hohen Stellenwert. Diese Feststellung wird noch unterstrichen, wenn wir beachten, daß Exponentialfunktionen bei zahlreichen weiteren realen Problemsituationen auftreten, z. B. bei

Aufladen/Entladen von Kondensatoren,
Erwärmung/Abkühlung von Körpern,
Absorption von Schall oder von Strahlung,
Dämpfung von Schwingungen,
Konzentrationsänderung chemischer Lösungen

u. v. a. m. (vgl. auch *Engel* [8]). Einige dieser Beispiele sind gerade für die *berufliche Oberstufe* von besonderer Bedeutung.

3. *Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht*

Aufgrund des am Ende von Abschnitt 2 Gesagten ergibt sich (nach *Kirsch* [11]) „eine bedeutsame Aufgabe für den Mathematikunterricht: Mit der rechtzeitigen, anwendungsorientierten und ausbaufähigen Behandlung der Exponentialfunktionen eine Art Aufklärungsarbeit zu leisten." Dies gilt insbesondere für die *Sekundarstufe I;* bereits dort soll „allen Schülern ... *die Fähigkeit zum verständigen Umgang* mit Exponentialfunktionen in realen Situationen" vermittelt werden. Es gibt jedoch auch viele Beispiele von Wachstums- oder Zerfallsprozessen, zu deren Behandlung Begriffe und Methoden der *Analysis* benötigt werden. Der Mathematikunterricht der — allgemeinen und beruflichen — Sekundarstufe II hat daher die Aufgabe, an die Sekundarstufe I anzuknüpfen und derartige Anwendungsprobleme zu behandeln.

Obwohl es sich also beim Thema „Wachstumsprozesse und Exponentialfunktionen" um einen Kreis von Problemen handelt, die *real, schülerrelevant, außermathematisch faßlich* sowie auch — wie man leicht nachprüft — *mit den Richtlinien* für den Mathematikunterricht *verträglich* sind, sieht die *schulische Realität in der Sekundarstufe* in der Regel nicht entsprechend den eben genannten Forderungen, sondern ganz anders aus: Wenn Exponentialfunktionen in der Mittelstufe überhaupt behandelt werden, so rein innermathematisch und erst am Ende von Klasse 10; in der Oberstufe werden Exponentialfunktionen oft erst im Anschluß an die Integralrechnung behandelt, nachdem die natürliche Logarithmusfunktion als $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ eingeführt worden ist. Oft entfällt das Thema Exponentialfunktionen in der Mittel- und in der — allgemeinen wie auch beruflichen — Oberstufe ganz.

Die Gründe für diese späte oder gar fehlende Behandlung in Mittel- bzw. Oberstufe sind im Kern beidemale dieselben: Es sind vor allem *Skrupel vor den mathe-*

matischen Schwierigkeiten, die eine frühe Beschäftigung mit Exponentialfunktionen verhindern (vgl. [1]). Das im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen als einziges der in Abschnitt 2 für Anwendungsprobleme aufgestellten Kriterien noch nicht geprüfte Kriterium der *innermathematischen Zugänglichkeit* scheint also problematisch zu sein.

Für die Mittelstufe hat jedoch *Kirsch* [11] einen Vorschlag gemacht, wie Exponentialfunktionen in elementarer Weise bereits früh behandelt werden können. Hier soll nur derjenige Teil seines Vorschlags kurz referiert werden, der im Hinblick auf die Oberstufe besonders wichtig ist[8].

Grundlegend ist, daß *nicht* die *Existenz* der sogenannten *exponentiellen Wachstumsfunktionen*

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto a \cdot b^x \ (a \in \mathbf{R}^+,\ b \in \mathbf{R}^+ / \{1\})$$

bewiesen werden soll. Vielmehr legt es das Umgehen mit realen Wachstums- bzw. Zerfallsprozessen nahe, die *Existenz* von Wachstumsfunktionen als *gesichert* anzusehen, d. h. genauer das folgende „Axiom" anzunehmen:

> Durch je 2 Punkte der oberen Koordinatenhalbebene, die nicht auf einer Parallelen zu einer der Achsen liegen, geht genau eine Funktion f mit den Eigenschaften
>
> (1) f ist eine streng monotone reelle Funktion mit Wertemenge $\mathbf{R}^+$
>
> (2) Wenn sich das Argument von f jeweils um denselben Summanden erhöht, multipliziert sich der Funktionswert von f jedesmal mit demselben Faktor[9]
>
> *(„Grundeigenschaft der exponentiellen Wachstumsfunktionen").*

Diese beiden Eigenschaften sind genau diejenigen, welche im Zusammenhang mit außermathematischen Anwendungsproblemen wichtig sind. Für die innermathematische Behandlung genügt die Potenzregel an Stelle der Grundeigenschaft (vgl. Abschnitt 5.1).

Auf diese Weise sind die Wachstumsfunktionen $x \mapsto a \cdot b^x$ und speziell die *Exponentialfunktionen*

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto b^x \ (b \in \mathbf{R}^+ / \{1\})$$

mit ihren wesentlichen Eigenschaften in mathematisch unverfälschter Form tatsächlich bereits am Ende der Sekundarstufe I bzw. im 1. Halbjahr von Klasse 11 (jedenfalls also vor der Differential- und Integralrechnung) zugänglich.

Wie die mathematischen Schwierigkeiten, die einer frühen Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung der *Oberstufe,* d. h. bereits in einem „Grundkurs"[10] zur Analysis in der beruflichen Oberstufe, entgegenstehen, in entsprechender Weise methodisch überwunden werden können, wird in Abschnitt 5 aufgezeigt. Der Themenkreis „Wachstumsprozesse und Exponentialfunktionen"

[8] Obwohl dabei natürlich die Gefahr besteht, den Vorschlag von Kirsch unzulässig verkürzt darzustellen.

[9] Explizit gemacht (was sowohl in der Mittelstufe als auch für einen Grundkurs in der Oberstufe nicht notwendig ist):

$$f(u + v) = q \cdot f(u), \text{ wobei } q = \frac{f(v)}{f(o)}$$

[10] Im Sinne von Abschnitt 1.

ist also tatsächlich ein solcher, der sämtlichen in Abschnitt 2 gesetzten Kriterien genügt und der damit dazu beiträgt, die Forderung nach einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht einzulösen und die damit angestrebten Ziele zu erreichen.

4. *Bemerkungen zum Analysis-Unterricht der beruflichen Oberstufe*

Der für alle Schüler verbindliche Teil des Analysis-Unterrichts der beruflichen Oberstufe besteht im wesentlichen aus einem „Vorkurs" zur Analysis und einem „Grundkurs" zur Analysis.

4.1 *Zum „Vorkurs" in Analysis*[11]

Unter einem „Vorkurs" zur Analysis verstehen wir bzgl. der Fachoberschule diejenigen Kurse bzw. Kurs-Teile der Analysis, welche der Differential- und Integralrechnung vorausgehen[12], bzw. bzgl. dem beruflichen Gymnasium einen „Eingangskurs" im Sinne der KMK-Empfehlungen[13]. Der „Vorkurs" beginnt zu Anfang von Klasse 11; seine *Ziele* sind u. a.:

— *Kompensation* von Defiziten aus der Sekundarstufe I und *Homogenisierung* unterschiedlicher Eingangsvoraussetzungen,
— *Orientierung* über Fragestellungen der Analysis,
— *Schaffung von Voraussetzungen* zur Beschäftigung mit der Differential- und Integralrechnung im „Grundkurs",
— *Vorbereitung* der Arbeit in den Mathematik-Kursen.

Der „Vorkurs" beinhaltet im wesentlichen das Thema *Funktionen:*

— ganzrationale Funktionen (insbesondere bis 4. Grades),
— einfachste gebrochen-rationale Funktionen (insbesondere $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto \frac{1}{x^2}$)
— Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$
— Betragsfunktion $x \mapsto |x|$
— Exponential- und Logarithmusfunktionen (insbesondere zu den Basen 2 und 10),
— Sinus- und Kosinusfunktion.

Im Zusammenhang mit ganzrationalen Funktionen werden lineare und quadratische Gleichungen sowie lineare Ungleichungen wiederholend behandelt und die Grundbegriffe der Analytischen Geometrie der Geraden eingeführt.

4.2 *Zum „Grundkurs" in Analysis*[14]

Zu den Zielen: Für einen Grundkurs zur Analysis in der beruflichen Oberstufe gelten analoge *allgemeine Ziele* wie für jeglichen Mathematikunterricht in der Sekundarstufe, d. h. vor allem

[11] Vgl. [3, S. 293/294] sowie die Entwürfe für die Kurse 30.26.01 und 30.26.02 in den Materialien [14] für die Fachoberschule in Hessen.

[12] Diese Kurse umfassen real etwa 60 Unterrichtsstunden; vgl. [13].

[13] Ein solcher Eingangskurs umfaßt real etwa 50 Unterrichtsstunden; vgl. [12].

[14] Vgl. zu allem [3] sowie die Entwürfe für die Kurse 30.26.02 und 30.26.03 in den Materialien [14] für die Fachoberschule in Hessen.

— Vermittlung der zur Beschreibung, zum Verständnis und zur Bewältigung von relevanten außermathematischen Problemen notwendigen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten aus der Analysis,
— Förderung von Argumentationsfähigkeit und von Kreativität,
— Förderung von Kooperations- und Kommunikationsfähigkeit.

Diese Ziele sind *emanzipatorisch* und orientieren sich an allgemeinen Erziehungszielen.

Die Ziele implizieren in erster Linie, daß der Schüler *adäquate Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen, Methoden und Regeln der Differential- und Integralrechnung aktiv aufbauen* soll. Dabei heißt „adäquat", daß ihn diese Vorstellungen in die Lage versetzen sollen, die *Begriffe, Methoden und Sätze der Analysis bei der Behandlung von außermathematischen Problemen verständig* (d. h. nicht nur rezeptemäßig bei vorgegebenen Beispielen bekannter Art) *zu handhaben.*

Zu den Inhalten: Die *zentralen Begriffe* eines so verstandenen Analysis-Grundkurses sind die der *Ableitung* und des *Integrals.* Dagegen hat der *Stetigkeits*begriff primär innermathematische Bedeutung und spielt in einem solchen Grundkurs nur eine untergeordnete Rolle, und zwar als ein *Hilfsbegriff,* der die Klasse der zu betrachtenden „vernünftigen" Funktionen einschränkt.

Ein solcher Grundkurs zur Analysis könnte also mathematisch das folgende beinhalten, wobei wir uns an „fundamentalen Ideen bei reellen Funktionen (nach Fischer [9]) orientieren:

— Ableitungsbegriff,
— Ableitung der wichtigsten Funktionen aus dem „Vorkurs",
— Einfache Ableitungsregeln (für $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x + a)$, $f(a \cdot x)$ und $f(x) \pm g(x)$),
— Funktionsuntersuchungen (auf Achsenschnittpunkte, Monotonie und Extrema),
— Funktionsbestimmungen (bei einfachen ganzrationalen Funktionen),
— Einfache Extremwertaufgaben,
— Begriff des bestimmten Integrals,
— Stammfunktionen,
— Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Bei Zeitknappheit kann notfalls auf die Integralrechnung verzichtet werden; jedenfalls ist die selbsttätige Auseinandersetzung der Schüler mit relevanten Problemen wichtiger als inhaltliche Vollständigkeit.

Genauere inhaltliche Lernziele für einen Grundkurs zur Analysis in der beruflichen Oberstufe sind bei *Blum* [3] angegeben.

Zu den Methoden: Hierbei ist es wichtig, im Sinne des *Brunerschen Spiralprinzips*[15] zwischen einer ersten Begegnung mit den Gegenständen der Analysis und einem späteren Wiederaufgreifen mit Präzisierungen und Vertiefungen zu unterscheiden. Zur Erreichung der genannten Ziele für einen Grundkurs in Analysis ist es nämlich keineswegs erforderlich, daß die Schüler sämtliche Begriffe, Methoden und Sätze, die ihnen dort begegnen, sofort in ihrer abschließenden mathematischen Fassung und an der genauen Stelle innerhalb des deduktiven Gerüsts der Ana-

[15] Vgl. [18, S. 67].

lysis kennenlernen. Es ist vielmehr *legitim und notwendig*, an geeigneten Stellen *didaktische Vereinfachungen* vorzunehmen, die *keine Verfälschungen* sind und *auf höherer Stufe ausgebaut* werden können. Dies bedeutet, daß *an ein Vorverständnis der Schüler bewußt angeknüpft* wird und somit *einerseits einige Begriffe in einer noch nicht abschließend präzisierten Form eingeführt und benutzt, andererseits bewußt* (für Lehrer *und* Schüler) *Lücken im mathematischen Aufbau gelassen* werden dürfen. Beispiele für derartige didaktische Vereinfachungen innerhalb eines Grundkurses zur Analysis sind

a) Der *Verzicht* auf eine Behandlung von *Konvergenz und Stetigkeit* vor Beginn der Differentialrechnung. Statt dessen darf ein noch unpräzisierter, aber ausbaubarer und an Beispielen erarbeiteter *Konvergenzbegriff* zugrundegelegt werden, etwa in der Form

   $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = m$ bedeutet, daß $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ „gegen m strebt" (d. h. die Zahl m „beliebig gut" approximiert), wenn h „gegen 0 geht" (d. h. betraglich „beliebig klein" wird).

   Die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten werden bewußt ohne Beweis verwendet. Dieser Grenzwertbegriff kann im Anschluß an die Differential- und Integralrechnung mittels Folgenkonvergenz exakt fundiert werden.

b) Die bewußte Entnahme derjenigen Sätze aus der *Anschauung*, die zwar völlig evident sind, deren Beweis jedoch die Vollständigkeit des Körpers der reellen Zahlen — also z. B. den Mittelwertsatz der Differentialrechnung[16] — erfordert. Diese Sätze sind

   — *Das Monotonie-Kriterium:*

   $$f' \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \text{ in } [a;b] \gg f \text{ streng monoton } \left\{ \begin{matrix} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{matrix} \right\} \text{ in } [a;b]$$

   — *Das Extrema-Kriterium:*

   $$f'(a) = 0 \wedge f' \text{ hat Vorzeichenwechsel an a von } \left\{ \begin{matrix} + \text{ nach } - \\ - \text{ nach } + \end{matrix} \right\}$$

   $$\gg f \text{ hat an a ein relatives } \left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$$

   — *Der Satz über verschwindende Ableitungen:*

   $f' = 0$ in $[a;b] \gg f = \text{const.}$ in $[a;b]$.

c) Der *Verzicht* auf eine *Definition des Inhalts krummlinig begrenzter Flächen* in der Integralrechnung. Vielmehr wird der Inhalt von Flächen unter „vernünftigen" Funktionen anschaulich als existent angenommen und wird das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f$ als der Inhalt der Fläche zwischen erster Achse und Graph(f) im Intervall $[a;b]$ definiert, wobei Flächen unterhalb der ersten Achse negativ zählen.

Bei all diesen didaktischen Vereinfachungen ist es wichtig, daß stets *mathematisch einwandfrei argumentiert* wird, wenn auch auf der Basis von noch vorläufigen Begriffen oder von aus der Anschauung entnommenen Sätzen, und daß sämtliche *Lücken* für Lehrer *und* Schüler *bewußt* gelassen werden. D. h. der Schüler

[16] Vgl. [2].

soll stets wissen, wann vereinfacht wird und wann nicht, und er soll unterscheiden können zwischen Plausibilitätsbetrachtungen und Beweisen. Hierdurch ist eine derartige didaktische Konzeption auch deutlich abgegrenzt von einer unexakten und rezeptemäßig betriebenen Analysis (vgl. [3, S. 291]).

Ein Beispiel für den Unterschied zwischen anschaulichen Betrachtungen und exakten Beweisen: Nach Entnahme des Satzes „$f' = 0 \Rightarrow f$ konstant" aus der Anschauung wird hieraus *exakt* deduziert, daß sich alle Stammfunktionen einer Funktion auf einem Intervall nur um eine Konstante unterscheiden. Wir schildern nun abschließend einen methodischen Vorschlag zur elementaren Behandlung der Exponentialfunktionen im Rahmen eines Grundkurses zur Analysis, welcher didaktisch im Sinne der eben aufgestellten Grundsätze konzipiert ist.

5. *Elementare Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen*[17]

5.1 *Schüler-Voraussetzungen*

Den Schülern müssen die Exponentialfunktionen $x \mapsto b^x$ $(b \in \mathbf{R}^+ / \{1\})$ aus der Mittelstufe oder wenigstens vom Vorkurs her bekannt sein (z. B. in der von *Kirsch* [11] vorgeschlagenen Weise; siehe Abschnitt 3); genauer: Die Schüler müssen

— die Graphen der Exponentialfunktionen kennen, insbesondere deren strenge Monotonie,
— wissen, daß die Exponentialfunktionen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ und deren Umkehrfunktion $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ bijektiv sind,
— die Potenzregeln kennen:
$b^{u+v} = b^u b^v$ und $b^{uv} = (b^u)^v$ für alle $u, v \in \mathbf{R}$

Wenn es um den Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Eulerschen Zahl geht (siehe Abschnitt 5.2), müssen die Schüler weiter

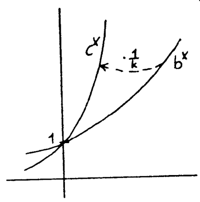

Fig. 1

— wissen, daß die Graphen je zweier Exponentialfunktionen durch eine bestimmte Affinität $x \mapsto \frac{1}{k} x$ auseinander hervorgehen[18]:
$c^x = b^{kx}$ für alle $x \in \mathbf{R}$
$(b, c \in \mathbf{R}^+ / \{1\}; k = \log_b c)$.

Außerdem müssen die Schüler

— den Begriff der Ableitung $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ einer Funktion f an einer Stelle x kennen

und

— wissen, daß die Ableitung als Tangentensteigung gedeutet werden kann.

[17] Vgl. [4]. Abschnitt 5 ist für mathematische „Laien" unter den Lesern an mehreren Stellen zu knapp geschrieben.

[18] Dabei braucht auf einer ersten Stufe der Streckungsfaktor noch nicht explizit gemacht zu werden. Vielmehr genügt es zu wissen, daß sich aufgrund der Surjektivität der Exponentialfunktionen jede positive Zahl c als eine gewisse reelle Potenz $c = b^k$ einer gegebenen positiven Zahl $b \neq 1$ schreiben läßt.

5.2 *Ableitungsbestimmung*

Innerhalb eines anwendungsorientierten Grundkurses zur Analysis kann die Notwendigkeit der Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen z. B. innerhalb folgender Problemkontexte auftreten:

— durch Exponentialfunktionen beschriebene reale zeitliche Wachstums- (oder Zerfalls-)Prozesse, bei denen nach der zeitlichen *Änderungsrate* des Wachstumsprozesses, d. h. nach der Wachstumsgeschwindigkeit gefragt wird

oder

— reale Wachstum- (oder Zerfalls-)Prozesse, die durch noch unbekannte Funktionen f beschrieben werden, welche die Bedingung $f' = \lambda f$ (λ konstant) erfüllen.

Wir bilden nun zuerst den Differenzenquotienten der Exponentialfunktionen $\exp_b\colon x \mapsto b^x$ ($b \in \mathbf{R}^+ / \{1\}$) an der Stelle x: $\frac{b^{x+h} - b^x}{h} =^{19} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}$

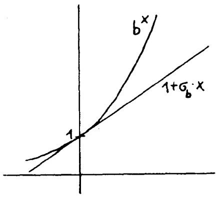

Fig. 2

Nun vereinfachen wir und lassen *bewußt* eine *Lücke,* wie dies in Abschnitt 4.2 für einen Grundkurs als legitim und notwendig begründet worden ist. Und zwar entnehmen wir bewußt aus der Anschauung: *Der Graph von* $\exp_b$ *beschreibt eine Linkskurve und hat an der Stelle* 0 *eine wohlbestimmte Tangente, die — außer in* 0 *— ganz unterhalb des Graphen verläuft.*

Diese bewußte Anleihe bei der Anschauung verfälscht nichts und könnte — bei entsprechender Zeit sogar im Rahmen eines Grundkurses — Schritt für Schritt aufgehoben werden bis hin zum exakten Nachweis der Konvexität der Exponentialfunktionen und ihrer Differenzierbarkeit an der Stelle 0. Es ist jedoch sowohl aus zeitlichen als auch aus didaktischen Gründen nicht sinnvoll, diesen Nachweis innerhalb des Grundkurses tatsächlich vollständig zu erbringen. (Der vollständige Beweis ist bei *Blum/Kirsch* [6] zu finden.) Noch wichtiger als diesen Beweis hier zu führen ist es zu betonen, daß der Lehrer diese Lücke tatsächlich „guten Gewissens" lassen kann und daß er die Möglichkeit hat, interessierten und kritischen Schülern klar zu machen, wie diese aus der Anschauung entnommenen Tatsachen mathematisch begründbar sind.

Wir fahren fort mit der Ableitungsbestimmung. Bezeichnet σ_b die Steigung der Tangente in 0, so existiert also
$$\sigma_b = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} \quad (b \in \mathbf{R}^+ / \{1\})$$

Hieraus ergibt sich die Differenzierbarkeit von b^x an jeder Stelle x mit der Ableitung $\sigma_b \cdot b^x$. Es gilt somit $\exp'_b = \sigma_b \cdot \exp_b$ ($b \in \mathbf{R}^+ / \{1\}$),
d. h. die *Ableitung einer Exponentialfunktion ist bis auf einen konstanten Faktor,* der nur von der Basis abhängt, *gleich der Funktion selbst.* Dieser Faktor ist gleich der Tangentensteigerung im Punkt (0|1). Dies ist eine erste wichtige Erkenntnis.

[19] Hier wird die erste Potenzregel benutzt. Da wir die benötigten Eigenschaften der Exponentialfunktionen in 5.1 zusammengefaßt haben, werden wir im folgenden nicht jedesmal einzeln darauf verweisen, wenn wir sie anwenden.

Das Problem ist nun reduziert auf die Bestimmung der Konstanten σ_b für $b \varepsilon \mathbf{R}^+ \; / \; \{1\}$. Durch Zeichnen verschiedener Exponentialfunktionen in der Umgebung von 0 und näherungsweises Zeichnen der Tangenten in $(0|1)$ lassen sich erste Näherungswerte für einige σ_b ermitteln. Z. B. ergibt sich

$$\sigma_{1,5} \approx 0{,}4; \quad \sigma_2 \approx 0{,}7; \quad \sigma_{2,5} \approx 0{,}9; \quad \sigma_3 \approx 1{,}1; \quad \sigma_{10} \approx 2{,}3.$$

Anschaulich ist nun klar, daß es genau eine Exponentialfunktion geben muß, deren Tangente in $(0|1)$ die Steigung 1 hat, und daß deren Basis zwischen 2,5 und 3 liegen muß. Diese Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist deshalb besonders interessant, da ihre Ableitungsfunktion mit ihr übereinstimmt.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Basis e mit $\sigma_e = 1$, also $(x \mapsto e^x)' = (x \mapsto e^x)$, kann im Unterricht zuerst bewußt aus der Anschauung entnommen und später begründet werden; wir geben diese Begründung gleich anschließend. Zuvor kann die für Anwendungen benötigte Ableitung von $x \mapsto e^{kx}$ $(k \varepsilon \mathbf{R} \; / \; \{0\})$ ganz einfach ermittelt werden, entweder geometrisch (Anwendung der Affinität $x \mapsto \frac{1}{k}x$ auf den Graphen von e^x und die Tangente im betrachteten Punkt) oder algebraisch (mit Hilfe der Ableitungsregel für $f(a \cdot x)$). Es resultiert $(x \mapsto e^{kx})' = (x \mapsto k \cdot e^{kx})$ $(k \varepsilon \mathbf{R} \; / \; \{0\})$.

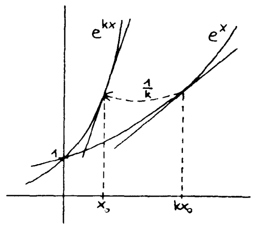

Fig. 3

Mit den Exponentialfunktionen $x \mapsto e^{kx}$ steht damit eine Klasse von Funktionen zur Verfügung, die dem wichtigen Differentialgleichungs-Typ $f' = k \cdot f$ genügt. Somit sind zahlreiche Anwendungsprobleme, die auf diesen Typ führen, jetzt lösbar.

Diese wichtige Zahl e, die *Eulersche Zahl,* ist hier also in der Weise definiert, die ihre praktische Bedeutung begründet, nämlich als Basis derjenigen Exponentialfunktion, die an der Stelle 0 die Steigung 1 hat, also mit ihrer Ableitung übereinstimmt, und nicht wie bei anderem Aufbau etwa als 1-Stelle der über das Integral $\int_1^x \frac{dt}{t}$ definierten Funktion ln oder als Limes der Folge[20] $((1 + \frac{1}{n})^n)$.

Zur *Begründung für Existenz und Eindeutigkeit* einer Zahl e mit $\sigma_e = 1$ müssen wir uns nur nochmals vergegenwärtigen, daß die Graphen zweier Exponentialfunktionen jeweils durch eine bestimmte Affinität $x \mapsto \frac{1}{k}x$ auseinander hervorgehen. Dieselbe Affinität überführt auch die Tangenten in $(0|1)$ ineinander. Für deren Steigungen gilt damit[21]

$$\sigma_c = k \cdot \sigma_b \quad (b, c \varepsilon \mathbf{R}^+ \; / \; \{1\}; \; k = \log_b c)$$

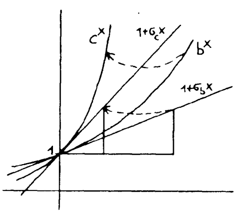

Fig. 4

[20] Man beachte auch die Kritik am Zugang via „stetige Verzinsung“ bei Kirsch [11].

[21] Dies läßt sich natürlich auch wieder algebraisch mit Hilfe der Ableitungsregel für f (ax) berechnen.

Aufgrund der Bijektivität der Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen, d. h. der Logarithmusfunktionen, nimmt nun — für beliebig festgehaltenes $b \in \mathbf{R}^+ / \{1\}$ — der Faktor $k = \log_b c$ und damit auch $k \cdot \sigma_b$ jeden reellen Wert genau einmal an, wenn c alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Insbesondere gibt es genau eine Zahl $e \in \mathbf{R}^+$ mit $\sigma_e = 1$.

Schließlich können nun auch noch die gesuchten konstanten Faktoren σ_b ermittelt werden, womit die Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen dann abgeschlossen ist. Analog zu oben werden nämlich die Graphen aller Exponentialfunktionen mit dem der e-Funktion verglichen. Wegen $\sigma_e = 1$ ergibt sich $\sigma_c = \ln c$ für alle $c \in \mathbf{R}^+ / \{1\}$, wobei $\ln := \log_e$ gesetzt wird. Damit sind die gesuchten Faktoren bestimmt, und es gilt also

$$\exp'_b = \ln b \cdot \exp_b \quad \text{für alle } b \in \mathbf{R}^+ / \{1\}.$$

5.3 *Numerische Bestimmung der Eulerschen Zahl*

Der numerische Wert von e kann in der jetzt zu schildernden Weise bereits direkt nach der Definition von e und noch vor der Begründung für Existenz und Eindeutigkeit ermittelt werden.

Vorläufiger Ausgangspunkt ist der lineare Approximationsaspekt: In der Umgebung von 0 läßt sich der Graph der e-Funktion näherungsweise durch die zugehörige Tangente in $(0|1)$ ersetzen, d. h. es gilt

$$e^x \approx 1 + x \text{ für kleine } |x|.$$

Insbesondere wird $e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$ für große n. Indem in dieser Näherungsgleichung einfach auf beiden Seiten die n-te Potenz gebildet wird, ergibt sich

$$e \approx (1 + \tfrac{1}{n})^n \text{ für große } n.$$

Hieraus berechnet man mit Hilfe eines Taschenrechners — unter vorteilhafter Verwendung von Zweierpotenzen — sofort $e \approx 2{,}718$.

Dieses Potenzieren einer Näherungsgleichung ist jedoch eine durch nichts gerechtfertigte Operation. Daher ergibt sich die Notwendigkeit der Präzisierung und Begründung der Aussage $e \approx (1 + \frac{1}{n})^n$. Dies ist nun aber in elementarer Weise möglich.

Wir benutzen aus 5.2, daß der Graph der e-Funktion — außer an der Stelle 0 — ganz oberhalb der Tangente in $(0|1)$ verläuft. Es gilt deshalb

$$e^x > 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R} / \{0\}.$$

Wir setzen nun einerseits $x = \frac{1}{n}$. Es folgt $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$, also

$$e > (1 + \tfrac{1}{n})^n \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Wir setzen andererseits $x = -\frac{1}{n+1}$. Es folgt $e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - \frac{1}{n+1}$, also

$$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

und folglich

$$e < (1 + \tfrac{1}{n})^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{n})^n \cdot (1 + \tfrac{1}{n}) = (1 + \tfrac{1}{n})^n + \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$$

$$< (1 + \tfrac{1}{n})^n + \tfrac{e}{n} \quad \text{alle } n \in \mathbf{N}.$$

Wegen $e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ist insbesondere $e < 4$ (setze $n=1$).
Daher gilt zusammenfassend

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^n + \frac{4}{n} \quad \text{für alle } n \varepsilon \mathbf{N}.$$

In diesem präzisen Sinn gilt $e \approx (1 + \frac{1}{n})^n$. Der Beweis dieser Ungleichung war deshalb so einfach im Vergleich zu den sonst üblichen Abschätzungen im Zusammenhang mit der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$, weil wir die Zahl e *nicht* mehr *definieren*, sondern *nur* noch *berechnen* mußten.

Aus dieser Ungleichung folgt sofort

$$0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < \frac{4}{n} \quad \text{für alle } n \varepsilon \mathbf{N},$$

also

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Hierbei brauchen keineswegs Folgen bereits vorher thematisiert worden zu sein (vgl. Abschnitt 4.2). Diese Grenzwertaussage ist aufgrund obiger expliziter Abschätzung vollkommen klar, gleichgültig ob ein exakter Grenzwertbegriff zugrundeliegt oder aber — wie wir für den Grundkurs vorschlagen — ein didaktisch vereinfachter.

LITERATUR

[1] Baumgartner, E.: Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen in der Sekundarstufe II. Didaktik der Mathematik 3 (1975), H. 1, S. 1—28.

[2] Blum, W.: Bemerkungen zum Analysisunterricht am Beispiel des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Didaktik der Mathematik 2 (1974), H. 4, S. 305—313.

[3] Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberstufe. Die berufsbildende Schule 27 (1975), H. 5, S. 290—301.

[4] Blum, W.: Elementare Ableitungsbestimmung für Exponentialfunktionen im Mathematikunterricht der beruflichen Oberstufe. Erscheint in: Die berufsbildende Schule 28 (1976), H. 10.

[5] Blum, W.: Mathematik in der Berufsschule — Curriculare Probleme, aufgezeigt am Beispiel des Berufsfeldes Elektrotechnik. Die Deutsche Berufs- und Fachschule 72 (1976), H. 9.

[6] Blum, W./Kirsch, A.: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. Erscheint in Didaktik der Mathematik 5 (1977).

[7] Braunbek, W.: Die unheimliche Wachstumsformel. München 1973.

[8] Engel, A.: Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle. Der Mathematikunterricht 17 (1971), H. 3, S. 5—56.

[9] Fischer, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. Erscheint in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8 (1976).

[10] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1/2. Stuttgart 1973.

[11] Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. Erscheint in: Didaktik der Mathematik 4 (1976).

[12] Konferenz der Kultusminister: Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen; Beschluß vom 3. 10. 1968.
[13] Konferenz der Kultusminister: Rahmenrichtlinien für das Fach Mathematik in der Fachoberschule; Beschluß vom 5. 2. 1976.
[14] Kultusminister des Landes Hessen (Hrsg.): Materialien für die Fachoberschule in Hessen, Fach Mathematik, Teil 1: Analysis. Wiesbaden 1976.
[15] Luschberger, H./Winkelmann, B.: Mathematik in der studienbezogenen Sekundarstufe II: Überblick über den Stand der didaktischen Diskussion. Die Deutsche Berufs- und Fachschule 72 (1976), H. 9.
[16] Meadows, D. et. al.: Die Grenzen des Wachstums. Reinbek bei Hamburg 1973.
[17] Nägerl, H. et. al.: Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. Didaktik der Mathematik 1 (1973), H. 2, S. 143 bis 157.
[18] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974.