In: MU. Der Mathematikunterricht. Beiträge zu seiner fachinhaltlichen und fachdidaktischen Gestaltung. Quellen zur Geschichte des Mathematikunterrichts, Jahrgang 34, Heft 1, Januar 1988, Friedrich Verlag, Seelze, S. 22-27

Das Problem des Graphikers

von Werner Blum und Arnold Kirsch

1. Problemstellung

Das Briefpapier der Gesamthochschule Kassel wurde vor einigen Jahren von einem Graphiker konzipiert. Dieser hatte zugleich die Aufgabe, auch vielerlei andere offizielle Formulare für die Hochschule zu entwerfen, und zwar mit einem möglichst einheitlichen System für das »Lay-out«. Im Laufe seiner Arbeit tauchte ein Problem auf, für welches er Berge von Papier mit Rechnungen, Tabellen und Zeichnungen produzierte. Eines Tages kam er mit einem ganzen Koffer voller solcher Aufzeichnungen zu uns in den Fachbereich Mathematik der Hochschule, um nach Hilfe zu suchen. Seitdem heißt sein Problem bei uns *»Das Problem des Graphikers«*. Es lautet folgendermaßen:

Ein Blatt Papier soll so mit einem Streifenraster versehen werden, daß man verschiedene Möglichkeiten hat, das Blatt in gleichbreite Spalten aufzuteilen. Zwischen je zwei Spalten soll immer ein Streifen frei bleiben. Wenn man z. B. 11 Streifen nimmt, so gibt es u. a. folgende Aufteilungsmöglichkeiten:

– 3 Spalten mit je 3 Streifen
– 2 Spalten mit je 5 Streifen
– 4 Spalten mit je 2 Streifen

Aufgabe:
Wie viele Streifen sollte man nehmen, um möglichst viele solcher Aufteilungsmöglichkeiten zu haben und damit ein besonders variables Lay-out für das Blatt zu ermöglichen?

Wir gaben dem Graphiker eine *Lösung,* indem wir ihm eine allgemeine Regel nannten, mit der man zu einer gegebenen Streifenzahl ohne Probieren alle Aufteilungsmöglichkeiten finden kann. Heute würden wir vielleicht auch sagen: Wir *mathematisierten* das Problem des Graphikers, und aus dem resultierenden mathematischen »Modell« leiteten wir eine einfache Methode ab, die das Problem löste.

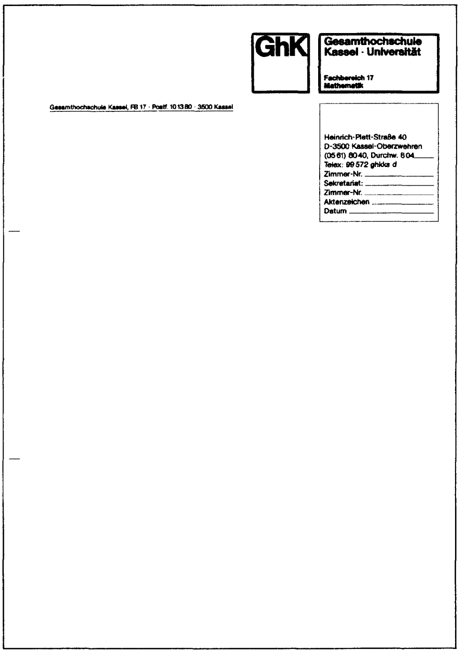


Fig. 1

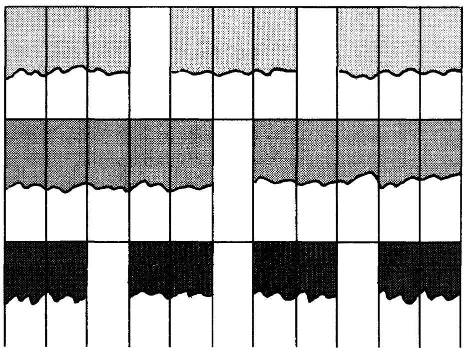


Fig. 2

Kurz gesagt lösten wir das Problem des Graphikers so: Seien n die Anzahl der Streifen, A die jeweilige Anzahl der Spalten und B die Breite jeder Spalte (d. h. die Anzahl der Streifen pro Spalte). Dann gilt (wir denken uns rechts noch einen Leerstreifen angefügt!) offenbar

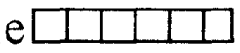
$$n + 1 = A \cdot (B + 1) \qquad (n, A, B \in \mathbb{N})$$

Das heißt, die möglichen Einteilungen entsprechen genau den sämtlichen Teilern, d. h. den multiplikativen Zerlegungen von $n + 1$, mit Ausnahme von $(n + 1) \cdot 1$.

Wir sind nicht ganz sicher, ob der Graphiker das Briefpapier der Gesamthochschule Kassel tatsächlich nach diesen Gesichtspunkten gestaltet hat. Wir vermuten »ja«, denn das Briefpapier paßt sehr gut zu den Zahlen $n = 35$, $A = 6$, $B = 5$.

Seitdem haben wir dieses Problem schon oft Schülern und Studenten gestellt; denn trotz oder vielleicht wegen seiner Einfachheit enthält es einige interessante und grundlegende methodologische und didaktische Aspekte (vgl. Abschnitt 4). Im folgenden (Abschnitte 2 und 3) berichten wir über einige diesbezügliche Erfahrungen.

2. Eine Unterrichtssequenz im 6. Schuljahr

Zur *Vorbereitung* wird in der Klasse (34 Schüler von 11–13 Jahren) die Teilbarkeit natürlicher Zahlen wiederholt. Die Schüler befassen sich mit der Frage »Welche Zahlen haben viele Teiler?« am Beispiel der Verteilung von Schokoladenriegeln wie  an 2, 3 usw. Kinder.

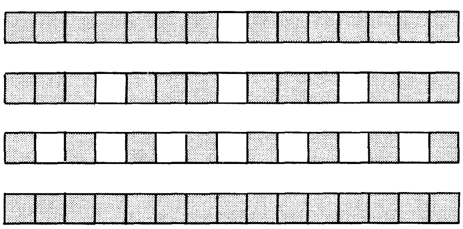
Danach stellt der Lehrer das *Problem des Graphikers* vor, etwa wie in Abschnitt 1 formuliert. Dabei fragt er konkret nach den möglichen »Lücken-Zerlegungen« eines 14er Blocks von der folgenden Art:

Fig. 3

Hierdurch sind die Schüler stark motiviert. Sie sehen dies sofort als *mathematisches Problem* und fragen nicht weiter nach dem konkreten Anliegen des Graphikers.

<u>Einige Beobachtungen:</u>

- Das Problem wird bereits nach *einem* Beispiel richtig erfaßt.
- *Experimentelle* Lösungen für spezielle Blocklängen n (= 14, 15, 17, 12, 13, 16 usw.) bereiten keine Schwierigkeiten.
- Die betreffenden Zerlegungen werden *graphisch* und in *Tabellen* angegeben (bald nur in Tabellen), z. B. für $n = 15$ wie folgt:



Anzahl der Stücke	Breite jedes Stückes
2	7
4	3
8	1
1	15

Fig. 4

  (Die triviale Zerlegung wird meist zuletzt aufgeführt.)
- Parallel dazu werden *allgemeine Aussagen* gemacht und Vermutungen geäußert und begründet bzw. widerlegt. Beispiele: »Bei geraden Zahlen n geht es nicht mit 2 Stücken.«; »Wenn es mit 4 Stücken der Länge 3 geht, dann auch mit 3 Stücken der Länge 4.«
- Die Schüler sind überrascht, daß die »schönen« Zahlen 12 und 16 nur *eine* Zerlegung erlauben.

– Es werden Spekulationen zu einer allgemeinen Lösung des Problems angestellt, insbesondere: »Primzahlen haben viele Zerlegungen«, und kritisiert: »13 hat nur drei Zerlegungen, ebenso wie schon 9« (und, wie der Lehrer hinzufügt, ebenso wie 37 und 61).

Sodann gibt der Lehrer *Einhilfen:*

– »Welche Zahlen haben *ganz wenige* Zerlegungen? Was fällt Euch daran auf?«

– »Was fällt Euch bei den Stückzahlen 1, 2, 4, 5, 10 zu n = 19 auf?«

Trotz dieser Einhilfen und suggestiven Beispiele hat noch kein Schüler den vollen Durchblick. Erst die massive Einhilfe

– »Wie wäre es, wenn wir rechts noch eine künstliche Lücke anfügen?«

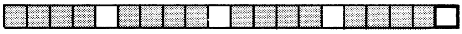


Fig. 5

führt zum »Durchbruch« und zu *Schüleräußerungen* wie:

– »Es hat etwas zu tun mit den Teilern der nächst-größeren Zahl.«

– »Wenn *die* viele Teiler hat, dann gibt's viele Zerlegungen.«

Dies wird an den schon untersuchten Blocklängen bestätigt. Dann »hagelt es« Schülervorschläge für günstige Längen (in dieser Reihenfolge): 59, 29, 35, 47, 83.

Die Unterrichtssequenz schließt mit einer *Ergebnis-Formulierung* durch den Lehrer:
Lücken-Zerlegungen einer Zahl n
Die möglichen *Stückzahlen* sind die *Teiler der nächst-größeren Zahl* n + 1, außer n + 1 selbst. Die zugehörigen *Stücklängen* sind immer um eins kleiner als die Komplementärteiler.

Die *Interpretation* dieses Ergebnisses für das Ausgangsproblem war für die Schüler offensichtlich.

Bemerkung: Die Unterrichtssequenz umfaßte drei Unterrichtsstunden, geplant und durchgeführt von A. Kirsch mit StD V. Dippel an der Gesamtschule Heiligenrode bei Kassel. Wir danken auch StR M. Schober, Kassel, für seine Hilfen bei der unterrichtlichen Behandlung des Themas.

3. Informelle Tests mit Oberstufenschülern und Studenten

Folgender *Testbogen* (s. gegenüberliegende Seite, Fig. 6) wurde Schülern und Studenten (ohne jede Vorbereitung) vorgelegt.

Einige *Ergebnisse:*

1. 15 Schüler, Grundkurs 12. Schuljahr

Zu c) machen 10 Schüler Lösungsansätze mit Variablen (4 davon verwenden die Buchstaben x, y statt A, B). 8 von ihnen versuchen, die Situation in eine Formel zu übersetzen, nur 5 kommen zu einer adäquaten Gleichung wie $(n - A + 1)/A = B$, die eine direkte Übersetzung des vorliegenden Sachverhalts bildet. Aber dann erfolgt keine Umformung; keiner erhält ein verwertbares Ergebnis. Dies gilt auch für die Lösungsversuche der übrigen Schüler (zwei mit Fallunterscheidungen n gerade/ungerade, zwei mit Ansätzen zu einer Funktionsgleichung oder einem Graphen in der x-y-Ebene, einer mit Hilfe einer Tabelle).

Zu d) äußern 9 Schüler einfach die Vermutung, daß ungerade Zahlen mehr Zerlegungen ergeben, die anderen gar nichts.

2. 7 Studenten für das Lehramt Primarstufe, 3. Semester

Hier ist ein stärker experimentelles Vorgehen festzustellen. Aufgrund von Beobachtungen zu b) wird (ohne Ergebnis) versucht, allgemeine Antworten zu c) und d) zu finden.

Ein Student liefert eine (im wesentlichen richtige) Tabelle aller Zerlegungen für Zahlen bis n = 19. Einer kommt ohne Begründung zu dem Ergebnis »Günstig sind die Zahlen $n = m \cdot 11 + m - 1$« (was in der Tat günstig ist, da die Vielfachen von 12 viele Teiler haben;

Eine Zeitungsseite soll mit einem Streifenraster versehen werden, so daß man verschiedene Möglichkeiten hat, die Seite in Spalten aufzuteilen. Zwischen den Spalten soll immer ein Streifen frei bleiben.

Beispiel: $\boxed{\text{14er-Raster}}$

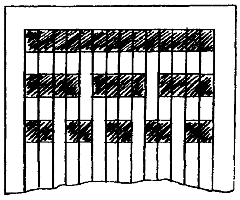
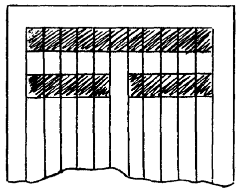


Tabelle aller Möglichkeiten:

Anzahl A der Spalten auf einer Seite	Breite B jeder Spalte (Anzahl der Streifen einer Spalte)
1	14
3	4
5	2

drei Möglichkeiten

a) Untersuche entsprechend: $\boxed{\text{11er-Raster}}$



A	B
1	11
2	5
.	.
.	.
.	.

Wie viele Möglichkeiten?

b) Stelle statt für n = 14 bzw. n = 11 für einige weitere selbstgewählte "Rasterzahlen" n solche Tabellen auf.

c) Formuliere als allgemeine Regel: Wie erhält man zu gegebener Rasterzahl n ohne Probieren alle möglichen Aufteilungen?

d) Welche Rasterzahlen muß man verwenden, um möglichst viele Aufteilungsmöglichkeiten zu haben?

Fig. 6

vgl. hierzu auch Kirsch 1988). Nur ein Student macht einen Ansatz mit Variablen: $n = A \cdot B + x$, $x = A - 1$, formt dies aber nicht um und kommt zu keinem verwertbaren Ergebnis.

Die übrigen liefern allenfalls zusätzliche Beispiele zu b).

3. 26 Studenten für die Lehrämter Sekundarstufe I und Sekundarstufe II, ab 3. Semester

20 Studenten machen Ansätze mit Variablen. Von diesen gelangen 11 über Gleichungen wie $A \cdot B + A - 1 = n$ durch richtige Handhabung des Umformungskalküls im wesentlichen zu einer Lösung von c) und d), die aber nur bei 7 von diesen (davon 6 Studenten für Sek. II) vollständig klar formuliert ist. Die übrigen 9 gelangen teilweise dicht an die Lösung, geben dann aber auf.

Die Ansätze der anderen 6 Studenten (insbesondere mit Fallunterscheidung n gerade/ungerade oder Ausweitung der Beobachtungen zu b)) führen zu keinem verwertbaren Ergebnis.

Zu d) werden häufig (auch von den vorstehend genannten Studenten) als günstige Zahlen Primzahlen oder ungerade Zahlen vermutet.

Insgesamt ist festzustellen, daß in keinem Falle ein bewußtes »Modellbilden« erkennbar ist. Das Aufstellen einer Gleichung zur Beschreibung der Situation kann indessen als unbewußtes, aber adäquates Modellbilden interpretiert werden (s. Abschnitt 4). Nur in wenigen Fällen (und nur bei Studenten für das Lehramt Sekundarstufe II) wurden daraus durch kalkülmäßiges Umformen einige innermathematische Folgerungen gezogen. In noch weniger Fällen konnten diese Ergebnisse sinnvoll interpretiert und zu einer vollständig klaren Lösung des gegebenen Problems weitergeführt werden.

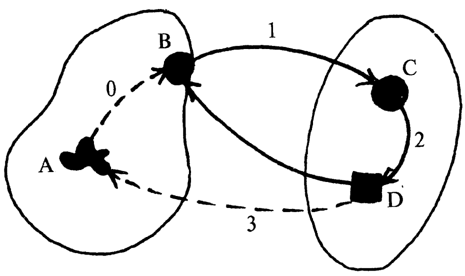
Interessant ist, daß die Frage d) offenbar vielfach in dem Sinne mißverstanden wurde, es sei eine »absolute« Antwort gefordert statt der (von der Sache her gebotenen) »relativen«: *»Die* Zahlen n, bei denen n + 1 viele Teiler im gewöhnlichen Sinn hat.« Dies sollte bei einer Neufassung des Testbogens beachtet werden.

Wir danken Herrn H. Kammer für die Auswertung der Testbogen zu 1) und 3).

4. Einige methodologische und didaktische Bemerkungen

(W. Blum)

Wenn wir eines der üblichen vereinfachten Schemata für das komplexe Beziehungsverhältnis zwischen Realität und Mathematik zugrundelegen (Blum 1985):



Realität Fig. 7 Mathematik

A: Realsituation
B: Realmodell
C: Mathematisches Modell
D: Mathematische Resultate

0: Präzisieren, Strukturieren, Idealisieren
1: Mathematisieren
2: Mathematisches Arbeiten
3: Interpretieren, Anwenden

so läßt sich unser Beispiel wie folgt einordnen:

Die ursprüngliche Realsituation läßt sich für uns nicht mehr rekonstruieren (der Graphiker lebt jetzt im Ausland). Das »Problem des Graphikers« ist bereits als mathematiknahes *»Realmodell«* formuliert. Genau wie bei vielen Textaufgaben (»eingekleideten« Aufgaben) führt diese unmittelbare Nähe zur Mathematik dazu, daß Schüler und Studenten dieses Problem sofort als ein *mathematisches* ansehen und den realen Kontext »vergessen«.

Das heißt aber keineswegs, daß hierdurch schon die eigentliche *Mathematisierung* (Schritt 1 in Fig. 7) durchgeführt wäre. Diese besteht hier im Identifizieren der relevanten Variablen, im Finden eines geeigneten Zusammenhangs zwischen diesen Variablen, als »Formel« oder auch in Worten sowie im Übersetzen der Ausgangs-Frage in eine mathematische. Als Hilfe dienen dabei beispielbezogenes Probieren und Experimentieren, graphische Darstellungen und Tabellen. Je nach Betrachtung der Situation können unterschiedliche Gleichungen aufgestellt werden, die alle inhaltlich sinnvoll sind, z. B.

$$n + 1 = A \cdot (B + 1) \qquad \text{oder} \qquad n = A \cdot B + (A - 1) \qquad \text{oder} \qquad \frac{n + 1 - A}{A} = B.$$

Jede solche Gleichung kann – zusammen mit der Festlegung der inhaltlichen Bedeutung der Variablen sowie der Fragestellung – als ein adäquates *mathematisches Modell* des Problems des Graphikers angesehen werden.

Diese Mathematisierung stellt offenbar die *erste* große *Schwierigkeit* für Schüler und Studenten dar. Vergleichbare Schwierigkeiten kennt man von Lernenden beim Bearbeiten »nicht gehabter« Textaufgaben. Offenbar sind hier intellektuelle Fähigkeiten gefordert, die im gegenwärtigen Mathematikunterricht an Schule und Hochschule nur selten gefordert und kaum gefördert werden.

Der nächste Schritt (2 in Fig. 7) besteht im Umformen (falls dies nötig ist) der aufgestellten Gleichung und insbesondere im Ziehen geeigneter *Folgerungen* hieraus, d. h. vor allem im Gewinnen der entscheidenden Einsicht »Es kommt auf die Teiler von $n + 1$ an«, was auch zur Beantwortung von Fragen wie c) und d) auf dem Testbogen führt. Hier zeigt sich die *zweite* große *Schwierigkeit* für Schüler und selbst für Mathematikstudenten. Immerhin haben einige Studenten durch kalkülmäßiges Umformen der von ihnen aufgestellten Gleichung einige brauchbare mathematische Ergebnisse erhalten. Hierzu scheint demnach ein Mathematikstudium am ehesten zu befähigen. Vielleicht stellt dies aber auch nur eine von Lehreffekten unabhängige intellektuelle Leistung dieser speziellen Studenten dar (die im Urteil von Professoren und Kommilitonen allgemein als »begabter« als andere galten).

Der letzte Schritt (3 in Fig. 7), das *Interpretieren* der erhaltenen mathematischen Ergebnisse im Ausgangsproblem, ist hier, wo dieses Problem so mathematiknah formuliert ist, nicht schwierig. Wenn die mathematische Lösung jedoch – wie das bei »wirklichen« Problemen der Fall ist – in die ursprüngliche reale Situation zurückzuübersetzen ist und praktische Folgerungen zu ziehen sind, zeigt sich eine *dritte Schwierigkeit,* die wir selbst sehr eindrucksvoll bei unserem Graphiker beobachten konnten. Er hatte regelrechte »mentale Sperren«, unser Ergebnis mit seiner Aufgabe in Beziehung zu setzen.

Übrigens scheint die Einfachheit der verwendeten Mathematik keine Hilfe für die mit dem Problem des Graphikers konfrontierten Personen gewesen zu sein. Im Gegenteil scheint die *Diskrepanz zwischen Einfachheit und Wirksamkeit* eher zusätzliche Schwierigkeiten erzeugt zu haben. Dies hängt vermutlich mit dem in Schule und Hochschule vermittelten Bild von Mathematik zusammen. Jedenfalls verdeutlicht das Problem des Graphikers eindrucksvoll, daß für erfolgreiches angewandtes Problemlösen nicht Schönheit und Tiefe der involvierten Mathematik oder Eleganz und Raffinesse der Schlüsse wichtig sind, sondern nur der *Effekt* der Mathematisierung (nach H. Dinges).

Eine *vierte,* generelle *Schwierigkeit* zeigt sich bei einer genaueren Analyse des Verhaltens der Schüler und Studenten: Alle haben Probleme, zielgerichtet vorzugehen, den Überblick zu behalten, ihr eigenes Tun sinnvoll einzuordnen usw.; kurz: ihnen fehlen allgemeinere *Problemlösestrategien* und ein Bewußtsein für durchzuführende Schritte innerhalb eines methodologischen Schemas. Auch solches scheint im Mathematikunterricht zu wenig gefördert zu werden.

Einige *didaktische Folgerungen* liegen auf der Hand: Wenn Mathematik in Schule und Hochschule anwendungsorientiert gelehrt und gelernt werden soll (wofür es vielfältige Gründe gibt; siehe etwa Blum 1985), so ist es nötig, erstens die relevanten *Fähigkeiten* anhand geeigneter Beispiele gezielt zu *fördern* (Übersetzen zwischen Realität und Mathematik in beiden Richtungen sowie Ziehen von innermathematischen Folgerungen) und zweitens die wesentlichen *Schritte* im Kreislaufprozeß bei der Problemlösung nicht nur zu durchlaufen, sondern auch für Lernende *bewußt* zu machen.

Literatur

Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32 (1985), H. 2, S. 195–232

Kirsch, A.: Über eine »Schönheit der Zahl 60«. In: Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter (Hrsg.: P. Bender). Berlin: Cornelsen 1988, S. 99–102