In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 12, 1980, Klett Verlag, Stuttgart, S.101-105

Methodik

Werner Blum, Kassel

0. Vorbemerkungen

Analysiert werden die 8 Bücher aus Liste I sowie die Bücher [II1] und [II7]. Die untersuchten *Aspekte* sind

1. („Lokale") methodische Grundkonzeption, Motivation
- Wie werden die einzelnen Themen erarbeitet?
- Welche Stufungen sind hierbei erkennbar?
- Werden Begründungen gegeben?
- Wie werden mathematische Themen motiviert?
- Welche mathematische Fachmethodik liegt zugrunde?

2. Methodische Hilfen, Darstellungen
- Welche fachmethodischen Hilfen werden bei einzelnen mathematischen Stoffinhalten gegeben?
- Welche Ebenen der Darstellung werden benutzt?
- Wie ist die verwendete Sprache?

Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt bzgl. Aspekt 1 einerseits auf *mathematischen Themen im engeren Sinne* wie Arithmetik, Gleichungen, Funktionen, ebene Figuren, Körper, Pythagoras oder Trigonometrie, andererseits auf solchen *in Anwendungen eingebetteten mathematischen Themen*, die unabhängig vom außermathematischen Sachverhalt ein eigenständiges Gebiet konstituieren, wobei der mathematische den fachkundlichen Gehalt überwiegt, und die traditionell zum „allgemeinbildenden" Schulstoff (des Sachrechnens) gehören, insbesondere Prozent- und Dreisatzrechnung. *Nicht* so eingehend dargestellt werden in Abschnitt 1 diejenigen Themen, die zur *Fachkunde* gehören und in denen mathematische Stoffinhalte als eigentliches „Fachrechnen" verwoben sind (vgl. die Analysen von Wombacher und Strässer). Dies ist insofern gerechtfertigt als sich zeigt, daß die methodische Grundkonzeption bei diesen Themen derjenigen bei den anderen Themen sehr ähnlich ist.

Bzgl. Aspekt 2 werden sämtliche mathematischen Inhalte berücksichtigt, d. h. sowohl die manchmal so genannte „allgemeine Mathematik", die Schwerpunkt bei Aspekt 1 ist, als auch das eigentliche Fachrechnen. Bei den Teil-Aspekten „Darstellungsebenen" und „Sprache" wird darüber hinausgehend jeweils das gesamte Buch betrachtet.

Um einige Feststellungen deutlicher zu machen, sind zahlreiche Ausschnitte aus den analysierten Büchern abgebildet. Dafür wird an einigen Stellen auf detailliertere Ausführungen verzichtet. Überhaupt wird hier eher versucht, methodische Gemeinsamkeiten verschiedener Bücher herauszuarbeiten, als jedes einzelne Buch in seinen methodischen Besonderheiten zu analysieren. Dadurch fallen einige Beurteilungen etwas vergröbert aus, was aber bewußt in Kauf genommen wird.

1. Methodische Grundkonzeption

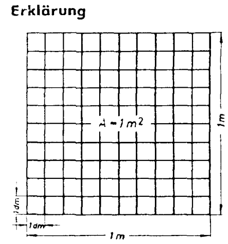
Beim methodischen Vorgehen in bezug auf *mathematische* Themen (im eben definierten Sinn) können grob drei Typen A, B, C unterschieden werden.

A) Neue Themen beginnen i. allg. mit kurzen erläuternden Vorbemerkungen allgemeiner Art. Es folgen Musterbeispiele nebst Lösung. Vor, nach oder auch parallel zu den Musterbeispielen werden Rezepte – je nach Thema auch als Formeln – gegeben, z. T. ausführlich dargestellt und durch „Merke" o. ä. hervorgehoben. Daran schließen sich innermathematische und vor allem zahlreiche fachkundliche Übungsaufgaben an. Begründungen fehlen völlig. Methodische Stufungen der mathematischen Inhalte sind nur insoweit erkennbar, als die beschriebene Vorgehensweise bei jedem Teil-Abschnitt innerhalb eines mathematischen Kapitels wiederholt wird.

So lassen sich *erstens* die (technischen) Fachrechenbücher [I4] und [II7] charakterisieren.

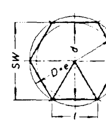
Beispiele:
1] Flächenberechnung ([I4], S. 35/36)

Erklärung



Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen:
Länge und Breite.
Daraus ergibt sich, daß dies auch beim Flächenmaß in Erscheinung treten muß.
Länge · Breite = Fläche
m · m = m²
Durch die Hochzahl 2 (Quadratmeter) sind die zwei Ausdehnungen (Dimensionen) erkennbar.
Eine Fläche ist eine ebene Ausdehnung, die durch gerade oder krumme Linien begrenzt ist.
Man unterscheidet: 1. Eckige Flächen
2. Runde Flächen
3. Zusammengesetzte Flächen

Formel mit Beispiel



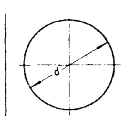
Von einem Sechseck sind gegeben: SW = 22 mm, l = 12,7 mm. Berechne Fläche und Umfang in mm² bzw. mm!

Regelmäßiges Vieleck

$\boxed{A = \frac{l \cdot d}{4} \cdot n \qquad U = l \cdot n}$

$A = \frac{12{,}7 \cdot 22}{4} \cdot 6 = \underline{419{,}1\ \mathrm{mm}^2}$

$U = 12{,}7 \cdot 6 = \underline{76{,}2\ \mathrm{mm}}$



Berechne Fläche und Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d = 80 mm in cm² bzw. cm!

Kreis

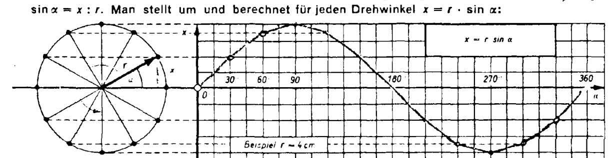
$\boxed{A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \qquad U = d \cdot \pi}$

$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot \pi}{4} = \underline{50{,}27\ \mathrm{cm}^2}$

$U = 8 \cdot \pi = \underline{25{,}13\ \mathrm{cm}}$

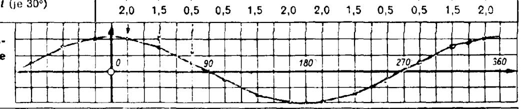
2] Sinusfunktion ([II7], S. 88)

① **Sinuslinie** nennt man die Kennlinie für den senkrechten Anteil der Zeigerlänge r (hier: x) bei wachsendem Drehwinkel α. Sinus-Spitzenwert ist die Zeigerlänge r. Im Dreieck mit $\sphericalangle\alpha$ gilt $\sin\alpha = x : r$. Man stellt um und berechnet für jeden Drehwinkel $x = r \cdot \sin\alpha$:



Drehwinkel α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Sinus α nach Tabelle	0	$\frac{1}{2}$	$\approx\frac{7}{8}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	-1	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0
$x = r \cdot \sin\alpha$ (r = 4 cm)	0	2	3,5	4	3,5	2	0	−2	−3,5	−4	−3,5	−2	0
Anstieg $\Delta x/t$ (je 30°)		+2,0	+1,5	+0,5	−0,5	−1,5	−2,0	−2,0	−1,5	−0,5	+0,5	+1,5	+2,0

② **Anstiegs-Kennlinie** $\left(\text{für } \frac{\Delta x}{t}\right)$



Die Anstiegskennlinie ist um 90° verschoben. Größter Anstieg ist $\omega \cdot r$.

Sie beginnt mit dem größten Anstieg und zeigt $\Delta x/t$ (x-Änderung im Zeitabschnitt t). Bei senkrechtem Zeiger (α = 90°) keine x-Änderung! Bei waagerechtem Zeiger größte x-Änderung mit Zeigergeschwindigkeit! Zeigergeschwindigkeit ist $v = \omega \cdot r$ (siehe Tafel 17) = Winkelgeschwindigkeit mal Zeigerlänge.

Zweitens können die (kleinere Berufsfelder betreffenden) Bücher [I2], [I6] und [II1] hierzu gerechnet werden.

Beispiele:
3] Multiplikation in $\mathbb{Q}$, ([I2], S. 31)

Erläuterungen:
1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert.

Beispiele:

a) $\frac{5}{8} \times 3 = \frac{5 \times 3}{8} = \frac{15}{8} = \underline{\underline{1\frac{7}{8}}}$

4] Siehe Fußnote 1 in der Zusammenfassung von Bardy.

5] Prozentrechnung ([II1], S. 16/17)

Grundlage der Prozentrechnung ist die Dreisatzrechnung.

. . . .

Berechnung des Prozentsatzes

Ganz gleich, welchen Lösungsweg wir einschlagen, zunächst notieren wir die gegebenen und gesuchten Größen.

40 kg eines Fasergemischs enthalten 8 kg Zellwolle. Wieviel Prozent sind das?

Grundwert: 40 kg
Prozentwert: 8 kg
Prozentsatz gesucht

Dreisatz
Diese Methode ist sicher, aber sehr ausführlich:

Beim Ansatz achten wir darauf, daß Grundwert und Prozentwert auf einer Seite und 100% und Prozentsatz auf der anderen Seite stehen.

40 kg entsprechen 100%
8 kg entsprechen ? %

Wir lösen dann die Aufgabe in drei Phasen wie bei jedem einfachen Dreisatz.

$40\ kg \mathrel{\hat{=}} 100\%$
$1\ kg \mathrel{\hat{=}} 100\% : 40$
$8\ kg \mathrel{\hat{=}} \frac{100 \cdot 8}{40}\% = \underline{\underline{20\%}}$

Drittens kann auch das Elektro-Fachrechenbuch [I8] hierunter subsumiert werden. In diesem Buch werden auf der rechten Seitenhälfte Musterbeispiele vorgerechnet und Formeln angegeben. Auf der linken Seitenhälfte werden verbale Rezepte formuliert; weiter werden dort i. a. die jeweiligen Begriffe und Lösungswege erläutert, und zwar weit ausführlicher als in den bisher genannten Büchern.

Beispiel 6]: Bruchgleichungen ([I8], S. 30)

Lösungsgang:

1. Faktoren ausklammern und, wenn möglich, Brüche kürzen
2. Hauptnenner H bestimmen
3. Alle Glieder der Gleichung gleichnamig machen
4. Nenner auf beiden Seiten der Gleichung weglassen
5. Klammern ausrechnen
6. Glieder ordnen
7. Glieder zusammenfassen
8. Gleichung mit −1 multiplizieren
9. Unbekanntes Glied isolieren und ausrechnen

12. $\frac{6x+6}{8x-64} - 2 + \frac{x+1}{x-8} = \frac{6x-6}{4x-32}$

$\frac{2(3x+3)}{8(x-8)} - 2 + \frac{x+1}{x-8} = \frac{2(3x-3)}{4(x-8)}$

$\frac{3x+3}{4(x-8)} - 2 + \frac{x+1}{x-8} = \frac{3x-3}{2(x-8)}$

$H = 4(x-8)$

$\frac{3x+3}{H} - \frac{2 \cdot 4(x-8)}{H} + \frac{4(x+1)}{H} = \frac{2(3x-3)}{H}$

$3x + 3 - 8(x-8) + 4(x+1) = 2(3x-3)$

$3x + 3 - 8x + 64 + 4x + 4 = 6x - 6$

$3x - 8x + 4x - 6x = -6 - 4 - 64 - 3$

$-7x = -77 | \cdot -1$

$7x = 77$

$x = \frac{77}{7} = \underline{11}$

Viertens ist auch der größte Teil der mathematischen Themen des Metall-Fachrechenbuchs [I1] zum eingangs beschriebenen Typ zu rechnen.

Beispiel 7]: Lösen von Gleichungen ([I1], S. 8)

Rechnen mit Gleichungen
Im praktischen Leben rechnet man mit Gleichungen (Formeln), aus denen ein Wert, die Lösungsvariable, berechnet wird. Man formt die Gleichung so um, daß die Lösungsvariable allein auf einer Seite steht. Je nach Art der Gleichung wird die Lösungsvariable berechnet, indem der mit ihr auf derselben Seite stehende Wert auf beiden Seiten entweder addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert, bzw. auf beiden Seiten potenziert oder radiziert wird.

Beim Umstellen einer Zahlengröße auf die andere Seite der Gleichung werden die Rechenbefehle umgekehrt

(Die Lösungsvariable *x* sei in folgenden Gleichungen 16)

. . . .

+ wird −	− wird +	· wird :
$\frac{x}{2} = 8$	$x^2 = 256$	$\sqrt{x} = 4$
$\frac{x \cdot 2}{2} = 8 \cdot 2$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{256}$	$(\sqrt{x})^2 = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$	$x = 16$
Vereinfachung		
$\frac{x}{2} = 8$	$x^2 = 256$	$\sqrt{x} = 4$
$x = 8 \cdot 2$	$x = \sqrt{256}$	$x = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$	$x = 16$
: wird ·	**Exponent wird Wurzelexponent**	**Wurzelexponent wird Exponent**

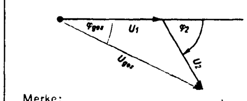
In den mathematischen Teilen dieses Buches finden sich jedoch auch an einigen Stellen methodische Stufungen und begründende Herleitungen von Formeln, was in den entsprechenden Teilen der anderen bisher genannten Bücher fehlt.

Die Grundkonzeption „Musterbeispiele mit Handlungsanweisungen (z. B. Rechenrezepte oder Formeln) – Übungsaufgaben" trifft auch auf die *fachkundebezogenen* Teile dieser Bücher zu. Doch finden sich hierin stellenweise auch Begründungsansätze, etwa Herleitungen fachkundlicher Formeln oder Erläuterungen zu fachkundlichen Rechnungen.

Beispiele aus der Fachkunde:

8] Zeigerdreieck bei Wechselströmen ([II7], S. 90)

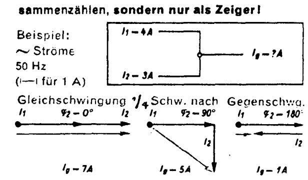
Zeigerdreieck für Effektivwerte:
Legen Sie einen geeigneten Maßstab fest!
Setzen Sie die Teilwerte aneinander!
Messen Sie die Gesamtwerte!



Merke:
∢ φ_2 nach links, wenn 2. Zeiger voreilt;
∢ φ_2 nach rechts, wenn 2. Zeiger nacheilt;
Zeigerlänge ≙ Effektivwert.

Sinusschwingungen gleicher Frequenz, die um den Phasenwinkel φ (Phi) zeitlich verschoben sind, arbeiten zeitweise gegeneinander! Ihre Effektivwerte dürfen Sie nicht als Zahlen zu sammenzählen, sondern nur als Zeiger!

Beispiel:
~ Ströme
50 Hz
(—I für 1 A)

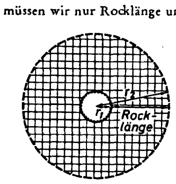


I_g zwischen 7 A und 1 A je nach Winkel φ_2!

9] Glockenröcke ([II1], S. 64)

Der echte Glockenrock bildet, flach aufgelegt, stets einen vollen Kreis, genauer: einen Kreisring.

Zur Schnittaufstellung
müssen wir nur Rocklänge und Taillenweite kennen.



—— *Taillenweite*
········ *kleiner (innerer) Umfang* = U_1
- - - - *großer (äußerer) Umfang* = U_2

Zuerst berechnen wir den kleinen Halbmesser = r_1 mit Hilfe der Kreisformel: $r = \frac{U}{2\pi}$

Diese Größe addieren wir mit der Rocklänge und erhalten den großen Halbmesser.

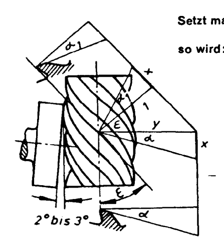
Länge: 70 cm, Taillenw.: 64 cm, kleiner (= r_1) und großer (= r_2) Halbmesser gesucht.

$r_1 = \frac{Tw}{2\pi} = \frac{64\ cm}{2 \cdot 3{,}14}$
= (etwa) 10 cm
d. h.: kleiner Halbmesser: $\underline{10\ cm}$

$r_2 = 10\ cm + 70\ cm = 80\ cm$
d. h.: großer Halbmesser $\underline{80\ cm}$

Jetzt stellen wir den Schnitt auf: um den gleichen Mittelpunkt ziehen wir zwei Kreise, der eine mit dem kleinen, der andere mit dem großen Halbmesser. Der innere Kreis ist die Taillenlinie, der äußere die Kante des Saumes.

10] Werkzeugschleifen ([I1], S. 130)



Setzt man die Ankathete = 1,

so wird: $\tan \alpha_1 = \frac{x}{1}$

$\underline{x = \tan \alpha_1}$

$\cos \varepsilon = \frac{1}{y}$

$y = \frac{1}{\cos \varepsilon}$

$\tan \alpha = \frac{x}{y}$

$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha_1}{\frac{1}{\cos \varepsilon}}$

$\boxed{\tan \alpha = \tan \alpha_1 \cdot \cos \varepsilon}$

. . . .

Der wirksame Freiwinkel α_1 wird senkrecht zur Schneide gemessen und wird im Verhältnis zum Freiwinkel α um so größer, je größer der Neigungswinkel ε der Wendel ist.

Beispiel: $d = 70$ mm, $\varepsilon = 25°$, $\alpha_1 = 5°$
Ges.: a) α **und b)** h **in mm**
Lös.: a) $\tan \alpha = \tan \alpha_1 \cdot \cos \varepsilon$
$\tan \alpha = \tan 5° \cdot \cos 25°$
$\tan \alpha = 0{,}0875 \cdot 0{,}9063$
$\tan \alpha = 0{,}0793$
$\underline{\alpha = 4°32'}$

Das letzte Beispiel zeigt exemplarisch, daß [I1] bzgl. seiner fachbezogenen Teile aus Kategorie A herausfällt und zum zweiten Typ überleitet:

B) In [I5] beginnen neue Themen mit ausführlichen, auch beispielgebundenen Erläuterungen, die im weiteren wieder aufgegriffen werden. Solche Erläuterungen sind in [I3] kürzer oder fehlen auch ganz. Gemeinsam ist beiden (kaufmännischen) Fachrechenbüchern, daß – wie bei Typ A – Musterbeispiele mit Lösungen folgen. Dann werden mit „Merke" bezeichnete rezeptartige Handlungsanweisungen gegeben und viele meist fachkundliche Übungsaufgaben gestellt.

Im Gegensatz zu Typ A werden in beiden Büchern zahlreiche Begründungen gegeben (bzw. wird dies wenigstens versucht). Deshalb (und auch wegen des Versuchs einer „Modernisierung“ durch Hinzunahme einleitender Kapitel über Mengen und Logik; vgl. die Analysen von HUMPERT) können die Bücher [I3] und [I5] als eigener Typ aufgeführt werden.

Beispiele:

11] Dreisatzrechnung ([I3], S. 71 u. 76)

An den Zahlenpaaren unserer Preistabelle fällt auf, daß ihr Quotient denselben Wert hat, zum Beispiel $\frac{1}{1,4} = \frac{2}{2,8} = \frac{3}{4,2}$ bzw. $\frac{1,4}{1} = \frac{2,8}{2} = \frac{4,2}{3}$ Zahlenpaare, deren Quotient gleich ist, heißen **quotientengleiche Zahlenpaare.**

Bei den geordneten Paaren (DM; m) hat der Quotient von jedem Paar den Wert 1,4. Die Zahl 1,4, die den Preis je Längeneinheit angibt, bezeichnet man als **Proportionalitätsfaktor.** Mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors berechnen wir den Preis für jede gewünschte Menge: 1,40 DM · 2; 1,40 DM · 3; 1,40 DM · 4 usw.

. . . .

BEISPIEL MIT LÖSUNG

Aufgabe:

Für eine 350 km lange Geschäftsreise benötigte ein Kaufmann für seinen Wagen 32,2 Liter Benzin. Wieviel Liter verbrauchte der Wagen auf 100 km?

Lösung:	
Was ist gegeben? (Bedingungssatz)	auf 350 km braucht man 32,2 Liter
Was ist gefragt? (Fragesatz)	auf 100 km braucht man x Liter
Gleichbenannte Größen untereinander schreiben!	
Verhältnis festlegen:	je weniger km, desto weniger Benzin: gerades Verhältnis.
Bei geraden Verhältnissen bilden wir quotientengleiche Zahlenpaare:	$\frac{x \text{ Liter}}{100 \text{ km}} = \frac{32,2 \text{ Liter}}{350 \text{ km}}$
Ansatz der Verhältnisgleichung: x verhält sich zu 100 wie 32,2 zu 350.	$\frac{x}{100} = \frac{32,2}{350} \quad \mid \cdot 100$
x ausrechnen:	$x = \frac{32,2 \cdot 100}{350}$ $\underline{\underline{x = 9,2}}$
Ergebnis:	9,2 Liter Verbrauch auf 100 km

MERKE:

> Gerades Verhältnis: Je weniger – desto weniger.
> Je mehr – desto mehr.
> Wir erhalten quotientengleiche Zahlenpaare und bilden eine Verhältnisgleichung.

12] Prozentrechnung ([I5], S. 104/105)

1. Beispiel: Als Transportkosten für eingekaufte Ware werden uns 2 % des Bezugspreises (7256,85 DM) berechnet. Wieviel DM sind das?

Lösung:
100 % — 7256,85 DM
1 % — 72,5685 „
2 % — 145,137 „
Uns werden <u>145,14 DM</u> Transportkosten berechnet.

Begründung: Gegeben sind der Grundwert g und der Prozentsatz p (g, p ∈ Q).
Zu bestimmen ist der Prozentwert w.
Das Verhältnis, in dem p zu 100 steht, ist also auf w : g zu übertragen. Daher gilt:

$p : 100 = w : g$	$w = \frac{p \cdot g}{100}$
$100 \cdot w = p \cdot g$	$w = \frac{g}{100} \cdot p$

Merke: $\boxed{\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert}}{100} \cdot \text{Prozentsatz}}$

13] Terminrechnung ([I5], S. 164/165)

I. Berechnung des mittleren Verfalltages

Gegenstand der Terminrechnung ist die Ermittlung des Tages, an dem mehrere Einzelbeträge, die zu verschiedenen Terminen fällig sind, ohne Nachteil für Schuldner und Gläubiger in e i n e m Betrag gezahlt werden können. Diesen Zahlungstermin nennt man den mittleren Verfalltag.

Beispiel: Die Firma Peter Krause, Lüdenscheid, reicht am 10. 5. bei der Handels- und Gewerbebank 5 Wechsel ein und bittet um Gutschrift zum mittleren Verfall. Es sind die Wechsel Nr. 1: 6000,— DM, fällig 28. 5., Nr. 2: 1400,— DM, fällig 11. 6., Nr. 3: 500,— DM, fällig 18. 6., Nr. 4: 3100,— DM, fällig 26. 7., Nr. 5: 4500,— DM, fällig 2. 8. Berechnen Sie den mittleren Verfalltag!

Lösung: 1. Ordnen Sie die Beträge nach der Fälligkeit.
2. Wählen Sie — am besten aus den vorhandenen Verfallterminen —

. . . .

Die Handels- und Gewerbebank schreibt den Gesamtbetrag von 15 500,— DM zum 30. 6. gut.

Begründung: Würde die Bank den Gesamtbetrag zum 28. 5. (Stichtag) gutschreiben, so hätte die Firma Krause einen Zinsvorteil von 4960 # (bei 3 % wären das z. B. 41,33 DM Zinsen). Jeder Tag, um den die Guschrift des Betrages von 15 500,— DM s p ä t e r erfolgt, v e r m i n d e r t diesen Vorteil um 155 #. Die Gutschrift muß also um so viele Tage hinausgeschoben werden, daß der Zinsvorteil ausgeglichen ist, also um

4960 : 155 = 32 Tage

Der mittlere Verfalltag liegt also um 32 Tage **nach** dem gewählten Stichtag (28. 5.).

. . . .

Merke: $\boxed{\text{Mittlerer Verfalltag} = \text{Stichtag} \pm \frac{\text{Summe der Zinszahlen}}{1\,\%\text{ des Kapitals}}}$

Beachte: Wenn die Einzelbeträge gleich groß sind, dann errechnet man den mittleren Verfalltag, indem man den einfachen Durchschnitt (arithmetisches Mittel) der Tage zum Stichtag addiert (bzw. vom Stichtag subtrahiert).

C) Im (bautechnischen) Fachrechenbuch [I7] beginnen neue Themen-Abschnitte stets mit der Angabe eines Lernziels. Es folgt eine erläuternde „Grundinformation“. Diese enthält ggf. auch Formeln, die i. a. erarbeitet und nicht wie in den anderen Büchern – mit Ausnahme von [I5] und [I3] sowie teilweise [I1] – einfach angegeben werden. Dann wechseln weitere Erläuterungen mit Beispielen ab. Schließlich werden zahlreiche Übungsaufgaben gestellt. An vielen Stellen werden Begründungen gegeben (bzw. wird dies wenigstens versucht), z. T. beispielgebunden. Im Gegensatz zu den bisher genannten Büchern sind sämtliche Themen (inklusive Aufgaben) methodisch sorgfältig gestuft aufgebaut.

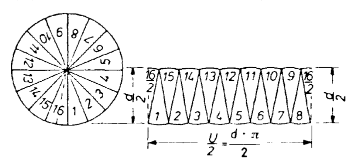
Beispiel 14]: Kreisumfang und -inhalt ([I7], S. 75)

1. Lernziel: Die für die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts am Kreis üblichen Formeln angeben und Berechnungen durchführen können.

Grundinformation:
Beim Kreis stehen **Umfang** (*U*) und **Durchmesser** (*d*) in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Wird die Länge des Umfanges eines Kreises durch den dazugehörigen Durchmesser geteilt, so ergibt sich immer die Zahl 3,141 .. $\left(\frac{U}{d} = 3,141\right)$. Sie wird als **Kreiszahl** bezeichnet und mit dem griechischen Buchstaben π(pi) angegeben.
Für den Kreisumfang (*U*) gilt also die Formel:

$$\boxed{U = d \cdot \pi}$$

Um die **Fläche** eines Kreises zu ermitteln, wird der Kreis in sehr viele Kreisausschnitte zerlegt, die zu einer rechteckähnlichen Figur zusammengesetzt werden. Wird die Anzahl der Kreisausschnitte vergrößert, so geht die Figur immer mehr in ein Rechteck über, dessen Seiten der halbe Durchmesser $\left(\frac{d}{2}\right)$ und der halbe Kreisumfang $\left(\frac{d \cdot \pi}{2}\right)$ sind.



Für die Kreisfläche (A) gilt also die Formel:

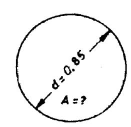
$$\boxed{A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \quad \text{oder} \quad A = 0,785 \cdot d \cdot d}$$

In die Formeln für den Flächeninhalt und den Umfang wird im allgemeinen der **Durchmesser** *und nicht der Radius eingesetzt, weil in der Praxis meistens der Durchmesser angegeben wird, z.B. Durchmesser eines Rundholzes, eines Betonstabstahles, einer Stahlbetonsäule usw.*

. . . .

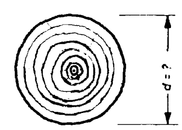
Aus der Formel $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ oder $A = 0,785 \cdot d^2$ ergibt sich durch Umstellung:

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{\frac{A}{0,785}}}$$



Beispiel 1:
Ein kreisrunder Tisch hat einen Durchmesser von 0,85 m. Welchen Flächeninhalt hat die Tischplatte?

$A = 0,785 \cdot d \cdot d = 0,785 \cdot (0,85\text{ m})^2 = \underline{0,567\text{ m}^2}$

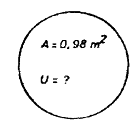


Beispiel 2:
Ein Rundholz hat eine Querschnittsfläche von 362,5 cm². Welchen Durchmesser hat das Rundholz?

$d = \sqrt{\frac{A}{0,785}} = \sqrt{\frac{362,5\text{ cm}^2}{0,785}} = \underline{21,49\text{ cm}}$

Aus der Formel $U = d \cdot \pi$ ergibt sich durch Umstellung:

$$\boxed{d = \frac{U}{\pi}}$$



Beispiel 1:
Wie groß ist der Umfang eines Kreises, der eine Fläche von 0,98 m² hat?

$d = \sqrt{\frac{A}{0,785}} = \sqrt{\frac{0,98\text{ m}^2}{0,785}} = \underline{1,117\text{ m}}$

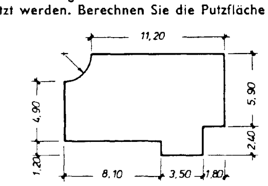
$U = d \cdot \pi = 1,117\text{ m} \cdot 3,14 = \underline{3,508\text{ m}}$

. . . .

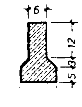
Die fachkundlichen Rechenaufgaben, die in den anderen Büchern in eigenen Abschnitten abgehandelt werden, sind bei diesem Buch in großem Umfang in die Übungsaufgaben integriert.

Beispiel 15]: Inhalt zusammengesetzer Flächen ([I7], S. 85)

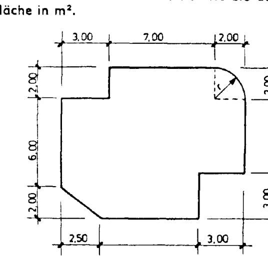
19.4. Die abgebildete Deckenuntersicht soll verputzt werden. Berechnen Sie die Putzfläche in m².



19.5. Berechnen Sie die Querschnittsfläche des abgebildeten Stahlbeton-Fertigbalkens.



19.8. Ein Gebäude hat die in der Zeichnung angegebenen Außenmaße. Berechnen Sie die überbaute Fläche in m².



Als nächstes soll nun untersucht werden, wie mathematische Themen *motiviert* werden. In fünf Büchern, nämlich [I1], [I6], [II7] sowie – abgesehen vom Thema Dualsystem – [I2] und [I5] wird keinerlei Motivationsversuch unternommen. Vielmehr beginnen neue Stoffgebiete sofort mit einem innermathematischen Beispiel oder einer innermathematischen Erläuterung.

Beispiel 16]: Proportionen ([I1], S. 9)

Verbindet man zwei Verhältnisse von gleichem Wert zu einer Gleichung, so erhält man eine Proportion.*

Beispiel: $2:3 = 4:6$ oder $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

In vier Büchern, nämlich [I3], [I4], [I8] und [II1] werden einige der mathematischen Themen zu Beginn motiviert, wobei fast stets fachkundliche Sachverhalte herangezogen werden.

Beispiele:
17] Graphen im Koordinatensystem ([I8], S. 51)

Diagramme sind graphische Darstellungen von Zahlenwerten, physikalischen Größen und veränderlichen Zuständen, Vorgängen und Funktionen durch Linien und Flächen.

Abb. C.1 zeigt das Belastungsdiagramm eines Elektrizitätswerkes an einem Wintertag. Die dicke Linie gibt die jeweilige Belastung, die Fläche die abgegebene Energie an.

Diagramme werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gezeichnet.

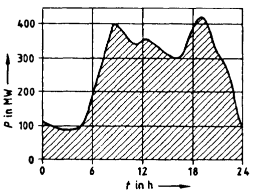
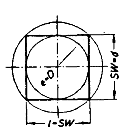


Abb. C.1

18] Satz des Pythagoras ([I4], S. 78)

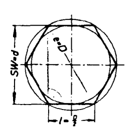
Der Lehrsatz des Pythagoras findet vielfältige Anwendung in der Technik. Die Berechnung der Schlüsselweite eines Vier- oder Sechskantes, die Errechnung des Eckmaßes eines Vieleckes und die Berechnung der Höhe eines Körpers erfolgt mit Hilfe des Pythagoras.

. . . .



Vierkant

D = Durchmesser des Umkreises [mm]
d = Durchmesser des Inkreises [mm]
e = D = Eckmaß [mm]
d = SW = Schlüsselweite [mm]
l = Länge der Vieleckseite [mm]



Sechskant

Eine Sonderstellung nimmt auch hier Buch [I7] ein. Dort wird versucht, jedes Thema durch Angabe eines Lernziels sowie i. a. durch zusätzliche Erläuterungen und Beispiele zu motivieren.

Beispiele: 14] sowie
19] Satz des Pythagoras ([I7], S. 61)

Der Lehrsatz wurde vor ca. 2500 Jahren von dem griechischen Gelehrten Pythagoras mathematisch formuliert und deshalb nach ihm benannt. Die dem Lehrsatz zugrunde liegende Erkenntnis machten sich aber schon viel früher die Bauleute des Alten Ägypten zunutze, indem sie rechte Winkel mittels Dreiecken mit einem Seitenverhältnis von 3:4:5 abstecken (s. Aufgabe 14.1.).

1. Lernziel: Den Lehrsatz des Pythagoras in Worten und in der Form $c^2 = a^2 + b^2$ angeben, davon die Formeln für die Berechnung von c, a und b ableiten und solche Berechnungen durchführen können.

Zum Abschluß von Abschnitt 1 wenden wir uns der *mathematischen Fachmethodik* zu. Die in den analysierten Fachrechenbüchern verwendeten mathematischen *Begriffe und Verfahren* entstammen fast durchweg der *Hauptschul-Methodik der 50er Jahre.* So verwenden beispielsweise in der *Algebra* bis auf [I3] und teilweise [I1] alle Bücher die traditionellen Begriffe.

Beispiel 20]: Einführung Gleichungslehre ([I8], S. 25)

Ist in einer Gleichung ein Glied unbekannt, so nennt man diese Gleichung *Bestimmungsgleichung*, weil man das unbekannte Glied (x) ausrechnen kann. Führt die Lösung zu einer identischen Gleichung, so war die Rechnung richtig.

Alle z. B. von VOLLRATH (Vollrath, H.-J.: Didaktik der Algebra. – Stuttgart, 1974. – Hier: S. 91 ff.) formulierten Kritikpunkte an der traditionellen Gleichungslehre lassen sich wiederfinden; weitere Beispiele: 6], 7] (Zur Algebra vgl. auch die ausführlichen Analysen von HUMPERT und STRÄSSER).

In der *„Schlußrechnung“* benutzen bis auf [I3] sämtliche Bücher das traditionelle Drei-Satz-Verfahren, oft verbunden mit dem Kurz-Schema „Überkreuz-Malnehmen“; meist werden (Ausnahmen: [I1], [I4], [I8]) „Je-desto-Zuordnungen“ mit (Anti-)Proportionalitäten verwechselt (siehe Beispiel I1]).

Beispiel 21]: Dreisatzrechnung ([I4], S. 16)

Ein Auto braucht für eine Strecke von 150 km 120 Minuten. Wie lange braucht es für eine Strecke von 450 km?

gegebene Größen	Behauptungssatz	150 km $\triangleq$ 120 Minuten
Einheit	Schluß auf Einheit	1 km $\triangleq \frac{120}{150}$ Minuten
gesuchte Größe	Schluß auf gesuchte Größe	450 km $\triangleq \frac{120 \cdot 450}{150} = \underline{\underline{360 \text{ Minuten}}}$

Die grundlegende Kritik von KIRSCH (Kirsch, A.: Zuordnungen zwischen Größenbereichen. Lehrerheft Mathematik heute 7. – Hannover, 1973. – S. 33–62. Hier: S. 34.) an der traditionellen Schlußrechnung trifft auf Fachrechenbücher offenbar in vollem Umfang zu (vgl. hierzu auch die Analysen von WOMBACHER).

In der *Prozentrechnung* findet man Dreisatzmethode (in [I1], [I2], [I3], [I5], [I6], [I8], [II1]; siehe Beispiele 5], 12]) oder schlichte „Formeleinsetzmethode“ (in [I4], [II7], zudem auch in [I8], [II1]; auch [I7] ist hierzu zu zählen, aber nach Herleitung der Formeln). Nur [I3] und [I5] verwenden auch Verhältnis-Ansätze.

Die bisherigen Beispiele lassen erkennen, daß man die *Konzeption* der meisten Bücher so charakterisieren kann: Mathematische Stoffinhalte sollen *beim Lösen fachkundlicher Aufgaben als Hilfsmittel* eingesetzt werden; diese Verwendung von Mathematik braucht nicht verständig zu erfolgen, sondern kann *schematisch* geschehen *nach Rezepten,* die aus *Musterbeispielen* erwachsen und dann *eingeübt* werden (vgl. die Analysen von WOMBACHER). Doch wenn schon ein *verständiger* Einsatz mathematischer Hilfsmittel – aus Gründen, die hier nicht diskutiert werden können (siehe W. Blum: Fachrechnen/Technische Mathematik. – In: Bonz, B.; Lipsmeier, A. (Hrsg.): Fachdidaktik Metalltechnik. – Stuttgart, 1980) – nicht für möglich oder nicht für nötig gehalten wird, so ist doch zumindest ein gezielter Einsatz unabdingbar, genauer: Der Schüler braucht allgemeine Strategien zum Lösen von *Sachaufgaben.* Über die Wichtigkeit derartiger Strategien gibt es kaum Zweifel, insbesondere wenn man Ursachen von Fehlern in Lehrabschlußprüfungen analysiert. Jedoch nur Buch [II7] thematisiert das Lösen von fachkundlichen Rechenaufgaben.

Beispiel 22]: Lösen von Sachaufgaben ([II7], S. 56)

① Dem Wortlaut der Aufgabe folgend notieren wir alle Rechenwerte in der Form: Größe = = Zahlenwert mal Einheit.
Hierzu gehören auch Werkstoffangaben! Unterschiedliche Teil- und Sammelmaße sind so umzurechnen, daß gleichartige Größen gleiche Einheiten erhalten. Die gesuchte Größe steht als Zielangabe für den Lösungsweg.

③ Für Formel-Umstellungen notieren Sie vorher am Blattrand die bekannte Stammformel! Schreibt man die Ansatzformel und alle nötigen Hilfsformeln fertig umgestellt untereinander, so kann man – von unten beginnend – die Ausrechnung jeweils in derselben Zeile beifügen.

① Der Lösungsweg beginnt mit der Formel für die gesuchte Größe. Die Formel soll rechts nur gegebene Größen oder solche enthalten, die man – mit weiteren Formeln — aus den gegebenen Größen berechnen kann. Im Beispiel kann man *I* aus der Stromdichte, *R* aus Werkstoffangaben und Abmessungen berechnen.

④ Zur Ausrechnung setzt man die gegebenen Werte und errechnete Hilfswerte in die Formeln ein. Man rechnet mit Rechenstab-Genauigkeit. Einheiten beim Einsetzen beachten, in allen Zwischenrechnungen und Ergebnissen angeben! Nebenrechnungen (beim Rechnen ohne Rechenstab) rechts am Blattrand ausführen! Endergebnis doppelt unterstreichen!

Anmerkung: Um physikalische Größengleichungen mit Formelzeichen — insbesondere kompliziertere Größengleichungen z. B. mit Doppelbrüchen, Potenzen und Wurzeln — sicher zu beherrschen, ist es zweckmäßig, die Einheiten stets mit in die Rechnung hineinzunehmen, so daß beide Gleichungsseiten nicht nur in den Zahlenwerten, sondern auch in den Einheiten übereinstimmen.

2. Methodische Hilfen, Darstellungen

Bei der Darbietung und Verwendung mathematischer Themen werden in den Büchern *fachmethodische Hilfsmittel* nur in geringem Umfang eingesetzt; vgl. auch die in Abschnitt 1 gegebenen Beispiele. So findet sich nur in vier Büchern ein Zahlenstrahl, und auch dieser jeweils nur einmal zu Beginn der Arithmetik. Die Bücher [I3], [I8] und [II7] stellen zwar zu Beginn der Gleichungslehre eine Waage dar, doch nur [II7] arbeitet im weiteren nochmals hiermit:

Beispiel 23]: Formelumstellen ([II7], S. 20)

Aufgabe 1:

Stellen Sie $U = l_1 + l_2 + l_3$ in 4 Schritten nach l_1 um!

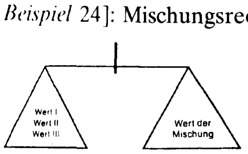
Zur Veranschaulichung

1. Setzen Sie die Stammformel auf die Gleichungswaage $\quad U = l_1 + l_2 + l_3$
2. Seitentausch! l_1 kommt dadurch nach links $\quad l_1 + l_2 + l_3 = U$
3. Ergänzen Sie beide Seiten durch $-l_2$ und $-l_3$ $\quad l_1 + l_2 + l_3 - l_2 - l_3 = U - l_2 - l_3$
4. Kürzen Sie links $+l_2$ gegen $-l_2$, $+l_3$ gegen $-l_3$ $\quad l_1 + \cancel{l_2} + \cancel{l_3} - \cancel{l_2} - \cancel{l_3} = U - l_2 - l_3$

Lösung: $\underline{\underline{l_1 = U - l_2 - l_3}}$

[I3] verwendet den Waage-Gedanken auch in der Verteilungs- und Mischungsrechnung.

Beispiel 24]: Mischungsrechnung ([I3], S. 60)



Wert der Sorten = Wert der Mischung
I + II + III

[I1] erwähnt die Waage nur einmal verbal. In der Dreisatzrechnung zeigen immerhin vier Bücher, nämlich [I1], [I3], [I4] und [I7], Graphen proportionaler Zuordnungen. Schließlich gehen – um ein letztes Beispiel zu nennen – in der Geometrie nur [I7] und – in weit geringerem Maße – [I1] über das bloße Nennen von Berechnungs-Rezepten hinaus.

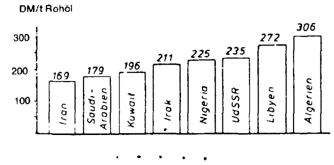
Dieser – im Vergleich zu Schulbüchern der SI – geringe Umfang fachmethodischer Instrumente in der großen Mehrzahl der Bücher ist zum einen wohl darauf zurückzuführen, daß diese Instrumente in der Berufsschullehrerschaft kaum bekannt sind. Zum anderen ist er Ausdruck der in Abschnitt 1 analysierten methodischen Grundkonzeption. Daher überrascht es nicht, daß die drei in Kategorie A eingeordneten Bücher [I2], [I6] und [II1] keinerlei methodische Hilfen enthalten. Dies alles steht keineswegs im Widerspruch zu der Tatsache, daß fast alle Bücher versuchen, ihre Konzeption sorgfältig aufbereitet darzustellen und dem Berufsschüler ein erfolgreiches Bewältigen der Ziele zu ermöglichen; in manchen Büchern sind die Handlungsanweisungen für den Schüler geradezu „liebevoll" aufbereitet.

Die Bücher mit geometrischen Inhalten, d. h. die fünf technikbezogenen Fachrechenbücher [I1], [I4], [I7], [I8], [II7] sowie das Bekleidungsgewerbe-Rechenbuch [II1] enthalten naturgemäß viele *bildliche Darstellungen,* wobei die Anzahl je nach Geometrieanteil unterschiedlich ist. Diese sechs Bücher setzen darüberhinaus die ikonische Ebene auch bei einigen Themen aus Arithmetik und Algebra ein, insbesondere bei der graphischen Darstellung funktionaler Abhängigkeiten.

Beispiel 25]: Graphische Darstellungen ([I1], S. 21)

Zahlentafeln sind abstrakt; sie sind schwer einprägsam. Größen in graphischer Darstellung sind übersichtlicher, anschaulicher und leichter vergleichbar.

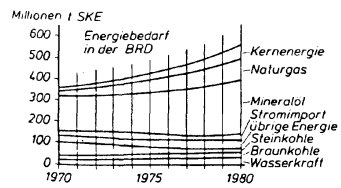
1. Strecken- und Stabschaubilder



. . . . .

2. Kurvenschaubilder

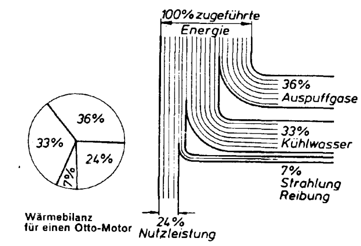
Größen, die sich fortschreitend verändern, werden in Kurvenschaubildern dargestellt.



3. Flächenschaubilder

. . . . .

Zur Darstellung einer Verteilung eignen sich besonders das Kreisschaubild und das Sankey-Schaubild.



Wärmebilanz für einen Otto-Motor

. . . . .

4. Körperschaubilder

. . . . .

Während in den Büchern [I1], [I7] *symbolische Darstellungen* nur unwesentlich stärker ins Gewicht fallen als die zahlreichen Bilder, ist dies in [I4] schon eher der Fall, und in den Elektro-Büchern [I8], [II7] sowie erst recht in [II1] dominiert die symbolische Ebene deutlich. Dabei werden reichlich Variable verwendet, und vor allem in den fünf Technik-Büchern treten zahlreiche Formeln auf.

Diese Dominanz symbolischer Darstellungen gilt noch mehr für die vier Bücher [I2], [I3], [I5] und [I6], die keine geometrischen Themen beinhalten. Nur in [I3] und jeweils an einer einzigen Stelle auch in [I5] und [I6] treten graphische Darstellungen mathematischer Gegenstände auf. Darüberhinaus wird die Seitengestaltung in [I6] durch zahlreiche Abbildungen von Schweinen, Schlachtwerkzeugen etc. aufgelokkert. Bei [I2] enthält nur das Titelblatt Bilder (nämlich jeweils eine lächelnde Helferin neben einem abhörenden bzw. zahnziehenden bzw. augenprüfenden Arzt). In den Büchern [I2] und [I6] sind nur verbale, keinerlei formale Darstellungen zu finden.

Beispiel 26]: Zinsrechnung ([I2], S. 92)

Sind Zinsen für mehrere Jahre zu berechnen, so multipliziert man die Jahreszinsen mit der Anzahl der Jahre. Wir kommen zu der Formel:

$$\boxed{\text{Mehrjahreszinsen} = \frac{\text{Kapital}}{100} \cdot \text{Zinsfuß} \cdot \text{Jahre}}$$

2. Beispiel:
Ein Arzt erhält von seiner Bank für 3 Jahre ein Darlehen in Höhe von 2200,— DM. Er muß 6% Jahreszinsen zahlen. Berechnen Sie die Zinsen für 3 Jahre!
Lösung:

$$\frac{2\,200,\!—}{100} \cdot 6 \cdot 3 = \underline{396,\!— \text{ DM Zinsen}}$$

Die verwendete *Sprache* ist in allen Büchern i. a. einfach und klar. Die Sätze sind meist kurz, die benutzten Ausdrücke verständlich. Vor allem in [I1], [I6] und [I7] finden sich auch einige kompliziertere Formulierungen, die Schülern vermutlich Verständnisschwierigkeiten bereiten. (Man vergleiche die bisherigen Beispiele.) Insgesamt ist jedoch bei sämtlichen Büchern das Bemühen um eine schüleradäquate Sprache zu erkennen.