In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 14, 1982, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, S.25-30

Der Integraph im Analysisunterricht – Ein altes Gerät in neuer Verwendung

Werner BLUM, Kassel

Gliederung:
0. Vorbemerkungen
1. Analyse des Integraphen
2. Didaktische Überlegungen zum Integraphen
3. Einbettung in die Integral-Konzeption von A. Kirsch

0. Vorbemerkungen

Die Anregung zur Beschäftigung mit der Thematik dieses Aufsatzes kam aus der Arbeitsgruppe *„Visualisierung in der Mathematik"* (Leiter: W. METZLER) an der Gesamthochschule Kassel. Die Studenten N. BAYER und J. THOMA drehten im Frühjahr 1981 drei Filme zur schulischen Einführung in die Integralrechnung. Zwei dieser Filme beinhalten einen INTEGRAPHEN. Ich konnte dann im Sommer und Herbst 1981 eigene Unterrichtserfahrungen mit einem Integraphen[1] sammeln[2]. Die folgenden Ausführungen zielen jedoch nicht nur auf einen solchen direkten Einsatz eines Integraphen im Schulunterricht ab (ein solches Gerät ist nur schwer zu erhalten[3]), sondern auch und insbesondere auf den Einsatz von entsprechenden *Filmen.* Ein derartiger Film soll 1982 in Kassel hergestellt werden.

Im folgenden werden zuerst (Abschnitt 1) Integraphen vorgestellt und analysiert. Hierbei wird sich eine überraschende Möglichkeit eröffnen, den *Hauptsatz* der Differential- und Integralrechnung auf eine *neue* Art zu *beweisen.* Dann (Abschnitt 2) soll (m.W. erstmals in der Literatur) gezeigt werden, inwiefern Integraphen als *Hilfsmittel für den Analysisunterricht* eingesetzt werden können, insbesondere auch – dies ist ihre „neue Verwendung" – bei der Begründung des Hauptsatzes. Abschließend (Abschnitt 3) wird eine entsprechende *Lernsequenz* skizziert, die sich in die *Integral-Konzeption von Kirsch* ([9]) einpaßt.

1. Analyse des Integraphen

1.1 Wirkungsweise und Prinzip

Ein *Integraph* ist eine Maschine, die zu graphisch gegebener Funktion f, definiert auf einem Intervall [a;b], die *Flächeninhaltsfunktion* I zu f auf [a;b] zeichnet. Dabei ist

$$I : [a;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f.$$

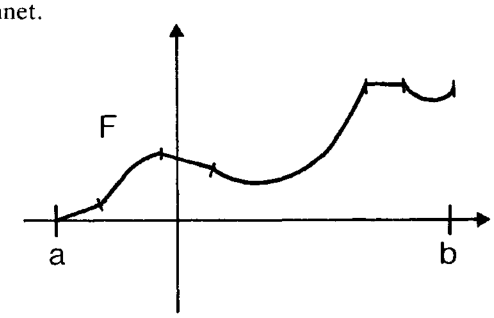
Je nach Einführung des Integralbegriffs und je nach Behandlung des Flächeninhaltsbegriffs (siehe hierzu etwa KIRSCH [9], [10]) gilt dies nach Definition oder aufgrund eines Satzes. Ein Integraph ist deshalb ein *Integralfunktions-Zeichner.* Wir verwenden jedoch hier und im folgenden durchweg *geometrische* Formulierungen für die Grundbegriffe der Integralrechnung. Die *„praktische Verwendung"* eines Integraphen führt somit zur *„Wirkungsweise" eines Integraphen* (Integraph als *Flächeninhaltsfunktions-Zeichner)*: Zu gegebenem f auf [a;b] wird die Flächeninhaltsfunktion I von f gezeichnet.

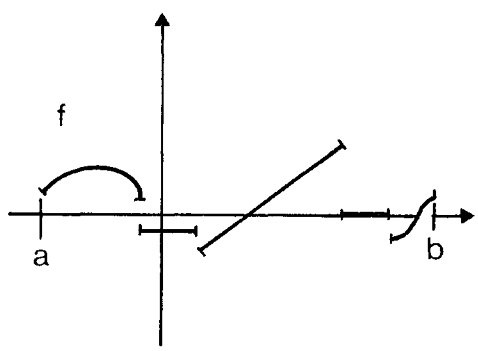
Beim Zeichnen der Flächeninhaltsfunktion mit Hilfe eines Integraphen fährt man den gegebenen Graphen von f mit einem Stift nach. Dabei möchte man den Fahrstift nicht vom Blatt absetzen, wobei (endlich viele) Sprünge im Graphen von f mittels vertikaler Strecken überbrückt werden können. Es ist deshalb naheliegend zu *verlangen,* daß f *stückweise stetig* ist. Wir setzen dies im folgenden stets voraus. Alle anwendungs- und schulrelevanten Funktionen besitzen diese Eigenschaft.

Die Flächeninhaltsfunktion I einer auf [a;b] stetigen Funktion f ist nach dem 1. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit der Ableitung I' = f, d.h. I ist eine *Stammfunktion* von f. Unter allen Stammfunktionen von f auf [a;b] ist I nach dem Satz über Konstante durch I(a) = 0 eindeutig charakterisiert, d.h. die Stammfunktion F von f mit F(a) = 0 ist gleich der Flächeninhaltsfunktion von f.

Um einen Integraphen zu erhalten muß man also eine Maschine konstruieren, die zu gegebenem, auf [a;b] stetigen f eine Stammfunktion von f zeichnet, und zwar diejenige Stammfunktion F von f, die an der Stelle a verschwindet (die Bedingung F(a) = 0 ist dabei ohne größeren Belang, da dies leicht durch eine passende Verschiebung des Graphen von F parallel zur 2. Achse erreicht werden kann). Allgemeiner muß die Maschine zu gegebenem stückweise stetigen f die – im Anfangspunkt verschwindende – überall stetige „stückweise" Stammfunktion von f zeichnen, d.h. die Funktion, die durch „lückenloses Aneinandersetzen" der entsprechenden Stammfunktionen der stetigen Teile von f entsteht.

Diese *„theoretische Idee"* führt somit zum *„Prinzip" eines Integraphen* (Integraph als *Stammfunktions-Zeichner)*: Zu gegebenem f auf [a;b] wird die an der Stelle a verschwindende (stetige stückweise) Stammfunktion F von f gezeichnet.





Geometrisch bedeutet dieses Prinzip also: Der Zeichenstift bei F hat an jeder Stelle x ∈ [a;b] die Richtung f(x). Eine Ordinatenänderung bei f macht sich in einer entsprechenden Richtungsänderung bei F bemerkbar und umgekehrt.

Oben haben wir überlegt, daß via Hauptsatz und Satz

---

[1]) Von der TH Darmstadt freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

[2]) Ich danke Frau G. KAISER (Kassel) für ihre anregenden Diskussionsbemerkungen zum Unterrichtsversuch und zu diesem Aufsatz.

[3]) Integraphen gibt es wohl noch in einigen Abteilungen für „Praktische Mathematik" an Hochschulen. Eine Liste von Firmen und Institutionen (darunter 11 deutsche), die in den letzten 15 Jahren Integraphen von der *Firma A. Ott* in Kempten (Allgäu) bezogen haben, hat mir diese Firma freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

über Konstante *Wirkungsweise und Prinzip äquivalent* sind. D.h.: *Jeder Flächeninhaltsfunktions-Zeichner ist ein Stammfunktions-Zeichner und umgekehrt.*

1.2 Technische Realisierung und geschichtlicher Rückblick
Die bisherigen Überlegungen in 1.1 haben noch nicht die konkrete *technische Realisierung* eines Integraphen miteinbezogen. Wir beschreiben sogleich den von der Firma Albert Ott hergestellten Integraphen. Ansonsten spielt diese mechanische Realisierung keine Rolle in diesem Aufsatz. Wir vermerken nur, daß zur Realisierung des Prinzips eine *Anleihe bei der Kinematik* nötig ist: Der Stift, der F zeichnet, muß gezwungen werden, sich stets in Tangentenrichtung zu bewegen. Daß dies möglich ist, ist sozusagen[4] ein „Axiom", das die Existenz eines Stammfunktions-Zeichners (und damit auch die Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen) sicherstellt.

Der in 0 erwähnte Integraph ist (in den 20er Jahren) von H. ADLER entworfen und von der Firma A. OTT in Kempten (Allgäu) konstruiert und serienmäßig hergestellt worden. Wir geben hier die Beschreibung von WILLERS [13, S. 210/211] in Auszügen wieder:

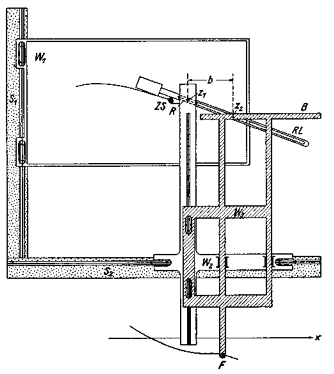
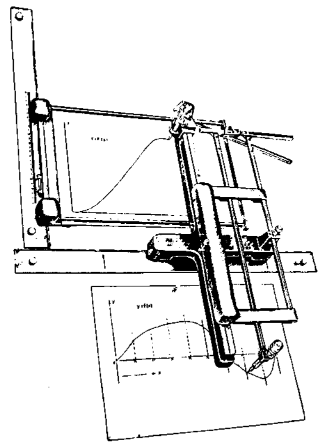


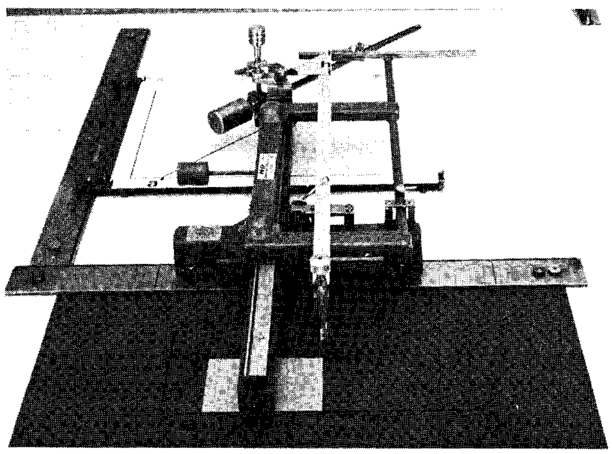
Bild 168. Schematische Darstellung des Integraphen Adler-Ott.

„Beim Integraphen Adler-Ott . . . wird . . . die Integralkurve auf einem durch ein Schneidenrad R in y-Richtung bewegten Integral-Wagen W_1 aufgezeichnet (Bild 168–. . .). Dieser gleitet mittels Rollen auf einer y-parallelen Laufschiene S_1 . . . Das auf W_1 aufliegende Schneidenrad R ist um den Zapfen Z_1 des Abszissenwagens W_2 drehbar, der auf einer zweiten zu S_1 senkrechten Schiene S_2 rollt . . . parallel zur x-Achse . . . Auf dem Wagen W_2 rollt in y-Richtung der Ordinatenwagen W_3, der oben die Basisschiene B und unten den Fahrstift F trägt, mit dem man die gegebene Kurve befährt. Auf der Basisschiene ist mittels Mikrometerwerkes der Zapfen Z_2 einstellbar. Dieser gleitet in einem Schlitz des um Z_1 drehbaren Richtungslineals RL. Sein x-paralleler Abstand von dem Aufsatzpunkt des Schneidenrades auf den Integralwagen W_1 ist die Integrationsbasis b, während die Abmessungen so gewählt sind, daß der y-parallele Abstand dieser beiden Zapfen f(x) ist, wenn der Fahrstift auf der Kurve entlanggeführt wird. Der Winkel zwischen x-Achse und Richtungslineal und damit, da RL stets der Ebene des Schneidenrades parallel ist, zwischen x-Achse und Ebene dieses Rades ist daher $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{b}$. Das Schneidenrad verschiebt also den Integralwagen in der y-Richtung so, daß der mit W_2 verbundene Zeichenstift ZS auf dem Wagen W_1 die Integralkurve verzeichnet . . ."
Bei uns ist stets b = 1 gewählt.

Die zu Beginn von 1.2 erwähnte Ausrichtung des Zeichenstifts in Tangentenrichtung von F wird hier also durch ein Schneidenrädchen erreicht, das mit genügendem Druck auf die Zeichenebene gepreßt wird.

Der Integraph Adler-Ott ist eine Fortentwicklung der ersten Integraphen. Solche Geräte sind aus *praktischen*





Integraph Adler/Ott[5]

Bedürfnissen heraus erfunden worden, insbesondere zur Anwendung in der Technik (z.B. bei Momenten in der Statik); zu verschiedenen Anwendungen vgl. etwa [1, Kap. 5] oder [13, S. 215ff.]. Erste Flächeninhaltsmesser („Planimeter") bzw. Integralmesser („Integrimeter") zur numerischen Auswertung von Flächeninhalten bzw. Integralen wurden schon zu Beginn des 19. Jahrhunderts verwendet. Der erste Integralzeichner („Integraph") stammt wohl vom Franzosen ABDANK-ABAKANOWICZ 1878. Danach wurden verschiedene weitere, verbesserte Integraphen erfunden; man vergleiche etwa [1], [7, S. 157], [13, S. 206ff.] oder [11, S. 234ff.] zu geschichtlichen und technischen Details[6].

Heutzutage haben Integraphen *keine praktische Bedeutung* mehr, da Computer viel schneller und genauer arbeiten. Integraphen können jedoch auch heute noch *didaktische Bedeutung* haben. Während Integraphen vor 20–50 Jahren wohl gelegentlich auch im Mathematikunterricht, und zwar im Sinne ihrer praktischen Verwendung, eingesetzt worden sind[7], liegt ihr Wert heute in ihrer Verwendung als „Hauptsatzmaschine" und zur enaktiv/ikonischen Repräsentation von Flächeninhalts- bzw. Stammfunktionen; genaueres hierzu in Abschnitt 2.

Im folgenden kann man sich bei Bedarf unter einem Integraphen stets das vorhin beschriebene Gerät Adler-Ott vorstellen. Daher sprechen wir oft – wie auch in den Überschriften – von *„dem"* Integraphen. Alle Ausführun-

[4]) Nach F. WILLE (Kassel), zusammen mit N. BAYER und J. THOMA.

[5] Fotos von Firma Ott bzw. von N. BAYER/J. THOMA

[6]) sowie z.B. auch [12] zur Frage der Fehler beim Arbeiten mit Integraphen.

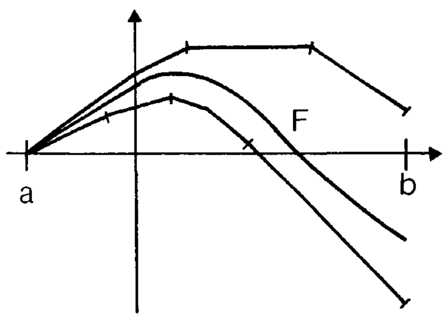
[7]) Vgl. dazu W. MEYER ZUR CAPELLEN in der Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 67 (1936), S. 323–325

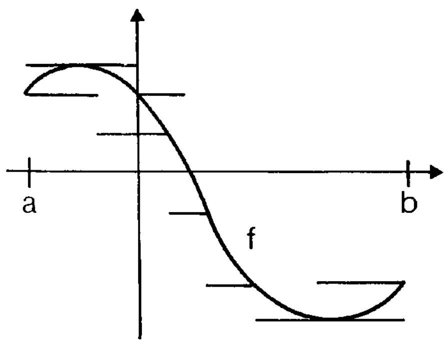
gen sind aber unabhängig von jeder mechanischen Realisierung gültig. Wichtig sind nur *Wirkungsweise* und *Prinzip*, auch wenn diese nur in der Vorstellung ablaufen.

1.3 Ein neuer Beweis des Hauptsatzes: Wirkungsweise als Konsequenz des Prinzips

Wir haben in 1.1 gesehen, daß mittels Hauptsatz (1. Teil) die Äquivalenz von Wirkungsweise und Prinzip des Integraphen trivial ist. Wir wollen nun zeigen, wie man *ohne Hauptsatz* die Wirkungsweise aus dem Prinzip folgern kann. Wenn dies geschehen ist, d.h. wenn man ohne Zuhilfenahme des Hauptsatzes weiß, daß *jeder Stammfunktions-Zeichner* „automatisch" *ein Flächeninhaltsfunktions-Zeichner* ist, so ist der Hauptsatz (und damit wiederum genau wie in 1.1 auch die Umkehrung „Wirkungsweise impliziert Prinzip") offenbar sofort klar. Dieser Nachweis der Gültigkeit von „Prinzip impliziert Wirkungsweise" führt somit zu einem *neuen Beweis des Hauptsatzes*. Dieser besagt also: *Die gezeichnete Stammfunktion*[8] *ist stets die Flächeninhaltsfunktion der gegebenen Funktion.*

Die *Idee*[9] dieses Beweises besteht in einer *Approximation* einer gegebenen Funktion durch solche Funktionen, für die man die Gültigkeit des Hauptsatzes schon weiß, und einer Übertragung oder besser *Fortsetzung* dieser Aussage von diesen Funktionen auf die von ihnen approximierte Funktion.





Solche Funktionen, für die man *elementargeometrisch* sofort *einsehen* kann, daß die gezeichnete Stammfunktion gleich der Flächeninhaltsfunktion ist, sind konstante Funktionen und allgemeiner *Treppenfunktionen*; mit elementargeometrischen Mitteln *rechnerisch* nachweisen läßt sich dies für affin-lineare Funktionen und allgemeiner *stückweise affin-lineare Funktionen* (vgl. etwa [9]).

Wir wollen die Beweisidee nun genauer darlegen. Sei dazu f auf [a;b] stückweise stetig gegeben. Wir approximieren den Graphen von f durch geradlinige Stückchen (Treppen oder Streckenzüge); dies ist beliebig genau möglich. Dabei überträgt sich die Approximation von f auch auf die zugehörigen Stammfunktionen wie auch auf die zugehörigen Flächeninhaltsfunktionen, ebenfalls jeweils beliebig gut. Aber für jede approximierende Funktion ist die zugehörige Stammfunktion gleich der Flächeninhaltsfunktion. Deshalb muß dies auch für f gelten!

Mit Hilfe des Integraphen sind wir also zu einem neuen Beweis des Hauptsatzes (1. Teil) gelangt. Es versteht sich von selbst, daß der Integraph nur ein Hilfsmittel zur Konkretisierung und Veranschaulichung ist und daß alle Argumente, die eben aus der Anschauung entnommen und verbal dargelegt worden sind, auch formal-mathematisch begründbar sind. Die mathematischen Hintergründe dieses Beweises sind in [2] ausgeführt. *Vorausgesetzt* werden dabei zum einen die Existenz der auftretenden Flächeninhalte, wobei die üblichen Eigenschaften des Inhaltsbegriffs gelten, und zum anderen die Existenz von Stammfunktionen zu den auftretenden Funktionen. Benutzt wird noch eine Monotonieeigenschaft für Stammfunktionen, die aus dem Monotoniesatz folgt.

2. Didaktische Überlegungen zum Integraphen

2.1 Allgemeines

Wir zählen in 2.2 einige Möglichkeiten auf, wie der *Integraph im Analysisunterricht* verwendet werden kann. Dabei ist generell zu beachten:

- Das Gerät ist stets nur ein *Mittel* zum Erreichen von gesteckten Zielen, nicht ein Gegenstand mit eigenständiger Bedeutung.
- Wesentlich sind *Prinzip* und *Wirkungsweise* des Geräts, nicht dessen konkrete Mechanik. Eine Beschäftigung mit der Mechanik wäre zu zeitaufwendig und würde vom Thema ablenken[10].
- Alle in 2.2 genannten Aspekte (mit Ausnahme von a, dem didaktisch unwichtigsten Aspekt) lassen sich nicht nur mit einem konkreten Gerät verwirklichen, sondern weitestgehend auch mit einem geeigneten *Film* (vgl. 0).

Didaktische Vorzüge des Integraphen (als Gerät oder im Film) liegen (wie bei allen derartigen Maschinen) in einer *„enaktiv/ikonischen Repräsentierung"* der zugehörigen mathematischen Inhalte (Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion, Hauptsatz) und dadurch:

- Motivation und Herausforderung von Schülern
- Tieferes Verstehen und längeres Behalten dieser Inhalte (vgl. auch [4, S. 143]), inbesondere auch wegen des stattfindenden Wechsels der Repräsentationsebene (vgl. das „Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen" bei Wittmann [14, S. 91]).

Günstig ist dabei, daß der Integraph keine „Black Box" ist, sondern vom Prinzip her *durchschaut* werden kann. Dies wird wirksam unterstützt, wenn Schüler den Integraphen selbst „erfinden" (d.h. „nacherfinden" im Sinne von Freudentahl [6]). Dadurch wird auch eine für den Lernprozeß förderliche innere Einstellung zum Gegenstand aufgebaut. Unabdingbare Voraussetzung für ein solches „Erfinden" sind geometrische Grundvorstellungen vom Stammfunktions-Begriff.

Steht ein Gerät (nicht nur im Film, sondern) im Klassenzimmer zur Verfügung, so ist ein weiterer Vorteil, daß die Schüler im Sinne *„aktiven Lernens"* mit dem Gerät arbeiten können. Es ist – wie Erfahrungen zeigen – keineswegs zu „kindisch" für Oberstufenschüler, mit dem Gerät zu „spielen".

[8]) „Stammfunktion" bedeutet hier und im folgenden „stetige stückweise Stammfunktion", d.h. Stammfunktion im verallgemeinerten Sinn wie etwa in [5]; vgl. [2].

[9]) Diese Idee ist entstanden in der Arbeitsgruppe „Visualisierung" und in den bereits hergestellten Filmen berücksichtigt (siehe Abschnitt 0).

[10]) Dies schließt nicht aus, daß technisch interessierte Schüler sich zusätzlich auch mit der Mechanik befassen. Natürlich erzeugt ein solches Gerät bei vielen Schülern diesbezügliche Neugierde!

Wie bei allen Hilfsmitteln besteht auch hier die *Gefahr*, daß einzelne Schüler zu sehr dem Hilfsmittel verhaftet sind und *nur* mit seiner Unterstützung die mathematischen Inhalte verarbeiten können. *Ziel* bei alledem ist daher, daß sich die Schüler nach Erreichen der angestrebten Lernziele *vom Gerät lösen*, im Sinne von HUND [8]: „Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht . . . erfüllen ihren Zweck gerade dadurch, daß sie sich nach Erfüllung ihrer Funktion, Anschauungsgrundlage für abstrakte Begriffe zu sein, selbst überflüssig machen". Bei Schülern, die diese Loslösung vom Hilfsmittel nicht schaffen, ist zu fragen, ob sie ohne dieses Mittel überhaupt einen Zugang zum mathematischen Gegenstand gefunden hätten.

2.2 Didaktischer Stellenwert des Integraphen

a) Einfache praktische Bestimmung der Graphen von Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen zu konkret gegebenen Funktionen

Dies ist insbesondere dann hilfreich, wenn von der gegebenen Funktion kein Term bekannt ist. Ein solcher Einsatz des Integraphen entspricht seiner ursprünglichen praktischen Verwendung (siehe 1.1), hat aber heute für sich genommen keine Bedeutung mehr.

b) Veranschaulichung von Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen zu konkret gegebenen Funktionen

Hierdurch wird beim Einstieg in die Integralrechnung das Rechnen des Schülers graphisch unterstützt.

Wichtiger als die genannten, *konkrete* Funktionen betreffenden, sind die folgenden, *allgemeineren* Einsatzmöglichkeiten des Integraphen.

c) Verdeutlichung des Funktionscharakters von Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen

Durch den Integraphen wird also der „dynamische" Charakter von Funktionen, der Prozeß des Entstehens der Graphen betont.

d) Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen den Graphen einer gegebenen Funktion und der zugehörigen Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen

Der Integraph macht z. B. sichtbar, daß einer Nullstelle von f eine Stelle mit waagerechter Tangente bei Stammfunktion F bzw. Flächeninhaltsfunktion I entspricht, oder daß zu einer Extremstelle bei f eine Wendestelle bei F bzw. I gehört. Hierdurch werden geometrische Grundvorstellungen der Differential- und Integralrechnung (vgl. [3]) wirksam unterstützt. Es ist günstig, wenn solche Grundvorstellungen bereits vorhanden sind. Sie werden dann vom Integraphen reaktiviert und vertieft.

Bei a, b, c und d ist dabei jeweils nicht ein blindes Benutzen oder Betrachten des Geräts gemeint, sondern ein verständiges Einsetzen des Prinzips, wenn Stammfunktionen, bzw. der Wirkungsweise, wenn Flächeninhaltsfunktionen veranschaulicht werden. Prinzip bzw. Wirkungsweise müssen (wie auch immer begründet) vorausgesetzt werden. Ist der Hauptsatz bekannt, so zeigt sich, daß beides äquivalent ist (siehe 1.1 und 1.3).

e) Begründung des (1. Teils des) Hauptsatzes

Dies ist für mich seine wichtigste Bedeutung: der Integraph als „*Hauptsatzmaschine*"[11]. Er verhilft – wie in 1.3 geschildert – zu einem neuen Beweis des Hauptsatzes, er provoziert geradezu den Beweisgedanken. Damit trägt er auch zur Förderung der Argumentationsfähigkeit der Schüler bei.

[11]) Nach einer Idee von W. METZLER. In dieser Weise wird der Integraph auch in den in 0 erwähnten Filmen eingesetzt.

f) Beitrag zum geometrisch-inhaltlichen Verstehen des (1. Teils des) Hauptsatzes

Im Analysisunterricht ist es nicht nur wichtig, daß die Schüler geometrische Grundvorstellungen von Ableitung und Integral vermittelt bekommen. Sie sollen auch den durch den Hauptsatz vermittelten *Zusammenhang* geometrisch-inhaltlich verstehen, d. h. die Tatsache: *Wenn man zu gegebenem f die Flächeninhaltsfunktion bildet und an der Stelle x die Tangente anlegt, so hat diese die Steigung f(x)*. Schüler empfinden durchaus ein Bedürfnis, diese staunenswerte Tatsache zu verstehen. Ein solches Verständnis kann mit Hilfe des Integraphen zwar nicht direkt vermittelt, wohl aber für Schüler nachvollziehbar gefördert werden. Denn bei konstanten bzw. Treppen-Funktionen sieht man dies rasch ein (am Integraphen: „Die gezeichnete Stammfunktion F zu f ≡ m ist affin-linear mit der Steigung m. Da der Flächeninhalt in gleichen Schritten um gleiche Beträge wächst, und zwar um m bei Schrittweite 1, ist F die Flächeninhaltsfunktion zu f. Also . . ."), und diese Einsicht läßt sich via Approximationsgedanken auf die gegebene Funktion fortsetzen (vgl. den Beweis in 1.3).

g) Herausforderung zu einem Gespräch über Geschichte und praktische Bedeutung der Integralrechnung

Hier (und nur hier) kann gegebenenfalls der Integraph auch selbst zum Unterrichtsgegenstand werden.

Die bisherigen Überlegungen haben verschiedene *Möglichkeiten* aufgezeigt, wie und warum der Integraph im Analysisunterricht eingesetzt werden *kann*. Doch damit ist noch nichts darüber gesagt, ob der Integraph tatsächlich eingesetzt werden *darf* oder gar *soll*. Denn bei der herrschenden Stoffhülle ist stets Vorsicht geboten, wenn neue Inhalte vorgeschlagen werden.

Wir geben nun abschließend noch einige *Begründungen* dafür, daß der Integraph (als Gerät oder im Film) nicht aufgrund einer Modewelle „Rückbesinnung auf das Alte", sondern aus *didaktischen* Erwägungen im heutigen Analysisunterricht mit Gewinn eingesetzt werden darf.

1) Stammfunktionen bzw. Flächeninhaltsfunktionen und ihr geometrischer Zusammenhang mit der Ausgangsfunktion sind ein wichtiges Themengebiet des Analysisunterrichts. Daher sind methodische Hilfen im Sinne der Aspekte b, c und d notwendig. Der Integraph trägt hierzu bei.

2) Der Hauptsatz ist die „Krönung" der Analysis, aus theoretischen wie auch aus praktischen Gründen. Daher sind methodische Hilfsmittel im Sinne der Aspekte e und f notwendig, und zwar insbesondere solche, welche die mathematische Substanz nicht verfälschen und im Sinne des Spiralprinzips Fortsetzungs- und Vertiefungsmöglichkeiten zulassen. Der Integraph ist ein solches Hilfsmittel (vgl. 2.3).

3) Förderung der Fähigkeit zum Argumentieren, insbesondere auch auf nicht-formalem Niveau, wird allgemein als wichtiges Lehrziel des Mathematikunterrichts angesehen. Der Integraph leistet, wie hier in 2.2 und nachher in 2.3 ausgeführt, einen Beitrag hierzu.

All dies ist *ohne zusätzlichen Zeitaufwand* erreichbar: Ein Einsatz entsprechend b, c und d verkürzt die – im Analysisunterricht ohnehin stattfindende – Phase des Behandelns von Beispielen, und ein Einsatz entsprechend e und f macht „herkömmliche" Beweise des Hauptsatzes überflüssig.

2.3 Didaktische Anmerkungen zum neuen Beweis des Hauptsatzes

Der vom Integraphen nahegelegte neue Beweis des Hauptsatzes bietet mehrere *didaktische Vorteile.* Zum einen können Schüler über die Maschine die Beweisidee *selbst* finden (vgl. die in 3.2 wiedergegebene Schüleräußerung). Zum zweiten läßt sich jeder Beweisschritt *„enaktiv/ikonisch repräsentieren“*, was die in 2.1 geschilderten Vorzüge hat. Zum dritten läßt sich der Beweis in seinem wesentlichen Kern in schüleradäquater Weise rein *verbal* formulieren und benötigt nicht – wie die schulüblichen Beweise – Begriffe und Bezeichnungen auf formaler Ebene. Eine Möglichkeit hierfür ist:

„Behauptung (*): Die gezeichnete Stammfunktion ist die Flächeninhaltsfunktion der gegebenen Funktion.

Beweis: Gegeben sei f.

1) Wir nähern den Graphen von f durch Treppen an. Eine solche Annäherung können wir beliebig gut vornehmen.

2) Diese Annäherung überträgt sich auch auf die zugehörigen Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen.

3) Wir wissen schon: Für alle Treppen gilt (*).

4) Durch die Annäherung setzt sich die Gültigkeit von (*) dann auch auf f fort“.

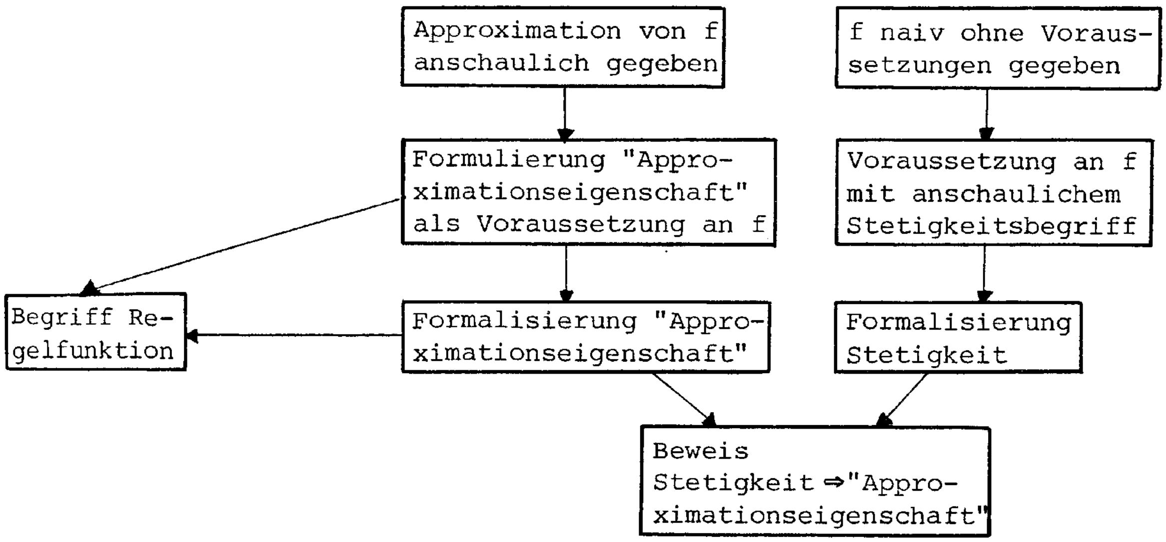
Es zeigt sich also, daß der Beweis vielfältige *Vereinfachungen* im Sinne des Spiralprinzips (siehe dazu [3, S. 18]) gestattet, insbesondere die folgenden:

a) Bewußtes Weglassen von Inhalten:
- Existenz von Stammfunktionen
- Existenz von Flächeninhalten mit gewissen Eigenschaften
- Eindeutigkeit von Stammfunktionen
- Monotonievoraussetzungen inklusive Vollständigkeit
- Voraussetzungen an f (stückweise Stetigkeit)
- Existenz approximierender Treppenfunktionen
- Übertragung der Approximation auf Stamm- bzw. Flächeninhaltsfunktionen.

b) Wahl eines geeigneten Strengenniveaus:
- Begriffliche Fassung der „Annäherung“
- Begriffliche Fassung der (stückweisen) Stetigkeit.

Diese Vereinfachungen können bei Bedarf (je nach Lerngruppe und je nach Lernzielen) schrittweise aufgehoben werden.

Ein Beispiel hierzu:



Zum Flächeninhaltsbegriff hat Kirsch ([9], [10]) eine gestufte Exaktfizierung vorgeschlagen.

Die Voraussetzung der Existenz von Stammfunktionen kann entfallen, wenn man den formulierten Gültigkeitsbereich des Hauptsatzes auf diejenigen Funktionen beschränkt, von denen man – aus der Differentialrechnung – schon Stammfunktionen kennt.

Der Beweis bietet also ein breites Spektrum methodischer Stufungen. Hierdurch wird eine Begründung des Hauptsatzes auch solchen (Grundkurs-)Schülern zugänglich, die einen der üblichen Beweise nicht verstanden hätten. Zwar besteht – wie Unterrichtserfahrungen zeigen – bei solchen Schülern die Gefahr, daß sie sich nicht von der enaktiven Ebene lösen können, d.h. den Beweis nur am Integraphen vollziehen können. Dies ist trotzdem viel mehr wert als bloßes Memorieren formaler Argumente.

Ob im Unterricht der Beweis mit Treppen- oder mit Streckenzug-Approximation geführt wird, hängt von den Vorerfahrungen der Schüler ab. Lernpsychologisch naheliegender scheinen Streckenzüge zu sein; Treppen haben jedoch neben dem hiermit erzielbaren, hier jedoch unwesentlichen rechnerischen bzw. formal-mathematischen Vereinfachungseffekt den Vorzug, ein geometrisch-inhaltliches Verständnis des Hauptsatzes zu ermöglichen (vgl. die Ausführungen zu Teil f in 2.2).

3. Einbettung in die Integral-Konzeption von Kirsch

Wir wollen nun eine Lernsequenz, die den Einsatz des Integraphen im vorhin diskutierten Sinn beinhaltet, vorstellen und in die Grundkurs-Konzeption zur Integralrechnung von Kirsch ([9]) integrieren. Diese Konzeption ist aufgrund ihrer Intentionen (insbesondere Aufbau geometrischer Grundvorstellungen und Hintansetzen von Existenz- und Definitions-Problemen) besonders gut hierfür geeignet.

3.1 Unterrichtliche Voraussetzungen

Wir setzen voraus, daß eine Einführung in die Integralrechnung entsprechend [9] stattgefunden hat, in der folgende Inhalte behandelt worden sind:
- Berechnung von Flächeninhaltsfunktionen zu (stückweise) konstanten und affin-linearen Funktionen (vgl. [9, S. 92–94]) sowie Aufbau zugehöriger geometrischer Grundvorstellungen
- Vermutung des (1. Teils des) Hauptsatzes aufgrund von Vergleichen der Funktionsterme und der Graphen (vgl. [9, S. 97]).
- Berechnung von Flächeninhalten unter dem Graphen von $x \mapsto x^2$
- (Gegebenenfalls) Integralbegriff über Flächeninhalte (vgl. [9, S. 91/92 und S. 95]) und Integrationsregeln (vgl. [9, S. 95]).

Die Zahl der Beispiele kann dabei geringer sein als in [9] vorgeschlagen. Daß das Beispiel x^2 behandelt werden soll, hat neben historischen und methodischen Gründen (breitere Vermutungsbasis für Hauptsatz vorhanden, nachher bessere Würdigung der Tragweite des Hauptsatzes möglich, Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$ motiviert) auch den Zweck, den Schüler mit dem (später beim Beweis benötigten) Approximationsgedanken vertraut zu machen.

Weiter setzen wir aus der Differentialrechnung voraus:

- Begriff der Ableitung, Begriff der Stammfunktion und zugehörige geometrische Grundvorstellungen (vgl. [3]).

Wichtig, für unsere Lernsequenz jedoch nicht notwendig ist das Grundverständnis der Ableitung als „lokale Änderungsrate" (vgl. [3, S. 10]), was ebenfalls zu einer Stützung der Vermutung, ja sogar zu einer plausiblen Begründung des Hauptsatzes führt; siehe Kirsch [9, S. 98].

Wenn bei der Konzeption von Kirsch der Beweis des Hauptsatzes ansteht (vgl. [9, S. 99/100]), setzt unser Vorschlag ein.

3.2 Schilderung der Lernsequenz

Die folgende Lernsequenz ist für 3–4 Unterrichtsstunden konzipiert. Sie ist in zwei Grundkursen der Klasse 12 von mir durchgeführt worden[12)].

Beim *Einstieg* in diese Lernsequenz kann entweder sofort an die Vermutung des Hauptsatzes angeknüpft oder zuerst ein scheinbar neuer Gedankengang begonnen werden. Ich habe mich hier für die zweite Alternative entschieden, da sie unerwünschte „Interferenzen" verhindert und von Schülern besser durchschaut werden kann.

- Zielangabe: „Erfinden" eines Stammfunktions-Zeichners; Erarbeitung des Prinzips im Unterrichtsgespräch
- Vorstellung des Geräts, eventuell im Film, und Behandlung von Beispielen; falls vorhanden: Konkretes Arbeiten mit dem Gerät
- Erläuterung des Namens: „Integraph"=Stammfunktions-Zeichner; Anknüpfen an Vermutung des Hauptsatzes und Übersetzen auf den Integraphen („Jeder Stammfunktions-Zeichner ist automatisch ein Flächeninhalts-funktions-Zeichner" und „Die gezeichnete Stammfunktion ist stets die Flächeninhaltsfunktion der gegebenen Funktion"); Wiederholung, für welche Funktionen dies schon bekannt ist
- Begründung des Hauptsatzes im Unterrichtsgespräch (wie in 1.3 geschildert); gegebenenfalls bzgl. Approximationsidee Anknüpfen an Beispiel x^2; eventuell: Wiederholende Verdeutlichung des Beweises im Film
- Diskussion über Bedeutung des Hauptsatzes; geometrisch-inhaltliche Interpretation (wie in 2.2, Aspekt f); eventuell: Unterstützung der Grundvorstellungen durch Film
- Rückblickende Diskussion des Beweises; Herausarbeiten einiger stillschweigender Vereinfachungen.

Die Lernsequenz soll ebenso wie der vorangehende und der nachfolgende Unterricht dazu beitragen, das Hauptziel der Konzeption von Kirsch zu erreichen: Den (Grundkurs-)Schüler dazu zu befähigen, *angemessene Vorstellungen* von den wesentlichen Inhalten der Integralrechnung aktiv *aufzubauen* und diese *Inhalte* in inner- und außermathematischen Anwendungssituationen *verständig zu handhaben.*

Bei der *Durchführung* der Lernsequenz in den genannten Grundkursen war vor allem bemerkenswert, daß der Integraph tatsächlich beidemale die Beweisidee provozierte, und zwar einmal via Streckenzüge und einmal via Treppen. (Die selbständig gefundene Argumentation einer – schwächeren – Schülerin: „Ich stelle mir vor, daß der Integraph beim Nachzeichnen den Graphen der gegebenen Funktion in lauter ganz kleine gradlinige Stückchen zerlegt. Für alle diese Stückchen zeichnet er eine Stammfunktion, die – das wissen wir von vorher – Flächeninhaltsfunktion ist. Damit muß dies natürlich auch für den ganzen Graphen gelten!")

Die Integralrechnung wird nach dieser Lernsequenz in üblicher Weise fortgesetzt, d. h. mit dem 2. Teil des Hauptsatzes sowie inner- und außermathematischen Anwendungen der Integralrechnung.

Literatur

[1] Abdank-Abakanowicz, B.: Die Integraphen (deutsch bearbeitet von E. Bitterli). – Leipzig, 1889

[2] Blum, W.: Stammfunktionen als Flächeninhaltsfunktionen – Ein anderer Beweis des Hauptsatzes. – In: Mathematische Semesterberichte 28 (1982) H. 1

[3] Blum, W.; Kirsch, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. – In: Der Mathematikunterricht 25 (1979) H. 3, S. 6–24

[4] Cundy, H. M., Rollett, A. P.: Mathematical Models. – Oxford, 1960

[5] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis I. – Braunschweig, 1975

[6] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. – Stuttgart, 1973

[7] Galle, A.: Mathematische Instrumente. – Leipzig und Berlin, 1912

[8] Hund, H.: Einführung zu „Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht". – In: Der Mathematikunterricht 2 (1956) H. 3, S. 4

[9] Kirsch, A.: Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. – In: Didaktik der Mathematik 4 (1976) H. 2, S. 87–105

[10] Kirsch, A.: Natürliche und formale Auffassung des Flächeninhalts. – In: Praxis der Mathematik 21 (1979) H. 5, S. 65–69

[11] Meyer zur Capellen, W.: Mathematische Instrumente. – Leipzig, 1944

[12] Vietoris, L.: Zur Theorie der Integraphen. – In: Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 52 (1942), Abt. I, S. 71–74

[13] Willers, A.: Mathematische Instrumente. – München und Berlin, 1943

[14] Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterricht. – Braunschweig, 1981

[12)] Ich danke den Herren M. Schober und H. Weckesser (beide Kassel) für ihre freundliche Unterstützung.