In: Journal für Mathematik-Didaktik, Zeitschrift der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Hrsg.: Artmann (u.a.), Jahrgang 14, Heft 1, 1993, Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn, S. 269-305

Gabriele Kaiser-Meßmer / Werner Blum

Einige Ergebnisse von vergleichenden Untersuchungen in England und Deutschland zum Lehren und Lernen von Mathematik in Realitätsbezügen

In der Arbeit werden einige Resultate von vergleichenden empirischen Untersuchungen zu unterschiedlichen Konzeptionen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, wie sie in England und Deutschland häufig vertreten werden, dargestellt. Bei diesen Untersuchungen werden in verschiedenen Fallstudien, die u.a. auch strukturelle Unterschiede zwischen den Bildungssystemen in England und Deutschland und den zugrundeliegenden Erziehungsphilosophien berücksichtigen, Auswirkungen dieser Konzeptionen auf die Einstellung der Lernenden zum Mathematikunterricht, ihr Bild von Mathematik, ihr Verständnis mathematischer Begriffe und Methoden sowie ihre Fähigkeiten zur Anwendung mathematischer Methoden zum Lösen realer Problemaufgaben untersucht. Die hier dargestellten Erhebungen sind Teil eines längerdauernden Kollaborationsprojekts zwischen den Universitäten Exeter und Kassel.

In this paper, some results of comparative empirical investigations into different educational approaches to the teaching of mathematics in context, frequently found in England and Germany, will be presented. These investigations consist of various case studies, which also consider structural differences between the educational systems in England and Germany and the underlying educational philosophies, and evaluate the influence of these approaches on the attitude of the students towards mathematics, their image of mathematics, their comprehension of mathematical concepts and methods and their abilities to use mathematics in order to solve real-world problems. The investigations presented here are part of a longer, on-going collaborative project between the universities of Exeter and Kassel.

1. DIDAKTISCHER UND ERZIEHUNGSWISSENSCHAFTLICHER RAHMEN

Seit Ende der sechziger Jahre hat die Forderung nach Berücksichtigung von **Realitätsbezügen im Mathematikunterricht** weltweit wieder stark an Bedeutung gewonnen und ist mittlerweile in der didaktischen Diskussion weitgehend akzeptiert (vgl. z.B. den Übersichtsartikel von Blum/Niss, 1991). Dabei haben sich - u.a. aufgrund unterschiedlicher Bildungssysteme und Erziehungsphilosphien in verschiedenen Ländern und damit auch unterschiedlicher Traditionen für den Mathematikunterricht - auf internationaler Ebene unterschiedliche **Richtungen** für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht herausgebildet, die man idealtypisch wie folgt beschreiben kann:

- Eine eher an humanistischen Bildungsidealen und der Wissenschaft Mathematik orientierte Richtung, bei der formale Ziele wie z.B. die Befähigung der Lernenden, zwischen Mathematik und der Realität Bezüge herzustellen, sowie stärker mathematikbezogene Ziele in den Mittelpunkt gestellt werden; Bezeichnung: "**wissenschaftlich-humanistische**" Richtung.
- Eine eher an der Nützlichkeit der Mathematik orientierte Richtung, bei der vor allem die Befähigung der Lernenden, Mathematik zur Lösung praktischer Probleme anzuwenden, betont wird; Bezeichnung: "**pragmatische**" Richtung.

Hier ist nicht der Ort, diese Richtungen genauer zu beschreiben; für Details verweisen wir auf die ausführliche Darstellung in Kaiser-Meßmer, 1986, Bd.1.

Diese Richtungen lassen sich natürlich kaum in "Reinkultur" vorfinden. Sie sind vielmehr in jeweilige Bildungssysteme eingebettet und werden von verschiedenen Personen bzw. Materialien in unterschiedlichem Ausmaß repräsentiert. Die **angelsächsische** didaktische Diskussion ist vergleichsweise recht stark pragmatisch orientiert[1], wobei dies ursprünglich stärker für den nordamerikanischen Raum galt ("life adjustment" als Haupterziehungsziel der von Dewey stark geprägten amerikanischen Erziehungsphilosphie). In England gewannen solche Ansätze erst in den achtziger Jahren im Zuge der Diskussion um den Cockcroft Report eine wesentliche Bedeutung; in den letzten Jahren hat sich die einschlägige didaktische Diskussion allerdings dahingehend verändert, daß zunehmend gefordert wird, mit dem Mathematikunterricht auch allgemeine Problemlösestrategien (sog. Strategic Skills) zu vermitteln. Die **deutschsprachige** Tradition ist für den gymnasialen Bereich stark wissenschaftlich-humanistisch orientiert, während für den Haupt- und Realschulbereich auch deutliche Bezüge zur pragmatischen Richtung vorhanden sind (genauer lassen sich auch im deutschsprachigen Raum verschiedene Richtungen unterscheiden; siehe auch hierzu Kaiser-Meßmer, 1986, Bd.1).

Bisher existieren weder im nationalen noch im internationalen Bereich **vergleichende empirische Untersuchungen** zur unterrichtlichen Realisierung der genannten Richtungen (für einen Überblick über die empirischen Untersuchungen zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht bis Mitte der achtziger Jahre siehe Kaiser-Meßmer, 1986, Bd.2). Da aber wohl gerade im Vergleich der unterrichtlichen Auswirkungen Stärken und Schwächen deutlich werden, erscheinen vergleichende Untersuchungen zu diesen Richtungen - eingebettet in jeweilige Bildungssysteme - sehr wünschenswert. Dies gilt umso mehr innerhalb eines immer mehr zusammenwachsenden Europas, in dem im Zuge der Einführung des gemeinsamen Marktes Grenzen auch für Arbeitskräfte fallen und damit Fragen der Anerkennung und Vergleichbarkeit von Bildungsabschlüssen stark an Bedeutung gewinnen.

Wir haben in den vergangenen zwei Jahren in einem gemeinsamen Projekt der Universitäten von Kassel und Exeter solche vergleichenden Untersuchungen zwischen **England** und **Deutschland**[2] durchgeführt (für einen kurzen Bericht siehe Blum et.al., 1992). Gründe für diese Kooperation waren zum einen bereits bestehende Arbeitsbeziehungen zwischen Didaktikergruppen an beiden Universitäten und zum anderen die Tatsache, daß in der pädagogischen bzw. sogar in der öffentlichen Diskussion in England in neuerer Zeit immer wieder Vergleiche der Leistungen des bundesdeutschen und des englischen Bildungssystems angestellt werden.

---

1 Die von uns darunter gefaßten Positionen werden z.B. von Ernest (1991) als "Technological Pragmatists" mit utilitaristischer Ideologie bezeichnet (S. 151ff).

2 Mit einem Vergleich der Bildungssysteme von England und Deutschland ist übrigens noch kein Vergleich der Bildungssysteme der angelsächsischen Länder insgesamt mit dem bundesdeutschen Bildungswesen geleistet, da die in anderen angelsächsischen Ländern - wie etwa USA oder Schottland - entwickelten Bildungssysteme beträchtliche Unterschiede zum englischen System aufweisen (z.B. bzgl. der Bedeutung des Privatschulwesens, des Stellenwerts von Allgemeinbildung und damit einhergehend des Aufbaus des oberen Sekundarbereichs).

Wie eben erwähnt gibt es in **England** großes Interesse an vergleichenden empirischen Untersuchungen, insbesondere bezogen auf den Mathematikunterricht, u.a. bedingt durch das schlechte Abschneiden englischer Schülerinnen und Schüler in internationalen Mathematiktests (z.B. in der Second International Mathematics Study von 1983, siehe Cresswell/Gubb, 1987, bzw. beim Second International Assessment of Educational Progress, siehe Educational Testing Service, 1992) bzw. durch Veröffentlichungen, in denen auf die geringe Zahl von Abschlußprüfungen in Mathematik in England verglichen mit der Bundesrepublik Deutschland sowie die schlechteren Leistungen der breiten Masse der Lernenden hingewiesen wird (siehe die in England nicht unumstrittene Untersuchung von Prais/Wagner, 1986). Die seit Mitte der achtziger Jahre von der konservativen Regierung in England begonnene Umgestaltung des Bildungssystems - wie Einführung eines Kernbereichs mit verschiedenen verpflichtenden Fächern, nationale Curricula für diese Kernfächer, nationale Leistungskontrollen nach verschiedenen Altersstufen (mit 7, 11, 14 und 16 Jahren), verschiedene Arten summativer Leistungsmessung wie Coursework oder Standard Assessment Tasks (für Details siehe Lawton/Chitty, 1988; Dowling/Noss, 1990; Brown, 1993) - bezieht sich dabei immer wieder auf die Leistungen und Erfolge des deutschen Bildungssystems, was z.T. zu erbitterten Kontroversen geführt hat (für Details der Debatte siehe u.a. Hearnden 1986; Phillips, 1987; Marshall, 1989; Glowka, 1989; Education Report, 1991).

Vergleichende empirische Untersuchungen in bundesdeutschen und englischen Klassenzimmern müssen nun einerseits die großen **Unterschiede zwischen den beiden Bildungssystemen** berücksichtigen, die u.a. durch Schlagworte zu charakterisieren sind, wie:
- dreigliedriges, selektives Schulsystem vs. Gesamtschulsystem,
- Betonung von Allgemeinbildung vs. frühe Spezialisierung,
- permanente vs. punktuelle Leistungsüberprüfung,
- Gesamtabschlußexamen in den Kernfächern vs. Examina in einzelnen, ausgewählten Fächern,
- Schwerpunkt auf Frontalunterricht bzw. Klassengespräch vs. individualisiertes Lernen

(für eine fundierte und aktuelle Darstellung des englischen Bildungssystems mit vergleichenden Bezügen zum bundesdeutschen System siehe Stübig, 1980, 1983, 1989; für eine Darstellung des englischen Schulunterrichts aus deutscher Sicht siehe Sienknecht, 1985). Andererseits müssen solche Untersuchungen auch die Unterschiede in den zugrundeliegenden **Erziehungsphilosophien** berücksichtigen, die die Bildungssysteme prägen. In der komparativen Erziehungswissenschaft werden seit Jahren Ansätze zur Klassifikation der verschiedenen Bildungssysteme aufgrund der ihnen zugrundeliegenden Erziehungsphilosophien unternommen (siehe u.a. Hopper, 1968; Lauwerys, 1959). Die neuesten und umfassendsten Arbeiten dazu, die sich insbesondere mit einem Vergleich der den deutschen und den englischen Bildungssystemen zugrundeliegenden Erziehungsphilosophien beschäftigen, stammen von McLean (1990) und Holmes/McLean (1989).

Holmes/McLean sehen die **englische** Erziehungstradition durch die Prinzipien der Moralität (Ideal des christlichen Gentleman), Individualität und Spezialisierung geprägt, was u.a. zu einer antirationalen Haltung und einem geringen Stellenwert von methodischem und systematischem Lernen führt. Als Charakteristikum der englischen Erziehungsphilosphie sehen sie die auf klassisch-altgriechische Traditionen zurückgehende Trennung von Erziehung und Ausbildung (education vs training) an. Erziehung ist der Elite vorbehalten, wobei weniger die Vermittlung spezieller Inhalte als der Umgang mit gebildeten Menschen wichtig ist. Ausbildung, insbesondere bzgl. handwerklicher Fertigkeiten, ist der Unterschicht zugeordnet. Aufgrund dieser Trennung haben Berufsvorbereitung und Bezüge zur Arbeitswelt einen geringen Stellenwert in englischen Bildungsphilosophien, was bis heute zu einer Dominanz eher akademischer Bildungsziele geführt hat. Die englische Erziehungsphilosphie zielt nach Holmes/McLean insbesondere auch für den Mathematikunterricht nicht auf Einsicht in Theoreme und Strukturen, sondern auf das eigenständige Durcharbeiten von Ketten von Beispielen, die Einsicht in allgemeine Prinzipien vermitteln sollen (hoher Stellenwert des Prinzips des entdeckenden Lernens). Daraus erklärt sich die Betonung von beispielgebundenem Arbeiten und Argumentieren in englischen Unterrichtsmaterialien und die Fülle von Materialien für individualisiertes Lernen im Klassenzimmer (siehe z.B. die Schulbuchreihe des School Mathematics Project (SMP) als in England am weitesten verbreitete Reihe). Dabei bleiben auch Ansätze, die den englischen Mathematikunterricht ändern wollen, wie z.B. der Cockcroft-Report, dem Antirationalismus verhaftet und betonen hauptsächlich die Nützlichkeit der Mathematik für das spätere Leben, nicht aber allgemeine Lernziele wie etwa die Möglichkeit der Förderung von Argumentationsfähigkeiten (was auch in der Charakterisierung der pragmatischen Richtung deutlich wurde).

Holmes/McLean charakterisieren die **deutsche** Erziehungsphilosophie als enzyklopädisch mit naturalistischen Bezügen. Die enzyklopädische Orientierung beinhaltet eine starke Betonung der Prinzipien der Rationalität und Universalität. Rationalität ist dabei das höchste Ziel des enzyklopädischen Ansatzes, als ein Mittel zur Verbesserung des Menschen und der Gesellschaft. Universalität zielt darauf ab, allen Lernenden soviel Wissen wie möglich aus allen wichtigen Fächern zu vermitteln. Diese Prinzipien finden u.a. im hohen Stellenwert von Allgemeinbildung, d.h. der Vermittlung eines breiten Wissens über die gesamte Natur und die Menschheit (ursprünglich nur in der Ausbildung für die Elite), bereits seit Humboldt seinen Ausdruck. Die naturalistische Orientierung beinhaltet die Entwicklung arbeitsorientierter Ansätze für die breite Masse der Bevölkerung, die die Verbindung des Wissens mit dem täglichen Leben und der Arbeit sowie die bildende Kraft von Arbeit betonen (z.B. bei Kerschensteiner). Für den Mathematikunterricht bedeutet die rationale Orientierung des Bildungssystems einen hohen Stellenwert des Verständnisses von Theorien und logischen Verbindungen und einen geringeren Stellenwert des selbständigen Bearbeitens von Beispielen; Verständnis des Ganzen und seiner Strukturen wird als wichtiger angesehen als das Erreichen von Tiefe in einzelnen Bereichen.

Wenn wir im folgenden von "**Konzeptionen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht**" in England bzw. in Deutschland oder kurz von (Unterrichts-)Konzeptionen sprechen, so meinen wir damit sämtliche in Abschnitt 1 angesprochenen Aspekte, insbesondere die verschiedenen mathematikdidaktischen Richtungen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, die den Bildungssystemen zugrundeliegenden Erziehungsphilosophien sowie die jeweils dominierenden Lehr-Lern-Formen.

2. ZIELE DER UNTERSUCHUNG UND METHODISCHES VORGEHEN

Um die Auswirkungen unterschiedlicher Konzeptionen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, wie sie in England und Deutschland vertreten werden, auf Lernende besser kennenzulernen, haben wir vergleichende empirische Untersuchungen durchgeführt; weitere sind im Gange bzw. werden noch folgen. Insbesondere folgende Bereiche wurden bzw. werden genauer untersucht, da hier besonders deutliche Unterschiede vermutet werden:
- Anwendungsfähigkeiten der Lernenden;
- Mathematisches Begriffs- und Methodenverständnis der Lernenden;
- Bild der Lernenden von der Mathematik.

Auf dem Hintergrund der genannten Konzeptionen liegen u.a. folgende **Arbeitshypothesen** nahe, die in den empirischen Untersuchungen überprüft und ggf. untermauert oder in Frage gestellt werden:

- Die den englischen realitätsbezogenen Mathematikunterricht dominierenden Ansätze sind eher geeignet, Fähigkeiten zur eigenständigen Anwendung mathematischer Methoden zur Lösung realer Probleme sowie - falls zur Problemlösung nötig - zur Durchführung von Modellbildungsprozessen[3] zu fördern.
- Defizite dieser Ansätze liegen in der geringen Vermittlung von Einsichten in die den Problemen zugrundeliegenden mathematischen Grundideen und das mathematische Theoriegebäude sowie im nicht genügenden Aufbau eines adäquaten, umfassenden Verständnisses mathematischer Begriffe und Methoden (das auch außermathematische Bezüge umfaßt und auf dem Zusammenspiel verschiedener Grundideen und Grundvorstellungen beruht).
- Die den deutschen realitätsbezogenen Mathematikunterricht dominierenden Ansätze sind eher geeignet, adäquate Vorstellungen von den bei Anwendungsbeispielen zugrundeliegenden mathematischen Begriffen, Methoden und Resultaten (abgestuft im dreigliedrigen Schulwesen) und dadurch auch ein ausgewogeneres Bild von der Mathematik als Wissenschaft zu vermitteln.
- Diese Ansätze weisen Defizite bzgl. der Vermittlung von Anwendungs- und Modellbildungsfähigkeiten auf, insbesondere in Bezug auf eigentätiges, selbständiges Lösen außermathematischer Probleme.

Als Untersuchungsmethode haben wir die **Fallstudienmethode** ausgewählt, auch weil statistisch-

[3] Wir verstehen übrigens hier und im folgenden unter "Modellbildung" den gesamten Prozeß des angewandten Problemlösens (siehe Blum/Niss, 1991).

quantitative Vergleiche aufgrund der unterschiedlichen Bildungs- und Schulsysteme auf der Basis des bisherigen Erkenntnisstandes recht schwierig erscheinen. Insbesondere gilt die Fallstudienmethode (als wesentlicher Teil der interpretativen Unterrichtsforschung; vgl. z.B. Maier/Voigt, 1991) für die Entwicklung erkenntnisleitender Hypothesen und deren Überprüfung als besonders geeignet, was dem explorativen Charakter unseres Projekts angemessen ist. Weiter ist in den letzten Jahren immer wieder auf die methodologische Angemessenheit der Fallstudienmethode gerade für komparative empirische Untersuchungen hingewiesen worden (siehe z.B. Stenhouse, 1979; Crossley/Vulliamy, 1984).

Wir haben bisher mehrere Fallstudien in englischen und deutschen Schulklassen mit für die genannten Konzeptionen "typischen" Unterrichtsmaterialien und Lehrpersonen durchgeführt, beschränkt auf **obere Bildungsniveaus der Sekundarstufe I**. Um unser Bild vom Mathematikunterricht in England und Deutschland zu festigen, haben wir zusätzlich zahlreiche Unterrichtsstunden in beiden Sekundarstufen beobachtet und ausgewertet (Ergebnisse in Abschnitt 4.1). Unsere **"Fälle"** sind dabei Klassen bzw. Schülergruppen, nicht jedoch einzelne Lernende, da es uns um die Gewinnung von generalisierbaren Aussagen (im ersten Anlauf als Hypothesen bezeichnet) über Effekte von Mathematikunterricht bezogen auf Lernende einer Alters- und Fähigkeitsgruppe, nicht jedoch um Erkenntnisse über Verstehensprozesse einzelner Lernender o.ä. geht. Als Untersuchungsinstrumente wurden **teilnehmende Unterrichtsbeobachtungen** mit schriftlichen Unterrichtsprotokollen sowie (hauptsächlich im deutschen Unterricht) Tonbandaufzeichnungen mit anschließender Transkription verwendet[4]. Des weiteren haben wir am Ende der beobachteten Unterrichtseinheiten vergleichende **Einstellungs- und Leistungstests** zu den Vorstellungen von Mathematik als Wissenschaft, zum Interesse und zur Einstellung bzgl. Mathematik, zu Anwendungsfähigkeiten und zum mathematischen Begriffsverständnis durchgeführt (Ergebnisse in den Abschnitten 4.2 und 4.3).

Die Einstellungstests und die Tests zum Thema Raumgeometrie sind im Anhang abgedruckt. Dabei geben wir sowohl die deutsche als auch die englische Version wieder, um den Lesern eine eigene Beurteilung der Äquivalenz der Fragen zu ermöglichen. Denn z.B. weist die Untersuchung von Hanna (1993) an der Second International Mathematics Study darauf hin, wie schwierig die Herstellung wirklich äquivalenter Fragen ist, insbesondere wenn die gewählten Formulierungen den in den jeweiligen Unterrichtsmaterialien verwendeten entsprechen sollen. Wir haben jedenfalls viel Mühe auf die Sicherung der Äquivalenz der Fragen verwendet, wie z.B. Prüfung der Übersetzungen durch einen am Projekt beteiligten bilingualen Mathematiklehrer.

Die bisher durchgeführten empirischen Untersuchungen in **englischen** Klassenzimmern basieren auf einem vom Centre for Innovation in Mathematics Teaching an der University of Exeter ent-

---

[4] Alle Unterrichtsbeobachtungen wurden von Gabriele Kaiser-Meßmer durchgeführt. Sämtliche Unterlagen (Unterrichtsaufzeichnungen, Tests usw.) sind bei ihr einsehbar.

wickelten experimentellen Kurs ("Enterprising Mathematics"), der die englischen Jahrgangsstufen 10 und 11 (entspricht i.w. den Jahrgangsstufen 9 und 10 in Deutschland) vor dem General Certificate of Secondary Education (GCSE, entspricht i.w. der mittleren Reife in Deutschland) abdeckt (siehe Hobbs 1992/1993). Dieser Kurs ist für experimentelle Ansätze zum Lernen von Mathematik im Kontext, wie sie z.Zt. in England entwickelt werden, als typisch anzusehen, u.a. aufgrund der starken Betonung individualisierten Lernens, des nach außermathematischen Themen (z.B. Betreiben eines Geschäfts, elektrische Schaltkreise, Konstruktion und Bau eines Hauses, Meinungsumfragen) strukturierten Aufbaus, der Orientierung an konkreten Sachproblemen und der Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden aus Awendungskontexten (für eine Beschreibung des Kurses siehe Hobbs/Burghes, 1989). Die empirischen Untersuchungen in **deutschen** Schulen basieren auf für die deutschsprachige Anwendungsdiskussion typischen Unterrichtsmaterialien, die u.a. charakterisiert sind durch eine stringente mathematische Sachsystematik, die Einbettung von Begriffseinführungen in Realitätsbezüge unter Betonung verschiedener mathematischer Grundideen, die Berücksichtigung einer breiten Palette von Zielen sowohl außermathematischer wie innermathematischer Art sowie Bezüge zu Gesellschaft und Umwelt (Beispiele: Physikalische Bewegungsvorgänge, bundesdeutsche Einkommensteuer, Bevölkerungsentwicklung, Rohstoffverbrauch und Grenzen des Wachstums, Verkehrsprobleme, Risikostudien für Kernkraftwerke oder Wärmedämmung eines Hauses[5]).

Selbstverständlich ist es **nicht** möglich, Ergebnisse unserer Untersuchungen quasi **monokausal** auf die unterschiedlichen Konzeptionen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht zurückzuführen. Bekanntlich gibt es ja eine **Fülle von Variablen**, die solche Ergebnisse beeinflussen (können), z.B. die bis dato erreichten Kenntnisse und Fähigkeiten der Lernenden, das Schulsystem (mit Fächertrennung, Unterricht im 45-Minuten-Takt usw.) sowie nicht zuletzt Ausbildungsstand, Arbeitsbedingungen, Motivation oder Kognition der einzelnen Lehrenden. Und natürlich sind unsere Ergebnisse untrennbar mit den spezifischen Instrumentarien (insbesondere den von uns konstruierten Tests) verbunden, die wir eingesetzt haben (mehr dazu in Abschnitt 4.3). Wir haben jedoch bei der Konzipierung unserer Untersuchungen versucht, möglichst viele Variable (vor allem durch sorgfältige Auswahl der beteiligten Klassen nach Schultyp, Einzugsbereich, Leistungsniveau, Unterrichtsmaterialien sowie Unterrichtsstil der Lehrenden) a priori so zu steuern, daß sie entweder - bei für uns irrelevanten Merkmalen - weitgehend übereinstimmend oder aber in einer für die beschriebenen Unterrichtskonzeptionen möglichst typischen Weise belegt sind. Bei der Auswertung versuchen wir dann in der Tat, die erhaltenen Ergebnisse (primär) auf diese für uns **relevanten** Variablen, d.h. auf die zugrundeliegenden **Konzeptionen** zurückzuführen. Nur wo dies in plausibler und (zumindest für uns) leicht nachvollziehbarer Weise möglich ist, formulieren wir entsprechende Aussagen und Folgerungen (siehe Abschnitt 4.3).
Bei all dem verkennen wir nicht die prinzipiell bestehende Abhängigkeit vom konkreten Fall. Ins-

[5] Für weitere Beispiele siehe Kaiser-Meßmer/Blum/Schober (1982, 1992).

besondere möchten wir **nicht** behaupten, daß die von uns ausgewählten und untersuchten Fälle (genauer beschrieben in Abschnitt 3) und die erhaltenen Ergebnisse **repräsentativ** für "den" englischen und deutschen Mathematikunterricht sind; um Aussagen in dieser Richtung machen zu können, wären weitere, umfangreichere Untersuchungen erforderlich. Allerdings meinen wir, wie schon gesagt, aufgrund der Fülle der von uns in den letzten Jahren durchgeführten Unterrichtsbeobachtungen sowie von zahlreichen Gesprächen mit Mathematiklehrenden in beiden Ländern, daß unsere Fallbeispiele sehr wohl **typisch** für den Mathematikunterricht in den beiden Ländern sind.

3. BESCHREIBUNG DES BEOBACHTETEN UNTERRICHTS

Bisher wurden **zwei umfangreichere vergleichende Fallstudien** durchgeführt: In der ersten Studie wurden zwei Gruppen der Jgst.10 aus dem oberen Leistungsniveau einer englischen Gesamtschule über mehrere Wochen beobachtet, die **Oberfläche und Volumen geometrischer Körper** behandelten. In einer Paralleluntersuchung mit deutschen Lernenden wurden drei Gymnasialklassen der Jgst. 10 beobachtet (an zwei additiven Gesamtschulen), die im wesentlichen dieselben mathematischen Inhalte behandelten. Die zweite Studie wurde zu **trigonometrischen Funktionen** durchgeführt, mit zwei englischen Schulklassen der Jgst.11 aus dem oberen Leistungsbereich derselben Gesamtschule und mit einer deutschen Schulkasse der Jgst.10 aus dem oberen Leistungsbereich einer integrierten Gesamtschule. Die Fallstudien wurden im Winter 1990 bzw. Sommer 1991 durchgeführt.

Zunächst einige Details zu den beteiligten **Schulen**: Bei der **englischen** Schule handelt es sich um eine integrierte Gesamtschule, die die Jahrgangsstufen 9-11 (14-16jährige) und die Oberstufe (sog. Sixth Form, 16-18jährige) abdeckt. Die in einer mittleren Stadt Englands nahe London gelegene Schule weist einen hohen Anteil von Ausländern auf, und zwar ca. 20% Italiener der 2. Generation sowie einige Jamaicaner. Ungefähr 30% der Schülerinnen und Schüler der Stadt, darunter viele der leistungsstärksten, gingen zum Untersuchungszeitraum in Privatschulen, von denen es in der Stadt vier gibt. Bei den drei **deutschen** beteiligten Schulen handelt es sich um zwei additive und eine integrierte Gesamtschule(n) in größeren Städten Hessens bzw. Nordrhein-Westfalens. Eine der beiden additiven Gesamtschulen ist durch ihre Entstehung aus einer Haupt- und Realschule und durch umliegende Gymnasien leistungsmäßig recht ausgedünnt und darüberhinaus nur für den unteren Sekundarbereich ausgelegt. Die zweite additive Gesamtschule - ebenfalls nur unterer Sekundarbereich - wird u.a. durch ihre Entstehung aus einem Gymnasium von deutlich leistungsstärkeren Lernenden, auch aus gehobeneren sozialen Schichten, besucht. Die beteiligte integrierte Gesamtschule, mit unterem und oberen Sekundarbereich, ist eine Neugründung mit einem jungen, aufgeschlossenen Kollegium. Ca. 1/3 der Lernenden waren zum Untersuchungszeitraum ausländische Kinder, überwiegend der 2. Generation, und zwar hauptsächlich türkischer Nationalität.

Aus Platzgründen müssen wir uns in dieser Arbeit darauf **beschränken**, ausschließlich die Fallstudie zu **geometrischen Körpern** darzustellen. Wir beschreiben nun den beobachteten Unterricht zu diesem Thema etwas genauer.

Vorweg ein Vergleich der beteiligten **Lerngruppen**: Bei den beiden **englischen** Gruppen handelte es sich um den obersten Leistungsbereich der Jgst. 10 jener Schule. Die erste Gruppe umfaßte 28 Lernende, davon 14 Mädchen, die zweite 27 Lernende, davon 11 Mädchen. Die erste **deutsche** Gruppe stammte aus Jgst. 10 der leistungsschwächeren additiven Gesamtschule und umfaßte 16 Lernende, davon 9 Mädchen. Die beiden weiteren deutschen Gruppen besuchten Jgst. 10 der anderen additiven Gesamtschule; die leistungsstärkere Gruppe umfaßte 24 Lernende, davon 16 Mädchen, die andere Gruppe 14 Lernende, davon 3 Mädchen[6] Die englischen Lernenden waren somit zwar jünger als die deutschen, das mittlere "Schulalter" war jedoch in beiden Gruppen gleich (beidemale zehntes Schul-Jahr). Aufgrund der vorhin genannten Bedingungen (Einzugsbereich der Schulen, Leistungsniveau von Schulen und Klassen) sind die englischen und die deutschen Lernenden, zusammengefaßt zu zwei zu vergleichenden Gruppen, in für unsere Zwecke genügendem Maße **vergleichbar**. Wir werden ja, wie in Abschnitt 2 erwähnt, nur solche Unterschiede bei den Ergebnissen der englischen bzw. der deutschen Lernenden hervorheben, die wir auf dem Hintergrund der in Rede stehenden Unterrichtskonzeptionen interpretieren können.

Der Unterricht in **England**: Zugrunde lag die Unterrichtseinheit "Containers For Everything" des Enterprising Mathematics Course, die folgende Teile enthält:

- Ausgangspunkt: Klassifizieren von Verpackungen nach ihren geometrischen Formen;
- Pyramiden: Bau eines Pyramidenmodells und Zusammenfügen dreier inhaltsgleicher Pyramiden zu einem Prisma bzw. Würfel, Volumenberechnungen;
- Prismen und Zylinder: Volumenberechnungen;
- Kegel: Herstellung eines Kegelmodells, Bestimmung des Mantelflächeninhalts und des Volumens;
- Kugel: Volumen und Oberflächeninhalt.

Die Anwendungsbeispiele in dieser Einheit stammen aus dem Alltag, insbesondere aus dem Bereich Design von Verpackungen. Dabei werden auch verschiedene Verpackungsformen im Hinblick auf Materialverbrauch, Verpackungsfreundlichkeit u.ä. verglichen. Weiter werden z.B. das Volumen von Swimmingpools oder von Weingläsern sowie der Materialverbrauch beim Bau von Pyramiden in Mexico und Ägypten bestimmt.

Das unterrichtliche Vorgehen in beiden Gruppen unterschied sich nur wenig. So umfaßte die Arbeit zu geometrischen Körpern in der ersten, leistungsstärkeren Gruppe (28 Lernende) fünf Wochen, wobei die Lernenden drei Wochen lang den neuen Stoff anhand der Unterrichtsmaterialien

[6] Die Aussagen über die Leistungsstärke der beteiligten Gruppen beruhen auf uns vorweg von den beteiligten Lehrpersonen gegebenen Einschätzungen und Bewertungen.

erarbeiteten und ungefähr zwei Wochen lang eine sich darauf beziehende Kursarbeit (sog. Coursework[7]) erstellten. Da die letzten drei Wochen der Unterrichtseinheit beobachtet wurden, stützt sich die folgende Beschreibung des unterrichtlichen Vorgehens der ersten beiden Wochen auf die von dem unterrichtenden Lehrer gegebenen Informationen sowie auf die genaue Durchsicht der im Unterricht geführten Hefte der Lernenden. Zum Unterricht im Detail: In den ersten (2-3) Stunden wurden Modelle verschiedener geometrischer Formen behandelt, einschließlich Pyramiden und Kegeln. Dabei bauten die Lernenden ihre eigenen Pyramidenmodelle, wobei sie ein Arbeitsblatt aus der Unterrichtseinheit benutzten. Anschließend erarbeitete die Lehrperson mit den Lernenden, wie das Volumen von Pyramide und Kegel zu berechnen sei, und zwar unter Bezug auf den Konstruktionsprozeß bzw. die Beziehungen zwischen Kegel und Pyramide, und teilte anschließend die entsprechenden Formeln mit. Die von den Lernenden entwickelten Vorschläge wurden anhand physikalischer Modelle der geometrischen Formen überprüft. Danach begannen die Lernenden, ein Übungsblatt (sog. Practice Sheet) der Unterrichtseinheit zu bearbeiten, bei dem Textaufgaben zu Kegel, Zylinder, Pyramide, Prisma und Kugel durch Anwendung der entsprechenden Volumen- bzw. Oberflächeninhaltsformeln zu lösen waren. Nach 2-3 Stunden unterbrach die Lehrperson diese Arbeit, da für die meisten Lernenden die Übungen zu schwer waren. Die Lernenden begannen daher, die Unterrichtseinheit im Detail durchzuarbeiten, wobei sie an verschiedenen Stellen der Einheit begannen und unterschiedlich weit vorankamen. So bearbeiteten einige in den 1 1/2 Wochen die gesamte Unterrichtseinheit, andere beschränkten sich auf die Kapitel zu Zylinder und Kegel, jedoch nur wenige bearbeiteten die Teile zur Kugel. Nach ungefähr 1 1/2 Wochen wurde die Arbeit an der Unterrichtseinheit beendet und wurden sich darauf beziehende Kursarbeiten begonnen. So beschäftigten sich z.B. einige Lernende mit der Minimierung der Oberfläche eines Saftkartons bei gegebenem Volumen unter Verwendung von Quadern, Prismen, Zylindern und Kegeln, andere mit der Minimierung der Oberfläche von zylindrischen Saftbehältern, die eine ökonomische Art der Verpackung in größere Behälter ermöglichen sollten. Sehr verschieden von diesen Problemen waren z.B. die Frage, ob Toilettenpapierrollen weniger Platz benötigen würden, wenn sie flach verpackt würden, oder das Problem der aus einem DIN A4-Blatt herzustellende Form mit größtmöglichem Volumen.

Die zweite, etwas weniger leistungsstarke Gruppe (27 Lernende) folgte nach Auskunft der Lehrerin im wesentlichen demselben Unterrichtsgang, wobei die sporadischen Unterrichtsbeobachtungen sowie die Durchsicht der Übungshefte der Lernenden darauf hinwiesen, daß das unterrichtliche Vorgehen etwas stärker an die Unterrichtsmaterialien gebunden war.

Der Unterricht in **Deutschland:** In allen drei Gruppen lag das Schulbuch "Mathematik heute"

[7] Coursework ist eine in den beiden letzten Jahren vor dem GCSE weitverbreitete (nach den neuesten Richtlinien allerdings nicht mehr verpflichtende) Form der Leistungsmessung, in der Lernende zu selbstgewählten Themen aus den neuesten Unterrichtsinhalten umfangreichere schriftliche Arbeiten anfertigen, und zwar z.T. zuhause und z.T. in der Schule. Die Anzahl der durchzuführenden Arbeiten variiert je nach Examination Board zwischen 1 bis 4 Arbeiten pro Jahr, ebenso wie ihre Gewichtung im GCSE. Im Enterprising Mathematics Course war im Untersuchungszeitraum mit 50% die Gewichtung der Coursework ungewöhnlich hoch.

(hrsg. von H. Athen, H. Griesel, H. Postel) zugrunde, das zahlreiche Anwendungsbezüge enthält und bei Lehrenden für seine methodisch fein gestuften Begriffseinführungen bekannt ist. Das Schulbuch enthält folgende Themen zur Raumgeometrie:

- Prisma und Zylinder: Schrägbilder, Oberflächeninhalt und Volumen;
- Pyramide/Kegel: Oberflächeninhalt und Volumen (mittels Satz des Cavalieri);
- Kugel: Oberflächeninhalt und Volumen.

Die im Schulbuch behandelten Anwendungsbeispiele stammen im wesentlichen aus Alltag, Architektur und Technik. So wird u.a. der Materialbedarf für verschiedene Pappkartons zur Verpakkung von Lebkuchen oder Zahnpasta bestimmt, der beim Herstellen eines Sechskants aus einem Rundstahl entstehende Abfall berechnet oder der Materialbedarf zum Decken von pyramidenförmigen oder kegelförmigen Kirchturmdächern bestimmt. Es finden sich auch einige wenige umfangreichere Anwendungsbeispiele wie Berechnungen rund um die kugelförmige Sicherheitshülle eines Atomkraftwerks.

Zunächst zur ersten Gruppe (16 Lernende). Im Verlauf der (vollständig beobachteten) dreiwöchigen Unterrichtseinheit, die aufgrund der anstehenden Weihnachtsferien kürzer als üblich war, wurden folgende Themen behandelt: Zunächst wurde in üblicher Weise die Oberfläche von Pyramide und Kegel berechnet (mittels Erstellung von Netzen bzw. Abwicklung der Mantelfläche in die Ebene), anschließend wurde mittels des Satzes von Cavalieri die Volumenformel für Pyramiden begründet. Zur Veranschaulichung wurden Modelle von drei inhaltsgleichen Pyramiden, die einen Würfel bzw. ein Prisma bilden, gezeigt. Die Volumenformeln für Kugel und Kegel wurden mittels Meßverfahren an Modellen aus Zylinder, Halbkugel und Kegel plausibel gemacht. Abschließend wurde eine Klassenarbeit zu dem Thema geschrieben. Aufgrund des durch die anstehenden Ferien entstandenen Zeitdrucks wurde nur der kleinere Teil der Unterrichtszeit zu Übungen verwendet und wurden notwendige Übungen als Hausaufgaben gegeben. Insgesamt legte die Lehrerin weniger Wert auf den Kalkül, sondern betonte in Erläuterungen immer wieder die zugrundeliegenden geometrischen Zusammenhänge, die ihr wichtig waren.
Die beiden (stärker gymnasial ausgerichteten) Gruppen aus der anderen Gesamtschule wurden von demselben Lehrer unterrichtet. Eine Gruppe (24 Lernende) wurde weitgehend über die gesamte Dauer der Unterrichtseinheit, die andere (14 Lernende) mehr sporadisch beobachtet. In beiden Gruppen wurde in der sechswöchigen Unterrichtseinheit, die durch die Osterferien länger unterbrochen wurde, wie folgt vorgegangen: Ausgangspunkt war die Klassifikation alltäglicher Gegenstände wie Prismen oder Zylinder, von denen anschließend Schrägbilder gezeichnet wurden. Danach wurden unter Rückgriff auf das allgemeine Prinzip der Volumenberechnung über "Schichten von Einheitswürfeln" die Volumenformel für Prismen sowie unter Verwendung des Volumens von Prismen die Volumenformel für Zylinder hergeleitet. Die Oberflächeninhalte von Prisma und Zylinder wurden mittels entsprechender Netze bestimmt. Von Kegel und Pyramide wurden ebenfalls Schrägbilder und Netze gezeichnet, womit die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts der Pyramide klar war. Der Oberflächeninhalt des Kegels wurde wie in der er-

sten Gruppe mittels Abwicklung der Mantelfläche in die Ebene berechnet. Die Volumenformeln für Pyramide und Kegel wurden mittels des Satzes von Cavalieri begründet, zur Veranschaulichung wurden Modelle dreier inhaltsgleicher Pyramiden in Würfel und Prisma gezeigt. Für die Kugel wurden die Volumen- und Oberflächeninhaltsformeln hergeleitet, unter Rückgriff auf Zylinder, Kegel und Pyramide. Eine Leistungsüberprüfung fand zweimal in beiden Gruppen statt; eine Klassenarbeit wurde während der Unterrichtseinheit geschrieben, eine nach Abschluß der Einheit. Der Unterricht war zum einen durch eine starke Betonung exakter Begriffseinführungen charakterisiert, in denen der unterrichtende Lehrer stark lenkte. Zum anderen legte der Lehrer auch großen Wert auf den Kalkül der Berechnung von Volumen und Oberfläche der behandelten geometrischen Körper mit akkurater Ausführung, was in langen Übungsphasen entsprechend eingeübt wurde.

4. ERSTE ERGEBNISSE DER EMPIRISCHEN UNTERSUCHUNGEN

Die bisher durchgeführten Untersuchungen in englischen und deutschen Klassenzimmern machen deutlich, daß es bzgl. Unterrichtsstil und Unterrichtsinhalten - auch bezogen auf Anwendungsbezüge - sowie bzgl. Einstellungen und Leistungen der Lernenden z.T. große Unterschiede gibt. Die ersten Ergebnisse aus den Unterrichtsbeobachtungen (bei 4.1 auch aus weiteren, hier nicht dokumentierten) bzw. aus den Fragebögen und Tests lassen sich wie folgt zusammenfassen.

4.1. Zum Unterrichtsstil und zu den Unterrichtsinhalten

Zum Unterrichtsstil:

- Für den deutschen Mathematikunterricht waren **Unterrichtsgespräche** zwischen allen Lernenden und der Lehrperson (d.h. der von Maier, 1991, so genannte GEMU, der "gemeinsam erarbeitende Mathematikunterricht") ein konstitutives Element des Unterrichts. Im englischen Unterricht fanden solche Unterrichtsgespräche deutlich seltener statt (wobei dies nicht nur für den Mathematikunterricht galt). Typisch für den englischen Unterrichtsstil waren individualisierte Lernformen[8], d.h. Erklärungen zu einer gegebenen Problemstellung zu Beginn des Unterrichts, dann Einzelarbeit der Lernenden mit Hilfen der Lehrperson, wenn nötig. Über Schwierigkeiten bei der Problemlösung wurden nur selten gemeinsame Diskussionen geführt, vielmehr half die Lehrperson in der Regel individuell. Im Mathematikunterricht an deutschen Schulen erfolgten Erklärungen zu Problemen, neuen Methoden u.ä. üblicherweise im

[8] Diese Unterrichtsform ist zur Zeit noch zumindest im unteren Sekundarbereich des staatlichen Schulwesens in England die fast überall übliche Unterrichtsform. Daneben gibt es natürlich auch den klassischen Frontalunterricht, der derzeit nicht mehr weit verbreitet und insbesondere an Privatschulen üblich ist. Allerdings läßt sich zur Zeit auf offizieller Ebene (z.B. bei Schulinspektoren u.ä.) eine starke Tendenz gegen individualisierte Lernformen feststellen, die bereits zu einem ersten Zurückdrängen solcher Lernformen auch in staatlichen Schulen geführt hat.

Unterrichtsgespräch. Damit war die Teilnahme daran für das Verständnis des Unterrichtsstoffs unverzichtbar, wohingegen in englischen Schulen häufig nicht alle Lernenden am Unterrichtsgespräch teilnahmen, weil sie darauf vertrauen konnten, daß die zentralen Erklärungen ohnehin in den Unterrichtsmaterialien enthalten sind bzw. von der Lehrperson - falls notwendig - individuell erklärt werden. In deutschen Schulen erfolgte der Einsatz von Unterrichtsgesprächen in der Regel geplant, währenddessen dies in englischen Schulen eher spontan vorkam.

- Im Mathematikunterricht an deutschen Schulen wurde stärker gelenkt als im englischen Unterricht. Dies führte zu Unterschieden im **Unterrichtstempo** derart, daß im deutschen Unterricht mathematische Inhalte in der Regel in kürzerer Zeit behandelt wurden als im englischen Unterricht.
  Aus dem englischen Unterrichtsstil ergaben sich ersichtliche Schwierigkeiten mit der adäquaten Lenkung der Eigenarbeit der Lernenden. Häufig waren die Lehrpersonen nicht in der Lage, die Arbeit der Lernenden, die sich ja z.T. auf sehr unterschiedlichen Wegen und Niveaus vollzieht, individuell angemessen zu strukturieren, vielmehr überließen sie die Lernenden weitgehend selbständig den Unterrichtsmaterialien.
- Im Mathematikunterricht an englischen Schulen wurden sehr häufig die Hefte der Lernenden eingesammelt und die **Hausaufgaben** sowie die Arbeit aus dem Unterricht korrigiert, was im deutschen Mathematikunterricht sehr selten geschah. Allerdings wurde die Nichterledigung von Hausaufgaben in Deutschland meistens strenger als in England sanktioniert.
- Charakteristisch für den deutschen Mathematikunterricht war u.a. seine **Aufgabenorientierung**, d.h. der Unterricht wurde organisiert längs geplanter Sequenzen wohldefinierter mathematischer Aufgaben. Die Einführung neuer mathematischer Begriffe und Methoden erschien vielen Lernenden deshalb nicht so wichtig wie die darauffolgenden Aufgaben, insbesondere die für die nächste Klassenarbeit wichtigen (die zu kennzeichnen vom Lehrenden erwartet wurde).

Zu den Unterrichtsinhalten und der Berücksichtigung von Anwendungen:

- Im Mathematikunterricht an deutschen Schulen dominierten **kurze Aufgaben** mit **eindeutigen Lösungen**, die i.w. **kalkülmäßig** zu erhalten waren; umfangreichere Probleme kamen selten vor. Im englischen Unterricht kamen demgegenüber häufiger auch umfangreichere, offene Probleme vor, die oft mehrere Lösungen hatten. U.a. aufgrund der Stoffülle und Zeitknappheit wurden im deutschen Unterricht kaum größere Projekte oder Sacheinheiten behandelt, obwohl es dafür Vorschläge - auch in Schulbüchern - gibt.
- Im englischen Mathematikunterricht wurden in der Regel mehr **realitätsbezogene Probleme** als im deutschen behandelt. Dabei zielten in englischen Schulen viele Aufgaben darauf ab, Lernende mathematische Sachverhalte (wie z.B. das Problem der Dido, d.h. der Kreis als

geometrische Form mit maximalem Flächeninhalt bei gegebenem Umfang), selbst entdecken zu lassen (sog. Investigations), während in deutschen Schulen die Mehrzahl der Aufgaben vorstrukturiert und weniger praktisch orientiert war bzw. es sich häufig um eingekleidete Aufgaben handelte. Des weiteren wurden mit realistischen Anwendungsaufgaben unterschiedliche Intentionen verfolgt: Während im englischen Unterricht in stärkerem Maße auch außermathematische Ziele wie ein Verstehen der konkreten Problemsituation oder die Förderung der Entwicklung von Strategien und Methoden zum Lösen realer Probleme wichtig waren, wurden im deutschen Unterricht in stärkerem Maße auch mathematikbezogene Intentionen wie die Förderung von Begriffsverständnis verfolgt.

- Im deutschen Mathematikunterricht wurde auf **präzise Sprech- und Schreibweisen** viel mehr Wert gelegt als im englischen. In England achteten (zumindest im unteren Sekundarbereich) viele Lehrpersonen kaum auf mathematisch exakte Sprech- und Schreibweisen, da entsprechende Interventionen in ihren Augen eine Entfaltung der mathematischen Kreativität und Kommunikationsfreudigkeit der Lernenden behindern würden[9].
- Kennzeichnend für den deutschen Mathematikunterricht war neben der begrifflichen Präzision seine **Theorieorientierung**, d.h. es wurden in der Regel nicht einzelne Sätze vermittelt, sondern jeweils ein in sich abgeschlossenes Theoriestück. Im englischen Mathematikunterricht fehlte häufig eine explizit erkennbare mathematische Fachsystematik (zumindest im unteren Sekundarbereich), vielmehr wurden viele kleine Stücke gelehrt, die aber für die Lernenden oft weder im Unterricht noch in den Unterrichtsmaterialien verbunden wurden[10].

4.2. Zur Einstellung zur Mathematik

Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf den ersten Teil der im Anhang abgedruckten Fragebögen.

(1) Bild von der Mathematik
Für viele englische Lernende dominierten in ihrem Bild von Mathematik Aspekte, die in den Lehr-Lern-Formen begründet waren, wie Arbeiten mit Arbeitsblättern, Eigenarbeit und damit mehr Freiheit, mehr Gruppenarbeit. Die deutschen Lernenden betonten demgegenüber in der Wissenschaft Mathematik begründete Aspekte wie logische Struktur und Theorieorientierung der Mathematik. Die englischen Lernenden hoben stärker als die deutschen die hohe Bedeutung der Mathematik für das alltägliche Leben hervor.

[9] Ein Phänomen, das sicherlich zumindest für den unteren Sekundarbereich des englischen Mathematikunterrichts an Staatsschulen als typisch anzusehen ist.
[10] Diese Unterschiede sind bereits deutlich erkennbar, wenn man nur die Kapitelüberschriften in deutschen und englischen Schulbüchern vergleicht.

Im folgenden zur Illustration einige typische Antworten der Lernenden auf die Frage, ob sich Mathematik von anderen Schulfächern unterscheidet:

"Yes, the way we work through sheets instead of the way when teachers just tell you what to do and you start work."

"It is quite different to other subjects because you can work on your own doing your own ideas."

"They are different because we are allowed to work at our own pace."

"Yes the maths lessons are different to other lessons as most of the time, we are allowed to work in pairs or groups and so it makes solving problems easier as the task is shared."

"Ich finde Mathe unterscheidet sich von Chemie oder Physik nicht allzusehr, weil man in diesen Fächern auch logisch denken muß. Dagegen finde ich, unterscheidet sich Mathe von Englisch oder Französisch ganz grundsätzlich, weil es dort mehr auf Sprachgefühl als auf Logik ankommt."

"Mathematik unterscheidet sich sehr von Deutsch, Geschi, Reli, ..., weil es in diesen Fächern nie ein richtige und präzise Antwort gibt. In diesen Fächern kann man um Meinungen und Antworten diskutieren. Im Mathematikunterricht kann man dies nicht. Es gibt bei Mathe meistens nur 1 richtige Antwort."

"Der Unterschied liegt meiner Meinung nach in dem logischen Aufbau."

(2) Verwendung von Mathematik in Alltag und anderen Schulfächern

Etwas mehr als die Hälfte sowohl der englischen wie der deutschen Lernenden gaben an, Mathematik schon einmal im Alltag bzw. in anderen Schulfächern angewendet zu haben. Die angegebenen außermathematischen Bereiche beschränkten sich allerdings bei beiden Gruppen im wesentlichen auf Einkaufen/Geldgeschäfte und Berechnungen in anderen Schulfächern (vorwiegend Naturwissenschaften). Es fällt auf, daß sowohl bei den deutschen wie bei den englischen Lernenden eine Lücke klafft zwischen ihrer Auffassung über die hohe Bedeutung der Mathematik und deren Verwendung in Alltag und den dann doch recht dürftigen Beschreibungen, wo sie Mathematik tatsächlich angewendet haben. Insbesondere scheinen die meisten Lernenden - dies auch als Ergänzung zu (1) - mit "Mathematik" vorwiegend Rechnen zu assoziieren.

Hier einige typische Antworten:

"Maths is very relevant to every day life, it teaches you how to cope with different situations and problems e g adding up bills, choosing my bank account etc."

"I think maths has a lot of importance in everyday life because you need it for jobs plus you need to know some maths e.g. multiplying money to buy shopping etc."

"I counted the amount of calories in my daily intake".

"Beim Einkaufengehen braucht man Mathe, oder wenn man etwas basteln will, rechnet man sich vorher aus, wieviel cm^2/m^2 man braucht und kauft das dann. In Bio mußten wir mal ausrechnen, wieviel mal im Durchschnitt ein Herz in 80 Jahren schlägt. In Physik muß man auch Formeln ausrechnen oder umstellen."

"Man braucht überall Mathe, vor allem im Beruf."

4.3. Zu den Leistungen in Anwendungsaufgaben und zum Begriffsverständnis

Vorweg eine Bemerkung zu unserer Auffassung vom **Verstehen eines mathematischen Begriffs**. U. E. gehören zu einem umfassenden und adäquaten Begriffsverständnis auch Fähigkeiten, inner- und außermathematische Beziehungen zu erkennen, einschlägige inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben zu lösen, Probleme von der Sprachebene in die signitive Ebene zu übersetzen oder den Begriff in geeigneten Realsituationen zu interpretieren. Dementsprechend haben wir den im Anhang abgedruckten Test zur Raumgeometrie konstruiert. (Der Test zur Trigonometrie, der wie gesagt aus Platzgründen nicht wiedergegeben und diskutiert werden kann, ist ebenso konzipiert worden). Der Raumgeometrie-Test besteht aus 13 Aufgaben mit insgesamt 31 Teilaufgaben. Da aus unterrichtsorganisatorischen Gründen eine Beschränkung des Tests auf eine Schulstunde[11] notwendig war, konnten wir nur wenige **Fähigkeitskomponenten** abtesten, ganz abgesehen von der grundsätzlichen Schwierigkeit, wie man "höhere" Fähigkeiten überhaupt abtesten kann. Insofern spiegelt unser Test naturgemäß nur einen gewissen Ausschnitt des innerhalb der hier diskutierten Konzeptionen relevanten Fähigkeitsspektrums wieder: Begriffsverständnis sowie Anwenden, Umstellen, Begründen von bekannten und Entwickeln von neuen Formeln (vgl. auch Abschnitt 2; eine genauere Beschreibung der abgetesteten Fähigkeiten bei ausgewählten Aufgaben folgt sogleich). Dementsprechend betreffen unsere Ergebnisse und die heraus gezogenen Folgerungen auch nur diesen Ausschnitt. Allerdings meinen wir aufgrund von unseren Untersuchungen sowie von vielen Gesprächen mit Lehrenden (auch außerhalb des Projektkontextes) sagen zu können, daß die von uns abgetesteten Fähigkeiten einen sehr großen Teil der im realen, alltäglichen Mathematikunterricht faktisch erreichten Fähigkeiten ausmachen.

Der Test wurde jeweils 6-7 Wochen nach dem Ende der entsprechenden Unterrichtseinheiten durchgeführt. Aufgrund des Fallstudienansatzes war die Anzahl der beteiligten Lernenden recht klein (siehe Abschnitt 3). Wir wollen daher im folgenden nicht so sehr die absoluten Ergebnis-Prozentzahlen betonen und vor allem nicht bloße Prozentzahl-Vergleiche zwischen England und Deutschland anstellen; dies wäre schon deshalb problematisch, weil wir nicht genügend viele Informationen über die allgemeinen mathematischen Fähigkeiten der beteiligten Lernenden haben, so daß direkte Leistungsvergleiche nur bedingt aussagekräftig sind[12]. Uns geht es vielmehr - wie schon in Abschnitt 2 betont - um **Interpretationen** der erhaltenen Resultate auf der **Basis unserer Unterrichtsbeobachtungen**. Aus solchen Interpretationen leiten sich dann Hypothesen ab, die in weiteren Forschungen zu bestätigen (oder ggfs. auch zu widerlegen) sind.

[11] Dies bedeutete 45 Minuten in Deutschland und 50 Minuten in England.

[12] Ein Vergleich mathematischer Fähigkeiten von deutschen und englischen Lernenden aufgrund eines selbstentwickelten "Potentialtests" findet in unserem derzeitigen Projekt "Progress in Mathematical Development" statt (siehe Blum et.al., 1993).

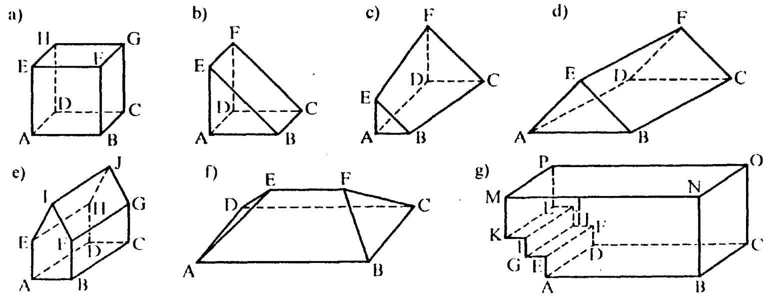
Am Test nahmen 51 englische und 41 deutsche Lernende teil. Insgesamt wurde weniger als die Hälfte der Aufgaben bearbeitet, wobei die englischen Lernenden etwas mehr Aufgaben bearbeitet haben als die deutschen (48% gegenüber 44%). Gründe für diese geringe Bearbeitungsquote liegen wohl zum einen in der zur Verfügung stehenden Bearbeitungszeit, die bei der Fülle von Teilaufgaben sehr knapp bemessen war. Zum anderen war aber auch der Schwierigkeitsgrad mancher Aufgaben für viele Lernende wohl zu hoch[13]. Insbesondere legen die Testbearbeitungen die Vermutung nahe, daß durch den Zeitabstand zwischen Beendigung der Unterrichtseinheit und Durchführung des Tests viele Lernende einige der gerade gelernten Begriffe und Methoden einfach wieder vergessen hatten. Nur ganz wenige Lernende scheinen die Tests, da sie nicht Teil der schulischen Leistungsbewertung waren, mit zu wenig Engagement und Interesse bearbeitet zu haben. Trotz all dieser Einschränkungen gestatten die Ergebnisse u.E. einige interessante und für unsere Fragestellung relevante Interpretationen.

Im folgenden betrachten wir einige ausgewählte Aufgaben.

(1) Aufgaben zum Prisma

Verständnis des Prismenbegriffs

B1. Welcher der Körper ist ein Prisma? Markiere im Bild die beiden Grundflächen.



Diese Frage sollte klären, inwieweit die Lernenden über ein adäquates Verständnis des Prismabegriffs verfügten, wobei die Frage nicht ein allgemeines Begriffsverständnis anspricht, sondern auf die ikonische Repräsentation bezogen ist. Dabei wurden Prismen im englischen bzw. deutschen Unterricht unterschiedlich definiert: Im deutschen Unterricht wurde ein Körper, dessen beide Grundflächen kongruente und parallele Vielecke sind und dessen Mantelfläche aus lauter Rechtecken besteht, als Prisma definiert. Im englischen Unterricht wurde ein geometrischer Körper, bei dem durch parallele Schnitte lauter Schnittflächen derselben Größe und Form entstehen, als Prisma bezeichnet (womit z.B. auch Zylinder Prismen sind).

Etwas mehr deutsche als englische Lernende haben diese Frage richtig gelöst, nämlich 34% zu

[13] Die von uns als schwierig angesehenen Aufgaben waren in den ausgeteilten Tests mit einem Stern (*) markiert.

24%. Eine Einzelanalyse der Ergebnisse der drei deutschen Gruppen zeigt jedoch auf, daß die zwei leistungsstärkeren Gruppen bei der Aufgabe weitgehend versagt haben (nur 9% bzw. 14% richtige Lösungen), im Gegensatz zur leistungsschwächeren Gruppe (69% richtige Lösungen). Folgende Erklärung erscheint auf der Basis des vorangegangenen Unterrichts für dieses auf den ersten Blick verblüffende Ergebnis plausibel: In der Gruppe, die nur wenige Probleme mit dieser Aufgabe hatte, waren ähnliche Aufgaben, bei denen grafische Darstellungen von Körpern zu lesen waren, im Unterricht behandelt worden. In den beiden anderen Gruppen waren bei der Begriffseinführung und zur Begriffsfestigung reale Gegenstände klassifiziert und anschließend in einer längeren Unterrichtsphase gezeichnet worden. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß für diese Lernenden Handlungs- und Darstellungsebene noch nicht genügend verbunden waren (zumindest nicht in der Richtung enaktiver zu ikonischer Ebene) und sie daher noch nicht in der Lage waren, selbständig die in der Aufgabe verlangten Beziehungen herzustellen. Verglichen mit diesen beiden Gruppen erzielten die englischen Lernenden bessere Ergebnisse, obwohl auch sie in sehr ähnlicher Weise mit realen Gegenständen gearbeitet hatten. Dies legt die These nahe, daß die englischen Lernenden beide Ebenen besser in ihr Begriffsverständnis integriert hatten, vermutlich weil sie aufgrund der insgesamt stärkeren Handlungsorientierung des Unterrichts schon vorher häufig parallel auf enaktiver und ikonischer Ebene (d.h. in beiden Richtungen dazwischen wechselnd) gearbeitet hatten. Allerdings war das Begriffsverständnis der englischen Lernenden insgesamt ebenfalls nicht befriedigend, was aufgrund des vorangegangenen Unterrichts (s.o.) nicht überraschen kann.

(2) Aufgaben zum Zylinder

Zylindervolumen - Umstellen von Formeln

B4. a) Ein Limonadengetränk wird in einer zylindrischen 0,33-l-Dose und 0,5-l-Dose verkauft. Beide Dosen haben denselben Durchmesser von 6,4 cm.
Wie hoch ist jede Dose?

b) In Flugzeugen wird dieselbe Limonade in kleineren 150-ml-Dosen angeboten. Diese Dosen sind 7,6 cm hoch.
Wie groß ist der Durchmesser der Dose?

c) Gib eine Formel an, mit der man
- bei gegebenem Volumen und gegebenem Radius die Höhe berechnen kann.
- bei gegebenem Volumen und gegebener Höhe den Radius berechnen kann.

Diese Aufgabe sollte überprüfen, ob die Lernenden fähig sind, die Formel für das Zylindervolumen zur Lösung einfacher Anwendungsaufgaben anzuwenden, ggf. angemessen umgeformt. Die Aufgabe verlangt also keine Mathematisierung, vielmehr ist die Verwendung der entsprechenden Formel leicht aus der Aufgabe erkennbar. Die Formeln mußten nicht auswendig gewußt werden, vielmehr waren alle relevanten Formeln im Test gesondert angegeben (siehe Anhang).

Deutlich mehr deutsche als englische Lernende haben diese Aufgabe richtig gelöst; alle Aufgabenteile richtig haben durchschnittlich 59% der deutschen gegenüber 29% der englischen Lernenden. Bei den englischen Lernenden zeigten sich massive Probleme mit dieser Aufgabe, insbesondere mit den richtigen Operationen beim Formelumstellen, z.B. Wurzelziehen, sowie mit der richtigen Reihenfolge. Ein Detail: 51% der deutschen verglichen mit 16% der englischen Lernenden formten die Volumenformel richtig nach dem Radius um.

Im folgenden zur Illustration einige typische Schülerlösungen. Zuerst geben wir die Lösung einer deutschen Schülerin ausschnittsweise wieder, die das Vorgehen vieler deutscher Lernender aufzeigt, nämlich erst die entsprechenden Formeln umzuformen und dann in diese einzusetzen.

b)

$V = \pi r^2 k \qquad V = 150\,cm^3$

$r^2 = \frac{V}{\pi k} \qquad k = 7{,}6\,cm$

$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{150\,cm^3}{\pi \cdot 7{,}6\,cm}} \approx 2{,}51\,cm$

Die beiden Lösungen englischer Lernender sind ebenfalls charakteristisch: Die erste (bis auf einen Schreibfehler in Teil b richtige) Lösung macht keinen Rückgriff auf allgemeine Formeln, beim Formelumstellen zeigen sich spezifische Schwierigkeiten mit der Notation.

84 a) 0.33 litre = 330 cm³

Area of top of cans = π × 3.2² = 32.17cm².

Height = 10.26cm

0.5 litre = 500cm³.

Height = 500 ÷ 32.17 = 15.54cm.

b) Volume = 140cm³

Area of top = 140 ÷ 7.6 = 22.37.

Diameter = √22.37 ÷ π = 1.51cm x 2 = 3.01 cm

c) i) H = V ÷ (π × r²)

ii) R = √V ÷ h ÷ π

Die andere Antwort einer englischen Schülerin ist stark durch Probleme mit Quadratzahlen und -wurzeln geprägt und enthält nur wenige richtige Lösungsansätze (so hat die Schülerin z.B. die richtige Wurzeloperation in Teil b wieder weggetipp-ext).

B4 a- $h = v \div \sqrt{r^2} \div \pi = \cancel{333}^{330} \div \sqrt{3.2 \times 3.2} \div 3.14 = 32.8\,cm(h)$

$= 500 \div \sqrt{3.2 \times 3.2} \div 3.14 = 49.76\,cm(h)$

b- $r = v \div 3.14 \div h = \sqrt{150 \div 7.6 \div 3.14} = 6.2856 \times 2 = 12.57$

c= $h = v \div \sqrt{r^2} \div \pi$

$r = v \div \pi \div h$

Die Resultate dieser und ähnlicher Aufgaben deuten darauf hin, daß eine Stärke der deutschen Lernenden im Umformen von Formeln besteht. Dies ist einfach erklärbar, denn der Kalkül des Formelumstellens ist im deutschen Mathematikunterricht anhand typischer Aufgaben ausführlich geübt worden. Die Probleme der englischen Lernenden sind - wie sich in den Schülerlösungen deutlich zeigte - u.a. auch darin begründet, daß formale Unkorrektheiten bzw. mathematischen Konventionen widersprechende Schreibweisen, die vor allem wohl durch den sehr frühen Rechnereinsatz bedingt sind, weder in den Kursarbeiten noch in den Unterrichtsmitschriften von den Lehrenden korrigiert wurden. So hatte sich eine nicht unbedeutende Gruppe von Lernenden folgende Schreibweisen angewöhnt:

$$r = \sqrt{V \div h \div \pi} \quad \text{oder} \quad r = V \div h \div \pi \sqrt{\ } \quad \text{oder} \quad \frac{V}{h} \div 3.14 \sqrt{\ } = r$$

Änderung des Zylindervolumens

B5. Wie verändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn man
a) die Höhe i) verdoppelt, ii) verdreifacht;
b) den Radius i) verdoppelt, ii) verdreifacht;
c) zugleich die Höhe und den Radius i) verdoppelt, ii) verdreifacht.
Gib eine Regel an.

Diese Aufgabe sollte überprüfen, inwieweit die Lernenden über funktionales Denken in Zusammenhang mit Formeln verfügen, d.h. die Veränderung einer Größe innerhalb einer Formel in Abhängigkeit von einer anderen Größe bestimmen können.

Es ergibt sich ein umgekehrtes Bild wie bei der vorangegangenen Aufgabe: Deutlich mehr englische als deutsche Lernende haben die Aufgabe richtig gelöst; alle Aufgabenteile richtig haben durchschnittlich 49% der englischen gegenüber 28% der deutschen Lernenden. Z.B. wurden die Auswirkungen der gleichzeitigen Verdopplung von Radius und Höhe nur von 12% der deutschen gegenüber 39% der englischen Lernenden richtig beschrieben. Weiterhin zeigte sich, daß die deutschen Lernenden stark auf Regeln hin orientiert sind. So versuchten deutlich mehr deutsche als englische Lernende, die gefragte Regel zur Beschreibung der Volumensveränderungen zu finden, wobei dies allerdings nur ganz wenigen gelang.

Im folgenden wieder einige typische Schülerlösungen. Die Lösung einer englischen Schülerin formuliert die gesuchten Zusammenhänge fehlerlos:

B5 a, hieght is doubled V = doubled
heights trebled V = trebled

b, i, ~~x~~ V = x4 ii, V = x 9

c, i, x8 ii, x27

when hieght x x then volume = x·x
when radius x x then volume = x x^2
when radius + hiegnt x x then volume = x x^3

Die folgende Lösung einer deutschen Schülerin zeigt, daß sie zwar die Zusammenhänge verstanden hat, nicht aber in der Lage ist, diese in einer Regel zu formulieren.

B5) ai) Es verdoppelt sich ~~Dr~~ bii) 3fach

bi) 4fach bii) 9 fach

ci) 8fach cii) 27fach

!

es quadriert sich (πr^2)

c) ~~Es~~ a · b

Die folgende Lösung eines deutschen Schülers zeigt typische Fehler beim Umgehen mit den Vervielfachungsfaktoren auf:

B5 a) ~~V = G · h · 2~~
Wenn die Höhe verdoppelt wird / bzw
verdreifacht, verdoppelt bzw verdreifacht
sich auch das Volumen

b) $V = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Es findet ebenfalls eine Verdoppelung
bzw Verdreifachung statt.

c) Wenn man Höhe und r verdoppelt, ist
das Volumen 4x so groß.
Wenn man h und r verdreifacht, ist
V = 9 x so groß

(normale)
D Die Formel besteht nur aus Faktoren,
die multipliziert werden, wenn man
nun einen einzelnen Faktor z.B.
x mal 2 nimmt, ~~verdoppelt muß~~
~~die ganze Form~~ betrifft das die
ganze Formel, egal, wo man mit
2 multipliziert
Wenn man 2 Faktoren (wie bei c)
hinzufügt, wird die Formel auch mit
diesen beiden Zahlen multipliziert.

Durchaus typisch ist auch die Lösung einer englischen Schülerin (aus Platzgründen hier nicht wiedergegeben), die die Zusammenhänge nicht sofort durchschaut und sich daher - wie in der Coursework gelernt bzw. im Unterricht praktiziert - alles (i.w. richtig) ausführlich (über 3 DINA4-Seiten!) anhand von Beispielen klarmacht. Da der rechnerische Aufwand nicht unbeträchtlich ist, schafft sie es nicht, das Problem in der vorgegebenen Zeit zu Ende zu führen (oder gar noch die darauffolgenden Aufgaben zu bearbeiten). Solche für den englischen Unterricht charakteristischen Vorgehensweisen finden sich noch mehrfach in den Testbearbeitungen.

Diese (nach den Resultaten der vorangegangenen Aufgabe womöglich teilweise überraschenden) Ergebnisse sind auf der Basis des beobachteten Unterrichts leicht erklärbar: Aufgabenstellungen, in denen funktionales Denken gefragt ist ("was passiert wenn, ..."), wurden im englischen Unterricht immer wieder behandelt, während Derartiges im entsprechenden deutschen Unterricht überhaupt nicht vorkam. Dies legt die These nahe, daß solche Fähigkeiten nicht einfach als Transfer nach der Behandlung der entsprechenden Formeln erwartet werden können, vielmehr müssen solche Fragestellungen explizit thematisiert und geübt werden. Dieses Ergebnis ist natürlich - wie viele andere unserer Ergebnisse auch - in der Mathematikdidaktik nicht neu; es wird durch unsere Untersuchungen jedoch erneut bestätigt.

(3) Aufgaben zur Pyramide

Begründung der Volumenformel für Pyramiden

B6. Für das Volumen einer Pyramide gilt: $V=\frac{1}{3}$Grundfläche$\cdot$Höhe
Gib Begründungen für diese Regel (erinnere Dich daran, wie dies im Unterricht begründet wurde).

Mit dieser Aufgabe sollte geklärt werden, wie sich die unterschiedlichen Begründungsformen, die im deutschen bzw. englischen Unterricht üblicherweise verwendet wurden (siehe Abschnitt 3), auf das Erinnern der Begründung nach einem Zeitraum von 6-7 Wochen auswirken.

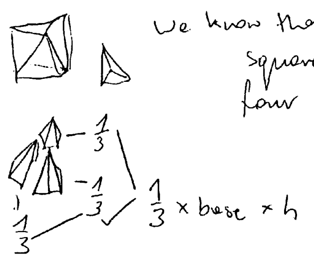
Deutlich mehr englische als deutsche Lernende erinnerten sich an die Grundidee, daß drei inhaltsgleiche Pyramiden zu einem Prisma bzw. Würfel zusammengefügt werden können, nämlich 43% der englischen gegenüber 20% der deutschen Lernenden. Nur einigen wenigen deutschen Lernenden war den Satz des Cavalieri noch gegenwärtig, und zwar nur den leistungsstärksten (d.h. solchen, die insgesamt in dem Test gute Resultate erzielten). 73% der deutschen gegenüber nur 39% der englischen Lernenden versuchten überhaupt keine Aufgabenlösung.

Im folgenden wieder einige charakteristische Schülerlösungen. Bei der Lösung eines englischen Schülers wird die Grundidee in der Zeichnung deutlich erkennbar:

B6.

Pyramid $V = \frac{1}{3} \times$ base area $\times h$

We know that pyramid has always square base when it has four walls,



Die erste Antwort einer deutschen Schülerin formuliert die wesentlichen Aspekte der Begründung für die Volumenformel, wie sie im deutschen Mathematikunterricht mittels des Satzes von Cavalieri entwickelt worden war. Die zweite Antwort benennt prägnant die wesentliche Schwierigkeit vieler deutscher Lernender.

B6 Wir haben im Unterricht erarbeitet, daß (Satz des Cavalieri) 2 Körper das gleiche Volumen haben, wenn sie zwischen 2 parallelen Ebenen liegen und jede dritte parallele Ebene gleich große Flächen ausschneidet. Daß jede 3 parallele Ebene gleich große Grundflächen ausschneidet, haben wir mit Hilfe des Strahlensatzes bewiesen.
Da nun 3 volumengleiche Pyramiden in 1 Prisma passen und das Volumen des Prismas mit G · h ausgerechnet wird, gilt für 1 Pyramide: $\frac{1}{3}$ G · h.

B6) Ich kann mich leider nicht mehr daran erinnern!

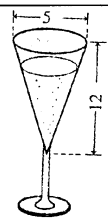
Diese Resultate deuten daraufhin, daß die "handgreifliche" Art der Herleitung mathematischer Formeln, wie sie im englischen Mathematikunterricht deutlich weiter verbreitet ist als im deutschen, zumindest für die breite Masse der Lernenden angemessener ist, um damit zumindest die Grundidee zu behalten. Die im deutschen Mathematikunterricht übliche mathematisch präzisere Begründung von Formeln wird wohl von der Mehrzahl der Lernenden nur rezipiert und offenbar recht bald wieder vergessen. Dies steht auch im Einklang mit der bekannten Beobachtung, daß die permanente Leistungsüberprüfung durch Klassenarbeiten bei den Lernenden zu einer Konzentration auf in der nächsten Klassenarbeit zu erwartende Aufgabentypen führt und daß andere Aspekte wie Begriffserarbeitung und Begründungen/Beweise als weniger wichtig angesehen werden.

(4) Aufgaben zum Kegel

Kegelvolumen (Sektglas)

**B10. a) Ein Glas Sekt ist bis zur halben Höhe gefüllt. Zu wieviel Prozent seines Volumens ist das Sektglas gefüllt?*

b) Bestimme die Höhe des Sektes, wenn das Glas viertel voll ist.



Die Aufgabe ist als komplexer und schwieriger als die meisten anderen Aufgaben des Tests anzusehen, da zur Lösung des Problems neben der Anwendung der Formel für das Kegelvolumen die Anwendung von Strahlensätzen nötig ist. Mit dieser Aufgabe sollte geklärt werden, inwieweit die Lernenden in der Lage sind, ihr bisher gelerntes geometrisches Wissen zur Lösung eines neuartigen außermathematischen Problems anzuwenden.

Die deutschen Lernenden haben in der ersten Teilaufgabe besser abgeschnitten, 10% von ihnen haben die Aufgabe vollständig richtig gelöst. Demgegenüber gibt es bei den englischen Lernenden nur einen einzigen Lösungsversuch, der in die richtige Richtung geht. Die Mehrzahl der Lernenden (und zwar mehr deutsche als englische) hat überhaupt nicht versucht, das Problem zu lösen (78% zu 53%). Nur einige wenige englische und deutsche Lernende versuchten, den zweiten Teil des Problems zu lösen, und nur ein einziger (deutscher) Schüler entwickelte eine richtige Lösung.

Im folgenden ist die richtige Lösung der ersten Teilaufgabe durch einen deutschen Schüler wiedergegeben, wobei die zweite Teilaufgabe nicht zu Ende geführt worden ist.

B10) ~~2,5 π~~

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (1{,}25\,cm)^2 \cdot 6\,cm \approx 9{,}82\,cm^3$

$\frac{1}{3}\pi \cdot (2{,}5\,cm)^2 \cdot 12\,cm \approx 78{,}54\,cm^3$

$$\frac{x\,\%}{9{,}82\,cm^3} = \frac{100\,\%}{78{,}54\,cm^3} \quad \Big| \cdot 9{,}82\,cm^3$$

$$x = \frac{100\,\% \cdot 9{,}82\,cm^3}{78{,}54\,cm^3} = 12{,}5\,\%$$

b) $$\frac{78{,}54\,cm^3}{100\,\%} = \frac{x\,cm^3}{25\,\%} \quad \Big| \cdot 25\,\%$$

$$\frac{78{,}54\,cm^3 \cdot 25\,\%}{100\,\%} \approx 19{,}63\,cm^3$$

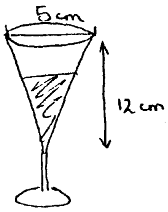
$\cancel{V = \frac{1}{3}\pi}$

$19{,}63\,cm^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot G \cdot h$

$$h = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot G}{19{,}63\,cm^3}$$

Der Lösungsversuch eines englischen Schülers zeigt einen häufig aufgetretenen Denkfehler:

B10)



VOLUME OF CONE = $\frac{\pi r^2 h}{3}$

VOLUME OF CONE = $\frac{2.5^2 \times 3.14 \times 12}{3} = \frac{235.5}{3} = 78.5cm$

A) (50% full) HALF VOLUME OF CONE = $\frac{2.5^2 \times 3.14 \times 6}{3} = \frac{117.75}{3} = 39.25$

B) $\frac{1}{4}$ VOLUME OF THE CONE = $\frac{2.5^2 \times 3.14 \times 3}{3} = \frac{58.875}{3} = 19.625$

HEIGHT OF WINE = 3 cm.

or

$78.5 \div 4 = 19.625$

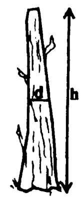
Die geringe Anzahl der richtigen Lösungen sowohl bei den deutschen wie bei den englischen Lernenden macht deutlich, daß die Lösung von Anwendungsaufgaben mittels mathematischer Methoden, die nicht aus einem wohlumgrenzten, vorher geübten Gebiet stammen, sowohl den deutschen wie den englischen Lernenden erhebliche Probleme bereitet. Die Ergebnisse bei dieser und bei entsprechenden Aufgaben legen die These nahe, daß solche Fähigkeiten nur in langfristig angelegten Lernprozessen erreichbar sind, in denen eine große Vielfalt von Anwendungssituationen behandelt wird, wodurch ein Transfer auf neuartige Situationen einfacher möglich wird.

(5) Mathematisierungsaufgaben

Fortwirtschaftschaftliche Faustformel zur Volumenberechnung von Bäumen

**B12. In der Forstwirtschaft wird eine Faustformel zur Bestimmung des Volumens eines zu fällenden Baumes benutzt, welche den Durchmesser in der Mitte des Baumes und die Höhe des Baumes benutzt.*

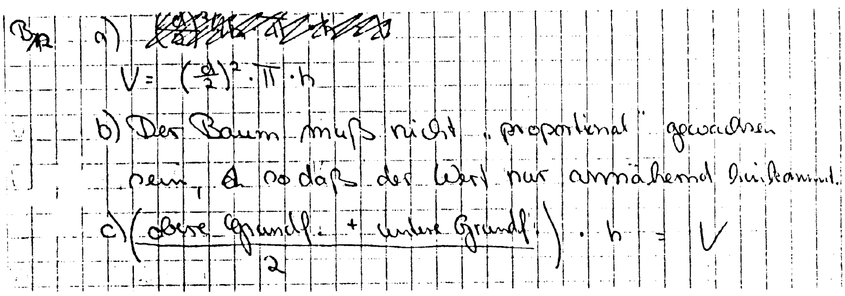
a) Entwickle eine solche Faustformel.
b) Warum ist diese Faustformel nicht genau?
c) Wie könnte man das Volumen genauer bestimmen?



Mit dieser zwar vorstrukturierten, jedoch ansonsten offen gehaltenen Aufgabe sollte getestet werden, inwieweit die Lernenden über Fähigkeiten zur Mathematisierung neuartiger außermathematischer Situationen verfügen.

Nur noch wenige Lernende haben diese Aufgabe bearbeitet, jedoch deutlich mehr deutsche als englische (nämlich 20% gegenüber 5%), wobei die deutschen Lernenden deutlich bessere Ergebnisse erzielten. So entwickelten 2 der deutschen und 1 der englischen Lernenden eine richtige Faustformel, weitere 2 deutsche Lernende gaben eine teilweise richtige Lösung an. Korrekte Argumente, warum die Faustformel nicht genau ist, gaben 15% der deutschen gegenüber 4% der englischen Lernenden. Ein richtiger Vorschlag zur Verbesserung der Faustformel (das arithmetische Mittel der beiden Basisflächen) wurde nur von einer deutschen Schülerin entwickelt, 2 weitere deutsche sowie 2 weitere englische Antworten enthielten richtige Ansätze.

Hier sei zunächst die einzige ganz richtige Lösung wiedergegeben:


B12 a)
$V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h$
b) Der Baum muß nicht „proportional" gewachsen sein, so daß der Wert nur annähernd stimmt.
c) $\frac{\text{obere Grundfl.} + \text{untere Grundfl.}}{2} \cdot h =$ ✓

Die folgenden Aufgabenbearbeitungen zeigen richtige Antworten von deutschen bzw. englischen Lernenden zu der geforderten Faustformel:

B12)
Man berechnet das Volumen ~~des einer~~ Hälfte
~~und~~ mit dem Durchmesser (Radius) aus der
Stam ~~Baum~~ in der Mitte des Baumes hat und
nimmt dies mit der Höhe mal, dabei
geht man davon ausgeht, daß der Baum unterhalb
der Mitte ~~exakt~~ genau das an Volumen zuviel
hat, was der ihm oberhalb der Mitte fehlt
(Alles klar?).

B12 | base area (where the diameter is halfway) × h.
It's not accurate because the thickness of the
tree isn't the same all the way up.

Die geringe Zahl von Bearbeitungen läßt nur wenige Interpretationen zu. Immerhin ist bemerkenswert, daß auch der von uns beobachtete englische Mathematikunterricht mit seiner noch stärkeren Realitätsorientierung nicht zu besseren Resultaten bei dieser Mathematisierungsaufgabe geführt hat. Es zeigt sich hier wohl, daß Mathematisierungen hohe intellektuelle Anforderungen stellen und sehr schwierig für Lernende sind, unabhängig von der jeweiligen mathematikdidaktischen Konzeption.
Insgesamt fällt auch auf, daß die Lernenden, die im gesamten Test gut waren, auch diejenigen sind, die die guten Leistungen bei den offenen Anwendungsaufgaben erbrachten. Damit drängt sich die immer wieder formulierte These nach einem starken Zusammenhang zwischen einer allgemeinen mathematischen Fähigkeit und der Fähigkeit zum angewandten Problemlösen, speziell zum Mathematisieren, auf.

5. ZUSAMMENFASSENDE SCHLUSSBEMERKUNGEN

Insgesamt weisen die bisher durchgeführten empirischen Untersuchungen darauf hin, daß es bzgl. des **Unterrichtsstils** tatsächlich beträchtliche **Unterschiede** zwischen englischem und deutschem Unterricht geben kann. So dominierten im dem untersuchten englischen Unterricht individualisierte Lernformen, in denen sich die Lernenden die mathematischen Inhalte mittels geeigneter Unterrichtsmaterialien alleine oder in Kleingruppen aneignen sollen. Im untersuchten deutschen Mathematikunterricht dominierte demgegenüber als Unterrichtsform das - unterschiedlich stark - gelenkte Unterrichtsgespräch zwischen Lernenden und Lehrperson, mit deutlich kürzeren Eigenarbeitsphasen. Auch im Bereich der **Unterrichtsinhalte** und der **Berücksichtigung von Anwendungen** wurden große Unterschiede zwischen dem deutschen und dem englischen Mathematikunterricht beobachtet. So wurden im englischen Unterricht häufiger realitätsbezogene, offene Probleme behandelt, während im deutschen Unterricht seltener Anwendungsbezüge behandelt wurden und kurze, kalkülorientierte Aufgaben dominierten. Kennzeichnend für den deutschen Mathematikunterricht war seine begriffliche Präzision, auf die sowohl bei Begriffseinführungen als auch innerhalb von Unterrichtsgesprächen geachtet wurde, im Gegensatz zum englischen Mathematikunterricht, in dem klar definierte Begriffe eine geringere Rolle spielten. Ein weiteres Charakteristikum des deutschen Mathematikunterrichts war, daß i.a. in sich abgeschlossene Theoriestücke vermittelt wurden, während im englischen Unterricht eine explizit erkennbare mathematische Fachsystematik häufig fehlte.

Unsere empirischen Untersuchungen bestätigen u.E. die globale Ausgangshypothese, daß die von uns unterschiedenen Konzeptionen zum Lernen von Mathematik in Realitätsbezügen in England und Deutschland tatsächlich auch zu Unterschieden in der **Einstellung** der Lernenden zum Mathematikunterricht und in ihren mathematischen **Fähigkeiten** führen. Die Ergebnisse lassen aber auch die Vermutung zu, daß andere Variable (insbesondere solche, die in beiden Bildungssystemen vergleichbar belegt sind, wie fächergetrenntes Lernen im Unterrichtsstundentakt, oder auch das allgemeine "mathematische Potential" der einzelnen Lernenden; vgl. Abschnitt 2) ebenfalls einen nicht unerheblichen Einfluß auf die Lernenden haben und damit die in gewissen Bereichen a priori vermuteten Unterschiede zwischen deutschen und englischen Lernenden verringern oder gar aufheben. Wir können dieser interessanten Frage hier nicht weiter nachgehen. Bzgl. der in Abschnitt 2 im einzelnen formulierten Hypothesen zu den Auswirkungen der unterschiedlichen Konzeptionen können wir zusammenfassend feststellen:

- Die vermuteten Unterschiede im **Bild** der Lernenden **von der Mathematik** bestätigten sich. So dominierten für viele englische Lernende in ihrem Bild von der Mathematik Aspekte, die in den Lehr-Lern-Formen begründet sind, währenddessen viele deutsche Lernende in der Wissenschaft Mathematik begründete Aspekte betonten.
- Im Bereich der **Anwendungsfähigkeiten** zeigten sich die in den Anfangshypothesen formulierten Unterschiede, nämlich daß die englischen Lernenden eher in der Lage sind, mathematische Methoden zur Lösung realer Probleme anzuwenden, nicht. Vielmehr hatten sowohl die englischen wie die deutschen Lernenden große Schwierigkeiten mit Anwendungsaufgaben, zu deren Lösung mathematische Methoden nötig sind, die nicht aus einem wohlumgrenzten, vorher geübten Gebiet stammen. Des weiteren hatten beide Schülergruppen massive Probleme, neuartige außermathematische Situationen zu mathematisieren.
- Im Bereich des **Begriffs- und Methodenverständnisses** konnten wir die global formulierte Anfangshypothese, daß die deutschen Lernenden adäquatere Vorstellungen von den bei Anwendungsbeispielen zugrundeliegenden mathematischen Begriffen und Methoden entwickeln, so nicht bestätigen, vielmehr ergibt sich ein differenzierteres Bild. Z.B. haben die englischen

Lernenden die eher "handgreiflich" vermittelten Grundideen von Beweisen und Herleitungen insgesamt besser und länger behalten als die deutschen, denen mathematisch präzisere Begründungen vermittelt worden waren. Stärken der deutschen Lernenden zeigten sich im Bereich der Anwendung von Kalkülen, in denen sie deutlich souveräner waren als die englischen.

Für die **Zukunft** sind auf der Basis der bisherigen Ergebnisse **weitere Fallstudien** mit Lerngruppen an anderen Schulen geplant. Insbesondere sollen in England Fallstudien mit anderen realitätsbezogenen Unterrichtsmaterialien durchgeführt werden (u.a. Materialien aus dem School Mathematics Project), und es soll eine Ausweitung auf die Sekundarstufe II erfolgen. Damit soll auch ein noch umfassenderes Bild vom englischen und deutschen Mathematikunterricht und von deren Gemeinsamkeiten und Unterschieden gewonnenen werden. Des weiteren ist geplant, das allgemeine "**mathematische Potential**" von englischen und deutschen Lernenden zu testen und zu vergleichen und auf dieser Basis noch abgesichertere Aussagen über Auswirkungen unterschiedlicher Unterrichtskonzeptionen (nicht notwendig beschränkt auf Anwendungsbezüge) zu machen.

Wir hoffen, mit solchen Untersuchungen, in denen Stärken und Schwächen verschiedener Konzeptionen sichtbar werden, zum einem zu einem besseren Verständnis der eigenen wie auch anderer Positionen beizutragen. Zum anderen möchten wir damit auch Ansatzpunkte zur Fortentwicklung dieser Konzeptionen aufzeigen. Nicht zuletzt können aus solchen Untersuchungen auch Anregungen für Veränderungsmöglichkeiten der Unterrichtspraxis entnommen werden.

LITERATUR

BLUM W. & NISS, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. In: Educational Studies in Mathematics, 22, 37-68.

BLUM, W. et.al. (1992). Teaching and Learning of Mathematics and its Applications: First Results from a Comparative Empirical Study in England and Germany. In: Teaching Mathematics and its Applications, 11, 112-123.

BLUM, W. et.al. (1993). British/German Comparative Project: Some Preliminary Results. In: Teaching Mathematics and its Applications, 12, 13-21.

BROWN, M. (1993). Assessment in Mathematics Education: Developments in Philosophy and Practice in the United Kingdom. In: M. Niss (Ed.), Cases of Assessment in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer, 71-84.

CRESSWELL, M. & GUBB, J. (1987). The Second International Mathematics Study in England and Wales. Windsor: NFER-Nelson.

CROSSLEY, M. & VULLIAMY, G. (1984). Case-study Research Methods and Comparative Education. In: Comparative Education, 20, 193-207.

DOWLING, P. & NOSS, R. (Eds) (1990). Mathematics versus the National Curriculum. Basingstoke: Falmer.

EDUCATION REPORT 1991 (1991). Every Child in Britain. London: Channel 4 Television.

EDUCATIONAL TESTING SERVICE (1992). Learning Mathematics. Princeton: Educational Testing Service.

ERNEST, P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education. London: Falmer.

GLOWKA, D. (1989). Anglo-German Perceptions of Education. In: Comparative Education, 25, 319-332.

HANNA, G. (1993). The Validity of International Performance Comparisons. In: M. Niss (Ed.), Investigations into Assessment in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer, 245-252.

HEARNDEN, A. (1986). Comparative Studies and Curriculum Change in the United Kingdom and the Federal Republic of Germany. In: Oxford Review of Education, 12, 187-194.

HOBBS, D. (Ed). (1992-1993). Enterprising Mathematics for GCSE and Standard Grade. Oxford: Heinemann Educational.

HOBBS, D. & BURGHES, D. (1989). Enterprising Mathematics: A Cross-curricular Modular Course for 14-16 Year-Olds. In: W. Blum et.al. (Eds), Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Horwood, 159-165.

HOLMES, B. & McLEAN, M. (1989). The Curriculum: A Comparative Perspective. London: Routledge (ursprünglich Unwin Hyman).

HOPPER, E. (1968). A Typology for the Classification of Educational Systems. In: Sociology, 2, 29-46.

KAISER-MESSMER, G. (1986). Anwendungen im Mathematikunterricht. Bd.1, 2. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

KAISER-MESSMER, G. & BLUM, W. & SCHOBER, M. (1982, [2]1992). Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Teile 1, 2. Karlsruhe: Fachinformationszentrum Energie Physik Mathematik.

LAWTON, D. & CHITTY, C. (1988) (Eds.). The National Curriculum. London: Kogan Page.

LAUWERYS, J. (1959). The Philosophical Approach to Education. In: International Review of Education, 5, 281-298.

MAIER, H. (1991). Analyse von Schülerverstehen in Unterrichtsgeschehen - Fragestellungen, Verfahren und Beispiele. In: H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), a.a.O., 117-151.

MAIER, H. & VOIGT, J. (1991) (Hrsg.). Interpretative Unterrichtsforschung. IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd. 17. Köln: Aulis.

MARSHALL, S. (1989). The German Perspective. In: Comparative Education, 25, 309-317.

McLEAN, M. (1990). Britain and a Single Market Europe. Prospects for a Common School Curriculum. London: Kogan Page.

PHILLIPS, D. (1987). Lessons from Germany? - The Case of German Secondary Schools. In: British Journal of Educational Studies, 35, 211-232.

PRAIS, S.J. & WAGNER, K. (1986). Schooling Standards in England and Germany - Some Summary Comparisons Bearing on Economic Performance. In: Compare, 16, 5-35.

SIENKNECHT, H. (1985). Sekundarschulen in England. Köln: Bohlau.

STENHOUSE, L. (1979). Case Study in Comparative Education: Particularity and Generalisation. In: Comparative Education, 15, 5-10.

STÜBIG, H. (1980). Bildungswesen, Chancengleichheit und Beschäftigungssystem. Vergleichende Daten und Analysen zur Bildungspolitik in England. München: Minerva.

STÜBIG, H. (1983). Aspekte der englischen Sekundarschulreform. Leistungsdifferenzierung, Fächerangebot und Curriculumplanung. München: Minerva.

STÜBIG, H. (1989). Bildungspolitik in England (1975-1985). Vergleichende Analysen und Daten. München: Minerva.

Dr. Gabriele Kaiser-Meßmer
Prof. Dr. Werner Blum
Universität Gesamthochschule Kassel
Fachbereich Mathematik/Informatik
34109 Kassel

ANHANG

FRAGEBOGEN ZUM MATHEMATIKUNTERRICHT UND ZU KÖRPERN

A. ZUM MATHEMATIKUNTERRICHT IM ALLGEMEINEN

A1. Interessiert Dich das Fach Mathematik? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

A2. Unterscheidet sich der Mathematikunterricht Deiner Meinung nach von anderen Fächern, und wenn ja, wodurch?

A3. Welche Bedeutung hat die Mathematik Deiner Meinung nach für das alltägliche Leben?

A4. Hast Du etwas von dem, was Du bisher im Mathematikunterricht gelernt hast, im Alltag oder in anderen Schulfächern anwenden können? Wenn ja, was und wo?

Ihr habt in den letzten Wochen im Mathematikunterricht Beispiele für Oberflächen und Volumen von Pyramide, Kegel, Prisma usw. behandelt, die vielfältig in unserer Umwelt vorkommen.
A5. Hat sich der Mathematikunterricht durch diese Beispiele gegenüber dem vorherigen Unterricht geändert, und wenn ja, wie?

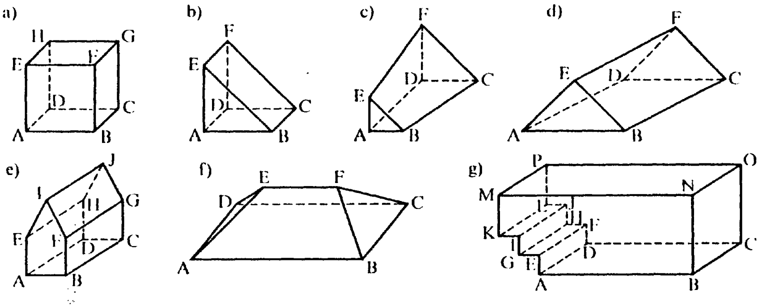
A6. Sollten im Mathematikunterricht mehr Beispiele behandelt werden, die Mathematik mit unserer Realität verbinden oder sollten Probleme, die auf die Mathematik beschränkt sind, einen größeren Stellenwert einnehmen? Bitte Gründe für die Entscheidung angeben.

B. ZU KÖRPERN

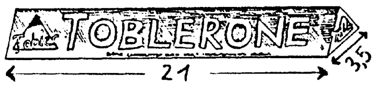
Pyramide	Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$	mit Grundflächengröße G und Höhe h
Prisma	Volumen	$V = G \cdot h$	
Zylinder	Volumen	$V = \pi r^2 \cdot h$	mit Radius r und Höhe h
	Oberfläche	$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$	
Kegel	Volumen	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$	mit Radius r und Höhe h
	Mantelfläche	$M = \pi r \cdot s$	mit Länge einer Mantellinie s
Kugel	Volumen	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	mit Radius r
	Oberfläche	$O = 4 \pi r^2$	
Dreieck	Fläche	$F = \frac{1}{2} g \cdot h$	mit Grundlinienlänge g und Höhe h
Trapez	Fläche	$F = \frac{1}{2} (a+c) \cdot h$	mit a und c Längen der parallelen Seiten und h Höhe
Kreis	Fläche	$F = \pi r^2$	mit Radius r
	Umfang	$U = 2\pi r$	

Erklärung: Stern * bedeutet: schwierige Aufgabe

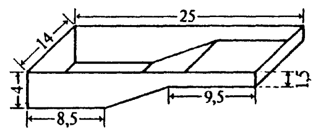
B1. Welcher der Körper ist ein Prisma? Markiere im Bild die beiden Grundflächen.



B2. Berechne das Volumen der Toblerone Schokoladenpackung und die zur Herstellung nötige Fläche von Karton (Maße in cm).



*B3. Wieviel Liter Wasser werden für eine Füllung des Schwimmbeckens benötigt (Maße in m)?



B4. a) Ein Limonadengetränk wird in einer zylindrischen 0,33-l-Dose und 0,5-l-Dose verkauft. Beide Dosen haben den denselben Durchmesser von 6,4 cm.
Wie hoch ist jede Dose?

b) In Flugzeugen wird dieselbe Limonade in kleineren 150-ml-Dosen angeboten. Diese Dosen sind 7,6 cm hoch.
Wie groß ist der Durchmesser der Dose?

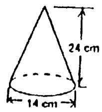
c) Gib eine Formel an, mit der man
- bei gegebenem Volumen und gegebenem Radius die Höhe berechnen kann.
- bei gegebenem Volumen und gegebener Höhe den Radius berechnen kann.

B5. Wie verändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn man
a) die Höhe i) verdoppelt, ii) verdreifacht;
b) den Radius i) verdoppelt, ii) verdreifacht;
c) zugleich die Höhe und den Radius i) verdoppelt, ii) verdreifacht.
Gib eine Regel an.

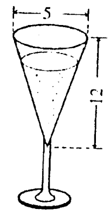
B6. Für das Volumen einer Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3}$ Grundfläche · Höhe.
Gib Begründungen für diese Regel (erinnere Dich daran, wie dies im Unterricht begründet wurde).

B7. Die Dächer der drei Türme des Limburger Domes sollen neu mit Schiefer gedeckt werden. Die Maße des Daches des großen Turmes in der Mitte betragen: Länge der Grundkante 15 m, Höhe 12 m. Die Maße der Dächer der beiden kleineren Türme sind: Durchmesser 8 m, Höhe 10 m.
Wieviel m^2 Schieferplatten werden benötigt?

B8. Beschreibe, wie man einen Kegel mit den angegebenen Maßen bauen kann.



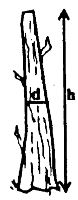
*B9. Die Mantelfläche eines Kegels berechnet sich wie folgt:
$M = \pi \cdot$ Radius des Kegels $\cdot$ Länge der Mantellinie.
Gib eine Begründung dafür.



*B10. a) Ein Glas Sekt ist bis zur halben Höhe gefüllt.
Zu wieviel Prozent seines Volumens ist das Sektglas gefüllt?
b) Bestimme die Höhe des Sektes, wenn das Glas viertel voll ist.

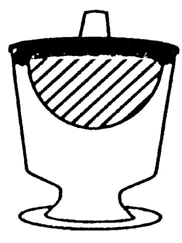
*B11. Die Lunge eines Menschen enthält ungefähr 400 000 000 Lungenbläschen. Ein Lungenbläschen hat einen Durchmesser von 0,2 mm.
a) Wie groß ist die Oberfläche aller Lungenbläschen eines Menschen? Welche Annahmen machst Du dabei?
b) Welchen Durchmesser hätte eine einzige Kugel der gleichen Oberflächengröße?
c) Welche Oberflächengröße hätte eine Kugel, deren Volumen so groß ist wie das Volumen aller Lungenbläschen zusammen?

*B12. In der Forstwirtschaft wird eine Faustformel zur Bestimmung des Volumens eines zu fällenden Baumes benutzt, welche den Durchmesser in der Mitte des Baumes und die Höhe des Baumes benutzt.
a) Entwickle eine solche Faustformel.
b) Warum ist diese Faustformel nicht genau?
c) Wie könnte man das Volumen genauer bestimmen?



*B13. Das Bild zeigt einen Querschnitt durch eine Cremedose, wie sie in der Kosmetikindustrie üblich ist. Nur der schraffierte Teil ist mit Creme gefüllt.

Beschreibe, wie man näherungsweise das Volumen der Dose, die keine Creme enthält bestimmen könnte.



QUESTIONNAIRE ON MATHEMATICS TEACHING AND THE "CONTAINERS FOR EVERYTHING" TOPIC UNIT

A. ON MATHEMATICS TEACHING IN GENERAL

A1. Are you interested in mathematics? If yes, why? If no, why not?

A2. Are the maths lessons different from the lessons in other school subjects? If yes, how?

A3. What relevance, in your opinion, has mathematics for everyday life?

A4. Up to now, have you used any methods, which you have learned in mathematics lessons, in your everyday life or other school subjects? If yes, what and where?

Since last summer you have used in your mathematics lessons teaching materials of the Enterprising Mathematics Course, which try to teach mathematics in connection with the real world.

A5. Have the mathematics lessons changed by using these materials compared to former mathematics lessons? If yes, how?

A6. Would you wish, that mainly such real world examples are treated in your future maths lessons, or should problems, restricted to mathematics, be more important? Please give reasons for your decision.

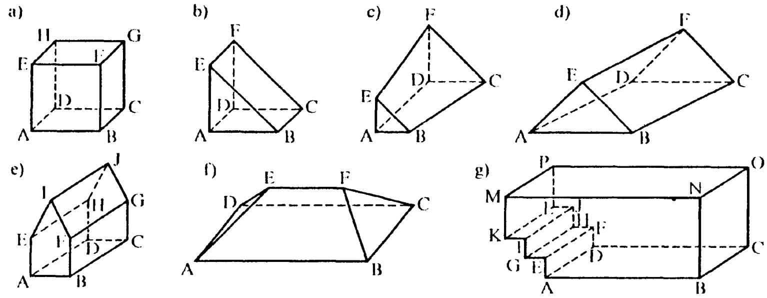
B. ON THE "CONTAINERS FOR EVERYTHING" TOPIC UNIT

Pyramid	Volume = $\frac{1}{3}$ x base area x perpendicular height		
Prism	Volume = area of cross-section x length		
Cylinder	Volume = area of circular end x height = $\pi r^2 h$		
	Curved surface area = circumference of circular end x height = πdh		
Cone	Volume = $\frac{1}{3}$ x base area x perpendicular height = $\frac{\pi r^2 h}{3}$		
	Curved surface area = π x base radius x slant height = πrl		
Sphere	Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$		
	Surface area = $4\pi r^2$		
Triangle	Area	= ½ x base x perpendicular height	
Trapezium	Area	= ½ x sum of parallel sides x distance between them	
Circle	Circumference	= π x diameter	= πd
	Area	= π x (radius)^2	= πr^2

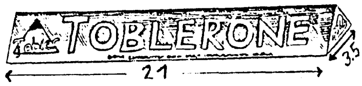
Where necessary, use the value for π given by the calculator, and round answers to a reasonable degree of accuracy.

Explanation: Asterisk * means: difficult problem

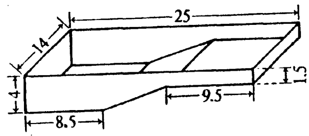
B1. Which of these solid shapes are prisms? Mark in the picture one cross-section.



B2. Find the volume of the Toblerone chocolate box and the area of material needed to make it (measurements in cm).



*B3. How many litres of water are needed to fill the swimming-pool? (measurements in metres)



B4. a) A lemonade drink is sold in a cylindrical 0.33-litre-can and in a 0.5-litre-can, both cans having the same diameter of 6.4 cm.
Find the height of both cans.

b) In aeroplanes the same lemonade is offered in a smaller 150-millilitre-can with the height of 7.6 cm.
Find the diameter of this can.

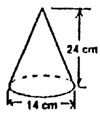
c) Rearrange the formula for the volume V of a cylinder
- to find the height h when the volume V and the radius r are given.
- to find the radius r when the height h and the volume V are given.

B5. How does the volume of a cylinder change, when
(a) the height is i) doubled, ii) trebled
(b) the radius is i) doubled, ii) trebled
(c) the height and the radius are both i) doubled, ii) trebled.
Give a rule.

B6. The volume of a pyramid equals 1/3 x base area x perpendicular height.
Give reasons for this rule (try to remember the explanations, which have been given in the topic unit).

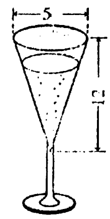
B7. The roofs of the three towers of the cathedral in Limburg shall newly be slated. The measurements of the roof of the big tower in the middle are: edge length of base 15 m, perpendicular height 12 m. The measurements of the roofs of the two smaller towers are: diameter 8 m, perpendicular height 10 m.
How many m^2 of slates will be needed altogether?

B8. Give instructions for making this cone.



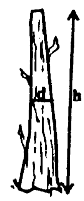
*B9. The curved surface area of a cone equals π x base radius x slant height.
Try to prove it.

*B10. a) A sparkling wine glass is filled to half of its height.
To what percentage of its volume is the glass filled?
b) Find the height of the sparkling wine when the glass is a quarter full.



*B11. The lung of a human being contains approximately 400 000 000 small bubbles. One bubble has a diameter of 0.2 mm.
a) Find the surface area of all these bubbles. What assumptions do you make?
b) Find the diameter of a single sphere with the same surface area.
c) Find the surface area of a single sphere having the volume of all the lung bubbles together.

*B12. In forestry a rule of thumb is used to determine the volume of a tree to be cut, which is based on the diameter in the middle of the tree and the height of the tree.
a) Develop such a rule of thumb.
b) Why is this rule of thumb not accurate?
c) How would it be possible to find the volume more precisely?



*B13. The picture shows a cross-section of a cream box, common in cosmetics. Only the hatched part is filled with cream.

Describe how you might find, approximately, the volume of the box which does not contain cream.