

# Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehramtsstudierenden

Maria-Christina Schneider  
Jana Kolter

Kassel, Januar 2014

**khdm-Report 14-02**  
Universität Kassel  
Leuphana Universität Lüneburg  
Universität Paderborn

### Kurzbeschreibung khdm-Report

In dieser Schriftenreihe des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik werden von den Herausgebern und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten und „Occasional Papers“, die sich mit mathematikbezogener Hochschuldidaktik und angrenzenden Wissenschaftsgebieten beschäftigen. Die Reihe wurde ins Leben gerufen, um Materialien zu veröffentlichen, die im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik und in assoziierten Projekten oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind.

<https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2012050741193>

### Herausgegeben von

Rolf Biehler

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik,  
Universität Paderborn, [biehler@khdm.de](mailto:biehler@khdm.de)

Reinhard Hochmuth

Fakultät I Bildungs-, Kultur- und Sozialwissenschaften, Institut für Mathematik und  
ihre Didaktik, Leuphana Universität Lüneburg, [hochmuth@khdm.de](mailto:hochmuth@khdm.de)

Hans-Georg Rück

Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Mathematik,  
Universität Kassel, [rueck@khdm.de](mailto:rueck@khdm.de)

### khdm-Report 14-02

#### Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehrerstudierenden

Maria-Christina Schneider

Fachbereich 10, Institut für Mathematik, Universität Kassel,  
[m.c.schn@googlemail.com](mailto:m.c.schn@googlemail.com)

Jana Kolter (Kontaktautor)

Department Lehrerbildung - Grundschulpädagogik - Mathematik, Universität Potsdam,  
[jana.kolter@uni-potsdam.de](mailto:jana.kolter@uni-potsdam.de)

<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2014012444809>

Das khdm wird im Rahmen der gemeinsamen Initiative „Bologna – Zukunft der Lehre“ von der Stiftung Mercator und der VolkswagenStiftung für zunächst drei Jahre gefördert.

# Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehramtsstudierenden

Maria-Christina Schneider<sup>1</sup>, Jana Kolter<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universität Kassel, <sup>2</sup>Universität Potsdam

## Abstract

*Dieser Werkstattbericht gibt einen Einblick in ein Promotionsvorhaben im Bereich der universitären Mathematikdidaktik. 15 Studierende des Grundschullehramts wurden mit leitfadengestützten materialbasierten Interviews zur Zahldarstellung in Stellenwertsystemen, einem zentralen Thema ihrer Mathematikausbildung, befragt. Wir stellen hier Kategorien vor, die anhand der Interview-Daten identifiziert wurden, und erste strukturelle Beschreibungen von Vorstellungen und Hürden sowie Spezifika eines adäquaten Verständnisses zum Bündelungsprinzip liefern, welches sich zugleich als fachlicher Inhalt, als (ggf. nur mentaler) Handlungsprozess und als mathematische Darstellung verstehen lässt.*

## Einbettung

Das Bündelungsprinzip ist ein zentrales Thema in der Grundschulmathematik und damit sowohl in der fachlichen als auch in der fachdidaktischen Ausbildung von Grundschullehrkräften bedeutsam. Trotzdem gibt es außer Beschreibungen des Prinzips aus fachlicher und stoffdidaktischer Perspektive (z.B. bei Padberg, 1996) kaum Erkenntnisse über die Entwicklung hin zu einer adäquaten Vorstellung von Lernenden – seien sie in der Schule oder in der Hochschule. Im Projekt KLIMAGS (Kompetenzorientierte LehrInnovation im MATHematikstudium für die GrundSchule, im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik, [www.khdm.de](http://www.khdm.de)) wird die Mathematiklehre der Universitäten Kassel und Paderborn in den Blick genommen und Innovationskonzepte für einen effizienteren Kompetenzerwerb der angehenden GrundschullehrerInnen entwickelt. Angegliedert an das KLIMAGS-Projekt ist das Promotionsvorhaben der Zweitautorin. Dieses hat zunächst die theoretische Beschreibung adäquater Grundvorstellungen (im Begriffsverständnis nach vom Hofe, 1995) zu Bündelungsprozessen im Stellenwertsystem und deren Operationalisierung in einem Interviewleitfaden zum Ziel und untersucht mit Hilfe dieses Instruments die tatsächlich vorhandenen Vorstellungen und deren Entwicklung im Studienverlauf. In diesem konzeptionellen Rahmen hat die Erstautorin in ihrer Qualifikationsarbeit zum ersten Staatsexamen Analysen angestellt, welche die Grundlage für den vorliegenden Beitrag bilden.

## Bündeln im Stellenwertsystem

Die für uns übliche Zahldarstellung beruht auf dem dekadischen Stellenwertsystem. Eine Zahl wird mit (meist) mehreren Stellen dargestellt, von denen jede einen bestimmten Wert trägt. Die Zahldarstellung wird (im dekadischen System) mit Hilfe der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 erzeugt. Dabei transportieren die einzelnen Ziffern einer Zahl zwei Informationen, nämlich zum einen ihren eigenen Zahlenwert und zum anderen, durch ihre Positionierung, den Stellenwert. Das bedeutet, dass eine Ziffer unterschiedliche Werte ausdrücken kann, abhängig von ihrer Positionierung innerhalb der Zahl. Bei der Zahl 3435 beispielsweise wird die Ziffer „3“ an der vierten Stelle von rechts mit „1000“ multipliziert und steht somit für einen höheren Wert als die „3“ an der zweiten Stelle („Zehnerstelle“), welche mit „10“ multipliziert wird.

Das Stellenwertsystem bietet einige Vorteile, die von den meisten Erwachsenen verinnerlicht wurden und vielfach nicht mehr bewusst wahrgenommen werden. Zum einen werden im uns geläufigen dekadischen Stellenwertsystem nur zehn Ziffern benötigt, um alle möglichen Zahlen

zu erzeugen. Dies ist möglich, da die einzelnen Ziffern nicht einen einzigen festgeschriebenen Wert besitzen, wie es z.B. im römischen Zahlensystem der Fall ist, sondern sich der Wert durch die Platzierung in der Zahldarstellung ergibt. Zum anderen ist vorteilhaft, dass große Zahlen wegen der Zehnerbündelung und der festgelegte Reihenfolge der Stellenwerte mit relativ wenigen Stellen geschrieben werden können. Ganz besonders kommt der Vorteil der Stellenwerte bei den Grund-Operationen zur Geltung, wenn hier über geeignete, z.B. stellengerechte, Zahlzerlegungen oder durch stellenweises Rechnen im schriftlichen Normalverfahren mit wenig Aufwand und relativ sicher auch mit großen (oder mehreren) Zahlen operiert werden kann.

Um den Aufbau einer Zahldarstellung fachlich nachvollziehen zu können, kann eine wiederholte Anwendung des „Satzes zur Division mit Rest“ hilfreich sein: Wenn eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sukzessive (mit Rest) durch 10 geteilt wird, ergeben sich von rechts beginnend durch den je übrig bleibenden Rest die Ziffern der Zahl  $n$ . Fasst man die Ergebnisse der einzelnen Divisionen zusammen, so ergibt sich folgende formale Schreibweise der natürlichen Zahl  $n$ :

$$n = z_k \cdot 10^k + z_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10^1 + z_0 \cdot 10^0 \text{ mit den Ziffern } z_i \text{ mit } i = 0, \dots, k,$$

wobei  $z_i$  entsprechend des Dezimalsystems die oben genannten Ziffern 0,1,...,9 sind (z.B. zerlegt man die Zahl 1234 in die verschiedenen Summanden  $1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ ). Hieraus wird ersichtlich, dass die Ziffern an den verschiedenen Stellen mit jeweils einer bestimmten Zehnerpotenz multipliziert werden.

Für den Umgang mit und insbesondere für das Lernen von Mathematik unterscheidet man, zurückgehend auf Jérôme Bruner (1988), drei Darstellungsebenen: enaktiv (handelnd), ikonisch (bildlich) und symbolisch, die für das tiefere Verständnis von Begriffen oder mathematischen Zusammenhängen wichtig sind. Handelnde Tätigkeiten mit dem Gegenstand tragen dazu bei, durch die verinnerlichte Handlung Begriffe bilden zu können (vom Hofe, 1995). Der handelnde Zugang zum Stellenwertsystem über das Bündelungsprinzip ist von großer Bedeutung, da Lernende sich einen (hier mathematischen) Gegenstand durch eine Handlung besser im Geist bewahren können. Dies ist die Vorstufe der Fähigkeit, bildliche Darstellungen eines Gegenstandes zu erkennen, eine nächst höhere Stufe ist dann die Begriffsbildung (Lauter, 1991). Der Satz zur Division mit Rest kann also durch einen Bündelungsprozess mit Hilfe von Material handelnd erlebt bzw. veranschaulicht werden. Unstrukturiertes Material, wie die in der hier vorliegenden Untersuchung verwendete Dekosteine, eignet sich nach Rödler (2006) gut, um die Zifferndarstellung einer Zahl schrittweise zu erzeugen.

„Bündeln“ bedeutet, die Elemente einer vorgegebenen Menge [sukzessiv] zu gleich großen Gruppierungen zusammenzufassen.“ (Krauthausen, Scherer, 2007, S.17). Die Anzahl der Elemente in einem Bündel wird als Basis eines Systems bezeichnet. In unserem alltäglichen Gebrauch sind Zahlen zur Basis 10 gebündelt, dies ist vermutlich auf die Anzahl unserer Finger zurückzuführen (Padberg, 1996). Allerdings funktioniert das Bündeln auch zu allen anderen Basen  $b \in \mathbb{N}, b > 1$ , man spricht dann allgemein von  $b$ -adischen Ziffernsystemen (Scheid, 1996). Das Bündeln in fremden Stellenwertsystemen bietet für das Lernen von Kindern und Erwachsenen unterschiedliche Vorteile. Für Kinder ist es im Anfangsunterricht wichtig, zuerst einen Zugang zu dem Vorgang „bündeln“ an sich zu bekommen, weshalb übersichtliche Bündelgrößen  $1 < b \leq 5$  gewählt werden sollten. Erwachsene beherrschen das Dezimalsystem automatisiert, wodurch es für sie erschwert wird, den eigentlichen Aufbau und die besonderen Charakteristika der Zahlen im Stellenwertsystem zu erkennen. Fremde Systeme können hier helfen, ein Grundverständnis vom Stellenwertsystem zu erhalten. Auch können Erwachsenen bei der Behandlung von fremden Stellenwertsystemen auf Schwierigkeiten stoßen, die analog bei Schülern beim Erlernen

vom Dezimalsystem auftreten können. Durch das Bewusstsein über die Schwierigkeiten, die es beim Erlernen des Stellenwertsystems geben kann, ist es z.B. einer Lehrperson möglich, sich in die Schüler hineinzusetzen und Hilfestellungen zu geben, die ihr selbst im fremden System geholfen haben.

Weitere zentrale Aspekte wie die Rolle der Null oder die Verschiedenheit unserer Schreib- und Sprechweise führen wir hier nicht weiter aus, da sie in den diesem Beitrag zugrundeliegenden Interviewausschnitten nicht thematisiert wurden.

## Forschungsfragen und Zielstellung

Für den vorliegenden Werkstattbericht haben wir einen kleinen – aber zentralen – Ausschnitt aus den geführten Interviews (siehe dazu Abschn. Erhebung) ausgewählt. Ziel ist es, ein Kategoriensystem zu entwickeln, welches das studentische Handeln und die Antworten der Testpersonen effizient dokumentiert und den Entwicklungsstand der fach- und handlungsbezogenen Vorstellungen erfasst, wobei einerseits die vorhandene Kompetenz und andererseits fehlerhafte Vorstellungen als Ansatzpunkte für die Lehre berücksichtigt werden sollen. Die erkenntnisleitende Fragestellung ist

*Welche (Unterscheidungs-) Merkmale lassen sich, ggf. in welchen Abstufungen, in den Handlungsprozessen der Testpersonen identifizieren?*

Im Anschluss hieran muss geklärt werden, inwiefern diese Merkmale eine Interpretation in Bezug auf die vorhandenen Vorstellungen, Fehlvorstellungen und Verstehenskomponenten erlauben und welche Ausprägungen theoretisch und empirisch Indikatoren für einen erfolgreichen Handlungsprozess sind. Insbesondere aus Kategorien, die fehlerhaftes oder unvollständiges Handeln oder Verstehen beschreiben, leiten wir notwendige fachliche oder fachdidaktische Wissenskomponenten ab, die in der Hochschullehre (noch) eindrücklich(er) vermittelt werden sollten.

## Methodik

### Erhebung

Im Verlauf des Wintersemesters 2011/12 wurden an der Universität Kassel leitfadengestützte halboffene Interviews mit Erstsemester-Studierenden des Lehramtes für Grundschulen geführt. Der Interviewleitfaden wurde speziell für das hier angerissene Promotionsvorhaben entwickelt und behandelt den mathematischen Inhaltsbereich des Stellenwertsystems mit Fokus auf dem Bündelungsprinzip und der Durchführung des dahinterstehenden Handlungsprozesses im dezimalen sowie nicht-dezimalen System. Wir beschränken uns im vorliegenden Bericht auf eben dieses Bündeln im Dezimalsystem und im Vierer-System. Die konkrete Formulierung der Frage variiert leicht zwischen den verschiedenen Interviews, da sie an den jeweiligen Verlauf angepasst werden musste. Kern der Aufträge war je erstens, einen Vorgang, der die unserer Zahldarstellung zugrundeliegende sukzessive Bündelung mit 10 beinhaltet, am Material zu veranschaulichen und zweitens, diesen Vorgang von der 10 zu lösen und mit der Basis<sup>1</sup> 4 durchzuführen. Das Material bestand in beiden Fällen aus 123 Dekosteinen. Die korrekten Bündel-Konstellationen sind also einmal „1 Hunderter, 2 Zehner, 3 Einer“ (denn  $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 123$ ) und einmal „1 Vierundsechziger, 3 Sechzehner, 2 Vierer, 3 Einer“ (denn  $1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 123$ ).

---

<sup>1</sup> Für die Probanden zum Testzeitpunkt am Studienbeginn wurde der Begriff „Strukturierungszahl“ genutzt, da der Fachbegriff „Basis“ nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann und da das Operieren mit dem Material genau einem Strukturieren mithilfe der 10 bzw. der 4 entspricht.

Die Datenbasis für den vorliegenden Bericht bilden 20 Interviews, von denen 10 zu Beginn und 10 zum Ende des ersten Studienseesters der Probanden durchgeführt wurden. Fünf Personen wurden dabei zu beiden Zeitpunkten befragt. Alle Interviews wurden videografiert und transkribiert. Im Zeitraum zwischen den Erhebungszeitpunkten haben die Testpersonen die Fachvorlesung „Arithmetik für die Grundschule“ gehört. In dieser Veranstaltung wurden Stellenwertsysteme, die Zahldarstellung und der Bündelungsgedanke zumindest auf der symbolischen Ebene ausführlich thematisiert, sodass ein Kompetenzzuwachs bezüglich der Interviewfragestellung zu erwarten ist.

## Auswertung

Die von uns zugrunde gelegte Vorgehensweise folgt der Grounded Theory Methode (Strauss & Corbin, 1990; Strübing, 2008). Sie geht von einer wechselseitigen Abhängigkeit von Datenanalyse und Theoriebildung aus. Das Ziel ist die Erarbeitung einer aus der Datenlage begründeten neuen Theorie, welche, legitimiert durch eine systematische Vorgehensweise und entsprechende Dokumentation, geprägt ist durch subjektive Leistung und Interpretation des Forschers. Diese Methode wurde gewählt, da im untersuchten Inhaltsbereich zwar die fachliche Grundlage und eindeutige Beschreibungen des korrekten Handlungsprozesses vorliegen, es aber kaum Erkenntnisse über tatsächliche kognitive Prozesse, (Handlungs-)vorstellungen oder Schwierigkeitspotentiale gibt und hier eine Grundlegung erfolgen soll.

Die Datenkodierung folgt dem Prinzip des ständigen Vergleichens, dabei werden die Handlungen und Antworten der Testpersonen systematisch auf Unterschiede, Ähnlichkeiten und Spezifika untersucht und somit die theoretischen und strukturellen Eigenschaften der Kategorien herausgearbeitet. Aus Platzgründen können wir im Rahmen dieses Beitrags nur das (vorläufige) Ergebnis des mehrstufigen Kodierungsprozesses, der sich aus offener, axialer und selektiver Kodierung<sup>2</sup> zusammensetzt, vorstellen. Zum derzeitigen Stand können wir ein Kategoriensystem präsentieren, dessen Kategorien und deren einzelne Abstufungen exakt im Datenmaterial beobachtet wurden. Die verschiedenen Kategorien wurden (vor dem Hintergrund der fachlichen, fachdidaktischen und diagnostischen theoretischen Grundlagen, vgl. oben) in den Handlungen bzw. Äußerungen der Testpersonen identifiziert und zusammengefasst.

## Ergebnisse

### Kategoriensystem

Im folgenden Abschnitt stellen wir die Kategorien vor, die sich bei der Analyse der insgesamt 20 Interviews offenbart haben. Die Kategorien dienen einerseits der Beschreibung von Bearbeitungsmerkmalen, die nicht zwingend eine Wertung beinhalten, wie z.B. einer möglichen aber nicht notwendigen Strukturierung des Materials, und andererseits zur Verortung von Schwierigkeiten im Bearbeitungsprozess, welche letztlich eine Bewertung des Verständnisses implizieren. Die Kategorien beziehen sich auf Prozess bzw. Produkt der Handlungen (zum Teil der Äußerungen), die nach der Aufforderung, einen Bündelungsvorgang<sup>3</sup> im Zehner- bzw. im Vierersystem zu

---

<sup>2</sup> Die drei Schritte beinhalten Sichtung und Deskription, dann ein In-Zusammenhang-Bringen der Phänomene und mögliche Generalisierungen und schließlich die Überprüfung und Optimierung der Kategorien anhand neuer Daten.

<sup>3</sup> Der Hinweis, dass ein Bündelungsvorgang „erwünscht“ ist, erfolgte im Interview subtiler und ohne Verwendung des Fachbegriffs.

durchlaufen, erfolgte. Alle Kategorien bis auf die letzte beziehen sich sowohl auf den Bündelungsprozess im Dezimalsystem als auch auf den im Vierersystem.

### Kategorie 1 – Äußere Struktur

Diese Kategorie erfasst die äußere Struktur der Bündelung der Steine. Inhaltliche Aspekte spielen hier keine Rolle.

- a) strukturierte / gezielte Anordnung der verschiedenen Bündel nach ihrer Größe (z.B. von oben nach unten). Hierbei muss zusätzlich unterschieden werden, ob die Strukturierung spontan oder auf Nachfrage durch die Interviewerin erzeugt wurde.
- b) keine Ordnung / Reihenfolge der Bündelgrößen, unstrukturiertes Bild.

### Kategorie 2 – Bündelgröße

In dieser Kategorie wird die Wahl der Bündelgröße erfasst. Mit einbezogen wird, ob die Bündelgröße und die Basis des Zahlensystems übereinstimmen.

- a) Die gewählte Bündelgröße ist korrekt im Bezug auf das jeweilige  $b$ -adische System.
- b) Die gewählte Bündelgröße weicht von den Potenzen der Basis des Systems ab
  - (1) von Beginn an (ab  $b^1$ ).
  - (2) ab der Stufe  $b^2$ , also ab dem zweiten Bündelungsschritt.
- c) Es ist kein Bündelungsprozess erkennbar. Diese Kategorie ist ein Abbruchkriterium in der Datenanalyse. Wird sie vergeben, kann in den Kategorien 3 und 4 keine Einordnung vorgenommen werden.

### Kategorie 3 – Innere Bündelstruktur

Hier wird beschrieben, wie die innere Struktur der Bündel gestaltet wird<sup>4</sup>.

- a) Die Steine der Bündel  $\geq b^2$  (also 100er bzw. 16er und 64er) werden je zu einem Haufen ohne innere Strukturierung zusammengeschoben.
- b) In einem „großen“ Bündel sind mindestens die  $b$  Bündel der nächst kleineren Stufe(n) ersichtlich (z.B. die 4er-Bündel sind im 16er-Bündel bzw. im 64er-Bündel erkennbar).

### Kategorie 4 – Auftreten von Schwierigkeiten

Es soll erfasst werden, ob und falls ja an welcher Stelle im Bündelungsprozess (zum ersten Mal) Schwierigkeiten auftreten.

- a) Keine Schwierigkeiten.
- b) Erstes Auftreten von Schwierigkeiten bei Bündelgröße ( $b^0$  oder)  $b^1$ .

---

<sup>4</sup> In dieser Kategorie ist eine feinere Unterteilung der Ausprägungen denkbar. Allerdings sind sie in den bislang erhobenen und analysierten Daten nicht relevant geworden.

- c) Erstes Auftreten von Schwierigkeiten bei Bündelgröße  $b^2$ .
- d) Erstes Auftreten von Schwierigkeiten bei Bündelgröße  $b^3$ .

#### Kategorie 5 – Zusammenhang zwischen Material und Ziffernschreibweise

In dieser Kategorie wird erfasst, ob die erzeugte Bündelstruktur (also Anzahlen und Mächtigkeiten der Steinhäufchen) mit den Ziffern der Zahldarstellung in Verbindung gebracht werden kann. Folgefehler aus ggf. fehlerhafter Bündelung werden bei einer korrekten Übersetzung aus Steinchen-Bild in Ziffern nicht gewertet.

- a) Die Übersetzung von den Steinen hin zur Zifferndarstellung erfolgt spontan und korrekt.
- b) Die Übersetzung von den Steinen hin zur Zifferndarstellung erfolgt korrekt aber erst nach Hilfestellung.
- c) Der Zusammenhang zwischen Bündelbild und Zifferndarstellung kann nicht hergestellt werden.

#### Kategorie 6 – Umgang mit dem Material

Die Testpersonen offenbarten einen sehr unterschiedlichen Umgang mit dem Material, was uns veranlasst, eine eigene Kategorie hierfür einzuführen. (Zum Zusammenhang von Vertrautheit mit dem Material und Leistung siehe z.B. Rödler, 2006).

- a) Souveräner, spontaner Umgang mit den Steinchen.
- b) Hemmungen, die Steine zu Benutzen / Zögerliche Benutzung.
- c) Ausweichen auf schriftliche oder mündliche Erklärungen.
- d) Hinzunahme von anderem/ ergänzendem Material (tatsächlich oder als Wunschäußerung).

#### Kategorie 7 – Verständnis von nicht-dezimalen Systemen (hier des 4er-Systems)

Diese Kategorie kann nur auf dem Prozess der 4er-Bündelung angewendet werden. Es soll erfasst werden, ob die Testperson den Aufbau und die Struktur des 4er-Systems verstanden hat und anwenden kann. Sichtbar wird dies (vgl. dazu Abschn. 2) an der Wahl (inkl. Begründung) der Bündelgröße.

- a) Das 4er-System wird nicht verstanden, es wird im Dezimalsystem verharret
  - (1) in Bezug auf die „Zielzahl“. Z.B. werden 20er-, 12er- oder 30er-Bündel gebildet, weil man damit „gut weiterrechnen kann“, z.B. können fünf 20er zu einem 100er oder fünf 12er zu einem 60er aufaddiert werden.
  - (2) in Bezug auf die Bündelzahl / Basis. Z.B. werden statt vier 4er-Bündel zehn 4er-Bündel zusammengefasst.
- b) Das 4er-System wird offenbar verstanden. Bedingung hierfür ist eine Kategorisierung in 2a), und 5a) oder 5b). Falls in Kategorie 4 Schwierigkeiten festgestellt wurden, müssen diese im Verlauf des Prozesses überwunden worden sein.

## Grenzen und Spezifika des Kategoriensystems

Bislang ist die Kategorisierung der Interviews recht aufwändig, da die Einordnungen nur sehr schwer anhand der Transkripte, besser anhand des Filmmaterials vorgenommen werden können. Für eine einfachere Form der Zuweisung zu den Kategorien müsste die Erhebungsform grundlegend überdacht werden, was mit dem derzeitigen Informationsstand jedoch nicht sinnvoll erscheint. Da einige Schritte des Handlungsprozesses nur erreicht werden können, wenn gewisse notwendige Elemente vorher erfüllt wurden, bedingen sich einige Ausprägungen von Kategorien gegenseitig. Wir erhoffen uns aus weiteren Daten die nötige Erkenntnis für eine effiziente Straffung bzw. Ausschärfung der Kategorien. Eine Grenze, die weniger das Kategoriensystem als das Erhebungsinstrument betrifft, ist, dass durch das verwendete Material (Dekosteine) die Interviewbedingungen für manche Testpersonen leichter/schwieriger erschienen als für andere. Ggf. sind beobachtete Schwierigkeiten also mehr auf das eingesetzte Material als auf „echte“ inhaltliche Probleme zurückzuführen. Dieser Problematik versuchen wir mit der Kategorie 6 Rechnung zu tragen.

## Erste Befunde

Zum ersten Zeitpunkt offenbaren alle Studierenden große Schwierigkeiten mit dem fremden Stellenwertsystem. Zum zweiten Messzeitpunkt sind deutliche Entwicklungen feststellbar hin zu einem besseren Verständnis von Stellenwertsystem und Bündelungsprinzip. Die Studierenden können nun überwiegend richtige Bündelungsprozesse durchführen – wenn auch noch mit einigen Schwierigkeiten. Dabei wurde deutlich, dass es zwischen den Polen „vollständig Verstehen“ und „überhaupt nicht Verstehen“ diverse Abstufungen gibt und nur selten strukturelle Transfers zwischen zwei Zahlssystemen oder von niedrigeren zu höheren Bündelstufen stattfinden. Probleme zeigten sich vermehrt beim Bilden der Bündel höherer Stufen, insbesondere, wenn die größeren Bündel nicht als ein kompakter Haufen, sondern als „lose Ansammlung“ der kleineren Bündel zusammengelegt wurden. Sowohl das Erkennen der Mächtigkeit eines Bündels als auch die Identifizierung der Anzahl der Bündel je Größe sind potentielle Hürden. Wenn diese beiden Informationen jedoch korrekt entnommen wurden, stellte die Übersetzung zwischen den Darstellungsebenen von den konkreten Steinchen in die formale Zifferschreibweise kein Problem mehr dar. Der Zugang und Umgang mit dem Material war sehr unterschiedlich, für einige stellten die Steine eine regelrechte Hürde, für andere hingegen eine Hilfestellung dar. Vereinzelt ließ sich große Begeisterung bezüglich Optik, Haptik und fachlichem Unterstützungsgehalt der bunten Steinchen ausmachen.

## Zusammenfassung und Ausblick

Ziel des vorliegenden Beitrags war es, Kategorien für die Beschreibung von Handlungsprozessen und für die Diagnose von eventuellen Schwierigkeiten zu identifizieren. Der Optimierungsprozess der Kategorien kann nicht als abgeschlossen angesehen werden, die Ausdifferenzierung anhand weiterer Daten steht noch aus. Die Ausschärfung weiterer Kategorien, beispielsweise die Versprachlichung der eigenen Handlungen und die Vernetzung der verschiedenen Artikulationsebenen (handelnd, sprechend, schreibend) betreffend, stehen noch aus, um die Vorstellungen und das fachliche Verständnis der Probanden noch genauer analysieren zu können. Auch schränkt die bislang kleine Datenmenge die allgemeine Tragweite der Befunde ein. Trotzdem lässt sich eine gewisse Häufung von Schwierigkeiten in den gleichen Aspekten ausmachen, sodass – mit aller gebotenen Vorsicht – davon ausgegangen werden kann, dass es sich hier um verbreitete Probleme bei Grundschullehramtsstudierenden handelt. Erste Rückmeldungen der Testpersonen legen nahe, dass der handelnde Zugang in der Ausbildung einen stärkeren Stellenwert erfahren

sollte. Dabei sollte u.E. der Übersetzungsprozess zwischen der formalen, der hier nicht untersuchten ikonischen und der enaktiven Darstellungsebene besprochen werden. Insbesondere sollte Wert auf den Begriff der Basis als Bündelgröße und auf die Unterscheidung der beiden Informationsanteile „Mächtigkeit eines Bündels“ (Stellenwert) und „Anzahl der Bündel einer Stufe“ (Ziffer auf der jeweiligen Stelle) gelegt werden.

Sobald die Befundlage besser abgesichert ist, können anhand der Erkenntnisse u.a. Transfers in verwandte Ausbildungsbereiche wie die ErzieherInnen-Bildung oder Lehrerfortbildungsprogramme geleistet werden. Ebenso ist die Übertragung der Ergebnisse und ihr Nutzen für die Erforschung von Erstlernprozessen und Vorstellungsentwicklung im Kindesalter denkbar.

## Literatur

- Bruner, J.S. (1988). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R.R. Oliver & P.M. Greenfield (Hrsg.) Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität (S.21-53). 2. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- Lauter, J. (1991). *Fundament der Grundschulmathematik – Pädagogische-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule*. 1.Auflage. Donauwörth: Ludwig Auer GmbH.
- Padberg, F. (1996). *Didaktik der Arithmetik*. 2. Auflage. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- Rödler, K. (2006). *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln*. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH.
- Scheid, H. (1996). *Elemente der Arithmetik und Algebra*. 3. Auflage. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Strübing, J. (2008). *Grounded Theory – Zur sozialtheoretischen und epistemologischen Fundierung des Verfahrens der empirisch begründeten Theoriebildung*. 2. Auflage. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.