kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium

Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - TP1: Mathematik für Maschinenbauer

Paul Wolf
Rolf Biehler

Kassel, März 2014

khdm-Report 14-03
Universität Kassel
Leuphana Universität Lüneburg
Universität Paderborn

Kurzbeschreibung khdm-Report
In dieser Schriftenreihe des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik werden von den Herausgebern und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten und „Occasional Papers", die sich mit mathematikbezogener Hochschuldidaktik und angrenzenden Wissenschaftsgebieten beschäftigen. Die Reihe wurde ins Leben gerufen, um Materialien zu veröffentlichen, die im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik und in assoziierten Projekten oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind.

https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2012050741193

Herausgegeben von
Rolf Biehler
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik, Universität Paderborn, biehler@khdm.de

Reinhard Hochmuth
Fakultät I Bildungs-, Kultur- und Sozialwissenschaften, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Leuphana Universität Lüneburg, hochmuth@khdm.de

Hans-Georg Rück
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Mathematik, Universität Kassel, rueck@khdm.de

khdm-Report 14-03

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium
Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - TP1: Mathematik für Maschinenbauer

Dipl.-Math. Paul Wolf
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik, Universität Paderborn
wolf@khdm.de

Prof. Dr. Rolf Biehler
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik, Universität Paderborn
biehler@khdm.de

http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2014013144836

Das khdm wird im Rahmen der gemeinsamen Initiative „Bologna – Zukunft der Lehre"
von der Stiftung Mercator und der VolkswagenStiftung für zunächst drei Jahre gefördert.

khdm-Report, Nr. 03, 2014

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium

Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - TP1: Mathematik für Maschinenbauer

Version 1.0, 25.03.2014

Paul Wolf, Rolf Biehler
Institut für Mathematik und Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik
Universität Paderborn

Abstract
In dieser Zusammenfassung wollen wir den derzeitigen Arbeitsstand des Teilprojekts darlegen und Interessenten die Möglichkeit geben, auf die in den vergangenen Monaten erstellten Anwendungsaufgaben zurückzugreifen und diese ggf. in den Lehrveranstaltungen zu nutzen. Es ist geplant, diesen Bericht je nach Stand der Arbeit zu erweitern und zu ergänzen. Die hier vorgestellten Aufgaben sind für die Veranstaltungen Mathematik 1 und 2 für Maschinenbauer konzipiert, jedoch lassen sie sich sicherlich auch auf andere Studiengänge übertragen. Das dahinter liegende Konstruktionskonzept wird zu Beginn kurz dargestellt.

Gerne dürfen Sie die Aufgaben unter Angabe der Quelle für Ihre Lehrveranstaltungen verwenden. Bitte sehen Sie jedoch davon ab, die Lösungen online zu stellen. Über Rückmeldungen (z.B. an wolf@khdm.de) würden wir uns sehr freuen!

Inhalt

1. Über das Projekt

Die AG Ing-Math ist ein Projekt des Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) und besteht aus drei Teilprojekten. Das Teilprojekt, welches hier seine Ergebnisse präsentiert, stellt sich unter den Namen „Mathematik für Maschinenbauer: Integration des Modellierens in ingenieurwissenschaftlichen Zusammenhängen" vor und wird von Prof. Dr. Rolf Biehler und Prof. Dr. Gudrun Oevel geleitet.
In diesem Teilprojekt werden Interventionselemente für die Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbauer" untersucht und entwickelt, wobei diese Elemente begleitend und abschließend evaluiert werden sollen. Die geplanten Maßnahmen betreffen insbesondere:

- das Betonen der Einsatzgebiete der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften: Vorbereitung der Studierenden auf das Simulieren, Modellieren und Interpretieren von Problemstellungen und Lösungen
- die Veranschaulichung und Vernetzung der Mathematik durch ingenieurwissenschaftliche Anwendungsbeispiele
- die zeitliche Umstrukturierung der Lerninhalte, so dass die benötigte Mathematik parallel zu den Fachveranstaltungen gelehrt wird
- die Umgestaltung der Lerninhalte bezüglich ihrer Relevanz.
- Empirische Studien zu Wirkungen der Lehrinnovationen auf Einstellungen und Kompetenzen der Studierenden

In diesem Werkstattbericht soll es vor allem um die ersten beiden Punkte gehen.
Die hierbei entwickelten Aufgaben und deren zugrunde liegendes Konzept, sowie deren Weiterentwicklung, Evaluierung und die zugrunde liegenden Theorien werden ein Hauptbestandteil der Dissertation des erstgenannten Autors sein.

Weitere Informationen finden sich auf www.khdm.de, sowie bei Oevel et al. (2014).

2. Die Konzeptidee für die Aufgabenkonstruktion

Ziel des Projektes ist es, Aufgaben zu entwickeln, die thematisch und von den Anforderungen her in den üblichen Übungsbetrieb einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Ingenieure" passen. Was aber kann in diesem Zusammenhang „passen" überhaupt heißen? Wir geben kurz unsere Kriterien wieder, die einerseits in der Diskussion in der Mathematikdidaktik zur Klassifikation von anwendungsbezogenen Aufgaben verankert sind (z.B. Maaß, 2010), andererseits aber die spezifischen Rahmenbedingungen von Mathematik-Lehrveranstaltungen für Ingenieure berücksichtigen.

Wir sprechen von einer Konzeptidee „Gute anwendungsorientierte Aufgaben in der Mathematik für Maschinenbauer". Die folgende Abbildung fängt die wichtigsten Stichworte in Kurzschreibweise auf. Im weiteren Verlauf wird auf jeden Unterpunkt einzeln eingegangen, die Begriffe werden geklärt und in ihrer Relevanz und Umsetzbarkeit bewertet.

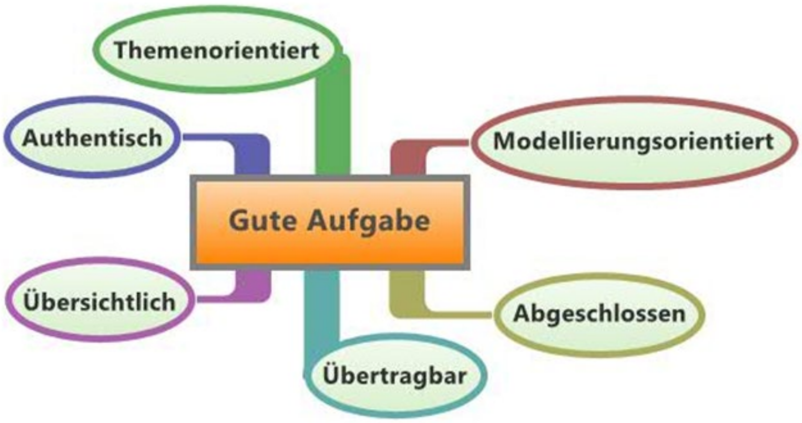


Abb. 1: Die Konzeptidee in Stichworten

Folgende Punkte sollten von einer guten Anwendungsaufgabe in Mathematik für Maschinenbauer erfüllt werden:

- Mathematik-Themenorientiert („Themenorientiert")

Da die Übungsaufgabe in einer Mathematikvorlesung ausgeteilt wird, sollte natürlich das Thema, welches geübt werden soll (z.B. Gleichungssysteme lösen) auch den mathematischen Teil der Aufgabe bestimmen oder mindestens in auffälliger Weise darin vorkommen. Die Brücke zwischen der Mathematik und den Fachinhalten kann nur geschlagen werden, wenn den Lernenden die Zusammenhänge klar werden. Die aus der Vorlesung bekannte Mathematik soll dabei möglichst so angewendet werden, wie sie auch gelehrt wurde (z.B. Gauß-Verfahren). Hierin unterscheiden sie sich von Aufgaben in Maschinenbauvorlesungen, in denen oft eigene mathematische Praktiken eingeführt und benutzt werden dürfen. Weiterhin zeichnet sich eine - insbesondere im Sinne der Mathematik - gute Aufgabe auch dadurch aus, dass die Studierenden den mathematischen Gedanken des Verallgemeinerns erfahren und umsetzen müssen. Hiermit wird eine Art der Verallgemeinerung angestrebt, die eher in Richtung der Mathematik als in Richtung einer Theorie im Maschinenbau geht. Im Beispiel der Gleichungssysteme kann dies leicht durch Einführung von zusätzlichen Parametern oder Variablen geschehen.

- Maschinenbau-Authentisch („Authentisch")

Kurz gesagt verlangen wir hier, dass keine eingekleidete Mathematik-Aufgabe vorliegt, in der der Maschinenbau-Kontext nur behauptet wird, und unrealistische Zahlenwerte, Annahmen und Fragestellungen verwendet werden. Die Werte müssen in der Praxis vorkommen können und nicht wirken, als ob sie nur für ein „schönes" Ergebnis gewählt wurden (ein Stahlträger der nur wenige Gramm wiegt macht wenig Sinn). Die Verwendung von korrekten Einheiten und für Maschinenbauer relevante Problemstellungen sollten eigentlich selbstverständlich sein. Bei der Erstellung der Aufgabe sollte man sich fragen, ob man in der Realität hier tatsächlich etwas berechnen würde (wenigstens bei sehr großen oder schweren Objekten und Bauvorhaben) oder ob man einfach probieren würde. Eine Aufgabe wirkt sehr künstlich, wenn es keinen Grund gibt das Problem überhaupt mathematisch exakt lösen zu wollen. Dieser Aspekt des Konzepts verhält sich ähnlich zu der Forderung von Alpers (2001) nach relevanten Themen in Projekten für Ingenieursstudierende. Insgesamt soll dieser Punkt auch den Zusammenhang zu den technischen Inhalten des Studiums garantieren und das Interesse an den mathematischen Themen steigern. Dass solch ein Querbezug das Interesse deutlich steigern kann, ließ sich in allgemeiner Form durch Studien an Schülerinnen und Schülern (Krapp, 1998, S. 188), sowie aktuell auch direkt an Studierenden technischer Fächer (Rooch et al., 2014, S.406) zeigen. Um die Maschinenbau-Authentizität sicherzustellen wurden die Aufgaben Dozenten aus Maschinenbau-Lehrveranstaltungen zur Beurteilung vorgelegt. Mit den Studierenden muss ein „didaktischer Kontrakt" (gemeint ist damit eine meist implizit bleibende Vereinbarung zwischen Lehrenden und Lernenden über das Wissen und die Strategien, die bezogen auf diese Aufgaben genutzt werden können und sollen) geschlossen werden, der z.B. beinhaltet, dass zur Lösung maschinenbaulich-physikalisches Wissen nicht nur erwünscht, sondern für die Lösung erforderlich ist und dass im Maschinenbau übliche Validierungsstrategien über Einheiten und Größenordnung der Ergebnisse hier anwendbar sind. Das ist schon deshalb wichtig, weil viele Studierende aus ihrem Mathematikunterricht eher nur eingekleidete Aufgaben kennen, die eine andere Lösungsstrategie erfordern, bei der das Ernstnehmen des Anwendungskontextes sogar manchmal hinderlich sein kann.

- Modellierungsorientiert

Es soll ein stetiger Wechsel zwischen Physik-Interpretation und mathematischen Vorgehen zum Lösen der Aufgabe notwendig sein. Dieser Wechsel darf durch spezielle Aufgabenteile an verschiedenen Stellen wiederholt angeregt werden, doch sollte darauf geachtet werden, dass es nicht möglich ist, die Aufgabe zu lösen ohne den Wechsel Physik-Mathematik-Physik wenigstens einmal vollzogen zu haben. Offene, komplexe Modellierungsaufgaben, wie sie in der schulischen Mathematikdidaktik gefordert werden, werden i.d.R. auch nicht in Anfängervorlesungen zum Maschinenbau gestellt. Wir wählen deshalb auch hier Aufgaben, die bereits an einem „Realmodell" ansetzen, das auch im Maschinenbau Verwendung findet (vgl. Leiss et al., 2010) und die Studierenden nicht dadurch überfordern, dass selbstständig weitreichende Idealisierungen und Annahmen zu treffen sind.

- Übersichtlich und kognitiv angemessen („Übersichtlich")

Die Studierenden dürfen nicht allein durch die Textmasse abgeschreckt werden die Aufgabe zu bearbeiten, stattdessen ist es angebracht stilistische Mittel wie z.B. Bilder oder Skizzen einzubauen und die Aufgabenstellung möglichst kurz und präzise zu formulieren. Als groben Richtwert sollte man versuchen nicht mehr als eine DIN-A4 Seite zu füllen, so dass nicht umgeblättert werden muss. Natürlich muss zudem die Schwierigkeit der Aufgabe angemessen sein, allerdings nicht nur im mathematischen Teilbereich, sondern insbesondere auch im technischen und physikalischen. Im optimalen Fall wurden die technischen Aspekte bereits in einer Fachvorlesung behandelt, bevor die Aufgabe gestellt wird. So ergibt sich zugleich auch ein Wiederholungseffekt.

- Abgeschlossen bzgl. Maschinenbauwissen („Abgeschlossen")

Es sollte entweder bekanntes Wissen aus den Maschinenbau-Fachvorlesungen verwendet werden oder man muss Informationen zum physikalisch-technischen Hintergrund der Aufgabenthematik oder eventuell vorgegebener Formeln in der Aufgaben selber vermitteln. Um den Aufgabentext nicht zu überlasten (siehe „Übersichtlichkeit") besteht eine Möglichkeit darin, diese Informationen in einem Anhang zu erklären. Für die eigentliche Aufgabenbearbeitung ist der i.d.R. optional für die Studierenden, aber er kann zur Wertschätzung der Authentizität beitragen. Gerade in den ersten Semestern sollten allerdings die Themen so gewählt sein, dass ein Hinweis auf ein Buch oder auf eine gute Internetseite den Anhang auch ersetzen kann. So findet beispielsweise jeder Student zum Thema „Schwerpunkt" sofort die Formeln und gute Erklärungen im Internet und hat die Möglichkeit sich auf eigenen Wunsch hin in kürzester Zeit weiter zu informieren. Im didaktischen Kontrakt muss nur klar sein, dass diese Bearbeitungsstrategien erwünscht und erforderlich sind.

- Prototyp- und Ankerbeispielaufgabe für Mathematik und / oder Maschinenbau („Übertragbar")

Im besten Falle dienen die Aufgaben den Studierenden später als Gedankenbrücke bei anderen Aufgaben ähnlichen Typs. Ein „das ist ja wie in Aufgabe X"-Effekt ist sehr wünschenswert, wenn auch abhängig vom jeweiligen Lernenden. Dieser Punkt lässt sich nur schwer bei der Aufgabenkonstruktion erzwingen, allerdings dient er im Nachhinein als ein zusätzliches Qualitätsmerkmal.

3. Praktische Hinweise zur Aufgabenkonstruktion

Da die Aufgaben im Rahmen einer Mathematikvorlesung verwendet werden sollen, ist es selbstverständlich, dass die Aufgabe einem gewissen Thema zugeordnet sein soll (z.B. Integralrechnung). Dies engt die Auswahl an Themen meist schon derart ein, dass, wenn einmal diese Hürde überwunden ist, die restliche Konstruktion leicht von der Hand geht. Fachwissen und/oder Expertenaussagen sind grundlegend, um ein geeignetes Sachthema zu finden, wobei auch das Durchblättern von Vorlesungsskripten der Fachvorlesungen erste Ideen liefern kann. So sieht man schnell, dass beispielsweise gerade zu Beginn die Matrizenrechnung im Rahmen der Grundaufgaben zu Kraftsystemen eine zentrale Rolle einnimmt. Wir garantieren durch dieses Vorgehen die Themenorientierung und legen die Grundlage für die Authentizität und Modellierungsorientierung.

Haben wir also sowohl unser mathematisches, als auch unser ingenieurwissenschaftliches Thema gefunden, so müssen wir nach Anwendungen in der Realität Ausschau halten. Gerade hier kann es sehr hilfreich sein, erfahrene Ingenieure oder interessierte Studierende um Hilfe zu bitten, da sie Anwendungen und vor allem die Neigungen der Studierenden einschätzen können. Dabei muss stets auf die Komplexität der Probleme geachtet werden, so dass die benötigte Einleitung (bzw. der Anhang) nicht bereits von der Bearbeitung der Aufgabe abschreckt, und dass insbesondere die Aufgabe auch für die noch Unerfahrenen lösbar und verständlich bleibt. Weiterhin muss die Aufgabe so gestellt werden, dass die Relevanz und die Authentizität des Problems für den angehenden Ingenieur klar zu erkennen sind. Die Frage, wie lange es beispielsweise dauert bis sich ein Bonbon im Mund auflöst kann sicherlich eine spannende Frage sein, aber den realitätsnahen Ingenieur würden wohl eher Eigenschaften von Beton und Stahl interessieren. So sollte man auch auf einfach zu korrigierende Logiklücken achten, womit beispielsweise gemeint ist, dass ein Stahlträger mit einem Gewicht von wenigen Gramm sehr unrealistisch wirkt. Authentische Werte sind „schönen" Rechenergebnissen immer vorzuziehen, insbesondere wenn die Einheiten bekannt und im Fach verwendet werden (z.B. der Elastizitätsmodul von Aluminium). Man sollte sich nicht scheuen, den Studierenden zuzutrauen gewisse Fachbegriffe und Einheiten selbst nachzuschlagen, wenn es um Stoffe und Formeln geht, die für den Ingenieur alltäglich sind, sofern die Studierenden mit ihrem bereits gesammelten Fachwissen in der Lage sein können, die Zusammenhänge zu verstehen. Dies erfordert meist das Einholen einer Expertenmeinung.

Die Modellierungsorientierung zu garantieren ist oft die zweite Hürde bei der Erstellung einer Aufgabe im Sinne des Konzepts. Zunächst muss man darauf achten, dass in dem Aufgabentext möglichst wenig über konkretes mathematisches Vorgehen gesagt wird. So macht es einen enormen Unterschied ob man schreibt „An welchem Punkt setzen Sie die Kraft an?" versus „Bestimmen Sie den Schwerpunkt!". Fragen eignen sich häufig besser um den Modellierungskreislauf zu starten, da sie im Gegensatz zu „Rechenaufträgen", nicht das Vorgehen direkt angeben, sondern bereits diesen ersten Schritt an den Lernenden abgeben und ihm zum Nachdenken anregen. Um nach dem rein mathematischen Teil eine Rückinterpretation in die Physik zu erzwingen, sollte die Aufgabenstellung dies durch direkte Bezüge zum Problem fordern.

Schließlich sollte wenigstens eine Teilaufgabe eine mathematische Verallgemeinerung beinhalten, so dass mathematische Denkweisen zur Anwendung kommen und die Nützlichkeit einer verallgemeinernden Mathematik deutlich werden kann. Dies lässt sich meist sehr leicht durch Einführung von Parametern erreichen in dem man das Problem weiter verallgemeinert. So könnte das Gewicht, die Temperatur oder die Gestalt eines Objekts sich verändern oder die zu entwickelnde Maschine soll mehrere Fälle bearbeiten können, ohne dass jeder Fall explizit einzeln berechnet werden muss.

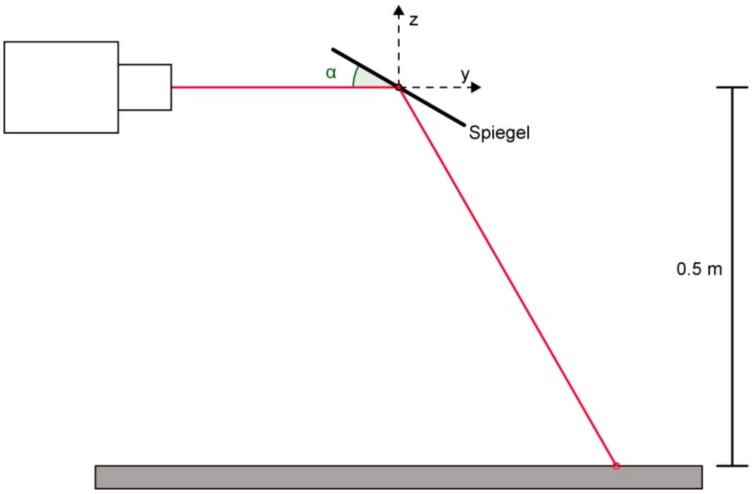
Der letzte Punkt, die Übertragbarkeit, lässt sich, wie bereits angesprochen, nicht immer garantieren, aber zeichnet eine gute Aufgabe im Nachhinein aus.

4. Aufgabenbeispiele

Aufgabe 1: Laserstrahl (Trigonometrie)

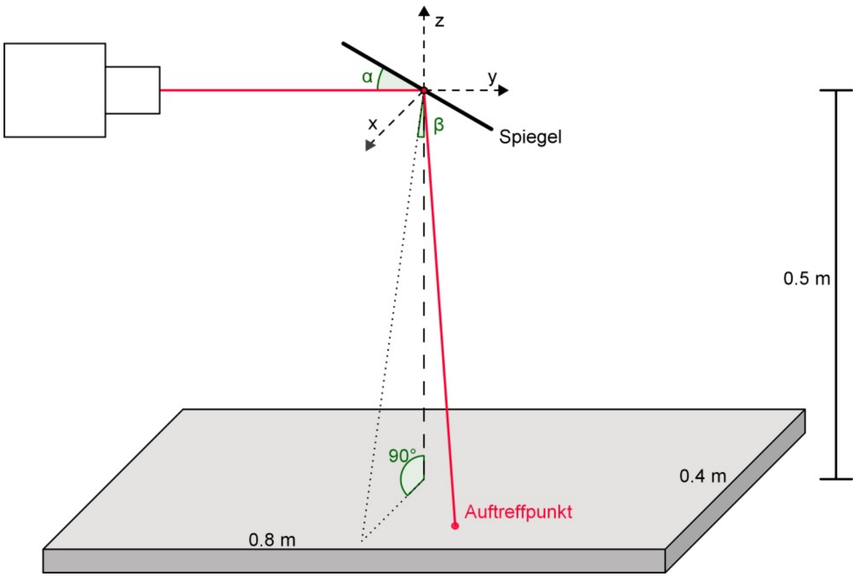
Sie dürfen in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!
Mittels eines Lasers soll eine Metallplatte graviert werden. Aus praktischen Gründen wird nicht der Laser selbst bewegt, sondern nur ein Spiegel, über den der Laserstrahl weitergeleitet wird. Zu diesem Zweck soll eine Maschine konstruiert werden, die den Spiegel ausrichtet. Der Spiegel wurde mittig über der Platte angebracht.

a) Zunächst soll nur eine einzelne Linie in die Platte graviert werden. Die Entfernung zwischen der Drehachse des Spiegels und der Platte beträgt 50 cm, wobei der Spiegel nur um die x-Achse gedreht werden kann (siehe rechte Skizze). Dieser Drehwinkel wird mit α bezeichnet. Bestimmen Sie den Auftreffpunkt des Laserstrahls auf die Platte in Abhängigkeit vom Drehwinkel α!



b) Die Platte ist 80 cm breit und der Laserstrahl soll sich dem Rand nicht mehr als 10 cm nähern. Welche Werte sind in der Teilaufgabe a) für α sinnvoll bzw. erlaubt?

c) Um die komplette Platte treffen zu können kann der Spiegel nun zusätzlich auch um die y-Achse rotieren. Dieser Drehwinkel wird mit β bezeichnet. Geben Sie den Auftreffpunkt des Laserstrahls auf die Platte in Abhängigkeit von α und β an!

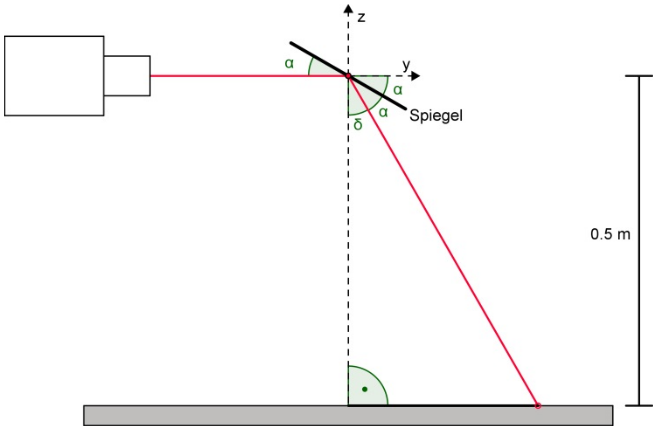


d) Beachten Sie, dass die Platte 80 cm breit und 40 cm lang ist, und dass ein Abstand von 10 cm zu allen Rändern eingehalten werden soll! Welche Winkel α, β sind in Teilaufgabe c) also sinnvoll bzw. erlaubt?

Lösung:

Zu Teilaufgabe a)

Wir suchen den Auftreffpunkt des reflektierten Laserstrahls auf die Platte. Da die Platte 50 cm von dem Spiegel entfernt ist, steht die z-Komponente mit -50 bereits fest. Also benötigen wir nur noch die y-Komponente.



Zunächst bestimmen wir den Winkel δ zwischen dem reflektierten Laserstrahl und der z-Achse (nach unten, siehe Skizze).

Da Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel, ist $\delta = 90° - 2\alpha$. Damit liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor und wir können mit dem Tangens die Länge der Gegenkathete berechnen:

$$\tan(\delta) = \frac{y}{50}$$

$$\Rightarrow y = 50 \cdot \tan(90° - 2\alpha) = 50 \cdot \frac{\sin(90° - 2\alpha)}{\cos(90° - 2\alpha)}$$

$$= 50 \cdot \frac{\sin(90°)\cos(-2\alpha) + \cos(90°)\sin(-2\alpha)}{\cos(90°)\cos(-2\alpha) - \sin(90°)\sin(-2\alpha)}$$

$$= 50 \cdot \frac{1 \cdot \cos(-2\alpha)}{-1 \cdot \sin(-2\alpha)} = 50 \cdot \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = 50 \cdot \cot(2\alpha)$$

Damit ist der Auftreffpunkt in Abhängigkeit vom Drehwinkel gegeben durch:

$$AP = \left(50 \cdot \cot(2\alpha), -50\right).$$

Zu Teilaufgabe b)

Wir wissen aus a), dass $y = 50 \cdot \cot(2\alpha)$, also gilt nach Hinweis $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\frac{y}{50}\right)$.

Weiterhin besagt die Aufgabenstellung, dass die Platte zwar 80 cm breit ist, aber dass ein Rand von jeweils 10 cm gelassen werden soll. Damit ist $y \in [-30, 30]$. Also gilt (wieder nach Hinweis), dass $\alpha \in [29.52°, 60.48°]$. Diese Angaben lassen sich auch an der Skizze verifizieren. Insbesondere sollte klar sein, dass ein Drehwinkel von 0° oder größer gleich 90° keinen Sinn machen.

Zu Aufgabenteil c)

Wir suchen wieder den Auftreffpunkt des reflektierten Laserstrahls auf die Platte. Da die Platte immer noch 50 cm von dem Spiegel entfernt ist, steht die z-Komponente mit -50 wieder fest. Auch haben wir bereits in a) die y-Komponente in Abhängigkeit von α bestimmt, daher fehlt uns nur noch die x-Komponente.

Wie aus der 3D-Skizze in der Aufgabe ersichtlich ist, liegt wieder ein rechtwinkliges Dreieck vor. Da der Tangens gleich Gegenkathete durch Ankathete ist, können wir sagen, dass

$\tan(\beta)=\frac{x}{50}$ und damit gilt $x=50\cdot\tan(\beta)$.

Der Auftreffpunkt ist also gegeben durch: $AP=\left(50\cdot\tan(\beta),\,50\cdot\cot(2\alpha),\,-50\right)=50\cdot\left(\tan(\beta),\,\cot(2\alpha),\,-1\right)$.

Zu Aufgabenteil d)

Die Einschränkungen aus b) für α bleiben weiter bestehen. Wir müssen nur noch den erlaubten Bereich für β bestimmen.

Es gilt $\tan(\beta)=\frac{x}{50}$, daher ist $\beta=\arctan\left(\frac{x}{50}\right)$. Da die Platte 40 cm lang ist, aber wieder die Ränder von jeweils 10 cm nicht getroffen werden sollen, ist klar, dass $x\in[-10,10]$. Mit dem in der Aufgabe gegebenem Hinweis wissen wir nun, dass $\beta\in[-11.31°,11.31°]$. Auch dies lässt sich anschaulich verifizieren.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe geht es, im Hinblick auf die Themenorientierung, vor allem um die Trigonometrie und Koordinaten in der Ebene und im Raum. Da die Punkte in Abhängigkeit von einem variablen Winkel bestimmt werden sollen, wird die Idee der mathematischen Verallgemeinerung in diese Aufgabe integriert.

Es war bei der Aufgabenstellung entscheidend, dass ein Laserstrahl eine Gerade darstellt und ohne Krümmungen modelliert werden kann. Da tatsächlich auch mit Lasern Gravuren an Metallplatten durchgeführt werden, sehen wir diese Aufgabe als ausreichend authentisch an. In Gesprächen mit einem Ingenieur aus der Industrie zeigte sich, dass die Aufgabe viele Parallelen zur Realität aufweist, auch wenn vieles selbstverständlich heute von Computern erledigt wird (die aber natürlich auch programmiert werden müssen). In unserer Studie im WS13/14 an der Universität Paderborn (Ergebnisse noch unveröffentlicht) zeigte sich, dass diese Aufgabe auch von den Studierenden als authentisch wahrgenommen wurde.

Im Zuge der Aufgabenbearbeitung müssen die Studierenden zwischen der Skizze und ihrem selbst erstellten mathematischen Modell kontinuierlich hin und her wechseln. Die Aufgabenteile

b) und d) sollen dies verstärken. Somit ist die Aufgabe im Sinne des Konzepts modellierungsorientiert.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und die Skizzen wurden von den Studierenden als sehr hilfreich bewertet. Die Aufgabenstellung empfanden sie als gut verständlich (Änderungswünsche seitens der Studierenden sind bereits in die Aufgaben in diesem Bericht umgesetzt worden). Somit ist die Aufgabe in unserem Sinne übersichtlich.

Die technischen Hintergründe darf man, gerade bei Ingenieurstudierenden, als Allgemeinwissen voraussetzen. Lediglich die Faustformel „Eingangswinkel = Ausgangswinkel" ist hier relevant, stellte aber in unserer Studie kein Hindernis dar. Das mathematische Wissen wurde kurz zuvor in der Vorlesung wiederholt (das Meiste ist aus der Schule noch bekannt gewesen), daher ist die Aufgabe abgeschlossen.

Die Übertragbarkeit lässt sich schwer einschätzen, jedoch kann hier der Umgang mit trigonometrischen Zusammenhängen und Punktberechnungen sicherlich im Allgemeinen als übertragbar bewertet werden. Insgesamt erfüllt die Aufgabe somit die Konzeptbedingungen.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis der trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens
- Grundverständnis von Koordinaten im kartesischen Koordinatenkreuz
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen
- Wissen, dass bei Spiegelung Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel gilt
- Einfache Gleichungen lösen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit trigonometrischen Funktionen
- Umgang mit Koordinaten in der Ebene / im Raum
- Umgang mit Variablen und Parametern

Aufgabe 2: Pendeluhr (Folgen)

Das Pendel einer Turmuhr sei zwei Meter lang und 150 kg schwer.

Es wird beim Start der Beobachtung aus einer Höhe von 40 cm losgelassen. Eine Periode ist beendet, wenn die Schwingung ihren höchsten Punkt an der Startseite erreicht hat. Zu jedem Beginn einer neuen Periode (außer der Start-Periode) wird das Pendel von einem mechanischen Hämmerchen angeschlagen. Wir nehmen an, dass das Hämmerchen unabhängig von der Schwinghöhe immer dieselbe Energie überträgt.

Sie dürfen in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden! Runden Sie auf die zweite Stelle nach dem Komma!

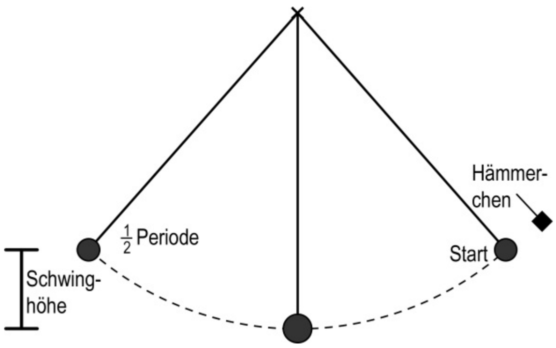
Big Ben (Quelle s.u.)

a) Das Pendel verliert durch äußere Einflüsse pro Schwingperiode 3% seiner Energie. Durch das Hämmerchen werden zum Anfang jeder Periode 15,89 Joule auf das Pendel übertragen. Die Anfangshöhe des Pendels beträgt 40 cm.

   i) Kompensiert das Hämmerchen den Energieverlust komplett?

   ii) Wie viel Energie besitzt das Pendel nach dem 50. Hammerschlag?

Tipp: Potentielle Energie. Erdbeschleunigung $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$



b) Welche maximale Schwinghöhe wird niemals *unter*schritten, sofern die Mechanik nicht versagt? Wie viel Energie müsste das Hämmerchen übertragen, damit die Starthöhe von 40 cm gehalten werden kann?

c) Beweisen Sie mit mathematischen Mitteln: Wenn das Hämmerchen permanent ausfällt, so wird die Schwinghöhe des Pendels beliebig klein, aber nie Null! Erklären Sie (in wenigen Worten) aus physikalischer Sicht, warum das Pendel bereits nach *endlicher* Zeit still steht!

d) Wenn das Hämmerchen nach dem 50. Schlag ausfällt, wie viele Perioden werden dann noch durchlaufen bis das Pendel weniger als 10 Joule Energie enthält?

Lösung:

Zu Teilaufgabe a)

Das Pendel ist 150 kg schwer und startet bei 40 cm, damit ergibt sich eine potentielle (Start)Energie von $E_{pot,0} = m \cdot g \cdot h_0 = 150\,kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.4\,m = 588.6\,J$ (Joule). Dies ist auch der Startwert unserer Folge. Das Pendel verliert pro Periode 3% seiner Energie. Das Hämmerchen gibt nach jeder Periode 15,89 Joule hinzu, damit ergibt sich die rekursive Folge:

$$a_{n+1} = 0.97 \cdot a_n + 15.89$$

Wir wandeln sie in eine explizite Folge um:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 0.97 \cdot a_n + 15.89 \\
&= 0.97 \cdot \left(0.97 \cdot a_{n-1} + 15.89\right) + 15.89 \\
&= \ldots = \left(0.97\right)^{n+1} \cdot a_0 + 15.89 \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(0.97\right)^i \\
&\underset{Summe}{\overset{geo.}{=}} \left(0.97\right)^{n+1} \cdot a_0 + 15.89 \cdot \frac{1-\left(0.97\right)^{n+1}}{1-0.97}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich also

$$a_n = \left(0.97\right)^n \cdot 588.6 + 15.89 \frac{1-\left(0.97\right)^n}{0.03}$$

Somit liegt in dem Pendel nach 50 Hammerschlägen eine Energie von $a_{50} = 542.52$ Joule vor. Offensichtlich kann das Hämmerchen also den Energieverlust nicht kompensieren. (Dies kann auch deutlich früher beantwortet werden, z.B. durch den Vergleich von a_0 und a_1).

Zu Teilaufgabe b)

Wir suchen mittels der Formel für die potentielle Energie und dem Grenzwert der Folge nach der geringsten Höhe.

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt (obere Schranke ergibt sich durch die Monotonie und die untere durch die Tatsache, dass nur positive Zahlen addiert werden – die Monotonie lässt sich einfach nachrechnen), also konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 + 15.89 \frac{1-0}{0.03} \approx 529.67 = E_{pot,\infty}$$

Umgestellt zur Höhe und unter Beachtung, dass das Pendel 150 kg schwer ist, ergibt sich

$h_\infty = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{g \cdot m} \approx 0.36\,m$, also 36 cm. Das ist eine Differenz von 4 cm zur Starthöhe.

Um die gesuchte Hämmerchen-Energie zu erhalten, so dass die Starthöhe von 40 cm behalten wird, müssen wir lediglich die 15,89 Joule durch eine Variable ersetzen und verlangen, dass im Grenzwert die Startenergie von 588,6 Joule erreicht werden.

$$x \cdot \frac{1}{0.03} = 588.6 \Leftrightarrow x = 17.658 \text{ Joule.}$$

Zu Aufgabenteil c)

Wenn das Hämmerchen irgendwann ausfällt, so gibt es eine Anzahl an Hammerschlägen $k \in \mathbb{N}$ nach der keine Energie mehr hinzugeführt wird (also k Schläge bis er ausfällt). Dann ist also

$$\hat{a}_n = \begin{cases} a_n, & falls\, n < k \\ (0.97)^n \cdot 588.6, & sonst \end{cases}$$

Und der Grenzwert dieser Folge ist offensichtlich Null, also wird die Energie und damit auch die Schwinghöhe beliebig klein (siehe Zusammenhang über die potentielle Energie).

Physikalisch ist das klar, denn durch die Reibung (z.B. mit der Luft) wird das Pendel immer weiter ausgebremst, bis es schließlich zum Stehen kommt. Dies geschieht nach endlicher Zeit. Weiterhin ist die Annahme, dass die Energie um 3% schrumpft nur eine Annäherung, die die Realität nicht absolut beschreiben kann.

Zu Aufgabenteil d)

Die Energie nach 50 Schlägen wurde bereits in a) berechnet: $a_{50} = 542.52$ Joule.
Da das Hämmerchen dem Pendel keine Energie mehr hinzuführt, ergibt sich die neue Folge durch:
$c_n = (0.97)^n a_{50}$. Wir fragen uns, wann weniger als 10 Joule im Pendel enthalten sind:

$$c_n \leq 10 \Leftrightarrow (0.97)^n \cdot 542.52 \leq 10 \Leftrightarrow (0.97)^n \leq \frac{10}{542.52}$$

Wir wenden die Logarithmusregel zum Basiswechsel an und bemerken, dass der Logarithmus für Werte zwischen 0 und 1 negativ ist, daher dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Also:

$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10}{542.52}\right)}{\ln(0.97)} \approx 131.11$ und damit wissen wir, dass nach 132 Perioden die Energie weniger als 10 Joule beträgt.
Achtung: Vergisst man die ersten 50 Schläge, so erhält man 134 Perioden. Hier sollten dann Punkte abgezogen werden.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Im Hinblick auf die Themenorientierung geht es in dieser Aufgabe um Folgen und Folgenkonvergenz, sowie, je nach Vorgehen, auch um die geometrische Reihe. In Teil c) wird ein kleiner Beweis gefordert, der hier unsere Verallgemeinerung darstellt.

Im Vergleich zur Laserstrahl-Aufgabe ist der Authentizitätsanspruch hier eventuell etwas geringer erfüllt worden, jedoch sind die äußeren Umstände realistisch und die Studierenden sollten leicht in der Lage sein die hier dargestellte Situation auf andere Problemstellungen ähnlicher Art zu übertragen. In unseren Augen erfüllt die Aufgabe insgesamt den Anspruch. Die Auswertung unserer Studie vom WS13/14 wird zeigen, ob die Studierenden, dies auch so wahrnehmen.

Auch bei dieser Aufgabe müssen die Studierenden während der Aufgabenbearbeitung zwischen der Skizze und ihrem selbst erstellten mathematischen Modell wechseln. Dies wird in allen Aufgabenteilen gefordert. Somit ist die Aufgabe im Sinne des Konzepts modellierungsorientiert.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und ist übersichtlich und ansprechend gestaltet. Eine Bewertung seitens der Studierenden wird nachgereicht.

Die technischen Hintergründe sind durch die Fachvorlesungen oder bei manchen Studierenden gar bereits durch den Physikunterricht in der Schule bekannt. Das mathematische Wissen wird in der Mathematik-Vorlesung behandelt, daher ist die Aufgabe abgeschlossen.

Die Übertragbarkeit ist gegeben, da die Pendelbewegung hier während der Bearbeitung auch abseits der Uhr betrachtet wird. Insgesamt erfüllt die Aufgabe somit die Konzeptbedingungen.

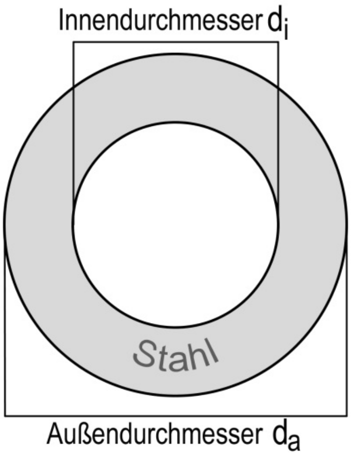
Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Verständnis von Folgen (explizit, rekursiv)
- Grenzwertberechnung von Folgen sollte bekannt sein
- Geometrische Reihe muss bekannt sein
- Der Logarithmus sollte bekannt oder als Hinweis unter der Aufgabe ergänzt sein
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen
- Einfache Gleichungen lösen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Folgen, Reihen, Grenzwert
- Umgang mit Variablen und Parametern
- Umgang mit dem Logarithmus und Ungleichungen

Aufgabe 3: Stahlbalken (Optimierung)



Sie dürfen in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!

In einer Lagerhalle soll ein neues Regalsystem eingebaut werden. Hierfür wird ein spezieller kreisförmiger Stahlbalken mit Hohlprofil benötigt. Für die Auslegung sind bekannt:
Die Länge des Balkens ist auf $6.5\ m$ festgelegt, der Außendurchmesser beträgt maximal $0.3\ m$, die maximale Betriebslast wird mit $20 \cdot 10^4\ N$ vorgegeben und der geforderte Sicherheitsfaktor beträgt 1.5. Der zu verwendende Stahl hat eine zulässige Normalspannung von $240\ {}^{N}\!/_{mm^2}$. Der Balken wird am Boden festbetoniert, steht senkrecht, wird am oberen Ende an der Wand fest verschraubt und die Verdrehung ist verhindert.

a) Für den gegebenen Sicherheitsfaktor soll die Querschnittsfläche so dimensioniert werden, dass die zulässige Normalspannung nicht überschritten wird. Bestimmen Sie die minimal mögliche Querschnittsfläche! *Alternative Aufgabenstellung: Zeigen Sie, dass die minimal mögliche Querschnittsfläche* $A = 1250\,mm^2$ *beträgt.*

b) Für die in a) berechnete Querschnittsfläche sollen Innen- und Außendurchmesser des Balkens so gewählt werden, dass die Knickkraft unter den gegebenen Voraussetzungen **maximal** ist. Bestimmen Sie Innen- und Außendurchmesser! Ist die berechnete Knickkraft ausreichend?

Knickfall I	**Knickfall II**	**Knickfall III**	**Knickfall IV**
			
$l_k = 2 \cdot l$	$l_k = l$	$l_k = 0.7 \cdot l$	$l_k = 0.5 \cdot l$
Der Knickfall der Aufgabe muss selbst bestimmt und begründet werden!			

Es gilt Knickkraft $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_K^2}$. J ist hier das Flächenträgheitsmoment $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$ wobei der Elastizitätsmodul $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$, d_a und d_i Außen- bzw. Innendurchmesser des Balkens und l_K die Knicklänge (siehe Tabelle) sind. Wird mehr Kraft auf den Balken ausgeübt, als er an Knickkraft aushalten kann, so knickt er.

c) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe b), dass bezüglich der Knickkraft ein Vollprofil bei gleicher Querschnittsfläche immer ungünstiger ist als ein Hohlprofil! Halten Sie dabei das Material, die Knicklänge und die Querschnittsfläche allgemein.

Sollten Ihnen technische Begriffe oder Formeln unklar sein, so ist empfehlen wir: Richard, H.A., Sander, M.: Technische Mechanik Festigkeitslehre. Für weitere Recherchen sollte man „Eulersche Knickfälle“ als Suchbegriff wählen.

Lösung:

Zu Teilaufgabe a)

Wir wollen die Querschnittsfläche so bestimmen, dass die zulässige Normalspannung nicht überschritten wird. Es gilt $\sigma_{zul} = 240\frac{N}{mm^2}$ allgemein gilt für die Normalspannung $\sigma = \frac{F}{A}$ (siehe entweder durch Einheiten oder aus Formelsammlung). Da wir zudem einen Sicherheitsfaktor von 1,5 vorgegeben haben ist also

$\sigma_{zul} \geq \frac{F}{A} \cdot 1.5 \Rightarrow \sigma_{zul} \geq \frac{F_{\max}}{A} \cdot 1.5 = \frac{20 \cdot 10^4\, N}{A} \cdot 1.5$, siehe maximale Betriebslast. Damit ergibt sich also $A \geq \frac{20 \cdot 10^4\, N \cdot 1.5}{240\frac{N}{mm^2}} = 1250\, mm^2$. Die kleinstmögliche Fläche, bei der die zulässige Normalspannung nicht überschritten wird, beträgt also 1250 mm^2.

Zu Teilaufgabe b)

Es gilt Knickkraft $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_K^2}$ und $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$ und da ein kreisförmiger Balken mit Hohlprofil vorliegt haben wir $A = \frac{\pi}{4}\left(d_a^2 - d_i^2\right)$. Die Zahlen setzen wir erst zum Schluss ein.

Wir wollen eine Formel finden, die nur in Abhängigkeit von dem Innendurchmesser ist (analog ginge auch Außendurchmesser), dazu setze Flächenträgheitsmoment in Knickkraft ein und verwende den Zusammenhang $d_a = \sqrt{\frac{4A}{\pi} + d_i^2}$ (beachte dass $d_a > 0$):

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi}{64} \cdot \left(d_a^4 - d_i^4\right)}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi}{64} \cdot \left(\left(\frac{4A}{\pi} + d_i^2\right)^2 - d_i^4\right)}{l_K^2}$$

$$= \frac{\pi^3 \cdot E}{64 l_K^2}\left(\frac{8A}{\pi} d_i^2 + \frac{16A^2}{\pi^2}\right)$$

Stahl hat einen Elastizitätsmodul von $E = 210000\frac{N}{mm^2}$. Aus a) wissen wir $A = 1250\, mm^2$. Da der Balken einbetoniert und oben festgeschraubt ist, liegt Knickfall IV vor und somit ist $l_K = 0.5 \cdot l = 3250\, mm$. Weiterhin ist bekannt, dass $d_a \leq d_{a,\max} = 300\, mm$ und natürlich $d_i \geq 0$. Über die Formel zur Querschnittsfläche können wir also sagen, dass

$d_i \le \sqrt{d_{a,\max}^2 - \frac{4A}{\pi}} =: d_{i,\max} \approx 297.34\,mm$. Damit können wir eine Knickkraft-Funktion in Abhängigkeit vom Innendurchmesser angeben:

$$F_K : \left[0\,;\,d_{i,\max}\right] \to \mathbb{R} \text{ mit } d_i \mapsto \frac{\pi^3 E}{64 l_K^2}\left(\frac{8A}{\pi}d_i^2 + \frac{16A^2}{\pi^2}\right).$$

Diese Funktion ist offensichtlich stetig (da Polynom) und differenzierbar. Es ist

$F_K^{'}\left(d_i\right) = \frac{\pi^2 EA}{4 l_K^2} d_i$ und $F_K^{''}\left(d_i\right) = \frac{\pi^2 EA}{4 l_K^2} > 0$. Damit sehen wir sofort, dass bei $\left(0\ ;\ F_K\left(0\right)\right) \approx \left(0\ ;\ 24398.46\right)$ der einzige Tiefpunkt vorliegt. Alle anderen Extremstellen müssen demnach auch (die Funktion ist stetig!) an den Intervallgrenzen liegen. Das Minimum kann natürlich nicht als Lösung verwendet werden, da $24398\ N \ll 20 \cdot 10^4\ N$.

Wir wissen also, dass bei $\left(d_{i,\max}\ ;\ F_K\left(d_{i,\max}\right)\right) \approx \left(297.34\ ;\ 273.508 \cdot 10^4\right)$ der Hochpunkt liegt und dieser Kraftwert ist sogar mehr als 13 mal so groß, wie die geforderten $2 \cdot 10^5 N$. Also ist die Knickkraft bei $d_a = 300\,mm$ und $d_i = 297.34\,mm$ absolut ausreichend.

Verwendet man fälschlicherweise den Knickfall 3, so ergibt sich $\left(297.34\ ;\ F_K\left(297.34\right)\right) \approx \left(297.34\ ;\ 139.54 \cdot 10^4\right)$.

Stellt man die Funktion in Abhängigkeit vom Außendurchmesser auf, so sind die Ergebnisse identisch. Die Funktion hat lediglich die Gestalt $F_K : \left[\sqrt{\frac{4A}{\pi}}\,;300\right] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$d_a \mapsto \frac{\pi^3 E}{64 l_K^2}\left(\frac{8A}{\pi}d_a^2 - \frac{16A^2}{\pi^2}\right).$$

<u>Zu Aufgabenteil c)</u>

Da $F_K^{'}\left(d_i\right) = \frac{\pi^2 EA}{4 l_K^2} d_i = 0 \Leftrightarrow d_i = 0$ (völlig unabhängig von E, A und l_K) und da die zweite Ableitung immer echt größer null ist, liegt bei $\left(0\ ;\ F_K\left(0\right)\right)$ immer ein Tiefpunkt vor. Die Funktion ist streng monoton wachsend, also folgt, da mit $d_i = 0$ ein Vollprofil vorliegt, dass ein Hohlprofil immer eine höhere Knickkraft hat, als ein Vollprofil.

<u>Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen</u>

Der ingenieurwissenschaftliche Hintergrund der Aufgabe ist die Berechnung eines Stahlbalkens, der speziellen Anforderungen genügen soll, während die dazu passende mathematische Aufgabe als Optimierungsproblem beschrieben werden kann. Die Angaben bzgl. der Auslegung sind so gewählt, wie sie tatsächlich in der Realität auftauchen können, da ein Kunde solch einen Balken benötigen könnte. Zwei Dinge zeichnen diese Aufgabe besonders aus: Erstens muss die gegebene Situation erkannt und der richtige Knickfall muss bestimmt werden und zweitens leitet die Aufgabenbearbeitung einen Beweis für eine wichtige physikalische Tatsache her, nämlich dass ein Hohlprofil knickstabiler ist, als ein Vollprofil. Dieser letzte Punkt ist sowohl eine mathematische, als auch eine physikalische Verallgemeinerung und erfüllt damit gleich in zweifacher Hinsicht die Bedingungen, die entsprechend durch unser Konzept gestellt werden. Authentizität und Themenorientierung sind also abgedeckt.

Der stetige Wechsel zwischen Mathematik und Physik wird durch die Aufgabe gefordert, da die Nutzung der Einheiten und das zu betrachtende Objekt so auch in einer Fachvorlesung vorstellbar wären. Außerdem regt die Aufgabe an die Ergebnisse zu validieren, da die Situation gut vorstellbar ist. Die Aufgabe ist daher modellierungsorientiert gestaltet.

Auch wenn die Aufgabe etwas mehr als eine Seite beansprucht, so ist sie dennoch übersichtlich und für die zukünftigen Ingenieure ansprechend gestaltet. Diese Vermutung wird durch die derzeit laufende Studie geprüft werden. Eins vorne weg: Unsere Befürchtung, die Aufgabe könnte zu schwer sein, konnte in Stichproben der Studentenbearbeitungen nicht bestätigt werden. An dieser Stelle werten wir die Aufgabe im Sinne des Konzepts als übersichtlich.

Es ist stark von den Fachvorlesungen abhängig, ob die technischen Hintergründe bereits bekannt sind, wenn diese Aufgabe ausgeteilt wird, jedoch sind auch hier sämtliche Fachbegriffe typisch und können leicht recherchiert werden (eine Quelle wurde am Ende der Aufgabe genannt, wobei zu erwarten ist, dass eher die Internetsuche von den Studierenden favorisiert wird). Durch die Angabe der Einheiten und der Quelle ist die Aufgabe als abgeschlossen zu werten.

Eine Übertragbarkeit kann hier fast garantiert werden, da hier sowohl mehrere Knickfälle, als auch verschiedene Formen für den Stahlbalken möglich sein können.

Insgesamt erfüllt die Aufgabe also unsere Konzeptbedingungen.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Kräften, Sicherheitsfaktoren, Normalspannung, Elastizitätsmodul
- Umgang mit Gleichungen in denen Variablen und Parameter vorkommen
- Umgang mit einfachen Ungleichungen, Abschätzung durch Maximum
- Differenzieren von Polynomen, Hoch-/Tiefpunkte bestimmen, Anwendung des Extremwertsatzes (Extrema an Intervallrändern)
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Kräften, Sicherheitsfaktoren und typischen Einheiten aus der Statik
- Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen und Parametern

- Differenzierung einer Funktion mit Parametern
- Extremwertbestimmung (insb. an den Rändern)

Erklärung verwendeter Fachbegriffe:
In Richard u. Sander (2006) finden sich auf den Seiten 70-71 und 164-167 technische Hintergründe zu der Aufgabe. Es folgt hier eine kurze Erklärung der wichtigsten Begriffe aus der Aufgabe:

Max. Betriebslast: Max. Beanspruchung in Newton, die bei Benutzung erwartet wird.

Normalspannung: Spannung bei Beanspruchung. Wird mehr Kraft ausgeübt, dann verformt sich das Objekt. Es kann z.B. Beulen/Dellen bekommen bevor es schließlich knickt. Die Formel ist Kraft durch Fläche (analog zu Druck).

Sicherheitsfaktor: Soll z.B. ein Stuhl eine 100kg schwere Person tragen können bei einem Sicherheitsfaktor von 1,5, so muss der Stuhl so gebaut werden, dass er auch 150kg aushält.

Knickkraft (Knicklast): Wird mehr Kraft aufgewendet, dann knickt der Stab. $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_K^2}$.

Einheit ist Newton.

Elastizitätsmodul E: Ein Materialkennwert aus der Werkstofftechnik, der den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Verformung eines festen Körpers beschreibt. Für Stahl kann man E=210000 N/mm^2 wählen. Hoher Wert = hart (Diamant 1.000.000 N/mm^2), kleiner Wert = weich (Gummi 50 N/mm^2).

Flächenträgheitsmoment J: Das Flächenträgheitsmoment ist eine aus dem Querschnitt eines Balkens abgeleitete geometrische Größe, die den Widerstand eines Bauteiles gegenüber einer Beanspruchung auf Biegung und Verdrehung angibt. Bei einem rundem Hohlprofil gilt: $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$ (Einheit: m^4).

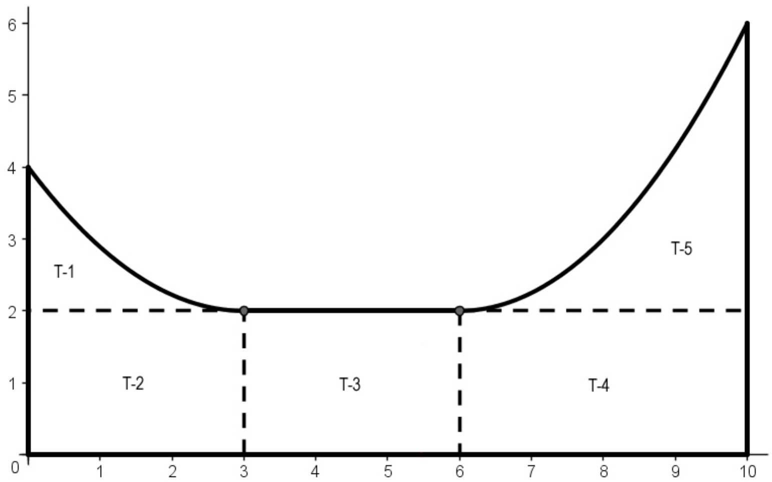
Aufgabe 4: Halfpipe (Integralrechnung)

Eine Halfpipe (Steckkonstruktion der Teile T-1 bis T-5, siehe Skizze, Angaben in Meter) soll mittels einer einzelnen konstanten Kraft verschoben werden. Die Konstruktion steht auf dem Boden und ist nicht fest verankert. Die gestrichelten Linien geben in der Skizze die Steckstellen an. Das Foto ist nicht maßstabsgetreu und dient nur zur Veranschaulichung.

Halfpipe (Quelle s.u.)

Sie dürfen Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden.

a) Bestimmen Sie einen Punkt der Seitenfläche (siehe Skizze), an dem Sie die Kraft ansetzen, ohne dass sich die Halfpipe beim Verschieben dreht! Die benötigten Informationen können eindeutig aus der Skizze abgelesen werden. Die Berechnungen müssen exakt sein (T-1 und T-5 dürfen also nicht durch Dreiecke approximiert werden)! Ist die Lösung eindeutig?



b) Für die praktische Umsetzung liegt der Schwerpunkt etwas zu weit links. Was passiert mit dem Schwerpunkt, wenn man T-1 oder T-5 entfernt? Vergleichen Sie die Auswirkungen auf den Schwerpunkt und entscheiden Sie, welches der beiden Teile Sie entfernen würden! Eine Begründung ohne Rechnung genügt!

c) Man entscheidet sich T-1 zu entfernen. Berechnen Sie den neuen Schwerpunkt! Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a). Um wie viele Zentimeter wird durch das Entfernen von T-1 der Schwerpunkt nach rechts / links und nach unten verschoben?

d) Bei zukünftigen Arbeiten mit ähnlichen Halfpipes wird der linke obere Randpunkt von T-1 weiter oben oder unten liegen, nämlich zwischen den Punkten (0|2) und (0|6). Diese Veränderung möchte man in der entsprechenden Situation schnell in die Berechnung einfließen lassen können. Zeigen Sie zunächst, dass man die Oberfläche von T-1 mit $f_{1,t}(x) = \frac{t-2}{9}x^2 + \frac{4-2t}{3}x + t$ für $x \in [0,3],\ t \in [2,6]$ beschreiben kann (wobei der Koordinatenursprung wie in der Skizze liegt). Geben Sie den Schwerpunkt der kompletten Seitenfläche in Abhängigkeit von t an! In welchem Bereich kann der Schwerpunkt liegen?

Lösung:
Anmerkung: Alle Schwerpunkt-Lösungen sind auch richtig, wenn nur die x-Koordinate bestimmt wurde, sofern man das begründet (Halfpipe kann nicht nach hinten kippen)!

Zu Teilaufgabe a)

Es gilt den Schwerpunkt zu bestimmen. Dazu bestimmen wir die drei Oberflächenfunktionen mit den Punkten (0,4) und (3,2) und der Eigenschaft, dass die Ableitung an der Stelle 3 gleich Null sein muss und erhalten $f_1(x)=\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4$ für $x\in[0,3]$. Das Mittelstück ist die konstante Funktion $f_2(x)=2$ für $x\in[3,6]$. Die linke Funktion wird durch die Punkte (6,2) und (10,6), sowie durch die Eigenschaft, dass ihre Ableitung bei 6 gleich Null sein muss, bestimmt.

Es ist $f_3(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+11$ für $x\in[6,10]$.

Wir bestimmen die Gesamtfläche per Integration:

$$G=\int_G dG=\int_0^3 \frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4dx+\int_3^6 2dx+\int_6^{10}\frac{1}{4}x^2-3x+11dx=8+6+\frac{40}{3}=\frac{82}{3}$$

Jetzt bestimmen wir nach den bekannten Formeln die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$x_S=\frac{1}{G}\int_G xdG=\frac{3}{82}\left(\int_0^3\left(\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4\right)\cdot x\,dx+\int_3^6 2\cdot x\,dx+\int_6^{10}\left(\frac{1}{4}x^2-3x+11\right)\cdot x\,dx\right)$$

$$=\frac{3}{82}\left(\frac{21}{2}+27+112\right)=\frac{897}{164}\approx 5{,}47$$

$$y_S=\frac{1}{G}\int_G ydG=\frac{3}{82}\left(\int_0^3\frac{1}{2}\left(f_1(x)\right)^2dx+\int_3^6\frac{1}{2}\left(f_2(x)\right)^2dx+\int_6^{10}\frac{1}{2}\left(f_3(x)\right)^2dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{82}\left(\begin{array}{l}\int_0^3\frac{4}{81}x^4-\frac{16}{27}x^3+\frac{32}{9}x^2-\frac{32}{3}x+16\,dx+\int_3^6 4\,dx+\\ \int_6^{10}\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{29}{2}x^2-66x+121dx\end{array}\right)$$

$$=\frac{3}{164}\left(\frac{112}{5}+12+\frac{752}{15}\right)=\frac{317}{205}\approx 1{,}55$$

➔ Und damit liegt der **Gesamt-Schwerpunkt** bei $(5.47\,;\,1.55)$.

Zum Prüfen hier noch die Einzelschwerpunkte (T-1 und T-5 nicht verschoben):

$T_1-(0.75\,;\,2.6),T_2-(1.5\,;\,1),T_3-(4.5\,;\,1),T_4-(8\,;\,1),T_5-(9\,;\,3.2)$

$T_1+T_2-(1.31\,;\,1.4)$, $T_4+T_5-(8.4\,;\,1.88)$

Zu Teilaufgabe b)

Nur wenn man T-1 entfernt kann man den Schwerpunkt weiter nach rechts verlagern. Würde man T-5 entfernen, so würde er dagegen weiter nach links wandern.

Zu Teilaufgabe c)

Es sei also nun T-1 entfernt. Nun ist $f_1(x) = f_2(x) = 2$ und wir erhalten

$$G' = \int_0^6 2dx + \int_6^{10} f_3(x)dx = 12 + \frac{40}{3} = \frac{76}{3} .$$

Entweder rechnet man nun wieder analog zu a) die Koordinaten aus (man kann fast alle Rechnungen übernehmen) oder man macht es sich deutlich einfacher und verwendet die Formel für den gemeinsamen Schwerpunkt aus mehreren Schwerpunkten: $x_S = \frac{1}{G}\left(\sum_{i=1}^{n} G_i x_i\right)$ (analog für y_S) wobei G die Gesamtfläche und G_i die Einzelflächen der Teile mit Schwerpunkten bei (x_i, y_i) sind.

Es ergibt sich also $x_S^{'} = \frac{3}{76}\left(6\cdot 1.5 + 6\cdot 4.5 + \frac{40}{3}\cdot 8.4\right) \approx 5.84$ und

$$y_S^{'} = \frac{3}{76}\left(6\cdot 1 + 6\cdot 1 + \frac{40}{3}\cdot 1.88\right) \approx 1.46$$

Der Schwerpunkt wurde um 37 cm nach rechts und um 9 cm nach unten verschoben.

Zu Teilaufgabe d)

Wir verallgemeinern die erste Funktion da der Punkt (0,4) nun allgemein zu (0,t) für $t \in [2,6]$ wird (siehe Höhenbeschränkung in der Aufgabe). Dadurch ergibt sich die Funktion

$f_{1,t}(x) = \frac{t-2}{9}x^2 + \frac{4-2t}{3}x + t$ für $x \in [0,3]$, $t \in [2,6]$. Die anderen beiden Funktionen werden von oben übernommen. Wir bestimmen die Fläche und dann den Schwerpunkt wie gewohnt, nur diesmal mit t als Parameter. Wir wählen wieder den übersichtlichen Weg wie bei c) und bestimmen zunächst den Schwerpunkt von T_1^t und T_2 sowie die Gesamtfläche:

$$G_t = \int_0^3 f_{1,t}(x)dx + \int_3^6 f_2(x)dx + \int_6^{10} f_3(x)dx = (t+4) + 6 + \frac{40}{3} = t + \frac{70}{3}$$

$$oder\,auch = \frac{3t+70}{3}$$

$$x_{S,1,2}^t = \frac{1}{t+4}\left(\int_0^3 f_{1,t}(x)\cdot x\,dx\right) = \frac{1}{t+4}\left(\frac{3}{4}(t+10)\right) = \frac{3t+30}{4t+16}$$

$$y_{S,1,2}^t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+4}\left(\int_0^3 \left(f_{1,t}(x)\right)^2 dx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+4}\left(\frac{3t^2+8t+32}{5}\right) = \frac{3t^2+8t+32}{10t+40}$$ und damit

ergibt sich insgesamt:

$$x_S^t = \frac{3}{3t+70}\left(\frac{3t+30}{4t+16} + 4.5\cdot 6 + \frac{40}{3}\cdot 8.4\right) = \frac{9t+1758}{12t+280} \in [5.15; 5.84]$$

$$y_S^t = \frac{3}{3t+70}\left(\frac{3t^2+8t+32}{10t+40} + 6\cdot 1 + \frac{40}{3}\cdot 1.88\right) = \frac{9t^2+24t+1028}{30t+700} \in [1.46; 1.7]$$

Anmerkung: Lässt man $\frac{1}{t+4}$ ausgeklammert, so wird die Rechnung leichter.
Wie man sieht liegen also alle möglichen Schwerpunkte in dem Rechteck $[5{,}15\ ;\ 5{,}84]\times[1{,}46\ ;\ 1{,}7]$. Mit einem Blick auf die Skizze lässt sich dies auch anschaulich verifizieren.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Die Authentizität der Aufgabe wird hier weniger durch den direkten Nutzen der Lösung für den Alltag oder die Arbeitswelt hergestellt, sondern viel mehr durch die Übertragbarkeit des Problems auf andere Situationen. Schwerpunktberechnungen nehmen in den verschiedensten Bereichen der Ingenieure eine wichtige Rolle, allerdings sind diese Situationen oft derart komplex, dass sie nicht in einer vergleichsweise kurzen Aufgabe behandelt werden können. Hier wird versucht ein Kompromiss zwischen Authentizität und Anfängerfreundlichkeit herzustellen, wobei wir davon ausgehen, dass den Studierenden dies klar ist.

Tatsächlich hat sich einer qualitativen Videostudie im Sommersemester 2013 gezeigt, dass die Teilnehmer (Maschinenbaustudierende des ersten Semesters) die Aufgabe als verständlich und interessant bewerten und davon überzeugt sind, dass sie eine Verbindung zwischen der Mathematik und den hier behandelten Fachthemen (Schwerpunkt) herstellt. Der Schwierigkeitsgrad wurde als angemessen bewertet.

Den Wechsel zwischen Mathematik und Physik regt die Aufgabe durch die Arbeit mit der Skizze, dem Foto und der Problemstellung an. Man beachte, dass in Teilaufgabe a) nicht nach dem Schwerpunkt gefragt wird, sondern nach einem speziellen Punkt der Seitenfläche. Die Studierenden müssen erst selbst entdecken, dass hier nach dem Schwerpunkt gefragt wird und müssen dann auf ihr Wissen aus den Fachvorlesungen zurückgreifen.

Die Polynominterpolation, die sowohl in a), als auch in d) gefordert wird, sorgt dafür, dass die Skizze immer wieder in den Vordergrund gerückt wird. Eine Validierung der Ergebnisse ist während der gesamten Aufgabe gut umsetzbar, da man auch durch das Alltagswissen bereits eine Vermutung hat, wo ungefähr der Schwerpunkt liegen muss.

Eine mathematische Verallgemeinerung wird im letzten Aufgabenteil gefordert, da hier eigenständig ein Parameter eingeführt werden muss.

Insgesamt erfüllt die Aufgabe unsere Konzeptbedingungen.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Verständnis vom Schwerpunkt
- Integralrechnung (man muss Polynome integrieren können)
- Mathematisierungsmuster/Modellierungsmuster (Fähigkeit den technischen Aspekt zu erkennen und auf TM-Wissen zurück zu greifen)
- Umgang mit Skizzen, Koordinaten, Variablen, Parametern
- Polynominterpolation (kann man ggf. weg lassen, wenn man einfach die Funktionen angibt. Empfehlenswerter ist aber dieses wichtige Thema zu üben)
- Räumliches Vorstellungsvermögen

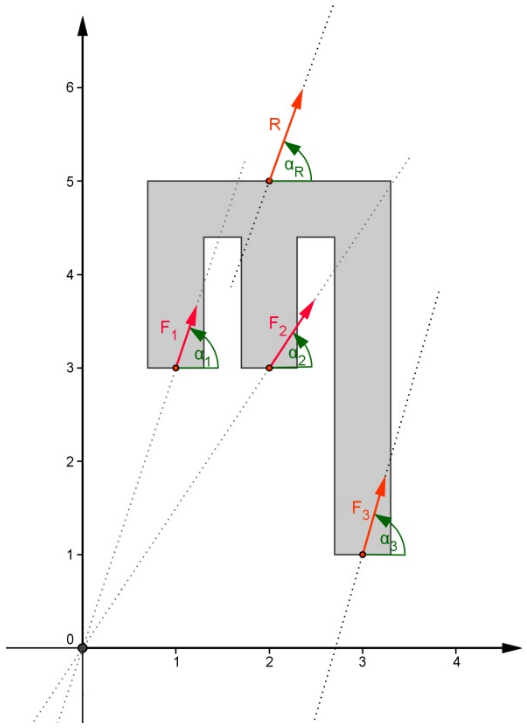
Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation / Validierung
- Umgang mit Schwerpunkt und Verständnis dessen
- Umgang mit Koordinaten
- Polynominterpolation (lineare Gleichungssysteme oder Scheitelpunktform)
- Integration
- Umgang mit Paramatern / Verallgemeinerung

Die theoretischen Grundlagen, die die Studierenden in der Vorlesung zur Technischen Mechanik gehört haben sollten, kann man beispielsweise in Mahnken (2011) auf den Seiten 187 und 197 finden.

Aufgabe 5: Bauteil belasten (Lineare Gleichungssysteme)

Ein Bauteil, dessen Auflager für die äquivalente Kraft $R = 981kN$ bei Richtungswinkel $\alpha_R = 70°$ ausgelegt sind, wird in einer neuen Belastungssituation durch die Kräfte F_1, F_2, F_3 beansprucht (siehe Skizze).



Sie dürfen beim Bearbeiten der Aufgabe ihr Wissen aus der Technischen Mechanik nutzen!

a) Bei einer Messung der neuen Situation zeigt sich, dass die Belastungskräfte über die in der Skizze gezeichneten Wirkungslinien mit Winkeln

$$\propto_1 = 71.57°, \propto_2 = 56.31°, \propto_3 = 74°$$

übertragen werden können. Wie groß dürfen die Kräfte F_1, F_2, F_3 sein, ohne dass die Auflager verstärkt werden müssen?
Die Angriffspunkte sind ganzzahlig (in Meter) aus der Zeichnung ablesbar.
Hinweis: Die Wirkungslinie der Kraft R geht in der Skizze nicht durch den Ursprung.
Werte kleiner als 10^{-4} müssen als 0 gewertet werden.

b) Da dieses Problem in Zukunft öfter auftreten kann, soll die Rechnung verallgemeinert werden. Ein gleiches Bauteil soll, wie zuvor beschrieben, belastet werden, allerdings werden die drei Belastungskräfte F_1, F_2, F_3 über Wirkungslinien mit noch unbekannten Winkeln übertragen.
Für welche Richtungswinkel sind die Kräfte in dem beschriebenen Szenario eindeutig bestimmbar? Welche neuen Situationen entstehen durch die übrigen Winkel?

c) In einer konkreten Situation kommen nur die Richtungswinkel $\propto_1 = 71.57°$, $\propto_2 = 56.31°$ in Frage, doch die dritte Kraft (F_3) kann nun auf der Strecke zwischen den Punkten $(2.7 \mid 1)$ und $(3.3 \mid 1)$ angreifen. Welche Richtungswinkel $\propto_3$ führen zu eindeutigen Werten für F_3? Interpretieren Sie anschließend die Bedeutung der ausgeschlossenen Winkel für die vorliegende Situation!

d) Wir verwenden noch einmal die Werte aus Aufgabenteil a). Ist es möglich die dritte Kraft (F_3) zu ignorieren? Sie dürfen Ihre Antwort mathematisch oder physikalisch begründen.

Lösung:

Zu Teilaufgabe a)

Es handelt sich um ein nichtzentrales Kraftsystem in der Ebene und die Aufgabe verlangt die Zerlegung einer Kraft R in die drei Kräfte F_1, F_2, F_3 mit Richtungswinkel $\propto_1 = 71.57°, \propto_2 = 56.31°, \propto_3 = 74°$. Jede Kraft kann in ihre x,y-Komponenten aufgeteilt werden: $F_x, F_y = F * (cos \propto, sin \propto)$.

Man bemerke, dass die Kräfte F_1, F_2 kein polares Moment bzgl. des Ursprungs haben, daher ergibt die Forderung, dass die Kräftesummen in horizontaler und vertikaler Richtung äquivalent zu R sein sollen und dass R und F_3 das gleiche Moment haben müssen, folgendes Gleichungssystem:

$y_3 F_{3x} - x_3 F_{3y} = y_R R_x - x_R R_y$

$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x$

$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = R_y$

Anmerkung: Man kann die Tatsache, dass die ersten beiden Kräfte kein Moment besitzen auch direkt über die Formeln ausrechnen. Hier wird der Hinweis benutzt, dass sehr kleine Werte gleich Null zu setzen sind (Rundungsfehler des Taschenrechners).

Wir lesen aus der Skizze ab: $(x_3, y_3) = (3{,}1)$ und $(x_R, y_R) = (2{,}5)$. Es ergibt sich insgesamt die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \cos(74) - 3\sin(74) & 5 * 981 * \cos(70) - 2 * 981 * \sin(70) \\ \cos(71.57) & \cos(56.31) & \cos(74) & 981 * \cos(70) \\ \sin(71.57) & \sin(56.31) & \sin(74) & 981 * \sin(70) \end{array}\right)$$

Und wir erhalten als Lösung: $F_1 = 808{,}33\ kN, F_2 = 112{,}41kN,\ F_3 = 63{,}91kN$.

Zu Teilaufgabe b)

Systemmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \cos(\propto_3) - 3\sin(\propto_3) & 5R * \cos(\propto_R) - 2R * \sin(\propto_R) \\ \cos(\propto_1) & \cos(\propto_2) & \cos(\propto_3) & R * \cos(\propto_R) \\ \sin(\propto_1) & \sin(\propto_2) & \sin(\propto_3) & R * \sin(\propto_R) \end{array}\right)$$

Damit bestimmen wir die Determinante und setzen diese gleich Null:

$(\cos(\propto_3) - 3\sin(\propto_3))(\cos(\propto_1)\sin(\propto_2) - \cos(\propto_2)\sin(\propto_1)) = 0$

Wir lösen die Faktoren einzeln auf:

$\tan(\propto_3) = \frac{1}{3}$ oder $\tan(\propto_1) = \tan(\propto_2)$

Also muss $\propto_3 \neq 18{,}43°$ sein, sonst hat das LGS keine Lösung, da in diesem Fall die dritte Kraft kein Moment mehr besitzen würde und man somit nicht mehr die drei Kräfte mit der Resultierenden vergleichen kann (denn die Resultierende besitzt immer ein Moment).

Und weiterhin muss $\propto_1 \neq \propto_2$ (sonst sind die Wirkungslinien parallel) und $\propto_1 \neq \propto_2 \pm 180°$ (sonst sind die Kräfte entgegengesetzt) sein. In diesen Fällen liegen unendlich viele Lösungen des LGS vor (auch solche die technisch keinen Sinn machen, wie riesig große Kräfte) und man bräuchte weitere Randbedingungen um eine exakte Aussage treffen zu können (z.B. Belastungsgrenzen).

Man bemerke, dass die Bereiche, in denen man keine eindeutigen Aussagen treffen kann für die Praxis sehr ungünstig sind, da man keine Sicherheit garantieren kann und völlig neue Berechnungen starten müsste (teuer!).

Zu Teilaufgabe c)

$\propto_1 = 71.57°, \propto_2 = 56.31°, x_3 \in]2.7; 3.3[$

Es gibt nur eine Stelle, wo das Intervall Anwendung findet:

$F_3 \cos(\propto_3) - x_3 F_3 \sin(\propto_3) = 5R cos(\propto_R) - 2R sin(\propto_R)$

Die Determinante der Matrix (siehe oben) wird in Abhängigkeit von x genau dann gleich Null, wenn $F_3 \cos(\propto_3) - x_3 F_3 \sin(\propto_3) = 0$. Nach Umstellung sieht man, dass

$\tan(\propto_3) \neq \frac{1}{x}$ sein muss. Da der $\text{Arctan}(\frac{1}{x})$ insb. auf dem genannten Intervall monoton fallend und stetig ist und da $\text{Arctan}(\frac{1}{2,7}) \approx 20{,}32$ und $\text{Arctan}(\frac{1}{3,3}) \approx 16{,}86$, dürfen keine Werte zwischen 16,86° und 20,32° von $\propto_3$ angenommen werden, sonst hat F_3 kein polares Moment und wie in Teil b) kann man dann keinen Vergleich mehr zwischen den drei Kräften und der Resultierenden aufstellen.

Zu Teilaufgabe d)

Nein, da R ein polares Moment besitzt, aber die Kräfte F_1 und F_2 nicht (siehe LGS).

Mathematisch: $0 = y_R R_x - x_R R_y$ ist ein Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe wird eines für die meisten Studierenden tendenziell eher leichteres mathematisches Thema (lineare Gleichungssysteme) mit einem anspruchsvollen, aber aus dem ersten Semester bekannten technischen Thema verknüpft. Diese Aufgabe wird an der Uni Paderborn bedingt durch den Themenaufbau in der Mathematikvorlesung erst im zweiten Semester verwendet.

Die Grundidee besteht darin, dass ein in der Praxis relevantes Problem möglichst leicht verständlich beschrieben werden soll. Eine Idealisierung ist notwendig um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten und die Einstiegszeit zu minimieren. Das Problem soll aber so allgemein sein, dass man sich leicht reale Situationen dazu überlegen kann. Wie genau ein Bauteil in der Praxis aussehen mag und welchen Nutzen es hat, ist für die Aufgabe nicht relevant und würde nur unnötig von dem Problem ablenken und den zu lesenden Text verlängern. Die Idee für die Aufgabe kam auf, als der Autor bei Mahnken (2011, S. 118-121) nach Themen gesucht hat, in denen lineare Gleichungssysteme Verwendung finden.

Es geht in der Aufgabe darum, dass man zunächst die Situation (Belastung) verstehen muss um dann eine physikalische Problemanalyse (Kräfteaufteilung, Vergleich, Sicherheit) und schließlich eine Mathematisierung (LGS) durchführen zu können.

Aus dem Einleitungstext der Aufgabe soll der Studierende erkennen, dass die Befestigungen eines Bauteils (z.B. Schrauben) belastet werden und man die insgesamt maximal zulässige Belastung kennt. In der Praxis tauchen nun an drei Stellen Kräfte auf und der Maschinenbauer muss entscheiden, ob die Auflager der Belastung standhalten können. Dies ist ein sehr typisches Beispiel für eine Sicherheitsprüfung, auch wenn es im Sinne einer zeitnah lösbaren Aufgabe vereinfacht wurde. Für uns ist die Aufgabe insgesamt als authentisch zu werten.

Durch die Skizze und die konkreten Fragen hinsichtlich der gegebenen Situation wird die Modellierungsorientiertheit der Aufgabe gefördert. Weiterhin wird auch (z.B. in b)) die von uns geforderte mathematische Verallgemeinerung von den Studierenden verlangt. Die Abgeschlossenheit wird gewährleistet, da der fachspezifische Stoff bereits im ersten Semester in der Technischen Mechanik behandelt sein sollte. Da die Aufgabe nicht mehr als eine Seite benötigt und durch die Skizze ergänzt wird, ist sie übersichtlich.

Letztlich ist sie, wie weiter oben bereits beschrieben, übertragbar und damit erfüllt die Aufgabe unser Konzept.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Kräften
- Zerlegung einer Kraft bei nicht-zentralen Kraftsystemen (Gleichgewichtsbedingungen, Momente),
- Umgang mit fachtypischen Aufgabenbeschreibungen und Idealisierungen (Bedeutung der Skizze und der Fachwörter wie „Richtungswinkel“ und „Kraft“)
- Aufstellen und Lösen von linearen Gleichungssystemen
- Determinante berechnen und interpretieren können
- Grundlegendes Verständnis der Sinus und Cosinus Funktionen
- Umgang mit Gleichungen in denen Variablen und Parameter vorkommen
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Kräften und Koordinaten
- Kräftegleichgewicht berechnen und interpretieren
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Determinante bestimmen und interpretieren

Aufgabe 6: Heißer Stahl (Differentialgleichungen)

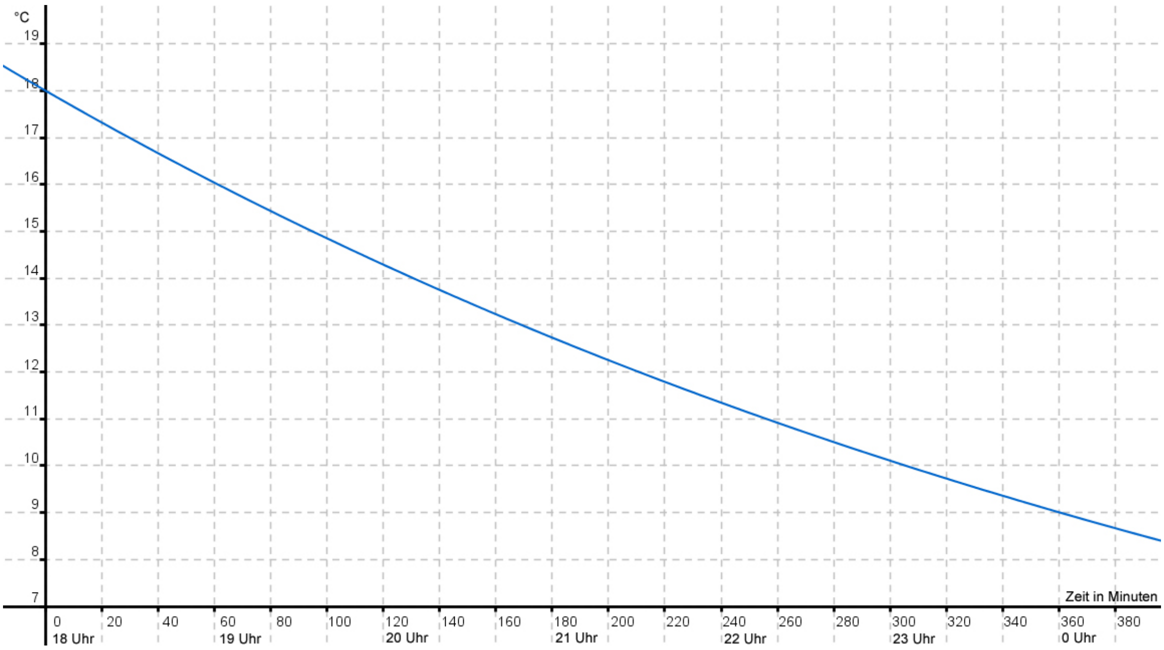
In einer Gießerei sollen ab 18 Uhr zwei frisch gegossene Stahlbalken von $1250°C$ abkühlen, um sie später weiterverarbeiten zu können.

Gießerei Kiel (Quelle s.u.)

a) Die Halle, in der sich der erste Balken befindet, wird konstant auf $25°C$ gehalten. Nach zwei Stunden stellen Sie fest, dass die Temperatur des Balkens auf $785°C$ gefallen ist. Um wie viel Uhr wird der Balken voraussichtlich auf $300°C$ abgekühlt sein?
<u>Tipp:</u> Die Abkühlgeschwindigkeit hängt von dem jeweils aktuellen Temperaturunterschied zwischen Objekt- und Umgebungstemperatur, sowie von einer Konstanten ab. Diese ist für alle in den Aufgabenteilen dargestellten Fälle gleich.

b) Ihr Chef will, dass die Weiterverarbeitung in Zukunft bereits nach der Hälfte der Zeit möglich ist. Auf wie viel Grad müsste die Halle dazu konstant temperiert werden? Was entgegnen Sie Ihrem Chef?

c) Der zweite Balken soll vor der Halle an der kühlen Nachtluft abkühlen. Im Diagramm ist der erwartete Außentemperaturverlauf von 18 Uhr bis Mitternacht angegeben. Welche Temperatur hat der zweite Balken zu dem Zeitpunkt, wenn der erste (siehe a)) bereit zur Weiterverarbeitung ist?
<u>1. Hinweis:</u> Interpolieren Sie den Temperaturverlauf mit einer Exponentialfunktion.
<u>2. Hinweis:</u> Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, so gehen Sie von 0:15 Uhr für den Zeitpunkt der Weiterverarbeitung des ersten Balkens aus.



Lösung:

Zu Teilaufgabe a)

Wir suchen eine Funktion f, die die Temperatur (in °C) des Balkens in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit (in Minuten) angibt. Wir wissen dass $f(0)=1250$ und $f(120)=785$ und dass die Außentemperatur (Halle) konstant $25°C$ beträgt. Wir suchen einen Zeitpunkt t_{end}, so dass $f(t_{end})=300$.

Da die Abkühlgeschwindigkeit gleich der Differenz zwischen Außentemperatur und der jeweils aktuellen Temperatur des Balkens ist (multipliziert mit einer Konstanten), ergibt sich die Differentialgleichung $f'(t)=\left(25-f(t)\right)\cdot k$. Um spätere Rechnungen zu erleichtern klammern wir ein Minus aus und verbinden es mit der Konstanten, also $f'(t)=\left(-k\right)\cdot\left(f(t)-25\right)$. Diese GDGL lösen wir mittels getrennter Variablen (man beachte: $f(120)=785$ erzeugt das Anfangswertproblem):

$\int_{785}^{f(t)} \frac{1}{s-25}ds = \int_{120}^{t} -kdx$, daraus folgt

$$\ln\left|s-25\right|\Big|_{785}^{f(t)} = -k(t-120)$$

und da die Funktion auf dem betrachteten Intervall immer größer als 25 ist, fällt der Betrag weg und wir wissen nun (Logarithmusgesetzte), dass

$\ln\left(\frac{f(t)-25}{760}\right) = -k(t-120)$, was aufgelöst die Lösung

$f(t)=760\cdot e^{-k(t-120)}+25$ ergibt. Eine andere Notation, findet sich weiter unten.

Wir bestimmen nun die fehlende Konstante, wobei wir ausnutzen können, dass $f(0)=1250$ bereits bekannt ist. Es gilt also

$1250=760\cdot e^{-k\cdot(-120)}+25$ und damit ist $k\approx 0.00397815$ (Einheit: 1/min)

Jetzt können wir die Aufgabe lösen, da wir die Funktion kennen:

$f(t_{end})=300 \Leftrightarrow 300=760\cdot e^{-0.00397815\cdot(t-120)}+25 \Leftrightarrow t\approx 375{,}533$, also dauert die Abkühlung etwa 6 Stunden und 16 Minuten. Damit ist der Balken ab etwa 0:16 Uhr bereit zur Weiterverarbeitung.

Anmerkung 1: Sollte das Abkühlungsgesetz nach Newton bekannt sein, so bietet dies eine schnellere Lösung.

Anmerkung 2: Verwendet man $f(0)=1250$ und den entsprechend anderen Punkt zum Berechnen der Konstanten, so ergeben sich die gleichen Ergebnisse. Lediglich die Funktion hat dann die Gestalt $f(t)=1225\cdot e^{-kt}+25$ (die Funktionen sind identisch, sehen nur in der Schreibweise anders aus!).

Hier nun die erwähnte alternative DGL-Lösungsmethode:

$$\frac{df}{dt}=(25-f)k \Rightarrow \int \frac{1}{25-f}df=\int kdt \Rightarrow -\ln|25-f|=kt+c_1$$

$\Rightarrow f=-e^{-kt-c_1}+25=-ce^{-kt}+25$. Jetzt suche c und nutze dabei $f(120)=785$. Erhalte damit $c=-1225$. Das weitere Vorgehen ist analog zur obigen Lösung.

Bei der Vorstellung der Lösung ist die erste Methode vorzuziehen, da sie mathematisch „sauberer" ist.

Zu Teilaufgabe b)

Wir müssen unsere Funktion aus a) abändern, da wir nun wollen, dass bereits $f(\frac{375.533}{2})=300$ gilt. Die neue Funktion nennen wir g und bezeichnen die gesuchte Außentemperatur mit a. Vorsicht: Die Information, dass der Balken nach 2 Stunden nur noch 785°C warm ist, darf natürlich nicht mehr benutzt werden, da dies ja von der Außentemperatur abhängt. Die bereits berechnete Konstante verwenden wir allerdings weiterhin. Man könnte dieses Vorgehen anzweifeln, jedoch ist es unter den gegebenen Umständen das übliche Vorgehen. Ohne konkrete Angabe eines zweiten Punktes gibt es auch keine Lösungsalternative.

Laut Anmerkung 2 aus Lösung zu a) (oder in dem wir das AWP nochmals lösen) ergibt sich:

$g(t)=(1250-a)e^{-kt}+a$, wobei wir die Abkühlkonstante $k\approx 0.00397815$ bereits berechnet haben. Jetzt ist nur noch eine Gleichung zu lösen:

$$300=(1250-a)e^{-0.00397815\cdot\left(\frac{375.533}{2}\right)}+a$$
$$\Leftrightarrow 300=(1250-a)\cdot 0.473803+a$$
$$\Leftrightarrow a\approx -555.41°\mathrm{C}$$

Diese Temperatur liegt allerdings unterhalb des absoluten Nullpunkts und ist daher unerreichbar! Man beachte: Vor Erreichen dieser Temperatur würden sich die Bestandteile der Luft verflüssigen und somit die Geschwindigkeit der Wärmeübertragung und damit einhergehend auch die Abkühlkonstante verändern. Für diesen Fall ist die obige Rechnung nicht sinnvoll, jedoch wäre es unsinnig, dass die Temperatur in der Halle derart tief reguliert werden kann, dass die Luft sich verflüssigt.

Zu Aufgabenteil c)

Wir wollen den Temperaturgraphen mit einer Exponentialfunktion p mit $p(x)=\lambda e^{\mu x}$ interpolieren. Wir lesen die Punkte $p(0)=18=\lambda$ und $p(360)=9=18e^{360\mu}$ ab und erhalten somit $p(x)=18e^{-0,001925x}$.

Das zu lösende Anfangswertproblem lautet nun:

$\mathrm{h}'(t) = \left(p(t) - h(t)\right) \cdot k$, mit $h(0) = 1250$, wobei die Konstante $k \approx 0.00397815$ bereits bekannt ist. Wir bemerken, dass dies nun ausmultipliziert die Gestalt $\mathrm{h}'(t) = -k \cdot h(t) + k \cdot p(t)$ hat und daher handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung $\left(y' = A(x)y + b(x)\right)$. Es gibt zwei Möglichkeiten diese zu lösen. Entweder direkt über die Formel oder über die Variation der Konstante.

Zunächst der Weg über die direkte Formel:

$$\mathrm{h(t)} = \left(1250 + \int_0^t kp(x)\exp\left(-\int_0^x -kds\right)dx\right)\exp\left(\int_0^x -kds\right)$$

$$= \left(1250 + k\int_0^t 18e^{-0{,}001925x}e^{kx}dx\right)e^{-kt}$$

$$= \left(1250 + \frac{18k}{k - 0{,}001925}\left(e^{(k-0{,}001925)t} - 1\right)\right)e^{-kt}$$

Uns interessiert die Temperatur zum Zeitpunkt $t \approx 375.533$, also berechnen wir:

$\mathrm{h}\left(375{,}533\right) \approx 289{,}709$, d.h. der zweite Balken ist etwas mehr als 10°C kühler, wenn der erste Balken auf 300°C abgekühlt ist.

Sollten die Studierenden den Hinweis nutzen müssen und mit $t = 375$ rechnen, so ergibt sich als Lösung: $\mathrm{h}\left(375\right) \approx 290{,}306$.

Es folgt die Lösung des AWP über die Variation der Konstante. Alle anderen Rechnungen verlaufen analog zur obigen Lösung!

Die DGL lautet $\mathrm{h}'(t) = -k \cdot h(t) + k \cdot p(t)$. Wir betrachten das homogene Problem $\mathrm{h}'(t) = -k \cdot h(t)$ („getrennte Variablen“) und er halten $h(t) = e^{-kt+c}$, wobei das c durch die Bildung der Stammfunktion entsteht. Wir führen nun die Variation der Konstante durch (sehen c also als Funktion $c(t)$ an) und setzen die Ableitungen gleich um den genauen Funktionsterm bestimmen zu können:

$$-k \cdot \left(e^{-kt+c(t)}\right) + k \cdot p(t) = -k \cdot \left(e^{-kt+c(t)}\right) + c'(\mathrm{t})e^{-kt+c(t)}$$

Hierbei wurde $h(t) = e^{-kt+c(t)}$ und die Produktregel beim Ableiten verwendet.

Aus dieser Gleichung ergibt sich $c'(t) = 18ke^{(k-0{,}001925)t-c(t)}$ (wir haben jetzt $p(t)$ eingesetzt).

Substituieren wir $d(t) := e^{c(t)}$, so erhalten wir $d'(t) = 18ke^{(k-0{,}001925)t}$ und damit $d(t) = \dfrac{18k}{k - 0{,}001925}e^{(k-0{,}001925)t} + c_0$. Eine Resubstitution gibt uns schließlich

$c(t)=\ln\left(\dfrac{18k}{k-0{,}001925}e^{(k-0{,}001925)t}+c_0\right)$ und zusammen ergibt das

$h(t)=e^{-kt}\left(\dfrac{18k}{k-0{,}001925}e^{(k-0{,}001925)t}+c_0\right)$. Unser AWP, also die zusätzliche Forderung $h(0)=1250$ liefert uns $c_0=1250-\dfrac{18K}{k-0{,}001925}$. Die Lösung ist damit identisch zu der aus der obigen aus der direkten Formel.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe wird eine Anwendung der Differentialgleichungen aufgezeigt und ist üblicherweise für Maschinenbaustudierende Ende des zweiten / Anfang des dritten Semester gedacht, da oft erst zu diesen Zeitpunkten das mathematische Thema behandelt wird.

Sofern das Abkühlungsgesetz nach Newton nicht bekannt ist oder durch zusätzliche Anmerkungen in der Aufgabe verboten wird, muss zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen gelöst werden. Im letzten Aufgabenteil ist ein lineares Anfangswertproblem aufzustellen und zu lösen. Die Themenorientierung ist damit klar gegeben.

Der Anwendungsbezug ist aus unserer Sicht authentisch, da die Probleme realistisch und für Maschinenbauer interessant sind. Insbesondere Aufgabenteil b) zeigt deutlich auf, welche Fehlvorstellungen viele Menschen von exponentiellem Wachstum haben und dürfte einige Studierende überraschen.

Die Aufgabe ist im Sinne unseres Konzepts modellierungsorientiert, da die Aufgabe nicht aus mathematischen Forderungen besteht, sondern ganz klar den Bezug zur Realität fordert. Die Ergebnisse können anschaulich validiert werden und die Rückführung zur Situation wird durch die Aufgabenstellungen stets gefordert. So wird beispielsweise nach den konkreten Uhrzeiten und nach der Antwort für den Vorgesetzten gefragt.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze und das Foto aufgelockert. Wir empfinden sie daher als übersichtlich. Durch die einfachen Funktionen und leicht zu lösenden Integrale (Exponentialfunktionen) ist auch der Schwierigkeitsgrad angemessen. Eine Befragung hierzu steht allerdings erst noch an.

Die Übertragbarkeit der Aufgabe kann angenommen werden, da es sich um klassische Abkühlungsprozesse handelt, die häufig in der Realität ihre Relevanz haben.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Gewöhnlichen Differentialgleichungen (getrennte Variablen und lineare DGL) müssen bekannt sein und man sollte die Lösungsmethoden kennen
- Einfache Integralrechnung
- Entweder ist das Abkühlungsgesetzt nach Newton bekannt oder es muss hergeleitet werden (durch den Tipp bei Teilaufgabe a))
- Umgang mit Zeit und Temperatur im Koordinatenkreuz

- Einfache Gleichungen lösen können

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Aufstellen von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Lösen von Anfangswertproblemen (getrennte Variablen und lineare GDGL)

5. Literatur

Alpers, B. (2001). Mathematicals Application Projects for Mechanical Engineers - Concept, Guidelines and Examples. *Proceedings der Int. Conf. on Technology in Math. Teaching (ICTMT 5)*

Krapp, A. (1998). Entwicklung und Förderung von Interesse im Unterricht. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 44, 185-201*

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling-Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *JMD31-1, 119-141*

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *JMD31-2, 285-311*

Mahnken, R. (2011). *Lehrbuch der Technischen Mechanik – Statik, Von den Grundlagen zu den Anwendungen.* Berlin Heidelberg: Springer

Oevel, G., Henning, M., Hoppenbrock, A., Kortemeyer, J., Mertsching, B (2014). Werkstattbericht der Arbeitsgruppe "Mathematik in den Ingenieurwissenschaften". *Th. Wassong, D. Frischemeier, P.R. Fischer, R. Hochmuth, P. Bender (Hrsg), Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen - Using Toolsfor Learning Mathematics and Statistics.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Richard, H.A., Sander, M. (2006). *Technische Mechanik Festigkeitslehre.* (1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.

Rooch, A., Kiss, A., Härterich, J (2014). Brauchen Ingenieure Mathematik? - Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. *Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S., Wassong, T., Mathematische Vor- und Brückenkurse - Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

6. Bildquellen

Konzept:
Abbildung erstellt mit XMind2012 SE (V. 3.3.1.201212250029)

Laserstrahlaufgabe:
Skizzen erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Pendeluhraufgabe:
Foto von Mario Modesto Mata [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) oder CC-BY-SA-3.0-2.5-2.0-1.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Big_Ben_-_Detalle.JPG?uselang=de# (Abgerufen am 4.2.14)
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Stahlbalkenaufgabe:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)
Bilder zu den Knickfällen aus Richard u. Sander (2006)

Halfpipeaufgabe:
Foto: http://cdn.morgue_le.com/imageData/public
/_les/n/nitadee/preview/_dr_2012_05_27/_le121338153849.jpg. (2013). _
[Abgerufen am 06.09.2013. Hochgeladen von Nutzer NitaDee als lizenzfreies
Foto bei www.morgue_le.com]
Skizzen erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Bauteilaufgabe:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Aufgabe Heißer Stahl:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)
Foto von CT-Gruppe (zur Verfügung gestellt durch Urheber) [CC-BY-SA-2.0-de (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en), GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giesserei_Kiel.jpg
(Abgerufen am 17.2.14)