


**Dynamische Analyse großer,
verkoppelter Systeme mit
Methoden der Komplexen Netzwerke
am Beispiel des Inverse-Response-Verhaltens**

Andreas Geiger

Schriftenreihe Mess- und Regelungstechnik der Universität Kassel

Band 06



kassel
university 
press

Schriftenreihe Mess- und Regelungstechnik der Universität Kassel

Band 6 / Vol. 6

Herausgegeben von / Edited by

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Andreas Kroll

**Dynamische Analyse großer,
verkoppelter Systeme mit
Methoden der Komplexen Netzwerke
am Beispiel des
Inverse-Response-Verhaltens**

Andreas Geiger



Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Andreas Kroll, Universität Kassel

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Jumar, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Tag der mündlichen Prüfung

22. Mai 2015

Die elektronische Version dieser Publikation liegt in der Kasseler Online Bibliothek, Repository und Archiv (KOBRA) unter <https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/>.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2015

ISBN print: 978-3-86219-587-9

© 2015, kassel university press GmbH, Kassel
www.uni-kassel.de/upress

Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Verlauf meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik des Fachbereichs Maschinenbaus der Universität Kassel. Unterstützt durch den Leiter des Fachgebiets, Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Kroll, sowie den Kollegen war es mir möglich, die Ideen und Ansätze, welche in die vorliegende Ausarbeitung mündeten, zu verfolgen, zu vertiefen und zu diskutieren. Für diese Unterstützung bin ich sehr dankbar.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Kroll für die mir gebotene Möglichkeit zur Promotion sowie für die Begleitung meiner Arbeit durch ein stets offenes Ohr und die kritischen Fragen, welche für eine Reflexion der Arbeit äußerst hilfreich waren. Zudem bin ich sehr dankbar für seine Bereitschaft, die Rolle des Erstgutachters zu übernehmen.

Weiterhin möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Jumar (Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg) für die Übernahme des Zweitgutachtens danken. Ebenso gilt mein Dank den Professoren Dr.-Ing. M. Fister und Dr.-Ing. J. Hesselbach für ihr Mitwirken in der Promotionskommission.

Allen Kollegen des Fachgebiets Mess- und Regelungstechnik danke ich für das Feedback bei den halbjährlichen Doktorandenseminaren sowie jedweder weiteren Hilfe. Insbesondere möchte ich mich bei Herrn H. Al Mawla, M. Sc., Dipl.-Ing. A. Schrodtt sowie Dr.-Ing. S. Soldan bedanken. Für die technische Unterstützung zur Realisierung der Fallstudie möchte ich mich ganz besonders bei Herrn J. Pankratz bedanken. Er hat so, neben zahlreichen Studierenden (Projekt-, Studien-, Diplom- und Bachelorarbeiten), zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen.

Für das abschließende mühevollen Korrekturlesen mit Blick auf Rechtschreibung und Grammatik bedanke ich mich ganz herzlich bei J. Sitte.

Kassel, im Mai 2015

Andreas Geiger

Kurzfassung

Die zunehmende Vernetzung der Energie-, Stoff- und Informationsströme, z. B. innerhalb von Produktionsanlagen, begründet das Interesse an Methoden, welche eine Analyse der Systemeigenschaften von großen und verkoppelten dynamischen Systemen bereits in einem frühen Entwicklungsstadium ermöglichen. Dabei ist das Gesamtsystemverhalten von Interesse, welches sowohl auf der Dynamik der Teilsysteme als auch der Verkopplungen beruht. In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Methode zur qualitativen Analyse von Systemen auf Inverse-Response-Verhalten entwickelt. Der Ansatz nutzt eine auf dynamisch erweiterten Komplexen Netzwerken beruhende Modellbeschreibung, welche als Übertragungsfunktionsbasierter Graph bezeichnet wird.

Komplexe Netzwerke verwenden die Graphentheorie zur Beschreibung der Verkopplungen von großen Systemen und zur statistischen Analyse der Systemeigenschaften, welche durch die Verkopplungen bedingt sind. Der Übertragungsfunktionsbasierte Graph nutzt diesen Modellierungsansatz und erweitert ihn durch Verwendung von Kantengewichten, welche eine Analyse des dynamischen Verhaltens des modellierten Systems ermöglichen. Die verwendeten Parameter sind die Verstärkung, Anstiegszeit sowie Verzugszeit, welche das dynamische Verhalten einer beschriebenen Komponente im Anfangsbereich sowie im stationären Bereich der Sprungantwort approximieren. Innerhalb des vereinfachten Systemmodells vergleicht der Detektionsalgorithmus die Pfade zwischen den betrachteten Ein- und Ausgängen anhand der aggregierten dynamischen Parameter und ermöglicht somit eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten des Gesamtsystems. Er bietet dadurch eine einfach anwendbare Alternative zur Auswertung der positiven Nullstellen des Systems, da im Fall eines linearen Systems eine ungerade Anzahl positiver Nullstellen eine notwendige sowie hinreichende Bedingung für das Inverse-Response-Verhalten ist. Der vorgestellte neue Detektionsalgorithmus ermittelt zur Untersuchung des Inverse-Response-Verhaltens zunächst die Pfade des Graphen zwischen den betrachteten Ein- und Ausgängen. Die Kantengewichte innerhalb eines Pfades werden dann zu Ersatzgewichten aggregiert, welche für eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten des Systems abschließend ausgewertet werden. Im Rahmen der Arbeit erfolgt eine Untersuchung der Einflüsse der Modellapproximation, der Aggregation der Ersatzpfadgewichte und deren Auswertung auf die erreichbare Güte des Detektionsergebnisses sowie auf die Falsch- und Fehldetektionsrate.

Das entwickelte Verfahren wurde erfolgreich an einer flexibel konfigurierbaren Prozessinsel der Modellfabrik μ Plant des Fachgebiets Mess- und Regelungstechnik getestet. Die Prozessinsel ermöglicht das Nachbilden einer vernetzten Produktion durch aktuell bis zu zehn miteinander verkoppelte „Fluidspeicher“.

Abstract

The increasing interconnection of energy, material and information flows within production plants has awakened significant interest in the development of new methods which are able to analyze the properties of large coupled dynamical systems right from the beginning of their development. Of particular interest is the analysis of behavior of the system as a whole which results from both the dynamics of the subsystems and the couplings between them. This work presents a novel method for the qualitative analysis of systems with inverse-response behavior. For the analysis, a modeling approach is used basing on complex-network models which are extended by including the description of the system dynamics. This novel modeling approach is called transfer-function-based graph.

Complex networks use the graph theory to describe the interconnection of large systems and can be used to perform statistical analysis of the system properties which are due to the interconnections. Transfer-function-based graphs include additional edge weights in the interconnections to describe the dynamic behavior of the system and, therefore, allow an analysis of the dynamic behavior of the modeled system. The parameters used as edge weights are: gain, rise time and delay time. With these parameters it is possible to approximate the dynamic behavior of a system component initially after a step at the input as well as during the steady-state. A novel detection algorithm compares the paths between the observed system input and output with each other using the transfer-function-based graph. The edge weights along a path are aggregated to path weights and are then evaluated to enable a statement about the inverse-response behavior of the observed system. This approach is a simple alternative to the evaluation of the number of positive zeros of the system which, in the case of a linear system, when odd, is a necessary and sufficient condition to predict an inverse-response behavior. The effects on the detection result, which depend on the approximation as weighted graph, the aggregation of path weights and the final evaluation of the weights and their influence on false detections, are also examined in this work.

The modeling and analyzing method described in this work was successfully tested with a flexible configurable process island of the „ μ Plant “ model factory which was developed by the Department of Measurement and Control. The process island allows emulating a networked production plant with currently up to ten interconnected fluid tanks.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Bezeichnungen	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und allgemeine Problemstellung	1
1.2 Einordnung in den Stand der Wissenschaft und Technik	3
1.2.1 Komplexität	3
1.2.2 Large-Scale Systems und System-of-Systems	4
1.2.3 Systemanalyse mit Komplexen Netzwerken	5
1.2.4 Graphenorientierte Modellierung	6
1.2.5 Vernetzte Regelungssysteme	8
1.2.6 Diskussion	9
1.3 Ziele und Aufgaben	10
2 Komplexe Netzwerke und Graphentheorie	13
2.1 Graphentheorie	13
2.1.1 Grundlegende Begriffe	13
2.1.2 Metriken auf einem Graph	18
2.2 Komplexe Netzwerke	21
2.2.1 Modelle und Analyse	21
2.2.2 Nichttechnische Anwendungsbeispiele	26
2.2.3 Anwendungsbeispiele für technische Systeme	27
2.2.4 Komplexe Netzwerke in der Regelungstechnik	29
2.2.5 Untersuchung zeitvarianter Komplexer Netzwerke	29
2.3 Diskussion	31
3 Modellierung dynamischer technischer Systeme als Komplexe Netzwerke	33
3.1 Modellansatz	33
3.1.1 Definition Inverse-Response-Verhalten	33
3.1.2 Modellierung des dynamischen Verhaltens mittels eines erweiter- ten Komplexen Netzwerks	35

3.2	Modellerstellung	44
3.2.1	R&I-Fließschema und Konstruktionsdaten	44
3.2.2	Identifikation	45
3.2.3	Ableitung aus physikalischem Modell	51
3.3	Diskussion	54
3.3.1	Abschätzung des Approximationsfehlers	54
3.3.2	Praktische Anwendbarkeit des Modellansatzes	59
4	Analyse auf Inverse-Response-Verhalten	61
4.1	Einleitung	61
4.2	Kriterien für Inverse-Response-Verhalten bei linearen Systemen	61
4.2.1	Eingrößensystem	62
4.2.2	Mehrgrößensystem	63
4.2.3	Nicht minimalphasiges System	64
4.2.4	Nullstellenbestimmung	64
4.3	Qualitativer Detektionsalgorithmus	65
4.3.1	Ermittlung der Pfade zwischen Ein- und Ausgängen	68
4.3.2	Aggregation der Kantengewichte	71
4.3.3	Bewertung der aggregierten Pfadgewichte	83
4.4	Diskussion	93
4.4.1	Aggregationsfehler	93
4.4.2	Fehler durch Auswahl des Betrachtungshorizonts	96
4.4.3	Fehler durch Auswertung der Steigung im Betrachtungshorizont	98
4.4.4	Fehl- und Falschklassifikationsrate sowie Zuverlässigkeit des De-	
	tektionsergebnisses	99
5	Anwendungsbeispiel	101
5.1	Modellfabrik	101
5.2	Szenario der Fallstudie	105
5.3	Modellierung des Anwendungsbeispiels	107
5.3.1	Ermittlung der Struktur des Modells anhand des R&I-Fließschemas	107
5.3.2	Kantengewichte der Komponenten	109
5.4	Ergebnisse und Diskussion	114
6	Zusammenfassung und Ausblick	117
6.1	Zusammenfassung	117
6.2	Ausblick	119

A Anhang	121
A.1 Verwendete Beispielsysteme	121
A.2 Parametertabelle des Beispiels 9	126
A.3 Mathematische Ergänzungen	128
A.3.1 Routh-Approximation erster und zweiter Ordnung der Übertragungsfunktion eines Pfades	128
A.3.2 Bestimmung der Sprungantwort einer Reihenschaltung von Systemen erster Ordnung	131
A.4 In Fallstudie verwendete physikalische Modelle	133
A.4.1 Modell von Tank 7 und 8	133
A.4.2 Modell von Tank 2 und 5	133
A.4.3 Modell von Tank 6	135
A.4.4 Modell von Tank 1	136
Veröffentlichte Beiträge	139
Literaturverzeichnis	141

Formelzeichen und Bezeichnungen

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

Symbol	Bedeutung
$a_{i,j}$	Element der Adjazenzmatrix; Element der Systemmatrix
a_i	Element im Nenner eines Bruchs
A	Anzahl der Systemausgänge; Fläche
\mathbf{A}	Systemmatrix
$\tilde{\mathbf{A}}$	Balancierte Systemmatrix
$\mathbf{A}(\mathcal{G})$	Adjazenzmatrix des Graphen \mathcal{G}
b_i	Element im Zähler eines Bruchs
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
$\tilde{\mathbf{B}}$	Balancierte Eingangsmatrix
c	Spezifische Wärmekapazität
$C(v_i)$	Clusterkoeffizient des Knotens v_i
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix
$\tilde{\mathbf{C}}$	Balancierte Ausgangsmatrix
\mathcal{C}	Kreis in einem Graphen
\mathcal{C}^J	Kreis mit der Länge J in einem Graphen
d_j	Substitutionsvariable
$d(\mathcal{G})$	Durchschnittsgrad des Graphen \mathcal{G}
$d_{\mathcal{G}}(v_i)$	Knotengrad des Knoten v_i
$d_{\mathcal{G}}^+(v_i)$	Eingangsgrad des Knoten v_i
$d_{\mathcal{G}}^-(v_i)$	Ausgangsgrad des Knoten v_i
$D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j)$	Abstand zwischen den Knoten v_i und v_j
e_n	Kante aus Kantenmenge eines Graphen (Bezeichnung n)
e_q bzw. e_h	Regelabweichung des Durchfluss- bzw. Füllstandsreglers
E	Anzahl der Systemeingänge
$E(\cdot)$	Erwartungswert

Symbol	Bedeutung
\mathcal{E}	Kantenmenge
\mathcal{E}'	Kantenmenge eines Teilgraph \mathcal{G}'
$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$	Kantenmenge von \mathcal{G}
g	Gravitationskonstante
g_{p_i}	Steigung eines Pfades
$G(s)$	Übertragungsfunktion eines SISO-Systems $g(t)$
$\mathbf{G}(s)$	Übertragungsmatrix eines MIMO-Systems
$G_{e_n}(s)$	Der Kante e_n zugeordnete Übertragungsfunktion
$G_{p_i}(s)$	Dem Pfad p_i zugeordnete Übertragungsfunktion
$\hat{G}_{p_i}(s)$	Dem Pfad p_i zugeordnete approximierte Übertragungsfunktion
$\hat{G}(s)$	Approximierte Übertragungsfunktion
\mathcal{G}	Graph bestehend aus Kantenmenge \mathcal{E} und Knotenmenge \mathcal{V}
\mathcal{G}'	Teilgraph des Graphen \mathcal{G}'
$h(t)$	Sprungantwort eines Systems
$h_{e_n}(t)$	Der Kante e_n zugeordnete Sprungantwort
$h_{p_i}(t)$	Dem Pfad p_i zugeordnete Sprungantwort
$\hat{h}_n(t)$	Logarithmische Sprungantwortfunktion
$H(s)$	Laplace-Transformierte der Sprungantwort $h(t)$
I	Anzahl der Pfade zwischen einem Systemein- und Systemausgang
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
$u \rightarrow y$	Betrachtetes Ein-/Ausgangspaar
J	Anzahl der Kanten einer Kantenfolge, eines Pfades oder Kreises
k	Koeffizient eines Polynoms
\mathbf{k}	Verstärkungsvektor
K	Verstärkung
K_n	Verstärkung des der Kante e_n zugeordneten Teilsystems
K_{p_i}	Aggregierte Verstärkung des Pfades p_i
$K_{\sigma,n}$	Faktor der Einheitssprungantwort bei der Komponente n
K_P	Verstärkung des Proportionalanteils eines PID-Reglers
K_{AW}	Parameter für Anti-Wind-Up
\mathcal{K}	Kantenfolge in einem Graphen
$l_{\text{Tank } j}$	Höhe des Füllstands von Tank j bezogen auf einen Referenzwert
l_{Tank}	Füllstand eine Tanks
L	Anzahl der Knoten eines Graphen

Symbol	Bedeutung
$L(\mathcal{G})$	Adjazenzliste des Graphen \mathcal{G}
m	Masse
$\mathbf{M}\{\mathbf{G}(s)\}$	McMillan-Normalform von $\mathbf{G}(s)$
N	Anzahl der Teilsysteme, Komponenten oder Kanten
$N(\cdot)$	Nennerpolynom
$N_{\mathcal{G}}(v_i)$	Menge der Nachbarknoten des Knoten v_i
p	Wahrscheinlichkeit
p_i	Pfad i eines Graphen
$P(\cdot)$	Verteilung des Knotengrads in Zufallsgraphen
\mathbf{P}	Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{P}}$	Balancierte Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix
$\mathcal{P}_{u \rightarrow y}$	Pfadmenge der Pfade zwischen einem Ein- und Ausgangsknoten
$\tilde{\mathcal{P}}$	Pfadmenge des abschließend betrachteten Anfangsbereichs
\mathcal{P}_-	Pfadmenge der Pfade mit negativer Verstärkung
\mathcal{P}_+	Pfadmenge der Pfade mit positiver Verstärkung
\mathfrak{P}	Teilsysteme innerhalb von \mathfrak{S}
q_{zu}, q_{ab}	Zu- und Abfluss eines Tanks
q_m	Massenstrom
\mathbf{Q}	Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{Q}}$	Balancierte Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix
r	Parameter des Small-World-Graphen sowie skalenfreien Netze
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
s	Variable der Laplace-Transformation
\mathcal{S}	Pfad in einem Graphen
\mathcal{S}^J	Pfad in einem Graphen mit der Länge J
\mathfrak{S}	Für die Detektion betrachtetes Gesamtsystem
t	Zeitvariable
t_e	Obere Grenze des Bereichs der Integrale der Gütefunktionen
$t_{20\%}$	Zeitpunkt, an dem $h(t)$ 20 % des stationären Endwerts entspricht
$t_{63\%}$	Zeitpunkt, an dem $h(t)$ 63 % des stationären Endwerts entspricht
T_n	Zeitkonstante oder Anstiegszeit des Systems n
T_{p_i}	Aggregierte Anstiegszeit des Pfades p_i
T_{d,p_i}	Aggregierte anteilige Verzugszeit des Pfades p_i
$T_{\tau,n}$	Verzugszeit des zur Kante e_n zugeordnete Systems

Symbol	Bedeutung
T_{τ, p_i}	Aggregierte Verzugszeit des Pfades p_i
T_{Σ}	Summenzeitkonstante
T_{Σ, p_i}	Summenzeitkonstante des Pfades p_i
T_G	Glättungszeitkonstante eines realen PID-Reglers
T_N	Nachstellzeit eines PID-Reglers
T_V	Vorhaltezeit eines PID-Reglers
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
$u(t)$	Eingangsgröße eines Systems
u_q bzw. u_h	Stellgröße des Durchfluss- bzw. Füllstandsreglers
\mathbf{u}	Eingangsvektor eines Zustandsraummodells
$U(s)$	Laplace-Transformierte Eingangsgröße eines Systems
v_i	Knoten i der Knotenmenge eines Graphen
\mathcal{V}	Knotenmenge
\mathcal{V}'	Knotenmenge eines Teilgraph \mathcal{G}'
$\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$	Knotenmenge von \mathcal{G}
w_h	Stellgröße des Füllstandsreglers nach der Stellgrößenbegrenzung
w_n	Kantengewicht einer Kante e_n
$w_{i,j}$	Element der Gewichtsmatrix
\mathbf{w}_n	Vektorielles Kantengewicht der Kante e_n in \mathfrak{S}
\mathbf{w}_{p_i}	Vektorielles aggregiertes Gewicht des Pfades p_i
$\mathbf{W}(\mathcal{G})$	Gewichtsmatrix des Graphen \mathcal{G}
\mathcal{W}	Menge der Kantengewichte
x_i	Zustand i in einem Zustandsraummodell
\mathbf{x}	Zustandsvektor eines Zustandsraummodells
$y(t)$	Ausgangsgröße eines Systems
\mathbf{y}	Ausgangsvektor eines Zustandsraummodells
$Y(s)$	Laplace-Transformierte Ausgangsfunktion eines Systems
z	Parameter eines Zufallsgraphen
z_i	Transformierter Zustand x_i
$\delta(\mathcal{G})$	Minimalgrad des Graphen \mathcal{G}
$\delta_{\mathcal{G}}^+$	Minimaler Eingangsgrad des Graphen \mathcal{G}
$\delta_{\mathcal{G}}^-$	Minimaler Ausgangsgrad des Graphen \mathcal{G}
$\Delta(\mathcal{G})$	Maximalgrad des Graphen \mathcal{G}

Symbol	Bedeutung
$\Delta_{\mathcal{G}}^+$	Maximaler Eingangsgrad des Graphen \mathcal{G}
$\Delta_{\mathcal{G}}^-$	Maximaler Ausgangsgrad des Graphen \mathcal{G}
Δh_{abs}	Gütefunktion mit dem Betrag der Differenz
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	Auf t_e normierte Gütefunktion mit dem Betrag der Differenz
Δh_{diff}	Gütefunktion mit einfacher Differenz
Δh_{quad}	Gütefunktion mit quadratischer Differenz
$\epsilon_{T_{\tau,n}}$	Schwellenwert für die Bestimmung der Verzugszeit
ϑ	Temperatur
Θ	Laplace-Transformierte der Temperatur
κ	Spezifische Wärmeleitfähigkeit
σ	Singulärwert
$\sigma(t)$	Einheitssprungfunktion
$\text{abs}(\cdot)$	Betragsfunktion
$\text{diam}(\mathcal{G})$	Durchmesser des Graphen \mathcal{G}
$\text{det}(\cdot)$	Determinante
$e^{(\cdot)}$	Natürliche Exponentialfunktion
$\ln(\cdot)$	Natürlicher Logarithmus
$\max(\cdot)$	Maximum
$\min(\cdot)$	Minimum
$\text{rad}(\mathcal{G})$	Radius des Graphen \mathcal{G}
$\text{sgn}(\cdot)$	Signum-Funktion

Akronyme

Symbol	Bedeutung
BA	Barabási-Albert
MIMO	Multi-Input-Multi-Output
MID	Magnetisch-Induktives-Durchflussmessgerät
PID	Proportional-Integral-Derivative
R&I	Rohrleitung und Instrumentierung
SISO	Single-Input-Single-Output
SoS	System-of-Systems
SPS	Speicherprogrammierbare Steuerung
TFG	Übertragungsfunktionsbasierter Graph (engl.: transfer function graph)
WS	Watts-Strognatz

1 Einleitung

1.1 Motivation und allgemeine Problemstellung

In der produzierenden Industrie findet eine zunehmende Vernetzung im Bereich der Energie-, Stoff- und Informationsströme statt. So werden z. B. in der chemischen Industrie bisher eigenständige Anlagen in Verbundsystemen miteinander verknüpft [98] oder in der Fertigungstechnik die Vernetzung von Zulieferern und Fertigungsanlagen erhöht. Dies trägt dazu bei, die Effizienz und Effektivität von Produktionsanlagen zu steigern und Wettbewerbsvorteile zu schaffen, da Energie, Rohmaterialien und Arbeitszeiten eingespart werden können [100]. Weitere Beispiele für eine zunehmende Vernetzung finden sich im Bereich der Infrastruktur, wie z. B. bei der Verkehrsplanung und dem Energieversorgungsnetz, sowie in den mit ihnen verbundenen Informationsnetzen [81]. Für den Fall der Energieversorgung ist der Grund für die zunehmende Vernetzung die steigende Anzahl an Anlagen aus dem Bereich der erneuerbaren Energie, welche in das bestehende Versorgungsnetz integriert werden müssen, wobei die Volatilität dieser Anlagen einen höheren Automatisierungsgrad des Netzes als bislang erfordert. Im Rahmen der zunehmenden Verknüpfung ist es die Aufgabe der Automatisierungssysteme, immer größere Bereiche von Anlagen, bis hin zu Produktionsverbänden, aber auch Verbundnetzwerke zu steuern, zu überwachen und zu regeln. Eine Herausforderung bei der Entwicklung geeigneter Automatisierungssysteme ist dabei die zunehmende Größe, Verknüpfung und daraus resultierende Komplexität der Struktur sowie des Verhaltens der Anlagen und Verbundnetzwerke [41]. Um die Anforderungen an das Automatisierungssystem formulieren zu können, ist es notwendig, das Verhalten des zu automatisierenden Systems zu untersuchen [59]. Bei der Systemanalyse wird dabei auch das dynamische Verhalten des Systems ermittelt, um dieses im Entwurf des Automatisierungssystems zu berücksichtigen. In der Regel werden zur Systemanalyse großer Systeme in der Regelungstechnik Entkopplungsmethoden verwendet, bei denen das Gesamtsystem zunächst in möglichst schwach verknüpfte Teilsysteme zerlegt wird. Diese Teilsysteme können anschließend separat mit Hilfe von linearen und nichtlinearen Analysemethoden untersucht werden [105]. Somit wird das individuelle Verhalten der Teilsysteme betrachtet, nicht jedoch das Gesamtsystemverhalten. Ebenfalls gebräuchlich sind Modellreduktionsverfahren, welche ein System hoher Ordnung in ein System mit einer niedrigeren Ordnung

1 Einleitung

approximieren, um dieses als Ganzes zu analysieren. In [47] wird z. B. das Gesamtsystem zunächst mittels Linearisierungsmethoden approximiert, bevor eine Ordnungsreduktion durch Auswahl relevanter Moden erfolgt. Somit wird zwar das Gesamtsystem betrachtet, die inneren Verkopplungen des Systems werden jedoch durch die Ordnungsreduktion verändert. Aus diesen Gründen sind Analysemethoden wünschenswert, welche das Verhalten des Gesamtsystems untersuchen, ohne die Verkopplungen zu vernachlässigen oder zu verändern. Für die Systemanalyse im Rahmen der Konzeptentwicklung der Anlage bzw. des Versorgungsnetzes sowie der zugehörigen Automatisierung sind qualitative Aussagen hilfreich. Im Fall von Infrastruktureinrichtungen werden dabei Anlagenmodelle eingesetzt. Diese ermöglichen durch Simulationen mit verschiedenen Anlagenkonfigurationen und Entwurfsparametern bzw. äußeren Einflüssen die Untersuchung des Systemverhaltens [46, 54, 103]. Dabei ist der Aufwand für die Erstellung eines den Anforderungen entsprechenden Modells sowie für die numerische Simulation des Modells nicht zu unterschätzen [5]. Es werden daher Methoden angestrebt, welche einfach zu generierende, qualitative Aussagen ermöglichen und somit bereits bei der Planung die Bewertung verschiedener Ansätze erlauben. Sie sollten bereits in einem frühen Stadium der Entwicklung eingesetzt werden können und einen moderaten Aufwand im Vergleich zu konventionellen Methoden aufweisen.

In verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen wie z. B. der Biologie, den Sozialwissenschaften, aber auch der Physik, werden Komplexe Netzwerke zur Beschreibung und zur Untersuchung komplexer Systeme und ihrem, auf den Verkopplungen basierenden, Verhalten verwendet. Beispiele für komplexe Systeme sind dabei das menschliche Gehirn, Verbindungen und Interaktionen zwischen Personen oder die Verknüpfung von Naturphänomenen wie Erdbeben und Vulkanausbrüche. Dabei wird die Graphentheorie zur Modellierung und Analyse mit Blick auf die Verkopplungen verwendet [9]. Auch in der Regelungstechnik werden Komplexe Netzwerke inzwischen bei der statistischen Auslegung und Analyse einer optimalen Struktur von vernetzten Regelungssystemen verwendet [64]. Da Komplexe Netzwerke bisher im allgemeinen nur für die statistische Untersuchung verwendet werden, ist es Ziel der Arbeit, ihre Verwendung für die Analyse des dynamischen Verhaltens technischer Anlagen zu betrachten.

Als Beispiel wird hierzu die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens betrachtet. Das Inverse-Response-Verhalten ist bei der Auslegung einer Prozessanlage sowie ihrem Automatisierungssystem zu beachten, da es die Reglerperformance einschränkt. Von Inverse-Response-Verhalten spricht man, wenn ein Ausgangssignal zunächst entgegen dem stationären Endwert verläuft, wie in Bild 1.1 dargestellt. Dieses Phänomen tritt z. B. in Dampferzeugern von Destillationskolonnen [90], in Rührkesselreaktoren und in Wasserkraftwerken [66] auf. Wird ein Regler ohne Berücksichtigung des möglichen Inverse-Response-Verhaltens eines Systems ausgelegt, so wird dieser versuchen das an-

fänglich gegenläufige Systemverhalten auszugleichen. Dies wiederum führt zu einer Verstärkung des Inverse-Response-Effekts und somit zu einer schlechten Reglerperformance. Bei der Reglerauslegung ist es daher hilfreich zu wissen, ob das zu regelnde System Inverse-Response-Verhalten aufweist oder nicht. Hierbei ist eine qualitative Aussage zunächst ausreichend, eine Bewertung der Intensität des Unterschwingens ist nicht notwendig.

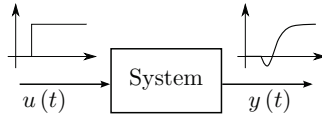


Bild 1.1: Inverse-Response-Verhalten am Systemausgang als Reaktion auf einen Sprung am Eingang.

1.2 Einordnung in den Stand der Wissenschaft und Technik

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der qualitativen Analyse von großen, komplexen sowie verkoppelten technischen Systemen. Daher erfolgt zunächst eine Einordnung, was unter einem komplexen, großen und verkoppelten bzw. vernetzten System zu verstehen ist. Daneben werden in aller Kürze bereits bekannte Modellierungsansätze, welche Graphen verwenden, sowie sich im Kontext der Arbeit befindende Forschungsergebnisse vorgestellt. Die Definition des als Beispiel für die Analyse verwendeten Inverse-Response-Verhaltens erfolgt im Kapitel 3.1.1, die Vorstellung möglicher Analyseverfahren zur Untersuchung des Inverse-Response-Verhaltens im Kapitel 4.2.

1.2.1 Komplexität

Da im Folgenden immer wieder von komplexen Systemen die Rede sein wird, soll der Begriff der Komplexität eingehender betrachtet werden. Die Problematik bei der Begriffsbildung liegt darin, dass die unterschiedlichen Wissenschaftsdisziplinen und Domänen im Laufe der Zeit ein unterschiedliches Verständnis von Komplexität und komplexen Systemen entwickelt haben. Daher sollen die verschiedenen Ansätze und die Gemeinsamkeiten der verwendeten Definitionen von Komplexität aufgezeigt werden [48]. Betrachtet man die unterschiedlichen Definitionen, so lassen sich zunächst zwei Gruppen bilden. Die erste beschreibt die Komplexität, die in der Natur und im sozialen Verhalten zu finden ist, und umfasst somit die Natur- und Sozialwissenschaften [50]. Demgegenüber lassen sich von Menschenhand geschaffene und somit „künstliche“ komplexe Systeme in einer zweiten Gruppe zusammenfassen. Dazu zählen dann vor allem die technischen Systeme wie z. B. Flugzeuge, Infrastruktureinrichtungen und Produktionsanlagen [69].

Mit dem speziellen Fall der komplexen Systeme in Verbindung mit der Regelungstechnik beschäftigte sich bereits Schmidt [89]. Dabei unterscheidet er zwischen komplizierten und komplexen Systemen, wobei ein kompliziertes System zwar nicht einfach zu verstehen ist, seine Größe jedoch noch die Berechenbarkeit des Verhaltens ermöglicht. Gemeinsame Eigenschaften beider Gruppen sind [32, 50, 69]:

- Ein komplexes System besteht aus einer Vielzahl von Komponenten bzw. Teilsystemen. Dabei ist das Verständnis davon, was „viel“ ist, von der jeweiligen Domäne abhängig.
- Die Komponenten bzw. Teilsysteme des komplexen Systems stehen in Wechselwirkung zueinander. Erst durch diese Wechselwirkung bilden sich die Eigenschaften des Gesamtsystems heraus, sie sind also in der Verkopplung der Teilsysteme begründet.
- Ein komplexes System kann nicht für sich alleine betrachtet werden, da es über Interaktion mit der Umwelt verknüpft ist und auch in diesem Zusammenhang zu betrachten ist.
- Es ist schwierig ein komplexes System zu beschreiben, verstehen oder steuern.

Bedingt durch die Wechselwirkungen und die sich daraus ergebenden Systemeigenschaften spricht man im Fall der ersten Gruppe, der „natürlichen“ komplexen Systeme, davon, dass Emergenz auftritt. Emergenz bedeutet, dass die Systemeigenschaften nicht einfach nur eine Zusammenfassung der Eigenschaften der einzelnen Teilsysteme sind, sondern sich darüber hinaus auch Eigenschaften ergeben, welche erst durch das Zusammenspiel der Teilsysteme ermöglicht wird. Hierzu zählt unter anderem die Bildung von Strukturen wie z. B. bei der Schwarmbildung [50]. Im Fall eines komplexen technischen Systems ist es hingegen schwieriger von Emergenz zu sprechen, da sich das Systemverhalten nicht von alleine ergibt, sondern durch den Entwicklungsprozess dem System auferlegt wird.

1.2.2 Large-Scale Systems und System-of-Systems

Ausgehend von der regelungstheoretischen Betrachtung von einzelnen Systemen entwickelte sich das Forschungsgebiet der Large-Scale Systems, da reale Probleme in den meisten Fällen eine hohe Komplexität besitzen. Bei Large-Scale Systems wird davon ausgegangen, dass ein großes System eine Struktur aufweist, bei der einzelne hierarchisch oder dezentral angeordnete Subsysteme voneinander unterschieden werden können [42]. Es findet daher zunächst eine Aufspaltung oder auch Dekomposition des Gesamtsystems in die Subsysteme statt. Die Analyse der Teilsysteme erfolgt dann individuell, ebenso werden Regler für die einzelnen Teilsysteme entwickelt und z. B. in einer hierarchischen Struktur miteinander verkopplert, um das Gesamtsystem zu regeln. Die Beschreibung des Gesamtsystems sowie seiner Teilsysteme erfolgt in den meisten Fällen als lineares

Differentialgleichungssystem. Basierend darauf wurden Verfahren zur Entkopplung und zur Approximation in Form einer Modellreduktion entwickelt und veröffentlicht. Da die Teilsysteme als lineare Systeme mit einer niedrigen Ordnung vorliegen, können für die Analyse sowie Reglersynthese die wohlbekannten Verfahren der linearen Regelungstheorie angewandt werden [60, 70]. Es gibt auch Veröffentlichungen, bei denen die Methoden der Large-Scale Systems auch mit anderen als den linearen Verfahren zusammen verwendet werden, so z. B. mit Fuzzy-Logik [42].

Als eine Weiterentwicklung der Large-Scale Systems kann die System-of-Systems (SoS) Theorie angesehen werden. Jamshidi definiert die SoS als ein großes, verteiltes System, welches aus einer Vielzahl nebenläufiger, komplexer Systeme besteht [86]. Bei diesem Ansatz wird davon ausgegangen, dass das interne Verhalten eines Teilsystems entkoppelt vom Gesamtsystemverhalten, welches auf der Interaktion der Teilsysteme basiert, betrachtet werden kann. In [8] wird z. B. ein Beschreibungsansatz vorgestellt, welcher die Teilsysteme als Knoten eines Graphen und deren Interaktionen als ungerichtete Kanten modelliert. Die Modellierung zielt auf eine statistische Untersuchung der Struktur ab, weshalb keine weiteren Modellbeschreibungen, wie z. B. Kantengewichte oder gerichtete Kanten, verwendet werden.

1.2.3 Systemanalyse mit Komplexen Netzwerken

Wie bereits erwähnt, werden z. B. in der Biologie, den Sozialwissenschaften, aber auch der Physik sowie der Epidemiologie und der Meteorologie, Komplexe Netzwerke zur Beschreibung und zur Untersuchung komplexer Systeme verwendet. Bei der Untersuchung steht vor allem das, auf den Verkopplungen basierende, Verhalten im Vordergrund. Die bereits aufgeführten Beispiele für komplexe Systeme sind das menschliche Gehirn, Verbindungen und Interaktionen zwischen Personen oder die Verknüpfung von Naturphänomenen wie Erdbeben und Vulkanausbrüche. Weitere Beispiele sind zudem die Untersuchung der Ausbreitungswege und -geschwindigkeit von Krankheiten sowie die Zusammenhänge von Wetterphänomenen. Die Modellierung und Analyse der Komplexen Netzwerke erfolgt mit Hilfe der Graphentheorie [9]. Die Knoten des Graphen beschreiben dabei ein Neuron, eine Person, ein Land oder ein Ereignis. Die Kanten verbinden die Knoten dann je nach ihrer Zusammengehörigkeit, wobei Richtungen vorgegeben werden können. Für die Untersuchung des Systemverhaltens werden Knotengrad, Pfade, Zyklen, Cluster oder verschiedene Spektren des Graphen statistisch untersucht. Eine detaillierte Einführung in die Komplexen Netzwerke sowie in die in der Arbeit verwendete Graphentheorie erfolgt in Kapitel 2. Inzwischen werden Komplexe Netzwerke auch bei der statistischen Auslegung und Analyse einer optimalen Struktur von vernetzten Regelungssystemen verwendet [64].

1.2.4 Graphenorientierte Modellierung

1.2.4.1 Petri-Netze

Eine weitverbreitete Form der ereignisdiskreten Modellierung in der Automatisierungstechnik sind die Petri-Netze. Die Petri-Netze sind eine Erweiterung der Automaten und bestehen aus Stellen und Transitionen. Diese sind wiederum durch Kanten miteinander verbunden und werden von Markern durchlaufen [33]. Das modellierte System liegt also in einer Art und Weise vor, die es erlaubt, das Systemverhalten zu simulieren, wobei die im Modell vorhandenen Marker auf Basis der mit den Transitionen verknüpften Regeln bewegt werden. Dies ermöglicht die Anwendung von Petri-Netzen zur Beschreibung diskreter Produktionsabläufe, wie sie in der Fertigungstechnik auftreten. Die Petri-Netz Modelle werden zunächst zur Systemanalyse herangezogen, um Produktionssysteme zu optimieren und das Auftreten unerwünschter Zustände, wie z. B. Deadlocks, zu untersuchen [61, 102]. Es wurden zudem Methoden zur Reglersynthese entwickelt, welche auf der Grundlage eines Petri-Netz Modells automatisch diskrete Regler entwerfen [37]. Über die Automatisierungstechnik hinaus werden inzwischen Petri-Netze in vielen Bereichen eingesetzt, so z. B. in der Systembiologie oder in den Betriebswissenschaften zur Beschreibung von Geschäftsprozessen [1, 57]. Zudem gibt es Erweiterungen der bereits vorhandenen Beschreibungsformen, wie z. B. hybride Petri-Netze, welche es ermöglichen, in derselben Beschreibungssprache sowohl diskrete als auch kontinuierliche Systembereiche zu modellieren [38].

1.2.4.2 Signalflussgraphen und Systemgraphen

Als graphische Darstellung des Übertragungsverhaltens von Systemen entwickelte Mason in den 50er Jahren den Signalflussgraphen [71]. Dieser modelliert die Systemzustände bzw. Signale als Knoten und die Übergänge zwischen ihnen als Kanten, wobei jeder Kante eine individuelle Übertragungsfunktion zugewiesen ist. Die Übertragungsfunktionen der Kanten beschreiben jeweils nur das Verhalten zwischen den Zuständen. Der Signalflussgraph kann auch direkt als Visualisierung eines linearen Zustandsraummodells angesehen werden. Dabei werden die Zustände sowie Ein- und Ausgänge als Knoten angesehen und die Kanten als Verknüpfungen zwischen den Knoten, welche durch die Einträge in der System-, Eingangs-, Ausgangs- und Durchgangsmatrix gegeben sind. Dabei können Kantengewichte mit den Matrixeinträgen verwendet werden, wodurch der Signalflussgraph dieselben Informationen wie das Zustandsraummodell enthält. Teilweise wird der Signalflussgraph auch als Systemgraph bezeichnet. Es existieren Transformationsschritte, welche es ermöglichen Pfade eines Signalflussgraphen aufzuspalten oder auch zusammenzufassen [82]. Ferner gibt es Ansätze, welche

den Signalflussgraphen durch Verwendung eines Mehrschicht-Graphen auf nichtlineare Systeme erweitern [92]. In mehreren Ebenen werden Graphen verwendet, die mit den Graphen in den benachbarten Ebenen wiederum über Kanten miteinander verbunden sind. Durch die Zuordnung von Funktionen zu den Kanten ist auf diese Weise die Darstellung von Multiplikationen möglich. Es gibt Anwendungen ohne Kantengewichte, bei denen die Struktur des Systems sowie deren Analyse im Vordergrund stehen. Mit Hilfe eines Signalflussgraphen lässt sich so z. B. die Abhängigkeit der Steuerbarkeit von einer bestimmten Systemstruktur untersuchen [56]. Für die Analyse der strukturellen Steuerbarkeit wurde ein für nichtlineare Systeme anwendbarer Signalflussgraph entwickelt [91]. Zur Analyse werden dabei Verknüpfungen innerhalb des Graphen mit Hilfe von graphentheoretischen Methoden untersucht.

1.2.4.3 Bondgraphen

Ähnlich wie die Signalflussgraphen oder Blockschaltbilder stellen Bondgraphen eine Möglichkeit zur grafischen Repräsentation dynamischer Systeme dar. Mit ihnen lassen sich physikalische Systeme beschreiben, wobei die Verbindungen innerhalb eines Bondgraphen unidirektional ausgeprägt sind. Grundidee des Bondgraphen ist der Transport von Energie zwischen den verbundenen Komponenten, wobei Energiefluss sowie Potential berücksichtigt werden [25]. Es handelt sich um eine physikalische Modellierung, welche die kausalen Zusammenhänge berücksichtigt und dabei einen Detaillierungsgrad aufweist, der für die Analyse komplexer Systeme ungeeignet ist.

1.2.4.4 Signed Directed Graph

Für die Diagnose von Fehlern werden seit den 80er Jahren sogenannte *Signed Directed Graphs* verwendet [72]. Mit Hilfe eines Graphen, bestehend aus gerichteten Kanten, werden dabei die kausalen Zusammenhänge von Prozessanlagen modelliert. Zur Beschreibung der Zustände und Gewichte werden die Symbole +, -, 0 und ? verwendet. Dabei symbolisiert die 0 den stationären Zustand, + und - einen positiven und negativen Zustand bzw. eine positive und negative Veränderung durch die Verbindungskante. Zustände werden zudem mit ? gekennzeichnet, wenn sich aktuell keine Aussage zum Zustand treffen lässt. In diskreten Schritten werden bei einer Simulation eines Signed Directed Graph die Zustände auf Basis der vorherigen Zustände und der gewichteten Kanten angepasst. Hierfür gibt es Tabellen mit Berechnungsvorschriften. Es gibt verschiedenste Anpassungen des Signed Directed Graph um auch komplexe Dynamiken im Modell darstellen zu können. So befasst sich [79] mit der Modellierung von Systemen mit Inverse-Response und Ausgleichsverhalten. Die Modelle werden zur

1 Einleitung

Fehlerdetektion eingesetzt, wobei durch erweiterte Vorschriften, zur Auswahl möglicher Ausgangssituationen des Systems vor einem aufgetretenen Fehler, auch Systeme mit Inverse-Response-Verhalten berücksichtigt werden können. Für die Analyse von Inverse-Response-Verhalten an sich ist der Signed Directed Graph nicht geeignet, da zwar die Richtung der Zustandsänderung angegeben wird, für eine Analyse auf Inverse-Response-Verhalten jedoch auch das zeitliche Verhalten sowie der stationäre Endwert zu berücksichtigten ist.

1.2.4.5 System Dynamics

Der von Jay W. Forrester entwickelte Ansatz der System Dynamics [26, 27], wird vor allem in den Betriebswissenschaften angewendet [76]. Nach der Erstellung eines Modells des zu betrachtenden Aspekts ergeben sich aus der Analyse und Simulation des Modells Hinweise für die Entscheidungsfindung. Im Rahmen der System Dynamics werden dabei bewusst Rückkopplungen mit in das Modell übernommen, wobei zwischen positiven (reinforcing loops) und negativen (balancing loops) Rückkopplungen unterschieden wird. Bei der qualitativen Modellierung und Analyse erfolgt die Betrachtung von kausalen Zusammenhängen zwischen den Akteuren. Die Aufbereitung von zunächst komplex erscheinenden Vorgängen und die Identifizierung von Einflüssen durch Rückkopplungen reichen in den meisten Anwendungsfällen bereits als Ergebnis aus. Für die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens ist jedoch die Ausprägung der Dynamik erforderlich, weshalb das qualitative Modell der System Dynamics nicht verwendet werden kann. Die quantitative Modellierung und Analyse der System Dynamics, bei der anhand des Modells und auf Basis bekannter Größen eine Simulation erfolgt, ist aufwendiger sowie meist nicht notwendig und kommt deshalb nur selten zum Einsatz [18]. Eine Simulation kann ebenfalls das Inverse-Response-Verhalten aufzeigen, ist aber in vielen Fällen mit einem hohen Aufwand verbunden, im Vergleich zur Analyse der Struktur.

1.2.5 Vernetzte Regelungssysteme

Der Bereich der vernetzten Regelung befasst sich mit Fragestellungen rund um verteilte Regelungssysteme, welche untereinander durch Kommunikationsmittel miteinander verbunden sind. So auch das Schwerpunktprogramm 1305 „Regelungstheorie digital vernetzter dynamischer Systeme“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft [65]. Der Fokus des Schwerpunktprogramms liegt dabei auf sich flexibel anpassende Informationskopplungen zwischen den Regelkreisen, wobei durch die Praxis bedingt digitale Kommunikationstechniken im Vordergrund liegen. Da die Informationsverbindungen nicht mehr als beständig angesehen werden und zudem die Zeitverzögerung sowie der Verlust von Informationspaketen im Kommunikationsnetzwerk auftreten können, müssen für den

Entwurf der einzelnen verteilten Regler Methoden entwickelt werden, die dies ermöglichen [11]. Zudem stellt sich je nach Anwendung die Frage, ob jedes Teilsystem bzw. jeder individuelle Regler auch mit jedem anderen im System verfügbaren kommunizieren muss oder ob es ein Optimum für die Auswahl der Kommunikationspartner gibt [21]. In beiden Fällen können Graphen für die Analyse der Verkopplungen eingesetzt werden. Dies ermöglicht zum einen eine grafische und für den Menschen interpretierbare Darstellung des Netzwerks sowie zum anderen eine mathematische Betrachtung durch die Verwendung der Adjazenzmatrix [83].

1.2.6 Diskussion

Der später vorgestellte Modellierungsansatz sowie Detektionsalgorithmus wurde mit Blick auf die Anwendung bei Produktions- und Fertigungsanlagen sowie Infrastruktureinrichtungen entwickelt. Hierbei handelt es sich um Systeme, welche aus einer großen Anzahl von Teilsystemen bestehen, die untereinander und mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung stehen. Auf die Wechselwirkung können wiederum einige Systemeigenschaften zurückgeführt werden, welche in den einzelnen Teilsystemen zunächst nicht auftreten. Insgesamt betrachtet ist es daher schwierig, das System als Ganzes zu beschreiben und zu verstehen, weshalb solche Systeme zu den „künstlichen“ komplexen Systemen gezählt werden können. Wegen des technischen Ursprungs der Systeme und mit Blick auf die Modellierung sowie Analyse im Kontext der Regelungstechnik ist die Bezeichnung dieser Systeme als Large-Scale Systeme denkbar. Dabei werden Teilsysteme identifiziert, welche dann individuell untersucht werden, dies ist bei der System-of-Systems Theorie ebenfalls der Fall. Diese Herangehensweise der Analyse klammert somit jedoch das Systemverhalten, welches durch die Verkopplungen der Teilsysteme bedingt ist, aus und entspricht somit nicht dem Ziel einer ganzheitlichen Analyse. Um die Zusammenhänge zwischen den Teilsystemen zu illustrieren, werden jedoch durchaus Graphen verwendet. Graphen werden auch bei der Betrachtung und Untersuchung komplexer Netzwerke verwendet, welche vor allem für „natürliche“ komplexe Systeme verwendet werden. Die komplexen Netzwerke betrachten das System und sein Verhalten als Ganzes, beziehen sich dabei jedoch auf statistische Auswertungen. Dies wiederum genügt nicht der Anforderung der Untersuchung des dynamischen Verhaltens. Die in der Technik bekannten Methoden, bei denen Graphen zur dynamischen Modellierung verwendet werden, sind zur simulationsbasierten Analyse ereignisdiskreter Systeme gedacht. Sie sind eine graphische Repräsentation der Modellgleichungen und somit keine vereinfachte Modelldarstellung bzw. nicht für das betrachtete Problem verwendbar, da ihre Beschreibungssprache nicht die notwendigen Elemente enthält. Zur Abgrenzung wurde noch das Forschungsfeld der vernetzten Regelungssysteme angeführt, welches

sich mit der Regelung im Kontext verteilter und miteinander vernetzter Regelungsstrategien sowie der damit zusammenhängenden Anwendungsproblematik beschäftigt. Die Analyse spielt hierbei nur mit Blick auf das jeweilige regelungstechnische Problem eine Rolle, eine allgemeine Systemanalyse verkoppelter sowie komplexer Systeme erfolgt dabei nicht.

Zusammenfassend ergibt sich, dass die betrachteten Methoden keine direkte Analyse der auf den Verkopplungen beruhenden Systemeigenschaften in einer einfachen Art und Weise ermöglichen, die auch bereits in einem frühen Entwicklungsstadium einsetzbar ist.

1.3 Ziele und Aufgaben

Wird ein großes und verkoppeltes System mit den bekannten Methoden für die regelungstechnische Untersuchung des dynamischen Verhaltens modelliert, so führt dies zu einem komplexen Modell. Besonders im Fall der Analyse des Inverse-Response-Verhaltens ist es von Bedeutung, die genaue Anzahl sowie das Vorzeichen der Nullstellen zu kennen. Dies bedeutet wiederum, dass das komplexe Ausgangssystem betrachtet werden muss und eine Modellreduktion zur Reduzierung der Komplexität nicht in Frage kommt. Eine Möglichkeit zur einfachen Modellierung komplexer Systeme und Zusammenhänge mit Blick auf die Verkopplungen des Systems wird durch die Komplexen Netzwerke bereitgestellt. Diese beschreiben jedoch nicht das für die Regelungstechnik im Allgemeinen und für die Analyse des Inverse-Response-Verhalten im Besonderen relevante dynamische Verhalten.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, die Verwendung Komplexer Netzwerke zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens großer und verkoppelter technischer Systeme am Beispiel der qualitativen Analyse des Inverse-Response-Verhaltens zu betrachten. Der entwickelte Detektionsalgorithmus ermöglicht die Untersuchung eines Systems auf Inverse-Response-Verhalten ohne die Notwendigkeit einer exakten Berechnung der Übertragungsnullstellen. Dazu wird ein Graphenmodell verwendet, welches den Modellsatz der Komplexen Netzwerke um die Beschreibung des dynamischen Verhaltens erweitert und die für die Analyse relevanten Bereiche des betrachteten Systems wiedergibt. Im Einzelnen betrachtet die Arbeit die folgenden Punkte:

- Darstellung der Modellierung und Analyse von komplexen Systemen unter Verwendung von Komplexen Netzwerken. Hierzu erfolgt eine kurze Einführung in die Graphentheorie, wobei die für die Arbeit relevanten Begriffe eingeführt werden. Nach einer Einführung in die gängigen Modelle der Komplexen Netzwerke wird ihre Verwendung zur statistischen Untersuchung nichttechnischer sowie technischer Systeme aufgezeigt. (Kapitel 2)

- Einführung des Modellierungsansatzes, welcher die Modellierung der Komplexen Netzwerke um die für die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens relevante dynamische Systembeschreibung ergänzt. Die Modellierung wird dabei anhand einfacher Beispiele aufgezeigt und diskutiert. (Kapitel 3)
- Beschreibung des neuen qualitativen Detektionsalgorithmus zur Untersuchung des Inverse-Response-Verhaltens basierend auf dem zuvor eingeführten Modellansatz. Dabei werden die Pfade zwischen betrachteten Ein- und Ausgängen des Systems ermittelt und ihre Kantengewichte in Ersatzpfadgewichte aggregiert. Für die Aggregation werden drei Verfahren dargestellt und verglichen. Durch den Vergleich der ermittelten Ersatzpfadgewichte ermöglicht der Algorithmus eine qualitative Aussage über das Auftreten des Inverse-Response-Verhaltens. Das Vorgehen bei der Detektion sowie die Vertrauenswürdigkeit des Ergebnisses werden anhand eines Beispiels eines Übertragungsfunktionsbasierten Graphen mit mehreren Ein- und Ausgängen illustriert und diskutiert. (Kapitel 4)
- Aufzeigen des praktischen Vorgehens sowie der Anwendbarkeit der Modellierung und Analyse mit Hilfe des Detektionsalgorithmus in der Praxis an einem Fallbeispiel. Für die Fallstudie wird die im Rahmen der vorliegenden Arbeit realisierte Prozessinsel verwendet, welche Teil der Modellfabrik μ Plant des Fachgebiets Mess- und Regelungstechnik ist. (Kapitel 5)

Zum Abschluss der Arbeit erfolgt eine Zusammenfassung sowie ein Ausblick in Kapitel 6. Im Anhang finden sich ergänzende Informationen.

2 Komplexe Netzwerke und Graphentheorie

2.1 Graphentheorie

Als Geburtsstunde der Graphentheorie wird das von Euler im 18. Jahrhundert gelöste Königsberger Brückenproblem angesehen. Dabei steht die Frage im Raum, ob es möglich sei, einen Rundgang durch die Stadt Königsberg zu machen und dabei jede der sieben Brücken über den Fluss Pregel genau einmal zu benutzen. Weitere Grundlagen wurden dann im 19. Jahrhundert gelegt, als graphentheoretische Überlegungen zur Analyse von elektrischen Netzwerken oder zur Untersuchung der Struktur von Molekülen in der Chemie herangezogen wurden. Anfang des 20. Jahrhunderts erschienen auch die ersten Bücher über die Graphentheorie, woraufhin diese eine weitere Verbreitung in verschiedensten Wissensgebieten fand. Als Vorteil der Graphen wird dabei meist die einfache Visualisierung mittels Punkten und Linien gesehen, die es ermöglicht, auch kompliziertere Strukturen darzustellen und anschließend mit den Methoden der Graphentheorie zu untersuchen [34, 44].

2.1.1 Grundlegende Begriffe

Die folgende Darstellung der Grundlagen der Graphentheorie orientiert sich an den Büchern von Distel [22] und Lau [52]. Es sei darauf hingewiesen, dass die Einführung bei weitem nicht das komplette Themengebiet erfasst.

2.1.1.1 Graph

Ein Graph besteht aus Knoten (manchmal auch als Ecken bezeichnet), welche über Kanten miteinander verbunden sind.

Definition 1: *Der Graph $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ setzt sich aus der Menge \mathcal{V} der Knoten sowie der Menge \mathcal{E} der Kanten zusammen, wobei die Elemente von \mathcal{E} eine Teilmenge von \mathcal{V} sind; $\mathcal{E} \subseteq [\mathcal{V}]^2$. Ein einzelner Knoten wird als $v \in \mathcal{V}$ bezeichnet und eine einzelne Kante als $e \in \mathcal{E}$. Eine Kante e wird durch ein Tupel von zwei Knoten beschrieben: $e = (v_i, v_j)$ mit $v_i, v_j \in \mathcal{V}$, wobei v_i der Startknoten der Kante und v_j ihr Endknoten ist.*

In der vorliegenden Arbeit wird für die Kanten eines Graphen die Notation e_n verwendet, wobei n für die Bezeichnung der Kante steht. Für die Bezeichnung ist es unter anderem Möglich die Kanten durchnummerieren oder auch mit den Bezeichnungen des Start- und Endknotens zu versehen. Es gelten folgende Definitionen, welche zum Teil in Bild 2.1 illustriert sind:

- $|\mathcal{G}|$ ist die **Ordnung eines Graphen** und entspricht $|\mathcal{V}(\mathcal{G})|$ und somit der Anzahl der Knoten.
- Ein Graph mit der Ordnung 0 oder 1 wird als **trivial** bezeichnet.
- \emptyset bezeichnet den **leeren Graphen** $\mathcal{G} = (\emptyset, \emptyset)$.
- Ein Graph \mathcal{G} für den gilt, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(\mathcal{G}) \forall v_i, v_j \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$, ist ein **vollständiger Graph**.
- $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ ist **Teilgraph** von $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, wenn gilt: $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$.
- Gibt es zu jeder Kante $e_n = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ mit $v_i, v_j \in \mathcal{V}$ eine Kante $e_{\bar{n}} = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$, so wird der Graph als **ungerichteter Graph** bezeichnet. Wird angegeben, dass es sich um einen ungerichteten Graphen handelt, so kann für die Menge $\mathcal{E} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_3, v_2), (v_2, v_3), \dots\}$ vereinfacht geschrieben werden $\tilde{\mathcal{E}} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots\}$.
- Besitzt ein Graph mindestens eine Kante $e_n = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ mit $v_i, v_j \in \mathcal{V}$, zu der es keine Kante $e_{\bar{n}} = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ gibt, so wird der Graph als **gerichteter Graph** bezeichnet.
- Eine Kante $e_n = (v_i, v_i)$ wird als **Schlinge** bezeichnet.
- Die Knoten $v_i, v_j \in \mathcal{V}$ heißen **benachbart** genau dann, wenn eine Kante (v_i, v_j) bzw. $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ zwischen den Knoten existiert. Gilt dies nicht, so sind die Knoten **unabhängig**.
- Als **Nachbarn** eines Knoten werden alle mit ihm verbundenen Knoten der Menge $N_{\mathcal{G}}(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \cup (v_j, v_i) \in \mathcal{E} \forall v_i, v_j \in \mathcal{V} \wedge v_i \neq v_j\}$ bezeichnet.
- Ein Knoten v_i für den gilt $N_{\mathcal{G}}(v_i) = \emptyset$, wird als **isoliert** bezeichnet.

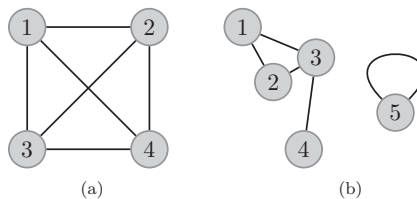


Bild 2.1: (a) Vollständiger Graph der Ordnung $|\mathcal{G}| = 4$. (b) Ungerichteter Graph mit dem isolierten Knoten 5, welcher über eine Schlinge verfügt. Der Knoten 1 ist mit den Knoten 2 und 3 benachbart sowie unabhängig bezüglich der Knoten 4 und 5.

Gewichteter Graph Ein (ungerichteter sowie ein gerichteter) Graph kann durch Kantengewichte ergänzt werden. Hierzu wird eine weitere Menge $\mathcal{W} \equiv \{w_1, w_2, \dots, w_{|\mathcal{E}|}\}$ eingeführt, wobei w_n der Kante e_n zugeordnet ist. Mit Hilfe der Kantengewichte lassen sich Eigenschaften von Kanten genauer spezifizieren. So kann ein Kantengewicht z. B. die Länge einer Verbindungsstrecke oder eine zeitliche Verzögerung zwischen zwei Knoten repräsentieren. In den bereits betrachteten Fällen wurde von einer einheitlichen Gewichtung mit eins ausgegangen.

Vorzeichenbehafteter Graph Eine Vereinfachung der Gewichtung kann durch die Verwendung von vorzeichenbehafteten Graphen erfolgen. Sie können verwendet werden, wenn es bei der Darstellung eines Systems nicht notwendig ist, die Gewichte zu kennen, sondern eine Aussage bezüglich der Auswirkungen einer Kante auf einen Knoten gefragt ist. So können die Kanten eines gerichteten Graphen durch Vorzeichen ergänzt und somit ein positiver oder negativer Einfluss des Startknotens auf den Endknoten markiert werden. Mit Hilfe dieser Darstellung lässt sich das beschriebene System auf positive oder negative Rückkopplungen untersuchen.

2.1.1.2 Kantenfolge, Pfad und Kreis

Es gibt weitere Begriffe, welche die Topologie eines Graphen oder Subgraphen spezifizieren. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Topologiebegriffe werden im Folgenden definiert.

Definition 2: *Es sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein ungerichteter Graph (bzw. gerichteter Graph), mit den Knoten $v_0, v_1, \dots, v_J \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ und ebenso vielen Kanten $e_1, e_2, \dots, e_J \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Dann heißt das Tupel*

$$\mathcal{K} := (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, e_J, v_J) \quad (2.1)$$

Kantenfolge (bzw. gerichtete Kantenfolge) von v_0 nach v_J der Länge J des ungerichteten Graphen (bzw. gerichteten Graphen) \mathcal{G} [52].

Des Weiteren gilt für eine Kantenfolge:

- Ist $v_0 \neq v_J$, so ist die Kantenfolge **offen**. Bei $v_0 = v_J$ handelt es sich um eine **geschlossene** Kantenfolge.

Ein Beispiel für eine offene Kantenfolge ist in Bild 2.2 als Strichpunktlinie eingezeichnet.

Definition 3: *Ein Pfad ist ein nicht leerer Teilgraph $\mathcal{S} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ der Form*

$$\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_J\} \quad \mathcal{E} = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{J-1}, v_J)\} \quad (2.2)$$

wobei die Knoten v_i paarweise verschieden sind [22].

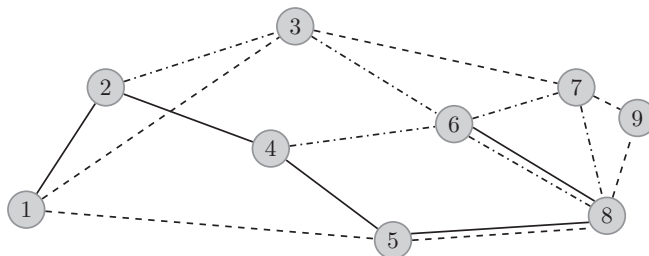


Bild 2.2: (Strichpunkt) Offene Kantenfolge der Länge 6. (Durchgezogen) Pfad der Länge 5 mit den Endknoten 1 und 6. (Strich) Kreis der Länge 6.

Ein Beispiel für einen Pfad ist als durchgezogene Linie im Bild 2.2 dargestellt, wobei zur genaueren Beschreibung eines Pfades gilt:

- Die Knoten v_0 und v_J sind die **Endknoten** von \mathcal{S} und durch den Pfad \mathcal{S} verbunden.
- Als **innere Knoten** von \mathcal{S} werden die Knoten v_1, \dots, v_{J-1} bezeichnet.
- Die Anzahl J von Kanten eines Pfades heißt seine **Länge**. Ein Pfad der Länge J wird als \mathcal{S}^J bezeichnet.
- Der Pfad \mathcal{S}^J wird auch als Folge seiner Knoten geschrieben, $\mathcal{S}^J = v_0v_1\dots v_J$.
- Zwei oder mehrere Pfade werden als **kreuzungsfrei** bezeichnet, wenn keiner einen inneren Knoten des anderen enthält.

Definition 4: Ein Pfad $\mathcal{S} = v_0v_1\dots v_{J-1}$ mit einer Kantenfolge $\mathcal{K} = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{J-1}, e_J, v_0)$ wird als **Kreis** \mathcal{C} bezeichnet.

Auch ein Beispiel für einen Kreis ist in Bild 2.2 als gestrichelte Linie dargestellt. Die Länge des Beispielpfades ist sechs, wozu Folgendes zu beachten ist:

- Die **Länge** eines Kreises ist definiert als die Anzahl seiner Kanten. Ein Kreis mit J Kanten wird dann als \mathcal{C}^J bezeichnet [22].
- Ein Kreis kann ebenfalls als Folge seiner Knoten beschrieben werden mit $\mathcal{C}^J = (v_0v_1\dots v_{J-1}v_0)$ [22].

2.1.1.3 Darstellung von Graphen

Um einen Graphen darzustellen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Neben der Darstellung als Adjazenzliste oder Adjazenzmatrix ist die graphische Darstellung weit verbreitet. Die drei genannten Darstellungsarten werden im Folgenden eingeführt.

Graphische Darstellung Bei der graphischen Darstellung werden die Knoten des Graphen als Punkte gezeichnet. Die Kanten werden dann entsprechend ihrer Indizierung

$e_n = (v_i, v_j)$ als Linien zwischen den Knoten eingezeichnet. Für die Anordnung der Punkte auf der Zeichenebene gibt es keine weiteren Vorschriften. Die Anordnung sollte vielmehr zweckmäßig an die zu zeichnenden Graphen angepasst werden. Dies führt jedoch zu einer Vielzahl von Darstellungsmöglichkeiten für ein und denselben Graphen.

Beispiel 1: *Abbildung 2.3 zeigt drei Möglichkeiten zur Darstellung des ungerichteten Graphen:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (\mathcal{V}, \mathcal{E}) \text{ mit} \\ \mathcal{V} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ und } \tilde{\mathcal{E}} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

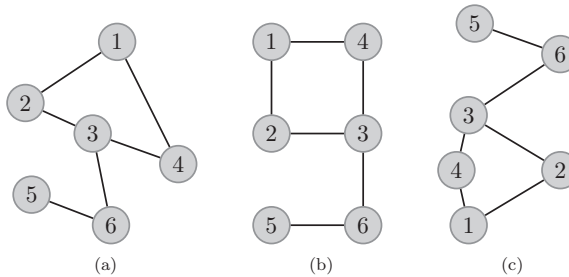


Bild 2.3: Beispielhafte Darstellung des Graphen (2.3) mit Punkten und Linien.

Matrixdarstellung Um Berechnungen auf und mit Hilfe von Graphen zu ermöglichen, ist es sinnvoll, diese mittels Matrizen darzustellen. Somit ist es möglich, Computer zur Lösung verschiedenster Aufgaben an einem Graphen heranzuziehen. Die grundlegendste Form der Darstellung ist die Adjazenzmatrix, welche einen Graphen durch die Angabe der vorhandenen Kanten beschreibt. Zur Darstellung eines Graphen \mathcal{G} wird eine $n \times n$ Matrix \mathbf{A} mit $n = |\mathcal{G}|$ verwendet. Die Einträge $a_{i,j}$ der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ sind wie folgt definiert:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Handelt es sich bei dem Graphen um einen ungerichteten Graphen, so ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.

Beispiel 2: Für den ungerichteten Graphen aus Beispiel 1 ergibt sich dann folgende symmetrische Adjazenzmatrix:

$$\mathbf{A}(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Sollen weitere Eigenschaften in dem Graphen dargestellt werden, so kann dies durch die Gewichtungen der Kanten erfolgen. Dazu wird die Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}(\mathcal{G})$ verwendet, welche dieselbe Größe und denselben Aufbau wie die Adjazenzmatrix besitzt. Die Einträge sind aber nicht mehr zwingend 0 oder 1, sondern entsprechen dem Gewicht der zugehörigen Kante. Somit setzt sich die Gewichtungsmatrix zusammen als:

$$w_{i,j} = \begin{cases} w_n, & \text{wenn } e_n = (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.6)$$

Adjazenzliste Neben der Darstellung in Form einer Matrix kann auch eine Liste verwendet werden. Da eine Adjazenzmatrix meistens nur schwach besetzt ist, werden mit einer Liste die Nulleinträge gespart und somit entsprechend auch Speicherplatz. Die Adjazenzliste $L(v_i)$ enthält jeweils die Nachbarn eines Knoten und wird für jeden Knoten $v_i \in \mathcal{V}$ des Graphen wie folgt definiert:

$$L(v_i) = \{v_j | (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \forall v_j \in \mathcal{V}\} . \quad (2.7)$$

2.1.2 Metriken auf einem Graph

Zur Untersuchung eines Graphen werden eine Reihe von Maßen verwendet, wovon im Folgenden einige eingeführt werden. Die Auswahl ist dabei auf jene Maße beschränkt, die auch bei der Analyse von Komplexen Netzwerken verwendet werden (siehe Abschnitt 2.2).

2.1.2.1 Ungewichtete Graphen

Knotengrad eines ungerichteten Graphen Es sei $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein ungerichteter, schlingenfreier Graph mit dem Knoten $v_i \in \mathcal{V}$. Der **Grad des Knotens** v_i ist definiert als die Anzahl der mit ihm indizierten Kanten, wobei sich dieser aus der Anzahl der Nachbarn

ergibt [22]:

$$d_{\mathcal{G}}(v_i) = |N_{\mathcal{G}}(v_i)| . \quad (2.8)$$

- Der **Minimalgrad** von \mathcal{G} ist der kleinste vorkommende Knotengrad im Graphen,

$$\delta(\mathcal{G}) := \min_{v_i \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v_i) . \quad (2.9)$$

- Der **Maximalgrad** von \mathcal{G} ist der größte vorkommende Knotengrad im Graphen,

$$\Delta(\mathcal{G}) := \max_{v_i \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v_i) . \quad (2.10)$$

- Als **Durchschnittsgrad** wird die Zahl

$$d(\mathcal{G}) := \sum_{v_i \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v_i) / |\mathcal{V}| \quad (2.11)$$

bezeichnet.

Knotengrad eines gerichteten Graphen Im Fall eines gerichteten, schlingenfreien Graphen unterscheidet man zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangsgrad eines Knoten. Es sei $v_i \in \mathcal{V}$ ein Knoten des gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, dann ergibt sich der Ausgangsgrad des Knotens v_i als

$$d_{\mathcal{G}}^{-}(v_i) = |\{e_n | e_n = (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \forall v_j \in \mathcal{V}\}| \quad (2.12)$$

und der Eingangsgrad des Knotens v_i als

$$d_{\mathcal{G}}^{+}(v_i) = |\{e_n | e_n = (v_j, v_i) \in \mathcal{E} \forall v_j \in \mathcal{V}\}| . \quad (2.13)$$

- Einen Knoten mit $d_{\mathcal{G}}^{-}(v_i) = 0$ und $d_{\mathcal{G}}^{+}(v_i) \neq 0$ nennt man **Senke**. Dem gegenüber wird ein Knoten mit $d_{\mathcal{G}}^{-}(v_i) \neq 0$ und $d_{\mathcal{G}}^{+}(v_i) = 0$ als **Quelle** bezeichnet.
- Analog zum Minimalgrad eines ungerichteten Graphen ergibt sich für einen gerichteten Graphen ein **minimaler Eingangs- bzw. Ausgangsgrad**, $\delta^{+}(\mathcal{G})$ bzw. $\delta^{-}(\mathcal{G})$.
- Auch im Fall des Maximalgrads ergibt sich, analog zum ungerichteten Graphen, bei einem gerichteten Graphen ein **maximaler Eingangs- bzw. Ausgangsgrad**, $\Delta^{+}(\mathcal{G})$ bzw. $\Delta^{-}(\mathcal{G})$.
- Ebenfalls analog zum ungerichteten Graphen ergibt sich der **durchschnittliche Eingangs- bzw. Ausgangsgrad**, $d^{+}(\mathcal{G})$ bzw. $d^{-}(\mathcal{G})$.

Abstand zweier Knoten Es sei \mathcal{G} ein Graph mit den Kanten $v_i, v_j \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$. So ist der Abstand $D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j)$ definiert als die Länge des kürzesten Pfads von v_i nach v_j .

$$D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j) = \min_{\mathcal{S} \in \mathcal{G} \text{ mit Anfangsknoten } v_i \text{ und Endknoten } v_j} \left\{ k \mid \mathcal{S}^k = v_i v_1 \dots v_{k-1} v_j \right\} \quad (2.14)$$

Im Fall $v_i = v_j$ gilt $D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j) = 0$. Existiert kein Pfad von v_i nach v_j , so ist $D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j) = \infty$.

Durchmesser eines Graphen Der Durchmesser eines Graphen \mathcal{G} definiert sich zu:

$$\text{diam}(\mathcal{G}) := \max_{v_i, v_j \in \mathcal{V}(\mathcal{G})} D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j) . \quad (2.15)$$

Er beschreibt den maximal auftretenden Abstand zwischen den Knoten des Graphen.

Radius eines Graphen Der Radius eines Graphen \mathcal{G} definiert sich zu:

$$\text{rad}(\mathcal{G}) := \min_{v_i, v_j \in \mathcal{V}(\mathcal{G})} D_{\mathcal{G}}(v_i, v_j) . \quad (2.16)$$

Der Radius entspricht somit dem geringsten Durchmesser.

Clusterkoeffizient Ebenfalls von Interesse sind Gruppen von Knoten innerhalb eines Graphen, bei denen eine starke Verknüpfung untereinander, aber eine schwache zu außerhalb liegenden Knoten vorhanden ist. Solche Gruppen werden als *Cluster* bezeichnet. Die Tendenz, ob ein Knoten zu einem solchen Cluster gehört oder nicht, lässt sich über den *Clusterkoeffizienten* ausdrücken. Er bezieht sich auf das Verhältnis der vorhandenen Verbindungen eines Knotens und den theoretisch möglichen. Der Clusterkoeffizient eines Knotens $v_i \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ eines ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ist definiert als:

$$C(v_i) = \frac{\sum_{v_j \in N_{\mathcal{G}}(v_i)} |N_{\mathcal{G}}(v_j) \cap N_{\mathcal{G}}(v_i)|}{\frac{1}{2} |N_{\mathcal{G}}(v_i)| (|N_{\mathcal{G}}(v_i)| - 1)} . \quad (2.17)$$

Der Mittelwert der Clusterkoeffizienten aller Knoten eines Graphen ist dann der Clusterkoeffizient des gesamten Graphen.

2.1.2.2 Gewichtete Graphen

Die oben angegebenen Metriken sind jeweils für ungewichtete Graphen definiert. Eine Übertragung auf gewichtete oder auch vorzeichenbehaftete Graphen ist möglich, aufgrund der vorhandenen Analogien zu den bereits beschriebenen Metriken wird hierauf

an dieser Stelle jedoch verzichtet. Es sei noch gesagt, dass sich bei den Metriken für gewichtete Graphen in Abhängigkeit der gewählten Metrik unterschiedliche Ergebnisse erzielen lassen. So kann der Knotengrad wie gehabt verwendet oder durch die Summe der Gewichte angepasst werden, wobei eine absolute oder eine normierte Summe Anwendung finden kann.

2.2 Komplexe Netzwerke

Die Komplexen Netzwerke entwickelten sich aus der Graphentheorie (siehe Abschnitt 2.1) und ersten Untersuchungen sozialer Netzwerke, welche seit den 1920er Jahren betrieben wurden [9]. Im Jahr 1961 veröffentlichten Erdős und Rényi erste Arbeiten über die Analyse sogenannter Zufallsgraphen (engl.: random graphs) [24], deren Ideen anschließend auf reale Systeme aus den Bereichen der Soziologie und Biologie übertragen wurden. Ende der 1990er Jahre gewann das Forschungsgebiet der Komplexen Netzwerke weiter an Bedeutung, bedingt unter anderem durch eine zunehmende Rechenleistung. Aus dieser Zeit stammen die grundlegenden Arbeiten von Watts und Strogatz [106], Barabási und Albert [6] und weiteren Forschern wie z.B. [4, 93]. Es stellte sich heraus, dass der bisherige Ansatz für Zufallsgraphen nicht das Verhalten bzw. den Aufbau realer Systeme widerspiegelt. Unter dem Schlagwort „Small-World“ wurden eine Reihe weiterer Modelle entwickelt, die der Realität näher kommen. Die entwickelten Netzwerkmodelle wurden statistisch untersucht, um Rückschlüsse auf reale Systeme treffen zu können. Nach der Jahrtausendwende rückten zunehmend Fragestellungen nach dem dynamischen Verhalten von Komplexen Netzen und den durch sie beschriebenen Systemen in den Vordergrund. Der folgende Abschnitt soll einen kurzen Überblick über das Forschungsgebiet der Komplexen Netze geben, wofür zunächst einzelne Netzwerktypen genauer betrachtet werden, bevor auf deren Analyse eingegangen wird.

2.2.1 Modelle und Analyse

2.2.1.1 „Zufallsgraphen“

Erdős und Rényi definierten einen Zufallsgraphen als einen Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ mit einer festen Anzahl an Knoten $L = |\mathcal{V}|$, wobei zwei Knoten mit der Wahrscheinlichkeit p miteinander verbunden sind [23]. Somit ist die Anzahl der Kanten $N = |\mathcal{E}|$ in einem Graphen zufällig, wobei ein Erwartungswert existiert: $E(N) = p[L(L-1)/2]$. Abbildung 2.4 zeigt drei Realisierungen von Zufallsgraphen mit jeweils 50 Knoten, welche jedoch mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten miteinander verbunden sind. Bei der Untersuchung von Zufallsgraphen stellten Erdős und Rényi fest, dass Teilgraphen

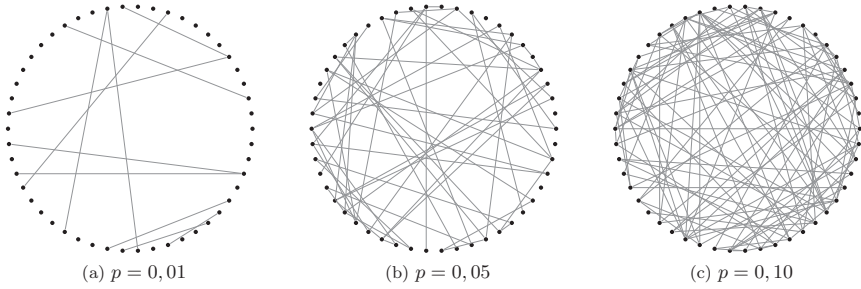


Bild 2.4: Realisierungen von Zufallsgraphen mit jeweils $L = 50$ und drei verschiedenen Wahrscheinlichkeiten $p = 0,01$, $p = 0,05$ und $p = 0,10$.

wie Bäume und Kreise schlagartig auftreten, sobald die Wahrscheinlichkeit p eine feste Grenze erreicht. Einige Beispiele hierfür sind in Bild 2.5 dargestellt, wobei für die Wahrscheinlichkeit gilt: $p \sim L^z$, mit der Anzahl an Knoten L sowie dem frei wählbaren Parametern z . So verfügen nahezu alle Graphen mit $p \geq L^{-3/2}$ über mindestens einen Baum der Ordnung drei [3]. Weitere Untersuchungen erfolgten zur Verteilung des

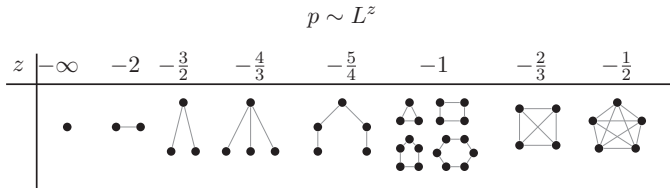


Bild 2.5: Verschiedener Strukturen mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitswert [3].

Knotengrads sowie zum Durchmesser und dem Clusterkoeffizienten. Es konnte gezeigt werden, dass die Verteilung des Knotengrads einer Binomialverteilung entspricht

$$P(N_i = N) = C_{L-1}^N \cdot p^N \cdot (1-p)^{L-1-N}, \tag{2.18}$$

welche sich für große L an eine Poisson-Verteilung annähert. Die Verteilung ist in Bild 2.6 für einen Zufallsgraph mit $L = 10^5$ Knoten und einer Verbindungswahrscheinlichkeit von $p = 0,0015$ dargestellt. Neben der auf die Anzahl der Knoten L normierten erwarteten Verteilung $E(X_{d_G})$ ist auch die berechnete Anzahl an Knoten X_{d_G} mit dem Knotengrad $d_G(v_i)$ dargestellt. Für den Durchmesser eines Zufallsgraphen wurde

$$\text{diam}(\mathcal{G}) = \frac{\ln(L)}{\ln(p \cdot L)}, \tag{2.19}$$

als typischer Wert eines Graphen mit einer Knotenanzahl L und Verbindungen der Kanten mit der Wahrscheinlichkeit p ermittelt. Zudem wurde festgestellt, dass dieser

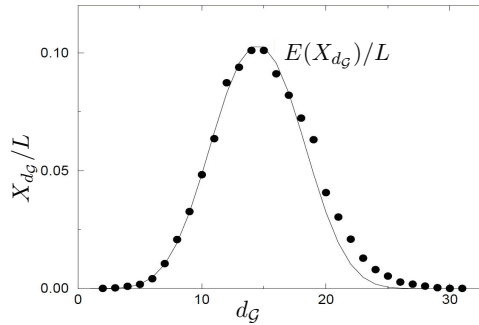


Bild 2.6: Verteilung des Knotengrads eines Zufallsgraphen [3]. Die durchgezogene Linie zeigt die Poisson-Verteilung, die Punkte entsprechen den berechneten Werten.

Wert proportional zur durchschnittlichen Pfadlänge skaliert. Der Clusterkoeffizient eines Zufallsgraphen ist gleich der Verbindungswahrscheinlichkeit; $C_G = p$. Bei der Bestimmung des Clusterkoeffizienten realer Netzwerke hat sich ergeben, dass dieser nicht dem Verhalten von Zufallsgraphen entspricht, sondern größer ist. Dies führte zu weiteren Untersuchungen von Netzwerken und ihrem Aufbau, worauf im nachfolgenden Abschnitt eingegangen wird.

2.2.1.2 „Small-World“ von Watts und Strogatz

Um die Bekanntheitsverknüpfungen zwischen Personen zu untersuchen, führte der Psychologe Stanley Milgram in den 60er Jahren das folgende Experiment durch. Sechzig Personen aus Omaha und Wichita in den USA wurde ein Packet gegeben, das sie an eine festgelegte Person in Bosten, ebenfalls in den USA, senden sollten. Die Aufgabe wurde dadurch erschwert, dass das Packet nicht einfach direkt an den Adressaten gegeben werden sollte, sondern nur an persönlich bekannte Personen, von denen eine nähere Verbindung zum Empfänger erhofft wurde. Das erstaunliche Ergebnis der Untersuchung war, dass die ankommenden Pakete im Schnitt nach sechs Zwischenschritten den Empfänger erreichten. Die Ergebnisse der Studie wurden anschließend als „Small-World“-Phänomen auch außerhalb der Wissenschaft bekannt [73].

Im Jahr 1998 stellten Watts und Strogatz ein komplexes Netzwerk mit der Bezeichnung Small-World-Netzwerk vor, welches das von Milgram aufgezeigte Phänomen aufgriff. Die Grundlage für den Small-World-Graphen bildet eine reguläre Anordnung von L Knoten. Diese können z. B. in einem Ring angeordnet und jeweils mit $2 \cdot r$ Nachbarn verbunden sein, wobei r zu Beginn festgelegt wird. (Die Anzahl der Kanten im Graphen ist dann $N = r \cdot L$.) Ausgehend von dieser Anordnung werden im Uhrzeigersinn alle Knoten

bearbeitet und einzelne Verbindungen neu gelegt. Die bestehende Verbindung eines Knoten zu einem seiner Nachbarn wird mit einer Wahrscheinlichkeit p aufgelöst und mit einem zufällig gewählten anderen Knoten verbunden. Somit ergibt sich für $p = 0$ der reguläre Anfangsgraph und für $p = 1$ ein Zufallsgraph mit L Knoten. Abbildung 2.7 zeigt die Veränderung des anfänglichen regulären Netzes, wenn die Wahrscheinlichkeit p für das Austauschen einer Verbindung erhöht wird.

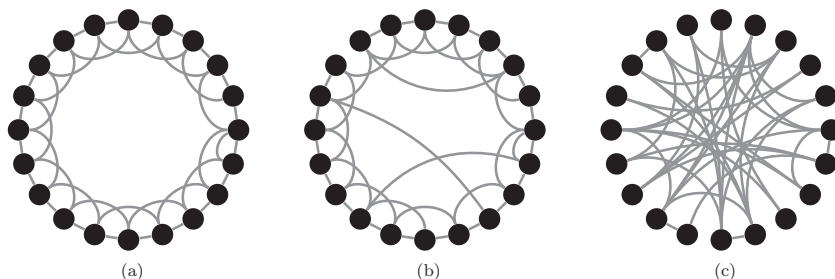


Bild 2.7: Watts und Strogatz Netzwerkmodell für zunehmende Wahrscheinlichkeiten p von (a) nach (c) [3].

Da die Small-World-Eigenschaft eines Netzwerkes mit der Länge der Pfade zwischen den Knoten zusammen hängt, waren erste Untersuchungen der erstellten Methoden auf die durchschnittliche Pfadlänge ausgerichtet. So wurde für die Länge J eines Pfades in einem Watts-Strogatz (WS) Modell festgestellt, dass J für kleine p linear und für große p logarithmisch skaliert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass mit zunehmendem p auch die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen einer Abkürzung zwischen weit entfernten Teilen des Netzwerkes steigt. Weitere Untersuchungen erbrachten, dass J erst kleiner wird, wenn $p \geq 1/(L \cdot r)$ gilt und somit auch in diesem Fall eine sprunghafte Änderung einer Systemeigenschaft vorliegt. Neben der Pfadlänge wurde bei der Untersuchung von WS-Netzen zudem der durchschnittliche Clusterkoeffizient betrachtet. Dieser ist für kleine p relativ groß im Vergleich zu dem von Zufallsgraphen, nähert sich aber mit steigendem p den bekannten Werten an.

2.2.1.3 Skalenfreie Netze

Die Betrachtung der Verteilung des Knotengrads von realen Systemen hat gezeigt, dass diese nicht einer Poisson-Verteilung, sondern einem Potenzgesetz folgen. Als Reaktion hierauf wurde Ende der 90er Jahre ein Netzwerkmodell entwickelt, welches auch der Verteilung des Knotengrads Rechnung trägt. Bei der Erstellung des Netzes wird dabei nicht mehr auf einen festen Satz an Knoten gebaut, sondern der Entstehungsprozess eines Netzes nachgebildet. So baut das von Barabási und Albert entwickelte BA-Modell (Barabási-Albert-Modell) auf einer Basisstruktur auf, wie z. B. einem vollständigen Graphen mit drei Knoten. Während der Entwicklung werden anschließend

sukzessive Knoten hinzugefügt und mit einer festen Anzahl r bereits vorhandener Knoten verbunden. Die Wahl der Nachbarn des neuen Knotens erfolgt dabei nicht mit einer fest vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, wie es bei Zufallsgraphen der Fall ist. Die Wahrscheinlichkeit wird im Falle des BA-Modells durch die Anzahl der benachbarten Knoten beeinflusst. Besitzt ein Knoten viele Nachbarn, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der neu hinzugefügte Knoten ebenfalls mit ihm verbunden ist, höher als bei einem Knoten mit weniger Nachbarn. Dieses Vorgehen wird auch mit „rich get richer“ betitelt und fördert die Ausprägung von zentralen Knoten, welche eine Vielzahl anderer Knoten miteinander verbinden. In Abbildung 2.8 ist ein BA-Modell bestehend aus 50 Knoten dargestellt; die zentralen Knoten sind größer eingezeichnet.

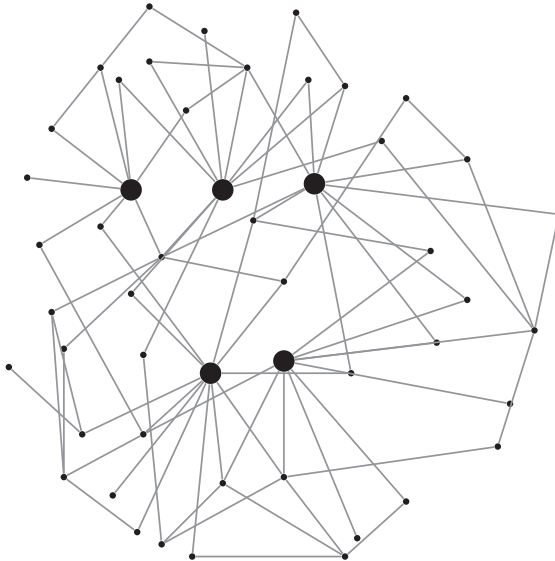


Bild 2.8: Komplexes Netz nach Barabási und Albert, zentrale Knoten sind hervorgehoben.

Im Hinblick auf die Entwicklungsgeschichte des BA-Modells, welches zur Bildung von skalenfreien Netzen entwickelt wurde, ist die als erstes zu betrachtende Eigenschaft die Verteilung des Knotengrads. Wie erwartet verläuft diese nach einem Potenzgesetz. Aus der Untersuchung von Komplexen Netzen nach dem BA-Modell ergibt sich eine Verteilung mit:

$$P(d_G) \propto d_G^{-3}. \quad (2.20)$$

Neben der Verteilung des Knotengrads wurden die BA-Netze, wie auch die bereits vorgestellten weiteren Netzwerktypen, auf Eigenschaften wie z. B. die durchschnittliche Pfadlänge oder den Clusterkoeffizienten untersucht. Für die durchschnittliche Pfadlänge

wurde eine Verbindung zur Anzahl der Knoten festgestellt:

$$J \propto \frac{\ln(L)}{\ln(\ln(L))}. \quad (2.21)$$

Der Clusterkoeffizient eines BA-Netztes ist größer als der eines Zufallsgraphen, unterscheidet sich jedoch auch von der bereits beschriebenen Small-World-Eigenschaft. Dies hängt damit zusammen, dass er nicht für alle L gleich ist, sondern ebenfalls einem Potenzgesetz folgt:

$$C_G \propto L^{-0,75}. \quad (2.22)$$

Bei der Betrachtung von Netzen nach dem BA-Modell kommt die Untersuchung der dynamischen Eigenschaften neu hinzu, worunter man die Betrachtung des Entwicklungsprozesses eines Netztes und seiner Zustände zu verschiedenen Zeitpunkten versteht. Barabási, Albert und Jeong [3] betrachteten zunächst den Knotengrad $d_G(v_i)$, den der Knoten v_i über der Zeit besitzt, und stellten die folgende Differenzialgleichung auf:

$$\frac{\partial d_G(v_i)(t)}{\partial t} = r \cdot \frac{d_G(v_i)}{\sum_{j=1}^{L-1} d_G(v_j)} = \frac{d_G(v_i)}{2t}, \quad (2.23)$$

wobei r die Anzahl der Verbindungen eines neuen Knotens und t die Zeit ist. Des Weiteren schließt die Summe den neu hinzugefügten Knoten nicht mit ein. Mit dem Anfangswert $d_G(v_i)(t_{v_i}) = N$ lässt sich die Differenzialgleichung lösen und es ergibt sich auch hier ein Potenzgesetz:

$$d_G(v_i)(t) = r \left(\frac{t}{t_{v_i}} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

2.2.2 Nichttechnische Anwendungsbeispiele

Bedingt durch die Entwicklung der Komplexen Netzwerke lassen sich die meisten Anwendungen in der Soziologie oder den Naturwissenschaften wie der Biologie, Chemie und Physik finden. Eine breite Übersicht von Anwendungsbeispielen der Komplexen Netzwerke gibt es unter anderem in [17]. In der Soziologie sind neben dem Beispiel aus den Anfängen der Komplexen Netzwerke, bei denen das „Small-World“-Phänomen [73] untersucht wurde, auch weitere Beispiele zu nennen. So befassen sich einige Arbeiten auf Basis verschiedenster Datenquellen eingehender mit der Untersuchung der Beziehungen zwischen Personen. Zu Beginn wurden unter anderem Filmdatenbanken verwendet, um die Beziehungen zwischen Schauspielern zu analysieren, da diese Daten einfach zugänglich waren [17]. Seit der zunehmenden Verbreitung sozialer Netzwerke, wie z. B. Facebook, bieten diese eine ganz neue und reichhaltige Grundlage zur Untersuchung

von Verknüpfungen und Beziehungen zwischen verschiedenen Personen [13, 55]. Weitere nichttechnische Beispiele sind die Untersuchung der Transportwege zwischen Städten oder ganzen Staaten. Verbunden mit dem Wirtschaftsaufkommen als Gewichtung des Netzwerkes lässt sich so z. B. der Welthandel analysieren [17]. Werden hingegen die Anzahl an Reisenden und die Frequenz der Verbindungen als Gewichte herangezogen, können Epidemieverläufe untersucht werden, um die optimalen Angriffspunkte zu finden [78].

2.2.3 Anwendungsbeispiele für technische Systeme

Es gibt bereits Arbeiten zur Untersuchung von technischen Systemen, wenn diese als Komplexes Netzwerk betrachtet werden. Es handelt sich dabei um statistische Analysen, welche vornehmlich auf Infrastruktureinrichtungen angewandt werden. Als Beispiel hierfür werden zwei Anwendungen betrachtet, zum einen Stromverteilnetzwerke und zum anderen Kommunikationsnetzwerke. Arbeiten zur Analyse von Kommunikationsnetzwerken haben inzwischen Einzug in die Regelungstechnik gehalten und werden daher auch mit Blick auf ihre dortige Anwendung betrachtet.

2.2.3.1 Hochspannungsnetze

Wie bereits erwähnt gibt es auch Anwendungsbeispiele von Komplexen Netzwerken zur Untersuchung technischer Systeme. So wurden diese z. B. verwendet, um das Verhalten von Stromverteilnetzen zu untersuchen [17, 78, 80]. Der Beitrag von Pagani und Aiello [80] gibt einen Überblick über 33 Veröffentlichungen, in denen Komplexe Netzwerke zur Untersuchung von Hoch-, Mittel- und Niederspannungsnetzen in Europa, den USA und China verwendet wurden. Dabei wird unter anderem die Struktur der Netzwerke mit den bereits bekannten Netzwerkformen verglichen um Aussagen über die Zuverlässigkeit und Robustheit der Netzwerke zu ermöglichen. Bei der Modellierung werden Verteilstationen, Kraftwerke und weitere Einrichtungen durch Knoten repräsentiert und die Verbindungen durch das Spannungsnetz als Kanten. Bei der Analyse wurde bei über der Hälfte der Beiträge der Knotengrad und seine Verteilung sowie die Pfadlänge betrachtet. Dies lässt sich damit begründen, dass dadurch Schlussfolgerungen über die Einordnung als Scale-Free Netzwerk oder als Small-World-Netzwerk möglich sind. In den Fällen, bei denen ein Hochspannungsnetz betrachtet wurde, konnte im Allgemeinen festgestellt werden, dass die Verteilung des Knotengrads einer Exponentialfunktion folgt. Die Zugehörigkeit zur Klasse der Small-World-Netzwerke lässt sich für Hochspannungsnetze nicht eindeutig klären, da es einige Netze gibt deren struktureller Aufbau zu einem Small-World-Netzwerk passen und solche bei denen dies nicht zutrifft. Mittel- und Niederspannungsnetzwerke sind demgegenüber eindeutig keine Small-World-Netzwerke. In

den meisten Fällen wurde ein ungewichteter Graph verwendet. Dies führen Pagani und Aiello vor allem auf die Schwierigkeit zurück, Daten für die Bestimmung von Gewichten zu erhalten. In den Fällen mit Gewichten repräsentierten diese Leitwert, Impedanz, Länge oder Leistungsübertragung der Hochspannungsleitungen. Bei der Untersuchung der gewichteten Graphen wurde weniger häufig der Knotengrad, dafür jedoch vermehrt die Zentralität betrachtet. Der Grund hierfür ist, dass im Fall von gewichteten Graphen die Untersuchung der Zuverlässigkeit des Hochspannungsnetzwerkes im Vordergrund steht. In diesem Fall gibt die Zentralität eines Knotens seine Bedeutung für das Netzwerk an. Es werden also jene Elemente des Hochspannungsnetzwerkes identifiziert, welche für einen reibungslosen Betrieb von Bedeutung sind. Das verwendete Gewicht legt dabei fest, unter welchem Augenmerk die Zuverlässigkeitsanalyse stattfindet, wobei bei der Verwendung unterschiedlicher Gewichte auch abweichende Ergebnisse erzielt werden können. Bei der Zuverlässigkeitsanalyse lässt sich zeigen, dass die Spannungsnetzwerke eine gute Robustheit gegenüber zufälligen Ausfällen von Knoten und Kanten haben, was generell eine Eigenschaft skalenfreier Netze ist. Wird jedoch gezielt ein Element entfernt, welches eine hohe Zentralität besitzt, so ist die Robustheit nicht mehr gegeben.

2.2.3.2 Kommunikationsnetze

Bei der Untersuchung von Kommunikationsnetzwerken mit Methoden der Komplexen Netzwerke werden verschiedenste Anwendungen betrachtet. Es gibt Arbeiten zu Telefon- oder Mobilfunknetzen [17], zum Internet und dem World-Wide-Web [9, 17] sowie zu Datennetzen aus dem Bereich der vernetzten Regelung [64]. Bei der Modellierung eines Kommunikationsnetzwerkes als Komplexes Netzwerk werden in den meisten Fällen die Ausgangs- sowie Endpunkte der Kommunikation sowie die dazwischen liegenden Router als Knoten dargestellt. Die Kommunikationswege dazwischen werden durch die Kanten des Komplexen Netzwerkes beschrieben. Wie schon bei den Spannungsnetzwerken, können die Kanten zusätzlich mit Gewichten versehen werden, um die Kapazität oder auch Kosten der Verbindung zu modellieren. Auf Basis eines solchen Netzwerkes können nun zum einen statistische Untersuchungen erfolgen, bei denen durchschnittliche Pfadlängen bzw. Kosten oder auch die Zentralität eines Knoten oder einer Kante untersucht werden. In Verbindung mit der Zentralität werden zudem Cluster im Netzwerk untersucht. Dies ermöglicht z. B. im Fall des World-Wide-Webs die Identifizierung von Gruppen mit einer starken Kommunikation untereinander, was wiederum Rückschlüsse auf Interessensgruppen zulässt [2].

In [12] wird als Erweiterung des Komplexen Netzwerkes ein Routing-Modell eingeführt, welches die Betrachtung des Kommunikationsumsatzes innerhalb des Netzwerkes nachbildet und damit neben den statistischen Analysemethoden weitere Möglichkeiten zur

Bestimmung von Engpässen und somit zur Optimierung des Netzwerkes bereitstellt. In dem Routing-Modell werden alle Knoten des Netzwerkes sowohl als Quellen als auch als Senken aufgefasst, welche über eine Wahrscheinlichkeit p verfügen, mit der ein Datenpaket versandt wird. Auch die Auswahl des Ziels erfolgt zufällig, sodass in dem Modell die zufällige Kommunikation zwischen allen Kommunikationsknotenpunkten betrachtet wird. Dies ist in der Diskussion der Ergebnisse ein wesentlicher Punkt, da nicht auf spezielle Gegebenheiten, wie z. B. Hauptkommunikationspfade, eingegangen wird. Mit Hilfe des Modells wird die Kapazität des untersuchten Netzwerkes betrachtet und Grenzwerte ermittelt, welche aufzeigen, ab welchen Datenaufkommen die Kommunikation schlagartig zusammenbricht. In dem Beitrag [12] werden zwei Optimierungsstrategien vorgestellt. Die erste verwendet softwaretechnische Mittel, um die Datenpakete sinnvoll im Netzwerk weiterzuleiten und somit die Kapazität zu erhöhen. Dem gegenüber werden bei der zweiten Strategie Eingriffe in die Hardware betrachtet, ebenfalls um die Auswirkungen auf die Kapazität zu untersuchen.

2.2.4 Komplexe Netzwerke in der Regelungstechnik

Erste Ansätze gibt es inzwischen auch zur Verwendung der komplexen Netzwerke in der vernetzten Regelung [64]. Die in [64] aufgezeigten Ansätze beziehen sich dabei auf die bereits in Abschnitt 2.2.3 aufgeführten Anwendungsbeispiele. Der Wandel in der Energieversorgung erfordert einen zunehmenden Automatisierungsgrad, wobei die Verwendung von verteilten und vernetzten Regelungseinrichtungen eine wichtige Rolle spielt. In [64] stellt Lunze daher fest, dass sich die statistischen Ergebnisse aus der Betrachtung als komplexes Netzwerk auch auf das dynamische Verhalten übertragen lassen und somit Rückschlüsse auf die optimale Anzahl an Verkopplungen gemacht werden können. Die Optimierung der Verkopplungen erfolgt dabei unter der Betrachtung der Robustheit des Spannungsnetzes gegen Ausfälle einzelner Komponenten. Als weiteres Beispiel führt Lunze die Kommunikation zwischen den vernetzten Reglern an, hier können komplexe Netzwerke zum einen bei der Untersuchung der kürzesten Kommunikationswege und zum anderen bei der Kozeptionierung der Kommunikationsstrukturen hilfreich sein. Als wesentliche Neuerung der komplexen Netzwerke wird in [64] dabei die Betrachtung des Gesamtsystems im Vergleich zur Aufspaltung des Systems in Teilsysteme angesehen.

2.2.5 Untersuchung zeitvarianter komplexer Netzwerke

Die bisher vorgestellten Modellansätze und Untersuchungsmethoden der komplexen Netzwerke verwenden statistische Methoden, um Systemeigenschaften anhand der Struktur eines Systems zu ermitteln. In den vergangenen Jahren wurden zudem Ansätze ver-

folgt, bei denen auch die als „Dynamik“ bezeichnete zeitlich Veränderung der Struktur berücksichtigt wird sowie das daraus resultierende Verhalten des Systems.

Im Rahmen der BA-Modelle wurde der Entstehungsprozess des Netzes bei der Analyse mit betrachtet. Durch die Analyse der einzelnen Entwicklungsschritte und der Änderungen zwischen ihnen soll ein realistischeres Modell generiert werden, welches z. B. Kommunikationsnetzwerke wie das World-Wide-Web auch über der Zeit beschreiben kann. Durch ein solches Modell wäre es dann möglich, Prognosen über den zukünftigen Aufbau eines Netzes abzuleiten. Das zeitliche Verhalten des Systems kann z. B. durch ein ereignisbasiertes Modell beschrieben werden, bei dem jeweils in Folge einer Veränderung ein neues Komplexes Netzwerk aufgestellt wird, welches sich von dem vorherigen in seiner Struktur unterscheidet und den Systemaufbau bis zum Zeitpunkt des folgenden Ereignisses beschreibt. So entsteht eine Reihe von zeitlich hintereinander angeordneten Komplexen Netzwerken, welche die Veränderungen des beschriebenen Systems modellieren. Neben der Analyse von künstlich erzeugten Netzen wurden auch reale Netze über der Zeit betrachtet. Dadurch werden einzelne Akteure nicht nur anhand einer einzelnen Momentaufnahme des Netzwerks bewertet. Es fließen zudem Informationen darüber mit ein, wie die Positionierung im Netzwerk erreicht wurde. Trier beschreibt z. B. in [96] die Analyse des E-Mail-Verkehrs eines Unternehmens über einen Zeitraum von ca. 2 Jahren. In diesem Zeitraum kommt es zu verschiedenen Verschiebungen der zentralen Knoten, also der zentralen Akteure.

Weitere Untersuchungen richten sich auf das Verhalten eines Systems bzw. seines Netzwerks, wenn in einem dynamischen Prozess Kanten oder Knoten eliminiert oder hinzugefügt werden. Anders als beim BA-Modell erfolgt dabei das Hinzufügen nicht nach einem vorgegebenen Verfahren, sondern als Folge des dargestellten Prozesses. Ein wesentlicher Punkt dieser Betrachtung ist die Frage nach der Robustheit eines Systems. So stellt sich bei einem Funk- oder Energieversorgungsnetz z. B. die Frage, wann es im Fall der Eliminierung von Kanten zusammenbricht. Andersherum wird auch die Frage verfolgt, welche Kanten oder Knoten von besonderem Interesse sind, wenn es um den Erhalt der Funktionalität des Netzes geht. Dabei ist auch von Interesse zu wissen, in wie viele Cluster ein Netzwerk zerfällt und wo die Übergänge zwischen einem einheitlichen und einem in Teilgraphen zersplitterten System liegen [78]. Ein solcher Übergang zwischen zwei unterschiedlichen Ausprägungen eines Graphen wird auch als Phasenübergang bezeichnet. Dieser Begriff beschreibt die schlagartige Änderung einer Eigenschaft oder Struktur des Graphen beim Erreichen eines festen Grenzwerts [31].

2.3 Diskussion

Die bisher vorgestellten Modellansätze der Komplexen Netze sowie die zugehörigen Untersuchungsmethoden sind auf die statistischen Eigenschaften der Netzwerke ausgerichtet. Für die angestrebte Betrachtung von komplexen technischen Systemen ist es aber von Interesse, Aussagen über deren dynamische Eigenschaften treffen zu können. Ansätze zur Berücksichtigung der zeitlichen Veränderung von Komplexen Netzwerken, welche in der zugehörigen Literatur auch als „dynamische Komplexe Netzwerke“ bezeichnet werden [96], wurden im letzten Abschnitt kurz beschrieben. Dabei wird die Struktur der Netzwerke nicht ausschließlich zu einem Zeitpunkt betrachtet und statistisch untersucht, sondern es wird z. B. auf Zeitreihen zurückgegriffen. Durch diese Herangehensweise wird die Veränderung über der Zeit der bisher rein statistisch ausgewerteten Struktureigenschaften betrachtet. Die Dynamik innerhalb der durch die Knoten vereinfacht dargestellten Elemente des komplexen Systems bleibt aber weiter unbeachtet, da lediglich die Veränderung der Verbindungen, welche auch als Verkopplungsdynamik bezeichnet wird, untersucht wird. Diese ist für die in der Arbeit betrachtete Analyse von komplexen technischen Anlagen nicht ausreichend, da auch die verkopplungsbedingten Systemeigenschaften nicht ausschließlich von der Verkopplung abhängig sind. Es ist viel mehr das Zusammenspiel zwischen Verkopplungen und Systemelementen sowie deren jeweilige innere Dynamik, welches für die Analyse relevant ist. Dies greift der im folgenden Kapitel vorgestellte Modellansatz auf, da er mit Hilfe von Kantengewichten die bisher nicht berücksichtigte Dynamik der Systemelemente in Form derer Übertragungsverhalten modelliert.

3 Modellierung dynamischer technischer Systeme als Komplexe Netzwerke

3.1 Modellansatz

3.1.1 Definition Inverse-Response-Verhalten

Verläuft die Sprungantwort eines Systems nicht wie erwartet zunächst monoton steigend zu ihrem stationären Endwert hin, sondern entgegen dem stationären Endwert, wie in Bild 3.1 skizziert, wird dies als Inverse-Response-Verhalten des Systems bezeichnet. Inverse-Response-Verhalten tritt z. B. in Dampferzeugern von Destillationskolonnen [90], in Rührkesselreaktoren [95] und in Wasserkraftwerken [66] auf. Der Begriff Inverse-Response wird vor allem in der Prozessindustrie verwendet [104]. Allgemeiner wird das zum stationären Endwert gegenläufige Verhalten als *Unterschwingen* (engl. undershoot) bezeichnet [20]. Beim Unterschwingen wird zudem zwischen dem *initialen Unterschwingen*, welches direkt nach dem Sprung einsetzt, und einem oder mehreren Unterschwingen, welche zu einem späteren Zeitpunkt in der Systemantwort auftreten, unterschieden.

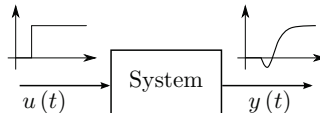


Bild 3.1: Illustration des Inverse-Response-Verhaltens eines Systems.

Unterschwingen Die folgende Definition von Unterschwingen erfolgt in Anlehnung an [20], sie ist jedoch auf instabile sowie nichtlineare Systeme erweiterbar. Betrachtet wird hierzu die Sprungantwort $h(t)$ eines beliebigen Systems mit einem Eingangssignal $u(t)$ und einem Ausgangssignal $y(t)$. Weist die Sprungantwort zu einem beliebigen Zeitpunkt ein zum stationären bzw. begrenzten Endwert umgekehrtes Vorzeichen auf, so wird dies als Unterschwingen bezeichnet.

Definition 5: Ein Eingrößensystem weist Unterschwingverhalten auf, wenn sich infolge eines Sprungs $K \cdot \sigma(t)$ mit $K \in \mathbb{R}$ und der Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$, am Eingang

$u(t)$, am Ausgang $y(t)$ eine Ausgangsfunktion $h(t)$ mit $t > 0$ ergibt, welche einen stationären Endwert $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) \neq 0$ besitzt, und mindestens ein $t_n > 0$ existiert, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$h(t_n) \cdot \operatorname{sgn}(h(\infty)) < 0, \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=t_n} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right|_{t=t_n} \cdot \operatorname{sgn}(h(\infty)) > 0. \quad (3.3)$$

Nach dieser Definition handelt es sich um Unterschwingen, wenn es einen Zeitpunkt t_n gibt, bei dem der Funktionswert $h(t_n)$ ein umgekehrtes Vorzeichen zum stationären Endwert hat, vgl. (3.1), und es sich nach (3.2) sowie (3.3) um ein Minimum der Sprungantwort $h(t)$ handelt.

In Anlehnung an [74] lässt sich das Unterschwingverhalten auch für Mehrgrößensysteme definieren. Dabei werden bei einem Mehrgrößensystem mit E Eingängen und A Ausgängen die einzelnen Ausgänge in Abhängigkeit eines Eingangsvektors $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{K} \cdot \sigma(t)$ betrachtet. Dabei ist $\sigma(t)$ die skalare Einheitssprungfunktion und \mathbf{K} ein zeitunabhängiger Vektor.

Definition 6: Ein Mehrgrößensystem mit E Eingängen und A Ausgängen weist Unterschwingen auf, wenn für mindestens einen der A Ausgänge bei einer Eingangsfunktion $\mathbf{K} \cdot \sigma(t)$ mit einem beliebigen $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^E$ die Bedingungen aus Definition 5 erfüllt sind.

Inverse-Response-Verhalten Tritt das Unterschwingen direkt zu Beginn der Sprungantwort auf, so wird dies als initiales Unterschwingen oder im Englischen auch „initial undershoot“ bezeichnet. In der Prozessindustrie ist zudem die Bezeichnung als Inverse-Response-Verhalten verbreitet [104]. Für das Inverse-Response-Verhalten lassen sich aus Definition 5 die folgende Definition für Eingrößensysteme ableiten [20].

Definition 7: Ein Eingrößensystem weist Inverse-Response-Verhalten auf, wenn neben den Bedingungen aus Definition 5 für ein t_n gilt:

$$h(t) \cdot \operatorname{sgn}(h(\infty)) < 0 \quad \forall t, 0 < t < t_n. \quad (3.4)$$

Es folgt zudem eine Definition für Mehrgrößensysteme, parallel zu Definition 6.

Definition 8: Ein Mehrgrößensystem weist Inverse-Response-Verhalten auf, wenn für mindestens einen der A Ausgänge bei einem beliebigen $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^E$ die Bedingungen aus Definition 7 erfüllt sind.

3.1.2 Modellierung des dynamischen Verhaltens mittels eines erweiterten Komplexen Netzwerks

Der hier vorgestellte Modellierungsansatz verfolgt das Ziel, die Herangehensweise bei der Modellierung der Komplexen Netzwerke so zu ergänzen, dass die Dynamik des modellierten Systems wiedergegeben und die Analyse des Systems auf sein Inverse-Response-Verhalten ermöglicht wird. Daher wird zunächst ein einfaches und weit verbreitetes Beispiel für das Inverse-Response-Verhalten eingeführt, welches zur Verdeutlichung des Modellierungsansatzes dienen soll. Das in Bild 3.2 dargestellte System besteht aus zwei parallel geschalteten Teilsystemen erster Ordnung, deren Ausgänge addiert werden. In [90] wird das Inverse-Response-Verhalten des Systems betrachtet und Satz 1 hergeleitet.

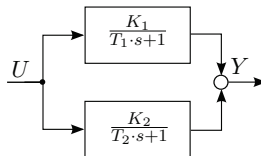


Bild 3.2: System, bestehend aus zwei parallelen Teilsystemen erster Ordnung.

Satz 1: Ein lineares System mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} + \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1}$, mit $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ und $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^+$, zeigt Inverse-Response-Verhalten, wenn gilt

$$\frac{T_1}{T_2} > -\frac{K_1}{K_2} > 1, \quad (3.5)$$

wobei o.B.d.A. $K_1 > 0$ und $K_2 < 0$ gelte.

Beweis: Siehe [90]. □

In Satz 1 werden die Verstärkungen und Zeitkonstanten der beiden Pfade miteinander verglichen, um eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten des Systems zu erhalten. Unter der Annahme, dass das Gesamtsystem eine positive Verstärkung aufweist, lässt sich sinngemäß formulieren: Inverse-Response-Verhalten tritt auf, wenn der Pfad mit negativer Verstärkung schneller als der Pfad mit positiver Verstärkung ist. Hat das System eine negative Gesamtverstärkung, so gilt die Aussage umgekehrt. Wird des weiteren berücksichtigt, dass das Inverse-Response-Verhalten nach Definition 7 direkt nach einem Sprung an einem Eingang eines Systems zu beobachten ist, so lassen sich für die Analyse auf Inverse-Response-Verhalten zwei zu betrachtende zeitliche Bereiche festlegen. Diese sind zum einen das Anfangsverhalten der Sprungantwort, in dem es zu einem initialen Unterschwingen kommen kann, und zum anderen ihr stationäres Verhalten.

3.1.2.1 Modellansatz

Dem Modellierungsansatz der Komplexen Netzwerke folgend wird ein Graph verwendet. (Eine Einführung in Graphen und die Graphentheorie wurde bereits in Abschnitt 2.1 gegeben.) Das Gesamtsystem \mathfrak{S} wird dafür in N einzelne Teilsysteme \mathfrak{P}_n , auch als Komponenten bezeichnet, aufgeteilt, wobei die Aufteilung von der Anwendung abhängig ist. Als eine Komponente wird dabei z.B. eine Pumpe, ein Ventil oder ein Tank, aber auch kompliziertere Einheiten wie z.B. ein Rührkessel angesehen. Die Ein- und Ausgänge des Gesamtsystems und auch die der Teilsysteme werden im vorgestellten Modellierungsansatz durch die Knoten v_i repräsentiert, sodass sich für das System \mathfrak{S} eine Knotenmenge $\mathcal{V}_{\mathfrak{S}}$ ergibt. Jedem Knoten kann somit ein Signal zugeordnet werden, z.B. ein Ein- oder Ausgangssignal eines Tanks als Zufluss eines Fluids in Litern pro Minute. Die Knoten werden wiederum durch gerichtete Kanten $e_n \in \mathcal{E}_{\mathfrak{S}}$ miteinander verbunden. Dabei geben die Kanten das Übertragungsverhalten zwischen den Teilsystemen als auch innerhalb der Komponenten wieder. Dafür wird jeder Kante ein vektorielles Kantengewicht \mathbf{w}_n zugewiesen, welches das dynamische Verhalten des Signals am Startknoten auf das Signal am Endknoten modelliert. Die Richtung der Kante orientiert sich dabei an der Wirkungsrichtung von einem Knoten zu einem anderen und nicht zwangsläufig an der Richtung des modellierten Masse- oder Stoffstroms. Da die Kanten des Graphen das Übertragungsverhalten innerhalb und zwischen Teilsystemen modellieren, wurde in [30] die Bezeichnung übertragungsfunktionsbasierter Graph (TFG da engl.: transfer function graph) für das Modell eingeführt. Es empfiehlt sich zunächst die Teilsysteme zu betrachten und deren inneres dynamisches Verhalten zwischen ihren Ein- und Ausgängen durch Kanten zu beschreiben. In einem weiteren Schritt werden anschließend die Verkopplungen und das dynamische Verhalten zwischen den Teilsystemen, in Form von Kanten und Gewichten, hinzugefügt. Das Vorgehen wird anhand eines einfachen Beispiels demonstriert.

Beispiel 3: *Betrachtet wird ein System bestehend aus zwei Tanks, welche über zwei Pumpen miteinander verbunden sind, wie das Rohrleitungs- und Instrumentierungs-Fließschema (R&I-Fließschema) in Bild 3.3 zeigt. Als Komponenten werden in diesem Beispiel zum einen die Tanks angesehen und zum anderen die Pumpen in Kombination mit dem jeweiligen Antriebsmotoren. Bei der Modellierung als TFG werden die Komponenten durch Knoten für jedes Ein- und Ausgangssignal abgebildet und das zugehörige Übertragungsverhalten durch Kanten zwischen den Knoten. Dies ist in Bild 3.4 (a) für einen Tank dargestellt, wobei die durch Knoten repräsentierten Funktionen der Zuflüsse in den Tank mit v_1 und v_2 bezeichnet und die Funktion des Abflusses mit v_3 . Der TFG einer Pumpe ist beispielhaft in Bild 3.4 (b) dargestellt, dabei entspricht der Knoten v_1 dem Steuersignal, v_2 der Funktion des Abflusses sowie v_3 der Funktion des Zuflusses.*

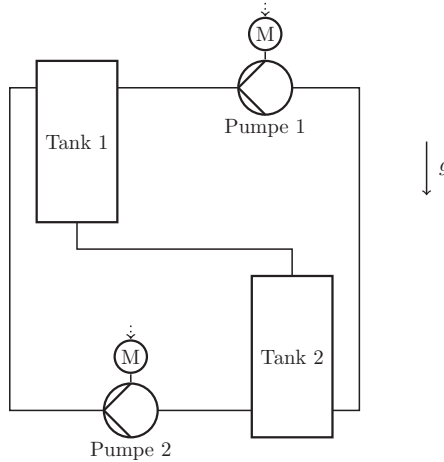


Bild 3.3: R&I-Fließschema des Beispielsystems.

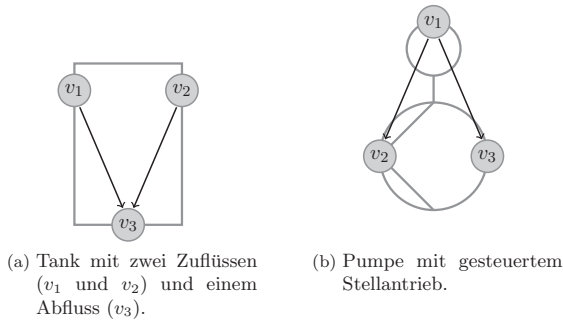


Bild 3.4: Modellierung von Tank und Pumpe als TFG.

Werden die Komponenten im Bild 3.3 nun durch die entsprechenden Modelle des übertragungsfunktionsbasierten Graphen aus Bild 3.4 ersetzt und die Verbindungen aus dem R&I-Fließschema ebenfalls durch Kanten abgebildet, so ergibt sich der in Bild 3.5 dargestellte TFG für das Beispielsystem. Die Knoten wurden einfach durchnummeriert und alle Kanten besitzen ein bisher nicht angegebenes Kantengewicht, da dessen Zusammensetzung erst im Folgenden geklärt wird. Die Eingänge in das Gesamtsystem sind mit Kanten ohne Startknoten zu den beiden Knoten v_4 und v_7 gekennzeichnet. Besonders zu beachten sind die Kanten von v_6 nach v_{11} sowie von v_9 nach v_{10} , da diese entgegen der Strömungsrichtung des Fluids liegen und somit nicht die zunächst erwartete Richtung besitzen. Der Grund für die anscheinende Verdrehung der Kanten liegt darin, dass eine Änderung der Eingangssignale der Pumpen (bei v_4 bzw. v_7) den Fluidstrom, welchen die Pumpen jeweils von Tank 2 absaugen, beeinflusst. Durch den veränderten Absaugstrom

der Pumpe werden wiederum die durch die Knoten v_{10} und v_{11} dargestellten Abflüsse des Tanks 2 verändert. Die Pfeilrichtung gibt somit die Wirkungsrichtung der Eingänge auf die entsprechenden Signale in den Knoten wieder (Im Verlauf von Kapitel 4 wird zu erkennen sein, dass die in den Kantengewichten beschriebene Verstärkung in den entsprechenden Kanten ein umgekehrtes Vorzeichen zu den Verstärkungen der übrigen Kanten des Graphen besitzt).

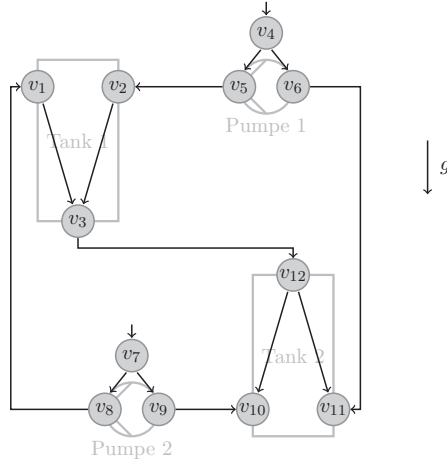


Bild 3.5: Übertragungsfunktionsbasierter Graph des Beispielsystems.

Die Festlegung der Elemente des vektoriiellen Kantengewichts \mathbf{w}_n eines Teilsystems \mathfrak{P}_n beruht auf der Annahme eines linearen Übertragungsverhaltens der Teilsysteme um einen festgelegten Arbeitspunkt. Durch die individuelle Modellierung des Übertragungsverhaltens jedes einzelnen Ein-/Ausgangspaares als Kante, wird das betrachtete Verhalten auf das eines Eingrößensystems reduziert. Da für das Inverse-Response-Verhalten, wie bereits erwähnt, das stationäre sowie das Anfangsverhalten in Folge einer sprunghaften Änderung des Eingangssignals von Interesse sind, wird die Sprungantwort $h_n(t)$ betrachtet. Das stationäre Verhalten entspricht dem Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t)$, welcher auch als stationärer Endwert bezeichnet wird. Wird der stationäre Endwert bezüglich der Sprungfunktion normiert, so ergibt sich die Verstärkung K_n des Systems. Die Verstärkung wiederum muss bei der Analyse auf Inverse-Response-Verhalten berücksichtigt werden, weswegen diese auch im Kantengewicht des Modells berücksichtigt wird. Als Anfangsbereich wird zunächst der Verlauf der Sprungantwort $h_n(t)$ bis zum Erreichen von 63% des stationären Endwerts festgelegt, da die Zeit bis zum Erreichen dieses Werts, ausgehend vom Einsetzen der Sprungantwort, der Zeitkonstante eines Systems erster Ordnung entspricht. Das Verhalten zwischen dem Ende des Anfangsbereichs und dem stationären Endwert ist für die Inverse-Response-Analyse nicht von Interesse und kann

daher vernachlässigt werden. Dies bedeutet wiederum, dass mögliches Überschwingen nicht berücksichtigt werden muss. Für die Modellierung des Anfangsbereichs wird zum einen die Verzugszeit $T_{\tau,n}$ und zum anderen die Anstiegszeit T_n verwendet. Somit wird das anfängliche Verhalten durch ein System erster Ordnung mit Verzugszeit approximiert. Besitzt die betrachtete Komponente bereits vor der Approximierung als System erster Ordnung mit Verzugszeit eine Totzeit, so wird diese durch die approximative Modellierung des Anfangsbereichs in der Verzugszeit integriert. Es ist also grundsätzlich möglich, Systeme mit Totzeit bei der Modellierung zu berücksichtigen. In Bild 3.6 sowie 3.7 sind exemplarisch zwei normierte Einheitssprungantworten (durchgezogene Linien) sowie ihre für den TFG gewählte Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit im anfänglichen sowie stationären Bereich (gestrichelte Linien) dargestellt. Ein Kantengewicht, welches das Übertragungsverhalten zwischen einem Paar von Ein- und Ausgängen beschreibt, ergibt sich somit zu: $\mathbf{w}_n = (K_n, T_n, T_{\tau,n}), K_n \in \mathbb{R}$ und $T_n, T_{\tau,n} \in \mathbb{R}^+$.

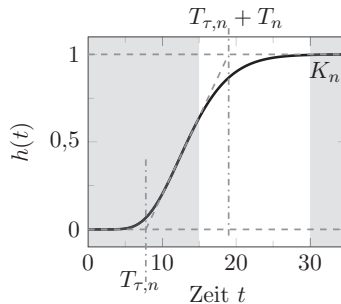
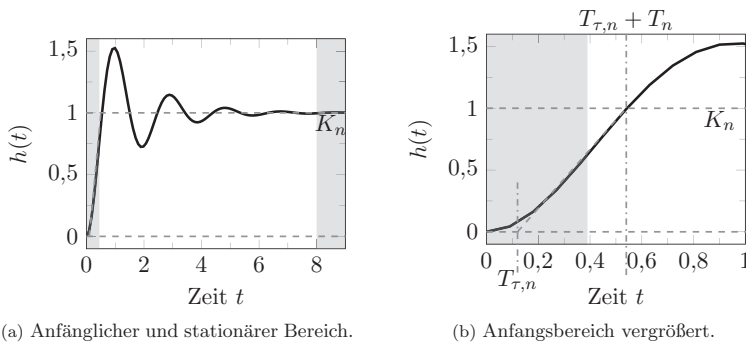


Bild 3.6: Einheitsimpulsantwort der Beispielkomponente 2 mit den für die Modellierung interessanten Bereichen (grau hinterlegt).



(a) Anfänglicher und stationärer Bereich.

(b) Anfangsbereich vergrößert.

Bild 3.7: Einheitsimpulsantworten der Beispielkomponente 6 mit den für die Modellierung interessanten Bereichen (grau hinterlegt).

Die bisher in Bild 3.6 und 3.7 dargestellten Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten 2 und 6 weisen bis zu der gewählten Grenze des Anfangsbereichs bei 63% des stationären Endwerts ein monoton wachsendes Verhalten auf. Dies ist nicht zwangsweise immer so, wie die Einheitssprungantwort der Beispielkomponente 7 in Bild 3.8 (a) zeigt. In dem mit grau hinterlegten Anfangsbereich weist die Einheitssprungantwort ein eindeutig nicht monotones Verhalten auf. Die für die Beispielkomponenten 2 und 6 verwendete Approximation des Anfangsbereichs lässt sich in diesem Fall, mit Ausnahme der Verstärkung K_n , nicht anwenden. Wie mehrfach erwähnt ist neben dem durch K_n modellierten stationären Verhalten das Anfangsverhalten von Interesse, genauer gesagt ist die Geschwindigkeit, mit welcher das System auf einen Sprung reagiert von Bedeutung. Daher kann im Fall der Beispielkomponente 7 der Anfangsbereich noch einmal kleiner gewählt werden, wie es in Bild 3.8 (b) dargestellt wurde. In dem aufgezeigten Fall wird als Grenze des Anfangsbereichs das erste Maximum der Sprungantwort gewählt und die Approximation dann wie gehabt in diesem Bereich vorgenommen. Da die Sprungantwort direkt einsetzt gilt $T_{\tau,n} = 0$.

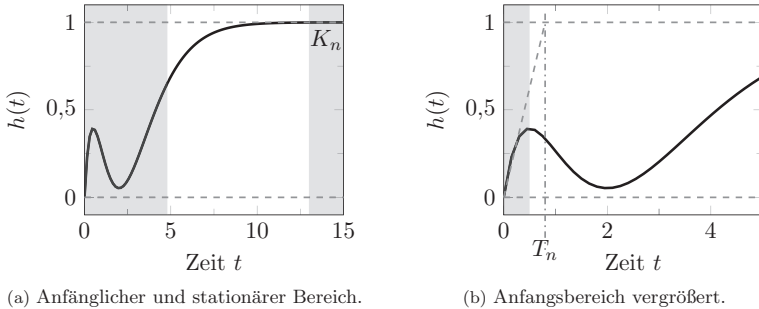


Bild 3.8: Einheitssprungantworten mit den für die Modellierung interessanten Bereichen (grau hinterlegt) wie bisher in (a) und bessere Wahl für die Beispielkomponente 7 in (b) (ebenfalls grau hinterlegt).

3.1.2.2 Systemkomponenten mit Inverse-Response-Verhalten

Besitzen einzelne Komponenten des Systems Inverse-Response-Verhalten zwischen ihren Ein- und Ausgangsknoten, so kann für das Gesamtsystem nicht direkt auf Inverse-Response-Verhalten gefolgert werden. Wir betrachten dazu ein Beispiel bestehend aus zwei parallelen Teilsystemen.

Beispiel 4: Die beiden Teilsysteme G_1 und G_2 mit den Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{2}{s+2} \quad (3.6)$$

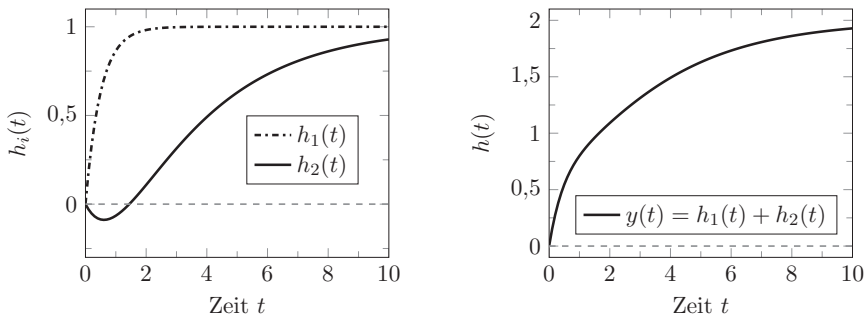
und

$$G_2(s) = \frac{-s+1}{3^2+4 \cdot s+1} \quad (3.7)$$

sollen den selben Eingang besitzen und so miteinander verkoppelt sein, dass gilt:

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s)) \cdot U(s) . \quad (3.8)$$

Das System mit der Übertragungsfunktion nach (3.6) besitzt kein Inverse-Response-Verhalten, das nach (3.7) hingegen zeigt Inverse-Response-Verhalten. In Bild 3.9 sind links die beiden Einheitssprungantworten $h_1(t)$ und $h_2(t)$ der Teilsysteme gezeigt und rechts die Antwort am Ausgang des Gesamtsystems $h_1(t) + h_2(t)$. Wie deutlich zu sehen ist, zeigt dieser kein Inverse-Response-Verhalten, da die Summe aus den beiden Einheitssprungantworten immer positiv ist. Aus einer Komponente mit Inverse-Response-Verhalten lässt sich also keine Schlussfolgerung für das Gesamtsystem bezüglich seines Inverse-Response-Verhaltens ableiten.



(a) Antwort von G_1 und G_2 ohne bzw. mit Inverse-Response-Verhalten.

(b) Überlagerte Systemantwort $y(t)$.

Bild 3.9: Einheitssprungantworten zum Beispiel 4.

Um ein Teilsystem mit Inverse-Response-Verhalten im übertragungsfunktionsbasierten Graphen zu berücksichtigen, kann dieses z. B. wie im Beispiel zu Satz 1 in zwei parallele Kanten aufgespalten werden. Das folgende Beispiel demonstriert dies für das System mit der Übertragungsfunktion nach (3.7). Die Aufspaltung in überlagerte Teilsysteme ist im Allgemeinen möglich, jedoch nicht zwangsweise durch den an dieser Stelle beschriebenen Ansatz zweier parallel geschalteter Systeme erster Ordnung. Eventuell ist ein Ansatz mit mehreren parallelen Kanten oder Teilsystemen höherer Ordnung zu wählen, welche

anschließend reduziert werden, um die Kantengewichte zu erhalten. Auch eine grafische Lösung ist denkbar, bei der zwei sich überlagernde Sprungantworten gesucht werden, welche in Summe das nachzubildende Inverse-Response-Verhalten aufweisen. Diese Ansatzvorschläge werden in der Arbeit nicht weiter betrachtet, weshalb keine Aussage zum jeweiligen Aufwand getroffen werden kann.

Beispiel 5: Die in Satz 1 angegebene Übertragungsfunktion lässt sich umformen nach:

$$G(s) = \frac{(K_1 \cdot T_2 + K_2 \cdot T_1) \cdot s + (K_1 + K_2)}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1} . \quad (3.9)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der Übertragungsfunktion nach (3.7) ergeben sich dann die Verstärkung und die Zeitkonstante der beiden parallelen Teilsysteme. Deren Übertragungsfunktionen sind somit:

$$G_{\mathfrak{P}_1}(s) = \frac{2}{3 \cdot s + 1} \quad (3.10)$$

und

$$G_{\mathfrak{P}_2}(s) = \frac{-1}{1 \cdot s + 1} . \quad (3.11)$$

Es handelt sich hierbei um zwei Systeme erster Ordnung, welche kein Inverse-Response-Verhalten besitzen und deren einzelne Einheitsprungantwort zur Verdeutlichung in Bild 3.10 (a) sowie die Summe mit Inverse-Response-Verhalten in (b) dargestellt ist.

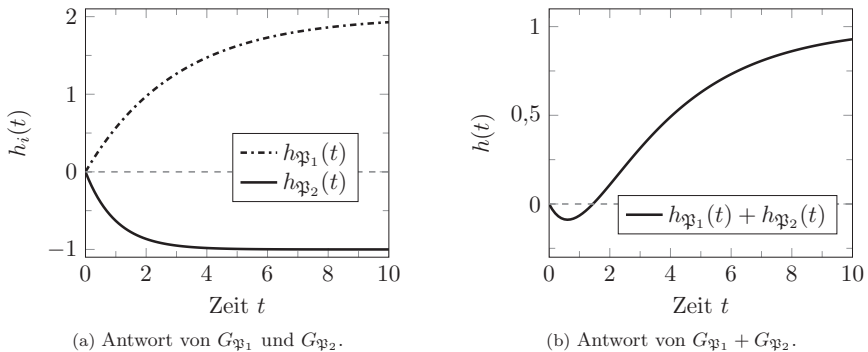


Bild 3.10: Einheitsprungantworten der beiden parallelen Teilsysteme (a) sowie ihrer Summe (b).

3.1.2.3 Schleifen im übertragungsfunktionsbasierten Graphen

Wie später noch erläutert wird, ist es für den Detektionsalgorithmus erforderlich, dass der übertragungsfunktionsbasierte Graph schleifenfrei ist. Handelt es sich um eine stabile Schleife, so kann diese für die Analyse durch eine oder mehrere Kanten substituiert

werden, um das Anwendungsfeld des Detektionsalgorithmus zu erweitern. Dabei ist es möglich, die Rückkopplung und ihre beinhalteten Komponenten als eine einzelne Komponente zu betrachten. Hierdurch sind nur die Ein- und Ausgänge der übergeordneten, integrierenden Komponente und das zwischen diesen bestehende Übertragungsverhalten im übertragungsfunktionsbasierten Graphen darzustellen. Diese Herangehensweise ist z. B. bei der Verwendung von Identifikationsverfahren zur Gewinnung der Kantengewichte sinnvoll, wie es in Abschnitt 3.2.2 beschrieben wird. Eine weitere Möglichkeit für die Substitution lässt sich aus den Parallelen zwischen dem übertragungsfunktionsbasierten Graphen und dem in Abschnitt 1.2.4.2 vorgestellten Signalflussgraphen herleiten. Unter Verwendung der Transformationsschritte für Signalflussgraphen werden die Schleifen auf einzelne Kanten reduziert und somit substituiert [71, 82]. Dieses Vorgehen macht z. B. Sinn, wenn die Komponenten anhand physikalischer Modelle abgeleitet werden (siehe Abschnitt 3.2.3). Es kann aber auch auf die Kantengewichte angewandt werden, wobei durch die Reduzierung von Teilen des Graphen auf eine einzelne Kante Approximationsfehler verursacht werden. Das prinzipielle Vorgehen bei der Transformation wird durch das folgende einfache Beispiel verdeutlicht. Die Transformationsschritte können auch auf verschachtelte Schleifen bzw. Rückkopplungen angewandt werden. Für ein Beispiel sei hierbei auf Bild 6.9 des Kapitel 6 von [82] verwiesen. Dort findet sich auch eine Tabelle mit einigen Umformungsregeln.

Beispiel 6: *In Anlehnung an [82] wird der Signalflussgraph in Bild 3.11 (a) betrachtet. Dabei stehen G_1 , G_2 und G_3 für die Übertragungsfunktionen der jeweiligen Kanten. Da der übertragungsfunktionsbasierte Graph durch seine Gewichte das Übertragungsverhalten in ausgewählten Bereichen modelliert, lassen sich die bekannten Transformationsschritte auch auf Komponenten bzw. Kanten des übertragungsfunktionsbasierten Graphen anwenden. In einem ersten Schritt lässt sich die Schleife in eine Schlinge überführen, so dass der in Bild 3.11 (b) dargestellte Graph entsteht. Die Schlinge lässt sich wiederum eliminieren, sodass die einfache Kante in Bild 3.11 (c) verbleibt.*

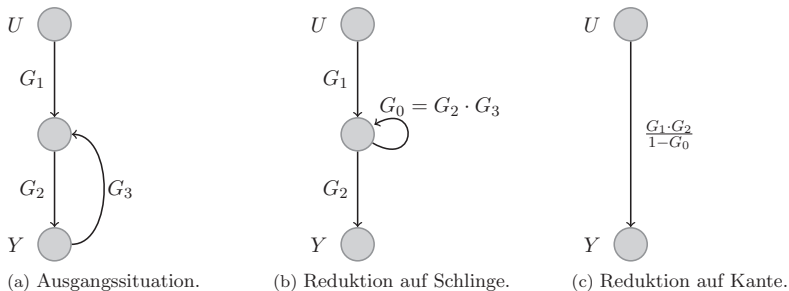


Bild 3.11: Transformationsschritte von einer Rückkopplung zu einer Kante.

3.2 Modellerstellung

Für die Modellierung eines Systems als übertragungsfunktionsbasierten Graphen stehen verschiedene Informationsquellen und Vorgehensweisen zur Verfügung, die unterschiedlich miteinander kombiniert werden können. So können R&I-Fließschemata verwendet werden, um die als Komponenten bezeichneten Teilsysteme festzulegen und die Struktur der Verbindungen zwischen den Komponenten zu modellieren. Für die Komponenten sowie die Verbindungen dazwischen können z. B. Messdaten verwendet werden, aus denen durch geeignete Identifikationsmethoden die Kantengewichte für das Übertragungsverhalten bestimmt werden. Ebenso ist es möglich, vorhandene physikalische Modelle so zu approximieren, dass das Kantengewicht einer Komponente ableitbar ist. Dabei ist es nicht notwendig, für alle Komponenten dasselbe Verfahren anzuwenden. Es ist viel mehr sinnvoll, für jede Komponente eine passende Herangehensweise zu wählen. Ebenfalls denkbar ist die Nutzung bereits vorhandener Kantengewichte für den Fall, dass eine Komponente aus einem bereits vorhandenen Modell übernommen wird. Auch der Einsatz von Konstruktionsdaten, z. B. als Parameter in einem allgemeinerem physikalischen Modell, ist vorstellbar. Zu beachten ist dabei jeweils, dass das Kantengewicht das Übertragungsverhalten ausgehend von einem festgelegten Arbeitspunkt beschreibt, da im übertragungsfunktionsbasierten Graphen, zur Approximation des Anfangs und Endbereichs der Sprungdynamik, ein lineares System angenommen wird. Die im Laufe der Arbeit eingehender betrachteten Informationsquellen sowie die jeweiligen Schritte zur Ableitung der Graphenstruktur und Kantengewichte werden im Folgenden, als Auswahl an dem weitaus breiteren Pool an Möglichkeiten, vorgestellt.

3.2.1 R&I-Fließschema und Konstruktionsdaten

Das R&I-Fließschema beschreibt den verfahrenstechnischen Aufbau der Anlage, indem es die verschiedenen Apparaturen, Behälter, Aktoren und Sensoren sowie deren Verbindungen durch Rohr- oder Datenleitungen graphisch wiedergibt. Es stellt also die Struktur der Anlage dar und eignet sich daher bei der Modellierung eines übertragungsfunktionsbasierten Graphen als Informationsquelle für die Festlegung der als Komponenten bezeichneten Teilsysteme und deren Verbindungen untereinander. In Abschnitt 3.1.2 wurde mit dem Beispiel 3 bereits ein einfaches Beispiel vorgestellt. Dabei wurden in dem R&I-Fließschema nach Bild 3.3 die Tanks und die Pumpen zusammen mit ihrem Antriebsmotor als Komponenten der Anlage festgelegt. Ebenfalls durch das R&I-Fließschema lassen sich hierbei die Ein- und Ausgänge der Komponenten ableiten, sodass wie in Bild 3.5 dargestellt, die Komponenten miteinander verbunden werden können. Die den in Bild 3.4 dargestellten Übertragungsverhalten zugehörigen Gewichte kön-

nen wiederum mit Hilfe von z. B. Identifikationsverfahren oder durch Approximation eines physikalischen Modells bestimmt werden. Wird je Verbindung im R&I-Fließschema mehr als eine Zustandsgröße berücksichtigt, wie es z. B. in dem in Abschnitt 3.2.3 vorgestellten Beispiel 7 der Fall ist, so ist es erforderlich, für jede Zustandsgröße separate Ein- bzw. Ausgänge durch Knoten abzubilden und entsprechend der Abhängigkeiten untereinander durch Kanten zu verbinden.

Neben R&I-Fließschemata fallen bei der Planung einer Anlage weitere Konstruktionsdaten an, wie z. B. Durchmesser und Länge von Rohrleitungen. Im Fall einer Rohrleitung ist es somit möglich, ein allgemeines Modell auszustellen, welches dann durch die entsprechenden Konstruktionsdaten als Parameter ergänzt wird. Somit lassen sich bei wiederkehrenden und nicht zu komplizierten Komponenten auf eine einfache Art und Weise die Kantengewichte schätzen.

3.2.2 Identifikation

Eine Möglichkeit, die Kantengewichte $\mathbf{w}_n = (K_n, T_n, T_{\tau,n})$ einer Komponente zu ermitteln, ist die Verwendung von Methoden der Systemidentifikation. Anhand von Messungen lassen sich auf diese Weise die Parameter bestimmen, was somit eine Alternative zur physikalischen Modellierung darstellt. Da es eine ganze Reihe von Methoden zur Systemidentifikation gibt, ist es notwendig, die Problemstellung sowie das gewünschte Ergebnis genauer zu betrachten, um basierend darauf ein geeignetes Verfahren auszuwählen [40]. Da die Kantengewichte für die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens den Anfangsbereich der Sprungantwort $h_n(t)$ der zugehörigen Komponente möglichst genau darstellen sollen, wird das Augenmerk für die Auswahl eines geeigneten Identifikationsverfahrens auf diesen gelegt. Die Entwicklung von Identifikationsverfahren ist nicht Kern der vorliegenden Arbeit, es soll jedoch die Möglichkeiten zur Generierung eines Modells aufgezeigt werden. Deshalb wird davon ausgegangen, dass für die Identifikation Messdaten der Sprungantwort aus der betrachteten Ruhelage heraus zur Verfügung stehen. Für die Aufzeichnung der Messung wird der Eingang einer Komponente mit $u_n = K_{\sigma,n} \cdot \sigma(t)$ beaufschlagt.

3.2.2.1 Identifikationsverfahren

Ausgehend von den dargestellten Anforderungen, werden vier einfache Verfahren eingehender betrachtet und miteinander verglichen. Mit allen vier Verfahren lassen sich geeignete Systemmodelle identifizieren, wobei das Ergebnis jeweils von der Wahl der freien Parameter des Identifikationsverfahrens abhängt.

Graphische Bestimmung der Parameter Ein System höherer Ordnung, welches kein Überschwingen zeigt, kann als System erster Ordnung mit einer Verzugszeit approximiert werden. Wie bereits erwähnt, ist dies die Herangehensweise für die Modellierung der Komponenten in den Kantengewichten $\mathbf{w}_n = (K_n, T_n, T_{\tau,n})$, da nur der Anfangsbereich der Sprungantwort betrachtet wird und eventuelles Überschwingen also ausgeblendet werden kann. Ist die Sprungantwort eines Systems als Messung verfügbar, so können die Parameter der Approximation graphisch ermittelt werden [66]. Das Vorgehen ähnelt dem Wendetangentenverfahren, da jedoch bei einer graphischen Betrachtung nicht zwangsweise genau der Wendepunkt sowie die Wendetangente bestimmt werden kann, ist es nicht identisch. Zunächst kann durch Betrachtung des stationären Endwerts $h_n(t \rightarrow \infty)$ die Verstärkung bestimmt werden. Dazu ist es eventuell notwendig, über die letzten Messwerte zu mitteln, um normalverteiltes Rauschen zu eliminieren. Die Verstärkung ergibt sich dann zu:

$$K_n = \frac{h_n(t \rightarrow \infty)}{K_{\sigma,n}} . \quad (3.12)$$

Bild 3.12 zeigt einen beispielhaften Verlauf einer Sprungantwort, in dem der stationäre Endwert durch eine gestrichelte Linie eingetragen ist. Zur Bestimmung der Anstiegszeit wird zunächst eine Tangente an den Verlauf der Sprungantwort angelegt, wie es die gepunktete Linie in Bild 3.12 zeigt. Der Zeitpunkt, an dem die Tangente den Abszissenwert von 0 erreicht, entspricht der Verzugszeit $T_{\tau,n}$. Ebenso lässt sich der Zeitpunkt $T_n + T_{\tau,n}$ bestimmen, an welchem die Tangente den stationären Endwert erreicht. Somit lässt sich wiederum die Anstiegszeit T_n berechnen. Dieses an sich händische Verfahren

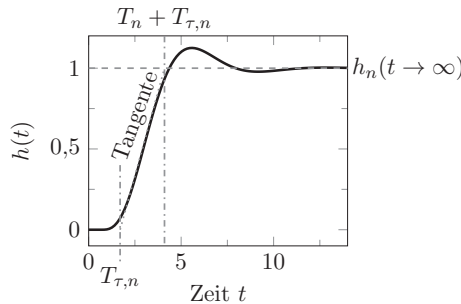


Bild 3.12: Einheitssprungantwort der Beispielkomponente 5 (Anhang A.1) mit eingezeichnetem stationären Endwert, Anstiegszeit und Totzeit.

kann zum Teil automatisiert werden, in dem z. B. der stationäre Endwert nach (3.12) durch Mittelwertbildung bestimmt wird. Für die Bestimmung der Tangente ist dem Autor keine Methode bekannt, die dies mit einem annehmbaren Aufwand in einer mit dem händischen Herangehen vergleichbaren Qualität ermöglicht.

Verfahren nach Strejc Das Verfahren nach Strejc setzt ebenfalls eine Sprungantwort sowie die Kenntnis der Größe des Sprungsignals am Eingang des Systems voraus. Wie bei der graphischen Bestimmung lässt sich die Verstärkung K_n aus dem stationären Endwert der Sprungantwort $h_n(t \rightarrow \infty)$ und dem Verstärkungsfaktor des Sprungs $K_{\sigma,n}$ mit Hilfe von (3.12) bestimmen. Zur Berechnung der Zeitkonstanten werden beim Verfahren von Strejc zwei beliebige Punkte $h_n(t_1)$ und $h_n(t_2)$ der Sprungantwort verwendet, welche vor bzw. nach der Wendetangente liegen sollten, wie in Bild 3.13 dargestellt. Damit lässt sich zum einen die Anstiegszeit für ein System erster Ordnung mit Verzugszeit [66],

$$T_n = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{K_n - h_n(t_1)}{K_n - h_n(t_2)}}, \quad (3.13)$$

und zum anderen auch die Verzugszeit selbst,

$$T_{\tau,n} = T_n \cdot \ln \left(1 - \frac{h_n(t_1)}{K_n} \right) + t_1, \quad (3.14)$$

berechnen.

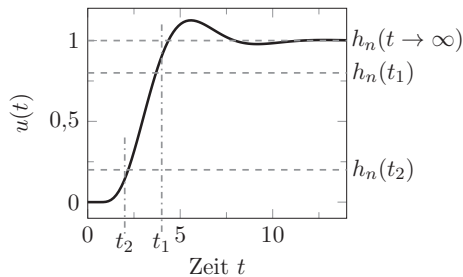


Bild 3.13: Einheitssprungantwort der Beispielkomponente 5 (Anhang A.1) mit eingezeichnetem stationären Endwert, sowie den Berechnungspunkten $h_n(t_1)$ und $h_n(t_2)$.

Der Vorteil des Verfahrens nach Strejc liegt darin, dass eine automatisierte Durchführung auch ohne Verwendung eines Schwellenwerts möglich ist. Der Schwellenwert wird bei der Methode der kleinsten Quadrate verwendet, um die Verzugszeit zu ermitteln. Das Verfahren nach Strejc berechnet die Verzugszeit direkt anhand der Stützpunkte. Durch die Wahl der Stützpunkte wird das Ergebnis beeinflusst und damit auch dessen Qualität im Vergleich zur Originalfunktion. Im Folgenden werden die Stützpunkte als freie Parameter gewählt und eine geeignete Gütefunktion ausgewählt, so dass sich durch ein Optimierungsverfahren eine geeignete Approximation ermitteln lässt. Für die in der Arbeit behandelten Beispiele sowie die Fallstudie ist das Verfahren nach Strejc aus den genannten Gründen am besten geeignet und wird daher im weiteren Verlauf verwendet.

Methode der kleinsten Quadrate Für die Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist es nicht zwangsläufig erforderlich die Systemantwort in Folge eines Sprungs am Eingang zu betrachten, weshalb dieses Verfahren neben dem nach Strejc noch an dieser Stelle genannt wird. Für eine bessere Vergleichbarkeit mit den bereits vorgestellten Verfahren wird jedoch auch eine Sprungantwort verwendet. Es sei dabei angemerkt, dass sich die folgenden Angaben und Umformungen somit jedoch auf eine Sprungfunktion beziehen und nicht direkt für jedes beliebige Eingangssignal verwendet werden können. Wie bei den beiden bereits vorgestellten Methoden wird auch in diesem Fall die Verstärkung anhand von $h_n(t \rightarrow \infty)$ und $K_{\sigma,n}$, wie in (3.12) beschrieben, bestimmt. Für die Identifizierung der Zeitkonstanten wird das Problem in zwei Teile zerlegt. Zunächst wird die Verzugszeit mit Hilfe eines Schwellenwerts $\epsilon_{T_{\tau,n}}$ ermittelt. Durch den Schwellenwert wird festgelegt, bis zu welchem Funktionswert des realen Verlaufs der Sprungantwort die Verzugszeit angenommen wird und das angenommene System erster Ordnung einsetzen soll. Für die Berechnung gilt somit:

$$T_{\tau,n} : h_n(T_{\tau,n}) = \epsilon_{T_{\tau,n}} \cdot h_n(t \rightarrow \infty) . \quad (3.15)$$

In einem zweiten Schritt werden die Messdaten zwischen der vorher bestimmten Totzeit und dem Erreichen von 63% von K_n verwendet, um über die Methode der kleinsten Quadrate den Parameter T_n zu schätzen. In diesem Bereich wird das Systemverhalten durch ein System erster Ordnung mit der Sprungantwort

$$h_n(t) = K_n \left(1 - e^{-\frac{t-T_{\tau,n}}{T_n}} \right) \cdot \sigma(t-T_{\tau,n}) \text{ für } t = [T_{\tau,n}, t_a] \text{ mit } h_n(t_a) = 0,63 \cdot K_n \quad (3.16)$$

angenommen. Die Sprungantwort lässt sich nach t umformen, sodass sich eine Funktion im logarithmischen Koordinatensystem ergibt, welche linear in den Parametern ist:

$$\ln \left(1 - \frac{h_n}{K_n} \right) = \hat{h}_n = -\frac{t - T_{\tau,n}}{T_n} . \quad (3.17)$$

Auf diese kann die Methode der kleinsten Quadrate direkt angewandt werden, woraus sich dann die Anstiegszeit T_n ergibt [77].

Optimierung der Sprungantwortfunktion Die letzte betrachtete Methode zur Systemidentifikation geht wieder von der Sprungantwort des zu identifizierenden Systems aus. Ein Kantengewicht $\mathbf{w}_n = (K_n, T_n, T_{\tau,n})$ lässt sich als Parametervektor eines Systems erster Ordnung mit Totzeit betrachten. Wie bereits bei dem vorherigen Verfahren aufgeführt, lässt sich für ein solches System die Sprungantwort in Abhängigkeit der im

Kantengewicht aufgeführten Parameter bestimmen:

$$h_n(t) = K_n \left(1 - e^{-\frac{t-T_{\tau,n}}{T_n}} \right) \cdot \sigma(t - T_{\tau,n}) \quad (3.18)$$

Wie bereits erwähnt, lässt sich die Verstärkung K_n aus dem stationären Endwert der Sprungantwort sowie dem der Sprungfunktion ermitteln. Somit sind noch die beiden Zeitkonstanten T_n und $T_{\tau,n}$ zu bestimmen. Mit Hilfe eines geeigneten Optimierungsverfahrens ist es möglich, in Abhängigkeit einer Gütefunktion optimale Werte für die Anstiegszeit und Verzugszeit zu bestimmen.

3.2.2.2 Gütefunktionen

Um die Qualität des Verhaltens der durch Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit modellierten Komponente im Vergleich zu ihrem realen Verhalten zu bewerten, wird die Sprungantwort $h_{p_{\text{Org}}}$ des realen Systems mit jener der Sprungantwort $h_{p_{\text{App}}}$ des Modells verglichen. Die Werte von $h_{p_{\text{Org}}}$ können dabei aus einer Messung oder aus einer Simulation stammen. Eine Simulation erfordert hierbei eine Beschreibung des Systems als lineares aber auch nichtlineares System, welches ausgewertet werden kann. Um eine für die Anwendung geeignete Gütefunktion zu finden, wurden das Integral über die Differenz des Vergleichswerts und des Modellwerts, das Integral über den Betrag der Differenz und das Integral über den quadrierten Betrag der Differenz betrachtet. In [99] werden die genannten Gütefunktionen auf die Funktion des Regelfehlers angewandt, und als Integralkriterium der linearen, betragslinearen sowie quadratischen Regelfläche bezeichnet. In Anlehnung an diese Benennung werden im Folgenden die Bezeichnungen lineares, betragslineares sowie quadratisches Integralkriterium verwendet. In allen drei Fällen wird der integrierte Wert durch die Verstärkung K dividiert, wobei die reale Verstärkung $K_{p_{\text{Org}}}$ und die des Modells $K_{p_{\text{App}}}$ als identisch angenommen werden ($K = K_{p_{\text{Org}}} = K_{p_{\text{App}}}$), da sie anhand des stationären Endwerts sehr genau bestimmt werden können. Diese Normierung ermöglicht einen direkten Vergleich des Werts der Gütefunktion zwischen den Komponenten. In der betrachteten Anwendung wird zudem das Integral auf den Zeitbereich zwischen dem Einsetzen des Einheitssprungs zum Zeitpunkt $t = 0$ und dem Zeitpunkt t_e beschränkt. Der Endzeitpunkt wird dabei anhand der Messwerte der Sprungantwort festgelegt, es soll gelten:

$$h_{p_{\text{Org}}}(t_e) = 0,63 \cdot K_{p_{\text{Org}}} \quad (3.19)$$

Zunächst wird das quadratische Integralkriterium betrachtet, welches die quadratische Differenz verwendet,

$$\Delta h_{\text{quad}} = \frac{1}{K} \int_{t=0}^{t_e} (h_{p_{\text{Org}}}(t) - h_{p_{\text{App}}}(t))^2 dt . \quad (3.20)$$

Durch das Quadrat wird die Differenz so gewichtet, dass kleine Differenzen weniger stark zu Δh_{quad} beitragen als große. Für das lineare Integralkriterium wird die Differenz integriert,

$$\Delta h_{\text{diff}} = \frac{1}{K} \int_{t=0}^{t_e} (h_{p_{\text{Org}}}(t) - h_{p_{\text{App}}}(t)) dt . \quad (3.21)$$

Die Gütefunktion beschreibt somit die Fläche zwischen den beiden Sprungantworten, wobei Flächen unterhalb des realen Verlaufs positiv und solche oberhalb negativ gewertet werden. Dies hat wiederum zur Folge, dass zum Erreichen eines minimalen Werts der Gütefunktion nur die Flächen unter- und oberhalb gleich groß sein müssen. Dies führt jedoch nicht zwangsläufig zu einer optimalen Lösung für die Approximation des Anfangsbereichs, weshalb Δh_{diff} nicht für die Bewertung der Approximation geeignet ist. Durch die Verwendung des Betrags heben sich die Bereiche ober- und unterhalb der Sprungantwort nicht mehr gegenseitig auf, weshalb ein möglichst kleiner Wert Δh_{abs} erreicht wird, wenn die Kurven möglichst nahe beieinander liegen. Daher stellt sich das betragslineare Integralkriterium,

$$\Delta h_{\text{abs}} = \frac{1}{K} \int_{t=0}^{t_e} |h_{p_{\text{Org}}}(t) - h_{p_{\text{App}}}(t)| dt , \quad (3.22)$$

als eine sinnvolle Wahl für die betrachtete Anwendung bei der Analyse des Inverse-Response-Verhaltens dar. Dies liegt daran, dass sich dieses Systemverhalten auf die Summe der positiven und negativen Flächen der Sprungantworten der Pfade beziehen lässt. Dies wird in Abschnitt 4 noch ausführlich dargestellt.

3.2.2.3 Bewertung der Identifikationsverfahren

Jedes der vorgestellten Identifikationsverfahren kann zur Bestimmung von Kantengewichten des Übertragungsfunktionsbasierten Graphen herangezogen werden. Wie bereits erwähnt, gibt es darüber hinaus noch weitere Identifikationsverfahren, welche an dieser Stelle nicht eingehender betrachtet wurden, sich aber für die Ermittlung von Kantengewichten eignen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Verfahren nach Streje für die Identifikation von Kantengewichten verwendet, da sich dieses im Rahmen der

Fallstudie aus Kapitel 5 als in der Praxis am geeignetsten darstellte. Bei der graphischen Bestimmung der Parameter sowie der Methode der kleinsten Quadrate wird ein Schwellenwert verwendet, um die Verzugszeit $T_{7,n}$ zu bestimmen. Durch das in der Praxis auftretende Messrauschen ist es schwierig, einen geeigneten Schwellenwert festzulegen. Wird ein kleiner Schwellenwert in der Größenordnung des Rauschens gewählt, so kann in Folge des Rauschens die Verzugszeit zu kurz bestimmt werden, da bereits das Rauschen den Schwellenwert übersteigt. Ein Schwellenwert, der größer als das Rauschen ist, kann dieses Problem zwar vermeiden, jedoch auch wieder so groß sein, dass eine zu große Verzugszeit bestimmt wird. Die Verzugszeit beeinflusst dann wiederum die Bestimmung der Anstiegszeit. Insgesamt betrachtet ist die Güte der so ermittelten Approximation des Anfangsbereichs schlechter als beim Verfahren nach Strejc oder der Optimierung der Sprungantwortfunktion, welche beide keinen Schwellenwert verwenden. Die Verfahren besitzen beide jeweils zwei freie Parameter welche mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens möglichst günstig anhand einer Gütefunktion gewählt werden. Bei der Implementierung der beiden Verfahren wurde die betraglineare Gütefunktion nach (3.22) und die MATLAB Funktion „fminsearch“, welche die Nelder-Mead Simplex Methode nach [51] nutzt [94], verwendet. Bei der Bestimmung der Kantengewichte des Modells der Fallstudie (siehe Kapitel 5) wurden zunächst beide Verfahren angewandt, wobei sich herausstellte, dass die Optimierung auf Basis des Verfahrens nach Strejc robuster gegenüber dem Messrauschen als auch der Abtastzeit ist und somit einfacher in der Anwendung. Daher wird im Folgenden das Verfahren nach Strejc verwendet.

3.2.3 Ableitung aus physikalischem Modell

Eine letzte hier vorgestellte Möglichkeit zur Modellierung von Teilen des Übertragungsfunktionsbasierten Graphen ist die Verwendung von physikalischen Modellen. Dies macht vor allem dann Sinn, wenn das dynamische Verhalten eines Teil der Anlage schon einmal als physikalisches Modell hergeleitet wurde oder ein allgemeines Modell erstellt werden soll, welches mit Hilfe von Parametern wie z. B. Geometriedaten je nach Ausprägung der Komponente angepasst werden soll. Das folgende Beispiel soll das prinzipielle Vorgehen bei der Ableitung der Kantengewichte sowie der Knoten veranschaulichen, wobei ein Mehrgrößensystem gewählt wurde, um auch diesen Aspekt zu betrachten.

Beispiel 7: *Als Beispiel wird in Anlehnung an [62] (Seite 111) zunächst allgemein ein Wärmetauscher betrachtet. Bild 3.14 zeigt das Schema des Wärmetauschers mit dem zu kühlenden Flüssigkeitsstrom $q_{m_{10}}$ im Zufluss und q_{m_1} im Abfluss sowie dem Kühlmittelstrom $q_{m_{20}}$ im Zufluss und q_{m_2} im Abfluss. Zudem sind die Temperaturen der Ströme vor sowie nach dem Wärmetauscher angegeben mit ϑ_{10} und ϑ_1 bzw. ϑ_{20} und ϑ_2 .*

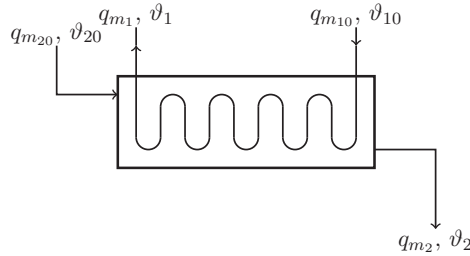


Bild 3.14: Schematische Skizze des Wärmetauschers.

Anhand der Skizze in Bild 3.14 können zunächst die Ein- und Ausgänge des Systems modelliert werden. Es ist einfach zu erkennen, dass es sowohl für den Kühlmittelfluss als auch für das zu kühlende Medium jeweils einen Zufluss und einen Abfluss gibt. Für jeden Zufluss bzw. Abfluss sind der Massenstrom sowie die Temperatur angegeben, weshalb für die jeweiligen Ein- und Ausgänge zwei Knoten im Graphen verwendet werden. Ein Knoten repräsentiert die Funktion des Massenstroms und einer die der Temperatur. Es ergibt sich somit zunächst der in Bild 3.15 dargestellte übertragungsfunktionsbasierte Graph ohne Kanten.

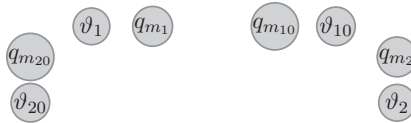


Bild 3.15: Erste Annäherung an den übertragungsfunktionsbasierten Graphen des Wärmetauschers.

Die Kantengewichte können nun durch die Betrachtung der physikalischen Zusammenhänge bestimmt werden. Um dies zu verdeutlichen, werden anhand des Beispiels aus [62] die Kantengewichte $\mathbf{w}_{\vartheta_{10}, \vartheta_1}$ und $\mathbf{w}_{\vartheta_{20}, \vartheta_2}$ der Kanten zwischen ϑ_{10} und ϑ_1 bzw. ϑ_{20} und ϑ_2 hergeleitet. Neben diesen beiden betrachteten Kanten gibt es noch weitere Kanten, z. B. zwischen ϑ_2 und ϑ_1 oder ϑ_1 und ϑ_2 , deren Herleitung im Beispiel nicht erfolgt, jedoch analog dazu erfolgen kann. Bild 3.16 zeigt die beiden im Beispiel behandelten Kanten, welche das Verhalten der Eintrittstemperatur des zu kühlenden Fluids bzw. des Kühlmittels auf die Ausgangstemperatur des zu kühlenden Fluids repräsentieren.

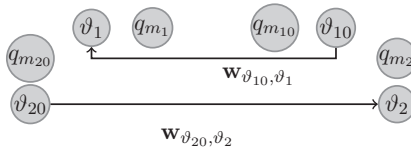


Bild 3.16: Übertragungsfunktionsbasierter Graph des Wärmetauschers mit den zwei betrachteten Kanten.

Für die Modellierung wird in [62] als grobe Näherung angenommen, dass die Fluide homogen durchmischt sind, weshalb die Temperatur ortsunabhängig betrachtet wird und die Zuflüsse gleich den Abflüssen sind, weshalb $q_{m_{10}} = q_{m_1}$ sowie $q_{m_{20}} = q_{m_2}$. Auf Basis der Energiebilanz ergeben sich somit die folgenden Gleichungen:

$$m_1 \cdot c_1 \frac{\vartheta_1(t)}{dt} = q_{m_1} \cdot c_1 \cdot (\vartheta_{10}(t) - \vartheta_1(t)) - \kappa \cdot A \cdot (\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)) \quad (3.23)$$

und

$$m_2 \cdot c_2 \frac{\vartheta_2(t)}{dt} = q_{m_2} \cdot c_2 \cdot (\vartheta_{20}(t) - \vartheta_2(t)) + \kappa \cdot A \cdot (\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)) \quad (3.24)$$

In der Bilanz werden die konstanten Parameter für die spezifische Wärmekapazität c_1 und c_2 , den Wärmeaustausch pro Flächeneinheit und Temperaturdifferenz κ sowie die Austauschfläche A verwendet. Ebenso wird die in der Rohrleitung befindliche Masse m_1 und m_2 als unveränderlich angenommen. Transformiert man (3.23) und (3.24) mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich, so ergibt sich in Abhängigkeit der Temperaturen:

$$\Theta_1(s) (m_1 \cdot c_1 \cdot s + q_{m_1} \cdot c_1 + \kappa \cdot A) = (q_{m_1} \cdot c_1) \Theta_{10}(s) + \kappa \cdot A \cdot \Theta_2(s) \quad (3.25)$$

und

$$\Theta_2(s) (m_2 \cdot c_2 \cdot s + q_{m_2} \cdot c_2 + \kappa \cdot A) = (q_{m_2} \cdot c_2) \Theta_{20}(s) + \kappa \cdot A \cdot \Theta_1(s) \quad (3.26)$$

Daraus lassen sich wiederum die Übertragungsfunktionen

$$G_{\vartheta_{10}, \vartheta_1}(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\Theta_{10}(s)} = \frac{q_{m_1} \cdot c_1}{m_1 \cdot c_1 \cdot s + q_{m_1} \cdot c_1 + \kappa \cdot A} \quad (3.27)$$

sowie

$$G_{\vartheta_{20}, \vartheta_2}(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_{20}(s)} = \frac{q_{m_2} \cdot c_2}{m_2 \cdot c_2 \cdot s + q_{m_2} \cdot c_2 + \kappa \cdot A} \quad (3.28)$$

bestimmen. Es ist leicht zu erkennen, dass es sich um Systeme erster Ordnung handelt, weshalb anhand der Übertragungsfunktionen (3.27) und (3.28) die in den Kantengewichten verwendete Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit abgeleitet werden können:

$$\mathbf{w}_{\vartheta_{10}, \vartheta_1} = (K_{\vartheta_{10}, \vartheta_1}, T_{\vartheta_{10}, \vartheta_1}, T_{\tau, \vartheta_{10}, \vartheta_1}) = \left(\frac{q_{m_1} \cdot c_1}{q_{m_1} \cdot c_1 + \kappa \cdot A}, \frac{m_1 \cdot c_1}{q_{m_1} \cdot c_1 + \kappa \cdot A}, 0 \right) \quad (3.29)$$

und

$$\mathbf{w}_{\vartheta_{20}, \vartheta_2} = (K_{\vartheta_{20}, \vartheta_2}, T_{\vartheta_{20}, \vartheta_2}, T_{\tau, \vartheta_{20}, \vartheta_2}) = \left(\frac{q_{m_2} \cdot c_2}{q_{m_2} \cdot c_2 + \kappa \cdot A}, \frac{m_2 \cdot c_2}{q_{m_2} \cdot c_2 + \kappa \cdot A}, 0 \right) . \quad (3.30)$$

Sind die Parameter für die spezifische Wärmekapazität usw. bekannt, können die Werte der Kantengewichte bestimmen werden. Durch unterschiedliche Parameter kann so auch das selbe Modell für verschiedene Wärmetauscher verwendet werden. Um weitere, noch fehlende Kantengewichte zu bestimmen, ist das Vorgehen für das jeweilige Ein-/Ausgangsverhalten zu wiederholen. Aus der bereits getroffenen Annahme das $q_{m_{10}} = q_{m_1}$ und $q_{m_{20}} = q_{m_2}$, ergeben sich z. B. die Kantengewichte:

$$\mathbf{w}_{q_{m_{10}}, q_{m_1}} = (K_{q_{m_{10}}, q_{m_1}}, T_{q_{m_{10}}, q_{m_1}}, T_{\tau, q_{m_{10}}, q_{m_1}}) = (1, 0, 0) \quad (3.31)$$

und

$$\mathbf{w}_{q_{m_{20}}, q_{m_2}} = (K_{q_{m_{20}}, q_{m_2}}, T_{q_{m_{20}}, q_{m_2}}, T_{\tau, q_{m_{20}}, q_{m_2}}) = (1, 0, 0) . \quad (3.32)$$

3.3 Diskussion

3.3.1 Abschätzung des Approximationsfehlers

Da bei der Modellierung des übertragungsfunktionsbasierten Graphen der Anfangsbereich des Verhaltens der Sprungantwort vereinfacht durch Anstiegszeit und Verzugszeit aus einem Arbeitspunkt heraus beschrieben wird, beinhaltet das Modell Approximationsfehler, welche im Folgenden diskutiert werden sollen. Zunächst wird die Approximation der Verstärkung betrachtet, welche sich auf ein in einem Arbeitspunkt linearisiertes System bezieht. Wird das Modell in der Analyse um diesen Arbeitspunkt betrachtet, so kann der Fehler in der Verstärkung für die Analyse vernachlässigt werden. Für den vorgestellte Modellansatz wird angenommen, dass alle Komponenten bzw. jedes Übertragungsverhalten im jeweilig zugehörigen Arbeitspunkt modelliert ist, welcher sich aus einem stationären Betrieb ergibt. Das Modell beschreibt also nur das Verhalten aus einem festgelegten Betriebspunkt heraus. Dies ist keine Einschränkung für die Detektion des Inverse-Response-Verhaltens, da sich das Verhalten immer auf einen Betriebspunkt bezieht. Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, auch wenn die Kantengewichte der Komponenten des Modells separat bestimmt werden, sich immer auf den selben Betriebspunkt zu beziehen. Diese Beschränkung auf einen Betriebspunkt ist bei den möglichen Anwendungen keine besonders gravierende Einschränkung, da Industrieanlagen für einen effizienten Betrieb meistens auf einen bzw. eine begrenzte Auswahl an Betriebspunkten hin ausgelegt sind [41]. Die Betrachtung des Inverse-Response-Verhalten müsste im Fall von mehreren Betriebspunkten dann einfach für jeden durchgeführt werden,

wobei die Struktur des Modells erhalten bleibt und sich lediglich die Kantengewichte ändern. Es sei zudem angemerkt, dass die Verschiebung des Betriebspunktes nicht auf alle modellierten Komponenten den selben Effekt hat, da es sich im Original auch um nichtlineare Teilsysteme handeln kann. Das bedeutet, dass sich durch die Verschiebung des Betriebspunktes nicht zwangsweise eine Kompensation des Fehlers zwischen den Komponenten einstellt.

Um die Approximationsfehler, welche durch die Approximation des Anfangsbereichs mittels Anstiegszeit sowie Verzugszeit entstehen, und ihre Auswirkungen auf die noch folgende Analyse eingehender zu betrachten, werden die Beispielkomponenten 1, 2, 6 und 7 aus Anhang A.1 herangezogen. Somit sind zum einen Systeme mit und ohne Überschwingen sowie Totzeit berücksichtigt, aber auch Systeme mit unterschiedlichen Zeitkonstanten. Da der Anfangsbereich von Interesse ist, werden die Verstärkungen aller Beispielkomponenten zu Eins gewählt, $K_{B1} = K_{B2} = K_{B6} = K_{B7} = 1$.

Für die Betrachtung wurden Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten simuliert und mit einem Rauschen beaufschlagt. Die Größenordnung des Rauschens orientiert sich dabei an der später noch vorgestellten Fallstudie aus Kapitel 5. Zur Bestimmung der Größenordnung wurde beispielhaft die Messung des auf 30 mm gehaltenen Füllstands in Tank 9 der Fallstudie betrachtet, Bild 3.17 (a) zeigt die verrauschte Messung. Für den dargestellten Ausschnitt ergab sich das in Bild 3.17 (b) aufgezeigte Histogramm sowie ein Mittelwert von 30,0764 mm und eine empirische Standardabweichung von 0,3809 mm bzw. 0,0127 % des Mittelwerts. Für die Beaufschlagung der Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten wird daher ein normalverteiltes Rauschsignal mit einem Mittelwert von 0 und einer Standardabweichung von 0,02 angenommen.

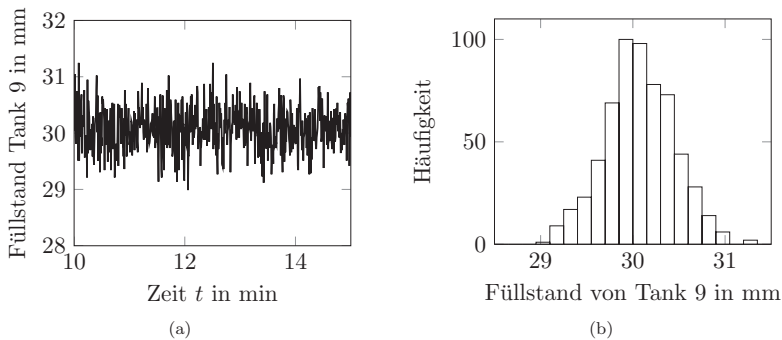


Bild 3.17: Verrauschtes Messsignal (a) sowie zugehöriges Histogramm (b) des Füllstands von Tank 9 der Fallstudie aus Kapitel 5.

Zur Aufbereitung der simulierten Messdaten für die Anwendung des Identifikationsverfahrens erfolgte die Filterung mittels nicht kausalem gleitenden Mittelwert. Für die Beispielkomponente 2 wurde, bei 10000 Messungen innerhalb des gemessenen Zeitraums

von 0 bis 35, die Breite des gleitenden Mittelwerts auf 21 Messungen festgelegt. Somit ergibt sich aus dem in Bild 3.18 (a) dargestellten verrauschten Signal der in Bild 3.18 (b) dargestellte Signalverlauf.

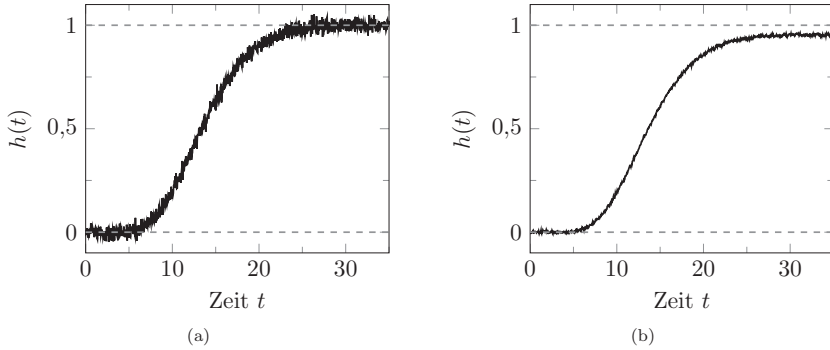


Bild 3.18: Verrauschtes Messsignal der Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten 2 (a) und das gefilterte Signal (b).

Wie in Abschnitt 3.2.2.3 beschrieben, wird für die Identifizierung das Verfahren nach Strejc verwendet. Dabei wird das gefilterte Signal als Bezugsfunktion $h_{p_{\text{Org}}}$ der Gütefunktion benutzt. Bild 3.19, 3.20 und 3.21 zeigt zum einen in (a) die Einheitssprungantwort $h_w(t)$ der Approximation durch die aus den verrauschten Daten identifizierte Verzugs- und Anstiegszeit der Beispielkomponenten 1, 2 und 6 zusammen mit den jeweiligen verrauschten Messsignal $\tilde{h}(t)$. In (b) ist zudem jeweils die ideale Sprungantwort $h(t)$ zusammen mit dem Verhalten $h_w(t)$ der aus den verrauschten Daten identifizierte Approximation durch Verzugs- und Anstiegszeit aufgezeichnet. Es wird jeweils der Verlauf vom Einsetzen des Sprungs zum Zeitpunkt 0 bis zu dem Zeitpunkt t_e dargestellt, an dem die Sprungantwort 63 % des stationären Endwerts erreicht hat.

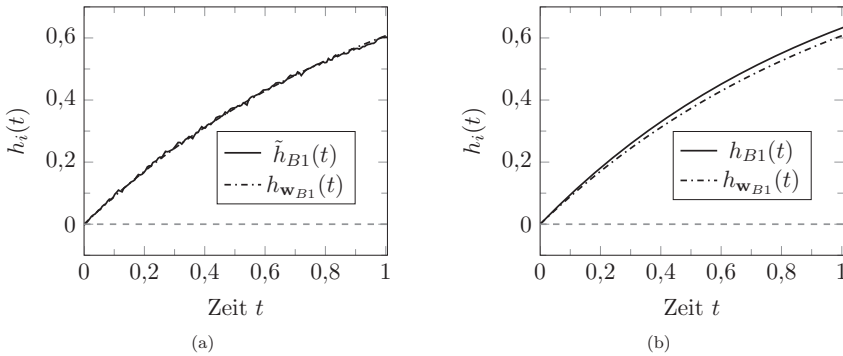


Bild 3.19: Anfängliche Bereiche der Einheitssprungantworten der Ergebnisse der Identifikation der Beispielkomponenten 1 mit verrauschtem Ausgangssignal (a) und idealem Verhalten (b).

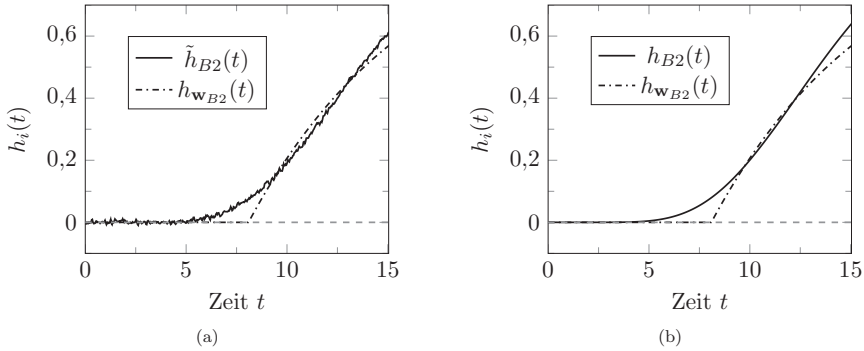


Bild 3.20: Anfängliche Bereiche der Einheitssprungantworten der Ergebnisse der Identifikation der Beispielkomponenten 2 mit verrauschtem Ausgangssignal (a) und idealem Verhalten (b).

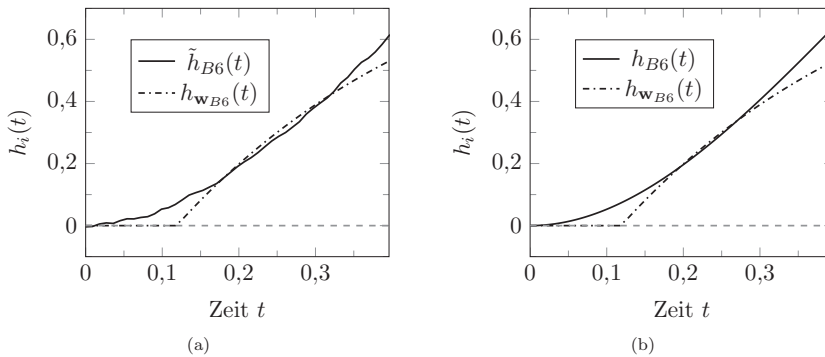


Bild 3.21: Anfängliche Bereiche der Einheitssprungantworten der Ergebnisse der Identifikation der Beispielkomponenten 6 mit verrauschtem Ausgangssignal (a) und idealem Verhalten (b).

Die bei der Identifikation ermittelten Parameter sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst, zusammen mit dem zugehörigen optimierten Wert Δh_{abs} der Gütefunktion.

Tabelle 3.1: Identifizierte Modellparameter für die Beispielkomponenten.

	Verstärkung	Anstiegszeit	Verzugszeit	Δh_{abs}	t_e
Beispielkom. 1	1,0009	1,0702	0	0,0042	1,0704
Beispielkom. 2	0,9975	8,2253	8,0920	0,2658	15,1865
Beispielkom. 6	0,9989	0,3667	0,1188	0,0105	0,4059

In Abschnitt 3.1.2.1 wurde bereits die Modellierung der Beispielkomponente 7 aufgegriffen. Es wurde gezeigt, dass diese ein Nachschwingen aufweist und daher mit einem kleineren Anfangsbereich betrachtet wird. Wird für die Identifikation der Verzugszeit und Anstiegszeit der Beispielkomponente 7 der Bereich bis zum ersten Maximum als Anfangsbereich angesehen, so ergibt sich die Approximation in Bild 3.22. Dabei ist die

Verstärkung $K_{B7_{p_{App}}} = 0,9997$, die Anstiegszeit dann $T_{B7_{p_{App}}} = 0,1635$ und die Verzugszeit $T_{\tau, B7_{p_{App}}} = 0,0105$. Der Wert der Gütefunktion beträgt $\Delta h_{abs, B7_{p_{App}}} = 0,0170$ bei einem Endzeitpunkt des Integrals von $t_{e, B7_{p_{App}}} = 0,4995$.

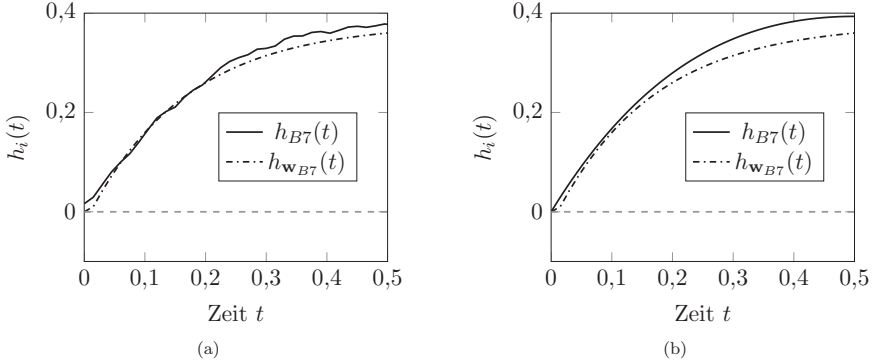


Bild 3.22: Anfängliche Bereiche der Einheitssprungantworten der Ergebnisse der Identifikation der Beispielkomponenten 7 mit verrauschtem Ausgangssignal (a) und idealem Verhalten (b).

Um nun eine Aussage zu den Approximationsfehlern und ihrem Einfluss auf die spätere Analyse zu machen, werden die Werte des betragslinearen Integralkriteriums Δh_{abs} miteinander verglichen. Dabei fällt zunächst auf, dass diese stark unterschiedlich sind, da sie mit unterschiedlichen Endzeitpunkten t_e berechnet wurden, und daher zunächst keine weiteren Rückschlüsse für die Modellierung möglich sind. Der Einfluss von t_e auf das Integralkriterium lässt sich dadurch vermindern und eine bessere Vergleichbarkeit erreichen, dass auf den jeweiligen Anfangsbereich normiert wird:

$$\Delta \hat{h}_{abs} = \frac{\Delta h_{abs}}{t_e} . \quad (3.33)$$

Daraus ergeben sich die in Tabelle 3.2 dargestellten Werte. Die Tabelle umfasst zudem die Werte des betragslinearen Integralkriteriums, wenn der approximierte Verlauf mit dem idealen Verlauf $h_{abs, p_{Org}}$ der Beispielkomponenten verglichen wird.

Tabelle 3.2: Werte der Gütefunktion bei der Identifizierung der Beispielkomponenten.

	Beispielkom. 1	Beispielkom. 2	Beispielkom. 6	Beispielkom. 7
t_e	1,0704	15,1865	0,4059	0,4995
Δh_{abs}	0,0042	0,2658	0,0105	0,0170
$\Delta \hat{h}_{abs}$	$3,92 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$2,59 \cdot 10^{-2}$	$3,43 \cdot 10^{-2}$
$\Delta h_{abs, p_{Org}}$	0,0195	0,2838	0,0126	0,0332
$\Delta \hat{h}_{abs, p_{Org}}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$1,87 \cdot 10^{-2}$	$3,10 \cdot 10^{-2}$	$6,65 \cdot 10^{-2}$

Es fällt auf, dass der normierte Wert $\Delta \hat{h}_{abs}$ der ersten Beispielkomponente im Fall des Vergleichs mit dem gefilterten Signal um eine Zehnerpotenz unterscheidet. Dies

lässt sich dadurch erklären, dass es sich bei dem Beispiel um ein System erster Ordnung handelt, bei welchem die Sprungantwort direkt eine positive Steigung hat und eigentlich keine Verzugszeit. Durch das Messrauschen wird einem System erster Ordnung bei der Optimierung jedoch auch eine Verzugszeit hinzugefügt, um das Optimum der Gütefunktion zu erreichen. Die anderen Beispielkomponenten haben jeweils eine feste Totzeit oder eine durch die höhere Ordnung bedingte Verzugszeit. Vergleicht man die zeitnormierten Werte des Integralkriteriums $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$ der Beispielkomponenten 2, 6 und 7, so fällt auf, dass diese eine ähnliche Größenordnung aufweisen. Dies gilt auch für den Integralwert mit Bezug zur Originalfunktion $\Delta \hat{h}_{\text{abs}, p_{\text{Org}}}$. Bei der Analyse wird im nächsten Kapitel noch einmal eingehender dargestellt, dass das Inverse-Response-Verhalten auf die Summe der einzelnen Sprungantworten zurückgeführt werden kann. Dabei ist es ausschlaggebend, wie das Verhältnis zwischen Pfaden mit negativem Vorzeichen der Sprungantwort und denen mit positivem Vorzeichen ist. Für die Auswertung wird dabei jeweils der durch die Verzugszeit und Anstiegszeit approximierter Anfangsbereich betrachtet. Sind die Fehler in den miteinander zu vergleichenden Pfaden ähnlich groß, so bedeutet das im Vergleich der Pfade mit positivem Vorzeichen und negativem Vorzeichen, dass sich der Approximationsfehler im Zuge der vereinfachten Modellierung ausgleichen kann. Besitzt das betrachtete System Inverse-Response-Verhalten, so haben die negativen Pfade im Anfangsbereich einen größeren Einfluss als die positiven. Umgekehrt verhält es sich für den Fall, dass das System kein Inverse-Response-Verhalten besitzt (unter der Annahme das Gesamtverstärkung positiv ist). Daraus kann gefolgert werden, dass durch den Approximationsfehler das Verhalten des Systems im Anfangsbereich bei der Modellierung verstärkt wird, dies führt bei der Analyse wiederum dazu, dass eine sicherer Aussage gemacht werden kann. Hierauf wird in Abschnitt 4.4 noch einmal eingegangen.

3.3.2 Praktische Anwendbarkeit des Modellansatzes

Neben den im vorherigen Abschnitt besprochenen Approximationsfehlern bei der Modellierung ist es zudem von Interesse, die Anwendbarkeit eines Modellansatzes in der Praxis zu diskutieren. Hierzu ist zu betrachten, wie sich die Größe und Komplexität eines Systems auf den Aufwand der Modellierung auswirkt. Einführend wurde im Beispiel 3 ein Eingrößensystem betrachtet. Die Modellierung von Eingrößensystemen ist jedoch mit Blick auf die praktische Anwendbarkeit nicht ausreichend, weshalb in Beispiel 7 ein Mehrgrößensystem verwendet wurde. Es ist also grundsätzlich möglich, auch Mehrgrößensysteme als übertragungsfunktionsbasierten Graphen zu modellieren. Wie das Beispiel 7 zeigt, ist es dabei sehr einfach anhand einer Skizze des Teilsystems oder eines R&I-Fließschema die Knoten des übertragungsfunktionsbasierten Graphen zu iden-

tifizieren. Zu berücksichtigen ist, dass es bei einem großen System auch zu einer sehr großen Anzahl an Knoten kommen kann, da diese nicht nur einzelne Ein- und Ausgänge repräsentieren, sondern jeweils nur eine Zustandsgröße. Verglichen mit anderen Modellierungsmethoden ist der Aufwand jedoch ähnlich, da auch bei einem mathematischen Modell für jeden Zustand eine Variable zur Verfügung stehen muss. Die Modellierung der Kanten ist hingegen nicht so trivial wie die der Knoten. Es ist zum einen darauf zu achten, dass jedes relevante Übertragungsverhalten auch berücksichtigt wurde und zum anderen, dass die Gewichte korrekt abgeleitet bzw. ermittelt wurden. Von Vorteil ist beim Übertragungsfunktionsbasierten Graphen, dass verschiedene Methoden zur Bestimmung der Kantengewichte miteinander kombiniert werden können und dass es möglich ist, bereits bekannte Kantengewichte wiederzuverwenden. Zudem ist es möglich, einzelne Teile der Anlage schnell anzupassen, indem Knoten und Kanten hinzugefügt, angepasst oder entfernt werden. Alles in allem ist der Aufwand mit anderen Modellierungsmethoden vergleichbar, wobei die Einfachheit des Modells und die Möglichkeit von Kombinationen den frühen Einsatz des Graphen im Entwicklungsprozess begünstigen.

4 Analyse auf Inverse-Response-Verhalten

4.1 Einleitung

Der im Folgenden vorgestellte Detektionsalgorithmus ermöglicht auf der Grundlage eines Modells nach dem im vorhergehenden Kapitel eingeführten Modellansatz eine qualitative Aussage zum Vorliegen der strukturellen Eigenschaft des Inverse-Response-Verhalten des betrachteten Systems. Das Detektionsergebnis ist qualitativ, da es sich um eine Ja-Nein-Aussage zum Vorhandensein des Inverse-Response-Verhaltens handelt, nicht jedoch um eine quantitative Bewertung des Betrags des gegenläufigen Verhaltens. Einfach zu generierende, qualitative Aussagen können bei der Konzeptentwicklung eines Automatisierungssystems helfen, alternative Konzeptentwürfe zu bewerten. Dazu sollte der Detektionsalgorithmus bereits in einem frühen Stadium der Entwicklung eingesetzt werden können und einen moderaten Aufwand im Vergleich zu konventionellen Methoden aufweisen. Bevor der neue Detektionsalgorithmus für Inverse-Response-Verhalten vorgestellt wird, sollen zunächst bereits bekannte Verfahren zur Analyse von Inverse-Response-Verhalten aufgezeigt werden. Zum Abschluss des Kapitels wird zudem die Genauigkeit des Detektionsergebnisses bewertet.

4.2 Kriterien für Inverse-Response-Verhalten bei linearen Systemen

Im Fall eines linearen Systems ist die Untersuchung auf Inverse-Response-Verhalten durch Betrachtung der Übertragungsnullstellen des Systems möglich. Für die Untersuchung nichtlinearer Systeme sind dem Autor keine Verfahren bekannt. Die bekannten Kriterien werden an dieser Stelle für Ein- sowie Mehrgrößensysteme besprochen. Zudem wird auf den Begriff der Minimalphasigkeit eingegangen, da dieser häufig im Zusammenhang mit dem Inverse-Response-Verhalten verwendet wird.

4.2.1 Eingrößensystem

Im Abschnitt 3.1.1 wurde bereits das Unterschwingen als auch das Inverse-Response-Verhalten definiert. Zudem wurde in Abschnitt 3.1.2 ein Beispielsystem mit Inverse-Response-Verhalten eingeführt. Dabei handelt es sich um ein Eingrößensystem, welches aus zwei parallelen Systemen erster Ordnung besteht. In [90] wurde gezeigt, dass die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt sind, wenn die Nullstelle der zugehörigen Übertragungsfunktion positiv ist. Die Berechnung der Anzahl positiver Nullstellen ist in allen bekannten Arbeiten die Grundlage zur Untersuchung eines Systems auf Unterschwingen sowie Inverse-Response-Verhalten. So wird in [36] gezeigt, dass die Sprungantwort eines linearen, asymptotisch stabilen Eingrößensystems mindestens einen Nulldurchgang aufweist, wenn die Übertragungsfunktion des Systems mindestens eine positive Nullstelle besitzt. Aus einem Nulldurchgang der Sprungantwort lässt sich direkt ein Unterschwingen ableiten. Durch die Anzahl an Nullstellen lässt sich verifizieren, ob es sich um ein initiales Unterschwingen, also um Inverse-Response-Verhalten, oder um ein Unterschwingen zu einem späteren Zeitpunkt handelt. Eine notwendige sowie hinreichende Bedingung für das Auftreten eines initialen Unterschwingens wurde in [101] hergeleitet.

Satz 2: *Die Einheitssprungantwort $h(t)$ eines asymptotisch stabilen, ortsunabhängigen Eingrößensystems zeigt initiales Unterschwingen, wenn seine streng propere (Zählergrad ist kleiner Nennergrad) Übertragungsfunktion $G(s)$ eine ungerade Anzahl an reellen Nullstellen aufweist.*

Beweis: *Ein Beweis hierfür finden sich z. B. in [101].* □

Der Satz 2 wird in [36] auf lineare Systeme mit einem relativen Grad von 0 erweitert.

Satz 3: *Ein asymptotisch stabiles, ortsunabhängiges Eingrößensystem mit der properen Übertragungsfunktion $G(s)$, weist initiales Unterschwingen in der Einheitssprungantwort auf, wenn $G(s) - G(\infty)$ eine ungerade Anzahl an positiven Nullstellen besitzt.*

Beweis: *Siehe [36], Seite 50 und 51.* □

Aus dem Satz 2 und der Erkenntnis zum Nulldurchgang in [36] kann nun eine Aussage für das Sprungantwortverhalten bei gerader Anzahl von Nullstellen hergeleitet werden.

Korollar 1: *Die Einheitssprungantwort $h(t)$ eines asymptotisch stabilen, ortsunabhängigen Eingrößensystems besitzt kein initiales Unterschwingen, jedoch mindestens ein Unterschwingen zu einem späteren Zeitpunkt t_i , wenn seine streng propere Übertragungsfunktion $G(s)$ eine gerade Anzahl an Nullstellen hat.*

4.2.2 Mehrgrößensystem

Eine Definition von Unterschwingen sowie Inverse-Response-Verhalten im Falle eines Mehrgrößensystems wurde ebenfalls im Abschnitt 3.1.1 aufgezeigt. Es gibt Beispiele, in denen die Übertragungsnulstellen zur Analyse des Inverse-Response-Verhaltens herangezogen werden, z. B. in [43], dies trifft jedoch nicht in allen Fällen zu, wie das folgende Gegenbeispiel aus [74] zeigt.

Beispiel 8: Gegeben sei das lineare Zustandsraummodell mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

mit den Anfangswerten $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Übertragungsfunktionsmatrix des Beispiels lautet:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+7}{s^2+3s+2} & \frac{2s+5}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.\tag{4.2}$$

Die McMillan-Normalform von $\mathbf{G}(s)$ ist dann:

$$\mathbf{M}\{\mathbf{G}(s)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}.\tag{4.3}$$

Es ergibt sich somit, dass keine Übertragungsnulstelle nach der Definition von [68, 84, 85] existiert. Für die Definition der Übertragungsnulstellen nach [63] ergibt sich mit $\det(\mathbf{G}(s)) = 0$ die Übertragungsnulstelle $s_0 = -1$.

Die invarianten Nullstellen können mit Hilfe der Determinanten der Systemmatrix nach Rosenbrock [85] berechnet werden, wobei es in dem Beispiel keine gibt.

$$\det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I} \cdot s & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = 3.\tag{4.4}$$

Wird das System mit einem sprungförmigen Eingangssignal $\mathbf{u}(t) = (1, -1)^T \cdot \sigma(t)$ beaufschlagt, so ergibt sich am Ausgang ein Inverse-Response-Verhalten, wie das Simulationsergebnis in Bild 4.1 zeigt.

Das Beispiel zeigt Inverse-Response-Verhalten in der Simulation, es gibt jedoch keine positive Übertragungsnulstelle und keine invariante Nullstelle. Anhand der Übertragungsnulstellen lässt sich das Inverse-Response-Verhalten daher nicht direkt ableiten.

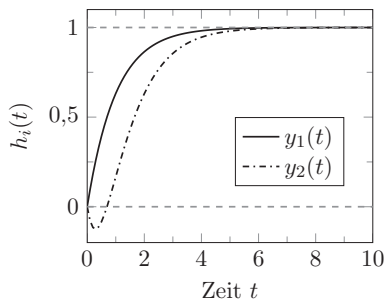


Bild 4.1: Verlauf der Ausgangsfunktionen des Beispielsystems mit Inverse-Response-Verhalten.

4.2.3 Nicht minimalphasiges System

Im Zusammenhang mit der Betrachtung des Inverse-Response-Verhaltens wird häufig der Begriff des nicht minimalphasigen Systems verwendet. Dabei ist zu beachten, dass ein Eingrößensystem, welches Inverse-Response-Verhalten aufweist und daher mindestens eine positive Nullstelle besitzt, auch ein nicht minimalphasiges System ist. Andersherum lässt sich jedoch von einem nicht minimalphasigen System nicht auf ein System mit Inverse-Response-Verhalten schließen, da z. B. auch instabile Systeme oder Systeme mit einer geraden Anzahl an Nullstellen zu den nicht minimalphasigen Systemen zählen. Die folgende Definition eines minimalphasigen Systems verdeutlicht dies.

Definition 9: Ein lineares, zeitinvariantes System wird als minimalphasig bezeichnet, wenn das System und seine Inverse stabil und kausal sind [45].

Erschwerend kommt hinzu, dass sich für den Begriff der Minimalphasigkeit im Laufe der Zeit weitere Definitionen ergeben haben, welche nicht deckungsgleich sind [107]. Dies führte dazu, dass der Zusammenhang zwischen einem nicht minimalphasigen System und einem System mit Inverse-Response-Verhalten nicht in allen bekannten Publikationen deutlich wird. Um eine eindeutige Einordnung des Inverse-Response-Verhaltens zu ermöglichen, wird daher in der vorliegenden Arbeit auf die Klassifizierung als nicht minimalphasiges System verzichtet.

4.2.4 Nullstellenbestimmung

Für den Fall eines linearen Systems ist eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten des Systems also durch die Art und Anzahl der Nullstellen des Systems möglich. Hierfür ist es zunächst erforderlich, die Übertragungsfunktion zwischen den betrachteten Eingängen und dem Ausgang zu bestimmen. Da die genaue Anzahl der positiven Nullstellen für die Untersuchung ausschlaggebend ist, muss darauf geachtet werden, dass

keine positiven Nullstellen eliminiert werden. Dies kann z. B. dann der Fall sein, wenn ein großes System betrachtet wird und bei der Modellierung daher Reduktionsverfahren angewandt werden, um die Systemgröße auf ein praktikables Mass zu verringern. Bei der numerischen Berechnung der Nullstellen werden üblicherweise Verfahren eingesetzt, welche zunächst eine einzelne Nullstelle bestimmen, wie z. B. im Fall des Newtonverfahrens. Die berechnete Nullstelle wird dann vom Zählerpolynom der Übertragungsfunktion abgespalten und der Vorgang mit dem reduzierten Polynom wiederholt. Dies geschieht so lange, bis alle Nullstellen bestimmt sind. Dabei ist jedoch zu beachten, dass es sich um ein numerisches Verfahren handelt, welches z. B. Rundungsfehler aufweist. Diese sind zwar zunächst vernachlässigbar, bei Polynomen mit einer hohen Ordnung vergrößert sich jedoch auch der numerische Fehler, da dieser in jedem Schritt von den vorhergehenden Fehlern abhängt [19]. Je nach Betrag der Nullstellen kann es dabei auch zu einem Umschlag des Vorzeichens kommen, was wiederum das Untersuchungsergebnis bezüglich des Inverse-Response-Verhaltens beeinflusst.

4.3 Qualitativer Detektionsalgorithmus

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Kriterien für das Inverse-Response-Verhalten bei linearen Systemen ermöglichen die Untersuchung eines Systems durch die Bestimmung der Übertragungsnullstellen. Einschränkend gilt dabei, dass dies nur für Eingrößensysteme möglich ist und dabei die genaue Zahl der positiven Nullstellen bestimmt werden muss, um sicher zu gehen, dass es sich auch um initales Unterschwingen handelt. Der nun folgende neue Detektionsalgorithmus ermöglicht unter Verwendung approximativer Verfahren die qualitative Untersuchung eines Systems auf dessen Inverse-Response-Verhalten. Der Algorithmus ist nicht zwangsweise auf lineare Systeme beschränkt, verwendet jedoch eine vereinfachte Systembeschreibung basierend auf linearen Teilsystemen, welche auch als Komponenten bezeichnet werden. Des Weiteren handelt es sich um ein qualitatives Verfahren, weshalb eine Einschätzung der Größe des Unterschwingens nicht möglich ist. Zudem ist zu beachten, dass es in Folge der Approximationen bei der Untersuchung zu fehlerhaften Detektionsergebnissen kommen kann. Dies wird in Abschnitt 4.4 aufgegriffen und diskutiert.

Am Beispiel von Satz 1 wurde in Abschnitt 3.1.2 bereits der Modellansatz eingeführt. Derselbe Satz ist ebenfalls Grundlage für den Ansatz des Detektionsalgorithmus. Wie bereits erörtert, tritt Inverse-Response-Verhalten unter der Annahme einer positiven Gesamtverstärkung auf, wenn die Pfade mit negativer Verstärkung schneller als jene mit positiver Verstärkung sind. (Hat das System eine negative Gesamtverstärkung, so gilt die Aussage umgekehrt). In Satz 1 wird genau ein Paar von Pfaden betrachtet und

miteinander verglichen. Für den Detektionsalgorithmus wird das Prinzip des Pfadvergleichs nun auf die Menge der positiven und negativen Pfade im Anfangsbereich nach einer Sprungantwort übertragen. Hierzu werden die Pfade zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang approximativ miteinander verglichen.

Für die Untersuchung wird ein Systemmodell verwendet, welches nach dem in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten Modellierungsansatz erzeugt wurde. Dabei ist zu beachten, dass alle Komponenten stabil sind, kein eigenes Inverse-Response-Verhalten aufweisen, es keine Schleifen im Graphen gibt und innerhalb eines Pfades keine Anstiegszeit mehrfach vorhanden ist. Diese Einschränkungen lassen sich zum Teil umgehen, da Komponenten mit eigenem Inverse-Response-Verhalten durch zwei parallele Pfade modelliert werden können, wie bereits in Abschnitt 3.1.2.2 dargestellt wurde. Zudem können stabile Schleifen substituiert werden, was in Abschnitt 3.1.2.3 aufgezeigt wurde. Die Vermeidung von mehrfachen Anstiegszeiten innerhalb eines Pfades ist zudem durch eine realistische Anwendung meist gegeben, da sich bei der Identifikation nur selten dieselben Anstiegszeiten über mehrere Komponenten ergeben. Sollte dies doch einmal der Fall sein, so kann die Anstiegszeit leicht verschoben werden, um die Bedingung zu erfüllen. Das Vorgehen des Algorithmus lässt sich in drei aufeinanderfolgende Schritte aufspalten, welche in den folgenden Abschnitten separat vorgestellt und anhand des Beispiels 9 verdeutlicht werden. Im ersten Schritt werden die Pfade zwischen den Ein- und Ausgängen ermittelt. Deren Gewichte werden dann im zweiten Schritt in Ersatzpfadgewichte aggregiert, bevor im letzten Schritt der Vergleich der Pfade erfolgt.

Beispiel 9: *Als begleitendes Beispiel zur Veranschaulichung des Detektionsalgorithmus wird der in Bild 4.2 dargestellte Systemgraph verwendet. Er basiert auf den im Anhang A.1 aufgeführten Beispielkomponenten, welche im Graphen angegeben sind. Die verwendeten Beispielkomponenten sowie die zugehörigen Werte für die Verstärkungen der Komponenten sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Ebenso sind die nicht den Standardwerten entsprechenden Zeitkonstanten angegeben. Es sei zudem darauf hingewiesen, dass sowohl die Zeitkonstanten als auch die Verstärkungen als dimensionslose Größen angenommen werden. Dies ist möglich, da sich hieraus kein Einfluss auf die Ergebnisse ergibt. Betrachtet wird das Verhalten zwischen den Eingängen u_1 sowie u_2 und dem Ausgang y_1 , welches Inverse-Response-Verhalten aufweist, sowie das Verhalten zwischen Eingang u_3 und dem Ausgang y_1 , welches kein Inverse-Response-Verhalten besitzt. Zur Veranschaulichung sind in Bild 4.3 die Sprungantworten bzgl. Ausgang y_1 abgebildet, welche sich in Folge eines Einheitssprungs an Eingang u_1 , u_2 und u_3 ergeben.*

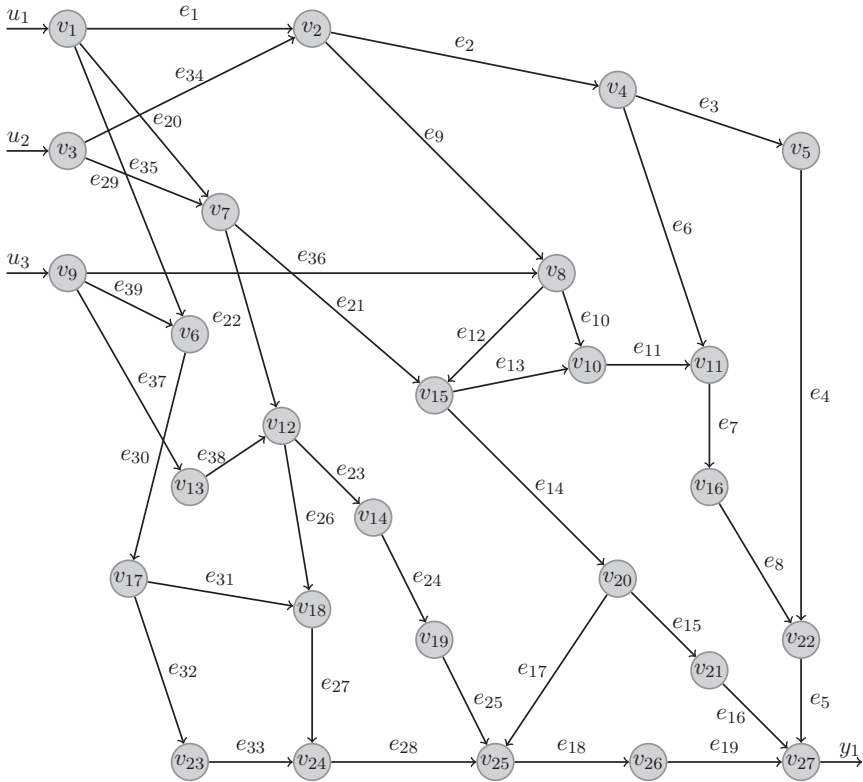


Bild 4.2: Übertragungsfunktionsbasierter Graph des Beispiels.

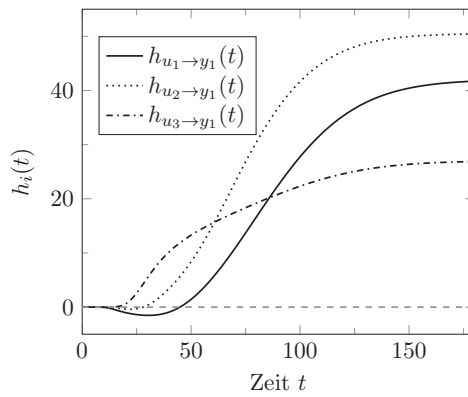


Bild 4.3: Einheitssprungantwort des Beispielsystems am betrachteten Ausgang.

Tabelle 4.1: Verstärkungen der verwendeten Beispielkomponenten des Systems nach Bild 4.2.

Kante	Bsp.-Komp.	Verstärkung	Kante	Bsp.-Komp.	Verstärkung
e_1	4	1	e_{21}	5	1
e_2	6	3	e_{22}	7	1
e_3	2	1	e_{23}	1	2
e_4	5	1	e_{24}	6	0.5
e_5	3	1	e_{25}	5	-2
e_6	1	1	e_{26}	1	-1
e_7	4	1	e_{27}	5	1
e_8	3	4	e_{28}	1	1
e_9	6	2	e_{29}	4	1
e_{10}	1	1	e_{30}	5	1
e_{11}	7	1	e_{31}	2	4
e_{12}	3	1	e_{32}	3	3
e_{13}	3	1	e_{33}	4	1
e_{14}	5	1	e_{34}	2	1.5
e_{15}	5	1	e_{35}	5	0.5
e_{16}	3	-1	e_{36}	4	1
e_{17}	1	2	e_{37}	4	1
e_{18}	3	1	e_{38}	2	1
e_{19}	1	1	e_{39}	1	3
e_{20}	6	1			

4.3.1 Ermittlung der Pfade zwischen Ein- und Ausgängen

Das Verhalten zwischen einem Ein- und Ausgang lässt sich bei einem Systemgraphen auf die Summe des Verhaltens der Pfade zwischen dem Ein- und Ausgang zurückführen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4: *Besitzt der Systemgraph eines linearen Systems keine Schleifen, so lässt sich die Gesamtübertragungsfunktion $G_{\text{Sys}}(s)$ zwischen einem Eingang $U(s)$ und einem Ausgang $Y(s)$ als Summe von I einzelnen Übertragungsfunktionen darstellen, welche jeweils einen Pfad p_i zwischen dem Ein- und Ausgang beschreiben. Die Übertragungsfunktion eines jeden Pfades entspricht dabei wiederum dem Produkt der Übertragungsfunktionen G_n der einzelnen Komponenten e_n des Pfades.*

$$G_{\text{Sys}}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^I \left(\prod_{e_n \in p_i} G_n \right) \quad (4.5)$$

Beweis: Bild 4.4 zeigt einen Systemgraphen mit L Knoten $v_1, \dots, v_l, \dots, v_L$. Die Knoten sind durch N Kanten e_n miteinander verbunden, wobei jede Kante eine Übertragungsfunktion G_n repräsentiert. Die Kantenbezeichnung n besteht dabei im Bild aus der

Nummer des ausgehenden (k) und eingehenden (j) Knotens, z. B. $e_{k,j}$. Des Weiteren gibt es zwei Kanten, welche den Eingang U und Ausgang Y des Systems darstellen. Die Ausgangsfunktion eines Knotens entspricht der Summe seiner Eingangsfunktionen,

$$G_{l,j} = \dots = G_{l,N} = \sum_{k=1}^N (G_{k,l}) . \quad (4.6)$$

Ausgehend vom Ausgang des Systems lässt sich somit die Gesamtübertragungsfunktion

$$G = \sum_{k=1}^N \left(G_{k,L} \sum_{l=1}^N (G_{k,l} \dots (G_{1,j} \cdot U)) \right) . \quad (4.7)$$

berechnen. Existieren keine Schleifen im Graphen, so lässt sich die Gesamtübertragungsfunktion in die Form (4.5) überführen. \square

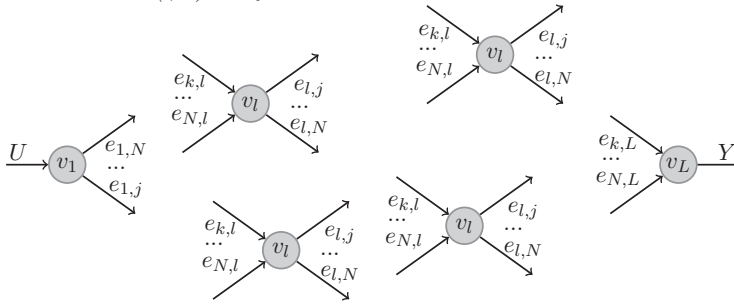


Bild 4.4: Allgemeiner TFG mit einem Eingang U und einem Ausgang Y .

Der Zusammenhang zwischen Gesamtsystemverhalten und Pfaden lässt sich direkt auf den übertragungsfunktionsbasierten Graphen übertragen, da dieser als eine Ausprägung des Systemgraphens gesehen werden kann, wenn alle Übertragungsfunktionen G_n der Komponenten dieselbe Funktion:

$$G_n = \frac{K_n}{T_n \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,n}} , \quad (4.8)$$

aufweisen, wobei K_n , T_n und $T_{\tau,n}$ den Elementen des Gewichtungsvektors \mathbf{w}_n entsprechen. Um die Pfade zwischen Ein- und Ausgängen zu ermitteln, stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung, welche z. B. bei der Routenplanung eingesetzt werden und für große Systeme einfach anwendbar sind [97]. Ergebnis der Pfadsuche ist die Menge aller Pfade $\mathcal{P}_{u \rightarrow y} = \{p_1, \dots, p_i, \dots, p_I\}$, welche in den nächsten Schritten des Detektionsalgorithmus eingehender betrachtet werden.

Der übertragungsfunktionsbasierte Graph aus Beispiel 9 besitzt zwischen dem Eingang u_1 und dem Ausgang y_1 insgesamt 13 Pfade, zwischen u_2 und y_1 11 und zwischen u_3 und

4 Analyse auf Inverse-Response-Verhalten

y_1 8 Pfade. Die Pfade können in dem Beispiel noch einfach von Hand oder z. B. durch eine Tiefensuche im Graphen ermittelt werden [16]. Das Ergebnis für die im Beispiel betrachteten Ein-/Ausgangspaare ist in Tabelle 4.2, 4.3 und 4.4 dargestellt.

Tabelle 4.2: Pfade mit ihren Komponenten zwischen dem Eingang u_1 und dem Ausgang y_1 .

Pfad	Komponenten
$p_{1,1}$	e_1, e_2, e_3, e_4, e_5
$p_{1,2}$	$e_1, e_2, e_6, e_7, e_8, e_5$
$p_{1,3}$	$e_1, e_9, e_{10}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{1,4}$	$e_1, e_9, e_{12}, e_{13}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{1,5}$	$e_1, e_9, e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{16}$
$p_{1,6}$	$e_1, e_9, e_{12}, e_{14}, e_{17}, e_{18}, e_{19}$
$p_{1,7}$	$e_{20}, e_{21}, e_{13}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{1,8}$	$e_{20}, e_{21}, e_{14}, e_{15}, e_{16}$
$p_{1,9}$	$e_{20}, e_{21}, e_{14}, e_{17}, e_{18}, e_{19}$
$p_{1,10}$	$e_{20}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{18}, e_{19}$
$p_{1,11}$	$e_{20}, e_{22}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$
$p_{1,12}$	$e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{27}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$
$p_{1,13}$	$e_{29}, e_{30}, e_{32}, e_{33}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$

Tabelle 4.3: Pfade mit ihren Komponenten zwischen dem Eingang u_2 und dem Ausgang y_1 .

Pfad	Komponenten
$p_{2,1}$	$e_{34}, e_2, e_3, e_4, e_5$
$p_{2,2}$	$e_{34}, e_2, e_6, e_7, e_8, e_5$
$p_{2,3}$	$e_{34}, e_9, e_{10}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{2,4}$	$e_{34}, e_9, e_{12}, e_{13}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{2,5}$	$e_{34}, e_9, e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{16}$
$p_{2,6}$	$e_{34}, e_9, e_{12}, e_{14}, e_{17}, e_{18}, e_{19}$
$p_{2,7}$	$e_{35}, e_{21}, e_{13}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{2,8}$	$e_{35}, e_{21}, e_{14}, e_{15}, e_{16}$
$p_{2,9}$	$e_{35}, e_{21}, e_{14}, e_{17}, e_{18}, e_{19}$
$p_{2,10}$	$e_{35}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{18}, e_{19}$
$p_{2,11}$	$e_{35}, e_{22}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$

Tabelle 4.4: Pfade mit ihren Komponenten zwischen dem Eingang u_3 und dem Ausgang y_1 .

Pfad	Komponenten
$p_{3,1}$	$e_{36}, e_{10}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{3,2}$	$e_{36}, e_{12}, e_{13}, e_{11}, e_7, e_8, e_5$
$p_{3,3}$	$e_{36}, e_{12}, e_{14}, e_{15}, e_{16}$
$p_{3,4}$	$e_{36}, e_{12}, e_{14}, e_{17}, e_{18}, e_{19}$
$p_{3,5}$	$e_{37}, e_{38}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{18}, e_{19}$
$p_{3,6}$	$e_{37}, e_{38}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$
$p_{3,7}$	$e_{39}, e_{30}, e_{31}, e_{27}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$
$p_{3,8}$	$e_{39}, e_{30}, e_{32}, e_{33}, e_{28}, e_{18}, e_{19}$

4.3.2 Aggregation der Kantengewichte

Um die Pfade miteinander vergleichen zu können, werden die Kantengewichte der in den Pfaden enthaltenen Komponenten zu einem Ersatzgewicht $\mathbf{w}_{p_i} = (K_{p_i}, T_{p_i}, T_{\tau, p_i})$ für den jeweiligen Pfad aggregiert. Wie auch die Kantengewichte, beschreibt das Ersatzpfadgewicht das anfängliche sowie das stationäre Gesamtverhalten des Pfades bei einer sprungförmigen Anregung. Hierfür werden drei mögliche Herangehensweisen betrachtet, verglichen und diskutiert. Für die Aggregation wird dabei angenommen, dass es innerhalb eines Pfades keine zwei gleichen Anstiegszeiten T_n gibt. Da es in der Praxis durch Messfehler sowie numerische Ungenauigkeiten nur sehr selten zu zwei identischen Anstiegszeiten innerhalb eines Pfades kommt, ist diese Annahme jedoch keine starke Einschränkung für die Anwendbarkeit des Detektionsalgorithmus.

Bei allen der folgenden Aggregationsmethoden entspricht die aggregierte Verstärkung dem Produkt der Verstärkungen der einzelnen Komponenten des Pfades.

Satz 5: *Die aggregierte Verstärkung eines Pfades p_i , in einem Übertragungsfunktionsbasierten Graphen ohne Schleife, ergibt sich zu*

$$K_{p_i} = \prod_{e_n \in p_i} K_n \text{ mit } p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y} . \quad (4.9)$$

Beweis: *In (4.5) lässt sich leicht erkennen, dass die Übertragungsfunktion eines einzelnen Pfades dem Produkt der Übertragungsfunktionen seiner Komponenten entspricht. Mit der Betrachtung des anfänglichen sowie stationären Verhaltens in Form eines Systems erster Ordnung mit Totzeit (siehe (4.8)) folgt somit direkt Satz 5. \square*

4.3.2.1 Routh-Schema

Eine Möglichkeit zur Berechnung von T_{p_i} und T_{τ,p_i} ist durch die Verwendung der Systemapproximation nach Routh [14, 42] gegeben, da diese einfach zu berechnen ist und bei dem Verfahren ein stabiles approximiertes System resultiert. Wie bei der Modellierung bereits beschrieben wurde, werden die Parameter eines Kantengewichts \mathbf{w}_n als die Parameter eines verzögerten Systems erster Ordnung angesehen. Dies ist möglich, da für die Detektion das anfängliche Verhalten in Folge eines Eingangssprungs von Interesse ist und dies durch ein System erster Ordnung mit Verzugszeit ausreichend genau angenähert wird. Nach Satz 4 lässt sich somit ein Pfad zunächst durch die Übertragungsfunktion

$$G_{p_i}(s) = \prod_{e_n \in p_i} \frac{K_n}{T_n \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,n}} = \frac{\prod_{e_n \in p_i} K_n}{a_J \cdot s^J + \dots + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,n}} \quad (4.10)$$

beschreiben, wobei

$$a_J = \prod_{e_n \in p_i} T_n, \quad (4.11)$$

mit J als der Anzahl der Kanten des Pfades und somit der Ordnung des Systems (4.10). Da der Pfad bzw. seine aggregierten Gewichte das anfängliche sowie stationäre Verhalten beschreiben, kann für das anfängliche Verhalten wieder ein System erster Ordnung mit Verzugszeit verwendet werden. Das durch die Übertragungsfunktion nach (4.10) beschriebene Systemverhalten des Pfades sollte daher durch die Übertragungsfunktion

$$\hat{G}_{p_i} = \frac{K_{p_i}}{T_{p_i} \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,p_i}} \quad (4.12)$$

approximiert werden, welche die aggregierten Pfadgewichte als Parameter besitzt. Die aggregierte Verstärkung wird hierfür wie bereits beschrieben nach (4.9) berechnet.

Zur Bestimmung der Anstiegszeit werden zunächst die Verzugszeiten $T_{\tau,n}$ der Komponenten vernachlässigt und das Routh-Schema für die Approximation in ein System erster Ordnung angewandt. Aus der Approximation der Übertragungsfunktion nach (4.10) mit Hilfe des Routh-Schemas ergibt sich die aggregierte Anstiegszeit als die Summe der Anstiegszeiten der Komponenten des Pfades (siehe (A.15) im Anhang A.3.1):

$$T_{p_i} = \sum_{e_n \in p_i} T_n. \quad (4.13)$$

Die aggregierte Verzugszeit des Pfades T_{τ,p_i} kann separat bestimmt werden und besteht aus zwei Teilen: Zum einen besteht sie aus der Summe der Verzugszeiten $T_{\tau,n}$ der im Pfad p_i befindlichen Kantengewichte \mathbf{w}_n . Zum anderen wird eine Verzugszeit T_{d,p_i} ver-

wendet, um das mittels Routh-Schema approximierte System erster Ordnung mit der Verstärkung nach (4.9) und der Anstiegszeit nach (4.13) zu optimieren. Die Summe

$$T_{\tau,p_i} = T_{d,p_i} + \sum_{e_n \in p_i} T_{\tau,n} \quad (4.14)$$

entspricht somit der Verzugszeit des Pfades.

Da sich mit jeder Kante eines Pfades auch die Ordnung des durch den Pfad dargestellten Systemverhaltens erhöht, steigt auch der Approximationsfehler des Anfangsbereichs bei der Aggregation mit Hilfe des Routh-Schemas. Der Grund hierfür ist, dass bei der Routh-Approximation der zunächst flache Verlauf des anfänglichen Bereichs der Sprungantwort nicht abgebildet wird. Bei der Modellierung des Systems als übertragungsfunktionsbasierter Graph wurde zur Beschreibung dieses Bereichs die Verzugszeit eingeführt, weshalb auch für den Fall der Aggregation mittels des Routh-Schemas eine weitere Verzugszeit T_{d,p_i} verwendet wird, um das Ergebnis zu verbessern. Für die Bestimmung einer geeigneten Verzugszeit wird die Routh-Approximation zweiter Ordnung (A.16) der Systembeschreibung aus (4.10) verwendet (Herleitung siehe Anhang A.3.1), da diese den anfänglichen Verlauf bei einer Sprungantwort noch einmal besser approximiert, und um die Verzugszeit ergänzt:

$$\hat{G}_{p_i, \text{R2}}(s) = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{d,p_i}} \quad (4.15)$$

mit

$$b_0 = \prod_{e_n \in p_i} K_n \quad (4.16)$$

$$a_1 = \sum_{e_n \in p_i} T_n \quad (4.17)$$

und

$$a_2 = - \frac{\left(\sum_{e_n, e_m, e_o \in p_i \wedge n \neq m \neq o} T_n \cdot T_m \cdot T_o \right)}{\left(\sum_{e_n \in p_i} T_n \right)} + \sum_{e_n, e_m \in p_i \wedge n \neq m} T_n \cdot T_m \quad (4.18)$$

Der Zähler entspricht mit $b_0 = \prod_{e_n \in p_i} K_n = K_{p_i}$ dem Zähler von (4.10) und (4.12), weshalb die Exponentialfunktion mit der Verzugszeit in den Nenner gebracht wird. Wird die Exponentialfunktion zudem durch die unendliche Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ersetzt, so ist es möglich, durch einen Koeffizientenvergleich einen Wert für T_{d,p_i} zu finden, sodass die Nennerpolynome von (4.10) und (4.12) angeglichen werden. Nach dem Einsetzen der unendlichen Reihe anstelle der Exponentialfunktion in (4.15) ergibt sich das Nenner-

polynom

$$\hat{N}(s, T_{d,p_i}) = (a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1) \cdot \left(1 + s \cdot T_{d,p_i} + \frac{T_{d,p_i}^2}{2} \cdot s^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(s \cdot T_{d,p_i})^n}{n!} \right). \quad (4.19)$$

Bei der Approximation des Pfades durch ein System erster Ordnung wurden bereits die Koeffizienten des Nennerpolynoms betrachtet, welche einen niedrigen Exponenten aufweisen. Für die Bestimmung der Verzugszeit wird daher der Koeffizient mit dem höchsten Exponenten s^J der Übertragungsfunktion nach (4.10) betrachtet. Für den Koeffizienten \hat{a}_J der Approximation ergibt sich aus (4.19):

$$\hat{a}_J(T_{d,p_i}) = \frac{T_{d,p_i}^J}{J!} + \frac{T_{d,p_i}^{(J-1)}}{(J-1)!} \cdot a_1 + \frac{T_{d,p_i}^{(J-2)}}{(J-2)!} \cdot a_2. \quad (4.20)$$

Die Totzeit T_{d,p_i} ergibt sich dann als kleinste positive Lösung der Gleichung:

$$\hat{a}_J(T_{d,p_i}) - a_J = 0. \quad (4.21)$$

4.3.2.2 Balancierte Modellreduktion

Als weitere Möglichkeit zur Aggregation der Ersatzpfadgewichte wurde die Modellreduktion betrachtet. Dabei wird - wie schon bei der Routh-Approximation - der Pfad als System erster Ordnung mit Verzugszeit angenommen, siehe (4.12). Da durch die Kanten und ihre zugehörigen Gewichte das Ein-/Ausgangsverhalten der Komponenten der Anlage beschrieben wird, wird das Verfahren der balancierten Modellreduktion verwendet. Bei diesem Verfahren wird das System, welches den Pfad beschreibt, zunächst so transformiert, dass ein Ausgleich zwischen der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit des Systems hergestellt wird. Anschließend werden die Zustände des Systems abgeschnitten, welche vom energetischen Standpunkt aus am uninteressantesten sind [58].

Ausgangspunkt der notwendigen Transformation sowie der Reduktion ist ein Zustandsraummodell des betrachteten Systems. Wie bereits bei der Routh-Approximation erläutert, können die Werte der Kantengewichte als Parameter eines Systems erster Ordnung mit Verzugszeit aufgefasst werden. Parallel zur bereits verwendeten Übertragungsfunktion mit Vernachlässigung der Verzugszeit ergibt sich somit eine Zustandsraumbeschreibung für eine einzelne Kante der Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -\frac{1}{T_n} \cdot x_n + \frac{K_n}{T_n} \cdot u_n \\ y_n &= x_n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Innerhalb des Pfades ist der Ausgang einer Kante immer gleich dem Eingang der darauffolgenden Kante, weshalb sich für den Pfad die Zustandsraumbeschreibung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_J \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{p_i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{K_J}{T_J} & -\frac{1}{T_J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{p_i}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{p_i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_1}{T_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{p_i}} u_{p_i} \quad (4.23)$$

$$y_{p_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{p_i}} \mathbf{x}_{p_i}$$

ergibt. Für dieses System lässt sich wiederum eine geeignete Transformationsmatrix \mathbf{T} bestimmen, sodass sich durch eine Ähnlichkeitsstransformation ein balanciertes System

$$\mathbf{z}_{p_i} = \mathbf{T}\mathbf{x}_{p_i}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{p_i} = \mathbf{T}\mathbf{A}_{p_i}\mathbf{T}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{p_i} = \mathbf{T}\mathbf{B}_{p_i}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{p_i} = \mathbf{C}_{p_i}\mathbf{T}^{-1} \quad (4.24)$$

berechnen lässt [35]. Für die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{P}}$ und die Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}$, welche die Ljapunow-Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}^T + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T = 0 \quad (4.25)$$

und

$$\tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^T\tilde{\mathbf{C}} = 0 \quad (4.26)$$

erfüllen, gilt im balancierten Fall:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J) \text{ mit } \sigma_i \geq \sigma_{i+1}, i = 1, 2, \dots, J - 1. \quad (4.27)$$

Das balancierte Zustandsraummodell ist somit absteigend nach der Größe der Singulärwerte sortiert. Dies erlaubt eine Aufteilung der Zustände in zwei Blöcke und somit auch die Aufspaltung der System-, Eingangs- und Ausgangsmatrix. Auf dieser Aufteilung basiert die Reduktion, weshalb der erste Block nur eine Zustandsgröße umfasst, da das Zustandsraummodell der Ordnung J auf ein System erster Ordnung reduziert werden soll:

$$\mathbf{z}_{p_i} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{\mathbf{a}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} u \quad (4.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Nach [58] kann aus (4.28), durch $\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ ein System erster Ordnung mit demselben stationären Endwert berechnet werden, wobei

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(\tilde{a}_{11} - \tilde{\mathbf{a}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{21} \right) z_1 + \left(\tilde{b}_1 - \tilde{\mathbf{a}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_2 \right) u \\ y &= \left(\tilde{c}_1 - \tilde{\mathbf{a}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{21} \right) z_1 - \left(\tilde{\mathbf{c}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_2 \right) u . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$ ergibt sich die approximierte Übertragungsfunktion des Pfades zu:

$$\hat{G}(s) = \frac{l_1 \cdot s + l_2}{s + l_3} \quad (4.30)$$

mit

$$\begin{aligned} l_1 &= - \left(\tilde{\mathbf{c}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_2 \right) \\ l_2 &= \left(\tilde{c}_1 - \tilde{\mathbf{c}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{21} \right) \left(\tilde{b}_1 - \tilde{\mathbf{a}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_2 \right) \\ &\quad + \left(\tilde{a}_{11} - \tilde{\mathbf{a}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{21} \right) \left(\tilde{\mathbf{c}}_2 \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_2 \right) \\ l_3 &= - \left(\tilde{a}_{11} - \tilde{\mathbf{a}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_{21} \right) . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aus (4.30) ergibt sich die aggregierte Anstiegszeit mit:

$$T_{p_i} = \frac{1}{l_3} . \quad (4.32)$$

Um die anteilige Verzugszeit T_{d,p_i} zu berechnen wird die Einheitssprungantwort von (4.30) bestimmt und der Zeitpunkt berechnet an dem diese gleich Null ist. Durch eine Laplace-Rücktransformation ergibt sich die Einheitssprungantwort zu:

$$\hat{h}(t) = \frac{l_2}{l_3} + \frac{l_3 \cdot l_1 - l_2}{l_3} \cdot e^{-l_3 \cdot t} . \quad (4.33)$$

Mit $\hat{h}(T_{d,p_i}) = 0$ lässt sich daraus die anteilige Verzugszeit berechnen:

$$T_{d,p_i} = -\frac{1}{l_3} \ln \left(-\frac{l_2}{l_1 \cdot l_3 - l_2} \right) . \quad (4.34)$$

Die aggregierte Verzugszeit ergibt sich somit wie bereits in (4.14) aufgezeigt wurde als Summe aus T_{d,p_i} und der Summe aller Verzugszeiten der Kanten $T_{\tau,n}$.

4.3.2.3 Summenzeitkonstante

Für das dritte betrachtete Aggregationsverfahren wird der Ansatz der Summenzeitkonstante, nach [49], verwendet. Wie bereits in den vorherigen beiden Verfahren, wird auch in diesem Fall das Systemverhalten des Pfades als ein Produkt von J Systemen erster Ordnung mit Verzugszeit betrachtet: wie in (4.10). Dabei werden die in den Parametern codierten Kantengewichte als die Parameter des Systems interpretiert, um das anfängliche sowie stationäre Verhalten, welches von Interesse ist, zu beschreiben. Ansatz der Aggregation ist es dabei, auch wie schon in den vorherigen Verfahren, das Produkt nach (4.10) in ein System erster Ordnung mit Verzugszeit, wie in (4.12), zu approximieren.

Für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G_S = K_S \cdot \frac{(T_{D,1} \cdot s + 1)(T_{D,2} \cdot s + 1) \cdots (T_{D,m} \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1) \cdots (T_n \cdot s + 1)} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,S}} \quad (4.35)$$

lässt sich nach [49] die Fläche zwischen einer Einheitssprungantwort und ihrem stationärem Endwert allgemein bestimmen. Zur Veranschaulichung ist die Fläche schraffiert in Bild 4.5 dargestellt. Dabei ist K_S die Verstärkung, $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ sind die Zeitkonstanten im Nenner und $T_{D,j}, j = 1, 2, \dots, m$ die Zeitkonstanten im Zähler sowie $T_{\tau,S}$ die Totzeit des Systems. Handelt es sich um eine sogenannte „s-förmige“ Sprungantwort, also einen monotonen Verlauf der Sprungantwort ohne Unter- oder Überschwingen, so lässt sich die besagte Fläche durch Integration der Einheitssprungantwort

$$A = \int_0^{\infty} (K_S - h_S(t)) dt = K_S \cdot T_{\Sigma} \quad (4.36)$$

ermitteln, wobei eine Vereinfachung auf das Produkt der Verstärkung und der Summenzeitkonstante T_{Σ} möglich ist. Die Summenzeitkonstante entspricht wiederum der Summe aller Zeitkonstanten, wobei die Zeitkonstanten des Zählers negativ eingehen:

$$T_{\Sigma} = T_1 + T_2 + \cdots + T_n - T_{D,1} - T_{D,2} - \cdots - T_{D,m} + T_{\tau,S} . \quad (4.37)$$

Da es sich bei der Übertragungsfunktion des Pfades nach (4.10) um ein reines Produkt von Systemen erster Ordnung handelt, tritt kein Unter- oder Überschwingen auf, weshalb für die Aggregation das Verfahren der Summenzeitkonstante verwendet werden kann. Wie bereits in den vorherigen Aggregationsverfahren beschrieben, setzt sich die aggregierte Verzugszeit nach (4.14) aus der Summe der Verzugszeiten der Kanten $T_{\tau,n}$ sowie der durch die Approximation bestimmten anteiligen Verzugszeit T_{d,p_i} zusammen. Für das approximierte Pfadverhalten in einem System erster Ordnung ergibt sich nach

4 Analyse auf Inverse-Response-Verhalten

(4.35), (4.36) und (4.37) die Fläche

$$\hat{A} = K_{p_i} \cdot (T_{p_i} + T_{d,p_i}) \quad , \quad (4.38)$$

wobei K_{p_i} die nach (4.9) berechnete Verstärkung des Pfades. Für das Ausgangssystem des Pfades nach (4.10), Produkt der Kanten, ergibt sich die Fläche

$$A = K_{p_i} \sum_{e_n \in p_i} T_n = K_{p_i} \cdot T_{\Sigma,p_i} \quad . \quad (4.39)$$

Beide Flächen sind in Bild 4.5 dargestellt. Zur Berechnung der aggregierten Zeitkon-

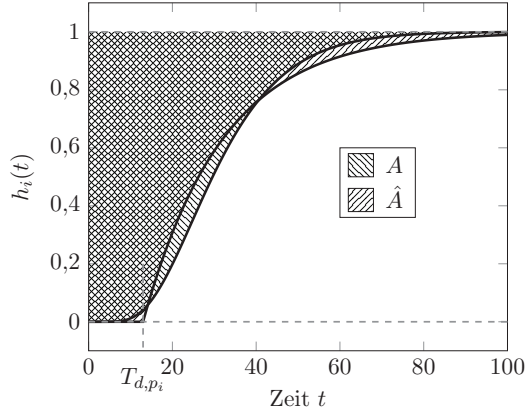


Bild 4.5: Fläche zwischen Einheitssprungantwort und stationärem Endwert der Pfadübertragungsfunktion und der zugehörigen Approximation.

stanten wird gefordert, dass die Flächen $A = \hat{A}$ gleich sein sollen. Aus (4.39) und (4.38) folgt somit für die aggregierte Anstiegszeit:

$$T_{p_i} = \left(\sum_{e_n \in p_i} T_n \right) - T_{d,p_i} \quad . \quad (4.40)$$

Für die Berechnung von T_{p_i} muss daher zunächst die anteilige Verzugszeit T_{d,p_i} bestimmt werden. Da die Verzugszeiten der Komponenten T_n bereits in T_{p_i} berücksichtigt wurden, werden sie für die Bestimmung von T_{d,p_i} vernachlässigt. Da die Ausgangsfunktion eines Pfades nach (4.10) immer ein Produkt aus Systemen erster Ordnung mit Totzeit ist, lässt sich für $t > 0$ eine allgemeine Funktion der Einheitssprungantwort

$h_{p_i}(t)$ des Pfades herleiten,

$$h_{p_i}(t) = K_{p_i} \cdot \left(1 - \sum_{e_n \in p_i} \frac{1}{\prod_{e_m \in p_i \wedge m \neq n} \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} \right), \quad (4.41)$$

wie im Anhang A.3.2 (A.28) beschrieben. Durch Verwendung der bereits eingeführten Gütefunktion (3.22) aus Abschnitt 3.2.2.2 lässt sich somit eine Verzugszeit finden, welche die Differenz aus (4.41) und der Einheitssprungantwort der Approximation durch ein System erster Ordnung mit Verzugszeit

$$\hat{h}_{p_i}(t) = K_{p_i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t - T_{d,p_i}}{T_{\Sigma,p_i} - T_{d,p_i}}} \right) \quad (4.42)$$

minimiert. Betrachtet wird dabei wie gehabt der Bereich vom Einsetzen des Sprungs bis zum Erreichen von 63 % des stationären Endwerts.

Bei der Anwendung der Aggregation mittels der Summenzeitkonstanten hat sich herausgestellt, dass sich die Ausgangsfunktion und die approximierte Funktion der Einheitssprungantwort immer in einem Bereich um 20 % des stationären Endwerts schneiden. Dies lässt sich auch anhand der Beispielkomponenten 2, 3 und 4 zeigen, welche alle einen „s-förmigen“ Verlauf der Sprungantwort aufweisen. In Bild 4.6 ist jeweils ein Ausschnitt der Einheitssprungantworten um den Schnittpunkt herum zu sehen. Weshalb der Schnittpunkt in dem Bereich um 0,2 liegt, konnte in der Arbeit nicht abschließend geklärt werden, es wurde bisher jedoch kein Gegenbeispiel gefunden.

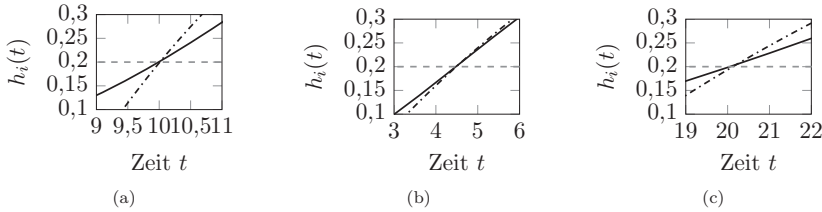


Bild 4.6: Ausschnitt der Einheitssprungantworten im Bereich um den Schnittpunkt, Ausgangsfunktion als durchgezogene Linie und Approximation als Strichpunktlinie.

Wird gefordert, dass die Einheitssprungantworten nach (4.41) und (4.42) sich bei 20 % des stationären Endwerts also K_{p_i} schneiden sollen, so lässt sich zunächst durch Umstellen von (4.42) der Zeitpunkt

$$t_{20\%} = T_{d,p_i} - (T_{\Sigma,p_i} - T_{d,p_i}) \cdot \ln(0,8) \quad (4.43)$$

des Schnittpunkts berechnen. Dieser kann nun wieder in die Einheitssprungantwort nach

(4.41) eingesetzt werden, wobei $h_{p_i}(t_{20\%}) = 0,2 \cdot K_{p_i}$ gefordert wird. Durch Lösen von

$$0 \stackrel{!}{=} 0,8 - \sum_{e_n \in p_i} \frac{1}{\prod_{e_m \in p_i \wedge e_m \neq e_n} \left(1 - \frac{T_m}{T_n}\right)} \cdot e^{-\frac{T_{d,p_i} - (T_{\Sigma,p_i} - T_{d,p_i}) \cdot \ln(0,8)}{T_n}} \quad (4.44)$$

lässt sich somit die aggregierte Verzugszeit T_{d,p_i} ermitteln. Mit diesem Ergebnis kann dann auch abschließend die aggregierte Anstiegszeit T_{p_i} nach (4.40) berechnet werden.

4.3.2.4 Vergleich der Aggregationsverfahren

Um die Aggregationsverfahren miteinander zu vergleichen, werden die Pfade $p_{1,1}$ und $p_{1,10}$ zwischen dem Eingang u_1 und dem Ausgang y_1 des Beispiels 9 betrachtet. Der Pfad $p_{1,1}$ besteht aus 5 Kanten und einer Gesamtverstärkung von 3, Pfad $p_{1,10}$ besitzt eine Gesamtverstärkung von -2 bei insgesamt 7 Kanten. Für die Umsetzung der Aggregationsverfahren sowie die Auswertung der Pfade wurde MATLAB verwendet. Dabei wurde für die Implementierung des Verfahrens mit Hilfe des Routh-Schemas sowie der Summenzeitkonstanten die Funktion „fzero“, nach [10, 28], zur Nullstellenberechnung verwendet. Für die balancierte Modellreduktion wurden hingegen die Funktionen „breal“ und „modred“, nach [53, 75], verwendet.

Die Bilder 4.7 und 4.8 zeigen jeweils die Einheitssprungantwort der Übertragungsfunktion der Pfade auf Basis des Produkts der verwendeten Beispielsysteme der Komponenten $h_{p_{1,1},p_{\text{Org}}}$ sowie der als Systeme erster Ordnung mit Totzeit approximierten Komponenten $h_{p_{1,1},\text{App}}$. Zudem sind die Einheitssprungantwort für die, als Parameter von Systemen erster Ordnung mit Totzeit interpretiert, aggregierten Pfadgewichte aufgetragen. Betrachtet wird die Aggregation mittels des Routh-Schemas $h_{p_{1,1},\text{Rou}}$, der balancierten Modellreduktion $h_{p_{1,1},\text{Red}}$ sowie der Summenzeitkonstanten $h_{p_{1,1},\text{Sum}}$.

Es ist direkt zu erkennen, dass der Verlauf der Einheitssprungantwort der mit dem Routh-Schema aggregierten Pfadgewichte die größte Abweichung im Verhältnis zu den beiden anderen Aggregationsverfahren aufweist. Um eine genauere Aussage zu treffen, wird, wie bereits bei der Identifikation, die durch die Zeit $t_{63\%}$ gemittelte Gütefunktion $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$ nach (3.33) und (3.22) verwendet, um die Abweichung der aggregierten Pfadgewichte von der Beschreibung des Pfades durch approximierte Komponenten zu bewerten. Dabei wird als Endzeitpunkt $t_{63\%}$ des Integrals jeweils der Zeitpunkt des Erreichens von 63 % des stationären Endwerts des aggregierten Pfades verwendet. Die Werte für die hier betrachteten beiden Pfade sind in den Tabellen 4.5 und 4.6 aufgeführt.

Der erste Eindruck aus dem Verlauf der Einheitssprungergebnisse bestätigt sich durch die Bewertung. So schneidet hier die Aggregation mittels Routh-Schema am schlechtesten ab. Dies lies sich auch bei allen weiteren, im Rahmen der Forschungsarbeit betrachteten Pfaden feststellen. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Anstiegszeit und

4.3 Qualitativer Detektionsalgorithmus

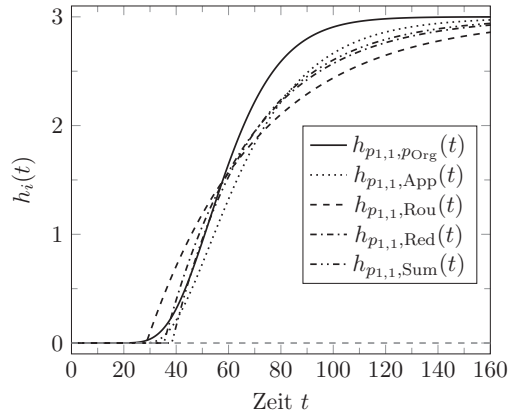


Bild 4.7: Einheitssprungantworten des Pfades $p_{1,1}$ aus dem Beispiel 9.

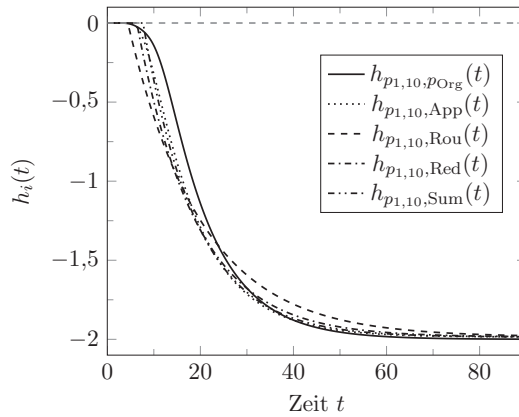


Bild 4.8: Einheitssprungantworten des Pfades $p_{1,10}$ aus dem Beispiel 9.

Tabelle 4.5: Abweichung zwischen Aggregation und Approximation im Anfangsbereich von Pfad $p_{1,1}$.

	Routh-Schema	Balancierte Modellreduktion	Summenzeitkonstante
$t_{63\%}$	70,82	68,46	68,46
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0633	0,0403	0,0275

Tabelle 4.6: Abweichung zwischen Aggregation und Approximation im Anfangsbereich von Pfad $p_{1,10}$.

	Routh-Schema	Balancierte Modellreduktion	Summenzeitkonstante
$t_{63\%}$	20,09	19,00	19,12
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0571	0,0372	0,0169

Verzugszeit im Fall der Aggregation mit Hilfe des Routh-Schemas separat berechnet werden und nicht aufeinander aufbauend wie bei der Aggregation mittels Summenzeitkonstante oder der balancierten Modellreduktion. Vergleicht man zudem den allgemeinen Rechenaufwand der Verfahren miteinander, so ergibt sich das Aggregationsverfahren auf Grundlage der Summenzeitkonstante als das geeignetste. Für die Bestimmung der Pfadgewichte sind beim Verfahren mit der Summenzeitkonstante einfache Rechenvorschriften zu tätigen und es ist einmalig eine Gleichung zu lösen, wobei es sich um eine Nullstellenberechnung handelt (vergl. (4.44)). Werden die Pfadgewichte hingegen mittels balancierter Modellreduktion bestimmt, so ist es zum einen erforderlich, das System, welches den Pfad beschreibt, umzustellen, und zum anderen numerisch eine geeignete Transformationsmatrix zu bestimmen (vergl. (4.24), (4.25) und (4.26)).

Für die Betrachtung im Folgenden sowie für die Umsetzung des Detektionsalgorithmus wird aus den aufgeführten Gründen das Verfahren auf Basis der Summenzeitkonstante zur Aggregation der Pfadgewichte verwendet.

Die aggregierten Pfadgewichte des Beispiels 9, welche mit Hilfe des Verfahrens der Summenzeitkonstante ermittelt wurden, sind in den Tabellen 4.7, 4.8 und 4.9 aufgeführt. Dabei ist neben der Verstärkung K_{p_i} , der Anstiegszeit T_{p_i} und der Verzugszeit T_{τ,p_i} jeweils auch die anteilige Verzugszeit T_{d,p_i} angegeben, da diese für die Bewertung im letzten Schritt benötigt wird.

Tabelle 4.7: Aggregierte Pfadgewichte w_{p_i} der Pfade zwischen u_1 und y_1 (Werte wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet).

Pfad p_i	K_{p_i}	T_{p_i}	T_{τ,p_i}	T_{d,p_i}
$p_{1,1}$	2,99	26,83	41,78	15,59
$p_{1,2}$	11,87	36,84	62,97	28,84
$p_{1,3}$	7,94	36,84	63,06	28,94
$p_{1,4}$	7,91	40,41	83,64	45,30
$p_{1,5}$	-2,00	28,08	40,06	18,77
$p_{1,6}$	3,95	28,10	39,40	19,14
$p_{1,7}$	3,98	30,39	47,39	25,03
$p_{1,8}$	-1,00	11,12	10,75	5,44
$p_{1,9}$	1,99	11,11	10,13	5,85
$p_{1,10}$	-1,99	10,92	8,22	4,84
$p_{1,11}$	-0,99	10,95	8,61	5,35
$p_{1,12}$	3,94	27,04	46,48	19,35
$p_{1,13}$	2,94	37,13	66,88	31,80

Tabelle 4.8: Aggregierte Pfadgewichte w_{p_i} der Pfade zwischen u_2 und y_1 (Werte wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet).

Pfad p_i	K_{p_i}	T_{p_i}	T_{τ,p_i}	T_{d,p_i}
$p_{2,1}$	4,49	16,84	31,23	11,88
$p_{2,2}$	17,82	29,34	49,94	22,65
$p_{2,3}$	11,92	29,34	50,03	22,74
$p_{2,4}$	11,88	33,78	69,73	38,23
$p_{2,5}$	-2,99	18,53	29,07	14,62
$p_{2,6}$	5,93	18,55	28,442	14,99
$p_{2,7}$	1,97	30,45	49,80	26,52
$p_{2,8}$	-0,50	11,33	13,01	6,78
$p_{2,9}$	0,99	11,33	12,38	7,18
$p_{2,10}$	-0,99	11,14	10,46	6,17
$p_{2,11}$	-0,49	11,17	10,85	6,68

Tabelle 4.9: Aggregierte Pfadgewichte w_{p_i} der Pfade zwischen u_3 und y_1 (Werte wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet).

Pfad p_i	K_{p_i}	T_{p_i}	T_{τ,p_i}	T_{d,p_i}
$p_{3,1}$	3,96	36,85	62,63	28,59
$p_{3,2}$	3,94	40,42	83,20	44,95
$p_{3,3}$	-0,99	28,09	39,62	18,42
$p_{3,4}$	1,97	28,12	38,96	18,79
$p_{3,5}$	-1,98	27,03	44,41	18,04
$p_{3,6}$	-0,98	27,04	44,82	18,57
$p_{3,7}$	11,78	14,55	23,44	11,23
$p_{3,8}$	8,79	28,27	40,22	20,05

4.3.3 Bewertung der aggregierten Pfadgewichte

Das Detektionsergebnis wird anhand der aggregierten Pfadgewichte ermittelt. Der Vergleich der aggregierten Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit basiert dabei, wie bereits die Modellierung, auf dem Satz 1. Der Satz besagt, dass das Inverse-Response-Verhalten vom Verhältnis zwischen Anstiegszeit und Verstärkung sowie dem Vorzeichen der Verstärkung abhängig ist. Wie bereits mehrfach erläutert, ist es also erforderlich, das anfängliche sowie das stationäre Verhalten der Sprungantwort am betrachteten Ausgang in Abhängigkeit zum betrachteten Eingang zu untersuchen. Diese Untersuchung und Bewertung erfolgt nun, wobei der Ausgangspunkt für das Vorgehen die Menge $\mathcal{P}_{u \rightarrow y}$ der Pfade zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang sowie die zugehörigen Pfadgewichte w_{p_i} ist.

4.3.3.1 Stationäres Verhalten

Inverse-Response-Verhalten kann nur dann zwischen einem Ein- und Ausgang auftreten, wenn sowohl Pfade mit einer positiven als auch solche mit einer negativen Verstärkung bzw. stationärem Verhalten vorhanden sind. Anhand des stationären Verhaltens der Pfade (aggregierte Verstärkung K_{p_i}) und der Gesamtsprungantwort am betrachteten Ausgang lässt sich somit eine notwendige jedoch nicht hinreichende Bedingung für Inverse-Response-Verhalten eines Systems ableiten.

Satz 6: *Ein durch einen Übertragungsfunktionsbasierten Graphen beschriebenes System kann nur dann Inverse-Response-Verhalten zwischen einem betrachteten Ein-/Ausgangspaar mit der Pfadmenge $\mathcal{P}_{u \rightarrow y}$ aufweisen, wenn es mindestens ein Paar von Pfaden $p_i, p_j \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y} \wedge i \neq j$ gibt, sodass*

$$\operatorname{sgn}(K_{p_i}) \neq \operatorname{sgn}(K_{p_j}) . \quad (4.45)$$

Beweis: *Nach Definition 7 tritt Inverse-Response-Verhalten nur direkt zu Beginn der Sprungantwort auf. Der anfängliche Bereich der Sprungantwort einer, als lineares System erster Ordnung mit Verzugszeit angenommenen, Komponente weist einen monotonen Verlauf auf, wie im Kapitel 3.1.2 bei der Modellierung des Systems im Übertragungsfunktionsbasierten Graphen gezeigt wurde. Das Produkt der Komponenten führt wiederum dazu, dass der anfängliche Bereich der Sprungantwort eines Pfades ebenfalls einen monotonen Verlauf aufweist. Hat ein System Inverse-Response-Verhalten, so ist der zugehörige anfängliche Verlauf der Sprungantwort jedoch nicht monoton. Nach Satz 4 bildet sich die Funktion am betrachteten Ausgang aus der Summe der Funktionen der Pfade zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang. Der Verlauf der Gesamtsprungantwort am betrachteten Ausgang kann also nur dann nichtmonoton sein, wenn das stationäre Verhalten der Pfade unterschiedliche Vorzeichen besitzt. \square*

Die Untersuchung des Verhaltens zwischen dem Ein-/Ausgangspaar nach Satz 6 kann bereits direkt nach der Bestimmung der Menge der Pfade $\mathcal{P}_{u \rightarrow y}$ erfolgen, womit im Fall, dass alle Pfade dasselbe Vorzeichen haben, die Aggregation der Anstiegszeit und Verzugszeit überflüssig ist und gar nicht erst durchgeführt werden muss.

Nach Definition 5 muss zudem gelten, dass der stationäre Endwert der Ausgangsfunktion ungleich Null ist. Dies lässt sich ebenfalls sehr früh anhand der aggregierten Verstärkungen überprüfen, wobei für die Gesamtverstärkung $K_{u \rightarrow y}$ gelten muss:

$$K_{u \rightarrow y} = \sum K_{p_i} \neq 0 . \quad (4.46)$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Gesamtverstärkung positiv ist $K_{u \rightarrow y} >$

0. Ist sie negativ, so können die Vorzeichen aller Verstärkungen einfach umgekehrt werden, damit die nachfolgenden Aussagen zutreffen.

4.3.3.2 Anfängliches Verhalten

Neben dem stationären Verhalten ist vor allem der anfängliche Verlauf der Sprungantwort für das Inverse-Response-Verhalten von Bedeutung, siehe hierzu Definition 5 und Definition 7. Um den anfänglichen Verlauf mit Blick auf das Inverse-Response-Verhalten zu bewerten, werden die aggregierten Anstiegszeiten sowie Verzugszeiten betrachtet. Zusätzlich wird auch die aggregierte Verstärkung berücksichtigt, da diese gemeinsam mit der aggregierten Anstiegszeit die Steigung eines Pfades p_i ergibt:

$$g_{p_i} = \frac{K_{p_i}}{T_{p_i}}. \quad (4.47)$$

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, gilt die Annahme dass $K_{u \rightarrow y} > 0$ ist. Daher muss nach Satz 1 gezeigt werden, dass die Pfade mit negativer Verstärkung im anfänglichen Bereich schneller sind als die mit positiver Verstärkung. Ist dies der Fall, so verläuft die Sprungantwort zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang zunächst gegen den stationären Endwert. Die Pfade mit negativem stationären Verhalten werden also erst im Verlauf der Sprungantwort von denen mit positivem stationären Verhalten dominiert. Für die Betrachtung des anfänglichen Bereichs wird zunächst der zu berücksichtigende Betrachtungshorizont ΔT_τ festgelegt. Dieser bezieht sich auf das Sprungantwortverhalten des betrachteten Ein-/Ausgangspaars. Da für die Auswertung auf Inverse-Response-Verhalten nur die für das anfängliche Verhalten relevanten Pfade berücksichtigt werden, erfolgt eine Auswahl mittels des Betrachtungshorizonts. Die beiden folgenden Paragraphen zeigen zum einen die Bestimmung des Betrachtungshorizonts und zum anderen die daran anschließende Auswertung innerhalb des Betrachtungshorizonts.

Bestimmung des Betrachtungshorizonts: Der Betrachtungshorizont ΔT_τ hat entscheidenden Einfluss auf die Genauigkeit des Detektionsergebnisses, da er festlegt, welche Pfade bei der Berechnung der Anfangssteigung berücksichtigt werden und welche nicht. Im Betrachtungshorizont sollen nach Möglichkeit jene Pfade liegen, welche den anfänglichen Verlauf der Sprungantwort des betrachteten Ausgangs prägen und somit das Inverse-Response-Verhalten beeinflussen. Es empfiehlt sich daher, für die Wahl eines geeigneten ΔT_τ eine Abschätzung des Einflusses der negativen und positiven Pfade vorzunehmen. Da angenommen wird, dass die Gesamtverstärkung $K_{u \rightarrow y}$ größer Null ist, hängt das Inverse-Response-Verhalten von den Pfaden mit negativer aggregierter Verstärkung ab. Es werden daher für die Abschätzung positive und negative Pfade ge-

genüber gestellt und berücksichtigt, wie schnell, also mit welcher Verzugszeit, die Pfade Einfluss auf die Sprungantwort nehmen. Vom Sprungantwortverhalten des schnellsten Pfades ausgehend (Pfad mit kleinster aggregierter Verzugszeit), wird abgeschätzt, welchen Einfluss die Pfade mit dem umgekehrten Vorzeichen der aggregierten Verstärkungen haben müssen, um den schnellsten Pfad kompensieren zu können. Aus dieser Abschätzung kann wiederum der Betrachtungshorizont abgeleitet werden.

Definition 10: Eine Kompensation zwischen zwei Pfaden p_1 und p_2 mit $\text{sgn}(K_{p_1}) \neq \text{sgn}(K_{p_2}) \neq 0$ ist gegeben, wenn die Summe aus ihren Sprungantworten keinen Funktionswert mit dem umgekehrten Vorzeichen wie dem summierten stationären Endwert besitzt. Für alle $t \geq 0$ muss gelten, dass $\text{sgn}(h_1(t) + h_2(t)) = \text{sgn}(\lim_{t \rightarrow \infty} (h_1(t) + h_2(t)))$. Für den Fall der Beschreibung als zwei Systeme erster Ordnung darf hierfür nicht die Bedingung (3.5) aus Satz 1 erfüllt sein.

Unter der Annahme das $K_{u \rightarrow y}$ positiv ist, muss also jeder Funktionswert der Summe der beiden betrachteten Pfade jederzeit positiv sein.

Grundsätzlich sind verschiedene Verfahren zur Abschätzung und somit zur Bestimmung des Betrachtungshorizonts denkbar. In [29] wird zur Abschätzung des Verlaufs eines Pfades eine quadratische Funktion verwendet. Mit Hilfe der quadratischen Funktion wird in einem Gedankenexperiment ein fiktiver, abschätzender Pfad mit der maximalen positiven Verstärkung $K_{\Sigma+} = \sum_{\text{sgn}(K_{p_i})=1, p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} K_{p_i}$ gesucht, welcher den im System vorkommenden negativen Pfad mit der kleinsten Verzugszeit $T_{\tau, p_{\min, -}}$ kompensieren kann. Anhand der Verzugszeit des abgeschätzten, kompensierenden Pfades wird dann der Betrachtungshorizont festgelegt. Für die Bestimmung des kompensierenden Pfades wird zudem ein Funktionswert des negativen Pfades verwendet, welcher bei dem in [29] verwendeten Aggregationsverfahren auf Basis der Summenzeitkonstante als Nebenergebnis ermittelt wird. Die im Abschnitt 4.3.2.3 vorgestellte Aggregation mit Hilfe der Summenzeitkonstanten beinhaltet das erwähnte Nebenergebnis jedoch nicht mehr, weshalb an dieser Stelle eine weiterentwickelte Methode zur Abschätzung des Betrachtungshorizonts vorgestellt wird.

Ausgangspunkt für das folgende Abschätzungsverfahren ist der schnellste Pfad. Als schnellsten Pfad p_{erst} wird dabei jener Pfad mit der kleinsten Verzugszeit festgelegt, da dieser als erstes einen Funktionswert ungleich Null besitzt:

$$p_{\text{erst}} = p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y} \text{ für den gilt } \min_{p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} (T_{\tau, p_i}) . \quad (4.48)$$

Hierbei wird angenommen, dass es keine zwei Pfade mit der selben Verzugszeit T_{τ, p_i} gibt. Dies ist nur eine sehr geringe Einschränkung, da bereits die Anstiegszeiten der Komponenten nicht identisch sein dürfen, ergeben sich bei der Aggregation entsprechend

unterschiedliche Verzugszeiten. Sollte dies einmal nicht der Fall sein, so lässt sich die Verzugszeit leicht variieren, ohne das Ergebnis der Detektion nachhaltig zu beeinflussen. Ausgehend von dem Pfad p_{erst} wird in einem Gedankenexperiment ein fiktiver Pfad p_{komp} mit umgekehrtem Vorzeichen der Verstärkung gesucht, welcher in Kombination mit dem schnellsten Pfad gerade zu einer Kompensation nach Definition 10 führt. Es findet also die Betrachtung des Grenzfalls statt. Da die aggregierten Pfadgewichte den Parametern eines Systems erster Ordnung entsprechen, kann die in der Definition aufgeführte Bedingung (3.5) aus Satz 1 für die Grenzbetrachtung verwendet werden. Es ergibt sich somit für die Abschätzung und die daraus resultierende Bestimmung des Betrachtungshorizonts:

$$\frac{T_{p_{\text{erst}}}}{T_{p_{\text{komp}}}} > -\frac{K_{p_{\text{erst}}}}{K_{p_{\text{komp}}}} > 1. \quad (4.49)$$

Da der Grenzfall der Kompensation betrachtet wird, ergibt sich

$$K_{p_{\text{komp}}} = -K_{p_{\text{erst}}} \quad (4.50)$$

als geeignete Wahl für die Verstärkung des kompensierenden Pfades p_{komp} . Ebenfalls mit Blick auf den Grenzfall ergibt sich die Anstiegszeit des kompensierenden Pfades $T_{p_{\text{komp}}}$ als die kleinste Verzugszeit der Pfade mit dem umgekehrten Vorzeichen zum schnellsten Pfad p_{erst} . Da die Verstärkung des kompensierenden Pfades p_{komp} bereits festgelegt wurde, ergibt sich anhand der kleinsten Verzugszeit somit die größte Steigung. Es wird also der Worst Case angenommen, nach dem der Pfad mit der größten Steigung so früh einsetzt, dass er noch Einfluss auf den schnellsten Pfad p_{erst} hat. Zur Veranschaulichung ist in Bild 4.9 zum einen der schnellste Pfad durch seine Verzugs- und Anstiegszeit sowie Verstärkung dargestellt. Für das Beispiel wurde ein Pfad mit negativer Verstärkung als erster Pfad gewählt, was jedoch keine Einschränkung darstellt, da die Betrachtung genauso Gültigkeit besitzt, wenn der schnellste Pfad eine positive Verstärkung besitzt. Zum anderen zeigt Bild 4.9 beispielhaft einen kompensierenden Pfad mit der positiven Verstärkung $K_{p_{\text{komp}}}$ sowie einer angenommenen Anstiegszeit $T_{p_{\text{komp}}}$.

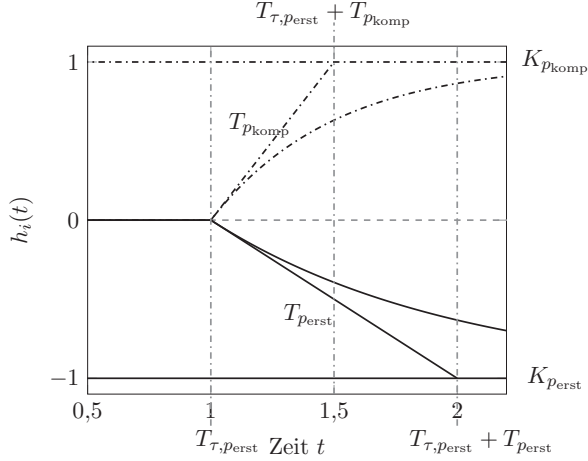


Bild 4.9: Darstellung der Einheitssprungantwort sowie der Parameter des schnellsten negativen Pfades (durchgezogen) und des fiktiven, verschobenen kompensierenden Pfades (Strichpunktlinie) (Normierung auf die Verstärkung $|K_{p_{erst}}|$, die Anstiegszeit $T_{p_{erst}}$ und die Verzugszeit $T_{\tau, p_{erst}}$).

Die Anstiegszeit $T_{p_{komp}}$ lässt sich durch die Aufteilung der Pfade in Abhängigkeit des Vorzeichens der aggregierten Verstärkung bestimmen:

$$\mathcal{P}_- = \{p_i | K_{p_i} < 0 \wedge p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}\} \quad (4.51)$$

und

$$\mathcal{P}_+ = \{p_i | K_{p_i} > 0 \wedge p_i \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}\} . \quad (4.52)$$

Ist die Verstärkung $K_{p_{erst}}$ positiv, so ergibt sich

$$T_{p_{komp}} = \min_{p_i \in \mathcal{P}_-} (T_{p_i}) \quad (4.53)$$

und für den Fall das $K_{p_{erst}}$ negativ ist

$$T_{p_{komp}} = \min_{p_i \in \mathcal{P}_+} (T_{p_i}) . \quad (4.54)$$

In Bild 4.9 besitzen die beiden Pfade dieselbe Verzugszeit $T_{\tau, p_{erst}}$. Wegen der Grenzfallbetrachtung muss zuletzt, neben der Anstiegszeit und der Verstärkung, auch noch eine Verzugszeit $T_{\tau, p_{komp}}$ des kompensierenden Pfades bestimmt werden. Die Verzugszeit verschiebt den kompensierenden Pfad p_{komp} soweit nach rechts, bis er gerade noch den schnellsten Pfad p_{erst} kompensiert. Aus der gesuchten Verzugszeit $T_{\tau, p_{komp}}$ und der bereits bekannten $T_{\tau, p_{erst}}$ ergibt sich somit der Betrachtungshorizont ΔT_τ , da unter Be-

rücksichtigung der vorhandenen aggregierten Anstiegszeiten bis zu diesem Zeitpunkt noch Einfluss auf die anfängliche Steigung der Sprungantwort des Gesamtsystems zwischen den betrachteten Ein-/Ausgangspaar möglich ist.

Für die Berechnung einer Verzugszeit $T_{\tau,p_{\text{komp}}}$ im betrachteten Grenzfall kann das bereits für die Aggregation verwendete Verfahren der Summenzeitkonstante (siehe Abschnitt 4.3.2.3) verwendet werden. Die aggregierte Verzugszeit eines Pfades ergibt sich nach (4.14) aus zwei Anteilen, der Summe der Verzugszeiten der im Pfad enthaltenen Komponenten $T_{\tau,n}$ und der anteiligen Verzugszeit T_{d,p_i} , welche sich aus der Bestimmung der Anstiegszeit ergibt. Die anteilige Verzugszeit T_{d,p_i} beschreibt dabei den Bereich des aggregierten Pfades, in dem ein sehr flacher Verlauf der Sprungantwort auftritt, der daher bei der Aggregation mit einem Funktionswert von Null angenommen wird. Für die Bestimmung des Betrachtungshorizonts wird dieser Bereich nun wieder berücksichtigt, da der beschriebene Pfad in der Realität innerhalb dieses Bereichs bereits Einfluss auf die Sprungantwort des betrachteten Eingangs hat. Aus der anteiligen Verzugszeit und der Anstiegszeit des Pfades ergibt sich wiederum die Summenzeitkonstante des Pfades nach (4.40). Wie bereits bei der Aggregation beschrieben, ergibt sich aus der Summenzeitkonstante und der Verstärkung die Fläche

$$A_{p_{\text{erst}}} = K_{p_{\text{erst}}} \cdot (T_{p_{\text{erst}}} + T_{d,p_{\text{erst}}}) , \quad (4.55)$$

nach [49]. Die Fläche $A_{p_{\text{erst}}}$ entspricht dabei der Fläche zwischen der monoton verlaufenden Einheitssprungantwort eines Pfades und der zugehörigen Verstärkung. In Bild 4.10 ist der aus Bild 4.9 bekannte Pfad um den Anfangszeitpunkt der anteiligen Verzugszeit $T_{\tau,p_{\text{erst}}} - T_{d,p_{\text{erst}}}$ sowie um die gepunktete Fläche $A_{p_{\text{erst}}}$ ergänzt. Für den kompensierenden Pfad kann ebenfalls eine Fläche $A_{p_{\text{komp}}}$ aufgestellt werden, wobei die Summenzeitkonstante die noch gesuchte anteilige Verzugszeit $T_{d,p_{\text{komp}}}$ enthält:

$$A_{p_{\text{komp}}} = K_{p_{\text{komp}}} \cdot (T_{p_{\text{komp}}} + T_{d,p_{\text{komp}}}) . \quad (4.56)$$

Wird nun wegen der Grenzfallbetrachtung gefordert, dass die Flächen $A_{p_{\text{erst}}}$ und $A_{p_{\text{komp}}}$ gleichgroß sein sollen, so lässt sich aus (4.55) und (4.56) sowie (4.50) die Verzugszeit

$$T_{d,p_{\text{komp}}} = T_{p_{\text{erst}}} + T_{d,p_{\text{erst}}} - T_{p_{\text{komp}}} \quad (4.57)$$

berechnen. Die Fläche $A_{p_{\text{komp}}}$ sowie alle weiteren Werte des im Grenzfall betrachteten kompensierenden Pfades $p_{p_{\text{komp}}}$ sind zur Verdeutlichung ebenfalls in Bild 4.10 dargestellt. Der Betrachtungshorizont lässt sich abschließend aus der anteiligen Verzugszeit

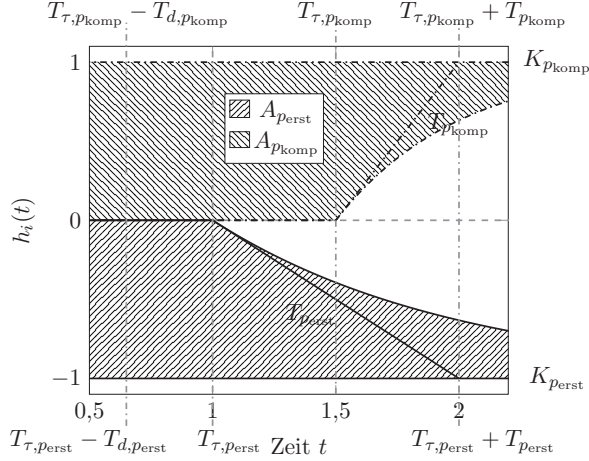


Bild 4.10: Darstellung der Einheitssprungantwort, der Parameter sowie der Fläche des schnellsten negativen Pfades (durchgezogen) und des fiktiven kompensierenden Pfades (Strichpunktlinie) (Normierung auf die Verstärkung $|K_{p_{erst}}|$, die Anstiegszeit $T_{p_{erst}}$ und die Verzugszeit $T_{\tau,perst}$).

und der kleinsten Verzugszeit zusammensetzen:

$$\Delta T_{\tau} = T_{\tau,perst} + T_{d,p_{komp}} . \quad (4.58)$$

Für den Fall, dass $T_{d,p_{komp}} < 0$ ist, muss dabei allerdings $T_{d,p_{komp}} = 0$ gesetzt werden.

Auswertung der Steigung im Betrachtungshorizont: Mit Hilfe des Betrachtungshorizonts ΔT_{τ} kann die Menge $\tilde{\mathcal{P}}_{u \rightarrow y}$ der zu berücksichtigenden Pfade anhand ihrer aggregierten Verzugszeiten eingeschränkt werden:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{u \rightarrow y} = \{p_i | T_{\tau,p_i} \leq \Delta T_{\tau}\} . \quad (4.59)$$

Für den festgelegten Anfangsbereich wird nun eine Anfangssteigung $g_{u \rightarrow y}$ mit Hilfe der aggregierten Anstiegszeiten T_{p_i} und Verstärkungen K_{p_i} berechnet, wobei die aggregierten Verzugszeiten T_{τ,p_i} vernachlässigt und somit die Zeitpunkte des Einsetzens der Sprungantworten der Systeme erster Ordnung, welche die Pfade beschreiben, in einem Zeitpunkt zusammengezogen werden. Da sich die Ausgangsfunktion nach Satz 4 aus der Summe der Funktionen der Pfade zwischen dem Ein-/Ausgangspaar bilden, entspricht die Anfangssteigung ebenfalls der Summe der Steigungen der Pfade:

$$g_{u \rightarrow y} = \sum_{p_i \in \tilde{\mathcal{P}}_{u \rightarrow y}} \frac{K_{p_i}}{T_{p_i}} . \quad (4.60)$$

Ist diese Anfangssteigung negativ, so ist davon auszugehen, dass das System Inverse-Response-Verhalten aufweist und der Detektionsalgorithmus ein entsprechendes Ergebnis liefert. Umgekehrt gilt, dass bei einem positiven Wert durch den Detektionsalgorithmus kein Inverse-Response-Verhalten zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang detektiert wird.

Der aufgezeigte Detektionsalgorithmus kommt für das Beispiel 9 somit zu dem Ergebnis, dass zwischen den Eingängen u_1 sowie u_2 und dem Ausgang y_1 Inverse-Response-Verhalten auftritt, zwischen u_3 und y_1 hingegen nicht. Die Zwischenwerte für die Bestimmung des Betrachtungshorizonts sowie die Berechnung der Steigung sind in der Tabelle 4.10 aufgeführt. Die Bilder 4.11, 4.12 und 4.13 zeigen jeweils den Anfangsbereich der Einheitssprungantworten der aggregierten Pfade im Betrachtungshorizont sowie den ersten darauffolgenden Pfad.

Tabelle 4.10: Werte der Auswertung des Beobachtungshorizonts des Beispiels 9.

	$T_{\tau, \text{perst}}$	$T_{d, \text{pkomp}}$	ΔT_{τ}	Pfade in ΔT_{τ}	$g_{u \rightarrow y}$
$u_1 \rightarrow y_1$	8,22	4,65	12,87	$p_{1,8}, p_{1,9}, p_{1,10}, p_{1,11}$	-0,1835
$u_2 \rightarrow y_1$	10,46	5,98	16,44	$p_{2,8}, p_{2,9}, p_{2,10}, p_{2,11}$	-0,0892
$u_3 \rightarrow y_1$	23,44	0	23,44	$p_{3,7}$	0,8096

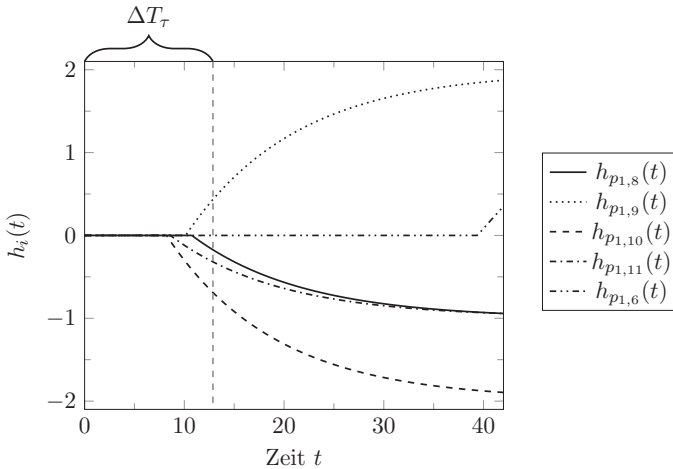


Bild 4.11: Einheitssprungantworten der aggregierten Pfade im und kurz nach dem Betrachtungshorizont für u_1 nach y_1 .

4 Analyse auf Inverse-Response-Verhalten

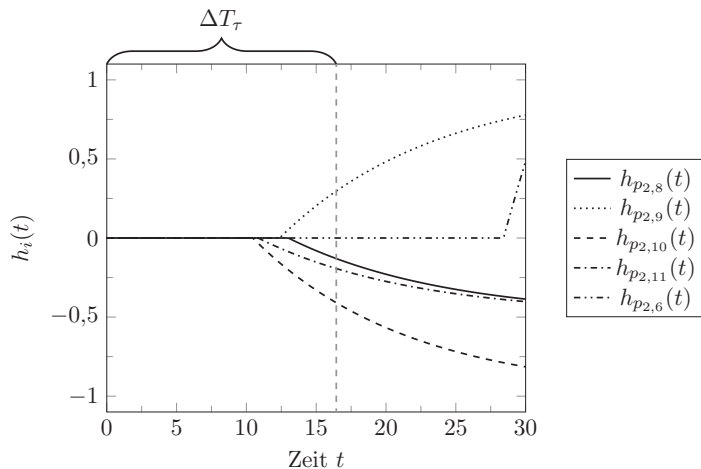


Bild 4.12: Einheitssprungantworten der aggregierten Pfade im und kurz nach dem Betrachtungshorizont für u_2 nach y_1 .

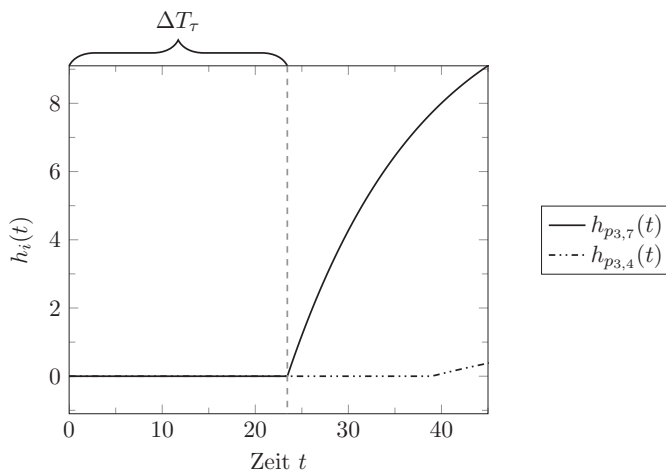


Bild 4.13: Einheitssprungantworten der aggregierten Pfade im und kurz nach dem Betrachtungshorizont für u_3 nach y_1 .

4.4 Diskussion

Im Kapitel 3 zur Modellierung wurde im Abschnitt 3.3.1 angesprochen, dass es zu Approximationsfehlern kommen kann, welche im Endeffekt auch das Detektionsergebnis beeinflussen. Da das Inverse-Response-Verhalten auf die Summe der einzelnen Sprungantworten zurückgeführt werden kann und der Fehler in den einzelnen Komponenten ähnlich groß ist, hebt sich der Fehler der Pfade mit positivem Vorzeichen und negativem Vorzeichen teilweise auf. Besitzt das betrachtete System Inverse-Response-Verhalten, so haben die negativen Pfade im Anfangsbereich einen größeren Einfluss als die positiven. Umgekehrt verhält es sich für den Fall, dass das System kein Inverse-Response-Verhalten besitzt (unter der Annahme das Gesamtverstärkung positiv ist). Daraus konnte gefolgert werden, dass durch den Approximationsfehler das Verhalten des Systems im Anfangsbereich bei der Modellierung verstärkt wird, was wiederum bei der Analyse dazu führt, dass eine sicherer Aussage getroffen werden kann. Durch die in diesem Kapitel beschriebenen Schritte der Aggregation sowie der abschließenden Auswertung der aggregierten Pfadgewichte kommt es zu weiteren Fehlern, welche im Folgenden betrachtet werden. Ebenso wird ihr Einfluss auf das Detektionsergebnis diskutiert.

4.4.1 Aggregationsfehler

Ausgangspunkt für den Aggregationsschritt sind die im Pfad befindlichen Kantengewichte \mathbf{w}_n , welche jeweils das Übertragungsverhalten einer Komponente beschreiben. Aus den Kantengewichten werden dann mit Hilfe des im Abschnitt 4.3.2.3 eingeführten Verfahren der Summenzeitkonstante Pfadgewichte aggregiert. Wie schon bei der Approximation der Systeme durch die Kantengewichte (vergl. Abschnitt 3.3.1), kommt es auch in diesem Schritt zu Fehlern durch die Vereinfachung, welche im Folgenden diskutiert werden sollen. Für die Diskussion wird nur der Schritt von den approximierten Kantengewichten bis zu den aggregierten Pfadgewichten betrachtet.

Bei der Vorstellung der Aggregationsverfahren wurde (4.10) eingeführt, welche die Übertragungsfunktion eines Pfades anhand seiner Kantengewichte beschreibt. Die bei der Aggregation bestimmten Pfadgewichte können wiederum als Parameter eines Systems erster Ordnung mit Totzeit interpretiert werden, siehe (4.12). Für die Bewertung der Auswirkungen des Aggregationsschrittes muss also der durch diese Vereinfachung hervorgerufene Fehler in der Sprungantwort des Pfades betrachtet werden. Wie bereits mehrfach erwähnt, ist die Sprungantwort die für das Inverse-Response-Verhalten relevante Funktion. Für einen Pfad nach (4.10) gilt, dass diese unter den gegebenen Bedingungen durch die im Anhang A.3.2 hergeleitete Sprungantwort beschrieben werden

kann:

$$h_{p_i}(t) = K_{p_i} \cdot \left(1 - \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} \frac{1}{\prod_{e_m \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y} \wedge m \neq n} \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \cdot e^{-\frac{t - \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_{\tau, n}}{T_n}} \right) \cdot \sigma \left(t - \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_{\tau, n} \right). \quad (4.61)$$

Dabei ist T_m wie T_n die Anstiegszeit einer Komponente mit der Bezeichnung m bzw. n . Diese Unterscheidung ist notwendig, da jeweils nur ungleiche Anstiegszeiten miteinander dividiert werden dürfen, um eine Null im Nenner zu verhindern. Auch für (4.12) lässt sich eine Einheitssprungantwortfunktion in Abhängigkeit der aggregierten Pfadgewichte bestimmen:

$$\hat{h}_{p_i}(t) = K_{p_i} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t - T_{\tau, p_i}}{(\sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_n)^{-T_{\tau, p_i}}}} \right) \cdot \sigma(t - T_{\tau, p_i}). \quad (4.62)$$

Um die Differenz zwischen (4.61) und (4.62) zu bestimmen, wird wie bereits bei der Identifikation, das Gütekriterium nach (3.22) verwendet, da sich das Inverse-Response-Verhalten aus der Summe der Sprungantworten der Pfade ergibt und daher die Abweichung in den Funktionswerten des Anfangsbereichs entscheidend ist. Für den Zeitbereich von 0 bis $t_{63\%}$ ergibt sich unter Verwendung von (4.40) die gemittelte Integralfunktion:

$$\Delta \hat{h}_{\text{abs}} = \frac{1}{t_{63\%}} \int_{t = \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_{\tau, n}}^{t_{63\%}} \left| \left(e^{-\frac{t - T_{\tau, p_i}}{(\sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_n)^{-T_{\tau, p_i}}}} \right) \cdot \sigma(t - T_{d, p_i}) - \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} \frac{1}{\prod_{e_m \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y} \wedge m \neq n} \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \cdot e^{-\frac{t - \sum_{e_n \in \mathcal{P}_{u \rightarrow y}} T_{\tau, n}}{T_n}} \right| dt. \quad (4.63)$$

Eine allgemeine Aussage zum auftretenden Fehler im Sinne einer geschlossenen mathematischen Betrachtung lässt sich aus (4.63) nicht ableiten. Daher wird wie bereits bei der Betrachtung der Aggregationsverfahren in Abschnitt 4.3.2.4 das $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$ der Pfade des Beispiels 9 berechnet. Dabei wurde der Zeitpunkt $t_{63\%}$ jeweils in Abhängigkeit des aggregierten Pfads nach (4.62) bestimmt. Die Tabellen 4.11, 4.12 und 4.13 zeigen die entsprechenden Werte und zusätzlich auch die zu den Pfaden zugehörigen Verzugszeiten T_{τ, p_i} .

Tabelle 4.11: Gemittelter Integralwert sowie Verzugszeit der aggregierten Pfade zwischen u_1 und y_1 im Beispiel 9.

	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$p_{1,4}$	$p_{1,5}$	$p_{1,6}$	$p_{1,7}$
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0219	0,0267	0,0267	0,0281	0,0251	0,0253	0,0283
T_{τ, p_i}	41,78	62,97	63,06	83,64	40,06	39,40	47,39
	$p_{1,8}$	$p_{1,9}$	$p_{1,10}$	$p_{1,11}$	$p_{1,12}$	$p_{1,13}$	
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0177	0,0171	0,0143	0,0153	0,0215	0,0263	
T_{τ, p_i}	10,75	10,13	8,22	8,61	46,48	66,88	

Tabelle 4.12: Gemittelter Integralwert sowie Verzugszeit der aggregierten Pfade zwischen u_2 und y_1 im Beispiel 9.

	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$p_{2,3}$	$p_{2,4}$	$p_{2,5}$	$p_{2,6}$	$p_{2,7}$
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0243	0,0257	0,0256	0,0281	0,0277	0,0278	0,0278
T_{τ, p_i}	31,23	49,94	50,03	69,73	29,07	28,442	49,80
	$p_{2,8}$	$p_{2,9}$	$p_{2,10}$	$p_{2,11}$			
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0197	0,0193	0,0175	0,0181			
T_{τ, p_i}	13,01	12,38	10,46	10,85			

Tabelle 4.13: Gemittelter Integralwert sowie Verzugszeit der aggregierten Pfade zwischen u_3 und y_1 im Beispiel 9.

	$p_{3,1}$	$p_{3,2}$	$p_{3,3}$	$p_{3,4}$	$p_{3,5}$	$p_{3,6}$	$p_{3,7}$	$p_{3,8}$
$\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$	0,0268	0,0283	0,0252	0,0254	0,0217	0,0217	0,0227	0,0253
T_{τ, p_i}	62,63	83,20	39,62	38,96	44,41	44,82	23,44	28,27

Zunächst lässt sich bei den ermittelten werden ein qualitativer Zusammenhang zwischen $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$ und der Verzugszeit T_{τ, p_i} feststellen. Wird die Verzugszeit kleiner, so ist auch der gemittelte integrale Fehler kleiner. Pfade mit einer ähnlichen Verzugszeit besitzen dabei auch einen ähnlichen Wert für $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$. Dies lässt sich zudem dadurch untermauern, dass Pfade mit einer größeren Verzugszeit auch eine größere Abweichung aufweisen. Gerade durch die Verzugszeit entsteht ein Fehler dadurch, dass in diesem Teil der Sprungantwort die Funktionswerte nach der Aggregation mit Null angenommen werden, obwohl dies zumindest zum Teil in der Realität nicht der Fall ist. Wie bereits erwähnt ist für das Inverse-Response-Verhalten die Summe der Sprungantwortfunktionen der Pfade von Bedeutung. Ausgehend von einem positiven stationären Endwert kommt es nur dann zu Inverse-Response-Verhalten, wenn zu Beginn der summierten Sprungantwort die Antwort mit negativem stationären Endwert dominieren. Hat der Aggregationsfehler nun einen ähnlich großen Einfluss auf die Abweichungen der Sprungverläufe, so kann - wie bereits bei der Identifikation - argumentiert werden, dass sich der Fehler zwischen den

Pfaden mit positivem und negativem stationären Endwert nährungsweise ausgleicht. Wird berücksichtigt, dass für die Bestimmung des Detektionsergebnisses nur die Pfade innerhalb des Betrachtungshorizonts bewertet werden, so besitzen die Pfade zu dem eine ähnlich große Verzugszeit. Dies untermauert die Argumentation, da dann auch die Abweichung $\Delta \hat{h}_{\text{abs}}$ der betrachteten Pfade ähnlich groß ist. Der durch die Aggregation der Pfade entstehende Fehler kann daher im Fall der Inverse-Response-Analyse vernachlässigt werden, da sich das Verhalten der positiven und negativen Pfade nährungsweise ausgleicht oder das zu analysierende Verhalten verstärkt wird, was die qualitative Detektion unterstützt.

4.4.2 Fehler durch Auswahl des Betrachtungshorizonts

In Abschnitt 4.3.3.2 wird beschrieben, wie durch eine Abschätzung der sogenannte Betrachtungshorizont ermittelt wird, welcher wiederum jene Pfade festlegt, die für die abschließende Analyse auf das Inverse-Response-Verhalten betrachtet werden. Andersherum kann formuliert werden, dass der Betrachtungshorizont gezielt Pfade ausschließt, welche nur einen marginalen Einfluss auf das anfängliche Verhalten der Sprungantwort des betrachteten Ausgangs haben. Da dabei auf die aggregierten Werte zurückgegriffen wird und anzunehmen ist, dass die ausgeschlossenen Pfade in der Realität doch Einfluss auf das anfängliche Verhalten haben - wenn auch nur marginal - wird in diesem Abschnitt der aus der Bestimmung des Betrachtungshorizonts entstehende Fehler diskutiert.

Wie bereits erörtert, wird für die Bestimmung des Betrachtungshorizonts der schnellste Pfad, also der Pfad mit der kleinsten Verzugszeit, ausgewählt. Daraufhin wird in einem Gedankenexperiment die anteilige Verzugszeit eines Pfades gesucht, der den ausgewählten Pfad nach Definition 10 kompensieren kann und dabei eine betragsmäßig gleiche Verstärkung besitzt sowie eine Anstiegszeit, welche der kleinsten Anstiegszeit der für die Kompensation in Frage kommenden Pfade entspricht. Durch diese Wahl wird also abgeschätzt, bis zu welchem Zeitpunkt der Pfad mit der steilsten Steigung einsetzen muss, um eine Kompensation zu ermöglichen. Bis zu diesem Zeitpunkt werden dann alle Pfade berücksichtigt, das heißt die berechnete anteilige Verzugszeit bildet zusammen mit der kleinsten Verzugszeit den Betrachtungshorizont nach (4.58).

Die Bestimmung des Betrachtungshorizonts kann dann zu einem fehlerhaften Ergebnis und in Folge dessen zu einer Falsch- bzw. Fehldetektion führen, wenn sich Pfade im Grenzbereich des Betrachtungshorizonts befinden. Diese Pfade werden dann entweder gerade noch oder eben gerade nicht mehr berücksichtigt, was wiederum Einfluss auf den folgenden Schritt der Bewertung der Steigung der Pfade im Betrachtungshorizont hat. Zudem stellen die aggregierten Pfadgewichte nur eine Approximation des tatsächlichen

Verhaltens dar. Für den Fall der Sprungantwort eines Pfades bedeutet dies, dass auch schon vor dem Zeitpunkt der aggregierten Verzugszeit in der Realität Funktionswerte ungleich Null auftreten können.

Um die Auswirkungen der Beschränkung durch den Betrachtungshorizont zu illustrieren wird das Verhalten zwischen dem Eingang u_2 und dem Ausgang y_1 des Beispiels 9 betrachtet. Diese Ein-/Ausgangskombination weist Inverse-Response-Verhalten auf, jedoch in einer wesentlich schwächeren Form als das Ein-/Ausgangspaar u_1 nach y_1 . Es handelt sich also um den Grenzfall des betrachteten Beispiels. Der Betrachtungshorizont sowie die Einheitssprungantworten der in ihm befindlichen Pfade wurden bereits durch das Bild 4.12 aufgezeigt. In Bild 4.14 sind nun die Einheitssprungantwort der Summen der Pfade, welche sich innerhalb des Betrachtungshorizonts ΔT_τ befinden, sowie die der außerhalb befindlichen Pfade dargestellt. Dabei ist jeweils die Sprungantwort anhand der im Beispiel verwendeten originalen (org.) sowie der durch die Kantengewichte approximierten (app.) Komponenten zusammen mit der aus den aggregierten (agg.) Pfadgewichten resultierenden Einheitssprungantwort dargestellt. Wie auch schon im Bild 4.12 zu sehen war, gibt es eine klare Trennung zwischen den Pfaden im Betrachtungshorizont und denen außerhalb davon. Es ist ebenfalls gut zu erkennen, dass durch den Beobachtungshorizont in dem betrachteten Beispiel, eine für die Auswertung des Anfangsverhaltens sinnvolle Grenze gezogen wird.

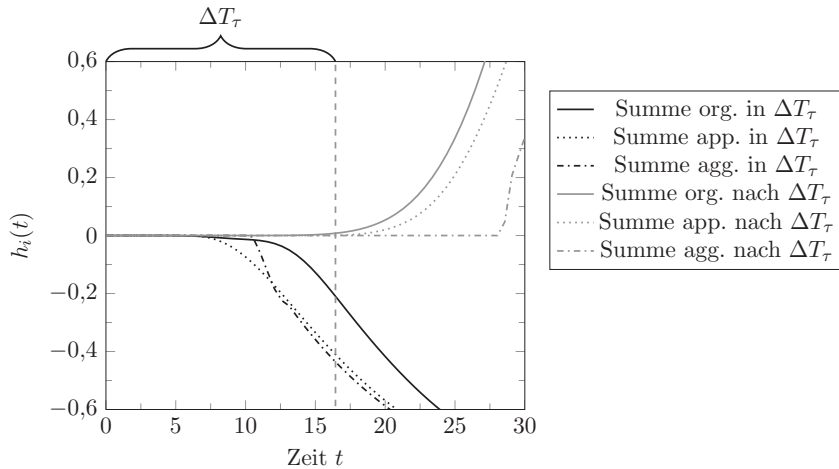


Bild 4.14: Einheitssprungantworten der Summe der Pfade im und außerhalb des Betrachtungshorizonts, für u_2 nach y_1 .

Eine allgemeinere Analyse des Fehlers durch die Wahl des Betrachtungshorizont kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Der Grund hierfür liegt wie bereits bei den vorherigen Fehlerdiskussionen darin, dass es nicht möglich ist, sich auf ein allgemeines Gesamtsys-

tem zu beschränken. Der Hinweis auf den Einfluss bei einem im direkten Bereich um den Beobachtungshorizont liegenden Pfad wird jedoch im übernächsten Abschnitt noch einmal aufgegriffen, da er für eine Zuverlässigkeitsbewertung des Detektionsergebnisses herangezogen werden kann.

4.4.3 Fehler durch Auswertung der Steigung im Betrachtungshorizont

Nach dem der Betrachtungshorizont gewählt wurde, wird anhand der aggregierten Pfadgewichte der in ihm befindlichen Pfade die Anfangssteigung $g_{u \rightarrow y}$ nach (4.60) berechnet. Anhand des Vorzeichens der Anfangssteigung erfolgt dann die Detektion des Inverse-Response-Verhaltens. In diesem abschließenden Schritt kommt es zu weiteren Fehlern durch vereinfachte Annahmen, welche das Detektionsergebnis beeinflussen. Hierzu zählen zunächst die verwendeten aggregierten Pfadgewichte, welche das reale Verhalten des Pfades bei einem Sprung nur approximativ beschreiben. Des Weiteren hat die durch den Betrachtungshorizont getroffene Auswahl an Pfaden einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis der Anfangssteigung. Als letzter Punkt sei noch die Vernachlässigung der Verzugszeiten der Pfade genannt. Durch das Zusammenziehen aller Pfade in einen gemeinsamen inertialen Zeitpunkt, was durch die Berechnung nach (4.60) erfolgt, wird das durch die Verzugszeiten berücksichtigte anfängliche Verhalten der Pfade ignoriert. Für die approximationsbedingten Fehler durch die Verwendung der aggregierten Pfadgewichte sei auf die vorhergehenden Betrachtungen verwiesen. Dabei ließ sich feststellen, dass sich sowohl bei der Approximation in den Kantengewichten als auch bei der Aggregation der Pfadgewichte ein Ausgleich zwischen den positiven und den negativen Pfaden ergibt. Der approximationsbedingte Fehler wird daher an dieser Stelle nicht weiter berücksichtigt, er wird im folgenden Abschnitt jedoch noch einmal aufgegriffen. Aus der Tatsache, dass die aggregierten Pfadgewichte verwendet und zudem nicht alle Pfade berücksichtigt werden, lässt sich zunächst schließen, dass es sich bei der berechneten Anfangssteigung nicht um die wirkliche Anfangssteigung einer Sprungantwort des betrachteten Systems handelt.

Zum Fehler durch die Zusammenführung der Steigungen in einem Zeitpunkt, also die Vernachlässigung der Verzugszeiten, sei noch einmal der Betrachtungshorizont berücksichtigt. Durch die Wahl des Betrachtungshorizonts auf Basis der kleinsten Verzugs- und Anstiegszeit ist sichergestellt, dass sich die Ausdehnung des Betrachtungshorizonts auch bei anderen Systemen mit verschiedensten Zeitkonstanten in einem ähnlichen Verhältnis zu den Zeitkonstanten bewegt wie in Beispiel 9. Durch die Größe des Betrachtungshorizonts ist jeweils wiederum festgelegt, welche Verzugszeiten vernachlässigt werden, durch das Zusammenziehen der Steigungen der Pfade in einen Zeitpunkt. Da sich dieser auch bei einem anderen System im Verhältnis zu den Zeitkonstanten nur geringfügig ändern

wird, ist davon auszugehen, dass auch der Fehler immer ähnlich groß sein wird, auch wenn er sich nicht mathematisch beschreiben lässt.

Um eine Einschätzung der Zuverlässigkeit des Detektionsergebnisses zu ermöglichen, kann der Betrag der Anfangssteigung $g_{u \rightarrow y}$ verwendet werden. Darauf wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen.

4.4.4 Fehl- und Falschklassifikationsrate sowie Zuverlässigkeit des Detektionsergebnisses

In den vorherigen Abschnitten 4.4.1, 4.4.2 und 4.4.3 sowie in Abschnitt 3.3.1 wurden verschiedene Einflüsse durch Approximation, Aggregation und Vereinfachungen diskutiert. In allen Fällen ging es dabei um die Einflüsse im Fall der Analyse des Inverse-Response-Verhaltens, da die einzelnen Schritte jeweils auf das finale Ergebnis, die Anfangssteigung, Auswirkungen haben. Da sich kein allgemeingültiges Ausgangssystem für die Modellierung im übertragungsfunktionsbasierten Graphen sowie die Detektion aufstellen lässt, da diese auch ein nichtlineares Verhalten besitzen könnten, wurden die Schritte einzeln am Beispiel 9 sowie den Beispielkomponenten aus Anhang A.1 betrachtet. An dieser Stelle sollen die Einflüsse noch einmal reflektiert werden, um die Fehlklassifikationsrate und die Zuverlässigkeit des Detektionsalgorithmus zu bewerten. Ob das untersuchte System Inverse-Response-Verhalten besitzt oder nicht, wird anhand des Vorzeichens der Anfangssteigung $g_{u \rightarrow y}$ bestimmt. Wie bereits kurz angesprochen, lässt sich auch der Betrag der Steigung für eine Einschätzung der Zuverlässigkeit der Ergebnisse verwenden. Um dies zu verdeutlichen, sei noch einmal auf Tabelle 4.10 verwiesen, in welcher die Anfangssteigungen der drei im Beispiel 9 betrachteten Ein-/Ausgangspaare aufgeführt sind. Vergleicht man diese mit dem Verlauf der Einheitsprungantworten des Beispiels in Bild 4.3, so lässt sich zunächst feststellen, dass für die Eingänge u_1 und u_2 sich jeweils ein stärker und ein schwächer ausgeprägtes Unterschwingen ergibt. Dies spiegelt sich in der Anfangssteigung wieder, welche einen Wert von $-0,1835$ bzw. $-0,0892$ aufweist. Wird also zum Abschluss des Detektionsergebnisses neben dem Vorzeichen auch der Betrag der berechneten Anfangssteigung betrachtet, so lässt sich über diesen eine Aussage über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses ermitteln. Je größer der Betrag ist, um so zuverlässiger ist das Ergebnis und um so unwahrscheinlicher ist es, dass eine Fehl- bzw. eine Falschklassifizierung durch den Algorithmus erfolgt. Da sich der Zusammenhang zwischen dem Betrag der Anfangssteigung und den zuvor erfolgten Vereinfachungen nicht mathematisch beschreiben lässt, konnte im Rahmen der Arbeit keine genauere Aussage dazu getroffen werden, wie groß der Betrag mindestens sein muss, um die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu garantieren. Er sollte jedoch in jedem Fall zusammen mit dem Detektionsergebnis betrachtet werden, um bei einem sehr

kleinen Wert gegebenenfalls genauere Untersuchungen anzustreben. In den Betrag der Steigung fließt auch ein möglicher Fehler durch den Betrachtungshorizont mit ein, da im Fall eines großen Betrachtungshorizonts eventuell zu viele Pfade berücksichtigt werden und es deshalb zu einem Umschlagen der Anstiegsrichtung im Vorzeichen kommt. Dies würde den Betrag entsprechend verändern.

Weiteren Einfluss auf eine Fehl- bzw. Falschklassifizierung haben zum Teil auch die Approximation und die Aggregation. Hier wurde zunächst festgestellt, dass sich die Fehler in einem ähnlichen Verhältnis sowohl in den Pfaden mit positiver als auch in denen mit negativer Verstärkung auswirken und sie sich daher ausgleichen. Durch die Auswahl von Pfaden im Betrachtungshorizont kommt es jedoch leicht zu einem Überhang an negativen oder positiven Pfaden. In diesem Fall gleichen sich die durch die Approximation und Aggregation bedingten Fehler zwischen den Pfaden nicht mehr aus. Haben z. B. die Pfade mit positiver Verstärkung im Betrachtungshorizont eine größere Gewichtung, so wird deren Fehler nur zum Teil von den negativen Pfaden ausgeglichen. Der restliche Fehler der positiven Pfade wirkt sich in der Art und Weise aus, dass die positiven Pfade mit einem geringeren Einfluss auf die summierte Sprungantwort berücksichtigt werden, als dies in der Realität der Fall wäre. Da die positiven Pfade in diesem Fall jedoch trotzdem einen größeren Einfluss haben, wird der Detektionsalgorithmus auch unter dem Einfluss des Fehlers zu dem Ergebnis gelangen, dass kein Inverse-Response-Verhalten auftritt. Umgekehrt gilt das Ganze natürlich für den Fall, dass die Pfade mit negativer Verstärkung überwiegen. Für die eigentlich kritische Situation eines Grenzfalles lässt sich anhand des Gedankenbeispiels feststellen, dass sich die durch Approximation und Aggregation bedingten Fehler ausgleichen, da die Pfade mit negativem und positiven Vorzeichen mit einer ähnlichen Gewichtung in das Ergebnis einfließen. Angezeigt wird der Grenzfall zudem durch den Betrag der Anfangssteigung, welcher wie bereits erörtert, als Zuverlässigkeitsmaß genutzt werden kann.

5 Anwendungsbeispiel

Das folgende Anwendungsbeispiel soll das gesamte Vorgehen zur Analyse des Inverse-Response-Verhaltens mit dem in der Arbeit vorgestellten Übertragungsfunktionsbasierten Graphen und Detektionsalgorithmus anhand einer praktischen Fallstudie aufzeigen. Für die praktische Umsetzung einer Anlage wurde dabei die am Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik entwickelte und aufgebaute Prozessinsel 1 (im Folgenden einfache Prozessinsel) der Modellfabrik μ Plant verwendet. Bevor in Abschnitt 5.2 das realisierte Szenario beschrieben wird, erfolgt zunächst im Abschnitt 5.1 eine Beschreibung der Modellfabrik. Daraufhin wird die Modellierung in Abschnitt 5.3 beschrieben. Die Ergebnisse des Detektionsalgorithmus werden in Abschnitt 5.4 vorgestellt und diskutiert. Es sei darauf hingewiesen, dass im Rahmen der Fallstudie neben den SI-Basiseinheiten auch die in der Technik üblichen Einheiten: cm, l, l/min und mbar verwendet werden.

5.1 Modellfabrik

Die Modellfabrik μ Plant wurde als Forschungs- und Lehrplattform am Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik der Universität Kassel konzipiert und ist in Teilen bereits umgesetzt. Die Modellfabrik besteht aus zwei Prozessinseln, einer Fertigungszelle, einem Lager mit Industrieroboter und einem Materialfluss, welcher durch mobile Roboter realisiert wird. Damit bildet die Modellfabrik eine hoch flexible Produktionsanlage nach, welche aus verteilten Komponenten mit individuellen Steuerungen besteht. Um einen einfachen Betrieb der Anlage im universitären Umfeld zu ermöglichen, wird im Prozess teil Wasser als Fluid eingesetzt. So auch in den Prozessinseln, von denen die erste bisher aufgebaute als Plattform zur Realisierung der Fallstudie verwendet wird. Die Konzeptionierung und Realisierung der verwendeten ersten Prozessinsel war Teil der Forschungsarbeit am Fachgebiet.

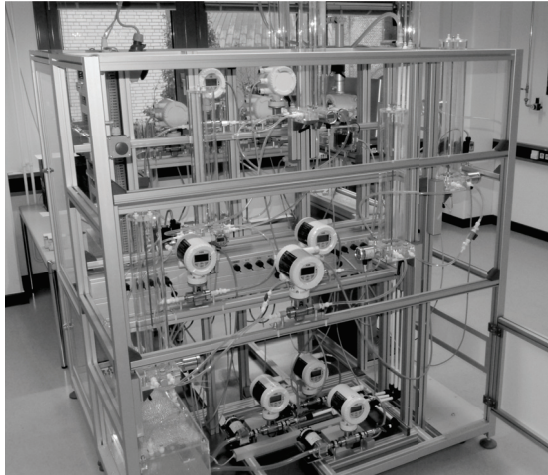
Die Prozessinsel umfasst 9 höhenverstellbare zylindrische Tanks mit jeweils einer Höhe von 60 cm, einem Durchmesser von 11 cm und somit einem Fassungsvermögen von ca. 5,7 l sowie einem rechteckigen Vorhaltetank mit einer Höhe von 35 cm, einer Breite von 25 cm und einer Länge von 79 cm, woraus ein Volumen von ca. 70 l resultiert. Alle Tanks verfügen über einen relativen Drucksensor mit einem Messbereich von 0 bis 60 mbar,

sodass der Füllstand eines jeden Tanks durch die Messung des hydrostatischen Drucks ermittelt werden kann. Um die Tanks innerhalb der Prozessinsel aus dem Vorhaltetank heraus zu befüllen, sind 3 Zahnradpumpen („UP6-P“ der Firma Marco) mit einer installationsbedingten Fördermenge von ca. 10 l/min in eine vorgegebene Richtung in der Prozessinsel fest verbaut. Um den Förderstrom regeln zu können, kann die Versorgungsspannung durch Pulsweitenmodulation über ein Steuersignal angepasst werden. Zudem ist hinter den Pumpen jeweils ein Magnetisch-Induktives-Durchflussmessgerät (MID) („HygienicMaster 300, FEH311“ der Firma ABB) angebracht, welches auf einen Messbereich von 0 bis 15 l/min eingestellt ist. Alle Tanks verfügen über Kupplungsanschlüsse, sodass diese untereinander und mit weiteren Aktoren sowie Sensoren einfach und flexibel durch Schläuche mit den entsprechenden Kupplungsgegenständen verbunden werden können. Die Schläuche haben einen Standarddurchmesser von 8 mm, welcher jedoch mit Hilfe von eingebauten Kugelhähnen manuell verringert werden kann.

Zu den weiteren Aktoren und Sensoren zählen jeweils 10 weitere Pumpen und MIDs sowie jeweils 10 Binär- und Proportionalventile. Bei den weiteren Pumpen handelt es sich ebenfalls um Zahnradpumpen („UP4-P“ der Firma Marco), welche nur in eine Richtung fördern und bis zu ca. 6 l/min fördern können. Die zusätzlichen MIDs sind hingegen baugleich mit den bereits erwähnten, wurden jedoch auf einen Messbereich von 0 bis 10 l/min eingestellt. Bei den Binärventilen handelt es sich um 2/2-Wege Magnetventile („SCG238A044“ der Firma ASCO Numatics), welche durch das Zuschalten einer Spannung geöffnet werden können. Die Proportionalventile („2875“ der Firma Christian Bürkert) können hingegen so angesteuert werden, dass ein beliebiger Öffnungsquerschnitt von bis zu 8 mm erreicht werden kann. Als Stellantrieb wird bei den Proportionalventilen eine Magnetspule verwendet. Alle Aktoren und Sensoren verwenden eine Versorgungsspannung von 24 V und sind mit der in der Prozessinsel verbauten Speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) verbunden. Für die Pumpen und Proportionalventile wird dabei eine Steuerspannung von 0 bis 10 V verwendet. Zur Übertragung der Messsignale der Drucksensoren und MIDs wird hingegen die 4 bis 20 mA Technik verwendet. Die Aktoren und Sensoren können innerhalb der Prozessinsel beliebig auf Aluminiumprofilen platziert und flexibel durch Schläuche miteinander verbunden werden. Der Anschluss der Geräte an die SPS erfolgt ebenfalls flexibel über Steckverbinder innerhalb der Prozessinsel. Somit ist es möglich, verschiedenste Szenarien mit Hilfe der Prozessinsel zu realisieren und experimentelle Ergebnisse zu gewinnen.

Wie bereits erwähnt, verfügt die Prozessinsel über eine SPS, an welcher die Aktoren sowie Sensoren angeschlossen sind. Es handelt sich dabei um einen Industrie-PC („C6640“ der Firma Beckhoff mit einem 2,1 GHz Intel Core i7 Prozessor) mit Soft-SPS („Twin-CAT 3“ der Firma Beckhoff), welcher über ein Multitouch-Control-Panel („CP3921“ der Firma Beckhoff) bedient werden kann. Der Industrie-PC ist per EtherCAT mit den

Ein-/Ausgangsklemmen (verschiedene digitale und analoge E-Bus-Klemmen der Firma Beckhoff) verbunden. Für den Betrieb der Prozessinsel wurde ein SPS-Programm in „TwinCAT 3“ sowie eine Visualisierung in „VisualBasic“ implementiert, welche es ermöglichen, auch bei einer flexiblen Verwendung der Aktoren und Sensoren diese wie gewünscht anzusteuern. Um einen besseren Eindruck vom Aufbau der Prozessinsel zu bekommen, ist diese in Bild 5.1 (a) und (b) aus unterschiedlichen Perspektiven abgebildet.



(a)



(b)

Bild 5.1: Prozessinsel der Modellfabrik μ Plant mit dem Szenario der Fallstudie aus zwei unterschiedlichen Perspektiven.

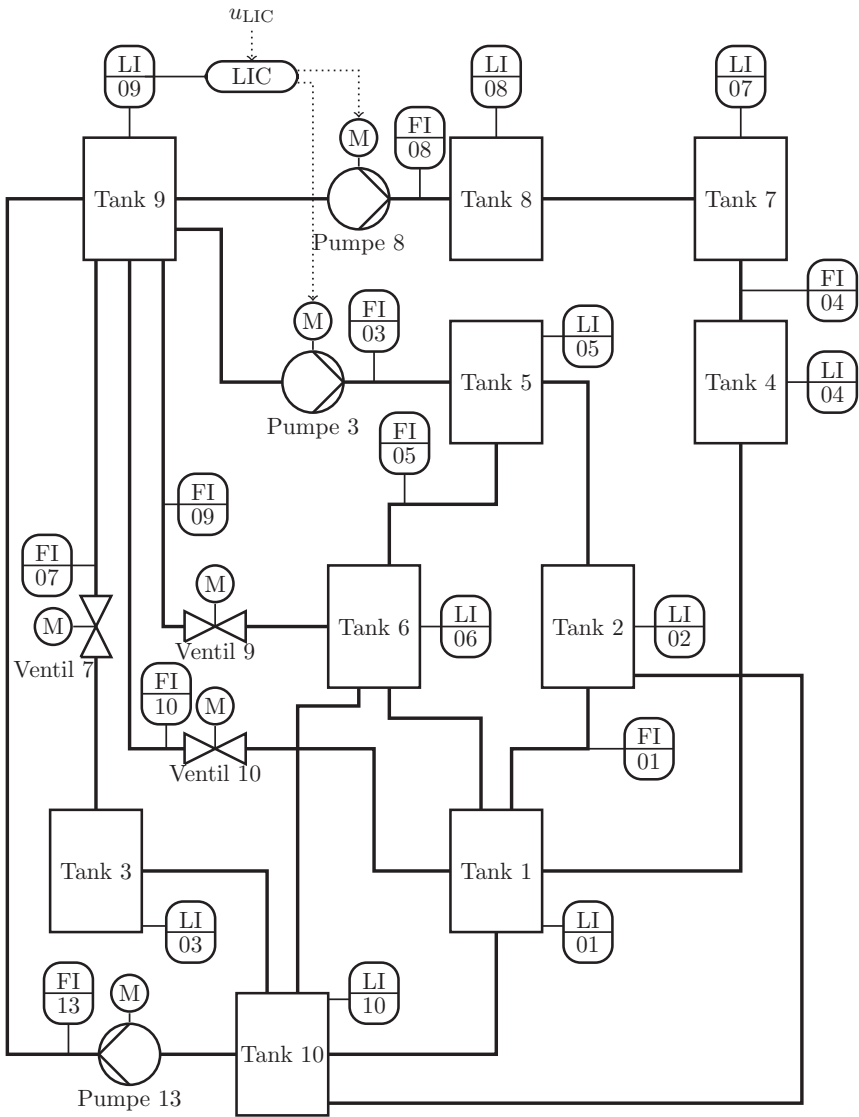


Bild 5.2: R&I-Fliebschema der Fallstudie.

5.2 Szenario der Fallstudie

Durch geeignete Wahl der Aktoren sowie der Verrohrung innerhalb der Prozessinsel wurde für die Fallstudie eine Konfiguration realisiert, welche Inverse-Response-Verhalten aufweist. Die Tanks der Prozessinsel sind dabei, wie im R&I-Fließschema in Bild 5.2 dargestellt, miteinander verbunden. Die Pumpe 13, welche Wasser aus dem Vorhalte-tank (Tank 10) in den Tank 9 befördert, besitzt eine feste Leistung, die vom Programm nicht geändert wird. Somit gibt es in Tank 9 einen konstanten Zufluss, der sich im stationären Zustand der Anlage zum einen auf die drei gravitationsbedingten Abflüsse zu den Tanks 1, 3 und 6 aufteilt. Zum anderen gibt es einen Füllstandsregler (LIC), der die Pumpen 3 und 8 so ansteuert, dass im Tank 9 der geforderte Sollfüllstand von zunächst 0,55 m gehalten wird.

Bei dem Füllstandsregler handelt es sich um eine diskrete Kaskadenregelung, bestehend aus einem PID-Regler und einem überlagerten PI-Regler mit Anti-Wind-Up. Der überlagerte PI-Regler stellt den Füllstand h über den Durchfluss q ein, welcher untergeordnet durch den PID-Regler über die Pumpenleistung geregelt wird. Da der Durchfluss einer Stellgrößenbegrenzung unterliegt, wurde für den überlagerten Regler ein Anti-Wind-Up gewählt. Der Regler wird mit einer Zykluszeit von $\Delta t = 10$ ms ausgeführt und mit Hilfe eines Modells in Simulink sowie der dort verfügbaren Optimierungsfunktion für diskrete PID-Regler parametrisiert. Die Parameter für die Durchflussregelung sind: die Verstärkung des Proportionalanteils $K_{P,h} = 0,2 \text{ \%} \cdot \text{min}/\text{dm}^3$, die Nachstellzeit $T_{N,h} = 0,05$ s, die Vorhaltezeit $T_{V,h} = 0$ s und die Glättungszeitkonstante $T_{G,h} = 0$ s. Der PI-Regler mit Anti-Wind-Up folgt dem Regelgesetz

$$u_{q,k} = K_{P,q} \left[e_{h,k} + T_{N,q} \sum_{i=0}^k (e_{h,i} - K_{AW,q} (u_{q,i-1} - w_{q,i-1})) \Delta t \right], \quad (5.1)$$

mit der Stellgröße u_q vor und w_q nach der Begrenzung, der Regelabweichung e_h sowie den Reglerparametern $K_{P,q} = -0,2 \text{ dm}^3/(\text{mm} \cdot \text{min})$, $T_{N,q} = 0,05 \text{ 1/s}$ und $K_{AW,q} = -10 \text{ mm} \cdot \text{min}/\text{dm}^3$ für das Anti-Wind-Up. Für die Stellgrößenbegrenzung gilt:

$$w_q = \begin{cases} 0 \text{ dm}^3/\text{min} & \forall u_q < 0 \\ u_q & \forall 0 \leq u_q \leq 8 \\ 8 \text{ dm}^3/\text{min} & \forall u_q > 8 \end{cases}. \quad (5.2)$$

Das von den Pumpen in die Tanks 8 und 5 geförderte Wasser wird gravitationsbedingt in die angeschlossenen Tanks weitergeleitet. Die verschiedenen Fluidströme werden in Tank 1 sowie im Vorhaltetank wieder zusammengeführt. Das zur Illustrierung der Prozessinsel bereits eingeführte Bild 5.1 gibt einen Eindruck der Anordnung der Aktoren,

Sensoren und Tanks. Da die meisten der vorhandenen Fluidströme gravitationsbedingt sind, ist in Tabelle 5.1 unter anderem die Höhe des Tankbodens angegeben, auf welche die Tankböden im Szenario eingestellt sind. Die Tabelle beinhaltet zudem auch die Füllstände der Tanks im stationären Betrieb, welcher auf Inverse-Response-Verhalten hin untersucht wird. Die Füllstände geben somit die Arbeitspunkte der Tanks vor.

Tabelle 5.1: Auslegungsdaten der Prozessinsel im Szenario (Auszug).

	Höhe Tankboden	Füllstand im sta. Betrieb	Grundfläche des Tanks	Fläche des Abflusses
Tank 1	80 cm	174 mm	9500 mm ²	77 mm ² nach Tank 10
Tank 2	120 cm	104 mm	9500 mm ²	39 mm ² nach Tank 1 11 mm ² nach Tank 10
Tank 3	80 cm	65 mm	9500 mm ²	11 mm ² nach Tank 10
Tank 4	110 cm	188 mm	9500 mm ²	77 mm ² nach Tank 1
Tank 5	170 cm	43 mm	9500 mm ²	39 mm ² nach Tank 2 11 mm ² nach Tank 6
Tank 6	100 cm	160 mm	9500 mm ²	39 mm ² nach Tank 1 17 mm ² nach Tank 10
Tank 7	140 cm	136 mm	9500 mm ²	77 mm ² nach Tank 4
Tank 8	170 cm	65 mm	9500 mm ²	48 mm ² nach Tank 7
Tank 9	175 cm	500 mm	9500 mm ²	39 mm ² nach Tank 1 28 mm ² nach Tank 3 28 mm ² nach Tank 6
Tank 10	16 cm	143 mm	197.500 mm ²	-

Wird der Füllstand des Tanks 1 als Systemausgang betrachtet, so ergibt sich bei einem Sprung des Füllstandsollwerts in Tank 9 Inverse-Response-Verhalten. Dabei sinkt der Füllstand zunächst ab, bevor er im Anschluss einen erhöhten stationären Endwert erreicht. Dies ist auch in Bild 5.3 zu sehen, welches den Verlauf des Füllstands in Tank 1 aufzeichnet, wobei der Füllstandssollwert zunächst bei 0,55 m liegt und dann sprunghaft auf 0,05 m abgesenkt wird. Die Messstellen der verwendeten Sensoren sind in Bild 5.2 eingezeichnet. Die Messwerte wurden mit Hilfe des SPS-Programms mit einer Abtastzeit von zunächst 5 ms aufgezeichnet. Für die anschließende Verarbeitung in MATLAB wurde nur jeder 100 Messwert verwendet, sodass sich eine Abtastzeit von 0,5 s für die noch folgende Identifikation ergibt. Das zu berücksichtigende Messrauschen der verwendeten Sensoren wurde bereits in Abschnitt 3.3.1 diskutiert.

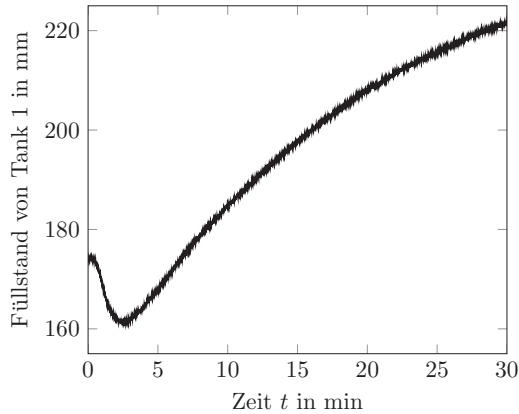


Bild 5.3: Ausgangssignal der Fallstudie mit Inverse-Response-Verhalten.

5.3 Modellierung des Anwendungsbeispiels

Um im Fallbeispiel den Prozess zwischen dem Sollwerteingang am Regler u_{LIC} und dem Ausgangssignal des Füllstandssensors am Tank 1 $y_{l_{Tank\ 1}}$ auf Inverse-Response-Verhalten untersuchen zu können, ist es zunächst erforderlich, den übertragungsfunktionsbasierten Graphen aufzustellen. Hierfür wird in einem ersten Schritt die Struktur des Graphen anhand des R&I-Fließschemas ermittelt. In einem zweiten Schritt erfolgt anschließend die Bestimmung der notwendigen Kantengewichte durch die Identifikation auf Basis aufgezeichneter Messwerte.

5.3.1 Ermittlung der Struktur des Modells anhand des R&I-Fließschemas

Bild 5.2 zeigt das R&I-Fließschema der Anlage. Wie bereits im Kapitel 3 beschrieben, lässt sich anhand des Fließschemas die Struktur des übertragungsfunktionsbasierten Graphen ermitteln. Zunächst werden die zu betrachtenden Komponenten festgelegt. In der Fallstudie wären dies die Tanks mit ihren Ein- und Ausgängen, die Ventile zusammen mit ihrem Stellantrieb und die Pumpen, ebenfalls mit ihrem Antrieb. Die Pumpen 3 und 8 werden weiter gefasst und zusammen mit dem Füllstandsregler als eine Komponente angesehen. Dies vereinfacht den Aufbau des Modells sowie die Modellierung, da nicht alle für eine individuelle Modellierung notwendigen Messwerte vorliegen.

Durch Berücksichtigung der Höhenunterschiede der Tanks sowie der Förderrichtung der Pumpen ist es möglich, die Kantenrichtungen der Fallstudie aufzustellen. Eine weitere Vereinfachung des Vorgehens lässt sich zudem erreichen, indem nur die Kanten zwischen dem betrachteten Ein-/Ausgangspaar für die Modellierung berücksichtigt werden. Dies

5 Anwendungsbeispiel

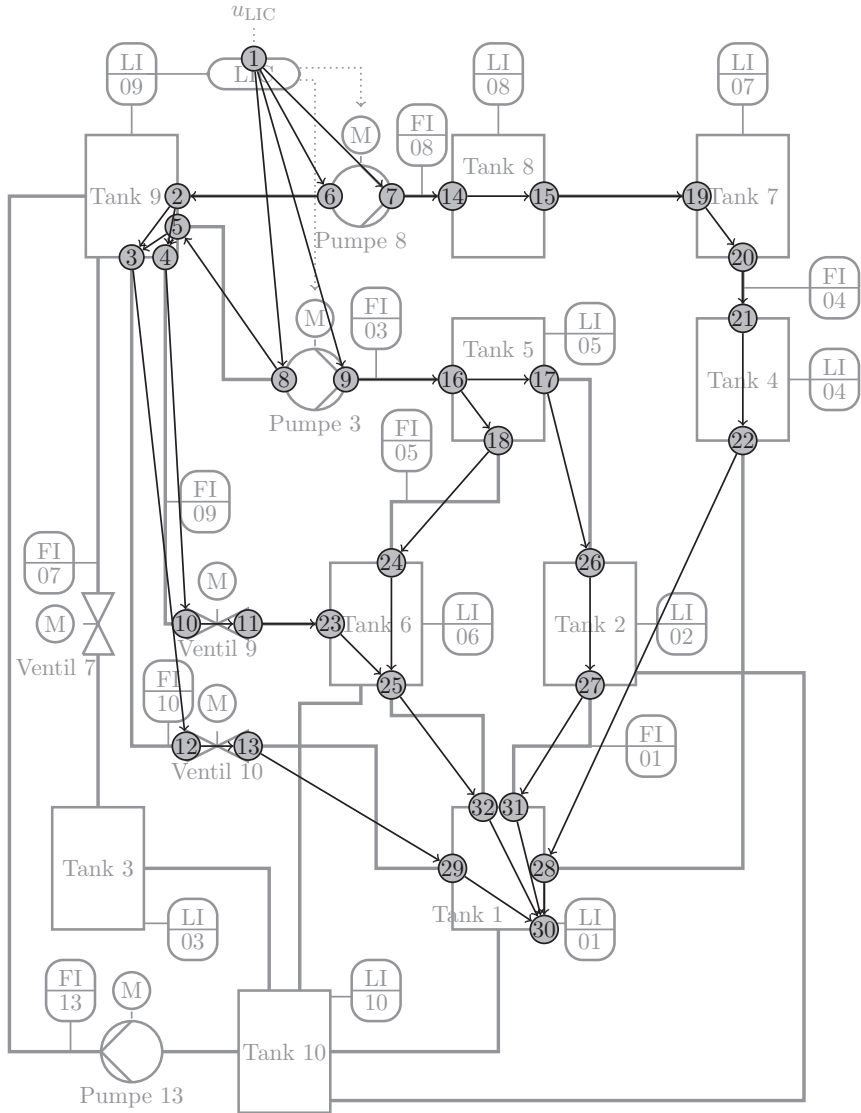


Bild 5.4: Übertragungsfunktionsbasierter Graph der Fallstudie mit dem zugehörigen R&I-Fließschema im Hintergrund.

ist möglich, da nur diese Kanten für die Analyse relevant sind. Außerdem wird somit der Aufwand für die Bestimmung der Kantengewichte reduziert, da eine Beschränkung auf die relevanten Kanten erfolgt. All dies zusammen führt zu dem in Bild 5.4 dargestellten übertragungsfunktionsbasierten Graphen. Zur besseren Veranschaulichung ist im Hintergrund des Graphen noch einmal das R&I-Fließschema eingezeichnet. Es ergeben sich 37 Kanten, welche jeweils ein Kantengewicht $w_{in,out}$ besitzen, wobei „in“ den Anfangsknoten und „out“ den Ausgangsknoten beschreibt. Die Nummerierung einer Kante setzt sich also im Fallbeispiel aus zwei Zahlenwerten zusammen. Anhand der Nummerierung sind die zu den Kantengewichten gehörenden Kanten leicht in Bild 5.4 zu finden. Dort wurden die Kantengewichte nicht eingezeichnet, um die Lesbarkeit zu gewährleisten.

5.3.2 Kantengewichte der Komponenten

Nachdem die Struktur des übertragungsfunktionsbasierten Graphen feststeht, müssen noch die Werte der Kantengewichte ermittelt werden. Zunächst werden die Kanten betrachtet, welche die Komponenten miteinander verbinden. In der Anlage sind an dieser Stelle jeweils Schlauchverbindungen eingesetzt. Da diese in allen Fällen sehr kurz sind und somit im Verhältnis zu den Tanks und Pumpen mit ihrem jeweiligen dynamischen Verhalten nur einen sehr geringen Einfluss auf das dynamische Gesamtsystemverhalten haben, wird der Einfluss der Verbindungen vernachlässigt. Dies bedeutet, dass die Verstärkungen der Kanten zu Eins gewählt werden und die Anstiegszeiten sowie die Verzugszeiten zu Null. Es gilt also: $w_{3,12} = w_{4,10} = w_{6,2} = w_{7,14} = w_{8,5} = w_{9,16} = w_{11,23} = w_{13,29} = w_{15,19} = w_{17,26} = w_{18,24} = w_{20,21} = w_{22,28} = w_{25,32} = w_{27,31} = (1; 0; 0)$. Der so entstehende Modellierungsfehler kann nicht geschlossen abgeschätzt werden, wird aber als gering angenommen, da der Einfluss im Verhältnis zu den anderen Komponenten gering ist, wie bereits erwähnt wurde.

Betrachtet man die Komponenten weiter, so kommen in der Anlage Pumpen, Ventile und einige Tanks vor. Bei den Ventilen 9 und 10 handelt es sich um 2/2-Wege Ventile, welche den Durchfluss durch einen veränderlichen Querschnitt beeinflussen können. Da die Einstellung im Laufe der Untersuchung jedoch nicht geändert wird, ist der Zufluss und der Abfluss der Ventile immer gleich groß. Daraus lässt sich ableiten, dass die Verstärkungen der beiden Ventile gleich eins ist. Die Verjüngung wird jedoch bei der Modellierung des Tanks 9 berücksichtigt. Da es sich in den beiden Fällen zudem um magnetisch angesteuerte Ventile handelt, welche kaum Schaltverzögerungen aufweisen, kann die Anstiegszeit der Ventile sowie die Verzugszeit mit Null angenommen werden. Die Kantengewichte der Ventile lassen sich also bereits anhand des Aufbaus ableiten und sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Tabelle 5.2: Kantengewichte der Ventile 9 und 10 im TFG.

Kante	Verstärkung	Anstiegszeit	Verzugszeit
$e_{10,11}$	1	0 s	0 s
$e_{12,13}$	1	0 s	0 s

5.3.2.1 Identifikation anhand von Messdaten

Um das Inverse-Response-Verhalten des Szenarios in Bild 5.3 nachweisen zu können, wurden experimentell die Messwerte an den in Bild 5.2 eingezeichneten Messstellen aufgenommen. Die Messwerte können nun zum Teil verwendet werden, um einige Kantengewichte mit dem im Abschnitt 3.2.2.1 beschriebene Verfahren nach Strejc abzuleiten, wobei die Messdaten mit Hilfe von MATLAB aufbereitet werden. Wie bereits im Abschnitt 3.3.1 beschrieben wurde, wird die MATLAB Funktion „fminsearch“ genutzt, um die Stützpunkte in Abhängigkeit des betragslinearen Integralkriteriums mit Betragsintegral nach (3.22) zu optimieren. Mit Hilfe dieses Vorgehens konnten gute Ergebnisse erzielt werden. Die Aufbereitung der Messungen, welche mit einer Abtastzeit von 0,5 Sekunden aufgezeichnet wurden, umfasst dabei die Selektion des zu berücksichtigenden Zeitraums und die Normierung auf den Arbeitspunkt des betrachteten stationären Betriebs.

Wird z. B. die Sprungfunktion am Eingang u_{LIC} sowie der Durchfluss an der Messstelle „FI 08“ verwendet, so lässt sich das Kantengewicht von $e_{1,7}$ bestimmen. Während des stationären Betriebs befindet sich der Füllstandswert zunächst bei 500 mm und wird dann zum Zeitpunkt des Sprungs auf 30 mm gesenkt. Der sich daraus ergebende Durchfluss durch die Pumpe kann an der Messstelle „FI 08“ ermittelt werden und wird mit einer Abtastzeit von einer halben Sekunde für die Identifikation verwendet. Mit dem optimierten Verfahren nach Strejc lassen sich durch Identifikation die Verstärkung $K_{1,7} = 0,0053 \frac{l/min}{mm}$, die Anstiegszeit $T_{1,7} = 1,0639$ s und die Verzugszeit $T_{7,1,7} = 0$ s ermitteln. In Bild 5.5 ist das Messsignal von „FI 08“ gestrichelt eingetragen und dazu die Sprungantwort eines Systems erster Ordnung mit Verzugszeit, welches die identifizierten Kantengewichte als Parameter verwendet. Beide Verläufe sind die Reaktion auf den Eingangssprung in u_{LIC} . Die anscheinende Differenz zwischen der Verstärkung des gemessenen und des identifizierten Verlaufs lässt sich dadurch erklären, dass bei der Identifikation die Verstärkung anhand der letzten 50 Messwerte der Sprungantwort bestimmt wird und diese zum Großteil unterhalb des scheinbaren mittleren stationären Endwerts liegt.

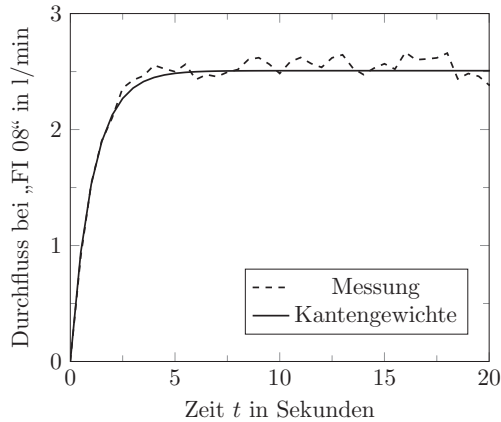


Bild 5.5: Auf Arbeitspunkt normierter Durchfluss an der Messstelle „FI 08“ sowie Sprungantwort eines Systems erster Ordnung mit den identifiziertem Kantengewicht als Parameter.

Der Eingang wirkt nicht nur auf den Ausgang der Pumpe, sondern auch auf ihren Eingang. Die Menge an Fluid, welche von der Pumpe in den Tank 8 gefördert wird, ist gleich der Menge, welche aus dem Tank 9 abgesaugt wird. Das Kantengewicht $w_{1,6}$ lässt sich daher aus dem bereits ermittelten Kantengewicht der Kante $e_{1,7}$ ableiten, wobei lediglich das Vorzeichen der Verstärkung geändert werden muss. Es ergibt sich daher eine Verstärkung $K_{1,6} = -0,0053 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}}$ und wie gehabt die Anstiegszeit $T_{1,6} = 1,0639$ s sowie die Verzugszeit $T_{\tau,1,6} = 0$ s. Dasselbe gilt für die Pumpe 3, sodass sich für die Pumpen die in Tabelle 5.3 aufgeführten Kantengewichte ergeben. Auch wenn es sich bei den Pumpen um denselben Typ handelt, so unterscheiden sich ihre Werte, da die Pumpen in unterschiedlicher Höhe eingebaut bzw. mit unterschiedlichen Tanks verbunden sind.

Tabelle 5.3: Identifizierte Kantengewichte der Fallstudie.

Kante	Verstärkung	Anstiegszeit	Verzugszeit
$e_{1,6}$	$-0,0053 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}}$	1,06 s	0 s
$e_{1,7}$	$0,0053 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}}$	1,06 s	0 s
$e_{1,8}$	$-0,0051 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}}$	0,96 s	0 s
$e_{1,9}$	$0,0051 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}}$	0,96 s	0 s

Im Verhältnis zu einem Tank hat eine Pumpe - wie auch ein Ventil - eine schnelle Reaktionszeit, sodass die Messungen an den Stellen „FI 9“ und „FI 10“ zusammen mit dem Sprung am Eingang u_{LIC} verwendet werden können, um die relevanten Kantengewichte im Tank 9 zu ermitteln. Wird eine Identifikation, wie bereits beschrieben, mit Hilfe des

Verfahrens nach Strejc durchgeführt, so ergeben sich eine Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit. Da sich die Verstärkung von in Reihe verschalteten Systemen aus dem Produkt der einzelnen Verstärkungen der Systeme ergibt, lässt sich z. B. die Verstärkung der Kante $e_{2,3}$ berechnen als:

$$K_{2,3} = \frac{K_{1 \rightarrow 3}}{K_{1,6} \cdot K_{6,2}} , \quad (5.3)$$

wobei es sich bei $K_{1 \rightarrow 3}$ um die Verstärkung zwischen dem Eingangssignal u_{LIC} und der Messstelle „FI 10“ handelt und $K_{6,2} = 1$ ist. Wie bereits erläutert, ist die Anstiegszeit des Tanks wesentlich größer als die der Pumpe, sodass die identifizierte Anstiegszeit als Summe der beiden einzelnen Anstiegszeiten angenommen werden kann [87].

$$T_{2,3} = T_{1 \rightarrow 3} - (T_{1,6} + T_{6,2}) . \quad (5.4)$$

Dasselbe gilt für die Verzugszeiten, weshalb die in Tabelle 5.4 dargestellten Werte sich für die Kanten im Tank 9 ergeben.

Tabelle 5.4: Identifizierte Kantengewichte der Fallstudie.

Kante	Verstärkung	Anstiegszeit	Verzugszeit
$e_{2,3}$	0,0887	30,58 s	2 s
$e_{2,4}$	0,1377	27,66 s	2,50 s
$e_{5,3}$	0,0922	30,68 s	2 s
$e_{5,4}$	0,1431	27,76 s	2,50 s

5.3.2.2 Ableitung von Kantengewichten aus physikalischen Modellen

Neben der Verwendung des R&I-Fließschemas sowie der Identifikationsmethoden für die Modellierung des übertragungsfunktionsbasierten Graphen wurde in Abschnitt 3.2.3 auch die Möglichkeit aufgezeigt, die Kantengewichte anhand eines physikalischen Modells zu ermitteln. Diese Möglichkeit wird nun aufgegriffen, um die Gewichte der Kanten der Tanks 1, 2, 4, 5, 6, 7 und 8 zu ermitteln.

Zunächst werden die Tanks 4, 7 und 8 betrachtet, da diese jeweils über einen Zu- und Abfluss verfügen und daher ein einheitliches Modell zugrunde liegen haben. Dabei hängt die Veränderung des Füllstands l_{Tank} eines Tanks von der Summe seiner Zu- und Abflüsse ab, wobei die Abflüsse negativ einfließen und die Grundfläche A_{Tank} des Tanks zu berücksichtigen ist:

$$A_{\text{Tank}_j} \cdot \dot{l}_{\text{Tank}_j} = \sum q_{zu_j} - \sum q_{ab_j} . \quad (5.5)$$

Da die Tanks in der Prozessinsel auf unterschiedlichen Höhen angebracht sind, wird durch l_{Tank_j} die Füllhöhe eines Tanks in Bezug zum Boden der Prozessinsel angegeben. Da in der folgenden Modellierung die Differenz und die Veränderung betrachtet werden, kann dieser Wert verwendet werden. Die Zuflüsse sind in der Betrachtung die Systemeingänge und die Abflüsse die Ausgänge, welche sich mit dem Gesetz von TORRICELLI modellieren lassen:

$$q_{ab_j} = A_{ab_j} \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_j} - l_{ab_j})}. \quad (5.6)$$

Dabei ist A_{ab_j} die Fläche des Abflusses, g die Gravitationskonstante und l_{ab_j} die Füllstandshöhe im angeschlossenen Tank, in den das Wasser abfließt. Für Tank 4 ergibt sich somit das folgende Zustandsraummodell mit der Ausgangsfunktion q_{ab_4} :

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_4} &= - \frac{A_{ab_4}}{A_{\text{Tank}_4}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_4} - l_{\text{Tank}_1})} + \frac{1}{A_{\text{Tank}_4}} \cdot q_{zu_4} \\ q_{ab_4} &= A_{ab_4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_4} - l_{\text{Tank}_1})}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Da das Sprungantwortverhalten des Tanks aus dem Betriebspunkt heraus von Interesse ist, lässt sich dieser als Arbeitspunkt einer Linearisierung verwenden:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_4} &= \underbrace{- \frac{A_{ab_4}}{A_{\text{Tank}_4}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{g}{(l_{\text{Tank}_{4,0}} - l_{\text{Tank}_{1,0}})}}}_{\mathbf{A}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_4} + \underbrace{\frac{1}{A_{\text{Tank}_4}}}_{\mathbf{B}} \cdot \Delta q_{zu_4} \\ \Delta q_{ab_4} &= \underbrace{A_{ab_4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{g}{(l_{\text{Tank}_{4,0}} - l_{\text{Tank}_{1,0}})}}}_{\mathbf{C}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_4}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Füllstände im stationären Betrieb sind dabei $l_{\text{Tank}_{4,0}}$ und $l_{\text{Tank}_{1,0}}$. Das Zustandsraummodell nach (5.8) kann in eine Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ für den Eingang q_{zu_4} und den Ausgang q_{ab_4} umgeformt werden,

$$G_{\text{Tank}_4}(s) = \frac{1}{\frac{A_{\text{Tank}_4}}{A_{ab_4} \sqrt{d_{\text{Tank}_4}}} \cdot s + 1}, \quad (5.9)$$

mit

$$d_{\text{Tank}_4} = \frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{4,0}} - l_{\text{Tank}_{1,0}})}, \quad (5.10)$$

sodass sich die Verstärkung und die Anstiegszeit einfach ablesen lassen:

$$\begin{aligned} K_{\text{Tank}_4} &= K_{26,27} = 1 \\ T_{\text{Tank}_4} &= T_{26,27} = A_{ab_4} \sqrt{d_{\text{Tank}_4}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Eine Verzugszeit gibt es in diesem Fall nicht, da es sich bei dem Modell bereits um ein System erster Ordnung handelt und daher keine weitere Approximation notwendig ist. Durch Einsetzen der Werte des stationären Betriebs nach Tabelle 5.1 lässt sich die Anstiegszeit berechnen, wobei $l_{\text{Tank}_{1,0}} = 974$ mm und $l_{\text{Tank}_{4,0}} = 1288$ mm ist. Die Anstiegszeit der Kante $e_{26,27}$ sowie die bisher noch nicht bestimmten Kantengewichte sind in Tabelle 5.5 aufgeführt. Die verwendeten Modelle sowie die dazugehörigen Berechnungen sind im Anhang A.4 aufgeführt.

Tabelle 5.5: Aus physikalischen Modellen abgeleitete Kantengewichte der Fallstudie.

Kante	Verstärkung	Anstiegszeit	Verzugszeit
$e_{14,15}$	1	42,76 s	0 s
$e_{16,17}$	0,80	58,55 s	0 s
$e_{16,18}$	0,20	58,55 s	0 s
$e_{19,20}$	1	27,74 s	0 s
$e_{21,22}$	1	31,22 s	0 s
$e_{23,25}$	0,88	41,93 s	0 s
$e_{24,25}$	0,88	41,93 s	0 s
$e_{26,27}$	0,86	54,85 s	0 s
$e_{28,30}$	$8,01 \frac{\min}{l}$	45,64 s	0 s
$e_{29,30}$	$8,01 \frac{\min}{l}$	45,64 s	0 s
$e_{31,30}$	$8,01 \frac{\min}{l}$	45,64 s	0 s
$e_{32,30}$	$8,01 \frac{\min}{l}$	45,64 s	0 s

5.4 Ergebnisse und Diskussion

Der Detektionsalgorithmus wurde ebenfalls in MATLAB implementiert und lässt sich nun auf den im vorherigen Abschnitt modellierten übertragungsfunktionsbasierten Graphen anwenden. Dazu werden eine Adjazenzliste des TFG erstellt sowie Listen mit den Kantengewichten aus den Tabellen 5.2, 5.3, 5.4 und 5.5. Zusätzlich wird das Ein-/Ausgangspaar angegeben, zwischen dem die Untersuchung erfolgen soll. Der Algorithmus bestimmt daraufhin die Pfade durch eine Tiefensuche und aggregiert die Kantengewichte nach dem Verfahren mit der Summenzeitkonstanten aus Abschnitt 4.3.2.3. Die aggregierten Pfadgewichte werden dann unter Verwendung der in Abschnitt 4.3.2.4 beschriebenen Bewertungsmethode ausgewertet. Die Ausgabewerte des Algorithmus sind zum einen das Ergebnis, ob es sich um Inverse-Response-Verhalten handelt, und die berechnete Gesamtverstärkung als Vergleichswert zur Beurteilung des Ergebnisses. Für

eine Einschätzung der Genauigkeit des Ergebnisses stehen zudem die aggregierten Pfadgewichte sowie die Werte aus der abschließenden Betrachtung der Pfade zur Verfügung. Für die Fallstudie liefert der Detektionsalgorithmus die Aussage, dass Inverse-Response-Verhalten zwischen dem Knoten „1“ und „30“ auftritt. In der Fallstudie treten die sieben in Tabelle 5.6 aufgeführten Pfade auf, welche die aggregierten Pfadgewichte nach Tabelle 5.7 besitzen. Die Zwischenwerte der abschließenden Betrachtung der Pfadgewichte sind in Tabelle 5.8 aufgeführt.

Tabelle 5.6: Pfade zwischen Ein- und Ausgang der Fallstudie.

Pfad	Komponenten
p_1	$e_{1,6}, e_{6,2}, e_{2,3}, e_{3,12}, e_{12,13}, e_{13,29}, e_{29,30}$
p_2	$e_{1,6}, e_{6,2}, e_{2,4}, e_{4,10}, e_{10,11}, e_{11,23}, e_{23,25}, e_{35,32}, e_{32,30}$
p_3	$e_{1,7}, e_{7,14}, e_{14,15}, e_{15,19}, e_{19,20}, e_{20,21}, e_{21,22}, e_{22,28}, e_{28,30}$
p_4	$e_{1,8}, e_{8,5}, e_{5,3}, e_{3,12}, e_{12,13}, e_{13,29}, e_{29,30}$
p_5	$e_{1,8}, e_{8,5}, e_{5,4}, e_{4,10}, e_{10,11}, e_{11,23}, e_{23,25}, e_{25,32}, e_{32,30}$
p_6	$e_{1,9}, e_{9,16}, e_{16,17}, e_{17,26}, e_{26,27}, e_{27,31}, e_{31,30}$
p_7	$e_{1,9}, e_{9,16}, e_{16,18}, e_{18,24}, e_{24,25}, e_{25,32}, e_{32,30}$

Tabelle 5.7: Aggregierte Pfadgewichte der Fallstudie.

Pfad p_i	K_{p_i}	T_{p_i}	T_{τ,p_i}	T_{d,p_i}
p_1	-0,003766	58,25 s	21,03 s	19,03 s
p_2	-0,005144	73,44 s	45,35 s	42,85 s
p_3	0,04245	82,01 s	66,41 s	66,41 s
p_4	-0,003766	58,31 s	20,96 s	18,96 s
p_5	-0,005144	73,49 s	45,30 s	42,80 s
p_6	0,02811	100,3 s	59,68 s	59,68 s
p_7	0,007190	92,47 s	54,61 s	54,61 s

Tabelle 5.8: Werte der Bewertung der aggregierten Pfadgewichte der Fallstudie.

$T_{\tau,p_{erst}}$	$T_{d,p_{komp}}$	ΔT_{τ}	Pfade in ΔT_{τ}	$g_{u \rightarrow y}$
20,96 s	0 s	20,96 s	p_4	$-6,458 \cdot 10^{-05}$ mm/s

Wie Bild 5.3 zeigt, weist das Szenario der Fallstudie Inverse-Response-Verhalten auf, sodass das Ergebnis des Detektionsalgorithmus zunächst einmal richtig ist. Da in Abschnitt 4.4.4 beschrieben wird, dass die Anfangssteigung $g_{u \rightarrow y}$ als Bewertungskriterium des Ergebnisses verwendet werden kann, ist es sinnvoll, diese im Weiteren zu betrachten. Für die Fallstudie hat sich hier mit $-6,458 \cdot 10^{-5}$ mm/s ein sehr kleiner Wert ergeben. Da es sich um ein relativ träges System handelt, welches mit einem Sprung von 470 mm

beauftragt wird, ergibt sich umgerechnet ein Wert von $3,875 \cdot 10^{-3}$ mm/min, was verglichen mit dem Verlauf in Bild 5.3 realistisch erscheint, wenn berücksichtigt wird, dass es sich um die Anfangssteigung handelt, in die nur die Steigung eines Pfades einfließt. Somit ist auch eine zweite Beobachtung der Ausgabewerte der Fallstudie bereits vorweg genommen: Der Betrachtungshorizont umfasst nur den schnellsten Pfad (p_4). Werden die Verzugszeiten aller Pfade verglichen, so ist zu erkennen, dass auch der nächste Pfad (p_1) eine negative Verstärkung besitzt und der schnellste positive Pfad (p_7) erst 33,65 s später einsetzt. Zum Abschluss lässt sich somit feststellen, dass durch die Bewertung des Betrags der Anfangssteigung, der Länge des Bewertungshorizonts sowie dem Verhältnis zwischen dem Bewertungshorizont und der aggregierten Verzugszeit der Pfade, die Zuverlässigkeit des Detektionsergebnis geprüft werden kann und eine Messung, wie z. B. in Bild 5.3 dargestellt, nicht mehr erforderlich ist.

Das in der Prozessinsel realisierte Szenario besitzt durch die baugleichen Tanks und Aktoren auf den ersten Blick einen homogenen Aufbau. Durch die unterschiedlichen Ab- und Zuflüsse (siehe Tabelle 5.1) wird das Szenario jedoch heterogen, sodass es mit einer Anlage mit unterschiedlichen Tanks und Aktoren vergleichbar ist. Durch die baugleichen Tanks wird aber die Modellierung erleichtert, da die Modelle der Tanks wiederverwendet werden können. Auch die Größe des Szenarios ist beschränkt und entspricht nicht nach jeder Definition einem komplexen System. Das Vorgehen kann jedoch ohne Weiteres auf größere Systeme übertragen werden. Ebenso lässt sich auch der Detektionsalgorithmus auf größere Systeme mit längeren Pfaden anwenden, ohne dass sich hierdurch noch nicht betrachtete Einflüsse auf das Detektionsergebnis ergeben. Da es sich bei der Fallstudie um die Auswertung eines realen Szenarios handelt, konnte das Vorgehen bei der Modellierung und Analyse noch einmal geschlossen aufgezeigt werden. Da es sich jedoch nur um ein einzelnes Szenario handelt, kann dies nicht als repräsentativ für die Einschätzung von auftretenden Fehlern gesehen werden. Um eine breitere Übersicht hierzu zu bekommen, sei daher noch einmal auf das Beispiel 9 in Kapitel 4 und die anschließende Diskussion in Abschnitt 4.4 verwiesen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit wurde zu Beginn wie folgt formuliert: Betrachtung der Verwendung Komplexer Netzwerke zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens großer und verkoppelter technischer Systeme am Beispiel der qualitativen Analyse des Inverse-Response-Verhaltens. Mit Blick auf das genannte Ziel wurden in Kapitel 2 zunächst die notwendigen Grundlagen und Definitionen der Graphentheorie eingeführt, bevor eine genauere Betrachtung der Komplexen Netzwerke erfolgte. Im Rahmen der Betrachtung wurden die drei verbreitetsten Modellansätze für Komplexe Netzwerke vorgestellt: der Zufallsgraph, das Small-World Netzwerk sowie das skalenfreie Netzwerk. Wie beschrieben wurde, werden diese Netzwerkansätze verwendet, um das Verhalten komplexer Systeme in z. B. der Soziologie, Biologie oder Physik zu modellieren und auch zu analysieren. Einige der für die Analyse verwendeten Metriken wurden ebenfalls im Abschnitt 2.1.2 eingeführt. Daneben gibt es auch einige Beispiele für den Einsatz Komplexer Netzwerke zur Untersuchung technischer Systeme, welche in Abschnitt 2.2.3 aufgeführt sind. Im Wesentlichen geht es dabei um die Betrachtung der Ausfallwahrscheinlichkeit und somit um die Sicherheit von Energie- und Kommunikationsnetzwerken. In allen Fällen in denen Komplexe Netzwerke verwendet werden, wird jedoch die Dynamik eines Systems, wie sie für die Regelungstechnik entscheidend ist, nicht betrachtet.

Um die Analyse von dynamischen technischen Systemen im Sinne der Regelungstechnik zu ermöglichen, wurde im Rahmen der Arbeit der übertragungsfunktionsbasierte Graph (TFG) entwickelt. Der in Kapitel 3 vorgestellte Modellansatz des TFG verwendete, wie auch die Komplexen Netzwerke, einen Graphen zur Beschreibung der Komponenten einer technischen Anlage sowie ihrer Verkopplungen. Das dynamische Verhalten, welches bisher noch nicht in einem Komplexen Netzwerk modelliert ist, wird durch vektorielle Kantengewichte beschrieben. Für das in der vorliegenden Arbeit beispielhaft behandelte Inverse-Response-Verhalten ist es erforderlich, das anfängliche sowie das stationäre Verhalten in Folge einer Sprungantwort zu modellieren. Ausgehend von einem Betriebspunkt der zu modellierenden Anlage wird das in der Praxis meist nichtlineare Verhalten der Komponenten der Anlage, in den betrachteten, anfänglichen sowie

stationären Bereichen durch eine lineare Approximation beschrieben. Daher beinhalten die vektoriellen Kantengewichte die Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit des jeweils durch sie beschriebenen Übertragungsverhaltens einer Komponente. Durch die verwendete Approximation beschränkt sich der Modellierungsansatz auf stabile Komponenten bzw. Teilsysteme (stationärer Endwert). Ebenso ausgeschlossen sind Komponenten mit einem Unterschwingen nach Definition 5. Zudem ist bei einem nicht monotonen Verlauf der Sprungantwort einer Komponente darauf zu achten, auch wirklich das anfängliche Verhalten zu modellieren. Das prinzipielle Vorgehen bei der Modellierung mit dem vorgestellten, neuartigen Modellansatz wurde anhand von Beispielen erläutert und zudem wurden Möglichkeiten zur Ermittlung der Kantengewichte aufgezeigt. Dafür wurden in Abschnitt 3.2.2 Identifikationsverfahren vorgestellt und diskutiert und in Abschnitt 3.2.3 die Bestimmung der Kantengewichte aus physikalischen Modellen aufgezeigt. Generell können die Struktur des Modells sowie die Kantengewichte der Komponenten auf Basis unterschiedlichster Quellen ermittelt werden. So ist z. B. auch die Wiederverwendung von Teilen bereits vorhandener Modelle sowie die Verwendung von Konstruktionsdaten möglich. Dies trägt dazu bei, dass der neu entwickelte Übertragungsfunktionsbasierte Graph eine einfache Modellierung von technischen Anlagen bereits in einem frühen Entwicklungsstadium ermöglicht.

Der vorgestellte TFG wurde entwickelt, um Analysen des auf den Verkopplungen basierenden dynamischen Systemverhaltens zu ermöglichen. In der Arbeit wurde die Analyse am Beispiel der Untersuchung des Inverse-Response-Verhaltens aufgezeigt. Hierfür wurde ein neuartiger Detektionsalgorithmus entwickelt, welcher auf Basis eines TFG eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten zwischen einem betrachteten Ein- und Ausgang ermöglicht. Der Algorithmus wurde im Kapitel 4 detailliert vorgestellt. Grundsätzlich ist der TFG bereits auf stabile Komponenten ohne Inverse-Response-Verhalten beschränkt, daher kann die Forderung nach einem schleifenfreien Graphen, durch das Zusammenführen von Kanten erreicht werden, wie in Abschnitt 3.1.2.3 beschrieben. Für die Analyse werden die Pfade des TFG zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang ermittelt, Grundlage hierfür ist Satz 4. Die Kantengewichte innerhalb der Pfade werden dann jeweils zu einem Pfadgewicht aggregiert, welches das Verhalten des Pfades durch die Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit beschreibt. Hierfür wurden drei Methoden (Routh-Schema, balancierte Modellreduktion und Summenzeitkonstante) betrachtet, welche in Abschnitt 4.3.2 eingeführt wurden. Das auf der Summenzeitkonstante aufbauende Verfahren stellte sich als geeignet heraus, da es einfach zu realisieren ist und ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die so gewonnenen aggregierten Pfadgewichte werden durch den neuartigen Detektionsalgorithmus innerhalb eines Betrachtungshorizont zu einer Anfangssteigung verrechnet, um eine Aussage zum Inverse-Response-Verhalten zu erhalten. Hat das Gesamtsystemverhalten einen positi-

ven stationären Endwert, so kommt es zu Inverse-Response-Verhalten, wenn die Anfangssteigung negativ ist und umgekehrt. Der Betrachtungshorizont beschreibt dabei den für die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens relevanten Anfangsbereich des Gesamtsystemverhaltens zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang. Um die einzelnen Schritte der Detektion zu verdeutlichen, und als Grundlage zur Diskussion der Genauigkeit des Analyseergebnisses, wurde zudem ein Beispielsystem in Abschnitt 4.3 eingeführt und begleitend analysiert.

In Kapitel 5 wird das Vorgehen von der Modellierung bis zur Diskussion der Analyseergebnisse an einer Fallstudie aufgezeigt. Diese wurde mit Hilfe einer Prozessinsel der Modellfabrik μ Plant, welche im Rahmen der Arbeit entwickelt und realisiert wurde, umgesetzt und besitzt zwischen dem betrachteten Ein- und Ausgang Inverse-Response-Verhalten. Für die Modellierung des Systems wurden neben dem R&I-Fließschema auch Messdaten verwendet, um Kantengewichte zu identifizieren. Einige der Kantengewichte wurden zudem anhand von physikalischen Modellen und konstruktiven Werten der Anlage bestimmt. Die Ausgabewerte des in MATLAB realisierten Detektionsalgorithmus werden auch für die Abschätzung der Genauigkeit des Ergebnisses verwendet.

6.2 Ausblick

Die Arbeit stellt die Verwendung der Komplexen Netzwerke für eine dynamische Modellierung und Analyse von technischen Systemen am Beispiel von Inverse-Response-Verhalten vor. Darauf aufbauend ergeben sich weitere Fragen sowie Anknüpfungspunkte, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden konnten.

- **Modellgewinnung:** In Abschnitt 3.2 wurden drei Möglichkeiten der Modellerstellung aufgezeigt, welche in Kombination verwendet werden können, um einen Übertragungsfunktionsbasierten Graphen zu erstellen. Die aufgezeigten Möglichkeiten stellen keine abgeschlossene Liste dar und können beliebig erweitert oder verbessert werden. So können weitere Identifikationsverfahren eingesetzt werden, um die Kantengewichte von Komponenten zu ermitteln. Außerdem ist es denkbar, auch den Punkt der physikalischen Modellierung noch eingehender zu betrachten, da an dieser Stelle noch nicht abschließend aufgezeigt wurde, wie aus einem System höherer Ordnung die Kantengewichte ermittelt werden können. Denkbar ist z. B. die Anwendung von Modellreduktionsmethoden unter Berücksichtigung der diskutierten Gütefunktion. Sind die Modelle einzelner Komponenten bereits in Abhängigkeit von z. B. konstruktiven Parametern bekannt, so lassen sich anhand von übergeordneten Topologie-Modellen jeweils spezifische TFG erzeugen [15]. Die noch unspezifizierten parameterabhängigen Modelle können allgemein für ei-

ne ganze Klasse von Komponenten vorgehalten werden, was die Wiederverwertung fördert und eine Automatisierung der Modellerstellung ermöglicht.

Neben dem Vorgehen zur Modellgewinnung ist es zudem noch erforderlich, die Auswirkungen von Modellierungsfehlern auf das Detektionsergebnis zu betrachten, da dies in der vorliegenden Arbeit bislang nicht erfolgte.

- **Modellerweiterung:** Für den vorgestellten TFG wurden die Kantengewichte mit Blick auf das zu analysierende Inverse-Response-Verhalten ausgewählt. Für die Untersuchung weiterer dynamischer Systemeigenschaften kann es sinnvoll sein, den Modellansatz noch einmal zu erweitern und weitere Kantengewichte mit aufzunehmen. Der Grundgedanke eines einfachen Modells zur qualitativen Untersuchung des durch die Verkopplungen bedingten Systemverhaltens wird dadurch nicht berührt. Zudem kann der bereits aufgezeigte Weg eines übergeordneten Topologie-Modells aufgegriffen werden. Aus diesem könnten in Abhängigkeit des zu untersuchenden Verhaltens unterschiedlichste Kantengewichte abgeleitet werden.

Die bisher verwendete Verstärkung, Anstiegszeit und Verzugszeit werden als Parameter eines linearen Systemansatzes betrachtet. Werden weitere Kantengewichte eingefügt, so ist auch darüber nachzudenken, Kantengewichte mit aufzunehmen, die es ermöglichen, nichtlineares Systemverhalten zu beschreiben. Dabei ist in jedem Fall das zu analysierende Verhalten zu berücksichtigen.

- **Analysestrategien:** Der vorgestellte Detektionsalgorithmus betrachtet jeweils das Verhalten zwischen einem Ein- und Ausgang. Inverse-Response-Verhalten kann jedoch nach Definition 8 auch bei MIMO-Systemen auftreten. Werden hierfür geeignete Analysestrategien entwickelt, welche einen passenden Eingangsvektor bereitstellen, so lässt sich der bereits vorhandene Detektionsalgorithmus auch auf diese Systemklasse erweitern. Da der TFG das System aus einem stationären Betrieb heraus betrachtet, kann es zudem sinnvoll sein, Parameterstudien vorzunehmen, bei denen das Verhalten in Abhängigkeit verschiedener Arbeitspunkte untersucht wird.
- **Analyse weiterer dynamischer Eigenschaften:** Da in der Arbeit speziell die Analyse des Inverse-Response-Verhaltens betrachtet wurde, stellt sich bei der Modellerweiterung auch die Frage nach der Analyse weiterer dynamischer Eigenschaften. Es empfiehlt sich grundsätzlich, zunächst die zu analysierende Eigenschaft festzulegen und von ihr ausgehend das Modell zu erweitern. Steht eine zu untersuchende Eigenschaft einer technischen Anlage fest, so kann geprüft werden, ob das in der Arbeit beschriebene Vorgehen sinnvoll ist.

A Anhang

A.1 Verwendete Beispielsysteme

Für die Untersuchung der Genauigkeit des Detektionsalgorithmus sowie seiner Grenzen werden im Folgenden Beispielsysteme eingeführt. Die Beispielsysteme stellen dabei verschiedenste denkbare Systeme für die Komponenten, also Teilsysteme, eines Gesamtsystems dar, welches in Beispiel 9 (Abschnitt 4.3) eingeführt wird. Aus diesem Grund werden die Beispielsysteme auch als „Beispielkomponenten“ bezeichnet. Neben der Verwendung im beispielhaft betrachteten Gesamtsystem, werden die Beispielkomponenten zudem auch für die Betrachtung einzelner Systeme im Rahmen der Modellierung in Kapitel 3 verwendet.

Um sicherzustellen, dass die Genauigkeitsbetrachtung zu repräsentativen Ergebnissen führt, wurde bei der Auswahl der Beispielkomponenten darauf geachtet, in der Praxis relevante Systemklassen zu berücksichtigen. Hierzu wurden unter anderem bereits bekannte Klassifikationen und Beispielsysteme aus der Literatur betrachtet. So werden in [7] die Systemklassen: oszillatorisch, monoton, totzeitbehaftet, I-System und statische Nichtlinearität eingeführt. Diese sollen bei der Reglerauslegung helfen, auf Basis der Klassifizierung des zu regelnden Systems bereits definierte Strukturen eines Fuzzy-Reglers zu wählen und somit eine schnelle Reglersynthese zu ermöglichen. In [39] werden elf Testprozesse eingeführt, um Beispieldaten für die Identifikation zu generieren. Bei den aufgeführten Systemen handelt es sich um lineare Systeme zweiter, dritter und fünfter Ordnung, welche Oszillation, Tiefpass-, Totzeit- und Inverse-Response-Verhalten aufweisen. Zudem wird ein linearer Prozess mit zwei Größen (Verdampfer und Überhitzer eines Trommeldampferzeugers) sowie ein integral wirkender und ein instabiler Prozess zweiter Ordnung angeführt. Ein weiteres Beispiel für die Systemklassifizierung gibt [88], wobei versucht wird, einige Beispiele für nichtlineare dynamische Systeme zu klassifizieren. Dabei wird jeweils ein lineares System mit Rückkopplung durch eine nichtlineare Funktion im Signal der Regelabweichung oder in der Rückkopplung ergänzt. Diese Klassifikation deckt bei weitem nicht alle nichtlinearen Systeme ab. Die folgende Auswahl orientiert sich an den genannten Systemklassifikationen, wobei die Zeitkonstanten so gewählt werden, dass Systeme mit langsamem sowie schnellem Verhalten vorhanden sind. Da die Inverse-Response-Analyse zudem die jeweiligen Komponenten

in einem Arbeitspunkt betrachtet und sich dabei auf einen Ein- sowie einen Ausgang beschränkt, werden für die Genauigkeitsbetrachtung an dieser Stelle nur lineare Systeme als Repräsentanten für die Komponenten verwendet. Die als Beispielkomponenten verwendeten Systeme sind im Weiteren alle stabil, da die Anwendung des Algorithmus auf stabile Komponenten beschränkt ist. Auch Mehrgrößensysteme werden bei den Beispielkomponenten nicht aufgegriffen, da diese bei der Modellierung in die einzelnen Ein-/Ausgangs-Übertragungsfunktionen zerlegt werden. Diese entsprechen dann wiederum Eingrößensystemen wie die im Folgenden eingeführten Beispielkomponenten. Komponenten mit eigenem Inverse-Response-Verhalten werden ebenfalls nicht berücksichtigt, da diese wie im Kapitel 3 zur Modellierung beschrieben durch zwei parallele stabile Komponenten ohne Inverse-Response-Verhalten ersetzt werden können bzw. für die Analyse ersetzt werden müssen.

Für die Beispielkomponenten werden jeweils Standardwerte für die Verstärkung und die Zeitkonstanten angegeben. Die Tabelle umfasst zudem jeweils ein Zeitintervall in dem die Einheitssprungantwort, falls nicht anders angegeben, betrachtet wird. Das Zeitintervall wird z. B. mit t_{B1} im Falle der ersten Beispielkomponente bezeichnet. Alle Angaben sind ohne Einheiten, was jedoch keine Einschränkung für den Vergleich anhand der Beispielkomponenten darstellt.

Beispielkomponente 1: *Als grundlegendes System wird ein System erster Ordnung ohne Totzeit betrachtet.*

$$G_{B1} = \frac{K_{B1}}{T_{B1} \cdot s + 1} \quad (\text{A.1})$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.1 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.1: Standardwert der Beispielkomponente 1.

K_{B1}	T_{B1}	t_{B1}
1	1	[0; 6]

Beispielkomponente 2: *Das verwendete System neunter Ordnung hat kleinere Zeitkonstanten im Vergleich zur Beispielkomponente 4. Das langsame anfängliche Verhalten der Sprungantwort wird zudem durch eine Totzeit von $T_\tau = 0.4$ verzögert. Die Beispielkomponente zeigt jedoch kein Überschwingen in der Sprungantwort.*

$$G_{B2} = \frac{K_{B2}}{T_{B2,9} \cdot s^9 + T_{B2,8} \cdot s^8 + T_{B2,7} \cdot s^7 + T_{B2,6} \cdot s^6 + T_{B2,5} \cdot s^5 + \dots} \cdot e^{-s \cdot 0,4} \quad (\text{A.2})$$

$$\dots T_{B2,4} \cdot s^4 + T_{B2,3} \cdot s^3 + T_{B2,2} \cdot s^2 + T_{B2,1} \cdot s + 1$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.2 aufgeführten Standardwerte für

Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.2: Standardwert der Beispielkomponente 2.

K_{B2}	$T_{B2,9}$	$T_{B2,8}$	$T_{B2,7}$	$T_{B2,6}$	$T_{B2,5}$
1	33,52	207,4	568,2	904,3	921,6
$T_{B2,4}$	$T_{B2,3}$	$T_{B2,2}$	$T_{B2,1}$	t_{B2}	
623,7	280,3	80,7	13,5	[0; 35]	

Beispielkomponente 3: Mit der Systemordnung von drei ist diese Beispielkomponente zwischen der Beispielkomponente 1 und Beispielkomponente 2 angesiedelt, wenn man den anfänglichen Verlauf der Sprungantwort betrachtet. Das System weist keine Totzeit und kein Überschwingen auf.

$$G_{B3} = \frac{K_{B3}}{T_{B3,3} \cdot s^3 + T_{B3,2} \cdot s^2 + T_{B3,1} \cdot s + 1} \quad (\text{A.3})$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.3 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.3: Standardwert der Beispielkomponente 3.

K_{B3}	$T_{B3,3}$	$T_{B3,2}$	$T_{B3,1}$	t_{B3}
1	13,2	24,32	12,3	[0; 60]

Beispielkomponente 4: Die folgende Beispielkomponente neunter Ordnung weist relativ große Zeitkonstanten auf, im Vergleich zu den anderen Systemen, sodass sich zunächst ein langsamer Verlauf der Sprungantwort einstellt. Zudem tritt keine Oszillation und keine Totzeit auf.

$$G_{B4} = \frac{K_{B4}}{T_{B4,9} \cdot s^9 + T_{B4,8} \cdot s^8 + T_{B4,7} \cdot s^7 + T_{B4,6} \cdot s^6 + T_{B4,5} \cdot s^5 + \dots} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\dots T_{B4,4} \cdot s^4 + T_{B4,3} \cdot s^3 + T_{B4,2} \cdot s^2 + T_{B4,1} \cdot s + 1}{\dots}$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.4 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.4: Standardwert der Beispielkomponente 4.

K_{B4}	$T_{B4,9}$	$T_{B4,8}$	$T_{B4,7}$	$T_{B4,6}$	$T_{B4,5}$
1	2906	14230	29740	34530	24240
$T_{B4,4}$	$T_{B4,3}$	$T_{B4,2}$	$T_{B4,1}$	t_{B4}	
10510	2754	412,6	32,1	[0; 100]	

Beispielkomponente 5: Diese Beispielkomponente weist Oszillation auf, wobei die Oszillation schwächer ausgeprägt ist als bei der Beispielkomponente 6 und zusätzlich eine Totzeit von 0,7 eingefügt wurde.

$$G_{B5} = \frac{K_{B5} (0,25 \cdot s^2 + s + 1)}{T_{B5,5} \cdot s^5 + T_{B5,4} \cdot s^4 + T_{B5,3} \cdot s^3 + T_{B5,2} \cdot s^2 + T_{B5,1} \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot 0,7} \quad (\text{A.5})$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.5 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.5: Standardwert der Beispielkomponente 5.

K_{B5}	$T_{B5,5}$	$T_{B5,4}$	$T_{B5,3}$	$T_{B5,2}$	$T_{B5,1}$	t_{B5}
1	0,5	2	4	4,5	3	[0; 14]

Beispielkomponente 6: Diese Beispielkomponente bildet ein oszillierendes System ab, wobei die Oszillation stärker ausgeprägt ist als bei der Beispielkomponente 5.

$$G_{B6} = \frac{K_{B6}}{T_{B6,2} \cdot s^2 + T_{B6,1} \cdot s + 1} \quad (\text{A.6})$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.6 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.6: Standardwert der Beispielkomponente 6.

K_{B6}	$T_{B6,2}$	$T_{B6,1}$	t_{B6}
1	0,09	0,12	[0; 9]

Beispielkomponente 7: Wie diese Beispielkomponente in Anlehnung an [36] zeigt, kann es bei einer Sprungantwort auch zu einem nicht monotonem Verlauf kommen. Dabei zeigt die Sprungantwort ein Gegenschwingen, ohne jedoch das Vorzeichen zu wechseln.

$$G_{B7} = \frac{2 \cdot s^2 - s + 1}{(T_{B7} \cdot s + 1)^3} \quad (\text{A.7})$$

Falls nicht anders angegeben, werden die in Tabelle A.7 aufgeführten Standardwerte für Verstärkung, Zeitkonstante sowie betrachtetes Zeitintervall des Einheitssprungs verwendet.

Tabelle A.7: Standardwert der Beispielkomponente 7.

K_{B7}	T_{B7}	t_{B7}
1	1	[0; 15]

Die Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten mit den jeweils in den Tabellen angegebenen Standardwerten sind in Bild A.1 (a) und (b) zur Veranschaulichung der Unterschiede dargestellt.

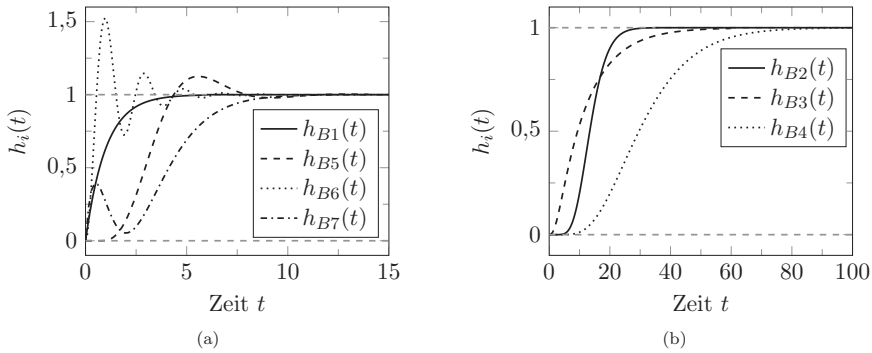


Bild A.1: Einheitssprungantworten der Beispielkomponenten mit den jeweiligen Standardwerten.

A.2 Parametertabelle des Beispiels 9

Die folgenden Tabellen A.8 und A.9 beinhalten alle Parameter des Beispiels 9 aus Kapitel 4. Die Betrachtung des Beispiels erfolgt unabhängig von Einheiten.

Tabelle A.8: Verstärkungen sowie Zeitkonstanten der Beispielkomponenten des Beispiels 9.

Kante	Beispielkomponente	Verstärkung	Angepasste Zeitkonstanten
e_1	4	1	-
e_2	6	3	-
e_3	2	1	-
e_4	5	1	-
e_5	3	1	-
e_6	1	1	$T_{B1} = 1, 1$
e_7	4	1	$T_{B4,9} = 2932, T_{B4,8} = 14330,$ $T_{B4,7} = 29920, T_{B4,6} = 34680,$ $T_{B4,5} = 24320, T_{B4,4} = 10530,$ $T_{B4,3} = 2758, T_{B4,2} = 413,$ $T_{B4,1} = 31, 11$
e_8	3	4	$T_{B3,3} = 13, 07, T_{B3,2} = 24, 09,$ $T_{B3,1} = 12, 2$
e_9	6	2	$T_{B6,2} = 0, 0961$
e_{10}	1	1	-
e_{11}	7	1	-
e_{12}	3	1	$T_{B3,3} = 13, 32, T_{B3,2} = 24, 43,$ $T_{B3,1} = 12, 31$
e_{13}	3	1	$T_{B3,3} = 13, 31, T_{B3,2} = 24, 43,$ $T_{B3,1} = 12, 31$
e_{14}	5	1	$T_{B5,5} = 0, 51$
e_{15}	5	1	$T_{B5,5} = 0, 52$
e_{16}	3	-1	$T_{B3,3} = 13, 33, T_{B3,2} = 24, 55,$ $T_{B3,1} = 12, 4$
e_{17}	1	2	$T_{B1} = 1, 05$
e_{18}	3	1	$T_{B3,3} = 13, 46, T_{B3,2} = 24, 78,$ $T_{B3,1} = 12, 5$
e_{19}	1	1	$T_{B1} = 1, 15$
e_{20}	6	1	$T_{B6,2} = 0, 09923$
e_{21}	5	1	$T_{B5,5} = 0, 53$
e_{22}	7	1	-
e_{23}	1	2	$T_{B1} = 1, 2$
e_{24}	6	0,5	$T_{B6,2} = 0, 09766$
e_{25}	5	-2	$T_{B5,5} = 0, 49$
e_{26}	1	-1	$T_{B1} = 1, 025$
e_{27}	5	1	$T_{B5,5} = 0, 48$
e_{28}	1	1	$T_{B1} = 1, 075$

Tabelle A.9: Verstärkungen sowie Zeitkonstanten der Beispielkomponenten des Beispiels 9.

Kante	Beispielkomponente	Verstärkung	Angepasste Zeitkonstanten
e_{29}	4	1	$T_{B_{4,9}} = 2959, T_{B_{4,8}} = 14440,$ $T_{B_{4,7}} = 30090, T_{B_{4,6}} = 34840,$ $T_{B_{4,5}} = 24400, T_{B_{4,4}} = 10550,$ $T_{B_{4,3}} = 2761, T_{B_{4,2}} = 413, 3,$ $T_{B_{4,1}} = 32, 12$ $T_{B_{5,4}} = 2, 1$
e_{30}	5	1	
e_{31}	2	4	$T_{B_{2,9}} = 33, 52, T_{B_{2,8}} = 209,$ $T_{B_{2,7}} = 571, 9, T_{B_{2,6}} = 909, 1,$ $T_{B_{2,5}} = 925, 5, T_{B_{2,4}} = 625, 8,$ $T_{B_{2,3}} = 281, T_{B_{2,2}} = 80, 82,$ $T_{B_{2,1}} = 13, 51$
e_{32}	3	3	$T_{B_{3,3}} = 13, 6, T_{B_{3,2}} = 25, 01,$ $T_{B_{3,1}} = 12, 6$
e_{33}	4	1	$T_{B_{4,9}} = 2985, T_{B_{4,8}} = 14550,$ $T_{B_{4,7}} = 30270, T_{B_{4,6}} = 34990,$ $T_{B_{4,5}} = 24480, T_{B_{4,4}} = 10580,$ $T_{B_{4,3}} = 2765, T_{B_{4,2}} = 413, 6,$ $T_{B_{4,1}} = 32, 13$
e_{34}	2	1,5	$T_{B_{2,9}} = 34, 13, T_{B_{2,8}} = 210, 6,$ $T_{B_{2,7}} = 575, 6, T_{B_{2,6}} = 914,$ $T_{B_{2,5}} = 929, 5, T_{B_{2,4}} = 627, 9,$ $T_{B_{2,3}} = 281, 7, T_{B_{2,2}} = 80, 95,$ $T_{B_{2,1}} = 13, 52$
e_{35}	5	0,5	$T_{B_{5,4}} = 2, 2$
e_{36}	4	1	$T_{B_{4,9}} = 3012, T_{B_{4,8}} = 14650,$ $T_{B_{4,7}} = 30440, T_{B_{4,6}} = 35150,$ $T_{B_{4,5}} = 24560, T_{B_{4,4}} = 10600,$ $T_{B_{4,3}} = 2769, T_{B_{4,2}} = 413, 9,$ $T_{B_{4,1}} = 32, 14$
e_{37}	4	1	$T_{B_{4,9}} = 3038, T_{B_{4,8}} = 14760,$ $T_{B_{4,7}} = 30620, T_{B_{4,6}} = 35300,$ $T_{B_{4,5}} = 24640, T_{B_{4,4}} = 10620,$ $T_{B_{4,3}} = 2773, T_{B_{4,2}} = 414, 2,$ $T_{B_{4,1}} = 32, 15$
e_{38}	2	1	$T_{B_{2,9}} = 39, 62, T_{B_{2,8}} = 239, 6,$ $T_{B_{2,7}} = 642, 2, T_{B_{2,6}} = 1001,$ $T_{B_{2,5}} = 665, T_{B_{2,4}} = 293, 8,$ $T_{B_{2,3}} = 293, 8, T_{B_{2,2}} = 83, 18,$ $T_{B_{2,1}} = 13, 7$
e_{39}	1	3	$T_{B_1} = 1, 125$

A.3 Mathematische Ergänzungen

A.3.1 Routh-Approximation erster und zweiter Ordnung der Übertragungsfunktion eines Pfades

Die Übertragungsfunktion eines Pfades innerhalb des übertragungsfunktionsbasierten Graphen entspricht dem Produkt der Übertragungsfunktionen der Komponenten des Pfades. Eine Komponente wird wiederum als ein System erster Ordnung mit Verzugszeit angenommen, da somit das betrachtete anfängliche sowie stationäre Verhalten beschrieben wird. Damit ergibt sich für einen Pfad die Übertragungsfunktion:

$$G_{p_i}(s) = \prod_{e_n \in p_i} \frac{K_n}{T_n \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{r,n}} . \quad (\text{A.8})$$

Im Folgenden wird nun beschrieben, wie die Übertragungsfunktion nach (A.8) durch ein System erster bzw. eines zweiter Ordnung approximiert werden kann, wobei die durch die Exponentialfunktion beschriebene Verzögerung vernachlässigt wird. Für die Approximation wird dabei das Routh-Schema nach [42] verwendet.

Soll die Charakteristik im niederfrequenten Bereich bei der Approximation erhalten bleiben, werden die Koeffizienten der Ausgangsübertragungsfunktion

$$\tilde{G}(s) = \frac{a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n}{b_0 \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + \dots + b_{n-1} \cdot s + b_n} \quad (\text{A.9})$$

vertauscht, sodass sich für die zu approximierende Übertragungsfunktion die folgende Beschreibung ergibt:

$$G(s) = \frac{a_n \cdot s^{n-1} + a_{n-1} \cdot s^{n-2} + \dots + a_2 \cdot s + a_1}{b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0} . \quad (\text{A.10})$$

Anhand dieser können die Koeffizienten der zu approximierenden Übertragungsfunktion in die in Tabelle A.10 bzw. A.11 dargestellte Routh-Alpha- bzw. Routh-Beta-Tabellen übertragen werden. Anhand dieser Tabellen lassen sich die Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms der Approximation bestimmen.

Tabelle A.10: Routh-Alpha-Tabelle nach [42].

	$b_0^0 = b_0$ $b_0^1 = b_1$	$b_2^0 = b_2$ $b_2^1 = b_3$	$b_4^0 = b_4$ $b_4^1 = b_5$	$b_6^0 = b_6$ \dots	\dots
$\alpha_1 = \frac{b_0^0}{b_1^0}$	$b_2^0 = b_2^0 - \alpha_1 \cdot b_2^1$	$b_4^0 = b_4^0 - \alpha_1 \cdot b_4^1$	$b_6^0 = b_6^0 - \alpha_1 \cdot b_6^1$	\dots	
$\alpha_2 = \frac{b_1^0}{b_2^0}$	$b_4^0 = b_4^0 - \alpha_2 \cdot b_4^1$	$b_6^0 = b_6^0 - \alpha_2 \cdot b_6^1$	\dots		
$\alpha_3 = \frac{b_2^0}{b_4^0}$	$b_6^0 = b_6^0 - \alpha_3 \cdot b_6^1$	\dots			
$\alpha_4 = \frac{b_3^0}{b_6^0}$	\dots				
\vdots					

Tabelle A.11: Routh-Beta-Tabelle nach [42].

	$a_0^1 = a_1$ $a_0^2 = a_2$	$a_2^1 = a_3$ $a_2^2 = a_4$	$a_4^1 = b_5$ $a_4^2 = b_6$	\dots \dots
$\beta_1 = \frac{a_0^1}{b_1^0}$	$a_2^3 = a_2^1 - \beta_1 \cdot b_2^1$	$a_4^3 = a_4^1 - \beta_1 \cdot b_4^1$	\dots	
$\beta_2 = \frac{a_0^2}{b_2^0}$	$a_4^4 = a_4^2 - \beta_2 \cdot b_4^2$	$a_6^4 = a_6^2 - \beta_2 \cdot b_6^2$	\dots	
$\beta_3 = \frac{a_1^3}{b_3^0}$	$a_6^5 = a_6^3 - \beta_3 \cdot b_6^3$	\dots		
$\beta_4 = \frac{a_0^4}{b_4^0}$	\dots			
\vdots				

Für den Fall der Approximation in ein System erster Ordnung ergibt sich somit die Übertragungsfunktion:

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_1}{s + \alpha_1} = \frac{\frac{a_0^1}{b_1^0}}{s + \frac{b_0^0}{b_1^0}} = \frac{\frac{a_0^1}{b_1^0}}{\frac{b_1^0}{b_1^0} \cdot s + 1} . \quad (\text{A.11})$$

Für den Fall eines Systems zweiter Ordnung ergibt sich:

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_2 \cdot s + \alpha_2 \cdot \beta_1}{s^2 + \alpha_2 \cdot s + \alpha_1 \cdot \alpha_2} = \frac{\frac{a_0^2}{b_0^0} \cdot s + \frac{a_0^1}{b_0^0}}{s^2 + \frac{b_1^0}{b_0^0} \cdot s + \frac{b_0^0}{b_0^0}} = \frac{\frac{a_0^2}{b_0^0} \cdot s + \frac{a_0^1}{b_0^0}}{\left(\frac{b_2^0}{b_0^0} - \frac{b_1^1}{b_0^1}\right) \cdot s^2 + \frac{b_1^0}{b_0^0} \cdot s + 1} . \quad (\text{A.12})$$

Betrachtet man die zu approximierende Funktion in (A.8), so lässt sich das Produkt aus j Übertragungsfunktionen erster Ordnung ausmultipliziert darstellen:

$$G_{p_i}(s) = \frac{\prod_{e_n \in p_i} (K_n)}{\prod_{e_n \in p_i} (T_n) \cdot s^j + \dots + \sum_{e_n, e_m \in p_i \wedge n \neq m} T_n \cdot T_m \cdot s^2 + \sum_{e_n \in p_i} T_n \cdot s + 1} . \quad (\text{A.13})$$

Nach (A.10) ergeben sich somit die für das Routh-Schema benötigten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 b_0^0 &= b_0 = 1 \\
 b_0^1 &= b_1 = \sum_{e_n \in p_i} T_n \\
 b_2^0 &= b_2 = \sum_{e_n, e_m \in p_i \wedge n \neq m} T_n \cdot T_m \\
 b_2^1 &= b_3 = \sum_{e_n, e_m, e_o \in p_i \wedge n \neq m \neq o} T_n \cdot T_m \cdot T_o \\
 a_0^1 &= a_1 = \prod_{e_n \in p_i} K_n \\
 a_0^2 &= a_2 = 0 .
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Die Routh-Approximation erster Ordnung des durch (A.8) beschriebenen Pfades, unter Vernachlässigung der Exponentialfunktion und Verwendung von (A.11), ist somit:

$$\hat{G}_{p_i}(s) = \frac{\left(\prod_{e_n \in p_i} K_n \right)}{\left(\sum_{e_n \in p_i} T_n \right) \cdot s + 1} . \tag{A.15}$$

Für die Approximation in ein System zweiter Ordnung ergibt sich hingegen nach (A.12):

$$\hat{G}_{p_i}(s) = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1} , \tag{A.16}$$

mit

$$b_0 = \prod_{e_n \in p_i} K_n , \tag{A.17}$$

$$a_1 = \sum_{e_n \in p_i} T_n \tag{A.18}$$

und

$$a_2 = - \frac{\left(\sum_{e_n, e_m, e_o \in p_i \wedge n \neq m \neq o} T_n \cdot T_m \cdot T_o \right)}{\left(\sum_{e_n \in p_i} T_n \right)} + \sum_{e_n, e_m \in p_i \wedge n \neq m} T_n \cdot T_m \tag{A.19}$$

A.3.2 Bestimmung der Sprungantwort einer Reihenschaltung von Systemen erster Ordnung

Im Folgenden wird aufgezeigt, wie sich die im Laplace-Bildbereich dargestellte Einheitsprungantwort

$$H(s) = \left(\prod_{n=1}^N \frac{K_n}{T_n \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot T_{\tau,n}} \right) \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{A.20})$$

mit den Verstärkungen $K_1, \dots, K_n, \dots, K_N$, den Zeitkonstanten $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n, \dots, T_N\}$ und den Totzeiten $T_{\tau,1}, \dots, T_{\tau,n}, \dots, T_{\tau,N}$ in den Zeitbereich überführen lässt. Diese Einheitssprungantwort entspricht dabei der eines Systems, welches aus N in Reihe geschalteten Systemen erster Ordnung mit Totzeit besteht. Die Einheitssprungantwort kann zunächst umgestellt werden, um den Anteil der Totzeiten zu separieren:

$$H(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot \prod_{n=1}^N \frac{K_n}{T_n \cdot s + 1} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \quad (\text{A.21})$$

Da es sich bei der zum ersten Teil zugehörigen Übertragungsfunktion um eine streng propere Funktion handelt, kann die Transformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erfolgen [67]. Dabei ist die Annahme zu beachten, dass $T_k \neq T_l \forall T_k, T_l \in \mathcal{T}$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet dann:

$$\frac{1}{s} \cdot \prod_{n=1}^N \frac{K_n/T_n}{s - p_n} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} + \dots + \frac{A_N}{s - p_N}, \quad (\text{A.22})$$

wobei $p_n = -\frac{1}{T_n}$ entspricht und $p_0 = 0$ sowie $\frac{K_0}{T_0} = 1$ ist. Die Zählerwerte lassen sich dann durch die folgende Berechnungsvorschrift bestimmen [99]:

$$A_n = \left[(s - p_n) \cdot \left(\prod_{m=0}^N \frac{K_m/T_m}{s - p_m} \right) \right]_{s=p_n} \quad (\text{A.23})$$

Somit ergibt sich für die einzelnen Zähler:

$$A_0 = \prod_{m=1}^N \frac{K_m/T_m}{-p_m}, \quad (\text{A.24})$$

$$A_1 = \frac{1}{s} \cdot \frac{K_1}{T_1} \cdot \prod_{m=2}^N \frac{K_m/T_m}{p_1 - p_m} \dots \quad (\text{A.25})$$

Für alle Zählerwerte lässt sich allgemein formulieren:

$$A_n = \frac{\prod_{m=0}^N K_m/T_m}{\prod_{m=0 \wedge m \neq n}^N p_n - p_m} . \quad (\text{A.26})$$

Als Ergebnis der Partialbruchzerlegung lässt sich die Einheitssprungantwort im Laplace-Bildbereich dann als die Summe

$$\begin{aligned} H(s) &= \left(\sum_{n=0}^N \frac{A_n}{s - p_n} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^N \frac{\prod_{m=0}^N K_m/T_m}{(s - p_n) \left(\prod_{m=0 \wedge m \neq n}^N p_n - p_m \right)} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \\ &= \left(\frac{1}{s} \cdot \prod_{m=1}^N \frac{K_m}{-p_m \cdot T_m} + \sum_{n=1}^N \frac{\prod_{m=1}^N K_m/T_m}{(s - p_n) \cdot p_n \cdot \left(\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N p_n - p_m \right)} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \\ &= \left(\frac{1}{s} \cdot \left(\prod_{m=1}^N K_m \right) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(s + 1/T_n)} \right. \\ &\quad \left. \frac{\prod_{m=1}^N K_m}{\left(\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N T_m \right) \cdot T_n \cdot \left(\frac{-1}{T_n} \right) \cdot \left(\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N \frac{-1}{T_n} + \frac{1}{T_m} \right)} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \\ &= \left(\frac{1}{s} \cdot \left(\prod_{m=1}^N K_m \right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(s + 1/T_n)} \cdot \frac{\prod_{m=1}^N K_m}{\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \right) \cdot e^{-s \cdot \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

darstellen und in den Zeitbereich transformieren. Die Einheitssprungantwort für einen Produkt aus N Systemen erster Ordnung mit Totzeit $T_\tau = \sum_{n=1}^N T_{\tau,n}$ ist somit:

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\left(\prod_{m=1}^N K_m \right) - \sum_{n=1}^N \frac{\prod_{m=1}^N K_m}{\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{T_n} \cdot (t - T_\tau)} \right) \cdot \sigma(t - T_\tau) \\ &= \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{\prod_{m=1 \wedge m \neq n}^N \left(1 - \frac{T_m}{T_n} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{T_n} \cdot (t - T_\tau)} \right) \cdot \left(\prod_{n=1}^N K_n \right) \cdot \sigma(t - T_\tau) . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

A.4 In Fallstudie verwendete physikalische Modelle

In Abschnitt 5.3.2.2 wird detailliert beschrieben, wie für den Tank 4 anhand eines physikalischen Modells die Kantengewichte hergeleitet werden können. Die Herleitung der Kantengewichte für die Tanks 1, 2, 5, 6, 7 und 8 geschieht an dieser Stelle. Da die Differenz in der Füllhöhe von Bedeutung ist und die Tanks auf unterschiedlichen Höhenniveaus angebracht sind, bezeichnet l_j jeweils die Höhe des Füllstands mit Bezug zum Boden der Prozessinsel.

A.4.1 Modell von Tank 7 und 8

Die Tanks 7 und 8 folgen dem Prinzip von Tank 4, da sie auch jeweils einen Zufluss (Tank 8 bzw. Pumpe 8) und einen Abfluss (Tank 4 bzw. Tank 8) haben. Es ergibt sich also das Modell nach (5.8) und daraus eine Verstärkung von $K_{\text{Tank}_7} = K_{\text{Tank}_8} = 1$ sowie die Anstiegszeit:

$$T_{\text{Tank}_7} = A_{\text{ab}_7} \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{7,0}} - l_{\text{Tank}_{4,0}})}} \quad (\text{A.29})$$

und

$$T_{\text{Tank}_8} = A_{\text{ab}_8} \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{8,0}} - l_{\text{Tank}_{7,0}})}} \quad (\text{A.30})$$

Mit $A_{\text{ab}_7} = 77 \text{ mm}^2$, $l_{\text{Tank}_{4,0}} = 1288 \text{ mm}$ und $l_{\text{Tank}_{7,0}} = 1536 \text{ mm}$ ergibt sich dann $T_{\text{Tank}_7} = 27,74 \text{ s}$. Für den Tank 8 ergibt sich eine Anstiegszeit von $T_{\text{Tank}_8} = 42,76 \text{ s}$, da $A_{\text{ab}_8} = 48 \text{ mm}^2$, $l_{\text{Tank}_{7,0}} = 1536 \text{ mm}$ und $l_{\text{Tank}_{8,0}} = 1765 \text{ mm}$ ist.

A.4.2 Modell von Tank 2 und 5

Der Tank 2 ($j = 2$) hat einen Zufluss (Tank 5) und zwei Abflüssen (Tank 1 und 10). Ähnlich ist Tanks 5 ($j = 5$) aufgebaut, mit einem Zufluss (Tank 9) und zwei Abflüssen (Tank 2 und 6). Somit ergibt sich für beide das folgende Modell:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_j} = & - \frac{A_{\text{ab}_{1,j}}}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_j} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{1,j}}})} \\ & - \frac{A_{\text{ab}_{2,j}}}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_j} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{2,j}}})} + \frac{1}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot q_{\text{zu}_j} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} q_{\text{ab}_{1,j}} = & A_{\text{ab}_{1,j}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_j} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{1,j}}})} \\ q_{\text{ab}_{2,j}} = & A_{\text{ab}_{2,j}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_j} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{2,j}}})} \end{aligned}$$

Durch eine Linearisierung um den Arbeitspunkt erhält man dann:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_j} = & - \frac{A_{\text{ab}_{1,j}}}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{j,0}} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{1,j},0})}}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_j} \\ & - \frac{A_{\text{ab}_{2,j}}}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{j,0}} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{2,j},0})}}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_j} + \frac{1}{A_{\text{Tank}_j}} \cdot \Delta q_{\text{zu}j} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\Delta q_{\text{ab}_j} = \begin{bmatrix} A_{\text{ab}_{1,j}} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{j,0}} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{1,j},0})}}} \\ A_{\text{ab}_{2,j}} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (l_{\text{Tank}_{j,0}} - l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{2,j},0})}}} \end{bmatrix} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_j} .$$

Im Fall von Tank 2 mit $j = 2$, ist $A_{\text{ab}_{1,2}} = 39 \text{ mm}^2$, $A_{\text{ab}_{2,2}} = 11 \text{ mm}^2$, $A_{\text{Tank}_2} = 9500 \text{ mm}^2$, $l_{\text{Tank}_{2,0}} = 1304 \text{ mm}$, $l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{1,2},0}} = 974 \text{ mm}$ und $l_{\text{Tank}_{\text{ab}_{2,2},0}} = 159 \text{ mm}$ (siehe Tabelle 5.1), womit sich die folgenden Modellgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_2} = & - 0,01823 \frac{1}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_2} + 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \cdot \Delta q_{\text{zu}2} \\ \Delta q_{\text{ab}_2} = & \begin{bmatrix} 150,4 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \\ 22,78 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{bmatrix} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_2} . \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Mit $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ kann aus dem Zustandsraummodell die Übertragungsmatrix berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{Tank}_2}(s) = & \begin{bmatrix} 150,4 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \\ 22,78 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{bmatrix} \left(s + 0,01823 \frac{1}{\text{s}} \right)^{-1} 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \\ \mathbf{G}_{\text{Tank}_2}(s) = & \begin{bmatrix} \frac{150,4 \cdot 0,0001053 \frac{1}{\text{s}}}{s + 0,01823 \frac{1}{\text{s}}} \\ \frac{22,78 \cdot 0,0001053 \frac{1}{\text{s}}}{s + 0,01823 \frac{1}{\text{s}}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{\text{Tank}_2}(s) = & \begin{bmatrix} 0,86 \\ \frac{0,14}{(54,85 \text{ s}) \cdot s + 1} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Für das Kantengewicht der relevanten Kante $e_{26,27}$ ergibt sich somit eine Verstärkung von $K_{26,27} = 0,86$ und eine Anstiegszeit von $T_{26,27} = 54,85 \text{ s}$.

Für den Tank 5 mit $j = 5$, ist $A_{ab_{1,5}} = 39 \text{ mm}^2$, $A_{ab_{2,5}} = 11 \text{ mm}^2$, $A_{\text{Tank}_5} = 9500 \text{ mm}^2$, $l_{\text{Tank}_{5,0}} = 1743 \text{ mm}$, $l_{\text{Tank}_{ab_{1,5},0}} = 1304 \text{ mm}$ und $l_{\text{Tank}_{ab_{2,5},0}} = 1160 \text{ mm}$ (siehe Tabelle 5.1). Die Modellgleichungen sind somit:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_5} &= -0,01708 \frac{1}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_5} + 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \cdot \Delta q_{\text{zu}_5} \\ \Delta q_{ab_5} &= \begin{bmatrix} 130,4 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \\ 31,91 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{bmatrix} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_5} , \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

woraus die Übertragungsmatrix folgt:

$$\mathbf{G}_{\text{Tank}_5}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,80}{(58,55 \text{ s}) \cdot s + 1} \\ \frac{0,20}{(58,55 \text{ s}) \cdot s + 1} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.36})$$

Daraus ergeben sich die Verstärkungen $K_{16,17} = 0,80$ und $K_{16,18} = 0,20$ sowie die Anstiegszeiten von $T_{16,17} = T_{16,18} = 58,55 \text{ s}$.

A.4.3 Modell von Tank 6

Der Tank 6 besitzt zwei Zuflüsse (Tank 5 und 9) und zwei Abflüsse (Tank 1 und 10), weshalb sich das folgende linearisierte Modell ergibt (das nichtlineare Modell lässt sich wie schon in den vorherigen Fällen herleiten):

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_6} &= -\frac{A_{ab_{1,6}}}{A_{\text{Tank}_6}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_{6,0}} - l_{\text{Tank}_{1,0}})} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ &\quad - \frac{A_{ab_{2,6}}}{A_{\text{Tank}_6}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_{6,0}} - l_{\text{Tank}_{10,0}})} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ &\quad + \frac{1}{A_{\text{Tank}_6}} \cdot \Delta q_{\text{zu}_{1,6}} + \frac{1}{A_{\text{Tank}_6}} \cdot \Delta q_{\text{zu}_{2,6}} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \Delta q_{ab_{1,6}} &= A_{ab_{1,6}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_{6,0}} - l_{\text{Tank}_{1,0}})} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ \Delta q_{ab_{2,6}} &= A_{ab_{2,6}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_{6,0}} - l_{\text{Tank}_{10,0}})} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} . \end{aligned}$$

Aus Tabelle 5.1 können die Parameter abgelesen werden, sodass sich ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_6} = & -0,02385 \frac{1}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ & + \left[0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \quad 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta q_{\text{zu}_{1,6}} \\ \Delta q_{\text{zu}_{2,6}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \Delta q_{\text{ab}_{1,6}} = & 200,3 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ \Delta q_{\text{ab}_{2,6}} = & 26,32 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} . \end{aligned}$$

Mit der bekannten Formel $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ kann die Übertragungsmatrix berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{Tank}_6}(s) = & \begin{bmatrix} 200,3 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \\ 26,32 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{bmatrix} \left(s + 0,02385 \frac{1}{\text{s}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} & 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{\text{Tank}_6}(s) = & \begin{bmatrix} \frac{0,88}{(41,93 \frac{1}{\text{s}}) \cdot s + 1} & \frac{0,88}{(41,93 \frac{1}{\text{s}}) \cdot s + 1} \\ \frac{0,12}{(41,93 \frac{1}{\text{s}}) \cdot s + 1} & \frac{0,12}{(41,93 \frac{1}{\text{s}}) \cdot s + 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Aus (A.39) ergeben sich die relevanten Verstärkungen $K_{23,25} = K_{24,25} = 0,88$ sowie die zugehörigen Anstiegszeiten $T_{23,25} = T_{24,25} = 41,93$ s.

A.4.4 Modell von Tank 1

Für den Tank 1 ist zunächst zu beachten, dass er vier Zuflüsse (Tank 2, 4, 6 und 9) und einen Abfluss (Tank 10) hat. Der Abfluss ist jedoch für die Modellierung im übertragungsfunktionsbasierten Graphen nur nebensächlich, da der Einfluss der Zuflüsse auf den Füllstand des Tanks relevant ist. Wird dies bei der Modellierung berücksichtigt, so ergibt sich das folgende lineare Zustandsraummodell (nichtlineares Modell wird übersprungen):

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_1} = & -\frac{A_{\text{ab}_{10}}}{A_{\text{Tank}_1}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (l_{\text{Tank}_{1,0}} - l_{\text{Tank}_{10,0}})} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_1} \\ & + \frac{1}{A_{\text{Tank}_1}} \cdot (\Delta q_{\text{zu}_{1,1}} + \Delta q_{\text{zu}_{2,1}} + \Delta q_{\text{zu}_{3,1}} + \Delta q_{\text{zu}_{4,1}}) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\Delta q_{\text{ab}_1} = \Delta l_{\text{Tank}_1} .$$

Mit den Parametern aus Tabelle 5.1 ergeben sich die Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{l}_{\text{Tank}_1} = & -0,02191 \frac{1}{\text{s}} \cdot \Delta l_{\text{Tank}_6} \\ & + 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \cdot (\Delta q_{\text{zu}1,1} + \Delta q_{\text{zu}2,1} + \Delta q_{\text{zu}3,1} + \Delta q_{\text{zu}4,1}) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\Delta q_{\text{ab}_1} = \Delta l_{\text{Tank}_1} \cdot$$

Wie bei den vorherigen Tankmodellen lässt sich daraus die Übertragungsmatrix ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{Tank}_1}(s) &= \left(s + 0,02191 \frac{1}{\text{s}} \right)^{-1} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot 0,0001053 \frac{1}{\text{mm}^2} \\ \mathbf{G}_{\text{Tank}_1+}(s) &= \frac{4,806 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{mm}^2}}{(45,64 \text{ s}) \cdot s + 1} \cdot [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Für die Kanten $e_{28,30}$, $e_{29,30}$, $e_{31,30}$ und $e_{32,30}$ ergibt sich somit eine Verstärkung von $4,806 \cdot 10^{-3} \frac{\text{s}}{\text{mm}^2}$ sowie eine Anstiegszeit von 45,64 s. Da für den Durchfluss in der Fallstudie die Einheit Liter pro Minute verwendet wurde, muss hier noch eine Umrechnung der Verstärkung erfolgen, damit auch im TFG der Füllstand im Tank 1 die Einheit Millimeter besitzt. Die Verstärkung ist somit $8,01 \frac{\text{min}}{\text{l}}$.

Veröffentlichte Beiträge

Im Rahmen der Forschungsarbeit für diese Dissertation wurden mehrere wissenschaftliche Beiträge veröffentlicht.

Veröffentlichung mit wissenschaftlicher Qualitätssicherung

GEIGER, A.; KROLL, A.: Modeling and analyzing technical systems as complex networks: Detecting inverse response. In: *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (CICA)*, S. 89-96, Singapur: IEEE Computational Intelligence Society, 15.-19. April 2013.

GEIGER, A.; KROLL, A.: Komplexe Netzwerke zur Modellierung und Analyse von Anlagen: Qualitative Detektion des Inverse-Response-Verhaltens von Systemen höherer Ordnung. In: *Entwurf komplexer Automatisierungssysteme (EKA)* (JUMAR U.; DIETRICH C., Hg.), Magdeburg: Institut für Automatisierungstechnik und Kommunikation e.V., 14.-15. Mai 2014.

Andere Veröffentlichungen und Vorträge

GEIGER, A.; SOMMER, H.; KROLL, A.: Koevolutionärer Algorithmus zur Analyse struktureller Steuerbarkeit - Eine Methode der „komplexen Netzwerke“ zur Systemanalyse. In: *20. Workshop Computational Intelligence* (HOFFMANN F.; HÜLLERMEIER E., Hg.), S. 235-249, Dortmund: GMA-FA 5.14 „Computational Intelligence“ und GI-FG „Fuzzy-Systeme und Soft-Computing“, 1.-3. Dezember 2010, .

GEIGER, A.: Zur qualitativen Analyse großer, verkoppelter Systeme auf Inverse-Response-Verhalten. Vortrag auf dem 48. Regelungstechnischen Kolloquium. Boppard, 20.-21. Februar 2014.

Literaturverzeichnis

- [1] VAN DER AALST, W. M. P.: Geschäftsprozessmodellierung: Die “Killer-Applikation“ für Petrinetze. *Informatik-Spektrum* 37 (2014) 3, S. 191–198.
- [2] ADAMIC, L. A.; GLANCE, N.: The political blogosphere and the 2004 US election: divided they blog. In: *Proceedings of the 3rd international workshop on Link discovery*, S. 36–43, Chicago, 21.-24. August 2005.
- [3] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L.: Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics* 74 (2002) 1, S. 47–97.
- [4] ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L.: Error and attack tolerance of complex networks. *Nature* 406 (2000) 6794, S. 378–382.
- [5] BANASZUK, A.; FONOBEROV, V. A.; FREWEN, T. A.; KOBILAROV, M.; MATHEW, G.; MEZIC, I.; PINTO, A.; SAHAI, T.; SANE, H.; SPERANZON, A.; ET AL.: Scalable approach to uncertainty quantification and robust design of interconnected dynamical systems. *Annual Reviews in Control* 35 (2011) 1, S. 77–98.
- [6] BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R.: Emergence of scaling in random networks. *Science* 286 (1999) 5439, S. 509–512.
- [7] BERGER, M.; BERTRAM, T.; SCHWARZ, H.; BEHMENBURG, C.: Konfektionierte Fuzzy-Regler für Systemklassen. *at – Automatisierungstechnik* 44 (1996) 3, S. 132–137.
- [8] BJELKEMYR, M.; SEMERE, D.; LINDBERG, B.: An engineering systems perspective on system of systems methodology. In: *1st Annual IEEE Systems Conference*, S. 1–7, Honolulu, 9.-12. April 2007.
- [9] BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U.: Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports* 424 (2006) 4, S. 175–308.

- [10] BRENT, R. P.: *Algorithms for minimization without derivatives*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, ISBN: 978-0-13-022335-7, 1973.
- [11] CHÁVEZ GRUNEWALD, M. G.; BEN MAKHLOUF, I.; DIAB, H.; MUT, V.; KO-WALEWSKI, S.; ABEL, D.: Regelung und Sicherheitsanalyse einer Gruppe Massenpunktfahrzeuge mit Hilfe energiebasierter Methoden. *at – Automatisierungstechnik* 58 (2010) 4, S. 227–235.
- [12] CHEN, S.; HUANG, W.; CATTANI, C.; ALTIERI, G.: Traffic dynamics on complex networks: a survey. *Mathematical Problems in Engineering* 2012 (2011).
- [13] CHENG, J.; ADAMIC, L.; DOW, P. A.; KLEINBERG, J. M.; LESKOVEC, J.: Can Cascades Be Predicted? In: *23rd International Conference on World Wide Web*, S. 925–936, Seoul, Korea: International World Wide Web Conferences Steering Committee, 7.-11. April 2014.
- [14] CHOO, Y.; KIM, D.: Routh Approximants with Arbitrary Order. *Transactions on Control, Automation and Systems Engineering* 1 (1999) 1, S. 50–53.
- [15] CHRISTIANSEN, L.; HOERNICKE, M.; FAY, A.: Regelbasierte Erstellung von Topologie-Modellen im Kontext der “Automatisierung der Automatisierung“. In: *Entwurf komplexer Automatisierungssysteme (EKA)* (JUMAR, U.; DIEDRICH, C., Hg.), Magdeburg: Institut für Automatisierungstechnik und Kommunikation e.V., 14.-15. Mai 2014.
- [16] CORMEN, T. H.: *Algorithmen - Eine Einführung*. München: Oldenbourg, ISBN: 978-3-486-59002-9, 2010.
- [17] COSTA, L. D. F.; OLIVEIRA JR, O. N.; TRAVIESO, G.; RODRIGUES, F. A.; VILLAS BOAS, P. R.; ANTIQUEIRA, L.; VIANA, M. P.; CORREA ROCHA, L. E.: Analyzing and modeling real-world phenomena with complex networks: a survey of applications. *Advances in Physics* 60 (2011) 3, S. 329–412.
- [18] COYLE, G.: Qualitative and quantitative modelling in system dynamics: some research questions. *System Dynamics Review* 16 (2000) 3, S. 225–244.
- [19] DAHMEN, W.; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Bd. 2. Springer, ISBN: 978-3-540-76492-2, 2008.
- [20] DELABARRA, B.: On undershoot in SISO systems. *IEEE transactions on automatic control* 39 (1994) 3, S. 578–581.

- [21] DEMIR, O.; LUNZE, J.: Autonomie und Kooperation in seriell gekoppelten Systemen. *at – Automatisierungstechnik* 58 (2010) 4, S. 217–226.
- [22] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*. Berlin: Springer, 4 Aufl., ISBN: 978-3-642-14911-5, 2010.
- [23] ERDOS, P.; RENYI, A.: On random graphs I. *Publicationes Mathematicae Debrecen* 6 (1959), S. 290–297.
- [24] ERDOS, P.; RENYI, A.: On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica* 12 (1961), S. 261–267.
- [25] FILIPPO, J. M.-D.; DELGADO, M.; BRIE, C.; PAYNTER, H. M.: A survey of bond graphs: theory, applications and programs. *Journal of the Franklin Institute* 328 (1991) 5, S. 565–606.
- [26] FORRESTER, J. W.: *Industrial dynamics*, Bd. 2. MIT press, 1961.
- [27] FORRESTER, J. W.: *Grundzüge einer Systemtheorie*. Gabler, ISBN: 978-3-409-31331-5, 1972.
- [28] FORSYTHE, G. E.; MOLER, C. B.; MALCOLM, M. A.: *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, ISBN: 978-0-13-165332-0, 1977.
- [29] GEIGER, A.; KROLL, A.: Komplexe Netzwerke zur Modellierung und Analyse von Anlagen: Qualitative Detektion des Inverse-Response-Verhaltens von Systemen höherer Ordnung. In: *Entwurf komplexer Automatisierungssysteme (EKA)* (JUMAR, U.; DIEDRICH, C., Hg.), Magdeburg: Institut für Automatisierungstechnik und Kommunikation e.V., 14.-15. Mai 2014.
- [30] GEIGER, A.; KROLL, A.: Modeling and analyzing technical systems as complex networks: Detecting inverse response. In: *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (CICA)*, S. 89–96, Singapur, 15.-19. April 2013.
- [31] GEIGER, A.; SOMMER, H.; KROLL, A.: Koevolutionärer Algorithmus zur Analyse struktureller Steuerbarkeit – Eine Methode der „komplexen Netzwerke“ zur Systemanalyse. In: *20. Workshop Computational Intelligence* (HOFFMANN, F.; HÜLLERMEIER, E., Hg.), S. 235–249, Dortmund: GMA-FA 5.14 „Computational Intelligence“ und GI-FG „Fuzzy-Systeme und Soft-Computing“, 1.-3. Dezember 2010.

- [32] GERLAND, P.: *Klassifikationsgestützte On-line-Adaption eines robusten beobachterbasierten Fehlerdiagnoseansatzes für nichtlineare Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik, 2011.
- [33] GIUA, A.; SEATZU, C.: Petrinetze und die Steuerung Ereignisdiskreter Systeme. *Informatik-Spektrum* 37 (2014) 3, S. 199–210.
- [34] GROSS, J. L.; YELLEN, J.; ZHANG, P. (Hg.): *Handbook of graph theory*. Boca Raton: CRC Press, 2. Aufl., ISBN: 978-1-4398-8018-0, 2014.
- [35] HINRICHSSEN, D.; PHILIPPSEN, H.-W.: Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen. *at – Automatisierungstechnik* 38 (1990) 12, S. 460–466.
- [36] HOAGG, J. B.; BERNSTEIN, D. S.: Nonminimum-phase zeros. *IEEE Control Systems Magazine* 27 (2007) 3, S. 45–57.
- [37] HU, H.; ZHOU, M.; LI, Z.; TANG, Y.: An Optimization Approach to Improved Petri Net Controller Design for Automated Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 10 (2013) 3, S. 772–782.
- [38] HUMMEL, T.: Der Einsatz von hybriden Petri-Netzen für den Entwurf gemischt analog-digitaler eingebetteter Systeme. In: *MBMV (2)*, S. 49–58, MoPress, 2001.
- [39] ISERMANN, R.: *Digitale Regelsysteme. 1. Grundlagen, deterministische Regelungen*. Berlin: Springer, 2. Aufl., ISBN: 978-3-540-16596-5, 1988.
- [40] ISERMANN, R.; MÜNCHHOF, M.: *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Berlin: Springer, ISBN: 978-3-540-78878-2, 2011.
- [41] JÄMSÄ-JOUNELA, S.-L.: Future trends in process automation. *Annual Reviews in Control* 31 (2007) 2, S. 211–220.
- [42] JAMSHIDI, M.: *Large-scale systems: modeling, control, and fuzzy logic*. New York: Prentice-Hall, Inc., ISBN: 978-0-13-125683-5, 1996.
- [43] JOHANSSON, K.: The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (2000) 3, S. 456–465.
- [44] KADERALI, F.; POGUNTKE, W.: *Graphen, Algorithmen, Netze: Grundlagen und Anwendungen in der Nachrichtentechnik*. Studium Technik, Braunschweig: Vieweg, ISBN: 978-3-528-06662-8, 1995.

- [45] KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B.: *Linear estimation*, Bd. 1. New Jersey: Prentice Hall, ISBN: 978-0-13-022464-4, 2000.
- [46] KIPPELS, D.: Computersimulation optimiert Versorgungsnetze. *VDI Nachrichten* (2012) 22, S. 16.
- [47] KORBA, P.; UHLEN, K.: Wide-area monitoring of electromechanical oscillations in the Nordic power system: practical experience. *IET generation, transmission & distribution* 4 (2010) 10, S. 1116–1126.
- [48] KROLL, A.: *Computational Intelligence: Eine Einführung in Probleme, Methoden und technische Anwendungen*. München: Oldenbourg, ISBN: 978-3-486-70976-6, 2013.
- [49] KUHN, U.: Eine praxisnahe Einstellregel für PID-Regler: Die T-Summen-Regel. *Automatisierungstechnische Praxis* 37 (1995) 5, S. 10–16.
- [50] LADYMAN, J.; LAMBERT, J.; WIESNER, K.: What is a complex system? *European Journal for Philosophy of Science* 3 (2013) 1, S. 33–67.
- [51] LAGARIAS, J. C.; REEDS, J. A.; WRIGHT, M. H.; WRIGHT, P. E.: Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization* 9 (1998) 1, S. 112–147.
- [52] LAU, D.: *Algebra und Diskrete Mathematik 2*. Berlin: Springer, ISBN: 978-3-540-20398-8, 2004.
- [53] LAUB, A. J.; HEATH, M. T.; PAIGE, C.; WARD, R.: Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32 (1987) 2, S. 115–122.
- [54] LEUGERING, G.; MARTIN, A.; STINGL, M.: Topologie und Dynamische Netzwerke: Anwendungen der Optimierung mit Zukunft. In: *Produktionsfaktor Mathematik* (GRÖTSCHEL, M.; LUCAS, K.; MEHRMANN, V., Hg.), S. 323–338, Berlin: Springer, ISBN: 978-3-540-89434-6, 2009.
- [55] LEWIS, K.; KAUFMAN, J.; GONZALEZ, M.; WIMMER, A.; CHRISTAKIS, N.: Tastes, ties, and time: A new social network dataset using Facebook.com. *Social Networks* 30 (2008) 4, S. 330–342.
- [56] LIN, C.-T.: Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (1974) 3, S. 201–208.

- [57] LIU, F.: *Colored Petri Nets for systems biology*. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität, Cottbus - Senftenberg, Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik, 2012.
- [58] LIU, Y.; ANDERSON, B. D.: Singular perturbation approximation of balanced systems. *International Journal of Control* 50 (1989) 4, S. 1379–1405.
- [59] LOVE, J.: *Process Automation Handbook: A guide to theory and practice*. London: Springer, ISBN: 978-1-84628-282-9, 2007.
- [60] LUNZE, J.: *Feedback control of large-scale systems*. Prentice-Hall international series in systems and control engineering, New York: Prentice-Hall, ISBN: 978-0-13-318353-5, 1991.
- [61] LUNZE, J.: *Ereignisdiskrete Systeme*. München: Oldenbourg, ISBN: 978-3-486-58071-6, 2006.
- [62] LUNZE, J.: *Automatisierungstechnik: Methoden für die Überwachung und Steuerung kontinuierlicher und ereignisdiskreter Systeme*. München: Oldenbourg, 2. Aufl., ISBN: 978-3-486-58061-7, 2008.
- [63] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Berlin: Springer, 7. Aufl., ISBN: 978-3-642-29561-4, 2013.
- [64] LUNZE, J.: Vernetzte Regelungen aus der Sicht der Theorie komplexer Netzwerke. *at-Automatisierungstechnik* 61 (2013) 10, S. 700–711.
- [65] LUNZE, J.: *Control Theory of Digitally Networked Dynamic Systems*. Berlin: Springer, ISBN: 978-3-319-01130-1, 2014.
- [66] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Berlin: Springer, 10. Aufl., ISBN: 978-3-642-53908-4, 2014.
- [67] LUTZ, H.; WENDT, W.: *Taschenbuch der Regelungstechnik: mit MATLAB und Simulink*. Frankfurt am Main: Harri Deutsch, ISBN: 978-3-8171-1807-6, 2007.
- [68] MACFARLANE, A.; KARCANIAS, N.: Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control* 24 (1976) 1, S. 33–74.
- [69] MAGEE, C.; DE WECK, O.: Complex system classification. In: *Fourteenth Annual International Symposium of the INCLOSE*, Toulouse: International Council On Systems Engineering (INCLOSE), 20.-24. Juni 2004.

- [70] MAHMOUD, M. S.; HASSAN, M. F.; DARWISH, M. G.; ET AL.: *Large-scale control systems: theories and techniques*. New York: Marcel Dekker, ISBN: 978-0-8247-7289-5, 1985.
- [71] MASON, S. J.: *Feedback Theory: I. Some Properties of Signal Flow Graphs*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics, 1953.
- [72] MAURYA, M. R.; RENGASWAMY, R.; VENKATASUBRAMANIAN, V.: A signed directed graph-based systematic framework for steady-state malfunction diagnosis inside control loops. *Chemical Engineering Science* 61 (2006) 6, S. 1790–1810.
- [73] MILGRAM, S.: The small world problem. *Psychology today* 2 (1967) 1, S. 60–67.
- [74] MITA, T.; YOSHIDA, H.: Undershooting phenomenon and its control in linear multivariable servomechanisms. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981) 2, S. 402–407.
- [75] MOORE, B.: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981) 1, S. 17–32.
- [76] MOSTERT, C. H.: *Fabrik-Umfeld Simulationsmodell zur kennzahlenbasierten Bewertung von Produktionsstrategien*, Bd. 2. Kassel: kassel university press, ISBN: 978-3-89958-332-8, 2007.
- [77] MYERS, R. H.: *Classical and modern regression with applications*. Duxbury classic series, Pacific Grove: Duxbury, 2 Aufl., ISBN: 978-0-534-38016-8, 1990.
- [78] NEWMAN, M. E. J.: The Structure and Function of Complex Networks. *SIAM Review* 45 (2003) 2, S. 167–256.
- [79] OYELEYE, O. O.; KRAMER, M. A.: Qualitative simulation of chemical process systems: Steady-state analysis. *AIChE Journal* 34 (1988) 9, S. 1441–1454.
- [80] PAGANI, G. A.; AIELLO, M.: The power grid as a complex network: a survey. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392 (2013) 11, S. 2688–2700.
- [81] REHTANZ, C.: Energie- und Informationsnetze. *at – Automatisierungstechnik* 62 (2014) 5, S. 313–314.
- [82] REINISCH, K.: *Analyse und Synthese kontinuierlicher Steuerungs- und Regelungssysteme*. Berlin: Verl. Technik, 3 Aufl., ISBN: 978-3-341-01167-6, 1996.

- [83] REN, W.; ATKINS, E.: Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 17 (2007) 10–11, S. 1002–1033.
- [84] ROPPENECKER, G.; PREUSS, H.: Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensysteme. *Regelungstechnik* 30 (1982), S. 219–225.
- [85] ROSENBRÖCK, H. H.: *State-space and multivariable theory*. New York: John Wiley & Sons, ISBN: 978-0-17-781002-2, 1970.
- [86] SAHIN, F.; SRIDHAR, P.; HORAN, B.; RAGHAVAN, V.; JAMSHIDI, M.: System of systems approach to threat detection and integration of heterogeneous independently operable systems. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2007.*, S. 1376–1381, Montreal: IEEE Systems, Man and Cybernetics Society, 7.-10. Oktober 2007.
- [87] SAMAL, E.; BECKER, W.: *Grundriss der praktischen Regelungstechnik: mit 32 Tabellen*. München: Oldenbourg Verlag, ISBN: 978-3-486-27583-4, 2004.
- [88] SARIDIS, G.; HOFSTADTER, R. F.: A Pattern Recognition Approach to the Classification of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* SMC-4 (1974) 4, S. 362–371.
- [89] SCHMIDT, G.: Was sind und wie entstehen komplexe Systeme, und welche spezifischen Aufgaben stellen sie für die Regelungstechnik? *Regelungstechnik* 30 (1982) 10, S. 331–339.
- [90] SEBORG, D. E.; MELLICHAMP, D. A.; EDGAR, T. F.; DOYLE III, F. J.: *Process dynamics and control*. Hoboken: John Wiley & Sons, 3 Aufl., ISBN: 978-0-470-12867-1, 2010.
- [91] SOMMER, H.-J.; HAHN, H.: Controllability of a class of nonlinear systems: a graph theoretic approach. *Systems Science* 25 (1999) 1, S. 49–56.
- [92] SPIELMANN, M.: *Mehrschicht-Graphen zur Analyse nichtlinearer Systeme und zur Generierung nichtlinearer Regelungsgesetze*. Forschungsbericht, Duisburg: Gerhard-Marcator-Universität, Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, 1997.
- [93] STROGATZ, S. H.: Exploring complex networks. *Nature* 410 (2001) 6825, S. 268–276.
- [94] THE MATHWORKS: MATLAB. Stand 15. Oktober 2014, 2011.

- [95] TRICKETT, K. J.: *Quantification of inverse response for controllability assessment of nonlinear processes*. Dissertation, Department of Chemical & Biochemical Engineering, University of London, 1995.
- [96] TRIER, M.: Research note-Towards dynamic visualization for understanding evolution of digital communication networks. *Information Systems Research* 19 (2008) 3, S. 335–350.
- [97] TURAU, V.: *Algorithmische Graphentheorie*. München: Oldenbourg, ISBN: 978-3-486-59057-9, 2009.
- [98] ULRICH, J.; POLT, A.; HÜBINGER, W.: Elemente der "Verbundsimulation". *Chemie Ingenieur Technik* 77 (2005) 8, S. 1073–1074.
- [99] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 15. Aufl., ISBN: 978-3-8348-0497-6, 2008.
- [100] VDI/VDE INNOVATION + TECHNIK GMBH: Vernetzte Produktionsanlagen. In: *Innovationspolitik, Informationsgesellschaft, Telekommunikation* (BUNDESMINISTERIUM FÜR WIRTSCHAFT UND TECHNOLOGIE, Hg.), Berlin, 2008.
- [101] VIDYASAGAR, M.: On undershoot and nonminimum phase zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control* 31 (1986) 5, S. 440–440.
- [102] VIERE, T.; BRÜNNER, H.; HEDEMANN, J.: Stoffstromnetz-basierte Planung und Optimierung komplexer Produktionssysteme. *Chemie Ingenieur Technik* 83 (2011) 10, S. 1565–1572.
- [103] VIERE, T.; BRUENNER, H.; HEDEMANN, J.: Verbund-Simulation-Strategic Planning and Optimization of Integrated Production Networks. *Chemical engineering & technology* 33 (2010) 4, S. 582–588.
- [104] WALLER, K. V.; NYGARDAS, C.: On inverse response in process control. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals* 14 (1975) 3, S. 221–223.
- [105] WANG, Q.-G.: *Decoupling control*, Bd. 285 von *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer, ISBN: 978-3-540-44128-1, 2002.
- [106] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H.: Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393 (1998), S. 440–442.
- [107] ZEITZ, M.: Minimalphasigkeit - keine relevante Eigenschaft für die Regelungstechnik! *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014) 1, S. 3–10.

Schriftenreihe Mess- und Regelungstechnik der Universität Kassel

Herausgegeben von / Edited by

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Andreas Kroll, Universität Kassel

- Band 1:** Klassifikationsgestützte on-line Adaption eines robusten beobachterbasierten Fehlerdiagnoseansatzes für nichtlineare Systeme, Kassel 2011
Patrick Gerland
- Band 2:** Zur Identifikation mechatronischer Stellglieder mit Reibung bei Kraftfahrzeugen, Kassel 2012
Zhenxing Ren
- Band 3:** Sensordatenfusionsansätze in der Thermografie zur Verbesserung der Messergebnisse, Kassel 2014
Samuel Soldan
- Band 4:** Multi-Robot Task Allocation for Inspection Problems with Cooperative Tasks Using Hybrid Genetic Algorithms, Kassel 2014
Chun Liu
- Band 5:** Gasleckortungsmethode für autonome mobile Inspektionsroboter mit optischer Gasfernmessstechnik in industrieller Umgebung, Kassel 2015
Gero Bonow

Die zunehmende Vernetzung der Energie-, Stoff- und Informationsströme, z. B. innerhalb von Produktionsanlagen, begründet das Interesse an Methoden, welche eine Analyse der Systemeigenschaften von großen und verkoppelten dynamischen Systemen bereits in einem frühen Entwicklungsstadium ermöglichen. Dabei ist das Gesamtsystemverhalten von Interesse, welches sowohl auf der Dynamik der Teilsysteme als auch der Verkopplungen beruht. In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Methode zur qualitativen Analyse von Systemen auf Inverse-Response-Verhalten vorgestellt. Der Ansatz nutzt Komplexe Netzwerke zur Modellbeschreibung, wobei diese um Kantengewichte ergänzt werden, welche das dynamische Verhalten des modellierten Systems beschreiben. Der vorgestellte Detektionsalgorithmus vergleicht die Pfade des Graphen zwischen den betrachteten Ein- und Ausgängen. Hierfür werden die aggregierten Kantengewichte der Pfade bestimmt und zur Ermittlung der qualitativen Aussage zum Inverse-Response-Verhalten herangezogen. Der Analyseansatz bietet somit eine einfach anwendbare Alternative zur Auswertung der positiven Nullstellen des Systems, welche auf die notwendige sowie hinreichende Bedingung für das Inverse-Response-Verhalten eines linearen Systems zurückgreift: eine ungerade Anzahl positiver Nullstellen.

Das entwickelte Verfahren wurde erfolgreich an einer flexibel konfigurierbaren Prozessinsel der Modellfabrik μ Plant des Fachgebiets Mess- und Regelungstechnik der Universität Kassel getestet.

ISBN 978-3-86219-587-9



9 783862 195879 >