khdm kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium

Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - Mathematik für Maschinenbauer

Paul Wolf

Rolf Biehler

Kassel, Februar 2016

khdm-Report 16-04

Universität Kassel

Leuphana Universität Lüneburg

Universität Paderborn

Kurzbeschreibung khdm-Report

In dieser Schriftenreihe des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik werden von den Herausgebern und ggf. weiteren Gutachtern geprüfte Materialien publiziert, z.B. Berichte von Forschungs- und Entwicklungsprojekten und „Occasional Papers", die sich mit mathematikbezogener Hochschuldidaktik und angrenzenden Wissenschaftsgebieten beschäftigen. Die Reihe wurde ins Leben gerufen, um Materialien zu veröffentlichen, die im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik und in assoziierten Projekten oder bei Kooperationspartnern in Wissenschaft und Schulpraxis entstanden sind.

https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2012050741193

Herausgegeben von

Rolf Biehler
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik,
Universität Paderborn, biehler@khdm.de

Reinhard Hochmuth
Fakultät I Bildungs-, Kultur- und Sozialwissenschaften, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Leuphana Universität Lüneburg, hochmuth@khdm.de

Hans-Georg Rück
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, Institut für Mathematik,
Universität Kassel, rueck@khdm.de

khdm-Report 16-04

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium

Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - Mathematik für Maschinenbauer

Dipl.-Math. Paul Wolf
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik,
Universität Paderborn
wolf@khdm.de

Prof. Dr. Rolf Biehler
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik, Institut für Mathematik,
Universität Paderborn
biehler@khdm.de

http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016010549550

Das khdm wurde im Rahmen der gemeinsamen Initiative „Bologna - Zukunft der Lehre" von der Stiftung Mercator und der VolkswagenStiftung in den Jahren 2010 - 2015 gefördert.

Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium

Werkstattbericht der khdm-AG Ing-Math - Mathematik für Maschinenbauer

Zweite verbesserte und um weitere Aufgaben ergänzte Version, Februar 2016

Paul Wolf, Rolf Biehler
Institut für Mathematik und Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik
Universität Paderborn

Abstract
In dieser Zusammenfassung wollen wir den derzeitigen Arbeitsstand des Teilprojekts darlegen und Interessenten die Möglichkeit geben, auf die in den vergangenen Monaten erstellten Anwendungsaufgaben zurückzugreifen und diese ggf. in den Lehrveranstaltungen zu nutzen. Es ist geplant, diesen Bericht je nach Stand der Arbeit zu erweitern und zu ergänzen. Die hier vorgestellten Aufgaben sind für die Veranstaltungen Mathematik 1 und 2 für Maschinenbauer konzipiert, jedoch lassen sie sich sicherlich auch auf andere Studiengänge übertragen. Das dahinter liegende Konstruktionskonzept wird zu Beginn kurz dargestellt.

Gerne dürfen Sie die Aufgaben für Ihre Lehrveranstaltungen verwenden. Wir empfehlen leichte Veränderungen (z.B. an den Zahlenwerten) vorzunehmen. Über Rückmeldungen (z.B. an wolf@khdm.de) würden wir uns sehr freuen! Auf Anfrage senden wir Ihnen gerne Lösungen zu den Aufgaben per Email. Bitte sehen Sie davon ab, Lösungen zu den Aufgaben online zu stellen.

Änderungen zur ersten Version

Viele der Aufgaben wurden im WS 13/14, WS 14/15 und im Sommersemester 2015 eingesetzt. Die hierbei gewonnen Erfahrungen wurden genutzt, um die Aufgaben und die Version 1 dieser Arbeit (siehe Wolf & Biehler (2014a)) zu optimieren.

Zu jeder Aufgabe findet man nun Hinweise, wie die Aufgabe modifiziert werden kann, so dass man sie auch in mehreren aufeinanderfolgenden Jahren verwenden kann. Häufig finden sich nun auch weitere Tipps in den Anmerkungen, die es ermöglichen, die Aufgaben ggf. einfacher zu gestalten.

Weiterhin wurden vier neue Aufgaben (Flugsicherheit, Brücke im Winter, Freier Fall und Brückenbelastung) diesem Report hinzugefügt und einige kleinere Fehler korrigiert.

Inhalt

1. Über das Projekt 2
2. Die Konzeptidee für die Aufgabenkonstruktion 3
3. Praktische Hinweise zur Aufgabenkonstruktion 5
4. Aufgabenbeispiele 7
Aufgabe 1: Laserstrahl (Trigonometrie) 7
Aufgabe 2: Pendeluhr (Folgen) 10
Aufgabe 3: Stahlbalken (Optimierung) 13
Aufgabe 4: Halfpipe (Integralrechnung) 17
Aufgabe 5: Bauteil belasten (Lineare Gleichungssysteme) 20
Aufgabe 6: Heißer Stahl (Differentialgleichungen) 23
Aufgabe 7: Flugsicherheit (Analytische Geometrie) 26
Aufgabe 8: Brücke im Winter (Differentialgleichungen) 29
Aufgabe 9: Freier Fall (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität) 32
Aufgabe 10: Brückenbelastung (LGS und Numerik) 35
5. Literatur 37
6. Bildquellen 37

1. Über das Projekt

Die AG Ing-Math ist ein Projekt des Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) und besteht aus drei Teilprojekten. Das Teilprojekt, welches hier seine Ergebnisse präsentiert, stellt sich unter den Namen „Mathematik für Maschinenbauer: Integration des Modellierens in ingenieurwissenschaftlichen Zusammenhängen“ vor und wird von Prof. Dr. Rolf Biehler und Prof. Dr. Gudrun Oevel geleitet.
In diesem Teilprojekt werden Interventionselemente für die Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbauer“ untersucht und entwickelt, wobei diese Elemente begleitend und abschließend evaluiert werden sollen. Die geplanten Maßnahmen betreffen insbesondere:

- das Betonen der Einsatzgebiete der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften: Vorbereitung der Studierenden auf das Simulieren, Modellieren und Interpretieren von Problemstellungen und Lösungen
- die Veranschaulichung und Vernetzung der Mathematik durch ingenieurwissenschaftliche Anwendungsbeispiele
- die zeitliche Umstrukturierung der Lerninhalte, so dass die benötigte Mathematik parallel zu den Fachveranstaltungen gelehrt wird
- die Umgestaltung der Lerninhalte bezüglich ihrer Relevanz.

- Empirische Studien zu Wirkungen der Lehrinnovationen auf Einstellungen und Kompetenzen der Studierenden

In diesem Werkstattbericht soll es vor allem um die ersten beiden Punkte gehen.
Die hierbei entwickelten Aufgaben und deren zugrunde liegendes Konzept, sowie deren Weiterentwicklung, Evaluierung und die zugrunde liegenden Theorien werden ein Hauptbestandteil der Dissertation des erstgenannten Autors sein. Erste Ergebnisse unserer Studien finden sich in Wolf & Biehler (2014b).

Weitere Informationen finden sich auf www.khdm.de, sowie bei Oevel et al. (2014).

2. Die Konzeptidee für die Aufgabenkonstruktion

Ziel des Projektes ist es, Aufgaben zu entwickeln, die thematisch und von den Anforderungen her in den üblichen Übungsbetrieb einer Lehrveranstaltung „Mathematik für Ingenieure" passen. Was aber kann in diesem Zusammenhang „passen" überhaupt heißen? Wir geben kurz unsere Kriterien wieder, die einerseits in der Diskussion in der Mathematikdidaktik zur Klassifikation von anwendungsbezogenen Aufgaben verankert sind (z.B. Maaß, 2010), andererseits aber die spezifischen Rahmenbedingungen von Mathematik-Lehrveranstaltungen für Ingenieure berücksichtigen.

Wir sprechen von einer Konzeptidee „Gute anwendungsorientierte Aufgaben in der Mathematik für Maschinenbauer". Die folgende Abbildung fängt die wichtigsten Stichworte in Kurzschreibweise auf. Im weiteren Verlauf wird auf jeden Unterpunkt einzeln eingegangen, die Begriffe werden geklärt und in ihrer Relevanz und Umsetzbarkeit bewertet.

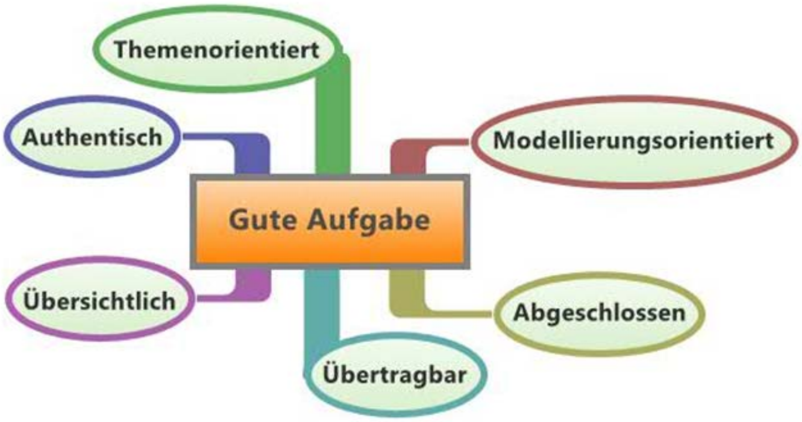


Abb. 1: Die Konzeptidee in Stichworten

Folgende Punkte sollten von einer guten Anwendungsaufgabe in Mathematik für Maschinenbauer erfüllt werden:

- Mathematik-Themenorientiert („Themenorientiert")

Da die Übungsaufgabe in einer Mathematikvorlesung ausgeteilt wird, sollte natürlich das Thema, welches geübt werden soll (z.B. Gleichungssysteme lösen) auch den mathematischen Teil der Aufgabe bestimmen oder mindestens in auffälliger Weise darin vorkommen. Die Brücke zwischen der Mathematik und den Fachinhalten kann nur geschlagen werden, wenn den

Lernenden die Zusammenhänge klar werden. Die aus der Vorlesung bekannte Mathematik soll dabei möglichst so angewendet werden, wie sie auch gelehrt wurde (z.B. Gauß-Verfahren). Hierin unterscheiden sie sich von Aufgaben in Maschinenbauvorlesungen, in denen oft eigene mathematische Praktiken eingeführt und benutzt werden dürfen. Weiterhin zeichnet sich eine - insbesondere im Sinne der Mathematik - gute Aufgabe auch dadurch aus, dass die Studierenden den mathematischen Gedanken des Verallgemeinerns erfahren und umsetzen müssen. Hiermit wird eine Art der Verallgemeinerung angestrebt, die eher in Richtung der Mathematik als in Richtung einer Theorie im Maschinenbau geht. Im Beispiel der Gleichungssysteme kann dies leicht durch Einführung von zusätzlichen Parametern oder Variablen geschehen.

- Maschinenbau-Authentisch („Authentisch")

Kurz gesagt verlangen wir hier, dass keine eingekleidete Mathematik-Aufgabe vorliegt, in der der Maschinenbau-Kontext nur behauptet wird, und unrealistische Zahlenwerte, Annahmen und Fragestellungen verwendet werden. Die Werte müssen in der Praxis vorkommen können und nicht wirken, als ob sie nur für ein „schönes" Ergebnis gewählt wurden (ein Stahlträger der nur wenige Gramm wiegt macht wenig Sinn). Die Verwendung von korrekten Einheiten und für Maschinenbauer relevante Problemstellungen sollten eigentlich selbstverständlich sein. Bei der Erstellung der Aufgabe sollte man sich fragen, ob man in der Realität hier tatsächlich etwas berechnen würde (wenigstens bei sehr großen oder schweren Objekten und Bauvorhaben) oder ob man einfach probieren würde. Eine Aufgabe wirkt sehr künstlich, wenn es keinen Grund gibt das Problem überhaupt mathematisch exakt lösen zu wollen. Dieser Aspekt des Konzepts verhält sich ähnlich zu der Forderung von Alpers (2001) nach relevanten Themen in Projekten für Ingenieursstudierende. Insgesamt soll dieser Punkt auch den Zusammenhang zu den technischen Inhalten des Studiums garantieren und das Interesse an den mathematischen Themen steigern. Dass solch ein Querbezug das Interesse deutlich steigern kann, ließ sich in allgemeiner Form durch Studien an Schülerinnen und Schülern (Krapp, 1998, S. 188), sowie aktuell auch direkt an Studierenden technischer Fächer (Rooch et al., 2014, S.406) zeigen. Um die Maschinenbau-Authentizität sicherzustellen wurden die Aufgaben Dozenten aus Maschinenbau-Lehrveranstaltungen zur Beurteilung vorgelegt. Mit den Studierenden muss ein „didaktischer Kontrakt" (gemeint ist damit eine meist implizit bleibende Vereinbarung zwischen Lehrenden und Lernenden über das Wissen und die Strategien, die bezogen auf diese Aufgaben genutzt werden können und sollen) geschlossen werden, der z.B. beinhaltet, dass zur Lösung maschinenbaulich-physikalisches Wissen nicht nur erwünscht, sondern für die Lösung erforderlich ist und dass im Maschinenbau übliche Validierungsstrategien über Einheiten und Größenordnung der Ergebnisse hier anwendbar sind. Das ist schon deshalb wichtig, weil viele Studierende aus ihrem Mathematikunterricht eher nur eingekleidete Aufgaben kennen, die eine andere Lösungsstrategie erfordern, bei der das Ernstnehmen des Anwendungskontextes sogar manchmal hinderlich sein kann.

- Modellierungsorientiert

Es soll ein stetiger Wechsel zwischen Physik-Interpretation und mathematischen Vorgehen zum Lösen der Aufgabe notwendig sein. Dieser Wechsel darf durch spezielle Aufgabenteile an verschiedenen Stellen wiederholt angeregt werden, doch sollte darauf geachtet werden, dass es nicht möglich ist, die Aufgabe zu lösen ohne den Wechsel Physik-Mathematik-Physik wenigstens einmal vollzogen zu haben. Offene, komplexe Modellierungsaufgaben, wie sie in der schulischen

Mathematikdidaktik gefordert werden, werden i.d.R. auch nicht in Anfängervorlesungen zum Maschinenbau gestellt. Wir wählen deshalb auch hier Aufgaben, die bereits an einem „Realmodell" ansetzen, das auch im Maschinenbau Verwendung findet (vgl. Leiss et al., 2010) und die Studierenden nicht dadurch überfordern, dass selbstständig weitreichende Idealisierungen und Annahmen zu treffen sind.

- Übersichtlich und kognitiv angemessen („Übersichtlich")

Die Studierenden dürfen nicht allein durch die Textmasse abgeschreckt werden die Aufgabe zu bearbeiten, stattdessen ist es angebracht stilistische Mittel wie z.B. Bilder oder Skizzen einzubauen und die Aufgabenstellung möglichst kurz und präzise zu formulieren. Als groben Richtwert sollte man versuchen nicht mehr als eine DIN-A4 Seite zu füllen, so dass nicht umgeblättert werden muss. Natürlich muss zudem die Schwierigkeit der Aufgabe angemessen sein, allerdings nicht nur im mathematischen Teilbereich, sondern insbesondere auch im technischen und physikalischen. Im optimalen Fall wurden die technischen Aspekte bereits in einer Fachvorlesung behandelt, bevor die Aufgabe gestellt wird. So ergibt sich zugleich auch ein Wiederholungseffekt.

- Abgeschlossen bzgl. Maschinenbauwissen („Abgeschlossen")

Es sollte entweder bekanntes Wissen aus den Maschinenbau-Fachvorlesungen verwendet werden oder man muss Informationen zum physikalisch-technischen Hintergrund der Aufgabenthematik oder eventuell vorgegebener Formeln in der Aufgaben selber vermitteln. Um den Aufgabentext nicht zu überlasten (siehe „Übersichtlichkeit") besteht eine Möglichkeit darin, diese Informationen in einem Anhang zu erklären. Für die eigentliche Aufgabenbearbeitung ist der i.d.R. optional für die Studierenden, aber er kann zur Wertschätzung der Authentizität beitragen. Gerade in den ersten Semestern sollten allerdings die Themen so gewählt sein, dass ein Hinweis auf ein Buch oder auf eine gute Internetseite den Anhang auch ersetzen kann. So findet beispielsweise jeder Student zum Thema „Schwerpunkt" sofort die Formeln und gute Erklärungen im Internet und hat die Möglichkeit sich auf eigenen Wunsch hin in kürzester Zeit weiter zu informieren. Im didaktischen Kontrakt muss nur klar sein, dass diese Bearbeitungsstrategien erwünscht und erforderlich sind.

- Prototyp- und Ankerbeispielaufgabe für Mathematik und / oder Maschinenbau („Übertragbar")

Im besten Falle dienen die Aufgaben den Studierenden später als Gedankenbrücke bei anderen Aufgaben ähnlichen Typs. Ein „das ist ja wie in Aufgabe X"-Effekt ist sehr wünschenswert, wenn auch abhängig vom jeweiligen Lernenden. Dieser Punkt lässt sich nur schwer bei der Aufgabenkonstruktion erzwingen, allerdings dient er im Nachhinein als ein zusätzliches Qualitätsmerkmal.

3. Praktische Hinweise zur Aufgabenkonstruktion

Da die Aufgaben im Rahmen einer Mathematikvorlesung verwendet werden sollen, ist es selbstverständlich, dass die Aufgabe einem gewissen Thema zugeordnet sein soll (z.B. Integralrechnung). Dies engt die Auswahl an Themen meist schon derart ein, dass, wenn einmal diese Hürde überwunden ist, die restliche Konstruktion leicht von der Hand geht. Fachwissen und/oder

Expertenaussagen sind grundlegend, um ein geeignetes Sachthema zu finden, wobei auch das Durchblättern von Vorlesungsskripten der Fachvorlesungen erste Ideen liefern kann. So sieht man schnell, dass beispielsweise gerade zu Beginn die Matrizenrechnung im Rahmen der Grundaufgaben zu Kraftsystemen eine zentrale Rolle einnimmt. Wir garantieren durch dieses Vorgehen die Themenorientierung und legen die Grundlage für die Authentizität und Modellierungsorientierung.

Haben wir also sowohl unser mathematisches, als auch unser ingenieurwissenschaftliches Thema gefunden, so müssen wir nach Anwendungen in der Realität Ausschau halten. Gerade hier kann es sehr hilfreich sein, erfahrene Ingenieure oder interessierte Studierende um Hilfe zu bitten, da sie Anwendungen und vor allem die Neigungen der Studierenden einschätzen können. Dabei muss stets auf die Komplexität der Probleme geachtet werden, so dass die benötigte Einleitung (bzw. der Anhang) nicht bereits von der Bearbeitung der Aufgabe abschreckt, und dass insbesondere die Aufgabe auch für die noch Unerfahrenen lösbar und verständlich bleibt. Weiterhin muss die Aufgabe so gestellt werden, dass die Relevanz und die Authentizität des Problems für den angehenden Ingenieur klar zu erkennen sind. Die Frage, wie lange es beispielsweise dauert bis sich ein Bonbon im Mund auflöst kann sicherlich eine spannende Frage sein, aber den realitätsnahen Ingenieur würden wohl eher Eigenschaften von Beton und Stahl interessieren. So sollte man auch auf einfach zu korrigierende Logiklücken achten, womit beispielsweise gemeint ist, dass ein Stahlträger mit einem Gewicht von wenigen Gramm sehr unrealistisch wirkt. Authentische Werte sind „schönen" Rechenergebnissen immer vorzuziehen, insbesondere wenn die Einheiten bekannt und im Fach verwendet werden (z.B. der Elastizitätsmodul von Aluminium). Man sollte sich nicht scheuen, den Studierenden zuzutrauen gewisse Fachbegriffe und Einheiten selbst nachzuschlagen, wenn es um Stoffe und Formeln geht, die für den Ingenieur alltäglich sind, sofern die Studierenden mit ihrem bereits gesammelten Fachwissen in der Lage sein können, die Zusammenhänge zu verstehen. Dies erfordert meist das Einholen einer Expertenmeinung.

Die Modellierungsorientierung zu garantieren ist oft die zweite Hürde bei der Erstellung einer Aufgabe im Sinne des Konzepts. Zunächst muss man darauf achten, dass in dem Aufgabentext möglichst wenig über konkretes mathematisches Vorgehen gesagt wird. So macht es einen enormen Unterschied ob man schreibt „An welchem Punkt setzen Sie die Kraft an?" versus „Bestimmen Sie den Schwerpunkt!". Fragen eignen sich häufig besser um den Modellierungskreislauf zu starten, da sie im Gegensatz zu „Rechenaufträgen", nicht das Vorgehen direkt angeben, sondern bereits diesen ersten Schritt an den Lernenden abgeben und ihm zum Nachdenken anregen. Um nach dem rein mathematischen Teil eine Rückinterpretation in die Physik zu erzwingen, sollte die Aufgabenstellung dies durch direkte Bezüge zum Problem fordern.

Schließlich sollte wenigstens eine Teilaufgabe eine mathematische Verallgemeinerung beinhalten, so dass mathematische Denkweisen zur Anwendung kommen und die Nützlichkeit einer verallgemeinernden Mathematik deutlich werden können. Dies lässt sich meist sehr leicht durch Einführung von Parametern erreichen in dem man das Problem weiter verallgemeinert. So könnte das Gewicht, die Temperatur oder die Gestalt eines Objekts sich verändern oder die zu entwickelnde Maschine soll mehrere Fälle bearbeiten können, ohne dass jeder Fall explizit einzeln berechnet werden muss.

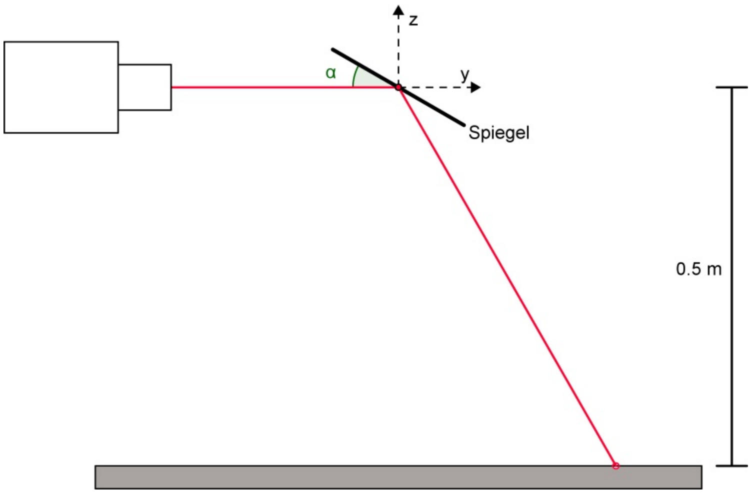
Der letzte Punkt, die Übertragbarkeit, lässt sich, wie bereits angesprochen, nicht immer garantieren, aber zeichnet eine gute Aufgabe im Nachhinein aus.

4. Aufgabenbeispiele

Aufgabe 1: Laserstrahl (Trigonometrie)

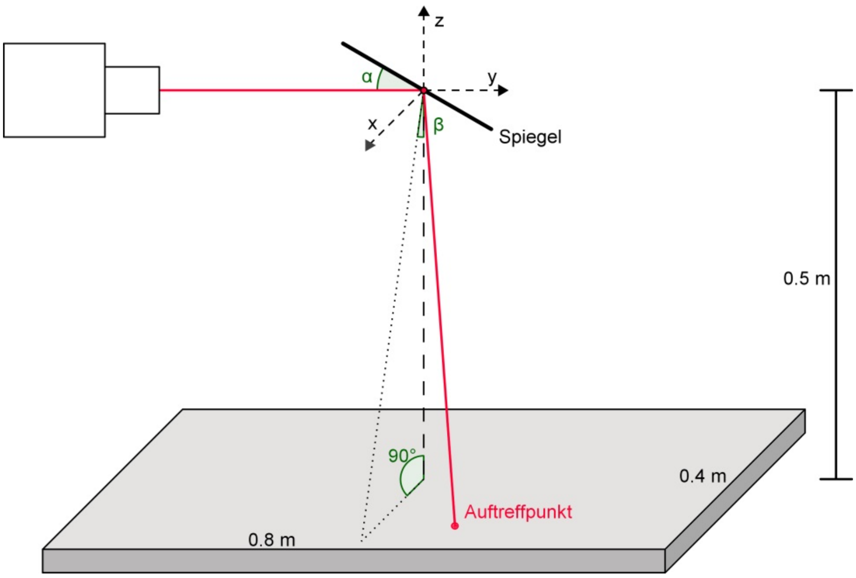
Sie dürfen in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!
Mittels eines Lasers soll eine Metallplatte graviert werden. Aus praktischen Gründen wird nicht der Laser selbst bewegt, sondern nur ein Spiegel, über den der Laserstrahl weitergeleitet wird. Zu diesem Zweck soll eine Maschine konstruiert werden, die den Spiegel ausrichtet. Der Spiegel wurde mittig über der Platte angebracht.

a) Zunächst soll nur eine einzelne Linie in die Platte graviert werden. Die Entfernung zwischen der Drehachse des Spiegels und der Platte beträgt 50 cm, wobei der Spiegel nur um die x-Achse gedreht werden kann (siehe rechte Skizze). Dieser Drehwinkel wird mit α bezeichnet. Bestimmen Sie den Auftreffpunkt des Laserstrahls auf die Platte in Abhängigkeit vom Drehwinkel α ! *Tipp:* Welche Beziehung gilt zwischen Eintritts- und Austrittswinkel?



b) Die Platte ist 80 cm breit und der Laserstrahl soll sich dem Rand nicht mehr als 10 cm nähern. Welche Werte sind in der Teilaufgabe a) für α sinnvoll bzw. erlaubt?

c) Um die komplette Platte treffen zu können kann der Spiegel nun zusätzlich auch um die y-Achse rotieren. Dieser Drehwinkel wird mit β bezeichnet. Geben Sie den Auftreffpunkt des Laserstrahls auf die Platte in Abhängigkeit von α und β an!



d) Beachten Sie, dass die Platte 80 cm breit und 40 cm lang ist, und dass ein Abstand von 10 cm zu allen Rändern eingehalten werden soll! Welche Winkel α, β sind in Teilaufgabe c) also sinnvoll bzw. erlaubt?

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe geht es, im Hinblick auf die Themenorientierung, vor allem um die Trigonometrie und Koordinaten in der Ebene und im Raum. Da die Punkte in Abhängigkeit von einem variablen Winkel bestimmt werden sollen, wird die Idee der mathematischen Verallgemeinerung in diese Aufgabe integriert.

Es war bei der Aufgabenstellung entscheidend, dass ein Laserstrahl eine Gerade darstellt und ohne Krümmungen modelliert werden kann. Da tatsächlich auch mit Lasern Gravuren an Metallplatten durchgeführt werden, sehen wir diese Aufgabe als ausreichend authentisch an. In Gesprächen mit einem Ingenieur aus der Industrie zeigte sich, dass die Aufgabe viele Parallelen zur Realität aufweist, auch wenn vieles selbstverständlich heute von Computern erledigt wird (die aber natürlich auch programmiert werden müssen). In unserer Studie im WS13/14 an der Universität Paderborn (Ergebnisse noch unveröffentlicht) zeigte sich, dass diese Aufgabe auch von den Studierenden als authentisch wahrgenommen wurde.

Im Zuge der Aufgabenbearbeitung müssen die Studierenden zwischen der Skizze und ihrem selbst erstellten mathematischen Modell kontinuierlich hin und her wechseln. Die Aufgabenteile b) und d) sollen dies verstärken. Somit ist die Aufgabe im Sinne des Konzepts modellierungsorientiert.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und die Skizzen wurden von den Studierenden als sehr hilfreich bewertet. Die Aufgabenstellung empfanden sie als gut verständlich (Änderungswünsche seitens der Studierenden sind bereits in die Aufgaben in diesem Bericht umgesetzt worden). Somit ist die Aufgabe in unserem Sinne übersichtlich.

Die technischen Hintergründe darf man, gerade bei Ingenieurstudierenden, als Allgemeinwissen voraussetzen. Lediglich die Faustformel „Eingangswinkel = Ausgangswinkel" ist hier relevant, stellte aber in unserer Studie kein Hindernis dar. Das mathematische Wissen wurde kurz zuvor in der Vorlesung wiederholt (das Meiste ist aus der Schule noch bekannt gewesen), daher ist die Aufgabe abgeschlossen. Es kann sinnvoll sein zudem noch Hinweise zu den Umkehrfunktionen von Tangens und Kotangens (und ggf. spezielle Werte) zu geben.

Die Übertragbarkeit lässt sich schwer einschätzen, jedoch kann hier der Umgang mit trigonometrischen Zusammenhängen und Punktberechnungen sicherlich im Allgemeinen als übertragbar bewertet werden. Insgesamt erfüllt die Aufgabe somit die Konzeptbedingungen.

Die Aufgabe kann leicht abgewandelt werden, indem man die Platte oder die Höhe des Lasers verändert. Man könnte auch fordern, dass eine spezielle Form (sie sollte nur relativ einfach sein, wie z.B. eine Gerade) eingebrannt werden soll und dann nach den Winkeln fragen. Grundsätzlich bieten sich viele Szenerien mit (Laser-)Strahlen und Spiegeln an.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis der trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens
- Grundverständnis von Koordinaten im kartesischen Koordinatenkreuz
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen
- Wissen, dass bei Spiegelung Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel gilt
- Einfache Gleichungen lösen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit trigonometrischen Funktionen
- Umgang mit Koordinaten in der Ebene / im Raum
- Umgang mit Variablen und Parametern

Aufgabe 2: Pendeluhr (Folgen)

Big Ben (Quelle s.u.)

Das Pendel einer Turmuhr sei zwei Meter lang und 150 kg schwer.

Es wird beim Start der Beobachtung aus einer Höhe von 40 cm losgelassen. Eine Periode ist beendet, wenn die Schwingung ihren höchsten Punkt an der Startseite erreicht hat. Zu jedem Beginn einer neuen Periode (außer der Start-Periode) wird das Pendel von einem mechanischen Hämmerchen angeschlagen. Wir nehmen an, dass das Hämmerchen unabhängig von der Schwinghöhe immer dieselbe Energie überträgt.

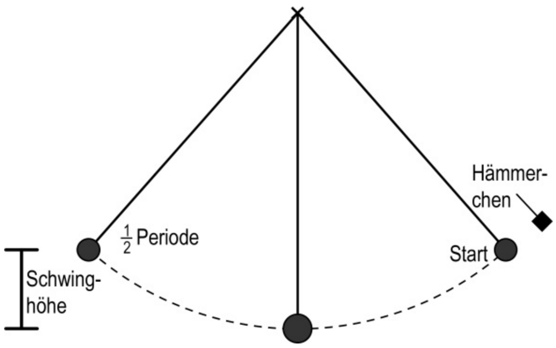
Sie dürfen (bei Bedarf) in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik und externen Quellen verwenden! Runden Sie auf die zweite Stelle nach dem Komma!

a) Das Pendel verliert durch äußere Einflüsse pro Schwingperiode 3% seiner Energie. Durch das Hämmerchen werden zum Anfang jeder Periode 15,89 Joule auf das Pendel übertragen. Die Anfangshöhe des Pendels beträgt 40 cm.

   i) Kompensiert das Hämmerchen den Energieverlust komplett?

   ii) Wie viel Energie besitzt das Pendel nach dem 50. Hammerschlag?

Tipp: Potentielle Energie. Erdbeschleunigung $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$



b) Welche maximale Schwinghöhe wird niemals *unter*schritten, sofern die Mechanik nicht versagt? Wie viel Energie müsste das Hämmerchen übertragen, damit die Starthöhe von 40 cm gehalten werden kann?

c) Beweisen Sie mit mathematischen Mitteln: Wenn das Hämmerchen permanent ausfällt, so wird die Schwinghöhe des Pendels beliebig klein, aber nie Null! Erklären Sie (in wenigen Worten) aus physikalischer Sicht, warum das Pendel bereits nach *endlicher* Zeit still steht!

d) Wenn das Hämmerchen nach dem 50. Schlag ausfällt, wie viele Perioden werden dann noch durchlaufen bis das Pendel weniger als 10 Joule Energie enthält?

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Im Hinblick auf die Themenorientierung geht es in dieser Aufgabe um Folgen und Folgenkonvergenz, sowie, je nach Vorgehen, auch um die geometrische Reihe. In Teil c) wird ein kleiner Beweis gefordert, der hier unsere Verallgemeinerung darstellt.

Im Vergleich zur Laserstrahl-Aufgabe ist der Authentizitätsanspruch hier eventuell etwas geringer erfüllt worden, jedoch sind die äußeren Umstände realistisch und die Studierenden sollten leicht in der Lage sein die hier dargestellte Situation auf andere Problemstellungen ähnlicher Art zu übertragen. In unseren Augen erfüllt die Aufgabe insgesamt den Anspruch. Die Auswertung unserer Studie vom WS13/14 wird zeigen, ob die Studierenden, dies auch so wahrnehmen.

Auch bei dieser Aufgabe müssen die Studierenden während der Aufgabenbearbeitung zwischen der Skizze und ihrem selbst erstellten mathematischen Modell wechseln. Dies wird in allen Aufgabenteilen gefordert. Somit ist die Aufgabe im Sinne des Konzepts modellierungsorientiert.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und ist übersichtlich und ansprechend gestaltet. Eine Bewertung seitens der Studierenden wird nachgereicht.

Die technischen Hintergründe sind durch die Fachvorlesungen oder bei manchen Studierenden gar bereits durch den Physikunterricht in der Schule bekannt. Das mathematische Wissen wird in der Mathematik-Vorlesung behandelt, daher ist die Aufgabe abgeschlossen.

Wir haben festgestellt, dass es viele Studierende sehr schätzen, wenn man zu Teilaufgabe a) die Hinweise gibt: „Potentielle Energie ergibt sich durch Masse mal Höhe mal Erdbeschleunigung.“ Und: „Rekursive Folge definieren, in explizite umwandeln.“ Weiterhin haben wir noch den Logarithmus und dessen Basiswechsel erklärt und eine explizite Folge als eine Lösung für a) angegeben, so dass auch Studierende, die dies nicht geschafft haben, weiter arbeiten können. Hier muss der Dozent entscheiden, ob insbesondere die letzten Hinweise angebracht sind.

Die Übertragbarkeit ist gegeben, da die Pendelbewegung hier während der Bearbeitung auch abseits der Uhr betrachtet wird. Insgesamt erfüllt die Aufgabe somit die Konzeptbedingungen.

Diese Aufgaben lässt sich am besten modifizieren, in dem man das Pendelgewicht und / oder die Schwinghöhe ändert. Die Prozentangabe in a) bietet sich ebenfalls an.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

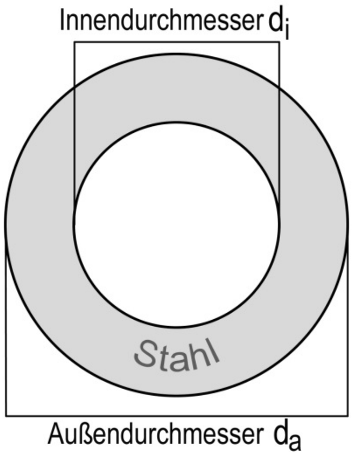
- Verständnis von Folgen (explizit, rekursiv)
- Grenzwertberechnung von Folgen sollte bekannt sein
- Geometrische Reihe muss bekannt sein
- Der Logarithmus sollte bekannt oder als Hinweis unter der Aufgabe ergänzt sein
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen
- Einfache Gleichungen lösen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung

- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Folgen, Reihen, Grenzwert
- Umgang mit Variablen und Parametern
- Umgang mit dem Logarithmus und Ungleichungen

Aufgabe 3: Stahlbalken (Optimierung)

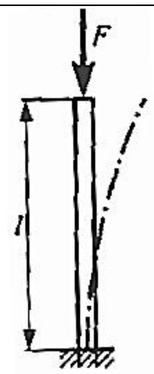


Sie dürfen in folgender Aufgabe Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!

In einer Lagerhalle soll ein neues Regalsystem eingebaut werden. Hierfür wird ein spezieller kreisförmiger Stahlbalken mit Hohlprofil benötigt. Für die Auslegung sind bekannt:
Die Länge des Balkens ist auf $6.5\ m$ festgelegt, der Außendurchmesser beträgt maximal $0.3\ m$, die maximale Betriebslast wird mit $20 \cdot 10^4\ N$ vorgegeben und der geforderte Sicherheitsfaktor beträgt 1.5. Der zu verwendende Stahl hat eine zulässige Normalspannung von $240\ {}^{N}\!/_{mm^2}$. Der Balken wird am Boden festbetoniert, steht senkrecht, wird am oberen Ende an der Wand fest verschraubt und die Verdrehung ist verhindert.

a) Für den gegebenen Sicherheitsfaktor soll die Querschnittsfläche so dimensioniert werden, dass die zulässige Normalspannung nicht überschritten wird. Bestimmen Sie die minimal mögliche Querschnittsfläche! *Alternative Aufgabenstellung: Zeigen Sie, dass die minimal mögliche Querschnittsfläche $A = 1250\, mm^2$ beträgt.*

b) Für die in a) berechnete Querschnittsfläche sollen Innen- und Außendurchmesser des Balkens so gewählt werden, dass die Knickkraft unter den gegebenen Voraussetzungen **maximal** ist. Bestimmen Sie Innen- und Außendurchmesser! Ist die berechnete Knickkraft ausreichend?

Knickfall I	**Knickfall II**	**Knickfall III**	**Knickfall IV**
			
$l_k = 2 \cdot l$	$l_k = l$	$l_k = 0.7 \cdot l$	$l_k = 0.5 \cdot l$
Der Knickfall der Aufgabe muss selbst bestimmt und begründet werden!			

Es gilt Knickkraft $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_K^2}$. J ist hier das Flächenträgheitsmoment $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$ wobei der Elastizitätsmodul $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$, d_a und d_i Außen- bzw. Innendurchmesser des Balkens und l_K die Knicklänge (siehe Tabelle) sind. Wird mehr Kraft auf den Balken ausgeübt, als er an Knickkraft aushalten kann, so knickt er.

c) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe b), dass bezüglich der Knickkraft ein Vollprofil bei gleicher Querschnittsfläche immer ungünstiger ist als ein Hohlprofil! Halten Sie dabei das Material, die Knicklänge und die Querschnittsfläche allgemein.

Es ist in dieser Aufgabe vorgesehen, dass Sie technische Begriffe, die Ihnen unklar sind, selbstständig recherchieren.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Der ingenieurwissenschaftliche Hintergrund der Aufgabe ist die Berechnung eines Stahlbalkens, der speziellen Anforderungen genügen soll, während die dazu passende mathematische Aufgabe als Optimierungsproblem beschrieben werden kann. Die Angaben bzgl. der Auslegung sind so gewählt, wie sie tatsächlich in der Realität auftauchen können, da ein Kunde solch einen Balken benötigen könnte. Zwei Dinge zeichnen diese Aufgabe besonders aus: Erstens muss die gegebene Situation erkannt und der richtige Knickfall muss bestimmt werden und zweitens leitet die Aufgabenbearbeitung einen Beweis für eine wichtige physikalische Tatsache her, nämlich dass ein Hohlprofil knickstabiler ist, als ein Vollprofil. Dieser letzte Punkt ist sowohl eine mathematische, als auch eine physikalische Verallgemeinerung und erfüllt damit gleich in zweifacher Hinsicht die Bedingungen, die entsprechend durch unser Konzept gestellt werden. Authentizität und Themenorientierung sind also abgedeckt.

Der stetige Wechsel zwischen Mathematik und Physik wird durch die Aufgabe gefordert, da die Nutzung der Einheiten und das zu betrachtende Objekt so auch in einer Fachvorlesung vorstellbar wären. Außerdem regt die Aufgabe an die Ergebnisse zu validieren, da die Situation gut vorstellbar ist. Die Aufgabe ist daher modellierungsorientiert gestaltet.

Auch wenn die Aufgabe etwas mehr als eine Seite beansprucht, so ist sie dennoch übersichtlich und für die zukünftigen Ingenieure ansprechend gestaltet. Diese Vermutung wird durch die derzeit laufende Studie geprüft werden. Eins vorne weg: Unsere Befürchtung, die Aufgabe könnte zu schwer sein, konnte in Stichproben der Studentenbearbeitungen nicht bestätigt werden. An dieser Stelle werten wir die Aufgabe im Sinne des Konzepts als übersichtlich.

Es ist stark von den Fachvorlesungen abhängig, ob die technischen Hintergründe bereits bekannt sind, wenn diese Aufgabe ausgeteilt wird, jedoch sind auch hier sämtliche Fachbegriffe typisch und können leicht recherchiert werden (eine Quelle wurde am Ende der Aufgabe genannt, wobei zu erwarten ist, dass eher die Internetsuche von den Studierenden favorisiert wird). Durch die Angabe der Einheiten und der Quelle ist die Aufgabe als abgeschlossen zu werten.

Bei Aufgabenteil b) ist es sinnvoll den folgenden Tipp zu geben: „Entwickeln Sie zunächst eine Knickkraft-Funktion in Abhängigkeit von dem Innendurchmesser.“ Wir geben zudem am Ende der Aufgabe noch ein Foto hinzu, welches die Knickfälle anschaulich erläutert.

Eine Übertragbarkeit kann hier fast garantiert werden, da hier sowohl mehrere Knickfälle, als auch verschiedene Formen für den Stahlbalken möglich sein können. Insgesamt erfüllt die Aufgabe also unsere Konzeptbedingungen.

Diese Aufgabe lässt sich leicht modifizieren, in dem man Länge, Außendurchmesser und / oder die maximale Betriebslast ändert. Man könnte auch die Situation so ändern, dass ein anderer Knickfall gewählt werden muss.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Kräften, Sicherheitsfaktoren, Normalspannung, Elastizitätsmodul
- Umgang mit Gleichungen in denen Variablen und Parameter vorkommen
- Umgang mit einfachen Ungleichungen, Abschätzung durch Maximum
- Differenzieren von Polynomen, Hoch-/Tiefpunkte bestimmen, Anwendung des Extremwertsatzes (Extrema an Intervallrändern)
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Kräften, Sicherheitsfaktoren und typischen Einheiten aus der Statik
- Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen und Parametern
- Differenzierung einer Funktion mit Parametern
- Extremwertbestimmung (insb. an den Rändern)

Erklärung verwendeter Fachbegriffe:
In Richard u. Sander (2006) finden sich auf den Seiten 70-71 und 164-167 technische Hintergründe zu der Aufgabe. Es folgt hier eine kurze Erklärung der wichtigsten Begriffe aus der Aufgabe:

Max. Betriebslast: Max. Beanspruchung in Newton, die bei Benutzung erwartet wird.

Normalspannung: Spannung bei Beanspruchung. Wird mehr Kraft ausgeübt, dann verformt sich das Objekt. Es kann z.B. Beulen/Dellen bekommen bevor es schließlich knickt. Die Formel ist Kraft durch Fläche (analog zu Druck).

Sicherheitsfaktor: Soll z.B. ein Stuhl eine 100kg schwere Person tragen können bei einem Sicherheitsfaktor von 1,5, so muss der Stuhl so gebaut werden, dass er auch 150kg aushält.

Knickkraft (Knicklast): Wird mehr Kraft aufgewendet, dann knickt der Stab. $F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_K^2}$.

Einheit ist Newton.

Elastizitätsmodul E: Ein Materialkennwert aus der Werkstofftechnik, der den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Verformung eines festen Körpers beschreibt. Für Stahl kann man E=210000 N/mm^2 wählen. Hoher Wert = hart (Diamant 1.000.000 N/mm^2), kleiner Wert = weich (Gummi 50 N/mm^2).

Flächenträgheitsmoment J: Das Flächenträgheitsmoment ist eine aus dem Querschnitt eines Balkens abgeleitete geometrische Größe, die den Widerstand eines Bauteiles gegenüber einer Beanspruchung auf Biegung und Verdrehung angibt. Bei einem rundem Hohlprofil gilt: $J = \frac{\pi}{64}\left(d_a^4 - d_i^4\right)$ (Einheit: m^4).

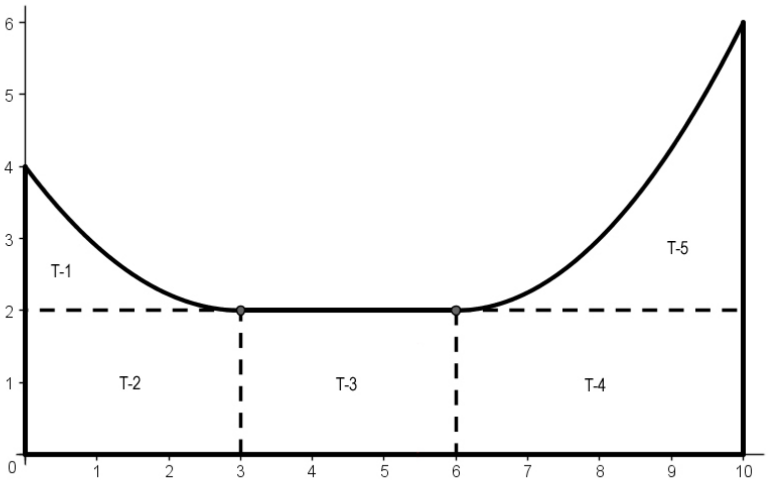
Aufgabe 4: Halfpipe (Integralrechnung)

Eine Halfpipe (homogene Steckkonstruktion der Teile T-1 bis T-5, siehe Skizze, Angaben in Meter) soll mittels einer einzelnen konstanten Kraft verschoben werden. Die Konstruktion steht auf dem Boden und ist nicht fest verankert. Die gestrichelten Linien geben in der Skizze die Steckstellen an. Das Foto ist nicht maßstabsgetreu und dient nur zur Veranschaulichung.

Halfpipe (Quelle s.u.)

Sie dürfen Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden.

a) Bestimmen Sie einen Punkt der Seitenfläche (siehe Skizze), an dem Sie die Kraft ansetzen, ohne dass sich die Halfpipe beim Verschieben dreht! Die benötigten Informationen können eindeutig aus der Skizze abgelesen werden. Die Berechnungen müssen exakt sein (T-1 und T-5 dürfen also nicht durch Dreiecke approximiert werden)! Ist die Lösung eindeutig? *Alternative zur Eindeutigkeit: „Muss man tatsächlich auch den y-Wert („Höhe“) des Punktes bestimmen? Begründen Sie!“*



b) Für die praktische Umsetzung liegt der Schwerpunkt etwas zu weit links. Was passiert mit dem Schwerpunkt, wenn man T-1 oder T-5 entfernt? Vergleichen Sie die Auswirkungen auf den Schwerpunkt und entscheiden Sie, welches der beiden Teile Sie entfernen würden! Eine Begründung ohne Rechnung genügt!

c) Man entscheidet sich T-1 zu entfernen. Berechnen Sie den neuen Schwerpunkt! Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a). Um wie viele Zentimeter wird durch das Entfernen von T-1 der Schwerpunkt nach rechts / links und nach unten verschoben?

d) Bei zukünftigen Arbeiten mit ähnlichen Halfpipes wird der linke obere Randpunkt von T-1 weiter oben oder unten liegen, nämlich zwischen den Punkten (0|2) und (0|6). Diese Veränderung möchte man in der entsprechenden Situation schnell in die Berechnung einfließen lassen können. Zeigen Sie zunächst, dass man die Oberfläche von T-1 mit $f_{1,t}(x)=\dfrac{t-2}{9}x^2+\dfrac{4-2t}{3}x+t$ für $x\in[0,3], t\in[2,6]$ beschreiben kann (wobei der Koordinatenursprung wie in der Skizze liegt). Geben Sie den Schwerpunkt der kompletten Seitenfläche in Abhängigkeit von t an! In welchem Bereich kann der Schwerpunkt liegen?

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Die Authentizität der Aufgabe wird hier weniger durch den direkten Nutzen der Lösung für den Alltag oder die Arbeitswelt hergestellt, sondern viel mehr durch die Übertragbarkeit des Problems auf andere Situationen. Schwerpunktberechnungen nehmen in den verschiedensten Bereichen der Ingenieure eine wichtige Rolle, allerdings sind diese Situationen oft derart komplex, dass sie nicht in einer vergleichsweise kurzen Aufgabe behandelt werden können. Hier wird versucht ein Kompromiss zwischen Authentizität und Anfängerfreundlichkeit herzustellen, wobei wir davon ausgehen, dass den Studierenden dies klar ist.

Tatsächlich hat sich einer qualitativen Videostudie im Sommersemester 2013 gezeigt, dass die Teilnehmer (Maschinenbaustudierende des ersten Semesters) die Aufgabe als verständlich und interessant bewerten und davon überzeugt sind, dass sie eine Verbindung zwischen der Mathematik und den hier behandelten Fachthemen (Schwerpunkt) herstellt. Der Schwierigkeitsgrad wurde als angemessen bewertet.

Den Wechsel zwischen Mathematik und Physik regt die Aufgabe durch die Arbeit mit der Skizze, dem Foto und der Problemstellung an. Man beachte, dass in Teilaufgabe a) nicht nach dem Schwerpunkt gefragt wird, sondern nach einem speziellen Punkt der Seitenfläche. Die Studierenden müssen erst selbst entdecken, dass hier nach dem Schwerpunkt gefragt wird und müssen dann auf ihr Wissen aus den Fachvorlesungen zurückgreifen.

Die Polynominterpolation, die sowohl in a), als auch in d) gefordert wird, sorgt dafür, dass die Skizze immer wieder in den Vordergrund gerückt wird. Eine Validierung der Ergebnisse ist während der gesamten Aufgabe gut umsetzbar, da man auch durch das Alltagswissen bereits eine Vermutung hat, wo ungefähr der Schwerpunkt liegen muss.

Eine mathematische Verallgemeinerung wird im letzten Aufgabenteil gefordert, da hier eigenständig ein Parameter eingeführt werden muss. Insgesamt erfüllt die Aufgabe also unsere Konzeptbedingungen.

Möchte man die Aufgabe abändern, so bietet es sich an, dass man eine andere Skizze wählt. Man sollte dabei lediglich beachten, dass schwierigere Oberflächenfunktionen unter Umständen zu extrem rechenaufwendigen Integralbestimmungen führen können. Möchte man jedoch schwierigere Integrale einbauen, so sollte man die Aufgabe kürzen und / oder klar machen, dass es genügt, die x-Koordinaten zu bestimmen.

Da die Aufgabe generell viel Rechenarbeit erfordert (insbesondere, wenn man auch die y-Koordinaten bestimmt), empfehlen wir ggf. Teilaufgabe c) entweder zu streichen oder nur nach dem Rechenweg zu fragen, ohne ihn umzusetzen.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

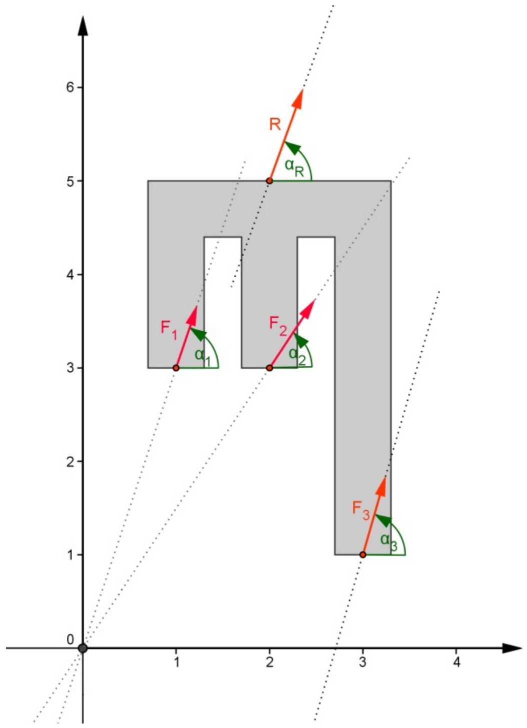
- Verständnis vom Schwerpunkt
- Integralrechnung (man muss Polynome integrieren können)
- Mathematisierungsmuster/Modellierungsmuster (Fähigkeit den technischen Aspekt zu erkennen und auf TM-Wissen zurück zu greifen)
- Umgang mit Skizzen, Koordinaten, Variablen, Parametern
- Polynominterpolation (kann man ggf. weg lassen, wenn man einfach die Funktionen angibt. Empfehlenswerter ist aber dieses wichtige Thema zu üben)
- Räumliches Vorstellungsvermögen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation / Validierung
- Umgang mit Schwerpunkt und Verständnis dessen
- Umgang mit Koordinaten
- Polynominterpolation (lineare Gleichungssysteme oder Scheitelpunktform)
- Integration
- Umgang mit Paramatern / Verallgemeinerung

Die theoretischen Grundlagen, die die Studierenden in der Vorlesung zur Technischen Mechanik gehört haben sollten, kann man beispielsweise in Mahnken (2011) auf den Seiten 187 und 197 finden.

Aufgabe 5: Bauteil belasten (Lineare Gleichungssysteme)



Ein Bauteil, dessen Auflager für die äquivalente Kraft $R = 981kN$ bei Richtungswinkel $\alpha_R = 70°$ ausgelegt sind, wird in einer neuen Belastungssituation durch die Kräfte F_1, F_2, F_3 beansprucht (siehe Skizze).

Sie dürfen beim Bearbeiten der Aufgabe ihr Wissen aus der Technischen Mechanik nutzen!

a) Bei einer Messung der neuen Situation zeigt sich, dass die Belastungskräfte über die in der Skizze gezeichneten Wirkungslinien mit Winkeln
$$\propto_1 = 71.57°, \propto_2 = 56.31°, \propto_3 = 74°$$
übertragen werden können. Wie groß dürfen die Kräfte F_1, F_2, F_3 sein, ohne dass die Auflager verstärkt werden müssen?
Die Angriffspunkte sind ganzzahlig (in Meter) aus der Zeichnung ablesbar.
Hinweis: Die Wirkungslinie der Kraft R geht in der Skizze <u>nicht</u> durch den Ursprung.
Werte kleiner als 10^{-4} müssen als 0 gewertet werden.

b) Da dieses Problem in Zukunft öfter auftreten kann, soll die Rechnung verallgemeinert werden. Ein gleiches Bauteil soll, wie zuvor beschrieben, belastet werden, allerdings wird die Belastungskraft F_3 über eine Wirkungslinie mit noch unbekannten Winkeln übertragen. Die Winkel $\propto_1$ und $\propto_2$ werden aus Aufgabenteil a) übernommen.
Für welche Richtungswinkel sind die Kräfte in dem beschriebenen Szenario eindeutig bestimmbar? Welche neuen Situationen entstehen durch die übrigen Winkel?

c) In einer konkreten Situation kommen nur die Richtungswinkel $\propto_1 = 71.57°$, $\propto_2 = 56.31°$ in Frage, doch die dritte Kraft (F_3) kann nun auf der Strecke zwischen den Punkten $(2.7 \mid 1)$ und $(3.3 \mid 1)$ angreifen. Welche Richtungswinkel $\propto_3$ führen zu eindeutigen Werten für F_3? Interpretieren Sie anschließend die Bedeutung der ausgeschlossenen Winkel für die vorliegende Situation!

d) Wir verwenden noch einmal die Werte aus Aufgabenteil a). Ist es möglich die dritte Kraft (F_3) zu ignorieren? Sie dürfen Ihre Antwort mathematisch oder physikalisch begründen.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe wird eines für die meisten Studierenden tendenziell eher leichteres mathematisches Thema (lineare Gleichungssysteme) mit einem anspruchsvollen, aber aus dem ersten Semester bekannten technischen Thema verknüpft. Diese Aufgabe wird an der Uni Paderborn bedingt durch den Themenaufbau in der Mathematikvorlesung erst im zweiten Semester verwendet.

Die Grundidee besteht darin, dass ein in der Praxis relevantes Problem möglichst leicht verständlich beschrieben werden soll. Eine Idealisierung ist notwendig um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten und die Einstiegszeit zu minimieren. Das Problem soll aber so allgemein sein, dass man sich leicht reale Situationen dazu überlegen kann. Wie genau ein Bauteil in der Praxis aussehen mag und welchen Nutzen es hat, ist für die Aufgabe nicht relevant und würde nur unnötig von dem Problem ablenken und den zu lesenden Text verlängern. Die Idee für die Aufgabe kam auf, als wir bei Mahnken (2011, S. 118-121) nach Themen gesucht haben, in denen lineare Gleichungssysteme Verwendung finden.

Es geht in der Aufgabe darum, dass man zunächst die Situation (Belastung) verstehen muss um dann eine physikalische Problemanalyse (Kräfteaufteilung, Vergleich, Sicherheit) und schließlich eine Mathematisierung (LGS) durchführen zu können.

Aus dem Einleitungstext der Aufgabe soll der Studierende erkennen, dass die Befestigungen eines Bauteils (z.B. Schrauben) belastet werden und man die insgesamt maximal zulässige Belastung kennt. In der Praxis tauchen nun an drei Stellen Kräfte auf und der Maschinenbauer muss entscheiden, ob die Auflager der Belastung standhalten können. Dies ist ein sehr typisches Beispiel für eine Sicherheitsprüfung, auch wenn es im Sinne einer zeitnah lösbaren Aufgabe vereinfacht wurde. Für uns ist die Aufgabe insgesamt als authentisch zu werten.

Durch die Skizze und die konkreten Fragen hinsichtlich der gegebenen Situation wird die Modellierungsorientiertheit der Aufgabe gefördert. Weiterhin wird auch (z.B. in b)) die von uns geforderte mathematische Verallgemeinerung von den Studierenden verlangt. Die Abgeschlossenheit wird gewährleistet, da der fachspezifische Stoff bereits im ersten Semester in der Technischen Mechanik behandelt sein sollte. Da die Aufgabe nicht mehr als eine Seite benötigt und durch die Skizze ergänzt wird, ist sie übersichtlich.

Letztlich ist sie, wie weiter oben bereits beschrieben, übertragbar und auf Grund der thematischen Anbindung an die Technische Mechanik auch abgeschlossen. Damit erfüllt die Aufgabe unser Konzept.

Möchte man die Aufgabe abändern, so sollte man darauf achten, dass zwei Kräfte weiterhin durch den Ursprung gehen. Die Form des Bauteils kann man gut ändern, sowie auch die Resultierende in Länge und Richtung (sofern diese nicht durch den Ursprung geht).

Wir geben bei Teilaufgabe b) den Tipp: „Wie prüft man am einfachsten die Invertierbarkeit einer Matrix?“. Es bleibt dem Dozenten überlassen, ob dieser Tipp gegeben werden soll, oder nicht.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Kräften
- Zerlegung einer Kraft bei nicht-zentralen Kraftsystemen (Gleichgewichtsbedingungen, Momente),

- Umgang mit fachtypischen Aufgabenbeschreibungen und Idealisierungen (Bedeutung der Skizze und der Fachwörter wie „Richtungswinkel" und „Kraft")
- Aufstellen und Lösen von linearen Gleichungssystemen
- Determinante berechnen und interpretieren können
- Grundlegendes Verständnis der Sinus und Cosinus Funktionen
- Umgang mit Gleichungen in denen Variablen und Parameter vorkommen
- Umgang mit Skizzen und räumliches Vorstellungsvermögen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Kräften und Koordinaten
- Kräftegleichgewicht berechnen und interpretieren
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Determinante bestimmen und interpretieren

Aufgabe 6: Heißer Stahl (Differentialgleichungen)

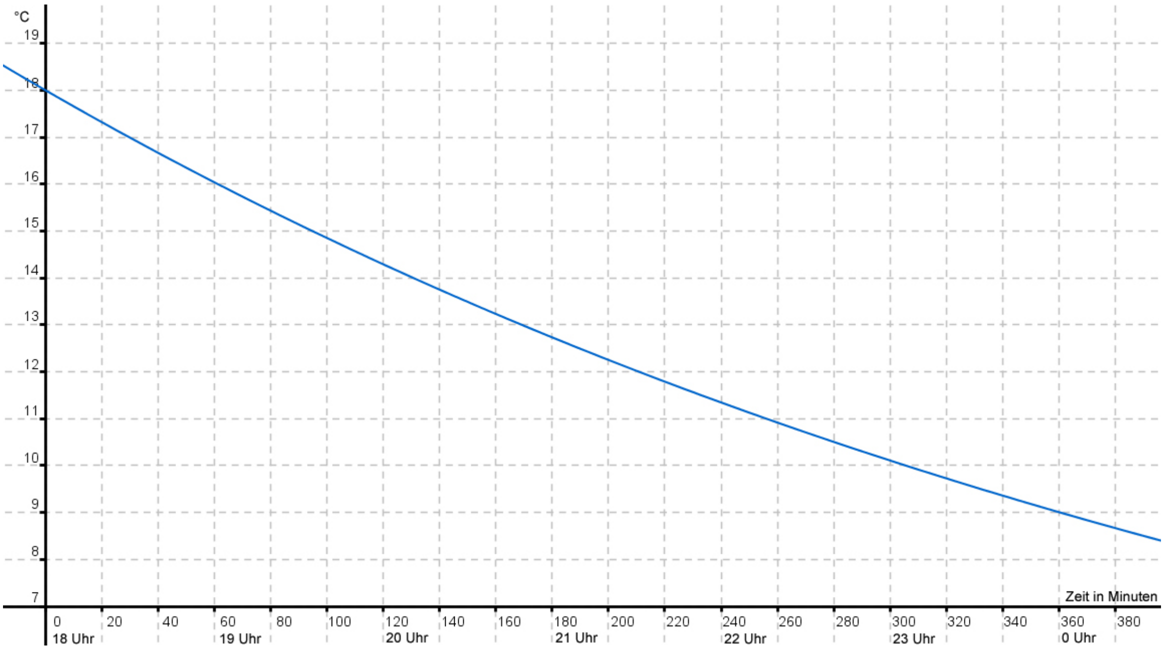
In einer Gießerei sollen ab 18 Uhr zwei frisch gegossene Stahlbalken von $1250°C$ abkühlen, um sie später weiterverarbeiten zu können.

Gießerei Kiel (Quelle s.u.)

a) Die Halle, in der sich der erste Balken befindet, wird konstant auf $25°C$ gehalten. Nach zwei Stunden stellen Sie fest, dass die Temperatur des Balkens auf $785°C$ gefallen ist. Um wie viel Uhr wird der Balken voraussichtlich auf $300°C$ abgekühlt sein?
<u>Tipp:</u> Die Abkühlgeschwindigkeit hängt von dem jeweils aktuellen Temperaturunterschied zwischen Objekt- und Umgebungstemperatur, sowie von einer Konstanten ab. Diese ist für alle in den Aufgabenteilen dargestellten Fälle gleich.

b) Ihr Chef will, dass die Weiterverarbeitung in Zukunft bereits nach der Hälfte der Zeit möglich ist. Auf wie viel Grad müsste die Halle dazu konstant temperiert werden? Was entgegnen Sie Ihrem Chef?

c) Der zweite Balken soll vor der Halle an der kühlen Nachtluft abkühlen. Im Diagramm ist der erwartete Außentemperaturverlauf von 18 Uhr bis Mitternacht angegeben. Welche Temperatur hat der zweite Balken zu dem Zeitpunkt, wenn der erste (siehe a)) bereit zur Weiterverarbeitung ist?
<u>1. Hinweis:</u> Interpolieren Sie den Temperaturverlauf mit einer Exponentialfunktion.
<u>2. Hinweis:</u> Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, so gehen Sie von 0:15 Uhr für den Zeitpunkt der Weiterverarbeitung des ersten Balkens aus.



Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

In dieser Aufgabe wird eine Anwendung der Differentialgleichungen aufgezeigt und ist üblicherweise für Maschinenbaustudierende Ende des zweiten / Anfang des dritten Semester gedacht, da oft erst zu diesen Zeitpunkten das mathematische Thema behandelt wird.

Sofern das Abkühlungsgesetz nach Newton nicht bekannt ist oder durch zusätzliche Anmerkungen in der Aufgabe verboten wird, muss zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen gelöst werden. Im letzten Aufgabenteil ist ein lineares Anfangswertproblem aufzustellen und zu lösen. Die Themenorientierung ist damit klar gegeben.

Der Anwendungsbezug ist aus unserer Sicht authentisch, da die Probleme realistisch und für Maschinenbauer interessant sind. Insbesondere Aufgabenteil b) zeigt deutlich auf, welche Fehlvorstellungen viele Menschen von exponentiellem Wachstum haben und dürfte einige Studierende überraschen.

Die Aufgabe ist im Sinne unseres Konzepts modellierungsorientiert, da die Aufgabe nicht aus mathematischen Forderungen besteht, sondern ganz klar den Bezug zur Realität fordert. Die Ergebnisse können anschaulich validiert werden und die Rückführung zur Situation wird durch die Aufgabenstellungen stets gefordert. So wird beispielsweise nach den konkreten Uhrzeiten und nach der Antwort für den Vorgesetzten gefragt.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze und das Foto aufgelockert. Wir empfinden sie daher als übersichtlich. Durch die einfachen Funktionen und leicht zu lösenden Integrale (Exponentialfunktionen) ist auch der Schwierigkeitsgrad angemessen. Eine Befragung hierzu steht allerdings erst noch an.

Die Abgeschlossenheit ist erfüllt, da die hier behandelten Themen nicht unbekannt für die angehenden Maschinenbauingenieure sind.

Die Übertragbarkeit der Aufgabe kann angenommen werden, da es sich um klassische Abkühlungsprozesse handelt, die häufig in der Realität ihre Relevanz haben.

Zum Modifizieren der Aufgabe kann man die Uhrzeiten und die Gradzahlen (°C) ändern. Man sollte lediglich darauf achten, dass die Werte weiterhin sinnvoll bleiben.

Diese Aufgabe eignet sich übrigens auch hervorragend als Präsenzaufgabe, also als Einzel- und/oder Gruppenaufgabe mit Unterstützung durch Tutoren.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Gewöhnlichen Differentialgleichungen (getrennte Variablen und lineare DGL) müssen bekannt sein und man sollte die Lösungsmethoden kennen
- Einfache Integralrechnung
- Entweder ist das Abkühlungsgesetzt nach Newton bekannt oder es muss hergeleitet werden (durch den Tipp bei Teilaufgabe a))
- Umgang mit Zeit und Temperatur im Koordinatenkreuz
- Einfache Gleichungen lösen können

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung

- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Aufstellen von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Lösen von Anfangswertproblemen (getrennte Variablen und lineare GDGL)

Aufgabe 7: Flugsicherheit (Analytische Geometrie)

An einem in ebener Umgebung gelegenen Flughafen startet um 9:00 Uhr ein Airbus A330-200 Richtung Norden.

Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn steigt das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit $162\,\text{kn}$ unter einem ebenfalls als konstant angenommenen Startwinkel von 20° näherungsweise geradlinig auf.

A330-200 (Quelle s.u.)

a) Um wie viel Uhr wird der Airbus seine Reisehöhe von 35000 ft erreicht haben?

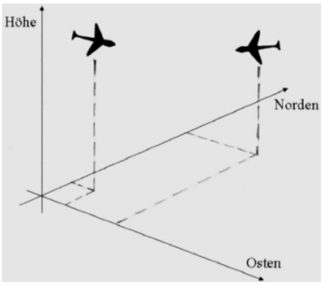
Während des Fluges des Airbus befindet sich ebenfalls eine Boeing 767-400 in der Luft. Die örtliche Flugsicherung verzeichnet die folgenden Daten der beiden Flugzeuge:

Flugzeug / Uhrzeit	11:10:10	11:10:15
Airbus A330-200	(100, 100, 10370)	(300, 300, 9195)
Boeing 767-400	(-300, 500, 10230)	(100, 100, 11266)
Flugzeugpositionen in (Norden, Osten, Höhe) in Meter vom Tower aus gesehen.		

b) Mit welcher Geschwindigkeit sind die Flugzeuge durchschnittlich unterwegs?

c) Untersuchen Sie, ob die Flugzeuge ihre Flüge in jedem Fall sicher, d.h. kollisionsfrei, hinter sich bringen können. Wie nahe könnten sich die Flugzeuge unabhängig von ihrer tatsächlichen Position (also unab. von der Zeit) kommen?

d) Angenommen der Airbus würde seinen Kurs aus b) exakt so beibehalten. Bei welchen Koordinaten würde er auf dem Boden aufsetzen?



Hintergrundinformationen:

Die Flugzeuge bewegen sich auf fest vorgegebenen Flugverkehrsstrecken, ähnlich wie Autoverkehrsstraßen. Die Strecken sind durch Navigationsanlagen am Boden oder durch Koordinatenschnittpunkte gekennzeichnet. Die Bordsysteme im Flugzeug empfangen die Signale von den Bodenanlagen oder via Satellit und führen das Flugzeug automatisch über das Flight Management System oder leiten die Signale an den Piloten weiter. Neben dem Piloten tragen Fluglotsen die Verantwortung für die Flugzeuge. Sie sind während des gesamten Fluges über den Flugweg informiert. Mit Hilfe von Radarantennen, die im ganzen Bundesgebiet verteilt sind, wird die Flugstrecke überwacht. Die Antennen messen in zeitlichen Abständen die Entfernung des Flugzeuges zur Antenne, die Höhe des Flugzeuges und die Richtung als Winkel. Die Daten werden vom Computer in drei Koordinaten - Norden, Osten und Höhe - (jeweils in Meter) übersetzt. Das ermöglicht eine Darstellung auf dem Monitor.

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Diese Aufgabe stammt in ihrer ursprünglichen Fassung von Dr. Sebastian Hage-Packhäuser und wurde für die Veranstaltung „Mathematik 1 für Maschinenbauer" an der Universität Paderborn entwickelt. Im Sinne des Konzepts wurden einige Änderungen durchgeführt, doch die Grundidee blieb bestehen.

In dieser Aufgabe wird eine Anwendung der analytischen Geometrie aufgezeigt, da es hier insbesondere um Entfernungen und Schnittpunkte von Geraden und Ebenen geht. Die Themenorientierung ist damit geklärt.

Die Authentizität des Anwendungsbezugs ist weniger offensichtlich als bei anderen Aufgaben, was einer der Hauptgründe war, weshalb wir diese Aufgabe nicht bereits in die erste Version dieses Reports eingefügt hatten. In unserer Studie im Wintersemester 2013/14 an der Universität Paderborn (Details hierzu werden derzeit für eine Veröffentlichung zusammengefasst) haben wir unter anderem die Flugsicherheitsaufgabe gestellt. Die speziell zu dieser Aufgabe befragten Studierenden (hier N=57) haben bzgl. der Authentizität auf einer Likert-Skala von „Trifft gar nicht zu" (1) bis „Trifft ganz genau zu" (6) im Median mit 4 gestimmt. Dieses Ergebnis ist nicht überragend, aber wir möchten diese Aufgabe dennoch als Anregung anbieten um eventuell einen authentischeren Anwendungsbezug finden zu können (Uboote wären ggf. eine Alternative).

Die Aufgabe entspricht hinsichtlich der Modellierungsorientiertheit weitestgehend unserem Konzept, da ein Wechsel vom Realmodell zur Mathematik nötig ist. Verglichen mit den anderen Aufgaben findet der Wechsel hier auf einem deutlich niedrigeren Niveau statt und ist weit weniger kompliziert als beispielsweise bei der Aufgabe „Bauteil belasten".

Auch diese Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze und das Foto aufgelockert. Sie ist vom Schwierigkeitsgrad völlig akzeptabel und lediglich die Abstandsberechnung wird erfahrungsgemäß für die Studierenden etwas anspruchsvoller sein. Die Aufgabe ist also im Sinne des Konzepts übersichtlich.

Die Abgeschlossenheit ist klar, da hier einerseits kaum echtes Maschinenbauwissen verlangt wird und andererseits wurden Hintergrundinformationen eingefügt.

Da die analytische Geometrie, in der Form wie sie im ersten Semester gelehrt wird, ein an sich recht anschauliches Gebiet ist, kann man davon ausgehen, dass die Aufgabe übertragbar im Sinne des Konzepts ist.

Die Aufgabe lässt sich leicht durch modifizieren der Uhrzeiten o.ä. ändern. Eine alternative Aufgabe ließe sich beispielsweise mit U-Booten oder Fischen (anstatt Flugzeugen) entwickeln. Eine Vereinfachung der Situation wird weiterhin notwendig sein, sofern man lediglich Ebenen und Geraden verwenden will. Wie wir in einer Studie feststellen konnten, sorgt dies aber in keiner Weise zu einer schlechteren Beurteilung der Aufgabe durch die Studierenden. Sie waren über den Anwendungsbezug erfreut.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Verständnis von Vektoren und Geradengleichungen
- Sinussatz oder alternative Berechnungen von Seitenlängen eines Dreiecks
- Umgang mit Koordinaten und einfachen linearen Gleichungssystemen

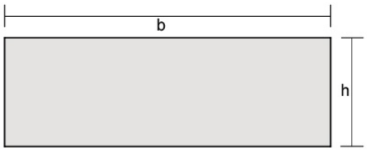
- Räumliches Vorstellungsvermögen
- Verschiedene Maßeinheiten umrechnen können (Dreisatz)
- Formel zur Abstandsberechnung zweier windschiefer Geraden oder Herleitung über Hesse-Normalform (Normalenvektor in beiden Fällen benötigt)

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit Vektoren / Koordinaten und Sinus
- Geradengleichungen aufstellen und gleichsetzen
- Abstandsberechnungen von windschiefen Geraden

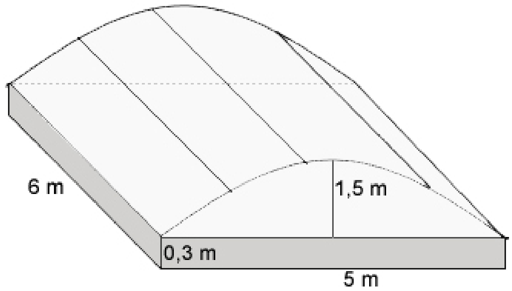
Aufgabe 8: Brücke im Winter (Differentialgleichungen)

Sie dürfen Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!



Querschnitt des Balkens

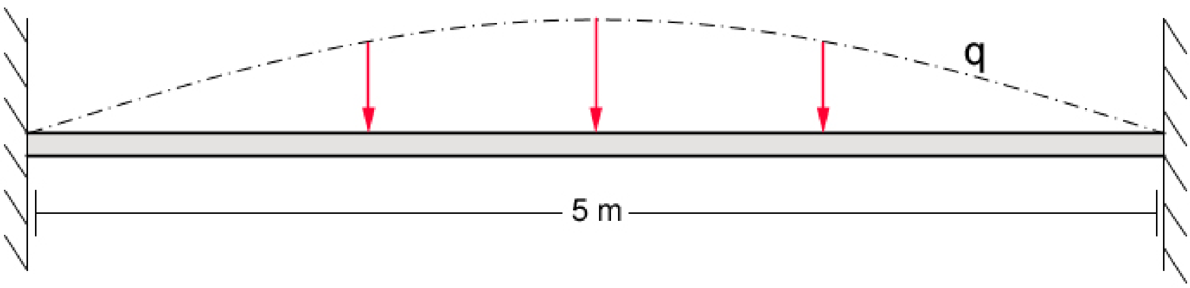
Eine Brücke mit einer Spannweite von 5 Metern wird durch eine homogene Schneemasse belastet. Die Brücke selbst besteht aus einem rechteckigen Stahlbalken mit Elastizitätsmodul $E = 210\ {}^{kN}\!/_{mm^2}$. Die Breite der Brücke beträgt $b = 6\,m$, die Höhe des Balkens ist $h = 0{,}3\,m$. Der Schneehügel hat in der Mitte eine Höhe von 1,5 Metern.



Seitenansicht der Brücke mit Schnee-Hügel

a) Interpolieren Sie den Schneehügel in der Seitenansicht, in dem Sie idealisierend annehmen, dass die Querschnittsbegrenzung durch eine Sinusfunktion beschrieben werden kann.

   Wie lautet die Belastungsfunktion q? *Hinweis:* $g = 9{,}81\ {}^{m}\!/_{s^2}$.



Seitenansicht der Brücke mit Belastungsfunktion

b) Bestimmen Sie die Funktion w, die die Biegelinie beschreibt. Lösen Sie dazu eine passende Differentialgleichung, wie sie aus der Technischen Mechanik bekannt ist. *Hinweis: War es Ihnen nicht möglich a) zu lösen, so verwenden Sie bitte*

$$q(x) = 17658 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)\frac{N}{m}.$$

c) Zeichnen Sie die Seitenansicht der Brücke ab und skizzieren Sie darin die Biegelinie in ihrem groben Verlauf! Wie weit genau biegt sich die Brücke maximal durch?

d) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Höhe des Balkens und der maximalen Durchbiegung als Funktion an, so dass Sie zu beliebig gegebener maximalen Durchbiegung sofort die benötigte Höhe des Balkens angeben können!

e) Angenommen, man hätte Holz ($E = 15\ {}^{kN}\!/_{mm^2}$) statt Baustahl verwendet, wie weit würde sich die Brücke dann unter der Last maximal durchbiegen? Vergleichen Sie die Ergebnisse hinsichtlich der unterschiedlichen Materialien!

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Diese Aufgabe wurde unter Mithilfe von M.Sc. Martin Düsing entwickelt.

In dieser Aufgabe wird eine Anwendung von einer (mathematisch gesehen) sehr einfachen Differentialgleichung aufgezeigt, daher eignet sie sich insbesondere für den Einstieg in dieses Thema. Die Differentialgleichung kann durch bloßes Integrieren gelöst werden und benötigt daher keine tiefgehenden Kenntnisse. Wurde das Thema bereits eingehender behandelt, so empfehlen wir die Aufgabe „Heißer Stahl".

Die Authentizität wird durch den Bezug zur Brückenbelastung garantiert. Aus den Nachrichten kennt man das Problem, dass Dächer unter großen Schneemassen einstürzen und so ist es leicht einzusehen, dass die Durchbiegung auch für den Alltag relevant sein kann. Der Aufbau des Schneehügels (als Sinusfunktion) mag für den ein oder anderen etwas künstlich wirken, sollte aber die Authentizität der Aufgabe nicht signifikant schmälern. Hier bietet sich dem Dozenten die Möglichkeit die Aufgabe zu modifizieren.

Die Aufgabe entspricht hinsichtlich der Modellierungsorientiertheit unserem Konzept, da ein Wechsel vom Realmodell zur Mathematik stets nötig ist. Es gilt die Masse des Schneehügels zu bestimmen und das gegebene Modell mit Formeln aus der Technischen Mechanik zu beschreiben. Diese dabei auftretende Differentialgleichung wird mit Hilfe der Mathematik gelöst und schließlich verlangen wir die Ergebnisinterpretation, sowie auch den Vergleich mit Ergebnissen, die durch andere Materialien entstehen würden.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze unterstützt und aufgelockert. Sie ist vom Schwierigkeitsgrad akzeptabel und lediglich das Aufstellen der Funktionen wird erfahrungsgemäß für die Studierenden etwas anspruchsvoller sein, weshalb es sich anbietet eine Zwischenlösung anzugeben. Die Aufgabe ist also im Sinne des Konzepts übersichtlich.

Die Abgeschlossenheit wird dadurch gegeben, dass die Aufgabe zu einem Zeitpunkt eingesetzt werden sollte, zu dem die Themen, wie die Biegelinie, in den Fachveranstaltungen bereits behandelt wurden. Üblicherweise sollte dies in der Mitte des zweiten Semesters der Fall sein.

Wir gehen davon aus, dass die Aufgabe übertragbar im Sinne des Konzepts ist, da sie sehr anschaulich ist (verstärkt durch die Aufforderung die Skizze anzufertigen) und eine nachvollziehbare Situation ergibt.

Die Aufgabe lässt sich leicht modifizieren, in dem man beispielweise die Werte der Brücke etwas abändert, andere Materialien als Stahl oder Holz verwendet oder gar die Belastungssituation neu gestaltet.

Es kann ratsam sein die Teilaufgabe b) durch folgenden Satz zu ergänzen oder abzuändern: „Lösen Sie dazu die Differentialgleichung $E \cdot I \cdot w^{IV}(x) = q(x)$, wie sie aus der Technischen Mechanik bekannt ist." Damit verhindert man eventuelle Verständnisschwierigkeiten, da diese Differentialgleichung an sich sehr einfach ist und vielleicht als solche gar nicht direkt wahrgenommen wird.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Biegelinien und den dazugehörigen Themen
- Sinus / Cosinus integrieren unter Beachtung der Verkettung

- Grundverständnis von gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Umgang mit Gleichungen
- Lösen eines einfachen Gleichungssystems
- Umgang mit Skizzen und groben Verlauf einer Funktion einzeichnen können

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation
- Umgang mit typischen Einheiten aus der Statik
- Umgang mit Gleichungen
- Grundvorstellungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen vertiefen
- Verbindung zwischen Mathematik und Technischer Mechanik erkennen

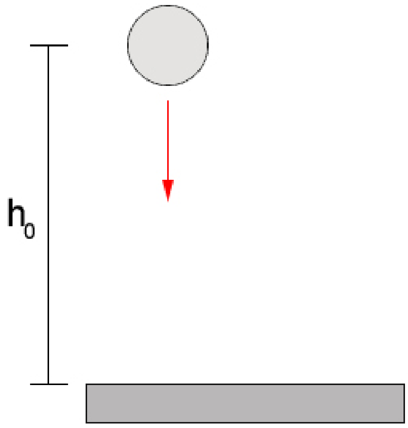
Aufgabe 9: Freier Fall (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Ein Gegenstand wird aus der Höhe $h_0 > 0$ (in Metern) losgelassen und fällt senkrecht aus den Erdboden. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstands wird in Abhängigkeit von der Fallzeit $t \geq 0$ (in Sek.) die Höhe h des Gegenstandes bis zum Aufprall beschrieben durch:

$$h = h_0 - \frac{g}{2}t^2$$

Weiterhin wird die Geschwindigkeit des Gegenstands zum Zeitpunkt t beschrieben durch:

$$v = g \cdot t$$



a) Geben Sie eine Funktion $h: A \to B$ an, die die Höhe des Gegenstands zur Zeit t beschreibt. Bestimmen Sie einen Definitionsbereich A, der sinnvoll im Bezug zu der gegebenen Situation ist! Bestimmen Sie weiterhin den Wertebereich B, so dass die Funktion surjektiv ist!

b) Ermitteln Sie eine Funktion $v: A \to C$, die die Geschwindigkeit des Gegenstands zur Zeit t angibt. Bestimmen Sie hierzu die Abbildungsvorschrift und weiterhin den Wertebereich C, so dass die Funktion surjektiv ist!

c) Untersuchen Sie die beiden Funktionen h und v auf Injektivität und Bijektivität. Besitzen die Funktionen Umkehrfunktionen?

d) Bilden Sie, falls möglich, die Umkehrfunktionen h^{-1} und v^{-1} und geben Sie jeweils Definitionsbereiche, Wertebereiche und die Abbildungsvorschriften an.

e) Ein Freund prahlt damit, dass er im Urlaub von einer Klippe ins Meer gesprungen ist und dabei 7 Sekunden im freien Fall war. Ist diese Angabe realistisch? Welche Zeitangabe könnte normalerweise eher der Wahrheit entsprechen, wenn der Freund kein professioneller Wasserspringer ist?

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Diese Aufgabe stammt in ihrer ursprünglichen Fassung von Dr. Sebastian Hage-Packhäuser und wurde für die Veranstaltung „Mathematik 1 für Maschinenbauer" an der Universität Paderborn entwickelt. Im Sinne des Konzepts wurden einige Änderungen durchgeführt, doch die Grundidee blieb bestehen.

In dieser Aufgabe wird ein Bezug zwischen den Eigenschaften von Funktionen und Umkehrfunktionen (Injektivität etc.) und dem freien Fall aufgezeigt. Die Studierenden werden aufgefordert Definitions- und Wertebereiche einerseits der Situation entsprechend passend zu bestimmen und andererseits sie so zu modifizieren, dass die Funktion bestimmte Voraussetzungen erfüllt.

Die Authentizität des Anwendungsbezugs ist nicht so offensichtlich, wie bei einigen anderen unserer Aufgaben. Wir haben uns dem Problem gestellt, ein sehr innermathematisches Thema durch deinen Anwendungsbezug zu motivieren. Tatsache ist, dass diese Eigenschaften, wie Injektivität und Surjektivität, in der Praxis keinerlei direkte Anwendung finden, aber dennoch grundlegendes Fähigkeiten und Wissen zu Funktionen an sich vermitteln. Daher haben wir den Spagat gewagt. Tatsächlich wurde diese Aufgabe von den Studierenden sehr positiv bewertet und der Anwendungsbezug wurde deutlich stärker als authentisch gewertet, als wir es vermutet hätten.

Der gewünschte Wechsel zwischen der physikalischen Situation und der Mathematik wird einerseits durch die Frage nach sinnvollen Definitionsbereichen und andererseits auch speziell durch Aufgabenteil e) gefordert. Gerade Teil e) wurde von unseren Studierenden in persönlichen Gesprächen immer sehr geschätzt.

Diese Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze ergänzt. Sie ist vom Schwierigkeitsgrad eher zu leicht als zu schwer und kann daher gerne noch etwas angereichert werden. Die Aufgabe ist also im Sinne des Konzepts übersichtlich.

Die Abgeschlossenheit ist klar, da hier einerseits kaum echtes Maschinenbauwissen verlangt wird, sondern mehr physikalisches Grundlagenwissen.

Da die Studierenden ansonsten überhaupt keine Anwendung der Injektivität und Surjektivität sehen, ist davon auszugehen, dass die Aufgabe in unserem Sinne übertragbar ist.

Die Aufgabe lässt sich modifizieren, in dem man einen anderen physikalischen Sachverhalt verwendet.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Funktionen, insbesondere Definitions- und Wertebereich
- Grundverständnis von den Begriffen Injektivität, Surjektivität und Bijektivität
- Umgang mit einfachen Gleichungen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

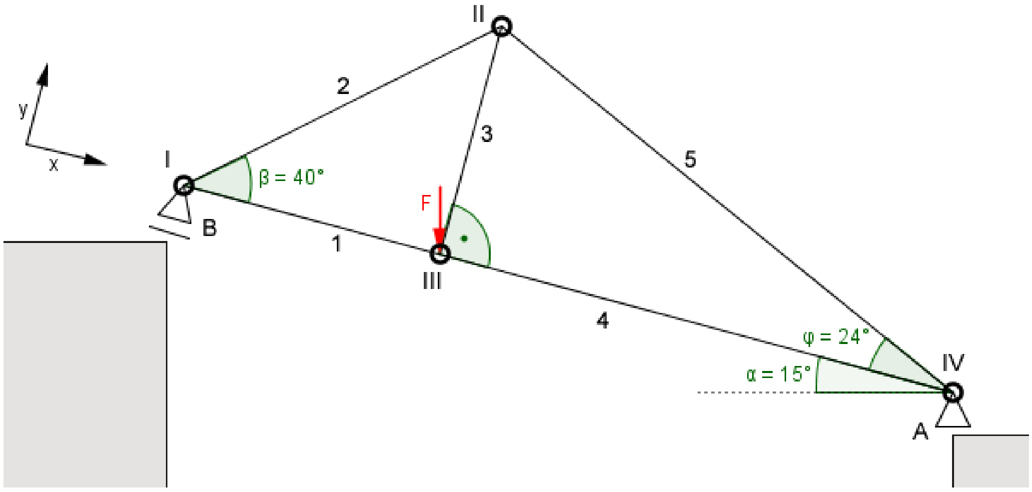
- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Ergebnisinterpretation

- Umgang mit Injektivität, Surjektivität, Bijektivität
- Berechnung von Umkehrfunktionen
- Selbstständiges Bestimmen von Definitions- und Wertebereichen

Aufgabe 10: Brückenbelastung (LGS und Numerik)

Sie dürfen Ihr Wissen aus der Technischen Mechanik verwenden!

Wir betrachten eine Brücke am Hang, die in idealisierter Darstellung hier als Fachwerk betrachtet werden soll und aus den Stäben 1 bis 5 und den Knoten I bis IV besteht. Sie ist mit dem Festlager A am Knoten IV und dem Loslager B am Knoten I gelagert. Bei Knoten III parkt ein Auto, welches vereinfacht als Kraft F dargestellt wird.



Skizze: Brücke am Hang

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich bei den Bauteilen um Stäbe handelt, die Kräfte nur in ihrer Längsrichtung aufnehmen können, weshalb bei den Schnittgrößen weder Biegemoment, noch Querkraft auftreten.

a) Fertigen Sie von jedem einzelnen Knoten einen Freischnitt gemäß Ihrer Kenntnisse aus der Technischen Mechanik an und tragen Sie alle Schnittkräfte ein.

b) Stellen Sie, ausgehend von dem in a) durchgeführten Freischnitt, die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Knoten auf. Verwenden Sie das in der Skizze angedeutete Koordinatenkreuz.

c) Das Auto belastet die Brücke am Knoten III mit einer Kraft von $F = 12\,kN$. Die Winkel seien durch $\alpha = 15°$, $\beta = 40°$ und $\varphi = 24°$ gegeben. Geben Sie ein Gleichungssystem an, mit dem Sie die noch unbekannten Kräfte, die an den Knoten wirken, bestimmen können. Lösen Sie es am Computer und geben Sie den Lösungsvektor an!

d) Die Belastung durch das Auto ist nur ein Spezialfall. Die Kraft F sei nun beliebig (größer Null), wie sieht dann der Zusammenhang zwischen den Kräften und der Belastung aus? Sie dürfen wieder den Computer zu Hilfe nehmen.

e) In der Praxis entstehen häufig wesentlich größere Matrizen (z.B. 1000 x 1000). Wie und mit welchem Verfahren würden Sie solch ein großes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen? Müsste man ggf. noch spezielle Voraussetzungen prüfen?

Anmerkungen bzgl. Konzept, Lernzielen und Voraussetzungen

Diese Aufgabe wurde unter Mithilfe von Dipl.-Math. Bianca Thiere und M.Sc. Martin Düsing entwickelt.

In dieser Aufgabe sollen die Studierenden einerseits ihr Wissen aus der Technischen Mechanik einsetzen (Freischnitt etc.) und andererseits große, „unangenehme" Gleichungssysteme kennen lernen und bearbeiten, die sonst normalerweise in Übungen vermieden werden. Aufgabenteil e) wirkt eventuell zunächst ungewöhnlich, soll aber insofern einen Realitätsbezug herstellen, dass auch in der Praxis selten vorgegeben wird, wie genau ein Problem zu lösen ist und welches Verfahren zu verwenden ist (und ob es überhaupt verwendet werden darf). Wir wünschen uns hier lediglich, dass sich die Studierenden einmal selbst Gedanken machen, was sie momentan an Möglichkeiten sehen und daher neue Methoden, die in der Mathematik-Veranstaltung später vorgestellt werden, mit anderen, interessierteren Augen sehen.

Die Authentizität des Anwendungsbezugs wird durch die starke Verbindung zur Technischen Mechanik gegeben. Es ist üblich, dass reale (und daher komplexe) Probleme zunächst durch möglichst einfache Modelle beschrieben werden. Dies ist den Studierenden zu diesem Zeitpunkt bewusst.

Der geforderte Wechsel zwischen der physikalischen Situation und der Mathematik entsteht durch die Arbeit mit der Skizze und dem Entwickeln der Gleichungen. Da es uns hier mehr um das computergestützte Lösen von großen Gleichungssystemen geht, haben wir auf eine Ergebnisinterpretation weitestgehend verzichtet. Dies könnte man in zukünftigen Optimierungen eventuell ändern.

Die Aufgabe passt auf eine Seite und wird durch die Skizze ergänzt. Ihr Schwierigkeitsgrad hängt stark davon ab, wie intensiv der Freischnitt in der Technischen Mechanik behandelt wurde. Aus unseren Erfahrungen heraus würden wir sagen, dass die Aufgabe für die Studierenden absolut machbar ist. Die Aufgabe ist also im Sinne des Konzepts übersichtlich.

Die Abgeschlossenheit ist gegeben, wenn der Freischnitt und die Gleichgewichtsbedingungen in den Fachveranstaltungen behandelt worden sind.

Da Übertragbarkeit ist in dieser Aufgabe nur schwer einzuschätzen, da die Studierenden einige Aufgaben zum Freischnitt in ihrem Studium sehen dürften. Die vielleicht ungewöhnlichen Verbindungen zur Mathematik und zum Computer können aber dafür sorgen, dass die Aufgabe in Erinnerung bleibt.

Die Aufgabe lässt sich modifizieren, in dem man z.B. die Größen der Winkel ändert. Bei dieser Version der Aufgabe entstehen 8x8-Matrizen. Würde man die Konstruktion mit mehr Stäben und Knoten versehen, so würde die Größe der Matrix rasant wachsen, was für die Studierenden einen sehr unangenehmen Schreibaufwand bedeuten würde, daher raten wir davon ab.

Zum Lösen der Aufgabe müssen die Studenten folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Grundverständnis von Kräften und Freischnitt
- Aufteilen von Kräften in x/y-Anteile per Sinus/Cosinus
- Umgang mit linearen Gleichungssystemen
- Grundverständnis von Lösungsmethoden für LGS

- Umgang mit Skizzen

Die Lernziele lassen sich stichwortartig wie folgt zusammenfassen:

- Problemerkennung
- Mathematisierung
- Umgang mit größeren LGS
- Computergestützten Umgang mit LGS erlernen (eigene Wahl des Computeralgebrasystems)

5. Literatur

Alpers, B. (2001). Mathematicals Application Projects for Mechanical Engineers - Concept, Guidelines and Examples. *Proceedings der Int. Conf. on Technology in Math. Teaching (ICTMT 5)*

Krapp, A. (1998). Entwicklung und Förderung von Interesse im Unterricht. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 44, 185-201*

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling-Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *JMD31-1, 119-141*

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *JMD31-2, 285-311*

Mahnken, R. (2011). *Lehrbuch der Technischen Mechanik – Statik, Von den Grundlagen zu den Anwendungen.* Berlin Heidelberg: Springer

Oevel, G., Henning, M., Hoppenbrock, A., Kortemeyer, J., Mertsching, B (2014). Werkstattbericht der Arbeitsgruppe "Mathematik in den Ingenieurwissenschaften". *Th. Wassong, D. Frischemeier, P.R. Fischer, R. Hochmuth, P. Bender (Hrsg), Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen - Using Toolsfor Learning Mathematics and Statistics.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Richard, H.A., Sander, M. (2006). *Technische Mechanik Festigkeitslehre.* (1. Auflage). Wiesbaden: Vieweg.

Rooch, A., Kiss, A., Härterich, J (2014). Brauchen Ingenieure Mathematik? - Wie Praxisbezug die Ansichten über das Pflichtfach Mathematik verändert. *Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S., Wassong, T., Mathematische Vor- und Brückenkurse - Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wolf, P., Biehler, R. (2014a). Anwendungsorientierte Aufgaben für die Erstsemester-Mathematik-Veranstaltungen im Maschinenbaustudium. *khdm-Report: Nr. 03-14. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel.*

Wolf, P., Biehler, R. (2014b). Entwicklung und Erprobung anwendungsorientierter Aufgaben für Ingenieurstudienanfänger/innen. *ZFHE Jg.9, Nr.4, 169-190*

6. Bildquellen

Konzept:
Abbildung erstellt mit XMind2012 SE (V. 3.3.1.201212250029)

Laserstrahlaufgabe:
Skizzen erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Pendeluhraufgabe:
Foto von Mario Modesto Mata [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) oder CC-BY-SA-3.0-2.5-2.0-1.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Big_Ben_-_Detalle.JPG?uselang=de# (Abgerufen am 4.2.14)
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Stahlbalkenaufgabe:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)
Bilder zu den Knickfällen aus Richard u. Sander (2006)

Halfpipeaufgabe:
Foto: http://cdn.morgue_le.com/imageData/public
/_les/n/nitadee/preview/_dr_2012_05_27/_le121338153849.jpg. (2013). _
[Abgerufen am 06.09.2013. Hochgeladen von Nutzer NitaDee als lizenzfreies
Foto bei www.morgue_le.com]
Skizzen erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Bauteilaufgabe:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Aufgabe Heißer Stahl:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)
Foto von CT-Gruppe (zur Verfügung gestellt durch Urheber) [CC-BY-SA-2.0-de (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en), GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Giesserei_Kiel.jpg
(Abgerufen am 17.2.14)

Aufgabe Flugsicherheit:
Skizze erhalten von Dr. Sebastian Hage-Packhäuser
Foto von von Ken Fielding (https://www.flickr.com/photos/kenfielding/9972134676/) Lizenziert unter Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0), CC BY-SA 3.0 (commons.wikimedia.org/wiki/) Wikimedia Commons. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:F-WWCB_A330-203_Airbus_Industrie_TLS_27SEP13_(9972134676).jpg
(Abgerufen am 5.6.14)

Aufgabe Brücke im Winter:
Skizzen erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Aufgabe Freier Fall:
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)

Aufgabe Brückenbelastung
Skizze erstellt mit GeoGebra (V.3.2.46.0)