Skript zur Vorlesung

Geometrische Maßtheorie

UNI KASSEL
VERSITÄT

A. Stylianou

Sommersemester 2016

Vorwort

Dieses Skript entstand während meiner Vorlesungen „Geometrische Masstheorie I und II“ im Sommersemester 2016 und Wintersemester 2016/17 an der Universität Kassel. Es ist ein Versuch, diverse Ergebnisse, die in der Literatur zerstreut sind, in einem gemeinsamen Kontext zusammenzubringen, und somit ein deutschsprachiges Skript zu produzieren. Vorausgesetzt werden Kenntnisse in der klassischen Masstheorie, insbesondere die Konstruktion des Lebesgue-Integrals. Kenntnisse in der Variationsrechnung und in der klassischen Differentialgeometrie werden nicht vorausgesetzt, sind aber trotzdem sehr hilfreich.

Ich möchte mich bei Herrn Manuel Lorenz bedanken, der die erste Version des Skriptes sorgfältig gelesen hat.

Sollte es Fragen, Anregungen, Verbesserungs- oder Korrekturvorschläge geben, würde ich mich über eine E-Mail an `astylian@math.uni-koeln.de` sehr freuen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen aus der Maßtheorie

1.1 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt wird X eine beliebige Menge bezeichnen.

Definition 1.1.1. *Eine Funktion $\mu : 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$ heißt* ***äußeres Maß****, falls*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, *falls* $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq X$ *(Subadditivität).*

Die Definition impliziert, dass $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A \subseteq B \subseteq X$.

Definition 1.1.2.
1. *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt* ***μ-messbar*** *falls*
$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^{\mathsf{c}}) \tag{1.1}$$
für alle $S \subseteq X$.
2. *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt* ***μ-Nullmenge*** *falls $\mu(A) = 0$ gilt.*

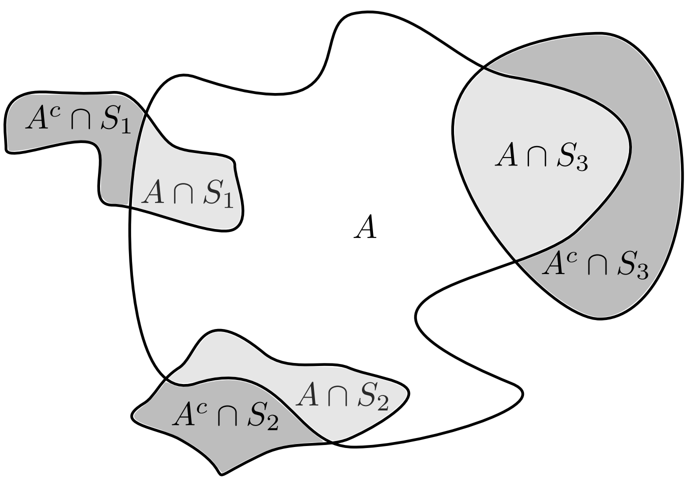

Abbildung 1.1: Eine μ-messbare Menge schneidet alle Teilmengen additiv bezüglich μ.

Bemerkung 1.1.3. $A \subset X$ ist μ-messbar genau dann, wenn A^{c} μ-messbar ist.

Bemerkung 1.1.4. Wegen der Subadditivität von μ gilt, dass $A \subset X$ genau dann μ-messbar ist, wenn

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^{\mathsf{c}}) \tag{1.2}$$

für alle $S \subseteq X$ mit $\mu(S) < \infty$, da $S \subseteq S = (S \cap A) \cup (S \cap A^{\mathsf{c}}) \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^{\mathsf{c}})$.

Bemerkung 1.1.5.

1. $\emptyset$ ist μ-messbar, da $\mu(S) = \mu(S \cap \emptyset) + \mu(S \cap \emptyset^{\mathsf{c}}) = \mu(\emptyset) + \mu(S \cap X) = \mu(S)$ für alle $S \subseteq X$.
2. Eine μ-Nullmenge A ist μ-messbar, denn $A \cap S \subseteq A \Rightarrow \mu(A \cap S) \leq \mu(A) = 0$ und somit gilt $\mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^{\mathsf{c}}) = \mu(S \cap A^{\mathsf{c}}) \leq \mu(S)$, da $S \cap A^{\mathsf{c}} \subseteq S$.

Definition 1.1.6. *$\mathcal{S} \subseteq 2^X$ heißt **σ-Algebra**, falls*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{S}$.*
2. *Aus $A \in \mathcal{S}$ folgt $X \setminus A \in \mathcal{S}$.*
3. *Aus $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ folgt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$.*

Bemerkung 1.1.7. Aus $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ folgt

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j) \right) \in \mathcal{S}.$$

Bemerkung 1.1.8.

1. Seien $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq 2^{2^X}$ σ-Algebren. Dann ist $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{S}_\alpha$ eine σ-Algebra.
2. Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Die Menge

$$\mathcal{B}[\mathcal{F}] \coloneqq \bigcap \{\mathcal{S} \subseteq 2^X : \mathcal{S}\ \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}\} \tag{1.3}$$

ist wohldefiniert, da $\mathcal{S} = 2^X$ eine σ-Algebra ist.

Definition 1.1.9. *Sei $(T, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\mathcal{B}[\mathcal{T}]$ **Borelsche σ-Algebra** und $A \in \mathcal{B}[\mathcal{T}]$ heißt **Borel-Menge**.*

Bemerkung 1.1.10. Die Borelsche σ-Algebra kann auch von der Familie aller abgeschlossenen Mengen erzeugt werden.

Lemma 1.1.11. *Falls $A_1, A_2, \dots \in X$ μ-messbar und paarweise disjunkt, gilt*

$$\mu\left(S \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S \cap A_j) \ (\sigma\text{-Additivität}), \tag{1.4}$$

für alle $S \subseteq X$.

Beweis. Übung. [15, Remark 1.7, p.3] ∎

Lemma 1.1.12 (Carathéodory)**.** *Die Menge*

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X : A \ \mu\text{-messbar}\} \tag{1.5}$$

ist eine σ-Algebra und enthält alle μ-Nullmengen.

Beweis. Übung. [15, Lemma 1.6, p.3] ■

Lemma 1.1.13. *Seien $A_j \subseteq X$ μ-messbar und $A_j \subseteq A_{j+1}$. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right). \tag{1.6}$$

Beweis. Übung. [15, 1.8, p.4] ■

Lemma 1.1.14. *Seien $A_j \subseteq X$ μ-messbar mit $A_{j+1} \subseteq A_j$ und so, dass ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\mu(A_{j_0}) < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right). \tag{1.7}$$

Beweis. Übung. [15, 1.9, p.4] ■

Definition 1.1.15. *Ein äußeres Maß in X heißt **regulär**, falls für jede Teilmenge $A \subset X$ eine μ-messbare Menge $B \subseteq X$ existiert sodass $A \subseteq B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.*

Lemma 1.1.16. *Seien $A_j \subseteq X$ mit $A_j \subseteq A_{j+1}$ (nicht unbedingt μ-messbar) und μ regulär. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right). \tag{1.8}$$

Beweis. Übung. [15, Remark 1.10, p.4] ■

Definition 1.1.17. *Ein äußeres Maß in einem topologischen Raum $(T, \mathcal{T})$ heißt **Borel-regulär**, falls:*

1. *Alle Borel-Mengen sind μ-messbar.*
2. *Für jede Teilmenge $A \subset T$ existiert eine Borel-Menge $B \supseteq A$ sodass $\mu(B) = \mu(A)$ gilt.*

Bemerkung 1.1.18. Für die Mengen A und B von oben gilt nicht $\mu(B \setminus A) = 0$, es sei denn A ist μ-messbar mit $\mu(A) < \infty$.

Definition 1.1.19. *Sei $(T, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Funktion $\mu : 2^{\mathcal{B}[\mathcal{T}]} \longrightarrow [0, +\infty]$ heißt **Borel-Maß** falls*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$, falls $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{B}[\mathcal{T}]$ paarweise disjunkte Borel-Mengen sind.*

Lemma 1.1.20. *Seien $(T, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und μ_0 ein Borel-Maß in T. Dann ist $\mu : 2^T \longrightarrow [0, +\infty]$ mit*

$$\mu(A) \coloneqq \inf\left\{\mu_0(B) : A \subseteq B,\ B \in \mathcal{B}[\mathcal{T}]\right\}, \tag{1.9}$$

ein Borel-reguläres äußeres Maß in T, und für alle $B \in \mathcal{B}[\mathcal{T}]$ gilt $\mu_0(B) = \mu(B)$.

Beweis. Übung. [15, Remark 1.11, p.5]. ∎

Definition 1.1.21. *Sei $Y \subset X$ und μ ein äußeres Maß in X. Das durch die Formel*

$$\mu \llcorner Y(Z) \coloneqq \mu(Y \cap Z) \text{ für } Z \subseteq X, \tag{1.10}$$

*definierte äußere Maß $\mu \llcorner Y$ in X heißt **Einschränkung** von μ auf Y.*

Lemma 1.1.22. *Seien $Y \subset X$ und μ ein äußeres Maß in X.*

1. *Jede μ-messbare Menge ist $\mu \llcorner Y$-messbar.*
2. *Seien zusätzlich μ Borel-regulär und Y μ-messbar mit $\mu(Y) < \infty$. Dann $\mu \llcorner Y$ Borel-regulär.*

Beweis. Übung. [15, 1.12, p.5]. ∎

Definition 1.1.23. *Für einen metrischen Raum (X, d) und $A, B \subseteq X$ definiere*

$$\operatorname{dist}(A, B) \coloneqq \begin{cases} \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}, & \text{falls } A, B \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Theorem 1.1.24 (Messbarkeitskriterium von Carathéodory)**.** *Seien (X, d) ein metrischer Raum und μ ein äußeres Maß in X. Falls*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ für alle } A, B \subseteq X \text{ mit } d(A, B) > 0, \tag{1.12}$$

dann sind alle Borel-Mengen μ-messbar.

Bemerkung 1.1.25. Die Umkehrung ist elementar; siehe Lemma 1.1.11.

Beweis von Theorem 1.1.24. Es reicht zu zeigen, dass alle abgeschlossenen Mengen μ-messbar sind.

(Warum? μ-messbare Mengen formen eine σ-Algebra; die Borel Mengen formen die kleinste σ-Algebra die alle abgeschlossenen Teilmengen erhält, siehe 1.1.10.)

Aus Bemerkung 1.1.4 reicht es zu zeigen, dass

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap C) + \mu(S \cap C^{\mathsf{c}}) \tag{1.13}$$

für alle $S \subseteq X$ mit $\mu(S) < \infty$ und alle abgeschlossenen Mengen $C \subset X$. (Warum nicht $C = X$? Aw: Der Fall ist trivial). Sei $C_j \coloneqq \{x \in X : \operatorname{dist}(\{x\}, C) \leq 1/j\} (\neq \emptyset)$. Dann gilt $\operatorname{dist}\left(S \cap C_j^{\mathsf{c}}, S \cap C\right) > 0$, denn für $b \in C_j^{\mathsf{c}}$ gilt $\operatorname{dist}(\{b\}, C) > 1/j$, d.h. $d(b, c) > 1/j$ für alle $c \in C$ und somit

$$\inf\{d(b, c) : c \in S \cap C, b \in S \cap C_j^{\mathsf{c}}\} \geq \inf\{d(b, c) : c \in C, b \in C_j^{\mathsf{c}}\} \geq \frac{1}{j}.$$

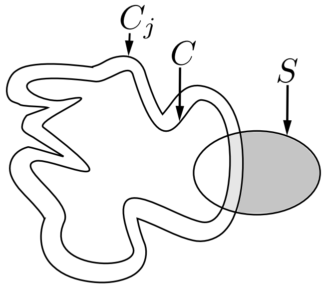

Abbildung 1.2: Zerlegung (1.15) der Menge $S \cap C^{\mathsf{c}}$.

Aus der Annahme (1.12) folgt

$$\mu(S) \geq \mu\Big(\big(S \cap C_j^{\mathsf{c}}\big) \cup \big(S \cap C\big)\Big) = \mu(S \cap C_j^{\mathsf{c}}) + \mu(S \cap C)$$

und wir bekommen (1.13), falls

$$\lim_{j \to \infty} \mu(S \cap C_j^{\mathsf{c}}) = \mu(S \cap C^{\mathsf{c}}). \tag{1.14}$$

Da die Menge C abgeschlossen ist, gilt

$$S \cap C^{\mathsf{c}} = \{x \in S : \operatorname{dist}(\{x\}, C) > 0\} = \big(S \cap C_j^{\mathsf{c}}\big) \cup \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k\right),\ j = 1, 2, \dots, \tag{1.15}$$

wobei $R_k \coloneqq \{x \in S : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$: $x \in S \cap C^{\mathsf{c}}$ genau dann, wenn $x \in S$ und $x \in C^{\mathsf{c}}$. Dieses gilt genau dann, wenn $x \in S$ und $\operatorname{dist}(\{x\}, C) > 0$, da C abgeschlossen und somit C^{c} offen ist. Also

$$x \in S \cup \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k\right) \text{ und } x \in \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k\right) \cup C_j^{\mathsf{c}},$$

da

$$\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k = \Big\{x \in S : 0 < \operatorname{dist}(\{x\}, C) \leq \tfrac{1}{j}\Big\}$$

gilt.

Weiterhin impliziert die Subadditivität von μ, dass

$$\mu(S \cap C_j^{\mathsf{c}}) \leq \mu(S \cap C^{\mathsf{c}}) \leq \mu(S \cap C_j^{\mathsf{c}}) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k).$$

Somit ist der Beweis zu Ende, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty$ gilt.

Dazu bemerken wir, dass $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ falls $j \geq i + 2$ und, dass, durch Induktion in N, für alle $N \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k}\right) \leq \mu(S) < \infty$$
$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k-1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k-1}\right) \leq \mu(S) < \infty$$

gilt, weil $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \subseteq S$. ■

Definition 1.1.26. *Ein Borel-reguläres Maß μ in einem topologischen Raum $(T, \mathcal{T})$ heißt **offen σ-endlich**, falls $T = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$, wobei $O_j \in \mathcal{T}$ und $\mu(O_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 1.1.27. Sei μ ein Borel-reguläres, lokal endliches Maß in einem separablen metrischen Raum (X, d) (lokal endlich heißt für jedes $x \in X$ gibt $\rho > 0$ sodass $\mu\big(\overline{B(x, \rho)}\big) < \infty$). Dann ist μ offen σ-endlich.

Theorem 1.1.28. *Seien $(T, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass jede abgeschlossene Teilmenge von T die Schnittmenge einer abzählbaren Familie offener Mengen ist (z.B. ein metrischer Raum), und μ ein (Borel-reguläres) offenes σ-endliches Maß in T.*

1. *Für jede Teilmenge $A \subseteq T$ gilt*

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(O) : A \subseteq O,\ O \in \mathcal{T}\big\}.$$

2. *Für jede μ-messbare Teilmenge $A \subseteq T$ gilt*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(C) : C \subseteq A,\ C \text{ abgeschlossen}\big\}.$$

3. *Falls T zusätzlich Hausdorff (kompakte Mengen sind abgeschlossen) und σ-kompakt ($T = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ mit K_j kompakt) ist, gilt*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\big\}$$

für jede μ-messbare Teilmenge $A \subseteq T$ mit $\mu(A) < \infty$.

Beweis. Übung. [15, Theorem 1.15, Remark 1.16, p.7]. ■

Theorem 1.1.29 (Lusin)**.** *Seien $(T, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass jede abgeschlossene Teilmenge von T die Schnittmenge einer abzählbaren Familie offener Mengen ist (z.B. ein metrischer Raum), μ ein Borel-reguläres Maß in T, $A \subseteq T$ eine μ-messbare Teilmenge von T mit $\mu(A) < \infty$ und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ μ-messbar ($f^{-1}(B)$ ist μ-messbar für irgendeine Borel-Menge B in $\mathbb{R}$). Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$, sodass $f|_C$ stetig ist.*

Beweis. [15, Theorem 1.17]. ■

1.2 Hausdorff-Maße

Wie kann die heuristische Beobachtung „eine Kurve in $\mathbb{R}^3$ ist ein eindimensionales Objekt" rigoros werden? Wir brauchen ein äußeres Maß $\mathcal{H}^m$, was die „Länge" oder das „Volumen" einer m-dimensionalen Menge misst. So ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ m-dimensional ($m \leq n$), falls $\mathcal{H}^m(A) \in (0, \infty)$.

In diesem Abschnitt wird X einen metrischen Raum mit Metrik d bezeichnen.

Definition 1.2.1. 1. *Der **Durchmesser** einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist definiert durch:*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}. \tag{1.16}$$

2. *Seien $m \geq 0$ und $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ mit $\Gamma(q) := \int_0^\infty t^{q-1}e^{-t}\,dt$ (die Gammafunktion). Definiere*
$$\omega_m := \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}. \tag{1.17}$$

3. *Für $A \subseteq X$, $m \geq 0$ und $\delta \in (0,\infty]$ heißt*
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m_\delta(A) := \omega_m \inf\Bigg\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^m &: \{C_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X \textit{ mit} \\ &A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j \textit{ und } \operatorname{diam} C_j < \delta \textit{ für alle } j \in \mathbb{N}\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.18}$$
*das m-**dimensionale** δ-**approximierte Hausdorff-Maß** von A.*

4. *Für $A \subseteq X$ und $m \geq 0$ heißt*
$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}^m_\delta(A) \tag{1.19}$$
*das m-**dimensionale Hausdorff-Maß** von A.*

Bemerkung 1.2.2. 1. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\omega_m = \operatorname{Vol}\big(B(0,1)\big)$.

2. Die Konvention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ gilt in (1.18). Dieser Fall tritt nicht auf, falls (X,d) separabel ist.

3. Da $\operatorname{diam} C_j = \operatorname{diam} \overline{C}_j$ gilt, kann man zusätzlich voraussetzen, dass die Mengen C_j in (1.18) abgeschlossen sind.

4. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $O_j \supset C_j$, sodass $\operatorname{diam} O_j < \operatorname{diam} C_j + \varepsilon/2^j$. So kann man zusätzlich voraussetzen, dass die Mengen C_j in (1.18) offen sind.

5. Der Grenzwert in (1.19) existiert in $[0,+\infty]$, da die Funktion $\delta \mapsto \mathcal{H}^m_\delta(A)$ monoton fallend ist.

Satz 1.2.3 (Fundierte Eigenschaften von Hausdorff-Maßen)**.** *1. Für jede $m \geq 0$ und $\delta > 0$, sind $\mathcal{H}^m$ und $\mathcal{H}^m_\delta$ äußere Maße.*

2. *$\mathcal{H}^m$ ist für jedes $m \geq 0$ Borel-regulär.*

3. *Es gilt $\mathcal{H}^0 = \#$, wobei $\#$ das Zählmaß ist.*

4. *Existiert $\delta > 0$ sodass $\mathcal{H}^m_\delta(A) = 0$, dann gilt $\mathcal{H}^m(A) = 0$.*

5. *Sei (Y,ρ) ein metrischer Raum und $i : X \longrightarrow Y$ eine Isometrie. Für $A \subseteq X$ gilt $\mathcal{H}^m(A) = \mathcal{H}^m\big(i(A)\big)$. (Beispielsweise, für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{H}^m(A+a) = \mathcal{H}^m(A)$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$.)*

6. *Falls X zusätzlich ein reeller Vektorraum ist, gilt $\mathcal{H}^m(\lambda A) = \lambda^m \mathcal{H}^m(A)$, $\lambda > 0$, $A \subseteq X$.*

7. *Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq m_1 < m_2 < \infty$.*

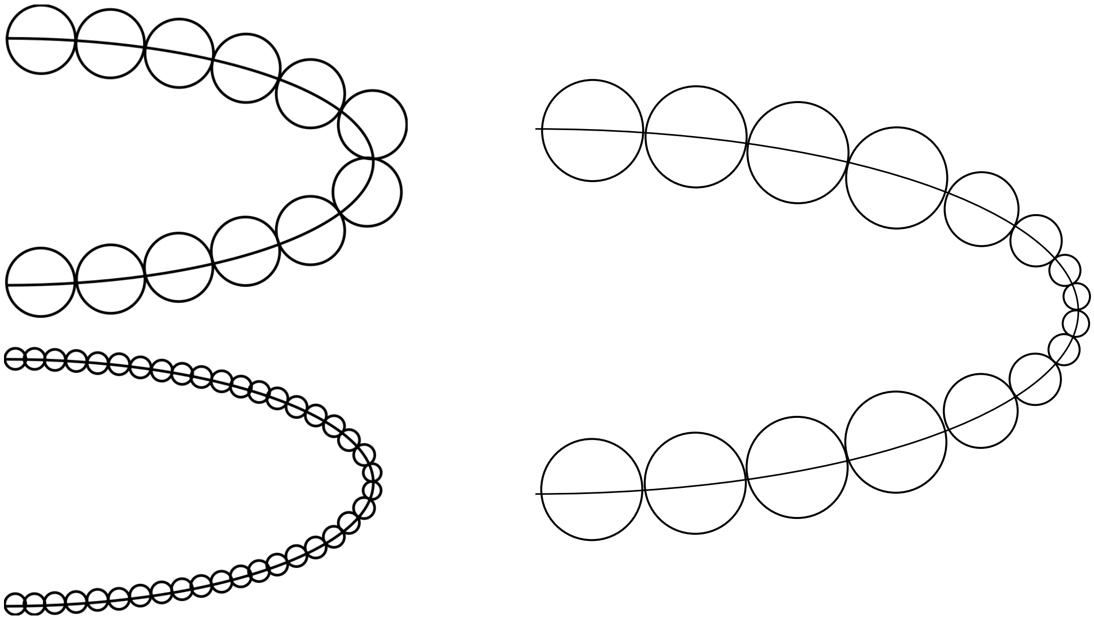

Abbildung 1.3: Je größer die Krümmung, desto mehrere und kleinere Kugeln werden gebraucht.

(a) $\mathcal{H}^{m_1}(A) < \infty$ *impliziert* $\mathcal{H}^{m_2}(A) = 0$.

(b) $\mathcal{H}^{m_2}(A) > 0$ *impliziert* $\mathcal{H}^{m_1}(A) = \infty$.

Beweis. Übung. [1, Remark 2.48, Proposition 2.49], [4, Theorem 2.1,2.2, Lemma 2.1,2.2], [5, Proposition 3.1], [15, Remark 2.3, 2.4, 2.5, 2.6]. ■

Bemerkung 1.2.4. Es ist nicht wahr, dass alle Borel-Mengen $\mathcal{H}^m_\delta$-messbar für alle $\delta > 0$ sind: Es existiert ein $\delta > 0$, sodass die Halbebene $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ nicht $\mathcal{H}^1_\delta$-messbar ist.

Beweis. Übung. [15, Note, p.10]. ■

Hier wird die klassische Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes in $\mathbb{R}^n$ wiederholt.

Definition 1.2.5. *1.* $\mathcal{Q}^n$ *ist die Klasse aller offenen n-dimensionalen Quadern in* $\mathbb{R}^n$*, d.h.*

$$\mathcal{Q}^n \coloneqq \left\{ \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) : a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j \right\}. \tag{1.20}$$

2. Für $Q = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \in \mathcal{Q}^n$ *definiere* $|Q| \coloneqq \prod_{j=1}^n (b_j - a_j.)$

3. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *definiere das* ***äußere Lebesgue-Maß*** *von A durch*

$$\mathcal{L}^n(A) \coloneqq \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty |Q_j| : \{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Q}^n \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty Q_j \right\}. \tag{1.21}$$

Satz 1.2.6. *Sei* Λ *ein äußeres Maß in* $\mathbb{R}^n$ *mit den Eigenschaften:*

1. $\Lambda(Q) = |Q|$ *für alle* $Q \in \mathcal{Q}^n$,

2. $\Lambda(A) = \inf\{\Lambda(O) : A \subseteq O, O \text{ offen}\}$ *für alle* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

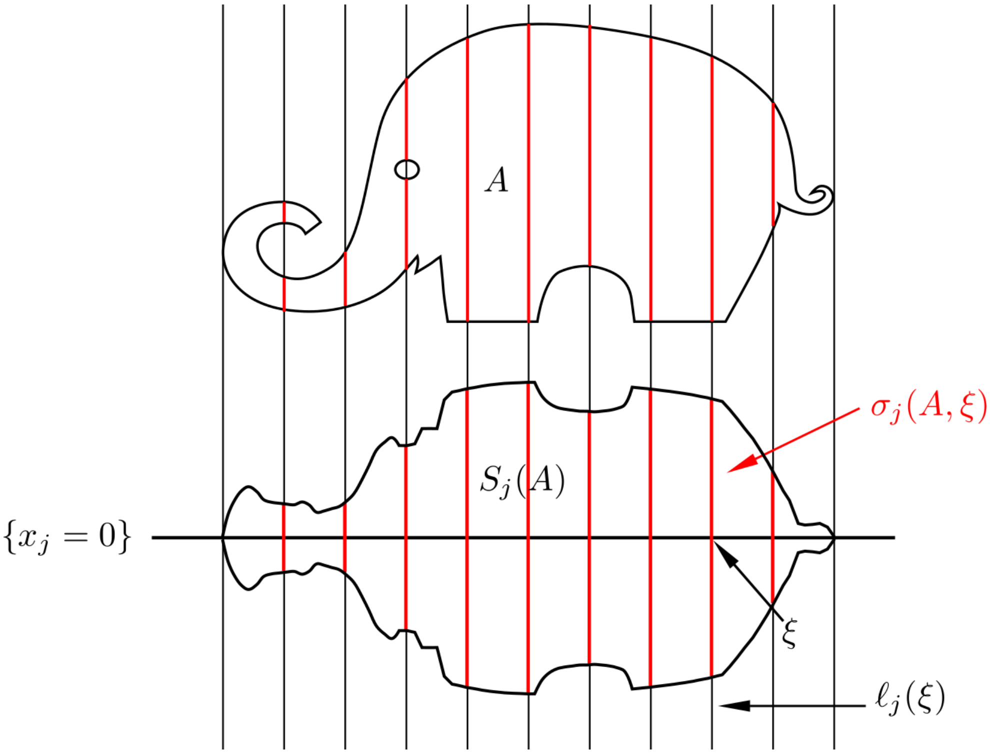

Abbildung 1.4: Steiner-Symmetrisierung einer Menge A bezüglich der Ebene $\{x_j = 0\}$.

Dann gilt $\Lambda = \mathcal{L}^n$.

Beweis. [15, 2.8], [3, Proposition 1.4.3, p.24]. ■

Theorem 1.2.7 (Isodiametrische Ungleichung)**.** *Für jede Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^n . \tag{1.22}$$

Korollar 1.2.8. *Unter allen Teilmengen von* $\mathbb{R}^n$ *mit Durchmesser* r*, hat die* r*-Kugel das größte Lebesgue-Maß.*

Beweis von Theorem 1.2.7. Siehe [4, Theorem 2.4, p.89]. Der Beweis erfolgt durch die sogenannte *Steiner-Symmetrisierung*.

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Die Steiner-Symmetrisierung einer beschränkten Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich der x_j-Koordinatenebene $E_j \coloneqq \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$ ist definiert durch

$$S_j(E) \coloneqq \bigcup \{\sigma_j(E,\xi) : \xi \in E_j \text{ sodass } \ell_j(\xi) \cap E \neq \emptyset\} , \tag{1.23}$$

wobei $\ell_j(\xi) \coloneqq \{\xi + t\, e_j : t \in \mathbb{R}\}$ die Linie, die senkrecht durch ξ zu E_j läuft, ist und

$$\sigma_j(E,\xi) \coloneqq \left\{\xi + t\, e_j : |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1\big(\ell_j(\xi) \cap E\big)\right\}$$

das Intervall zentriert auf ξ mit Länge $\mathcal{H}^1\big(\ell_j(\xi) \cap E\big)$ ist. Definiere

$$E^* \coloneqq (S_n \circ \cdots \circ S_1)(E).$$

Behauptung: $\mathcal{L}^n(E^*) = \mathcal{L}^n(E)$, $\operatorname{diam}(E^*) \leq \operatorname{diam}(E)$. Übung. [4, Theorem 2.3, p.88].

Behauptung: E^* ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Die Menge $S_1(E)$ ist symmetrisch bezüglich E_1. Sei $1 \leq k < n$ und nehme an, dass $(S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)$ symmetrisch bezüglich $E_1, \ldots, E_k$ ist. Die Menge $S_{k+1} \circ (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)$ ist symmetrisch bezüglich E_{k+1}. Seien $1 \leq j \leq k$ und R_j die Reflexion bezüglich E_j. Da $R_j(S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) = (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)$ (Induktionsvoraussetzung) und R_j eine Isometrie ist, gilt

$$\mathcal{H}^1\Big((S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \bigcap \ell_{k+1}(\xi)\Big) = \mathcal{H}^1\Big((S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \bigcap \ell_{k+1}(R_j\xi)\Big)$$

für $\xi \in E_{k+1}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
& t_1 \in \big\{t \in \mathbb{R} : \xi + t\, e_{k+1} \in S_{k+1} \circ (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)\big\} \\
\Leftrightarrow\ & \xi \in (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \text{ und } |t_1| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1\Big((S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \bigcap \ell_{k+1}(\xi)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \xi \in R_j(S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \text{ und } |t_1| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1\Big((S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) \bigcap \ell_{k+1}(R_j\xi)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & t_1 \in \big\{t \in \mathbb{R} : R_j\xi + t\, e_{k+1} \in S_{k+1} \circ (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)\big\}
\end{aligned}$$

und darüber hinaus $R_j S_{k+1} \circ (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E) = S_{k+1} \circ (S_k \circ \cdots \circ S_1)(E)$. So ist E^* symmetrisch bezüglich $E_1, \ldots, E_n$ und die Behauptung bewiesen.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ sodass $\operatorname{diam}(A) < \infty$ (anderenfalls ist (1.22) trivialerweise erfüllt). Aus der obigen Behauptung gilt für $x \in \overline{A}^*$, dass $-x \in \overline{A}^*$, und darüber hinaus $2|x| \leq \operatorname{diam}(\overline{A}^*)$. D.h. $\overline{A}^* \subseteq \overline{B\big(0, \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\overline{A}^*)\big)}$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) = \mathcal{L}^n(\overline{A}^*) \leq \mathcal{L}^n\left(\overline{B\big(0, \tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(\overline{A}^*)\big)}\right) &= \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(\overline{A}^*)}{2}\right)^n \\
&\leq \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(\overline{A})}{2}\right)^n = \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

■

Lemma 1.2.9 (Offene Mengen mit Kugeln füllen)**.** *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\delta > 0$. Es existiert eine abzählbare Familie $\mathcal{G}$ von paarweise disjunkten, abgeschlossenen Kugeln $B \subset O$, sodass $\operatorname{diam} B < \delta$ für alle $B \in \mathcal{G}$ und*

$$\mathcal{L}^n\left(O \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Beweis. Siehe [4, Theorem 1.26, p.82]. ■

Theorem 1.2.10. *Für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ gilt $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n_\delta(A)$.*

Beweis. Als erstes zeigen wir, dass

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{L}^n(A) \text{ für alle } \delta > 0. \tag{1.24}$$

Sei $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}$, sodass $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ (eine solche Familie existiert, da $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^\infty (-j, j)^n$). Aus Lemma 1.2.9 existieren paarweise disjunkte abgeschlossene Kugeln $B_{1,j}, B_{2,j}, \cdots \subset Q_j$, sodass $\operatorname{diam} B_{i,j} < \delta$ und $\mathcal{L}^n\left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) = 0$. Aus der Definition des δ-approximierten Hausdorff-Maßes folgt, dass $\mathcal{H}^n_\delta\left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) = 0$. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(Q_j) &= \mathcal{H}^n_\delta\left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) \cup \left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right)\right) \le \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) + \mathcal{H}^n_\delta\left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) \\
&= \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) \le \sum_{i=1}^\infty \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(B_{i,j})}{2}\right)^n = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(B_{i,j}) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) \\
&= \mathcal{L}^n\left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) \cup \left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right)\right) - \mathcal{L}^n\left(Q_j \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{i,j}\right) = \mathcal{L}^n(Q_j) = |Q_j|,
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \le \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{j=1}^\infty Q_j\right) \le \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^n_\delta(Q_j) \le \sum_{j=1}^\infty |Q_j|. \tag{1.25}$$

Ungleichung (1.24) folgt aus (1.25), wenn wir das Infimum bezüglich $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}$ nehmen.

Seien zunächst $C_1, C_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{diam}(C_j) < \delta$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j$. Die Isodiametrische Ungleichung impliziert

$$\mathcal{L}^n(A) \le \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty C_j\right) \le \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(C_j) \le \sum_{j=1}^\infty \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^n$$

und, somit, $\mathcal{L}^n(A) \le H^n_\delta(A)$. ■

1.3 Die Theoreme von Lebesgue und Radon-Nikodym

Auf einem Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ lässt sich mit einer integrierbaren Funktion f, durch

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

ein signiertes Maß ν auf $(X, \mathcal{S})$ definieren. Die Funktion f wird dann als Dichte von ν bezüglich μ bezeichnet. ν ist dann absolut stetig bezüglich μ, das heißt jede μ-Nullmenge ist auch eine ν-Nullmenge.

Jedes signierte Maß mit einer Dichte f bezüglich μ ist folglich absolut stetig bezüglich μ. Der Satz von Radon-Nikodym liefert die Umkehrung: Ist ein signiertes Maß absolut stetig bezüglich μ, so existiert auch eine Dichte f, sodass sich das signierte Maß wie oben darstellen lässt.

Diese Fragestellung lässt sich nun erweitern: Angenommen ν ist nicht absolut stetig bezüglich μ, kann ν in einen absolut stetigen Teil und einen „singulären" Teil zerlegt werden? Existieren also signierte Maße ν_a, ν_s mit $\nu = \nu_a + \nu_s$, sodass ν_a absolut stetig bezüglich μ ist und ν_s singulär bezüglich μ ist? Der Zerlegungssatz von Lebesgue beantwortet diese Frage positiv.

In diesem Abschnitt wird X einen metrischen Raum mit Metrik d bezeichnen. Das Ziel ist das Radon-Nikodym Theorem zu beweisen.

Definition 1.3.1. *Seien μ ein äußeres Maß in X, $A \subseteq X$ und $x \in X$.*

1. *Man definiere die **obere n-dimensionale Dichte***

$$\Theta^{*n}(\mu, A, x) \coloneqq \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu\big(A \cap \overline{B(x,\rho)}\big)}{\omega_n\, \rho^n}$$

2. *Man definiere die **untere n-dimensionale Dichte***

$$\Theta^{n}_{*}(\mu, A, x) \coloneqq \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu\big(A \cap \overline{B(x,\rho)}\big)}{\omega_n\, \rho^n}$$

3. *Falls $\Theta^{*n}(\mu, A, x) = \Theta^{n}_{*}(\mu, A, x)$, definiere die **$n$-dimensionale Dichte***

$$\Theta^{n}(\mu, A, x) \coloneqq \Theta^{*n}(\mu, A, x) = \Theta^{n}_{*}(\mu, A, x).$$

Bemerkung 1.3.2. $\omega_n\, \rho^n$ ist das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius ρ.

Satz 1.3.3. *Die Funktionen $x \mapsto \Theta^{*n}(\mu, A, x)$ und $x \mapsto \Theta^{n}_{*}(\mu, A, x)$ sind unter- beziehungsweise oberhalbstetig und somit Borel-messbar.*

Beweis. Übung. [15, Remark 3.2, p.13], [11, p.12] J.Jost Riemmanian Geometry p.449. ∎

Satz 1.3.4 (Obere-Dichte-Theorem)**.** *Seien μ ein Borel-reguläres äußeres Maß in X und $A \subseteq X$ μ-messbar mit $\mu(A) < \infty$. Dann gilt $\Theta^{*n}(\mu, A, x) = 0$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in X \setminus A$.*

Beweis. [15, Theorem 3.6]. ∎

Korollar 1.3.5. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar.*

1. *$\Theta^{*n}(\mathcal{L}^n, A, x)$ existiert $\mathcal{L}^n$-f.ü. in $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\Theta^{*n}(\mathcal{L}^n, A, x) = 0$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. in $\mathbb{R}^n \setminus A$.*
3. *$\Theta^{*n}(\mathcal{L}^n, A, x) = 1$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. in A.*

Beweis. [15, Corollary 3.8] ∎

Definition 1.3.6. *Seien μ, μ_0 Borel-reguläre äußere Maße in X und sei μ_0 lokal endlich, d.h. für jedes $x \in X$ existiert $\rho > 0$, sodass $\mu_0\big(\overline{B(x,\rho)}\big) < \infty$. Seien*

$$U_0 \coloneqq \big\{x \in X : \exists \rho > 0 \text{ sodass } \mu_0\big(\overline{B(x,\rho)}\big) = 0\big\} \text{ und}$$
$$V_0 \coloneqq \big\{x \in X : \exists \rho > 0 \text{ sodass } \mu\big(\overline{B(x,\rho)}\big) = 0\big\}.$$

*Man definiere die **obere Dichte von μ bezüglich μ_0** durch*

$$\Theta^{*\mu_0}(\mu, x) \coloneqq \begin{cases} \limsup\limits_{\rho \downarrow 0} \dfrac{\mu\big(\overline{B(x,\rho)}\big)}{\mu_0\big(\overline{B(x,\rho)}\big)}, & \text{für } x \in X \setminus (U_0 \cup V_0) \\ +\infty, & \text{für } x \in U_0 \setminus V_0 \\ 0, & \text{für } x \in V_0, \end{cases}$$

*die **untere Dichte von** μ **bezüglich** μ_0 durch*

$$\Theta_*^{\mu_0}(\mu, x) \coloneqq \begin{cases} \liminf\limits_{\rho\downarrow 0} \dfrac{\mu\big(\overline{B(x,\rho)}\big)}{\mu_0\big(\overline{B(x,\rho)}\big)}, & \text{für } x \in X \setminus (U_0 \cup V_0) \\ +\infty, & \text{für } x \in U_0 \setminus V_0 \\ 0, & \text{für } x \in V_0, \end{cases}$$

*und, falls $\Theta^{*\mu_0}(\mu, x) = \Theta_*^{\mu_0}(\mu, x)$, die **Dichte von** μ **bezüglich** μ_0 durch*

$$\Theta^{\mu_0}(\mu, x) \coloneqq \Theta^{*\mu_0}(\mu, x) = \Theta_*^{\mu_0}(\mu, x).$$

Bemerkung 1.3.7. Seien $x \in X$ und $\rho_0 > \rho > 0$, sodass $\mu_0\big(\overline{B(x,\rho_0)}\big) = \mu\big(\overline{B(x,\rho)}\big) = 0$. Da μ, μ_0 Borel-reguläre äußere Maße sind, existiert für jedes $y \in B(x, \rho)$ ein $\rho_y > 0$, sodass $\mu_0\big(\overline{B(x,\rho_y)}\big) = \mu\big(\overline{B(x,\rho_y)}\big) = 0$. Somit sind U_0, V_0 offene Mengen.

Definition 1.3.8. *Ein äußeres Maß μ_0 hat die **Symmetrische-Vitali-Eigenschaft**, falls für jede Familie $\mathcal{B} = \big\{\overline{B(x,\rho)}\big\}_{x,\rho}$ mit*

1. $\inf\{\rho > 0 : \overline{B(x,\rho)} \in \mathcal{B}\} = 0$ *für alle* $x \in C(\mathcal{B}) \coloneqq \big\{x \in X : \exists \rho > 0$ *sodass* $\overline{B(x,\rho)} \in \mathcal{B}\big\}$
2. $\mu_0\big(C(\mathcal{B})\big) < +\infty$

eine Teilfamilie $\mathcal{B}' = \big\{\overline{B(x_j,\rho_j)} : j \in \mathbb{N}\big\} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\overline{B(x_i,\rho_i)} \cap \overline{B(x_j,\rho_j)} = \emptyset$ falls $i \neq j$ existiert, sodass $\mu_0\big(C(\mathcal{B}) \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B(x_j,\rho_j)}\big) = 0$.

Bemerkung 1.3.9. Jedes Borel-reguläre äußere Maß μ in $\mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft, dass $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten K, hat die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft. Der Beweis ist nicht elementar: Man braucht das Überdeckungslemma von Besicovitch (siehe [15, Remark 3.11(3)]).

Satz 1.3.10. *Seien μ, μ_0 offen σ-endliche Borel-reguläre äußere Maße, $A \subseteq X$, $t \geq 0$. Falls μ_0 die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, gilt:*

$$\Theta^{*\mu_0}(\mu, x) \geq t \text{ für alle } x \in A \Longrightarrow \mu(A) \geq t\, \mu_0(A).$$

Beweis. [15, Theorem 3.13] ■

Definition 1.3.11. *Sei μ ein Borel-reguläres äußeres Maß in X.*

1. *Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls $f \in L^1_{loc}(X, \mu)$, wobei*

$$L^1_{loc}(X,\mu) \coloneqq \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \mu\text{-messbar, } \forall x \in X\, \exists \rho > 0 \text{ sodass } \int_{\overline{B(x,\rho)}} |f|\, d\mu < +\infty \right\}.$$

2. *Ein Punkt $x \in X$ heißt **Lebesgue-Punkt** einer Funktion $f \in L^1_{loc}(X, \mu)$, falls*

$$f(x) = \lim_{\rho\downarrow 0} \fint_{\overline{B(x,\rho)}} f\, d\mu,$$

wobei $\fint_A f\, d\mu \coloneqq \dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int_A f\, d\mu.$

Bemerkung 1.3.12. Der Raum L^1_{loc} enthält keine Äquivalenzklassen, sondern Funktionen.

Theorem 1.3.13 (Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue)**.** *Seien μ ein offenes σ-endliches Borel-reguläres äußeres Maß mit der Symmetrischen-Vitali-Eigenschaft und $f \in L^1_{loc}$. Dann sind μ-fast alle $x \in X$ Lebesgue-Punkte von f.*

Beweis. [15, Corollary 3.17] ■

Definition 1.3.14. *Seien μ, μ_0 σ-endliche äußere Maße (X ist eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen mit endlichem Maß). Dann ist μ* ***absolut stetig bezüglich*** *μ_0 **($\mu \ll \mu_0$)**, falls $\mu_0(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ für alle $A \subseteq X$.*

Lemma 1.3.15. *Seien μ, μ_0 Borel-reguläre äußere Maße, und sei μ zusätzlichσ-endlich. Dann existiert eine Borel-Menge $B \subset X$, sodass $\mu_0(B) = 0$ und $\mu \llcorner (X \setminus B) \ll \mu_0$.*

Beweis. [15, Lemma 3.19] ■

(Erinnerung: $\mu \llcorner (X \setminus B)(A) = \mu\big(A \cap (X \setminus B)\big)$)

Satz 1.3.16. *Seien μ, μ_0 offen σ-endliche Borel-reguläre äußere Maße, $t > 0$ und $A \subseteq X$, sodass $\Theta^{\mu_0}_*(\mu, x) \leq t$ für alle $x \in A$.*

1. *Falls μ die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, gilt $\mu(A) \leq t\,\mu_0(A)$.*
2. *Falls μ_0 die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, gilt $\mu(A \setminus B) \leq t\,\mu_0(A)$, wobei B durch Lemma 1.3.15 gegeben ist.*

Beweis. [15, Theorem 3.21] ■

Satz 1.3.17. *Seien μ, μ_0 offen σ-endliche Borel-reguläre äußere Maße.*

1. *Falls μ die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, existiert eine Borel-Menge B mit $\mu(B) = 0$, sodass $x \mapsto \Theta^{\mu_0}(\mu, x)$ in $X \setminus B$ wohldefiniert ist.*
2. *Falls μ_0 die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, existiert eine Borel-Menge B mit $\mu_0(B) = 0$, sodass $x \mapsto \Theta^{\mu_0}(\mu, x)$ in $X \setminus B$ wohldefiniert und endlich ist.*

In beiden Fällen ist $x \mapsto \Theta^{\mu_0}(\mu, x)$ eine Borel-messbare Funktion in $X \setminus B$.

Beweis. [15, Theorem 3.23] ■

Theorem 1.3.18 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Seien μ, μ_0 offen σ-endliche Borel-reguläre äußere Maße und habe μ_0 die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft.*

1. *(Radon-Nikodym) Falls $\mu \ll \mu_0$ (somit hat auch μ die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft), gilt*
$$\mu(A) = \int_A \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\, d\mu_0(x) \tag{1.26}$$
für jede Borel-Menge $A \subseteq X$.
2. *(Lebesguescher Zerlegungssatz) Es existiert eine Borel-Menge $Z \subseteq X$ mit $\mu_0(Z) = 0$, sodass*
$$\mu(A) = \mu_{ac} + \mu_s := \int_A \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\, d\mu_0(x) + \mu \llcorner Z(A) \tag{1.27}$$
für jede Borel-Menge $A \subseteq X$.

3. *Falls μ die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft hat, gilt* (1.27) *mit*

$$Z = \{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = +\infty\}. \tag{1.28}$$

Bemerkung 1.3.19.
1. Nach der Bemerkung 1.3.9 folgt, dass die Menge Z in (1.28) eine μ_0-Nullmenge ist.
2. Nach der Bemerkung 1.3.9 folgt, dass (1.28) für $X = \mathbb{R}^n$ auch für μ ohne die Symmetrische-Vitali-Eigenschaft gilt.
3. Die Maße μ_{ac} und μ_s heißen ***absolut stetiger*** und ***singulärer Teil*** von μ bezüglich μ_0.

Beweis von Theorem 1.3.18. Da μ, μ_0 offen σ-endlich sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mu(X), \mu_0(X) < +\infty$ (Übung). Sei B die Borel-μ_0-Nullmenge aus Theorem 1.3.17. Für eine Borel-Menge $A \subseteq X \setminus B$ definiere

$$\nu(A) \coloneqq \int_A \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\, d\mu_0(x)$$

und für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq X \setminus B$ setze ν wie folgt fort:

$$\nu(A) \coloneqq \inf\{\nu(S) : A \subset S, S \text{ Borel-Menge}\}.$$

Somit ist ν ein Borel-reguläres äußeres Maß (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals und Lemma 1.1.20). Für eine Borel-Menge A, $m \in \mathbb{Z}$ und $t > 1$ setze $A_m \coloneqq \{x \in A : t^m \leq \Theta^{\mu_0}(\mu, x) < t^{m+1}\}$. Da $x \mapsto \Theta^{\mu_0}(\mu, x)$ Borel-messbar ist, ist A_m eine Borel-Menge und somit μ- und μ_0-messbar, da beide μ, μ_0 Borel-regulär sind. Es gilt

$$A \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m = \{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = 0\} \cup \{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = +\infty\} \cup \{x \in X : \nexists \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\}$$

und $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m, A \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m$ sind Borel-Mengen. Aus Satz 1.3.17-2. folgt, dass

$$\mu_0\big(\{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = +\infty\}\big) = \mu_0\big(\{x \in X : \nexists \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\}\big) = 0$$

und somit

$$\mu\big(\{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = +\infty\}\big) = \mu\big(\{x \in X : \nexists \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\}\big) = 0,$$

da $\mu \ll \mu_0$. Außerdem folgt aus Satz 1.3.16-1., dass $\mu_0\big(\{x \in X : \Theta^{\mu_0}(\mu, x) = 0\}\big) = 0$. Somit gilt

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m \cup (A \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m\Big).$$

Somit liefert Satz 1.3.10, dass

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m\Big) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(A_m) \geq \sum_{m\in\mathbb{Z}} t^m \mu_0(A_m)\\ &= \frac{1}{t}\sum_{m\in\mathbb{Z}} t^{m+1}\mu_0(A_m) \geq \frac{1}{t}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \nu(A_m) = \frac{1}{t}\,\nu(A),\end{aligned}$$

da ν Borel-regulär ist. Mit Satz 1.3.16-1. gilt, dass

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m\Big) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(A_m) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} t^{m+1}\mu_0(A_m)\\ &= t\sum_{m\in\mathbb{Z}} t^m\mu_0(A_m) \leq t\sum_{m\in\mathbb{Z}} \nu(A_m) = t\,\nu(A),\end{aligned}$$

da ν Borel-regulär ist. Somit gilt

$$\frac{1}{t}\,\nu(A) \leq \mu(A) \leq t\,\nu(A),$$

und wir erhalten (1.26) für $t \downarrow 1$.

Um den Zerlegungssatz zu beweisen, argumentieren wir wie folgt: Aus Lemma 1.3.15 existiert eine Borel-Menge $B \subset X$, sodass $\mu_0(B) = 0$ und $\mu \llcorner (X \setminus B) \ll \mu_0$. Somit können wir das obige Argument auf das Maß $\mu \llcorner (X \setminus B)$ anwenden und erhalten, dass

$$\mu(A \setminus B) = \int_A \Theta^{\mu_0}(\mu, x)\, d\mu_0(x)$$

für jede Borel-Menge $A \subset X$. So bekommen wir (1.27) mit $Z = B$.

Zu 3.: Aus Satz 1.3.16-1. folgt, dass $\mu_0(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$ für alle $A \subseteq X \setminus Z$, d.h. $\mu \llcorner (X \setminus Z) \ll \mu_0$. Somit können wir (1.26) auf $\mu \llcorner (X \setminus Z)$ anwenden und erhalten die Aussage. ■

1.4 Radon-Maße

In diesem Kapitel wird X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit Topologie τ sein.

Definition 1.4.1. *Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **lokalkompakter Hausdorffraum** falls:*

1. *(Hausdorff) Für jede $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren $U, V \in \tau$, sodass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*
2. *(lokale Kompaktheit) Für jedes $x \in X$ existieren $V \subseteq X$ und $U \in \tau$ mit $U \subseteq V$ (V ist eine Umgebung von x) und $\overline{V}$ kompakt.*

Oft werden wir für X folgende Eigenschaft voraussetzen:

Voraussetzung 1.4.2. *Jede offene Menge des lokalkompakten Hausdorffraumes X ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen.*

Jeder zweitabzählbare lokalkompakter Hausdorffraum (z.B. $\mathbb{R}^n$) erfüllt 1.4.2.

Definition 1.4.3. *Ein **Radon-Maß** in X ist eine äußeres Maß μ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *μ ist Borel-regulär und $\mu(K) < +\infty$ für $K \subseteq X$ kompakt.*
2. *Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subseteq O, O \text{ offen}\}$.*
3. *Für jede offene Teilmenge $O \subseteq X$ gilt $\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq O, K \text{ kompakt}\}$.*

Theorem 1.4.4. *Erfülle X Voraussetzung 1.4.2. Ein äußeres Maß in X ist ein Radon-Maß genau dann, wenn μ Borel-regulär ist, und $\mu(K) < +\infty$ für $K \subseteq X$ kompakt gilt.*

Beweis. [15, Lemma 4.9, p.31] ■

Radon-Maße sind in gewisser Weise kompatibel mit der Topologie des Raumes. Im folgenden wird $C_c(X, Y)$ den Raum aller stetigen Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ mit kompaktem Träger bezeichnen, wobei Y eine Teilmenge eines topologischen Vektorraumes Z ist, und $0 \in Y$. Erinnerung: $\operatorname{supp} f \coloneqq X \setminus \{x \in X : \exists O \in \tau \text{ sodass } x \in O \text{ und } f|_O \equiv 0\}$.

Theorem 1.4.5 (Rieszer Darstellungssatz für nicht-negative Funktionale)**.** *Sei*

$$\lambda : C_c\big(X, [0, +\infty)\big) \longrightarrow [0, +\infty)$$

linear in $C_c\big(X, [0, +\infty)\big)$. Dann existiert ein Radon-Maß μ in X, sodass $\lambda(f) = \int_X f \, d\mu$.

Beweisidee [15, Theorem 4.12, p.33]. Für $O \subseteq X$ offen, definiere

$$\mu(O) \coloneqq \sup \big\{\lambda(f) : f \in C_c\big(X, [0, +\infty)\big), f \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq O\big\} \tag{1.29}$$

und für beliebige $A \subseteq X$ definiere

$$\mu(A) \coloneqq \inf \big\{\mu(O) : A \subseteq O, O \in \tau\big\}. \tag{1.30}$$

Zunächst, wird gezeigt, dass μ ein äußeres Maß ist. Dazu verwendet man eine Zerlegung der Eins bezüglich einer endlichen Überdeckung des Trägers einer Funktion f.

Als nächstes wird gezeigt, dass μ ein Radon-Maß ist. Da μ aus (1.29)-(1.30) Eigenschaften 2. und 3. der Definition 1.4.3 erfüllt , verwendet man folgendes Lemma: Sei μ ein äußeres Maß, sodass Eigenschaften 2. und 3. der Definition 1.4.3 erfüllt sind. Dann ist μ ein Radon-Maß, falls

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2) < +\infty \tag{1.31}$$

für alle K_1, K_2 kompakt und disjunkt.

Für $f \in C_c\big(X, [0, +\infty)\big)$ und $\varepsilon > 0$ wähle $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < \sup f < t_N$ mit $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$ und setze $U_j \coloneqq f^{-1}\{(t_{j-1}, t_j)\}$, $j = 1, \ldots, N$. Aus der Definition von μ, der Definition eines Radon-Maßes, der Linearität von λ und der Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{N} t_{j-1}\, \mu(U_j) \leq \int_X f \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{N} t_j\, \mu(U_j)$$

folgt

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \left(\mu(\operatorname{supp} f) + \sup f\right) &\leq -\sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu(U_j) - \varepsilon \sup f \\
&\leq \int_X f \, d\mu - \lambda(f) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})\mu(U_j) + \varepsilon \sup f \leq \varepsilon \left(\mu(\operatorname{supp} f) + \sup f\right).
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ wird der Beweis beendet. ■

Zunächst zitieren wir den klassischen Darstellungssatz von Riesz für L^p-Räume.

Theorem 1.4.6. *Seien $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$, sodass $1/p + 1/q = 1$. Die durch*

$$g \mapsto T_g(f) \coloneqq \int_X f\, g\, d\mu$$

definierte Abbildung $T : L^q(\mu) \longrightarrow \big(L^p(\mu)\big)^*$, ist eine Isometrie. Sie ist zusätzlich ein Isomorphismus, falls (i) $p \in (1, \infty)$, oder (ii) $p = 1$ und μ ist σ-endlich, oder (iii) $p = 1$ und X ist zusätzlich eine topologische Gruppe.

Beweis. Siehe [3, Proposition 3.5.5] und weitere Diskussion auf S.108. ∎

Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Theorem 1.4.7 (Rieszer Darstellungssatz)**.** *Sei X zusätzlich entweder eine topologische Gruppe oder ein σ-kompakter Hausdorffraum und sei $L : C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, mit*

$$\sup\big\{L(f) : f \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |f| \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq K\big\} < +\infty \tag{1.32}$$

für jede $K \subseteq X$ kompakt. Dann existiert ein Radon-Maß μ in X und eine μ-messbare Funktion $\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$ μ-f.ü. in X, sodass $L(f) = \int_X f \cdot \nu\, d\mu$.

Beweisidee [15, Theorem 4.14, p.35]. Definiere $\lambda : C_c\big(X, [0, +\infty)\big) \longrightarrow [0, +\infty)$ durch

$$\lambda(f) \coloneqq \sup\big\{|L(\omega)| : \omega \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |\omega| \leq f\big\}.$$

Aus (1.32) folgt, dass $\lambda(g) < +\infty$ für alle $g \in C_c\big(X, [0, +\infty)\big)$ (setze $K = \operatorname{supp} g$ in (1.32)). Bemerke außerdem, dass $\lambda(c\, f) = c\, \lambda(f)$ und $\lambda(f + g) \geq \lambda(f) + \lambda(g)$ für $f, g \in C_c\big(X, [0, +\infty)\big)$ und $c \geq 0$ gilt, denn $|\omega_1| \leq f$ und $|\omega_2| \leq g$ impliziert $|\omega_1 + \omega_2| \leq f + g$ und somit $\lambda(f + g) \geq L(\omega_1) + L(\omega_2)$. Für die umgekehrte Ungleichung zerlegt man ein beliebiges $|\omega| \leq f + g$ in $\omega = \omega_1 + \omega_2$, sodass $|\omega_1| \leq f$, $|\omega_2| \leq g$. Somit gilt $L(\omega) = L(\omega_1) + L(\omega_2) \leq \lambda(f) + \lambda(g)$.

So erfüllt λ die Voraussetzungen des Theorems 1.4.5 und somit existiert ein Radon-Maß μ sodass $\lambda(f) = \int_X f\, d\mu$ und darüber hinaus

$$\sup\big\{|L(\omega)| : \omega \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |\omega| \leq f\big\} = \int_X f\, d\mu \tag{1.33}$$

für alle $f \in C_c\big(X, [0, +\infty)\big)$.

Für $j = 1, \ldots, n$ und $f \in C_c\big(X, \mathbb{R}\big)$ definiere $\lambda_j(f) \coloneqq L(f\, e_j)$, wobei $\{e_j\}_{j=1,\ldots,n}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$ ist. Aus (1.33) folgt

$$\begin{aligned} |\lambda_j(f)| &= |L(f\, e_j)| \\ &\leq \sup\big\{|L(\omega)| : \omega \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |\omega| \leq |f|\big\} \\ &= \lambda(|f|) = \int_X |f|\, d\mu. \end{aligned}$$

Somit kann λ_j zu einem linearen und stetigen Funktional auf $L^1(\mu)$ fortgesetzt werden (mithilfe von Hahn-Banach-Theorem). Aus Theorem 1.4.6 existiert $\nu_j \in L^\infty(\mu)$, sodass

$$\lambda_j(f) = L(f\, e_j) = \int_X f\, \nu_j\, d\mu, \tag{1.34}$$

für alle $f \in C_c\big(X, \mathbb{R}\big)$. Sei jetzt $f = \sum_{j=1}^n f_j\, e_j \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big)$. Aus (1.34) existiert $\nu \in \big(L^\infty(\mu)\big)^n$, sodass

$$L(f) = \sum_{j=1}^n L(f_j\, e_j) = \int_X f \cdot \nu \, d\mu. \tag{1.35}$$

Der Beweis von $|\nu| = 1$ μ-f.ü. folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und aus einem Approximationsargument. ■

Definition 1.4.8. *Das Maß μ aus Theorem 1.4.7 heißt **Totalvariationsmaß** bezüglich des Funktionals F. Es ist für eine offene Menge $O \subseteq X$ durch*

$$\mu(O) \coloneqq \sup\big\{L(f) : f \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |f| \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq O\big\}$$

definiert.

Mithilfe des Darstellungssatzes von Riesz sind wir in der Lage eine wichtige Kompaktheitsaussage für Radon-Maße zu beweisen.

Theorem 1.4.9 (de la Vallée-Poussin)**.** *Sei X zusätzlich ein σ-kompakter Hausdorffraum und sei $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Radon-Maßen mit der Eigenschaft*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(K) < +\infty \text{ für alle } K \subseteq X \text{ kompakt.} \tag{1.36}$$

Dann existiert ein Radon-Maß μ in X und eine Teilfolge $\{\mu_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\lim_{i\to\infty} \int_X f \, d\mu_{k_i} = \int_X f \, d\mu \text{ für jede } f \in C_c(X, \mathbb{R}). \tag{1.37}$$

Beweis. Seien $K_1, K_2, \ldots,$ sodass $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $K_j \subseteq K_{j+1}$ (wenn nicht, definiere $K_j' \coloneqq \bigcup_{l=1}^j K_l$). Definiere $F_{j,k} : C(K_j, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $F_{j,k}(f) \coloneqq \int_{K_j} f \, d\mu_k$. Somit ist die Folge $\{F_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \big(C(K_j, \mathbb{R})\big)^*$ aus (1.36) gleichmäßig beschränkt. Eine rekursive Anwendung des Theorems von Alaoglu ergibt Teilfolgen $\{F_{j,k'}\}_{k'\in N_j\subseteq\mathbb{N}}$ mit $N_{j+1} \subseteq N_j$ und $F_j \in \big(C(K_j, \mathbb{R})\big)^*$, sodass

$$\lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_j}} F_{j,k'}(f) = F_j(f) \tag{1.38}$$

für alle $f \in C(K_j, \mathbb{R})$. Für $j \in \mathbb{N}$ setze $k_j \coloneqq \min\{k' \in N_j : k_{j-1} \leq k'\}$ wobei $k_0 \coloneqq 1$, und bemerke, dass k_j wohldefiniert ist, da N_j eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

Für $f \in C_c(X, \mathbb{R})$ existiert $j \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{supp} f \subseteq K_j$. Definiere j_f als das Minimum aller dieser j. Definiere das Funktional $F : C_c(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $F(f) \coloneqq F_{j_f}(f)$. Da $\operatorname{supp}(c\, f) = \operatorname{supp} f$ für $c \in \mathbb{R}$ gilt $F(c\, f) = F_{j_f}(c\, f) = c\, F_{j_f}(f) = c\, F(f)$. Für $f, g \in C_c(X, \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
F(f+g) &= F_{j_{f+g}}(f+g) = F_{j_{f+g}}(f) + F_{j_{f+g}}(g) \\
&= \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} F_{j_{f+g},k'}(f) + \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} F_{j_{f+g},k'}(g) \\
&= \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{K_{j_{f+g}}} f \, d\mu_{k'} + \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{K_{j_{f+g}}} g \, d\mu_{k'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{\operatorname{supp} f} f \, d\mu_{k'} + \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{\operatorname{supp} g} g \, d\mu_{k'} \\
&= \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k'} + \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'\in N_{j_{f+g}}}} \int_{K_{j_g}} g \, d\mu_{k'} \\
&= F_{j_f}(f) + F_{j_g}(g) = F(f) + F(g),
\end{aligned}
$$

da $j_{f+g} \geq j_f, j_g$ und somit $N_{j_{f+g}} \subseteq N_{j_f}, N_{j_g}$.

Seien $\varepsilon > 0$, $f \in C_c(X, \mathbb{R})$. Aus (1.38) folgt, dass $\{F_{j,k'}\}_{k'\in N_j}$ eine Cauchy-Folge ist, und somit $j_0 > j_f$ und $k_0' \in N_j \subseteq N_{j_f}$ existieren, sodass für alle $j > j_0$ und $k' > k_0'$, $k' \in N_j$

$$
\left| \int_{K_j} f \, d\mu_{k_j} - \int_{K_j} f \, d\mu_{k'} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left| \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k'} - F_{j_f}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{2},
$$

wobei die zweite Ungleichung für $j = j_f$ wieder aus (1.38) folgt. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\left| \int_X f \, d\mu_{k_j} - F(f) \right| &= \left| \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k_j} - F_{j_f}(f) \right| \\
&\leq \left| \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k_j} - \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k'} \right| + \left| \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k'} - F_{j_f}(f) \right| \\
&= \left| \int_{K_j} f \, d\mu_{k_j} - \int_{K_j} f \, d\mu_{k'} \right| + \left| \int_{K_{j_f}} f \, d\mu_{k'} - F_{j_f}(f) \right| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

das heißt

$$
\lim_{j\to\infty} \int_X f \, d\mu_{k_j} = F(f). \tag{1.39}
$$

Voraussetzung (1.36) erlaubt uns Theorem 1.4.7 auf F anzuwenden, und die Existenz eines Radon-Maßes μ zu beweisen, sodass $F(f) = \int_X f \, d\mu$ für alle $f \in C_c(X, \mathbb{R})$. Somit ergibt sich aus (1.39) letztlich, dass

$$
\lim_{j\to\infty} \int_X f \, d\mu_{k_j} = \int_X f \, d\mu.
$$

■

Kapitel 2

Grundlagen aus der Analysis

2.1 Funktionen beschränkter Variation

Definition 2.1.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (beziehungsweise $L^1(\Omega)$) hat **(lokal) beschränkte Variation**, d.h. $u \in BV_{loc}(\Omega)$ (beziehungsweise $BV(\Omega)$), falls für jede offene Menge $E \subset\subset \Omega$, d.h. $\overline{E} \subset \Omega$ relativ kompakt (beziehungsweise $E = \Omega$)*

$$|Du|(E) \coloneqq \sup\left\{ \int_E u \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^n : g \in C^1_c(E, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\} < +\infty \tag{2.1}$$

gilt.

Satz 2.1.2. *Sei $u \in BV_{loc}(\Omega)$. Dann existiert ein Radon-Maß μ und eine μ-messbare Funktion $\nu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $|\nu| = 1$ μ-f.ü. in Ω und*

$$\int_\Omega u \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^n = -\int_\Omega g \cdot \nu \; d\mu$$

für alle $g \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Beweisidee [4, Theorem 5.1, p.194]. Für $E \subset\subset \Omega$ definiere das Funktional $F : C^1_c(E, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(g) \coloneqq -\int_E u \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^n$$

und setze F mithilfe von (2.1) und dem Hahn-Banach-Theorem auf $C_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ fort. Der Darstellungssatz von Riesz liefert dann den Beweis. ■

Bemerkung 2.1.3.

1. Das Totalvariationsmaß μ erfüllt $\mu = |Du|$.
2. Für $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ gilt $|Du| = |\nabla u|$ im Sinne von $|Du|(E) = \int_E |\nabla u| \, d\mathcal{L}^n$, und

$$\nu_j = \begin{cases} \dfrac{\partial_j u}{|\nabla u|} & \text{für } |\nabla u| \neq 0, \\ 0 & \text{für } |\nabla u| = 0. \end{cases}$$

3. Der distributionelle Gradient $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ von $u \in BV_{loc}(\Omega)$ (beziehungsweise $BV(\Omega)$) ist ein vektorwertiges Radon-Maß in $E \subset\subset \Omega$ (beziehungsweise in Ω).

4. Es gilt $\int_E d|Du| = |Du|(E)$.

Definition 2.1.4 (Konvergenzbegriffe in BV)**.** 1. *Eine Folge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$* ***konvergiert schwach-$*$*** *gegen eine Funktion $u \in BV(\Omega)$, falls $u_j \longrightarrow u$ in L^1 und $Du_j \overset{*}{\rightharpoonup} Du$, d.h.*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g \, dDu_j = \int_\Omega g \, dDu \text{ für alle } g \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

2. *Eine Folge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$* ***konvergiert strikt*** *gegen eine Funktion $u \in BV(\Omega)$, falls $u_j \longrightarrow u$ in L^1 und $|Du_j|(\Omega) \longrightarrow |Du|(\Omega)$.*

Satz 2.1.5 (Eigenschaften von BV)**.** 1. *Strikte Konvergenz impliziert schwach-$*$ Konvergenz. Die Umkehrung ist generell falsch.*

2. *Falls $u \in BV_{loc}(\Omega)$ (beziehungsweise $u \in BV(\Omega)$) mit $Du = 0$ (beziehungsweise $|Du|(\Omega) = 0$), so ist u in jeder zusammenhängenden Komponente von Ω $\mathcal{L}^n$-f.ü. konstant.*

3. *$BV(\Omega)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|u\|_{BV} := \|u\|_{L^1} + |Du|(\Omega)$. Er ist nicht separabel.*

4. *$|Du|(\Omega)$ ist die Operatornorm von $Du \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

5. *$BV(\Omega)$ ist der Dualraum eines separablen Banachraumes. Die duale schwach-$*$ Topologie induziert die oben definierte schwach-$*$ Konvergenz.*

6. *$W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ und $\|u\|_{BV} = \|u\|_{W^{1,1}}$ für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$.*

7. *Sei $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV_{loc}(\Omega)$ (beziehungsweise $BV(\Omega)$) und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sodass $u_j \longrightarrow u$ in L^1_{loc}. Dann gilt $|Du|(E) \le \liminf_{j\to\infty} |Du_j|(E)$ für alle $E \subset\subset \Omega$ (beziehungsweise $E = \Omega$).*

8. *Seien $u \in BV(\Omega)$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz mit $f(0) = 0$ falls $|\Omega| = \infty$. Dann gilt $f \circ u \in BV(\Omega)$ und $|D(f \circ u)|(\Omega) \le F\,|Du|(\Omega)$, wobei $F > 0$ die Lipschitz-Konstante von f ist.*

Beweis. Siehe [1, 4]. Zu 2.: $|Du|(\Omega) = 0$ impliziert $\int_\Omega u\,\partial_j g \, d\mathcal{L}^n = 0$ und somit $Du = 0$. ■

Satz 2.1.6 (Eindimensionale Charakterisierung)**.** *Für jede Funktion $u \in BV(a, b)$ existiert $\tilde{u} \in BV(a, b)$, sodass $u = \tilde{u}$ $\mathcal{L}^1$-f.ü. in (a, b) und*

$$|Du|(a, b) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{N-1} |\tilde{u}(t_j) - \tilde{u}(t_{j+1})| : a < t_1 < \dots < t_N < b, N \ge 2 \right\}.$$

Die Funktion $\tilde{u}$ heißt ***guter Repräsentant*** *von u.*

Beweis. Siehe [1, Theorem 3.27, (3.24)]. ■

Beispiel 2.1.7. Die Heaviside Funktion $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0, \\ 1 \text{ für } t \ge 0 \end{cases}$$

erfüllt $H \in BV(\mathbb{R})$ mit $|DH|(\mathbb{R}) = 1$. Außerdem ist $|DH|$ das Dirac-Maß δ:

$$\delta(A) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \notin A, \\ 1 \text{ für } 0 \in A. \end{cases}$$

Gesehen als Distribution gilt $\langle \delta, g \rangle = g(0)$.

Satz 2.1.8 (Approximation)**.** *Der Raum $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ liegt dicht in $BV(\Omega)$ bezüglich der strikten Konvergenz. Für $u \in BV_{loc}(\Omega)$ existiert eine Folge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV_{loc}(\Omega)$, sodass $u_j \longrightarrow u$ in L^1_{loc} und $|Du_j| \overset{*}{\rightharpoonup} |Du|$.*

Beweis. Siehe [4, Theorem 5.3, p.199], [15, Lemma 2.5]. ■

Das Radon-Nikodym-Theorem 1.3.18 impliziert, dass $|Du| = |Du|_s + |\nabla u|\,\mathcal{L}^n$ für $u \in BV_{loc}(\Omega)$ gilt, und $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \iff Du_s = 0$. Insbesondere gilt $u \in BV \implies u = u_{\text{absolut stetig}} + u_{\text{sprung}} + u_{\text{Cantor}}$.

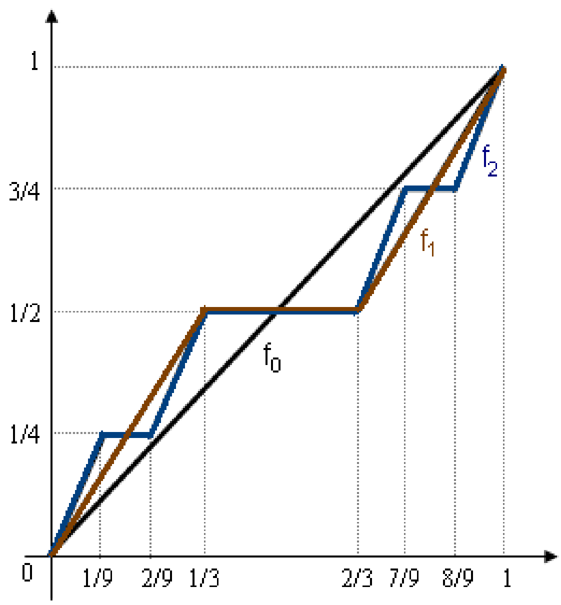

Abbildung 2.1: Iterative Konstruktion der Cantorfunktion (Teufelstreppe).

Satz 2.1.9 (Einbettungen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sodass $\partial\Omega$ kompakt und Lipschitz ist. Die Einbettung $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ ist stetig für $p \in \left[1, \frac{n}{n-1}\right]$ und kompakt für $p \in \left[1, \frac{n}{n-1}\right)$. Hier gilt die Konvention $1/0 \equiv \infty$.*

Beweis. Siehe [1, Corollary 3.49]. ■

Satz 2.1.10 (Kompaktheit)**.** *Sei $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV_{loc}(\Omega)$, sodass*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\|u_j\|_{L^1(E)} + \int_E d|Du_j| \right) < +\infty$$

für alle $E \subset\subset \Omega$. Dann existieren $u \in BV_{loc}(\Omega)$ und $\{u_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $u_{j_k} \longrightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Falls $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt ist, gilt $u \in BV(\Omega)$ und $u_{j_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u$.

Beweis. Siehe [1, Proposition 3.23]. ■

Satz 2.1.11 (Poincaré Ungleichung)**.** *Sei W ein nicht-trivialer Unterraum von $BV(\Omega)$, abgeschlossen bezüglich der L^1-Topologie, mit der Eigenschaft: $u \in W$, u in jeder zusammenhängenden Komponente von Ω konstant $\Longrightarrow u = 0$. Dann existiert eine Konstante $C(\Omega) > 0$, sodass $\|u\|_{L^1} \leq C(\Omega)\,|Du|(\Omega)$ für alle $u \in W$.*

Beweis. Angenommen es existiert $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset W$, sodass $\|u_j\|_{L^1} > j\,|Du_j|(\Omega)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $u_j \neq 0$. Definiere $v_j = u_j / \|u_j\|_{L^1}$. Dann gilt $\|v_j\|_{L^1} = 1$, und aus der Definition der Totalvariation folgt $|Dv_j|(\Omega) = |Du_j|(\Omega)/\|u_j\|_{L^1} < 1/j$. Somit gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|v_j\|_{BV} \leq 2$ und daher existieren eine Teilfolge $\{v_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $v \in BV(\Omega)$, sodass $v_{j_k} \xrightarrow{*} v$. Da W ein abgeschlossener Unterraum ist, gilt $v \in W$. Die Unterhalbstetigkeit der Totalvariation impliziert

$$|Dv|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} |Dv_{j_k}|(\Omega) = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{j_k} = 0.$$

Somit ist v in jeder zusammenhängenden Komponente von Ω konstant und daher $v = 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\|v_j\|_{L^1} = 1$. ■

2.2 Die Flächenformel

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitz und injektiv. Dann existiert $\partial_j f$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. und somit die Jakobi-Determinante

$$J_f := \sqrt{\det\left(\nabla f^\top \nabla f\right)} = \sqrt{\det\left\{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_1 f_{n+m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n f_1 & \dots & \partial_n f_{n+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_{n+m} & \dots & \partial_n f_{n+m} \end{pmatrix}\right\}}.$$

Darüber hinaus gilt

$$\mathcal{H}^n\big(f(A)\big) = \int_A J_f \, d\mathcal{H}^n. \tag{2.2}$$

Falls f nicht injektiv ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{H}^0\big(f^{-1}(y) \cap A\big)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_A J_f \, d\mathcal{H}^n, \tag{2.3}$$

wobei $H^0\big(f^{-1}(y) \cap A\big)$ die Anzahl von Elementen im Urbild von f, die in A liegen, angibt. Für eine Funktion $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} h(x) \right) d\mathcal{H}^n(y) = \int_A h\, J_f \, d\mathcal{H}^n. \tag{2.4}$$

Für $\mathcal{H}^n$-f.a. $y \in \mathbb{R}^{n+m}$ gilt, dass $f^{-1}(y)$ abzählbar ist ([4, Remark, p.119]).

Beispiel 2.2.1. 1. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt $J_\gamma = \sqrt{|\gamma'|^2} = |\gamma'|$ und somit

$$\mathcal{H}^1\big(\gamma([a,b])\big) = \int_a^b |\gamma'| \, d\mathcal{H}^1 = \int_a^b |\gamma'(s)| \, ds.$$

2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $M := \{(x, u(x)) : x \in \Omega\}$ der Graph von u. So ist $M = \varphi(\Omega)$, wobei $\varphi : x \mapsto (x, u(x))$, und es gilt

$$\mathcal{H}^n(M) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, d\mathcal{L}^n.$$

Für die Beweise der Formeln siehe [4, Section 3.3].

2.3 Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum

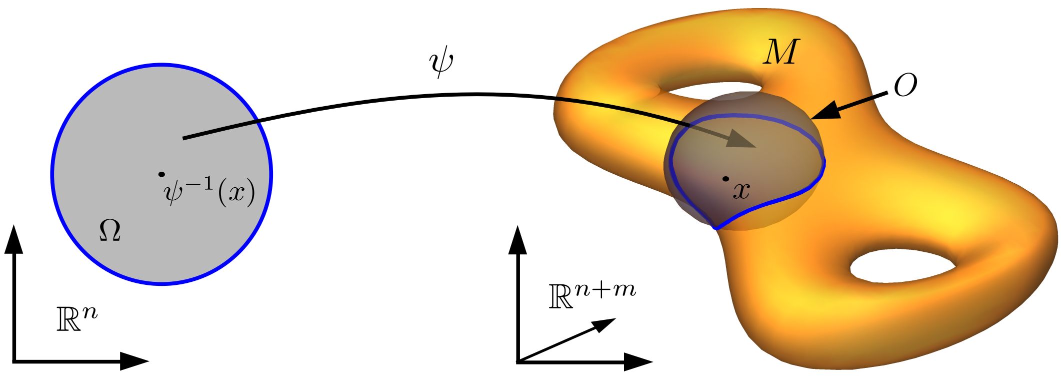

Abbildung 2.2: Die Untermannigfaltigkeit M und die lokale Immersion ψ.

Zuerst setzen wir fest was Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einer beliebigen Teilmenge bedeutet.

Definition 2.3.1. *Sei $k \geq 1$ und $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ beliebig.*

1. *Eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heißt C^r in M, falls eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $M \subseteq O$ und eine C^r Funktion $\overline{f} : O \longrightarrow \mathbb{R}^k$ existieren, sodass $\overline{f}|_M = f$. Für $x \in M$ definiere $\nabla f(x) := \nabla \overline{f}(x)$, falls $\nabla \overline{f}|_M$ unabhängig von der Fortsetzung $\overline{f}$ ist.*

2. *Eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heißt **lokal Lipschitz** in M, falls für jedes $x \in M$ ein $\rho > 0$ und ein $L > 0$ existieren, sodass*

$$|f(y) - f(z)| \leq L\,|y - z|$$

für alle $y, z \in M \cap \overline{B(x, \rho)}$.

Definition 2.3.2. 1. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. Eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ heißt **Immersion**, falls der Gradient $\nabla\psi$ wohldefiniert in M ist, und falls für alle $x \in M$ der Rang der $(n+m) \times n$ Matrix $\nabla\psi(x)$ gleich n ist.*

2. *Sei $r \geq 1$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heißt **n-dimensionale C^r Untermannigfaltigkeit von** $\mathbb{R}^{n+m}$, falls es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $x \in O$ gibt, sowie eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und entweder eine Immersion*

$$\psi : \Omega \longrightarrow M \cap O$$

oder eine Immersion

$$\psi : \Omega \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \longrightarrow M \cap O,$$

*sodass ψ in beiden Fällen sowohl ein Homöomorphismus als auch eine C^r Abbildung ist. Die Abbildung ψ heißt **lokale Parameterdarstellung**.*

3. *Das **Innere einer n-dimensionale C^r Untermannigfaltigkeit von** $\mathbb{R}^{n+m}$ ist definiert durch: $x \in \operatorname{int} M$, falls es eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $x \in O$ sowie eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ existieren, sodass $\psi : \Omega \longrightarrow M \cap O$ eine lokale Parameterdarstellung ist.*

4. *Der **Rand einer n-dimensionale C^r Untermannigfaltigkeit von** $\mathbb{R}^{n+m}$ ist definiert durch $\partial M := M \setminus \operatorname{int} M$.*

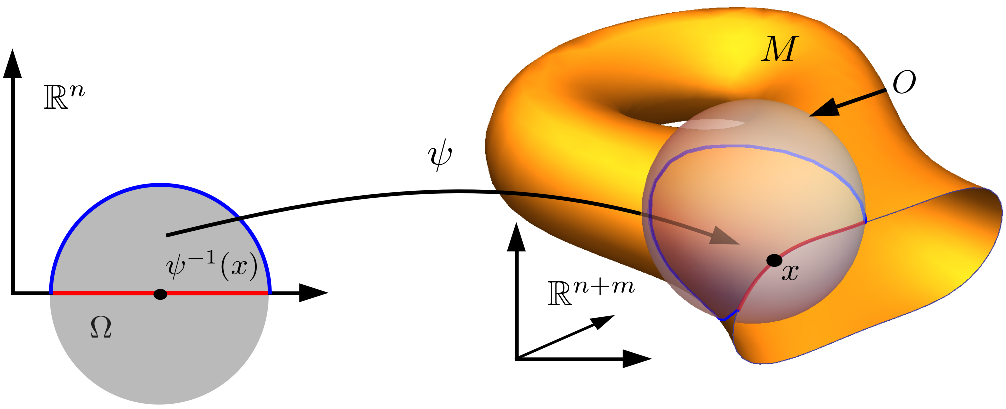

Abbildung 2.3: Eine Untermannigfaltigkeit M mit einem nicht-leeren Rand.

In diesem Abschnitt bezeichnet M eine n-dimensionale C^r $(r \geq 1)$ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$.

Der Rand einer Untermannigfaltigkeit unterscheidet sich vom topologischen Rand: Seien

$$M_1 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$$

und

$$M_2 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)\}.$$

Dann gilt $\partial M_1 \neq \partial_{top} M_2 = \partial_{top} M_1 = M_1$ und $\partial M_2 = \emptyset$. Um die Randpunkte einer Untermannigfaltigkeit zu charakterisieren, existiert ein anschauliches Tool:

Lemma 2.3.3. *Seien x, ψ, Ω und O wie in Definition 2.3.2-2..*

1. *Falls $\psi : \Omega \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \longrightarrow M \cap O$ und $x = \psi(y)$ für $y \in \Omega \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, dann gilt $x \in \operatorname{int} M$.*

2. *Falls $\psi : \Omega \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\} \longrightarrow M \cap O$ und $x = \psi(y)$ für $y \in \Omega \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, dann gilt $x \in \partial M$.*

Beweis. Siehe [14, Lemma 24.2, p.205]. ∎

Theorem 2.3.4. *Falls $\partial M \neq \emptyset$, dann ist ∂M eine $(n-1)$-dimensionale C^r Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ ohne Rand.*

Beweis. Siehe [14, Theorem 24.3, p.206]. ∎

Definition 2.3.5.

1. *Sei $x \in \operatorname{int} M$. Der **Tangentialraum** T_xM an M in x ist der Vektorraum aller $\tau \in \mathbb{R}^{n+m}$, sodass eine C^1 Kurve $\gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\gamma\big((-1,1)\big) \subseteq M$, $\gamma(0) = x$ und $\tau = \gamma'(0)$ existiert.*

2. *Sei $x \in \partial M$. Der **Tangentialraum** T_xM an M in x ist der Vektorraum aller $\tau \in \mathbb{R}^{n+m}$, sodass eine C^1 Kurve $\gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\gamma\big((0,1)\big) \subseteq M$ oder $\gamma\big((-1,0)\big) \subseteq M$, $\gamma(0) = x$ und $\tau = \gamma'(0)$ existiert.*

Es gilt

$$T_xM = \operatorname{span}\{\partial_1\psi(y), \dots, \partial_n\psi(y)\},$$

wobei ψ eine lokale Parameterdarstellung mit $\psi(y) = x$ ist.

Für eine Funktion betrachten wir die Richtungsableitung: Seien $x \in M$ und $\tau \in T_xM$. Man definiere

$$D_\tau f(x) \coloneqq \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0},$$

wobei $\gamma : (-1,1) \longrightarrow M$ eine C^1 Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(0) = \tau$ ist. Eine wichtige Folgerung des Theorems von Rademacher ist folgender Satz.

Satz 2.3.6. *Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitz.*

1. *Es existiert eine $\mathcal{H}^n$-Nullmenge E, sodass für alle $x \in M \setminus E$ die Ableitung $D_\tau f(x)$ für alle $\tau \in T_xM$ existiert und die Abbildung $\tau \mapsto D_\tau f(x)$ eine lineare Abbildung von $T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ist.*

2. *Sei f die Einschränkung einer lokalen Lipschitz Funktion $\overline{f}$, die in einer offenen Menge $O \supseteq M$ definiert ist. Dann gilt $D_\tau f(x) = \frac{d}{dt}\overline{f}(x + t\tau)\big|_{t=0}$.*

Beweis. Siehe [15, 4.8-4.10, p.57]. ∎

Für eine lokal Lipschitz Funktion kann man auf der Mannigfaltigkeit Div-Grad-und Co. definieren.

Definition 2.3.7. *Seien $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $X = (X_1, \dots, X_{n+m}) : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ lokal Lipschitz, $x \in M$ und $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ eine Orthonormalbasis von T_xM.*

1. *Der **Pushforward** (Differential oder induzierte lineare Abbildung) $df_x^M : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ist durch $df_x^M(\tau) \coloneqq D_\tau f(x)$ definiert.*

2. *Der **Gradient** $\nabla_M f$ ist durch*

$$\nabla_M f(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \big(D_{\tau_j} f(x)\big)\,\tau_j$$

definiert. Er ist ein Vektor für $k = 1$ und eine Matrix für $k > 1$.

3. *Die* **Divergenz** $\operatorname{div}_M X$ *ist durch*

$$\operatorname{div}_M X(x) := \sum_{j=1}^{n} D_{\tau_j} X_j(x)$$

definiert.

4. *Die* **Jakobi-Determinante** J_f *ist durch* $J_f(x) := \sqrt{\det\left(\nabla_M f(x)^\top \nabla_M f(x)\right)}$ *definiert.*

Falls f die Einschränkung einer lokalen Lipschitz Funktion $\overline{f}$ ist, die in einer offenen Menge $O \supseteq M$ definiert ist, gilt

$$\nabla_M f(x) = P_{T_x M}\big(\nabla_{\mathbb{R}^{n+m}} \overline{f}(x)\big),$$

wobei $P_{T_x M}$ die orthogonale Projektion auf $T_x M$ ist.

Satz 2.3.8. *Seien $k \geq n$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitz und $h \in L^1_{loc}(M)$. Dann sind die Funktionen $y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} h(x)$ und $x \mapsto h(x)\, J_f(x)$ $\mathcal{H}^n$-messbar und gilt*

$$\int_{f(M)} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} h(x) \right) d\mathcal{H}^n(y) = \int_M h\, J_f \, d\mathcal{H}^n. \tag{2.5}$$

Beweis. Siehe [15, 4.13, p.58], [4, Theorem 3.9, p.122]. ■

Satz 2.3.9. *Sei M zusätzlich C^2 und kompakt in $\mathbb{R}^{n+m}$, und sei $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitz, sodass $X(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$ gilt. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div}_M X \, d\mathcal{H}^n = \int_{\partial M} X \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei ν der (bzgl. M) äußere Normalenvektor von ∂M ist, d.h. für $x \in \partial M$ und für eine C^1 Kurve $\gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\gamma\big((0,1)\big) \subseteq M$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) \in \big(T_x \partial M\big)^\perp$ und $|\gamma'(0)| = 1$, gilt $\nu(x) = -\gamma'(0)$.

Beweis. Der Beweis folgt aus [14, Theorem 38.8, p.319], wenn man $\mathbb{R}^{n+1}$ als eine C^1 Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ betrachtet. Siehe auch [1, Theorem 7.34], [6, p.391]. Für die Vollversion siehe [6, 4.5.6, p.478]. ■

Definition 2.3.10. *Seien M eine C^2 Untermannigfaltigkeit, $x \in M$, $\nu_1, \ldots, \nu_m$ in einer Umgebung U_x von x definierte C^1 Vektorfelder, sodass $\nu_i(y) \cdot \nu_j(y) = \delta_{ij}$ und $\nu_j(y) \in \big(T_y M\big)^\perp$ für alle $y \in V_x \cap M$, wobei $V_x \subseteq U_x$ eine Umgebung von x ist.*

1. *Die* **zweite Fundamentalform** $B_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \big(T_x M\big)^\perp$ *ist definiert durch*

$$B_x(\tau, \eta) := -\sum_{j=1}^{m} \big(\eta \cdot D_\tau \nu_j(x)\big)\, \nu_j(x).$$

2. *Sei $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Der* **mittlere Krümmungsvektor** $\mathbf{H}(x)$ *ist definiert durch*

$$\mathbf{H}(x) := \sum_{j=1}^{n} B_x(\tau_j, \tau_j).$$

Es gilt

$$\mathbf{H}(x) = -\sum_{j=1}^{n} \big(\operatorname{div}_M \nu_j(x)\big)\, \nu_j(x) \in \big(T_x M\big)^\perp.$$

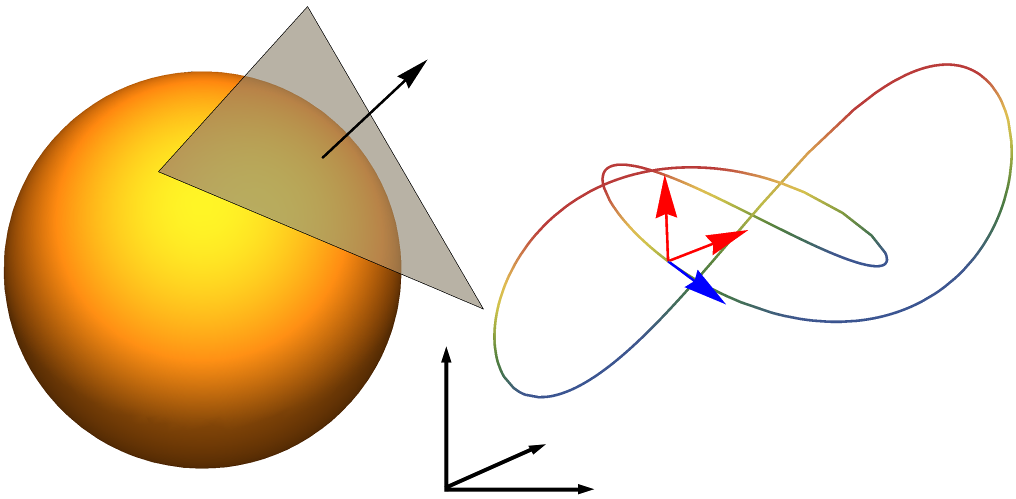

Abbildung 2.4: Die Normalfelder (schwarz, rot) einer zwei- und eindimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 2.3.11. 1. (Übung) Seien $\tau \in T_xM$ mit $|\tau| = 1$ und $\gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^2 Kurve mit $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = \tau$ und $\gamma\big((-1,1)\big) \subset M$. Dann gilt

$$B_x(\tau,\tau) = P_{(T_xM)^\perp}\big(\gamma''(0)\big).$$

2. Seien $\tau, \eta \in T_xM$, $O \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $(0,0) \in O$ und $\varphi \in C^2(O, \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\varphi(0,0) = x$, $\partial_{x_1}\varphi(0,0) = \tau$, $\partial_{x_2}\varphi(0,0) = \eta$ und $\varphi(O) \subset M$. Dann gilt

$$B_x(\tau,\eta) = -P_{(T_xM)^\perp}\big(\partial_{x_1x_2}\varphi(0,0)\big).$$

3. Die Bilinearform B_x ist symmetrisch.

Satz 2.3.12. *Sei M zusätzlich C^2 und kompakt in $\mathbb{R}^{n+m}$, und sei $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitz. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div}_M X \, d\mathcal{H}^n = -\int_M X \cdot \mathbf{H} \, d\mathcal{H}^n + \int_{\partial M} X \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei ν der äußere Normalenvektor von ∂M ist.

Beweis. Wir zerlegen X in ein Normal- und ein Tangentialteil:

$$X = P_{T_xM}(X) + \big(\mathrm{Id} - P_{T_xM}\big)(X) = P_{T_xM}(X) + P_{(T_xM)^\perp}(X)$$

und somit

$$\operatorname{div}_M X = \operatorname{div}_M P_{T_xM}(X) + \operatorname{div}_M P_{(T_xM)^\perp}(X). \tag{2.6}$$

Sei $x \in M$. Es existiert eine Umgebung U_x von x, sodass

$$P_{(T_xM)^\perp}(X)(y) = \sum_{j=1}^m \big(X(y) \cdot \nu_j(y)\big)\, \nu_j(y)$$

für alle $y \in U_x$ (in der Notation von Definition 2.3.10), und darüber hinaus ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_M P_{(T_xM)^\perp}(X)(y) &= \sum_{j=1}^m \operatorname{div}_M \Big(\big(X(y)\cdot \nu_j(y)\big)\,\nu_j(y)\Big)\\ &= \sum_{j=1}^m \Big(\nabla_M\big(X(y)\cdot\nu_j(y)\big)\cdot \nu_j(y) + \big(X(y)\cdot\nu_j(y)\big)\operatorname{div}_M \nu_j(y)\Big)\\ &= \sum_{j=1}^m \big(X(y)\cdot\nu_j(y)\big)\operatorname{div}_M \nu_j(y).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\operatorname{div}_M P_{(T_xM)^\perp}(X)(x) = -X(x)\cdot \mathbf{H}(x) \tag{2.7}$$

für alle $x \in M$. Außerdem, da P_{T_xM} eine Lipschitz Abbildung ist, impliziert Satz 2.3.9, dass

$$\int_M \operatorname{div}_M P_{T_xM}(X)\, d\mathcal{H}^n = \int_{\partial M} X\cdot \nu\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{2.8}$$

da $\nu(x) \in T_xM$. Die Relationen (2.6)-(2.8) liefern das Ergebnis. ■

2.4 Erste und zweite Variationsformel

In diesem Abschnitt wird M eine n-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ sein.

Bedingungen 2.4.1 (Deformationsfeld)**.** *1. Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\Omega \cap M \neq \emptyset$ ist offen, und es ist $\mathcal{H}^n(\tilde{K}\cap M) < \infty$ für alle $\tilde{K} \subset \Omega$ kompakt.*

2. *Es existieren eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ und eine Familie von Diffeomorphismen $\{\varphi_t\}_{t\in[-1,1]}$ mit $\varphi_t : \Omega \longrightarrow \Omega$, sodass*
   - *(a) Die Abbildungen $(-1,1)\times\Omega \longrightarrow \Omega$, $(t,x)\mapsto \varphi_t(x)$ sind $C^{2,1}$ (zweimal Lipschitz differenzierbar).*
   - *(b) $\varphi_0(x) = x$ für alle $x \in \Omega$.*
   - *(c) $\varphi_t(x) = x$ für alle $(t,x) \in (-1,1)\times\Omega\setminus K$.*
3. *Man definiere $X(x) \coloneqq \partial_t\varphi_0(x)$ und $Z(x) \coloneqq \partial_{tt}\varphi_0(x)$. Es gilt $X \in C_c^{1,1}\big(\Omega,\mathbb{R}^{n+m}\big)$ und $Z \in C_c^{0,1}\big(\Omega,\mathbb{R}^{n+m}\big)$.*
4. *Man definiere $M_t \coloneqq \varphi_t(M\cap K)$.*

Somit ist $\{M_t\}_{t\in[-1,1]}$ eine Familie von n-dimensionalen C^1 Untermannigfaltigkeiten (die Komposition von φ_t mit der lokalen Immersion ist wieder eine Immersion, φ_t ist ein Diffeomorphismus), und es gilt $M_0 = M\cap K$. Um die erste und zweite Variationsformel

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} \quad\text{und}\quad \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0}, \tag{2.9}$$

zu berechnen, benötigen wir:

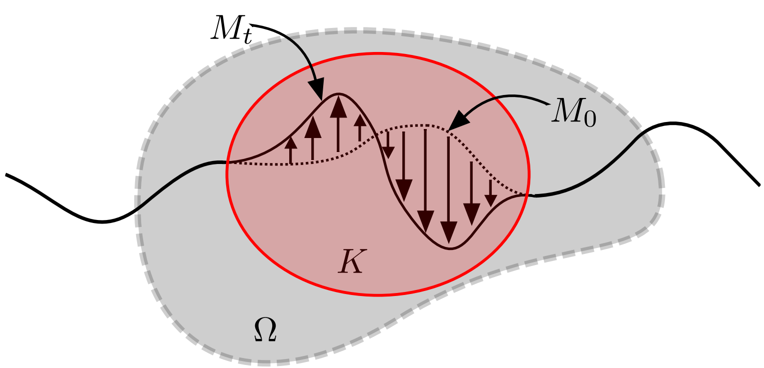

Abbildung 2.5: Eine glatte lokale Verformung von M.

(i) die Flächenformel (Satz 2.3.8)

$$\mathcal{H}^n(M_t) = \mathcal{H}^n\big(\varphi_t(M \cap K)\big) = \int_{M\cap K} J_{\varphi_t|_{M\cap K}}\, d\mathcal{H}^n,$$

(ii) eine Taylorentwicklung zweiter Ordnung der Jakobi-Determinante und,

(iii) ein Approximationsargument.

Somit gilt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_{M\cap K} \operatorname{div}_M X\, d\mathcal{H}^n \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_{M\cap K} \Big\{ &\operatorname{div}_M Z + \big(\operatorname{div}_M X\big)^2 + \sum_{j=1}^{n} \big|P_{(T_xM)^\perp}\big(D_{\tau_j}X\big)\big|^2, \\ &- \sum_{i,j=1}^{n} \big(\tau_i \cdot D_{\tau_j}X\big)\big(\tau_j \cdot D_{\tau_i}X\big)\Big\}\, d\mathcal{H}^n,\end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ eine Orthonormalbasis von T_xM ist. Diese Berechnung motiviert folgende Definition.

Definition 2.4.2. *1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen mit $\Omega \cap M \neq \emptyset$ und $\mathcal{H}^n(K \cap M) < \infty$ für alle kompakte Mengen $K \subset \Omega$. Die Untermannigfaltigkeit M heißt **stationär in** Ω, falls*

$$\int_M \operatorname{div}_M X\, d\mathcal{H}^n = 0$$

für alle Vektorfelder $X \in C_c^1\big(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m}\big)$ mit $\operatorname{supp} X \subset \Omega$.

*2. Seien N eine $(n+l)$-dimensionale C^2 Untermannigfaltigkeit mit $0 \leq l \leq m$ und $M \subseteq N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen mit $\Omega \cap \partial N = \Omega \cap \partial M = \emptyset$. Die Untermannigfaltigkeit M heißt **stationär in** $\Omega \cap N$, falls*

$$\int_M \operatorname{div}_M X\, d\mathcal{H}^n = 0$$

für alle Vektorfelder $X \in C_c^1\big(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m}\big)$ mit: (i) $\operatorname{supp} X \subset \Omega$, (ii) $\operatorname{supp} X \cap N$ kompakt in $\mathbb{R}^{n+m}$ und (iii) $X(x) \in T_xN$ für alle $x \in M$.

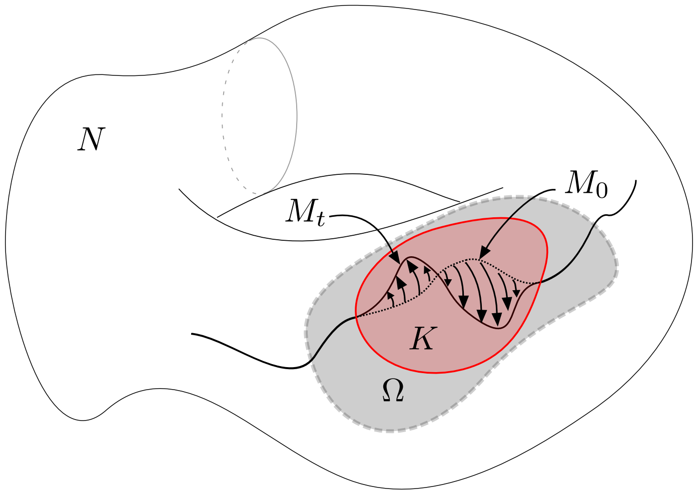

Abbildung 2.6: Deformation entlang $T_x N$.

Mithilfe des Satzes von Gauß-Green (Satz 2.3.12) kann man folgende Aussage treffen.

Lemma 2.4.3. *Sei M zusätzlich eine C^2 Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ mit mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$, und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ mit $\Omega \cap M \neq \emptyset$ offen. M ist stationär in Ω genau dann, wenn $\mathbf{H} = 0$ in $M \cap \Omega$ und $\partial M \cap \Omega = \emptyset$.*

Bemerkung 2.4.4. Falls M als Graph einer skalarwertigen Funktion $u \in C^2(E)$ für ein C^2 Gebiet $E \subset \mathbb{R}^n$ dargestellt werden kann (d.h. $m = 1$), gilt

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = H, \tag{2.12}$$

wobei $\mathbf{H} = H\nu$ und ν der äußere Normalenvektor von M ist, d.h. $\nu(x) \in (T_x M)^{\perp}$. Die Funktion H heißt ***mittlere Krümmung*** und Gleichung (2.12) ist für $H = 0$ bekannt als ***Minimalflächengleichung***

Lemma 2.4.5. *Seien N, Ω wie bei der Definition 2.4.2-2.. M ist stationär in $\Omega \cap N$ genau dann, wenn*

$$\int_M \operatorname{div}_M X \, d\mathcal{H}^n = -\int_M X \cdot \overline{\mathbf{H}} \, d\mathcal{H}^n \tag{2.13}$$

für alle Vektorfelder $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\operatorname{supp} X \subset \Omega$. Hier ist

$$\overline{\mathbf{H}}(x) := \sum_{j=1}^{n} B_x^N(\tau_j, \tau_j),$$

wobei B_x^N die zweite Fundamentalform von N in x und $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$ ist.

Beweis. Siehe [15, 5.9, p.64]. ■

Lemma 2.4.6. *Seien M zusätzlich C^2 und stationär in Ω mit $\Omega \cap \partial M = \emptyset$ und $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\operatorname{supp} X \subset \Omega$ und $X(x) \in (T_x M)^{\perp}$ für alle $x \in M$. Dann gilt*

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|P_{(T_x M)^{\perp}}(D_{\tau_j} X)\right|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left(X \cdot B_x(\tau_i, \tau_j)\right)^2 \right\} d\mathcal{H}^n. \tag{2.14}$$

Beweis. Siehe [15, Lemma 5.11, p.65]. ■

Bemerkung 2.4.7. Falls $m = 1$ und M mit Normalenvektor ν orientierbar ist, gilt $X = \zeta\,\nu$ für eine skalarwertige Funktion ζ mit kompaktem Träger in M. In diesem Fall kann man Gleichung (2.14) umschreiben:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left\{|\nabla_M \zeta|^2 - |\zeta|^2\,|B|^2\right\}\,d\mathcal{H}^n,$$

wobei $|B|$ die Frobeniusnorm der Matrix $\{B_x(\tau_i, \tau_j)\}_{i,j=1}^n$ ist.

2.5 Die Koflächenformel und eine C^1 Version des Satzes von Sard

Die Flächenformel (2.5) (Satz 2.3.8) ist eine Generalisierung der Substitutionsregel der Integralrechnung für Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^k$ für $k \geq n$. Auch für $k < n$ ist es möglich eine Generalisierung zu finden. Diese ist die Koflächenformel und es stellt sich heraus, dass sie eine Generalisierung des Satzes von Fubini ist. Für eine differenzierbare Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k < n$, gilt $J_f(x) = 0$.

Definition 2.5.1. *Seien $k < n$ und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitz. Die* ***Jakobi-Determinante*** *J_f^* ist durch*

$$J_f^*(x) \coloneqq \sqrt{\det\left(\nabla_M f(x)\,\nabla_M f(x)^\top\right)}$$

definiert.

Satz 2.5.2. *Seien $k < n$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitz, $E \subseteq M$ $\mathcal{H}^n$-messbar und $h \in L^1_{loc}(M)$. Dann ist $h \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^{n-k})$ und gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{E\cap f^{-1}(y)} h(x)\,d\mathcal{H}^{n-k}(x)\right)d\mathcal{H}^n(y) = \int_E h\,J_f^*\,d\mathcal{H}^n. \tag{2.15}$$

Beispiel 2.5.3.

1. (Niveaumengen) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz und setze $h = 1$. Die Koflächenformel impliziert

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{H}^{n-1}\big(f^{-1}(t)\big)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|\,d\mathcal{H}^n.$$

2. (Kugelkoordinaten) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Die Koflächenformel impliziert

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{\partial B(0,r)} h(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)dr = \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\mathcal{H}^n.$$

3. (Fubini) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$. Die Koflächenformel impliziert

$$\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} h(x_1, \ldots, x_n)\,d\mathcal{H}^{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)\right)d\mathcal{H}^k(x_1, \ldots, x_k) = \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\mathcal{H}^n.$$

Der klassische Satz von Sard besagt, dass die Bildmenge aller kritischen Punkten einer glatten Abbildung zwischen zweier Untermannigfaltigkeiten eine (Lebesgue-) Nullmenge ist. Dies bedeutet, dass jede zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten glatte Abbildung f.ü. invertierbar ist. Mithilfe der Koflächenformel können wir eine schwächere Version dieses Satzes beweisen.

Theorem 2.5.4 (C^1-Sard)**.** *Seien $k < n$ und $f \in C^1(M, \mathbb{R}^k)$ und setze*

$$C \coloneqq \{x \in M : J_f^*(x) = 0\}.$$

Dann gilt für $\mathcal{L}^k$-f.a. $y \in f(M)$, dass

1. $f^{-1}(y) = \big(f^{-1}(y) \setminus C\big) \cup \big(f^{-1}(y) \cap C\big)$,
2. $\mathcal{H}^{n-k}\big(f^{-1}(y) \cap C\big) = 0$, *und*
3. $f^{-1}(y) \setminus C$ *ist entweder leer oder eine $(n-k)$-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeit.*

Beweis. Aussagen 1. und 2. bekommt man aus der Koflächenformel (2.15) mit $E = C$ und $h = 1$. Aussage 3. ist eine direkte Anwendung des Satzes von der Umkehrabbildung, da $J_f^*(x) \neq 0$ impliziert, dass die Jakobi-Matrix invertierbar ist. ■

Kapitel 3

Abzählbar *n*-rektifizierbare Mengen

3.1 Der approximative Tangentialraum

Definition 3.1.1. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ heißt **abzählbar n-rektifizierbare Menge**, falls $M_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, $A_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f_j : A_j \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitz für $j \in \mathbb{N}$ existieren, sodass*

$$M = M_0 \cup \big(\cup_{j=1}^{\infty} f_j(A_j) \big).$$

Mithilfe des C^1 Approximationssatzes für Lipschitz Funktionen kann man folgende Charakterisierung beweisen.

Satz 3.1.2. *M ist abzählbar n-rektifizierbar genau dann, wenn $M \subseteq \cup_{j=0}^{\infty} N_j$, wobei $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ und N_j für $j \in \mathbb{N}$ n-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{n+m}$ sind.*

Beweis. Siehe [15, Lemma 1.2, p.69]. ■

Bemerkung 3.1.3. Setze $M_0 \coloneqq N_0 \cap M$ und $M_j \coloneqq M \cap N_j \setminus \cup_{i=0}^{j-1} M_j$, $j = 1, 2, \dots$. Somit gilt $M_j \subseteq N_j$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $M = \cup_{j=0}^{\infty} M_j$.

Zunächst betrachten wir Tangenten aus Sicht der Maßtheorie. Die Idee hierzu ist, dass die „infinitesimale“ Fläche der Mannigfaltigkeit im Punkt x gleich der „infinitesimale“ Fläche des Tangentialraumes im Punkt x sein soll. Um diese Idee rigoros zu machen, skalieren wir diese „infinitesimale“ Fläche hoch, und vergleichen sie lokal mit der Fläche des Tangentialraumes.

Definition 3.1.4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{H}^n$-messbar, sodass $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle $K \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ kompakt. Der **approximative Tangentialraum** $T_x M$ an M in x ist der (eindeutig bestimmte) n-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^{n+m}$, sodass*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\lambda^{-1}(M-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_{T_x M} f \, d\mathcal{H}^n,$$

für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$.

Theorem 3.1.5. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle $K \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ kompakt. Dann ist M abzählbar n-rektifizierbar genau dann, wenn der approximative Tangentialraum $T_x M$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ existiert.*

Beweis. Wir zeigen „$\Longrightarrow$“. Für die andere Richtung siehe [15, Theorem 1.6, p.71]. Nach Bemerkung 3.1.3 gilt $M = \cup_{j=0}^{\infty} M_j$, $M_j \subseteq N_j$, wobei N_j n-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeiten sind, und $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Außerdem sind die M_j $\mathcal{H}^n$-messbar, da M messbar ist. Seien $f \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$ und $R > 0$ so, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \overline{B(0,R)}$. Fixiere j und beachte, dass

$$M = M_j \cup (M \setminus M_j) = \Big(N_j \setminus (N_j \setminus M_j)\Big) \cup (M \setminus M_j),$$

da $M_j \subseteq N_j$ und $N_j \setminus M_j$ das relative Komplement in N_j ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\lambda^{-1}(M-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_{\lambda^{-1}(N_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) &- \int_{\lambda^{-1}(N_j\setminus M_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y)\\ &+ \int_{\lambda^{-1}(M\setminus M_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y).\end{aligned}$$

Da N_j eine n-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeit ist, gilt (Übung)

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \int_{\lambda^{-1}(N_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_{T_x N_j} f\, d\mathcal{H}^n.$$

Außerdem gilt nach dem Theorem der oberen Dichte 1.3.4:

$$\begin{aligned}\left| \int_{\lambda^{-1}(N_j\setminus M_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \right| &\leq \sup|f|\, \mathcal{H}^n\Big(\overline{B(0,R)} \cap \lambda^{-1}(N_j \setminus M_j - x)\Big)\\ &\qquad\qquad \Big(\text{denn } \operatorname{supp} f \subseteq \overline{B(0,R)}\Big)\\ &= \sup|f|\, \mathcal{H}^n\Big(\lambda^{-1}\big(\overline{B(0,\lambda R)} \cap (N_j \setminus M_j - x)\big)\Big)\\ &= \sup|f|\, \lambda^{-n}\, \mathcal{H}^n\Big(\overline{B(0,\lambda R)} \cap (N_j \setminus M_j - x)\Big)\\ &= \sup|f|\, \lambda^{-n}\, \mathcal{H}^n\Big(\overline{B(x,\lambda R)} \cap (N_j \setminus M_j)\Big) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $\lambda \downarrow 0$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M_j$.

(Erinnerung: [Obere-Dichte-Theorem] Seien μ ein Borel-reguläres äußeres Maß in X und $A \subseteq X$ μ-messbar mit $\mu(A) < \infty$. Dann gilt

$$\Theta^{*n}(\mu, A, x) = \limsup_{\rho\downarrow 0} \frac{\mu\big(A \cap \overline{B(x,\rho)}\big)}{\omega_n\, \rho^n} = 0$$

für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in X \setminus A$.)

Ähnlich gilt

$$\left| \int_{\lambda^{-1}(M\setminus M_j-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \right| \longrightarrow 0$$

für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M_j$. Insgesamt existieren $\mathcal{H}^n$-Nullmengen A_j, sodass

$$\int_{\lambda^{-1}(M-x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \longrightarrow \int_{T_x N_j} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y)$$

für alle $x \in M \setminus \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, wobei $\mathcal{H}^n(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$ und N_j eindeutig bestimmt ist, da für jedes $x \in M$ genau so ein j existiert, dass $x \in M_j$ und $M_j \subseteq N_j$. ■

In dem obigen Beweis wurde zusätzlich gezeigt, dass der approximative Tangentialraum T_xM für eine abzählbar n-rektifizierbare Menge $M \subseteq \cup_{j=0}^{\infty} N_j$ $\mathcal{H}^n$-f.ü. gleich dem (klassischen) Tangentialraum T_xN_j ist.

Beispiel 3.1.6. Seien $N_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, -1 \leq x < 0\}$, $N_2 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, 0 \leq x < 1\}$ und $N \coloneqq N_1 \cup N_2$. Somit ist N abzählbar 1-rektifizierbar und es gilt $T_{(0,0)}N_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Für $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ mit $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,R)}$ gilt dennoch

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\lambda^{-1}(N)} f \, d\mathcal{H}^1 = \int_{-R}^{0} f(x,-x) \, dx + \int_{0}^{R} f(x,x) \, dx \neq \int_{-R}^{R} f(x,0) \, dx,$$

d.h. der approximative Tangentialraum $T_{(0,0)}N$ existiert nicht.

Definition 3.1.7. *Seien $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{H}^n$-messbar und $\theta \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^n)$ positiv. Der* ***approximative Tangentialraum*** *T_xM* ***bezüglich*** *θ an M in x ist der (eindeutig bestimmte) n-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^{n+m}$, sodass*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\lambda^{-1}(M-x)} f(y)\, \theta(x + \lambda\, y) \, d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_{T_xM} f \, d\mathcal{H}^n,$$

für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$.

Bemerkung 3.1.8 ([15, Remarks 1.8, p.75])**.**

1. Es existiert eine $\mathcal{H}^n$-Nullmenge $E \subset M$, sodass T_xM für alle $x \in M \setminus E$ genau dann existiert, wenn T_xM bezüglich θ existiert. Für ein solches x stimmen beide Tangentialräume überein.
2. Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $f = 1$ in $\overline{B(0,1)}$ und $f = 0$ in $\mathbb{R}^{n+m} \setminus \overline{B(0,1+\varepsilon)}$. Falls T_xM bezüglich θ existiert, gilt

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\omega_n\, \rho^n} \int_{M \cap \overline{B(x,\rho)}} \theta \, d\mathcal{H}^n = \theta(x).$$

Theorem 3.1.9. *Seien $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{H}^n$-messbar und $\theta \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^n)$ positiv. Dann ist M genau dann abzählbar n-rektifizierbar, wenn der approximative Tangentialraum T_xM bezüglich θ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ existiert.*

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Theorem 3.1.5 und Bemerkung 3.1.8. ∎

3.2 Gradienten und Co.

In diesem Abschnitt bezeichnet M eine abzählbar n-rektifizierbare $\mathcal{H}^n$-messbare Menge, sodass $M = \cup_{j=0}^{\infty} M_j$ und $M_j \subseteq N_j$ mit $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ für n-dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeiten N_j, $j \in \mathbb{N}$, nach Bemerkung 3.1.3 ist, und $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt. Außerdem sind M_j $\mathcal{H}^n$-messbar, da M $\mathcal{H}^n$-messbar ist. Auf M können wir $\mathcal{H}^n$-f.ü. die klassische Differentialoperatoren definieren:

Definition 3.2.1. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lokal Lipschitz.*

1. *Für $x \in M$ definiere*
$$\nabla_M f(x) = \nabla_{N_j} f(x), \ j = 1, 2, \ldots$$
wobei $x \in M_j \subseteq N_j$. Die Definition ist modulo $\mathcal{H}^n$-Nullmengen unabhängig von der Zerlegung $M = \cup_{j=0}^{\infty} M_j$, da $D_\tau f(x) = \frac{d}{dt} f(x + t\,\tau)\big|_{t=0}$ für alle $\tau \in T_x M$.

2. *Für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ definiere den Pushforward $df_x^M : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ durch $df_x^M(\tau) \coloneqq D_\tau f(x)$.*

3. *Für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ definiere die Jakobi-Determinante J_f durch*
$$J_f(x) \coloneqq \sqrt{\det\big(\nabla_M f(x)^\top \, \nabla_M f(x)\big)}.$$

4. *Für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ definiere die (adjungierte) Jakobi-Determinante J_f^* durch*
$$J_f^*(x) \coloneqq \sqrt{\det\big(\nabla_M f(x) \, \nabla_M f(x)^\top\big)}.$$

Somit können wir die Flächen- und Koflächenformel in M beweisen.

Theorem 3.2.2. *Seien $h \in L^1_{loc}(M)$ und $E \subseteq M$ $\mathcal{H}^n$-messbar*

1. *Sei $k \geq n$. Dann sind die Funktionen $y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} h(x)$ und $x \mapsto h(x)\, J_f(x)$ $\mathcal{H}^n$-messbar und es gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^k} \Bigg(\sum_{x \in f^{-1}(y)} h(x) \Bigg) \, d\mathcal{H}^n(y) = \int_E h \, J_f \; d\mathcal{H}^n. \tag{3.1}$$

2. *Sei $k < n$. Dann ist $h \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^{n-k})$, $x \mapsto h(x)\, J_f^*(x)$ ist $\mathcal{H}^n$-messbar und es gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^k} \Bigg(\int_{E \cap f^{-1}(y)} h(x) \; d\mathcal{H}^{n-k}(x) \Bigg) \, d\mathcal{H}^n(y) = \int_E h \, J_f^* \; d\mathcal{H}^n. \tag{3.2}$$

Beweisidee. Man betrachte die Formeln in $M_j \cap E$ und summiere bzgl. j auf. Für $j = 0$ nutzt man, dass $\mathcal{H}^n\big(f(B)\big) = 0$ für alle $\mathcal{H}^n$-Nullmengen B. ■

Bemerkung 3.2.3. Die Koflächenformel zusammen mit dem Theorem von Sard 2.5.4 impliziert, dass die Schnitte $M \cap f^{-1}(y)$ abzählbar $(n-k)$-rektifizierbar für $\mathcal{H}^k$-f.a. $y \in \mathbb{R}^k$ sind.

3.3 Rein n-unrektifizierbare Mengen und der Struktursatz von Federer

Zunächst legen wir fest, was Unrektifizierbarkeit bedeutet. Folgende Definition weicht von [15, Definition 3.1, p.78] ab, indem wir $\mathcal{H}^n$-Nullmengen nicht als unrektifizierbar beschreiben ($\mathcal{H}^n$-Nullmengen sind per Definition abzählbar n-rektifizierbar).

Definition 3.3.1. *Eine Menge $P \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heßt **rein n-unrektifizierbar**, falls $\mathcal{H}^n(P) > 0$ und $\mathcal{H}^n(M) = 0$ für alle abzählbar n-rektifizierbare Teilmengen $M \subseteq P$ gilt.*

Wie sehen rein n-unrektifizierbare Mengen aus? Die Antwort wird durch den sogenannten Struktursatz gegeben. Dieser wurde zuerst von Besicovitch in $\mathbb{R}^2$ bewiesen und später in $\mathbb{R}^{n+m}$ von Federer (siehe Referenzen in [15, p.79]). Der Beweis [6, Chapter 3.3] ist sehr komplex und wird hier nicht durchgeführt. Grob beschrieben besagt der Struktursatz, dass eine rein n-unrektifizierbare Menge aus „fast allen Richtungen in $\mathbb{R}^{n+m}$ unsichtbar“ ist. Um diese Aussage präzise zu formulieren, brauchen wir die sogenannte Grassmann-Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m}$ und das dazugehörige Haar-Maß.

Definition 3.3.2. *1. Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und eine Verknüpfung $* : G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto x * y$, sodass:*

(a) Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Assoziativität).

(b) Es existiert $e \in G$, sodass $x * e = e * x = x$ für alle $x \in G$ gilt (neutrales Element).

(c) Zu jedem $x \in G$ existiert $x^{-1} \in G$, sodass $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ gilt (inverses Element).

*2. Sei G eine Menge, sodass $(G, *)$ eine Gruppe und $(G, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorffraum ist. G heißt **topologische Gruppe**, falls:*

(a) Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

(b) Die Abbildung $(x, y) \mapsto x * y$ ist stetig bezüglich der Produkttopologie, die durch $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ generiert wird.

Das Haar-Maß wird durch folgendes Theorem definiert.

Theorem 3.3.3 (Haar-Maß)**.** *Sei G eine kompakte topologische Gruppe. Dann existiert genau ein Radon-Maß θ auf G (das **Haar-Maß** von G) mit*

1. $\theta(G) = 1$ (d.h. θ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß), und

2. für alle $A \subset G$ und $g \in G$ gilt $\theta(A) = \theta\big(\{g * x : x \in A\}\big) = \theta\big(\{x * g : x \in A\}\big)$ (Links- und Rechtsinvarianz).

Beweis. Siehe [3, Chapter 9]. ■

Die ***Grassmann-Mannigfaltigkeit*** $\mathbb{G}(n+m, n)$ ist die Menge aller n-dimensionaler Unterräume von $\mathbb{R}^{n+m}$. Um ein Maß in $\mathbb{G}(2, 1)$ zu definieren, brauchen wir das Haar-Maß nicht, da alle Geraden in $\mathbb{R}^2$ die durch $(0, 0)$ gehen, mit dem Winkel zu der x-Achse identifiziert werden können. Somit kann $\mathbb{G}(2, 1)$ mit $[0, \pi)$ identifiziert werden, und wir können das eindimensionale Lebesgue-Maß auf $[0, \pi)$ betrachten. Für beliebige n, m ist die Konstruktion etwas aufwendiger.

Satz 3.3.4. *Sei $O(n+m)$ die Menge aller linearen Abbildungen $g : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, die das innere Produkt „respektieren“, d.h.*

$$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Dann ist $O(n+m)$ bezüglich der Metrik

$$d(f, g) \coloneqq \|f - g\| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}^{n+m}, |x| = 1\}$$

und bezüglich der Komposition eine kompakte topologische Gruppe.

Beweis. Übung ■

Somit ist das Haar-Maß θ_{n+m} auf $O(n+m)$ wohldefiniert. Jetzt können wir ein Maß auf $\mathbb{G}(n+m,n)$ definieren: Sei $V \in \mathbb{G}(n+m,n)$ und setze

$$\theta_{n+m,n}(\mathbf{A}) \coloneqq \theta_{n+m}\big(\{g \in O(n+m) : g * V \in \mathbf{A}\}\big),\ \mathbf{A} \subseteq \mathbb{G}(n+m,n).$$

Somit ist $\theta_{n+m,n}$ ein Radon-Maß mit $\theta_{n+m,n}\big(\mathbb{G}(n+m,n)\big) = 1$.

Satz 3.3.5 (Haar-Maß in $\mathbb{G}(n+m,n)$)**.** *Das Maß $\theta_{n+m,n}$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von $V \in \mathbb{G}(n+m,n)$.*

Beweis. Siehe [12, 3.9, p.48]. ■

Jetzt können wir den Struktursatz formulieren.

Theorem 3.3.6 (Besicovitch, Federer)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\mathcal{H}^n(A) > 0$, sodass $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit $\mathcal{H}^n(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

1. *A ist genau dann rein n-unrektifizierbar, wenn $\mathcal{H}^n\big(P_V(A)\big) = 0$ für $\theta_{n+m,n}$-f.a. $V \in \mathbb{G}(n+m,n)$. Hier ist $P_V(A)$ die Projektion von A auf V.*
2. *Falls für jede Teilmenge $B \subseteq A$ mit $\mathcal{H}^n(B) > 0$ eine Teilmenge $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{G}(n+m,n)$ mit $\theta_{n+m,n}(\mathbf{B}) > 0$ existiert, sodass $\mathcal{H}^n\big(P_V(B)\big) > 0$ für alle $V \in \mathbf{B}$, dann ist A abzählbar n-rektifizierbar.*

Beweis. Siehe [15, Theoreme 3.6 und 3.8, p.80] und [1, Theorem 2.65, p.84]. ■

Federers Struktursatz war für eine lange Zeit ein unverzichtbarer Baustein für Kompaktheitsaussagen von Strömen (Flächen gesehen als Maße). In 1986 wurden solche Aussagen direkt bewiesen, und ein einfacherer Beweis des Struktursatzes von Solomon und White gefunden; siehe [13, 3.17, p.34].

Die „wenn“ Richtung in 1. des Struktursatzes kann wesentlich vereinfacht werden.

Lemma 3.3.7. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\mathcal{H}^n(A) > 0$, sodass $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit $\mathcal{H}^n(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$, und sei $\{e_1, \ldots, e_{n+m}\}$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^{n+m}$. Falls*

$$\mathcal{H}^n\Big(P_{\mathrm{span}\{e_{j_1},\ldots,e_{jn}\}}(A)\Big) = 0$$

für alle Kombinationen $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}\} \subset \{e_1, \ldots, e_{n+m}\}$, dann ist A rein n-unrektifizierbar.

Beweis. Siehe [15, Lemma 3.3, Remark 3.4, p.78-79]. ■

3.4 Mengen endlichen Perimeters

Erinnerung: Funktionen beschränkter Variation.

Definition 3.4.1 (Definition 2.1.1)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ hat **lokal beschränkte Variation**, d.h. $u \in BV_{loc}(\Omega)$, falls für jede offene Menge $E \subset\subset \Omega$ (d.h. $\overline{E} \subset \Omega$ kompakt) gilt*

$$|Du|(E) \coloneqq \sup\Big\{\int_E u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n : g \in C^1_c(E, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1\Big\} < +\infty. \tag{3.3}$$

Satz 3.4.2 (Satz 2.1.2)**.** *Sei $u \in BV_{loc}(\Omega)$. Dann existiert ein Radon-Maß μ und eine μ-messbare Funktion $\nu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $|\nu| = 1$ μ-f.ü. in Ω und für alle $g \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$*

$$\int_\Omega u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n = -\int_\Omega g \cdot \nu \, d\mu.$$

Außerdem gilt $\mu(E) = |Du|(E)$ für alle offenen $E \subset\subset \Omega$, und

$$\mu(A) = \inf\{|Du|(E) : A \subseteq E, E \text{ offen}\}$$

für A beliebig.

Beispiel 3.4.3. (Bemerkung 2.1.3) Sei $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Für alle offenen $E \subset\subset \Omega$ und $g \in C^1_c(E, \mathbb{R}^n)$ mit $|g| \leq 1$ gilt

$$\int_E u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n = -\int_E g \cdot \nabla u \, d\mathcal{L}^n \leq \int_E |\nabla u| \, d\mathcal{L}^n < \infty.$$

So ist $u \in BV_{loc}(\Omega)$ mit $|Du| = |\nabla u|$ im Sinne von $|Du|(E) = \int_E |\nabla u| \, d\mathcal{L}^n$, und

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} \text{ für } |\nabla u| \neq 0, \\ 0 \text{ für } |\nabla u| = 0. \end{cases}$$

In diesem Abschnitt betrachten eine spezielle Familie von Mengen in $\mathbb{R}^n$, die mithilfe von BV-Funktionen beschrieben werden können.

Definition 3.4.4. *Eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ hat* ***lokal endlichen Perimeter*** *(und heißt* ***Caccioppoli-Menge****), falls $\chi_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, wobei*

$$\chi_E(x) \coloneqq \begin{cases} 1 \text{ für } x \in E, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für eine Caccioppoli-Menge E definiere das ***Perimeter-Maß*** *$|\partial E| \coloneqq |D\chi_E|$ und $\nu_E \coloneqq -\nu$. So ist $|\partial E|(\mathbb{R}^n)$ der Umfang von E in $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 3.4.5. Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K) < \infty$ für alle kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$, sodass $\overline{E}$ eine n-dimensionale C^2 Untermannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^n$ ist, $\mathbf{n}$ der äußere Normalenvektor von ∂E, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $|g| \leq 1$. Mithilfe des Satzes von Gauß 2.3.9 bekommen wir

$$\int_E \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial E} g \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E \cap \operatorname{supp} g} g \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \operatorname{supp} g) < \infty.$$

So hat E lokal endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^n$. Außerdem gelten

$$|\partial E|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$$

und

$$\nu_E(x) = \mathbf{n}(x) \text{ für } \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.a. } x \in \partial E.$$

Ferner gilt $\chi_E \notin W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und somit ist die Inklusion $W^{1,1}_{loc} \subset BV_{loc}$ grundsätzlich strikt.

Zunächst möchten wir den Rand einer Menge maßtheoretisch betrachten. Für eine Caccioppoli-Menge E und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt gilt

$$|\partial E|(V) = |D\chi_E|(V) = \sup\left\{ \int_{V\cap E} \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(V, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\},$$
$$|\partial E|(\mathbb{R}^n) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = \sup\left\{ \int_{E} \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\}.$$

Der topologische Rand überschätzt den maßtheoretischen Umfang einer Menge. Betrachte

$$E = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0,1]\} \cup \{(x_1, 0) : -1 \leq x_1 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Für den topologischen Rand gilt

$$\partial E = \{(x_1, 0) : -1 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(x_1, 1) : 0 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x \in \{0,1\},\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

und somit ist $\mathcal{H}^1(\partial E) = 5$. Für $g \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $|g| \leq 1$ gilt aber

$$\int_{\_\blacksquare} \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^2 = \int_{\blacksquare} \operatorname{div} g \; d\mathcal{L}^2 = \int_{\square} g \cdot \mathbf{n} \; d\mathcal{H}^1 \leq 4$$

und somit ist $|\partial E|(\mathbb{R}^2) = 4$.

Weiterhin setzen wir voraus, dass E einen lokal endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^n$ hat.

Definition 3.4.6. *Der **reduzierte Rand** $\partial^* E$ von E enthält alle $x \in \mathbb{R}^n$, sodass*

1. $|\partial E|\big(\overline{B(x,\rho)}\big) > 0$ *für alle* $\rho > 0$,
2. $\nu_E(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{\overline{B(x,\rho)}} \nu_E \; d|\partial E|$, *und*
3. $|\nu_E(x)| = 1$.

So sind alle Punkte in $\partial^* E$ Lebesgue-Punkte von ν_E, und somit gilt $|\partial E|\big(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E\big) = 0$. Außerdem kann man mit etwas Mühe zeigen, dass $\partial^* E \subseteq \partial E$ für eine beliebige Caccioppoli-Menge E.

Folgendes Theorem charakterisiert den reduzierten Rand einer Caccioppoli-Menge.

Theorem 3.4.7 (De Giorgi)**.** *Der reduzierte Rand $\partial^* E$ ist abzählbar $(n-1)$-rektifizierbar. Außerdem gilt:*

1. $|\partial E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$.
2. *Für alle $x \in \partial^* E$ gilt $\nu_E(x) \in \big(T_x \partial^* E\big)^{\perp}$.*
3. *Für alle $x \in \partial^* E$ ist $\nu_E(x)$ der **maßtheoretische äußere Normalenvektor**, im Sinne von*

$$\chi_{\{\lambda^{-1}(y-x) : y \in E\}} \longrightarrow \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nu_E(x) < 0\}}$$

in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $\lambda \downarrow 0$.

Beweis. Siehe [15, Theorem 4.3, p.81], [4, Theorem 5.15, p.231] ■

Die Klasse von Caccioppoli-Mengen eignet sich um eine erste Lösung des Plateau-Problems zu finden. Dafür benötigt man die Unterhalbstetigkeit der Totalvariation:

> Seien $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sodass $u_j \longrightarrow u$ in L^1_{loc}. Dann gilt $|Du|(\Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} |Du_j|(\Omega)$.

und die Kompaktheit von BV-Funktionen in L^1:

> Sei $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$, sodass $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_{BV} < +\infty$. Dann existieren $u \in BV(\Omega)$ und $\{u_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $u_{j_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u$. Insbesondere gilt $u_{j_k} \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$.

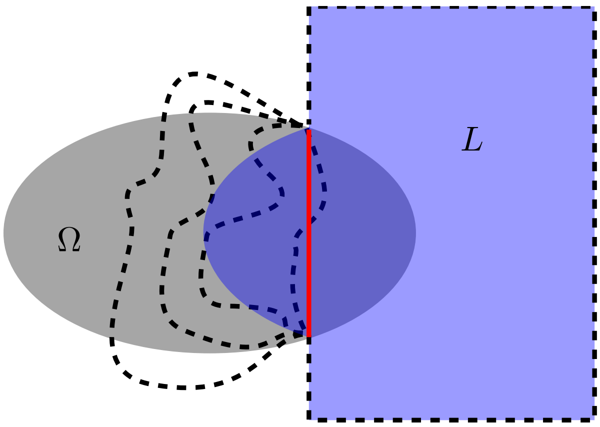

Abbildung 3.1: Eine minimierende Folge im Zweidimensionalen.

Theorem 3.4.8 (Existenz von Minimalfächen, De Giorgi)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $L \subset \mathbb{R}^n$ eine Caccioppoli-Menge. Dann existiert eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$, sodass*

1. *$E \setminus \Omega = L \setminus \Omega$, und*
2. *für alle Caccioppoli-Mengen $F \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $F \setminus \Omega = L \setminus \Omega$ gilt $|\partial E|(\mathbb{R}^n) \leq |\partial F|(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $\rho > 0$ so, dass $\Omega \subset B(0,R)$. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $F \setminus \Omega = L \setminus \Omega$ eine Caccioppoli-Menge. Dann gilt

$$|\partial F|(\mathbb{R}^n) = |\partial F|\big(B(0,R)\big) + |\partial F|\big(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)\big) = |\partial F|\big(B(0,R)\big) + |\partial L|\big(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)\big),$$

da $|\partial F|$ ein Radon-Maß ist, $B(0,R)$ eine Borel-Menge und demnach $|\partial F|$-messbar ist, und zudem $F \setminus \Omega = L \setminus \Omega$. Somit reicht es eine Menge E zu finden, sodass

$$|\partial E|\big(B(0,R)\big) \leq |\partial F|\big(B(0,R)\big).$$

Wir betrachten das Funktional $J : X\big(B(0,R)\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$X\big(B(0,R)\big) \coloneqq \big\{\chi \in BV\big(B(0,R)\big) : \exists F \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Caccioppoli mit } F\backslash\Omega = L\backslash\Omega, \text{ sodass } \chi = \chi_F|_{B(0,R)}\big\}$$

und

$$J(\chi) \coloneqq |D\chi|\big(B(0,R)\big).$$

Das Funktional J ist nach unten beschränkt, da $F \geq 0$ gilt. Somit existiert eine minimierende Folge $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X\big(B(0,R)\big)$, d.h.

$$J(\chi_j) \longrightarrow \inf\Big\{J(\chi) : \chi \in X\big(B(0,R)\big)\Big\}.$$

Ferner, da χ_j charakteristische Funktionen sind, gilt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\chi_j\|_{L^1} \leq \omega_n R^n < +\infty,$$

und

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} J(\chi_j) < +\infty,$$

da $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine minimierende Folge ist. Somit gilt

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\chi_j\|_{BV} < +\infty$$

und es existieren wegen der Kompaktheit von BV-Funktionen in L^1 ein $\chi \in BV\big(B(0,R)\big)$ und eine Teilfolge $\{\chi_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\chi_{j_k} \longrightarrow \chi \text{ in } L^1\big(B(0,R)\big).$$

Darüber hinaus existiert eine weitere Teilfolge $\{\chi_{j_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\chi_{j_{k_i}} \longrightarrow \chi \ \mathcal{L}^n\text{-f.ü. in } B(0,R)$$

und somit ist $\chi = \chi_E$ für eine Menge $E \subseteq B(0,R)$. O.B.d.A. (durch Umdefinieren in einer Nullmenge) gilt $E \setminus \Omega = L \setminus \Omega$ und

$$\chi_{j_{k_i}} \longrightarrow \chi_E \text{ in } L^1_{loc}\big(B(0,R)\big).$$

Gilt vielleicht nicht mehr, dass $\chi_{j_{k_i}} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_E$? Diesbezüglich wird sich in Bemerkung 4.1.10 Gedanken gemacht. Mithilfe der Unterhalbstetigkeit bekommen wir, dass

$$\begin{aligned} J(\chi_E) = |D\chi_E|\big(B(0,R)\big) &\leq \liminf_{i\to\infty} |D\chi_{j_{k_i}}|\big(B(0,R)\big) = \liminf_{i\to\infty} J(\chi_{j_{k_i}}) \\ &= \inf\Big\{J(\chi) : \chi \in X\big(B(0,R)\big)\Big\} < \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt $\chi_E \in X\big(B(0,R)\big)$ und $J(\chi_E) = \min\Big\{J(\chi) : \chi \in X\big(B(0,R)\big)\Big\}$. ■

Intermezzo

Nicht-parametrische Minimalflächen

4.1 Existenz durch die direkte Methode

Nicht-parametrische Minimalflächen werden als Graphen von BV-Funktionen dargestellt. Um das Plateau-Problem formulieren zu können brauchen wir einen passenden Spuroperator. In diesem Abschnitt bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit Lipschitz Rand. Somit existiert der geometrische äußere Normalenvektor $\mathbf{n}$ $\mathcal{L}^{n-1}$-f.ü. (Theorem von Rademacher) und gilt $\mathbf{n}(x) = \nu_\Omega(x)$.

Theorem 4.1.1. *Es existiert ein beschränkter linearer Operator*

$$\mathrm{tr} : BV(\Omega) \longrightarrow L^1\big(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1}\big),$$

sodass

1. tr *ist stetig bezüglich der strikten Konvergenz in* $BV(\Omega)$ *(d.h.* $u_j \longrightarrow u$ *in* L^1_{loc} *und* $|Du_j|(\Omega) \longrightarrow |Du|(\Omega)$*),*
2. *für alle* $u \in BV(\Omega)$ *und* $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int_\Omega u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega g \cdot \nu_\Omega \, d|Du| + \int_{\partial\Omega} (g \cdot \nu_\Omega) \operatorname{tr} u \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

3. *für* $\mathcal{H}^{n-1}$*-f.a.* $x \in \partial\Omega$ *gilt*

$$\operatorname{tr} u(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{\overline{B(x,\rho)} \cap \Omega} u \, d\mathcal{L}^n.$$

Der Operator tr ist der Spuroperator und $\mathrm{tr}\, u$ bezeichnet die Spur von $u \in BV(\Omega)$ auf $\partial\Omega$. So sind Randwerte einer BV-Funktion wohldefiniert. Somit haben wir präzise die Nebenbedingung des Plateau-Problems rigoros definiert. Wie sieht aber die Fläche von dem Graphen einer BV-Funktion aus? Falls $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz Funktion ist, gilt

$$\mathcal{H}^n\Big(\Big\{\big(x, f(x)\big) : x \in \Omega\Big\}\Big) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, d\mathcal{L}^n$$

mithilfe der Flächenformel (3.1). Falls $u \in BV(\Omega)$, so könnte man überlegen den Gradient formal durch das Totalvariationsmaß zu ersetzen.

Definition 4.1.2. *Seien $u \in BV(\Omega)$ und $E \subseteq \Omega$ offen. Man definiere*

$$\sqrt{1+|Du|^2}(E) \coloneqq \sup\left\{ \int_E (h + u \operatorname{div} g)\, d\mathcal{L}^n : (h,g) \in C_c^1(E, \mathbb{R}^{1+n}), |(h,g)| \leq 1 \right\}. \tag{4.4}$$

Es ist direkt aus der Definition zu erschließen, dass

$$|Du|(E) \leq \sqrt{1+|Du|^2}(E) \leq |\Omega| + |Du|(E) \tag{4.5}$$

für $u \in BV(\Omega)$ und $E \subseteq \Omega$ offen. Falls $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ist, gilt außerdem

$$\sqrt{1+|Du|^2}(E) = \int_E \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d\mathcal{L}^n$$

wie in Beispiel 3.4.3.

Satz 4.1.3 (Satz 2.1.2)**.** *Sei $u \in BV(\Omega)$. Dann ist $\mu : 2^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\mu(A) = \inf\left\{ \sqrt{1+|Du|^2}(E) : A \subseteq E, E \subseteq \Omega, E \textit{ offen} \right\}$$

ein Radon-Maß.

Beweis. Ähnlich zum Totalvariationsmaß, mithilfe von (4.5). ■

Auch hier kann man die Unterhalbstetigkeit in $BV(\Omega)$ beweisen.

Satz 4.1.4. *Seien $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sodass $u_j \longrightarrow u$ in L^1_{loc}. Dann gilt*

$$\sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} \sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega).$$

Beweis. Seien $(h,g) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{1+n})$ mit $|(h,g)| \leq 1$. So gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (h + u_j \operatorname{div} g)\, d\mathcal{L}^n - \int_\Omega (h + u \operatorname{div} g)\, d\mathcal{L}^n \right| &\leq \int_\Omega |u_j - u|\, |\operatorname{div} g|\, d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\operatorname{supp} g} |u_j - u|\, |\operatorname{div} g|\, d\mathcal{L}^n \\ &\leq c(g) \int_{\operatorname{supp} g} |u_j - u|\, d\mathcal{L}^n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\operatorname{supp} g \subset\subset \Omega$. Somit ist also

$$\begin{aligned} \int_\Omega (h + u \operatorname{div} g)\, d\mathcal{L}^n &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (h + u_j \operatorname{div} g)\, d\mathcal{L}^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \sup \left\{ \int_\Omega (\tilde{h} + u_j \operatorname{div} \tilde{g})\, d\mathcal{L}^n : (\tilde{h}, \tilde{g}) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{1+n}), |(\tilde{h},\tilde{g})| \leq 1 \right\} \\ &= \liminf_{j\to\infty} \sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega) \end{aligned}$$

und die Aussage folgt. ■

Jetzt können wir einen Satz beweisen, der das Plateau-Problem definiert. Das Problem ist, dass der Spuroperator nur bezüglich der strikten Konvergenz und nicht bezüglich der schwach-$*$ Konvergenz stetig ist. Wir brauchen eine Fortsetzungsaussage für Funktionen in $W^{1,1}(\Omega)$.

Theorem 4.1.5. *Habe Ω zusätzlich einen C^1 Rand, und sei $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi \in L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u \in W^{1,1}(\Omega)$, sodass*

1. $\operatorname{tr} u = \varphi$ $\mathcal{H}^{n-1}$*-f.ü. auf* $\partial\Omega$,
2. $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon\ \|\varphi\|_{L^1(\partial\Omega)}$, *und*
3. $\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq (1+\varepsilon)\ \|\varphi\|_{L^1(\partial\Omega)}$.

Beweis. Siehe [9, Theorem 2.16, Remark 2.17, p.41]. ■

Satz 4.1.6. *Habe Ω zusätzlich einen C^1 Rand, und seien $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi \in L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$ und*

$$P_1 \coloneqq \left\{ \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) : u \in BV(\Omega), \operatorname{tr} u = \varphi\ \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.ü. auf } \partial\Omega \right\},$$

$$P_2 \coloneqq \left\{ \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u - \varphi|\ d\mathcal{H}^{n-1} : u \in BV(\Omega) \right\}.$$

Dann gilt $\inf P_1 = \inf P_2$.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass $\inf P_2 \leq \inf P_1$, da $P_1 \subseteq P_2$ gilt. Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$, sodass

$$\sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u_j - \varphi|\ d\mathcal{H}^{n-1} \longrightarrow \inf P_2.$$

Theorem 4.1.1 impliziert, dass $\varphi - \operatorname{tr} u_j \in L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$ ist, und mit Theorem 4.1.5 existiert ein $w_{1/j} \in W^{1,1}(\Omega)$, sodass $\operatorname{tr} w_{1/j} = \varphi - \operatorname{tr} u_j$ und

$$\int_\Omega |w_{1/j}|\ d\mathcal{L}^n \leq j^{-1} \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u_j - \varphi|\ d\mathcal{H}^{n-1},$$
$$\int_\Omega |\nabla w_{1/j}|\ d\mathcal{L}^n \leq \left(1 + j^{-1}\right) \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u_j - \varphi|\ d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Wir setzen $v_j \coloneqq u_j + w_{1/j}$ und bemerken, dass $v_j \in BV(\Omega)$ und $\operatorname{tr} v_j = \varphi$ $\mathcal{H}^{n-1}$-f.ü. auf $\partial\Omega$ ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+|Dv_j|^2}(\Omega) &= \sup \Big\{ \int_\Omega (h + u_j \operatorname{div} g)\ d\mathcal{L}^n + \int_\Omega w_{1/j} \operatorname{div} g\ d\mathcal{L}^n : \\
&\qquad\qquad (h,g) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{1+n}), |(h,g)| \leq 1 \Big\} \\
&\leq \sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega) + |Dw_{1/j}|(\Omega) \\
&= \sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega) + \int_\Omega |\nabla w_{1/j}|\ d\mathcal{L}^n \\
&\leq \sqrt{1+|Du_j|^2}(\Omega) + \left(1 + j^{-1}\right) \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u_j - \varphi|\ d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\liminf_{j\to\infty} \sqrt{1+|Dv_j|^2}(\Omega) \leq \inf P_2.$$

Die Aussage folgt, da $v_j \in P_1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. ■

Wir sind noch nicht fertig. Die Stetigkeit des Spuroperators reicht noch nicht aus. Um eine weitere Umformulierung durchzuführen brauchen wir Fortsetzungen von BV-Funktionen.

Theorem 4.1.7. *Seien $f_1 \in BV(\Omega)$, $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ und $f_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^n$-messbar. Dann gilt $\overline{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \mu(\Omega) + \mu(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} f_1 - \operatorname{tr} f_2| \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei

$$\overline{f}(x) \coloneqq \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ f_2(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \\ f_3(x) & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

und $\mu = |D\overline{f}|$ oder $\mu = \sqrt{1 + |D\overline{f}|^2}$.

Beweis. Siehe [4, Theorem 5.8]. ■

Hierzu muss man bemerken, dass f_3 weder der Spur von f_1 noch von f_2 sein muss.

Satz 4.1.8. *Sei $R > 0$ so, dass $\Omega \subset\subset B(0,R)$, und seien $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\varphi} : B(0,R)\setminus\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \in L^1\big(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1}\big)$, $\overline{\varphi} \in W^{1,1}\big(B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\big)$ und $\operatorname{tr}\overline{\varphi} = \varphi$ $\mathcal{H}^{n-1}$-f.ü. auf $\partial\Omega$. Man definiere*

$$\begin{aligned} P_2 &\coloneqq \left\{ \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |\operatorname{tr} u - \varphi| \, d\mathcal{H}^{n-1} : u \in BV(\Omega) \right\}, \\ P_3 &\coloneqq \Bigg\{ \sqrt{1+|Du|^2}\big(B(0,R)\big) - \int_{B(0,R)\setminus\overline{\Omega}} \sqrt{1+|\nabla\overline{\varphi}|^2} \, d\mathcal{L}^n : \\ &\qquad\qquad u \in BV\big(B(0,R)\big), u = \overline{\varphi} \text{ in } B(0,R)\setminus\overline{\Omega} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\inf P_2 = \inf P_3$.

Beweis. Sei $u \in BV\big(B(0,R)\big)$ mit $u = \overline{\varphi}$ in $B(0,R)\setminus\overline{\Omega}$. So gilt $u|_\Omega \in BV(\Omega)$, und aus Theorem 4.1.7 folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{1+|Du|^2}\big(B(0,R)\big) &= \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \sqrt{1+|Du|^2}\big(B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\big) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \big|\operatorname{tr} u|_\Omega - \operatorname{tr} u|_{B(0,R)\setminus\overline{\Omega}}\big| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \sqrt{1+|D\overline{\varphi}|^2}\big(B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\big) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \big|\operatorname{tr} u|_\Omega - \operatorname{tr}\overline{\varphi}\big| \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \int_{B(0,R)\setminus\overline{\Omega}} \sqrt{1+|\nabla\overline{\varphi}|^2} \, d\mathcal{L}^n\big) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \big|\operatorname{tr} u|_\Omega - \varphi\big| \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

So gilt $P_3 \subseteq P_2$. Für die umgekehrte Inklusion definieren wir für $u \in BV(\Omega)$ die Funktion $v : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(x) \coloneqq \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \overline{\varphi}(x) & \text{für } x \in B(0,R)\setminus\Omega. \end{cases}$$

Theorem 4.1.7 impliziert, dass $v \in BV\big(B(0,R)\big)$ und wie zuvor gilt

$$\sqrt{1+|Dv|^2}\big(B(0,R)\big) = \sqrt{1+|Du|^2}(\Omega) + \int_{B(0,R)\setminus\overline{\Omega}} \sqrt{1+|\nabla\overline{\varphi}|^2}\, d\mathcal{L}^n\big) + \int_{\partial\Omega} \big|\operatorname{tr} u|_\Omega - \varphi\big|\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Also gilt $P_2 \subseteq P_3$ und somit folgt die Aussage. ■

Somit können wir das Plateau-Problem in folgender Form lösen.

Theorem 4.1.9. *Sei $\varphi : B(0,R)\setminus\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \in W^{1,1}\big(B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\big)$. Es existiert ein $u \in BV\big(B(0,R)\big)$ mit $u = \varphi$ in $B(0,R)\setminus\overline{\Omega}$, sodass*

$$\sqrt{1+|Du|^2}\big(B(0,R)\big) = \inf\left\{\sqrt{1+|Dv|^2}\big(B(0,R)\big) : v \in BV\big(B(0,R)\big), v = \varphi \text{ in } B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\right\}.$$

Beweis. Das Flächenfunktional ist nach unten beschränkt und somit existiert eine minimierende Folge von Funktionen $u_j \in BV\big(B(0,R)\big)$ mit $u_j = \varphi$ in $B(0,R)\setminus\overline{\Omega}$ für $j \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sqrt{1+|Du_j|^2}\big(B(0,R)\big)\right) = \inf\left\{\sqrt{1+|Dv|^2}\big(B(0,R)\big) : v \in BV\big(B(0,R)\big), v = \varphi \text{ in } B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\right\}.$$

Aus (4.5) folgt, dass

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |Du_j|\big(B(0,R)\big) < \infty,$$

da $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine minimierende Folge ist. Ferner, impliziert der Verkettungssatz für die Lipschitz Funktion $|\cdot|$, dass $|u_j| \in BV\big(B(0,R)\big)$ und

$$\big|D|u_j|\big|\big(B(0,R)\big) \leq |Du_j|\big(B(0,R)\big).$$

Zunächst wenden wir Theorem 4.1.1 an $|u_j|$ und

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\,(x_1,\ldots,x_n),$$

sodass

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} |u_j|\, d\mathcal{L}^n &= \int_{B(0,R)} g\cdot\nu_{B(0,R)}\, d\big|D|u_j|\big| + \int_{\partial B(0,R)} (g\cdot\nu_{B(0,R)}) \operatorname{tr}|u_j|\, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \|g\|_\infty\, \big|D|u_j|\big|\big(B(0,R)\big) + \tilde{C}\, \|g\|_\infty\, \|\varphi\|_{W^{1,1}(B(0,R)\setminus\overline{\Omega})} \\ &\leq C\left(1+|Du_j|\big(B(0,R)\big)\right).\end{aligned}$$

Also gilt, dass

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_{L^1(B(0,R))} < \infty.$$

Somit existiert $\tilde{u} \in BV\big(B(0,R)\big)$, sodass $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ und

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+|D\tilde{u}|^2}\big(B(0,R)\big)\\ &\qquad = \inf\left\{\sqrt{1+|Dv|^2}\big(B(0,R)\big) : v \in BV\big(B(0,R)\big), v = \varphi \text{ in } B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\right\}.\end{aligned}$$

Es existiert eine Teilfolge $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, sodass $u_j \longrightarrow \tilde{u}$ $\mathcal{L}^n$-f.ü.. Da $u_j = \varphi$ in $B(0,R)\setminus\overline{\Omega}$ gilt, bekommen wir $\tilde{u} = \varphi$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. in $B(0,R)\setminus\overline{\Omega}$. Wir setzen

$$u(x) := \begin{cases} \tilde{u}(x) \text{ für } x \in \overline{\Omega}, \\ \varphi(x) \text{ fúr } x \in B(0,R)\setminus\overline{\Omega}, \end{cases}$$

und bemerken, dass $u \in BV\big(B(0,R)\big)$ und $u_j \longrightarrow u$ in $L^1\big(B(0,R)\big)$ gilt. Aus der Unterhalbstetigkeit des Flächenfunktionals folgt, dass

$$\begin{aligned}\sqrt{1+|Du|^2}\big(B(0,R)\big) &\le \liminf_{j\to\infty}\left(\sqrt{1+|Du_j|^2}\big(B(0,R)\big)\right)\\ &= \inf\Bigg\{\sqrt{1+|Dv|^2}\big(B(0,R)\big) :\\ &\qquad\qquad v \in BV\big(B(0,R)\big), v = \varphi \text{ in } B(0,R)\setminus\overline{\Omega}\Bigg\},\end{aligned}$$

d.h. u ist ein Minimierer. ■

Bemerkung 4.1.10. Seien $\tilde{u} \in BV(\Omega)$ und $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ mit $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$. Seien $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbar und $E \subset \Omega$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge. Definiere

$$u(x) := \begin{cases} \tilde{u}(x) \text{ für } x \in \Omega\setminus E, \\ v(x) \text{ für } x \in E. \end{cases}$$

Somit gilt $u_j \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ und für den distributionellen Gradient gilt

$$\begin{aligned}\langle\nabla\tilde{u},\varphi\rangle &= -\int_\Omega \tilde{u}\,\operatorname{div}\varphi\, d\mathcal{L}^n = -\int_{\Omega\setminus E}\tilde{u}\,\operatorname{div}\varphi\, d\mathcal{L}^n\\ &= -\int_{\Omega\setminus E}\tilde{u}\,\operatorname{div}\varphi\, d\mathcal{L}^n - \int_E v\,\operatorname{div}\varphi\, d\mathcal{L}^n\\ &= -\int_\Omega u\,\operatorname{div}\varphi\, d\mathcal{L}^n = \langle\nabla u,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Also gilt $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$. Ferner ist

$$\begin{aligned}|D\tilde{u}|(\Omega) &= \sup\left\{\int_\Omega \tilde{u}\,\operatorname{div} g\, d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^n), |g|\le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{\Omega\setminus E}\tilde{u}\,\operatorname{div} g\, d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^n), |g|\le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{\Omega\setminus E}\tilde{u}\,\operatorname{div} g\, d\mathcal{L}^n + \int_E v\,\operatorname{div} g\, d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^n), |g|\le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_\Omega u\,\operatorname{div} g\, d\mathcal{L}^n + 0 : g \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^n), |g|\le 1\right\} = |Du|(\Omega)\end{aligned}$$

Kapitel 5

Ströme

5.1 Differentialformen auf dem Euklidischen Raum

Tangentialvektoren und k-Formen. Wir beschränken uns auf den $\mathbb{R}^n$ und offene Mengen darin, bemerken jedoch sofort, dass der natürliche Rahmen für die Behandlung von Differentialformen eigentlich durch beliebig glatte Mannigfaltigkeiten geliefert wird. Die Verallgemeinerung auf diesen Fall ist jedoch ziemlich direkt durchführbar. Meist werden durch die Einführung von Koordinaten die Rechnungen wieder auf den Fall des $\mathbb{R}^n$ zurückgeführt.

Im Folgenden sei O stets eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ (der Fall $O = \mathbb{R}^n$ ist natürlich nicht ausgeschlossen). Die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$ werden mit $e_1, \dots, e_n$ bezeichnet.

Definition 5.1.1. *1. Ein Tangentialvektor in $\mathbb{R}^n$ ist ein Paar $(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Der Punkt p heißt* **Fußpunkt**, *v ist die* **Richtung**.

2. *Die Menge der Tangentialvektoren wird mit $T\mathbb{R}^n$ bezeichnet, die Menge der Tangentialvektoren mit Fußpunkt p mit $T_p\mathbb{R}^n$.*

3. *Eine glatte Abbildung $X : O \longrightarrow T\mathbb{R}^n$, $X(p) = X|_p$, die jedem $p \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung $X|_p \in T_p\mathbb{R}^n$ zuordnet, heißt* **Vektorfeld**.

4. *Die Menge der Vektorfelder wird mit $\mathcal{X}(O)$ bezeichnet.* [1]

Angenommen, wir haben ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(O)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(O)$ gegeben. Dann kann man f entlang X ableiten und erhält eine neue glatte Funktion $X[f] \in C^\infty(O)$ mit

$$X[f](p) \coloneqq \frac{d}{dt} f\big(p + t\, X|_p\big)\bigg|_{t=0}.$$

Die Abbildung $X[\cdot] : C^\infty(O) \longrightarrow C^\infty(O)$ ist eine *Derivation*, d.h. es gelten die folgenden Bedingungen:

1. (Linearität) $X[\lambda f + \mu g] = \lambda X[f] + \mu X[g]$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C^\infty(O)$.

2. (Leibnizregel) $X[f g] = g X[f] + f X[g]$ für alle $f, g \in C^\infty(O)$.

Die Umkehrung davon kann man beweisen.

[1] Sie trägt die Struktur eines sogenannten $C^\infty(O)$-Moduls.

Satz 5.1.2 ([10, Proposition 8.15, p.181])**.** *Sei $V : C^\infty(O) \longrightarrow C^\infty(O)$ eine Derivation. Dann existiert ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(O)$, sodass $X[\cdot] = V$.*

Beweisidee. Um diese Aussage zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass V durch ein Vektorfeld X induziert ist, und zeigen die Eindeutigkeit. Aus der Kettenregel folgt

$$V\big(f(p)\big) = X[f](p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\,(X|_p)_j$$

Setze $f = x_j$, $j = 1, \dots, n$. Daraus folgt, dass $(X|_p)_j = V\big(x_j(p)\big) = V(x_j)$. Damit ist das Vektorfeld eindeutig festgelegt.

Hat man nun eine Derivation V, so definiert man das Vektorfeld X durch

$$p \mapsto \Big(p, \big(V(x_1), \dots, V(x_n)\big)\Big).$$

Dieses Vektorfeld induziert dann die Derivation. ■

Man kann also Vektorfelder und Derivationen miteinander identifizieren. Das werden wir im Folgenden immer stillschweigend anwenden. Analog kann man einen einzelnen Vektor (p, v) mit einer Derivation $f \in C^\infty(O) \longrightarrow \mathbb{R}$ identifizieren: Die Abbildung $(p, v) \mapsto D_v f(p)$ ist ein Vektorraumisomorphismus ([10, Proposition 3.2]).

Das konstante Vektorfeld $p \mapsto (p, e_j)$ wird mit $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bezeichnet. Die Schreibweise ist so gewählt, weil

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[f](p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

gilt, wobei auf der rechten Seite die partielle Ableitung steht.

Definition 5.1.3. *Eine* **Differentialform vom Grad k** *(oder auch kurz* **k-Form***) auf O ist eine Abbildung $\omega : \mathcal{X}(O)^k \longrightarrow C^\infty(O)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *ω ist $C^\infty(O)$-linear in jeder Variable, d.h.*

   $$\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, f\,X_i + g\,Y_i, X_{i+1}, \dots, X_k) = f\,\omega(X_1, \dots, X_k) + g\,\omega(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$$

   für $i = 1, \dots, k$, $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(O)$ und $f, g \in C^\infty(O)$.

2. *ω ist alternierend, d.h.*

   $$\omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\,\omega(X_1, \dots, X_k)$$

   für jede Permutation π von $\{1, \dots, k\}$ ($\operatorname{sgn}(\pi) = 1$, falls π eine gerade Permutation ist, und $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$ sonst).

Die Menge der k-Formen wird mit $\mathcal{E}^k(O)$ bezeichnet (sie trägt die Struktur eines $C^\infty(O)$-Moduls). Für $k = 0$ definieren wir $\mathcal{E}^0(O) = \mathcal{E}(O) \coloneqq C^\infty(O)$.

Differentialformen sind lokal in folgendem Sinne: Der Wert $\omega(X_1, \dots, X_k)(p)$ hängt von p nur durch $X_1|_p, \dots, X_k|_p$ ab. Wir bezeichnen ihn mit $\omega|_p(X_1, \dots, X_k)$.

Als Beispiel einer 1-Form definieren wir für eine Funktion $f \in C^\infty(O)$ und ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(O)$, dass

$$df(X) \coloneqq X[f].$$

Dann gilt folgende Rechenregel, die man wieder aus der Kettenregel gewinnt:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Hier betrachtet man x_j als die konstante Funktion $x \mapsto x_j$ auf $\mathbb{R}^n$. Es gilt $dx_j|_p(X) = (X|_p)_j$.

Definition 5.1.4 (Das äußere Produkt)**.** *Seien ω, ϕ zwei Differentialformen vom Grad k bzw. l. Dann definiert man eine $(k+l)$-Form $\omega \wedge \phi$ durch*

$$(\omega \wedge \phi)(X_1, \dots, X_{k+l}) \coloneqq \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\pi \in \Pi_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)})\, \phi(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)})$$

Dabei ist Π_{k+l} die Menge der Permutationen der Menge $\{1, ..., k+l\}$.

Man rechnet nach, dass $(\omega \wedge \phi) \wedge \psi = \omega \wedge (\phi \wedge \psi)$ gilt (dafür wird der Faktor $\frac{1}{k!\, l!}$ benötigt). Für so ein Produkt kann man daher $\omega \wedge \phi \wedge \psi$ schreiben. Weiterhin gilt

$$\omega \wedge \phi = (-1)^{k\, l} \phi \wedge \omega.$$

Satz 5.1.5. *Für eine beliebige k-Form ω gilt*

$$\omega = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{n} \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big)\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

So wird die Menge der k-Formen von den Formen $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ mit $1 \le j_1 \le \dots \le j_k \le n$ (algebraisch) erzeugt. Speziell folgt, dass $\mathcal{E}^k(O) = \emptyset$ für $k > n$ und, dass $\mathcal{E}(O)$ algebraisch von $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ erzeugt wird.

Beweis. Sei ω eine beliebige k-Form. Es gilt

$$\begin{aligned}
\omega(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\pi \in \Pi_k} \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \Pi_k} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega\Bigg(\sum_{j_1=1}^{n} dx_{j_1}(X_{\pi(1)})\, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \sum_{j_k=1}^{n} dx_{j_k}(X_{\pi(k)})\, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Bigg) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{n} \sum_{\pi \in \Pi_k} \operatorname{sgn}(\pi)\, dx_{j_1}(X_{\pi(1)}) \dots dx_{j_k}(X_{\pi(k)})\, \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{n} (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(X_1, \dots, X_k)\, \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\Big),
\end{aligned}$$

wobei die Antisymmetrie, die Linearität und die Definition des äußeren Produkts verwendet wurden. ■

TRÄGER UND ÄUßERE ABLEITUNG. Oft werden wir die sogenannte *geordnete Multiindex* Notation verwenden. Dazu definieren wir folgende Menge:

$$I_{n,k} \coloneqq \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \le \alpha_1 \le \dots \le \alpha_k \le n\}. \tag{5.1}$$

Sei $\alpha \in I_{n,k}$. Wir schreiben $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ und $dx_\alpha := dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}$. Somit besagt Satz 5.1.5, dass sich jede k-Form ω eindeutig durch

$$\omega = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha \, dx_\alpha, \ \omega_\alpha \in C^\infty(O)$$

darstellen lässt. Oft werden wir diverse Eigenschaften von Multiindizen, die aus dem Kontext zu lesen sind, verbergen, und für eine k-Form $\omega = \sum \omega_\alpha \, dx_\alpha$ schreiben.

Definition 5.1.6. *Der* ***Träger*** *der k-Form $\omega = \sum \omega_\alpha \, dx_\alpha$ ist definiert durch*

$$\operatorname{supp} \omega := \cup_\alpha \operatorname{supp} \omega_\alpha.$$

Die Menge aller k-Formen mit kompaktem Träger wird durch $\mathcal{D}^k(O)$ bezeichnet. Für $k = 0$ wird analog $\mathcal{D}(O) := \mathcal{D}^0(O)$ definiert.

Definition 5.1.7. *Die äußere Ableitung der k-Form $\omega = \sum \omega_\alpha dx_\alpha$ ist definiert als die $(k+1)$-Form*

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} \, dx_j \wedge dx_\alpha.$$

Ist z.B. $\omega = f$ eine Funktion (d.h. 0-Form), so hatten wir df schon früher definiert. Im Allgemeinen kann man den nachfolgenden Satz beweisen.

Satz 5.1.8. *Seien ω_1, ω_2 zwei k-Formen, ϕ ein l-Form und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *(Linearität) $d(\lambda \, \omega_1 + \mu \, \omega_2) = \lambda \, d\omega_1 + \mu \, d\omega_2$.*
2. *(Produktregel) $d(\omega \wedge \phi) = (d\omega) \wedge \phi + (-1)^k (\omega \wedge d\phi)$.*
3. *(Nilpotenz) $d(d\omega_1) = 0$.*

Beweiskomponenten. Man benutzt, dass gemischte partielle Ableitungen kommutieren, den Satz 5.1.5 und, dass $dx_j \wedge dx_j = 0$. ■

Formen ω mit $d\omega = 0$ nennt man ***geschlossen***, während man Formen ω der Form $\omega = d\phi$ ***exakt*** nennt.

EINE GEOMETRISCHE SICHTWEISE. Um die Welt der Tangentialvektoren, k-Formen, usw. besser verstehen zu können, kann man diese durch die sogenannte *Kovektoren* definieren. Wie üblich werden die Standardeinheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$ mit $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnet. Wir definieren mit

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^n)^*, \tag{5.2}$$

den Raum aller linearen Funktionalen (kurz: ***Kovektoren***) $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Da $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, besitzt er eine Standardbasis dual zu $e_1, \ldots, e_n$. Diese wird durch

$$\{dx_1, \ldots, dx_n\}$$

bezeichnet, wobei für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$dx_j(p) = p_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

Für $k \geq 2$ enthält der Raum $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ alle alternierenden k-lineare Funktionen (kurz: ***k*-Kovektoren**) $\omega : (R^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}$. Für $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ definiert man $\omega \wedge \phi \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\omega \wedge \phi)(p_1, \ldots, p_{k+l}) \coloneqq \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\pi \in \Pi_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(k)})\, \phi(p_{\pi(k+1)}, \ldots, p_{\pi(k+l)}),$$

und für einen beliebigen k-Kovektor ω gilt

$$\omega = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha \, dx_\alpha,$$

wobei $\omega_\alpha \in \mathbb{R}$.

Falls V ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_k$ ist, dann bezeichnen wir für $l \leq k$ den Unterraum von $\Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ mit $\Lambda^l(V)$, sodass

$$\Lambda^l(V) \coloneqq \operatorname{span}\{v^*_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v^*_{\alpha_l} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in I_{k,l}\},$$

wobei v_i^* das duale Element von v_i ist, d.h. $v_i^*(p) \coloneqq v_i \cdot p$ für $p \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \ldots, k$.

Ähnlich definieren wir $\Lambda_k\big(\Lambda^1(\mathbb{R}^n)\big)$ für $k \geq 2$ als den Raum aller alternierenden, k-linearen Funktionen in $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Wir identifizieren $(dx_j)^*$ mit e_j und bekommen somit die Isomorphie

$$\Lambda_k\big(\Lambda^1(\mathbb{R}^n)\big) \cong \Lambda_k(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller k-Vektoren in $\mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$\Lambda_k(\mathbb{R}^n) \coloneqq \operatorname{span}\{e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in I_{n,k}\},$$

wobei $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$ das klassische äußere Produkt in $\mathbb{R}^n$ ist. Falls V ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit Basisvektoren $v_1, \ldots, v_k$ ist, bezeichnen wir für $l \leq k$ mit $\Lambda_l(V)$ den Unterraum von $\Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$\Lambda_l(V) \coloneqq \operatorname{span}\{v_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha_l} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in I_{k,l}\}.$$

In $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ und $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ kann man natürlicherweise ein inneres Produkt definieren:

$$u \cdot w = \Bigg(\sum_{\alpha \in I_{n,k}} u_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}\Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{\alpha \in I_{n,k}} w_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}\Bigg) \coloneqq \sum_{\alpha \in I_{n,k}} u_\alpha\, w_\alpha \tag{5.3}$$

$$\omega \cdot \phi = \Bigg(\sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\, dx_\alpha\Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{\alpha \in I_{n,k}} \phi_\alpha\, dx_\alpha\Bigg) \coloneqq \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\, \phi_\alpha \tag{5.4}$$

für $u, w \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ und $\omega, \phi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Da $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ der Dualraum von $\mathbb{R}^n$ ist, stehen die Räume $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ und $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ in Dualität, durch

$$\langle \omega, w\rangle_{\Lambda^k,\Lambda_k} = \Big\langle \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\, dx_\alpha, \sum_{\alpha \in I_{n,k}} w_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k} \Big\rangle_{\Lambda^k,\Lambda_k} \coloneqq \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\, w_\alpha, \tag{5.5}$$

für $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ und $w \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$.

Mithilfe dieses Formalismus: (i) Es gilt $\mathcal{E}^k(O) = C^\infty\big(O, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\big)$, und (ii) Man kann Untermannigfaltigkeiten orientieren:

Definition 5.1.9. *Eine k-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ heißt* ***orientierbar****, falls eine stetige Funktion $\xi : M \longrightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass $\xi(x) = \pm\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$ gilt, wobei $\tau_1, \ldots, \tau_k$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$ ist, und somit $\xi(x) \in \Lambda_k(T_x M)$. Die Funktion ξ heißt* ***Orientierung*** *von M.*

Beispielsweise bildet die Orientierung einer 2-dimensionalen, glatten Fläche in $\mathbb{R}^3$ jeden Punkt der Fläche auf die Matrix, welche die Basisvektoren des Tangentialraumes als Spalten besitzt, ab.

DAS HIN- UND HERZIEHEN VON STRUKTUREN. Auch hier ist die geometrische Vorstellung im Kontext von Mannigfaltigkeiten etwas passender. Man möchte eine Struktur, (Tangentialvektor, lineare Abbildung usw.) die auf eine Mannigfaltigkeit M definiert ist, auf eine andere Mannigfaltigkeit N mithilfe einer Abbildung $f : M \longrightarrow N$ definieren („Pushforward"). Die Umkehrung von diesem Prozess, d.h. eine Struktur, die auf N lebt, zurück nach M zu ziehen, heißt „Pullback". Das ist nicht immer möglich auszuführen: man braucht bestimmte Voraussetzungen an f und die Strukturen.

Hier sind wir an den euklidischen Fall interessiert: Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und $f : O \longrightarrow V$ eine C^∞ Funktion (hier würde es reichen eine lokal Lipschitz Funktion zu betrachten). Zunächst betrachten wir Tangentialvektoren: das Differential von f, nämlich $df : T\mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^m$ (mit $df|_p : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$) ist der Pushforward $f_\#$, d.h.

$$f_\# \coloneqq df,$$

denn Tangentialvektoren von Punkten in O werden auf Tangentialvektoren von Punkten in V abgebildet. Diese Konstruktion kann man nicht direkt auf Vektorfelder übertragen: Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(O)$ ist die Abbildung $q \mapsto df|_q(X)$ ein Vektorfeld auf V genau dann, wenn f surjektiv ist.

Der Pullback einer Funktion wird durch die Dualität definiert, als eine Abbildung

$$f^\# : (T\mathbb{R}^m)^* \longrightarrow (T\mathbb{R}^n)^*$$

durch

$$f^\# F \coloneqq F \circ f_\# = F \circ df.$$

Man bemerke, dass diese Definition auch punktweise zu verstehen ist: für $F \in (T\mathbb{R}^m)^*$ gilt $f^\# F \in C^\infty(O)$ mit

$$(f^\# F)(p) = F(f_\#|_p) = F(df|_p).$$

Ähnlich kann man den Pullback einer k-Form definieren: Seien $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(O)$ Vektorfelder und $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$. Man definiere

$$(f^\#\omega)(X_1, \ldots, X_k) \coloneqq \omega\big(f_\#(X_1), \ldots, f_\#(X_k)\big) = \omega\big(df(X_1), \ldots, df(X_k)\big)$$

und bemerke, dass $f^\#\omega \in \mathcal{E}^k(O)$ (hier wurde formal die Surjektivität von f vorausgesetzt).

Satz 5.1.10. *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^l$ offene Mengen und $f : O \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ glatte surjektive Abbildungen. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Für alle $\omega, \phi \in \mathcal{E}^k(V)$ gilt $f^\#(\omega + \phi) = f^\#\omega + f^\#\phi$.*

2. *Für alle $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$, $\phi \in \mathcal{E}^l(V)$ gilt $f^\#(\omega \wedge \phi) = (f^\#\omega) \wedge (f^\#\phi)$.*

3. *Für alle $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$ gilt $d(f^\# \omega) = f^\# d\omega$.*

4. *Für alle $\omega \in \mathcal{E}^k(W)$ gilt $(g \circ f)^\#(\omega) = f^\#\big(g^\#(\omega)\big)$.*

Beweiskomponenten. Kettenregel und Vertauschbarkeit gemischter Ableitungen. ■

Integration von Differentialformen. Wir betrachten zunächst eine n-Form $\omega \in \mathcal{D}^n(O)$. Dann hat ω die Gestalt

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \;\; f \in C_0^\infty(O)$$

und man setzt

$$[\![O]\!](\omega) \coloneqq \int_O \omega \coloneqq \int_O f(x)\; dx_1 \dots dx_n.$$

Dabei ist dieses Integral das Lebesgue (oder auch Riemann-) Integral von f, denn f ist eine glatte Funktion mit kompaktem Träger.

Auf diese Weise kann man nur n-Formen integrieren. Hat man eine k-Form, $k < n$, so kann man diese aber über k-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ (mit oder ohne Rand) integrieren. Sei $\psi : \Omega \cap V \longrightarrow M \cap O$ eine lokale Parameterdarstellung, wobei $V = \emptyset$ oder $V = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$, und $\omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{supp} \omega \subset \Omega \cap V$. Man definiere

$$[\![M]\!](\omega) \coloneqq \int_M \omega \coloneqq \int_{\Omega \cap V} \psi^\# \omega,$$

denn $\psi^\# \omega \in \mathcal{D}^k(\Omega \cap V)$ und $\Omega \cap V \subset \mathbb{R}^k$. Die Orientierbarkeit von M erlaubt es zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Parameterdarstellung ψ ist.

Für den allgemeinen Fall überdeckt man M mit (relativ) offenen Mengen $M \cap O_i$, $i \in I$, und wählt eine Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ bezüglich dieser Überdeckung. So definiert man

$$[\![M]\!](\omega) \coloneqq \int_M \omega \coloneqq \sum_{i \in I} [\![\Omega_i \cap V]\!](\varphi_i\, \omega),$$

und zeigt, dass auch diese Definition unabhängig der Wahl der Überdeckung und der Zerlegung der Eins ist.

Eine sehr wichtige Aussage in diesem Kontext ist der Satz von Stokes:

Theorem 5.1.11. *Seien $1 < k \leq n$ und M eine in $\mathbb{R}^n$ relativ kompakte k-dimensionale, orientierbare C^∞ Untermannigfaltigkeit, $O \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subseteq O$ und $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(O)$. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \;\; \text{falls } \partial M \neq \emptyset \text{ und } \int_M d\omega = 0, \;\; \text{falls } \partial M = \emptyset.$$

Hier muss man bemerken, dass es auf ∂M eine natürliche Orientierung gibt, die von M induziert ist.

5.2 Ströme: Erste Definitionen und Beispiele

Wir definieren zunächst die Topologie auf $\mathcal{D}^k(O)$, die durch folgenden Konvergenzbegriff charakterisiert ist. Im Folgenden sei O stets eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leq n$.

Definition 5.2.1. *Eine Folge*

$$\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{\alpha\in I_{n,k}} \omega_{\alpha,j}\, dx_\alpha \right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^k(O)$$

von k-Formen mit kompakten Trägern konvergiert genau dann gegen eine k-Form

$$\omega = \sum_{\alpha\in I_{n,k}} \omega_\alpha\, dx_\alpha \in \mathcal{D}^k(O),$$

wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset O$ gibt, sodass

1. $\operatorname{supp}\omega_{\alpha,k} \subset K$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha \in I_{n,k}$, *und*
2. $\sup_{x\in K} \left| D^\beta \omega_{\alpha,j}(x) - D^\beta \omega_\alpha(x) \right| \longrightarrow 0$ *für alle* $\beta \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ *und* $\alpha \in I_{n,k}$.

Definition 5.2.2. *Ein k-dimensionaler Strom auf O ist ein stetiges, lineares Funktional auf dem (topologischen) Raum $\mathcal{D}^k(O)$ der k-Formen auf O mit kompaktem Träger. Die Menge der k-dimensionalen Ströme auf O wird mit $\mathcal{D}_k(O)$ bezeichnet, d.h. $\mathcal{D}_k(O) := \left(\mathcal{D}^k(O)\right)^*$.*

Beispiel 5.2.3.

1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung die durch $\delta_a(f) := f(a)$ definiert ist, ist ein 0-Strom auf $\mathbb{R}$.
2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $f \mapsto f'(a)$ definiert einen 0-Strom auf $\mathbb{R}$.
3. Jede Funktion $f \in L^1_{loc}(O)$ definiert einen 0-Strom $S_f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ durch
$$S_f(g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\, dx.$$
4. Es gilt $\mathcal{D}_0(O) = \mathcal{D}'(O)$, d.h. 0-Ströme auf O sind das gleiche wie Distributionen.
5. Jede orientierte, k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert einen Strom $[\![M]\!] \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ durch
$$[\![M]\!](\omega) := \int_M \omega.$$
Falls ξ eine Orientierung von M ist, gilt
$$\int_M \omega = \int_M \langle \omega, \xi \rangle_{\Lambda^k,\Lambda_k}\, d\mathcal{H}^k,$$
wobei die duale Paarung durch (5.5) gegeben ist (Übung).
6. Ist $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(O)$ eine $(n-k)$-Form (mit nicht notwendig kompaktem Träger), so definiert man einen k-Strom $T_\xi \in \mathcal{D}_k(O)$ durch
$$T_\xi(\omega) := \int_O \omega \wedge \xi.$$
Es gibt also eine Einbettung $\mathcal{E}^{n-k}(O) \hookrightarrow \mathcal{D}_k(O)$.

Diese Beispiele werden uns immer wieder begegnen und noch verallgemeinert werden.

Wie in den vorherigen Beispielen zu sehen ist, man kann Ströme als Verallgemeinerung von (Unter-)Mannigfaltigkeiten oder Distributionen und somit auch als Verallgemeinerung von Maßen betrachten.

Mit der nachfolgenden Definition kann man Ströme auf Differentialformen „einschränken".

Definition 5.2.4. *Sei $T \in \mathcal{D}_k(O)$ und $\phi \in \mathcal{D}^m(O)$ mit $m \leq k$. Dann ist der Strom $T \llcorner \phi \in \mathcal{D}_{k-m}(O)$ definiert durch*

$$T \llcorner \phi(\omega) \coloneqq T(\phi \wedge \omega), \ \text{für } \omega \in \mathcal{D}^{k-m}(O).$$

Später werden wir sehen, dass man gewisse Ströme auch auf Teilmengen einschränken kann. Für ein $T \in \mathcal{D}_k(O)$, $\alpha \in I_{n,k}$ und $\varphi \in C_0^\infty(O)$ definieren wir die ***Komponenten*** von T durch

$$T_\alpha(\varphi) \coloneqq T(\varphi \, dx_\alpha)$$

und bemerken, dass $T_\alpha \in \mathcal{D}'(O)$ und

$$T(\omega) = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} T_\alpha(\omega_\alpha) \text{ für } \omega = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha \, dx_\alpha.$$

Aus dieser Sicht sind Ströme eine einfache Sammlung einer endlichen Anzahl von Distributionen. Das erlaubt uns einen schönen Konvergenzbegriff zu definieren.

Definition 5.2.5. *Eine Folge von Strömen $T_1, T_2, \ldots \in \mathcal{D}_k(O)$ konvergiert schwach-$*$ gegen $T \in \mathcal{D}_k(O)$, in Zeichen $T_j \overset{*}{\rightharpoonup} T$, falls $T_j(\omega) \longrightarrow T(\omega)$ für alle $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$ gilt.*

Viele Autoren bezeichnen diese Konvergenz nur als „schwach". Das ist ein Missbrauch der Notation, denn in diesem Zusammenhang keine „echte" schwache Konvergenz benutzt wird.

Außerdem, können wir den Träger eines Stroms definieren.

Definition 5.2.6. *Sei $T \in \mathcal{D}_k(O)$. Man definiere*

$$\operatorname{supp} T \coloneqq O \setminus \bigcup \{V \subset\subset O : V \ \text{offen}, T(\omega) = 0 \ \text{für alle } \omega \in \mathcal{D}^k(O) \ \text{mit } \operatorname{supp} \omega \subset W\}.$$

Sei $T(\omega) = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} T_\alpha(\omega_\alpha)$, dann gilt

$$\operatorname{supp} T = \bigcup_{\alpha \in I_{n,k}} \operatorname{supp} T_\alpha \ \text{(Übung)}.$$

Der erste Begriff in der Theorie der Ströme, der Ströme geometrisch bereichert und in der Theorie der Distributionen nicht existiert, ist der Rand eines Stroms.

Definition 5.2.7. *Seien $k \geq 1$ und $T \in \mathcal{D}_k(O)$. Dann definiert man den Rand von T durch $\partial T \in \mathcal{D}_{k-1}(O)$*

$$\partial T(\omega) \coloneqq T(d\omega).$$

Beispiel 5.2.8. 1. Wir betrachten den 1-Strom $[\![(a,b)]\!]$ auf $\mathbb{R}$, der durch

$$[\![(a,b)]\!](\omega) = [\![(a,b)]\!](f\,dx) = \int_a^b f(x)\,dx$$

definiert ist. Dann ist

$$\partial[\![(a,b)]\!](f) = [\![(a,b)]\!](df) = [\![(a,b)]\!](f'\,dx) = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Es folgt $\partial[\![(a,b)]\!] = \delta_b - \delta_a$.

2. Jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definiert einen 0-Strom $S_f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ durch
$$S_f(g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\; dx$$
und einen 1-Strom $T_f \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ durch
$$T_f(\omega) = T_f(g\; dx) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\; dx.$$
Sei zusätzlich $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$. Dann ist
$$\partial T_f(g) = T_f(dg) = T_f(g'\; dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g'(x)\; dx = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, g(x)\; dx = -S_{f'}(g).$$
Also gilt $\partial T_f = -S_{f'}$. In diesem Sinne verallgemeinert der Rand eines Stroms die Ableitung einer Funktion.

3. Sei M eine orientierbare, k-dimensionale, glatte Untermannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) des $\mathbb{R}^n$ und $[\![M]\!]$ der zugehörige k-dimensionale Strom. Dann ist nach dem Satz von Stokes
$$\partial[\![M]\!](\omega) = [\![M]\!](d\omega) = \int_M d\omega \;= \int_{\partial M} \omega = [\![\partial M]\!](\omega).$$
Also ist $\partial[\![M]\!] = [\![\partial M]\!]$. In diesem Sinne verallgemeinert ∂ den Rand von Untermannigfaltigkeiten.

4. Ist $\xi \in \mathcal{E}^{n-k}(O)$, so gilt $\partial T_\xi = (-1)^k\, T_{d\xi}$, wobei
$$T_\xi(\omega) := \int_O \omega \wedge \xi.$$
Also verallgemeinert der Rand auch die äußere Ableitung von Formen.

Satz 5.2.9. *Für alle Ströme $T \in \mathcal{D}_k(O)$ gilt $\partial(\partial T) = 0$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus $d(d\omega) = 0$. ■

Zunächst werden wir eine (Operator) Norm-Funktion für Ströme definieren, die sogenannte *Masse*. Dafür brauchen wir die Euklidische Norm und die *Komassenorm* einer k-Form im Punkt x.

Definition 5.2.10. *Sei $\omega = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\, dx_\alpha \in \mathcal{D}^k(O)$ und $x \in O$. Definiere*

1. $|\omega(x)| := \left(\sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha(x)^2 \right)^{1/2} = \big(\omega(x) \cdot \omega(x)\big)^{1/2}$ ***(Euklidische Norm)***

2. $\|\omega(x)\| := \sup\{\langle \omega(x), \xi \rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k} : \xi \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ *einfach*, $\xi \cdot \xi \le 1\}$ ***(Komassenorm)***

*Ein Element $\xi \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ heißt **einfach**, falls $\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k$ mit $\{\xi_j\}_{j=1}^k$ orthonormal.*

Für $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$ und $\phi \in \mathcal{D}^l(O)$ gelten folgende Eigenschaften (Übung; [6, p.32,39]):

$$|(\omega \wedge \phi)(x)| \leq \binom{k+l}{k}^{1/2} |\omega(x)|\,|\phi(x)|,$$
$$\|(\omega \wedge \phi)(x)\| \leq \binom{k+l}{k} \|\omega(x)\|\ \|\phi(x)\|\,.$$

Jetzt kann man die Masse eines Stromes $T \in \mathcal{D}_k(O)$, $O \subset \mathbb{R}^n$, definieren.

Definition 5.2.11. *Seien $T \in \mathcal{D}_k(O)$, $O \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man definiere*

1. $\underline{\mathbb{M}}(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : |\omega(x)| \leq 1$ *für alle* $x \in O\}$ *(**Euklidische Masse**)*
2. $\mathbb{M}(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : \|\omega(x)\| \leq 1$ *für alle* $x \in O\}$ *(**Masse**)*

Die Abbildungen $\mathbb{M}$ und $\underline{\mathbb{M}}$ sind Operator-Normen in $\mathcal{D}_k(O)$ bezüglich der Normen

$$\omega \mapsto \sup_{x \in O} \|\omega(x)\| \ \text{ und } \omega \mapsto \sup_{x \in O} |\omega(x)|$$

in $\mathcal{D}^k(O)$. Man kann ohne Probleme zeigen, dass Masse und Euklidische Masse bis auf einen Faktor c, der nur von n abhängt, übereinstimmen, d.h. es gilt

$$c^{-1}\,\mathbb{M}(T) \leq \underline{\mathbb{M}}(T) \leq c\,\mathbb{M}(T).$$

Im Allgemeinen gilt trotzdem $\underline{\mathbb{M}}(T) < \mathbb{M}(T)$. Somit gelten alle folgende topologische Aussagen, die bzgl. $\mathbb{M}$ formuliert sind, auch für $\underline{\mathbb{M}}$. Hierzu muss man noch bemerken, dass Simon [15] die Massen umgekehrt definiert.

Beispiel 5.2.12. Sei M eine orientierbare, k-dimensionale, glatte Untermannigfaltigkeit (eventuell mit Rand) des $\mathbb{R}^n$ und $[\![M]\!]$ der zugehörige k-dimensionale Strom. Dann gilt

$$\mathbb{M}([\![M]\!]) = \mathcal{H}^k(M).$$

Für geometrische Anwendungen ist die Masse des Stromes wichtiger als die Euklidische Masse. Ist man aber nicht am konkreten Wert, sondern nur an der Größenordnung interessiert, so ist die Euklidische Masse oft einfacher zu handhaben.

Da viele Überlegungen und Konstruktionen in der geometrischen Maßtheorie lokal sind, ist es nützlich noch folgende lokale Definitionen zu machen.

Definition 5.2.13. *Seien $T \in \mathcal{D}_k(O)$, $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset\subset O$ offen. Man definiere*

1. $\underline{\mathbb{M}}_V(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : \operatorname{supp}\omega \subset V,\ |\omega(x)| \leq 1$ *für alle* $x \in O\}$
2. $\mathbb{M}_V(T) \coloneqq \sup\{T(\omega) : \operatorname{supp}\omega \subset V,\ \|\omega(x)\| \leq 1$ *für alle* $x \in O\}$

Definition 5.2.14. *Eine Folge von Strömen $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_k(O)$ konvergiert bzgl. der Masse gegen $T \in \mathcal{D}_k(O)$, wenn $\mathbb{M}(T_j - T) \longrightarrow 0$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $T_j \longrightarrow T$. Die Folge $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gegen T, falls $\mathbb{M}_V(T_j - T) \longrightarrow 0$ für alle offene $V \subset\subset O$.*

Bemerke: dass $T_j \longrightarrow T$ impliziert $T_j \longrightarrow T$ lokal (Übung).

Satz 5.2.15. *Seien $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_k(O)$ und $T \in \mathcal{D}_k(O)$ mit $T_j \longrightarrow T$. Dann gilt $T_j \overset{*}{\rightharpoonup} T$.*

Beweis. Für $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$ gilt

$$|T_j(\omega) - T(\omega)| = |(T_j - T)(\omega)| \leq \mathbb{M}(T_j - T) \sup_{x \in O} \|\omega(x)\| \longrightarrow 0.$$

■

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Zum Beispiel ist mit $T_j \coloneqq \delta_j$, $\mathbb{M}(T_j) = 1$, aber $T_j \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ (Übung). Allerdings hat man folgende Halbstetigkeit der Masse, die für das Plateau-Problem von Bedeutung ist.

Lemma 5.2.16. *Seien $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_k(O)$ und $T \in \mathcal{D}_k(O)$ mit $T_j \overset{*}{\rightharpoonup} T$. Dann gilt*

$$\mathbb{M}(T) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathbb{M}(T_j).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums existiert ein $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$ mit $\|\omega(x)\| \leq 1$ für alle $x \in O$, sodass $T(\omega) > \mathbb{M}(T) - \varepsilon$. Somit gilt

$$\liminf_{j \to \infty} \mathbb{M}(T_j) \geq \liminf_{j \to \infty} T_j(\omega) = T(\omega) > \mathbb{M}(T) - \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. ■

5.3 Ströme mit endlicher Masse und normale Ströme

Die Menge der Ströme $T \in \mathcal{D}_k(O)$ mit $\mathbb{M}(T) < \infty$ wird aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz eine besondere Rolle spielen. Für viele Sätze ist zudem noch nötig, dass auch der Rand eine endliche Masse hat.

Definition 5.3.1. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

1. $\mathcal{M}_k(O) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(O) : \mathbb{M}(T) < \infty\}$ ***(Ströme mit endlicher Masse)***
2. $\mathcal{M}_{k,loc}(O) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(O) : \mathbb{M}_V(T) < \infty$ *für alle* $V \subset\subset O$ *offen*$\}$ ***(Ströme mit lokal endlicher Masse)***
3. $\mathcal{N}_k(O) \coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(O) : \mathbb{M}(T) + \mathbb{M}(\partial T) < \infty\} = \{T \in \mathcal{M}_k(O) : \partial T \in \mathcal{M}_{k-1}(O)\}$ ***(Normale Ströme)***
4. $$\begin{aligned} \mathcal{N}_{k,loc}(O) &\coloneqq \{T \in \mathcal{D}_k(O) : \mathbb{M}_V(T) + \mathbb{M}_V(\partial T) < \infty \text{ für alle } V \subset\subset O \text{ offen}\} \\ &= \{T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O) : \partial T \in \mathcal{M}_{k-1,loc}(O)\} \end{aligned}$$
   (Lokal normale Ströme)

Beispiel 5.3.2. Als Beispiel eines Stromes T, der nicht normal ist, aber endliche Masse hat, betrachten wir $T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$, definiert durch

$$T(f(x)\,dx) = f(0).$$

Dann ist $\mathbb{M}(T) = 1$, denn

$$\begin{aligned} \|f(x)\,dx\| &= \sup\{\langle f(x)\,dx, \xi\rangle_{\Lambda^1,\Lambda_1} : \xi \in \Lambda_1(\mathbb{R}) \text{ einfach},\ \xi \cdot \xi \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle f(x)\,dx, \lambda\, e_1\rangle_{\Lambda^1,\Lambda_1} : \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| \leq 1\} \\ &= \sup\{f(x)\,\lambda : \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| \leq 1\} = |f(x)|. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\partial T(f) = f'(0)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit unendlicher Masse, denn f kann in jedem Punkt durch 1 beschränkt sein und dennoch beliebig große Ableitung bei 0 haben.

Satz 5.3.3. *Sei $T \in \mathcal{N}_k(O)$ und $\phi \in \mathcal{D}^m(O)$ mit $m \leq k$. Dann ist der Strom $T \llcorner \phi \in \mathcal{N}_{k-m}(O)$.*

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{D}^{k-m}(O)$. Dann ist

$$|T \llcorner \phi(\omega)| = |T(\phi \wedge \omega)| \leq \mathbb{M}(T) \sup_{x \in O} \|\phi \wedge \omega(x)\| \leq \mathbb{M}(T) \sup_{x \in O} \|\phi(x)\| \sup_{x \in O} \|\omega(x)\| .$$

Daraus folgt

$$\mathbb{M}(T \llcorner \phi) \leq \mathbb{M}(T) \sup_{x \in O} \|\phi(x)\| < \infty.$$

Für $\omega \in \mathcal{D}^{k-m-1}(O)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial(T \llcorner \phi)(\omega) &= (T \llcorner \phi)(d\omega) = T(\phi \wedge d\omega) \\ &= T\big((-1)^m\, d(\phi \wedge \omega) - (-1)^m\, d\phi \wedge \omega\big) \\ &= (-1)^m\, T\big(d(\phi \wedge \omega)\big) - (-1)^m\, T(d\phi \wedge \omega) \\ &= (-1)^m\, (\partial T \llcorner \phi)(\omega) - (-1)^m\, (T \llcorner d\phi)(\omega). \end{aligned}$$

Also gilt $\partial(T \llcorner \phi) = (-1)^m\, \partial T \llcorner \phi - (-1)^m\, T \llcorner d\phi$ und beide Summanden haben nach dem oben Bewiesenen eine endliche Masse. ■

Man kann viele grundlegende Eigenschaften von Strömen mit endlicher Masse herleiten, indem man diese Ströme mit Radon-Maße identifiziert. Dies erfolgt mithilfe des Darstellungssatzes von Riesz.

Theorem 5.3.4. *Sei $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$. Dann existiert ein Radon-Maß $\|T\|$ und $\vec{T} : O \longrightarrow \Lambda_k \mathbb{R}^n$ mit*

$$\vec{T}(x) = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \vec{T}_\alpha(x)\, e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k},$$

sodass folgende Aussagen gelten:

1. *Die Abbildung $x \mapsto \bigtimes_{\alpha \in I_{n,k}} \vec{T}_\alpha(x)$ ist $\|T\|$-messbar. (Hier ist mit $\bigtimes$ das kartesische Produkt gemeint.)*
2. *$\vec{T}(x) \cdot \vec{T}(x) = 1$ für $\|T\|$-f.a. $x \in O$.*
3. *$T(\omega) = \displaystyle\int_O \langle \omega, \vec{T} \rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k}\, d\|T\|$ für $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$.*
4. *Für das Totalvariationsmaß $\|T\|$ gilt $\|T\|(V) = \mathbb{M}_V(T)$ für $V \subset\subset O$ offen. Insbesondere $\|T\|(O) = \mathbb{M}(T)$ falls zusätzlich $\mathbb{M}(T) < \infty$ gilt, d.h. $T \in \mathcal{M}_k(O)$.*

Beweis, Übung. Erinnerung:

Ein äußeres Maß in einem zweitabzählbaren, lokalkompakten Hausdorffraum X ist ein Radon-Maß genau dann, wenn μ Borel-regulär ist und $\mu(K) < +\infty$ für kompakte $K \subseteq X$ gilt.

Ein äußeres Maß in einem topologischen Raum $(T, \mathcal{T})$ heißt ***Borel-regulär***, falls:

1. Alle Borel-Mengen sind μ-messbar.
2. Für jede Teilmenge $A \subset T$ existiert eine Borel-Menge $B \supseteq A$ sodass $\mu(B) = \mu(A)$ gilt.

Theorem (Rieszer Darstellungssatz)**.** *Sei X zusätzlich entweder eine topologische Gruppe oder ein σ-kompakter Hausdorffraum und sei $L : C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear mit*

$$\sup\Big\{L(f) : f \in C_c\big(X, \mathbb{R}^n\big), |f| \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq K\Big\} < +\infty$$

für jede $K \subseteq X$ kompakt. Dann existiert ein Radon-Maß μ in X und eine μ-messbare Funktion $\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$ μ-f.ü. in X, sodass $L(f) = \int_X f \cdot \nu \, d\mu$.

Sei $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$ mit $\omega = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha \, dx_\alpha$. Wir betrachten T als eine Abbildung

$$C_0^\infty\big(O, \mathbb{R}^{|I_{n,k}|}\big) \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wenden den obigen Rieszer Darstellungssatz an. ∎

Bemerkung 5.3.5. Man kann diese Konstruktion auch bezüglich der Euklidischen Masse durchführen, und ein anderes Totalvariationsmaß bekommen. Um zwischen diese beiden Maßen unterscheiden zu können und um konsistent mit der Notation der Totalvariation einer BV-Funktion zu bleiben, schreibt man oft $\|T\|$ und $|T|$ für diese zwei Totalvariationsmaße.

Definition 5.3.6. *Seien $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$, $A \subset O$ eine Borel-Menge, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion, $\vec{T}$ wie in Theorem 5.3.4, und $\omega \in \mathcal{D}^k(O)$. Man definiere:*

1. $\|T\| \llcorner \vec{T}(\omega) \coloneqq \displaystyle\int_O \big\langle \omega, \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k} \, d\|T\| \quad (= T(\omega)),$
2. $\|T\| \llcorner f(\omega) \coloneqq \displaystyle\int_O f \big\langle \omega, \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k} \, d\|T\|,$
3. $\|T\| \llcorner A(\omega) \coloneqq \displaystyle\int_A \big\langle \omega, \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k} \, d\|T\|.$

Als Beispiel nehme man eine Borel-Menge A in einer Untermannigfaltigkeit M. Dann ist $[\![M]\!] \llcorner A$ gegeben durch Integration über A. Ist A selbst eine Untermannigfaltigkeit, so ist jedoch $[\![T]\!] \llcorner A \neq [\![A]\!]$, außer wenn A die gleiche Dimension wie M hat.

Die Folgen-Version des Satzes von Alaoglu, angewandt auf den separablen, normierten Raum $\big(\mathcal{D}^k(O), \|\cdot\|_\infty\big)$, impliziert die schwach-$*$ Kompaktheit der Einheitskugel im Dualraum, denn

$$\big(\mathcal{D}^k(O), \|\cdot\|_\infty\big)^* = \mathcal{M}_k(O).$$

Theorem 5.3.7 (de la Vallée-Poussin für Ströme endlicher Masse)**.** *Sei $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{k,loc}(O)$ mit $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{M}_V(T_j) < \infty$ für alle offenen $V \subset\subset O$. Dann existiert ein $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$ und eine Teilfolge $\{T_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $T_{j_i} \overset{*}{\rightharpoonup} T$.*

Beweisidee. Seien $K_1, K_2, \ldots$ kompakt, sodass $O = \cup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. Man wende, wie im Beweis der für Radon-Maße analogen Aussage (Theorem 1.4.9), die Folgen-Version des Theorems von Alaoglu zusammen mit einem Diagonalargument an. ∎

Mithilfe eines Diagonalarguments beweist man die analoge Aussage für normale Ströme.

Korollar 5.3.8. *Sei $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_{k,loc}(O)$ mit $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{M}_V(T_j) + \mathbb{M}_V(\partial T_j)\big) < \infty$ für alle offenen $V \subset\subset O$. Dann existiert ein $T \in \mathcal{N}_{k,loc}(O)$ und eine Teilfolge $\{T_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $T_{j_i} \overset{*}{\rightharpoonup} T$.*

Beweis. Nach dem Theorem 5.3.7 existiert eine Teilfolge $\{T_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_{k,loc}(O)$ und ein $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$, sodass $T_{j_i} \xrightarrow{*} T$. Eine weitere Anwendung des vorherigen Theorems impliziert, dass eine weitere Teilfolge $\{T_{j_{i_m}}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_{k,loc}(O)$ und $S \in \mathcal{D}_{k-1}(O)$ existieren, sodass $\partial T_{j_{i_m}} \xrightarrow{*} S$. Das bedeutet, dass $T_{j_{i_m}}(d\omega) \longrightarrow S(\omega)$ für alle $\omega \in \mathcal{D}^{k-1}(O)$. Jedoch gilt $T_{j_i}(d\omega) \longrightarrow T(d\omega)$, und somit $S(\omega) = T(d\omega)$. ■

5.4 Einige wichtige Spezialfälle

n-DIMENSIONALE STRÖME IN $\mathbb{R}^n$. Hier betrachten wir $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, sodass

$$\mathcal{D}^n(O) = \{f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n : f \in C_0^\infty(O)\}.$$

Somit gibt es zu jedem n-dimensionalen Strom T die entsprechende Distribution

$$f \mapsto T(f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

und umgekehrt, zu jeder Distribution $S \in \mathcal{D}'(O)$ gibt es der entsprechenden n-dimensionalen Strom

$$f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mapsto S(f).$$

Insbesondere gibt es zu jeder Funktion $u \in L^1_{loc}(O)$ der entsprechenden n-dimensionalen Strom $T_u \in \mathcal{D}_n(O)$, definiert durch

$$T_u(f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \coloneqq \int_O u\, f\; d\mathcal{H}^n.$$

Man berechne, dass

$$\mathbb{M}_V(T_u) = \int_V |u|\; d\mathcal{H}^n \text{ für alle } V \subset\subset O \text{ offen.}$$

Sei $\omega \in \mathcal{D}^{n-1}(O)$. Dann gilt

$$\omega = \omega_1\, dx_{(2,\ldots,n)} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1}\, \omega_j\, dx_{(1,\ldots,j-1)} \wedge dx_{(j+1,\ldots,n)},$$

und somit

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_{(2,\ldots,n)} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{(1,\ldots,j-1)} \wedge dx_{(j+1,\ldots,n)} \\ &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_{(2,\ldots,n)} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j}\, dx_{(1,\ldots,j-1)} \wedge dx_j \wedge dx_{(j+1,\ldots,n)} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \Big)\, dx_{(1,\ldots,n)} = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}\, dx_{(1,\ldots,n)}, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\omega} \coloneqq (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Daraus folgt, dass

$$\partial T_u(\omega) = \int_O u \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}\; d\mathcal{H}^n.$$

Falls wir zusätzlich annehmen, dass $u \in BV_{loc}(O)$, dann gilt

$$\mathbb{M}_V(\partial T_u) = \int_V d|Du| = |Du|(V) \text{ für alle } V \subset\subset O \text{ offen.}$$

Ein sehr wichtiges Ergebnis handelt es von der Umkehrung dieser Konstruktion:

Theorem 5.4.1. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend.*

1. *Sei $T \in \mathcal{D}_n(O)$ mit $\partial T = 0$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $T = c\, [\![O]\!]$, wobei*

$$[\![O]\!](\omega) \coloneqq \int_O \langle \omega, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle_{\Lambda^n, \Lambda_n} \, d\mathcal{H}^n.$$

2. *Sei $T \in \mathcal{N}_{k,loc}(O)$. Dann existiert eine Funktion $u \in BV_{loc}(O)$, sodass $T = T_u$.*

Beweis. [15, Theorem 2.34, Remark 2.35] ■

Bemerkung 5.4.2. Eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine orientierbare, topologische, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Orientierung $x \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

k-DIMENSIONALE STRÖME IN $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}$ gibt es nur 0-Ströme (=Distributionen), und 1-Ströme. Sie haben die Form

$$T(f\, dx) = T_1(f),$$

wobei T_1 eine Distribution (die 1. Komponente des Stroms) ist. Demnach gilt

$$\partial T(f) = T(df) = T(f'\, dx) = T_1(f') = -DT_1(f).$$

Somit wird der Begriff der distributionellen Ableitung im Kontext der Ströme erfasst.

In $\mathbb{R}^2$ existieren zusätzlich Ströme der Form

$$T(\omega_{(1,2)}\, dx_1 \wedge dx_2) = T_{(1,2)}(\omega_{(1,2)}) \text{ und } S(\omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2) = S_1(\omega_1) + S_2(\omega_2),$$

wobei $T \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^2)$, $S \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$ und $T_{(1,2)}, S_1, S_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Für

$$\omega = \omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^2)$$

gilt

$$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = \Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\Big) dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^2).$$

Somit berechnet man

$$\begin{aligned} \partial T(\omega) = T(d\omega) = T_{(1,2)}\Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\Big) &= -D^{(1,0)}T_{(1,2)}(\omega_2) + D^{(0,1)}T_{(1,2)}(\omega_1) \\ &= -\nabla T_{(1,2)} \cdot (\omega_2, -\omega_1), \end{aligned}$$

sodass ∂T als ein Gradient betrachtet werden kann. Außerdem gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2,$$

für $f \in D(\mathbb{R}^2)$, und damit auch

$$\partial S(f) = S(df) = S_1\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big) + S_2\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) = -D^{(1,0)}S_1(f) - D^{(0,1)}S_2(f) = -\operatorname{div}(S_1, S_2)(f),$$

sodass $\partial S = -\operatorname{div} S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ im Sinne von Strömen.

In $\mathbb{R}^3$ existieren außer Distributionen noch folgende Ströme:

$$\begin{aligned}
&T(\omega_{(1,2,3)}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = T_{(1,2,3)}(\omega_{(1,2,3)}) \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}^3),\\
&S(\omega_{(1,2)}\, dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{(2,3)}\, dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{(3,1)}\, dx_3 \wedge dx_1)\\
&\qquad\qquad\qquad = S_{(1,2)}(\omega_{(1,2)}) + S_{(2,3)}(\omega_{(2,3)} + S_{(3,1)}(\omega_{(3,1)})) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^3),\\
&R(\omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2 + \omega_3\, dx_3) = R_1(\omega_1) + R_2(\omega_2) + R_3(\omega_3) \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

Wie in $\mathbb{R}^2$ betrachtet man $\nabla T \coloneqq -\partial T$ und $\operatorname{div} S \coloneqq -\partial S$. Für

$$\omega = \omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2 + \omega_3\, dx_3 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$$

berechnen wir

$$d\omega = \Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\Big)\, dx_1 \wedge dx_2 + \Big(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\Big)\, dx_2 \wedge dx_3 + \Big(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\Big)\, dx_1 \wedge dx_3 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3).$$

So betrachten wir $\operatorname{curl} R \coloneqq -\partial R$ im Sinne von Strömen.

5.5 Verknüpfungen und Operationen

Produkt von Strömen. Im Folgenden werden wir das kartesische Produkt von Strömen definieren. Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$. In diesem Kontext bezeichnen wir die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und die von $\mathbb{R}^m$ mit $y = (y_1, \dots, y_m)$. Eine Differentialform $\omega \in \mathcal{D}^{k+l}(O \times V)$ hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in I_{n,k'}\times I_{m,l'}\\ k'+l'=k+l}} \omega_{\alpha,\beta}\, dx_\alpha \wedge dy_\beta,$$

wobei $\omega_{\alpha,\beta} \in C_0^\infty(O \times V)$.

Definition 5.5.1. *Das* ***Kreuz- oder kartesische Produkt*** $S \times T \in \mathcal{D}_{k+l}(O \times V)$ *zweier Strömen* $S \in \mathcal{D}_k(O)$, $T \in \mathcal{D}_l(V)$ *ist definiert durch*

$$S \times T(\omega) \coloneqq \sum_{(\alpha,\beta)\in I_{n,k}\times I_{m,l}} S\big(T(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)\, dx_\alpha\big).$$

Das Kreuzprodukt ist wohldefiniert, denn die Abbildung

$$x \mapsto \sum_{(\alpha,\beta)\in I_{n,k}\times I_{m,l}} T\big(\omega_{\alpha,\beta}(x,y)\, dy_\beta\big)$$

lebt in $C_0^\infty(O)$ und es gilt $|\alpha| = k$. Seien außerdem P_O und P_V die Projektionen von $O \times V$ auf O und V, und betrachte die Formen $\omega \in \mathcal{D}^{k'}(O)$ und $\phi \in \mathcal{D}^{l'}(V)$, wobei $k' + l' = k + l$. Dann hat die Form

$$P_O^{\#}\omega \wedge P_V^{\#}\phi = (\omega \circ P_O) \wedge (\phi \circ P_V) \in \mathcal{D}^{k+l}(O \times V)$$

die Gestalt

$$P_O^\# \omega \wedge P_V^\# \phi = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in I_{n,k'}\times I_{m,l'}\\ k'+l'=k+l}} \omega_\alpha(x)\, \phi_\beta(y)\, dx_\alpha \wedge dy_\beta.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} S \times T(P_O^\# \omega \wedge P_V^\# \phi) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in I_{n,k}\times I_{m,l}} S\big(\omega_\alpha\, T(\phi_\beta\, dy_\beta)\, dx_\alpha\big) \\ &= S\Big(\sum_{\alpha\in I_{n,k}} \Big(\omega_\alpha\, T\Big(\sum_{\beta\in I_{m,l}} \phi_\beta\, dy_\beta\Big)\, dx_\alpha\Big)\Big) = S(\omega)\, T(\phi) \end{aligned} \tag{5.6}$$

genau dann, wenn $k' = k$ und $l' = l$. Man kann folgende fundierte Eigenschaften beweisen.

Satz 5.5.2. *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $S \in \mathcal{D}_k(O)$, $T \in \mathcal{D}_l(V)$.*

1. $\operatorname{supp}(S \times T) = \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T$
2. $\partial(S \times T) = \partial S \times T + (-1)^k\, S \times \partial T$

Beweis. *1.* Für ein beliebiges $\alpha \in I_{n,k'}$ setze

$$\omega_\alpha(x) \coloneqq \sum_{\substack{\beta\in I_{m,l'}\\ k'+l'=k+l}} T(\omega_{\alpha,\beta}(x,y)\, dy_\beta).$$

Somit ist

$$S \times T(\omega) \coloneqq S\Big(\sum_{\alpha\in I_{n,k}} \omega_\alpha\, dx_\alpha\Big).$$

Falls $S \times T(\omega) \neq 0$, existiert einen Index α und ein $x \in \operatorname{supp} S$, sodass $\omega(x) \neq 0$. Daraus folgt, dass es einen Index β und ein $y \in \operatorname{supp} T$ gibt, sodass $\omega_{\alpha,\beta}(x,y) \neq 0$. Damit wurde die Inklusion $\operatorname{supp}(S \times T) \subseteq \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T$ bewiesen.

Für die andere Richtung bemerken wir, dass für $S(\omega), T(\phi) \neq 0$ aus (5.6) folgt, dass

$$S \times T(P_O^\# \omega \wedge P_V^\# \phi) \neq 0.$$

2. Es reicht aus die Gleichheit für eine Form $\omega = \omega_{\alpha,\beta}\, dx_\alpha \wedge dy_\beta$ zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_\alpha \wedge dy_\beta + (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dx_\alpha \wedge dy_j \wedge dy_\beta \\ &= \sum_{j=1}^n \pm \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dx_{\tilde\alpha} \wedge dy_\beta + (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^m \pm \frac{\partial \omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dx_\alpha \wedge dy_{\tilde\beta}, \end{aligned}$$

wobei $dx_{\tilde{\alpha}}$ und $dy_{\tilde{\beta}}$ sind die aufsteigend umsortierte Formen $dx_j \wedge dx_\alpha$ und $dy_j \wedge dy_\beta$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\partial(S \times T)(\omega) = S \times T(d\omega)\\
&= \sum_{j=1}^{n} S\Big(T\Big(\pm \frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dy_\beta\Big)\, dx_{\tilde{\alpha}}\Big) + (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{m} S\Big(T\Big(\pm \frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_{\tilde{\beta}}\Big)\, dx_\alpha\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} S\Big(T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dy_\beta\Big)\, dx_j \wedge dx_\alpha\Big) + (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{m} S\Big(T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dy_\beta\Big)\, dx_\alpha\Big)\\
&= S\Big(\sum_{j=1}^{n} T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dy_\beta\Big)\, dx_j \wedge dx_\alpha\Big) + (-1)^{|\alpha|} S\Big(\sum_{j=1}^{m} T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dy_\beta\Big)\, dx_\alpha\Big)\\
&\coloneqq A + B.
\end{aligned}$$

Weiterhin betrachten wir jeden Summanden separat.

$$\begin{aligned}
B &= (-1)^{|\alpha|} S\Big(\sum_{j=1}^{m} T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dy_\beta\Big)\, dx_\alpha\Big)\\
&= (-1)^{|\alpha|} S\Big(T\Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dy_\beta\Big)\, dx_\alpha\Big) = (-1)^{|\alpha|} S\Big(T\big(d(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)\big)\, dx_\alpha\Big)\\
&= (-1)^{|\alpha|} S\Big(\partial T(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)\, dx_\alpha\Big) = (-1)^{|\alpha|} S \times \partial T(\omega_{\alpha,\beta}\, dx_\alpha \wedge dy_\beta)\\
&= (-1)^{|\alpha|} S \times \partial T(\omega).
\end{aligned}$$

Um A ähnlich umzuformen, muss man überlegen, dass partielle Ableitungen bezüglich eines Parameters aus dem Argument heraus gezogen werden können, denn $\omega_{\alpha,\beta} \in C_0^\infty(O \times V)$. Somit rechnen wir, dass

$$\begin{aligned}
A &= S\Big(\sum_{j=1}^{n} T\Big(\frac{\partial\omega_{\alpha,\beta}(x,y)}{\partial x_j}\, dy_\beta\Big)\, dx_j \wedge dx_\alpha\Big) = S\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underbrace{T(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)}_{\in C_0^\infty(O)}\Big)\, dx_j \wedge dx_\alpha\Big)\\
&= S\Big(d\big(T(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)\, dx_\alpha\big)\Big) = \partial S\big(T(\omega_{\alpha,\beta}\, dy_\beta)\, dx_\alpha\big) = \partial S \times T(\omega_{\alpha,\beta}\, dx_\alpha \wedge dy_\beta)\\
&= \partial S \times T(\omega).
\end{aligned}$$

■

Satz 5.5.3. *Seien $S \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$, und $T \in \mathcal{M}_{l,loc}(V)$, $E \subset\subset O$ und $W \subset\subset V$ offen gegeben. Dann gilt*

1. $\underline{\mathbb{M}}_{E\times W}(S \times T) = \underline{\mathbb{M}}_E(S)\, \underline{\mathbb{M}}_W(T)$
2. *Für eine Konstante $c = c(n) > 1$ gilt*

$$c^{-1}\, \mathbb{M}_{E\times W}(S \times T) \le \mathbb{M}(S)_E\, \mathbb{M}_W(T) \le c\, \mathbb{M}_{E\times W}(S \times T).$$

Beweisidee. *1.* Folgt aus der Definition und (5.6).
2. Folgt aus *1.* und aus der Äquivalenz der Massen. ■

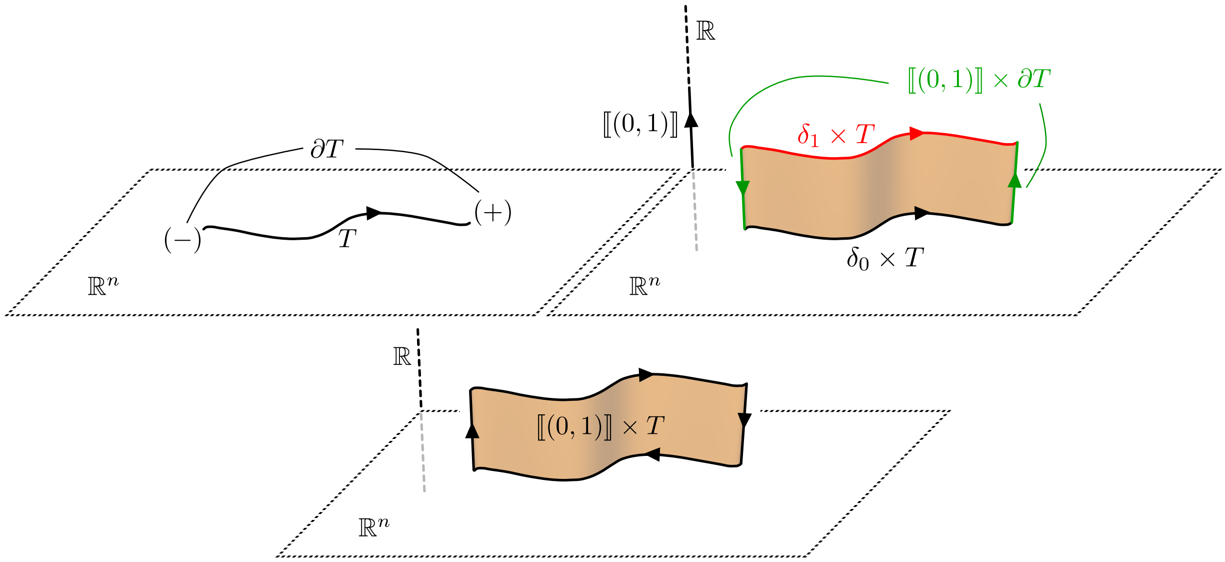

Abbildung 5.1: Konstruktion von $[\![(0,1)]\!] \times T$ (Beispiel 5.5.5). Die Orientierung von $[\![(0,1)]\!] \times \partial T$ kann man durch die Rechnung $[\![(0,1)]\!] \times \partial[\![(a,b)]\!] = [\![(0,1)]\!] \times \delta_b - [\![(0,1)]\!] \times \delta_a$ bestimmen.

Bemerkung 5.5.4. Das Kreuzprodukt ist der einzige Strom in $\mathcal{D}^{k+l}(O \times V)$ mit der Eigenschaft (5.6). Einen Beweis findet man in [6, S. 360].

Beispiel 5.5.5. Für $[\![(0,1)]\!] \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ und $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \partial\big([\![(0,1)]\!]) \times T\big) &= \partial[\![(0,1)]\!] \times T - [\![(0,1)]\!] \times \partial T \\ &= (\delta_1 - \delta_0) \times T - [\![(0,1)]\!] \times \partial T \\ &= \delta_1 \times T - \delta_0 \times T - [\![(0,1)]\!] \times \partial T. \end{aligned}$$

Falls außerdem $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$ mit $T = \|T\| \llcorner \vec{T}$ gilt, dann kann gezeigt werden, dass

$$[\![(0,1)]\!] \times T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O), \; \|[\![(0,1)]\!] \times T\| = \big(\mathcal{L}^1 \llcorner (0,1)\big) \times \|T\| \text{ und } \overrightarrow{[\![(0,1)]\!]} = e_1 \wedge \vec{T}.$$

Der Pushforward. Hier werden wir das Bild eines Stromes unter einer glatten Abbildung definieren. Wir betrachten einen Strom $T \in \mathcal{D}_k(O)$ mit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und eine C^∞ Abbildung $f : O \longrightarrow V$, wobei $V \subseteq \mathbb{R}^m$, sodass:

Die Menge $\operatorname{supp} T \cap f^{-1}(K)$ ist kompakt in O für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq V$.

Diese Eigenschaft wird manchmal als ***die Funktion*** $f|_{\operatorname{supp} T}$ ***ist proper*** zusammengefasst.

Definition 5.5.6. *Der **Pushforward** $f_\# T \in \mathcal{D}_k(V)$ des Stromes T ist für $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ definiert durch*

$$f_\# T(\omega) \coloneqq T\big(\eta\, f^\# \omega\big),$$

wobei $\eta \in C_0^\infty(O)$ und $\eta = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} f^\# \omega$.

Bemerkung 5.5.7.
1. $f_\# : \mathcal{D}_k(O) \longrightarrow \mathcal{D}_k(V)$ ist ein linearer Operator.
2. Es ist $\operatorname{supp} f^\# \omega \subseteq f^{-1}(\operatorname{supp} \omega)$. Da $f|_{\operatorname{supp} T}$ proper ist, ist $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} f^\# \omega$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ebenfalls kompakt.

3. Die Funktion η muss eingeführt werden, damit man T anwenden kann. Denn es ist durchaus möglich, dass $f^{\#}\omega$ keinen kompakten Träger hat. In diesem Fall schneidet man mit η den Teil, der außerhalb von $\operatorname{supp} T$ liegt, ab.

4. Die Definition hängt nicht von der Wahl von η ab, wie man direkt nachrechnet.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial(f_{\#}T)(\omega) &= f_{\#}T(d\omega) = T\big(\eta\, f^{\#} d\omega\big) \\
&= T\big(\eta\, d(f^{\#}\omega)\big) \qquad \text{(elementare Eigenschaften der Ableitung, Satz 5.1.10)} \\
&= T\big(d(\eta\, f^{\#}\omega)\big) \qquad (\eta = 1 \text{ wo die Anwendung stattfindet}) \\
&= \partial T\big(\eta\, f^{\#}\omega\big) = f_{\#}\partial T(\omega),
\end{aligned}$$

das heißt,

$$\partial(f_{\#}T) = f_{\#}\partial T. \tag{5.7}$$

Weiterhin kann man

$$\operatorname{supp} f_{\#}T \subseteq f(\operatorname{supp} T)$$

nachrechnen.

Die Bedingung, dass $f|_{\operatorname{supp} T}$ proper ist, ist wesentlich bezüglich der Eigenschaft (5.7). Nimmt man beispielsweise $O = (0, \infty)$ und $V = \mathbb{R}$, $f : O \longrightarrow V$ die Identität und $T = [\![(0,1)]\!]$, so gilt $\partial T = \delta_1$, denn für $f \in C_0^\infty(O)$ gilt

$$\partial[\![(0,1)]\!](f) = [\![(0,1)]\!](df) = [\![(0,1)]\!](f'\,dx) = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1).$$

Außerdem gelten $f_{\#}\partial T = \delta_1$, $f_{\#}T = [\![(0,1)]\!] \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ und $\partial(f_{\#}T) = \delta_1 - \delta_0$. Also gilt $\partial(f_{\#}T) \neq f_{\#}\partial T$.

Hierzu kann man einen wichtigen Satz beweisen.

Satz 5.5.8 (Homotopieformel)**.** *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $f, g : O \longrightarrow V$ glatte Abbildungen und $h : [0,1] \times O \longrightarrow V$ eine glatte **Homotopie** zwischen ihnen, d.h. es gelten*

$$h(0,x) = f(x) \text{ und } h(1,x) = g(x) \text{ für alle } x \in O.$$

Seien $T \in \mathcal{D}_k(O)$ und $h|_{[0,1]\times \operatorname{supp} T}$ proper. Dann gilt

$$g_{\#}T - f_{\#}T = \partial h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times T\big) + h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times \partial T\big).$$

Beweis. Aus den Eigenschaften des Kreuzproduktes folgt, dass

$$\operatorname{supp}\big([\![(0,1)]\!] \times T\big) = \operatorname{supp}[\![(0,1)]\!] \times \operatorname{supp} T.$$

Somit ist $h|_{\operatorname{supp}([\![0,1]\!]\times \operatorname{supp} T)}$ proper. Es folgt, dass $h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times T\big)$ wohldefiniert ist, und mithilfe des Beispiels 5.5.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times T\big) &= h_{\#}\partial\big([\![(0,1)]\!] \times T\big) \\
&= h_{\#}\big(\delta_1 \times T\big) - h_{\#}\big(\delta_0 \times T\big) - h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times \partial T\big) \\
&= g_{\#}T - f_{\#}T - h_{\#}\big([\![(0,1)]\!] \times \partial T\big).
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass für $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ gilt:

$$\begin{aligned}
h_\#\big(\delta_1 \times T\big)(\omega) &= \delta_1 \times T(\eta\, h^\# \omega) \\
&= \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \delta_1\Big(T\Big(\eta\, \omega_\alpha\big(h_\#(t,x)\big)\, d\big(h_\#(t,x_{\alpha_1})\big) \wedge \cdots \wedge d\big(h_\#(t,x_{\alpha_k})\big)\Big)\Big) \\
&= \sum_{\alpha \in I_{n,k}} T\Big(\eta\, \omega_\alpha\big(h_\#(1,x)\big)\, d\big(h_\#(1,x_{\alpha_1})\big) \wedge \cdots \wedge d\big(h_\#(1,x_{\alpha_k})\big)\Big) \\
&= \sum_{\alpha \in I_{n,k}} T\Big(\eta\, \omega_\alpha\big(g_\#(x)\big)\, d\big(g_\#(x_{\alpha_1})\big) \wedge \cdots \wedge d\big(g_\#(x_{\alpha_k})\big)\Big) \\
&= T\Big(\eta \sum_{\alpha \in I_{n,k}} \omega_\alpha\big(g_\#(x)\big)\, d\big(g_\#(x_{\alpha_1})\big) \wedge \cdots \wedge d\big(g_\#(x_{\alpha_k})\big)\Big) \\
&= T(\eta\, g^\# \omega) = g_\# T(\omega),
\end{aligned}$$

und ähnlich, dass $h_\#\big(\delta_0 \times T\big) = f_\# T$. ■

Eine erste Anwendung der Homotopieformel ist:

Korollar 5.5.9 (Poincaré Lemma)**.** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig. Dann ist jeder randlose Strom selbst ein Rand.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{D}_k(O)$ mit $\partial T = 0$ und betrachte die Homotopie $h(t,x) = t\,x$. Dann gilt

$$T = \partial h_\#\big([\![(0,1)]\!] \times T\big) + h_\#\big([\![(0,1)]\!] \times \partial T\big) = \partial h_\#\big([\![(0,1)]\!] \times T\big).$$

■

Ein Spezialfall der Homotopieformel liefert uns folgende Aussage.

Korollar 5.5.10. *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $f, g : O \longrightarrow V$ glatte Abbildungen, $h : [0,1] \times O \longrightarrow V$ definiert durch*

$$h(t,x) \coloneqq (1-t)\, f(x) + t\, g(x),$$

und $T \in \mathcal{M}_k(O)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, die nur von n abhängt, sodass

$$\mathbb{M}\Big(h_\#\big([\![(0,1)]\!] \times T\big)\Big) \le c \sup_{x \in \operatorname{supp} T} |f(x) - g(x)| \sup_{x \in \operatorname{supp} T} (|df(x)| + |dg(x)|)^k\, \mathbb{M}(T).$$

Beweisidee. Wir benutzen die Tatsache (Beispiel 5.5.5), dass $[\![(0,1)]\!]) \times T \in \mathcal{M}_k(O)$ für $T = \|T\| \llcorner \vec{T}$,

$$\|[\![(0,1)]\!] \times T\| = \big(\mathcal{L}^1 \llcorner (0,1)\big) \times \|T\| \text{ und } \overrightarrow{[\![(0,1)]\!]} = e_1 \wedge \vec{T}$$

gilt. Damit folgt für $\omega \in \mathcal{D}^{k+1}(V)$, dass

$$\begin{aligned}
h_\#\big([\![(0,1)]\!] \times T\big)(\omega) &= [\![(0,1)]\!] \times T(\eta\, h^\# \omega) \\
&= \int_{(0,1)\times O} \big\langle \eta\, h^\# \omega, e_1 \wedge \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^{k+1}, \Lambda_{k+1}}\, d\Big(\big(\mathcal{L}^1 \llcorner (0,1)\big) \times \|T\|\Big) \\
&\quad (\text{denn } \operatorname{supp} \eta \subseteq (0,1) \times O) \\
&= \int_{(0,1)} \int_O \big\langle h^\# \omega, e_1 \wedge \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^{k+1}, \Lambda_{k+1}}\, d\|T\| d\mathcal{L}^1 \\
&\quad (\text{siehe [15, p. 140]}) \\
&= \int_{(0,1)} \int_O \big\langle \omega|_{h(t,x)}, \big(g(x) - f(x)\big) \wedge \big(t\, dg + (1-t)\, df\big)\big)_\# \vec{T} \big\rangle_{\Lambda^{k+1}, \Lambda_{k+1}}\, d\|T\| d\mathcal{L}^1.
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass $\|\omega|_x\| \leq 1$ für alle $x \in O$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
|h_\#([\![(0,1)]\!] \times T)(\omega)| &\leq c \int_{(0,1)} \int_O |g(x) - f(x)| \left| (t\, dg + (1-t)\, df)_\# \vec{T} \right| d\|T\| d\mathcal{L}^1 \\
&\leq c \sup_{x \in \operatorname{supp} T} |f(x) - g(x)| \sup_{x \in \operatorname{supp} T} (|df(x)| + |dg(x)|)^k \int_{(0,1)} \int_O d\|T\| d\mathcal{L}^1,
\end{aligned}$$

und die Aussage folgt, denn $\int_{(0,1)} \int_O d\|T\| d\mathcal{L}^1 = \mathbb{M}(T)$. ■

Mithilfe der Homotopieformel kann man das Bild eines Stromes unter einer Lipschitz Abbildung definieren.

Satz 5.5.11 (Lipschitz-Pushforward)**.** *Seien $T \in \mathcal{N}_{k,loc}(O)$ und $f : O \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ Lipschitz mit $f|_{\operatorname{supp} T}$ proper. Seien η_ε die klassische Mollifier in $\mathbb{R}^n$ und $f_n := f * \eta_{1/n}$. Für eine Form $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ definiere*

$$f_\# T(\omega) := \lim_{n \to \infty} f_{n\#} T(\omega).$$

Dann gelten folgende Aussagen:

1. *Der Grenzwert ist von der Wahl der Folge unabhängig und existiert für jede solche glättende Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und jede Form ω.*
2. *Es gelten $f_\# T \in \mathcal{N}_{k,loc}(V)$ und $\operatorname{supp} f_\# T \subseteq f(\operatorname{supp} T)$.*
3. *Ist L die Lipschitz-Konstante von f, so ist $\mathbb{M}_W(f_\# T) \leq L^k\, \mathbb{M}_W(T)$ für jede offene Teilmenge $W \subset\subset V$.*
4. *Falls f glatt ist, so stimmt die Definition mit der vorher gegebenen überein.*
5. *Es gilt $f_\# \partial T = \partial f_\# T$.*

Beweisidee. Für einen kompletten Beweis siehe [2, Definition und Satz 9.1, p.23]. Für $i, j \in \mathbb{N}$ groß genug, $W \subset\subset V$ offen, $\omega \in \mathcal{D}^k(V)$ mit $\operatorname{supp} \omega \subset \operatorname{int} W$, und $h(t,x) = t\, f_i(x) + (1-t)\, f_j(x)$ impliziert Korollar 5.5.10, dass eine Konstante

$$c = c(n, k, \mathbb{M}_W(T), \mathbb{M}_W(\partial T), \sup_{x \in V} \|\omega(x)\|, \sup_{x \in V} \|d\omega(x)\|, L) > 0$$

mit

$$|f_{i\#} T(\omega) - f_{j\#} T(\omega)| \leq c \sup_{x \in f^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} T} |f_i(x) - f_j(x)|$$

existiert, wobei L die Lipschitz Konstante von f ist. Der Beweis folgt dann aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_i \longrightarrow f$ in $f^{-1}(W)$. ■

5.6 Rektifizierbare Ströme und das Plateau-Problem

Wir erinnern uns an das Plateau-Problem in $\mathbb{R}^3$, nämlich eine Minimalfläche zu finden, die als Rand eine gegebene Kurve besitzt. Eine gute Vorgehensweise wäre die Direkte Methode der Variationsrechnung zu benutzen:

1. Zeige $\inf > -\infty$. (Poincaré lemma)

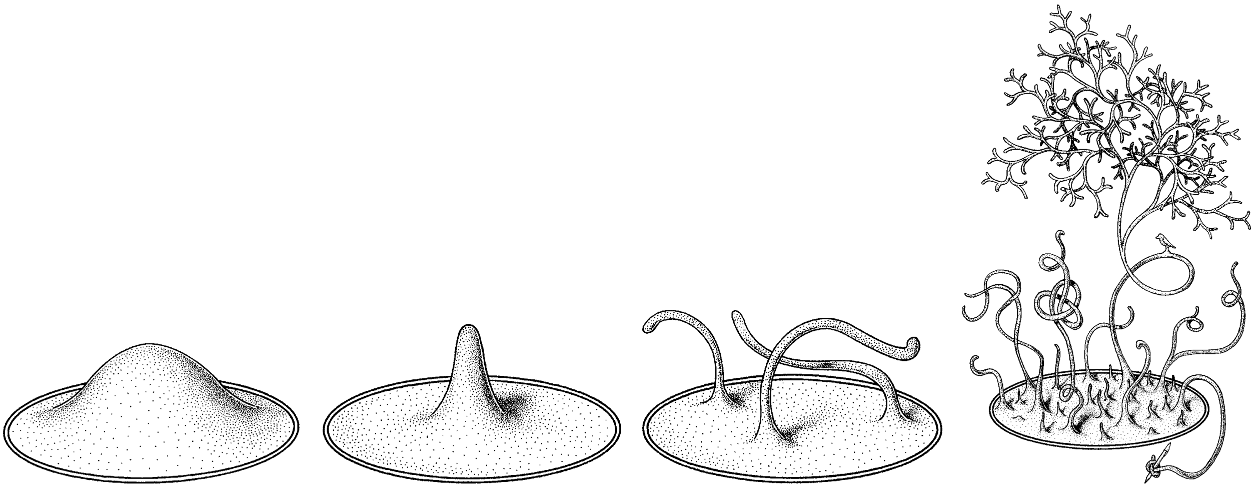

Abbildung 5.2: Eine Folge von Flächen mit Inhalt $\pi + 1$, $\pi + \frac{1}{4}$, $\pi + \frac{1}{16}$ und $\pi + \frac{1}{64}$ (von links nach rechts); Abbildungen sind aus [13].

2. Betrachte eine Folge von Flächen deren Flächeninhalt gegen das Infimum konvergiert.

3. Extrahiere eine konvergente Teilfolge. (Kompaktheit in der schwach-$*$ Konvergenz)

4. Zeige, dass der Grenzwert die gesuchte Minimalfläche ist. (Unterhalbstetigkeit der Masse)

Wenn man Flächen als Abbildungen betrachtet, so funktioniert die direkte Methode wegen den fehlenden Kompaktheitseigenschaften nicht, auch wenn der gegebene Rand der Einheitskreis ist. Durch das Herausstrecken von dünnen Tentakeln könnte diese Folge sogar den gesamten $\mathbb{R}^3$ als Häufungspunkt besitzen (siehe Abbildung 5.2).

In diesem Kapitel werden wir eine klasse von Strömen einführen, die der Abschluss von Untermannigfaltigkeiten bezüglich der schwach-$*$ Konvergenz ist. Dieser Konvergenzbegriff hat uns ermöglicht Kompaktheitsaussagen zu machen. Zunächst werden wir abzählbar rektifizierbare Mengen orientieren.

Definition 5.6.1. *Eine abzählbar k-rektifizierbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* ***orientierbar****, falls eine $\mathcal{H}^k$-messbare (als vektorwertige Abbildung) Funktion $\xi : M \longrightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass für $\mathcal{H}^k$-fast alle $x \in M$ gilt, dass $\xi(x) = \pm\, \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$, wobei $\tau_1, \ldots, \tau_k$ eine Orthonormalbasis von dem approximativen Tangentialraum $T_x M$ ist, und somit $\xi(x) \in \Lambda_k(T_x M)$ gilt. Die Funktion ξ heißt* ***Orientierung*** *von M.*

Man bemerke, dass $\|\xi(x)\| = 1$ für $\mathcal{H}^k$-fast alle $x \in M$. Es gibt im Allgemeinen überabzählbar viele Orientierungen einer rektifizierbaren Menge.

Definition 5.6.2. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.*

1. *Ein Strom $T \in \mathcal{D}_k(O)$ heißt* ***rektifizierbar****, wenn es*

   (a) *eine abzählbar k-rektifizierbare und $\mathcal{H}^k$-messbare Menge $M \subseteq O$,*

   (b) *eine Orientierung ξ von M,*

   (c) *eine nicht-negative Funktion $\theta \in L^1_{loc}(M)$*

gibt, so dass für alle $\omega \in \mathcal{D}_k(O)$ gilt:

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle_{\Lambda^k, \Lambda_k} \theta \, d\mathcal{H}^k, \text{ oder } T = \theta \, \xi \, \mathcal{H}^k \llcorner M.$$

Man sagt, der Strom T ist vom Typ $\tau(M, \xi, \theta)$, und schreibt $T = \tau(M, \xi, \theta)$, falls die obere Darstellung ohne die Voraussetzungen (a)-(c) gilt.

2. *Sei $T = \tau(M, \xi, \theta)$ rektifizierbar. Wenn θ nur ganze Zahlen annimmt, heißt T* ***ganzzahlig rektifizierbar mit Multiplizität*** *θ. Der Raum der ganzzahlig rektifizierbaren, k-dimensionalen Ströme wird mit $\mathcal{R}_k(O)$ bezeichnet.*

Bemerkung 5.6.3. Falls $T = \tau(M, \xi, \theta)$ mit $\theta \in L^1_{loc}(M)$, dann gilt $T \in \mathcal{M}_{k,loc}(O)$ und für alle offene $V \subset\subset O$, dass

$$\mathbb{M}_V(T) = \int_{M \cap V} \theta \, d\mathcal{H}^k.$$

Beispiel 5.6.4. 1. Eine orientierbare, k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M induziert einen ganzzahlig rektifizierbaren Strom $[\![M]\!]$, wenn das k-dimensionale Volumen endlich ist.

2. Der 1-Strom $T \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^2)$, definiert durch

$$T(\omega_1 \, dx + \omega_2 \, dy) = \int_0^1 \omega_2(s, 0) \, ds = \int_{[0,1] \times \{0\}} \langle \omega_1 \, dx + \omega_2 \, dy, e_2 \rangle_{\Lambda^1, \Lambda_1} \, d\mathcal{H}^1,$$

ist nicht rektifizierbar, da e_2 senkrecht zu $[0, 1] \times \{0\}$ steht. Definiert man T durch

$$T(\omega_1 \, dx + \omega_2 \, dy) = \int_0^1 \omega_1(s, 0) \, ds = \int_{[0,1] \times \{0\}} \langle \omega_1 \, dx + \omega_2 \, dy, e_1 \rangle_{\Lambda^1, \Lambda_1} \, d\mathcal{H}^1,$$

so erhält man einen rektifizierbaren Strom.

Das Verhalten von ganzzahlig rektifizierbaren Strömen unter den angegebenen Konstruktionen wird im folgenden Theorem zusammengefasst:

Theorem 5.6.5. *1. Eine ganzzahlige Linearkombination zweier rektifizierbarer Strömen ist ganzzahlig rektifizierbar.*

2. *Das Kreuzprodukt von ganzzahlig rektifizierbaren Strömen ist ganzzahlig rektifizierbar.*

3. *Der Lipschitz-Pushforward eines ganzzahlig rektifizierbaren Stromes ist wieder ganzzahlig rektifizierbar.*

Beweis. [15, 3.2 Remarks, p.146] ■

Die Wichtigkeit dieser Klasse von Strömen liegt an folgender Aussage.

Theorem 5.6.6 (Federer-Fleming Kompaktheitstheorem)**.** *Sei $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_{k,loc}(O) \cap \mathcal{R}_k(O)$ mit*

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{M}_V(T_j) + \mathbb{M}_V(\partial T_j) \right) < \infty$$

für alle $V \subset\subset O$. Dann existiert ein $T \in \mathcal{R}_k(O)$ und eine Teilfolge $\{T_{j_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, sodass $T_{j_i} \xrightharpoonup{*} T$.

Beweis. Siehe [15, Chapter 8]. ■

Das Theorem beschreibt uns gleichzeitig den Abschluss dieser Klasse bezüglich der schwach-$*$ Konvergenz. Die Menge aller Untermannigfaltigkeiten ist eine Teilmenge dieser Klasse. Somit ist es „natürlich“ das Plateau-Problem in dieser Klasse zu betrachten.

Definition 5.6.7. *Seien $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathcal{R}_k(O)$. Der Strom T heißt* ***flächenminimierend****, falls für alle $S \in \mathcal{R}_k(O)$ mit $\partial S = \partial T$ gilt, dass*

$$\mathbb{M}_V(T) \leq \mathbb{M}_V(S)$$

für alle offene $V \subset\subset O$ mit $\operatorname{supp}(S - T) \subset\subset V$.

Theorem 5.6.8 (Existenz flächenminimierender Ströme)**.** *Sei $S \in \mathcal{R}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und $\partial S = 0$. Dann existiert ein flächenminimierender Strom $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und $\partial T = S$.*

Beweisidee. Sei

$$I_S \coloneqq \{R \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} R \subset\subset \mathbb{R}^n,\ \partial R = S\}.$$

Das Lemma von Poincaré (Korollar 5.5.9) impliziert, dass die Menge I_S nicht leer ist. Das technische Problem was man lösen muss, ist dass die Träger einer minimierenden Folge Tentakeln gegen Unendlich ziehen könnten. Somit kann man Kompaktheit verlieren. Sei $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset I_S$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{M}(R_j) = \inf_{R\in I_S} \mathbb{M}(R), \tag{5.8}$$

und sei $\rho > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} S \subset B(0, \rho)$. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{B(0, \rho)}$, die alle Punkte in $\mathbb{R}^n \setminus B(0, \rho)$ radial auf $\partial B(0, \rho)$ projiziert. Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Konstante gleich 1. Somit gilt nach Satz 5.5.11, dass

$$\mathbb{M}(f_\# R_j) \leq \mathbb{M}(R_j). \tag{5.9}$$

Außerdem gilt

$$\partial f_\# R_j = f_\# \partial R_j = f_\# S = S, \tag{5.10}$$

da $\operatorname{supp} S \subset B(0, \rho)$, und $f|_{B(0,\rho)}$ die Identität ist. Damit gilt $\{f_\# R_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset I_S$, sodass (5.8) und (5.9) implizieren, dass

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{M}(f_\# R_j) = \inf_{R\in I_S} \mathbb{M}(R). \tag{5.11}$$

Das Kompaktheitstheorem von Federer-Fleming gibt uns einen Strom $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, sodass $f_\# R_j \overset{*}{\rightharpoonup} T$ bis auf Teilfolgen. Die schwach-$*$ Unterhalbstetigkeit der Masse zusammen mit (5.11) ergibt

$$\mathbb{M}(T) \leq \inf_{R\in I_S} \mathbb{M}(R). \tag{5.12}$$

Außerdem gilt, dass $\operatorname{supp} T \subset B(0, \rho)$ und nach (5.10) $\partial T = S$ gilt, sodass $T \in I_S$. Zusammen mit (5.12) folgt die Aussage des Theorems. ■

Hierzu muss man bemerken, dass auch wenn S eine glatte Untermannigfaltigkeit ist, T nicht unbedingt auch eine sein muss; siehe z.B. Abbildung 5.3.

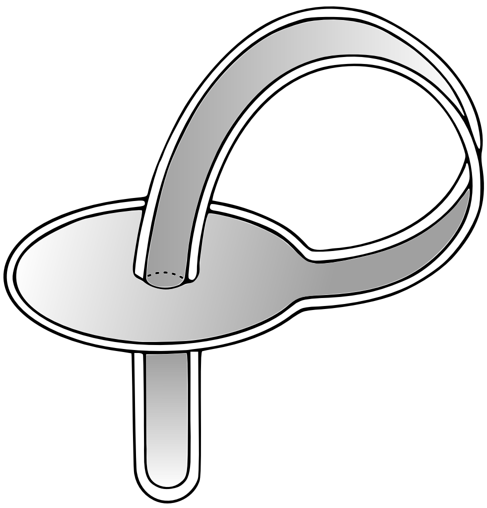

Abbildung 5.3: Ein flächenminimierender Strom mit glattem Rand. Obwohl er keine Untermannigfaltigkeit ist, kann man ihn mit Seifenblasen konstruieren ([13, p. 82]).

Coda

Eine invariante Betrachtung der nichtlinearen Elastizität

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, was die ***Referenzkonfiguration*** oder den ***Ruhezustand*** eines elastischen Körpers beschreibt. Klassisch betrachtet, wird die aus einer Belastung resultierende Verformung des Körpers durch eine glatte Abbildung $u : \Omega \longrightarrow \hat{\Omega} := u(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben, wobei u ***orientierungserhaltend*** und ***global invertierbar*** ist. Hier beschreibt $\hat{\Omega}$ die ***Ausgangskonfiguration*** des Körpers. Die Invertierbarkeit der ***Deformation*** u führt zu zwei äquivalenten Koordinatensystemen, die Eulersche und die Lagrangesche Darstellung, mit unabhängigen Variablen $x \in \Omega$ und $\hat{x} \in \hat{\Omega}$.

In der Eulerschen Darstellung nimmt man an, dass eine gespeicherte Energiedichte $W(x, F)$ existiert, die von den ***infinitesimalen Deformationen*** $F(x) = \nabla u(x)$ abhängt. Somit ist die elastische Energie des Körpers durch

$$\mathcal{E}(u, \Omega) := \int_\Omega W\big(x, \nabla u(x)\big)\, d\mathcal{H}^3(x) \tag{6.13}$$

gegeben. Die gesuchte Deformation bezüglich einer gegebenen Belastung und gegebener Randbedingungen wird als ein Minimierer von $\mathcal{E}$ in einer passenden Klasse von Diffeomorphismen mit den angegebenen Eigenschaften gesucht.

Hier werden wir einen „invarianten“ Formalismus präsentieren, d.h. wir werden uns weder zwischen der Eulerschen noch zwischen der Lagrangeschen Darstellung entscheiden, und dem Weg folgen, das Energiefunktional bezüglich des Graphen der Deformation zu minimieren. Dafür werden wir die Techniken benötigen, die als Teil der Theorie der Strömen entwickelt worden.

6.1 Kinematik und zulässige Deformationen

Ein elastischer Körper wird durch eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\mathcal{K}$ parametrisiert, d.h. zu jedem materiellen Punkt wird ein eindeutiges $t \in \mathcal{K}$ zugewiesen. Wir folgen der Notation von [8]:

Definition 6.1.1. *1. Eine **Konfiguration** des Körpers ist eine Abbildung $\phi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $\phi(\mathcal{K})$ eine 3-dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, und ϕ : $\operatorname{int}\mathcal{K} \longrightarrow \operatorname{int}\phi(\mathcal{K})$ ein Diffeomorphismus ist.*

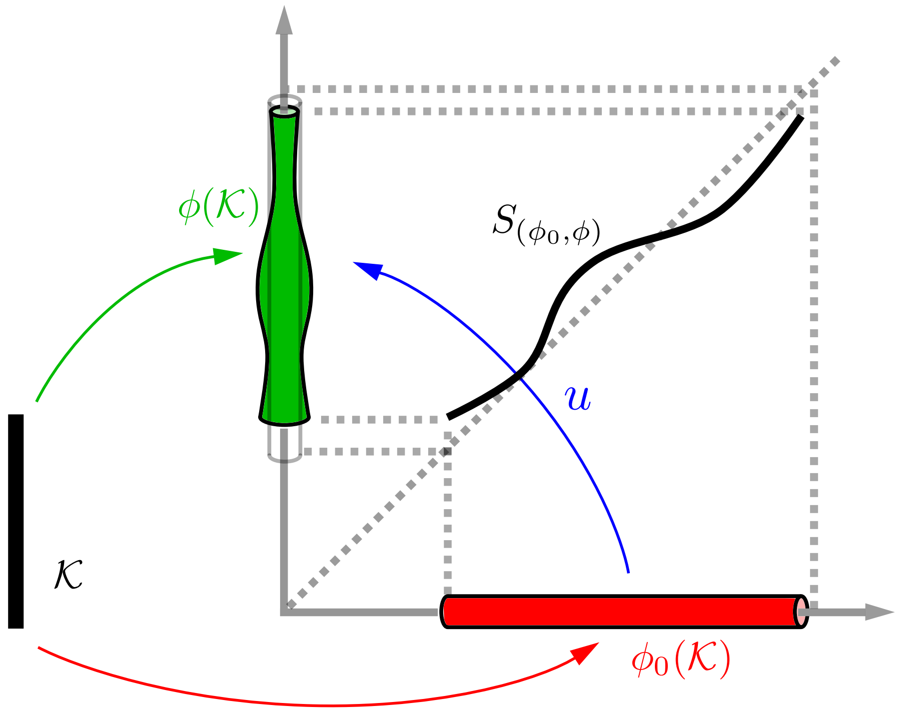

Abbildung 6.4: Deformation eines elastischen Körpers, der durch $\mathcal{K}$ parametrisiert ist.

2. *Die* ***Referenzkonfiguration*** *oder der* ***Ruhezustand*** *des Körpers wird als die Konfiguration ϕ_0 bezeichnet.*

3. *Seien* $\Omega \coloneqq \operatorname{int}\phi_0(\mathcal{K})$ *und* $\hat{\Omega} \coloneqq \operatorname{int}\phi(\mathcal{K})$*. Dann heißt* $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\hat{\Omega}}$ *mit* $u \coloneqq \phi \circ \phi_0^{-1}$ *die* ***Deformation*** *des Körpers.*

4. $S_{(\phi_0,\phi)} \coloneqq \Big\{\big(\phi_0(t), \phi(t)\big) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : t \in \mathcal{K}\Big\}$ *und* $\{e_1, e_2, e_3, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ *sei die Standardbasis für* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$*.*

Man sollte annehmen, dass die Injektivität einer Konfiguration ϕ auf $\partial\mathcal{K}$ verloren gehen kann, da Selbstkontakt möglich ist. Es gilt

$$S_{(\phi_0,\phi)} = \mathcal{G}_u \coloneqq \{(x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \hat{x} = u(x)\},$$

d.h. $S_{(\phi_0,\phi)}$ ist der Graph von u. Eine Durchdringung wird vermieden, indem man die Voraussetzungen an ϕ wie folgt auf u überträgt:

$$\det \nabla u(x) > 0 \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Bei der Modellierung nehmen wir an, dass es eine Energiedichte gibt, d.h. man kann die Deformation „infinitesimal“ zu jedem Punkt beschreiben. Diese Infinitesimalverschiebung zum Punkt $(x, \hat{x})$ werden wir durch den Tangentialraum $T_{(x,\hat{x})}S_{(\phi_0,\phi)}$ beschreiben; er ist im klassischen Fall punktweise eindeutig bestimmt. Zu $T_{(x,\hat{x})}S_{(\phi_0,\phi)}$ definiert man den ***Tangentialeinheits-3-Vektor***, als

$$\vec{S} = \vec{S}(x, \hat{x}) \coloneqq \frac{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3}{|v_1 \wedge v_2 \wedge v_3|} \in \Lambda_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

wobei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{(x,\hat{x})}S_{(\phi_0,\phi)}$ ist. Es kann gezeigt werden, dass k-Vektoren orientierte, k-dimensionalen Ebenen darstellen; siehe z.B. [7, S. 110].

Wir werden eine andere Darstellung für $\vec{S}$ geben: Sei $\vec{\eta} \in T_{(x,\hat{x})}S_{(\phi_0,\phi)}$ mit

$$\vec{\eta} = \Big(e_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\Big) \wedge \Big(e_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\Big) \wedge \Big(e_3 + \frac{\partial u}{\partial x_3}(x)\Big),$$

sodass $\vec{S} = \vec{\eta}/|\vec{\eta}|$. Definiere

$$\big|M\big(\nabla u(x)\big)\big| \coloneqq |\vec{\eta}| = \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2 + |\operatorname{adj} \nabla u(x)|^2 + \big(\det \nabla u(x)\big)^2}.$$

Für zwei 3×3 Matrizen A und B, definiere

$$A{:}B \coloneqq \operatorname{tr}(A^\top B) \text{ und } \operatorname{adj} A \coloneqq A^{-1} \det A, \text{ falls } \det A > 0.$$

Definiere außerdem die 3×3 Matrizen

$$e_{(2)} \wedge \hat{e}_{(1)} \coloneqq \begin{pmatrix} e_{(2,3)} \wedge \hat{e}_1 & e_{(2,3)} \wedge \hat{e}_2 & e_{(2,3)} \wedge \hat{e}_3 \\ -e_{(1,3)} \wedge \hat{e}_1 & -e_{(1,3)} \wedge \hat{e}_2 & -e_{(1,3)} \wedge \hat{e}_3 \\ e_{(1,2)} \wedge \hat{e}_1 & e_{(1,2)} \wedge \hat{e}_2 & e_{(1,2)} \wedge \hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

und

$$e_{(1)} \wedge \hat{e}_{(2)} \coloneqq \begin{pmatrix} -e_1 \wedge \hat{e}_{(2,3)} & e_1 \wedge \hat{e}_{(1,3)} & -e_1 \wedge \hat{e}_{(1,2)} \\ -e_2 \wedge \hat{e}_{(2,3)} & e_2 \wedge \hat{e}_{(1,3)} & -e_2 \wedge \hat{e}_{(1,2)} \\ -e_3 \wedge \hat{e}_{(2,3)} & e_3 \wedge \hat{e}_{(1,3)} & -e_3 \wedge \hat{e}_{(1,2)} \end{pmatrix}.$$

Somit kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 6.1.2. *Sei $P : \Omega \times \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ die Projektion mit $P(x, \hat{x}) = x$. Dann gilt*

$$\vec{S} = S\, e_{(1,2,3)} + \hat{S}\, \hat{e}_{(1,2,3)} + \vec{S}_{(2,1)}{:}e_{(2)} \wedge e_{(1)} + \vec{S}_{(1,2)}{:}e_{(1)} \wedge e_{(2)},$$

wobei

$$S \coloneqq \frac{1}{|M(\nabla u)|} \circ P, \quad \hat{S} \coloneqq \frac{\det \nabla u}{|M(\nabla u)|} \circ P, \quad \vec{S}_{(2,1)} \coloneqq \frac{\nabla u}{|M(\nabla u)|} \circ P, \quad \vec{S}_{(1,2)} \coloneqq \frac{\operatorname{adj} \nabla u}{|M(\nabla u)|} \circ P.$$

Außerdem gilt

$$\nabla u = \frac{\vec{S}_{(2,1)}}{S} \circ P^{-1}, \quad \operatorname{adj} \nabla u = \frac{\vec{S}_{(1,2)}}{S} \circ P^{-1}, \quad \det \nabla u = \frac{\hat{S}}{S} \circ P^{-1}, \quad |M(\nabla u)| = \frac{1}{S} \circ P^{-1}.$$

Beweis. Siehe [8, Proposition 2, S.145]. ■

Dieser Zusammenhang erlaubt uns die Klasse aller zulässigen infinitesimalen Deformationen zu definieren, und festzustellen, dass diese eindeutig aus $(\nabla u, \operatorname{adj} \nabla u, \det \nabla u)$ bestimmt werden.

Definition 6.1.3. *Ein $\vec{\xi} \in \Lambda_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ heißt **zulässige infinitesimale Deformation**, falls $|\vec{\xi}| = 1$ und $\vec{\xi} \in \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, wobei*

$$\begin{aligned} \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \coloneqq & \Big\{ \vec{\xi} = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} \xi_{\alpha\beta}\, e_\alpha \wedge \hat{e}_\beta : \xi \text{ einfach und } \xi_{(1,2,3)(0,0,0)}, \xi_{(0,0,0)(1,2,3)} > 0 \Big\} \\ = & \Big\{ \vec{\xi} = \xi\, e_{(1,2,3)} + \hat{\xi}\, \hat{e}_{(1,2,3)} + \vec{\xi}_{(2,1)}{:}e_{(2)} \wedge e_{(1)} + \vec{\xi}_{(1,2)}{:}e_{(1)} \wedge e_{(2)} \quad : \\ & \quad \vec{\xi} \text{ einfach und } \xi, \hat{\xi} > 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Wir folgen einer invarianten Betrachtung, d.h. wir werden als unabhängige Variablen weder x noch $\hat{x}$ betrachten, sondern die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{G}_u$ selbst. Aus der Betrachtung des Plateau-Problems wissen wir, dass Kompaktheit im Raum der Untermannigfaltigkeiten nicht gelingt. Deshalb folgen wir dem Weg, den wir bisher gelegt haben, nämlich, dass wir als unabhängige Variable den ganzzahligen, rektifizierbaren 3-Strom G_u mit Multiplizität 1 und

$$G_u \coloneqq [\![\mathcal{G}_u]\!](\omega) = \int_{\mathcal{G}_u} \langle \omega, \vec{S} \rangle_{\Lambda^3, \Lambda_3} \, d\mathcal{H}^3$$

nehmen, wobei $\vec{S}(x)$ der Tangentialeinheits-3-Vektor von $\mathcal{G}_u$ im Punkt $\big(x, u(x)\big)$ ist.

In diesem Kontext wissen wir aus dem Kompaktheitstheorem von Federer und Fleming 5.6.6, dass eine Minimierung in der Klasse der ganzzahlig rektifizierbaren 3-Ströme $\mathcal{R}_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ stattfinden kann.

6.2 Elastische Energien

Hierzu werden klassischerweise polykonvexe Energiedichten betrachtet. Die Klasse $\Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ist nämlich nicht konvex.

Definition 6.2.1. *1. Eine Funktion $W : M_+^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **polykonvex**, falls es eine konvexe Funktion $f : M_+^{3\times 3} \times M^{3\times 3} \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$W(F) = f(F, \operatorname{adj} F, \det F) \text{ für alle } F \in M_+^{3\times 3}.$$

*2. Eine Funktion $f : \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls $f = f^{(c)}|_{\Sigma^{++}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}$, wobei*

$$f^{(c)}(\vec{\xi}) \coloneqq \sup \big\{ g(\vec{\xi}) : \quad g : \Lambda_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ konvex} \\ \text{und } g(\vec{\psi}) \leq f(\vec{\psi}) \text{ für alle } \vec{\psi} \in \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \big\}.$$

Satz 6.2.2. *1. Sei $W : M_+^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$ polykonvex. Dann ist $f : \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$f(\vec{\xi}) \coloneqq \xi W\left(\frac{\vec{\xi}_{(2,1)}}{\xi} \right)$$

konvex.

2. Sei $f : \Sigma^{++}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\vec{\xi}) = f\big(\xi, \vec{\xi}_{(1,2)}, \vec{\xi}_{(2,1)}, \hat{\xi}\big)$ konvex. Dann ist

$$W : M_+^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad W(F) \coloneqq f(1, F, \operatorname{adj} F, \det F)$$

polykonvex.

Beweis. Siehe [8, Proposition 3, p.150]. ■

Somit betrachten wir

$$\mathcal{E}(u, \Omega) \coloneqq \int_{\mathcal{G}_u} f\big(x, \hat{x}, \vec{G_u}(x, \hat{x})\big) \, d\mathcal{H}^3(x, \hat{x}), \tag{6.14}$$

wobei $\vec{G_u}$ die Dichte von G_u ist, d.h. $G_u = \vec{G_u} \mathcal{H}^3 \llcorner \mathcal{G}_u = \tau\big(\mathcal{G}_u, \vec{G_u}, 1\big)$.

6.3 Minimierung in der Klasse der schwachen Diffeomorphismen: Elastoplastizität

Da Graphen nicht schwach-$*$ abgeschlossen sind, brauchen wir eine passende Klasse von Strömen die alle physikalischen Voraussetzungen erfüllen.

Definition 6.3.1. 1. *Für $T \in \mathcal{R}_3(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ definiere die* 1*-Norm durch*

$$\|T\|_1 \coloneqq \sup\left\{T_{(1,2,3)(0,0,0)}(|\hat{x}|\,\varphi) = T\big(|\hat{x}|\,\varphi(x,\hat{x})\,dx_{(1,2,3)}\big) : \varphi \in C_0(\Omega\times\mathbb{R}^3), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1\right\}.$$

2. *[7, p. 385] Die Klasse der* ***kartesischen Ströme*** *ist definiert durch:*

   $T \in \operatorname{cart}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn

   (a) $T \in \mathcal{M}_3(\Omega \times \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{R}_3(\Omega \times \mathbb{R}^3)$,

   (b) $\|T\|_1 < \infty$,

   (c) $T_{(1,2,3)(0,0,0)} \geq 0$,

   (d) $\partial T \llcorner \Omega \times \mathbb{R}^3 = 0$,

   (e) $P_\# T = [\![\Omega]\!]$,

   wobei $P : \Omega\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \Omega$ die Projektion mit $P(x,\hat{x}) = x$ ist, sodass $P_\# : \mathcal{D}_3(\Omega\times\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{D}_3(\Omega)$. Beachte, $P_\#$ ist nicht notwendigerweise stetig, siehe [7, S. 383].

3. *[8, p. 209] Die Klasse der* ***generalisierten schwachen Diffeomorphismen*** *ist definiert durch:*

   $T \in \widetilde{\operatorname{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn:

   (a) $T \in \operatorname{cart}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$

   (b) Für alle $\varphi \in C_0(\Omega\times\mathbb{R}^3)$ mit $\varphi \geq 0$ gilt $T_{(0,0,0)(1,2,3)}(\varphi) \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \max_{x\in\Omega} \varphi(x,\hat{x})\, d\mathcal{H}^3(\hat{x})$.

Bemerkung 6.3.2. Einige Kommentare zur vorherigen Definition:

1. Ein Strom $T \in \mathcal{R}_3(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ ist eindeutig auf 3-Formen mit stetigen Koeffizienten und kompaktem Träger fortsetzbar. Dies kann mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz gezeigt werden.

2. (a) Man generalisiere Graphen von Funktionen.

   (b) Erlaubt uns eine Deformation aus einem Strom zu definieren.

   (c) Ersetzt die starke Voraussetzung, dass Materie sich nicht durchdringen kann, aber am Rand Selbstkontakt stattfinden kann.

   (d) Im Inneren gibt es keinen Rand, d.h. Risse dürfen nicht entstehen.

   (e) Man kann alles auf Ω zurückführen.

3. (b) Das ist die passende Generalisierung der globalen Invertierbarkeit.

Satz 6.3.3. *Sei $T = \tau(M, \vec{\xi}, \theta) \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$. Seien $u_i[T]$ die Radon-Maße, die durch die Funktionale $\varphi \mapsto T_{(1,2,3)(0,0,0)}(\hat{x}_i\,\varphi)$ mithilfe des Theorems von Riesz definiert sind. Außerdem sei*

$$M_+ := \{(x, \hat{x}) \in M : \vec{\xi}(x, \hat{x}) > 0\}$$

die Teilmenge von M, die keine „vertikalen" Vektoren hat. Dann gilt

1. *Es existiert eine Funktion $u_T \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$, sodass $u_j[T] = (u_T)_j\, d\mathcal{L}^3$, $j = 1, 2, 3$.*

2. *$T \llcorner M_+ = G_{u_T}$.*

Beweis. Siehe [7, Theorem 1, S. 392 & Theorem 3 (ii), S. 395]. ∎

Theorem 6.3.4. *Sei $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ mit*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{M}(T_j) + \|T_j\|_1\right) < \infty.$$

Dann existiert ein $T \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ und eine Teilfolge $\{T_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $T_{j_i} \overset{*}{\rightharpoonup} T$.

Beweisidee. Aus dem Kompaktheitstheorem 5.6.6 von Federer und Fleming folgt die Existenz eines $T \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, sodass $T_j \overset{*}{\rightharpoonup} T$ bis auf Teilfolgen. Daraus folgt mithilfe von [7, Theorem 1, S. 386], dass $T \in \mathrm{cart}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$. Aus [8, Theorem 3, S. 201] folgt ferner, dass $T \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$. ∎

Theorem 6.3.5. *Sei $f : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \Lambda_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig und f.ü. konvex in $\Lambda_3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Seien $T_0 \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ und ein relativ offenes $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ so, dass $\mathcal{H}^2(\Gamma) > 0$. Für $S \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ definiere*

$$\mathcal{F}(S) := \mathcal{E}(u_S, \Omega)$$

und sei $\mathcal{F}$ koerziv, d.h.

$$\mathcal{F}(S) \geq c\,\mathbb{M}(S).$$

Dann existiert ein $T \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, sodass

$$\mathcal{F}(T) = \min\left\{\mathcal{F}(S) : S \in \widetilde{\mathrm{dif}}(\Omega \times \mathbb{R}^3) \text{ und } \partial S = \partial T_0 \text{ auf } \Gamma\right\}.$$

Bemerkung 6.3.6. Es folgt direkt, dass $\partial T = \partial T_0$ auf Γ im distributionellen Sinne ist. Daraus folgt aber nicht, dass $u_T = u_{T_0}$ als Spuren auf Γ; siehe [8, S. 263].

Literaturverzeichnis

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[2] A.. Bernig. *Geometrische Masstheorie*. Vorlesungsskript, Universität Zürich, Sommersemester 2003.

[3] D. L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, second edition, 2013.

[4] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised edition, 2015.

[5] K. Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third edition, 2014. Mathematical foundations and applications.

[6] H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[7] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. *Cartesian currents in the calculus of variations. I Cartesian Currents*, volume 37 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[8] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. *Cartesian currents in the calculus of variations. II Variational Integrals*, volume 38 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[9] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[10] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[11] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.

[12] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[13] F. Morgan. *Geometric measure theory*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fourth edition, 2009. A beginner's guide.

[14] J. R. Munkres. *Analysis on manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1991.

[15] L. Simon. *Introduction to Geometric Measure Theory*. Lectures on geometric measure theory (Canberra, 1983), revised edition, 2014.