

Eine Multipolmethode für die Gleichungen von Stokes

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
Dr. rer. nat.
am Fachbereich Mathematik/Informatik
der Universität Kassel

vorgelegt von
Dipl.-Math. Tatiana S. Samrowski

Kassel, den 25. Mai 2005

Erster Gutachter: Prof. Dr. Werner Varnhorn
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Maria Specovius-Neugebauer
Tag der Disputation: 07.07.2005

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mir diese Arbeit ermöglicht haben: Herrn Prof. Dr. Werner Varnhorn danke ich für die Vergabe, Betreuung und Diskussion der Arbeit. Ebenso bedanke ich mich für seine aktive Unterstützung bei der Bewerbung um ein Promotions-Stipendium des Otto-Braun-Fonds.

Den gesamten Arbeitsgruppen "Analysis und Angewandte Mathematik" und "Computational Mathematics" möchte ich herzlich für die freundliche und hilfsbereite Arbeitsatmosphäre danken. Ein ganz besonderer Dank geht dabei an Herrn Dr. Frank Müller und Herrn PD Dr. Andreas Klein, die mich mit zahlreichen Ratschlägen unterstützt haben.

Ein weiterer Dank geht an alle anderen, die mich mit Tips und Anregungen versorgt haben.

Dem Otto-Braun-Fonds danke ich für das gewährleistete Stipendium, das dieses Forschungsprojekt ermöglicht hat.

Besonderer Dank geht an meine Familie, die mir während der Jahre meines Studiums jederzeit Rückhalt und Unterstützung geboten hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Potentialtheoretische Grundlagen der Stokes-Gleichungen im \mathbb{R}^2	9
2.1	Randwertaufgaben und Eindeutigkeit der Lösungen	9
2.1.1	Einführende Notation	9
2.1.2	Die Greenschen Formeln	11
2.1.3	Die Randwertaufgaben	12
2.2	Fundamentaltensor und Linienpotentiale	15
2.2.1	Die Grundlösungsmatrix	15
2.2.2	Eine Darstellungsformel	19
2.2.3	Linienpotentiale	21
2.3	Eine Integralgleichungsmethode	24
3	Numerik der Integralgleichungen	29
3.1	Diskretisierung mit dem Nyström-Verfahren	29
3.2	Konvergenzuntersuchung	32
4	Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	36
4.1	Das Verfahren GMRES	36
4.1.1	Krylov-Unterraum-Verfahren und Arnoldi-Algorithmus	36
4.1.2	Beschreibung des GMRES-Verfahrens	38
4.1.3	Implementierung	42
4.2	Das Good-Broyden-Verfahren	44
4.2.1	Beschreibung des Good-Broyden - Verfahrens	44
4.2.2	Implementierung	48
5	Komplexifizierung und Multipolentwicklungen	50
5.1	Reihen im Komplexen	50
5.2	Komplexifizierung der hydrodynamischen Potentiale	53
5.3	Multipolentwicklung und ihre Transformation	55
6	Die Multipolmethode	68
6.1	Heuristik	68
6.2	Notation	71
6.3	Formale Beschreibung	73
6.4	Der adaptive Algorithmus	78
6.4.1	Implementierung	78
6.4.2	Komplexitätsanalyse	82
6.4.3	Speicherplatzanalyse	89

7 Numerische Tests	90
7.1 Gebiete für die Testrechnungen	90
7.2 Untersuchungen zur adaptiven schnellen Multipol- methode	93
7.2.1 Zusammenhang zwischen der Höchstzahl der Punkte pro Box und der Rechenzeit sowie dem Speicherbedarf	93
7.2.2 Zusammenhang zwischen der Anzahl der Summanden in den Entwicklungen und dem maximalen relativen Fehler	95
7.2.3 Vergleich von DFMM bzw. EFMM mit der Berechnung der hydrodynamischen Potentiale konstanter Belegung durch die direkte Matrix-Vektor-Multiplikation	96
7.3 Untersuchungen zum inneren Dirichlet-Problem	98
7.3.1 Vergleich des Konvergenzverhaltens der iterativen Algo- rithmen	98
7.3.2 Simulationen zum inneren Dirichlet-Problem	101
Literatur	111
Erklärung	117

1 Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines adaptiven, schnellen Multipolverfahrens zur numerischen Lösung der Gleichungen von Stokes. Diese Gleichungen beschreiben bei konservativen äußeren Kräften die stationäre Bewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit in einem zweidimensionalen Strömungsgebiet G mit Rand ∂G : Gesucht ist das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T$ und eine skalare Druckfunktion $p = p(\mathbf{x})$ als Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0} && \text{in } G, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } G, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} && \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei setzen wir G als einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand ∂G von der Klasse C^2 voraus. Die Funktion $\mathbf{b} = (b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}))^T$ ist ein auf ∂G vorgegebener stetiger Randwert, der im Fall eines beschränkten Gebietes G der Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\partial G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$$

mit der ins Äußere von G weisenden Einheitsnormalen \mathbf{N} genügt. Im Fall eines unbeschränkten Gebietes kommen zu (1) noch geeignete Abklingbedingungen hinzu.

Zur numerischen Lösung von (1) werden in der Regel Randelementemethoden (REM) eingesetzt. Dabei wird das vorliegende Randwertproblem zunächst in ein System von Fredholmschen Integralgleichungen erster oder zweiter Art auf dem Rand des betrachteten Gebietes überführt. Diese Randintegralgleichungssysteme werden dann mit Hilfe eines Kollokationsverfahrens oder eines Galerkinverfahrens diskretisiert. Es entstehen lineare algebraische Gleichungssysteme, deren Lösungen über einen speziellen Potentialansatz zu einer approximativen Lösung von (1) führen.

Die Vorteile dieser Verfahren insbesondere bei Außenraumproblemen sind hinlänglich bekannt: Anstelle eines unbeschränkten Gebietes ist nur der beschränkte Gebietsrand zu diskretisieren. Komplizierte Geometrien, die bei der Finite-Differenzen-Methode (FDM) oder bei der Finite-Elemente-Methode (FEM) häufig Probleme bereiten, sind hier einfach zu handhaben. Und schließlich führt die Dimensionsreduktion vom Übergang eines Gebietes auf dessen Rand zu einer erheblich kleineren Dimension der resultierenden linearen Gleichungssysteme als dies bei der FDM oder der FEM der Fall ist.

Da mit dem Übergang von den Differentialgleichungen zu den Integralgleichungen der lokale Charakter der Problemstellung (1) verloren geht, sind die aus der REM resultierenden Systemmatrizen allerdings unsymmetrisch und vollbesetzt, im Gegensatz zu den aus der FDM oder der FEM resultierenden Matrizen. Hinzu kommt, dass zur Berechnung der einzelnen Matrixkomponenten zum Teil rechenintensive (schwach) singuläre Integrale auszuwerten sind. Konventionelle Lösungsmethoden wie zum Beispiel das Eliminationsverfahren von Gauß erfordern hier $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenoperationen und $\mathcal{O}(n^2)$ Speicherplätze, wodurch die Effektivität der REM besonders für große Dimensionierungen wieder eingeschränkt wird. Um hier Abhilfe zu schaffen wird in der vorliegenden Arbeit ein schnelles Summationsverfahren für die aus (1) resultierenden Gleichungssysteme entwickelt, das iterative Lösungsverfahren mit einer schnellen adaptiven Multipolmethode koppelt. Diese Vorgehensweise ermöglicht die Auswertung der Matrix-Vektor-Produkte der REM mit quasilinearem Aufwand für Rechenoperationen und Speicherplatz. Dazu wird eine hierarchische Unterteilung des Randes mit Hilfe einer Cluster-Baumstruktur geschaffen und zwischen Nah- und Fernfeld unterschieden: Während man im Nahfeld Interaktionen direkt berechnet, werden im Fernfeld die Kerne der Randintegraloperatoren durch geeignete Entwicklungen approximiert. Im Zusammenspiel mit dem iterativen Löser können auf diese Art REM-Simulationen auf sehr feinen Diskretisierungsstufen (über 10^5 Kollokationspunkte) durchgeführt werden.

Die Multipolmethode geht auf Rokhlin [57] zurück und ist ursprünglich ein Verfahren zur Teilchensimulation. Sie wurde dann von Greengard und Rokhlin [25], [27] weiter entwickelt. Inzwischen existiert eine Vielzahl dieser Methoden für verschiedene Randwertaufgaben der Laplacegleichung [?], der Helmholtzgleichung [24], der Elastizitätsgleichungen [78], [79] und für elektromagnetische Feldprobleme (siehe auch unter <http://www.fastfieldsolvers.com/links.htm> für industrielle Anwendungen).

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt: Nach der Einleitung werden im zweiten Kapitel potentialtheoretische Lösungsmethoden für (1) zusammen gestellt: Ausgangspunkt sind in Abschnitt 2.1 die hydrodynamischen Greenschen Formeln und Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung der klassischen vier Randwertprobleme (Dirichlet- und Neumann-Problem im Innen- und Außengebiet). Anschließend wird in Abschnitt 2.2 der Stokes-Fundamentaltensor mit Hilfe der Fourier-Transformation explizit ausgerechnet, eine Darstellungsformel für die Lösung der Stokes-Gleichungen in Termen ihrer Dirichlet- und Neumann-Daten angegeben und die wichtigsten Eigenschaften der hydrodynamischen Linienpotentiale zusammen gestellt. Im Abschnitt 2.3 wird eine Randintegralgleichungsmethode angegeben, die für die beiden Dirichlet-Probleme im Gegensatz zum klassischen Fall auf eindeutig lösbare Systeme von Randintegralgleichungen führt. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Numerik der aus dem inne-

ren Dirchlet-Problem resultierenden Randintegralgleichungen (21). Diese werden zunächst geeignet parametrisiert und anschließend mit dem so genannten Nyström-Verfahren diskretisiert. Bei diesem Verfahren wird die unbekannte Belegungsdichte als Linearkombination stückweise linearer Splines dargestellt und der Integraloperator durch ein auf der summierten Trapezregel basierendes Quadraturverfahren approximiert. Die Konvergenz des Verfahrens folgt dann mit Hilfe der Theorie kollektiv kompakter Operatoren aus bekannten Resultaten zum Kollokationsverfahren [30]. Im vierten Kapitel werden die aus dem Nyström-Verfahren resultierenden linearen algebraischen Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ iterativ gelöst. Wir untersuchen dazu zwei Iterationsverfahren, nämlich in Abschnitt 4.1 das Verfahren GMRES (Generalized Minimal Residual), ein Vertreter der Krylovraum-Methoden und in Abschnitt 4.2 das Verfahren GB (Good Broyden), das Broyden-Verfahren mit der "guten" Update-Formel, einer Schrittweitensteuerung und kompakter Speicherung. Während GMRES in jedem Schritt die euklidische Norm des Residuums $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_k$ minimiert, verringert GB die euklidische Norm des Fehlers $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k$. Dabei ist \mathbf{x}_k die aktuelle Iterierte und \mathbf{x}^* die exakte Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Zur Reduktion des Aufwandes bei der iterativen Lösung des vorliegenden Gleichungssystems werden im fünften Kapitel die Grundlagen für eine adaptive schnelle Multipolmethode geschaffen. Dazu werden in Abschnitt 5.1 zunächst einige Eigenschaften komplexer Reihenentwicklungen zusammen gestellt und anschließend in Abschnitt 5.2 die einzelnen Bestandteile der hydrodynamischen Potentialkerne komplexifiziert. Die Reihenentwicklungen dieser komplexifizierten Bestandteile mit den entsprechenden Fehlerabschätzungen bei Reihenabbruch nach p Summanden werden in Abschnitt 5.3 hergeleitet (Lemma 5.3, Satz 5.4). Darüber hinaus wird angegeben, wie sich die Entwicklungen von Ladungsmengen verschieben (Satz 5.5) und als lokale Taylorentwicklungen darstellen lassen (Satz 5.6). Diese Resultate bilden die Grundlage für den im sechsten Kapitel entwickelten Multipolalgorithmus nach Carrier, Greengard und Rokhlin [13], der ein Verfahren zur schnellen Berechnung des Potentialfeldes eines Systems von n Ladungsteilchen darstellt: Die Multipolmethode stellt das Potential dieser Teilchen durch Reihenentwicklungen dar. Diese lassen sich in andere Entwicklungspunkte verschieben und aufsummieren. Dadurch kann man die Potentiale mehrerer Ladungen zusammenfassen. Durch geschicktes Ausnutzen dieser Möglichkeiten und eine geeignete hierarchische Gruppierung der Teilchen gelingt dann die gewünschte Reduktion des Aufwandes. Die Multipolmethode wird zur Berechnung des Potentials bei weit genug entfernten Ladungsteilchen verwendet. Interaktionen zwischen naheliegenden Teilchen werden direkt berechnet. Nach einer einleitenden Heuristik (Abschnitt 6.1) und der verwendeten Notation (Abschnitt 6.2) erfolgt die formale Beschreibung in Abschnitt 6.3. Es folgt der eigentliche Algorithmus (Abschnitt 6.4) in einer Pascal-ähnlichen Syntax zusammen mit der entsprechenden Komplexitäts- und Speicherplatzanalyse. Verschiedene numerische Testrechnungen im siebten Kapitel belegen eindrucksvoll die Ergebnisse der Komplexitätsanalyse.

2 Potentialtheoretische Grundlagen der Stokes-Gleichungen im \mathbb{R}^2

2.1 Randwertaufgaben und Eindeutigkeit der Lösungen

2.1.1 Einführende Notation

Für $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ verwenden wir

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{l=1}^2 x_l y_l, \quad |\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

für das Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} und den Betrag des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Für eine Matrix $\mathbf{A} = (A_{kl})_{k=1, \dots, m; l=1, \dots, n}$ ist $\mathbf{A}^T = (A_{lk})$ die zugehörige transponierte Matrix. Wir setzen außerdem den Betrag der Matrix \mathbf{A} durch die Definition

$$|\mathbf{A}| := \sqrt{\sum_{\substack{k=1, \dots, m \\ l=1, \dots, n}} A_{kl}^2}$$

fest.

Ist $\mathbf{u} := \mathbf{u}(\mathbf{x}) := (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T$ eine in $\mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definierte Vektorfunktion, so bezeichnet $\partial_l u_k := \frac{\partial}{\partial x_l} u_k$ die partielle Ableitung der k -ten Komponente u_k von \mathbf{u} nach der Variablen x_l , $l, k = 1, 2$. Wir schreiben $\nabla \mathbf{u} := (\partial_l u_k)_{k, l=1, 2}$ für die 2×2 -Matrix der ersten partiellen Ableitungen von \mathbf{u} . Manchmal verwenden wir auch die Bezeichnung

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} (\nabla u_1)^T \\ (\nabla u_2)^T \end{pmatrix}$$

mit dem Zeilenvektor $(\nabla u_l)^T := (\partial_1 u_l, \partial_2 u_l)$. Den Spaltenvektor $\nabla u_l := (\partial_1 u_l, \partial_2 u_l)^T$ nennen wir den Gradienten der Funktion u_l .

Mit $\Delta := \sum_{l=1}^2 \partial_l \partial_l$ bezeichnen wir den Laplace-Operator im \mathbb{R}^2 . Für $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt folglich

$$\Delta u(\mathbf{x}) := \sum_{l=1}^2 \partial_l \partial_l u(\mathbf{x}) := \sum_{l=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_l}(\mathbf{x}).$$

Für $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^T$ definieren wir analog $\Delta \mathbf{u}$ durch

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) := (\Delta u_1(\mathbf{x}), \Delta u_2(\mathbf{x}))^T = \left(\sum_{l=1}^2 \partial_l \partial_l u_1(\mathbf{x}), \sum_{l=1}^2 \partial_l \partial_l u_2(\mathbf{x}) \right)^T$$

und die Divergenz von \mathbf{u} durch

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \sum_{l=1}^2 \partial_l u_l(\mathbf{x}).$$

Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, d.h. eine offene einfach zusammenhängende Punktmenge, so bezeichnen wir mit ∂G den Rand und mit $\overline{G} := G \cup \partial G$ den Abschluss von G . Wir setzen $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$.

Mit $C^k(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Menge aller in G definierten, k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. Entsprechend verwenden wir $C^k(G)^2$ im Falle vektorwertiger Funktionen $\mathbf{u} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $u_l \in C^k(G)$ für $l = 1, 2$. Im Falle $k = 0$ verwenden wir einfach $C(G)$, ... an Stelle von $C^0(G)$, ... Unter $C_\sigma^k(G)^2$, $k \in \mathbb{N}$ verstehen wir die Menge aller Funktionen $\mathbf{u} \in C^k(G)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Divergenz in G verschwindet.

Um die Glattheit der Berandung ∂G eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^2$ auszudrücken, schreiben wir $\partial G \in C^k$ genau dann, wenn sich ∂G mit Hilfe einer Parametrisierung $\vartheta : D \rightarrow \partial G$ mit $D \subset \mathbb{R}$, $\vartheta \in C^k(D)$ lokal darstellen lässt. Mit diesen Bezeichnungen können wir nun den formalen Stokes-Operator einführen:

Definition 2.1 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{u} \in C^2(G)^2$, $p \in C^1(G)$. Dann heißt S mit

$$S_p^{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

formaler Stokes-Operator. Analog heißt S' mit

$$S'_p{}^{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} -\Delta \mathbf{u} - \nabla p \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

der zu S formal adjungierte Stokes-Operator. Ist \mathbf{I}_2 die zweidimensionale Einheitsmatrix und

$$D\mathbf{u} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) := \left(\frac{1}{2} (\partial_l u_k + \partial_k u_l) \right)_{k,l=1,2}$$

der so genannte Deformationstensor, so definieren wir die zueinander formal adjungierten Spannungstensoren T und T' durch

$$T_p^{\mathbf{u}} := -2D\mathbf{u} + p\mathbf{I}_2$$

bzw.

$$T'_p{}^{\mathbf{u}} := -2D\mathbf{u} - p\mathbf{I}_2.$$

Mit der soeben eingeführten Notation lassen sich die homogenen Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0} & \text{in } G, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } G \end{aligned}$$

kurz durch die Gleichung

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G$$

beschreiben.

2.1.2 Die Greenschen Formeln

Die Greenschen Formeln bilden ein wichtiges Hilfsmittel zur Entwicklung von Lösungsdarstellungen (vgl. [49], [56]).

Satz 2.2 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^1$, und $\mathbf{N} := \mathbf{N}(\mathbf{y})$ sei die ins Äußere von G weisende Einheitsnormale in $\mathbf{y} \in \partial G$. Außerdem seien Funktionen*

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_\sigma^2(G)^2 \cap C^1(\overline{G})^2$$

und

$$p, q \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$$

gegeben. Sind zusätzlich $S_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix}$, $S_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix}$, $S_q^{\mathbf{v}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$, $S_q^{\mathbf{v}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$, sowie

$$D\mathbf{u} : D\mathbf{v} := \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} (\partial_l u_k + \partial_k u_l) \frac{1}{2} (\partial_l v_k + \partial_k v_l)$$

in G integrierbar, dann gilt die erste Greensche Formel

$$\int_G S_p^{\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} d\mathbf{y} = 2 \int_G D\mathbf{u} : D\mathbf{v} d\mathbf{y} + \int_{\partial G} (T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{o}$$

und die zweite Greensche Formel

$$\int_G ((S_p^{\mathbf{u}}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \cdot (S_q^{\mathbf{v}})) d\mathbf{y} = \int_{\partial G} ((T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (T_q^{\mathbf{v}} \mathbf{N})) d\mathbf{o},$$

wobei $d\mathbf{o}$ hier das Linienelement bezeichnet.

2.1.3 Die Randwertaufgaben

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die klassischen Randwertaufgaben der Hydrodynamik und entwickeln Eindeutigkeitssätze für ihre Lösungen.

Definition 2.3 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$ und $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ das zugehörige Außengebiet. Außerdem sei $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ gegeben. Wir nennen zwei Funktionen*

$$\mathbf{u} \in C_\sigma^2(G)^2, p \in C^1(G)$$

eine Lösung des inneren Dirichlet-Problems für die Gleichungen von Stokes zum Randwert \mathbf{b} genau dann, wenn

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G$$

gilt und \mathbf{u} stetig auf ∂G fortgesetzt werden kann mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G.$$

In diesem Fall muss \mathbf{b} die Verträglichkeitsbedingung $\int_{\partial G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$ erfüllen.

Entsprechend heißt \mathbf{u}, p eine Lösung des inneren Neumann-Problems zum Randwert \mathbf{b} genau dann, wenn

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G$$

gilt und $T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N}$ stetig auf ∂G fortgesetzt werden kann mit

$$T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G.$$

Analog bilden die Funktionen $\mathbf{u} \in C_\sigma^2(G^)^2, p \in C^1(G^*)$ eine Lösung des äußeren Dirichlet-Problems für die Gleichungen von Stokes zum Randwert \mathbf{b} genau dann, wenn*

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G^*$$

erfüllt ist bei stetiger Fortsetzung von \mathbf{u} auf ∂G mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G.$$

Das Paar \mathbf{u}, p heißt eine Lösung des äußeren Neumann-Problems für die Gleichungen von Stokes zum Randwert \mathbf{b} genau dann, wenn

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G^*$$

erfüllt ist bei stetiger Fortsetzung von $T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N}$ auf ∂G mit

$$T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G.$$

Es wird sich im Folgenden herausstellen, dass das innere Neumann-Problem für den Geschwindigkeitsanteil \mathbf{u} nur bis auf so genannte Starrkörperbewegungen eindeutig lösbar ist:

Definition 2.4 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{u} \in C^1(G)^2$. Erfüllt \mathbf{u} die Gleichung*

$$\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T = 0 \text{ in } G,$$

so nennen wir \mathbf{u} eine Starrkörperbewegung in G .

Satz 2.5 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{u} \in C^1(G)^2$. Dann besitzt die Gleichung*

$$\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T = 0 \text{ in } G$$

genau drei linear unabhängige Lösungen. Diese haben die Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

Dabei ist $\mathbf{C} = (c_{ik})_{i,k=1,2}$ eine reelle Matrix mit $c_{ik} = -c_{ki}$ ($i, k = 1, 2$) und $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: Aus der Gleichung $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T = 0$ folgt, dass die i -te Komponente u_i des Vektors \mathbf{u} nicht von der i -ten Komponente x_i des Arguments \mathbf{x} , $i = 1, 2$ abhängt: Mit

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

erhält man speziell für $i = k$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

und daher $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$. Außerdem folgt aus (2), dass jedes u_i nur linear von x_k für $i \neq k$ abhängt: Da u_k nicht von x_k abhängt, hängt auch $\partial_i u_k = -\partial_k u_i$ nicht von x_k ab. Es gilt folglich

$$u_i(x) = c_{ik} x_k + d_i, \quad i \neq k \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = c_{ik} + c_{ki} = 0 \tag{4}$$

liefert $c_{ik} = -c_{ki}$, wie behauptet. Ist andererseits diese Bedingung erfüllt, so ergibt der Ansatz (3) stets eine Lösung \mathbf{u} der Gleichung $\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T = 0$, deren gesamter Lösungsraum hiermit gegeben ist.

Die Koeffizienten c_{ik} bilden eine Matrix $\mathbf{C} = (c_{ik})_{i,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $c_{ii} = 0$. Der

unterhalb der Hauptdiagonale in der Matrix \mathbf{C} stehende Eintrag lässt sich beliebig vorgeben, wobei \mathbf{C} damit vollständig festgelegt ist. Dann sind für den Vektor $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^T$ beide Einträge frei wählbar. Daher gibt es insgesamt drei frei wählbare Einträge bzw. linear unabhängige Lösungen der Gleichung $\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T = 0$. \square

Für die oben formulierten Randwertaufgaben gilt folgender Eindeutigkeitsatz (vgl. [5], [56], [75, S. 16]):

Satz 2.6 (Eindeutigkeitsatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ und $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$. Dann gelten die folgenden Eindeutigkeitsaussagen über die Randwertprobleme der Gleichungen von Stokes:*

- *Im Falle des inneren Dirichlet-Problems existiert zu jedem vorgegebenen Randwert \mathbf{b} , der die Verträglichkeitsbedingung $\int_{\partial G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$ erfüllt, höchstens eine Geschwindigkeitsfunktion \mathbf{u} und höchstens eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Druckfunktion p .*

Im Falle des inneren Neumann-Problems existiert zu jedem vorgegebenen Randwert \mathbf{b} , der die Verträglichkeitsbedingungen

$$\int_{\partial G} \mathbf{b} \, d\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial G} (b_1 x_2 - b_2 x_1) \, d\sigma = 0$$

erfüllt, höchstens eine bis auf eine additive Starrkörperbewegung eindeutige Geschwindigkeitsfunktion \mathbf{u} . Die Druckfunktion p ist in diesem Fall eindeutig bestimmt.

- *Unter den Lösungen \mathbf{u}, p des äußeren Dirichlet-Problems gibt es höchstens eine Lösung, die die Abklingeigenschaften*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1), \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad p(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5)$$

besitzt.

Unter den Lösungen \mathbf{u}, p des äußeren Neumann-Problems gibt es zu jedem Randwert \mathbf{b} , der die Verträglichkeitsbedingung $\int_{\partial G} \mathbf{b} \, d\sigma = 0$ erfüllt, höchstens eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Lösung, die die Abklingeigenschaften

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1), \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad p(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (6)$$

besitzt.

Zum Nachweis der Existenz von Lösungen der Randwertaufgaben entwickeln wir in den nächsten Abschnitten die benötigten potentialtheoretischen Grundlagen.

2.2 Fundamentaltensor und Linienpotentiale

2.2.1 Die Grndlösungsmatrix

Im Folgenden werden wir mit Hilfe der Fouriertransformation im Fall $n = 2$ die Grndlösung des Stokes-Operators ermitteln. Wir wollen also diejenige Matrix $\mathbf{E} := (E_{jk})_{j,k=1,2,3}$ bestimmen, die im Distributionensinn der Gleichung

$$S\mathbf{E} = \delta \mathbf{I}_3$$

genügt. Dabei schreiben wir die Matrix \mathbf{E} als Aneinanderreihung von Spalten, also $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ mit $\mathbf{E}_k := (E_{jk})_{j=1,2,3}$ für $k = 1, 2, 3$. Mit $S\mathbf{E} = (S\mathbf{E}_1, S\mathbf{E}_2, S\mathbf{E}_3)$ meinen wir die Anwendung des Operators S auf die einzelnen Spalten $\mathbf{E}_k := (E_{jk})_{j=1,2,3}$ von \mathbf{E} , definiert durch

$$S\mathbf{E}_k := \begin{pmatrix} -\Delta \tilde{\mathbf{E}}_k + \nabla E_{3,k} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{\mathbf{E}}_k := (E_{jk})_{j=1,2}$ für $k = 1, 2, 3$ derjenige Spaltenvektor ist, der aus \mathbf{E}_k durch Streichen der letzten Komponente entsteht. Außerdem ist \mathbf{I}_3 die dreidimensionale Einheitsmatrix und δ die Deltadistribution.

Wir verwenden die Bezeichnung

$$c := c_2 := \frac{1}{2\pi}$$

für die aus der Fourieranalysis bekannte dimensionsabhängige Normierungskonstante und definieren

$$Ff(\mathbf{a}) := F[f](\mathbf{a}) := c \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

als die zweidimensionale Fouriertransformierte Ff einer gegebenen Funktion f . Hier bedeutet wieder $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} := \sum_{l=1}^2 a_l x_l$ das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ und $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

Die inverse zweidimensionale Fouriertransformierte $F^{-1}g$ der Funktion g ist dann gegeben durch

$$F^{-1}g(\mathbf{x}) := F^{-1}[g](\mathbf{x}) := c \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{a}) e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{a}.$$

Zur Ermittlung der Grndlösungsmatrix \mathbf{E} bestimmen wir zunächst die Fouriertransformierte $F S\mathbf{E}_k$. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall $k \in 1, 2$:

Die k -te Spalte der Ausgangsgleichung lautet hier

$$S\mathbf{E}_k = (\delta_{jk} \delta)_{j=1,2,3} . \quad (7)$$

Fouriertransformation ergibt wegen $F\delta = c$ (vgl. [73, S. 108]) die Beziehung

$$\begin{aligned} FSE_k(\mathbf{a}) &= F \begin{pmatrix} -\Delta \tilde{\mathbf{E}}_k + \nabla E_{3,k} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k \end{pmatrix}(\mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) + i\mathbf{a} FE_{3,k}(\mathbf{a}) \\ i\mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= F(\boldsymbol{\delta}_k \delta) = c \boldsymbol{\delta}_k . \end{aligned} \quad (8)$$

Der Spaltenvektor $\boldsymbol{\delta}_k$ ist dabei definiert durch $\boldsymbol{\delta}_k := (\delta_{jk})_{j=1,2,3}$ mit dem Kroneckersymbol δ_{jk} . Wegen $k \neq 3$ lautet die letzte Komponente dieser Vektorgleichung

$$i\mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) = 0.$$

Wir bilden das Skalarprodukt der ersten zwei Gleichungen von (8) mit dem Vektor \mathbf{a} und erhalten

$$|\mathbf{a}|^2 \mathbf{a} F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) + i|\mathbf{a}|^2 FE_{3,k}(\mathbf{a}) = c a_k .$$

Dies ergibt

$$FE_{3,k}(\mathbf{a}) = \frac{-ic a_k}{|\mathbf{a}|^2}, \quad k = 1, 2.$$

Hieraus folgt

$$|\mathbf{a}|^2 F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) + i\mathbf{a} \frac{-ic a_k}{|\mathbf{a}|^2} = |\mathbf{a}|^2 F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) + \mathbf{a} \frac{c a_k}{|\mathbf{a}|^2} = c \boldsymbol{\delta}_k ,$$

also

$$F\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{a}) = \frac{c}{|\mathbf{a}|^2} \boldsymbol{\delta}_k - \frac{c a_k}{|\mathbf{a}|^4} \mathbf{a}$$

oder komponentenweise

$$FE_{jk}(\mathbf{a}) = \frac{c}{|\mathbf{a}|^2} \delta_{jk} - \frac{c a_j a_k}{|\mathbf{a}|^4}, \quad k, j = 1, 2. \quad (9)$$

Zur Ermittlung von $E_{j,k}$ durch inverse Fouriertransformation werden wir die beiden rechter Hand stehenden Terme getrennt behandeln. Zunächst geben wir die Grundleistung des Operators Δ im \mathbb{R}^2 an (vgl. [73, S. 145]):

$$\Delta \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| = \delta$$

mit dem Umfang der zweidimensionalen Einheitssphäre $\omega_2 = 2\pi$. Durch Fouriertransformation beider Seiten ergibt sich hieraus

$$F\left(\Delta \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}|\right)(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 F\left(-\frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}|\right)(\mathbf{a}) = F(\delta) = c$$

und somit

$$F\left(-\frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}|\right)(\mathbf{a}) = \frac{c}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Damit folgt

$$F^{-1}\left(\frac{c}{|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}|.$$

Da

$$\Delta^2 \left(-\frac{1}{4\omega_2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|\right)\right) = \Delta \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| = \delta$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} & F\left(\Delta^2 \left(-\frac{1}{4\omega_2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|\right)\right)\right)(\mathbf{a}) \\ &= -i^4 |\mathbf{a}|^4 F\left(\frac{1}{4\omega_2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|\right)\right)(\mathbf{a}) \\ &= F(\delta) = c. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$F^{-1}\left(-\frac{c}{|\mathbf{a}|^4}\right) = \frac{1}{4\omega_2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|\right). \quad (10)$$

Wir wenden nun die inverse Fouriertransformation auf die bereits ermittelte Gleichung (9) an und erhalten

$$\begin{aligned} E_{jk}(\mathbf{x}) &= \delta_{jk} F^{-1}\left(\frac{c}{|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{x}) - F^{-1}\left(\frac{c a_k a_j}{|\mathbf{a}|^4}\right)(\mathbf{x}) \\ &= -\delta_{jk} \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| - F^{-1}\left(\frac{-c i a_k i a_j}{|\mathbf{a}|^4}\right)(\mathbf{x}) \\ &= -\delta_{jk} \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| - \partial_j \partial_k F^{-1}\left(\frac{-c}{|\mathbf{a}|^4}\right)(\mathbf{x}) \\ &= -\delta_{jk} \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| - \partial_j \partial_k \frac{1}{4\omega_2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|\right) \\ &= -\delta_{jk} \frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| + \frac{1}{2\omega_2} \left(\delta_{jk} \ln |\mathbf{x}| + \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\omega_2} \left(-\delta_{jk} \ln |\mathbf{x}| + \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2}\right). \end{aligned}$$

Schließlich folgt aus der bereits bekannten Gleichung

$$FE_{3,k}(\mathbf{a}) = \frac{-ic a_k}{|\mathbf{a}|^2}, \quad k = 1, 2 \quad (11)$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} E_{3,k}(\mathbf{x}) &= F^{-1} \left(\frac{-ic a_k}{|\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{x}) \\ &= -\partial_k F^{-1} \left(\frac{c}{|\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{x}) \\ &= -\partial_k \left(-\frac{1}{\omega_2} \ln |\mathbf{x}| \right) = \frac{x_k}{\omega_2 |\mathbf{x}|^2}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

2. Fall $k = 3$:

Wir betrachten nun die Ausgangsgleichung $S\mathbf{E} = \delta\mathbf{I}_3$ in der dritten Spalte, das heißt

$$S\mathbf{E}_3 = \delta \delta_3.$$

Wegen $F\delta = c$ erhalten wir durch Fouriertransformation

$$\begin{aligned} FSE_3(\mathbf{a}) &= F \begin{pmatrix} -\Delta \tilde{\mathbf{E}}_3 + \nabla E_{3,3} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}_3 \end{pmatrix} (\mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} |\mathbf{a}|^2 F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) + i\mathbf{a} FE_{3,3}(\mathbf{a}) \\ i\mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad (12) \\ &= F(\delta_3 \delta)(\mathbf{a}) = c\delta_3. \end{aligned}$$

Aus der letzten Komponente dieser Vektorgleichung folgt

$$i\mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) = c$$

beziehungsweise

$$\mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) = \frac{c}{i} = -ic.$$

Skalarproduktbildung der verbleibenden Komponenten mit dem Vektor \mathbf{a} liefert

$$|\mathbf{a}|^2 \mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) + i|\mathbf{a}|^2 FE_{3,3}(\mathbf{a}) = 0,$$

also

$$FE_{3,3}(\mathbf{a}) = -\frac{|\mathbf{a}|^2 \mathbf{a} \cdot F\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a})}{i|\mathbf{a}|^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2 ci}{i|\mathbf{a}|^2} = c,$$

und somit

$$E_{3,3}(\mathbf{x}) = F^{-1}(c) = \delta.$$

Durch Einsetzen folgt

$$|\mathbf{a}|^2 F \tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) = -i \mathbf{a} F E_{3,3}(\mathbf{x}) = -i \mathbf{a} c,$$

also ergibt sich

$$F \tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{a}) = \frac{-i c \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$$

und folglich

$$\tilde{\mathbf{E}}_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{w_2 |\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}.$$

Mit $w_2 = 2\pi$ hat die Grundlösungsmatrix $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_{jk}(\mathbf{x}))_{j,k=1,2,3}$ die folgende Gestalt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x_1 x_1}{|\mathbf{x}|^2} - \ln |\mathbf{x}| \right) & \frac{x_1 x_2}{4\pi |\mathbf{x}|^2} & \frac{x_1}{2\pi |\mathbf{x}|^2} \\ \frac{x_2 x_1}{4\pi |\mathbf{x}|^2} & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x_2 x_2}{|\mathbf{x}|^2} - \ln |\mathbf{x}| \right) & \frac{x_2}{2\pi |\mathbf{x}|^2} \\ \frac{x_1}{2\pi |\mathbf{x}|^2} & \frac{x_2}{2\pi |\mathbf{x}|^2} & \delta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Eine Darstellungsformel

Satz 2.7 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ und $\mathbf{N} := \mathbf{N}(\mathbf{y})$ die ins Äußere von G weisende Einheitsnormale in $\mathbf{y} \in \partial G$. Ist $\mathbf{u} \in C_\sigma^2(G)^2$ und $p \in C^1(G)$ eine Lösung der Gleichungen von Stokes*

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{in } G, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } G,$$

so gilt die Darstellungsformel

$$\begin{aligned} & \int_{\partial G} \left((T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N})(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot T_{\mathbf{y}}' \mathbf{E}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \\ &= \begin{cases} -u_k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G, k = 1, 2, \\ -p(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G, k = 3, \\ 0, & \mathbf{x} \in G^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{E}}_k$ der k -te Spaltenvektor aus der Grundlösungsmatrix, aus dem die letzte Komponente $E_{3,k}$ weggestrichen wurde. $T'_y \mathbf{E}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ist diejenige 2×2 -Matrix, die durch Anwendung des Spannungstensors T'_y auf den k -ten Spaltenvektor \mathbf{E}_k der Grundlösungsmatrix \mathbf{E} entsteht. Die Differentiationen im Spannungstensor T'_y sind dabei nach \mathbf{y} durchzuführen. Schließlich ist $T'_y \mathbf{E}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y})$ die übliche Matrix-Vektor-Multiplikation der Matrix $T'_y \mathbf{E}_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ mit der Einheitsnormalen $\mathbf{N}(\mathbf{y})$. Der Beweis dieser Aussage befindet sich in [75, S. 16-17].

Der obige Satz gibt eine Darstellung für jede Komponente $u_k(\mathbf{x})$ des Vektors $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ bzw. für $p(\mathbf{x})$ an. Um den gesamten Zeilenvektor $(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ darzustellen, benötigen wir noch das Symbol $\ll ., . \gg$. Dieses Symbol erklären wir für Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ und Matrizen $\mathbf{A} := (A_{ji}) \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ gemäß

$$\ll \mathbf{a}, \mathbf{A} \gg := \left(\sum_{j=1}^2 a_j A_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^2 a_j A_{jm} \right).$$

Aus dem obigen Satz erhält man damit die Zeilendarstellungsformel

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \ll T'_p \mathbf{u}(\mathbf{y}), \mathbf{E}^{(z)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \gg \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial G} \ll \mathbf{u}(\mathbf{y}), T'_y \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \gg \, d\mathbf{y} \\ &= \begin{cases} -\left(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}) \right) & , \mathbf{x} \in G \\ \mathbf{0} & , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}. \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathbf{E}^{(z)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ diejenige 2×3 -Matrix, die aus der Grundlösungsmatrix $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ durch Streichen der untersten Zeile entsteht.

Mit der Bezeichnung $\int_{\partial G} \mathbf{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} := \left(\int_{\partial G} v_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \dots, \int_{\partial G} v_m(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right)^T$ für Vektorfunktionen $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ liefern unsere Ergebnisse auch die Spaltdarstellung

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) T'_p \mathbf{u}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \int_{\partial G} T'_y \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \begin{cases} -\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} & , x \in G \\ \mathbf{0} & , x \in G^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Unter $\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ verstehen wir dabei diejenige 3×2 -Matrix, die aus der Grundlösungsmatrix $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ durch Streichen der letzten Spalte entsteht.

Zur Abkürzung führen wir den Doppelschichttensor $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ein. Unter $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ verstehen wir die 3×2 - Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= (-T_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}))^T = ((-T_{\mathbf{x}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}))_{ij} \mathbf{N}_j(\mathbf{y}))_{ki} \\ &= (T'_{\mathbf{y}} \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}))^T = ((T'_{\mathbf{y}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}))_{ij} \mathbf{N}_j(\mathbf{y}))_{ki}, \end{aligned}$$

worin $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ die Grundlösungsmatrix und $T_{\mathbf{x}}$ sowie $T'_{\mathbf{y}}$ die bereits eingeführten Spannungstensoren sind, die auf die einzelnen Spalten von $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ angewendet werden. Der Index an den Spannungstensoren gibt an, nach welcher Variablen in $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ differenziert wird. Mit den Abkürzungen $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ und $\mathbf{N} := \mathbf{N}(\mathbf{y})$ errechnet man die folgende Gestalt von \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} D_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \frac{z_k z_i \mathbf{z} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{z}|^4}, & k, i = 1, 2, \\ D_{3,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2 z_i \mathbf{z} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{z}|^4} - \frac{N_i}{|\mathbf{z}|^2} \right), & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Die schon angegebene Spaltendarstellung hat damit die vereinfachte Form

$$\int_{\partial G} E^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N}(\mathbf{y}) d\mathbf{o}_{\mathbf{y}} - \int_{\partial G} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{o}_{\mathbf{y}} = \begin{cases} - \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ p(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, & x \in G \\ \mathbf{0} & , x \in G^*. \end{cases}$$

2.2.3 Linienpotentiale

Anhand der Darstellungsformel erkennen wir einen Zusammenhang zwischen den Werten $\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$ im Inneren des Gebietes G und den Werten $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ und $(T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N})(\mathbf{y})$ auf dem Gebietsrand ∂G . Dies motiviert uns ganz allgemein Vektorfunktionen mit Hilfe von Integralen über den Rand ∂G zu erklären, wobei wir so zum Begriff des Einfachschicht- und des Doppelschichtpotentials kommen. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich daher mit der Definition und den Eigenschaften dieser Potentiale. Zu ihrer Definition benötigen wir den bereits eingeführten Grundlösungstensor \mathbf{E} und den Doppelschichttensor \mathbf{D} .

Definition 2.8 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$ und $\phi \in C(\partial G)^2$ eine vorgegebene Funktion. Dann*

heißt die Vektorfunktion $E\phi$ mit

$$E\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y, \quad \mathbf{x} \notin \partial G$$

das hydrodynamische Einfachschichtpotential mit Belegungsdichte ϕ . Dabei ist $\mathbf{E}^{(s)}$ die 3×2 -Matrix, die aus der Grundlösungsmatrix \mathbf{E} entsteht, wenn man in ihr die letzte Spalte wegstreicht.

Die Vektorfunktion $D\phi$, definiert durch

$$D\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y, \quad \mathbf{x} \notin \partial G,$$

nennen wir das hydrodynamische Doppelschichtpotential mit Belegungsdichte ϕ . Dabei ist die 3×2 -Matrix $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ der bereits eingeführte Doppelschichttensor. Außerdem bezeichnen wir die den Geschwindigkeitsanteil betreffenden Potentiale mit $E^\bullet\phi$ und $D^\bullet\phi$. Diese sind für $\mathbf{x} \notin \partial G$ definiert durch

$$E^\bullet\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(z,s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y, \quad D^\bullet\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} \mathbf{D}^{(z)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y.$$

Unter $\mathbf{E}^{(z,s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ verstehen wir hier die 2×2 -Matrix, die durch Streichen der letzten Zeile und der letzten Spalte in $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ entsteht. Schließlich ist $\mathbf{D}^{(z)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die aus $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ durch Streichen der letzten Zeile hervorgehende 2×2 -Matrix.

Aus der Existenz von Parallellinien für eine C^2 -Berandung folgt, dass jeder Punkt \mathbf{x} aus einer hinreichend kleinen Umgebung $U(\partial G)$ des Randes ∂G eindeutig auf einen Randpunkt $\tilde{\mathbf{x}} \in \partial G$ projiziert werden kann. Damit sind die so genannten Normalspannungen $T(E\phi) \mathbf{N}(\mathbf{x})$ des Einfachschichtpotentials für jedes $\mathbf{x} \in U(\partial G)$, $\mathbf{x} \notin \partial G$ wohldefiniert, und es gilt

$$H^\bullet\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y := \int_{\partial G} T_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}) \, d\mathbf{o}_y.$$

Wir wollen im Weiteren die wichtigsten bekannten Eigenschaften der hydrodynamischen Linienpotentiale auflisten. Durch Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration ergibt sich sofort die folgende Aussage:

Satz 2.9 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$ und $\phi \in C(\partial G)^2$. Dann sind $E\phi$ und $D\phi$ Lösungen der Gleichungen von Stokes außerhalb von ∂G :*

$$\begin{aligned} S E\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \notin \partial G, \\ S D\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \notin \partial G. \end{aligned}$$

Die Potentiale $E^\bullet\phi$, $D^\bullet\phi$, $H^\bullet\phi$ wurden bisher nur für das Innengebiet G bzw. für das Außengebiet G^* erklärt. Wir erweitern diese Definition nun, indem wir ihre so genannten direkten Werte auf dem Rand ∂G einführen.

Satz 2.10 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ und $\phi \in C(\partial G)^2$. Dann existieren auf ∂G die Potentiale $E^\bullet\phi$, $D^\bullet\phi$, $H^\bullet\phi$, definiert durch*

$$\begin{aligned} E^\bullet\phi(\mathbf{x}) &:= \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(s,z)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \partial G, \\ D^\bullet\phi(\mathbf{x}) &:= \int_{\partial G} \mathbf{D}^z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \partial G, \\ H^\bullet\phi(\mathbf{x}) &:= \int_{\partial G} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \partial G. \end{aligned}$$

Wir nennen diese Potentiale die direkten Werte der entsprechenden Potentiale aus Definition 2.8 auf dem Rand ∂G .

Einen Beweis dieses und des nächsten Satzes findet man in [49].

Satz 2.11 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. Dann gilt für das Doppelschichtpotential $D^\bullet\mathbf{c}$ mit konstanter Belegung $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ die Aussage*

$$(D^\bullet\mathbf{c})(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{c}, & \mathbf{x} \in G, \\ \frac{1}{2}\mathbf{c}, & \mathbf{x} \in \partial G, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in G^*. \end{cases}$$

Satz 2.12 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. Dann gilt für das Einfachschichtpotential EN mit äußerer Einheitsnormale \mathbf{N} als Belegung die Aussage*

$$(EN)(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} E^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \begin{cases} -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{x} \in G, \\ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{x} \in \partial G, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{x} \in G^*. \end{cases}$$

Insbesondere gilt daher auch $E^\bullet\mathbf{N} = \mathbf{0}$ in \mathbb{R}^2 .

Definition 2.13 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$ und $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. Außerdem seien $\mathbf{u} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{v} : G^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei stetige Funktionen. Dann definieren wir für $\mathbf{z} \in \partial G$ die Grenzwerte*

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{z}) := \lim_{x \in G, x \rightarrow \mathbf{z}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{Grenzwert bei Annäherung von } G)$$

und

$$\mathbf{v}^a(\mathbf{z}) := \lim_{x \in G^*, x \rightarrow z} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{Grenzwert bei Annäherung von } G^*),$$

sofern diese Grenzwerte existieren.

Satz 2.14 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand $\partial G \in C^2$, $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ und $\phi \in C(\partial G)^2$. Dann gilt in $\mathbf{z} \in \partial G$:*

$$\begin{aligned} (E^\bullet \phi)^i(\mathbf{z}) &= E^\bullet \phi(\mathbf{z}) = (E^\bullet \phi)^a(\mathbf{z}), \\ (D^\bullet \phi)^i(\mathbf{z}) - D^\bullet \phi(\mathbf{z}) &= +\frac{1}{2} \phi(\mathbf{z}) = D^\bullet \phi(\mathbf{z}) - (D^\bullet \phi)^a(\mathbf{z}), \\ (H^\bullet \phi)^i(\mathbf{z}) - H^\bullet \phi(\mathbf{z}) &= -\frac{1}{2} \phi(\mathbf{z}) = H^\bullet \phi(\mathbf{z}) - (H^\bullet \phi)^a(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Dabei sind $E^\bullet \phi(\mathbf{z})$, $D^\bullet \phi(\mathbf{z})$ und $H^\bullet \phi(\mathbf{z})$ die direkten Werte der Potentiale in $\mathbf{z} \in \partial G$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [49].

2.3 Eine Integralgleichungsmethode

Zur Konstruktion einer Lösung \mathbf{u}, p für die Randwertaufgaben verwenden wir eine Integralgleichungsmethode. Hierzu wählen wir für \mathbf{u}, p im Falle der Dirichlet-Probleme einen Ansatz als Doppelschichtpotential mit einer noch anzupassenden Belegungsdichte $\phi \in C(\partial G)^2$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := D\phi(\mathbf{x}) := \int_{\partial G} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_{\mathbf{y}} \quad (\mathbf{x} \in G).$$

Der so gewählte Ansatz liefert nach Konstruktion $S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in G , so dass lediglich die Randbedingungen noch zu erfüllen sind. Dazu bezeichnen wir den Geschwindigkeitsanteil des obigen Doppelschichtpotentials wieder mit $D^\bullet \phi(\mathbf{x})$. Mit diesen Bezeichnungen reduziert sich das innere Dirichlet-Problem auf das Lösen der Gleichung

$$(D^\bullet \phi)^i(\mathbf{x}) := \lim_{\substack{\xi \rightarrow \mathbf{x} \\ \xi \in G, x \in \partial G}} (D^\bullet \phi)(\xi) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial G.$$

Aufgrund der Sprungrelationen gilt bekanntlich

$$(D^\bullet \phi)^i = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G,$$

so dass die geforderte Randbedingung erfüllt ist, falls die Belegung $\phi \in C(\partial G)^2$ eine Lösung des folgenden Systems von Fredholm-Randintegralgleichungen zweiter Art darstellt:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G. \quad (13)$$

Zur Untersuchung der Gleichung $\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi$ betrachten wir das zugehörige homogene adjungierte System. Wegen $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{D}^{(z)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))^T = \mathbf{D}^{(z)}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vgl. [75, S. 18]) besitzt dieses die Form

$$\mathbf{0} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \psi \quad \text{auf } \partial G. \quad (14)$$

Dabei sind $H^\bullet \psi$ die direkten Werte der Normalspannungen des Einfeldpotentials (vgl. Definition 2.8, Satz 2.10). Man kann zeigen, dass die Einheitsnormale $\psi := \mathbf{N}$ das System (14) löst, und dass es weitere, von \mathbf{N} linear unabhängige Lösungen nicht gibt. Jede Lösung ψ der obigen Gleichung kann folglich in der Form $\psi = \alpha \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Somit führt der reine Doppelschichtansatz zur Lösung des inneren Dirichlet-Problems auf einen Randintegraloperator mit nicht explizit bekanntem, eindimensionalem Nullraum. Wir kennen in diesem Fall lediglich den Nullraum des hierzu adjungierten Operators, der vom Normalfeld erzeugt wird.

Der gleiche Ansatz führt uns im Falle des äußeren Dirichlet-Problems auf das Fredholmsche Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G, \quad (15)$$

dessen homogenes System

$$\mathbf{0} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G \quad (16)$$

genau die drei linear unabhängigen Starrkörperbewegungen als Lösungen besitzt.

Wir wissen aufgrund der Fredholmschen Alternative, dass (15) genau dann Lösungen besitzt, wenn der Randwert \mathbf{b} die Gleichung

$$\int_{\partial G} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\chi}_l \, d\sigma = 0, \quad l = 1, 2, 3, \quad (17)$$

für alle drei linear unabhängigen Lösungen $\boldsymbol{\chi}_l$ von

$$\mathbf{0} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \psi \quad \text{auf } \partial G$$

erfüllt. Dies bedeutet, dass Lösungen des äußeren Dirichlet-Problems als reines Doppelschichtpotential genau dann existieren, wenn der Randwert die Bedingung (17) erfüllt.

Wir konstruieren eine Lösung \mathbf{u}, p des inneren Neumann-Problems

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G, \quad T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G$$

für ein gegebenes $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ mit Hilfe eines Einfachschichtpotentials $E\phi$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := E\phi(\mathbf{x}) = \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y, \quad \mathbf{x} \in G.$$

Die Sprungrelationen liefern dann das Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G.$$

Dieses System ist nicht eindeutig lösbar, denn seine homogene Version

$$\mathbf{0} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G \quad (18)$$

besitzt genau drei linear unabhängige Lösungen. Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass die zu (18) adjungierte homogene Version

$$\mathbf{0} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \psi \quad \text{auf } \partial G$$

genau von den drei linear unabhängigen Starrkörperbewegungen gelöst wird.

Weiter konstruieren wir eine Lösung \mathbf{u}, p des äußeren Neumann-Problems

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G^*, \quad T_p^{\mathbf{u}} \mathbf{N} = \mathbf{b} \quad \text{auf } \partial G$$

für ein gegebenes $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ mit Hilfe eines Einfachschichtpotentials $E\phi$ wie oben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := E\phi(\mathbf{x}) = \int_{\partial G} \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{o}_y, \quad \mathbf{x} \in G^*.$$

Die Sprungrelationen liefern dann das Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G.$$

Dieses System ist nicht eindeutig lösbar, weil seine homogene Version

$$\mathbf{0} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + H^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G$$

durch alle Vielfachen $\alpha \mathbf{N}$ der Einheitsnormalen \mathbf{N} gelöst wird, wie wir bei der Diskussion des inneren Dirichlet-Problems bereits gesehen haben.

Wir wollen uns jetzt mit anderen Ansätzen für das äußere und innere Dirichlet-Problem beschäftigen, die auf eindeutig lösbare Randintegralgleichungssysteme führen.

Für das innere Dirichlet-Problem definieren wir den Projektionsoperator $P_{\mathbf{N}}$ gemäß

$$P_{\mathbf{N}} : C(\partial G)^2 \longrightarrow C(\partial G)^2 \quad \text{mit } P_{\mathbf{N}} \phi(\mathbf{x}) := \mathbf{N}(\mathbf{x}) \int_{\partial G} \phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (19)$$

Hiermit modifizieren wir das aus dem reinen Doppelschichtpotentialansatz resultierende System (13) durch das System

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet - \eta P_{\mathbf{N}} \right) \phi \quad \text{auf } \partial G, \quad 0 \neq \eta \in \mathbb{R}.$$

Satz 2.15 *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G \in C^2$. Mit der Konstanten $\eta \neq 0$, dem Projektionsoperator $P_{\mathbf{N}}$ aus (19) und dem Geschwindigkeitsanteil des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials $D^\bullet \phi$ existiert zu jeder Randfunktion $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ genau eine Belegungsfunktion $\phi \in C(\partial G)^2$, die das System*

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet - \eta P_{\mathbf{N}} \right) \phi \quad \text{auf } \partial G, \quad 0 \neq \eta \in \mathbb{R} \quad (20)$$

löst. Falls $\int_{\partial G} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$ gilt, so ist die Lösung ϕ des Systems (20) ebenfalls eine Lösung des Systems (13):

$$\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet \right) \phi \quad \text{auf } \partial G.$$

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := D\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G$$

löst dann für das obige ϕ das innere Dirichlet-Problem eindeutig.

Einen Beweis findet man in [75, S. 76].

Für das äußere Dirichlet-Problem kann man auch mit einem passenden Ansatz ein eindeutig lösbares Randintegralgleichungssystem formulieren.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := D\phi(\mathbf{x}) - \eta(E M \phi)(\mathbf{x}) - \alpha \int_{\partial G} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma, \quad 0 < \eta \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist der Projektionsoperator $M : C(\partial G)^2 \longrightarrow C(\partial G)^2$ definiert durch

$$\phi \longrightarrow M\phi := \phi - \phi_M$$

mit

$$\phi_M := \frac{1}{|\partial G|} \int_{\partial G} \phi d\sigma, \quad |\partial G| = \int_{\partial G} 1 d\sigma.$$

Mit den bekannten Sprungrelationen führt unser Ansatz auf das Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b} = K\phi := \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet - \eta E^\bullet M - \alpha |\partial G| (\mathbf{I}_2 - M) \right) \phi$$

mit $0 < \eta \in \mathbb{R}$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass dieses System für jedes $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ genau eine Lösung $\phi \in C(\partial G)^2$ besitzt (vgl. [75, S. 20-21]). Der folgende Satz fasst unsere Ergebnisse zusammen.

Satz 2.16 *Es sei G ein beschränktes Gebiet mit einfach zusammenhängendem Rand $\partial G \in C^2$ und $G^* := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. Mit den Konstanten $0 < \eta \in \mathbb{R}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ dem hydrodynamischen Doppelschichtpotential $D\phi$ und dem hydrodynamischen Einzelschichtpotential $E\phi$ existiert zu jeder Randfunktion $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ eine Belegungsdichte $\phi \in C(\partial G)^2$, so dass der Ansatz*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := D\phi(\mathbf{x}) - \eta(E M \phi)(\mathbf{x}) - \alpha \int_{\partial G} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma$$

das äußere Dirichlet-Problem

$$S_p^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } G^*, \quad \mathbf{u} = \mathbf{b} \text{ auf } \partial G$$

löst. Das sich durch den obigen Ansatz ergebende Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b} = K\phi := \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I}_2 + D^\bullet - \eta E^\bullet M - \alpha |\partial G| (\mathbf{I}_2 - M) \right) \phi$$

ist für jedes $\mathbf{b} \in C(\partial G)^2$ eindeutig lösbar.

3 Numerik der Integralgleichungen

3.1 Diskretisierung mit dem Nyström-Verfahren

Wir wenden uns jetzt dem inneren Dirichlet-Problem zu und betrachten das in Kapitel 2.3 gewählte eindeutig lösbare Randintegralgleichungssystem

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) + D^\bullet \phi(\mathbf{x}) - \mathbf{N}(\mathbf{x}) \int_{\partial G} \phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \partial G, \quad (21)$$

wobei $D^\bullet \phi(\mathbf{x})$ hier den direkten Wert bezeichnet. Durch eine Parametrisierung des Randes

$$\mathbb{R} \ni [0, 1] \rightarrow \gamma(\tau) := (y_1(\tau), y_2(\tau)) \in \partial G \quad (22)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\gamma(s)) = \frac{1}{2} \phi(\gamma(s)) &+ \int_0^1 \mathbf{D}^\bullet(\gamma(s), \gamma(\tau)) \phi(\gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)| \, d\tau \\ &- \mathbf{N}(\gamma(s)) \int_0^1 \phi(\gamma(\tau)) \cdot \mathbf{N}(\gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)| \, d\tau \end{aligned}$$

mit dem Doppelschichttensor $\mathbf{D}^\bullet(\gamma(s), \gamma(\tau))$ der Gestalt

$$D_{ik}(\gamma(s), \gamma(\tau)) = -\frac{1}{\pi} \frac{(\gamma_i(s) - \gamma_i(\tau))(\gamma_k(s) - \gamma_k(\tau))(\gamma(s) - \gamma(\tau)) \cdot \mathbf{N}(\gamma(\tau))}{|\gamma(s) - \gamma(\tau)|^4},$$

für $i, k = 1, 2$, der Gramschen Determinante

$$|\dot{\gamma}(\tau)| = \sqrt{y_1(\tau)^2 + y_2(\tau)^2} \quad (23)$$

und dem Normalenvektor

$$\mathbf{N}(\gamma(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{y_1(\tau)^2 + y_2(\tau)^2}} \begin{pmatrix} y_2(\tau) \\ -y_1(\tau) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Setzen wir

$$\tilde{\phi}(\tau) := \phi(\gamma(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{N}} := \mathbf{N}(\gamma(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{N}}_\gamma := \mathbf{N}(\gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)| \quad (25)$$

und

$$\tilde{D}^\bullet_{\gamma}(s, \tau) := D^\bullet(\gamma(s), \gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)|, \quad (26)$$

so folgt für den Geschwindigkeitsanteil vom direkten Wert des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials die Darstellung

$$\widetilde{D^\bullet\phi}(s) = \int_0^1 \widetilde{D^\bullet\gamma}(s, \tau) \widetilde{\phi}(\tau) d\tau, \quad s \in [0, 1]. \quad (27)$$

Wie aus Satz 2.15 folgt lässt sich die Lösung des inneren Dirichlet-Problems durch das hydrodynamische Doppelschichtpotential darstellen, und wir erhalten für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ die Darstellung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \overline{D^\bullet\gamma}(\mathbf{x}, \tau) \widetilde{\phi}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (28)$$

mit

$$\overline{D^\bullet\gamma}(\mathbf{x}, \tau) := D(\mathbf{x}, \gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)|.$$

Zur Bestimmung einer approximativen Darstellung von \mathbf{u} gehen wir in zwei Schritten vor:

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $h := 1/m$. Zunächst ersetzen wir die gesuchte Funktion $\widetilde{\phi}$ in (28) durch die Lagrange-Interpolierende

$$\widetilde{\phi}_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \widetilde{\phi}_m(\tau) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(\tau) = \sum_{j=1}^m \widetilde{\phi}(jh) \varphi_j(\tau) \quad (29)$$

mit einer stückweise linearen Funktion φ_j . Für die Funktionswerte in den Diskretisierungspunkten $\tau = ih$ für $i = 1, \dots, m$ gilt außerdem:

$$\varphi_j(ih) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (30)$$

$$(31)$$

Weiter definieren wir für $\mathbf{x} \in G$ den approximativen Ansatz

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) := \int_0^1 \overline{D^\bullet\gamma}(\mathbf{x}, \tau) \widetilde{\phi}_m(\tau) d\tau = \int_0^1 \overline{D^\bullet\gamma}(\mathbf{x}, \tau) \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(\tau) d\tau$$

als Näherung für $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Die unbekanntenen Koeffizienten $\alpha_j = \widetilde{\phi}(jh)$ bestimmen wir approximativ aus

einem mit dem Nyström-Verfahren diskretisierten System von Randintegralgleichungen, das im Folgenden hergeleitet wird. Dazu starten wir mit dem System (21): Für alle $\mathbf{x} \in \partial G$ gilt

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) + D\phi(\mathbf{x}) - \mathbf{N}(\mathbf{x}) \int_{\partial G} \phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, d\omega_{\mathbf{y}}.$$

Hieraus folgt für $s \in [0, 1]$ mit den obigen Bezeichnungen

$$\tilde{\mathbf{b}}(s) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}(s) + \int_0^1 \tilde{D}\boldsymbol{\gamma}(s, \tau) \tilde{\phi}(\tau) \, d\tau - \tilde{\mathbf{N}}(s) \int_0^1 \tilde{\phi}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\boldsymbol{\gamma}}(\tau) \, d\tau. \quad (32)$$

Im Rahmen des Nyström-Verfahrens approximieren wir die Integrale nun mit der summierten Trapezregel und erhalten das lineare Gleichungssystem ($i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(ih) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(ih) + h \sum_{k=1}^m \tilde{D}\boldsymbol{\gamma}(ih, kh) \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(kh) \\ &\quad - h \tilde{\mathbf{N}}(ih) \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(kh) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\boldsymbol{\gamma}}(kh) \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha_i + h \sum_{j=1}^m \tilde{D}\boldsymbol{\gamma}(ih, jh) \alpha_j - h \tilde{\mathbf{N}}(ih) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{\boldsymbol{\gamma}}(jh) \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha_i + h \sum_{j=1}^m \left(\tilde{D}\boldsymbol{\gamma}(ih, jh) - \mathcal{N}(ih, jh) \right) \alpha_j \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{N}(ih, jh) := \begin{pmatrix} \tilde{N}_1(ih) (\tilde{N}_{\boldsymbol{\gamma}})_1(jh) & \tilde{N}_1(ih) (\tilde{N}_{\boldsymbol{\gamma}})_2(jh) \\ \tilde{N}_2(ih) (\tilde{N}_{\boldsymbol{\gamma}})_1(jh) & \tilde{N}_2(ih) (\tilde{N}_{\boldsymbol{\gamma}})_2(jh) \end{pmatrix} \quad (33)$$

zur Bestimmung der Koeffizienten α_j . Wir setzen nun für $\mathbf{x} \in G$

$$\mathcal{U}_m(\mathbf{x}) = h \sum_{j=1}^m \overline{D}\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, jh) \alpha_j$$

als Näherung für $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ und somit als Näherung für $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, den Geschwindigkeitsanteil der exakten Lösung des Dirichlet-Problems im Punkt $\mathbf{x} \in G$.

3.2 Konvergenzuntersuchung

Wir untersuchen nun, wie gut \mathcal{U}_m den Geschwindigkeitsanteil \mathbf{u} der exakten Lösung des Dirichlet-Problems approximiert. Für den Fehler

$$R_m(\mathbf{x}) := |\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_m(\mathbf{x})|$$

im Punkt $\mathbf{x} \in G$ gilt

$$\begin{aligned} R_m(\mathbf{x}) &= |\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}(\mathbf{x}) + \mathcal{U}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_m(\mathbf{x})| \\ &\leq |\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}(\mathbf{x})| + |\mathcal{U}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_m(\mathbf{x})| \\ &=: R'_m(\mathbf{x}) + R''_m(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Zunächst schätzen wir $R'_m(\mathbf{x})$ ab.

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir für die Einträge der Matrix $\overline{D\boldsymbol{\gamma}}$ aus (26)

$$\begin{aligned} \left| (\overline{D\boldsymbol{\gamma}})_{ij}(\mathbf{x}, t) \right| &= \left| \frac{(x_i - \gamma_i(t))(x_j - \gamma_j(t))}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^2} \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot N(\boldsymbol{\gamma}(t))}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^2} |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)| \right| \\ &\leq \left| \frac{(x_i - \gamma_i(t))(x_j - \gamma_j(t))}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)|^2} \right| \frac{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)|} \\ &\leq \frac{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)|} \leq \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|_\infty}{\text{dist}(\mathbf{x}, \partial G)} \end{aligned}$$

mit $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial G) := \inf_{\mathbf{y} \in \partial G} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Außerdem gilt für die i -te Komponente der Vektoren $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_m$

$$(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_m)_i(\tau) = \sum_{j=1}^m (\alpha_j)_i \varphi_j(\tau) := \sum_{j=1}^m \tilde{\phi}_i(jh) \varphi_j(\tau). \quad (34)$$

Mit dem Mittelwertsatz erhält man für eine Funktion $\tilde{\boldsymbol{\phi}} \in C^1([0, 1])^2$

$$(\alpha_j)_i = \tilde{\phi}_i(jh) = \tilde{\phi}_i(\tau) + \tilde{\phi}'_i(\xi_j)(jh - \tau)$$

mit einem $\tau \in [(j-1)h, jh]$ und einem $\xi_j \in [\tau, jh]$. Setzt man diese Darstellung in (34) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\phi}_m)_i(\tau) &= \sum_{j=1}^m \left(\tilde{\phi}_i(\tau) + \tilde{\phi}'_i(\xi_j)(jh - \tau) \right) \varphi_j(\tau) \\
 &= \tilde{\phi}_i(\tau) + \sum_{j=1}^m \tilde{\phi}'_i(\xi_j)(jh - \tau) \varphi_j(\tau).
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{\phi}(\tau) - \tilde{\phi}_m(\tau) \right| &= \left| \sum_{i=1}^2 \left(\tilde{\phi}_i(\tau) - \tilde{\phi}_i(\tau) - \sum_{j=1}^m \tilde{\phi}'_i(\xi_j)(jh - \tau) \varphi_j(\tau) \right) \right|^2 \Big|^{1/2} \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^2 \left| \sum_{j=1}^m \tilde{\phi}'_i(\xi_j)(jh - \tau) \varphi_j(\tau) \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^m |\tilde{\phi}'_i(\xi_j)| |(jh - \tau)| \varphi_j(\tau) \right)^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq Mh \quad \text{mit} \quad M := \sqrt{2} \max_{i=1,2} |\tilde{\phi}'_i|.
 \end{aligned}$$

Für den Fehler $R'_m(\mathbf{x})$ erhält man damit im Fall $\tilde{\phi} \in C^1([0, 1])^2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 R'_m(\mathbf{x}) &= \left| \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathcal{U}(\mathbf{x}) \right| = \left| \int_0^1 \tilde{D}^\bullet \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \tau) (\tilde{\phi}(\tau) - \tilde{\phi}_m(\tau)) d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^1 \left| \tilde{D}^\bullet \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \tau) (\tilde{\phi}(\tau) - \tilde{\phi}_m(\tau)) \right| d\tau \\
 &\leq \int_0^1 \left(2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\tilde{D}^\bullet \boldsymbol{\gamma})_{ij}^2(\mathbf{x}, \tau) (\tilde{\phi}_j(\tau) - (\tilde{\phi}_m)_j(\tau))^2 \right)^{1/2} d\tau \\
 &\leq 2 \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|_\infty}{\text{dist}(\mathbf{x}, \partial G)} \int_0^1 \left| \tilde{\phi}(\tau) - \tilde{\phi}_m(\tau) \right| d\tau \leq 2 \frac{M \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|_\infty}{\text{dist}(\mathbf{x}, \partial G)} h
 \end{aligned}$$

mit der Konstanten M und $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial G)$ wie oben.

Wir wollen noch den Fehler $R''_m(\mathbf{x})$ abschätzen. Dabei gehen wir von dem Randintegralgleichungssystem (32) aus

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(s) = & \frac{1}{2} \tilde{\phi}(s) + \int_0^1 \tilde{D} \cdot \gamma(s, \tau) \tilde{\phi}(\tau) d\tau \\ & - \tilde{\mathbf{N}}(s) \int_0^1 \tilde{\phi}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_\gamma(\tau) d\tau, \quad s \in [0, 1] \end{aligned}$$

aus und definieren die Operatoren

$$T, T_m : C([0, 1])^2 \rightarrow C([0, 1])^2$$

durch

$$T\tilde{\phi}(s) := 2 \int_0^1 \mathcal{D}(s, \tau) \tilde{\phi}(\tau) d\tau \quad (35)$$

mit

$$\mathcal{D}_{ij}(s, \tau) := (\tilde{D} \cdot \gamma)_{ij}(s, \tau) - \tilde{N}_i(s) (\tilde{N}_\gamma)_j(\tau), \quad i, j = 1, 2 \quad (36)$$

und

$$T_m \tilde{\phi}(s) := 2h \sum_{j=1}^m \mathcal{D}(s, jh) \tilde{\phi}(jh) \quad (37)$$

mit der Matrix $\mathcal{D}(s, jh)$ wie oben. Wenn wir weiter $\tilde{\beta} := 2\tilde{\mathbf{b}}$ setzen, schreibt sich das Randintegralgleichungssystem für das innere Dirichlet-Problem, wie folgt:

$$\tilde{\beta} = \tilde{\phi} + T\tilde{\phi}. \quad (38)$$

Um den entsprechenden Konvergenzsatz zu formulieren benötigen wir den Begriff der kollektiven Kompaktheit.

Definition 3.1 Eine Menge $\mathcal{F} = \{F \mid X \rightarrow Y\}$ von linearen Operatoren F aus einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt kollektiv kompakt, falls für jede beschränkte Menge $U \subset X$ die Bildmenge

$$\{F\varphi \mid \varphi \in U, F \in \mathcal{F}\}$$

relativ kompakt ist, d.h. ihr Abschluss kompakt ist. Eine Folge (F_n) heißt kollektiv kompakt, wenn die korrespondierende Menge kollektiv kompakt ist.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt

Satz 3.2 *Es gelten folgende Aussagen*

- *Das System*

$$\tilde{\beta} = \tilde{\phi}_m + T_m \tilde{\phi}_m. \quad (39)$$

mit T_m aus (37) ist eindeutig lösbar, und die Folge der Näherungslösungen $(\tilde{\phi}_m)$ konvergiert gegen $\tilde{\phi}$ aus (28).

- *Ist $\mathcal{A} = (\alpha_1 \dots \alpha_m)^T$ eine Lösung des linearen Gleichungssystem*

$$\tilde{\beta}(ih) = \alpha_i + 2h \sum_{j=1}^m \mathcal{D}(ih, jh) \alpha_j \quad (40)$$

mit \mathcal{D} aus (36), so ist

$$\tilde{\phi}_m(s) = \tilde{\beta}(s) - 2h \sum_{j=1}^m \mathcal{D}(ih, jh) \alpha_j \quad (41)$$

eine Lösung des Näherungssystems

$$\tilde{\beta} = \tilde{\phi}_m + T_m \tilde{\phi}_m.$$

- *Das lineare Gleichungssystem (40) ist eindeutig lösbar.*
- *Für $m \rightarrow \infty$ konvergiert $R_m''(\mathbf{x})$ gegen Null.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus bekannten Resultaten zur Konvergenz des Randelemente-Kollokationsverfahrens [30, S.145-153]: Zunächst wird nachgewiesen, dass die Folge T_m kollektiv kompakt und punktweise gegen T konvergent ist. Weiter zeigt man, dass die Konvergenz $T_m \rightarrow T$ auf kompakten Teilmengen von $C([0, 1])^2$ gleichmäßig erfolgt. Durch Nachweis von

$$\|(T_m - T) T_m\| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|(T_m - T) T\| \rightarrow 0$$

folgt man weiter die Existenz des inversen Operators $(I - T_m)^{-1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(I - T_m)^{-1} (T_m - T) T_m\| < 1$$

und somit die eindeutige Lösbarkeit des Näherungssystems

$$\tilde{\beta} = \tilde{\phi}_m + T_m \tilde{\phi}_m$$

sowie die Konvergenz der Folge der Näherungen $(\tilde{\phi}_m)$ gegen $\tilde{\phi}$ aus (28). Die zweite Behauptung des Satzes zeigt man durch Einsetzen von (40) in (41) für $s = ih$.

Für die dritte Aussage führt man einen Widerspruchsbeweis durch, in dem die Existenz zwei verschiedener Lösungen von (40) zum Widerspruch zur eindeutigen Lösbarkeit des Näherungssystems (39) führt. Mit dieser Erkenntnis folgt sofort die vierte Behauptung.

4 Iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Bei der Diskretisierung der Randintegralgleichungen aus Kapitel 3 entstehen lineare Gleichungssysteme der Form

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (42)$$

mit einer vollbesetzten, regulären und nicht symmetrischen Systemmatrix \mathbf{A} . Bei einer kleinen Anzahl von Unbekannten kann man für die Lösung dieser Gleichungssysteme direkte Verfahren verwenden. Um eine ausreichende Genauigkeit der Näherungslösung zu erreichen, benötigen viele praxisrelevante Problemstellungen jedoch sehr große Gleichungssysteme. Deswegen ist es zweckmäßig iterative Verfahren einzusetzen, bei denen nur Produkte der Systemmatrix mit einer Folge von Vektoren auftreten. Bei solchen Verfahren muss nicht die Systemmatrix gespeichert werden, sondern nur eine Berechnungsvorschrift für die Matrix-Vektor-Multiplikation. Realisiert werden diese Forderungen durch Verfahren vom CG-Typ, siehe zum Beispiel [59] oder [46], oder durch das Broyden-Verfahren mit kompakter Speicherung wie in [67], [3]. Da das System (42) durch Diskretisierung entsteht, muss die Iteration nur so lange durchgeführt werden, bis die erreichte Genauigkeit etwa dem Diskretisierungsfehler der Randintegralgleichungen entspricht.

4.1 Das Verfahren GMRES

4.1.1 Krylov-Unterraum-Verfahren und Arnoldi-Algorithmus

Ein Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen \mathbf{x}_k des Systems (42) unter der Bedingung $\mathbf{x}_k \in \mathbf{x}_0 + K_k := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in K_k\}$ und

$$(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k) \perp L_k, \quad (43)$$

wobei die Anfangsnäherung $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig ist, und K_k sowie L_k k -dimensionale Unterräume des \mathbb{R}^n repräsentieren, nennt man eine *Projektionsmethode*. Die Orthogonalitätsbedingung ist hierbei durch das Skalarprodukt mittels

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

definiert. Gilt $K_k = L_k$, so besagt (43), dass der Residuenvektor

$$\mathbf{r}_k := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k \quad (44)$$

senkrecht auf K_k steht. In diesem Fall liegt eine orthogonale Projektionsmethode vor und (43) heißt Galerkin-Bedingung.

Für $K_k \neq L_k$ liegt eine schiefe Projektionsmethode vor und (43) bezeichnet man als Petrov-Galerkin-Bedingung.

Definition 4.1 Eine Krylov-Unterraum-Methode ist eine Projektionsmethode, bei der K_k den k -ten Krylov – Unterraum

$$K_k = K_k(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) := \text{span} \{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0 \}$$

repräsentiert, der durch die Anfangsnäherung \mathbf{x}_0 , den zugehörigen Residuenvektor \mathbf{r}_0 und die Systemmatrix \mathbf{A} erzeugt ist.

Eine Krylov-Unterraum-Methode ist z. B. der Arnoldi-Algorithmus, mit dem man eine starkbesetzte Matrix in die Hessenbergform (siehe unten) bringen kann. Dabei wird die orthonormale Basis des Krylov-Unterraums konstruiert. Im Folgenden steht $|\cdot|$ wie oben für die euklidische Norm. Betrachtet man zudem ausschließlich normierte Basisvektoren, kann der Arnoldi-Algorithmus wie folgt formuliert werden (vgl. [46, S. 130]):

Arnoldi-Algorithmus

1. Wähle $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v}_1 := \mathbf{r}_0/|\mathbf{r}_0|$
2. **for** $k := 1, 2, \dots$ **do**
3. **begin**
4. **for** $i := 1(1)k$ **do** $h_{ik} := \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}\mathbf{v}_k$
5. $\mathbf{w}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^k h_{ik}\mathbf{v}_i$
6. $h_{k+1,k} := |\mathbf{w}_k|$
7. **if** $h_{k+1,k} = 0$ **then** $\mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{0}$ **und STOP**
8. $\mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{w}_k/h_{k+1,k}$
9. **end**

Wir geben noch einige Eigenschaften des Arnoldi-Algorithmus an (vgl. [59, S. 146-147]):

Satz 4.2 Vorausgesetzt, der Arnoldi-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ ab, dann stellt $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ eine Orthonormalbasis des k -ten Krylov-Unterraums $K_k = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}_1\}$ dar.

Satz 4.3 Es sei $\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k]$ die $n \times k$ -Matrix, deren Spalten die orthonormale Basis von K_k bilden. Nach k Schritten des Arnoldi-Prozesses hat man eine orthonormale Basis \mathbf{V}_{k+1} und eine $(k+1) \times k$ -dimensionale obere Hessenberg-Matrix

$$\overline{\mathbf{H}}_k := \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1k} \\ h_{21} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & h_{k,k-1} & h_{kk} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{k+1,k} \end{bmatrix} \quad (45)$$

mit Vollrang k . Die Vektorrekursion im Iterationsschritt des Arnoldi-Prozesses kann in Matrixdarstellung geschrieben werden als

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1} \overline{\mathbf{H}}_k. \quad (46)$$

4.1.2 Beschreibung des GMRES-Verfahrens

Eine weitere Krylov-Unterraum-Methode ist GMRES (Generalized Minimal Residual). GMRES wurde von Saad und Schultz 1986 vorgestellt (vgl. [59]). Das Verfahren kann formal als direktes oder iteratives Verfahren aufgefasst werden. Die Verwendung des GMRES-Verfahrens in seiner direkten Form ist jedoch in der Regel aufgrund des benötigten Speicherplatzes nicht praktikabel (vgl. [59, S.157-172], [46, S. 144-145]).

Das Ziel bei GMRES ist, $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k \approx \mathbf{0}$ in einem gewissen Sinne zu erreichen. Einen Zugang erhält man, indem GMRES als eine Minimierungsaufgabe im Krylov-Unterraum betrachtet wird. Dabei nutzt man die Beziehung (46) aus und ermittelt mit $\mathbf{V}_k = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ den gesuchten Vektor $\mathbf{x}_k \in \mathbf{x}_0 + K_k$ in der Form

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k \quad (47)$$

mit $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^k$. Dafür definieren wir eine Funktion $J_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathbf{y} \mapsto |\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y})| \quad (48)$$

und suchen ein \mathbf{y}_k , das die obige Funktion (48) minimiert:

$$\mathbf{y}_k := \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} J_k(\mathbf{y}). \quad (49)$$

Wir wollen weiter eine möglichst einfache Strategie zur Berechnung von \mathbf{y}_k finden und die Berechnung erst ausführen, wenn

$$|\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k| \leq \varepsilon$$

mit einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke $\varepsilon > 0$ gilt. Weiter setzen wir wie im Arnoldi-Algorithmus $\mathbf{v}_1 := \mathbf{r}_0 / |\mathbf{r}_0|$ und erhalten mit (46)

$$\begin{aligned} J_k(\mathbf{y}) &= |\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y})| \\ &= |\mathbf{r}_0 - \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{y}| \\ &= | |\mathbf{r}_0| \mathbf{v}_1 - \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{y} | \\ &= | |\mathbf{r}_0| \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{k+1} \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y} | \\ &= | \mathbf{V}_{k+1} (|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}) |. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ der erste Einheitsvektor und $\overline{\mathbf{H}}_k$ wie in (45) definiert.

Die durch (47) und (49) gegebene Formulierung des Problems ermöglicht uns die Berechnung des minimalen Fehlers

$$\min_{\mathbf{x}_k \in \mathbf{x}_0 + K_k} |\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k|$$

ohne \mathbf{x}_k explizit ermitteln zu müssen.

Eine Möglichkeit für die Lösung des Problems

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} |\mathbf{V}_{k+1}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y})|$$

ist, $\overline{\mathbf{H}}_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ in Dreiecksform zu bringen, z. B. durch das Produkt mit einer Rotationsmatrix (vgl. [59, S. 162-163]):

$$\mathbf{Q}_k \overline{\mathbf{H}}_k = \overline{\mathbf{R}}_k.$$

Dabei ist $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ eine orthogonale Matrix mit $\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k = \mathbf{I}_{k+1}$ und $\overline{\mathbf{R}}_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $\overline{\mathbf{R}}_k = (r_{ij})$ mit $r_{ij} = 0$ für $i > j$ (vgl. [46, S. 145f.]).

Wir definieren den Vektor $\overline{\mathbf{g}}_k \in \mathbb{R}^{k+1}$ durch

$$\overline{\mathbf{g}}_k := \mathbf{Q}_k |\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 = \left(g_1^{(k)}, \dots, g_k^{(k)}, g_{k+1} \right)^T = \left(\mathbf{g}_k^T, g_{k+1} \right)^T \quad (50)$$

und erhalten mit den orthonormalen Vektoren von \mathbf{V}_{k+1}

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} J_k(\mathbf{y}) &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} |\mathbf{V}_{k+1}(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y})| \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} | |\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y} | \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} |\mathbf{Q}_k(|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1 - \overline{\mathbf{H}}_k \mathbf{y})| \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} |\overline{\mathbf{g}}_k - \overline{\mathbf{R}}_k \mathbf{y}| \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} \sqrt{|\mathbf{g}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{y}|^2 + |g_{k+1}|^2} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Das Minimum $\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} J_k$ wird dabei im Fall $|\mathbf{g}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{y}|^2 = 0$ erreicht. Durch die Regularität der Matrix \mathbf{R}_k ergibt sich dann die Beziehung

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{g}_k. \quad (51)$$

Liegt der Fall $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$ vor, so erhalten wir sogar

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} J_k(\mathbf{y}) = 0.$$

Damit erhält man die Lösung \mathbf{y} durch die Lösung des Dreieckssystems, das man durch Streichen der letzten Zeile von $\overline{\mathbf{R}}_k$ und der letzten Komponente von $\overline{\mathbf{g}}_k$ erhält. Für die Norm des Residuums folgt $|\mathbf{r}_k| = |g_{k+1}|$.

Man bekommt also Informationen über die Norm des Residuums, ohne das Residuum oder \mathbf{y}_k bzw. \mathbf{x}_k explizit zu berechnen, und kann somit ohne Durchführung nutzloser Rechnungen über die Beendigung des Iterationsprozesses entscheiden.

Uns bleibt jetzt also nur noch die Matrix \mathbf{Q}_k zu beschreiben. Wir konstruieren sie als Produkt von *Givens-Drehungen* wie folgt:

$$\mathbf{Q}_k := \mathbf{G}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_1.$$

Dabei ist $\mathbf{G}_j \in \mathbb{R}^{k+1, k+1}$ die Rotationsmatrix, die die Einheitsvektoren e_j und e_{j+1} um den Winkel $-\phi$ dreht. Sie unterscheidet sich von der Einheitsmatrix \mathbf{I}_{k+1} nur in den vier Elementen $(\mathbf{G}_j)_{jj} = (\mathbf{G}_j)_{j+1, j+1} = c$, $(\mathbf{G}_j)_{j, j+1} = s$ und $(\mathbf{G}_j)_{j+1, j} = -s$, wobei $c^2 + s^2 = 1$ gilt. Der Wert ϕ ist durch die Bedingungen $c = \cos \phi$ und $s = \sin \phi$ festgelegt.

Wendet man die Givens-Drehungen auf $\overline{\mathbf{H}}_k$ an, so erhält man die obere Dreiecksmatrix $\overline{\mathbf{R}}_k$. Im nächsten Schritt werden die letzte Zeile und Spalte von $\overline{\mathbf{H}}_{k+1}$ angefügt. Um $\overline{\mathbf{R}}_{k+1}$ zu erhalten, müssen zuerst die bisher durchgeführten Givens-Drehungen auch auf die neue Spalte angewendet werden. Die sich daraus ergebende $(k+2) \times (k+1)$ -Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{G}_k \cdots \mathbf{G}_1 \overline{\mathbf{H}}_{k+1} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1k} & r_{1, k+1} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & r_{kk} & r_{k, k+1} \\ 0 & \dots & 0 & r \\ 0 & \dots & 0 & h \end{bmatrix}.$$

Der Wert $h = h_{k+2, k+1}$ wurde durch die vorangegangenen Givens-Drehungen nicht geändert. Die nächste Drehung \mathbf{G}_{k+1} hat das Ziel, h zu eliminieren. Das wird durch die Wahl von

$$c_{k+1} = r/\rho, \quad s_{k+1} = h/\rho \quad \text{mit} \quad \rho = \sqrt{r^2 + h^2}$$

erreicht. Man erhält $r_{k+1, k+1} = \rho$ und $r_{k+2, k+1} = 0$. Die Drehungen \mathbf{G}_j müssen auch auf $|\mathbf{r}_0| \mathbf{e}_1$ angewendet werden. Im folgenden Lemma fassen wir alles zusammen (vgl. [59, S. 160], [46, S. 147]):

Satz 4.5 Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $h_{j+1,j}$ und \mathbf{w}_j durch den Arnoldi-Algorithmus berechnet und gelte $j < n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Für die Folge der Krylov-Unterräume gilt

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots K_j = K_{j+1} = \dots$$

(2) Das GMRES-Verfahren liefert im j -ten Schritt die exakte Lösung.

(3) $\mathbf{w}_j = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

(4) $h_{j+1,j} = 0$.

Weitere Konvergenzaussagen für das GMRES-Verfahren werden in [48, S. 48f.] hergeleitet.

Das GMRES-Verfahren weist aber auch Nachteile auf. Die Problematik liegt im Rechenaufwand zur Bestimmung der Orthonormalbasis, die linear mit der Dimension des Krylov-Unterraums anwächst. Desweiteren ergibt sich ein hoher Speicherplatzbedarf für die Basisvektoren. Bei praxisrelevanten Problemen übersteigt dieser oftmals die vorhandenen Ressourcen. Deswegen wird oft ein GMRES-Verfahren mit Restart GMRES(k) verwendet, bei dem die maximale Krylov-Unterraumdimension beschränkt wird. Weist das Residuum $|\mathbf{r}_k|$ bei Erreichen dieser Obergrenze nicht eine vorgegebene Genauigkeit $|\mathbf{r}_k| \leq \varepsilon > 0$ auf, so wird dennoch die zur Zeit optimale Näherungslösung \mathbf{x}_k bestimmt und als Startvektor innerhalb eines Restarts verwendet [59, S. 167].

4.1.3 Implementierung

Anschließend geben wir die Implementierung des GMRES-Algorithmus an:

GMRES-Algorithmus:

Wähle einen Startwert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und die Genauigkeit ε ;

$b := |\mathbf{b}|$;

$\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$;

$\mathbf{v}_1 := \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$;

$\mathbf{s} := |\mathbf{r}| \mathbf{e}_1$;

$i := 0$;

repeat

$i := i + 1;$

$\mathbf{w} := \mathbf{A}\mathbf{v}_i;$

for $k := 1(1)i$ **do**

begin

$h_{ki} := \mathbf{w}^T \mathbf{v}_k;$

$\mathbf{w} := \mathbf{w} - h_{ki} \mathbf{v}_k$

end;

$h_{i+1,i} := |\mathbf{w}|;$

$\mathbf{v}_{i+1} := \mathbf{w}/h_{i+1,i};$

Wende $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{i-1}$ auf $\mathbf{h}_i = [h_{1i} \cdots h_{i+1,i}]^T$ an;

Konstruiere \mathbf{G}_i , welches h_{ii} und $h_{i+1,i}$ so verändert, dass $(\mathbf{G}_i \mathbf{h}_i)_{i+1} = 0;$

$\mathbf{s} := \mathbf{G}_i \mathbf{s}$

until $s_{i+1} \leq \varepsilon b;$

Berechne \mathbf{y} als Lösung von $\mathbf{H}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{s}}$, wobei $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{i \times i}$ die aus den h_{ij} bestehende obere Dreiecksmatrix ist, und $\tilde{\mathbf{s}}$ aus den ersten i Komponenten von \mathbf{s} besteht;

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^i y_j \mathbf{v}_j.$$

GMRES liefert nach k Schritten die Näherungslösung \mathbf{x}_k . Es werden dabei die folgenden Operationen benötigt:

Summen: $n(k^2 + 3k + 3) + k^2 - 2k - 2;$

Multiplikationen: $n(k^2 + 4k + 3) + \frac{5}{2}k^2 + \frac{9}{2}k;$

Quadratwurzelberechnungen: $2k + 2;$

Matrix-Vektor-Multiplikationen: $k + 1.$

Gespeichert werden müssen die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{k+1}$, die Parameter der Givens-Drehungen und die obere Dreiecksmatrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{k \times k}$; es werden also $n(k+1) + \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 1$ Speicherplätze benötigt.

4.2 Das Good-Broyden-Verfahren

4.2.1 Beschreibung des Good-Broyden - Verfahrens

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel wieder mit der Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (42): Gesucht ist die Lösung \mathbf{x}^* der Gleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

mit der Funktion $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$. Diese Aufgabe kann z.B. mit dem Broyden-Verfahren gelöst werden. Dies ist ein iteratives Quasi-Newton-Verfahren für allgemeine nichtlineare Gleichungen, es kann aber auch auf nicht symmetrische lineare Systeme als Spezialfall angewendet werden.

Beim Broyden-Verfahren wird die Funktion \mathbf{F} durch eine affin lineare Funktion $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) + \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \quad (53)$$

ersetzt, die \mathbf{F} in der Umgebung der letzten Iterierten $\mathbf{x}_{\mathbf{k}}$ in einem gewissen Sinne approximiert. Die neue Iterierte $\mathbf{x}_{\mathbf{k}+1}$ ergibt sich dann als eine Lösung der Ersatzaufgabe

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

bzw. als eine Approximation für eine solche Nullstelle (vgl. [67]).

Zur Festlegung der noch freien Parameter $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{B}_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verwendet man nur Funktionswerte und höchstens Ableitungen erster Ordnung von \mathbf{F} . Dazu ist pro Schritt die Berechnung der Jacobi-Matrix erforderlich, was aus verschiedenen Gründen häufig nicht erwünscht ist. Daher benötigt man solche Verfahren, die ohne die explizite Verwendung der partiellen Ableitungen auskommen. Außerdem sollten die Funktionswertkosten und die zur Bestimmung von $\mathbf{x}_{\mathbf{k}+1}$ erforderlichen algebraischen Kosten möglichst gering sein im Verhältnis zur erreichbaren Konvergenzgeschwindigkeit. Für so ein Verfahren nimmt man an, dass durch ein Iterationsverfahren für genügend gute Startwerte eine gegen \mathbf{x}^* konvergente Folge $(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}}$ erzeugt wird, die man in der Form

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}+1} = \mathbf{x}_{\mathbf{k}} + \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \quad \text{für alle } \mathbf{k} \geq 0 \quad (54)$$

mit den Korrekturen $\mathbf{s}_{\mathbf{k}}$ schreibt. Wenn der Vektor $\mathbf{s}_{\mathbf{k}}$ die Newton-Korrektur $-\mathbf{F}'(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})$ approximieren soll, ist es naheliegend, den Ansatz

$$\mathbf{s}_{\mathbf{k}} = -\mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \quad (55)$$

mit einer noch festzulegenden regulären Matrix $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ zu wählen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die affin lineare Ersatzfunktion (53) mit einer regulären Matrix $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ gebildet, und die Interpolationsforderung $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})$ erfüllt

wird. Im Weiteren stellen wir so ein Verfahren vor:

Wir nehmen an, dass eine Näherung $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}$ und eine reguläre Approximation \mathbf{B}_k für $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)$ bekannt ist. Dann wird

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (56)$$

berechnet, und wegen $\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$ ist die Änderung \mathbf{s}_k von Null verschieden. Die neue Approximation \mathbf{B}_{k+1} für $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_{k+1})$ soll dann so bestimmt werden, dass die als *Quasi-Newton-Gleichung* bezeichnete Bedingung

$$\mathbf{B}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (57)$$

erfüllt ist. Außerdem soll \mathbf{B}_{k+1} aus \mathbf{B}_k durch die Modifikation

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \mathbf{u} \mathbf{v}^T \quad (58)$$

mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ entstehen. Hier und im Folgenden wird $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$ in Sinne der Matrixmultiplikation zwischen einer $n \times 1$ -Matrix \mathbf{u} und einer $1 \times n$ -Matrix \mathbf{v}^T verstanden. Mit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$$

erhält man

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{s}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{u}(\mathbf{v}^T \mathbf{s}_k) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}(\mathbf{v}^T \mathbf{s}_k)$$

und damit

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})}{\mathbf{v}^T \mathbf{s}_k},$$

wobei hier und im Folgenden $\mathbf{v}^T \mathbf{s} \in \mathbb{R}$ das Produkt einer $1 \times n$ -Matrix \mathbf{v}^T und einer $n \times 1$ -Matrix \mathbf{s} darstellt. Die Wahl von $\mathbf{v}_k = \mathbf{s}_k$ in jedem Iterationsschritt führt zum so genannten *Good-Broyden-Verfahren*: Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}_k + \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A} \mathbf{s}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \end{aligned}$$

ergibt sich aus (58)

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + (\mathbf{A} - \mathbf{B}_k) \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}. \quad (59)$$

Wie im Abschnitt über GMRES bezeichne $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k$ das Residuum zu \mathbf{x}_k . Für die reguläre Matrix \mathbf{B}_k sei die Matrix

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k^{-1} \quad (60)$$

eine Approximation für \mathbf{A}^{-1} . Aus

$$\mathbf{B}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k$$

erhält man dann mit (60)

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{r}_k. \quad (61)$$

Für die praktische Realisierung des Good-Broyden - Verfahrens kann man die durch Anwendung der Sherman-Morrison-Formel entstehende "inverse" Aufdatierungsformel

$$\mathbf{H}_{k+1} := \mathbf{H}_k + (\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{A} \mathbf{s}_k) \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{A} \mathbf{s}_k} \quad (62)$$

verwenden [67], die die Berechnung von \mathbf{H}_{k+1} aus \mathbf{H}_k mit $\mathcal{O}(n^2)$ algebraischen Operationen erlaubt.

Satz 4.6 Sei $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und gelte $|\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_0| \leq 1$. Dann ist die gute Aufdatierungsformel (59) von Broyden wohldefiniert, solange $x_k \neq x^*$ ist. Für $\mathbf{E}_k := \mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_k$ gilt $|\mathbf{E}_{k+1}| \leq |\mathbf{E}_k|$.

Man kann das Broyden-Verfahren verallgemeinern, indem die neue Iterierte \mathbf{x}_{k+1} aus \mathbf{x}_k durch Korrektur *entlang* der Richtung \mathbf{s}_k erzeugt wird: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{s}_k$. Für das Residuum \mathbf{r}_{k+1} ergibt sich entsprechend die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{A} \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{r}_k - \frac{t_k}{t_k} \mathbf{A} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{r}_k - t_k \mathbf{A} \mathbf{s}_k. \end{aligned}$$

Ideal wäre es, t_k so zu wählen, dass

$$|(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{k+1})| = |(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{k+1})(t_k)| = \min_{t \in \mathbb{R}} |(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{k+1})(t)| \quad (63)$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}^* - (\mathbf{x}_k + t \mathbf{s}_k) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{A}^{-1} t \mathbf{A} \mathbf{s}_k \\ &= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_k - t \mathbf{A} \mathbf{s}_k) = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{r}_k - t \mathbf{A} \mathbf{s}_k) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}_{k+1} \end{aligned}$$

kann (63) näherungsweise gelöst werden, indem t_k so gewählt wird, dass

$$|(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1})(t_k)| = \min_{t \in \mathbb{R}} |(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1})(t)|. \quad (64)$$

Dabei ist \mathbf{H}_{k+1} wie oben eine Approximation für \mathbf{A}^{-1} . Mit $\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{s}_{k+1}$ wird (64) zu

$$|\mathbf{s}_{k+1}(t_k)| = \min_{t \in \mathbb{R}} |\mathbf{s}_{k+1}(t)|. \quad (65)$$

Für \mathbf{s}_{k+1} erhält man aus (62) weiter

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{r}_{k+1} = \left(\mathbf{H}_k + (\mathbf{s}_k - \mathbf{z}_k) \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k} \right) (\mathbf{r}_k - t_k \mathbf{q}_k) \\ &= \mathbf{s}_k + (\mathbf{s}_k - \mathbf{z}_k) \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k} - t_k \mathbf{z}_k - t_k (\mathbf{s}_k - \mathbf{z}_k) \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k} \\ &= (1 - t_k + \tau_k) \mathbf{s}_k - \tau_k \mathbf{z}_k \quad \text{mit} \quad \tau_k := \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die quadrierte euklidische Norm von \mathbf{s}_{k+1} die Rechnung

$$\begin{aligned}|\mathbf{s}_{k+1}(t_k)|^2 &= ((1 - t_k + \tau_k) \mathbf{s}_k - \tau_k \mathbf{z}_k)^T ((1 - t_k + \tau_k) \mathbf{s}_k - \tau_k \mathbf{z}_k) \\ &= (1 - t_k + \tau_k)^2 \mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k - 2\tau_k (1 - t_k + \tau_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k + \tau_k^2 \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k \rightarrow \min_{t \in \mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Wir bestimmen das Minimum von $|\mathbf{s}_{k+1}(t_k)|^2$ als Nullstelle der ersten Ableitung:
Aus

$$-2(1 - t_k + \tau_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k + 2\tau_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k = 0$$

erhalten wir

$$t_k = \tau_k = \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k}.$$

Wir untersuchen weiter, wie sich das Good-Broyden - Verfahren bei Anwendung auf ein lineares Gleichungssystem verhält, und formulieren dafür die folgende Konvergenzaussage, deren Beweis in [67] zu finden ist.

Satz 4.7 Die Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert durch $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und regulärem $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gelten für jedes $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $|\mathbf{E}_k| < 1$, $\mathbf{E}_k := \mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_k$ die folgenden Aussagen:

- (i) \mathbf{B}_k und $\mathbf{I} - \mathbf{E}_k$ sind regulär, \mathbf{x}_{k+1} kann gemäß (56) gebildet werden, und es gelten

$$\mathbf{e}_{k+1} := \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* = \mathbf{E}_k \mathbf{s}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_k = -(\mathbf{I} - \mathbf{E}_k)^{-1} \mathbf{e}_k, \quad (66)$$

wobei $\mathbf{x}^* := \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ die eindeutige Lösung von $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ bezeichnet.

- (ii) Im Fall $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}$ ist $\mathbf{s}_k \neq \mathbf{0}$, und \mathbf{B}_{k+1} kann gebildet werden. Dann ist

$$\mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{E}_k \mathbf{R}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_k := \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{s}_k)^T}{(\mathbf{s}_k)^T \mathbf{s}_k}, \quad (67)$$

und es gelten

$$\mathbf{R}_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad (68)$$

und

$$|\mathbf{E}_{k+1}| \leq |\mathbf{E}_k|. \quad (69)$$

(iii) Das Broyden-Verfahren ist für jeden Startwert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede Startmatrix $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die der Bedingung $|\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_0| < 1$ genügt, durchführbar und endet nach N Schritten, $0 \leq N \leq 2n$, mit $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

4.2.2 Implementierung

Bei dem Good-Broyden - Verfahren werden nicht die Matrizen \mathbf{H}_k , sondern die Produkte $\mathbf{H}_k \mathbf{q}_k$ wie folgt berechnet und gespeichert:

Sei $\mathbf{z}_0 = \mathbf{H}_0 \mathbf{q}_0$. Dann gilt mit $\gamma_k := \mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k$ und $\sigma_k := \gamma_k \tau_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{q}_k = \left(\mathbf{H}_k + \frac{1}{\gamma_k} \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k (\mathbf{s}_k - \mathbf{z}_k) \right) \mathbf{q}_k \\ &= \mathbf{H}_k \mathbf{q}_k + \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{q}_k (\tau_k \mathbf{s}_k - \tau_k \mathbf{z}_k + \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k) \\ &= \mathbf{z}_k + \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{s}_k^T \mathbf{z}_k (\mathbf{s}_{k+1} - (1 - \tau_k) \mathbf{s}_k). \end{aligned}$$

Dann kann das **Good-Broyden - Verfahren** nach dem folgenden Algorithmus mit kompakter Speicherung wie in [3] realisiert werden :

Wähle Anfangswert \mathbf{x}_0 für \mathbf{x}^* , \mathbf{H}_0 für \mathbf{A}^{-1} und eine Genauigkeit ε ;

$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$;

$\mathbf{s}_0 := \mathbf{H}_0 \mathbf{r}_0$;

$\sigma_0 := \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0$;

$i := 0$;

repeat

$\mathbf{q}_i := \mathbf{A} \mathbf{s}_i$;

$\tilde{\mathbf{z}}_0 := \mathbf{H}_0 \mathbf{q}_i$;

if $i \geq 1$ **then**

for $k := 0(1) i - 1$ **do** $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} := \tilde{\mathbf{z}}_k + \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{s}_k^T \tilde{\mathbf{z}}_k (\mathbf{s}_{k+1} - (1 - \tau_k) \mathbf{s}_k)$;

$\mathbf{z}_i := \tilde{\mathbf{z}}_i$;

$\gamma_i := \mathbf{s}_i^T \mathbf{z}_i$;

$\tau_i := \sigma_i / \gamma_i$;

$\mathbf{x}_{i+1} := \mathbf{x}_i + \tau_i \mathbf{s}_i$;

$\mathbf{s}_{i+1} := \mathbf{s}_i - \tau_i \mathbf{z}_i$;

$\sigma_{i+1} := \mathbf{s}_{i+1}^T \mathbf{s}_{i+1}$;

$i := i + 1$;

until $\sqrt{\sigma_i} \leq \varepsilon |\mathbf{x}_i|$.

Das Verfahren liefert nach k Schritten die Näherungslösung \mathbf{x}_k . Es werden dabei die folgenden Operationen benötigt:

Summen: $n(\frac{3}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 2) - \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k - 1$;

Multiplikationen: $n(\frac{3}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 1) + k$;

Quadratwurzelberechnungen: $2k$;

Matrix-Vektor-Multiplikationen: $k + 1$.

Es müssen die Vektoren $\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_k, \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$ und die Skalare $\tau_k, \sigma_k \in \mathbb{R}$ gespeichert werden, also werden $n(k + 2) + 2k + 1$ Speicherplätze benötigt.

5 Komplexifizierung und Multipolentwicklungen

5.1 Reihen im Komplexen

Wir stellen zunächst einige Eigenschaften komplexer Reihen zusammen, die für die Multipolmethode benötigt werden

Satz 5.1 *Ist $a \in \mathbb{C}$ und f im Kreisring $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$ analytisch, dann gilt:*

Die Funktion f lässt sich in $z \in A$ als Laurent-Reihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}. \quad (70)$$

Beide Reihen der rechten Seite von (70) konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen, in A enthaltenen Kreisring. Die Koeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R).$$

Dabei durchläuft der Integrationsweg den Kreis genau einmal im positiven Sinne.

Fordert man Analytizität in einem Kreis anstelle eines Kreisringes, so gilt spezieller:

Satz 5.2 *Ist $a \in \mathbb{C}$ und f im Kreis $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$ analytisch, dann lässt sich f in jedem Punkt $z \in D$ in eine Taylor-Reihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$$

entwickeln. Die Funktion f ist analytisch in jedem Kreis

$$D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R_1\} \quad \text{mit} \quad R_1 < R,$$

und für das Restglied \mathcal{R}_n von

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (z - a)^{n-1} + \mathcal{R}_n$$

gilt

$$|\mathcal{R}_n| \leq \frac{R_1 M}{R_1 - |z - a|} \left(\frac{|z - a|}{R_1} \right)^n \quad \text{mit} \quad M = \max_{\zeta \in C_1} |f(\zeta)|. \quad (71)$$

Da die komplexe Exponentialfunktion e^z und der komplexe Logarithmus $\ln z$ im Folgenden eine große Rolle spielen, stellen wir ihre wichtigsten Eigenschaften noch einmal zusammen. Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$w = f(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Die Funktion e^z ist stetig auf \mathbb{C} .
- (2) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- (3) Ist $z = x + iy$, so gilt $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
- (4) Die Funktion e^z ist periodisch mit der (imaginären) Periode $2\pi i$, denn es gilt:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

- (5) Durch $f(z)$ wird jeder Periodenstreifen

$$S_k = \{ z = x + iy \mid -\infty < x < \infty, 2k\pi - \pi < y \leq 2k\pi + \pi \}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ umkehrbar eindeutig abgebildet. Es gibt also unendlich viele Umkehrfunktionen (Zweige der mehrdeutigen Umkehrfunktion) von e^z . Wir gewinnen diese auf folgende Weise:

Mit $z = x + iy$ und $w = e^z = |w| e^{i(\arg w + 2k\pi)}$, $w \neq 0$ folgen die Beziehungen

$$x = \ln |w| \quad \text{und} \quad y = \arg w + 2k\pi.$$

Die gesuchten Zweige der Umkehrfunktion werden also durch

$$z_k(w) = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad (-\pi < \arg w \leq \pi, k \in \mathbb{Z})$$

gegeben. Wir verwenden für $z_k(w)$ die Schreibweise $\log_k w$. Für $k = 0$ spricht man vom *Hauptwert des Logarithmus* und benutzt die Schreibweise $\log_0 w = \text{Log } w$. Die übrigen Werte heißen *Nebenwerte*. Sie ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addition ganzzahliger Vielfacher von $2k\pi$. Für reelle positive Argumente w stimmt $\text{Log } w$ mit $\ln w$ überein.

Außerdem gelten folgende Aussagen:

- (1) $\log z$ ist für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ erklärt, also beispielsweise auch für negative reelle Zahlen. Dabei sollte $z \in \mathbb{C}$ vor dem Logarithmieren in die Exponentialform gebracht werden.

- (2) Die verschiedenen Werte von $\log z$ stimmen im Realteil überein und unterscheiden sich im Imaginärteil um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π .
- (3) Die Identität $\text{Log}(wz) = \text{Log} w + \text{Log} z$ gilt im Komplexen nicht, da

$$\begin{aligned}\text{Log}(wz) &= \text{Log}(|w||z|) + i\chi \\ &= \text{Log}(|w||z|) + i\phi + i\psi + i\eta \\ &= (\text{Log}(|w|) + i\phi) + (\text{Log}(|z|) + i\psi) + i\eta \\ &= \text{Log} w + \text{Log} z + i\eta.\end{aligned}$$

Es gibt also einen Zweig von $\log w$, für den Folgendes gilt

$$\text{Log}(wz) = \log w + \text{Log} z.$$

5.2 Komplexifizierung der hydrodynamischen Potentiale

Im Folgenden wird mit Funktionen in \mathbb{C} gearbeitet und kein Unterschied zwischen einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und einem Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ gemacht, da \mathbb{R}^2 bekanntlich isomorph zu \mathbb{C} ist. Wir haben somit für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2) \leftrightarrow z = x_1 + i x_2, \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2) \leftrightarrow z_0 = y_1 + i y_2, \\ \mathbf{N} &= (N_1, N_2) \leftrightarrow N = n_1 + i n_2.\end{aligned}\tag{72}$$

Dann erhält man mit $\bar{N} = n_1 - i n_2$, $M := n_2 + i n_1$ und $\bar{M} = n_2 - i n_1$ die Darstellungen

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \frac{N}{z - z_0} &= \frac{|z - z_0|^2}{|z - z_0|^2} \operatorname{Re} \frac{(n_1 + i n_2)((x_1 - y_1) - i(x_2 - y_2))}{|z - z_0|^2} \\ &= \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{|z - z_0|^2} \frac{(n_1(x_1 - y_1) + n_2(x_2 - y_2))}{|z - z_0|^2} \\ &= \frac{n_1(x_1 - y_1)^3 + n_1(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)^2}{|z - z_0|^4} \\ &\quad + \frac{n_2(x_1 - y_1)^2(x_2 - y_2) + n_2(x_2 - y_2)^3}{|z - z_0|^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \frac{N}{(z - z_0)^2} &= \operatorname{Re} \frac{(n_1 + i n_2)((x_1 - y_1) - i(x_2 - y_2))^2}{|z - z_0|^4} \\ &= \frac{n_1(x_1 - y_1)^2 - n_1(x_2 - y_2)^2 + 2n_2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|z - z_0|^4}.\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\operatorname{Re} \frac{\bar{N}}{(z - z_0)^2} = \frac{n_1(x_1 - y_1)^2 - n_1(x_2 - y_2)^2 - 2n_2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|z - z_0|^4},$$

und somit

$$\frac{1}{4} \operatorname{Re}(z - z_0) \left(\operatorname{Re} \frac{N}{(z - z_0)^2} - \operatorname{Re} \frac{\bar{N}}{(z - z_0)^2} \right) = \frac{n_2(x_1 - y_1)^2(x_2 - y_2)}{|z - z_0|^4},$$

sowie

$$\frac{1}{4} \operatorname{Im}(z - z_0) \left(\operatorname{Re} \frac{M}{(z - z_0)^2} - \operatorname{Re} \frac{\bar{M}}{(z - z_0)^2} \right) = \frac{n_1(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)^2}{|z - z_0|^4}.$$

Für die Komponenten $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vom Kern des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials erhält man dann die folgende Darstellung im Komplexen:

$$D_{11} = \operatorname{Re} \frac{N}{z - z_0} + \frac{3}{4} \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{M}}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{M}{(z - z_0)^2} \\ - \frac{1}{4} \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{N}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{N}}{(z - z_0)^2},$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{4} \left(\operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{M}{(z - z_0)^2} - \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{M}}{(z - z_0)^2} \right. \\ \left. + \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{N}{(z - z_0)^2} - \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{N}}{(z - z_0)^2} \right),$$

$$D_{22} = \operatorname{Re} \frac{N}{z - z_0} - \frac{3}{4} \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{N}{(z - z_0)^2} - \frac{1}{4} \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{N}}{(z - z_0)^2} \\ - \frac{1}{4} \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{M}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{\overline{M}}{(z - z_0)^2}.$$

Um den Kern des Einfachschichtpotentials darzustellen, beachten wir die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_0} = (x_1 - y_1) \operatorname{Re} \frac{(x_1 - y_1) - i(x_2 - y_2)}{|z - z_0|^2} = \frac{(x_1 - y_1)^2}{|z - z_0|^2},$$

$$\operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_0} = \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|z - z_0|^2},$$

$$\operatorname{Im}(z_0 - z) \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_0} = \frac{(x_2 - y_2)^2}{|z - z_0|^2},$$

$$\operatorname{Re}(\log(z - z_0)) = \operatorname{Re}(\log|z - z_0| + i(\arg(z - z_0) + 2k\pi))$$

Die Komponenten $E_{ij} = E_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ des hydrodynamischen Einfachschichtpotentials haben dann die Darstellung:

$$E_{11} = \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_0} - \operatorname{Re}(\log(z - z_0)), \\ E_{12} = E_{21} = \operatorname{Im}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{1}{z - z_0}, \\ E_{22} = \operatorname{Im}(z_0 - z) \operatorname{Im} \frac{1}{z - z_0} - \operatorname{Re}(\log(z - z_0)).$$

5.3 Multipolentwicklung und ihre Transformation

In diesem Abschnitt werden Reihenentwicklungen für einzelne Bestandteile der komplexifizierten Kerne der hydrodynamischen Potentiale angegeben. Diese Entwicklungen bilden die Grundlage für den schnellen Multipolalgorithmus im sechsten Kapitel.

Lemma 5.3 *Seien $q \in \mathbb{R}$ und $N, z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt für jedes z mit $|z| > |z_0|$*

$$\Phi_{z_0}(z) := q \log(z - z_0) = q \left(\log z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0}{z} \right)^k \right), \quad (73)$$

$$\Phi_{z_0, N}(z) := \frac{qN}{z - z_0} = qN \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^k}{z^{k+1}}, \quad (74)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{z_0, N}(z) &:= \operatorname{Re}(z - z_0) \operatorname{Re} \frac{qN}{(z - z_0)^2} \\ &= qN \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z_0^k}{z^{k+2}} - qN \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z_0^k \operatorname{Re} z_0}{z^{k+2}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Beweis: Es gilt $\log(z - z_0) - \log z = \log\left(1 - \frac{z_0}{z}\right)$ mit $|\frac{z_0}{z}| < 1$. Die Identität (73) folgt jetzt aus der Reihenentwicklung

$$\log(1 - w) = (-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k},$$

die für alle $|w| < 1$ gilt. Weiter erhalten wir für die Entwicklungen von $\frac{1}{z - z_0}$ und $\frac{1}{(z - z_0)^2}$ für $|z| > |z_0|$ entsprechend

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z(1 - \frac{z_0}{z})} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z_0}{z} + \dots + \left(\frac{z_0}{z} \right)^n + \dots \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^k}{z^{k+1}}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - z_0)^2} &= \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{z_0}{z} + \dots + \left(\frac{z_0}{z} \right)^n + \dots \right)^2 \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^k}{z^k} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z_0^k}{z^{k+2}}. \end{aligned}$$

Damit folgen (74) und (75). □

In der Physik nennt man den Faktor $q := q_0 := q(z_0)$ in der Funktion Φ_{z_0} eine Punktladung in z_0 bzw. in der Funktion $\Phi_{z_0, N}$ eine Dipolladung in z_0 in Richtung $N := N_0 := N(z_0)$. Sind m Punktladungen q_i in Punkten z_i bzw. m Dipolladungen q_i in Punkten z_i in die Richtungen N_i gegeben, so spricht man von Ladungsmengen und ersetzt die Funktionen Φ_{z_0} , $\Phi_{z_0, N}$ bzw. $\tilde{\Phi}_{z_0, N}$ durch

$$\Phi(z) := \sum_{i=1}^m \Phi_{z_i}(z) := \sum_{i=1}^m q_i \log(z - z_i), \quad (76)$$

$$\Phi_N(z) := \sum_{i=1}^m \Phi_{z_i, N_i}(z) := \sum_{i=1}^m \frac{q_i N_i}{z - z_i}, \quad (77)$$

bzw. durch

$$\tilde{\Phi}_N(z) := \sum_{i=1}^m \tilde{\Phi}_{z_i, N_i}(z) := \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(z - z_i) \operatorname{Re} \frac{q_i N_i}{(z - z_i)^2} \quad (78)$$

Im folgenden Satz werden die Multipolentwicklungen solcher Ladungsmengen angegeben:

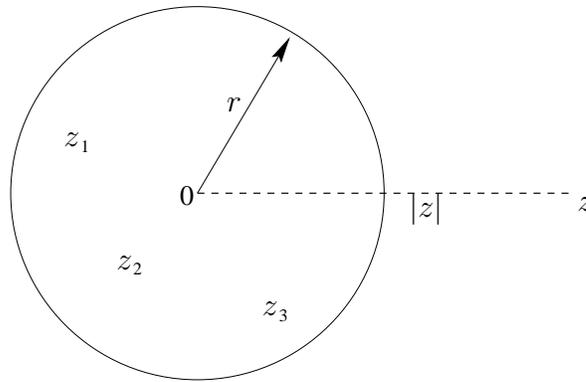


Abbildung 1: Multipolentwicklung einer Ladungsmenge

Satz 5.4 Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $q_i \in \mathbb{R}$ sowie $N_i, z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$ gegeben. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r > \max_{i=1, \dots, m} |z_i|$ (Abb. 1) für die oben definierten Funktionen Φ und Φ_N :

$$\Phi(z) = Q \log z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad \text{mit} \quad Q = \sum_{i=1}^m q_i, \quad a_k = \sum_{i=1}^m \frac{-q_i z_i^k}{k}. \quad (79)$$

Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \Phi(z) - Q \log z - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} = \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p \quad (80)$$

mit

$$c = \left| \frac{z}{r} \right|, \quad A = \sum_{i=1}^m |q_i| \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{A}{1 - |r/z|}. \quad (81)$$

Weiterhin hat man

$$\Phi_N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad \text{mit} \quad a_k = \sum_{i=1}^m q_i N_i z_i^{k-1}. \quad (82)$$

Hier gilt für jedes $p \in \mathbb{N}$ die Fehlerabschätzung

$$\left| \Phi_N(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \frac{A}{|z| - r} \left(\frac{r}{|z|} \right)^p \quad \text{mit} \quad A = \sum_{j=1}^m |q_j N_j|. \quad (83)$$

Man erhält außerdem

$$\tilde{\Phi}_N(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{z^{k+1}} \quad (84)$$

mit

$$a_k = k \sum_{i=1}^m q_i N_i z_i^{k-1}, \quad a'_k = k \sum_{i=1}^m q_i N_i z_i^{k-1} \operatorname{Re} z_i \quad (85)$$

und

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^p \quad \text{bzw.} \quad \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a'_k}{z^{k+1}} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^p \quad (86)$$

mit

$$\alpha = \frac{A(r + (p+1)(|z| - r))}{|z|(|z| - r)^2}, \quad A = \sum_{i=1}^m |q_i N_i| \quad \text{bzw.} \quad A = \sum_{i=1}^m |q_i N_i \operatorname{Re} z_i| \quad (87)$$

für jedes $p \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die Ausdrücke für die Multipolentwicklungen (79) und (82) erhält man unmittelbar aus dem obigen Lemma und der Definition von Φ und Φ_N . Für (78) hat man dann

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_N(z) &= \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \frac{q_j N_j}{(z - z_j)^2} - \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} \frac{q_j N_j}{(z - z_j)^2} \\ &=: \quad \quad \quad T_1 \quad \quad \quad - \quad \quad \quad T_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \frac{q_j N_j}{(z - z_j)^2} = \operatorname{Re} z \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \frac{q_j N_j}{(z - z_j)^2} \\
 &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m \frac{q_j N_j}{z^2} \left(1 + \frac{z_j}{z} + \frac{z_j^2}{z^2} + \dots \right)^2 \right) \\
 &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m \frac{q_j N_j}{z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_j^k}{z^k} \right)^2 \right) \\
 &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m \frac{q_j N_j}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_j^{k-1}}{z^{k-1}} \right) \\
 &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \right) \quad \text{mit} \quad a_k = k \sum_{j=1}^m q_j N_j z_j^{k-1}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} \frac{q_j N_j}{(z - z_j)^2} = \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \frac{q_j N_j \operatorname{Re} z_j}{(z - z_j)^2} \\
 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{z^{k+1}} \right) \quad \text{mit} \quad a'_k = k \sum_{j=1}^m q_j N_j z_j^{k-1} \operatorname{Re} z_j.
 \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzungen lassen sich dann folgendermaßen herleiten: Zunächst gilt

$$\left| \Phi(z) - Q \log z - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right|.$$

Mit (79) und (81) erhält man weiter

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \right| \leq A \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k|z|^k} \leq A \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{r}{z} \right|^k = \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} = \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p.$$

Im Spezialfall $c = 2$ gilt sogar

$$\left| \Phi(z) - Q \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq A \left(\frac{1}{2} \right)^p.$$

Die Aussage (83) beweist man analog. Für (84) erhält man die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Phi}_N(z) - \left(\operatorname{Re} z \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^{k+1}} - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p \frac{a'_k}{z^{k+1}} \right) \right| \\ = \left| \operatorname{Re} z \operatorname{Re} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} - \operatorname{Re} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a'_k}{z^{k+1}} \right|. \end{aligned}$$

Weiter gilt mit (85) und (87)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| &\leq \left| \frac{A}{z^2} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k r^{k-1}}{z^{k-1}} \right| = \frac{A}{|z|^2} \left| \frac{r}{z} \right|^p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z|} \right)^k (k+p+1) \\ &= \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^p \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{A(r+(p+1)(|z|-r))}{|z|(|z|-r)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Der nächste Satz erlaubt uns, die Multipolentwicklung einer Ladungsmenge zu verschieben.

Satz 5.5 Sei $m \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ und seien $q_i \in \mathbb{R}$ sowie $N_i, z_i, \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, m$ gegeben. Außerdem seien für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > r$ die Funktionen Φ, Φ_N und $\tilde{\Phi}_N$ durch

$$\Phi(z) := a_0 \log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^k}, \quad (88)$$

$$\Phi_N(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^k} \quad (89)$$

und

$$\tilde{\Phi}_N(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (90)$$

gegeben. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R = r + |z_0|$

$$\Phi(z) = a_0 \log z + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{z^l} \quad \text{mit} \quad b_l = \sum_{k=1}^l a_k z_0^{l-k} \binom{l-1}{k-1} - \frac{a_0 z_0^l}{l}, \quad (91)$$

$$\Phi_N(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{z^l} \quad \text{mit} \quad b_l = \sum_{k=1}^l a_k z_0^{l-k} \binom{l-1}{k-1} \quad (92)$$

und

$$\tilde{\Phi}_N(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{z^{l+1}} \quad \text{mit} \quad b_l = \sum_{k=1}^l a_k z_0^{l-k} \binom{l}{k}. \quad (93)$$

Darüberhinaus gelten für jedes $p \in \mathbb{N}$ die Fehlerabschätzungen

$$\left| \Phi(z) - a_0 \log z - \sum_{l=1}^p \frac{b_l}{z^l} \right| \leq \left(A / \left(1 - \left| \frac{R}{z} \right| \right) \right) \left| \frac{R}{z} \right|^{p+1}, \quad (94)$$

$$\left| \Phi_N(z) - \sum_{l=1}^p \frac{b_l}{z^l} \right| \leq \left(A / \left(1 - \left| \frac{R}{z} \right| \right) \right) \left| \frac{R}{z} \right|^{p+1} \quad (95)$$

mit A aus (81) bzw. (83), und

$$\left| \tilde{\Phi}_N(z) - \sum_{l=1}^p \frac{b_l}{z^{l+1}} \right| \leq \alpha \left| \frac{R}{z} \right|^{p+1} \quad (96)$$

mit

$$\alpha = \frac{A (R + (p+1)(|z| - R))}{|z| (|z| - R)^2}. \quad (97)$$

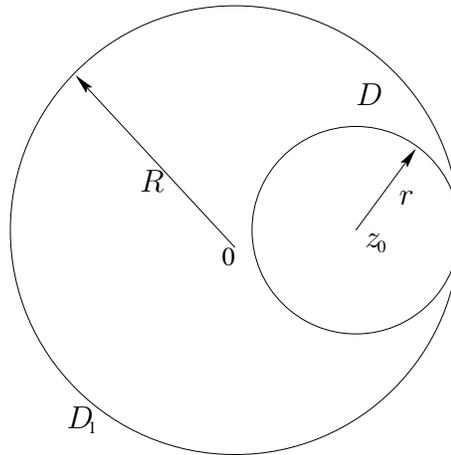


Abbildung 2: Verschiebung des Zentrums der Multipolentwicklung einer Ladungsmenge

Beweis: Entwickelt man $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ für $|z| > |z_0|$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} &= \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{z-z_0} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_0^l}{z^{l+1}} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_0^l}{z^{l+k+1}} (l+1)\dots(l+k) (-1)^k \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{a_k}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{a_k}{z^{k+1}} + \frac{(k+1) a_k}{z^{k+2}} z_0 + \dots + \binom{l+k}{l} \frac{a_k}{z^{l+k+1}} z_0^l + \dots$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^{k+1}} &= \frac{a_1}{z^2} + \frac{2 a_1}{z^3} z_0 + \dots + \binom{l}{l-1} \frac{a_1}{z^{l+1}} z_0^{l-1} + \dots \\ &+ \frac{a_2}{z^3} + \frac{3 a_2}{z^4} z_0 + \dots + \binom{l}{l-2} \frac{a_2}{z^{l+1}} z_0^{l-2} + \dots \\ &+ \frac{a_3}{z^4} + \frac{4 a_3}{z^5} z_0 + \dots + \binom{l}{l-3} \frac{a_3}{z^{l+1}} z_0^{l-3} + \dots \\ &= \frac{a_1}{z^2} + \frac{2 a_1 z_0 + a_2}{z^3} + \frac{3 a_1 z_0^2 + 3 a_2 z_0 + a_3}{z^3} + \dots \\ &+ \frac{\binom{l}{l-1} a_1 z_0^{l-1} + \binom{l}{l-2} a_2 z_0^{l-2} + \dots + \binom{l}{l-k} a_k z_0^{l-k} + \dots + a_l}{z^l} \\ &+ \dots \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \sum_{k=1}^l a_k z_0^{l-k} \binom{l}{l-k} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} \sum_{k=1}^l a_k z_0^{l-k} \binom{l}{k}, \end{aligned}$$

und damit die Darstellung (93). (92) beweist man analog, und aus der Darstellung (73) sowie $\binom{l-1}{l-k} = \binom{l-1}{k-1}$ erhält man auch (91). Für die Fehlerabschätzungen (94), (95) und (96) berücksichtigt man, dass die Zahlen b_l die Koeffizienten der eindeutigen Multipolentwicklung um den Ursprung für die Punktladungen bzw. Dipolladungen im Kreis D sind. Man wendet nun Satz 5.4 an, indem man den Radius r durch den Radius $R = |z_0| + r$ ersetzt. Die Abschätzung (96) zeigt man so:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{b_l}{z^{l+1}} \right| &= \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^l \left(k \sum_{i=1}^m q_i N_i (z_i - z_0)^{k-1} \right) z_0^{l-k} \binom{l}{k}}{z^{l+1}} \right| \\ &\leq \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^l k (R - z_0)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^m q_i N_i \right) z_0^{l-k} \binom{l}{k}}{z^{l+1}} \right| \\ &\leq \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{A \sum_{k=1}^l k r^{k-1} z_0^{l-k} \binom{l}{k}}{z^{l+1}} \right| = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{A R^{l-1} l}{z^{l+1}} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{A}{|z|^2} \left| \frac{R}{z} \right|^p \sum_{l=0}^{\infty} (l+p+1) \left(\frac{R}{|z|} \right)^l \\
 &= \alpha \left| \frac{R}{z} \right|^p \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{A(R+(p+1)(|z|-R))}{|z|(|z|-R)^2}.
 \end{aligned}$$

Die Beweise von (94) und (95) verlaufen analog. \square

Aus dem obigen Satz wird deutlich, dass man das Zentrum einer Multipolentwicklung ohne Genauigkeitsverlust verschieben kann: Sind die Werte a_i in den Entwicklungen (88), (89) und (90) einmal berechnet, so erhält man sofort alle b_i aus (91), (92) und (93).

Der nächste Satz zeigt, wie sich die Multipolentwicklung einer Ladungsmenge als lokale Taylorentwicklung um den Ursprung darstellen läßt:

Satz 5.6 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $q_i, c, R \in \mathbb{R}$ sowie $N_i, z_i, z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| > (c+1)R$ und $|z_i - z_0| < R$, $i = 1, \dots, m$ gegeben (s.u. Abb.3). Dann konvergiert die zugehörige Multipolentwicklung innerhalb eines Kreises D_2 mit Radius R um den Ursprung, und für die obige Funktion Φ ergibt sich die Darstellung*

$$\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \tag{98}$$

mit

$$b_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(-z_0)^k} + a_0 \log(-z_0) \tag{99}$$

und

$$b_l = \frac{1}{z_0^l} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{l+k-1}{k-1} \frac{a_k}{(-z_0)^k} - \frac{a_0}{l z_0^l} \quad \text{für } l \geq 1. \tag{100}$$

Für $\Phi_N(z)$ und $\tilde{\Phi}_N(z)$ erhält man entsprechend

$$\Phi_N(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \quad \text{mit} \quad b_l = \frac{1}{z_0^l} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{l+k-1}{k-1} \frac{a_k}{(-z_0)^k} \tag{101}$$

bzw.

$$\tilde{\Phi}_N(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \quad \text{mit} \quad b_l = \frac{1}{z_0^{l+1}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \binom{l+k}{k} \frac{a_k}{(-z_0)^k}. \tag{102}$$

Außerdem gelten für jedes $p \geq \max(2, 2c/(c-1))$ die Fehlerabschätzungen

$$\left| \Phi(z) - \sum_{l=0}^p b_l z^l \right| \leq \frac{A(4ep+c)}{c-1} \left(\frac{1}{c} \right)^{p+1}, \tag{103}$$

$$\left| \Phi_N(z) - \sum_{l=0}^p b_l z^l \right| \leq \frac{4Aep}{(c-1)R} \left(\frac{1}{c} \right)^{p+1} \quad (104)$$

und

$$\left| \tilde{\Phi}_N(z) - \sum_{l=0}^p b_l z^l \right| \leq \frac{4Aep^2}{(c-1)R^2} \left(\frac{1}{c} \right)^{p+2} \quad (105)$$

mit der Eulerschen Zahl e und A aus (81), (83) bzw. (87).

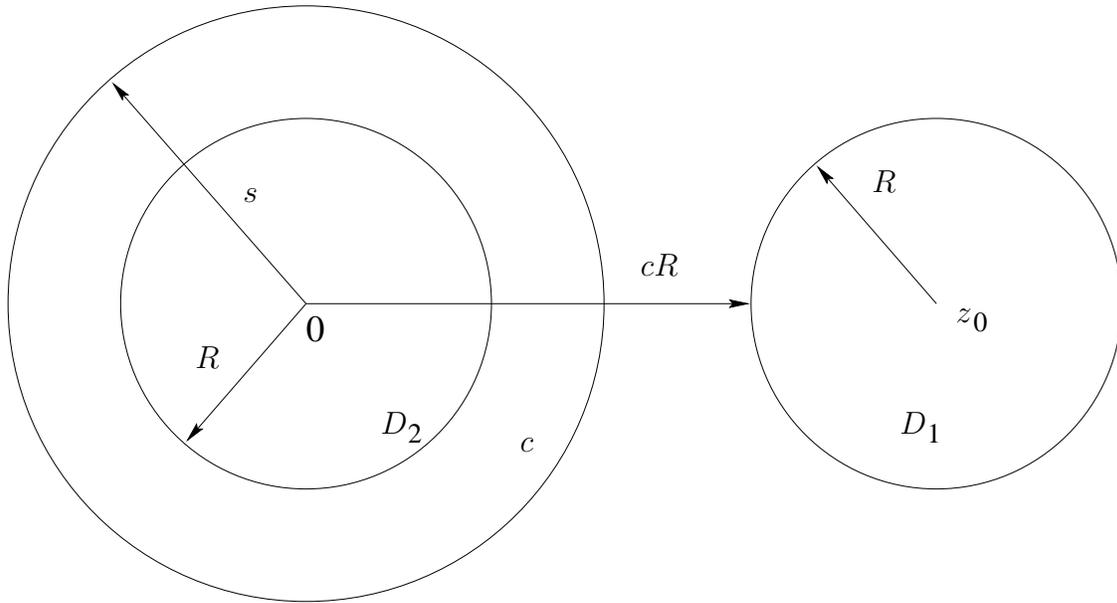


Abbildung 3: Umwandlung einer Multipolentwicklung in eine Taylorentwicklung

Beweis: Entwickelt man $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ um $0 \neq z_0$ für $|z| \leq |z_0|$, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz_0^k} \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz_0^k} \left(- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{z_0^{l+1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{z_0^{l+k+1}} (l+1) \dots (l+k) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{a_k}{(z-z_0)^{k+1}} = (-1)^{k+1} \left(\frac{a_k}{z_0^{k+1}} + \frac{(k+1)a_k}{z_0^{k+2}} z + \dots + \binom{k+l}{l} \frac{a_k}{z_0^{k+l+1}} z^l + \dots \right).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z-z_0)^{k+1}} &= + \frac{a_1}{z_0^2} + \frac{2a_1}{z_0^3} z + \dots + \binom{l+1}{l} \frac{a_1}{z_0^{l+2}} z^l + \dots \\
 &- \frac{a_2}{z_0^3} - \frac{3a_2}{z_0^4} z - \dots - \binom{l+2}{l} \frac{a_2}{z_0^{l+3}} z^l - \dots \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \sum_{k=1}^{\infty} \binom{l+k}{k} \frac{a_k}{z_0^{l+k+1}} (-1)^{k+1} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \frac{1}{z_0^{l+1}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \binom{l+k}{k} \frac{a_k}{(-z_0)^k}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\log(z-z_0) = \log(-z_0) + \log\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) = \log(-z_0) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{z_0}\right)^l$$

für $|z| < |z_0|$ erhält man die Formel (98), (99), (100) und (102). Der Beweis von (101) verläuft völlig analog.

Für die Fehlerabschätzung (103) findet man

$$\left| \Phi(z) - \sum_{l=0}^p b_l z^l \right| = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} b_l z^l \right| \leq S_1 + S_2$$

mit

$$S_1 = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \gamma_l z^l \right| \quad \text{und} \quad S_2 = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \beta_l z^l \right|$$

sowie

$$\gamma_l = -\frac{a_0}{l z_0^l} \quad \text{und} \quad \beta_l = b_l - \gamma_l.$$

Für S_1 erhalten wir

$$S_1 \leq |a_0| \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{|z|^l}{l |z_0|^l} < A \sum_{l=p+1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right| = \frac{A}{1 - \left| \frac{z}{z_0} \right|} \left| \frac{z}{z_0} \right|^{p+1}.$$

Mit

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| \leq \frac{R}{|z_0|} = \frac{R}{R(c+1)} < \frac{1}{c}$$

kann man S_1 weiter abschätzen durch

$$S_1 < \frac{A}{1 - \frac{1}{c}} \left(\frac{1}{c}\right)^{p+1} = \frac{A}{c-1} \left(\frac{1}{c}\right)^p. \quad (106)$$

Um eine obere Schranke von S_2 zu ermitteln, führen wir einen Kreis C ein mit Radius s , der innerhalb des Intervalls (R, cR) beliebig gewählt werden kann. Es gilt also $s = cR \frac{p-1}{p}$. Weiter definieren wir die Funktion $\Upsilon : \mathbb{C} \setminus D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\Upsilon(z) := \Phi(z) - a_0 \log(z - z_0)$$

Mit (71) erhalten wir dann die Abschätzung

$$S_2 = \left| \Upsilon(z) - \sum_{l=0}^p \beta_l z^l \right| = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} \beta_l z^l \right| \leq \left(\frac{|z|}{s} \right)^{p+1} M / \left(1 - \frac{|z|}{s} \right) \quad (107)$$

mit

$$M = \max_{t \in C} |\Upsilon(t)|.$$

Für $t \in C$ ist $|t - z_0| \geq cR + R - s$, außerdem gilt $|a_k| \leq AR^k/k$, und es folgt

$$\begin{aligned} |\Phi_1(t)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{|t - z_0|^k} \leq A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R}{cR + R - s} \right)^k \\ &< A \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{cR + R - s} \right)^k = \frac{AR}{cR - s}. \end{aligned}$$

Also kann man S_2 unter Berücksichtigung von $|z| \leq R$ abschätzen durch

$$S_2 < \frac{1}{1 - \frac{R}{s}} \frac{AR}{cR - s} \left(\frac{R}{s} \right)^{(p+1)} = F_1 F_2 F_3. \quad (108)$$

Wir schätzen jetzt jeden der Faktoren F_1, F_2, F_3 ab. Mit $s := cR \frac{p-1}{p}$ erhalten:

$$F_1 = \frac{1}{1 - \frac{R}{s}} = \frac{s}{s - R} = \frac{cR \frac{p-1}{p}}{cR \frac{p-1}{p} - R} \leq \frac{c}{c-1},$$

$$F_2 = \frac{AR}{cR - s} = \frac{AR}{cR \frac{1}{p}} = \frac{Ap}{c}$$

und

$$\begin{aligned} F_3 &= \left(\frac{R}{s} \right)^{(p+1)} = \left(\frac{R}{cR} \right)^{(p+1)} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{(p+1)} \\ &= \left(\frac{1}{c} \right)^{(p+1)} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right)^{(p+1)} \\ &= \left(\frac{1}{c} \right)^{(p+1)} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right)^{(p-1)} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{c} \right)^{(p+1)} e^4, \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für S_2 :

$$S_2 \leq \frac{4 A e p}{c-1} \left(\frac{1}{c}\right)^{p+1}. \quad (109)$$

Die Addition von (106) und (109) ergibt die Fehlerabschätzung (103). Der Beweis von (104) ähnelt sich dem Beweis von (105), deswegen zeigen wir hier nur (105). Mit den Vorüberlegungen wie bei (107) erhält man für die Fehlerabschätzung (105)

$$\left| \tilde{\Phi}_N(z) - \sum_{l=0}^p b_l z^l \right| = \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} b_l z^l \right| \leq \left(\frac{|z|}{s}\right)^{p+1} M / \left(1 - \frac{|z|}{s}\right) = S'_N \quad (110)$$

mit

$$M = \max_{t \in C} |\tilde{\Phi}_N(t)|.$$

Wie oben gilt weiter für $t \in C$ die Abschätzung $|t - z_0| \geq cR + R - s$. Mit (85) und (87) erhalten $|a_k| \leq k A R^{k-1}$, und es folgt

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}_N(t)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{|t - z_0|^{k+1}} \leq A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k R}{(cR + R - s)^{k+1}} \\ &= \frac{A}{(cR + R - s)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{R}{cR + R - s}\right)^k \\ &= \frac{A}{cR - s} \frac{(R + (cR + R - s) - R)}{(cR + R - s - R)^2} \\ &= \frac{A}{(cR - s)^2} = \frac{A}{(cR - cR \frac{p-1}{p})^2} = \frac{A p^2}{(cR)^2}. \end{aligned}$$

Also kann man (110) mit $|z| \leq R$ und $s := cR \frac{p-1}{p}$ weiter abschätzen durch

$$S'_N < \frac{1}{1 - \frac{R}{s}} \frac{A p^2}{(cR)^2} \left(\frac{R}{s}\right)^{(p+1)} \leq \frac{c}{c-1} \frac{A p^2}{(cR)^2} \left(\frac{1}{c}\right)^{(p+1)} e 4, \quad p \geq 2. \quad (111)$$

Aus (111) folgt die Behauptung (105). \square

Das folgende Lemma beschreibt, wie das Zentrum einer lokalen Taylorentwicklung verschoben wird.

Lemma 5.7 Für $z_0, z, a_k \in \mathbb{C}$, ($k = 0, 1, \dots, n$) gilt

$$\sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k = \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=l}^n a_k \binom{k}{l} (-z_0)^{k-l} \right) z^l. \quad (112)$$

Beweis: Mit der binomischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-z_0)^m z^{k-m} \\ &= z^0 \sum_{k=0}^n \binom{k}{k} (-z_0)^k a_k + z^1 \sum_{k=1}^n \binom{k}{k-1} (-z_0)^{k-1} a_k \\ &\quad + z^2 \sum_{k=2}^n \binom{k}{k-2} (-z_0)^{k-2} a_k + \dots + z^n \binom{n}{0} (-z_0)^0 a_n \\ &= \sum_{l=0}^n \left(\sum_{k=l}^n a_k \binom{k}{l} (-z_0)^{k-l} \right) z^l. \quad \square \end{aligned}$$

6 Die Multipolmethode

6.1 Heuristik

Zur Speicherung der aus der Diskretisierung der Randintegralgleichungssysteme resultierenden $n \times n$ - Matrizen werden n^2 Speicherplätze benötigt, und für jede Matrix-Vektor - Multiplikation sind n^2 Multiplikationen notwendig. Dadurch ist die Randelementmethode zunächst nur für relativ kleine Dimensionen n anwendbar. Dieses Problem soll nun behoben werden, indem die Randintegraloperatoren mit einer adaptiven schnellen Multipolmethode realisiert werden. Dadurch reduziert sich der Speicherbedarf und der Rechenaufwand für eine Matrix-Vektor - Multiplikation auf $\mathcal{O}(n \log_2 n)$. Somit kann die iterative Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer vollbesetzten Matrix erheblich beschleunigt werden.

Als Grundlage hierzu dient die schnelle Multipolmethode (Fast Multipol Method (FMM)) von L. Greengard und V. Rokhlin, die ein Verfahren zur schnellen Berechnung des Potentialfeldes eines Systems von n Ladungsteilchen darstellt (vgl. [25], [?]).

Die Multipolmethode stellt das Potential der Teilchen durch Reihenentwicklungen dar. Diese lassen sich in andere Entwicklungspunkte verschieben und aufsummieren. Dadurch kann man die Potentiale mehrerer Ladungen zusammenfassen. Durch geschicktes Ausnutzen dieser Möglichkeiten und eine geeignete hierarchische Gruppierung der Teilchen gelingt dann die gewünschte Reduktion des Aufwands. Die Multipolmethode wird zur Berechnung des Potentials bei weit genug entfernten Ladungsteilchen verwendet. Interaktionen zwischen nahe liegenden Teilchen werden direkt berechnet.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die durch die Diskretisierung des Randes erhaltenen m Punkte in einem Quadrat mit den Ecken $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ enthalten sind. Dann führt man eine Hierarchie von Verfeinerungen des Ausgangsquadrates ein: Die Stufe 0 ist äquivalent zur gesamten Ausgangsbox. Die Stufe $l + 1$ erhält man aus der Stufe l , indem jede Region in vier gleiche Teile zerlegt wird. Durch diese Hierarchie von Verfeinerungen wird eine Baumstruktur hervorgerufen: Ist b eine feste Box der Stufe l , so werden die vier durch Viertelung von b erhaltenen Boxen als deren Kinder betrachtet. Bei einer festen Maschinengenauigkeit ε ist der minimale Abstand zwischen den Diskretisierungspunkten $r_{\min} > \varepsilon$. Man kann deswegen maximal $L_{\max} = \lceil \log_2 \varepsilon \rceil$ Generationen für eine feste Box erzeugen.

Im Gegensatz zu dem nichtadaptiven Algorithmus in [?] wird hier nicht die gleiche Anzahl von Stufen für alle Teile der Boxen verwendet, sondern es werden, nachdem man eine ganze Zahl $s > 0$ festgelegt hat, nur die Boxen weiter geteilt,

die mehr als s Diskretisierungspunkte enthalten. Bei höheren Verfeinerungsstufen erhält man natürlich eine große Anzahl leerer Boxen, so dass in jeder Stufe nur eine Liste der nichtleeren Boxen gespeichert wird (vgl. [25]).

Im Folgenden soll demonstriert werden, wie die Berechnungen der Potentiale durch die Verwendung von Multipolentwicklungen beschleunigt werden können.

Seien $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ zwei endliche Punktmen- gen in \mathbb{C} . X und Y heißen *wohlsepariert*, wenn es zwei Punkte $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ und ein reelles $R > 0$ gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} |x_j - x_0| &\leq R \quad \text{für } j = 1, \dots, n, \\ |y_i - y_0| &\leq R \quad \text{für } i = 1, \dots, m, \\ |x_0 - y_0| &\geq 2\sqrt{2}R. \end{aligned}$$

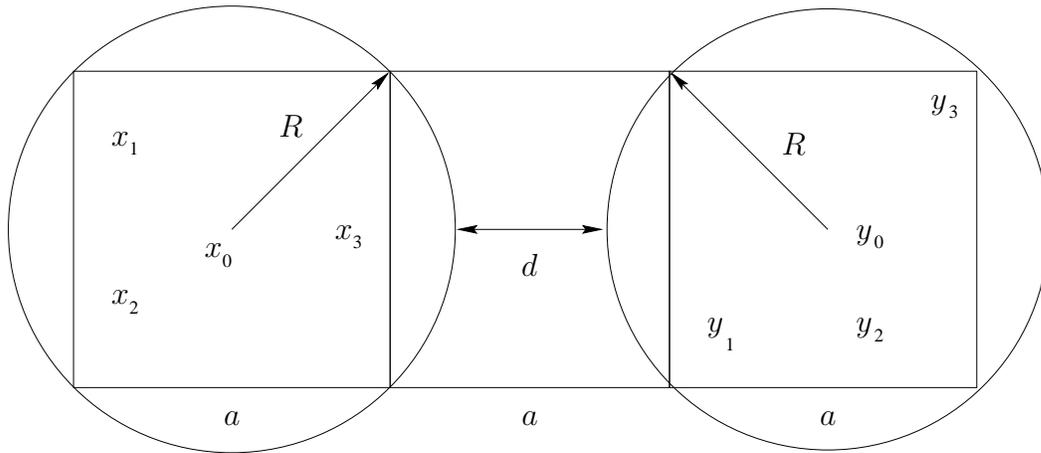


Abbildung 4: Wohlseparierte Punktmenge

Die dritte Ungleichung ist durch den Algorithmus motiviert: Es wird im Weiteren mit quadratischen Boxen gerechnet, in denen sich die Punktmen- gen X und Y befinden. Die Seitenlänge einer Box sei a und kann mit Hilfe des Umkreisradius R dargestellt werden durch $a = R\sqrt{2}$. Damit die Entwicklungen gemäß der Fehlerabschätzung aus Satz 5.6 schnell konvergieren, soll $|x_0 - y_0| \geq 2a$ sein, also ist $d \geq 2(a - R) = 2R(\sqrt{2} - 1)$.

In den Punkten y_i sollen sich Dipolladungen q_i befinden und in die Richtung der äußeren Einheitsnormale $\mathbf{N}(y_i)$, $i = 1, \dots, m$ orientiert sein. Wenn man jetzt

die Summen

$$\sum_{i=1}^m \Phi_{y_i}(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (113)$$

berechnen möchte, hat man den Aufwand $\mathcal{O}(nm)$, es müssen nämlich m Felder in n Punkten berechnet werden. Mit Hilfe der Sätze aus Abschnitt 5.3 kann dieser Prozess jedoch beschleunigt werden. Es seien um x_0 bzw. y_0 Kreise D_x und D_y mit dem Radius R gegeben. Mit der Dreiecksungleichung folgt für $x \in D_x$

$$2\sqrt{2}R \leq |x_0 - y_0| = |x_0 - x + x - y_0| \leq |x_0 - x| + |x - y_0|.$$

Wegen $|x_0 - x| \leq R$ ist also $|x - y_0| \geq R(2\sqrt{2} - 1)$, und mit $R \geq |y_i - y_0|$ folgt

$$|x - y_0| \geq |y_i - y_0|(2\sqrt{2} - 1) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Mit Satz 5.4 erhält man, zum Beispiel

$$\sum_{i=1}^m \Phi_{y_i, N_i}(x) = \mathcal{R}e \left(\sum_{i=1}^m \frac{q_i N_i}{x - y_i} \right) = \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x - y_0)^k} \sum_{i=1}^m q_i N_i (y_i - y_0)^{k-1} \right).$$

Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt dann die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^m \Phi_{y_i, N_i}(x) - \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{(x - y_0)^k} \sum_{i=1}^m q_i N_i (y_i - y_0)^{k-1} \right) \right| \\ & \leq \frac{\sum_{i=1}^m |q_i N_i|}{2\sqrt{2} - 2} \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)^p}. \end{aligned}$$

Um die Genauigkeit ϵ zu erreichen, muss also $p \approx -\log_2 \sqrt{2-1} \epsilon$ sein. Dabei wird ϵ etwa in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers der Randintegralgleichungen gewählt. Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{(x - y_0)^k} \sum_{i=1}^m q_i N_i (y_i - y_0)^{k-1} \quad (114)$$

kann als Polynom vom Grad p bezüglich $\frac{1}{(x-y_0)}$ interpretiert werden. Für festes p erfordert die Berechnung der Koeffizienten $\mathcal{O}(mp)$ Operationen.

Werden nun zuerst die Koeffizienten von (114) und dann die erhaltene Multipolentwicklung in den Punkten x_1, \dots, x_n berechnet (Aufwand $\mathcal{O}(np)$), so ist der Gesamtaufwand $\mathcal{O}(mp + np)$ und für große m, n somit beträchtlich kleiner als $\mathcal{O}(mn)$.

Eine andere Möglichkeit ist, die Koeffizienten von (114) zu berechnen ($\mathcal{O}(mp)$ Operationen), diese anschließend mittels Satz 5.6 in eine Entwicklung der Form

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j (x - x_0)^j \quad (115)$$

zu konvertieren ($\mathcal{O}(p^2)$ Operationen), und danach (115) in den Punkten x_1, \dots, x_n zu berechnen ($\mathcal{O}(np)$ Operationen).

6.2 Notation

Wir werden bei der Beschreibung des Multipolverfahrens folgende Begriffe und Bezeichnungen verwenden:

- Punkt- bzw. Dipolladungen werden allgemein als *Teilchen* bezeichnet.
- G ist die Ausgangsbox.
- $T(A)$ bezeichnet die Menge der Teilchen in einer Teilmenge $A \subseteq G$.
- Die Bezeichnung B_l verwenden wir für die Menge der nichtleeren Boxen auf der Stufe l .
- L ist die höchste Verfeinerungsstufe.
- Eine Box wird *Elternbox* genannt, wenn sie mehr als s Teilchen enthält, sonst ist sie *kinderlos*.
- Eine *Kindbox* ist eine nichtleere Box, die aus der Viertelung einer Elternbox entsteht. $c \sqsubset b$ bedeutet, dass c Kind von b ist.
- Die höchsten vier Kinder einer Box nennen wir *Brüder*.
- *Kollegen* werden die benachbarten Boxen derselben Größe, also auf der gleichen Stufe, genannt. Eine Box hat also höchstens acht Kollegen.
- n_{box} sei die Gesamtzahl der gebildeten Boxen.

Für jede Box b auf der Stufe l müssen fünf Listen anderer Boxen in Abhängigkeit von ihrer Lage bezüglich b definiert werden:

1. U_b enthält b und alle zu b benachbarten kinderlosen Boxen, wenn b kinderlos ist. U_b ist leer, wenn b eine Elternbox ist.
2. V_b besteht aus den von b wohlseparierten Kindern der Kollegen der Elternbox von b .

3. W_b enthält alle nicht zu b benachbarten Nachfolger der Kollegen von b , deren Elternboxen aber zu b benachbart sind, wenn b kinderlos ist. W_b ist leer, wenn b eine Elternbox ist. Der Abstand zwischen b und jeder Box $w \in W_b$ ist größer oder gleich der Seitenlänge von w .
4. X_b besteht aus allen Boxen c mit $b \in W_c$, d.h. $c \in X_b$ genau dann, wenn $b \in W_c$. Alle Boxen dieser Liste sind kinderlos und größer als b .
5. Y_b enthält alle Boxen, die wohlsepariert von der Elternbox von b sind.

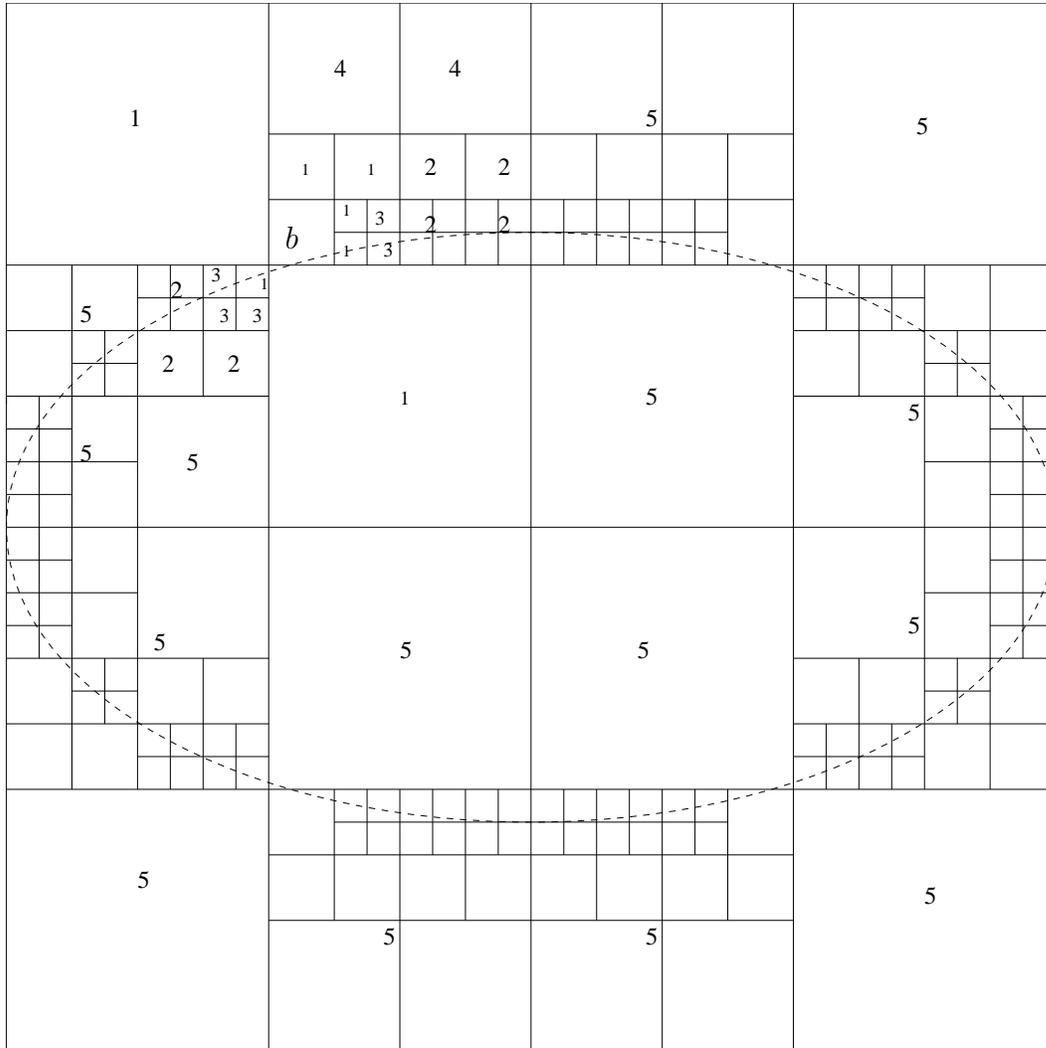


Abbildung 5: Beispiel einer adaptiven Zerlegung der Ausgangsbox

Für die Beschreibung des adaptiven Algorithmus werden noch weitere Bezeichnungen benötigt:

- Φ_b bezeichnet die Multipolentwicklung p -ter Ordnung um den Mittelpunkt von b des durch alle Teilchen in $T(b)$ bewirkten Feldes.
- Wir schreiben Ψ_b für die lokale Entwicklung p -ter Ordnung um den Mittelpunkt von b des durch alle Teilchen außerhalb von $T(U_b) \cup T(W_b)$ hervorgerufenen Feldes. $\Psi_b(r)$ ist dann das Ergebnis der Berechnung der Entwicklung Ψ_b an der Position eines Teilchen $r \in T(b)$.
- Γ_b steht im Weiteren für die lokale Entwicklung um den Mittelpunkt von b des durch alle Teilchen in $T(V_b)$ erzeugten Feldes.
- Δ_b ist die lokale Entwicklung um den Mittelpunkt von b des durch alle Teilchen in $T(X_b)$ bewirkten Feldes.
- $\alpha_b(r)$ bezeichnet das Feld in $r \in T(b)$, das durch alle Teilchen in $T(U_b)$ hervorgerufen wird.
- $\beta_b(r)$ verwenden wir für das Feld in $r \in T(b)$, das durch alle Teilchen $T(W_b)$ erzeugt wird.

Die obige Abbildung 5 verdeutlicht die Zerlegung einer Ausgangsbox für den Fall von 200 sich auf dem Rand befindenden Teilchen bei maximal drei Teilchen pro Box ($s = 3$). Weiterhin ist für eine spezielle Box b die Zugehörigkeit anderer Boxen zu den obigen Listen 1 bis 5 vermerkt.

6.3 Formale Beschreibung

Wir wollen jetzt die hydrodynamischen Potentiale in ihrer komplexen Form (Kapitel 5) mit Hilfe der Multipolmethode ausrechnen. Dazu wird jeder Summand der Grundlösungsmatrix \mathbf{E} und des Doppelschichttensors \mathbf{D} mit der Multipolmethode ausgerechnet und die erhaltenen Ergebnisse anschließend zu E_{ij} , D_{ij} , ($i, j = 1, 2$) addiert. Somit muss man für das hydrodynamische Doppelschichtpotential die Multipolmethode vierunddreißig mal und für das hydrodynamische Einfachschichtpotential zehn mal durchführen.

Im Weiteren wollen wir die einzelnen Schritte der Multipolmethode mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 angeben. Die Formeln für die Multipolentwicklungen und die lokalen Entwicklungen wurden zunächst um den Ursprung notiert. Werden sie für den Mittelpunkt z_M einer Box b benötigt, so muss man sie durch eine Transformation $z := z - z_M$ modifizieren. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die Reihen nach p Gliedern abgebrochen werden. Φ_B^b bezeichnet den Anteil der Box b an der Multipolentwicklung Φ_B von B . Analoges gilt für Γ_B^b , Δ_B^b und Ψ_B^b .

Bei der adaptiven schnellen Multipolmethode muss zuerst die Ausgangsbox rekursiv verfeinert werden, bis sich in keiner Box mehr als s Teilchen befinden. Danach wird für jede Box b auf jeder Stufe l die Ausgangsbox in die vier Teilmengen U_b, V_b, W_b und X_b zerlegt und mit den Mengen $T(U_b), T(V_b), T(W_b)$ und $T(X_b)$ von Teilchen wie folgt verfahren:

1. Für jede kinderlose Box b werden die Teilchen in $T(b)$ mittels Satz 5.4 kombiniert und die Koeffizienten a_k der Multipolentwicklungen Φ_b gebildet. Für Punktladungen berechnen wir a_k mit

$$a_0 = Q = \sum_{i=1}^m q_i, \quad a_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^m q_i (z_i - z_M)^k, \quad (116)$$

für Dipolladungen mit

$$a_k = \sum_{i=1}^m q_i N_i (z_i - z_M)^{k-1} \quad (117)$$

und für weitere Summanden des hydrodynamischen Potentials vom Typ (78) mit

$$a_k = k \sum_{i=1}^m q_i N_i (z_i - z_M)^{k-1}, \quad a'_k = k \sum_{i=1}^m q_i N_i (z_i - z_M)^{k-1} \mathcal{R}e z_i \quad (118)$$

bzw.

$$a'_k = k \sum_{i=1}^m q_i N_i (z_i - z_M)^{k-1} \mathcal{I}m z_i.$$

2. Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen in $T(b)$ und $T(U_b)$ werden direkt berechnet. Man erhält damit $\alpha_b(r)$. Für Punktladungen gilt

$$\alpha_b(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \Phi_{z_i}(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} q_i \log(r - z_i), \quad (119)$$

für Dipolladungen folgt entsprechend

$$\alpha_b(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \Phi_{z_i, N_i}(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \frac{q_i N_i}{r - z_i} \quad (120)$$

und für weitere Summanden des hydrodynamischen Potentials vom Typ (78)

$$\alpha_b(r) = \mathcal{R}e r \left(\sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \frac{q_i N_i}{(r - z_i)^2} \right) \quad (121)$$

oder

$$\alpha_b(r) = \mathcal{I}m r \left(\sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \frac{q_i N_i}{(r - z_i)^2} \right)$$

bzw.

$$\alpha'_b(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \frac{q_i N_i \mathcal{R}e z_i}{(r - z_i)^2}$$

oder

$$\alpha'_b(r) = \sum_{T(U_b) \ni z_i \neq r} \frac{q_i N_i \mathcal{I}m z_i}{(r - z_i)^2}.$$

3. Für jede Elternbox B wird Satz 5.5 angewandt, um die Multipolentwicklungen ihrer Kinder c_i zu Φ_B zu kombinieren. Dabei werden zunächst wieder nur die Koeffizienten b_l berechnet. Die entsprechende Formel für Punktladungen ist

$$b_l = \sum_{k=1}^l a_k (z_0 - z_M)^{l-k} \binom{l-1}{k-1} - \frac{a_0 (z_0 - z_M)^l}{l}. \quad (122)$$

Für Dipolladungen gilt gemäß Satz 5.5

$$b_l = \sum_{k=1}^l a_k (z_0 - z_M)^{l-k} \binom{l-1}{k-1} \quad (123)$$

und für weitere Summanden des hydrodynamischen Potentials vom Typ (78)

$$b_l = \sum_{k=1}^l a_k (z_0 - z_M)^{l-k} \binom{l}{k}. \quad (124)$$

4. Mittels Satz 5.6 wird die Multipolentwicklung jeder Box in V_b in eine lokale Entwicklung um den Mittelpunkt von b umgewandelt. Wenn man die daraus resultierenden Ausdrücke addiert, erhält man Γ_b : Es gilt

$$\Gamma_b^v(z) = \sum_{l=0}^p b_l (z - z_M)^l$$

mit den Koeffizienten

$$b_0 = \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(z_M - z_0)^k} + a_0 \log(z_M - z_0) \quad (125)$$

und

$$b_l = \frac{1}{(z_0 - z_M)^l} \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(z_M - z_0)^k} \binom{l+k-1}{k-1} - \frac{a_0}{l(z_0 - z_M)^l}, \quad l \geq 1$$

im Fall von Punktladungen. Für Dipolladungen erhält man entsprechend

$$b_l = \frac{1}{(z_0 - z_M)^l} \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{(z_M - z_0)^k} \binom{l+k-1}{k-1} \quad (126)$$

und für weitere Summanden des hydrodynamischen Potentials vom Typ (78)

$$b_l = \frac{1}{(z_0 - z_M)^{l+1}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{l+k}{k} \frac{a_k}{(z_M - z_0)^k}. \quad (127)$$

In diesem Schritt werden genau wie im ersten und dritten Schritt nur die Koeffizienten b_l berechnet.

5. Man erhält Δ_b , indem man das Feld jedes Teilchens in $T(X_b)$ in eine lokale Entwicklung um den Mittelpunkt von b konvertiert und die erhaltenen Ausdrücke addiert. Man berechnet die Koeffizienten b_l und benutzt dabei die Formeln

$$\Delta_b^{q_i}(z) = \sum_{l=0}^p b_l (z - z_M)^l$$

mit

$$b_0 = q_i \log(z_M - z_i) \quad \text{und} \quad b_l = -\frac{q_i}{l(z_i - z_M)^l}, \quad l \geq 1 \quad (128)$$

für Punktladungen und

$$b_l = -\frac{q_i N_i}{(z_i - z_M)^{l+1}} \quad (129)$$

für Dipolladungen. Für weitere Summanden des hydrodynamischen Potentials vom Typ (78) hat man

$$b_l = (l+1) \frac{q_i N_i}{(z_i - z_M)^{l+2}}, \quad b_l = (l+1) \frac{q_i N_i \operatorname{Re} z_i}{(z_i - z_M)^{l+2}} \quad (130)$$

oder

$$b_l = (l+1) \frac{q_i N_i \operatorname{Im} z_i}{(z_i - z_M)^{l+2}}.$$

6. Ψ_b wird durch Addition von Δ_b und Γ_b berechnet.
7. Für alle Teilchen $r \in T(b)$ wird das durch alle Teilchen in $T(W_b)$ erzeugte Feld $\beta_b(r)$ berechnet, indem die Multipolentwicklungen Φ_w p -ter Ordnung jeder Box $w \in W_b$ in r berechnet und addiert werden (vgl. dazu Schritt 1 und 2).

8. Mittels Lemma 5.7 wird der Mittelpunkt der lokalen Entwicklung Ψ_B jeder Elternbox B zu den Mittelpunkten ihrer Kinder c_i verschoben und zu Ψ_{c_i} addiert. Sowohl für Punktladungen, als auch für Dipolladungen berechnet man dazu

$$\Psi_b^B(z) = \sum_{l=0}^p c_l (z - z_M)^l \quad (131)$$

mit

$$c_l = \sum_{k=1}^p \binom{k}{l} b_k (z_M - z_0)^{k-l}.$$

9. Für jede Box b wird der Realteil der lokalen Entwicklung Ψ_b für jedes Teilchen $r \in T(b)$ berechnet und das Ergebnis zu $\mathcal{R}e \alpha_b(r)$ und $\mathcal{R}e \beta_b(r)$ addiert. Man hat das Feld $\Phi(r)$ bestimmt.

Man berechnet dabei die Wechselwirkungen zwischen Teilchen in $T(b)$ und $T(Y_b)$ nicht explizit, da sie aufgrund der Wohlsepariertheit aller Boxen in Y_b von der Elternbox von b schon im vierten und fünften Schritt auf der vorherigen größeren Stufe berechnet wurden.

6.4 Der adaptive Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir den Algorithmus für die adaptive schnelle Multipolmethode (Adaptive Fast Multipol Method) vor. Dabei wird eine Pascal-ähnliche Syntax verwendet (vgl. [3]).

6.4.1 Implementierung

Initialisierung

Wahl der Hauptparameter

Man wählt die maximale Anzahl s von Teilchen in einer kinderlosen Box, eine Toleranz ϵ und setzt die Anzahl der Terme in den Entwicklungen auf $p \approx -\log_{2\sqrt{2}-1} \epsilon$.

Verfeinerung der Ausgangsbox in eine Hierarchie von Gittern

```

for  $l := 0, 1, \dots$  do
  for  $b \in B_l$  do
    if  $\text{card } T(b) > s$  then
      begin
        Teile  $b$  in 4 Boxen  $c_1, \dots, c_4$ ;
        for  $i := 1(1)4$  do
          if  $\text{card } T(c_i) \neq 0$  then  $B_{l+1} := B_{l+1} \cup c_i$ 
        end;
      end;

```

Schritt 1

Punkt 1 der formalen Beschreibung

```

for  $i := 1(1) \text{ nbox}$  do
  if  $b_i$  ist kinderlos then Bilde die Koeffizienten der Multipolentwicklungen  $\Phi_{b_i}$  mit (116), (117) bzw. (118);

```

Schritt 2

Punkt 2 der formalen Beschreibung

```

for  $i := 1(1) \text{ nbox}$  do
  if  $b_i$  ist kinderlos then

```

for $r \in T(b_i)$ **do** Berechne $\alpha_{b_i}(r)$ mit
(119), (120) bzw. (121);

Schritt 3

Punkt 3 der formalen Beschreibung

for $l := L - 1(-1)0$ **do**
for $b_i \in B_l$ **do**
if b_i ist Elternbox **then**
begin
for $c \sqsubset b_i$ **do** Bilde entsprechende Koeffiziente von $\Phi_{b_i}^c$ aus Φ_c mit
(122), (123) bzw. (124);
Berechne $\Phi_{b_i} := \sum_{c \sqsubset b_i} \Phi_{b_i}^c$
end;

Schritt 4

Punkt 4 der formalen Beschreibung

for $i := 1(1) nbox$ **do**
begin
for $b_j \in V_{b_i}$ **do** Konvertiere Φ_{b_j} in $\Gamma_{b_i}^{b_j}$ mit (125), (126) bzw. (127);
Berechne $\Gamma_{b_i} := \sum_{b_j \in V_{b_i}} \Gamma_{b_i}^{b_j}$
end;

Schritt 5

Punkt 5 und 6 der formalen Beschreibung

for $i := 1(1) nbox$ **do**
begin
for $r \in T(X_{b_i})$ **do** Bilde Koeffiziente von $\Delta_{b_j}^r$ mit (128), (129) bzw.
(130);
Berechne $\Delta_{b_i} := \sum_{r \in T(V_{b_i})} \Gamma_{b_i}^{b_j}$;
Berechne $\Psi_{b_i} := \Gamma_{b_i} + \Delta_{b_i}$
end;

Schritt 6*Punkt 7 der formalen Beschreibung*

```

for  $i := 1(1) \text{ nbox}$  do
  if  $b_i$  ist kinderlos then
    for  $r \in T(b_i)$  do Berechne  $\beta_{b_i}(r) := \sum_{b_j \in W_{b_i}} \Phi_{b_j}(r)$ ;

```

Schritt 7*Punkt 8 der formalen Beschreibung*

```

for  $i := 1(1) \text{ nbox}$  do
  if  $b_i$  ist Elternbox then
    for  $c \sqsubset b_i$  do
      begin
        Bilde  $\Phi_c^{b_i}$  mit (131);
        Berechne  $\Phi_c := \Psi_c + \Psi_c^{b_i}$ 
      end;

```

Schritt 8*Punkt 9 der formalen Beschreibung*

```

for  $i := 1(1) \text{ nbox}$  do
  if  $b_i$  ist kinderlos then
    for  $r \in T(b_i)$  do Berechne  $\Phi(r) := \Psi_{b_i}(r) + \alpha_{b_i}(r) + \beta_{b_i}(r)$ ;

```

Bemerkung: Im Algorithmus kommen Ausdrücke der Form $a_0 \log z$ vor. Dabei muss für den komplexen Logarithmus der richtige Zweig gewählt werden. Da man aber letztendlich nur den Realteil benötigt und a_0 , als einzelne Ladung oder deren Summe, immer reell ist, können wir den Hauptzweig nehmen. Bei der Implementierung kann die natürliche Rekursivität des Problems ausgenutzt und die Schritte 1, 2 und 3 in einer Routine zusammengefasst werden:

```
procedure Rekursion( $b$ );  
begin  
  if  $b$  ist Elternbox then  
    begin  
      for  $c \sqsubset b$  do Rekursion( $c$ );  
      Berechne  $\Phi_b = \sum_{c \sqsubset b} \Phi_b^c$   
    end  
  else  
    begin  
      Berechne  $\Phi_b$ ;  
      for  $r \in T(b)$  do Berechne  $\alpha_b(r)$   
    end  
end.
```

6.4.2 Komplexitätsanalyse

Um die Komplexitätsanalyse anschaulicher darzustellen, führen wir noch einige Bezeichnungen ein:

- Die Menge aller Boxen in einer Zerlegung \mathcal{S} bezeichnen wir weiter mit $B_{\mathcal{S}}$.
- $C_{\mathcal{S}}$ steht für die aus allen kinderlosen (d.h. nichtleeren und nicht weiter unterteilten) Boxen bestehende Teilmenge von $B_{\mathcal{S}}$.
- $D_{\mathcal{S}}$ ist die aus allen leeren Boxen bestehende Teilmenge von $B_{\mathcal{S}}$, die einen kinderlosen Bruder haben.
- $G_{\mathcal{S}}$ besteht aus allen Boxen, die entweder kinderlos oder leer, aber mit einem kinderlosen Bruder, sind. Damit gilt $G_{\mathcal{S}} = C_{\mathcal{S}} \cup D_{\mathcal{S}}$.
- Für die Menge aller Elternboxen benutzen wir die Bezeichnung $E_{\mathcal{S}}$.
- $F_{\mathcal{S}}$ schreiben wir für die aus allen nichtleeren Boxen bestehende Teilmenge von $B_{\mathcal{S}}$. Damit gilt $F_{\mathcal{S}} = G_{\mathcal{S}} \cup E_{\mathcal{S}}$.
- $\text{card } A$ bezeichnet die Anzahl der Elemente einer Menge A .

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Lemma 6.1 *Für jede Zerlegung \mathcal{S} der Ausgangsbox gelten die Beziehungen*

- a) $\sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p \leq 9 \text{ card } G_{\mathcal{S}}$.
- b) $\sum_{b \in F_{\mathcal{S}}} \text{card } V_b \leq 27 \text{ card } F_{\mathcal{S}}$.
- c) $\sum_{b \in F_{\mathcal{S}}} \text{card } X_b \leq 5 \text{ card } G_{\mathcal{S}}$.
- d) $\text{card } C_{\mathcal{S}} \leq \text{card } G_{\mathcal{S}} \leq \frac{4Lm}{s+1}$.
- e) $\text{card } F_{\mathcal{S}} \leq \frac{5Lm}{s+1}$.

Beweis: zu a): Diese Ungleichung gilt offensichtlich bei einer äquidistanten Zerlegung des Ausgangsquadrates. Sei L die höchste Verfeinerungsstufe einer äquidistanten Zerlegung \mathcal{S} . Wir teilen jetzt ein Quadrat b in vier kleinere Quadrate und erhalten somit eine neue Zerlegung \mathcal{S}_b mit der Verfeinerungsstufe $L + 1$. Offensichtlich gilt

$$\text{card } G_{\mathcal{S}_b} = \text{card } G_{\mathcal{S}} + 3. \quad (132)$$

Folgende Aussagen gelten für die U -Listen der Kinder von b :

- (1) Jedes Kind von b hat seine drei Brüder, sich selbst und drei Kollegen der Elternbox in seiner Liste U . Die Summe $\sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p$ vergrößert sich deswegen um $4 \cdot 7$ Elemente.

- (2) In der Zerlegung \mathcal{S}_b ist b eine Elternbox und hat somit eine leere Liste U . Die Summe $\sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p$ verkleinert sich deswegen um $\text{card } U_b$ Elemente.
- (3) Die Nachbarn von b , die eine gemeinsame Seite mit b haben, erhalten bei der Zerlegung \mathcal{S}_b ein zusätzliches Element in ihren U -Listen. Die Summe $\sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p$ erhält zusätzlich $(\text{card } U_b - 5)$ Elemente. Insgesamt erhält man mit einer äquidistanten Zerlegung \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in C_{\mathcal{S}_b}} \text{card } U_p &= \sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p + 4 \cdot 7 - \text{card } U_b + \text{card } U_b - 5 \\ &= \sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p + 23 \leq 9 \text{card } G_{\mathcal{S}} + 23 \\ &\leq 9(\text{card } G_{\mathcal{S}} + 3) = 9 \text{card } G_{\mathcal{S}_b} \end{aligned}$$

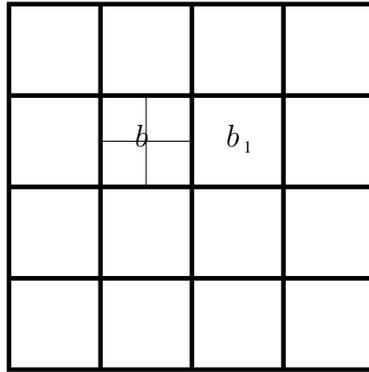
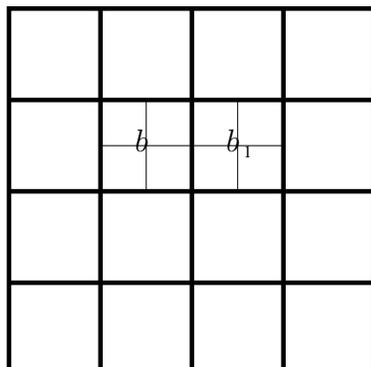


Abbildung 6: Zerlegung \mathcal{S}_b

Die obere Ungleichung bleibt erhalten, auch wenn man jede weitere Box, außer die Kollegen von b , die mit b eine gemeinsame Seite haben, teilt. Die Differenz zwischen der Summe $\sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p$ und $9 \text{card } G_{\mathcal{S}_b}$ vergrößert sich, wenn die Zerlegung ungleichmäßiger wird. Weiter betrachten wir den verbliebenen Fall: Wir teilen einen Kollegen b_1 , und erhalten eine neu Zerlegung \mathcal{S}_{bb_1}

$$\begin{aligned} \sum_{p \in C_{\mathcal{S}_{bb_1}}} \text{card } U_p &= \sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p + (4 \cdot 7 - \text{card } U_b + \text{card } U_b - 5) \\ &\quad + (2 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 7 - \text{card } U_{b_1} + \text{card } U_{b_1} - 6) \\ &= \sum_{p \in C_{\mathcal{S}}} \text{card } U_p + 49 \leq 9 \text{card } G_{\mathcal{S}} + 49 \\ &\leq 9(\text{card } G_{\mathcal{S}} + 3 + 3) = 9 \text{card } G_{\mathcal{S}_{bb_1}}. \end{aligned}$$

Abbildung 7: Zerlegung \mathcal{S}_{bb_1}

Alle weiteren Zerlegungen können in ähnlicher Weise betrachtet werden und führen zu dem selben Ergebnis.

zu b): V_b besteht nach Definition aus den von b wohlseparierten Kindern der Kollegen der Elternbox von b . Die Elternbox von b hat höchstens acht Kollegen, und jeder der acht Kollegen hat höchstens vier Kinder, von denen fünf mit der Box b benachbart sind und somit V_b nicht angehören. Die Anzahl der Elemente von V_b ist also durch $8 \cdot 4 - 5 = 27$ beschränkt (Abb. 8). Daraus folgt die Behauptung b).

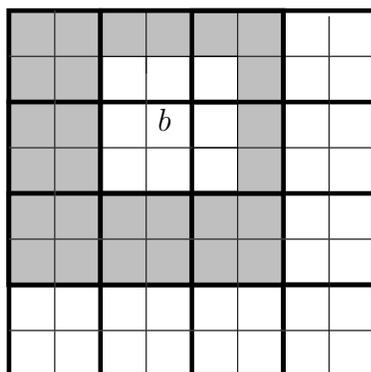


Abbildung 8: zu b)

zu c): X_b besteht nach Definition aus allen Boxen c mit $b \in W_c$. Somit sind alle Boxen dieser Liste wohlsepariert von b und mindestens die Kollegen der Elternbox von b . Es können aber auch die Kollegen der Großeltern usw. von b sein, die aber zur Elternbox von b benachbart sind. Da wir aber eine Abschätzung nach oben anstreben, können wir uns nur auf die Kollegen der Elternbox von b beschränken. Die Elternbox von b hat höchstens acht Kollegen, drei davon sind zu b benachbart, also ist die Anzahl der Elemente von X_b durch $8 - 3 = 5$ beschränkt (Abb. 9).

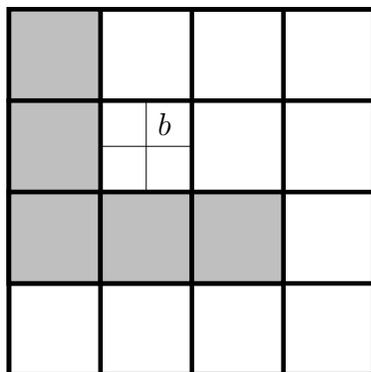


Abbildung 9: zu c)

zu d): Die erste Ungleichung gilt wegen $C_S \subseteq G_S$. Auf der Stufe l hat man höchstens $\frac{m}{s+1}$ Elternboxen, die jeweils höchstens vier Kinder haben können. Für L Verfeinerungsstufen erhält man die Abschätzung d).

zu e): Es gilt nach Definition $F_S = G_S \cup E_S$, $G_S \cap E_S = \emptyset$. Die Anzahl der Elternbox jeder Stufe ist höchstens $\frac{m}{s+1}$, außerdem gilt $\text{card } G_S \leq \frac{4Lm}{s+1}$. Somit erhalten wir die Abschätzung $\text{card } F_S \leq \frac{(L-1)m}{s+1} + \frac{4Lm}{s+1} \leq \frac{5Lm}{s+1}$. \square

Im Folgenden geben wir die Aufwandsabschätzungen der Multipol- und lokalen Entwicklungen für Dipolladungen an. Für Punktladungen erhöht sich der Aufwand nur geringfügig. Dabei betrachten wir generell Operationen mit komplexen Zahlen.

Initialisierung

Der Aufwand bei der Initialisierung hängt stark von der Implementierung ab und ist von der Ordnung $\mathcal{O}(Lm)$. Die benötigten Binomialkoeffizienten werden auch während dieses Schritts berechnet und gespeichert.

Schritt 1

Da jedes der m Teilchen einen Anteil an der Multipolentwicklung p -ter Ordnung einer kinderlosen Box hat, erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen: } & 2mp \\ \text{Additionen: } & 4mp \end{aligned}$$

Schritt 2

Jede kinderlose Box enthält höchstens s Teilchen, und der Aufwand für die direkte Berechnung aller Wechselwirkungen zwischen den Teilchen zweier Boxen ist $\mathcal{O}(s^2)$. Die Gesamtzahl der Boxen in den Listen 1 ist beschränkt durch $9 \cdot 4 L m / (s + 1)$ (Lemma 6.1). Für die Rechnungen gelten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} & \leq \frac{3 \cdot 9 \cdot 4 L m s^2}{s+1} \\ \text{Additionen} & \leq \frac{2 \cdot 9 \cdot 4 L m s^2}{s+1} \\ \text{Divisionen} & \leq \frac{9 \cdot 4 L m s^2}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 3

Das Zentrum der Multipolentwicklung jeder Box wird zum Zentrum der Elternbox verschoben. Die Gesamtzahl der Boxen ist beschränkt durch $5 L m / (s + 1)$ (Lemma 6.1) und jede Verschiebung erfordert einen Aufwand der Größenordnung $\sum_{i=1}^p i = p(p + 1) / 2$. Für die Rechnungen gelten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} & \leq \frac{5 L m (p^2 + p + 2)}{s+1} \\ \text{Additionen} & \leq \frac{5 L m ((p+1)p/2 + 1)}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 4

Liste 2 jeder Box hat nicht mehr als 27 Einträge. Es gibt höchstens $5 L m / (s + 1)$ Boxen (Lemma 6.1), und jede Transformation erfordert den Aufwand $\mathcal{O}(p^2)$. Für die Rechnungen gelten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} &\leq \frac{27 \cdot 5 L m ((p^2 + 5p)/2)}{s+1} \\ \text{Additionen} &\leq \frac{27 \cdot 5 L m (p+1)^2}{s+1} \\ \text{Divisionen} &\leq \frac{27 \cdot 5 L m (p+1)}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 5

Jede Box in X_b enthält höchstens s Teilchen, und der Aufwand für die Berechnung aller Wechselwirkungen zwischen allen Teilchen einer Box in X_b und einer Box b ist $\mathcal{O}(ps)$. Die Gesamtzahl der Boxen in den Listen 4 ist beschränkt durch $5 \cdot 5 L m / (s + 1)$ (Lemma 6.1). Für die Rechnungen gelten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} &\leq \frac{5 \cdot 5 L m s (p+5)}{s+1} \\ \text{Additionen} &\leq \frac{5 \cdot 5 L m (s+1)}{s+1} \\ \text{Divisionen} &\leq \frac{5 \cdot 5 L m s}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 7

Jede kinderlose Box enthält höchstens s Teilchen, und der Aufwand für die Berechnung aller Wechselwirkungen zwischen allen Teilchen in b und einer Box in W_b ist $\mathcal{O}(ps)$. Die Gesamtzahl der Boxen in den Listen 3 ist beschränkt durch $5 \cdot 5 L m / (s + 1)$ (Lemma 6.1). Für die Rechnungen gelten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} &\leq \frac{5 \cdot 5 L m s 2p}{s+1} \\ \text{Additionen} &\leq \frac{5 \cdot 5 L m s (p+1)}{s+1} \\ \text{Divisionen} &\leq \frac{2 \cdot 25 L m s}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 8

Jede Box hat höchstens vier Kinder. Die Anzahl der Boxen ist nicht größer als $5 L m / (s + 1)$ (Lemma 6.1), und eine Transformation erfordert einen Aufwand $\mathcal{O}(p^2/2)$. Für die Rechnung delten die folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen} &\leq \frac{10 L m (p^2 + 3p)}{s+1} \\ \text{Additionen} &\leq \frac{10 L m (p^2 + p)}{s+1} \end{aligned}$$

Schritt 9

An jeder Position eines Teilchens wird eine Multipolentwicklung p -ter Ordnung berechnet. Die Summation erfordert einen zusätzlichen Aufwand von m Additionen, man hat dabei:

$$\begin{aligned} \text{Multiplikationen: } &m(2p - 1), \\ \text{Additionen: } &m(p + 2) \end{aligned}$$

Gesamtaufwand für die Schritte 1-8

Komplexe Multiplikationen:

$$T_M < m \left(L \frac{108 s^2 + 80 p^2 + 380 p + 75 ps + 135}{s + 1} \right)$$

Komplexe Additionen:

$$T_A < m \left(L \frac{72 s^2 + 150 p^2 + 290 p + 25 ps + 50 s + 165}{s + 1} \right)$$

Komplexe Divisionen:

$$T_D < m \left(L \frac{36 s^2 + 135 p + 75 s + 135}{s + 1} \right).$$

Insgesamt erhält man wegen $L = \mathcal{O}(\log_2 m)$ als Abschätzung für die CPU-Zeit:

$$T_G := \mu T_M + \delta T_D + \alpha T_A = \mathcal{O}(m \log_2 m).$$

Dabei hängen die Koeffizienten α , μ und δ vom verwendeten Rechner, der Programmiersprache und der Implementierung ab.

6.4.3 Speicherplatzanalyse

Bei der Implementierung eines Algorithmus hat man die Qual der Wahl: Speichert man lieber etwas mehr Daten (wie z. B. Zwischenergebnisse) oder berechnet diese auf Kosten der Laufzeit immer wieder neu. In unserem Programm wird die Baumstruktur ausgenutzt. Dabei wird für jede Stufe eine Liste mit den nichtleeren Boxen dieser Stufe bereitgehalten, um Rechenzeit zu sparen.

Der Speicherbedarf ist durch die Anzahl $\text{card } F_S$ nichtleerer Boxen bestimmt. Für jede Box b werden gespeichert:

- die Verfeinerungsstufe ($|i|$),
- der Mittelpunkt ($|c|$),
- die Koeffizienten einer Multipolentwicklung p -ter Ordnung ($(p+1)|c|$),
- die Koeffizienten einer lokalen Entwicklung p -ter Ordnung ($(p+1)|c|$),
- die Zeiger auf die höchstens vier Kinder ($4|z|$),
- eine Liste der Teilchen in der Box (τ_b),
- die Listen U_b, V_b, W_b und X_b für jede Box b (λ_b).

Dabei ist $|i|$ der Speicherbedarf einer ganzen Zahl, $|c|$ der Speicherbedarf einer komplexen Zahl und $|z|$ der Speicherbedarf einer Zeigervariablen.

Für den Speicherbedarf der Teilchen aller Boxen $b \in F_S$ findet man:

$$\tau := \sum_{b \in C_S} \tau_b = 2|z|m.$$

Für den Speicherbedarf der Listen erhalten mit Lemma (6.1)

$$\lambda := \sum_{b \in F_S} \lambda_b \leq 2|z|(9 \text{ card } G_S + 37 \text{ card } F_S)$$

Insgesamt erhält man für den Speicherbedarf als obere Schranke

$$M = (|i| + |c|(1 + 2(p+1)) + 4|z|) \text{ card } F_S + \tau + \lambda$$

und mit dem Lemma (6.1)

$$\begin{aligned} M &= (|i| + |c|(1 + 2(p+1)) + 4|z|) \frac{5Lm}{s+1} + 2|z| \left(m + 9 \frac{4Lm}{s+1} + 37 \frac{5Lm}{s+1} \right) \\ &= m \frac{5L|i| + 5L|c|(3 + 2p) + 2|z|(231L + s + 1)}{s+1}. \end{aligned}$$

7 Numerische Tests

Für die numerischen Tests wurde ein PC mit einem AMD-Mobile-Athlon-XP-2400+- Prozessor und 512 MB DDR-Ram verwendet. Programmiert wurde mit Borland Pascal 7.0, und die Rechnungen wurden im Protected Mode unter DOS mit doppelter Genauigkeit - jede Real-Zahl belegt acht Byte Speicherplatz - durchgeführt. Intern werden für die Rechnungen automatisch 10-Byte-Real-Zahlen verwendet.

Die Darstellung der Näherungslösung \mathcal{U}_m des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} ist aus dem dritten Kapitel bekannt. Die unbekanntenen Koeffizienten α_j werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems mit einem iterativen Verfahren (siehe Kapitel vier) bestimmt. Für den Benutzer stehen im Programm zwei iterative Verfahren zur Auswahl: GMRES und das Good-Broyden - Verfahren mit kompakter Speicherung. Dabei muss in jeder Iteration ein Matrix-Vektor - Produkt kalkuliert werden. Dies geschieht in zwei Schritten: Zunächst werden die Berechnungen für die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale der Matrix mit der adaptiven schnellen Multipolmethode durchgeführt. Danach wird zu dem entstandenen Vektor der Krümmungsanteil \mathcal{K} addiert. Die Untersuchungen zur Multipolmethode werden im Abschnitt 7.2 durchgeführt. Im Abschnitt 7.3 testen wir die iterativen Verfahren und geben den absoluten Fehler der Lösung des inneren Dirichlet-Problems in Abhängigkeit von der Geometrie des Gebietes, der Randfunktion und der Anzahl der Diskretisierungspunkte an.

7.1 Gebiete für die Testrechnungen

Für die Testrechnungen werden wir die folgenden vier Gebiete verwenden: Den Einheitskreis G_1 um den Ursprung, die Ellipse G_2 um den Ursprung mit den Halbachsen $a = 0.9$ und $b = 0.5$, ein so genanntes "Wurstgebiet" G_3 und ein Gebiet G_4 , dessen Rand ∂G_4 aus einem Dreiviertelkreis und einem Polynom vierten Grades so zusammengesetzt wird, dass in den beiden Nahtstellen die Übergänge bis einschließlich ihrer zweiten Ableitungen stetig sind. Die Ränder dieser Gebiete werden wie folgt parameterisiert:

$$\begin{aligned} G_1 : \quad x(t) &:= \cos(2\pi t), \\ y(t) &:= \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1]; \end{aligned}$$

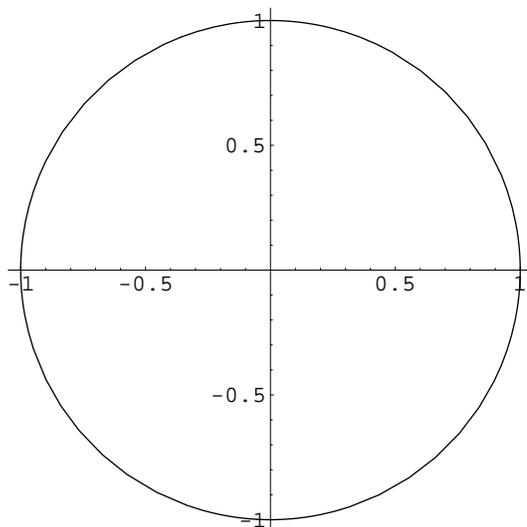


Abbildung 10: Gebiet G_1

$$G_2 : \begin{aligned} x(t) &:= 0.9 \cos(2\pi t), \\ y(t) &:= 0.5 \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

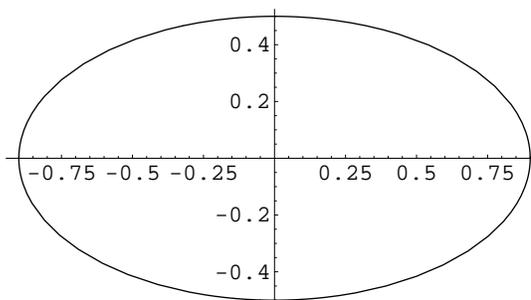


Abbildung 11: Gebiet G_2

$$G_3 : \begin{aligned} x(t) &:= 0.35 \cos(2\pi t) + 0.7 \cos(2\pi(2t)) - 0.14, \\ y(t) &:= 0.35 \sin(2\pi(t - 0.2)) + 0.14 \sin(2\pi(2t)) - 0.07 \sin(2\pi(4t)) \\ &\quad + 0.28 \sin(2\pi(t + 0.07)), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

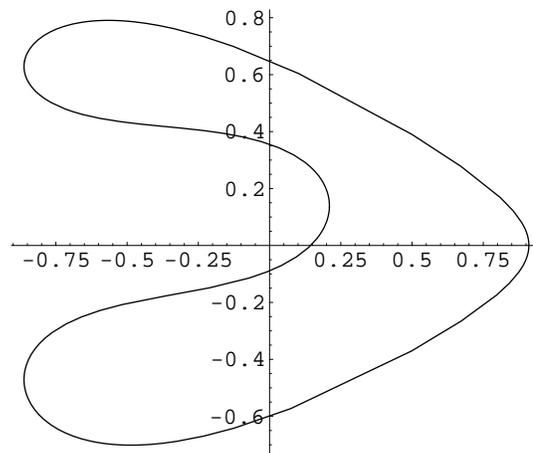


Abbildung 12: Gebiet G_3

$$G_4: \quad x(t) := \cos(2\pi t),$$

$$y(t) := \begin{cases} \sin(2\pi t), & t \in [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{3}{8}, 1], \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} (\cos^4(2\pi t) + \cos^2(2\pi t) - \frac{11}{4}), & t \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}). \end{cases}$$

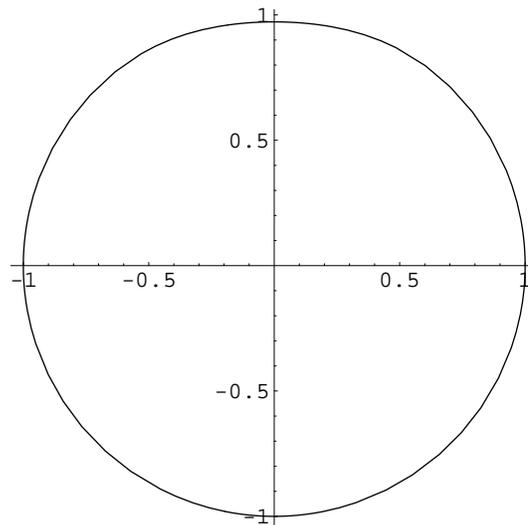


Abbildung 13: Gebiet G_4

7.2 Untersuchungen zur adaptiven schnellen Multipolmethode

Im Folgenden wird die Abkürzung DFMM für die Berechnung des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials und EFMM für die Berechnung des Einfachschichtpotentials mit der adaptiven schnellen Multipolmethode aus dem sechsten Kapitel verwendet. Wir untersuchen weiter verschiedene Zusammenhänge zwischen den Parametern der adaptiven schnellen Multipolmethode bei DFMM und EFMM.

7.2.1 Zusammenhang zwischen der Höchstzahl der Punkte pro Box und der Rechenzeit sowie dem Speicherbedarf

Zunächst wird das Gebiet G_1 für $m = 1000$ diskretisiert. In jedem Punkt soll sich eine Dipolladung der Stärke $q = 1$ befinden. Nun wird das hydrodynamische Doppelschichtpotential zur konstanten Belegung $\phi = 1$ mit der schnellen Multipolmethode berechnet. In Tabelle 7.1 wird der Zeitbedarf t , der für die Berechnung von DFMM benötigt wird, sowie der für DFMM gegenüber der direkten Berechnung zusätzlich benötigte Speicherplatz angegeben. Die Zeitmessungen erfolgen für $p = 20$ und $p = 30$ Summanden in den Entwicklungen.

Tabelle 7.1: Ergebnisse für G_1

s Punkte pro Box	Zeit in <i>sec</i> , $p = 20$	Zusatzspeicher in Byte, $p = 20$	Zeit in <i>sec</i> , $p = 30$	Zusatzspeicher in Byte, $p = 30$
1	10,12	1.691.888	20,86	1.806.640
2	6,33	1.059.824	13,17	1.453.104
3	5,04	750.512	10,41	1.023.472
4	4,61	709.616	9,58	967.216
5	3,11	472.688	6,43	641.968
6	2,67	375.280	5,41	508.720
7	2,57	375.280	5,22	508.720
8	2,21	326.896	4,35	442.416
9	2,13	309.616	4,04	418.736
10	1,82	255.536	3,48	344.176
20	1,43	158.256	2,45	211.056
30	1,36	103.088	1,91	135.408
40	1,22	82.416	1,80	107.056
50	1,22	55.088	1,63	69.488
60	1,23	55.088	1,82	69.488
70	1,24	55.088	1,92	69.488
80	1,31	55.088	2,02	69.488
90	2,36	31.088	2,37	36.528
100	2,48	31.088	2,56	36.528

Die folgende Tabelle 7.2 stellt die Ergebnisse der gleichen Untersuchung für das Gebiet G_3 dar.

Tabelle 7.2: Ergebnisse für G_3

s Punkte pro Box	Zeit in <i>sec</i> , $p = 20$	Zusatzspeicher in Byte, $p = 20$	Zeit in <i>sec</i> , $p = 30$	Zusatzspeicher in Byte, $p = 30$
1	9,98	1.677.152	20,66	1.783.904
2	6,65	1.052.176	13,73	1.439.696
3	5,33	808.688	10,95	1.103.728
4	4,24	611.040	8,65	831.200
5	3,70	520.512	7,51	706.432
6	3,22	446.352	6,48	604.432
7	2,82	380.352	5,66	513.792
8	2,49	319.120	4,95	429.520
9	2,28	282.624	4,48	379.264
10	2,18	260.400	4,23	348.720
20	1,64	153.088	3,02	201.728
30	1,53	104.912	2,47	136.272
40	1,53	79.280	2,24	101.360
50	1,55	70.288	2,23	89.168
60	1,73	56.272	2,36	70.352
70	1,90	54.560	2,39	68.000
80	2,32	48.848	2,76	60.368
90	2,53	41.536	2,89	50.496
100	2,66	38.832	2,99	46.832

Man sieht, dass in den betrachteten vier Fällen die optimale Anzahl s_{opt} von Punkten pro Box bei ungefähr 50 liegt, da die benötigte Zeit für $s = 50$ bei beiden Gebieten G_1 und G_3 für $p = 20$ sowie $p = 30$ am geringsten ist. Außerdem entnimmt man den Tabellen 7.1 und 7.2, dass der Zusatzspeicher mit wachsendem s abnimmt. Die Ergebnisse hängen auch von der Geometrie des Randes ab: Für die gleichen Rechnungen benötigt man bei G_3 aufgrund der komplizierteren Randparametrisierung mehr Zeit und Zusatzspeicher.

7.2.2 Zusammenhang zwischen der Anzahl der Summanden in den Entwicklungen und dem maximalen relativen Fehler

Um den Zusammenhang zwischen der Anzahl p der Summanden in den Entwicklungen und dem maximalen relativen Fehler ε festzustellen, werden die Ränder ∂G_1 und ∂G_2 mit $m = 1000$ diskretisiert. Die maximale Anzahl s der Punkte pro Box wird gleich 50 gewählt. In jedem Punkt wird eine Punktladung bzw. eine Dipolladung der Stärke $q = 1$ angebracht. Nun berechnen wir das hydrodynamische Einfachschichtpotential Φ_{EFMM} (für den Rand ∂G_1) und das hydrodynamische Doppelschichtpotential Φ_{DFMM} (für die Ränder ∂G_1 und ∂G_2) mit der konstanten Belegung $\phi = 1$ unter Verwendung der adaptiven schnellen Multipolmethode. Außerdem bestimmen wir mit dem Nyström-Verfahren die beiden hydrodynamischen Potentiale Φ_{dir} näherungsweise durch die direkte Matrix-Vektor - Multiplikation. Wir definieren den maximalen relativen Fehler durch

$$\varepsilon_{rel} := \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{\Phi_{dir}(z_i) - \Phi_{EFMM}(z_i)}{\Phi_{dir}(z_i)} \right|$$

bzw.

$$\varepsilon_{rel} := \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{\Phi_{dir}(z_i) - \Phi_{DFMM}(z_i)}{\Phi_{dir}(z_i)} \right|.$$

Dabei ist $\Phi_{dir}(z_i)$ das mit dem Nyström-Verfahren direkt berechnete hydrodynamische Einfachschicht- bzw. Doppelschichtpotential in z_i , welches durch die Punktladungen bzw. Dipolladungen in z_j ($j \neq i$) bewirkt wird. $\Phi_{EFMM}(z_i)$ bzw. $\Phi_{DFMM}(z_i)$ ist das mit der adaptiven schnellen Multipolmethode für p Summanden in den Entwicklungen berechnete hydrodynamische Einfachschicht- bzw. Doppelschichtpotential in z_i . Der Zusammenhang zwischen p und ε_{rel} für Φ_{EFMM} und G_1 ist in Tabelle 7.3, für Φ_{DFMM} und G_1 in Tabelle 7.4, und für Φ_{DFMM} und G_2 in Tabelle 7.5 dargestellt.

Tabelle 7.3: Ergebnisse für Φ_{EFMM} und G_1

p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}
5	$1,23 \cdot 10^{-3}$	12	$2,01 \cdot 10^{-6}$	19	$5,86 \cdot 10^{-9}$	26	$1,62 \cdot 10^{-11}$
6	$2,18 \cdot 10^{-4}$	13	$6,38 \cdot 10^{-7}$	20	$1,15 \cdot 10^{-9}$	27	$7,21 \cdot 10^{-12}$
7	$2,30 \cdot 10^{-4}$	14	$2,07 \cdot 10^{-7}$	21	$7,91 \cdot 10^{-10}$	28	$2,84 \cdot 10^{-12}$
8	$6,54 \cdot 10^{-5}$	15	$1,48 \cdot 10^{-7}$	22	$4,69 \cdot 10^{-10}$	29	$1,53 \cdot 10^{-12}$
9	$2,55 \cdot 10^{-5}$	16	$5,85 \cdot 10^{-8}$	23	$2,00 \cdot 10^{-10}$	30	$6,75 \cdot 10^{-13}$
10	$6,12 \cdot 10^{-6}$	17	$2,51 \cdot 10^{-8}$	24	$5,62 \cdot 10^{-11}$	31	$2,35 \cdot 10^{-13}$
11	$4,32 \cdot 10^{-6}$	18	$1,03 \cdot 10^{-8}$	25	$3,45 \cdot 10^{-11}$	32	$1,59 \cdot 10^{-13}$

Tabelle 7.4: Ergebnisse für Φ_{DFMM} und G_1

p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}
5	$7,26 \cdot 10^{-3}$	12	$3,07 \cdot 10^{-5}$	19	$1,80 \cdot 10^{-7}$	26	$6,94 \cdot 10^{-10}$
6	$3,97 \cdot 10^{-3}$	13	$1,86 \cdot 10^{-5}$	20	$4,32 \cdot 10^{-8}$	27	$3,74 \cdot 10^{-10}$
7	$2,90 \cdot 10^{-3}$	14	$4,38 \cdot 10^{-6}$	21	$2,30 \cdot 10^{-8}$	28	$9,71 \cdot 10^{-10}$
8	$7,57 \cdot 10^{-4}$	15	$3,32 \cdot 10^{-6}$	22	$1,99 \cdot 10^{-8}$	29	$5,87 \cdot 10^{-11}$
9	$4,45 \cdot 10^{-4}$	16	$1,38 \cdot 10^{-6}$	23	$6,29 \cdot 10^{-9}$	30	$4,37 \cdot 10^{-11}$
10	$8,49 \cdot 10^{-5}$	17	$6,85 \cdot 10^{-7}$	24	$2,21 \cdot 10^{-9}$	31	$1,77 \cdot 10^{-11}$
11	$6,69 \cdot 10^{-5}$	18	$3,38 \cdot 10^{-7}$	25	$9,67 \cdot 10^{-10}$	32	$6,31 \cdot 10^{-12}$

Tabelle 7.5: Ergebnisse für Φ_{DFMM} und G_2

p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}	p	ε_{rel}
5	$8,14 \cdot 10^{-3}$	12	$1,07 \cdot 10^{-5}$	19	$4,69 \cdot 10^{-8}$	26	$2,10 \cdot 10^{-10}$
6	$2,26 \cdot 10^{-3}$	13	$7,63 \cdot 10^{-6}$	20	$2,37 \cdot 10^{-8}$	27	$5,27 \cdot 10^{-11}$
7	$9,13 \cdot 10^{-4}$	14	$2,54 \cdot 10^{-6}$	21	$8,32 \cdot 10^{-9}$	28	$2,89 \cdot 10^{-11}$
8	$3,32 \cdot 10^{-4}$	15	$8,78 \cdot 10^{-7}$	22	$3,11 \cdot 10^{-9}$	29	$1,61 \cdot 10^{-11}$
9	$2,51 \cdot 10^{-4}$	16	$3,52 \cdot 10^{-7}$	23	$1,47 \cdot 10^{-9}$	30	$1,01 \cdot 10^{-11}$
10	$6,95 \cdot 10^{-5}$	17	$1,80 \cdot 10^{-7}$	24	$8,85 \cdot 10^{-10}$	31	$4,71 \cdot 10^{-12}$
11	$2,04 \cdot 10^{-5}$	18	$8,11 \cdot 10^{-8}$	25	$5,11 \cdot 10^{-10}$	32	$1,44 \cdot 10^{-12}$

Wie man sieht klingt der maximale relative Fehler mit wachsendem p bei allen Beispielen kontinuierlich ab. Das genaue Abklingverhalten hängt allerdings von der Geometrie des Randes ab (vgl. Tabelle 7.4 und 7.5).

7.2.3 Vergleich von DFMM bzw. EFMM mit der Berechnung der hydrodynamischen Potentiale konstanter Belegung durch die direkte Matrix-Vektor-Multiplikation

Im Folgenden werden die Gebiete G_1 und G_4 diskretisiert und die Entwicklungen mit $p = 25$ berechnet. Dabei wird der Parameter s so gewählt, dass der durch die numerischen Experimente ermittelte Zeitaufwand für DFMM bzw. EFMM minimal wird. In Tabelle 7.6 ist im Falle von G_1 die für EFMM und die

für die direkte Berechnung des Einfachschichtpotentials benötigte Zeit sowie der zusätzliche Speicherbedarf angegeben. In Tabelle 7.7 bzw. 7.8 sind die entsprechenden Ergebnisse für DFMM und G_1 bzw. G_4 aufgelistet.

Tabelle 7.6: Ergebnisse für Φ_{EFMM} und G_1

n	s	$t_{dir, sec}$	Speicherbedarf	$t_{EFMM, sec}$	Zusatzspeicher
500	60	0,31	144.528	0,21	25.808
1000	60	0,78	288.528	0,38	62.288
2000	60	2,60	576.528	0,84	135.248
4000	60	10,02	1.152.528	1,66	282.448
8000	60	40,04	2.042.384	3,65	39.440
16000	60	174,19	1.987.088	8,39	98.384
32000	60	784,21	1.876.496	16,16	-53.168

Tabelle 7.7: Ergebnisse für Φ_{DFMM} und G_1

n	s	$t_{dir, sec}$	Speicherbedarf	$t_{DFMM, sec}$	Zusatzspeicher
500	50	0,27	116.464	0,75	25.808
1000	50	0,48	232.464	1,42	62.288
2000	50	2,26	464.464	3,02	135.248
4000	50	8,83	928.464	6,23	282.448
8000	50	34,0	1.856.464	16,0	39.440
16000	50	150,7	1.877.456	33,14	98.384
32000	50	762,7	1.919.440	72,32	-53.168

Tabelle 7.8: Ergebnisse für Φ_{DFMM} und G_4

n	s	$t_{dir, sec}$	Speicherbedarf	$t_{DFMM, sec}$	Zusatzspeicher
500	50	0,30	116.464	1,12	48.272
1000	50	0,88	232.464	1,67	96.592
2000	50	2,60	464.464	3,68	132.624
4000	50	8,84	928.464	7,99	309.776
8000	50	35,3	1.856.464	17,5	53.776
16000	50	163,5	1.877.456	35,41	108.944
32000	50	782,3	1.919.440	76,40	-33.264

Es ist deutlich erkennbar, dass der Aufwand bei der adaptiven schnellen Multipolmethode fast linear anwächst. Für das hydrodynamische Einfachschichtpotential ist die Methode schon ab ungefähr $m = 500$ schneller als die direkte Berechnung. Aus den Tabellen 7.7 und 7.8 entnimmt man außerdem, dass die adaptive schnelle Multipolmethode für das hydrodynamische Doppelschichtpotential erst ab ungefähr $m = 3000$ vorteilhafter ist als die direkte Berechnung. Hier hat sicherlich die Tatsache, dass für Φ_{DFMM} die Multipolmethode vierunddreißig mal und für Φ_{EFMM} nur zehn mal angewendet wird, einen Einfluss. Dabei wird der Unterschied mit wachsendem m immer gravierender. Bei einer sehr großen Anzahl von Diskretisierungspunkten erfordern beide Gebiete auch wesentlich weniger Speicherplatz für die Berechnungen.

7.3 Untersuchungen zum inneren Dirichlet-Problem

In diesem Abschnitt werden nun Simulationen zum inneren Dirichlet-Problem mit der adaptiven schnellen Multipolmethode durchgeführt.

7.3.1 Vergleich des Konvergenzverhaltens der iterativen Algorithmen

Wir betrachten im Folgenden eine Ellipse G . Mit der Parameterisierung

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(2\pi t) \\ b \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} a \cos(2\pi \tau) \\ b \sin(2\pi \tau) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten wir die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned} |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tau)| &= \sqrt{\dot{y}_1^2(\tau) + \dot{y}_2^2(\tau)} \\ &= 2\pi \sqrt{(a \sin(2\pi t))^2 + (b \cos(2\pi t))^2} \end{aligned}$$

für die Gramsche Determinante,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{\sqrt{\dot{y}_1^2(\tau) + \dot{y}_2^2(\tau)}} \begin{pmatrix} \dot{y}_2(\tau) \\ -\dot{y}_1(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(a \sin(2\pi t))^2 + (b \cos(2\pi t))^2}} \begin{pmatrix} b \cos(2\pi t) \\ a \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für die äußere Einheitsnormale im Punkt $\mathbf{y} \in \partial G$ und

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{11}^{\bullet}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \frac{(x_1 - y_1)^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} |\dot{\gamma}(\tau)| \\ &= \frac{a^3 b \sin^2 \pi(t + \tau)}{(a^2 \sin^2 \pi(t + \tau)) + b^2 \cos^2 \pi(t + \tau))^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{12}^{\bullet}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{D}_{21}^{\bullet}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} |\dot{\gamma}(\tau)| \\ &= -\frac{a^2 b^2 \sin 2\pi(t + \tau)}{2(a^2 \sin^2 \pi(t + \tau)) + b^2 \cos^2 \pi(t + \tau))^2}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{22}^{\bullet}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\pi} \frac{(x_2 - y_2)^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} |\dot{\gamma}(\tau)| \\ &= \frac{a b^3 \cos^2 \pi(t + \tau)}{(a^2 \sin^2 \pi(t + \tau)) + b^2 \cos^2 \pi(t + \tau))^2}\end{aligned}$$

für die ersten zwei Zeilen des parametrisierten Doppelschichtpotentialkernes. Im Falle $t = \tau$ erhalten wir die Krümmungsmatrix des Randes ∂G in der Form

$$\mathcal{K}_{11}(\tau) = \frac{a^3 b \sin^2(2\pi\tau)}{(a^2 \sin^2(2\pi\tau)) + b^2 \cos^2(2\pi\tau))^2},$$

$$\mathcal{K}_{12}(\tau) = \mathcal{K}_{21}(\tau) = -\frac{a^2 b^2 \sin(4\pi\tau)}{2(a^2 \sin^2(2\pi\tau)) + b^2 \cos^2(2\pi\tau))^2}$$

sowie

$$\mathcal{K}_{22}(\tau) = \frac{a b^3 \cos^2(2\pi\tau)}{(a^2 \sin^2(2\pi\tau)) + b^2 \cos^2(2\pi\tau))^2}.$$

Wie bereits oben erwähnt muss der Krümmungsanteil $\mathcal{K} \phi_m$ in jedem Iterationsschritt zum aus der Multipolmethode resultierenden Vektor addiert werden. Um das Konvergenzverhalten von GB und GMRES zu vergleichen, betrachten wir das Beispiel $G := G_2$ und $m = 1000$ mit dem Randwert $\mathbf{b}(\mathbf{x}) := (-x_1, x_2)^T$. Für die Startbelegung $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ konvergiert GMRES wesentlich schneller als GB. Spätestens nach sechs Iterationsschritten liefern aber beide Verfahren den gesuchten Wert mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-6}$. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 7.9 dargestellt.

Tabelle 7.9: Konvergenzverhalten vom GB und GMRES im Falle $G = G_2$, $m = 1000$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$ und Startwert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

Iteration k	Reduktion des Fehlers $ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* $ bei GB	Reduktions des Residiums $ \mathbf{Ax}_k - \mathbf{b} $ bei GMRES
1	$7,96 \cdot 10^{-1}$	$1,48 \cdot 10^0$
2	$1,73 \cdot 10^{-1}$	$2,50 \cdot 10^{-1}$
3	$6,42 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$
4	$2,16 \cdot 10^{-2}$	$3,39 \cdot 10^{-5}$
5	$3,64 \cdot 10^{-5}$	$6,16 \cdot 10^{-6}$
6	$5,04 \cdot 10^{-6}$	$1,75 \cdot 10^{-7}$
7	$1,68 \cdot 10^{-6}$	$2,14 \cdot 10^{-8}$
8	$3,36 \cdot 10^{-7}$	$3,52 \cdot 10^{-9}$
9	$1,05 \cdot 10^{-7}$	$1,29 \cdot 10^{-10}$
10	$7,11 \cdot 10^{-9}$	$7,22 \cdot 10^{-13}$
11	$1,73 \cdot 10^{-9}$	$1,08 \cdot 10^{-13}$
12	$4,44 \cdot 10^{-10}$	$2,51 \cdot 10^{-14}$
13	$6,59 \cdot 10^{-11}$	$2,42 \cdot 10^{-14}$
14	$2,12 \cdot 10^{-12}$	$2,38 \cdot 10^{-14}$
15	$1,11 \cdot 10^{-13}$	$2,38 \cdot 10^{-14}$
16	$1,26 \cdot 10^{-14}$	$2,38 \cdot 10^{-14}$
17	$3,19 \cdot 10^{-16}$	$2,38 \cdot 10^{-14}$
18	$7,90 \cdot 10^{-17}$	$2,38 \cdot 10^{-14}$

Wie aus der obigen Tabelle ersichtlich ist ändert sich das Residuum bei GMRES nach ungefähr zwölf Iterationen nicht mehr.

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel: Seien $G = G_1$, $m = 100$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + 2x_2^2, -2x_1x_2)^T$. Auch hier konvergiert für die Startbelegung $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ GMRES wieder wesentlich schneller, wobei nach sechs Iterationsschritten beide Verfahren den gesuchten Wert mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-6}$ liefern. Die entsprechenden Ergebnisse sind in der Tabelle 7.10 dargestellt.

Tabelle 7.10: Konvergenzverhalten von GB und GMRES für $G = G_1$, $m = 100$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + 2x_2^2, -2xx_2)^T$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

Iteration k	Reduktion des Fehlers $ \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* $ bei GB	Reduktions des Residiums $ \mathbf{Ax}_k - \mathbf{b} $ bei GMRES
1	$7,30 \cdot 10^{-1}$	$2,22 \cdot 10^{-1}$
2	$1,89 \cdot 10^{-1}$	$1,69 \cdot 10^{-3}$
3	$8,48 \cdot 10^{-2}$	$2,86 \cdot 10^{-5}$
4	$6,54 \cdot 10^{-4}$	$9,13 \cdot 10^{-6}$
5	$1,51 \cdot 10^{-5}$	$8,45 \cdot 10^{-8}$
6	$3,93 \cdot 10^{-6}$	$9,73 \cdot 10^{-10}$
7	$1,76 \cdot 10^{-6}$	$8,45 \cdot 10^{-12}$
8	$1,64 \cdot 10^{-8}$	$8,83 \cdot 10^{-13}$
9	$4,20 \cdot 10^{-10}$	$1,41 \cdot 10^{-13}$
10	$9,35 \cdot 10^{-11}$	$1,30 \cdot 10^{-13}$
11	$3,75 \cdot 10^{-11}$	$3,10 \cdot 10^{-14}$
12	$4,42 \cdot 10^{-12}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
13	$8,28 \cdot 10^{-13}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
14	$3,13 \cdot 10^{-13}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
15	$1,35 \cdot 10^{-13}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
16	$1,71 \cdot 10^{-15}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
17	$1,41 \cdot 10^{-15}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$
18	$1,09 \cdot 10^{-15}$	$1,13 \cdot 10^{-14}$

7.3.2 Simulationen zum inneren Dirichlet-Problem

Mit der Lösung des lineare Gleichungssystems, lässt sich die Lösung des inneren Dirichlet-Problems für die Stikes-Gleichungen in jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ approximieren. Dazu betrachten wir die beiden folgenden Beispiele

Beispiel 1: Auf dem Rand der Gebiete G_1 und G_2 sei die Funktion $\mathbf{b}(\mathbf{x}) := (1, 1)^T$ vorgegeben. Diese Funktion erfüllt die Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{\partial G} \mathbf{b}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = 0. \quad (133)$$

Also existiert eine Lösung (\mathbf{u}, p) , der Stokes-Gleichungen, wobei das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} eindeutig und die Druckfunktion p bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Die Funktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x}) := (1, 1)^T$, $p(\mathbf{x}) := 0$ stellen eine Lösung dieses Problems dar.

Wir bestimmen die Näherungslösung $\mathcal{U}_m = ((\mathcal{U}_m)_1, (\mathcal{U}_m)_2)^T$ für $m = 50$ mit der adaptiven Multipolmethode und dem GB-Verfahren. Die Fehler $|1 - (\mathcal{U}_m)_1|$ und $|1 - (\mathcal{U}_m)_2|$ sind im Fall von G_1 in den Abbildungen 14 bis 17 dargestellt.

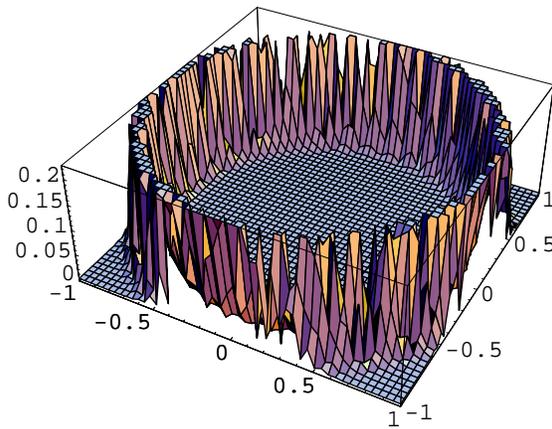


Abbildung 14:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

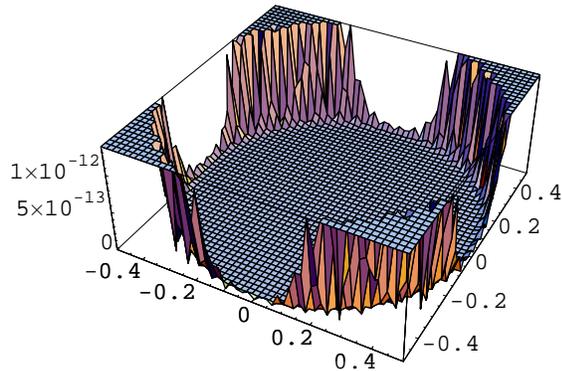


Abbildung 15:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

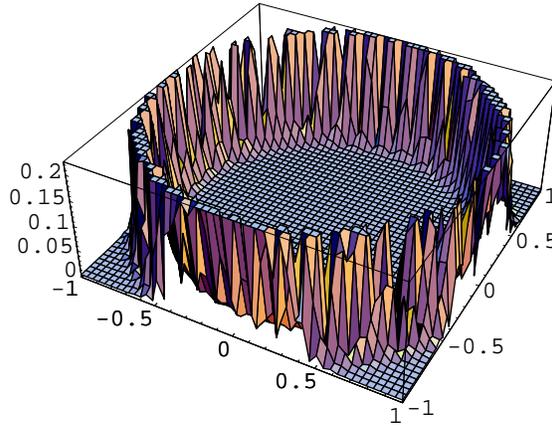


Abbildung 16:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

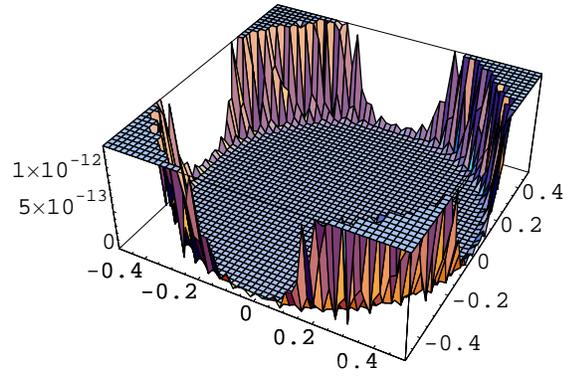


Abbildung 17:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

Im Inneren des Gebietes G_1 sind die Fehler $|1 - (\mathcal{U}_m)_1|$ und $|1 - (\mathcal{U}_m)_2|$ schon für $m = 50$ sehr klein, wobei in der Umgebung des Randes die Näherung \mathcal{U}_m die größten Abweichungen vom exakten Wert \mathbf{u} aufweist. Dies geschieht aufgrund des im Abschnitt 2.3 beschriebenen Sprungverhaltens von \mathbf{u} . Es gilt nämlich $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (0.5, 0.5)^T$ für alle $\mathbf{x} \in \partial G$.

Für $m = 250$ sind die Fehler $|1 - (\mathcal{U}_m)_1|$ und $|1 - (\mathcal{U}_m)_2|$ sowohl im Inneren des Gebietes G_1 als auch in der näheren Umgebung des Randes ∂G_1 praktisch gleich Null, wie in den Abbildungen 18 bis 21 dargestellt.

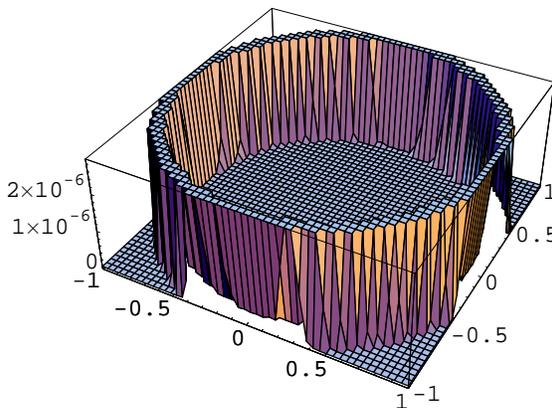


Abbildung 18:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

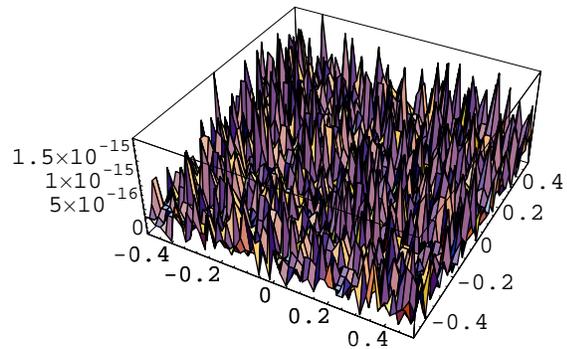


Abbildung 19:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

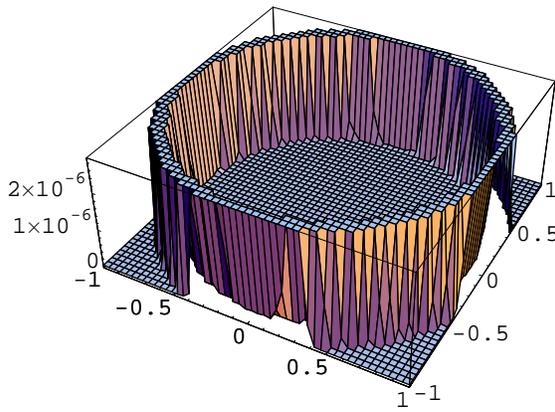


Abbildung 20:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

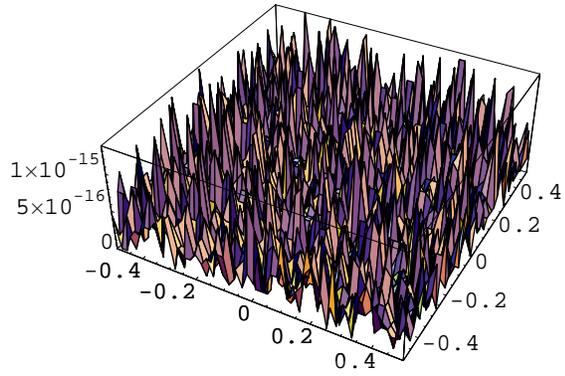


Abbildung 21:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

Mit der Erhöhung der Anzahl m der Diskretisierungspunkte verkleinert sich der Fehler wie erwartet. Qualitativ identische Ergebnisse erhalten wir auch für das Gebiet G_2 (siehe Abbildung 22 bis 29).

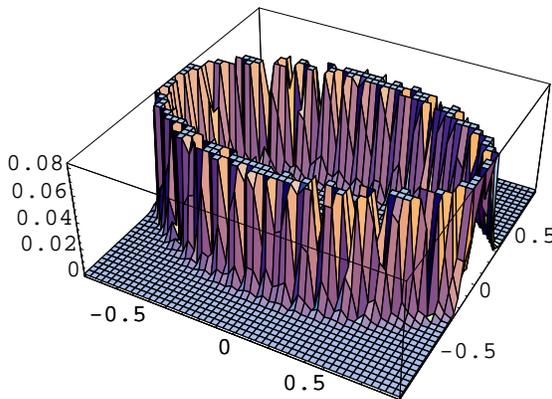


Abbildung 22:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

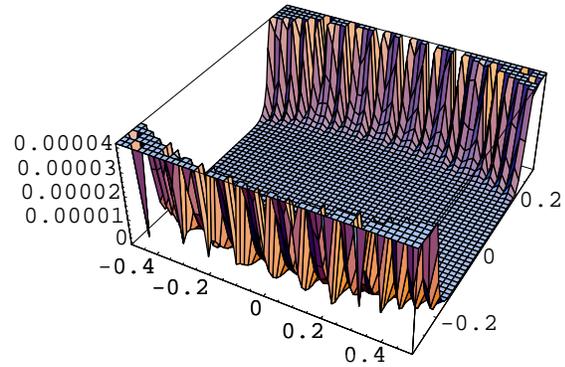


Abbildung 23:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

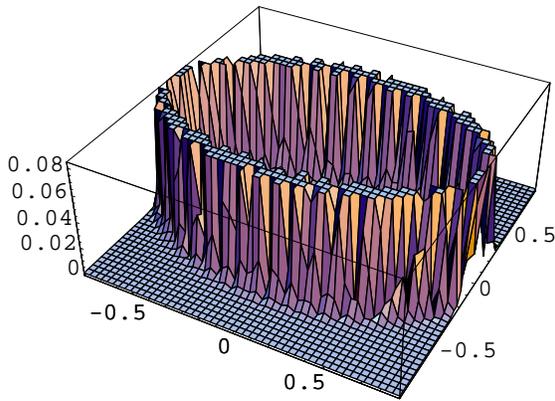


Abbildung 24:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

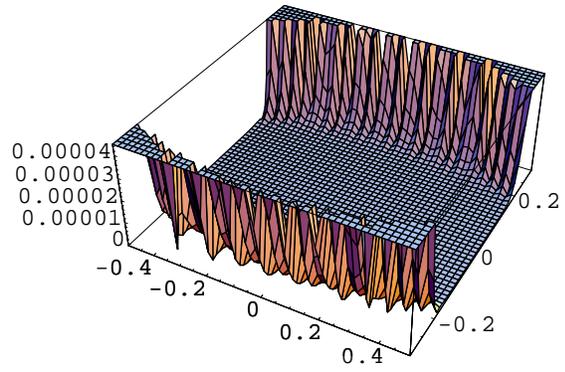


Abbildung 25:
 $m = 50, s = 5, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

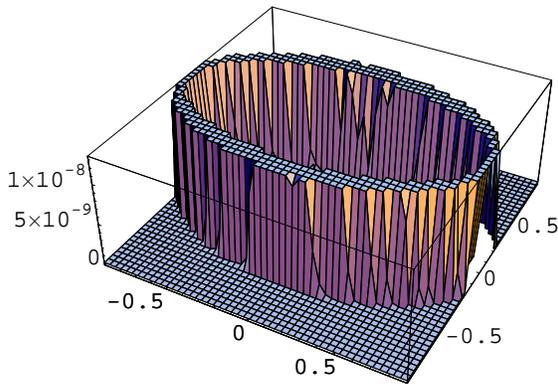


Abbildung 26:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

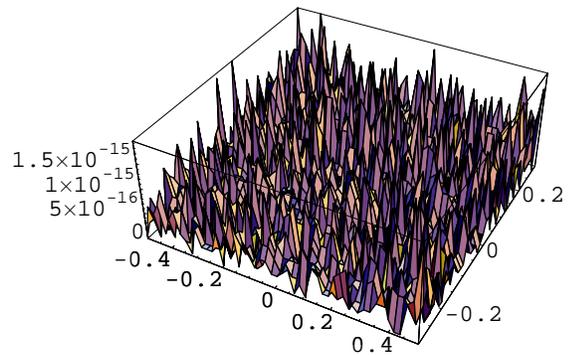


Abbildung 27:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

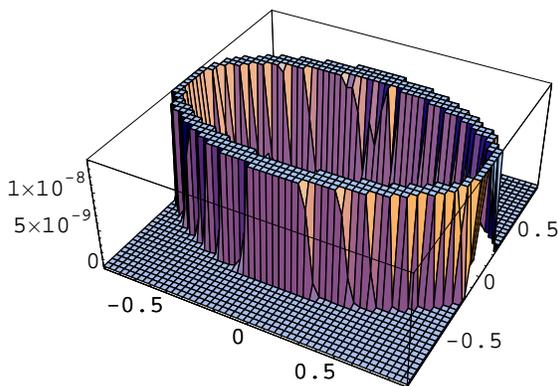


Abbildung 28:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

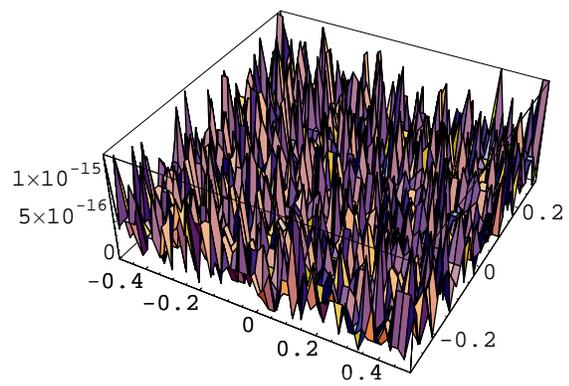


Abbildung 29:
 $m = 250, s = 10, |1 - (\mathcal{U}_m)_2|$

Beispiel 2: Im Falle des Randwertes $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$, ist die Verträglichkeitsbedingung (133) ebenfalls erfüllt. Hier ist $\mathbf{u}(\mathbf{x}) := (-x_1, x_2)^T$ das eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsfeld bei konstantem Druck p . Die Fehlerverteilungen für $|-x_1 - (\mathcal{U}_m)_1|$ und $|x_2 - (\mathcal{U}_m)_2|$ sehen in G_1 für $m = 50, s = 5$ wie folgt aus:

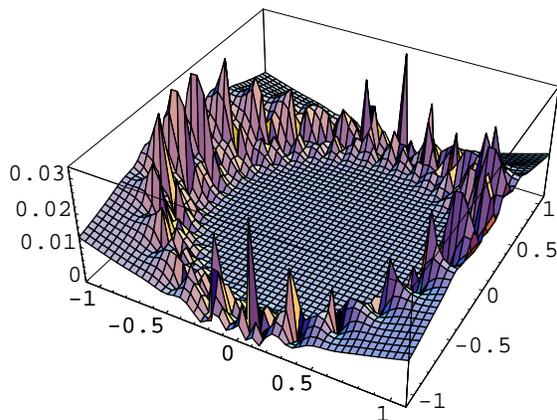


Abbildung 30:
 $m = 50, s = 5, |-x_1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

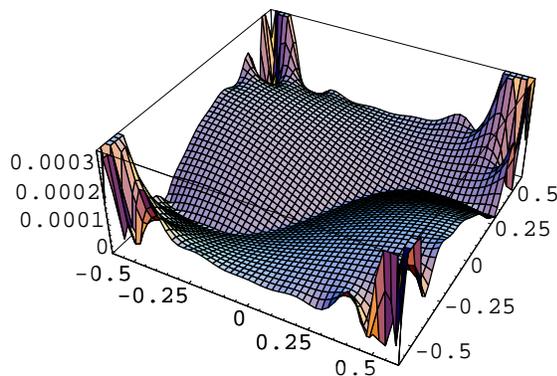


Abbildung 31:
 $m = 50, s = 5, |-x_1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

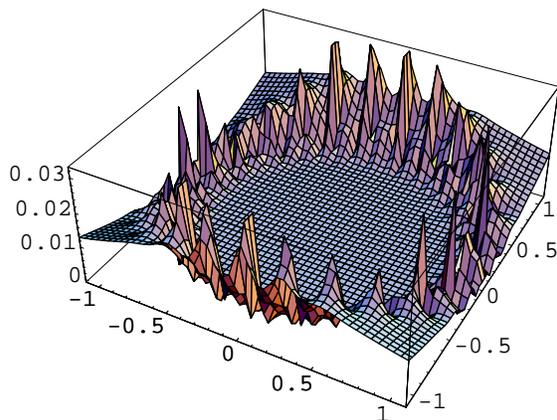


Abbildung 32:
 $m = 50, s = 5, |x_2 - (\mathcal{U}_m)_2|$

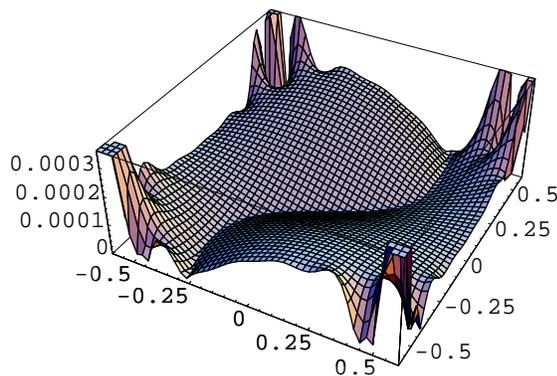


Abbildung 33:
 $m = 50, s = 5, |x_2 - (\mathcal{U}_m)_2|$

Wenn wir jetzt die Rechnung mit $m = 250$ und $s = 10$ durchführen, verändern sich die Fehlerverteilungen wie folgt:

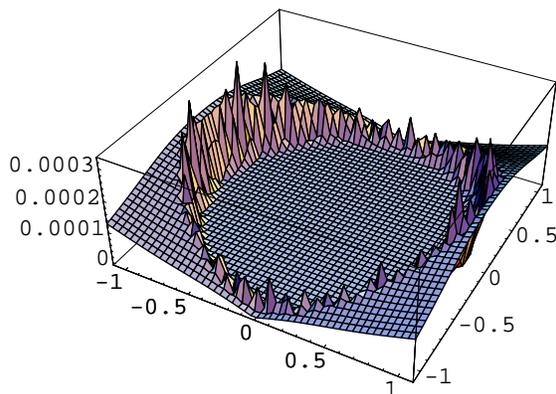


Abbildung 34:
 $m = 250, s = 10, |-x_1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

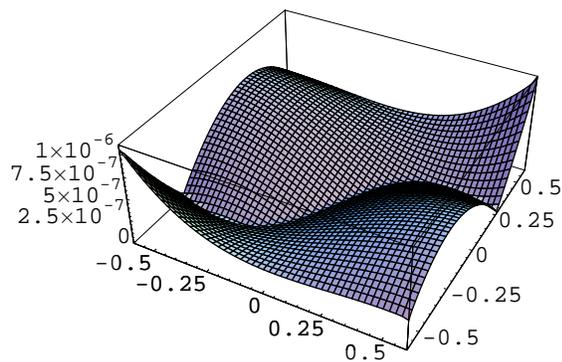


Abbildung 35:
 $m = 250, s = 10, |-x_1 - (\mathcal{U}_m)_1|$

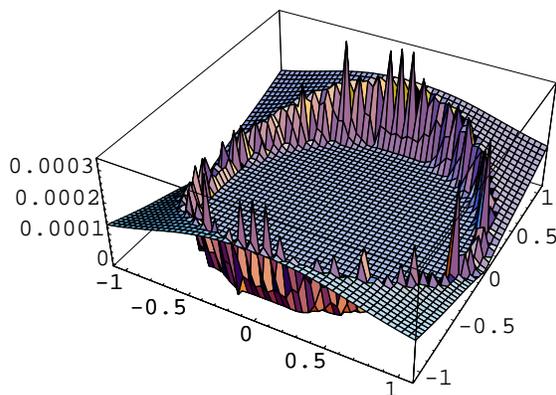


Abbildung 36:
 $m = 250, s = 10, |x_2 - (\mathcal{U}_m)_2|$

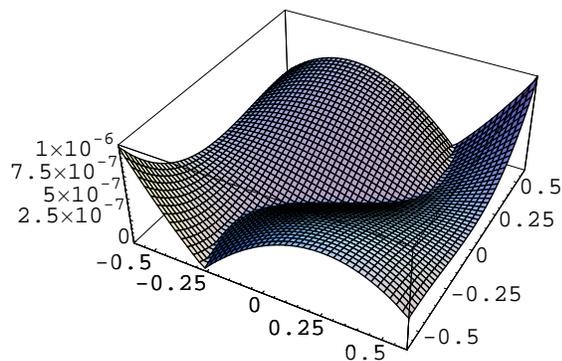


Abbildung 37:
 $m = 250, s = 10, |x_2 - (\mathcal{U}_m)_2|$

Man stellt fest, dass der Fehler im **Beispiel 2** nicht so schnell abklingt wie im **Beispiel 1**.

Die gleichen Experimente liefern uns für das Gebiet G_2 die Fehlerverteilungen wie folgt:

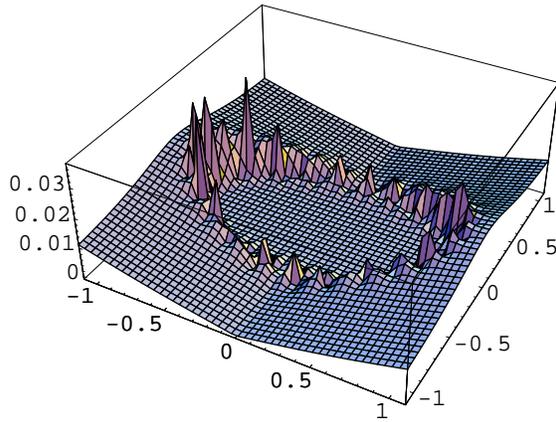


Abbildung 38:
 $m = 50, s = 5, | -x_1 - (\mathcal{U}_m)_1 |$

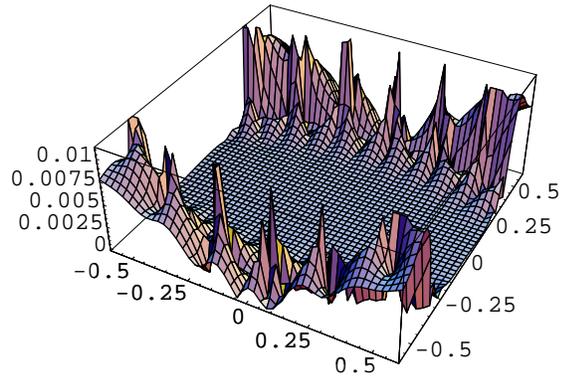


Abbildung 39:
 $m = 50, s = 5, | -x_1 - (\mathcal{U}_m)_1 |$

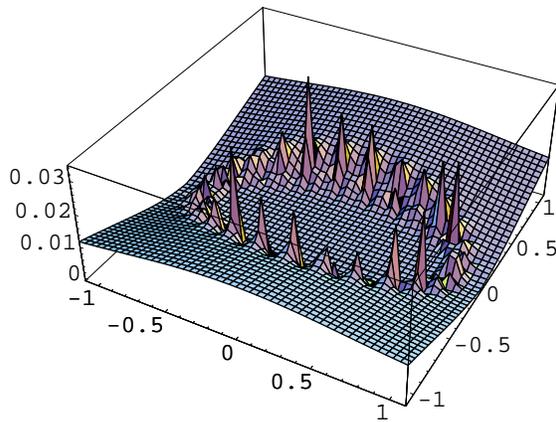


Abbildung 40:
 $m = 50, s = 5, | x_2 - (\mathcal{U}_m)_2 |$

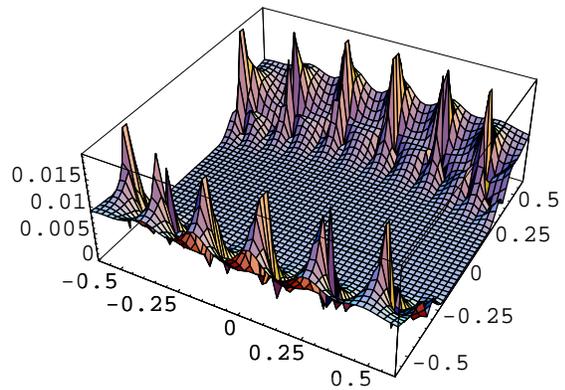


Abbildung 41:
 $m = 50, s = 5, | x_2 - (\mathcal{U}_m)_2 |$

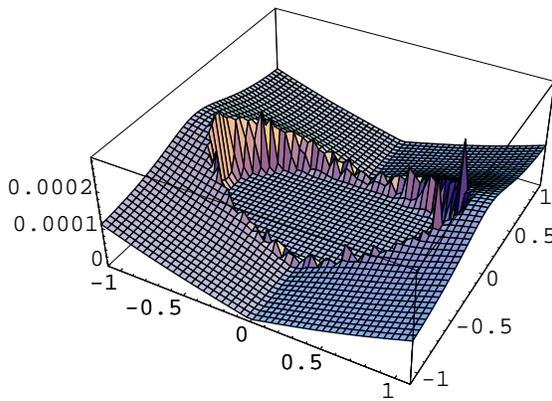


Abbildung 42:
 $m = 250, s = 10, | -x_1 - (\mathcal{U}_m)_1 |$

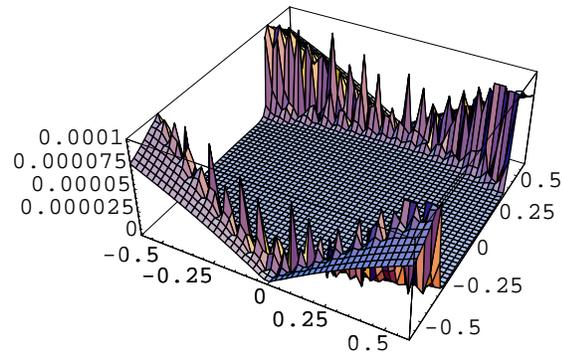


Abbildung 43:
 $m = 250, s = 10, | -x_1 - (\mathcal{U}_m)_1 |$

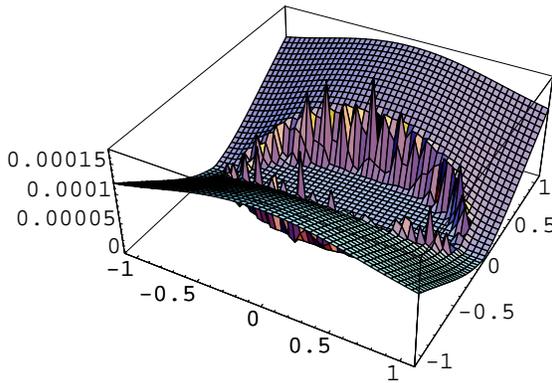


Abbildung 44:
 $m = 250, s = 10, | x_2 - (\mathcal{U}_m)_2 |$

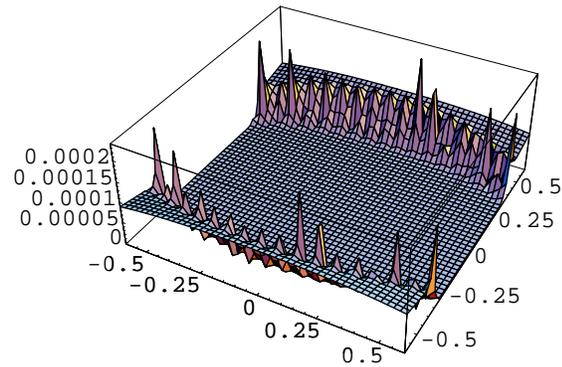


Abbildung 45:
 $m = 250, s = 10, | x_2 - (\mathcal{U}_m)_2 |$

Die Fehler der beiden Komponenten unterscheiden sich hier von einander stärker als wir dies im **Beispiel 1** beobachtet haben. Dies liegt daran, dass die Randwertkomponente $b_1(\gamma(\tau)) = -a \cos(2\pi \tau)$ in den Punkten ihr Betragsmaximum annimmt, in denen Komponente $b_2(\gamma(\tau)) = b \sin(2\pi \tau)$ verschwindet, und umgekehrt.

Außerdem sieht man hier auch, dass die größten Fehler in der Umgebung des Randes auftreten und dass der Fehler im Allgemeinen abnimmt, wenn die Anzahl m der Diskretisierungspunkte vergrößert wird.

Wir fassen die Ergebnisse der obigen Untersuchungen noch einmal zusammen:

- Die CPU-Zeit wächst bei der adaptiven schnellen Multipolmethode fast linear mit der Anzahl m der Diskretisierungspunkte.
- Für das hydrodynamische Doppelschichtpotential lohnt sich die adaptive schnelle Multipolmethode etwa ab 3000 Diskretisierungspunkten, für das Einfachschichtpotential etwa ab 500 Diskretisierungspunkten.
- Sowohl für die Berechnung des hydrodynamischen Doppelschichtpotentials als auch für die Berechnung des hydrodynamischen Einfachschichtpotentials mit der adaptiven schnellen Multipolmethode wird ab $m = 30\,000$ weniger Speicherplatz benötigt als bei den direkten Berechnungen dieser Potentiale mit dem Nyström-Verfahren.
- Je kleiner die Anzahl s der Punkte pro Box ist, desto größer ist bei der adaptiven schnellen Multipolmethode der Speicherbedarf.
- Der relative Fehler bei der Berechnung der hydrodynamischen Potentiale mit der adaptiven schnellen Multipolmethode klingt mit wachsender Anzahl p der Glieder in der lokalen Taylorentwicklung kontinuierlich ab.
- Die Anzahl der erforderlichen Iterationen bei der numerischen Lösung des Stokes-Systems hängt stark von der Geometrie des Gebietes ab. Dabei konvergiert das Verfahren GMRES schneller als das Good-Broyden - Verfahren.

Literatur

- [1] Agoshkov, V.I.; Dubovskii, P.V.; Shutjaev, V.P.: *Metody reschenija zadach matamaticheskoj fiziki*. Moskwa: FIZMATLIT (2002)
- [2] Alpert, B.K.: High-order quadratures for integral operators with singular kernels. *J. Comp. Appl. Math.* **60**, 367-378 (1995)
- [3] Bastian, J.: *Schnelle Verfahren zur Lösung von Randintegralgleichungen der Potentialtheorie*. Diplomarbeit TU Dresden 1996
- [4] Bokanowski, O.; Lemou, M.: Fast multipole method for multidimensional integrals. *Num. Anal.* **326** , 105-110 (1998)
- [5] Borchers, W.; Varnhorn, W.: On the boundedness of the Stokes semigroup in two-dimensional exterior domains. *Math. Z.* **213**, 275-300 (1993)
- [6] Broyden, C.G.: A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Math. Comp.* **19**, 577-593 (1965)
- [7] Broyden, C.G.: Quasi-Newton methods and their application to function minimization. *Math. Comp.* **21**, 368-381 (1967)
- [8] Broyden, C.G.: A new method of solving nonlinear simultaneous equations. *Comput. J.* **12**, 94-99 (1969)
- [9] Broyden, C.G.: The convergence of single-rank quasi-Newton methods. *Math. Comp.* **24**, 365-382 (1970a)
- [10] Broyden, C.G.: The convergence of a class of double-rank minimization algorithms I, II. *J. Inst. Math. Appl.* **6**, 76-90, 222-231 (1970b)
- [11] Broyden, C.G.: The convergence of an algorithm for solving sparse nonlinear systems. *Math. Comp.* **25**, 285-294 (1971)
- [12] Broyden, C.G.; Dennis, J.E.; Moré, J.J.: On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods. *J. Inst. Math. Appl.* **12**, 223-245 (1973)
- [13] Carrier, J.; Greengard L.; Rokhlin, V.: A fast algorithm for particle simulations. *J. Sci. Stat. Comp.* **9**, 669-686 (1988)
- [14] Darve, E.: Fast multipole method: a mathematical study. *Num. Anal.* **325** , 1037-1042 (1997)
- [15] Darve, E.: The fast multipole method I: error analysis and asymptotic complexity. *SIAM J. Numer. Anal.* **38** , 98-128 (2000)

- [16] Darve, E.: The fast multipole method: numerical implementation. *J. Comp. Phys.* **160**, 195-240 (2000)
- [17] Dassios, G.; Hadjinicolaou, M.: Multipole expansions in Stokes flow. *Int. J. Eng. Sci.* **40**, 223-229 (2002)
- [18] Deuffhard, P.; Freund, R.; Walter, A.: Fast secant methods for the iterative solution of large nonsymmetric linear systems. *IMPACT Comp. Sci. Eng.* **2**, 244-276 (1999)
- [19] Elsgolz, L.E.; Lunz, G.L.: *Funkzii kompleksnogo peremennogo*. St-Petersburg: Lan (2002)
- [20] Engl, H.W.: *Integralgleichungen*. Wien: Springer (1997)
- [21] Ethridge, F.; Greengard, L.: A new fast multipole accelerated Poisson solver in two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.* **23**, 3, 741-760 (2001)
- [22] Forster, O.: *Analysis 1, 2, 3*. Braunschweig: Vieweg (1987-1989)
- [23] Gáspár, C.: A multipole expansion technique in solving boundary integral equations. *Comput. Methods Appl. Mach. Eng.* **157**, 289-297 (1998)
- [24] Giebermann, K.: *Schnelle Summationsverfahren zur numerischen Lösung von Integralgleichungen für Strupprobleme im \mathbb{R}^3* . Dissertation Universität Karlsruhe 1997
- [25] Greengard, L.; Rokhlin, V.: Rapid evaluation of potential fields in three dimensions. In: *Vortex Methods*, edited by C. Anderson and C. Greengard, *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer (1988)
- [26] Greengard, L.; Kropinski, M.C.; Mayo, A.: Integral equation methods for Stokes flow and isotropic elasticity in the plane. *J. Comp. Phys.* **125**, 403-414 (1996)
- [27] Greengard, L.; Rokhlin, V.: A fast algorithm for particle simulations. *J. Comp. Phys.* **135**, 280-292 (1997a)
- [28] Greengard, L.; Rokhlin, V.: A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions. *Acta Numerica* **6**, 229 (1997b)
- [29] Greengard, L.; Kropinski, M.C.: An integral equation approach to the incompressible Navier-Stokes equations in two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.* **20**, 318-336 (1998)

- [30] Hackbusch, W.: Integralgleichungen. Stuttgart: Teubner (1989)
- [31] Hackbusch, W.: Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme. Stuttgart: Teubner (1993)
- [32] Hsiao, G.C.: Integral representation of solutions for two-dimensional viscous flow problems. *Integral Equations and Operator Theory* 5, 533-547 (1982)
- [33] Hsiao, G.C.; Kress, R.: On an integral equation for the two-dimensional exterior Stokes problem. *Appl. Num. Math.* 1, 77-93 (1985)
- [34] Isaacson, E.; Keller, H.K.: Analyse numerischer Verfahren. Frankfurt / Main: Deutsch (1973)
- [35] Jiang, S.; Rokhlin, V.: Second kind integral equations for the classical potential theory on open surfaces I: analytical apparatus. *J. Comp. Phy.* **191**, 40-74 (2003)
- [36] Jiang, S.; Rokhlin, V.: Second kind integral equations for the classical potential theory on open surfaces II. *J. Comp. Phy.* **195**, 1-16 (2004)
- [37] Knopp, K.: Elemente der Funktionentheorie. Berlin: de Gruyter (1978)
- [38] Knopp, K.: Funktionentheorie. Berlin: de Gruyter (1981)
- [39] Kress, R.: Linear Integral Equations. Berlin: Springer (1989)
- [40] Kress, R.: Numerical Analysis. Berlin: Springer (1998)
- [41] Kropinski, M. C. A.: An efficient numerical method for studying interfacial motion in two-dimensional creeping flows. *J. Comp. Phys.* **171**, 479-508 (2001)
- [42] Kropinski, M. C. A.: Numerical methods for multipole inviscid interfaces in creeping flows. *J. Comp. Phys.* **180**, 1-24 (2002)
- [43] Ladyzhenskaya, O. A.: The mathematical theory of viscous incompressible flow. New York: Gordon and Breach Science Publishers Inc. (1969)
- [44] Leis, R.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mannheim: Bibliographisches Institut 1967

- [45] Maxej, M.R.; Patel, B.K.: Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flow. *Int. J. Multiphase Flow* **27**, 1603-1626 (2001)
- [46] Meister, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Braunschweig: Vieweg (1999)
- [47] Nabors, K.; Korsmeyer, F.T.; Leighton, F.T.; White, J.: Preconditioned, adaptive, multipole-accelerated iterative methods for the three-dimensional first-kind integral equations of potential theory. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **15**, 714 (1994)
- [48] Nachtigal, N.M.; Reddy, S.C.; Trefethen, L.N.: How fast are nonsymmetric matrix iterations? *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **13**, 778-795 (1992)
- [49] Odquist, F.K.G.: Über die Randwertaufgaben in der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. *Math. Z.* **32**, 329-375 (1930)
- [50] Of, G.: *Die Multipolmethode für Randintegralgleichungen*. Diplomarbeit Universität Stuttgart 2001
- [51] Opfer, G.: *Numerische Mathematik für Anfänger*. Wiesbaden: Vieweg (1994)
- [52] Rahola, J.: Diagonal Forms of the Translation operators in the Fast Multipole Algorithm for Scattering Problems. *BIT* **36**, 333-358 (1996)
- [53] Pérez-Jordá, J.M.; Yang, W.: A simple $O(N \log N)$ algorithm for the rapid evaluation of particle-particle interactions. *Chem. Phys. Letters* **247**, 484-490 (1995)
- [54] Peter, M.: *Maximalbetragsabschätzungen für Lösungen der Gleichungen von Stokes*. Dissertation Universität Kassel 2002
- [55] Polyanin, A.D.; Manzhirov, A.V.: *Handbuch der Integralgleichungen*. Heidelberg: Spectrum Akad. (1999)
- [56] Popov, A.N.: Application of Potential Theory to the Solution of a Linearized System of Navier-Stokes Equations in the Two-Dimensional Case. In: "Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **116** (Ed.: O.A. Ladyzhenskaja)", Providence R.I.: Amer. Math. Soc. 167-186 (1973)
- [57] Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comp. Phys.* **60**, 187 (1985)

- [58] Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *J. Comp. Phys.* **86**, 414 (1990)
- [59] Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston: PWS Publishing Company (1996)
- [60] Samrowski, T.S.: Zur Lösung der Stationären Grundgleichungen der Hydrodynamik. Diplomarbeit Universität Kassel(2002)
- [61] Samrowski, T.S.; Varnhorn, W.: The Poisson equation in homogeneous Sobolev spaces. *IJMMS*, **36**, 1909-1921 (2004)
- [62] Samrowski, T.S.: An adaptive method for the rapid evaluation of hydrodynamical potentials, In: "Proceedings of the Institute of Thermomechanics". Colloquium Fluid Dynamics, Acad. Sci. CR, 121-124 (2004)
- [63] Samrowski, T.S.: A multipole method for the boundary value problems of the Laplace equation. *PAMM* **4**, 716-717 (2004)
- [64] Samrowski, T.S.: A multipole method for the Rapid Solution of the Stokes System. Erscheint in *PAMM* **5** (2005)
- [65] Schulz, H.; Schwab, C.; Wendland, W.L.: The computation of potentials near and on the boundary by an extraction technique for the boundary element methods. *Comput. Methods Appl. Mach. Eng.* **157**, 225-238 (1998)
- [66] Schwarz, H.R.: *Numerische Mathematik*. Stuttgart: Teubner (1988)
- [67] Schwetlick, H.: *Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen*. München, Wien: Oldenbourg (1979)
- [68] Seifert, B.: Zur Numerik der Gleichungen von Stokes. Diplomarbeit TU Dresden 1996
- [69] Spellucci, P.; Törnig, W.: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Berlin: Springer (1990)
- [70] Stoer, J.; Bulirsch, R.: *Numerische Mathematik II*. Berlin: Springer (1990)
- [71] Strain, J.: Fast adaptive 2d vortex methods. *J. Comp. Phys.* **132**, 108-122 (1997)
- [72] Strauss, W.A.: *Partielle Differentialgleichungen*. Braunschweig: Vieweg (1995)

- [73] Triebel, H.: Höhere Analysis. Frankfurt/Main: Deutsch-Verlag (1980)
- [74] Varnhorn, W.: Zur Numerik der Gleichungen von Navier-Stokes. Dissertation Universität Paderborn (1985)
- [75] Varnhorn, W.: The Stokes Equations. Berlin: Akademie (1994)
- [76] Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin: Springer (1976)
- [77] Wladimirow, B.S.: Urawnienija matematicheskij fiziki. Moskwa: Nauka (1985)
- [78] Yamada, Y and Hayami, K.: A Multipole Boundary Element Technique for Two-dimensional Elastostatics. METR 95-07, 1 - 20 (1995)
- [79] Zhenhan Yao, Haitao Wang, Pengbo Wang, Ting Lei: Some Applications of Fast Multipole Boundary Element Method, Department of Engineering Mechanics. Tsinghua University, Beijing (2004)

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe und andere als in der Dissertation angegebene Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit wurde in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet.

Kassel, den 25 Mai 2005