F. Hartmann, P. Jahn

Statik und Einflussfunktionen – vom modernen Standpunkt aus

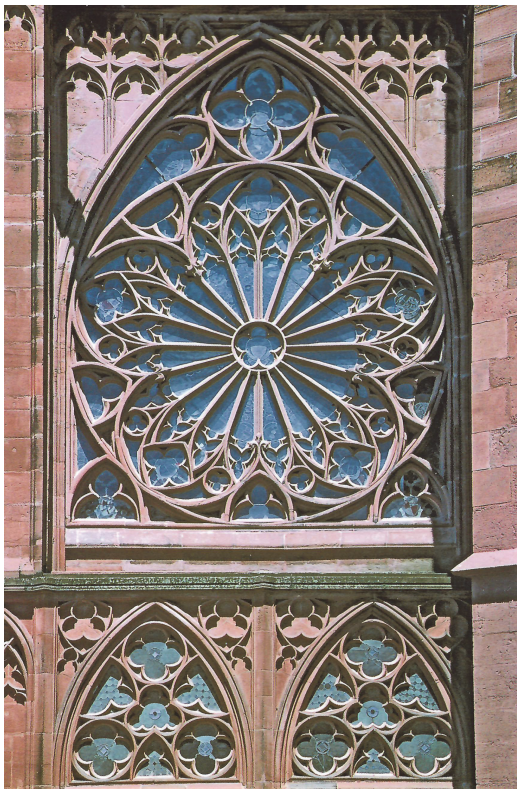
9. Auflage

(Statics and Influence Functions – From a Modern Perspective)

3. Januar 2025

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h.c. Christian Petersen

gewidmet



Gotische Fensterrose von 1332
Katharinenkirche in
Oppenheim, Rheinland-Pfalz

Vorwort

Die neue Statik ist die alte Statik
und im Grunde ist die klassische Statik
heute mächtiger als je zuvor

Einflussfunktionen sind ein bewährtes Werkzeug der Statik. Sie verknüpfen Statik mit Anschauung, denn mit ein paar geschickten Skizzen – wenn es sein muss auf einem Bierdeckel – kann man leicht dem Tragverhalten einer Struktur nachspüren und so Klarheit über kritische Punkte finden.

Leider ist aber die Anwendung der Einflussfunktionen zunehmend in den Hintergrund getreten, denn in Zweifelsfällen spielt man dann doch lieber Varianten mit dem Computer durch und umgeht so die Mühe, nach dem warum und wieso zu fragen und tiefer in das Verständnis des Tragverhaltens einzudringen.

In der klassischen Statik beschränkt sich das Thema auf den *Satz von Land* und seine Modifikationen, aber man verliert bald das Interesse, weil sich die Einflussfunktionen so schwer berechnen lassen.

Neue Untersuchungen haben jedoch das Interesse an den Einflussfunktionen wieder belebt, denn es ist nun klar, dass finite Elemente mit Einflussfunktionen rechnen. Das gleicht einer Rolle rückwärts. Man dachte, man sei der klassischen Rechenverfahren ledig, und plötzlich sieht man, dass sie in den finiten Elementen frisch und lebendig wieder auferstanden sind.

Nur ist bei den Finiten Elementen der Begriff der Einflussfunktion viel weiter gefasst. Das Stichwort heißt *Funktionale*. Die Durchbiegung in der Feldmitte, das Moment über der Stütze, die Kraft im Lager, all dies sind Funktionale. Alles, was man berechnen kann, ist für die finiten Elemente ein Funktional. Und zu jedem linearen Funktional gehört eine Greensche Funktion, eine Einflussfunktion.

Nun sind Einflussfunktionen aber Biegelinien, Verformungen und da beginnt das Problem, denn FE-Netze besitzen nur eine eingeschränkte Kinematik. Es gibt ja nur einen beschränkten Vorrat an Ansatzfunktionen (*shape functions*), um Verformungen darzustellen. Und das ist der eigentliche Grund,

warum FE-Ergebnisse in der Regel nur Näherungen sind. Das FE-Programm kann die exakten Einflussfunktionen auf dem Netze nicht generieren und es nimmt statt dessen genäherte Einflussfunktionen dafür und so sind auch die Ergebnisse nur – Näherungen.

Die Einflussfunktionen sind also die wahren *shape functions*, die *physikalischen shape functions*. Sie muss ein FE-Programm möglichst gut annähern. Wenn das gelingt, dann sind auch die FE-Ergebnisse gut. Die Einflussfunktionen sind der eigentliche ‚Geist' in der Maschine.

In der Computerstatik geht das Thema Einflussfunktionen also weit über den *Satz von Land* hinaus und um dieser Bedeutung gerecht zu werden, haben wir dieses Buch geschrieben.

Es ist kein Buch für Erstsemester, der Leser sollte mit dem Thema Einflussfunktionen schon etwas vertraut sein, dem Thema in den Statik- oder Mechanikvorlesungen schon begegnet sein.

Wir behandeln die Statik auch scheinbar mit einem sehr spitzen Bleistift. Das ist aber im Grunde Notwehr, weil sich in der Statik doch viele Dinge im Laufe der Zeit eingeschliffen haben und der mathematische Hintergrund der Formeln nicht immer offenkundig und evident ist.

Wir haben jeden Respekt vor der Leistung der Ingenieure, die im 19. Jahrhundert die Grundlagen der Statik gelegt haben. Wenn man in der Gründungsphase mit kleinen virtuellen Verrückungen an dem Tragwerk wackelte, dann ist das ‚klein' ein Symbol dafür, wie tastend die Gehversuche war.

Heute aber sind wir in der glücklichen Lage die mathematischen Strukturen zu verstehen, die hinter den Energie- und Variationsprinzipen der Statik stehen, wir wissen, dass das $\delta W_e = \delta W_i$ auf partieller Integration beruht, wie auch der Satz von Land und dass der Satz von Betti gilt, weil die klassischen Differentialgleichungen der Statik selbstadjungiert sind.

Die Statik hat mit den finiten Elementen in kurzer Zeit einen enormen Lernkurs in Sachen Mathematik bewältigen müssen und wenn das fruchtbar werden soll, dann muss doch auch in der Darstellung der Grundlagen dieser Zugewinn deutlich werden.

Kassel *Friedel Hartmann, Peter Jahn*
Frühjahr 2016/2024 hartmann@be-statik.de, PJahn@uni-kassel.de

PS. Ursprünglich sollte der Titel nur *Einflussfunktionen — vom modernen Standpunkt aus* heißen. Im Zeitalter der Suchmaschinen schien es uns jedoch sinnvoll, das Wort *Statik* mit in den Titel aufzunehmen. Es war nicht unsere Absicht einen (nicht existierenden) Gegensatz zwischen klassischer und moderner Statik zu konstruieren. Nur der Blickwinkel auf die Einflussfunktionen hat sich mit dem Computer geändert.

Editionen

Der Text begann als gedrucktes Buch bei der Kassel-University-Press im Frühjahr 2016. Die Auflagen 2, 3, 5, 6, 7 und 8 liegen als *pdf-files* auf dem Server der Universitätsbibliothek Kassel (Kobra), [129].

Im Januar 2024 haben wir mit der **neunten Auflage**, das ist dieser Text, begonnen. Die jeweils tages-aktuelle pdf-Version liegt auf den Seiten

https://go.simplel.ink/pdf und https://go.simplel.ink/winfemBook.

Download der Programme, siehe Kapitel 12.

Die erste englische Ausgabe

Statics and Influence Functions – From a Modern Perspective

erschien 2017 im Springer Verlag und die zweite englische Ausgabe (464 S.) im Herbst 2020. Die hier vorliegende deutsche Ausgabe hat 850 Seiten.

Kassel *Friedel Hartmann, Peter Jahn*
November 2024 hartmann@be-statik.de, PJahn@uni-kassel.de

Acknowledgement. Herr Kollege Werkle von der Hochschule Konstanz hat uns bei der korrekten Formulierung der *Äquivalenten Spannungs Transformation*, Kapitel 3.19, tatkräftig unterstützt. Dafür sei ihm an dieser Stelle herzlich gedankt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen 21
1.1 Einführung 21
1.1.1 Partielle Integration 22
1.1.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen 25
1.1.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte 26
1.1.4 Der Satz von Betti 26
1.1.5 Einflussfunktionen 27
1.1.6 Identitäten 29
1.2 Greensche Identitäten 31
1.2.1 Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes 31
1.2.2 Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens 32
1.2.3 Durchbiegung w eines Seils 32
1.2.4 Durchbiegung w eines Balkens 33
1.2.5 Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung . . . 34
1.2.6 Elastisch gebetteter Träger 34
1.2.7 Zugbandbrücke 35
1.2.8 Torsion 35
1.3 Die Arbeitssätze der Statik 36
1.4 Ein Null-Summen Spiel 38
1.5 Beispiele 40
1.5.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen 40
1.5.2 Energieerhaltungssatz 42
1.5.3 Schnittgrößen 43
1.5.4 Das Prinzip der virtuellen Kräfte 43
1.6 Rahmen 46
1.7 Federnde Stützung 47
1.8 Einzelkräfte und Einzelmomente 48
1.9 Lagersenkung 49
1.10 Federn 53
1.11 Temperatur 53
1.12 Die vollständige Arbeitsgleichung 54

1.13 Kurzform . . . 55
1.14 Dualität . . . 56
1.15 Ganze Tragwerke . . . 58
1.16 Mohr contra Betti . . . 63
1.17 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 63
1.18 Die kanonischen Randwerte . . . 66
1.18.1 Zur Notation . . . 67
1.18.2 Gleichgewicht . . . 67
1.18.3 Die Herleitung von $\boldsymbol{K u = f + d}$ . . . 68
1.18.4 Steifigkeitsmatrizen . . . 69
1.19 Die Reduktion der Dimension . . . 70
1.20 Randelemente . . . 72
1.21 Singularitätenmethode . . . 75
1.22 Finite Elemente und Randelemente . . . 75
1.23 Digital vs. analog . . . 80
1.24 Testfunktionen . . . 81
1.25 Müssen virtuelle Verrückungen klein sein? . . . 82
1.26 Theorie I. Ordnung . . . 84
1.27 Nur, wenn Gleichgewicht herrscht? . . . 84
1.28 Was ist Weg und was ist Kraft? . . . 85
1.29 Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen . . . 86
1.30 Warum das Minus in $-H\,w'' = p$? . . . 86
1.31 Die virtuelle innere Energie . . . 87
1.32 Satz von Castigliano . . . 88
1.33 Satz von Maxwell . . . 89
1.34 Pseudodrehungen . . . 90
1.35 Gleichgewicht . . . 92
1.36 Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt . . . 94
1.37 Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht . . . 95
1.38 Gleichgewicht am verformten Tragwerk? . . . 95
1.39 Quellen und Senken . . . 96
1.40 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie . . . 97
1.40.1 Minimum oder Maximum? . . . 99
1.40.2 Wenn das Material reißt . . . 102
1.40.3 Wenn Lager entfallen . . . 103
1.41 Unendliche Energie . . . 105
1.42 Sobolevscher Einbettungssatz . . . 109
1.43 Drehfedern . . . 113
1.44 Der Reduktionssatz . . . 113
1.45 Das Kraftgrößenverfahren . . . 117
1.46 Die Diagonale . . . 117
1.47 Wo läuft es hin? . . . 119
1.48 Finite Elemente und die erste Greensche Identität . . . 121

2 Der Satz von Betti 125
2.1 Grundlagen 126
2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen 129
2.2.1 Herleitung 131
2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen 134
2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$ 137
2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$ 137
2.3.3 Einflussfunktion für $V(x)$ 138
2.3.4 Lagersenkung 139
2.3.5 Temperaturänderungen 140
2.3.6 Die Kette der Einflussfunktionen 141
2.3.7 Lastmomente differenzieren die Einflussfunktionen 142
2.3.8 Ein Rätsel 142
2.4 Statisch bestimmte Tragwerke 143
2.4.1 Polpläne 146
2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren . 147
2.4.3 Berechnung der Verdrehungen 148
2.4.4 Berechnung der Verschiebung eines Punktes 151
2.4.5 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22 151
2.4.6 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.23 152
2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.24 153
2.4.8 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.25 155
2.4.9 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.26 157
2.4.10 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.27 157
2.4.11 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.28 159
2.5 Kragträger 160
2.6 Statisch unbestimmte Tragwerke 160
2.7 Einflussfunktionen für Lagerkräfte 164
2.8 Sprünge in Schnittgrößen 166
2.9 Die Nullstellen der Querkraft 169
2.10 Kernpunktmomente 169
2.11 Vierendeel als Kragträger 170
2.12 Dirac Deltas 171
2.13 Dirac Energie 174
2.14 Punktwerte bei Flächentragwerken 178
2.15 Versatz im 2-D und 3-D 181
2.16 Switches 183
2.17 Dualität 184
2.18 Der adjungierte Operator 187
2.19 Monopole und Dipole 187
2.20 Höhere Ableitungen 193
2.21 Die Unwucht 198
2.22 Handicap Rand 200
2.23 Der schiefe Turm von Pisa 202
2.24 Symmetrie und Antimetrie 202

2.25 Lager im Schatten . . . 204
2.26 Einflussfunktionen für integrale Werte . . . 204
2.26.1 Mittlere Dehnung und Krümmung . . . 211
2.26.2 Der Split der inneren Energie . . . 211
2.27 Einflussfunktionen rechnen rückwärts . . . 213
2.28 Historischer Rückblick . . . 215
2.29 Das Abklingverhalten . . . 216
2.30 Prinzip von St. Venant . . . 216
2.31 Fourier . . . 219
2.32 Nichtlineare Effekte . . . 224
2.33 Eigenlösungen . . . 225
2.34 Eigenlösungen und Greensche Funktionen . . . 226
2.35 Theorie II. Ordnung . . . 227
2.35.1 Shape functions . . . 232
2.35.2 Steifigkeitsmatrix . . . 233
2.36 Plattenbeulen . . . 233
2.37 Biegedrillknicken . . . 234
2.38 Videos . . . 236

3 Finite Elemente . . . 239
3.1 Das Minimum . . . 240
3.2 Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind . . . 243
3.3 Addition der lokalen Lösung . . . 247
3.4 Parallel und in Reihe . . . 251
3.5 Der Zusammenbau . . . 252
3.6 Elastische Stützung . . . 256
3.7 Die lokale Lösung w_p . . . 256
3.8 Projektion . . . 257
3.9 Äquivalente Knotenkräfte . . . 260
3.9.1 Die Reichweite der φ_i . . . 261
3.9.2 Rechenpfennige . . . 262
3.10 Festhaltekräfte . . . 263
3.11 Die Neutralität der shape functions . . . 266
3.12 Shape forces und der FE-Lastfall . . . 267
3.13 Die Rolle der u_i . . . 268
3.14 Wie die Lawine ins Rollen kam . . . 273
3.15 Finite Elemente mit Betti . . . 275
3.16 Der FE-Lastfall bei Platten . . . 278
3.17 Realism . . . 279
3.18 Kopplung von Bauteilen . . . 281
3.19 Äquivalente Spannungs Transformation . . . 282
3.20 Die Koppelfuge . . . 288
3.21 Gleichgewicht in den Knoten? . . . 289
3.22 Einflussfunktionen . . . 290
3.22.1 Beispiel . . . 292

3.22.2 Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i . . . 293
3.23 Funktionale . . . 295
3.24 Der Betti-Trick . . . 298
3.25 Generalisierte Einflussfunktionen . . . 300
3.26 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 300
3.27 Beispiele . . . 301
3.28 Die shape functions und ihre Spannungen . . . 311
3.29 Die lokale Einflussfunktion . . . 311
3.30 Schräger Balken . . . 322
3.31 GF-Anywhere . . . 324
3.32 Aufpunkt im Knoten . . . 324
3.33 Die zentrale Gleichung . . . 326
3.34 Der einzelne Punkt und das Ganze . . . 330
3.35 Darstellung einer FE-Lösung . . . 331
3.36 Stabtragwerke und $J = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ . . . 332
3.37 Handberechnung . . . 332
3.38 Zustandsvektoren und Messungen . . . 333
3.39 Der Satz von Maxwell . . . 335
3.40 Die inverse Steifigkeitsmatrix . . . 339
3.41 Beispiele . . . 341
3.42 Der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ hat zwei Basen . . . 346
3.43 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion . . . 347
3.44 Die Dominanz der Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen . . . 349
3.45 Warum FE-Spannungen springen . . . 350
3.46 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung . . . 353
3.47 Die Spalten von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$ . . . 354
3.48 Die Inverse als Analysetool . . . 363
3.48.1 Maximale Verformungen . . . 363
3.49 Lokale Änderungen und die Inverse . . . 365
3.50 Das Weggrößenverfahren . . . 366
3.50.1 Wie kommt man auf $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$? . . . 366
3.50.2 Handberechnung von $\boldsymbol{K}$ . . . 369
3.50.3 Drehwinkelverfahren . . . 369
3.51 Mohr und die Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ . . . 370
3.52 Querschnittsänderungen . . . 372
3.53 Sensitivitätsplots . . . 375
3.54 Knotengleichgewicht . . . 380
3.55 Genäherte shape functions . . . 384
3.56 Unbekannte Elemente . . . 385
3.57 Push and Pull . . . 386
3.58 Die Lagerkräfte der FE-Lösung . . . 387
3.59 Lagersenkung . . . 391
3.60 Einflussfunktion für ein starres Lager . . . 392
3.61 Der Rechengang . . . 396
3.62 Beispiel EF Lagerkraft . . . 397

3.63 Einflussfunktion für ein nachgiebiges Lager . . . 397
3.64 Einflussfunktionen für Wände . . . 401
3.65 Punktstützen . . . 402
3.66 Der Eckenwinkel . . . 403
3.67 Querkräfte bei Platten . . . 403
3.68 Durchstanznachweis . . . 405
3.69 Genauigkeit der Lagerkräfte . . . 411
3.70 Punktlasten und Punktlager bei Scheiben . . . 411
3.71 Ein mögliches Missverständnis . . . 416
3.72 Punktlager sind hot spots . . . 417
3.73 Der amputierte Dipol . . . 423
3.74 Der Dipol am Rand . . . 424
3.75 Symmetriebrechung . . . 427
3.76 Einzelkräfte als Knotenkräfte . . . 430
3.77 Vorverformungen . . . 431
3.78 Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen . . . 432
3.79 Ein Plädoyer für Einflussfunktionen . . . 433
3.80 Schalenelemente . . . 437
3.81 Kontrolle von FE-Berechnungen . . . 437
3.82 Stahlbeton . . . 446
3.83 Die Realität . . . 448
3.84 Wie man auf $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$ kommt . . . 451
3.85 Dynamische Probleme . . . 454
3.86 Die Intelligenz der Funktionen . . . 456
3.87 Das Gibbsche Phänomen – mit den Augen eines Statikers . . . 460
3.88 Der Kreis schließt sich . . . 461

4 Betti Extended . . . 467
4.1 Beweis . . . 468
4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt? . . . 471
4.3 Exakte Werte . . . 477
4.4 Eindimensionale Probleme . . . 478
4.5 Eine andere mögliche Sicht . . . 480
4.6 Isogeometric Analysis . . . 481
4.7 Flächentragwerke . . . 484
4.8 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied . . . 486
4.9 Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt . . . 487
4.10 Maxwell und Radius null . . . 490
4.11 Patch Test . . . 491
4.12 Adaptive Verfeinerung . . . 492
4.13 Pollution . . . 497
4.13.1 Ursachen . . . 500
4.13.2 Details . . . 501
4.14 Superkonvergenz . . . 502
4.15 Symmetrien . . . 506

5 Steifigkeitsänderungen und Reanalysis 509
5.1 Die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ 510
5.1.1 Rechnen mit den alten Einflussfunktionen 512
5.1.2 Die Schnittgrößen 513
5.2 Parameteridentifikation 514
5.3 Einleitung 514
5.4 Strategie 517
5.5 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten 518
5.6 Dipole und Monopole 519
5.7 Weggrößen und Kraftgrößen 521
5.8 Symmetrie und Antimetrie 523
5.9 Orthogonalität 523
5.10 Das Abklingen der Effekte 524
5.11 Die Bedeutung für die Praxis 526
5.12 Das Kraftgrößenverfahren 532
5.13 Kräfte $\boldsymbol{j}^+$ 533
5.14 Austausch als Alternative 534
5.15 Die Ableitung der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ 535
5.16 Die Ableitungen $\partial \boldsymbol{u}/\partial f_k$ und $\partial \boldsymbol{u}/\partial k_{ij}$ 537
5.17 Integration über das defekte Element 541
5.18 Sensitivitäten und Mohr 544
5.19 Nah und fern 548
5.20 Zusammenfassung 552
5.21 Ein naheliegender Schluss 553
5.22 Lager 553
5.23 Integrale Brücken 561
5.24 Verstärkungen 565
5.25 Klassische Formulierung 566
5.26 Direkte Differentiation 572
5.27 Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$ 573
5.27.1 Iteration 573
5.27.2 Direkte Berechnung 574
5.27.3 Lagersteifigkeit 579
5.27.4 Sherman-Morrison-Woodbury 579
5.28 Rechentechnik 580
5.29 One-Click Reanalysis 581
5.29.1 Wenn die Last ‚getroffen‘ wird 585
5.30 Singuläre Steifigkeitsmatrizen 586
5.31 Gauss-Jordan 587
5.32 Drehpole 590
5.33 Nachträglicher Einbau von Gelenken 592
5.34 Knicklasten 592
5.35 Dynamische Probleme 594
5.36 Die Vektoren $\boldsymbol{f}^+, \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{g}^+, \boldsymbol{j}^+$ 594
5.37 Unsymmetrie in den Ausgleichsbewegungen 595

5.38 Das Kontinuum . . . 596
5.38.1 Potentialtheorie . . . 597
5.38.2 Das einzelne Element und das Netz . . . 598
5.38.3 Variierende Steifigkeiten . . . 599
5.38.4 Beispiel . . . 602
5.38.5 Kerne j^+ . . . 604
5.38.6 Die zwei Zugänge . . . 605
5.38.7 Unterschiedliche Stärken . . . 607
5.38.8 Veränderliche Belastung . . . 608

6 Singularitäten . . . 611
6.1 Singuläre Spannungen . . . 611
6.2 Singuläre Lagerkräfte . . . 612
6.3 Einzelkräfte . . . 614
6.4 Das Abklingen der Spannungen . . . 618
6.5 Kragträger . . . 621
6.6 Je weiter desto tiefer . . . 621
6.7 Unendlich große Spannungen . . . 622
6.8 Symmetrie der Wirkungen . . . 625
6.9 Kragscheibe . . . 628
6.10 Standardsituationen . . . 630
6.11 Almost everywhere . . . 632
6.12 Zu glatt ist auch nicht gut . . . 636
6.13 Singularitäten in Einflussfunktionen . . . 638

7 Gemischte Formulierungen . . . 653
7.1 Das System des Stabes . . . 653
7.2 Das System des Balkens (Bernoulli-Balken) . . . 655
7.2.1 LF Temperatur . . . 656
7.3 Der schubweiche Balken (Timoshenko Balken) . . . 657
7.4 Poisson Gleichung . . . 661
7.5 Die Scheibengleichung . . . 662
7.6 Die schubstarre Platte (Kirchhoff) . . . 666
7.7 Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin) . . . 670
7.8 FE-Programme . . . 674
7.9 Shear locking . . . 675
7.10 Einflussfunktionen . . . 678
7.11 Betti extended . . . 680

8 Nichtlineare Probleme . . . 683
8.1 Einführung . . . 683
8.2 Gateaux Ableitung . . . 684
8.3 Nichtlinearer Stab . . . 686
8.3.1 Newton Verfahren . . . 686
8.4 Geometrisch nichtlinearer Balken . . . 687

8.4.1 Energieerhaltungssatz . . . 689
8.5 Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte . . . 691
8.6 Nichtlineare Elastizitätstheorie . . . 691
8.6.1 Linearisierung . . . 693
8.6.2 Ein Fachwerkstab im Raum . . . 694
8.6.3 Ebenes Problem . . . 696
8.7 Nichtlineare Funktionale . . . 700

9 Die Algebra der Statik . . . 703
9.1 Grundlagen . . . 704
9.2 Notation . . . 707
9.3 Skalarprodukt und Norm . . . 709
9.4 Gauss garantiert das . . . 710
9.5 Multiplikation von Matrizen . . . 712
9.6 FE-Notation . . . 713
9.7 Vektoren und Funktionen . . . 715
9.8 Finite Differenzen und finite Integrale . . . 716
9.9 Erste Variation . . . 718
9.10 Selbstadjungiert . . . 719
9.11 Die Algebra der Identitäten . . . 720
9.12 Die Algebra der finiten Elemente . . . 723
9.13 Die Algebra der Einflussfunktionen . . . 727
9.14 Partition of Unity . . . 728
9.15 FEM und Gleichgewicht . . . 729
9.16 Finite Elemente und Randelemente und Betti . . . 733
9.17 Schiefe Projektion . . . 734
9.18 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 736
9.19 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^+$ . . . 738
9.20 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^*$ . . . 738
9.21 Galerkin . . . 738
9.22 Schwache Lösung . . . 739
9.23 Variation und Greensche Identität . . . 742
9.24 A Path-Independent Integral . . . 743
9.25 Das Grundfunktional (Hu-Washizu) . . . 744
9.26 Kraftgrößenverfahren versus Weggrößenverfahren . . . 746
9.27 Der adjungierte Operator und die Greensche Funktion . . . 746
9.28 Die Ableitungen der Dirac Deltas . . . 749
9.29 Das Seil . . . 750
9.30 Schalen . . . 751
9.31 Der h-Vertauschungssatz . . . 753
9.32 Filter . . . 753
9.33 Kopplung auf dem Rand . . . 754
9.33.1 Flächenlasten . . . 759
9.34 Potentiale und Potentialtheorie . . . 760
9.35 Lagrange und Hamilton . . . 764

9.36 Variationsrechnung . . . 765
9.37 Einzelkraft in einer Scheibe . . . 767
9.38 Einzelkräfte auf der rechten Seite . . . 768
9.39 Bodenplatten und Randelemente . . . 769
9.40 Antimetrie in den vertikalen Einflussfunktionen . . . 769
9.41 Multipole . . . 770
9.42 Steifigkeitsmatrizen 1-D . . . 772
9.43 Die Dimension der f_i . . . 772
9.44 Transformationen . . . 773
9.45 Konischer Stab . . . 776
9.46 Näherungen . . . 779
9.47 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 780
9.48 Wie kommt der Einbettungssatz zu seinem Namen? . . . 780
9.49 Negative Normen . . . 786
9.50 Punktlasten und ihre Energie . . . 789
9.51 Early Birds . . . 789
9.52 Physik und Mathematik . . . 789

10 Shape functions und MATLAB™ . . . 793
10.1 Balken mit beliebiger Belastung. . . . 793
10.2 Einheitsverformungen Th. II. Ordg. . . . 793
10.3 Balken, h linear . . . 796
10.4 Dirac Delta . . . 800
10.4.1 EF für $w(x)$ . . . 801
10.4.2 EF für $M(x)$ und $V(x)$ mit Dirac Delta . . . 801
10.5 Stab, h linear . . . 802
10.6 Gebetteter Balken . . . 804
10.6.1 Zahlenbeispiel . . . 806
10.7 Seil mit finiten Elementen . . . 808
10.8 Timoshenko Balken . . . 810
10.9 MATLAB™ pdetool . . . 813
10.10 function KTBC() . . . 813

11 Nachwort . . . 815

12 Software . . . 825
12.1 Download . . . 825
12.2 Position Minnert . . . 826
12.3 Spannungspunkte . . . 830

Literaturverzeichnis . . . 831
Literatur . . . 831

Index . . . 845

1

Grundlagen

1.1 Einführung

Statik ist die Lehre von den Kräften und dem Gleichgewicht. In der Statik der Kontinua – im Gegensatz zur Vektorstatik – sind die Belastung und die Schnittgrößen Funktionen und die Gleichgewichtslage eines Balkens ist die Lösung einer Differentialgleichung, $EI\,w^{IV}(x) = p(x)$.

Aber die moderne Statik löst keine Differentialgleichungen mehr, sondern sie löst Variationsprobleme – wie die Marktfrau mit ihrer Waage. Aus der Statik ist eine ‚Wackelstatik' geworden: Gleichgewicht ist ein Balanceakt[1], ist die Kunst des Wägens, [318], und je kleiner man die Elemente macht, umso näher kommt man dem wahren Gleichgewichtspunkt.

Die Grundlage der Variationsprinzipe – auf denen die finite Elemente ja beruhen – ist das Skalarprodukt von *Kraft* und *Weg*

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w(x)\,dx = Kraft \times Weg\,, \tag{1.1}$$

und weil die Kraft $EI\,w^{IV}(x) = p(x)$ die Ableitung der Biegelinie ist, kann man mittels partieller Integration das Arbeitsintegral umformen, aus der äußeren virtuellen Arbeit δW_e wird innere virtuelle Arbeit δW_i, und so entstehen wie von selbst die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik:

- **Das Prinzip der virtuellen Verrückungen**
- **Der Energieerhaltungssatz**
- **Das Prinzip der virtuellen Kräfte**
- **Der Satz von Betti**

Mathematisch beruhen diese Prinzipe auf der *ersten Greenschen Identität*. Das ist einfach die Summe der Terme, die entsteht, wenn man das obige

[1] στατικὴ τέχνη

Arbeitsintegral mittels partieller Integration umformt und alles auf eine Seite bringt

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l EI\, w^{IV}\,\delta w\, dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\, dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.2}$$

Diese Null ist die wichtigste Invariante der Statik und Mechanik.

1.1.1 Partielle Integration

Die partielle Integration

$$\int_0^l u'\,\delta u\, dx = [u\delta u]_0^l - \int_0^l u\delta u'\, dx\,, \tag{1.3}$$

beruht auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_0^l (u\delta u)'\, dx = \int_0^l (u'\,\delta u + u\delta u')\, dx = [u\delta u]_0^l\,. \tag{1.4}$$

Schreiben wir (1.3) als null, als **‚Null-Summe'**,

$$\mathscr{N}(u,\delta u) = \int_0^l u'\,\delta u dx - [u\delta u]_0^l + \int_0^l u\delta u'\, dx = 0\,, \tag{1.5}$$

dann ist das ein Ausdruck, der für ***alle Paare*** von Funktionen aus $C^1(0,l)$, wie $u = \sin(x)$ und $\delta u = \cos(x)$ null ist. Mit (1.5) kommt das ***für alle δu*** in die Welt, das die Arbeits- und Energieprinzipe so geschickt ausnutzen, denn das Skalarprodukt und die partielle Integration sind der Schlüssel zur Mechanik und Statik.

Die partielle Integration ist die materielle Grundlage der Variationsprinzipe.

Die Belastung ist eine Funktion, die gesuchte Biegelinie ist eine Funktion und die Bestimmung der Biegelinie geschieht nach mathematischen Regeln. Mancher Leser ist vielleicht der Meinung, dass die Variationsprinzipe an ‚Naturgesetze' grenzen, aber so weit wagen wir uns nicht hinaus. Was wir unter dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder dem Prinzip der virtuellen Kräfte etc. verstehen, sind einfache Integralsätze, die ganz der Mathematik angehören und von daher ihre Gültigkeit haben. In diesem Buch geht es um das **Rechnen** in der Statik, um den Umgang mit Zahlen, Vektoren, Funktionen und Differentialgleichungen und ein Beweis, dass zwei Integrale gleich sind, $\delta W_e = \delta W_i$, muss nach mathematischen Regeln geführt werden[2].

[2] Eine Brücke zwischen Mathematik und Natur zu schlagen ist sicherlich reizvoll, und *Wikipedia* ist voll davon, aber diese Vermischung hat schon zu vielen Studenten das Leben schwer gemacht, und soll hier für diesmal außen vorbleiben.

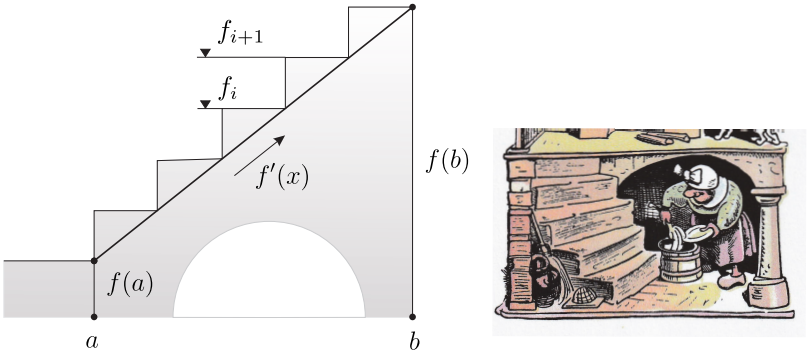


Bild 1.1. Beim Treppensteigen spürt Witwe Bolte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Partielle Integration ist wie Treppensteigen (dann ist $\delta u = 1$)

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)} \tag{1.6}$$

denn wenn bei jedem Schritt dx in der Horizontalen der Zuwachs an Höhe $df = f'(x)\,dx$ beträgt, steigt Witwe Bolte insgesamt um das Maß $f(b) - f(a)$ aus dem Keller nach oben, siehe Bild 1.1.

Die **Treppenformel** (1.6), rechnerisch einfach die Summe über die Differenzen in der Treppe, Stufe Oberkante - Stufe Unterkante,

$$\begin{aligned}\int_0^l f'(x)dx = \Delta x \sum \Delta f' = \Delta x \sum\nolimits_i \frac{1}{\Delta x}\,(f_{i+1} - f_i)\\ = f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + \ldots + f_n - f_{(n-1)} = f_n - f_0\,,\end{aligned} \tag{1.7}$$

ist der ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***. Aus ihm folgt leicht, dass z.B. das Integral der Normalkraft $N(x) = EAu'(x)$ in einem beidseitig festgehaltenen Stab null ist, siehe Bild 1.2 *a*,

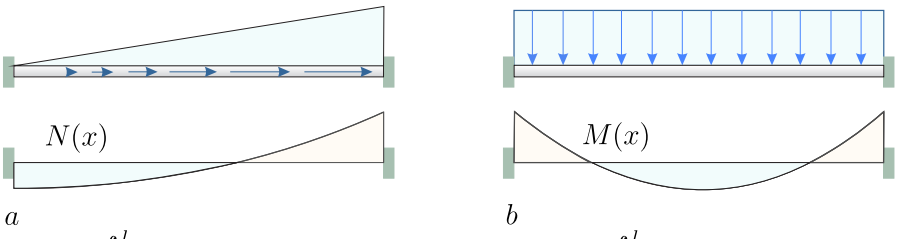
$$\int_0^l EAu'(x)dx = [EAu]_0^l = EA\,(u(l) - u(0)) = 0\,, \tag{1.8}$$

und ebenso das Integral des Biegemomentes $M(x) = -EIw''(x)$ in einem beidseitig eingespannten Balken, siehe Bild 1.2 *b*,

$$\int_0^l -EIw''(x)dx = -EI\,(w'(l) - w'(0)) = 0\,. \tag{1.9}$$

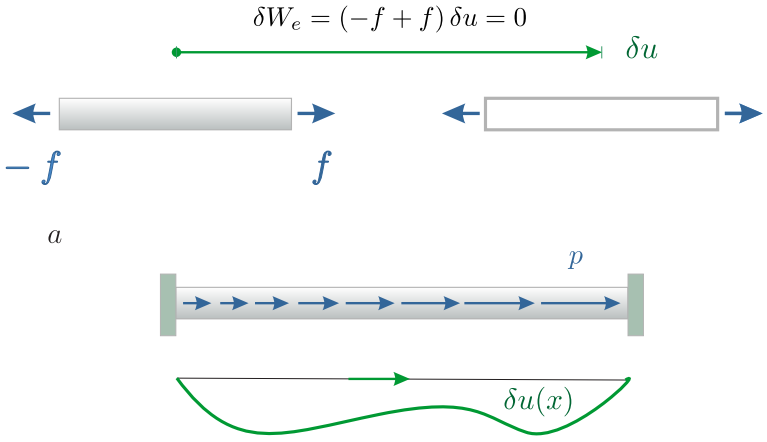
Bei partiellen Ableitungen gilt

$$\int_\Omega u_{,i}\,v d\Omega = \int_\Gamma u\,n_i v\,ds - \int_\Omega u v_{,i}\,d\Omega\,, \tag{1.10}$$



a $\int_0^l N(x)\,dx = 0$ b $\int_0^l M(x)\,dx = 0$

Bild 1.2. Das Integral der Normalkraft und des Biegemomentes ist null



a

b $\delta W_i = \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = \int_0^l p\,\delta u\,dx = \delta W_e$

Bild 1.3. Virtuelle Verrückung **a)** eines starren und frei beweglichen Stabes als Ganzes und **b)** der Querschnitte eines beidseitig festgehaltenen elastischen Stabes. Die beiden Integrale sind für jedes zulässige δu gleich, siehe (1.19)

wobei Γ der Rand der Scheibe, der Platte Ω ist, über die integriert wird, n_i ist die i-te Komponente des Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ (Länge $|\boldsymbol{n}| = 1$) auf Γ und $u_{,i} = \partial u/\partial x_i$ ist eine abkürzende Schreibweise für die Ableitung nach x_i.

Wenn eine Scheibe Ω an ihrem Rand Γ festgehalten wird, $u_x = u_y = 0$, ist das Integral der Spannung

$$\sigma_{xx} = E\,(\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy}) = E\,(u_{x,x} + \nu\,u_{y,y}) \tag{1.11}$$

über Ω, also der Mittelwert von σ_{xx}, null (und ebenso von σ_{yy}), denn

$$\int_\Omega E\,(u_{x,x} + \nu\,u_{y,y})\,d\Omega = \int_\Gamma E\,(u_x n_x + \nu\,u_y n_y)\,ds = 0\,. \tag{1.12}$$

1.1.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Wenn an einem Stab zwei gegengleiche Kräfte $\pm f$ ziehen wie in Bild 1.3 *a*,

$$-f + f = 0\,, \tag{1.13}$$

dann kann man die Gleichung mit einer beliebigen Zahl δu multiplizieren, ohne etwas an dem Ergebnis zu ändern

$$\delta u \cdot (-f + f) = -\delta u \cdot f + \delta u \cdot f = 0\,, \tag{1.14}$$

und daher ist die Arbeit der beiden Stabendkräfte bei einer virtuellen Verrückung δu des Stabes als Ganzes null. Das ist das einfachste Beispiel für das ***Prinzip der virtuellen Verrückungen***.

Das Prinzip beruht auf der einfachen Tatsache, dass sich eine Gleichung (wir bringen alles auf eine Seite)

$$(\ldots) = 0\,, \tag{1.15}$$

nicht ändert, wenn man die Gleichung mit beliebigen Zahlen δu multipliziert

$$\delta u \cdot (\ldots) = 0\,, \tag{1.16}$$

was natürlich auch für Funktionen gilt, siehe Bild 1.3 *b*. Genügt die Funktion $u(x)$ der Differentialgleichung

$$-EAu''(x) - p(x) = 0 \qquad 0 < x < l\,, \tag{1.17}$$

dann folgt

$$\int_0^l (-EAu'' - p)\,\delta u\,dx = 0\,, \tag{1.18}$$

oder nach partieller Integration, wenn die Randwerte der virtuellen Verrückung null sind, $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$,

$$\int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = \int_0^l p\,\delta u\,dx\,. \tag{1.19}$$

Und schon an dieser Stelle sei betont, dass δu beliebig groß sein kann, denn anders gibt es auch keinen Sinn: Wenn (1.19) für ein infinitesimal kleines $\delta u = 10^{-10} \cdot \sin(\pi\, x/l)$ gilt, dann auch für $\delta u = \sin(\pi\, x/l)$, weil sich jeder Skalenfaktor wie $\varepsilon = 10^{-10}$ einfach herauskürzt, denn die Stabgleichung $-EAu'' = p$ ist **linear** und deswegen die erste Greensche Identität bilinear, siehe (1.249).

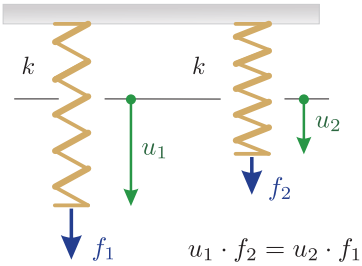


Bild 1.4. Zwei gedehnte Federn und der Satz von Betti, $k = 3$

1.1.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Das Prinzip der virtuellen Kräfte für den Stab

$$\int_0^l \frac{\delta N^* N}{EA}\, dx = \int_0^l \delta p^*\, u\, dx\,, \tag{1.20}$$

ist im Grunde eine Wiederholung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, denn *mathematisch* basiert es auf derselben Gleichung (1.44) wie das Prinzip der virtuellen Verrückungen,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(u, \delta u) &= 0 \qquad \text{Prinzip der virt. Verrückungen} \\ \mathscr{G}(\delta u^*, u) &= 0 \qquad \text{Prinzip der virt. Kräfte}\,, \end{aligned}$$

es werden nur die Namen geändert, aus u wird ein δu^* und aus δu wird ein u. In der ersten Greenschen Identität werden Kräfte und Wege überlagert

$$\mathscr{G}(\sin x, \cos x) = \text{Kräfte 1} \times \text{Wege 2} \;= 0\,, \tag{1.21}$$

und **beide mal** wackelt die Nr. 2 an der Nr. 1, der *cosinus* an dem *sinus*. Ob aber der $\cos x$ ‚virtuell' ist, oder der $\sin x$, ist mathematisch irrelevant,

$$\mathscr{G}(\sin x = u, \cos x = \delta u) = 0 \qquad \mathscr{G}(\sin x = \delta u^*, \cos x = u) = 0\,, \tag{1.22}$$

wenn natürlich auch in der Mechanik viel Wert auf die unterschiedliche Interpretation gelegt wird. Ob man aber Lasten p virtuell verrückt, $(p, \delta u)$, oder eine virtuelle Last δp^* verschiebt, $(\delta p^*, u)$, Arbeit ist es allemal...

1.1.4 Der Satz von Betti

Wenn zwei Zahlen u_1 und u_2 die beiden Zwillings-Gleichungen

$$3 \cdot u_1 = 12 \qquad 3 \cdot u_2 = 18 \tag{1.23}$$

lösen, (die 3 macht sie zu Zwillingen) und man multipliziert die beiden Gleichungen jeweils mit der anderen Lösung **‚über Kreuz'**,

$$u_2 \cdot 3 \cdot u_1 = 12 \cdot u_2 \qquad u_1 \cdot 3 \cdot u_2 = 18 \cdot u_1\,, \tag{1.24}$$

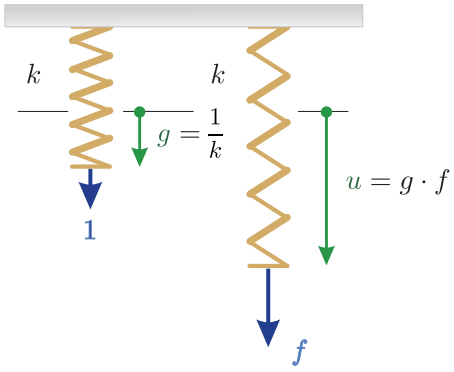


Bild 1.5. Wenn sich eine Feder unter einer Kraft $f = 1$ um $g = 1/k$ verlängert, dann verlängert sie sich unter einer Kraft f um $u = f \cdot g$

dann sind die linken Seiten gleich und daher auch die rechten Seiten, siehe Bild 1.4,

$$W_{1,2} = 12 \cdot u_2 = 18 \cdot u_1 = W_{2,1}\,. \tag{1.25}$$

Das ist der *Satz von Betti*: ***Die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die im Gleichgewicht sind, sind gleich groß***. Es ist nur Algebra, wie auch bei dem folgenden Beispiel, einem Fachwerk.

Multipliziert man die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ des Fachwerks aus zwei Lastfällen

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{f}_1 \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{f}_2\,, \tag{1.26}$$

skalar ‚über Kreuz', dann ergibt das

$$\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{f}_1 \qquad \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{f}_2\,, \tag{1.27}$$

und weil die linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein

$$\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{f}_2\,, \tag{1.28}$$

gilt $W_{1,2} = W_{2,1}$.

Der Satz beruht auf der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$, aber die hat man automatisch, wenn die Differentialgleichungen, wie in der linearen Statik, **selbstadjungiert** sind.

1.1.5 Einflussfunktionen

Um die Gleichung

$$3 \cdot x = 12 \tag{1.29}$$

zu lösen, dividieren wir die rechte Seite durch die Zahl 3, was man auch als Multiplikation der rechten Seite mit dem Faktor $g = 1/3$ lesen kann. ***Die magische Zahl*** g ist die Lösung der Gleichung

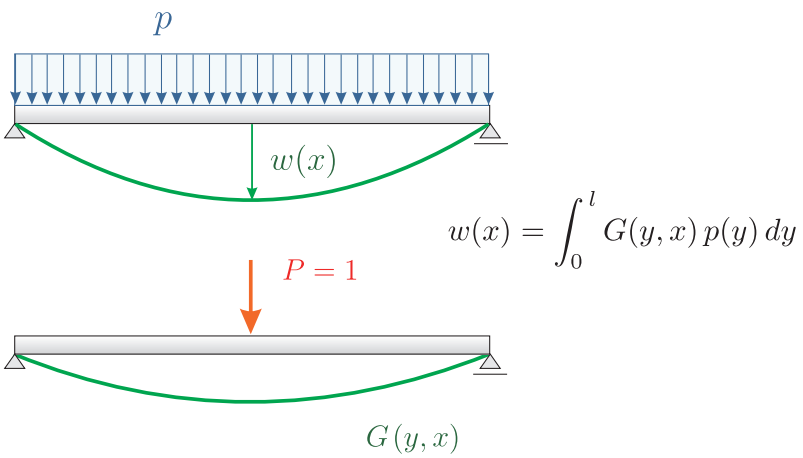


Bild 1.6. Biegebalken und Einflussfunktion für die Durchbiegung in Feldmitte

$$3 \cdot g = 1\,, \tag{1.30}$$

also die Antwort auf eine ‚Punktlast', auf eine Eins. Offensichtlich ist dann

$$x = g \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \tag{1.31}$$

die Antwort auf die 12, siehe Bild 1.5. Das ist die Technik der ***Einflussfunktionen*** oder ***Greenschen Funktionen***.

Um die Verschiebung u_i eines Fachwerkknotens zu berechnen, setzen wir in den Knoten eine Kraft $f_i = 1$, bestimmen die dazu gehörigen Knotenverschiebungen des Fachwerks, den Vektor $\boldsymbol{g}_i$,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i \qquad (i\text{-ter Einheitsvektor})\,, \tag{1.32}$$

und bilden das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{f}$

$$u_i = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}\,. \tag{1.33}$$

Bei einem Balken setzen wir sinngemäß eine Einzelkraft $P = 1$ in den Aufpunkt x, bestimmen die zugehörige Biegelinie $G(y, x)$, siehe Bild 1.6, überlagern die Belastung mit dieser Biegelinie, und erhalten so die Durchbiegung $w(x)$ in dem Punkt x

$$w(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{1.34}$$

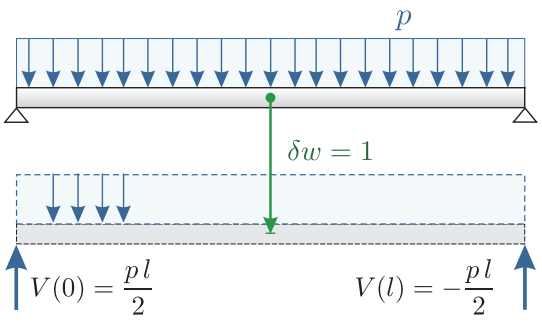


Bild 1.7. Die Kontrolle des Gleichgewichts der Kräfte an einem Balken beruht auf einer dualen Formulierung, $\mathscr{G}(w,1) = p \cdot l + V(l) - V(0) = 0$

1.1.6 Identitäten

Beim Rechnen in der Statik geht es um das Lösen einzelner Gleichungen

$$k\,u = f\,, \tag{1.35}$$

oder symmetrischer Gleichungssysteme

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{1.36}$$

oder um das Lösen von Differentialgleichungen wie

$$EIw^{IV}(x) = p(x)\,. \tag{1.37}$$

Zu jeder linken Seite gehört eine einfache **Identität**

$$\mathscr{B}(u,\delta u) = \delta u\,k\,u - u\,k\,\delta u = 0\,, \tag{1.38}$$

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta u} = 0\,, \tag{1.39}$$

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^l EIw^{IV}\delta w\,dx + [V\delta w - M\delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\,dx = 0\,. \tag{1.40}$$

Die letzte Identität beruht auf partieller Integration und daher müssen wir voraussetzen, dass die Funktionen w und δw hinreichend glatt sind, sie aus $C^4(0,l)$ bzw. $C^2(0,l)$ sind.

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik basieren auf den Greenschen Identitäten.

Die zentrale Rolle des Arbeitsbegriffs (= Skalarprodukt) geht auf diese Identitäten zurück, denn die wesentlichen Formulierungen der Statik und Mechanik sind ***duale Formulierungen***, sind ‚Stereo', nicht ‚Mono'. Zwei Funktionen, die Biegelinie w und die virtuelle Verrückung δw, sind in der Identität

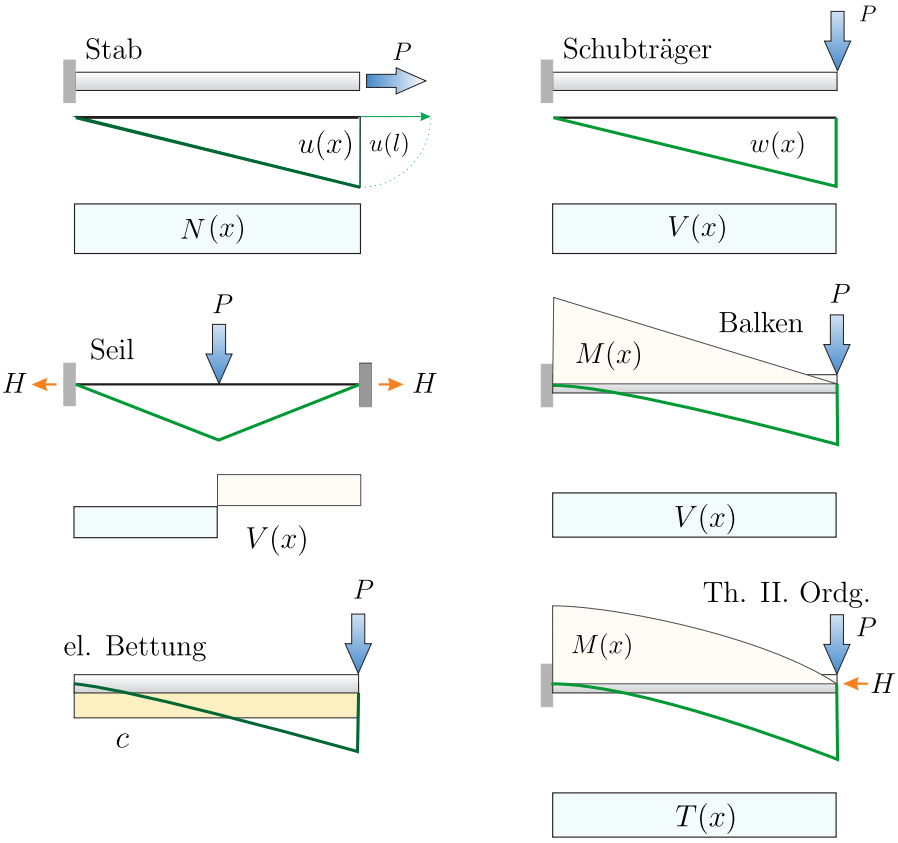


Bild 1.8. Stabverformungen

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{1.41}$$

miteinander verknüpft und die null bedeutet, dass bei jeder Verrückung δw die virtuelle äußere Arbeit gleich der virtuellen inneren Arbeit ist.

Und weil die Identität (1.40) für alle $\delta w \in C^2(0, l)$ gilt, muss sie z.B. auch für die Verrückung $\delta w = 1$ gelten

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^l EIw^{IV} \cdot 1 \, dx + V(l) \cdot 1 - V(0) \cdot 1 = 0 \,, \tag{1.42}$$

und damit ist das **Gleichgewicht der vertikalen Kräfte**, die zu einer Biegelinie w gehören, es ist $EIw^{IV} = p$, garantiert, siehe Bild 1.7.

Hier sieht man auch, wie man jedes 1-Term Integral durch Multiplikation mit einer Eins zu einem 2-Term Integral machen kann, das man dann ‚dual' interpretieren kann und **dual** bedeutet wichten, messen. *Wirkung bedingt immer ein zweites.*

1.2 Greensche Identitäten

Im Folgenden stellen wir zunächst in knapper Form die wichtigsten **Differentialgleichungen** der Stabstatik vor und formulieren die zugehörigen **Identitäten**.

1.2.1 Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes

$$-EAu''(x) = p(x) \tag{1.43}$$

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_0^l -EAu''(x)\,\delta u(x)\,dx + [N\,\delta u]_0^l}_{\text{äußere virt. Arbeit}} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx}_{\text{innere virt. Arbeit}} = 0\,, \tag{1.44}$$

mit der Normalkraft $N = EAu'$, siehe Bild 1.8.

Wenn $EA(x)$ veränderlich ist,

$$-(EA(x)\,u'(x))' = p(x)\,, \tag{1.45}$$

dann führt partielle Integration

$$\int_0^l -(EA(x)\,u')'\,\delta u\,dx = [(-EA(x)\,u')\,\delta u]_0^l - \int_0^l -EA(x)\,u'\,\delta u'\,dx \tag{1.46}$$

sinngemäß auf das Ebenbild der Identität (1.44), denn die Definition von $N = EA(x)\,u'(x)$ ändert sich nicht

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -(EA(x)\,u')'\,\delta u(x)\,dx + [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = 0\,. \tag{1.47}$$

Weil $-N' = p$ dasselbe ist wie $-(EA(x)\,u')' = p$, kann man auch schreiben

$$\int_0^l -N'\,\delta u\,dx = [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l -N\,\delta u'\,dx\,. \tag{1.48}$$

Wird die Ausdehnung des Stabes durch Reibung (c) behindert, wie bei einem Ausziehversuch

$$-EAu''(x) + c\,u(x) = p(x)\,, \tag{1.49}$$

dann lautet die Identität

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \underbrace{\int_0^l (-EAu''(x) + c\,u(x))\,\delta u(x)\,dx + [N\,\delta u]_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{-\int_0^l (\frac{N\,\delta N}{EA} + c\,u\,\delta u)\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.50}$$

1.2.2 Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens

$$-GA\,w_s''(x) = p(x) \tag{1.51}$$

$$\mathscr{G}(w_s,\delta w) = \underbrace{\int_0^l -GA\,w_s''(x)\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{V\,\delta V}{GA}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.52}$$

mit $V = GAw_s'$.

Wenn der Balken auf einer elastischen Grundlage (c) ruht,

$$-GA\,w_s''(x) + c\,w_s(x) = p(x)\,, \tag{1.53}$$

dann hat die Identität die Gestalt

$$\mathscr{G}(w_s,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (-GA\,w_s''(x) + c\,w_s(x))\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w]_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{-\int_0^l (\frac{V\,\delta V}{GA} + c\,w_s\,\delta w)dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.54}$$

1.2.3 Durchbiegung w eines Seils

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad H = \text{Vorspannung im Seil} \tag{1.55}$$

mit $V(x) = H\,w'(x)$ als der Querkraft in dem Seil (die Vorspannung H ist das EI beim Seil – je straffer desto steifer)

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l -H\,w''(x)\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{V\,\delta V}{H}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.56}$$

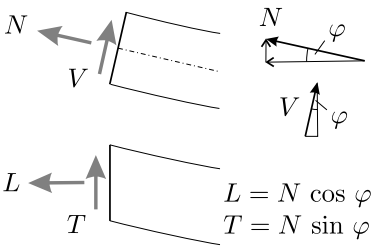


Bild 1.9. Schnittkräfte, Balken Th. II. Ordg.

1.2.4 Durchbiegung w eines Balkens

$$EI\,w^{IV}(x) = p(x) \tag{1.57}$$

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.58}$$

mit $M(x) = -EI\,w''(x)$ und $V(x) = -EI\,w'''(x)$.

Wenn $EI(x)$ veränderlich ist,

$$(EI(x)\,w''(x))'' = p(x) \tag{1.59}$$

dann führt zweimalige partielle Integration

$$\int_0^l (EI(x)\,w'')''\,\delta w\,dx = [(EI(x)\,w'')'\,\delta w - EI(x)\,w''\,\delta w']_0^l + \int_0^l EI(x)\,w''\,\delta w''\,dx\,, \tag{1.60}$$

es ist $M = -EI(x)\,w''$ und $V = -(EI(x)\,w'')'$, auf die zu (1.58) analoge Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^l (EI(x)\,w'')''\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,. \tag{1.61}$$

Auch hier kann man, weil $-M'' = p$ dasselbe ist wie $(EI(x)w'')'' = p$, schreiben

$$\int_0^l -M''\,\delta w\,dx = -[M'\,\delta w]_0^l + \int_0^l M'\,\delta w'\,dx\,. \tag{1.62}$$

1.2.5 Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung

$$EI\,w^{IV}(x) + (D(x)\,w'(x))' = p_z(x) \qquad D(x) = P + \int_0^x p_x(y)\,dy \tag{1.63}$$

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) + (D(x)\,w'(x))')\,\delta w\,dx + [T\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} - D(x)\,w'(x)\,\delta w'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0 \tag{1.64}$$

mit der ***Transversalkraft***

$$T(x) = -EI\,w'''(x) - D(x)\,w'(x) = V(x) - D(x)\,w'(x)\,, \tag{1.65}$$

als der Erweiterung der Querkraft um den vertikalen Anteil aus der schräg gerichteten ($w' = \tan\varphi$) Druckkraft D, [233], S. 8.

Die Konstante P ist eine Druckkraft in dem Stab und $p_x(x)$ und $p_z(x)$ sind Linienkräfte in Achsrichtung und senkrecht dazu.

Die math. Transversalkraft[3] $T = V + N\,w'$ (hier N als Zugkraft) ist konjugiert zu δw, ist also vertikal gerichtet und N hat eine Komponente in vertikaler Richtung. Multiplikation des statischen T in Bild 1.9 mit $1/\cos\varphi$ ergibt

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,T = V + N\tan\varphi = V + N\,w'\,, \tag{1.66}$$

was mit dem math. T übereinstimmt, wenn wir $1/\cos\varphi \simeq 1$ setzen.

1.2.6 Elastisch gebetteter Träger

$$EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = p(x) \tag{1.67}$$

Hierzu gehört die Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x))\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + c\,w(x)\,\delta w(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.68}$$

[3] Wie sie sich mit partieller Integration in (1.64) ergibt.

1.2.7 Zugbandbrücke

Man stelle sich einen Balken vor, durch den ein vorgespanntes Seil gezogen wird, so dass Balken und Seil gemeinsam die Streckenlast p tragen, [39],

$$EI\,w^{IV}(x) - H\,w''(x) = p(x) \qquad H = \text{Vorspannkraft} \tag{1.69}$$

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) - H\,w''(x))\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + H\,w'(x)\,\delta w'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.70}$$

mit $V = -EI\,w'''(x) + H\,w'(x)$.

1.2.8 Torsion

Die Differentialgleichung der ***St. Venantschen Torsion***

$$-GI_T\,\vartheta''(x) = m_x \tag{1.71}$$

$$\mathscr{G}(\vartheta,\delta\vartheta) = \underbrace{\int_0^l -GI_T\,\vartheta''(x)\,\delta\vartheta(x)\,dx + [M_T\,\delta\vartheta]_0^l}_{\delta W_e} \underbrace{- \int_0^l \frac{M_T\,\delta M_T}{GI_T}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.72}$$

und der ***Wölbkrafttorsion***

$$EI_\omega\,\vartheta^{IV}(x) - GI_T\,\vartheta''(x) = m_x \tag{1.73}$$

$$\mathscr{G}(\vartheta,\delta\vartheta) = \underbrace{\int_0^l (EI_\omega\,\vartheta^{IV}(x) - GI_T\,\vartheta''(x))\,\delta\vartheta(x)\,dx + [M_T\,\delta\vartheta - M_\omega\,\delta\vartheta']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M_\omega\,\delta M_\omega}{EI_\omega} + GI_T\,\vartheta'(x)\,\delta\vartheta'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.74}$$

mit

$$M_\omega = -EI_\omega\,\vartheta''(x) \qquad M_T = -EI_\omega\,\vartheta'''(x) + GI_T\,\vartheta'(x) \tag{1.75}$$

wiederholen die obigen Muster[4].

[4] Damit ist die Liste der Differentialgleichungen der Stabstatik noch nicht zu Ende. Für eine umfangreiche Zusammenstellung verweisen wir auf [247].

1.3 Die Arbeitssätze der Statik

In den Greenschen Identitäten

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l -EAu''\,\delta u\,dx + [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = 0\,, \tag{1.76}$$

werden **Kräfte** [N] mit **Wegen** [m] überlagert, und die Summe der **Arbeiten** [N·m] ist null. Darauf beruhen die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\boxed{\mathscr{G}(w,\delta w) = \delta W_e - \delta W_i = 0\,.} \tag{1.77}$$

Energieerhaltungssatz

Ist das zweite Argument identisch mit dem ersten, dann ist es der Energieerhaltungssatz

$$\boxed{\frac{1}{2}\;\mathscr{G}(w,w) = W_e - W_i = 0\,,} \tag{1.78}$$

der besagt, dass die äußere Eigenarbeit (deswegen der Faktor 1/2) als innere Energie gespeichert wird.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Rückt man $w(x)$ an die zweite Stelle und überlässt den ersten Platz einer Testfunktion δw^*, die man, wie es Tradition ist, mit einem Asterisk schreibt, dann ist es das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\boxed{\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,.} \tag{1.79}$$

Satz von Betti

Der Satz von Betti entsteht durch Spiegelung aus der ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{B}(w,\,\hat{w}) = \mathscr{G}(w,\hat{w}) - \mathscr{G}(\hat{w},w) = \underbrace{\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\hat{w}(x)\,dx + [V\,\hat{w} - M\,\hat{w}']_0^l}_{W_{1,2}}$$

$$\underbrace{-\,[w\,\hat{V} - w'\hat{M}]_0^l - \int_0^l w(x)\,EI\,\hat{w}^{IV}(x)\,dx}_{W_{2,1}} = 0\,, \tag{1.80}$$

was bedeutet, dass die reziproken äußeren Arbeiten zweier Biegelinien w_1 und w_2 gleich groß sind,

$$\boxed{\mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} - W_{2,1} = 0}$$

also

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \text{Kräfte 1} \times \text{Wege 2} - \text{Wege 1} \times \text{Kräfte 2} = 0\,. \tag{1.81}$$

Vorsichtshalber sei noch angemerkt: Hier wurden nicht die Greenschen Identitäten an Hand der Variationsprinzipe ‚verifiziert', sondern es ist umgekehrt: Die Variationsprinzipe gelten, weil die Identitäten gelten.

Strong form and weak form

Mit den Greenschen Identitäten kommt der Unterschied zwischen **starken** und **schwachen** Lösungen in die Statik, siehe Kapitel 9.22. Entweder man löst die Differentialgleichung, die **Euler-Gleichung**, in jedem Punkt $0 < x < l$, oder man löst das Variationsproblem $\mathscr{G}(w, \delta w) = 0$ für alle δw.

Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Die **potentielle Energie** eines gelenkig gelagerten Einfeldträgers ist – in klassischer und moderner Notation nebeneinander – der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi(w) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx - \int_0^l p(x)w(x)\,dx = \frac{1}{2}\,a(w,w) - (p,w) \\ &= \frac{1}{2}\,(a(w,w) - (p,w)) - \frac{1}{2}\,(p,w)\,. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Ist w die Biegelinie des Trägers, $EI\,w^{IV} = p$, dann ist $a(w,w) - (p,w) = 0$ (das ist die erste Greensche Identität) und dann verkürzt sich $\Pi(w)$ auf

$$\boxed{\Pi(w) = -\frac{1}{2}\,(p,w) = \text{Eigenarbeit} \times (-1)} \tag{1.83}$$

woraus folgt, dass die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage **negativ** ist, weil ***Eigenarbeit*** immer positiv ist.

Addiert man zur tiefsten Lage w eine Testfunktion δw, also $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$, dann wird die potentielle Energie größer

$$\Pi(w + \delta w) = \Pi(w) + \underbrace{\mathscr{G}(w, \delta w)}_{=0} + \underbrace{a(\delta w, \delta w)}_{>0}\,, \tag{1.84}$$

was belegt, dass $\Pi(w)$ der tiefste Punkt ist. Ferner gilt, siehe Kapitel 9.23,

Die erste Variation $\delta\Pi$ der potentiellen Energie ist identisch mit der ersten Greenschen Identität,

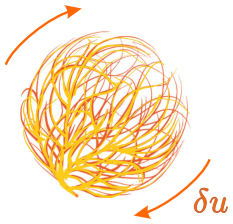


Bild 1.10. Tumbleweed

$$\delta\Pi(w,\delta w) = a(w,\delta w) - (p,\delta w) = \mathscr{G}(w,\delta w) = 0\,. \tag{1.85}$$

Deswegen bilden die Greenschen Identitäten die Vorlage für die finiten Elemente. Man konstruiert eine Lösung $w_h = \sum_j w_j\,\varphi_j(x)$ so, dass

$$\boxed{a(w_h,\varphi_i) - (p,\varphi_i) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\,.} \tag{1.86}$$

Free body diagram

Es sollte klar sein, dass die Greenschen Identitäten am frei geschnittenen System (*free body diagram*) formuliert werden, denn ohne Randarbeiten [...] wären die Ausdrücke nicht komplett. Sind nur starre Lager vorhanden, kann man auf das Freischneiden verzichten, wenn δw eine ***zulässige*** virtuelle Verrückung ist.

1.4 Ein Null-Summen Spiel

Die erste Greensche Identität gleicht dem Spiel, das der Wüstenwind ($= \delta u$) mit dem ausgetrockneten *tumbleweed* ($= u$) treibt, siehe Bild 1.10. Egal wie stark der Wind bläst und wie groß die Kapriolen sind, am Schluss ist die Bilanz immer null, $\mathscr{G}(u,\delta u) = 0$. Lesen wir diese null wie eine Variationsaussage

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = 0 \qquad \text{für alle } \delta u\,, \tag{1.87}$$

dann erinnert sie an die Weg-Unabhängigkeit des Arbeitsintegrals einer Punktmasse m im Schwerefeld der Erde, siehe Bild 1.11. Nahe der Erdoberfläche hat die potentielle Energie den Wert $\Pi = m \cdot g \cdot y$ und wenn sich die Punktmasse m auf einem geschlossenen Pfad $\mathcal{C} = \{x(s), y(s)\}^T$ bewegt, dann ist die Gesamtarbeit null[5]

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \nabla\Pi \bullet \boldsymbol{ds} = m \cdot g \int_0^L \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} ds = m \cdot g \int_0^L y'\,ds \\ = m \cdot g \cdot (y(L) - y(0)) = 0\end{aligned} \tag{1.88}$$

unabhängig von der Gestalt der Kurve $\mathcal{C}$ – dem Pfad δu so zu sagen.

Mit dem Skalarprodukt und der partiellen Integration kommt die ***Dualität***, das Wechselspiel von Kraft und Weg in die Mechanik hinein.

[5] Part. Int. und $y(0) = y(L)$ mit $L =$ Länge des Pfades

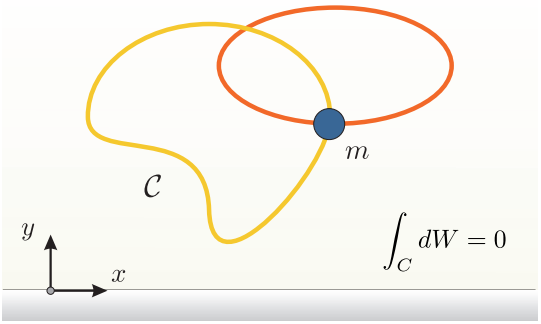


Bild 1.11. Geschlossene Pfade im Schwerefeld der Erde

Es beginnt mit dem Skalarprodukt[6] von zwei konjugierten Größen, einer Kraft und einem Weg,

$$\int_0^l -EAu''\,\delta u\,dx = Kraft \times Weg \tag{1.89}$$

und indem man die Integrale mittels partieller Integration umformt

$$\mathscr{G}\,(u,\delta u) = \int_0^l -EAu''\,\delta u\,dx + [N\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = 0\,, \tag{1.90}$$

kann man beliebig viele Paare von Funktionen u und δu in mehreren solchen ‚Null-Summen Spielen' miteinander verknüpfen

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^l -EAu''\,\delta u\,dx + \ldots \\ \displaystyle\int_0^l EI\,u^{IV}\,\delta u\,dx + \ldots \\ \displaystyle\int_\Omega -\Delta u\,\delta u d\Omega + \ldots \\ \ldots \end{array} \right\} = 0\,, \tag{1.91}$$

und kommt so spielerisch zu den Variationsprinzipen der Mechanik und Statik.

Und dass es Null-Summen sind, also ***Invarianten*** – man denke an den Wüstenwind – darauf beruht der große praktische Nutzen der Arbeits- und Energieprinzipe, sprich der ersten Greenschen Identität.

[6] Die Überlagerung zweier Funktionen nennt man ein L_2-Skalarprodukt.

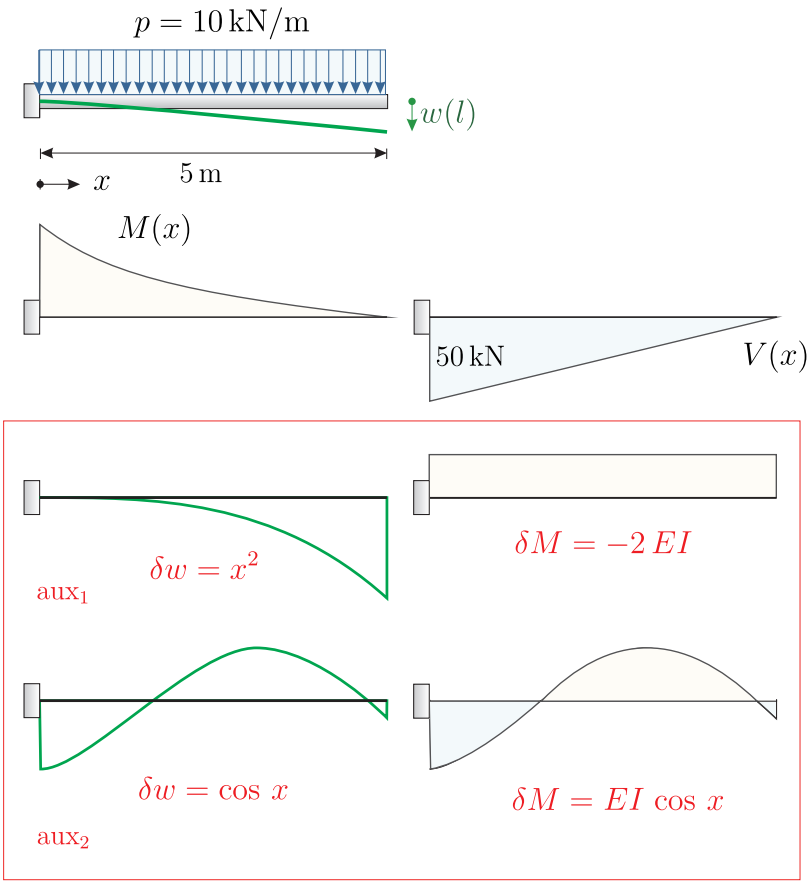


Bild 1.12. Kragträger, aux = Hilfssystem

1.5 Beispiele

Nach dieser doch etwas knappen, schlagwortartigen Auflistung sollen nun einige Beispiele den Inhalt veranschaulichen.

1.5.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Die Biegelinie des Kragträgers in Bild 1.12

$$EI\,w^{IV}(x) = 10 \qquad w(0) = w'(0) = 0 \qquad M(l) = V(l) = 0 \tag{1.92}$$

hat die Gestalt

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{10}{24}\,x^4 - \frac{50}{6}\,x^3 + \frac{125}{2}\,x^2\right) \tag{1.93}$$

und die Schnittkräfte lauten

$$M(x) = -5\,x^2 + 50\,x - 125 \qquad V(x) = -10\,x + 50\,. \tag{1.94}$$

Die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,, \tag{1.95}$$

reduziert sich unter Beachtung von (1.92), und der Annahme, dass $\delta w(x)$ eine zulässige virtuelle Verrückung ist,

$$\delta w(0) = 0 \qquad \delta w'(0) = 0\,, \tag{1.96}$$

auf den Ausdruck

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l 10 \cdot \delta w\,dx - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,, \tag{1.97}$$

der mit $\delta W_e - \delta W_i = 0$ identisch ist.

Wählen wir z.B. als zulässige virtuelle Verrückung die Funktion $\delta w(x) = x^2$, so bestätigt sich das auch numerisch

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w, x^2) &= \int_0^5 10 \cdot x^2\,dx - \int_0^5 (-5\,x^2 + 50\,x - 125) \cdot (-2)\,dx \\ &= \frac{1250}{3} - \frac{1250}{3} = \delta W_e - \delta W_i = 0\,.\end{aligned} \tag{1.98}$$

Dagegen ist die Funktion

$$\delta w(x) = \cos x \tag{1.99}$$

keine zulässige virtuelle Verrückung, denn bei dieser Bewegung wird das eigentlich feste linke Lager verrückt, $\delta w(0) = \cos 0 = 1$. Das setzt aber die Gültigkeit von $\mathscr{G}(w, \delta w) = 0$ nicht außer Kraft. Man muss jetzt nur richtig zählen und beachten, dass nun auch die Querkraft $V(0) = 50$ im linken Lager eine Arbeit leistet, und so ergibt sich mit

$$\delta M(x) = -EI\,\delta w''(x) = EI\,\cos x \tag{1.100}$$

auch das richtige Resultat (es ist $-50 \cdot 1 = -V(0) \cdot \cos 0$)

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w, \cos x) &= \int_0^5 10\cos x\,dx - 50 \cdot 1 - \int_0^5 (-5\,x^2 + 50\,x - 125)\cos x\,dx \\ &= \underbrace{-9.6 - 50}_{\delta W_e} - \underbrace{-59.6}_{\delta W_i} = 0\,.\end{aligned} \tag{1.101}$$

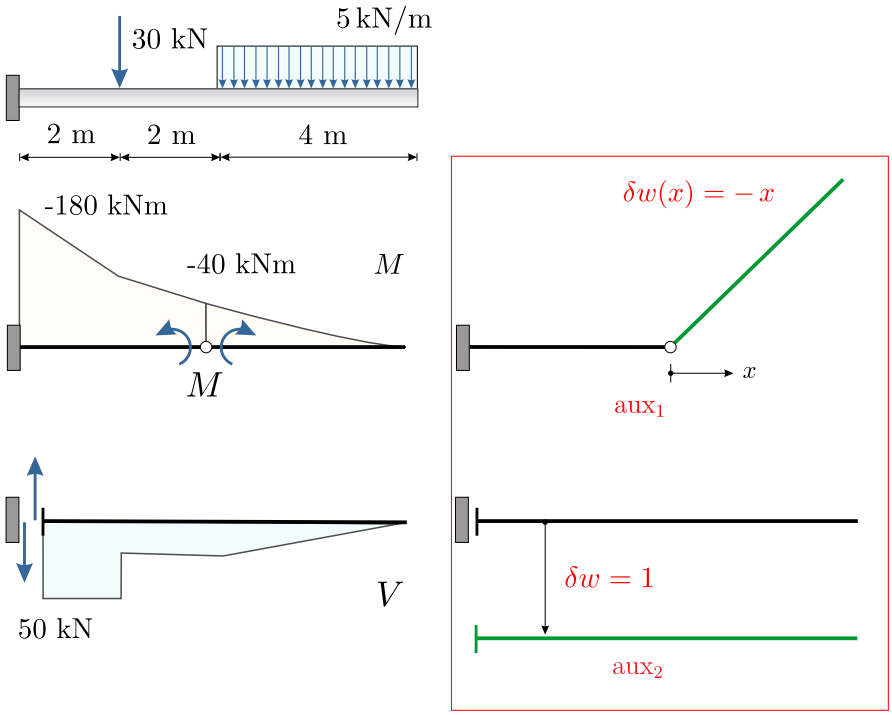


Bild 1.13. Bestimmung von M und V mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen. Man schafft eine Beweglichkeit und misst die Arbeit

Die Starrkörperbewegungen $\delta w = a + b\,x$ ignorieren ebenfalls die Lagerbedingungen $\delta w(0) = \delta w'(0) = 0$, aber trotzdem ist ihre Anwendung erlaubt und sogar geboten, denn mit zwei speziellen Starrkörperbewegungen, $\delta w(x) = 1$ und $\delta w(x) = x$, kontrollieren wir das **Gleichgewicht**, also die Summe der vertikalen Kräfte und die Summe der Momente um das linke Lager

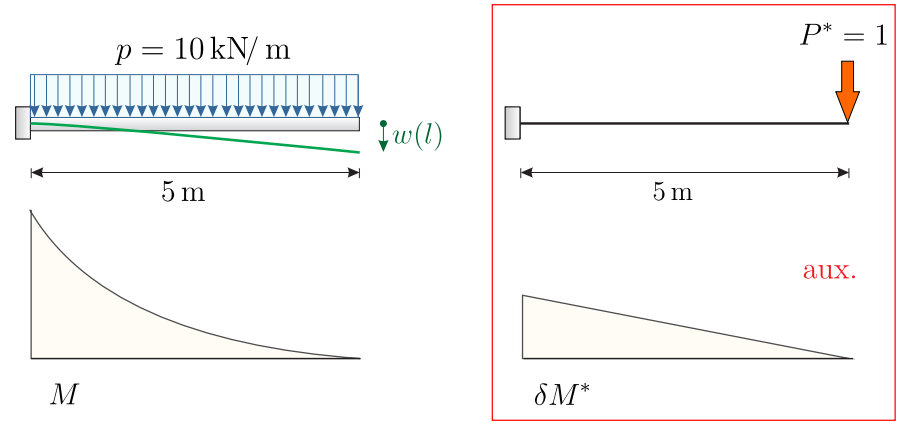
$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^5 10 \cdot 1 \, dx - V(0) \cdot 1 = 50 - 50 = 0 \qquad \delta w = 1\,, \quad (1.102)$$

$$\mathscr{G}(w, x) = \int_0^5 10 \cdot x \, dx - M(0) \cdot 1 = 125 - 125 = 0 \qquad \delta w = x\,. \quad (1.103)$$

($M(0) \cdot 1 = M(0) \cdot x'$). Nur wenn w orthogonal zu diesen beiden Verrückungen ist, herrscht Gleichgewicht am Balken.

1.5.2 Energieerhaltungssatz

Man überzeugt sich auch leicht, dass die Biegelinie des Kragträgers dem Energieerhaltungssatz genügt



$$w(l) = \int_0^5 \frac{M\,\delta M^*}{EI}\,dx$$

Bild 1.14. Kragträger

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathscr{G}(w,w) &= \frac{1}{2}\int_0^l p(x)\,w(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx = W_e - W_i \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{EI}(1562.5 - 1562.5) = 0\,,\end{aligned} \tag{1.104}$$

die äußere Eigenarbeit W_e also gleich der inneren Energie W_i ist.

1.5.3 Schnittgrößen

In Bild 1.13 wird ein Moment mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen berechnet. Nach dem Einbau eines **Momentengelenks** ist das System kinematisch und die erste Greensche Identität (1.58) ergibt

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^4 5\cdot(-x)\,dx - M\cdot\delta w' = -40 - M\cdot 1 = 0 \tag{1.105}$$

und ebenso bestimmt man die Querkraft im Lager durch den Einbau eines **Querkraftgelenks**, das die Verrückung $\delta w = 1$ möglich macht

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^4 5\cdot 1\,dx + 30\cdot 1 + V\cdot 1 = 0\,. \tag{1.106}$$

1.5.4 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Bei diesem Prinzip ist die Reihenfolge von w und δw vertauscht und man schreibt dann üblicherweise δw^* statt δw

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \int_0^l EI\,\delta w^{*IV}(x)\,w(x)\,dx + [\delta V^* w - \delta M^* w']_0^l - \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI}\,dx = 0\,. \tag{1.107}$$

Die **Mohrsche Arbeitsgleichung** basiert auf dieser Gleichung. Dort heißt $\delta w^* = \bar{w}$

Um auf diesem Weg die Durchbiegung am Kragarmende des Trägers in Bild 1.14 *a* zu berechnen, belasten wir den Träger in einem zweiten Lastfall mit einer Einzelkraft $P^* = 1$ (konjugiert zum gesuchten Wert $w(l)$), also

$$EI\,\delta w^{*\,IV} = 0 \qquad \delta V^*(l) = 1 \qquad \delta M^*(l) = 0\,. \tag{1.108}$$

und unter Beachtung von $w(0) = w'(0) = 0$ folgt dann

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = P^* \cdot w(l) - \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI}\,dx = 0\,, \tag{1.109}$$

oder (mit der δ_{ik}-Tafel)

$$1 \cdot w(5) = \int_0^5 \frac{\delta M^* M}{EI}\,dx = \boxed{\frac{1}{4}} \cdot \boxed{(-5)} \cdot \boxed{(-125)} \cdot \boxed{5} = \frac{781.25}{EI}\,, \tag{1.110}$$

was die Mohrsche Arbeitsgleichung ist.

Nach diesem ersten Probestück wollen wir das Prinzip der virtuellen Kräfte nun systematischer fassen. Weil $\delta w^*(x)$ in (1.107) an erster Stelle steht, werden mit der Wahl von $\delta w^*(x)$ implizit die Kraftgrößen gesetzt, also die Streckenlast

$$EI\,\delta\,w^{*IV}(x) = \delta\,p^* \tag{1.111}$$

und die Momente $\delta M^* = -EI\,\delta w^{*\prime\prime}$ und die Querkräfte $\delta V^* = -EI\,\delta w^{*\prime\prime\prime}$ an den Balkenenden, nennen wir sie die Kräfte δK^*.

Weil die Weggrößen von δw^* an den Balkenenden in der ersten Greenschen Identität **nicht** abgefragt werden, muss δw^* keine Rücksicht auf die Lagerbedingungen des Trägers nehmen.

Die Identität $\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0$ garantiert dann, dass die äußere Arbeit δW_e^* der Kräfte δK^* auf den Wegen $w(x)$ genauso groß ist, wie die virtuelle innere Energie δW_i^*, also die Überlagerung von δM^* und M.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Ist ein System von äußeren Kräften δK^* im Gleichgewicht, dann ist die äussere Arbeit δW_e^* dieser Kräfte auf den Wegen w des Balkens

$$\delta W_e^* = \int_0^l EI\,\delta w^{*IV}\,w(x)\,dx + [\delta V^* w - \delta M^* w']_0^l\,, \tag{1.112}$$

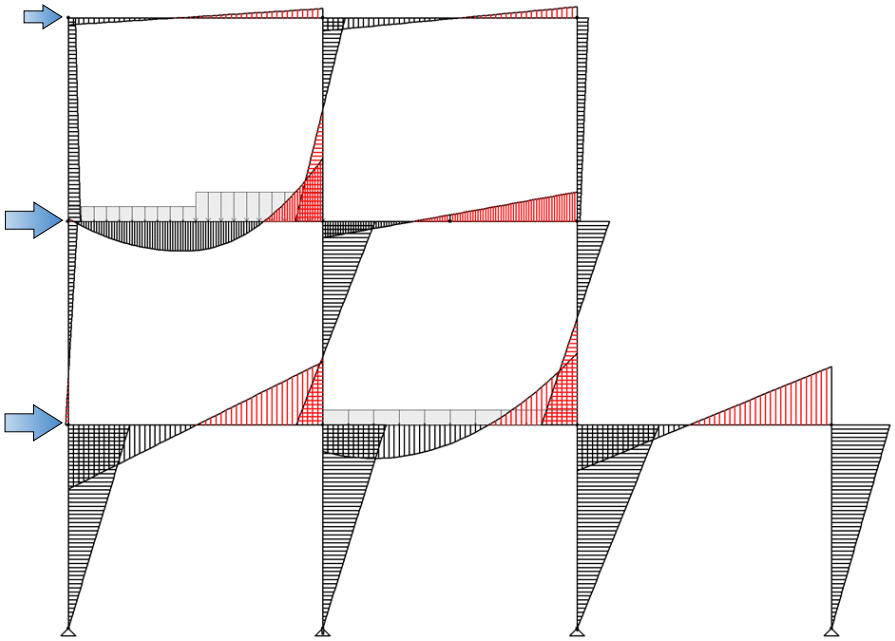


Bild 1.15. Stockwerkrahmen, Momente unter Last

gleich der virtuellen inneren Energie δW_i^*

$$\delta W_i^* = \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI}\, dx\,. \tag{1.113}$$

Gelegentlich wird behauptet, dass die Kräfte δK^* *infinitesimal klein* sein müssen, aber dafür gibt es sachlich keinen Grund, denn partielle Integration macht keinen Unterschied zwischen groß und klein.

Das **Gleichgewicht** der virtuellen Kräfte ist im übrigen garantiert, weil wir die Kräfte aus der Funktion δw^* (dem ‚Mutterschiff') durch Differentiation herleiten und jede Funktion $\delta w^* \in C^4(0,l)$ die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt

$$\mathscr{G}(\delta w^*, \delta w) = 0 \qquad \delta w = a + b\,x\,. \tag{1.114}$$

Anders wäre es, wenn $EI\,\delta w^{*IV}$ und die Balkenendkräfte δV^* und δM^* nicht zueinander passen würden, wenn sie ‚gewürfelt' wären, dann wäre die Bilanz $\delta W_e^* - \delta W_i^*$ nur mit Glück null.

1.6 Rahmen

Die Erweiterung der Identitäten auf rahmenartige Tragwerke wie den Stockwerkrahmen in Bild 1.15 ist einfach, denn $0+0+\ldots+0=0$.

Der Rahmen möge aus n Stielen und Riegeln mit entsprechenden Längs- und Biegeverformungen u_i und w_i bestehen. Für jedes u_i bzw. w_i schreiben wir die zugehörige erste Greensche Identität an und addieren

$$0+0+\ldots+0=0\,. \tag{1.115}$$

Dann trennen wir nach äußerer und innerer Arbeit. Äußere Arbeit kommt nach links und innere Arbeit nach rechts

$$\delta W_e = \delta W_i\,, \tag{1.116}$$

und der Term δW_e lässt sich in der Regel weiter vereinfachen. Die beiden zu u_i und w_i gehörigen Identitäten eines Riegels oder Stiels,

$$\mathscr{G}(u_i, \delta u_i) = 0 \quad \text{(längs)} \qquad \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = 0 \quad \text{(quer)} \tag{1.117}$$

tragen in der Summe zu δW_e einen Ausdruck wie

$$\int_0^{l_i} p_x\,\delta u_i\,dx + \int_0^{l_i} p_z\,\delta w_i\,dx + \underbrace{[N_i\,\delta u_i]_0^{l_i} + [V_i\,\delta w_i - M_i \delta w_i']_0^{l_i}}_{Randarbeiten} \tag{1.118}$$

bei. Das sind also die virtuellen äußeren Arbeiten der Streckenlasten p_x (längs) und p_z (quer) zwischen den Knoten, und die Randarbeiten, die die Balkenendkräfte, N_i, V_i und M_i auf den zu ihnen konjugierten virtuellen Verrückungen leisten.

Wenn in den Knoten des Rahmens keine Kräfte oder Momente angreifen, dann sind die Anschlusskräfte der Balken in den Knoten unter sich im Gleichgewicht. Was als Normalkraft N ankommt, wird als Querkraft V weitergeleitet etc. Ferner sind die virtuellen Verrückungen der Balken in den Knoten gleich groß.

In unbelasteten Knoten ist also die Summe über die eckigen Klammern null, und damit reduziert sich die Bilanz auf

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \sum\nolimits_i \Big(\int_0^{l_i} p_z\,\delta w_i\,dx + \int_0^{l_i} p_x\,\delta u_i\,dx\Big)\\ &= \sum\nolimits_i \Big(\int_0^{l_i} \frac{N_i\,\delta N_i}{EA_i}\,dx + \int_0^{l_i} \frac{M_i \delta M_i}{EI_i}\,dx\Big) = \delta W_i\,.\end{aligned} \tag{1.119}$$

Wenn Punktlasten in den Knoten angreifen, dann springen die beteiligten Balkenendkräfte um die Höhe dieser Punktlasten, und die Summe über die Randarbeiten (die eckigen Klammern) ergibt dann in dem Knoten einen Beitrag wie $P \cdot \delta w(x)$.

Den Ausdruck (1.119) kann man weiter vereinfachen, wenn man auf das Anschreiben der Integrationsgrenzen verzichtet und ebenso die Indices an u_i

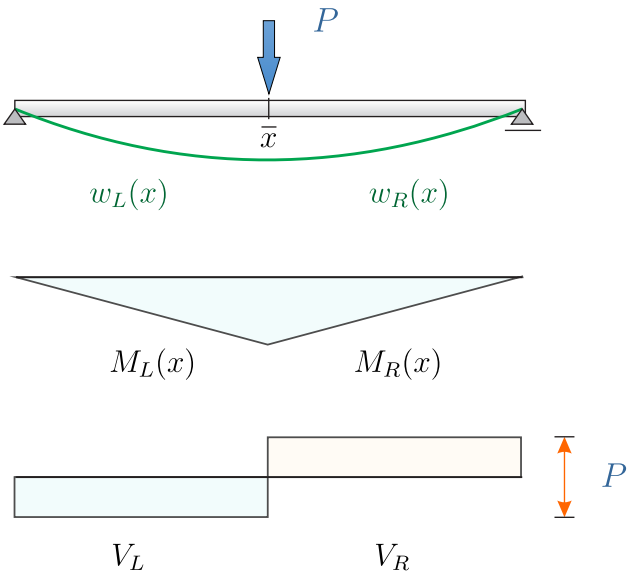


Bild 1.16. Die Einzelkraft spaltet den Balken – mathematisch – in zwei Teile

und w_i und EA_i und EI_i etc. weglässt, denn jeder weiß ja, welcher Teil des Rahmens gerade gemeint ist. Man schreibt also einfacher

$$\delta W_e = \int p_z \, \delta w \, dx + \int p_x \, \delta u \, dx \tag{1.120}$$

und analog

$$\int \frac{N \delta N}{EA} \, dx + \int \frac{M \delta M}{EI} \, dx = \delta W_i \,, \tag{1.121}$$

so dass aus den vielen Identitäten am Ende schließlich der bequeme Ausdruck

$$\delta W_e = \int p_z \, \delta w \, dx + \int p_x \, \delta u \, dx = \int \frac{N \delta N}{EA} \, dx + \int \frac{M \delta M}{EI} \, dx = \delta W_i \tag{1.122}$$

wird.

1.7 Federnde Stützung

Der Balken in Bild 1.17 ruht rechts auf einem elastischen Lager. Setzen wir in der ersten Greenschen Identität $EI\, w^{IV} = p$ und $V(l) = -k\, w(l)$, dann ergibt sich unter Berücksichtigung der übrigen Randbedingungen, $w(0) = w'(0) = M(l) = 0$, und $\delta w(0) = \delta w'(0) = 0$,

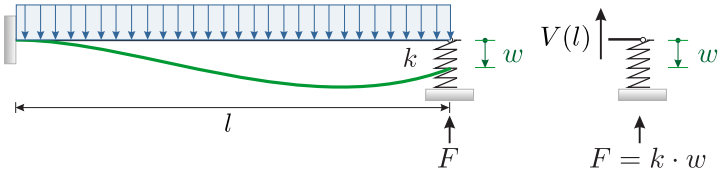


Bild 1.17. Federnde Lagerung eines Balkens, $V(l) = -k\,w(l)$

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p\,\delta w\,dx - k\,w(l)\,\delta w(l) - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,, \qquad (1.123)$$

und das ist die **erste Variation** $\delta\Pi(w, \delta w)$ der potentiellen Energie

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}k\,w^2 - \int_0^l p\,w\,dx\,. \qquad (1.124)$$

1.8 Einzelkräfte und Einzelmomente

Es ist noch zu klären, wie Einzelkräfte und Einzelmomente in die Arbeitsgleichung hineinkommen, also Terme wie $P \cdot \delta w(x)$.

Sie rühren von den eckigen Klammern, den Randarbeiten, her, denn Einzelkräfte und Einzelmomente auf freier Strecke machen eine Zweiteilung der Biegelinie in $w_L(x)$ und $w_R(x)$ notwendig, weil man – anschaulich gesagt – nicht einfach über eine Einzelkraft hinweg integrieren kann. Der Rand bildet sich dort, wo die beiden Hälften zusammenstoßen.

Man integriert vom linken Lager bis zum Fußpunkt $\bar{x}$ der Kraft, stoppt dort, und setzt hinter dem Lastangriffspunkt die Integration fort

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \mathscr{G}(w_L, \delta w)_{(0,\bar{x})} + \mathscr{G}(w_R, \delta w)_{(\bar{x},l)} = 0 + 0 = 0\,. \qquad (1.125)$$

Die beiden Teile der Biegelinie, $w_L(x)$ und $w_R(x)$, sind jeweils homogene Lösungen der Balkengleichung – wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass keine Streckenlasten vorhanden sind

$$EI\,w_L(x) = 0 \qquad 0 < x < \bar{x} \qquad EI\,w_R(x) = 0 \qquad \bar{x} < x < l\,, \qquad (1.126)$$

und an der Stelle $\bar{x}$ gehen die beiden Lösungen stetig ineinander über, bis auf die Querkräfte V_L und V_R, die um den Betrag der Einzelkraft springen, siehe Bild 1.16,

$$M_R(\bar{x}) - M_L(\bar{x}) = 0 \qquad V_L(\bar{x}) - V_R(\bar{x}) = P\,. \qquad (1.127)$$

Bei der Addition der Randarbeiten, also der eckigen Klammern an der Übergangsstelle, bleibt somit allein die virtuelle Arbeit der Einzelkraft übrig

$$[V_L\,\delta w - M_L\,\delta w']_0^{\bar{x}} + [V_R\,\delta w - M_R\,\delta w']_{\bar{x}}^{l} = P \cdot \delta w(\bar{x}) \qquad (1.128)$$

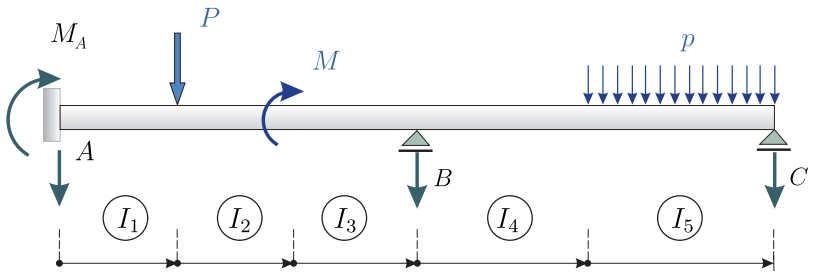


Bild 1.18. Der Träger muss in fünf Integrationsintervalle unterteilt werden

und damit lautet die Bilanz

$$\delta W_e = P \cdot \delta w(\bar{x}) = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i\,. \tag{1.129}$$

Mit Einzelmomenten verfährt man sinngemäß.

Gegebenenfalls muss man, siehe Bild 1.18, die Integration mehrmals unterbrechen

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) &:= \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_1,x_2)} + \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_2,x_3)} + \ldots + \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_5,x_6)} \\ &= 0 + 0 \ldots + 0 = 0\,.\end{aligned} \tag{1.130}$$

All dies gilt natürlich auch für Lagerkräfte, die ja auch Punktkräfte sind. Damit sie in der Bilanz auftauchen, muss man allerdings virtuelle Verrückungen wählen, die offiziell nicht zulässig sind, die die ‚Ruhepflicht', die Festhaltung der Lager, ignorieren, was mathematisch ja vollkommen legitim ist.

Ist δw eine solche virtuelle Verrückung des Durchlaufträgers in Bild 1.18, die auch die Lager verschiebt, dann stehen in der ersten Greenschen Identität auch die Arbeiten der Lagerkräfte

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) = {} & M_A\,\delta w'(x_1) + A\,\delta w(x_1) + P\,\delta w(x_2) + M\,\delta w'(x_3) + B\,\delta w(x_4) \\ & + \int_{x_5}^{x_6} p\,\delta w\,dx + C\,\delta w(x_6) - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{1.131}$$

Wir können gleich den umgekehrten Schluss ziehen:

Wenn man mit zulässigen virtuellen Verrückungen δw an einem Tragwerk wackelt, dann sind die Arbeiten der Lagerkräfte null.

1.9 Lagersenkung

Im Zusammenhang mit einer Lagersenkung interessieren drei Themen:

- Der Energieerhaltungssatz
- Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

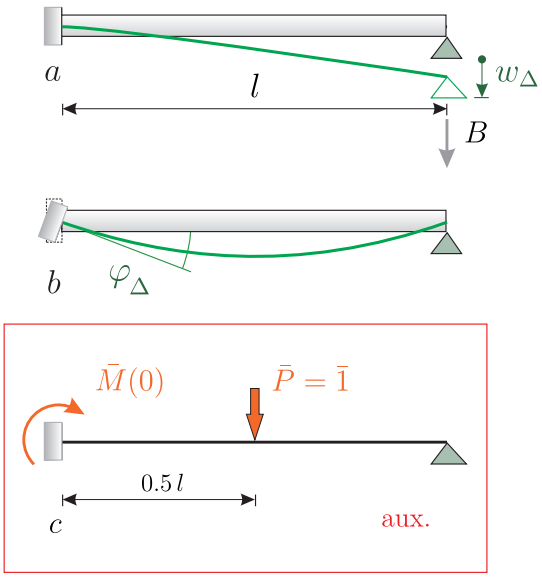


Bild 1.19. Lagersenkung und Lagerverdrehung

- Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte zur Berechnung von Verformungen

Das rechte Lager des Trägers in Bild 1.19 senkt sich um einen Weg w_Δ. Für die Biegelinie des Trägers

$$EI\,w^{IV} = 0 \qquad w(0) = w'(0) = 0 \qquad M(l) = 0 \quad w(l) = w_\Delta\,, \tag{1.132}$$

machen wir einen Ansatz aus **zwei Funktionen**, einer Biegelinie $w_1(x)$ mit den korrekten Randwerten

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0 \qquad w_1(l) = w_\Delta \tag{1.133}$$

und einer zweiten Biegelinie $w_2(x)$, die ‚komplementär' zu $w_1(x)$ ist in dem Sinne, dass die Summe $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ den Gleichungen (1.132) genügt

$$EI\,w_2^{IV}(x) = -EI\,w_1^{IV}(x) \quad w_2(0) = w_2'(0) = w_2(l) = 0 \quad M_1(l) + M_2(l) = 0\,. \tag{1.134}$$

Mit finiten Elementen setzt man $w_1(x) = w_\Delta \cdot \varphi_3(x)$, bringt die Spalte $\boldsymbol{f}_3$ von $\boldsymbol{K}$ auf die rechte Seite, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = -w_\Delta \boldsymbol{f}_3$ und bestimmt aus diesen $n-1$ Gleichungen (die Zeile 3 wird gestrichen), die übrigen Knotenwerte w_i.

Energieerhaltungssatz bei Lagersenkung

Zur Kontrolle von $W_e = W_i$ gehen wir auf die Diagonale und überlagern w mit sich selbst

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,w) &= \int_0^l EI\, w^{IV}\, w\, dx + [V\, w - M\, w']_0^l - \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx \\ &= V(l)\cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = 0\,, \end{aligned} \tag{1.135}$$

was nach Multiplikation mit $1/2$

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(w,w) = \frac{1}{2}\, V(l)\cdot w_\Delta - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = 0\,, \tag{1.136}$$

der Energieerhaltungssatz ist.

Prinzip der virtuellen Verrückungen bei Lagersenkung

Nun gehen wir auf die Nebendiagonale, δw sei eine zulässige virtuelle Verrückung, also $\delta w(0) = \delta w'(0) = \delta w(l) = 0$. Weil die Streckenlast null ist, $EI\, w^{IV} = 0$, ist $\delta W_e = 0$, und somit muss auch $\delta W_i = 0$ sein

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = -\int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\, dx = -\delta W_i = 0\,. \tag{1.137}$$

Das versteht man, wenn man an die Mohrsche Arbeitsgleichung denkt: Wir berechnen in (1.137) mit Hilfe der frei gesetzten Einzelkraft $V(l)$ im rechten Lager (das Lager wird weggenommen, Reduktionssatz), um wieviel die virtuelle Verrückung dort nach unten geht, aber $\delta w(l) = 0$. Bei Lagersenkungen orientieren sich die virtuellen Verrückungen δw ja am ursprünglichen System, sind also in den (ursprünglich) festen Lagern null.

Prinzip der virtuellen Kräfte bei Lagersenkung

Jetzt tauschen w und δw, das nun δw^* heißt, die Plätze, die erste Greensche Identität wird zum *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,, \tag{1.138}$$

und wir berechnen mit diesem Prinzip beispielhaft die Durchbiegung in Balkenmitte, siehe Bild 1.19. Traditionsgemäß heißt die Biegelinie δw^* bei Mohr $\bar{w}$.

Wir lassen also eine Einzelkraft $\bar{P} = 1$ in Richtung der gesuchten Verschiebung wirken und formulieren mit den beiden Teilen der Biegelinie

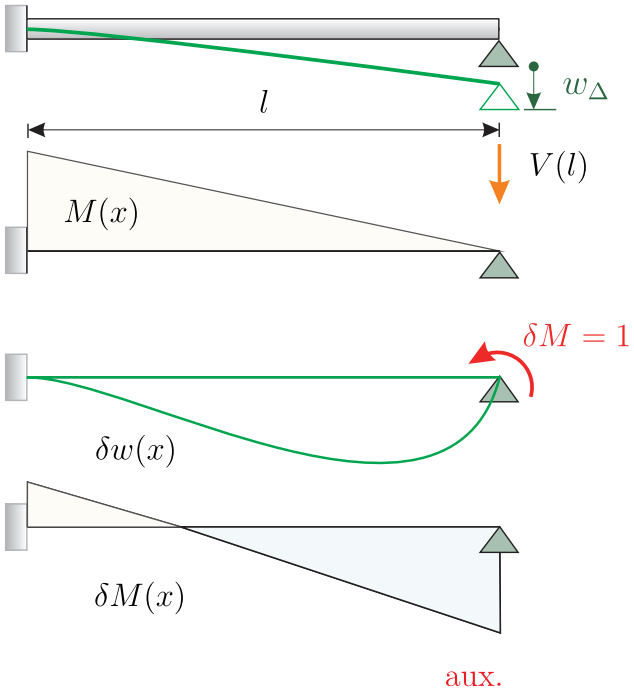


Bild 1.20. Virtuelle Verrückung, $\delta W_e = \delta W_i = 0$

$$\bar{w} = \bar{w}_L + \bar{w}_R \tag{1.139}$$

und w die erste Greensche Identität und erhalten so, wir überspringen die Zwischenschritte, das Ergebnis

$$\mathscr{G}(\bar{w}_L, w)_{(0,0.5\,l)} + \mathscr{G}(\bar{w}_R, w)_{(0.5\,l,l)} = \bar{1} \cdot w(0.5\,l) + \bar{V}(l) \cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{\bar{M} M}{EI}\, dx = 0\,, \tag{1.140}$$

oder aufgelöst nach der gesuchten Durchbiegung

$$w(0.5\,l) = \int_0^l \frac{\bar{M} M}{EI}\, dx - \bar{V}(l) \cdot w_\Delta\,. \tag{1.141}$$

Bei einer Lagersenkung ist also die Mohrsche Arbeitsgleichung um den Beitrag $-\bar{V}(l) \cdot w_\Delta$ zu erweitern, wobei $\bar{V}(l)$ die Lagerkraft aus $\bar{P} = 1$ ist. Der Beitrag ist negativ, weil er eigentlich auf die linke Seite gehört, zu den virtuellen äußeren Arbeiten.

Wenn sich die Einspannung um einen Winkel φ_Δ verdreht,

$$EI\, w^{IV} = 0 \qquad w'(0) = \tan\varphi_\Delta \qquad w(0) = w(l) = M(l) = 0\,, \tag{1.142}$$



Bild 1.21. Schraubenfeder

dann erhält man auf analoge Weise

$$\bar{1} \cdot w(0.5\,l) = -\bar{M}(0) \cdot \tan\varphi_\Delta + \int_0^l \frac{\bar{M} M}{EI}\, dx\,. \tag{1.143}$$

Das Moment $\bar{M}(0)$ ist das Einspannmoment aus der Einzelkraft $\bar{P} = \bar{1}$. Eigentlich gehört es auf die linke Seite, weil es virtuelle äußere Arbeit ist, und so taucht es rechts mit dem Faktor (-1) auf.

1.10 Federn

In matrizieller Schreibweise lautet das **Federgesetz**, siehe Bild 1.21,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1.144}$$

oder kürzer $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Zu dieser symmetrischen Matrix gehört die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta u} = 0\,. \tag{1.145}$$

Ist $\boldsymbol{u}$ die Gleichgewichtslage der Feder, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dann ergibt sich daraus das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für die Feder

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta u} = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{1.146}$$

und analog das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\delta u}^*, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}^* - \boldsymbol{\delta u}^{*T} \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,. \tag{1.147}$$

1.11 Temperatur

In der linearen Statik darf man die Ergebnisse **superponieren** und so kann man den Lastfall Temperatur wie einen zusätzlichen Lastfall behandeln

$$w(x) = w_{LF\,1} + w_{LF\,2} + \ldots + w_T\,. \tag{1.148}$$

Wir dürfen weiter annehmen, dass w_T am statisch bestimmten Tragwerk berechnet wird, also die Form

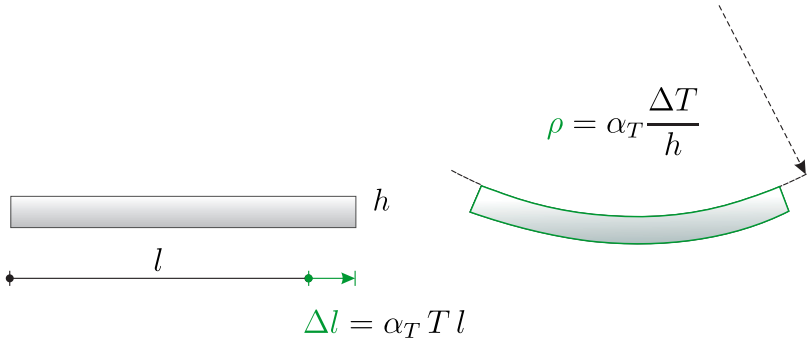


Bild 1.22. Temperaturverformungen

$$w_T(x) = \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\, x^2 + a\, x + b\,, \qquad (a, b \text{ sind Konstante}) \tag{1.149}$$

hat, weil eventuell nötige Korrekturen in den vorangehenden Lastfällen behandelt werden.

Das *Prinzip der virtuellen Kräfte* für eine Biegelinie w_T, wir setzen eine Punktlast $P^* = 1$ in den Aufpunkt x, lautet dann

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w_T) = 1 \cdot w_T(x) - \int_0^l EI\, \delta w^{*\prime\prime} w_T''\, dx = 0 \tag{1.150}$$

oder mit $w_T'' = \alpha_T \Delta T / h$

$$w_T(x) = \int_0^l \delta M^* \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\, dx\,. \tag{1.151}$$

Hierbei ist $\alpha_T \sim 10^{-5}$ (Stahl, Beton) der Temperaturkoeffizient des Materials, ΔT ist die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterkante des Trägers und h ist die Trägerhöhe, siehe Bild 1.22; wegen Details siehe Kapitel 7.2.

Genauso leitet man die Formel für die Längsverschiebung aus Temperatur ab

$$u_T(x) = \int_0^l \delta N^* \alpha_T\, T\, dx\,, \tag{1.152}$$

wobei T die Änderung gegenüber der Ausgangstemperatur ist.

1.12 Die vollständige Arbeitsgleichung

Wir haben nun alle Teile zusammen, um die vollständige Arbeitsgleichung, die ***Mohrsche Arbeitsgleichung***, zu formulieren

$$\bar{1}\cdot\delta = \int \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int \frac{\bar{N}N}{EA}\,dx + \int \bar{M}\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx + \int \bar{N}\,\alpha_T T\,dx$$
$$+ \underbrace{\sum\nolimits_i \frac{\bar{F}_i F_i}{k_i}}_{\text{Normalkraftfedern}} + \underbrace{\sum\nolimits_j \frac{\bar{M}_j M_j}{k_{\varphi j}}}_{\text{Biegemomentenfedern}}$$
$$- \underbrace{\sum\nolimits_k \bar{F}_k w_{\Delta k}}_{\text{Lagerverschiebungen}} - \underbrace{\sum\nolimits_l \bar{M}_l \tan\varphi_{\Delta l}}_{\text{Lagerverdrehungen}}. \tag{1.153}$$

Das δ auf der linken Seite steht sowohl für Verschiebungen als auch Verdrehungen.

Wenn es eine Verdrehung ist, dann ist es der Tangens des Drehwinkels, weil in der ersten Greenschen Identität – auf der die Arbeitsgleichung ja beruht – das Moment mit dem Tangens gepaart ist

$$\ldots + [V w - M w'] + \ldots \tag{1.154}$$

und nicht mit dem Drehwinkel.

Nur so wird die Arbeitsgleichung auch ihrem Namen gerecht, stehen links wie rechts wirklich Arbeiten

$$\bar{M}\cdot\delta = 1\,\mathrm{N{\cdot}m}\cdot\tan\varphi = [\mathrm{N{\cdot}m}]\cdot[\ ] = \int_0^l \ldots \tag{1.155}$$

1.13 Kurzform

Es wäre nun sicherlich zu mühsam, für ein gegebenes System die Bilanz

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{1.156}$$

aus den Greenschen Identitäten der einzelnen Tragglieder zu entwickeln. Das macht kein Ingenieur so, sondern der Ingenieur weiß mit ein wenig Übung automatisch, welche Beiträge er δW_e zuschlagen muss. Das sind die Arbeiten der Streckenlasten

$$\int_0^l p_z\,\delta w\,dx \qquad \int_0^l p_z\,\delta u\,dx \tag{1.157}$$

und die Arbeiten der Punktlasten

$$P_z\,\delta w(x) \qquad P_x\,\delta u(x) \qquad M\,\delta w'(x) \qquad \text{etc.} \tag{1.158}$$

und die Beiträge zu δW_i sind auch bekannt

$$\delta W_i = \int \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx + \int \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx + \int \delta M\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx + \int \delta N\,\alpha_T T\,dx$$
$$+ \sum\nolimits_i \frac{\delta F_i\,F_i}{k_i} + \sum\nolimits_j \frac{\delta M_j\,M_j}{k_{\varphi j}} - \sum\nolimits_k \delta F_k\,w_{\Delta k} - \sum\nolimits_l \delta M_l\,\tan\varphi_{\Delta l}\,, \tag{1.159}$$

und sie verkürzen sich meist auf

$$\delta W_i = \int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx \tag{1.160}$$

oder oft noch einfacher auf

$$\delta W_i = \int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\,dx\,. \tag{1.161}$$

1.14 Dualität

Die Arbeits- und Energieprinzipe des Balkens entwickeln sich, wie wir gesehen haben, spielerisch aus dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w(x)\,dx\,, \tag{1.162}$$

also dem L_2-Skalarprodukt von Kraft und Weg. Wie dies im Einzelnen geschieht, ist in der ersten Greenschen Identität detailliert dargelegt. Und was für den Balken gilt, gilt für die anderen Bauteile ebenso.

Kraft und Weg sind die beiden Pole, um die sich die Statik dreht. Der Arbeitsbegriff ist der zentrale Begriff der Statik und die Grund-Rechenoperation der Statik ist das Skalarprodukt

Die Kunst im Umgang mit der ersten Greenschen Identität besteht eigentlich nur darin, die virtuelle Größe δw bzw. δw^* so zu wählen, dass man an die gesuchte Weg- oder Kraftgröße kommt:

$$\begin{aligned}
\text{Gesucht Kraftgröße} &\rightarrow \text{virtuelle Verrückung} & \mathscr{G}(w,\delta w) &= 0\\
\text{Weggröße} &\rightarrow \text{virtuelle Kräfte} & \mathscr{G}(\delta w^*, w) &= 0\\
\text{Wege oder Kräfte} &\rightarrow \text{Satz von Betti} & \mathscr{B}(w_1, w_2) &= 0
\end{aligned}$$

Mit dem *Satz von Betti* kann man Weg- und Kraftgrößen berechnen, mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* Weggrößen und mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* Kraftgrößen, üblicherweise sind das Lagerkräfte.

Im *Prinzip der virtuellen Verrückungen* formuliert man

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \text{Reale Kräfte} \times \text{virtuelle Wege} - a(w,\delta w) = 0 \tag{1.163}$$

und im *Prinzip der virtuellen Kräfte* dagegen

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \text{Virtuelle Kräfte} \times \text{reale Wege} - a(\delta w^*, w) = 0\,. \tag{1.164}$$

Um zum Beispiel die Lagerkraft A an dem Einfeldträger in Bild 1.23 zu bestimmen, wählt man eine Drehung um das rechte Lager, $\delta w(x) = 1 - x/l$, als virtuelle Verrückung

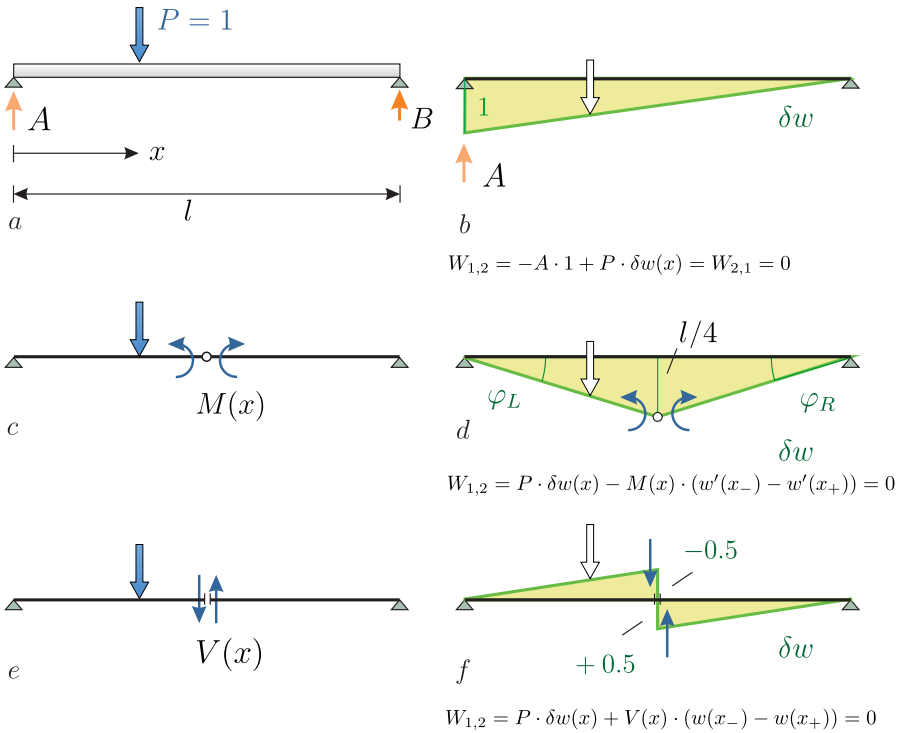


Bild 1.23. Einflussfunktionen sind Wege. Man zeichnet das System noch einmal an, löst ein Lager oder baut ein Gelenk ein und verrückt die Kopie. Es gilt $W_{1,2} = W_{2,1}$. Die Arbeiten der Null-Kräfte rechts – das System ist kinematisch – auf den (nicht angetragenen) Wegen links ist null, $W_{2,1} = 0$, und daher sind auch die Arbeiten der Kräfte links auf den Wegen rechts null, $W_{1,2} = 0$. Zur Illustration wurden die Kräfte links rechts wiederholt, um ihre Wege zu verfolgen.

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p(x)\,\delta w(x)\,dx - V(0)\,\delta w(0) = 0\,, \tag{1.165}$$

und löst die Identität nach $A = V(0)$ auf

$$A \cdot 1 = \int_0^l p \cdot (1 - \frac{x}{l})\,dx\,. \tag{1.166}$$

Es sei noch erwähnt, dass man auch mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken berechnen kann, obwohl das Vorgehen eigentlich mit dem Satz von Betti identisch ist. Jedes Bild in 1.23 kann man als $\delta W_e = 0$ interpretieren.

Weil das Tragwerk nach Einbau eines Gelenkes kinematisch ist, ist die virtuelle innere Arbeit $\delta W_i = 0$ und somit muss auch $\delta W_e = 0$ sein

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \delta W_e - 0 = 0\,, \tag{1.167}$$

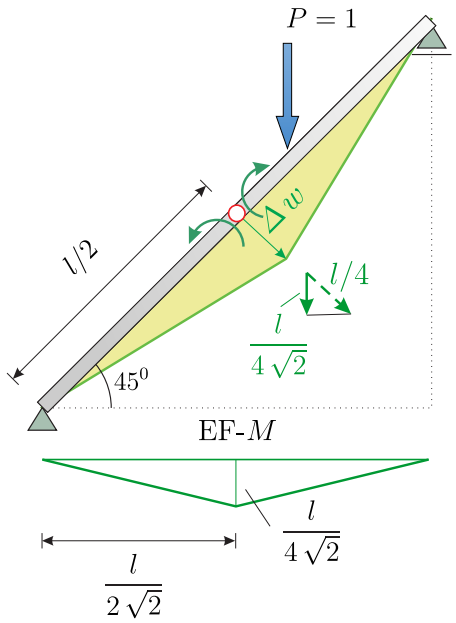


Bild 1.24. Die Einflussfunktion für das Feldmoment in einem Sparren entsteht durch die Spreizung des Gelenks um 'Eins', $\tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1$. Die vertikale Wanderlast schaut auf den vertikalen Anteil der EF

während beim Satz von Betti

$$\mathscr{B}(w, \delta w) = W_{1,2} - 0 = 0 \tag{1.168}$$

die Arbeit $W_{2,1}$ null ist, siehe Seite 162. Mathematisch sind aber δW_e und $W_{1,2}$ in diesen Situationen identisch, nur heißen sie anders.

Sind Streckenlasten vorhanden, dann geschieht die Auswertung der Einflussfunktionen durch Integration

$$A(x) = \int_a^b p(x)\, \delta w(x)\, dx\,. \tag{1.169}$$

Bei schrägen Stäben, wie dem Sparren in Bild 1.24, muss man darauf achten, dass nur der Anteil von $\delta w(x)$, der in Richtung der Wanderlast fällt, gezählt wird.

1.15 Ganze Tragwerke

Die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen an ganzen Tragwerken ist ein Summieren der einzelnen Identitäten, längs (u_i) und quer (w_i),

$$\sum\nolimits_i \mathscr{G}(u_i, \delta u_i) + \sum\nolimits_i \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0\,. \tag{1.170}$$

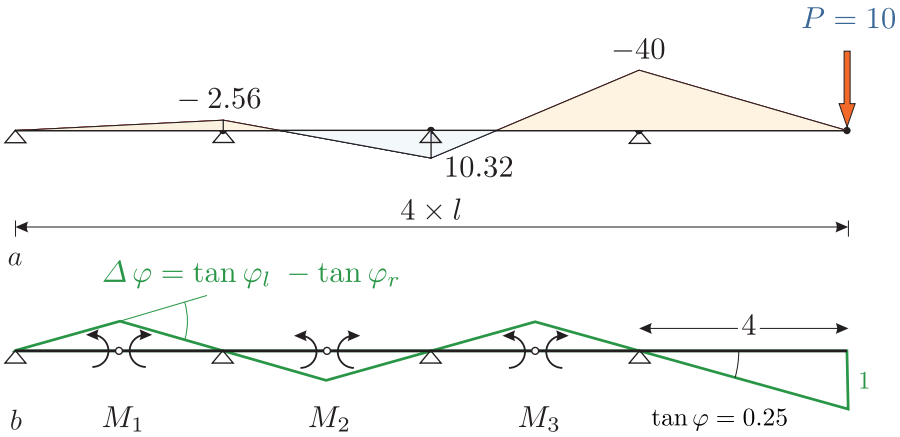


Bild 1.25. Durchlaufträger und das Prinzip der virtuellen Verrückungen, **a)** Momente, **b)** virtuelle Verrückung nach Einbau von Zwischengelenken

So könnte man z.B. in den Durchlaufträger in Bild 1.25 drei Gelenke einbauen – die zuvor inneren Momente werden zu äußeren Momenten – und diese Gelenkkette so auslenken, dass die Einzelkraft den Weg Eins geht und man hätte das Resultat ($\delta W_i = 0$ weil die δw_i Starrkörperbewegungen sind)

$$\sum\nolimits_i \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = \delta W_e + \delta W_i = \sum_{k=1}^{3} -M_k \cdot \Delta\varphi_k + P \cdot 1 = 0 \qquad (1.171)$$

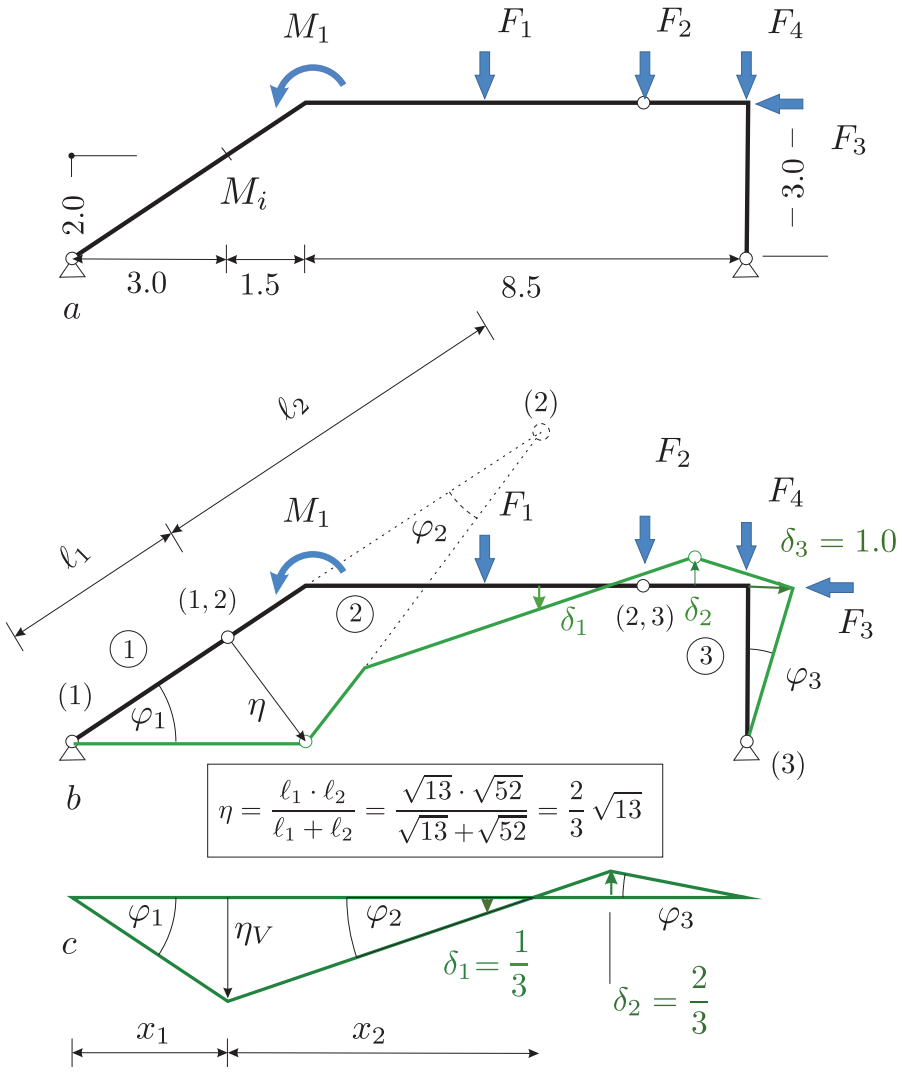
$$\Delta\varphi_k = \tan\varphi_k^l - \tan\varphi_k^r\,, \qquad (1.172)$$

was einem wahrscheinlich nicht viel weiterhilft, weil man drei Schnittmomente M_k in einer Gleichung hat. Kennt man aber die Momente M_k, dann kann (1.171) als Kontrolle dienen. Ist $l = 4$ und $P = 10$, dann ergibt sich mit $\Delta\varphi_1 = -0.25 - 0.25 = -0.5, \Delta\varphi_2 = 0.5, \Delta\varphi_3 = -0.5$ und $M_1 = -1.31, M_2 = 3.98, M_3 = -14.71$ tatsächlich das richtige Ergebnis, nämlich null

$$\delta W_e = \sum_{k=1}^{3} -M_k\,\Delta\varphi_k + P \cdot 1 = -0.5 \cdot (1.31 + 3.98 + 14.71) + 10 \cdot 1 = 0\,. \qquad (1.173)$$

Wichtig ist, dass die Integrationsgrenzen [...] zum einen die Lager und die Gelenke und zum anderen Einzelkräfte und Einzelmomente respektieren müssen. Mit jedem Einbau von zusätzlichen Gelenken in ein Tragwerk ändert sich die Zahl der Abschnitte, über die zu integrieren ist. Bei dem Träger in Bild 1.25 sind es erst vier Intervalle, entsprechend den vier Feldern, und danach sind es sieben.

Der erfahrene Ingenieur geht natürlich nicht über die Identitäten, sondern er weiß automatisch, was er mitzunehmen hat, und was nicht. Das macht die



$$\eta_V = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \qquad \tan\varphi_1 + \tan\varphi_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$M_i = M_1 \cdot \tan\varphi_2 + F_1 \cdot \delta_1 - F_2 \cdot \delta_2 - F_3 \cdot \delta_3$$

Bild 1.26. Dreigelenkrahmen, Bestimmung des Moments M_i mittels eines Polplans, **a)** System und Belastung, **b)** virtuelle Verrückung nach Einbau des Gelenks, **c)** vertikaler Anteil der Einflussfunktion im Lastgurt

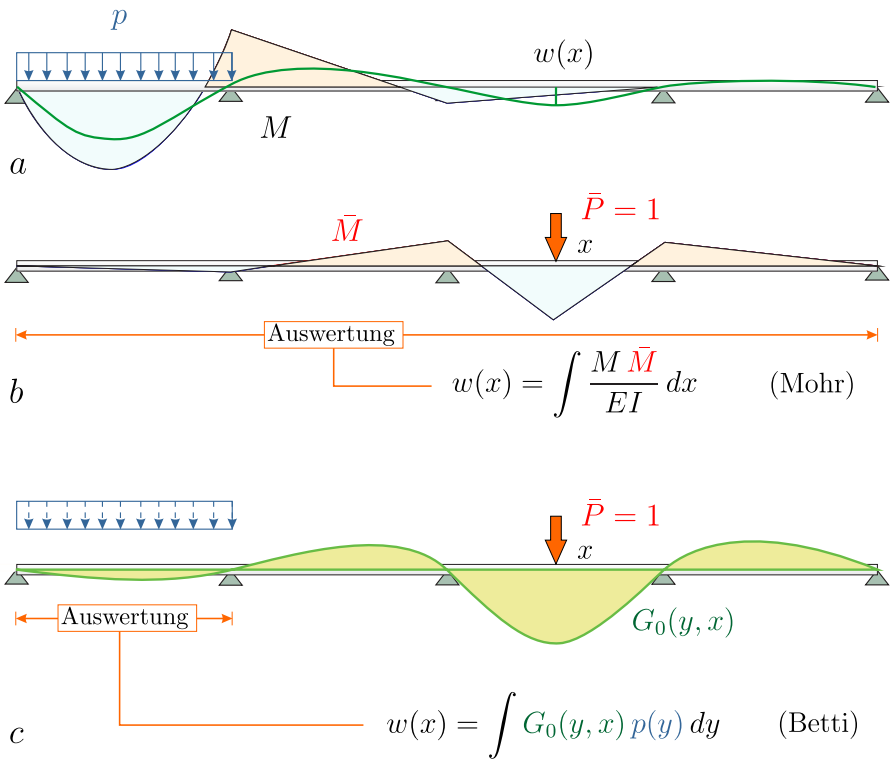


Bild 1.27. Mohr und der Satz von Betti, es ist einfacher $\bar{M}$ zu bestimmen, als die Biegelinie $G_0(y, x)$

Identitäten aber nicht überflüssig, denn sie legen ja eigentlich erst fest, was zu zählen ist, und was nicht, wie die innere Energie aussieht und die äußere Arbeit und wie sich Starrkörperbewegungen über ein Tragwerk fortpflanzen – nämlich als Pseudodrehungen – und die Identitäten garantieren schließlich erst das Endresultat $\delta W_e - \delta W_i = 0$.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist immer dann gut anwendbar, wenn das Tragwerk statisch bestimmt ist, weil man dann durch das geschickte Wegnehmen nur eines Lagers oder den Einbau eines Gelenks ein **kinematisches System** erhält, an dem man mit geeigneten Starrkörperbewegungen eine unbekannte Lagerkraft oder ein inneres Moment bestimmen kann.

Bei Rahmen, wie in Bild 1.26, muss man sich allerdings erst mit Hilfe von **Polplänen** Klarheit über die Wege verschaffen, die die Kräfte gehen. Programme können dabei helfen, wenn sie in der Lage sind dem Anwender ein ‚zuviel' an Freiheitsgraden grafisch sichtbar zu machen, also die Kinematik eines nicht ausreichend stabilisierten Rahmens offen zu legen, siehe Kapitel 5.30, Seite 586.

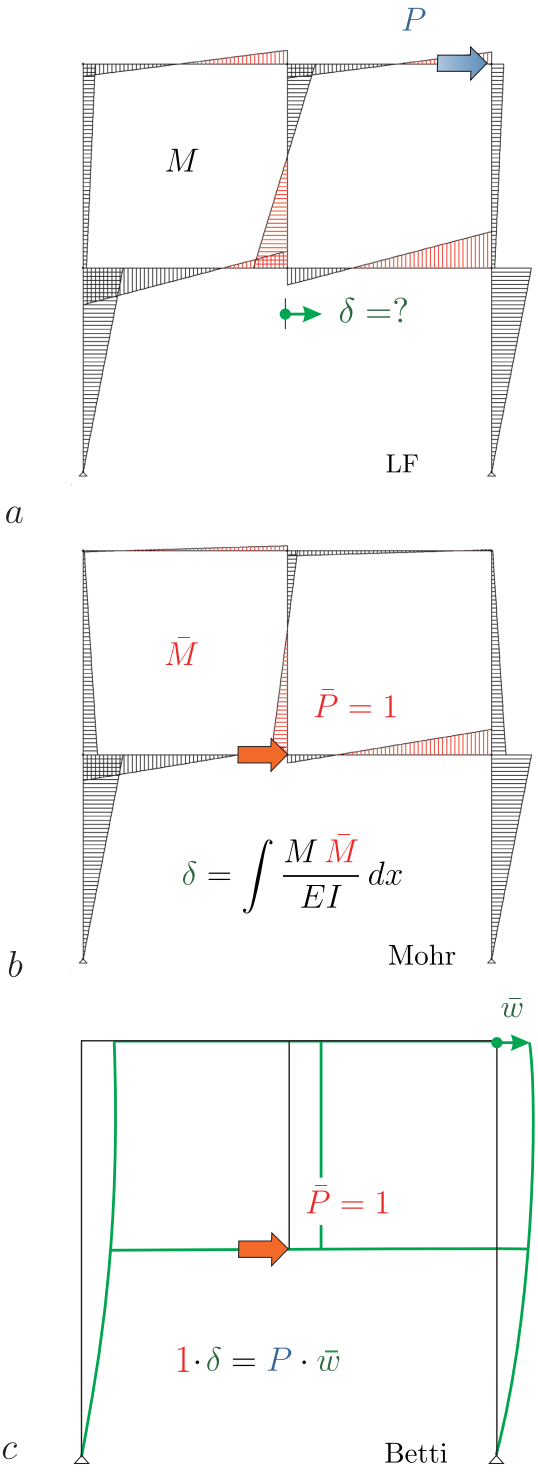


Bild 1.28. Berechnung der Horizontalverschiebung δ des mittleren Knotens mit Mohr und mit dem Satz von Betti, **a)** Momente aus Last, **b)** Momente aus $\bar{P} = 1$, **c)** Verschiebung aus $\bar{P} = 1$ (= Einflussfunktion für die Horizontalverschiebung) (BE-FRAMES)

1.16 Mohr contra Betti

Man kann die Durchbiegung eines Balkens mit der Mohrschen Arbeitsgleichung (dem *Prinzip der virtuellen Kräfte*) berechnen

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\,\bar{M}(y,x)}{EI}\,dy \qquad \mathscr{G}(G_0, w) = 0 \tag{1.174}$$

oder mit dem *Satz von Betti*

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \qquad \mathscr{B}(G_0, w) = 0\,. \tag{1.175}$$

Die zweite Gleichung benutzt aber kein Ingenieur, weil er dazu erst die Biegelinie $G_0(y,x)$ bestimmen müsste, die die Einzelkraft $\bar{P} = 1$ an dem Träger erzeugt, siehe Bild 1.27. Die Berechnung der Momente $\bar{M} = -EI\,G_0''$ fällt dem Ingenieur dagegen viel leichter, und das ist der Grund, warum Verformungen an Tragwerken mit der Mohrschen Arbeitsgleichung berechnet werden und nicht mit dem Satz von Betti.

Allerdings muss man bei Mohr mehr tun, um zum Ergebnis zu kommen, wie man in Bild 1.28 sieht, denn man muss die Momente M und $\bar{M}$ über den ganzen Rahmen integrieren, während sich dasselbe Ergebnis nach dem Satz von Betti durch eine Auswertung in einem Punkt ergibt.

Mit Blick auf die finiten Elemente scheint es so zu sein, dass Mohr die genaueren Ergebnisse liefert, weil sich die mittleren Fehler in M_h und $\bar{M}_h$ (den FE-Näherungen) besser ausgleichen, während Betti ja genau den richtigen Wert $G_0(y,x)$ am Ort y von P treffen muss. *Aber Mohr und Betti sind zwei Seiten einer Medaille!* Wenn man mit finiten Elementen rechnet, dann sind die Ergebnisse gleich genau (oder gleich ungenau), weil man Mohr (2+2 Abltg.) mittels partieller Integration in Betti (0+4) umformen kann und umgekehrt.

Bemerkung 1.1. In der Statikliteratur schreibt man für das Integral (1.174) kürzer

$$\delta = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx\,, \tag{1.176}$$

taucht der Aufpunkt x nicht auf, und deswegen kann dann die Integrationsvariable x heißen. Auch wir haben diese kurze Form bei der Arbeitsgleichung benutzt und werden sie gelegentlich weiter benutzen.

1.17 Schwache und starke Einflussfunktionen

Die Gleichung (die Mohrsche Arbeitsgleichung)

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\,\bar{M}(y,x)}{EI}\,dy \qquad (2+2) \qquad \text{(Mohr)} \tag{1.177}$$

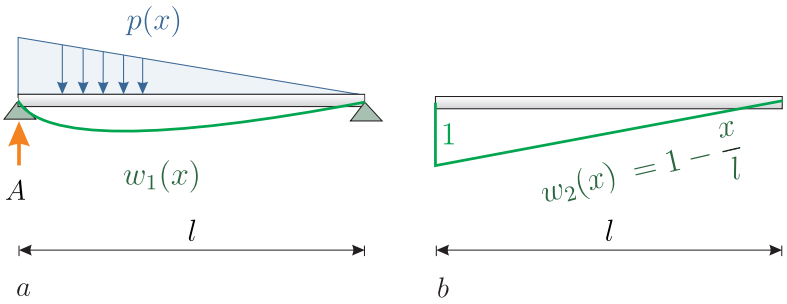


Bild 1.29. Der Satz von Betti, System 1 der reale Balken, System 2 derselbe Balken, frei schwebend, ohne Belastung, ohne Lager, sich frei um sein rechtes Ende drehend

nennen wir eine ***schwache Einflussfunktion*** und die Gleichung

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad (0+4) \qquad \text{(Betti)} \tag{1.178}$$

eine ***starke Einflussfunktion***. Man kann also $w(x)$ aus den Momenten, der zweiten Ableitung von w, berechnen oder aus der Streckenlast, der vierten Ableitung von w.

Schwache Einflussfunktionen basieren auf der ersten Greenschen Identität, in der Formulierung als *Prinzip der virtuellen Kräfte*,

$$\mathscr{G}(G,w) = 0\,, \tag{1.179}$$

das G ist sozusagen das δw^*, und starke Einflussfunktionen auf der zweiten Greenschen Identität, dem *Satz von Betti*

$$\mathscr{B}(G,w) = 0\,. \tag{1.180}$$

Das Standardbeispiel für eine schwache Einflussfunktion ist die **Mohrsche Arbeitsgleichung** (1.177).

Mit der Mohr kann man aber keine Kraftgrößen wie etwa das Moment

$$M(x) \stackrel{?}{=} \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI}\, dy \tag{1.181}$$

berechnen. Was klar scheint, denn welche virtuelle Kraft will man ansetzen, um das Moment $M(x)$ in einem Punkt zu berechnen?

Betti rechnet

$$M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\, p(y)\, dy \tag{1.182}$$

und Mohr würde gerne rechnen

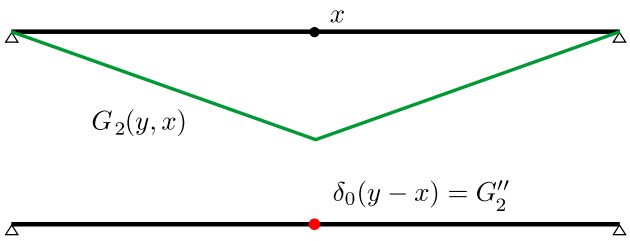


Bild 1.30. Die Einflussfunktion für $M(x)$ und ihre zweite Ableitung

$$M(x) = \int_0^l M_2(y,x)\, M(y)\, dy\,, \tag{1.183}$$

was scheinbar nicht geht, weil die zweite Ableitung, das Moment $M_2(y,x)$ der Einflussfunktion G_2, ja im Aufpunkt nicht existiert, siehe Bild 1.30.

Aber wenn wir $M_2 = -EIG_2''$ mit einem Dirac Delta δ_0 gleichsetzen, dann wird ein Schuh daraus

$$M(x) = \int_0^l M_2(y,x)\, M(y)\, dy = \int_0^l \delta_0(y-x)\, M(y)\, dy\,. \tag{1.184}$$

Man kann also schon Kraftgrößen mit Mohr berechnen, nur schrumpfen die Integrale zu Punktfunktionalen; man kann die Integraltafeln in der Schublade lassen. Es sind einfach die Kraftgrößen selbst im Aufpunkt. Man erfährt nichts neues, wenn man nicht schon vorher weiß, was herauskommt...

Bemerkung 1.2. Um den Unterschied zwischen Mohr und Betti deutlich zu machen, nehmen wir im folgenden an, dass die Belastung aus einer Einzelkraft P besteht.

Im **Satz von Betti**

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = G_0(y,x) \cdot P \tag{1.185}$$

lassen wir – anschaulich gesprochen – im Aufpunkt x einen Stein (ein Dirac Delta) in das Wasser plumpsen, und wir beobachten, wie sich die Welle $G_0(y,x)$ über den Balken ausbreitet, um wieviel die Punktlast in der Ferne von der Welle gehoben wird.

Bei dem **Prinzip der virtuellen Kräfte (Mohr)**

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\, M^*(y,x)}{EI}\, dy \tag{1.186}$$

beobachten wir dagegen die Interaktion von **zwei Wellen**. Die erste Welle, $M(y)$, ist das Biegemoment, das von der Punktlast erzeugt wird, und die zweite Welle $M^*(y,x)$ ist das Biegemoment, das von dem Dirac Delta erzeugt wird. Nur die Teile des Balkens, wo beide Momente groß sind (und nicht orthogonal zueinander), sind maßgebend.

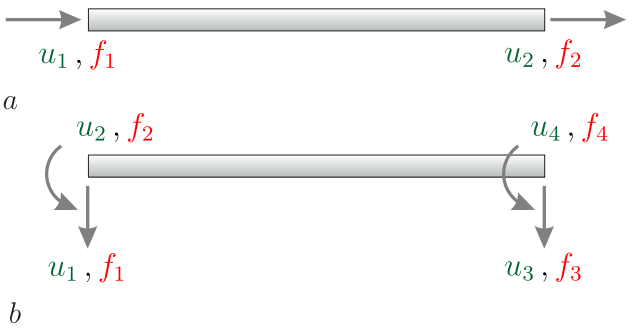


Bild 1.31. Die kanonischen Randwerte von Stab und Balken

1.18 Die kanonischen Randwerte

Die erste Greensche Identität besteht aus einer Folge von Skalarprodukten **konjugierter** Größen. Dabei kommt den Weg- und Kraftgrößen in den eckigen Klammern, den **Randarbeiten**,

$$[Nu]_0^l = N(l)u(l) - N(0)u(0) = f_2u_2 + f_1u_1 \tag{1.187}$$

$$\begin{aligned}[Vw - Mw']_0^l &= V(l)w(l) - M(l)w'(l) - V(0)w(0) + M(0)w'(0)\\ &= f_3u_3 + f_4u_4 + f_1u_1 + f_2u_2\,,\end{aligned} \tag{1.188}$$

eine spezielle Bedeutung zu, siehe Bild 1.31. Wir nennen sie die *kanonischen Randwerte* eines Stabes

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1.189}$$

bzw. eines Balkens

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}. \tag{1.190}$$

Die Steifigkeitsmatrizen formulieren eine ***Kopplung*** zwischen den $2+2$ Weg- und Kraftgrößen eines Stabes ($-EAu'' = 0$) bzw. den $4+4$ Größen eines Balkens ($EIw^{IV} = 0$). Sind Streckenlasten vorhanden, dann sind die Gleichungen um den **Vektor** $\boldsymbol{d}$ der äquivalenten Knotenkräfte aus der Streckenlast, der *domain load*, der Last im Feld, zu erweitern,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}\,, \tag{1.191}$$

der beim Stab zwei Komponenten und beim Balken vier Komponenten hat

$$d_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i^e(x)\,dx \qquad i = 1,2 \qquad \text{(Stab)} \tag{1.192}$$

$$d_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i^e(x)\,dx \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \text{(Balken)}\,. \tag{1.193}$$

Die $\varphi_i^e(x)$ sind die zwei bzw. vier **Einheitsverformungen** des Stabes bzw. Balkens, siehe Bild 3.17 auf Seite 264. Die d_i sind die Kräfte, mit denen die Streckenlast auf die eingespannten Balken/Stabenden drückt. Die ***Festhaltekräfte*** halten dagegen. Sie haben das entgegengesetzte Vorzeichen.

↓ Äquivalente Knotenkräfte d_i = Festhaltekräfte $\times(-1)$ ↑

Bei den finiten Elementen operiert man meist mit nur einem Vektor $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$, der beide Anteile enthält, also die Kräfte f_{Ki}, die direkt in den Knoten angreifen, und die Kräfte d_i aus der verteilten Belastung. Wenn der Ingenieur Lasten in die Knoten reduziert, dann sind das – in unserer Notation – die d_i.

Eine Knotenkraft heißt äquivalent zu p, wenn sie bei einer Einheitsverformung des Knotens dieselbe Arbeit leistet, wie die Last p.

1.18.1 Zur Notation

Wir schreiben $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$, wenn wir am einzelnen Element sind, dann sind die f_i die *Balkenendkräfte*. Wir schreiben $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$, wenn $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix des Tragwerks ist, dann sind die f_{Ki} die *Einzelkräfte*, die direkt in den Knoten angreifen. Meist schreiben wir diese zweite Gleichung aber einfach $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, lesen also $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$. Gelegentlich mag es Abweichungen von diesen Regeln geben.

1.18.2 Gleichgewicht

Wie immer man die Knoten eines Elements auslenkt, wie immer also der Vektor $\boldsymbol{u}$ aussieht, die Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$, die dazu nötig sind, sind immer im Gleichgewicht. Bei einem Balkenelement gilt also $f_1 + f_3 = 0$ ($\sum V = 0$), und $f_2 - f_3 \cdot \ell + f_4 = 0$ ($\sum M = 0$ um $x = 0$).

Der Grund ist, dass alle C^m-Funktionen $w(x)$ (m = Ordg. der DGL) ‚im Gleichgewicht' sind, denn

$$\mathscr{G}(w,s) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,s\,dx + [V\,s - M\,s']_0^l = 0\,, \tag{1.194}$$

wenn $s = a + b\,x$ ein Starrkörperbewegung des Balkens ist. Das gilt für alle Bauteile und die assoziierten Identitäten. Als die vier Ingenieure bei Boeing probeweise ihr *CST-Element* auslenkten, siehe Kapitel 3.14, konnten sie sicher sein, dass das Element jedesmal im Gleichgewicht war, denn ihre Ansatzfunktionen waren Polynome und die sind C^∞.

In der Ingenieurliteratur wird das als selbstverständlich genommen, aber hier zeigt sich:

Jede Funktion stellt ein verformtes Element dar, einen Stab, einen Balken.

Funktionen denken mit. Ihre Kräfte sind immer im Gleichgewicht, denn es gilt $\sum V = \sum H = \sum M = 0$, egal wie groß die Ausschläge sind. In jede Funktion ist Intelligenz eingebaut, siehe Kapitel 3.86.

1.18.3 Die Herleitung von $\boldsymbol{Ku = f + d}$

Auch das System $\boldsymbol{Ku = f + d}$ basiert auf der ersten Greenschen Identität. Um dies zu sehen, spalten wir die Längsverschiebung $u(x) = u_n(x) + u_p(x)$ eines Stabes in eine homogene Lösung, eine Null-Lösung[7]

$$u_n(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) \tag{1.195}$$

und eine partikuläre Lösung $u_p(x)$ auf

$$-EAu_p''(x) = p(x) \qquad u_p(0) = u_p(l) = 0\,, \tag{1.196}$$

denn dann folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(u_n + u_p, \varphi_i^e) &= \int_0^l p\varphi_i^e\,dx + [N\varphi_i^e]_0^l - a(u_n + u_p, \varphi_i^e)\\ &= d_i + f_i - a(u_n, \varphi_i^e) - \underbrace{a(u_p, \varphi_i^e)}_{=0} = d_i + f_i - \sum_{j=1}^{2} k_{ij}u_j = 0\,,\end{aligned} \tag{1.197}$$

wobei wir das Resultat

$$\mathscr{G}(\varphi_i^e, u_p) = \int_0^l 0 \cdot u_p\,dx - a(\varphi_i^e, u_p) = a(\varphi_i^e, u_p) = 0 \tag{1.198}$$

benutzt haben. Weil die Randwerte von u_p null sind, sind es auch die Randarbeiten, ist $[N_i^e u_p]_0^l = 0$.

In einem Balken ergibt dieselbe Aufspaltung (w_n = homogene Lösung)

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w_n + w_p, \varphi_i^e) &= \int_0^l p\,\varphi_i^e\,dx + [V\varphi_i^e - M\varphi_i^{e\prime}]_0^l - a(w_n, \varphi_i^e) - \underbrace{a(w_p, \varphi_i^e)}_{=0}\\ &= d_i + f_i - \sum_{j=1}^{4} k_{ij}\,u_j = 0\,,\end{aligned} \tag{1.199}$$

wobei die $\varphi_i^e(x)$ die Einheitsverformungen der Balkenenden sind.

[7] Weil u_h die FE-Lösung bezeichnet, heißt die homogene Lösung u_n.

Der wesentlich Schluss ist, dass man mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ die Kontrolle über die **Randwerte** u_i und f_i eines Balkens hat. Die u_i sind die Weggrößen und die f_i sind die Balkenendkräfte und der Vektor $\boldsymbol{d}$ sind die äquivalenten Knotenkräfte $d_i = (p, \varphi_i^e)$ aus der Belastung im Feld (alle Vorzeichen nach FEM). Das System sieht aus wie eine FE-Gleichung, aber es gilt unabhängig von den finiten Elementen. Eine Steifigkeitsmatrix, wenn sie auf den richtigen homogenen Lösungen φ_i^e basiert, stellt also so etwas wie eine **‚Eichmatrix‘** dar.

- In jeder Gleichung darf es immer nur eine Unbekannte geben, wie etwa im Fall eines gelenkig gelagerten Trägers, u_2, u_4 sind die Verdrehungen und f_1, f_3 sind die Balken-Endkräfte, die gleich den Lagerkräften sind,

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2\,? \\ 0 \\ u_4\,? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\,? \\ 0 \\ f_3\,? \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} . \tag{1.200}$$

- Man kann also nicht zwei konjugierte Größen *gleichzeitig* vorschreiben, mit einer Kraft von 10 kN an einem Stab ziehen und gleichzeitig verlangen, dass die Längsverschiebung $u(l)$ dabei 1 cm betragen soll.

Am wichtigsten ist jedoch:

- Wenn man die u_i und f_i am Balkenende kennt, dann kann man aus ihnen (und der Belastung $p(x)$ im Feld) die Verformungen und Schnittgrößen in allen Punkten dazwischen berechnen.

Hier kündigt sich das Thema des nächsten Kapitels 1.19 an: Die Reduktion der Dimension von n auf $n-1$.

1.18.4 Steifigkeitsmatrizen

Steifigkeitsmatrizen sind also keine Erfindung der finiten Elemente. Zu jeder linearen Differentialgleichung der Ordnung n (gerade) gehören n linear unabhängige homogene Lösungen φ_i, siehe Bild 3.17 – wir lassen den oberen Index e hier weg – deren Wechselwirkungsenergien die Einträge k_{ij} in der zugehörigen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sind

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \qquad i, j = 1, 2, \ldots n\,. \tag{1.201}$$

Das Kennzeichen **genäherter Steifigkeitsmatrizen** ist, dass die φ_i keine homogenen Lösungen sind, wie etwa im Fall eines elastisch gebetteten Balkens,

$$EI\, w^{IV}(x) + c\, w(x) = p(x)\,, \tag{1.202}$$

wo man gern – statt mit den exakten $\varphi_i(x)$ zu rechnen – mit den homogenen Lösungen $\varphi_i(x)$ des normalen Balkens rechnet, siehe Kapitel 9.46.

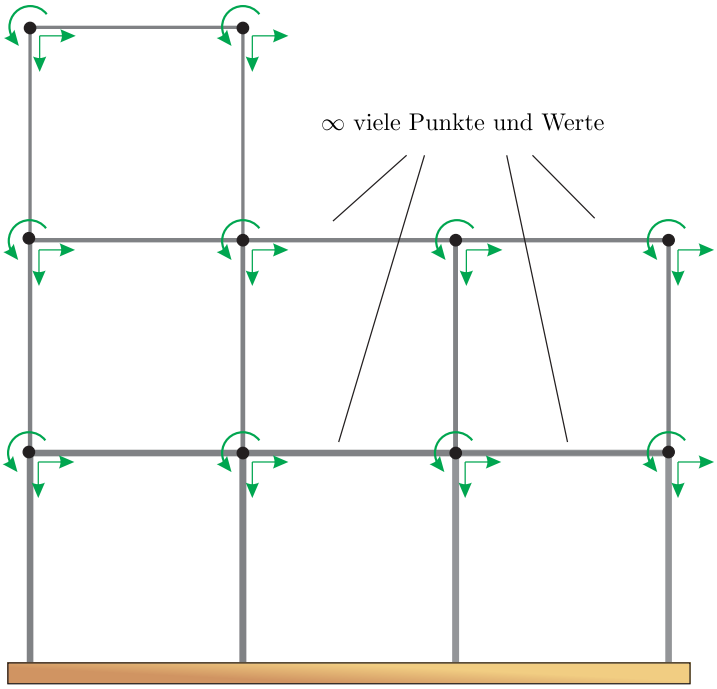


Bild 1.32. Die Knoten sind die ‚Ränder' eines Rahmens. Weiß man, wie sich die Knoten verformen, kann man die Verläufe von N, M und V zwischen den Knoten berechnen

Der entscheidende Schritt geschieht dann bei den Flächentragwerken, wo man sich von dem Begriff der homogenen Lösung löst und die φ_i frei nach ‚Geschmack' (und Talent) wählt. Aber weiter wollen wir hier nicht gehen, denn zu dem Technischen der finiten Elemente bei Flächentragwerken gibt es ja ausreichend Literatur.

1.19 Die Reduktion der Dimension

Beim Drehwinkelverfahren sprechen wir vom ***Grad der kinematischen Unbestimmtheit*** und meinen damit die Zahl der unbekannten Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen. Sind dann die Verformungen der Knoten berechnet, nennen wir das Tragwerk *kinematisch bestimmt*, und wir können uns dann daran machen, aus den Knotenwerten die Verformungen und die Schnittgrößen zwischen den Knoten zu berechnen.

In der Stabstatik reicht es also offenbar aus, die Weg- und Kraftgrößen auf dem **‚Rand'** zu kennen – **in den Knoten**, siehe Bild 1.32 – denn nur so ist es möglich, dass sich die Statik eines Rahmens auf zwei Vektoren, $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{f}$, die dem Gleichungssystem

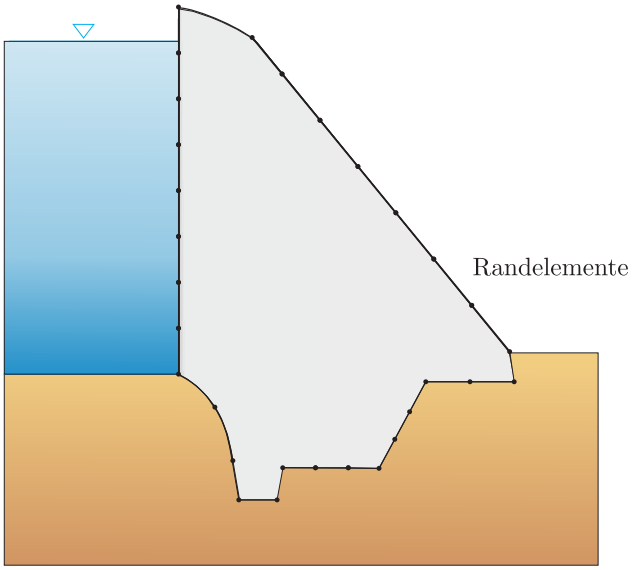


Bild 1.33. Staumauer, auf der Wasser- und Luftseite kennt man den Spannungsvektor $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ und im Fels den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Die fehlenden Werte, den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ im Fels und den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ des oberen Teils kann man durch Lösen einer Integralgleichung (‚Knotenausgleich auf der Oberfläche der Staumauer') berechnen. Anschließend können aus den Randwerten die Spannungen im Innern der Staumauer berechnet werden.

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{1.203}$$

genügen, reduzieren lässt ($\boldsymbol{f}_K$ = Kräfte in den Knoten). Das bedeutet:

Endlich viele Knotenwerte steuern die Verformungen $u(x), w(x), w'(x)$ und Schnittgrößen $N(x), M(x), V(x)$ in den unendlich vielen Punkten dazwischen, zwischen den Knoten.

Das ist aber doch eine Reduktion um Eins. Die $n = 1$ dimensionalen Traglieder schrumpfen auf eine $n - 1 = 0$ dimensionale Menge von Punkten, von Knoten, zusammen. *Erst diese Reduktion macht das Drehwinkelverfahren möglich: Es reicht, sich mit den Knoten zu beschäftigen!*

Alle linearen, selbstadjungierten Differentialgleichungen gestatten eine solche **Reduktion der Dimension** eines Problems um Eins, $n \to (n-1)$. Der praktische Wert dieser Reduktion kann nicht hoch genug geschätzt werden.

Aus den Weg- und Kraftgrößen auf dem Rand lassen sich die Verformungen und Schnittgrößen im Innern berechnen.

Zur Ermittlung der Spannungen in einer Staumauer ($n = 3$), siehe Bild 1.33, reicht die Kenntnis der Verschiebungen und Spannungen auf der Oberfläche der Staumauer ($n = 2$) aus. Um eine Platte ($n = 2$) zu berechnen,

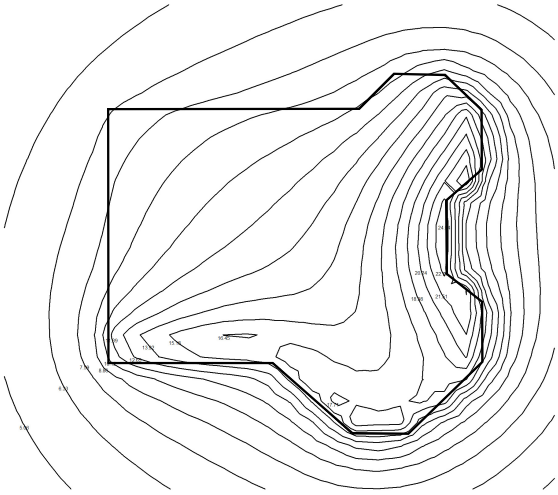


Bild 1.34. Steifezifferverfahren (BE-PLATTE)

reicht die Kenntnis der Weg- und Schnittgrößen längs des Randes ($n = 1$) aus und bei einem Balken ($n = 1$) muss man nur die Knotenwerte ($n = 0$) kennen.

Die einfachste Umsetzung dieser Idee ist das **Lineal**. Eine Gerade (die Lösung der Differentialgleichung $u'' = 0$) ist durch ihre beiden Randwerte eindeutig bestimmt und daher muss man das Lineal nur an die Endpunkte anhalten und man kann die Gerade zeichnen. *Das Lineal ist die universelle Einflussfunktion der Geraden .*

Außenraumprobleme werden gerne durch solche Methoden gelöst. Allein durch das Diskretisieren der Oberfläche eines Motorblocks kann man den Lärm – den Schalldruck – in 3 m, 30 m oder 300 m Entfernung berechnen. Beim Steifezifferverfahren ist das Außen der elastische Halbraum und die **Boussinesq-Lösung** bestimmt die Druckverteilung unter der Sohlplatte in Bild 1.34 wie auch bei der Pfahl-Platten-Gründung in Frankfurt, [252].

1.20 Randelemente

Die Methode der Randelemente ist die Anwendung dieser Idee auf Flächentragwerke (Scheiben und Platten) oder ganze Volumina, wie Staumauern. Sie hat ihren Namen von den kurzen Geradenstücken (Randelementen), in die der Rand der Platte oder Scheibe unterteilt wird. Eine Unterteilung des Innern wie bei den finiten Elementen ist nicht nötig, so wie ja noch nie ein Ingenieur einen Knotenausgleich ‚im Feld' geführt hat.

Man kann sich die Methode als eine Mischung aus dem Drehwinkelverfahren und Einflussfunktionen vorstellen. Der Rand der Platte oder Scheibe wird in Randelemente unterteilt, siehe Bild 1.35 und 1.36, um die Randverfor-



Bild 1.35. Deckenplatte, **a)** die Knoten der Randelemente, **b)** Hauptmomente im LF g, **c)** Durchbiegung (BE-PLATTE)

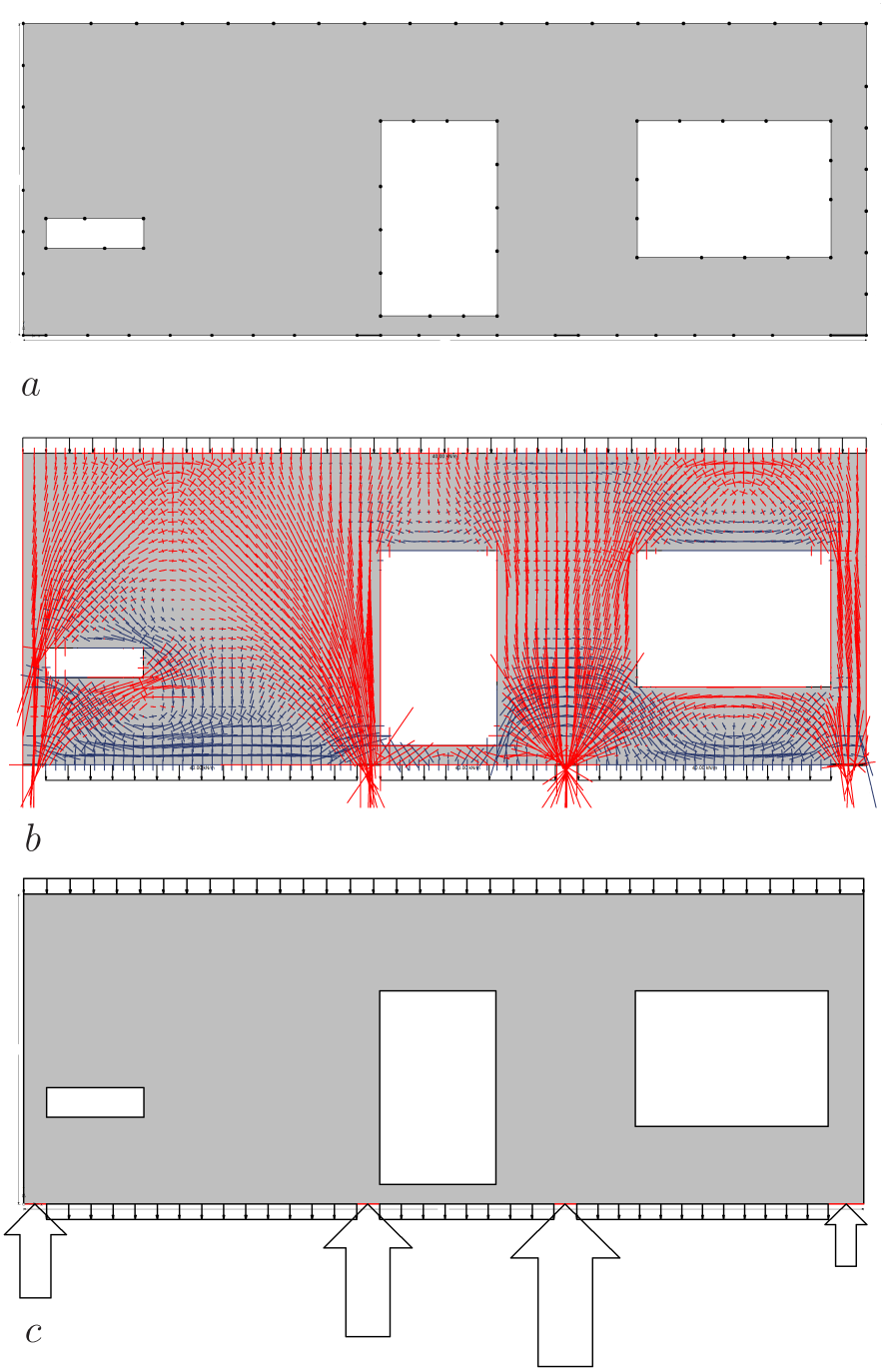


Bild 1.36. Wandscheibe, **a)** Knoten der Randelemente, **b)** Hauptspannungen **c)** Lagerkräfte. Alle Spannungen im Innern – in jedem Punkt einzeln – wurden durch Integration über den Rand berechnet (BE-SCHEIBE Pos. BSP5)

mungen und Randkräfte (= Funktionen) längs des Randes mit Polygonzügen darstellen zu können. Dann wird, wie beim Drehwinkelverfahren, ein Knotenausgleich in den Randknoten durchgeführt – allerdings nicht iterativ, sondern in einem Schritt.

Anschließend werden dann mit Hilfe von Einflussfunktionen aus den Verformungen des Randes und den Lagerkräften die Schnittgrößen im Innern der Platte oder Scheibe berechnet. Das Drehwinkelverfahren ist im übrigen eine genuine Randelementmethode, bei der meist **Übertragungsmatrizen** (Einflussfunktionen ‚*en bloc*') die Randwerte $[w, w', M, V]^T$ nach Innen fortsetzen.

Und was überraschen mag: Die finiten Elemente sind eng mit den Randelementen verwandt, denn auch FE-Lösungen sind **Potentiallösungen**, siehe Kapitel 9.16, und die **Kerne** $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ in den Einflussfunktionen[8]

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{1.204}$$

basieren auf derselben Integraldarstellung wie bei den Randelementen

$$G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \ldots ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega \ldots d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{1.205}$$

und über diese Schiene propagieren die Singularitäten auf dem Rand ins Innere, siehe Kapitel 6.13, machen, dass die FE-Einflussfunktion (1.204) und damit die FE-Lösung – im ganzen Gebiet – an Genauigkeit verliert!

Die **Potentialtheorie**, die Mathematik hinter den finiten Elementen und Randelementen, wenn man in Lasten, in ‚Quellen' denkt, kann erklären, warum die Ecken zu Schwierigkeiten für die finiten Elemente im Feld führen.

1.21 Singularitätenmethode

An dieser Stelle dürfen wir nicht unerwähnt lassen, dass *Pucher* in Wien die Methode der Randelemente – er nannte sie *Singularitätenmethode* – schon 1941 auf Plattenprobleme angewandt hat und damit Einflussfelder berechnet hat[9], siehe Bild 1.37, [242].

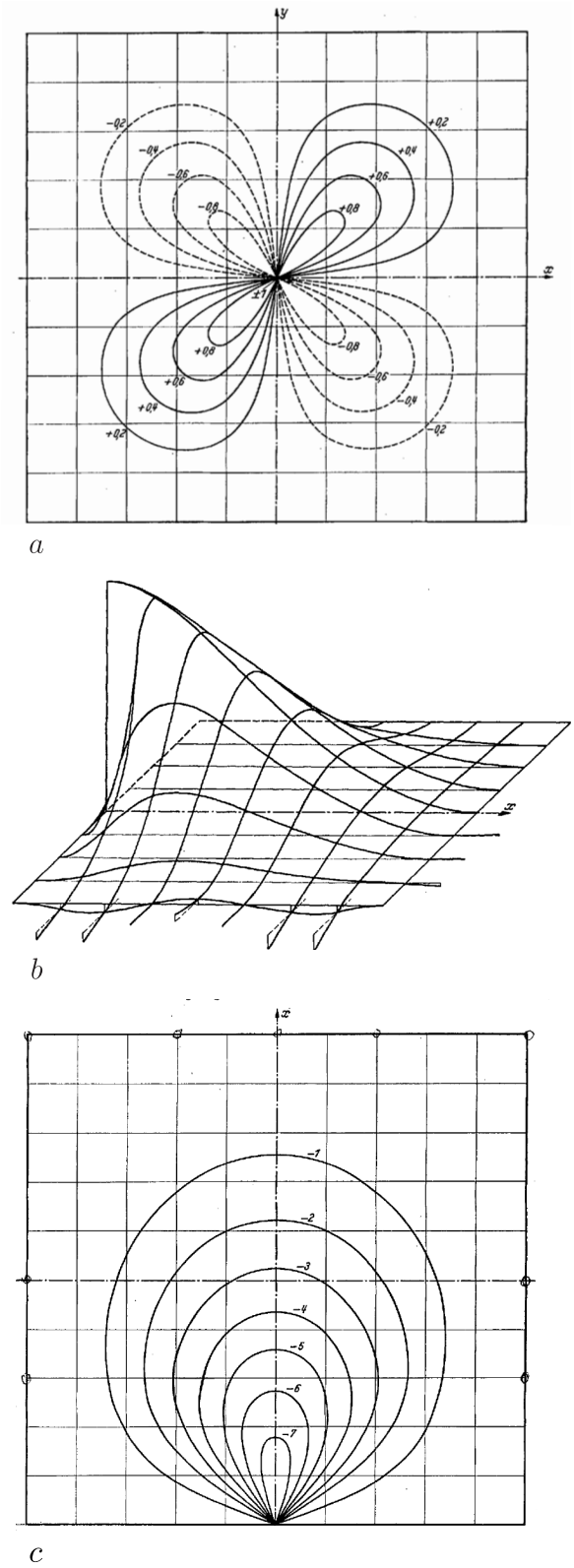
1.22 Finite Elemente und Randelemente

Randelemente rechnen mit Einflussfunktionen, aber auch die finiten Elemente tun das. Ein FE-Programm berechnet die Verschiebung in einem Stab – ganz klassisch – mit der Einflussfunktion

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y, x)\, p(y)\, dy\,, \tag{1.206}$$

[8] $d\Omega_{\boldsymbol{y}}$ und $ds_{\boldsymbol{y}}$ bedeutet, dass über $\boldsymbol{y}$ integriert wird.

[9] Das war 1969 wohl schon wieder vergessen, als Rüsch und Hergenröder Einflussfelder für schiefe Plattenbrücken an Gipsmodellen bestimmt haben, [259].



a

b

c

Bild 1.37. *Pucher* **a)** Drillungsmoment-Einflussfeld für die Feldmitte einer eingespannten, quadratischen Platte ($8\,\pi$-fach), **b)** Schrägbild des Stützmoment-Einflussfeldes mit Darstellung der Randstörung, **c)** Stützmoment-Einflussfeld für die Seitenmitte einer eingespannten Platte (8π-fach), Text und Bilder aus [242]

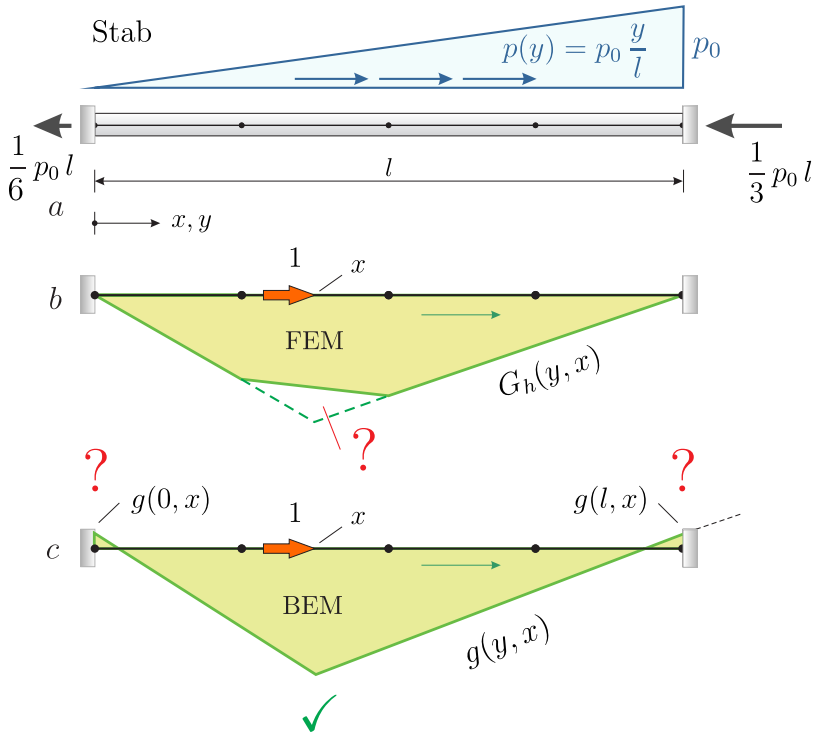


Bild 1.38. Stab, **a)** System und Belastung, **b)** genäherte Einflussfunktion – ihr fehlt der Knick, **c)** Fundamentallösung, sie hat den Knick an der richtigen Stelle, aber ihre Randwerte sind nicht null; die horizontalen Verschiebungen sind, um sie sichtbar zu machen, nach unten abgetragen (BEM = *boundary element method*)

nur dass die Einflussfunktion $G_h(y,x)$ eine Näherung ist, siehe Bild 1.38 *b*, weil sie den Knick unter der Einzelkraft nicht darstellen kann – zumindest, wenn der Aufpunkt x zwischen den Knoten liegt.

Die Methode der Randelemente geht im Grunde genauso vor, aber sie benutzt eine sogenannte ***Fundamentallösung*** $g(y,x)$. Das ist eine Funktion, die zwar den richtigen Knick unter der Einzelkraft aufweist, die aber an den Enden des Stabes nicht null ist, die also die Lagerbedingungen verletzt.

Die Folge ist, dass bei der Formulierung des *Satzes von Betti*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(g,u)_{\Omega_e} = 0 \tag{1.207}$$

nun auch die Normalkräfte $N(0)$ und $N(l)$ an den Endes des Stabes, siehe Bild 1.38 *a*, von den ‚nicht-null' Verschiebungen g verschoben werden und zur Dirac Energie beitragen, **die Einflussfunktion wird ‚länger'**

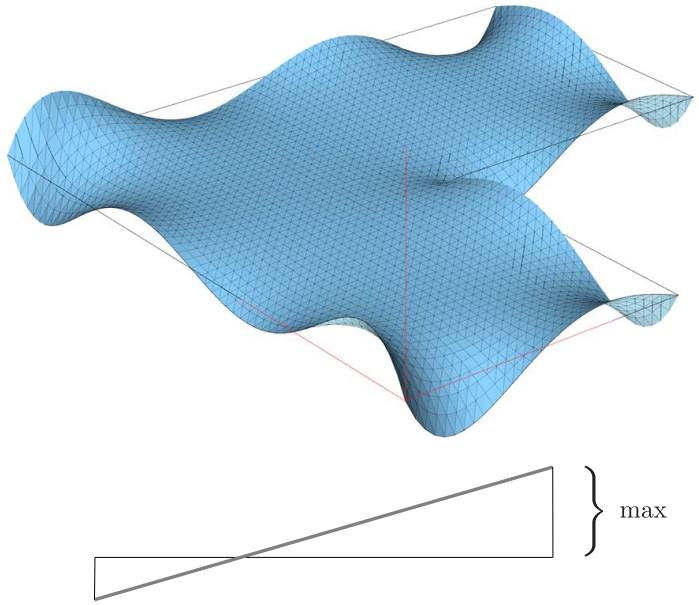


Bild 1.39. Die am Rand eingeprägten Sinus-Schwingungen verformen das Tuch so, dass das Maximum auf dem Rand liegt. Dasselbe gilt für jede Gerade, $u'' = 0$ (BE-LAPLACE)

$$1 \cdot u(x) = \underbrace{\int_0^l g(y,x)p(y)\,dy + N(l)g(l,x) - N(0)g(0,x)}_{Dirac\ Energie} \tag{1.208}$$

verglichen mit der ursprünglichen Formulierung mit $G(y,x)$

$$1 \cdot u(x) = \underbrace{\int_0^l G(y,x)p(y)\,dy}_{Dirac\ Energie}\,. \tag{1.209}$$

Man beachte, dass beide Formeln denselben Wert für die Dirac Energie liefern. Aber der $g(y,x)$-Zugang muss auch die Arbeit an den Stabenden, den Rändern, mitzählen, das Arbeitsintegral (p,g) allein ist ‚zu wenig'. Das ist der Unterschied.

Der Vorteil von Fundamentallösungen ist, dass sie ein ***Universalschlüssel*** sind, der überall passt. Mit ein und derselben Fundamentallösung kann man alle Platten berechnen. In BE-Programmen sind die Fundamentallösungen ‚fest verdrahtet'. *One solution suffices to rule them all.*

Der Nachteil ist, dass auch die Lagerkräfte und eventuell auch die Randverformungen mit zur ***Dirac Energie*** beitragen, so dass diese Randwerte, wenn sie unbekannt sind, durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems

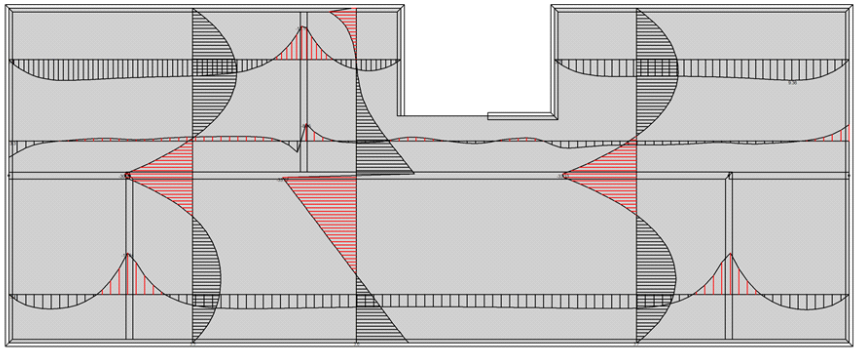


Bild 1.40. Momente und Querkräfte in einer Deckenplatte. Jeder Wert wurde einzeln durch Integration über den Rand und die Wände berechnet (BE-PLATTE)

bestimmt werden müssen. Technisch stellt dies kein Problem dar. Es ist nur so, dass in zwei und drei Dimensionen diese Hilfsprobleme nur näherungsweise gelöst werden können und so ist auch bei Randelementen – wie bei den finiten Elementen – die *Dirac Energie* nur eine Näherung.

Die Randelemente haben aber den Vorteil, dass sie die Lösung weitgehend aus den Original-Lasten generieren. Im Innern ist p wirklich p. Es gibt nicht die (scheinbar) ‚wilden' und ‚springenden' Lasten p_h wie bei der FEM, und das vermittelt ein ruhigeres, ausgeglicheneres Bild in den Spannungen.

Dafür sind die Marken auf dem Rand, an die sozusagen die Kurvenlineale, die Einflussfunktionen, gehalten werden, leicht verrutscht, ohne dass das eigentlich auffällt oder bemerkbar ist. Dasselbe gilt aber auch für die finiten Elemente, die Momente an dem freien Rand einer FE-Platte sind nicht null.

Randelemente haben auch ein besseres **Auflösungsvermögen** bei Singularitäten als finite Elemente, siehe z.B. Bild 3.125. Die Spannungen der FE-Lösungen weichen in den Ecken deutlich von der BE-Lösung ab. Wenn man aber FE-Resultate mit BE-Resultaten vergleicht, dann sind die Abweichungen in den Schnittgrößen und der Bewehrung im Feld, entfernt von den Ecken, in der Regel gering. Da kommt man dann ins Zweifeln, ob man wirklich ein Netz in den Ecken verfeinern muss. Man sollte es sicherlich, insbesondere, wenn man vernünftige Querkräfte für den Durchstanznachweis haben will, aber wenn es nur um die Feldmomente ginge, könnte es wohl unterbleiben.

Wir wollen das Thema Rand(elemente) doch nicht verlassen, ohne das ***Maximumprinzip*** zu erwähnen, weil alles, wo sich in der Form der Gehalt ausprägt, den Bauingenieur höchlich interessiert. Das Maximumprinzip besagt, dass jede homogene Lösung der Laplace-Gleichung, $\Delta u = 0$, ihr Maximum auf dem Rand annimmt, siehe Bild 1.39. Im 1-dimensionalen Fall sind das die Geraden, $u'' = 0$.

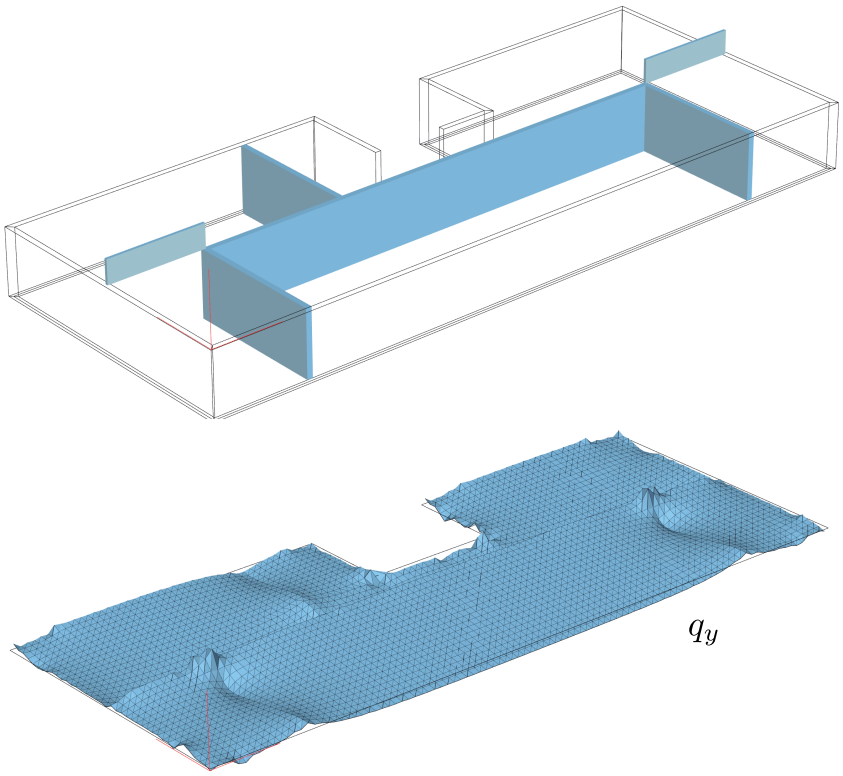


Bild 1.41. Da nicht jeder Punkt angezeigt wird, kommt es in der 3-D Ansicht zu einer Rasterung wie bei den finiten Elementen (BE-PLATTE)

Weil $EIw^{IV} = p$ mit $-M'' = p$ identisch ist, bedeutet dies, dass in jedem unbelasteten Feld, $p = 0$, das maximale Moment an den Enden auftritt.

1.23 Digital vs. analog

Beim *post processing*, der Ergebnisauswertung, gleichen die finiten Elemente einem ‚Raster-Verfahren', ähneln einer Digitaluhr, und die Randelemente einer Analoguhr.

Die finiten Elemente arbeiten auf einem Netz und die *shape functions* sind stückweise Polynome und die Ergebnisse werden vorzugsweise in den Knoten (Verschiebungen) bzw. den Mittelpunkten der Elemente (Spannungen) ausgegeben und dazwischen wird dann interpoliert. Diese Betonung der Knoten und der Gausspunkte gibt den FE-Ergebnissen diesen ‚Rastercharakter'.

Bei den Randelementen ist es anders. Wenn man z.B. den Verlauf der Querkraft q_x in einem Schnitt darstellt, dann wird jeder Wert q_x für sich durch

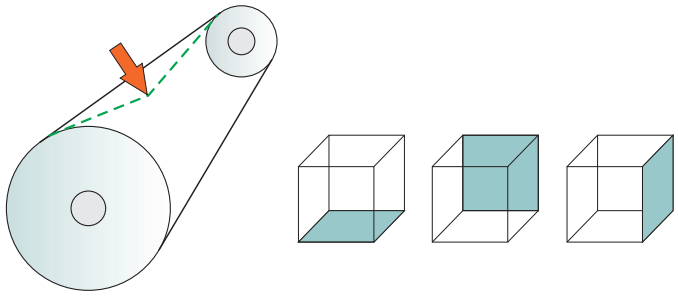


Bild 1.42. Test eines Keilriemens und die drei Projektionsebenen

Integration über den Rand der Platte und die Lasten im Innern berechnet, also nicht aus den Nachbarwerten interpoliert, siehe Bild 1.40. Ist die Belastung (relativ) glatt, dann liefern Einflussfunktionen glatte Kurven, die natürlich immer noch oszillieren können, (und auch falsch sein können), aber vom Ansatz her sind die Randelemente das analytischere Verfahren.

Was die beiden Verfahren wieder aneinanderrückt, sind Gesamtansichten, wie z.B. der Querkräfte q_y in Bild 1.41. Das sind Randelement-Ergebnisse, aber weil die Querkräfte nur in ausgesuchten Punkten angezeigt werden, kommt es auch hier teilweise zu Sprüngen, wenn die Gradienten groß sind.

Bei Randelementen gibt es kein Netz und deswegen muss man die Knoten, die wir dann **Spannungspunkte** nennen künstlich erzeugen. Dazu wird eine Schar von horizontalen Linien über die Platte gelegt auf denen gleichabständig Punkte verteilt sind, Seite 830. Es entsteht so der Eindruck eines Netzes, das sehr anschauliche Bilder ermöglicht, wie die Biegefläche der Membran in Bild 1.39. Natürlich, wenn die Querkräfte (die dritten Ableitungen!) an den Wänden springen oder in der Nähe von Stützen stark ansteigen, dann wird die Darstellung der Ergebnisse auch für Randelemente schwierig, aber wie Bild 1.41 zeigt, gelingt das – bis auf einige *peaks*, die aber ihre Ursache in der Stützung der Platte selbst haben – immer noch ganz gut.

1.24 Testfunktionen

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik beruhen also auf der ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = 0\,, \tag{1.210}$$

und deren ‚Spiegelung', dem Satz von Betti. Die Schreibweise $\mathscr{G}(w, \delta w)$ ist geeignet deutlich zu machen, dass nichts besonders geheimnisvolles an einer virtuellen Verrückung δw ist. Mathematisch ist sie einfach der Gegenpart zu w. Und wie w ist δw eine Funktion – und mehr nicht!

Leider ist der Begriff der virtuellen Verrückungen jedoch historisch so belastet, dass man versucht ist, ihn durch einen harmloseren Begriff wie den der

Testfunktion zu ersetzen. Das Testen, das Wackeln, das Auslenken aus der Gleichgewichtslage ist ja ein vertrautes, alltägliches Manöver.

Um das Gewicht eines Koffers zu bestimmen, heben wir den Koffer hoch. Gemäß der Formel *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung* können wir aus der Beschleunigung a und der Kraft im Arm, auf die Masse m des Koffers schließen.

Um die Spannung in einem Keilriemen oder den Druck in einem Fußball zu ermitteln, drücken wir mit dem Daumen dagegen, siehe Bild 1.42. Der Bauzeichner, der Risse anfertigt, projiziert das Tragwerk auf drei Ebenen, und die Risse sind das Skalarprodukt zwischen dem Tragwerk und den je zwei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ der drei Ebenen. Von je mehr Seiten wir etwas betrachten können, desto mehr erfahren wir über den Gegenstand. In einem übertragenen Sinn bedeutet das: Je öfter wir ‚wackeln', je mehr Tests φ_i wir fahren, desto deutlicher wird das Bild.

1.25 Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?

Nein. Virtuelle Verrückungen müssen nicht klein sein, siehe Bild 1.43, und die Gleichung

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i, \tag{1.211}$$

ist nicht deswegen wahr, weil $\delta W_e = \delta W_i$ ist. Das Anheften von *labels* beweist nichts!

Ja, die Energieprinzipe bilden den Kern der Mechanik und an keiner Stelle ist man der Mechanik so nahe, wie bei Formulierungen wie $\delta W_e = \delta W_i$. Es ist auch richtig, dass die statische Interpretation einer Gleichung – definitiv – die beste Kontrolle ist. Aber das verführt Ingenieure dazu Mathematik mit Mechanik zu beweisen, was nicht geht – Kontrolle ja, aber Beweis nein.

Um nicht missverstanden zu werden: Wir halten die Energieprinzipe der Mechanik für ein hervorragendes Konzept. Vom didaktischen Standpunkt aus gibt es keinen besseren Zugang zur Statik – Generationen von Ingenieuren haben so erfolgreich Statik gelernt.

Es ist nicht unsere Absicht, Statik in ein rigoros System von Axiomen und Theoremen zu verwandeln. Ein solcher Versuch würde mehr Unheil anrichten als dass er Gutes bewirkt. Statik kann nicht und sollte nicht im Sinne eines mathematischen Lehrbuches gelehrt werden[10]. Wir glauben nur, dass wir an einem Punkt des Studiums den Studenten erklären sollten, warum die doch so zentrale Gleichung (1.211) richtig ist. Nicht, weil $\delta W_e = \delta W_i$, sondern weil

[10] Auch wenn die Lufthoheit, die die Mathematik (scheinbar) garantiert, verlockend ist. Aber die Statik lebt von lebendiger Anschauung und nicht von rigider Axiomatik. Babuška hat sogar einmal einen Doktoranden vor den Mathematikern gewarnt: ‚*Mathematicians are very clever*'. Anders gesagt: *Don't fall into their trap*, [11]. Und um die Anekdote noch fortzusetzen: Die erste Frage von *Babuška* an den Doktoranden war: ‚*What does your hour cost?*' Ist jemand bereit, für Ihre Ergebnisse zu zahlen?

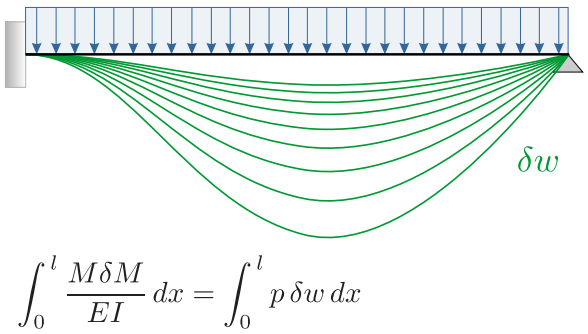


Bild 1.43. Gleichgültig, wie groß δw ist, immer ist $\delta W_i = \delta W_e$

- $w \in C^4(0,l)$ eine Lösung des Randwertproblems ist

$$EI\,w^{IV} = p \qquad w(0) = w(l) = M(0) = M(l) = 0 \tag{1.212}$$

- $\delta w \in C^2(0,l)$ eine zulässige virtuelle Verrückung ist, $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$
- und wir daher die Regeln der partiellen Integration

$$\int_0^l w'(x)\,\delta w(x)\,dx = [w\,\delta w]_0^l - \int_0^l w(x)\,\delta w'(x)\,dx \tag{1.213}$$

zweimal anwenden dürfen, um die linke Seite von (1.211) in die rechte Seite umzuformen

$$\int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx\,. \tag{1.214}$$

Da partielle Integration keinen Unterschied zwischen ‚groß' und ‚klein' macht, darf δw beliebig groß sein. Auf der linken Seite steht am Ende eine Zahl und auf der rechten Seite steht eine Zahl

$$0.56789\ldots = 0.56789\ldots \tag{1.215}$$

die in allen Ziffern gleich sind. Welches mechanische Prinzip kann dies garantieren? Oder wenn wir das Argument auf den Kopf stellen, welches *mathematische Gesetz* würde missachtet werden, wenn δw groß wäre? Hat je ein Mathematiker eine Gleichung dadurch bewiesen, dass er sich auf ein Naturgesetz bezogen hat?

Die Balkenkrümmung wegen $w' \ll 1$ auf $\kappa \simeq w''$ zu reduzieren, ist ein legitimes Argument, um die Balkengleichung zu linearisieren, aber man ist dann doch erstaunt, wenn der Gesprächspartner erklärt – wie uns das mehrfach passiert ist – dass die Gleichung (1.211) nur solange richtig ist, solange δw klein ist[11].

[11] Da wünscht man sich die Mathematiker als Zuhörer, wünscht sich, dass sie einmal ihre *splendid isolation* verlassen und verstehen, was Ingenieur-Mathematik ist. ‚*Epsilontik*' ist einfach, das schwere ist die physik. Interpretation, ist das ‚Sein'! Viele Missverständnisse beruhen auf dieser *Zwi-Natur* der Ingenieur-Mathematik.

1.26 Theorie I. Ordnung

Die lineare Statik nimmt an, dass die Verformungen eines Bauteils klein sind und die Gleichgewichtsbedingungen daher am unverformten System aufgestellt werden können (Theorie I. Ordnung). Auch hier begegnet uns das Stichwort klein, nur diesmal in einer anderen Rolle.

Bei der Herleitung der Differentialgleichungen, die ja auf dem Gleichgewicht am infinitesimalen Element dx basieren, werden die Verschiebungen der Schnittufer vernachlässigt. Auf Grund dieser Annahme kommt es zu einer Linearisierung der Starrkörperbewegungen, über die wir später noch ausführlicher sprechen werden, Kapitel 1.34. Starrkörperbewegungen lassen ein Bauteil per definition spannungsfrei, und das schränkt die Starrkörperbewegungen in der linearen Stabstatik auf die Bewegungen

$$\delta w = a + bx \qquad \delta u = a \tag{1.216}$$

ein; es sind die einzig möglichen Lösungen mit $M = 0$ bzw. $N = 0$ der beiden Gleichungen $EI\, w^{IV} = 0$ und $-EA u'' = 0$. Gleichzeitig aber unterliegen die Zahlen a und b keiner Größenbeschränkung, und so kommt es, dass in der Theorie I. Ordnung die virtuellen Verrückungen beliebig groß sein können. Wenn natürlich auch $\delta w = a + b\,x$ eine **Pseudodrehung** ist und keine echte Starrkörperdrehung.

Die 6×6 Steifigkeitsmatrix eines Balkens ist orthogonal zu allen Vektoren $\boldsymbol{u}_0$, die beliebig kleine/große Translationen und Pseudodrehungen darstellen, aber nicht zu echten – wenn auch noch so winzigen – Starrkörperdrehungen $\boldsymbol{u}_0$. Man drehe den Balken um sein linkes Ende, dann ist $u_1 = 0$ und $u_4 = l\,(\cos\varphi - 1)$ und so entsteht bei der Rotation eine Druckkraft $N = EA/l \cdot u_4$ in dem Balken. Echte Rotationen und die Matrix $\boldsymbol{K}$ vertragen sich nicht.

1.27 Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?

Die Identitäten beruhen auf einer Kette von Umformungen mittels partieller Integration und daher ist das Ergebnis $\mathscr{G}(w, \delta w) = 0$ immer richtig.

Nun wird aber bei der Formulierung der Arbeitsprinzipien der Statik immer davon gesprochen, dass die Systeme im Gleichgewicht sein müssen. Diese Einschränkung liegt an den Abkürzungen, die in der Literatur an dieser Stelle genommen werden.

Um nachzuweisen, dass die Biegelinie eines Balkens,

$$EI\, w^{IV}(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \qquad M(0) = M(l) = 0\,, \tag{1.217}$$

dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* genügt, setzen wir die Biegelinie w und eine zulässige virtuelle Verrückung δw in die erste Greensche Identität ein

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx+[V\,\delta w-M\,\delta w']_0^l-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=0\,, \tag{1.218}$$

und wir erhalten so unter Berücksichtigung von

$$EI\,w^{IV}(x)=p(x)\qquad M(0)=M(l)=0\qquad \delta w(0)=\delta w(l)=0 \tag{1.219}$$

das bekannte Ergebnis

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l p(x)\,\delta w(x)\,dx-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=\delta W_e-\delta W_i=0\,. \tag{1.220}$$

Anders in der Literatur: Dort wird die zu Grunde liegende Identität (1.218) gar nicht angeschrieben, sondern die Autoren formulieren direkt die **verkürzte Identität** (1.220), was aber die Autoren dann zu dem Hinweis verpflichtet, dass das ganze nur gilt, wenn der Balken im Gleichgewicht ist (w genügt (1.217)) und δw eine zulässige virtuelle Verrückung ist.

Das steckt hinter der Bemerkung, dass die Arbeitsprinzipe nur gelten, wenn das System im Gleichgewicht ist.

1.28 Was ist Weg und was ist Kraft?

Bei der Umformung des Arbeitsintegrals

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,w(x)\,dx \tag{1.221}$$

mittels partieller Integration erscheinen wie von selbst die Weg- und Kraftgrößen, die zur Differentialgleichung gehören. Sie bilden paarweise die **Randarbeiten**

$$[V\,w-M\,w']_0^l=V(l)\,w(l)-M(l)\,w'(l)-V(0)\,w(0)+M(0)\,w'(0)\,, \tag{1.222}$$

an denen man ablesen kann, dass die Querkraft V zu w konjugiert ist und das Moment M zu w'. Das scheint uns selbstverständlich, weil wir es nicht anders kennen, aber hier ist die Stelle, wo das amtlich gemacht wird.

Der Versuch eines Kollegen etwa die Größe $w+0.5\,w'$ als die ‚wahre' Weggröße auf dem Rand zu definieren, die zu V konjugiert ist, muss scheitern, weil es in der ersten Greenschen Identität anders steht. Sie hält uns auf dem rechten Weg.

Bei der (zweimaligen) partiellen Integration der Arbeitsgleichung des Balkens nach Theorie II. Ordnung

$$\int_0^l (EI\,w^{IV}(x)+P\,w''(x))\,w(x)\,dx=[\underbrace{(EI\,w'''(x)+P\,w'(x))}_{-T(x)}\,w+M\,w']_0^l$$
$$+\int_0^l(\frac{M^2}{EI}-P\,(w'(x))^2)\,dx \tag{1.223}$$

lernen wir z.B., dass nun die Transversalkraft

$$T(x) = -EI\,w'''(x) - P\,w'(x) = V(x) - P\,w'(x)\,, \tag{1.224}$$

zu $w(x)$ konjugiert ist und wir lesen aber auch ab, dass $M(x)$ dasselbe Moment ist, wie bei der Theorie erster Ordnung und dass M weiterhin zu w' konjugiert ist.

Die Unterscheidung zwischen Weg und Kraft ist auch für die finiten Elemente wichtig. *Shape functions* sind **konform**, wenn ihre Weggrößen stetig sind, denn dann ist ihre Energie endlich. *Hat functions* $\varphi_i(x)$ taugen nicht für Balken, weil die Sprünge in der ersten Ableitung $\varphi_i'(x)$ (‚Fließgelenke') unendlich große Momente bedeuten; anders lässt sich ein Balken nicht knicken. Die Einträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ in der Steifigkeitsmatrix wären ∞.

1.29 Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen

Zu Differentialgleichungen **zweiter Ordnung** gehören eine Weg- und eine Kraftgröße $1 + 1$. Bei einem Stab, $-EAu''(x)$, sind dies

$$u(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad N(x) = EAu'(x) \quad \text{1. Ableitung} \tag{1.225}$$

bei einem Seil, $-H\,w''(x)$,

$$w(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad V(x) = H\,w'(x) \quad \text{1. Ableitung} \tag{1.226}$$

oder einem Schubträger, $-GA\,w_s''(x)$,

$$w(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad V(x) = GA\,w'(x) \quad \text{1. Ableitung}\,. \tag{1.227}$$

Zu Differentialgleichungen **vierter Ordnung** gehören dagegen je zwei Weg- und Kraftgrößen $2 + 2$

$$w(x),\, w'(x) \qquad \text{0-te und 1. Ableitung} \tag{1.228}$$

$$M(x) = -EI\,w''(x), V(x) = -EI\,w'''(x) \quad \text{2. und 3. Ableitung}\,. \tag{1.229}$$

Diese Unterscheidung ist nicht ganz unwichtig, weil Einflussfunktionen für Weggrößen sowohl mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* als auch dem *Satz von Betti* berechnet werden können, während Einflussfunktionen für Kraftgrößen in der Regel nur mit dem *Satz von Betti* berechnet werden können.

1.30 Warum das Minus in $-H\,w'' = p$?

Warum beginnen eigentlich alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem Minus?

Das kommt durch den Vorzeichenwechsel bei den **trigonometrischen Funktionen**. Eine wellenförmige Belastung $p(x) = \sin(x)$ hat ein gleichsinniges Echo, $w(x) = 1/H\,\sin(x)$, in dem Seil zur Folge, siehe Bild 1.44. Weil

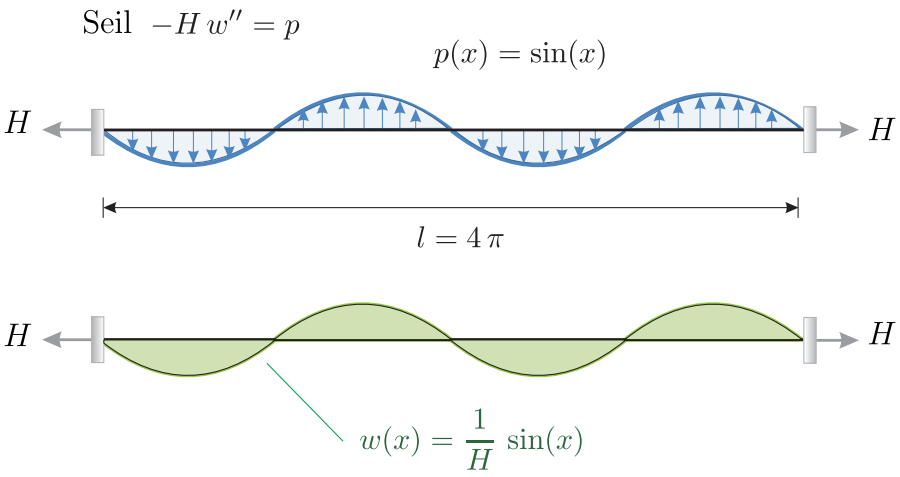


Bild 1.44. Oszillierende Belastung auf einem Seil und das getreue Echo im Seil

nun aber die zweite Ableitung des Sinus negativ ist, muss ein Minus vor der Differentialgleichung dies korrigieren

$$-H\,w''(x) = -H(-\frac{1}{H}\,\sin(x)) = \sin(x)\,. \tag{1.230}$$

Statisch kommt das Minus aus dem Gleichgewicht $-V+V+dV+p\,dx = 0$ am infinitesimalen Element, aber was wissen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ vom Gleichgewicht – und wie kommt es, dass der *switch* $(1)\cdot(-1)$ im $\sin(x)$ eingebaut ist, aber nicht in Polynomen? Sind sie nicht identisch[12]

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{1.231}$$

Bei der Balkengleichung, $EIw^{IV}(x)$, korrigiert sich der ‚Fehler' im übrigen durch die viermalige Differentiation, $(-1)\cdot(1)\cdot(-1)\cdot(1) = 1$, von selbst.

1.31 Die virtuelle innere Energie

Das symmetrische Integral in den Greenschen Identitäten ist die virtuelle innere Energie, die oft auch knapper

$$a(w,\delta w) := \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx \tag{1.232}$$

geschrieben wird. Wir bezeichnen sie auch als ***Wechselwirkungsenergie*** oder ***strain energy product***, weil das besser die Gleichwertigkeit der beiden Funktionen w und δw zum Ausdruck bringt.

[12] Die Reihenentwicklung von $\sin(x)$ und das alternierende Vorzeichen sind anscheinend der Grund.

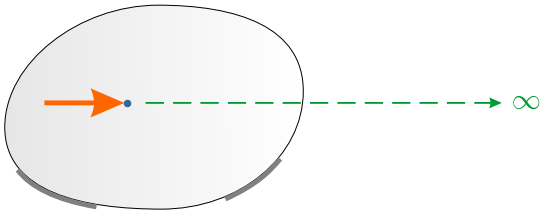


Bild 1.45. Satz von Castigliano bei einer Scheibe: *Und die Kraft wurde nie wieder gesehen...*

Auf der Diagonalen, $\delta w = w$, ist die Wechselwirkungsenergie gleich der inneren Energie

$$\frac{1}{2}\, a(w,w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx\,. \tag{1.233}$$

Sind $w(x)$ und $\delta w(x)$ zusammengesetzte Funktionen

$$w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) \qquad \delta w(x) = d_1 \delta w_1(x) + d_2 \delta w(x)\,, \tag{1.234}$$

dann kann man das Ergebnis auf die Überlagerung der einzelnen Biegelinien zurückführen

$$\begin{aligned} a(w,\delta w) = c_1 d_1 a(w_1,\delta w_1) + c_1 d_2 a(w_1,\delta w_2) \\ + c_2 d_1 a(w_2,\delta w_1) + c_2 d_2 a(w_2,\delta w_2)\,, \end{aligned} \tag{1.235}$$

und deswegen nennt man $a(w,\delta w)$ eine ***symmetrische Bilinearform***. Sie ist in beiden Argumenten linear und wegen $a(w,\delta w) = a(\delta w, w)$ ist sie auch symmetrisch.

1.32 Satz von Castigliano

Der oder die Sätze von Castigliano, [48], basieren nur auf Algebra. Sie gelten, wenn, wie bei einem Fachwerk, die Wechselwirkungsenergie eine Bilinearform ist. Die Ableitung der Verzerrungsenergie eines Fachwerks[13]

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij} u_i u_j \tag{1.236}$$

nach einer Knotenverschiebung u_l (gemäß Kettenregel und wegen $k_{lj} = k_{jl}$)

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\frac{1}{2}\, a(u,u) = \frac{1}{2}\sum\nolimits_j k_{lj} u_j + \frac{1}{2}\sum\nolimits_j k_{jl} u_j = \sum\nolimits_j k_{lj} u_j = f_l \tag{1.237}$$

ist die Knotenkraft f_l.

[13] Fachwerke löst die FEM exakt, also ist $a(u,u) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$, und das ist ein quadr. Polynom in den u_i und darauf beruht der Satz.

Castigliano's erster Satz *Die Ableitung der Verzerrungsenergie in einem Tragwerk nach einer Knotenverschiebung u_l ist gleich der Kraft f_l am Ort von u_l in Richtung der Verschiebung (wenn die Energie endlich ist).*

Wir können aber auch schreiben

$$\frac{1}{2}\,a(u,u) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{1.238}$$

und so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial f_l}\frac{1}{2}a(u,u) = \sum\nolimits_j k_{lj}^{(-1)} f_j = u_l\,. \tag{1.239}$$

Castigliano's zweiter Satz *Die Ableitung der Verzerrungsenergie in einem Tragwerk nach einer Kraft f_l ist gleich der Verschiebung u_l in Richtung der Kraft (wenn die Energie endlich ist).*

Castigliano gilt auch, wenn man Knotenlasten (Einzelkräfte) P mit Streckenlasten p ‚mischt', $w = P \cdot w_K + w_p$,

$$\frac{1}{2}\,a(w,w) = \frac{1}{2}P^2 \cdot a(w_K, w_K) + P \cdot a(w_K, w_p) + \frac{1}{2}\,a(w_p, w_p)\,. \tag{1.240}$$

Nach der Ableitung ist man bei der Mohrschen Arbeitsgleichung.

Wollen wir Castiglianos Satz auf Punktlösungen im 2-D oder 3-D erweitern

$$\boldsymbol{u} = \sum\nolimits_i \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{f}_i\,, \tag{1.241}$$

dann haben wir das Problem, dass die Energie der Verschiebungsfelder $\boldsymbol{G}_i$ unendlich ist, $a(\boldsymbol{G}_i, \boldsymbol{G}_i) = \infty$, siehe Bild 1.45, und dann existiert die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial u_l}a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \tag{1.242}$$

nicht wie z.B. in der Elastizitätstheorie, wo die Punktlösungen unendliche Energie haben, siehe Kap. 1.41 und Seite 822. Wir müssen Castigliano's Theorem also um den **Nachsatz** erweitern, *‚wenn die Energie endlich ist'*.

1.33 Satz von Maxwell

Der Satz von Maxwell, [199],

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{1.243}$$

beruht auf derselben Algebra wie der Satz von Castigliano. Wir würden heute sagen Maxwell hat die Steifigkeitsmatrix eines **Fachwerks** aufgestellt und gezeigt, dass die Matrix symmetrisch ist, [181] S. 241. Nur war er vorsichtiger, hat er das Resultat nicht auf Kontinua erweitert wie später Castigliano.

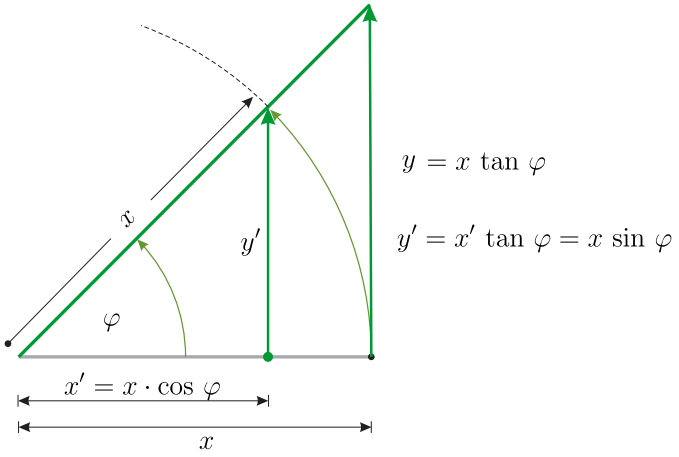


Bild 1.46. Auslenkung y' bei einer echten Drehung und Auslenkung y bei einer Pseudodrehung

1.34 Pseudodrehungen

Am freigeschnittenen Balken herrscht Gleichgewicht, wenn die äußeren Kräfte (p + Lagerkräfte) **orthogonal** sind zu allen Funktionen δw, deren Momente null sind, denn dann ist

$$a(w, \delta w) = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,, \tag{1.244}$$

und so bleibt in der ersten Greenschen Identität nur die Arbeit der äußeren Kräfte übrig und die ist dann null

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = \delta W_e = 0\,. \tag{1.245}$$

Beim Balken sind die ‚Null-Energie'-Funktionen die Starrkörperbewegungen

$$\delta w(x) = a + b \cdot x\,, \tag{1.246}$$

also ***Translationen*** a und ***Pseudodrehungen*** $b \cdot x$. Wir nennen $b \cdot x$ eine *Pseudodrehung* weil, anders als bei echten Drehungen, die Punkte nicht auf dem Drehkreis bleiben, sondern sie der **Tangente an den Drehkreis** folgen, sie kerzengerade nach oben gehen wie in Bild 1.46,

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}\,. \tag{1.247}$$

Das ist kein Defekt, sondern es ist das Merkmal der linearen Statik und Mechanik. Alle Einflussfunktionen statisch bestimmter Tragwerke sind kinematische

Ketten, die Pseudodrehungen vollführen. Beim Zeichnen folgt der Stift der Tangente. *Echte Drehungen würden zu falschen Ergebnissen führen.*

Man sollte statt von infinitesimalen Bewegungen von Translationen + linearisierten Drehungen sprechen (Bewegung auf der Tangente), denn nur für solche Bewegungen ist $\delta W_e = 0$. Dann ist man auch die **crux** mit dem infinitesimal kleinen los und kann die virtuellen Verrückungen gedanklich beliebig groß machen. **Infinitesimal** heißt also nicht klein, nicht ‚winzig', sondern

infinitesimale Drehung ≡ linearisierte Drehung

Dürfen wir an das **Moment einer Kraft um einen Punkt** erinnern? Die Wirkungslinie der Kraft ist mit der Tangente[14] an den Drehkreis deckungsgleich und im 1. Semester haben wir gelernt, dass man die Kraft auf ihrer Wirkungslinie *beliebig weit* verschieben kann ohne dass sich das Moment ändert. Es gibt – zum Glück(!) – keine ‚infinitesimalen' Momente.

Die Balkenendkräfte V und -momente M eines Balkens stehen mit der verteilten Belastung p also genau dann im Gleichgewicht, wenn (1.245) für alle $\delta w = a + b\,x$ gilt. Ein erfolgreicher Test mit $\delta w = 1$ bedeutet, dass die Summe der vertikalen Kräfte null ist, und ein Test mit $\delta w = x$, dass die Summe der Momente um das linke Lager null ist. Für die Kontrolle von $M = 0$ um andere Punkte wähle man a, b geeignet!

Man verstehe bitte, dass in der Mathematik von Bewegung nicht die Rede ist. Das $\delta w = a + b\,x$ ist ein **Gewicht** und die Kräfte eines frei geschnittenen Balkens sind **orthogonal** zu diesen Funktionen, wie groß auch immer a und b sind. Das ist das Resultat der partiellen Integration der Arbeitsgleichung.

Und weil es eben auch für $b = 10^{-10}$ gilt, muss die Momentenbedingung, die Orthogonalität, auch bei ‚Null' Drehung gelten und damit kann man die Mechaniker trösten. Die ‚Androhung' der Drehung reicht aus, man muss gar nicht echt drehen, die Orthogonalität $M = 0$ gilt auch ‚im Stand'.

Natürlich, die Anschauung versteht δw als eine Bewegung – wie einen Raketenstart, der beim *countdown* 1 Millisekunde vor der Zündung stehen bleibt. Noch eine Millisekunde – alle schauen hin und sind gespannt – und dann geht es wie $\delta w = a + b\,x$ los – aber auf der Tangente[15].

Will man Anschauung und Mathematik unter einen Hut bringen, nicht nur in einer Millisekunde, in ***frozen time***, leben, dann kann man diese Gewichtsfunktionen als Pseudodrehungen interpretieren und man hat damit die ganze Fülle an Informationen und Einsichten zur Verfügung, die uns die Kinematik, das freie Spiel von Kräften und Bewegung, gewährt.

In der Mechanik hat man statt dessen den Begriff der **infinitesimalen Verrückung** eingeführt, das ist wie Stillstand, aber trotzdem ein bisschen

[14] *Gli italiani sono un saggio popolo antico* und bei ihnen ist *la tangente* auch der ‚stups', *touch and go keeps the ball rolling*, *saggio* = weise.

[15] Auch die Rakete bewegt sich auf einer Tangente, der Richtung des Impuls, den die Startrampe auf der rotierenden Erde zur Zeit $t = 0$ hatte.

Bewegung, was aber im Grunde nicht geht und weil die Mechaniker deswegen ein schlechtes Gewissen haben, achten sie streng darauf, dass δw – um Himmels willen – ‚klein' ist. Nur, das löst das Problem auch nicht,

$$\delta w = \varepsilon \cdot (a + b\,x) \qquad \varepsilon = 10^{-10}\,, \tag{1.248}$$

weil sich jedes ε einfach herauskürzt, denn **die Differentialgleichung ist linear** und deswegen ist die erste Greensche Identität **bilinear**

$$\mathscr{G}(w, \varepsilon\,\delta w) = \varepsilon \cdot \mathscr{G}(w, \delta w) = 0\,. \tag{1.249}$$

Das ‚klein' kommt mathematisch also gar nicht zum Zuge, der Faktor bleibt außen vor, $\varepsilon \cdot 0 = 0$.

Das Problem entsteht in dem Moment, wo der Mechaniker das $\delta w = a + b\,x$ nicht nur als **Gewicht**, als Testfunktion liest, wie der Mathematiker, sondern als **Bewegung**, als Drehung. Wenn er an dieser Stelle seinen Studenten sagen würde: Für den Übergang vom Gewicht δw zur Verrückung δw müssen wir uns darauf einigen, dass in der linearen Mechanik und Statik Rotationen Pseudodrehungen sind, wäre alles gut, aber er will die Anschauung retten, und so muss das **‚infinitesimal klein'** über ein Problem hinweghelfen, das er sich – in bester Absicht – selbst geschaffen hat.

Auch wenn wir hier *pro domo* reden: Die Einsicht, dass die Variationsprinzipe der Statik und Mechanik eine mathematische Grundlage haben, wäre auch an dieser traditionsreichen Stelle mehr als hilfreich.

Wir sollten uns von dieser historischen Bürde lösen und die virtuellen Drehungen für das nehmen, was sie sind: Pseudodrehungen. Wir wären damit auch den ganzen Spuk um das ‚infinitesimal klein' los.

Bemerkung 1.3. Bei der Drehung eines Waagebalkens, $P_1\,h_1 = P_2\,h_2$, stehen die Änderungen $\Delta h_i = (\cos\varphi - 1)\,h_i$ in den Hebelarmen in demselben Verhältnis wie die h_i, und deswegen ist der Waagebalken auch in jeder gedrehten Lage im Gleichgewicht, $P_1\,(h_1 + \Delta h_1) = P_2\,(h_2 + \Delta h_2)$, siehe Bild 9.20.

1.35 Gleichgewicht

Jede Funktion w aus $C^4(0, l)$ ist im **Gleichgewicht**, denn ihre Kraftgrößen

$$EI\,w^{IV}(x) \qquad M(x) = -EI\,w''(x) \qquad V(x) = -EI\,w'''(x) \tag{1.250}$$

genügen der Gleichung, siehe Bild 1.47,

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = 0\,, \tag{1.251}$$

wie immer die Starrkörperbewegung $\delta w(x) = a + b\,x$ aussieht – garantiert!

Also ist eine Sinus-Welle $w(x) = \sin(x)$ im Gleichgewicht



Bild 1.47. Chartres die Triade des Vitruv *Firmitas, Utilitas, Venustas*

$$\mathscr{G}(\sin(x),1) = \int_0^l EI\,\sin(x)\cdot 1\,dx + [EI\,\cos(x)\cdot 1]_0^l = 0 \tag{1.252}$$

$$\mathscr{G}(\sin(x),x) = \int_0^l EI\,\sin(x)\,\cdot x\,dx + [\underbrace{EI\,\cos(x)}_{V}\cdot x - \underbrace{(EI\,\sin(x))}_{M}\cdot 1]_0^l = 0\,. \tag{1.253}$$

Bei einem **Fundamentbalken** ist das anders. Zur Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens

$$EI\,w^{IV}(x) + cw(x) = p(x)\,, \tag{1.254}$$

gehört die Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) = &\int_0^l p(x)\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l \\ &- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + cw(x)\,\delta w(x))\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{1.255}$$

Jetzt gibt es keine Funktion δw, außer $\delta w = 0$, die die virtuelle innere Energie

$$a(w,\delta w) := \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + cw(x)\delta w(x))\,dx \tag{1.256}$$

zu null macht. Gibt es also keine Gleichgewichtsbedingungen? Nun die Terme in der ersten Greenschen Identität müssen zumindest orthogonal sein zu allen Funktionen $\delta w \in C^2$. Wählen wir die Funktion $\delta w(x) = 1$, dann folgt

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^l p(x)\,dx + V(l) - V(0) - \int_0^l cw(x)\,dx = 0\,, \tag{1.257}$$

oder wegen $p(x) = EI\,w^{IV}(x) + cw(x)$

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,dx + V(l) - V(0) = 0\,, \tag{1.258}$$

was uns vertraut vorkommt. Analog führt die Drehung $\delta w(x) = x$ zu der Bedingung $M = 0$ um den linken Anfangspunkt

$$\mathscr{G}(w, x) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,x\,dx + V(l)x - M(l)\cdot 1 + M(0)\cdot 1 = 0\,. \tag{1.259}$$

Allerdings wird hier immer nur der Anteil $EI\,w^{IV}$ der Gesamtbelastung $p(x) = EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x)$ bilanziert und das versteht man, wenn man die Streckenlast p in der ersten Greenschen Identität durch das ‚Original' $p = EI\,w^{IV} + c\,w$ ersetzt, denn dann sieht man, dass sich der Term $c\,w(x)\,\delta w(x)$ gegen denselben Term in der inneren Energie wegkürzt und man ist wieder bei der ersten Greenschen Identität des normalen (ungebetteten) Balkens.

Wenn am Ende eines Fundamentbalkens eine Einzelkraft $P = V(l)$ steht, dann muss folglich gelten

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,dx + P = 0\,. \tag{1.260}$$

Wegen $EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = 0$ (keine Streckenlast) kann man $EI\,w^{IV}(x)$ mit $-c\,w(x)$ vertauschen, und daher muss auch gelten

$$P = \int_0^l cw(x)\,dx\,, \tag{1.261}$$

woran man abliest, dass das Integral des Bodendrucks gleich der Kraft P ist.

1.36 Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt

Der Mathematiker weiß: Jede Biegelinie $w(x)$ muss gemäß

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = 0\,, \tag{1.262}$$

orthogonal zu allen Biegelinien $\delta w(x) = a + b\,x$ sein. Weil in diesen Fällen aber $\delta W_i = 0$ ist, müssen notwendig die zu w gehörigen äußeren Kräfte (p + Lagerkräfte) zu jedem solchen δw orthogonal sein

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = 0\,, \tag{1.263}$$

und so entdeckt der Mathematiker die Forderung

$$\sum \text{vert. Kräfte} = 0 \qquad \sum \text{Momente} = 0\,, \tag{1.264}$$

ohne etwas von Statik zu wissen.

1.37 Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht

Das Gleichgewicht basiert auf dem ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***

$$\int_0^l f'(x)\,dx = f(l) - f(0)\,, \tag{1.265}$$

denn weil $EI\,w^{IV}(x) = -V'(x) = p(x)$ die Ableitung der Querkraft $V(x)$ ist, gilt

$$\int_0^l -V'(x)\,dx = -V(l) + V(0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^l p(x)\,dx + V(l) - V(0) = 0\,. \tag{1.266}$$

Um z.B. zu zeigen, dass das Moment um das linke Lager null ist, $M = 0$, berechnen wir das Moment der Streckenlast $p(x) = -V'(x)$ um das linke Lager und formen es mittels partieller Integration um

$$\int_0^l -V'(x)\,x\,dx = [-V\,x]_0^l - \int_0^l -V(x)\cdot 1\,dx\,. \tag{1.267}$$

Wegen $V(x) = M'(x)$ bedeutet das

$$\int_0^l -V'(x)\,x\,dx = [-V\,x]_0^l + M(l) - M(0)\,, \tag{1.268}$$

oder

$$\int_0^l p(x)\,x\,dx + V(l)\cdot l - M(l) + M(0) = 0\,. \tag{1.269}$$

1.38 Gleichgewicht am verformten Tragwerk?

In der Theorie erster Ordnung wird das Gleichgewicht am unverformten Tragwerk aufgestellt und in der Theorie zweiter Ordnung am verformten Tragwerk – so kennen wir es. Aber das ist nicht ganz richtig. Die Theorie zweiter

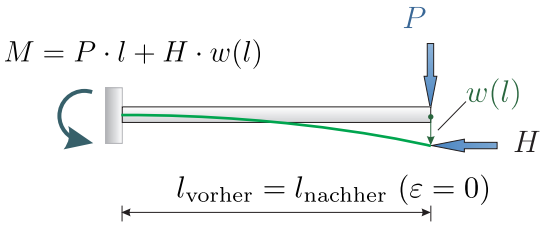


Bild 1.48. Theorie II. Ordnung

Ordnung ist in Wirklichkeit **eine Mischung aus beiden Theorien**, siehe Bild 1.48.

Die seitliche Auslenkung des Balkens, also die Vergrößerung der Durchbiegung geht in die Gleichgewichtsbedingung ein, aber die Verkürzung der Stabachse in Längsrichtung nicht, $EA = \infty$.

Es ist daher auch nicht möglich, das Gleichgewicht eines Rahmens, der nach Theorie zweiter Ordnung berechnet wurde, zu überprüfen, denn die Knotenverformungen enthalten ja Beiträge aus Theorie I. wie II. Ordnung. Dass das in der Praxis nicht auffällt, liegt daran, dass die Verkürzungen der Stäbe sehr klein sind, so dass man bei einer Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen geneigt ist, Abweichungen auf Rundungsfehler zu schieben, [119].

Zahlenbeispiel [233] S. 213: Der Kragträger ist ein IPE 300, Länge $l = 500$ cm, $P = 10\,\mathrm{kN}$, $H = 0.7 \cdot H_{krit} = 1.2129 \cdot 10^3\,\mathrm{kN}$. Die Durchbiegung am Kragarmende beträgt $w = 7.8336\,\mathrm{cm}$ und das Lastmoment $M = P \cdot 500 + H\,w$ stimmt mit dem Einspannmoment $M(0) = -1.4501 \cdot 10^4$ nach Th. II. Ordg. überein, aber wegen der Verkürzung $u = H\,l/EA = 0.5368$ cm des Trägers beträgt das Lastmoment eigentlich nur $M = -1.4501 \cdot 10^4 + 5.3677\,\mathrm{kNm}$.

1.39 Quellen und Senken

Aus der Sicht der Physik sind die Gleichgewichtsbedingungen ***Erhaltungssätze***. Das, was aus einer Platte Ω am Rand Γ ‚herausfließt', also die Lagerkraft, technisch der Kirchhoffschub $v_n = q_n + d/ds\, m_{nt}$, muss in der Summe gleich der aufgebrachten Belastung sein[16]

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_\Omega p\, d\Omega + \int_\Gamma v_n\, ds = 0\,. \tag{1.270}$$

Die Temperaturverteilung $T(\boldsymbol{x})$ in einer Platte, die von einer Fußbodenheizung p (= Quellen) erwärmt wird und deren Rand durch eine Eisschürze konstant auf null Grad gehalten wird, genügt der Gleichung

$$-\Delta T = p \qquad T = 0 \qquad \text{am Rand } \Gamma\,. \tag{1.271}$$

Aus der ersten Greenschen Identität

[16] Die Eckkräfte haben wir weggelassen.

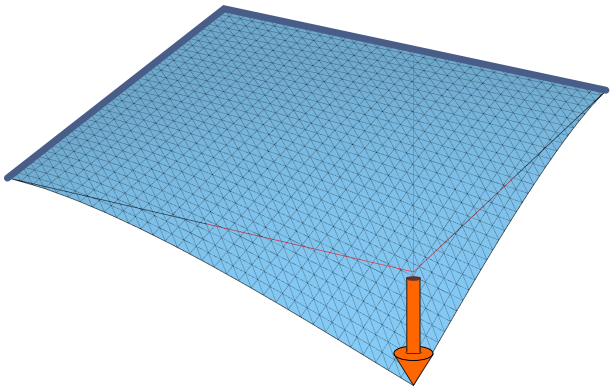


Bild 1.49. Zu Kapitel 1.40. Möglichst viel Energie aus der rückseitig eingespannten Platte holen, die Ecke möglichst tief nach unten treiben und dabei die Differentialgleichung lösen, das bedeutet $\Pi \to \min$.

$$\mathscr{G}(u,\delta v) = \int_\Omega -\Delta u \delta v \, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \delta v \, ds - \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \delta v \, d\Omega = 0\,, \quad (1.272)$$

in der Formulierung

$$\mathscr{G}(T,1) = \int_\Omega p d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial T}{\partial n} \, ds = 0\,, \quad (1.273)$$

folgt: Was an Wärme am Rand Γ wegfließt, das ist das Integral des Fluß $\partial T/\partial n$, (der ist < 0), muss gleich der Menge der produzierten Wärme sein.

Fachwerkstäbe sind frei von Quellen (keine Streckenlast zwischen den Stabenden) und daher heben sich die Normalkräfte am Anfang und am Ende in der Summe auf, was an Kraft hineinfließt muss auch wieder herausfließen

$$\mathscr{G}(u,1) = [N \cdot 1]_0^l = N(l) - N(0) = 0\,. \quad (1.274)$$

In der Summe hat also die erste Greensche Identität, wenn man $\delta u = 1$ setzt, die Struktur

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_\Omega \mathit{Quellen\ im\ Gebiet}\, d\Omega + \int_\Gamma \mathit{Fluss\ am\ Rand}\, ds = 0\,. \quad (1.275)$$

1.40 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Gemäß dem Federgesetz

$$ku = f \quad (1.276)$$

ist die Auslenkung u einer Feder proportional zur aufgebrachten Kraft f, siehe Bild 1.50.

Die Kraft f, die die Feder nach unten zieht, leistet dabei die Arbeit (weil es Eigenarbeit ist, steht hier der Faktor $1/2$),

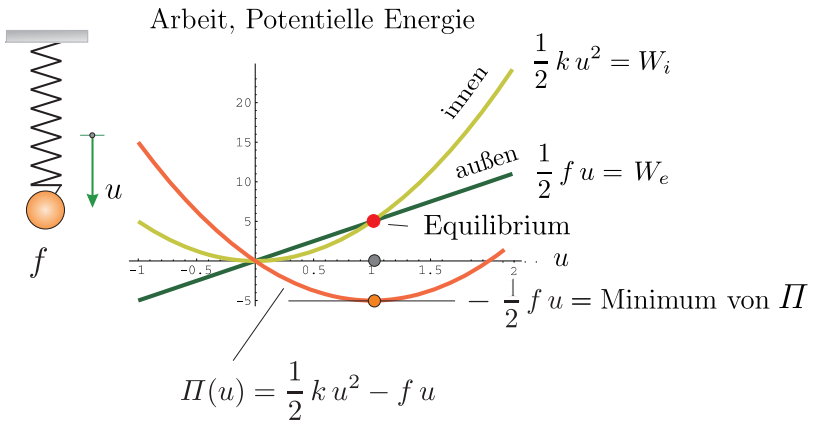


Bild 1.50. Dort, wo $W_i = W_e$ ist, liegt der Gleichgewichtspunkt u der Feder. Weil die innere Energie W_i quadratisch mit u wächst, die äußere Arbeit W_e aber nur linear, holt W_i immer W_e ein, gibt es immer eine Gleichgewichtslage, wenn $f < \infty$

$$W_e = \frac{1}{2} f u\,, \tag{1.277}$$

und diese Arbeit wird als innere Energie in der Feder gespeichert

$$W_i = \frac{1}{2} k u^2\,. \tag{1.278}$$

Wir erwarten natürlich, dass in der Gleichgewichtslage die **äußere Arbeit** und die **innere Energie** gleich groß sind

$$W_e = \frac{1}{2} f u = \frac{1}{2} k u^2 = W_i\,, \tag{1.279}$$

was aber durch die Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \delta u k u - u k \delta u = 0 \tag{1.280}$$

garantiert ist, denn

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(u,u) = \frac{1}{2}\,uku - \frac{1}{2}\,uku = \frac{1}{2}\,uf - \frac{1}{2}\,ku^2 = W_e - W_i = 0\,. \tag{1.281}$$

Trägt man die Funktionen $1/2\,fu$ und $1/2\,ku^2$ als Funktion von u auf, dann ist die Auslenkung u der Feder unter der Wirkung der Kraft f genau der Punkt u, in dem sich die beiden Kurven schneiden, siehe Bild 1.50.

Die unterste Kurve ist die **potentielle Energie** Π der Feder

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\,ku^2 - fu\,. \tag{1.282}$$

Der Faktor $1/2$ kürzt sich bei der Bildung der Ableitung weg

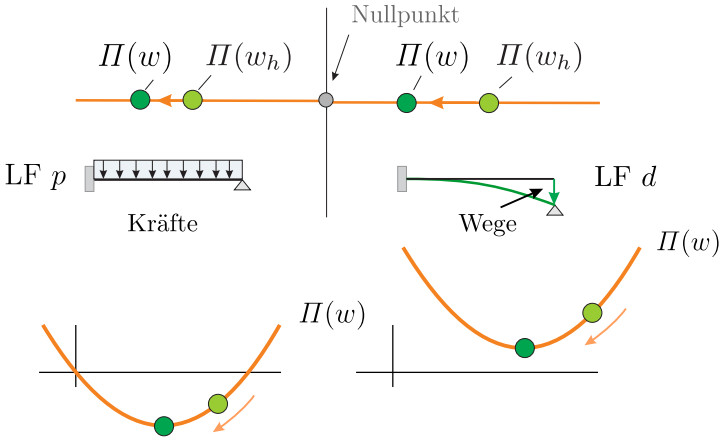


Bild 1.51. Die potentielle Energie $\Pi(w_h)$ der FE-Lösung liegt immer rechts von der exakten potentiellen Energie $\Pi(w)$, aber in beiden Fällen ist Π eine nach oben offene Parabel, muss man Energie zuführen, um die Gleichgewichtslage zu verlassen

$$\Pi'(u) = ku - f \tag{1.283}$$

und wegen dem Federgesetz $ku = f$ hat die potentielle Energie daher im Gleichgewichtspunkt u eine horizontale Tangente $\Pi'(u) = 0$, liegt dort der tiefste Punkt von $\Pi(u)$.

Am Anfang steigt die äußere Arbeit schneller als die innere Energie, aber dann passieren die beiden Kurven einen Punkt, von dem ab die innere Energie schneller wächst als die äußere Arbeit. Dieser Schnittpunkt ist der **Gleichgewichtspunkt**. Nur in diesem Punkt gilt $W_e = W_i$ und in diesem Punkt hat die potentielle Energie auch ihr Minimum.

Würde von Anfang an die innere Energie schneller steigen als die äußere Arbeit, dann würde sich die Feder überhaupt nicht bewegen, dann wäre schon im Nullpunkt der Wettlauf zu Ende.

Setzen wir alles eins, also $k = 1$ und $f = 1$, dann liegt der Gleichgewichtspunkt genau bei $u = 1$. Die ganze Statik und Mechanik beruht im Grunde darauf, dass im Intervall $(0, 1)$ die Ungleichung $u > u^2$ gilt und danach das Umgekehrte, $u^2 > u$.

1.40.1 Minimum oder Maximum?

Man kann die Lastfälle (LF) in der Statik in zwei Typen, p und d, einteilen:

- In einem LF p werden Kräfte aufgebracht.
- In einem LF d sind es Lagerverschiebungen/-verdrehungen (*displacements*).

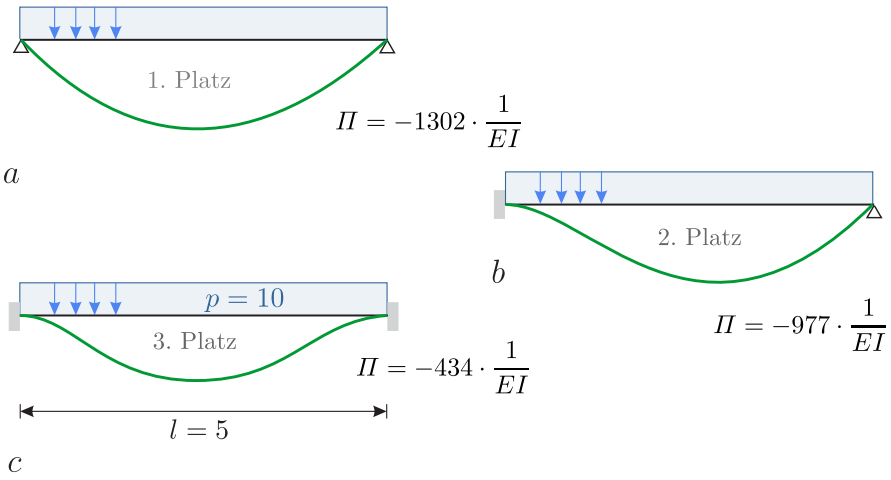


Bild 1.52. Je weniger Festhaltungen desto größer ist $\mathcal{V}$ und umso größer ist daher der Betrag $|\Pi|$ der potentiellen Energie in der Gleichgewichtslage

Der Typ des Lastfalls bestimmt das Vorzeichen der potentielle Energie in der Gleichgewichtslage.

In einem LF p ist die potentielle Energie in der tiefsten Lage **negativ**, wie man durch Einsetzen ($ku = f$) direkt verifiziert

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\,ku^2 - fu = \frac{1}{2}\,fu - fu = -\frac{1}{2}\,fu\,. \tag{1.284}$$

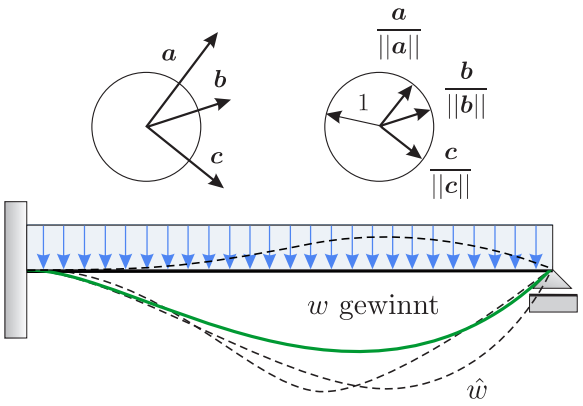
Nun ist aber die Auslenkung u der Sieger in dem Wettbewerb, die potentielle Energie möglichst klein zu machen, und das heißt doch anschaulich, dass u den Abstand $|\Pi(u)|$ vom Nullpunkt *maximal macht*.

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie ist in einem LF p eigentlich ein **Maximumprinzip**: Der Betrag $|\Pi(u)|$ wird maximiert. Nur weil die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage negativ ist, ist das dasselbe, wie das Minimum der potentiellen Energie zu finden.

Wir interpretieren das Prinzip in der Regel so, wie es die Wortwahl (anscheinend) suggeriert, mit möglichst wenig Anstrengung zum Ziel zu kommen, die potentielle Energie möglichst klein zu machen, möglichst nahe an null zu rücken, während die wahre Bedeutung genau das Gegenteil ist, siehe Bild 1.51. Je größer der Ansatzraum $\mathcal{V}$ ist, (= alle w, die an der Konkurrenz teilnehmen), je weniger Fesseln es gibt, desto negativer wird die potentielle Energie bei demselben p, desto weiter rückt $\Pi(w) \leftarrow 0$ von null ab, siehe Bild 1.52.

Das Bestreben der Kraft f ist es, möglichst viel Energie aus der Feder herauszuholen, den Betrag $|\Pi(u)|$ möglichst groß zu machen.

Bild 1.53 illustriert dieses versteckte Maximumprinzip an einem Balken. Man kann zeigen, dass die Biegelinie w des Balkens unter allen auf Eins nor-



$$\frac{(p,w)}{\|w\|} > \frac{(p,\hat{w})}{\|\hat{w}\|} \qquad \|w\|^2 = \int_0^l EI\,(w'')^2\,dx$$

Bild 1.53. Unter allen auf Eins normierten Biegelinien $w/\|w\|$ in $\mathcal{V}$, ist die Biegelinie w des Balkens die Funktion, die die größte Wirkung aus p ziehen kann, [126]

mierten Biegelinien $w/\|w\|$ aus $\mathcal{V}$ die ist, die die größte Wirkung, ***the most mileage***, aus dem Arbeitsintegral, siehe (1.83),

$$J(w) = \int_0^l pw\,dx \tag{1.285}$$

zieht. Die Norm $||w|| = \sqrt{a(w,w)}$ ist die Wurzel aus dem Integral von M^2/EI.

Betrachten wir nun dagegen einen LF d wie in Bild 1.54. Wegen der fehlenden äußeren Lasten reduziert sich die potentielle Energie auf den positiven Ausdruck, siehe Kapitel 9.25,

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\,a(w,w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx > 0\,. \tag{1.286}$$

In einem LF d ist die potentielle Energie also positiv, ***liegt sie rechts vom Nullpunkt***, und wenn man jetzt die potentielle Energie minimiert, dann sucht man die Verformung u oder w, die die potentielle Energie möglichst nahe an null rückt $0 \leftarrow \Pi(w)$, siehe Bild 1.51. In dieser Situation hat das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie die Bedeutung, die wir ihm normalerweise unterlegen. Das Tragwerk versucht mit möglichst wenig Widerstand, mit möglichst geringen Dehnungen, die Verformungen zu ertragen, die ihm aufgezwungen werden.

Bei der Interpolation mit ***splines*** nutzt man diese Intelligenz des Materials aus, indem man es dem Material überlässt die optimale Kurve w durch den Slalom der Pflöcke zu finden, optimal in dem Sinn, dass die Biegeenergie

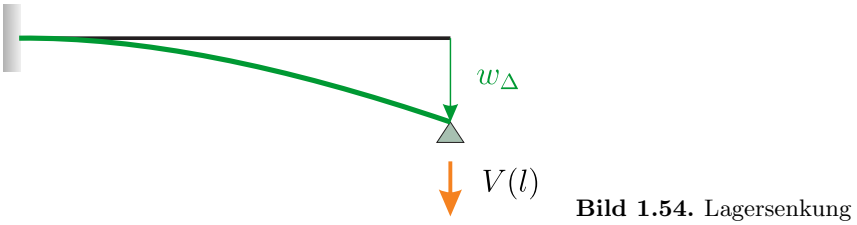


Bild 1.54. Lagersenkung

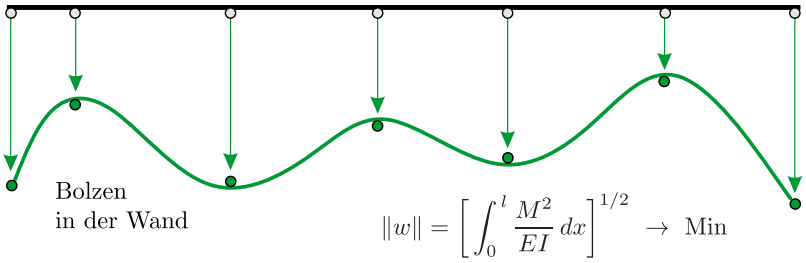


Bild 1.55. Spline Interpolation als LF Lagersenkung

$$\|w\| = \sqrt{a(w,w)} = \left[\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \text{Min} \tag{1.287}$$

möglichst klein wird, möglichst nahe an null rückt, siehe Bild 1.55.

1.40.2 Wenn das Material reißt

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie verrät uns auch, warum die Spannungen in einem Bauteil wachsen, wenn das Bauteil Risse bekommt, siehe Bild 1.56.

Denn dann müssen die Verschiebungen auf den Flanken des Risses nicht mehr gleich sein, wie das der Fall war, als die Flanke noch im Inneren des ungerissenen Bauteils lag. ***Risse vergrößern also den Ansatzraum*** $\mathcal{V}$, weil mehr Funktionen an der Konkurrenz um das Minimum teilnehmen können. Damit rutscht das Minimum aber noch weiter weg vom Nullpunkt, wird es dem Betrage nach größer, und das bedeutet, dass die potentielle Energie und damit die Spannungen in dem Bauteil steigen.

Bei einer aufgezwungenen Lagersenkung haben Risse dagegen den gegenteiligen Effekt, einen heilsamen Effekt, die Spannungen sinken, weil $\Pi(\boldsymbol{u}) > 0$ jetzt näher an null rutschen kann – wieder weil der Ansatzraum $\mathcal{V}$ durch die Risse größer wird.

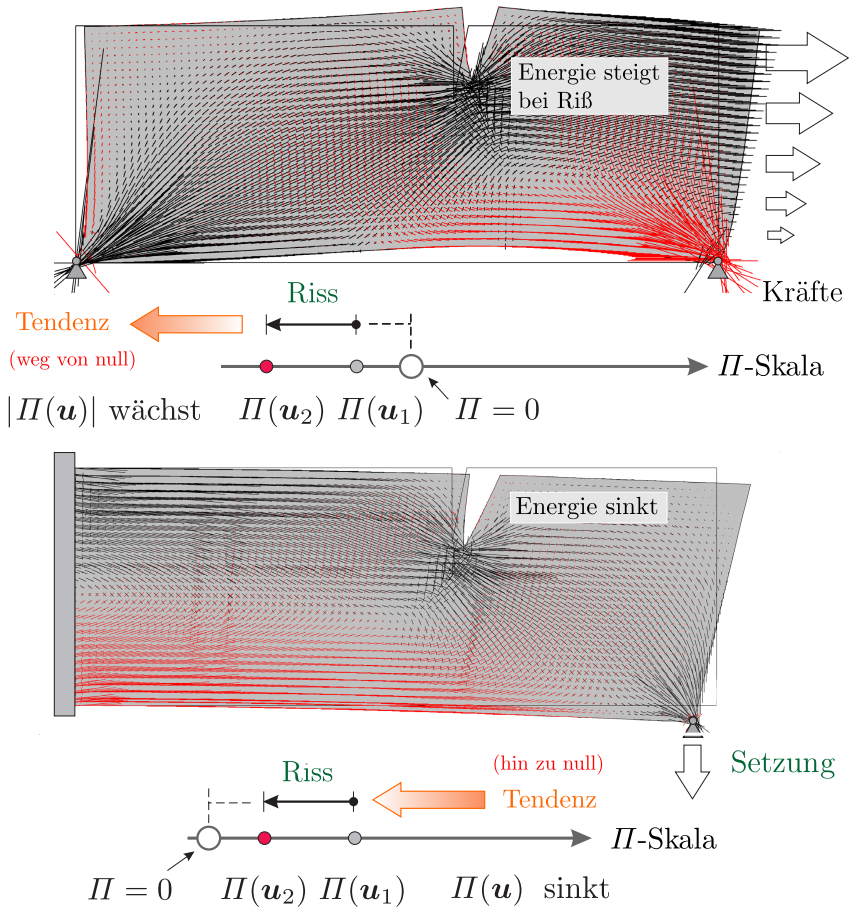


Bild 1.56. In einem LF p (Kräfte) nehmen die Spannungen zu, wenn das Material reißt, $\boldsymbol{u}_1 \to \boldsymbol{u}_2$, während sie in einem LF d (Wege) sinken (BE-SCHEIBE)

1.40.3 Wenn Lager entfallen

Derselben Logik unterliegen auch Durchlaufträger, bei denen die Größe des Ansatzraums $\mathcal{V}$ der Zahl der Lager proportional ist, siehe Bild 1.57. Je mehr Lager vorhanden sind, desto kleiner ist $\mathcal{V}$, weil die wachsende Zahl von Zwangspunkten, $w(x) = 0$, die Zahl der Konkurrenten verringert, $\mathcal{V}$ also schrumpft, und das bedeutet, dass die potentielle Energie in einem LF p dem Betrage nach kleiner wird.

Bei Einzelkräften kann man das direkt an Hand der Wege verfolgen, denn bei diesen ist die potentielle Energie proportional zur Durchbiegung unter der Einzelkraft

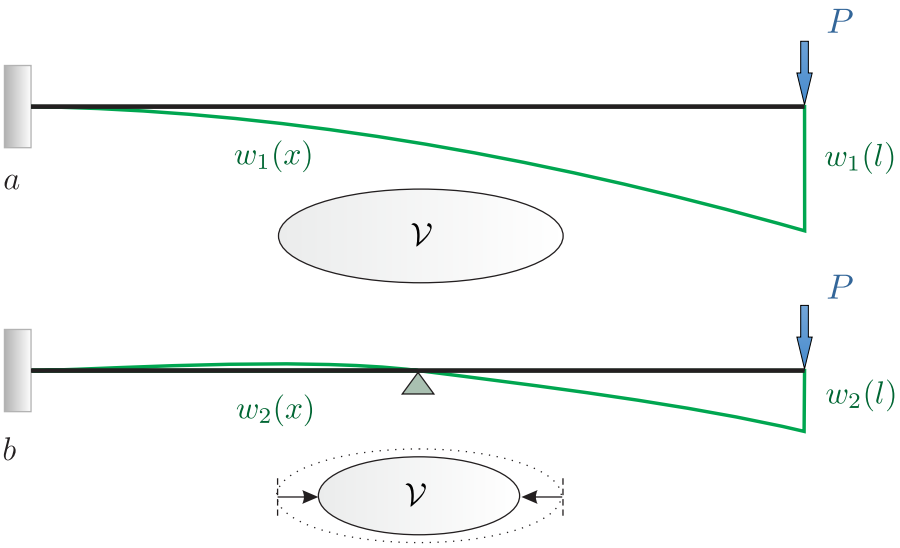


Bild 1.57. Je mehr Lager vorhanden sind, desto kleiner wird der Betrag der potentiellen Energie, weil der Ansatzraum $\mathcal{V}$ schrumpft

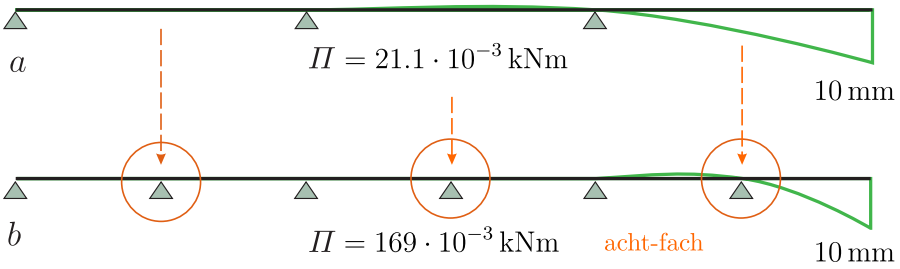


Bild 1.58. Wenn man die Zahl der Lager erhöht (+3), aber die Absenkung unverändert beibehält, dann nimmt die potentiellen Energie um das achtfache zu

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx - P\cdot w(l) = -\frac{1}{2}\,P\cdot w(l) \tag{1.288}$$

und wegen $|\Pi(w_2)| = 0.5\,P\,w_2(l) < |\Pi(w_1)| = 0.5\,P\,w_1(l)$ muss daher gelten, siehe Bild 1.57, dass die Kragarmdurchbiegung kleiner wird, wenn man ein Zwischenlager einbaut.

Das Umgekehrte passiert, wenn man Lager wegnimmt, denn dann wird der Ansatzraum $\mathcal{V}$ größer, weil weniger Forderungen an die Biegelinien gestellt werden, die an der Konkurrenz teilnehmen, und das bedeutet, dass der Betrag $|\Pi(w)|$ der potentiellen Energie wächst.

Das gegenteilige Phänomen hat man, wenn man einen Durchlaufträger, dessen Ende man um einen vorgegebenen Betrag w_Δ nach unten drückt (Lagersenkung), auf zusätzliche Lager stellt, siehe Bild 1.58. Wieder wird der

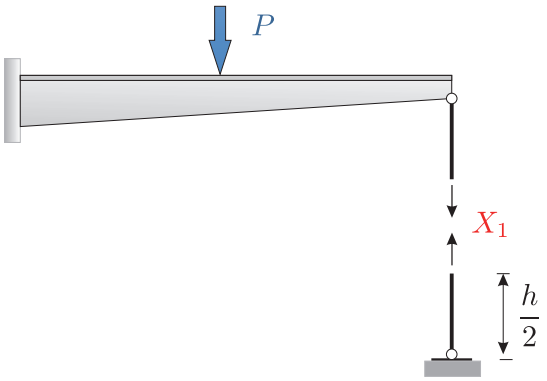


Bild 1.59. Hauptsystem

Ansatzraum $\mathcal{V}$ kleiner, aber weil in einem LF d die potentielle Energie positiv ist, siehe Kap. 9.25, bedeutet dies, dass die potentielle Energie steigt. Man muss Energie zuführen, um einen ausgelenkten Punkt zurück zu binden, $w(x) \to 0$, Übergang von n auf $n+1$ Lager.

Nun könnte man vermuten, dass der Raum $\mathcal{V}$ nur schrumpft, wenn ‚harte' Lagerbedingungen wie $w(x) = 0$ dazu kommen, aber auch ‚weiche' Nebenbedingungen lassen $\mathcal{V}$ schrumpfen. Eine Stütze, die man zum Beispiel unter das Ende eines Trägers stellt, siehe Bild 1.59, stellt einen solchen ***soft constraint*** dar und $\mathcal{V}$ schrumpft trotzdem.

Um das zu verstehen, argumentieren wir wie beim Kraftgrößenverfahren. Der Balken mit der Stütze ist das statisch unbestimmte Hauptsystem und wir wählen die Normalkraft N in der Stütze als statisch Überzählige X_1. Nach dem Einbau des Normalkraftgelenkes können sich der obere und untere Teil unabhängig voneinander bewegen.

Der Raum $\mathcal{V}$ des statisch bestimmten Hauptsystems besteht aus allen Biegelinien w, die die Lagerbedingungen des Balkens erfüllen, $w(0) = w'(0) = 0$, und aus allen Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ der zweigeteilten Stütze. Dieses System ist unserem ursprünglichen System äquivalent, weil die zweigeteilte Stütze keine Lasten trägt.

Die Kraft X_1 unterliegt der Bedingung, dass der obere und untere Teil der Stütze in der Mitte die gleiche Verschiebung aufweisen, $u_1(h/2) = u_2(h/2)$, und das bedeutet das die Zahl der möglichen Funktionen $u_i(x)$ kleiner wird, $\mathcal{V}$ schrumpft.

Wenn man Riegel oder Stiele zu einem Rahmen addiert, schrumpft der Raum $\mathcal{V}$, die Steifigkeit des Tragwerks nimmt zu.

1.41 Unendliche Energie

Die Erzeugung von Einflussfunktionen bedeutet für einen Rahmen eine große Strapaze, denn dabei werden Punktlasten (*all the action at one point*) aufgebracht oder ein Riegel wird geknickt (Sprung in w', EF-M) oder

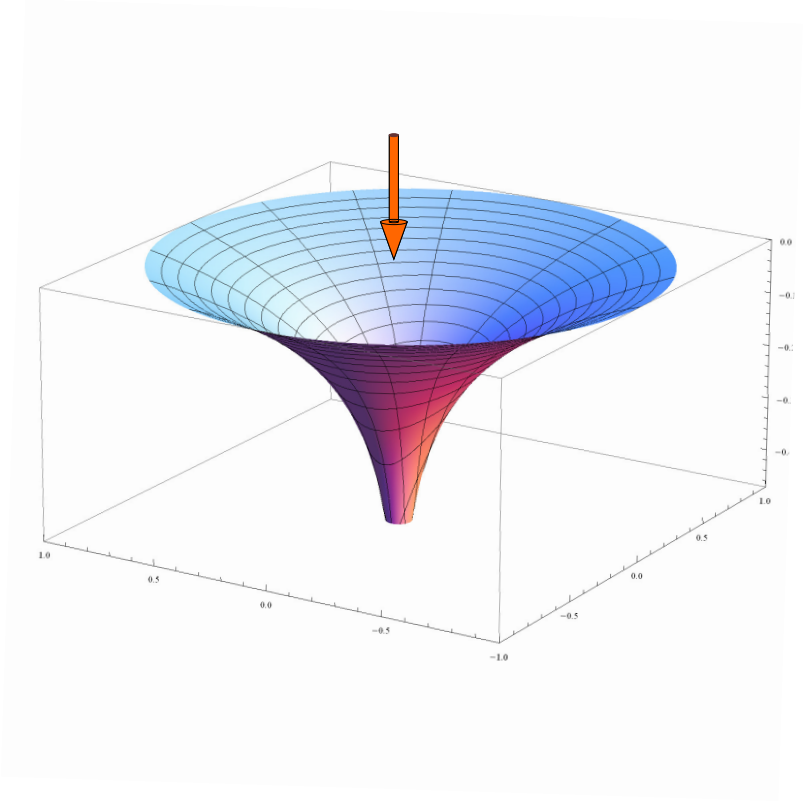


Bild 1.60. Membran und zentrische Punktlast (MATHEMATICA™)

buchstäblich auseinander gerissen, (Sprung in w, EF-V), was bedeutet, dass die **Verzerrungsenergie über alle Grenzen** wächst. Das wollen wir im Folgenden am Beispiel einer Membran, dem einfachst möglichen Flächentragwerk, näher betrachten.

Die kreisförmige Membran mit Radius $R = 1$ überdeckt eine Öffnung Ω und ist am ringförmigen Rand Γ festgemacht. Unter Druck p beult die Membran aus und die Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ ist die Lösung des Randwertproblems

$$-H\Delta u = p \quad \text{in } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma\,. \tag{1.289}$$

Die Konstante H ist die in x_1- und x_2-Richtung gleich große Vorspannkraft in der Membran.

Beim Seil ist $V = H\,w'$ die Querkraft (man denke an den Querkraftsprung unter dem Fuß des Seiltänzers $\bigvee mg = V_L - V_R = H(w'_L - w'_R)$ und bei einer Membran sind es nun zwei Querkräfte v_1 und v_2 (Kräfte/lfd. m)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u_{,x_1} \\ u_{,x_2} \end{bmatrix} = H\,\nabla u\,, \tag{1.290}$$

die proportional den Neigungen der Biegefläche in die beiden Richtungen x_1 und x_2 sind.

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Membran basieren auf der ersten Greenschen Identität des Laplace-Operators, also dem Ausdruck, (wir setzen $H = 1$),

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_\Omega -\Delta u \delta u d\Omega + \int_\Gamma \nabla u \bullet \boldsymbol{n} \delta u \, ds}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \delta u d\Omega}_{\delta W_i} = 0 \,. \tag{1.291}$$

Das Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und dem Normalenvektor

$$\nabla u \bullet \boldsymbol{n} = u_{,x_1} \, n_1 + u_{,x_2} \, n_2 = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{1.292}$$

ist die Normalableitung der Biegefläche (*the slope*), also die Neigung der Membran am Rand in Richtung des nach Außen zeigenden Normalenvektors. Wenn die Durchbiegung zum Rande hin kleiner wird, wie das die Regel ist, ist die Normalableitung negativ und wir haben Gleichgewicht zwischen der abwärts gerichteten Flächenkraft $p \downarrow$ und den aufwärts gerichteten Haltekräften $\partial u / \partial n \uparrow$ am Rand

$$\mathscr{G}(u, 1) = \int_\Omega p \cdot 1 \, d\Omega + \int_\Gamma \nabla u \bullet \boldsymbol{n} \cdot 1 \, ds = 0 \,. \tag{1.293}$$

Wird die Membran in ihrer Mitte $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ mit einer Einzelkraft $P = 1$ belastet, siehe Bild 1.60, dann bildet sich ein unendlich tiefer Trichter aus,

$$G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi} \, \ln r \qquad r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \,, \tag{1.294}$$

weil die Einzelkraft keinen Halt findet.

Uns interessiert der ***Energieerhaltungssatz*** in diesem Lastfall, also die Gleichung

$$\frac{1}{2} \; \mathscr{G}(G, G) = W_e - W_i = 0 \,, \tag{1.295}$$

die wir ohne den Faktor $1/2$ schreiben, weil er für die Argumentation nicht wesentlich ist.

Der Gradient der schlauchartigen Biegefläche G verläuft wie $1/r$

$$\nabla G = \frac{1}{2\,\pi} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{1.296}$$

und wegen

$$\nabla G \bullet \nabla G = \frac{1}{4\,\pi^2} \frac{1}{r^2} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{1}{4\,\pi^2} \frac{1}{r^2} \tag{1.297}$$

ist die innere Energie **unendlich groß**,

$$W_i = \int_\Omega \nabla G \bullet \nabla G d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\varphi = \infty \,, \tag{1.298}$$

denn das Integral von $1/r$

$$\int_0^1 \frac{1}{r} \, dr = \infty \tag{1.299}$$

ist unbeschränkt. Passend hierzu ist auch die äußere Arbeit unendlich groß

$$W_e = P \cdot \infty \,, \tag{1.300}$$

weil P ja keinen Halt findet. In sich ist das Resultat zwar stimmig

$$W_e - W_i = \infty - \infty = 0 \,, \tag{1.301}$$

aber mit unendlich kann man leider nicht rechnen, unendlich ist einfach nur ‚unzählbar viel'.

Der Grund ist, dass wir uns bei der Formulierung von W_i auf der **Diagonalen** der ersten Greenschen Identität befinden

$$\frac{1}{2} \ \mathscr{G}(G, G) = W_e - W_i = 0 \tag{1.302}$$

und sich deshalb die Singularität im Integral verdoppelt. Aus $1/r$ wird $1/r^2$ was nicht mehr integrierbar, nicht mehr messbar ist.

Dies wiederholt sich in der **Elastizitätstheorie**. Wenn man eine Kreisscheibe, $R = 1$, mit einer Einzelkraft belastet, dann verhalten sich die Dehnungen und Spannungen wie $1/r$ und durch das Verdoppeln der Singularität auf der Diagonalen wird W_i unendlich groß,

$$W_i = \int_\Omega \sigma_{ij} \, \varepsilon_{ij} \, d\Omega \simeq \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \infty \,. \tag{1.303}$$

Ebenso im 3-D, wo sich die Spannungen σ_{ij} und Dehnungen ε_{ij} wie $1/r^2$ verhalten und das Volumenelement $d\Omega = r^2 \, dr \, d\varphi \, \sin\theta \, d\theta$ der verdoppelten Singularität $1/r^4$ nicht paroli bieten kann, die innere Energie ‚alle Grenzen' sprengt.

Bei einer kreisförmigen Platte (Kirchhoff) mit einer zentralen Einzelkraft P hat die Biegefläche hingegen die Gestalt

$$w(\boldsymbol{x}) = P \cdot \frac{1}{8\pi K} \, r^2 \ln r + \text{reguläre Terme} \,, \tag{1.304}$$

und die Momente m_{ij} bzw. Krümmungen κ_{ij} gehen daher ‚nur' wie

$$m_{ij} \sim \ln r \tag{1.305}$$

gegen Unendlich und so ist die innere Energie der Platte mit Radius $R = 1$

$$W_i = \int_\Omega m_{ij}\kappa_{ij}\, d\Omega \sim \int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln^2 r \underbrace{r\, dr\, d\varphi}_{d\Omega} + \text{endliches Integral} \tag{1.306}$$

beschränkt, ist W_i endlich, weil der Integrand $\ln^2 r \cdot r$ in der Grenze gegen null geht, $r \to 0$ behält die Oberhand gegenüber $\ln^2 r \to \infty$[17],

$$\lim_{r\to 0} \ln^2 r \cdot r = 0\,. \tag{1.307}$$

Wie bei der Scheibe verursacht die Punktlast $P = 1$ eine $1/r$ Singularität des Kirchhoffschubs v_n (der ‚dritten' Ableitung),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \frac{1}{2\pi r}\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1\,, \tag{1.308}$$

weil aber die Plattengleichung von vierter Ordnung ist, braucht es drei Schritte von v_n hoch zu w

$$w = \int\int\int v_n (d\Omega)^3 \simeq r^2 \ln r \qquad \textbf{(drei Schritte)} \tag{1.309}$$

und das reicht, um die Singularität zu dämpfen. Bei Problemen zweiter Ordnung, wie der Scheibe, trennt dagegen nur eine Integrationsstufe $\sigma \simeq 1/r$ von u und das ist nicht genug

$$u \simeq \int \frac{1}{r}\, dr = \ln r \qquad \textbf{(ein Schritt)}\,. \tag{1.310}$$

1.42 Sobolevscher Einbettungssatz

In dieses scheinbare Durcheinander von endlicher und unendlicher Energie kann man nun mit dem *Sobolevschen Einbettungssatz* eine gewisse Systematik hineinbringen. Er erlaubt genaue Voraussagen, wann die innere Energie endlich ist und wann nicht, [126].

Eine Einflussfunktion hat eine **endliche Energie**, wenn die Ungleichung

$$m - i > \frac{n}{2} \tag{1.311}$$

erfüllt ist[18]. Hier ist $2\,m$ die Ordnung des Differentialoperators, i ist die Ordnung der Singularität, die in unserer Notation identisch ist mit dem Index i an dem Dirac Delta δ_i, und n ist die Dimension des Raums. Bei Scheiben ist

[17] ‚That's a guess, no one has had the patience to wait for it yet' (Terence Tao).

[18] Die Tabelle auf Seite 788 enthält eine systematische Auswertung der Ungleichung im Zusammenhang mit den Gleichungen der Statik.

$n = 2$, das Differentialgleichungssystem hat die Ordnung $2\,m = 2$ und daher hat das Verschiebungsfeld, das von einer Einzelkraft, $i = 0$, erzeugt wird eine unendlich große Energie, weil die Ungleichung

$$1 - 0 > \frac{2}{2} = 1 \ ? \tag{1.312}$$

nicht gilt, während sie im Fall der Kirchhoffplatte, $2m = 4$, gilt

$$2 - 0 > \frac{2}{2} = 1\,. \tag{1.313}$$

Wir können es auch so formulieren:

Die innere Energie W_i ist unendlich, wenn die äußere Arbeit W_e unendlich ist und das ist genau dann der Fall, wenn in

$$W_e = \mathit{Kraft} \ \times \ \mathit{Weg} \tag{1.314}$$

einer der beiden Größen unendlich ist.

Bei der Membran ist die Kraft zwar endlich, $P = 1$, aber sie findet keinen Halt, sie endet im Punkt ∞. Auch bei einer Scheibe ist das so. Anders aber bei einer Platte: Die Durchbiegung unter einer Kraft $P = 1$ ist beschränkt und daher auch die Arbeit $W_e = \mathit{Kraft} \times \mathit{Weg} < \infty$.

Die Energie ist immer unendlich, wenn das Material über die Fließgrenze hinaus deformiert wird, wie das zur Erzeugung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen nötig ist. Die Einflussfunktion für eine Normalkraft N in einem Stab entsteht ja durch ein Verschiebungssprung, man muss den Stab im Aufpunkt also buchstäblich zerreissen, und der Knick in der Einflussfunktion für ein Moment M bildet sich nur dann aus, wenn man den Balken im Aufpunkt zum Fließen bringt.

Bei Flächentragwerken haben eigentlich alle Einflussfunktionen, auch die für Weggrößen, eine unendlich große Energie. Die Ausnahme ist die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ einer **Kirchhoffplatte**[19].

‚Wenn aber die Energie der Einflussfunktionen unendlich ist, wieso kann man dann mit ihnen rechnen?' Der Unterschied ist, dass man bei der Anwendung des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* oder des *Prinzips der virtuellen Kräfte* auf der **‚Nebendiagonalen'** ist

$$\mathscr{G}(G, u) = \delta W_e - \delta W_i = 0\,, \tag{1.315}$$

und sich daher die Singularität nicht verdoppelt, die virtuelle innere Energie δW_i bleibt endlich

[19] Die schubstarre Kirchhoffplatte ist die ‚Fortsetzung' des Biegebalkens $EI\,w^{IV}$ in die Fläche. Im Unterschied hierzu ist die Mindlin-Reissner Platte eine schubweiche Platte, siehe Kapitel 7. Im Regelfall meint der Ingenieur die Kirchhoffplatte, wenn er von Platten spricht. FE-Programme rechnen meist jedoch schubweich.

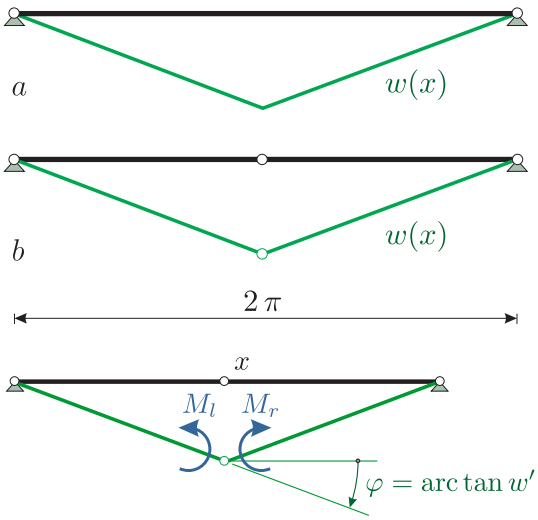


Bild 1.61. Balkenbiegelinien, **a)** mit unendlich großer Energie, $(M, M) = \infty$, **b)** mit endlicher Energie, hier sogar null

Bild 1.62. Definition des Winkels φ

$$\delta W_e = 1 \cdot u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \nabla G \bullet \nabla u d\Omega = \delta W_i \,, \tag{1.316}$$

weil das $1/r$ des Gradienten ∇G durch das r in dem Flächenelement $d\Omega = r\, dr\, d\varphi$ ausgeglichen wird. Genau genommen müssen wir auch noch fordern, dass der Gradient von u beschränkt ist, $|\nabla u| \leq \infty$.

Der *Satz von Betti* ist von den Singularitäten der Einflussfunktionen auch betroffen, aber weil in den Büchern nur das Endergebnis steht

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G, u)_{\Omega_\varepsilon} = u(\boldsymbol{x}) - \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \,, \tag{1.317}$$

sieht alles glatt aus. Die Singularität hat den Term $u(\boldsymbol{x})$ produziert und der Rest sind alles Integrale, deren Berechnung man bequem dem Computer überlassen kann (numerische Quadratur).

Bemerkung 1.4. Die charakteristischen Singularitäten der verschiedenen Einflussfunktionen G_i für *solids*, Scheiben und Platten, bis hinunter zu den Einflussfunktionen für Momente und Querkräfte, findet der interessierte Leser in [117] und [118]. Dort werden auch die Grenzprozesse

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{G}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \,, \tag{1.318}$$

die ja den Einflussfunktionen zu Grunde liegen, detailliert diskutiert.

Bemerkung 1.5. **Ingenieur vs. Mathematiker** Ein Mathematiker wird darauf hinweisen, dass unendlich viel Energie nötig ist, um einen Knick in einem Balken zu erzeugen, und zur Bekräftigung seiner Behauptung wird er die Biegelinie w des Balkens, siehe Bild 1.61 *a*, in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$w(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots) \tag{1.319}$$

und dem Ingenieur die Energie vorrechnen

$$\frac{1}{2}\cdot EI\int_0^{2\pi}(w''(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot EI\cdot\frac{16}{\pi}(1+1+1\ldots) = \infty\,. \tag{1.320}$$

Aber der Ingenieur installiert erst ein (Fließ) Gelenk[20] und verdreht dann die beiden Seiten des Gelenkes so, dass $\tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1$. Die Biegeenergie ist dann einfach die Energie, die notwendig ist, um die Balkenenden am Gelenk zu verdrehen und diese Energie ist endlich. Im Fall des statisch bestimmten Balkens in Bild 1.61 *b* ist sie sogar null, weil ja $w'' = 0$ ist.

Bemerkung 1.6. In Bild 1.62 ist angetragen, wie der Winkel φ gezählt wird. Aus graphischen Gründen werden wir gelegentlich den rechten Winkel anders drehen lassen, aber rechnerisch gilt Bild 1.62.

Die Arbeit, die die beiden Momente, links und rechts vom Gelenk, leisten, ist

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(w,\delta w) &= \mathscr{B}(w_l,\delta w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(w_r,\delta w)_{(x,l)}\\ &= \ldots - M_l\cdot\delta w_l' + M_r\cdot\delta w_r' + \ldots = 0\,.\end{aligned} \tag{1.321}$$

Mit der Bezeichnung in Bild 1.62 geht dieser Ausdruck über in

$$\begin{aligned}-M_l\cdot\delta w_l' + M_r\cdot\delta w_r' &= -M_l\cdot\tan\varphi_l + M_r\,\tan\varphi_r\\ &= -M\,(\tan\varphi_l - \tan\varphi_r)\,.\end{aligned} \tag{1.322}$$

Wenn wir diesen Term auf die linke Seite bringen, dann verschwindet das Minuszeichen

$$M\cdot(\tan\varphi_l - \tan\varphi_r) = M\cdot 1 = \ldots \tag{1.323}$$

In den Büchern wird das meist als

$$M\cdot\Delta\varphi = M\cdot 1 = \ldots\,, \tag{1.324}$$

geschrieben, weil für kleine Winkel $\tan\varphi \simeq \varphi$. Einige Autoren gehen so weit die Differenz $\Delta\varphi = \tan\varphi_l - \tan\varphi_r$ mit der Dimension *rad* oder *degree* zu schreiben, aber der Tangens, $dw/dx = [\mathrm{m}]/[\mathrm{m}]$, ist dimensionslos. Wenn ein M das Balkenende um 45° verdreht, dann beträgt die Arbeit

$$M\cdot\tan 45^\circ = M\,[\mathrm{N{\cdot}m}]\cdot 1 = M\,[\mathrm{N{\cdot}m}] \tag{1.325}$$

und nicht

$$M\cdot 45^\circ = M\,[\mathrm{N{\cdot}m}]\cdot 45^\circ[\mathrm{rad}] \qquad (?) \tag{1.326}$$

Bemerkung 1.7. Für weitere Hinweise zu dem Sobolevschen Einbettungssatz siehe Kapitel 9.48.

[20] Wofür er ∞ viel Energie braucht. Er blendet diesen *step ante* aber aus.

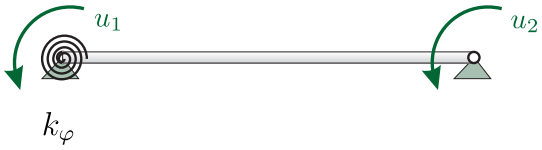


Bild 1.63. Elastische Einspannung

1.43 Drehfedern

Hierin gehören auch die Drehfedern, $M = k_\varphi \cdot \varphi$, deren Steifigkeit k_φ üblicherweise in N·m/Winkel angegeben wird.

Wenn ein Einfeldträger links elastisch eingespannt ist, wie in Bild 1.63, dann addiert der Praktiker einfach das k_φ zur Steifigkeitsmatrix

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 4\,l^2 + \boxed{k_\varphi} & 2\,l^2 \\ 2\,l^2 & 4\,l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \tag{1.327}$$

Theoretisch hat er jetzt ein Problem, weil der Drehfreiheitsgrad u_1 (und auch u_2) der Tangens des Drehwinkels ist und nicht der Winkel selbst. Er kommt aus der Klemme, wenn er sich auf kleine Winkel beschränkt, $\tan(\varphi) = \varphi + \varphi^3/3 + \ldots$, denn dann ist die Inkompatibilität in den Dimensionen nicht merkbar und das ‚passt', denn $w' \ll 1$ ist ja gerade die Grundannahme in der Balkenstatik, weil sich dann die Krümmung zu $\kappa = w''$ vereinfacht.

1.44 Der Reduktionssatz

Der *Reduktionssatz* ist eine spezielle Variante der Mohrschen Arbeitsgleichung. Zur Berechnung der horizontalen Verschiebung u_i des Rahmens in Bild 1.64 würde Mohr eine Kraft $X_1 = 1$ in Richtung der gesuchten Verschiebung u_i wirken lassen, und das Integral

$$1 \cdot u_i = \sum\nolimits_e \int_0^{l_e} \left(\frac{M\,M_1}{EI} + \frac{N\,N_1}{EA}\right) dx \tag{1.328}$$

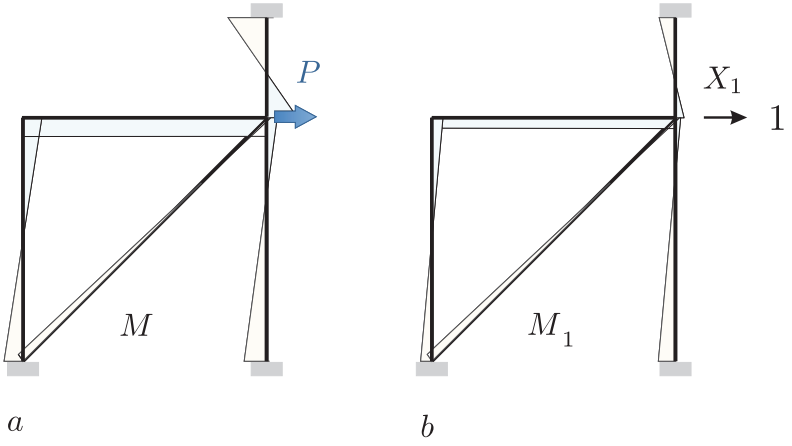
auswerten, also über alle Stäbe des Rahmens integrieren.

Gemäß dem Reduktionssatz reicht es jedoch aus, die Einzelkraft $X_1 = 1$ an einem statisch bestimmten **Teilsystem** des ursprünglichen Tragwerkes wirken zu lassen.

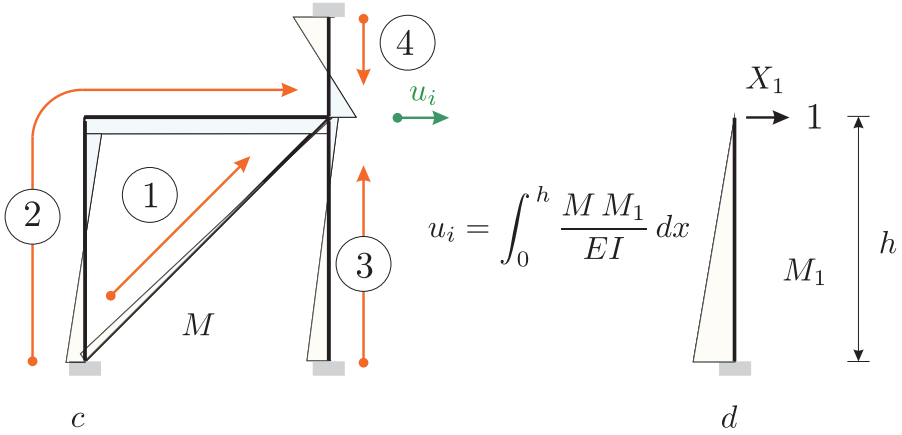
Wir verstehen das besser, wenn wir uns klarmachen, dass der Knoten, der die Last trägt, auf vier verschiedenen Wegen angesteuert werden kann, siehe Bild 1.64 *c*, und dass auf jedem Pfad die Summe der horizontalen Verschiebungsinkremente du_i, ihr Integral, gleich u_i sein muss.

Wir können also u_i berechnen, indem wir zum Beispiel nur über den Pfosten in Bild 1.64 *d* integrieren

$$1 \cdot u_i = \int_0^{l} \left(\frac{M\,M_1}{EI} + \frac{N(N_1 = 0)}{EA}\right) dx\,. \tag{1.329}$$



$$1 \cdot u_i = \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{M\, M_1}{EI} + \frac{N\, N_1}{EA}\right) dx$$



$$u_i = \int_0^{h} \frac{M\, M_1}{EI}\, dx$$

Bild 1.64. Anwendung des Reduktionssatzes, **a)** und **b)** Momentenverlauf und Mohrsche Formulierung, **c)** auf unterschiedlichen Pfaden ist das Ergebnis dasselbe, **d)** Reduktionssatz

Der Reduktionssatz besagt, dass das Dirac Delta, das X_1, nicht auf den ursprünglichen Rahmen aufgebracht werden muss, sondern dass es irgendein Teilsystem sein kann, das in dem ursprünglichen System ‚enthalten' ist, siehe Bild 1.64 *d*. Enthalten bedeutet, dass beim Übergang zum Teilsystem die Festhaltungen von Knoten gelöst werden können, aber das keine zusätzlichen Festhaltungen eingebaut werden dürfen. In der Sprache der Mathematik bedeutet dies: Der **Dirichlet Rand** (die Lagerknoten) kann schrumpfen, aber er

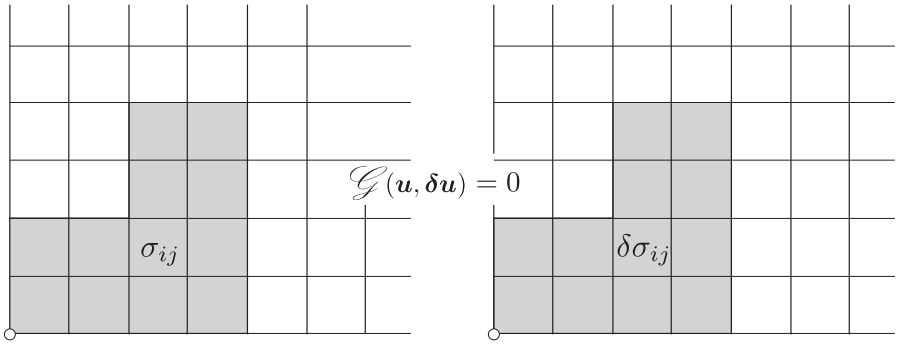


Bild 1.65. Kopplung zweier Spannungszustände auf einem Teilnetz

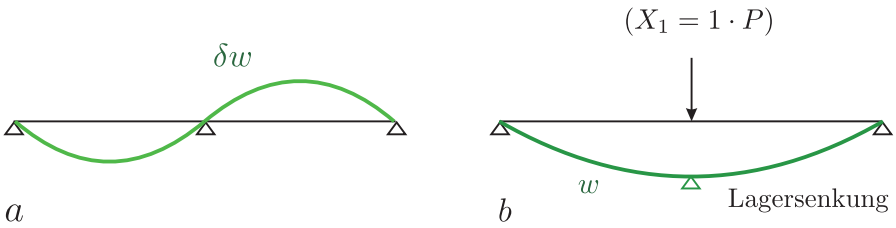


Bild 1.66. Virtuelle Verrückung und Lagersenkung

darf nicht wachsen, [126] p. 149. Die zulässigen Teilsysteme sind üblicherweise gerade die Teilsysteme, die man auch beim Kraftgrößenverfahren wählen würde, wie den einzelnen Pfosten.

Der Reduktionssatz ist eine geschickte Anwendung der ersten Greenschen Identität, denn weil diese für jedes einzelne Stabelement null ist

$$\sum\nolimits_e \mathscr{G}(u, u_1)_e = 0 + 0 + \ldots = 0\,, \tag{1.330}$$

ist sie auch für jedes Teilsystem null. Der ‚Trick' besteht darin, Teilsysteme zu wählen, die sich leichter analysieren lassen, weil sie statisch bestimmt sind.

Nur muss man eben Systeme vermeiden, die bei der Formulierung der Identitäten $\mathscr{G}(u, u_1) = 0$, nach unbekannten Knotenverschiebungen oder Knotenkräften fragen. Das ist die Essenz der obigen ‚**Dirichlet Bedingung**'. Wenn man sich aber von dem Kraftgrößenverfahren leiten lässt, dann kommt man nicht in diese Verlegenheit.

Die Idee der Teilsysteme lässt sich natürlich auf jedes FE-Netz anwenden. Auf jedem Teilnetz kann man unterschiedliche Spannungszustände via der Greenschen Identität in einer Null-Summe koppeln, siehe Bild 1.65

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,. \tag{1.331}$$

Mit dem Reduktionssatz kann man auch leicht zeigen, dass Biegelinien w aus Lagersenkung orthogonal sind zu den virtuellen Verrückungen δw des Systems,

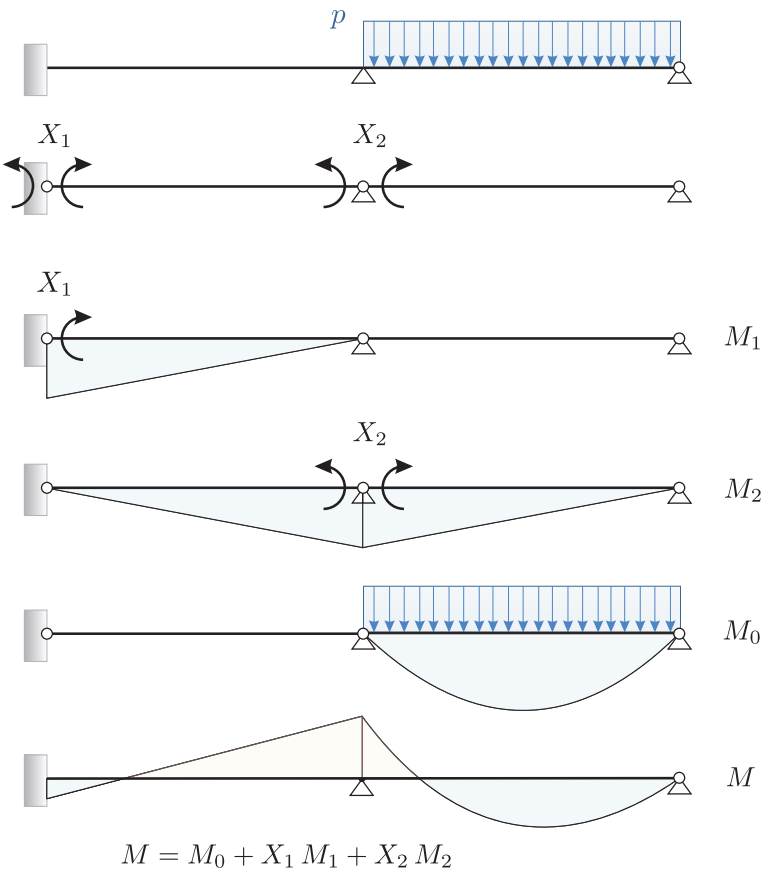


Bild 1.67. Kraftgrößenverfahren

siehe Bild 1.66. Die Absenkung kann man sich als Reaktion des Trägers ohne Zwischenlager (= Hauptsystem) auf eine Kraft $X_1 = 1 \cdot P$ vorstellen (auf den Faktor P kommt es nicht an) und gemäß Reduktionssatz muss gelten

$$\delta W_i(w, \delta w) = \int_0^l \frac{M \delta M}{EI}\, dx = 0 \qquad M = P \cdot M_1\,, \tag{1.332}$$

weil dieser Ausdruck gerade das P-fache der Durchbiegung der virtuellen Verrückung δw im Zwischenlager ist, aber δw ist null, siehe Bild 1.66 *a*.

Der Reduktionssatz gilt auch für Flächentragwerke, nur rechnet da niemand mit ‚Mohr'

$$u(\boldsymbol{x}) = a(G_0, u)\,. \tag{1.333}$$

Man könnte Betti benutzen und die Einflussfunktion an einem einfacheren System berechnen, aber dann gehen die eigentlich versteckten Lagerkräfte an

dem ursprünglichen System mit in die Rechnung ein – sie werden ja dann mit verschoben, leisten Arbeit – und das schafft neue Probleme, die die Randelemente aber erfolgreich lösen. Technisch formulieren die Randelemente ja $W_{1,2} = W_{2,1}$ am rundum frei geschnittenen System – ‚jeder darf mitmachen'.

1.45 Das Kraftgrößenverfahren

Beim Kraftgrößenverfahren macht man ein Tragwerk durch den Einbau von M-, V- oder N-Gelenken statisch bestimmt, siehe Bild 1.67.

Die **statisch Überzähligen** X_i werden so bestimmt, dass die Klaffungen in den Gelenken null sind

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{1.334}$$

Die δ_{ij} sind die Relativverdrehungen/Verschiebungen zwischen den X_i (links und rechts vom Gelenk) und die δ_{i0} sind dieselben Größen aus der Belastung. Ihre Berechnung beruht auf der Mohrschen Arbeitsgleichung

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI}\, dx\,, \tag{1.335}$$

die ja mit der ersten Greenschen Identität identisch ist

$$\mathscr{G}(w_i, w_j) = \delta_{ij} - a(w_i, w_j) = \delta_{ij} - \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI}\, dx = 0\,. \tag{1.336}$$

Die Biegelinien w_i und w_j sind die Linien, die zu X_i und X_j gehören (sie werden zum Glück nicht gebraucht – nur ihre Momente) und der einzelne, isolierte Term

$$\delta_{ij} = [V_i w_j - M_i w_j']_0^l \tag{1.337}$$

ist sozusagen der ‚Rest', das was von den eckigen Klammern, den Randarbeiten, in der Summe über alle Stäbe übrig bleibt. Der Rest $\delta_{ij} = Spreizung \cdot 1$ hat immer die Dimension einer Arbeit.

Zur Berechnung der δ_{i0} ersetzt man in den obigen Formeln das zweite Momente M_j durch das Moment M_0 am statisch bestimmten Hauptsystem aus der Belastung.

1.46 Die Diagonale

Ohne Diagonalen würde ein Fachwerk wie ein Kartenhaus zusammenfallen. Jedes Gerüst muss durch Diagonalen stabilisiert werden. Fehlen diese, wie bei einem Stockwerkrahmen, dann müssen Eckmomente für den seitlichen Halt



Bild 1.68. John Hancock Tower Chicago, [322]

sorgen. In Gedanken ist man ja immer versucht, einen Vierendeel-Träger durch Diagonalen zu stabilisieren.

An einem Gittermast kann man verfolgen, wie die Last über die Diagonalen und die Pfosten und die Riegel nach unten in die Lager geleitet wird. Die Knoten des Fachwerks sind die Stationen auf diesem Weg nach unten, und der Kraftfluss ist so ausbalanciert, dass in jedem Knoten die ab- und zufließenden Stabkräfte im Gleichgewicht sind[21], $f_i = 0$. Die Geometrie des Fachwerks bestimmt implizit den Kraftfluss.

Ein gelenkig gelagerter Diagonalstab stemmt sich gegen (ungleiche) Bewegungen seiner Enden. Er ist ein ‚Splitter', denn die Strebenkraft S hat eine horizontale und vertikale Komponente

[21] So wie in Bild 3.23, $f_{hi} = 0$. Die Stäbe stehen unter Spannung, aber außen sieht man davon nichts. Eine probeweise Verrückung eines Knotens und damit der am Knoten hängenden internen Kräfte um 1 m ergibt null Arbeit; das bedeutet energetisch $f_i = 0$.

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = S_x\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = S_y\sqrt{1 + 1/\tan^2\varphi} \tag{1.338}$$

und so kann man über die Neigung φ des Stabes den Kraftfluss steuern und das Tragwerk aussteifen, siehe Bild 1.68.

Das rechtwinklige Dreieck zählt zu den **Urphänomenen** der Physik. Mit der Schrägen kommen der *Pythagoras* und der *cosinus* und der *sinus* – die Projektion – in die Physik

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \qquad \sin\varphi = l_y/l \qquad \cos\varphi = l_x/l \tag{1.339}$$

und das Steigungsdreieck

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1.340}$$

krönt diese Bedeutung; und gefühlt gilt:

Der *sinus* ist für die Last und der *cosinus* für den Wind.

In der Potentialtheorie ist es der Sehstrahl $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$, in dem man die Diagonale wiedererkennt

$$\cos\varphi = \frac{y_1 - x_1}{r} = r_{,y_1} = -r_{,x_1} \qquad \sin\varphi = \frac{y_2 - x_2}{r} = r_{,y_2} = -r_{,x_2}\ . \tag{1.341}$$

Die Geometrie des Dreiecks bestimmt auch die Effekte der spez. Relativitätstheorie. Die Lichtgeschwindigkeit c, die Geschwindigkeit v des Zeitreisenden und die Projektion von v auf die x-Achse bilden ein Dreieck und der $\cos\gamma$ des Winkels in diesem Dreieck bestimmt, wie groß die Zeitdilatation bzw. die Längenverkürzung ist, siehe Bild 11.3. Geht $v \to c$, dann bedeutet das $1/\cos\gamma = \infty$; die Zeit $t' = t/\cos\gamma$ bleibt für den Reisenden praktisch stehen ($t = 1$ Minute auf der Erde ist $t' = \infty$ im Raumschiff) und die Länge $l' = l\cos\gamma$ seines Raumschiffs geht gegen null; beides aus der Sicht des unbewegten Beobachters.

Beim Seileck wird diese Grenze erreicht, wenn man die Vorspannung $H \to \infty$ unendlich groß macht, denn dann geht der Durchhang gegen null und $1/w' = \cos\varphi/\sin\varphi \to \infty$ geht gegen Unendlich, aber vorher reißt natürlich das Seil.

1.47 Wo läuft es hin?

Wir haben oben von der **Null-Summe** der ersten Greenschen Identität gesprochen. Dieser Begriff hat auch eine direkte statische Relevanz, wie die beiden folgenden Beispielen zeigen sollen.

Ein fester Punkt reicht Archimedes nicht aus, um die Welt aus den Angeln zu heben. Er benötigt auch einen Hebel mit $EI = \infty$, siehe Bild 1.69 *a*, denn sonst geht seine ganze Kraft nur in die Verkrümmung des Hebels.

Wegen $\mathscr{G}(w, w) = W_e - W_i = 0$ sind zu jedem Zeitpunkt die äußere Arbeit und die Biegeenergie in dem Balken gleich groß (wir lassen den Faktor 1/2 weg)

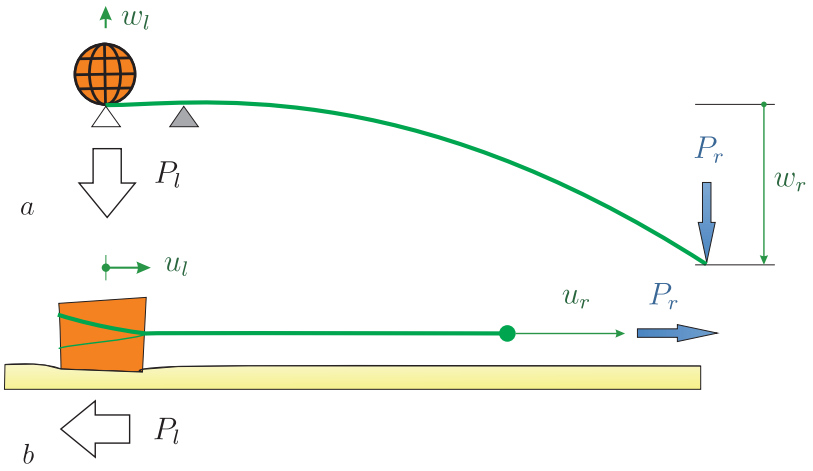


Bild 1.69. Archimedes' Dilemma: Aller Aufwand fließt in die Biegeenergie des Hebels, **a)** die Erde wird sich keinen Millimeter bewegen, **b)** und das Zugband wird lang und länger...

$$W_e = P_r \cdot w_r - P_l \cdot w_l = a(w,w) = \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = W_i \tag{1.342}$$

oder aufgelöst nach dem angestrebten Effekt

$$P_l \cdot w_l = a(w,w) - P_r \cdot w_r \simeq 0\,, \tag{1.343}$$

der aber praktisch null ist, weil der ganze Aufwand von Archimedes, $P_r \cdot w_r$, in die Verkrümmung des Balkens fließt, also in die Biegeenergie $a(w,w)$, und praktisch nichts auf der linken Seite der Gleichung ankommt, nichts übrigbleibt, um die Erde anzuheben.

Dasselbe passiert, wenn man ein schweres Gewicht über den nassen Sand am Strand zieht wie in Bild 1.69 *b*, [125],

$$W_e = \underbrace{P_r \cdot u_r}_{Aufwand} - P_l \cdot u_l = a(u,u) = \int_0^l \frac{N^2}{EA}\, dx = W_i\,. \tag{1.344}$$

Das Zugband wird lang und länger, die Verzerrungsenergie $a(u,u)$ wächst und wächst, aber das Gewicht wird sich kaum bewegen, $u_l \simeq 0$,

$$P_l \cdot u_l = a(u,u) - P_r \cdot u_r \simeq 0\,. \tag{1.345}$$

Das Null-Summen Spiel der ersten Greenschen Identität erlaubt es dem Balken bzw. dem Band auszuweichen. Der Anwender hat keine Kontrolle darüber, wo sein Effort, seine Energie hinfließt. Sie muss im System stecken, aber wo genau am Schluss? Das ist, wenn man so will, die **‚Unschärfe'** in der Statik.

Eine ähnliche Situation entsteht, wenn man Steifigkeiten ändert. Wie reagiert ein Tragwerk, wenn man eine Stütze wegnimmt oder in eine Wand eine Öffnung einbaut? Die Last ändert sich nicht, nur der Kraftfluss – aber wie? Wir wissen nur, siehe Kapitel 3.38, dass der Übergang in die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ nicht willkürlich geschieht, sondern dass die neue Lage $\boldsymbol{u}_c$ mit der alten Lage $\boldsymbol{u}$ kompatibel sein muss,

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}\,, \tag{1.346}$$

weil sich $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c$ nicht ändert.

1.48 Finite Elemente und die erste Greensche Identität

Es sei auch noch vor einem möglichen Missverständnis gewarnt: Die erste Greensche Identität ist identisch mit $\delta\Pi = 0$, aber nicht identisch mit der Gleichung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Ist u die Längsverschiebung eines Stabes, links fest, rechts frei,

$$-EAu'' = p \qquad u(0) = 0\,, \quad N(l) = 0 \tag{1.347}$$

und δu eine virtuelle Verrückung, $\delta u(0) = 0$, dann gilt

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = (p, \delta u) - a(u, \delta u) = 0 \tag{1.348}$$

und daher ebenso, wegen $\varphi_i(0) = 0$, (gilt für alle $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$),

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = (p, \varphi_i) - a(u, \varphi_i) = 0\,. \tag{1.349}$$

Das ist die Vorlage zur Bestimmung der FE-Lösung $u_h(x) = \sum_j u_j\,\varphi_j(x)$

$$(p, \varphi_i) - a(u_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.350}$$

also $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Man ist versucht, das mit

$$\mathscr{G}(u_h, \varphi_i) = (p_h, \varphi_i) - a(u_h, \varphi_i) = 0 \tag{1.351}$$

gleichzusetzen, also die FEM auf die bequeme Formulierung

$$\mathscr{G}(u_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.352}$$

zu reduzieren, aber die Belastung in (1.351) ist $p_h = -EAu_h''$ und nicht p

$$\text{FEM} = \underset{\uparrow}{(p, \varphi_i)} - a(u_h, \varphi_i) \neq \underset{\uparrow}{(p_h, \varphi_i)} - a(u_h, \varphi_i) = \mathscr{G}(u_h, \varphi_i)\,. \tag{1.353}$$

Die FE-Gleichungen (1.350) sehen so ähnlich aus, wie die erste Greensche Identität, (1.351), sind aber mit ihr nicht deckungsgleich – sie versuchen nur

die Identität mit der FE-Lösung u_h nachzubilden. Nur am Schluss, $h \to 0$, sind die beiden gleich, weil dann $p_h = p$ ist.

Hier wird deutlich, wie die ganze Algebra der finiten Elemente im Grunde an der ersten Greenschen Identität hängt, siehe Kapitel 9.12. Es ist ein ständiges, ‚wieselflinkes' Vertauschen von *außen* und *innen* und das in der angenehmen Gewissheit, dass alle Akteure aus dem *pool* der n *shape functions* φ_i kommen, das Terrain, die ‚Arena' fest abgesteckt ist. Und n heißt eben auch, wenn man n-mal an dem Tragwerk gewackelt hat, steht das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, weiß man wie die Lösung aussieht. Mit finiten Elementen werden Probleme abzählbar endlich...

Bemerkung 1.8. Die FEM-Formulierung unterscheidet sich immer dann von der ersten Greenschen Identität, wenn die *shape functions* die Gleichung $Lu = p$ nicht lösen können.

Bei Stabtragwerken, EA und EI konstant, benutzt man die FEM nur, um nach der Reduktion der Belastung in die Knoten die homogene Lösung $Lu = 0$ zu bestimmen, und dann ist $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ wirklich identisch mit der ersten Greenschen Identität, weil die φ_i jede homogene Lösung darstellen können, siehe Kapitel 1.18.3.

2

Der Satz von Betti

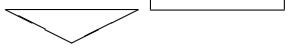
Der Gegenstand dieses Kapitels sind **Einflussfunktionen** und ihr Zusammenhang mit finiten Elementen.

Das Thema ist von großer Bedeutung, weil die Weg- und Kraftgrößen in der linearen Statik auf der Überlagerung der Einflussfunktionen mit der Belastung beruhen

$$u(x) = \int_0^l G(y,x)p(y)\,dy\,, \tag{2.1}$$

wie das uns wohl vertraute $pl^2/8$

$$M = \int_0^l G(y,x)p(y)\,dy = \int_0^l \qquad\qquad dy = \boxed{\frac{pl^2}{8}}, \tag{2.2}$$



das das Skalarprodukt der Einflussfunktion für $M(x)$ und der Belastung ist. (Das schließt die Multiplikation zweier Zahlen, Kraft $\times$ Weg, wie zweier Vektoren natürlich mit ein).

Die Einflussfunktionen sind also der Schlüssel zur linearen Statik. Sie verkörpern die **Sensitivitäten** eines Tragwerks. Die Einflussfunktion und die Belastung müssen sich irgendwann einmal kreuzen, wenn im Aufpunkt etwas ankommen soll, siehe Bild 2.1.

Und auch bei den finiten Elementen spielen die Einflussfunktionen eine entscheidende Rolle, siehe Bild 2.2, denn:

Jede FE-Lösung ist eine Linearkombination der Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_i$ der Knotenverschiebungen

$$\boldsymbol{u} = f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{2.3}$$

Das ist leicht zu verstehen: Die Verschiebungsantwort (Vektor $\boldsymbol{g}_i$) des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ auf eine Knotenkraft $f_i = 1$ ist die **Einflussfunktion** für die

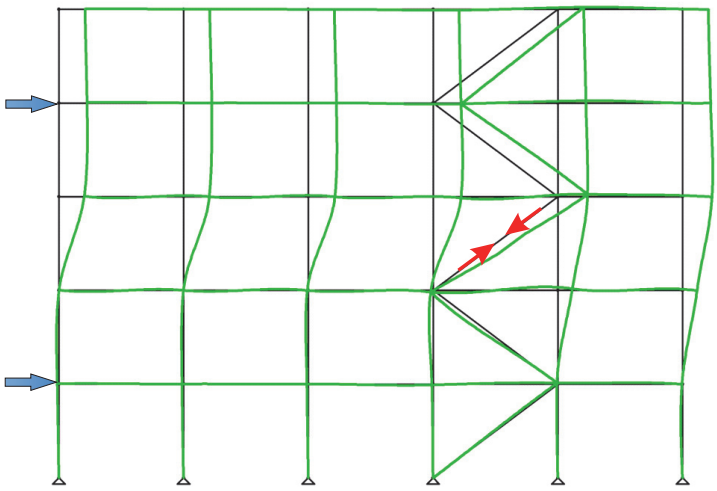


Bild 2.1. Einflussfunktion für die Normalkraft in einer Strebe

Verschiebung u_i des Knotens. Daher muss man nur die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ mit den eingeprägten f_i multiplizieren, was aber genau die obige Formel $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ ist, denn die $\boldsymbol{g}_i$ sind ja die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$. Die Knotenkräfte $f_i \neq 0$ selektieren die $\boldsymbol{g}_i$, die in $\boldsymbol{u}$ stecken.

Genau genommen sind die $\boldsymbol{g}_i$ nur die Knotenwerte der Einflussfunktionen für die Verschiebungen u_i

$$G(y, x_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\varphi_j(y) \qquad g_{ij} = \text{Einträge } j \text{ in Spalte } \boldsymbol{g}_i\,. \tag{2.4}$$

Die Einflussfunktionen entstehen erst durch Multiplikation der g_{ij} mit den $\varphi_j(y)$. Aber diese ‚Verkürzung' vereinfacht doch die Behandlung des Themas.

2.1 Grundlagen

Gemäß dem *Satz von Betti* sind die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die jedes für sich im Gleichgewicht sind, gleich groß

$$W_{1,2} = W_{2,1}\,. \tag{2.5}$$

Die Arbeiten, die die Lasten des Systems 1 auf den Wegen des Systems 2 leisten, $W_{1,2}$, sind genauso groß wie die Arbeiten, die die Lasten des Systems 2 auf den Wegen des Systems 1 leisten, $W_{2,1}$.

Dieser Satz beruht auf der **zweiten Greenschen Identität** $\mathscr{B}(w_1, w_2)$, die durch **Spiegelung** aus der ersten Greenschen Identität entsteht

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \mathscr{G}(w_1, w_2) - \mathscr{G}(w_2, w_1) = 0 - 0 = 0\,, \tag{2.6}$$

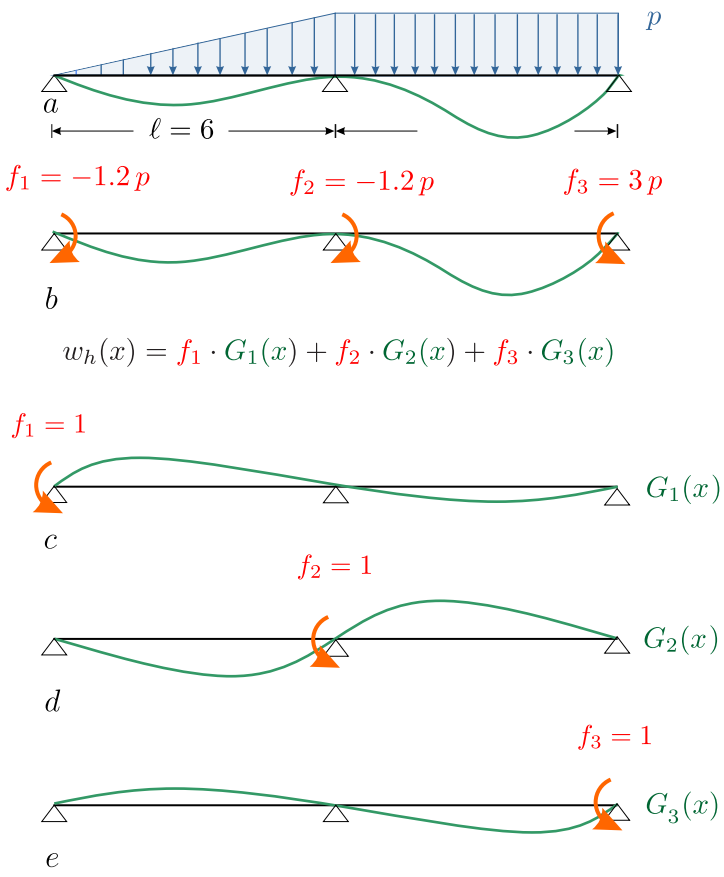


Bild 2.2. Die FE-Lösung $w_h(x)$ ist die gewichtete Summe der Einflussfunktionen G_1, G_2, G_3 der drei Knotenverdrehungen und die Gewichte sind die äquivalenten Knotenmomente $f_i = (G_i, p)$ (BE-FRAMES)

was im Falle des Balkens zu dem Ergebnis

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \underbrace{\int_0^l EI\, w_1^{IV}\, w_2\, dx + [V_1\, w_2 - M_1\, w_2']_0^l}_{W_{1,2}}$$
$$\underbrace{- [V_2 w_1 - M_2 w_1']_0^l - \int_0^l w_1\, EI\, w_2^{IV}\, dx}_{W_{2,1}} = 0 \qquad (2.7)$$

führt.

Man kann sich das auch so vorstellen, dass man mit dem Arbeitsintegral

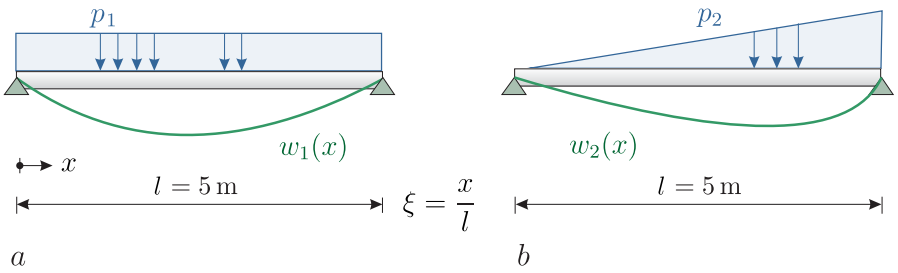


Bild 2.3. *Satz von Betti*

$$\int_0^l EI\, w_1^{IV}(x)\, w_2(x)\, dx \tag{2.8}$$

startet, und dann mittels partieller Integration die Ableitungen von w_1 vollständig auf w_2 überwälzt und so am Schluss das Spiegelbild des Ausgangsintegrals erhält.

Differentialgleichungen bei denen auf diesem Weg das Spiegelbild entsteht, heißen ***selbstadjungiert***. Alle linearen Differentialgleichungen gerader Ordnung sind selbstadjungiert.

Differentialgleichungen ungerader Ordnung, wie $u' = p$, nennt man ***schiefsymmetrisch***, weil sie nur nach Multiplikation mit (-1) mit dem Ausgangsintegral zur Deckung zu bringen sind

$$\int_0^l u'\,\delta u\, dx = [u\delta u]_0^l - \int_0^l u\delta u'\, dx\,. \tag{2.9}$$

Partielle Integration ist daher, wenn man so will, eine ‚schiefsymmetrische' Operation.

Beispiel 2.1. Die beiden Balken in Bild 2.3 tragen zwar verschiedene Streckenlasten

$$p_1 = 10 \qquad w_1(x) = \frac{10 \cdot 5^4}{24\,EI}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \qquad \xi = x/l \tag{2.10}$$

$$p_2 = 7\,\xi \qquad w_2(x) = \frac{7 \cdot 5^3\, x}{360\,EI}\,(7 - 10\,\xi^2 + 3\,\xi^4)\,, \tag{2.11}$$

aber ihre reziproken äußeren Arbeiten, die Arbeiten **‚über Kreuz'**, sind dennoch gleich groß

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(w_1, w_2) &= \int_0^l p_1(x)\, w_2(x)\, dx - \int_0^l p_2(x)\, w_1(x)\, dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 911.46 - \frac{1}{EI} \cdot 911.46 = 0\,.\end{aligned} \tag{2.12}$$

In den Statikbüchern wird der *Satz von Betti* meist gleich auf (2.12) reduziert ohne dass die zweite Greensche Identität (2.7) angeschrieben wird und

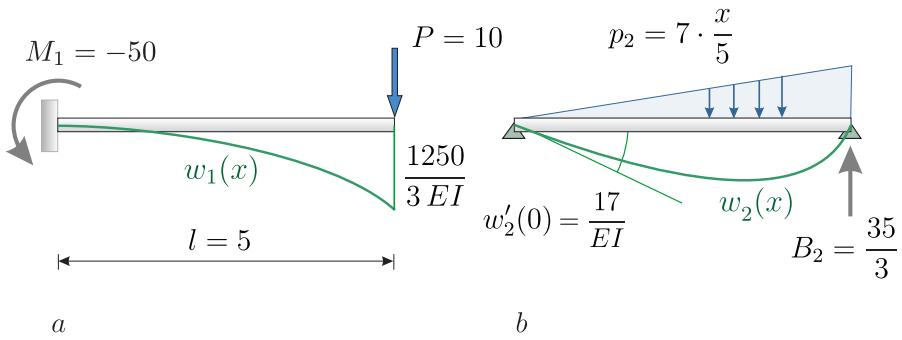


Bild 2.4. *Satz von Betti* bei zwei unterschiedlich gelagerten Systemen

deswegen heißt es in den Büchern immer, *‚wenn zwei Systeme im Gleichgewicht sind‘*, womit angemahnt wird, dass die beiden Biegelinien den Gleichungen $EI\,w_1^{IV} = p_1$ bzw. $EI\,w_2^{IV} = p_2$ und den Randbedingungen genügen müssen, damit die verkürzte Identität (2.12) mit dem Original (2.7) identisch ist.

Der *Satz von Betti* gilt im übrigen auch dann, wenn die beiden Balken unterschiedlich gelagert sind, wie in Bild 2.4, denn

$$W_{1,2} = M_1(0)\,w_2'(0) = -50 \cdot \frac{17}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI} \tag{2.13}$$

ist dasselbe, wie

$$\begin{aligned} W_{2,1} &= \int_0^l p_2\,w_1(x)\,dx - B_2\,w_1(l) \\ &= \int_0^5 7 \cdot \frac{x}{5} \cdot (25\,x^2 - \frac{10}{6}\,x^3)\,\frac{1}{EI}\,dx - \frac{35}{3} \cdot \frac{1250}{3\,EI} \\ &= 4010.42 \cdot \frac{1}{EI} - 4861.1 \cdot \frac{1}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI}\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Die unterschiedliche Lagerung bedeutet nur, dass jetzt auch die Lagerkräfte Arbeiten leisten und die müssen mitgezählt werden.

2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen

Die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Verschiebung eines Punktes x ist die Antwort des Tragwerks auf die Kraft $P = 1$, die den Aufpunkt x in Richtung der gesuchten Verformung drückt. Das y ist die Laufvariable, also die Stationen in denen wir die Effekte, die die Einzelkraft hervorruft, beobachten.

Die Einflussfunktion ist **symmetrisch**, $G_0(y,x) = G_0(x,y)$, man kann also jederzeit x mit y vertauschen. Ob die Kraft im Punkte x steht und wir

beobachten die Verformung im Punkt y, oder ob die Kraft im Punkt y steht und wir beobachten die Verformung im Punkt x, ist numerisch dasselbe (*Satz von Maxwell*).

Für unsere Zwecke wird es sich als sinnvoll erweisen, mit x den **Aufpunkt** zu bezeichnen und mit y die Lastordinaten.

Was am Anfang vielleicht etwas verwirrend ist: Um die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ zu erzeugen, setzen wir eine Kraft $P=1$ in den Aufpunkt x, wenn wir aber die Einflussfunktion später auswerten

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)p(y)\,dy\,, \tag{2.15}$$

dann wirkt die Last p in den Quellpunkten y und der Aufpunkt x wird zum **Sensor**, zum Brennpunkt, in dem sich die Strahlen $G_0\,dp$ sammeln

$$\text{Aufpunkt } x = \begin{cases} \text{Ort der Kraft } P=1, \text{ die } G_0(y,x) \text{ erzeugt} \\ \text{Sensor, wenn } (G_0(y,x),p) \text{ ausgewertet wird.} \end{cases} \tag{2.16}$$

Eine Streckenlast p kann man als eine Serie von kleinen Einzelkräften

$$dp(y) = p(y)\,dy \tag{2.17}$$

ansehen, die jede für sich die Durchbiegung im Aufpunkt x um das Maß

$$dw = G_0(y,x)\,dp(y) \tag{2.18}$$

erhöht, und so ist die gesamte Durchbiegung die Summe über die dw, also die Überlagerung der Einflussfunktion mit der Belastung

$$w(x) = \int_0^l dw = \int_0^l G_0(y,x)p(y)\,dy\,. \tag{2.19}$$

Besteht die Belastung nur aus einer einzelnen Kraft P in einem Punkt y, dann reduziert sich das natürlich auf den Ausdruck

$$w(x) = G_0(y,x)\cdot P\,. \tag{2.20}$$

Und so wie die Weg- und Kraftgrößen eines Balkens aus der Biegelinie durch Differentiation hervorgehen,

$$w'(x) = \frac{d}{dx}\,w(x) \qquad M(x) = -EI\,\frac{d^2}{dx^2}\,w(x) \qquad V(x) = -EI\,\frac{d^3}{dx^3}\,w(x)\,, \tag{2.21}$$

so gehen die zugehörigen Einflussfunktionen aus $G_0(y,x)$ durch Differentiation nach dem **Aufpunkt** x hervor

$$G_0(y,x) \qquad = \text{EF für } w(x) \tag{2.22a}$$

$$G_1(y,x) = \frac{d}{dx}G_0(y,x) \qquad = \text{EF für } w'(x) \tag{2.22b}$$

$$G_2(y,x) = -EI\,\frac{d^2}{dx^2}G_0(y,x) = \text{EF für } M(x) \tag{2.22c}$$

$$G_3(y,x) = -EI\,\frac{d^3}{dx^3}G_0(y,x) = \text{EF für } V(x) \tag{2.22d}$$

Wir bezeichnen die Einflussfunktionen mit dem Buchstaben G, weil in der Mathematik Einflussfunktionen ***Greensche Funktionen*** heißen, und weil die Durchbiegung die nullte Ableitung ist, schreiben wir ihre Einflussfunktion G_0 mit einem Index 0.

Das Wort Einflussfunktion kann einmal das komplette Integral bedeuten

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)p(y)\,dy\,, \tag{2.23}$$

oder nur den ***Kern*** $G_0(y,x)$ der Einflussfunktion. In der Mathematik versteht man unter der Green's Function meist den Kern. In Anlehnung an die Physik nennen wir das Integral das ***Wirkungsintegral*** der Belastung.

Die zentrale Rolle der Greenschen Funktionen kann nicht überbetont werden, weil in der linearen Statik alle Resultate auf der Überlagerung der Last mit den Punktlösungen beruhen, und die Schlüsselfrage daher lautet:

Wenn ich in y mit $P = 1$ drücke, wie groß ist dann in x die Verschiebung?

Wenn man diese ***unit response*** – die Greensche Funktion – für alle Punktepaare (x,y) eines Tragwerks parat hätte, dann bräuchte man keine finiten Elemente.

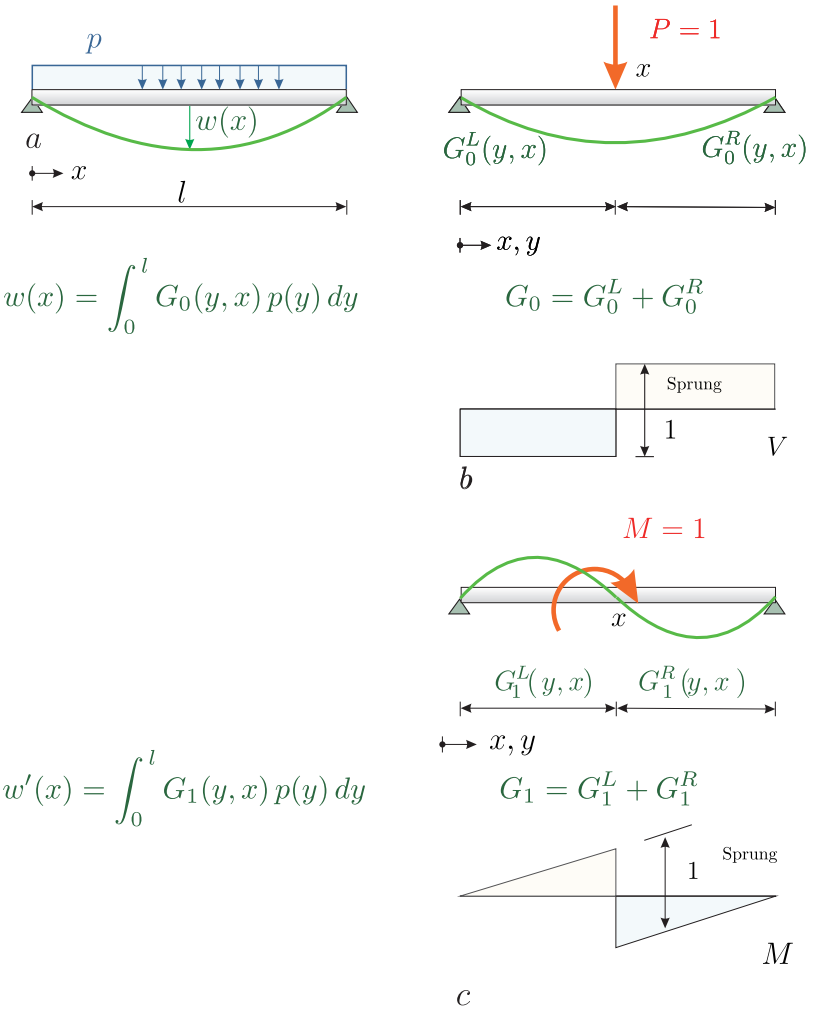
2.2.1 Herleitung

Technisch gesehen geschieht bei der Herleitung der Einflussfunktion (2.19) das folgende: Wir belasten den Träger im Aufpunkt x mit einer Einzelkraft $P = 1$, siehe Bild 2.5 *a*, ermitteln die zugehörige Biegelinie $G_0(y,x)$ und formulieren dann mit den beiden Biegelinien $G_0(y,x)$ und $w(y)$ den *Satz von Betti*, die zweite Greensche Identität.

Das geht nicht in einem Stück, weil die dritte Ableitung (die Querkraft) der Einflussfunktion **im Aufpunkt springt**. Also integrieren wir vom linken Lager bis zum Aufpunkt x, unterbrechen dort, und setzen die Integration hinter dem Aufpunkt fort

$$\mathscr{B}(G_0,w) = \mathscr{B}(G_0^L,w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R,w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.24}$$

An den beiden Balkenenden sind w und M null und so verbleibt in der Summe



$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad G_0 = G_0^L + G_0^R$$

$$w'(x) = \int_0^l G_1(y,x)\, p(y)\, dy \qquad G_1 = G_1^L + G_1^R$$

Bild 2.5. Anwendung des Satzes von Betti bei einem Balken, **a)** Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Durchbiegung $w(x)$ bzw. **b)** $G_1(y,x)$ für die Verdrehung $w'(x)$ in Balkenmitte

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(G_0, w) &= \mathscr{B}(G_0^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} \\
&= V_0^L(x)\, w(x) - M_0^L(x)\, w'(x) - \int_0^x G_0^L(y,x)\, p(y)\, dy \\
&\quad - V_0^R(x)\, w(x) + M_0^R(x)\, w'(x) - \int_x^l G_0^R(y,x)\, p(y)\, dy \\
&= \underbrace{(V_0^L(x) - V_0^R(x))}_{=1}\, w(x) - \underbrace{(M_0^L(x) - M_0^R(x))}_{=0}\, w'(x) \\
&\quad - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = 1 \cdot w(x) - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

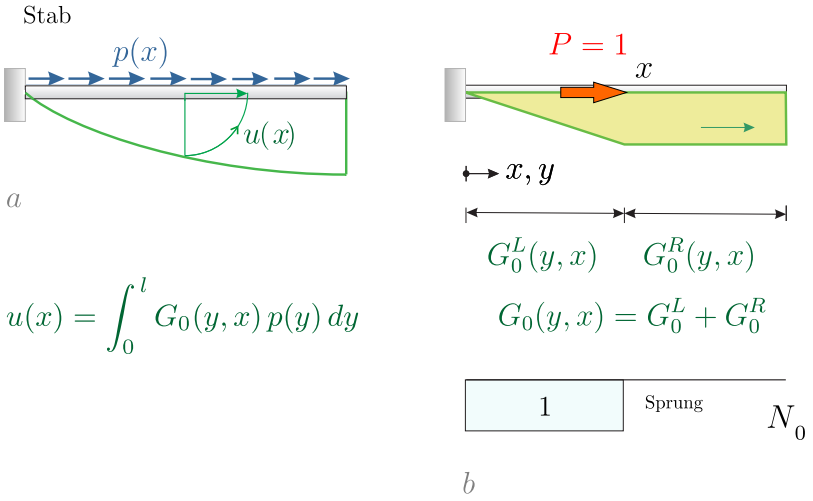


Bild 2.6. Anwendung des Satzes von Betti bei einem Stab

oder

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad [\text{N·m}]\,, \tag{2.26}$$

was die Einflussfunktion für $w(x)$ ist.

Einflussfunktion für $w'(x)$

Wir belasten den Träger im Aufpunkt mit einem **Einzelmoment** $M = 1$ und formulieren mit den beiden Teilen G_1^L und G_1^R den *Satz von Betti*, siehe Bild 2.5 *c*,

$$\mathscr{B}(G_1, w) = \mathscr{B}(G_1^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_1^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.27}$$

Der Sprung des Biegemomentes im Aufpunkt macht, dass bei der Addition der beiden Identitäten im Aufpunkt die Arbeit

$$(M_R(x_+) - M_L(x_-))\, w'(x) = 1 \cdot w'(x) \tag{2.28}$$

übrig bleibt und damit ergibt sich

$$1 \cdot w'(x) = \int_0^l G_1(y,x)\, p(y)\, dy \qquad [\text{N·m}]\,. \tag{2.29}$$

Einflussfunktion für die Längsverschiebung $u(x)$

Die zweite Greensche Identität (*Satz von Betti*) der Differentialgleichung $-EAu''(x) = p(x)$ lautet

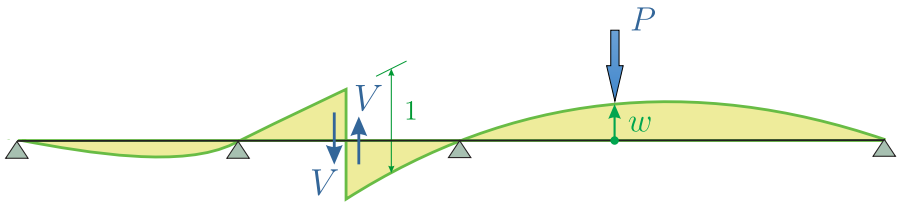


Bild 2.7. Eine Einflussfunktion gleicht einer Schaukel, $W_{1,2} = -V \cdot 1 - P \cdot w = 0$, siehe (2.80). Normalerweise schreiben wir G statt w, oder hier G_3

$$\mathscr{B}(u,\hat{u}) = \int_0^l -EAu''(x)\,\hat{u}(x)\,dx + [N\hat{u}]_0^l - [u\hat{N}]_0^l - \int_0^l u(x)\,(-EA\,\hat{u}''(x))\,dx = 0\,, \tag{2.30}$$

und aus ihr erhält man die Einflussfunktion für $u(x)$, indem man eine **Kraft** $P = 1$ in Richtung der Stabachse wirken lässt, siehe Bild 2.6,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_0,u) &= \mathscr{B}(G_0^L,u)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R,u)_{(x,l)} = 0+0\\ &= N_0^L(x)\,u(x) - \int_0^x G_0^L(y,x)\,p(y)\,dy\\ &\quad - N_0^R(x)\,u(x) - \int_x^l G_0^R(y,x)\,p(y)\,dy\\ &= \underbrace{(N_0^L(x) - N_0^R(x))}_{=1}\,u(x) - \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy\end{aligned} \tag{2.31}$$

oder

$$1\cdot u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,. \tag{2.32}$$

2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen

Einflussfunktionen für Kraftgrößen berechnen sich in zwei Schritten:

1. Kraftgröße sichtbar machen!
2. Schaukeln!

Erst macht man die Schnittgröße durch den Einbau eines entsprechenden Gelenks zu einem äußeren Kräftepaar, siehe Bild 2.7, und dann bewegt man die beiden Gelenkhälften so, dass die beiden Kräfte, links und rechts vom Gelenk, insgesamt den Weg -1 zurücklegen.

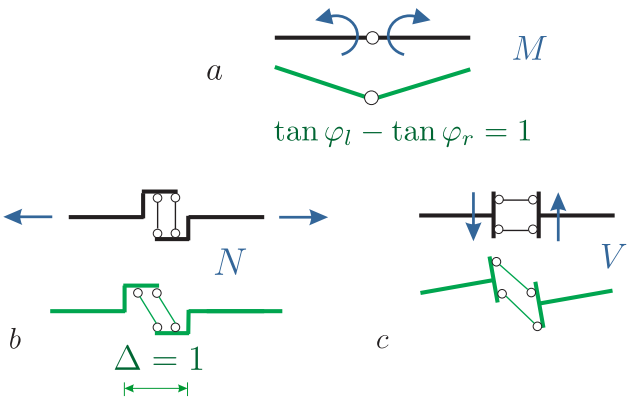


Bild 2.8. Der Einbau von Gelenken ermöglicht die Berechnung von Einflussfunktionen, **a)** M-Gelenk, **b)** N-Gelenk, **c)** V-Gelenk

In der Statik heißt dies der ***Satz von Land***, der aber im Grunde doch nur in Worte fasst[1], was in der zweiten Greenschen Identität steht. Man sucht in der Identität nach der Kraftgröße, schaut auf ihren Partner, also die Weggröße, mit der die Kraftgröße gepaart ist, und weiß dann, dass man diese Weggröße um Eins springen lassen muss, damit bei der Addition, siehe (2.38), die Kraftgröße ‚ans Licht kommt'.

Ist das Tragwerk statisch bestimmt, dann wird aus dem Tragwerk durch den Einbau des Gelenks, siehe Bild 2.8, ein ***Getriebe*** und dann sind keine Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen.

Ist das Tragwerk statisch unbestimmt, dann geht es nur mit Zwang. Praktisch geht man dabei, wie bekannt, so vor, dass man zunächst auf beiden Seiten des Gelenkes eine Kraftgröße $X = \pm 1$ wirken lässt, die dadurch verursachte Spreizung des Gelenks ausrechnet, und dann das Paar $\pm X$ so normiert, dass die Spreizung sich zu Eins ergibt.

Archimedes wusste, wenn er das linke Lager an dem **Hebel** in Bild 2.9 wegnimmt, und den Hebel dort um ein δἀκτυλος, einen Fingerbreit, nach unten drückt, dass dann die Arbeit der Lagerkraft A und die Arbeit der Kraft P in der Summe null sein müssen

$$W_{1,2} = A \cdot 1 - P\, h_2 \, \tan\varphi = 0\,, \tag{2.33}$$

und er fand so für den Wert von A das Resultat

$$A = P\, h_2 \, \tan\varphi = P\, \frac{h_2}{h_1}\,. \tag{2.34}$$

[1] Das soll nicht die Leistung von Land mindern. Er hat, wie viele andere Ingenieure, Pionierarbeit in der Gründungsphase der Statik geleistet. Die Geschichte der Statik ist – wie die aller Wissenschaften – Geistesgeschichte, [182].

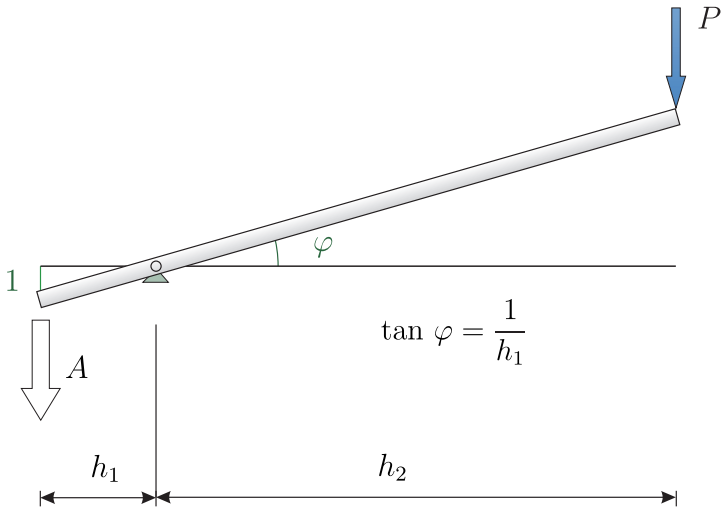


Bild 2.9. Der Hebel des Archimedes

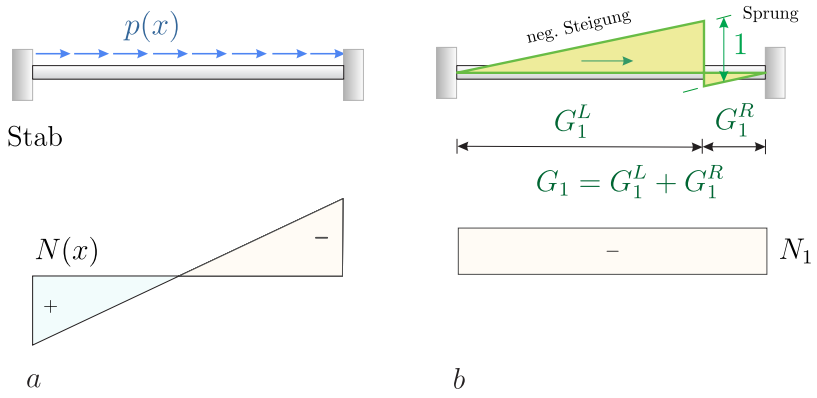


Bild 2.10. Berechnung der Einflussfunktion für die Normalkraft $N(x)$

Alle Einflussfunktionen für Kraftgrößen sind im Grunde solche Schaukeln, siehe Bild 2.7, denn das **Spiel von Kraft und Bewegung** bildet den Kern der Statik.

Die Kinematik bestimmt die Statik.

Zu jeder Schnittkraft gehört ein Gelenk und die Bewegung, die über das Tragwerk läuft, wenn man das Gelenk spreizt, ***das Echo***, das von der Last zurückkommt, bestimmt die Größe der Schnittkraft im Aufpunkt.

2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für eine Normalkraft $N(x)$ weist im Aufpunkt x einen **Verschiebungssprung** der Größe Eins auf, siehe Bild 2.10 *b*,

$$G_1(x_+) - G_1(x_-) = 1\,. \tag{2.35}$$

Die Randarbeiten an den Enden des Stabes im *Satz von Betti*

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_1,u) &= \mathscr{B}(G_1^L,u)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_1^R,u)_{(x,l)} = 0+0\\ &= [\ldots]_0^x - \int_0^x G_1^L(y,x)\,p(y)\,dy + [\ldots]_x^l - \int_x^l G_1^R(y,x)\,p(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{2.36}$$

sind, wegen $u(0) = u(l) = 0$ und $G_1(0,x) = G_1(l,x) = 0$, null, und so verbleiben nur die Randarbeiten links und rechts vom Aufpunkt x.

Die zu G_1 gehörige Normalkraft N_1 ist im Aufpunkt stetig, weil G_1 links und rechts vom Aufpunkt dieselbe Steigung hat, siehe Bild 2.10 *b*, und auch $u(x)$ ist dort stetig, so dass die Arbeit der beiden Normalkräfte $\pm N_1(x)$, links und rechts vom Gelenk, in der Summe null ist

$$\underbrace{N_1(x_-)\,u(x)}_{links} - \underbrace{N_1(x_+)\,u(x)}_{rechts} = (N_1(x_-) - N_1(x_+))\,u(x) = 0\,, \tag{2.37}$$

und sich somit alles auf

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_1,u) &= N(x)(G_1(x_+) - G_1(x_-)) - \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy\\ &= N(x)\cdot 1 - \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy = 0\end{aligned} \tag{2.38}$$

reduziert, oder

$$1\cdot N(x) = \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,. \tag{2.39}$$

2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$

Im Aufpunkt x wird ein **Momentengelenk** eingebaut und die Stabenden werden so verdreht, dass eine Spreizung von Eins entsteht

$$G_2'(x_-) - G_2'(x_+) = 1\,, \tag{2.40}$$

was eine Unterbrechung bei der Formulierung des Satzes von Betti nötig macht

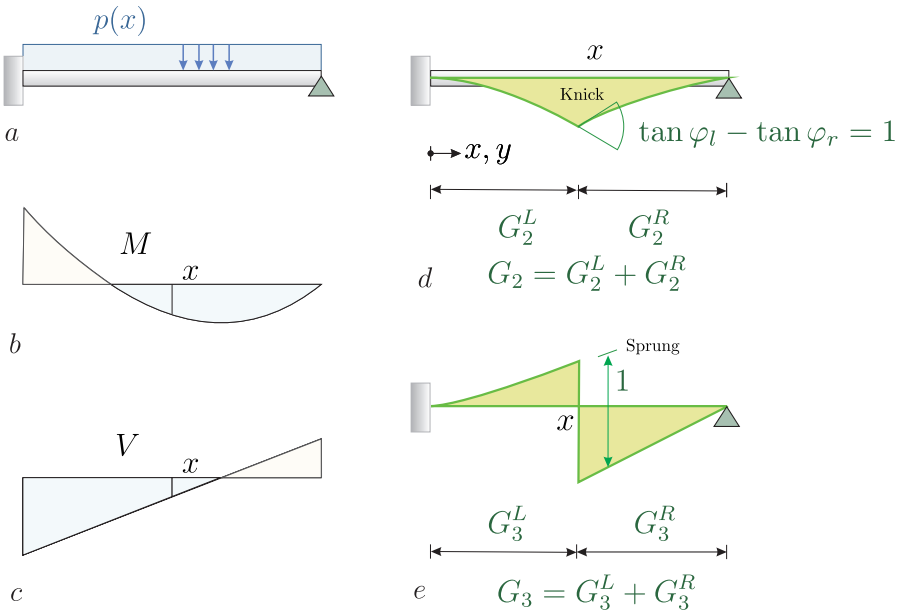


Bild 2.11. Einflussfunktionen für $M(x)$ und $V(x)$

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \mathscr{B}(G_2^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_2^L, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.41}$$

Die Randarbeiten an den Balkenenden sind null und die Randarbeiten an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich bis auf den Term

$$G_2'(x_-)\,M(x) - G_2'(x_+)\,M(x) = 1 \cdot M(x) \tag{2.42}$$

gegenseitig weg und so folgt

$$1 \cdot M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,. \tag{2.43}$$

2.3.3 Einflussfunktion für $V(x)$

Die Querkraft machen wir durch den Einbau eines **Querkraftgelenks** sichtbar, siehe Bild 2.11 *e*, und spreizen es so, dass die beiden Querkräfte in der Summe den Weg (-1) zurücklegen, technisch also die Einflussfunktion G_3 im Aufpunkt um Eins springt

$$G_3(x_+) - G_3(x_-) = 1\,. \tag{2.44}$$

Entsprechend besteht die Biegelinie G_3 aus zwei Teilen, G_3^L und G_3^R, die auch eine Zweiteilung des *Satz von Betti* nötig macht

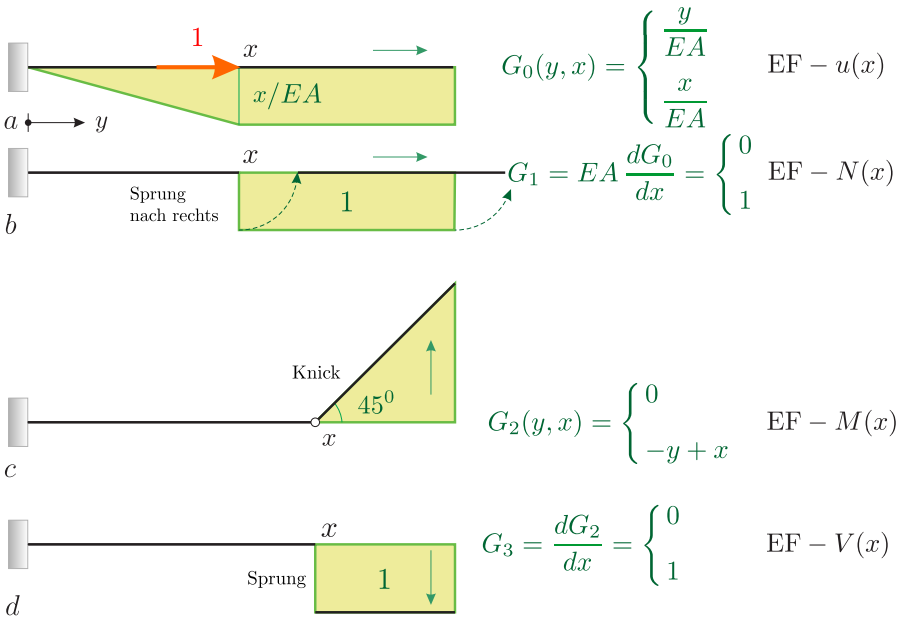


Bild 2.12. Herleitung der Einflussfunktionen durch Differentiation nach x

$$\mathscr{B}(G_3, w) = \mathscr{B}(G_3^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_3^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.45}$$

An der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich die Randarbeiten gegenseitig weg – bis auf

$$G_3(x_+)\,V(x) - G_3(x_-)\,V(x) = 1 \cdot V(x) \tag{2.46}$$

und so ergibt sich durch Umstellung aus $W_{1,2} = 0$ das Resultat

$$1 \cdot V(x) = \int_0^l G_3(y,x)\,p(y)\,dy \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,. \tag{2.47}$$

2.3.4 Lagersenkung

Wenn sich ein Lager senkt, gibt es kein p. Wie werden dann die Einflussfunktionen ausgewertet? Indem man über die Lagerkräfte geht. Ein Beispiel soll das erläutern.

Bei der Lagersenkung w_Δ des Trägers in Bild 2.13 *a* wirken keine Streckenlasten, $EI\,w^{IV} = 0$. Die Einflussfunktion für das Moment in Feldmitte entsteht durch die Spreizung des Aufpunkts, $EI\,G_2^{IV}(y,x) = \delta_2(y-x)$, siehe Bild 2.13 *b*. Das rechte Lager muss dabei durch eine Kraft $3\,EI/(2\,l^2)$ daran gehindert werden, abzuheben.

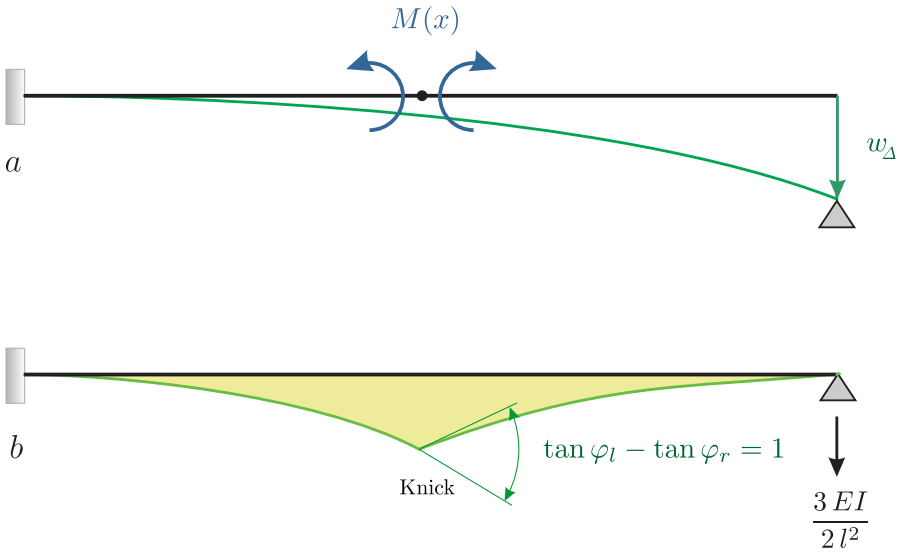


Bild 2.13. Auswertung einer Einflussfunktion bei Lagersenkung, **a)** Lagersenkung **b)** Einflussfunktion $G_2(y,x)$ für $M(x)$

Mit der Durchbiegung $w(y)$ aus der Lagersenkung und $G_2(y,x)$ aus der Spreizung, formulieren wir den Satz von Betti, und erhalten (wir überspringen die Zwischenschritte)

$$\mathscr{B}(G_2, w) = -M(x) - V_2(l)\, w(l) = 0\,, \tag{2.48}$$

oder

$$M(x) = -V_2(l)\, w_\Delta = -\text{Lagerkraft der Einflussfunktion} \times \text{Lagersenkung}\,. \tag{2.49}$$

Das Minus in $-V_2(l)\, w_\Delta$ ist dem Minus geschuldet, das vor dem zweiten Teil von Betti steht

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \int_0^l \ldots\, dy + [\ldots]_0^l - [V_2\, w + \ldots]_0^l - \int_0^l \ldots\, dy = 0\,. \tag{2.50}$$

Fassen wir das als Regel:

Bei einer Lagerbewegung geschieht die Auswertung einer Einflussfunktion durch Multiplikation der zur Einflussfunktion gehörigen Lagerkraft mit dem Lagerweg $\times(-1)$

2.3.5 Temperaturänderungen

Auch bei Temperaturänderungen ΔT gibt es kein p. Hier geht man über die **Mohrsche Arbeitsgleichung**

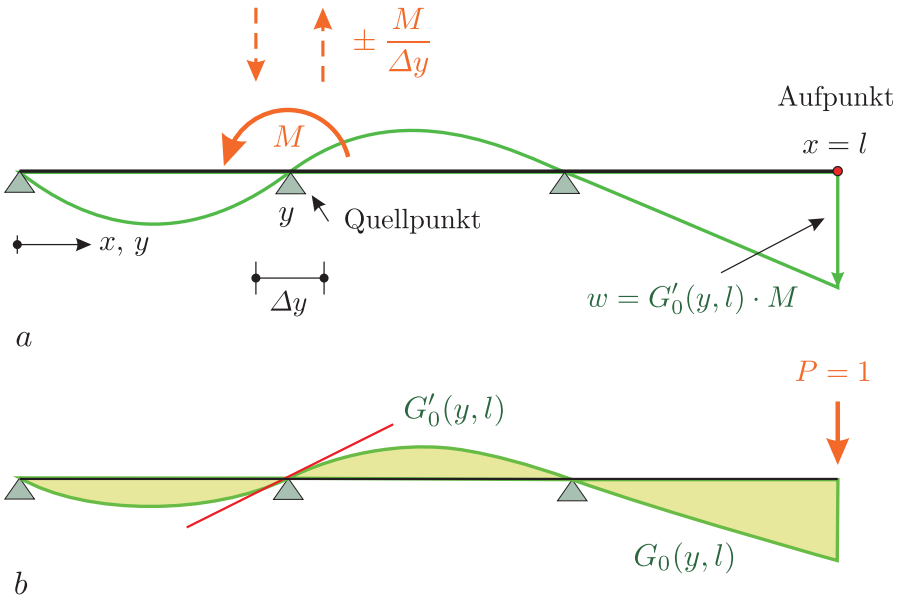


Bild 2.14. Der Einfluss eines Momentes hängt von der Neigung der Tangente an die Einflussfunktion im Quellpunkt, am Ort von M, ab, **a)** Biegelinie aus dem Moment über dem Lager, **b)** Einflussfunktion für Durchbiegung des Kragarmendes

$$\bar{1} \cdot \delta = \ldots + \int \bar{M}\, \alpha_T\, \frac{\Delta T}{h}\, dx + \int \bar{N}\, \alpha_T\, T\, dx\,. \tag{2.51}$$

Die Temperaturglieder kommen übrigens aus einer starken Einflussfunktion (Betti), siehe Kap. 7.2.1. Man kann mit ihnen daher auch temperaturbedingte Änderungen in Schnittgrößen verfolgen. Dann sind $\bar{M}$ und $\bar{N}$ die Momente und Normalkräfte der Einflussfunktion für die Schnittkraft.

2.3.6 Die Kette der Einflussfunktionen

Die Einflussfunktionen $G_i(y,x)$ für die höheren Ableitungen und Schnittkräfte erhält man durch Ableitung von $G_0(y,x)$ nach dem Aufpunkt x, wie in Bild 2.12 gezeigt.

Man kann die Einflussfunktion für $u(x)$ auch **direkt differenzieren**

$$u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad \rightarrow \qquad N(x) = \int_0^l EA\, \frac{d}{dx}\, G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.52}$$

was aber als Differentiation eines Integrals nach einem Parameter gilt und da muss man aufpassen.

Theoretisch muss man in zwei Schritten vorgehen. Zu berechnen sei die Einflussfunktion für das Moment $m_{xx}(\boldsymbol{x})$ in einer Platte:

1. Zunächst wird die Einflussfunktion $G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ für das Moment m_{xx} durch Ableitung aus G_0 berechnet, $G_2 = m_{xx}(G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))$.
2. Dann schaut man sich den Grenzprozess

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(G_2, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{2.53}$$

im Detail an und löst das Ergebnis nach $m_{xx}(\boldsymbol{x})$ auf

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.54}$$

Der Praktiker wird natürlich nicht so lange warten wollen und sagen, ‚ich weiß, was heraus kommt', und das Ergebnis direkt hinschreiben.

2.3.7 Lastmomente differenzieren die Einflussfunktionen

Das Lastmoment über dem Zwischenlager des Balken in Bild 2.14 kann man in zwei Einzelkräfte $P = \pm M/\Delta y$ auflösen, die untereinander den Abstand Δy haben. Ist $G_0(y,l)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung am Kragarmende $x = l$, dann ist

$$w(l) = \lim_{\Delta y\to 0} (G_0(y + 0.5\,\Delta y, l) - G_0(y - 0.5\,\Delta y, l)) \cdot \frac{M}{\Delta y} = \frac{d}{dy}\, G_0(y,l) \cdot M \tag{2.55}$$

die Durchbiegung aus dem Moment M. Entscheidend für die Wirkung des Moments auf das Kragarmende ist also die **Steigung der Einflussfunktion** am Ort von M.

Fassen wir das als Regel: Ist $G_0(y,x)$ die Einflussfunktion für $w(x)$, dann ist die Ableitung von G_0 nach y die Einflussfunktion, wenn ein Moment $M = 1$ über den Träger läuft.

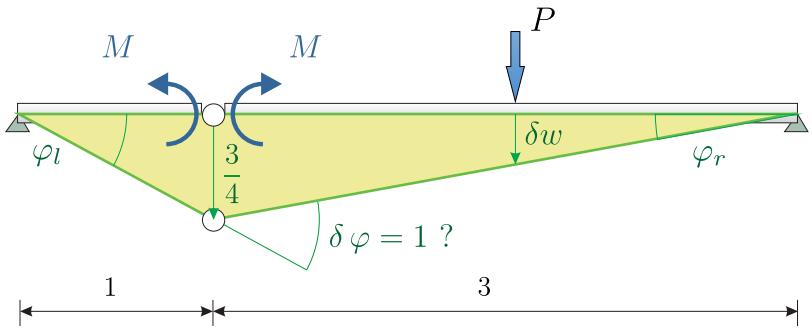
Das geht durch alle Stufen durch. Ist $G_2(y,x)$ die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$, dann ist die Ableitung nach y die Einflussfunktion für $M(x)$, wenn ein Wandermoment $M = 1$ über den Träger läuft.

2.3.8 Ein Rätsel

Bei der Herleitung der Einflussfunktion für Biegemomente wird oft die Spreizung des Gelenks, wie in Bild 2.15 gezeigt, mit $\delta\varphi = 1$ angegeben, und man rätselt, was das denn genau bedeutet. Beträgt der Winkel 45° und meint $\delta\varphi = 1$ also den Tangens dieses Winkels?

Was eigentlich gemeint ist, sieht man in Bild 2.15 auch. Der linke Teil des Trägers wird um einen Winkel φ_l verdreht und der rechte um einen Winkel φ_r und zwar so, dass die Summe

$$\delta w'(x_-) - \delta w'(x_+) = \tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1 \tag{2.56}$$



$$\tan\,\varphi_l = \frac{3}{4} \qquad \tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1 \qquad \tan\varphi_r = -\frac{1}{4}$$

Bild 2.15. Einflussfunktion für ein Moment

gleich 1 ist, denn dann erhält man prompt das gewünschte Resultat

$$-M\cdot\tan\varphi_l + M\cdot\tan\varphi_r + P\cdot\delta w = -M\cdot 1 + P\cdot\delta w = 0\,, \tag{2.57}$$

also $M = P\cdot\delta w$.

In den Statikbüchern wird oft kein Unterschied gemacht zwischen dem $\tan\varphi$ und dem Winkel φ selbst. Wenn die Autoren φ schreiben, dann meinen sie eigentlich immer den Tangens, und so auch hier

$$\delta\varphi = \varphi_l - \varphi_r = \tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1\,. \tag{2.58}$$

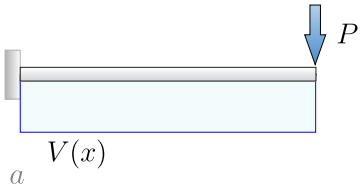
Um dem Leser aber einen Gefallen (?) zu tun, wird der Tangens oft als der Drehwinkel selbst genommen, $\tan\varphi = \varphi + \varphi^3/3 + \ldots \simeq \varphi$, und tritt dann prompt mit der Dimension *Rad* auf, was dann leicht zu Missverständnissen führen kann, siehe Seite 112.

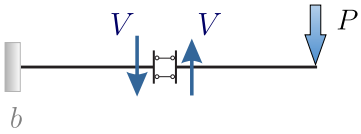
Dass der Tangens eine so dominante Rolle spielt, liegt daran, dass er die Weggröße ist, die in der ersten Greenschen Identität zu M konjugiert ist, während der Winkel keinen ‚Partner' hat und daher nicht in den Grundgleichungen der Statik vorkommt, die ja praktisch alle **Arbeitsgleichungen** sind.

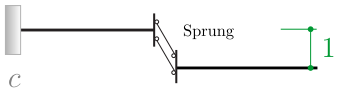
2.4 Statisch bestimmte Tragwerke

Die Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken sind **kinematische Ketten**, weil durch den Einbau des Zwischengelenks sich der Grad der statischen Bestimmtheit von $n = 0$ auf $n = -1$ reduziert.

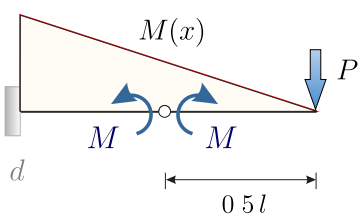
Die Schritte wiederholen sich. Man baut ein M- bzw. V-Gelenk in das Tragwerk ein, um die innere Schnittgröße sichtbar zu machen, ‚sie ans Licht zu zwingen', siehe Bild 2.16. Dann zeichnet man das so modifizierte Tragwerk

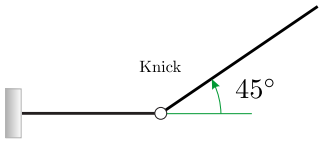






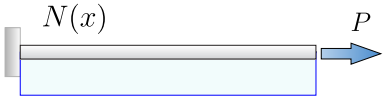
$$W_{1,2} = -V \cdot 1 + P \cdot 1 = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

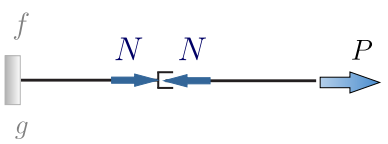


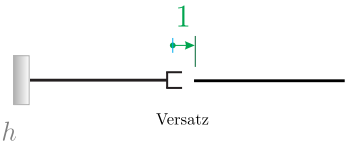


$$W_{1,2} = -M \cdot \tan 45° - P \cdot \tan 45° \cdot 0.5\,l = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

$$M = -P \cdot 0.5\,l$$





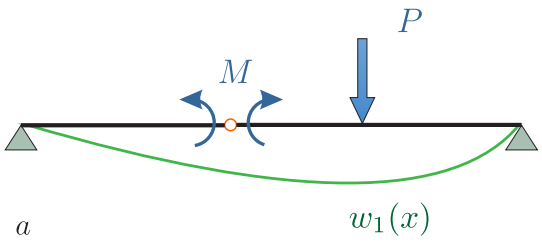


$$W_{1,2} = -N \cdot 1 + P \cdot 1 = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

Bild 2.16. Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

noch einmal an und verrückt es so, dass die beiden Kraftgrößen links und rechts vom Gelenk in der Summe den Weg -1 gehen.

In Bild 2.17 wird so die Einflussfunktion für ein Moment erzeugt. Zunächst wird in den Träger ein Gelenk eingebaut, um das innere Moment $M(x)$ ‚sichtbar' zu machen, zu einem äußeren Momentenpaar zu machen. Dann wird der so modifizierte Träger noch einmal angezeichnet, aber ohne Belastung. Statt dessen wird er so bewegt, dass die Spreizung im Gelenk genau



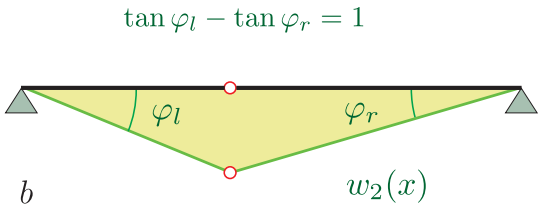
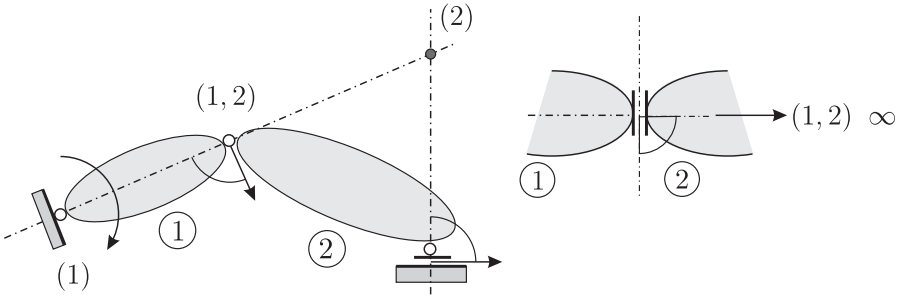


Bild 2.17. *Satz von Betti*—Einflussfunktion für ein Moment, **a)** Träger mit Belastung, **b)** dasselbe System unbelastet aber mit einer Spreizung $\tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1$ des Gelenks



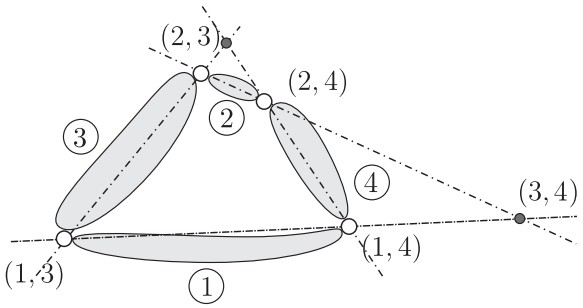


Bild 2.18. Regeln für die Polplankonstruktion

$\tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1$ beträgt. Weil der Träger mit dem Gelenk kinematisch ist, sind dazu keine Kräfte nötig.

Nach dem *Satz von Betti* gilt

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} - W_{2,1} = 0\,. \tag{2.59}$$

Nun ist $W_{2,1} = 0$, weil die nicht vorhandenen Kräfte am Träger 2 keine Arbeit auf den Wegen $w_1(x)$ leisten. Die Arbeit der Kräfte am Träger 1 auf den Wegen $w_2(x)$ ist somit ebenso null

$$W_{1,2} = -M\tan\varphi_l + M\tan\varphi_r + P\,w_2(x) = -M\cdot 1 + P\,w_2(x) = 0 \tag{2.60}$$

oder

$$1\cdot M = P\,w_2(x)\,, \tag{2.61}$$

also ist $w_2(x)$ die Einflussfunktion für $M(x)$.

Elementarregel. Schnittkräfte in statisch bestimmten Tragwerken hängen nicht von den Steifigkeiten ab, weil die Einflussfunktionen kinematische Ketten sind. Sie sind nur der Geometrie verpflichtet.

Bemerkung 2.1. Ein ‚akademischer' Beweis dieses Satzes lässt sich wie folgt führen: Wenn sich EI oder EA in einem Stab ändert, dann sind die zugehörigen f^+ Gleichgewichtskräfte, siehe Kapitel 5, und weil Gleichgewichtskräfte orthogonal sind zu allen Starrkörperbewegungen, also allen kinematischen Ketten (den Einflussfunktionen für N, M, V), ändern sich die Schnittkräfte nicht.

2.4.1 Polpläne

Bei der Konstruktion der Verschiebungsfiguren, die durch das Spreizen der Gelenke entstehen, hilft die Kenntnis der ***Drehpole*** der einzelnen Scheiben. Als Scheiben bezeichnet man einzelne Stäbe und Balken, oder biegesteife Verbindungen und unverschiebliche Konstruktionen aus diesen.

Hierzu muss man jedoch anmerken, dass diese lediglich Repräsentanten der entsprechenden Scheiben sind. Scheiben sind vielmehr unendlich große Mengen von Punkten, deren Verdrehung um den zugehörigen Hauptpol so erfolgt, dass sie sich dabei auf den Tangenten an die Drehkreise bewegen.

Die Regeln für die Konstruktion der Polpläne lauten, siehe Bild 2.18:

1. Jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen Scheibe.
2. Jedes Biegemomentengelenk bildet den Nebenpol der von diesem verbundenen Scheiben.
3. Die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers bildet den geometrischen Ort des Hauptpols der angeschlossenen Scheibe.

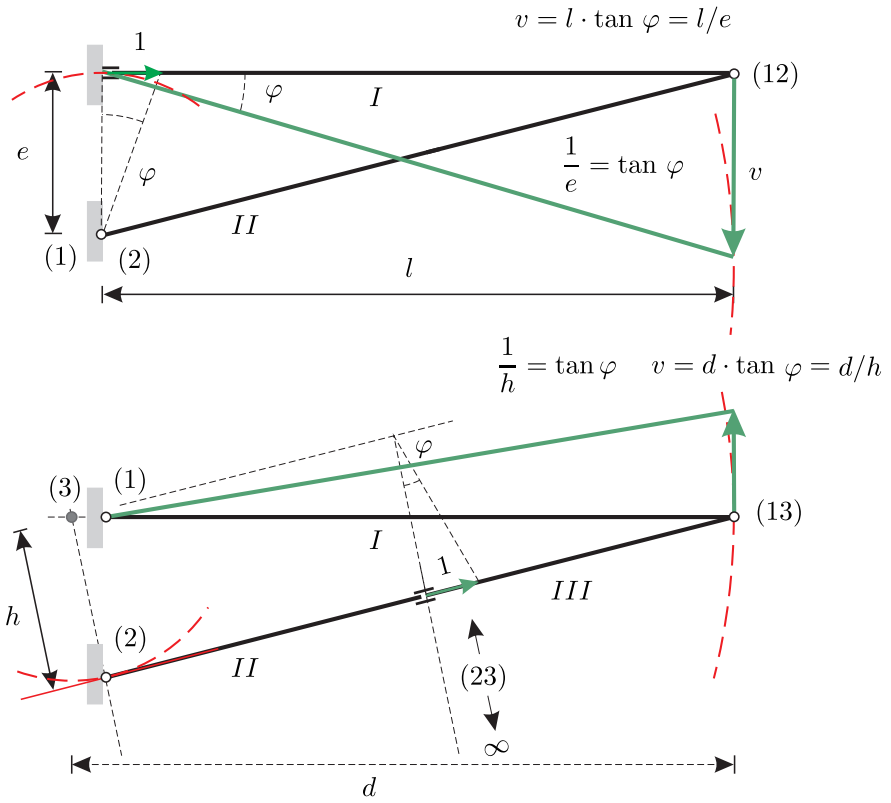


Bild 2.19. EF für N bei vert. Wanderlast im geraden und im schrägen Stab. Das Normalkraftgelenk wird um Eins gespreizt und alle Bewegungen werden als Bewegungen auf der Tangente an den Drehkreis gedacht.

4. Der Nebenpol zweier, durch einen verschieblichen Anschluss (Normalkraft- oder Querkraftgelenk) verbundenen Scheiben liegt auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung im Unendlichen.
5. Die Hauptpole zweier Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden: $(i) - (i,j) - (j)$, z.B.: $(1) - (1,2) - (2)$.
6. Die Nebenpole $(i,j), (j,k), (i,k)$ dreier Scheiben I, J, K liegen auf einer Geraden: $(i,j) - (j,k) - (i,k)$, z.B.: $(1,3) - (1,4) - (3,4)$.

2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren

Am einfachsten beginnt man mit den festen Gelenklagern, denn diese sind, siehe Regel 1, der **Hauptpol** der angeschlossenen Scheibe. Momentengelenke bilden den **Nebenpol** der angeschlossenen Scheiben, siehe Regel 2.

Alle übrigen Pole bestimmt man nun mit Hilfe sogenannter ***Ortslinien***. Unter einer Ortslinie versteht man die Gerade, auf der sich gemäß den Regeln 3 bis 7 der Pol befinden muss.

- Der Schnittpunkt zweier Ortslinien für ein und denselben Pol ist der exakte geometrische Ort des Pols.
- Laufen verschiedene Ortslinien für ein und denselben Pol parallel, so liegt dieser als Schnittpunkt aller dieser Linien im Unendlichen.
- Liegt der Hauptpol einer Scheibe im Unendlichen bedeutet dies, dass sich die Scheibe nur parallel verschieben kann, ihre Verdrehung ist null.
- Liegt der Nebenpol zweier Scheiben im Unendlichen bedeutet dies, dass sich beide Scheiben um ihre jeweiligen Hauptpole um exakt denselben Winkel verdrehen. Also sind zum Beispiel Stäbe dieser beiden Scheiben, die vor der Verdrehung parallel zueinander waren, es auch danach.

Mit diesen Regeln kann man die Verformungsfigur bestimmen, die durch das ‚normierte' Spreizen des M-, V- oder N-Gelenks entstehen, siehe Bild 2.19. Normiert meint, dass das Gelenk so gespreizt wird, dass am Gelenk negative Arbeit auf einem Weg von 1 m geleistet wird. Der Teil der Verformungsfigur, der in Richtung der Wanderlast fällt, ist dann die gesuchte Einflusslinie. Wir sagen dazu auch, dass die Einflussfunktion die **‚Projektion'** der Verformungsfigur in Richtung der Wanderlast ist.

2.4.3 Berechnung der Verdrehungen

An verschiedenen Stellen benötigt man ferner die **Stabdrehwinkel** von kinematischen Ketten und ihre Abhängigkeiten untereinander. Diese Aufgabe ist sehr leicht und elegant zu lösen, wenn man sich den Zusammenhang zwischen der Verdrehung zweier Scheiben (i) und (k), die über den Nebenpol (i,k) miteinander verbunden sind, klar macht. Das Vorgehen wollen wir an Bild 2.20 *b* illustrieren.

Die Verdrehung φ_i des Stabes i (bzw. der Scheibe (i)) ist gegeben und die Verdrehung Stabes k in Abhängigkeit von φ_i ist gesucht.

Es bezeichne x_i den horizontalen Abstand des Hauptpols (i) vom Nebenpol (i,k) bzw. x_k den horizontalen Abstand des Hauptpols (k) vom Nebenpol (i,k). Entsprechend bezeichnen y_i und y_k die vertikalen Abstände und l_i und l_k die Abstände der Hauptpole (i) bzw. (k) vom zugehörigen Nebenpol (i,k).

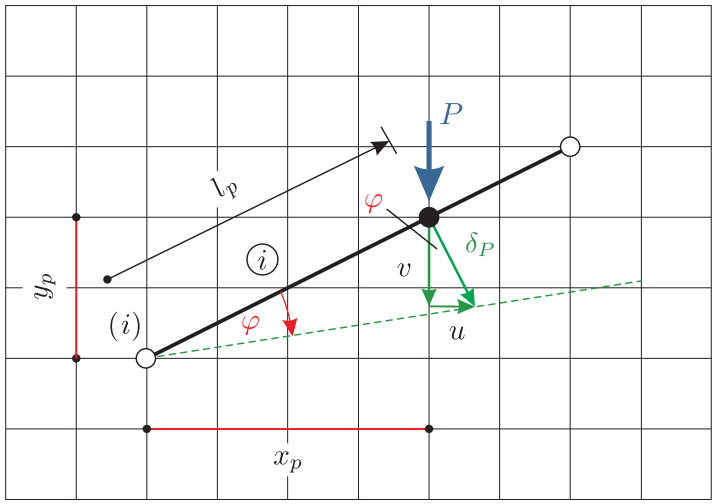
Damit gilt

$$\tan\varphi_i = \frac{\eta}{l_i} \qquad \tan\varphi_k = \frac{\eta}{l_k} \tag{2.62}$$

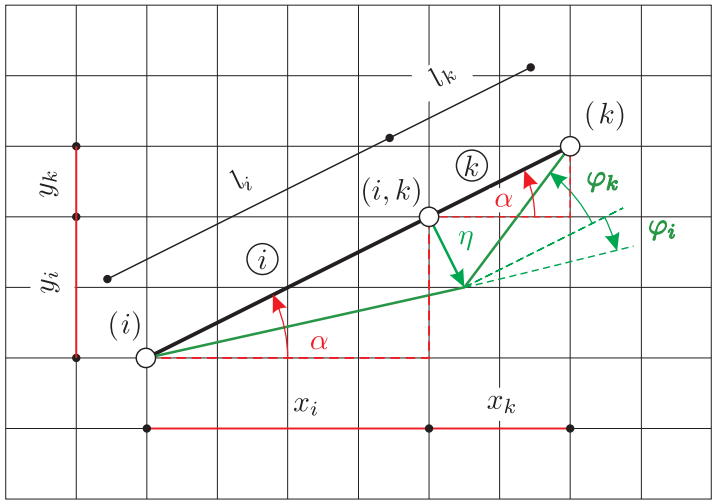
also

$$\boxed{l_i \cdot \tan\varphi_i = l_k \cdot \tan\varphi_k} \tag{2.63}$$

Die Hauptpole der beiden Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen – wie immer – auf einer Geraden, die hier unter dem Winkel α geneigt ist, und daher gilt



a



b

Bild 2.20. Verschiebungsberechnungen, **a)** Berechnung der Verschiebungen u und v einer Kraft, **b)** Berechnung der Verdrehungen zweier Scheiben zueinander

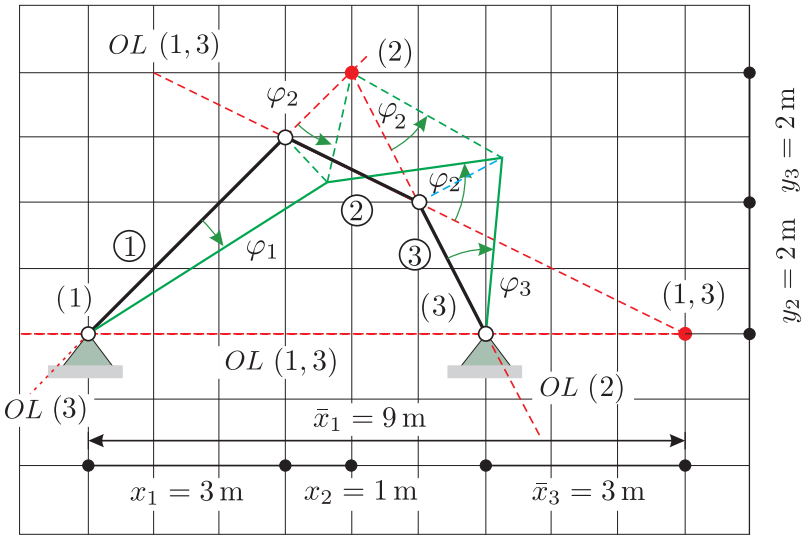


Bild 2.21. Berechnung der Verschiebungen der Scheiben bzw. Stäbe 2 und 3 bei vorgegebener Verdrehung von Scheibe 1, OL = Ortslinie

$$\sin\alpha = \frac{y_i}{l_i} = \frac{y_k}{l_k} \tag{2.64}$$

oder aufgelöst nach den Längen

$$l_i = \frac{y_i}{\sin\alpha} \qquad l_k = \frac{y_k}{\sin\alpha} \tag{2.65}$$

und mit (2.63) folgt also

$$\boxed{y_i \cdot \tan\varphi_i = y_k \cdot \tan\varphi_k} \tag{2.66}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{l_i} = \frac{x_k}{l_k} \tag{2.67}$$

das Ergebnis

$$\boxed{x_i \cdot \tan\varphi_i = x_k \cdot \tan\varphi_k} \tag{2.68}$$

An einem System aus drei Scheiben, siehe Bild 2.21, wollen wir die Anwendung dieser Beziehungen erläutern. Gegeben ist der Winkel φ_1 mit dem Wert $\tan\varphi_1 = 1/3$. Gesucht sind die anderen beiden Drehwinkel φ_2 und φ_3. Die Verdrehung der Scheibe 2 und damit des Stabes 2 ergibt sich über (2.68) zu

$$\tan\varphi_2 = \frac{x_1 \cdot \tan\varphi_1}{x_2} = \frac{3 \cdot 1/3}{1} = 1\,. \tag{2.69}$$

Die Verdrehung der Scheibe 3 erhält man nun z.B. aus (2.66)

$$\tan\varphi_3 = \frac{y_2 \cdot \tan\varphi_2}{y_3} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \tag{2.70}$$

oder mit (2.68) über die Verdrehung der Scheibe 1

$$\tan\varphi_3 = \frac{\bar{x}_1 \cdot \tan\varphi_1}{\bar{x}_3} = \frac{9 \cdot 1/3}{3} = 1\,. \tag{2.71}$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Verdrehungen der Scheiben in Abhängigkeit von der Verdrehung der Scheibe 1 das Resultat

$$\begin{bmatrix} \tan\varphi_1 \\ \tan\varphi_2 \\ \tan\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \tan\varphi_1\,. \tag{2.72}$$

2.4.4 Berechnung der Verschiebung eines Punktes

Die Arbeit, die eine Last P auf der zugehörigen Verschiebung v leistet, ist $P \cdot v$, siehe Bild 2.20 *a*. Deshalb ist es häufig notwendig den Anteil v von δP zu ermitteln, der in Richtung der Last fällt. Das ist jedoch einfach, denn weil sich der Stab um seinen Hauptpol dreht, besteht zwischen der Auslenkung δP in senkrechter Richtung zum Stab und den übrigen Größen die Beziehung

$$\frac{v}{\delta P} = \frac{x_p}{l_p}\,, \tag{2.73}$$

woraus schon das Ergebnis folgt

$$v = x_p \cdot \frac{\delta P}{l_p} = x_p \cdot \tan\varphi\,. \tag{2.74}$$

Analog lässt sich auch die horizontale Verschiebung ermitteln, denn man erhält sofort

$$u = y_p \cdot \tan\varphi\,. \tag{2.75}$$

2.4.5 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22

Im Bild 2.22 ist die Einflusslinie für die Querkraft in dem rechten, schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplans ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Querkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist gleichzeitig Ortslinie für den Hauptpol (2), genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). In dem Schnittpunkt der beiden Ortslinien liegt der Hauptpol (2).

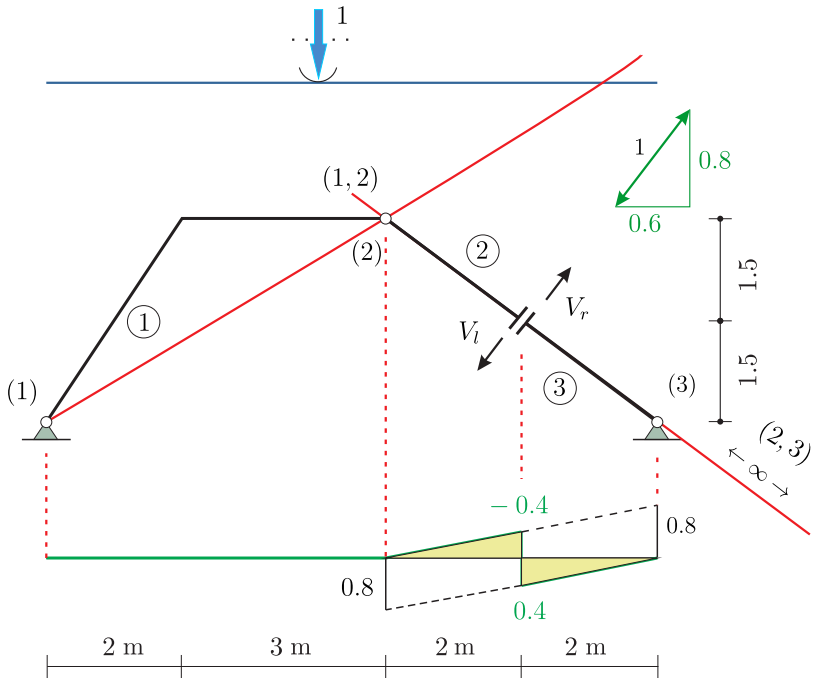


Bild 2.22. Vertikale Wanderlast und Einflussfunktion für eine Querkraft, $(1), (2), (3)$ sind die Hauptpole der Scheiben 1, 2 und 3 und $(1,2), (2,3)$ sind die Nebenpole von Scheibe 1 und 2 bzw. Scheibe 2 und 3

Zur Generierung der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 0.8 m.

Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Bewegung der Scheiben in der Projektion nutzen, da wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) betragsmäßig 0.8 m ist und umgekehrt die Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) betragsmäßig ebenso 0.8 m.

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtes bilden die gesuchte Einflusslinie.

2.4.6 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.23

In Bild 2.23 ist die Einflusslinie für die Normalkraft in dem schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplanes ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Normalkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist auch Orts-

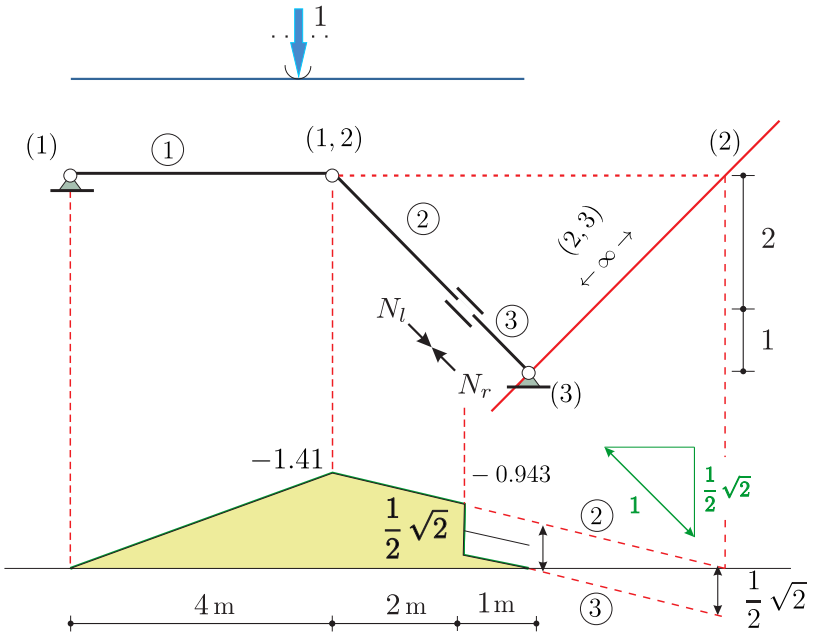


Bild 2.23. Einflussfunktion für eine Normalkraft bei vertikaler Wanderlast

linie für den Hauptpol (2) genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). Beide Ortslinien liefern in ihrem Schnittpunkt den Hauptpol (2).

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird im Normalkraftgelenk eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt und umgekehrt die Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) absolut genommen $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt.

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtes bilden wieder die gesuchte Einflusslinie.

2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.24

In Bild 2.24 ist die Einflusslinie für das Biegemoment im Punkt i gesucht, und so wird an der Stelle i zunächst ein Momentengelenk eingefügt. Das vormals statisch bestimmte System ist nun verschieblich. Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich dann über die Bedingung $\tan \varphi_r + \tan \varphi_l = 1$. Diese ist genau dann erfüllt, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

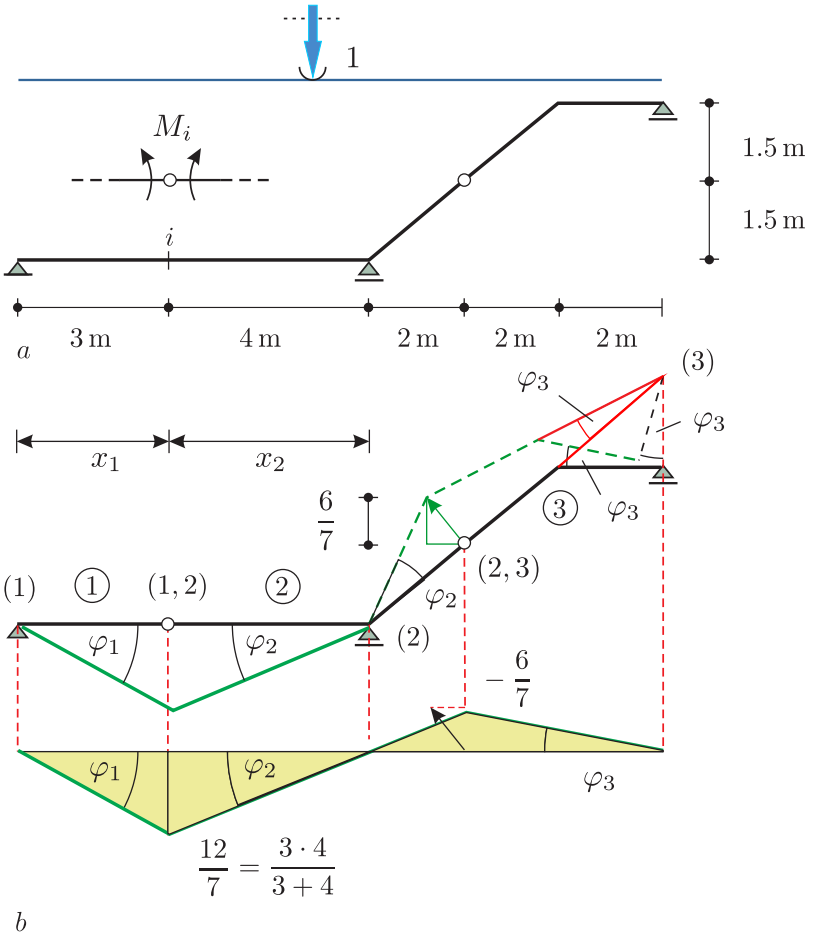


Bild 2.24. Einflussfunktion für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

$$\eta = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3 \cdot 4}{3+4} = \frac{12}{7} \tag{2.76}$$

hat.

Zum Schluss muss man noch die Verschiebungsfigur in die Lastrichtung projizieren. Die Verdrehungen der drei Scheiben in der Projektion stimmen mit den Verdrehungen in der Verschiebungsfigur überein. In den Hauptpolen ist die Verschiebung null und somit auch in der Projektion. Unter Beachtung dieser Zusammenhänge ist es im Allgemeinen möglich, sofort die Projektion des Lastgurtes in der Verschiebungsfigur zu zeichnen, ohne vorher die komplette Verschiebungsfigur am verschieblichen System zu bestimmen.

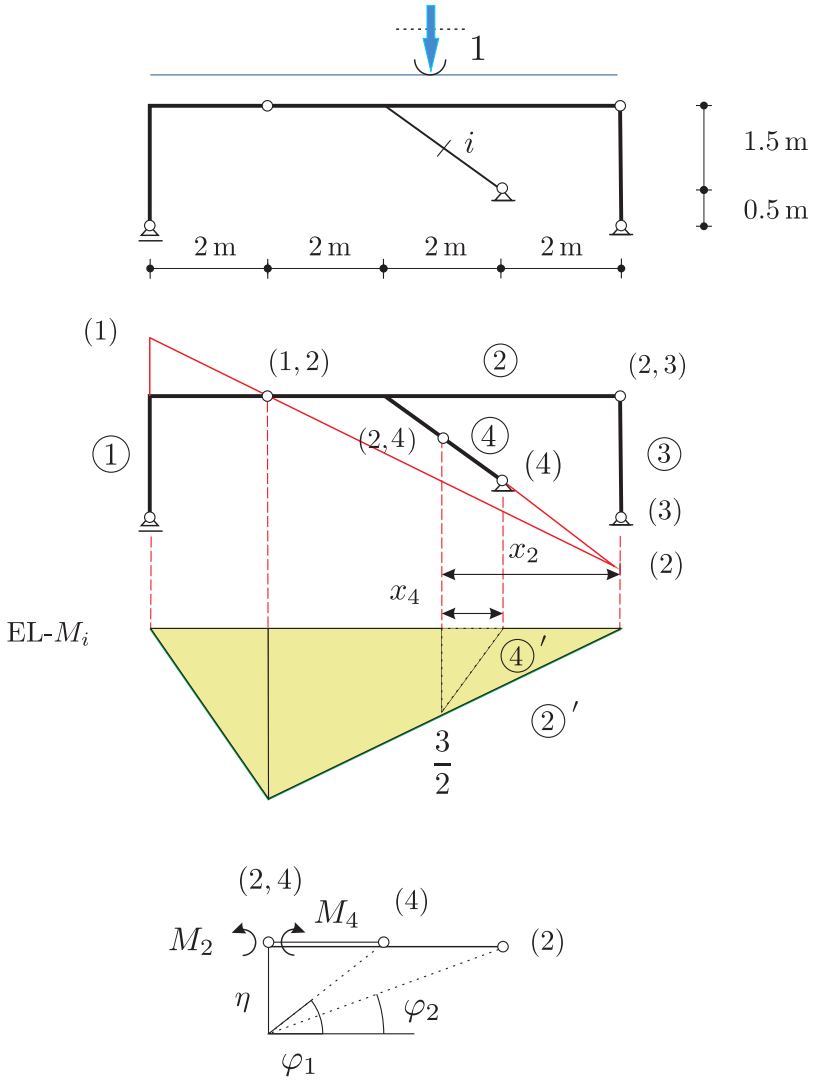


Bild 2.25. Einflussfunktion für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

2.4.8 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.25

In Bild 2.25 ist ebenfalls die Einflusslinie für ein Biegemoment in einem Punkt i gesucht. An der Stelle i wird zunächst wieder ein Momentengelenk eingefügt, wodurch das ehemals statisch bestimmte System verschieblich wird. Im Unterschied zum Beispiel in Bild 2.24 liegen beide Hauptpole der im Gelenk i, dem Nebenpol, miteinander verbundenen Scheiben, auf der rechten Seite des Gelenkes.

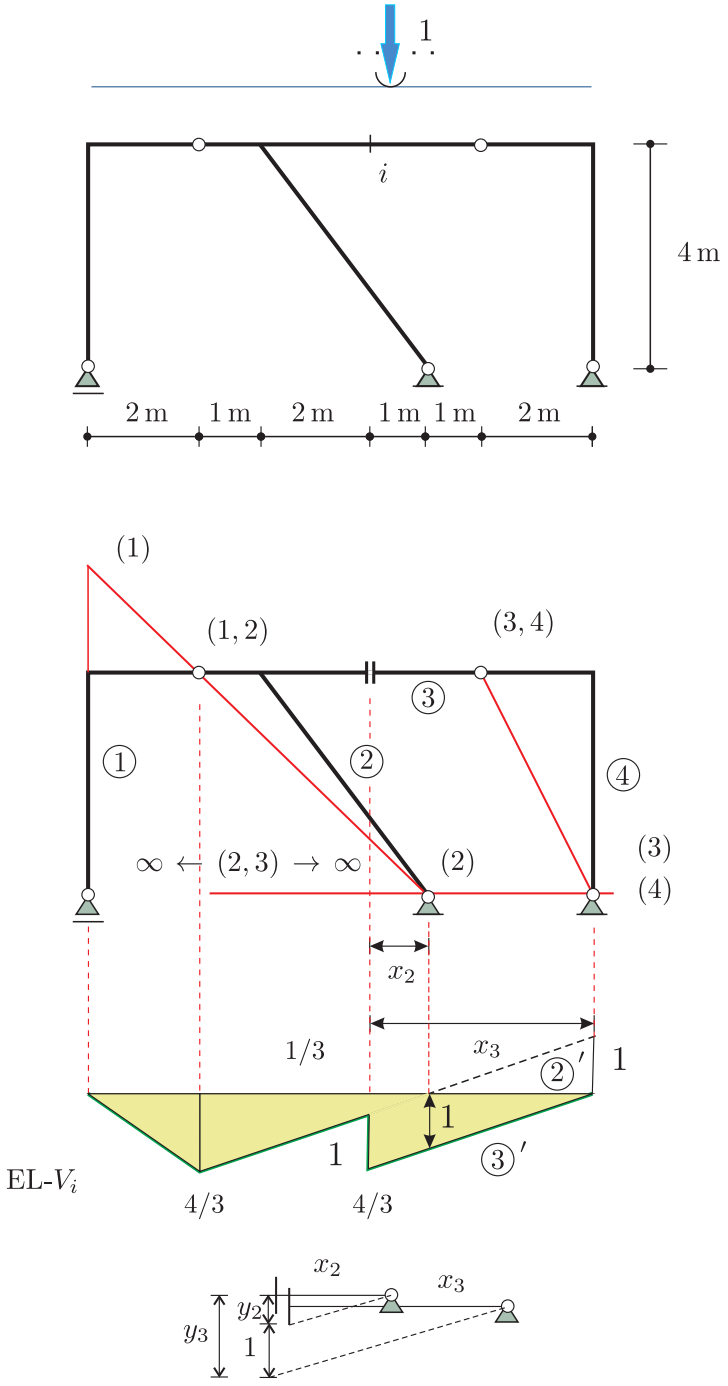


Bild 2.26. Einflussfunktion für eine Querkraft bei vertikaler Wanderlast

Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich nun über die Bedingung $\tan\varphi_4 - \tan\varphi_2 = 1$. Diese ist erfüllt, wenn die relative Verdrehung zwischen den beiden Scheiben 2 und 4 gleich eins ist, was genau dann der Fall ist, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

$$\eta = \frac{x_2 \cdot x_4}{x_2 - x_4} = \frac{3 \cdot 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} \tag{2.77}$$

hat.

2.4.9 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.26

In Bild 2.26 ist die Einflusslinie für die Querkraft im Punkt i gesucht und so wird an der Stelle i zunächst ein Querkraftgelenk eingefügt. Analog zum Beispiel in Bild 2.25 liegen beide Hauptpole der in diesem Gelenk verbundenen Scheiben rechts vom Aufpunkt i.

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Negative Arbeit wird dann geleistet, wenn sich die Scheibe 2 bzw. die Scheibe 3 im Uhrzeigersinn bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn um die zugehörigen Hauptpole drehen. Diese Drehrichtung findet man so auch in der Projektion wieder.

Vertikal, also in Lastrichtung, findet man in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 1 m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) absolut 1 m ist und umgekehrt. Die Teile des Lastgurtes auf den Projektionen der Scheiben gehören zur gesuchten Einflusslinie.

2.4.10 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.27

In Bild 2.27 sind die Einflusslinien für die Auflagerkräfte in A und B gesucht. Nach dem Lösen der jeweiligen Fessel wird, da die Auflagerkräfte genau in Belastungs- und Projektionsrichtung liegen, der Punkt A und B um den Wert 1 entgegengesetzt zur positiven Richtung der Auflagerkraft, also nach unten, verschoben (negative Arbeit!).

Die Einflusslinie für die Auflagerkraft A lässt sich sofort ablesen, da der abgesenkte Punkt der Scheibe 1 zum Lastgurt und damit zur Einflusslinie gehört. Im Fall der Einflussfunktion für die Auflagerkraft in B gehört dieser abgesenkte Punkt jedoch zu den Scheiben 3 und 4, deren Hauptpole im Unendlichen liegen. Damit verschieben sich diese beiden Scheiben parallel ebenfalls um eins nach unten.

Auf diesen beiden Scheiben findet man nun die Bilder der zu den Scheiben 1 bzw. 2 gehörenden Nebenpole (1,3) bzw. (2,4). Die Verbindung von (1) mit (1,3) und von (2) mit (2,4) in der Projektion liefert uns die zum Lastgurt gehörenden Scheiben 1 und 2 und damit die Einflusslinie.

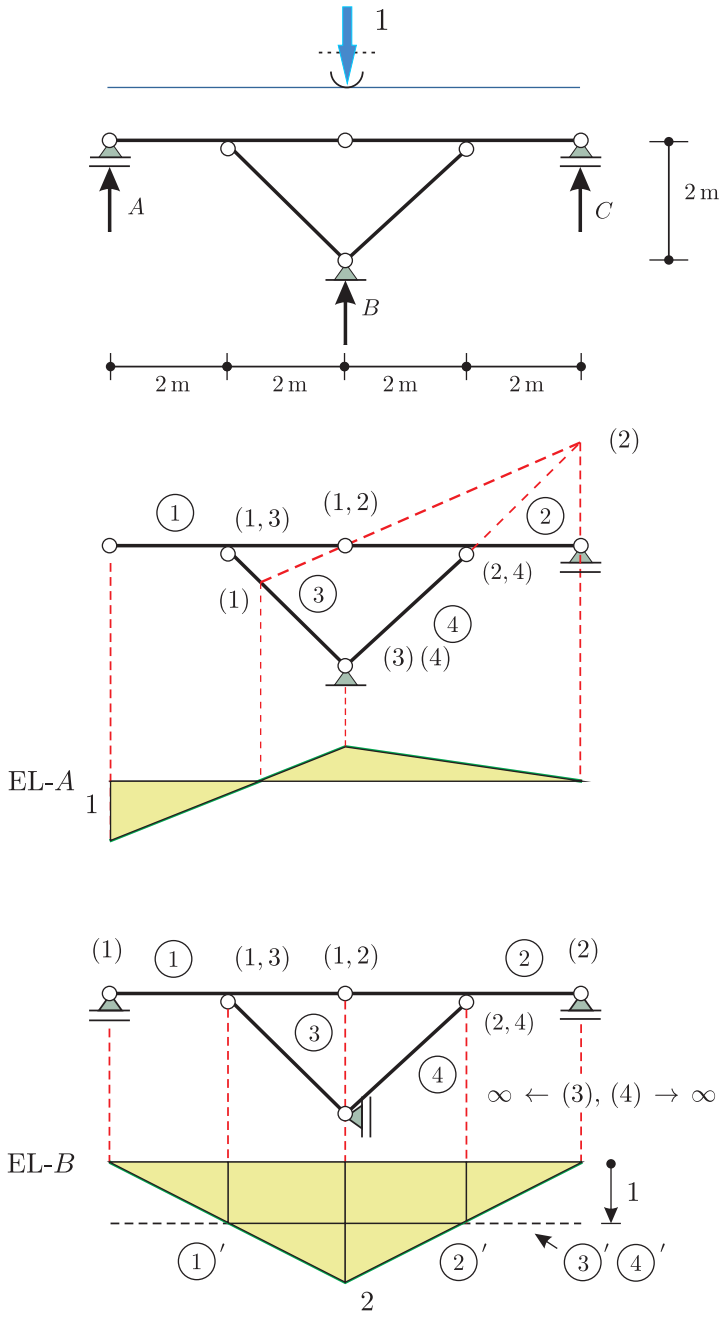


Bild 2.27. Einflussfunktionen für zwei Lagerkräfte

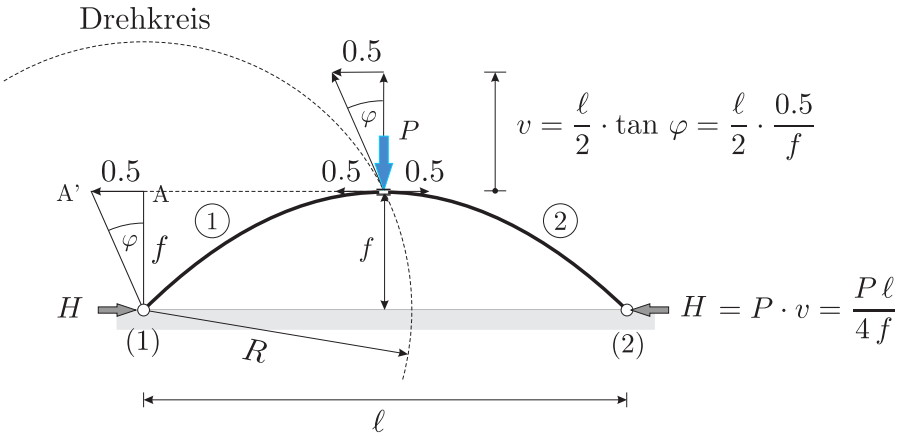


Bild 2.28. Spreizung der Bogenmitte um 1 Meter, eine für die Baustatik zentrale Figur, die zudem verdeutlicht, wie eng Statik und Kinematik zusammenhängen

2.4.11 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.28

Der Kämpferdruck H eines Bogens, siehe Bild 2.28,

$$H = \frac{M}{f}\,, \tag{2.78}$$

ist gleich dem Feldmoment M am gleichlangen Einfeldträger dividiert durch den Stich f. Die richtige Balance zwischen H und f zu finden ist das Kernproblem bei der Konstruktion von Hängebrücken.

Eigentlich ist ein gelenkig gelagerter Bogen einfach statisch unbestimmt. Wenn aber die Belastung symmetrisch ist, dann ist im Scheitel des Bogens, die Querkraft null und man kann daher dort ein Querkraftgelenk einbauen und den Bogen so statisch bestimmt machen.

In Bild 2.28 wird die Normalkraft $N = H$ im Zenith des Bogens durch den Einbau eines N-Gelenks ‚sichtbar' gemacht. Bei einer Spreizung der Bogenmitte um einen Meter dreht sich die linke Seite des Bogens um den Pol 1 und alle Punkte, die dieselbe Höhe f über dem Pol haben, schwenken um 0.5 m nach links, wie der Punkt A in Bild 2.28. Daran kann man $\tan\varphi = 0.5/f$ ablesen und alle anderen Punkte, die in der Horizontalen den Abstand $\ell/2$ vom Drehpol haben, schwenken um $v = \ell/2 \cdot \tan\varphi$ nach oben und somit ist $H = P \cdot v = P \cdot l/(4 \cdot f) = M/f$. Bei einer Gleichlast p gilt

$$H = 2 \cdot p \int_0^{\ell/2} x \cdot \tan\varphi \, dx = \frac{p \cdot \ell^2}{8 \cdot f} = \frac{M}{f}\,. \tag{2.79}$$

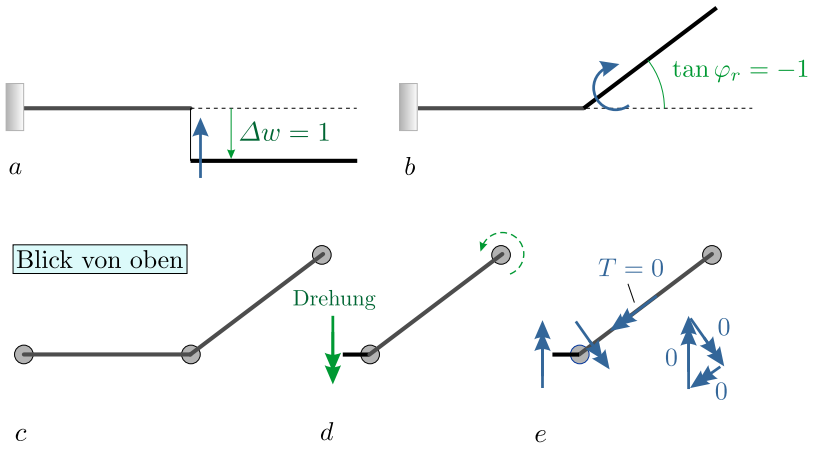


Bild 2.29. Einflussfunktionen am Kragträger und abgewinkelter Zweifeldträger

2.5 Kragträger

Zum Schluss noch eine Bemerkung zu den Kragträgern oder allgemeiner zu angehängten Tragwerksteilen. Warum bewegt sich immer nur die rechte Seite, das freie Ende, aber nicht der linke Teil, wenn man die Spreizung $\Delta w = 1$ bzw. $\tan\varphi_r = -1$ auslöst, siehe Bild 2.29.

Wollte man auch Bewegung in dem linken Teil sehen, dann müssten in der Schnittfuge gegengleiche Kräfte wirken, aber dann käme der rechte Teil ins ‚Trudeln', weil er nicht gelagert ist. Es geht also nur so, dass die Bewegung allein in dem rechten Teil stattfindet und zwar kräftefrei. Sobald eine Seite kinematisch ist, bewegt sich die andere Seite nicht.

Im Fall des abgeknickten Zweifeldträger auf ‚Kugellagern' in Bild 2.29 *c* können die Lager keine Torsionsmomente aufnehmen und so weicht der rechte Teil aus, dreht sich, wenn man das Momentengelenk (EF für M links vom mittleren Lager) spreizen will, Bild 2.29 *d*, d.h. im ersten Feld kommt keine Bewegung an, die Einflussfunktion ist dort null. Dasselbe gilt umgekehrt für das Moment rechts vom mittleren Lager. Der Zweifeldträger trägt wie eine Kette von zwei Einfeldträgern. Das Stützmoment ist immer null, [312] S. 145. Wenn die Träger einen Winkel von 90° bilden, ist es evident, aber es gilt auch für jeden Winkel $\neq 180°$ dazwischen.

2.6 Statisch unbestimmte Tragwerke

Wenn das Tragwerk statisch unbestimmt ist, dann sind Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen, aber auch dann ist $W_{2,1} = 0$ und der *Satz von Betti* reduziert sich wie oben auf

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} = 0\,. \tag{2.80}$$

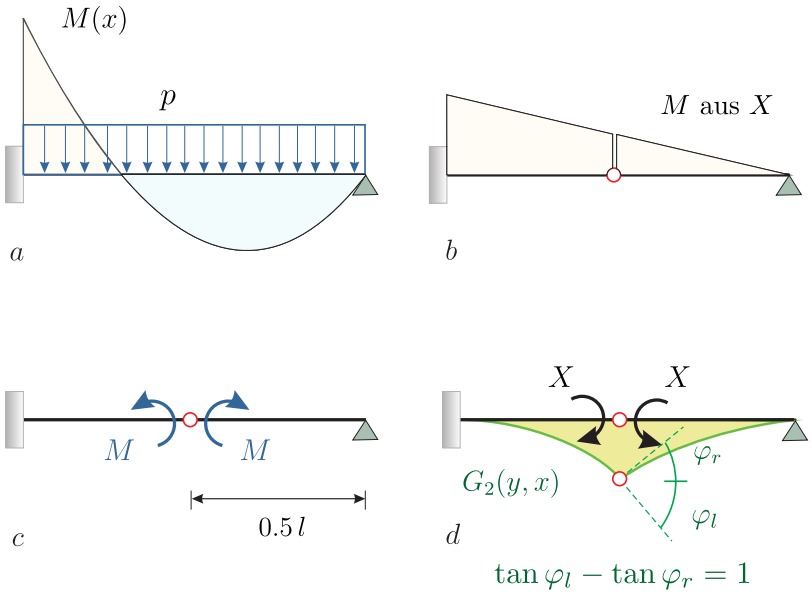


Bild 2.30. Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

Betrachten wir den Balken in Bild 2.30. Um die Einflussfunktion für das Biegemoment in Feldmitte zu erzeugen, wird ein Momentengelenk eingebaut und die beiden Hälften so gegeneinander verdreht, dass sich die Spreizung

$$w'(x_-) - w'(x_+) = \tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1 \tag{2.81}$$

einstellt. Dann integriert man von 0 bis x und von x bis zum Trägerende l

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \mathscr{B}(G_2, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_2, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.82}$$

Die Randarbeiten an den Trägerenden sind null und an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich alle Randarbeiten weg, bis auf den Term

$$\underbrace{M(x)\,G_2'(x_-)}_{\text{von links}} - \underbrace{M(x)\,G_2'(x_+)}_{\text{von rechts}} = M(x)\cdot(\tan\varphi_l - \tan\varphi_r)\,, \tag{2.83}$$

und somit ergibt sich in der Summe

$$\mathscr{B}(G_2, w) = M(x)\cdot\underbrace{(\tan\varphi_l - \tan\varphi_r)}_{=1} - \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy = 0 \tag{2.84}$$

oder

$$M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.85}$$

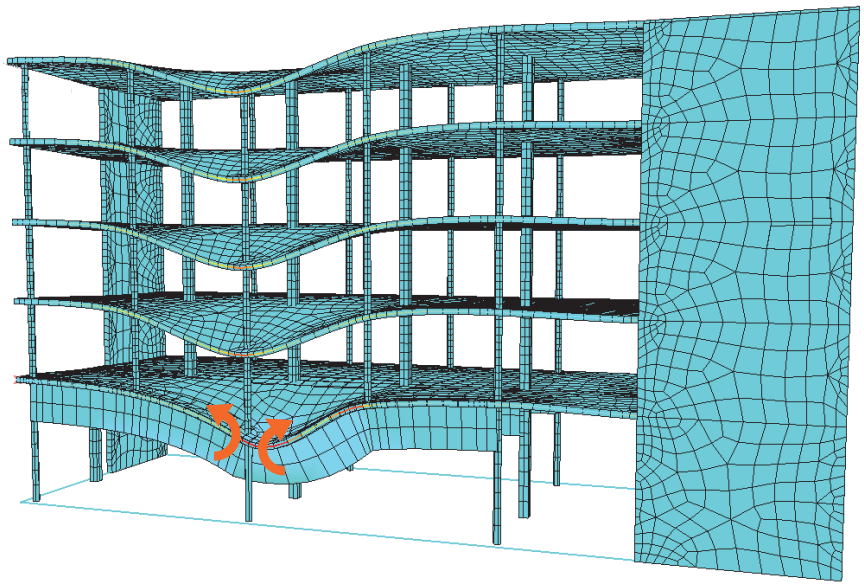


Bild 2.31. Einflussfunktion für das Moment in einem Unterzug (SOFiSTiK)

Um die Spreizung zu erzeugen, müssen an dem rechten Träger links und rechts von dem Gelenk zwei gegengleiche Momente $\pm X$ wirken. In der Praxis macht man das bekanntlich so, dass man zunächst ein Momentenpaar $\pm X = 1$ aufbringt, die Relativverdrehung berechnet und dann das X so normiert, dass sich die gewünschte Spreizung von eins einstellt.

Das ergibt die folgende Bilanz. Die Arbeit der äußeren Kräfte am Original auf den Wegen $G_2(y, x)$ aus der Spreizung ist

$$W_{1,2} = \int_0^l G_2(y,x)\, p(y)\, dy - M(x) \cdot (\tan \varphi_l - \tan \varphi_r)\,, \tag{2.86}$$

aber die Arbeit der Kräfte rechts auf den Wegen links ist null

$$W_{2,1} = -X \cdot w'(x) + X \cdot w'(x) = (-X + X)\, w'(x) = 0\,, \tag{2.87}$$

was immer so ist. Die Kräfte $\pm X$, hier die Momente, die das Gelenk spreizen, sind gegengleich und weil die zu den beiden $\pm X$ konjugierte Weggröße des Originals im Aufpunkt stetig ist ($w'(x)$ springt nicht bei diesem Beispiel), ist die Arbeit der Kräfte $\pm X$ in der Summe null.

Sinngemäß wird so auch die Einflussfunktion für das Stützmoment in dem Unterzug in Bild 2.31 berechnet.

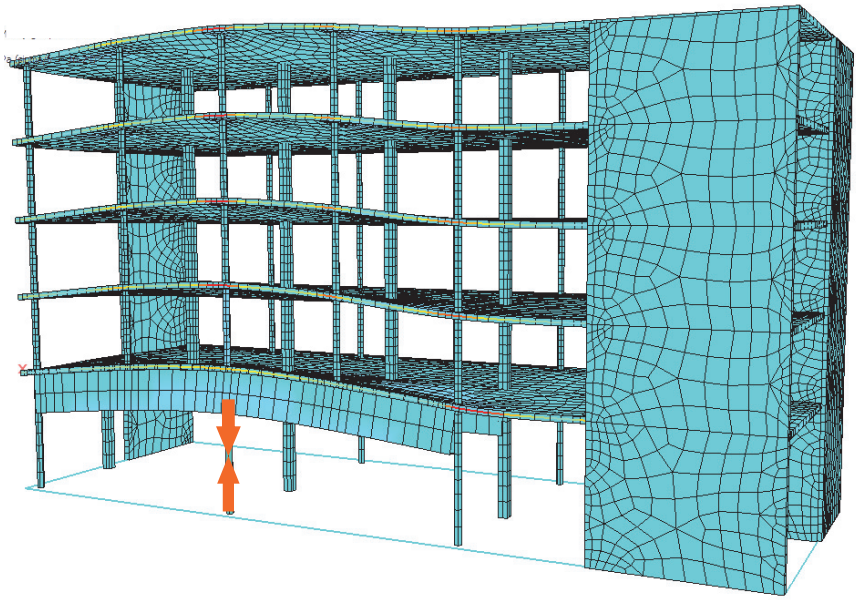


Bild 2.32. Einflussfunktion für die Normalkraft in einer Stütze (SOFiSTiK)

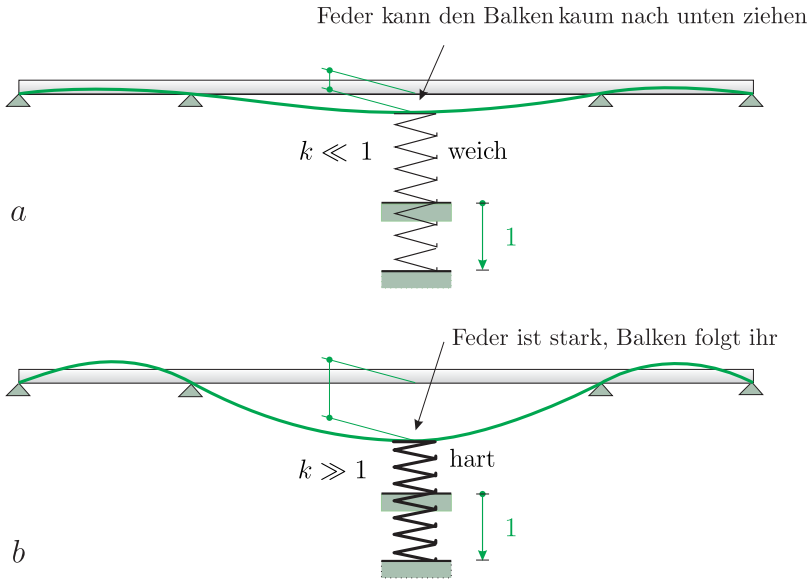


Bild 2.33. Eine weiche Feder fängt viel von der Fusspunktsbewegung auf, während eine harte Feder fast die ganze Bewegung an den Träger weitergibt und somit die Einflussfunktion für die Lagerkraft weiter ausschlägt als bei einer weichen Feder

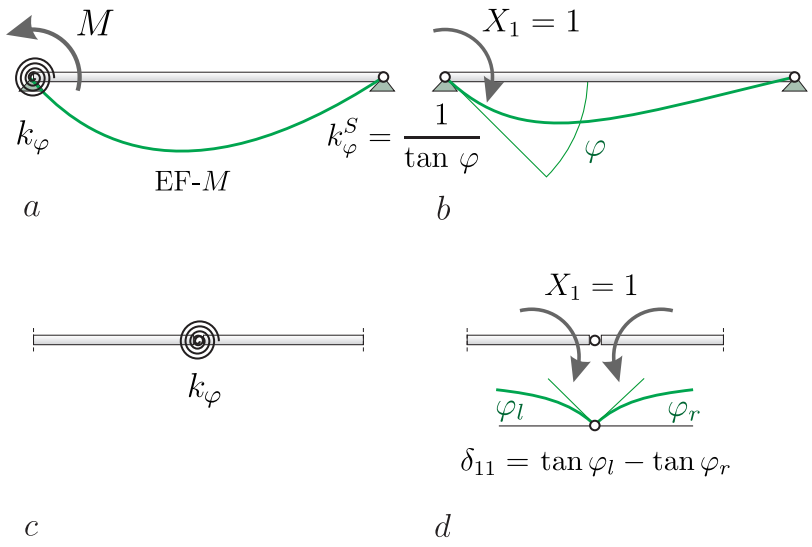


Bild 2.34. Einflussfunktion für eine elastische Einspannung

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen reduziert sich der *Satz von Betti* auf die Gleichung

$$W_{1,2} = 0\,. \tag{2.88}$$

2.7 Einflussfunktionen für Lagerkräfte

Lagerkräfte können, wie andere Schnittkräfte auch, durch den Einbau eines entsprechenden Gelenks sichtbar gemacht werden. Die Einflussfunktion entsteht dann wie gewohnt durch die **Spreizung des Lagers**. Wenn der Boden starr ist, dann kann sich nur eine Seite des Lagers bewegen, die somit allein den vollen Weg gehen muss. d.h. die 1 geht in voller Höhe in das Tragwerk, wie etwa in Bild 2.32.

Wenn der Boden elastisch ist, Steifigkeit k_B, dann muss man durch eine lokale Analyse untersuchen, wieviel von der 1 der Boden beiträgt und wieviel das Tragwerk.

Die Steifigkeit k_S der Struktur ermittelt man, indem man die Verbindung des Tragwerks mit dem Boden löst, und mit einer Kraft $X = 1$ gegen das Tragwerk drückt. Der Kehrwert der Verformung ist k_S. Die Steifigkeit der parallel geschalteten Federn beträgt dann $k = k_S + k_B$.

Ein verwandtes Problem stellen **nachgiebige Stützen** (= Federn) dar, siehe Bild 2.33. Aus der Sicht des als starr angenommenen Baugrunds sind Tragwerk und Stütze zwei hintereinander geschaltete Federn

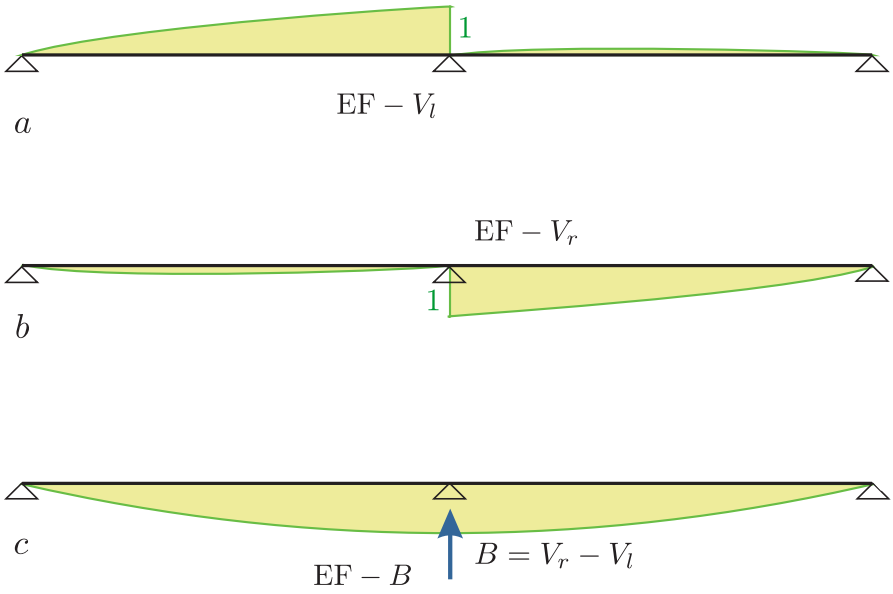


Bild 2.35. Einflussfunktionen für Querkräfte, **a)** V_l, **b)** V_r und **c)** die Lagerkraft $B = V_r - V_l$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_S} + \frac{1}{k_B} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_S\, k_B}{k_S + k_B}\,. \tag{2.89}$$

Wenn die Feder sehr weich ist, dann wird der Weg 1, den der (vom Boden gelöste) Fusspunkt der Feder geht, zu einem großen Teil von der Feder verschluckt und der Träger spürt wenig von der Spreizung, d.h. die Einflussfunktion verläuft sehr flach in dem Träger. Umgekehrt, wenn die Feder sehr hart ist, dann teilt sich der Weg 1 am Fuss der Feder dem Träger deutlich mit, d.h. die Feder nimmt relativ viel Last auf, weil die Einflussfunktion jetzt weit ausschwingt.

Bei einer **elastischen Einspannung** wie einer Drehfeder, siehe Bild 2.34, beträgt der Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und dem Moment M

$$M = k_\varphi \tan\varphi\,. \tag{2.90}$$

Ist k_φ^S die Drehfedersteifigkeit der Struktur (S), dann beträgt die Drehfedersteifigkeit der **parallel geschalteten Federn**

$$k = k_\varphi^S + k_\varphi\,. \tag{2.91}$$

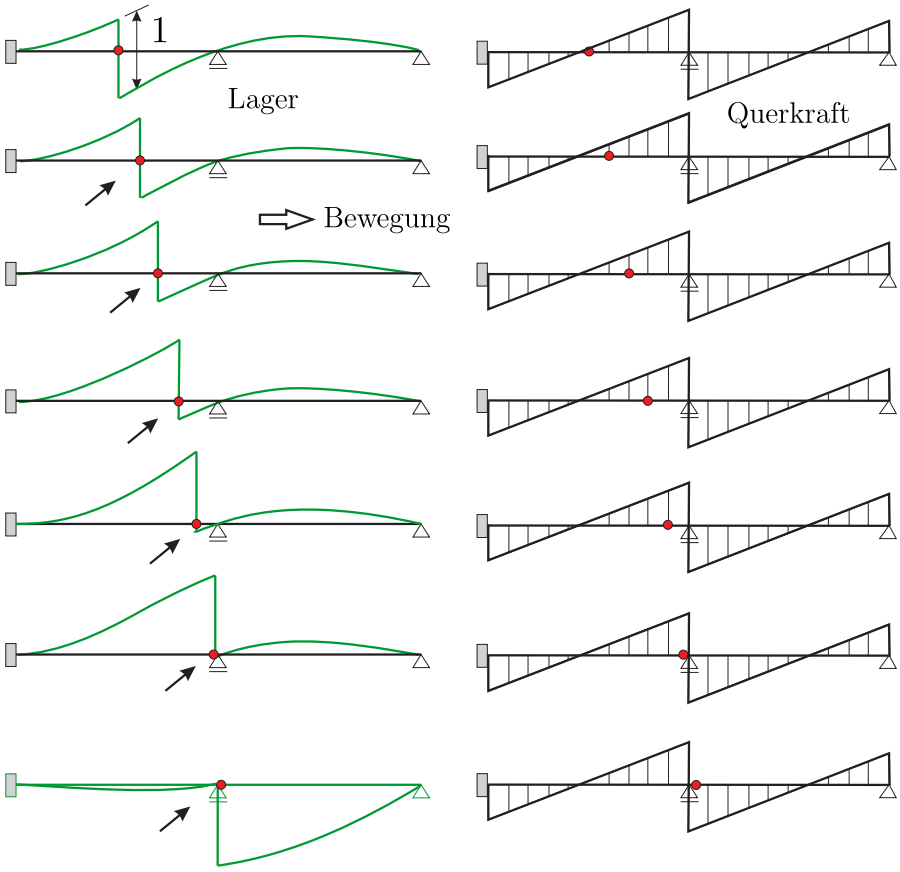


Bild 2.36. Wie die Einflussfunktion für die Querkraft über den Träger wandert und dabei im Grunde immer gleich bleibt, [126], (BE-FRAMES).

2.8 Sprünge in Schnittgrößen

Momente M oder Querkräfte V können springen. Es gibt daher keinen Sinn einen Aufpunkt genau in einen solchen Sprung, wie das Zwischenlager eines Balkens, zu legen, siehe Bild 2.35. Man kann nur eine Einflussfunktion für die linke Querkraft aufstellen und separat eine für die rechte Querkraft. Die Einflussfunktion für den Sprung $V_r - V_l$ ist identisch mit der Einflussfunktion für die Lagerkraft, die sich ja aus beiden Teilen zusammensetzt.

Im Angriffspunkt einer Einzelkraft $P = 1$ springt die Querkraft um eins und deswegen weisen Einflussfunktionen den typischen Sprung auf, siehe Bild 2.36. Rechnerisch kommt er durch die Spreizung des Querkraftgelenks in das System hinein.

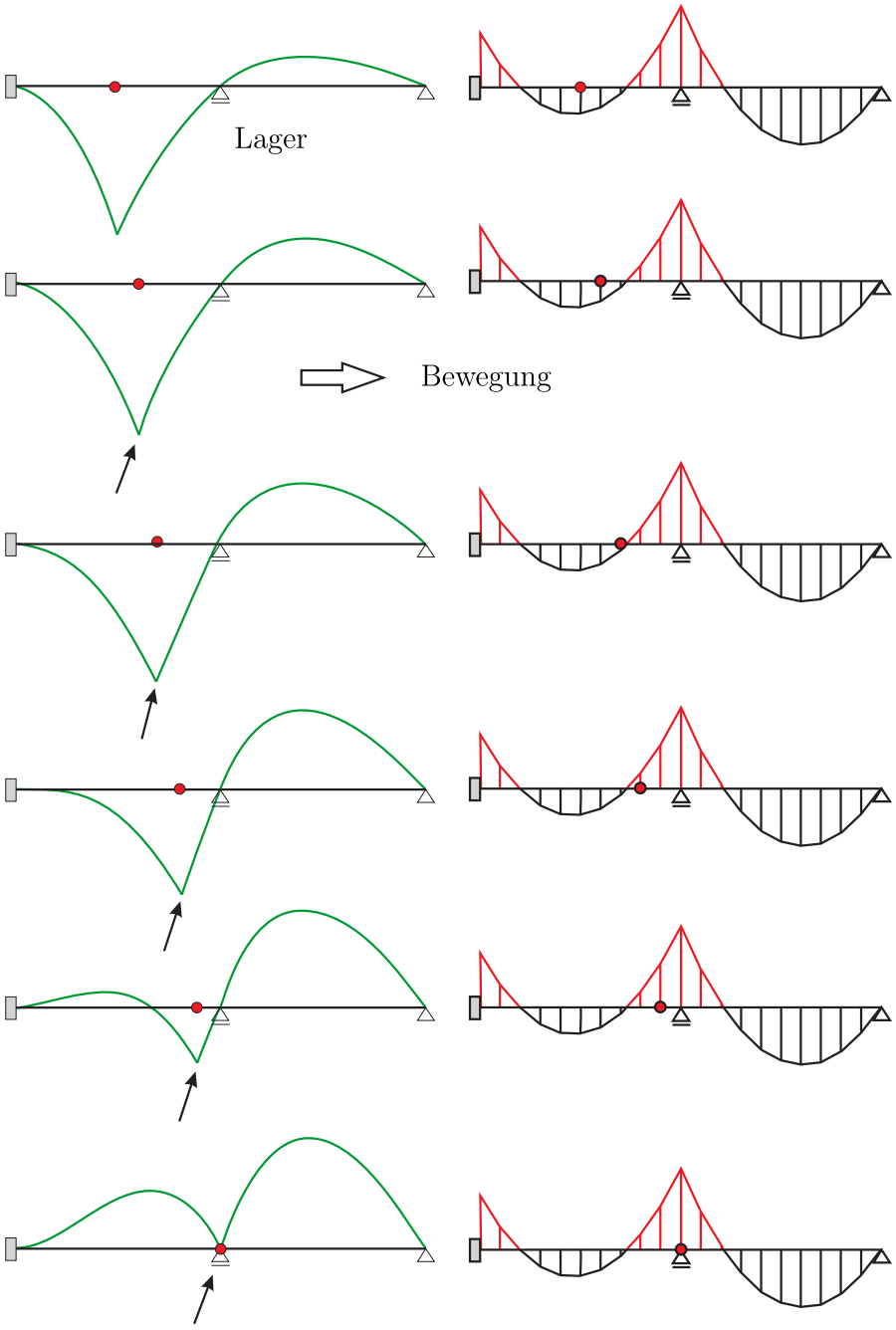


Bild 2.37. Wie die Einflussfunktion für das Biegemoment über den Träger wandert und dabei im Grunde immer gleich bleibt, [126], (BE-FRAMES).

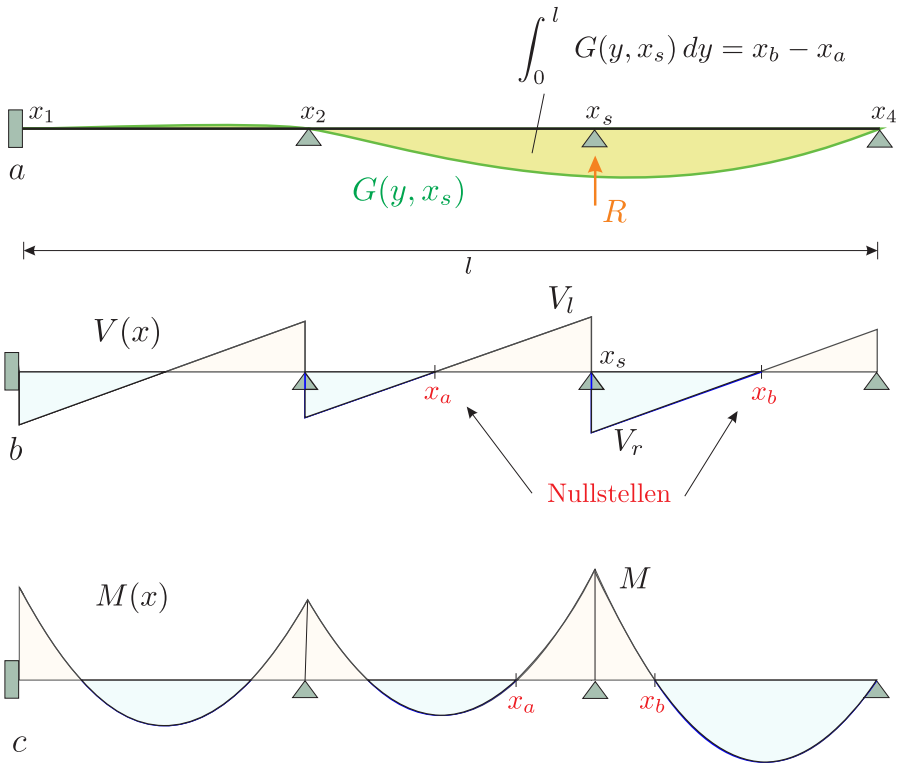


Bild 2.38. Durchlaufträger unter Gleichlast, **a)** die Einflussfunktion für die Lagerkraft, **b)** die Nullstellen der Querkraft, **c)** Momentenverlauf (BE-FRAMES)

Die Einflussfunktionen für Schnittmomente sind immer stetig, springen nicht, weil unter vertikalen Wanderlasten die Momente nicht springen, siehe Bild 2.37. Wollte man Sprünge sehen, dann müsste man die Ableitung dG_2/dy der Einflussfunktion antragen. Das wäre dann die Einflussfunktion für das Schnittmoment, wenn ein Wandermoment $M = 1$ über den Träger läuft.

Wegen

$$\frac{dG_2}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{G_2(x, y + 0.5\,\Delta y) \cdot 1 - G_2(x, y - 0.5\,\Delta y) \cdot 1}{\Delta y} \tag{2.92}$$

dreht ein positives Wandermoment im Uhrzeigersinn, denn die Kraft $P = 1/\Delta y$ rechts vom Punkt y zeigt nach unten und die Kraft links davon zeigt nach oben. Dieses Kräftepaar $\pm 1/\Delta y$ ist ja dem Wandermoment äquivalent.

2.9 Die Nullstellen der Querkraft

Praktiker schätzen die Größe einer Lagerkraft über das Querkraftdiagramm ab. Je weiter die Nullstellen der Querkraft auseinander liegen, um so größer ist die Lagerkraft, siehe Bild 2.38.

Diese Abschätzung beruht auf der Formel $V'(x) = -p(x)$. Links vom Lager (Koordinate x_s) gilt

$$\int_{x_a}^{x_s} V'(x)\,dx = V_l - V(x_a) = V_l \tag{2.93}$$

und rechts vom Lager

$$\int_{x_s}^{x_b} V'(x)\,dx = V(x_b) - V_r = -V_r \tag{2.94}$$

und somit beträgt die Lagerkraft

$$R = V_r - V_l = \int_{x_s}^{x_b} p(x)\,dx + \int_{x_a}^{x_s} p(x)\,dx = \int_{x_a}^{x_b} p(x)\,dx\,. \tag{2.95}$$

In allen Lastfällen $p = c$ (konstante Streckenlast) ist bei einem Durchlaufträger die Lage und der Abstand der Nullpunkte gleich und der Abstand ist gleich der Fläche der Einflussfunktion

$$R = \int_0^l G(y, x_s) \cdot c\,dy = (x_b - x_a) \cdot c\,. \tag{2.96}$$

Ähnliches gilt für das Stützmoment $M = M_l = M_r$. Aus $M'(x) = V(x)$ folgt

$$M = M_l = \int_{x_a}^{x_s} V\,dx \qquad M = M_r = -\int_{x_s}^{x_b} V\,dx\,, \tag{2.97}$$

wenn jetzt x_a und x_b die Nullstellen im M-Verlauf bezeichnen, siehe Bild 2.38 *c*. Das Stützmoment ist also gleich dem Flächeninhalt von V auf der linken Seite bzw. von $-V$ auf der rechten Seite.

2.10 Kernpunktmomente

In die Biegespannungen eines Trägers mit dem oberen und unteren Widerstandsmoment W_o und W_u

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{o,u}} < \sigma_{Rd} = \sigma_{zul} \tag{2.98}$$

gehen die Normalkräfte N und die Biegemomente M ein. Dieser Ausdruck ist äquivalent mit

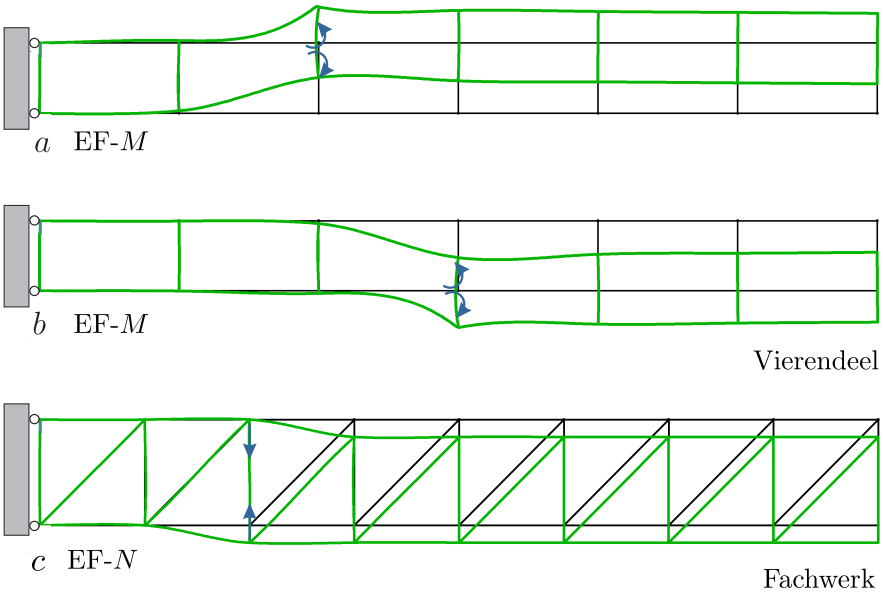


Bild 2.39. EF-$M(x)$. Die Momente in dem Vierendeelträger ändern sich nur wenig mit der Stellung der Last. Ganz ähnlich die EF-N für einen Vertikalstab in einem auskragenden Fachwerkträger mit biegesteifen Knoten

$$\sigma = \frac{1}{W_{o,u}} \left[\frac{N \cdot W_{o,u}}{A} \pm M \right] = \frac{M_{ku,ko}}{W_{o,u}} \,, \tag{2.99}$$

wobei

$$M_{ko,ku} = N \cdot k_{o,u} \pm M \qquad EF{-}M_{ko,ku} = EF{-}N \cdot k_{o,u} \pm EF{-}M \tag{2.100}$$

die **Kernpunktsmomente** sind, wenn $k_{o,u} = W_{u,o}/A$ die Kernabstände oben und unten sind, [263].

Diese zweite Formulierung ist besser handhabbar, weil die beiden Einflussfunktionen für N und M, sowieso parallel laufen – ändert sich N, dann ändert sich auch M – und die Kernpunktmomente nur noch durch $W_{o,u}$ dividiert werden müssen.

2.11 Vierendeel als Kragträger

Die Option *Green's function anywhere* in dem Programm BE-FRAMES erlaubt es, mit den Tragwerken zu spielen und dabei zeigte es sich, dass die Einflussfunktionen für die Kragarmmomente in Vierendeel-Trägern, siehe Bild 2.39, nahezu konstant verlaufen. Egal wo die Laufkatze steht, das Moment ändert sich kaum. Auch die Höhe der Momente selbst – im Bild die vertikale Auslenkung der EF – variiert nur wenig, wenn man den Aufpunkt ins nächste Gefach verschiebt.

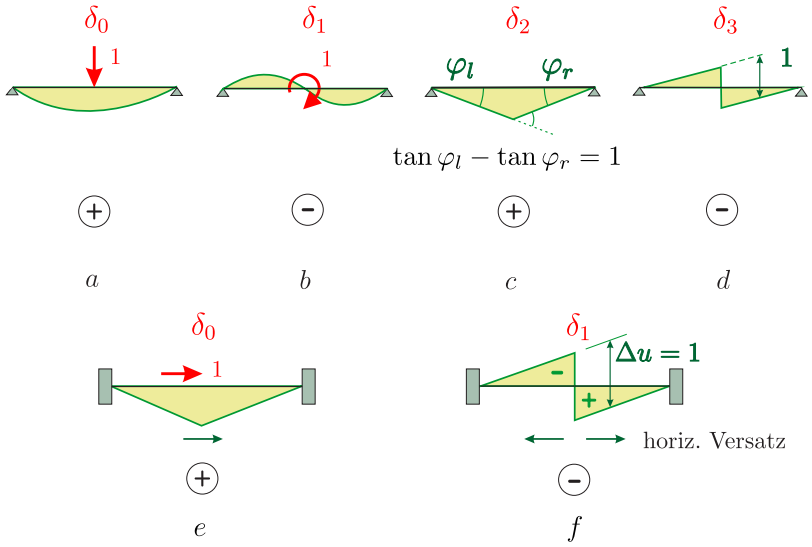


Bild 2.40. In der obersten Reihe sind die vier Einflussfunktionen eines Balkens für **a)** w, **b)** w', **c)** M und **d)** V, jeweils in der Balkenmitte, dargestellt. In der zweiten Reihe sieht man die Einflussfunktionen für einen Stab, **e)** u, **f)** N. Die Einflussfunktionen integrieren, $+$, bzw. differenzieren, $-$, die Belastung

2.12 Dirac Deltas

All diese Ergebnisse, die wir oben doch relativ mühsam durch Aufspalten des Integrationsbereichs in zwei Teile und dem genauen Verfolgen der einzelnen Terme hergeleitet haben, kann man mit dem Dirac Delta viel schneller zu Papier bringen.

Das Dirac Delta ist (mathematisch) eine **Linienlast** [N/m], die in allen Punkten y außer dem Aufpunkt x null ist

$$\delta_0(y-x) = 0 \qquad y \neq x\,, \tag{2.101}$$

und die bei einer virtuellen Verrückung w die Arbeit $1 \cdot w(x)$ leistet

$$\int_0^l \delta_0(y-x)\,w(y)\,dy = [\mathrm{N/m}]\,[\mathrm{m}]\,[\mathrm{m}] = 1 \cdot w(x) \qquad x \in (0,l)\,. \tag{2.102}$$

Der Ingenieur interpretiert das Dirac Delta natürlich als Einzelkraft.

Die Biegelinie, die zu der Einzelkraft gehört, ist die Lösung der Differentialgleichung

$$EI\,\frac{d^4}{dy^4}\,G_0(y,x) = \delta_0(y-x) \tag{2.103}$$

und mit dieser Definition und aufgrund der obigen Eigenschaften des Dirac Deltas ergibt sich die Einflussfunktion für $w(x)$ sozusagen automatisch

$$\mathscr{B}(G_0, w) = \int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy - \int_0^l G_0(y,x) p(y)\, dy$$
$$= w(x) - \int_0^l G_0(y,x) p(y)\, dy = 0\,. \tag{2.104}$$

Die Einflussfunktionen für die zweite Weggröße, $w'(x)$, und die beiden Kraftgrößen, $M(x)$ und $V(x)$, ergeben sich analog durch Einführung weiterer Dirac Deltas

$\delta_0(y-x)$	Kraft $P=1$	$\delta_1(y-x)$	Moment $M=1$
$\delta_2(y-x)$	Knick $\Delta w'=1$	$\delta_3(y-x)$	Versatz $\Delta w=1$

mit entsprechenden Eigenschaften, siehe Bild 2.40,

$$\int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy = w(x) \qquad \int_0^l \delta_1(y-x)\, w(y)\, dy = w'(x) \tag{2.105a}$$
$$\int_0^l \delta_2(y-x)\, w(y)\, dy = M(x) \qquad \int_0^l \delta_3(y-x)\, w(y)\, dy = V(x)\,. \tag{2.105b}$$

Die **Dirac Deltas** sind sozusagen die Akteure, die aus der Biegelinie w die interessierende Größe herauspräparieren.

Das Operieren mit Dirac Deltas ist ein sehr eleganter Kalkül mit dem man sehr einfach die vielen Schritte, die zur Herleitung einer Einflussfunktion nötig sind, wie die Zweiteilung des Intervalls, die genaue Verfolgung des Sprungs in der Querkraft etc., umgehen kann, aber auf der anderen Seite darf man nicht vergessen, dass man nur auf diesem analytischen Weg

$$\mathscr{B}(G_0, w) = \mathscr{B}(G_0^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0 \tag{2.106}$$

die Ergebnisse wirklich herleiten kann. Wenn man danach weiß, was herauskommt, kann man die Abkürzung nehmen, aber vorher muss man wissen, was eigentlich herauskommt...

Und noch eine Anmerkung: Die Punktwerte $w(x)$ etc. entspringen gar nicht dem Gebietsintegral, wie es das Dirac Delta glauben machen will, sondern es ist die **Differenz zweier Randarbeiten**, (Querkraftsprung), die den Punktwert $w(x)$ liefert

$$\underbrace{(V_0^L(x) - V_0^R(x))}_{=1}\, w(x) = 1 \cdot w(x)\,. \tag{2.107}$$

Das ist auch bei 2-D und 3-D Problemen so. Dann sind die Punktwerte die Grenzwerte von **Randintegralen** längs der kreisförmigen Öffnung, die den Aufpunkt umgibt, und die sich dann zu einem Punkt zusammenschnürt.

Die für die FEM wichtigste Eigenschaft von Dirac Deltas ist, dass man sie integrieren kann. Genauer gesagt, dass man feste Regeln dafür hat, was

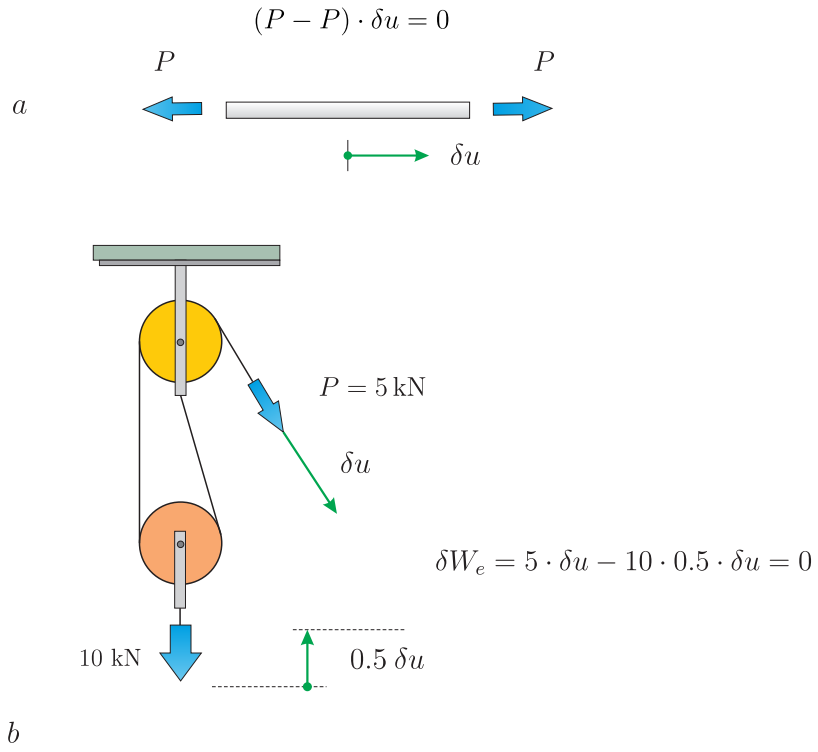


Bild 2.41. a) Gleichgewicht der Kräfte am Stab, *ut tenso sic vis*, **b)** Gleichheit der Arbeiten beim Flaschenzug

$$\int_0^l \delta(y-x)\varphi_i(y)\,dy \tag{2.108}$$

bedeuten soll, denn so kann man die Dirac Deltas nahtlos in die Methode der finiten Elemente einfügen, kann man jedem Dirac Delta **äquivalente Knotenkräfte** zuordnen

$$f_i = \int_0^l \delta_0(y-x)\varphi_i(y)\,dy = \varphi_i(x) \tag{2.109a}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_1(y-x)\varphi_i(y)\,dy = \varphi_i'(x) \tag{2.109b}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_2(y-x)\varphi_i(y)\,dy = M(\varphi_i)(x) \tag{2.109c}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_3(y-x)\varphi_i(y)\,dy = V(\varphi_i)(x)\,. \tag{2.109d}$$

Hier bezeichnet $M(\varphi_i)(x)$ das Moment der Ansatzfunktion φ_i im Aufpunkt x und $V(\varphi_i)(x)$ ist die Querkraft von φ_i im Aufpunkt x.

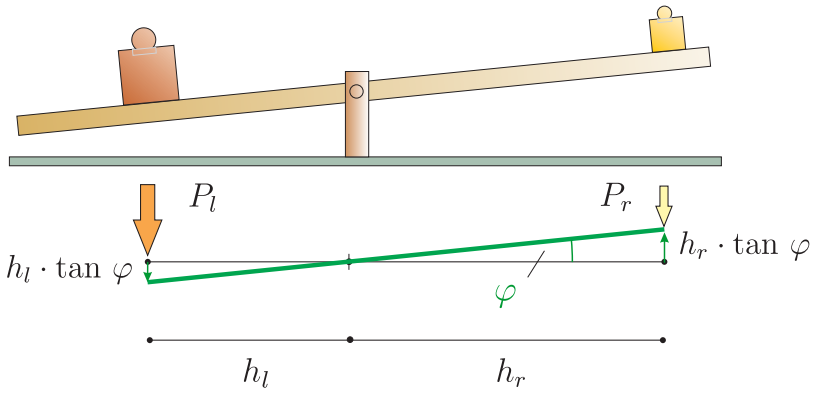


Bild 2.42. Schaukel

2.13 Dirac Energie

Das Geheimnis eines Flaschenzuges ist, dass die Kraft, die am Seilende zieht, und das Gewicht dieselbe Arbeit verrichten, siehe Bild 2.41. Auch Einflussfunktionen basieren auf dieser **Energiebalance**. Die Arbeit, die eine Einzelkraft $P = 1$ auf dem Weg $w(x)$ leistet

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)p(y)\,dy\,, \tag{2.110}$$

ist gleich der Arbeit, die die verteilte Belastung p auf dem Weg $G_0(y,x)$, der Durchbiegung des Balkens unter der Einzelkraft, leistet.

Der Faktor 1 ist wesentlich, weil nur dann die Dimensionen übereinstimmen

$$[\mathrm{N{\cdot}m}] = 1 \cdot u(x) = \int_0^l G_0(y,x)p(y)\,dy = [\mathrm{m{\cdot}N/m{\cdot}m}]\,. \tag{2.111}$$

Das Ergebnis einer Einflussfunktion ist daher eine *Energie*, ein Energie-Quantum, das wir ***Dirac Energie*** nennen.

Die Dirac Energie ist die Arbeit, die die Belastung auf dem Wege der Einflussfunktion leistet.

Am besten sieht man das bei einer Schaukel wie in Bild 2.42, wo die Arbeit der beiden Gewichte bei jeder Drehung φ der Schaukel null ist,

$$P_l u_l - P_r u_r = P_l \tan\varphi\, h_l - P_r \tan\varphi\, h_r = (P_l h_l - P_r h_r)\tan\varphi = 0\,, \tag{2.112}$$

weil die beiden Kräfte dem **Hebelgesetz** gehorchen, $P_l\, h_l = P_r\, h_r$.

In diesem Sinne gleicht jede Einflussfunktion einer Schaukel. Um die Querkraft $V(x)$ eines Trägers in einem Punkt x wie in Bild 2.7 zu berechnen, installieren wir ein Querkraftgelenk und spreizen das Gelenk so, dass die beiden Querkräfte dabei insgesamt die Arbeit $-V(x) \cdot 1$ leisten

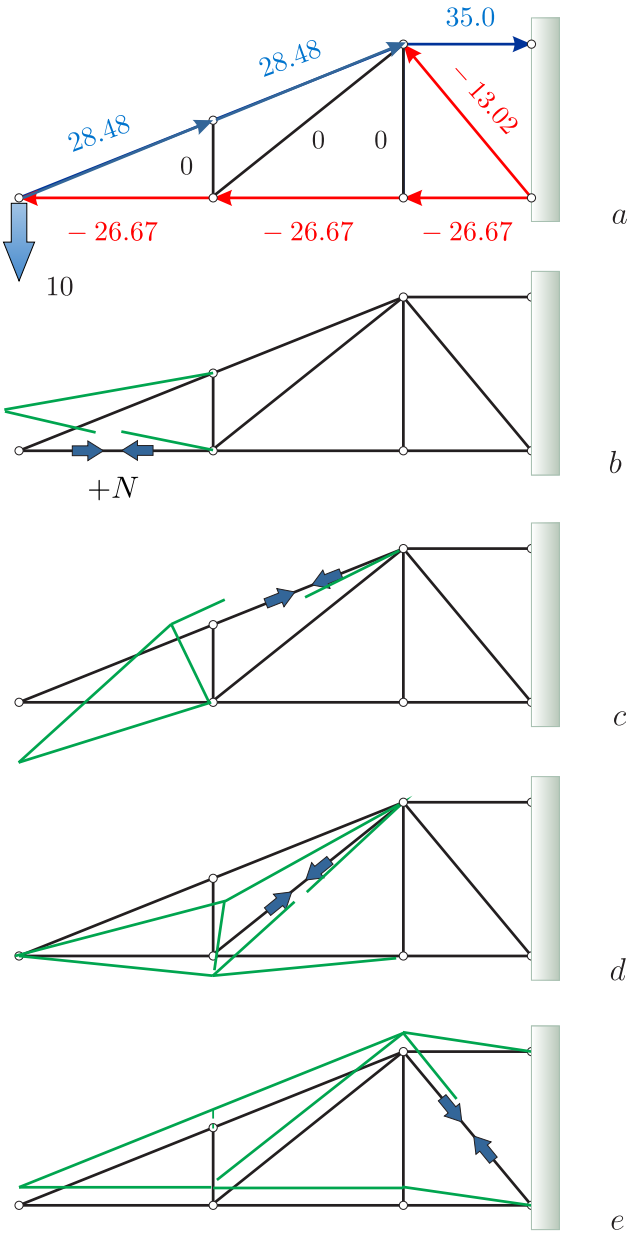


Bild 2.43. Die Kinematik eines Tragwerks bestimmt den Abtrag der Kräfte (BE-FRAMES)



Bild 2.44. Wenn eine Punktlast an der Turmspitze angreift, dann ist die Normalkraft in der Strebe proportional zur Auslenkung der Turmspitze, die durch die Spreizung 1 der Strebe verursacht wird

$$-V(x)\,w(x_-) - V(x)\,w(x_+) = -V(x)\,(w(x_-) + w(x_+)) = -V(x)\cdot 1\,. \tag{2.113}$$

Die Arbeit der Punktlast P auf der Verschiebung w, die durch die Spreizung des Gelenks ausgelöst wird, muss genau das Gegenteil davon sein

$$\underbrace{-V(x)\cdot 1 + P\,w}_{W_{1,2}} = 0\,, \tag{2.114}$$

wie aus dem *Satz von Betti*, $W_{1,2} = W_{2,1}$ folgt. (Die Arbeit $W_{2,1}$ ist null, siehe die folgende Bemerkung, und deswegen auch die Arbeit $W_{1,2} = 0$).

Zu jeder Schnittgröße gehört also ein gewisser **Mechanismus**, eine gewisse Schaukel, siehe Bild 2.43, und wenn wir das Gelenk lösen und die Arbeit berechnen, die die Belastung ‚beim Schaukeln' leistet, dann lernen wir, wie groß die Schnittgröße in dem Gelenk sein muss, damit sie die Arbeit der äußeren Belastung ins Gleiche setzt.

Bei einer FE-Berechnung behindern wir aber die freie Bewegung eines Tragwerks, wir legen dem Tragwerk **Fesseln** an, weil die *shape functions* $\varphi_i(x)$ zu ‚ungelenk' sind, und daher bekommt das Gelenk **das falsche Signal**. Die Verschiebung im Fußpunkt von P ist nur ein genäherter Wert w_h

$$-V_h(x)\cdot 1 + P\cdot w_h = 0 \tag{2.115}$$

und nicht der exakte Wert w

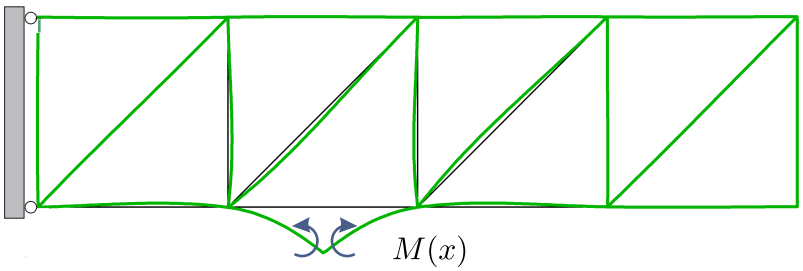


Bild 2.45. Fachwerk mit biegesteifen Knoten: Einflussfunktion für ein Moment. Die Spreizung im Riegel erzeugt keine Verschiebung in den Knoten und das Bild bestätigt damit die Zulässigkeit der Fachwerktheorie. Mit Gelenken läge die Einflussfunktion auch zwischen den Knoten ‚auf Linie'. (BE-FRAMES)

$$-V(x) \cdot 1 + P \cdot w = 0\,, \tag{2.116}$$

und so ist $V_h(x) \neq V(x)$. ***Ein FE-Programm verschätzt sich bei den Dirac Energien***[2]. Die Rückmeldung an das Gelenk ist fehlerhaft.

Wir ziehen also den Schluss, dass die Kinematik eines FE-Netzes, seine Beweglichkeit die Genauigkeit der FE-Lösung bestimmt.

Netz = Kinematik = Präzision der Einflussfunktionen = Güte der Ergebnisse

Wir können jetzt auch sagen, was ein **guter Entwurf** ist. Die Schaukellogik

$$V(x) = \frac{P \cdot w}{1} = P \cdot \frac{w}{1} \qquad \leftarrow \qquad \boxed{\text{mache } w \text{ klein!}} \tag{2.117}$$

signalisiert, dass ein Entwurf dann gut ist, wenn das, was von der auslösenden Bewegung, also hier der Spreizung 1 des Querkraftgelenks (im Nenner), im Fußpunkt der Punktlast P ankommt, das ist das w im Zähler, so klein wie möglich ist, weil dann $V(x)$ nur ein Bruchteil der Belastung P ist.

Wirf einen Stein ins Wasser und schau den Wellen zu! Je kleiner die Wellen sind, die die Last erreichen, um so besser. Der Hebel des Archimedes ist (ganz bewusst) das Gegenteil eines guten Entwurfs. Drückt man das kurze linke Ende um eins nach unten wie in Bild 2.9, dann stellt sich am rechten Ende eine sehr große Verschiebung w ein, weswegen Archimedes nur eine kleine Kraft braucht, um die Welt aus den Angeln zu heben. Umgekehrt bedeutet dies aber auch, dass Archimedes **lange, lange Wege** gehen muss, um die Welt nur ein *Iota* zu heben.

Bemerkung 2.2. Gleichung (2.117) macht noch einmal deutlich, dass Einfluss ein **Verhältnis** $w/1$ von zwei Verschiebungen ist, und es daher egal ist, ob die auslösende Spreizung 1 mm, 1 cm oder 1 m ist. Es kommt nur auf das Verhältnis von gespürter Bewegung zu auslösender Bewegung an.

[2] Vor allem bei Flächentragwerken. Bei Stabtragwerken ist die Kinematik außerhalb des Elements mit dem Aufpunkt meist exakt, es sei denn EA oder EI sind nicht konstant.



Bild 2.46. Die Kinematik ‚ist das Schicksal' – sie bestimmt die Kräfte. Nach 200 Jahren wurden Sicherungsmaßnahmen an einer als Korbbogen ausgebildeten Brücke nötig, die man um 1800 nachträglich überbaut hat, *Kassel Schloss Wilhelmshöhe*. Wie immer in der Stabilitätstheorie sollen die ‚Füllstäbe' nicht die Last tragen, sondern sie sollen dafür sorgen, dass der Bogen in der Flucht bleibt

Bild 2.44 illustriert, dass die Normalkraft N in einer Strebe des Turms (irgendwo weit unten) auf Grund einer Last $\boldsymbol{P} = \{P_x, P_y, P_z\}^T$ an der Spitze des Turms davon abhängt, wie groß die Auslenkung $\boldsymbol{g} = \{g_x, g_y, g_z\}^T$ der Spitze des Turms ist, die eine **Spreizung** 1 der Strebe verursacht

$$\text{(unten)} \;\; 1 \cdot N = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{g} = P_x \cdot g_x + P_y \cdot g_y + P_z \cdot g_z \;\; \text{(oben)}\,. \tag{2.118}$$

The mighty tower feels a sting but the top hardly moves. Bild 2.45 bestätigt die **Fachwerktheorie**, mit der der Eiffelturm ja berechnet wurde (+ grafischer Statik). Die biegesteif gerechneten Knoten verschieben sich bei der Spreizung des Aufpunktes nicht und so können Knotenkräfte keine Momente in dem Gurt erzeugen, d.h. die Knoten können gelenkig gerechnet werden.

Der Schadensfall in Bild 2.46 belegt eindrücklich, welche große und wichtige Rolle die **Kinematik** in der Statik spielt. Professor Christian Petersen hat über solche Zylinderschalen mit veränderlicher Krümmung promoviert, [231], und er hat sehr früh Programme (Zuse Z23) für Schalen von diesem Typ geschrieben, [182] S. 879.

2.14 Punktwerte bei Flächentragwerken

Punktwerte, wie die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens, kommen direkt in der zweiten Greenschen Identität der Balkengleichung vor und daher ist es ein einfaches, eine **Einflussfunktion** für $w(x)$ herzuleiten, man muss nur

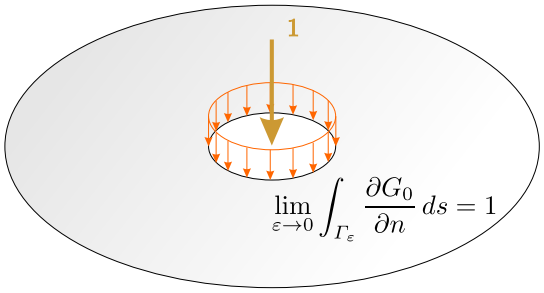


Bild 2.47. Die Querkräfte gehen gegen ∞ und der Radius ε gegen null

den Balken in zwei Teile teilen, denn dann springt wie von selbst an der Intervallgrenze mit Hilfe des dualen Lastfalls, der Einzelkraft $P = 1$, der Wert $w(x)$ heraus

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{2.119}$$

Bei Flächentragwerken ist das anders. Die Biegefläche $w(\boldsymbol{x})$ einer Membran ist die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta w = p \qquad w = 0 \qquad \text{auf dem Rand } \Gamma\,, \tag{2.120}$$

und in der zugehörigen zweiten Greenschen Identität,

$$\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \int_\Omega -\Delta w\hat{w}\, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial n}\hat{w}\, ds - \int_\Gamma w\frac{\partial \hat{w}}{\partial n}\, ds - \int_\Omega w(-\Delta\hat{w})\, d\Omega = 0\,, \tag{2.121}$$

stehen nur Integrale, aber **keine Punktwerte**.

Der Übergang zum Punkt gelingt, weil die Biegefläche $G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, die zu einer Punktlast $P = 1$ gehört, die Eigenschaft hat, dass das Integral der Querkräfte $\partial G_0/\partial n = 1/(2\,\pi\,\varepsilon)$ über immer enger gezogene Kreise Γ_ε um den Aufpunkt gegen 1 strebt, siehe Bild 2.47,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \text{Querkraft}\; ds = [\text{N/m}]\,[\text{m}] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial G_0}{\partial n}\, ds = 1\,[\text{N}]\,. \tag{2.122}$$

Dieser Grenzwert macht den **Übergang vom Integral zum Punkt** möglich. Nur weil (2.122) gilt, ist G_0 im übrigen eine Lösung von $-\Delta w = \delta_0$.

Man formuliert also den *Satz von Betti* zunächst auf dem gelochten Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega - N_\varepsilon$, spart einen kleinen Kreis N_ε um den Aufpunkt aus, und lässt dann den Radius $\varepsilon \to 0$ gegen null gehen. In der Grenze[3]

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_0,w) := \lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{B}(G_0,w)_{\Omega_\varepsilon} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\, w(\boldsymbol{y})\right) ds_{\boldsymbol{y}} = 0\end{aligned} \tag{2.123}$$

[3] Weil die Identität für alle $\varepsilon > 0$ null ist, muss sie auch in der Grenze null sein.

erhält man so die Einflussfunktion für $w(\boldsymbol{x})$ in dem Aufpunkt $\boldsymbol{x}$,

$$1 \cdot w(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.124}$$

Das $1 \cdot w(\boldsymbol{x})$ ist der Grenzwert des zweiten Randintegrals über Γ_ε in (2.123). Das erste ist null für $\varepsilon \to 0$.

Systematik

Wir wollen die Herleitung an dieser Stelle gleich generalisieren und nehmen die Kirchhoffplatte, $K\Delta\Delta w = p, 2\,m = 4$ als Muster. Eine Einflussfunktion G_i ist die Reaktion auf ein Dirac Delta δ_i

$$\delta_i = \text{Kraft, Moment, Knick, Versatz} \qquad i = 0, 1, 2, 3\,.$$

Zu einer Biegefläche w gehören vier Randwerte, $j = 0, 1, 2, 3$

$$\partial_j w = \text{Durchbiegung, Verdrehung, Moment, Kirchhoffschub.}$$

Ist $\partial_j G_i$ die Randgröße von G_i, die konjugiert zu δ_i ist, $j + i = 3 = 2\,m - 1$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \partial_j (G_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1\,. \tag{2.125}$$

Die Schubkraft der EF G_0 zieht sich also im Aufpunkt zu einer 1 zusammen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \partial_3 (G_0)\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1 \tag{2.126}$$

und das Moment der EF G_1 zu einem Moment 1

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \partial_2 (G_1)\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1 \tag{2.127}$$

und die Neigung der EF G_2 endet in einem integralen Knick

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \partial_1 (G_2)\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1 \tag{2.128}$$

und die Biegefläche G_3 in einem Sprung, einem integralen Versatz[4],

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \partial_0 (G_3)\, ds_{\boldsymbol{y}} = 1\,. \tag{2.129}$$

Das ist der ‚Zieheffekt', der die Herleitung von Einflussfunktionen mit Betti möglich macht, denn paart man die Einflussfunktion G_j mit einer Biegefläche w, dann springt gerade der Term $\partial_j w(\boldsymbol{x})$ heraus, also z.B.

[4] Auch eine Einzelkraft wird als Integralsumme der Schubkräfte wahrgenommen.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\partial_3(G_0)\,\partial_0(w)\,ds_{\boldsymbol{y}}=\partial_0(w)(\boldsymbol{x})=w(\boldsymbol{x})\,, \tag{2.130}$$

was dann

$$\mathscr{B}(G_0,w):=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathscr{B}(G_0,w)_{\Omega_\varepsilon}=w(\boldsymbol{x})-\int_\Omega G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,p(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.131}$$

ergibt.

Die Herleitung von Einflussfunktionen bei Flächentragwerken ist sehr technisch, verlangt viel Detailarbeit, siehe [117] und [118]. Zum Glück geht das ganze mit finiten Elementen aber viel einfacher, siehe Kapitel 3.

Bemerkung 2.3. Bei einem Seil ist $V=Hw'$ die Querkraft, bei einer Membran ist die Querkraft v_n in einem Schnitt mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{n}$ die Normalableitung der Biegefläche in Richtung von $\boldsymbol{n}$ (die Neigung) mal H

$$v_n=H\frac{\partial w}{\partial n}=H\nabla w\bullet\boldsymbol{n}=H(w_{,x}\,n_x+w_{,y}\,n_y)\qquad[\mathrm{N/m}]\,. \tag{2.132}$$

H ist die Vorspannkraft, die wir oben Eins gesetzt haben.

Bemerkung 2.4. Die Singularität unter einer Punktlast macht, dass die Querkraft $v_n=1/r$ in einer Membran unendlich groß wird. Bei einer Scheibe wären es die Spannungen σ_{ij}. **Man verstehe bitte, dass das eine nicht ohne das andere geht**[5]. Das $1/r$ ist die Voraussetzung dafür, dass man mit Betti Verschiebungen ***in einem Punkt*** berechnen kann, weil sich eben die Bogenlänge $ds=r\,d\varphi$ des Lochrandes gegenläufig verhält. Auf der anderen Seite torpediert diese Singularität aber *Castigliano*, siehe (1.310), weil eben die Stammfunktion von $1/r$ der Logarithmus ist.

2.15 Versatz im 2-D und 3-D

Wenn man von der Stabstatik kommt, dann stellt man sich einen Versatz in einer Scheibe (= Einflussfunktion für eine Spannung) als eine Klaffung ‚1' vor, aber im 2-D und 3-D sieht man keinen Versatz, sondern ein Versatz bedeutet: Wenn man den Aufpunkt einmal **umrundet**, und dabei mitzählt, dann ist das Endergebnis ein Versatz von 1, siehe Bild 2.48.

Dasselbe gilt sinngemäß für die Einflussfunktionen von Momenten und Querkräften bei Platten. Ein Knick in einer Platte ist kein Knick im naiven Sinn und ebenso ist ein Versatz in einer Platte (= Einflussfunktion für eine Querkraft) keine deutlich sichtbare Stufe. Es sind beides **integrale Maße**[6]

[5] Ein Mechanik-Kollege hatte vorgeschlagen, man solle die Mathematik ändern, damit Castigliano gilt

[6] Eigentlich gibt es drei Einflussfunktionen G_2, für m_{xx},m_{xy},m_{yy}, und analog zwei G_3, für v_x,v_y, wir schreiben aber einfach G_2 und G_3.

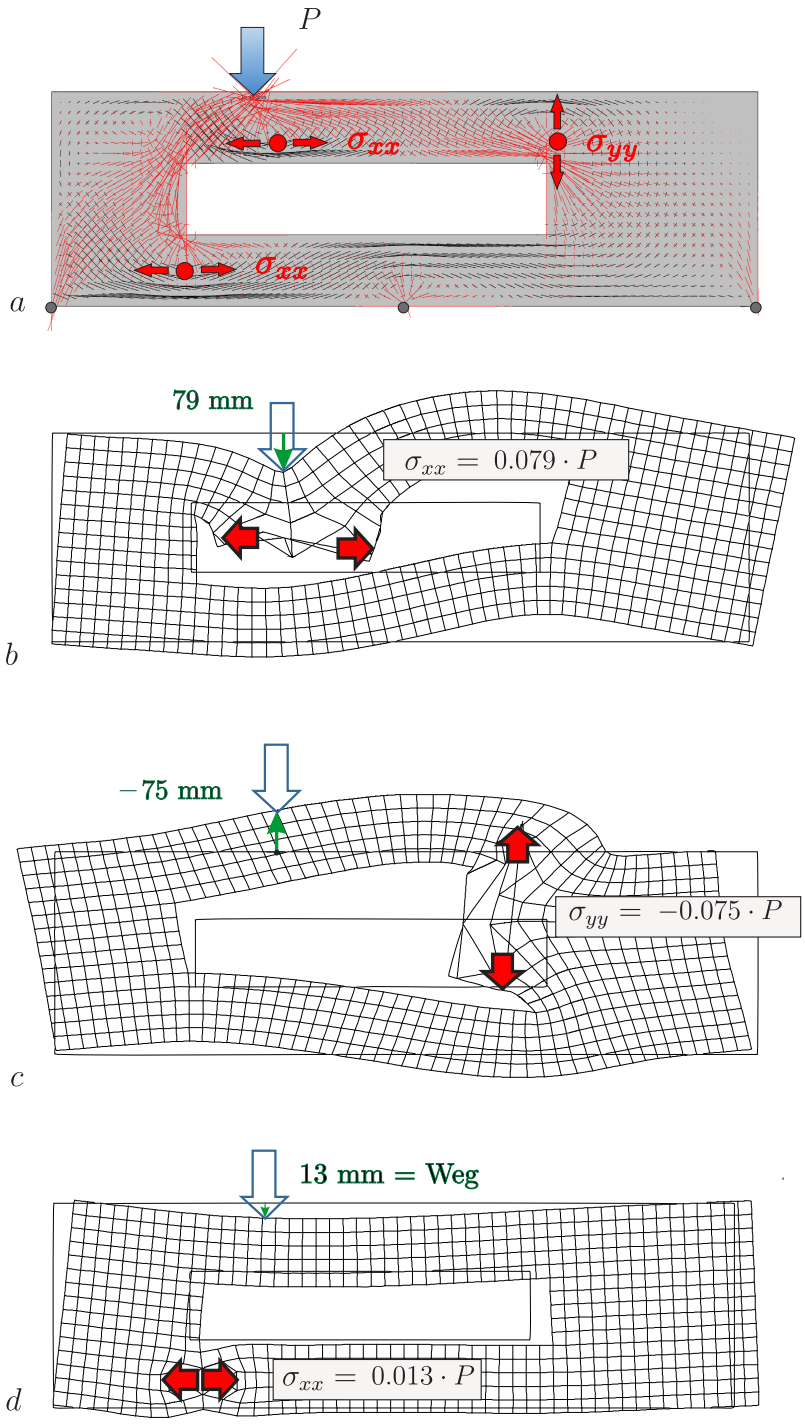


Bild 2.48. Die Spannung σ_{ii} in einem Aufpunkt ist gleich der Arbeit $P \cdot u_y$ die die Punktlast P bei der Verschiebung u_y ihres Fußpunktes leistet, wenn der Aufpunkt in x- oder y-Richtung um 1 000 mm gespreizt wird (jede andere Länge geht natürlich genauso). Die Spreizung ist nicht einfach ein Verschiebungssprung von 1 000 mm, sondern es ist ein integrales Maß. Wenn man den Aufpunkt einmal umrundet, misst man einen Versatz von 1 000 mm, [126]

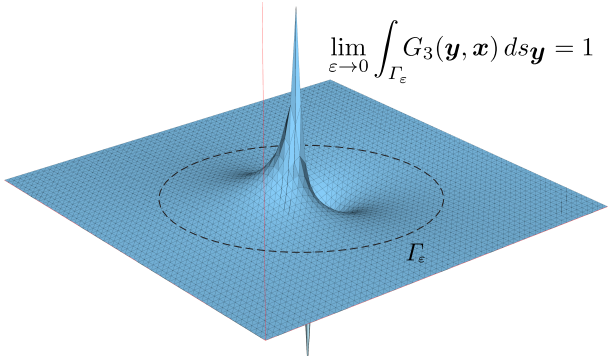


Bild 2.49. Wie ein Versatz in einer Platte aussieht, Einflussfunktion für v_x.

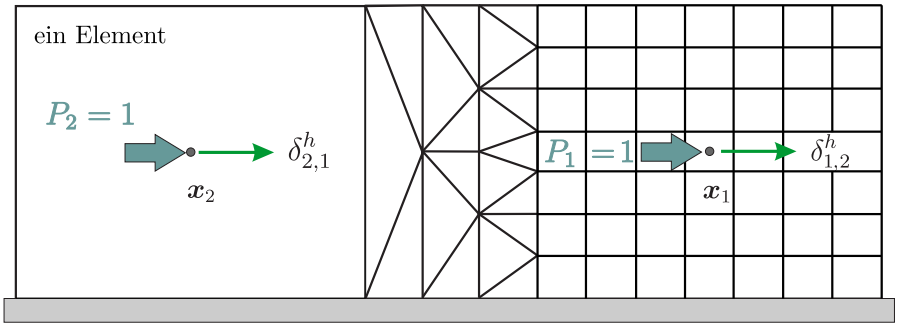


Bild 2.50. Sehr ungleiche Elemente, aber die gegenseitigen Wirkungen sind gleich groß, $\delta^h_{1,2} = \delta^h_{2,1}$. Jeder Punkt weiß von jedem anderen Punkt. Alles ist aufeinander abgestimmt, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$ (*Betti* und *Betti extended* garantieren das).

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G_2}{\partial n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, m_{nn}(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = m_{xx}(\boldsymbol{x}) \tag{2.133}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} G_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, v_n(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = v_x(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.134}$$

Hier ist G_2 ein ‚Knick' und G_3 ein ‚Sprung', beide in x-Richtung, und um die Effekte zu erleben, muss man einmal den Kreis Γ_ε mit Radius ε, der den Aufpunkt umgibt, umrunden; m_{nn} und v_n sind m und der Kirchhoffschub v auf Γ_ε in Richtung der Normalen $\boldsymbol{n}$, siehe Bild 2.49.

2.16 Switches

Es gibt in der linearen Statik und Mechanik zwei ***Schalter***. Einmal kann man innen mit außen vertauschen

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{2.135}$$

und dann kann man mit Betti dasselbe auf zwei Weisen sagen

$$W_{1,2} = W_{2,1}\,. \tag{2.136}$$

Die Einflussfunktionen basieren auf diesem zweiten ***switch***. Er beruht, wie die Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$, darauf, dass die Differentialgleichungen **selbstadjungiert** sind, siehe Bild 2.50.

Bemerkung 2.5. Die Mathematiker benutzen diesen Schalter, um ‚Nicht-Standard' Lasten (dazu gehören für einen M. schon Einzelkräfte) zu behandeln. Einzelkräfte sind mathematisch ***Distributionen***, weil man ihre Arbeit nicht mit einem **Riemann-Integral**

$$W_{1,2} = \underbrace{\int_\Omega P \cdot \delta w \, d\Omega}_{?} = \underbrace{\int_\Omega G\, p_{\delta w}\, d\Omega}_{\checkmark} = P \cdot \delta w(\boldsymbol{x}) = W_{2,1} \tag{2.137}$$

berechnen kann. Aber wenn man die Seite ‚wechselt', $W_{1,2} = W_{2,1}$, also die Durchbiegung G aus P mit der Last $p_{\delta w}$ (= Last, die die Delle δw verursacht) überlagert, dann ist die Arbeit berechenbar, wie in den Kapiteln 2.14 und 9.49.

2.17 Dualität

Zu jeder Kraftgröße gibt es eine konjugierte Weggröße, V und δw, M und $\delta w'$ etc., wie man bei der partiellen Integration der Arbeitsgleichung

$$\int_0^l EI\, w^{IV}\, \delta w \, dx \tag{2.138}$$

erkennt. Wir nennen diese Paare **duale** oder **adjungierte Größen**.

Unter einer **adjoint formulation** versteht man eine Technik, bei der man eine Messung A

$$w(x) = \int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \tag{2.139}$$

durch eine Messung B ersetzt, die denselben Wert liefert. Alle Einflussfunktionen gehen so vor, denn der Satz von Betti macht es möglich eine Messung an einer Biegelinie w durch eine Messung an der Belastung p zu ersetzen. (Wegen $p = EI\, w^{IV}$ bleibt es eine Messung an w, nur an einer ‚anderen Stelle').

Mit einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ lässt es sich am besten erklären. Wenn man die Matrix mit einem Vektor $\boldsymbol{u}$ multipliziert, $\boldsymbol{Ku}$, und diesen Vektor dann skalar mit einem zweiten Vektor $\boldsymbol{\delta u}$, ist das Ergebnis eine Zahl $\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{Ku}$.

Weil eine reelle Zahl wie π sich nicht ändert, wenn man sie **transponiert**, $\pi^T = \pi$, gilt

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\delta u} \tag{2.140}$$

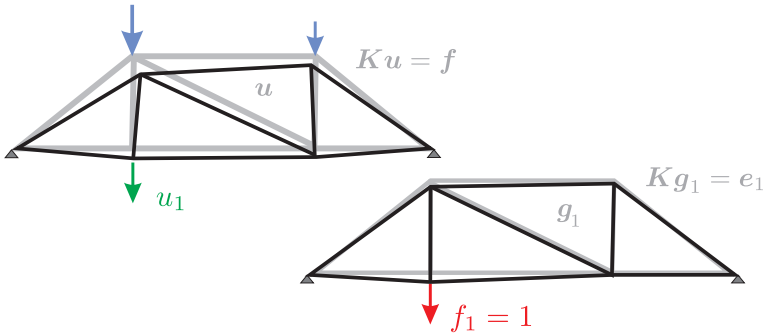


Bild 2.51. Die Verschiebung u_1 und der adjungierte Lastfall

oder

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\delta u} = W_{1,2} - W_{2,1} = 0\,. \tag{2.141}$$

Das ist der *Satz von Betti*. Für symmetrische Matrizen $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$ gilt er automatisch, weil sie selbstadjungierte sind.

Eine Steifigkeitsmatrix kann man bekanntlich als die Abbildung eines Vektors $\boldsymbol{u}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{f}$ lesen

$$\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}\,. \tag{2.142}$$

Stellen wir uns nun vor, wir kennen den Vektor $\boldsymbol{f}$, der etwa die Knotenkräfte eines Fachwerks darstellt, und wir wollen die Komponente u_1 des Vektors $\boldsymbol{u}$ im LF $\boldsymbol{f}$ wissen, siehe Bild 2.51.

Angenommen wir kennen die Lösung $\boldsymbol{g}_1$ des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{K g}_1 = \boldsymbol{e}_1\,, \tag{2.143}$$

wenn also $\boldsymbol{f}$ gleich dem ersten Einheitsvektor ist, $\boldsymbol{e}_1^T = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$. Mit der Lösung $\boldsymbol{g}_1$ und dem Vektor $\boldsymbol{u}$ gehen wir dann in die Identität (2.141)

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f} - u_1 = 0 \tag{2.144}$$

und erhalten so die gesuchte Verschiebung

$$u_1 = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f}\,. \tag{2.145}$$

Zu jedem u_i gibt es einen solchen Vektor $\boldsymbol{g}_i$

$$\boldsymbol{K g}_i = \boldsymbol{e}_i\,, \tag{2.146}$$

mit dem man u_i aus der rechten Seite $\boldsymbol{f}$ berechnen kann, siehe Bild 2.52,

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}\,. \tag{2.147}$$

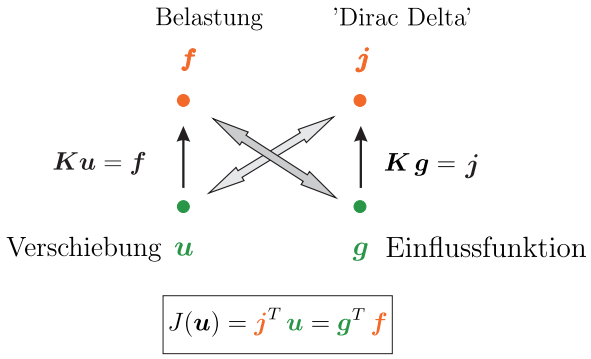


Bild 2.52. Dualität am Beispiel der linearen Algebra, Dualität = ‚über Kreuz', zwei unterschiedliche Messungen haben dasselbe Ergebnis

Nun gilt aber auch $u_i = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_i$, und daher ist die **Projektion** von $\boldsymbol{f}$ auf die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ dasselbe, wie die Projektion von $\boldsymbol{u}$ auf die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_i \,. \tag{2.148}$$

Die Inverse erledigt das in einem Rutsch

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \,, \tag{2.149}$$

denn die Zeilen (und Spalten) der symmetrischen Matrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind gerade die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f})\, \boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{g}_2^T \boldsymbol{f})\, \boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{f})\, \boldsymbol{e}_n \\ &= u_1\, \boldsymbol{e}_1 + u_2\, \boldsymbol{e}_2 + \ldots + u_n\, \boldsymbol{e}_n \,. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Geht es um Funktionen, also die Lösungen von Differentialgleichungen, wie

$$-EAu''(x) = p(x) \qquad u(0) = u(l) = 0 \,, \tag{2.151}$$

dann hat die Matrix $\boldsymbol{K}$ unendlich viele Spalten, und aus den Einheitsvektoren werden **Dirac Deltas**

$$-EA \frac{d^2}{dy^2}\, G(y,x) = \delta(y-x) \,, \tag{2.152}$$

aber der Formalismus ist derselbe. Indem wir die rechte Seite p auf die Lösungen $G(y,x)$ projizieren, also das L_2-Skalarprodukt (Integral) der beiden Funktionen bilden, können wir den Wert der Lösung in jedem Punkt x berechnen

$$u(x) = \underbrace{\int_0^l \delta(y-x) u(y)\, dy}_{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_i} = \underbrace{\int_0^l G(y,x) p(y)\, dy}_{\boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}} \,. \tag{2.153}$$

2.18 Der adjungierte Operator

Zum Skalarprodukt gehört der Begriff des ***adjungierten Operators***. Der adjungierte Operator L^* eines Operators L ist das ‚Spiegelbild' von L

$$(Lu, v) = \int_0^l Lu\, v\, dx = \int_0^l u L^* v\, dx = (u, L^* v)\,. \tag{2.154}$$

In der linearen Algebra ist L^* die **transponierte Matrix**

$$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{u})^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{v})\,. \tag{2.155}$$

Der Satz von Betti (2.141) drückt das ja genau aus.

Das ‚Jonglieren' mit dem adjungierten Operator nennt man ***adjoint analysis***, also die Technik, die wir eben vorgestellt haben: Der Vektor $\boldsymbol{u}$ sei die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und durch Multiplikation von $\boldsymbol{u}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{j}$ sei eine Messung an $\boldsymbol{u}$ vorzunehmen, $J = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}$. Setzt man nun, dass die ‚Messlatte' $\boldsymbol{j}$ die rechte Seite eines Systems $\boldsymbol{K}^T \boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ ist, dann folgt

$$J = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{g}\,. \tag{2.156}$$

Die Auswertung wird so auf den Vektor $\boldsymbol{f}$ verschoben. Dieses Muster wird uns beim Rechnen mit Einflussfunktionen wieder und wieder begegnen, denn in der Statik ist *adjoint analysis* identisch mit dem Satz von Betti.

2.19 Monopole und Dipole

Die Einflussfunktion für die Verdrehung w' eines Balkens ist die Reaktion auf ein Einzelmoment $M = 1$

$$M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\, \Delta x = 1\,, \tag{2.157}$$

das man sich durch zwei gegengleiche Kräfte, $P = \pm 1/\Delta x$, erzeugt denken kann, deren Abstand Δx gegen null geht, während gleichzeitig die Kräfte gegen unendlich gehen. In der Physik nennt man dies einen ***Dipol***.

Die Einflussfunktion für eine Durchbiegung $w(x)$ hingegen wird von einem ***Monopol***, einer Einzelkraft, erzeugt.

Einflussfunktionen, die von Monopolen erzeugt werden, summieren. Solche Einflussfunktionen gleichen **Dellen** oder **Senken**, siehe Bild 2.53 und 2.56 *a*. Alles was in die Delle hineinfällt, vergrößert die Durchbiegung der Platte.

Dipole hingegen erzeugen **Scherbewegungen**, die auf Ungleichgewichte reagieren, wie eine Waage, sie differenzieren, siehe Bild 2.53 und 2.56 *b*.

Monopole integrieren und Dipole differenzieren.

Jede der vier Einflussfunktionen in Bild 2.53 gehört sinngemäß zu einem der beiden Typen:

- EF für Durchbiegungen und Momente *summieren*.

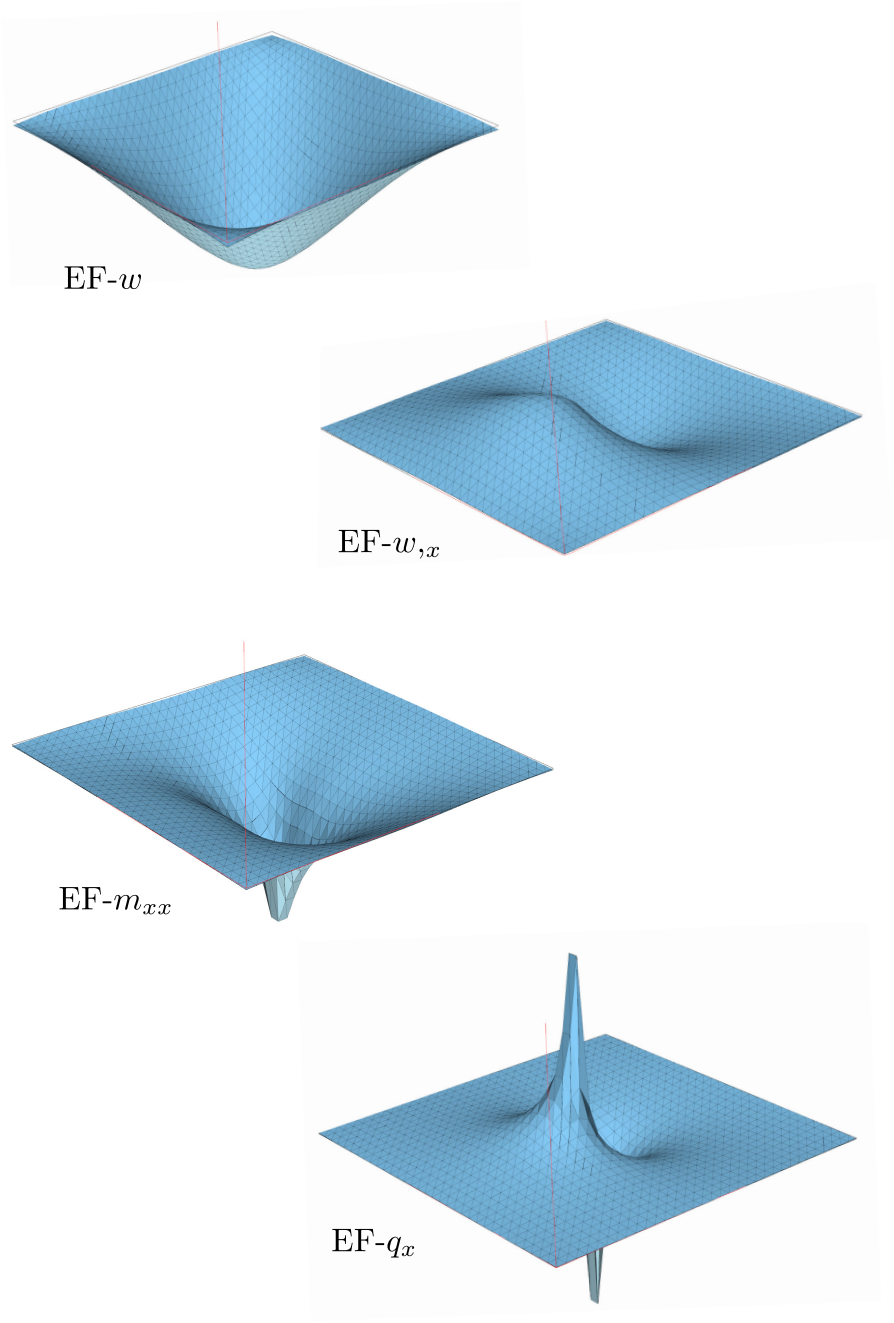


Bild 2.53. Einflussfunktionen werden von Monopolen (linke Seite) bzw. Dipolen (rechte Seite) erzeugt, Einflussfunktion für die Durchbiegung, die Verdrehung $w_{,x}$, das Moment m_{xx} und die Querkraft q_x in Plattenmitte (BE-PLATTE)

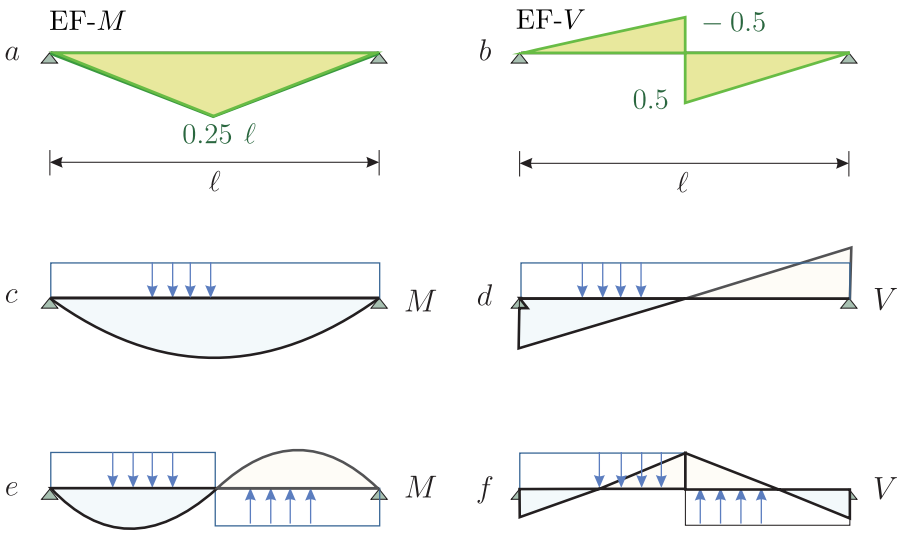


Bild 2.54. Oberste Reihe Einflussfunktionen für **a)** das Biegemoment und **b)** die Querkraft in der Mitte des Balkens, **c)** und **d)** Momente und Querkräfte unter symmetrischer Last und antimetrischer Last, **e)** und **f)**

- EF für Verdrehungen, Spannungen und Querkräfte *differenzieren*

Die Einflussfunktion für die Querkraft q_x wird von einem Dipol erzeugt, während die Einflussfunktion für das Biegemoment m_{xx} von zwei entgegengesetzt drehenden Momenten $M = \pm 1/\Delta x$ erzeugt wird, die nach Innen drehen und so eine symmetrische Biegefigur aber mit einem scharfen Knick im Aufpunkt generieren[7].

Die maximale Wirkung ergibt sich, wenn die Belastung und die Einflussfunktion vom selben Typ sind (***symmetrisch – symmetrisch*** oder ***antimetrisch – antimetrisch***) und den minimalen Effekt, wenn sie vom entgegengesetzten Typ sind, siehe Bild 2.54.

Der Unterschied zwischen Monopolen und Dipolen ist der Grund, warum es einfacher ist, Verschiebungen und Biegemomente anzunähern, als Spannungen und Querkräfte. Es ist der Unterschied zwischen **numerischer Integration** und **numerischer Differentiation**, siehe Bild 2.55.

Bemerkung 2.6. Alle Einflussfunktionen für Lagerreaktionen integrieren, obwohl die Lagerkräfte ja Normalkräfte (Spannungen) oder Querkräfte sind und daher würden wir erwarten, dass die Einflussfunktionen differenzieren. Aber

[7] Genau genommen lautet die Folge: *Monopol – Dipol – Quadropol – Octopol*, entsprechend den finiten Differenzen für w, w', M, V, siehe Bild 9.38, aber für unsere Zwecke reicht das einfache Raster: *Monopol – Dipol*, also *symmetrisch – antimetrisch* aus.

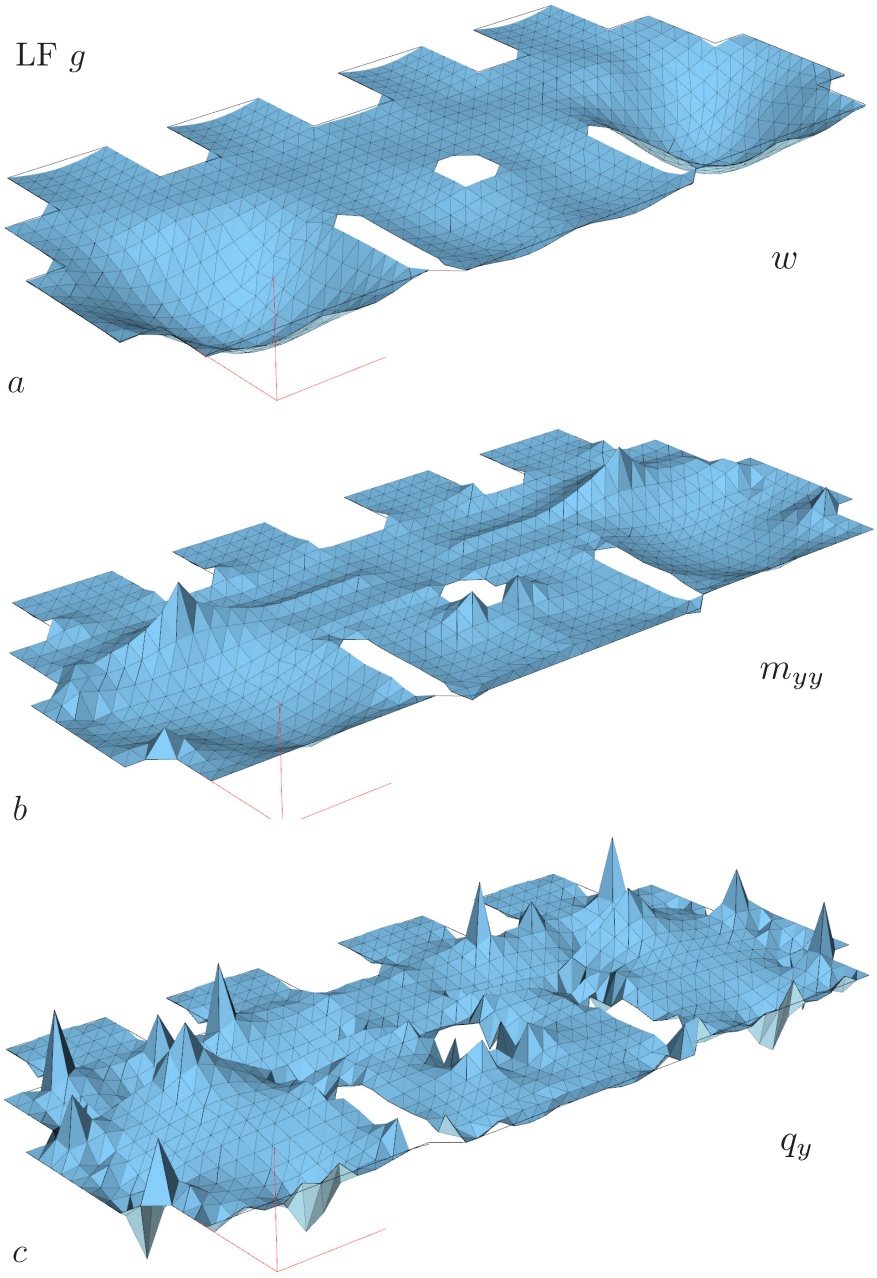


Bild 2.55. *Gravity load* Die Steigerung der Komplexität, **a)** Durchbiegung w, **b)** Momente m_{yy}, **c)** Querkräfte q_y (BE-PLATTE)

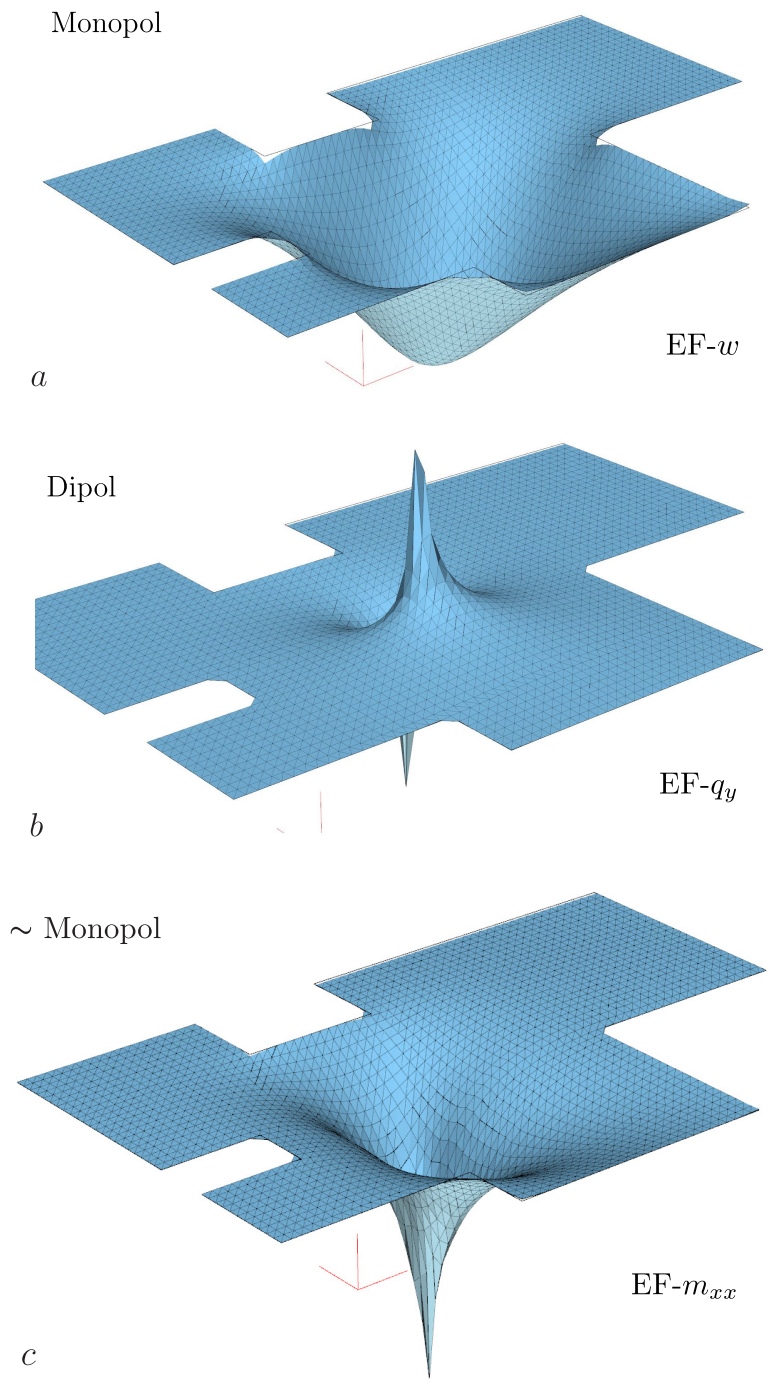


Bild 2.56. Deckenplatte Einflussfunktionen **a)** für eine Durchbiegung ($G_0 = O(r^2 \ln r)$), **b)** für eine Querkraft ($G_3 = O(r^{-1})$), **c)** für ein Moment ($G_2 = O(\ln r)$), siehe (6.47), dort letzte Spalte der Matrix (BE-PLATTE)

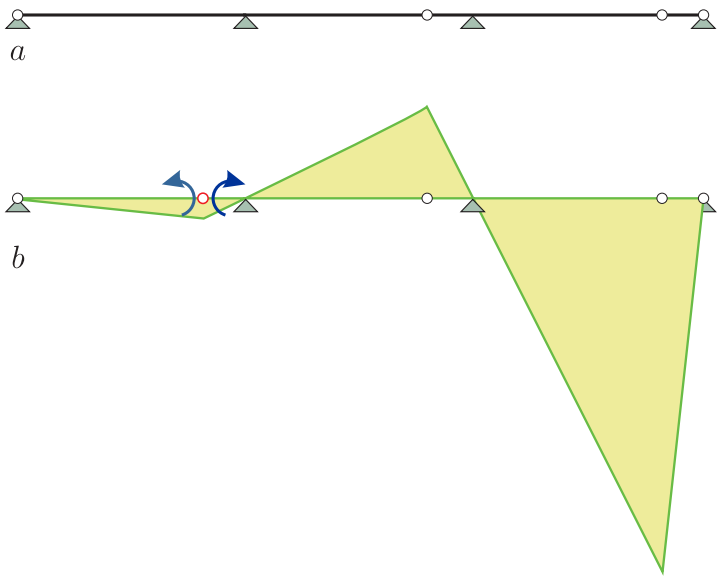


Bild 2.57. a) Gerberträger, **b)** Einflussfunktion für ein Moment M. Nicht alle Einflussfunktionen klingen ab!

in einem festen Lager wird der eine Teil der Scherbewegung durch den Baugrund behindert, so dass der andere Teil den ganzen Weg allein gehen muss, um die vorgeschriebene Versetzung $[[u]] = 1$ zu realisieren und daher wird aus der Einflussfunktion eine einseitige Integration.

Bemerkung 2.7. Nicht alle Einflussfunktionen tendieren gegen null. Wenn Teile des Tragwerks (nach dem Einbau eines N-, V- oder M-Gelenkes) **Starrkörperbewegungen** ausführen können, dann kann es passieren, dass sich die Einflussfunktionen aufschaukeln, siehe Bild 2.57 *b* und Bild 2.58.

Bemerkung 2.8. Das Abklingverhalten der Einflussfunktionen hängt von der Ordnung n der Zielgröße $d^n w/dx^n$ ab, beim Balken also $n = 0, 1, 2, 3$,

$$w(x), \quad w'(x), \quad M(x) = -EI\,w''(x), \quad V(x) = -EI\,w'''(x)\,. \tag{2.158}$$

Je niedriger die Ordnung ist, um so weiter schwingt eine Einflussfunktion aus und um so langsamer klingt sie ab, wie man an der Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ der Platte sieht, siehe Bild 2.56 *a*. Dagegen ist die Einflussfunktion für die Querkraft q_x sehr eng gefasst, siehe Bild 2.56 *b*. Es sind praktisch zwei gegengleiche Spitzen $\pm\infty$, die unendlich weit aus der Platte herausragen, aber dann sehr rasch auf null abfallen.

Natürlich sind das nur ‚Trendmeldungen', weil das genaue Verhalten auch von der Art der Lagerung abhängt, siehe Bild 2.59 und Bild 2.60, denn gerade **Kragträger**, **Kragplatten** und auch **Stockwerkrahmen** spielen diesbezüglich eine Sonderrolle, weil sie freie Enden haben.

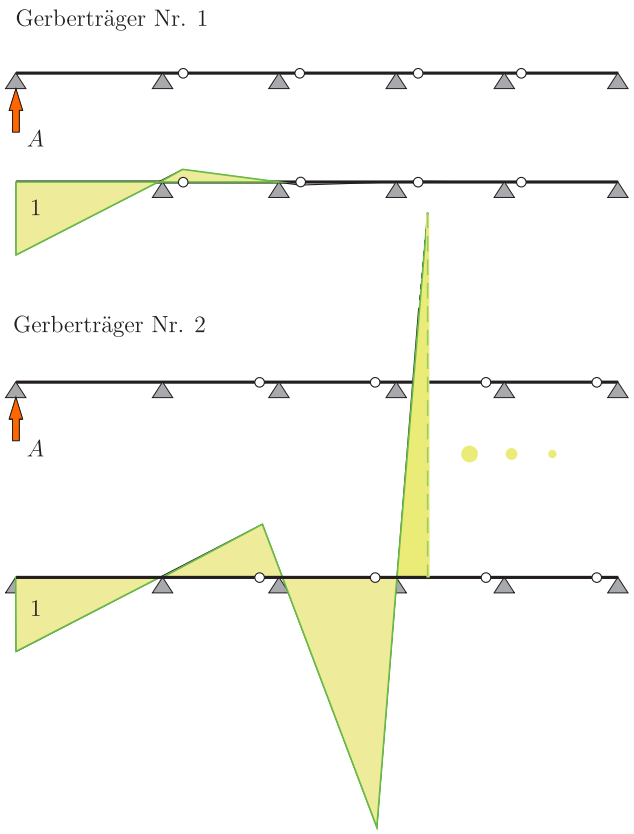


Bild 2.58. Die Lage der Gelenke entscheidet über den Verlauf der Einflussfunktion

Eine Sonderrolle spielen auch Einflussfunktionen für Kraftgrößen in statisch bestimmten Systemen. Weil nach dem Einbau des Gelenks das System kinematisch ist, können sich die Verformungen frei ausbilden, denn es wird keine Energie verbraucht. Nichts kann die Einflussfunktion für das Moment in einem Kragträger daran hindern den Schenkel rechts vom Aufpunkt unter 45° bis ‚in den Himmel' laufen zu lassen – es kostet ja nichts. Deswegen stürzen kinematische Strukturen auch so leicht ein, denn es ist keine Energie nötig, um den Einsturz auszulösen.

Statisch unbestimmte Systeme **dämpfen** also die Ausbreitung der Einflussfunktionen für Kraftgrößen, während bei statisch bestimmten Systemen eine solche Sperre fehlt.

2.20 Höhere Ableitungen

Symmetrie und **Antimetrie** sind in der Mathematik ‚fest verdrahtet', denn die Ableitung einer symmetrischen Funktion ist antimetrisch und umgekehrt. Die Kette der Greenschen Funktionen, $G_0 \to G_1 \to G_2 \to \ldots$, entsteht

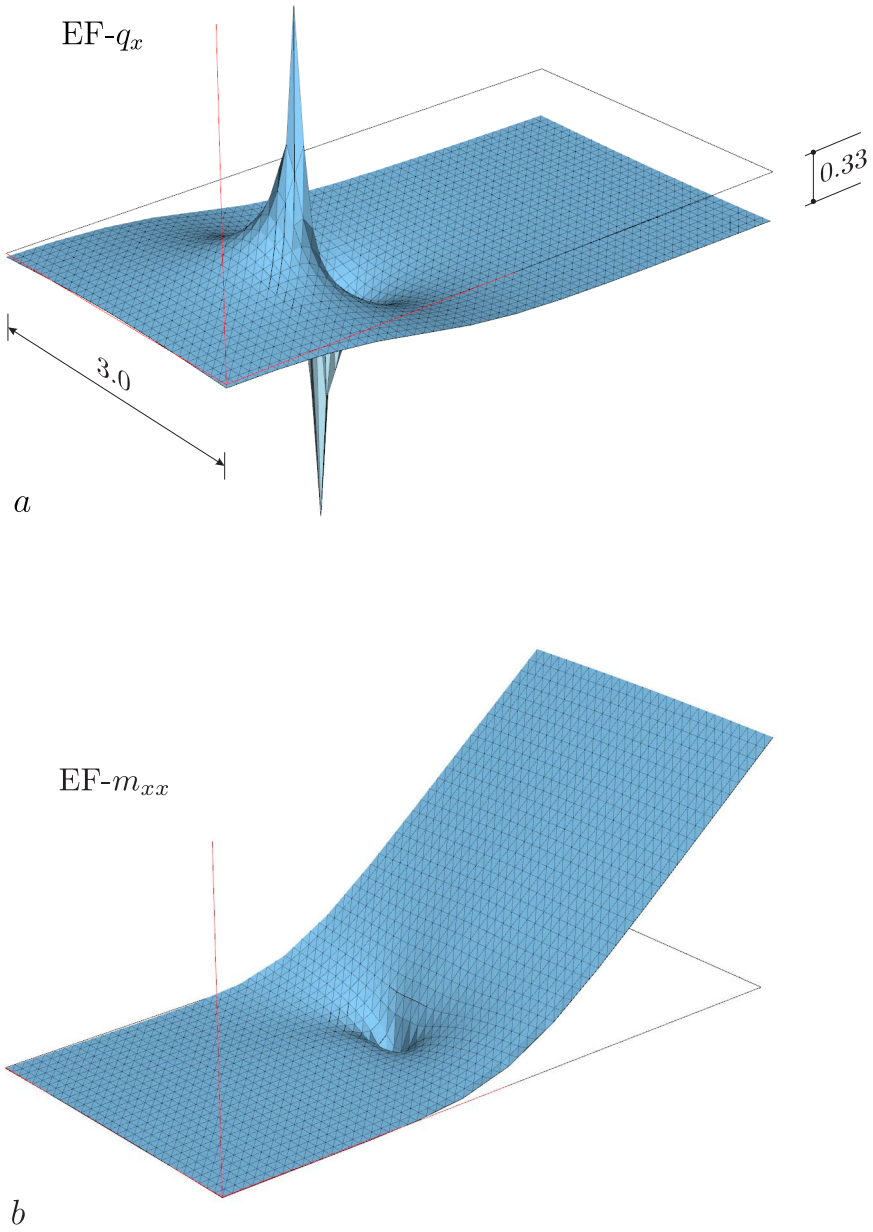
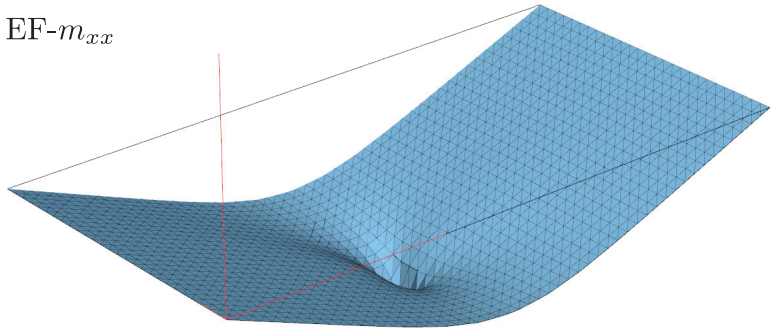
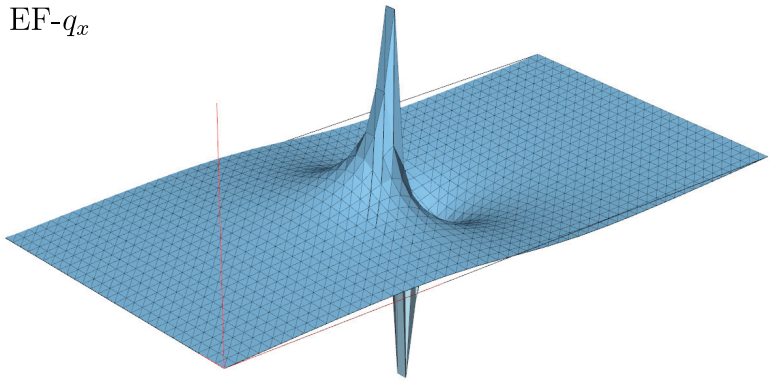


Bild 2.59. Kragplatte, **a)** Einflussfunktion für die Querkraft q_x und **b)** für das Moment m_{xx}; es ist erstaunlich, wie es mit einer ‚numerischen' Spreizung bzw. einem ‚numerischen' Knick (Grundlösung + Randelemente) möglich ist, einen fast konstanten Versatz bzw. eine Rotation von genau 45° zu erreichen (BE-PLATTE)



a



b

Bild 2.60. Plattenbrücke, **a)** Einflussfunktion für das Moment m_{xx} und **b)** für die Querkraft q_x in der Plattenmitte; die Einflussfunktion für das Integral von q_x quer durch die Mitte dürfte mit der Balkenlösung identisch sein (BE-PLATTE).

nun aber durch wiederholte Ableitung nach dem Aufpunkt x und daher ist der Wechsel von Symmetrie und Antimetrie in den Einflussfunktionen wie in Bild 2.40 und in Bild 2.53 ganz natürlich.

Und weiter: Wenn die Einflussfunktion für eine Verformung wie $1/r$ geht, dann die für die erste Ableitung wie $1/r^2$ und die für die zweite Ableitung wie $1/r^3$ etc. Es wird immer enger und immer steiler. Am Schluss der Kette steht – wenn wir bei der Platte bleiben – die Einflussfunktion für ‚die vierte Ableitung', die Belastung selbst

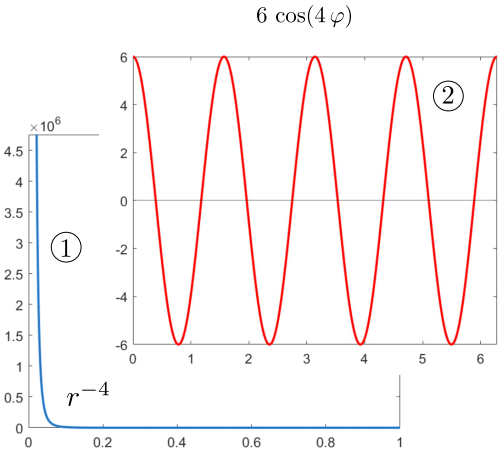


Bild 2.61. Die zwei Teile des singulären Kerns von $\partial^4 u/\partial x_1^4$, der praktisch nur im Kreis $r < 0.1$ lebt (MATLAB™)

$$p(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_4(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.159}$$

und der Kern G_4 muss mit dem Dirac Delta $\delta_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ identisch sein.

Aber man kann Einflussfunktionen auch für noch höhere Ableitungen aufstellen. Anders als die Kerne $G_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ für w, w', w'', w''', die die Belastung $p = EI\, w^{IV}$ (beim Balken) integrieren, differenzieren diese Kerne die Belastung und in diese Kerne ist wegen des r^{-n} eine **Lupe** eingebaut, die Nähe $r < 1$ ist extrem überbetont, und mit wachsendem n oszillieren die Gewichte $\cos(n\,\varphi)$ und $\sin(n\,\varphi)$ in den Einflussfunktionen immer stärker, siehe Bild 2.61.

So ist der Kern in der Einflussfunktion für die erste Ableitung $\partial u/\partial x_1$ im Mittelpunkt einer kreisförmigen Membran, $R = 1$, die Funktion

$$\frac{\partial G_0}{\partial x_1} = -\frac{r_{,x_1}}{2\,\pi\, r} = \frac{\cos(\varphi)}{2\,\pi\, r} \qquad G_0 = -\frac{1}{2\,\pi}\,\ln(r) \tag{2.160}$$

und für die vierte Ableitung (in x-Richtung) ist der Kern G_4 die Funktion

$$\frac{\partial^4 G_0}{\partial x_1^4} = \frac{6\,\cos(4\,\varphi)}{2\,\pi\, r^4}\,. \tag{2.161}$$

Es ist wie bei der *Fourier-Analysis*. Die hohen G_n spüren den hohen Frequenzen nach, aber wegen des nadelstichartigen r^{-n} ist der reguläre Teil

$$G_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \text{singulär} + \text{regulär}\,, \tag{2.162}$$

der eigentliche ‚Träger' der Einflussfunktionen G_n, wie man an den Bildern 2.59 und 2.60 sieht.

Bei der Membran lautet der *split* singulär + regulär

$$G_4(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{6\,\cos(4\,\varphi)}{2\,\pi}\,(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4})\,. \tag{2.163}$$

Bemerkung 2.9. Zu dem technischen noch eine Anmerkung. Die Einflussfunktion für die vierte Ableitung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} = \int_\Omega \frac{6\,\cos(4\,\varphi)}{2\,\pi}\,(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4})\,p\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.164}$$

lässt sich wegen des r^{-4} scheinbar gar nicht berechnen. Es ist aber so: Die Einflussfunktion basiert – wie alle Einflussfunktionen – auf dem Grenzwert über das gelochte Gebiet Ω_ε

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(G_4, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0\,, \tag{2.165}$$

und dieser Grenzwert ist ‚selbstheilend', zu jedem Term $+\infty$ gibt es einen entgegengesetzten Term $-\infty$, so dass am Ende nur Ausdrücke übrig bleiben, die der Computer berechnen kann. **Gauss garantiert das**[8].

Für eine genauere Analyse müsste man (2.165) näher betrachten, also den Grenzwert des Integrals über den Lochrand Γ_{N_ε} und das gelochte Gebiet Ω_ε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} (G_4\,\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial G_4}{\partial n}\,w)\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega_\varepsilon} G_4\,p\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\right\} = 0 \tag{2.166}$$

und so den ***Hauptwert*** von (2.164) bestimmen wie in Kapitel 9.4.

Der Hauptwert ist, vereinfacht gesagt, das Integral ohne die singulären Terme, ohne die Terme, die sich nicht integrieren lassen. Hauptwert bedeutet aber nicht, dass man das weglässt, was einem nicht gefällt, sondern hinter dem Hauptwert eines Integrals steht immer ein Grenzprozess wie (2.165).

Man muss also unterscheiden zwischen

$$\textbf{Wert} \text{ und } \textbf{Formel}\,. \tag{2.167}$$

Der Wert $\partial^4 w/\partial x_1^4$ existiert an sich. Die rechte Seite von (2.164) ist eine ‚Ansage', aber keine Formel, das Integral ist ja nicht berechenbar. Die eigentliche Formel ist das Ergebnis des Grenzprozesses (2.166), also der Hauptwert, der ja dann einen *berechenbaren* Ausdruck darstellt.

Dasselbe gilt für die Einflussfunktion (2.159) für $p(\boldsymbol{x})$. Der Ausdruck $p(\boldsymbol{x}) = (\delta_0, p)$ ist sehr suggestiv, aber er ist keine Formel, ist nicht ‚programmierbar'. Wenn man das wollte, obwohl es keinen Sinn macht, müsste man wie in (2.165) den Grenzprozess detailliert nachvollziehen und dokumentieren. Am Ende des Tages wüsste man dann, dass $p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$, aber wofür?

[8] Das ist ein bemerkenswertes Resultat und macht deutlich wieviel Mathematik in den eigentlich ‚harmlos' aussehenden Identitäten steckt, dass jedem Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ ein gutes, stabiles Ende garantiert ist, siehe Kapitel 9.4.

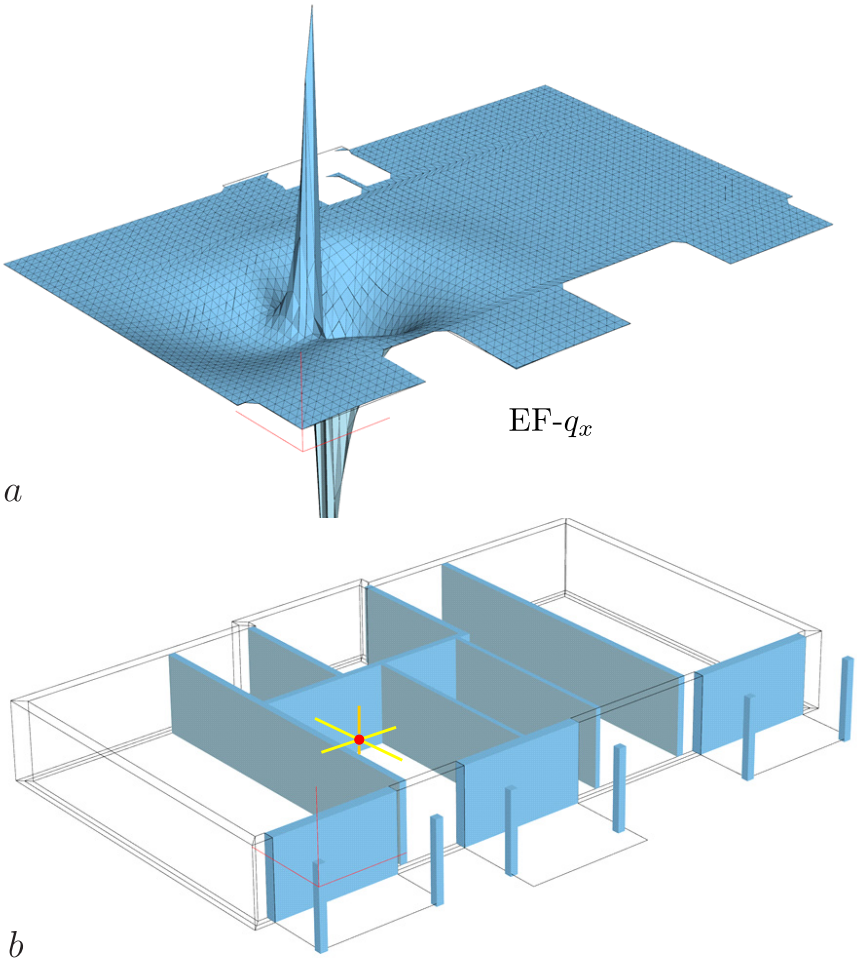


Bild 2.62. Deckenplatte, **a)** Einflussfunktion für die Querkraft q_x, **b)** Untergeschoss und Lage des Aufpunkts in der Deckenplatte (BE-PLATTE)

2.21 Die Unwucht

Die Einflussfunktion für die vierte Ableitung $\partial^4 w/\partial x^4 = O(r^{-4})$ der Membran ist also sehr, sehr eng gefasst und ähnliches gilt, wenn auch schwächer, für die – im Prinzip – antimetrische Querkraft-Einflussfunktion, $O(r^{-1})$, einer Platte, siehe etwa Bild 2.60 *b*. Dieser ***up-down*** Kern ist praktisch auf den Aufpunkt konzentriert und die Überlagerung mit einer konstanten Belastung p dürfte wenig mehr als null ergeben.

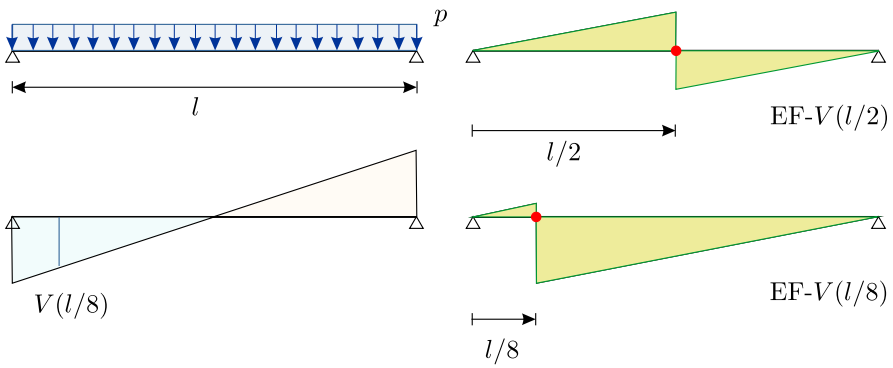


Bild 2.63. Die Einflussfunktion für die Querkraft in der Balkenmitte ist antimetrisch, ist genau ausbalanciert und so ist $V = 0$. Je näher der Aufpunkt aber zum Rand rückt, desto größer wird die Unsymmetrie, die Unwucht, und damit V.

Wo kommen dann aber die Querkräfte einer Platte her? Sie entstehen durch die **Unwucht des Einflussintegrals**.

Um das zu sehen, betrachten wir eine Membran, $-\Delta w = p$; sie ist die einfachste partielle Differentialgleichung.

Der Schlüssel ist die Integraldarstellung der Membran, (9.236),

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\,u(\boldsymbol{y})]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,p(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{2.168}$$

gemäß der nicht nur die Belastung p im Feld, sondern auch die Randverformungen u und die Aufhängekräfte $\partial u/\partial n$, die Durchbiegung in jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ der Membran bestimmen.

Man könnte vermuten, dass der Einfluss der Randgrößen wegen des $\ln r$ bzw. $1/r$ gering ist, aber der Rand geht einmal um die Membran herum, er hat einen langen Atem. Zum anderen ist es so, wenn wir an eine Platte denken, dass die Innenwände ja auch ‚Rand' sind und daher viel näher zu den Aufpunkten liegen, als der Rand der Platte, siehe Bild 2.62. Der zweite Effekt beruht auf der Lage des Aufpunkts im Gebiet. Ist die Membran eine Kreisscheibe, und der Aufpunkt der Mittelpunkt, dann ist das Gebietsintegral einer konstanten Last p null, wenn der Kern antimetrisch ist. Weicht die Form davon ab, dann liefern die ‚Zwickel' Beiträge zu dem Integral. Das Einflussintegral ist nicht mehr symmetrisch bzw. antimetrisch, sondern hat eine ‚Unwucht'.

Man sieht das sehr schön bei dem Einfeldträger in Bild 2.63. Die Einflussfunktion für die Querkraft in Balkenmitte ist antimetrisch und bei Gleichlast sind die Wirkungen ausbalanciert, $V(l/2) = 0$. Verschiebt man den Aufpunkt aber in Richtung Rand, dann wird die Einflussfunktion immer unsymmetrischer und so kommt es, dass die Querkraft ihr Maximum am Rand hat.

Weil die Einflussfunktionen für die ungeraden Ableitungen antimetrisch sind und für die geraden Ableitungen symmetrisch, sind bei Gleichlast die

ungeraden Ableitungen (w' und $V = -EIw'''$) in der Mitte null und am Rand am größten, während es bei den geraden Ableitungen (w und $M = -EIw''$) gerade umgekehrt ist.

Ein Flächentragwerk ist also – wir dürfen die obige Integraldarstellung (2.168) ja verallgemeinern – ein wohl abgestimmtes Gebilde, wo jeder Punkt jeden andern beeinflusst und der Ausdruck dieser Abhängigkeit der Tragwerksteile untereinander ist sinngemäß die obige Integraldarstellung, [118]. Sie formuliert, wenn $\boldsymbol{x}$ auf dem Rand liegt, eine Kopplungsbedingung $\boldsymbol{H\,u} = \boldsymbol{G\,t}+\boldsymbol{p}$ zwischen den Wegen $\boldsymbol{u}$ des Randes und den Randkräften $\boldsymbol{t}$ einer Scheibe oder Platte, siehe Kapitel 9.33, so wie die Steifigkeitsmatrix eine Kopplungsbedingung $\boldsymbol{K\,u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ zwischen den Weg- und Kraftgrößen an den beiden Enden eines Balkens, dem Rand des Balkens, darstellt. Und die Einflussfunktionen binden praktisch die Punkte $\boldsymbol{x}$ im Innern an das Geschehen auf dem Rand und an die Verteilung der Belastung p im Feld.

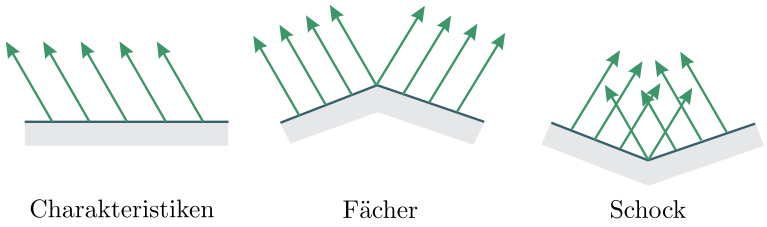
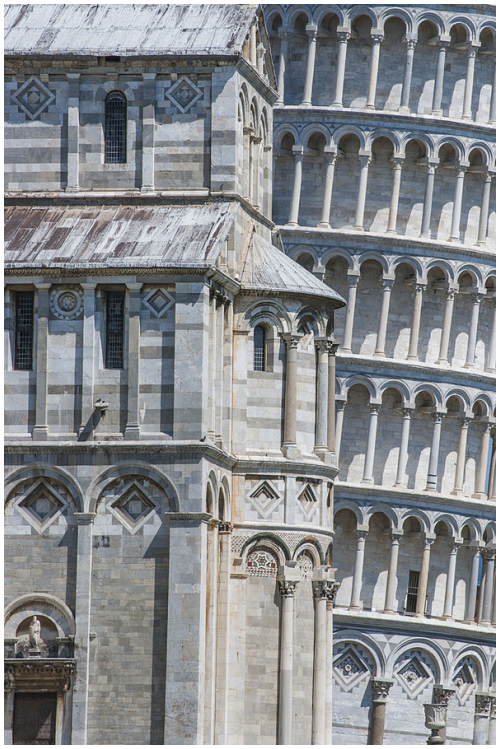


Bild 2.64. Charakteristiken lassen ahnen, wo Flächentragwerke Probleme haben, wenn auch die Gleichungen mathematisch von einem anderen Typ sind

2.22 Handicap Rand

Die Randelemente – wie die Mathematik auch – setzen die Randwerte nach Innen fort, ähnlich wie sich Wellenfronten längs den **Charakteristiken** fortpflanzen, siehe Bild 2.64. Nun ist der Rand eine sehr dünne Zone und der Übergang vom Rand $(n-1)$ aufs Gebiet (n) kann zu einem *handicap* werden, wenn in einer Ecke mehrere Platten mit unterschiedlichen Steifigkeiten zusammenstoßen. Dann ist viel Feinarbeit nötig, um die unterschiedlichen Kombinationen von Randbedingungen, Steifigkeiten und Lagerarten korrekt zu modellieren. In dem Programm BE-PLATTE sind auf jeder Seite einer Ecke zehn verschiedene Lagerbedingungen möglich. Eine solche Vielfalt von Varianten macht es bei der Programmierung nötig ganz von ‚vorne anzufangen' und die Biegefläche der Platte in eine Taylorreihe um die Ecke entwickeln, um die *conflicting conditions* unter einen Hut zu bringen und zu stimmigen Ergebnissen zu kommen.



Florian Hirzinger

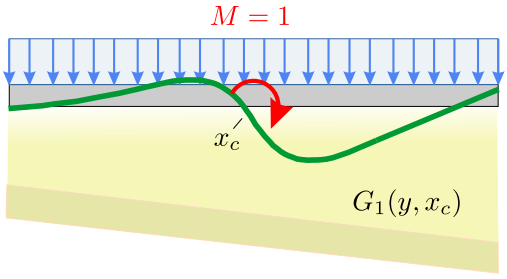


Bild 2.65. Der Boden unter dem schiefen Turm von Pisa, [326]

Die finiten Elemente leiden natürlich auch unter solchen Ecken, aber vordergründig haben sie es einfacher. Nur der Anwender muss dann später sehen, wie er die Ergebnisse interpretiert.

2.23 Der schiefe Turm von Pisa

Die Symmetrie und Antimetrie der Einflussfunktionen spielen auch beim schiefen Turm von Pisa die entscheidende Rolle.

Das Problem ist, dass die Bodensteifigkeit unter dem Turm nicht einheitlich ist, so dass die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für die Drehung der Fundamentplatte nicht perfekt antimetrisch ist, sondern eine Tendenz zur weicheren Seite hat, und sich daher der Turm zu dieser Seite neigt, siehe Bild 2.65,

$$w'(x_c) = \int_0^l G_1(y,x_c)\, p(y)\, dy\,. \tag{2.169}$$

Damit eine Waage sich nicht verdreht, müssen **zwei Dinge** stimmen:[9] Die Arme der Waage müssen gleich lang sein und die Last muss symmetrisch sein

$$\text{antimetrisch} \times \text{symmetrisch} = 0\,.$$

Das ist eine sehr ‚wacklige' Bedingung und der Bauingenieur tut daher gut daran eine Bodenplatte gegenüber möglichen Ungleichgewichten von oben wie von unten zu stabilisieren.

2.24 Symmetrie und Antimetrie

Der Rahmen in Bild 2.66 ist nicht symmetrisch, aber die Einflussfunktionen für die beiden horizontalen Lagerkräfte sind antimetrisch, weil die Summe der horizontalen Lagerkräfte bei rein vertikaler Belastung null ergeben muss.

Jede Struktur, die nur zwei horizontale Lager hat, unterliegt dieser Bedingung, siehe Kapitel 9.40.

Solche Gesetzmäßigkeiten gibt es viele bei den Einflussfunktionen. So ist die Summe aller Lager-Einflussfunktionen bei einem Durchlaufträger – unabhängig von den Feldlängen – gleich Eins, weil keine Belastung verschwinden darf.

Das gilt auch schon beim eingespannten Träger, wo die beiden *shape functions* $\varphi_1(x)+\varphi_3(x) = 1$, die ja auch die Einflussfunktionen für die Lagerkräfte sind, den Wert Eins ergeben.

Bei den Momenten ist die Sache nicht so einfach. Die Summe $\varphi_2(x)+\varphi_4(x)$ der beiden Einspannmomente ist ein Polynom dritten Grades, sie steigt und fällt, weil die beiden Einspannmomente das Moment $(\varphi_3(x)-\varphi_1(x))\, l$ aus den unterschiedlichen Lagerkräften ausgleichen müssen.

[9] Mathematisch nur eins, weil es nur eine Gleichung $P_1\, h_1 = P_2\, h_2$ ist. Drei von den vier Größen sind frei wählbar, die vierte muss dann das Ergebnis glatt stellen.

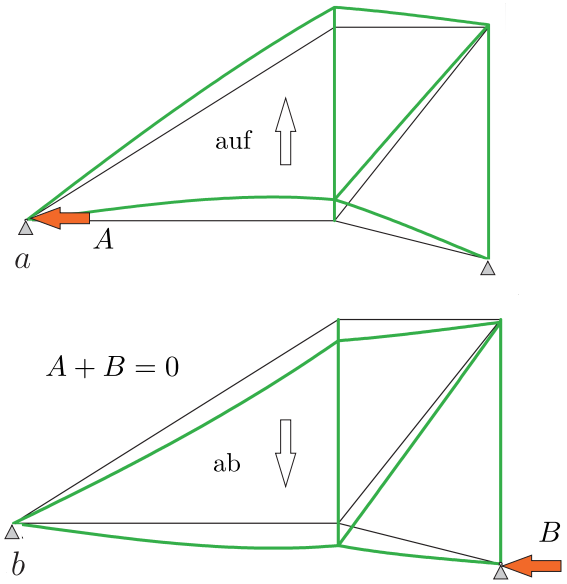


Bild 2.66. Die Einflussfunktionen (vert. Last) für die beiden horizontalen Lagerkräfte sind antimetrisch

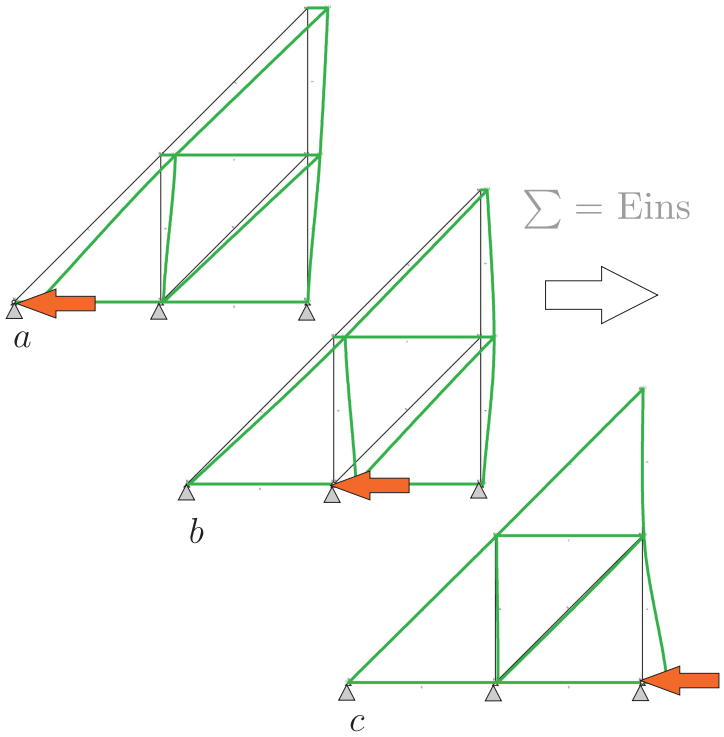


Bild 2.67. Die Einflussfunktionen (horiz. Last) der drei Lagerknoten

Die drei Einflussfunktionen in Bild 2.67 stellen in der Summe eine horizontale Verschiebung des Gerüsts um Eins nach rechts dar, weil die Summe der Lagerkräfte gleich der Last ist. Sind u_3, u_5, u_7 die Freiheitsgrade der gesperrten Lager, dann erhält man die Knotenwerte $\boldsymbol{g}_3$ der ersten Einflussfunktion, wenn man das System mit der Spalte $-\boldsymbol{f}_3$ der nicht-reduzierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ belastet (es werden nur die Einträge f_{3i} der Spalte $\boldsymbol{f}_3$ übernommen, die auch in dem reduzierten System vorkommen, u_i nicht gesperrt ist)

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_3 = -\boldsymbol{f}_3 \tag{2.170}$$

und zur Figur φ_3 addiert. Das bedeutet für die Summe der Spalten der drei Lagerknoten, dass

$$-\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_5 + \boldsymbol{f}_7) + \text{Diagonalterme} = \boldsymbol{g}_\Sigma = \text{'Eins'} \tag{2.171}$$

ist, wobei die horizontalen u_i in dem Vektor $\boldsymbol{g}_\Sigma$ alle 1 sind und die anderen null.

Man nimmt also einen leeren Vektor $\boldsymbol{u}$ (volle Länge, in dem alle u_i vertreten sind), trägt die Komponenten des obigen Vektors ein, und die ‚Diagonalterme' $u_3 = u_5 = u_7 = 1$. Das Ergebnis ist die Translation $\boldsymbol{g}_\Sigma$.

2.25 Lager im Schatten

Wir hatten am Anfang des Kapitels bemerkt, dass die Einflussfunktion und die Last sich irgendwo kreuzen müssen, damit im Aufpunkt etwas ankommt und das gilt vor allem für Lager. Es gibt Lager, die so ‚versteckt' liegen, dass sie fast nichts von der Belastung mitbekommen, weil ihre Einflussfunktionen früh versanden. Das gilt vor allem für die Eckkräfte in spitz zulaufenden Ecken, $\alpha < 90°$, siehe Bild 3.120, aber auch für die Lagerkräfte der Scheibe in Bild 2.68. Das Rollenlager wurde in 6 Elemente unterteilt. Dargestellt sind die resultierenden Lagerkräfte pro Element, die in der Mitte des Lagers deutlich kleiner als am Rand ausfallen, weil eine Auslenkung der inneren Elementknoten rasch abgebremst wird. In Bild 2.68 *b* und *c* sind die Knoten markiert, in denen die f_i angreifen, die die Einflussfunktionen für die beiden einzelnen, rot markierten Lagerknoten generieren.

2.26 Einflussfunktionen für integrale Werte

In einem Punkt ruht der Focus auf einzelnen Werten, dem Moment, der Durchbiegung, der Querkraft etc. Manchmal ist es jedoch sinnvoller, die Ergebnisse über eine kürzere oder längere Strecke aufzuintegrieren, also zu mitteln, weil die Punktwerte zu stark schwanken.

Warum das **Mitteln** bessere Ergebnisse liefert, versteht man, wenn man sich die Einflussfunktionen anschaut. Die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in einem Punkt ist eine **Spreizung** des Aufpunktes in vertikaler Richtung, siehe Bild 2.69 *b*. Erweitern wir den Punkt zu einer kurzen Linie *l* und

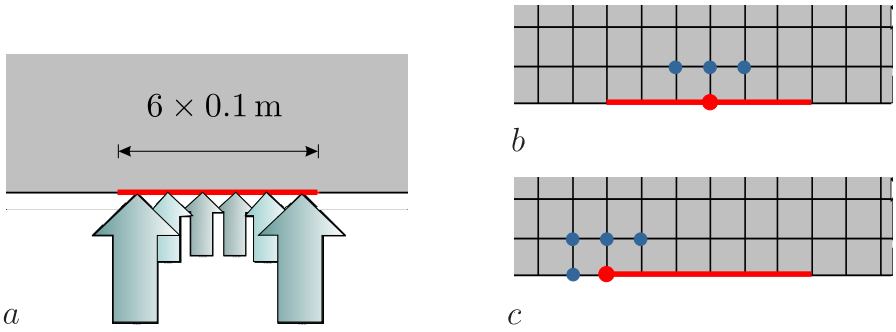


Bild 2.68. Aufwendige Elementierung eines Rollenlagers einer Wandscheibe

entschließen uns mit dem Mittelwert der Spannungen längs dieser Linie zu rechnen

$$\sigma_{yy}^{\varnothing} = \frac{1}{l}\int_0^l \sigma_{yy}\, ds\,, \tag{2.172}$$

dann ist die Einflussfunktion eine **linienhafte Versetzung** der Punkte auf der Linie und diese Bewegung ist einfacher mit finiten Elementen anzunähern als eine Punktversetzung. Das ist der Grund, warum eine Mittelung in der Regel bessere Werte liefert.

Wenn, wie in Bild 2.69 *a*, der Schnitt ganz durch die Scheibe geht, er läuft durch die unterste Elementreihe, ist das Integral der Spannungen

$$N_y = \int_0^l \sigma_{yy}\, dx \tag{2.173}$$

sogar exakt, wenn die Belastung oberhalb der ersten Elementreihe angreift, weil die FE-Einflussfunktion für N_y im oberen Teil ein *lift* um Eins ist. Dagegen dürfte die Einflussfunktion in Bild 2.69 *b* für den Punktwert σ_{yy} nur eine Näherung sein, denn so eckig sieht keine Einflussfunktion aus.

Einflussfunktionen für integrale Werte ordnen sich dem globalen Schema unter. Bei einem Punktfunktional wie $J(w) = w(x)$ sind die j_i die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ im Aufpunkt

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}\,. \tag{2.174}$$

Ist $J(w)$ hingegen ein **Integral**, etwa der Mittelwert der Durchbiegung auf einer Strecke (x_a, x_b),

$$J(w) = \frac{1}{(x_b - x_a)}\int_{x_a}^{x_b} w(x)\, dx\,, \tag{2.175}$$

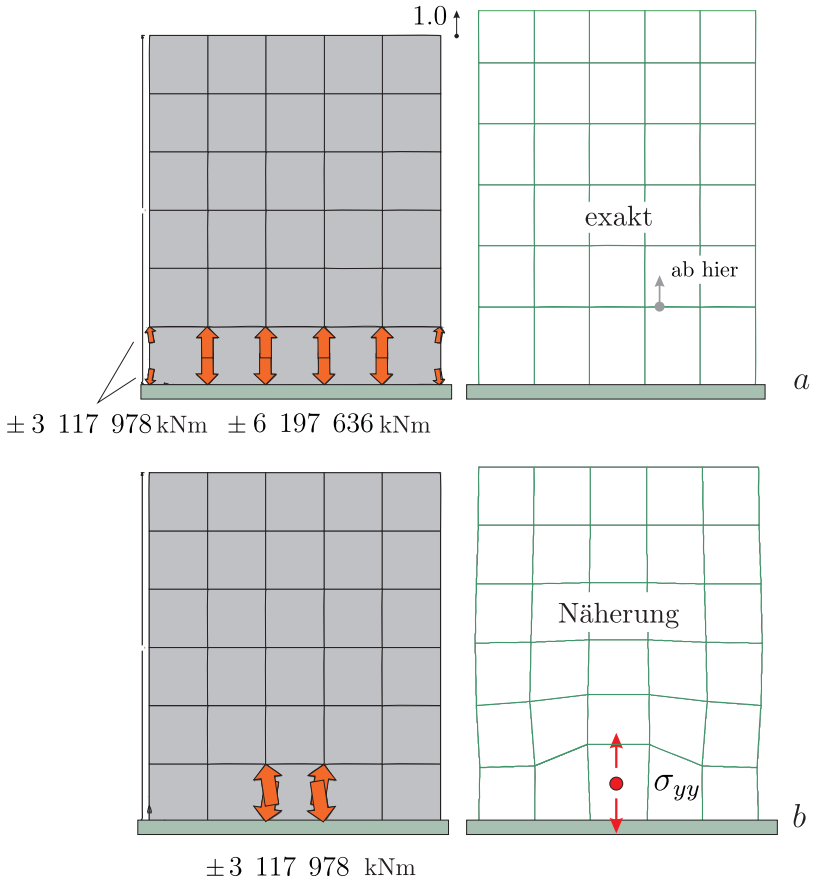


Bild 2.69. Scheibe, **a)** Einflussfunktion für N_y (exakt nach der gedehnten 1. Elementreihe), **b)** Einflussfunktion für σ_{yy}, Kräfte in kNm, Verschiebungen in m (WINFEM)

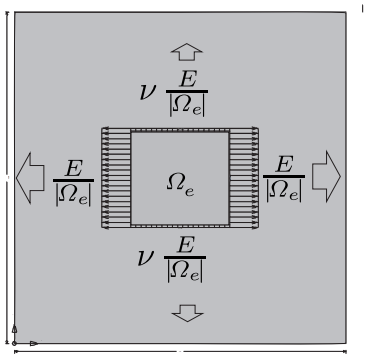
dann sind die äquivalenten Knotenkräfte die Mittelwerte der φ_i

$$j_i = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} \varphi_i(x)\, dx\,. \tag{2.176}$$

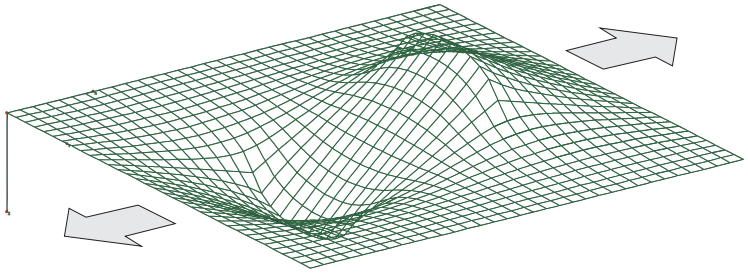
Bei Scheiben gibt es noch einen ‚Trick', denn man kann die mittlere Spannung in einem Element der Größe $|\Omega_e|$

$$\sigma_{xx}^{\varnothing} = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \sigma_{xx} d\Omega = \frac{E}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} (\varepsilon_{xx} + \nu\, \varepsilon_{yy}) d\Omega\,. \tag{2.177}$$

wegen $\varepsilon_{xx} = u_{x,x}$ und $\varepsilon_{yy} = u_{y,y}$, durch ein Integral über den **Rand** Γ_e des Elements ersetzen



a



b

Bild 2.70. Einflussfunktion für den Mittelwert von σ_{xx} in dem Element **a)** das ‚Dirac Delta' besteht aus horizontalen Linienkräften auf dem vertikalen Rand und (kleinen, ν-fachen) vertikalen Linienkräften auf dem horizontalen Rand von Ω_e, **b)** horizontale Verschiebungen, nach oben und unten in z-Richtung abgetragen. Bei bilinearen Elementen sind die Einflussfunktionen für den Mittelwert im Element und von σ_{xx} im Mittelpunkt des Elements identisch, [125], (BE-SCHEIBE)

$$\sigma_{xx}^{\varnothing} = \frac{E}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} (\varepsilon_{xx} + \nu\, \varepsilon_{yy}) d\Omega = \frac{E}{|\Omega_e|} \int_{\Gamma_e} (u_x n_x + \nu\, u_y n_y)\, ds\,. \qquad (2.178)$$

Die Einflussfunktion für die Verschiebung u_x bzw. u_y eines Randpunktes $\boldsymbol{x}$ ist die Verschiebung, die durch eine Einzelkraft $P_x = 1$ bzw. $P_y = 1$ ausgelöst wird, die im Punkt $\boldsymbol{x}$ angreift. Daher ist die Einflussfunktion für das Integral

$$\frac{E}{|\Omega_e|} \int_{\Gamma_e} (u_x n_x + \nu\, u_y n_y)\, ds \qquad (2.179)$$

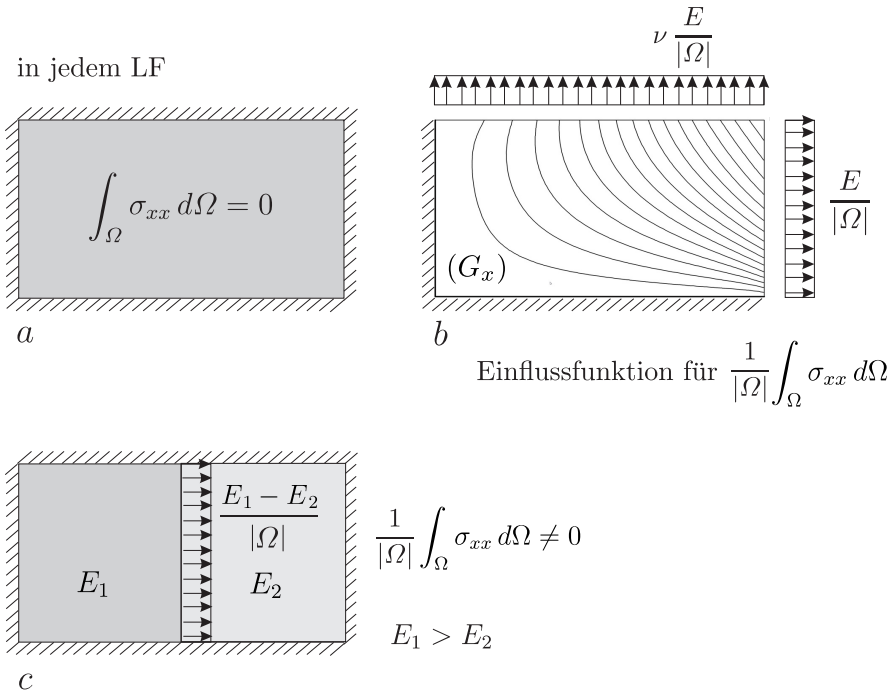


Bild 2.71. a) Der Mittelwert von σ_{xx} ist bei festgehaltenem Rand null, **b)** aber nicht, wenn freie Ränder vorhanden sind und auch nicht, **c)** wenn der E-Modul springt, [130]. Die Linienkräfte erzeugen die Einflussfunktionen

das Verschiebungsfeld, das durch horizontale u. vertikale Linienkräfte $E/|\Omega_e| \cdot n_x$ bzw. $E/|\Omega_e| \cdot n_y$ längs des Elementrandes Γ_e erzeugt wird, siehe Bild 2.70.

Eine Gleichung sagt es direkt: Es sei $\boldsymbol{G}_\varnothing$ die Antwort der Scheibe auf die Randkräfte $E/|\Omega_e| \cdot n_x$ und $\nu \cdot E/|\Omega_e| \cdot n_y$ in Bild 2.70, für die wir den Vektor $\boldsymbol{t}$ setzen und es sei $\boldsymbol{u}$ das Verschiebungsfeld der Scheibe im LF $\boldsymbol{p}$, dann gilt

$$W_{1,2} = \int_\Omega \boldsymbol{G}_\varnothing \bullet \boldsymbol{p}\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Gamma \boldsymbol{t} \bullet \boldsymbol{u}\, ds_{\boldsymbol{y}} = W_{2,1}\,, \tag{2.180}$$

und das zweite Integral ist identisch mit (2.178). Also sind die **mittleren Spannungen** in einer Scheibe, die am Rand festgemacht ist, siehe Bild 2.71, null, weil die die EF erzeugenden Randkräfte $\boldsymbol{t}$ die Scheibe nicht deformieren können. Sinngemäß dasselbe gilt für Platten: Die Mittelwerte der Momente in einer eingespannten Platte (*any shape*) sind null. Im eindimensionalen Fall hatten wir das schon in Kapitel 1, Gleichung (1.8) und Gleichung (1.9), festgestellt.

Erfahrungsgemäß sind die Spannungen in der Mitte eines Elements am genauesten. Zum einen, weil man in der Mitte von den Rändern des Elements, wo die FE-Spannungen springen, am weitesten entfernt ist, zum andern liegt

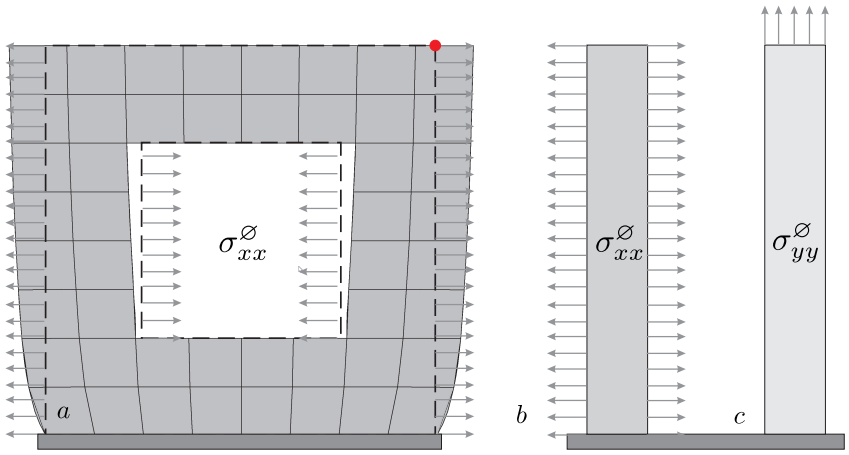
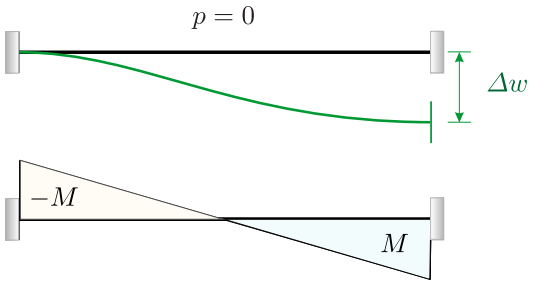


Bild 2.72. a) Die EF für $\sigma^{\varnothing}_{xx}$ ist die Reaktion auf horizontale Zugkräfte (vert. ~ 0) an den Rändern. Je mehr freie Ränder es gibt, um so weiter schlägt die EF aus. $P \rightarrow$ oben rechts • ergibt max $\sigma^{\varnothing}_{xx}$, **b)** EF-$\sigma^{\varnothing}_{xx} \ll 1$, **c)** EF-$\sigma^{\varnothing}_{yy} \gg 1$



$$\int_0^l M\,dx = -EI(w'(l) - w'(0)) = 0 - 0 = 0$$



$$\int_0^l V\,dx = M(l) - M(0) = M + M = 2\,M$$

$$\int_0^l p\,dx = -(V(l) - V(0)) = -(V - V) = 0$$

Bild 2.73. Integralbeziehungen an einem Balken

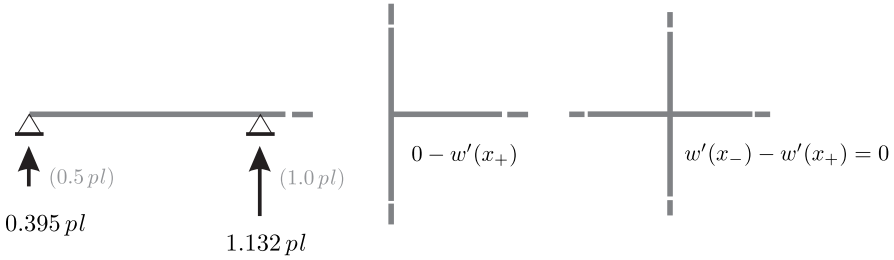


Bild 2.74. Symmetriebrechung durch Randstörungen, $M^{\varnothing} = -EI \sum_i [w']_0^{l_i} \neq 0$

es aber auch daran, dass die Einflussfunktionen für die Spannungen in der Elementmitte den Einflussfunktionen für die Mittelwerte der Spannungen im Element sehr ähnlich sind und diese haben es einfacher, sie sind genauer, sie müssen ja keinen Punkt spreizen. Bei bilinearen Elementen sind die beiden Einflussfunktionen sogar identisch, [125].

Partielle Integration ist auch eine Aussage über den **Mittelwert** der Ableitung einer Funktion

$$\frac{1}{l}\int_0^l u'(x)\,dx = \frac{1}{l}(u(l) - u(0)) \tag{2.181}$$

und sinngemäß ist daher das Integral der Normalkraft $N = EAu'(x)$ in einem Stab proportional zur Spreizung der Endpunkte

$$\frac{1}{l}\int_0^l N(x)\,dx = \frac{1}{l}(u(l) - u(0)) \cdot EA\ . \tag{2.182}$$

Ebenso ist das Integral des Moments $M(x) = -EIw''(x)$ proportional zur Relativverdrehung der Endtangenten, siehe Bild 2.73,

$$\frac{1}{l}\int_0^l M(x)\,dx = -EI\,\frac{1}{l}(w'(l) - w'(0)), \tag{2.183}$$

und bei der Querkraft

$$\frac{1}{l}\int_0^l V(x)\,dx = \frac{1}{l}(M(l) - M(0)) \tag{2.184}$$

ist es die Differenz der Endmomente und die Resultierende der Belastung $p = -V' = EIw^{IV}$ ist natürlich gerade der Differenz der Querkräfte

$$\int_0^l p\,dx = -(V(l) - V(0))\,. \tag{2.185}$$

Bei einem Durchlaufträger ist $M^{\varnothing}$ proportional zur Verdrehung der beiden Endtangenten, weil sich die Verdrehungen w' bei feldweiser Integration an



Bild 2.75. Auf der Suche nach dem Gleichgewicht

den Innenknoten wegkürzen, (2.183), wenn die Steifigkeit EI gleich ist. Auch bei Knoten mit vier Stäben (Rahmen) kürzen sich die w' bei part. Int., aber in den Randknoten (drei Stäbe) gilt das nicht, siehe Bild 2.74.

Am freien Rand einer Struktur werden – unvermeidbar – ‚Rhythmusstörungen' in das Tragwerk hineingetragen.

Das bekannteste Beispiel sind die Endlager eines Durchlaufträgers, die aus dem Raster fallen, weil sie das Randmoment zu null machen müssen. Ist die Volleinspannung eines Tragwerks der ‚natürliche', der optimale Zustand?

2.26.1 Mittlere Dehnung und Krümmung

Wenn man die Randknoten eines Tragwerks festhält, dann ist das Integral der Normalkräfte und der Momente, also der Dehnungen und Krümmungen, null. Sobald sich aber einzelne Randknoten verschieben oder verdrehen können, geht diese ‚Symmetrie' verloren. Die für das Gleichgewicht nötigen Ausgleichsbewegungen an den freien Rändern gleichen dem Flattern eines Storchs, siehe Bild 2.75. Je ‚strammer' ein Tragwerk sitzt, je kleiner $\mathcal{V}$ ist, desto kleiner ist die Verzerrungsenergie. Volleinspannung ergibt den kleinst möglichen Wert $a(u,u) > 0$. Bewegen sich aber die Flügelspitzen, die Ränder mit, dann wird $\mathcal{V}$ größer, die Lasten können längere Wege gehen, weil die Randeinspannung nicht mehr hindert, $a(u,u)$ wächst.

2.26.2 Der Split der inneren Energie

Bezeichne S_0 die voll eingespannte Struktur und S_n die reale Struktur, n *released nodes*, dann geschieht der Übergang $S_0 \to S_n$ so, dass in jeder Stufe ein Freiheitsgrad v_i gelöst wird und die inverse Festhaltekraft aufgebracht wird, und das n-mal. Bezeichne Δ_i den Übergang in den Verschiebungen von der Stufe u_i zur Stufe $u_{i+1}(x) = u_i(x) + \Delta_i(x)$, dann gilt

$$a(u_{i+1}, u_{i+1}) = a(u_i, u_i) + 2\underbrace{a(u_i, \Delta_i)}_{=0} + \underbrace{a(\Delta_i, \Delta_i)}_{>0} . \tag{2.186}$$

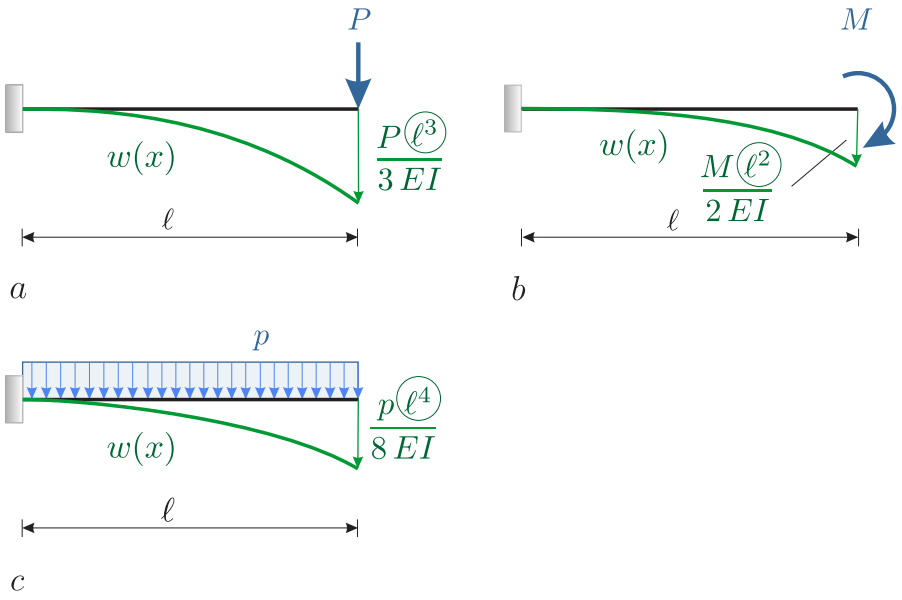


Bild 2.76. Durchbiegung am Kragarmende aus **a)** Einzelkraft – dreimal integrieren, **b)** Moment – zweimal integrieren – und **c)** Streckenlast – viermal integrieren

Mit jedem Schritt wächst die Energie, denn der Mittelterm ist null. Das Integral ist die Bewegung am System S_i in Richtung des gesperrten Freiheitsgrades v_i, berechnet durch die Überlagerung des Momentes aus der inversen Festhaltekraft mit dem Moment am System S_i (Mohr + Reduktionssatz)[10].

An der ***released structure*** sieht man die inversen Festhaltekräfte nicht, + und - ergibt null, aber sie stecken in der Energie

$$\boxed{a(u,u) = a(u_0,u_0) + \sum_{i=1}^{n} a(\Delta_i,\Delta_i)\,.} \tag{2.187}$$

Dieser ***split*** der inneren Energie in u_0 und die ‚Flatterbewegungen' Δ_i der *released nodes* ist ein bemerkenswertes Resultat, weil nur über die Eigenarbeiten – die ‚quadratischen' Terme – summiert wird! Die Reihenfolge, in der die Knoten gelöst werden, darf im übrigen keine Rolle spielen.

Man kann das noch weiter treiben, wenn man nicht nur die Randknoten einfriert, sondern alle Knoten. Dann ist u_0 die voll geblockte Struktur – wie beim Drehwinkelverfahren – und indem man schrittweise die Knoten löst, kumulieren sich die Beiträge $a(\Delta_i,\Delta_i)$ zur Gesamtenergie.

[10] Addiert man ein Lager, dann ist $2a(w,\Delta) + a(\Delta,\Delta) = -|Pw(x)|$, $(P{\cdot}\uparrow)$

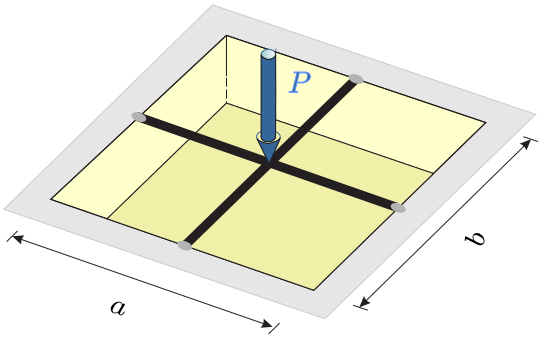


Bild 2.77. Balkenrost

2.27 Einflussfunktionen rechnen rückwärts

Wenn man differenziert, dann geht man ‚vorwärts' und wenn man integriert, dann geht man ‚rückwärts'. Einflussfunktionen rechnen rückwärts. Aus $-EAu'' = p$ bzw. $EI\,w^{IV} = p$ werden die Ableitungen niedrigerer Ordnung

$$u,\ N \qquad w,\ w',\ M,\ V \tag{2.188}$$

berechnet.

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für die Normalkraft in einem Stab integriert die Belastung einmal

$$N(x) = \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy \qquad (\,'') \to (\,') \tag{2.189}$$

und die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Längsverschiebung $u(x)$ integriert die Belastung zweimal

$$u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \qquad (\,'') \to (\ )\,. \tag{2.190}$$

Das Rückwärtsrechnen kann man sehr schön an dem Kragträger in Bild 2.76 beobachten. Die Durchbiegung w ist ja das dreifach unbestimmte Integral der Querkraft $V = -EI\,w'''$

$$w = -\int\int\int V\,dx\,dx\,dx = -\int\int\int P\,dx\,dx\,dx \tag{2.191}$$

und prompt steht ein ℓ^3 im Ergebnis, wenn eine Einzelkraft P angreift,

$$w(\ell) = \frac{P\,\ell^3}{3\,EI} \qquad (\,''') \to (\ )\,, \tag{2.192}$$

und ist es ein Moment $M = -EI\,w''$, dann steht dort ein ℓ^2



Hite Crossing Bridge, Utah

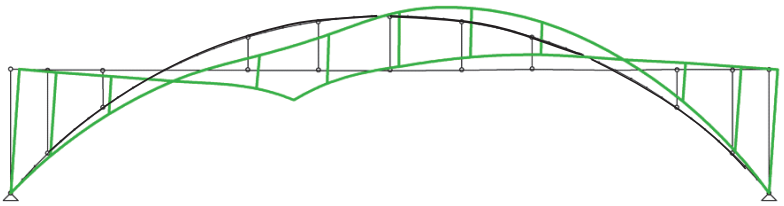


Bild 2.78. Colorado River Bridge, Einflussfunktion für ein Biegemoment $M(x)$

$$w(\ell) = \frac{M\ell^2}{2\,EI} \qquad (\,'') \to (\ )\,, \tag{2.193}$$

und ist es eine Streckenlast p,

$$w(\ell) = \frac{p\,\ell^4}{8\,EI} \qquad (\,'''') \to (\ )\,, \tag{2.194}$$

dann steht dort ein ℓ^4, denn $EIw^{IV} = p$.

Wir sehen das ℓ^3 der Gleichung (2.192) auch in der Formel

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{b^3}{a^3}\,, \tag{2.195}$$

die regelt, wie sich eine Punktlast $P = P_a + P_b$ auf zwei Balken verteilt, siehe Bild 2.77.

Eine Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ dagegen differenziert und daher finden wir den ‚inversen' Faktor EI/l^3 vor einer Balkenmatrix bzw. den Faktor EA/l vor einer Stabmatrix, $w \to V$ bzw. $u \to N$.

Bei dem ‚zurück' ist es wichtig zu wissen, wie man auf das p gekommen ist. Man differenziere die Funktion $u(x) = \sin(\pi\,x/l)$ zweimal bzw. viermal

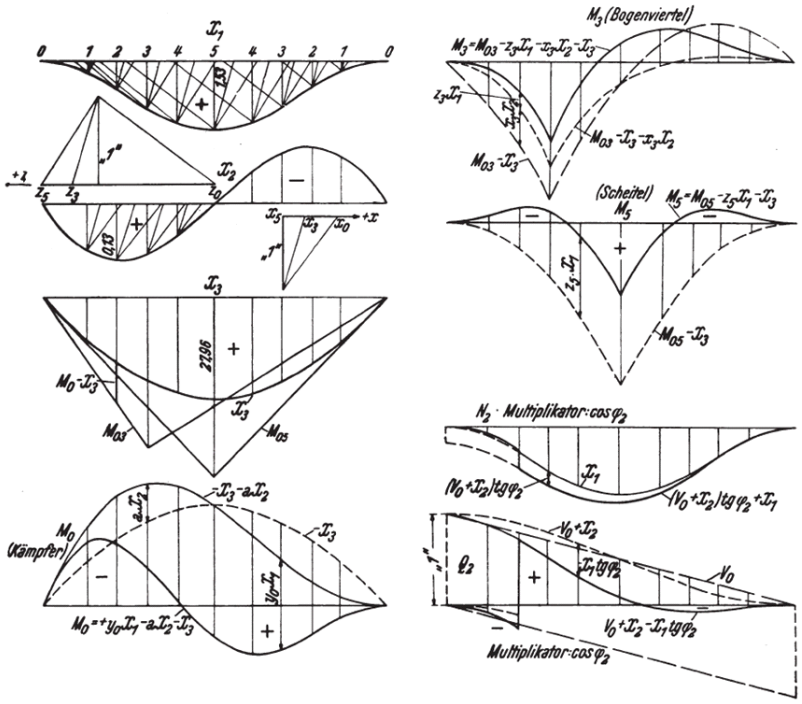


Bild 2.79. Einflussfunktionen für X_1, X_2, X_3 und das Biegemoment, und die Normal- und Querkraft eines Bogens, Pucher [243] S. 287

$$-u'' = (\frac{\pi}{l})^2 \sin(\pi\, x/l) \qquad = p(x) \tag{2.196}$$

$$EI\, u^{IV} = (\frac{\pi}{l})^4 \sin(\pi\, x/l) \qquad = \bar{p}(x)\,. \tag{2.197}$$

Einmal ist das Ergebnis die Streckenlast $p(x)$ eines vorgespannten Seils und einmal ist es die Streckenlast $\bar{p}(x)$ eines Balkens.

Um u im Punkt $x = l/2$ aus den rechten Seiten $p(x)$ und $\bar{p}(x)$ zu berechnen, sind **verschiedene Einflussfunktionen** nötig, obwohl wir nach demselben Wert fragen, $u(l/2) = \sin(0.5 \cdot \pi)$. Wir müssen also wissen, welcher Operator p aus u erzeugt hat. Wo kommen die Daten her?

2.28 Historischer Rückblick

Angesichts des heutigen Komforts – ein *click* auf irgendeinen Punkt eines Rahmens, siehe Bild 2.78, und es erscheint die gewünschte Einflussfunktion – sei daran erinnert, wie man früher Einflussfunktionen berechnet hat, siehe Bild 2.79; in der Regel mit dem Kraftgrößenverfahren. Zum Moment M_0 am statisch bestimmten Hauptsystem gehörte eine Einflussfunktion, aber auch zu

jeder statischen Überzähligen X_i und erst das Zusammenspiel aller Funktionen ergab dann die Einflussfunktion für das Biegemoment

$$M = M_0 + X_1\, M_1 + X_2\, M_2 + \ldots \tag{2.198}$$

Das war eine **Sisyphus-Arbeit**, denn es waren nicht Schnittgrößen zu bestimmen, sondern Biegelinien, Verformungen, deren Verlauf über das ganze Tragwerk zu verfolgen waren. Geringer Trost, dass man Hilfsmittel kannte – *elastischer Schwerpunkt,* $\mathfrak{w}$*-Gewichte, Mohrsche Analogie* etc. – die heute in Vergessenheit geraten sind. Die drei Bände von Müller-Breslau sind beeindruckende Zeugnisse dieser Zeit, [216].

2.29 Das Abklingverhalten

Wenn der Tragwerksplaner von seinem **statischen Gefühl** spricht, dann meint er die Einflussfunktionen. Sie dokumentieren nachvollziehbar das Tragverhalten einer Struktur. Da, wo ‚Material' ist, da ist Wirkung. Der leere Raum trägt nicht. Wirkung verzweigt sich nur längs den Riegeln oder Stielen.

Zum Spreizen eines Querkraft- oder Momentengelenks in einem statisch unbestimmten Rahmen benötigt man **Energie**. Je schneller diese Energie versickert, desto eher versandet auch die Einflussfunktion. Das entspricht der ***Daumenregel***: *Je mehr Stäbe die Umgebung des Gelenks pro* m^3 *enthält, desto schneller geht die Energie verloren. 3-D Modelle bremsen also die Einflussfunktionen schneller ab, weil sich die Energie einfach über mehr Stäbe verteilt als bei 2-D Modellen.*

Das ist wohl auch der Grund, warum die **Positionsstatik** auf der sicheren Seite liegt, denn wenn das einzelne Bauteil, die Platte, die Scheibe, aus dem Tragwerk herausgelöst und für sich berechnet wird, dann fehlt die Bremswirkung der angrenzenden Bauteile. Numerische Untersuchungen bestätigen diese Vermutung, [183], [184].

Dazu kommt, dass eventuelle Rechenungenauigkeiten – etwa in einem Einspannmoment – lokalen Störungen gleichen, deren Effekte in einem 3-D Modell rasch ‚versacken'.

2.30 Prinzip von St. Venant

‚Wenn die auf einen kleinen Teil der Oberfläche eines elastischen Körpers wirkende Kraft durch ein äquivalentes Kräftesystem ersetzt wird, ruft diese Belastungsumverteilung wesentliche Änderungen nur bei den örtlichen Spannungen hervor: nicht aber in Bereichen, die groß sind im Vergleich zur belasteten Oberfläche', [317].

Dieses Prinzip ist eine direkte Konsequenz der Tatsache, dass Wirkungen per Einflussfunktionen propagieren, siehe Bild 2.80. Einflussfunktionen sind Skalarprodukte, sind Integrale, die die Belastung p mit einem Kern $G(y, x)$ wichten und der Kern hat (gewöhnlich) die Eigenschaft, dass er mit wachsendem Abstand vom Aufpunkt gegen null tendiert. Wenn der Abstand nur

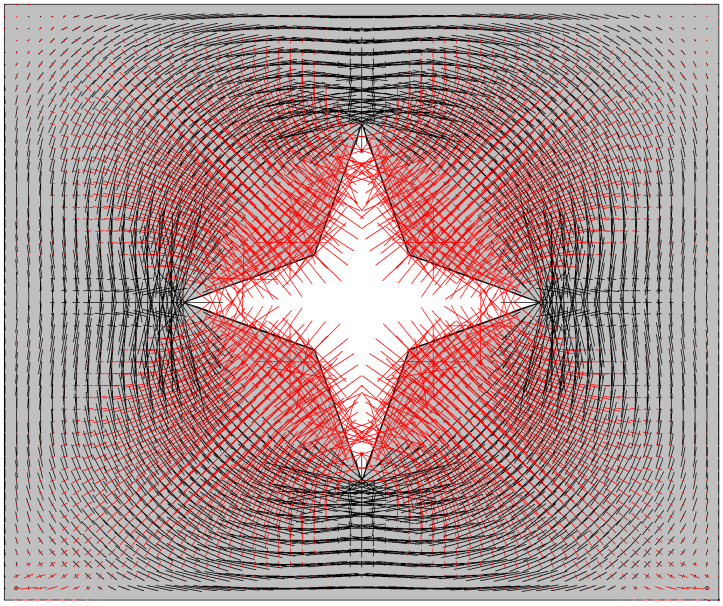


Bild 2.80. Sternförmige Öffnung unter Innendruck, Details verschwimmen schnell, wenn nicht singuläre Punkte Spuren hinterlassen (BE-SCHEIBE)

groß genug ist, dann reicht eine **Ein-Punkt-Quadratur** aus, kann man also die Belastung durch ihre Resultierende ersetzen. Weil nun äquivalente Kräftesysteme dieselbe Resultierende haben, wirkt sich ein Austausch in der Ferne nicht aus.

Daraus folgt im übrigen, dass die Wirkungen von **antimetrischen Lasten**, von Lasten mit null Resultierender, besonders schnell abklingen. Ja wenn die Einflussfunktionen im Bereich der Belastung ‚flach' verläuft, keine Steigung hat, dann ist der Einfluss sofort null, $Symmetrie \times Antimetrie = 0$.

Antimetrische Belastungen ‚differenzieren' die Einflussfunktionen.

Zu dem Thema gehört im Grunde auch der Effekt von **oszillierenden Lasten**, die die Tendenz haben sich gegenseitig auszulöschen, siehe Bild 2.81 und 2.82.

Es reicht, dass die Last schachbrettartig angeordnet ist und die Lastflächen gerade die Größe der finiten Elemente haben, dann sind bei einer Membran die f_i im Innern alle null. Der Algorithmus hat in solchen Fällen einen ‚blinden Fleck'. Er nimmt die Belastung nicht wahr und kommt auf $u = 0$.

St. Venant gilt, weil die Lösungen von *elliptischen Differentialgleichungen* (Standardtyp in der Statik) rasch abklingen, während sich die Lösungen von

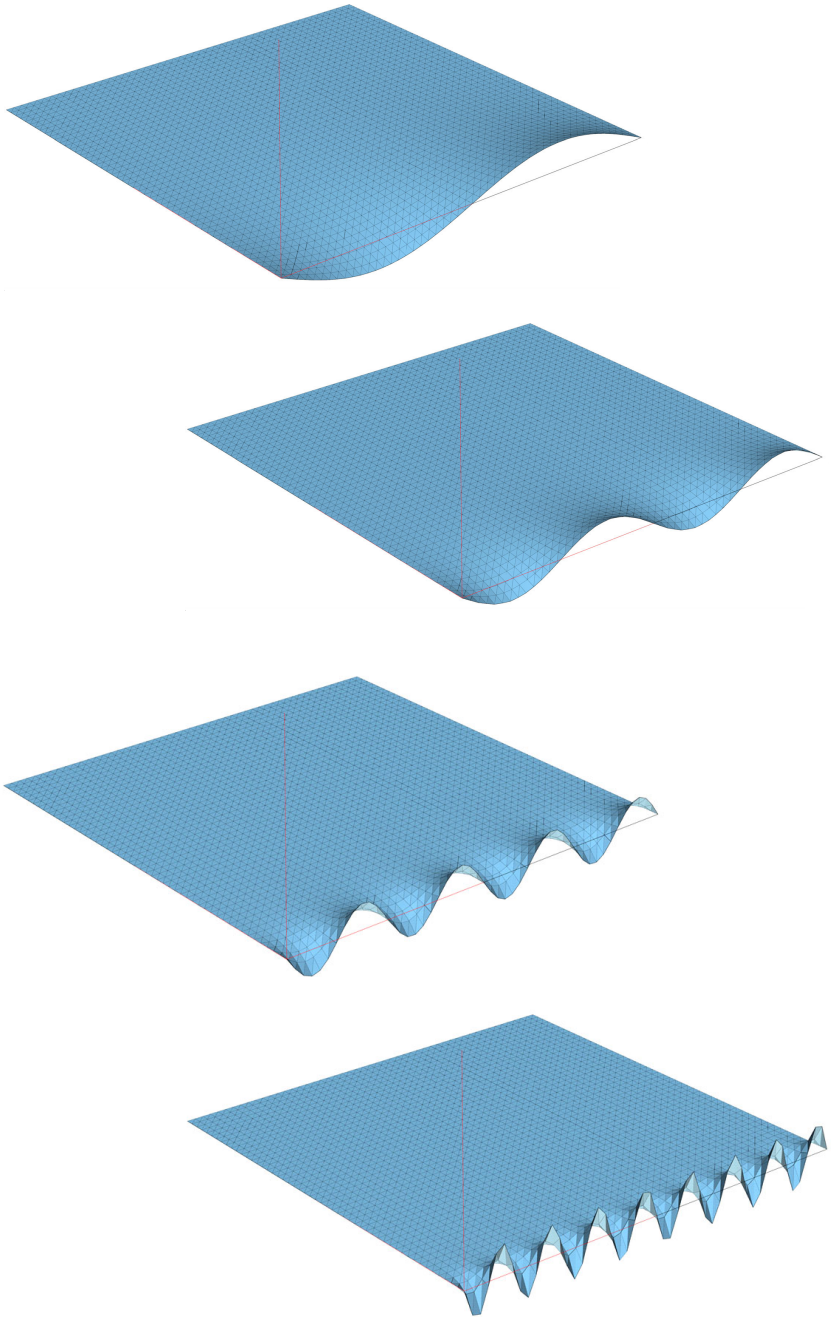


Bild 2.81. Membran mit beweglicher vorderer Kante. Je kurzwelliger die eingeprägten Randverformungen sind, desto eher klingen sie ab. Dieser Effekt ist den Einflussfunktionen geschuldet. Hochfrequente Linienlasten auf einem Flächentragwerk sind wie ‚nichts' (BE-LAPLACE)

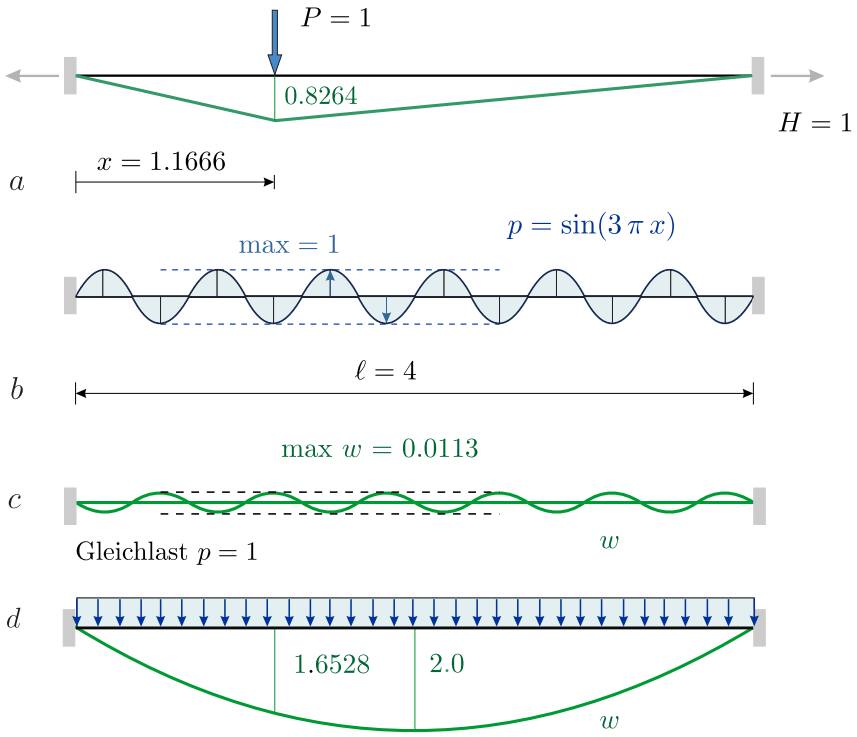


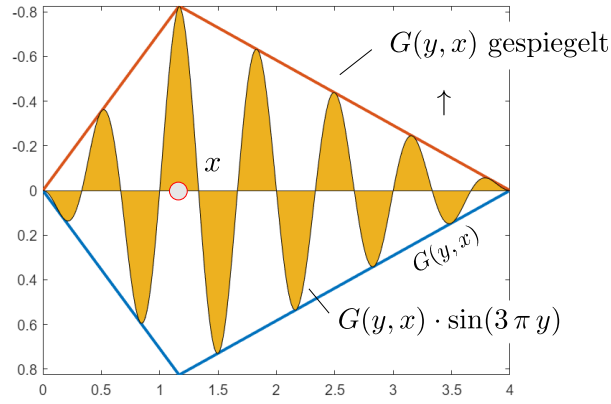
Bild 2.82. Vorgespanntes Seil, **a)** Einflussfunktion, **b)** oszillierende Belastung, **c)** Durchbiegung, **d)** zum Vergleich Durchbiegung unter Gleichlast (MATLAB™)

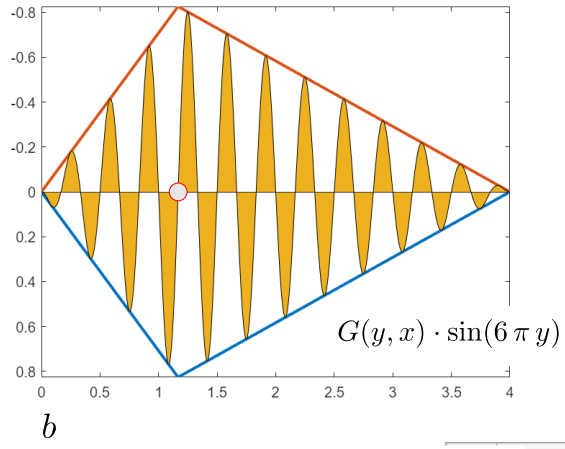
hyperbolischen Differentialgleichungen, wie z.B. von Schwingungsproblemen, längs den Charakteristiken ungehindert fortpflanzen. Auch Kühlturmschalen verhalten sich so. Wenn eine windschiefe Gerade um eine vertikale Achse rotiert, entsteht ein Hyperboloid, ein **Kühlturm**, und längs den Geraden, den Erzeugenden pflanzen sich Störungen von unten nach oben fort. In Wirklichkeit weichen cooling towers jedoch von dieser idealen Form ab. Kühltürme sind nicht ‚durchgängig' Hyperboloide, nur im unteren Teil stimmt es.

2.31 Fourier

Beim Blick auf die Bilder 2.81 und 2.82 versteht man, warum Fourier und das JPEG-Verfahren[11] funktionieren, DCT = Discrete Cosinus Transform. Die höheren Frequenzen in einer **Fourier-Reihe**, die kurzwelligen Oszillationen kommen nicht weit, weil ihre Effekte von den Einflussfunktionen ausgelöscht werden und darauf verlässt sich Fourier.

[11] Beim JPEG-Verfahren (DCT) wird z.B. ein Schwarz-Weiß-Bild in Blöcke aus 8×8 Pixeln unterteilt und die Grautöne in den 64 Pixeln eines Blocks bilden einen Vektor, den man Fourier-transformiert und die hohen Frequenzen weglässt.





	ak	bk
1	-0.2551	0.1958
2	-0.0945	-0.0253
3	-0.0066	-0.0159
4	-0.0063	0.0110
5	-0.0159	0.0021
6	-0.0056	-0.0056
7	-0.0001	0.0011
8	-0.0047	0.0027
9	-0.0043	-0.0018

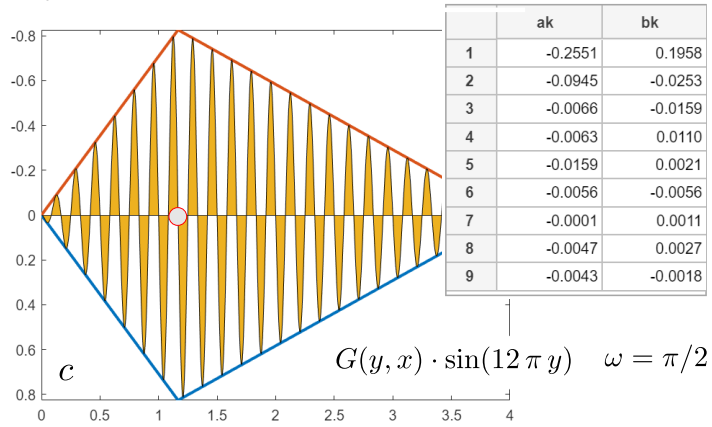


Bild 2.83. Fourier-Zerlegung der Einflussfunktion $G(y,x)$ in Bild 2.82 a. Die Integrale (dy) der Sinus-Glieder, gelb angelegte Flächen, die zwischen $\pm G(y,x)$ oszillieren, sind die Koeffizienten b_6, b_{12} und b_{24}. Auch wenn es anders aussieht: Das Verhältnis der Flächen Gelb zu Weiß ist in jeder Stufe k dasselbe (MATLAB™)

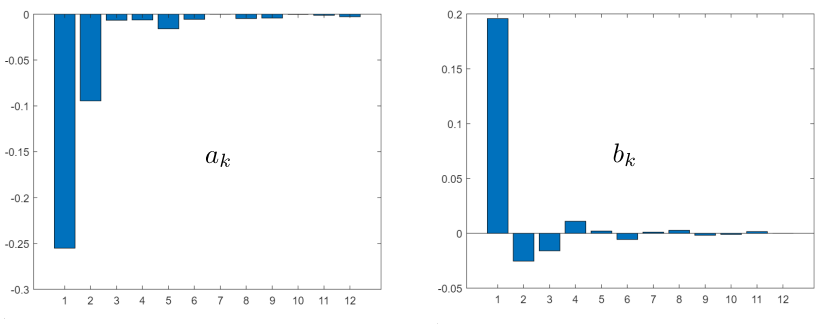


Bild 2.84. Die Verteilung der ersten 12 Koeffizienten a_k und b_k der Einflussfunktion in Bild 2.82 a, $a_0/2 = (G, 1)/L = 0.413$ = Mittelwert, (MATLAB™)

Die Zerlegung eines Signals in seine Frequenzen ist das eine, das andere, nicht weniger wichtig, ist, dass Effekte auf der Überlagerung des Signals mit den Einflussfunktionen beruhen. Erst beides zusammen begründet die Bedeutung der Fourier-Analysis für die Statik.

Die Idee der **diskreten Fourier Transformation** (Wellenvektoren statt Wellenfunktionen) ist ja, dass man einen Vektor nach seinen Wellenanteilen sortiert und dann die kurzen Wellen, die hohen Frequenzen, weglässt. Der wichtigste Vektor ist der Eins-Vektor $\boldsymbol{u} = \{1, 1, 1, \ldots\}^T$, dessen Wirkung, dessen Integral einfach die Fläche der Einflussfunktion ist, dann folgen Vektoren, die ‚eingefrorenen' Wellen wachsender Frequenz gleichen, deren Wirkung (= Integral) mit zunehmender Frequenz gegen Null geht, weil sie bei der Überlagerung mit den Einflussfunktionen ausgelöscht werden.

Der eigentliche ‚Pfiff' bei der diskreten Fourier Transformation ist die geschickt gewählte Basis aus Wellenvektoren (‚breiten Pinselstrichen'), die viel effektiver ist als die ‚pointillistische' Basis aus Euklidischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$. Will man einen Vektor $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{64} u_i \, \boldsymbol{e}_i$ senden, muss man alle 64 Komponenten u_i senden, darf kein u_i weglassen, (es könnte ja gerade das hellste Pixel sein), während Fourier sich auf die ersten 10 Komponenten beschränken kann, ohne dass es am anderen Ende der Leitung groß auffällt.

Einflussfunktionen haben viel mit **Fourier-Analysis** zu tun, weil beide auf Überlagerung beruhen. Fourier-Analysis entspricht einer Projektion, siehe Bild 2.83, auf das ‚Karussell' der trigonometrischen Funktionen – Rechnen am und auf dem Einheitskreis, aus $x \to \varphi = \omega x = x/L \cdot 2\pi$ wird ein Winkel.

Bei der Fourier-Analysis, L = Länge, $\omega = 2\pi/L$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(k\omega x)\, dx \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k\omega x)\, dx \tag{2.199a}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))\,, \tag{2.199b}$$

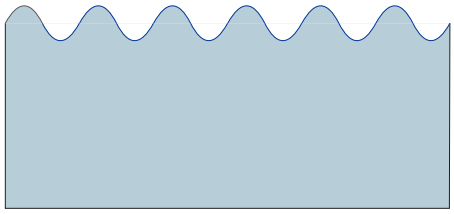


Bild 2.85. Last mit Wellenschlag

wird die Einflussfunktion nach Anteilen $\cos(k\omega x)$ und $\sin(k\omega x)$ zerlegt, die paarweise orthogonal sind

$$\int_0^L \cos(k\omega x)\cos(l\omega x)\,dx = 0 \qquad \text{wenn } k \neq l \qquad \text{etc.} \tag{2.200}$$

und wenn man auch die Belastung so zerlegt, Koeffizienten c_k, d_k, so wird klar: Eine Belastung kann nur Effekt machen, wenn ihre Frequenzen im Spektrum der Einflussfunktionen vertreten sind, wenn also die Koeffizienten $a_k \leftrightarrow c_k$ und $b_k \leftrightarrow d_k$ sich von der Größe her entsprechen.

Die Einflussfunktion für das Seil ist jedoch so einfach gestrickt, dass sie wenig höhere Anteile enthält und daher finden die ‚hochfrequenten' k kein passendes k in der Fourier-Reihe der Einflussfunktion, siehe Bild 2.84.

Eine sinusförmige Belastung $p(x) = \sin(k\omega x)$ hat nur **einen** Fourier-Koeffizienten $d_k = 1$ und je größer die Frequenz k ist desto weiter ‚außen' liegt d_k, also dort, wo die Koeffizienten b_k der Einflussfunktion praktisch null sind.

Eine am oberen Rand ondulierende Streckenlast wie in Bild 2.85 kann man also ruhigen Gewissens konstant rechnen, weil die Einflussfunktionen von einem solchen aufgesetzten ‚Zierrat' wenig bis nichts übrig lassen.

Der Aufwand, den man bei der Modellierung treibt, sollte mit der Sensitivität der Einflussfunktionen konform gehen.

Wenn man die Fourier-Reihen **komplex** schreibt[12]

$$c_0 = \frac{1}{2}\,a_0 \qquad c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - i b_k) \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + i b_k) \tag{2.201}$$

also

$$G(y,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)\,e^{iky} \qquad p(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\,e^{iky}\,, \tag{2.202}$$

dann sieht man noch besser, dass aus der Überlagerung ein Skalarprodukt wird ($\bar{p}_k$ = konjugiert komplex)

[12] umgekehrt: $a_k = c_k + c_{-k}\,,(\cos. = \text{sym.})\,,\ b_k = i\,(c_k - c_{-k})\,(\sin. = \text{antim.})$

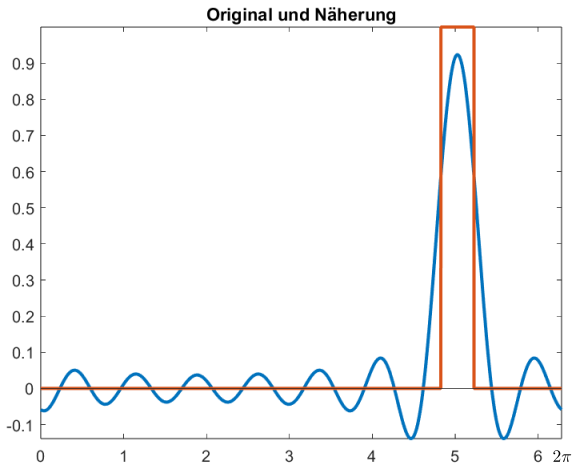


Bild 2.86. Fourier Approximation einer kurzen Streckenlast (MATLAB™)

$$J(u) = \int_0^L G(y,x)p(y)\,dy = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\bar{p}_k\,, \tag{2.203}$$

wie bei den finiten Elementen, $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$, nur dass die finiten Elementen eine andere Basis, die φ_i, benutzen und bei der Bestimmung von $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ eine andere Metrik.

Je unruhiger die Belastung ist, desto wichtiger die Rolle der hochfrequenten Terme $\bar{p}_k$. Nur dass Fourier lokale Störungen eigentlich nicht kann, denn sie werden über das ganze Intervall verteilt, sind auch da zu spüren, wo sie eigentlich gar nicht mehr sind – ‚einen einmal angeregten *sinus* kann man nicht einfach nach 50 cm ausknipsen' (G. Strang) – und man dann besser Wavelets benutzt, [283], wenn hohe Ansprüche an die Genauigkeit gestellt werden.

Man sieht aber in Bild 2.86, dass auch hier die Einflussfunktionen, wie im Fall der ondulierenden Linienlast, ihr Gutes tun und die Wirkung der nicht abstellbaren Oszillationen weitestgehend unterdrücken. Das Auf und Ab irritiert beim Blick auf den Bildschirm, aber in der linearen Statik und Mechanik ist jedes Ergebnis eine gewichtete Summe, ein **Skalarprodukt** (G,p) und p alleine, also hier die ‚Welle' p_h, ist nur die ‚halbe Miete'.

Einflussfunktionen wirken wie ein Filter und Einflussfunktionen sind ‚immer' eingeschaltet, sie sind der ‚Geist' in der Maschine.

In der Fourier-Analysis wird der Effekt ‚algebraisch' meßbar, siehe (2.203), $J(u) = L\cdot\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{p}}$, was aber auch für die FEM gilt, $J(u) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$, nur ist es da eine andere ‚Algebra', eine andere Zerlegung, die zum selben Ergebnis kommt.

Fourier-Reihen sind beliebte Ansätze für lineare Differentialgleichungen, wie $-u'' = p$, und weil die rechte Seite $-u_h'' = p_h$ eine Fourier-Reihe ist, ist die **Dämpfung** der Oszillationen von p_h (ihrer Wirkungen) durch die Greenschen

Funktionen

$$u_h(x) = \int_0^l G_0(y,x) p_h(y)\, dy \tag{2.204}$$

ein willkommenes Plus für die Fourier Analysis.

Ähnliche Situation: Ist die reguläre Matrix $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ symmetrisch und die rechte Seite $\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + f_n\boldsymbol{v}_n$ eine Entwicklung nach den Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$, (alle Eigenwerte λ_i reell und $\lambda_i > 0$), dann ist die Lösung

$$\boldsymbol{u} = \sum\nolimits_i \frac{1}{\lambda_i} f_i\, \boldsymbol{v}_i\,, \tag{2.205}$$

ein gedämpftes $(1/\lambda_i)$ Echo der rechten Seite. Jeder Einfeldträger steht praktisch unter dem Diktat seiner Eigenfunktionen $\sin(i\pi x/l)$.

2.32 Nichtlineare Effekte

Die Modellierung des Zusammenwirkens von Beton und Stahl und die Nachverfolgung von nichtlinearen Effekten in der Bewehrung und dem Betonstein in hochbeanspruchten Ecken ist sehr aufwendig, [110], [217]. Solche Untersuchungen vertiefen das Verständnis für den Werkstoff, sie helfen das Auftreten von Schäden und deren Muster zu verstehen, aber am Ende wird eine Wandscheibe, auch wenn man sie nichtlinear rechnet, in großen Teilen wie eine lineare Scheibe tragen, siehe Bild 2.87 und die Beispiele $\sigma = \infty$ in Kapitel 6, Bild 6.19 und Bild 6.24.

Im Grunde hat man als Laie (Nicht-Massivbauer) immer die Taylorreihe

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x^2 + \ldots \tag{2.206}$$

vor Augen und fragt sich, wieviel die ‚höheren Terme' in der Ferne beitragen.

Angenommen in der Ecke einer Öffnung plastifiziert der Stahl und wir modellieren diesen Bereich, indem wir den E-Modul in den drei, vier Elementen in der Ecke um 90 % reduzieren. Wir rechnen also weiterhin linear-elastisch und können so den Effekt der Steifigkeitsänderung mit Gleichgewichts-Kräften $\boldsymbol{f}^+$ in den Ecken der betroffenen Elemente modellieren. Nach allem, was wir in Kapitel 5 über die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ sagen, dürfte zu vermuten sein, dass die Fernwirkung der Kräfte gering ist.

Bei nichtlinearen ***multifield problems***, wie das heute heißt, geht das zwar nicht mehr, aber wenn wir das ‚nichtlinear' mit den quadratischen und höheren Termen in der Taylor-Reihe identifizieren, dann sollte zu vermuten sein, dass die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ zumindest in erster Näherung das Modell gut beschreiben.

Die Frage ist doch: Wie pflanzen sich bei nichtlinearen *multifield problems* die Ergebnisse fort? Welchen Einfluss hat die ‚nichtlineare' Numerik in der Zone A auf die ‚linearen' Ergebnisse in der Zone B? Um wieviel ändern sich die Lagerkräfte oder die Schnittkräfte, wenn man nichtlinear rechnet?

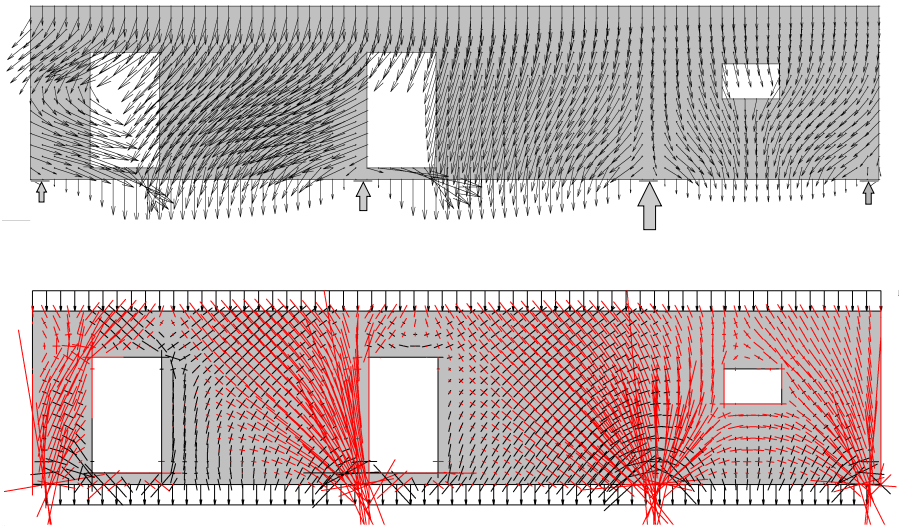


Bild 2.87. Das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ einer Scheibe und die zugehörigen Spannungen, LF g + Randlasten, (BE-SCHEIBE, BSP6)

2.33 Eigenlösungen

Eine Kurve w ist eine Eigenlösung der Differentialgleichung zum **Eigenwert** λ, wenn

$$-w'' = \lambda\, w\,. \tag{2.207}$$

Die Seilkurve in Bild 2.82 c

$$w(x) = \frac{1}{9\,\pi^2}\,\sin(3\pi x) \tag{2.208}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$-w''(x) = \sin(3\pi x) = 9\pi^2 w\,. \tag{2.209}$$

Sie ist also eine Eigenlösung mit dem Eigenwert $\lambda = 9\pi^2$.

Weil es eine Eigenlösung ist, muss bei der Überlagerung von $p = \lambda w$ mit der Einflussfunktion $G_0(y,x)$, dem Dreieck in Bild 2.82 a, die Funktion selbst herauskommen

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,\lambda w(y)\,dy\,. \tag{2.210}$$

Der Kern $\lambda G_0(y,x)$ gleicht in seiner Wirkung auf die Eigenlösung also dem Dirac Delta

$$w(x) = \int_0^l \delta(y-x)\,w(y)\,dy = \lambda \int_0^l G_0(y,x)\,w(y)\,dy\,. \tag{2.211}$$

Der Mathematiker wird natürlich sagen, das ist evident, denn weil G_0 die Lösung von $-G_0'' = \delta(y-x)$ ist, ergibt die partielle Integration von (2.210) genau dieses Resultat.

Das muss im übrigen für alle linearen, selbstadjungierten Differentialgleichungen $Lu = p$ gelten: Die Eigenlösungen, $Lu = \lambda u$, überlagert mit der Einflussfunktion $\lambda G_0(y,x)$ müssen gerade u ergeben

$$u(x) = \lambda \int_0^l G_0(y,x)\,u(y)\,dy\,. \tag{2.212}$$

Und was man an Bild 2.82 auch sieht ist, dass durch das Hochintegrieren der Belastung

$$p(x) = \sin(nx) \qquad \to \qquad u(x) = -\frac{1}{n^2}\sin(nx) \cdot \frac{1}{H} \tag{2.213}$$

die Auslenkung ‚quadratisch' gedämpft wird. Je höher die Frequenz desto kleiner die Auslenkung. Beim Balken beträgt das Dämpfungsmaß n^4.

Die trigonometrischen Funktionen $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ sind Eigenlösungen der Stab- und Balkengleichung.

2.34 Eigenlösungen und Greensche Funktionen

Wir wollen kurz an die **lineare Algebra** erinnern. Es sei $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ eine reguläre symmetrische Matrix mit n unterschiedlichen, orthogonalen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ mit der Länge $\|v_i\| = 1$ und $\boldsymbol{S}$ sei die Matrix der Eigenvektoren. Dann kann man $\boldsymbol{K}$ in eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ überführen

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} \qquad (\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^T \text{ wegen Orth.}) \tag{2.214}$$

auf deren Diagonalen die Eigenwerte λ_i stehen. Wechselt man also im $\mathbb{R}^n$ von der euklidischen Basis zur Basis der Eigenvektoren, dann entspricht dem Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ das System $\boldsymbol{D}\,\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{f}}$, wenn $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}$ und $\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{f}$ die Vektoren in der neuen Basis sind und die Inverse ist eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $1/\lambda_i$. Zur rechten Seite $\bar{\boldsymbol{f}} = \sum_i \bar{f}_i\,\boldsymbol{v}_i$ gehört also die Lösung $\bar{\boldsymbol{u}} = \sum_i \bar{f}_i/\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i$.

Wesentlich an dieser Stelle ist, dass man $\boldsymbol{K}$ und die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ als eine Entwicklung nach den Eigenvektoren schreiben kann

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{v}_i^T \quad \boldsymbol{K}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{v}_i^T \quad (n \text{ Matrizen} = \text{Spalte} \times \text{Zeile}) \tag{2.215}$$

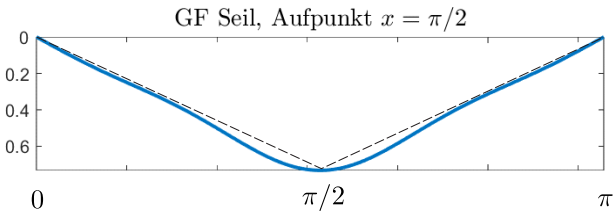


Bild 2.88. Genäherte GF eines Seils

und das macht deutlich, dass man umgekehrt die Greenschen Funktionen aus den auf 1 normierten Eigenlösungen $\psi_j(x)/\sqrt{(\psi_j, \psi_j)}$ und den Eigenwerten λ_j entwickeln kann

$$G(y,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \frac{\psi_j(y)\,\psi_j(x)}{(\psi_j, \psi_j)}\,, \tag{2.216}$$

siehe Green's function auf Wikipedia. So sind die Funktionen $\psi_j(x) = \sin(jx)$ Eigenlösungen der Seilgleichung, $[0, \pi]$ ist das Seil,

$$-(\sin(j\,x))'' = j^2 \sin(j\,x) \qquad \int_0^{\pi} \psi_j\,\psi_j\,dx = \pi/2 \tag{2.217}$$

mit $\lambda_j = j^2$ und die ersten fünf Funktionen ergeben die Näherung in Bild 2.88.

2.35 Theorie II. Ordnung

Die Differentialgleichung für den Balken nach Theorie zweiter Ordnung lautet

$$EI\,w^{IV}(x) + P\,w''(x) = p(x) \tag{2.218}$$

hierbei ist P der Absolutwert der Druckkraft in dem Balken und $p(x)$ die Streckenlast, siehe Bild 2.89 *a*. Dies ist eine lineare, selbstadjungierte Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, aber das Problem ist, dass der Koeffizient P Lastfall abhängig ist und daher hängt die Einflussfunktion von P ab.

Je mehr P sich der Knicklast P_{krit} nähert, desto mehr wölben sich die Einflussfunktionen für die Verdrehung am Balkenende, Bild 2.89 *b*, bzw. für die Durchbiegung, Bild 2.89 *c*, auf.

Diese Abhängigkeit von der Normalkraft N in den einzelnen Stielen ist der Grund, warum es nicht möglich ist, Einflussfunktionen für z.B. Hochregallager anzugeben. Erst muss die Gleichgewichtslage des Regals nach Theorie erster Ordnung gefunden werden und dann kann man diese Lösung iterativ korrigieren.

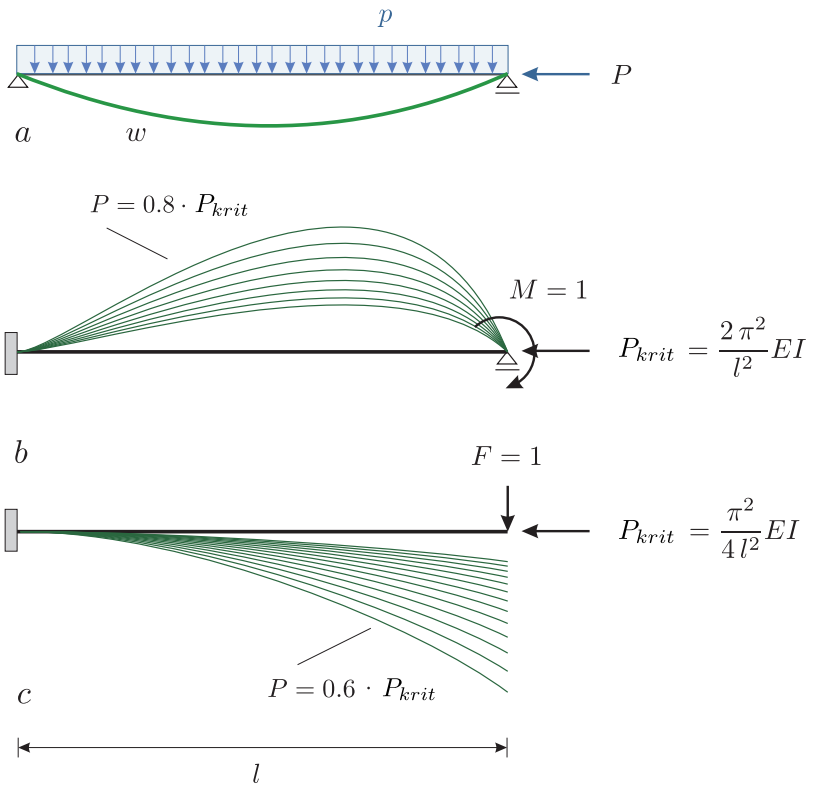


Bild 2.89. Theorie II. Ordnung, **a)** Druckkraft P, **b)** Einflussfunktionen für $w'(l)$ und **c)** für $w(l)$

Im Prinzip ist die Theorie zweiter Ordnung ein **nichtlineares Problem**, wo die Längsverschiebung $u(x)$ und die seitliche Auslenkung $w(x)$ gemäß den beiden Gleichungen

$$-EA\left(u' + \frac{1}{2}(w')^2\right)' = p_x \tag{2.219a}$$

$$EIw^{IV} - \left(EA(u' + \frac{1}{2}(w')^2)\,w'\right)' = p_z \tag{2.219b}$$

miteinander verknüpft sind, siehe Kapitel 8.4.

Nur wenn die Normalkraft

$$N = EA(u' + \frac{1}{2}(w')^2) \tag{2.220}$$

konstant ist und ihrer Größe nach bekannt ist, kann dieses System auf die eine Gleichung (2.218) reduziert werden. Man beachte, dass ein negatives N ein positives P in (2.218) ist.

Die homogene Lösung der Differentialgleichung (2.218) lautet

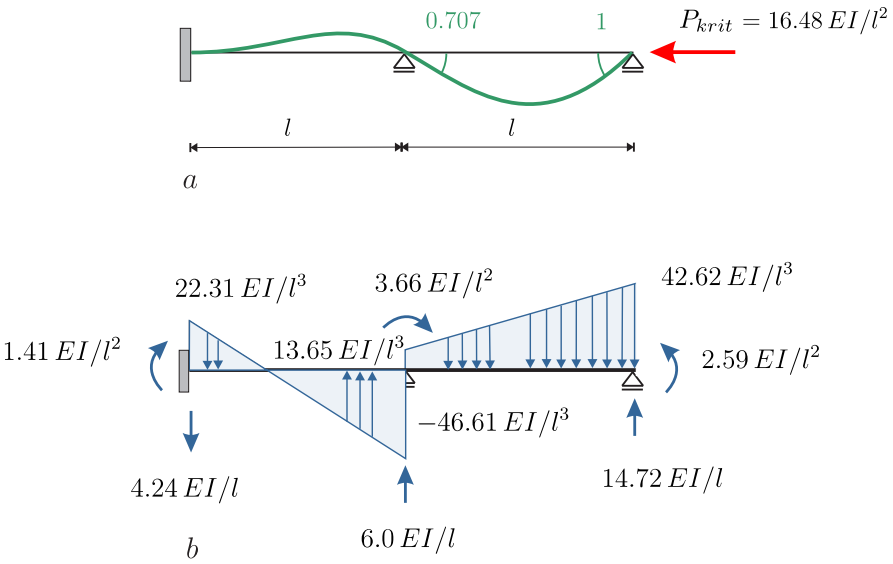


Bild 2.90. Theorie II. Ordg. mit finiten Elementen, **a)** die Knicklast und die erste Eigenform, **b)** die äußeren Kräfte hinter der Eigenform

$$w_n(x) = c_1 \sin(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_2 \cos(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_3 \varepsilon \frac{x}{l} + c_4 \qquad \varepsilon = l\sqrt{P/EI}\,. \tag{2.221}$$

Ist die Längskraft eine Zugkraft Z, dann lautet die Differentialgleichung

$$EI\,w^{IV}(x) - Z\,w''(x) = p(x) \tag{2.222}$$

und die homogene Lösung ist, siehe [233] S. 188,

$$w_n(x) = c_1 \sinh(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_2 \cosh(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_3 \varepsilon \frac{x}{l} + c_4 \qquad \varepsilon = l\sqrt{Z/EI}\,. \tag{2.223}$$

Unter Zug ist die Differentialgleichung (2.222) des Balkens dieselbe, wie bei einer Zugbandbrücke, $Z = H$, siehe (1.69). Theorie II. Ordnung ist also Rechnen mit einem ‚zug- und druckfesten' Seil, das durch den Balken gezogen wird.

Bei Knickproblemen ist die rechte Seite der Differentialgleichung (2.218) null und daher entfällt in dem Ausdruck der potentiellen Energie das Lastintegral (p, w)

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (\frac{M^2}{EI} - P(x)(w'(x))^2)\,dx\,. \tag{2.224}$$

Im Grundzustand, $w = 0$, wie auch im ausgeknickten Zustand ist die potentielle Energie null, und daher ist der Quotient

$$P = \frac{1}{EI} \cdot \frac{(M, M)}{(w', w')} \qquad \textbf{Rayleigh-Quotient} \tag{2.225}$$

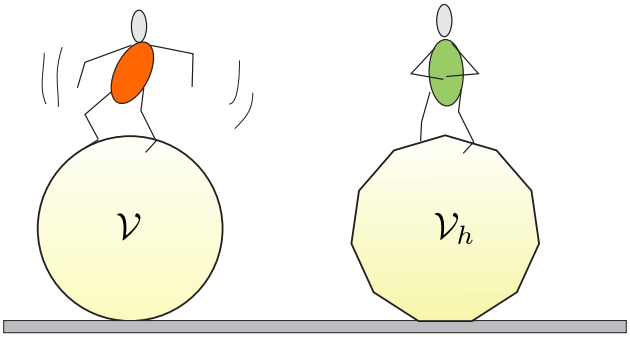


Bild 2.91. Ein Vieleck ist nicht ganz so labil wie ein Kreis

gleich der Knicklast. Der erste Integrand ist ja die Biegeenergie und der zweite Integrand ist die Verzerrungsenergie in dem ‚gedrückten Seil' – die ausgelenkte Achse des Balkens ist das Seil – und im ausgeknickten Zustand sind diese beiden gleich groß, halten sie den Balken in der Schwebe, solange kein Windhauch das prekäre Gleichgewicht stört.

Ist dagegen $P < P_{krit}$, dann treiben die Rückstellkräfte den Balken bei jedem Auslenkversuch in die Ruhelage $w = 0$ zurück.

Mit finiten Elementen konstruiert man eine Teilmenge $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, d.h. man macht für die Knickfigur den Ansatz $w_h = \sum_i w_i \varphi_i$, aber in der Regel mit den Einheitsverformungen des Balkens nach Theorie I. Ordnung (!).

Nun gilt für die exakte Knickfigur $w = w_{krit}$ wegen (2.218), es ist ja $p = 0$, dass ihre rechte Seite orthogonal ist zu allen Ansatzfunktionen $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$

$$\int_0^l \underbrace{(EIw^{IV}(x) + P\,w''(x))}_{0}\,\varphi_i\,dx = 0\,. \tag{2.226}$$

Wird dieses Integral partiell integriert, so folgt, weil die Ansatzfunktionen $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$ die Lagerbedingungen erfüllen, dass auch die Wechselwirkungsenergie zwischen w und den Ansatzfunktionen null sein muss

$$a(w, \varphi_i) = \int_0^l [EIw''\varphi_i'' - P\,w'\varphi_i']\,dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.227}$$

Dies versuchen wir mit der FE-Lösung w_h nachzubilden: Wir stellen die FE-Lösung so ein, dass dies auch für die FE-Knickfigur gilt, und wir werden so auf das lineare Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{K}_I - P \cdot \boldsymbol{K}_{II})\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \tag{2.228}$$

für die Knotenverformungen w_i geführt mit den Matrizen

$$k_{ij}^I = \int_0^l EI\,\varphi_i''\,\varphi_i''\,dx \qquad k_{ij}^{II} = \int_0^l \varphi_i'\varphi_i'\,dx\,. \tag{2.229}$$

Die triviale Lösung wäre $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, was bedeuten würde, dass der Balken nicht ausknickt. Da auf der rechten Seite der Nullvektor steht, kann es eine Lösung $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ nur dann geben, wenn die Determinante des Gleichungssystems null ist

$$\det\left(\boldsymbol{K}_I - P \cdot \boldsymbol{K}_{II}\right) = 0\,. \tag{2.230}$$

Die kleinste positive Zahl $P > 0$, für die dies gilt, ist die genäherte *kritische Knicklast* P^h_{krit}. Die Komponenten w_i des zugehörigen Eigenvektors $\boldsymbol{w}$ des Systems (2.228) sind die Knotenwerte der FE-Knickfigur w_h.

Dass die Knicklast P^h_{krit} auf der unsicheren Seite liegt, also zu hoch ausfällt, folgt aus der Tatsache, dass die Knickfigur w_{krit} den ***Rayleigh-Quotienten*** auf $\mathcal{V}$ zum Minimum macht und das Minimum gerade P_{krit} ist

$$P_{krit} = \frac{\displaystyle\int_0^l EI(w''_{krit})^2\,dx}{\displaystyle\int_0^l (w'_{krit})^2\,dx}\,. \tag{2.231}$$

Bildet man diesen Quotienten mit dem FE-Ansatz nach, so führt dies genau auf (2.228). Weil aber das Minimum auf der Teilmenge $\mathcal{V}_h$ immer größer ist als das Minimum auf der ganzen Menge $\mathcal{V}$ ist $P^h_{krit} > P_{krit}$.

Anders als sonst, *ein Riegel = ein Element*, muss man bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung die Riegel und Stiele in vier bis sechs Elemente unterteilen, weil die FE-Programme mit einer genäherten Steifigkeitsmatrix rechnen, siehe Kapitel 9.46, denn technisch sind die *shape functions* φ_i in (3.63) keine homogenen Lösungen der Differentialgleichung (2.218). Das sieht man in Bild 2.90.

Eine FE-Berechnung des Trägers mit zwei Elementen lieferte die kritische Knicklast

$$P_{krit} = 16.48\,\frac{EI}{l^2} \qquad \text{exakt} = 12.7\,\frac{EI}{l^2} \tag{2.232}$$

und die Eigenform in Bild 2.90 *a*. Setzen wir die FE-Lösung w_h in die Differentialgleichung (2.218) ein und beachten noch die Sprünge in den Schnittgrößen an den Knoten, so erhalten wir den in Bild 2.90 *b* dargestellten Lastfall p_h. Dieses Bild ist allerdings nur eine Momentaufnahme, gibt nur einen qualitativen Eindruck, denn der Lastfall p_h ist im Grunde beliebig skalierbar, weil jedes Vielfache der ‚Knickfigur' w_h auch wieder eine mögliche ‚Knickfigur' ist.

Wir erkennen an Bild 2.90 *b*, dass Streckenlasten nötig sind, um den Balken in der ausgeknickten Lage zu halten. Das ist gleichbedeutend damit, dass der unverformte Balken von den dazu inversen Kräften am Ausknicken gehindert wird. So kann man sich erklären, dass die Knicklast größer ist als bei der exakten Lösung, wo ja keine **Haltekräfte** zu überwinden sind, [233].

Sinngemäß dasselbe Phänomen erleben zwei Artisten, siehe Bild 2.91. Der Artist auf dem perfekt runden Kreis befindet sich im labilen Gleichgewicht,

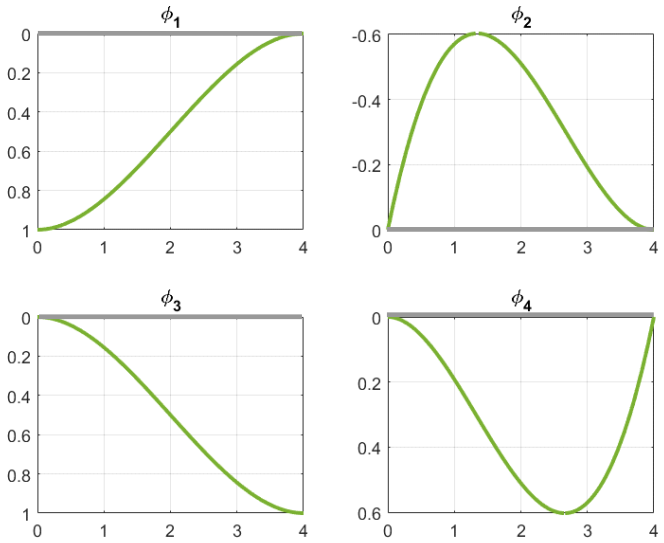


Bild 2.92. Die Einheitsverformungen des gedrückten Balkens, Th. II. Ordg., unterscheiden sich optisch nicht von den φ_i der Th. I. Ordg. (MATLAB™)

während sein Kollege davon profitiert, dass die Ecken des Vielecks seine Drehung behindern und damit seine Lage etwas stabilisieren.

2.35.1 Shape functions

Will man exakte Ergebnisse haben, dann muss man mit den exakten *shape functions* rechnen. Die Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ des gedrückten Balkens lauten, siehe Bild 2.92, [116] p. 287,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{m}\left[\sin(\varepsilon)\,(b_3(x) - b_1(x) - \varepsilon) + (1 - \cos(\varepsilon))\,(b_2(x) + 1)\right] \tag{2.233a}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{m}\,\frac{l}{\varepsilon}\left[\sin(\varepsilon)\,(\varepsilon\, b_1(x) - b_2(x) + 1)\right.$$
$$\left. + (\cos(\varepsilon) - 1)\,(b_1(x) + b_3(x)) + \varepsilon\,\cos(\varepsilon)\,(b_2(x) - 1)\right] \tag{2.233b}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{m}[\sin(\varepsilon)\,(b_1(x) - b_3(x)) + (1 - \cos(\varepsilon))\,(1 - b_2(x))] \tag{2.233c}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{m}\,\frac{l}{\varepsilon}\left[(\sin(\varepsilon) - \varepsilon)\,(b_2(x) - 1) + (1 - \cos(\varepsilon))\,(b_1(x) - b_3(x))\right] \tag{2.233d}$$

mit

$$m = \left[2\,(1 - \cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)\right], \qquad \varepsilon = l\sqrt{P/EI} \tag{2.234}$$

$$b_1(x) = \sin(\frac{\varepsilon\, x}{l}), \qquad b_2(x) = \cos(\frac{\varepsilon\, x}{l}), \qquad b_3(x) = \frac{\varepsilon\, x}{l}. \tag{2.235}$$

Damit kann man jede homogene Lösung von (2.218) darstellen

$$w_n(x) = u_1\,\varphi_1(x) + u_2\,\varphi_2(x) + u_3\,\varphi_3(x) + u_4\,\varphi_4(x)\,, \tag{2.236}$$

mit $u_1 = w_n(0), u_2 = -w_n'(0), u_3 = w_n(l), u_4 = -w_n'(l)$.

2.35.2 Steifigkeitsmatrix

Mit den obigen Einheitsverformungen erhält man dann aus

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^l (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' - P(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x))\,dx \tag{2.237}$$

die Steifigkeitsmatrix des Druckstabs nach Th. II. Ordg.

$$\boldsymbol{K} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 2(A+B)-\varepsilon^2 & -(A+B)\,l & -2\,(A+B)+\varepsilon^2 & -(A+B)\,l \\ & Al^2 & (A+B)\,l & B\,l^2 \\ & & 2(A+B)-\varepsilon^2 & (A+B)\,l \\ \text{sym.} & & & A\,l^2 \end{bmatrix} \tag{2.238}$$

mit

$$A = \frac{\varepsilon\,(\sin(\varepsilon) - \varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{2\,(1-\cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)} \qquad B = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - \sin(\varepsilon))}{2\,(1-\cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)}\,. \tag{2.239}$$

Für den Zugstab, es ist dann $\varepsilon = l\sqrt{Z/EI}$, lauten die beiden Konstanten

$$A = \frac{\varepsilon\,(\sinh(\varepsilon) - \varepsilon\,\cosh(\varepsilon))}{2\,(-1+\cosh(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sinh(\varepsilon)} \qquad B = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - \sinh(\varepsilon))}{2\,(-1+\cosh(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sinh(\varepsilon)} \tag{2.240}$$

siehe [116] p. 288.

2.36 Plattenbeulen

Das Beulen von Platten ist ein komplexes Thema und für eine umfassende Darstellung müssen wir auf Petersen verweisen, [233]. Wir wollen hier nur das Beulen von Rechteckplatten betrachten, das nach Petersen auf die Differentialgleichung

$$K\,\Delta\Delta w - (N_x\,w_{,xx} + 2N_{xy}\,w_{,xy} + N_y\,w_{,yy}) = 0 \tag{2.241}$$

führt, [233] S. 783. Das ist die Plattengleichung plus den Beiträgen aus den Normalkräften, die zusammen mit den Querkräften dann die Transversalkräfte in der Platte bilden. Die Ähnlichkeit mit der Differentialgleichung nach Theorie II. Ordnung ist evident.

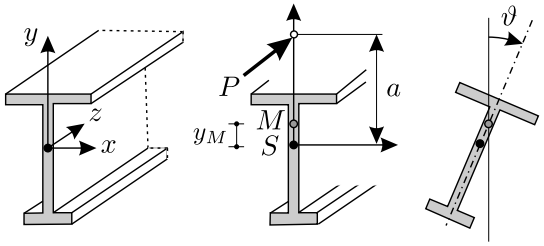


Bild 2.93. Einfach symmetrischer Querschnitt und Bezeichnungen beim Biegedrillknicken, nach Petersen [233]

Wir müssen hier auch nicht die ganze Greensche Identität dieser Gleichung ausrollen, sondern es reicht, wenn wir uns mit dem Teil beschäftigen, der hinzugekommen ist.

Die Überlagerung des Scheibenanteils, wir nehmen an, dass die Normalkräfte konstant sind, mit einer Verrückung δw und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -(N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy})\delta w \, d\Omega \\
&\quad = \int_\Gamma -(N_x w_{,x}\, n_x + N_{xy} w_{,y}\, n_x + N_{xy} w_{,x}\, n_y + N_y w_{,y}\, n_y)\delta w \, ds \\
&\quad + \underbrace{\int_\Omega (N_x w_{,x}\, \delta w_{,x} + N_{xy} w_{,y}\, \delta w_{,x} + N_{xy} w_{,x}\, \delta w_{,y} + N_y w_{,y}\, \delta w_{,y})\, d\Omega}_{a_{II}(w,\delta w)} \, .
\end{aligned} \tag{2.242}$$

Die gesamte Wechselwirkungsenergie lautet daher, wenn

$$a_I(w, \delta w) = \int_\Omega (m_{xx}\delta w_{,xx} + 2m_{xy}\delta w_{,xy} + m_{yy}\delta w_{,yy})\, d\Omega \tag{2.243}$$

die Wechselwirkungsenergie der ‚reinen' Platte ist

$$a(w, \delta w) = a_I(w, \delta w) + a_{II}(w, \delta w)\,, \tag{2.244}$$

und dieser Zweiteilung entspricht die Zweiteilung der Steifigkeitsmatrix in die Matrix $\boldsymbol{K}_I$ der Kirchhoffplatte plus der geometrischen Matrix $\boldsymbol{K}_{II}$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_I + \alpha \cdot \boldsymbol{K}_{II}\,, \tag{2.245}$$

wobei α der Skalierungsfaktor ist, der dann als Eigenwert die kritische Beullast bestimmt, [178].

2.37 Biegedrillknicken

Wir beschränken uns auf den Fall, dass der Stab keine Querbelastung trägt. In der Notation von Petersen, [233] S. 673, lautet das Gleichungssystem

$$EI_x\, v^{IV} + P\, v'' = 0 \tag{2.246a}$$

$$EI_y\, u^{IV} + P\, u'' + P\,(a - y_M)\,\vartheta'' = 0 \tag{2.246b}$$

$$EC_M\,\vartheta^{IV} + [P\,\underbrace{(i_M^2 + a\,(r_x - 2\,y_M))}_{\beta} - G\,J_D]\,\vartheta'' + P\,(a - y_M)\,u'' = 0\,. \tag{2.246c}$$

Es ist v die Durchbiegung, u die Verschiebung in x-Richtung, also die seitliche Ausweichbewegung, und ϑ ist die Verdrehung, siehe Bild 2.93.

Die linke Seite sind drei Ausdrücke $L_1(\boldsymbol{u}), L_2(\boldsymbol{u})$ und $L_3(\boldsymbol{u})$ angewandt auf das Vektorfeld $\boldsymbol{u} = \{v, u, \vartheta\}^T$. Wir testen die drei Gleichungen mit einer virtuellen Verrückung $\boldsymbol{\delta u} = \{\delta v, \delta u, \delta\vartheta\}^T$

$$(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) := \int_0^l (L_1(\boldsymbol{u})\,\delta v + L_2(\boldsymbol{u})\,\delta u + L_3(\boldsymbol{u})\,\delta\vartheta)\,dx\,. \tag{2.247}$$

Partielle Integration des Integrals führt dann auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = (\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) + [\text{Randarbeiten}] - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,. \tag{2.248}$$

Primär interessiert uns die **Wechselwirkungsenergie**

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = a_I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) + a_{II}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})\,. \tag{2.249}$$

Das erste Integral ist die Wechselwirkungsenergie aus den vierten Ableitungen, die wir vom Balken her kennen, plus dem Beitrag (nach part. Integration) $(-G\,J_D\,\vartheta', \delta\vartheta')$ aus der dritten Gleichung

$$a_I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l (EI_x v''\delta v'' + EI_y u''\delta u'' + EC_M\vartheta''\delta\vartheta'' - GJ_D\vartheta'\delta\vartheta')\,dx\,. \tag{2.250}$$

Die Einträge in dem zweiten Integral kommen von den Termen in (2.246), die mit der positiv genommenen Druckkraft P behaftet sind

$$\begin{aligned} a_{II}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = &- P \int_0^l [v'\delta v' + u'\delta u' + (a - y_M)\vartheta'\delta u' + \beta\vartheta'\delta\vartheta' \\ &+ (a - y_M)u'\delta\vartheta']\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.251}$$

Die Bestimmung der kritischen Knicklast P mit finiten Elementen führt dann auf das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{K}_I - P\boldsymbol{K}_{II})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.252}$$

wobei $\boldsymbol{K}_I$ auf (2.250) basiert und $\boldsymbol{K}_{II}$ ist die geometrische Matrix, die auf (2.251) beruht (ohne den Vorfaktor $-P$). Beide Matrizen sind symmetrisch.

Die Randarbeiten, die zu den drei Gleichungen (2.246) gehören, lauten

$$[-EI_x v'''\delta v - Pv'\delta v + EI_x v''\delta v']_0^l \tag{2.253a}$$

$$[-EI_y u'''\delta u - Pu'\delta u + EI_y u''\delta u' - P(a-y_M)\vartheta'\delta u]_0^l \tag{2.253b}$$

$$[-EC_M\vartheta'''\delta\vartheta - P\beta\vartheta'\delta\vartheta + EC_M\vartheta''\delta\vartheta' - P(a-y_M)u'\delta\vartheta + GI_D\vartheta'\delta\vartheta]_0^l \tag{2.253c}$$

In der Summe bilden sie die [Randarbeiten] in der obigen Gleichung (2.248).

Bemerkung 2.10. Eine **positive** zweite Ableitung

$$\int_0^l u''\delta u dx = [u'\delta u]_0^l - \int_0^l u'\delta u'\,dx \tag{2.254}$$

ergibt

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l u''\,\delta u\,dx + [-u'\delta u]_0^l \underbrace{-\int_0^l u'\,\delta u'\,dx}_{a(u,\delta u)} = 0 \tag{2.255}$$

und das soll das Minus vor dem P in (2.251) und (2.252) erklären.

Zum Vergleich das ganze mit **negativer** zweiter Ableitung

$$\int_0^l -u''\,\delta u\,dx = [-u'\delta u]_0^l + \int_0^l u'\,\delta u'\,dx \tag{2.256}$$

also

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l -u''\,\delta u\,dx + [u'\delta u]_0^l \underbrace{-\int_0^l u'\,\delta u'\,dx}_{a(u,\delta u)} = 0\,. \tag{2.257}$$

So kommt auch das $-P$ in die Gleichung $\boldsymbol{K} \simeq \boldsymbol{K}_I - P\,\boldsymbol{K}_{II}$ der Theorie II. Ordnung.

2.38 Videos

Das erste Video[13] stellt in lebendigen Bildern das Thema Biegedrillknicken vor. Das hat uns animiert nach weiteren Statik-Videos zu fahnden. So kam diese kleine Sammlung zustande.

Open Beams have a Serious Weakness

[13] I block every ad on YouTube and I'm not ashamed of it — PCWorld

Shear in Beams Model

Structural Shapes Ranked and Reviewed - Which one Wins?

The Challenge of Building Tall Structures

The actual reason for using stirrups explained

Failure of concrete anchors explained

Building Massive Concrete Structures

Which Buildings are Safe in an Earthquake?

Understanding the soil mechanics of retaining walls

The Secret to the Truss Strength!

Geotechnical Analysis of Foundations

Understanding why soils fail

'Soilcrete' (Soil reinforcement)

ARCH 348 Lecture 6 High Rises

ARCH 348 Lecture Ola Introduction to Structural Materials 1

ARCH 445 Lecture Ola Long Span Intro a

Plate Bending

Understanding Failure Theories (Tresca, von Mises etc...)

Understanding the Finite Element Method

Finite element method - Gilbert Strang

Linear Algebra Lecture 1 - Gilbert Strang

Mit den finiten Elementen ist die lineare Algebra ein Teil der Statik geworden und der letzte *link* weist auf das erste Video aus der berühmten Serie *Linear Algebra* von Gilbert Strang am *Massachusetts Institute of Technology*.

Das MIT hat einen Teil seiner Kurse unter dem Titel *OpenCourseWare* (OCW) ins Internet gestellt.

3

Finite Elemente

Unsere Tragwerke sind **Maschinen, Getriebe, Mobiles**, die sich – ohne dass es der Passant, der an dem Haus vorbeigeht, ahnt – ständig bewegen, ständig ihre Gleichgewichtslage ändern. Es ist ein **permanenter Balanceakt**, bei dem die Kräfte nach Maßgabe der Einflussfunktionen, also der Kinematik des Tragwerks, ihren Ausgleich finden, denn Gleichgewicht bedeutet, wie die Marktfrau auf dem Wochenmarkt weiß, dass die Arbeiten der Gewichte auf den beiden Seiten einer Waage gleich sind.

Das Tragwerk in der Präsentation des Architekten mag zwar hübsch aussehen, aber es **lebt nicht**. Das gelingt erst Bauingenieuren, die das Tragwerk mit finiten Elementen nachbilden und so aus der Skizze etwas lebendiges machen, das sich verformen und bewegen kann, denn die Kinematik bestimmt die Schnittkräfte – Statik ist Kinematik.

Finite Elemente heißt Bewegung, heißt Leben.

Natürlich, das FE-Modell gleicht eher einer hölzernen Gliederpuppe, einer Marionette, als der wahren Gestalt, *but even this hampered, restrained structure* hat schon genug Leben in sich, um dem Ingenieur einen Eindruck von der Verteilung der Kräfte zu geben.

Ist das Modell einmal konstruiert, lenkt der Ingenieur die Knoten nacheinander einzeln aus, $u_i = 1$, das sind die *shape functions* φ_i, merkt sich welche Kräfte dazu nötig sind, das sind die *shape forces* p_i, und kombiniert diese Lastfälle p_i so, dass der FE-Lastfall $p_h = \sum_j u_j\, p_j$ bei jeder Test-Verrückung φ_i **wackeläquivalent** zum Original-Lastfall p ist

$$\delta W_e(p, \varphi_i) = \delta W_e(p_h, \varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i\,. \tag{3.1}$$

Diese Gleichungen sind mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ identisch. Jeder möglichen Lage $\boldsymbol{u}$ des Tragwerks entspricht ein Satz p_h von Kräften – das sind die Kräfte, unter deren Last das Tragwerk die Gestalt $\boldsymbol{u}$ annimmt – und es gilt den Satz p_h zu finden, der wackeläquivalent zum Original ist. So wird mittels (3.1) die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}$ bestimmt. Es ist die Logik der Marktfrau.

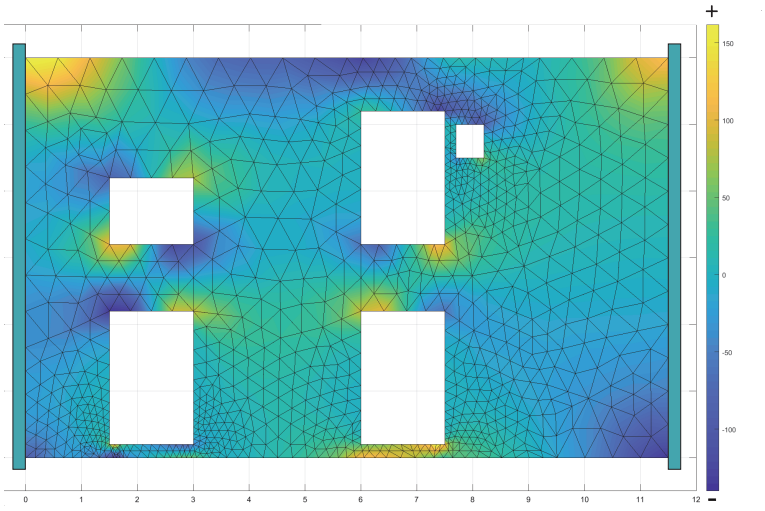


Bild 3.1. Farbprofil der Spannungen σ_{xx} (LF g) in einer Wandscheibe, die zwischen zwei Querwänden hängt, Hauptspannungen s. Bild 9.8 (MATLAB™ PDE Modeler)

Was wir hier im Vorgriff dargestellt haben, wird im folgenden sicher deutlicher werden. Zum Einstieg wollen wir jedoch die finiten Elemente ganz klassisch aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie herleiten.

3.1 Das Minimum

Das ***Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie*** besagt, dass die Gleichgewichtslage eines Tragwerks die potentielle Energie des Tragwerks zum Minimum macht. Zur Konkurrenz zugelassen sind bei diesem Wettbewerb alle Verformungen, die die Lagerbedingungen des Tragwerks einhalten. Man nennt diese Menge üblicherweise $\mathcal{V}$ (wie ‚Vorrat').

So ist die Biegelinie des Seils in Bild 3.2 c

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \qquad H = \text{Vorspannung in dem Seil}\,, \tag{3.2}$$

der Sieger, wenn es darum geht, die potentielle Energie des Seils

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V^2}{H}\,dx - \int_0^l p(x)w(x)\,dx \qquad (V = H\,w') \tag{3.3}$$

unter allen Funktionen, deren Durchbiegungen in den Aufhängepunkten null sind, $w(0) = w(l) = 0$, zum Minimum zu machen.

Nun ist $\mathcal{V}$ zu groß, um darin auf gut Glück $w(x)$ zu finden, und so beschränken wir die Suche auf einen ***endlichdimensionalen*** Teilraum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$

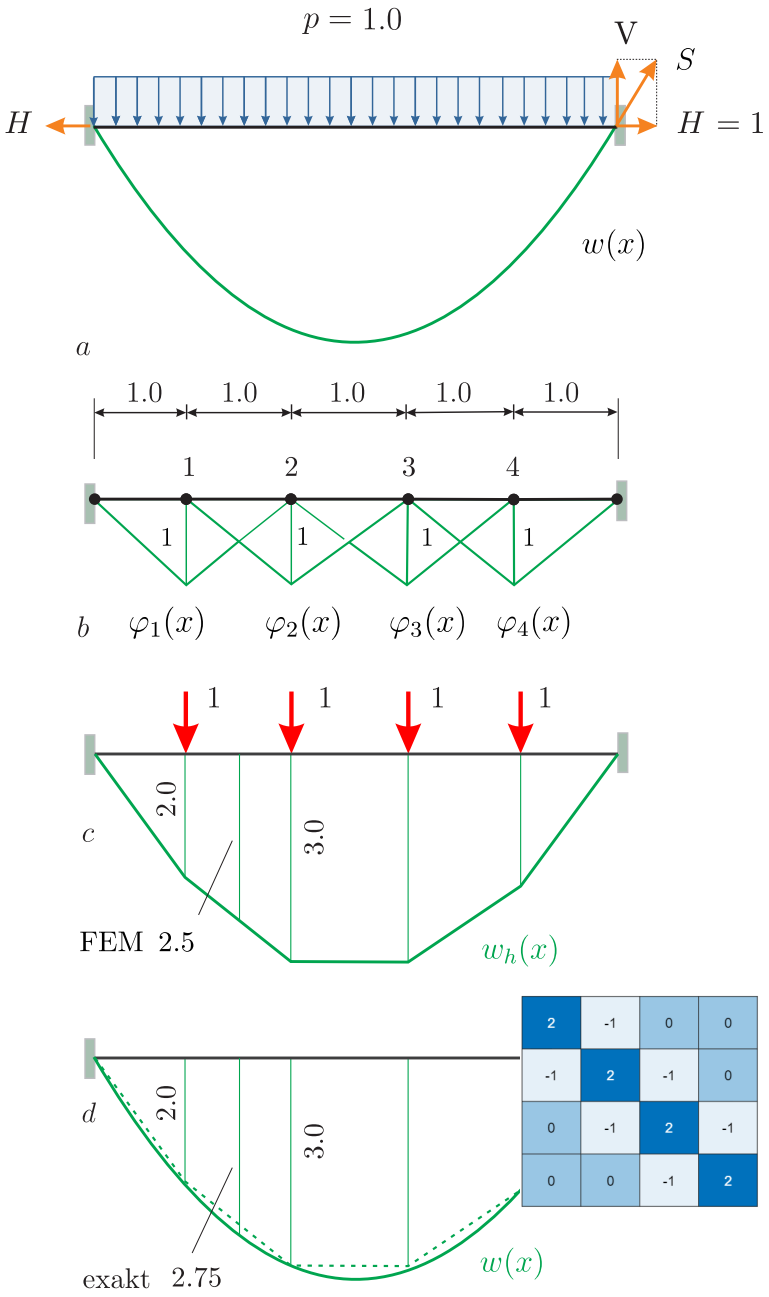


Bild 3.2. FE-Berechnung eines Seils, **a)** System und Belastung, **b)** *hat functions*, **c)** FE-Lösung $w_h(x)$, **d)** Vergleich $w(x)$ und $w_h(x)$ und $\boldsymbol{K}$ (MATLAB™, `heatmap(K)`)

und erklären den Sieger w_h des Wettbewerbs um das Minimum auf diesem Teilraum als die beste Näherung. Dies nennt man das ***Verfahren von Ritz***.

Der Wettbewerb beginnt damit, dass wir das Seil in mehrere finite Elemente unterteilen. Das ist einfach ein Stück Seil, (so sieht es der Ingenieur), bzw. ein Stück der x-Achse, (so sieht es der Mathematiker) auf dem zwei lineare Funktionen definiert sind, die sogenannten *Element-Einheitsverformungen*, die die Auslenkung des linken bzw. des rechten Knotens des Elements beschreiben. Indem man nun diese Verformungen über die Elementgrenzen hinweg fortsetzt, kann man ***hat functions*** konstruieren. Das sind stückweise lineare Verläufe $\varphi_i(x)$, die in dem Knoten x_i den Wert 1 haben und zu den beiden Nachbarknoten hin auf null abfallen, siehe Bild 3.2. Sie stellen die ***Einheitsverformungen der Knoten*** dar, sie sind die ***shape functions***.

Die Einheitsverformungen der vier Innenknoten bilden in der Summe den **FE-Ansatz**

$$w_h(x) = w_1\varphi_1(x) + w_2\varphi_2(x) + w_3\varphi_3(x) + w_4\varphi_4(x)\,, \tag{3.4}$$

und die Knotenverschiebungen w_i werden so bestimmt, dass die FE-Lösung die potentielle Energie

$$\Pi(w_h) = \frac{1}{2}\int_0^l H(w_h')^2\,dx - \int_0^l p w_h\,dx = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{w} \tag{3.5}$$

auf $\mathcal{V}_h$, der Menge aller Seilecke, die sich mit den $\varphi_i(x)$ darstellen lassen, zum Minimum macht.

Der Ansatz (3.4) gewinnt den Wettbewerb, wenn die Ableitungen nach den w_i null sind, $\partial\Pi(w_h)/\partial w_i = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$, wenn also der Vektor $\boldsymbol{w}$ (die ‚Adresse' des Ansatzes auf $\mathcal{V}_h$) dem Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$,

$$\frac{H}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,, \tag{3.6}$$

genügt. Die Elemente k_{ij} der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sind die **Wechselwirkungsenergien** zwischen den Ansatzfunktionen

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^l H\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx = \int_0^l \frac{V_i V_j}{H}\,dx\,, \tag{3.7}$$

und die **äquivalenten Knotenkräfte** $f_i = 1$ auf der rechten Seite sind die Arbeiten der Belastung auf den Wegen φ_i, also die Integrale

$$f_i = \int_0^l p(x)\varphi_i(x)\,dx\,. \tag{3.8}$$

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ hat die Lösung ($l_e = H = 1$)

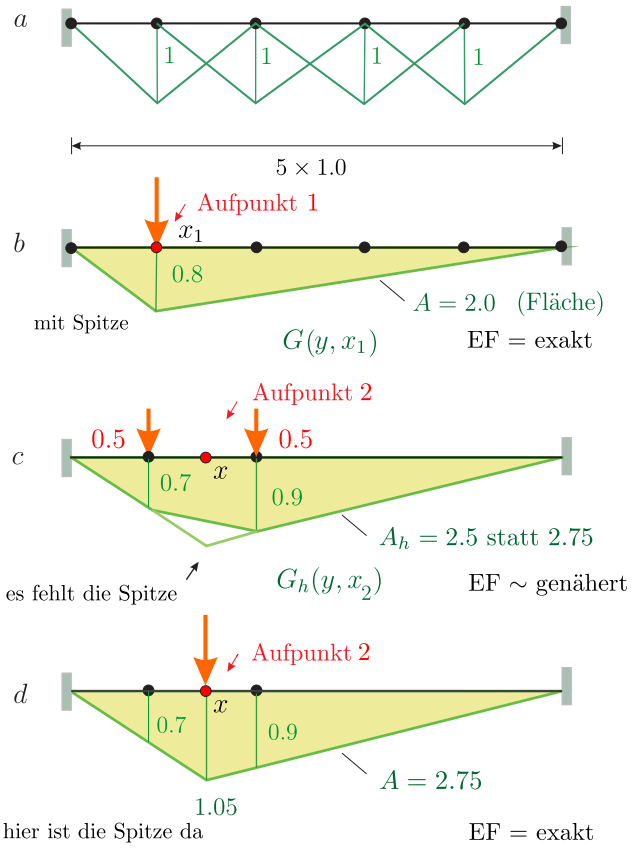


Bild 3.3. FE-Modell eines Seils, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Einflussfunktion (EF) für $w(x_1)$ und **c)** für die Durchbiegung $w(x)$ im Zwischenpunkt, **d)** die exakte Einflussfunktion für $w(x)$

$$w_1 = w_4 = 2 \cdot \frac{l_e}{H} \qquad w_2 = w_3 = 3 \cdot \frac{l_e}{H}\,, \tag{3.9}$$

und daher ist das Seileck in Bild 3.2 c

$$w_h(x) = 2 \cdot \varphi_1(x) + 3 \cdot \varphi_2(x) + 3 \cdot \varphi_3(x) + 2 \cdot \varphi_4(x) \tag{3.10}$$

auf $\mathcal{V}_h$ die beste Annäherung an die wahre Biegelinie $w(x)$.

3.2 Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind

Wenn man die FE-Lösung mit der exakten Lösung

$$w(x) = \frac{1}{2} \cdot (5\,x - x^2) \tag{3.11}$$

vergleicht, dann fällt auf, dass die FE-Lösung in den Knoten den exakten Wert trifft, $w_i = w(x_i)$. Das ist kein Zufall, sondern es liegt daran, dass das FE-Programm die Durchbiegung des Seils mit der **Einflussfunktion**

$$w(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{3.12}$$

berechnet und die Einflussfunktionen $G(y, x_i)$ der Knoten x_i in $\mathcal{V}_h$ liegen.

Die Einflussfunktion $G(y, x_1)$ für die Durchbiegung $w(x_1)$ im ersten Innenknoten ist das Seileck in Bild 3.3 *b* und dieses Dreieck, wie auch die anderen drei Einflussfunktionen, die anderen drei Dreiecke, können die vier Ansatzfunktionen darstellen.

Das ist der Grund, warum in diesem, aber ***auch in jedem anderen Lastfall***, die FE-Lösung mit der exakten Lösung in den Knoten x_i übereinstimmt

$$w_h(x_i) = \int_0^l G(y,x_i)\, p(y)\, dy = w(x_i)\,. \tag{3.13}$$

Das gilt für jeden Lastfall.

Wir machen die Probe mit $p(x) = \sin(\pi x/5)$. Die f_i lauten

$$\boldsymbol{f} = \{0.5687,\ 0.9202,\ 0.9202,\ 0.5687\}^T \tag{3.14}$$

und die Lösung $\boldsymbol{w} = \{1.489, 2.409, 2.409, 1.489\}^T$ des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$, sind die Knotenwerte der Biegelinie $w(x) = 25/\pi^2 \cdot \sin(\pi x/5)$.

Liegt der Aufpunkt aber **zwischen zwei Knoten** wie in Bild 3.3 *c*, im Punkt $x = 1.5$, dann lässt sich das zugehörige Seileck mit den vier Ansatzfunktionen nicht darstellen. Das Programm setzt daher notgedrungen zwei Einzelkräfte $P = 0.5$ in die Nachbarknoten, was die Biegelinie $G_h(y, x)$ ergibt, und überlagert die Belastung mit dieser genäherten Einflussfunktion

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = 2.5 \neq 2.75 = w(x)\,, \tag{3.15}$$

und erhält prompt einen zu kleinen Wert, $w_h(x) = 2.5 < 2.75 = w(x)$. Es ist so, als ob das Programm die beiden ausgelenkten Nachbarknoten mit einer Linie verbindet und die Spitze von $G(y, x)$ einfach abschneidet, Bild 3.3 *c*.

Nun wird der Leser einwenden wollen: Ein FE-Programm berechnet doch die Knotenwerte durch Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ und die Werte dazwischen, indem es zwischen den Knoten interpoliert.

Richtig, aber die Werte in dem Vektor $\boldsymbol{w}$ sind genauso groß, ***als ob*** das FE-Programm sie mit den genäherten Einflussfunktionen berechnet hätte, siehe Kapitel 4.1, (4.17). Ein FE-Programm geht nach Schulbuch vor, es rechnet wie in Statik II, **wie ein klassisch ausgebildeter Statiker**.

Um die Biegefläche der Platte in Bild 3.4 zu berechnen, stellt das Programm nacheinander in jeden Knoten $\boldsymbol{x}_i$ eine Kraft $P = 1$ und überlagert die dazu gehörige Biegefläche $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)$ mit der Verkehrslast p

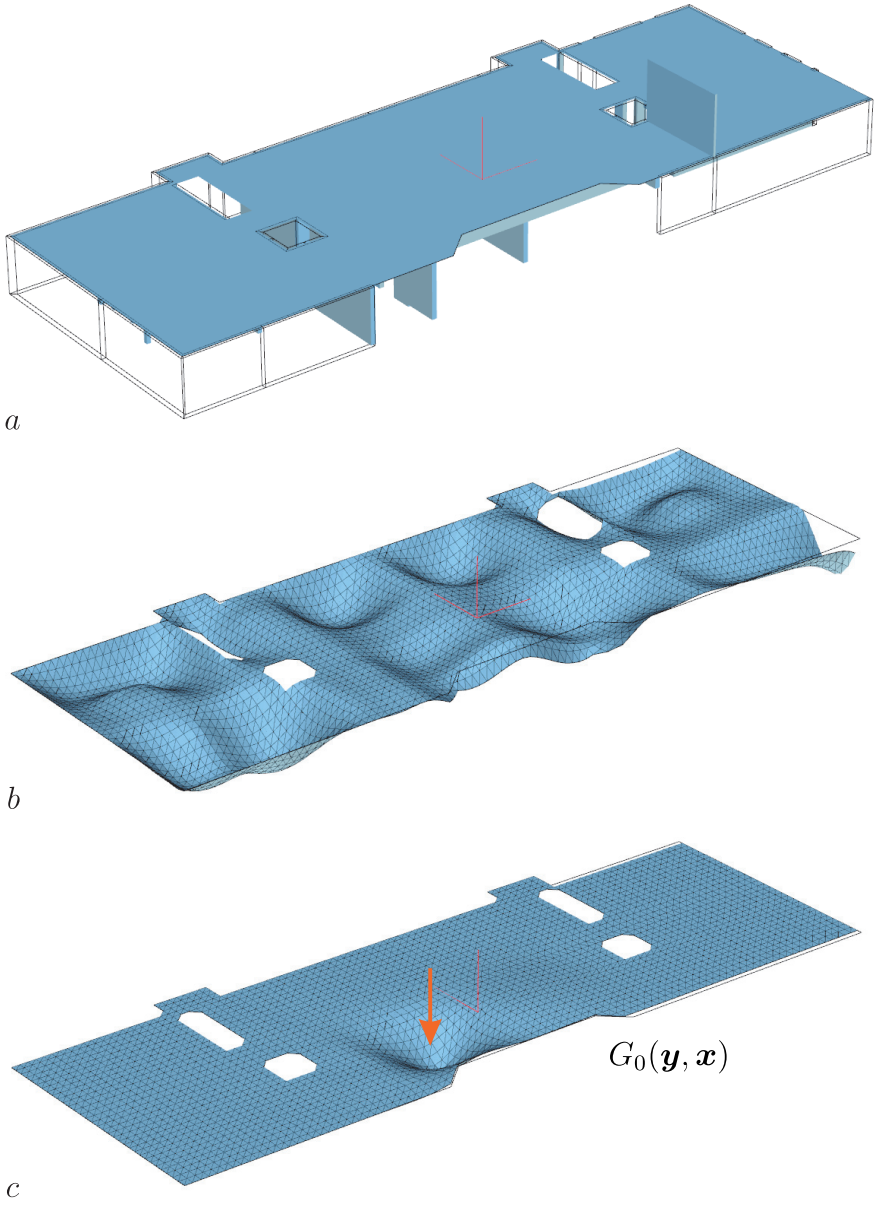
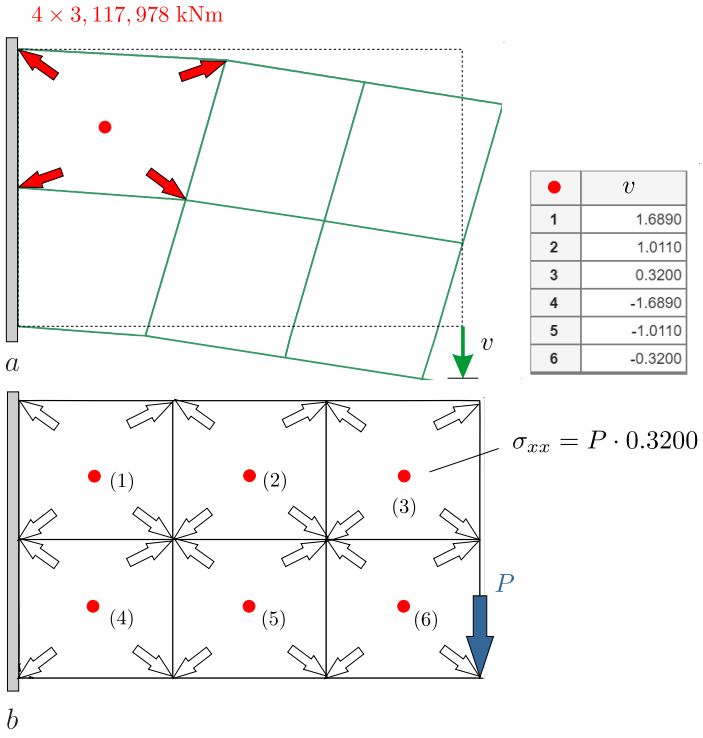


Bild 3.4. Hochbauplatte, **a)** System, **b)** Biegefläche im LF g, **c)** Einflussfunktion für die Durchbiegung w in einem Knoten $\boldsymbol{x}$ (BE-PLATTE)



●	v
1	1.6890
2	1.0110
3	0.3200
4	-1.6890
5	-1.0110
6	-0.3200

$\sigma_{xx} = P \cdot 0.3200$

Bild 3.5. a) Einflussfunktion für σ_{xx} im oberen, wandnahen Element. Die Spannung σ_{xx} der FE-Lösung ist gleich der Arbeit der Kraft P auf dem Weg v. In Bild **b)** sieht man die Last P und die (immer gleichen) Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} in den jeweiligen Elementmitten erzeugen, (WINFEM)

$$w_h(\boldsymbol{x}_i) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{3.16}$$

Theoretisch, weil natürlich die Knotenwerte auf dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ basieren, aber sie sind genau so groß, ***als ob*** das FE-Programm die Formel (3.16) benutzt hätte.

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ ist der ‚kurze' Weg zu den w_i, das Integral (3.16) ist der ‚lange' Weg, aber die Ergebnisse sind dieselben[1], siehe Kapitel 4,

$$w_i = \sum\nolimits_j k_{ij}^{(-1)} f_j = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = w_h(\boldsymbol{x}_i) \,. \tag{3.17}$$

Dies ist das geheime, wenig bekannte Gesetz hinter den finiten Elementen.

So gut wie die Einflussfunktionen sind, so gut sind die FE-Ergebnisse.

Die **Kinematik**, die in einem FE-Modell steckt, wie der Scheibe in Bild 3.5, bestimmt die Genauigkeit der Ergebnisse.

[1] Ungläubige Leser dürfen das Integral in (3.17) partiell integrieren.

Zu den vier Ecken eines Elements gehören je 2 (horiz. + vert.) Einheitsverformungen $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ (Verschiebungsfelder). Die 4×2 Knotenkräfte $f_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)$, die die Einflussfunktion für $\sigma_{xx}(\boldsymbol{x})$ erzeugen, sind die Spannungen σ_{xx} der 4×2 $\boldsymbol{\varphi}_i$ in der Elementmitte, im roten Punkt. In Bild 3.5 wurden aus den zwei f_i pro Ecke jeweils eine schräg gerichtete Knotenkraft gemacht.

Ist die Wand starr, dann machen nur die beiden rechten Kräfte ‚Effekt'. Würde man das Element daneben mit den vier Kräften belasten, dann werden die rechten Knotenkräfte in ihrer Wirkung durch die linken Kräfte ‚zurückgebunden' und die Verformung v und damit die Spannung σ_{xx} in Elementmitte wird kleiner.

Randspannungen sind also in solchen Lastfällen tendenziell größer als Spannungen im Feld. Bei dem Ausfall einer Fundamentstütze wie in Bild 5.15 ist die Situation ähnlich.

3.3 Addition der lokalen Lösung

Wenn man die Durchbiegung des Seils mit einem FE-Programm berechnet, dann sieht man auf dem Bildschirm kein Seileck, sondern eine wohl geschwungene Parabel zweiten Grades, also die exakte Kurve. Wie macht das das FE-Programm?

- Es unterteilt das Seil in kleine Elemente.
- Es reduziert die Belastung in die Knoten, es berechnet also die f_i.
- Es löst das Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$.

Wenn es jetzt stehen bleiben würde, dann würde man auf dem Bildschirm ein **Seileck** sehen.

Es folgt nun aber noch ein weiterer Schritt. Das Programm berechnet für jedes Element die sogenannte ***lokale Lösung*** w_p. Das ist die Durchbiegung an dem *beidseitig festgehaltenen Element* aus der Streckenlast, und diese wird elementweise zu dem Seileck addiert. So ist die exakte Seilkurve in Bild 3.6 entstanden.

Denkt man sich die Biegelinie $w = w_n + w_p$ elementweise in eine homogene, eine **Null-Lösung** w_n und eine partikuläre Lösung w_p aufgespalten, dann entspricht die lokale Lösung der partikulären Lösung w_p.

Das ist auch genau die Technik des **Drehwinkelverfahrens**. Das Drehwinkelverfahren reduziert alle Belastung in die Knoten, führt dann einen Knotenausgleich durch und hängt zum Schluss feldweise die lokalen Lösungen w_p ein. Die finiten Elemente machen es nicht anders, denn das Gleichungssystem, das aufgestellt wird, lautet eigentlich

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}\,. \tag{3.18}$$

Die f_{Ki} sind die Einzelkräfte, die direkt in den Knoten angreifen und die Kräfte $d_i = (p, \varphi_i)$ entstehen, wenn man die Lasten p im Feld (*domain*) in die Knoten reduziert. Beide zusammen sind die äquivalenten Knotenkräfte

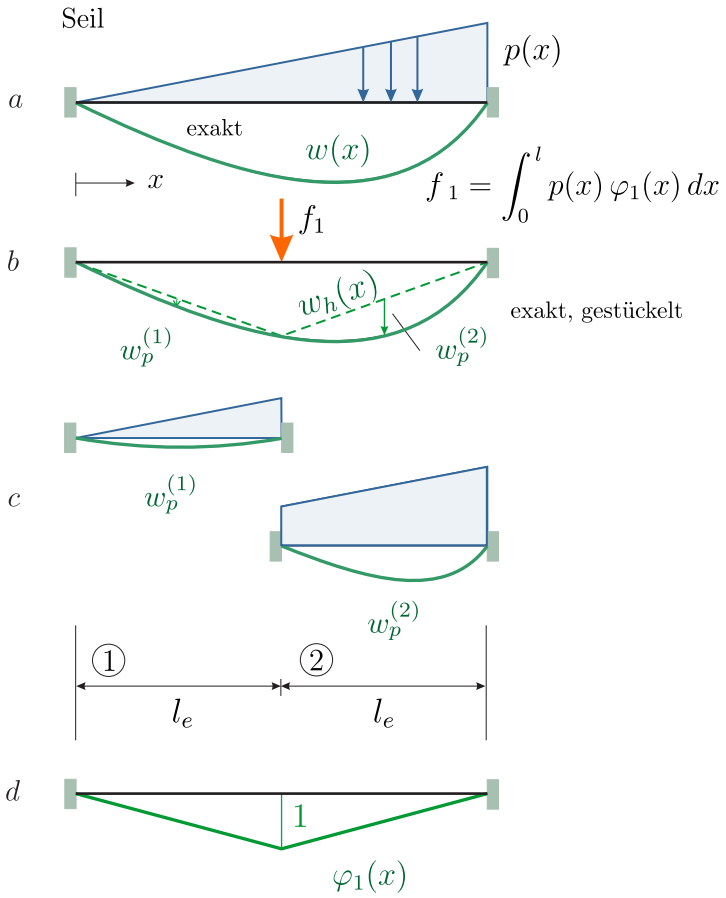


Bild 3.6. Seilberechnung mit zwei Elementen, **a)** Belastung und Biegelinie, **b)** FE-Lösung + lokale Lösungen, **c)** lokale Lösungen, **d)** Einheitsverformung des Knotens. Bemerkenswert ist, dass die Tangente im Mittenknoten automatisch stetig ist (kein Knick!), kein Sprung in der Querkraft $V = H\,w'$

$f_i = f_{Ki} + d_i$. Sie drücken auf die Lager, sind der **Lagerdruck**, die (*actio*) und die **Festhaltekräfte** (*reactio*) sind spiegelbildlich dazu. Die Festhaltekräfte sind die äquivalenten Knotenkräfte $f_i \times (-1)$.

In der FE-Literatur wird der Unterschied zwischen den f_{Ki} und d_i normalerweise verwischt, steht $f_i \equiv f_{Ki} + d_i$ für beide Anteile. Die f_i in dem obigen Beispiel sind eigentlich die d_i, also die in die Knoten reduzierte Streckenlast,

$$d_i^e = \int_0^{l_e} p\varphi_i^e \, dx \qquad \varphi_i^e = \text{Element-Einheitsverformungen}\,, \tag{3.19}$$

während die echten f_{Ki} null sind, weil keine Einzelkräfte in den Knoten angreifen.

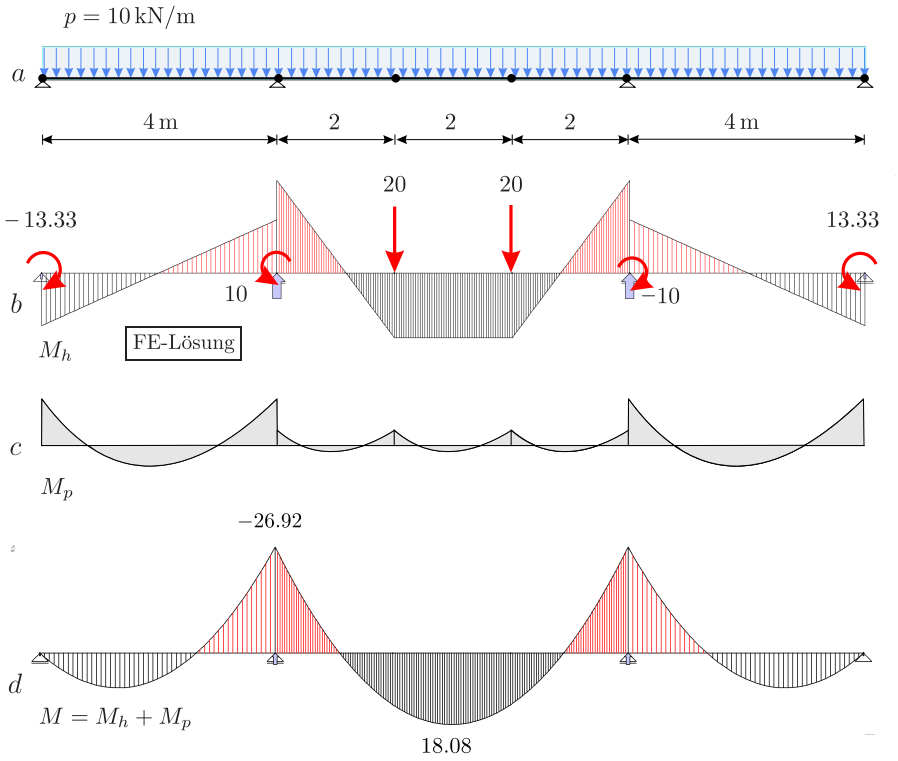


Bild 3.7. Drehwinkelverfahren oder finite Elemente ist dasselbe, **b)** erst wird die Streckenlast in die Knoten reduziert, die Knoten ausgeglichen und dann werden **c)** die lokalen Lösungen der beidseitig eingespannten Elemente **d)** dazu addiert

Der Ingenieur wendet beim Drehwinkelverfahren die Formel (3.19) jeweils links und rechts vom Knoten separat an, und addiert die beiden Beiträge $d_i^L + d_i^R$, während die finiten Elemente das ‚in einem Stück' tun, weil in den *shape functions* $\varphi_i = \varphi_i^L + \varphi_i^R$ ja beide Bewegungen stecken

$$d_i = \int_0^l p\varphi_i \, dx = \int_0^l p \, \triangle\!\!\triangle \, dx = d_i^L + d_i^R \,. \tag{3.20}$$

Die enge Verwandtschaft der finiten Elemente mit dem **Drehwinkelverfahren** beruht auf dieser Formel, denn die Einflussfunktionen für die äquivalenten Lagerdrücke d_i (f_i in der Literatur) basieren auf den Element-Einheitsverformungen φ_i^e. Ob man die Belastung in die Knoten reduziert (Drehwinkelverfahren) oder die äquivalenten Knotenkräfte berechnet, ist dasselbe.

Bei Stabtragwerken ist die Methode der finiten Elemente mit dem Drehwinkelverfahren identisch.

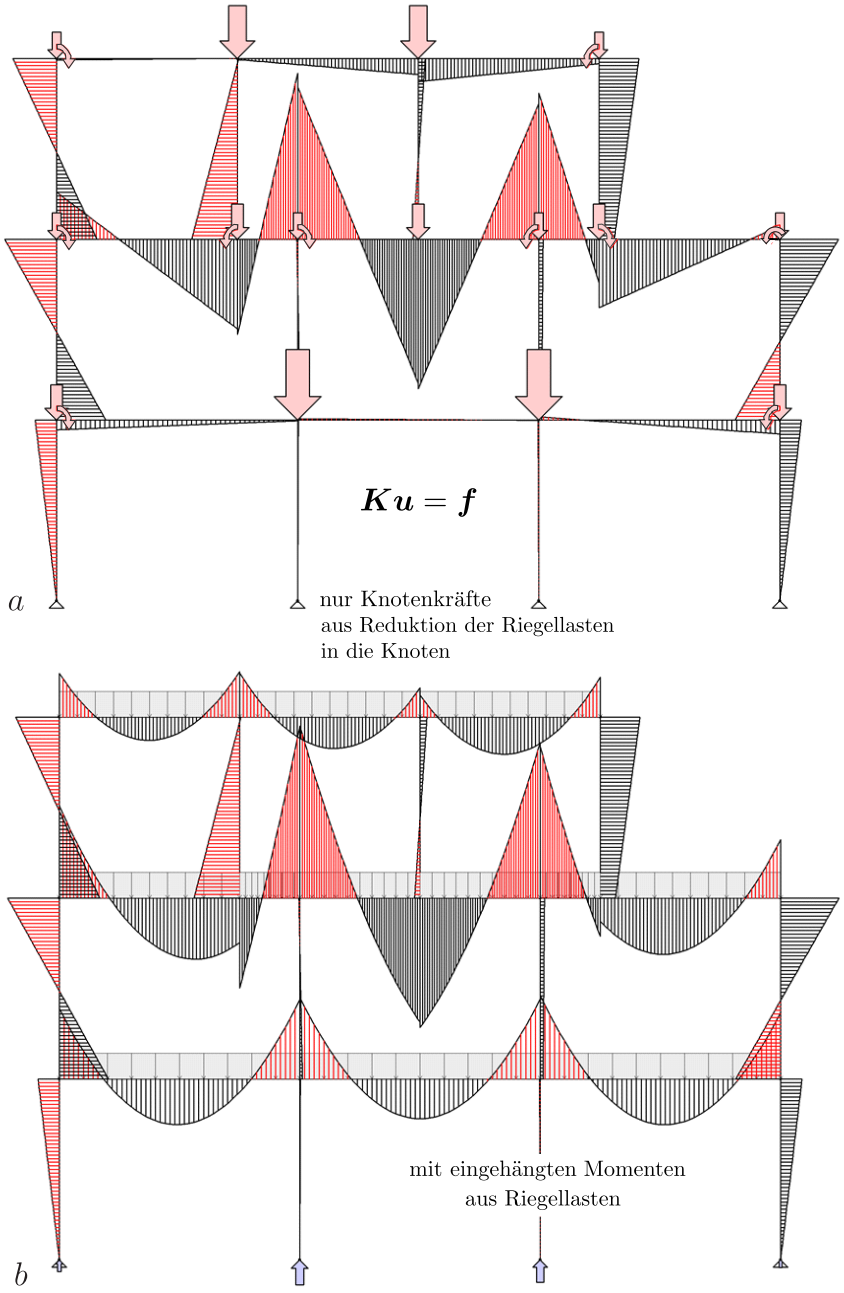


Bild 3.8. Stockwerkrahmen mit Riegellasten, zur FE-Lösung in **a)** werden die lokalen Lösungen addiert und so entsteht die exakte Lösung in **b)** – in dem Programm BE-FRAMES kann man zwischen den beiden Bildern wechseln, wenn man auf den *button* FE klickt und der *button* S zeigt die *shape functions* in Aktion

Das Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{Kw} = \boldsymbol{f}$ entspricht einem **Knotenausgleich** in einem Schritt. Elementweise werden dann nur noch die lokalen Lösungen w_p dazu addiert, siehe Bild 3.7 und Bild 3.8.

So gelingt es also den finiten Elementen trotz ihrer beschränkten Kinematik, der Verwendung von

- linearen Ansätzen für die Längsverschiebungen
- kubischen Polynomen für die Durchbiegungen

die exakten Verformungen zu generieren; die lokalen, die partikulären Lösungen (*clamped beam*) bringen den fehlenden ‚Schwung' in die Verformungsfigur. Die u_p bzw. w_p stehen in einer (aus der Statik-Literatur übernommen) Bibliothek des FE-Programms und werden von dort bei Bedarf abgerufen.

Genau genommen gilt das nur, wenn EA bzw. EI konstant sind, weil nur dann die Element-Einheitsverformungen φ_i^e **homogene Lösungen** der Stab- bzw. Balkendifferentialgleichung sind. Bei gevouteten Trägern liefern die finiten Elementen also nur eine Näherung, was aber auch für das Drehwinkelverfahren gilt, denn die exakte Reduktion der Belastung in die Knoten bei gevouteten Trägern beherrscht auch das Drehwinkelverfahren nicht. Ganz zu schweigen von der Kenntnis der exakten Fortleitungszahlen in einem solchen Fall.

Die Äquivalenz ***Finite Elemente*** $\equiv$ ***Drehwinkelverfahren*** bedeutet aber auch, dass es keinen Sinn macht, die einzelnen Stiele und Riegel eines Rahmens weiter in Elemente zu unterteilen. Es bringt nichts an Genauigkeit.

Bemerkung 3.1. Die finiten Elemente werden gerne am Balken erklärt. Wir machen das auch. Damit die finiten Elemente aber finite Elemente bleiben, müssen wir uns darauf verständigen, dass alle diese Demonstrationen sich auf den Zeitpunkt beziehen, ***bevor*** die lokale Lösung zur FE-Lösung addiert wird, weil dieses letzte Manöver aus der FE-Lösung die exakte Lösung macht.

3.4 Parallel und in Reihe

Es ist elementar, sei aber trotzdem angesprochen, weil es konstitutiv für die finiten Elemente ist: Der Unterschied zwischen **hintereinander geschalteten Federn**, k_1, k_2, k_3,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \tag{3.21}$$

und **parallel geschalteten Federn**

$$k = k_1 + k_2 + k_3\,. \tag{3.22}$$

Die Elemente, an denen ein Knoten hängt, bilden ein System von parallel geschalteten Federn: **Die Steifigkeiten addieren sich**. Das macht den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ einfach.

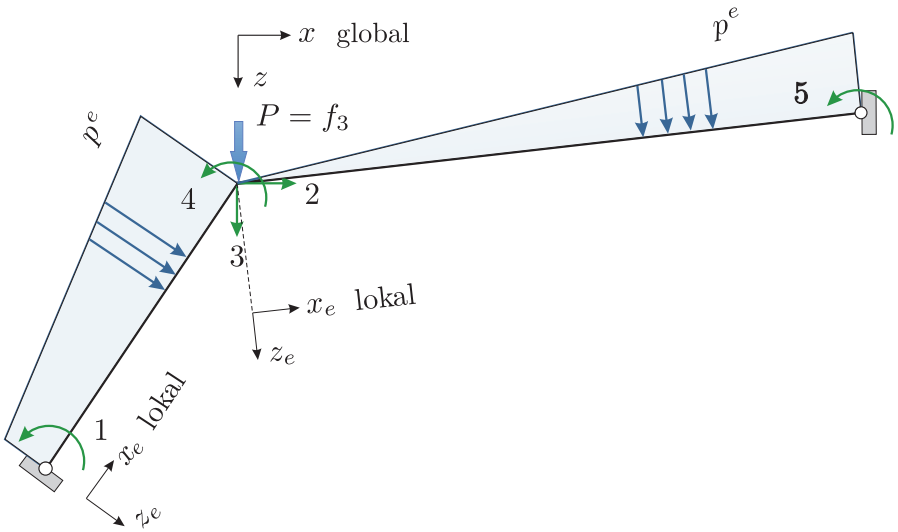


Bild 3.9. Lokales und globales Koordinatensystem

3.5 Der Zusammenbau

In der Stabstatik benutzt man zum Aufstellen von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ nicht das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, sondern man geht von den einzelnen Elementen aus, koppelt in den Knoten die Balkenendverformungen und formuliert das Gleichgewicht in den Knoten. Wir wollen das an Hand des einhüftigen Rahmens in Bild 3.9 zeigen.

Wie in Kapitel 1.18.3 erwähnt, gilt an jedem Balkenelement die Beziehung[2]

$$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{f}_e + \boldsymbol{d}_e\,. \tag{3.23}$$

Das ist die **Grundgleichung** auf der alles aufbaut – der Rest ist Algebra. $\boldsymbol{K}_e$ ist die Elementmatrix, $\boldsymbol{u}_e$ sind die Balkenendverformungen, $\boldsymbol{f}_e$ sind die Balkenendkräfte (also die Schnittkräfte an den Stirnseiten, Vorzeichen nach FEM) und $\boldsymbol{d}_e$ sind die in die Endknoten reduzierten Streckenlasten.

(1) Im ersten Schritt stellt das FE-Programm die globale, nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ auf. Es schreibt dazu das System zunächst in entkoppelter Form (das sind $12 = 2 \times 6$ Gleichungen)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix}\,, \tag{3.24}$$

[2] Sinngemäß gilt das auch für die 6×6-Matrix, längs und quer, die hier gemeint ist. Den Index e lassen wir im folgenden meist fort.

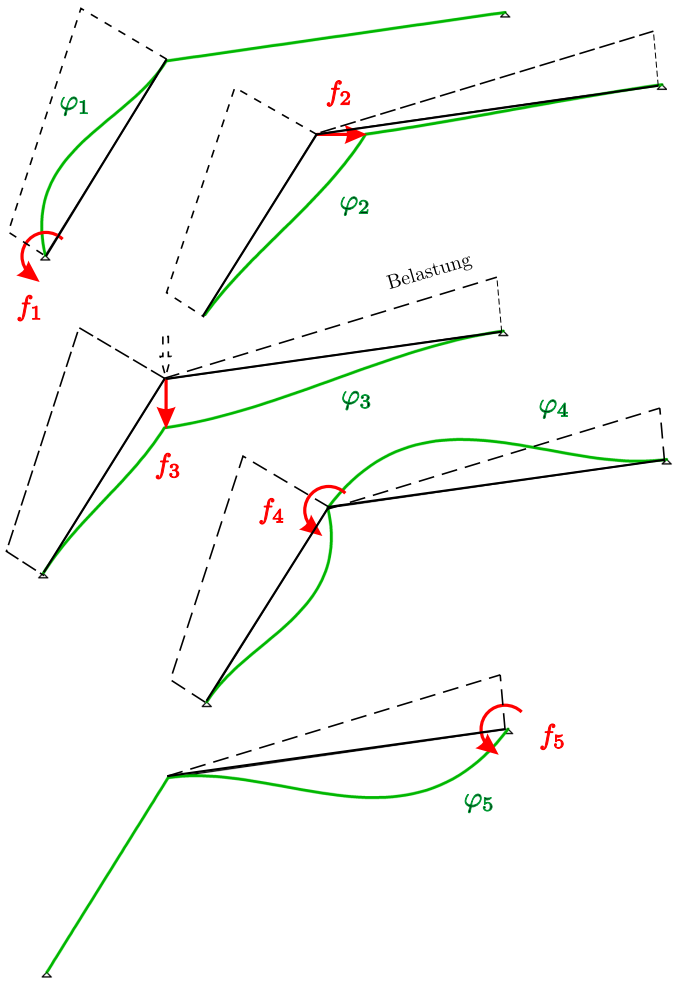


Bild 3.10. Die fünf *shape functions* – mehr Bewegungsmöglichkeiten hat das FE-Modell nicht. Nur Knotenlasten lassen sich damit rechnen, weil die horiz. und vert. Anteile der φ_i homogene Lösungen in lokaler x- und z-Richtung sind

wobei die $\boldsymbol{K}_i\,(6\times 6)$ die beiden Elementmatrizen sind, siehe (9.292), und die Vektoren $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{f}_i$ und $\boldsymbol{d}_i$ sind die zugehörigen Weg- und Kraftgrößen an den Balkenenden.

Die Kopplung der Balkenendverformungen $\boldsymbol{u}_i$ an die Knotenverformungen $\boldsymbol{u}$ wird durch eine Matrix $\boldsymbol{A}$ gesteuert

$$\text{(12 slaves)} \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}_{(12)} = \boldsymbol{A}_{(12\times 9)}\,\boldsymbol{u}_{(9)} \qquad \text{(9 master)}\,. \tag{3.25}$$

Parallel hierzu müssen die Balkenendkräfte $\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{d}_i$ der Stäbe in jedem Knoten mit den äußeren Knotenkräften $\boldsymbol{f}$ im Gleichgewicht sein, was die Gleichung

$$\boldsymbol{A}^T_{(9\times 12)} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix}_{(12)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix}_{(12)} \right) = \boldsymbol{f}_{(9)} \tag{3.26}$$

ergibt und so kommt man auf die Beziehung

$$\boldsymbol{A}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_G \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{3.27}$$

in der die 9×9 Matrix $\boldsymbol{K}_G$ die globale, nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix des Rahmens ist. Im Anschluss streicht das Programm die Spalten und Zeilen der Matrix $\boldsymbol{K}_G$, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören (praktisch geht es anders vor), und reduziert so die Matrix $\boldsymbol{K}_G$ auf eine 5×5 Matrix $\boldsymbol{K}$, die den fünf Freiheitsgraden in Bild 3.10 entspricht.

(2) Im zweiten Schritt berechnet das FE-Programm an jedem Element die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung[3]

$$d_i^e = \int_0^{l_e} p^e(x)\, \varphi_i^e(x)\, dx\,. \tag{3.28}$$

Die Notation ist symbolisch zu nehmen, weil $p^e(x)$ in zwei Richtungen zeigen kann, in lokale x_e- oder lokale z_e-Richtung und die Einheitsverschiebungen $\varphi_i^e(x)$ sind entsprechend die korrespondierenden Verschiebungen, zwei in x_e-Richtung und vier in z_e-Richtung.

Eine 6×6 Matrix $\boldsymbol{T}_e$ $(\ldots \sin\alpha, \cos\alpha, \ldots)$, siehe (9.290), dreht diese Vektoren $\boldsymbol{d}^e$ in das globale Koordinatensystem $\boldsymbol{d}_e = \boldsymbol{T}_e \boldsymbol{d}^e$, wo dann aus den 2×6 Komponenten die 5 Komponenten des Vektors

$$\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\} \to \boldsymbol{d} \tag{3.29}$$

zusammengestellt werden, der die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung in die 5 Richtungen u_i enthält.

(3) Im zentralen dritten Schritt löst das Programm das System

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} \tag{3.30}$$

und bestimmt damit den Vektor $\boldsymbol{u}$ der **Knotenverschiebungen**. Der Vektor $\boldsymbol{f}_K$ enthält nur Nullen, außer $f_{K3} = P$.

(4) Im vierten Schritt werden die Knotenverschiebungen u_i aus dem globalen Koordinatensystem in die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Stäbe transformiert,

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{T}_e^T \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{T}_e^T = \boldsymbol{T}_e^{-1})\,. \tag{3.31}$$

[3] Ein oberer Index e bedeutet, dass sich die Größe auf das lokale KS des Elements bezieht.

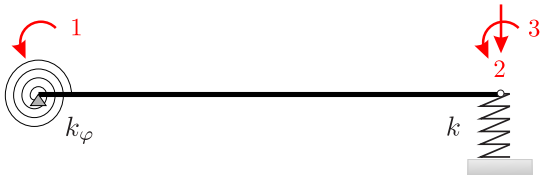


Bild 3.11. Elastisch gestützter Balken

(5) Im fünften Schritt bestimmt das Programm für jedes Element anhand des Systems (jetzt wird im lokalen KS gerechnet)

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{f}^e + \boldsymbol{d}^e \tag{3.32}$$

den Vektor der Balkenendkräfte $\boldsymbol{f}^e$

$$\boldsymbol{f}^e = \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{u}^e - \boldsymbol{d}^e \,, \tag{3.33}$$

wobei $\boldsymbol{K}^e$ die Elementmatrix der Größe 6×6 ist, (9.291). Man beachte, dass die f_i^e Balkenendkräfte sind, während die f_i in (3.30) Knotenkräfte sind.

Wenn man die Balkenendkräfte f_1^e, f_2^e, f_3^e am Anfang des Elements kennt und die Streckenlast, dann kann man mit den Gleichgewichtsbedingungen die Schnittgrößen $N(x), M(x)$ und $V(x)$ in jedem Punkt x des Elements berechnen.

(6) Im letzten sechsten Schritt addiert das FE-Programm schließlich die lokalen Lösungen zur FE-Lösung und kommt so zur selben Lösung wie das Drehwinkelverfahren.

In einem einzelnen Balken entspricht die ganze Prozedur der Aufteilung der Biegelinie $w(x)$ in eine homogene und eine partikuläre Lösung

$$w(x) = w_n(x) + w_p(x) \,, \tag{3.34}$$

wobei die homogene Lösung w_n (sie ist identisch mit der FE-Lösung w_h) eine Entwicklung nach den Element-Einheitsverformungen (3.63) ist

$$w_n(x) = \sum\nolimits_i u_i \varphi_i^e(x) \,, \tag{3.35}$$

und die partikuläre Lösung ist die Biegelinie am eingespannten Balken. In Gleichung (1.199) auf Seite 68 haben wir diese Aufspaltung vorgenommen. Nach diesem kurzen Ausflug in die Notation $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ wollen wir im Folgenden zur üblichen Notation $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ zurückkehren, bei der die rechte Seite für $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ steht.

3.6 Elastische Stützung

Jedes elastische Lager ist ein Element für sich dessen eines Ende am Boden fest gemacht ist und dessen anderes Ende den Bewegungen des Balkens folgt, siehe Bild 3.11. Aus den drei Matrizen Feder (2×2) + Balken (4×4) + Feder (2×2), siehe (9.278), entsteht so die Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l}+k_\varphi & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^2}+k & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} . \tag{3.36}$$

3.7 Die lokale Lösung w_p

Die lokale Lösung $w_p(x)$ ist die Durchbiegung am beidseitig eingespannten Balken. Die Standardfälle, $p = const.$ etc., sind natürlich tabelliert. Aber wenn man mit der Einflussfunktion

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} -\dfrac{(\ell-x)^3}{6}\,\varphi_3^e(y) + \dfrac{(\ell-x)^2}{2}\,\varphi_4^e(y) & y<x \\ -\dfrac{x^3}{6}\,\varphi_1^e(y) - \dfrac{x^2}{2}\,\varphi_2^e(y) & x<y \end{cases} \tag{3.37}$$

rechnet, siehe Bild 3.53, kann p von beliebiger Gestalt sein

$$w_p(x) = \int_0^\ell G_0(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{3.38}$$

Beispiel 3.1. Der Träger habe die Länge $\ell = 10$ m und es sei $p = 1$ kN/m. Die Durchbiegung in der Mitte $x = 5$ des Trägers beträgt dann

$$\begin{aligned} EI\,w_p(x) = &-\frac{5^3}{6}\int_0^5 \varphi_3^e(y)\cdot 1\,dy + \frac{5^2}{2}\int_0^5 \varphi_4^e(y)\cdot 1\,dy \\ &-\frac{5^3}{6}\int_5^{10} \varphi_1^e(y)\cdot 1\,dy - \frac{5^2}{2}\int_5^{10} \varphi_2^e(y)\cdot 1\,dy = 26.04\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Die Einflussfunktionen für die weiteren Größen[4]

$$w'(x) \qquad M(x) = -EI\,w''(x) \qquad V(x) = -EI\,w'''(x) \tag{3.40}$$

erhält man einfach durch Ableitung von $G_0(y,x)$ nach x, siehe Bild 3.55. Das **Reduktionsverfahren** zur Berechnung der Schnittkräfte in den Elementen braucht man also eigentlich nicht.

[4] In Kapitel 3.29 berechnen wir die EF für $M(x)$ und $V(x)$ auch von ‚Hand'.

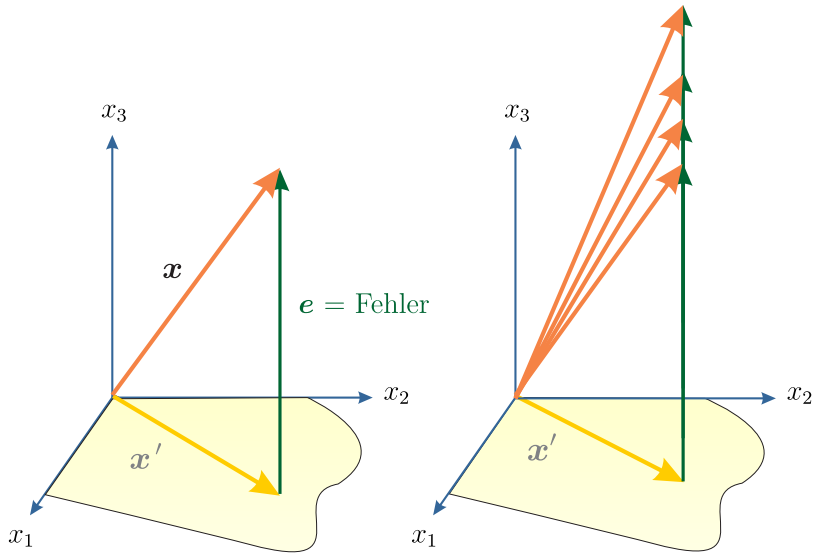


Bild 3.12. Der Fehler $\boldsymbol{e}$ steht senkrecht auf der Projektionsebene und alle Vektoren, die sich in Projektionsrichtung von $\boldsymbol{x}$ nicht unterscheiden, haben dasselbe Bild. Wie der Schatten eine kürzere Länge hat als das Original, so ist die innere Energie einer FE-Lösung (in einem LF p) kleiner als die Energie der exakten Lösung, siehe (9.107)

3.8 Projektion

Wir haben oben das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie hergeleitet. Die Projektion der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, also das ***Galerkin-Verfahren***, führt jedoch, wie wir zeigen wollen, auf dasselbe System.

Das Bild bei der Projektion eines Vektors $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ auf die $x-y$-Ebene ist sein **Schatten** $\boldsymbol{x}'$, siehe Bild 3.12. Wir sehen, wo der Schatten hinfällt, aber der Computer muss rechnen. Er macht für den Schatten $\boldsymbol{x}'$ den Ansatz $\boldsymbol{x}' = c_1\,\boldsymbol{e}_1 + c_2\,\boldsymbol{e}_2$ und bestimmt c_1 und c_2 so, dass der Fehler senkrecht auf der Ebene steht

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T \boldsymbol{e}_i = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = x_1\,, c_2 = x_2\,, \tag{3.41}$$

was gleichbedeutend damit ist, dass der Schatten $\boldsymbol{x}'$ der Vektor in der Ebene ist, der den kleinstmöglichen Abstand

$$|\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = \text{Minimum} \tag{3.42}$$

von $\boldsymbol{x}$ hat. Dies kann man auch schreiben als (wir vergessen einmal die Wurzel zu ziehen)

$$|\boldsymbol{e}|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \text{Minimum}\,, \tag{3.43}$$

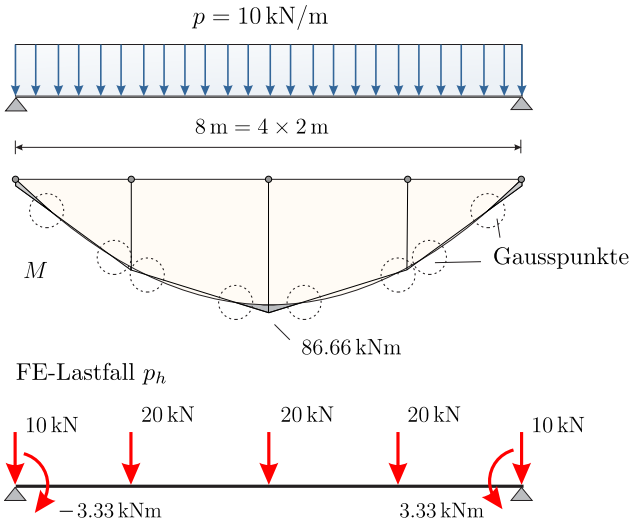


Bild 3.13. Balken, die FE-Lösung wird so eingestellt, dass das Fehlerquadrat der Momente minimal wird. Die f_i sind gerade die umgedrehten Festhaltekräfte

so sieht man besser die Verwandtschaft mit (3.47), denn auch bei den finiten Elementen handelt es sich, wenn man es als *Galerkin-Verfahren* interpretiert, um ein **Projektionsverfahren**. Nur dass die Metrik eine andere ist, nicht das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, sondern die **Wechselwirkungsenergie** zwischen zwei Funktionen ist das Maß.

Beim *Galerkin-Verfahren* wählt man als beste Näherung die Projektion der exakten Lösung w auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, also die Funktion w_h in $\mathcal{V}_h$, deren Fehler $w - w_h$ senkrecht auf allen φ_i steht

$$a(w - w_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3.44}$$

Die erste Greensche Identität des Balkens in Bild 3.13,

$$\mathscr{G}(w, \varphi_i) = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx - a(w, \varphi_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = a(w, \varphi_i) \tag{3.45}$$

legt nahe w_h wie folgt zu bestimmen, siehe Kapitel 1.48 für Details,

$$a(w_h, \varphi_i) = f_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.46}$$

und diese n Gleichungen entsprechen genau dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$.

Dies bedeutet, siehe (9.105), dass w_h auf $\mathcal{V}_h$ den kleinstmöglichen Abstand in der Energiemetrik,

$$a(w - w_h, w - w_h) = \text{Minimum} \tag{3.47}$$

von w hat, also w_h im Sinne des Fehlerquadrats die kleinstmögliche Abweichung in den Schnittgrößen aufweist, siehe Bild 3.13.

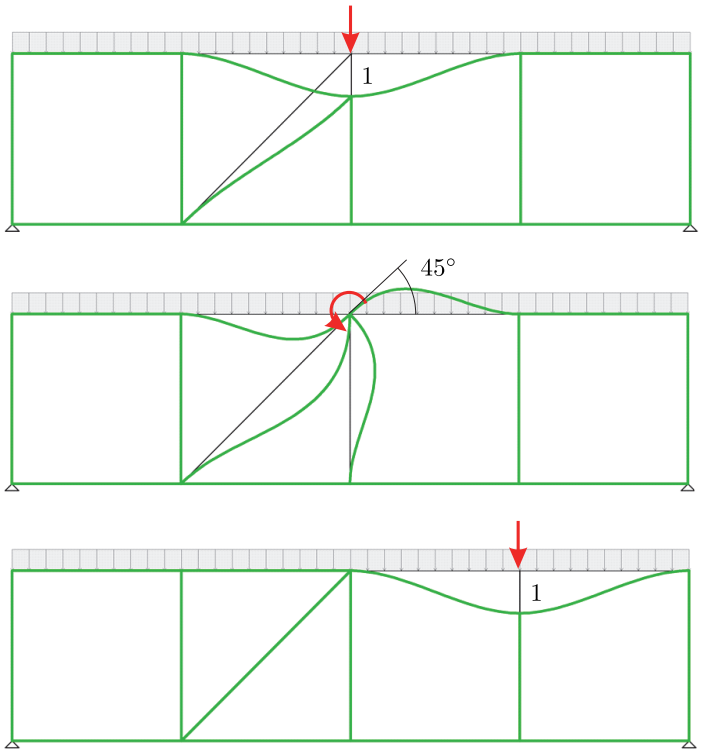


Bild 3.14. Drei Einheitsverformungen. Die äquivalenten Knotenkräfte f_i sind gleich der Arbeit der Riegellast auf den Wegen φ_i (BE-FRAMES, *button* S)

Was man in Bild 3.12 auch sieht ist, dass die nochmalige Projektion des Bildes $\boldsymbol{x}'$ nichts bringt, **die Projektion bleibt stehen**. Das ist auch der Grund, warum die Strategie, die Abweichung $p - p_h$ in den Lasten im Sinne einer Korrektur nachträglich auf die Struktur aufzubringen, zu nichts führt; die zu dem Lastfall $p - p_h$ gehörigen $f_i = (p - p_h, \varphi_i) = 0$ sind null, weil der Fehler keinen Schatten wirft.

Gleichung (3.44) ist die ***Galerkin-Orthogonalität***. Wegen $\delta W_i = \delta W_e$ kann man sie auch als Orthogonalität in den äußeren Arbeiten schreiben

$$\text{(innen)} \qquad a(\underset{?}{w} - w_h, \varphi_i) = \int_0^l (\underset{\checkmark}{p} - p_h)\, \varphi_i \, dx = 0 \qquad \text{(außen)}\,. \tag{3.48}$$

Die Differenz zwischen dem Originallastfall p und dem FE-Lastfall p_h (dessen Lösung w_h ist), ist also orthogonal zu allen φ_i, d.h. die Fehlerkräfte $p - p_h$ leisten keine Arbeit, wenn man an dem Balken mit den φ_i wackelt.

Dieser **Wechsel** von innen nach außen ist der eigentliche Pfiff bei Galerkin, denn die wahre Biegelinie w kennen wir ja nicht. Wie wollen wir den Abstand

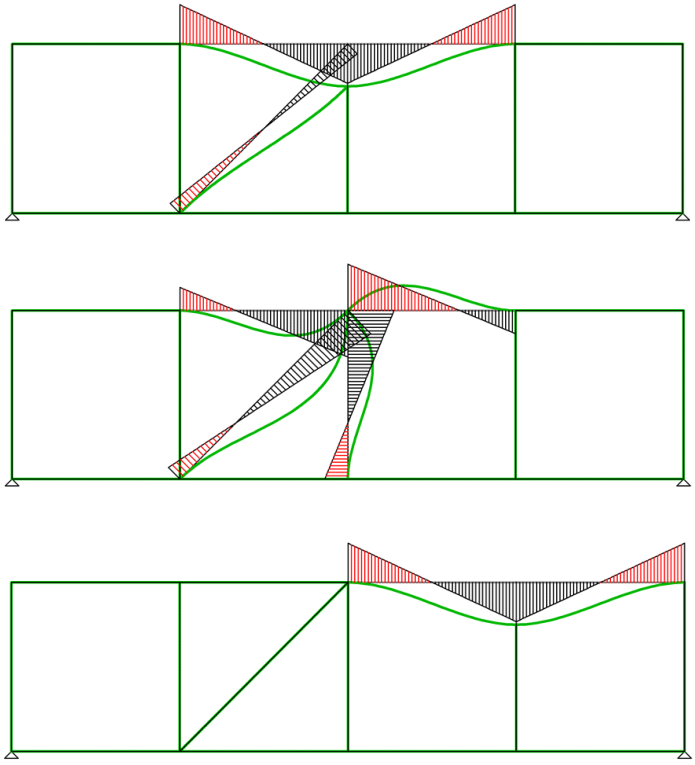


Bild 3.15. Die Momente der Einheitsverformungen. Man sieht, wie die starren Nachbarknoten die Bewegungen abblocken, (BE-FRAMES *button* S und dann Momente)

zu der unbekannten Größe w minimieren? Aber weil das Abstandsmaß die Energie ist, ist der Fehler innen genauso groß wie der Fehler außen – **und das macht Galerkin möglich**.

Hier wird noch einmal deutlich, dass die Grundgleichung der finiten Elemente $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ ist, die Gleichheit der äquivalenten Knotenkräfte, der äußeren Arbeiten. $\boldsymbol{Ku}$ (innen) ist nur eine andere Schreibweise für $\boldsymbol{f}_h$ (außen).

Aber (3.47) garantiert auch, dass wir mit $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ gleichzeitig das Fehlerquadrat in den Spannungen zum Minimum machen, obwohl wir M gar nicht kennen. Das ist die **Doppelbedeutung der Wackeläquivalenz**.

3.9 Äquivalente Knotenkräfte

Die f_i auf der rechten Seite des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ sind Arbeiten[5], sind Energien [N·m], keine Kräfte [N], siehe Bild 3.14,

[5] Für eine alternative Interpretation in der Stabstatik siehe Kap. 9.43 Seite 772.

$$f_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx = [\mathrm{N/m}]\cdot[\mathrm{m}]\cdot[\mathrm{m}] = [\mathrm{N{\cdot}m}]\,, \tag{3.49}$$

und auch auf der linken Seite stehen Energien, denn der einzelne Eintrag k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix beruht, wenn wir einen Stab als Beispiel nehmen, auf der Formel

$$k_{ij} = \int_0^l EA\,\varphi_i'\varphi_j'\,dx = [\mathrm{N}]\cdot[\ ]\cdot[\ ]\cdot[\mathrm{m}] = [\mathrm{N{\cdot}m}]\,, \tag{3.50}$$

und so auch beim Balken, wo die Momente überlagert werden, siehe Bild 3.15,

$$k_{ij} = \int_0^l EI\,\varphi_i''\varphi_j''\,dx = [\mathrm{N{\cdot}m^2}]\cdot[1/\mathrm{m}]\cdot[1/\mathrm{m}]\cdot[\mathrm{m}] = [\mathrm{N{\cdot}m}]\,. \tag{3.51}$$

Bei jeder Ableitung wird mit $[\mathrm{m}]^{-1}$ multipliziert

$$\varphi_i\ [\mathrm{m}] \qquad \varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{dx} = [\ ] \qquad \varphi_i'' = \frac{d\varphi_i'}{dx} = \frac{1}{[\mathrm{m}]}\,. \tag{3.52}$$

Bei 3-D Problemen führt die Dimensionsbetrachtung auf

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m^2}]}\,\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{m}]}\,[\mathrm{m^3}] = [\mathrm{N{\cdot}m}]\,, \tag{3.53}$$

woraus bei Scheibenproblemen, d = Dicke der Scheibe und $dV = d\cdot d\Omega$, der Ausdruck

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\,d\Omega = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m^2}]}\,\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{m}]}\,[\mathrm{m\cdot m^2}] = [\mathrm{N{\cdot}m}] \tag{3.54}$$

wird.

Eigentlich sind die Funktionen φ_i dimensionslos, denn Polynome haben keine Dimension. Die Dimension steckt in den Knotenverschiebungen u_i, also $u_i\,\varphi_i(x) = [\mathrm{m}]\,[\ ]$. Der Test mit einer virtuellen Verrückung $\delta u = \varphi_i$ ist also ein Test mit $\delta u = 1\,\mathrm{m}\cdot\varphi_i(x)$. Weil wir aber die u_i hier weglassen, müssen wir bei den Dimensionsbetrachtungen auf dieser Seite die φ_i stellvertretend so behandeln, als ob sie die Dimension einer Länge hätten.

3.9.1 Die Reichweite der φ_i

Es gibt Einflussfunktionen für Lagerkräfte und es gibt Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte f_i und das sind gerade die φ_i, denn die φ_i registrieren ja wieviel Arbeit die Belastung, das sei zunächst eine Punktlast P im Punkt x, auf dem Weg φ_i leistet

$$f_i = P\cdot\varphi_i(x)\,. \tag{3.55}$$

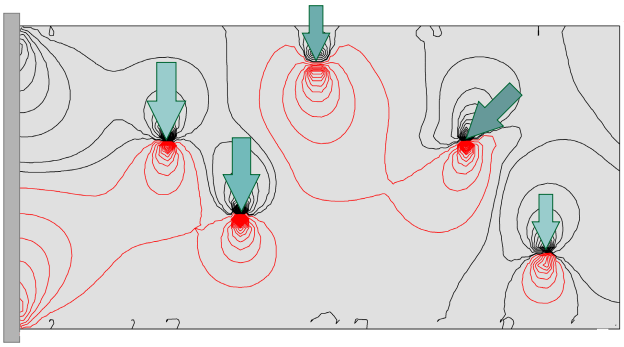


Bild 3.16. Einzelkräfte in einer Scheibe und die Konturen von σ_{yy} (BE-SCHEIBE)

Weil die *shape functions* φ_i in $\mathcal{V}_h^+$ eine ***partition of unity*** bilden[6],

$$\sum\nolimits_i \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{in allen Punkten } x\,, \tag{3.56}$$

ist die Summe der f_i gleich der Einzelkraft

$$\sum\nolimits_i f_i = \sum\nolimits_i P \cdot \varphi_i(x) = P \cdot \sum\nolimits_i \varphi_i(x) = P \cdot 1\,. \tag{3.57}$$

Das gilt auch für Streckenlasten $p(x)$

$$\sum\nolimits_i f_i = \sum\nolimits_i \int_0^l p(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_0^l p(x) \sum\nolimits_i \varphi_i(x)\,dx = \int_0^l p(x) \cdot 1\,dx = R \cdot 1\,, \tag{3.58}$$

wenn R die Resultierende der Streckenlast ist, Summe über alle $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$.

3.9.2 Rechenpfennige

Für ein FE-Programm sind die äquivalenten Knotenkräfte f_i *Rechenpfennige* wie ‚eins im Sinn'. Es geht von Knoten zu Knoten, verschiebt den Knoten um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung und notiert sich, wieviel Arbeit die Belastung dabei leistet. Das sind die f_i. Sie sind die **Signatur** der Belastung bezüglich den φ_i.

Hat ein horizontales f_i in einem Knoten einer Scheibe den Wert 10 kNm, so bedeutet dies, dass in der Nähe des Knotens Lasten so verteilt sind, dass sie bei einer horizontalen Auslenkung $\boldsymbol{\varphi}_i$ des Knotens um 1 m die Arbeit 10 kNm leisten.

Alles, was ein FE-Programm macht, ist, dass es dann **Ersatzlasten** so über die Scheibe verteilt, dass diese bei einer Auslenkung der einzelnen Knoten um 1 Meter dieselbe Arbeit leisten wie die Originalbelastung, was man kurz

[6] φ_i (Balken), die zu Knotendrehungen gehören, werden hier nicht mitgezählt

als $f_{hi} = f_i$ schreiben kann, oder wenn man alle Gleichungen in eins packt, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, denn $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ist der Vektor $\boldsymbol{f}_h$.

In der Notation des Abschnitts 3.12 ist das einzelne f_{hi} die Arbeit, die die FE-Lasten

$$\boldsymbol{p}_h = \sum\nolimits_j u_j \boldsymbol{p}_j \tag{3.59}$$

auf dem Weg $\boldsymbol{\varphi}_i$ leisten

$$f_{hi} = \sum\nolimits_j u_j \, \delta W_e(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) \qquad (= \text{Zeile } i \text{ von } \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}) \,. \tag{3.60}$$

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ sind die Kräfte, die nötig sind, um dem Tragwerk die Form $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}^T$ zu geben.

Wenn eine Scheibe, wie in Bild 3.16, mit Einzelkräften f_i belastet wird, dann muss die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_h$ sich so einstellen, dass in der Nähe der belasteten Knoten das Verschiebungsfeld so **‚verwirbelt'** ist, dass bei einer Auslenkung $\boldsymbol{\varphi}_i$ des Lastknotens die inneren Kräfte die Arbeit $a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = f_i$ leisten. Dort, wo keine Belastung ist, $f_i = 0$, muss das Feld so **‚glatt'** sein, so *well behaved*, dass die Arbeit null ist, $a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0$.

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ ist also orthogonal, $(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0$, zu allen $\boldsymbol{\varphi}_i$, die zu unbelasteten Knoten, $f_i = 0$, gehören.

Dem ***split*** einer Biegelinie $w = w_n + w_p$ in eine homogene und eine partikuläre Lösung entspricht im übertragenen Sinn die Unterteilung in Kräfte $f_i = 0$ und $f_i \neq 0$. Wo $f_i = (p_h, \varphi_i) = 0$ ist, ist die FE-Lösung **‚homogen'** und sonst **‚inhomogen'**; also nicht $Lu_h = 0$, sondern $(Lu_h, \varphi_i) = 0$.

3.10 Festhaltekräfte

Nach all dem gesagten sollte jetzt klar sein:

Bei Flächentragwerken werden die Lasten p nicht in die Knoten verschoben, sie bleiben draußen im Feld, sie werden nur durch ähnliche Lasten p_h ersetzt.

Was man die **Reduktion der Belastung in die Knoten** nennt, ist einfach nur die Berechnung der Arbeiten

$$f_i = \int_0^l p \, \varphi_i \, dx \,, \tag{3.61}$$

die die Last p auf den Wegen φ_i leistet.

Die Verwechslung kommt dadurch zustande, dass man beim **Drehwinkelverfahren** die Anwendung der obigen Gleichung die Reduktion der Belastung in die Knoten nennt, worunter man die Berechnung der Lagerdrücke aus der verteilten Belastung am beidseitig eingespannten Balken versteht, weil die Einheitsverformungen φ_i gleichzeitig die Einflussfunktionen für die Lagerkräfte an dem Balken mit *fixed ends* sind.

Bei einem Stab lauten diese lokalen *shape functions*

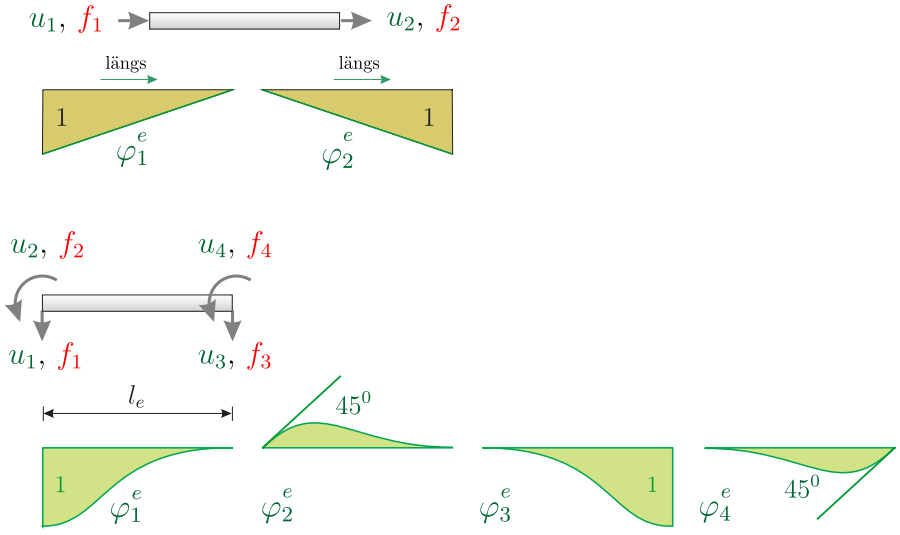
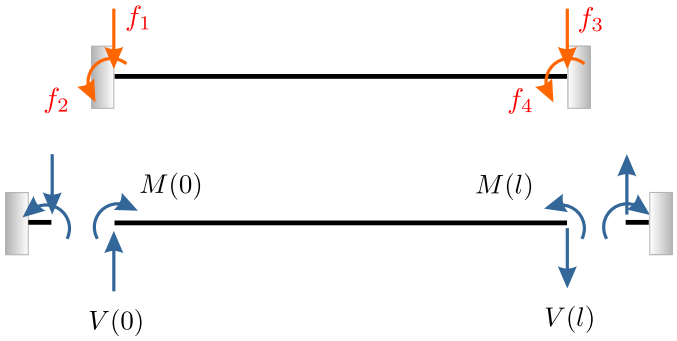


Bild 3.17. Die Einheitsverformungen am Stab (längs) und am Balken (quer) sind auch gleichzeitig die Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte. Wenn der $\mathcal{V}_h$ die φ_i^e enthält, interpoliert die FE-Lösung in den Knoten, $u_h(x_i) = u(x_i)$ (längs) und $w_h(x_i) = w(x_i)$ und $w_h'(x_i) = w'(x_i)$ (quer), weil man mit den φ_i^e die Einflussfunktionen für die Knoten darstellen kann – sie liegen in $\mathcal{V}_h$.



$$f_1 = V(0) \qquad f_2 = M(0) \qquad f_3 = -V(l) \qquad f_4 = -M(l)$$

Bild 3.18. Übersetzung der Balkenendkräfte in Knotenkräfte f_i. Die Balkenendkräfte wirken an den Knoten in umgekehrter Richtung, belasten die Knoten (*actio*) wie Knotenkräfte f_i

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= \frac{1-x}{l_e} \qquad \varphi_1^e(0) = 1\,, \qquad \varphi_1^e(l_e) = 0\,, \\ \varphi_2^e(x) &= \frac{x}{l_e} \qquad \varphi_2^e(0) = 0\,, \qquad \varphi_2^e(l_e) = 1 \end{aligned} \tag{3.62}$$

und bei einem Balken sind es kubische Polynome, siehe Bild 3.17,

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & \varphi_3^e(x) &= \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \\ \varphi_2^e(x) &= -x + \frac{2x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} & \varphi_4^e(x) &= \frac{x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2}\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Die äquivalenten Knotenkräfte d_i^e (f_i^e in der Literatur) sind dann die Größen

$$d_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\rightarrow}{p(x)}\, \varphi_i^e(x)\, dx \qquad i = 1,2 \qquad \text{Stab} \tag{3.64}$$

$$d_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\downarrow}{p(x)}\, \varphi_i^e(x)\, dx \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \text{Balken}\,. \tag{3.65}$$

Wirkt eine **Einzelkraft** P bzw. ein **Moment** M in einem Punkt x, dann ist das zugehörige d_i^e einfach die Arbeit im Punkt

$$d_i^e = \varphi_i^e(x) \cdot P \qquad d_i^e = \varphi_i^{e\prime}(x) \cdot M\,. \tag{3.66}$$

Äquivalente Knotenkräfte und Festhaltekräfte verhalten sich wie ***actio*** und ***reactio*** zueinander. Die Festhaltekräfte $= d_i^e \times (-1)$ kontern die d_i^e.

Eventuell muss man auch noch die d_i^e in das DIN-Koordinatensystem umrechnen

$$d_1^e = -N(0) \qquad d_2^e = N(l_e) \tag{3.67}$$

$$d_1^e = -V(0) \qquad d_2^e = -M(0) \qquad d_3^e = V(l_e) \qquad d_4^e = M(l_e)\,, \tag{3.68}$$

wenn man anders mit ihnen weiterrechnen will, siehe Bild 3.18.

Bei Stabtragwerken sind die Einheitsverformungen der Knoten die Einflussfunktionen für die Lagerdrücke $d_i = (p, \varphi_i) =$ Festhaltekräfte $\times (-1)$.

All dies natürlich unter der Voraussetzung, dass die Elementeinheitsverformungen φ_i^e homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkengleichung sind, was man in der Regel voraussetzen kann, wenn keine gevouteten oder andere exotische Profile vorkommen, wenn also EA und EI konstant sind.

Nun zurück zu den finiten Elementen. Die FE-Gleichung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ sieht genauso aus wie beim Drehwinkelverfahren, aber die f_i sind keine Knotenkräfte – **es wirkt nichts in den Knoten** – die f_i sind Energien, in $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ stehen auf beiden Seiten Arbeiten, [N·m].

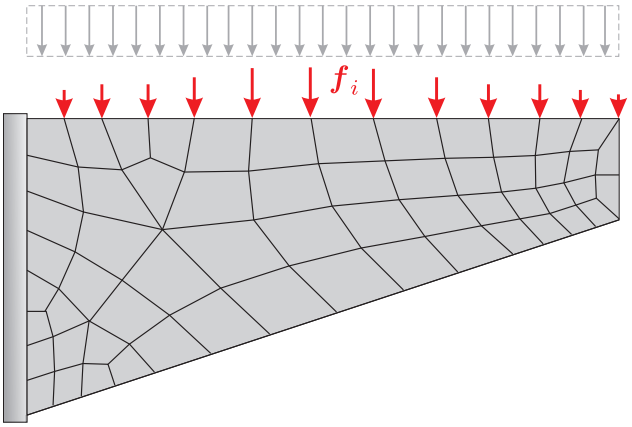


Bild 3.19. Die $\boldsymbol{f}_i$ [N·m] sind Rechenpfennige, keine Kräfte (SOFiSTiK)

Mit den f_i notiert sich der Tragwerksplaner neben jedem Knoten die Arbeit, die die Belastung in der Nähe des Knotens auf der Knotenverschiebung $\boldsymbol{\varphi}_i$ leistet, siehe Bild 3.19. Und anders als die Marktfrau, die nur einmal an dem Waagebalken wackelt, muss der Tragwerksplaner, je nach der Zahl der u_i, mit 100 oder 200 $\boldsymbol{\varphi}_i$ an dem Tragwerk wackeln. Jeder **‚Wackeltest‘** ist eine Zeile $f_{hi} = f_i$ in $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Man kann den f_i aber ein statisches Gesicht geben, indem man sagt: Wenn in dem Knoten eine Einzelkraft f_i stünde und man würde den Knoten um 1 Meter verschieben, dann wäre die Arbeit gerade so groß wie f_i, wie die Arbeit der Belastung im Feld.

Einzelkräfte in einem Scheibenknoten (mechanisch ein Unding) nähert die FEM korrekterweise durch eine Art **Streubelastung** aus Linien- und Flächenkräften an, wie in Bild 3.20, und auch die sonstigen FE-Lasten p_h, die das Programm statt p auf das Tragwerk setzt, sind Lasten ‚im Feld‘, sind keine Knotenkräfte, siehe z.B. Bild 3.23.

3.11 Die Neutralität der shape functions

Die Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$, die *shape functions*, verstehen wir als Biegelinien, als Verformungen, aber warum steht auf Seite 265 nirgendwo ein EI oder ein EA? Die Steifigkeiten EI und EA kommen erst durch $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ in die FE-Lösung hinein. Wenn die Matrix $\boldsymbol{K}$ den Vorfaktor EI hat, dann hat die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ den Vorfaktor $1/EI$, und so sind die Knotenwerte u_i wegen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ alle mit dem Kehrwert $1/EI$ behaftet, wie wir es von einer Biegelinie erwarten. Die Steifigkeit steckt also in den u_i, die $\varphi_i(x)$ selbst sind neutral.

Man beachte auch, dass bei der Berechnung von Einflussfunktionen, etwa für ein Moment $M(x)$, die äquivalenten Knotenkräfte j_i $(= f_i)$ die Momente

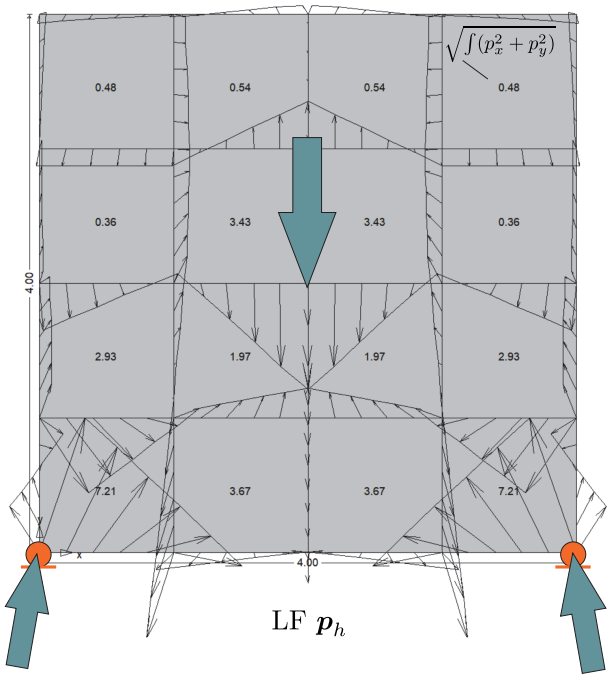


Bild 3.20. Streubelastung ersetzt die Einzelkräfte, bilineare Elemente (WINFEM)

$j_i = M(\varphi_i) = -EI\,\varphi_i''$ sind. Wenn φ_i von Hause aus mit $1/EI$ behaftet wäre, dann ginge das schief.

3.12 Shape forces und der FE-Lastfall

Um einen Knoten einer Scheibe um einen Meter horizontal oder vertikal zu verschieben – und dabei gleichzeitig alle anderen Knoten festzuhalten – sind gewisse Kräfte nötig, siehe Bild 3.21. Wir nennen diese Kräfte, in Analogie zu dem Begriff *shape functions*, die ***shape forces*** $\boldsymbol{p}_j = \{p_x^{(j)}, p_y^{(j)}\}^T$, die zu dem Freiheitsgrad u_j gehören. Es sind treibende wie haltende Kräfte. Die treibenden Kräfte lenken den Knoten aus, und die haltenden Kräfte sorgen dafür, dass die Bewegung an den umliegenden Knoten gleich wieder zum Stillstand kommt. Es sind immer Gleichgewichtskräfte, siehe Bild 3.22 und (9.115).

Die Summe dieser *shape-forces* – mit den Knotenverschiebungen u_j gewichtet – stellt den **FE-Lastfall** dar, also die Kräfte, die die Gestalt $\boldsymbol{u}$ ergeben

$$\boldsymbol{p}_h = \sum\nolimits_j u_j\,\boldsymbol{p}_j = u_1 \begin{bmatrix} p_x^{(1)} \\ p_y^{(1)} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} p_x^{(2)} \\ p_y^{(2)} \end{bmatrix} + \dots \tag{3.69}$$

Während bei Flächentragwerken einiger Aufwand nötig ist, um den FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ zu berechnen, siehe Bild 3.23, muss man bei Stabtragwerken (EA

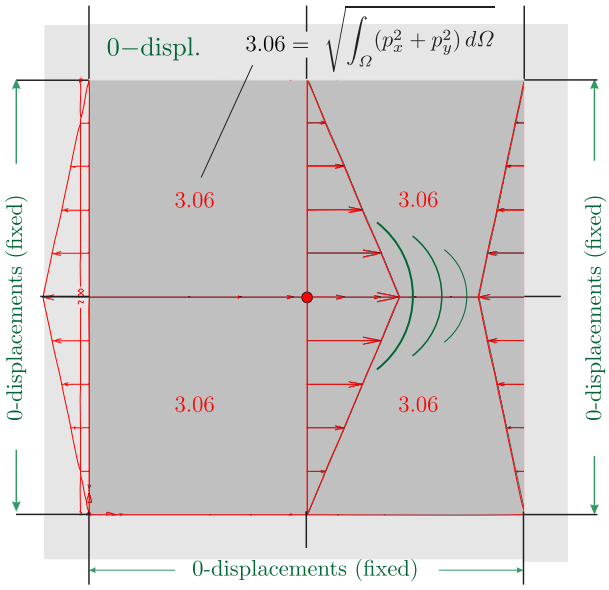


Bild 3.21. Bilineare Scheibenelemente: Die Kräfte, die den Mittenknoten um einen Meter nach rechts verschieben, und die Bewegung an den umliegenden Knoten abstoppen, sind die *shape forces*, es sind Linienkräfte auf den Elementkanten und konstante Flächenkräfte p_x und p_y in den Elementen. Im übrigen Netz sind die *shape forces* null, weil sich dort nichts bewegt

und EI konstant) gar nichts tun, denn bei Stabtragwerken ist der FE-Lastfall mit den äquivalenten Knotenkräften $f_i = f_{Ki} + d_i$ identisch.

Bemerkung 3.2. Das Bild 3.20 illustriert sehr gut, die ‚Doppelbödigkeit' der Statik im Umgang mit finiten Elementen. Gehalten wird die Scheibe in der Nähe der beiden Lagerknoten eigentlich von einem konzentrierten System von Flächen- und Linienkräften. Im Ausdruck stehen aber nur die äquivalenten Knotenkräfte f_i, die diese Haltekräfte in der ‚Summe' repräsentieren, und der Ingenieur findet (zu Recht) gar nichts dabei mit diesen f_i weiter zu rechnen, aus ihnen so echte Kräfte zu machen.

3.13 Die Rolle der u_i

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ wird mit Hilfe der u_i so austariert, dass die zugehörigen Knotenkräfte f_{hi} mit den äquivalenten Knotenkräften aus der Belastung übereinstimmen, also im Fall einer Scheibe die Arbeiten f_{hi} genauso groß sind, wie die Arbeiten f_i

$$f_{hi} = \int_\Omega \boldsymbol{p}_h^T \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega = f_i \qquad (\text{Test mit } \boldsymbol{\varphi}_i)\,. \tag{3.70}$$

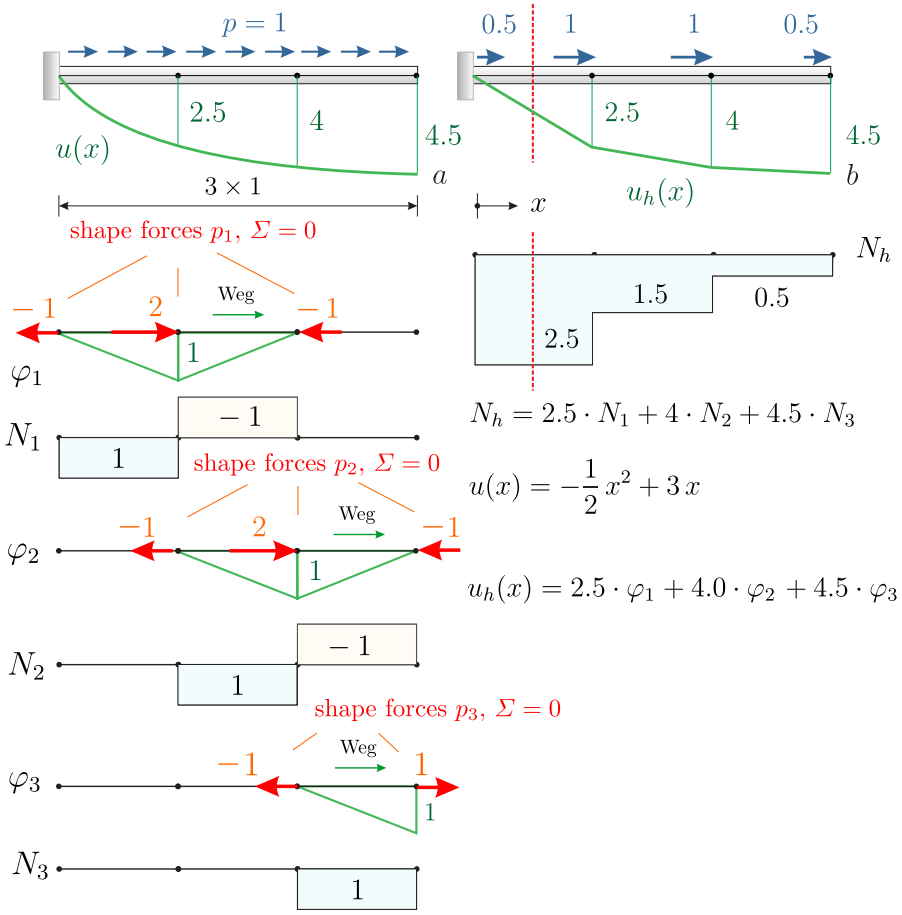


Bild 3.22. Lineare FE-Lösung eines Stabes ($EA = 1$) bei konstanter Streckenlast. Daneben Darstellung der *shape functions* φ_i und *shape forces* p_i des FE-Modells.

Diese Forderung ist äquivalent mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, denn der Vektor $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ (die Einträge sind innere Arbeiten δW_i) ist wegen *‚innen = außen‘* identisch mit dem Vektor $\boldsymbol{f}_h$ der zugehörigen äußeren Arbeiten δW_e. Man stelle sich die Scheibe einmal mit der Originalbelastung $\boldsymbol{p}$ vor und daneben mit der FE-Belastung $\boldsymbol{p}_h$. Nun gehe man von Knoten zu Knoten und verschiebe den Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung. Dann wird man finden, dass die Arbeiten immer gleich sind, $f_{hi} = f_i$. In diesem Sinne gilt:

Der FE-Lastfall ist ‚wackeläquivalent‘ zu dem Originallastfall.

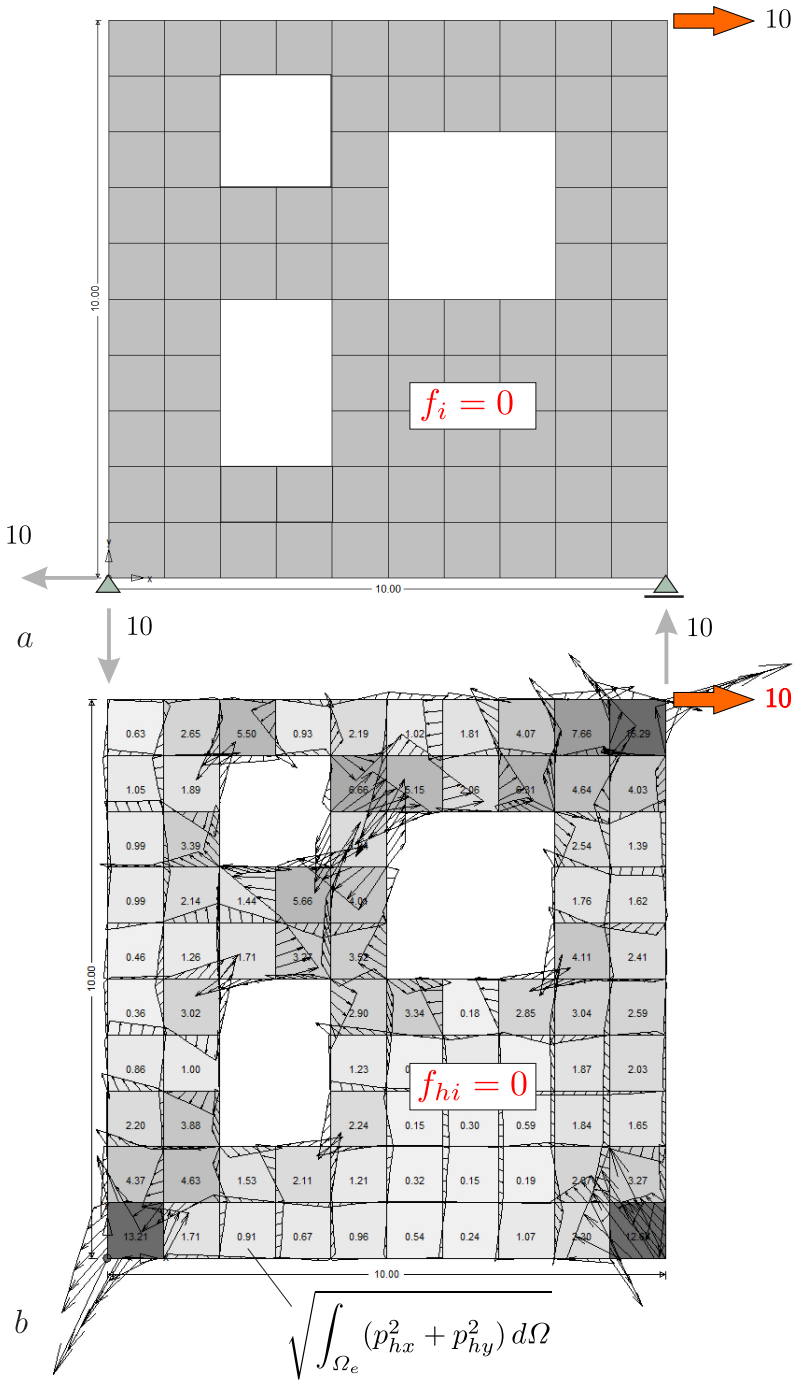


Bild 3.23. Belastung einer Scheibe mit einer Einzelkraft, **a)** System **b)** der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$; die Graustufen entsprechen der Intensität der aufintegrierten FE-Flächenlast in den bilinearen Elementen, wie in Bild 3.21. Die scheinbar ‚chaotischen' FE-Lasten leisten, bis auf $f_{hi} = f_i = 10$, keine Arbeit, $f_{hi} = (\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0$, (WINFEM)

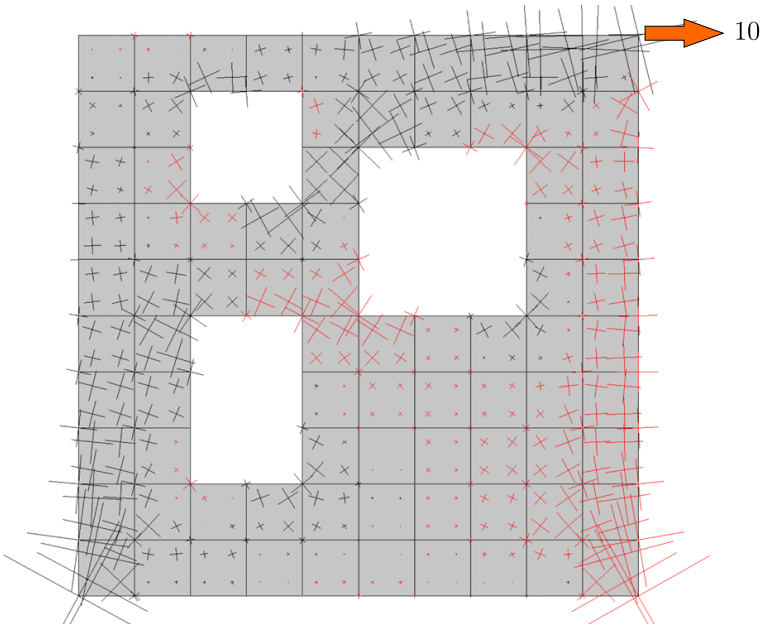


Bild 3.24. Hauptspannungen (WINFEM)

Das ist wie bei einer **Waage**, wo bei jeder Drehung des Waagebalkens die Arbeiten des linken und rechten Gewichts gleich sind, weil die beiden Gewichte **‚wackeläquivalent'** sind.

Ob ein Tragwerk die Originallasten trägt oder die FE-Lasten, kann der Prüfingenieur durch Wackeln mit den $\boldsymbol{\varphi}_i$ allein nicht entscheiden, weil die Arbeiten jedesmal gleich sind.

Der FE-Lastfall ist der Lastfall, für den der Aufsteller das Tragwerk eigentlich bemisst. Die Verformungen und die Schnittkräfte im Ausdruck gehören zu diesem Lastfall $\boldsymbol{p}_h$.

Wenn man die Belastung $\boldsymbol{p}_h$ auf das Tragwerk aufbringen würde und ein Statiker würde die Verformungen und Schnittkräfte von Hand berechnen, dann würde er genau die FE-Ergebnisse erhalten.

In Bild 3.23 *b* sind der Originallastfall und der FE-Lastfalls einmal nebeneinander dargestellt. Zu verfolgen war die Wirkung einer Einzelkraft, die an der rechten oberen Ecke zieht. Diesen doch eigentlich einfachen Lastfall ersetzt nun das FE-Programm durch ein **sehr konfus wirkendes System** von Flächen- und Linienkräften, die den Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ darstellen. Weil diese Lasten so **‚merkwürdig'** aussehen, werden sie von FE-Programmen nicht gezeigt, denn ein Anwender, der mit der Theorie der finiten Elemente nicht vertraut ist, würde sein Geld zurückhaben wollen.

Nur darf man sich von dem Bild aber nicht abschrecken lassen, denn den Ingenieur interessieren primär die Schnittgrößen, und es ist **Spekulation** aus

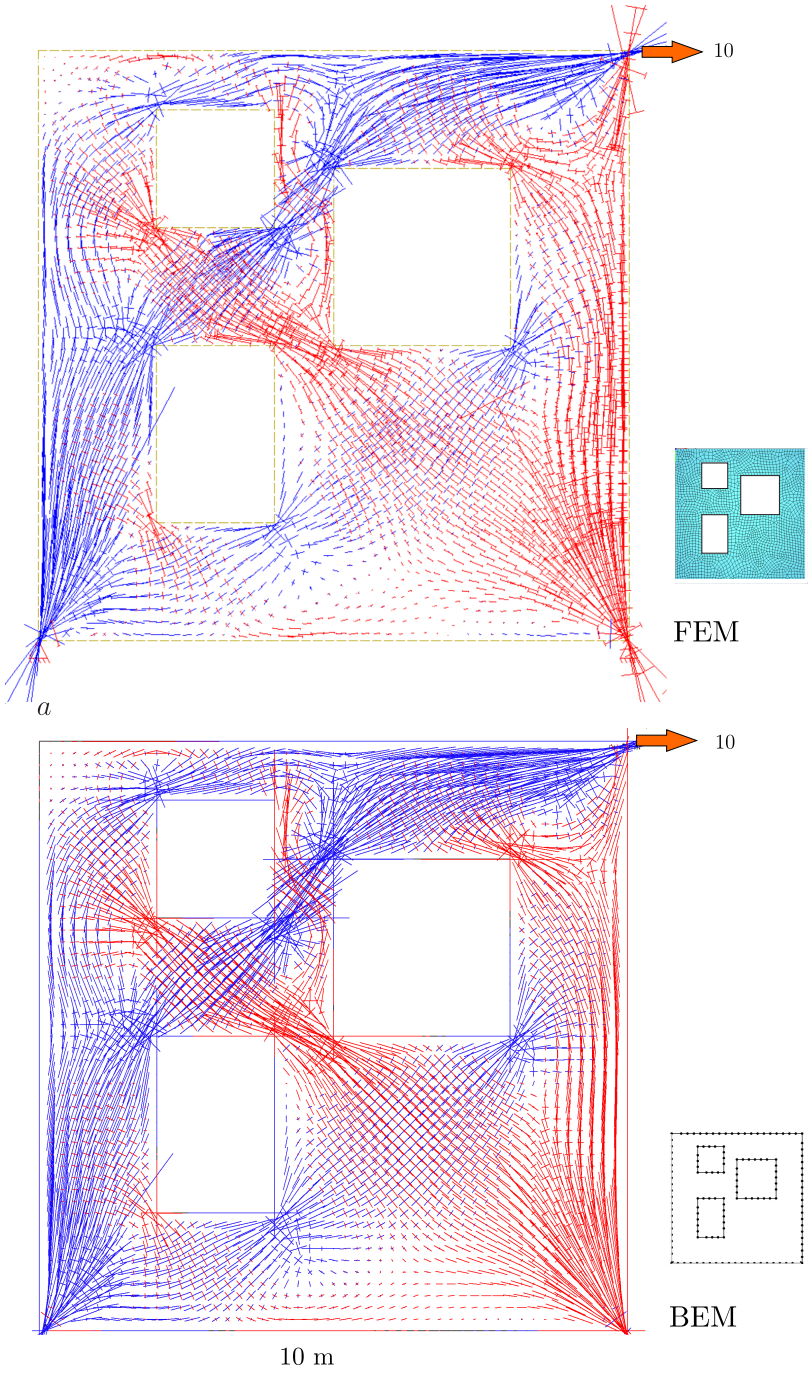


Bild 3.25. Hauptspannungen **a)** finite Elemente 0.2 × 0.2 m (SOFiSTiK) und **b)** Randelemente, Raster der Ergebnispunkte 0.2 × 0.2 m (BE-SCHEIBE). Die Ergebnispunkte der FEM sind die Mitten der (leicht) ‚unegal' geschnittenen Elemente, während sie bei der BEM ein gleichmäßiges Raster bilden, siehe auch Bild 7.18

der Differenz $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h$ in den Lasten auf die Differenz $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h$ in den Schnittgrößen schließen zu wollen. Die Differenz in der Belastung kann man berechnen, die Differenz in den Spannungen aber leider nicht.

Dass die FE-Ergebnisse nicht so schlecht sein können, wie dies das Bild 3.23 anscheinend suggeriert, macht der direkte Vergleich mit den Hauptspannungen in Bild 3.24 und Bild 3.25 klar. Sie wirken durchaus glaubhaft.

Wir wollen noch ein zweites, **indirektes Argument** anführen. Im Originallastfall sind alle $f_i = 0$, bis auf das $f_i = 10$ in der oberen rechten Ecke, und daher müssen auch alle $f_{hi} = 0$ sein, bis auf den Knoten in der Ecke, $f_{hi} = 10$

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_h^T \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = f_{hi} = f_i = 0 \,. \tag{3.71}$$

Das FE-Programm muss also schon kräftig jonglieren, um diese Eigenschaft zu garantieren, und das erklärt das **‚Chaos'** in Bild 3.23 *b*, denn all die recht konfus aussehenden Teile des Lastfalls $\boldsymbol{p}_h$ sind so **ausbalanciert**, dass sie keine Arbeit leisten, wenn man einen Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler oder vertikaler Richtung verschiebt. *Chapeau!*

Der Großteil der FE-Lasten $\boldsymbol{p}_h$ ist für das FE-Programm im Sinne der Energiemetrik null, es sind ‚Schnipsel', die keine Knotenkräfte f_{hi} generieren.

Bemerkung 3.3. Die *shape forces* $\boldsymbol{p}_i$ sind bei einer Scheibe Flächenkräfte und Linienkräfte und die virtuelle Arbeit dieser Kräfte ist daher eigentlich eine Summe aus Gebietsintegralen und Linienintegralen über die Kanten Γ der Elemente, auf denen der Knoten liegt, zu dem φ_i gehört

$$f_{hi} = \int_\Omega \ldots d\Omega + \int_\Gamma \ldots ds \,. \tag{3.72}$$

Die Schreibweise (3.71) ist eine zusammenfassende Kurzschreibweise für all diese Integrale.

3.14 Wie die Lawine ins Rollen kam

Wenn wir die Gleichung $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ als die Grundgleichung der finiten Elemente ansehen, dann stimmt das mit dem Zugang in der **Originalarbeit** von *Turner et alt.* (1956) [296] überein. Die Autoren betrachteten damals ein ***CST-Element*** wie in Bild 3.26 und sie leiteten eine Matrix $\boldsymbol{S}$ her, die die drei konstanten Spannungen in dem Element, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$, mit den Knotenverschiebungen der drei Ecken verknüpft[7]

$$\boldsymbol{\sigma}_{(3)} = \boldsymbol{S}_{(3\times 6)} \boldsymbol{u}_{(6)} \,. \tag{3.73}$$

[7] Wir orientieren uns hier an der Darstellung von Kurrer in [182] S. 882-883.

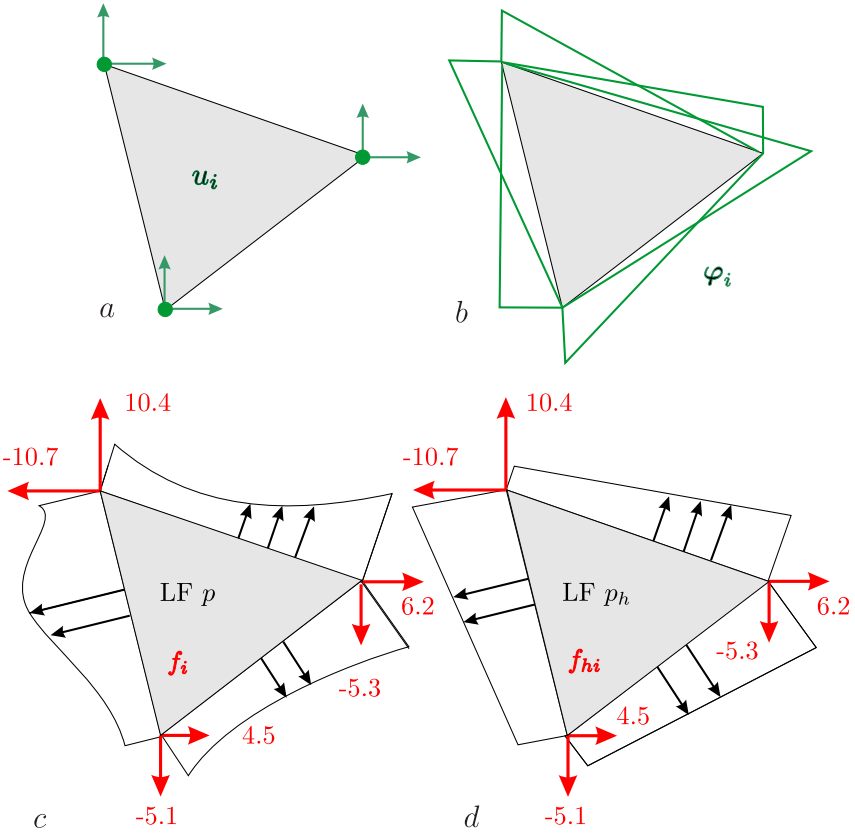


Bild 3.26. CST Element mit Randlasten, die beiden LF sind bezüglich den $\boldsymbol{\varphi}_i$ äquivalent, $f_i = f_{hi}$, sie werfen dieselben Schatten, **a)** Freiheitsgrade, **b)** *shape functions* (z.T. wegen besserer Sichtbarkeit nach unten und links geklappt), **c)** Originalbelastung, **d)** FE-Lastfall p_h

Die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ sind die Spannungen, die durch eine Verschiebung $\boldsymbol{u}$ der Knoten in dem Element entstehen. Die treibenden Kräfte sind dabei Randkräfte, Volumenkräfte = $\mathbf{0}$ gibt es keine. Als nächstes haben die Autoren die sechs äquivalenten Knotenkräfte, den Vektor $\boldsymbol{f}_h$, berechnet, der zu diesen Kräften gehört, sie haben also die Randkräfte (den Spannungsvektor $\boldsymbol{Sn}$) mit den sechs (3×2) horiz. + vertik. Einheitsverformungen $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ der 3 Knoten überlagert (Randintegrale), *Kraft* $\times$ *Weg*, was auf eine Matrix $\boldsymbol{T}$ führte

$$\boldsymbol{f}_{h(6)} = \boldsymbol{T}_{(6\times3)}\boldsymbol{\sigma}_{(3)} \tag{3.74}$$

oder mit (3.73) auf die Beziehung

$$\boldsymbol{f}_{h(6)} = \boldsymbol{T}_{(6\times3)}\boldsymbol{S}_{(3\times6)}\boldsymbol{u}_{(6)}\,, \tag{3.75}$$

und das ist genau die 6×6 Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{TS}$ des *CST-Element*. Dass hier die Steifigkeitsmatrix auftaucht, deren Einträge virtuelle *innere* Energien sind, obwohl doch eigentlich nur ‚außen' gerechnet wurde, beruht auf dem *außen = innen*, das die erste Greensche Identität garantiert.

Bezeichnet

$$\delta W_e(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_i) \bullet \boldsymbol{\varphi}_j \, ds =: f_{ij} \tag{3.76}$$

die Arbeit der ***tractions*** $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\varphi}_i)\,\boldsymbol{n}$ = Spannungstensor $\times$ Randnormale, also der Randspannungen des Feldes $\boldsymbol{\varphi}_i$, auf dem Weg $\boldsymbol{\varphi}_j$, dann gilt

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \delta W_e(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) - \delta W_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = f_{ij} - k_{ij} = 0 \tag{3.77}$$

und somit in der Summe

$$f_{hi} = \delta W_e(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = \sum\nolimits_j f_{ij}\, u_j = \sum\nolimits_j k_{ij}\, u_j \,. \tag{3.78}$$

Die Elemente k_{ij} einer Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ kann man als virtuelle innere Arbeit wie als virtuelle äußere Arbeit f_{ij} lesen.

Das $k_{11} = \delta W_i(\varphi_1, \varphi_1)$ einer Balkenmatrix

$$k_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{EI}\, dx = a(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{12\,EI}{l^3} \cdot 1 = \delta W_e(\varphi_1, \varphi_1) = f_{11} \tag{3.79}$$

ist genauso groß, wie die Arbeit, die die Kraft $12\,EI/l^3$ – das ist die Kraft, die den Knoten um eins nach unten drückt – auf dem Weg $\varphi_1(0) = 1$ leistet.

Die ‚erste' Steifigkeitsmatrix in der Geschichte der FEM war also eine Tabelle von **äußeren Arbeiten**. Erst die Äquivalenz $\delta W_i = \delta W_e$ führt auf die Interpretation, wie wir Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{K}$ heute lesen, $k_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)$.

Bemerkenswert ist dabei, wie **simpel** die finiten Elemente begonnen haben, keine potentielle Energie, kein Galerkin, keine höhere Mathematik, sondern ein uraltes Prinzip, das **Prinzip Waage**, die ‚Wackeläquivalenz'

$$\boxed{\delta W_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varphi}_i) = \delta W_e(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) \qquad \text{der Start der FEM}} \tag{3.80}$$

hat die Lawine ins Rollen gebracht[8].

3.15 Finite Elemente mit Betti

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass man bei 1-D Problemen auch über den Satz von Betti zu den finiten Elementen kommen kann

[8] Erst später, als die Mathematiker an Bord kamen, hat man erkannt, dass man die Elementansätze als finite Funktionen deuten konnte und dass die Wackeläquivalenz $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ dem $\delta\Pi = 0$ der potentiellen Energie entspricht.

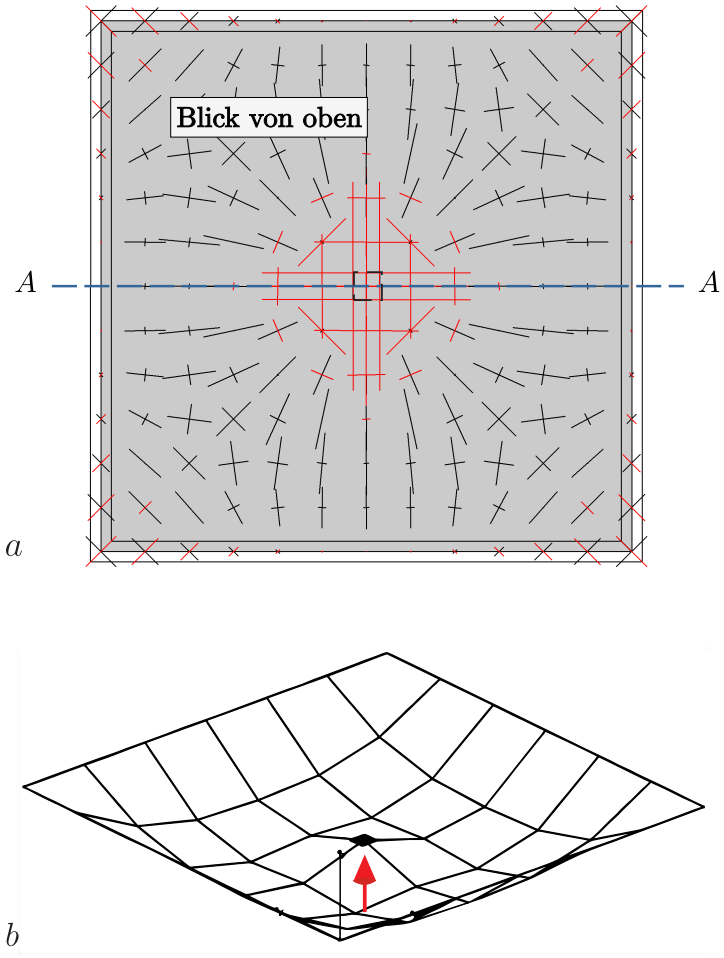


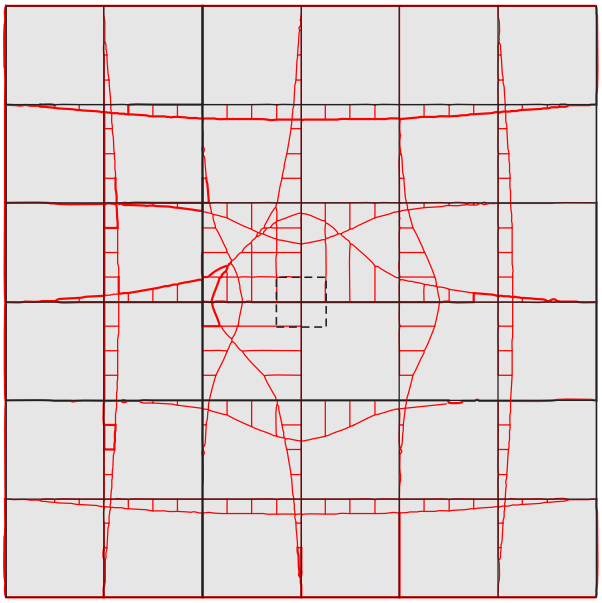
Bild 3.27. Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstütze im LF g, **a)** Hauptmomente, **b)** Biegefläche mit äquivalenter Knotenkraft in der Stütze, **c)** Längsschnitt durch die Platte mit den FE-Lasten (symbolische Darstellung). Die äquivalente Knotenkraft im mittleren Bild steht stellvertretend für die aufwärts gerichteten Flächenlasten im Bereich der Stütze, die eigentlich die Platte halten (WINFEM-P)

Blick auf die Platte

1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18

a

Elementlasten [kN/m^2] ↓↑



b

Linienkräfte [kN/m] stützend ↑

Bild 3.28. Der FE-Lastfall p_h, das ist der LF, den das FE-Programm für den LF g setzt, $f_i = (g, \varphi_i) = (p_h, \varphi_i) = f_{hi}$, **a)** die Zahlen sind die mittleren Flächenkräfte in den Elementen, im Bereich der Innenstütze sind sie negativ, dort stützen die Flächenkräfte also die Platte, **b)** ebenso wie die Linienkräfte längs eigentlich allen Elementkanten (rote Farbe); die Linienmomente des LF p_h längs der Linien sind nicht dargestellt (WINFEM-P)

$$\mathscr{B}(w_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots , \tag{3.81}$$

was aber im Ergebnis dasselbe ist. Es ist so, als ob man die Wechselwirkungsenergie

$$a(w_h, \varphi_i) = f_i \tag{3.82}$$

partiell integriert (auf $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_i, x_{i+1}]$), also das δW_i durch äußere Arbeit δW_e ersetzt

$$a(w_h, \varphi_i) = [V(\varphi_i) w_h - M(\varphi_i) w_h']_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + P_i \, w_h(x_i) \, . \tag{3.83}$$

Die *shape function* lebe im Intervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ und P_i sei die Kraft, die den Knoten x_i um Eins nach unten drückt, also $EI \, \varphi_i^{IV} = P_i \, \delta(y - x_i)$. Wenn φ_i eine Knotenverdrehung ist, dann ist sinngemäß zu setzen $M_i \, w_h'(x_i)$.

3.16 Der FE-Lastfall bei Platten

Der FE-Lastfall und seine Interpretation ist bei Platten ähnlich ambivalent wie bei Scheiben, wie die Bilder 3.27 und 3.28 zeigen. Die als **Stützenkraft** ausgewiesene Knotenkraft f_i im Ausdruck suggeriert, dass die Platte in der Mitte punktgenau von einer Einzelkraft gehalten wird, aber an der Verteilung der FE-Lasten p_h in Bild 3.28 sieht man, dass das symbolisch zu nehmen ist. Rechnerisch sind es aufwärts gerichtete **Flächen- und Linienkräfte** nahe der Stütze, die die Platte halten, keine Einzelkraft.

Wäre die Knotenkraft f_i eine echte Einzelkraft, dann müssten die Schubkräfte v_n in der Platte bei Annäherung an die Stütze unendlich groß werden, $v_n = f_i \cdot 1/(2\,\pi\, r)$, weil anders die Bilanz[9]

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\,\pi} v_n \, r \, d\varphi = f_i \tag{3.84}$$

nicht einzuhalten ist, siehe Bild 6.6. Aber die *shape functions* $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ sind Polynome und die können sich nicht wie $1/r$ in einem Knoten zusammenschnüren.

Die Knotenkraft f_i im Ausdruck ist eine **äquivalente Knotenkraft**, also ein Arbeitsäquivalent im Sinne von ‚soviel Arbeit wie eine Einzelkraft f_i auf dem Weg 1 Meter leisten würde'.

Mit der Bemessung selbst hat die Stützenkraft $f_i = (p, \varphi_i)$ nichts zu tun, weil die Bemessungs-Momente m_{xx}, m_{xy} und m_{xy} und Querkräfte q_x und q_y in der Platte von dem FE-Lastfall p_h stammen, siehe Bild 3.28, bei dem eben Flächen- und Linienkräfte die Platte stützen und kein f_i, aber der Ingenieur wird natürlich mit der Knotenkraft f_i einen Durchstanznachweis führen und sie auch als Stützenkraft weiterleiten.

[9] Integral von v_n über immer enger gezogene Kreise, $r \to 0$, siehe Kap. 6.3

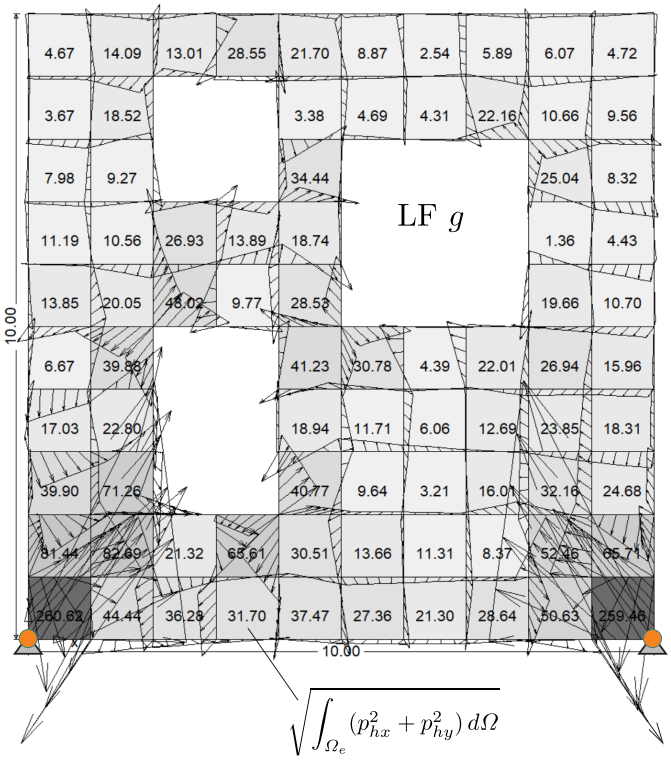


Bild 3.29. Wandscheibe. Das ist der zum LF g wackeläquivalente FE-Lastfall p_h, $f_i = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\varphi}_i) = (\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = f_{hi}$, p_{hx} und p_{hy} sind elementweise konstant (WINFEM)

3.17 Realism

Uns scheint, dass diese Ambivalenz der finiten Elemente zu wenig diskutiert wird. Ein FE-Modell ist ein ***Ersatzmodell*** und es ist gar nicht eindeutig geklärt, wie man die FE-Ergebnisse auf das reale Tragwerk zu übertragen hat.

Wie stellen sich die Prüfingenieure zu der Tatsache, dass die FE-Programme gar nicht den Originallastfall lösen, sondern einen Ersatzlastfall? Diesen kann man sich auf dem Bildschirm anzeigen lassen, siehe Bild 3.23, und so hätte jeder Prüfingenieur ganz bequem die Möglichkeit die Güte einer FE-Berechnung zu kontrollieren. Was wäre besser als ein solcher direkter Vergleich?

Dem seien nun aber alle Sachverständigen vor, denn das gäbe wahrscheinlich mehr Unfug als dass es nützt. **Zwei verschiedene, aber wackeläquivalente Lastfälle werfen gleiche Schatten, $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$.** Das ist der Ansatz hinter den finiten Elementen und die Wackeläquivalenz, die sieht man nicht

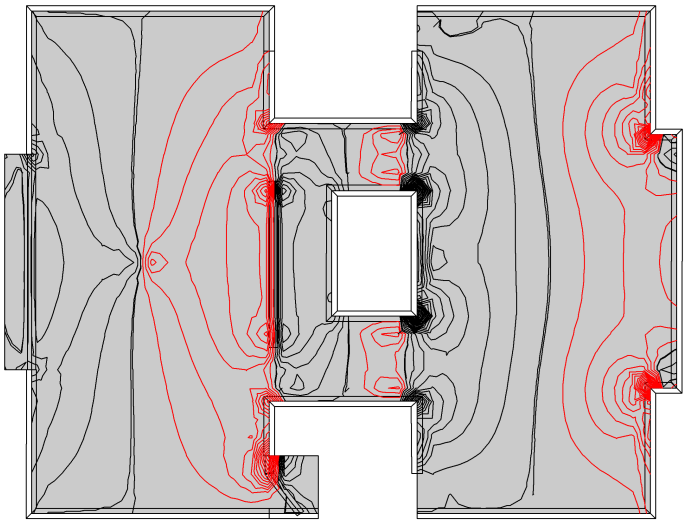


Bild 3.30. Querkräfte q_x in einer Platte (BE-PLATTE)

auf dem Bildschirm, deswegen tun die FE-Programme gut daran die beiden Lastfälle $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p}_h$ nicht nebeneinander auf dem Bildschirm zu zeigen, wie wir das in Bild 3.23 getan haben[10]. Der Prüfingenieur sieht nur die Diskrepanz $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h$ ‚in der Fläche', aber er sieht nicht, dass der scheinbar chaotische FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ so austariert ist, dass die $f_{hi} = (\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i)$ in den freien, unbelasteten Knoten null sind, wie beim Originallastfall. Er sieht nicht die Bewegungen $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Da, wo der Massivbauer bei seinem Werkstoff ist, da wird, wenn man sich den Eurocode anschaut, mit der ‚Goldwaage' gemessen. Bis zum letzten Zuschlagskorn wird, so hat man als Laie den Eindruck, modelliert und man bestaunt den Ernst und die Wissenschaftlichkeit, mit der das geschieht.

Der Statiker aber stutzt. Wissen die Autoren des Eurocodes, dass die Schnittkräfte auf Näherungsrechnungen basieren? Wissen die Autoren, wie FE-Programme rechnen, welche Modelle hinter den Ergebnissen stecken, wie die Elementwahl die Ergebnisse beeinflusst? Welchen Einfluss das FE-Netz auf die Ergebnisse hat? Und vor allem, was ein Punktwert wie die Spannung $\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) = (G_h, p)$ rechnerisch bedeutet?

Wenn man sieht, mit welcher Akkuratesse heute der Durchstanznachweis bei Platten geführt wird, [79], welcher Aufwand bei der Schnittführung getrieben wird, um ja alle Ecken und Kanten mitzunehmen – die Software-Häuser freut es – und wenn man dagegen weiß, **wie wacklig FE-Querkräfte sind**, siehe Bild 3.30, dann fragt man sich, ob die Relationen noch stimmen, ob die Schraube nicht überdreht ist. Offiziell kann man zwar auf der Materialseite keine Rücksicht darauf nehmen, dass Kräfte nur näherungsweise bekannt sind,

[10] FE-Programme, die adaptiv rechnen, nutzen diese Information schon.

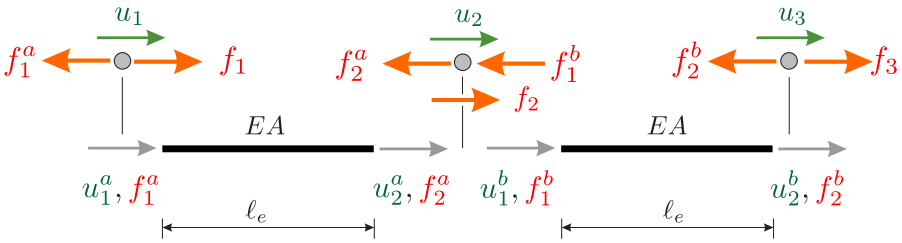


Bild 3.31. Kopplung zweier Stabelemente

man muss so tun, als ob sie exakt wären, aber exakte Resultate gibt es in der Praxis eben leider nicht und im Grunde ist es ein Unding die Dimensionierung und die Numerik getrennt zu behandeln. Statt sich um die vierte Stelle nach dem Komma zu kümmern, sollte man erst einmal sicherstellen, dass die erste sicher ist. Etwas mehr ***realism*** wäre unserer Meinung nach doch angesagt!

3.18 Kopplung von Bauteilen

Wenn man eine Scheibe an einem Stab – im Sinne eines Zugankers – festmacht und den Koppelknoten $\delta u_i = 1$ probehalber auslenkt, alle anderen Knoten bleiben fest, dann bedeutet $f_i^{Stab} = f_i^{Scheibe}$, dass die inneren Energien in den beiden Bauteilen dabei gleich groß sind. Es ist aber keine statische Kopplung, weil das f_i auf der Seite der Scheibe keine echte Einzelkraft ist, es ist eine Energie, ein Energie-Quantum.

Nur bei eindimensionalen Problemen, $EIw^{IV} = p$, $-EAu'' = p$ etc., und eben konstanten Steifigkeiten, sind die f_i (dimensionsbereinigt) echte Knotenkräfte.

Wie sich die einzelnen Elemente eines Netzes zu einem Ganzen fügen, kann man mit Hilfe der ***Inzidenzmatrizen*** verfolgen.

Die beiden Elementmatrizen des Stabes in Bild 3.31 stehen auf der Diagonalen einer 4×4 Matrix[11] $\boldsymbol{K}_{loc}$

$$\boldsymbol{f}_{loc} = \begin{bmatrix} f_1^a \\ f_2^a \\ f_1^b \\ f_2^b \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{u}_{loc} \,. \tag{3.85}$$

Die Verschiebungen der Elementenden sind an die Knotenverschiebungen u_1, u_2, u_3 gekoppelt

$$\boldsymbol{u}_{loc} = \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \,. \tag{3.86}$$

[11] Alle Elementmatrizen einzeln, unverbunden und $\boldsymbol{u}_{loc}$ und $\boldsymbol{f}_{loc}$ sind die Weg- und Kraftgrößen an den Elementenden.

Die Kräfte $\boldsymbol{f}_{loc}$ und die Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ müssen bei einer virtuellen Verrückung $\boldsymbol{\delta u}$ bzw. $\boldsymbol{\delta u}_{loc} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\delta u}$ die gleiche Arbeit leisten

$$\boldsymbol{f}_{loc}^T \boldsymbol{\delta u}_{loc} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\delta u} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{f}_{loc}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\delta u} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\delta u}\,, \tag{3.87}$$

was $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}$ ergibt und das sind natürlich gerade die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Stabendkräften und den Knotenkräften f_i

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^a \\ f_2^a \\ f_1^b \\ f_2^b \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}\,. \tag{3.88}$$

Multipliziert man (3.85) von links mit $\boldsymbol{A}^T$ und beachtet $\boldsymbol{u}_{loc} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ so kann man an $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}$ die **Gesamtsteifigkeitsmatrix** ablesen

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{A} = \frac{EA}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

Wir notieren noch: $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \lceil 1,\, 2,\, 1 \rfloor$ ist eine Diagonalmatrix der Größe $n \times n$, wenn n die Zahl der globalen FG ist. Der Eintrag d_i auf der Diagonalen ist gleich der Zahl der lokalen FG, die mit dem globalen FG u_i verbunden sind. Bei dem obigen Beispiel stehen die Zahlen $1, 2, 1$ auf der Diagonalen von $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$.

3.19 Äquivalente Spannungs Transformation

Die Kopplung von gleichartigen Elementen untereinander stellt also kein Problem dar. Schwieriger ist es aber z.B. Stützen (Balken) und Scheiben miteinander zu koppeln, weil Balkenenden Drehfreiheitsgrade haben, die den Knoten einer Scheibe fehlen.

Die ***Äquivalente Spannungs Transformation*** (EST) von Werkle, [309], löst dieses Problem auf sehr elegante, ja natürliche Weise. Bei ihr zäumt man das Pferd sozusagen von hinten auf. Normalerweise geht man bei der Formulierung einer Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{A} \tag{3.90}$$

ja so vor[12], dass man erst die Kopplung zwischen den Weggrößen beschreibt,

$$\boldsymbol{u}_{loc} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{Knoten} \tag{3.91}$$

und dann mit der Transponierten $\boldsymbol{A}^T$ die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen formuliert

[12] Auf der Diagonalen von $\boldsymbol{K}_{loc}$ stehen die Elementmatrizen, siehe (3.85).

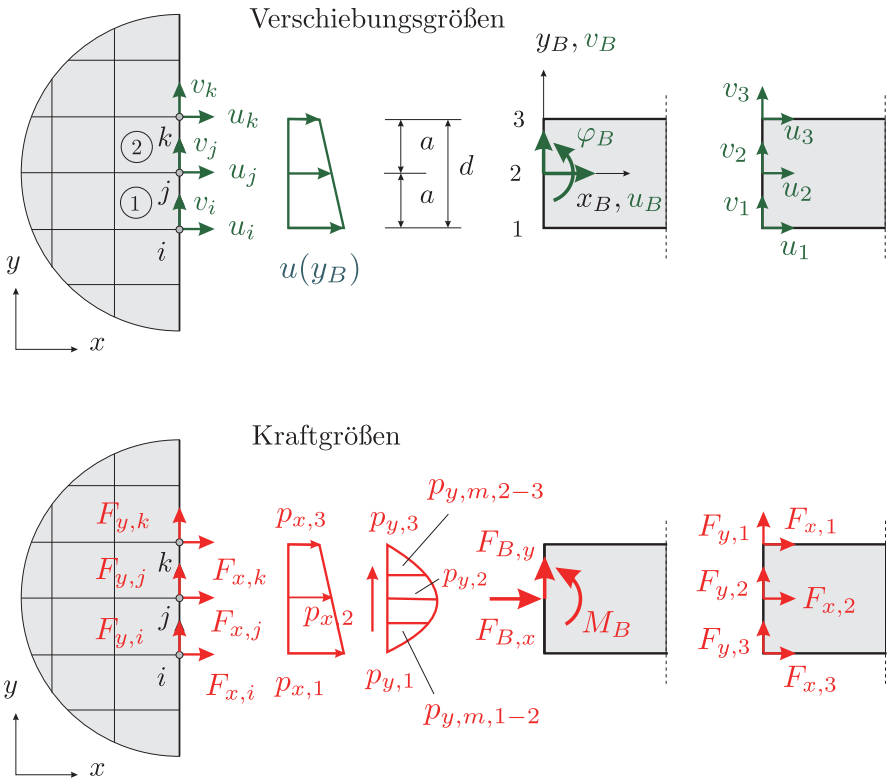


Bild 3.32. Kopplung Scheibe – Balken. Die drei Schnittkräfte $F_{B,x}, F_{B,y}, M_B$ des Balkens werden in äquivalente Knotenkräfte $F_{x,i}, F_{y,i}$ rechts umgerechnet, so dass sie zur Scheibe links passen [310]

$$\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}\,. \tag{3.92}$$

Erst berechnet man also $\boldsymbol{f}_{loc} = \boldsymbol{K}_{loc}\,\boldsymbol{u}_{loc} = \boldsymbol{K}_{loc}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}_{Knoten}$ und dann über $\boldsymbol{\delta u}^T\,\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{\delta u}_{loc}^T\,\boldsymbol{f}_{loc}$ daraus $\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{Knoten}$.

Bei der äquivalenten Spannungs Transformation ist es umgekehrt. Bei ihr wird zuerst die Abbildung (3.92) formuliert – hier ist das statische Verständnis und das Geschick des Ingenieurs gefragt – und diese Matrix $\boldsymbol{A}^T$ wird dann in transponierter Form in (3.91) übernommen.

An dieser Stelle zeigt sich – und das war vorher nicht so deutlich – dass es **zwei Wege** gibt, den Zusammenhang $\boldsymbol{A}$ der Elemente zu beschreiben, den geometrischen Pfad $\boldsymbol{u}_{Knoten} \to \boldsymbol{u}_{loc}$ oder den statischen Pfad $\boldsymbol{f}_{loc} \to \boldsymbol{f}_{Knoten}$.

Beispiel 3.2. Wie man diese Technik nutzen kann, um eine Steifigkeitsmatrix herzuleiten, die die Kopplung eines Balkens an eine Scheibe beschreibt, soll das folgende Beispiel zeigen.

Die Situation ist in Bild 3.32 dargestellt; drei Knoten mit den Freiheitsgraden u_i, v_i liegen dem Balken gegenüber. Beim **geometrischen Pfad** (3.91)

macht man die Annahme, dass der Querschnitt des Balkens eben bleibt, also mit $a = d/2$, halbe Trägerhöhe,

$$u_1 = u_B + a\,\tan\varphi_B, \quad u_2 = u_B, \quad u_3 = u_B - a\,\tan\varphi_B, \quad v_1 = v_2 = v_3 \tag{3.93}$$

und damit lautet (3.91) ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \tan\varphi_B \end{bmatrix}. \tag{3.94}$$

Entscheidend ist, dass hier ein linearer Verlauf der Verschiebungen angenommen wurde – eine Annahme, die natürlich so nicht richtig ist. Richtig im Sinne der Elastizitätstheorie wäre ein Verschiebungsverteilung, wie sie sich bei einer Berechnung des Anschlusses als Scheibe, d.h. der Modellierung des Balkens mit Scheibenelementen, einstellt.

Beim **statischen Pfad** geht man dagegen über die Kräfte. Die Schnittgrößen F_{Bx}, F_{By} und M_B, siehe Bild 3.32, erzeugen, bei Ansatz der Biegebalkentheorie, die Spannungen[13] (Rechteckquerschnitt, t = Wandstärke)

$$p_x = \frac{F_{B,x}}{A} - \frac{M_B}{I}\,y_B = \frac{F_{B,x}}{d\,t} - \frac{12\,M_B}{t\,d^3}\,y_B \tag{3.95}$$

$$p_y = \frac{3}{2}\,\frac{1}{d\,t}(1 - 4\,\frac{y_B^2}{d^2})\,F_{B,y}\,, \tag{3.96}$$

in der Stirnfläche des Balkens, die man in äquivalente Knotenkräften $\boldsymbol{f}$ auf der Seite der Scheibe umrechnen kann und so kommt man zu einer Beziehung zwischen den Kräften auf den beiden Seiten des Schnittufers.

Bei dieser Technik werden erst aus dem Vektor $\boldsymbol{f}_B = \{F_{B,x}, F_{B,y}, M_B\}^T$ die Knotenwerte p_i der Spannungen σ und τ ermittelt. Die Knotenwerte fassen wir zu einem Vektor $\boldsymbol{p}$ zusammen und so kann der Übergang $\boldsymbol{f}_B \to \boldsymbol{p}$ mit einer Matrix $\boldsymbol{P}$ (wie Polynome) beschrieben werden.

Mit den y-Koordinaten der Punkte 1, 2 und 3 (Achse y_B bezogen auf den Schwerpunkt des Balkens)

$$y_{B,1} = -a, \qquad y_{B,2} = 0, \qquad y_{B,3} = a \tag{3.97}$$

erhält man mit den obigen Formeln die Knotenwerte der Spannungen zu

[13] Vorzeichen gemäß Bild 3.32

$$\begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{16\,t\,a^2} \begin{bmatrix} 8\,a & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a & 0 \\ 8\,a & 0 & 0 \\ 0 & 12\,a & 0 \\ 0 & 9\,a & 0 \\ 8\,a & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

oder

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{f}_B\,. \tag{3.99}$$

Die Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_S$ aus den als Linienlasten aufgefassten Spannungen p_x und p_y geschieht, wie es die Regel ist, durch die Überlagerung der Spannungen mit den *shape functions*. Das Ergebnis hat formal die Gestalt

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p} \tag{3.100}$$

mit einer Matrix, die wir $\boldsymbol{Q}$ (wie Quadratur) nennen.

Diese Beziehung wird zunächst für jedes Element separat ermittelt und daraus dann die Gesamtmatrix $\boldsymbol{Q}$ gebildet. Nach Bild 3.32 sind hier zwei Scheibenelemente zu berücksichtigen. Man erhält[14], am Element 1

$$\begin{bmatrix} F_{x,1}^{(1)} \\ F_{x,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{x,2} \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

und

$$\begin{bmatrix} F_{y,1}^{(1)} \\ F_{y,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{y,2} \end{bmatrix}. \tag{3.102}$$

Damit lautet am Element 1 die Beziehung

$$\begin{bmatrix} F_{x,1}^{(1)} \\ F_{y,1}^{(1)} \\ F_{x,2}^{(1)} \\ F_{y,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

und entsprechend am Element 2

$$\begin{bmatrix} F_{x,2}^{(2)} \\ F_{y,2}^{(2)} \\ F_{x,3}^{(2)} \\ F_{y,3}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix}. \tag{3.104}$$

[14] nach [312] Gleichung (4.78c, d), S. 259 und Gleichung (4.86a, b), S. 262

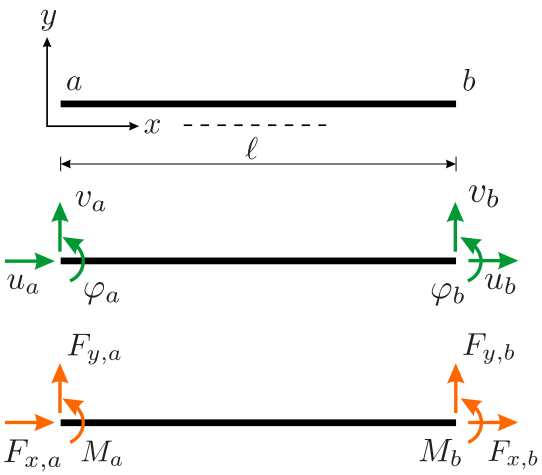


Bild 3.33. Stabelement

Den Vektor der Knotenkräfte, die auf die Scheibe an der Verbindung wirken, ergibt sich durch Addition der Elementkräfte der einzelnen Elemente, siehe Bild 3.32, und man erhält so die Matrix $\boldsymbol{Q}$ zu

$$\begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

oder

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}\,. \tag{3.106}$$

Die Kräfte $\boldsymbol{f}_S$ sind die Kräfte rechts in Bild 3.32. Mit (3.99) folgt weiter

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}_B = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{f}_B \tag{3.107}$$

und somit lautet die **Transformationsmatrix**

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 3/8 & 0 & 1/8 \\ 1/2\,a & 0 & 0 & 0 & -1/2\,a & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.108}$$

Die Weg- und Kraftgrößen am Stabende

$$\boldsymbol{f}_B = \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_B = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \varphi_B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_S = \begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_S = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

transformieren sich also wie

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}_{(3\times 6)} \boldsymbol{u}_S \qquad \boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)} \boldsymbol{f}_B \,. \tag{3.110}$$

Am Stab, siehe Bild 3.33, lauten die Beziehungen zwischen den Weg- und Kraftgrößen

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,a_1/\ell^2 & 6\,a_1/\ell & 0 & -12\,a_1/\ell^2 & 6\,a_1/\ell \\ 0 & 6\,a_1/\ell & 4\,a_1 & 0 & -6\,a_1/\ell & 2\,a_1 \\ -a_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\,a_1/\ell^2 & -6\,a_1/\ell & 0 & 12\,a_1/\ell^2 & -6\,a_1/\ell \\ 0 & 6\,a_1/\ell & 2\,a_1 & 0 & -6\,a_1/\ell & 4\,a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ v_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x,a} \\ F_{y,a} \\ M_a \\ F_{x,b} \\ F_{y,b} \\ M_b \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

mit

$$a_0 = \frac{EA}{\ell}, \quad a_1 = \frac{EI}{\ell}, \quad \ell = \text{Länge des Stabes.} \tag{3.112}$$

Das Balkenelement besitzt die Knoten a und b. Entsprechend wird die obige Steifigkeitsmatrix des Balkens nun in Untermatrizen, die sich auf die Knoten a und b beziehen, unterteilt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_a \\ \boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_b \end{bmatrix}. \tag{3.113}$$

Beim Anschluss des Knoten a an zwei Scheibenelemente wie in Bild 3.32 lauten die Weg- und Kraftgrößen im Knoten a in der Notation der EST

$$\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{u}_B = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \varphi_B \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{f}_B = \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix}. \tag{3.114}$$

Wenn die Verschiebungen in den finiten Elementen linear verlaufen, transformieren sich die Größen, s.o., gemäß

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}_{(3\times 6)} \boldsymbol{u}_S \tag{3.115}$$

mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ wie in (3.108). Setzen wir nun $\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_S$ in (3.113) ein, multiplizieren dann die erste Zeile von links mit $\boldsymbol{A}^T$, so ergibt sich mit

$$\boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)}\boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)}\boldsymbol{f}_B = \boldsymbol{f}_S \tag{3.116}$$

das Resultat

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_{aa}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_S \\ \boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_S \\ \boldsymbol{f}_b \end{bmatrix} . \tag{3.117}$$

Das ist eine 9×9 Matrix, 6 FG $\boldsymbol{u}_S$ an der Scheibe und 3 FG $\boldsymbol{u}_b$ am Balken, und die $\boldsymbol{f}_S$ sind die sechs Knotenkräfte an der Scheibe.

Die Steifigkeitsmatrix (3.117) ist nun im Knoten a auf die Freiheitsgrade des Scheibenmodells und im Knoten b auf die Freiheitsgrade des Stabes bezogen. Knoten b kann, falls er ebenfalls an ein Scheibenmodell angeschlossen ist, ebenfalls transformiert werden.

Zum Verständnis sei gesagt, dass der statische Pfad hier nur zur Herleitung der Matrix (3.117) benutzt wird. Der Zusammenbau aller Elementmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix erfolgt dann wie sonst auch.

Bemerkung 3.4. Der geometrische Pfad und der statische Pfad beruhen auf unterschiedlichen Annahmen, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Beim geometrischen Pfad werden die Verschiebungsverläufe vorgegeben, und die Spannungen der Scheibenelemente passen sich diesen Vorgaben an. Beim statischen Pfad werden dagegen die Spannungsverläufe vorgegeben und die Verschiebungen (hier die Punkte 1, 2 und 3) können sich anpassen und weichen dann aber von der linearen Verteilung des geometrischen Pfads ab.

Beim geometrischen Pfad ist die Verbindung zu steif, beim statischen Pfad ist sie zu weich. Der geometrische Pfad bedeutet jedoch – insbesondere bei der Verbindung von Stützen mit Platten wie bei einer Flachdecke – einen starren Einschluss im FE-Modell. Die FEM kommt jedoch mit starren Einflüssen nicht gut klar, d.h. es ergeben sich im Verbindungsbereich Spannungssingularitäten und damit stark fehlerhafte Elementspannungen. Dies ist beim statischen Pfad nicht der Fall und daher sollte man dem statischen Pfad den Vorzug geben. Für weitere Details verweisen wir auf [312].

3.20 Die Koppelfuge

Die *insider* wissen es, aber wir wollen es hier trotzdem ansprechen: Die Kopplung zwischen unterschiedlichen Bauteilen ist keine ‚Klebeverbindung', bedeutet nicht notwendig gleiche Verformungen und gleiche Schnittkräfte, sondern es ist eine **energetische Kopplung**. Bei einer Verrückung $\delta u = \varphi_i$ eines Knotens in der Koppelfuge gilt $\delta W_i = f_i$ (über alle beteiligten Bauteile hinweg), aber daraus folgt nicht, dass die Schnittkräfte in der Koppelfuge punktweise gleich sind und selbst die Verformungen gegenüberliegender Schnittufer müssen nicht punktweise gleich sein; das gilt nur für die Knoten, aber nicht notwendig für die Punkte dazwischen.

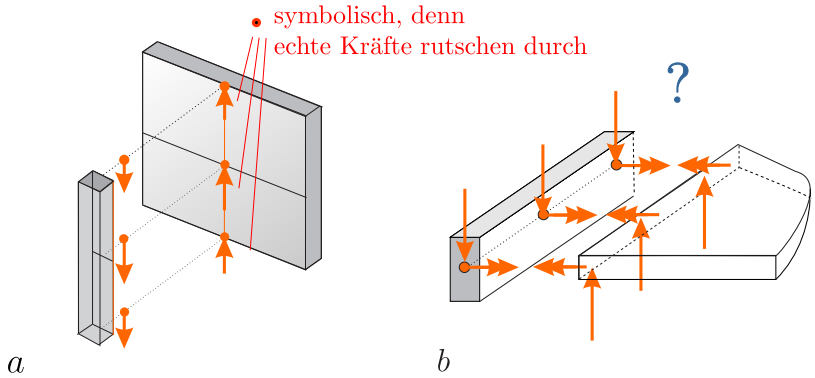


Bild 3.34. Kopplung zwischen **a)** Stab und Scheibe, **b)** Balken und Platte, [130]

Angenommen man schweißt einen Steg (quadratische Stabelemente) auf ein Blech (bilineare Scheibenelemente), Bild 3.34 *a*. Die finiten Elemente rechnen das, aber die Längsverschiebung der Stabelemente stimmt i.a. nur in den Knoten mit der Bewegung der Scheibe überein.

Aber auch auf die Idee, dass doch wenigstens die Knotenkräfte übertragbar sein müssen, ist kein Verlass, weil eine Scheibe Einzelkräfte nicht festhalten kann, sie enden im Punkt ∞. Knotenkräfte bei einer Scheibe sind statisch eine **‚Fiktion‘**. Die f_i sind **Energie-Quanten**, keine Kräfte.

In Bild 3.34 *b* wird ein Balken an eine schubstarre Platte (Kirchhoff) angekoppelt, aber die Knotenmomente des Balkens lassen sich nicht auf die Plattenseite übertragen, weil die Platte Einzelmomenten keinen Widerstand entgegensetzt (ein unendlicher Drehwurm, $\varphi = \infty$, wäre die Folge).

Würden wir die Platte schubweich rechnen, dann könnten wir noch nicht einmal die Knotenkräfte übertragen, weil Einzelkräfte bei einer schubweichen Platte, wie bei einer Scheibe, einfach **‚durchrutschen‘** – null Widerstand.

Oder man denke an den Brückenbau, stelle sich einen massiven Randträger vor, der auf Bohrpfählen liegt und in den die Brückenplatte einbindet. Im naiven Sinn passt hier nichts zusammen, weil die 3-D Elemente des Randträgers die Brückenplatte durchdringen, sie verformen sich anders als der Rand der Platte, und die Knotenkräfte der Bohrpfähle schießen ‚pfeilscharf‘ durch den (aus ihrer Sicht) butterweichen Beton des Randträgers.

3.21 Gleichgewicht in den Knoten?

Auch wenn wir uns wiederholen: Die Gleichung $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$ formuliert nicht das Gleichgewicht der Knotenkräfte. Und das gilt auch für die Knoten in der Koppelfuge. Die Gleichung bedeutet, dass bei der Auslenkung der Knoten in der Koppelfuge die virtuelle innere Energie (= virtuelle äußere Energie) der beteiligten Elemente in der Summe gleich f_i ist, $\delta W_i = \delta W_e = f_{hi} = f_i$. Die

Bauteile tauschen sich also nur über $\delta W_i = f_i$, das **‚schwache Gleichheitszeichen'**, aus und über die synchron geschalteten Knotenverschiebungen.

Nur in der Stabstatik und auch nur dann, wenn das Programm die exakten Steifigkeitsmatrizen verwendet, kann man die Gleichung als Gleichgewicht in den Knoten interpretieren. Bei Flächentragwerken geht das nicht, einfach weil echte Knotenkräfte das Material zum Fließen bringen würden. Keine Scheibe, keine Platte (außer der schubstarren Kirchhoffplatte) hält Einzelkräfte oder gar Einzelmomente aus, sie rutschen einfach durch.

Eigentlich müsste jetzt an dieser Stelle ein langes Kapitel über das Modellieren mit finiten Elementen folgen, nur gibt es dazu schon einen Text, [130], und inzwischen ist es auch so, dass die Kollegen aus dem Massivbau und Stahlbau selbst erkannt haben, dass das Thema ihrer Aufmerksamkeit wert ist, [110], [178], [192], [210], [256]. Weitere Bücher werden sicherlich folgen.

Wir wollten hier nur auf die Problematik hinweisen, daran erinnern, dass das **Knotenkraftmodell** ein **Schönwettermodell** ist, das über weite Strecken bequem und einfach zu handhaben ist und vieles vereinfachen kann, aber eben – von 1-D Problemen, EA und EI konstant, abgesehen – doch nur ein **Modell als ob** ist[15].

3.22 Einflussfunktionen

Wir kommen nun zu den Einflussfunktionen, einem zentralen Thema für den Erfolg der *computational mechanics*, denn die Genauigkeit einer FE-Berechnung hängt davon ab, siehe Kapitel 3.2, wie gut sich die Einflussfunktionen auf einem Netz darstellen lassen. Die Einflussfunktionen sind der Prüfstein für die FE-Programme.

Daneben sind Einflussfunktionen aber auch der Schlüssel zum Verständnis eines Tragwerks, denn sie repräsentieren die Sensitivität der Struktur. Und glückliche Fügung:

Die eigentliche Stärke des Computers ist die Visualisierung

Natürlich, ohne Numerik geht es nicht, aber es ist doch erst die grafische Darstellung der Ergebnisse, das Bild der verschobenen Struktur, die *plots* der Schnittkräfte und der Hauptspannungen, die das Tragverhalten anschaulich machen. Es dürfte wohl keine Disziplin geben, die so stark am Bild hängt und vom Bild geprägt ist – die so in der Anschauung lebt – wie die Statik[16].

Statik ist ja Kinematik, ist Leben, und so regt die Bewegung, die in den Einflussfunktionen steckt, uns zum Mitdenken an, zum Nachspielen des Tragverhaltens bis wir sicher sind: ‚Ja, so muss es sein'.

[15] Ein Programm ohne Knotenkräfte lässt sich an Bauingenieure nicht verkaufen, aber aus mathematischer Sicht ist das eine ‚Grenzüberschreitung'. Intern werden aus den f_i Flächenkräfte. In dem PDE Modeler von MATLAB™ kann man nur Flächen- und Linienlasten eingeben.

[16] Der erste Autor wollte einmal Grafiker werden.

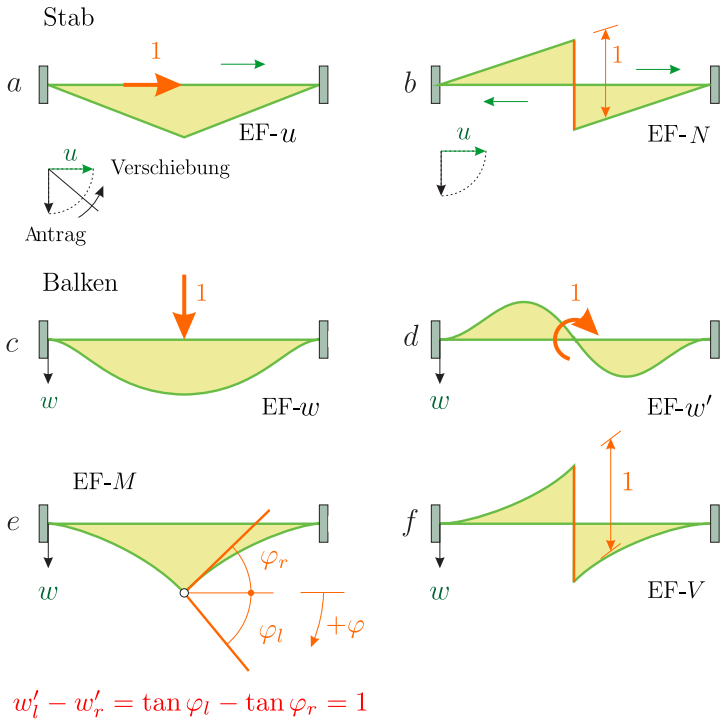


Bild 3.35. Lokale Einflussfunktionen am eingespannten Stab bzw. Balken

Und Einflussfunktionen lassen sich mit einem Computer doch ganz leicht berechnen. Das Programm löst einfach das System

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}\,, \tag{3.118}$$

das dasselbe System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ wie immer ist, nur dass wir die u_i jetzt g_i nennen und statt f_i schreiben wir j_i. Dieser Namenswechsel erleichtert das Operieren mit FE-Einflussfunktionen.

Schon an dieser Stelle sei betont, dass man bei der Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen **das System nicht verändert**, also kein Lager wegnimmt und keine Gelenke einbaut. Die Generierung der exakten Einflussfunktionen (in der Stabstatik) geschieht rein ‚software-seitig'.

Um z.B. die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Rahmen zu berechnen, wird das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ aufgestellt und gelöst. Die j_i sind die Momente der *shape functions* im Aufpunkt x und die g_i sind die Knotenwerte der Einflussfunktion. Im Riegel oder Stiel mit dem Aufpunkt wird nur noch die lokale Einflussfunktion für $M(x)$ dazu addiert, lokal = Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Element, siehe Bild 3.35 *e*. Die so generierte Ein-

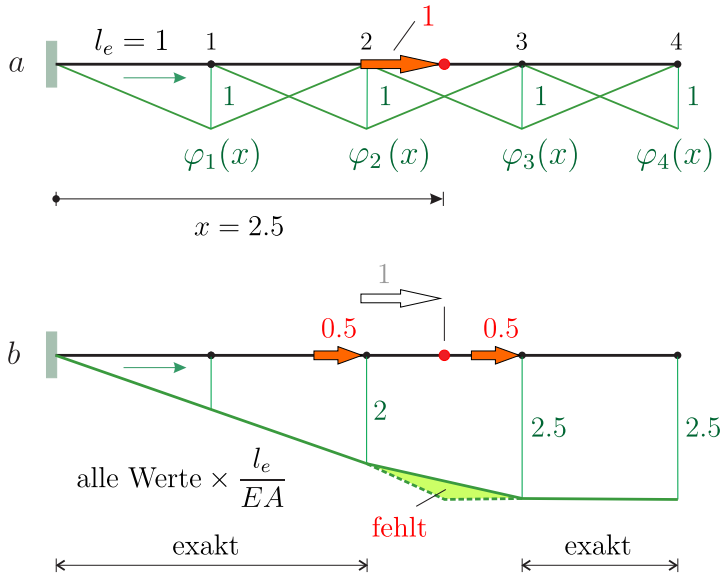


Bild 3.36. Berechnung der Einflussfunktion für eine Verschiebung $u(x)$, **a)** Dachfunktionen und Originalbelastung, **b)** Ersatzkräfte und daraus resultierende FE-Einflussfunktion

flussfunktion G_2 (2 bedeutet EF für ein Moment, 2. Abltg.) hat im Aufpunkt x genau den vorgeschriebenen Knick $G_2'(x_-) - G_2'(x_+) = 1$.

3.22.1 Beispiel

Unser erstes Probestück ist die Berechnung der Einflussfunktion für die **Längsverschiebung** $u(x)$ des Stabes in Bild 3.36 im Punkt $x = 2.5$. Die äquivalenten Knotenkräfte sind in diesem Fall die Verschiebungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ in dem Punkt $x = 2.5$ (genau genommen $1 \cdot \varphi_i(2.5)$)

$$\varphi_1(2.5) = 0 \qquad \varphi_2(2.5) = 0.5 \qquad \varphi_3(2.5) = 0.5 \qquad \varphi_4(2.5) = 0\,, \tag{3.119}$$

was auf das Gleichungssystem

$$\frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

für die Knotenverschiebungen g_i führt. Dieses System hat die Lösung

$$g_1 = 1 \qquad g_2 = 2 \qquad g_3 = 2.5 \qquad g_4 = 2.5 \qquad \times \frac{l_e}{EA}\,, \tag{3.121}$$

und somit hat die Einflussfunktion die Gestalt

$$G_0^h(y, x = 2.5) = \frac{l_e}{EA}\left[1 \cdot \varphi_1(y) + 2 \cdot \varphi_2(y) + 2.5 \cdot \varphi_3(y) + 2.5 \cdot \varphi_4(y)\right]. \tag{3.122}$$

Da x den festen Aufpunkt bezeichnet, heißt die Laufvariable jetzt y.

Der Verlauf der FE-Einflussfunktion ist, bis auf das Element in dem der Aufpunkt x liegt, exakt. Die Abweichung in dem Element beheben die Programme dadurch, dass sie zur FE-Lösung die lokale Einflussfunktion, siehe Kapitel 3.29, addieren

$$G_0(y, x) = G_0^h(y, x) + \text{lokale Einflussfunktion}. \tag{3.123}$$

So gelingt es den FE-Programmen **exakte Einflussfunktionen** für Stabtragwerke zu generieren – vorausgesetzt EA und EI sind konstant.

3.22.2 Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i

Warum sind bei dem obigen Beispiel die äquivalenten Knotenkräfte j_i (= f_i) die Werte der Ansatzfunktionen im Aufpunkt, $j_i = \varphi_i(2.5)$? Der Schlüssel hierzu liegt in der Definition der äquivalenten Knotenkräfte f_i.

Eine Knotenkraft f_i ist eine Arbeit, ein **Energie-Quantum**, und zwar die Arbeit, die die Belastung $p(x)$ auf dem Weg der Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ leistet

$$f_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx \qquad [\text{N·m}]\,. \tag{3.124}$$

Bei Einflussfunktionen steht auf der rechten Seite der Differentialgleichung aber ein Dirac Delta (eine in einem Punkt konzentrierte Linienlast)

$$-EA\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y, x) = \delta_0(y - x) \qquad \leftarrow\ [\text{N/m}]\,, \tag{3.125}$$

die einer Einzelkraft im Aufpunkt $x = 2.5$ gleichwertig ist. Sie ist sozusagen das p, das zur Einflussfunktion gehört. (Wir differenzieren auf der linken Seite nach y, denn das ist hier die Laufvariable). Jetzt rechnen wir und finden, dass die äquivalenten Knotenkräfte [N·m]

$$j_i = \int_0^l \underbrace{\delta_0(y - x)}_{[\text{N/m}]}\,\underbrace{\varphi_i(y)}_{[\text{m}]}\,\underbrace{dy}_{[\text{m}]} = \varphi_i(x) \qquad x = 2.5 \tag{3.126}$$

numerisch einfach die Werte der vier Ansatzfunktionen φ_i im Aufpunkt $x = 2.5$ sind; so kommt die Liste (3.119) zustande, siehe auch die Bilder 3.37 und 3.38.

Bemerkung 3.5. Eigentlich muss man, siehe (3.135), die j_i in Bild 3.37 *a* noch mit der jeweiligen konjugierten Größe multiplizieren

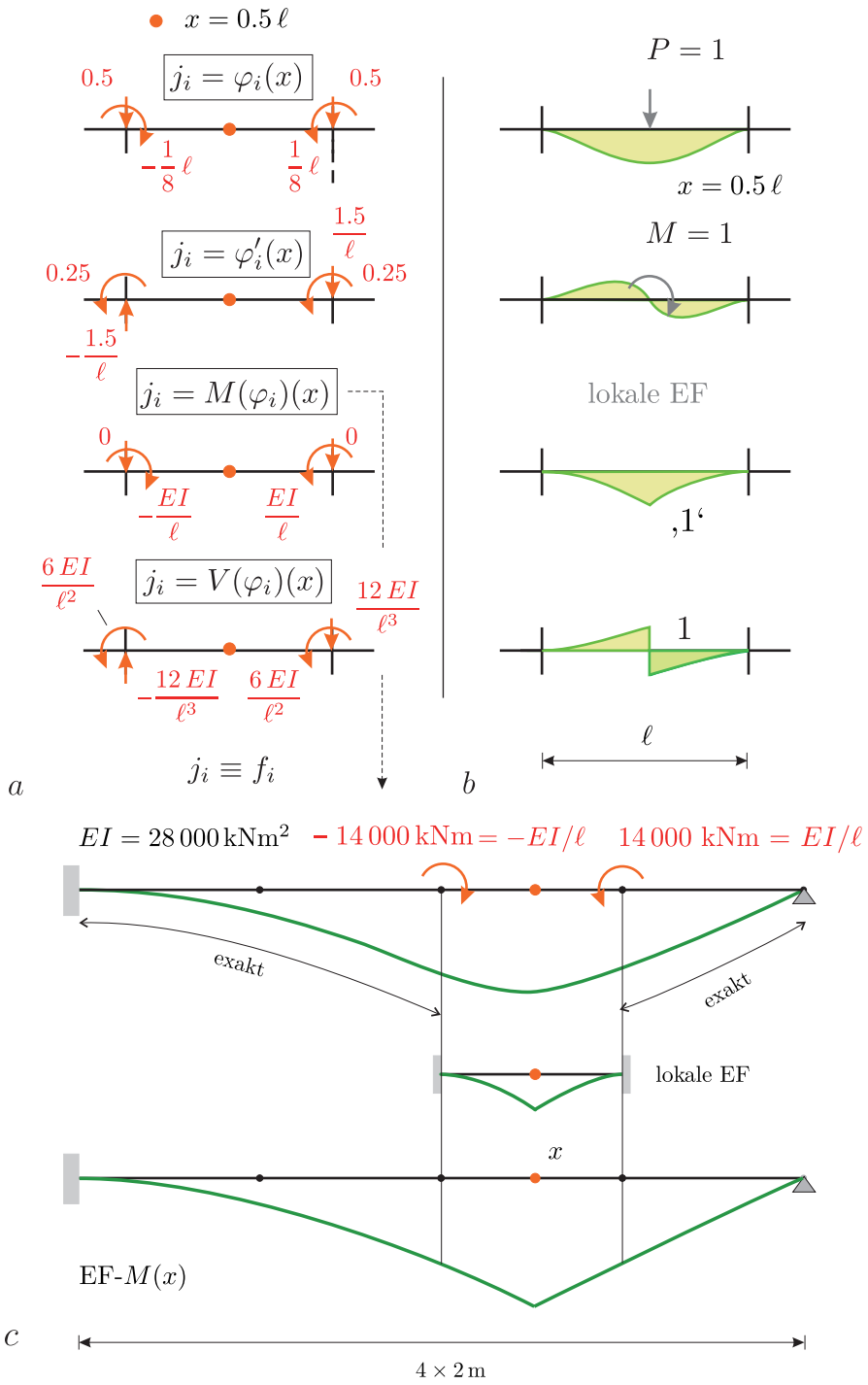


Bild 3.37. a) Die äquivalenten Knotenkräfte j_i zur Erzeugung der vier Einflussfunktionen für die Werte $w(x), w'(x), M(x), V(x)$ in der Mitte eines Balkenelements. Die j_i sind die Werte $\varphi_i, \varphi_i', M(\varphi_i), V(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen im Aufpunkt $x = 0.5\,\ell$. **b)** Wenn zu den FE-EF noch die lokalen EF rechts addiert werden, wie in Bild **c)** sind die EF auch im Element mit dem Aufpunkt exakt – sonst nur außerhalb von dem Element. Die j_i findet man in (3.159) und (3.160).

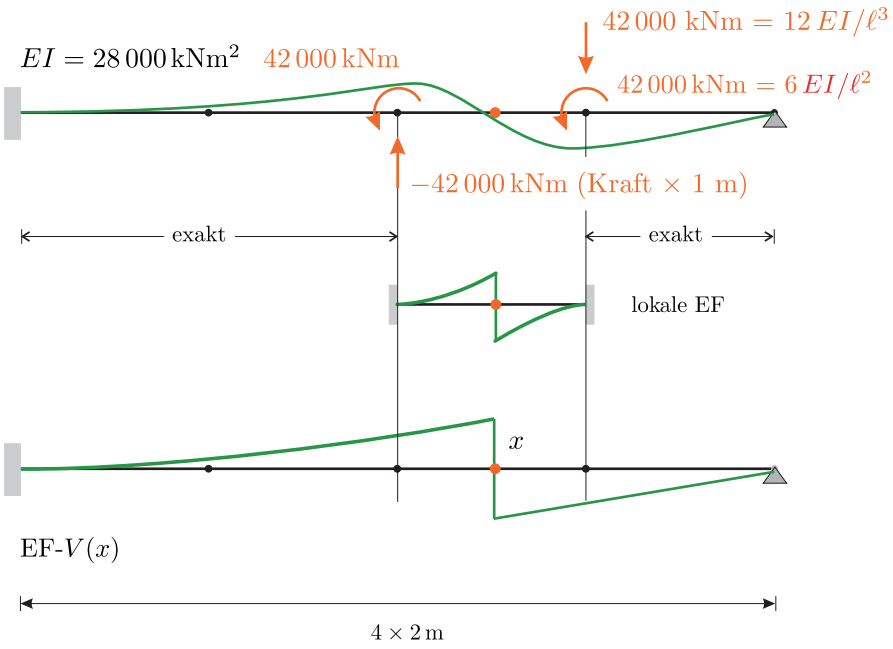


Bild 3.38. Einflussfunktion für die Querkraft $V(x)$ an demselben Träger. Wenn die Elementlänge ℓ gegen null geht, wird aus den $j_i \to \infty$ das Dirac Delta $\delta_3(y,x)$. Es ist 42 000 kNm $= (\delta_3, \varphi_1^e) = V(\varphi_1^e)(x = 0.5\ell) \times 1$ m, analog (δ_3, φ_3^e)

$$j_i = \varphi_i(x) \cdot 1 \quad \text{Kraft} \qquad j_i = \varphi_i'(x) \cdot 1 \quad \text{Moment} \tag{3.127}$$

$$j_i = M(\varphi_i)(x) \cdot \tan(45°) \quad \text{Verdrehung} \qquad j_i = V(\varphi_i) \cdot 1 \quad \text{Versatz} \tag{3.128}$$

um auf N·m zu kommen, aber numerisch ändert sich dadurch natürlich nichts. Der Computer kennt nur Zahlen.

3.23 Funktionale

Um nun doch etwas systematischer vorzugehen, müssen wir über Funktionale sprechen. Ein Funktional ist eine *Funktion von Funktionen*. Mit den Funktionen sind die Biegelinien, die Verformungen des Tragwerks gemeint.

Die Querkraft, die Durchbiegung, das Moment etc., in einem Punkt x eines Trägers, jeder Wert für sich, ist ein Funktional[17], ein **Punktfunktional**,

$$J(w) = V(x) \qquad J(w) = w(x) \qquad J(w) = M(x)\,, \tag{3.129}$$

und in der linearen Statik sind die Funktionale linear,

[17] Wir benutzen J als generische Bezeichnung für Funktionale.

$$J(w_1 + w_2) = J(w_1) + J(w_2)\,. \tag{3.130}$$

Lineare Statik bedeutet lineare Funktionale.

Wichtig für das folgende ist nun, dass man in der linearen Statik die Auswertung von Funktionalen auf **Skalarprodukte** zurückführen kann. Es sei z.B. $J(\boldsymbol{u}) = u_i$ die i-te Komponente u_i eines Vektors $\boldsymbol{u}$, etwa des Verschiebungsvektors eines Fachwerks. Wegen

$$J(\boldsymbol{u}) = u_i = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{u} \tag{3.131}$$

ist u_i gleich dem Skalarprodukt zwischen dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$, **dem diskreten Dirac Delta**, und dem Vektor $\boldsymbol{u}$, oder – statisch gesprochen – der Arbeit, die der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ auf dem Weg $\boldsymbol{u}$ leistet.

Genauso kann man das Funktional $J(w) = w(x)$, die Durchbiegung eines Trägers in einem Punkt x, als die Überlagerung von w mit einem Dirac Delta $\delta_0(y - x)$ (= Punktlast)

$$J(w) = 1 \cdot w(x) = \int_0^l \delta_0(y - x)\, w(y)\, dy \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,, \tag{3.132}$$

lesen. Das Dirac Delta spielt hier dieselbe Rolle, wie der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$.

In der Mathematik nennt man die Überlagerung zweier Funktionen ein L_2-Skalarprodukt, was hier ja auch genau den statischen Gehalt trifft. Jedes Funktional $J(w)$ beruht auf der Überlagerung eines bestimmten Dirac Deltas (einer statischen oder geometrischen Punktgröße, einer Kraft oder einem Versatz) mit der Biegelinie w

$$J(w) = \int_0^l \delta(y - x)\, w(y)\, dy\,. \tag{3.133}$$

Wie wir gleich sehen werden, müssen wir gar nicht wissen, wie diese verschiedenen Dirac Deltas aussehen. Wir müssen nur wissen, was das Ergebnis $J(w)$ sein soll. Und weil wir jedes Funktional als Arbeitsintegral lesen, hat jedes Funktional im Ergebnis die **Dimension einer Arbeit**

$$J(w) = 1 \cdot \text{‚irgend etwas‘} \qquad [\mathrm{N{\cdot}m}]\,, \tag{3.134}$$

wobei die 1 immer eine solche Dimension hat, dass $1 \cdot$‚irgend etwas‘ die Dimension einer Arbeit hat, die 1 also konjugiert zu ihrem Begleiter ist. So lauten die Funktionale in (3.129) eigentlich vollständig

$$J(w) = V(x) \cdot 1 \;\; = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \qquad 1 = \text{Versatz} \tag{3.135a}$$
$$J(w) = w(x) \cdot 1 \;\; = \mathrm{m} \cdot \mathrm{N} \qquad 1 = \text{Kraft} \tag{3.135b}$$
$$J(w) = M(x) \cdot 1 = \mathrm{N}\mathrm{m} \cdot [\;] \quad 1 = \text{Knick}\;. \tag{3.135c}$$

Der Knick ist ein Sprung in der Ableitung w', im Tangens, der ja als Quotient zweier Längen, dw/dx, keine Dimension hat. Im Folgenden schreiben wir die 1 meist nicht mit an, aber wir denken sie dann immer mit.

Die Einführung der **Dirac Deltas** hat den Vorteil, dass wir die zugehörige Einflussfunktion als die Lösung der Balkengleichung (wir bleiben der Einfachheit halber beim Balken) mit dem Dirac Delta auf der rechten Seite interpretieren können

$$EI\,\frac{d^4}{dy^4}\,G(y,x) = \delta(y-x)\,. \tag{3.136}$$

Weil x den Aufpunkt bezeichnet, nennen wir die eigentliche Laufvariable y und deswegen stehen links Ableitungen nach y.

Die **äquivalenten Knotenkräfte**, die die Einflussfunktion generieren, sind dann einfach die Zahlen (wir nennen die f_i hier j_i)

$$j_i = \int_0^l \delta(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = J(\varphi_i)\,, \tag{3.137}$$

also die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen. Einfacher geht es eigentlich nicht mehr. Das bedeutet also:

(1) Die Knotenkräfte j_i, die die Einflussfunktion für die Durchbiegung eines Balkens in einem Punkt x erzeugen, sind die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen φ_i in diesem Punkt

$$j_i = \varphi_i(x)\,. \tag{3.138}$$

(2) Die Knotenkräfte j_i, die die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Punkt x eines Balkens erzeugen,

$$j_i = -EI\,\varphi_i''(x) = M(\varphi_i)(x)\,, \tag{3.139}$$

sind die Momente der Ansatzfunktionen in diesem Punkt x – etc.

Formulieren wir das als Regel:

Theorem 3.1 (Knotenkräfte für Einflussfunktionen). *Die Einflussfunktion für eine Größe $J(u)$ (ein lineares Funktional $J(u)$) wird durch die Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)$ erzeugt. Die Knotenkräfte sind also einfach die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen.*

Die Knotenwerte der Einflussfunktionen nennen wir g_i und die äquivalenten Knotenkräfte j_i, so dass das System $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ jetzt also

$$\boxed{\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{j}} \tag{3.140}$$

heißt. Die Bedeutung der $g_i \equiv u_i$ und $j_i \equiv f_i$ ändert diese Umbenennung natürlich nicht.

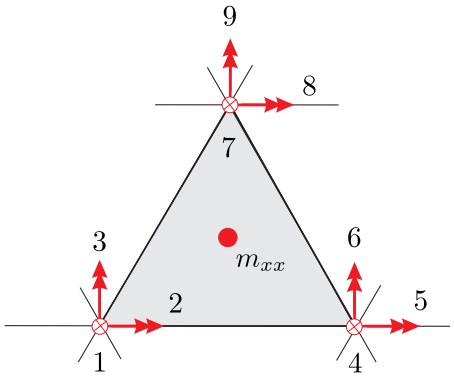


Bild 3.39. Plattenelement im Netz

3.24 Der Betti-Trick

Wie man es sich auch zurecht legen kann: Um die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} im Mittelpunkt $\boldsymbol{x}$ des Plattenelements in Bild 3.39 zu berechnen, werden, wie wir gesehen haben, die Knoten mit den Knotenkräften

$$j_i = \int_\Omega \delta_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\varphi_i(\boldsymbol{y})d\Omega_{\boldsymbol{y}} = m_{xx}(\varphi_i)(\boldsymbol{x}) \tag{3.141}$$

belastet.

Zu den drei Ecken des Elements gehören je drei Freiheitsgrade w, $w_{,x}$, $w_{,y}$, also gibt es $9 = 3\cdot 3$ *shape functions* $\varphi_i(\boldsymbol{x})$. Die Knotenkräfte $j_i = m_{xx}(\varphi_i)(\boldsymbol{x})$ sind *zahlenmäßig* die Momente m_{xx} der *shape functions* im Aufpunkt. Welches j_i nun Kraft oder Moment ist, richtet sich nach dem Freiheitsgrad w_i. Die Freiheitsgrade $1, 4, 7$ sind Durchbiegungen, also sind j_1, j_4, j_7 Knotenkräfte. Die Freiheitsgrade $2, 5, 8$ sind Drehungen um die x-Achse, also sind j_2, j_5, j_8 Knotenmomente um die x-Achse und j_3, j_6, j_9 sind Momente um die y-Achse. Diese neun j_i erzeugen die Einflussfläche $G_{2h}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ für $m^h_{xx}(\boldsymbol{x})$.

Das, was man wissen will, $J(w)$, steckt man als Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)$ in das System hinein.

Dahinter steht natürlich der Satz von Betti, $W_{1,2} = W_{2,1}$. Er macht das einmal so und einmal so möglich. **Nun zu dem Trick**. Der Praktiker rechnet

$$m^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \sum\nolimits_i m_{xx}(\varphi_i)(\boldsymbol{x})\cdot w_i \qquad (= \sum\nolimits_i j_i\, w_i)\,, \tag{3.142}$$

ohne dabei an Betti zu denken. Der Analytiker aber sagt – halt – ich kann diese Formel auch als ‚Betti' lesen, da werden Knotenkräfte $j_i = m_{xx}(\varphi_i)(\boldsymbol{x})$ mit Knotenverformungen w_i multipliziert. Die j_i sind die Knotenkräfte in einem LF 1 und die Wege w_i kommen aus einem LF 2, dem LF p_h. Wegen $W_{1,2} = W_{2,1}$ muss daher auch das umgekehrte gelten[18], $J(w) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$,

[18] Wie in Bild 4.5 $(G_{2h}, p_h) = (G_{2h}, p)$ dürfen wir p statt p_h schreiben und G_{2h} ist die Biegefläche unter der Wirkung der Knotenkräfte j_i

$$W_{1,2} = \sum\nolimits_i j_i\, w_i = m^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_{2h}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = W_{2,1}\,, \qquad (3.143)$$

und das ist die Bestimmung des Moments $m^h_{xx}(\boldsymbol{x})$ durch die Überlagerung der Einflussfunktion G_{2h} mit der Belastung p; es ist $(G_{2h}, p) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$.

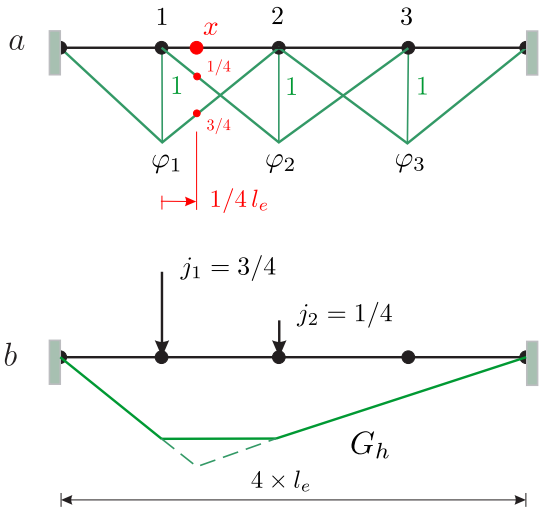


Bild 3.40. Einflussfunktion G_h für die Seildurchbiegung im Punkt x

Nennen wir es den **Betti-Trick**. Er spart den ganzen ‚Delta-Apparat'. Man setzt die $m_{xx}(\varphi_i)$ als Kräfte in die Knoten und berechnet deren Arbeit auf den Wegen w_i. So wird aus der Summe (3.142) ‚höhere Statik'. Das geht mit jeder 2-Term Summe $\sum_i a_i\, b_i = W_{1,2}$, wenn natürlich nicht garantiert ist, dass das Gegenstück $W_{2,1}$ existiert oder einen Sinn gibt. *There must exist a symmetric middle term* $\boldsymbol{K}$*, the governing equation must be self-adjoint*[19].

Ebenso funktioniert die Berechnung der Durchbiegung des Seils in Bild 3.40, einmal direkt und einmal mittels der Einflussfunktion. Die $j_i = \varphi_i(x)$ sind die Durchbiegungen der *shape functions* im Aufpunkt x, also $j_1 = 3/4$, $j_2 = 1/4$ und $j_3 = 0$, und das ‚einmal so und einmal so' ergibt

$$W_{1,2} = \sum\nolimits_i j_i\, w_i = \frac{3}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2 = w_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = W_{2,1}\,. \qquad (3.144)$$

[19] $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ und so gilt $\boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$

3.25 Generalisierte Einflussfunktionen

Jetzt werden wir kühn. Nachdem wir wissen, wie man Einflussfunktionen mit finiten Elementen berechnet, können wir das Wissen auf *beliebige* lineare Funktionale anwenden, also den Satz von Land, der nur Einflussfunktionen für $w(x), M(x)$ etc. kennt, hinter uns lassen.

Das Funktional muss nur linear sein. Mehr wird nicht verlangt. Die Einflussfunktionen, die zu diesen Funktionalen gehören, nennen wir ***generalisierte Einflussfunktionen***. Generalisiert zielt darauf ab, dass der Bereich der klassischen Einflussfunktionen überschritten wird.

3.26 Schwache und starke Einflussfunktionen

In Kapitel 1.17 haben wir über den Unterschied zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen gesprochen und gezeigt, dass es keine schwachen Einflussfunktionen für Kraftgrößen gibt.

Es mag daher eine Überraschung sein, dass die finiten Elemente (scheinbar, siehe (9.311)) nicht zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen unterscheiden. Eine FE-Einflussfunktion ist die Lösung des Variationsproblems

$$G_h \in \mathcal{V}_h : \qquad a(G_h, \varphi_i) = J(\varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h \tag{3.145}$$

und diese Funktion G_h kann in beide Formulierungen eingesetzt werden

$$J(u_h) = \underbrace{\int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy}_{stark} = \underbrace{a(G_h, u_h)}_{schwach} = \text{‚Mohr‘}\,, \tag{3.146}$$

weil auf $\mathcal{V}_h$ die beiden Formeln – stark und schwach – zusammenfallen

$$J(u_h) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = a(G_h, u_h)\,. \tag{3.147}$$

In Matrizenschreibweise besteht der Unterschied nur darin, wie man die Gleichungen liest

$$J(u_h) = \underbrace{\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}}_{stark} = \underbrace{\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}}_{schwach}\,. \tag{3.148}$$

In der schwachen Formulierung $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}$ summieren wir über alle Einträge i, j

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_i\, k_{ij}\, u_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_i\, a(\varphi_i, \varphi_j)\, u_j\,, \tag{3.149}$$

was einem Gebietsintegral (wie ‚Mohr‘, Überlagerung der Momente, beim Seil V) gleichkommt, während die starke Formulierung $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ die Knotenverschiebungen g_i mit den Knotenkräften f_i wichtet.

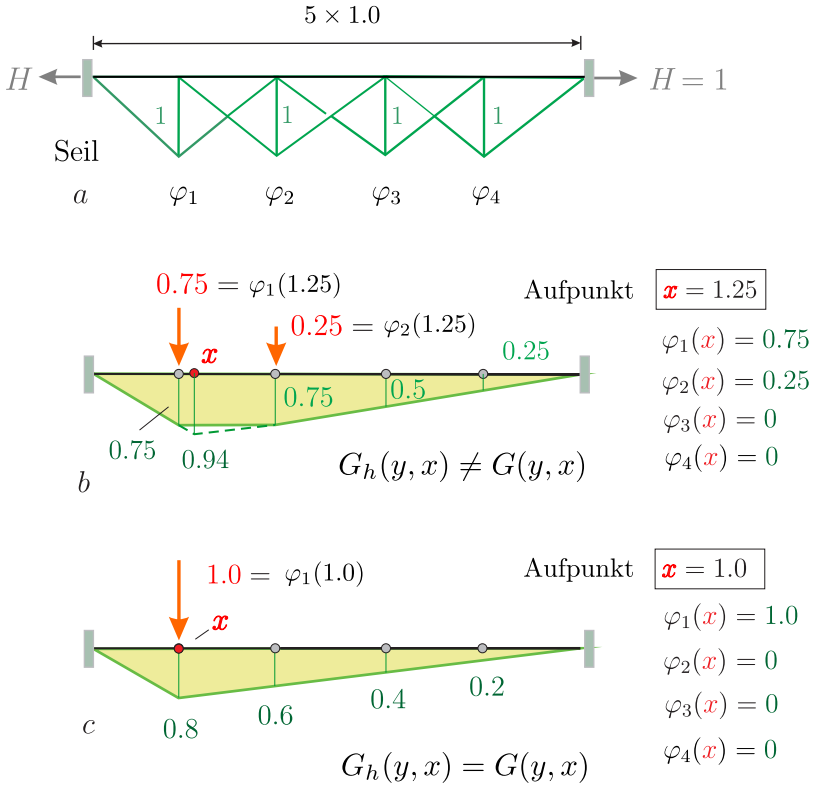


Bild 3.41. FE-Modell eines Seils, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** FE-Einflussfunktion für w im Punkt $x = 1.25$ und exakter Wert (0.94), **c)** FE-Einflussfunktion für w im ersten Knoten, die Funktion ist exakt, $G_h(y,x) = G(y,x)$

3.27 Beispiele

Beispiel 3.3. Um die Einflussfunktion für die **Durchbiegung** $w(x)$ **des Seils** in Bild 3.41 im Punkt $x = 1.25$ zu berechnen, $J(w) = w(1.25)$, werden die Durchbiegungen der φ_i im Punkt x als Knotenkräfte aufgebracht

$$j_1 = \varphi_1(x) = 0.75 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0.25 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0\,. \tag{3.150}$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.151}$$

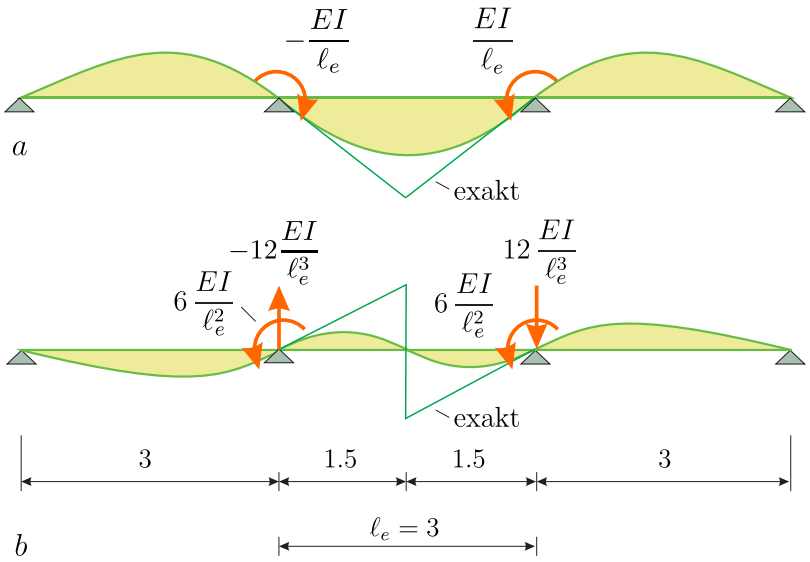


Bild 3.42. FE-Einflussfunktion für **a)** das Biegemoment M und **b)** die Querkraft V im Punkt $0.5\,\ell_e$. Die Knotenkräfte sind die $j_i = M(\varphi_i)$ bzw. $j_i = V(\varphi_i)$, s. (3.160). Hier sieht man auch: Je höher die Ableitung der Zielgröße, desto ungenauer ist die FE-Einflussfunktion — wichtig vor allem für Flächentragwerke

für die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion hat die Lösung

$$g_1 = 0.75 \qquad g_2 = 0.75 \qquad g_3 = 0.5 \qquad g_4 = 0.25 \tag{3.152}$$

und so lautet die Einflussfunktion, siehe Bild 3.41 *b*,

$$G_h(y,x) = 0.75 \cdot \varphi_1(y) + 0.75 \cdot \varphi_2(y) + 0.5 \cdot \varphi_3(y) + 0.25 \cdot \varphi_4(y)\,. \tag{3.153}$$

Ginge es um die Einflussfunktion für die **Durchbiegung im ersten Knoten**, $x = 1.0$, lauten die Knotenkräfte

$$j_1 = \varphi_1(x) = 1.0 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0\,, \tag{3.154}$$

und dann wäre die FE-Einflussfunktion für $w(x)$ sogar **exakt**, weil die Lösung von $\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{j}$

$$g_1 = 0.8 \qquad g_2 = 0.6 \qquad g_3 = 0.4 \qquad g_4 = 0.2 \tag{3.155}$$

genau die Knotenwerte der Einflussfunktion sind und sie dazwischen linear verläuft, siehe Bild 3.41 *c*, was die *shape functions* darstellen können.

Bemerkung 3.6. Die g_i ändern sich mit der Lage x des Aufpunktes, sie sind also Funktionen von x, so dass eine FE-Einflussfunktion im allgemeinen in einer **separierten Form** vorliegt

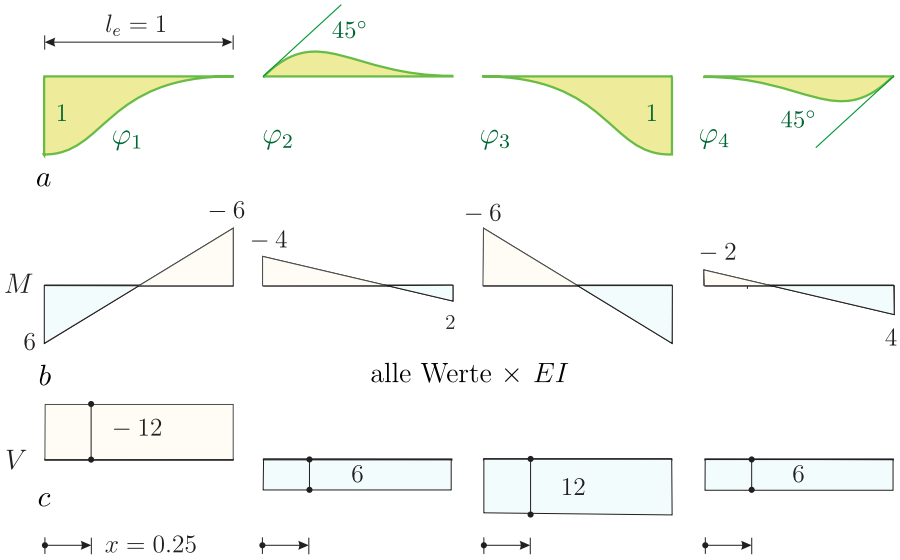


Bild 3.43. Balkenelement, **a)** die vier Ansatzfunktionen φ_i und **b)** die dazu gehörigen Biegemomente M und **c)** Querkräfte V, siehe (3.160)

$$G_h(y,x) = g_1(x)\cdot\varphi_1(y) + g_2(x)\cdot\varphi_2(y) + g_3(x)\cdot\varphi_3(y) + g_4(x)\cdot\varphi_4(y)\,. \tag{3.156}$$

Beispiel 3.4. Die Einflussfunktion für das **Biegemoment** $M = -EI\,w''(x)$ des Durchlaufträgers in Bild 3.42 im Punkt $x = 4.5$ wird von den äquivalenten Knotenkräften (den Momenten der φ_i), siehe Bild 3.43,

$$j_i = -EI\,\varphi_i''(x)\cdot 1\ \ [\mathrm{N{\cdot}m}]\cdot[\ ] \qquad 1 = \mathrm{Knick}\,[\mathrm{m/m}] = [\ ] \tag{3.157}$$

erzeugt und die Einflussfunktion für die **Querkraft** $V(x) = -EI\,w'''(x)$ von den Querkräften der φ_i

$$j_i = -EI\,\varphi_i'''(x)\cdot 1\ \ [\mathrm{N}]\cdot[\mathrm{m}] \qquad 1 = \mathrm{Versatz}\,[\mathrm{m}]\,, \tag{3.158}$$

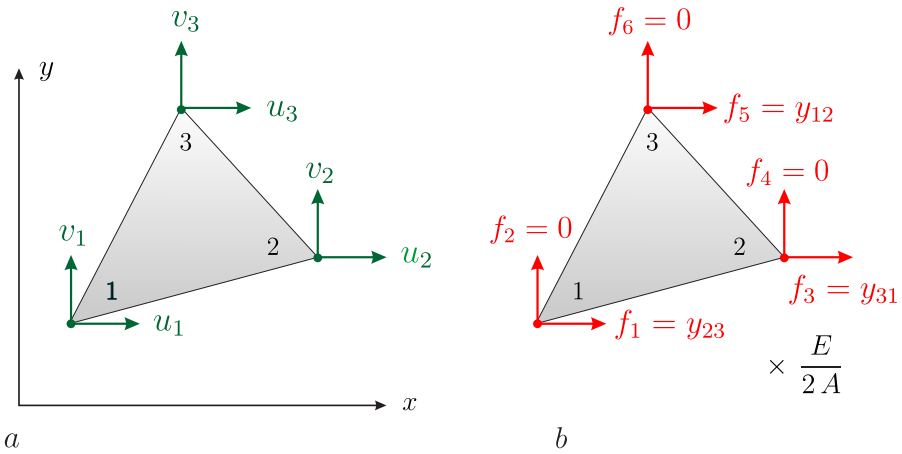
wobei die φ_i die Ansatzfunktionen (*shape functions*) sind, die auf einem einzelnen Element mit der Länge ℓ die Gestalt

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} \qquad \varphi_2(x) = -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2} \tag{3.159a}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} \qquad \varphi_4(x) = \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2} \tag{3.159b}$$

haben. Ihre Schnittgrößen $M_i = -EI\,\varphi_i''$ und $V_i = -EI\,\varphi_i'''$ lauten[20]

[20] $\varphi_i\,[\mathrm{m}]$, $\varphi_i'\,[\ ]$, $\varphi_i''\ \ [1/\mathrm{m}]$, $\varphi_i'''\,[1/\mathrm{m}^2]$



a *b*

Bild 3.44. CST-Element, **a)** Geometrie und Freiheitsgrade, **b)** diese Knotenkräfte erzeugen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx}. Sie ist konstant, wie es bei einem CST-Element (*constant strain element*) ja auch sein muss

$$M_1(x) = (\frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3}) \cdot EI \qquad M_2(x) = (\frac{6x}{\ell^2} - \frac{4}{\ell}) \cdot EI \tag{3.160a}$$

$$M_3(x) = (\frac{12x}{\ell^3} - \frac{6}{\ell^2}) \cdot EI \qquad M_4(x) = (\frac{6x}{\ell^2} - \frac{2}{\ell}) \cdot EI \tag{3.160b}$$

$$V_1(x) = -\frac{12}{\ell^3} \cdot EI \qquad V_2(x) = \frac{6}{\ell^2} \cdot EI \tag{3.160c}$$

$$V_3(x) = \frac{12}{\ell^3} \cdot EI \qquad V_4(x) = \frac{6}{\ell^2} \cdot EI\,. \tag{3.160d}$$

Nur die beiden Knoten des Elements mit dem Aufpunkt x tragen Knotenkräfte j_i, weil die Ansatzfunktionen φ_i aller anderen Knoten keine Momente bzw. Querkräfte im Aufpunkt x erzeugen.

Die so erzeugten Einflussfunktionen haben **außerhalb** des Elementes mit dem Aufpunkt die richtige Gestalt. Das Ergebnis wird auch im Element exakt, wenn wir – wie beim Drehwinkelverfahren – die lokale Einflussfunktion (*fixed ends*) zur FE-Einflussfunktion addieren.

Beispiel 3.5. In einem **CST-Element** (*constant strain triangle*) wie in Bild 3.44 entstehen bei einer Verschiebung $\boldsymbol{u} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T$ der drei Knoten **konstante Spannungen** im Element, deren Größe von den Koordinatendifferenzen der Ecken – also der Gestalt des Elements – abhängen

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{2\,A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{3.161}$$

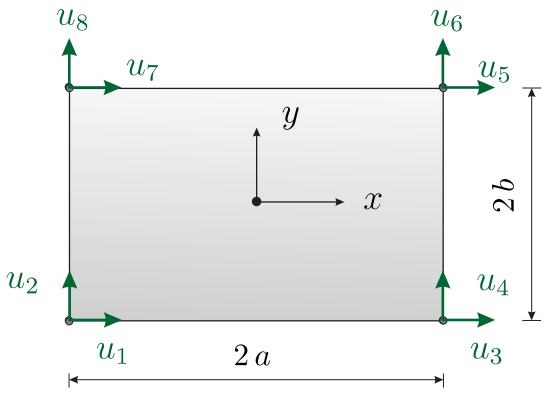


Bild 3.45. Bilineares Element

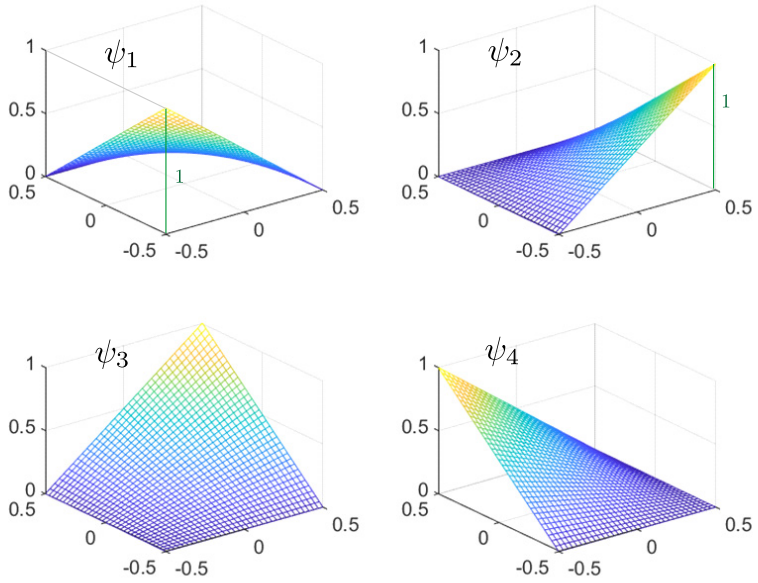


Bild 3.46. Die vier skalaren Knotenfunktionen ψ_i auf denen die vektorwertigen *shape functions* $\boldsymbol{\varphi}_i$ basieren (MATLAB™)

Es bedeutet $x_{ij} = x_i - x_j$ und $y_{ij} = y_i - y_j$. Um auf einem Elementnetz die Einflussfunktion für eine Spannung σ_{xx} zu erzeugen, lässt man in den Knoten des Elements, das den Aufpunkt enthält, die Spannungen σ_{xx} aus den Einheitsverformungen $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ der Knoten wirken, $j_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{x})$, also

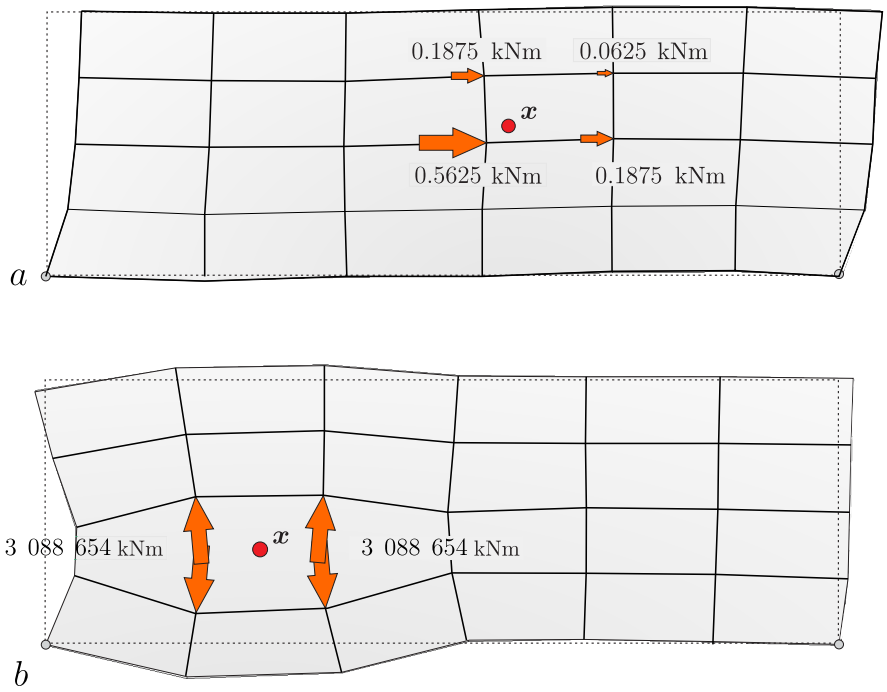


Bild 3.47. Bilineare Elemente, **a)** Einflussfunktion für $u_x(\boldsymbol{x})$ und **b)** für $\sigma_{yy}(\boldsymbol{x})$ (WINFEM)

$$j_1 = \frac{E}{2\,A}\,y_{23}\cdot 1 \quad j_3 = \frac{E}{2\,A}\,y_{31}\cdot 1 \quad j_5 = \frac{E}{2\,A}\,y_{12}\cdot 1 \quad j_2 = j_4 = j_6 = 0\,. \tag{3.162}$$

Die Summe der Knotenkräfte j_i ist null

$$j_1 + j_3 + j_5 = \frac{E}{2\,A}(y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2) = 0\,, \tag{3.163}$$

was bei allen Einflussfunktionen für **Kraftgrößen** so ist, weil die j_i gegengleich sind.

Beispiel 3.6. In den nächsten beiden Beispielen rechnen wir mit **bilinearen Scheibenelementen**, also Elementen mit vier Knoten und $2 \cdot 4$ Freiheitsgraden, siehe Bild 3.47. Zu jedem **Freiheitsgrad** (FG) gehört ein Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$, das den Knoten, entsprechend dem FG, entweder in horizontaler oder vertikaler Richtung auslenkt

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_3(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \psi_2(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{etc.} \tag{3.164}$$

Die sich wiederholenden Einträge $\psi_i(\boldsymbol{x})$, einmal oben, einmal unten, sind die vier skalarwertigen **Ansatzfunktionen** der vier Eckpunkte, siehe Bild 3.46,

$$\psi_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a-x)(b-y) \qquad \psi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a+x)(b-y) \tag{3.165}$$

$$\psi_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a+x)(b+y) \qquad \psi_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a-x)(b+y)\,. \tag{3.166}$$

Wenn ein Knoten sich in horizontale Richtung bewegt, dann sind also alle vertikalen Verschiebungen null und umgekehrt. Solche ‚gesplitteten' Verschiebungsfelder machen es leicht, die Bewegungen der Knoten zu kontrollieren.

Einflussfunktion für u_x

Um die Einflussfunktion für die horizontale Verschiebung in dem **Viertelspunkt** eines Elementes mit der Länge $a = 2$ und Höhe $b = 1$ zu generieren, lässt man vier horizontale Kräfte in den vier Ecken des Elementes wirken. Diese Kräfte sind die Verschiebungen der vier horizontalen Verschiebungsfelder, Indices $1, 3, 5, 7$, im Aufpunkt $\boldsymbol{x} = (-0.5, -0.25)$ (Element-Koordinaten)

$$j_1 = 0.5625 \qquad j_3 = 0.1875 \qquad j_5 = 0.0625 \qquad j_7 = 0.1875\,, \tag{3.167}$$

und sie erzeugen die Verformung in Bild 3.47. Die horiz. Verschiebungen $\rightarrow$ der vier vert. Verschiebungsfelder $\uparrow$ sind natürlich null im Aufpunkt und daher gibt es auch keine $j_i \uparrow$ in vertikaler Richtung, j_2, j_4, j_6, j_8, sind null.

Einflussfunktion für σ_{yy}

Die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in dem Viertelspunkt entsteht, wenn man die Spannungen $\sigma_{yy}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ der 4×2 Verschiebungsfelder $\boldsymbol{\varphi}_i$ in dem Aufpunkt als Knotenkräfte j_i wirken lässt.

In einem **bilinearen Element** mit der Länge a und Höhe b, wie in Bild 3.45, haben die Spannungen die Verläufe

$$\sigma_{xx}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,(u_1 - u_3) + a\,\nu\,(u_2 - u_8) + \\ + x\,\nu\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \Big] \tag{3.168}$$

$$\sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,\nu\,(u_1 - u_3) + a\,(u_2 - u_8) + \\ + x\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y\,\nu\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \Big] \tag{3.169}$$

und

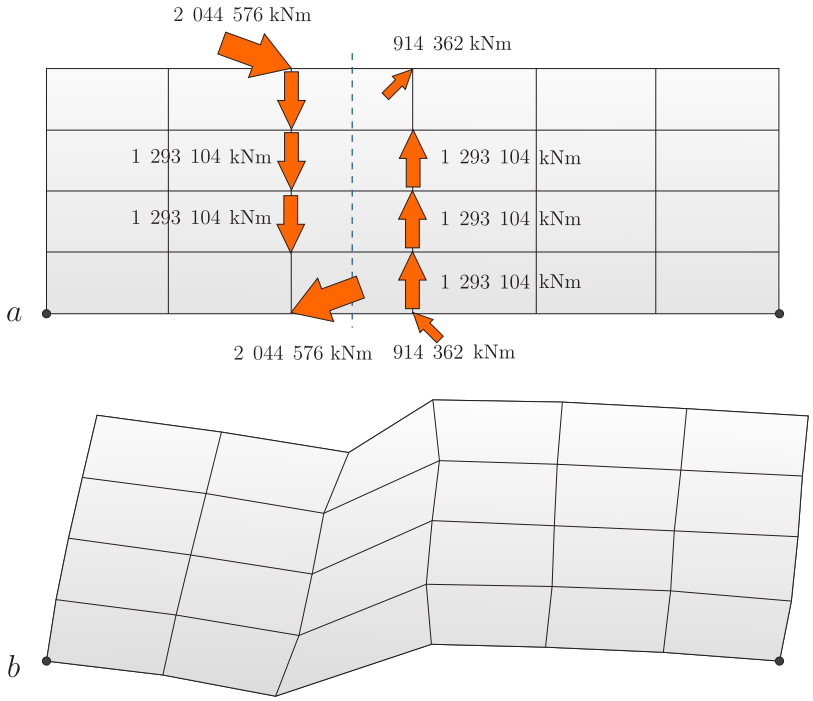


Bild 3.48. Einflussfunktion für das Integral von σ_{xy} in einem senkrechten Schnitt, **a)** äquivalente Knotenkräfte, **b)** Einflussfunktion, [126], (WINFEM)

$$\sigma_{xy}(x,y) = \frac{-E}{2\,a\,b\,(1+\nu)} \cdot \Big[b\,(u_2 - u_4) + a\,(u_1 - u_7) + \\ + x\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + y\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \Big] . \quad (3.170)$$

Setzen wir $u_1 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$, so sind das die Spannungen, die zu dem Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x})$ gehören. Also beträgt die äquivalente Knotenkraft j_1 im ersten Knoten in horizontaler Richtung ($u_1 = 1$)

$$j_1 = \sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,\nu\,u_1 + y\,\nu\,(-u_1) \Big] = -3.07 \cdot 10^6\,\text{kNm} \quad (3.171)$$

und in vertikaler Richtung ($u_2 = 1$)

$$j_2 = \sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[a\,(u_2) + x\,(-u_2) \Big] = -3.85 \cdot 10^7\,\text{kNm}\,. \quad (3.172)$$

Die anderen j_i ergeben sich nach demselben Muster. Das Ergebnis und die Knotenkräfte sind in Bild 3.47 *b* dargestellt.

Je größer ein Element ist, desto kleiner sind die Kräfte $j_i \simeq 1/h$, – und *vice versa*, siehe Bild 3.49, was ein Charakteristikum der Einflussfunktionen für Spannungen ist. Lange Elemente lassen sich leicht spreizen.

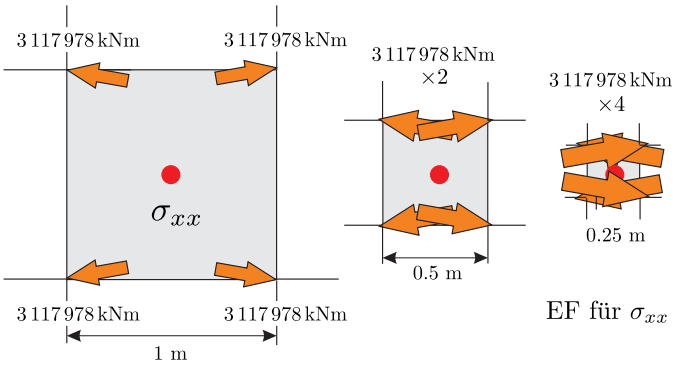


Bild 3.49. Je kleiner das Element ist, desto mehr Energie braucht man zum Spreizen des Elements. Einmal den Aufpunkt umrundet resultiert in einem Versatz von Eins

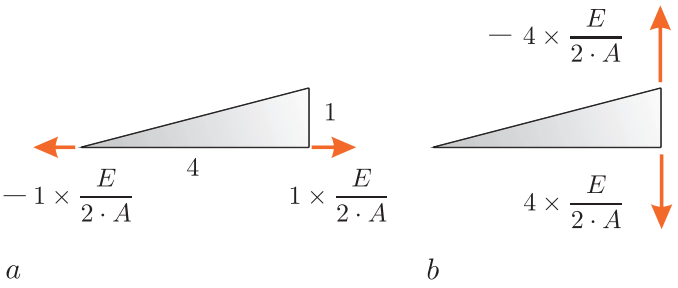


Bild 3.50. Generierung der Einflussfunktionen in einem CST-Element, **a)** für σ_{xx}, **b)** für σ_{yy}; weil die Spannungen in einem solchen Element überall gleich sind, gelten die Einflussfunktionen für jeden Punkt

Man kann die j_i, die das Element spreizen, auch ***‚geometrische Kräfte‘*** nennen, weil ihre Größe vom Zuschnitt des Elements abhängt.

Bei einem langgezogenen Dreieck (CST-Element) mit dem Seitenverhältnis $l_x : l_y = 4 : 1$ braucht man z.Bsp. für die Spreizung in vertikaler Richtung das vierfache an Kraft gegenüber einer Spreizung in horizontaler Richtung, siehe Bild 3.50. Entsprechend unausgewogen sind auch die Elementbeiträge in der Steifigkeitsmatrix des Elements, weil da ja noch quadriert wird

$$\int_{\Omega_e} \varepsilon_{yy}^2 d\Omega : \int_{\Omega_e} \varepsilon_{xx}^2 d\Omega = 16 : 1\,. \tag{3.173}$$

Bei der Berechnung einer Steifigkeitsmatrix wird zwar nichts gespreizt, sondern die Knoten werden um $u_i = 1$ ausgelenkt, aber das ist beim CST-Element dasselbe, weil die Spannungen konstant sind.

Einflussfunktion für N_{xy}

Nun soll die Einflussfunktion für das **Integral der Schubspannungen**

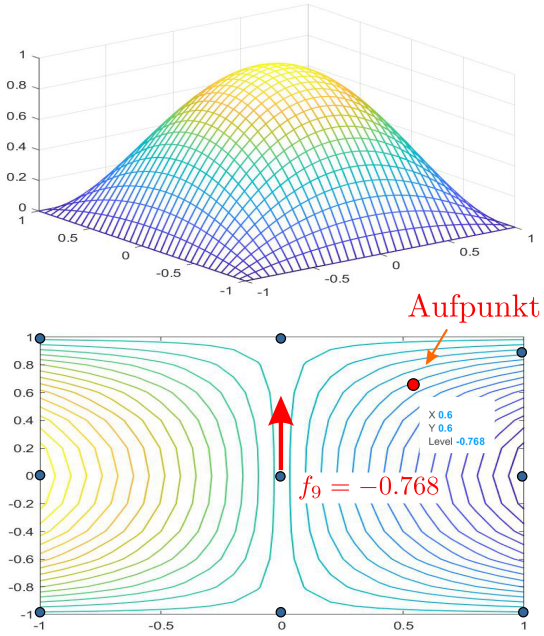


Bild 3.51. 9-Knoten Element. Zentrale *bubble function* φ_9 und ihre erste Ableitung in x-Richtung; f_9 ist natürlich senkrecht nach oben gerichtet (MATLAB™)

$$N_{xy} = \int_0^l \sigma_{xy}\, dy \tag{3.174}$$

in einem vertikalen Schnitt, der durch einen vorgegebenen Punkt $\boldsymbol{x} = (x, y)$ läuft, berechnet werden. Die äquivalenten Knotenkräfte sind jetzt Integrale, siehe Bild 3.48,

$$j_i = \int_0^l \sigma_{xy}(\boldsymbol{\varphi}_i)\, dy\,, \tag{3.175}$$

also die aufintegrierten Schubspannungen der Verschiebungsfelder, die zu den vier Ecken des Elementes gehören. In den vier Ecken jedes Elements, durch das der Schnitt führt, werden die folgenden äquivalenten Knotenkräfte aufgebracht

$$\begin{aligned} j_i^e = \int_0^b \sigma_{xy}(\boldsymbol{\varphi}_i)\, dy = \frac{-E}{2\,a\,(1+\nu)} \cdot \Big[& b\,(u_2 - u_4) + a\,(u_1 - u_7) + \\ & + x\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + \frac{b}{2}\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \Big]\,, \end{aligned} \tag{3.176}$$

wobei x die x-Koordinate des Schnittes ist.

Um j_1^e zu berechnen, setzen wir $u_1 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$. Für j_2^e setzen wir $u_2 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$ etc. Der Index e an j_i^e soll daran

erinnern, dass dies **Elementbeiträge** sind. Die resultierende Knotenkraft f_i ergibt sich durch die Summation über alle an den Knoten angeschlossenen Elemente, die vom Schnitt getroffen werden.

Einflussfunktion für $u_{,x}$

Zur Analyse einer Membran werden *Nine-Node Biquadratic Quadrilaterals* benutzt. Um die Einflussfunktion für die erste Ableitung $u_{,x}$ zu ermitteln, sind die Knoten mit den ersten Ableitungen $\varphi_{i,x}$ der *shape functions* im Aufpunkt zu belasten. Relativ zu dem Element in Bild 3.51 liegt der Aufpunkt an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0.6, 0.6)$ und dort beträgt z.B. die Ableitung der zentralen *bubble function* $\varphi_{9,x} = -0.768$, was die Knotenkraft $f_9 = -0.768$ ergibt.

Einflussfunktion für m_{xx}

In Bild 3.52 sieht man, wie die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in einer Platte nahe einer einspringenden Ecke mit Hilfe von äquivalenten Knotenmomenten f_i erzeugt wird (vertikale f_i gibt es keine).

3.28 Die shape functions und ihre Spannungen

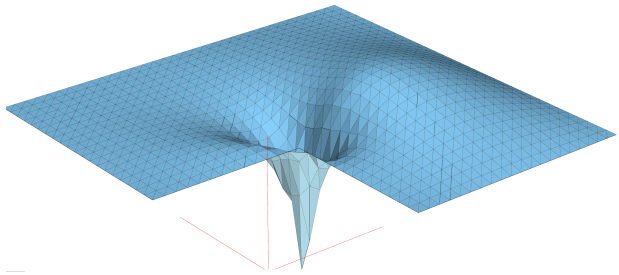
In linearen Elementen sind die Spannungen und die Normalkräfte konstant und in kubischen Elementen die Querkräfte. Daher muss die FE-Einflussfunktion der Querkraft in allen Punkten x eines Elements dieselbe sein. Das passt, denn die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = -EI\,\varphi_i'''(x)$, die die EF erzeugen, sind konstant. Aus dem Sprung, den die konformen *shape functions* nicht nachvollziehen können, werden zwei **antimetrische Halbwellen**, siehe Bild 3.42. Sinngemäß gilt dasselbe für die Normalkräfte und ihre Einflussfunktionen, $j_i = EA\,\varphi_i'(x)$, siehe Bild 3.79 *d*, und ebenso das $V(x)$ in einem Seil.

Aber was in der Mitte des Elementes noch richtig sein kann, (wenn die Belastung p konstant ist), ist es bestimmt nicht mehr zu den Enden hin und daher ist klar, dass die Genauigkeit der Schnittkräfte zu den Enden hin abnimmt.

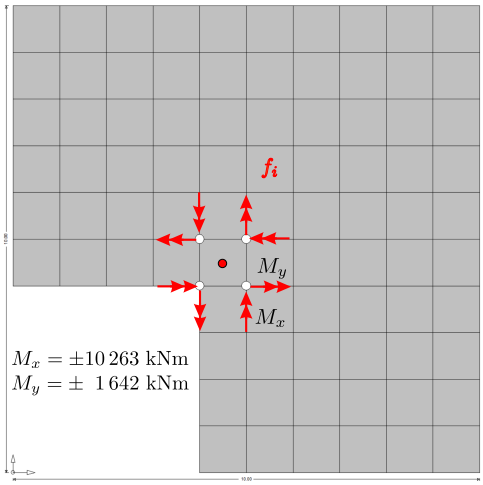
3.29 Die lokale Einflussfunktion

In Stabtragwerken ist die lokale Einflussfunktion die Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Element (***fixed ends***). Diese muss zur FE-Einflussfunktion addiert werden, um das Bild komplett zu machen. Das Stabwerksprogramm reduziert ja die Dirac Deltas in die Knoten, $\delta \to j_i$, und um das zu korrigieren, muss es am Schluss die lokale Lösung dazu addieren.

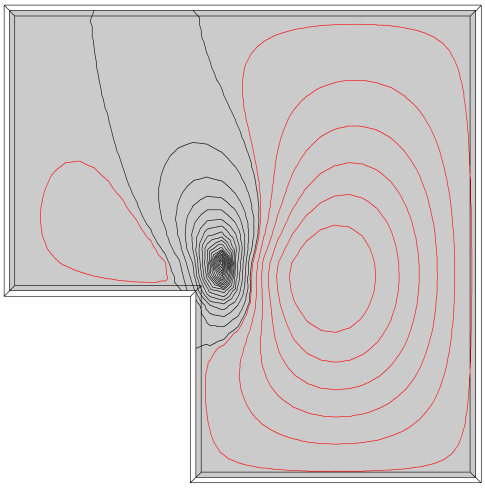
Die Einflussfunktion $G_0(y, x)$ für die Durchbiegung eines eingespannten Balkens, siehe Bild 3.53 b, lautet



EF-m_{xx} *a*



b



c

Bild 3.52. Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in einer Kirchhoff-Platte 10×10 m und die zugehörigen äquivalenten Knotenkräfte f_i, die die Momente m_{xx} der *shape functions* im Aufpunkt sind, $K = 20\,530$ kNm^2. Die f_i sind Momente M_x und M_y, vertikale f_i gibt es keine, weil die m_{xx} aus der Absenkung der Knoten in Elementmitte null sind, die Verläufe m_{xx} sind antimetrisch, (WINFEM + BEPLATTE)

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} -\dfrac{(\ell - x)^3}{6}\,\varphi_3^e(y) + \dfrac{(\ell - x)^2}{2}\,\varphi_4^e(y) & y < x \\ -\dfrac{x^3}{6}\,\varphi_1^e(y) - \dfrac{x^2}{2}\,\varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.177}$$

wobei die $\varphi_i^e(y)$ die lokalen *shape functions* sind, siehe (3.63), und die Einflussfunktion für die Längsverschiebung in dem Balken, siehe Bild 3.54,

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} (\ell - x)\,\varphi_2^e(y) & y < x \\ x\,\varphi_1^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.178}$$

basiert auf den *shape functions* (3.62) des Stabelements.

Die Berechnung dieser Einflussfunktionen ist eine einfache Übung in linearer Algebra.

Beispiel 3.7. Zum Exempel berechnen wir die Einflussfunktion (3.177) für die **Durchbiegung** des eingespannten Balkens. Die äquivalenten Knotenkräfte, die *actio*, lauten $j_i = \varphi_i(x) \cdot 1$ und die Festhaltekräfte, die dagegen halten, die *reactio*, siehe Bild 3.18, lauten

$$V(0) = j_1 = \varphi_1(x) \qquad M(0) = j_2 = \varphi_2(x) \tag{3.179a}$$

$$V(l) = -j_3 = -\varphi_3(x) \qquad M(l) = -j_4 = -\varphi_4(x)\,. \tag{3.179b}$$

Die Einflussfunktion kann man nicht in geschlossener Form angeben, weil die Querkraft im Aufpunkt springt. Für die beiden Teile machen wir die Ansätze

$$G_0^L(y,x) = a(x)\,\varphi_3(y) + b(x)\,\varphi_4(y) \qquad G_0^R(y,x) = c(x)\,\varphi_1(y) + d(x)\,\varphi_2(y)\,. \tag{3.180}$$

Weil die Ansätze die Lagerbedingungen $w = w' = 0$ einhalten, müssen wir uns nur noch um die statischen Lagerbedingungen kümmern. Im **linken Lager** muss gelten

$$\begin{bmatrix} V_3(0) & V_4(0) \\ M_3(0) & M_4(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(0) \\ M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1(x) \\ j_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}, \tag{3.181}$$

und im **rechten Lager**

$$\begin{bmatrix} V_1(l) & V_2(l) \\ M_1(l) & M_2(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} j_3(x) \\ j_4(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{bmatrix}. \tag{3.182}$$

Weil wir die Länge l und die Lage x des Aufpunkts offen lassen, brauchen wir ein Programm wie MATLAB™, um die allgemeine Lösung zu bestimmen

$$a = -\frac{(l - x)^3}{6\,EI} \quad b = \frac{(l - x)^2}{2\,EI} \quad c = -\frac{x^3}{6\,EI} \quad d = -\frac{x^2}{2\,EI}\,. \tag{3.183}$$

So wurde die Einflussfunktion (3.177) berechnet.

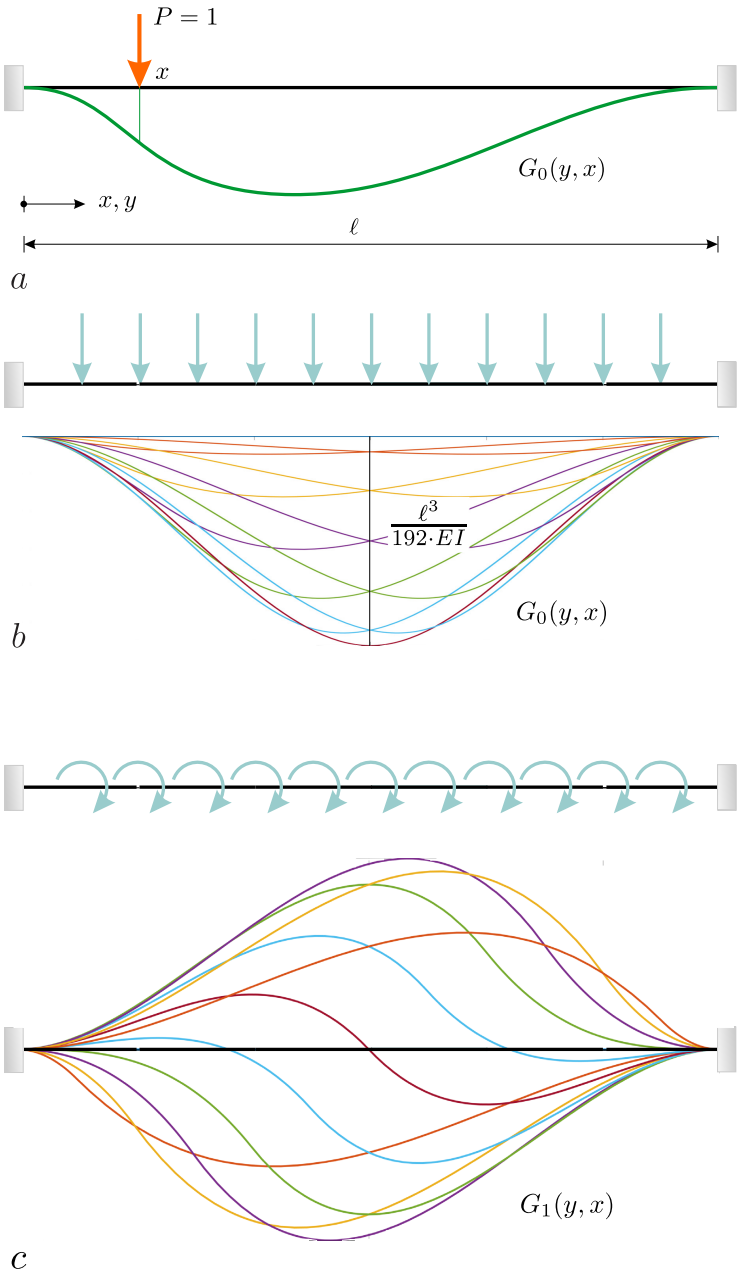


Bild 3.53. Einflussfunktionen für **b)** die Durchbiegung w und **c)** die Verdrehung w' eines eingespannten Balken (MATLAB™)

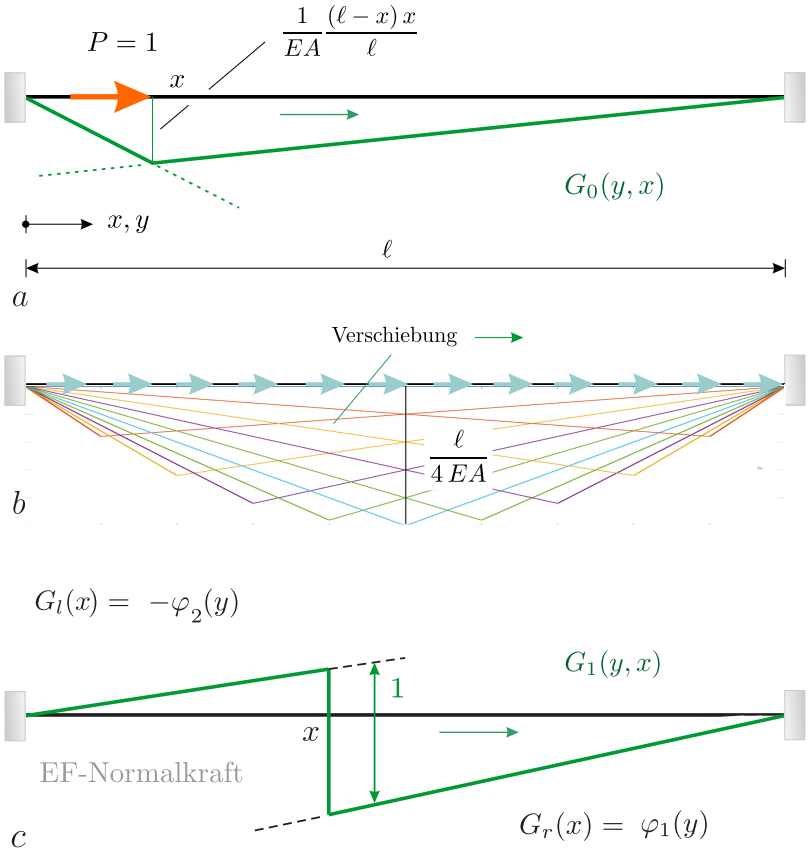


Bild 3.54. Einflussfunktionen für **a)** die Längsverschiebung und **c)** die Normalkraft eines beidseitig festgehaltenen Stabes (MATLAB™)

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für die **Verdrehung** $w'(x)$ ergibt sich durch Ableitung von (3.177) nach x

$$G_1(y,x) = \frac{1}{EI}\begin{cases} \dfrac{(\ell - x)^2}{2}\,\varphi_3^e(y) - (\ell - x)\,\varphi_4^e(y) & y < x \\ -\dfrac{x^2}{2}\,\varphi_1^e(y) - x\,\varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.184}$$

und sinngemäß so auch $G_2 = -EI\,d^2\,G_0/dx^2$, die Einflussfunktion für das **Moment**,

$$G_2(y,x) = \begin{cases} (\ell - x)\,\varphi_3^e(y) - \varphi_4^e(y) & y < x \\ x\,\varphi_1^e(y) + \varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.185}$$

und die **Querkraft**, $G_3 = -EI\,d^3\,G_0/dx^3$, siehe Bild 3.55,

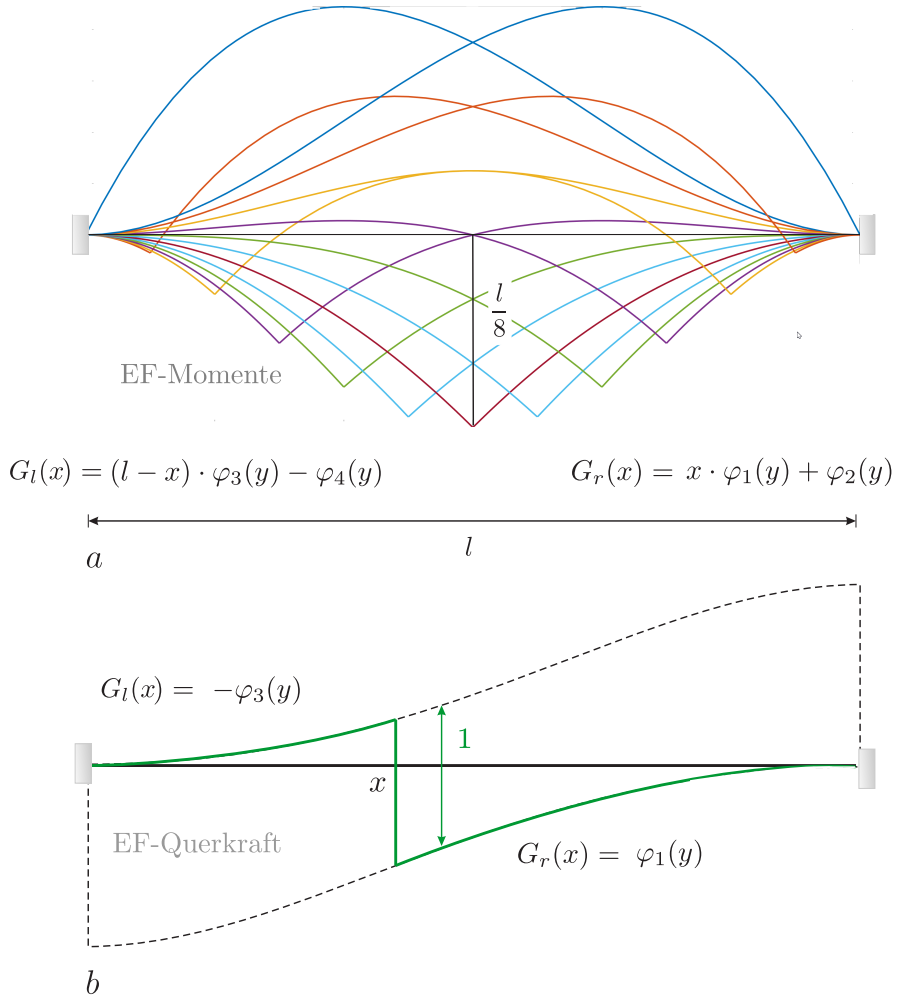


Bild 3.55. Einflussfunktionen für **a)** das Moment und **b)** die Querkraft in einem eingespannten Balken. Die φ_i sind die Funktionen in Bild 3.17 (MATLAB™)

$$G_3(y,x) = \begin{cases} -\varphi_3^e(y) & y < x \\ \varphi_1^e(y) & x < y \end{cases} . \tag{3.186}$$

In Längsrichtung geht man genauso vor. Die lokale Einflussfunktion für $N(x)$ setzt sich aus den beiden horizontalen *shape functions* $\varphi_1(x) = (\ell - x)/\ell$ und $\varphi_2(x) = x/\ell$ zusammen, siehe Bild 3.54 *c*.

Beispiel 3.8. Wir berechnen die Einflussfunktion für das **Einspannmoment** $M(0)$ des Zweifeldträgers in Bild 3.56. Die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = M(\varphi_i)(0)$ der beiden *shape functions* $\varphi_i(x)$, siehe Bild 3.56, sind

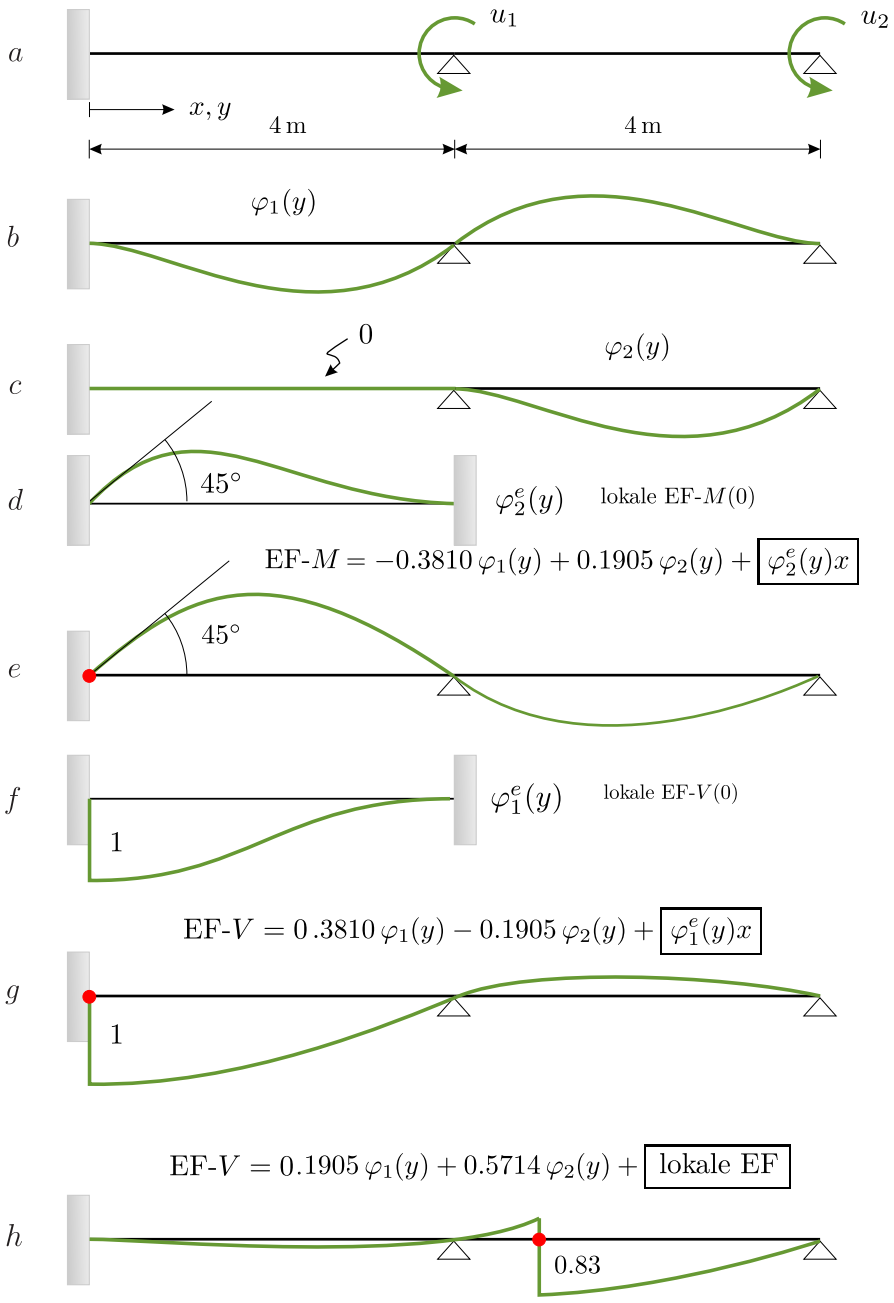


Bild 3.56. Zweifeldträger, **a)** System, **b)** und **c)** *shape functions* $\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$, **d)** lokale *shape function*, **e)** Einflussfunktion für das Einspannmoment, **g)** für die Lagerkraft (= Querkraft) und **h)** für $V(x = 5)$. Die Funktionen φ_i^e sind die Funktionen in Bild 3.43

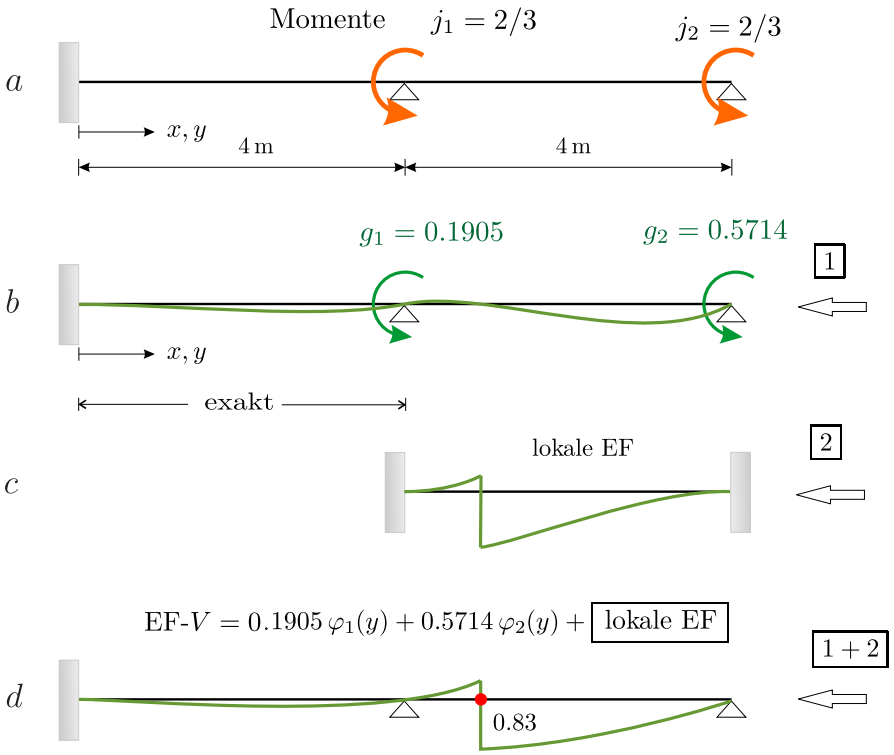


Bild 3.57. Im Detail: Berechnung der Einflussfunktion für die Querkraft $V(x = 5)$, **a)** äquiv. Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(x = 5)$ für die EF, **b)** die Verformungen g_i aus den j_i also $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$, **c)** die lokale Einflussfunktion, **d)** die endgültige EF

$$j_1 = -EI\,\frac{2}{3} \qquad j_2 = 0\,. \tag{3.187}$$

Auf den ersten Wert kommt man wie folgt: Die *shape function* $\varphi_1(x)$ ist im ersten Element identisch mit der lokalen Ansatzfunktion $\varphi_4^e(x)$ und deren Moment im Punkt $x = 0$ ist $M(\varphi_4^e)(0) = -EI \cdot 2/3$. Die zweite *shape function* $\varphi_2(x)$ ist im ersten Element null und so ist $j_2 = 0$.

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ zur Bestimmung der Knotenwerte g_i der Einflussfunktion

$$\frac{EI}{\ell_e^3}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.188}$$

hat die Lösung $g_1 = -0.3810$, $g_2 = 0.1905$. Im ersten Element ist zur Einflussfunktion noch die lokale Einflussfunktion $G_2^e = \varphi_2^e(y)$ zu addieren (setze in der Formel für $G_r(x)$ in Bild 3.55 *a* $x = 0$ = Aufpunkt)

$$G_2(y, x = 0) = g_1\,\varphi_1(y) + g_2\,\varphi_2(y) + \boxed{\varphi_2^e(y)} \tag{3.189}$$

Beispiel 3.9. Auf demselben Weg erhalten wir die Einflussfunktion für die **Querkraft** im linken Lager. Die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(0)$ betragen $j_1 = EI \cdot 2/3$ (das ist $V(\varphi_4^e)(0)$) und $j_2 = 0$, so dass das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ die Lösung

$$g_1 = 0.3810 \qquad g_2 = 0.1905 \tag{3.190}$$

hat und die Einflussfunktion lautet damit

$$G_3(y, x = 0) = g_1\,\varphi_1(y) + g_2\,\varphi_2(y) + \boxed{\varphi_1^e(y)} \tag{3.191}$$

Beispiel 3.10. An demselben Träger berechnen wir, siehe Bild 3.56 *h*, die Einflussfunktion für die **Querkraft** $V(x)$ einen Meter rechts vom mittleren Lager, $x = 5$; bezogen auf das zweite Element ist das lokal $x_e = 1$. In Bild 3.57 ist die Berechnung im Detail dargestellt. Im zweiten Element haben die *shape functions* die Gestalt

$$\varphi_1 = \varphi_2^e(x_e) \qquad \varphi_2 = \varphi_4^e(x_e) \tag{3.192}$$

und die j_i lauten daher

$$j_1 = V(\varphi_2^e)(x_e = 1) = \frac{2}{3} \qquad j_2 = V(\varphi_4^e)(x_e = 1) = \frac{2}{3}\,. \tag{3.193}$$

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ hat die Lösung

$$g_1 = 0.1905 \qquad g_2 = 0.5714\,, \tag{3.194}$$

und die Einflussfunktion ergibt sich zu, siehe Bild 3.57 *d*,

$$G_3(y, x = 5) = 0.1905\,\varphi_1(y) + 0.5714\,\varphi_2(y) + \boxed{\text{lokale EF}}\,. \tag{3.195}$$

Je nach Lage des Punktes y, in dem die Auswertung geschieht, hat die lokale Einflussfunktion die Gestalt, siehe Bild 3.55 *b*,

$$\text{lokale EF} = \begin{cases} -\varphi_3^e(y) & y < x \\ \varphi_1^e(y) & x < y\,. \end{cases} \tag{3.196}$$

Beispiel 3.11. Wir berechnen die Einflussfunktion für das **Einspannmoment** des Kragträgers in Bild 3.58. Es ist $\ell = 4$. Der Vektor $\boldsymbol{j} = \{j_3, j_4\}^T$ sind die Momente der *shape functions* φ_3 und φ_4 im Aufpunkt $x = 0$, siehe (3.159), und das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ hat die Lösung

$$EI \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.3750 \\ 0.3750 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = -EI \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.197}$$

Die Einflussfunktion ist die Summe aus der FE-Einflussfunktion und der loka-

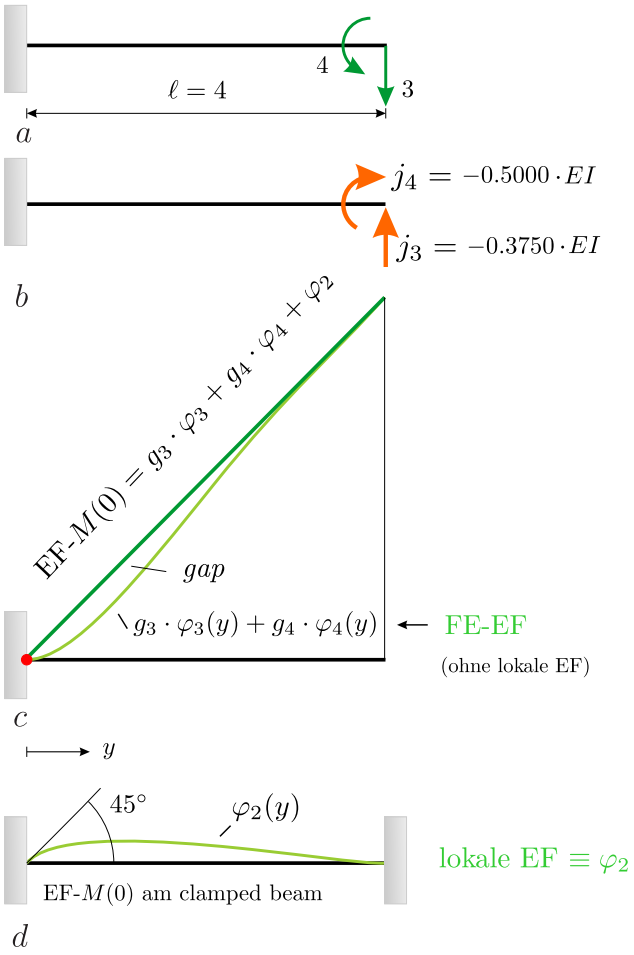


Bild 3.58. EF-$M(0)$, **b)** Knotenkräfte $j_3 = M(\varphi_3)(x = 0)$, $j_4 = M(\varphi_4)(x = 0)$ **c)** die exakte EF und die FE-Näherung, **d)** die lokale Einflussfunktion ($= \varphi_2$) *is the missing piece*, ist genau das Gegenstück zu dem *gap* in **c)**

len Einflussfunktion, die mit $\varphi_2(x)$ identisch ist, Verdrehung des linken Lagers um $\tan\varphi = -1$ (nach oben),

$$G_2(y,0) = g_3 \cdot \varphi_3(y) + g_4 \cdot \varphi_4(y) + \boxed{\varphi_2(y)} = -y\,, \tag{3.198}$$

also die bekannte schräge Gerade, die wir hier mit y laufen lassen, weil $x = 0$ den Aufpunkt markiert. Weil der Balken aus einem Element besteht, gibt es keinen Unterschied zwischen φ_i und φ_i^e.

Wir merken noch an, dass sich in allen Einflussfunktionen für Kräfte das EI herauskürzt, was bestätigt, dass die Einflussfunktion bei feldweise gleichem EI nicht von EI abhängt.

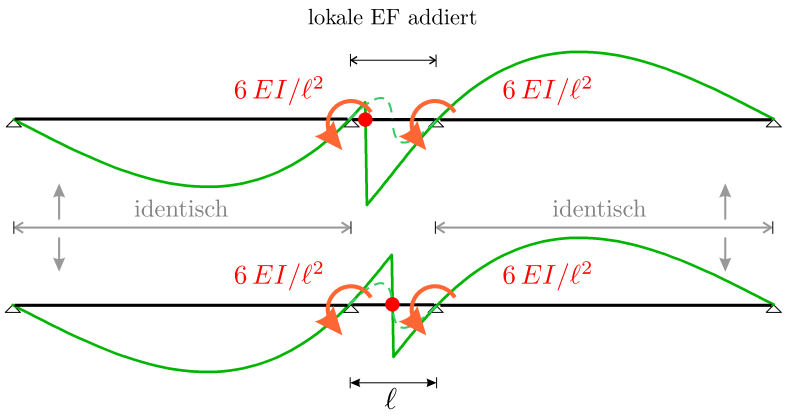


Bild 3.59. Einflussfunktionen für die Querkraft in zwei Punkten eines Feldes

Beispiel 3.12. Die Einflusslinien für die **Querkräfte** in einem Feld sind – ausserhalb von dem Feld – alle gleich, s. Bild 3.59, weil die erzeugenden Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(x)$ nicht von x abhängen, die dritten Ableitungen der φ_i sind ja konstant. Dem entspricht, dass die Querkräfte in einem unbelasteten Feld konstant sind und die Einflusslinien daher außerhalb gleich sein müssen.

Man starte das Programm BE-FRAMES und lasse sich die Einflussfunktion für die Querkraft in einem Riegel anzeigen (*GF-anywhere*). Wenn man innerhalb des Riegels von einem Punkt zum andern springt, ändern sich die Verläufe außerhalb von dem Riegel nicht, nur im Riegel selbst.

Die Einflussfunktionen für die Spannungen σ_{kl} in einem *CST*-Element sind auch im Element immer gleich, weil die Knotenkräfte $j_i = \sigma_{kl}(\boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{x})$ für alle Punkte $\boldsymbol{x}$ denselben Wert haben.

Was man in Bild 3.59 auch sieht, ist, wie die Knotenmomente, die die Einflussfunktionen erzeugen, mit $\ell \to 0$ gegen ∞ gehen, und sich die Einflussfunktion immer weiter aufwölbt, $V \to \infty$, siehe Kapitel 6.2.

Die $j_i = V(\varphi_i)(x)$ sind *numerisch* die Querkräfte der vier *shape functions* φ_i, siehe (3.160),

$$j_1 = -j_3 = -\frac{12\,EI}{\ell^3} \qquad j_2 = j_4 = \frac{6\,EI}{\ell^2}\,. \tag{3.199}$$

Statisch sind j_1 und j_3 Knotenkräfte (nicht angetragen, weil null Wirkung am starren Lager) und j_2 und j_4 sind Momente, weil u_2 und u_4 Drehfreiheitsgrade sind. (Am globalen System $\boldsymbol{K}_{8\times 8}$ haben die u_i und j_i natürlich andere Indizes).

Verallgemeinerung

Diese Technik lässt sich auf alle Stabgleichungen, wie etwa einen elastisch gebetteten Balken

$$EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = p(x) \tag{3.200}$$

anwenden. Mit Hilfe der homogenen Lösung, siehe (4.51a),

$$w_n(x) = e^{\beta x}(c_1\,\cos\beta x + c_2\,\sin\beta x) + e^{-\beta x}(c_3\,\cos\beta x + c_4\,\sin\beta x) \tag{3.201a}$$

$$\beta = \sqrt[4]{c/4\,EI} \tag{3.201b}$$

kann man die vier *shape functions* $\varphi_i^e(x)$ berechnen, siehe Kapitel 10, daraus dann die Knotenkräfte der Einflussfunktionen für $M(x)$ bzw. $V(x)$

$$j_i = M(\varphi_i)(x) \qquad \text{bzw.} \qquad j_i = V(\varphi_i)(x) \tag{3.202}$$

und dann bestimmt man die **Koeffizienten** a, b, c, d der lokalen Lösung links und rechts vom Aufpunkt

$$w_L(x) = a\,\varphi_3^e(x) + b\,\varphi_4^e(x) \qquad \text{links} \tag{3.203}$$

$$w_R(x) = c\,\varphi_1^e(x) + d\,\varphi_2^e(x) \qquad \text{rechts}, \tag{3.204}$$

wie auf Seite 313.

Kraftgrößenverfahren oder andere Verfahren

Man muss die Einflussfunktionen nicht mit finiten Elementen berechnen. Wir haben zwar die Knotenkräfte mit finiten Elementen bestimmt, aber ein Statiker käme auf dieselben Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)(x)$. Die Gleichgewichtslage des Tragwerks unter den Knotenkräften j_i plus der lokalen Einflussfunktion ist die Einflussfunktion – unabhängig von finiten Elementen. Die homogenen Lösungen φ_i sind ja nicht eine Erfindung der finiten Elemente.

Wir erwähnen das, weil das Thema Kraftgrößenverfahren und Einflussfunktionen in den Büchern oft so kompliziert dargestellt ist, [136], dass man schon vor der Notation zurückschrickt und es lieber lässt.

Aber es ist viel einfacher, man braucht nur die j_i (das sind die f_i) und die lokale Einflussfunktion aus Bild 3.55. Und Lastfälle mit Knotenkräften lassen sich mit dem Kraftgrößenverfahren doch leicht berechnen.

3.30 Schräger Balken

Die Normalkraft und die Querkraft in einem Balken sind ‚lokale' Größen. Ihre Einflussfunktionen werden generiert, indem man das $N(\varphi_i^e)(x)$ bzw. das $V(\varphi_i^e)(x)$ aus den vier lokalen *shape functions* φ_i^e (Balkenanteile) als Knotenkräfte j_i aufbringt. Weil die Schnittkräfte lokal sind, spielt die Neigung des Balkens keine Rolle.

Bei den Weggrößen ist es anders. Zur Berechnung der Einflussfunktion für die vertikale Durchbiegung (global y) eines Punktes x des **schrägen Balkens** muss man wissen, wie groß die Absenkungen des Punkts aus den 2×3 φ_i^e der beiden Endknoten sind; diese Verschiebungen sind die j_i.

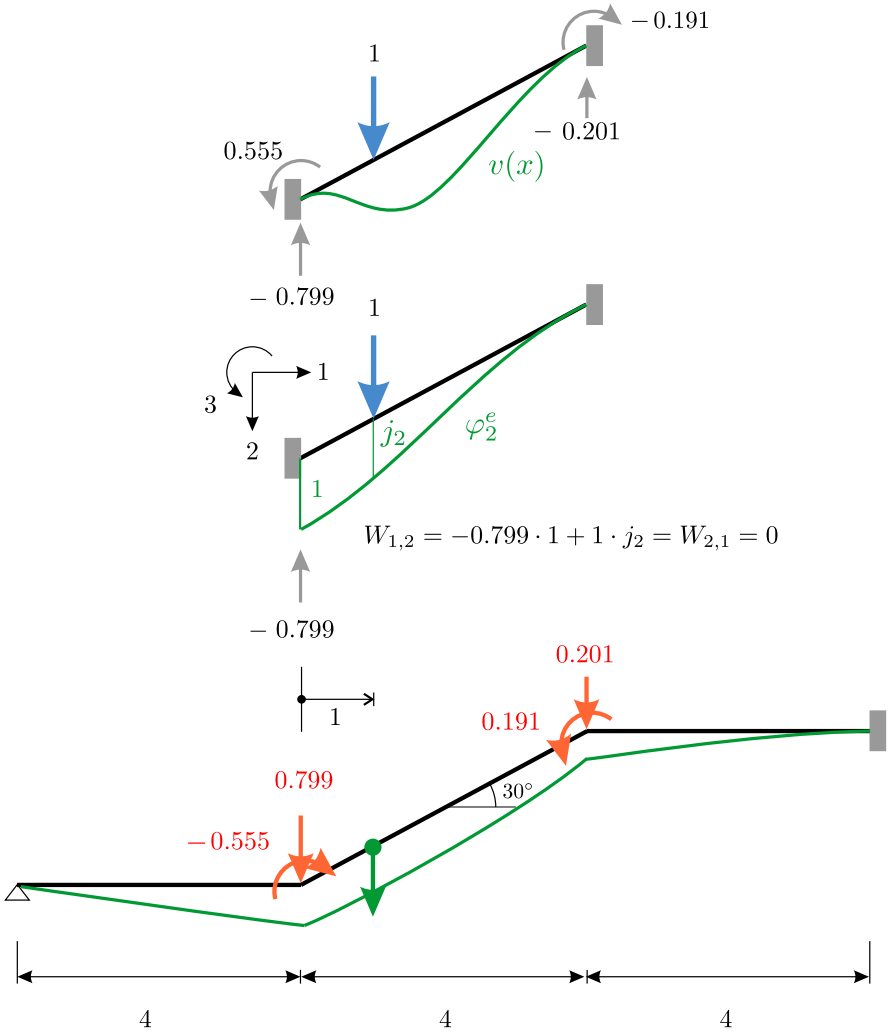


Bild 3.60. Einflussfunktion für die vertikale Verschiebung. Die j_i (rot) sind zahlenmäßig die Lagerkräfte $\times(-1)$ am eingespannten Balken

Bevor man da den *sinus* und *cosinus* bemüht, spannt man den schrägen Balken an beiden Enden ein und belastet ihn mit einer vertikalen Kraft $P = 1$ im Aufpunkt, siehe Bild 3.60. Die Lagerkräfte aus diesem Lastfall sind nach Betti zahlenmäßig gleich den Wegen j_i, die die φ_i^e im Aufpunkt gehen

$$W_{1,2} = -0.799 \cdot 1 + 1 \cdot j_2 = W_{2,1} = 0\,. \tag{3.205}$$

Die beiden Teile (längs und quer) von φ_2^e sind homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkengleichung — keine Lasten bei der Bewegung φ_2^e im Feld — und

daher ist $W_{2,1} = 0$, weil die null Lasten im Feld null Arbeit auf dem Weg $v(x)$ (LF $P = 1$) leisten. Die Lagerkräfte aus P sind also gleich den Bewegungen j_i, die als Knotenkräfte aufgebracht die Einflussfunktion erzeugen. Und wie immer am Schluss, muss man noch die lokale Einflussfunktion im Element dazu addieren. Dazu dreht man den Balken in die Horizontale, zerlegt $P = 1$ in einen tangentialen und normalen Anteil, $P_N = 1 \cdot \cos(30)$, ermittelt die Biegelinie (= EF) aus P_N am beidseitig eingespannten Balken und trägt sie senkrecht zum schrägen Balken von der FE-Einflussfunktion ab.

3.31 GF-Anywhere

In dem Programm BE-FRAMES wird bei einem Klick auf einen Punkt x die Einflussfunktion für die gewünschte Größe

$$u(x), N(x), w(x), w'(x), M(x), V(x) \tag{3.206}$$

angezeigt, siehe Bild 3.61. Das geht sehr schnell, weil das Programm gleich nach der Eingabe der Abmessungen die inverse Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ berechnet und abspeichert.

Angenommen die Zielgröße ist das Moment in einem Riegel, $J(w) = M(x)$. Die äquivalenten Knotenkräfte j_k^e in den beiden Knoten des Elements sind also die Momente der sechs *shape functions* $\varphi_k^e(x)$, $k = 1, 2, \ldots 6$, des Elements

$$j_k^e = M(\varphi_k^e)(x) \tag{3.207}$$

in dem Punkt x; das sind vier Zahlen j_k^e (die Längsverschiebungen $\varphi_k^e(x)$ haben keine Momente). Diese lokalen Lastgrößen werden, wie in jedem anderen Lastfall auch, in das globale Koordinatensystem transformiert, $j_k^e \to j_i$ und in den Vektor $\boldsymbol{j}$ geschrieben, der bis auf die (nun) sechs Einträge leer bleibt.

Das Produkt $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ (aus sechs Spalten) sind dann die Knotenwerte g_i der Einflussfunktion

$$G_h(y, x) = \sum\nolimits_i g_i(x)\, \varphi_i(y)\,. \tag{3.208}$$

Damit lässt sich $G_h(y, x)$ zeichnen. In dem Element mit dem Aufpunkt wird nur noch die lokale Einflussfunktion dazu addiert, siehe Kapitel 3.29.

3.32 Aufpunkt im Knoten

Man kann sich Einflussfunktionen für Knotenverschiebungen und -verdrehungen anzeigen lassen, aber nicht für Schnittkräfte ‚im Knoten'; immer nur links und rechts von einem Knoten, denn die Querkraft oder das Moment links von einem Rahmenknoten ist in der Regel nicht dieselbe wie rechts vom Knoten, jede Seite hat ihre eigene Einflussfunktion. Das ist wie beim Kraftgrößenverfahren, wo man Gelenke immer nur neben einem Knoten einbauen kann.

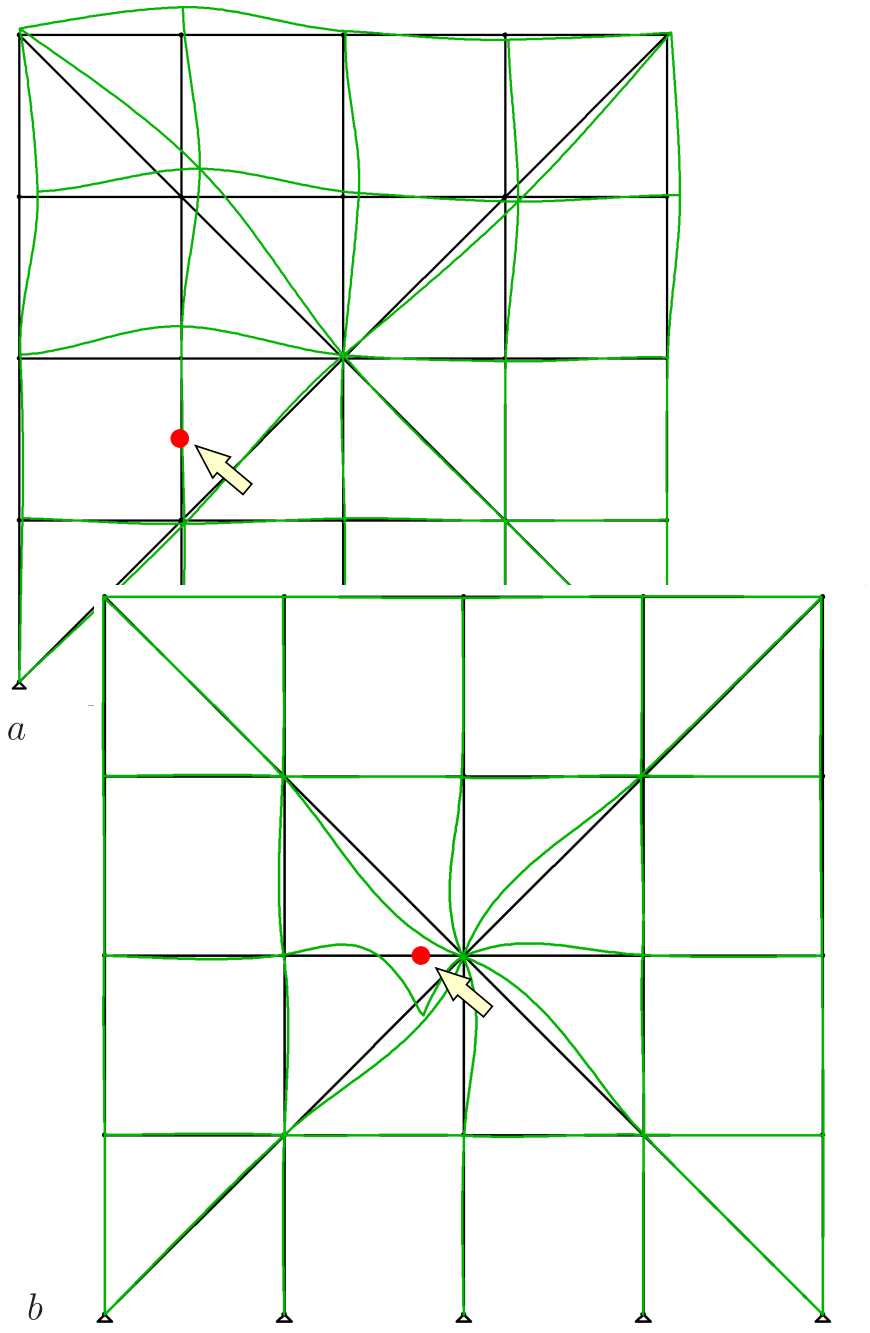


Bild 3.61. *GF-Anywhere*, ein einfacher *click* und man sieht sofort **a)** die EF für die Normalkraft in dem Stiel oder **b)** für das Moment in dem Riegel (BE-FRAMES)

3.33 Die zentrale Gleichung

FE-Einflussfunktionen liegen in **separierter Form** vor[21]

$$G_h(y,x) = g_1(x)\,\varphi_1(y) + g_2(x)\,\varphi_2(y) + \ldots + g_n(x)\,\varphi_n(y)\,, \tag{3.209}$$

und das ist der Grund, warum bei der Überlagerung mit der Belastung $p(y)$ die äquivalenten Knotenkräfte erscheinen

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\,p(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \int_0^l p(y)\,\varphi_i(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,f_i\,, \tag{3.210}$$

und somit die Auswertung einer **Summation über die Knoten** gleichkommt. Aus dem Wirkungsintegral wird das Skalarprodukt $\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$. Die äquivalenten Knotenkräfte ersetzen die Belastung und der Einfluss einer Knotenkraft f_i auf den Wert $J(u_h) = u_h(x)$ ist gleich der Arbeit, die f_i auf der zur Einflussfunktion gehörigen Knotenverschiebung g_i leistet.

Nun kann man $u_h(x)$ aber auch berechnen, indem man das Dirac Delta mit der Biegelinie u_h überlagert

$$u_h(x) = \int_0^l \delta(y-x)\,u_h(y)\,dy\,, \tag{3.211}$$

und wenn wir diese beiden Darstellungen verknüpfen, dann sind wir bei der zentralen Gleichung zu dem Thema Einflussfunktionen und finite Elemente.

Theorem 3.2 (Die zentrale Gleichung).

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy = \int_0^l \sum\nolimits_i g_i(x)\varphi_i(y)\,p(y)\,dy = \sum\nolimits_i g_i(x)\,f_i \\ &= \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \sum\nolimits_i j_i u_i = \sum\nolimits_i \varphi_i(x) u_i \\ &= \int_0^l \sum\nolimits_i u_i\varphi_i(y)\,\delta(y-x)\,dy = \int_0^l u_h(y)\,\delta(y-x)\,dy\,. \end{aligned} \tag{3.212}$$

Die Verformung $u_h(x)$ in einem Punkt x ist also das Skalarprodukt zwischen dem Vektor $\boldsymbol{g}$, den Knotenwerten der Einflussfunktion, und dem Vektor der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ oder, umgekehrt, zwischen den Knotenwerten $\boldsymbol{u}$ der FE-Lösung und den äquivalenten Knotenkräften $\boldsymbol{j}$ der Einflussfunktion

[21] Wie ein Kabel am Zugfenster: Den Verlauf zwischen den Masten stellen die $\varphi_i(y)$ dar, und die Höhe, in der das Kabel die einzelnen Masten (Knoten) passiert, das steuern die Zahlen $g_i(x)$, die wiederum vom gewählten Aufpunkt x abhängen.

$$u_h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^l u_h(y)\delta(y-x)\,dy = \sum\nolimits_i \varphi_i(x)u_i = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} \\ \displaystyle\int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}\,. \end{cases} \tag{3.213}$$

Dies gilt für **alle linearen Funktionale** (es ist $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$)

$$J(u) = \begin{cases} \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} & = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} & = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}\,, \end{cases} \tag{3.214}$$

und sie ist die denkbar knappste Darstellung eines linearen Funktionals[22].

Da die Wirkung $J(u) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ des Vektors $\boldsymbol{j}$ auf $\boldsymbol{u}$ der Wirkung des Dirac Deltas auf u gleicht

$$u(x) = \int_0^l \delta(y-x)u(y)\,dy\,, \tag{3.215}$$

nennen wir den Vektor $\boldsymbol{j}$ den **Dirac Vektor** des Funktionals $J(u)$.

Die erste Formel

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} &= j_1u_1 + j_2u_2 + \ldots + j_nu_n \\ &= J(\varphi_1)u_1 + J(\varphi_2)u_2 + \ldots + J(\varphi_n)u_n \end{aligned} \tag{3.216}$$

spielt die Berechnung von $J(\boldsymbol{u})$ auf die Einzelwerte $j_i = J(\varphi_i)$ zurück. Liest man die j_i als Kräfte in den Knoten, wie in Bild 3.42, dann ist $J(\boldsymbol{u})$ die Arbeit, die die j_i auf den Wegen u_i leisten.

In der zweiten Formel, $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$, werden die äquivalenten Knotenkräfte mit den g_i, den Knotenverschiebungen der Einflussfunktion, gewichtet.

Die Gleichung

$$\boxed{J(u) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}} \tag{3.217}$$

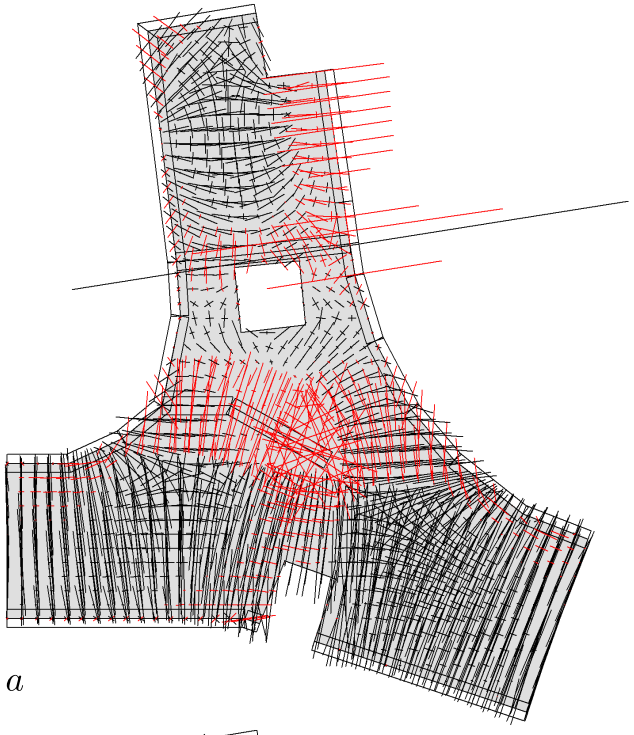
ist eigentlich die zentrale Formel, denn bei den finiten Elementen ist ‚alles' Funktional. Jede Ableitung

$$\frac{du}{dx} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{3.218}$$

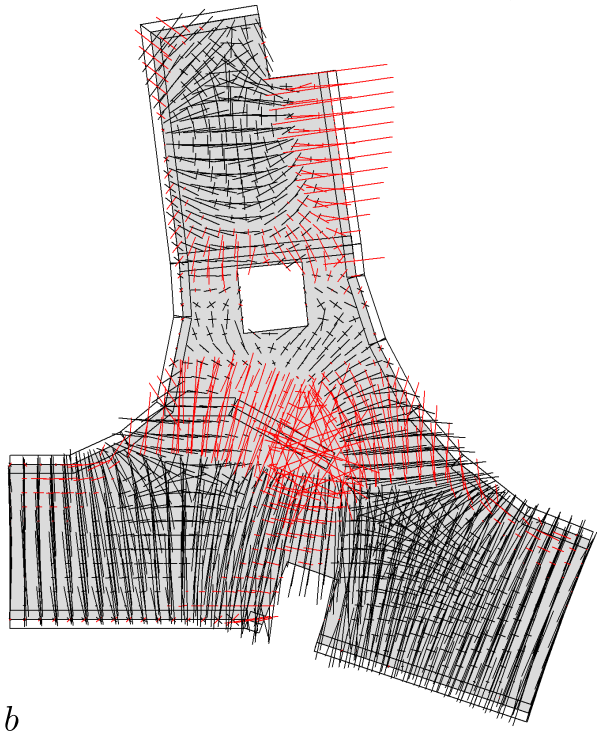
ist ein Funktional, jedes Ergebnis ist ein Funktional und zu jedem linearen Funktional gehört eine Einflussfunktion, ein Vektor $\boldsymbol{g}$, und das Skalarprodukt mit dem Lastvektor $\boldsymbol{f}$ ist der Wert $J(u)$ des Funktionals.

Um die zweite Ableitung der Biegelinie in einem Punkt x zu berechnen, kann man die *shape functions* von Hand differenzieren, $w''(x) = \sum_i \varphi_i''(x)w_i$, oder man bildet das Skalarprodukt

[22] *The middle term $\boldsymbol{K}$ is self adjoint, this allows the easy transition back and forth.*



a



b

Bild 3.62. Ein nur leicht falsch gesetzter Randknoten führte zu Singularitäten in den Momenten, **a)** vorher, **b)** nachher (BE-PLATTE)

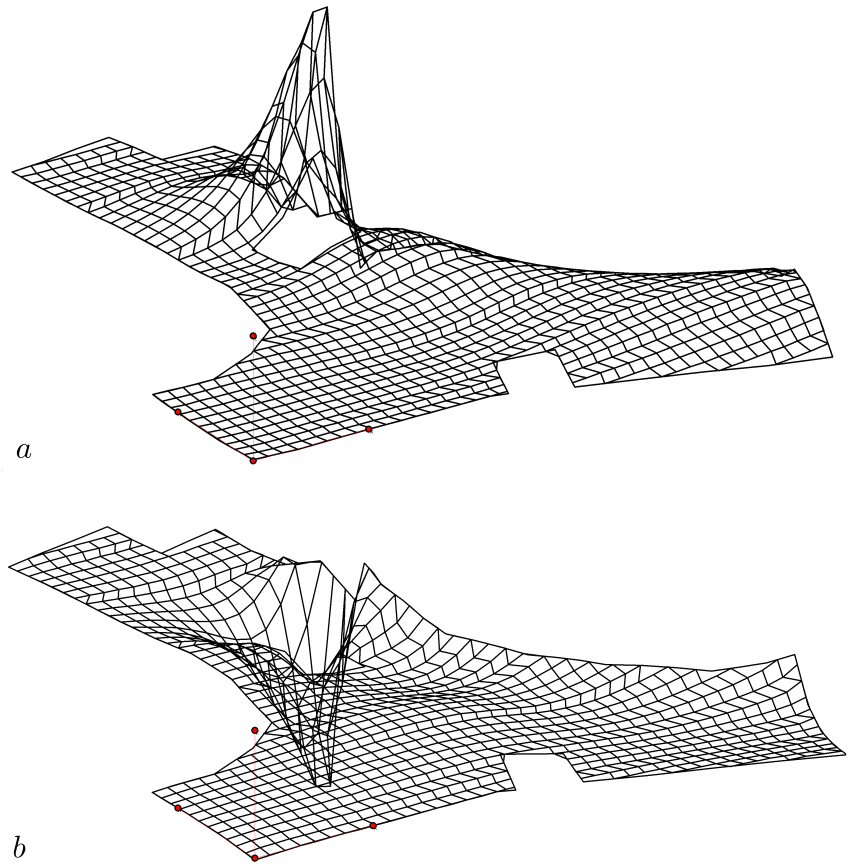


Bild 3.63. Die Einflussfunktionen für das Randmoment m_{nn} in zwei nahezu identischen Punkten haben ein entgegengesetztes Vorzeichen (BE-PLATTE)

$$w''(x) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,. \tag{3.219}$$

Natürlich rechnet niemand (anscheinend) so, aber die entscheidende Botschaft ist, dass das Differenzieren, wie jede Auswertung eines linearen Funktionals, auf **lineare Algebra** zurückgeführt werden kann, $J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$. Zu jeder Messung an einem Tragwerk gibt es einen Vektor $\boldsymbol{g}$ und das *post-processing* ist theoretisch ein wiederholtes Anwenden dieser Formel.

Jetzt denke man an eine **singuläre Ecke**. Zehn Zentimeter vor und hinter der Ecke sehen wir Spannungen, wie sie unterschiedlicher nicht sein können. Das bedeutet doch aber, dass die zugehörigen Vektoren $\boldsymbol{g}$ – obwohl die Aufpunkte nur 20 cm entfernt sind – krass unterschiedlich sind. Singularitäten in den Spannungen übersetzen sich also in oszillierende Vektoren $\boldsymbol{g}$, in oszillierende Einflussfunktionen, siehe die Bilder 3.62, 3.63 und 3.64.

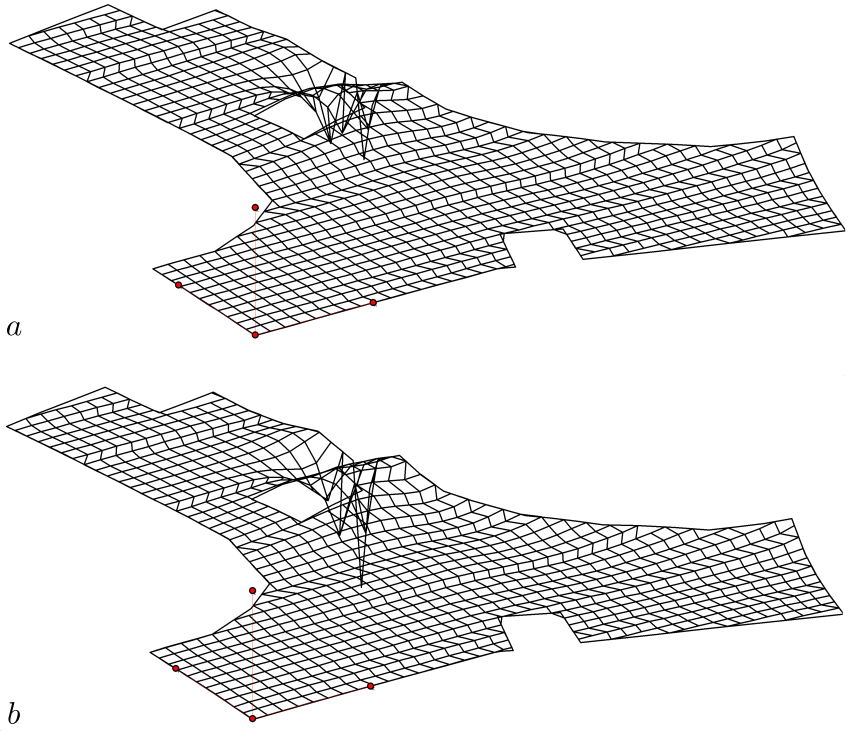


Bild 3.64. Dieselben Einflussfunktionen nachdem die Lage des Knotens korrigiert wurde, [126], (BE-PLATTE)

Man beachte, dass die Vektoren $\boldsymbol{g}$ nicht LF-abhängig sind, sondern zu dem Modell gehören. Sie entstehen mit dem Modell, wie alle Einflussfunktionen, nur der spezielle Lastfall macht die grassen Unterschiede zufällig sichtbar.

3.34 Der einzelne Punkt und das Ganze

Die finiten Elemente schwenken immer schnell auf die lineare Algebra über, auf Vektoren und Matrizen, aber es sei nicht vergessen, dass jeder Punkt ‚analytisch' ist, in jedem Punkt das Ganze steckt, denn jeder Wert ist das Skalarprodukt der Einflussfunktion G_0 und der Belastung p

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,, \tag{3.220}$$

und das gilt auch für die FE-Lösung, nur dass p durch p_h ersetzt wird und G_0 durch G_0^h

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_0\, p_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_0^h\, p_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_0^h\, p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{3.221}$$

was technisch aber auf dasselbe hinausläuft, (G_0, p_h) oder (G_0^h, p_h) macht keinen Unterschied. Die Randelemente erzeugen mit (3.220) den *plot* der Lösung auf dem Bildschirm.

Bei den finiten Elementen werden dagegen erst die Knotenwerte $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ bestimmt und dann mit den *shape functions* dazwischen interpoliert

$$u_h(x) = \sum\nolimits_i u_i\, \varphi_i(x)\,. \tag{3.222}$$

Theoretisch (praktisch lieber nicht) könnten sie es aber den Randelementen nachmachen. Sie bräuchten nur den FE-Lastfall p_h in (3.221) einzusetzen und – *voilà* – auf dem Bildschirm erschiene die verformte Struktur.

Das soll deutlich machen, dass es zwei Wege in der FEM gibt. Entweder man denkt in *shape functions* φ_i oder in *shape forces* p_i, lastet den Fehler $G_0 - G_0^h$ den φ_i an, oder den Fehler $p - p_h$ den p_i

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega (G_0 - G_0^h)\, p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_0 (p - p_h)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{3.223}$$

Aber beide Fehler sind gleich.

In Kapitel 6.13 werden wir näher auf den Unterschied zwischen G_0 und G_0^h eingehen und diskutieren, warum Singularitäten auf dem Rand die Güte von G_0^h und damit der FE-Lösung u_h negativ beeinflussen.

3.35 Darstellung einer FE-Lösung

Wir fassen zusammen:

So wie man den Vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ auf zwei Arten schreiben kann

$$\boldsymbol{u} = \sum\nolimits_i f_i\, \boldsymbol{g}_i = \sum\nolimits_i u_i\, \boldsymbol{e}_i \tag{3.224}$$

so auch die FE-Lösung

$$u(x) = \sum\nolimits_i f_i\, g_i(x) = \sum\nolimits_i u_i\, \varphi_i(x) \tag{3.225}$$

Die $g_i(x)$ sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen u_i, die $\varphi_i(x)$ sind die zugehörigen *shape functions* und die f_i sind die äquivalenten Knotenkräfte. In der Darstellung des Vektors $\boldsymbol{u}$ sind die $\boldsymbol{g}_i$ die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$ und die $\boldsymbol{e}_i$ sind die Einheitsvektoren.

In (3.225) stehen die zwei wichtigsten Basen $\{g_i(x)\}$ und $\{\varphi_i(x)\}$ des Ansatzraums $\mathcal{V}_h$ nebeneinander, siehe Kapitel 3.42.

3.36 Stabtragwerke und $J = g^T f$

In der zentralen Gleichung $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist $J(w)$ die Schnittgröße im Lastfall $\boldsymbol{f}$. Bei Stabtragwerken, wenn EA und EI konstant sind, kann man jedoch das FE-Ergebnis exakt machen, indem man das **lokale Ergebnis** (am *clamped beam*) zu dem Ergebnis addiert, wie in Bild 3.8 *b*,

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} + \int_0^{l_e} G_{loc}(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.226}$$

Wir machen das automatisch, deswegen ist uns dieser Schritt nicht so bewusst.

Das lokale Ergebnis ist die Überlagerung der lokalen Einflussfunktion G_{loc} für $M(x)$, $V(x)$ etc. mit der Belastung im Feld. Das geht natürlich einfacher: Man berechnet am eingespannten Element das Moment oder die Querkraft – was immer $J(w)$ gerade ist – aus der Belastung p im Aufpunkt x und addiert diesen Wert zu $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$; er entspricht genau dem Integral.

Wenn die Belastung p so ungewöhnlich ist, dass die Schnittkräfte nicht in den Handbüchern stehen, kann man natürlich auch über die Einflussfunktionen gehen, wie in Kapitel 3.7.

Bei Flächentragwerken geht all das leider nicht, kann man nicht ‚nachbessern', ist mit $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ Schluss, denn sonst hätten wir schon längst ein Drehwinkelverfahren für Platten und Scheiben.

3.37 Handberechnung

Die Formel

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} \tag{3.227}$$

sieht natürlich sehr elegant aus, aber wenn man sie ausschreibt[23]

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{M(\varphi_i)(x)}_{j_i}\, u_i\,, \tag{3.228}$$

dann erkennt man, dass sie mit der Handberechnung übereinstimmt – wie sollte es auch anders sein?

In der Formel ist $J(w) = M(x)$ das Moment in einem Riegel. Die Einträge j_i in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ sind die Momente $M(\varphi_i)(x)$ der *shape functions* in dem Aufpunkt x – der Vektor $\boldsymbol{j}$ ist also nahezu leer – und die u_i sind die Durchbiegungen und Verdrehungen der beiden Endknoten des Riegels. Zu diesem Ergebnis muss man noch das Moment der lokalen Lösung im Aufpunkt addieren, $+M_{loc}(x)$, also z.B. $p\,l^2/24$ bei Gleichlast und $x =$ Feldmitte.

Wenn wir oben gesagt haben, dass niemand so rechnet, keiner die Formel $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ benutzt, niemand Einflussfunktionen im Alltag benutzt, dann

[23] Die φ_i sind hier die vier Balken-φ_i in dem Element mit dem Aufpunkt x.

sieht man hier, dass **jeder** diese Formel benutzt, denn Handberechnung und $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist – bis auf das fehlende lokale Ergebnis – dasselbe.

3.38 Zustandsvektoren und Messungen

In einem übertragenen Sinne repräsentiert der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ einen **Zustandsvektor** des Tragwerks und die Auswertung eines Funktionals

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}\,, \tag{3.229}$$

die Bestimmung des Moments $J(\boldsymbol{u}) = M(x)$ oder der Querkraft $J(\boldsymbol{u}) = V(x)$ in einem Punkt x, kann man als eine Messung an dem Tragwerk verstehen. Naheliegend ist es dann zu fragen, wie sich die Messwerte verändern, wenn sich die Steifigkeitsmatrix ändert, wenn das Tragwerk aus einem System $\boldsymbol{K}$ in ein System $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ übergeht?

Die ursprüngliche schwache Formulierung (Variationsformulierung)

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} \tag{3.230}$$

und die geänderte Formulierung haben dieselbe rechte Seite, $\boldsymbol{u}_c$ = neue Lsg.,

$$\boldsymbol{\delta u}^T (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}) \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{3.231}$$

so dass die Differenz der beiden Gleichungen, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$, den Ausdruck

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c \tag{3.232}$$

ergibt. Setzen wir für $\boldsymbol{\delta u}$ den Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion, dann folgt

$$J(\boldsymbol{e}) = J(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c\,, \tag{3.233}$$

was ein **lokales Resultat** ist, zumindest so lokal wie die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$, weil wir zur Berechnung von $J(\boldsymbol{e})$ nur über das geänderte Element Ω_e integrieren müssen, sinngemäß ist die rechte Seite ja so etwas wie das Mohrsche Arbeitsintegral auf dem Element $\Omega_e = [0, l_e]$.

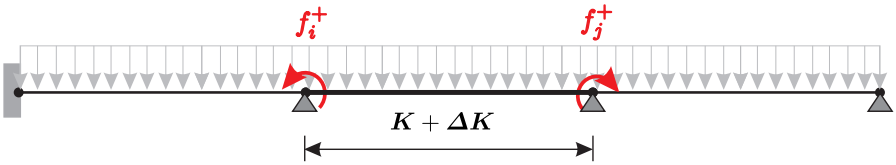


Bild 3.65. Steifigkeitsänderungen an dem Träger bedeuten zusätzliche Knotenkräfte $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$, siehe Kapitel 5.

Man stelle sich einen ebenen Rahmen vor, in dem ein einzelner Riegel reißt oder verstärkt wird, $EI \to EI \pm \Delta EI$. Das ΔEI bedeutet einen Übergang zu einer neuen Matrix $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$.

Die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ mal den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u}_c$ des Elements – also nach der Steifigkeitsänderung – ergibt Zusatzkräfte

$$\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \tag{3.234}$$

in den Knoten des Elements, siehe Bild 3.65, und die steuern wie sich die Steifigkeitsänderung $EI + \Delta EI$ in dem Tragwerk bemerkbar machen, denn

$$J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ . \tag{3.235}$$

Der Vektor $\boldsymbol{g}$ sind die Knotenverschiebungen der Einflussfunktion, die zu der jeweiligen Messung, dem jeweiligen Funktional $J(\boldsymbol{u})$ gehört.

Alles spielt sich nur auf dem geänderten Element Ω_e ab. Entscheidend ist, was von der Spreizung des Aufpunktes x in einem Riegel im Stockwerk darüber – oder sonst wo – (Einflussfunktion für ein Moment $M(x)$ z.B.) im Element Ω_e ankommt, also wie groß die Knotenwerte g_i der Einflussfunktion am Element sind und wie groß die Zusatzkräfte f_i^+ sind.

Das Problem ist natürlich, dass wir den Vektor $\boldsymbol{u}_c$, also die neue Gleichgewichtslage, nicht kennen. Man kann aber für den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ näherungsweise den ursprünglichen Vektor $\boldsymbol{u}$ setzen

$$J_i(\boldsymbol{e}) \simeq \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u} , \tag{3.236}$$

oder $\boldsymbol{u}_c$ durch Iteration bzw. eine sehr einfache – es sind nur wenige Zeilen – direkte Berechnung bestimmen, siehe Kap. 5.27.

Aus $\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}^{(-1)}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+)$ folgt

$$\boxed{(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} ,} \tag{3.237}$$

was bedeutet, dass ein Tragwerk **im Übergang** von $\boldsymbol{K}$ zu $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ den Zuwachs $\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ nicht frei wählen kann, sondern dass der neue Zustand $\boldsymbol{u}_c$ mit dem vorherigen Zustand $\boldsymbol{u}$ **kompatibel** sein muss.

In der Luft- und Raumfahrt steht man vor dem ‚inversen' Problem. An Hand der gemessenen harmonischen Schwingungen $\boldsymbol{u}_c$ eines Satelliten, muss man die Gestalt der Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ bestimmen.

Theoretisch könnte man mit einer ganz einfachen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_0$ starten, die man dann mit weiteren Matrizen $\boldsymbol{\Delta K}_i$ anreichert

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{\Delta K}_1 + \boldsymbol{\Delta K}_2 + \ldots + \boldsymbol{\Delta K}_i \tag{3.238}$$

und so würde man eine Kette von Lösungen $\boldsymbol{u}_i$ produzieren, wo jeder neue Vektor $\boldsymbol{u}_{i+1}$ mit dem vorhergehenden Vektor verschränkt ist

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}_i^{-1}\boldsymbol{\Delta K}_{i+1})\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i . \tag{3.239}$$

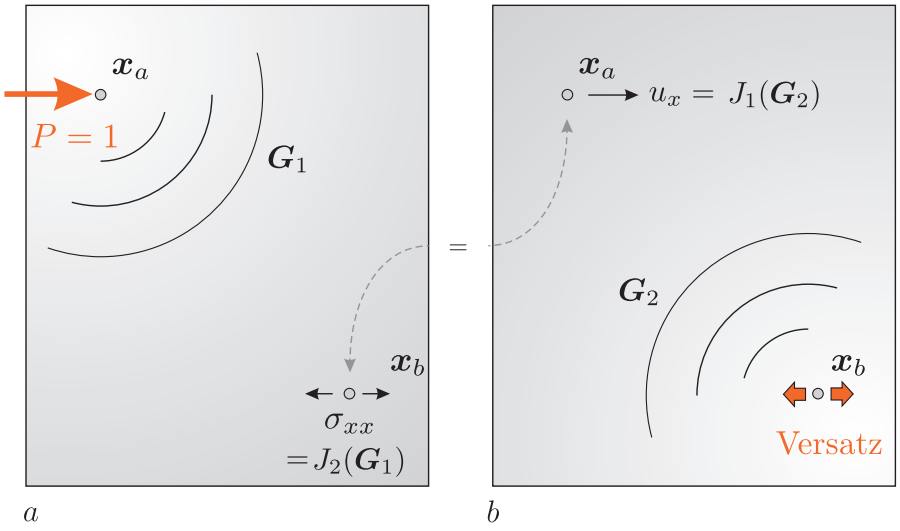


Bild 3.66. Zwei Einflussfunktionen, **a)** eine Einzelkraft generiert die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_1$ für $u_x(\boldsymbol{x}_a)$ und **b)** ein Versatz erzeugt die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$ für die Spannung σ_{xx} im Punkt $\boldsymbol{x}_b$; die beiden Kerne sind adjungiert, $J_2(\boldsymbol{G}_1) = J_1(\boldsymbol{G}_2)$

3.39 Der Satz von Maxwell

Eigentlich gehört der *Satz von Maxwell* in das Kapitel 2, aber wir wollten vorher über Funktionale gesprochen haben.

Den ***Satz von Maxwell*** kennen wir als die Gleichung

$$w_1(x_2) = w_2(x_1)\,. \tag{3.240}$$

Die Durchbiegung, die eine Kraft $P_1 = 1$ am Ort x_1 in einem abliegenden Punkt x_2 erzeugt, ist genauso groß, wie die Durchbiegung, die eine Kraft $P_2 = 1$ am Ort x_2 im Punkt x_1 erzeugt, siehe Bild 4.1.

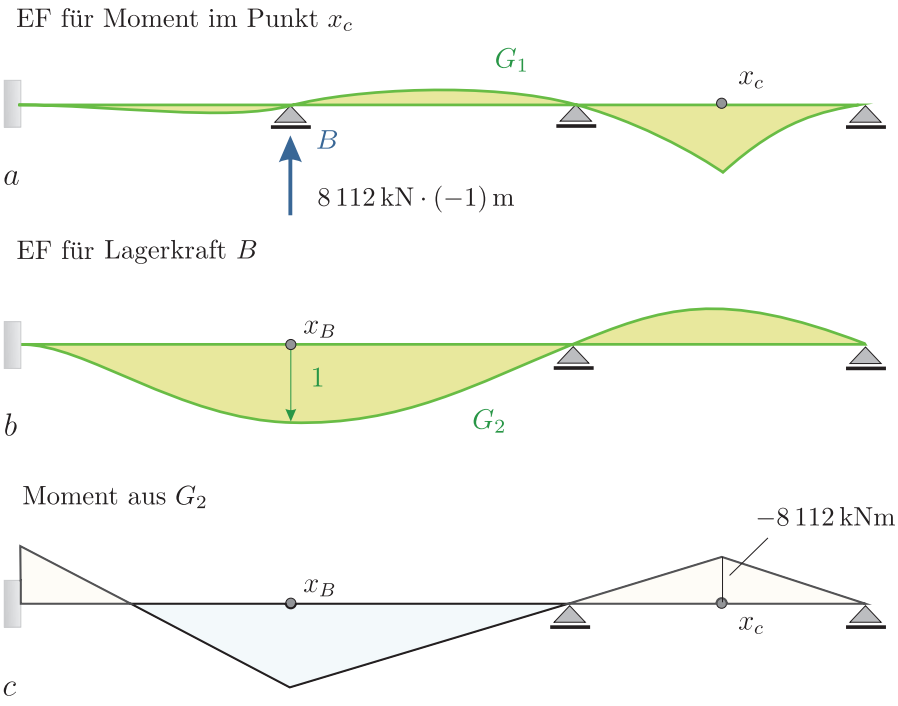
Wir können dies gleich dahingehend verallgemeinern, dass die **Kerne** zweier Funktionale **‚über Kreuz'** gleich sind, was heißen soll

$$\boxed{J_1(G_2) = J_2(G_1)}\,. \tag{3.241}$$

In Worten: *Was das erste Funktional J_1 angewandt auf die Einflussfunktion G_2 liefert, ist derselbe Wert, den das zweite Funktional J_2 angewandt auf die Einflussfunktion G_1 liefert.*

Die beiden Biegelinien w_1 bzw. w_2 in (3.240), Einzelkraft $P = 1$ in x_1 bzw. x_2, sind ja gerade die Einflussfunktionen G_1 und G_2 für die beiden Funktionale,

$$J_1(w) = w(x_1) = \int_0^l G_1(y, x_1)\, p\, dy \qquad J_2(w) = w(x_2) = \int_0^l G_2(y, x_2)\, p\, dy \tag{3.242}$$



$$J_2(G_1) = \text{Lagerkraft } B \text{ aus } G_1 = -8\,112 = \text{Moment aus } G_2 = J_1(G_2)$$

Bild 3.67. Zwei Einflussfunktionen und ihre Gleichheit $J_2(G_1) = J_1(G_2)$ über Kreuz (BE-FRAMES)

und so kommen wir auf den Ausdruck (3.241), der im übrigen für alle Paare von linearen Funktionalen und ihre Kerne gilt. Der *Satz von Maxwell* ist nicht auf Durchbiegungen begrenzt.

In einem gewissen Sinne ist das Resultat $w_1(x_2) = w_2(x_1)$ dasselbe, wie die Feststellung, dass die Entfernung von einem Punkt A zu einem Punkt B genauso groß ist, wie die Entfernung von B nach A[24].

Gleichung (3.241) ist die Grundgleichung. Sie ist der Satz von Betti auf den Punkt gebracht.

Um den Gehalt dieser Gleichung zu veranschaulichen, betrachten wir eine quadratische Scheibe auf der zwei Punkte $\boldsymbol{x}_a$ und $\boldsymbol{x}_b$ markiert sind, siehe Bild 3.66. Im Punkt $\boldsymbol{x}_a$ messen wir die **horizontale Verschiebung** eines Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$

$$J_1(\boldsymbol{u}) = u_x(\boldsymbol{x}_a) \tag{3.243}$$

und im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ messen wir die **Spannung** σ_{xx}

[24] Diese Bemerkung ist nicht ganz so trivial, wie sie klingt.

$$J_2(\boldsymbol{u}) = \sigma_{xx}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_b) \tag{3.244}$$

dieses Feldes.

Die Einflussfunktion für das Funktional J_1 ist das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{G}_1$, das von einer horizontalen Einzelkraft $P = 1$ erzeugt wird, und die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$ für J_2 wird von einem horizontalen Versatz im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ erzeugt.

Gemäß Maxwell (= Satz von Betti) gilt

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = J_2(\boldsymbol{G}_1) \tag{3.245}$$

oder

Die Verschiebung im Punkt $\boldsymbol{x}_a$ verursacht durch einen Versatz 1 im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ ist gleich der Spannung im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ infolge der Einzelkraft im Punkt $\boldsymbol{x}_a$.

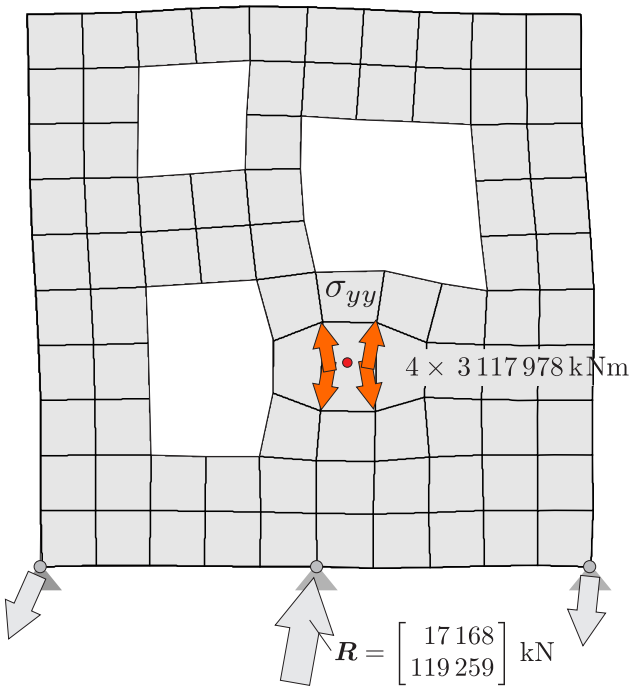


Bild 3.68. FE-Einflussfunktion für die vertikale Spannung σ_{yy} in der Elementmitte, äquivalente Knotenkräfte und zugehörige Lagerkräfte aus der Spreizung des Aufpunkts (WINFEM).

In Bild 3.67 ist das erste Funktional

$$J_1(w) = M(x_c) \tag{3.246}$$

das **Moment** der Biegelinie w im Punkt x_c und das zweite Funktional

$$J_2(w) = B \tag{3.247}$$

ist die **Lagerkraft**, die zu dieser Biegelinie im Lager B gehört.

Zu G_1 (= Einflussfunktion für J_1) gehört die Lagerkraft $J_2(G_1) = -8\,112$ kNm und zur Einflussfunktion G_2 (= Einflussfunktion für B) gehört ein Moment $J_1(G_2) = -8\,112$ kNm und beide Werte sind zahlenmäßig gleich[25]

$$J_1(G_2) = J_2(G_1)\,. \tag{3.248}$$

Betti extended, siehe Kapitel 4, garantiert übrigens, dass dies auch für die FE-Lösungen gilt, d.h. in der Gleichung

$$J_1(G_2) = \int_0^l \delta_1\, G_2\, dy = \int_0^l \delta_2\, G_1\, dy = J_2(G_1) \tag{3.249}$$

darf man G_1 und G_2 durch die FE-Lösungen ersetzen, $J_1(G_2^h) = J_2(G_1^h)$.

Bemerkung 3.7. Den klassischen Maxwell, $\delta_{12} = \delta_{21}$ unter Einzelkräften siehe Bild 4.1, kann man auch aus der Mohrschen Arbeitsgleichung herleiten, wenn man zur Berechnung der Durchbiegungen δ_{ij} schwache Einflussfunktionen benutzt, denn dann ist die Symmetrie im Ergebnis eine einfache Konsequenz der **Symmetrie der Wechselwirkungsenergie**

$$\delta_{12} = a(w_1, w_2) = a(w_2, w_1) = \delta_{21}\,. \tag{3.250}$$

Bei ‚höheren' Dirac Deltas, δ_3, δ_4 (Balken), muss man allerdings über den Satz von Betti gehen, weil es für $M(x)$ und $V(x)$ keine schwachen Einflussfunktionen gibt.

Lagersenkung

Der Satz von Maxwell beantwortet auch die Frage, wie man Einflussfunktionen auswertet, wenn sich ein Lager senkt, wie z.B. das mittlere Lager der Wandscheibe in Bild 3.68. Dargestellt ist dort die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in einem Element. Wir rechnen: Die Spreizung des Aufpunktes erzeugt in dem Lager eine vertikale Lagerkraft R_y von 119 259 kN und damit ergibt sich die Spannung zu

$$\sigma_{yy} = -119\,259 \cdot \Delta_y = \text{Lagerkraft aus EF} \cdot \text{Lagersenkung}\,, \tag{3.251}$$

wenn Δ_y (in y-Richtung positiv) die Lagerbewegung ist.

[25] Das Ergebnis von Einflussfunktionen hat immer die Dimension einer *Arbeit*.

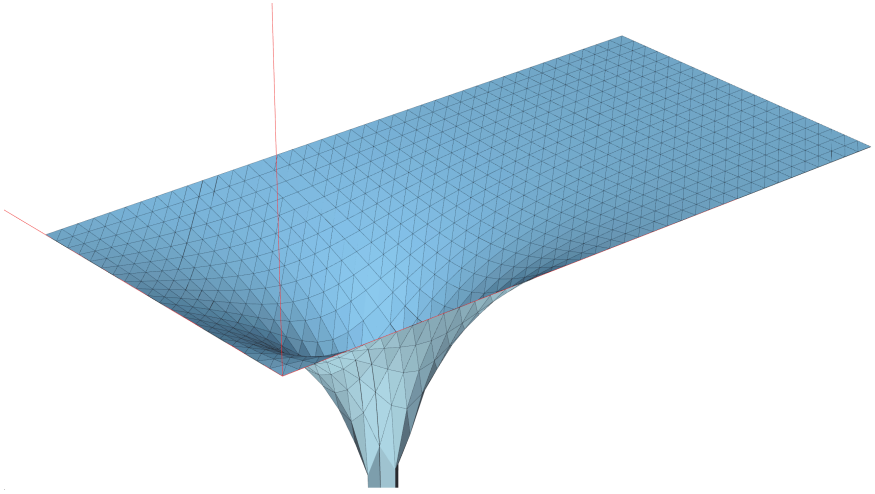


Bild 3.69. Membran. Das ist eine Spalte $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$, also die Verschiebungen aus einer Kraft 1 im Knoten $\boldsymbol{x}_i$. Es geht tief hinunter, und damit deutet sich an, dass die Knotenkraft f_i in der Grenze, $h \to 0$, zu einer echten Einzelkraft mutiert, die dann zu ‚scharf' für die Membran ist (BE-LAPLACE)

3.40 Die inverse Steifigkeitsmatrix

Die FE-Einflussfunktion für die Verschiebung $u(\boldsymbol{x})$ in einem Knoten $\boldsymbol{x}_k$ hat die Form

$$G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_k) = \sum\nolimits_i g_i(\boldsymbol{x}_k)\, \varphi_i(\boldsymbol{y})\,. \tag{3.252}$$

Der Vektor $\boldsymbol{g} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}^T$ ist die Lösung des $n \times n$ Systems

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_k \qquad (\text{Einheitsvektor } \boldsymbol{e}_k)\,, \tag{3.253}$$

was bedeutet, dass die n **Spalten** $\boldsymbol{g}_k$ der inversen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{g}_k \tag{3.254}$$

die Knotenverschiebungen sind, die zu den n **Einflussfunktionen** $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_k)$ der n Knoten $\boldsymbol{x}_k$ gehören, siehe Bild 3.69,

$$G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_k) = \sum\nolimits_i g_{ki}\, \varphi_i(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}_k^T \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,, \tag{3.255}$$

mit $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) = \{\varphi_1(\boldsymbol{y}), \varphi_2(\boldsymbol{y}), \ldots, \varphi_n(\boldsymbol{y})\}^T$.

Das erklärt, warum die Inverse einer **tri-diagonalen Matrix** voll besetzt ist. Schon eine einzelne Punktlast $P = 1$ zwingt alle Knoten ihre Lage zu korrigieren. Die Inverse einer Differenzenmatrix wie $\boldsymbol{K}$ (man denke an ein Seil $(\ldots\ 0\ \ -1\ \ 2\ \ -1\ \ 0\ \ \ldots) \cdot H/l_e$) ist also eine ‚integrierende Matrix'.

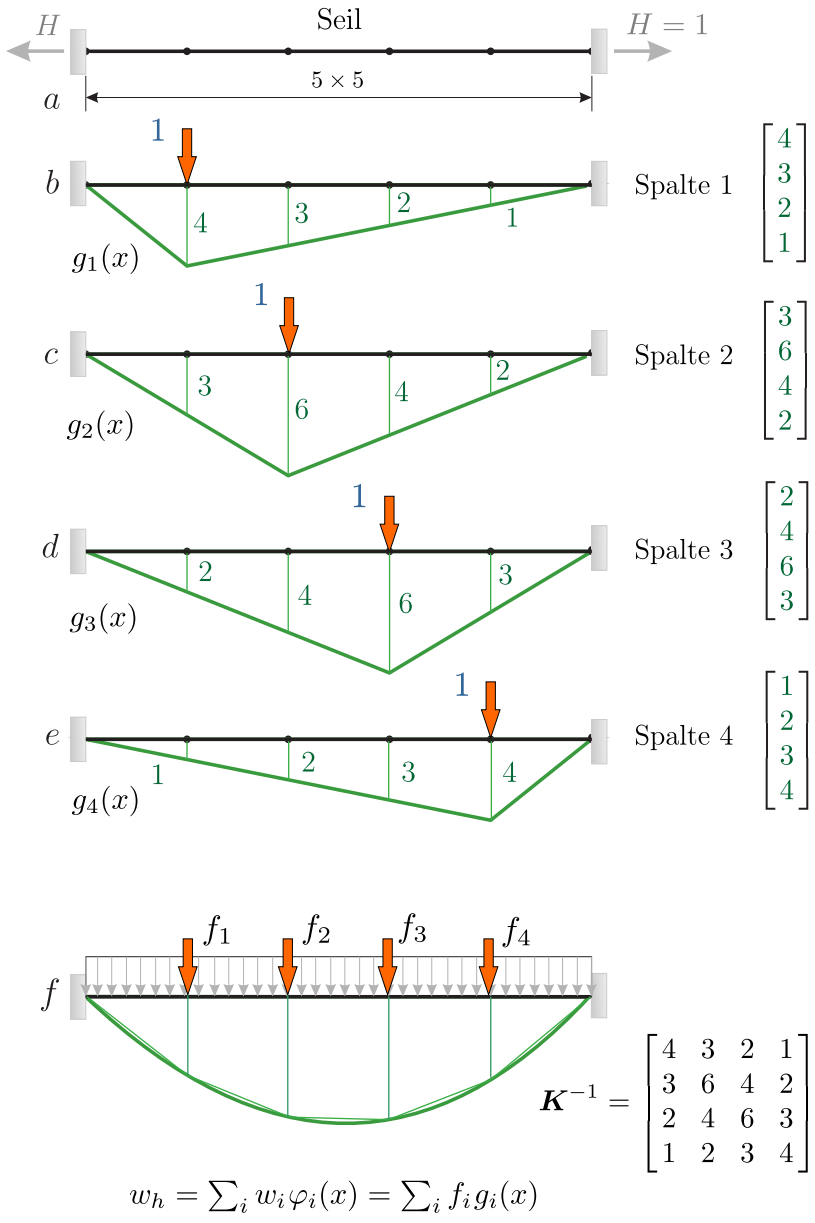


Bild 3.70. a) Seil aus $n = 5$ Elementen, **b-e)** die Durchbiegungen aus $f_i = 1$ sind die Spalten der inversen Steifigkeitsmatrix, **f)** die FE-Lösung lässt sich als Summe über die $\varphi_i(x)$ oder als Summe über die Spaltenfunktionen $g_i(x)$ (alternative Basis des $\mathcal{V}_h$), die Einflussfunktionen der w_i, schreiben, siehe Kapitel 3.42.

Eine Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ‚differenziert' und ihre Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ‚integriert'. Die Inverse ist *immer* voll besetzt und sie ist symmetrisch (wegen Maxwell).

3.41 Beispiele

Das mit einer Kraft H vorgespannte Seil in Bild 3.70 *a* wurde in fünf lineare Elemente unterteilt. Die Steifigkeitsmatrix[26] $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K} = \frac{H}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.256}$$

ist tri-diagonal, dagegen ist ihre Inverse

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{l_e}{5\,H}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.257}$$

voll besetzt. Die **Spalten** $\boldsymbol{g}_k$ der Inversen, siehe die Bilder 3.70 *b*—*f*, sind die Durchbiegungen der Knoten, wenn im Knoten x_k eine Einzelkraft $P = 1$ steht – deswegen sind alle Einträge > 0 (nur beim Seil so).

Die **Zeilensumme** der Inversen, ein Vektor $\boldsymbol{s}$ mit den Einträgen $s_i = \sum_j k_{ij}^{(-1)}$ stellt ein **‚Sensitivitäts-Profil'** der Matrix da, denn er verrät welche Knoten sich am stärksten verformen, wenn alle $f_j = 1$ gleich sind, weil

$$\begin{aligned} w_h(x_i) &= \int_0^l G_h(y, x_i)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{4} g_j(x_i) \int_0^l \varphi_j(y)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(-1)} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(-1)} = s_i \qquad \text{(Summe über Zeile } i\text{)}\,. \end{aligned} \tag{3.258}$$

Das sind hier die Knoten 2 und 3. Man kann aber auch andere Selektionskriterien anwenden, wie horizontale oder vertikale f_i.

Zu dem Balken in Bild 3.71, es sei $EI = 1$ und $l_e = 1$, gehört die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.259}$$

[26] Die Determinante einer Seilmatrix $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ (ohne Vorfaktor H/l_e) ist $n + 1$.

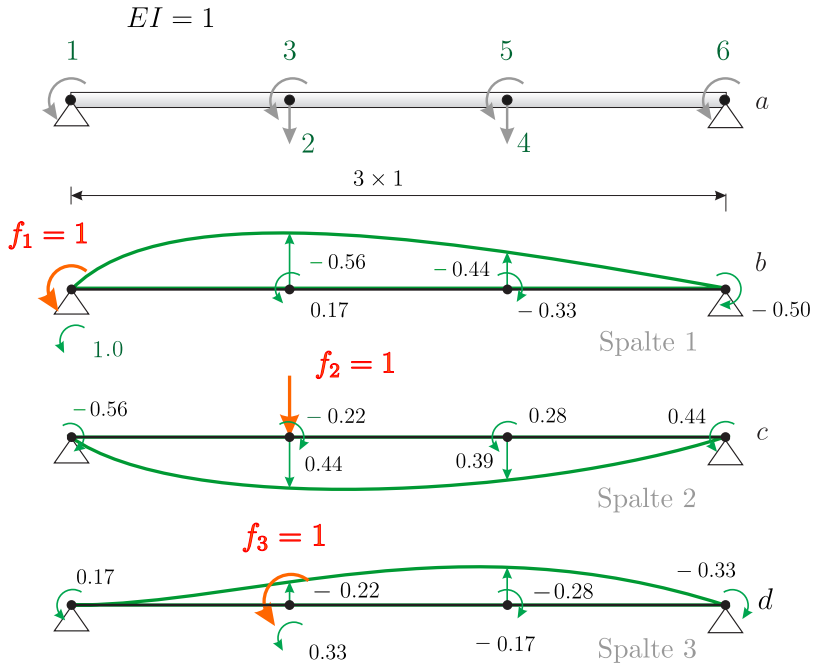


Bild 3.71. a) Unterteilung eines Balkens in drei Elemente, **b)** Biegelinie aus $f_1 = 1$ (Spalte 1 von $\boldsymbol{K}^{-1}$), **c)** aus $f_2 = 1$ (Spalte 2 von $\boldsymbol{K}^{-1}$), **d)** aus $f_3 = 1$ (Spalte 3)

und die **Spalten der Inversen** (die ersten drei sieht man in Bild 3.71 *b, c, d*)

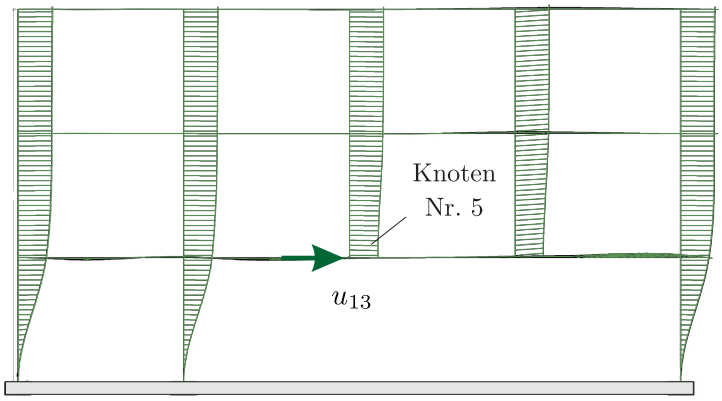
$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.56 & 0.17 & -0.44 & -0.33 & -0.50 \\ -0.56 & 0.44 & -0.22 & 0.39 & 0.28 & 0.44 \\ 0.17 & -0.22 & 0.33 & -0.28 & -0.17 & -0.33 \\ -0.44 & 0.39 & -0.28 & 0.44 & 0.22 & 0.56 \\ -0.33 & 0.28 & -0.17 & 0.22 & 0.33 & 0.17 \\ -0.50 & 0.44 & -0.33 & 0.56 & 0.17 & 1.00 \end{bmatrix} \tag{3.260}$$

sind die Knotenbewegungen in den sechs **Grundlastfällen** $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$, wenn also jeweils ein Knoten in Richtung eines FG belastet wird, $i = 1, 2, \ldots 6$.

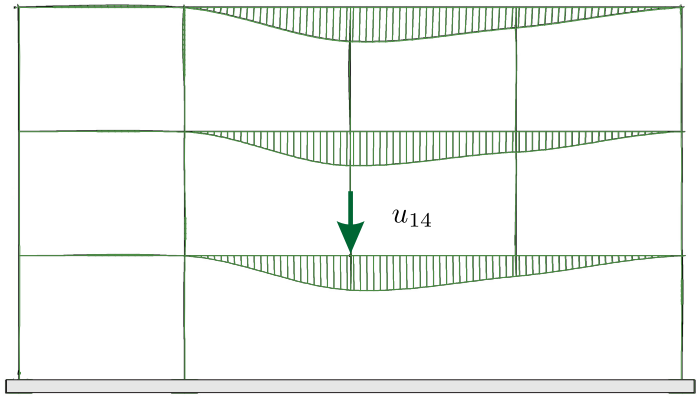
Dies gilt auch für ganze Rahmen, siehe Bild 3.72. Die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen (genauer: sind die Knotenwerte der EF).

Eine Einzelkraft $f_i = 1$ in Richtung eines Freiheitsgrades u_i führt zur Verformung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{g}_i$ und die Energie, die dabei entsteht, steht auf der Diagonalen $\{g_{ii}\}$ der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$, denn

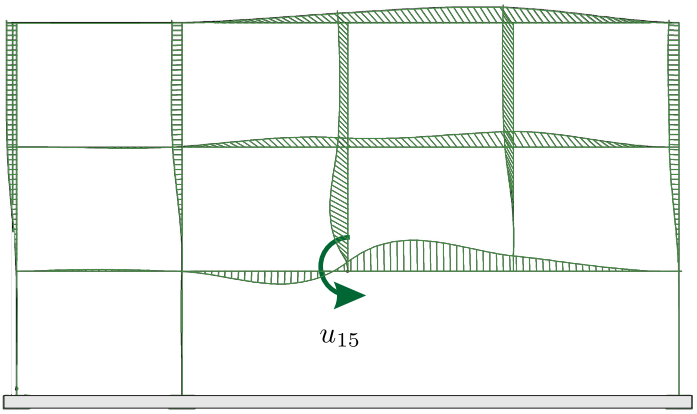
$$a(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_i) = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{e}_i = g_{ii}\,. \tag{3.261}$$



a



b



c

Bild 3.72. Die Knotenverschiebungen dieser drei Einflussfunktionen sind die Spalten 13, 14 und 15, also $\boldsymbol{g}_{13}$, $\boldsymbol{g}_{14}$, $\boldsymbol{g}_{15}$, der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ (BE-FRAMES)

Je größer g_{ii} ist, desto weiter ist der Ausschlag, **desto weicher** ist das Tragwerk in Richtung von u_i, denn $2 \cdot W_e = 1 \cdot u_i = 2 \cdot W_i = g_{ii}$. Überraschend ist das nicht, denn $g_{ii} = f_{ii}$ ist ja das Diagonalelement der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$.

Bemerkung 3.8. Man beachte, dass die Spalten der inversen Balkenmatrix abwechselnd Einträge w und w' enthalten und deswegen muss man erst in Gedanken die Einträge mit den zugehörigen φ_i multiplizieren, um sich ein Bild von der Einflussfunktion machen zu können, siehe Bild 3.71 und Bild 3.74. Bei einem Seil oder Stab ist das einfacher, da sieht man das Seileck direkt.

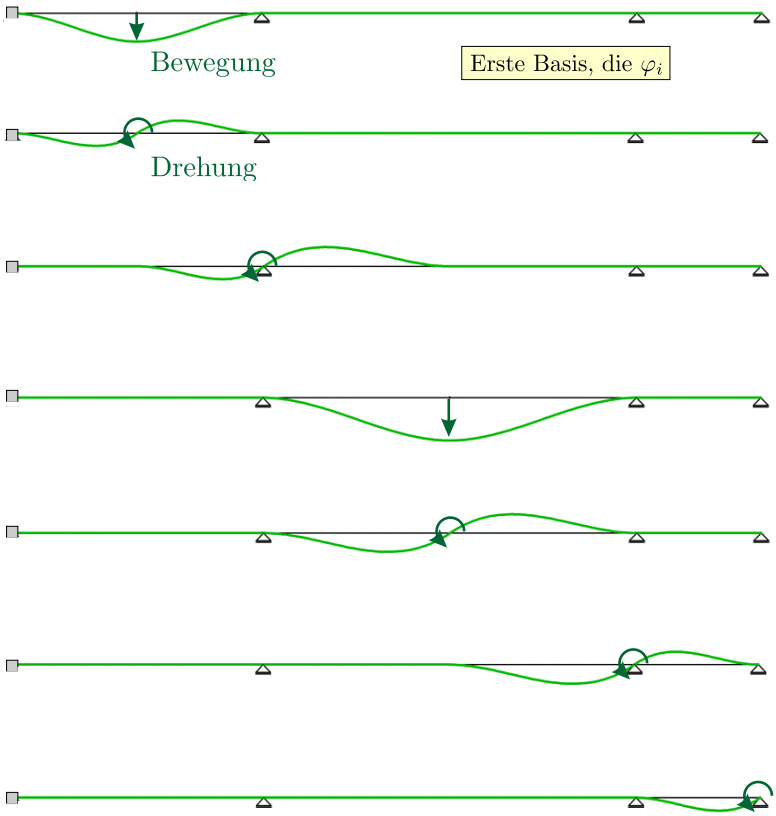


Bild 3.73. Die *shape functions*, die Einheitsverformungen der Knoten bilden eine mögliche Basis des $\mathcal{V}_h$ (BE-FRAMES)

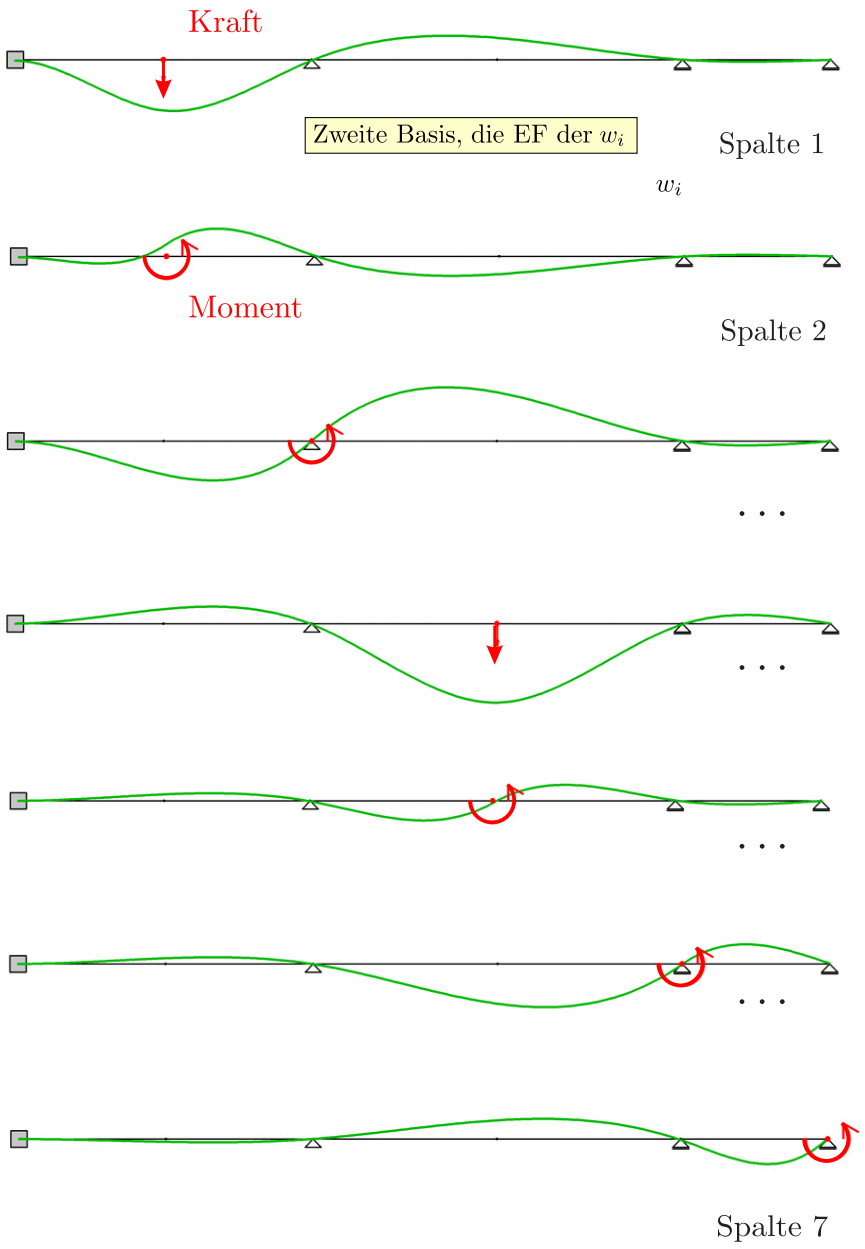


Bild 3.74. Die Spaltenfunktionen des Trägers bilden eine alternative Basis des $\mathcal{V}_h$. Jede Biegelinie entspricht einer Spalte der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$. Diese Biegelinien sind gleichzeitig die Einflussfunktionen für die zugehörigen w_i. Hier sieht man auch die inhärente Schwäche dieser Einflussfunktionen (der Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$). Mathematisch gleichen die g_i langen Vektoren, die viele kleine und kleinste Einträge enthalten – man denke an einen zehnstöckigen Rahmen. Der Praktiker sieht die Schwäche natürlich als Vorteil, weil er ruhigen Gewissens alles weglassen kann, was nicht zum Nahbereich gehört; $g_{ij} \cdot f_j$ ist der Einfluss von f_j auf w_i (BE-FRAMES).

3.42 Der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ hat zwei Basen

Alle *shapes*, alle Verformungen, die ein FE-Modell annehmen kann, sind Entwicklungen nach den *shape functions* $\varphi_i(x)$, siehe Bild 3.73,

$$u_h(x) = \sum\nolimits_i u_i\, \varphi_i(x)\,. \tag{3.262}$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}$ ist die **Adresse** des *shapes* bezüglich der Basis $\varphi_i(x)$. Nun gibt es aber noch eine zweite Basis[27] in $\mathcal{V}_h$ nach der man $u_h(x)$ entwickeln kann und zwar sind das die ***Spalten(funktionen)*** der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [g_{ij}]$

$$g_j(x) = \sum\nolimits_i g_{ij}\, \varphi_i(x)\,, \qquad (g_{ij} \text{ in Spalte } j) \tag{3.263}$$

denn

$$\boxed{u_h(x) = \sum\nolimits_i u_i \varphi_i(x) = \sum\nolimits_{i,j} g_{ij}\, f_j\, \varphi_i(x) = \sum\nolimits_j g_j(x)\, f_j}\,. \tag{3.264}$$

Die Funktion $g_j(x)$ ist die Verformung, wenn man die g_{ij} in Spalte j als Wege $v_i = g_{ij}$ liest, sie ist also das lebendige Bild der Spalte j, es ist ihr ***shape***, siehe Bild 3.74,

$$g_j(x) = \sum\nolimits_i v_i \varphi_i(x) = \sum\nolimits_i g_{ij} \varphi_i(x)\,. \tag{3.265}$$

Die Adresse von u_h bezüglich dieser Basis sind die Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$.

Während die eine Basis, die $\varphi_i(x)$, gestückelt ist, aus einer Aneinanderreihung von *kurzwelligen, kurzatmigen* Knotenverformungen besteht, ist die andere Basis ***langwellig***, denn die $g_i(x)$ strecken ihre Fühler über das ganze Tragwerk aus. Sie sind die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen u_i.

Eine Knotenkraft $f_1 = 1$ in Richtung des FG u_1 (und $f_i = 0$ sonst) produziert gemäß

$$u_h(x) = \sum\nolimits_j g_j(x)\, f_j \tag{3.266}$$

die Verformung $u_h(x) = 1 \cdot g_1(x)$ in dem Rahmen. Nach dem Satz von Maxwell erzeugt eine Einzelkraft $P = 1$ in einem Punkt x daher am Ort von u_1 in Richtung von u_1 die Verschiebung $g_1(x)$.

Die $g_i(x)$ stellen die anschauliche, die Ingenieur-Basis von $\mathcal{V}_h$ dar und sie markieren gleichzeitig die maximale Breite dessen, was technisch auf einem FE-Netz möglich ist – mehr geht nicht. Ein FE-Programm kennt nur n Lastfälle $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$, alle anderen Lastfälle sind Wiederholungen, sind Rekombinationen dieser n Grundlastfälle mit unterschiedlichen Knotenlasten f_i.

Natürlich, in der Stabstatik kann man die FE-Lösung nachbessern, indem man stabweise die lokalen Lösungen dazu addiert, das geht aber bei Flächentragwerken leider nicht. Da sind die $g_i(\boldsymbol{x})$ wirklich ‚das Ende der Fahnenstange'.

[27] Theoretisch gibt es ∞ viele.

3.43 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion

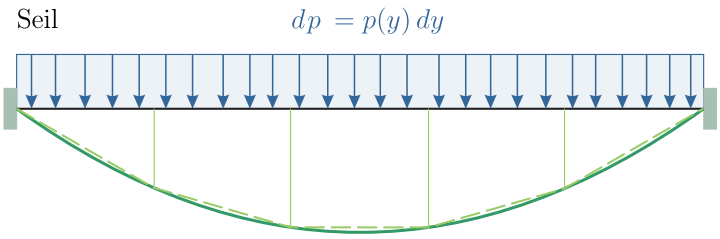


Bild 3.75. Die Biegelinie unter der Streckenlast p ist die Grenzlage der FE-Lösung für $h \to 0$, wenn also die $f_i = dp$ so klein wie Differentiale werden.

Theorem 3.3 (Form einer FE-Einflussfunktion). *Es sei $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix des Tragwerks und $\boldsymbol{K}^{-1}$ ihre Inverse.*
(i) Die Einflussfunktion für den Wert $u_h(x)$ der FE-Lösung in einem Punkt x, lautet

$$G_h(y,x) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(x) \tag{3.267}$$

wobei der Vektor

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}^T \tag{3.268}$$

die Werte der Ansatzfunktionen in dem Punkt x enthält, und der Vektor $\boldsymbol{\varphi}(y)$ ist die Liste der $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)$.
(ii) Die Einflussfunktion für ein lineares Punktfunktional J lautet

$$G_h(y,x) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{j}(x) \tag{3.269}$$

mit dem Vektor

$$\boldsymbol{j}(x) = \{J(\varphi_1), J(\varphi_2), J(\varphi_3), \ldots, J(\varphi_n)\}^T, \tag{3.270}$$

der die Werte $J(\varphi_i)(x)$ enthält.

Die Biegelinie eines Seils ist die **Einhüllende** der unendlich vielen Einflussfunktionen, die jede für sich den Einfluss eines infinitesimalen Teils $p(y)dy$ der Belastung auf die Durchbiegung $w(x)$ beschreiben, siehe Bild 3.75,

$$w(x) = \int_0^l G(y,x) p(y)\, dy\,. \tag{3.271}$$

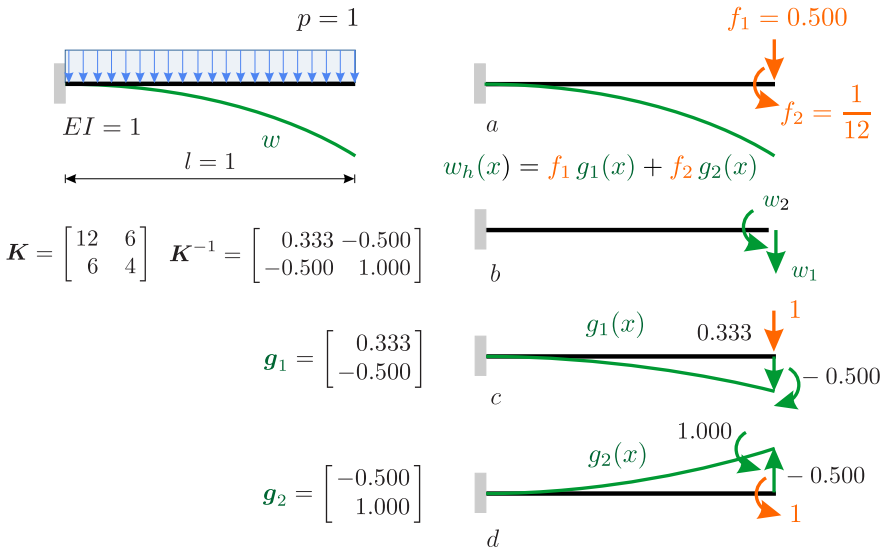


Bild 3.76. Kragträger **a)** äquivalente Knotenkräfte, **b)** Richtungen der positiven Knotenverformungen, **c)** Einflussfunktion $g_1(x)$ für w_1 und **d)** $g_2(x)$ für w_2 und in der Summe ist die FE-Lösung $w_h(x) = f_1 g_1(x) + f_2 g_2(x)$

Im Unterschied hierzu ist die FE-Lösung $w_h(x) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\varphi}(x)$ eine Summe von ***endlich vielen*** Einflussfunktionen, die einzeln mit den äquivalenten Knotenkräften f_i in Richtung von u_i gewichtet werden

$$w_h(x) = f_1 G_h(x_1, x) + f_2 G_h(x_2, x) + \ldots + f_n G_h(x_n, x)\,, \tag{3.272}$$

denn der Vektor $\boldsymbol{w}$ der Knotenwerte lautet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}^{-1}(f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{g}_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \left[\boldsymbol{g}_i\right] \end{aligned} \tag{3.273}$$

und die Spalte $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ entspricht $G_h(x_i, x)$.

Bild 3.76 illustriert dies am Beispiel eines **Kragträgers**. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ des Trägers und ihre Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ lauten

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.274}$$

und die FE-Lösung $\boldsymbol{u}$ ist eine **Linearkombination** der Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{u} = f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 = 0.5 \cdot \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -0.166 \end{bmatrix}. \tag{3.275}$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}$ sind die Knotenwerte der FE-Lösung. Dieselbe Darstellung gilt sinngemäß aber auch für einzelne Werte $u_h(x_P)$ in einem Punkt x_P, denn

$$u_h(x_P) = \int_0^l G_h(y, x_P) p(y)\, dy = \sum\nolimits_i g_i(x_P) \int_0^l \varphi_i(y) p(y)\, dy$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g_i(x_P) f_i = \boldsymbol{g}(x_P)^T \boldsymbol{f}\,. \tag{3.276}$$

Der Vektor $\boldsymbol{g}(x_P)$ ist die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}(x_P) = \boldsymbol{j}(x_P)$ wobei der Vektor $\boldsymbol{j}$ die Werte $\varphi_i(x_P)$ enthält. Sind es lineare Elemente und liegt der Punkt x_P zwischen zwei Knoten x_i und x_{i+1}, dann gilt

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}(x_P) = \boldsymbol{j}(x_P) = \varphi_i(x_P)\boldsymbol{e}_i + \varphi_{i+1}(x_P)\boldsymbol{e}_{i+1} \tag{3.277}$$

und dann ist $\boldsymbol{g}(x_P)$ eine Linearkombination der beiden benachbarten Spalten $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{g}_{i+1}$ der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{g}(x_P) = \varphi_i(x_P)\boldsymbol{g}_i + \varphi_{i+1}(x_P)\boldsymbol{g}_{i+1}\,. \tag{3.278}$$

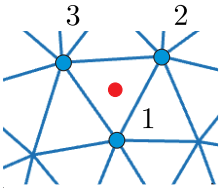


Bild 3.77. Einflussfunktion für ein $J(u_h)(\boldsymbol{x})$. Die Werte $j_i = J(\varphi_i)(\boldsymbol{x})$ der umliegenden *shape functions* bestimmen die Knotenwerte g_i der Einflussfunktion, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$.

3.44 Die Dominanz der Spalten g_i der Inversen

Man kann die obigen Resultate noch etwas prägnanter formulieren, wenn man sich auf die Knotenvektoren konzentriert. Der **Knotenvektor** $\boldsymbol{g}$ einer Einflussfunktion

$$G_h(y, x) = \boldsymbol{g}^T(x)\,\boldsymbol{\varphi}(y) = \sum\nolimits_i g_i(x)\varphi_i(y) \tag{3.279}$$

sind die Gewichte der Einflussfunktion bezüglich den *shape functions*. Der Vektor $\boldsymbol{g}(x)$ selbst ist die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{j}(x)$, ist also eine Entwicklung nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j} = \sum\nolimits_i \boldsymbol{g}_i\, j_i(x)\,. \tag{3.280}$$

Und das gilt für jede (!) Einflussfunktion.

Alle Einflussfunktionen – ob Verschiebungen oder Spannungen – beruhen auf denselben n Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$, nur wie die Spalten gewichtet werden (j_i), unterscheidet die Einflussfunktionen. Die n Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind die Saiten auf denen der Computer spielt.

Die j_i in den drei Knoten in Bild 3.77 mit den zugehörigen u_i nähern $J(u) \sim J(u_h) = \sum_i u_i J(\varphi_i)$ an. Die Frage ist: Hat das FE-Modell genug Flexibilität, um die Reaktion $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ des Tragwerks auf das Dirac Delta mit den φ_i getreu nachbilden zu können, $G_h \to G$. Erhalten die Bewegungs-Sensoren im Lastpfad die richtige Information? Ist auf das Signal Verlass?

Die Inverse repräsentiert – wie das heute heißt – den **digitalen Zwilling**. Jeder Schnittkraft oder Verformung an dem realen Tragwerk entspricht eine Messung $J(\boldsymbol{u})(x) = \boldsymbol{g}^T(x)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T(x)\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ an der Inversen.

Mit einem Druck auf den Fußball testen wir die Inverse, $u = k^{-1}f$.

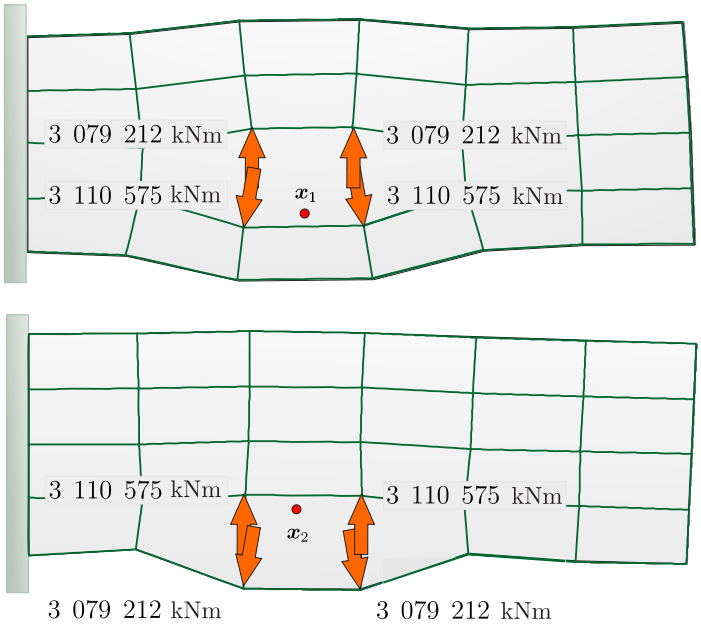


Bild 3.78. FE-Einflussfunktion für σ_{yy} in zwei benachbarten Punkten (WINFEM)

3.45 Warum FE-Spannungen springen

Wenn man die **Trennlinie** zwischen zwei Elementen überschreitet, dann springen die Spannungen. Dann müssen aber doch auch die Einflussfunktionen springen. Wie kommt das?

Den Grund sieht man in Bild 3.78. Die äquivalenten Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für σ_{yy} in dem oberen Punkt $\boldsymbol{x}_1$ generieren, sind die Spannungen σ_{yy} der $\boldsymbol{\varphi}_i$ in diesem Punkt. Weil nur die Ansatzfunktionen des Elements, in dem $\boldsymbol{x}_1$ liegt, bei einer Auslenkung der Elementknoten Spannungen in dem Punkt $\boldsymbol{x}_1$ erzeugen, werden nur die vier Knoten des Elementes belastet. Wenn der Punkt in das nächste Element wandert, $\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2$, dann verschwinden diese Knotenkräfte und tauchen an den vier Knoten des Nachbarelementes auf. Dieser **plötzliche Sprung in den belasteten Knoten** ist der Grund, warum die Spannungen springen: *Die Einflussfunktionen springen*.

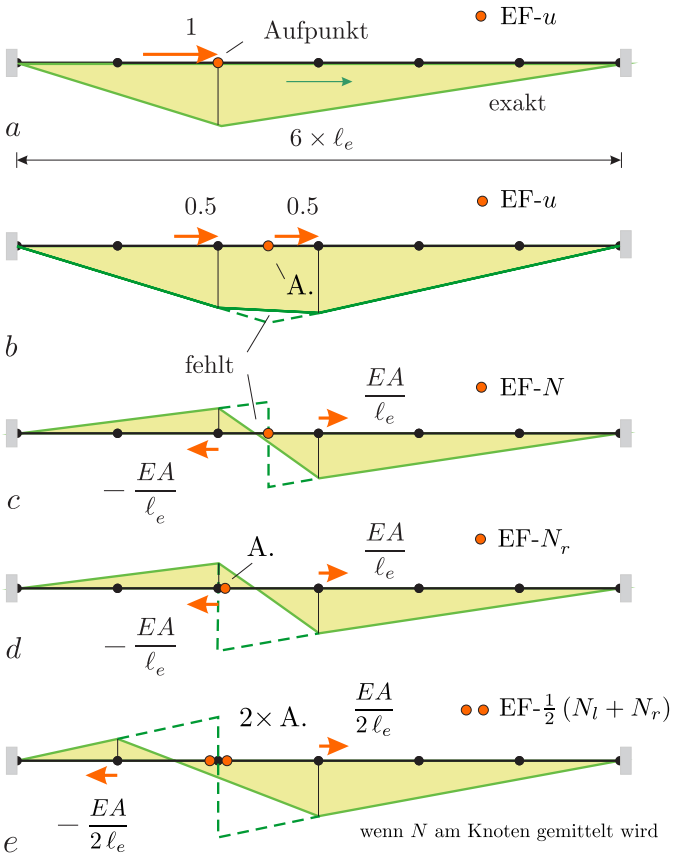


Bild 3.79. Einflussfunktionen bei einem Stab, **a)** EF für eine Knotenverschiebung, **b)** für die Verschiebung in Elementmitte, **c)** für $N(x)$ in Elementmitte, **d)** am Rand des Elements (Fehler bei Gleichlast ist größer als im Bild zuvor) und **d)** für den Mittelwert von N in einem Knoten

Einflussfunktionen für **Verschiebungen** springen dagegen beim Überschreiten einer Elementkante nicht, weil die *shape functions* stetig sind, die

$f_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$ auf beiden Seiten gleich sind. Wäre es anders, dann wären die *shape functions* unstetig und die Elemente nicht konform.

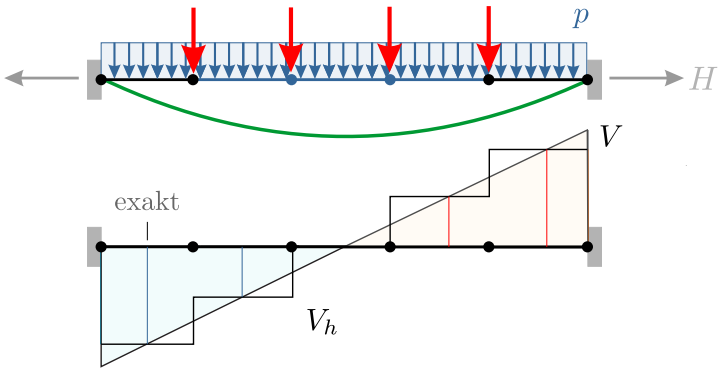


Bild 3.80. FE-Querkraft in einem vorgespannten Seil: In der Mitte der Elemente sind die Fehler in den Schnittgrößen am kleinsten

Beobachtet man die Einflussfunktionen in Bild 3.79, dann erkennt man, dass Verschiebungen in den Knoten am genauesten sind (bei 1-D Problemen sind sie dort sogar exakt, wenn EA oder EI konstant sind) und Spannungen sind es in der Mitte der Elemente, siehe Bild 3.80.

Um die Durchbiegung eines Seils zwischen zwei Knoten zu berechnen, setzt man **je ein halbes Dirac Delta** in die beiden Nachbarknoten, man mittelt also zwischen links und rechts, siehe Bild 3.3. Bei der Berechnung einer Knotenverschiebung kann man hingegen das Dirac Delta **zielgenau** plazieren. Es wirkt zu 100 % da, wo es wirken soll.

Wenn man Spannungen – gezwungenermaßen – an Knoten **mittelt**, dann ist das so, als ob man bei der Berechnung der Einflussfunktionen für die Spannungen die Elementgröße in der Umgebung des Knotens verdoppelt hätte.

Hierhin gehört auch das Thema ***Gausspunkte***, also die Beobachtung, dass in den Integrationspunkten die Ergebnisse genauer sind, als in den übrigen Punkten. Der Grund ist, dass der Fehler einer FE-Lösung eine ähnliche Verteilung aufweist, wie die **partikuläre Lösung** am allseits eingespannten Element – bei eindimensionalen Problemen stimmt das sogar genau – und die Nullstellen der Schnittkräfte der partikulären Lösungen genau in den Gausspunkten liegen, siehe Kapitel 4.14.

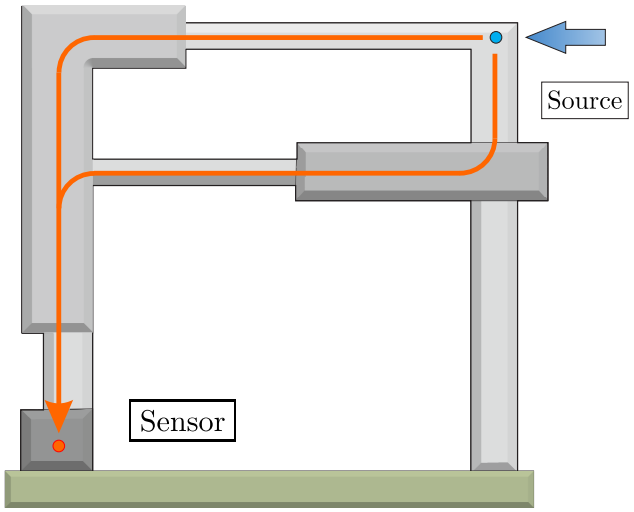


Bild 3.81. Auf dem Weg von der Quelle zum Sensor müssen alle Steifigkeiten richtig erfasst werden

3.46 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung

Für eine **korrekte Kommunikation** zwischen dem Sensor und der Belastung ist es wichtig, dass die Steifigkeiten auf dem Weg von der Quelle zum Sensor richtig modelliert werden, weil davon alles abhängt, siehe Bild 3.81.

Anschaulich ist es klar, dass diese Kommunikation um so **‚wackliger'** wird, je weiter der Aufpunkt und die Last auseinander liegen, weil mit wachsender Entfernung immer mehr Bauteile durchlaufen werden und sich so die Fehler aus nur näherungsweise richtig erfassten Steifigkeiten, $EA \pm \Delta EA$, $EI \pm \Delta EI$, oder Einspanngraden $k_\varphi \pm \Delta k_\varphi$, kumulieren können, siehe Bild 3.82 und Bild 3.83. Zum Glück ist es aber so, dass in der Regel mit der Entfernung die Einflusskoeffizienten abnehmen und damit auch die Auswirkungen von möglichen Fehlern.

Bemerkung 3.9. Die Situation ist (Physiker mögen uns dieses Bild verzeihen) ähnlich wie in der Quantenmechanik, wo das Ergebnis die ‚Summe', über alle Wegintegrale, über alle möglichen Pfade ist, die die Wellenfunktion nehmen kann. Eine kleine Änderung der elastischen Eigenschaften in einem begrenzten Bereich und die Summe, die Einflussfunktion $G(y, x)$, ändert sich.

In Analogie hierzu stelle man sich eine Scheibe in n Pfade zerlegt vor, die alle vom Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ zum Fusspunkt einer Kraft $\boldsymbol{P}$ führen, aber auf verschiedenen Wegen. Wenn das Modell stimmig sein soll, dann muss auf jedem Pfad das Ergebnis für die horizontale Verschiebung $u_x(\boldsymbol{x})$ im Aufpunkt gleich sein.

Die Idee führt natürlich zurück in die Frühzeit der Computerstatik: Die Annäherung einer Scheibe durch Fachwerkmodelle, [278], oder mathematisch gesehen die Annäherung eines Flächenintegrals $a(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{u})$ durch n Linienintegrale á la ‚Mohr', nur muss jedes Integral denselben Wert liefern.

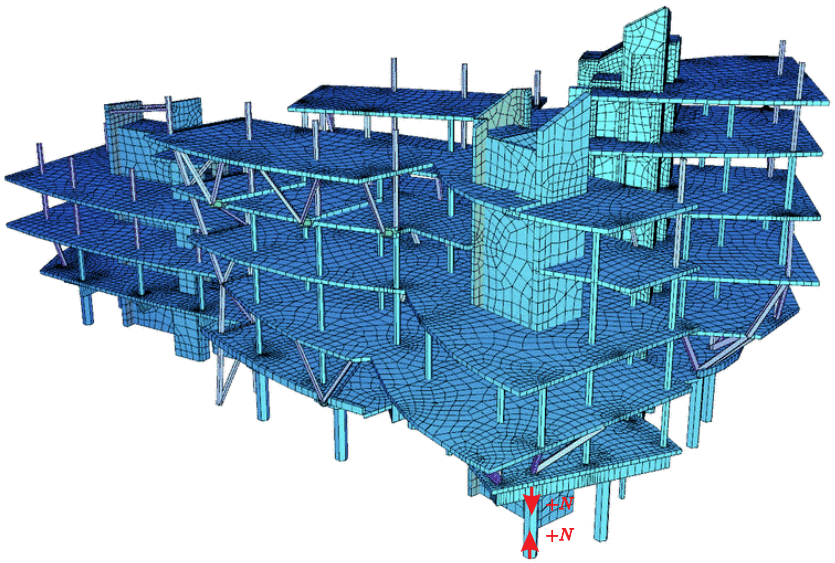


Bild 3.82. Die Spreizung der Stütze erzeugt die Einflussfunktion für die Stützenkraft. Die korrekte Propagierung über das Tragwerk hängt von der korrekten Modellierung der Steifigkeiten ab, [276], (SOFiSTiK)

3.47 Die Spalten von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$

Die Spalten von $\boldsymbol{K}$ sind die ***push-stop*** Kräfte der u_i und die Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind die Einflussfunktionen der u_i

Die Spalten von $\boldsymbol{K}$

Eine Steifigkeitsmatrix lässt sich **spaltenweise** auf zwei Arten lesen

$$\boldsymbol{K} = [\underbrace{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_n}_{\delta W_i}] = [\underbrace{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n}_{\delta W_e}] \,. \tag{3.281}$$

Die Spalten $\boldsymbol{f}_i$, siehe Bild 3.84,

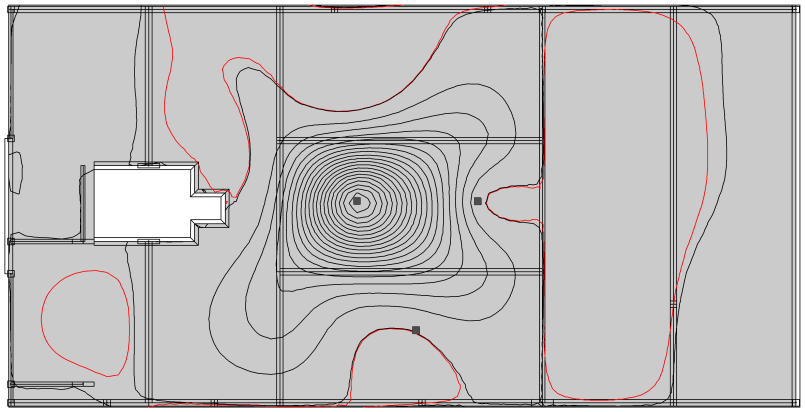
$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{f}_1 + u_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + u_n \boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{f}_h \,, \tag{3.282}$$

sind die Knotenkräfte der Einheitsverformungen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, denn $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$.

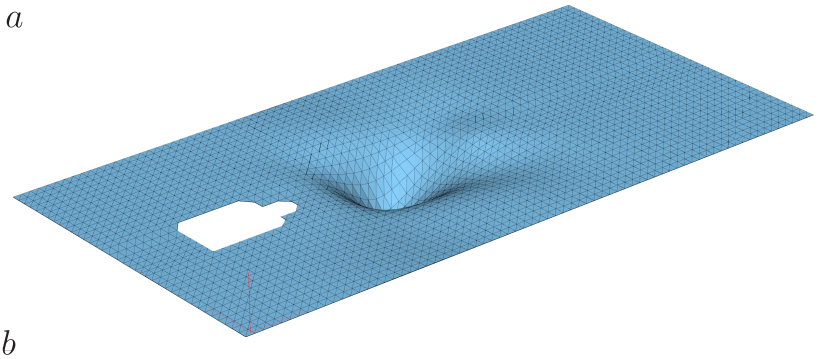
Die Kraft[28] f_{ii} in Spalte i lenkt $u_i = 1$ aus und die f_{ji} oberhalb und unterhalb davon (in derselben Spalte i) bremsen die Bewegung ab, $u_j = 0$.

Wegen $\mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_j) = \delta W_e(\varphi_i, \varphi_j) - \delta W_i(\varphi_i, \varphi_j) = f_{ij} - k_{ij} = 0$, ist die virtuelle äußere Arbeit f_{ij} der *shape forces* von φ_i auf den Wegen φ_j gleich

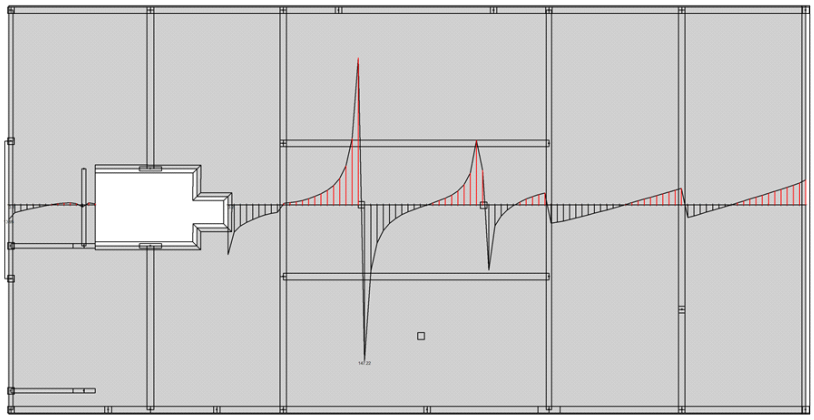
[28] Im 2-D und 3-D sind die f_{ij} äquivalente Knotenkräfte, also Energien.



a



b



c

Bild 3.83. Erst alle Steifigkeiten zusammen bestimmen die Form der Einflussfunktion für die zentrale Stütze unter der Hochbaudecke, **a)** Niveaulinien, **b)** 3-D Darstellung, **c)** Längsschnitt mit q_x im LF g (BE-PLATTE)

der Wechselwirkungsenergie k_{ij}, und daher können wir die Spalte $\boldsymbol{f}_i$ auch als einen Vektor $\boldsymbol{k}_i$ lesen, dessen Einträge die Überlagerung $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ der Spannungen von φ_i mit den Verzerrungen von φ_j ist.

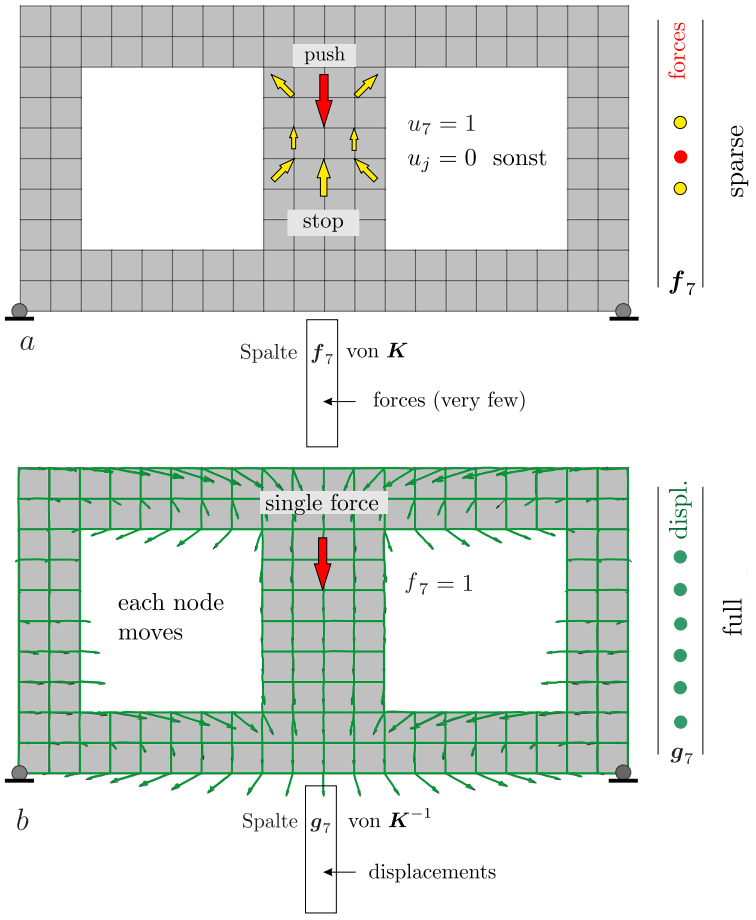


Bild 3.84. $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$, **a)** die Kräfte, die die Bewegung $u_7 = 1$ und $u_i = 0$ sonst auslösen bzw. abbremsen, stehen in Spalte $\boldsymbol{f}_7$ von $\boldsymbol{K}$ und **b)** die Verschiebungen u_i aus $f_7 = 1$ und $f_i = 0$ sonst stehen in Spalte $\boldsymbol{g}_7$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$. Anders als $\boldsymbol{K}$ ist $\boldsymbol{K}^{-1}$ voll besetzt, weil schon eine einzelne Punktlast f_i ausreicht, um alle freien Knoten zu verschieben (WINFEM)

Zur Bedeutung der Zeilen von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ siehe Seite 464.

Die Spalten von K^{-1}

Die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$ berechnet aus dem Vektor $\boldsymbol{f}$ der äquivalenten Knotenkräfte die zugehörige Verformung $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{u}\,, \tag{3.283}$$

oder komponentenweise

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T\boldsymbol{f} = \sum\nolimits_j g_{ij}f_j = \sum\nolimits_j g_{ij}\int_0^l \varphi_j(y)\,p\,dy\,, \tag{3.284}$$

was belegt, dass

$$G_h(y, x_i) = \sum\nolimits_j g_{ij}\,\varphi_j(y) \tag{3.285}$$

die Einflussfunktion für u_i ist

$$u_i = \int_0^l G_h(y, x_i)\,p(y)\,dy\,. \tag{3.286}$$

Jede Spalte $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ ist eine Einflussfunktion, genauer, ist der **Knotenvektor** der Einflussfunktion für den Freiheitsgrad u_i.

Die Inverse heißt wegen der Richtung $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$ die **Flexibilitätsmatrix** $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$ oder die **Greensche Matrix** $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{K}^{-1}$.

In Bild 3.84 wird ein Knoten ausgelenkt, $u_7 = 1$ und $u_j = 0$ sonst. Die Knotenkräfte, die den Knoten auslenken, bzw. die Bewegung in den Nachbarknoten abstoppen, stehen in Spalte $\boldsymbol{f}_7$ von $\boldsymbol{K}$. Es ist ein **lokales** Ereignis, *‚the neighborhood remains small even if the world is big‘* (G. Strang), denn der Vektor $\boldsymbol{f}_7 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_7$ ist ***schwach besetzt***; $\boldsymbol{e}_7$ ist das $\boldsymbol{u}$. In dem Vektor $\boldsymbol{f}_7$ stehen die ***push-stop Kräfte***. Die Kraft f_{77} drückt $u_7 = 1$ (*push*) und die anderen f_{j7} (*above and below*) sind *stop*-Kräfte, $u_j = 0$, sie halten dagegen[29].

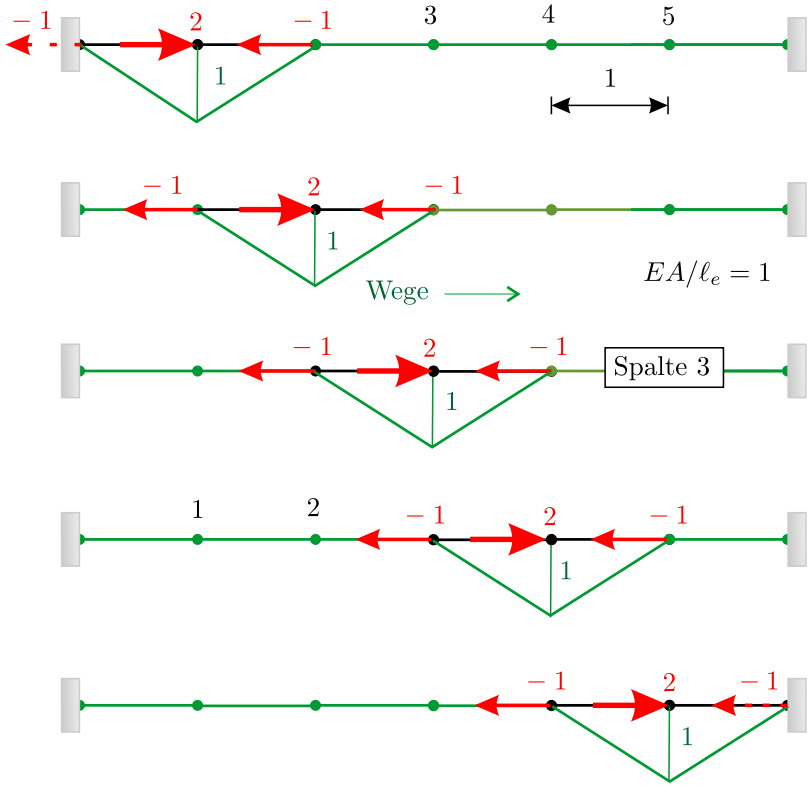
Hinter dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ stehen also n Knotenverschiebungen $u_i = 1$ und $u_j = 0$ sonst und die Spalten $\boldsymbol{f}_i$ von $\boldsymbol{K}$ sind die zugehörigen *push-stop* Kräfte und die u_i werden so skaliert, dass die kumulierten *push-stop* Kräfte $\boldsymbol{f}_h = \sum_i u_i\,\boldsymbol{f}_i$ mit der rechten Seite $\boldsymbol{f}$ übereinstimmen, $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$.

Bei Balken gehören auch Momente zu den *push-stop* Kräften, siehe Bild 3.86 LF $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$, aber es gilt weiterhin, dass sie alle in einer Spalte stehen.

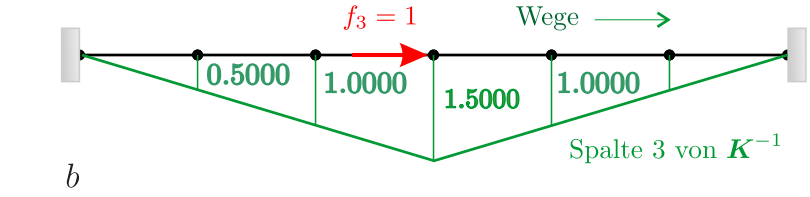
Nun zu $\boldsymbol{K}^{-1}$, der Systemantwort auf die Lasten. Eine Einzelkraft $f_7 = 1$ reicht, Bild 3.84 *b*, um in allen Knoten Ausgleichsbewegungen zu starten. Es ist ein ‚globales‘ Ereignis, der Vektor $\boldsymbol{g}_7 = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_7$ ist ***voll besetzt***, alle Knoten suchen eine neue Gleichgewichtslage, **alle spüren die Punktlast**, ($\boldsymbol{e}_7$ ist hier das $\boldsymbol{f}$, da nur $f_7 = 1$ besetzt ist).

Bild 3.85 zeigt das *push* und *stop* an einem eingespannten Stab.

[29] Wie das *Pushmi-Pullyu* bei Dr. Dolittle. Das ist die anschauliche Begründung, warum ‚ungelagerte‘ Steifigkeitsmatrizen singulär sind, die Spalten sind Gleichgewichtskräfte, null Arbeit bei Translationen und Drehungen, siehe auch S. 713.



$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{stop} \\ \rightarrow \text{push} \\ \leftarrow \text{stop} \end{matrix}$$



$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8333 & 0.6667 & \mathbf{0.5000} & 0.3333 & 0.1667 \\ 0.6667 & 1.3333 & \mathbf{1.0000} & 0.6667 & 0.3333 \\ 0.5000 & 1.0000 & \mathbf{1.5000} & 1.0000 & 0.5000 \\ 0.3333 & 0.6667 & \mathbf{1.0000} & 1.3333 & 0.6667 \\ 0.1667 & 0.3333 & \mathbf{0.5000} & 0.6667 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

Bild 3.85. In Spalte 3 von $\boldsymbol{K}$ stehen die ***push-stop Kräfte*** bei der isolierten Auslenkung des Knotens 3, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_3$, und in Spalte 3 von $\boldsymbol{K}^{-1}$ stehen die Wege im LF $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_3$, siehe auch Kapitel 9.5. Je größer die Elemente sind, desto kleiner sind wegen EA/l_e die Kräfte, also die k_{ij}, und umgekehrt. Für ein kurzes Element bedeutet eine Auslenkung 1 eine große Strapaze.

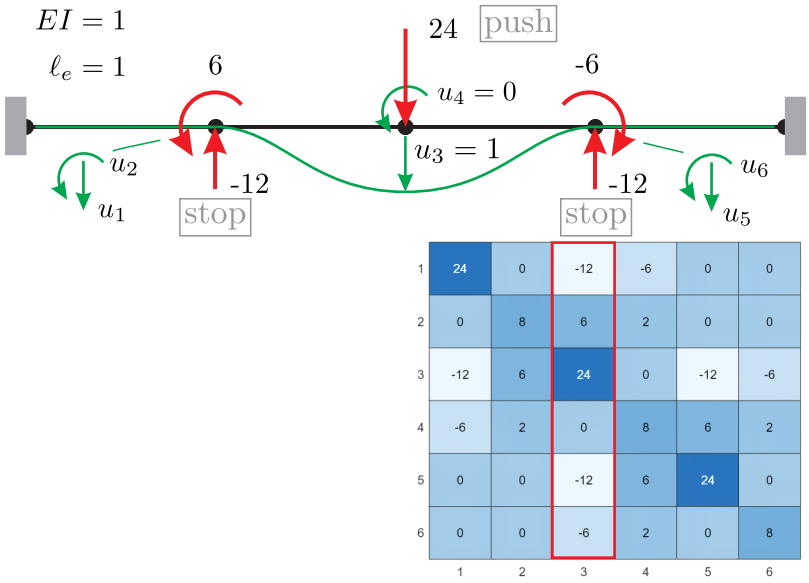


Bild 3.86. In Spalte 3 von $\boldsymbol{K}$ stehen die *push-stop* Kräfte des LF $u_3 = 1$ und $u_i = 0$ sonst (MATLAB™, *heatmap(K)*) .

Bei diesem Beispiel liegen die Indices der u_i, 1, 2, 3, 4, 5 hintereinander. Bei einem Rahmenknoten wird es dagegen Sprünge in der Nummerierung geben, aber es gilt weiterhin, dass die k_{ij} der Nachbar-u_i alle in **derselben Spalte** (Zeile) j stehen. In der Spalte gibt es aber Lücken. Nur die u_i, die mit u_j interagieren – bedeutet, die *shape functions* φ_i und φ_j haben Punkte gemeinsam – tauschen Energien (k_{ij}) aus, siehe Bild 3.87 und 3.88. Deswegen sind Steifigkeitsmatrizen ja **schwach besetzt**.

Theoretisch kann man eine Steifigkeitsmatrix von Hand zusammenbauen. Man geht von Knoten zu Knoten und notiert welche Kräfte nötig sind, den Knoten auszulenken – genauer die einzelnen FG des Knotens – und wie groß die Bremskräfte sein müssen, damit die Bewegung an den umliegenden Knoten zum Stillstand kommt.

Ist die Matrix dann aufgestellt, so hält man zunächst alle Knoten – bis auf einen – fest, belastet den Knoten mit der Knotenkraft f_j und berechnet, um wieviel Weg u_j man den Knoten auslenken muss, damit die dazu nötige Kraft $k_{jj}u_j$ gerade so groß wie f_j ist

$$\text{Auslenkkraft } \rightarrow \qquad k_{jj}\, u_j = f_j \qquad \leftarrow \text{ äußere Knotenkraft}\,. \tag{3.287}$$

Dann sperrt man den Knoten und geht zum nächsten Knoten, in dem (eventuell) eine Knotenkraft f_i wirkt und zusätzlich jetzt die **Bremskraft** $k_{ij}u_j$ aus dem vorherigen Knoten. Der Knoten wird ausgeglichen und das Spiel wiederholt sich, bis alle Knoten ausgeglichen sind. Am Schluss hat man das System

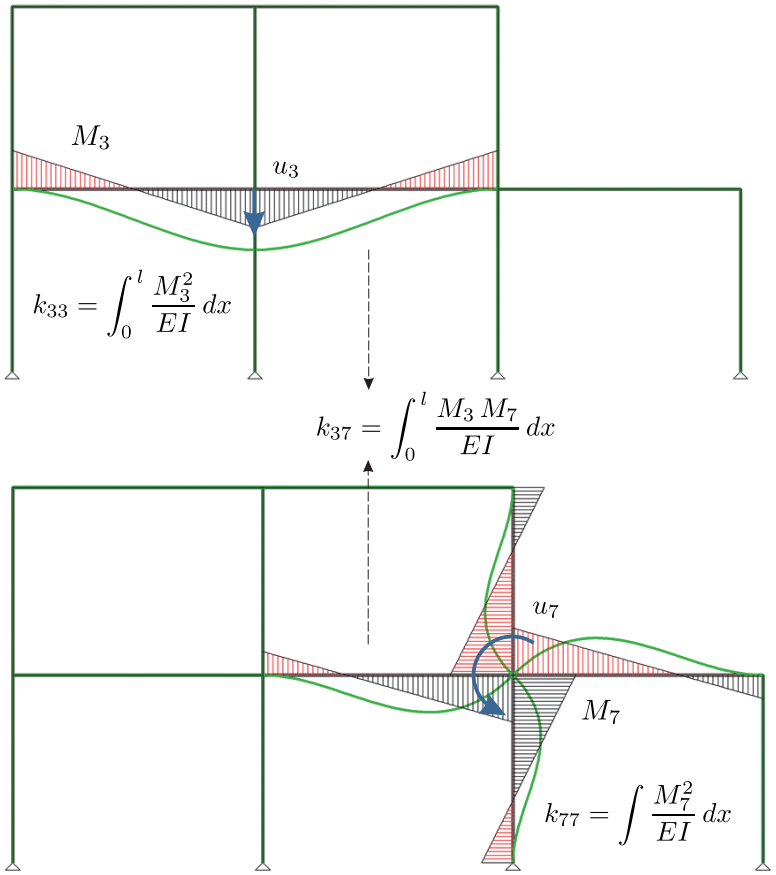


Bild 3.87. Die k_{ij} sind die Skalarprodukte der Momente der *shape functions* (ist $EA < \infty$, so sind auch die Normalkräfte zu überlagern).

$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst. Wegen

$$\text{Bremskraft} = k_{ij}\,u_j = k_{ij}\,\frac{f_j}{k_{jj}} = \mu_{ij}\,f_j \tag{3.288}$$

sind die Quotienten $k_{ij}/k_{jj} = \mu_{ij}$ die **Fortleitungszahlen**.

Die Identität $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}$

Mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ kommen wir auf

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}\,, \tag{3.289}$$

was im Grenzfall, $n \to \infty$, dem Integral

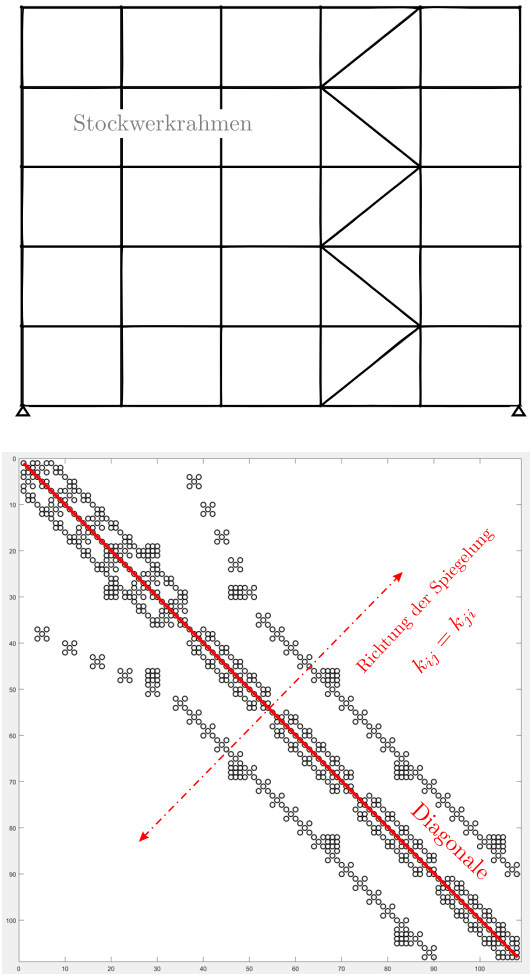


Bild 3.88. Die Einträge k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix des Rahmens konzentrieren sich um die Diagonale – mit gelegentlichen *‚outliern‘* (MATLAB™, `spy(K)`).

$$u(x) = \int_0^l \delta_0(y-x)\, u(y)\, dy \tag{3.290}$$

entspricht, siehe Bild 3.89. Je kleiner die Elementlänge l_e wird, umso mehr gleicht die Aktion der drei Knotenkräfte der Wirkung eines Dirac Delta.

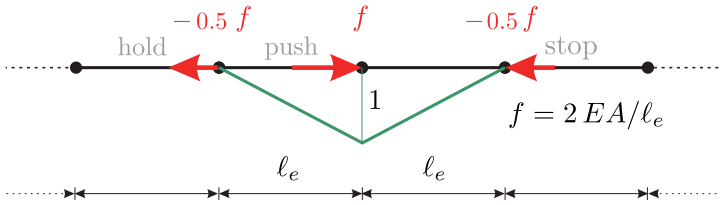


Bild 3.89. Der Übergang zum Dirac Delta mit $\ell_e \to 0$.

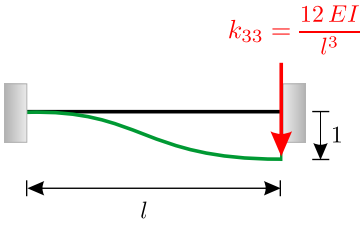


Bild 3.90. Je kürzer das Element ist, desto schwerer lässt es sich auslenken

Steifigkeit und Flexibilität

Die Gleichung $1/g_{ii} \stackrel{?}{=} k_{ii}$ ist sehr suggestiv, aber die Diagonalen von $\boldsymbol{K}^{-1}$ und $\boldsymbol{K}$ sind natürlich nicht die jeweiligen Kehrwerte. Auf der Diagonalen der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ stehen die **Flexibilitäten** $g_i \equiv g_{ii}$ in Richtung der u_i, und die Kehrwerte $1/g_{ii}$ sind die Steifigkeiten k_i, wenn wir sie so nennen wollen, in Richtung der u_i. Wie bei einer Feder kann man also invertieren, nur ist $1/g_{ii} \neq k_{ii}$.

Der Eintrag k_{ii} auf der Diagonalen von $\boldsymbol{K}$ ist die Steifigkeit, die Kraft $k_{ii} \cdot 1 = f_i$, wenn nur $u_i = 1$ bewegt wird und alle anderen $u_j = 0$ gesperrt sind. Das k_{ii} weiß nichts von der weiteren Umgebung, weiß nicht ob noch drei oder vier Stockwerke folgen, während die g_{ii} das genau wissen. Die k_{ij} sind **lokale Größen**, sie hängen nur von der Nachbarschaft ab, sie könnten auch in jeder anderen Matrix stehen, während die g_{ij} **Systemantworten** sind, die **von dem Ganzen** wissen, siehe auch Kapitel 9.8.

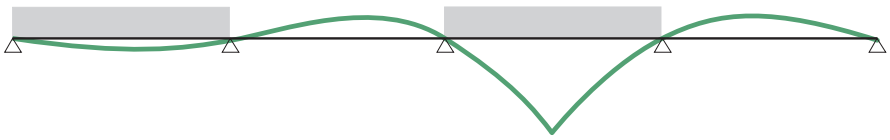


Bild 3.91. Einflussfunktion für ein Feldmoment und der maßgebende Lastenzug

Steifigkeit und Elementgröße

Je kleiner die Elemente sind, desto größer sind die k_{ij}, denn der Widerstand eines Knotens gegen die Bewegung $u_i = 1$, geht wie $1/l$ (Stab) bzw. wie $1/l^3$ bei einem Balken, siehe Bild 3.90. Hat das Stabelement die Länge $l = 1$ Meter, dann ist $u = 1$ Meter gleichbedeutend mit $\varepsilon = u/l = 1/1 = 1$ und $\sigma = E$.

Der E-Modul ist die Spannung $\sigma = E \cdot \varepsilon$, bei der sich die Länge l eines Stabes verdoppelt, $\varepsilon = 1$.

Das Verhältnis ε der ‚Normbewegung' $u_i = 1$ zur Elementlänge l und natürlich der E-Modul bestimmen also die Größe der k_{ij}, der *push-stop* Kräfte. Und wenn man große Kräfte braucht, um den Knoten auszulenken, $u_i = 1$, dann braucht man ebenso große Kräfte, um die Umgebung festzuhalten.

Beim Balken entspricht dem $\sigma = E\,\varepsilon$ die Gleichung $M = EI\,\kappa$. Die Krümmung κ hat die Dimension 1/m, siehe (3.52). Um einen Balken um den Einheitskreis ($\kappa = r = 1$) zu wickeln, braucht man das Moment $M = EI \cdot 1$.

Der steile Anstieg der Einträge k_{ij} mit $h \to 0$ lässt die Verschiebungsdifferenzen am Element schwinden, während p seine Höhe nicht ändert, aber die Numerik beugt automatisch vor, gleicht die Skalen an. Je kleiner der Abstand h der Knoten ist, desto größer werden die Gewichte $1/h^2$ in dem Differenzenquotient

$$-u''(x) = \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} = p(x)\,. \tag{3.291}$$

Nach Multiplikation von p mit $h^2 \ll 1$ ist die Last auf einem ähnlichen Niveau wie die Differenzen. Wenn das auch die Kondition nicht ändert, so sieht es doch zumindest passabler aus.

Wenn man einen Stab ℓ in $n = 10, 20, 30$ Elemente $\ell_e = \ell/n$ unterteilt, dann wächst die Diagonale von $\boldsymbol{K}$ wie $k_{ii} = 2\,EA\,n/\ell$.

3.48 Die Inverse als Analysetool

Die Standardübung des Tragwerkplaners an Hand der Einflussfunktion den maßgebenden Lastenzug zu finden, siehe Bild 3.91, lässt sich an allen interessierenden Stellen eines Tragwerks wiederholen.

3.48.1 Maximale Verformungen

Weil die Elemente g_{ij} der Inversen die Knotenwerte der Einflussfunktionen sind

$$u_i = \int_0^l G_h(y, x_i) p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int_0^l g_{ij}\, \varphi_j(y) p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, f_j = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}\,, \tag{3.292}$$

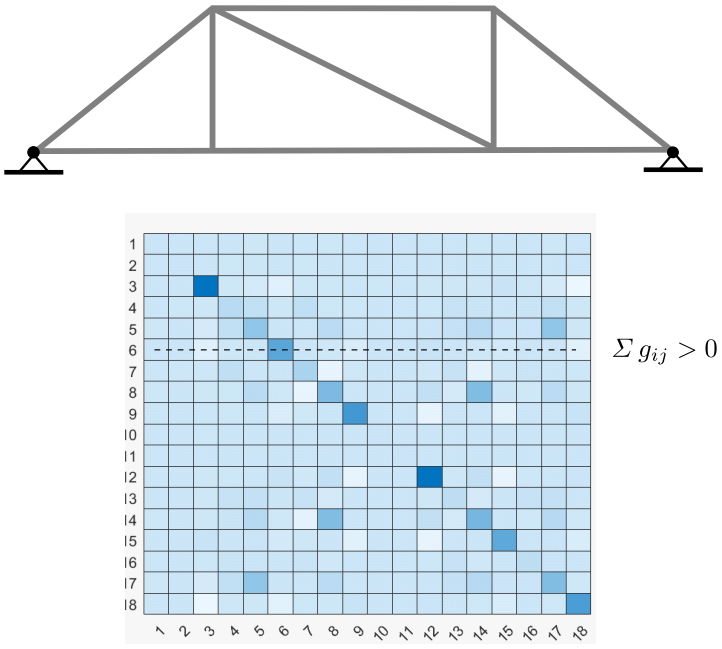


Bild 3.92. Die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ist wie $\boldsymbol{K}$ ‚diagonaldominant'. Der Effekt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f}$ einer Kraft f_j auf ein u_i ist am größten, wenn die Kraft direkt im Knoten angreift, (MATLAB™, *heatmap*(K^{-1}))

kann man die g_{ij} dazu benutzen, um überschlägig die Laststellungen zu finden, die die maximale Verformung u_i erzeugen, denn angenommen alle f_i sind eins, dann ist die maximal auftretende Verformung in Richtung u_i die Summe über die Einträge $g_{ij} > 0$ in der Spalte i

$$\max\, u_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \qquad g_{ij} > 0\,, \tag{3.293}$$

also die **Quersumme** in Zeile i (Spalte = Zeile), die Summe über die positiven Werte. Diese Knoten sind als Lastknoten zu wählen, siehe Bild 3.92.

Die typische Frage, ob denn eine Last f_j im 3. Stock einen Einfluss auf die Verformung u_i eines Knotens im 1. Stock hat, kann man also einfach an Hand der Größe des Elementes g_{ij} der Inversen beantworten.

Man könnte auch **Karten** (*plots*) generieren, wie weit die Kräfte f_j maximal von einem fest gewählten Knoten entfernt sein dürfen, damit noch etwas in Richtung u_i spürbar ist. Das wären dann alle Knoten mit $|g_{ij}| > \varepsilon$, also größer als eine gewisse Schranke ε.

Das geht mit jeder beliebigen Größe, sprich jedem Funktional $J(u)$. Man muss ja einfach nur rechnen

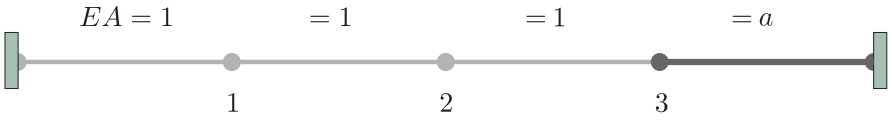


Bild 3.93. Stab aus vier Elementen, $l_e = 1$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j} \qquad j_i = J(\varphi_i)(x) \tag{3.294}$$

und kann dann das ‚Zeilenkriterium' auf den Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion $J(u) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$ anwenden, sprich die Komponenten g_i nach positiven und negativen Werten sortieren

$$g_i \gtrless 0 \tag{3.295}$$

und weiß dann, welche $f_i \gtrless 0$ einen **positiven** bzw. **negativen** Beitrag zu $J(u)$ leisten.

3.49 Lokale Änderungen und die Inverse

Das Thema Inverse gibt uns auch Gelegenheit darauf hinzuweisen, dass **lokale Steifigkeitsänderungen** die ganze Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ändern, auch wenn sich nur eine Zahl in $\boldsymbol{K}$ ändert.

Das letzte Element in dem Stab in Bild 3.93 hat die Längssteifigkeit $EA = a$, im Unterschied zu den ersten drei Elementen mit $EA = 1$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+a \end{bmatrix}, \tag{3.296}$$

aber das a taucht in jedem Element der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ auf, weil beim Lösen von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ durch die Determinante, hier $3\,a + 1$, dividiert wird

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{3\,a+1}\begin{bmatrix} 2a+1 & a+1 & 1 \\ a+1 & 2a+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.297}$$

Eine *lokale* Steifigkeitsänderung ändert also den Verlauf der Einflussfunktionen im *ganzen* Tragwerk.

Das macht **model updating** so schwierig. Wenn Steifigkeitsänderungen jeden Koeffizienten der Inversen ändern, welches Element ist dann für die Abweichung zwischen den Rechenwerten $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ und den gemessenen Daten verantwortlich?

In Kapitel 5.16 werden wir aber sehen, dass sich die Ableitungen von $\boldsymbol{u}$ nach den k_{ij} an Hand der Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen berechnen lassen, denn

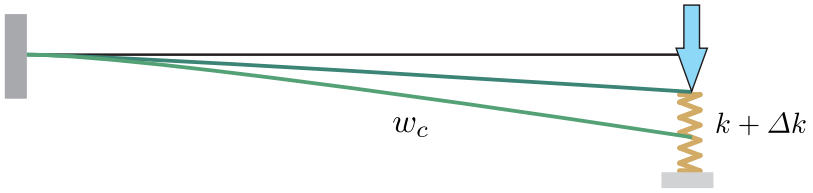


Bild 3.94. Die Ausgleichsbewegung bei einer Steifigkeitsänderung eines Lagers ist affin zur Einflussfunktion des Lagers. Die Zeichnung entspricht einem $\Delta k < 0$.

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j \boldsymbol{e}_i = -u_j \boldsymbol{g}_i}, \tag{3.298}$$

und damit lassen sich die Verschiebungsinkremente, $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq -u_j \boldsymbol{g}_i \cdot \Delta k_{ij}$, abschätzen.

Eigentlich ist es klar. Wenn sich die Steifigkeit einer Stütze $l = 1$, FG u_i, ändert, $EA \to EA + \Delta EA$, dann ‚sackt' das Tragwerk durch, geht es in die Lage

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ii}} \Delta EA = \boldsymbol{u} - u_i \boldsymbol{g}_i \Delta EA \tag{3.299}$$

über. Die Ausgleichsbewegung ist gleich der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}_i$ für die Zusammendrückung u_i des Stützenkopfes mal der Kraft $\Delta f = -u_i \Delta EA$. Steifigkeitsänderungen in Lagern führen also zu Zusatzbewegungen in Richtung der Lager-Einflussfunktionen wie in Bild 3.94 und 5.22. Vorsicht, die neue Stützkraft N_c ist nicht $N - \Delta f$, sondern $N_c = \varepsilon_c(EA + \Delta EA)$; also aus $\boldsymbol{u}_c$ die geänderte Dehnung ε_c der Stütze berechnen und daraus N_c, Kapitel 5.1.2.

3.50 Das Weggrößenverfahren

Das Weggrößenverfahren basiert auf der Beobachtung, dass die Kenntnis der Weggrößen u_i an den ‚Rändern', in den Knoten, ausreicht, um die Schnittkräfte in den Stäben zu berechnen, siehe Kapitel 1.20. Die Zahl der unbekannten u_i ist der ***Grad der kinematischen Unbestimmtheit***. Die Aufgabe ist es, herauszufinden, wie sich die u_i unter Last einstellen. Dies führt auf dasselbe System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ wie bei den finiten Elementen.

3.50.1 Wie kommt man auf $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$?

Wir stellen uns einen Rahmen vor, der aus mehreren Stäben besteht, zu denen je eine horizontale Verschiebung $u(x)$ und eine vertikale Biegelinie $w(x)$ gehört, also ein ‚Sammelsurium' von Funktionen. Wir werden uns aber im Folgenden kurz halten und in der Notation so tun, als hätten wir es nur mit einem Stab zu tun und alles auf eine Funktion $w(x)$ reduzieren, die stellvertretend

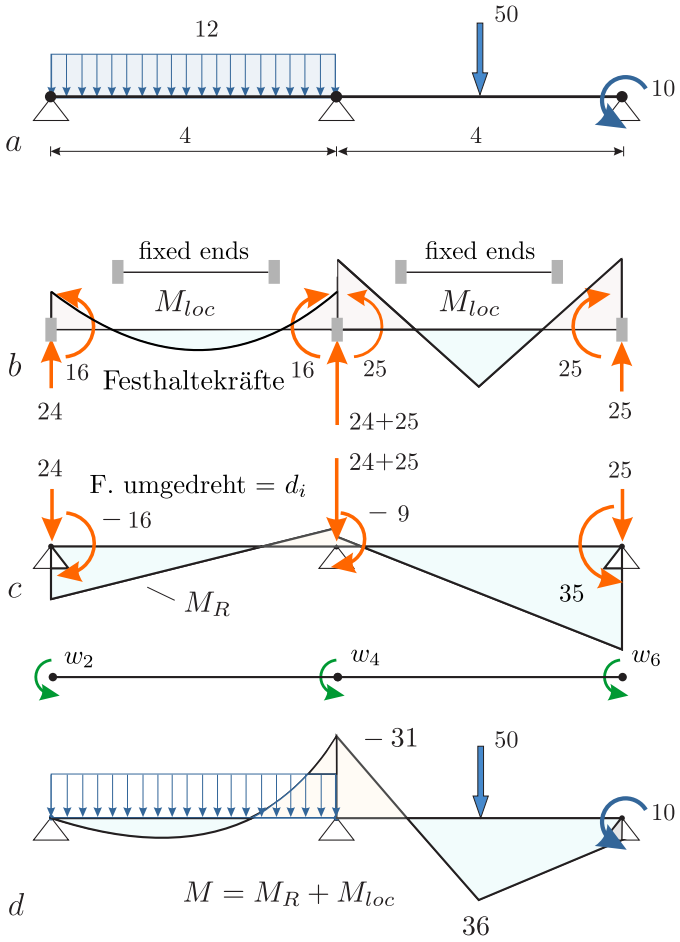


Bild 3.95. Weggrößenverfahren **a)** System, **b)** Festhaltekräfte und Momente der lokalen Lösung, **c)** Momente M_R (R = released nodes) im Lastfall Knotenlasten = $\boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$, **d)** Momente $M = M_R + M_{loc}$.

für all die anderen Funktionen in dem Rahmen stehen möge. Wir betreiben hier ja mehr Algebra als Mathematik.

Zuerst werden alle Knoten festgehalten und die Belastung in die Knoten reduziert, d.h. es werden die äquivalenten Knotenkräfte, die ***actio***,

$$d_i = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx \tag{3.300}$$

berechnet, siehe Bild 3.95 *b*. Die Festhaltekräfte ($= -d_i$), sind die ***reactio***. Wichtig ist, dass man mit den exakten $\varphi_i(x)$ rechnet, weil nur diese die exakten Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte sind.

Wir erinnern daran, dass das $\boldsymbol{f}$ auf der rechten Seite von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ eine Summe von zwei Vektoren

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} \tag{3.301}$$

ist. In dem Vektor $\boldsymbol{f}_K$ stehen die Kräfte, die direkt in den Knoten angreifen – wie das Einzelmoment rechts – und der Vektor $\boldsymbol{d}$ enthält die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung.

Lässt man dann die Knoten los, so stellt sich die Figur $w_R(x)$ ein, die die Gleichgewichtslage des Trägers unter der Wirkung der Knotenlasten $f_i = f_{Ki} + d_i$ ist, siehe Bild 3.95 *c*.

Das Weggrößenverfahren berechnet nur die Figur $w_R(x)$. Was fehlt, wird am Schluss als lokale Lösung stabweise zu $w_R(x)$ addiert, $w(x) = w_R(x) + w_{loc}$.

Weil $w_R(x)$ eine homogene Lösung ist, kann man sie stabweise mit den *shape functions* $\varphi_i(x)$ darstellen,

$$w_R(x) = \sum\nolimits_i w_i \varphi_i(x)\,, \tag{3.302}$$

denn die $\varphi_i(x)$ bilden in jedem Stab **ein vollständiges System** von homogenen Lösungen.

Nun fehlen noch die Knotenverschiebungen w_i. Diese bestimmen wir mit Hilfe der ersten Greenschen Identität. Die Identität $\mathscr{G}(w, v) = 0$ ist für alle Paare (w, v) von glatten Funktionen null, und daher muss sie auch für jedes Paar $(w_R, \varphi_j), j = 1, 2, \ldots n$ null sein

$$\mathscr{G}(w_R, \varphi_j) = f_j - a(w_R, \varphi_j) = f_j - \sum\nolimits_i w_i\, a(\varphi_i, \varphi_j) = 0\,, \tag{3.303}$$

was das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ ergibt

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 \\ -9 \\ 25 \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}\,. \tag{3.304}$$

So kommt die Steifigkeitsmatrix in das Weggrößenverfahren hinein.

Wenn man das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ in Einzelschritten löst (Verfahren von ***Gauss-Seidel***), dann entspricht das dem ***Drehwinkelverfahren***, siehe Seite 464, und wenn man in es einem Schritt löst, dann macht man es wie die finiten Elemente.

Bemerkung 3.10. Dass sich in (3.303) die äußere Arbeit δW_e auf ein f_j

$$\delta W_e = f_j = [V_R\, \varphi_j - M_R\, \varphi_j']_0^l = \sum_{i=1}^{4} f_i(w_R)\, w_i(\varphi_j) \tag{3.305}$$

reduziert, ist hoffentlich klar, denn $w_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker Delta). Hier steht $w_i(\varphi_j)$ für die Weggrößen $w_1(\varphi_j) = \varphi_j(0), w_2(\varphi_j) = \varphi_j'(0), w_3(\varphi_j) = \varphi_j(l), w_4(\varphi_j) = \varphi_j'(l)$.

3.50.2 Handberechnung von K

Bei einer Handberechnung stellt man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ spaltenweise von Hand auf. Die Spalte $\boldsymbol{f}_i$ enthält ja die äquivalenten Knotenkräfte, die zur Einheitsverformung $\varphi_i(x)$ gehören. Also aktiviert man einen Freiheitsgrad, $u_i = 1$, sperrt alle anderen FG und berechnet, welche Kräfte f_{ij} dies in Richtung der u_j ergibt. Das f_{ii} ist die äquivalente Knotenkraft, die den Knoten auslenkt und die anderen f_{ij} sind die äquivalenten Knotenkräfte in Richtung der andern u_j, die die Bewegung abstoppen.

So kann man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]$ spaltenweise direkt berechnen, was den kleinen Vorteil hat, dass man unter Umständen Freiheitsgrade sparen kann, man nicht jeden Stab als Vollstab mit $6 = 3 \times 2$ Freiheitsgraden ansetzen muss, sondern z.B. einen Pendelstab als ein 2×2 bzw. 4×4 (schräge Lage) Element behandeln kann.

Die Handberechnung wird ergänzt von der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ und am Schluss wird das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst.

3.50.3 Drehwinkelverfahren

Früher hat man das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ iterativ gelöst, wie in den Verfahren von ***Cross*** und ***Kani***, Cross (1930). Exemplarisch wollen wir die einzelnen Schritte am Drehwinkelverfahren erläutern.

1. Erst werden alle Knoten festgehalten und die Schnittkraftverläufe (= lokale Lösungen) bestimmt und die Festhaltekräfte in den Knoten berechnet.
2. Knotenweise werden dann die Knoten ausgeglichen: Man löst einen Knoten und stellt das Gleichgewicht her, erlaubt dem Knoten also sich so zu verdrehen, dass die inneren Momente dem Lastmoment das Gleichgewicht halten. Der Ausgleich an dem Knoten führt zur Weiterleitung von Momenten an die festgehaltenen Nachbarknoten.
3. Danach wird der Knoten wieder gesperrt und der nächste Knoten ausgeglichen. Nach drei- bis viermaligen Durchläufen konvergiert das Verfahren in der Regel, weil die Größe der weiterzuleitenden Momente relativ schnell abnimmt.

Man beginnt also, wie bei den finiten Elementen, mit der Reduktion der Belastung in die Knoten. Aber während die finiten Elemente das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ heute in einem Schritt lösen, hat der Praktiker das System im Grunde früher iterativ gelöst, zeilenweise, was dem Verfahren von *Gauss-Seidel* entspricht, siehe Seite 464. Das ist, aus mathematischer Sicht, im Grunde der einzige Unterschied zwischen dem Drehwinkelverfahren und den finiten Elementen. Wenn sich natürlich der Ingenieur so das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ erspart hat.

Bemerkung 3.11. Das Weggrößenverfahren bildet traditionsgemäß den Gegenpol zum Kraftgrößenverfahren. Die starke ‚Magnetwirkung' der finiten Elementen hat dazu geführt, dass das Verfahren heute meist in einer Matrizenschreibweise dargestellt wird.

Wir geben daher zu Bedenken, ob man das Weggrößenverfahren nicht gleich in FE-Schreibweise formulieren sollte, denn dann spart man Zeit, kann schon sehr früh die finiten Elemente (noch als exakte, homogene Lösungen) einführen und hat den ganzen Apparat zur Hand, um aus den Elementmatrizen die Steifigkeitsmatrix zu erzeugen.

Die ‚echten' finiten Elemente kann man ja dann als Galerkin-Verfahren einführen, als Projektion der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, mit derselben Gleichung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ wie beim Weggrößenverfahren und der Student hat den Vorteil, dass er in dem Neuen das Vertraute wiedererkennt.

3.51 Mohr und die Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$

Es sei $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix eines Fachwerks. Die Steifigkeit k_i des Fachwerks in Richtung des Freiheitsgrades u_i bestimmt sich gemäß

$$k_i = \frac{1}{u_i}\,, \tag{3.306}$$

wobei u_i die Verschiebung ist, die aus einer Einzelkraft $f_i = 1$ resultiert.

Der Verschiebungsvektor in diesem Lastfall ist $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i$ und daher ist die Verschiebung

$$u_i = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i = g_{ii} \tag{3.307}$$

mit dem Eintrag g_{ii} auf der Diagonalen der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$ identisch.

Wir könnten u_i aber auch mit dem **Mohrschen Arbeitsintegral**

$$u_i = g_{ii} = \sum\nolimits_e \frac{N_e^2\, l_e}{EA_e} \tag{3.308}$$

berechnen, wobei N_e die Normalkraft in dem Stab e im Lastfall $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$ ist.

Bei **Stockwerkrahmen** würde dieselbe Gleichung wie folgt lauten

$$u_i = g_{ii} = \sum\nolimits_e \int_0^{l_e} \left(\frac{N_e^2}{EA_e} + \frac{M_e^2}{EI_e}\right) dx\,, \tag{3.309}$$

wobei N_e und M_e die korrespondierende Bedeutung haben.

In moderner Notation könnten wir das auch schreiben als

$$g_{ii} = a(u^{(i)}, u^{(i)})\,, \tag{3.310}$$

wenn $u^{(i)}$ die FE-Lösung des Lastfalls $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$ ist. Die Verallgemeinerung auf die Nebendiagonalen ist offensichtlich

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i = \sum\nolimits_e \frac{N_e^{(i)} N_e^{(j)}\, l_e}{EA_e} = a(u^{(i)}, u^{(j)})\,. \tag{3.311}$$

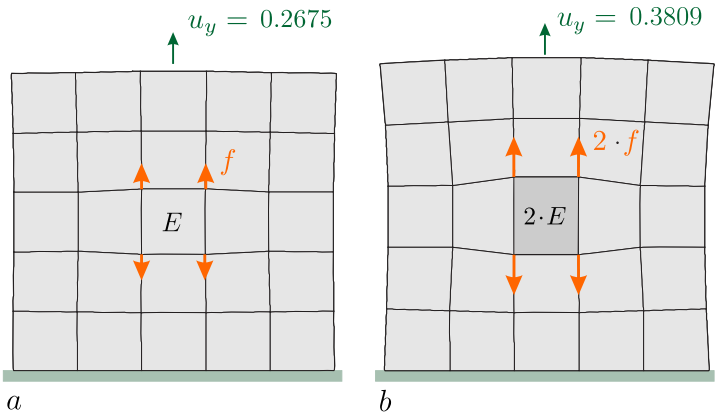


Bild 3.96. Einflussfunktion für σ_{yy}, **a)** vor Verdopplung und **b)** nach Verdopplung des E-Moduls; $\nu = 0$ daher nur vertikale f_i

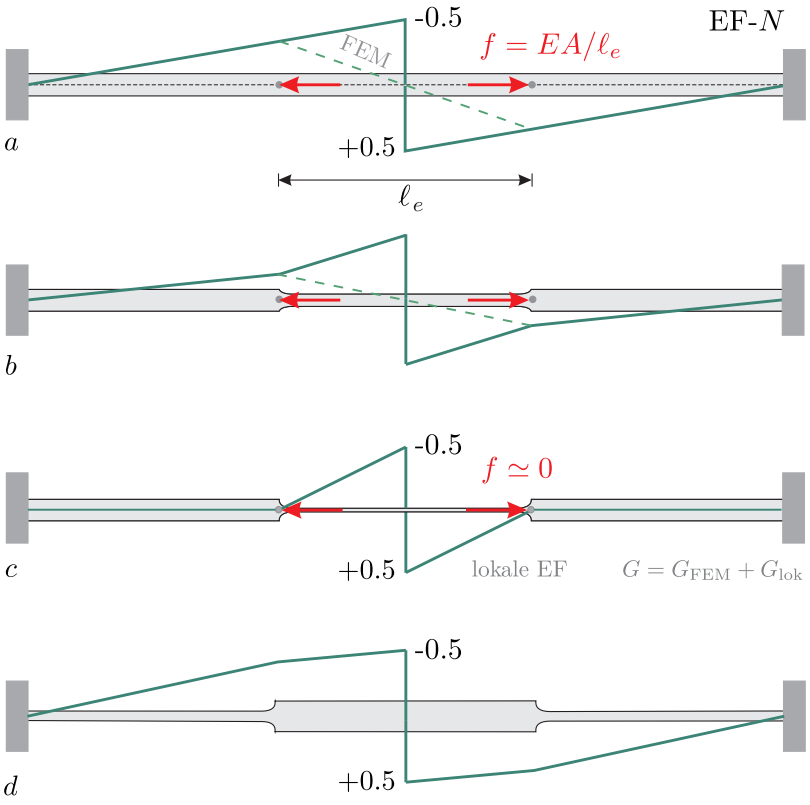


Bild 3.97. Einflussfunktion für N in Stabmitte, den $f_i = \pm EA/\ell_e$ geht mit $EA \to 0$ buchstäblich die Puste aus, unten der umgekehrte Effekt. In Gedanken spalte man die FE-EF in zwei LF links und rechts auf und addiere!

3.52 Querschnittsänderungen

An den Einflussfunktionen kann man sehr schön ablesen, wie steife Zonen Kräfte anziehen und weiche Zonen vermieden werden.

Wenn, wie in Bild 3.96 *b*, das Material in der eingebetteten Zone härter ist als die Umgebung, dann wird die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in der Mitte der Zone weiter ausstrahlen, d.h. ein größerer Anteil der Belastung fließt durch die steife Zone. Umgekehrt, wenn die Zone weicher ist als die Umgebung, dann wird die Umgebung die Ausbreitung der Spreizung des Aufpunktes verhindern – ‚die Großen gönnen dem Kleinen nichts' – und so wird nur ein kleiner Teil der Belastung durch den weichen Kern fließen.



Bild 3.98. $E_{Stahl}/E_{Holz} \simeq 210\,\mathrm{GPA}/12\,\mathrm{GPA} = 17.5 = A_{Holz}/A_{Stahl}$?

Der Effekt beruht wesentlich auf dem **Wechselspiel** zwischen den beiden Zonen und nicht auf der Größe der f_i, mit denen das Element gespreizt wird; im Fall $2 \cdot E$ sind diese ungefähr doppelt so groß wie im Fall E. Es ist aber so, dass im Fall $2 \cdot E$ sich das gespreizte Element erfolgreicher dagegen wehrt, von den umgebenden Elementen zurückgedrückt zu werden als im Fall E, und daher ist das u_y am oberen Rand größer. Bei dem Stab in Bild 3.97 ist es umgekehrt. Die f_i verlässt mit $EA \to 0$ die Kraft, die Enden wegzudrücken.

Bei den Pfosten in Bild 3.98 hängt die Aufteilung davon ab, wieviel von einer Einheitsspreizung oben im Sturz ankommt, aber die Unterschiede können gering sein, weil Stützenkräfte – je nach dem EI des Sturz – zögerlich auf Änderungen in EA reagieren. Merkbarer sind Änderungen in EI, wie bei der Platte in Bild 3.99, wo die Hauptmomente sichtbar um den geschwächten Bereich herumfließen.

Das Bild 3.100 belegt sehr schön, wie die Effekte von Steifigkeitsänderungen bei Flächentragwerken richtungsabhängig sind. Eine Stützenkopfverstärkung verursacht in einem horizontalen Schnitt Sprünge in den Momenten m_{yy}, aber nicht in den Momenten m_{xx}. In einem vertikalen Schnitt ist es umgekehrt, dann läuft m_{yy} stetig durch, aber m_{xx} springt.

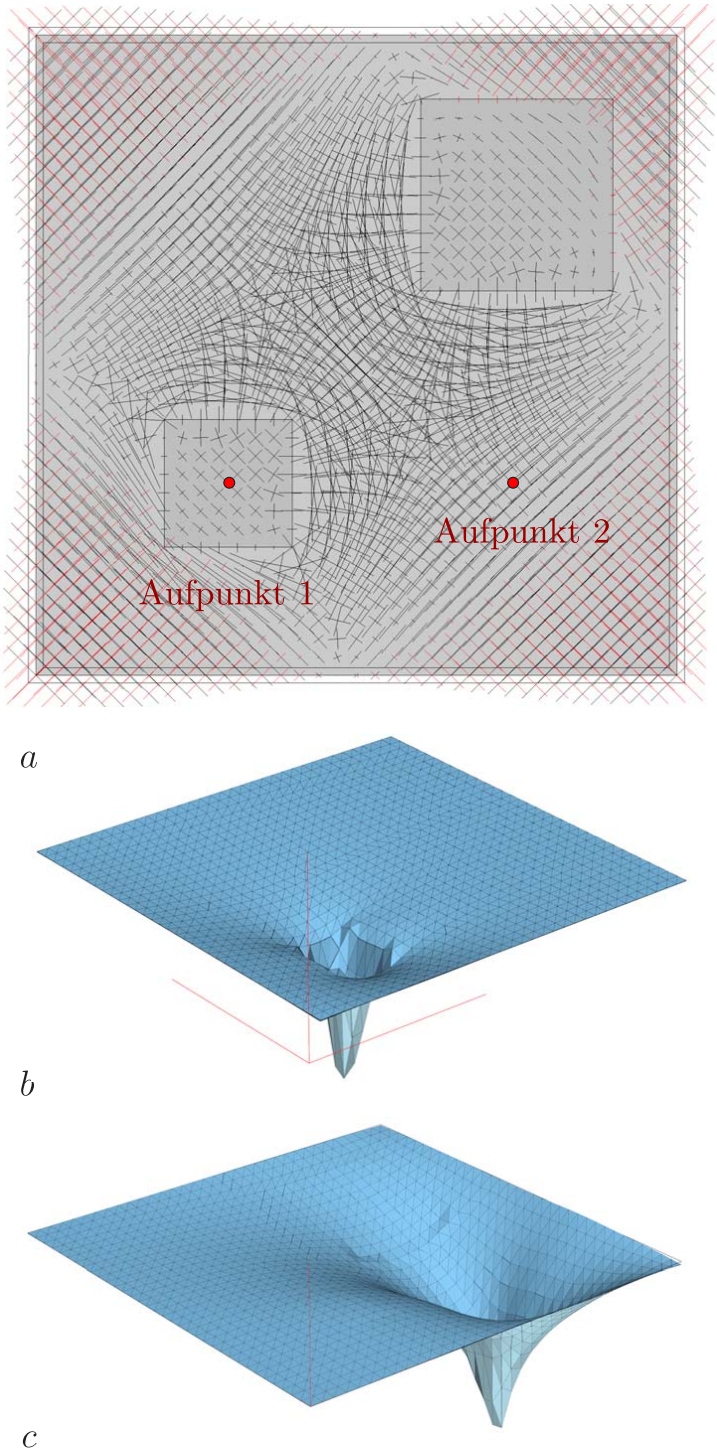


Bild 3.99. Hochbauplatte mit zwei abgeminderten Bereichen, 20 cm statt 40 cm im LF g, **a)** Hauptmomente, **b)** Einflussfunktion für m_{xx} im Aufpunkt 1 und **c)** im Aufpunkt 2 (BE-PLATTE)

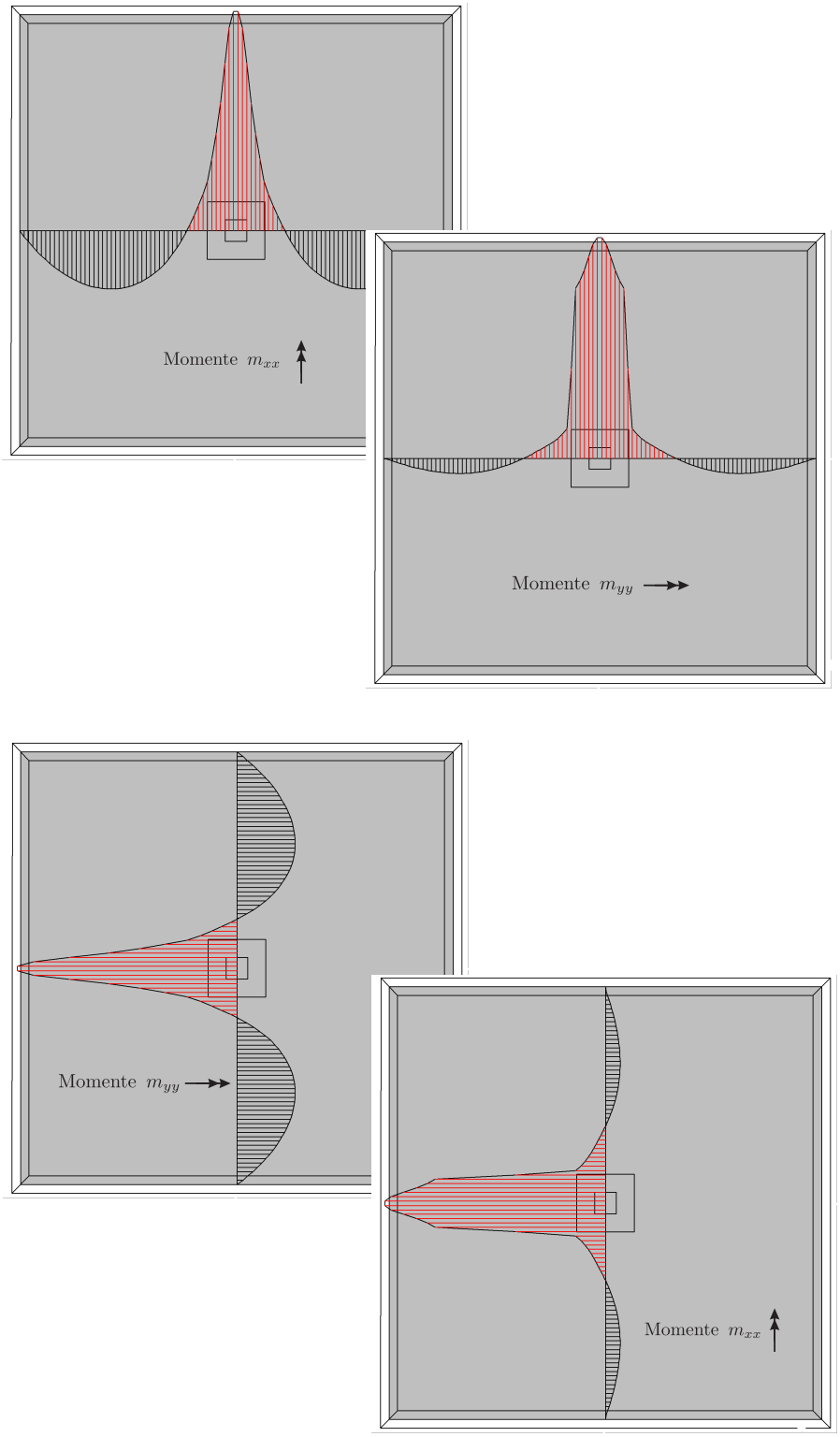


Bild 3.100. Platte mit Stützenkopfverstärkung, Momente m_{xx} und m_{yy} im LF g in einem horizontalen und vertikalen Schnitt (BE-PLATTE)

Zu dem Thema gehören auch **starre Inklusionen** in einem FE-Netz, also einzelne oder mehrere Elemente, deren Steifigkeit verglichen mit den Nachbarn sehr groß ist. Es reicht, wegen EI/l^3, dass ein Element sehr kurz ist, wie etwa eine Konsole. Dann sind die Unterschiede in den Knotenverschiebungen des Elements sehr klein und das bedeutet umgekehrt, dass die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ im Bereich des Elements sehr ähnlich sind, und es daher nahezu egal ist, in welchem Knoten der starren Inklusion eine Kraft angreift. Fast gleiche Spalten bedeutet aber auch, dass die Inverse fast singulär ist, und das FE-Programm Schwierigkeiten haben wird, die Knotenverschiebungen der Inklusion, die sich ja nur minimal unterscheiden, präzise auseinanderzuhalten.

3.53 Sensitivitätsplots

Das Ergebnis $J(u_h) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist das Skalarprodukt aus den Knotenwerten der Einflussfunktion, dem Vektor $\boldsymbol{g}$, und dem Vektor $\boldsymbol{f}$ der äquivalenten Knotenkräfte aus der Belastung. Dieses Skalarprodukt kann man als eine Summe über die N Knoten des FE-Netzes schreiben

$$J(u_h) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}_i \qquad i = \text{Knoten}\,, \tag{3.312}$$

wobei die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{f}_i$ die Anteile aus den großen Vektoren $\boldsymbol{g}$ and $\boldsymbol{f}$ sind, die sich auf den Knoten i beziehen

$$\boldsymbol{g} = \{\underbrace{g_1, g_2}_{\boldsymbol{g}_1}, \underbrace{g_3, g_4}_{\boldsymbol{g}_2}, \ldots, g_{2N}\}^T \qquad 2 - D\,. \tag{3.313}$$

Wenn daher $\boldsymbol{f}_i$ in einem Knoten orthogonal zu seinem Partner $\boldsymbol{g}_i$ ist, dann ist der Beitrag des Knotens zu $J(u_h)$ null. Der Plot der Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ gleicht somit einem ***Sensitivitätsplot*** des Funktionals $J(u_h)$, siehe die Bilder 3.101, 3.102 und 3.103. Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$, die in dieselbe Richtung zeigen wie die $\boldsymbol{g}_i$, üben dagegen einen maximal großen Einfluss auf $J(u_h)$ aus[30].

Der Vektor $\boldsymbol{g} = \nabla J$ ist der Gradient $(\partial J/\partial f_i)$ des Funktionals $J(u_h) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$

In Bild 3.104 ist die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund einer Zugscheibe dargestellt. Auffällig ist, dass es zwei ruhige Zonen gibt, in denen der Einfluss der Knotenkräfte auf $J(u_h)$ praktisch null ist. Wir nennen diese Punkte ***Lagrange-Punkte***. In der Astronomie sind die Lagrange-Punkte die Punkte, in denen sich die Gravitationskräfte der Sonne und der

[30] Das Verformungsbild einer Scheibe gleicht – auch in normalen Lastfällen – einer eingefrorenen Strömung, siehe Bild 3.168.

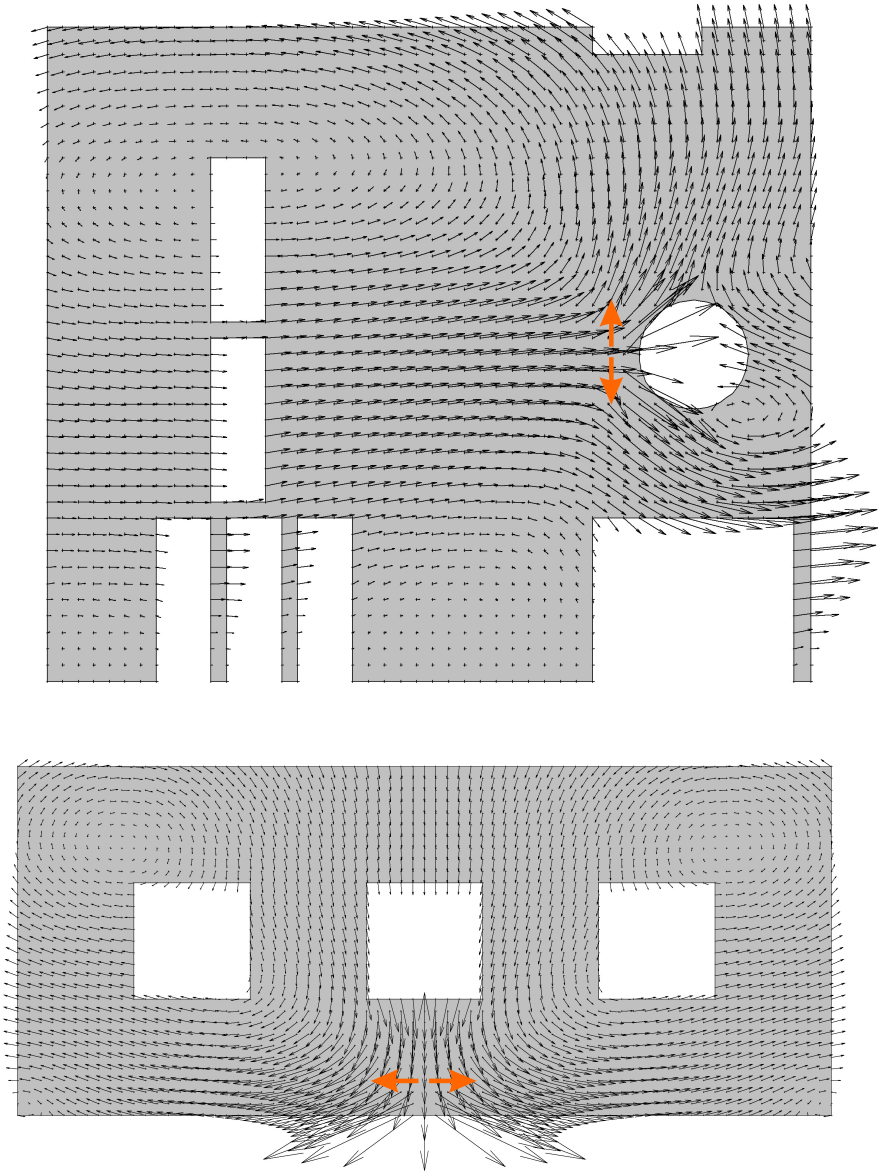


Bild 3.101. Einflussfunktionen für Spannungen σ_{yy} und σ_{xx} in zwei Scheiben. Die Pfeile sind die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{g}_i$ in den Knoten $\boldsymbol{x}_i$ aus der Spreizung des Aufpunkts. Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$ aus der Belastung, die in Richtung der $\boldsymbol{g}_i$ weisen, haben maximalen Einfluss und Knotenkräfte, die senkrecht auf den $\boldsymbol{g}_i$ stehen, keinen Einfluss (BE-SCHEIBE)

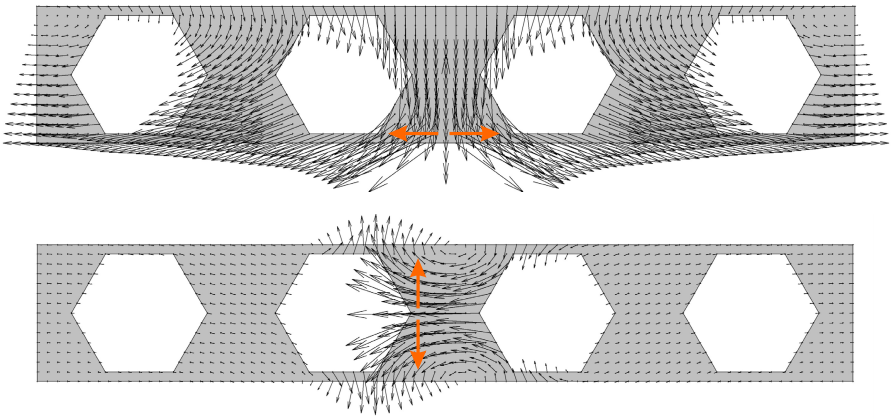


Bild 3.102. Einfeldträger, Plot der Knotenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ eines Funktionals $J(u_h) = \sigma_{xx}$ oben und $J(u_h) = \sigma_{yy}$ unten (BE-SCHEIBE)

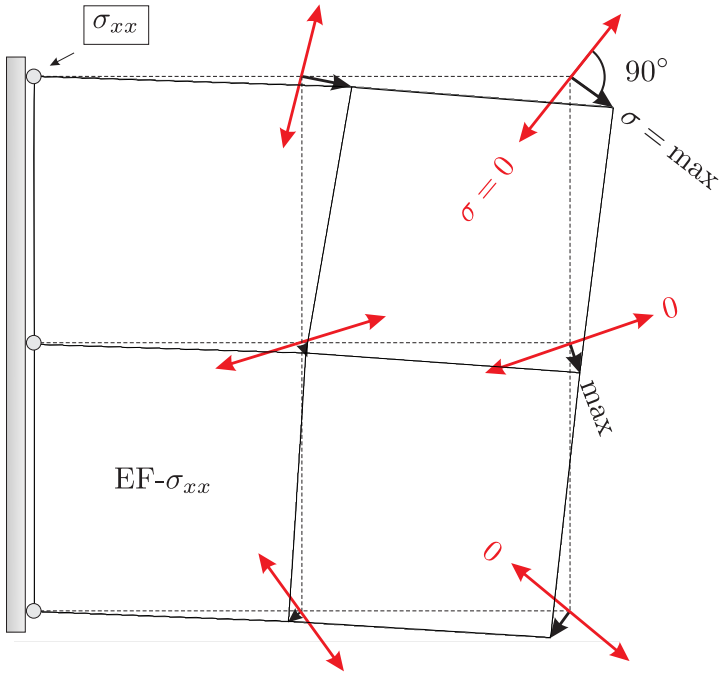


Bild 3.103. Scheibe aus vier bilinearen Elementen, Einflussfunktion für σ_{xx} im Knoten oben links. Knotenkräfte, die auf den roten Linien liegen, senkrecht zu den Verschiebungslinien der Knoten, verursachen keine Spannungen σ_{xx} in dem Knoten (WINFEM)

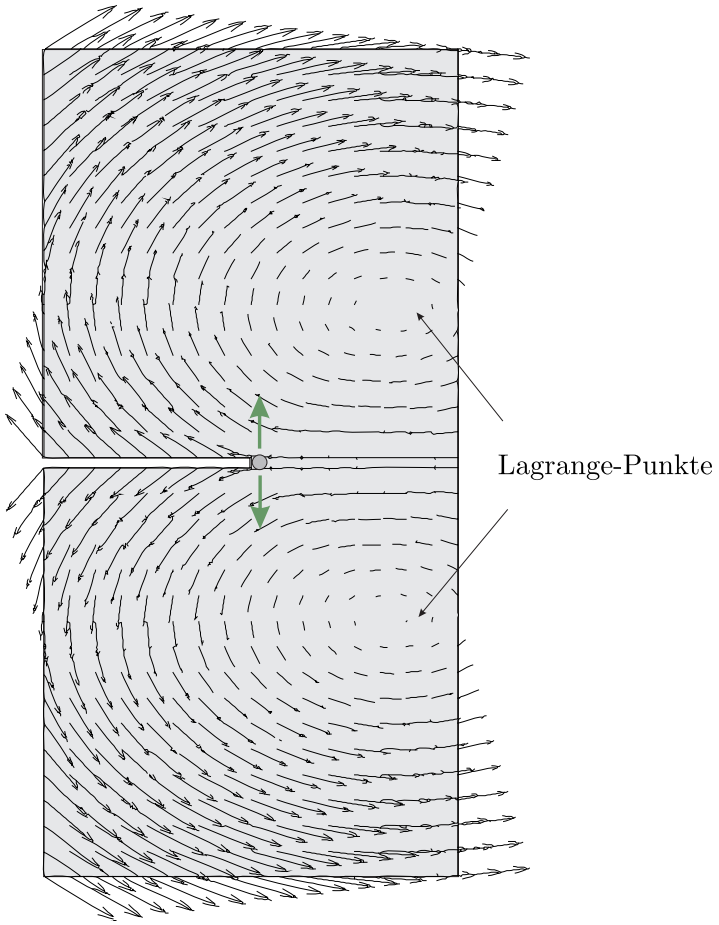


Bild 3.104. Knotenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{yy}$, also der vertikalen Spannung im Rissgrund. Die *Lagrange-Punkte* sind die Punkte, in denen der Einfluss der Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$ auf σ_{yy} praktisch null ist (BE-SCHEIBE Pos. Crack)

Erde das Gleichgewicht halten, weil sie mit gegengleichen Kräften an einem Satelliten ziehen, der dort geparkt ist [59][31]. In den Librationspunkten (= L.P.) L_4 und L_5 des Erde-Mond-Systems siehe Bild 9.33 haben sich zwei Staubwolken, die Kordylewskischen Wolken, gebildet. Solche Lagrange-Punkte findet man in fast allen diesen Plots, siehe Bild 3.105.
Die Lagrange-Punkte unterliegen natürlich auch einem Reziprozitätsgesetz: Wenn sich in einem LF A = Einzelkraft irgendwo ein Lagrange-Punkt zeigt,

[31] Die relative Lage der Lagrange-Punkte – es gibt 5 solche Punkte – zu Sonne und Erde ändert sich nicht, wenn sich S und E um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Das JWS-Teleskop steht im Lagrange-Punkt L_2 $\sim$ 1.5 Mio km

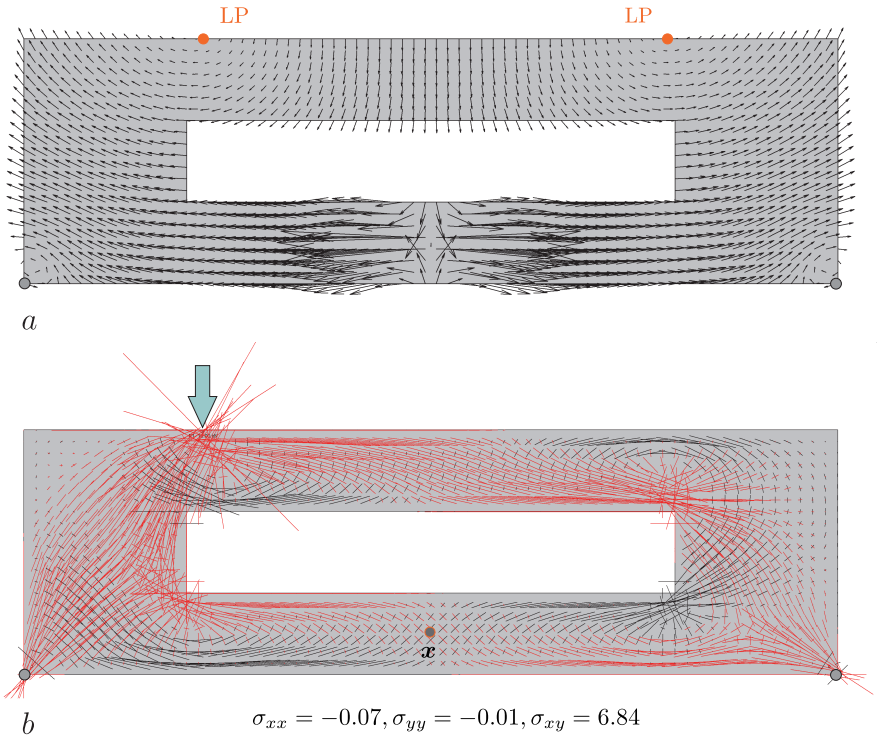


Bild 3.105. Scheibe 10 × 3 m, **a)** EF für die Spannung σ_{xx} in der Mitte des Zuggurts, **b)** die Hauptspannungen aus einer Einzelkraft (10 kN), die in dem linken Lagrange-Punkt (LP) der EF angreift und daher ist $\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) \sim 0$ (BE-SCHEIBE)

dann kann man sicher sein, dass eine Einzelkraft in dem Lagrange-Punkt (LF B) die Einzelkraft im LF A nicht verschiebt, siehe Bild 3.106.

Bemerkung 3.12. Mit einem FE-Programm erzeugt man diese Bilder wie folgt:

1. Man bringt die $j_i = J(\boldsymbol{\varphi}_i)$ als äquivalente Knotenkräfte auf und löst das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$.
2. Man plottet in jedem Knoten k den Vektor $\boldsymbol{g}_k = \{g_x^{(k)}, g_y^{(k)}\}^T$, also die horizontale und vertikale Verschiebung des Knotens.

Bei eindimensionalen Problemen wie einem Rahmen entstehen die Sensitivitätsplots, wenn man die Einflussfunktionen als ebene Verschiebungsfiguren anträgt, wie in Bild 3.107, also in einer Figur beide Anteile, horizontal und vertikal, anträgt. Wanderlasten, die maximalen Effekt erzielen wollen, müssen in Richtung der grünen Pfeile zeigen – senkrecht dazu ist die Wirkung null.

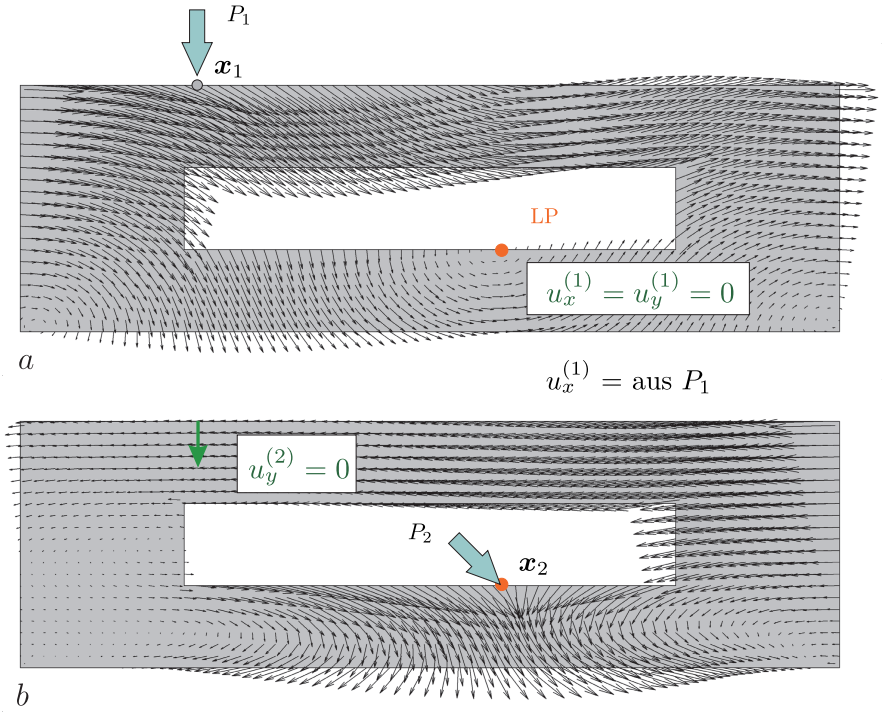


Bild 3.106. Wenn einer der beiden Punkte ein Lagrange-Punkt ist, dann bleibt nichts vom Satz von Maxwell übrig, $W_{12} = W_{21} = 0$, (BE-SCHEIBE)

3.54 Knotengleichgewicht

Die Methode der finiten Elemente wird gerne so erklärt: Man unterteilt ein Tragwerk in kleine Elemente, die in den Knoten zusammenhängen und bestimmt an Hand des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die Knotenverformungen u_i so, dass die Knoten im Gleichgewicht sind. Dazu drei Bemerkungen:

- Die f_i sind Arbeiten, [N·m]. Auf beiden Seiten $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ stehen Energien.
- Bei Stabtragwerken ist das ebenso, aber im 1-D kann man die FEM auch als Drehwinkelverfahren lesen und dann sind die f_i wirklich Kräfte und $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ ist das Gleichgewicht in den Knoten, siehe Kapitel 9.43.
- Nun gibt es noch eine **Mischtechnik** und über die wollen wir hier sprechen. Die Mischtechnik liest $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ als $\delta W_i = \delta W_e$, als Arbeiten [N·m], ist aber trotzdem davon überzeugt, dass $\delta W_i = \delta W_e$ das Gleichgewicht [N] in den Knoten formuliert.

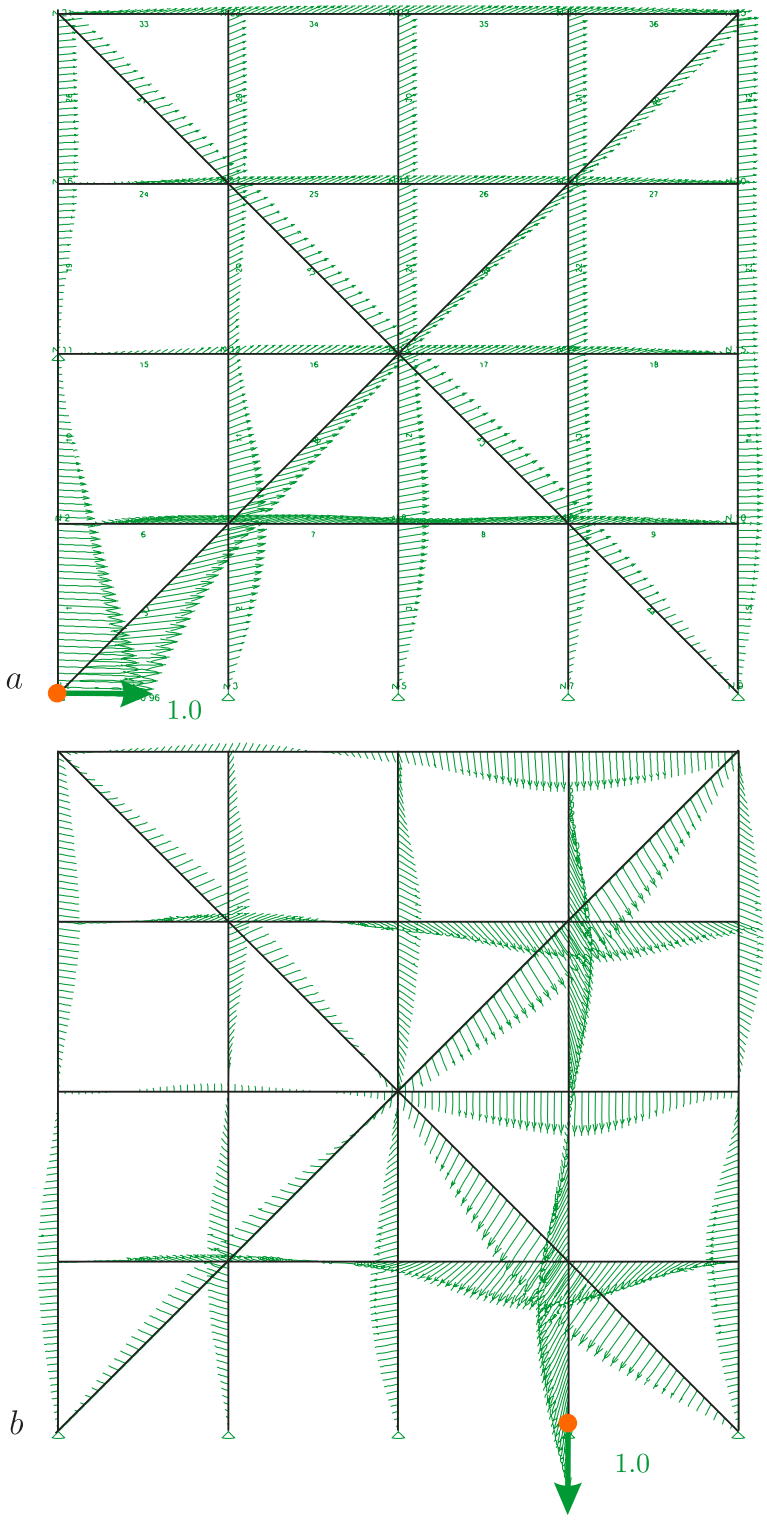


Bild 3.107. Stockwerkrahmen mit Diagonalstreben, **a)** Einflussfunktion für die horizontale Lagerkraft im linken Lager, **b)** für die vertikale Lagerkraft im vorletzten Lagerknoten (BE-FRAMES)

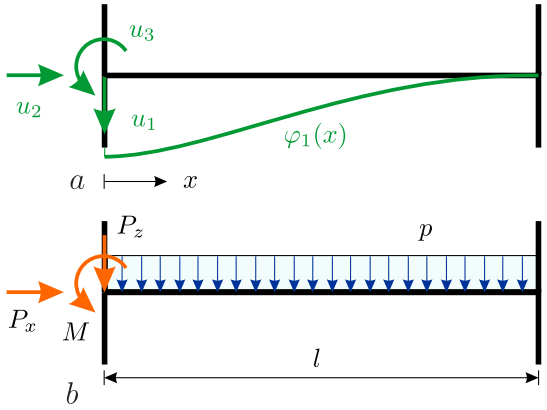


Bild 3.108. Knoten eines Rahmens, **a)** Freiheitsgrade, **b)** Belastung

Wie geht das? Betrachten wir hierzu den Knoten eines Rahmens, siehe Bild 3.108. Der Einfachheit halber lassen wir die Normalkräfte weg und nehmen nur die Biegeanteile mit. Der Knoten habe die drei Freiheitsgrade u_1, u_2, u_3 zu denen entsprechende *shape functions* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gehören. Die FE-Lösung wird in dem Knoten so eingestellt, dass (l_e die drei Stäbe im linken Knoten)

$$\delta W_i = \sum_{e=1}^{3} \int_0^{l_e} \frac{M_h M(\varphi_i)}{EI}\, dx = \delta W_e \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.314}$$

Das δW_e sind die drei Arbeiten $f_i = f_{Ki} + d_i$. Die f_{Ki} sind die Arbeiten der Kräfte, die direkt in den Knoten angreifen, das sind hier P_x, P_z und das Moment M, auf den Wegen $\varphi_i(0)$ (jeweils Eins)

$$f_{K1} = P_z \cdot 1 \qquad f_{K2} = P_x \cdot 1 \qquad f_{K3} = M \cdot 1\,. \tag{3.315}$$

Die d_i sind die äquivalenten Knotenkräfte aus der Belastung im Feld. Wir nehmen hier an, dass nur eine vertikale Riegellast p vorhanden ist, (l = Riegel)

$$d_i = \int_0^l p\, \varphi_i(x)\, dx \qquad (d_1 = \frac{p\,l}{2} \quad d_2 = 0 \quad d_3 = -\frac{p\,l^2}{12})\,. \tag{3.316}$$

Konzentrieren wir uns auf den Riegel. Der Beitrag des Riegels zu δW_i ist das Integral

$$\int_0^l \frac{M_h M(\varphi_i)}{EI}\, dx\,. \tag{3.317}$$

Es sei nun $\varphi_i = \varphi_1$ die Absenkung des Knotens um Eins. Am Riegel (als Bauteil für sich genommen) ist die virtuelle innere Arbeit δW_i gleich der virtuellen äußeren Arbeit der Riegelkräfte, wie aus der ersten Greenschen Identität folgt

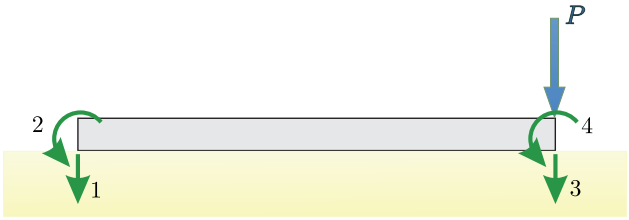


Bild 3.109. Elastisch gebetteter Träger

$$\mathscr{G}(w_h,\varphi_1) = \int_0^l 0\cdot\varphi_1\,dx + [V_h\,\varphi_1 - M_h\,\varphi_1']_0^l - \int_0^l \frac{M_h\,M(\varphi_1)}{EI}\,dx$$
$$= -V_h(0)\cdot 1 - \int_0^l \frac{M_h\,M(\varphi_1)}{EI}\,dx = 0\,. \tag{3.318}$$

Bei der vertikalen Verrückung φ_1 des Systems ist die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta W_e = f_1 = P_z\cdot 1 + d_1\,, \tag{3.319}$$

und die Bilanz $\delta W_i = \delta W_e$ lautet somit

$$\int_0^l \frac{M_h\,M(\varphi_1)}{EI}\,dx = -V_h(0)\cdot 1 = P_z\cdot 1 + d_1\,, \tag{3.320}$$

und nach Division durch 1 Meter ist das das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte, $P_z + d_1/1 + V_h(0) = 0$ in dem Knoten. Bei unserem vereinfachten Modell sind die Normalkräfte in den Stielen ja null, so dass sie hier nicht auftauchen und die Biegeenergie im Riegel ist die ganze Energie $\delta W_i(w_h,\varphi_1)$.

Diese Umwandlung von $\delta W_e = \delta W_i$ in ein klassisches Knotengleichgewicht geht nur bei Stabtragwerken und EA und EI müssen elementweise konstant sein; es darf keine Näherung in der Steifigkeitsmatrix stecken.

Ein einfaches **Gegenbeispiel**: Der elastisch gebettete Balken in Bild 3.109 besteht aus einem Element und das FE-Programm rechnet, wie üblich, mit den *shape functions* $\varphi_i(x)$ des normalen Balkens, die keine homogenen Lösungen der Gleichung $EI\,w^{IV} + c\,w = 0$ sind.

Die Einzelkraft rechts geht als $f_3 = P\cdot 1$ in das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ ein. Die FE-Lösung wird so eingestellt, dass beim Wackeln mit φ_3

$$a(w_h,\varphi_3) = f_3\,. \tag{3.321}$$

Naiverweise würde man jetzt erwarten, dass die linke Seite gerade die Arbeit der Querkraft $V_h(l)$ auf dem Weg Eins ist, also $V_h(l)\cdot 1 = f_3$, das wäre das echte Knotengleichgewicht, aber das ist nicht richtig,

$$a(w_h,\varphi_3) = \int_0^l (EI\,w_h^{IV} + c\,w_h)\,\varphi_3\,dx + V_h(l)\cdot 1 = \bar{f}_3 + V_h(l)\cdot 1\,, \tag{3.322}$$

weil das Integral nicht null ist, denn w_h ist keine homogene Lösung des elastisch gebetteten Balkens. Die Klammer $(\dots)$ ist eine **Extralast**, die die Arbeit $\bar{f}_3$ auf dem Weg φ_3 leistet. Nur beide zusammen, $\bar{f}_3 + V_h(l) \cdot 1$, sind der Arbeit $f_3 = P \cdot 1$ äquivalent. Man kann zwar das Arbeitsintegral $\bar{f}_3$ durch 1 Meter dividieren, aber das macht aus ihm keine Knotenkraft.

Wenn man mit genäherten *shape functions* rechnet, lässt sich $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$ nicht als Gleichgewicht, [N] = [N], in den Knoten interpretieren.

Bemerkung 3.13. Wir wollen hier noch die Gleichung für Stabtragwerke

$$\boxed{a(w_h, \varphi_i) = a(w, \varphi_i)} \tag{3.323}$$

nachtragen, die im Grunde auch schon in Kapitel 1.18 steht: *Beim Wackeln mit einem φ_i ist die **virtuelle innere Energie** der FE-Lösung genauso groß, wie die der exakten Lösung, wenn die φ_i homogene Lösungen sind.*

Wegen der ersten Greenschen Identität gilt

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(w, \varphi_i) &= \int_0^l p\, \varphi_i \, dx + [\dots \quad \dots]_0^l - a(w, \varphi_i) \\ &= d_i + f_i - a(w, \varphi_i) = a(w_h, \varphi_i) - a(w, \varphi_i) = 0\,, \end{aligned} \tag{3.324}$$

denn

$$d_i + f_i = \sum\nolimits_j k_{ij}\, w_j = a(w_h, \varphi_i)\,. \tag{3.325}$$

Der Grund ist, siehe Kapitel 1.18, dass die partikuläre Lösung w_p keine Arbeit auf den Wegen φ_i leistet, $a(w, \varphi_i) = a(w_p, \varphi_i) + a(w_n, \varphi_i) = 0 + a(w_n, \varphi_i)$, siehe (1.198), und die FE-Lösung gleich der homogenen Lösung ist, $w_h = w_n$.

3.55 Genäherte shape functions

Die Einträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ in einer Steifigkeitsmatrix sind die **Wechselwirkungsenergien** der *shape functions* φ_i.

Die *shape functions* der Standardelemente, EA und EI konstant, sind so fest in der Statik ‚verankert', dass man sie auch da verwendet, wo sie eigentlich nicht passen, wie in der Theorie II. Ordnung

$$EI\, w^{IV}(x) + P\, w''(x) = p(x) \tag{3.326}$$

oder bei elastisch gebetteten Trägern

$$EI\, w^{IV}(x) + c\, w(x) = p(x)\,, \tag{3.327}$$

denn die Balken-φ_i sind keine homogenen Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen und daher sind die mit diesen φ_i berechneten Steifigkeitsmatrizen, siehe Kapitel 9.46,

$$k_{ij} = \int_0^l (EI\,\varphi_i''\varphi_j'' - P\,\varphi_i'\varphi_j')\,dx \qquad k_{ij} = \int_0^l (EI\,\varphi_i''\varphi_j'' + c\,\varphi_i\,\varphi_j)\,dx \tag{3.328}$$

nur Näherungen, ebenso wie die damit berechneten äquivalenten Knotenkräfte

$$f_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx\,, \tag{3.329}$$

und die Zweiteilung wie in Bild 3.8 – Reduktion der Belastung in die Knoten und dann Einhängen der Feldmomente – geht nicht, weil man mit falschen φ_i keinen reinen Knotenlastfall rechnen kann. Im Feld treten **Phantomkräfte** auf wie z.B. in Bild 2.90,

$$EI\,\varphi_i^{IV}(x) + P\,\varphi_i''(x) = 0 + P\,\varphi_i''(x) \neq 0\,. \tag{3.330}$$

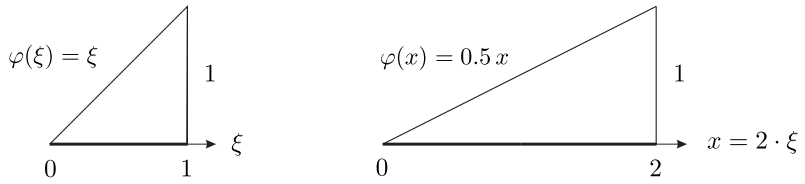
Während bei einer normalen Rahmenberechnung (EA und EI konstant) das Attribut ‚finite Elemente' im Programmnamen ein schmückendes Beiwort ist, weil es im Grunde das **Drehwinkelverfahren** ist, ist es bei der Theorie II. Ordnung oder elastisch gebetteten Balken anders, dann ist die Lösung wirklich eine Näherung und man kann und sollte die Genauigkeit steigern, indem man die Balken in mehrere Elemente unterteilt.

3.56 Unbekannte Elemente

Will man Einflussfunktionen für Schnittgrößen berechnen, dann muss man die *shape functions* kennen, die das Programm benutzt, weil die $j_i = J(\varphi_i)$ ja die entsprechende Schnittgröße der Ansatzfunktionen im Aufpunkt sind.

Behelfsweise geht es so: Ist das Element bestimmt, dann hält man alle Knoten des Netz – bis auf einen Knoten des Elements — fest und lenkt den Knoten um Eins aus, $u_i = 1$ sonst null. Dass dabei auch die direkt benachbarten Elemente mit ausgelenkt werden verfälscht das Ergebnis nicht. Das System wird in den Spannungszustand versetzt, der zu der *shape function* φ_i gehört. Die **Schnittgröße** aus diesem LF **im Aufpunkt** ist gleich die Knotenkraft $j_i = J(\varphi_i)$ zu dem FG u_i. Macht man das für alle FG des Elements und belastet die Platte oder die Scheibe mit den j_i, dann zeigt sich auf dem Bildschirm die gewünschte Einflussfunktion. Sind die Elemente alle unterschiedlich geschnitten, dann muss man diesen ‚Messvorgang' bei jedem interessierenden Element wiederholen. Diese Technik eignet sich daher eigentlich nur für reguläre Netze, wo sich auch die j_i wiederholen, oder es geht wirklich nur um eine einzelne Einflussfunktion.

Aber eigentlich sollte inzwischen jedes FE-Programm Einflussfunktionen können, denn es gibt keinen Grund mehr sich davor zu fürchten. *Hirschfeld*



$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = 0.5 \cdot 2 = 1 \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\int_0^2 \varphi(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot 2 \; d\xi \qquad 2 = \det \boldsymbol{J} = \det [J_{11}] \qquad J_{11} = \frac{dx}{d\xi} = 2$$

Bild 3.110. *push and pull*

hat sich wirklich damit abgequält, [136], und das Thema damit unglücklicherweise ‚negativ' besetzt, aber für die Computer ist ihre Berechnung ja doch eine einfache Übung und danach hat man ‚freies Gelände', um mit den Einflussfunktionen Statik anschaulich zu machen, um Statik zu ‚erleben'.

3.57 Push and Pull

Zu dem Thema $j_i = J(\varphi_i)$ gehört auch die Rolle der Kettenregel

$$\frac{\partial u(x(\xi))}{\partial \xi} = u_{,x} \cdot x_{,\xi} \; . \tag{3.331}$$

Die FE-Programme arbeiten mit einem ***master element***. Jedes Element des Netz entsteht durch ‚Vervielfältigung' aus diesem einen Ur-Element. Im einfachsten Fall wird das Ur-Element solange gedehnt oder gestaucht, bis es in die ‚Lücke' in dem Netz passt. Das geht bei ‚gekachelten' Netzen.

Sind die Elemente jedoch schief geschnitten oder gar krumm, dann braucht man richtige Funktionen $\boldsymbol{x}(\xi_1, \xi_2)$ und $\boldsymbol{\xi}(x_1, x_2)$, um die Beziehung zwischen den Punkten $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ des *master element* und $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ des Elements zu beschreiben und die Integration über ein Element Ω_e auf ein Integral über das *master element* Ω_0 zurückspielen zu können, [65],

$$\int_{\Omega_e} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_0} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) \det \boldsymbol{J}\, d\xi_1 d\xi_2 \, . \tag{3.332}$$

In der **Jacobi Matrix** $\boldsymbol{J}$ stehen die Ableitungen

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \tag{3.333}$$

der Abbildung $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$. Sie steuert, wie sich die Ableitungen $\partial u_i / \partial x_j$ transformieren. In einer vereinfachten Notation schreibt sich der Gradient einer skalaren Verschiebung u, ‚rückwärts' und ‚vorwärts' genommen, – *or pull-back and push-forward* – wie

$$\leftarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{J}\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}^{-1}\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\xi}} \qquad \rightarrow \tag{3.334}$$

wobei

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} . \tag{3.335}$$

Weil auch Spannungen **Ableitungen** sind, gelten diese Regeln auch für die Knotenkräfte j_i von Spannungs-EF, was ihre ‚Hand-Berechnung' in frei gestalteten Netzen praktisch unmöglich macht.

Die Abhängigkeit der Spannungen vom Zuschnitt des Elements sieht man sehr schön beim bilinearen (und *CST*) Element, wo überall in den Formeln für die Spannungen die Abmessungen a und b vorkommen, (3.168). Es sind die *push-forward* Transformationen $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{x}$ der Spannungen vom *master element* auf das einzelne Element im Netz. Man kann die j_i direkt ablesen.

Sollten die Elemente wirklich krumm und schief sein, dann kann nur das Programm die Spannungen der φ_i im Aufpunkt berechnen.

3.58 Die Lagerkräfte der FE-Lösung

Das Thema Lagerkräfte und FE-Lösungen muss man mit Vorsicht angehen. Nichts liegt näher, als die Knotenkräfte direkt wie Lagerkräfte zu behandeln. Bei Stabtragwerken sind es auch echte Kräfte, bei Flächentragwerken sind es jedoch in der Regel nur äquivalente Knotenkräfte, also Kräfte, die nicht wirklich im strengen Punktsinn vorhanden sind.

Die f_i in den Lagerknoten berechnet ein FE-Programm im Nachlauf, nachdem es das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst hat, wie folgt:

- Es erweitert den Vektor $\boldsymbol{u}$ zunächst um die zuvor gestrichenen $u_i = 0$ in den Lagerknoten, $\boldsymbol{u} \rightarrow \boldsymbol{u}_G$,
- und multipliziert **die nicht-reduzierte, globale Steifigkeitsmatrix** $\boldsymbol{K}_G$ mit dem vollen Vektor $\boldsymbol{u}_G$,
- die Einträge f_i in dem Vektor $\boldsymbol{f}_G = \boldsymbol{K}_G\boldsymbol{u}_G$, die zu den gesperrten Freiheitsgraden gehören, sind die Knotenkräfte in den Lagern *ohne* die Anteile der Last, die direkt in die Lager reduziert wurden. Zu diesen muss man also noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren, die wir R_d nennen, siehe Bild 3.111,

$$f_i(komplett) = f_i + R_d = R_{FE} + R_d\,. \tag{3.336}$$

- Wenn allerdings die Lager nachgiebig gerechnet wurden, dann ist das letzte Manöver nicht notwendig, dann ist $R_{FE} = u \cdot k$, der Lagerweg u mal der Lagersteifigkeit k, die volle Lagerkraft.

Die Summe über alle $f_i(komplett)$ ist gleich der aufgebrachten Belastung, weil die *shape functions* eine ***partition of unity*** bilden, $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ in

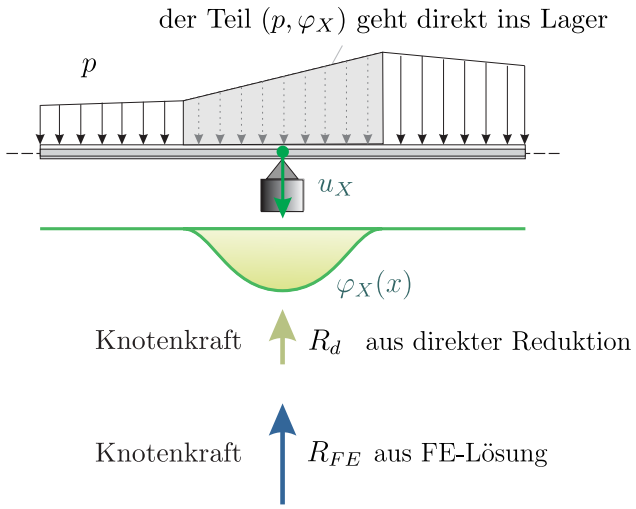


Bild 3.111. Starre Stütze, die gesamte Stützenkraft ist die Summe aus der Stützenkraft R_{FE} der FE-Lösung plus dem direkt in die Stütze reduziertem Anteil aus der Last p, also $R_d = (p, \varphi_X)$

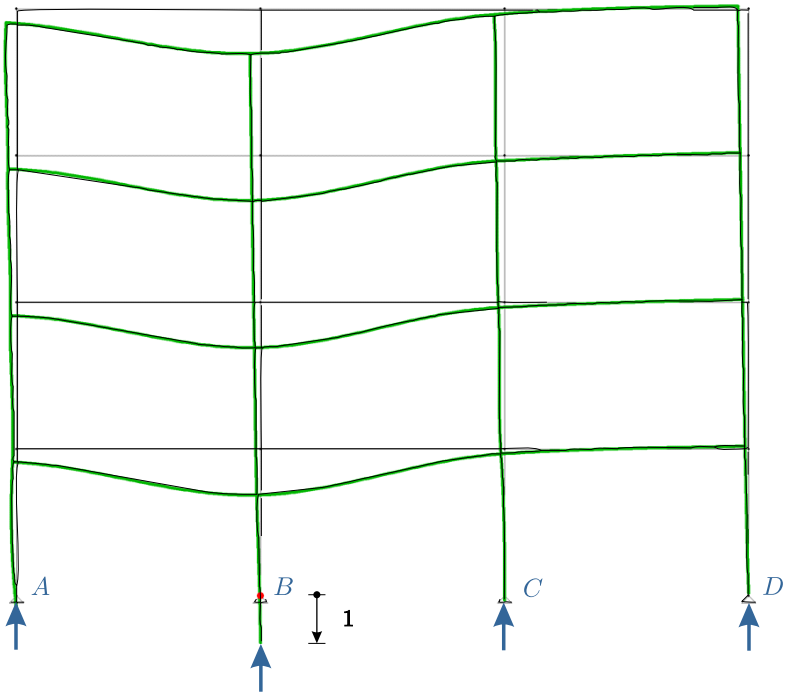


Bild 3.112. Einflussfunktion für die Lagerkraft B

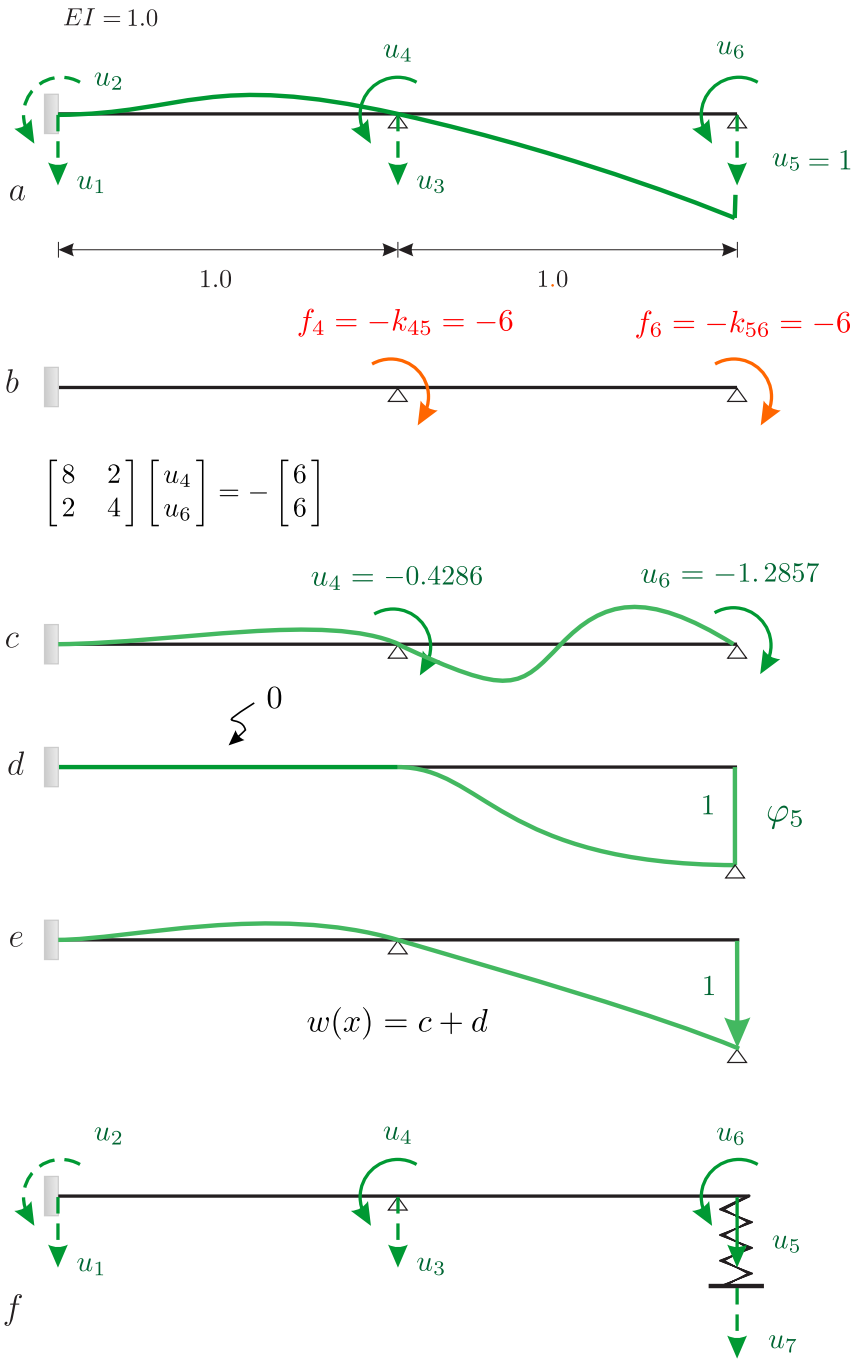


Bild 3.113. Lagersenkung, **e)** Biegelinie

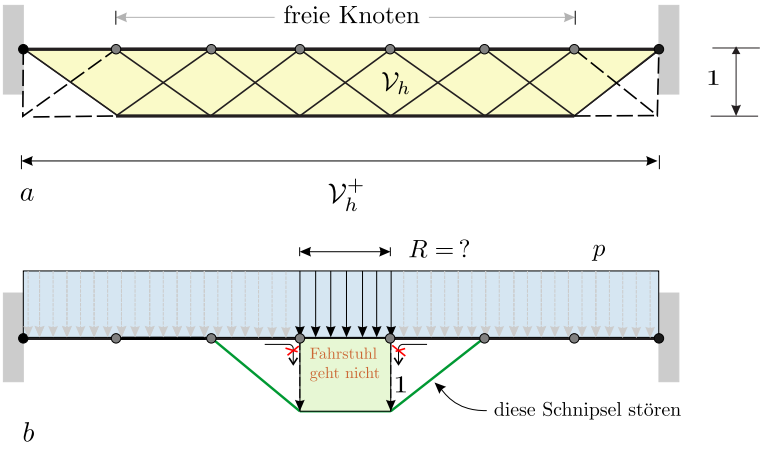


Bild 3.114. Die φ_i der freien Knoten bilden den *trial space* $\mathcal{V}_h$. Ein Programm kann die Resultierende R in einem Element oder *patch* nicht berechnen, weil die dazu nötige Senkung $\sqcup$ nicht in $\mathcal{V}_h$ liegt, die Last daneben wird immer mitbewegt; nur $R_{gesamt} = \sum_i f_i = \sum_i (\varphi_i, p)$ über alle $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$ geht.

jedem Punkt x (ohne die Dreh-φ_i), und die Starrkörperbewegungen des frei geschnittenen Tragwerks in $\mathcal{V}_h^+$ liegen oder liegen sollten. Gleichbedeutend damit ist, dass die Summe über alle Einflussfunktionen für die Lagerkräfte eines Rahmens, $A + B + C + D$, siehe Bild 3.112, in jedem Punkt x des Rahmens gleich Eins sein muss, EF Summe = Absenkung um Eins.

Der Raum $\mathcal{V}_h^+$ enthält alle $u_h = \sum_i u_i \varphi_i(x)$, die sich durch die Ansatzfunktionen φ_i darstellen lassen. Wenn man die φ_i streicht, die zu gesperrten Freiheitsgraden u_i gehören, dann erhält man den Unterraum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h^+$ auf dem wir die FE-Lösung suchen, $\mathcal{V}_h^+ = \mathcal{V}_h$ + Starrkörperbewegungen.

Technisch ist es so, dass die $\varphi_i(x)$ in $\mathcal{V}_h$ **keine** *partition of unity* bilden, weil eben in den festen Lagern x die Summe

$$\sum\nolimits_i \varphi_i(x) = 0 \tag{3.337}$$

null ist und nicht eins – es fehlen ja die *shape functions* der Lager. Trotzdem ist natürlich die Summe über alle f_i, also die Resultierende $\boldsymbol{R}_h$ des LF p_h, gleich der Resultierenden $\boldsymbol{R}$ des LF p, weil in den Lagerknoten die Belastung direkt in die Lager reduziert wird und diese f_i mitgezählt werden. Die f_i in den starren Lagerknoten sind ‚Verzierung', sie sitzen da, aber sie tun nichts, denn die Verformungen kommen nur aus den f_i in den freien Knoten.

Lokal – in irgend einem ***patch*** – ist das Gleichgewicht zwischen der Belastung p und den Schnittkräften am Rand des *patch* nicht erfüllt, weil ja die FE-Lösung die Gleichgewichtslage im FE-Lastfall p_h ist und nicht p.

Technisch ist der Grund der, dass die Starrkörperbewegungen u_0^p der *patchs* Ω_p nicht in $\mathcal{V}_h$ liegen, so dass das Programm nicht auf $(p - p_h, u_0^p) = 0$ testen

kann. Die u_0^p haben den Wert 1 im *patch* und 0 außerhalb und solche **fahrstuhlartige Bewegungen** kann man mit konformen (also stetigen) Ansätzen nicht darstellen, sie liegen nicht im Testraum $\mathcal{V}_h$, siehe Bild 3.114. *The resolution of a FE-mesh is limited.*

3.59 Lagersenkung

Erst hält man alle Knoten fest, $u_j = 0$, bis auf den Lagerknoten, den man absenkt, $u_i = w_\Delta$. Im zweiten Schritt bringt man die Festhaltekräfte, sie stehen in Spalte i der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$, in umgekehrter Richtung auf das Tragwerk (das sei hier ein Durchlaufträger) auf. Der FG $u_i = 0$ ist dabei gesperrt. Die Biegelinie[32] $w_{released+0}$ aus diesem zweiten LF plus der skalierten Einheitsverformung φ_i ist die Biegelinie aus der Lagersenkung

$$w(x) = w_{released+0}(x) + w_\Delta \cdot \varphi_i(x)\,. \tag{3.338}$$

Wie das geht, soll an Hand des Zweifeldträgers in Bild 3.113 gezeigt werden. Zunächst sei angenommen, dass das Lager starr ist. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ hat die Größe 2×2, und die Freiheitsgrade sind u_4 und u_6

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_6 \end{bmatrix}\,. \tag{3.339}$$

Die Kräfte f_4 und f_6 stehen in der nicht-reduzierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ und dort in Spalte 5

$$\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & -0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}\,, \tag{3.340}$$

denn $\boldsymbol{K}_G\,\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{f}$ sind die Knotenkräfte im LF $u_5 = 1$ und $u_i = 0$ sonst.

In Richtung der FG u_4 und u_6 wirken demnach die Knotenkräfte, siehe Bild 3.113 *b*,

$$f_4 = -k_{45} \cdot w_\Delta = -6 \cdot w_\Delta \qquad f_6 = -k_{65} \cdot w_\Delta = -6 \cdot w_\Delta\,. \tag{3.341}$$

Also belastet man den Träger mit den Kräften $f_4 = f_6 = -6$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}\,, \tag{3.342}$$

bestimmt die Verdrehung $u_4 = -0.4286$, $u_6 = -1.2857$ der beiden Knoten und mit dem dritten Wert $u_5 = 1.0$ ergibt sich so die Biegelinie

[32] $+0$, also u_i fest

$$w(x) = -0.4286 \cdot \varphi_4(x) + 1.0 \cdot \varphi_5(x) - 1.2857 \cdot \varphi_6(x)\,. \tag{3.343}$$

Wenn das rechte Lager elastisch ist (k), dann kommt zu $\boldsymbol{K}_G$ eine siebte Spalte und Zeile mit den Einträgen $k_{57} = k_{75} = -k, k_{77} = k$ und $k_{ij} = 0$ sonst hinzu. Aus k_{55} wird $k_{55}+k$. Das gelagerte System hat jetzt drei Freiheitsgrade und die Bewegung $u_7 = w_\Delta$ und $u_i = 0$ sonst ergibt eine Zugkraft $f_5 = kw_\Delta$ im rechten Knoten

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 12+k & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k\Delta w \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow -k_{57} \cdot \Delta w\,. \tag{3.344}$$

(Die Spalte 7 wird also auf die rechte Seite gebracht). Ist $k = 10$, dann hat das System die Lösung $\boldsymbol{u} = \{-0.3659, 0.8537, -1.0976\}^T$ und die Kurve

$$w(x) = -0.3659 \cdot \varphi_4(x) + 0.8537 \cdot \varphi_5(x) - 1.0976 \cdot \varphi_6(x)\,. \tag{3.345}$$

verläuft etwas flacher als im Fall des starren Lagers.

3.60 Einflussfunktion für ein starres Lager

Vom Standpunkt der ‚Schulstatik' aus ist alles klar: Man entfernt das Lager und drückt den Balken um einen Meter nach unten und bestimmt die Lösung so, wie wir das gerade eben beschrieben haben.

Es sei erlaubt das ganze auch etwas theoretischer anzugehen. Eine Lagerkraft R ist ein Resultat, ist also ein **Funktional**

$$R = J(w)\,, \tag{3.346}$$

und die FE-Einflussfunktion $\boldsymbol{g}$ für R erhält man, so lautet die Regel hinter $\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{j}$, wenn man als Knotenkräfte j_i die Lagerkräfte der Ansatzfunktionen

$$j_i = R(\varphi_i)\,, \tag{3.347}$$

ansetzt.

Die Lagerkraft $R(\varphi_i)$ einer *shape function* ist aber gleich der **Wechselwirkungsenergie** $\times(-1)$ zwischen φ_i und der Einheitsverformung des Lagerknotens, die hier φ_l heißen möge,

$$a(\varphi_i, \varphi_l) = \int_0^l EI\, \varphi_i''\, \varphi_l''\, dx = -R(\varphi_i) \cdot 1\,. \tag{3.348}$$

Auf dem Weg φ_l senkt sich das Lager um einen Meter und die n Terme $a(\varphi_i, \varphi_l)$ bilden die Spalte l der nicht-reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$.

Dieses Ergebnis beruht auf der ersten Greenschen Identität, denn (3.348) ist identisch mit $\delta W_i = \delta W_e$

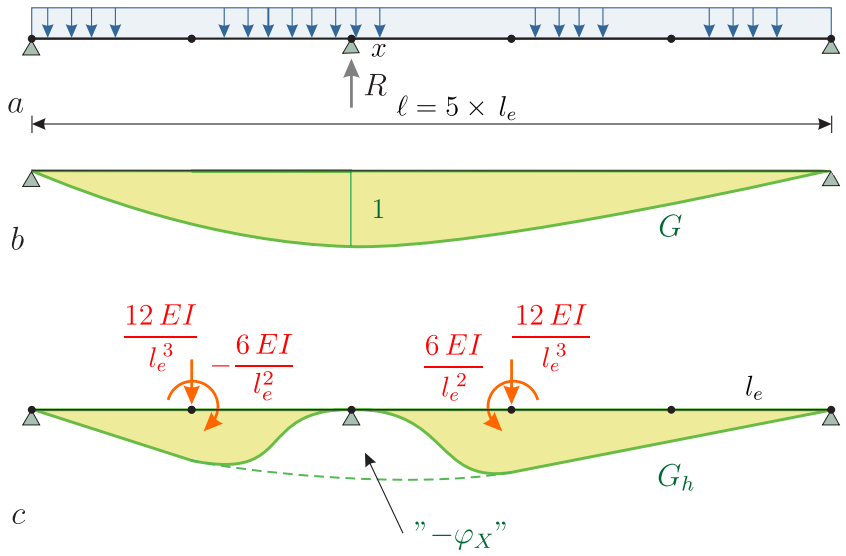


Bild 3.115. Träger, **a)** Lagerreaktion R, **b)** Einflussfunktion G für R, **c)** FE-Einflussfunktion G_h auf $\mathcal{V}_h$; die Knotenkräfte j_i, die G_h erzeugen, sind die Lagerkräfte R der Ansatzfunktionen. In Bild 3.121 sieht man die Kurve in 3-D.

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\varphi_i,\varphi_l) &= \mathscr{G}(\varphi_i,\varphi_l)_{(0,x)} + \mathscr{G}(\varphi_i,\varphi_l)_{(x,l)} \\ &= \underbrace{V(\varphi_i)(x_-) - V(\varphi_i)(x_+)}_{-R(\varphi_i)} - \int_0^l EI\,\varphi_i''\,\varphi_l''\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{3.349}$$

Die φ_i sind homogene Lösungen und φ_l ist in allen Knoten, bis auf den Lagerknoten, null. Dort ist $\varphi_l = 1$ und $V(\varphi_i)$ springt, wenn es dort nicht konstant null ist, und der Sprung ist die Lagerkraft. Das erklärt, warum die virtuelle äußere Arbeit sich auf den Ausdruck $-R(\varphi_i)\cdot 1$ verkürzt.

Die Lagerkraft R einer Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ ist gleich der Wechselwirkungsenergie $a(\varphi_i,\varphi_l)\times(-1)$ zwischen $\varphi_i(x)$ und $\varphi_l(x)$. Ist u_l der Freiheitsgrad des Lagers, dann ist also $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{K}_G\,\boldsymbol{e}_l = -\boldsymbol{f}_l$ (= Spalte l von $\boldsymbol{K}_G$).

Mit dem Vektor[33] $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_l$ lautet damit die Einflussfunktion für die Lagerkraft im Knoten x (FG u_l)

$$G_h(y,x) = \sum\nolimits_i g_i(x)\,\varphi_i(y) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_l\,. \tag{3.350}$$

Dieser Einflussfunktion fehlt aber offensichtlich, siehe Bild 3.115 *c*, das Stück φ_l direkt unter dem Lager. Die Lücke muss aber sein, weil der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ ja die Funktion φ_l nicht enthält – der Knoten ist ja gesperrt. Aber warum

[33] Im Vektor $\boldsymbol{f}_l$ werden die Einträge gestrichen, die zu gesperrten FG gehören.

kommen die finiten Elemente dann trotzdem auf die richtige Lagerkraft? Das liegt daran, wie ein FE-Programm rechnet.

Ist eine verteilte Last $p(x)$ gegeben, dann stellt es in jeden Knoten die zugehörige äquivalente Knotenkraft und in den Lagerknoten die Kraft

$$f_l = \int_0^l p(x)\,\varphi_l(x)\,dx\,. \tag{3.351}$$

Diese Kraft **wandert aber direkt in das starre Lager** und ist für die FE-Berechnung wie nicht vorhanden. Die Verformungen und die Schnittkräfte der FE-Lösung sparen diese Knotenkraft also aus. Und die Einflussfunktion in Bild 3.115 ist genau die Einflussfunktion für die Lagerkraft in diesen **‚amputierten' Lastfällen**.

Die direkt in die Stütze fließende Knotenkraft f_l erzeugt eine Gegenkraft in der Stütze, die wir $R_d = -f_l$ nennen. Am Ende der Berechnung addiert das FE-Programm zu der Lagerkraft R_{FE} des ‚amputierten' Lastfalls einfach die Lagerkraft R_d hinzu und so stimmt am Schluss wieder alles

$$R = R_{FE} + R_d\,. \tag{3.352}$$

Man kann das ganze natürlich auch ‚von hinten' aufzäumen, indem man zur FE-Einflussfunktion G_h den fehlenden Anteil φ_l addiert, und so genau die Einflussfunktion G erhält

$$G = G_h + \varphi_l\,, \tag{3.353}$$

wie sie der Ingenieur sehen will. Wenn man diese mit der Belastung überlagert, ist das Ergebnis die volle Lagerkraft

$$R = R_{FE} + R_d = \int_0^l G(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{3.354}$$

In der Stabstatik geschieht die Addition $R = R_{FE} + R_d$ **automatisch**, nämlich in dem Moment, in dem die lokalen Lösungen elementweise zur FE-Lösung addiert werden.

Das Seil in Bild 3.116 *a* wird mit einer konstanten Streckenlast $p = 10\,\mathrm{kN/m}$ belastet. Eine Unterteilung in zwei lineare Elemente[34]

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 10 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{3.355}$$

ergibt $w_2 = 5$ und damit erhält man in der Nachlaufrechnung die Lagerkräfte $f_1 = f_3 = -5$. Dazu müsste man noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren. Das geschieht aber automatisch wie folgt: Elementweise werden die lokalen Lösungen bestimmt, siehe Bild 3.116 *c* und *d*, und zur FE-Lösung addiert. Die Folge ist, dass der Seildurchhang $w = w_{FE} + w_{loc}$ jetzt schön rund ist, und die Lagerkräfte genau ‚passen'.

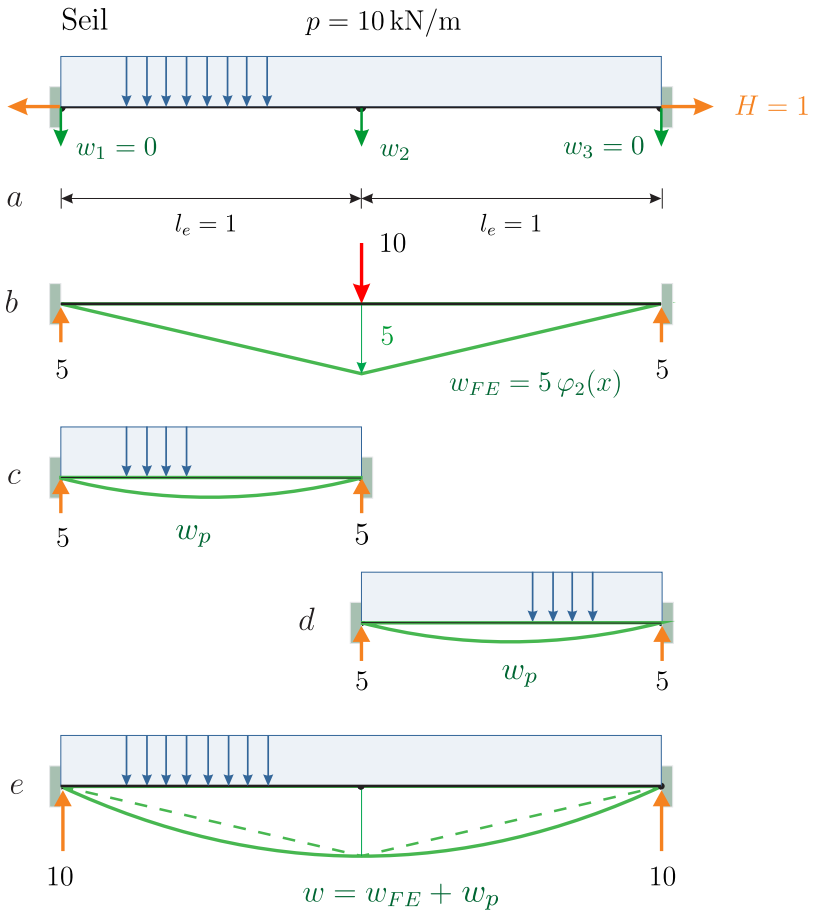


Bild 3.116. Seil, **a)** System, **b)** FE-Lösung **c) - d)** lokale Lösungen, **e)** exakte Lösung

Bemerkung 3.14. Bei Flächentragwerken wie einer Membran ist $a(\varphi_i, \varphi_l)$ nicht die exakte Lagerkraft $R(\varphi_i)$ der *shape function* φ_i, sondern nur noch die äquivalente Lagerkraft f_i

$$\mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_l) = \underbrace{\int_\Omega -\Delta\varphi_i\,\varphi_l\,d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\,\varphi_l\,ds}_{f_i} - a(\varphi_i, \varphi_l) = 0. \tag{3.356}$$

Das Randintegral ist natürlich null, wenn φ_l oder φ_i nicht bis zum Rand reichen, wie ja auch nur die φ_i, die sich mit φ_l überlappen, Knotenkräfte f_i liefern, was einer Situation wie in Bild 3.121 entspricht.

[34] Das ist die nicht-reduzierte globale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$.

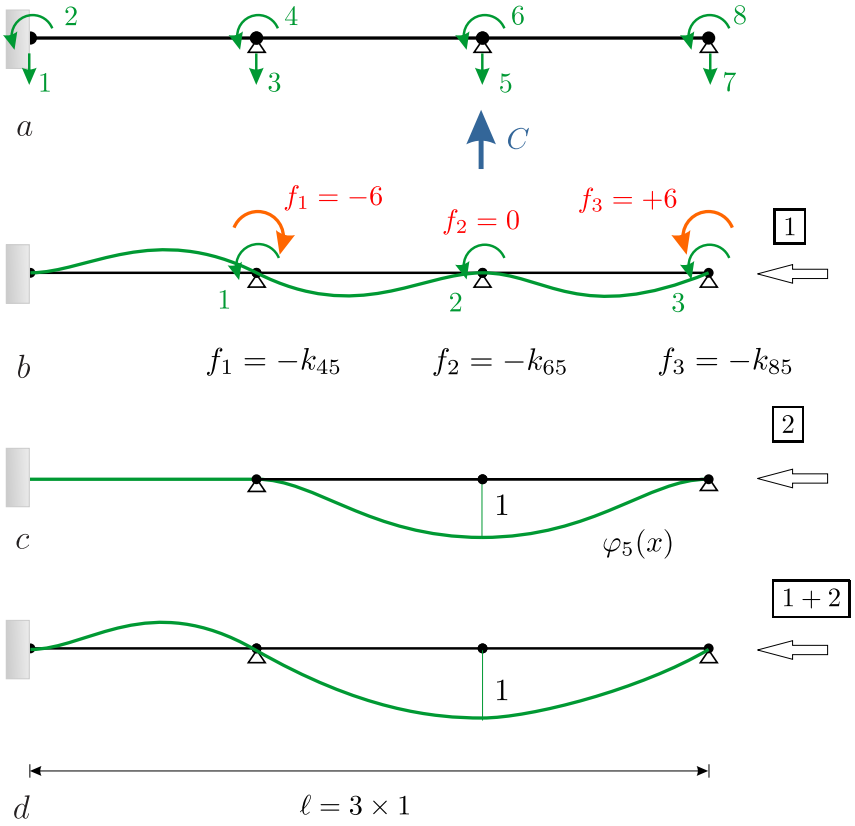


Bild 3.117. EF für die Lagerkraft C, **a)** System mit allen FG, **b)** Wirkung der Knotenkräfte f_i aus Spalte 5 am wirklichen System, **c)** *shape function* des Lagerknotens, **d)** Einflussfunktion

3.61 Der Rechengang

Die FEM entfernt kein Lager, sondern sie spaltet die Einflussfunktion für die Lagerkraft – es sei u_7 der Freiheitsgrad des starren Lagers – in zwei Teile auf

$$G(y,x) = G_h(y,x) + \varphi_7(y)\,. \tag{3.357}$$

Erst werden alle Knoten festgehalten und nur $u_7 = 1$ verschoben. Die dazu nötigen Festhaltekräfte in den umliegenden Knoten stehen in Spalte $\boldsymbol{f}_7$ der Matrix $\boldsymbol{K}_G$. Diese bringt man mit umgedrehten Vorzeichen auf das System auf

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{f}_7 \tag{3.358}$$

und addiert zu dieser Biegelinie

$$G_h(y,x) = \sum\nolimits_i u_i(x)\varphi_i(y) \tag{3.359}$$

die Einheitsverformung $\varphi_7(y)$, was (3.357) ergibt.

3.62 Beispiel EF Lagerkraft

Die globale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ des Trägers in Bild 3.117 hat, wenn wir $EI = 1$ setzen und die Feldlänge $\ell = 1$ ist, die Gestalt

$$\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} . \tag{3.360}$$

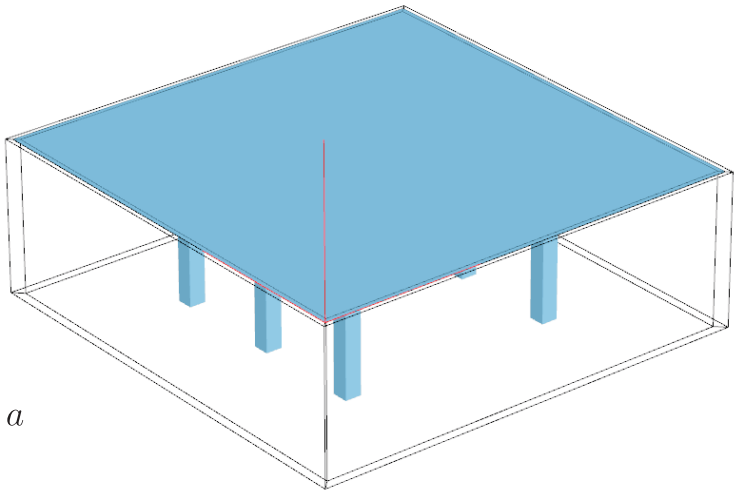
Es wird die Einflussfunktion für die Lagerkraft C (FG 5) berechnet. Die Einträge k_{i5} in Spalte 5 der Matrix $\boldsymbol{K}_G$ werden also mit negativem Vorzeichen auf das System in Bild 3.117 *b* als Knotenkräfte aufgebracht. Hierbei ist zu beachten, dass die Nummerierung beim Übergang vom nicht-reduzierten System, Matrix $\boldsymbol{K}_G$, zum endgültigen System (8 FG $\rightarrow$ 3 FG) wechselt. Die Freiheitsgrade 3, 5 und 7 fallen weg und aus 4 wird 1, aus 6 wird 2 und aus 8 wird 3. Das gibt die Knotenkräfte

$$f_1 = -k_{45} = -6 \qquad f_2 = -k_{65} = 0 \qquad f_3 = -k_{85} = 6\,. \tag{3.361}$$

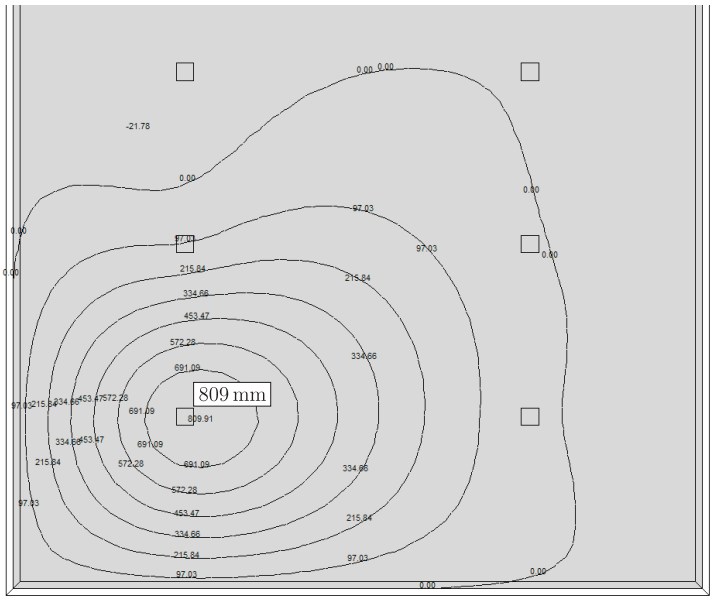
Zu der Verformung aus diesen Knotenkräfte, siehe Bild 3.117 *b*, wird noch die *shape function* φ_5 des Lagerknotens selbst addiert und so entsteht vor unseren Augen die Einflussfunktion für die Lagerkraft in Bild 3.117 *d* ohne dass wir das Lager entfernen mussten.

3.63 Einflussfunktion für ein nachgiebiges Lager

Das Problem kann man vom Kopf oder vom Fuss her angehen. Der Fusspunkt eines elastischen Lagers ist ein fester Punkt, ein festes Lager und so kann man die Einflussfunktion für die Fusspunktskraft berechnen, siehe Bild 3.118, indem man den Fuss der Feder um 1 Meter senkt. Was oben im Balken ankommt, ist die Einflussfunktion für die Lagerkraft. Genauer gesagt: Der Wert der Einflussfunktion in einem Punkt y ist das Verhältnis von dem, was im Punkt y an Verformung ankommt, zur auslösenden Bewegung. In Bild 3.118 senkt sich der Fusspunkt der Stütze um 1000 mm (auslösende Bewegung) und davon kommen ungefähr 800 mm am Stützenkopf an. Die Einflussfunktion für die Stützenkraft hat also direkt über der Stütze den Wert 800/1000 = 0.8, was bedeutet, dass 80 % von einer Kraft P über der Stütze in die Stütze



a



b

Bild 3.118. Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstützen, **a)** System, **b)** Einflussfunktion für die vordere, linke Stützenkraft. Von der angesetzten Spreizung (Lagersenkung) von 1000 mm werden $\sim$ 200 mm von der Stütze auf dem Weg vom Fuss bis zum Kopf ‚verschluckt'. Somit gehen rund 80 % $\doteq$ 800 mm/1000 mm einer Punktlast über der Stütze direkt in die Stütze. Die restlichen 20% trägt die Platte. (BE-PLATTE)

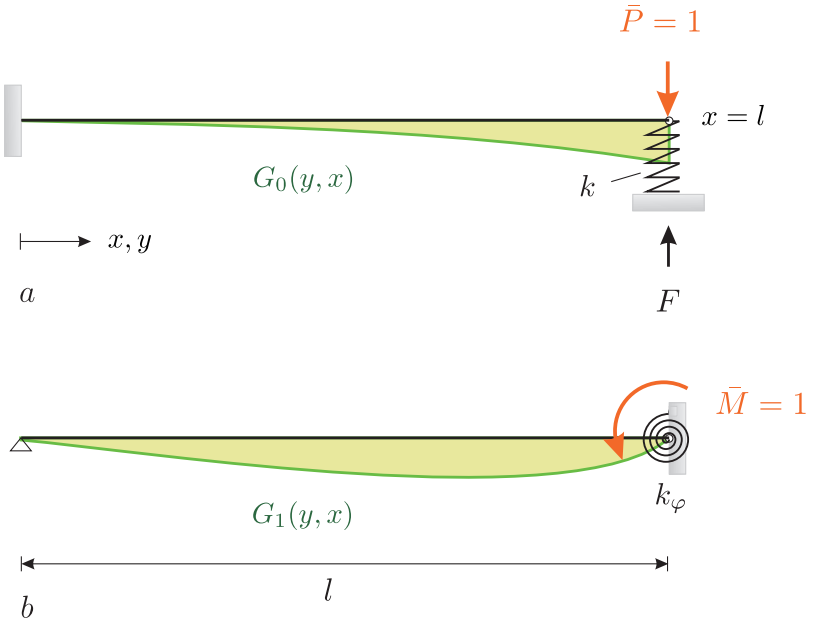


Bild 3.119. Federnde Lager, **a)** Einflussfunktion G_0 für die Absenkung der Feder und **b)** G_1 für die Verdrehung der Einspannung

gehen. Je weicher die Stütze ist, umso weniger wird oben von den 1000 mm ankommen.

Einfacher ist es natürlich, wenn man in den Kopf des nachgiebigen Lagers eine **Kraft** $\bar{P} = 1$ stellt, und die Reaktion $G_0(y, x)$ des Tragwerks darauf berechnet, x = Ort der Feder. Weil $G_0(y, x)$ die EF für die Absenkung des Stützenkopfes ist, ist $k \cdot G_0(y, x)$ die EF für die Federkraft, siehe Bild 3.119 *a*,

$$F = k \int_0^l G_0(y, l)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.362}$$

Weil unter Verkehrslast (nicht Eigengewicht) die Kraft am Kopf und am Fuß einer Stütze gleich groß sind, sind beide Techniken anwendbar.

Sinngemäß dasselbe gilt für **Drehfedern**, siehe Bild 3.119 *a*. Man verdreht die Einspannung mit einem Moment $\bar{M} = 1$, berechnet die Verformungsfigur $G_1(y, x)$ und diese Biegelinie, gewichtet mit k_φ, ist die Einflussfunktion für das Moment in der Feder aus einer Streckenlast p

$$M = k_\varphi \int_0^l G_1(y, l)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.363}$$

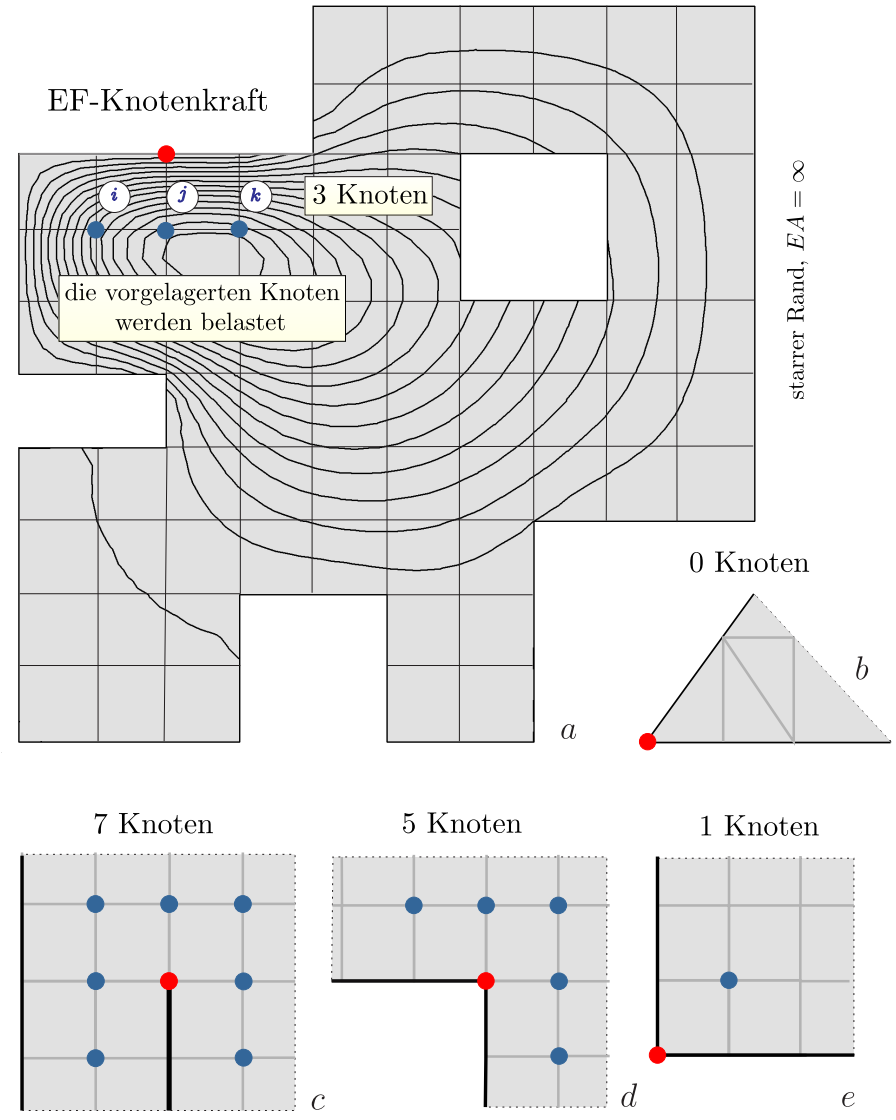


Bild 3.120. Die Einflussfunktion für die Lagerkraft in dem Knoten • (FG u_l) wird durch Knotenkräfte in den vorgelagerten freien Knoten • erzeugt. Erst wird der Knoten • um Eins gesenkt und alle anderen Knoten festgehalten = LF 1. Das Ergebnis ist die *shape function* φ_l des Knoten. Dann werden die Festhaltekräfte ($f_i^{LF\,1} = k_{il}$) in den freien Knoten in umgedrehter Richtung aufgebracht = LF 2. Der Knoten • ist dabei gesperrt. Die $f_i^{LF\,2} = -k_{il}$ stehen in der Spalte l von $\boldsymbol{K}_G$. In den Knoten, die u_l ‚sehen', wirken Kräfte/Momente $f_i = -k_{il}$ (je nach FG u_i). Je exponierter die Lage des Knoten • desto mehr • Knoten $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 7$, werden belastet, desto ausgeprägter die Delle $G = \varphi_l + w_{LF\,2}$. Man versuche sich vorzustellen, wie die Flächen in der Grenze $h \to 0$ aussehen.

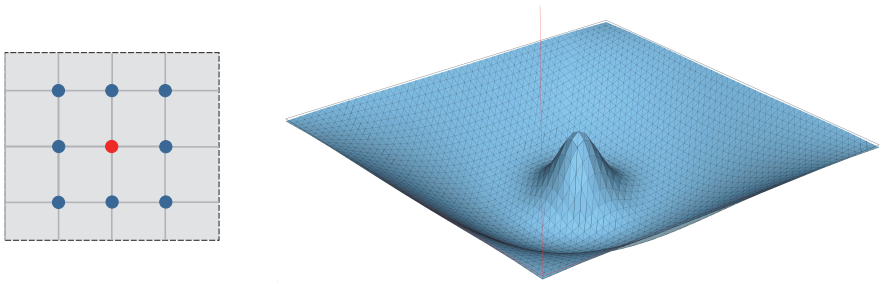


Bild 3.121. Die Stütze • wird um 1 m gesenkt; die • sind fest. Dann werden die • gelöst und mit den umgedrehten Festhaltekräften (in $\boldsymbol{K}_G$ ablesbar) belastet, • ist fest. Diese Fläche, siehe Bild, plus $\varphi_i^{\text{Stütze}}$ ist die Einflussfunktion für die Stütze.

3.64 Einflussfunktionen für Wände

Die Einflussfunktion für die resultierende Lagerkraft R in einer Wand ist eine **Delle** $w = 1$ in der Platte in Richtung der Wand. Bei einer freistehenden Wand kann man sich das noch vorstellen, aber wenn die Wand in einem Verbund von Wänden steht, dann wird es schwierig mit der Anschauung. In der Situation wechselt man besser zu dem FE-Modell, ersetzt also die Wände durch elastische Knoten, durch Punktlager, denn dann kann man so vorgehen wie in dem vorangegangenen Kapitel 3.63. Aus der Resultierenden R wird eine Summe über die einzelnen Knoten und jede Knotenkraft hat ihre eigene Einflussfunktion.

Sinngemäß dasselbe gilt natürlich, wenn die Wand starr gerechnet wird. Dann ist jeder Knoten ein starres Lager und die Einflussfunktion für die Lagerkraft f_l in Richtung des FG u_l

$$G_h(y,x) = \sum\nolimits_i g_i\,\varphi_i(y) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_l \qquad (+\varphi_l) \qquad (3.364)$$

ist dieselbe, wie bei einer starren Stütze, siehe (3.350) in Kapitel 3.60.

Der Vektor $\boldsymbol{f}_l$ ist die verkürzte Spalte l der nicht-reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$; verkürzt = die Zeilen, die zu gesperrten $u_i = 0$ gehören, werden gestrichen, und so hat $\boldsymbol{f}_l$ am Schluss dieselbe Höhe wie $\boldsymbol{K}$.

Weil nur die *shape functions* der unmittelbar benachbarten Knoten Beiträge $f_i = -k_{il}$ zu dem Vektor $\boldsymbol{f}_l$ liefern, bedeutet dies, dass die Einflussfunktion für die Lagerkraft allein durch Knotenkräfte f_i in den unmittelbar **vorgelagerten Knoten** generiert wird. Diese erzeugen sozusagen eine ‚lokale' Delle in der Platte, siehe Bild 3.120.

Was wir in Kapitel 3.60 über den amputierten LF gesagt haben, gilt auch hier: Eine direkt über den Knoten abfließende Knotenlast wird von der Einflussfunktion in (3.364) nicht erfasst, was nur logisch ist, denn eine solche Kraft erzeugt keine Schnittkräfte in der Platte. Will man die komplette EF, die Ingenieur-EF, sehen, dann muss man zu $G_h(y,x)$ noch $\varphi_l(y)$ dazu addieren.

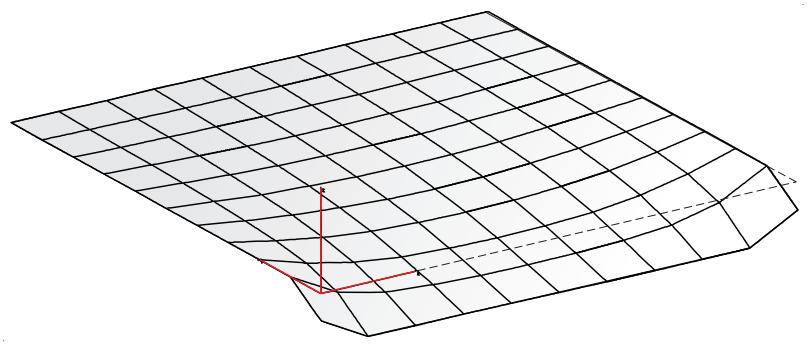


Bild 3.122. Gelenkig gelagerte Quadratplatte. Die Knoten der vorderen Kante wurden um Eins abgesenkt (Ecken um 1/2), $\sum_{i=1}^{4}$ EF-Kante$_i = 1$, (WINFEM-P).

Zum Verständnis sei noch angemerkt, dass die f_i in den vorgelagerten Knoten **Kräfte** und **Momente** sind. Ein solcher Knoten hat drei Freiheitsgrade, u_i, u_j, u_k, eine Durchbiegung und zwei Verdrehungen. Ist u_l der FG des Lagerknotens, dann lauten die Knotenkräfte $f_i = -k_{il}, f_j = -k_{jl}, f_k = -k_{jl}$, sie kommen alle aus der Spalte l der nicht-reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$, eine Kraft und zwei Momente, weil u_i eine Durchbiegung ist und u_j und u_k Verdrehungen. Der Typ der *shape function* φ_i, genauer des FG u_i, bestimmt also den Typ der *actio* f_i, Kraft oder Moment.

Und noch eine Anmerkung: Auch die Einflussfunktionen für Schnittgrößen werden durch Knotenkräfte um den Aufpunkt herum erzeugt und daher gilt das Bild 3.120 sinngemäß auch dann. Dazu kommt aber noch, dass diese Einflussfunktionen keine einfachen Dellen mehr sind, sondern dass ihr Kennzeichen ein (integraler) Knick oder Versatz im Aufpunkt ist, siehe Seite 181, und das macht ihre numerische Approximation doch deutlich schwieriger.

Will man sich nicht im ‚klein-klein' verlieren, sondern wissen wieviel eine Außenwand als Ganzes trägt, dann kann man wie in Bild 3.122, die Knoten der Wand um Eins senken und zuschauen, wie die Wand ihre Fühler bis zur anderen Seite ausstreckt. Das ist eine Einflussfunktion ohne Haken und Ösen und deswegen sollte auf die FE-Resultierende R in der Wand Verlass sein.

3.65 Punktstützen

Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt von dem Wandende in Bild 3.120 c zu der Stütze in Bild 3.121, die als starres Punktlager gedacht wird. Der LF 1 ist die Absenkung der Stütze um einen Meter und im LF 2 werden die Festhaltekräfte in umgekehrter Richtung aufgebracht, siehe Bild 3.121. Die Biegefläche ($= \varphi_i^{\text{Stütze}}$) aus LF 1 und aus LF 2 ist die Einflussfunktion für die Punktstütze in der Mitte der quadratischen, gelenkig gelagerten Platte.

3.66 Der Eckenwinkel

Der Eckenwinkel – auch wenn es keine Ecke ist – ist der Winkel, den der Rand im Knoten hat, also 180° in einem glatten Punkt und 90° in einer rechtwinkligen Ecke etc. Er bestimmt die Form der Einflussfunktion für die Knotenkraft in der Grenze $h \to 0$. In der Grenze gehen die f_i zwar gegen ∞, aber in einspringenden Ecken und auch am glatten Rand sind diese unendlich großen Knotenkräfte f_i unschädlich.

An dem Balken in Bild 3.123 *a* kann man das nachverfolgen. Dort wird die Einflussfunktion für die Querkraft im Anschnitt zum linken Lager berechnet. Wenn der erste Innenknoten gegen das feste Lager rückt, $l_e \to 0$, dann werden zwar die Knotenkräfte $f_i = O(1/l_e^3)$ immer größer, aber weil die $k_{ij} = O(1/l_e^3)$ mithalten, bleibt die Durchbiegung endlich und hat am Ende genau den angestrebten Wert 1.

In einem 2-D Modell ist es dagegen die Fläche, die trägt und für eine Fläche sind die f_i in der Grenze, $h \to 0$, zu ‚scharf', wenn der Eckenwinkel mehr als 180° beträgt, wenn also die f_i ‚von hinten um die Ecke kommen'.

Das betrifft z. Bsp. die Knotenkraft vorne am Wandende oder in der Ecke in Bild 3.120 *c* und *d*. Unter Gleichlast p werden die Knotenkräfte unendlich groß sein. Das geht nur so, dass die Delle, die die inversen Festhaltekräfte (EF G), in den vorgelagerten Knoten in der Grenze $h \to 0$ erzeugen ein unendlich großes Volumen hat, $(G, p) = p \cdot (G, 1) = \infty$.

Finite Elemente befreien also nicht von den Klippen der Kontinuumsmechanik, auch wenn nichts einfacher scheint, als eine Platte in kleine Elemente zu unterteilen und damit ‚*all den Ärger mit Differentialgleichungen auf ewig los zu sein*'.

3.67 Querkräfte bei Platten

Am Rand einer Platte ist die Querkraft-Tragfähigkeit nachzuweisen. Wie man in Bild 3.115 sieht, wirkt aber im Bemessungsschnitt **nicht die volle Querkraft**, sondern nur der Anteil aus der Belastung ‚im Feld', denn die Belastung unmittelbar am Lagerrand wird ja zum großen Teil dem Lager direkt zugeschlagen, fließt also gar nicht durch den Bemessungsschnitt[35]. Ein Grund mehr bei einer FE-Berechnung einer Platte die Elemente nicht zu groß zu machen. Bei Stützen führt man in der Regel einen Durchstanznachweis mit der vollen Stützenkraft und dort gibt es das Problem nicht.

Bemerkung 3.15. Will man genau wissen, was durch den Schnitt fließt, muss man die FE-Einflussfunktion für die Querkraft in dem Schnitt mit der exakten Einflussfunktion vergleichen.

Das wird aber so sein wie bei einem Balken, wo die FE-Einflussfunktion für die Querkraft im Schnitt neben dem Lager nicht springt, sondern in einem

[35] Wie groß der Effekt bei schubweichen Platten ist, müsste man untersuchen.

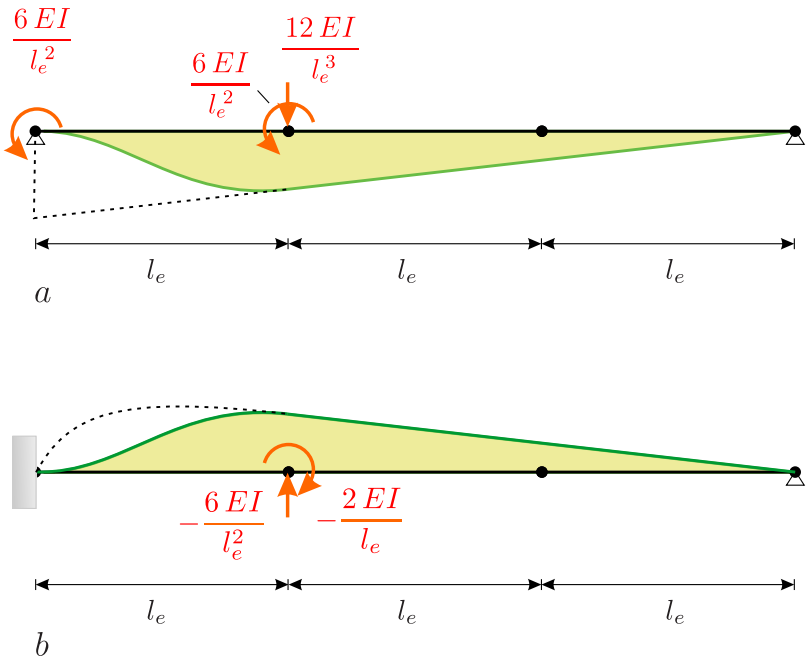


Bild 3.123. a) FE-Einflussfunktion für V im Anschnitt zum Lager. Die Kräfte und Momente j_i, die die Einflussfunktion erzeugen, sind numerisch die Querkräfte der *shape functions* im ersten Element; diese sind konstant. Wegen $k_{ij} = O(1/l_e^3)$ und $f_i = O(1/l_e^3)$ ist die Einflussfunktion endlich, auch in der Grenze $l_e \to 0$, **b)** FE-Einflussfunktion für das Moment im Anschnitt (BE-FRAMES)

Bogen auf null läuft, siehe Bild 3.123. Der **Zwickel** (überlagert mit der Belastung) ist der Anteil, den das FE-Programm ignoriert, der nicht durch den Schnitt fließt. Je kürzer man das erste Element macht, umso kleiner wird der Zwickel. Für das Einspannmoment, siehe Bild 3.123 *b*, gilt sinngemäß dasselbe. Und ebenso für die Randspannungen in einer Scheibe.

An nachgiebigen **Zwischenwänden** (federnde Lager) einer Platte zeigt sich dasselbe Muster, wie das Bild 3.124 sinngemäß demonstriert. All das bezieht sich auf schubstarre Platten (Kirchhoff, $K\Delta\Delta w = p$), vielleicht ist der Effekt bei schubweichen Platten etwas kleiner.

Bei Stabtragwerken (EA, EI konstant) tritt der Fehler nicht auf, weil dort zur FE-Lösung stabweise die lokale Lösung addiert wird, sie hat sozusagen den fehlenden Zwickel-Anteil mit im Gepäck.

Bemerkung 3.16. Wir haben oben stillschweigend angenommen, dass man die **Schubtragfähigkeit** mit den Querkräften nachweist, aber eigentlich müsste man mit dem **Kirchhoffschub** $v_n = q_n + d/ds\, m_{nt}$ rechnen, denn das ist die Gleichgewichtskraft bei einer **schubstarren** Platte. Sie ist die Kraft, die konjugiert zu w ist, (und damit zu dem *lift* $w = 1$, der Bewegung, die das Gleich-

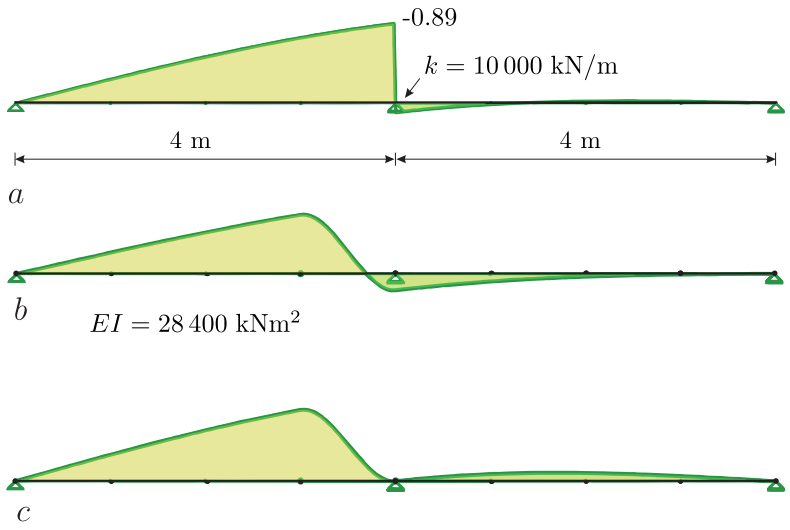


Bild 3.124. **a)** Einflussfunktion für die Querkraft links vom mittleren, federnden Lager, **b)** FE-Näherung, 4 Elemente/Feld, **c)** Näherung, wenn Lager starr ist (BE-FRAMES)

gewicht kontrolliert) wie man an der zweiten Greenschen Identität (7.67) ablesen kann[36]. Dass man es in der Praxis anders macht, kann man vielleicht damit rechtfertigen, dass die Torsionsmomente m_{nt} ja in die Hauptmomente einfließen, die dann die einzulegende Biegebewehrung bestimmen.

Bei **schubweichen** Platten ist die Querkraft $\boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n} = q_x n_x + q_y n_y$ senkrecht zum Schnitt wirklich die ganze Gleichgewichtskraft, siehe (7.82), denn bei einer Starrkörperbewegung hält q_n das Gleichgewicht

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi}, w; \mathbf{0}, 1) = \int_\Omega p \cdot 1 d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n} \cdot 1 \, ds = 0 \,, \tag{3.365}$$

während das bei schubstarren Platten der Kirchhoffschub $v_n = d/ds\, m_{nt} + q_n$ ist.

3.68 Durchstanznachweis

In den Ecken einer Platte und an den Enden von Wänden ist ein Durchstanznachweis zu führen. Das gilt natürlich auch für die Stützen, aber bei denen ist die Durchstanzkraft ja mit der Stützenkraft identisch.

In den Ecken ist das anders. Dort muss erst aus den Schnittkräften bzw. den Lagerkräften eine Durchstanzkraft ermittelt werden, mit der man dann den Nachweis führen kann. SOFiSTiK und RFEM führen dazu am Wanden-

[36] Bei der Th. II. Ordnung formuliert man ja auch das Gleichgewicht mit der Transversalkraft $T = V - P \cdot w'$ und nicht nur mit V.

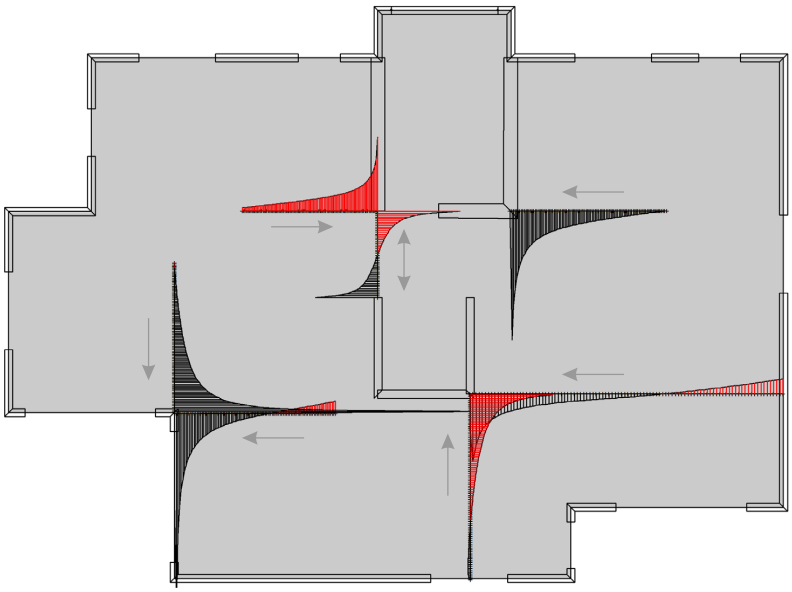


Bild 3.125. Verlauf der Schnittkräfte q_x und q_y in einer Platte vor den Wandenden (BE-PLATTE)

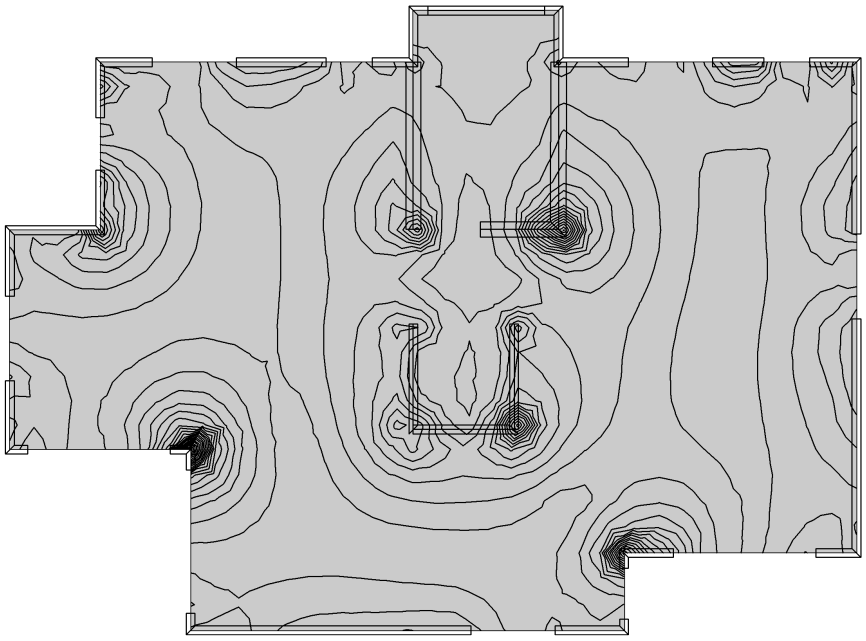


Bild 3.126. Die Niveaulinien von $\sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ (BE-PLATTE)

de einen **kreisförmigen Schnitt** und berechnen aus den Querkräften eine resultierende Durchstanzkraft, [254]. Das Programm BE-PLATTE integriert dagegen die Lagerkraft der Wand über eine gewisse Strecke des Wandendes und nimmt diese Summe als die Durchstanzkraft.

Was besser ist, wollen wir hier nicht entscheiden, sondern nur die Argumente zusammentragen.

Beginnen wir mit den finiten Elementen. Technisch dürften die beiden Programme wie folgt vorgehen: Sie berechnen die Querkraft q_n (N/m)

$$q_n = q_x n_x + q_y n_y \qquad \boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T \tag{3.366}$$

in den Mittelpunkten der Elemente, senkrecht zum Schnitt $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$, (die Querkräfte sind elementweise konstant) und multiplizieren diesen Wert mit der jeweiligen Schnittlänge und erhalten so in der Summe über alle geschnittenen Elemente die Durchstanzkraft.

Eine gewisse ‚Willkür' steckt hier natürlich in der Größe der Elemente, denn sie bestimmt ja den Abstand von der Wand und damit die Größe der Querkräfte q_x und q_y im Mittelpunkt, wenn auch theoretisch das Integral über den Schnittrand davon unabhängig sein sollte: *Großer Kreis – kleine Querkräfte* und *kleiner Kreis – große Querkräfte*, vorausgesetzt, man macht die Rechnung mit den exakten Querkräften, siehe die Bilder 3.125 und 3.126. So aber wird die Größe der Elemente die Güte der Querkraftverteilung beeinflussen, und um die steht es generell nicht zum besten, wenn man sich einmal die Querkräfte in der Nähe einer Ecke anschaut, siehe Bild 2.55. Die Approximation von singulären Größen mit stückweise konstanten Ansätzen hat nur den einen Vorteil, dass höhere Ansätze noch ‚wackligere' Ergebnisse liefern. Es gibt natürlich Stellen, wo man Vertrauen zu den Ergebnissen hat, aber dann gibt es auch wieder Ecken, wo die Querkräfte deutlich gestört sind. Geht man über die Lagerkraft, wie die Randelemente, dann hat man es im Prinzip einfacher, weil das letzte Stück der Lagerkraft ja genau das Integral der Querkräfte vor der Wand ist, siehe Bild 3.127. Die Frage ist nur, wie lange man das letzte Stück macht, über welche Länge (x mal Wandstärke) man summiert. Bei 17 cm Wandstärke und mit $x = 3$ ergab sich ein Wert von 59 kN bzw. 78 kN.

Macht man es wie die finiten Elementen und summiert über die Querkräfte in der Platte am Kopf der Wand, siehe Bild 3.127 *b*, dann ergibt sich bei einem seitlichen Abstand von 10 cm von den Wänden und einer Länge von 60 cm (parallel zu der jeweiligen langen Seite) ein Wert von 56 kN statt 59 kN bzw. 75 kN statt 78 kN.

Das ist (ungewollt) ein gutes Ergebnis, aber es gibt natürlich andere Beispiele wo die Differenzen größer sind, einfach weil man an zu vielen Parametern drehen kann.

Verglichen wurde der Kirchhoffschub $v_n = q_n + d/ds\, m_{nt}$, der bei einer schubstarren Platte (Kirchhoff) die eigentliche Gleichgewichtskraft ist

$$\text{(schubstarr)} \qquad v_n = q_n \qquad \text{(schubweich)} \tag{3.367}$$

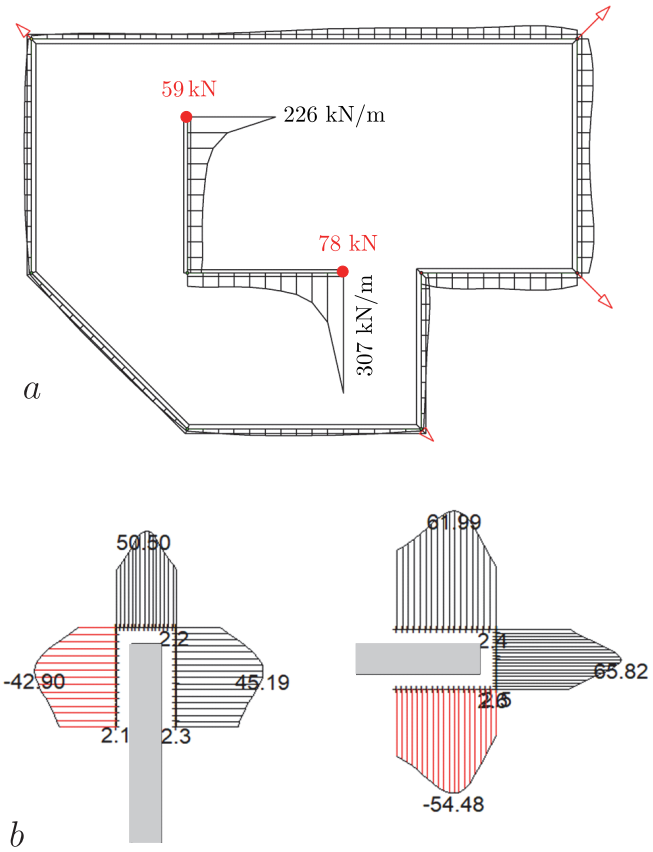


Bild 3.127. a) Lagerkräfte und Durchstanzkräfte in den Endpunkten zweier Wände, **b)** Querkräfte in der Platte nahe den Wandenden (BE-PLATTE)

die dem $q_n = q_x n_x + q_y n_y$ bei der schubweichen Platte (Reissner-Mindlin) entspricht[37]. Das $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$ ist die Schnittnormale; bei achsenparallelen Schnitten ist natürlich $q_n = q_x$ bzw. $= q_y$.

Zu den Querkräften in Bild 3.127 *b* wurde also rechnerisch noch die Ableitung $d\,m_{nt}/ds$ des Torsionsmoments in Schnittrichtung addiert. Man beachte, wie glatt die Querkräfte in den Schnitten sind, trotz der Singularität an den Wandenden.

Der Vorteil der Randelemente ist, dass die Lagerkräfte [N/m] der Wände direkt in den Grundgleichungen vorkommen, siehe Bild 3.130, während die finiten Elemente ja erst aus den Wandverformungen die Lagerkräfte berechnen und zu einer Durchstanzkraft aufintegrieren müssten.

Dieser Ansatz, der aber von den FE-Programmen (wohl aus Erfahrung) bewusst nicht verfolgt wird, hätte den Vorteil, dass sich Lagerkräfte mit FE-

[37] Die FE-Programme rechnen in der Regel schubweich.

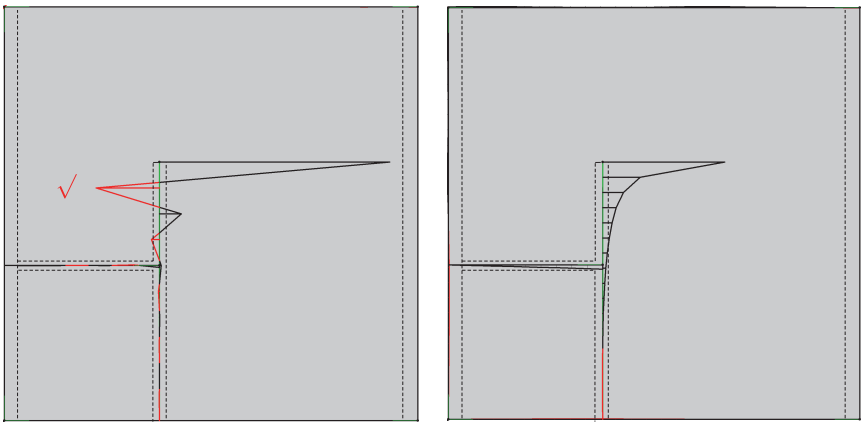


Bild 3.128. Lagerkräfte einer Wohnhausdecke 8×8 m im LF $g = 9$ kN/m^2, rechts ist ein freier Rand, **a)** Lagerung auf starren Wänden, **b)** Lagerung auf Mauerwerk

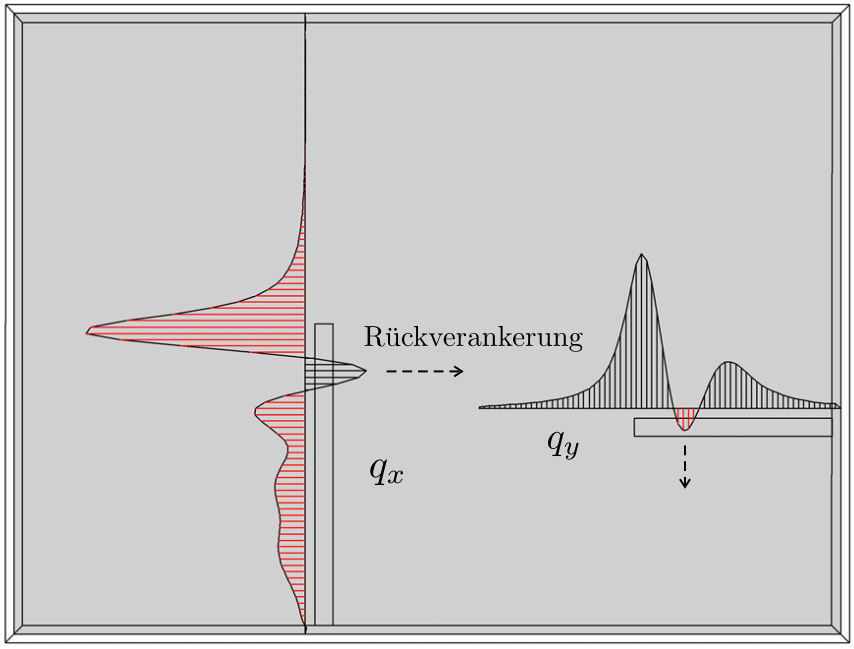


Bild 3.129. Stahlbetondecke, die Querkräfte seitlich vor den Wänden weisen im LF g deutliche Dellen auf, weil 50 cm hinter dem Wandkopf Zugkräfte in der Stahlbetonwand die Platte daran hindern, abzuheben, was das Vorzeichen von q_x bzw. q_y umdreht; die Verläufe wurden nur auf je einer Seite angetragen (BE-PLATTE)

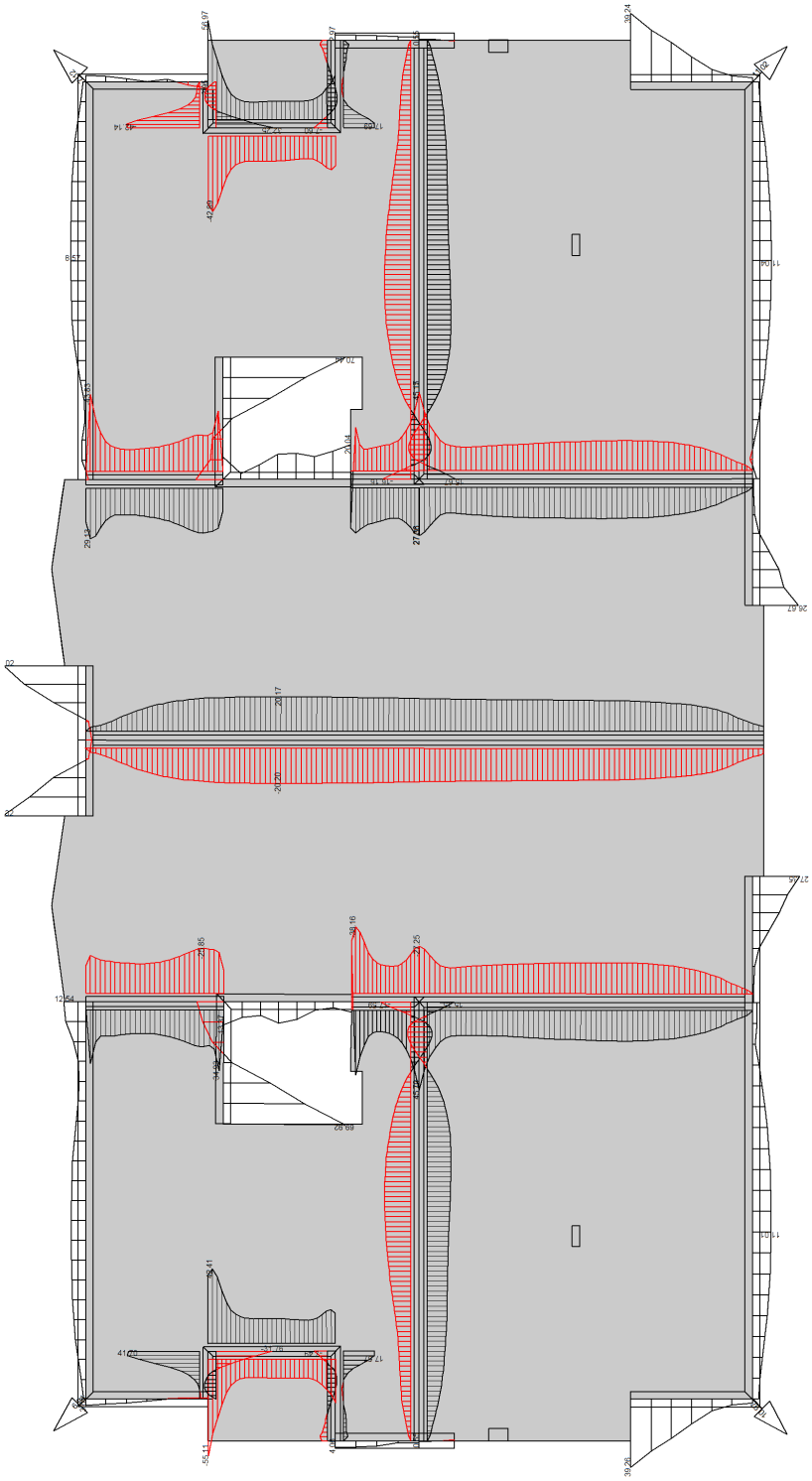


Bild 3.130. Typische Querkraftverläufe in der Nähe der Innenwände und am Rand einer Hochbaudecke (BE-PLATTE)

Programmen relativ genau berechnen lassen. Die Einflussfunktion für die Knotenkraft an der vorderen Kante ist ja einfach eine Delle der Platte an dieser Stelle und solche Einflussfunktionen ähneln Einflussfunktionen für Durchbiegungen, sie sind gleich ‚harmlos'.

Auch das typische **Oszillieren der Lagerkräfte am Wandende**, siehe Bild 3.128 aus [125] und Bild 3.129, kann man so erklären. Es ist kein Fehler, sondern es beruht darauf, dass der letzte Knoten vor dem Wandende die Platte vor der Wand nach oben zieht, wenn er sich um einen Meter (EF für die Knotenkraft) senkt. Ausgeprägt zeigt sich das, wenn man die Platte ‚knirsch' rechnet, während mit weicher Lagerung die Effekte sich verflüchtigen.

Bemerkung 3.17. Die Randelemente sind das analytischere Verfahren gegenüber den finiten Elementen und deswegen erhält man mit Randelementen in der Regel glattere, schönere Verläufe, sehen die Ergebnisse (unter günstigen Umständen) wie **Laborergebnisse** aus – das als Anmerkung zu den obigen Bildern, wie auch zu vielen anderen Bildern in diesem Buch.

3.69 Genauigkeit der Lagerkräfte

Die Einflussfunktionen für Stützen sind einfache Senken in der Platte, die durch eine **Spreizung** der Größe Eins zwischen Stützenkopf und Platte ausgelöst werden. Sie ähneln vom Typ her den Einflussfunktionen für Durchbiegungen und sie sind daher auch schon auf relativ groben Netzen gut anzunähern. Das ist der Grund, warum man bei einer FE-Berechnung keine großen Zweifel an der Höhe der ausgewiesenen Stützenkräfte haben muss, siehe Bild 3.131. Das gilt sinngemäß auch für Wände, siehe Bild 3.132 und auch für Unterzüge, obwohl da in der Praxis zum Teil heftig diskutiert wird, was die Modellierung von Unterzügen angeht, siehe Bild 3.133.

3.70 Punktlasten und Punktlager bei Scheiben

Punktlasten erzeugen in einer Scheibe unendlich große Spannungen und daher kann eine Scheibe auch nicht auf Punktlager gesetzt werden, weil das Material einfach zu fließen anfangen würde. Andererseits erhält man aber mit finiten Elementen doch sinnvolle Ergebnisse in Punktlagern, siehe Bild 3.134. Wie geht das?

Es geht, weil auch die finiten Elemente einen gebührenden Abstand von echten Punktkräften einhalten. Im Ausdruck stehen zwar äquivalente Knotenkräfte f_i, aber sie sind ja nur **Stellvertreter** für die wahren Stützkräfte, die als Flächen- und Linienkräfte in der Umgebung des Knotens die Scheibe halten.

Auf der Lastseite gilt dasselbe. Wenn der Anwender eine Einzelkraft $\boldsymbol{P}$ in einen Knoten $\boldsymbol{x}_k$ stellt, dann behilft sich ein FE-Programm damit im LF p_h eine Schar von äquivalenten Flächen- und Linienkräften in die Nähe des

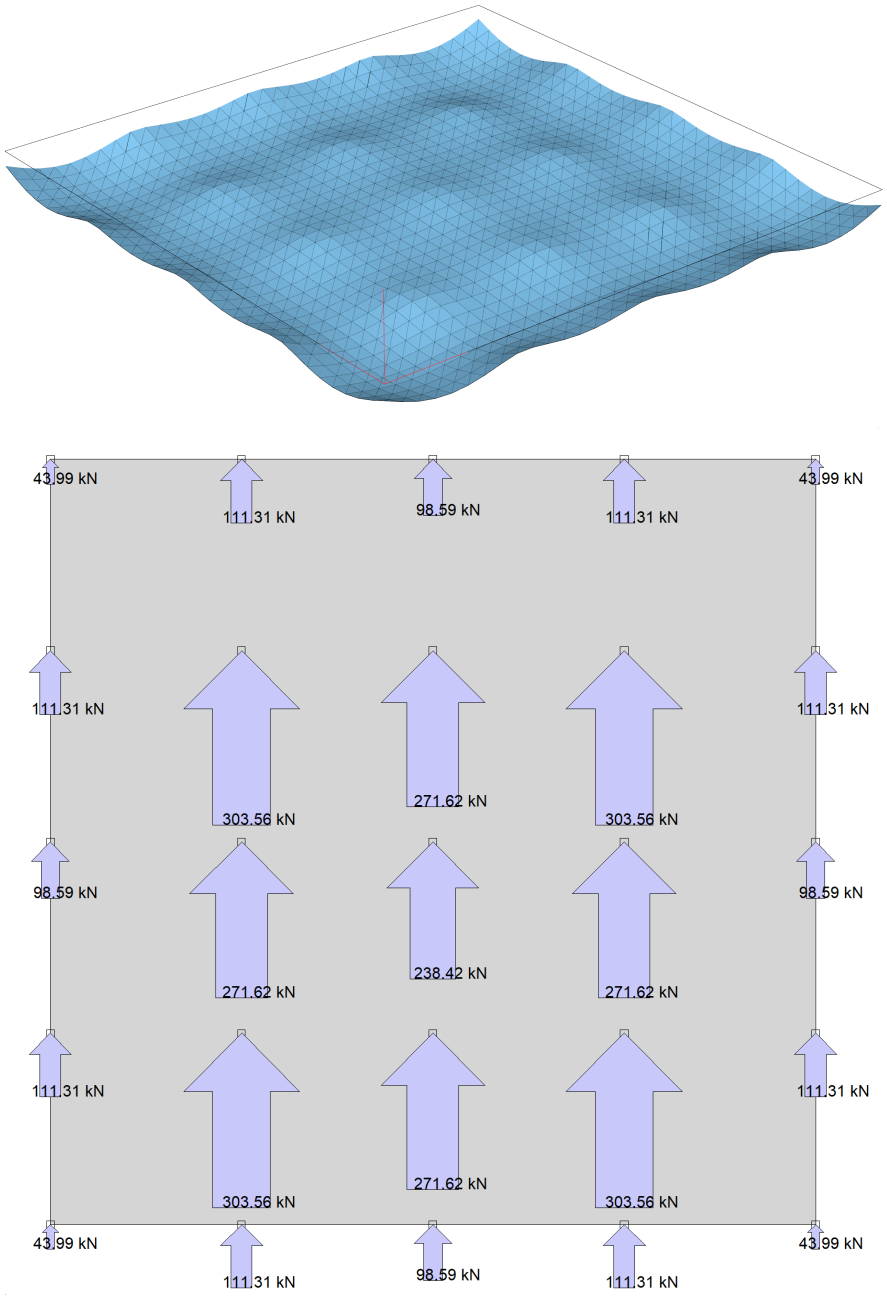
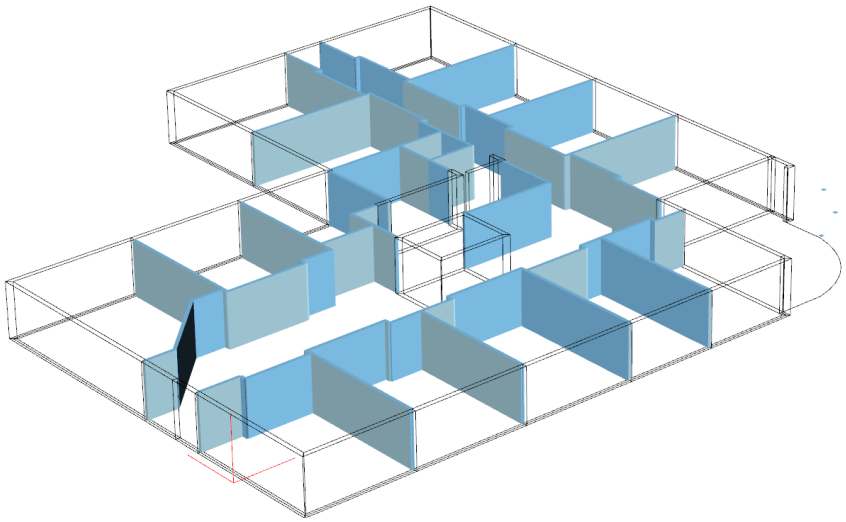
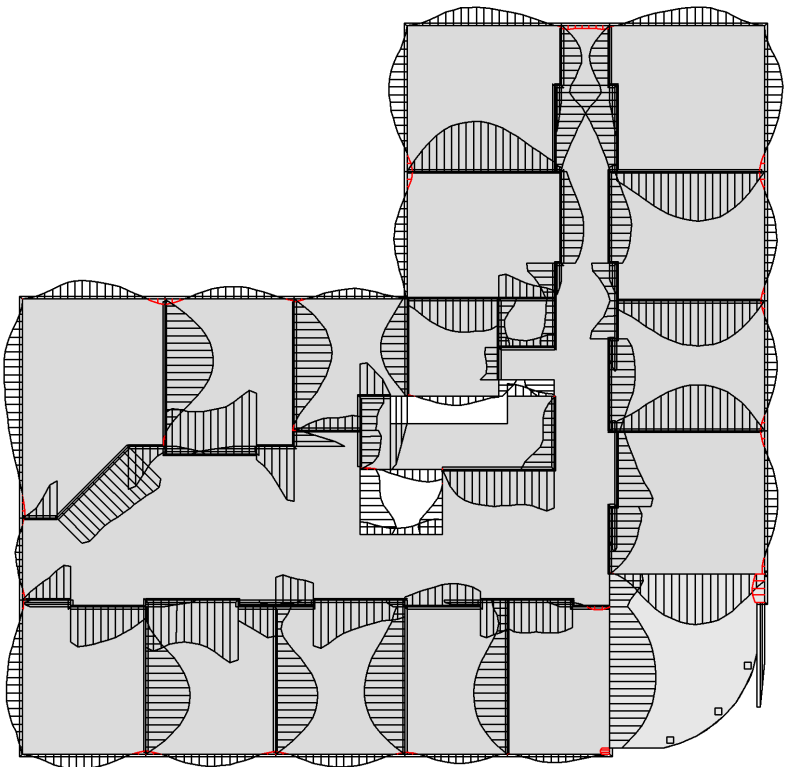


Bild 3.131. Punktgestützte Platte, LF g, **a)** Biegefläche, **b)** Lagerkräfte. Es ist erstaunlich, dass eine komplexe numerische Lösung, die auf vielen Zwischenschritten basiert, am Ende die Symmetrie in den Ergebnissen genau einhält, die Waage perfekt ausbalanciert ist (BE-PLATTE)

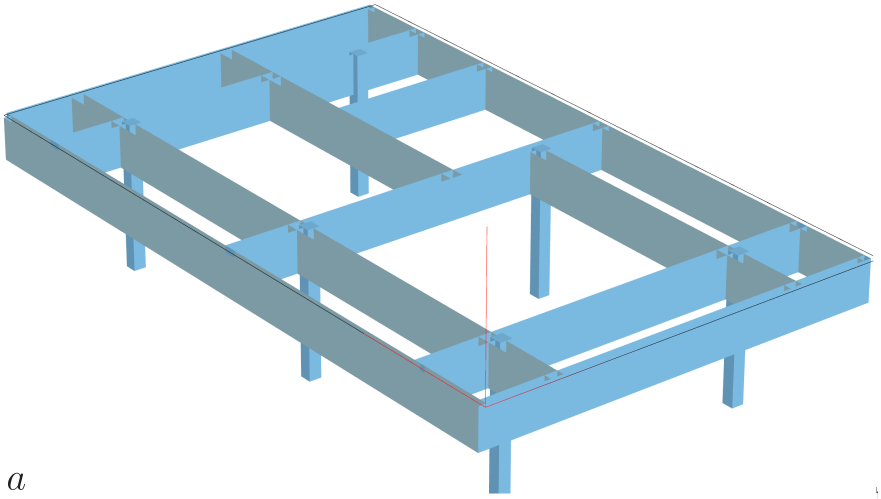


a

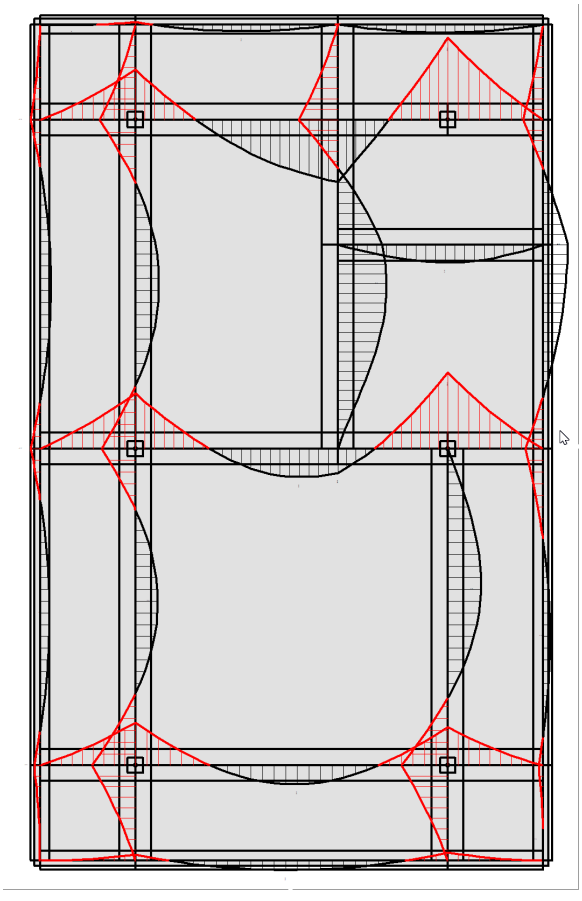


b

Bild 3.132. Wände unter einer Hochbaudecke, auch diese Lagerkräfte kann ein FE-Programm relativ genau ermitteln (BE-PLATTE)



a



b

Bild 3.133. Hochbauplatte auf Unterzug-Gitter, **a)** Unterkonstruktion, **b)** Momente in den Unterzügen im LF g (BE-PLATTE)

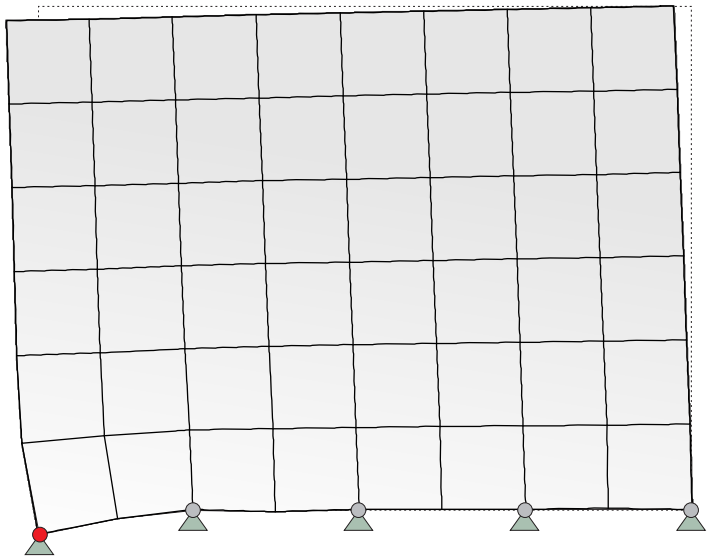


Bild 3.134. Einflussfunktion für die FE-Lagerkraft in dem Punktlager einer Scheibe (WINFEM)

Knotens zu plazieren, die die horiz. + vert. Knotenkraft $f_i = P_x$ bzw. P_y wackeläquivalent annähern, $f_i = \boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{p}_h)$.

Dies ist die Stelle, wo man sieht, wie die finiten Elemente ihr Eigenleben entwickeln. Formal sind sie nur ein numerisches Werkzeug, aber der Ingenieur findet gar nichts dabei, die Knotenkräfte für real zu nehmen und so kommt er mit Hilfe der finiten Elemente sehr elegant über die Stolpersteine hinweg, die ihm die Elastizitätstheorie in den Weg legt.

So ist das statische Problem der Wandscheibe in Bild 3.23, die sich auf zwei Punktlager stützt, vom Standpunkt der Mathematik aus ein **schlecht gestelltes Problem**, weil die Spannungen und Verformungen der Scheibe in den Lagerpunkten gemäß der Elastizitätstheorie unendlich groß werden und echte Punktlager die Scheibe auch nicht festhalten könnten.

Mit finiten Elementen ist man jedoch noch ein gutes Stück von dieser Grenze entfernt. Zudem ist die Scheibe statisch bestimmt gelagert und so ist es nur natürlich, die f_i wie echte Kräfte zu behandeln.

Viele Ingenieure lesen das FE-Modell einer Scheibe ja wie ein **Puzzle** aus kleinen Elementen, wo das Gleichgewicht in den Knoten, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}$ bestimmt, siehe Bild 3.135. Das ist natürlich eine Interpretation **‚als ob'**, weil auf beiden Seiten von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ Arbeiten stehen; echte Kräfte würden das Material ja auch zum Fließen bringen.

Das (scheinbar) merkwürdige ist, dass man für diese ‚fiktiven' äquivalenten Knotenkräfte f_i Einflussfunktionen aufstellen kann. Einfach so, wie man das auch bei einem Fachwerk machen würde: Man verschiebt den Lagerknoten

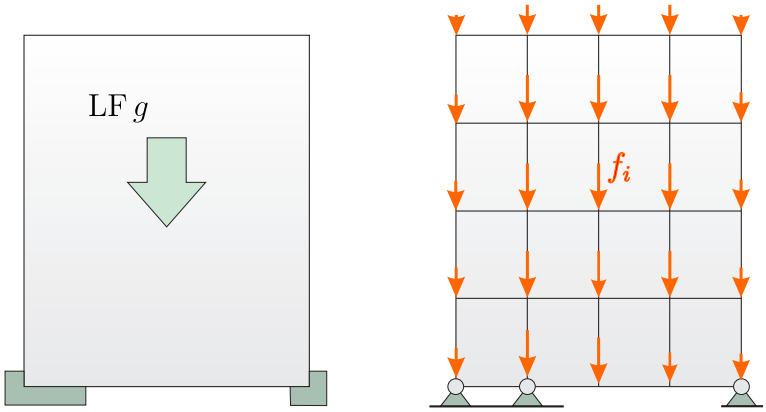


Bild 3.135. Original und FE-Netz mit äquivalenten Knotenkräften

um einen Meter und bilanziert so die Arbeiten, die von der Belastung und der Lagerkraft bei einer Verrückung des Lagers geleistet werden.

3.71 Ein mögliches Missverständnis

Der Fehler einer FE-Lösung, nehmen wir die Durchbiegung einer Membran, beruht auf der Differenz $p - p_h$

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, (p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y})) \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,, \tag{3.368}$$

was für eine Punktlast P (am Ort $\boldsymbol{y}$) bedeutet, dass scheinbar

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, (P - P_h) \qquad ? \tag{3.369}$$

wenn wir $P_h = f_i = P$ mit der äquivalenten Knotenkraft identifizieren. Demnach müsste der Fehler der FE-Lösung null sein

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, (P - P) = 0 \,. \tag{3.370}$$

Aber die rechte Seite der FE-Lösung u_h ist nicht die Knotenkraft $f_i = P$, sondern ein **Flickenteppich** $p_h = -\Delta u_h$ von Flächen- und Linienkräften, von ‚Streulasten', die die Punktlast äquivalent annähern, ähnlich wie in Bild 3.23 *b*. Die obige Gleichung lautet also richtig

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \cdot P - \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, p_h(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,, \tag{3.371}$$

und dieser Ausdruck ist nur null, wenn u in $\mathcal{V}_h$ liegt, was in der Regel nicht der Fall ist, weil die stückweisen Polynome φ_i die Spannungsspitze $1/r$ unter der Einzelkraft nicht nachbilden können.

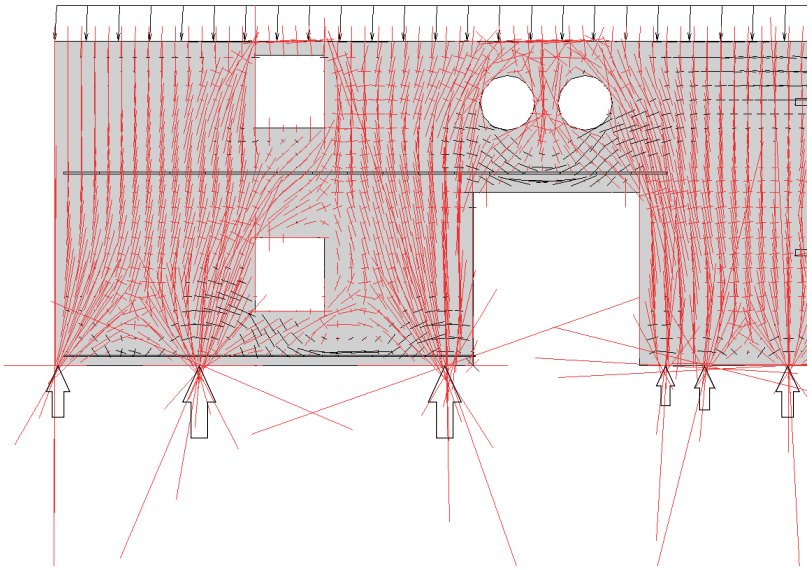


Bild 3.136. Wandscheibe auf Punktlagern (Ausschnitt) (BE-SCHEIBE)

3.72 Punktlager sind hot spots

Wenn man einen Knoten festhält, dann wird die Scheibe dort praktisch ‚geerdet'. Das ist so, als ob man mit der einen Hand eine **Hochspannungsleitung** berührt und mit der anderen die Erde. Der steile Anstieg der Verschiebungen vom festen Lager zu den freien Knoten produziert große Spannungen in den Elementen, die mit dem festen Knoten verbunden sind, siehe Bild 3.136. Die braucht es auch, denn integriert man die Spannungen in einem Kreisschnitt um das Lager, dann muss dabei gerade die Lagerkraft herauskommen, siehe Kapitel 6.3. Je kleiner der Radius des Schnitts desto größer müssen aber die Spannungen sein, um das Schrumpfen des Umfangs zu kompensieren.

Angenommen in dem Punktlager wirkt eine vertikale Kraft $f_i = 10$ kN. Wenn man also den Lagerknoten um einen Meter nach oben drückt (das ist rein rechnerisch), dann leistet die Knotenkraft dabei die Arbeit $\delta W_e = 10$ kNm, siehe Bild 3.137.

Die Bewegung des Lagerknotens teilt sich nur dem Element Ω_e mit, auf dem das Lager liegt, und so muss die virtuelle innere Energie δW_i in dem kleinen Element ‚riesengroß' sein, gleich δW_e

$$\delta W_e = 1\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{kN} = \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\Omega = \delta W_i = 10\,\mathrm{kNm}\,. \tag{3.372}$$

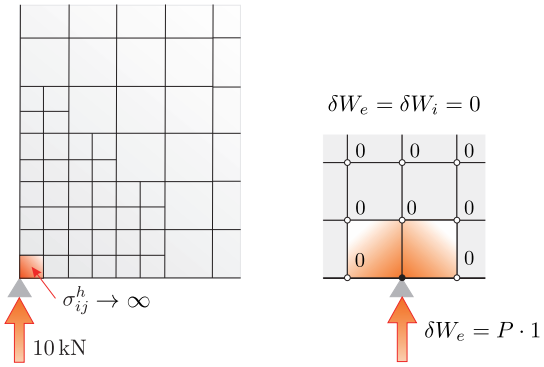


Bild 3.137. Durch das letzte Element vor dem Punktlager muss die ganze Lagerkraft fließen. In den unbelasteten Knoten, $f_i = 0$, ist $\delta W_i = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\delta E}) = 0$ und das dämpft σ_{ij}

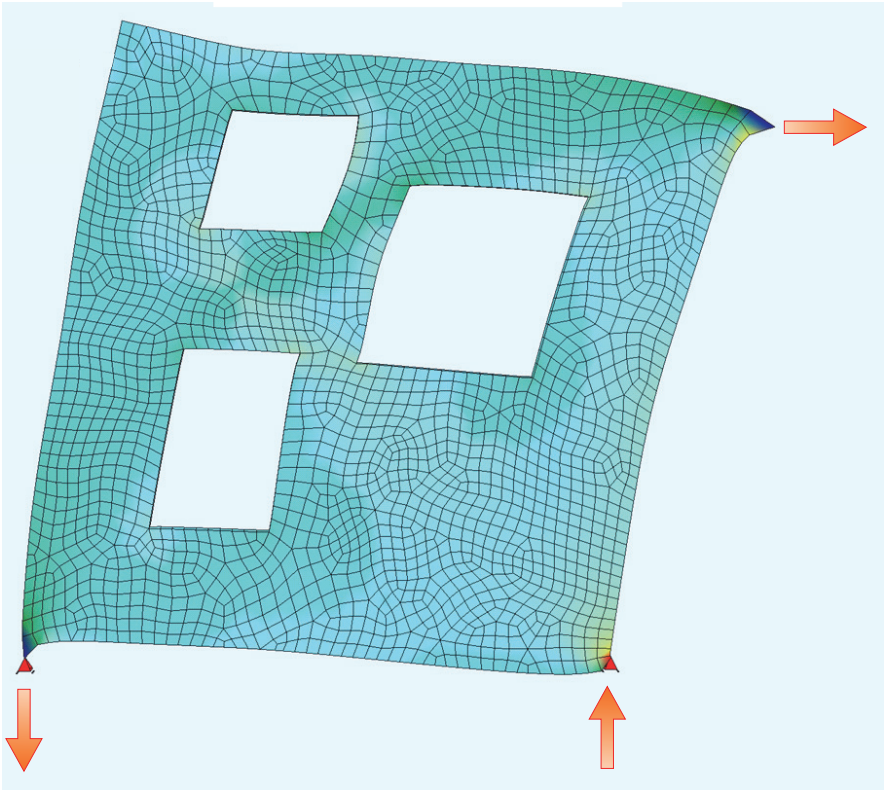


Bild 3.138. So sieht es der Ingenieur. Mathematisch kommt das $\sigma_{ij}^h \to \infty$ aus der großen Lagerkraft und der winzigen Größe des Elements, denn dieses allein muss die Arbeit bei der Bewegung des Lagerknotens ins Gleiche setzen (SOFiSTiK)

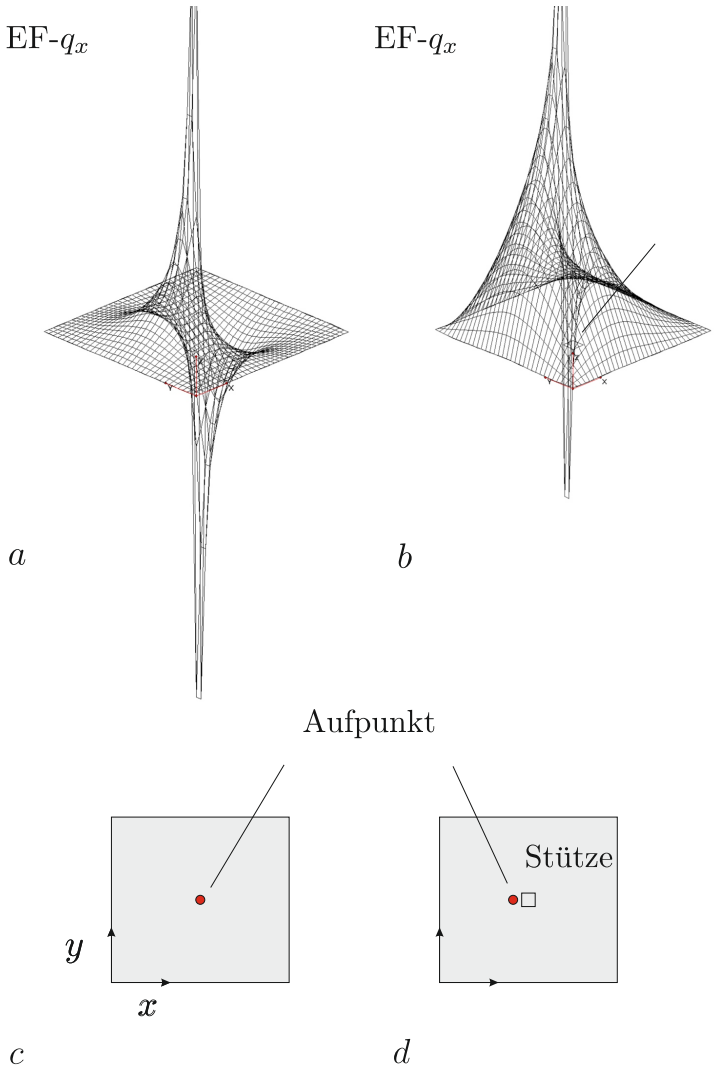


Bild 3.139. Einflussfunktion für die Querkraft q_x, **a)** die Scherbewegung kann sich frei ausbilden, **b)** die starre Stütze behindert die Scherbewegung, die weiter abliegenden Knotenkräfte haben die Oberhand und treiben so die Platte nach oben – auch in Bereichen, die vom Aufpunkt weiter weg entfernt liegen (BE-PLATTE)

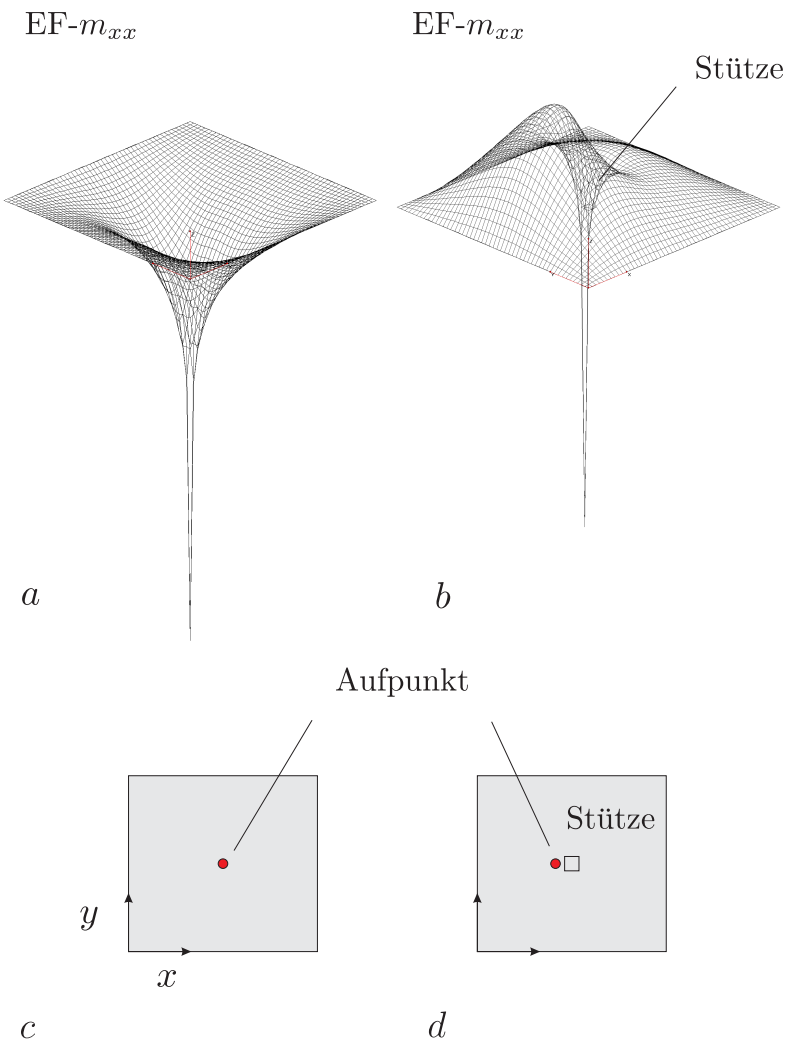


Bild 3.140. Dieselbe Platte wie in Bild 3.139; die Einflussfunktion für das Biegemoment m_{xx} (im selben Punkt) zeigt dasselbe Verhalten, aber links und rechts in **a)** und **b)** sind ausgewogener, weil die Einflussfunktion durch eine symmetrische Quelle (ein Quattropol) erzeugt wird (BE-PLATTE)

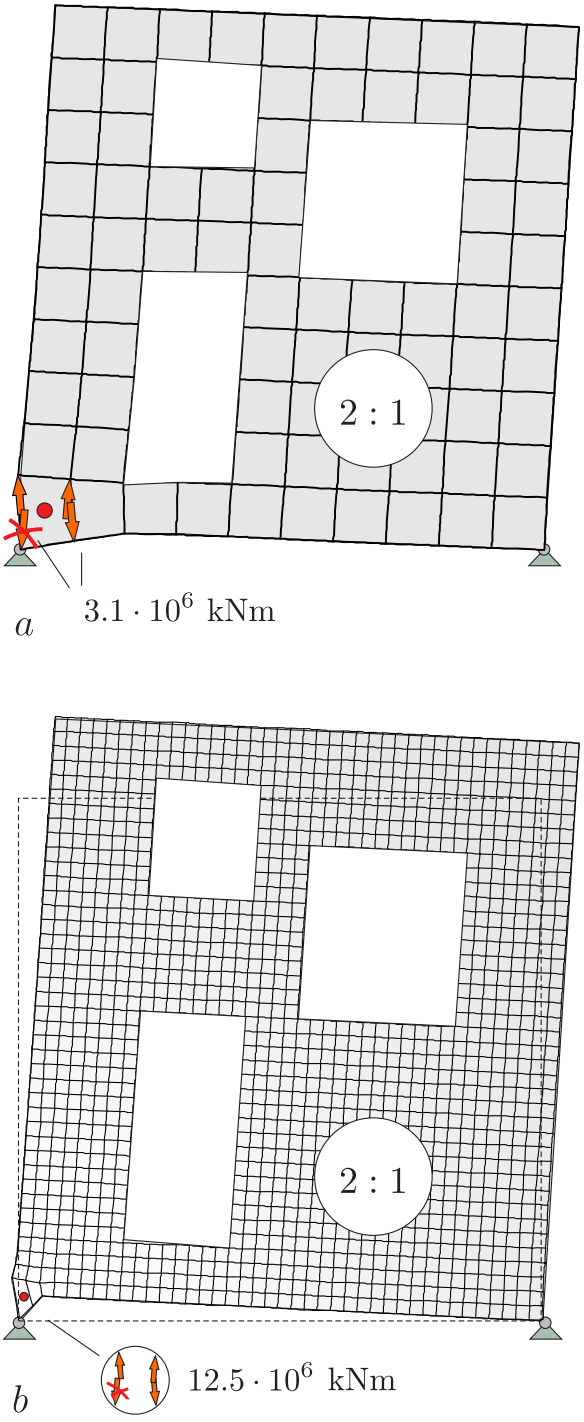
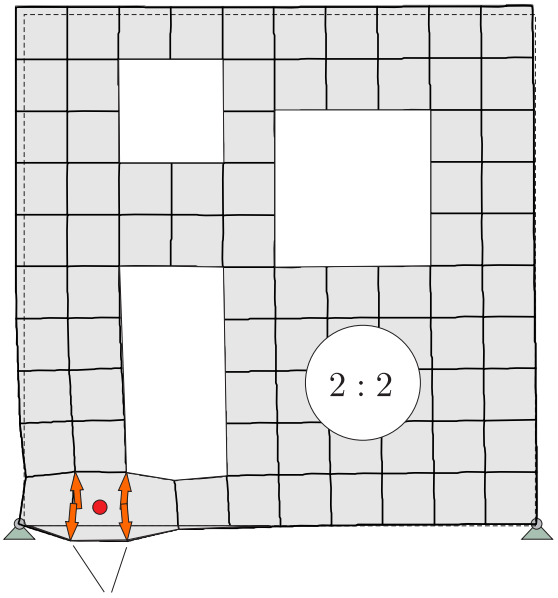
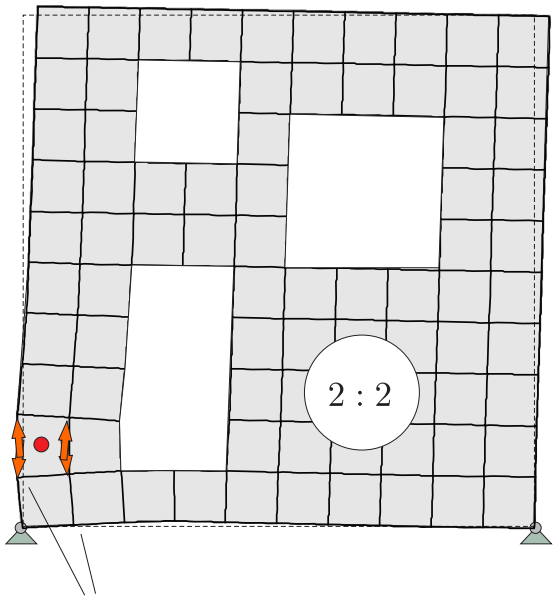


Bild 3.141. Generierung der Einflussfunktion für σ_{yy}, **a)** die Knotenkräfte, die die Spreizung (näherungsweise) erzeugen sind jeweils in allen vier Knoten gleich und hängen nur von der Maschenweite h ab, **b)** je kleiner die Elemente werden, um so größer werden die Knotenkräfte und damit die Verformung der Scheibe. Das Verhältnis zwischen den Kräften steht 2 : 1, weil das feste Lager eine Kraft neutralisiert (‚amputierter Dipol') (WINFEM)



$a \qquad 3.1 \cdot 10^6$ kNm



$b \qquad 3.1 \cdot 10^6$ kNm

Bild 3.142. Generierung der Einflussfunktionen für σ_{yy}, **a)** und **b)** bei der Spreizung der Nachbarelemente des Lagerelementes drücken zwei Kräfte nach oben und zwei Kräfte nach unten und so bleiben die Verschiebungen auch in der Grenze, $h \to 0$, endlich (‚echter Dipol') (WINFEM)

Die Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij} = O(1/|\Omega_e|)$ resultieren dabei aus der Lagerbewegung $\delta u_i = 1$ m. (Das $O(1/|\Omega_e|)$ in den $\delta\varepsilon_{ij}$ ist ‚unschädlich', weil es durch das $\Omega = O(|\Omega_e|)$ kompensiert wird).

Alle anderen Elemente spüren nichts davon, weil alle anderen Knoten bei dem Manöver festgehalten werden.

Dieses letzte vor dem Lager liegende Element muss also ganz allein die nötige Energie aufbringen, um die Lagerarbeit ins gleiche zu setzen!

In der Grenze $h \to 0$ muss das Integral des Punktwertes $\sigma_{yy}(\mathbf{0})$ über ‚null' Fläche die vertikale Lagerkraft sein.

Sagen wir es deutlich: **Einzelkräfte sind maximal unfair**. Sie leben nur in einem Punkt und so bürden sie die Wackeläquivalenz $\delta W_i(u_h, \varphi_i) = f_i$ ganz allein den unmittelbar benachbarten drei, vier Elementen auf – im Fall des Lagerknotens ist es sogar nur eins – und der knappe Platz fordert seinen Tribut. Jede einzelne *shape function* φ_i für sich darf testen, darf an dem Tragwerk wackeln, aber wenn dann in dem Knoten eine Einzelkraft steht, dann wird der Spaß richtig ‚teuer', Energie wird Plage, siehe Bild 3.138.

Ein zweites: In freien Knoten sind die f_{hi} an $f_{hi} = f_i$ gebunden, aber die Lagerknoten sind ungebunden, *any value* f_{hi} *is okay*, nur *in toto* müssen die resultierenden Lagerkräfte der Lastfälle p_h und p gleich sein, $\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{A}$, siehe Kap. 9.15. Oszillationen $\pm f_{hi}$ in den Lagerknoten sind eine **Schutzmaßnahme** gegen die steilen f_{hi} in den Ecken, sie schützen $\boldsymbol{A}_h$ vor Überlauf.

‚Dem Schlag f_i *in der Ecke folgen Konter* $\pm f_i$*'*. Ein $f_{hi} = \infty$ alleine kommt nicht vor.

3.73 Der amputierte Dipol

Um die Singularität in Punktlagern besser zu verstehen, betrachten wir die Einflussfunktion für die Querkraft q_x in einer Platte, siehe Bild 3.139, die ja durch eine **Scherbewegung** entsteht. Wenn der Aufpunkt frei im Innern liegt, dann halten sich die beiden Bewegungen die Balance und die Auslenkung der Platte bleibt, bis auf den Aufpunkt selbst, beschränkt. Rückt jedoch der Aufpunkt in die Nähe eines Punktlagers, dann wird diese Balance durch die Stütze gestört, und die Folge davon ist, dass bei Annäherung an die Stütze die Auslenkung der Platte über alle Grenzen wächst, siehe Bild 3.139 *b*.

Tendenziell bemerkt man den Effekt auch bei der über den Träger wandernden Einflussfunktion für die Querkraft in Bild 2.36. Je mehr der Aufpunkt sich dem Zwischenlager nähert, desto mehr wird die Einflussfunktion nach oben gedrückt, gerät die Balance zwischen links und rechts aus dem Lot und am Ende mündet die **Scherbewegung** in einem einseitigen Versatz, einem einseitigen *uplift*. Nur ist es so, dass bei der Platte die Spitze dieses *uplifts* unendlich weit über der Stütze liegt.

Diese Argumentation können wir nun direkt auf die Scheibe übertragen, denn die Einflussfunktion für die Spannungen σ_{ij} werden auch durch solche

Scherbewegungen erzeugt, siehe Bild 3.141. Numerisch sind es vier Kräfte, die dort die Einflussfunktion für σ_{yy} erzeugen.

Liegt der Aufpunkt in dem Element mit dem Lagerknoten, dann steht es **2:1** für die nach oben treibenden Kräfte, d.h. *zwei* Knotenkräfte drücken nach oben, aber nur *eine* Knotenkraft drückt nach unten, weil die Knotenkraft im Lager ausfällt. So gelingt es also den f_i die Oberkante der Scheibe in der Grenze in ‚den Himmel' zu verschieben. In den Nachbarelementen wirken hingegen, siehe Bild 3.142, alle ***vier = zwei + zwei*** Kräfte **gleichzeitig** und sie halten so die Balance mit der Konsequenz, dass die Auslenkung (= Spannung) endlich bleibt.

Um die Tendenz $\sigma_{ij} \to \infty$ auch statisch zu verstehen, denken wir uns der Einfachheit halber das Element als eine kleine Kreisscheibe mit einem Radius R. Die Elementverzerrungen aus der Eins-Verschiebung des Lagerknotens verhalten sich wie $\delta\varepsilon_{ij} = O(1/R)$.

Sinngemäß gilt daher

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\Omega \sim \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{ij}\, \frac{1}{R}\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}\, \frac{1}{2}\, R\, d\varphi\,, \tag{3.373}$$

und daher muss sich σ_{ij} wie $1/R$ verhalten, damit in der Grenze, $R \to 0$, die Knotenkraft f_i übrig bleibt

$$\lim_{R\to 0} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\Omega = f_i\,. \tag{3.374}$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass **Linienlager** im 3-D dasselbe Schicksal erleiden, wie **Punktlager** bei Scheiben, weil die Spannungen längs einem Linienlager (= unendlich feiner Draht) das Material zum Fließen bringen. Aus diesem Grund kann man theoretisch auch kein Linienlager um ein oder zwei Zentimeter senken. In der Praxis geht es natürlich schon, weil die finiten Elementen weit weg sind von solchen Fallstricken der Elastizitätstheorie.

3.74 Der Dipol am Rand

An einer Membran kann man den Effekt des **amputierten Dipols** sehr schön verfolgen. Die Einflussfunktion für die Querkraft $q_x = H\, w_{,x}$ ist, wie bei einer Scheibe, eine Spreizung des Aufpunktes, siehe Bild 3.143 weil σ_{xx} und $w_{,x}$ ja beides Ableitungen von erster Ordnung sind.

Liegt der Aufpunkt im Feld, siehe Bild 3.143 a, dann können sich die beiden Spitzen frei ausbilden und im Mittel, wenn man mit einer Gleichlast p darüber integriert, heben sich die krassen Spitzen + und − weg. Rückt der Aufpunkt jedoch in eine einspringende Ecke, siehe Bild 3.143 b, dann hat die Einflussfläche nur noch ein Vorzeichen und die Singularität schlägt voll durch, sprich das Volumen der Einflussfunktion vor der Ecke ist unendlich groß.

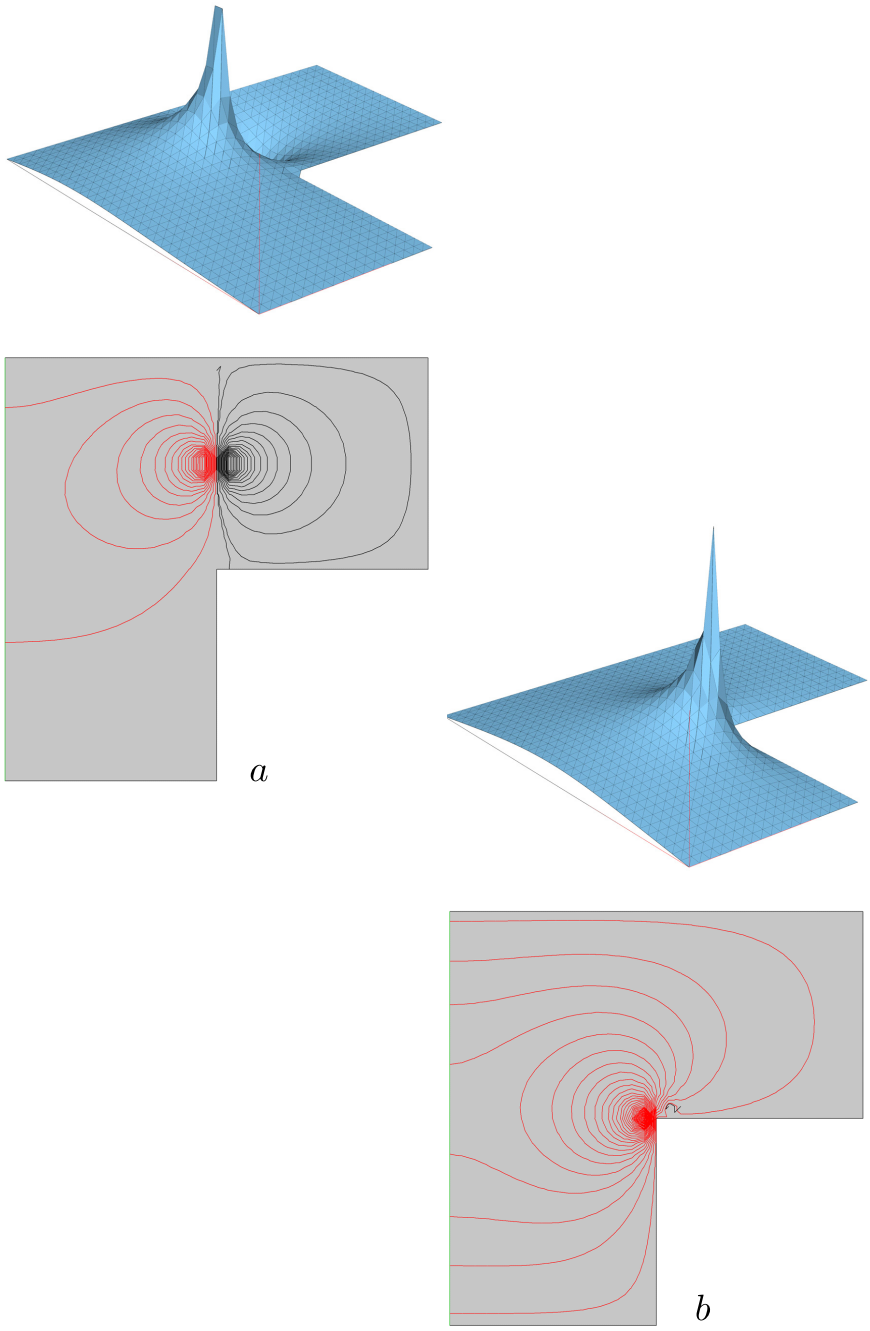


Bild 3.143. Einflussfunktion für die Querkraft $q_x = H\, w_{,x}$ in einer Membran (mit freiem Rand links); die EF gleicht einer Scherbewegung $\uparrow\downarrow$, **a)** Aufpunkt liegt im Innern, **b)** Aufpunkt liegt an der einspringenden Ecke und jetzt schlägt die Singularität durch, weil sich die andere Spitze nicht ausbilden kann (BE-LAPLACE)

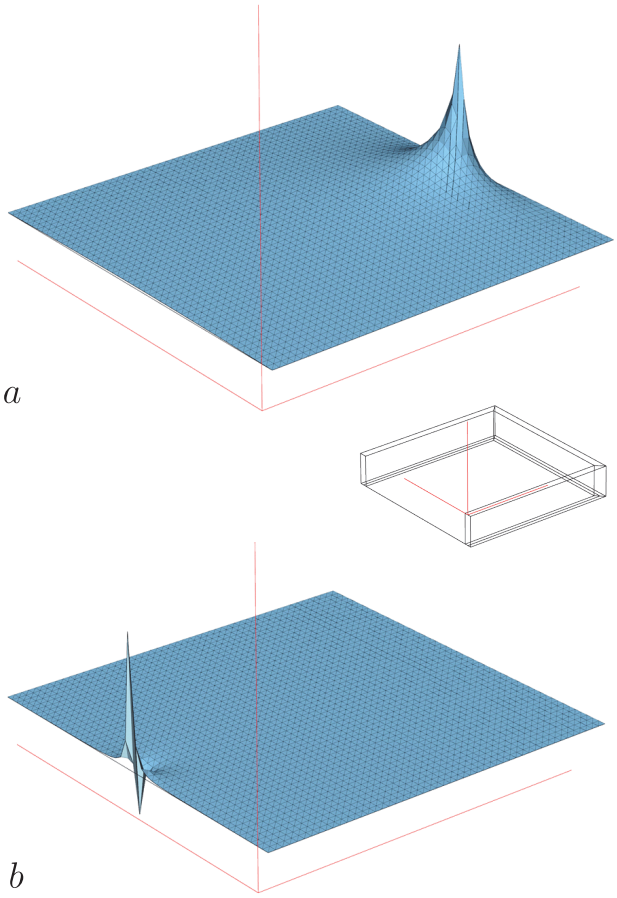


Bild 3.144. Membran, 5 m × 5 m, und Einflussfunktion $w_{,x}$ **a)** nahe dem festen Rand und **b)** nahe dem freien Rand, nahe = 5 cm vom Rand (BE-LAPLACE)

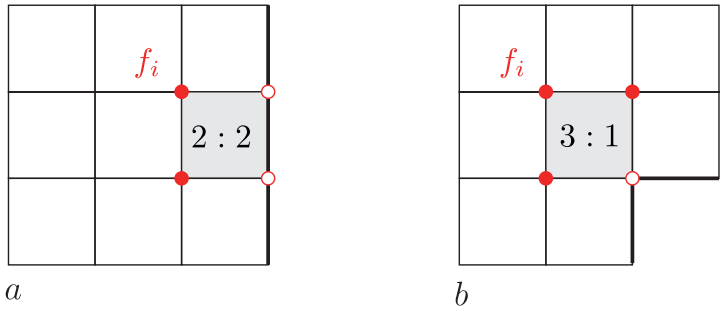


Bild 3.145. Das Element mit dem Aufpunkt und die Knotenkräfte $f_i = \mathrm{O}(1/h)$ der Einflussfunktion, **a)** am glatten Rand und **b)** in der Ecke, siehe auch Bild 9.48.

Ein Rätsel gibt es aber noch: Auch an glatten Rändern ist die Einflussfunktion für $w_{,x}$ (scheinbar) ein amputierter Dipol, aber bei der Überlagerung mit der Belastung p zeigt sich keine Singularität. Das $w_{,x}$ ist ja bis auf die Vorspannung H die Auflagerkraft $v_x = H\, w_{,x}$ (am vertikalen Rand) von der wir keine Überraschungen erwarten, wenn wir nicht gerade in einer einspringenden Ecke sind.

Die Festhaltung ist wohl entscheidend. Auf welcher Länge und unter welchem Winkel wird die Membran festgehalten? In einem glatten Randpunkt beträgt der Eckenwinkel 180° und die Linienlagerung verhindert die Ausbildung einer überkritischen Singularität, $(G_1^h, 1) < \infty$, siehe Bild 3.144. Bei der einspringenden Ecke mit einem Winkel von 270° wird dagegen die Singularität trotz Festhaltung überkritisch, $(G_1^h, 1) = \infty$.

Im Grunde kann man es sich auch an den Fingern abzählen: An einem glatten Rand sind zwei Knoten fest und zwei können sich bewegen, siehe Bild 3.145 *a*. Dieses ausgewogene Verhältnis von 2:2 bindet wohl die Wirkung der Kräfte $f_i \to \infty$ zurück, das Integral $(G_1^h, 1) < \infty$ bleibt endlich, auch in der Grenze $h \to 0$, während in der 270° Ecke das Verhältnis 3:1 beträgt, siehe Bild 3.145 *b*, und die drei Kräfte f_i haben freies Spiel und so ergibt die Auswertung der Einflussfunktion in der Grenze $h \to 0$ einen unendlich großen Wert,

$$v_x = \int_\Omega G_1^h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \begin{cases} < \infty & \text{Rand} \\ \infty & \text{Ecke}\,. \end{cases} \tag{3.375}$$

Man muss auch vor zuviel ‚Naivität' warnen. Der Ingenieur setzt die j_i in die Knoten und erwartet, dass für $h \to 0$ sich genau die exakte Einflussfunktion für die gesuchte Randspannung ergibt. Aber **Grenzwert** ist ein *delikater Begriff*, und die Frage, ob eine numerische Folge – lauter Integrale auf schwankendem Grund – exakt ihr Ziel trifft, ist nicht allein mit dem Hinweis $h \to 0$ beantwortet.

3.75 Symmetriebrechung

Die j_i einer Schnittkraft-EF sind Gleichgewichtskräfte, $\sum_i j_i = 0$ über alle Knoten[38]. Gilt das nicht, dann sprechen wir von **Symmetriebrechung**.

Einflussfunktionen mit einer Singularität im Aufpunkt (das sind fast alle im 2-D und 3-D) kollabieren bei Symmetriebrechung.

Es ist erstaunlich wieviel Statik in den f_i und einem Netz steckt.Wenn die Elemente kleiner werden, dann werden im LF g auch die Knotenkräfte kleiner, aber dafür gibt es dann eben mehr von ihnen; so ist es auch bei den Linienlasten. Einzelkräfte in den Knoten sind dagegen invariant gegenüber der

$$\int_\Omega \frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = 0 \qquad \int_\Omega \frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \infty$$

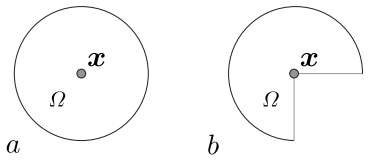


Bild 3.146. Singuläres Integral im Voll- (oder 1/2-Kreis) und im 3/4-Kreis (1/4)

Maschenweite h. Nur die Spannungen um den Knoten herum werden immer größer, je kleiner h wird.

Nun sind die statischen Knotenkräfte – Einzelkräfte oder Momente – eine Idealisierung und der Ingenieur hat daher ein gewisse Kontrolle über die Effekte, die sie auslösen. Anders ist es bei den **Knotenkräften aus einem Versatz**, also den $j_i\,(=f_i)$, die die Einflussfunktionen für Spannungen generieren. Ihre Größe ist proportional zu dem E-Modul und der Größe des ‚Spalts' Δx, also dem Abstand $h = \Delta x$ zwischen den Knoten, zwischen den $j_i = \pm E/\Delta x$.

Wenn die j_i gegengleich sind, dann bändigen sie sich in der Grenze $\Delta x \to 0$ gegenseitig. Kritisch wird es, wenn die Symmetrie durch die Festhaltung eines Knoten gestört wird, wie in Bild 3.139 und 3.141, wo wir vom amputierten Dipol gesprochen haben. Fehlt einer Knotenkraft $j_i \to \infty$ das Gegengewicht, der Partner, dann ist es wahrscheinlich, dass die Einflussfunktion ‚explodiert', $G_h = \infty$ überall, sie nicht mehr messbar ist, $(G_h, 1) = \infty$. Vorwiegend sind das die Ecken (3:1), nicht aber gerade Ränder (2:2), siehe Bild 3.145. Die Zeichnung in Bild 3.146 deutet an, wie es zu den Schwierigkeiten in den Ecken kommt. Die Kreisfunktionen sind die Ableitungen des Abstands $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$

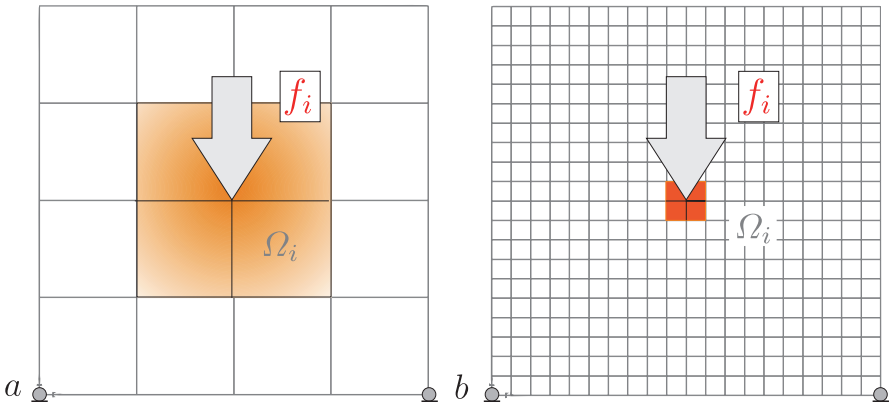
$$r_{,y_1} = \frac{y_1 - x_1}{r} = \cos(\varphi) \qquad r_{,y_2} = \frac{y_2 - x_2}{r} = \sin(\varphi)\,. \tag{3.376}$$

Abstand und Winkel sind die Maßzahlen der Einflussfunktionen.

Das Interessante ist, dass dies keine numerischen *Artefakte* sind, sondern die Singularität, die die j_i produzieren, auch im Original so gefunden wird. Nur kann man eben, wenn man von den finiten Elemente her kommt, die Singularität an Hand der Netzgeometrie ‚sichtbar' machen; **die Singularität macht sich evident**. Ist die **Parität** nicht verletzt, addieren sich alle j_i zu null, dann ist alles gut. Bleibt aber ein $j_i \to \infty$ übrig, dann **kollabiert** die Einflussfunktion (wahrscheinlich), und dabei reißt sie alles mit, $G_h = \infty$ in allen Punkten.

Es gibt aber Gegenbeispiele und zwar sind das die 1-D Probleme wie in Bild 3.123. Die Kräfte j_2, j_3 und j_4, EF-V, sind nicht ausgeglichen, aber das

[38] Ein ungelagertes Element kommt durch die $j_i = \partial\varphi_i/\partial x$ (z.B.) nicht ins Trudeln, weil die φ_i eine *partition of unity* bilden, $\sum j_i = \partial/\partial x\,(\sum_i \varphi_i) = \partial\, 1/\partial x = 0$.



$$f_i = \int_{\Omega_i} \sigma^h_{kl}\, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\varphi}_i)\; d\Omega$$

Bild 3.147. Je kleiner die vier Elemente um die Kraft herum werden, um so größer müssen die Spannungen werden, um die Energie f_i (= Kraft × Weg 1) $= a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega_i}$ aus schrumpfender Fläche Ω_i = Träger von $\boldsymbol{\varphi}_i$, zu erzeugen

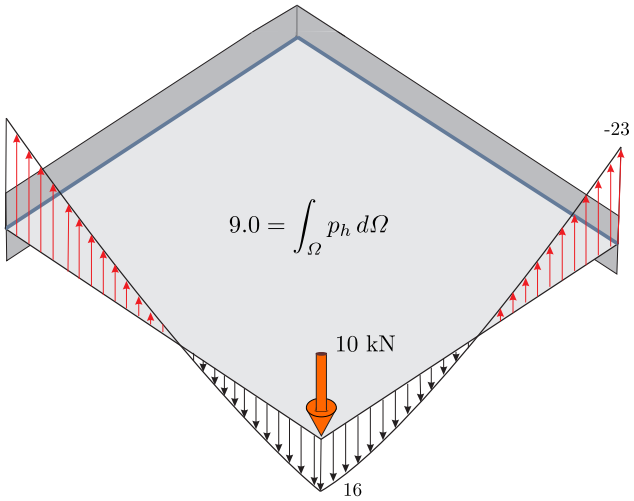


Bild 3.148. Rückseitig eingespanntes Plattenelement 1 × 1 Meter. Einzelkraft und die äquivalenten Linien- und Flächenkräfte des LF p_h. Die Flächenlast ist nur als Integral zitiert. Die Randmomente am freien Rand sind sehr klein. Näheres zu dem Element siehe Bild 12.1 (WINFEM-P)

ist nicht schädlich; $u = \infty$ überall kommt in der Stabstatik, der ‚Statik der Polynome', nicht vor.

Ebenso nicht bei der Platte in Bild 3.120, wo zwar auch die Gegenkraft $\uparrow$ zu der $\sum j_i \downarrow$ über die freien Knoten fehlt, aber die Einflussfunktion trotzdem endlich ist. Das ist eine Spezialität der Kirchhoffplatte, die ja Punktlager kann, wo die Einflussfunktion im Aufpunkt nicht singulär ist.

3.76 Einzelkräfte als Knotenkräfte

Eine Einzelkraft P, siehe Bild 3.148 und 3.149, übersetzt das FE-Programm in eine äquivalente Knotenkraft $f_i = P \cdot 1\,[\text{N·m}]$ und eine solche äquivalente Knotenkraft f_i ist für ein FE-Programm zunächst nur ein Signal, dass in der Nähe des Knotens Lasten stehen, die bei einer virtuellen Verrückung des Knotens die Arbeit f_i leisten, siehe Bild 3.147. Sollten die f_i in den Nachbarknoten null sein, dann kann es nur so sein, dass es wirklich eine Einzelkraft ist, die genau in dem Knoten angreift.

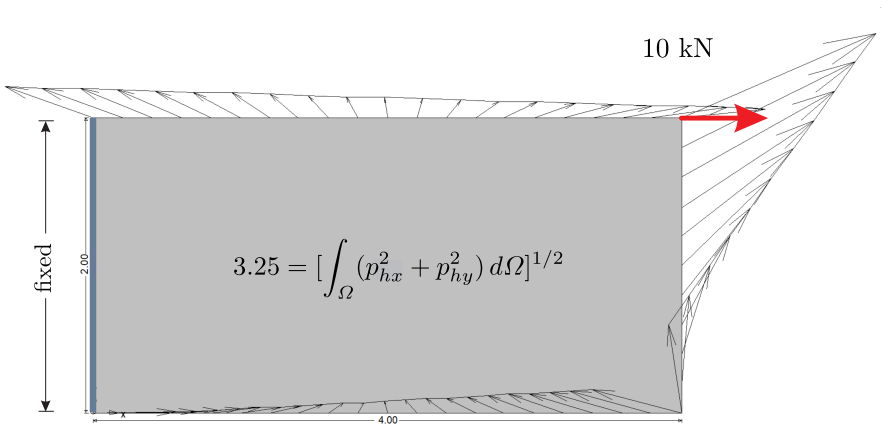


Bild 3.149. Wie ein bilineares Scheibenelement 4 × 2 Meter eine Knotenkraft in äquivalente Linien- und Flächenkräfte (den LF p_h) umsetzt (WINFEM)

Wenn nun der Ingenieur die Elemente immer kleiner macht und weiterhin darauf beharrt, dass in diesem einen Knoten – und nur in diesem – eine äquivalente Knotenkraft f_i steht, dann ist das für das FE-Programm ein Signal, dass es die Spannungen in der Nähe dieses Knotens tendenziell unendlich groß machen muss, weil sonst die Bilanz

$$\int_{\Omega_i} \sigma_{kl}^h \, \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\varphi}_i) d\Omega = f_i \tag{3.377}$$

nicht einzuhalten ist.

Die Verzerrungen ε_{kl} kommen aus der Einheitsverschiebung des Knotens in Richtung der Kraft und weil sie nur auf den Elementen nicht null sind, auf denen der Knoten liegt, muss **immer weniger Gebiet** Ω_i immer größere Spannungen σ_{kl}^h produzieren[39]. Auch so kommen singuläre Spannungen in die finiten Elemente hinein. Sie sind in dieser Situation eine **‚Schutzmaßnahme'**, um auch bei schrumpfenden Elementen am Ziel f_i festhalten zu können.

Über die Größe der Elemente kann der Benutzer also **die Singularität** unter der Einzelkraft **steuern**. Verfeinert man dagegen ein Netz in Gegenwart von Flächenkräften oder Linienkräften, also allem was eine ***Ausdehnung*** hat, dann werden die f_i kleiner, wenn h kleiner wird und eine Verfeinerung ist daher unschädlich. Hier ist es aber so, dass f_i seine Höhe *beibehält* und so erzwingt $h \to 0$ die Reaktion $\sigma \to \infty$.

3.77 Vorverformungen

Wir wollen auch noch kurz erläutern, wie Vorverformungen bei Stäben, die nach Theorie II. Ordnung gerechnet werden, im Rahmen der FEM behandelt werden.

‚*Bei Ansatz von Vorverformungen bedeutet Theorie II. Ordnung die Formulierung des Gleichgewichts am* gesamtverformten *System, wobei Gesamtverformung = Vorverformung + Lastverformung ist*', [258] S. 77. Wir schreiben das als

$$w(x) = s(x) + w_L(x) \qquad s \text{ wie ‚Schlangenlinie'} \tag{3.378}$$

Die so zweigeteilte Biegelinie muss der Differentialgleichung

$$EI\, w^{IV}(x) + P\, w''(x) = p(x) \qquad P = |P| \text{ als Druckkraft} \tag{3.379}$$

oder

$$EI\, w_L^{IV}(x) + P\, w_L''(x) = p(x) - (EI\, s^{IV}(x) + P\, s''(x)) \tag{3.380}$$

genügen. Die Vorverformung wird durch ihre Interpolierende s_I ersetzt

$$s_I(x) = \sum\nolimits_j s_j\, \varphi_j(x)\,, \tag{3.381}$$

wobei die s_j die Knotenwerte von $s(x)$ sind (Durchbiegungen und Verdrehungen – Hermite Interpolation!). Weil die *shape functions* elementweise homogene Lösungen sind, $EI\, \varphi_i^{IV} = 0$, reduziert sich das in jedem Element auf

$$EI\, w_L^{IV}(x) + P w_L''(x) = p(x) - P s_I''(x)\,. \tag{3.382}$$

[39] Wegen $\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\varphi}_i) = O(1/h)$ und $d\Omega = O(h)$ bleibt die Arbeit an $\sigma_{kl}^h \to \infty$ hängen.

Zu den äquivalenten Knotenkräften aus der Last sind also noch die äquivalenten Knotenkräfte der Interpolierenden zu addieren. Auf jedem Element gilt (partielle Integration)

$$\mathscr{G}_e(s_I,\varphi_i) = \int_0^{l_e} -P s_I''\varphi_i\,dx + [P s_I'\varphi_i]_0^{l_e} - P\int_0^{l_e} s_I'\varphi_i'\,dx = 0\,. \tag{3.383}$$

Nun hat die Hermite-Interpolierende s_I stetige erste Ableitungen in den Knoten und die $\varphi_i(x)$ sind stetig in den Knoten, so dass sich bei der Summation über die Elemente die Randarbeiten in den Innenknoten wegheben[40]

$$\sum\nolimits_e \mathscr{G}_e(s_I,\varphi_i) = \int_0^{l} -P s_I''\varphi_i\,dx - P\int_0^{l} s_I'\varphi_i'\,dx = 0\,, \tag{3.384}$$

was mit (3.381) gerade das Resultat

$$f_{si} - \sum\nolimits_j P\int_0^{l}\varphi_i'\varphi_j'\,dx\,s_j = f_{si} - \sum\nolimits_j G_{ij}\,s_j = 0 \qquad G_{ij} = P\int_0^{l}\varphi_i'\varphi_j'\,dx \tag{3.385}$$

ergibt. Man erhält also den Vektor der äquivalenten Knotenkräfte aus der Vorverformung, wenn man die ***geometrische Steifigkeitsmatrix***, (9.307) Seite 779, mit den Knotenwerten $\boldsymbol{s}$ der Vorverformung multipliziert

$$\boldsymbol{f}_s = \boldsymbol{K}_G\boldsymbol{s}\,, \tag{3.386}$$

und mit Vorverformungen löst man das System $\boldsymbol{K}_{II}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_s$. Hierbei ist $\boldsymbol{K}_{II}$ die Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung, die aber meist durch die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_I$ nach Theorie I. Ordnung und die geometrische Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ ersetzt wird, zum $-P$ siehe Bemerkung (2.10),

$$\boldsymbol{K}_{II} \simeq \boldsymbol{K}_I - P\boldsymbol{K}_G\,. \tag{3.387}$$

3.78 Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen

Wenn wir die Einflussfunktion für die zweite Ableitung $u''(x)$ der Längsverschiebung eines Stabes aufstellen und mit der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte j_i beginnen, dann merken wir schnell, dass alle

$$j_i = \varphi_i''(x) = 0 \tag{3.388}$$

null sind und wegen $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$ daher auch die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion, d.h. die FE-Einflussfunktion für die zweite Ableitung ist identisch null

[40] An freien Enden verbleibt ein zusätzlicher Anteil $P\,s_I'\cdot\varphi_i$ der zur Knotenkraft f_{si} zu addieren ist.



Bild 3.150. Hoover Dam Bypass Bridge, Nevada. Bis 10/2010 führte die Straße über den Damm, [290]

$$G_2^h(y,x) = 0\,. \tag{3.389}$$

Das ist immer so. Man kann mit finiten Elementen Einflussfunktionen nur für Ableitungen bis zu der Ordnung der Ansatzfunktionen berechnen

$$\text{Stab} \qquad \varphi_i(x) = \text{linear} \qquad \to \qquad \max\, u'(x) \tag{3.390}$$

$$\text{Balken} \qquad \varphi_i(x) = \text{kubisch} \qquad \to \qquad \max\, u'''(x)\,. \tag{3.391}$$

Die höheren Ableitungen kennen die finiten Elemente nicht oder, anders gesagt, sie haben keine Vorstellung davon, dass es so etwas geben könnte.

Das stimmt im übrigen mit dem ***h*-Vertauschungssatz** überein, siehe Seite 474,

$$J_h(u) = J(u_h)\,. \tag{3.392}$$

Denn sei $J(u) = u''(x)$, und u_h eine lineare FE-Lösung, dann ist die zweite Ableitung null, $J(u_h) = 0$, und daher muss auch $J_h(u) = 0$ null sein – für alle u, also etwa alle Polynome beliebig hoher Ordnung. Das geht nur so, dass $G_2^h(y,x)$ identisch null ist, was eben bedeutet, dass man eine Einflussfunktion für zweite Ableitungen mit linearen Elementen nicht darstellen kann.

3.79 Ein Plädoyer für Einflussfunktionen

Nichts einfacher als Einflussfunktionen zu berechnen. Man muss ja nur den Vektor $\boldsymbol{j}$ aufstellen, also die Werte $j_i = J(\varphi_i)$ bestimmen, das sind die Querkräfte, die Momente etc. der *shape functions* in dem Aufpunkt x, was

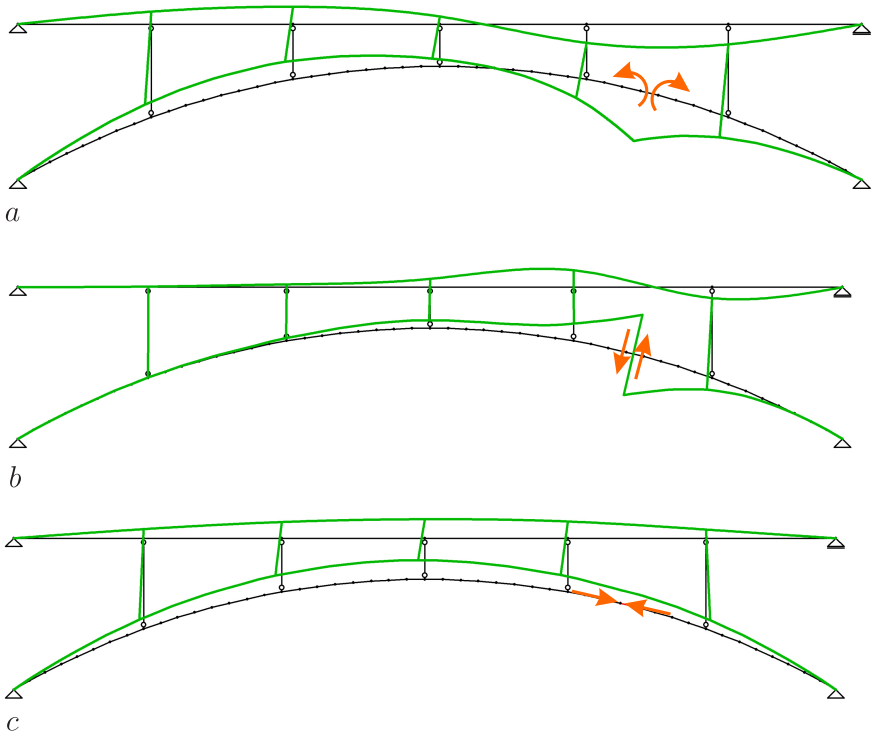


Bild 3.151. Bogen mit aufgeständerter Fahrbahn, Einflussfunktionen für **a)** das Moment, **b)** die Querkraft und **c)** die Normalkraft in einem charakteristischen Punkt des Bogens (BE-FRAMES)

immer $J(w)$ gerade ist – und die Inverse mit dem Vektor $\boldsymbol{j}$, der in der Regel $<= 6$ Einträge $\neq 0$ enthält, multiplizieren und hat die Knotenwerte $g_i(x)$ der Einflussfunktion und man kann die Einflussfunktion zeichnen[41]

$$G(y,x) = \sum\nolimits_i g_i(x)\,\varphi_i(y)\,. \tag{3.393}$$

Das geht blitzschnell, denn das Einarbeiten der lokalen Lösung, siehe Bild 3.55, also den Verlauf der Einflussfunktion im Element mit dem Aufpunkt, kann eine *subroutine* übernehmen. Die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen erhält man sogar gratis, denn deren Knotenwerte sind ja gerade die Spalten der Inversen.

MATLAB™ braucht für die Inverse einer symmetrischen Matrix $1\,000 \times 1\,000$ weniger als 1.5 sec, das sind also $1\,000$ Einflussfunktionen in weniger als zwei Sekunden...

[41] Die Einflussfunktion baut sich aus den *shape functions* $\varphi_i(y)$ auf und die $g_i(x)$ steuern die ‚Höhe', in der die *shape functions* die Knoten passieren.

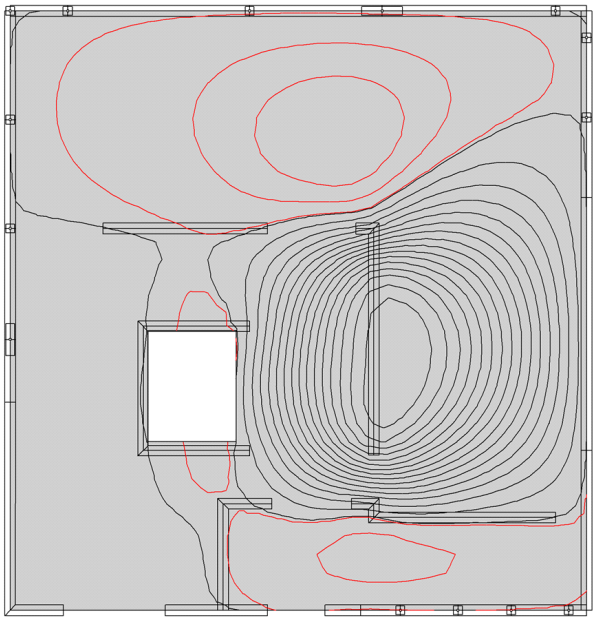


Bild 3.152. Deckenplatte und Einflussfunktion für die resultierende Lagerkraft in einer stützenden Wand. Man belastet die Wandknoten mit der Steifigkeit k der Wand und multipliziert das $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{K}^{-1}$, das ergibt die Knotenwerte $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f}$ (BE-PLATTE)

Die Fülle an Informationen, die man aus den Einflussfunktionen ziehen kann, ist so groß, dass man das keinem Anwender vorenthalten sollte. Auf keinem Wege erhält man einen besseren Einblick in der Tragverhalten einer Struktur wie in Bild 3.150 als über Einflussfunktionen, siehe Bild 3.151 oder Bild 3.152, eine Einflussfunktion für eine Wand oder wie in Bild 3.153. Man spreizt den Aufpunkt (EF-σ oder EF-V), und beobachtet, wie das Tragwerk darauf reagiert. Es ist ‚**Störungsrechnung**'.

Natürlich, man muss die inverse Steifigkeitsmatrix nicht berechnen und speichern, man kann für jede Einflussfunktion das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ neu lösen, aber dann fehlt wahrscheinlich die ‚*snappy response*', die der Anwender vom System erwartet. Er will sofort das Ergebnis sehen, egal wo er hinklickt[42], siehe Bild 3.156.

In MATLAB™ wird man zweimal gefragt, ob man wirklich die Inverse berechnen will, aber diese Fürsorge geht an der Sache vorbei. Wir benutzen die Inverse ja nicht primär, um das Gleichungssystem zu lösen, sondern um Aufschluss über das Tragverhalten und die Sensitivitäten eines Tragwerks zu bekommen. Die stecken in dem $1/k$.

[42] In dem Programm BE-FRAMES kann man das ausprobieren: *GF anywhere*.

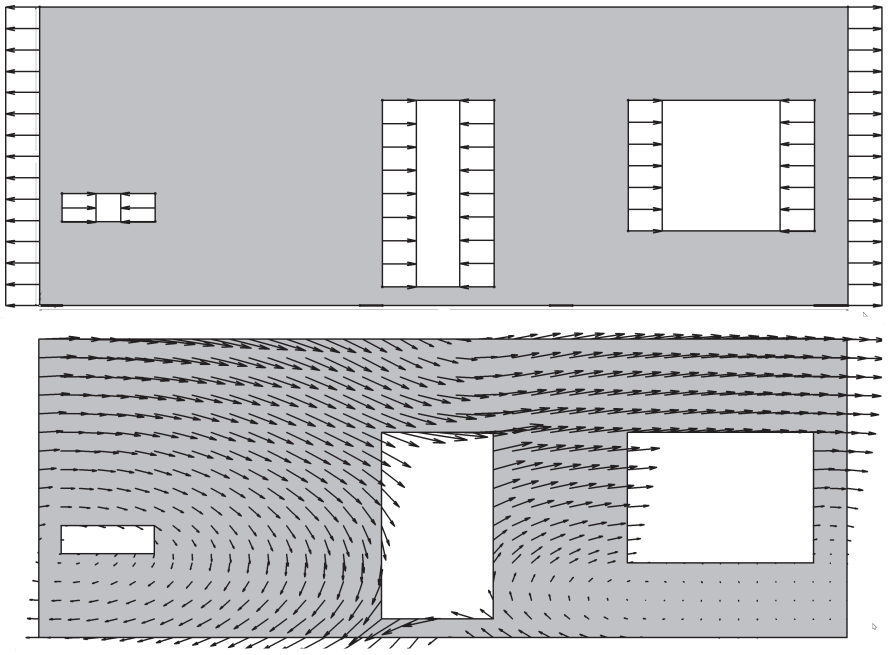


Bild 3.153. Horizontale Streckenlasten $E \cdot n_x/|\Omega|$ erzeugen die Einflussfunktion für den Mittelwert von $\sigma_{xx}^{\varnothing}$ in der Wandscheibe ($\nu = 0$). In Pfeilrichtung wird $\sigma_{xx}^{\varnothing}$ maximal (BE-SCHEIBE)

Und die Rechner sind heute so schnell geworden und Speicherplatz so preiswert, dass man sich die Informationen, die in $\boldsymbol{K}^{-1}$ strecken, nicht entgehen lassen sollte. Es ist ein echter Zugewinn.

Und damit sind wir beim zweiten Punkt, der auch den Nutzwert eines Programms erhöhen kann. In Kapitel 5.29 stellen wir die ***One-Click Reanalysis*** vor, wo der Anwender durch Mausklicks einzelne Riegel und Stäbe eines Rahmens nacheinander entfernen kann – das geht vorwärts wie rückwärts – und so entsteht vor seinen Augen ein lebendiges Bild des Tragwerks. Er kann so nachempfinden, welche Teile für das Tragverhalten wichtig sind, wie sich der Kräftefluss ändert etc. Das geht alles spielerisch und darin liegt der Lerneffekt.

Weil solche Klicks die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ändern, sind sie nicht so ganz leicht umzusetzen wie im Fall der Einflussfunktionen. Wir benutzen in dem Programm BE-FRAMES (wahlweise) zwei unterschiedliche Techniken, um den Aufwand zur Berechnung zu minimieren – direkte oder iterative Berechnung der neuen Lösung – und es gelingt damit auch die Antwortzeiten sehr klein zu halten, sie sind kaum merkbar.

Bei der direkten Berechnung wird nur ein kleines Untersystem (10×10 z.B.) gelöst, nicht die volle Matrix (100×100), und man kann so die 100



Bild 3.154. Cleveland Clinic Las Vegas, [90]. Das Traggerüst dürfte ein *steel frame* sein. Auch die Oper in Sydney ist ja keine echte Schale

Komponenten des neuen Vektors $\boldsymbol{u}_c$ aus den 10 Werten des Untersystems + den 100 Werten des alten Vektors $\boldsymbol{u}$ berechnen.

Man muss diese Techniken aber nicht benutzen, sondern man kann einfach das modifizierte Gleichungssystem $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ neu lösen. Auch das sollte heute sehr schnell gehen – in 10 Jahren wird es definitiv so sein.

3.80 Schalenelemente

Rahmentragwerke sind eindimensionale Faltwerke. Innerhalb eines Riegels oder Stiels sind die Längs- und Querverformungen entkoppelt, aber in den Rahmenknoten wird aus einer Normalkraft im Riegel eine Querkraft im Stiel etc.

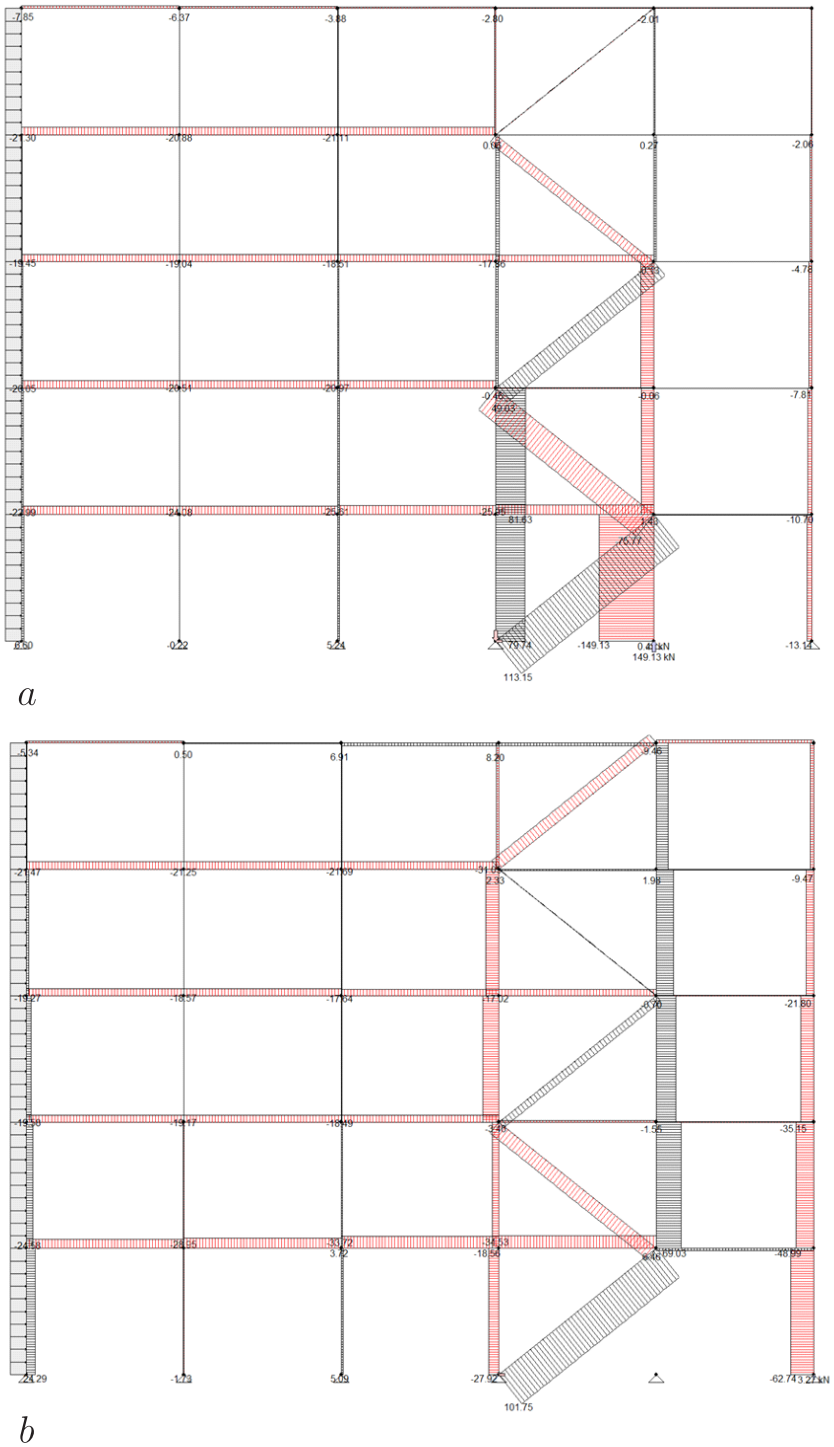
Sinngemäß gilt dasselbe für echte **Faltwerke**. Unter einem Schalenelement versteht man gewöhnlich ein ebenes Element, das Längs- und Querverformungen aufweist, dessen Steifigkeitsmatrix also Scheiben- und Plattenanteile enthält. Damit werden Faltwerke modelliert.

Berechnungen von **Frei-Form-Flächen** mit echten Schalenelementen sind rar. Für die Fassade in Bild 3.154 waren sie sicherlich nicht notwendig.

3.81 Kontrolle von FE-Berechnungen

Die Einflussfunktionen, wie in Bild 3.156, sind im Grunde der Schlüssel zu einer FE-Berechnung, denn eine Abweichung in einem Ergebnis bedeutet einfach, dass der Aufsteller B mit einer anderen Einflussfunktion gerechnet hat als der Aufsteller A, er die Lasten durch eine ‚andere Maschine geschickt hat', als der Aufsteller A.

Eine Übereinstimmung mit einer Kontrollberechnung sollte umso eher gelingen, je einfacher die zugehörige Einflussfunktion ist.



a

b

Bild 3.155. Stockwerkrahmen mit Auskreuzung, **a)** Normalkräfte unter Wind, **b)** nach Ausfall der rechten Stütze der Auskreuzung (SLW Anprall) (BE-FRAMES)

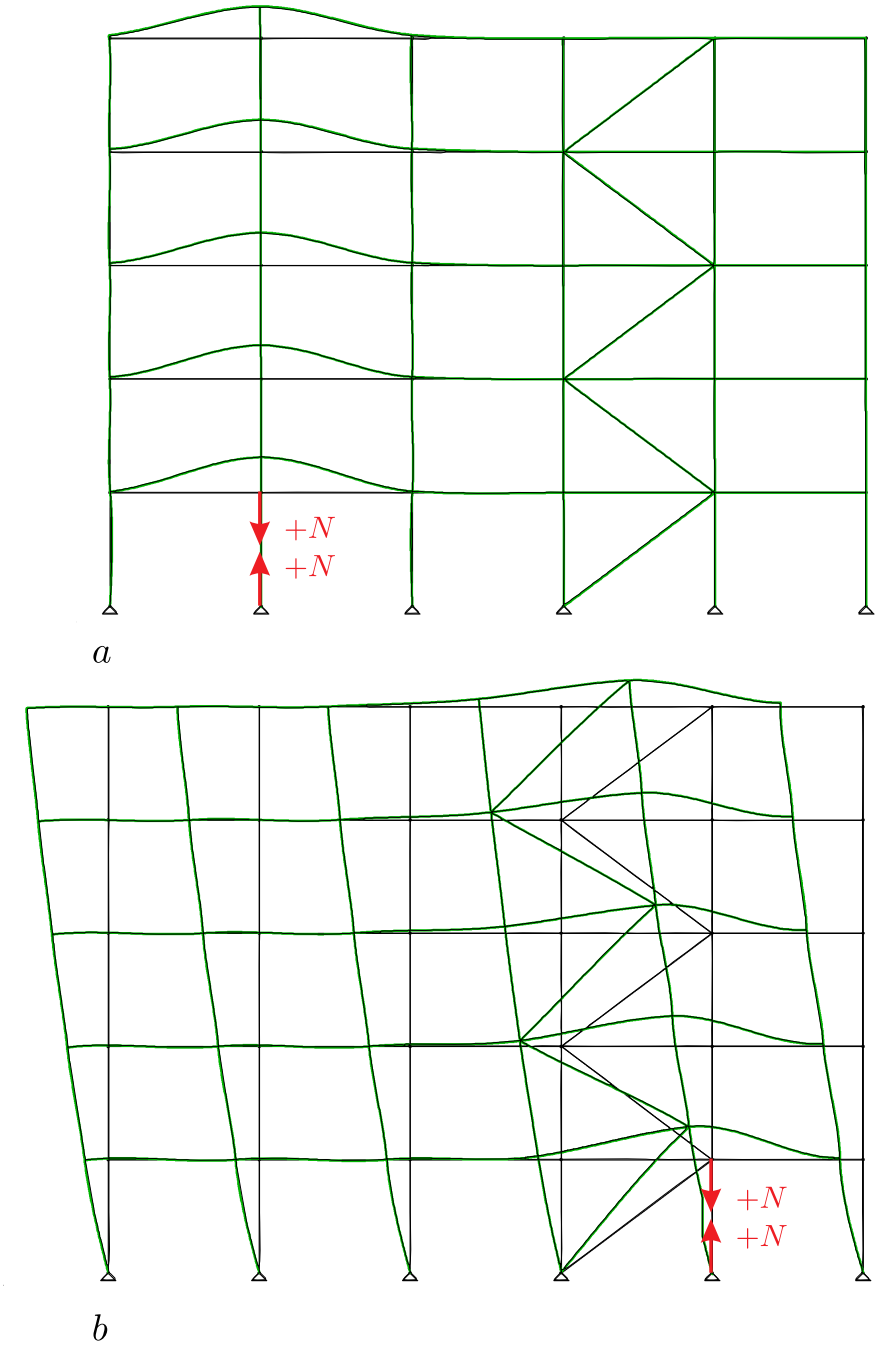


Bild 3.156. Einflussfunktion für die Normalkraft in einer ‚frei stehenden' Geschoßstütze und einem Stab im Windverband. Die Einflussfunktionen starten wie immer in ‚negativer Richtung' bezogen auf die positiven N. (BE-FRAMES)

Schnittgrößen sind Ableitungen

Die Fourierreihe einer glatten Funktion enthält vielleicht drei, vier wesentliche Terme. Wenn aber die Funktion ‚*rough*' ist, dann sind auch die höheren Terme relevant, und wenn man die Fourierreihe n-mal differenziert, dann wird jeder Term a_k und b_k mit k^n multipliziert, die Amplituden wachsen, $a_k \to k^n\, a_k$, und insbesondere die hochfrequenten ‚hinteren' Terme (große k) dominieren immer mehr. Die Oszillationen nehmen zu. Differentiation raut auf.

So ähnlich ist das bei Platten. Eine glatte Fläche mit finiten Elementen zu approximieren, ist einfach, aber die Biegefläche einer Platte ist nur scheinbar glatt, denn an Zwischenlagern steigen die Momente, die zweiten Ableitungen, stark an und die dritten Ableitungen, die Querkräfte (Kirchhoffplatte), springen. Bei einer schubweichen Platte springen schon die ersten Ableitungen von w. Das muss man mitbedenken, wenn man FE-Ergebnisse beurteilt. Man kann praktisch schon am Grundriss ablesen, wo die FE-Ergebnisse kritisch sein werden, siehe Bild 3.157.

Summe der Lagerkräfte

Das ist da erste, was der Ingenieur macht: Er kontrolliert, ob die Summe der Lagerkräfte gleich der aufgebrachten Belastung ist, aber das ist bei den finiten Elementen garantiert. ‚Die Einflussfunktion für die $\Sigma V = 0$, die Summe der vertikalen Kräfte, *Lasten + Lagerkräfte*, ist mit einer virtuellen Verrückung $\delta w = \pm 1$ des ganzen Tragwerks identisch. Eine einfachere Einflussfunktion als diesen *lift* gibt es nicht; höchstens noch eine Verschiebung des freigeschnittenen Tragwerks nach links oder rechts, $\delta u = \pm 1$, um die $\Sigma H = 0$ zu kontrollieren. Das nächst kompliziertere wäre dann eine (Starrkörper) Rotation des ganzen Tragwerks um einen Winkel $\tan \varphi = 1$, um die $\Sigma M = 0$ zu überprüfen.

Diese drei Einflussfunktionen sind auf jedem Netz, und sei es noch so grob, exakt darstellbar, so dass es hier keine Überraschung geben darf. Ein Programm stellt die Lagerkräfte ja so ein, dass sie bei einem *lift* $\delta w = \pm 1$ bzw. $\delta u = \pm 1$ dieselbe Arbeit leisten wie die Lasten. Weil die *shape functions* eine *partition of unity* bilden und die Starrkörperbewegungen in $\mathcal{V}_h^+$ liegen, ist das garantiert, gilt $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$, $\Sigma M = 0$.

Ebenso: Die *shape forces* p_i sind *self-equilibrated* wie in Bild 4.3, und daher auch ihre Summe $p_h = \sum_i u_i p_i$. *Equilibrium is a given in FE-Analysis.*

Normalkräfte in Stützen und Wänden

Danach sind die Lagerkräfte in den Stützen und Wänden an der Reihe, die sollten stimmen, denn die Einflussfunktionen für die Stützkräfte sind ja einfache ‚Dellen' wie in Bild 3.152 oder wie bei einem Durchlaufträger, dem man ein Lager weggenommen hat. Diese Einflussfunktionen lassen sich auch

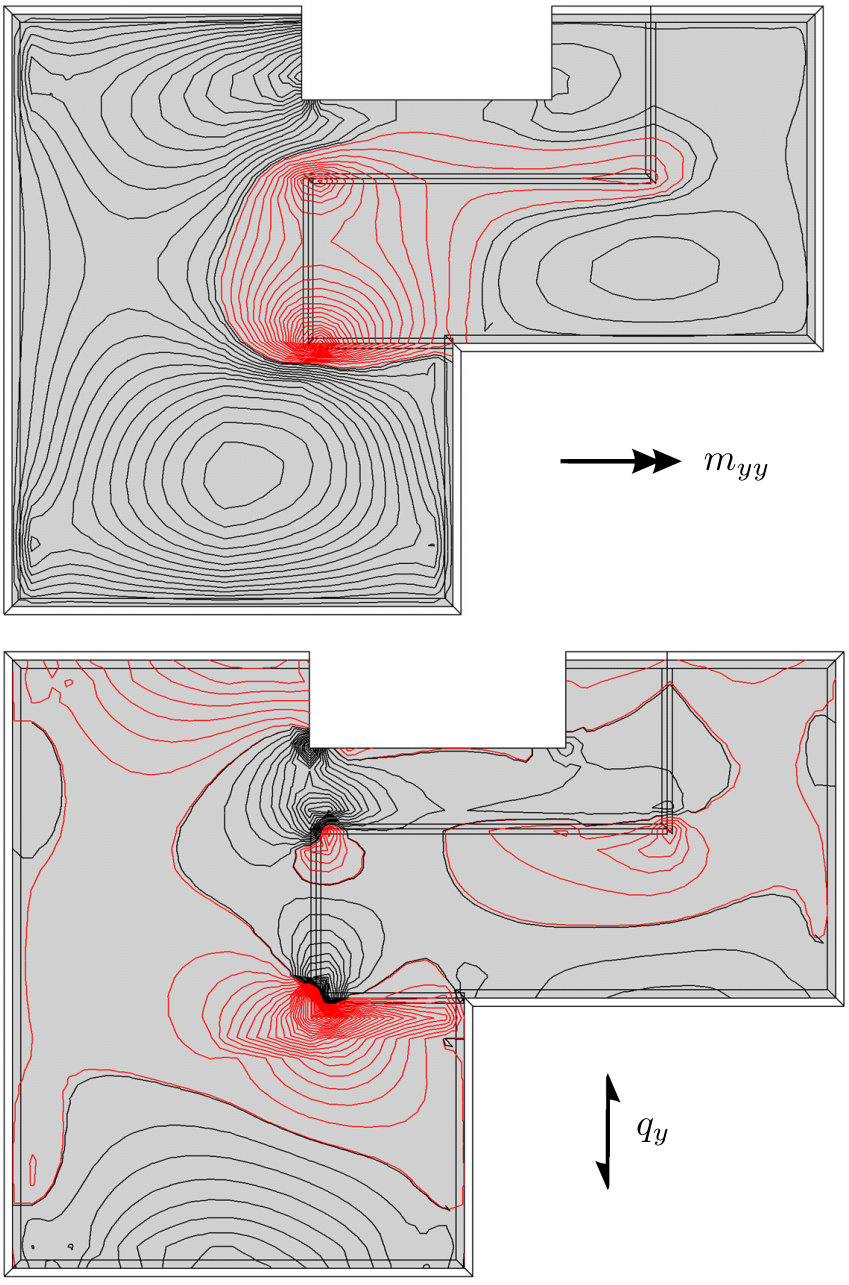


Bild 3.157. Momente m_{yy} und Querkräfte q_y in einer Hochbaudecke (BE-PLATTE)

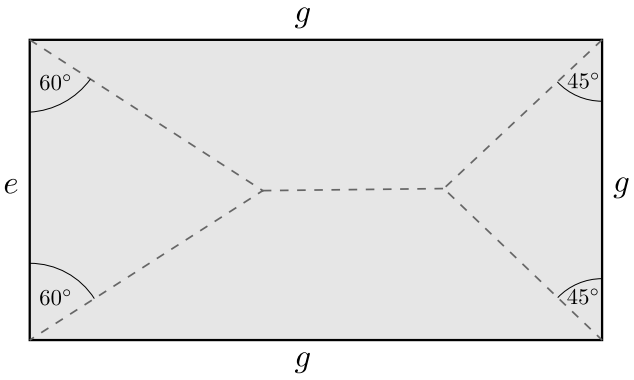


Bild 3.158. Einflussflächen für Lagerkräfte

auf einfachen Netzen gut darstellen und daher sollten hier keine großen Diskrepanzen auftreten. Abweichungen deuten eher darauf hin, dass Lasten vergessen worden sind.

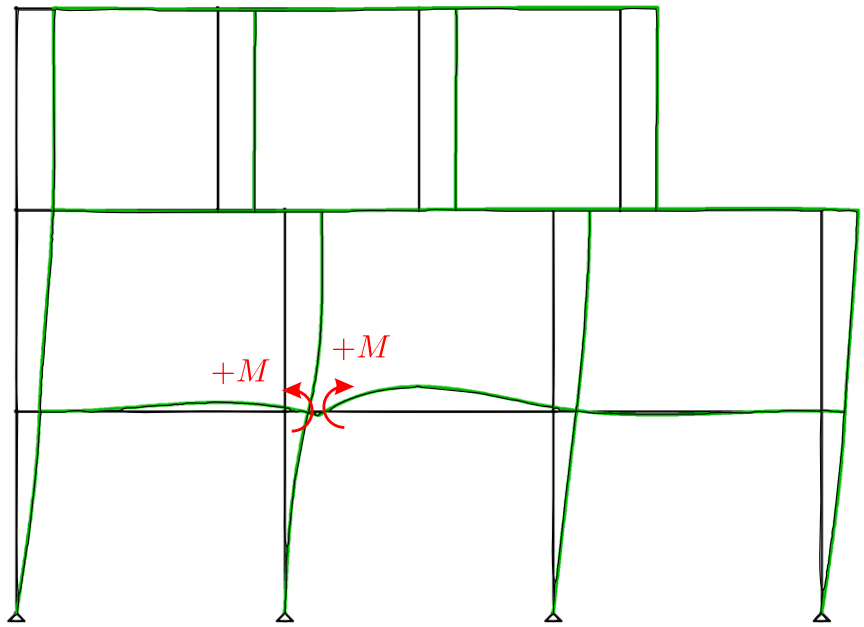
Der Praktiker schätzt die Lagerkräfte der Wände gerne mittels Trapezflächen ab, wie in Bild 3.158, aber diese Einflussfunktionen sind deutlich gröber, als die die finiten Elementen benutzen, siehe Kapitel 3.83. Im Zweifelsfall sollte man für die FE-Ergebnisse votieren. **Lagerkräfte können FE-Programme gut**.

Knotenverschiebungen

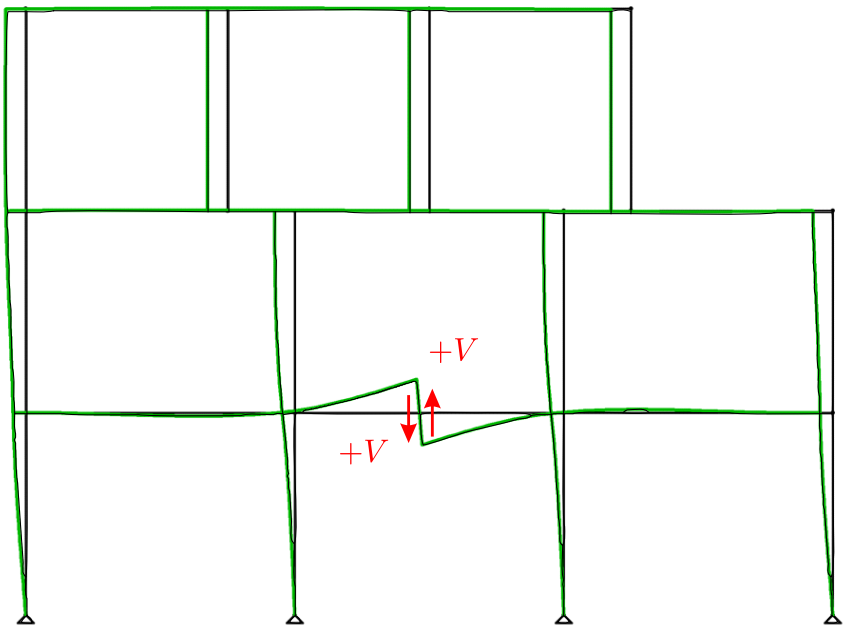
Von ähnlicher ‚Simplizität' wie die Lagerkräfte sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen, was im Umkehrschluss bedeutet, dass eine Übereinstimmung von Verformungen in einzelnen Knoten nicht viel besagt. In den Anfangszeiten der finiten Elemente hat man bei Platten die Durchbiegung in der Plattenmitte mit Reihenlösungen verglichen. Damals war man über das Ergebnis froh, aber die Beweiskraft eines solchen Ergebnisses ist gering – es ist der denkbar anspruchsloseste Test, denn die Einflussfunktion für die Durchbiegung ist eine einfache Delle in der Platte.

Feldmomente

Wenn die Kontrolle der Stützkräfte erfolgreich war, kann man die Schnittgrößen in ‚glatten' Punkten, also vorzugsweise im Feld kontrollieren, denn auch die Einflussfunktionen für Feldmomente sind relativ einfach. Zudem ist es meist so, dass die Momente primär von den Lasten in der unmittelbaren Nachbarschaft bestimmt werden, weil die Einflussfunktion rasch abklingt, s. Bild 3.159. Muss der Rahmen gegen Windlasten stabilisiert werden, dann sind natürlich auch die Feldmomente in den Stielen beteiligt, d.h. ihre Einflussfunktionen bewegen sich im wesentlichen ‚seitlich'. Die Querkraft in Riegelmitte in Bild 3.159 ist allein den Windlasten geschuldet.



a



b

Bild 3.159. Einflussfunktion, **a)** für das Anschnittsmoment im Riegel neben der Stütze und **b)** die Querkraft in Riegelmitte. Beide kommen im wesentlichen aus den horizontalen Lasten (BE-FRAMES)

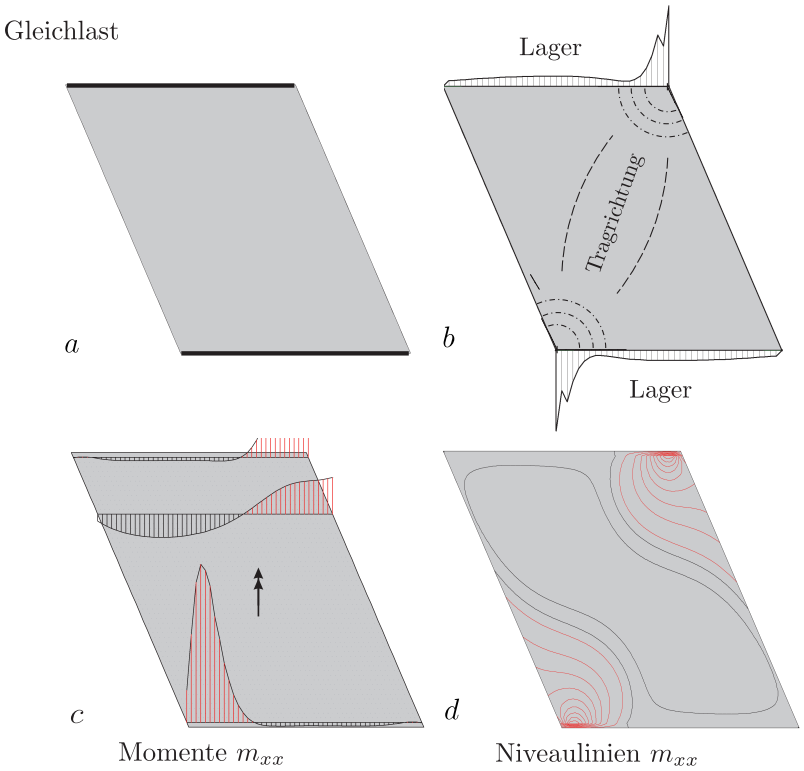


Bild 3.160. In den stumpfen Ecken der Plattenbrücke werden die Lagerkräfte und auch die Schnittmomente m_{xx} unendlich groß, [130]. In den 1960-er Jahren hat man die Einflussfunktionen für solche Brücken an Gipsmodellen abgelesen, [259], (BE-PLATTE)

Stützmomente

Unkritisch sind meist auch die Stützmomente über den Zwischenwänden, obwohl man da erste Diskrepanzen in der Höhe der Momente entdecken wird. Es sei daran erinnert, dass bei dem Verfahren von *Pieper-Martens* ja nur die Feld- und Stützmomente bestimmt wurden.

Im Übrigen: Der Eurocode erlaubt zwar das Ausrunden der Stützmomente über den Wänden, aber macht es Sinn einen genäherten Wert, denn das sind ja die FE-Momente, auszurunden?

Richtig schwierig sind natürlich die Momente über Stützen, denn diese haben steile Flanken und daher hängt alles von der Modellierung der Stütze ab. Wir haben in Kapitel 3.19 Hinweise gegeben, wie man mit der *Äquivalenten Spannungs Transformation* das Problem in den Griff bekommen kann. Es ist die Aufgabe der Programmierer diese Technik umzusetzen.

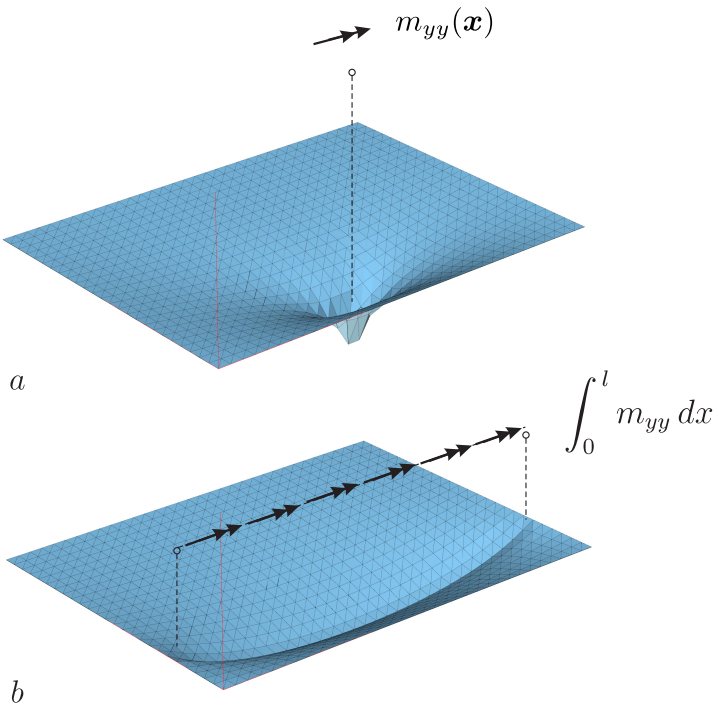


Bild 3.161. Platte: **a)** Einflussfunktion für den Punktwert $m_{yy}(\boldsymbol{x})$ und **b)** für das Integral von m_{yy}, [125], (BE-PLATTE)

Querkräfte

Die Querkräfte in Platten zu kontrollieren ist schon schwieriger, denn die Genauigkeit einer Schnittgröße ist gegenläufig zur Ordnung der Ableitung und das Ende der Kette bilden eben leider die Querkräfte. Im Grunde kann man nur ‚rückwärts' argumentieren, von den Lagern her, denn die Lagerkräfte sollten relativ genau sein und mit dieser Information im Hintergrund kann man dann den Verlauf der Querkräfte vor den Lagern beurteilen.

Auf jeden Fall ist es müßig über einzelne Werte zu streiten, dazu sind die Querkräfte zu erratisch. Es ist auch zu fragen, und das nicht nur bei den Querkräften, was ‚echt' ist – direkt aus dem Computer kommt – und was nachgebessert wurde, denn oft werden die ‚rohen' Verläufe der Schnittgrößen durch geglättete Verläufe ersetzt, die sich an den Werten in den Gausspunkten orientieren. Das ist ein durchaus legitimes Mittel.

Noch ein Wort zum Durchstanznachweis. Die Kraft in einer frei stehenden Stütze lässt sich gut ermitteln und weil der Durchstanzkegel klar definiert ist, sind Durchstanznachweise in solchen Stützen nahe an der Wirklichkeit.

In Ecken wandelt das Programm zunächst die Knotenkräfte in Lagerkräfte um, und diese liefern dann die Kraft

$$f_i\,[\mathrm{N{\cdot}m}] \quad \rightarrow \quad \text{Lagerkräfte } [\mathrm{N/m}] \quad \rightarrow \quad \text{Durchstanzkraft } [\mathrm{N}]$$

mit der der Durchstanznachweis geführt wird. Wie genau diese Kraft ist, hängt wesentlich von der Lagerung der Ecke ab. Der einfachste Fall wäre eine einzelne, isolierte 90°-Ecke, wie in einer Rechteckplatte. Wenn aber die Platte in der Ecke über mehrere Kanten gebogen wird, der Rand der Platte dort also vor- und zurückspringt und die typischen Singularitäten auftreten, dann dürfte die Größe der Durchstanzkraft diskutabel sein.

Singularitäten

In jeder Ecke einer Platte oder Scheibe wird man auf Singularitäten in den Schnittgrößen stoßen, man muss nur genau hinschauen (wollen), siehe Bild 6.23, 6.24 Seite 634. Das ist nur eine Frage des Maßstabs, aber die Praxis hält zu Recht einen gesunden Abstand von diesen Punkten, denn es reicht die Spannungsspitzen in den Ecken der Öffnungen einer Wandscheibe – wie der Erfahrung zeigt – durch das Anordnen einer konstruktive Bewehrung abzudecken. Die Risse, die auftreten, wenn die Bewehrung fehlt, belegen umgekehrt, dass die Spannungen wirklich existieren.

Es gibt aber auch Singularitäten, die schwerwiegender sind, wie die Singularität in den Lagerkräften einer schiefen Plattenbrücke, siehe Bild 3.160. Hier muss wirklich im Detail die Aufnahme der singulären Lagerkräfte und Momente m_{xx} nachgewiesen werden.

In kritischen Fällen sollte man Schnitte legen und die Ergebnisse aufintegrieren, denn das ist so, als ob das FE-Programm mit der Einflussfunktion für den Mittelwert gerechnet hätte und diese Einflussfunktionen sind ausgeglichener als die für einzelne Punkte, siehe Bild 3.161. Zudem ist natürlich der **Mittelpunkt** des Elements ein ‚ruhender Pol' im möglichen Chaos, denn die Spannungen in Elementmitte profitieren davon, dass man die Mitte am leichtesten spreizen kann, sich dort also die Einflussfunktion für eine Spannung am leichtesten erzeugen lässt.

3.82 Stahlbeton

Die Stahlbetonbemessung hat schon sehr früh Anleihen bei der Fachwerktheorie gemacht und diese Nähe ist in vielen Bereichen immer noch prägend.

Das Fachwerkmodell in Bild 3.162 geht auf Schlaich und Schäfer zurück [269] und wurde in einem *tutorial* der mb AEC Software GmbH genutzt, um an den Lagerknoten die Druck- und Zugspannungen nachzuweisen, [200].

Das Denken in Zug- und Druckstreben ist dem Ingenieur ‚angeboren', und daher wird gerne in Zweifelsfällen Rekurs auf Fachwerkmodelle genommen;

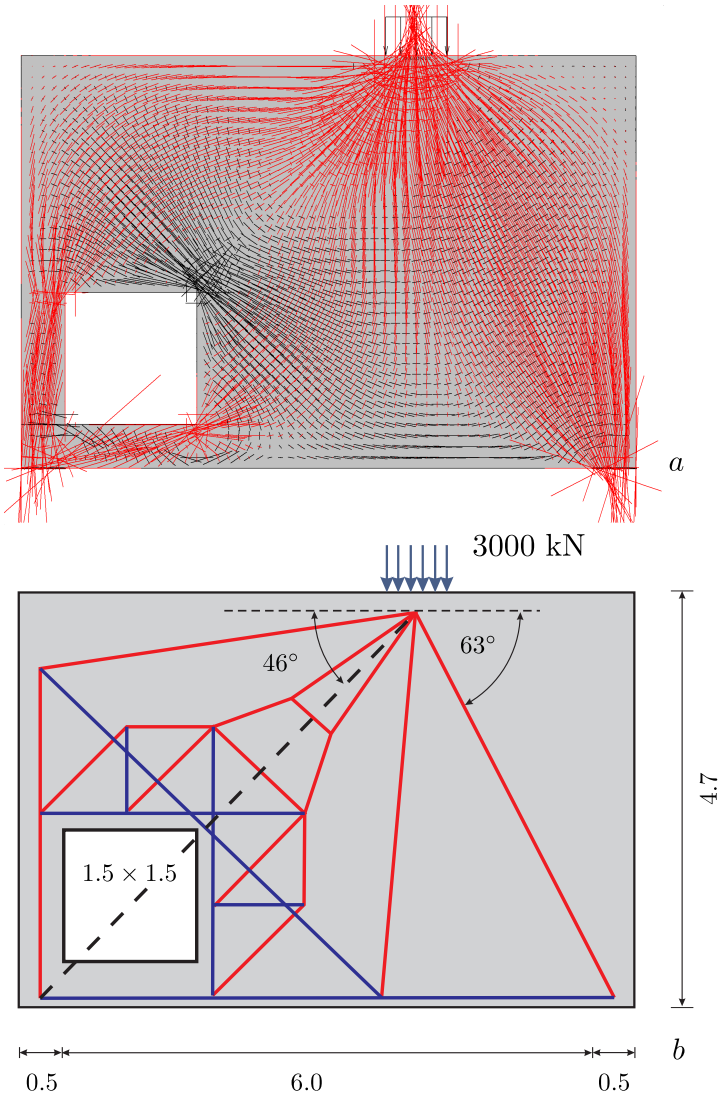


Bild 3.162. Original und Fachwerkmodell

sie sind eine ‚sichere' Bank. Aber was eben auch in Bild 3.162 b deutlich wird ist, dass solche Modelle ihre Grenzen haben. Die Auflösung rechts passt, der vertikale Druckstab in der Mitte ist wohl eher ein ‚Nullstab' und die linke Seite – na ja. Nun, es ist eben Ingenieurpraxis und keine Übung im Hörsaal; wo es hilft, hilft es.

Abgesehen von den Lagerknoten taugen solche Modelle eigentlich auch nur zur qualitativen Beschreibung, denn Druck- und Zugstreben im Innern einer



Bild 3.163. Omniturm im Frankfurter Bankenviertel, links das Japan Center, [323]

Scheibe kann man mit solchen Modellen nicht quantifizieren, nicht bemessen. Da muss man dann doch dem Computer vertrauen, wenn auch da bei den Kollegen vom Massivbau zum Teil heftig diskutiert wird [110], [256].

Unabhängig davon scheint uns jedoch, dass wir heute bessere Möglichkeiten haben, das Tragverhalten einer Scheibe zu visualisieren, denn der *plot* der Hauptspannungen wie in Bild 3.162 a vermittelt auf einen Blick einen anschaulichen Begriff von dem Tragverhalten der Scheibe. Das Fachwerkmodell scheint im Vergleich dazu, wie aus der Zeit gefallen zu sein. Sein Wert liegt eher bei Detailuntersuchungen, wie eben den Lagerknoten.

3.83 Die Realität

Der Omniturm ist ein 190 m hohes Bürogebäude im Frankfurter Bankenviertel mit 49 Geschossen, bei dem die Geschosse 14 bis 23 mit den *residential apartments* (‚RESI-area') gegeneinander versetzt sind, siehe Bild 3.163. In den Berichten des Ingenieurbüros kann man nachlesen, welche Herausforderungen bei dem Tragwerksentwurf zu meistern waren, [237], [238].

Wir wollen hier eine längere Passage aus dem ersten Bericht zitieren, bei der es um die Stützenkräfte geht.

‚Letztere wurden an mehreren verschiedenen Modellen ermittelt. Zum einen wurden die Lasten aus dem Gesamtmodell berechnet, das, wie oben beschrieben, den „Mangel“ des Eingusszustands[43] *enthält. Dies kann im Extremfall bei sehr hohen Gebäuden und kräftigen Decken, die sich in den Kern einspannen, zu Zugkräften in den Stützen in der Nähe der Turmspitze führen, weil sich die vertikalen Verformungsunterschiede wie Stützensenkungen gegenüber dem Kern auswirken. Diesem Problem wurde durch fiktive Vergrößerung der Dehnsteifigkeit der Stützen begegnet, die so gewählt wurde, dass Stützen und Kern annähernd gleiche vertikale Verformungen im Eingusszustand bekommen. In einem zweiten Schritt wurden sämtliche Decken auch für deren individuelle Bemessung als ebene Tragwerke berechnet und die Auflagerkräfte für die Stützen ausgelesen. Da es sich bei den Decken unter- und oberhalb der RESI-Geschosse um Halbfertigteilkonstruktionen mit einer 15 cm-Decke aus Filigranplatten handelt, wurden zwei verschiedene Berechnungsweisen gewählt. Einmal wurden die Lasten auf die Träger „klassisch“ durch Lasteinzugsflächen ermittelt, alternativ wurde die 15 cm dicke Decke als Platte ins System eingeführt und erneut gerechnet. Dies führte für die Auflagerkräfte auf den Stützen, insbesondere in den Eckbereichen des Gebäudes, zu unerwartet großen Veränderungen. Zusätzlich wurde vom Prüfingenieur ein eigenes, unabhängiges System berechnet, das aufgrund anderer Systemannahmen wieder zu anderen, in vielen Fällen höheren Lasten führte. Für die Bemessung der Stützen und schließlich auch für die Stauchungsberechnungen wurden die jeweils ungünstigsten Werte aus den verschiedenen Modellen zugrunde gelegt. Insofern gibt es mehrere Unsicherheitsfaktoren, die eine „genaue“ Vorhersage, insbesondere für die Verformungstoleranzen der Fassade im Millimeterbereich, nicht möglich machen‘.*

Jedes Ingenieurbüro, das mit finiten Elementen rechnet, dürfte über ähnliche Erlebnisse berichten können.

Bemerkung 3.18. Drei verschiedene Modelle liefern drei verschiedene Ergebnisse und weil der Aufsteller nicht weiß, was richtig ist, optiert er jeweils für den Extremwert. Man muss dem Aufsteller für seine Ehrlichkeit dankbar sein, aber die Statik und die finiten Elemente kommen dabei nicht gut weg.

Die Beurteilung und die Verifikation von FE-Ergebnissen ist – aus der Sicht der Praxis – ein sehr wichtiges Thema. Hier besteht ein großer Forschungsbedarf. Die Statik-Lehrstühle müssten nur den Mut haben sich mit diesen Problemen zu beschäftigen, dem guten Beispiel aus Graz folgen, [183], [184].

Bemerkung 3.19. Im *Wall Street Journal* vom 17. Februar 2022 wird berichtet, siehe Bild 3.164, dass in Manhattan *a gleaming new 57-story glass building under construction along the East River in the Financial District near the Brooklyn Bridge* sich um 3 *inches* zur Seite neigt und die Baumaßnahmen

[43] als würde es in „einem Guss“ hergestellt

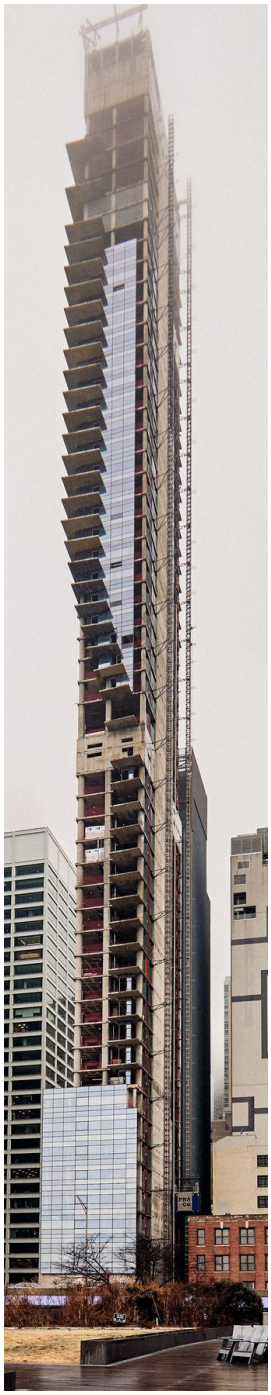


Bild 3.164. One Seaport apartment building in Manhattan, Photo by Zack DeZon for *The Wall Street Journal* 17. 2. 2022, seit 2019 ruhen die Arbeiten

(vorläufig?) eingestellt wurden. Why Nobody Can Fix This New York Skyscraper. Ähnliche Probleme gab es mit dem Millennium Tower in San Francisco. What Really Happened at the Millennium Tower?

3.84 Wie man auf $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ kommt

Wir wollen hier niemand beibringen, wie er ein FE-Programm zu schreiben hat, sondern wir wollen zusammenfassend den Gang der statischen und mathematischen Überlegungen darlegen, der letztendlich zu dem linearen Gleichungssystem $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ führt.

Beispielhaft soll die Differentialgleichung

$$-(EA(x)u'(x))' = p(x) \tag{3.394}$$

eines Stabes mit einem veränderlichen Querschnitt $A(x)$ gelöst werden. Der Stab sei links festgehalten, rechts frei, $u(0) = 0$ und $N(l) = 0$, und mit einer Streckenlast $p(x)$ belastet.

Zunächst braucht man die erste Greensche Identität, siehe (1.47),

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -(EA(x)\, u'(x))'\, \delta u(x)\, dx + [N\, \delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N \delta N}{EA(x)}\, dx = 0\,, \tag{3.395}$$

die mittels partieller Integration aus dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l -(EA(x)u'(x))'\delta u\, dx \tag{3.396}$$

entsteht. Es ist $N(x) = EA(x)\, u'(x)$.

Dann wählt man ein passendes Element, etwa ein lineares Element mit zwei Knoten auf dem zwei lineare Ansatzfunktionen

$$\varphi_1^e(x) = 1 - \frac{x}{l_e} \qquad \varphi_2^e(x) = \frac{x}{l_e} \tag{3.397}$$

definiert sind. Denkt man sich nun mehrere Elemente aneinander gereiht, dann kann man so *shape functions* $\varphi_i(x)$ generieren (*hat functions*), die im Knoten x_i den Wert 1 haben und in allen anderen Knoten den Wert null. Mit diesen Funktionen kann man beliebige Funktionen $u(x)$ über die Länge l des Stabes linear interpolieren

$$u_h(x) = \sum\nolimits_i u_i\, \varphi_i(x)\,. \tag{3.398}$$

Das soll auch gleich die Gestalt der noch zu findenden FE-Lösung sein, nur dass wir die *shape function* des ersten Knoten weg lassen, weil der Ansatz ja die wesentliche Randbedingung $u(0) = 0$ erfüllen muss.

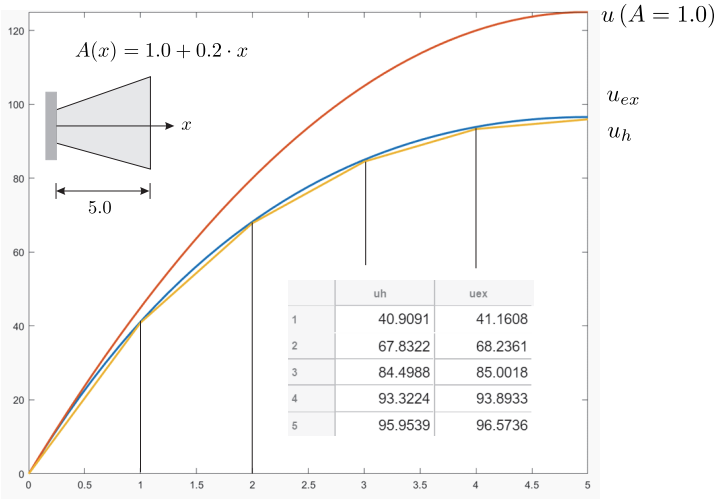


Bild 3.165. Konischer Stab, exakte Lösung u_{ex}, FE-Lösung u_h und Lösung bei konstantem Querschnitt $A = 1.0$, $E = 1.0$, Streckenlast $p = 10$ kN/m

Setzen wir in (3.395) für u die exakte Lösung und für $\delta u = \varphi_i(x)$ eine *shape function*, dann ergibt das wegen $\varphi_i(0) = 0$ und $N(l) = 0$

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx - \int_0^l EA(x)u'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx = 0\,. \tag{3.399}$$

Nun verlassen wir den Pfad der Tugend, denn wir nehmen an, dass man die exakte Lösung $u(x)$ wie in (3.398) mit den $\varphi_i(x)$ darstellen kann, was in der Regel leider nicht gilt. Trotzdem, wenn $u_h(x)$ die exakte Lösung wäre, dann müsste gelten

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(u_h, \varphi_i) &= \int_0^l p\,\varphi_i\,dx - \sum\nolimits_j \int_0^l EA(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx\,u_j \\ &= f_i - \sum\nolimits_j k_{ij}\,u_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n\,.\end{aligned} \tag{3.400}$$

Das sind n Gleichungen zur Bestimmung der u_j.

Unsere Aufgabe ist es daher die Einträge der Matrix $\boldsymbol{K}$ zu berechnen,

$$k_{ij} = \int_0^l EA(x)\varphi_j'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx\,, \tag{3.401}$$

also jedes $\varphi_i(x)$ mit jedem $\varphi_j(x)$ ‚energetisch' zu überlagern.

Praktisch macht man das elementweise, man überlagert also die lokalen *shape functions*

$$k_{ij}^e = \int_0^{l_e} EA(x)\,\varphi_i^{e\prime}\,\varphi_j^{e\prime}\,dx \tag{3.402}$$

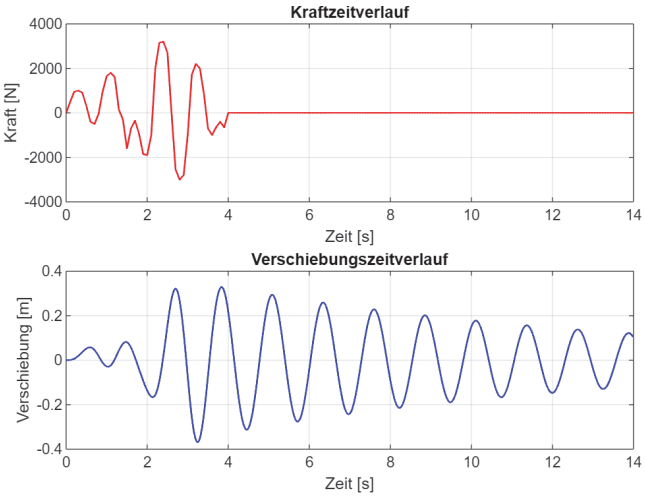


Bild 3.166. Anregung einer elastisch aufgehängten Masse (MATLAB™) [76]

– das bedeutet wegen $\varphi_i^{e\prime} = \pm 1/l_e$ (je nach Index i) –

$$\boldsymbol{K}_e = \frac{c_e}{l_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} EA(x)\, dx \tag{3.403}$$

und setzt das ganze dann gemäß dem Zusammenhang der Elemente zur globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ zusammen.

Bei n Ansätzen $\varphi_i(x)$ entspricht (3.400) einem System

$$\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f} \tag{3.404}$$

von n Gleichungen, das es erlaubt die Koeffizienten u_i in dem FE-Ansatz (3.398) zu berechnen, siehe Bild 3.165.

Die so gefundene Lösung (3.398) ist zwar nicht exakt, aber sie ist auf $\mathcal{V}_h$ die Lösung mit dem geringsten Fehler,

$$a(u - u_h, u - u_h) = \int_0^l EA(x)(u' - u_h')^2\, dx \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum} \tag{3.405}$$

der Fehler in der Wechselwirkungsenergie, dem ‚Fehlerquadrat der Spannungen', ist der kleinst mögliche. Ein Ansatz dessen Knotenwerte $\boldsymbol{u}$ nicht dem System (3.404) genügen, hat einen größeren Abstand. Gleichzeitig macht u_h die potentielle Energie $\Pi(u)$ auf $\mathcal{V}_h$ zum Minimum. Das $\boldsymbol{K u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ entspricht ja dem $f'(x) = 0$ in der Schulmathematik, und das $\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\delta u} > 0$ ($\boldsymbol{K}$ ist positiv definit, Eigenarbeit ist immer positiv) entspricht $\delta x^2 f''(x) > 0$, ein Schritt $\boldsymbol{\delta u}$ weg vom tiefsten Punkt. Der Startpunkt ist also die Differentialgleichung (DGL) und die darauf folgenden Schritte

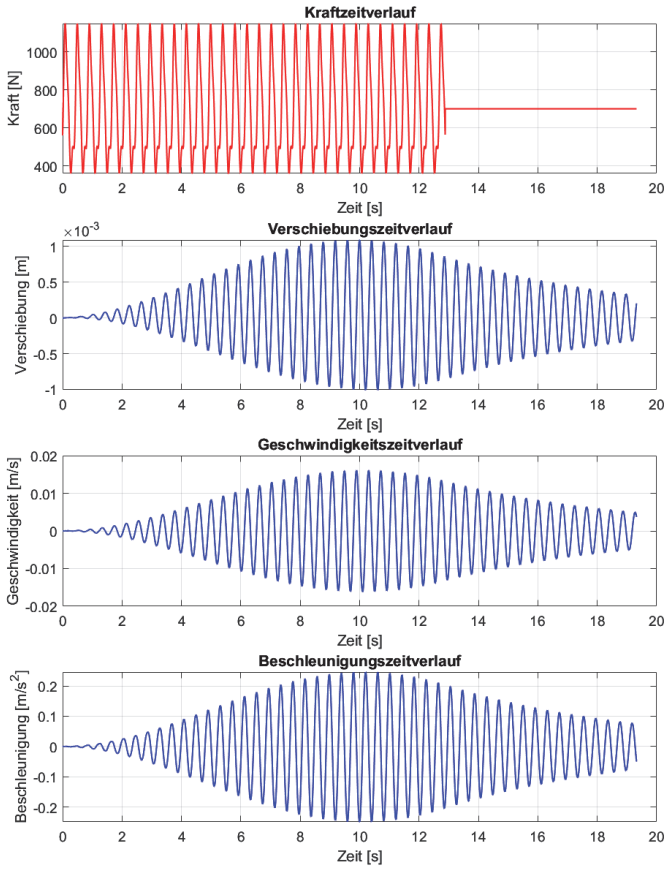


Bild 3.167. 2 Personen gehen über einen Einfeldträger (MATLAB™) [76]

$$\boxed{\text{DGL} \rightarrow \quad \mathscr{G}(u, \varphi_i) \rightarrow u_h = \sum_i u_i \varphi_i(x) \rightarrow \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}} \tag{3.406}$$

sind – wenn man so will – reine Algebra, wo es so scheint, als ob es gar nicht mehr darauf ankommt, was für ein Problem gelöst wird, denn die Schritte sind immer die gleichen.

Das gilt auch für **nichtlineare Probleme** – auch bei diesen gibt es eine Greensche Identität – nur ist das Gleichungssystem dann nicht mehr linear, siehe Kapitel 8.

3.85 Dynamische Probleme

Dynamische Probleme sind nicht das Thema des Buches, aber wir wollen trotzdem kurz die grundlegenden Gleichungen formulieren. Das Auf und Ab einer Punktmasse m, die an einer Feder mit der Steifigkeit k hängt, und von

einer Kraft $f(t)$ in Bewegung gehalten wird, siehe Bild 3.166,

$$m\,\ddot{u}(t) + k\,u(t) = f(t)\,, \tag{3.407}$$

verläuft, es ist $\omega = \sqrt{k/m}$, wie

$$u(t) = u(0)\,\cos(\omega t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\,\sin(\omega t) + \int_0^t \frac{1}{m\,\omega}\sin\omega(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.408}$$

Der Kern $g(t,\tau)$ in der Einflussfunktion, dem ***Duhamel-Integral***, ist die Impuls-Antwort auf einen plötzlichen Stoß, ein Dirac Delta, zum Zeitpunkt $t = 0$

$$m\,\ddot{g} + k\,g = \delta(t)\,. \tag{3.409}$$

Das $(t-\tau)$ in der Formel verschiebt den Stoß in den Zeitpunkt τ, zu dem die Kraft $f(\tau)\,d\tau$ auf die Feder wirkt. Die Kraft $f(\tau)$ wird also in lauter kleine Einzelstöße aufgelöst.

Modelliert man einen Rahmen als ein System von n Punktmassen m_k, die durch die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ aneinander gekoppelt sind, dann führt die Analyse der Eigenschwingungen auf das System, [235],

$$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\omega}_k^2\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.410}$$

wobei die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_k$ die Amplituden der n Eigenschwingungen $\boldsymbol{u}_k e^{i\,\omega_k t}$ sind. Weil die Eigenvektoren $\boldsymbol{M}$- bzw. $\boldsymbol{K}$-orthogonal sind

$$\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_j = 0 \qquad i \neq j \qquad\qquad \boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_j = 0 \qquad i \neq j\,, \tag{3.411}$$

kann man das System der n Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{3.412}$$

durch Multiplikation von links und rechts mit der Matrix der Eigenvektoren auf ein *entkoppeltes System* von n linearen Differentialgleichungen zurückführen, die man wie in (3.408) einzeln lösen kann, ***Modalanalyse***, siehe Bild 3.167.

Die Alternative zur Modalanalyse sind finite Differenzen, Zeit-Schritt-Verfahren wie Runge-Kutta, die die Lösung Schritt für Schritt aus den Anfangsdaten entwickeln, was bei nichtlinearen Problemen die einzig mögliche Strategie ist. Die Integralsätze, die zu Anfangswertproblemen gehören, wie einem dynamisch angeregten Balken

$$EI\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)\,, \tag{3.413}$$

sind wesentlich verschieden vom stationären Fall. Dem Satz von Betti entspricht bei dynamischen Problemen das **Theorem von Graffi**, [109], und

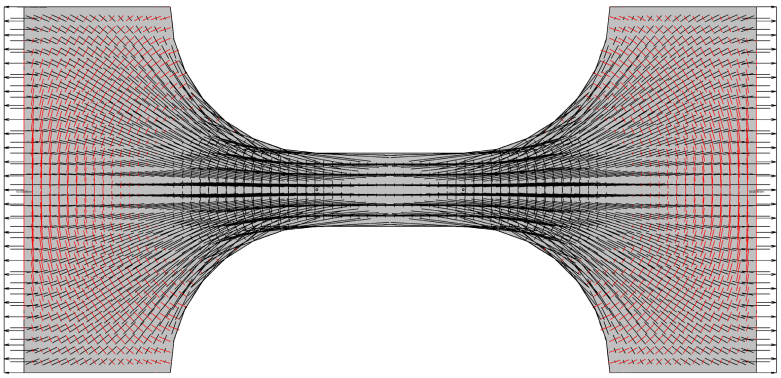


Bild 3.168. Das Fließen der Hauptspannungen (BE-SCHEIBE)

dem L_2-Skalarprodukt entspricht die Faltung. Das Duhamel-Integral ist ein Faltungsintegral. Die 2. Auflage von Petersen und Werkle [235] enthält eine umfangreiche Sammlung von MATLAB™ Routinen zur Dynamik [76].

3.86 Die Intelligenz der Funktionen

Was wir die Intelligenz des Materials nennen, siehe Bild 3.168, ist eigentlich die Intelligenz der Funktionen.

Jede C^1-Funktion längs einem Intervall $(0, l)$ besitzt die **Integraldarstellung**

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(y) \cdot 1 \, dy = \int_\Gamma \ldots + \int_\Omega \ldots \tag{3.414}$$

– das ist einfach nur partielle Integration – und jede C^2-Funktion in einem Gebiet Ω besitzt die **Integraldarstellung**, siehe Kapitel 9.33,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n} \, u(\boldsymbol{y})] \, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, (-\Delta u(\boldsymbol{y})) \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \, . \tag{3.415}$$

Der Kern $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -1/(2\,\pi) \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ ist die Fundamentallösung der Poissongleichung, $-\Delta g = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. (Der Kern oben ist die ***Heaviside-function*** $g = 1$ bis zum Punkt x). Im 3-D lautet die Fundamentallösung $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 1/(4\,\pi\, r)$. In (3.415) steckt die ganze Mathematik des Kontinuums.

Eine C^2-Funktion in einem Gebiet Ω ist also eindeutig durch ihren Randwert u, ihre ‚Spur' und die Normalableitung $\partial u/\partial n$ auf dem Rand Γ und die ‚Last' im Feld Ω, die Summe der negativ genommenen zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,11} + u_{,22}$, bestimmt, siehe Bild 3.169 und Bild 3.170.

Wir halten die Formel (3.415) für den Schlüssel zur Differential- und Integralrechnung: ***Gebiet, Rand*** und ***Funktion*** bilden, wie die Integralsätze ja

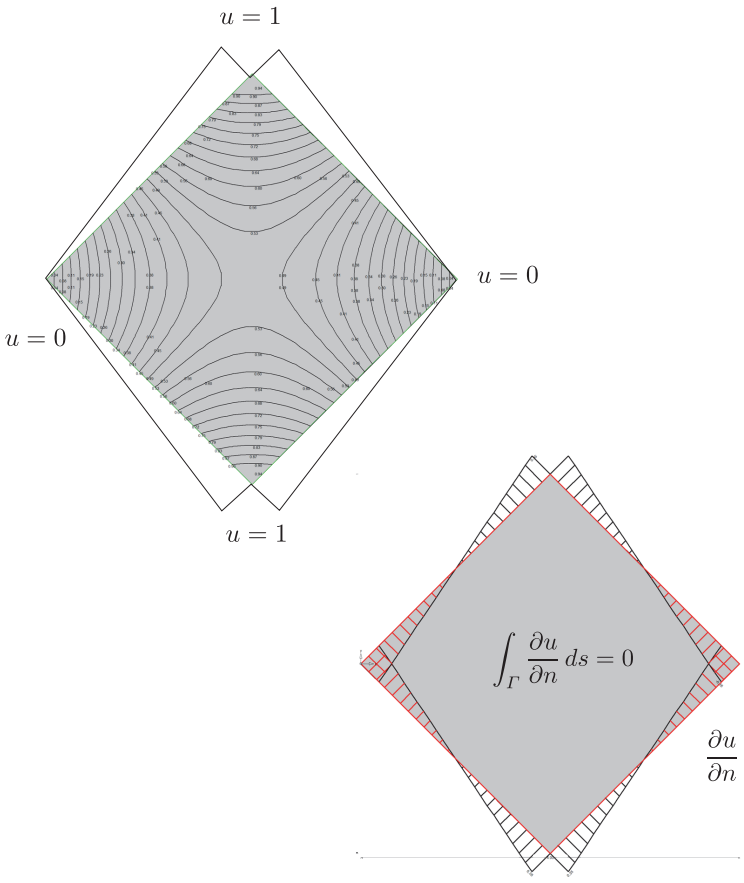


Bild 3.169. Die Randwerte u der Membran werden vorgegeben und die Lösung, eine Sattelfläche $-\Delta u = 0$, stellt sich automatisch so ein, dass das Integral der Normalableitung null ergibt – das ist die ‚Intelligenz' einer Funktion, sie denkt mit (BE-LAPLACE)

belegen, mathematisch eine Einheit und die finiten Elementen sind die logische Umsetzung dieser Idee

$$\text{Jede Funktion ist ein Element} = \text{Gebiet} + \text{Rand} + \text{Verformung}\,. \qquad (3.416)$$

Indem wir eine Funktion mit einer Differentialgleichung verknüpfen, die Funktion als Verformung lesen, wird aus der Funktion[44] ein Element. So haben die Ingenieure bei Boeing, *Turner et alt.* (1956) [296], die finiten Elemente gefunden. Sie haben physikalisch gedacht. Sie bauten ein Ersatzmodell und die Kopplung zwischen dem exakten und dem genäherten Modell beruhte auf

[44] also der Summe $u_h(x) = \sum_i u_i\, \varphi_i^e(x)$ der *shape functions*

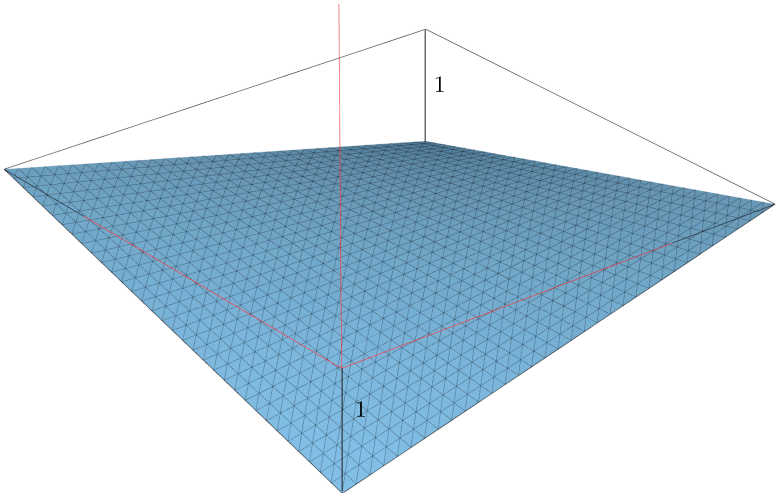


Bild 3.170. Die ausgelenkte Membran (BE-LAPLACE)

einer einfachen Ingenieur-Idee, der **Wackeläquivalenz**, gleiche Arbeit auf gleichen Wegen, siehe Kapitel 3.14.

Der Auslöser war nicht die Approximation von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch kurze Hütchen-Funktionen. Dieser ganze Apparat kam ja erst später, als die Mathematiker entdeckten, was die Ingenieure mit ihren finiten Elementen da eigentlich machten. Von dem Zeitpunkt ab ‚explodierte' die Literatur über die finiten Elemente.

Der Buchhalter, der die Punkte auf dem Papier mit einem Lineal verbindet, sieht nicht wie der Ingenieur, der in dem Polygonzug eine Seillinie erkennt, dass in den Ecken Knotenkräfte f_i wirken, und dass die Summe über alle Knicke $f_i = \tan\varphi_l(x_i) - \tan\varphi_r(x_i)$ null ist, weil die Gleichgewichtsbedingung das so vorschreibt. Und auf Grund seines statischen Verständnisses kann der Ingenieur die Knotenkräfte f_i in Streckenlasten umwandeln und so versuchen eine glattere (Seil)Kurve durch die Punkte des Buchhalters zu legen. Statik löst Interpolationsprobleme.

Plots bekommen ein ganz anderes Gesicht, wenn man die dargestellten Kurven und Flächen als Näherungslösungen von Differentialgleichungen ansieht, weil man damit automatisch den ganzen Apparat, wir sind versucht zu sagen, die ganze **Intelligenz** zur Verfügung hat, die in einer Differentialgleichung steckt.

Die trigonometrischen Funktionen $\sin(k\,x)$ und $\cos(k\,x)$ sind Eigenlösungen der Seilgleichung $-u'' = p$, denn $-\sin(k\,x)'' = k^2\,\sin(k\,x)$, also stellt jede Fourier-Reihe ein Seil unter oszillierender Belastung dar. Links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen dieselben Funktionen. Oder man denke an die *splines*, die Holzlineale des Schiffsbaus, die ihre Gutmütigkeit direkt der Balkengleichung $EI\,w^{IV}(x) = 0$ verdanken.

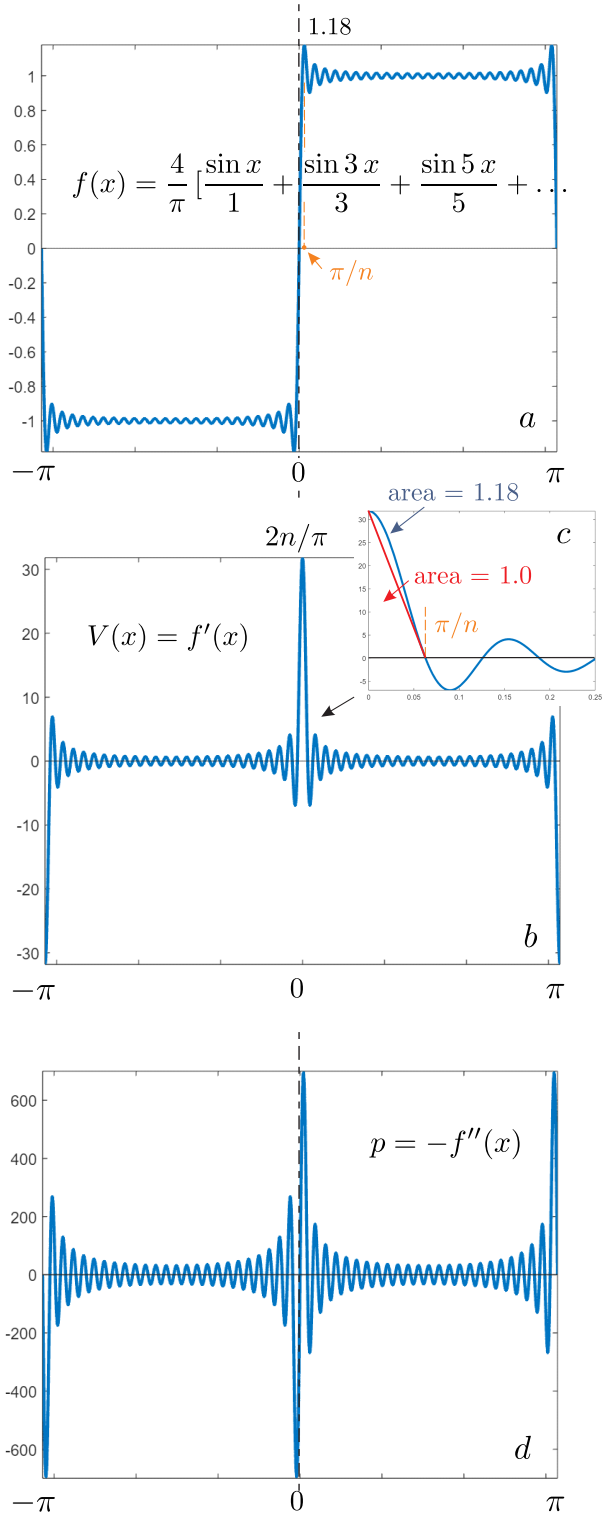


Bild 3.171. ***Gibb's phenomenon***, **a)** der Statiker sieht in der Box-Funktion ein ausgelenktes Seil, **c)** V im Detail, **d)** die zugehörige antimetrische Streckenlast (MATLAB™). Das rote Dreieck hat für alle n *area* $= 1$ und die Kurve $V(x)$ hat *area* $= 1.18$, max $f = 1.18$ in $x = \pi/n$, wo $f' = 0$ ist.

Uns scheint, dass wir, wenn wir weiterkommen wollen, **die Intelligenz, die in den Funktionen steckt**, besser ausnützen müssen; $h \to 0$ ist nur mangels besserer Ideen eine Lösung.

Und jetzt müssten wir eigentlich auch darüber sprechen, dass für Ingenieure Funktionen eine andere Bedeutung haben als für den Mathematiker, ja dass das Rechnen einen anderen Sinn hat. Jedes Statikbuch ist Beleg.

Lange bevor Finite Elemente ein Thema waren, haben Ingenieure mit *Cross* und *Kani* Stockwerkrahmen berechnet, große Systeme $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ iterativ von Hand gelöst. Gauss-Seidel war kein Thema, denn die Idee des Knotenausgleichs – *Knoten lösen, ausgleichen, sperren* und am nächsten Knoten die Schritte wiederholen – ist aus dem statischen Verständnis heraus entstanden, ist Statik ‚am lebendigen Tragwerk', ist Beleg, dass man (*we beg to differ*) Mathematik nicht allein den Mathematikern überlassen sollte.[45]

3.87 Das Gibbsche Phänomen – mit den Augen eines Statikers

Bei der Approximation der antimetrischen Box-Funktion in Bild 3.171 mit einer Fourierreihe ($n = 50$ Terme) kommt es an der Sprungstelle zu dem bekannten **Gibbschen Phänomen**. Der Statiker sieht ein Seil, und die negativ genommene zweite Ableitung der Reihe ist die Belastung, die dem Seil diese Form gibt

$$p(x) = -f''(x) = \frac{4}{\pi}\,[\sin x + 3\,\sin 3x + 5\,\sin 5x + \dots \tag{3.417}$$

Für den Verschiebungssprung braucht es jedoch sehr große antimetrische Kräfte, die (scheinbar) ein bißchen zu groß sind – aber anders geht es nicht. Der *overshoot* liegt an der Ausbuchtung von V nahe der Mitte $x = 0$, denn wenn man von der Mitte aus, $f(0) = 0$, nach rechts geht, steigt die Durchbiegung zunächst steil an

$$f(x) = \int_0^x V(y)\,dy\,, \tag{3.418}$$

und schießt über das Ziel 1 hinaus. Sobald aber die Oszillationen in $V = f'$ beginnen, siehe Bild 3.171 c, sinkt $f(x)$ wieder, und das Integral ändert seinen Wert dann im Rhythmus der Hebungen und Senkungen von V, behält aber eine mittlere Höhe von 1 bei. Ohne den *overshoot* würde $f(x)$ um einen tieferen Wert pendeln.

Die *area* $= 1/2 \cdot 2n/\pi \cdot \pi/n = 1$ des mit n immer steileren und schmaleren Dreiecks ist invariant und so wundert es nicht, dass auch der *overshoot*

[45] Wir wollen hier nicht einer ‚Wohlfühlmathematik' das Wort reden, der Sachverstand der Mathematiker ist unverzichtbar, aber ab und zu täte etwas mehr Phantasie doch gut, und es geht, wie *Gilbert Strang* gezeigt hat [282], [283], [286].

seinen Wert bis zum Ende $n \to \infty$ durchhält. Die $1.18 = 1.17911...$ ist das Erkennungszeichen von Gibb.

3.88 Der Kreis schließt sich



Bild 3.172. de Havilland Comet 1, *one of the three planes which crashed* [328]

Damit ist es nun an der Zeit den Kreis zu schließen. Die finiten Elemente sind keine ‚Knotenkraft-Methode' – wenigstens nicht im naiven Sinn – sondern eine **Energiemethode**. Die FE-Lösung und die exakte Lösung sind energetisch äquivalent, *shake equivalent*, $\delta W_e(p, \varphi_i) = \delta W_e(p_h, \varphi_i)$, hinsichtlich den Testfunktionen, den virtuellen Verrückungen φ_i.

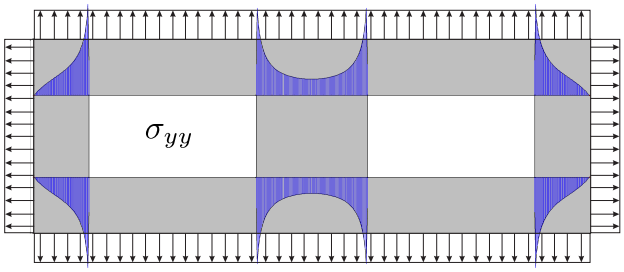


Bild 3.173. *Sharp-cornered cut-outs*, (BE-SCHEIBE), siehe auch Bild 6.24 und 6.25

Und ein zweites: Ein Moment $M(x)$ oder eine Durchbiegung $w(x)$ sind Punktwerte, Werte an einer Stelle x, die man gegebenenfalls mit dem Taschenrechner bestimmen kann, $w(x) = \sin(x)$. Kaum jemand denkt dabei an Einflussfunktionen, aber hinter ‚jeder' Zahl, jedem Punktwert steht – in der linearen Statik – eine Einflussfunktion, ein Wirkungsintegral, eine ***action***

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.419}$$

Jede Schnittgröße ist eine Energie

Was für den Automechaniker sein Messgerät und der Adapter unter dem Armaturenbrett sind, sind in der linearen Statik die Greenschen Funktionen mit denen der Ingenieur jeden Wert $J(u) = (G, p)$ auslesen kann.

Und das dritte: Die finiten Elemente sind ein *‚joint effort of Engineers and Mathematicians‘* (G. Strang), aber der entscheidende Auslöser für den Erfolg der finiten Elemente war der **Elementbegriff**. Die sich damit – wie natürlich – ergebende Basis aus **finiten Ansatzfunktionen**, *local basis functions*, war eine Folge des Elementbegriffs.

Das Element war der Beitrag der Ingenieure, der *structural engineers*, zu der Erfolgsgeschichte der finiten Elemente.

Das geht oft unter, wenn Mathematiker auf frühe Belege für das Rechnen mit finiten Funktionen verweisen, aber finite Funktionen sind nicht finite Elemente.

Der Geburtsfehler der finiten Elemente ist, dass die Ingenieure darunter finite Elemente verstehen und die Mathematiker finite ~~Elemente~~ Funktionen.

Finite Elemente ist mehr als die Idee den $\sin(x)$ durch Hütchenfunktionen zu ersetzen. Es ist die Reduktion eines Tragwerks auf ein exakt lösbares Modell. Es geht um die Statik, nicht um die Mathematik. Der Ingenieur will – das ist sein *impetus* – das statische Prinzip verstehen, das hinter einem Ansatz steht. Nur dann hat er Vertrauen in die Berechnung.

Auch wenn man die finiten Elemente gar nicht erwähnt, sondern einfach nur die *shape functions* als Ansatz benutzt,

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \sum\nolimits_i u_i \, \varphi_i(\boldsymbol{x}) \,, \tag{3.420}$$

und *Galerkin* (Projektion) oder *Ritz* (Minimum) folgt, kommt man auf das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. Aber es ist ein ‚mageres‘ Ergebnis, fehlt doch die statische Einsicht, die der Zugang über die finiten Elementen so glücklich gewährt.

Die finiten Elemente machen aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ Statik.

Nicht die *fashionable* neue Numerik, das Rechnen mit finiten Funktionen, *Courant's* (zu) oft zitierte Hütchenfunktionen, (denn es gab doch diverse Vorläufer [10]), war daher das neue, sondern die Einsicht, dass man

- eine Scheibe, eine Platte in kleine Elemente unterteilen kann
- und mittels der ‚Wackeläquivalenz‘ $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ die Struktur und das Modell ‚ins Gleiche‘ setzen kann.

So haben *M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp* es 1956 formuliert [296].

Natürlich ist $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ identisch mit $\delta \Pi = 0$, aber die Gleichung kommt aus der Anschauung, aus dem statischen Gefühl, und ist nicht, wie die zweite, eine Forderung der Mathematik. Als die Ingenieure ihr Modell betrachteten, war ihre erste Sorge ja nicht die Mathematik – die Gleichungen ließen sich ja nicht lösen – sondern sie wollten sicher gehen, dass das **Modell** in seinem Verhalten dem **Original** möglichst ähnlich war, ‚die Statik stimmte‘. Und bei

diesem Suchen und Wägen wurde – die Idee geht wohl auf Turner zurück – in einem *Heureka-Moment* technisch das finite Element geboren, [53].

Man erinnere sich an die Unglücksserie der de Havilland Comet, siehe Bild 3.172, Jan. 1954 (also ein Jahr vorher, *manuscript received June 29, 1955, lecture 1954*), wo *metal fatigue... particularly around sharp-cornered cut-outs*, wie in Bild 3.173 die Ursache für drei Abstürze innerhalb von 12 Monaten war. Vor diesem ernsten Hintergrund fand die Entwicklung der finiten Elemente bei Boeing statt, [273]. *It took courage.*

Auch die Mathematiker kamen erst später, aber dann mit Wucht, als sie die FEM als ‚Spielwiese' – man kann es eigentlich nicht anders nennen – für sich entdeckten. Und die Ingenieure haben davon profitiert.

Versuchen wir zum Schluss einem Mathematiker den Unterschied zwischen finiten Elementen und finiten Funktionen zu erklären!

Den Ingenieuren bei Boeing ging es darum ein **lösbares Ersatzmodell** zu finden. Und sie kannten das Drehwinkelverfahren. Die Zerlegung eines Tragwerks in Platten, Scheiben, Stützen, Balken war immer schon Vereinfachung, Modellreduktion. Neu war der Gedanke die Bauteile weiter zu unterteilen und die Elemente in ihren Bewegungen **zu restringieren**. Erlaubt sind nur noch Verformungen $u_h = \sum_i u_i \, \varphi_i(x)$, die sich durch die *shape functions* darstellen lassen. *The FE-model is a kinematically reduced copy of the structure.*

Die glückliche Idee der vier Ingenieure war es, das **Original** und das **Modell**, *the crippled structure*, mittels der **Wackeläquivalenz** ‚ins Gleiche' zu setzen[46]. Die rechte Seite der FE-Lösung, $Lu_h = p_h = \sum_i u_i p_i$, ist eine Entwicklung nach den *shape forces* p_i und die u_i werden so ausgewählt, dass der LF p und der LF p_h wackeläquivalent sind

$$\delta W_e(p, \varphi_i) = f_i = f_{hi} = \delta W_e(p_h, \varphi_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,, \tag{3.421}$$

und diesen Lastfall p_h lösen die finiten Elemente **exakt**. Die FE-Lösung ist nicht die Näherungslösung einer Differentialgleichung[47], sondern sie ist die exakte Lösung eines wackeläquivalenten Lastfalls p_h. FEM ist $\mathcal{V}_h + \mathcal{V}_h^*$, denn mit $\mathcal{V}_h$ wählt man die auf dem *trial space* lösbaren Lastfälle $\mathcal{V}_h^*$ mit.

Die FEM ist im Grunde eine Fortsetzung des Drehwinkelverfahrens der Stabstatik in höhere Dimensionen.

Das schöne ist, dass $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_h$ äquivalent damit ist, dass die FE-Lösung das Fehlerquadrat $a(u - u_h, u - u_h)$ der Spannungen zum Minimum macht. Wahrscheinlich haben die Autoren das von Anfang an gewusst oder sie sind erst später darauf gekommen, sei es wie es sei, diese **Doppelbedeutung** ist wie Lego, man kann sich jede gewünschte Paarung aussuchen

$$\delta W_e(p, \varphi_i) = \delta W_i(u, \varphi_i) = \delta W_i(u_h, \varphi_i) = \delta W_e(p_h, \varphi_i) \,. \tag{3.422}$$

Jede kann mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ identifiziert werden.

[46] ‚ins Gleiche setzen' (Goethe)

[47] Diesen ganzen Apparat haben die Mathematiker ja erst später der FEM übergestülpt und dabei ging die ursprüngliche Ingenieur-Idee verloren.

Für die Mathematiker war es natürlich ein leichtes, die Idee der vier Ingenieure in Mathematik zurück zu übersetzen, *Wackeläquivalenz* ist *Projektion* ist *Orthogonalität*, aber die Mathematiker sollten einsehen, dass es dem Ingenieur um die Statik, um **den statischen Gehalt**, die Tauglichkeit des Modells geht. Orthogonalität ist ein dürres Wort, aber Wackeläquivalenz versteht auch der Passant auf der Straße und die Marktfrau sowieso – Wackeläquivalenz ist eine statische Idee – und für den Ingenieur ist das statische Verständnis die ***conditio sine qua non***, denn er haftet am Ende mit seiner Unterschrift; er weiß: 1 m^3 Beton wiegt 25 kN.

Bemerkung 3.20. Mit dem Drehwinkelverfahren war im Grunde alles vorgespurt. Die Mathematiker hätten nur in die Statikbücher schauen dürfen.

Das Drehwinkelverfahren beruht auf dem *split*

$$w(x) = w_n(x) + w_p(x) = \sum\nolimits_i w_i \varphi_i(x) + w_p(x)\,, \tag{3.423}$$

der Aufspaltung der Balkenlösung in die homogene Lösung w_n (Null-Lsg.) und die partikuläre Lösung w_p (*fixed ends*). Die homogene Lösung ist eine Entwicklung nach den Einheitsverformungen φ_i der Endknoten und die Knotenverformungen w_i sind die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$. Die $f_i = (p, \varphi_i)$ sind die äquivalenten Knotenkräfte, sind die in die Knoten ‚reduzierten' Lasten im Feld.

Hier taucht zum ersten Mal der Begriff der **äquivalenten Knotenkraft** auf, hier wechselt die Statik – kaum bemerkt – die ‚Spur'. Die virtuelle Arbeit (p, φ_i), das Skalarprodukt wird zum Maß. Es ist dies der Schritt, der später vom Gleichgewicht im Punkt, am infinitesimalen Element, zur schwachen Lösung führt. Im Drehwinkelverfahren ist er angelegt.

Bemerkung 3.21. Wenn der Ingenieur beim Drehwinkelverfahren die Knoten ausgleicht, dann stellt er das Gleichgewicht zwischen den *push-stop* Kräften $\boldsymbol{f}_i$ (den Spalten von $\boldsymbol{K}$) und dem Vektor $\boldsymbol{f}$ der äußeren Knotenkräfte her, siehe Kapitel 3.47

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{f}_1 + u_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + u_n \boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{f}\,. \tag{3.424}$$

Das macht er iterativ und wenn man so will ‚verkürzt', weil er ja nicht in Wegen u_i denkt, sondern gleich in den daraus resultierenden Kräften und Momenten, den $k_{ij}u_j$, die als Anschlusskräfte am jeweiligen Knoten in Richtung des Freiheitsgrades u_i ihren Ausgleich mit der äußeren Knotenkraft f_i finden müssen.

Die Zeile i von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ ist das Gleichgewicht zwischen den Anschlusskräften $k_{ij}u_j$ in Richtung von u_i am Knoten mit dem Freiheitsgrad u_i und der äußeren Knotenkraft f_i; es ist $k_{ij} = 0$, wenn u_i und u_j nicht Nachbarn sind.

4

Betti Extended

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir die Tatsache benutzt, dass die FE-Lösung $u_h(x)$ die Überlagerung der **genäherten Einflussfunktion** $G_h(y,x)$ mit der Belastung $p(y)$ ist

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy\,. \tag{4.1}$$

Diese für die finiten Elemente zentrale Gleichung beruht auf einem Satz, den wir *Betti extended* nennen.

Theorem 4.1 (Betti extended). *Man darf in dem* Satz von Betti – *bei Beibehaltung der Belastung – die exakten Lösungen u_1 und u_2 durch ihre FE-Lösungen u_{1h} und u_{2h} ersetzen.*

Mit

$$W_{1,2} = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_2}\,dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_1}\,dx = W_{2,1} \tag{4.2}$$

gilt auch die Gleichung

$$W^h_{1,2} = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_{2h}}\,dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_{1h}}\,dx = W^h_{2,1}\,. \tag{4.3}$$

Die Behauptung ist nicht, dass $W_{1,2} = W^h_{1,2}$, sondern nur: Mit $W_{1,2} = W_{2,1}$ gilt auch $W^h_{1,2} = W^h_{2,1}$, also

$$(p_1,u_2) = (p_2,u_1) \qquad \Rightarrow \qquad (p_1,u_{2h}) = (p_2,u_{1h})\,. \tag{4.4}$$

Die Bedeutung von *Betti extended* macht man sich am einfachsten an Hand des ***Satzes von Maxwell*** klar, siehe Bild 4.1, der ja nur eine spezielle Variante des *Satzes von Betti* ist

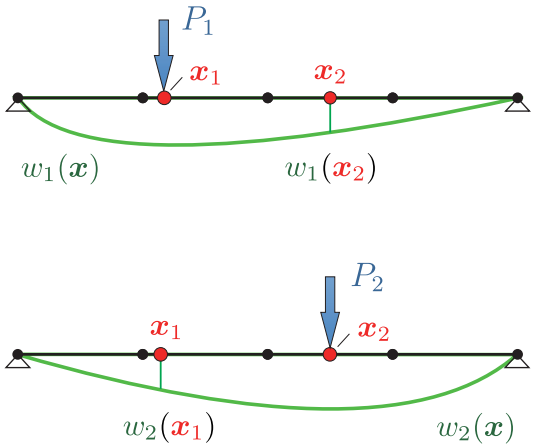


Bild 4.1. Der Satz von Maxwell bei zwei Plattenstreifen

$$P_1 \cdot w_2(\boldsymbol{x}_1) = P_2 \cdot w_1(\boldsymbol{x}_2)\,. \tag{4.5}$$

Wenn man die beiden Biegeflächen $w_1(\boldsymbol{x})$ und $w_2(\boldsymbol{x})$ mit finiten Elementen berechnet, dann sind die Durchbiegungen in den beiden Punkten $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ nur Näherungen, sie sind nicht exakt,

$$w_{1h}(\boldsymbol{x}_2) \neq w_1(\boldsymbol{x}_2) \qquad w_{2h}(\boldsymbol{x}_1) \neq w_2(\boldsymbol{x}_1)\,, \tag{4.6}$$

aber der *Satz von Betti*, das ‚über Kreuz gleich', gilt gemäß *Betti extended* auch für die Näherungen

$$P_1 \cdot w_{2h}(\boldsymbol{x}_1) = P_2 \cdot w_{1h}(\boldsymbol{x}_2)\,. \tag{4.7}$$

Auch die ‚falschen' Durchbiegungen sind also ‚gegengleich'.

Damit ist obendrein gezeigt, **dass der *Satz von Maxwell* auch für FE-Lösungen gilt**, man setze $P_1 = P_2 = 1$, was ja nicht unbedingt selbstverständlich ist. Für die Knotenwerte musste er – wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen – gelten, das war klar. *Betti extended* garantiert dies aber auch für alle Punkte dazwischen.

4.1 Beweis

Der Beweis von ***Betti extended*** beruht auf den beiden Gleichungen, siehe (9.101),

$$\int_\Omega p_{1h} \cdot u_{2h}\, d\Omega = \int_\Omega p_1 \cdot u_{2h}\, d\Omega \tag{4.8a}$$

$$\int_\Omega p_{2h} \cdot u_{1h}\, d\Omega = \int_\Omega p_2 \cdot u_{1h}\, d\Omega\,, \tag{4.8b}$$

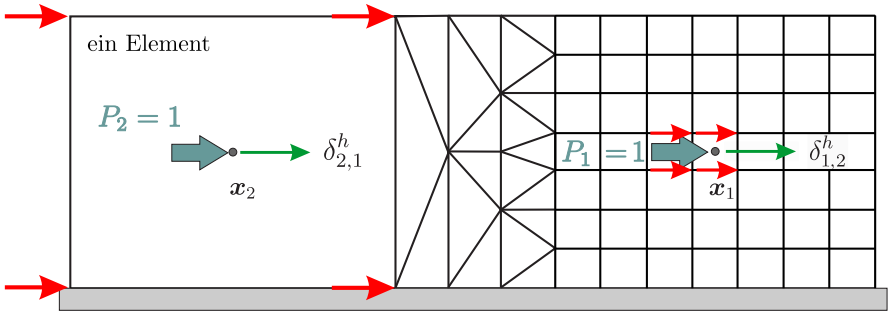


Bild 4.2. Das FE-Programm ersetzt bei der Berechnung von $\boldsymbol{u}_1^h$ und $\boldsymbol{u}_2^h$ die Kräfte P_1 und P_2 durch abliegende ‚Knotenkräfte' f_i, aber trotzdem ist $\delta^h_{2,1} = \delta^h_{1,2}$.

und dem ***Satz von Betti***

$$\mathscr{B}(u_{1h}, u_{2h}) = \int_\Omega p_{1h} \cdot u_{2h} d\Omega - \int_\Omega p_{2h} \cdot u_{1h} d\Omega = 0\,, \tag{4.9}$$

so dass

$$\int_\Omega p_1 \cdot u_{2h} d\Omega = \int_\Omega p_{1h} \cdot u_{2h} d\Omega = \int_\Omega p_{2h} \cdot u_{1h} d\Omega = \int_\Omega p_2 \cdot u_{1h} d\Omega\,, \tag{4.10}$$

oder

$$\boxed{\int_\Omega p_1 \cdot u_{2h} d\Omega = \int_\Omega p_2 \cdot u_{1h} d\Omega} \tag{4.11}$$

was die Erweiterung von

$$\int_\Omega p_1 \cdot u_2 d\Omega = \int_\Omega p_2 \cdot u_1 d\Omega \tag{4.12}$$

auf die FE-Lösungen ist.

Zu (4.8a) kommt man wie folgt: Die *Galerkin-Orthogonalität* besagt

$$\delta W_i = a(u_1 - u_{1h}, \varphi_i) = 0 \tag{4.13}$$

oder, wenn man das mit äußerer statt mit innerer Arbeit schreibt, $\delta W_i = \delta W_e$,

$$\int_\Omega (p_1 - p_{1h})\, \varphi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega (p_1 - p_{1h})\, u_{2h} d\Omega = 0\,, \tag{4.14}$$

weil ja u_{2h} eine Linearkombination der φ_i ist. Dasselbe gilt auch für die zweite Gleichung (4.8b).

Mit *Betti extended* ist der **Beweis der zentralen Gleichung** (4.1) sehr einfach, denn in der Einflussfunktion für $u(x)$

$$W_{1,2} = 1 \cdot u(x) = \int_0^l \delta(y-x)\, u(y)\, dy = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy = W_{2,1} \tag{4.15}$$

darf man u und G durch die FE-Lösungen u_h und G_h ersetzen

$$W_{1,2}^h = \int_0^l \delta(y-x)\, \underset{\uparrow}{u_h}(y)\, dy = \int_0^l \underset{\uparrow}{G_h}(y,x)\, p(y)\, dy = W_{2,1}^h \tag{4.16}$$

und somit gilt

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{4.17}$$

Diese **Substitutionen**, $u \to u_h$ und $G \to G_h$, lassen sich bei allen linearen Funktionalen

$$J(u) = \int_0^l \delta(y-y)\, u(y)\, dy = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{4.18}$$

vornehmen, man darf also jederzeit die Wege u und $G(y,x)$ durch ihre FE-Näherungen ersetzen und kommt so auf

$$J(u_h) = \int_0^l \delta(y-y)\, u_h(y)\, dy = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{4.19}$$

Bei dieser Gelegenheit wollen wir auch noch einmal auf das Beispiel aus Kapitel 2, Bild 2.50, zurückkommen. Wegen *Betti extended* gilt der Satz von Maxwell $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ auch für die FE-Lösungen, $\delta_{1,2}^h = \delta_{2,1}^h$.

Ausführlicher heißt das – wir schreiben alles skalar – und in $\boldsymbol{x}_i$ stehen die Lasten $P_i = 1$ und in den Punkten $\boldsymbol{x}_i$ werden die Verschiebungen gemessen

$$\delta_{1,2}^h = \int_\Omega \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1)\, G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = G_h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \tag{4.20a}$$

$$\delta_{2,1}^h = \int_\Omega \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_2)\, G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = G_h(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \tag{4.20b}$$

und wegen $\delta_{1,2}^h = \delta_{2,1}^h$ sind die beiden Lösungen ‚gegengleich'

$$G_h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = G_h(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)\,. \tag{4.21}$$

Bemerkenswert ist dabei, dass der LF $P_2 = 1$ durch vier Knotenkräfte f_i ersetzt wird (die keine Knotenkräfte sind) und ebenso der LF P_1, siehe Bild 4.2. Es wirken also gar keine Kräfte P_1 und P_2 in den beiden Aufpunkten, aber trotzdem sind – *in absentia* der P_i – die Verschiebungen gleich.

Das ist ‚griffig' formuliert, aber trotzdem ‚schief'. Die f_i sind ja Rechenpfennige, keine Knotenkräfte. Es wirken keine Kräfte in den Knoten, sondern in dem System stecken gewisse Energien – die $f_i = (\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i)$ sind Indikatoren dieser Energien – und diese Energien machen, dass $\delta_{1,2}^h = \delta_{2,1}^h$.

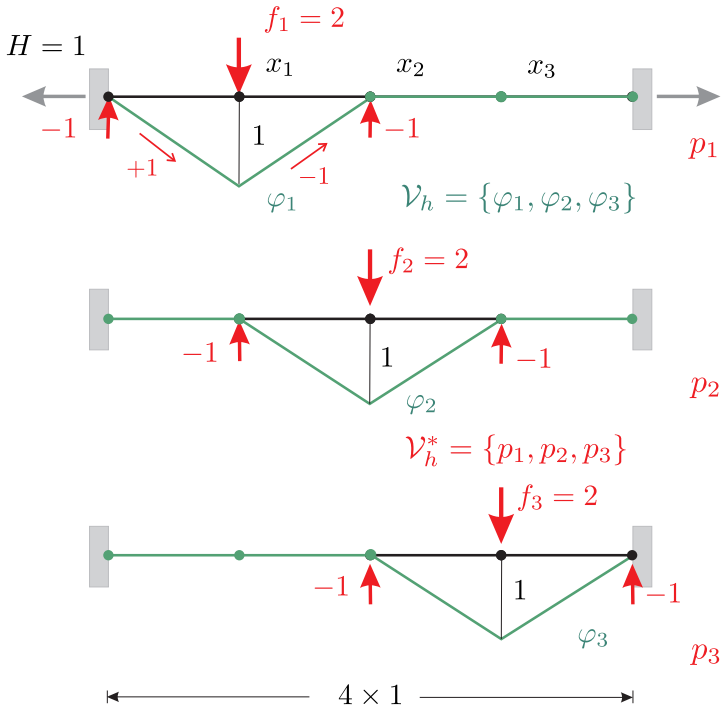


Bild 4.3. Die *shape functions* φ_i bilden den $\mathcal{V}_h$ und die *shape forces* p_i den $\mathcal{V}_h^*$

4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?

Mit Hilfe von *Betti extended* haben wir nun auch Klarheit darüber, wann und wo FE-Ergebnisse exakt sind.

Wir studieren diese Frage an einem vorgespannten Seil dessen Durchbiegung w wir, in Anlehnung an die FE-Notation, hier mit dem Buchstaben u bezeichnen.

Die Einflussfunktion $G(y, x)$ für die Durchbiegung des Seils, siehe Bild 4.4, in dem Punkt $x = 1.5$ ist die Antwort des Seils auf eine Einzelkraft $P = 1$, ein **Dirac Delta** $\delta(y - x)$.

Die Einzelkraft zwischen den zwei Knoten kann das FE-Programm nicht darstellen und so setzt es statt dessen zwei halb so große Einzelkräfte in die beiden Nachbarknoten. Dies ist – in unserer Notation – der Lastfall $\delta_h(y, x)$ und die zugehörige Durchbiegung $G_h(y, x)$ ist die genäherte Einflussfunktion.

Es gibt also **zwei Dirac Deltas**, das exakte und das genäherte

$$\delta(y - x) \quad \downarrow \qquad \delta_h(y - x) \quad \frac{1}{2} \downarrow + \frac{1}{2} \downarrow \tag{4.22}$$

und ebenso **zwei Einflussfunktionen**

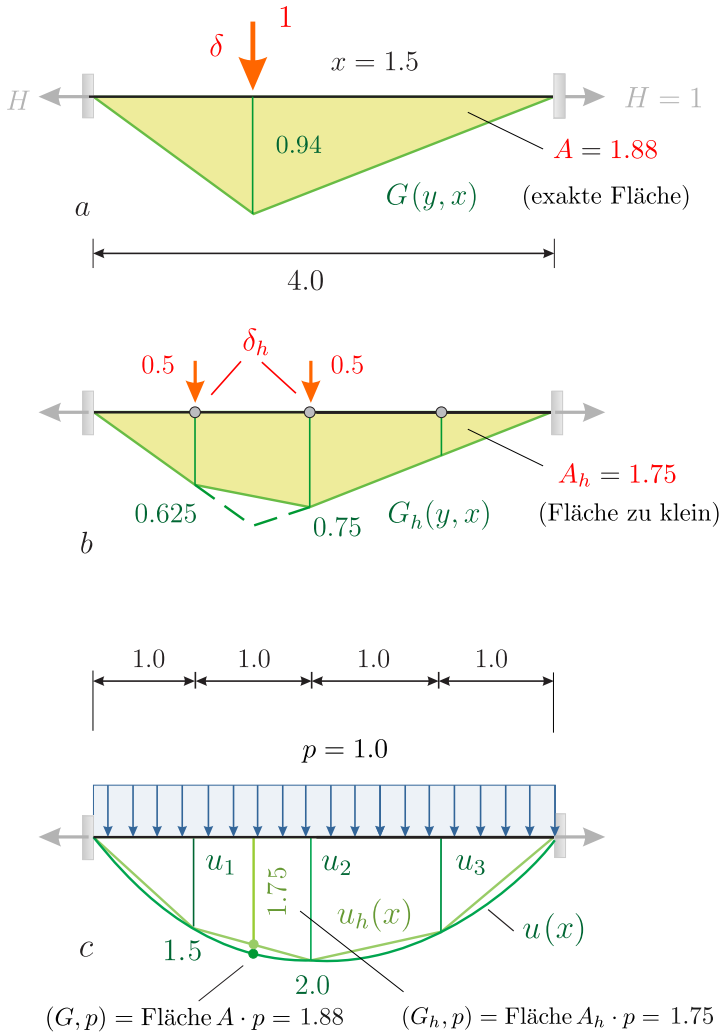


Bild 4.4. Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt $x = 1.5$, **a)** exakte Einflussfunktion, **b)** genäherte Einflussfunktion **c)** FE-Lösung unter Gleichlast $p = 1$

$$G(y,x) \quad \text{(ein Knick)} \qquad G_h(y,x) \quad \text{(zwei Knicke)}\,. \tag{4.23}$$

Mit finiten Elementen suchen wir eine Näherungslösung in dem LF p (Streckenlast) für den Seildurchhang auf dem Raum $\mathcal{V}_h$, siehe Bild 4.3, also all den Polygonzügen (Seilecken), die mit den drei $\varphi_i(x)$ dargestellt werden können. Spiegelbildlich zu diesem Raum gibt es einen **dualen Raum** $\mathcal{V}_h^*$, der all die Lastfälle, die die Seilecke in $\mathcal{V}_h$ erzeugen, enthält; also alle Lastfälle mit Kräften f_1, f_2, f_3 in den drei Knoten.

Es gilt nun: Wenn eine Funktion u_h in $\mathcal{V}_h$ liegt (also ein Seileck ist), dann ist das genäherte Dirac Delta (2 halbe Einzelkräfte) so gut, wie das exakte Dirac Delta (eine Einzelkraft)

$$u_h(x) = \int_0^l \delta(y-x)\,u_h(y)\,dy = \int_0^l \underset{\uparrow}{\delta_h}(y-x)\,u_h(y)\,dy\,. \tag{4.24}$$

Konkret heißt das also hier

$$1 \cdot u_h(x) = \frac{1}{2} \cdot u_h(x_1) + \frac{1}{2} \cdot u_h(x_2)\,, \tag{4.25}$$

was einleuchtet, weil der Wert einer Geraden zwischen zwei Knoten gerade der Mittelwert der Knotenwerte ist.

Und weil der **FE-Lastfall** p_h in $\mathcal{V}_h^*$ liegt, also aus drei Knotenkräften besteht, ist die genäherte Einflussfunktion $G_h(y,x)$ so gut wie die exakte

$$u_h(x) = \int_0^l G(y,x)p_h(y)\,dy = \int_0^l \underset{\uparrow}{G_h}(y,x)p_h(y)\,dy\,. \tag{4.26}$$

Auch das ist einfach zu verstehen. Weil der Lastfall p_h nur aus Knotenlasten f_i besteht, wird bei der Auswertung der Einflussfunktion nicht integriert, sondern mit den Knotenlasten multipliziert

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)p_h(y)\,dy = \sum_{i=1}^{3} G_h(y_i,x)\cdot f_i\,. \tag{4.27}$$

Die drei FE-Einflussfunktionen für die Durchbiegung der drei Knoten y_i sind aber exakt, $G_h(y_i,x) = G(y_i,x)$ und das erklärt, warum (4.27) in jedem Punkt x genau den richtigen Wert $u_h(x)$ liefert.

Auf $\mathcal{V}_h$ bzw. $\mathcal{V}_h^*$ sind die Ergebnisse, die man mit den Näherungen $\delta_h(y,x)$ bzw. $G_h(y,x)$ erzielt, exakt.

Um dieses Ergebnis richtig zu würdigen, muss man verstehen, dass mit u_h hier nicht notwendig die FE-Lösung gemeint ist, sondern dass u_h eine **beliebige** Funktion aus $\mathcal{V}_h$ sein kann.

Das genäherte Dirac Delta δ_h ist auf $\mathcal{V}_h$ also so gut, wie das exakte, denn (4.24) gilt für alle $u_h \in \mathcal{V}_h$. Und ist p_h der Lastfall, der dem Seil die Gestalt u_h gibt, dann kann man mit der genäherten Einflussfunktion $G_h(y,x)$ den Wert $u_h(x)$ aus $p_h = \{f_1, f_2, f_3\}$ berechnen. Dies ist der Inhalt von (4.27).

Es geht aber noch weiter. Das genährte Dirac Delta, also die beiden ‚halben' Punktlasten, stellt ja ein eigenes Funktional dar

$$J_h(u) = \int_0^l \delta_h(y-x)\,u(y)\,dy = \frac{1}{2}\left(u(x_1) + u(x_2)\right), \tag{4.28}$$

das man auf beliebige Funktionen anwenden kann – nicht nur auf die Seilecke in $\mathcal{V}_h$. Angewandt auf $u(x) = \sin(\pi\, x/4)$ erhält man z.Bsp. den Wert

$$J_h(u) = \frac{1}{2}\,(\sin\frac{1.0\,\pi}{4} + \sin\frac{2.0\,\pi}{4}) = 0.85\,, \tag{4.29}$$

während $J(u) = \sin(1.5\,\pi/4) = 0.92$ ist. Die Messungen mit J und J_h fallen also unterschiedlich aus.

Mit Blick auf die exakte Lösung $u(x)$ und die FE-Näherung $u_h(x)$ gilt jedoch der ***h-Vertauschungssatz***

$$\boxed{J_h(u) = J(u_h)}\,, \tag{4.30}$$

die wir im Falle des Seils auch leicht verifizieren können

$$J_h(u) = \frac{1}{2}\,(u(1.0) + u(2.0)) = \frac{1}{2}\,(1.5 + 2.0) = 1.75 \tag{4.31}$$

$$J(u_h) = u_h(1.5) = 1.75\,. \tag{4.32}$$

Das Funktional $J_h(u)$ misst u in den beiden Punkten $x = 1.0$ und $x = 2.0$, während das Funktional $J(u_h)$ die Biegelinie u_h nur im Aufpunkt $x = 1.5$ misst. **Aber beide Messergebnisse sind gleich!**

Der Vertauschungssatz basiert auf der Tatsache, dass eine FE-Lösung auf sechs verschiedene Arten darstellbar ist

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G(y,x)p_h(y)\,dy = \int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy = \int_0^l G_h(y,x)p_h(y)\,dy \\ &= \int_0^l \delta(y,x)u_h(y)\,dy = \int_0^l \delta_h(y,x)u_h(y)\,dy = \int_0^l \delta_h(y,x)u(y)\,dy\,, \end{aligned} \tag{4.33}$$

und wenn wir noch die Formeln

$$u_h(x) = a(G,u_h) = a(G_h,u_h) = a(G_h,u) \tag{4.34}$$

mitzählen, die im Grunde **Varianten der Mohrschen Arbeitsgleichung** sind, sind es sogar neun.

Auf den ersten beiden Gleichungen

$$J(u_h) = \int_0^l G(y,x)p_h(y)\,dy = \int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy = J_h(u) \tag{4.35}$$

basiert der h-Vertauschungssatz, wobei wir statt $u_h(x)$ gleich $J(u_h)$ geschrieben haben, denn (4.33) gilt ja nicht nur für das Punktfunktional $J(u) = u(x)$, sondern für jedes lineare Funktional J.

Ob man die exakte Einflussfunktion G mit den FE-Lasten p_h überlagert, oder die genäherte Einflussfunktion G_h mit der Originalbelastung p, macht keinen Unterschied – das Resultat ist dasselbe.

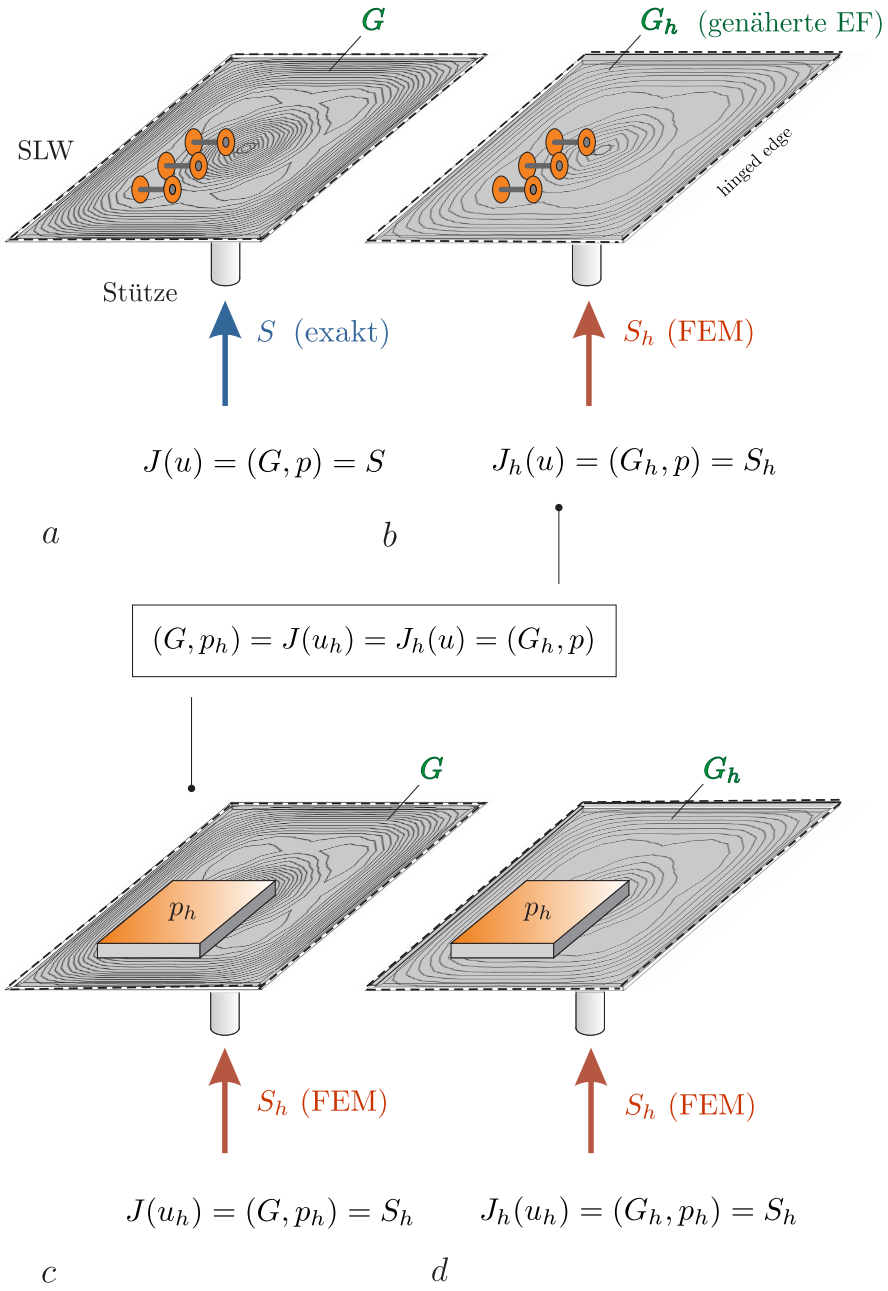


Bild 4.5. a) Gelenkig gelagerte Platte mit zentrischer Stütze, **b)** wenn man die sechs Räder des SLW, LF p, auf die genäherte Einflussfläche G_h stellt, erhält man die Stützenkraft S_h der FE-Lösung, **c)** dasselbe Ergebnis erhält man aber auch, wenn man die FE-Belastung p_h (hier symbolisch als Blocklast) auf die exakte Einflussfläche stellt, **d)** ebenso gilt $S_h = (G_h, p_h) = (G_h, p)$ wie in Bild *b*

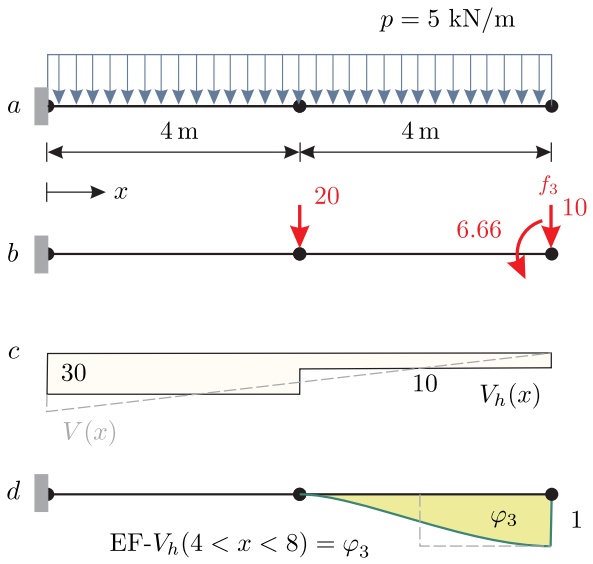


Bild 4.6. a) Kragarm, **b)** Knotenkräfte, **c)** FE-Querkraft, **d)** Einflussfunktion für $V_h(x)$ im zweiten Element. Sie ist für alle Punkte $4 < x < 8$ die gleiche.

Bild 4.5 demonstriert dies am Beispiel einer Platte, auf der ein Schwerlastwagen (SLW) steht. Dargestellt ist die exakte Einflussfläche für die Stützenkraft, Bild 4.5 *a*, und die genäherte, Bild 4.5 *b*. Die Radlasten des SLW stellen den LF p dar, und die Blocklast soll symbolisch für den FE-Lastfall p_h stehen. Es gibt nur eine Formel für die exakte Stützenkraft

$$S = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.36}$$

aber **drei Möglichkeiten**, die Näherung S_h zu berechnen

$$S_h = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.37}$$

Es gilt also: *FE-Einflussfunktion* $\times\, p$ = *falsche Lagerkraft*, aber *FE-Einflussfunktion* $\times\, p$ = *FE-Lagerkraft*. **FE-Einflussfunktionen sagen die FE-Ergebnisse exakt voraus**

$$\int_0^l G_h(y, x) p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T(x)\, \boldsymbol{f} = \text{FE-Ergebnis}\,. \tag{4.38}$$

Anders gesagt: Sie erzeugen keine ‚Zufallszahlen', sondern es gilt[1]:

[1] $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \sum_i J(\varphi_i)\, u_i$. In jeder Messung steckt $\boldsymbol{K}$.

Jedes Ergebnis $\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$ ist konsistent mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, weil auch die Einflussfunktionen auf derselben Matrix basieren, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$.

Das liegt an der Grundgleichung $a(u - u_h, \varphi_i) = 0$, und weil jede FE-Einflussfunktion G_h eine Entwicklung nach den φ_i ist, gilt auch

$$a(u - u_h, G_h) = (p, G_h) - (p_h, G_h) = J_h(u) - J_h(u_h) = 0\,. \tag{4.39}$$

Und $J_h(u)$ ist die linke Seite in (4.38) während $J_h(u_h)$, wie oben gezeigt, die rechte Seite ist.

Bei dem Kragträger in Bild 4.6 ist die Querkraft $V_h(x)$ im zweiten Element konstant, weil $V_h(x)$ in allen Punkten gleich $f_3 = (p, \varphi_3) = 10$ ist. Die *shape function* φ_3 des Endknoten ist also auch die Einflussfunktion für $V_h(x)$ im zweiten Element. Die echten Einflussfunktionen sind dagegen *step-functions*, links vom Aufpunkt x sind sie null und dahinter springen sie auf 1.

4.3 Exakte Werte

Theorem 4.2 (Exakte Werte).

Hinreichende Bedingungen

1. *Wenn die Einflussfunktion G eines Funktionals J in $\mathcal{V}_h$ liegt, dann ist die FE-Näherung G_h identisch mit G, und dann gilt*

$$J(u_h) = J_h(u) = J(u)\,, \tag{4.40}$$

   oder

$$J(u_h) = (G, p_h) = (G_h, p) = (G, p) = J(u)\,. \tag{4.41}$$

2. *Wenn die exakte Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt, $u = u_h$, dann ist der Fehler in jeder Einflussfunktion orthogonal zur rechten Seite p der Lösung*

$$J(u) - J(u_h) = \int_\Omega \underbrace{(G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))}_{Fehler}\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,. \tag{4.42}$$

Notwendige Bedingung

1. *Wenn ein Wert exakt ist, $J(u_h) = J(u)$, dann muss der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal sein zur rechten Seite p*

$$J(u) - J(u_h) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,. \tag{4.43}$$

Die Einflussfunktion der Lösung ist idempotent, $Lu = (LG, Lu) = (\delta_0, Lu)$,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad Lu(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})\,, \tag{4.44}$$

während der genäherten Einflussfunktion dieses Merkmal fehlt, es sei denn die Last ist aus $\mathcal{V}_h^*$, weil $LG_h = \delta_h$ nicht δ_0 ist, siehe Bild 4.16,

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad Lu_h(\boldsymbol{x}) = p_h(\boldsymbol{x}) \neq p(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.45}$$

Beides zusammen bedeutet $(LG_h, p) = (LG, p_h)$.

Eine ähnliche Algebra: Es sei $J(w) = q_x(\boldsymbol{x})$ die Querkraft in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ einer Platte, dann ergibt sich (J leitet $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ nach den x_i ab)

$$J(w) = J((G, p)) = (J(G), p) = (G_3, p) = q_x(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.46}$$

4.4 Eindimensionale Probleme

Das obige Theorem fasst im Grunde das ganze Thema zusammen, aber wir wollen auf einzelne Aspekte doch noch näher eingehen.

Weil die Einflussfunktionen stückweise homogene Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung sind, setzen exakte Knotenwerte, $u_h(x_i) = u(x_i)$, voraus, dass der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ diese Lösungen enthält.

Bei 1-D Problemen wie $-EAu'' = p_x$ und $EIw^{IV} = p_z$ sind die Knotenwerte exakt, weil die **homogenen Lösungen**

$$u_n(x) = c_1 + c_2 x \tag{4.47a}$$

$$w_n(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \tag{4.47b}$$

in $\mathcal{V}_h$ liegen. Die stückweise linearen *hat functions* eines Stabes können jedes $u_n(x)$, jede homogene Lösung, darstellen und dasselbe gilt für die vier *shape functions* eines Balkens, die jedes w_n darstellen können, siehe Bild 3.17.

Das Ganze gilt nicht mehr, wenn die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen aus diesem Raster herausfallen, wie im Fall eines in Längsrichtung gebetteten (c) Stabes

$$-EAu''(x) + cu(x) = p_x\,, \tag{4.48}$$

wo die homogene Lösung die Gestalt

$$u_n(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \qquad \alpha = \sqrt{c/EA} \tag{4.49}$$

hat oder im Fall eines elastisch gelagerten Balkens,

$$EIw^{IV} + c\,w(x) = p_z\,, \tag{4.50}$$

wo die homogene Lösung w_n, die ‚Null-Lösung', die Gestalt

$$w_n(x) = e^{\beta x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) + 8e^{-\beta x}(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x) \tag{4.51a}$$

$$\beta = \sqrt[4]{c/4\,EI} \tag{4.51b}$$

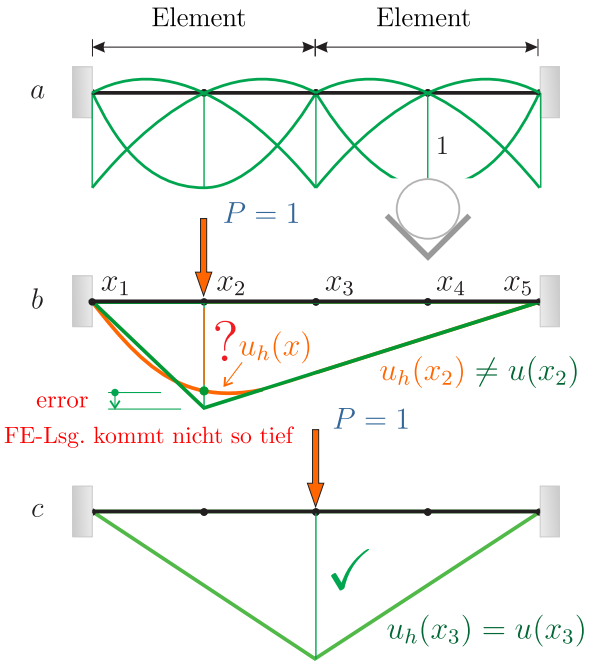


Bild 4.7. Quadratische Elemente interpolieren die exakte Lösung nicht im Mittelknoten, sondern nur an den Endknoten des Elements, weil die *bubble function* des Mittelknotens zu glatt ist, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Punktlast im Mittelknoten und FE–Lösung, **c)** Punktlast am Endknoten und die FE-Lösung, die in diesem Fall exakt ist. Man kann einen Knick nicht mit Kreisen ‚ausschöpfen' [40].

hat.

Denn alle Einflussfunktionen setzen sich stückweise aus den homogenen Lösungen der zu Grunde liegenden Differentialgleichung zusammen, aber normalerweise enthält der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ nicht solche ‚exotischen' Funktionen wie (4.49) und (4.51a).

Zu den Merkwürdigkeiten gehört auch, dass man mit eigentlich besseren Ansatzfunktionen unter Umständen die Fähigkeit **verliert**, die exakte Lösung in den Knoten zu interpolieren. Dies passiert, wenn man zum Beispiel eine Seillinie mit quadratischen Elementen annähert, siehe Bild 4.7.

In der Mitte des Elementes ist eine quadratische FE-Lösung glatt, dort regiert die ***bubble function*** des Mittenknotens. Was man aber bräuchte, wäre die Möglichkeit, dort einen **Sprung** in der ersten Ableitung darstellen zu können, um die Wirkung einer Einzelkraft in dem Mittenknoten anschaulich machen zu können. Die Ableitung der *bubble function* (wie der anderen φ_i) ist aber glatt in dem Mittenknoten, sie springt nicht, und deswegen stimmt z.B. die FE-Lösung des Problems

$$-u''(x) = x \qquad u(0) = u(l) = 0\,, \tag{4.52}$$

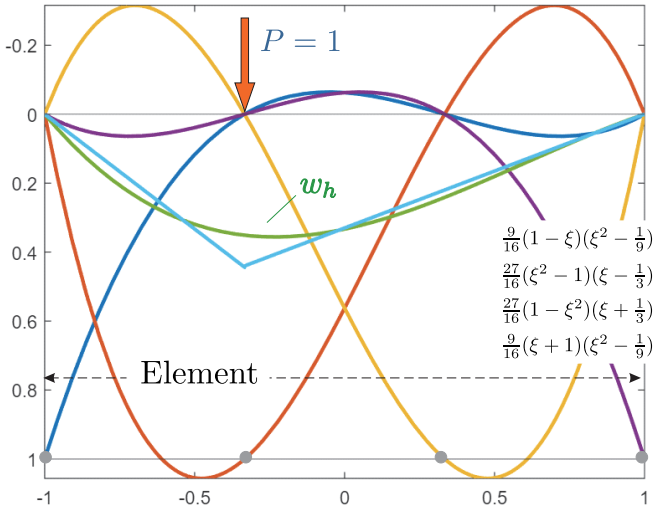


Bild 4.8. Auch kubische Ansatzfunktionen sind im Innern zu glatt (MATLAB™)

nicht mit der exakten Lösung in den Mittenknoten überein. Die Einflussfunktion für den Mittenknoten liegt nicht in $\mathcal{V}_h$[2]. Dasselbe gilt für kubische Elemente, siehe Bild 4.8. Die Knoten liegen bei $[-1, -1/3, +1/3, +1]$.

Ein FE-Programm muss also **eine Balance finden** zwischen der Regularität, die von der Wechselwirkungsenergie gefordert wird, damit man die Beiträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ der Steifigkeitsmatrix berechnen kann (Integrale!) und der **‚Nicht-Regularität'**, die man braucht, um einen Sprung in der ersten Ableitung (bzw. dritten Ableitung bei Balken) darstellen zu können.

4.5 Eine andere mögliche Sicht

Nur in seltenen Fällen liegen die exakten Einflussfunktionen in $\mathcal{V}_h$ und daher muss ein Programme in der Regel die fehlenden Einflussfunktionen G durch Näherungen G_h aus $\mathcal{V}_h$ ersetzen. Nun gilt

$$J(u_h) = \int_\Omega G\, p_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h\, p_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h\, p d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.53}$$

das heißt die genäherten Einflussfunktionen G_h sind **gut genug** für den $\mathcal{V}_h$, denn $J(u_h) = (G_h, p)$. Sie liefern die exakten Spannungen (oder jeden anderen Wert) der FE-Lösung $u_h = \sum_i u_i\, \varphi_i \in \mathcal{V}_h$, siehe Bild 4.10.

[2] Ausnahme: Wenn u in $\mathcal{V}_h$ läge, also u quadratisch wäre statt kubisch, wie hier, dann wäre der Fehler $u(x) - u_h(x) = 0$, weil der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal zu Lasten $p = const.$ (quadr. u) ist, siehe Theorem 4.2.

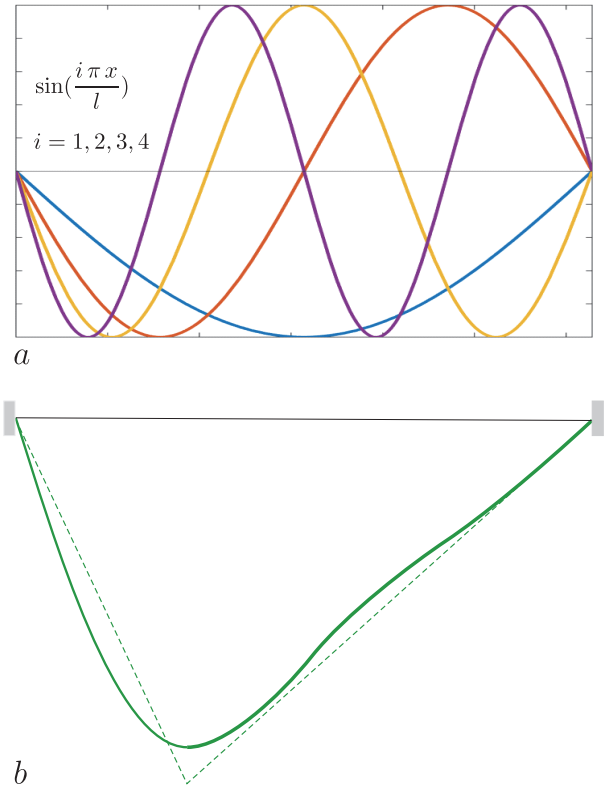


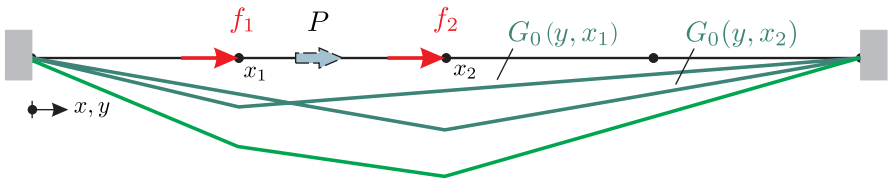
Bild 4.9. a) *Sinus*-Funktionen, **b)** genäherte und exakte Einflussfunktion für die Seildurchbiegung im Viertelspunkt $x = 2.5$. Weil die Seilecke nicht in $\mathcal{V}_h$ liegen, ist die Übereinstimmung, $w_h(x) = w(x)$, in einem Punkt x Zufall (MATLAB™)

Warum also soll sich ein FE-Programm damit abmühen, die Einflussfunktionen G möglichst gut zu approximieren, wenn es weiß, dass die Näherungen G_h für die FE-Lösung gut genug sind, ja die exakten Werte (der FE-Lösung) liefern? Der $\mathcal{V}_h$ mag nur eine kleine Welt sein, aber in sich ist sie stimmig. Die FE-Lösung ist die statisch korrekte Antwort auf den Ersatz-LF $p_h \in \mathcal{V}_h^*$ und die $G_h \in \mathcal{V}_h$ können die FE-Lösung exakt vermessen.

4.6 Isogeometric Analysis

In der isogeometric analysis benutzt man die ***splines*** (B-splines und nurbs), die das Modell erzeugen, auch als Ansatzfunktionen für die FE-Lösung, Höllig (2003) [143], Cottrell, Hughes, Bazilev (2009) [60].

Uns interessiert hier nur ein Aspekt der Methode, nämlich dass die Ansatzfunktionen in der Regel nicht mehr die FE-Lösung in den Knoten inter-



$$u_h(y) = f_1 \cdot G_0(y, x_1) + f_2 \cdot G_0(y, x_2)$$

Bild 4.10. Stab. Weil ein FE-Programm nur Knotenlasten rechnet, reicht es, wenn die Einflussfunktionen $G_0(y, x_i)$ der Knoten in $\mathcal{V}_h$ liegen. Im 2-D und 3-D sind die $G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)$ in $\mathcal{V}_h$ nur Näherungen und die f_i meist äquiv. Knotenkräfte

polieren, das vertraute $u_i(x_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Delta) verloren geht. Damit stellt sich die Frage: Gelten unsere Ergebnisse auch dann? Ja, es bleibt alles richtig. *Betti extended* gilt weiterhin und es bleibt dabei, dass die Güte der FE-Ergebnisse von der Güte der Einflussfunktionen abhängt.

Trigonometrische Ansätze haben dasselbe Problem. Zum Exempel betrachten wir ein $l = 10$ Meter langes Seil

$$-w''(x) = 10 \qquad 0 \le x \le l \qquad w(0) = w(l) = 0\,, \tag{4.54}$$

für dessen Biegelinie wir einen viergliedrigen Ansatz aus *sinus*-Funktionen machen, siehe Bild 4.9 *a*,

$$\varphi_i(x) = \sin(\frac{i\pi x}{l}) \qquad i = 1, 2, 3, 4\,. \tag{4.55}$$

Die Steifigkeitsmatrix

$$k_{ij} = \int_0^l \varphi_i' \, \varphi_j' \, dx = \begin{cases} \pi^2 \, i^2/20 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.56}$$

ist eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\pi^2 \, i^2/20$ und die f_i sind gerade die Integrale der $\varphi_i(x) \times 10 \, (= p)$. Die Lösung $w_h(x)$ trifft, wie zu erwarten war, nicht die exakte Lösung (in welchen Knoten?), aber ***Betti extended*** gilt weiterhin

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y, x) p(y) \, dy\,, \tag{4.57}$$

wenn $G_h(y, x) = \sum_i g_i(x) \, \varphi_i(x)$ die Entwicklung der Einflussfunktion nach den *sinus*-Funktionen $\varphi_i(x)$ ist, siehe Bild 4.9. Die g_i werden wie gewohnt aus $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ bestimmt mit $j_i = \varphi_i(x)$.

Wählen wir z.B. den Punkt $x = 2.5$, dann liefert das Integral genau der Wert $w_h(x) = 94.6$ der FE-Lösung, aber der exakte Wert ist $w(x) = 93.75$. Hier zeigt sich wieder, dass man für Schönheit büssen muss. Glatt ist nicht immer besser, wenn es um die Annäherung an Einflussfunktionen geht. Lineare Elemente können es **punktgenau**.

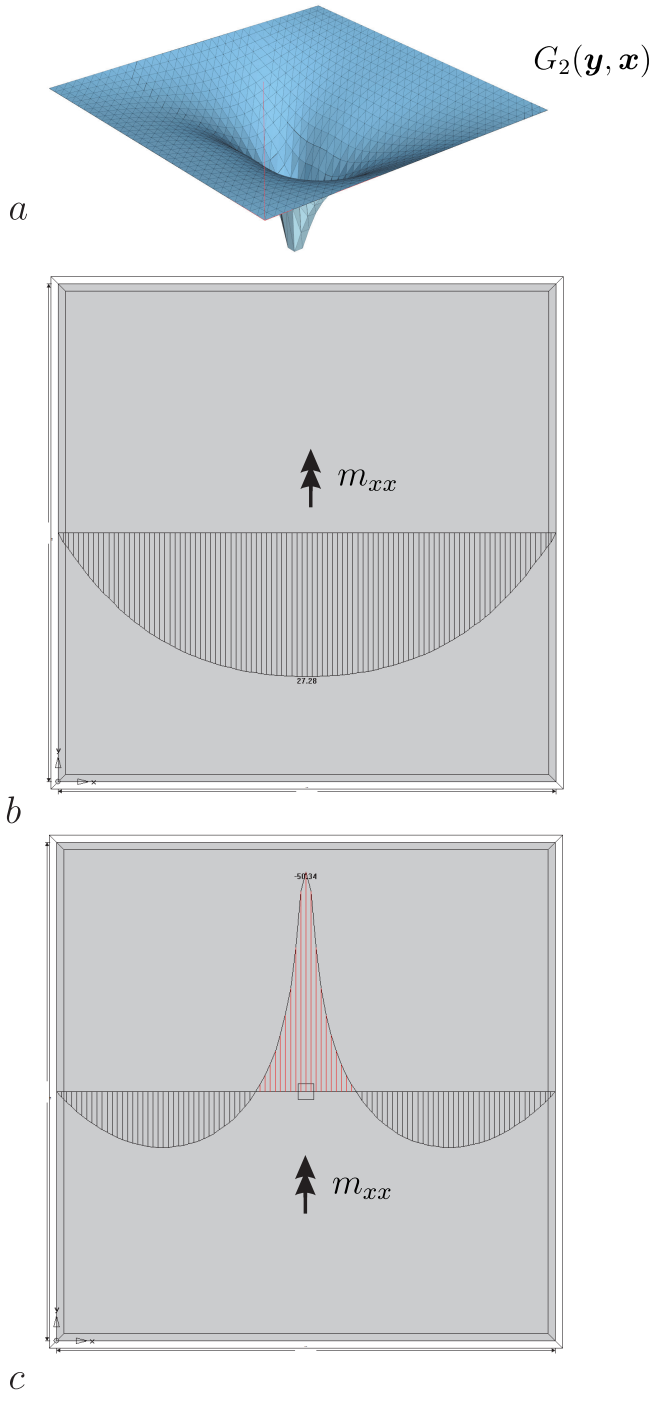


Bild 4.11. Platte im LF g, **a)** Einflussfunktion für m_{xx} in Plattenmitte, **b)** Momente m_{xx} im Längsschnitt, **c)** Momente m_{xx} mit Stütze (BE-PLATTE)

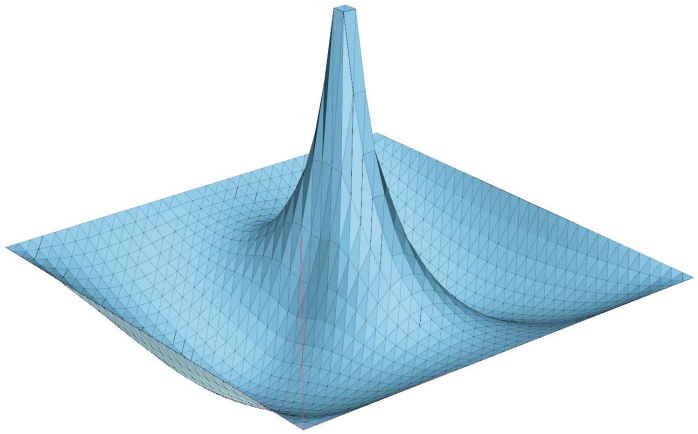


Bild 4.12. 3-D Darstellung der Momente m_{xx} der Quadratplatte mit einer zentrischen Stütze im LF g (BE-PLATTE)

Bemerkung 4.1. Die vier Sinus-Funktionen, bilden keine *partition of unity* des Intervalls $[0, 10]$ und so ist die Summe der FE-Lagerkräfte, $2 \cdot 45.032 \neq 100$, nicht die aufgebrachte Belastung und auch die äquivalenten Knotenkräfte

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \frac{200}{\pi} + 0 + \frac{200}{3\,\pi} + 0 = 84.8826 \tag{4.58}$$

addieren sich nicht zur Resultierenden, da dies voraussetzen würde, dass die Starrkörperbewegung $w = 1$ in $\mathcal{V}_h^+$ liegt, was nicht der Fall ist.

4.7 Flächentragwerke

Wenn bei Flächentragwerken das Ergebnis in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ exakt ist, dann ist das in der Regel **Zufall**. Dann kann es nur so sein, dass der Fehler $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ in der Einflussfunktion orthogonal zur Belastung p ist,

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,, \tag{4.59}$$

denn die exakten Einflussfunktionen liegen bei Flächentragwerken nicht in dem Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ der finiten Elemente, weil die verwendeten *shape functions* keine homogenen Lösungen der Scheiben- bzw. Plattengleichung sind.

Es ist aber auch klar, dass die Art der Belastung

$$\textit{Gleichlast} \qquad \textit{Linienlast} \qquad \textit{Punktlast} \tag{4.60}$$

einen Einfluss auf die Größe des Fehlers hat. Je gleichmäßiger die Belastung verteilt ist, um so eher gleichen sich die Fehler in den Einflussfunktionen im

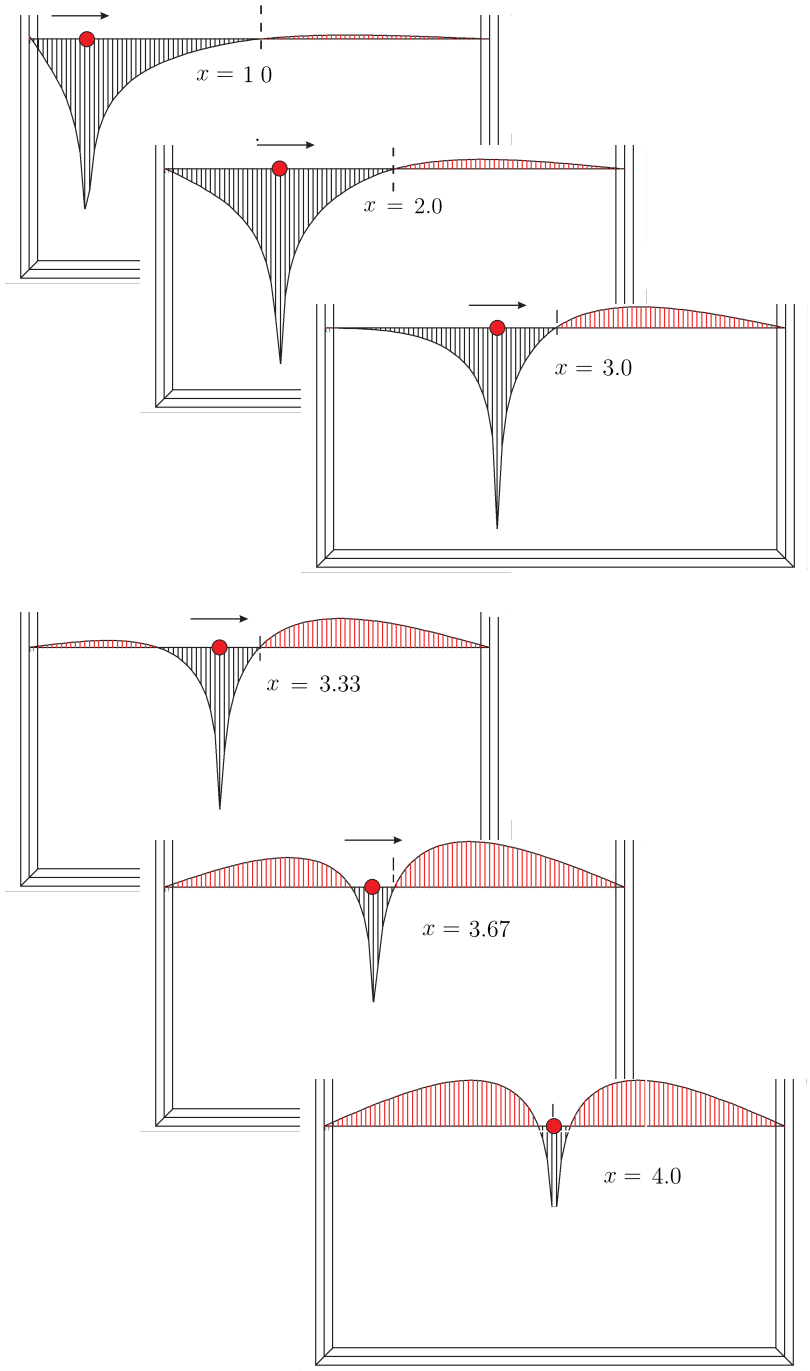


Bild 4.13. Quadratplatte, 8 m × 8 m, mit Einzelstütze in der Mitte, (dargestellt ist die untere Hälfte der Platte), Serie von Einflussfunktionen für m_{xx} auf der x-Achse

Mittel aus, wie man am Beispiel einer gelenkig gelagerten Quadratplatte sehen kann.

In Bild 4.11 a ist die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in Plattenmitte dargestellt. Im LF g, (wir schreiben hier p für g), ist das Moment

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) p d\Omega_{\boldsymbol{y}} = p \cdot \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = p \cdot V \tag{4.61}$$

gleich dem Volumen V unter G_2 mal p. Und anscheinend kann das FE-Programm das Volumen der Einflussfunktionen gut bestimmen, denn die Momentenverteilung in Bild 4.11 b wirkt überzeugend.

Eine Einzelkraft P aus einer Stütze, $\Omega_S = a \times b$, ist jedoch von einem anderen Kaliber, siehe Bild 4.12,

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) g d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \frac{P}{\Omega_S} \int_{\Omega_S} G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.62}$$

denn wenn eine Einzelkraft vorkommt, dann muss G_2^h genau in einem Punkt exakt sein.

Konkret rechnet das Programm zwar mit einer Ersatzlast $p_h(\boldsymbol{y})$, die das Eigengewicht der Platte wie die Stützenkraft ‚äquivalent' beinhaltet

$$m_{xx}^h(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2^h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.63}$$

aber auch diese Formel kommt an dem Grundproblem, dem scharfen Anstieg von G_2 zur Stütze hin nicht vorbei.

Die Bild 4.13 illustriert, wie sich die Einflussfunktion für m_{xx} ändert, wenn sich der Aufpunkt der Stütze nähert. Im Grunde bleibt sie sich immer gleich, nur wird sie bei der Annäherung an die Stütze nach oben geschoben. Und das Maß, um wieviel sie nach oben geschoben wird, das ist umso schwerer zu bestimmen, je näher der Aufpunkt der Stütze kommt.

4.8 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied

Bei Scheiben liegen die Dinge ähnlich. Es gibt jedoch einen bemerkenswerten Unterschied zwischen Scheibe und Platte.

Wenn eine Scheibe auf Punktlagern liegt, dann kennt man die Lagerkräfte relativ genau (bei statisch bestimmter Lagerung sogar exakt), aber das hilft nicht bei der Eingrenzung der (mit dem Ingenieurverstand verträglichen) maximalen Spannungen in der Nähe oder unter dem Punktlager. Hier kann man sich aber so behelfen, dass man die Lagerkraft über eine gewisse Breite gleichmäßig verteilt und die Scheibe für diese Spannungen bemisst, siehe Bild 4.14 a.

Bei einer Platte ist die Situation im Grunde dieselbe. Die Lagerkräfte in den Stützen sind bei einer FE-Berechnung relativ genau, aber das hilft einem

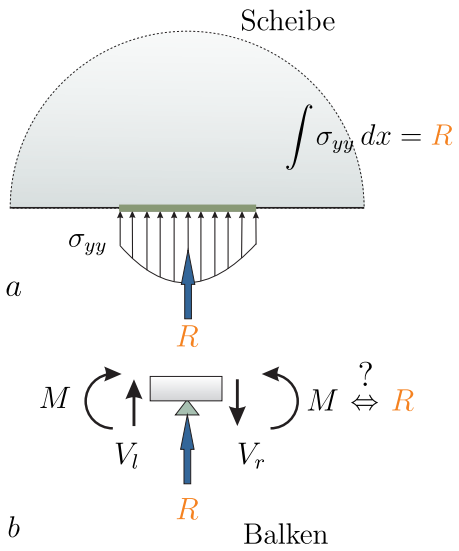


Bild 4.14. a) Die Lagerkraft R und die Lagerpressung bei einer Scheibe, **b)** bei einem Balken kann man jedoch keine Beziehung zwischen dem Stützmoment M und der Lagerkraft R herstellen

nicht – und das ist der Unterschied – bei der Eingrenzung der maximalen Biegemomente über der Stütze, weil es keinen direkten Zusammenhang zwischen der Stützenkraft und den Biegemomenten gibt; die **Ausmitten** e_x und e_y bleiben unbestimmt.

Es reicht das Zwischenlager eines Balkens zu betrachten, siehe Bild 4.14 *b*. Die Summe der Querkräfte V_l und V_r muss gleich der Lagerkraft R sein, aber es gelingt nicht, das Stützmoment M in irgendeiner Weise mit R zu verknüpfen.

Es gibt ja eine Vielzahl von Trägern, die über einem Zwischenlager bei gleicher Lagerkraft ganz unterschiedliche Momente aufweisen. Dazu passt, dass Momente keine Arbeiten leisten, wenn man sie hebt oder senkt – Kräfte schon. Man müsste Platten neigen, um die Ausmitten e_x und e_y zu finden.

4.9 Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt

Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt, weil zum Beispiel bilineare Ansätze ausreichen, um die Verformungen einer Scheibe darzustellen, dann ist $\boldsymbol{p}_h = \boldsymbol{p}$, d.h. dann ist der FE-Lastfall **identisch** mit dem Originallastfall. Den FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ erhält man ja, indem man die FE-Lösung in die Differentialgleichung ein-

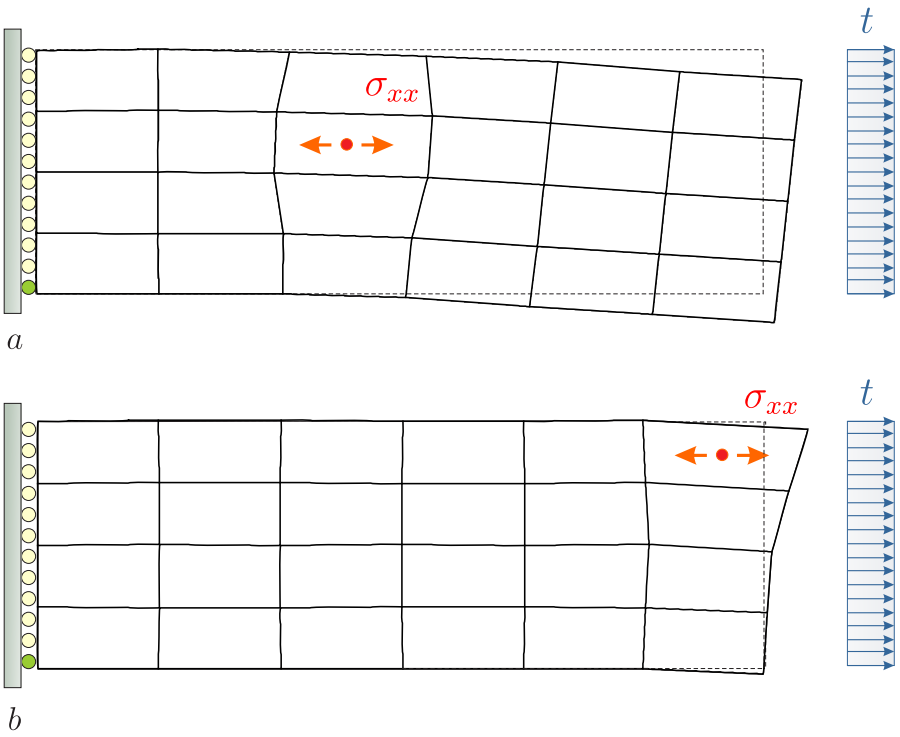


Bild 4.15. Bilineare Elemente und FE-Einflussfunktionen für σ_{xx}. Diesen ‚eckigen' Einflussfunktionen sieht man gleich an, dass sie nur Näherungen sind, aber das Integral über den Lastrand ergibt für beide Aufpunkte, und für alle anderen Aufpunkte ebenso, den korrekten Wert für σ_{xx} (WINFEM)

setzt und dabei muss in diesem Fall gerade die Belastung $\boldsymbol{p}$ herauskommen, die man aufgebracht hat.

Es bleibt aber ein Problem. Ein FE-Programm berechnet ja alle Werte und also auch die Spannungen mit **genäherten Einflussfunktionen**[3]

$$\sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{4.64}$$

Also müssten die FE-Spannungen doch nur Näherungswerte sein, warum sind sie aber exakt?

Weil der Fehler in den Einflussfunktionen orthogonal zu der Belastung ist, wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt,

$$\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) - \sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \underbrace{(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))}_{Fehler} \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \,. \tag{4.65}$$

[3] Skalarprodukt, weil $\boldsymbol{G}_h = \{G_{hx}, G_{hy}\}^T$ und $\boldsymbol{p} = \{p_x, p_y\}^T$ Vektoren sind.

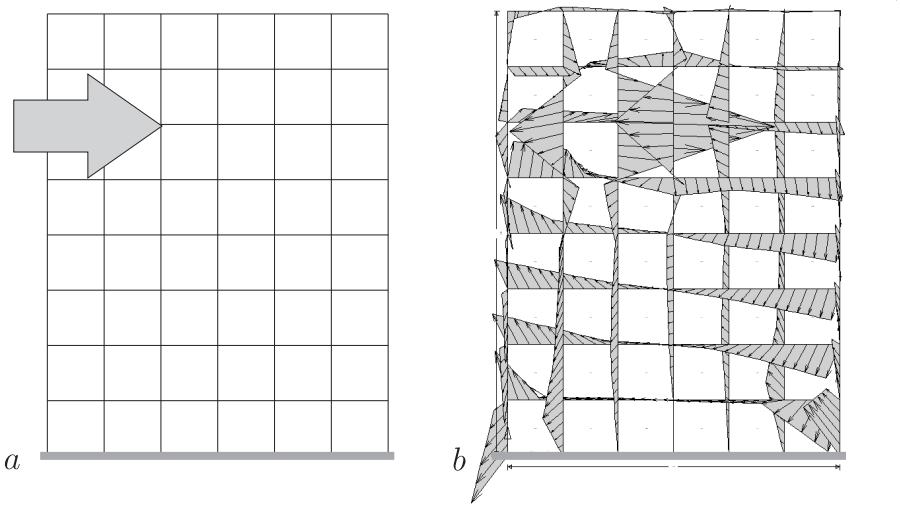


Bild 4.16. Scheibe, Dirac Delta $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ (*point load*) und das genäherte Dirac Delta $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ (= *area-* (*not shown*) and *line loads*). Auf $\mathcal{V}_h$ liefern beide dasselbe Ergebnis, $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varphi}_i) = (\boldsymbol{\delta}_h\,\boldsymbol{\varphi}_i)$ (WINFEM)

Jedes solches $\boldsymbol{p}$ ‚neutralisiert' den Fehler in den Einflussfunktionen.

Der Fehler in einer genäherten Einflussfunktion ist orthogonal zu allen Lastfällen p, die sich auf $\mathcal{V}_h$ exakt lösen lassen.

Die Scheibe in Bild 4.15 ist so gelagert, dass sich unter Zug ein gleichförmiger Spannungszustand aufbaut, den man mit bilinearen Elementen exakt wiedergeben kann. **Die exakte Lösung liegt also in $\mathcal{V}_h$.**

Aber die Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} – in welchem Punkt $\boldsymbol{x}$ auch immer – liegt nicht in $\mathcal{V}_h$, weil die dazu nötigen **Punktversetzungen** sich mit bilinearen Elementen nicht erzeugen lassen, aber trotzdem sind die Ergebnisse exakt.

Das geht nur so, dass die Verschiebung des rechten Randes, wie sie von der FE-Einflussfunktion ermittelt wird, in der Summe (dem Integral) genau den exakten Wert trifft, denn sonst wäre σ^h_{xx} nicht gleich σ_{xx}

$$\sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \sigma_{xx}(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.66}$$

Hier ist Γ der rechte Rand und $\boldsymbol{t} = \{t, 0\}^T$ ist die Randlast.

Eine Konsequenz der obigen Regel ist, dass die genäherten FE-Einflussfunktionen auf $\mathcal{V}_h$ die exakten Werte $J(\varphi_i)$ zurückgeben (hier skalar geschrieben)

$$J(\varphi_i) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_i(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_i(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = J_h(\varphi_i)\,, \tag{4.67}$$

weil die Lösungen der LF p_i, der *shape forces*, in $\mathcal{V}_h$ liegen. Die φ_i lassen sich auf $\mathcal{V}_h$ mit den beschränkten Mitteln eines FE-Netzes also exakt vermessen.

Bemerkung 4.2. Der Fehler in den FE-EF ist also orthogonal zu den LF $\boldsymbol{p}_i$

$$\int_\Omega (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})) \bullet \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \qquad \boldsymbol{p}_i \in \mathcal{V}_h^* , \tag{4.68}$$

und dies ist das **Gegenstück** zur ***Galerkin-Orthogonalität***

$$\int_\Omega (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}_h(\boldsymbol{x})) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) d\Omega = 0 \qquad \boldsymbol{\varphi}_i \in \mathcal{V}_h . \tag{4.69}$$

Galerkin testet mit den *shape functions* $\boldsymbol{\varphi}_i$, während die Einflussfunktionen mit den *shape forces* $\boldsymbol{p}_i$ getestet werden. Diese LF liegen in $\mathcal{V}_h^*$, weil ihre Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_i$ ja in $\mathcal{V}_h$ liegen. Messungen an den LF $\boldsymbol{p}_i$ mit den genäherten $\boldsymbol{G}_h$ z.B. von σ_{xx} ergeben exakte Werte, $(\boldsymbol{G}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{\varphi}_i) = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{x})$, für die Spannungen der $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Und wegen der *Galerkin-Orthogonalität* ist kein Unterschied in der Wirkung zwischen einer exakten und der genäherten Punktlast auf ein $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathcal{V}_h$, siehe Bild 4.16, ($\varphi_{i\,1}$ = horizontale Komponente von $\boldsymbol{\varphi}_i$)

$$\varphi_{i\,1}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega \boldsymbol{\delta}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} . \tag{4.70}$$

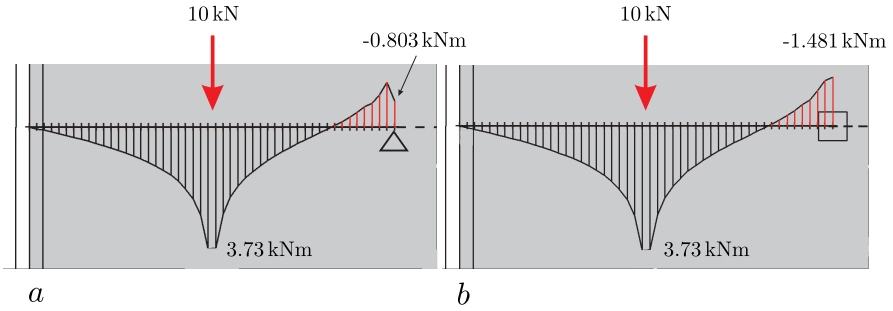


Bild 4.17. Ausschnitte aus einer 8 m × 8 m Platte mit Innenstütze, **a)** Stütze als Nadellager, **b)** reale Breite (BE-PLATTE)

4.10 Maxwell und Radius null

„Standpunkt ist Gesichtskreis mit Radius null“. Aber Maxwell geht nur, wenn der Radius null ist. In kommerziellen FE-Programmen hat jede Stütze eine Breite und jede Einzelkraft einen ‚Fußabdruck‘ und das wird zum Problem, wenn ein Student Maxwell nachrechnen will. In Bild 4.17 sieht man im

Blick von oben zwei Plattenstreifen (vom linken Rand bis zur Mitte) aus einer quadratischen, gelenkig gelagerten Platte mit zentraler Stütze. Die Verläufe wurden in die Ebene geklappt. Über der Stütze wurde die Platte in x-Richtung um ‚Eins' gespreizt – Dirac Delta δ_2 – und so die Einflussfläche für das Moment m_{xx} in der Platte über der Stütze ermittelt. Das ergab im Fußpunkt der Einzelkraft an beiden Systemen denselben Wert -0.0803 m und somit das Moment $m_{xx} = -0.803$ kNm. Bei der Nachrechnung betrug das Moment in Bild **b** aber $m_{xx} = -1.481$ kNm, weil das Programm die Normalkraft in der Stütze als Flächenlast ansetzte. Wurde die Stütze als Nadelstütze gerechnet wie in Bild **a**, ergab sich der vorhergesagte Wert.

4.11 Patch Test

Bei einem ***patch test*** konstruiert man eine Lösung, die in $\mathcal{V}_h$ liegt, vorzugsweise sind das Lösungen mit einfachen Spannungsfeldern, und kontrolliert, ob sich die exakten Ergebnisse ergeben. Der *patch test* lebt davon, dass der Fehler in den Einflussfunktionen orthogonal zur Belastung ist, wenn die Lösung u in $\mathcal{V}_h$ liegt, wenn also $p_h = p$ ist, denn mit (4.75) gilt

$$\int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, (p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y})) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \quad (4.71)$$

und weil die rechte Seite null ist, muss auch die linke Seite null sein, für jede EF G_h. Tests, die garantiert schief gehen, sind Einzelkräfte im 2-D und 3-D. Sie überfordern jedes Netz. Kein $\mathcal{V}_h$ enthält die exakte Lösung.

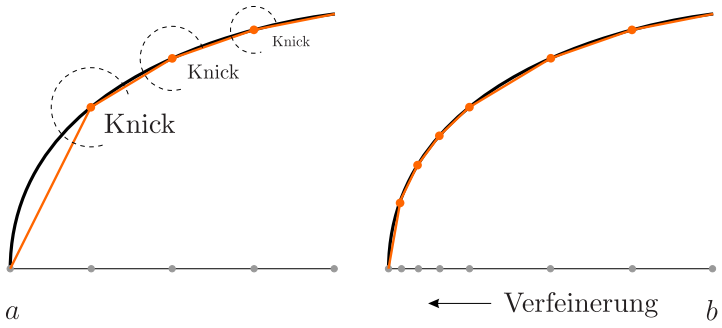


Bild 4.18. Um das Netz an den richtigen Stellen zu verfeinern, muss man die exakte Lösung nicht kennen. Dort wo die Knicke in der FE-Lösung groß sind, dort verfeinert man. In der Statik sind die Knicke die Spannungssprünge zwischen den Elementen

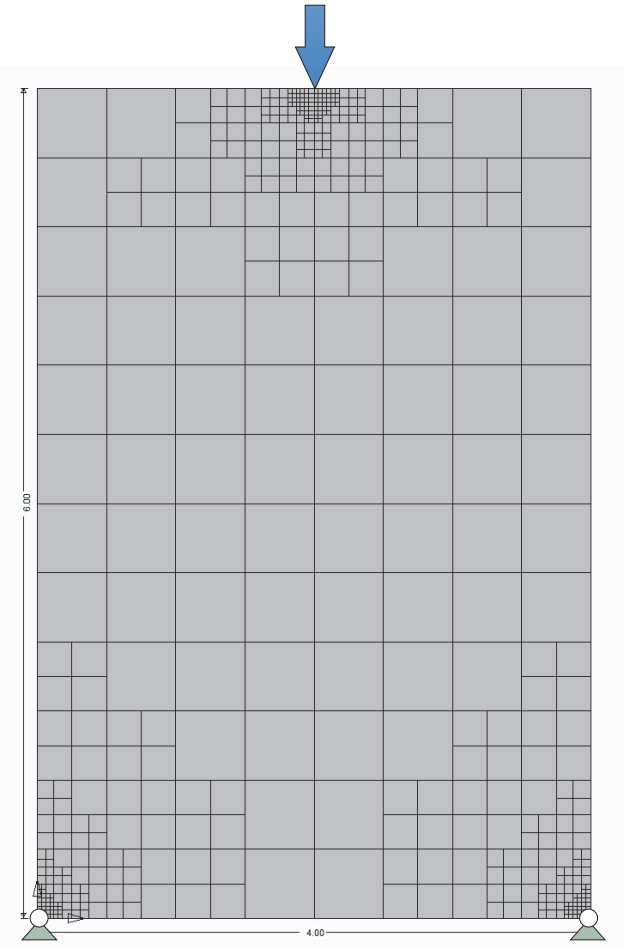


Bild 4.19. Adaptive Verfeinerung einer Scheibe in der Umgebung der kritischen Punkte (WINFEM)

4.12 Adaptive Verfeinerung

Den Fehler einer FE-Lösung kann man nicht direkt berechnen, denn man kennt weder die exakten Verschiebungen noch die exakten Spannungen. Man kann nur die Abweichung zwischen dem Originallastfall $\boldsymbol{p}$ und dem FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ messen und dann das Netz dort verfeinern, siehe Bild 4.19 und Bild 4.20, wo diese Differenzen am größten sind.

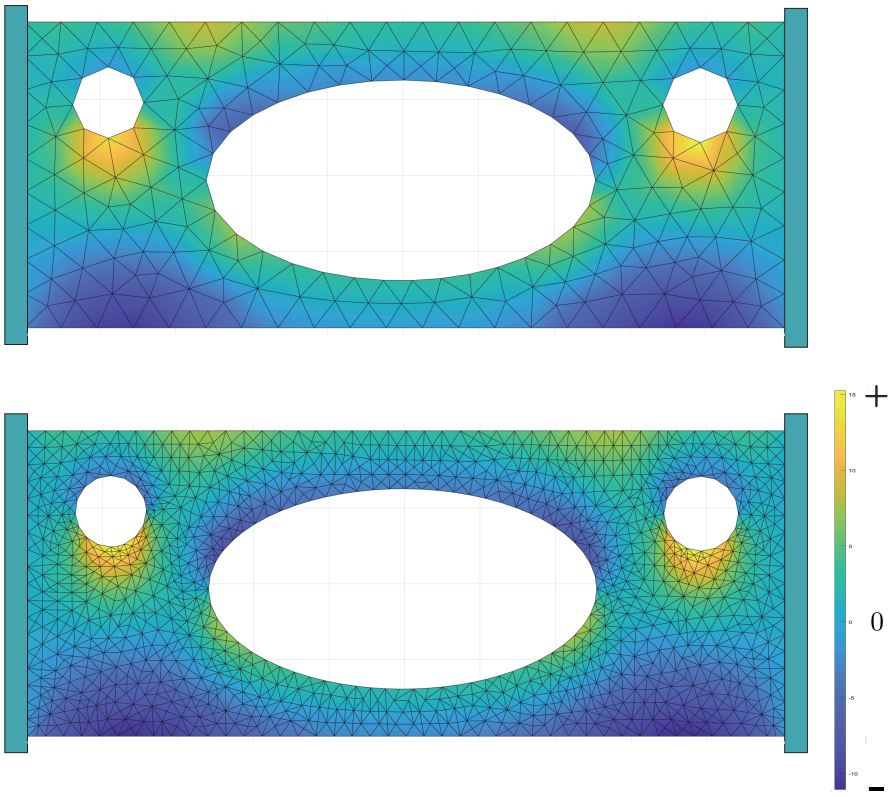


Bild 4.20. MATLAB™, PDE Modeler. Die Spannungen σ_{yy} im LF g auf dem Ausgangsnetz und auf dem verbesserten Netz (2-malige Verfeinerung), Kap. 10.9

Theoretisch geht es sogar noch einfacher, wie Bild 4.18 demonstriert: Man achtet nur auf die **‚Knicke'** (die Spannungssprünge in der FE-Lösung) und verfeinert das Netz an diesen Stellen[4].

Da es, wie so oft, nur auf die Algebra ankommt, wollen wir die Gleichungen skalar schreiben und die Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ einer Membran, die unter einem Druck p steht, betrachten.

Aus den Darstellungen

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{4.72}$$

ergibt sich der Fehler der FE-Lösung zu

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \left(G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.73}$$

[4] Bei geraden *shape functions*, $p = 2, 4, \ldots$, sind die Fehler im Element maßgebend, während es bei ungeradem p die Knicke sind (‚*dichotomy*'), siehe [12] p. 424.

Nun wissen wir aber auch, dass der Fehler einer FE-Lösung darauf beruht, dass ein FE-Programm den FE-Lastfall p_h statt des exakten Lastfalls p löst

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.74}$$

und somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} && \text{(4.75a)}\\ &= \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,p(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} && \text{(4.75b)}\\ &= \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. && \text{(4.75c)} \end{aligned}$$

Den Schritt von der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung macht die *Galerkin-Orthogonalität*

$$\int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,p_h(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{4.76}$$

möglich; wir haben nur eine null addiert.

Auf der ersten Gleichung (4.75a) basiert die **klassische adaptive Verfeinerung**, bei der das Netz dort verfeinert wird, wo die Abweichungen zwischen p und dem FE-Lastfall p_h groß sind.

Die andere Strategie wäre es, den Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion kleiner zu machen, wie dies (4.75b) nahelegt.

Dabei stellt sich die Frage, wie wir den Abstand $G-G_h$ messen wollen, denn wir kennen das exakte G nicht. Dies Problem lösen wir wie folgt: Zunächst ersetzen wir die Einflussfunktion (4.75b) durch ihre schwache Form

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,p(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} = a(G - G_h, u) \tag{4.77}$$

und schreiben diese Wechselwirkungsenergie äquivalent als äußere Arbeit[5]

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = a(G - G_h, u) = \int_\Omega (\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \delta_h(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))\,u(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.78}$$

und die Abweichung $\delta - \delta_h$ können wir messen, siehe Bild 4.16. Nicht direkt, weil δ ja nur ein flüchtiges Symbol ist, aber die Kräfte δ_h können wir plotten und das Netz so verfeinern, dass sie weitgehend vom Bildschirm verschwinden, sich in einem Punkt zusammenschnüren.

Die dritte Variante ist die ***zielorientierte adaptive Verfeinerung*** (*goal oriented adaptive refinement)*. Bei dieser Technik wird der Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion und gleichzeitig der Fehler $p - p_h$ in der Belastung kleiner

[5] Das ist der Satz von Betti, (4.77) $= W_{12} = W_{21} =$ (4.78).

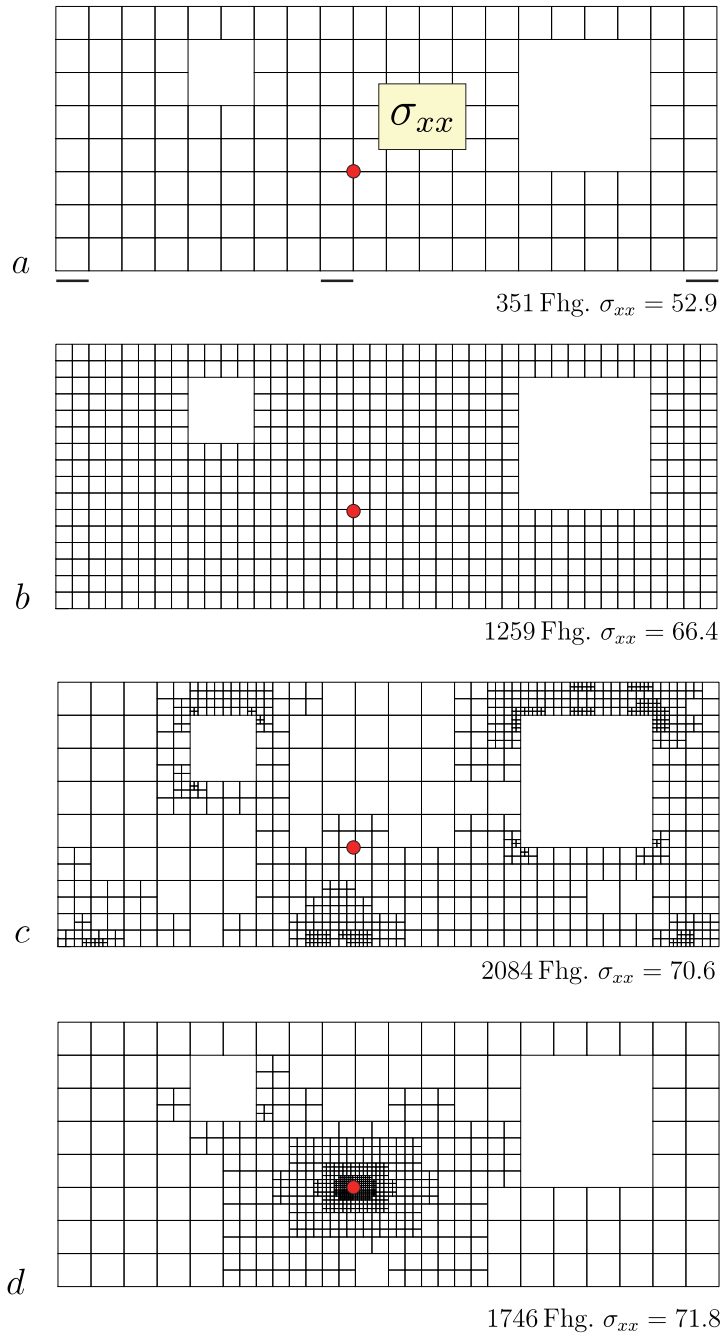


Bild 4.21. Bilineare Elemente, LF g, Berechnung von σ_{xx}, **a)** Ausgangsnetz, **b)** halbe Elementlänge, **c)** adaptive Verfeinerung, **d)** Verfeinerung mittels Dualitätstechnik (WINFEM)

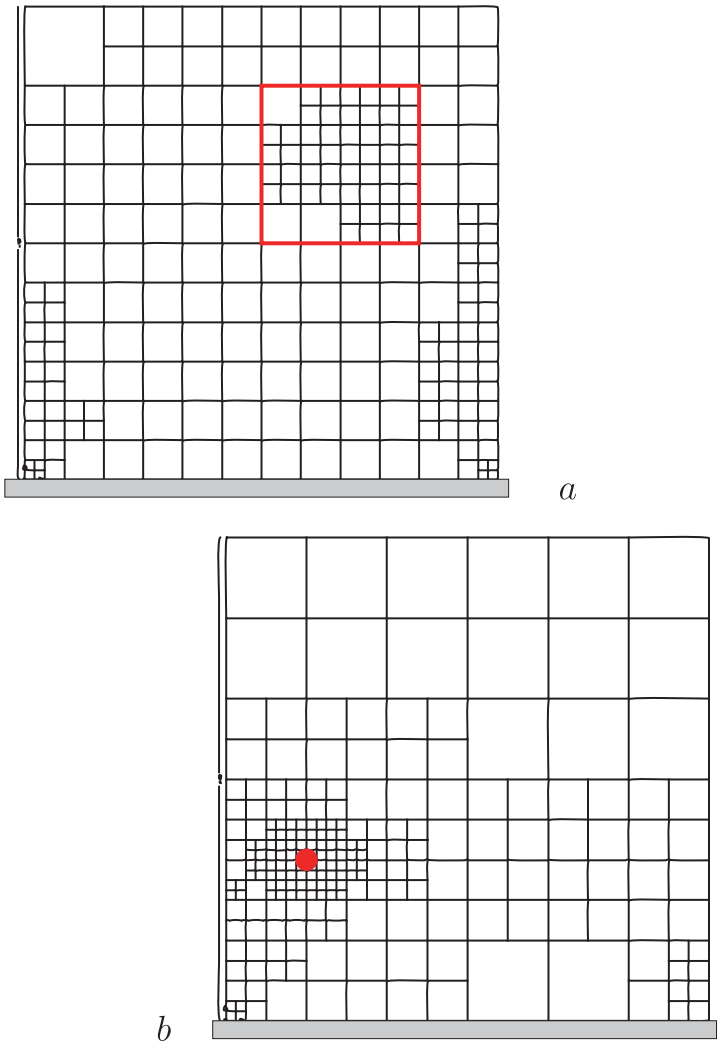


Bild 4.22. Die zwei möglichen Strategien: **a)** Verfeinerung des rot umrandeten Lastbereichs, oder **b)** der Umgebung des Aufpunkts (WINFEM)

gemacht. Sie basiert auf (4.75c). Schreiben wir diese Gleichung in schwacher Form, dann lautet sie

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = a(\underbrace{G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}_{f}, \underbrace{u - u_h}_{g}) =: a(f,g) \tag{4.79}$$

und jetzt kann man die ***Schwarzsche Ungleichung*** zu Hilfe nehmen,

$$|u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x})| = |a(f,g)| \le a(f,f)^{1/2} \cdot a(g,g)^{1/2} = \|f\| \cdot \|g\|\,, \tag{4.80}$$

um die linke Seite durch die Energienorm von f und g abzuschätzen.

Theoretisch steht (4.80) auf ‚wackligen Füßen', weil die Energienorm der Einflussfunktion ja in der Regel unendlich groß ist, aber wenn wir das schlicht ignorieren – der Erfolg gibt uns recht – dann ist das die schnellste Art, den Fehler der FE-Lösung in einem Punkt klein zu machen.

Technisch geht man bei der zielorientierten adaptiven Verfeinerung so vor, dass man neben dem ***primalen Problem*** $-\Delta u = f$ noch das ***duale Problem*** $-\Delta G = \delta_0$ löst und das Netz so optimiert, dass die Fehler in beiden Lösungen klein werden, wie bei der Scheibe in Bild 4.21, wo es darum ging die Spannung σ_{xx} in dem Aufpunkt möglichst genau zu bestimmen.

Die Idee der zielorientierten adaptiven Verfeinerung wirkt so einleuchtend, dass man sich fragt wieso eigentlich die normale adaptive Verfeinerung funktioniert, bei der die Umgebung des Aufpunktes ja nicht verfeinert wird, siehe Bild 4.22. Das Rätsel löst sich auf, wenn wir auf die Darstellung des Fehlers schauen

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\ &= \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))p(\boldsymbol{y})d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Die Verfeinerung des Netzes im Bereich der Belastung bewirkt, dass die Abweichung $p - p_h$ kleiner wird und dieser Fehler wird mit dem exakten Kern $G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ gewichtet der, weil exakt, ja unabhängig von der Feinheit des Netzes ist. Die zweite Gleichung erklärt warum dieser Effekt unabhängig von der Nicht-Verfeinerung im Aufpunkt ist, denn wenn die exakte Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt oder ‚fast' in $\mathcal{V}_h$, wenn $p - p_h$ also klein ist, dann ist der Fehler in der Greenschen Funktion orthogonal zur Belastung und dann stört es nicht, wenn die Greensche Funktion nur eine grobe Näherung ist.

Man könnte nach diesen Bemerkungen nun vermuten, dass fehlende Sprünge eine Garantie dafür sind, dass die FE-Lösung ‚genau' ist, aber das ist nicht garantiert, [125], denn **Fernfeldfehler**, Stichwort ***pollution***, können zu einem ***drift*** der FE-Lösung führen, den man nicht registriert, wenn man nur auf die Sprünge achtet.

4.13 Pollution

Der englische Begriff ***pollution*** meint das Phänomen, dass die Lösung in einem Teil A des Tragwerks von Fehlerquellen, die in einem abliegenden Teil B auftreten, negativ beeinflusst wird. Bei Flächentragwerken haben die Einflussfunktionen mit diesem Problem zu kämpfen, siehe Kapitel 6.13. Die Fehler in den Ecken strahlen ins Innere aus.

Die Wandscheibe in Bild 4.23 illustriert dieses Phänomen sehr gut. Die Einflussfunktion für die Scherkraft N_{yx} im horizontalen Schnitt $A-A$ ist eine Seitwärtsbewegung des Teils oberhalb des Schnittes um einen Meter nach rechts.

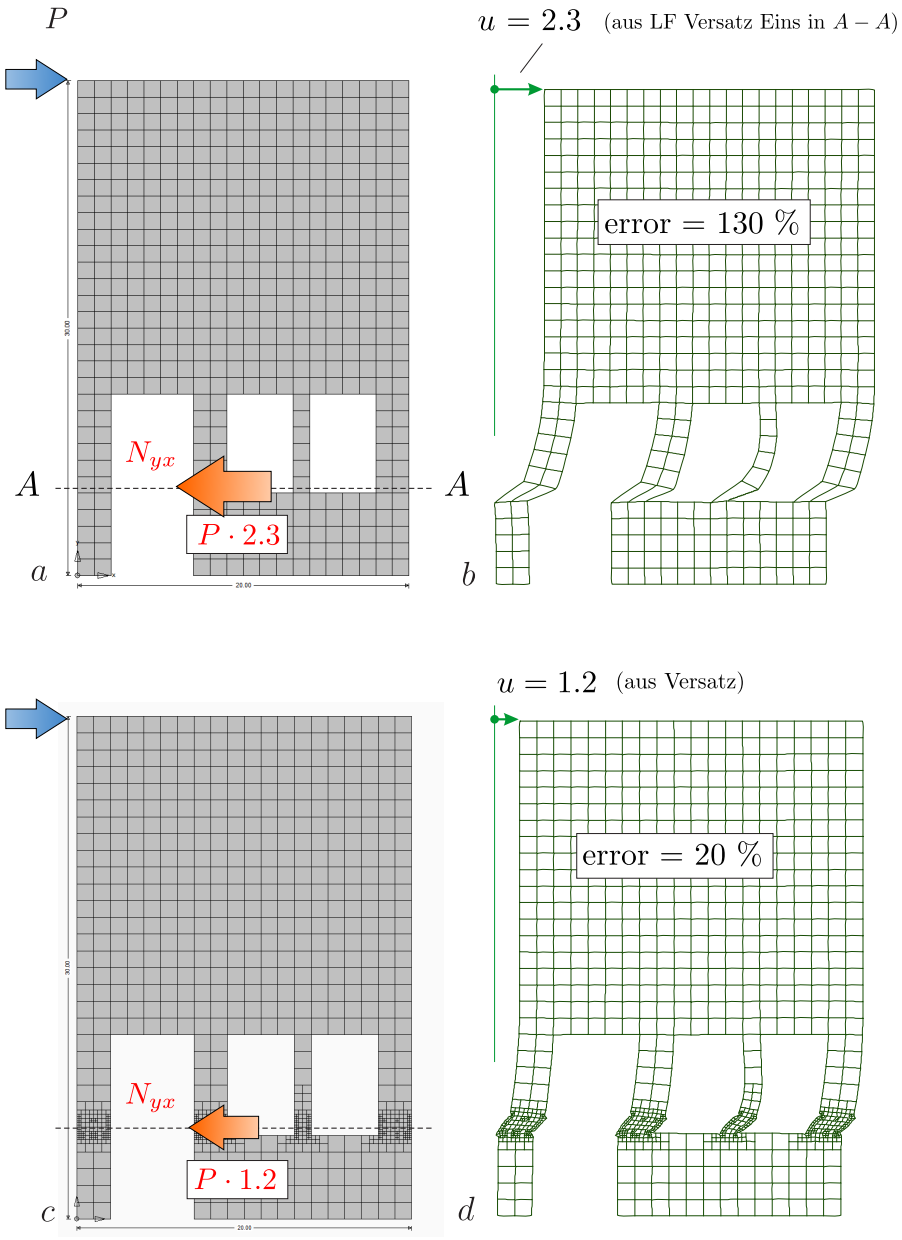


Bild 4.23. Einflussfunktion für die Scherkraft N_{yx} im Schnitt $A-A$, **a)** Wandscheibe und FE-Netz, **b)** FE-Einflussfunktion G_h, **c)** verbessertes Modell, **d)** verbesserte FE-Lösung G_h, [126], (bilineare Elemente, WINFEM). Die $j_i = N_{yx}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ in $\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{j}$ sind die aufintegrierten Schubspannungen σ_{yx} der $\boldsymbol{\varphi}_i$ im Schnitt $A - A$.

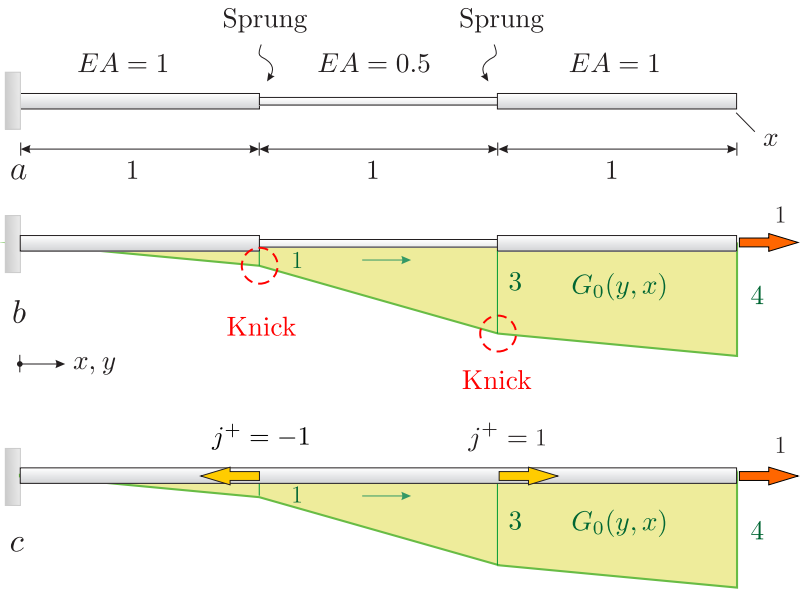


Bild 4.24. Zugstab mit sich veränderndem Querschnitt und Einflussfunktion für das Stabende, **a)** System, **b)** Einflussfunktion für Verschiebung des Stabendes, **c)** dieselbe Figur kann man auch an einem Stab $EA = 1$ mit Hilfe von Kräften j^+ erzeugen, siehe Kap. 5.13

Auf einem FE-Netz kann man diese Bewegung aber nicht nachfahren, weil man dafür die Elemente auseinander schneiden müsste. So produziert ein FE-Programm, das **bilineare Elemente** benutzt, die Verformungsfigur in Bild 4.23 *b*, bei der sich die Oberkante der Scheibe statt um 1.0 m um 2.3 m nach rechts bewegt! Die Schwierigkeiten, die das FE-Programm hat, die Gleitbewegung im Schnitt $A-A$ darzustellen, führen also zu einem großen Fehler an einer anderen Stelle, der Oberkante der Scheibe. Die Konsequenz ist, dass von einer Last von 1 kN an der Oberkante der Scheibe das 2.3-fache im Schnitt $A-A$ ankommt – wahrlich ein kapitaler Fehler.

Wie man in Bild 4.23 *d* sieht, kann man durch eine adaptive Verfeinerung des Netz den Fehler $\Delta = 2.3 - 1.0 = 1.3$ m in der oberen Auslenkung deutlich auf $\Delta = 1.2 - 1.0 = 0.2$ m verringern. Es gilt auch, dass, wenn man den Schnitt $A-A$ genau durch die **Mitte** der Elementreihe führt, sich die Oberkante wirklich um 1 m nach rechts bewegt, also die Belastung an der Oberkante richtig im Schnitt $A-A$ ankommt. Die resultierende Scherkraft N_{yx} in der Mitte des Elements ist dann exakt.

Wenn man das sogenannte ***Wilson-Element*** benutzt, wie SOFiSTiK [125], dann werden die Ergebnisse auch für einen Schnitt $A-A$ richtig, der nicht durch die Mitte der Elementreihe geht. Nur den Schnitt innerhalb des Elements selbst, die abrupte Scherbewegung, kann man auch mit dem Wilson-Element nur ‚gleitend' nachvollziehen, Rampe statt Versatz.

4.13.1 Ursachen

Pollution hat im wesentlichen vier Ursachen, [12]:

1. Unstetigkeiten in der Belastung, also zum Beispiel Sprünge in der Verkehrslast einer Platte (*a mild problem*)
2. Große und kleine Elemente nebeneinander, also ein unausgewogenes Netz; andererseits gilt aber, dass man mit gradierten Netzen *pollution* dämpfen kann
3. Nicht-glatte Einflussfunktionen, siehe Bild 4.24
4. Singularitäten auf dem Rand

Wenn die Koeffizienten in der Differentialgleichung springen, weil z.B. die Dicke d der Platte springt, dann schlägt das auf die Einflussfunktionen durch, die **Regularität** (‚die Glätte') der Einflussfunktionen nimmt ab, es treten Knicke auf wie in Bild 4.24 *b* und damit vergrößert sich die *pollution*, weil das FE-Programm mehr Mühe hat, solche Einflussfunktionen zu approximieren[6].

Alle FE-Lösungen – bis auf Stabtragwerke (EA und EI konstant) – weisen globale Fehler auf, kämpfen mit *pollution*.

Anschaulich äußert sich der Fehler als ***drift*** in den Knoten, [125]. Die exakte Lösung und die FE-Lösung sind in den Knoten nicht deckungsgleich. Das muss im Grunde auch so sein, es ist ein ‚Qualitätsmerkmal', weil die Interpolierende eine schlechtere Lösung als die FE-Lösung ist – die Fehler in den Spannungen sind im Mittel größer als bei der FE-Lösung.

Nur bei Stabtragwerken fallen **Interpolierende** u_I und FE-Lösung u_h zusammen, ist der Fehler in den Spannungen der beiden Lösungen daher gleich. Die Abweichung $u - u_I$ wird behoben, indem das FE-Programm stabweise die lokalen Lösungen zur FE-Lösung addiert und so auf die exakten Ergebnisse kommt. Vergisst man diesen Schritt, dann ist die FE-Lösung $u_h = u_I$ nicht besser als die Interpolierende und die ‚Lücken' $u - u_h$ (‚Bögen', die von Knoten zu Knoten spannen) sind die ***lokalen Fehler*** der FE-Lösung.

Interpolierende: Wenn man die exakte Lösung u kennt und man interpoliert sie in den Knoten mit den *shape functions* aus $\mathcal{V}_h$, dann ist das die Interpolierende u_I auf dem FE-Netz.

Viele Fehlerschätzer basieren auf der Tatsache, dass der Fehler der FE-Lösung $\|u - u_h\|$ (gemessen in der Energienorm $\sim$ Fehlerquadrat der Spannungen) kleiner als der Fehler $\|u - u_I\|$ der Interpolierenden ist. Netze, auf denen man Funktionen gut interpolieren kann, sind auch gute FE-Netze, weil die FE-Lösung immer noch eine Idee besser ist als die Interpolierende.

[6] Ausnahme 1-D: Lineare φ_i haben keine Schwierigkeiten mit elementweise unterschiedlichem EA, siehe Bild 4.24, und die kubischen φ_i bei Balken mit unterschiedlichem EI. Sie können die Einflussfunktionen darstellen und daher sind die Knotenwerte exakt, $u_h(x_i) = u(x_i)$ bzw. $w_h(x_i) = w(x_i), w_h'(x_i) = w'(x_i)$.

4.13.2 Details

Das Thema *Pollution* geht auf Babuška zurück, [12], in der FE-Literatur findet man sonst wenig dazu. Der Anlass war, wenn wir es richtig sehen, die Bemerkung von *Zienkiewicz et Zhu*, [340], dass man nur das Residuum $p - p_h$ in den Lasten klein machen müsse, um in die Nähe der exakten Lösung zu kommen. Aber es gibt eben auch – so der Einwand – den ***drift*** in einer FE-Lösung, dem man mit der alleinigen Betrachtung des Residuums $p - p_h$ nicht auf die Spur kommt, wenn die Lösung nicht glatt ist, [14] p. 259. Babuška

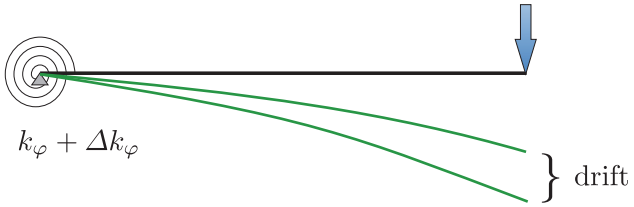


Bild 4.25. Drift einer Lösung auf Grund einer falschen Steifigkeit

definiert als den ***globalen Fehler*** oder *pollution*, den Abstand zwischen der Interpolierenden u_I und der FE-Lösung

$$u_g = u_I - u_h \tag{4.82}$$

und als den ***lokalen Fehler*** den Fehler der Interpolierenden auf den Elementen

$$u_l = u - u_I \,, \tag{4.83}$$

das sind bei 1-D Problemen die ‚Schwibbögen', die von Knoten zu Knoten spannen (in den Knoten ist $u_l(x_i) = 0$ ja null).

Die Summe ist der Fehler der FE-Lösung

$$e = u_g + u_l = u_I - u_h + u - u_I = u - u_h \,. \tag{4.84}$$

Der globale Fehler äußert sich als *drift* in den Knoten und man bezeichnet ihn daher gerne auch als ***Fernfeldfehler***, weil er durch Störungen $p - p_h$ in abliegenden Tragwerksteilen oder durch Singularitäten auf dem Rand verursacht wird, siehe Kapitel 6.13. Gerade letztere ‚übersieht' ein Fehlerschätzer, der nur auf das Residuum $p - p_h$ schaut.

Die einfachste Illustration des Phänomens bietet ein drehelastisch (k_φ) eingespannter Kragträger, siehe Bild 4.25. Eine falsch angesetzte Drehsteifigkeit $k_\varphi + \Delta k_\varphi$ gleicht einer Singularität auf dem Rand und je weiter man nach außen geht, um so größer wird der *drift* in der FE-Lösung – selbst wenn $p_h = p$ ist.

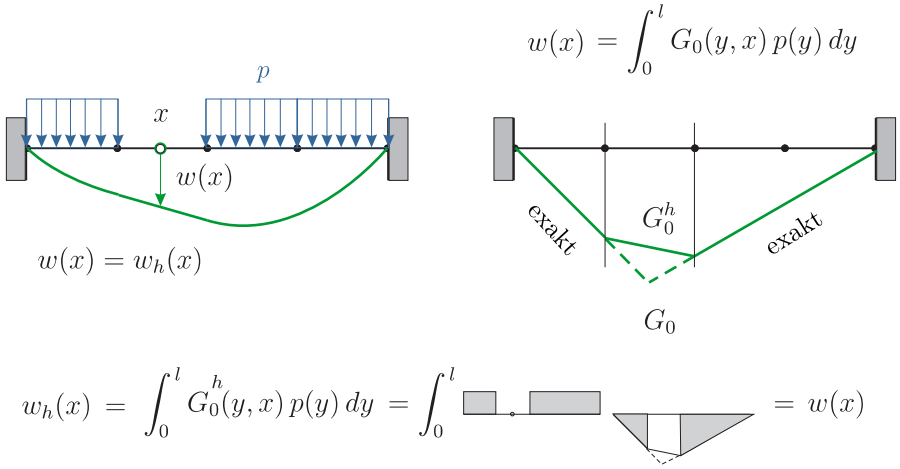


Bild 4.26. Seil, in allen Elementen, die keine Last tragen, ist der Fehler null

4.14 Superkonvergenz

Dieses Thema ist praktisch das Gegenstück zur *pollution*. In superkonvergenten Punkten ist eine FE-Lösung genauer als es eigentlich der Ordnung der Ansatzfunktionen entspricht. Als superkonvergente Punkte zählen vor allem die ***Gausspunkte*** der numerischen Quadratur. Warum das so ist, können wir sogar erklären.

Beginnen wir mit einem Balken, bei dem die Einflussfunktionen G_0^h der Knoten ja mit den exakten Einflussfunktionen G_0 übereinstimmen. Nun gilt: (i) die *shape functions* φ_i sind homogene Lösungen, (ii) die Einflussfunktionen sind in allen Punkten – mit Ausnahme des Aufpunkts – homogene Lösungen, (iii) homogene Lösungen sind durch ihre Knotenwerte bestimmt. Es folgt also, dass der Fehler in den Einflussfunktionen G_0^h außerhalb des Elements, das den Aufpunkt x enthält, null ist und so ist eine 1-D FE Lösung in allen Punkten x, die auf unbelasteten Elementen liegen, exakt, siehe Bild 4.26.

Was passiert nun, wenn x auf einem Element liegt, das eine Gleichlast p trägt? Die exakte Biegelinie w kann in jedem Element in eine homogene Lösung w_n und eine partikuläre Lösung w_p (*fixed ends*) aufgespalten werden

$$w(x) = w_n(x) + w_p(x) \qquad EI\, w_n^{IV}(x) = 0 \qquad EI\, w_p^{IV} = p\,, \tag{4.85}$$

und die homogene Lösung ist mit der FE-Lösung identisch, $w_h = w_n$, auf jedem Element. Der Fehler $e(x)$ in der FE-Lösung ist also $e(x) = w(x) - w_h(x) = w_p(x)$, und der Fehler im Moment ist damit gleich dem Verlauf des Biegemomentes am beidseitig eingespannten Träger (l_e = Elementlänge)

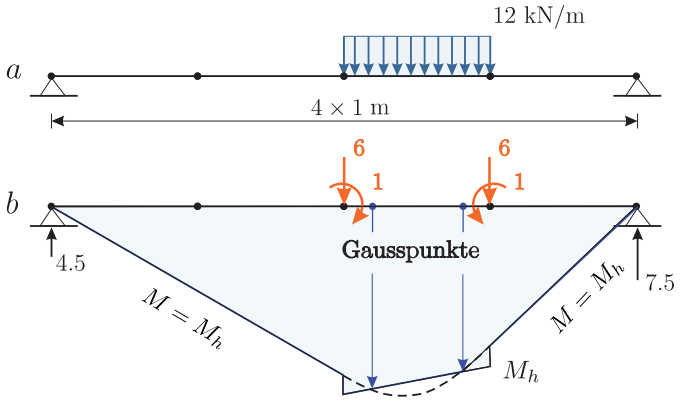


Bild 4.27. Balken, Knotenkräfte f_i statt Streckenlast p, aber in den beiden Gausspunkten sind die Momente exakt

$$M_p(x) = -EI\, w_p''(x) = \frac{p\, l_e^2}{2}\,(\frac{1}{6} - \frac{x}{l_e} + \frac{x^2}{l_e^2})\,. \tag{4.86}$$

Jetzt kommt die **Überraschung**! Der Fehler ist also da null, wo $M_p(x) = 0$ ist, und diese beiden Punkte $x_1 = 0.21132$ und $x_2 = 0.78868$, sind genau die Gausspunkte, siehe Bild 4.28. Wie kommt das?

(i) Das Integral von M_p ist null, weil die Enden eingespannt sind, $w_p'(0) = w_p'(l_e) = 0$, siehe Bild 4.28

$$\int_0^{l_e} M_p(x)\, dx = \int_0^{l_e} -EI\, w_p''(x)\, dx = -EI\,[w_p'(l_e) - w_p'(0)] = 0\,. \tag{4.87}$$

(ii) $M_p(x)$ ist ein Polynom zweiten Grades. Daher muss die Funktion in den $n = 2$ Gausspunkten einer $2n - 1 = 3$ Formel, null sein

$$\int_0^{l_e} M_p(x)\, dx = w_1\, M_p(x_1) + w_2\, M_p(x_2) = 0\,, \tag{4.88}$$

und das ist die Erklärung; (die w_i sind die Gewichte der Quadratur).

Bei anderen Lasten ist es nicht garantiert, dass M_p in den Gausspunkten null ist. Dann muss man die superkonvergenten Punkte in den Plots der Festeinspannmomente suchen. Obwohl sich immer noch Regeln finden lassen. Wenn z.B. die Belastung auf dem Intervall $[-1, 1]$ dreiecksförmig ist, $p(x) = (1 + x)/2$, dann muss M_p wegen

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} M_p(x)\, dx &= \int_{-1}^{+1} (-\frac{1}{12} - \frac{x}{20} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12})\, dx \\ &= 1.0 \cdot M_p(-0.5775) + 1.0 \cdot M_p(0.5775) = 0\end{aligned} \tag{4.89}$$

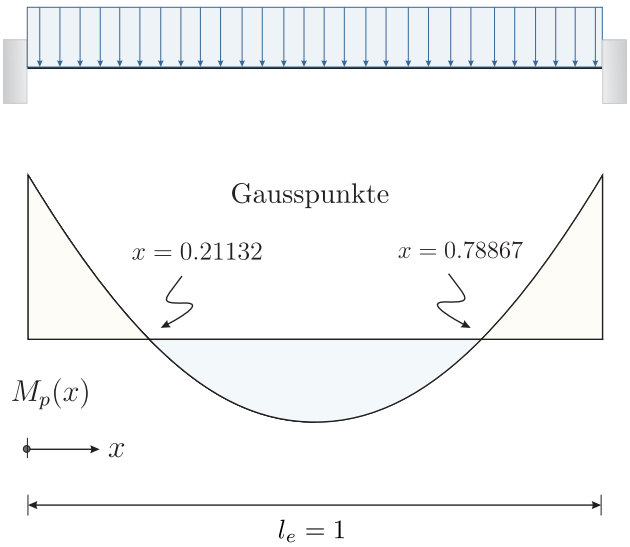


Bild 4.28. Die Nullstellen des Festeinspannmoments $M_p(x)$ fallen mit den Gausspunkten zusammen

entgegengesetzte Werte in den beiden Gausspunkten haben.

Aus demselben Grund ist die Querkraft $V(x) = -EI\,w'''(x)$ in der Mitte eines Elements null, wenn die Belastung p konstant ist, denn das Integral von $V(x) = M'(x)$ ist null, weil die beiden Einspannmomente gleich groß sind, $M(l_e) - M(0) = 0$, und weil $V(x)$ in dem Element eine lineare Funktion ist, die mit einem Gausspunkt exakt integriert werden kann.

Betrachten wir nun eine rechteckige, eingespannte Platte. Weil die Normalableitung $w_n = \nabla w \bullet \boldsymbol{n} = 0$ und die Tangentialableitung $w_t = \nabla w \bullet \boldsymbol{t} = 0$ auf dem Rand null sind, ist auch der Gradient $\nabla w = \{w_{,x}\,, w_{,y}\,\}^T$ null und daher muss das Integral von m_{xx} null sein

$$\int_\Omega m_{xx}\,d\Omega = \int_\Omega (w_{,xx} + \nu\, w_{,yy})\,d\Omega = \int_\Gamma (w_{,x}\, n_x + \nu\, w_{,y}\, n_y)\,ds = 0 \quad (4.90)$$

wie auch das Integral von m_{yy}.

In einem Balken ist unter einer Gleichlast $p = 1$ das Moment $M(x)$ ein Polynom zweiten Grades. Wenn dasselbe in einer Platte gelten würde, wenn die Biegemomente m_{ij} symmetrische Polynome zweiten Grades wären, dann müssten sie in den vier Gausspunkten null sein. Aber das ist wohl nur näherungsweise richtig, siehe Bild 4.29.

In einer allseitig festgehaltenen Scheibe muss das Integral von σ_{xx} null sein

$$\int_\Omega \sigma_{xx}\,d\Omega = E \int_\Omega (u_{x,x} + \nu\, u_{y,y})\,d\Omega = E \int_\Gamma (u_x n_x + \nu\, u_y n_y)\,ds = 0\,, \quad (4.91)$$

ebenso wie die Integrale von σ_{yy} und σ_{xy}.

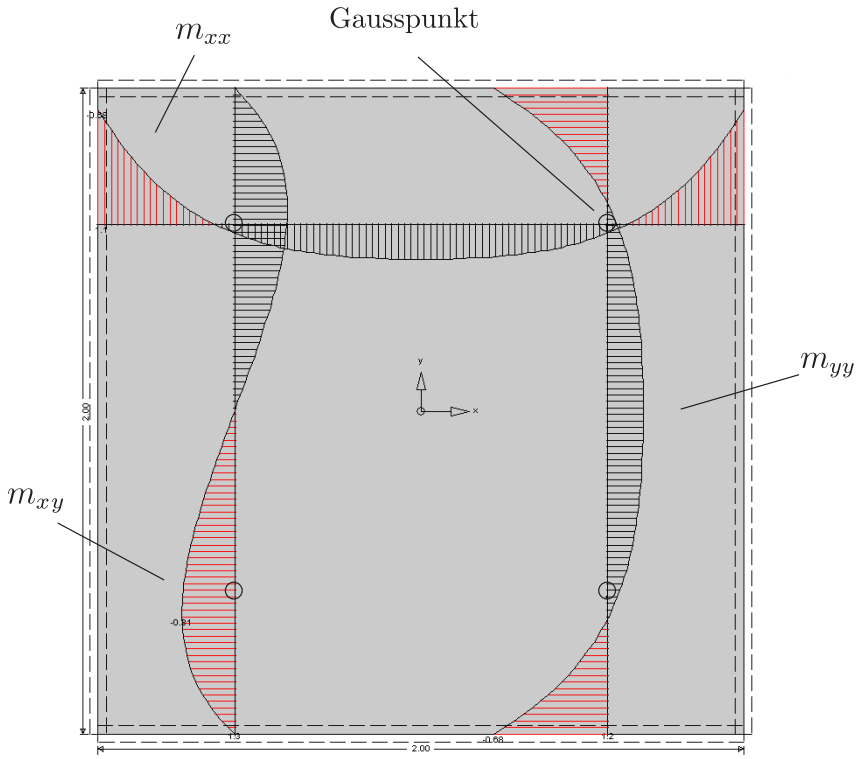


Bild 4.29. Eingespannte Platte und die Lage der vier Gausspunkte mit Plots der Momente m_{xx}, m_{xy}, und m_{yy} (BE-PLATTE)

Unter horizontalen Flächenkräften $\boldsymbol{p} = \{1, 0\}^T$ bildet sich näherungsweise eine lineare Spannungsverteilung σ_{xx} aus und die vertikalen Spannungen σ_{yy} sind quadratisch, siehe Bild 4.30. Bei linearen Spannungen σ_{xx} gäbe es eine Nullstelle in Elementmitte und bei quadratischen Spannungen σ_{yy} Nullstellen in allen vier Gausspunkten.

Das Problem bei all diesem ist natürlich, dass die Aufspaltung in homogene und partikuläre Lösung wie bei einem Balken, bei Flächentragwerken nicht möglich ist. Wenn natürlich auch ansatzweise, bei der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte so vorgegangen wird. In Gedanken steht ja das Drehwinkelverfahren hinter den finiten Elementen. Nur kann man das Addieren der lokalen Lösungen nicht separat vornehmen, sondern man muss darauf vertrauen, dass das ein FE-Programm automatisch richtig macht, dass ‚irgendwie' die lokale Lösung in der FE-Lösung steckt.

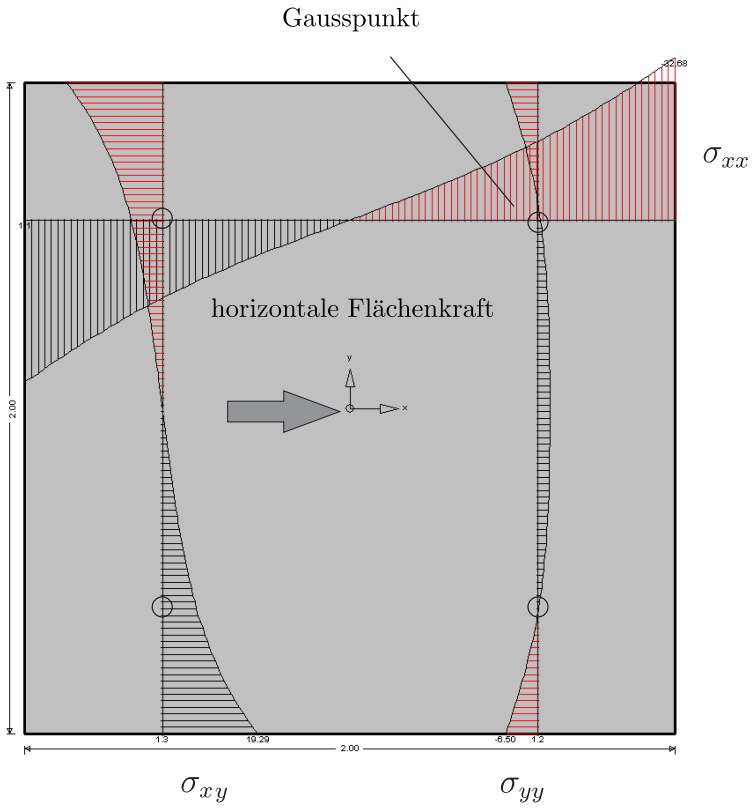


Bild 4.30. Eingespanntes Scheibenelement unter horizontalen Flächenkräften $\boldsymbol{p} = \{1, 0\}^T$; σ_{xx} und σ_{xy} verlaufen näherungsweise linear und σ_{yy} ist quadratisch (BESCHEIBE)

4.15 Symmetrien

Wir wollen mit einer Bemerkung schließen, die nichts mit Superkonvergenz zu tun hat, aber auch staunen lässt.

Die anfängliche Skepsis gegenüber den Randelementen beruhte ja auch darauf, dass das Gleichungssystem nicht symmetrisch ist. Wie konnte so etwas richtig sein?

Symmetrien können vieles erleichtern, aber der Programmierer fürchtet sie spätestens dann, wenn der Aufsteller anruft und fragt, was die -0 auf der Symmetrieachse bedeuten soll? Dass auf einem symmetrischen Netz bei symmetrischen Lasten die FE-Ergebnisse symmetrisch (w, M) bzw. antimetrisch (w', V) sind, das ‚weiß' man, da muss man erst gar nicht hinschauen. Das dasselbe aber auch für die Randelemente gilt, ist schon ein kleines Wunder.

Jeder Punktwert wird ja einzeln, unabhängig vom Nachbarn, durch Integration über den Rand und die Last p im Innern berechnet. Auf dem Rand

werden die Kerne $G_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ mit den Randverschiebungen und -spannungen überlagert, die ja auch teilweise – halbe-halbe – genähert sind. Bestimmend für den Verlauf der Einflussfunktionen ist der Abstand $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ von $\boldsymbol{x}$ zu den Gausspunkten und der Winkel des Sehstrahls $\boldsymbol{r}$ zu den Gausspunkten $\boldsymbol{y}$. Und wenn zwei Punkte $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ spiegelbildlich zur Symmetrieachse liegen, dann muss trotz der vielen Numerik dasselbe herauskommen und so ist es auch, solange man nicht auf die Idee kommt auch noch die siebte Stelle nach dem Komma zu vergleichen...

Für einen Mathematiker ist das selbstverständlich – *das muss so sein!* – aber der Programmierer, der an seinen *code* denkt und an die diversen Klippen bei der Diskretisierung der Randdaten (Richtungsableitungen in den Ecken, Sprung in den *tractions*, möglicher Sprung in den Koeffizienten der Differentialgleichung, etc.) – die Randelemente leben ja **auf und aus dem Rand** – der Programmierer staunt, wie sich das so alles nahtlos, wie von Zauberhand, ineinander fügt. ***You can rely on it, Gauss won't let you down***.

5

Steifigkeitsänderungen und Reanalysis

Das Thema in diesem Kapitel sind Steifigkeitsänderungen und die Frage, wie solche Änderungen durch ein Tragwerk propagieren, wie sie die Kräfteverteilung in dem Tragwerk verändern.

Weil das Kapitel teilweise recht technisch ist, wollen wir mit einer kurzen Skizze beginnen.

Algebra

Mit einer Änderung $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ ändert sich auch die Lösung $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_c$

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.1}$$

was man auch als

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+ \tag{5.2}$$

schreiben kann. Also ist der neue Vektor $\boldsymbol{u}_c$ die **Antwort am ursprünglichen System**, wenn man zur rechten Seite den Vektor $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ addiert[1].

Einflussfunktionen

Für die Änderungen in linearen Funktionalen gilt die ‚Kurzformel'

$$J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c\,. \tag{5.3}$$

Kurz, weil nur über das geänderte Element integriert wird – die rechte Seite ist ja eine Energie, ein Integral wie ‚Mohr'. Ändert sich auch $J() \to J_c()$, dann wird es etwas komplizierter, aber für den Anfang reicht diese Formel.

[1] Im Englischen nennt man die Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$ am alten System *Reanalysis*.

Mathematik

Die Ableitung der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ nach einem Parameter s ergibt

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{K}^{-1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\frac{d}{ds}\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.4}$$

und bei der Ableitung der Lösung $\boldsymbol{u}$ nach den k_{ij} tauchen die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ auf. Sie stecken hinter den Ausgleichsbewegungen eines Tragwerks bei Steifigkeitsänderungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1}u_j\boldsymbol{e}_i = -u_j\boldsymbol{g}_i\,. \tag{5.5}$$

Sensitivitäten

Mit (5.3) kann man Sensitivitäts-Karten erstellen, zeigen wo welche Änderungen den größten Einfluss auf eine Spannung oder Verschiebung haben. Übersetzt in die Stabstatik basieren die Karten auf dem Ausdruck

$$J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta EI}{EI}\int_0^l \frac{M_c M_G}{EI_c}\,dy\,. \tag{5.6}$$

Man plottet den Verlauf von M_c und von M_G (das Moment der EF) und die Riegel und Stiele, wo beide groß sind, sind die maßgebenden Zonen.

Berechnung von $\boldsymbol{u_c}$

Der Vektor $\boldsymbol{u}_c$ wird in der Praxis durch den Vektor $\boldsymbol{u}$ ersetzt. Man kann ihn jedoch auch direkt berechnen, entweder mittels Iteration [44] oder durch das Lösen eines kleinen Hilfssystems, siehe Kapitel 5.27.2.

Weil wir nicht in der Theorie stecken bleiben wollten, haben wir ein Programm geschrieben, Kapitel 5.29, mit dem Stabtragwerke ohne Neuberechnung durch einfache *mouse clicks* geändert werden können. Dabei kommen diese beiden Methoden zum Einsatz.

Das ist in etwa der rote Faden. Ein Mathematiker hätte das Thema wahrscheinlich knapper – mit weniger Abschweifungen – dargestellt, aber dann wäre es wohl weniger lesbarer geworden. So hat sich ein *mixed bag* ergeben, aber das ist die Praxis des numerischen Rechnens, wo man vieles versucht, um zu vernünftigen Ansätzen und Lösungen zu kommen.

5.1 Die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$

Mit einer Steifigkeitsänderung entsteht eine neue Matrix $\boldsymbol{K}_c$ und die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ des Tragwerks, (*c as in changed*), ändert sich

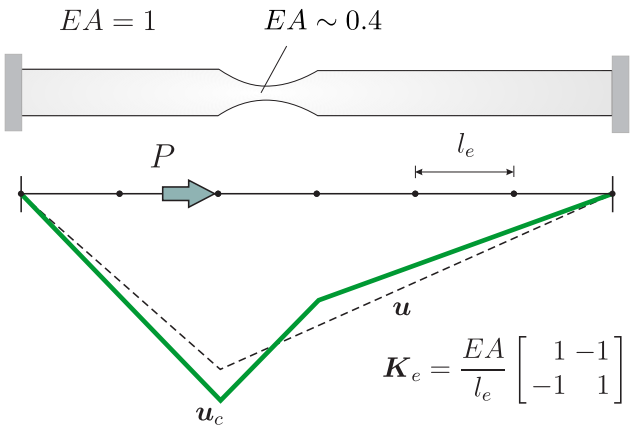


Bild 5.1. Einschnürung in einem Stab

$$\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,. \tag{5.7}$$

Wenn wir additiv denken, dann kann man das schreiben als

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.8}$$

wenn $\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{K}_c - \boldsymbol{K}$ die Änderung in der ursprünglichen Matrix $\boldsymbol{K}$ ist, und nun ist es nur noch ein kleiner Schritt zur zentralen Gleichung

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.9}$$

Die neue Lage $\boldsymbol{u}_c$ ist also interpretierbar als die Antwort des ursprünglichen Systems auf die Änderung

$$\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \tag{5.10}$$

der rechten Seite[2].

Diese Formulierung scheint zunächst kein großer Gewinn, aber es zeigt sich, dass $\boldsymbol{f}^+$ orthogonal zu allen Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}$ ist und das impliziert, dass Effekte von lokalen Steifigkeitsänderungen oft rasch abklingen.

Wenn man den neuen Vektor additiv schreibt

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Delta u}\,, \tag{5.11}$$

sieht man, dass jede Steifigkeitsänderung eine kompensierende Bewegung $\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+$ auslöst, die die Reaktion des ursprünglichen Tragwerks auf die zusätzlichen Knotenkräfte $\boldsymbol{f}^+$ ist.

[2] Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass der Lastvektor $\boldsymbol{f}$ nicht von den Steifigkeiten abhängt. Die Ausnahme sind EF für Spannungen, wo $j_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ (z.B.) vom E-Modul abhängt; j_i ist das f_i.

Das Problem dabei ist natürlich, dass der Vektor $\boldsymbol{u}_c$, von dem ja $\boldsymbol{f}^+$ abhängt, nicht bekannt ist. In der Optimierung setzt man für $\boldsymbol{f}^+$ näherungsweise den Vektor $-\boldsymbol{\Delta K u}$, siehe (5.168). In Kapitel 5.27.2 werden wir Techniken zur Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$ vorstellen. An dieser Stelle sei aber betont, dass es uns nicht darum geht, den Computer zu schlagen, sondern dass es uns um die Einsicht in die **Effekte von Steifigkeitsänderungen** geht.

Mathematisch kann man sich (5.8) so zurechtlegen: Um die geänderte Seilgleichung (Zuwachs ΔH in der Vorspannung des Seils)

$$-(H + \Delta H)u_c'' = p \tag{5.12}$$

zu lösen, kann man $-\Delta H\, u_c''$ auf die rechte Seite bringen,

$$-H\, u_c'' = p + \Delta H\, u_c'' \tag{5.13}$$

und die äquivalenten Knotenkräfte sind dann

$$\int_0^l \varphi_i\, p\, dx + \int_0^l \varphi_i\, \Delta H\, u_c''\, dx = f_i + f_i^+ . \tag{5.14}$$

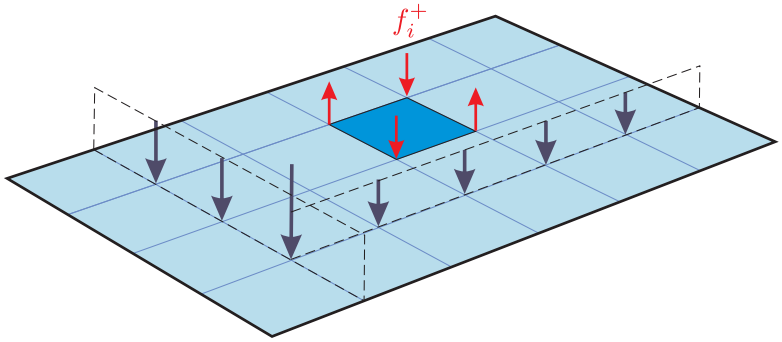


Bild 5.2. Membran. Steifigkeitsänderungen in einem Element kann man durch die Wirkung von Zusatzkräften f_i^+ in den Knoten des Elements berücksichtigen. Die f_i^+ sind Gleichgewichtskräfte, ihre Summe ist null.

5.1.1 Rechnen mit den alten Einflussfunktionen

Zurück zu $\boldsymbol{K u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Die neue Lösung $\boldsymbol{u}_c$ ist, wie die alte Lösung $\boldsymbol{u} = \sum_i f_i\, \boldsymbol{g}_i$, eine Entwicklung nach den Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen (= den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der **alten** (!) Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$)

$$\boldsymbol{u}_c = \sum\nolimits_i f_i\,\boldsymbol{g}_i + \underset{\uparrow}{f_a^+}\,\boldsymbol{g}_a + \underset{\uparrow}{f_b^+}\,\boldsymbol{g}_b + \ldots = \boldsymbol{u} + \underset{\uparrow}{f_a^+}\,\boldsymbol{g}_a + \underset{\uparrow}{f_b^+}\,\boldsymbol{g}_b + \ldots \tag{5.15}$$

nur um **Zusatzgewichte** $f_a^+, f_b^+, \ldots$ ergänzt, die den geänderten Steifigkeiten k_{ab} korrespondieren; auch $\boldsymbol{g}_a$ und $\boldsymbol{g}_b$ sind Spalten aus $\boldsymbol{K}^{-1}$.

Angenommen die Steifigkeiten $k_{5,5}, k_{5,6}, k_{5,7}, \ldots, k_{8,8}$ in einer Membran ändern sich. Dann markieren vier zunächst unbekannte Gewichte $f_5^+, f_6^+, f_7^+, f_8^+$ den Unterschied zwischen neu und alt

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = f_5^+\,\boldsymbol{g}_5 + f_6^+\,\boldsymbol{g}_6 + f_7^+\,\boldsymbol{g}_7 + f_8^+\,\boldsymbol{g}_8 \quad \leftarrow \text{alte Spalten } \boldsymbol{g}_i\,. \tag{5.16}$$

Es kommt sozusagen nichts neues hinzu, das alte wird nur – mit altem – ergänzt, siehe Bild 5.2.

Wem das merkwürdig vorkommt, sei daran erinnert, dass das im Grunde genau die Technik des **Kraftgrößenverfahrens** ist, das ja auch immer nur am statisch bestimmten Hauptsystem rechnet und alles, was dazu kommt über die X_i ($\equiv f_i^+$) einbaut. Es stellt die Matrix

$$\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K} \tag{5.17}$$

nie auf, sondern berechnet alles mit der Matrix $\boldsymbol{K}$, die im übertragenen Sinn dem statisch bestimmten Hauptsystem entspricht, siehe Kapitel 5.12.

Bemerkung 5.1. Wir lesen $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]$ und $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$. In Spalte $\boldsymbol{f}_i$ stehen die *push-stop* Kräfte, um den FG $u_i = 1$ auszulenken, und die anderen $u_j = 0$ festzuhalten, und die Spalte $\boldsymbol{g}_i$ ist die Gleichgewichtslage im LF $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$. Die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ sind die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen u_i, denn $u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}$ (genauer: sind die Knotenwerte der Einflussfunktionen, $G_h(y, x_i) = \sum_j g_{ij}\varphi_j(y)$, siehe Seite 357.

Bemerkung 5.2. Bei einer Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ steht die Steifigkeit EA/l ‚oben' und bei der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ daher ‚unten', fängt sie mit dem Kehrwert l/EA an. Dem entspricht, dass bei den Einflussfunktionen, das sind ja die inversen Operatoren, das EA im Nenner steht; das nur zur Erinnerung.

5.1.2 Die Schnittgrößen

Vorsichtshalber sei noch angemerkt: Wir stellen zwar die Gleichung

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+ \tag{5.18}$$

am ‚alten' System auf und lösen sie am alten System, aber die zu $\boldsymbol{u}_c$ gehörenden Schnittgrößen berechnen wir dann mit den Steifigkeiten des ‚neuen' Systems.

Es wäre also naiv einfach die Schnittgrößen am alten System aus den Knotenkräften $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$ auf das neue System zu übertragen. Ist $\varepsilon_c = du_c/dx$ die Dehnung eines Stabes am neuen System, dann ist die Normalkraft nicht $EA\,\varepsilon_c$, sondern $EA_c\,\varepsilon_c$, wenn sich EA zu EA_c geändert hat.

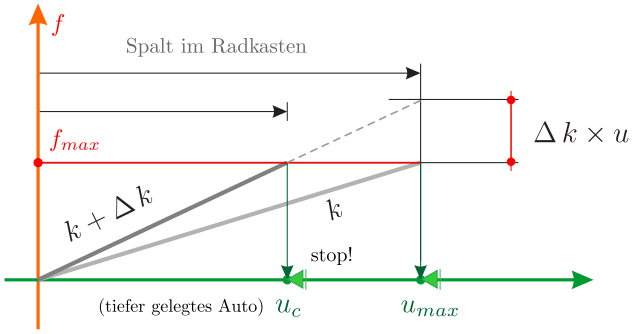


Bild 5.3. Wenn man ein Auto tiefer legt $u_c \leftarrow u_{max}$, muss man k erhöhen, um auf kürzerem Weg dieselbe Kraft $f_{max} = m \cdot a_y$ (Rad mit Masse m fährt mit $v_{max} \rightarrow$ über eine Bodenwelle der Höhe $h \uparrow$) aufnehmen zu können; a_y = nötige $\uparrow$ *acc.*

5.2 Parameteridentifikation

Wenn man an einer Feder mit einer Kraft f zieht und die Verlängerung u misst, kann man die Steifigkeit $k = f/u$ der Feder bestimmen. Unter Parameteridentifikation versteht man die Anpassung der Elemente k_{ij} einer Steifigkeitsmatrix an gemessene Daten, an Verschiebungsantworten. Mathematisch gilt das als (schwieriges) **inverses Problem**. Weil nun die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen sind, dreht sich alles um die Einflussfunktionen. Wie ändern sich die Systemantworten mit Korrekturen $k_{ij} \rightarrow k_{ij} + \Delta k_{ij}$? Wie muss man die k_{ij} ändern, um die Messdaten reproduzieren zu können? Wie sensitiv ist das Tragwerk gegenüber solchen Änderungen?

Das sind aber gerade die Fragen, die auch bei der Reanalysis eine große Rolle spielen, denn in Kapitel 5.16 zeigt sich, dass die Ableitung des Verschiebungsvektors nach einem Element k_{ij}

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j \, \boldsymbol{e}_i = -u_j \, \boldsymbol{g}_i \,, \tag{5.19}$$

gerade von der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}_i$ abhängt. In diesem Sinne hätte die Überschrift des Kapitels auch lauten können: *Steifigkeitsänderungen und Parameteridentifikation*.

5.3 Einleitung

Zur Einleitung betrachten wir eine Feder und ihr Federgesetz $k\,u = f$, siehe Bild 5.3. Die Reaktion der Feder auf eine Kraft $f = 1$ (das Dirac Delta) ist $G = 1/k$ und eine Änderung der Steifigkeit, $k + \Delta k$, führt zu einer geänderten

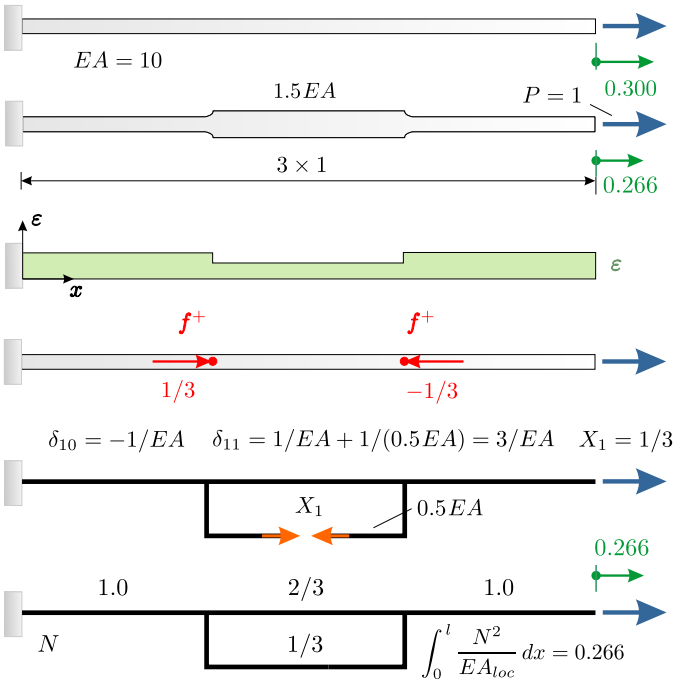


Bild 5.4. Modellierung der Steifigkeitsänderung in einem Stab mit Hilfe von Zusatzkräften $\boldsymbol{f}^+$. Unten Berechnung von $f^+ = X_1$ mit dem Kraftgrößenverfahren

Antwort $G_c = 1/(k + \Delta k)$. Übertragen auf eine beliebige Kraft f bedeutet das für die Verlängerung vorher, u, und nachher, u_c,

$$u = \frac{1}{k} f \qquad u_c = \frac{1}{k + \Delta k} f \,. \tag{5.20}$$

Eine **Taylor-Entwicklung** der geänderten Einflussfunktion

$$\frac{1}{k + \Delta k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \Delta k + \dots \tag{5.21}$$

macht deutlich, wie die Feder auf die Steifigkeitsänderung reagiert

$$u_c \simeq \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \frac{\Delta k}{k} \right] f = u - \frac{1}{k} \underbrace{\Delta k \cdot u}_{Kraft} \,. \tag{5.22}$$

Der Zuwachs an Steifigkeit, $k \to k + \Delta k$, führt dazu, dass das ursprüngliche u über das Ziel hinaus schießt, die Federkraft $(k + \Delta k)\, u = f + \Delta k \cdot u$ zu groß wird, und um dieses zuviel wieder zu beseitigen, muss eine entgegengesetzte Bewegung $\Delta u \simeq -\Delta k \cdot u/k$ die Lage des Knotens korrigieren.

Schaut man sich die Taylor-Entwicklung einer Steifigkeitsmatrix an, [63],

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K})^{-1}=\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{K}^{-1}+\ldots \tag{5.23}$$

dann ist die Analogie zwischen (5.22) und

$$\boldsymbol{u}_c=(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K})^{-1}\boldsymbol{f}\simeq\boldsymbol{u}-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u} \tag{5.24}$$

evident. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}\,, \tag{5.25}$$

dann liegt sie (fast) in der Form vor, wie wir sie in diesem Kapitel behandeln. Nur dass wir nicht mit Taylor arbeiten, sondern das ganze exakt angehen, d.h. wir ersetzen $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ durch die exakte Korrektur $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{f}^+$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.26}$$

Die Näherung (5.24) bedeutet $\boldsymbol{u}_c-\boldsymbol{u}\simeq-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ und das kann man, wenn man es auf einen Balken anwendet, $EI\to EI+\Delta EI$, und in integraler Form schreibt

$$w_c(x)-w(x)=-\int_0^l \underbrace{G_0(y,x)}_{\boldsymbol{K}^{-1}}\,\underbrace{\Delta EI\,\frac{d^4}{dy^4}}_{\boldsymbol{\Delta K}}\underbrace{\int_0^l G_0(y,z)\,p(z)\,dz}_{\boldsymbol{u}}\,dy \tag{5.27}$$

sogar verstehen,

$$w_c(x)-w(x)=-\int_0^l G_0(y,x)\,\frac{\Delta EI}{EI}p(y)\,dy\,, \tag{5.28}$$

denn es bedeutet, dass eine Abnahme, $\Delta EI<0$, mit Blick auf w einer Zunahme in der Belastung p gleichkommt.

Beispiel 5.1. Die drei Elemente, $l_e=1$, des Stabs in Bild 5.4 hatten zunächst alle dieselbe Längssteifigkeit $EA=10$, aber dann wird EA im mittleren Stab auf $EA=15$ kN erhöht. Die Matrizen heißen also

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}20&-10&0\\-10&20&-10\\0&-10&10\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{\Delta K}=\begin{bmatrix}5&-5&0\\-5&5&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{K}_c=\begin{bmatrix}25&-15&0\\-15&25&-10\\0&-10&10\end{bmatrix} \tag{5.29}$$

und $\boldsymbol{f}=\{0,0,1\}^T$ ist die Last. Die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ vorher und $\boldsymbol{u}_c$ nachher und der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ lauten

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0.100\\0.200\\0.300\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{u}_c=\begin{bmatrix}0.100\\0.166\\0.266\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{f}^+=-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c=\begin{bmatrix}0.333\\-0.333\\0.0\end{bmatrix}\,. \tag{5.30}$$

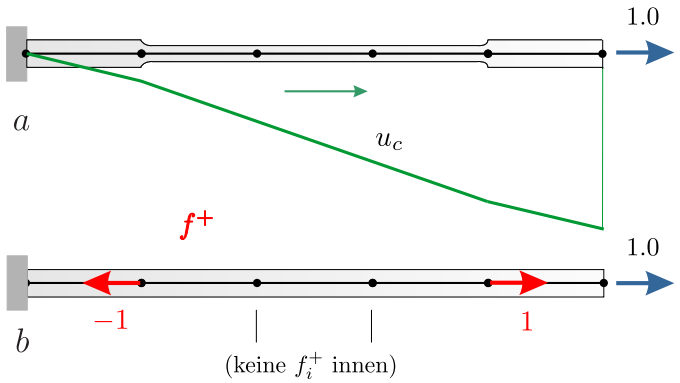


Bild 5.5. Wenn die Minderung in den Elementen gleich ist, dann treten Kräfte f_i^+ nur an den Enden des Bereichs auf, wenn der Bereich selbst lastfrei ist, siehe auch Bild 5.13 *b*

Zum Vergleich berechnen wir den neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$ mit der alten Matrix, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$, und setzen näherungsweise $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \simeq -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_c &= (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c)\\ &\simeq \boldsymbol{u} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \{0.100, 0.1500, 0.2500\}^T. \qquad (5.31)\end{aligned}$$

Bemerkung 5.3. Wenn mehrere Elemente betroffen sind, die Steifigkeitsänderungen in allen gleich sind, die Elemente gleich geschnitten sind und keine Last im betroffenen Bereich angreift, dann heben sich die Korrekturen an den **Innenknoten** weg, sind die f_i^+ dort null, siehe Bild 5.5 *b*. Ob EA oder EA_c die Lösung von $-EA\,u'' = 0$ liegt in $\mathcal{V}_h$, aber nicht, wenn $-EA\,u'' = p$.

5.4 Strategie

Diese Ergebnisse nehmen wir nun zum Anlass, unsere Strategie wie folgt zu formulieren: Wir ändern nicht die Steifigkeitsmatrix, sondern die rechte Seite. Wir suchen also eine Ergänzung $\boldsymbol{f}^+$ zu dem Vektor $\boldsymbol{f}$ so, dass $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$ an dem System $\boldsymbol{K}$ dieselben Knotenverschiebungen verursacht, wie $\boldsymbol{f}$ an dem System $\boldsymbol{K}_c$.

Weil die Korrektur $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ von dem neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$ abhängt, der ja erst berechnet werden soll, rechnet man näherungsweise mit $\boldsymbol{f}^+ \sim -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$.

Die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ ist, wie jede ‚ungelagerte' Steifigkeitsmatrix, singulär und die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ sind die Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0$ des Elements. Jeder Vektor $\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ ist orthogonal zu diesen Bewegungen, $(\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{0} = 0$.

Daher gilt: Alle Steifigkeitsänderungen können verstanden werden als die Addition von ***Gleichgewichtskräften*** $\boldsymbol{f}^+$ zur Belastung $\boldsymbol{f}$, also Kräften, die keine Arbeit auf Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$ leisten

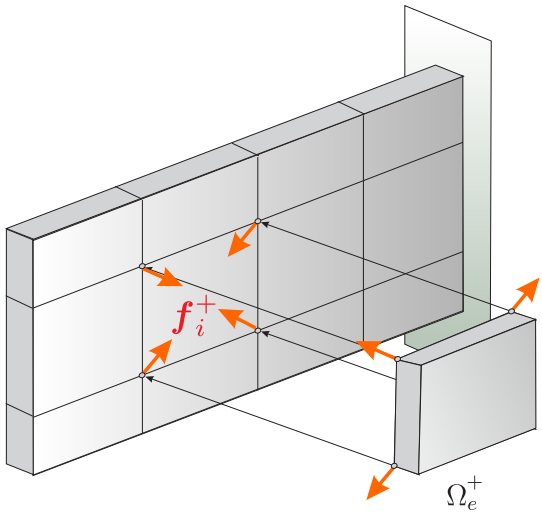


Bild 5.6. Eine Steifigkeitsänderung $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K}$ bedeutet, dass man ein Zusatzelement Ω_e^+ mit der Steifigkeit $\boldsymbol{\Delta K}$ an das Tragwerk anheftet, [126]

$$\boldsymbol{f}^{+T}\boldsymbol{u}_0 = 0\,. \tag{5.32}$$

Das erlaubt den folgenden Schluss:

Steifigkeitsänderungen sind in ihren Auswirkungen lokal begrenzt, weil sich die Wirkungen der Gleichgewichtskräfte $\boldsymbol{f}^+$ in der Ferne aufheben.

5.5 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten

Die Änderung der Steifigkeit in einem Element kann man so deuten, dass man vor das ursprüngliche Element ein zweites Element legt, dessen Steifigkeit gerade so groß ist, dass die beiden Elemente zusammen – wie parallel geschaltete Federn – die angezielte Steifigkeit haben, siehe Bild 5.6.

Das zusätzliche Element muss nun durch **Koppelkräfte** mit dem ursprünglichen Tragwerk synchron geschaltet werden, und diese Kräfte sind gerade die $\boldsymbol{f}^+$. Das macht auch verständlich, warum die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ Gleichgewichtskräfte sind, denn wären sie es nicht, dann würde das vorgeschaltete Element wegfliegen.

Dies Modell gilt bei einer Zu- wie Abnahme der Steifigkeit. Mit der Richtung ändert sich nur das Vorzeichen der $\boldsymbol{f}^+$.

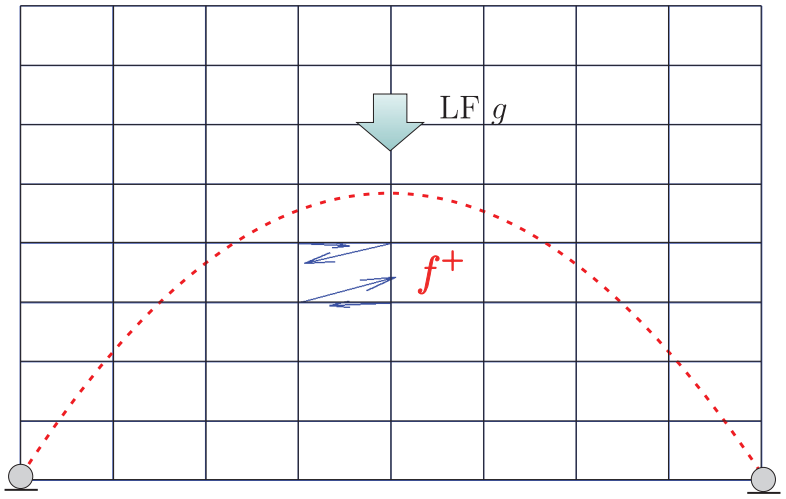


Bild 5.7. Abnahme der Steifigkeit in einem Element und die zugehörigen Koppelkräfte $\boldsymbol{f}_i^+$. Sie folgen den Hauptspannungsrichtungen (- - -) und sie sind Gleichgewichtskräfte, die Pseudo-Dipolen gleichen (MATLAB™)

5.6 Dipole und Monopole

Zwei gegengleiche Kräfte $f_i^+ = \pm 1/h$, die über alle Grenzen wachsen, wenn ihr Abstand h gegen null geht, bilden ein Dipol.

Bleiben die beiden gegengleichen Kräfte hingegen auch im Grenzfall $h = 0$ endlich, dann nennen wir dies einen ***Pseudo-Dipol***. Das Proton (+) und das Elektron (-) in einem Wasserstoffatom bilden einen solchen Pseudo-Dipol, denn der Abstand der beiden entgegengesetzten Elementarladungen ist so klein, dass sich ihre Wirkungen auf eine Punktladung außerhalb des Atoms praktisch aufheben.

In ähnlicher Weise stellen die Kräfte f_i^+ Pseudo-Dipole dar, d.h. zu jeder aufwärts gerichteten Kraft f_i^+ gibt es eine entgegengesetzt gerichtete Kraft f_j^+, so dass die beiden Kräfte aus der Ferne betrachtet einem Pseudo-Dipol gleichen, siehe Bild 5.7.

Die Wirkung der Kräfte f_i^+ auf irgendeinen Punkt x des Tragwerks hängt davon ab, wie groß die **Laufzeitunterschiede** von dem Punkt x zu der Kraft $+f_i^+$ und der Gegenkraft $-f_i^+$ sind. Wenn zwei Kräfte $\pm f_i^+$ fast deckungsgleich sind, weil das Element Ω_e sehr klein ist, dann heben sich ihre Wirkungen nahezu auf, weil die Einflussfunktion sich auf dem winzigen Element kaum ändert, $G' \simeq 0$.

Betrachten wir eine Kette von linearen Stabelementen mit Knotenkräften f_i, siehe Bild 5.8. Zunächst haben alle Elemente dieselbe Steifigkeit EA/ℓ_e, aber dann ändert sich in dem Element 5, die Steifigkeit, $EA_c = EA + \Delta EA$.

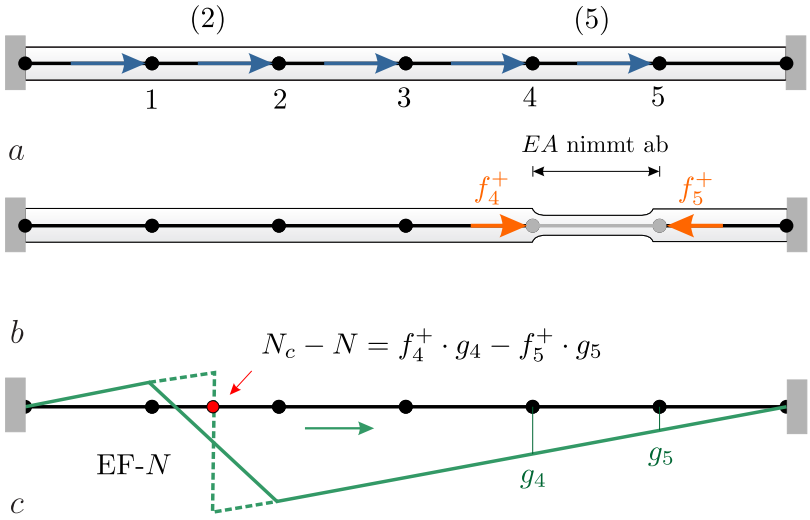


Bild 5.8. Steifigkeitsänderung im Element (5) und die Änderung der Normalkraft im Element (2). Außerhalb von Element (2) ist die EF für N am Stab a exakt

Wie ändert sich dadurch die Normalkraft in einem abliegenden Element, dem Element 2?

Gemäß der Einflussfunktion für die Normalkraft des Element 2

$$G(y,x) = \sum_{i=1}^{5} g_i(x)\,\varphi_i(y) \tag{5.33}$$

ist $N(x)$ gleich der Arbeit der f_i auf den Knotenverschiebungen g_i der EF

$$N(x) = \sum_{i=1}^{5} g_i(x) f_i\,. \tag{5.34}$$

Die Steifigkeitsänderung im Element 5 führt zu gegengleichen Zusatzkräften f_4^+ und f_5^+ in den Knoten x_4 und x_5, und die Änderung in der Normalkraft im Element 2 beträgt daher

$$N_c(x) - N(x) = f_4^+ g_4 - f_5^+ g_5 = f_4^+ \cdot (g_4 - g_5) \simeq f_4^+ \cdot G' \cdot l_e\,. \tag{5.35}$$

Die Steifigkeitsänderung wird also nur dann auffallen, wenn die Einflussfunktion in dem geänderten Element 5 merkbar ansteigt oder fällt, $|G'| \gg 0$. Die Wirkung der $\pm f^+$ lebt also von der Differenz $g_i - g_{i+1}$ zwischen Elementanfang und Elementende, also kurz gesagt von G'.

Die Kräftepaare $\pm f_i^+$ reagieren auf die Unterschiede in den Einflussfunktionen zwischen Elementanfang und Elementende, sie ‚differenzieren' die Einflussfunktionen.

Bei einem Balken sind die $\pm f_i^+$ Kräfte und Momente, die sinngemäß auf die Unterschiede in der ersten bzw. der zweiten Ableitung der Einflussfunktion an den Elementenden reagieren. Die Momente f_i^+ liefern den Beitrag

$$J(u_c) - J(u) = f_i^+ g_i' - f_{i+1}^+ g_{i+1}' = f_i^+ \cdot (g_i' - g_{i+1}') \simeq f_i^+ \cdot G'' \cdot l_e \qquad (5.36)$$

und der Beitrag der Kräfte f_i^+ ist entsprechend zu nehmen, $f_i^+ \cdot G' \cdot l_e$, so wie oben im Fall der Normalkraft.

5.7 Weggrößen und Kraftgrößen

Betrachten wir nun die Änderungen und die Rolle, die der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ dabei spielt, etwas systematischer. Zunächst sei $J(u)$ eine **Weggröße**, wie $u(x)$ oder $w(x)$. Die Ergebnisse vor und nach der Steifigkeitsänderung lauten

$$J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j} \qquad J(u_c) = \boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_c^T \boldsymbol{j}_c\,, \qquad (5.37)$$

Nun ändert sich aber die ‚Messlatte' nicht, $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j}$, weil die Steifigkeiten nicht in den Vektor $\boldsymbol{j}$ eingehen, wie etwa bei der Berechnung $J(u) = u(x)$ der Verschiebung in einem Punkt x

$$\boldsymbol{j} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}^T = \boldsymbol{j}_c \qquad (5.38)$$

und so folgt

$$\begin{aligned} J(u_c) - J(u) &= \boldsymbol{j}^T(\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \\ &= \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+\,. \end{aligned} \qquad (5.39)$$

Bei **Kraftgrößen** wie einer Normalkraft $J(u) = EAu'(x)$ ist das unter Umständen anders. Wenn der Aufpunkt x auf dem Element liegt, dessen Steifigkeit sich ändert, $EA \to EA_c$, dann sind die Vektoren $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{j} = \{EA\,\varphi_1'(x), EA\,\varphi_2'(x), \ldots, EA\,\varphi_n'(x)\}^T \qquad (5.40)$$

und

$$\boldsymbol{j}_c = \{EA_c\,\varphi_1'(x), EA_c\,\varphi_2'(x), \ldots, EA_c\,\varphi_n'(x)\}^T \qquad (5.41)$$

nicht gleich[3], so dass diese Differenz mit in das Resultat eingeht

$$\begin{aligned} J_c(u_c) - J(u) &= \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \\ &= (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+\,. \end{aligned} \qquad (5.42)$$

Der erste Term behebt den Fehler in der Steifigkeit, EA statt EA_c, und der zweite Term ist der Einfluss der Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ auf das Ergebnis.

Ändert sich die Steifigkeit in dem Punkt x nicht, dann ist $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j}$, dann ist es wie bei den Weggrößen

[3] Die meisten $\varphi_i(x)$ ‚erreichen' das Element mit dem Aufpunkt x nicht, sind dort also null, so dass die Vektoren $\boldsymbol{j}$ bzw. $\boldsymbol{j}_c$ ziemlich leer sind.

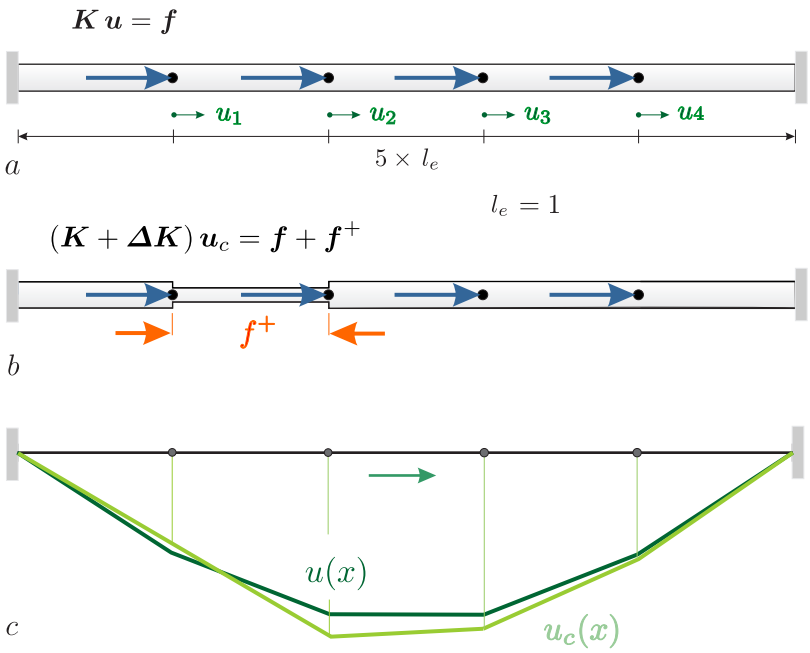


Bild 5.9. Steifigkeitsänderung in einem Stab unter einer Gleichstreckenlast, die f_i^+ sind antimetrisch

$$J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ \,. \tag{5.43}$$

Bei dem Stab in Bild 5.9 halbiert sich im zweiten Element die Längssteifigkeit von $EA = 1$ auf $EA_c = 0.5$. Die Belastung ist eine Gleichlast von 1 kN/m und die Elementlänge beträgt $l_e = 1.0$ m. Die Matrizen lauten

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

und die Vektoren haben die Gestalt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 1.833 \\ 3.500 \\ 3.333 \\ 2.167 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}^+ = \begin{bmatrix} -0.833 \\ 0.833 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} . \tag{5.45}$$

Der Unterschied in der Normalkraft in der Mitte des zweiten Elements beträgt somit, es ist $\boldsymbol{j}_c = 0.5 \cdot \boldsymbol{j}$ wegen $EA_c = 0.5\,EA$,

$$N_c - N = J_c(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) = -0.5 \cdot \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} + 0.5 \cdot \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = -0.1665 \,. \tag{5.46}$$

In der Praxis berechnet man $N_c - N$ natürlich direkt aus $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$. Weil die Elemente linear sind, ist $N_c = 0.5 \cdot (3.500 - 1.833) = 0.8335$ und $N = 1.0 \cdot (3.0 - 2.0) = 1.0$. Es ging hier primär um den Nachweis, dass die obige Formel (5.42) das richtige Ergebnis liefert.

5.8 Symmetrie und Antimetrie

Die Einflussfunktionen für Verschiebungen bei einem Stab (Scheibe) werden durch **Monopole** erzeugt und die Einflussfunktionen für Normalkräfte (Spannungen) durch **Dipole**. Nun sind ja die f_i^+ antimetrisch und somit sollten die Effekte von Steifigkeitsänderungen bei den Spannungen (*antimetrisch* × *antimetrisch*) größer sein als bei den Verschiebungen (*antimetrisch* × *symmetrisch*). Mit

$$\frac{N_c - N}{N} = \frac{0.8335 - 1.0}{1.0} = -0.1665 \qquad \frac{u_c - u}{u} = \frac{2.667 - 2.5}{2.5} = 0.0666 \tag{5.47}$$

bestätigt sich das bei diesem Beispiel.

Bei **statisch bestimmten Systemen** ist es gerade umgekehrt: Die Verformungen ändern sich, aber die Kräfte nicht. Der Grund ist, dass die f_i^+ **Gleichgewichtskräfte** sind, die auf den stückweise linearen Einflussfunktionen (für N, M, V) **null Arbeit** leisten. Die Einflussfunktionen für die Verformungen sind jedoch ‚krumm' und zu diesen sind die f_i^+ im energetischen Sinne nicht orthogonal. Deswegen ändern sich die Verformungen.

Steifigkeitsänderungen beeinflussen die Verformungen, aber nicht die Schnittkräfte in einem statisch bestimmten Tragwerk.

5.9 Orthogonalität

Die Änderung der Verschiebung oder der Spannung im Punkt $\boldsymbol{x}$ einer Scheibe ist ein Skalarprodukt über die N Freiheitsgrade (in den meisten Knoten werden die $\boldsymbol{f}_i^+ = \boldsymbol{0}$ sein)

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}_i^+ , \tag{5.48}$$

zur Notation siehe (3.312). Es ist anschaulich klar, wie das auch die Bilder 5.7 und 5.12 belegen, dass die Kräfte $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K u}_c$ aus einer Steifigkeitsänderung den Richtungen der Hauptspannungen folgen, denn die Bewegungen $\boldsymbol{u}_c$ einer Scheibe gehen in Richtung der Hauptspannungen.

An **zwei Plots** kann man also praktisch die Wirkung einer Steifigkeitsänderung in einer Scheibe ablesen

$$J(e) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ = \text{Sensitivitätsplot} \times \text{Hauptspannungen}.$$

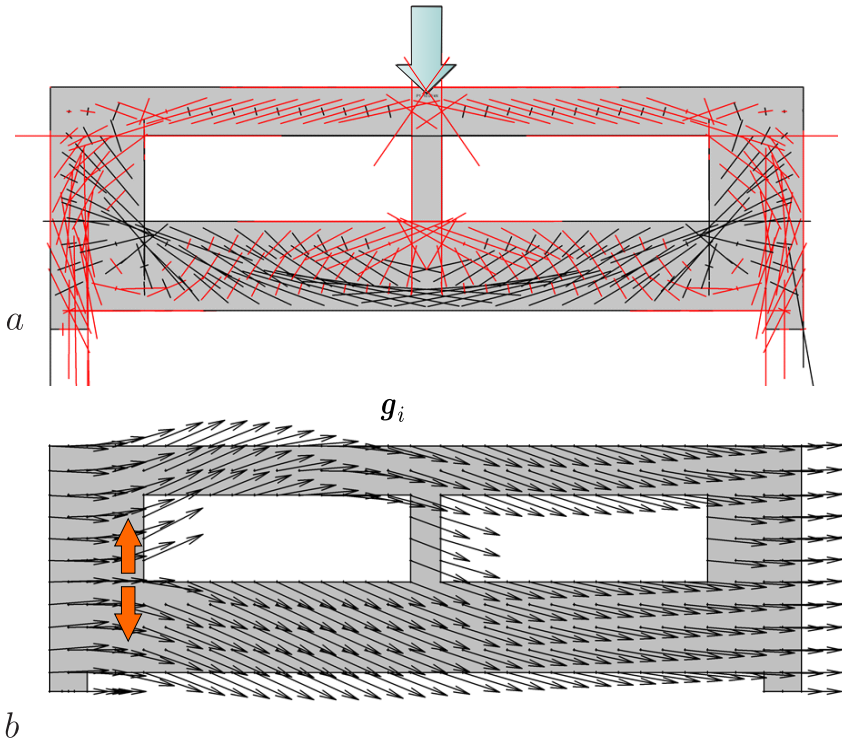


Bild 5.10. Wandscheibe, **a)** Hauptspannungen aus der Riegellast, **b)** Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in der Ecke. Dort, wo die Pfeile $\boldsymbol{g}_i$ und die Hauptspannungen gleich gerichtet sind, haben Steifigkeitsänderungen, bei denen ja Kräfte $\boldsymbol{f}_i^+$ in Richtung der Hauptspannungen entstehen, den größten Einfluss auf die Spannung in der Ecke (BE-SCHEIBE)

Der Sensitivitätsplot der Einflussfunktion gibt die Richtung und die Größe der $\boldsymbol{g}_i$ an und der Plot der Hauptspannungen die Richtung der Kräfte $\boldsymbol{f}_i^+$, siehe Bild 5.10.

Die Größe der $\boldsymbol{f}_i^+ = -\boldsymbol{\Delta K u}_c$, die im übrigen immer Gleichgewichtskräfte sind, hängt von der Größe des Elements ab und davon, wie stark sich die Steifigkeit im Element ändert, und natürlich hängen sie auch von der Größe der Elementverformungen $\boldsymbol{u}_c$ ab.

5.10 Das Abklingen der Effekte

Je weiter man sich vom Aufpunkt entfernt, um so ‚linearer' wird die Einflussfunktion, siehe Bild 5.11. Der Vektor $\boldsymbol{g}$ der Knotenverschiebungen gleicht mit wachsendem Abstand mehr und mehr einem Vektor $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}$ und das bedeutet, weil der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ orthogonal zu solchen Vektoren ist, dass der

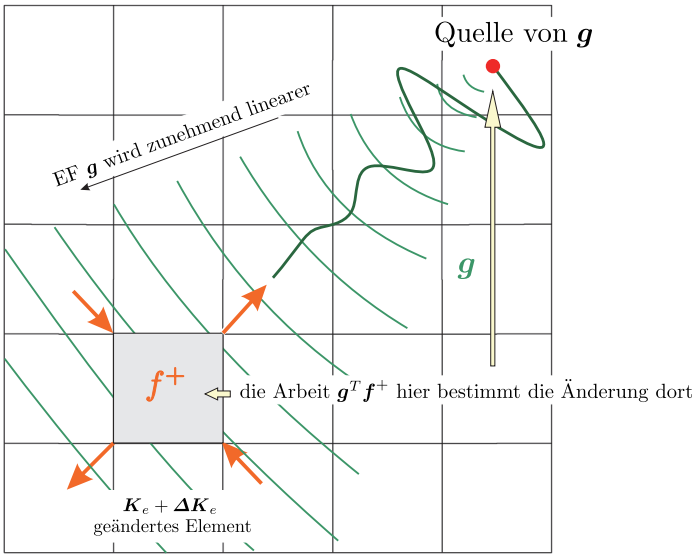


Bild 5.11. In jedem Element repräsentiert ein Vektor $\boldsymbol{g}_{(8)}$ (vier Knoten×2) die Einflussfunktion, die oben rechts • startet. Je größer der Abstand zum Aufpunkt • desto linearer ist das Feld der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}$, ähnelt $\boldsymbol{g} \simeq \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}$ zunehmend einer Starrkörperbewegung. Wegen $\boldsymbol{f}^+ \perp \boldsymbol{g}$, nimmt daher mit wachsendem Abstand des Elements die Wirkung der *self-equilibrated* $\boldsymbol{f}^+$ auf den Aufpunkt • ab.

Einfluss der Kräfte $\boldsymbol{f}^+$, je weiter sie vom Aufpunkt entfernt liegen, gegen null tendiert.

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ \simeq (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b})^T\boldsymbol{f}^+ = 0\,. \tag{5.49}$$

Dies ist der Grund, warum es möglich ist, mit gemittelten Materialparametern genaue Ergebnisse zu erhalten.

Wenn $J(u)$ eine Kraftgröße ist und der Aufpunkt auf dem betroffenen Element liegt, dann ist, wie oben gezeigt, die Formel um die Korrektur $EA_c - EA$ auf dem Element zu erweitern

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \underbrace{(\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T\boldsymbol{u}}_{Korrektur} + \boldsymbol{j}_c^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.50}$$

Die erste Korrektur ist rein lokal, geschieht nur im Aufpunkt, während der zweite Term den Einfluss der Kräfte f_i^+ erfasst, deren Effekte aber mit der Entfernung relativ rasch abklingen. Mathematisch gilt (5.49) nur, wenn das Element mit der Matrix $\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}^+$ ganz im Innern liegt, kein Freiheitsgrad

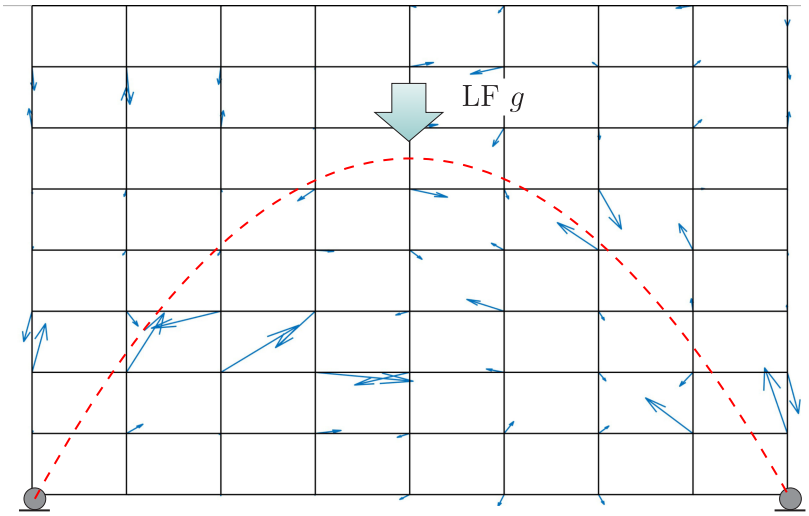


Bild 5.12. Eigengewicht und Kräfte f_i^+. Die Scheibe wurde erst mit einem einheitlichen E-Modul $E = 1$ berechnet und dann wurde der E-Modul in den Elementen zufällig, $0.5 < E_i < 1.5$, variiert, und es wurden die Kräfte f_i^+ berechnet. Diese Kräfte f_i^+ plus den Kräften f_i aus dem Lastfall Eigengewicht erzeugen in dem Modell $\boldsymbol{K}$ den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}_c$ der Scheibe, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Es ist derselbe Vektor $\boldsymbol{u}_c$ wie in dem Modell $\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ mit den zufällig gestreuten Werten E_i (MATLAB™)

u_i gesperrt ist, wie bei der Stütze in Bild 5.15, weil sich dann die f_i^+ nicht mehr ausgleichen. Randstörungen sind kritischer als Störungen im Innern.

5.11 Die Bedeutung für die Praxis

Die Bedeutung dieser Ergebnisse für die Praxis liegt darin, dass sie erklären, warum ***Homogenisierungsmethoden*** erfolgreich sind.

Beton setzt sich aus den unterschiedlichsten Kiessorten und Zementstein zusammen. Jedes Zuschlagskorn hat ja einen anderen Elastizitätsmodul und daher müssten wir eigentlich jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes finites Element modellieren. Stattdessen rechnen wir aber mit einem gemittelten Elastizitätsmodul und erhalten durchaus glaubhafte Ergebnisse.

Dies dürfte wesentlich daran liegen, dass die Knotenkräfte f_i^+ auf der Hülle des Zuschlagskorns, mit denen wir ja die Abweichungen des Elastizitätsmoduls vom Mittelwert korrigieren, Gleichgewichtskräfte sind, die zudem nahe beieinanderliegen, und deren Fernwirkungen daher gegen null tendieren.

Eine Scheibe Ω bestehe z.Bsp. aus einer Reihe von unterschiedlichen Elementen, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_n$, die alle einen eigenen E-Modul E_i aufweisen, der um einen Betrag $\Delta E_i = E - E_i$ von dem Mittelwert E abweicht, siehe Bild 5.12. Der exakte Knotenverschiebungsvektor $\boldsymbol{u}_c$ wäre daher die Lösung

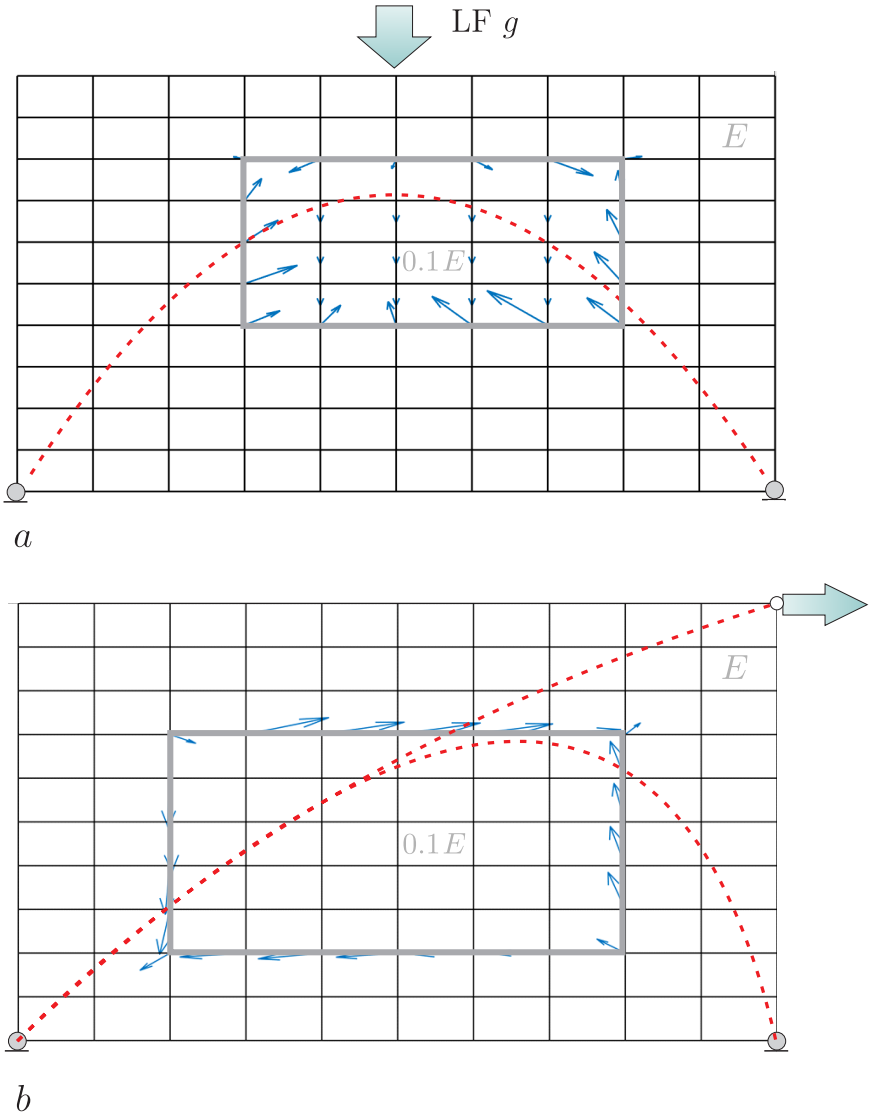
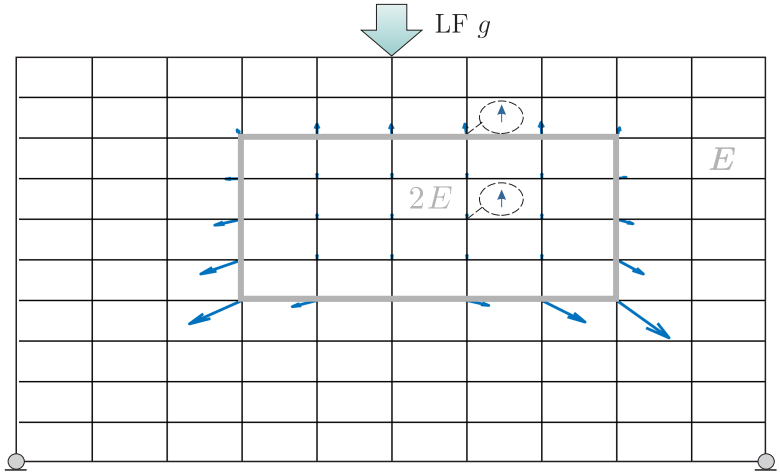
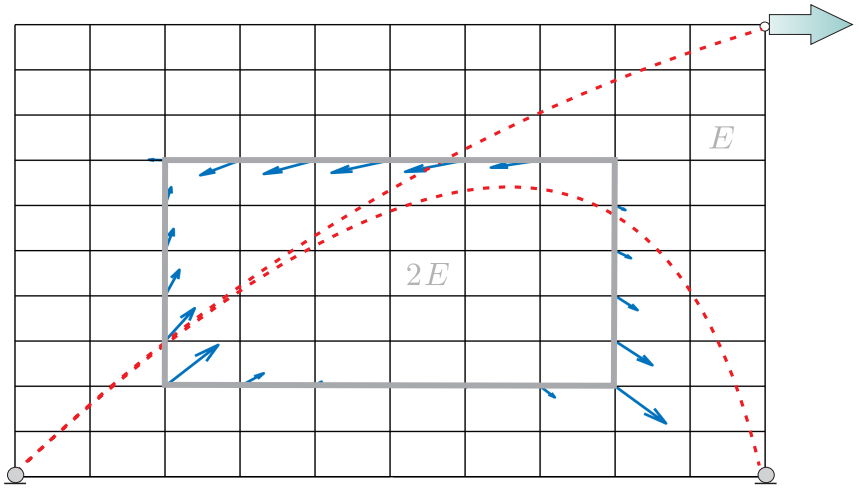


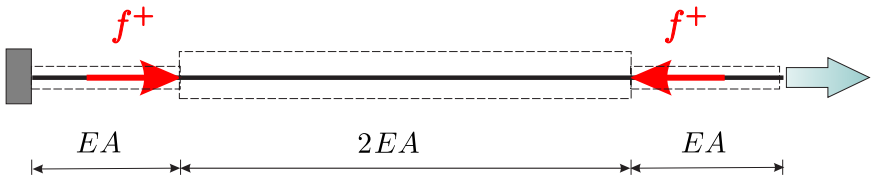
Bild 5.13. Zwei Wandscheiben **a)** unter Eigengewicht und **b)** mit Eckkraft. In den umrandeten Bereichen wurde der E-Modul um 90 % verringert, sie ähneln damit Öffnungen. Bemerkenswert ist, dass die Kräfte f_i^+ auf den Rand konzentriert sind. In einem Stahlblech, das man zur Verstärkung mit Heftnähten auf eine Stahlwand schweißt, dürften dieselben Kräfte auftreten, nur in umgekehrter Richtung, siehe Kapitel 5.38. In beiden LF erhöhen die f_i^+ die Schiefstellung der ‚Öffnung'. Im LF Eckkraft treten keine f_i^+ innerhalb des Bereichs auf, oder sie sind zu klein, weil $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}_c$ ‚fast' in $\mathcal{V}_h$ liegen – bis auf die Ecke. Im LF g treten sie auf, bleiben aber klein im Verhältnis zu den Randkräften (MATLAB™)



a

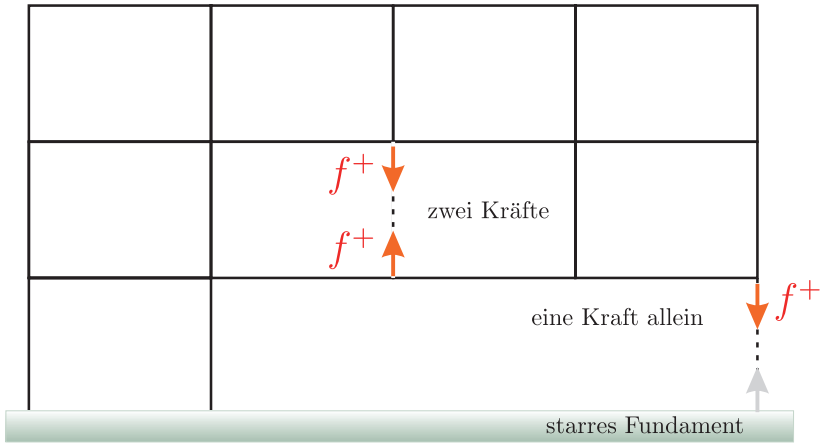


b

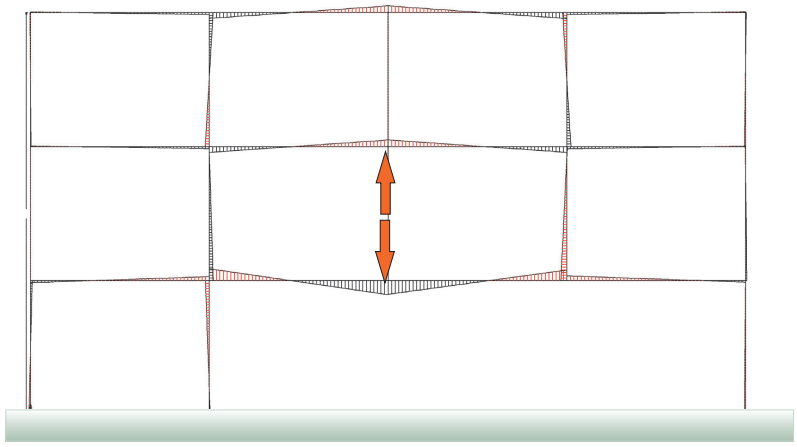


c

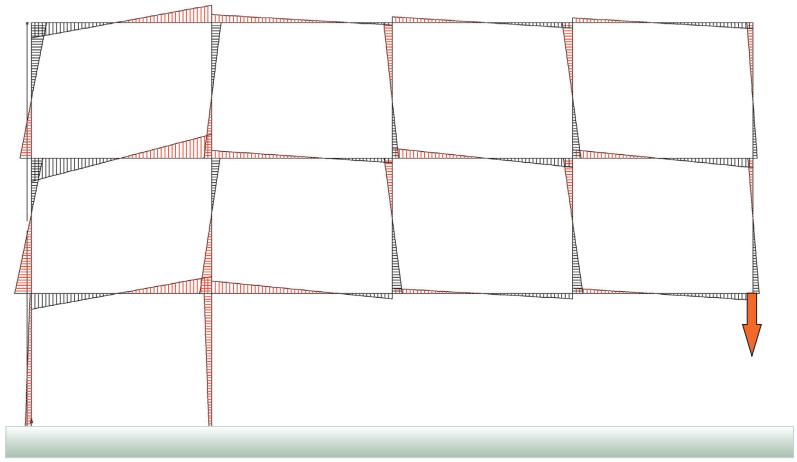
Bild 5.14. Die Vektoren $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u})$, nur diesmal wurde im mittleren Teil der E-Modul erhöht, $E \to 2E$. **c)** Zum Verständnis: Die Kraft $\leftarrow \boldsymbol{f}^+$ rechts mindert am Modell $\boldsymbol{K}$ (durchgängiges EA) die Zugkraft und damit die Streckung des Stabes, muss dafür aber am Anfang der versteiften Zone (links) in entgegengesetzter Richtung addiert werden, um den ‚Trick' zu vertuschen. Die Korrektur rechts bremst, die Korrektur links zeigt in Richtung der Originalbelastung; so auch in Bild **a)** und **b)**. Ist die Steifigkeit im mittleren Teil kleiner als im Modell $\boldsymbol{K}$, dann drehen sich die f^+ um; siehe das vorherige Bild 5.13 (MATLAB™)



a



b



c

Bild 5.15. Ausfall einer Stütze zwischen zwei Decken und zwischen der untersten Decke und dem Fundament (BE-FRAMES)

des Systems

$$\boldsymbol{K}_c \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.51}$$

dessen Matrix $\boldsymbol{K}_c$ sich aus den einzelnen Elementmatrizen $\boldsymbol{K}_e(E_i)$ zusammensetzt. Wenn man hingegen mit einem einheitlichen E-Modul rechnet, also einer vereinfachten Matrix $\boldsymbol{K}$,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.52}$$

dann ist der Fehler in einer Verschiebung

$$J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ \tag{5.53}$$

relativ klein, weil die Kräfte f_i^+, die von den Fehlertermen $\Delta E_i = E_i - E$ herrühren

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,, \tag{5.54}$$

zum einen (1) Gleichgewichtsgruppen bilden und (2) zum andern sich positive Abweichungen $\Delta E_i > 0$ und negative Abweichungen $\Delta E_j < 0$ ungefähr die Waage halten werden, so dass diese beiden Effekte zusammen dafür sorgen, dass die **Fernfeldfehler** klein sein werden, siehe Bild 5.12. Man muss nicht jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes Element darstellen, die Einflussfunktionen sorgen dafür, dass sich die Fehler aufheben.

Bei der Wandscheibe in Bild 5.12 war die Streuung in den Steifigkeiten zufällig verteilt. Anders in den Bildern 5.13 *a* und 5.13 *b* wo in zwei Bereichen die Steifigkeit aller Elemente um 90% reduziert wurde. Bemerkenswert ist hierbei die Dominanz der Kräfte f_i^+, siehe Bild 5.13, entlang den äußeren ‚Heftnähten' der Zusatzelemente Ω_e, analog zu Bild 5.6.

Man ist versucht, weil die Kräfte f_i^+ Gleichgewichtskräfte sind, die immer paarweise auftreten, die durch die f_i^+ ausgelösten Effekte zu ignorieren. Wenn, wie in Bild 5.15, eine Stütze zwischen zwei Geschossen ausfällt, dann kann man das am Originaltragwerk durch den Angriff von zwei gegengleichen Knotenkräften f_i^+ korrigieren und weil beide gleich groß sind heben sich – so hofft man – ihre Wirkungen in der Ferne auf.

Wenn aber eine **Fundamentstütze** ausfällt, dann wirken zwar auch zwei Kräfte $\pm f_i^+$, aber die untere Kraft ist am Boden verankert und so bleibt von dem Paar $\pm f_i^+$ nur die Kraft f_i^+ am Stützenkopf übrig, die, weil sie keinen Antagonisten hat[4], weiter ausstrahlen wird, als ein gegengleiches Kräftepaar $\pm f_i^+$.

Der Ausfall einer Fundamentstütze ist kritischer, als der Ausfall einer Zwischenstütze.

Man kann es auch so sagen: Es gibt einen Unterschied zwischen ***Innen*** und den ***Lagern***, siehe Bild 5.16. **Ausgleichsbewegungen** auf Grund von

[4] Wie bei der Symmetriebrechung in Kap. 3.75, nur sind die f_i^+ beschränkt

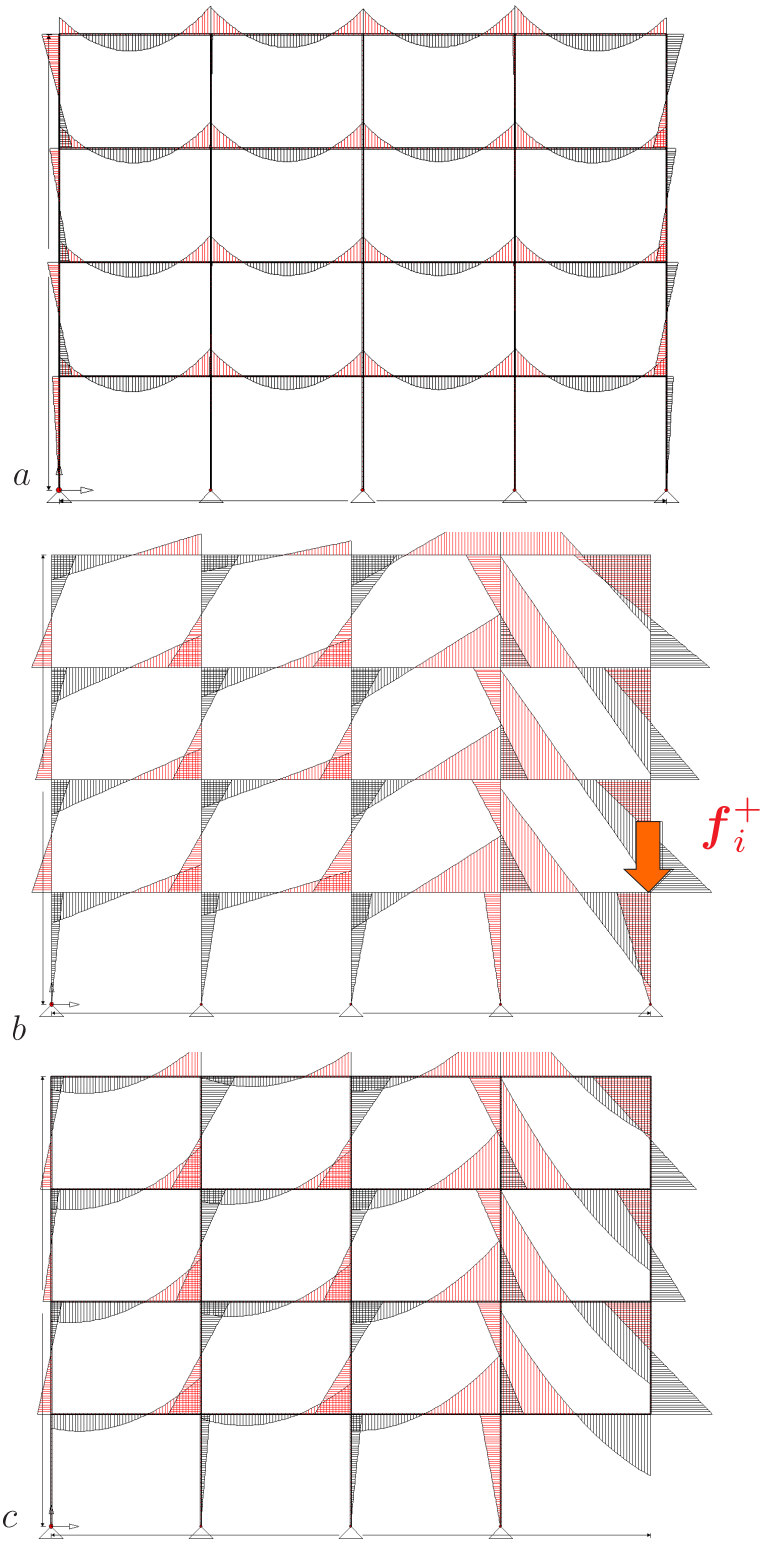


Bild 5.16. Ausfall einer Eckstütze, **a)** Momente im LF g, **b)** Kraft f^+ und zugehörige Momente, **c)** $a+b=$ Momente nach Ausfall der Eckstütze (BE-FRAMES)

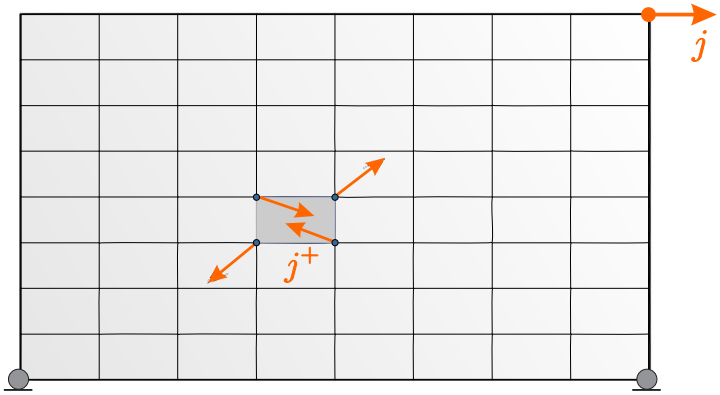


Bild 5.17. Die Eckkraft $\boldsymbol{j}$ – vergleichbar einem diskreten Dirac Delta – erzeugt die Einflussfunktion $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ für die Eckverschiebung. Ändert sich in einem Element die Steifigkeit, dann muss man dort zusätzliche Knotenkräfte $\boldsymbol{j}^+$ wirken lassen, um mit der ‚alten Inversen' die neue Einflussfunktion $\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)$ bestimmen zu können; siehe auch Bild 4.24 auf Seite 499 (MATLAB™)

Änderungen im Innern einer Struktur sind lokal begrenzt, klingen rasch ab, aber Steifigkeitsänderungen in der ‚Peripherie' – den Lagern – strahlen weiter aus. Je näher eine Ausgleichsbewegung einer **Starrkörperbewegung** kommt (‚wie ein Ruck im ganzen Tragwerk'), desto gefährlicher ist sie.

Auch die Abweichungen zwischen dem Modell des Aufstellers und dem des Prüfingenieurs, die oft auf Detailfragen – der Modellierung von Stützenanschlüssen etc. beruhen – sollten sich auf Unterschiede $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ in den Steifigkeitsmatrizen zurückführen lassen und damit auf Kräfte f_i^+, von denen wir hoffen dürfen, dass ihre Wirkung in der Ferne abklingt.

Nur wenn das $\boldsymbol{\Delta K}$ eine Randstütze betrifft, dann ist Vorsicht geboten.

5.12 Das Kraftgrößenverfahren

Zwischen dem Kraftgrößenverfahren und den f_i^+ besteht ein enger Zusammenhang, denn beim Rechnen mit den f_i^+ ändern wir nicht die Steifigkeitsmatrix, sondern wir ändern **die rechte Seite**, aus dem Vektor $\boldsymbol{f}$ wird der Vektor $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Genauso geht auch das Kraftgrößenverfahren vor.

Das Kraftgrößenverfahren wählt ein statisch bestimmtes ***Hauptsystem*** und alles Rechnen findet an diesem System statt. Die statisch Überzähligen X_i spielen dabei dieselbe Rolle wie die f_i^+. Während die f_i^+ das zusätzliche Element an die Struktur koppeln, beseitigen die X_i – auch sie sind Gleichgewichtskräfte – die Klaffungen. Beide, die X_i wie die f_i^+, sind ***Zusatzlasten***, die auf der rechten Seite erscheinen, während die eigentliche Bestimmung von $\boldsymbol{u}_c$ am unveränderten Hauptsystem (Matrix $\boldsymbol{K}$) vor sich geht.

Das hat den Vorteil, dass wir nicht zwei Sätze von Einflussfunktionen brauchen: Einen Satz für $\boldsymbol{u}$ am Hauptsystem (Matrix $\boldsymbol{K}$) und einen zweiten Satz

für $\boldsymbol{u}_c$ am statisch unbestimmten System (Matrix $\boldsymbol{K}_c$). Für die Schnittgrößen gilt das natürlich nicht, denn diese berechnet man ja mit den geänderten EA_c und EI_c, siehe Kapitel 5.1.2.

5.13 Kräfte $\boldsymbol{j}^+$

Die Formel $J(e) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+$ legt nahe zu probieren, ob es nicht auch eine Formel

$$J(e) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+ \tag{5.55}$$

gibt, siehe Bild 5.17.

Und die gibt es in der Tat, denn die Verschiebung $u(x)$ in einem Punkt kann man auf zwei Wegen berechnen

$$u(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l u(y)\, \delta(y-x)\, dy\,. \tag{5.56}$$

In der linearen Algebra der finiten Elemente lautet die zweite Gleichung

$$J(u) = u(x) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}(x)\,, \tag{5.57}$$

wenn $\boldsymbol{j}(x)$ die äquivalenten Knotenkräfte zu einem Dirac Delta im Punkt x sind, also $j_i = \varphi_i(x)$. Aus $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}$ folgt

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+ \tag{5.58}$$

und nach Multiplikation von links mit $\boldsymbol{u}$ (es ist $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K} = \boldsymbol{f}^T$)

$$\underbrace{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c}_{J(u_c)} = \underbrace{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}}_{J(u)} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+\,, \tag{5.59}$$

ergibt sich

$$J(e) = u_c(x) - u(x) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+ \tag{5.60}$$

mit $\boldsymbol{j}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c$.

Wenn $J(u)$ eine Kraftgröße ist und sich die Steifigkeit im Aufpunkt ändert, z.B. $J(u) = EA\,u' \to J_c(u_c) = EA_c u_c'$, dann steht rechts der Vektor $\boldsymbol{j}_c$

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c\,. \tag{5.61}$$

Umgestellt ist das

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}^+\,, \tag{5.62}$$

und Multiplikation von links mit $\boldsymbol{u}$

$$\underbrace{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c}_{J_c(u_c)} = \underbrace{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{j}_c}_{J_c(u)} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{j}^+ , \tag{5.63}$$

ergibt (wegen ‚zweimal' J_c ist das nicht die echte Differenz)

$$J_c(e) = J_c(u_c) - J_c(u) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{j}^+ . \tag{5.64}$$

Wenn sich EA im Aufpunkt nicht ändert, $J_c() = J()$, aber in einem abliegenden Element, dann gilt das sinngemäß, dann ist $J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{j}^+$. Erzeugen z.B. die Knotenkräfte $\boldsymbol{j}$ die Einflussfunktion für $V(x)$ in einem Riegel im 5. Stock und im 1. Stock ändert sich die Steifigkeit eines Stiels, dann muss man die Knoten dieses Stiels mit Knotenkräften $\boldsymbol{j}^+$ belasten, um aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}^+$ die geänderte Einflussfunktion, $\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{g}_c$, zu berechnen. Von der Spreizung $\boldsymbol{g}_c$ im 5. Stock wird aber nicht viel im 1. Stock ankommen, so dass die notwendigen Zusatzkräfte $\boldsymbol{j}^+$ klein sein werden.

Das ganze ist insofern theoretisch, weil man ja $\boldsymbol{g}_c$ nicht kennt (es sei denn man setzt $\boldsymbol{g}_c \sim \boldsymbol{g}$) und somit den Vektor $\boldsymbol{j}^+$ nicht berechnen kann, aber es veranschaulicht, was die j_i^+ bedeuten.

Nehmen wir eine Verschiebung als Beispiel. Um auf dem ‚alten' Netz G_c zu erzeugen, muss man zusätzlich die Kräfte j_i^+ anbringen. Formuliert man den Satz von Betti mit der *alten* Lösung u und dem *neuen* G_c so heißt das

$$1 \cdot u + \sum\nolimits_i j_i^+ u_i = \int_\Omega G_c\, p d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 1 \cdot u_c , \tag{5.65}$$

was bedeutet, dass die Arbeit der Kräfte $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{j}^+$ auf den alten Wegen $\boldsymbol{u}$ gleich dem neuen u_c im Aufpunkt ist.

5.14 Austausch als Alternative

Statt mit den Kräften f_i^+ zu operieren, gibt es auch andere Techniken. Man stelle sich vor, dass eine Stütze abgefangen werden muss, oder eine Stütze zwischen zwei Decken ausgetauscht werden muss, wie in Bild 5.18. Wenn die neue Stütze dieselbe Steifigkeit $k = EA$ hat[5], dann

- muss sie auf dem Bauhof dieselbe Länge haben, wie die alte unbelastete Stütze
- muss die neue Stütze so vorgespannt werden, dass sie bei dem Einbau dieselbe Länge hat wie die alte Stütze.

Nach dem Einbau können die Pressen an der neuen Stütze weggenommen werden und nichts hat sich geändert.

Wenn stattdessen die neue Stütze eine Steifigkeit $EA_c > EA$ hat, dann drücken Zusatzkräfte ($= f_i^+$) gegen die obere und untere Decke, sobald die Pressen entfernt werden, siehe Bild 5.18. Denn um eine Stütze mit $EA_c > EA$ zusammenzudrücken, sind größere Kräfte notwendig als im Fall $EA_c = EA$.

[5] Eigentlich $k = EA/l$, aber zur Vereinfachung lassen wir den Faktor $1/l$ weg.

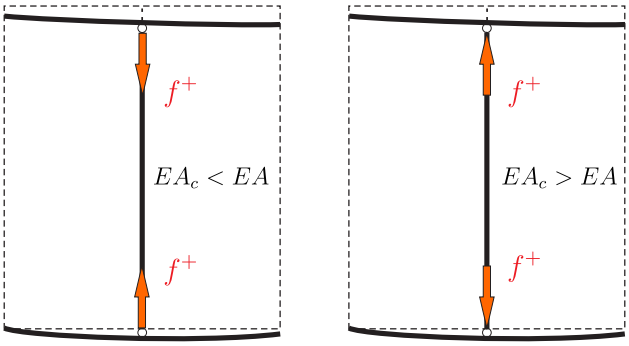


Bild 5.18. Zunahme und Abnahme von EA in einer Zwischenstütze

Und wenn die Pressen entfernt werden, dann drücken diese Kräfte gegen die Decken.

Wenn die neue Stütze eine geringere Steifigkeit hat, $EA_c < EA$, dann ist die Situation im Grunde dieselbe, nur müssen wir das Vorzeichen der f_i^+ umdrehen.

Statt also ein zweites Element Ω_e^+ vor das erste Element Ω_e zu legen, können wir uns auch vorstellen, dass wir das Element als Ganzes ersetzen. Weil aber die Steifigkeit *neu – alt* unterschiedlich ist, $EA_c \neq EA$, treten nach dem Loslassen der Pressen Zusatzkräfte f_i^+ an den Enden des Elements auf.

5.15 Die Ableitung der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$

Bis jetzt haben wir Steifigkeitsänderungen statisch betrachtet. Nun wollen wir die Änderungen mathematisch betrachten. Eine Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{5.66}$$

ist eine Funktion der Koeffizienten k_{ij} und es liegt nahe Steifigkeitsänderungen, $k_{ij} \to k_{ij} + \Delta k_{ij}$, mittels Taylor zu verfolgen[6], also den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ als Funktion eines Modellparameters s anzusehen und ihn in eine Taylorreihe zu entwickeln

$$\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{u}'(0)\,\Delta s + \dots\,. \tag{5.67}$$

Ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ eine Funktion einer Variablen s, dann lautet die Ableitung von $\boldsymbol{K}^{-1}$ nach s, [285] p. 163,

$$\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{K}^{-1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\,\frac{d}{ds}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.68}$$

[6] siehe auch Glg. (5.23), Taylor-Entwicklung der Inversen von $\boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{K} + s\,\boldsymbol{\Delta K}$

Betrachten wir noch einmal den Stab in Bild 3.93 auf Seite 365. In den ersten drei Elementen ist $k = EA/l_e = 1$ und im vierten Element beträgt $k = a$, wofür wir jetzt $k = (1+s)$ setzen. Damit hat die Steifigkeitsmatrix die Gestalt

$$\boldsymbol{K}(s) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2+s \end{bmatrix} . \tag{5.69}$$

Für ein gegebenes s lautet der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{K}^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}$ und so ergibt sich näherungsweise

$$\boldsymbol{u}(s) = [\boldsymbol{K}^{-1}(0) + \frac{d}{ds}\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\Delta s]\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{du}(0)\,\Delta s\,. \tag{5.70}$$

Nun ist

$$\boldsymbol{K}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

und die Ableitung von $\boldsymbol{K}$ nach s enthält nur einen Eintrag, die Zahl 1 in Zeile 3, Spalte 3. Ist eine Last wie $\boldsymbol{f} = \{1,1,1\}^T$ gegeben, dann lautet das Differential somit

$$\boldsymbol{du}(0) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{K}(0)\,\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix} . \tag{5.72}$$

Bei einer Änderung $\Delta s = 0.5$ ergibt dies

$$\boldsymbol{u}(0.5) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 0.5 \cdot \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3125 \\ 1.6250 \\ 0.9375 \end{bmatrix} , \qquad \begin{bmatrix} 1.3630 \\ 1.7273 \\ 1.0909 \end{bmatrix} \text{ (exakt)} \tag{5.73}$$

und bei $\Delta s = 1$,

$$\boldsymbol{u}(1.0) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 1.0 \cdot \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1250 \\ 1.2500 \\ 0.3750 \end{bmatrix} , \qquad \begin{bmatrix} 1.2857 \\ 1.5714 \\ 0.8571 \end{bmatrix} \text{ (exakt)}\,. \tag{5.74}$$

Mit der Ableitung der Inversen kann man also die **Sensitivität** der Steifigkeitsmatrix gegenüber Änderungen in den Elementsteifigkeiten verfolgen.

Bei den Steifigkeitsmatrizen von Balken und Stäben lauten die Vorfaktoren $k = EI/l^3$ bzw. $k = EA/l$ und daher sind die Ableitungen der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ nach den Steifigkeiten k die 2×2 bzw. 4×4 Elementmatrizen

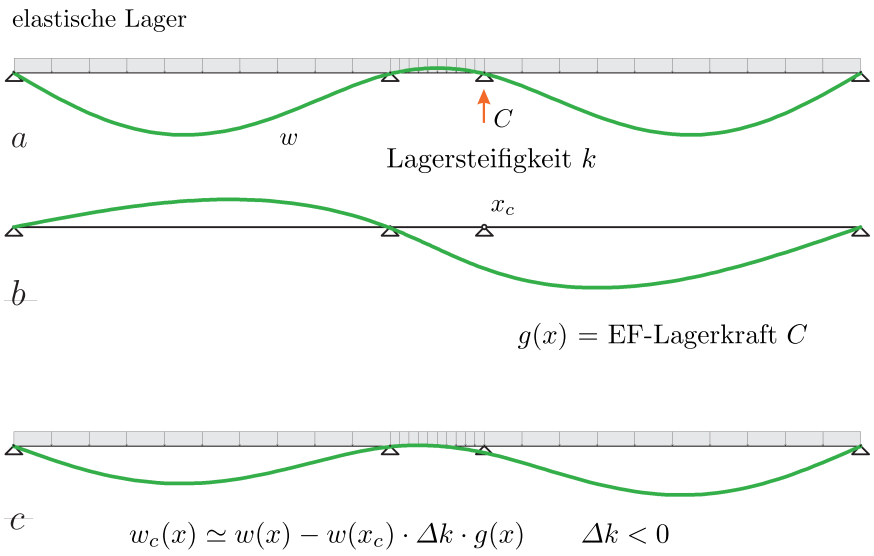


Bild 5.19. Wenn die Lagersteifigkeit um einen Betrag Δk abnimmt, dann folgt die Ausgleichsbewegung der Einflussfunktion $g(x)$ für die Lagerkraft.

ohne diese Faktoren und das Inkrement $d/dk\, \boldsymbol{K}\Delta k$ hat dann – hier bei einem Stabelement – sinngemäß die Gestalt

$$\frac{d}{dk}\boldsymbol{K}\Delta k = \Delta k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta k = \frac{\Delta EA}{l}\,. \tag{5.75}$$

Das ist die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ in der Gleichung $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$.

5.16 Die Ableitungen $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{f}_k$ und $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{k}_{ij}$

Die Ableitung der Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]\,\boldsymbol{f}$ nach einem f_k ist $\boldsymbol{g}_k$, und um die Ableitung von $\boldsymbol{u}$ nach einem k_{ij} zu bestimmen rechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}) \tag{5.76}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\frac{\partial}{\partial k_{ij}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = \frac{\partial}{\partial k_{ij}}\boldsymbol{f} = 0\,, \tag{5.77}$$

und das bedeutet[7]

[7] Skalar: $k\,u = f$, $du/dk = -1/k^2 \cdot f = -1/k \cdot u$. Wenn die f_i zu EF für Spannungen gehören, dann sind die $\partial \boldsymbol{f}/\partial k_{ij}$ nicht null.

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j \, \boldsymbol{e}_i = -u_j \, \boldsymbol{g}_i} \,. \tag{5.78}$$

Wenn sich also z.B. eine Steifigkeit auf der Diagonalen ändert, $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$, dann kann man die Änderung in dem Verschiebungsvektor wie folgt abschätzen

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq -u_i \, \boldsymbol{g}_i \, \Delta k_{ii} \,. \tag{5.79}$$

In Richtung von u_i wirkt eine Kraft $-u_i \, \Delta k_{ii}$, die den Vektor $\boldsymbol{u}$ korrigiert, ihn kleiner oder größer macht, je nach Vorzeichen von Δk_{ii}. Das ist sinngemäß die Glg. (5.22) aus der Einleitung am Ein-Feder-Modell ($k \, u = f$) mit $\boldsymbol{g} \equiv 1/k$

$$u_c - u \simeq -u \, \frac{1}{k} \, \Delta \, k. \tag{5.80}$$

Die Ausgleichsbewegung bei einer Änderung $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$ ist affin zur Spalte $\boldsymbol{g}_i$, also zu Einflussfunktion für den Freiheitsgrad u_i.

Eigentlich ist es klar: Wenn man die Steifigkeit $k = k_{ii}$, wie in Bild 5.19, in Richtung des Freiheitsgrades $u_i = w(x_c)$ vermindert, dann gibt der Träger in Richtung dieses Freiheitsgrades nach

$$w_c(x) - w(x) \simeq -w(x_c) \, \Delta k \, g(x) \qquad \Delta k < 0 \,. \tag{5.81}$$

Und die durch $k \to k + \Delta k$ ausgelöste Bewegung ist, bis auf den Vorfaktor $-w(x_c) \, \Delta k$, genau die Einflussfunktion $g(x)$ für die Lagerkraft.

Änderungen ganzer Stäbe

In der Praxis wird es meistens so sein, dass sich die Stabsteifigkeiten, etwa $EA \to EA + \Delta EA$, ändern und dann sind mehrere k_{ij} betroffen. Bei dem Stab in Bild 5.20, drei Elemente mit derselben Länge $\ell_e = 1$, und den Steifigkeiten $EA = 3, 2, 1$ verringert sich z.Bsp. die Steifigkeit EA zwischen den beiden Knoten 1 und 2, also im Element zwei, von $EA = 2$ auf $EA = 1$

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_2^{neu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{5.82}$$

Das bedeutet

$$\Delta k_{11} = \Delta k_{22} = -1 \qquad \Delta k_{12} = \Delta k_{21} = +1 \tag{5.83}$$

und so beträgt die Änderung in dem Verschiebungsvektor näherungsweise

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} \, \Delta k_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} -u_j \, \boldsymbol{g}_i \, \Delta k_{ij} \,. \tag{5.84}$$

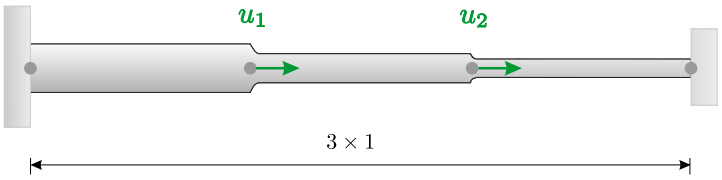


Bild 5.20. Gestufter Schaft, FG u_1 und u_2

Die $\boldsymbol{g}_i$ sind die Spalten der Inversen

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2727 & 0.1818 \\ 0.1818 & 0.4545 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

und die u_j sind die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u} = \{0.4545, 0.6364\}^T$ im Lastfall $\boldsymbol{f} = \{1, 1\}^T$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} &\simeq -\big[(u_1 \Delta k_{11} + u_2\, \Delta k_{12})\, \boldsymbol{g}_1 + (u_1\, \Delta k_{21} + u_2\, \Delta k_{22})\, \boldsymbol{g}_2\big] \\ &= \begin{bmatrix} -0.0165 \\ 0.0496 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -0.0260 \\ 0.0779 \end{bmatrix} \text{(exakt)}\,, \end{aligned} \tag{5.86}$$

und hier sieht man, wie die $\boldsymbol{g}_i$ die Differenz $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ prägen. Im Regelfall ist $\Delta k_{11} = \Delta k_{22} = \Delta k$ und $\Delta k_{12} = \Delta k_{21} = -\Delta k$. Die mit Δk gewichteten Differenzen der beiden Knotenverschiebungen u_i bilden also das Signal. Und wenn ein Element eine Starrkörperbewegung vollzieht, $u_2 - u_1 = 0$, dann haben Steifigkeitsänderungen null Effekt. Aus (5.86) folgt:

Der Unterschied zwischen den Schnittkräften von $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$ wird von den Schnittkräften der Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_i$ bestimmt.

Bei jeder Steifigkeitsänderung, $k_{ij} \to k_{ij} + \Delta k_{ij}$, wird ein Vielfaches der Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{g}_j$ zu $\boldsymbol{u}$ addiert.

Bei Lichte besehen ist das evident, denn wir hatten ja in Kapitel 2 festgestellt, siehe (2.3), dass jede FE-Lösung eine Entwicklung nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen ist und das gilt daher auch für *neu - alt*, für $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$. Bemerkenswert ist aber, dass man an den Indices von Δk_{ij} ablesen kann, welche $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{g}_j$ in der Änderung $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ stecken.

Probe

Wir können auch noch eine **Probe** machen, denn es muss ja gelten, siehe (3.237),

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\Delta K})\, \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.87}$$

und mit dem genäherten Vektor $\boldsymbol{u}_c = \{0.4380, 0.6860\}^T$ ergibt das

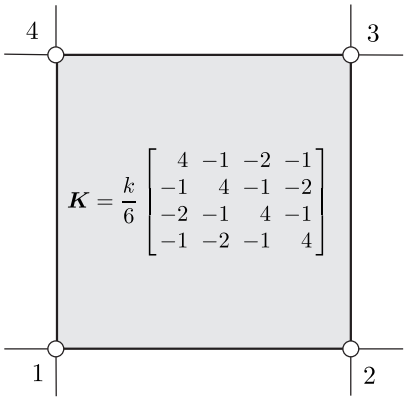


Bild 5.21. Bilineares Laplace-Element, 1×1, [65] p. 280

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 0.4606 \\ 0.6183 \end{bmatrix} \quad \simeq \quad \begin{bmatrix} 0.4545 \\ 0.6364 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.88}$$

Der exakte Vektor $\boldsymbol{u}_c = \{0.4286, 0.7143\}^T$ ergibt $\boldsymbol{u}$ genau. Wenn man (5.87) umstellt

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c\,, \tag{5.89}$$

dann sieht man, dass die Näherung (5.79) für $\boldsymbol{u}_c$ den alten Vektor $\boldsymbol{u}$ setzt.

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch $\partial f_i/\partial u_j = k_{ij}$ was direkt aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ folgt; es ist also $\partial \boldsymbol{f}/\partial u_j = \boldsymbol{k}_j$ (Spalte j von $\boldsymbol{K}$).

Auch bei dem bilinearen Laplace-Element in Bild 5.21, $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq \sum_{i,j=1}^{4} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}}\,\Delta k_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{4} u_j\,\boldsymbol{g}_i\,\Delta k_{ij} = \boxed{-\sum_{i=1}^{4}(\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u})_i\,\boldsymbol{g}_i} \simeq \sum_{i=1}^{4} f_i^+ \boldsymbol{g}_i\,. \tag{5.90}$$

Die Zusatzkräfte $f_i^+ \simeq -(\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u})_i$ in den vier Ecken sind für die Differenz zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}_c$ verantwortlich.

Gleichung (5.90) ist die **baupraktische Näherungsformel**, die sinngemäß überall anwendbar ist. Man kennt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\Delta K}$ und die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen, $(\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u})_i \simeq f_i^+$, Mit $\boldsymbol{u}_c$ wäre es genau f_i^+. Der Vektor $\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ enthält gewichtete Differenzen der Knotenverschiebungen u_i, weil die Zeilen = Spalten von $\boldsymbol{K}$ ja mittels $(4, -1, -2, -1)$ Differenzenquotienten nachbilden, *Steifigkeitsmatrizen differenzieren*. Je größer die **Gangunterschiede** zwischen den Knoten sind, und damit die Verzerrungen des Elements, desto empfindlicher reagiert es auf Steifigkeitsänderungen $k \to k + \Delta k$, desto größer ist der Ruck $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$, aber eben auch das $\Delta\sigma$. Was natürlich niemand wirklich überrascht. *A highly stressed state is easily perturbed*

Und hinter der Näherungsformel verbirgt sich auch keine große Wissenschaft. Betrachten wird den Rahmen in Bild 5.22. Der linke Stützenkopf habe

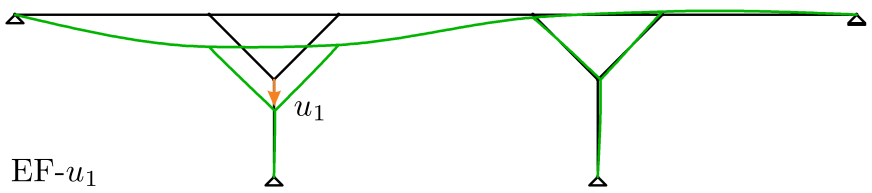


Bild 5.22. Einflussfunktion für die Knotenverschiebung u_1

im Gesamtsystem den FG u_1. Wenn sich die Längssteifigkeit $k = EA/l$ der Stütze ändert, $k \to k + \Delta k$, dann ändert sich der Eintrag $k_{1,1} \to k_{1,1} + \Delta k$ auf der Hauptdiagonalen von $\boldsymbol{K}$. Die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ ist also bis auf die Zahl Δk in Zeile 1, Spalte 1 leer und so ist der Ruck $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ in erster Näherung (Taylor) ein Vielfaches der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}_1$ des FG u_1

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq -\Delta k\, u_1\, \boldsymbol{g}_1\,. \tag{5.91}$$

Wie groß die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ sind, hängt davon ab, wie groß die Verformungen (die Flexibilität) aus Kräften $f_i = 1$ und $f_j = 0$ sind.

5.17 Integration über das defekte Element

Zuerst haben wir die Änderung statisch verfolgt, dann die Taylor-Entwicklung benutzt und nun setzen wir die Kurzformel (5.3) um, und wir wollen sie dazu auch noch einmal auf statischem Weg herleiten.

Mit Mohr – mit der Arbeitsgleichung – kann man bekanntlich die Durchbiegung eines Riegels in einem beliebigen Punkt x eines Rahmen berechnen, indem man über alle Stiele und Riegel (l_e) integriert

$$w(x) = \sum\nolimits_e \int_0^{l_e} \frac{\bar{M}\, M}{EI}\, dx\,. \tag{5.92}$$

Wenn sich die Steifigkeit eines Riegels im dritten Stock ändert, $EI \to EI_c = EI + \Delta EI$, dann muss man wieder von vorne anfangen, das Hilfsmoment $\bar{M} \to \bar{M}_c$ (aus $\bar{P} = 1$) neu berechnen – es hat sich ja wegen des ΔEI geändert – und ebenso das Moment $M \to M_c$ aus der Belastung (EI ist die jeweilige lokale Steifigkeit)

$$w_c(x) = \sum\nolimits_e \int_0^{l_e} \frac{\bar{M}_c\, M_c}{EI}\, dx\,. \tag{5.93}$$

Der Index c (= *changed*) steht für geänderte Größen.

Jetzt kommt der Punkt: Man muss zur Nachverfolgung der Änderung, egal wo x liegt, nur über den Riegel $(0, l_c)$ integrieren, dessen Steifigkeit sich ändert,

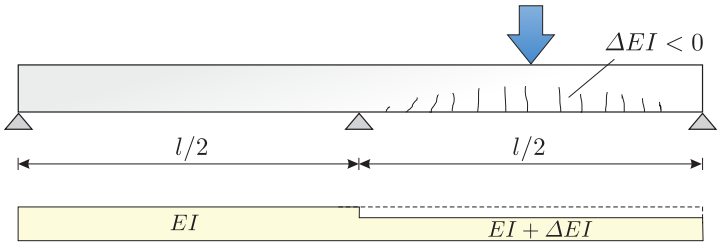


Bild 5.23. Risse in einem Balken

$$w_c(x) - w(x) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_c} \frac{\bar{M}_c M}{EI_c}\, dx\,. \tag{5.94}$$

Technisch ist es so, dass man den Index c auch an das andere Moment hängen kann

$$w_c(x) - w(x) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_c} \frac{\bar{M} M_c}{EI_c}\, dx\,. \tag{5.95}$$

Das Ergebnis ist dasselbe. Der Zähler ist ein ‚*mix*' aus *alt* × *neu*. Nur ein Moment muss ‚neu' sein, vom geänderten System sein.

Um den Beweis zu führen, betrachten wir den Zweifeldträger in Bild 5.23. Zu Anfang ist die Steifigkeit EI in beiden Feldern gleich groß und so lautet die **schwache Form** der Balkengleichung $EI\, w^{IV} = p$

$$\int_0^l EI\, w''\, \delta w''\, dx = \int_0^l p\delta w\, dx\,, \tag{5.96}$$

oder kurz

$$a(w, \delta w) = (p, \delta w)\,. \tag{5.97}$$

Dann ändert sich die Steifigkeit im zweiten Feld auf einen Wert $EI + \Delta EI$, die Biegelinie ändert sich mit, $w \to w_c$, und die schwache Form geht über in

$$\int_0^l EI\, w_c''\, \delta w''\, dx + \underbrace{\int_{l/2}^l \Delta EI\, w_c''\, \delta w''\, dx}_{d(w_c, \delta w)} = \int_0^l p\delta w\, dx \tag{5.98}$$

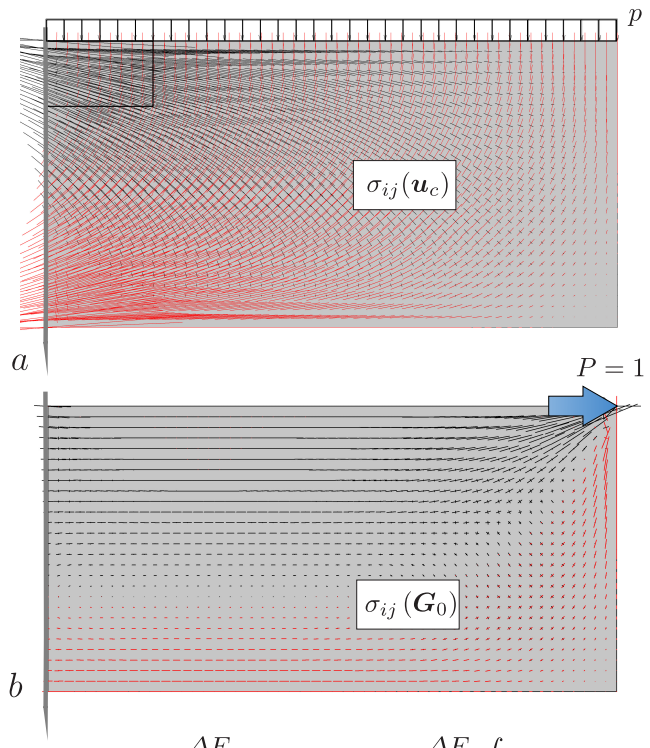
oder

$$a(w_c, \delta w) + d(w_c, \delta w) = (p, \delta w)\,. \tag{5.99}$$

Wenn wir die beiden Gleichungen voneinander abziehen, dann folgt

$$a(w_c - w, \delta w) + d(w_c, \delta w) = 0 \tag{5.100}$$

oder mit $e = w_c - w$



$$u_{cx}(\boldsymbol{x}) - u_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Delta E}{E}\, a(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{u})_{\Omega_e} = -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_c)\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{G}_0)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}$$

Bild 5.24. Die Integration über das gerissene Element oben links reicht aus, um die Änderung in der horizontalen Verschiebung zu bestimmen **a)** Spannungsverteilung nach dem Auftreten der Risse im Element oben links **b)** Spannungen aus der Einzelkraft $P = 1$ (Einflussfunktion für u_x) am oberen Ende der Kragscheibe (BESCHEIBE)

$$a(e, \delta w) = -d(w_c, \delta w)\,. \tag{5.101}$$

Wählen wir als virtuelle Verrückung δw die Einflussfunktion G eines Funktionals $J(w)$, dann ist das Ergebnis die Änderung in dem Funktional $J(e) = a(e, G) = -d(w_c, G)$, also

$$\boxed{J(e) = -d(w_c, G)}\,. \tag{5.102}$$

Das ist der ‚modifizierte Mohr'. Integriert wird nur über die Strecke, wo sich EI ändert

$$d(w_c, \delta w) = \int_{l/2}^{l} \Delta EI\, w_c''\, \delta w''\, dx = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{l/2}^{l} \frac{M_c\, M}{EI_c}\, dx\,. \tag{5.103}$$

In der Notation der linearen Algebra ist die Herleitung noch einfacher. Bei einer Änderung der Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{K} \rightarrow \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, wird aus der ursprünglichen schwachen Formulierung

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K u} = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} \tag{5.104}$$

die Gleichung

$$\boldsymbol{\delta u}^T (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}) \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{5.105}$$

so dass der Vektor $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ der Gleichung

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K e} = -\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\delta u} \tag{5.106}$$

genügt. Für eine Messung an dem System wichten wir den Verformungszustand $\boldsymbol{u}$ mit der entsprechenden Einflussfunktion, dem Vektor $\boldsymbol{g}$,

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K u} \tag{5.107}$$

und so folgt, wenn wir in (5.106) für $\boldsymbol{\delta u}$ den Vektor $\boldsymbol{g}$ setzen, das Ergebnis

$$J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c \qquad (= -d(w_c, G))\,, \tag{5.108}$$

zu dessen Berechnung wir nur längs dem oder den betroffenen Elementen messen müssen, siehe Bild 5.24. Diese Gleichung entspricht (5.102).

Im Grunde steht in (5.108) die **Wechselwirkungsenergie**, denn die Änderung $J(\boldsymbol{e})$ kann man, und das gilt für alle Bauteile, in der Form

$$J(\boldsymbol{e}) = -d(w_c, G) = -\alpha \cdot a(G, w_c)_{\Omega_e} \tag{5.109}$$

schreiben, also als die Wechselwirkungsenergie zwischen der Einflussfunktion G für $J(w)$ und der neuen Lösung w_c in dem Element Ω_e, dessen Steifigkeit sich ändert, wobei

$$\alpha = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta EI}{EI} = \frac{\Delta EA}{EA} = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta K}{K} \qquad \text{etc.} \tag{5.110}$$

das Verhältnis der Steifigkeitsänderung zur ursprünglichen Steifigkeit ist.

5.18 Sensitivitäten und Mohr

Die Änderung in der Durchbiegung $J(w) = w(x)$ kann man also alleine durch Integration über das Element, in dem sich die Steifigkeit ändert, berechnen, (5.108), was aber für jedes Funktional $J(w) = M(x)$, $J(w) = w'(x)$, $J(w) = V(x)$ etc. gilt

$$\boxed{J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c\, M_G}{EI_c}\, dy} \tag{5.111}$$

Hier ist EI_c die ***step function***

$$EI_c = \begin{cases} EI + \Delta EI & \text{im Intervall } [x_a, x_b] \\ EI & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.112}$$

M_c ist das Moment in dem Element *nach* der Änderung der Steifigkeit und M_G ist das Moment der Einflussfunktion *vor* der Änderung.

Schreiben wir das Biegemoment $M = -EIw''$ aus, wird die Gleichung noch etwas transparenter

$$J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c\, M_G}{EI_c}\, dy = -\Delta EI \int_{x_a}^{x_b} w_c''\, G''\, dy\,. \tag{5.113}$$

Es ist auch nicht wichtig, ob wir M_c mit M_G überlagern oder M mit M_G^c

$$M \times M_G^c \equiv M_c \times M_G\,, \tag{5.114}$$

das Ergebnis ist dasselbe

$$\boxed{J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M M_G^c}{EI_c}\, dy} \tag{5.115}$$

Es sei betont, dass der Punkt x **an beliebiger Stelle** im Tragwerk liegen kann. Angenommen $J(w)$ sei die Durchbiegung oder das Moment in einem Punkt x im zehnten Stock und wir wollen herausfinden, wie sich $J(w)$ ändert, wenn Risse in einem Riegel im dritten Stock entstehen.

Die Änderung $J(e)$ im Punkt x kann alleine durch Integration über den gerissenen Riegel $[x_a, x_b]$ bestimmt werden. Wichtig ist, wieviel von der Einflussfunktion, dem Dirac Delta im Aufpunkt x im zehnten Stock, im dritten Stock ankommt, wie groß das Moment M_G der Einflussfunktion in dem gerissenen Riegel $[x_a, x_b]$ ist – und natürlich wie groß das Lastmoment M_c in dem Riegel ist.

Die Formel (5.111) hat allerdings den Nachteil, dass man den Momentenverlauf M_c am geänderten System kennen muss. Also ersetzen wir M_c durch das Moment M am ursprünglichen Tragwerk und kommen so zur Näherung

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M M_G}{EI_c}\, dy\,. \tag{5.116}$$

Je nach der Art der Steifigkeitsänderung muss man diese Formel natürlich modifizieren. Wenn sich die Längssteifigkeit EA einer Stütze ändert, dann lautet die Formel

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta EA}{EA} \int_{x_a}^{x_b} \frac{N N_G}{EA_c}\, dy\,, \tag{5.117}$$

und ändert sich bei einer Scheibe in einem Element Ω_e der E-Modul, dann lautet die Formel

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^G d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.118}$$

und so kann diese Näherung auf alle Tragwerke und alle interessierenden Größen angewandt werden.

Wir haben bis jetzt, um die Diskussion nicht zu überfrachten, angenommen, dass $J(w)$ eine Weggröße ist. Ist $J(w)$ jedoch eine **Kraftgröße**, etwa ein Moment,

$$J_c(w_c) - J(w) = M_c(x) - M(x) = \underset{\uparrow}{-EI_c\, w_c''(x)} - M(x), \tag{5.119}$$

dann müssen wir berücksichtigen, dass bei der Herleitung von (5.113) die Einflussfunktion $G = G_2$ des Moments $M = -EI\, w''$ benutzt wird und daher die linke Seite in (5.113) die Differenz

$$J(w_c) - J(w) = \underset{\uparrow}{-EI\, w_c''(x)} - M(x) \tag{5.120}$$

ist und nicht (5.119). Das gilt für alle Kraftgrößen, weil deren Funktionale direkt von der Steifigkeit abhängen.

Diesen Unterschied bei den Kraftgrößen zwischen (5.119) und (5.120) bitten wir im folgenden immer mitzudenken. Es wäre zu mühsam im Text immer zwischen Weg- und Kraftgrößen zu unterscheiden. Man kann (5.120) ja leicht nach $M_c(x)$ auflösen

$$\boldsymbol{M}_c(x) = (J(w_c) - J(w) + M(x)) \cdot \frac{EI_c}{EI}\,, \tag{5.121}$$

was bedeutet

$$\tilde{\Delta} M := M_c(x) \cdot \frac{EI}{EI_c} - M(x) = J(w_c) - J(w)\,. \tag{5.122}$$

Das ist nicht $\Delta M = M_c - M$, sondern eine Differenz mit ‚Gewicht', aber es gibt die Tendenz wieder und in diesem Sinne wollen wir die Bezeichnung $\tilde{\Delta} M$ im folgenden verwenden.

Bevor man angesichts (5.121) meint, dass man $M_c(x)$ am ‚alten System' berechnen kann, sei daran erinnert, dass die Differenz $J(w_c) - J(w)$ ja nur näherungsweise bekannt ist, siehe (5.116). Und um die Übersicht zu behalten: $J(w_c) = -EI\, w_c''$ ist nicht dasselbe, wie $J_c(w_c) = -EI_c\, w_c''$, sondern

$$\frac{EI_c}{EI}\, J(w_c) = J_c(w_c)\,, \tag{5.123}$$

was aber schon in (5.121) steht, denn $-J(w) + M(x) = 0$.

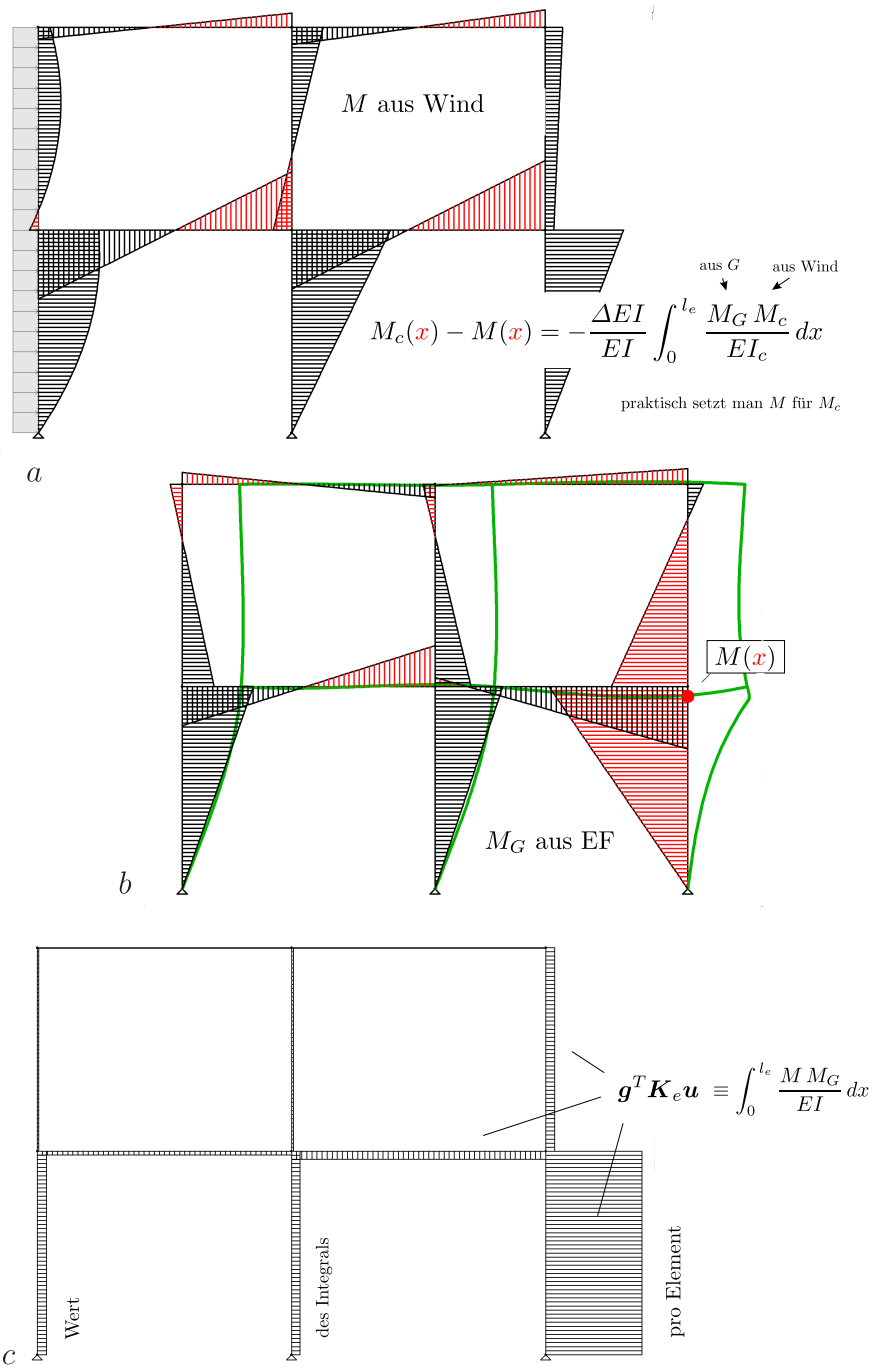


Bild 5.25. a) Moment M aus Wind, **b)** Moment M_G aus EF für das Stielmoment, **c)** die Wechselwirkungsenergie in den Elementen aus dem Wind und der EF zeigt an, wo Steifigkeitsänderungen einen großen Einfluss auf das Moment haben. In BE-FRAMES: LF laden, M anzeigen lassen, *GF-anywhere*, EF wählen, auf Aufpunkt klicken und dann auf den Button *Energy*

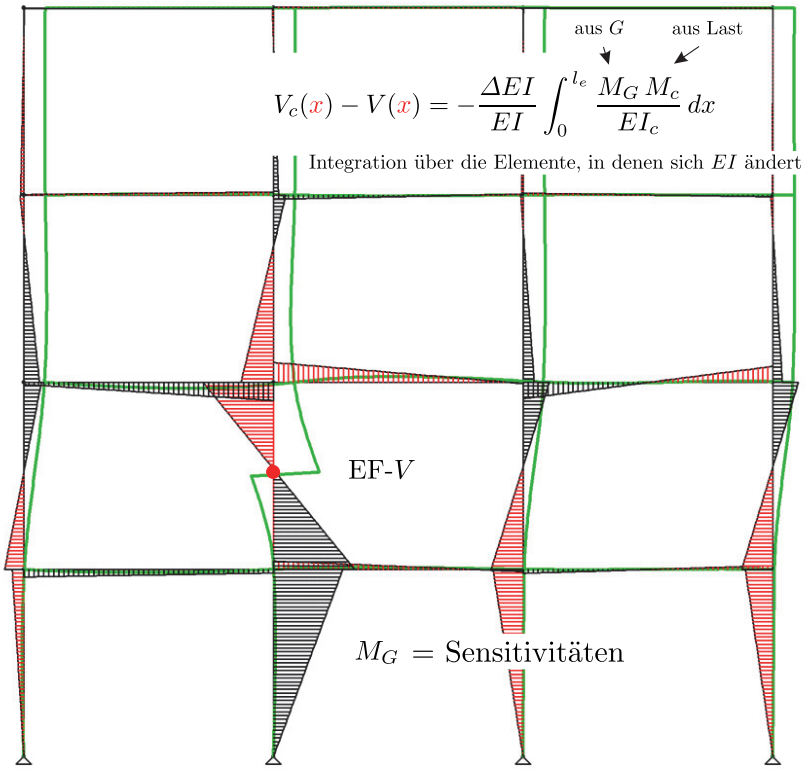


Bild 5.26. Einflussfunktion für eine Querkraft. Die Momente M_G der EF werden mit den Lastmomenten M_c (nicht darg.) überlagert. Sie signalisieren die Sensitivität von V gegenüber Änderungen $EI + \Delta EI = EI_c$ in den Elementen (BE-FRAMES)

5.19 Nah und fern

Die Änderung $J(w_c) - J(w)$ wird nur dann ins Auge fallen, wenn die **Wechselwirkungsenergie** $\delta W_i = a(G, w_c)_{\Omega_e}$ in dem Element ‚groß' ist[8], was der Fall ist, wenn die Schnittgrößen aus der Einflussfunktion und gleichzeitig die Schnittgrößen aus der Belastung in dem Element groß sind.

Weil die Einflussfunktionen (in der Regel) rasch abklingen, kann man davon ausgehen, dass Steifigkeitsänderungen in weit abliegenden Bauteilen nur sehr geringen Einfluss auf die Schnittgrößen im ‚Vordergrund' haben werden.

Und weil δW_i ein **Skalarprodukt** ist, kann es, wie bei Vektoren, Funktionen M und M_G geben, die senkrecht aufeinander stehen, deren Überlagerung

[8] Wir lassen den Asterix an δW_i^* weg, weil er mathematisch ‚Verzierung' ist.

also null ergibt – etwa wenn M antimetrisch ist und M_G symmetrisch. In solchen Fällen ist, unabhängig von der Größe von M und M_G, die Änderung $J(w_c) - J(w)$ null.

Focus auf einen Punkt

Vor jeder Berechnung kann man also an Hand der Einflussfunktionen abschätzen, welche Steifigkeitsänderungen Effekt machen und welche nicht.

In Bild 5.25 b ist die Einflussfunktion (grüne Kurve) für das Biegemoment in dem rot markierten Aufpunkt angetragen und gleichzeitig der Momentenverlauf, der zur Einflussfunktion gehört. Dieser Momentenverlauf stellt die **Sensitivität** des Moments gegenüber Steifigkeitsänderungen in der Umgebung des Aufpunktes dar, *Focus auf einen Punkt*, denn ändert sich in einem Stiel oder Riegel die Steifigkeit, $EI \to EI + \Delta EI$, dann ändert sich das Moment im Aufpunkt um den Wert (genähert, weil wir mit M statt M_c rechnen)

$$\tilde{\Delta} M = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M_G\, M}{EI}\, dy\,. \tag{5.124}$$

Hier ist M das Moment aus der Belastung und M_G ist das Moment der Einflussfunktion, also der grünen Kurve. Die Bauteile, in denen die Momente M_G und M ***beide*** groß sind, (und nicht orthogonal zueinander), haben den größten Einfluss auf das Anschnittsmoment. Indem man neben jedem Element die Wechselwirkunsenergien $\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{u}$ (eine Zahl) anträgt, entsteht so ein Sensitivitätsplot für das Stielmoment.

Dieselbe Logik gilt für die Querkraft-Einflussfunktion in Bild 5.26. Änderungen in den Steifigkeiten der Stiele und Riegel in denen das Moment der Einflussfunktion groß ist, haben einen relativ großen Effekt auf die Querkraft in dem Stiel.

Auch die Ergebnisse in Bild 5.27 sind natürlich keine Überraschung: Wenn man die seitliche Verschiebung im Stiel kleiner machen will, dann muss man vor allem das Geschoss darunter steifer machen, $EI \to EI + \Delta EI$ und wenn die Normalkraft kleiner werden soll, dann muss man die Abfangwirkung der Riegel darüber erhöhen, sprich die Riegel steifer machen. So kann also auch ein Computer mittels den Schnittgrößen der Einflussfunktion ein **‚statisches Gefühl‘** entwickeln, lässt sich ihm **artificial intelligence** antrainieren.

Focus auf ein Element

Eine verwandte Fragestellung ist die Suche nach dem **maximalen Effekt** den die Steifigkeitsänderung in *einem* Element in dem Rahmen hervorruft, *Focus auf ein Element*. Das kann man schreiben als

$$max\ J(e) \qquad alle\ interessierenden\ G\,, \tag{5.125}$$

also als Suche nach der Kurve M_G, die mit M_c auf dem Element überlagert den größten Wert $J(e)$ liefert, wobei M_G das Moment der Einflussfunktion ist, die zu dem Funktional $J(w)$ gehört.

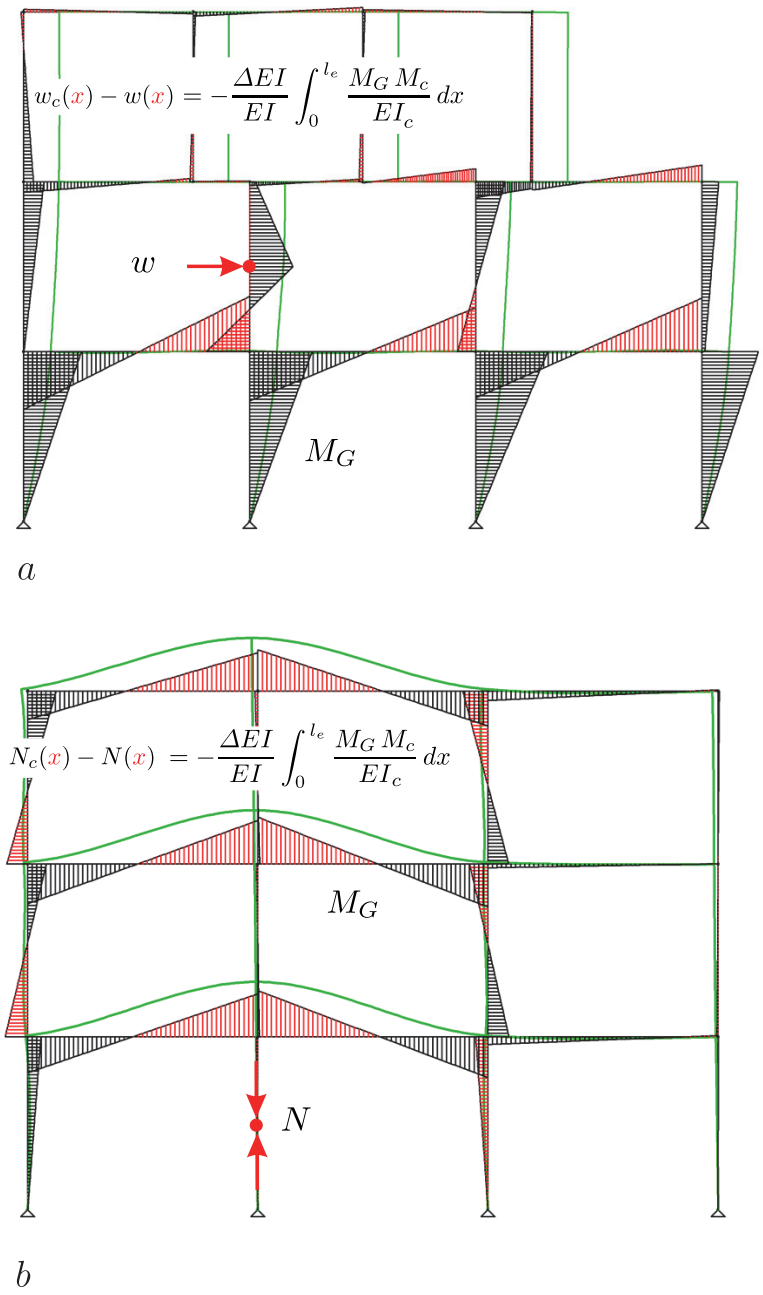


Bild 5.27. Einflussfunktionen (grüne Kurven) für **a)** die Horizontalverschiebung des Stiels und **b)** für die Normalkraft in dem Stiel im Stockwerk darunter, $EA = \infty$. Angetragen sind in beiden Bildern ebenfalls die Momente M_G der Einflussfunktionen, die signalisieren, wo der Rahmen zu verstärken ist. Integriert wird über das oder die Elemente, in denen sich EI ändert (BE-FRAMES)



Bild 5.28. Einflussfunktion für das Moment m_{xx} einer Platte im Feld und über der Wand (BE-PLATTE)

Bemerkung 5.4. In dem Programm BE-FRAMES sieht man die Momente der Einflussfunktion, wenn man nach der Markierung des Aufpunkts (*GF-Anywhere*) und der Darstellung der Einflussfunktion auf den Eintrag Moments in der Menüleiste klickt. Man kann sich natürlich auch die Normal- und Querkräfte der Einflussfunktion darstellen lassen. Das wäre dann im Sinne der erweiterten Formel (hier geht es um die Änderung in einem $M(x)$)

$$\tilde{\Delta}M = -\frac{\Delta EI}{EI}\int_0^{l_e}\frac{M_c\,M_G}{EI_c}\,dx - \frac{\Delta EA}{EA}\int_0^{l_e}\frac{N_c\,N_G}{EA_c}\,dx - \frac{\Delta GA}{GA}\int_0^{l_e}\frac{V_c\,V_G}{GA_c}\,dx\,, \tag{5.126}$$

also um den Einfluss, den Inkremente $EI+\Delta EI$, $EA+\Delta EA$ oder $GA+\Delta GA$ haben.

Bemerkung 5.5. Bei statisch bestimmten Tragwerken setzen sich die Einflussfunktionen für Kraftgrößen stückweise aus Starrkörperbewegungen zusammen, sind die Schnittgrößen der EF null, $M_G = N_G = V_G = 0$, und daher ändert sich nichts, wenn sich die Steifigkeiten ändern, $\Delta M(x) = 0$.

Bemerkung 5.6. Bei Flächentragwerken sind die Einflussfunktionen wegen der 2-D Tragwirkung stärker gedämpft als bei Stabtragwerken, siehe Bild 5.28. Die Einflussfunktion für das Stützmoment über der Wand geht nicht über die unmittelbar benachbarten Felder hinaus.

5.20 Zusammenfassung

Änderungen in einem Ergebnis – wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass sich das Funktional J selbst nicht ändert, wie das bei Weggrößen der Fall ist –

$$J(e) = J(w_c) - J(w) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \tag{5.127}$$

hängen also von **zwei Faktoren** ab, der Größe der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}$ am Ort der $\boldsymbol{f}^+$ und der Größe der $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$.

Die Einflussfunktionen stellen damit direkt die Sensitivitäten gegenüber jedweder Steifigkeitsänderung $\boldsymbol{\Delta K}$ dar, und ein *plot* der Einflussfunktionen ist eine grafische Darstellung dieser Sensitivitäten.

Alternativ kann man auch die Schnittgrößen – bei Rahmen vorzugsweise die Momente – der Einflussfunktionen plotten

$$J(e) = -\frac{\Delta\, EI}{EI}\int_{x_a}^{x_b}\frac{M_c\,M_G}{EI_c}\,dy\,, \tag{5.128}$$

was der zweiten Formel in (5.127) entspricht. Hierbei wird über das Element $[x_a, x_b]$ integriert, in dem sich die Steifigkeit ändert. Dort, wo M_G und das Lastmoment $M_c \simeq M$ groß sind, haben Steifigkeitsänderungen den größten Effekt, siehe z.B. Bild 5.25. Das ist sozusagen der Zugang im Sinne der Mohrschen Arbeitsgleichung (schwache Einflussfunktion) zur Sensitivität. Die Momente M_G sind die Sensitivitäten.

Es bleibe nicht unerwähnt, dass man den Übergang von $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ zu Mohr, zu dem Integral (5.128), nur machen kann, wenn das EI ein echter Vorfaktor von $\boldsymbol{\Delta K}$ ist, wenn man also mit $EA = GA = \infty$ rechnet. Bei Änderungen nur in dem E-Modul, $E \to E + \Delta E$, ginge es auch, aber im Fall $EA < \infty$ ist die obige schwache Form eine Näherung, bei der man aber wahrscheinlich nicht viel falsch macht.

5.21 Ein naheliegender Schluss

Die Zusatzkräfte $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ aus einer Steifigkeitsänderung in einem Element werden umso größer sein, je größer die Verformungsdifferenzen $\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}_j)$ zwischen den Knoten eines Elements sind. So sind in einem Stabelement $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ ja die Stabendkräfte f_i^+ (und damit die Normalkraft) – proportional zur Verschiebungsdifferenz $u_2^c - u_1^c$. Die Elemente mit großen ‚Gangunterschieden' zwischen den Verformungen links und rechts sind aber gerade die Elemente, die hoch beansprucht werden. Woraus folgt, dass die Elemente, deren Steifigkeitsänderungen für das Tragwerk am kritischsten sind, genau die Elemente sind, die am höchsten beansprucht werden.

Das sind auch die Elemente deren Einflussfunktionen am meisten ‚ausschlagen', deren Einflussfunktionen ihr Maximum gerade dort haben, wo die Last steht. Im Bauwesen sind die Einflussfunktionen ja – um es einfach zu halten – von der Bauart

$$G(x, y) = \frac{1}{k} f(x, y) \tag{5.129}$$

und eine Änderung $k \to k + \Delta k$ bewirkt daher näherungsweise den Zuwachs

$$dG = \frac{d}{dk} G \, \Delta k = -\frac{1}{k^2} f(x, y) \cdot \Delta k = -G(x, y) \cdot \frac{\Delta k}{k} \,, \tag{5.130}$$

so dass die Änderungen in den Ergebnissen gerade proportional zu $\Delta k/k$ und zur Einflussfunktion selbst sind.

5.22 Lager

Wenn sich die **Steifigkeit eines Lagers** ändert, kann man die Änderung $J(e)$ eines Funktionals – also *eines Moments, einer Querkraft, einer Durchbiegung* – **direkt an der Feder** verfolgen. Gerade bei komplexen 3-D Modellen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden ist das ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

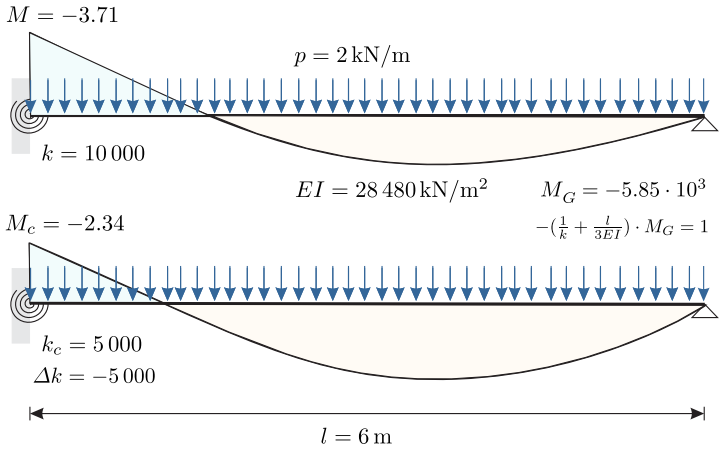


Bild 5.29. Elastische Einspannung. M_G ist das Moment aus der Spreizung 1 links

Elastische Einspannung

Die schwache Form der Balkengleichung des Trägers in Bild 5.29 lautet (k steht hier für k_φ; das Moment, um die Feder zu verdrehen ist $k \cdot \tan\varphi$)

$$\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx + \delta w'\,w'\,k = \int_0^l p\,\delta w\,dx\,. \tag{5.131}$$

Ändert sich die Drehfedersteifigkeit, $k \to k + \Delta k$, dann wird daraus

$$\underbrace{\int_0^l \frac{M_c\,\delta M}{EI}\,dx + \delta w'\,w_c'\,k}_{a(w_c,\delta w)} + \underbrace{\Delta k\,w_c'\,\delta w'}_{d(w_c,\delta w)} = \int_0^l p\,\delta w\,dx\,. \tag{5.132}$$

Die Änderung in einem Funktional $J(w)$ ergibt sich somit, wenn M_G das Moment der Einflussfunktion in der Feder vor der Änderung ist, zu

$$J(e) = -d(w_c, w_G) = -\Delta k\,w_c'\,w_G' = -\Delta k\,\frac{M_c}{k_c}\,\frac{M_G}{k}\,. \tag{5.133}$$

Zur Anwendung dieser Formel fehlt uns das neue Moment $M_c = k_c\,w_c'$ aus der Last, das man jedoch, wenn man nicht die Näherung $M_c \sim M$ verwenden will, entweder direkt oder durch *Iteration*, [44], bestimmen kann.

Um M_c direkt zu bestimmen, wenden wir (5.133) auf das Funktional $J(w) = M$, das Moment in der Feder selbst an, denn dann steht M_c auf beiden Seiten der Gleichung

$$J(e) = M_c - M = -\Delta k\,\frac{M_c}{k_c}\,\frac{M_G}{k}\,, \tag{5.134}$$

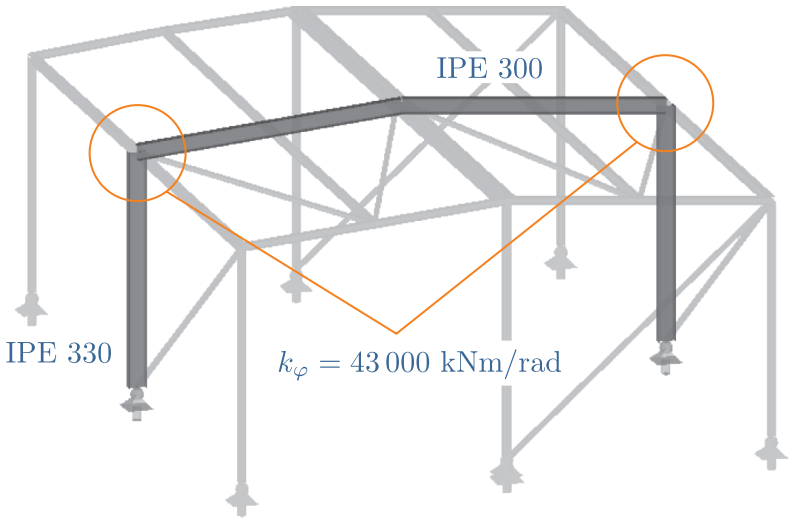


Bild 5.30. 3D-Modell eines Rahmens mit 47 Stäben und 180 Freiheitsgraden. Die drehelastische Einspannung reduzierte das Einspannmoment von $M = -86.6$ kNm auf $M_c = -75.0$ kNm, [46]

die man nach M_c auflösen kann, die Werte sind in Bild 5.29 angetragen,

$$M_c = M \frac{k_c\, k}{k_c\, k + \Delta k\, M_G} = M \cdot 0.63 = -3.71 \cdot 0.63 = -2.34\,, \tag{5.135}$$

oder man iteriert, erzeugt eine Folge $M_c^{(i)}$, die, wie sich zeigt, schnell gegen M_c konvergiert

$$M_c^{(i+1)} = -\Delta k \frac{M_c^{(i)}}{k_c} \frac{M_G}{k} + M \qquad M_c^{(0)} = M\,. \tag{5.136}$$

Ist dann $M_c = k_c\, w_c'$ bestimmt, und damit auch w_c', kann man mit (5.133) die Änderung

$$\boxed{J(e) = -\Delta k \frac{M\, M_G}{k_c\, k + \Delta k\, M_G}} \tag{5.137}$$

in jedem Funktional $J(w)$ berechnen. Man braucht nur das Moment M_G der Einflussfunktion des Funktionals $J(w)$ in der Feder und das Moment M in der Feder aus der Last, beide am ‚alten' System.

Ändern sich m **Federn in** m **Punkten** x_i, dann geht (5.133) in ein lineares Gleichungssystem über, das man wieder per Iteration lösen kann, eventuell mit einer Konvergenzbeschleunigung wie in Kapitel 5.27 beschrieben,

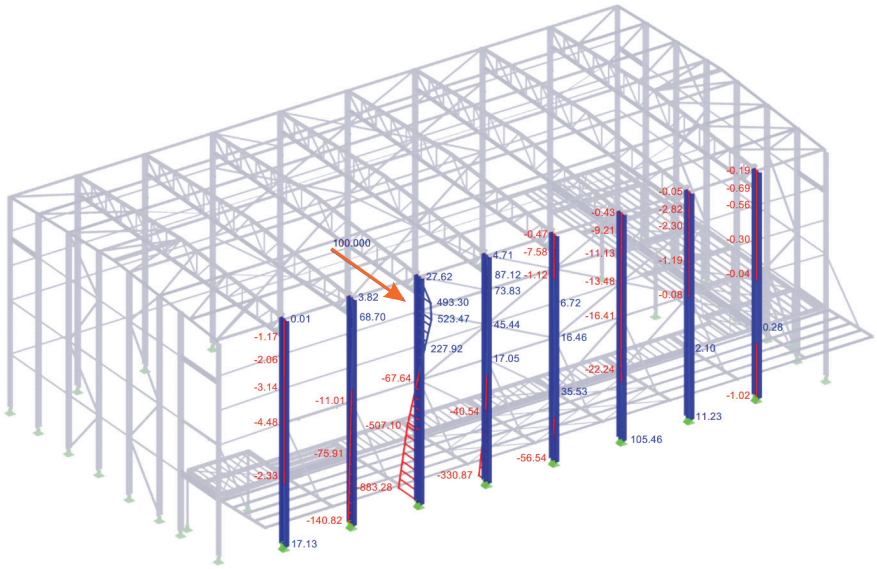


Bild 5.31. Stahlhalle, 1 643 Stäbe, 5 340 FG, 121 LF. Zu bestimmen war der Einfluss der drehelastischen Einspannung der acht Stützen auf die horizontale Verschiebung in Höhe der Kranbahn. Die hier vorgestellte Technik reduzierte das Problem auf ein 8×8 Gleichungssystem, das per Iteration gelöst wurde, [46], (RSTAB)

$$M_c^{(i+1)}(x_j) = -\sum_{l=1}^{m} \Delta k(x_l)\, \frac{M_c^{(i)}(x_l)}{k_c(x_l)}\, \frac{M_G(x_l, x_j)}{k(x_l)} + M(x_j) \quad j \quad = 1, 2, \ldots m\,. \tag{5.138}$$

Hier ist $M_G(x_l, x_j)$ das Moment ‚*ante*' in der Feder x_l (dem Ort), das von der Einflussfunktion für das Moment im Punkt x_j (der Ursache) in x_l erzeugt wird.

Die Stahlhallen in Bild 5.30 und 5.31 wurden so untersucht. Bei dem ersten System ging es um den Übergang von einem starren Anschluss in den Rahmenecken zu einer **drehelastischen Einspannung**. Bei dem zweiten System, auf das wir hier eingehen, ging es um den Einfluss der drehelastischen Einspannung der Stützen auf die horizontale Verschiebung der Kranbahn in einem ausgewählten Punkt x_P. In einer Vorstatik waren die Stützen voll eingespannt gerechnet worden.

Zuerst wurde der Punkt mit einer horizontalen Einzelkraft $P = 100$ kN belastet (100 wegen der ‚Sichtbarkeit') und die Einspannmomente $M_G^P(x_i), i = 1, 2, \ldots 8$ dieser Einflussfunktion (am ‚alten', dem voll eingespannten System) in den acht Fundamenten berechnet. Dann wurde die Iterationsvorschrift (ein 8×8-System) zur Bestimmung der acht Einspannmomente $M_c(x_i)$ aus der Verkehrslast (*Kran (25t-Hublast) - vert. Randlasten + Schräglaufkräfte in Reihe 4*) an dem drehelastischen System aufgestellt und die $M_c(x_i)$ wie in (5.138)

iterativ bestimmt. Wegen der ursprünglichen Festeinspannung $k(x_i) = \infty$ aber mit der Modifikation wie in (5.156) beschrieben

$$M_c^{(i+1)}(x_j) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{k_c(x_l)}\, M_c^{(i)}(x_l)\, M_G(x_l, x_j) + M(x_j) \quad j \quad = 1, 2, \ldots m\,. \tag{5.139}$$

Mit den auf Eins zurückgestellten Momenten $M_G^P(x_i)/100$ und den $M_c(x_i)$ konnte dann die horizontale Verschiebung $u_c(x_P)$ berechnet werden

$$u_c(x_P) = -\sum_{l=1}^{8} \frac{1}{k_c(x_l)} M_c(x_l)\, M_G^P(x_l) \frac{1}{100}\,. \tag{5.140}$$

Sind die Einspannmomente $M_c(x_l)$ der Stützen aus dem maßgebenden Lastfall ermittelt, kann man die Änderung in jeder anderen Weg- oder Kraftgröße $J(w)$ der Halle auf Grund der Änderungen in den Lagersteifigkeiten berechnen. Was man braucht, sind nur die acht Einspannmomente $M_G(x_l)$ (am ‚alten' System), die zu der Einflussfunktion für $J(w)$ gehören, siehe Bild 5.32. Diese Momente mit den geänderten Momenten $M_c(x_l)$ aus der Verkehrslast multipliziert, sinngemäß wie in 5.140, ergibt die Änderung $J(e)$.

Die Alternative zur Iteration ist die **direkte Lösung**. Wir betrachten zunächst eine Feder, die Teil eines Tragwerks ist und die sich ändert $k \to k + \Delta k$. Ist das Funktional $J(w) = w'$ der Tangens des Drehwinkels in der Feder, dann gilt

$$J(e) = w'_c - w' = -\Delta k\, w'_c\, w'_G\,, \tag{5.141}$$

was man nach w'_c auflösen kann

$$w'_c = w' \frac{1}{1 + \Delta k\, w'_G}\,. \tag{5.142}$$

Wenn die Feder den Drehfreiheitsgrad u_7 hat, dann ist w'_G der Eintrag $g_{7,7}$ in der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$. Mit w'_c kann man dann das geänderte Moment $M_c = (k + \Delta k)\, w'_c$ in der Feder berechnen und die Änderung $J(e)$ in jedem anderen Funktional, z.B. der Verschiebung u_3 in einem Knoten. Man muss nur für w'_G in (5.133) den entsprechenden Wert einsetzen. Hat die Drehfeder, wie angenommen, den Freiheitsgrad u_7, dann ist w'_G gleich dem Eintrag $g_{3,7}$ in der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$

$$J(e) = u_{c3} - u_3 = -\Delta k\, w'_c\, g_{3,7}\,. \tag{5.143}$$

Ändern sich die Steifigkeiten in zwei Federn, die an den Stellen x_1 und x_2 liegen, dann lautet der Ergänzungsterm zur schwachen Form

$$d(w_c, \delta w) = \Delta k_1\, w'_c(x_1)\, \delta w'(x_1) + \Delta k_2\, w'_c(x_2)\, \delta w'(x_2)\,. \tag{5.144}$$

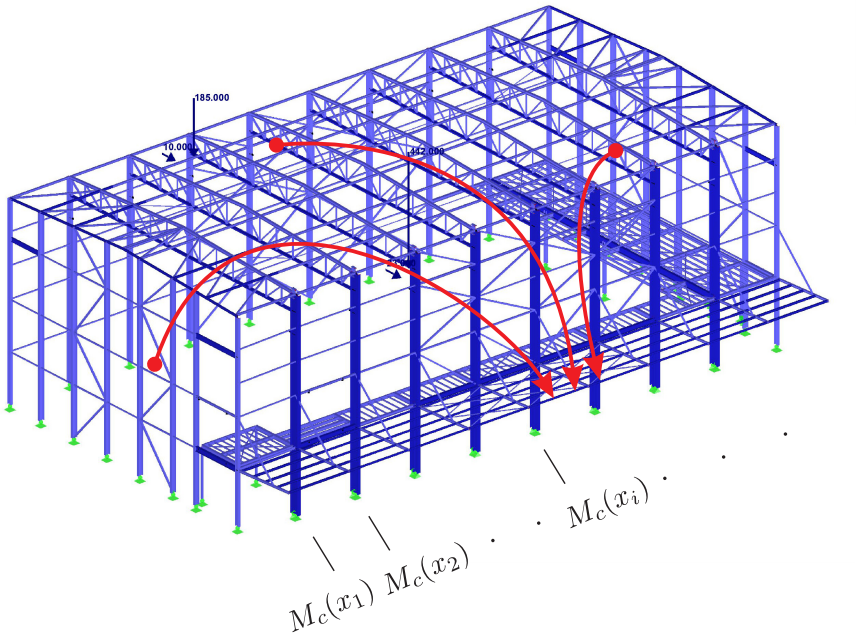


Bild 5.32. Die Einflussfunktion (G) für ein Moment, eine Querkraft, eine Durchbiegung erzeugt Momente (M_y^G) in den acht Fusspunkten der Stützen, und dieser Vektor $\boldsymbol{M}_y^G$ skalar multipliziert mit dem Vektor $\boldsymbol{M}_c$ der acht Fusspunkts-Momente $k_c^{-1}(x_i)M_c(x_i)$ ergibt die Änderung $J(e) = \boldsymbol{M}_c^T \boldsymbol{M}_y^G$ des Moments, der Querkraft etc. im Aufpunkt beim Übergang von festen zu drehelastischen Lagern (RSTAB)

Das Ziel ist zunächst die Bestimmung von $w_c'(x_1)$ und $w_c'(x_2)$. Die Verdrehungen in den Federn sind zwei Funktionale $J_1(w)$ und $J_2(w)$

$$J_i(w) = w'(x_i) = \int_0^l G_i(y, x_i)\, p(y)\, dy \qquad i = 1, 2 \tag{5.145}$$

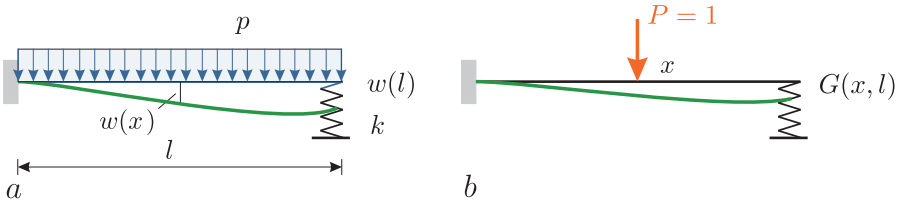
zu denen die Einflussfunktionen $G_i(y, x_i)$ gehören. Die Änderungen in den Verdrehungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} J_1(e) &= w_c'(x_1) - w'(x_1) = -\Delta k_1\, w_c'(x_1)\, G_1'(x_1, x_1) - \Delta k_2\, w_c'(x_2)\, G_2'(x_1, x_2) \\ J_2(e) &= w_c'(x_2) - w'(x_2) = -\Delta k_1\, w_c'(x_1)\, G_1'(x_1, x_2) - \Delta k_2\, w_c'(x_2)\, G_2'(x_2, x_2)\,, \end{aligned} \tag{5.146}$$

was dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c'(x_1) \\ w_c'(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'(x_1) \\ w'(x_2) \end{bmatrix} \tag{5.147}$$

mit



$$w(x) = \int_0^l \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dx + k\,w(l)\,G(x,l)$$

Bild 5.33. System mit Feder und Mohrsche Arbeitsgleichung

$$a_{11} = \Delta k_1\,G_1'(x_1,x_1) \qquad a_{12} = \Delta k_2\,G_1'(x_1,x_2) \tag{5.148a}$$
$$a_{21} = \Delta k_1\,G_1'(x_1,x_2) \qquad a_{22} = \Delta k_2\,G_2'(x_2,x_2) \tag{5.148b}$$

entspricht. Wären die Drehfreiheitsgrade in den beiden Federn u_7 und u_9, dann findet man die Terme $G_i'(x_j,x_i)$ an den entsprechend bezifferten Stellen in der Inversen $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$

$$G_1'(x_1,x_1) = g_{7,7} \qquad G_1'(x_1,x_2) = g_{7,9} \tag{5.149a}$$
$$G_2'(x_2,x_1) = g_{9,7} \qquad G_2'(x_2,x_2) = g_{9,9}\,. \tag{5.149b}$$

Die Änderung in irgendeinem Funktional $J(w)$ beträgt dann

$$J(e) = -\Delta k_1\,w_c'(x_1)\,G'(x_1,x) - \Delta k_2\,w_c'(x_2)\,G'(x_2,x)\,, \tag{5.150}$$

wenn $G(y,x)$ die Einflussfunktion für $J(w)$ ist und die $G'(x_i,x)$ die Ableitungen in den beiden Drehfedern sind.

Senkfeder

Der Vollständigkeit halber behandeln wir auch noch den Fall einer **Senkfeder** mit sich ändernder Steifigkeit, $k \to k + \Delta k$, obwohl sich die Formulierungen im Grunde an dem zuvor gesagten ablesen lassen.

Wir betrachten beispielhaft das Funktional $J(w) = w(x)$, also die Durchbiegung in einem Punkt x. Die Grundgleichung lautet (Mohrsche Arbeitsgleichung)

$$w(x) = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI}\,dy + k \cdot w(l) \cdot G(x,l) \tag{5.151}$$

wobei $\bar{M}$ das Moment der Einflussfunktion $G(x,y)$ ist; y ist die Laufvariable und x ist der Aufpunkt, siehe Bild 5.33. Nach obigem ergibt sich die Änderung in dem Funktional zu

$$J(e) = w_c(x) - w(x) = -\Delta k\,w_c(l)\,G(x,l)\,. \tag{5.152}$$

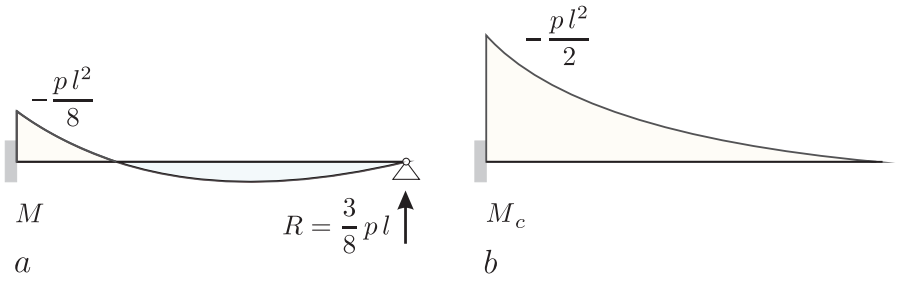


Bild 5.34. LF Gleichstreckenlast

Um $w_c(l)$ zu bestimmen, wenden wir die Formel auf den Punkt $x = l$ an

$$w_c(l) - w(l) = -\Delta k\, w_c(l)\, G(l,l)\,, \tag{5.153}$$

was

$$w_c(l) = \frac{w(l)}{1 + \Delta k\, G(l,l)} \tag{5.154}$$

ergibt und somit geht (5.152) über in

$$\boxed{J(e) = -\frac{\Delta k\, w(l)\, G(x,l)}{1 + \Delta k\, G(l,l)}}\,. \tag{5.155}$$

Damit kann man die Änderung in jedem Funktional $J(w)$ verfolgen. Es ist $w(l)$ der Federweg (= Zusammendrückung) unter Last, (alle Werte am ‚alten' System), $G(x,l)$ ist der Federweg aus dem Dirac Delta im Aufpunkt x, das zu dem Funktional gehört (Kraft $P = 1$, Moment $M = 1$, Spreizung $= 1$, Sprung $= 1$), $G(l,l)$ ist der Federweg, wenn eine Kraft $P = 1$ auf die Feder drückt, und Δk ist die Änderung der Steifigkeit. Mit $w_c(l)$ kennt man im übrigen auch die geänderte Federkraft $(k + \Delta k)\, w_c(l)$ unter Last.

Starre Lager

Wird aus einer starren Einspannung $k = \infty$ eine elastische Einspannung mit der Steifigkeit k_c, dann kommt man mit einer geschickten Umformung zum Ziel

$$J(e) = -\Delta k\, w_c'\, w_G' = -\frac{k_c - k}{k_c\, k} M_c\, M_G = -(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_c})\, M_c\, M_G = \frac{1}{k_c}\, M_c\, M_G\,. \tag{5.156}$$

Hier ist M_G das ursprüngliche Einspannmoment der Einflussfunktion des Funktionals $J(w)$ und M_c ist das Einspannmoment in der (dann elastischen) Einspannung aus der Last.

Angewandt auf $J(e) = M_c - M$ selbst ergibt sich

$$M_c - M = \frac{1}{k_c} M_c M_G \,, \tag{5.157}$$

wobei M_G das Moment ist, das das gelenkig gemachte Balkenende um $\tan \varphi = 1$ spreizt. Das kann man nach M_c auflösen und so mit (5.156) jede Änderung $J(e)$ verfolgen, wenn man für M_G das Einspannmoment setzt, das zur Einflussfunktion für $J(w)$ am ursprünglichen Tragwerk gehört.

Sinngemäß dasselbe gilt natürlich auch für Senkfedern

$$\boxed{J(e) = \frac{1}{k_c} R_c R_G} \,, \tag{5.158}$$

wenn R_c und R_G die entsprechenden Lagerkräfte sind. Fällt z.B. ein starres Lager aus, siehe Bild 5.34, dann bringt der Praktiker die Lagerkraft R in umgekehrter Richtung auf das modifizierte System auf und addiert die Ergebnisse zu den ursprünglichen Resultaten.

Im Sinne der obigen Formel ist R_c die umgedrehte Lagerkraft R und die Steifigkeit am Ende des Kragträgers (dort, wo vorher das Lager war) beträgt

$$k_c = \frac{3EI}{l^3} \,. \tag{5.159}$$

Zur Einflussfunktion für das Einspannmoment gehört die Kraft $R_G = 1/l$, ferner ist $R_c = 3/8 \cdot p\, l$ und somit ergibt sich z.B. für die Änderung des Einspannmoments der Wert

$$J(e) = M_c - M = \frac{l^3}{3\,EI} \cdot \frac{3}{8} p\, l \cdot \frac{1}{l} = p\, l^2 \, \frac{3}{8} \tag{5.160}$$

was mit der Differenz $pl^2/2 - pl^2/8$ übereinstimmt.

Bei dem Ausfall von Lagern ist es also so, dass man das M_c bzw. R_c kennt, denn es sind gerade die umgedrehten Lagerreaktionen, und man muss sich nur die Steifigkeit k_c besorgen, also die Steifigkeit in Richtung des vorher gesperrten Freiheitsgrades.

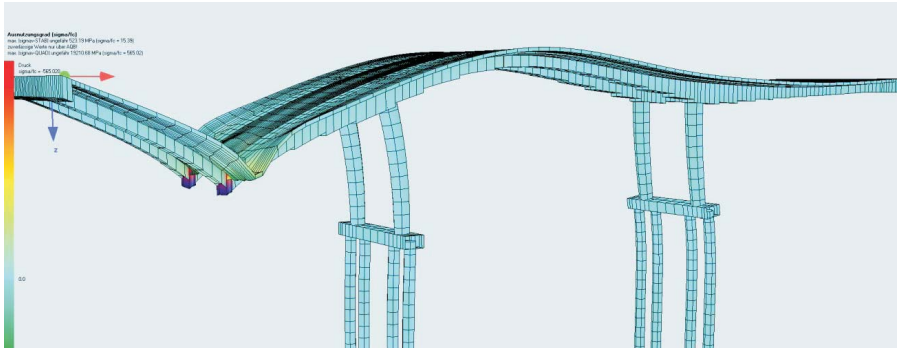
5.23 Integrale Brücken

Eine beispielhafte Anwendung finden diese Ideen auch bei integralen Brücken, bei denen die Widerlager, die Pfeiler und der Überbau monolithisch miteinander verbunden sind, um die Wartungsarbeiten zu vereinfachen.

Die Idee ist relativ neu und als daher im Zuge der Autobahnerneuerung der A3 die *Fahrbachtalbrücke* bei Aschaffenburg, eine **semi-integrale Brücke** (keine monolithische Verbindung mit den Widerlagern) errichtet werden sollte, hat das Brückenbauamt für Nordbayern darauf bestanden, dass Untersuchungen an Pfählen vorgenommen wurden, um den Einfluss der Grenzwerte $c \pm \Delta c$ der elastischen Bettung c auf den Überbau abschätzen zu können, [267].



a



b

Bild 5.35. Semi-integrale Brücke auf Pfählen **a)** FE-Modell **b)** Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ (SOFiSTiK)

In einer Diplomarbeit wurden die hier entwickelten Ideen benutzt, um dies rechnerisch zu verfolgen, [277]. Das Beispiel eignet sich gut, weil ja zwischen den Aufpunkten im Überbau der Brücke und den Pfählen eine relativ lange ‚Strecke' liegt, siehe Bild 5.35, und der Einfluss den Weg praktisch zweimal gehen muss, vom Überbau zu den Pfählen um die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ zu erzeugen und die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ gehen denselben Weg zurück, um die Schnittgrößen zu ändern, $M(x) \to M_c(x)$, $V(x) \to V_c(x)$ etc. Eine Situation, die typisch für ***Substrukturen*** ist.

In Substrukturen spielen die Einflüsse nach einer Steifigkeitsänderung ‚Ping-Pong', wechseln die Signale zwischen dem Lastgurt und der Substruktur hin und her bis die Signale ausgeglichen sind. Die Kräfte $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$ erzeugen die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ und die muss genau so groß sein, dass $\boldsymbol{u}_c$ die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ erzeugt.

Zurück zu der Brücke: Betrachten wir zum Beispiel das Moment $M(x)$ im Überbau an einer Stelle x, das sich durch die Überlagerung der Einflussfunktion $G_2(y, x)$ mit der Belastung p berechnen lässt

$$M(x) = \int_0^l G_2(y, x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,. \tag{5.161}$$

Die Frage, wie sich das Moment ändert, wenn sich der Bettungsmodul der Pfähle ändert, $c \to c + \Delta c$, zielt auf den Unterschied zwischen der Einflussfunktion G_2 (Modul c, Matrix $\boldsymbol{K}$) und der Einflussfunktion G_{2c}, die am System $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ mit dem Modul $c + \Delta c$ berechnet wird

$$M_c(x) = \int_0^l G_{2c}(y, x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f}\,. \tag{5.162}$$

Wegen

$$\boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) \tag{5.163}$$

kann man das auf die Bedeutung des Vektors $\boldsymbol{f}^+$ für das System $\boldsymbol{K}$ zurückspielen.

Die Vektoren $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{g}_c$ sind die Knotenwerte der beiden Einflussfunktionen am Modell $\boldsymbol{K}$ bzw. $\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$. Der Vektor $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ sind die Zusatzkräfte in den Knoten der Pfähle aus der Änderung des Bettungsmoduls, $c \to c + \Delta$.

Schreiben wir die Biegeverformung in einem Pfahlelement in der Form

$$w_c(x) \simeq w_c(0) + w_c'(0) \cdot x + \frac{1}{2}\, w_c''(0) \cdot x^2\,, \tag{5.164}$$

dann liefert nur der quadratischen Term Beiträge zu $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$, weil in jedem Element die Zeilen von $\boldsymbol{\Delta K}_e$ (näherungsweise) orthogonal zu Starrkörperbewegungen sind – den ersten beiden Termen. Die quadratischen Terme werden jedoch die kleinsten der drei Terme sein, so dass auch $\boldsymbol{f}^+$ relativ

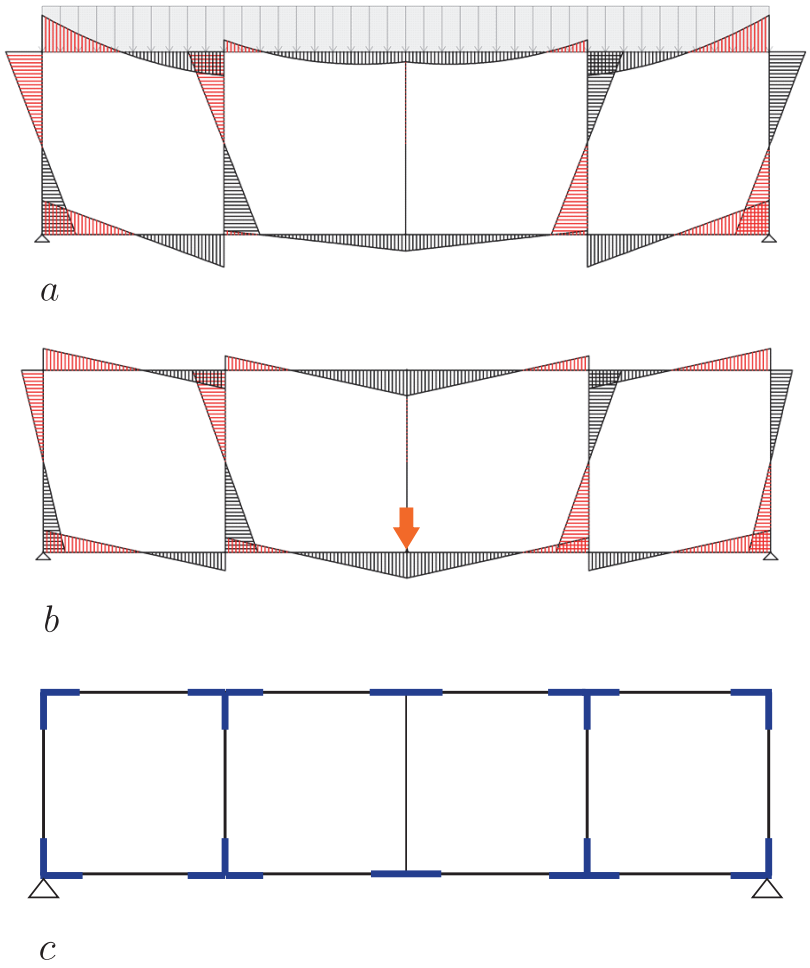


Bild 5.36. Verstärkung eines Vierendeel Träger, **a)** Biegemomente aus der Riegellast, **b)** Biegemomente M_G aus der Punktlast $P = 1$ (Dirac Delta δ_0), **c)** vorgeschlagene Änderungen, [125]

klein sein wird. Dazu kommt noch, dass die Pfähle relativ weit vom Überbau entfernt liegen, so dass der Einfluss der Pfahlkräfte $\boldsymbol{f}^+$ auf den Überbau, unabhängig von ihrer Größe, relativ klein sein wird. Die Rechenergebnisse bestätigten das, die Momente $M(x)$ und $M_c(x)$ weichen kaum voneinander ab.

Man kann das Ganze auch andersherum aufzäumen, indem man direkt die Änderungen $G_2(y,x) \rightarrow G_{2c}(y,x)$ verfolgt. Die Knotenwerte $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion G_2 sind die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ mit $j_i = M(\varphi_i)(x)$ und die Knotenwerte $\boldsymbol{g}_c$ der Einflussfunktion G_{2c} sind die Lösung des Systems

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+ \tag{5.165}$$

mit dem Vektor $\boldsymbol{j}^+ = -\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c$. Die durch die Spreizung des Aufpunktes x erzeugte Bewegung $g_c(x) = g_c(0) + g_c'(0)\,x + 0.5 * g_c''(0)^2/x \ldots$ (in den Pfählen) dürfte aber demselben Argument unterliegen wie oben. Die Einträge in dem Vektor $\boldsymbol{j}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c$ sollten relativ klein sein und weil die Knoten der Pfähle vom Überbau relativ weit weg liegen, sollte der Einfluss der $\boldsymbol{j}^+$ klein sein und somit auch der Unterschied zwischen den Einflussfunktionen $G_2(y,x)$ und $G_{2c}(y,x)$.

Bemerkung 5.7. Wir haben oben etwas vereinfacht: Die Differentialgleichung eines Pfahlelementes, $EI\,w^{IV} + c\,w = p$, legt es nahe, für die Elementmatrix die Näherung $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{Beam} + c \cdot \boldsymbol{M}$ zu benutzen, also die normale Balkenmatrix und die Massenmatrix $\boldsymbol{M}$, mit $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$. Nur die Zeilen von $\boldsymbol{K}_{Beam}$ sind orthogonal zu den Starrkörperbewegungen. Die Massenmatrix in $\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{K}_{Beam} + \Delta c \cdot \boldsymbol{M}$ reagiert auf die Starrkörperanteile in $\boldsymbol{u}_c$, aber der Gesamteffekt ist anscheinend sehr gering.

5.24 Verstärkungen

Die Einflussfunktionen kann man auch dazu benutzen, um Tragwerke gezielt zu verstärken, weil man Änderungen $J(e) = J(u_c) - J(u)$ allein durch Betrachtung des verstärkten Elements berechnen kann,

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c\,. \tag{5.166}$$

Man muss nur die Änderung $\boldsymbol{\Delta K}$ in der Steifigkeitsmatrix des Elements von links und rechts mit den entsprechenden Teilen der Vektoren $\boldsymbol{g}^T$ und $\boldsymbol{u}_c$ multiplizieren. Das Problem ist natürlich, dass wir die dafür nötigen Komponenten des Vektors $\boldsymbol{u}_c$ nicht kennen, aber es gibt Möglichkeiten, siehe Kapitel 5.27, an diese Werte zu kommen oder man rechnet einfach mit $\boldsymbol{u}$.

Bei Rahmentragwerken hat diese Gleichung, wenn wir uns hier auf die Biegeeffekte beschränken, ja die Gestalt

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = -\frac{\Delta EI}{EI}\int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G\,M_c}{EI_c}\,dx\,. \tag{5.167}$$

Hier ist ΔEI die Steifigkeitsänderung in dem Balkenstück (x_a, x_b), M_G ist das Moment aus der Einflussfunktion, die zu dem Funktional $J(u)$ gehört, und M_c ist das Moment in dem Balkenstück *nach* der Steifigkeitsänderung.

Angenommen wir wollen den Vierendeel-Träger in Bild 5.36 so verstärken, dass die Durchbiegung im unteren Riegel, kleiner wird. Hierzu belasten wir die Mitte des unteren Trägers mit einer Einzelkraft $P = 1$ – das ergibt die Einflussfunktion für die Durchbiegung – und vergleichen die Momente M_G aus der Einzelkraft mit den Momenten $M \sim M_c$ aus der Riegellast. Dort, wo

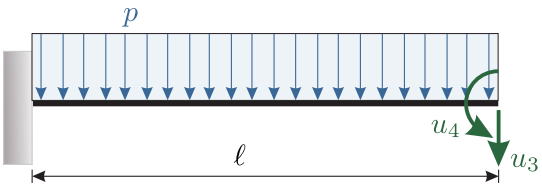


Bild 5.37. Kragarm mit konstanter Streckenlast

beide Momente groß sind (und nicht orthogonal zueinander), dort ändern wir am besten die Steifigkeit $EI \to EI + \Delta EI$. Das sind – nicht überraschend – gerade die Ecken.

5.25 Klassische Formulierung

Die Situation bei der Reanalysis und bei der **Optimierung** ist identisch, [172]. Jedesmal geht es darum, den Effekt von Änderungen zu verfolgen und daher ist auch der mathematische Zugang derselbe. Es ist nur so, dass bei der Optimierung die zentrale Rolle der Einflussfunktionen eher durch ‚Zufall' entdeckt wird, indem ein bestimmtes Skalarprodukt durch die äquivalente adjungierte Formulierung ersetzt wird, siehe (5.184), und bei diesem Schritt dann die Einflussfunktion auftaucht.

In der **Optimierung** nennt man das Operieren mit Einflussfunktionen daher die ***adjoint method of analysis*** und kommt auf

$$J(e) = J(u_c) - J(u) \simeq -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u} \tag{5.168}$$

als Näherung für den exakten Ausdruck

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ . \tag{5.169}$$

Wir haben hier, um die Notation nicht zu überfrachten, zunächst angenommen, dass das Funktional $J(u)$ nicht von der sich ändernden Steifigkeit $EI \to EI + \Delta EI$ abhängt, etwa, wenn $J(u) = u(x_i)$ eine Verschiebung in einem Knoten ist.

Zur Herleitung der obigen Näherung (5.168) nehmen wir an, dass die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(p_1, p_2, \ldots, p_m) \tag{5.170}$$

und ebenso der Vektor $\boldsymbol{f}$ eine Funktion von m Modellparametern p_i sind und wir fragen, wie die Ableitung der Lösung von $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$, nach den p_i aussieht. Weil $\boldsymbol{Ku} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ konstant ist, sind die Ableitungen null

$$\frac{d}{dp_i}(\boldsymbol{Ku} - \boldsymbol{f}) = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_i}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p_i} = 0 , \tag{5.171}$$

was

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i} = -\boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_i}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p_i}\right) = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p(i) \tag{5.172}$$

ergibt. Der Vektor $\boldsymbol{f}^p(i)$ heißt ***Pseudo-Lastvektor***. Es gibt m solche Vektoren entsprechend den m Parametern p_i. Im folgenden schreiben wir einfacher $\boldsymbol{f}^p$, weil wir wissen, welches (i) gemeint ist.

Beispiel 5.2. Wir studieren die Abhängigkeit der Lösung $\boldsymbol{u} = \{u_3, u_4\}^T$ des Kragträgers in Bild 5.37 von der Länge ℓ des Trägers.

$$\boldsymbol{K} = EI\begin{bmatrix} 12/\ell^3 & 6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 & 4/\ell \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{p}{EI}\begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = p\begin{bmatrix} \ell/2 \\ \ell^2/12 \end{bmatrix}. \tag{5.173}$$

Mit

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} \ell^3/3 & -\ell^2/2 \\ -\ell^2/2 & \ell \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell} = EI\begin{bmatrix} -36/\ell^4 & -12/\ell^3 \\ -12/\ell^3 & -4/\ell^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell} = p\begin{bmatrix} 1/2 \\ \ell/6 \end{bmatrix} \tag{5.174}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right]\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\right]\left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right]\right) = \frac{p}{2\,EI}\begin{bmatrix} \ell^3 \\ -\ell^2 \end{bmatrix}. \tag{5.175}$$

Weil der Gradient $\partial \boldsymbol{u}/\partial l$ nicht konstant ist, ist

$$\boldsymbol{u}(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{u}(\ell) \simeq \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell}\,\Delta\ell \tag{5.176}$$

nur eine Näherung.

Die Ableitung der Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ nach p ist hingegen konstant

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right]\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p}\right]\right) = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \tag{5.177}$$

und so ist

$$\boldsymbol{u}(p + \Delta p) - \boldsymbol{u}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p}\,\Delta p = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \cdot \Delta p \tag{5.178}$$

die exakte Differenz.

Die Abhängigkeit der Lösung $\boldsymbol{u}$ von EI wiederum ist nichtlinear, weil ja beim Lösen von $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ durch die Determinante dividiert wird (das sieht man an der ***Cramerschen Regel***) und so das EI im Nenner ein $-EI^{-2}$ in der Ableitung ergibt.

Es ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI} = \begin{bmatrix} 12/\ell^3 & 6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 & 4/\ell \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial EI} = \mathbf{0} \tag{5.179}$$

und mit $\boldsymbol{K}^{-1}\partial\boldsymbol{K}/\partial EI = EI^{-1}\cdot\boldsymbol{I}$ folgt somit

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial EI} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right]\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI}\right]\left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial EI}\right]\right) = -\frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{u} = -\frac{p}{EI^2}\begin{bmatrix}\ell^4/8\\ -\ell^3/6\end{bmatrix}. \tag{5.180}$$

Schätzt man also die Änderung $\boldsymbol{u}(EI) \to \boldsymbol{u}(EI+\Delta EI)$ damit ab

$$\boldsymbol{u}(EI+\Delta EI) - \boldsymbol{u}(EI) \simeq \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial EI}\cdot\Delta EI = -\frac{p}{EI^2}\begin{bmatrix}\ell^4/8\\ -\ell^3/6\end{bmatrix}\cdot\Delta EI\,, \tag{5.181}$$

dann ist das eine Näherung, ist das nur der erste Term in der Taylor-Entwicklung. Bei gleichem ΔEI hängt die Änderung in $\boldsymbol{u}$ davon ab, wo man sich auf der Skala EI befindet. Wäre der Zusammenhang linear, dann würde die Änderung nur von ΔEI abhängen.

Funktionale

Nun betrachten wir Funktionale. Wir wollen die **Sensitivität** eines Funktionals $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ bezüglich der Parameter p_i bestimmen

$$\frac{dJ}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}(\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}) = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}^T\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i}\,. \tag{5.182}$$

Hier steht jetzt also mit $d/dp_i\,\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ auch die Ableitung von J nach p_i, was wir zu Anfang vernachlässigt haben.

Mit (5.172) folgt

$$\frac{dJ}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boxed{\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p} = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{f}^p\,. \tag{5.183}$$

Im letzten Schritt haben wir die ***adjoint variable***, den Vektor $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$, eingeführt. Das wird in der Literatur als ‚Trick' gesehen, mit dem man über eine adjungierte Formulierung die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ von $\boldsymbol{f}^p$ wegbewegen kann[9]. Adjungiert ist in der linearen Algebra identisch mit transponiert, es wird einfach nur anders geklammert, und dadurch kommt die Adjungierte ins Spiel,

$$\boldsymbol{j}^T\underbrace{\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p} = \underbrace{\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}}\,\boldsymbol{f}^p = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}^p\,. \tag{5.184}$$

Weil $\boldsymbol{K}^{-1}$ aber symmetrisch ist, ist $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{K}^{-1T}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ oder $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j}$. Dies ist aber identisch mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ und daher ist $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{g}$.

[9] Bei diesem Zugang taucht der Vektor $\boldsymbol{g}$ (oder $\boldsymbol{\lambda}$) also auf rein algebraischem Wege auf ohne dass das Konzept von Greenschen Funktionen oder Dirac Deltas erwähnt wird. Das Endergebnis ist aber natürlich genau dasselbe.

Das unterschiedliche Klammern $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ ist eine oft benutzte Technik bei Beweisen in der linearen Algebra.

Den algebraischen Weg zu $\boldsymbol{g}$ – ohne die GF zu erwähnen – kann man sich auch wie folgt zurechtlegen: Sei $J(\boldsymbol{u})$ ein Funktional, dann gilt

$$J(\boldsymbol{u})=\sum\nolimits_i J(\varphi_i)\,u_i=\sum\nolimits_i j_i\,u_i=\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}\,. \tag{5.185}$$

Mit den Sensitivitäten dJ/dp_i kann man die Zuwächse

$$J(p_i+\Delta p_i)-J(p_i)\simeq\Delta J_i=\frac{dJ}{dp_i}\,\Delta p_i \tag{5.186}$$

abschätzen. Und das ist der Unterschied zu den Formeln mit den $\boldsymbol{f}^+$, die den Schritt $J(u_c)-J(u)$ in geschlossener Form geben, während in der Optimierung die Steigung, der Gradient, im Punkt p_i berechnet wird und dann auf den Zuwachs $J(u_c)-J(u)$ extrapoliert wird.

Vergleich

Weil man aber bei der geschlossenen Formulierung den Vektor $\boldsymbol{f}^+$ nicht kennt und mit der Näherung $\boldsymbol{f}^+\simeq-\boldsymbol{\Delta K u}$ arbeiten muss, sind die beiden Zugänge auf numerischer Ebene identisch.

Mit finiten Differenzen

$$\frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}\simeq\frac{1}{\Delta p_i}(\boldsymbol{j}(p_i+\Delta p_i)-\boldsymbol{j}(p_i))^T\boldsymbol{u}=\frac{1}{\Delta p_i}(\boldsymbol{j}_c-\boldsymbol{j})^T\,\boldsymbol{u} \tag{5.187}$$

und (wenn die Last nicht von p_i abhängt, $\partial\boldsymbol{f}/\partial p_i=\boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{f}^p=\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial p_i}\,\boldsymbol{u}=\frac{1}{\Delta p_i}(\boldsymbol{K}(p_i+\Delta p_i)-\boldsymbol{K}(p_i))\boldsymbol{u}=\frac{1}{\Delta p_i}\,\boldsymbol{\Delta K u} \tag{5.188}$$

geht (5.186), also eigentlich (5.183), über in

$$J(p_i+\Delta p_i)-J(p_i)\simeq(\boldsymbol{j}_c-\boldsymbol{j})^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Delta K u}\,. \tag{5.189}$$

In Kapitel 5.7, (5.42), hatten wir die exakte Formel[10]

$$J(u_c)-J(u)=(\boldsymbol{j}_c-\boldsymbol{j})^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}_c^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+=(\boldsymbol{j}_c-\boldsymbol{j})^T\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{g}}_c^T\boldsymbol{\Delta K u}_c \tag{5.190}$$

hergeleitet. Sie ist dann anzuwenden, wenn der Parameter p_i auch in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ steckt, wie das bei Kraftgrößen der Fall sein kann, wenn sich die Steifigkeit, das wäre dann das p_i, **in dem Element mit dem Aufpunkt** (nur dann) ändert.

Setzt man nun in (5.190) für $\bar{\boldsymbol{g}}_c=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c\simeq\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{g}=\boldsymbol{\lambda}$ und setzt für $-\boldsymbol{\Delta K u}_c$ die Näherung $-\boldsymbol{\Delta K u}$, dann sind die beiden Formeln identisch.

[10] Wir schreiben $\bar{\boldsymbol{g}}_c=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c$ im Unterschied zu $\boldsymbol{g}_c=\boldsymbol{K}_c^{-1}\boldsymbol{j}_c$.

Beispiel 5.3. Der Kragträger in Bild 5.37 hat die Länge $\ell = 4$ und trägt eine Streckenlast $p = 10$ kN/m. Wie ändert sich das Moment an der Stelle $x = 2$, wenn der Kragträger um einen Meter verlängert wird?

Es geht also um das Funktional $J(w) = M(x)$ und dessen Änderung

$$\frac{dJ}{d\ell} = \frac{d}{d\ell}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right). \tag{5.191}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(x) &= \{M(\varphi_3)(x), M(\varphi_4)(x)\}^T = EI\,\{-6/\ell^2 + 12\,x/\ell^3, -2/\ell + 6\,x/\ell^2\}^T \\ &= \{0, 2.5\}^T \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\lambda} = \{-2, 1\}^T = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}(x)\end{aligned} \tag{5.192}$$

und

$$\frac{d}{d\ell}\,\boldsymbol{j}(x) = EI\,\{12/\ell^3 - 36\,x/\ell^4, 2/\ell^2 - 12\,x/\ell^3\}^T = \{-0.0938, -0.250\}^T\,. \tag{5.193}$$

Die Ableitungen der Knotenkräfte $f_3 = p \cdot 0.5\,\ell$ und $f_4 = p \cdot \ell^2/12$ betragen

$$\partial \boldsymbol{f}/\partial \ell = \{0.5 \cdot p, \ell/6 \cdot p\}^T\,. \tag{5.194}$$

Ferner ist, siehe (5.174),

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell} = EI\begin{bmatrix} -0.1406 & -0.1875 \\ -0.1875 & -0.2500 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 320 \\ -106.6667 \end{bmatrix} \tag{5.195}$$

Das ergibt mit $\Delta\ell = 1$

$$\frac{dJ}{d\ell}\,\Delta\ell = \left[\frac{d}{d\ell}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right)\right]\Delta\ell = -23.33\,, \tag{5.196}$$

während die exakte Differenz der FE-Momente im Punkt $x = 2$ den Wert $M_c(x) - M(x) = -54.16 + 26.66 = -27.5$ hat. (FE-Momente heißt bevor die lokalen Lösungen dazu addiert werden, also die Momente aus den Knotenkräften f_i).

Anwendung auf Steifigkeitsmatrizen

Bei Steifigkeitsmatrizen sind die Steifigkeiten k (von nun ab heißen die $p_i \rightarrow k_i$) Vorfaktoren

$$\boldsymbol{K} = k \cdot \boldsymbol{K}' \qquad k = \frac{EA}{l} \qquad k = \frac{EI}{l^3} \qquad (\boldsymbol{K}' = \frac{1}{k}\boldsymbol{K})\,. \tag{5.197}$$

Nehmen wir an, dass die rechte Seite $\boldsymbol{f}$ nicht von k abhängt und k auch nicht in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ vorkommt (wenn etwa $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u} = u_i$), dann folgt

$$\boldsymbol{f}^p = (\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial k}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial k}) = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \tag{5.198}$$

und mit

$$\frac{d\,J}{dk} = \frac{d}{dk}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p = -\boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{f}^p = -\boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \tag{5.199}$$

folgt für das Inkrement der Ausdruck (5.168) in der Einleitung

$$J(\boldsymbol{e}) = J(k+\Delta k) - J(k) \simeq \frac{dJ}{dk}\,\Delta k = -\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}\,\Delta k = -\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}\,. \tag{5.200}$$

Schreiben wir $\boldsymbol{g}$ statt $\boldsymbol{\lambda}$ und lesen $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ als Näherung für $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$, dann ist das genau der Ausdruck $J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+$.

Bemerkung 5.8. Der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ ist der Vektor, den man auf das alte System zusätzlich aufbringen muss, um auf $\boldsymbol{u}_c$ zu kommen

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{f}^+\,, \tag{5.201}$$

ist also so etwas wie ein Pseudo-Lastvektor. In der Literatur wird unter dem **Pseudo-Lastvektor** jedoch der ‚Gradient' $\boldsymbol{f}^p$ von $\boldsymbol{f}^+$ verstanden

$$\boldsymbol{f}^+ \simeq -\boldsymbol{f}^p \cdot \Delta k\,, \tag{5.202}$$

der erst nach Multiplikation mit dem Inkrement Δk näherungsweise $\boldsymbol{f}^+$ ergibt. Das Minus ist dem Vorzeichenwechsel $-\boldsymbol{f}^p\Delta k = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u} \simeq \boldsymbol{f}^+$ geschuldet.

Bemerkung 5.9. Wie man klammert, ist im Grunde der wesentliche ‚Trick' bei allen *adjoint formulations* und er steckt auch hinter der ‚**Zwei-Wege-Formel**'

$$\boxed{J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T\underbrace{\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}} = \underbrace{\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}}\,, \tag{5.203}$$

die ihre Fortsetzung in dem Ausdruck

$$\boxed{J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+} \tag{5.204}$$

hat, siehe (5.277); die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ist symmetrisch.

Beispiel 5.4. Das Einspannmoment des Kragarms in Bild 5.37 ändert sich nicht, wenn sich $EI \to EI + \Delta EI$ ändert. Ist J also das Funktional $J(w) = M(0)$, dann muss (5.183)

$$\frac{d\,J}{dEI} = \frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p = \frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}^T\,\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI}\boldsymbol{u} = 0 \tag{5.205}$$

null sein. Das ist eine Situation, wo auch der Dirac Vektor $\boldsymbol{j}$ von dem Parameter, hier EI, abhängt. In dem Dirac Vektor

$$\boldsymbol{j} = \{M(\varphi_3)(0), M(\varphi_4)(0)\}^T = -EI \cdot \{0.375, 0.5\}^T \tag{5.206}$$

stehen die Momente der beiden rechten *shape functions* φ_3 und φ_4 im Aufpunkt $x = 0$, siehe (3.197). Es ist

$$\frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \frac{1}{EI}\,\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} \tag{5.207}$$

und $\partial\boldsymbol{K}/\partial EI = 1/EI \cdot \boldsymbol{K}$ und somit ist die Änderung null

$$\frac{d\,J}{dEI} = \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} - \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = 0\,. \tag{5.208}$$

5.26 Direkte Differentiation

Noch kürzer kann man die Ergebnisse mit der *direkten Differentiation* herleiten. Das Bauteil setze sich aus zwei Elementen zusammen und jedes Element habe einen eigenen E-Modul E_i, so dass die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ eine Funktion dieser zwei Werte E_i ist

$$\boldsymbol{K}(E_1, E_2)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,. \tag{5.209}$$

Mit $\boldsymbol{K}$ ist natürlich auch der Vektor $\boldsymbol{u}$ eine Funktion der E_i. Nun kann man fragen: Wie ändert sich der Vektor $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_c$, wenn sich der Wert E_1 im ersten Element ändert?

Bezeichnen wir die Ableitung nach E_1 mit $(')$, dann gilt, wenn wir annehmen, dass der Vektor $\boldsymbol{f}$ nicht von E_1 abhängt

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0} \tag{5.210}$$

oder

$$\boldsymbol{u}' = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}\,. \tag{5.211}$$

Brechen wir die Taylor-Entwicklung nach dem ersten Glied ab, dann gilt näherungsweise

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}' \cdot \Delta E_1 = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \cdot \Delta E_1 = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{(-1)}\,\tilde{\boldsymbol{f}}^+\,. \tag{5.212}$$

Wenn hier $\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ stünde, dann wäre $\tilde{\boldsymbol{f}}^+$ der exakte Vektor $\boldsymbol{f}^+$. Der naheliegende Vorschlag $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ durch $\boldsymbol{f}^+ \sim -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ anzunähern, entspricht also einer linearen Interpolation.

5.27 Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$

Das Grundproblem bei der Reanalysis $J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ ist, dass die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ des Tragwerks unbekannt ist bzw. ersatzweise durch den alten Vektor $\boldsymbol{u}$ angenähert werden muss. Es gibt aber zwei Techniken ***Iteration*** und ***direkte Bestimmung***, mit denen sich das Problem lösen lässt.

5.27.1 Iteration

Wir multiplizieren die Gleichung

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} \tag{5.213}$$

von links mit $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.214}$$

und schreiben sie in der Form

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} \tag{5.215}$$

was die folgende ***fixed-point iteration*** für $\boldsymbol{u}_c$

$$\boldsymbol{u}_c^{i+1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c^i + \boldsymbol{u} \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{5.216}$$

mit $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}$ als Startvektor nahelegt.

Die Konvergenz kann man beschleunigen, wenn man den Vektor $\boldsymbol{u}_c^{i+1}$ aus (5.216) mit dem vorhergehenden Vektor $\boldsymbol{u}_c^i$ kombiniert, [44] und [47],

$$\boldsymbol{u}_c^{i+1} = \boldsymbol{u}_c^i \cdot c_{max} \cdot q + \boldsymbol{u}_c^{i+1} \cdot q = \frac{1}{1 + c_{max}} \cdot (\boldsymbol{u}_c^i \cdot c_{max} + \boldsymbol{u}_c^{i+1}), \tag{5.217}$$

wobei c_{max} der größte Skalenfaktor c_e unter den Änderungen $\boldsymbol{\Delta K}_e = c_e \boldsymbol{K}_e$ ist und

$$q = \frac{1}{1 + c_{max}}. \tag{5.218}$$

Theoretisch versagt die Iteration, wenn das Tragwerk durch die Wegnahme eines Elementes kinematisch wird, wenn also die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K} \tag{5.219}$$

singulär ist. Denn dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{0}$ so, dass

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}, \tag{5.220}$$

und wenn wir diese Gleichung von links mit der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ multiplizieren, so zeigt sich,

$$\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.221}$$

dass der Vektor $\boldsymbol{u}_0$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ mit dem Eigenwert 1 ist und der Fehler $\boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i$ daher nicht schrumpft

$$\boldsymbol{e}_{i+1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{e}_i \qquad i = 1, 2, \ldots\,, \tag{5.222}$$

weil eine Fixpunktiteration nur konvergiert, wenn die Eigenwerte der Iterationsmatrix kleiner als 1 sind.

Man beachte, dass

$$\boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_{i-1} - \boldsymbol{u} \tag{5.223}$$

$$= -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_{i-1}) = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{e}_i\,. \tag{5.224}$$

Aber es ist bemerkenswert, dass bei nicht zu großen Störungen die Iteration konvergiert, selbst dann wenn das Entfernen eines Elementes das Tragwerk instabil macht, weil das Programm nicht versucht, die nicht existierende Inverse der singulären Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K}$ zu berechnen.

5.27.2 Direkte Berechnung

Wiederholen wir die Gleichung, die zu lösen ist

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.225}$$

Das Produkt $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ ist eine **schwach besetzte Matrix**, weil die zur vollen Größe $n \times n$ erweiterte Elementmatrix $\boldsymbol{\Delta K}$ viel ‚Luft', viele Nullen enthält. Nehmen wir an, dass die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ nur vier Einträge enthält, die nicht null sind

$$\boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} & & & \ldots & & & & \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & k^{\Delta}_{33} & 0 & 0 & k^{\Delta}_{35} & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & k^{\Delta}_{53} & 0 & 0 & k^{\Delta}_{55} & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ & & & \ldots & & & & \end{bmatrix} \tag{5.226}$$

zwei in Zeile 3 und zwei in Zeile 5 (wenn wir zum Beispiel ein Federelement, das die beiden Freiheitsgrade u_3 und u_5 verbindet, ändern).

Das Produkt von zwei $n \times n$ Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kann als die Summe von n Matrizen geschrieben werden,

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + \boldsymbol{g}_n\boldsymbol{r}_n \quad \text{(Spalten} \times \text{Zeilen)}\,, \tag{5.227}$$

Spalte $\boldsymbol{g}_1$ von $\boldsymbol{A}$ mal Zeile $\boldsymbol{r}_1$ von $\boldsymbol{B}$ plus Spalte $\boldsymbol{g}_2$ von $\boldsymbol{A}$ mal Zeile $\boldsymbol{r}_2$ von $\boldsymbol{B}$ etc. Jedes Produkt $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{r}_i$ ist eine $(n \times n)$ Matrix.

Weil $\boldsymbol{\Delta K}$ schwach besetzt ist, die Matrix enthält ja nur zwei Zeilen, die nicht null sind, folgt

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{g}_3\,\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{g}_5\,\boldsymbol{r}_5 \qquad \text{(Summe von zwei } n \times n \text{ Matrizen)} \tag{5.228}$$

was, wenn wir das in Spaltenform schreiben, das Ergebnis

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{c}_3 \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{c}_5 \quad \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}] \qquad \text{Spaltenvektoren} \tag{5.229}$$

ergibt, mit den beiden Spalten

$$\boldsymbol{c}_3 = k^{\Delta}_{33} \cdot \boldsymbol{g}_3 + k^{\Delta}_{53} \cdot \boldsymbol{g}_5 \qquad \boldsymbol{c}_5 = k^{\Delta}_{35} \cdot \boldsymbol{g}_3 + k^{\Delta}_{55} \cdot \boldsymbol{g}_5\,, \tag{5.230}$$

die Linearkombinationen der beiden Spalten $\boldsymbol{g}_3$ und $\boldsymbol{g}_5$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind.

Somit geht das System (5.225) über in

$$\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{c}_3\,u_{c3} + \boldsymbol{c}_5\,u_{c5} = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.231}$$

Wir wählen die Zeilen drei und fünf dieses Systems und bestimmen an Hand dieser zwei Gleichungen die zwei Werte u_{c3} und u_{c5}

$$\begin{bmatrix} 1 + c_{33} & c_{35} \\ c_{53} & 1 + c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \end{bmatrix}\,, \tag{5.232}$$

die ausreichen (!), um die neue Lösung zu bestimmen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_c &= -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} = -u_{c3}\boldsymbol{c}_3 - u_{c5}\boldsymbol{c}_5 + \boldsymbol{u} \\ &= -(u_{c3}\,k^{\Delta}_{33} + u_{c5}\,k^{\Delta}_{35})\boldsymbol{g}_3 - (u_{c3}\,k^{\Delta}_{53} + u_{c5}\,k^{\Delta}_{55})\boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{u} \\ &= \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{u}\,. \end{aligned} \tag{5.233}$$

Bei Betrachtung von (5.233) erkennt man dasselbe Muster wie in Kap. 3.43

Die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_c$ ist eine Entwicklung nach den Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen,

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 = \textstyle\sum_i f_i\,\boldsymbol{g}_i + \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 \tag{5.234}$$

nur, dass hier die Einflussfunktionen der Freiheitsgrade u_3 und u_5 im Sinne einer Korrektur zweimal vorkommen.

Das ist im übrigen genau die Formel

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^{+}) = \textstyle\sum_i f_i\,\boldsymbol{g}_i + f^{+}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + f^{+}_5 \cdot \boldsymbol{g}_5\,, \tag{5.235}$$

denn $\alpha_3 = f^{+}_3$ und $\alpha_5 = f^{+}_5$.

Steifigkeitsänderungen führen zu Zusatzkräften f^{+}_i und so sind die Spalten $f^{+}_i \cdot \boldsymbol{g}_i$ zu $\boldsymbol{u} = \sum_i f_i\,\boldsymbol{g}_i$ zu addieren, um auf $\boldsymbol{u}_c$ zu kommen, siehe Bild 5.38.

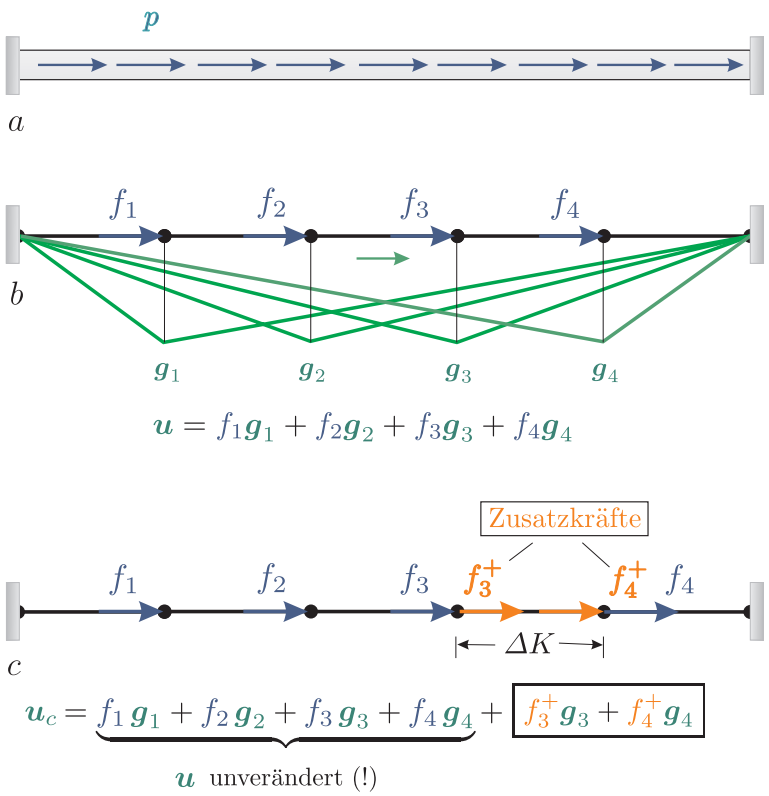


Bild 5.38. Stab, Belastung und Knotenkräfte, der Vektor $\boldsymbol{u}$ ist die gewichtete Summe über die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen. Steifigkeitsänderungen ΔK führen zu Zusatzkräften f_i^+

Um die Technik allgemeiner zu fassen, schreiben wir die beiden Matrizen als eine Folge von Spaltenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ bzw. Zeilenvektoren $\boldsymbol{r}_i$

$$\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n] \qquad \boldsymbol{\Delta K} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n]^T . \tag{5.236}$$

Das System $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n]$ hat dann die Spalten

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}_j \, r_{ji} \qquad \text{(vector} \times \text{entry } i \text{ of row } \boldsymbol{r}_j) \tag{5.237}$$

und so lautet das Gleichungssystem (5.225) zeilenweise

$$u_{ci} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, u_{cj} = u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{5.238}$$

Streicht man alle Zeilen und Spalten, die nur Nullen enthalten, dann wird daraus ein System der Größe $z \times z$, wobei z gleich der Zahl der Änderungen $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$ auf der Hauptdiagonalen ist. In dem Beispiel oben war $z = 2$.

Die Zahl z der Änderungen auf der Hauptdiagonalen bestimmt also die Größe des zu lösenden Hilfssystem (5.238). Es sei $\boldsymbol{u}_c^z$ die zugehörige Lösung. Füllt man nun die Lösung $\boldsymbol{u}_c^z$ mit Nullen zu einem ‚vollen' Vektor, $\boldsymbol{u}_c^z \to \boldsymbol{u}_c^Z$, mit n Einträgen auf, dann erhält man aus

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c^Z + \boldsymbol{u} \tag{5.239}$$

den neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$.

Zum Exempel behandeln wir den Stab in Bild 5.38. Es ist $EA/l_e = 1$, nur im vierten Element wurde die Steifigkeit nachträglich verdoppelt, $EA/l_e + \Delta EA/l_e = 1+1$. Die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ hat 2 auf der Hauptdiagonalen und -1 auf den beiden Nebendiagonalen. Mit den beiden Matrizen[11]

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.240}$$

ergibt sich das System $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}$ zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1.6 & -0.6 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} . \tag{5.241}$$

Die Lösung des (unsymmetrischen) Teilsystems

$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.6 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} \tag{5.242}$$

reicht aus, um die übrigen Terme bestimmen zu können

$$\begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} \tag{5.243}$$

und damit die ganze Lösung

$$\boldsymbol{u}_c = \{1.8889, 2.7778, 2.6667, 2.1111\}^T . \tag{5.244}$$

Jetzt kennen wir $\boldsymbol{u}_c$ und interessehalber können wir noch die exakten f_i^+ berechnen

$$-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}^+ = \{0, 0, -0.5556, 0.5556\}^T \tag{5.245}$$

[11] Die Determinante der tridiagonalen Matrix $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ ist $n + 1$ $(= 5)$.

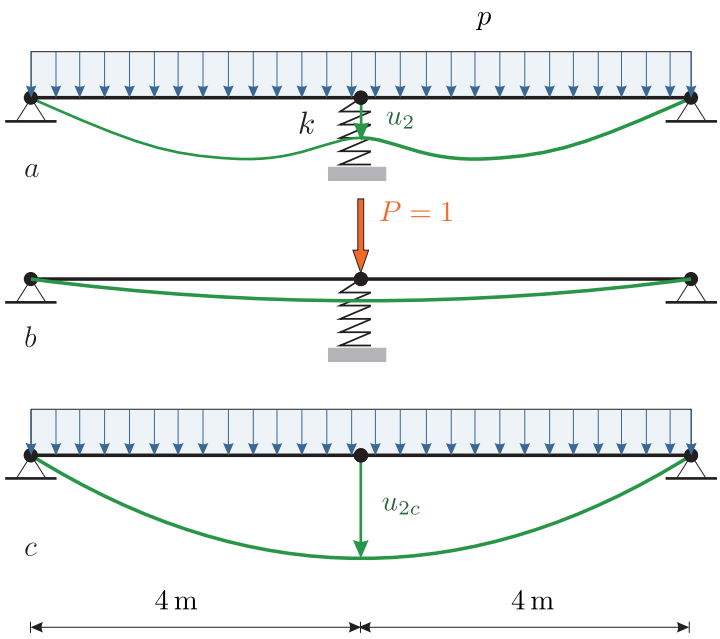


Bild 5.39. Ausfall einer Feder, $k = 10\,000$ kN/m, bei einem Zweifeldträger, $p = 10$ kN/m, $EI = 2.848 \cdot 10^4$ kNm^2

und so die Lösung $\boldsymbol{u}_c$ nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ entwickeln

$$\boldsymbol{u}_c = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{g}_i \, f_i + \boldsymbol{g}_3 \, f_3^+ + \boldsymbol{g}_4 \, f_4^+ = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_3 \cdot 0.5556 + \boldsymbol{g}_4 \cdot 0.5556 \,. \tag{5.246}$$

Fassen wir zusammen: Angenommen die Matrix $\boldsymbol{K}$ hat n Zeilen und Spalten. Dann ist auch die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$, wenn man sie zu voller Größe ‚aufbläst' $n \times n$. In der Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ seien nur die Spalten (und Zeilen) 5, 6, 7 und 8 besetzt. Dann gibt es in $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ vier Spalten $\boldsymbol{c}_i$, die nicht null sind, und diese sind Linearkombinationen der Spalten $\boldsymbol{g}_5, \boldsymbol{g}_6, \boldsymbol{g}_7, \boldsymbol{g}_8$ der Matrix $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_5 &= k^{\Delta}_{55}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{65}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{75}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{85}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_6 &= k^{\Delta}_{56}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{66}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{76}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{86}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_7 &= k^{\Delta}_{57}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{67}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{77}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{87}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_8 &= k^{\Delta}_{58}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{68}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{78}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{88}\,\boldsymbol{g}_8
\end{aligned} \tag{5.247}$$

Zu lösen ist also das System

$$\begin{bmatrix} u_5^c \\ u_6^c \\ u_7^c \\ u_8^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} \\ c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} \\ c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} \\ c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5^c \\ u_6^c \\ u_7^c \\ u_8^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} , \tag{5.248}$$

und der ganze Vektor $\boldsymbol{u}_c$ ergibt sich dann zu

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} = -u_5^c\,\boldsymbol{c}_5 - u_6^c\,\boldsymbol{c}_6 - u_7^c\,\boldsymbol{c}_7 - u_8^c\,\boldsymbol{c}_8 + \boldsymbol{u}\,, \tag{5.249}$$

unabhängig davon, ob $\boldsymbol{K}$ die Größe 100×100 oder $10\,000 \times 10\,000$ hat. In [47] wurde diese Technik bei der Ermittlung von $\boldsymbol{u}_c$ an dem 3-D Modell einer Stahlhalle eingesetzt.

5.27.3 Lagersteifigkeit

Ganz einfach wird es, wenn sich nur ein Wert k_{ii} auf der Diagonalen ändert, $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$, wie das der Fall ist, wenn sich die Steifigkeit in einem Lager ändert. Dann ist $\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii}$ (= Spalte $\times$ Zeile) und das System

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii}))\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.250}$$

geht über in

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.251}$$

und aus der i-ten Gleichung

$$(1 + g_{ii}\,\Delta k_{ii})u_i^c \;= u_i \tag{5.252}$$

kann man u_i^c berechnen und das reicht aus, um ganz $\boldsymbol{u}_c$ zu bestimmen

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\boldsymbol{u}_c\,\Delta k_{ii} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_i\,u_i^c\,\Delta k_{ii}\,. \tag{5.253}$$

Wenn bei dem Zweifeldträger in Bild 5.39 die Feder, $k = 10\,000$ kN/m, ausfällt, also $\Delta k = -k$, dann rechnen wir wie folgt: Die Zusammendrückung der Feder betrug $u_2 = 5.5 \cdot 10^{-3}$ m und eine Kraft $P = 1$ drückt die Feder um $g_{22} = 88 \cdot 10^{-6}$ m zusammen. Das ergibt die Gleichung

$$(1 - 88 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4)\,u_2^c = 5.5 \cdot 10^{-3}\,, \tag{5.254}$$

die die Lösung $u_2^c = 45 \cdot 10^{-3}$ m hat.

5.27.4 Sherman-Morrison-Woodbury

Hat eine Matrix die Gestalt $\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T$, dann lautet ihre Inverse

$$\boldsymbol{K}_c^{-1} = \boldsymbol{K}^{-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.255}$$

Das ist die *Sherman-Morrison-Woodbury Formel*, [111], [285]. Bei uns ist $-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{\Delta K}$ und wir können uns die Aufspaltung immer sinngemäß wie in

$$\boldsymbol{\Delta K} = \frac{\Delta E A}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta E A}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T \tag{5.256}$$

vorstellen. Die Matrix $-\boldsymbol{U} = \Delta k\, \boldsymbol{I}$ ist also die Einheitsmatrix mit dem Vorfaktor Δk, der hier $\Delta EA/l$ beträgt.

Es bleibt die Aufgabe, die Inverse $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}$ zu berechnen. Nehmen wir an $\boldsymbol{K}$ habe die Größe $N\times N$ und $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}$ die Größe $n\times n$ mit $n \ll N$. An dieser Stelle kann man sich den Hilfssatz zu nutze machen, dass die Inverse einer Einheitsmatrix, auf deren Diagonalen eine kleine Untermatrix steht, gleich die Einheitsmatrix plus der Inversen der Untermatrix ist – am selben Ort. Es reicht also die Inverse der $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}$ zu berechnen. Beim Einbau in das System (5.255) muss man natürlich dann das Resultat auf die volle Größe bringen, sprich mit Nullen auffüllen.

Als Beispiel betrachten wir den Stab in Bild 5.38, bei dem sich im vierten Element die Steifigkeit $EA/l = 1$ von 1 auf 2 erhöht $(\Delta k = 1)$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5.257}$$

Mit den Matrizen $(\Delta k = 1)$

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad -\boldsymbol{U} = \Delta k \cdot \boldsymbol{I}\,, \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.258}$$

ergibt sich mit (5.255) genau die Inverse der Matrix $\boldsymbol{K}_c$

$$\boldsymbol{K}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.56 & 0.33 & 0.22 \\ 0.56 & 1.11 & 0.67 & 0.44 \\ 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 \\ 0.22 & 0.44 & 0.67 & 0.78 \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}^{-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.259}$$

Das Beispiel belegt auch noch einmal sehr schön, wie Steifigkeitsänderungen ***alle*** Einflussfunktionen verändern, denn keine Spalte von $\boldsymbol{K}^{-1}$ hat sich nach $\boldsymbol{K}_c^{-1}$ retten können.

5.28 Rechentechnik

Wir wollen die verschiedenen Rechentechniken kurz zusammenstellen. Wir erinnern daran, dass eine Steifigkeitsänderung einem Zusatzterm in der virtuellen inneren Energie entspricht

$$a(u, \varphi_i) = f_i \qquad \rightarrow \qquad a(u_c, \varphi_i) + d(u_c, \varphi_i) = f_i\,. \tag{5.260}$$

Weil sich die virtuelle äußere Arbeit f_i nicht ändert, muss gelten

$$a(e, \varphi_i) = -d(u_c, \varphi_i)\,. \tag{5.261}$$

Dieser Zusatzterm ‚lebt' nur in dem Element, dem Lager, dessen Steifigkeit sich ändert. Er entspricht der Mohrschen Arbeitsgleichung, wenn man sie auf das betreffende Element verkürzt.

Ändert sich die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} \rightarrow \boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, dann kann man das System

$$\boldsymbol{K}_c \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} \tag{5.262}$$

neu lösen, oder wenn die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ abgespeichert wurde, die neue Lösung $\boldsymbol{u}_c$ iterativ oder direkt, wie in Kapitel 5.27 beschrieben, aus der alten Lösung $\boldsymbol{u}$ berechnen. Je weniger Änderungen vorgenommen werden, umso kleiner ist das zu lösende Hilfssystem beim direkten Zugang. Bei der Änderung einer Lagersteifigkeit ist es nur eine Zeile.

Dasselbe gilt sinngemäß für die neuen Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_c$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_c\, \boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}\,, \tag{5.263}$$

die sich auch so berechnen lassen. Bei Einflussfunktionen für Kraftgrößen kann es jedoch sein, dass sich der Vektor $\boldsymbol{j} \rightarrow \boldsymbol{j}_c$ ändert, wenn der Aufpunkt in dem betroffenen Element liegt.

Kennt man $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}_c$ kann man die Änderung in Funktionalen

$$J(\boldsymbol{e}) = J(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) \tag{5.264}$$

direkt berechnen. Alternativ bietet sich die Möglichkeit an, die Änderungen mittels

$$J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c \tag{5.265}$$

auszuwerten, was

$$J(u_c) - J(u) = a(e, G) = -d(u_c, G) \tag{5.266}$$

entspricht. Den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ kann man dabei iterativ bestimmen, wie in Kapitel 5.22 gezeigt. Setzt man näherungsweise für $\boldsymbol{\Delta K u}_c$ den ***Pseudo-Lastvektor***

$$J(\boldsymbol{e}) \simeq -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}\,, \tag{5.267}$$

dann geht es noch einfacher.

5.29 One-Click Reanalysis

In dem Programm BE-FRAMES, siehe Kapitel 12, sind beide Techniken zur Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$, Iteration und direkte Lösung, zu Lehrzwecken als *One-Click Reanalysis* implementiert, siehe die Bilder 5.40, 5.41 und 5.42. Der

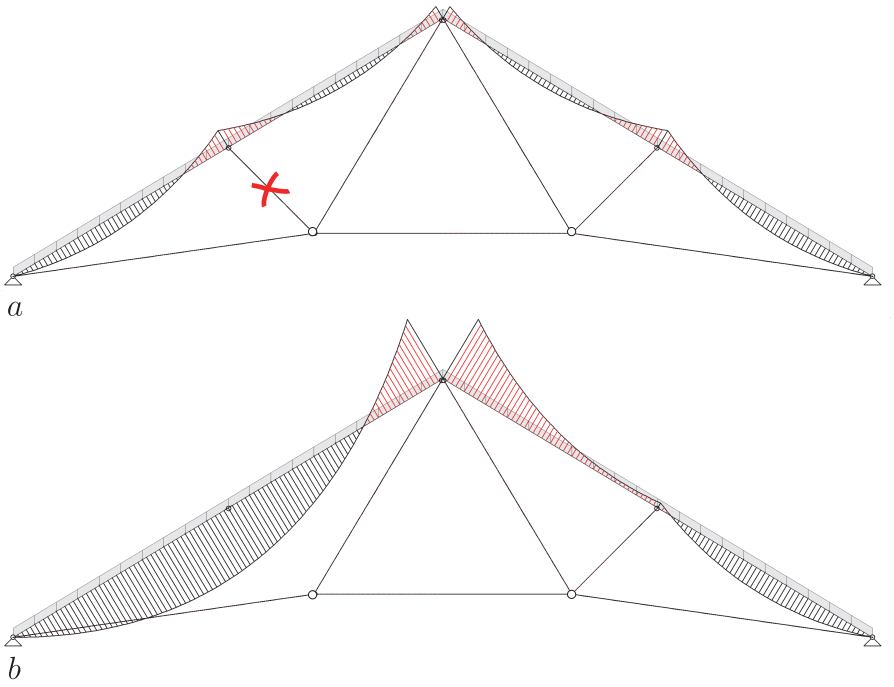


Bild 5.40. *Wiegemann-Polonceau* Träger nach dem ‚Wegklicken' einer Pendelstütze. Rechte Maustaste, $k = 0$, OK. Taste c und Stütze anklicken. (BE-FRAMES)

Student kann durch einfache Klicks Veränderungen an einem Rahmen vornehmen und die Effekte, die dadurch entstehen, studieren. Implementiert sind Änderungen der Art $\boldsymbol{\Delta K}_e = k \cdot \boldsymbol{K}_e$, also eine Skalierung einzelner Elementmatrizen mit unterschiedlichen Faktoren k, wobei $k = 0$ einem kompletten Verlust des Elements entspricht.

Eine Serie von Modifikationen, etwa Änderungen der Elemente 5, 7 und 9, bedeutet einfach, dass $\boldsymbol{\Delta K}$ eine Ansammlung von skalierten Elementmatrizen $\boldsymbol{\Delta K}_e$ ist

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\,(\boldsymbol{\Delta K}_5 + \boldsymbol{\Delta K}_7 + \boldsymbol{\Delta K}_9)\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} \qquad \text{(direkte Lsg.)} \qquad (5.268)$$

Natürlich können auch einzelne Lager entfernt werden, nachträglich Gelenke eingebaut werden (das geht mit Dirac Deltas) und Einflussfunktionen für alle interessierenden Größen berechnet werden.

In Bild 5.43 wurde die Technik benutzt, um den Bauablauf zu simulieren. Wenn man das Tragwerk als ‚Ganzes' berechnet, als **‚Ein-Guss Modell'**, dann werden die Einspannmomente in den linken Lagern zu groß, weil die Zusammendrückung der Stützen größer ist, als es dem Bauablauf entspricht, [30]. In jedem neuen Geschoss werden die Stützenköpfe ja bis zum Plansoll hoch gezogen, und durch diesen Höhenausgleich werden die Einspannmomente

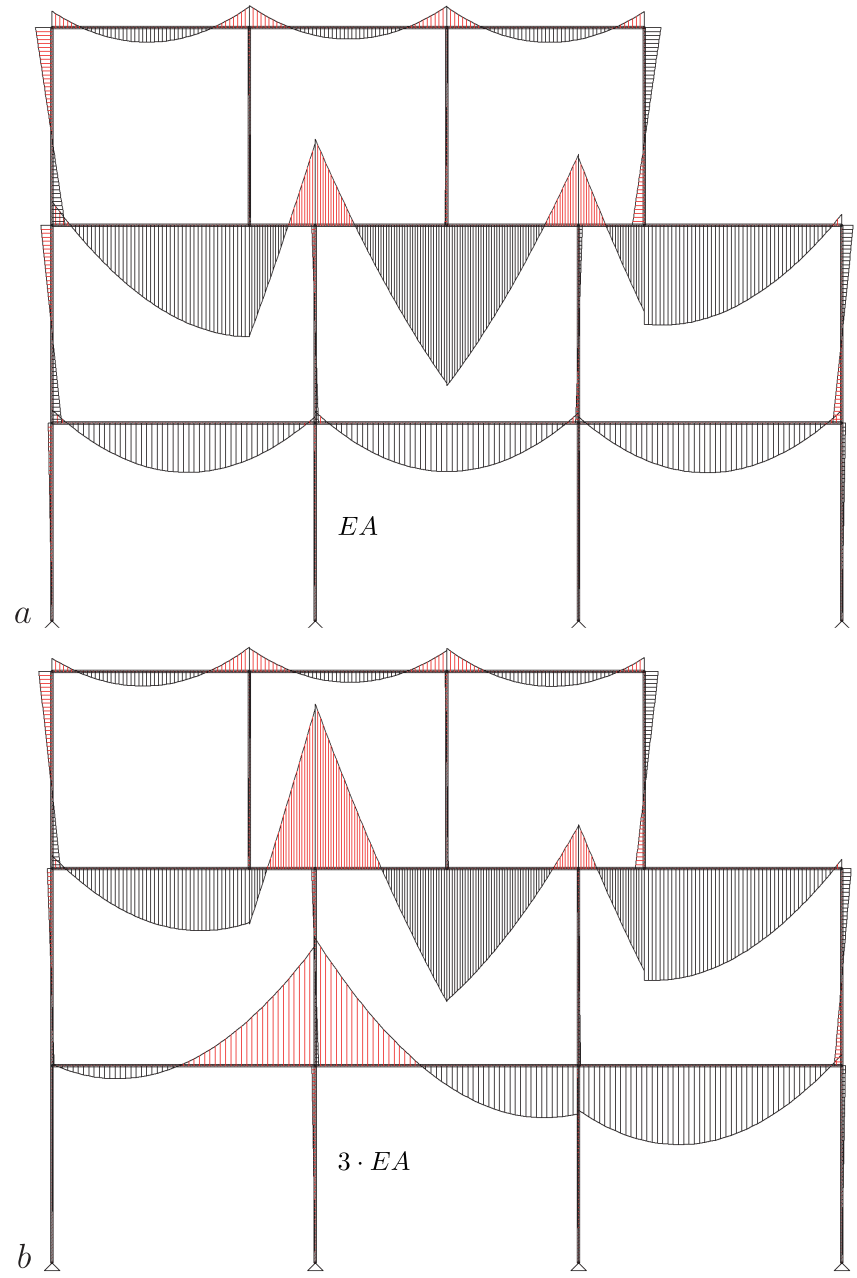
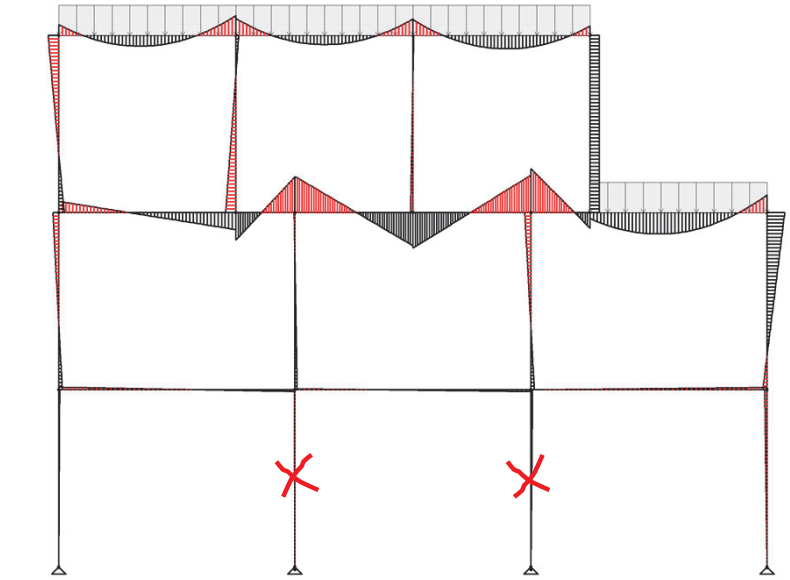
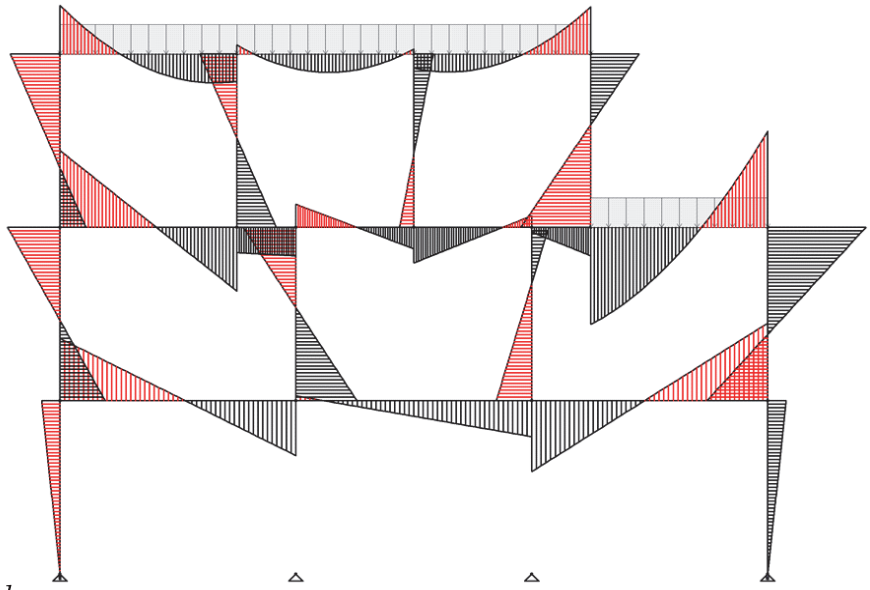


Bild 5.41. *One-Click Reanalysis*, LF g Momente **a)** vor und **b)** nach der Erhöhung der Steifigkeit in einem Stil. Rechte Maustaste, $k = 3$, OK. Dann Taste c drücken und Stütze(n) anklicken; mit $\boxed{\leftarrow}$ (*cursor-key*) geht es – nach mehreren Änderungen – stufenweise zurück oder wieder vorwärts $\boxed{\rightarrow}$ Eigentlich wird auch EI um den Faktor 3 erhöht, aber dieser Effekt ist hier nicht relevant (BE-FRAMES)



a



b

Bild 5.42. *One-Click Reanalysis* (ohne Neuberechnung der Steifigkeitsmatrix) LF Dachlasten, **a)** die angeklickten Elemente, **b)** die Momentenverteilung ohne die beiden Stützen. Rechte Maustaste, $k = 0$, OK. Taste c und Stützen anklicken (BEFRAMES)

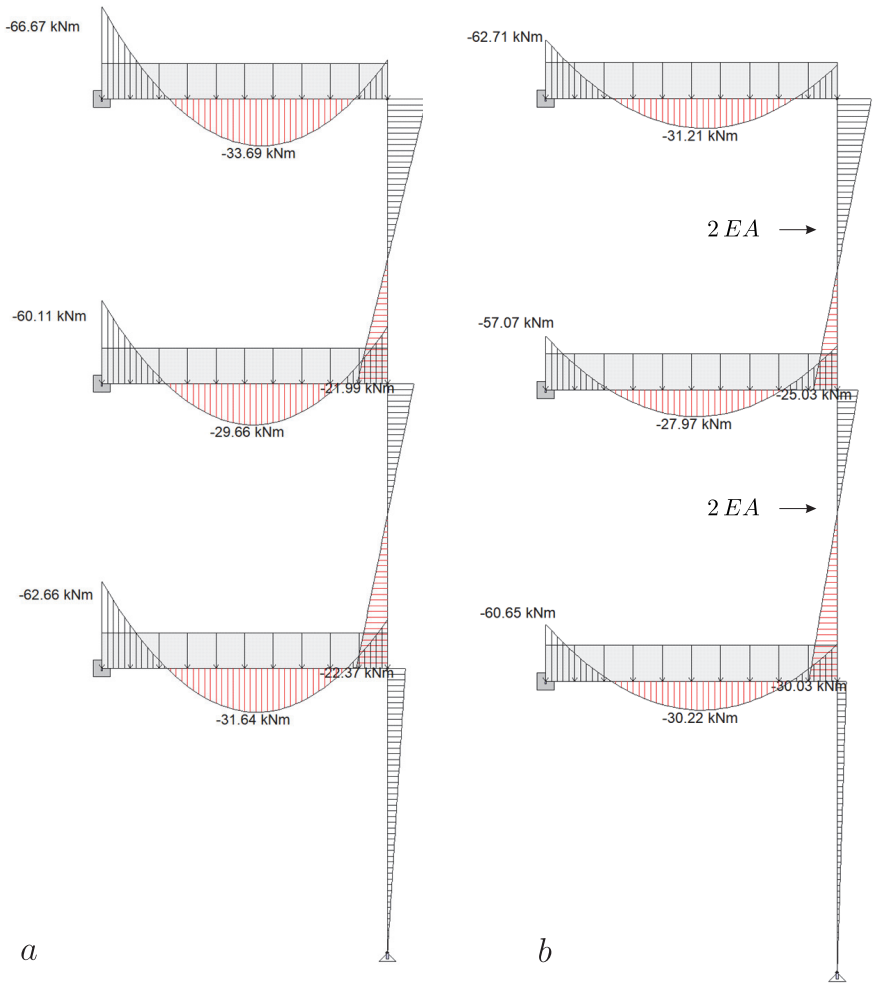


Bild 5.43. In jedem neuen Geschoss wird die Stauchung der Stützen durch ein Niveauausgleich korrigiert. Rechnerisch kann man das dadurch simulieren, dass man die Steifigkeitsmatrix der Stiele z.B. mit dem Faktor 2 multipliziert, rechte Maustaste, k = 2, OK, Taste c, Klick **a)** ohne und **b)** mit Erhöhung (BE-FRAMES)

kleiner. Das kann man z.B. so simulieren, ähnlich wie in [237], [238], dass man am Bildschirm die Steifigkeit der Stützen verdoppelt, $k = 2$, oder einen anderen Faktor k ausprobiert. Man sieht den Effekt sofort.

5.29.1 Wenn die Last ‚getroffen' wird

Wenn der Student ein Element Ω_e entfernt, das eine Belastung trägt, dann ist der neue Vektor $\boldsymbol{u}_c$ die Lösung des Systems

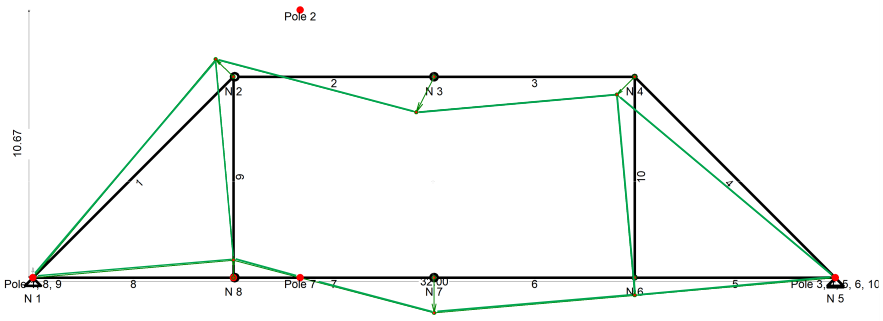


Bild 5.44. Verschieblichkeiten in einem Rahmen lassen sich mit dem ‚zweifachen' Gauss entdecken (BE-FRAMES)

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_e\,, \tag{5.269}$$

wobei die Einträge in dem Vektor $\boldsymbol{f}_e$ die vorherigen äquivalenten Knotenkräfte aus dem Element Ω_e sind. In diesem Fall muss das Programm also auch das Original der rechten Seite ändern, $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_e$.

5.30 Singuläre Steifigkeitsmatrizen

Weil es in dem Programm BE-FRAMES implementiert ist, sei noch erwähnt, dass man mit dem Gauss Algorithmus auch Beweglichkeiten in Rahmen aufdecken kann. Der Gauss Algorithmus formt ja die Steifigkeitsmatrix in eine obere Dreiecksmatrix um. Geht man noch einen Schritt weiter, und wendet den Gauss Algorithmus auch auf die obere Dreiecksmatrix an, dann erhält man am Schluss – bei regulären Matrizen – die Einheitsmatrix. Wenn allerdings die Matrix singulär ist, dann stehen in den letzten Spalten die Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda = 0$, also die möglichen Starrkörperbewegungen, die in dem Rahmen stecken, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Die kann man dann auf dem Bildschirm anzeigen und so den Benutzer auf fehlende Festhaltungen aufmerksam machen, siehe Bild 5.44.

Die Gestalt der Matrix, die bei diesem ‚zweimaligen' Gauss entsteht, heißt ***reduced row echelon form*** und unter diesem Namen oder Gauss-Jordan findet man den Algorithmus auch in der Literatur, z.B. [286].

Beispiel 5.5. Dem Balken in Bild 5.45 fehlt das rechte Lager. Die 6×6-Matrix hat nur den Rang 5. Die *reduced row echelon form* der Steifigkeitsmatrix ergibt sich zu

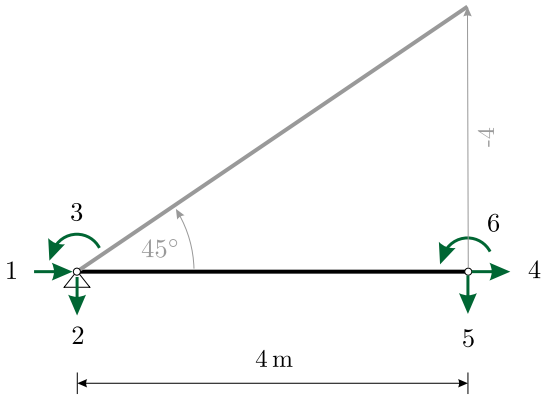


Bild 5.45. Dem Balken fehlt das rechte Lager und so kann er sich frei um das linke Lager drehen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \\ -4.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} . \tag{5.270}$$

Die letzte Spalte wird mit (-1) multipliziert (‚wird auf die rechte Seite gebracht') und auf der Diagonalen, hier dem Element $(6, 6)$, wird eine 1 addiert. Die so modifizierte Spalte ist die Starrkörperdrehung in Bild 5.45.

In dem Program BE-FRAMES wird die ‚erste' Starrkörperbewegung, die zur Position POS gehört im *file* MATH_UKINEMATICPOS.TXT im Verzeichnis SDIRPOS gespeichert. Dort liegt auch die Datei MATH_RREF.TXT.

5.31 Gauss-Jordan

Technische Anmerkung: In dem Programm BE-FRAMES sind alle Lager elastische Lager. In starren Lagern werden keine Zeilen und Spalten gestrichen, sondern die Steifigkeiten k_{ii} auf der Diagonalen entsprechend erhöht. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ behält also ihre Größe bei, sie wird nicht reduziert.

```
void GaussJordan()
 {
 typedef char wrkstringLong[241];
 FILE* stream_ptr;
 double k, temp, dmin;
 int i, j, jc, spalte, zeile, ieq, jZeile, icount, iNull, iK, iNext;
 wrkstringLong fname, sub_path;
```

```
// Das array K[i][j] enthaelt die Matrix

ieq = ...;  // Zahl der Gleichungen

for (i = 1; i <= ieq; ++i)   // Gauss
 {
 if (fabs(K[i][i]) > 0)
  {
  for (jZeile = i + 1; jZeile <= ieq; ++jZeile)  // die Zeilen darunter
   {
   k = K[jZeile][i] / K[i][i];
   for (jc = i; jc <= ieq; ++jc)  // ziehe von der Zeile j die Zeile i darueber ab
    K[jZeile][jc] -= k * K[i][jc];
   }
  }
 }

// Kontrollausgabe der oberen Dreiecksform
// sub_path = string = Pfad zum folder,  z.B. D:\\SDIRPOS\\

sprintf(fname, "%sMATH_TRIANGULAR%s", sub_path, ".TXT");
stream_ptr = fopen(fname, "wt");
for (i = 1; i <= ieq; ++i)
 {
 for (j = 1; j <= ieq; ++j)
  fprintf(stream_ptr, "%5.2lf  ", K[i][j]);
 fprintf(stream_ptr, "\n\n");
 }
fclose(stream_ptr);

// RREF (reduced row echelon form)

for (zeile = 1; zeile <= ieq; ++zeile)
 {
 for (spalte = zeile + 1; spalte <= ieq; ++spalte)
  {
  if (fabs(K[spalte][spalte]) > 0.1)
   k = K[zeile][spalte] / K[spalte][spalte];
  for (j = 1; j <= ieq; ++j)
   K[zeile][j] -= K[spalte][j] * k;
  }
 }

icount = 0;

for (i = 1; i <= ieq; ++i)
 if (fabs(K[i][i]) < 1)
  ++icount;   // Zahl der Diagonalelemente mit Nullen

for (i = 1; i <= ieq; ++i)
 if (fabs(K[i][i]) > 0)
  {
  temp = K[i][i];
```

```
  for (spalte = 1; spalte <= ieq; ++spalte)
   K[i][spalte] /= temp;

  if (fabs(temp) < 1)
   K[i][i] = temp;
  }

sprintf(fname, "%sMATH_RREF%s", sub_path, ".TXT");
stream_ptr = stream_ptr = fopen(fname, "wt");
for (i = 1; i <= ieq; ++i)
 {
 for (j = 1; j <= ieq; ++j)
  fprintf(stream_ptr, "%5.2lf  ", K[i][j]);
 fprintf(stream_ptr, "\n\n");
 }
fclose(stream_ptr);

if (icount > 0)
 {
 // find critical column
 dmin = 1000.0;
 iNull = ieq;

 // finde die erste singulaere Spalte

 for (i = 1; i <= ieq; ++i)
  if (K[i][i] < 0.01)
   {
   dmin = K[i][i];
   iNull = i;
   break;
   }

 // Erstelle den Eigenvektor aus den Eintraegen in der Spalte:
 // multipliziere alle Werte mit (-1) und addiere auf der Diagonalen der Spalte eine 1

 for (j = 1; j <= ieq; ++j)
  uKin[j] = -K[j][iNull];

 uKin[iNull] = 1.0f;

 // Ausgabe

 sprintf(fname, "%sMATH_UKINEMATIC%s", sub_path, ".TXT");
 stream_ptr = stream_ptr = fopen(fname, "wt");
 fprintf(stream_ptr, "First eigenvector, from column %i in the echelon matrix\n", iNull);

 fprintf(stream_ptr, "\n");

 // Ausgabe des Eigenvektors

 for (j = 1; j <= ieq; ++j)
  fprintf(stream_ptr, "%2i  %6.2lf\n", j, uKin[j]);
 fprintf(stream_ptr, "\n");
```

```
  }
 }
```

download code

5.32 Drehpole

Wenn der Rahmen verschieblich ist, zeigt das Programm BE-FRAMES die Verschiebungsfigur an. Wenn mehrere Festhaltungen fehlen, wird der erste Eigenvektor $\boldsymbol{u}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ angezeigt.

Die Drehpole der Verschiebungsfigur werden mit folgendem *code snippet* ermittelt und dann auf dem Bildschirm angezeigt.

```
//uLinks, vLinks, Phi_L und uRechts, vRechts, Phi_R
//sind die Verformungen am Elementanfang und -ende

  for (i = 1; i <= elemente; ++i)
   {
   Pol[i].infinite = FALSE;

   if ((fabs(uLinks) + fabs(vLinks])) < 0.01)
    {
// keine Bewegung des linken Knotens
    Pol[i].PolX = Knoten[elm[i].nodeL].x;
    Pol[i].PolY = Knoten[elm[i].nodeL].y;
    }
   else if ((fabs(uRechts) + fabs(vRechts)) < 0.01)
{
// keine Bewegung des rechten Knotens
    Pol[i].PolX = Knoten[elm[i].nodeR].x;
    Pol[i].PolY = Knoten[elm[i].nodeR].y;
    }
   else
    {
// Dreieck uL, hL
    if (fabs(Phi_L) > 0.01)
     {
// Verdrehung des linken Knotens (= Verdrehung des Stabs) ist nicht null
     hY = uLinks] / Phi_L;
// Verschiebung in x-Richtung/Verdrehung = y-Abstand des Pols
     PolY = Knoten[elm[i].nodeL].y + hY;

     hX = vLinks / Phi_L;
// Verschiebung in y-Richtung/Verdrehung = x-Abstand des Pols
     PolX = Knoten[elm[i].nodeL].x + hX;
     Pol[i].PolX = PolX;
     Pol[i].PolY = PolY;
     }
    else if (fabs(uPhi_R) > 0.01)
     {
```

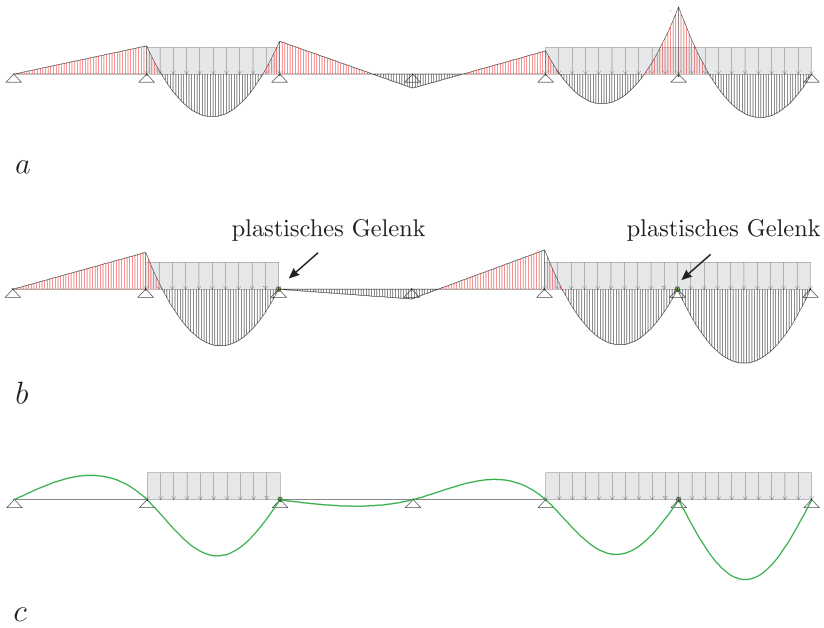


Bild 5.46. Der Einbau von plastischen Gelenken in einem Durchlaufträger, **a)** ursprüngliche Momentenverteilung, **b)** nach dem Einbau der Gelenke, **c)** Biegelinie (BE-FRAMES)

```
      hY = uRechts / Phi_L;
      PolY = Knoten[elm[i].nodeR].y + hY;

      hX = vRechts / Phi_R];
      PolX = Knoten[elm[i].nodeR].x + hX;
      Pol[i].PolX = PolX;
      Pol[i].PolY = PolY;
      }
     else
      {
// Element does not rotate,
// pole lies on a line normal to the element at infinity
      Pol[i].infinite = TRUE;
      }
     }
```

Studenten können so die Polpläne, die zu M-Gelenken gehören, direkt abzeichnen. Die Polpläne, die zu N- und V-Gelenken gehören, ermitteln sie am besten, indem sie sich die Einflussfunktion (*GF-anywhere*) für N bzw. V anzeigen lassen, denn daran kann man die Lage der Drehpole ablesen.

5.33 Nachträglicher Einbau von Gelenken

Andere mögliche Defekte, die sich unter Last ausbilden, sind plastische Gelenke. Mathematisch ist ein Gelenk eine Nullstelle im Momentenverlauf, $M(x) = 0$. Das Programm lässt ein Dirac Delta δ_2 im Punkt x wirken, d.h. es berechnet die Einflussfunktion für $M(x)$ in diesem Punkt und es berechnet, wie groß das Moment $M_2(x)$ der Einflussfunktion selbst in diesem Punkt x ist. Dann skaliert es das Dirac Delta mit einem Faktor a derart, dass $a \cdot M_2(x) + M(x) = 0$.

So wurden die Ergebnisse in Bild 5.46 erzielt. Auch dies steht als ‚*one-click*' *operation* in dem Programm zur Verfügung. Im Detail geht es wie folgt: Es sei x_0 der Punkt, an dem ein Gelenk eingebaut werden soll – oder besser – ein Moment M_p aus einem LF p zu Null gemacht werden soll. Der Punkt muss nicht am Ende eines Feldes liegen, wie die Punkte in Bild 5.46.

(1) Das Programm berechnet zunächst die Einflussfunktion G_2 für das Moment M im Punkt x_0, indem es in den Nachbarknoten die äquivalenten Knotenkräfte, die zu der EF gehören, siehe Bild 3.37, aufbringt. (2) Es addiert zu dieser Lösung die lokale Einflussfunktion, also die Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Träger. (3) Es berechnet das Moment $M_G(x)$ der so zusammengesetzten Einflussfunktion im Punkt x_0. (4) Es skaliert dann den LF Einflussfunktion so, dass das Moment $M_G(x_0)$ gerade $-M_p(x_0)$ ist. (5) Die Ergebnisse dieses Lastfalls zu dem LF p addiert, sind die Ergebnisse mit einem Gelenk im Punkt x_0 im LF p.

Werden mehrere Gelenke eingebaut, dann muss man die Spreizung der Gelenke untereinander abstimmen, also ein lineares Gleichungssystem lösen, so dass in allen Punkten gleichzeitig die Momente gegengleich zu den Momenten im LF p sind, siehe Bild 5.47.

All das geht natürlich auch in einem normalen FE-Programm: Man berechnet die EF für $M(x)$ und deren Moment im Aufpunkt und skaliert diesen LF so, dass in der Summe $M(x) = 0$.

5.34 Knicklasten

Auch die Knicklasten – also die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ (nach Theorie II. Ordnung) – ändern sich, wenn sich Steifigkeiten ändern. Das ist ein komplexes Thema, weil ja die Rechentechnik des Ingenieurs, Stichwort: *Nachweis am Einzelstab*, mindestens eine genauso große Rolle spielt, wie die Mathematik für die wir z.B. auf [16], [132] und insbesondere [285] verweisen.

Wir betrachten hier nur die mathematische Seite und nehmen an, dass das System von einem Parameter t, etwa der Zeit oder einer speziellen Stabsteifigkeit $t \equiv EA$, abhängt und somit auch die Eigenwerte $\lambda(t)$ und die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}(t)$ sich mit t ändern

$$\boldsymbol{K}(t)\,\boldsymbol{u}(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{5.271}$$

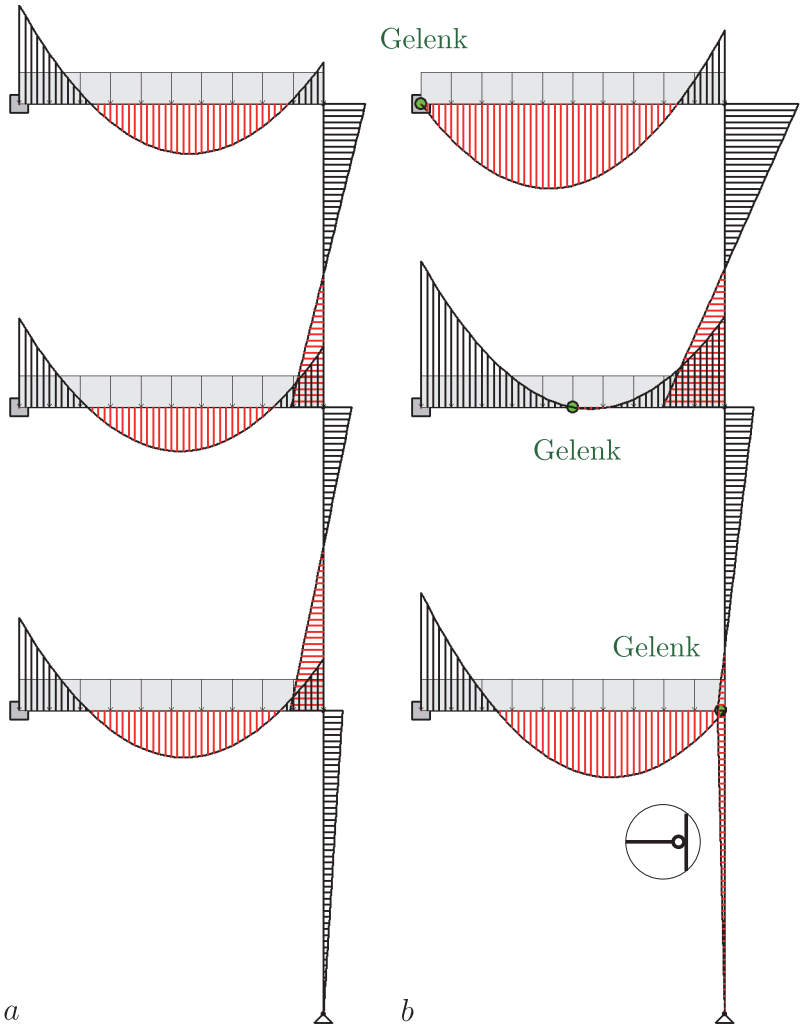


Bild 5.47. Mit drei Mausklicks wurden drei Gelenke eingebaut, Taste F und Klick auf die Riegel: *Links, Mitte, Rechts* (BE-FRAMES)

Die transponierte Matrix $\boldsymbol{K}^T$ hat dieselben Eigenwerte, aber nicht unbedingt dieselben Eigenvektoren $\boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{K}^T(t)\,\boldsymbol{v}(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{v}(t)\,. \tag{5.272}$$

Man kann nun die zu $\lambda(t)$ gehörigen Eigenvektoren von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^T$ immer so normieren, dass $\boldsymbol{u}(t)^T\,\boldsymbol{v}(t) = 1$ ist und unter dieser Voraussetzung gilt, [285],

$$\frac{d\,\lambda(t)}{dt} = \boldsymbol{v}^T(t)\,\frac{d\,\boldsymbol{K}(t)}{dt}\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{5.273}$$

Die Änderung in einem Eigenwert ist also gleich dem mit $d\,\boldsymbol{K}/dt$ gewichteten Skalarprodukt der zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{u}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t)$.

5.35 Dynamische Probleme

Auch bei harmonischen Schwingungen, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, die auf das Eigenwertproblem $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \lambda\,\boldsymbol{u}$ führen, spielen die Eigenwerte eine Rolle. Die Schwingungen einer Federkette mit n Massen lauten

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum\nolimits_k \boldsymbol{u}_k\, e^{i\,\lambda_k\,t}\,, \tag{5.274}$$

wobei die $\boldsymbol{u}_k$ die Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ sind und die λ_k die zugehörigen Eigenwerte. Eine Entwicklung $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta} K$ ändert also nicht nur die Eigenvektoren, sondern auch die Eigenwerte: Das ganze System schwingt anders.

5.36 Die Vektoren $\boldsymbol{f}^+, \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{g}^+, \boldsymbol{j}^+$

Wir fassen zusammen: Die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{g}$ sind Wege, die Vektoren $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{j}$ sind äquivalente Knotenkräfte. Das System $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ ist identisch mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ und hat die Lösung

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) \tag{5.275}$$

wobei

$$\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \qquad \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.276}$$

Ferner ist

$$J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}^+\,. \tag{5.277}$$

Das System $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c$ zur Berechnung der Knotenwerte g_i der Einflussfunktion für ein Funktional $J_c(\boldsymbol{u}_c) = \boldsymbol{j}_c^T\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{g}_c^T\boldsymbol{f}$ hat die Lösung

$$\boldsymbol{g}_c = \bar{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{g}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}_c^+)\,, \tag{5.278}$$

wobei

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c \qquad \boldsymbol{j}_c^+ = -\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c \qquad \boldsymbol{g}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c^+\,. \tag{5.279}$$

Wenn sich die Steifigkeit des Elements, in dem $J_c(\boldsymbol{u})$ ausgewertet wird, nicht ändert, wenn also $J(\boldsymbol{u}) = J_c(\boldsymbol{u})$ ist, dann ist $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_c$, und entsprechend nennen wir $\boldsymbol{j}_c^+ = \boldsymbol{j}^+$, und $\bar{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}$, so dass dann also mit (5.60) gilt

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^+)^T\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T\boldsymbol{u}\,. \tag{5.280}$$

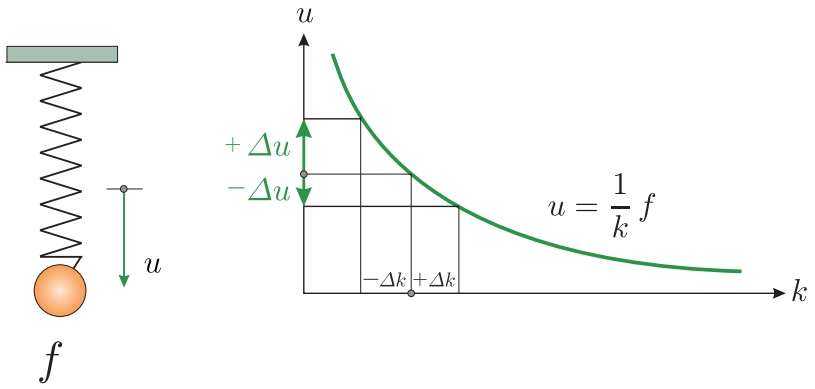


Bild 5.48. Das Federgesetz $u = 1/k \cdot f$ impliziert, dass Steifigkeitsänderungen, $\pm\Delta k$, zu unterschiedlich großen Korrekturen führen und jeder größer k, desto geringer der Effekt Δu aus einer Korrektur Δk.

Vorsicht! Es ist nicht $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$. Der Vektor $\boldsymbol{j}^+$ ist nur eine Hilfsgröße, die die Formel

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T \boldsymbol{u} \tag{5.281}$$

möglich macht, mit der man aus dem alten $\boldsymbol{u}$ die Werte des neuen $\boldsymbol{u}_c$ berechnen kann.

Wenn $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$ der richtige Vektor $\boldsymbol{j}_c$ wäre, dann müsste man mit ihm $J(\boldsymbol{u}_c)$ aus $\boldsymbol{u}_c$ berechnen können,

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T \boldsymbol{u}_c \qquad (?) \tag{5.282}$$

was aber (5.281) widerspricht. Es kann nicht beides richtig sein.

Wie man an Bild 5.17 sieht, sind die Kräfte j_i^+ in den Ecken des geänderten Elements Zusatzkräfte, um auf dem ‚alten' Netz (Matrix $\boldsymbol{K}$) die Wirkung des Dirac Deltas (Einzelkraft in der oberen rechten Ecke) darstellen zu können, also $\boldsymbol{g}_c$ zu generieren. Ohne die j_i^+ würde das Dirac Delta den Vektor $\boldsymbol{g}$ erzeugen, mit den j_i^+ nimmt das ‚alte' Netz die Form $\boldsymbol{g}_c$ an.

In Bild 4.24 wurde diese Technik bei dem 1-D Problem eines Stabes benutzt, um mit Hilfe von Kräften j^+ die Einflussfunktion des *stepped bars* an einem Stab mit konstantem Querschnitt zu berechnen.

5.37 Unsymmetrie in den Ausgleichsbewegungen

Zum Schluss wollen wir noch anmerken, dass, wegen $u = 1/k \cdot f$, Änderungen $k \pm \Delta k$ unsymmetrisch ablaufen, siehe Bild 5.48. Die Ausschläge Δu bei einer Abnahme $-\Delta k$ sind größer als die Verkürzungen Δu bei einer Zunahme $+\Delta k$. Anders gesagt: Wenn man die Steifigkeit k einer Feder um Δk verringert und dann wieder Δk dazu addiert, ist man nicht da, wo man vor dem Manöver war, sondern f hängt tiefer.

Der Grund ist, dass man sich bei der Abnahme auf der Kurve $u = 1/k \cdot f$ befindet und beim Rückweg auf der Kurve $u = 1/(k - \Delta k) \cdot f$.

Wenn man aus einem Reifen (5 l) ein Liter Luft (= 20 %) herauslässt und dann wieder hinzufügt, dann hat der Wagen seine alte Höhe. Aber bezogen auf das reduzierte Volumen (4 l) ist 1 Liter Luft 25 %. Rechnerisch hätte man nur 0.8 l hinzufügen dürfen, was nicht gereicht hätte, um auf die alte Höhe zu kommen.

Daumenregel: Wenn man ein Kapital K zu n Prozent Zinsen anlegt, dann hat sich das Kapital nach $72/n$ Jahren $\sim$ *verdoppelt* und ist n die Inflationsrate, dann hat sich die Kaufkraft in derselben Zeit $\sim$ *halbiert*[12]

$$(1 + \frac{n}{100})^a \cdot K \qquad (1 - \frac{n}{100})^a \cdot K \qquad a = \text{Jahre}\,. \tag{5.283}$$

5.38 Das Kontinuum

Schon bei der Vorstellung der Randelemente, siehe Kapitel 1.22, haben wir erwähnt, dass es eine Vorstufe zu den Greenschen Funktionen gibt und das sind die **Fundamentallösungen**. Sie genügen der Differentialgleichung des Problems, hier die Membran als Beispiel,

$$-\Delta\, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,, \tag{5.284}$$

aber – ander als die Greenschen Funktionen – genügen sie nicht den Lagerbedingungen. Formuliert man mit solchen Lösungen den Satz von Betti, dann erhält man die klassischen Integraldarstellungen der Potentialtheorie. Was daran bemerkenswert ist, ist dass man auf einen Blick sieht, von welchen Daten oder **Quellen**, von welchen *sources and sinks*, eine Lösung abhängt. Die Greenschen Funktionen

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{5.285}$$

zeigen ja nur den Einfluss der Belastung, die Lagerbedingungen stecken implizit in $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, während die auf $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ basierende Integraldarstellung (5.288) auch den Einfluss der Randwerte – auch das sind ja Quellen – zeigt.

Der Ingenieur denkt nicht in Quellen, er sieht das Netz, er sieht die kleinen Platten- und Scheibenelemente, und ihm geht es vor allem darum, ihre Steifigkeiten richtig zu modellieren. Was aber am Ende auf dem Netz entsteht, ist eine **Potentiallösung** wie in (5.288), die das Resultat der Wirkung der Quellen ist.

Während aber das Gravitationsfeld der Sonne bis zu den Punkten $r = \infty$ reicht, sind die Lösungen der Platten- oder Scheibengleichung Potentiale, die nur innerhalb der Platte oder Scheibe leben und außerhalb davon null sind. All die verschiedenen Quellen oder **Belegungen**, wie man technisch sagt, sind so

[12] Wegen der Unsymmetrie sind die Fehler in den Näherungen nicht gleich.

ausbalanciert, *self-equilibrated*, dass man gedanklich die Platte in eine unendlich ausgedehntes Plattenkontinuum einbetten kann und der Aussenbereich dabei glatt wie ein Spiegel bleibt. Geht man von Innen nach Außen, dann springt die Integraldarstellung der Lösung erst von u auf $1/2\,u$ (am Rand) und dann ganz auf null; im 1-D nur u und 0.

Die Lösung eines Randwertproblems ist also außerhalb von Ω null. Nicht per definition, sondern weil die Wirkungen der Quellen sich außerhalb von Ω gegenseitig neutralisieren. Dieser Blick auf die finiten Elemente aus der Sicht der Potentialtheorie ist sicherlich ungewohnt, aber er kann doch, wie wir zeigen wollen, zum besseren Verständnis der finiten Elemente beitragen.

5.38.1 Potentialtheorie

Die Potentialtheorie beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Felder, die von Punktladungen erzeugt werden. Das Charakteristikum dieser Felder

$$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi}\ln r \qquad 2\text{-}D \qquad g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,\pi}\frac{1}{r} \qquad 3\text{-}D \tag{5.286}$$

ist, dass sie in allen Punkten $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ Lösungen der *Laplace Gleichung* sind[13]

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} = 0\,. \tag{5.287}$$

Wir differenzieren hier nach der Laufvariablen $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

Mit diesen ***Fundamentallösungen*** kann man Integraldarstellungen für beliebige C^2-Funktionen $u(\boldsymbol{x})$ herleiten

$$c(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\,\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\,u]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\,(-\Delta u)\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.288}$$

wenn man den Verlauf von u und der Normalableitung $\partial u/\partial n = \nabla u \bullet \boldsymbol{n}$ auf dem Rand Γ kennt und im Feld Ω die Summe der zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,11} + u_{,22}$.

Die Funktion $c(\boldsymbol{x})$ ist die sogenannte *charakteristische Funktion* des Gebiets Ω

$$c(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \Delta\varphi/2\,\pi & \boldsymbol{x} \in \Gamma \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega^c \end{cases} \tag{5.289}$$

Es ist $\Delta\varphi$ ($= \pi$ am glatten Rand) der Innenwinkel in dem Randpunkt und Ω^c ist das Komplement, also alles, was jenseits des Randes Γ liegt.

Man stelle sich ins Innere von Ω und richte den Blick auf den Rand. Dreht man sich einmal um sich selbst, dann überstreicht der Sehstrahl einen Winkel von $2\,\pi$. Steht man auf dem Rand, dann ist der Winkel gleich $\Delta\varphi$ und steht man außerhalb von Ω, dann ist der Winkel null, weil der Sehstrahl vor und

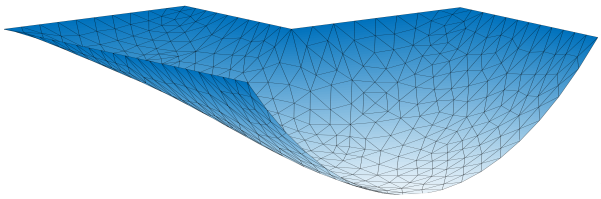


Bild 5.49. Membran unter Last (MATLAB™ PDE Modeler)

zurück pendelt. Teilt man den Winkel durch 2π, dann hat man die Funktion $c(\boldsymbol{x})$.

Haben wir eine Membran Ω in ein Netz von Elementen unterteilt, dann können wir also die FE-Lösung wie folgt schreiben

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\,\frac{\partial u_h}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\,u_h]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \sum\nolimits_e \int_{\Omega_e} g\,p_e\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \sum\nolimits_i \int_{\Gamma_i} g\,t_i\,ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.290}$$

Hierbei sind $p_e = -\Delta u_h$ die Flächenkräfte der FE-Lösung u_h im Element Ω_e und die t_i sind die Linienkräfte auf den Netzkanten Γ_i, also die Sprünge der Normalableitung zwischen den Elementen, die die Kante Γ_i gemeinsam haben.

Das ist eine ‚quellenmäßige' Darstellung der FE-Lösung, wenn wir u_h als die Antwort auf die ‚Lasten', die Quellen, in der Einflussfunktion lesen.

5.38.2 Das einzelne Element und das Netz

Nehmen wir an, das Netz besteht aus 100 Dreiecken, linearen Elementen, siehe Bild 5.49. All die Kantenkräfte t_i beeinflussen jeden Punkt der Membran (die $p_e = 0$ sind null). Wie kommt es dann aber, dass die t_i gerade so eingestellt sind, dass in jedem der 100 Elemente die Lösung $u_h = a + b\,x_1 + c\,x_2$ einen linearen Verlauf hat? Das gleicht doch einem Wunder!

Das Rätsel löst sich wie folgt: Die obige Integraldarstellung erhält man, wenn man (5.288) für jedes Element einzeln formuliert und diese Gleichungen addiert; dabei werden Sprünge in der Normalableitung zwischen den Elementen sichtbar, das sind die t_i.

Ein Punkt $\boldsymbol{x}$, der in dem ersten Element Ω_1 liegt, ist jedoch ein Punkt ‚außen' für die anderen 99 Elemente, d.h. deren Beiträge sind alle null und die Einflussfunktion für $u_h(\boldsymbol{x})$ reduziert sich auf die Originalgleichung (5.288) am Element Ω_1. Die Membran Ω_1 mit linearen Randwerten u, konstanter (aber unterschiedlicher) Normalableitung $\partial u/\partial n$ auf den drei Kanten und $p_e = 0$ muss aber einen linearen Verlauf im Innern haben.

Natürlich, die anderen Elemente beeinflussen schon die Randwerte auf den Elementkanten von Ω_1, aber die Darstellung im Innern ist dann rein lokal.

[13] Eine Potentialtheorie gibt es natürlich auch für andere Differentialgleichungen.

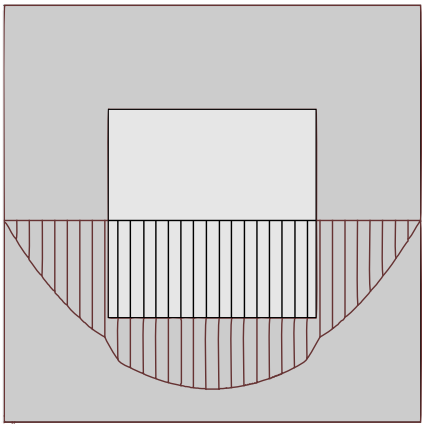


Bild 5.50. Unterschiedliche Steifigkeiten (Vorspannung) in einer Membran (BE-LAPLACE)

Das gilt im übrigen für jede Fläche über der $x-y$-Ebene. Man schlage um irgendeinen Punkt in der Ebene Ω einen Kreis, dann kann die Fläche $u(\boldsymbol{x})$ oberhalb davon allein aus den Daten $-\Delta u$ in dem Kreis und den Funktionen u und $\partial u/\partial n$ auf dem Kreisrand berechnet werden – auch wenn die Fläche die Lösung einer nichtlinearen Gleichung ist. Die Formel (5.288) gilt für **alle** Funktionen aus $C^2(\Omega)$. Sie ist sozusagen ein ‚exakter Taylor'.

Man kann sie auch als Kontrollgleichung benutzen: Wenn die Randwerte und das $-\Delta u$ aus verschiedenen Quellen kommen, dann passen sie nur zueinander, wenn sie der Integralgleichung (5.288) auf dem Rand des Elements genügen; wenn man $\boldsymbol{x}$ auf den Rand legt, steht ja links und rechts dasselbe $\boldsymbol{u}$.

5.38.3 Variierende Steifigkeiten

Wir hatten oben in Bild 5.13 auf Seite 527 beim Betrachten der Verteilung der Knotenkräfte f_i^+ auf die Analogie mit einer Stahlwand hingewiesen, die man mit einem aufgeschweißten Blech verstärkt und die Knotenkräfte f_i^+ wie die Kräfte in einer Schweißnaht gedeutet, die das Blech fixiert, wenn sich die darunterliegende Stahlwand unter der Belastung deformiert.

Das ist kein bloßes Bild. Die Knotenkräfte f_i^+ sind nur die Übersetzung ins Diskrete von Linienkräften t, die *rechnerisch* (nicht physikalisch(!)) überall dort auftreten, wo die Steifigkeit eines Bereiches sich ändert, also z.B. dort, wo die Stärke eines Blechs sich ändert. Wenn man die Kräfte t durch die Steifigkeit dividiert, dann sind es die Sprünge in der Verzerrung zwischen den Bereichen.

Weil die folgenden Seiten sehr technisch sind, wollen wir eine kurze Zusammenfassung voranstellen. Was ist das Problem?

Das Problem ist, dass man zwei Bereiche mit unterschiedlichen Steifigkeiten hat, siehe Bild 5.50, und man sucht eine Einflussfunktion für die Lösung $u(\boldsymbol{x})$, die in beiden Bereichen gültig ist. Man kann immer zwei Einflussfunktionen getrennt für Ω_a und Ω_b aufstellen, aber das ist nicht das Ziel. Es soll eine sein.

Das geht auf zwei Weisen. Entweder man belegt das *interface* Γ_i zwischen den beiden Gebieten mit einer fiktiven äußeren Linienkraft $\bar{t}$, was dann eine Darstellung wie

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t \tag{5.291}$$

ergibt, oder man führt einen neuen Kern $\Delta H\, \partial g/\partial n$ auf dem *interface* ein

$$(c_a(\boldsymbol{x}) H_a + c_b(\boldsymbol{x}) H_b)\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.292}$$

der adjungiert zur Lösung u auf dem *interface* ist. Weil die charakteristischen Funktionen $c_a(\boldsymbol{x})$ und $c_b(\boldsymbol{x})$ in dem jeweiligen anderen Gebiet null sind, ist das wie ‚eine' Einflussfunktion für $u(\boldsymbol{x})$, keine ‚gedoppelte'. In der ersten Gleichung steht links $u(\boldsymbol{x})$, egal wo $\boldsymbol{x}$ liegt, und in der zweiten steht $H_a\, u(\boldsymbol{x})$ oder $H_b\, u(\boldsymbol{x})$, je nachdem wo man ist.

Soweit die Mathematik, nun stellen wir uns eine Membran vor, die mit einer Kraft H_a vorgespannt wird und unter einem Winddruck p steht

$$-H_a \Delta u = p \qquad u = 0 \;\text{ auf } \Gamma\,. \tag{5.293}$$

Die Aufhängekraft auf dem Rand ist dann $H_a \partial u/\partial n$, wie man an der ersten Greenschen Identität (9.233) ablesen kann, und die Fundamentallösung hat die Gestalt

$$g_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{H_a}\, g \qquad g = -\frac{1}{2\,\pi}\, \ln r\,. \tag{5.294}$$

In einem Teil Ω_b im Innern der Membran habe die Vorspannung jedoch davon abweichend den Wert H_b (wie so etwas zu realisieren sei, interessiert hier nicht). Technisch bedeutet dies, dass die Biegefläche u in Ω_a und Ω_b unterschiedlichen Differentialgleichungen genügt

$$-H_a\, \Delta u = p \quad \text{in } \Omega_a \qquad -H_b\, \Delta u = p \quad \text{in } \Omega_b\,. \tag{5.295}$$

Die Fundamentallösung im Gebiet Ω_b ist dann natürlich $1/H_b \cdot g$.

Multipliziert man (5.288) erst mit H_a und dann mit dem Kehrwert $1/H_a$, dann ist das die Integraldarstellung zu dem Operator $-H_a \Delta u$ mittels g_a

$$c(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} [g_a\, H_a \frac{\partial u}{\partial n} - H_a \frac{\partial g_a}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} g_a\, (-H_a \Delta u)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.296}$$

Bei Lichte gesehen, hat sich aber nichts geändert. Der Ausdruck ist mit (5.288) identisch.

Formuliert man nun diese Gleichung auch für das Gebiet Ω_b (also $-H_b \Delta u = p$) und addiert die beiden Darstellungen, so erhält man

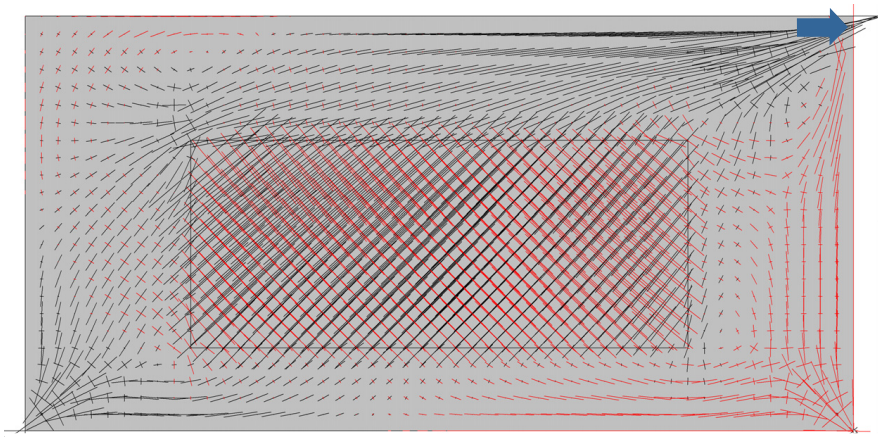


Bild 5.51. Das ist die Wandscheibe aus Bild 5.13 b. Der mittlere Teil (Reststeifigkeit 10 %) verhält sich wie ein Schubblech. Solche Probleme lassen sich mit der hier dargestellten Technik behandeln (BE-SCHEIBE)

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\,\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} \tag{5.297}$$
$$+ \int_\Omega g\,(-\Delta u)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} g\,\bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t\,,$$

wenn Γ_i das *interface* zwischen den beiden Gebieten ist, also der Rand von Ω_b. Auf das *interface* Integral kommt man wie folgt: Auf dem *interface* ist

$$t_a = H_a\, \partial u/\partial n = -H_b\, \partial u/\partial n = -t_b\,, \tag{5.298}$$

und damit summieren sich die Beiträge von beiden Gebieten zu

$$\int_{\Gamma_i} (g_a\, t_a - g_b\, t_a)\, ds_{\boldsymbol{y}} = \int_{\Gamma_i} g\, t_a\, (\frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b})\, ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.299}$$

Das t in (5.297) ist also das t_a. Die anderen beiden *interface* Integrale

$$\int_{\Gamma_i(\Omega_a)} \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i(\Omega_b)} \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{5.300}$$

sind in der Summe null, weil u stetig ist und der Normalenvektor an $\partial g/\partial n = \nabla g \bullet \boldsymbol{n}$ jeweils in das andere Gebiet zeigt, sich also die $u\,\partial g/\partial n$ aufheben.

Die Kräfte $\bar{t}$ auf Γ_i entsprechen den Knotenkräften f^+ in der Heftnaht, die das Blech mit der Stahlwand verbinden.

Der Ausdruck (5.297) ist die Integraldarstellung einer Membran mit überall gleicher Vorspannung $H = 1$ auf der ein Druck $-\Delta u$ lastet und längs dem *interface* Linienkräfte $\bar{t}$ wirken.

Was kann man mit der Gleichung machen? Angenommen man gibt Linienkräfte $\bar{t}$ und Gebietskräfte $p = -\Delta u$ vor, dann formuliert (5.297), wenn man

$\boldsymbol{x}$ längs des Randes laufen lässt, eine Koppelbedingung zwischen den Randwerten u und $\partial u/\partial n$ der Biegefläche. Hat man zwei Randfunktionen u und $v\,(=\partial u/\partial n)$ gefunden, die der Koppelbedingung genügen, dann kann man mit (5.297) die zur Belastung $\bar{t}$ und $-\Delta u$ gehörige Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ darstellen.

Zurück zur der unterschiedlich vorgespannten Membran. Damit die Darstellung (5.297) die Biegefläche der Membran liefert, muss das $\bar{t}$ der Bedingung

$$\bar{t} = \frac{H_b - H_a}{Ha\, H_b}\, t_a \tag{5.301}$$

genügen, das t_a muss also die Normalableitung der Lösung in Ω_a auf dem *interface* sein. Diese Eigenschaft wurde ja bei der Herleitung ausgenutzt. Dem entspricht praktisch, dass in dem $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K u}_c$ die Lösung $\boldsymbol{u}_c$ steckt und uns $\boldsymbol{f}^+$ daher Probleme macht.

In dem $\boldsymbol{f}^+$ stecken aber auch noch Anteile aus dem Gebiet Ω_b, denn in dem ursprünglichen Vektor $\boldsymbol{f}$ stehen die Integrale $f_i = (\varphi_i, -H_a \Delta u)$ (Integration über die ganze Membran). Wenn sich nun die Vorspannung in Ω_b ändert, so muss man das zuviel oder zuwenig, also die Differenzkräfte $p/H_a - p/H_b$, mit berücksichtigen und durch ein Integral $(\varphi_i, -(H_a - H_b)\Delta u)$ über Ω_b korrigieren. Das macht einen Teil von den f_i^+ aus. Man sieht diese inneren f_i^+ in Bild 5.13, Seite 527.

5.38.4 Beispiel

Wir betrachten einen Stab, siehe Bild 5.52 *a*, mit zwei unterschiedlichen Steifigkeiten EA_a und EA_b. Ist $g(y,x)$ eine Fundamentallösung zu $EA = 1$, dann sind

$$g_a(y,x) = \frac{1}{EA_a} \cdot g(y,x) \qquad g_b(y,x) = \frac{1}{EA_b} \cdot g(y,x) \tag{5.302}$$

Fundamentallösungen zu Steifigkeiten EA_a bzw. EA_b. (Die Fundamentallösungen sind hier gleichzeitig auch die Einflussfunktionen, weil sie den Lagerbedingungen genügen).

Wir formulieren den Satz von Betti nun zweimal, einmal auf dem Abschnitt $[0, x_S]$ und einmal auf dem Abschnitt $[x_S, l]$

$$\mathscr{B}(g_a, u)_{[0,x_S]} = 0 \qquad \mathscr{B}(g_b, u)_{[x_S,l]} = 0\,. \tag{5.303}$$

Das ergibt

$$c_a(x)u(x) = [g_a\, N - N(g_a)\, u]_0^{x_S} + \int_0^{x_S} g_a(y,x)\, p(y)\, dy \tag{5.304a}$$

$$c_b(x)u(x) = [g_b\, N - N(g_b)\, u]_{x_S}^{l} + \int_{x_S}^{l} g_b(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{5.304b}$$

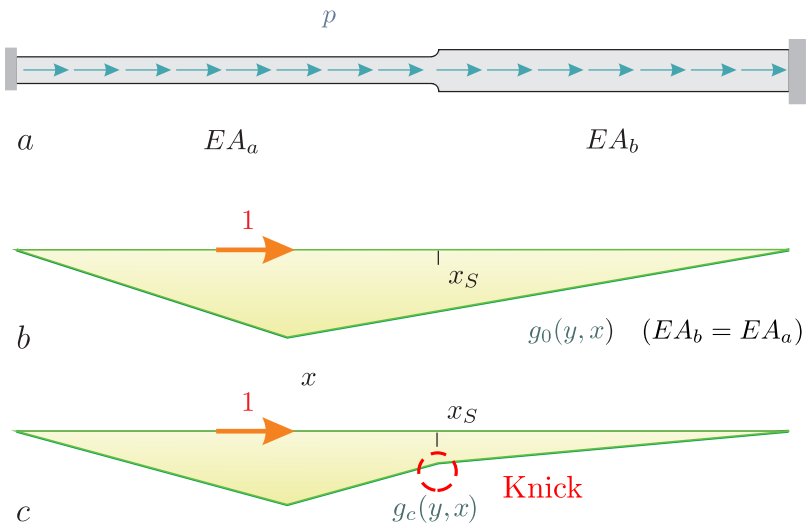


Bild 5.52. Wechselnde Steifigkeiten EA in einem Stab, **a)** System und Belastung, **b)** Einflussfunktion am homogenen Stab, **c)** Einflussfunktion am System a

Es ist $N(g_a) = EA_a\, g_a' = g'$ und ebenso $N(g_b) = EA_b\, g_b' = g'$. Die charakteristischen Funktionen lauten[14]

$$c_a(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0, x_s] \\ 1 & 0 \le x < x_S \\ (l - x_S)/l & x = x_S \end{cases} \qquad c_b(x) = \begin{cases} x_S/l & x = x_S \\ 1 & x_S < x \le l \\ 0 & x \notin [x_S, l] \end{cases} \tag{5.305}$$

Die Addition der beiden Darstellungen liefert, weil u und g an den Stabenden null sind,

$$\begin{aligned} (c_a(x) + c_b(x))\, u(x) &= (g_a(x, x_S) - g_b(x, x_S))\, N(x_S) \\ &\quad + \int_0^{x_S} g_a(y, x)\, p(y)\, dy + \int_{x_S}^{l} g_b(y, x)\, p(y)\, dy \\ &= g(x, x_S) \cdot F + \int_0^{x_S} g_a(y, x)\, p(y)\, dy + \int_{x_S}^{l} g_b(y, x)\, p(y)\, dy \end{aligned} \tag{5.306}$$

mit

$$F = \frac{EA_a - EA_b}{EA_a EA_b}\, N(x_S)\,. \tag{5.307}$$

Aus Sicht der Mathematik ist der Stab also zusätzlich im Punkt x_S mit einer Einzelkraft F belastet. Das kann man noch etwas umformen. Weil die Normalkraft im Punkt x_S stetig ist, $EA_a\, \varepsilon_a = EA_b\, \varepsilon_b$, gilt

[14] $(l - x_S)/l$ und x_S/l ist die Normalkraft N links und rechts vom Punkt x_S am homogenen Stab, wenn die Kraft $P = 1$ im Punkt x_S steht.

$$F = \frac{EA_a - EA_b}{EA_b}\varepsilon_a = \varepsilon_b - \varepsilon_a \,. \tag{5.308}$$

Die ‚Kraft' ist also der Sprung in der Dehnung im Punkt x_S. Formt man um, dann kann man daraus eine wirkliche Kraft machen

$$g(x, x_S) \cdot F = \frac{1}{EA_a}\, g(x, x_S)\,(\varepsilon_b - \varepsilon_a)\, EA_a \,. \tag{5.309}$$

Dass es auch ohne Kraft F geht, zeigt Bild 5.52 *c*. Wenn man die Fundamentallösungen nicht ‚stückelt', sondern mit einer ‚durchgehenden' Fundamentallösung rechnet, bei der der Wechsel von EA_a nach EA_b eingebaut ist, dann taucht die Kraft F nicht auf

$$u(x) = \int_0^l g_c(y, x)\, p(y)\, dy \,. \tag{5.310}$$

Das wäre die richtige Einflussfunktion.

5.38.5 Kerne j^+

Wir hatten uns in Kapitel 5.13 überlegt, dass es nicht nur Kräfte f^+ gibt, sondern dass es auch Kräfte j^+ geben muss. Hier können wir das präzisieren.

Die Membran $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$ bestehe, wie oben, aus zwei unterschiedlich vorgespannten Flächen Ω_a und Ω_b. Formuliert man die Darstellung (5.288) für beide Gebiete getrennt, multipliziert die jeweilige Darstellung mit H_a bzw. H_b und addiert die beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned}(c_a(\boldsymbol{x})H_a + c_b(\boldsymbol{x})H_b)\, u(\boldsymbol{x}) = &\int_{\Gamma_a} [g\, H_a \frac{\partial u}{\partial n} - H_a \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_b} [g\, H_b \frac{\partial u}{\partial n} - H_b \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} g\; p d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\ &+ \int_{\Gamma_i} (H_a - H_b) \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} \,. \end{aligned} \tag{5.311}$$

Liegt nun wie in Bild 5.53 der Teil Ω_b im Innern, wir können uns Ω_b als ein einzelnes finites Element vorstellen, dessen Steifigkeit sich geändert hat, $H \to H + \Delta H$, dann entfällt das Integral über Γ_b

$$\begin{aligned}(c_a(\boldsymbol{x})H + c_b(\boldsymbol{x})(H + \Delta H))\, u(\boldsymbol{x}) = &\int_{\Gamma} [g\, H \frac{\partial u}{\partial n} - H \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} \\ &+ \int_{\Omega} g\, p d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} \,. \end{aligned} \tag{5.312}$$

Liegt der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ z.B. in Ω_a, dann ist $c_b(\boldsymbol{x}) = 0$ und das Resultat lautet

$$H\, u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} [g\, H \frac{\partial u}{\partial n} - H \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} g\, p d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{5.313}$$

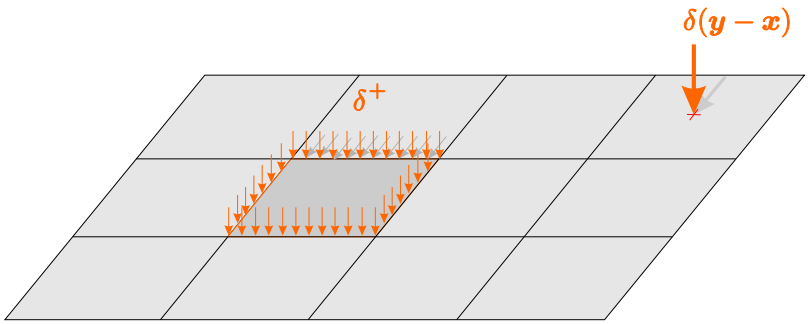


Bild 5.53. Am Rand des Elements mit der abweichenden Steifigkeit ergänzen zusätzliche Deltas δ^+ das Dirac Delta

Nach Division durch H ist das die Durchbiegung $u(\boldsymbol{x})$. Eine Steifigkeitsänderung führt also zu Zusatztermen δ^+ (zusätzlichen ‚Dirac Deltas') auf dem Rand des Elements

$$\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \quad \rightarrow \quad \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \delta^+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{\Delta H}{H}\frac{\partial g}{\partial n}\,, \tag{5.314}$$

gegen die die Lösung u zusätzlich arbeiten muss

$$J(u_c) = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \delta^+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.315}$$

um auf den Wert $u(\boldsymbol{x})$ zu kommen. Es ist klassische Potentialtheorie.

5.38.6 Die zwei Zugänge

Und damit sind wir an dem Punkt, wo wir deutlich sagen müssen, dass es *zwei* Zugänge gibt. Der eine führt zu den zusätzlichen Kräften $\bar{t}$ längs dem *interface* Γ_i und der andere zu den zusätzlichen Kernen δ^+ längs Γ_i. Wenn man den Satz von Betti für Ω_a und Ω_b zunächst getrennt formuliert – also mit dem jeweils eigenen Kern g_a bzw. g_b – und dann addiert, dann entsteht bei der Addition eine *Zusatzbelegung* $\bar{t}$

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t\,. \tag{5.316}$$

Wenn man aber die beiden Integraldarstellungen für $u(\boldsymbol{x})$, bevor man sie addiert, mit den betreffenden Steifigkeiten H_a und H_b multipliziert, dann entsteht bei der Addition ein zusätzlicher *Kern*, entstehen zusätzliche linienhafte ‚Dirac Deltas',

$$(c_a(\boldsymbol{x})H_a + c_b(\boldsymbol{x})H_b)\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.317}$$

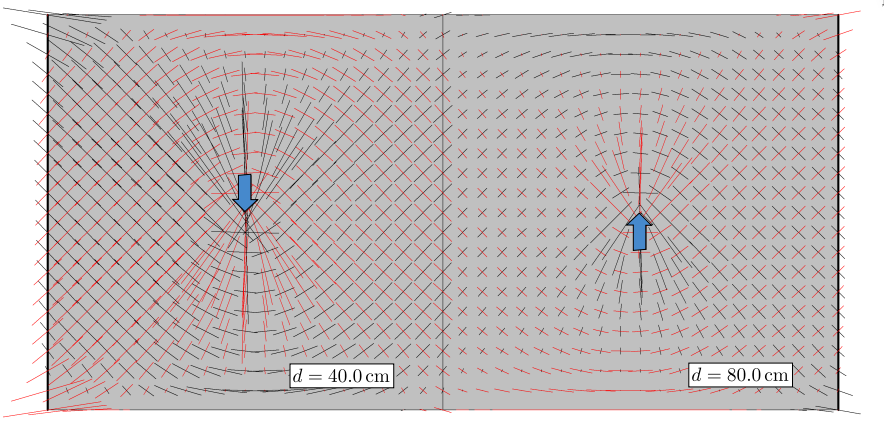


Bild 5.54. Die beiden Scheiben sind links und rechts gehalten und in der Mitte miteinander verbunden (BE-SCHEIBE)

die wir δ^+ genannt haben[15]. Der Begleiter, die Belegung u auf Γ_i ist ja ein alter Bekannter, ist nicht neu.

Physikalisch gibt es keine *äußeren* Kräfte $\bar{t}$, so wie ja beim Stab dort, wo der Querschnitt springt, die Normalkräfte links und rechts gleich groß sind, keine Kraft f^+ auftritt. Aber die Kräfte $\bar{t}$ oder die Kraft f^+ sind das Vehikel, mit dem es der Potentialtheorie gelingt, den exakten Wert $u(\boldsymbol{x})$ zu ermitteln. Sie haben ihre Existenz von der Mathematik. So wie $1 + 1 = 2$ ergibt, so entstehen bei der Addition der Einflussfunktionen zweier aneinander grenzender Bereiche

$$\ldots \int_{\Gamma_i} g_a \frac{\partial u}{\partial n}\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} g_b \frac{\partial u}{\partial n}\, ds_{\boldsymbol{y}} = \ldots + \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \tag{5.318}$$

mit unterschiedlichen Steifigkeiten *automatisch* die Belegungen (die Kräfte) $\bar{t}$ bzw. die Kerne δ^+

$$\ldots + \int_{\Gamma_i} H_a \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} H_b \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.319}$$

(Weil die Normalenvektoren auf Γ_i jeweils entgegengesetzt gerichtet sind, ergibt sich bei der Addition der Beitrag $\Delta H = H_a - H_b$).

Bemerkung 5.10. Die *Randelemente* basieren auf der Potentialtheorie und in dem Program BE-PLATTE, siehe Kapitel 12, wird diese Technik benutzt, um Platten mit feldweise unterschiedlichen Stärken zu berechnen, werden die Einflussfunktionen sinngemäß um zwei Integrale erweitert, (die Plattengleichung ist von vierter Ordnung), die die Durchbiegung w und die Neigung $\partial w/\partial n$

[15] Je nach Lage des Aufpunkts $\boldsymbol{x}$ muss man $\Delta H \partial g/\partial n$ durch H_a bzw. H_b dividieren, um auf das korrespondierende δ^+ zu kommen.

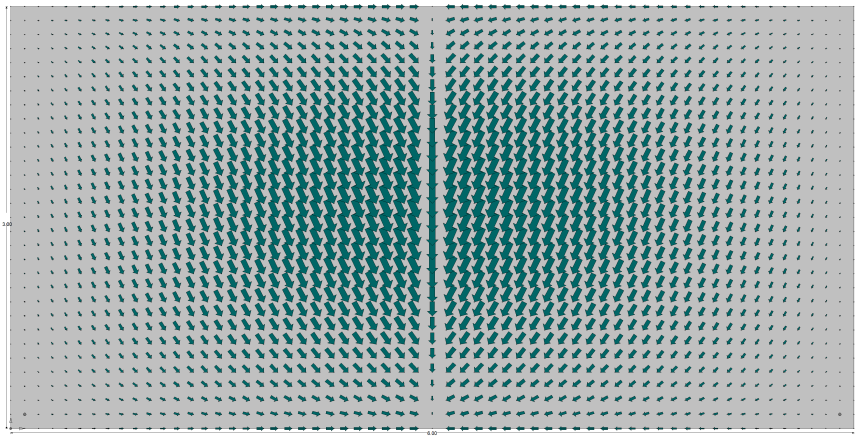


Bild 5.55. Die Flächenlast wurde in kleine Blocklasten aufgelöst. Die Pfeile signalisieren die Stärke und die Richtung der Blocklasten (BE-SCHEIBE)

(senkrecht zum Rand der Felder) mit zwei solchen Kernen j^+ wichten, die konjugiert zu w und $\partial w/\partial n$ sind, die also aus den Sprüngen des Querkraftkerns (genauer: Kirchhoffkerns) und des Momentenkerns kommen, [118] S. 289,

$$\ldots + \int_{\Gamma_i} [M_\nu(g_0^a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))(K_a - K_b)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) - V_\nu(g_0^a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))(K_a - K_b)w(\boldsymbol{y})]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \ldots \tag{5.320}$$

5.38.7 Unterschiedliche Stärken

Die Stärke einer Scheibe geht nicht in die Differentialgleichung ein. Man rechnet daher mit der Scheibendicke $d = 1.0$ und skaliert die Lasten so, dass sich die Ergebnisse auf die reale Scheibe übertragen lassen. Einzelkräfte werden also durch die Scheibendicke dividiert etc.

Wenn zwei unterschiedlich starke Scheiben miteinander verbunden sind, wie in Bild 5.51 oder 5.54, dann werden die Integralgleichungen getrennt für beide Scheiben aufgestellt und in den gegenüberliegenden Knoten der Schnittfuge, links und rechts, werden die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ gekoppelt

$$\boldsymbol{u}_L - \boldsymbol{u}_R = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{t}_L \cdot d_L + \boldsymbol{t}_R \cdot d_R = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.321}$$

Das numerisch umzusetzen ist nicht trivial. Man denke an eine schachbrettartige Anordnung von Scheiben und einen Knoten, in dem sich vier Seiten schneiden. Mit Hilfe der acht Integralgleichungen ($2u_i \times 4$) in dem Knoten sind zwei Verschiebungen u_i und die drei Verzerrungen $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ passend zu bestimmen, um die Kompatibilität zwischen den Spannungsvektoren

$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}]\boldsymbol{n}_i$ auf den vier Seiten (Kanten) des Knotens zu gewährleisten.

Auch bei unterschiedlicher Stärke rechnet man jedes Teil mit der Dicke eins, skaliert die äußere Belastung entsprechend; die σ_{ij} muss man also nicht noch durch die Stärke d_i dividieren. Die Stärke geht über die Kopplung (5.321) der $\boldsymbol{t}_i$ in die Ergebnisse ein.

Bemerkung 5.11. Der Übergang $3D \to 2D$ geht bei den Randelementen gedanklich so, dass man von einem ebenen Spannungszustand in dem elastischen Volumen ausgeht, und das dV in der ersten Greenschen Identität durch $d \cdot d\Omega$ = Stärke der Scheibe $\times$ Flächenelement $d\Omega$ ersetzt.

Bei den finiten Elementen steht die Stärke d eines Scheibenelements als Faktor vor der Steifigkeitsmatrix

$$a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = k_{ij} = d \int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_i)\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_j)\, d\Omega\,. \tag{5.322}$$

Oft lässt man aber auch das d weg, oder setzt es eins, um bei der Herleitung der Gleichungen $2D$ und $3D$ in eins fassen zu können.

5.38.8 Veränderliche Belastung

Flächenlasten wie $p(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$ sind für Randelemente kein Hindernis, denn die Belastung lässt sich hinreichend genau durch kleine Blocklasten annähern. Man erzeugt ein Raster von Spannungspunkten $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)$ mit der Maschenweite $\Delta x \times \Delta y$ und ersetzt die Belastung in den Maschen durch Blocklasten, siehe Bild 5.55,

$$p_{ix} = p_x(\boldsymbol{x}_i) \qquad p_{iy} = p_y(\boldsymbol{x}_i)\,. \tag{5.323}$$

Das rückt die Randelemente in die Nähe der finiten Elemente, nur dass es echte Flächenlasten sind und die Größe des Gleichungssystems sich nicht ändert. Es wird weiterhin nur auf dem Rand gerechnet.

Bemerkung 5.12. Finite Elemente von der Warte der Potentialtheorie aus zu betrachten — implizit also vom Standpunkt der Differential- und Integralrechnung — ist für den Ingenieur sicherlich ungewohnt, aber die FEM ist nicht einfach nur ein Spiel mit kleinen Platten- und Scheibenelementen, sondern dahinter stehen mathematische Strukturen, deren Kenntniss zum Verständnis der finiten Elemente wesentlich sind. Das Kontinuum verliert nicht seine eingebaute Intelligenz, wenn man es in ‚Elemente' unterteilt – finite Elemente ist nicht nur ‚Lineare Algebra', nicht nur Vektoren und Matrizen.

6

Singularitäten

In diesem Kapitel geht es um die Frage, wann Spannungsspitzen auftreten, und wieso singuläre Punkte die Güte der Einflussfunktionen mindern und damit die Lösung selbst – nicht nur in der Nähe der singulären Punkte, sondern (theoretisch) auch in allen abliegenden Punkten eines Bauteils.

6.1 Singuläre Spannungen

Spannungen sind proportional zu den Dehnungen, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, also zu den Ableitungen der Verschiebungen, siehe Bild 6.1, und so entstehen singuläre Spannungen immer dann, wenn die Verschiebungen sich schlagartig ändern, sie praktisch aus dem Stand heraus von null nach oben schießen, wie in dem Bild 6.1 *a*.

Die ***Brachystochrone***, (βραχύς = kurz), illustriert die Situation am besten. Die Brachystochrone ist die Kurve, die zwei vorgegebene Punkte A und B so verbindet, dass man mit Hilfe des Schwerefelds der Erde möglichst schnell von A nach B kommt. Die Lösung ist, wie Johann I Bernoulli gezeigt hat, eine Zykloide.

Es ist also nicht der kürzeste Weg, der am schnellsten zum Ziel führt, sondern der Weg, bei dem wir am Anfang möglichst viel Geschwindigkeit holen, indem wir uns senkrecht nach unten fallen lassen.

Genauso verhalten sich die Bauteile, denn das Material will möglichst schnell weg aus der Gefahrenzone, wie etwa einem Riss, siehe Bild 6.2, und so läuft die vertikale Verschiebung u_y mit unendlich großem ‚Tempo', unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund heraus und dies führt damit natürlich zu unendlich großen Spannungen σ_{yy}.

Beim Auto sagt man: *Wo der Weg (= Bremsweg) null ist, ist die Kraft unendlich* und was beim Auto die negative Beschleunigung $a = -dv/dt$ ist[1], ist bei Tragwerken die Verzerrung $\varepsilon = du/dx$ (Scheiben) bzw. die Krümmung $\kappa = d^2w/dx^2$ (Platten).

[1] Bei ungebremster Fahrt gegen eine Wand, also in 0 Sek. auf $v = 0$, ist $a = -v/0$.

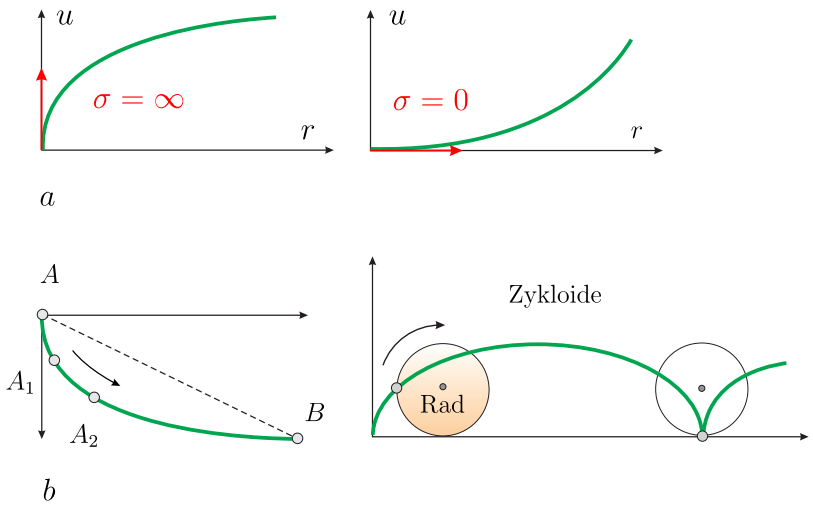


Bild 6.1. Je nachdem, wie die Verschiebungen ausklingen, sind die Spannungen endlich oder unendlich. Die schnellste Verbindung von A nach B im Schwerefeld der Erde ist nicht die kürzeste Verbindung ($- - -$), sondern eine Zykloide. Weil die Anfangsbeschleunigung in den tieferen Startpunkten A_1 bzw. A_2 kleiner ist als in A (flachere Tangenten), dauert die Reise von dort aus nach B genauso lange wie von A aus

Reißt eine Scheibe auf, dann ist, weil die Bruchflächen vorher den Abstand $dx = 0$ hatten, bei noch so kleiner Rissöffnung du die Verzerrung unendlich groß, $du/dx = du/0 = \infty$.

Sinngemäß dasselbe gilt für einen Knick in einer Platte, weil dort der Krümmungskreisradius R null ist und der Kehrwert $\kappa = 1/R$ damit unendlich groß.

6.2 Singuläre Lagerkräfte

Mit der ungeschickten Plazierung von Festpunkten kann man sich beliebig große Kräfte, sprich Probleme, einhandeln, wie Bild 6.3 zeigt.

Die Momente aus der Einzelkraft sind zickzackförmig und je enger die beiden Innenlager beieinander stehen, um so größer wird die Querkraft, weil die Querkraft ja die **Ableitung des Momentes** ist

$$V = \frac{dM}{dx}\,, \tag{6.1}$$

sie also dem **Steigungsdreieck** des Momentes entspricht[2].

Die Einflussfunktion für die Querkraft schwingt immer weiter aus, je kürzer der Abstand der beiden Lager ist. Die Spreizung ± 0.5 des Aufpunktes bleibt

[2] Wie beim Vierendeelträger: Je niedriger die Sprossen, desto größer sind die Querkräfte, Vierendeel = Zickzack-Momente und große Querkräfte.

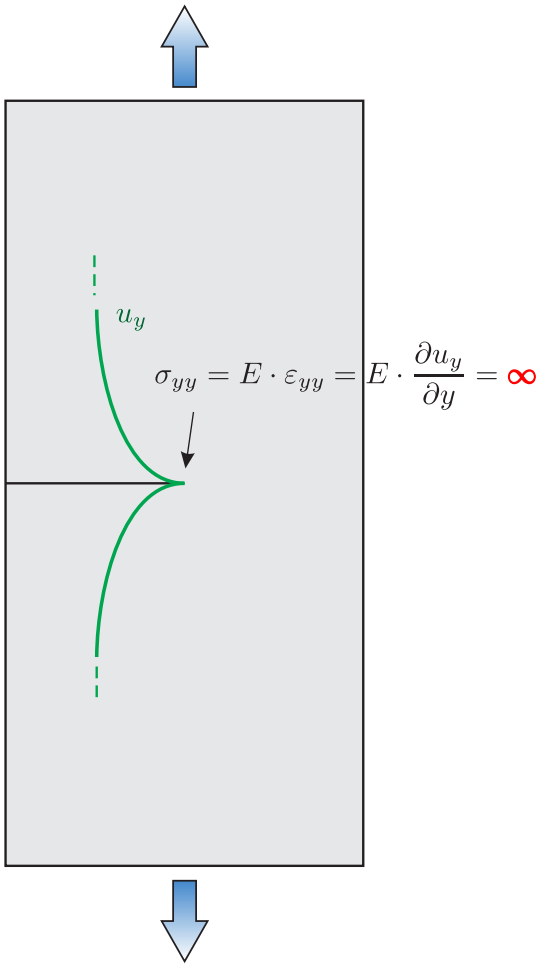


Bild 6.2. Die Spannungen σ_{yy} im Rissgrund sind unendlich groß, weil u_y mit unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund herausläuft ($\nu = 0$)

der Höhe nach immer gleich, aber die Flanken der Einflussfunktion werden mit $h \to 0$ **immer steiler** und das wölbt die Einflussfunktion in den Nachbarfeldern immer weiter auf.

Die Decke des starren Kellers in Bild 6.4 wirkt wie ein festes Zwischenlager, und der Sprung im Querkraftdiagramm führt zu großen Horizontallasten in der Decke.

Bei der Deckenplatte in Bild 6.5 ist es der Versatz der Innenwände, der ähnliche Effekte produziert. Den Wänden gelingt es, wegen ihres kurzen Abstandes, nur sehr schwer das **Versatzmoment** auszubalancieren und die Platte leidet deutlich unter der Situation, wie die Oszillationen in den Hauptmomenten belegen.

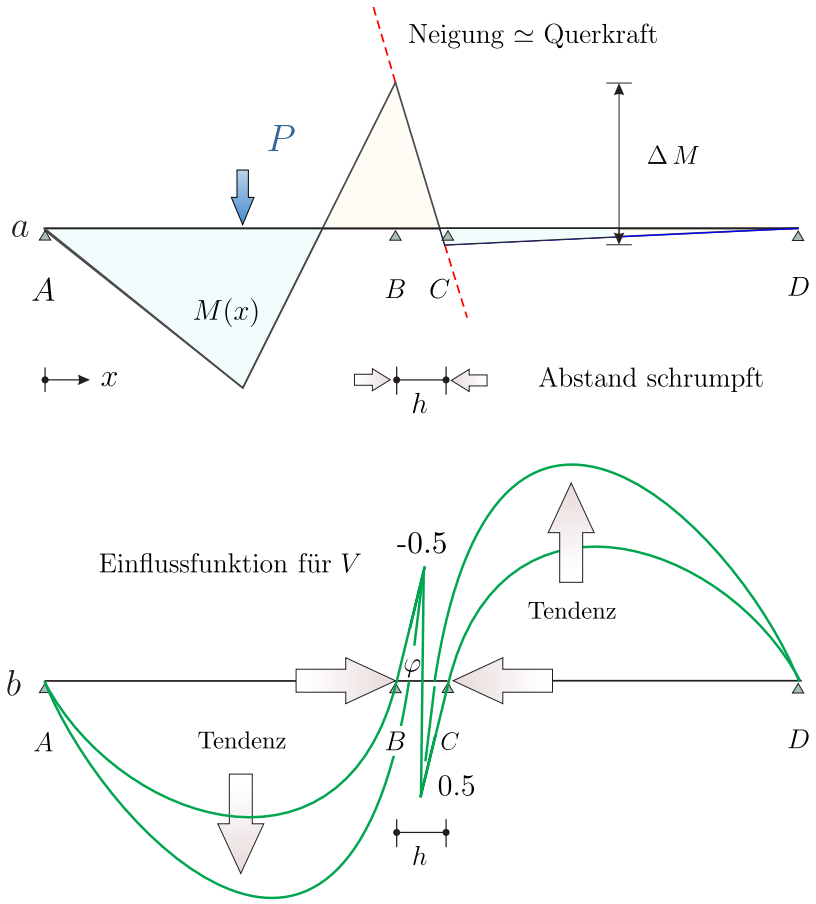


Bild 6.3. Durchlaufträger, **a)** Je kürzer das mittlere Feld wird, um so steiler werden die Momente und um so größer damit die Querkraft, $V = M'$, **b)** Einflussfunktion für die Querkraft in der Trägermitte

6.3 Einzelkräfte

Singuläre Spannungen geben oft Rätsel auf. ‚Liegt es am Netz oder an der Statik?' Wie singuläre Spannungen entstehen, illustriert – geradezu musterhaft – eine Einzelkraft $P = 1$, die in der Mitte einer Scheibe angreift, siehe Bild 6.6 *a*.

Schlägt man um den Aufpunkt Kreise mit dem Radius r, dann müssen die über den Kreis aufintegrierten horizontalen Spannungen die Punktlast ergeben, auch in der Grenze $r \to 0$.

Um dies nun genauer zu fassen, müssen wir etwas ausholen. Was wir über den Kreisumfang integrieren, sind nicht die horizontalen Spannungen, sondern die horizontalen ***tractions***, um hier das englische Wort zu benutzen. Ist $\boldsymbol{S}$

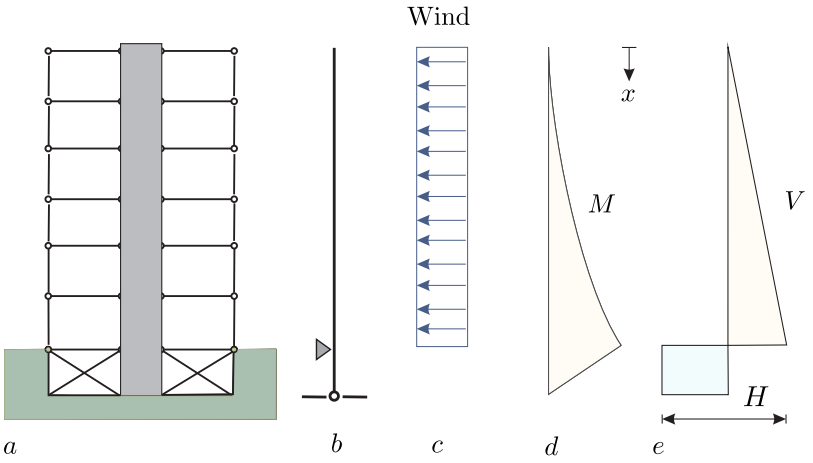


Bild 6.4. Über dem starren Keller bildet sich ein Zwischenlager aus und der Sprung im Querkraftdiagramm ergibt eine große Horizontalkraft H in der Decke, nach [20]

der Spannungstensor in der Scheibe,

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} , \tag{6.2}$$

dann gehört zu einem Schnitt mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$ der **Spannungsvektor**

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \text{auf dem Kreisumfang} \tag{6.3}$$

und das Gleichgewicht verlangt, dass das Integral des Spannungsvektors über den Umfang des Kreises Γ gleich der Einzelkraft ist

$$\int_\Gamma \boldsymbol{t}\, ds + P \cdot \boldsymbol{e}_1 = \int_\Gamma \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{6.4}$$

Nun geht mit immer kleiner werdendem Radius, $r \to 0$, der **Umfang des Kreises**, $U = 2\,\pi\,r$, gegen null und damit bis zum Ende das Integral der horizontalen Spannungen weiterhin den Wert -1 ergibt, muss sich t_x wie $-1/(2\,\pi\,r)$ verhalten

$$\lim_{r\to 0} \int_\Gamma t_x\, ds = \int_0^{2\,\pi} t_x\, r\, d\varphi = -\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{2\,\pi\,r}\, r\, d\varphi = -1 , \tag{6.5}$$

und damit **in der Grenze**, $r \to 0$, unendlich groß werden[3].

Frage: Um wieviel verschiebt sich der Aufpunkt? Dies finden wir heraus, indem wir die Verzerrungen integrieren. Setzen wir der Einfachheit halber die

[3] Wegen Details siehe Kap. 9.37

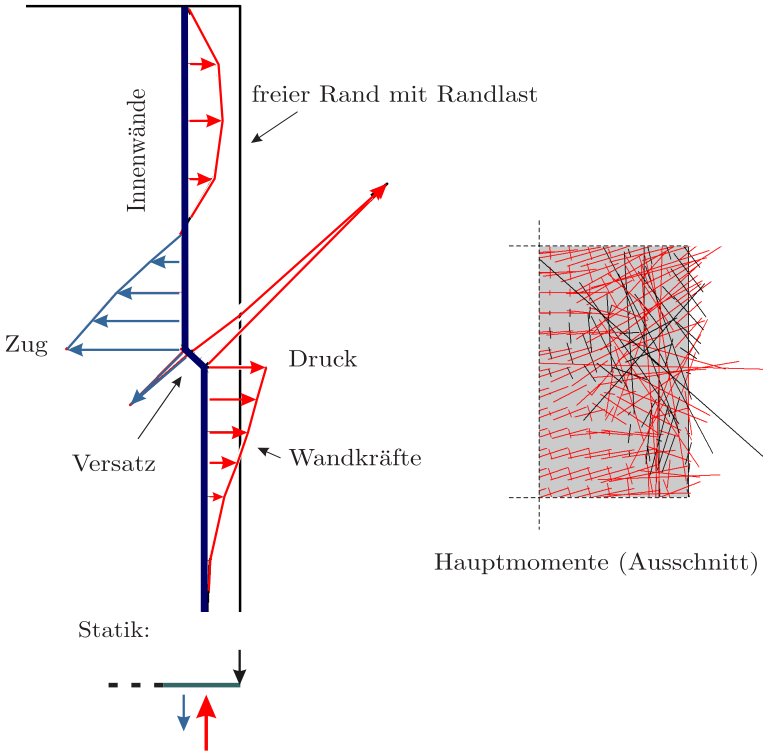


Bild 6.5. Blick auf eine Platte – ein kleiner Versatz in den tragenden Innenwänden und die großen Folgen. Die Wände wurden ‚knirsch' gerechnet. Elastische Lagerung dürfte die Effekte dämpfen

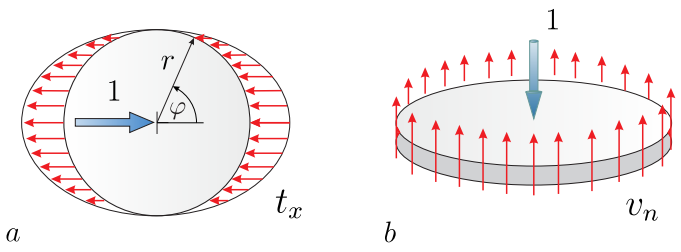


Bild 6.6. Einzelkraft bei einer Scheibe und bei einer Platte. Bei einer Platte wachsen die Querkräfte (v_n) auch wie $1/r$, aber weil w das dreifache Integral der Querkräfte ist, ist $w = r^2 \ln r$ auch im Punkt $r = 0$ endlich; v_n ist der Kirchhoffschub

Querdehnungszahl $\nu = 0$, dann hängt die Dehnung $\varepsilon_{xx} = 1/E \cdot \sigma_{xx}$ nur von der horizontalen Spannung ab und wegen

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2\,\pi\,r} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \simeq -\frac{1}{r} \tag{6.6}$$

folgt, dass sich **die horizontale Verschiebung** u wie $-\ln r$ verhält, weil dies die Stammfunktion von $-1/r$ ist. Dies bedeutet, dass die Verschiebung im Aufpunkt unendlich groß wird, denn $-\ln 0 = \infty$.

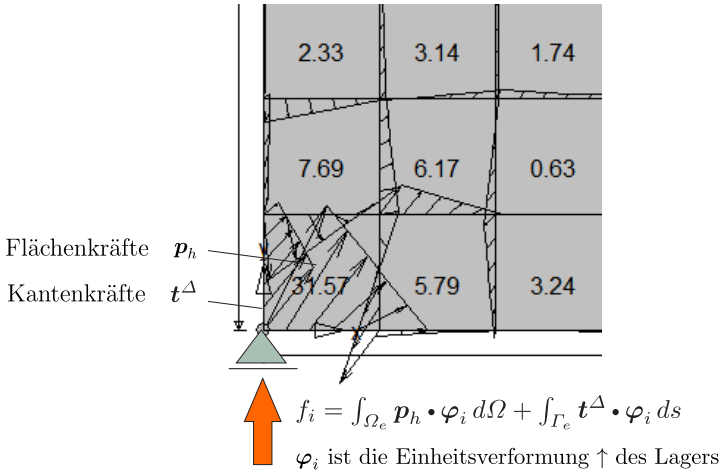


Bild 6.7. Haltekräfte = Flächenkräfte + Kantenkräfte nahe einem Lagerknoten. Die Flächenkräfte $\boldsymbol{p}_h$ sind nur über ihre Integrale, Glg. (6.7), das sind die Zahlen in den Elementen, dargestellt. Die Kantenkräfte sieht man als Pfeile (WINFEM)

Es gilt also:

- Unter Einzelkräften werden die Spannungen unendlich groß
- Die unendlich großen Spannungen bringen das Material zum Fließen und der Aufpunkt wandert unendlich weit weg.
- Echte Punktlager (= Punktkräfte) bieten einer Scheibe kein Halt und eingeprägte Lagerverschiebungen ignoriert die Scheibe.

Nun kann man aber, all diesem zu Trotz, bei einer FE-Berechnung Knoten festhalten und auch Knotenverschiebungen vorgeben. Wie das?

Des Rätsels Lösung ist natürlich, dass die FE-Lösung keine exakte Lösung ist. In einem Lagerknoten werden die Verschiebungen $u_i = 0$ in der Tat auf null abgebremst, aber das sind verteilte Kräfte, die diesen Halt erzwingen, siehe Bild 6.7, und keine Einzelkräfte.

Im Ausdruck steht zwar eine Knotenkraft f_i, aber das ist eine ***äquivalente Knotenkraft***, die stellvertretend für die wahren Haltekräfte wie in Bild

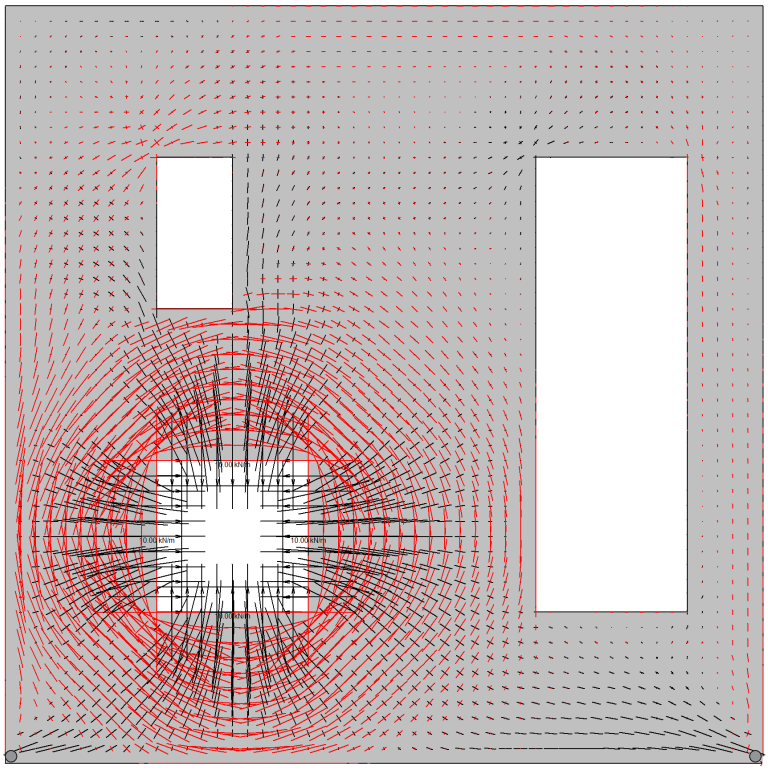


Bild 6.8. Öffnungsrand einer Scheibe unter Zugkräften (BE-SCHEIBE)

6.7 steht. Statisch sind es Linienkräfte längs den Elementkanten und Flächenkräfte in den Elementen, die die Scheibe stützen. Die Zahlen in Bild 6.7 sind die aufintegrierten Flächenkräfte der FE-Lösung pro Element

$$\sqrt{\int_{\Omega_e} (p_x^2 + p_y^2) d\Omega}\,. \tag{6.7}$$

6.4 Das Abklingen der Spannungen

Aus einem ähnlichen Grund wie oben, müssen die Spannungen und Verzerrungen mit wachsendem Abstand von der Last immer kleiner werden. Nur ist es nicht das Gleichgewicht, sondern der ***Energieerhaltungssatz***, aus dem das folgt, siehe Bild 6.8.

Schlagen wir um den Mittelpunkt der Öffnung einen Kreis mit Radius R, groß genug, um über den Öffnungsrand hinaus zu gehen, so muss die innere

Energie in dem getroffenen Gebiet gleich der äußeren Arbeit der beteiligten Kräfte sein

$$W_i = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,d\Omega = W_e\,. \tag{6.8}$$

Das sind neben den Druckkräften auf dem Öffnungsrand auch noch die Schnittkräfte auf dem Kreisrand. Diese werden jedoch mit wachsendem Radius R immer kleiner, weil der Kreis (der dann kein Kreis mehr sein wird) irgendwann gegen den freien Rand stößt und weil gleichzeitig das Integrationsgebiet Ω immer größer wird, muss die Energiedichte $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} > 0$ gegenläufig immer kleiner werden.

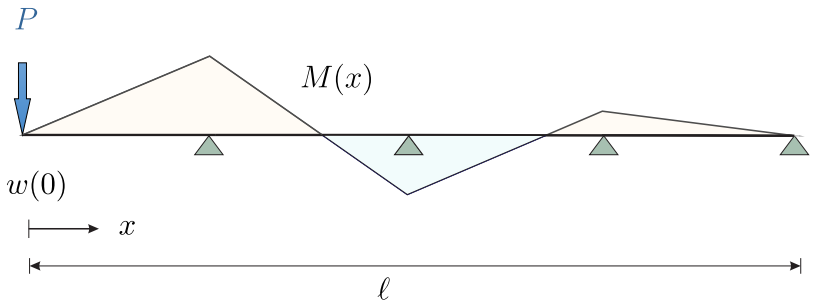


Bild 6.9. Der Energieerhaltungssatz impliziert, dass das Moment abklingt

In analoger Weise muss das Moment des Durchlaufträgers in Bild 6.9 mit wachsender Entfernung vom Aufpunkt $x = 0$ gegen Null gehen, damit die Energiebilanz eingehalten wird

$$W_e = \frac{1}{2}Pw(0) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx = W_i\,. \tag{6.9}$$

Der Energieerhaltungssatz ist der Grund, warum Einflussfunktionen (*all the action concentrated at one point*) in der Regel rasch abklingen.

Die Ausnahme sind Einflussfunktionen für Schnittgrößen in statisch bestimmten Tragwerken, weil kinematische Ketten null Energie haben und sie somit nicht gegen den Energieerhaltungssatz verstoßen, wenn sie unter Umständen immer weiter anwachsen.

Bemerkung 6.1. Je größer der Abstand R eines Betrachters von der Sonne ist, um so schwächer scheint ihm das Licht, weil sich die abgestrahlte Energie E über eine immer größere Sphäre S verteilt

$$E = \int_S q \, dS = q \cdot 4 \, \pi \, R^2 \,, \tag{6.10}$$

und die Energiedichte $q = E/S$ pro m^2 daher wie $1/R^2$ abnimmt.

Dieses Argument benutzt implizit auch der Ingenieur, der Laständerungen in abliegenden Punkten einer Platte ignoriert, weil er weiß, dass das, was an Biegeenergie hinzukommt, mit zunehmenden Abstand vom Quellpunkt, wie das Licht der Sonne, abklingen muss. Allerdings kann man die Regel nicht

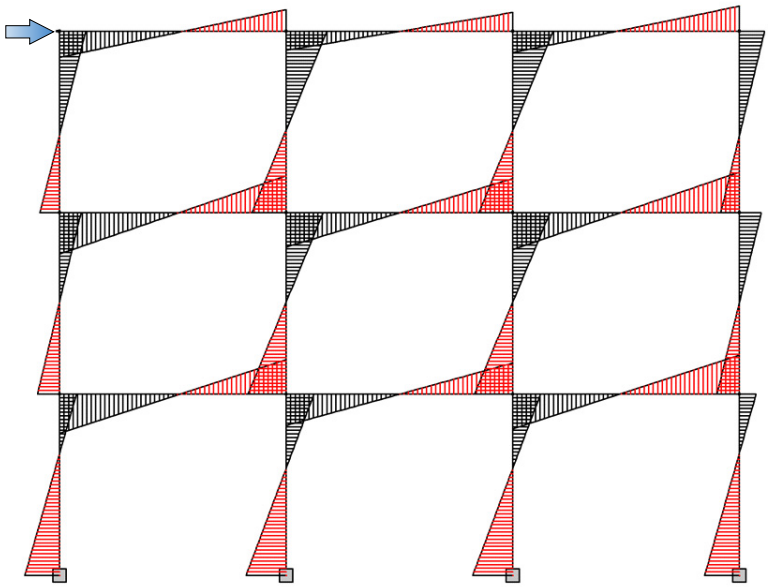


Bild 6.10. Einzelkraft an Gebäudeecke (Stockwerkrahmen) (BE-FRAMES)

blindlings anwenden. Die Abmessungen und die Lagerbedingungen spielen eine große Rolle, wie etwa bei dem Stockwerkrahmen in Bild 6.10, bei dem die Fußpunkte zwar den größten Abstand vom Kraftangriffspunkt haben, aber die Fußpunktsmomente mit zu den größten Momenten gehören.

Der Stockwerkrahmen trägt zwar vorwiegend wie ein Schubträger, aber er ist ähnlich empfindlich wie ein sehr langer Kragträger, bei dem eine Zusatzlast ΔP am Kragarmende zu einem großen zusätzlichen Ausschlag Δw am Kragarmende führt und so die Energiebilanz

$$\Delta P \cdot \Delta w = \int_0^l \frac{\Delta M^2}{EI} \, dx \tag{6.11}$$

geradezu verlangt, dass sich der Momentenverlauf merklich ändert, M wächst.

Anders gesagt, wenn die Zusatzbelastung **große Wege** geht, ihre Eigenarbeit groß ist, dann muss man genau hinschauen, während man in allen anderen Fällen davon ausgehen kann, dass die Effekte ‚versickern'.

Wenn eine seitliche Kraft H an der Spitze des Eiffelturms den Turm um 10 cm auslenkt, dann wird die Energie $W_e = 0.5 \cdot H \cdot 10\,\text{cm}$ in den Turm eingetragen, aber weil das Integral über die ‚Riesengestalt', über alle Stäbe,

$$W_i = \frac{1}{2} \sum\nolimits_e \left[\int_0^{l_e} \frac{M^2}{EI}\, dx + \int_0^{l_e} \frac{N^2}{EA}\, dx \right] \tag{6.12}$$

nicht größer als W_e sein kann, müssen die Schnittgrößen rasch ‚versickern'. Es ist, als ob ein Kind einen Eimer Wasser in den Sand gösse.

Das Ziel in der Statik muss es sein, dass die Lasten keine großen Wege gehen, die äußere Arbeit W_e klein bleibt, weil dann wegen

$$W_i = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, d\Omega = W_e \tag{6.13}$$

auch die Spannungen klein bleiben.

6.5 Kragträger

Wir wollen diese Beobachtungen zum Anlass nehmen, auf die besondere Rolle der Kragträger hinzuweisen. Bei einem Durchlaufträger klingen Momente um so schneller ab, je mehr Felder er hat. Der Kragträger ist das genaue Gegenteil. Wenn man einen Kragträger nur lang genug macht, dann kann man das Einspannmoment beliebig groß machen, ohne dass sich die Last am Kragarmende ändert, weil die Einflussfunktion für das Einspannmoment eine Verdrehung des Trägers um 45° ist.

Richtet man einen sehr starken **Laserstrahl** von der Erde auf den Mond, dann bewegen sich die Lichtpunkte auf dem Mond bei einer winzigen Drehung des Lasers mit einer Geschwindigkeit, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit – theoretisch, weil die Photonen ja nur mit c unterwegs sind und sie auch den Weg zweimal gehen müssen, wenn man auf der Erde auf das Aufblinken wartet.

Starrkörperdrehungen – so elementar das Konzept ist – sind also mit Vorsicht zu betrachten. Wenn diese möglich oder denkbar sind, dann muss man mit allem rechnen...

6.6 Je weiter desto tiefer

Die innere Energie kennt nur eine Richtung, sie wächst quadratisch: Je größer die Platte Ω ist, siehe Bild 6.11, oder die Spannweite l eines Trägers, desto größer wird sie

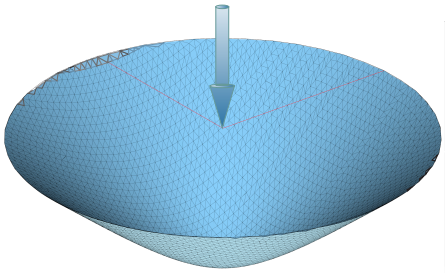


Bild 6.11. Einzelkraft und Kreisplatte (stark überhöhte Darstellung)

$$W_i = \frac{1}{2}\, a(w, w) \tag{6.14}$$

und weil der **Energieerhaltungssatz** verlangt, dass die äußere Arbeit W_e gleichzieht – wir betrachten einen Einfeldträger mit zentrischer Einzelkraft P – muss die Durchbiegung um das gleiche Maß anwachsen

$$W_e = \frac{1}{2}\, P\, w(x) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = W_i\,. \tag{6.15}$$

6.7 Unendlich große Spannungen

Singuläre Punkte, also Punkte, in denen die Spannungen unendlich groß werden, liegen typischerweise auf dem Rand und dort in Eckpunkten oder Punkten, in denen sich die Lagerbedingungen ändern, siehe Bild 6.12.

Wenn wir der Meinung sind, dass man mit Einflussfunktionen auch diese Spannungen – vielleicht nicht direkt in der Ecke, aber in der Nähe – voraussagen kann, dann stehen wir vor einem Problem: Wie gelingt es einer **Punktversetzung** (= Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund) den oberen und unteren Rand der Scheibe in Bild 6.13 in die Richtungen $\pm\infty$ zu verschieben? Anders kann es ja nicht sein, wenn wir der Überzeugung sind, dass die Einflussfunktionen auch in der Nähe solcher singulärer Punkte noch anwendbar sind

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \infty\,. \tag{6.16}$$

Wie funktioniert das? Wie gelingt es einer Punktversetzung eine Scheibe unendlich weit auseinander zu treiben?

Im Grunde haben wir das Phänomen schon bei der Einflussfunktion für die Querkraft kennengelernt. Stellen wir uns vor, wir benutzen dreiecksförmige Elemente, die Querdehnzahl ν sei null (der Einfachheit halber), und wir wollen die Einflussfunktion für die Summe $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$ der Spannungen in den beiden Elementen, die dem Rissgrund unmittelbar benachbart sind, berechnen. Weil wir mit der Summe rechnen, bleibt die Symmetrie des Problems erhalten.

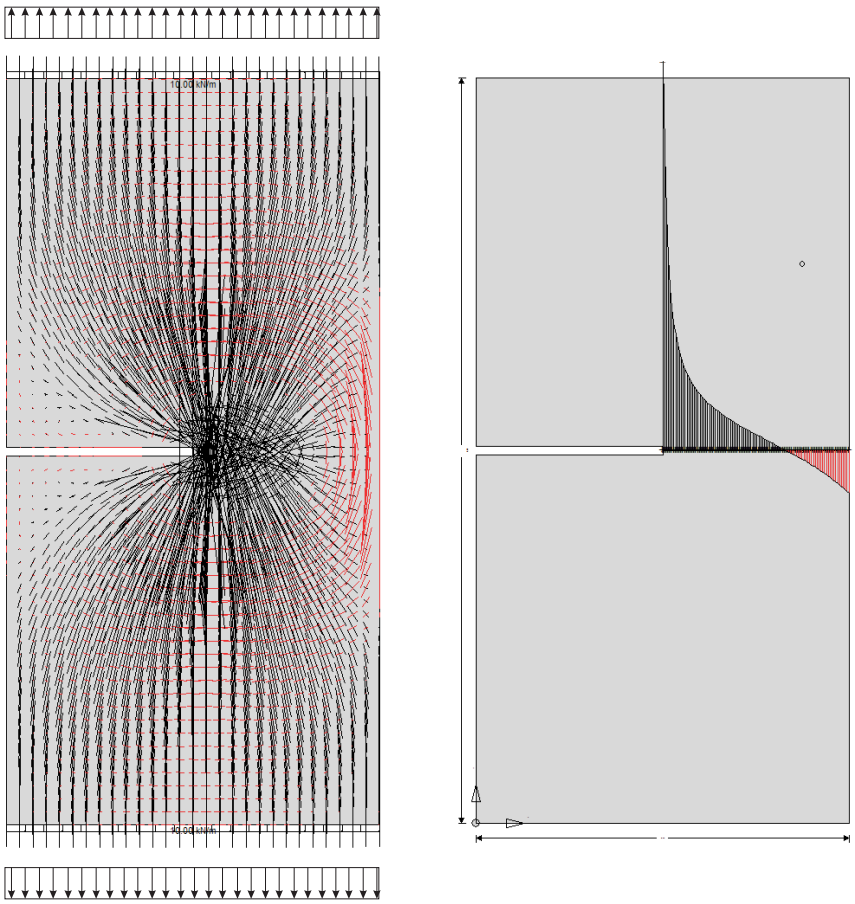


Bild 6.12. Hauptspannungen in einer geschlitzten Scheibe, rechts die Spannungen σ_{yy} (BE-SCHEIBE Pos. Crack)

Wir müssen also die Spannungen σ_{yy} der Ansatzfunktionen als Knotenkräfte aufbringen. Das ergibt das Bild 6.14 *a*, wenn wir die Knotenkräfte, die sich gegenseitig aufheben, weglassen. In dem rückwärtigen Knoten, der ja auf der Symmetrieachse liegt, muss die vertikale Verschiebung null sein. Damit ist die Situation im Grunde dieselbe wie bei einem Kragträger. Wenn die beiden Kräfte die Knoten auseinander treiben, dann drehen sie praktisch die freien Schenkel des Risses um diesen rückwärtigen Knoten und wenn h gegen null geht, dann stellen sich die Schenkel um 90° auf d.h. die vertikalen Verschiebungen (↑ auf Tangente an den Drehkreis) werden unendlich groß.

Wie ist das nun, wenn wir dasselbe Manöver an dem glatten Rand einer Scheibe fahren? Wir berechnen wieder die Einflussfunktion für $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$, aber nun ragt kein Teil der Scheibe über den Außenrand hinaus, siehe Bild 6.14 *c*

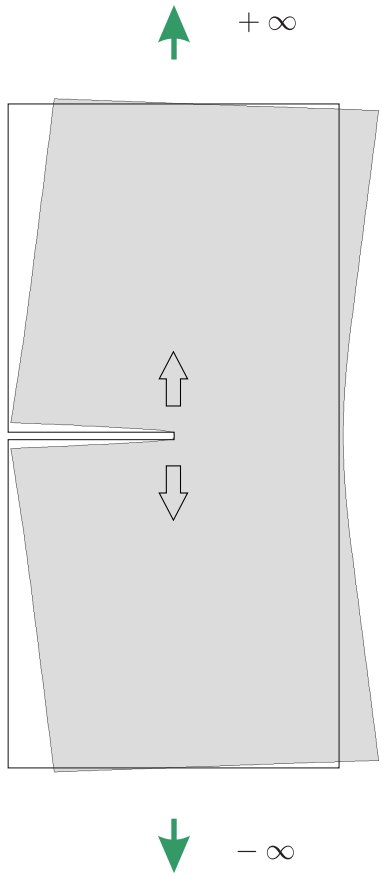


Bild 6.13. Ein Versatz im Rissgrund, muss unendlich große Verschiebungen verursachen (BE-SCHEIBE)

und daher bleiben die Verformungen (in den abliegenden Punkten) endlich. Die Randspannungen $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$ sind in jedem LF endlich.

Auch die singulären Spannungen bei der L-Scheibe in Bild 6.15 rühren daher, dass die beiden Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für die Summe der beiden schrägen Spannungen $2 \cdot \sigma_{\xi\xi}$ erzeugen, im Grenzfall $h \to 0$, die Schenkel um 90° verdrehen.

Bei dem ausgerundeten Zugstab in Bild 6.16 – nur der obere Teil wurde modelliert – werden die Spannungsspitzen vermieden, aber das Versatzmoment dominiert weiterhin die Spannungsverteilung in der Mittelachse.

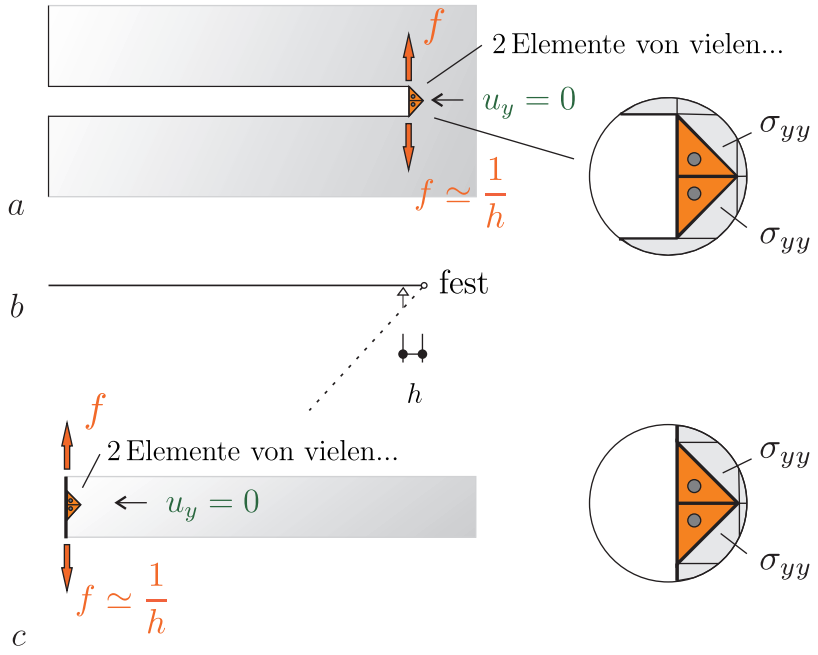


Bild 6.14. a) Dreiecksförmige Elemente, Erzeugung der Einflussfunktion für $2 \cdot \sigma_{yy}$ im Rissgrund, **b)** die Kinematik, **c)** am Außenrand

6.8 Symmetrie der Wirkungen

Es gibt noch ein theoretisches Argument, das diese Überlegungen unterstützt. Betrachten wir noch einmal die gerissene Scheibe. Im Grunde sind hier **zwei Einflussfunktionen** am Werk: Zum einen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund und zum anderen die Einflussfunktion für die vertikalen Verschiebungen am oberen bzw. unteren Rand der Scheibe. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir je einen Punkt auf dem oberen und unteren Rand als Aufpunkte wählen, in denen wir die vertikalen Verschiebungen berechnen. Durch die Wahl von zwei Punkten, unten und oben, bleibt die Symmetrie erhalten.

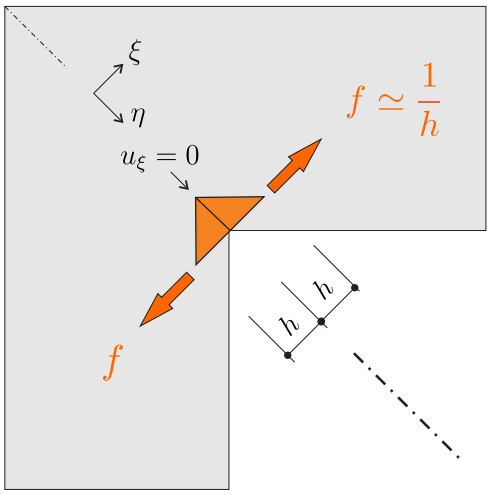
Das sind also zwei Funktionale, die wir

$$J_1(\boldsymbol{u}) = \sigma_{yy}(\boldsymbol{u}) \qquad J_2(\boldsymbol{u}) = u_y(\mathit{oben\ Mitte}) + u_y(\mathit{unten\ Mitte}) \tag{6.17}$$

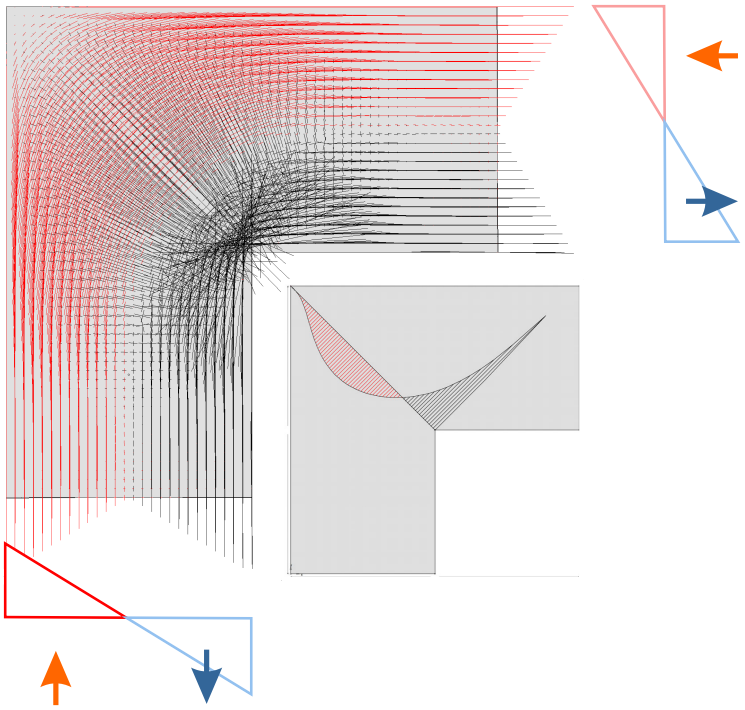
nennen. Zu dem ersten Funktional gehört die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_1$ und zu dem zweiten Funktional die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$.

Nun kann man zeigen, dass die beiden Funktionale ‚über Kreuz' gleich sind, d.h.

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = J_2(\boldsymbol{G}_1)\,, \tag{6.18}$$



a



b

Bild 6.15. In der einspringenden Ecke werden die Spannungen unendlich groß (BESCHEIBE)

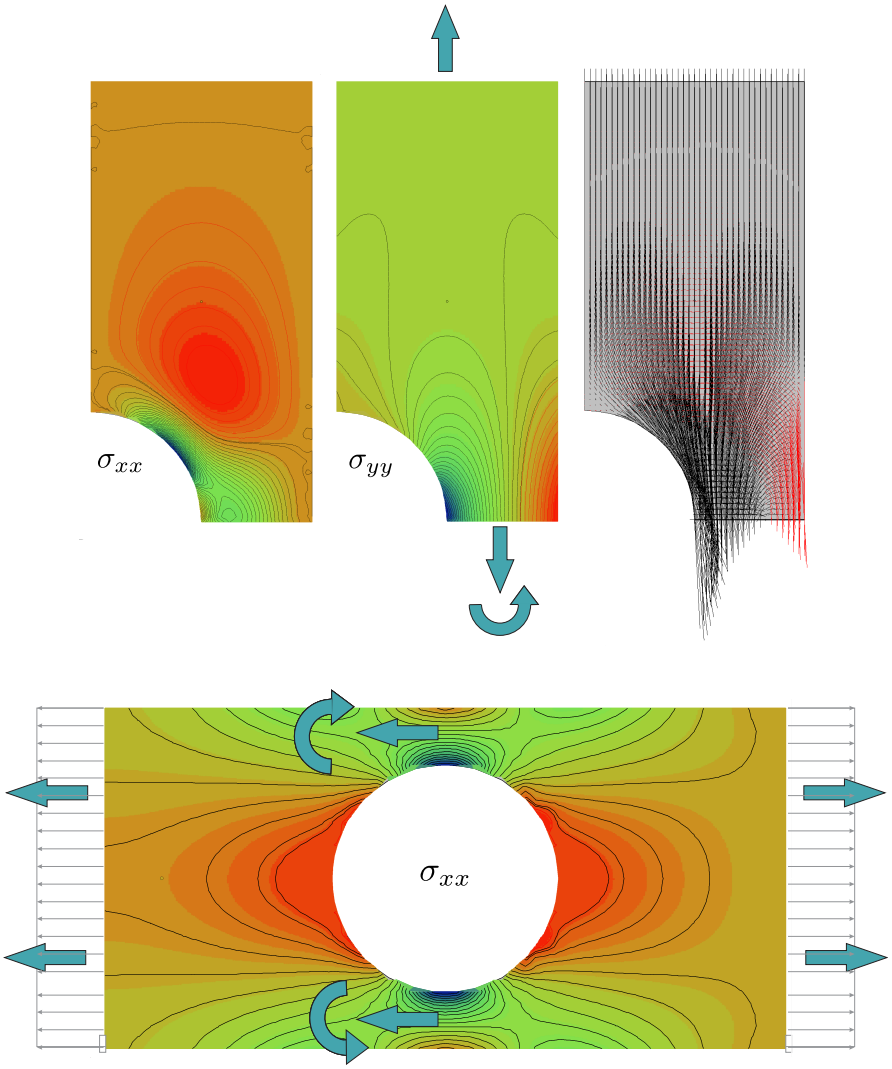


Bild 6.16. Das Versatzmoment prägt die Spannungsverteilung (BE-SCHEIBE, Pos. STRESSA, ZSTAB)

was übrigens für alle Paare von Funktionalen und deren Einflussfunktionen gilt – nicht nur hier.

Gleich bedeutet hier das folgende: $\boldsymbol{G}_2$ wird von zwei Einzelkräften $P = \pm 1$ generiert, die am oberen und unteren Rand der Scheibe ziehen. Die Wirkung dieser beiden Kräfte führt zu unendlich großen vertikalen Spannungen σ_{yy} in der Rissfuge, also

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = \infty \qquad J_1 \text{ misst } \sigma_{yy} \text{ von } \boldsymbol{G}_2\,. \tag{6.19}$$

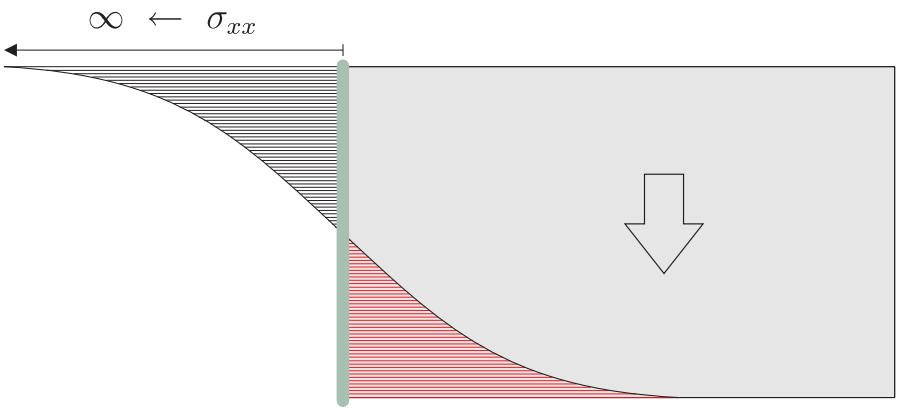


Bild 6.17. Das Eigengewicht der Kragscheibe erzeugt unendlich große Spannungen in den Randfasern (BE-SCHEIBE)

Umgekehrt führt die Spreizung der Rissfuge, wie wir uns überzeugt haben, zu unendlich großen Verschiebungen an der oberen und unteren Kante, also

$$J_2(\boldsymbol{G}_1) = \infty \qquad J_2 \text{ misst } u_y(\text{oben/unten}) \text{ von } \boldsymbol{G}_1\,, \tag{6.20}$$

und die Theorie sagt, dass diese beiden Werte gleich groß sind. Wenn also der eine Wert unendlich ist, dann muss es auch der andere sein.

6.9 Kragscheibe

Aber selbst in einer scheinbar harmlosen Standardsituation, wie der Scheibe in Bild 6.17, treten im LF g unendlich große Spannungen in den äußersten Fasern auf. Wir dürfen annehmen, dass das auch passieren würde, wenn das Eigengewicht durch eine Einzelkraft P ersetzt würde, die in irgendeinem inneren Punkt $\boldsymbol{y}_P$ der Scheibe angreift.

Wenn dies richtig ist, dann muss die Einflussfunktion für die obere Randspannung σ_{xx} den Wert ∞ in fast allen Punkten der Scheibe haben

$$\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_P, \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\infty} \bullet \boldsymbol{P}\,. \tag{6.21}$$

Wir rechnen das nach: In dem FE-Modell muss man zur Berechnung der Einflussfunktion die Spannungen σ_{xx} der Ansatzfunktionen des Netz in dem Eckpunkt als Belastung aufbringen.

Weil nur die Ansatzfunktionen des Eckelementes selbst in der Ecke Spannungen $\sigma_{xx} \neq 0$ generieren, werden nur die Knoten des Eckelementes mit

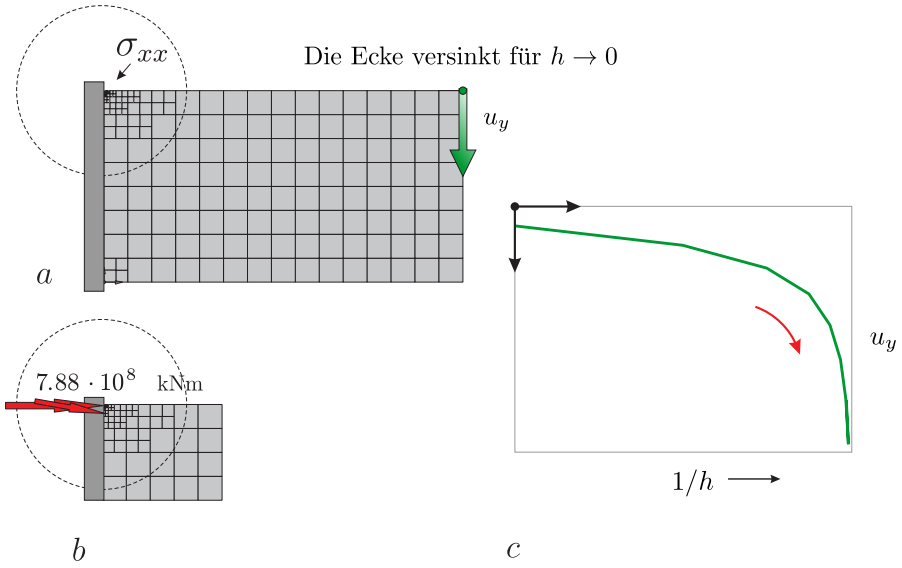


Bild 6.18. Berechnung der Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} im Eckpunkt, **a)** Netz, **b)** Detail mit äquivalenten Knotenkräften, **c)** vertikale Verschiebung der oberen rechten Ecke in Abhängigkeit von der Elementlänge h (WINFEM)

diesen Spannungen als Knotenkräfte, $f_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ belastet, und diese Kräfte bzw. Spannungen sind proportional zu E/h, wobei $E = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2 der E-Modul des Materials ist, und h die Elementlänge.

Beim numerischen Test, siehe Bild 6.18, mit adaptiver Verfeinerung wuchs die Eckverschiebung in der Tat exponentiell mit $h \to 0$ an.

Um hinter das Geheimnis der singulären Spannungen zu kommen, ersetzen wir in Gedanken die Hauptspannungen durch paarweise orthogonale Pfeile (**‚Stromlinien‘**), siehe Bild 6.19 *a* und 6.19 *b*. Die Vektorsumme der Pfeile muss dann gleich der Resultierenden der aufgebrachten Belastung sein. Anders gesagt, die Versetzung, die die beiden Pfeile verursachen, muss den Angriffspunkt der Resultierenden um einen Meter anheben.

Damit ist auch klar, warum die Spannungen in den äußersten Fasern singulär werden. Je näher die Stromlinien dem linken Rand kommen, um so flacher müssen sie verlaufen, weil der Rand in vertikaler Richtung festgehalten wird, und das bedeutet, dass sich die Stromlinien **weiter und weiter strecken müssen**, damit ihre immer kleiner werdenden vertikalen Komponenten der Belastung das Gleichgewicht halten können.

Das ist wie bei einer **Straßenlaterne**, die an einem Seil zwischen zwei Häusern hängt. Bevor man das Seil richtig straff ziehen kann, reißt das Seil.

Wenn die Ecken ausgerundet werden, dann können die Stromlinien sich drehen, und dann haben sie es leichter, das Gleichgewicht mit der vertikalen

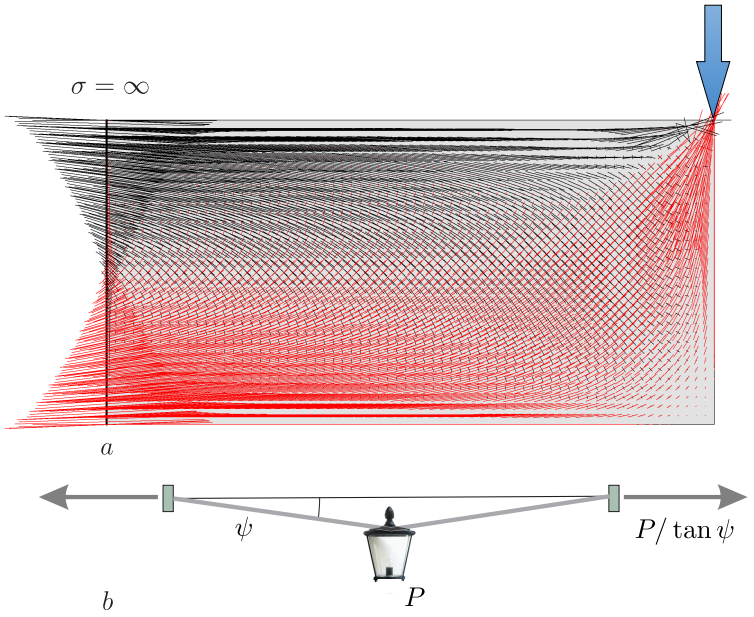


Bild 6.19. Kragscheibe, **a)** Hauptspannungen (‚Stromlinien'), **b)** will man den Durchhang einer Straßenlaterne zu null machen, braucht man eine unendlich große Zugkraft (BE-SCHEIBE)

Belastung zu halten, siehe Bild 6.20 und 6.21. Dann besteht kein Grund mehr, unendlich große Spannungen zu generieren.

Numerische Tests belegen, dass horizontale Kräftepaare, die mit einem **Lastmoment** einhergehen, nicht zu singulären Spannungen in der Einspannfuge führen, siehe Bild 6.22, und ebenso gilt das für vertikale Kräftepaare.

6.10 Standardsituationen

Es braucht aber nicht eine Kragscheibe, um Singularitäten zu produzieren. Singularitäten treten auch an so harmlos scheinenden Stellen wie den Ecken von Öffnungen auf, siehe Bild 6.23. In der Praxis bemerkt man diese Singularitäten in der Regel nicht, weil man nicht so stark verfeinert, gleichwohl wird man aber auch auf gröberen Netzen schon erste Anzeichen dafür entdecken. Die konstruktive Bewehrung ist aber in der Regel in der Lage, solche Effekte aufzufangen.

Wenn man aber wirklich in die Ecken hineingeht wie in Bild 6.24, dann sieht man, dass die Spannungen in der Tat unendlich groß werden. Bei hochbelasteten Bauteilen im Maschinenbau, etwa Turbinenschaufeln, sind solche Spannungsspitzen durchaus bemessungsrelevant.

Die Wandscheibe in Bild 6.24 wurde mit Randelementen gerechnet und die singulären Spannungen zeigen sich deutlich. Die BE-Lösung kann diese

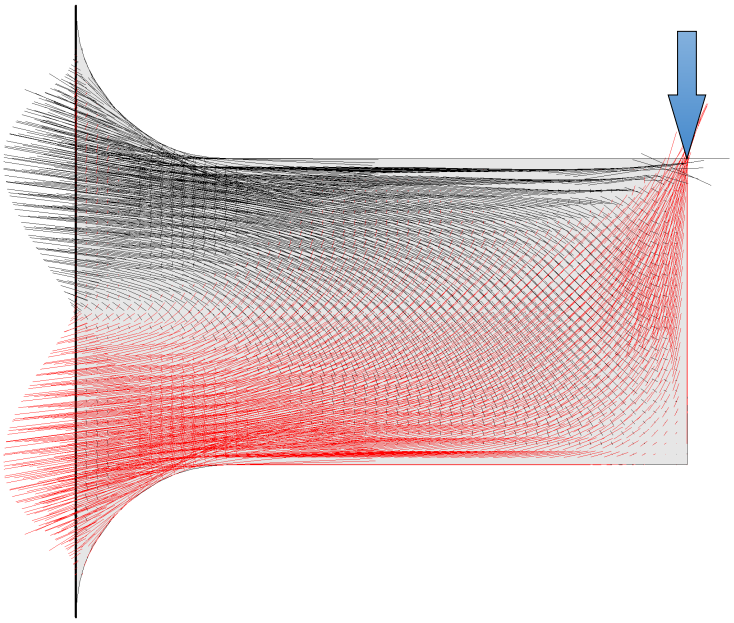


Bild 6.20. Wenn man die Ecken ausrundet, dann können sich die ‚Stromlinien' (= Hauptspannungen) verdrehen und dann haben sie es leichter der vertikalen Belastung das Gleichgewicht zu halten (BE-SCHEIBE, Pos. KRAGR5)

Singularitäten abbilden, sie sind in der Lösung enthalten. Das gilt für alle Scheiben- und Plattenberechnungen, Bild 3.125, mit Randelementen. Das muss nicht heißen, dass die Singularitäten bis auf das i-Tüpfelchen exakt sind, aber die Tendenz stimmt wenigstens.

FE-Netze sind dafür in der Regel zu grob. Die Spannungen der FE-Lösung weichen in den Ecken deutlich von der BE-Lösung ab. Wenn man aber FE-Resultate mit BE-Resultaten im ganzen vergleicht, dann sind die Abweichungen in den Schnittgrößen und der Bewehrung in der Regel gering.

Frage: Muss man also die Singularitäten in einer Scheibe mit finiten Elementen genau nachfahren, oder reicht es nicht aus, das Netz da zu verfeinern (oft unterbleibt auch das), wo man Probleme erwartet?

Und, angenommen man modelliert die Nichtlinearität in einer Ecke mit drei verschiedenen Modellen, *A, B, C*. Wie groß ist der Unterschied in der Ferne, was kommt im Rest der Scheibe an? Es ist zu vermuten, dass die Unterschiede minimal sind. Der Einfluss in der Ferne ist doch der entscheidende Punkt. Ausgetüftelte nichtlineare Untersuchungen oder *multi-scale models* ohne Würdigung dieses Aspekts sind wenig sinnvoll. Wie breiten sich Störungen über ein Netz aus, wie beeinflusst die Modellierung der nichtlinearen Zone die Ausbreitung?

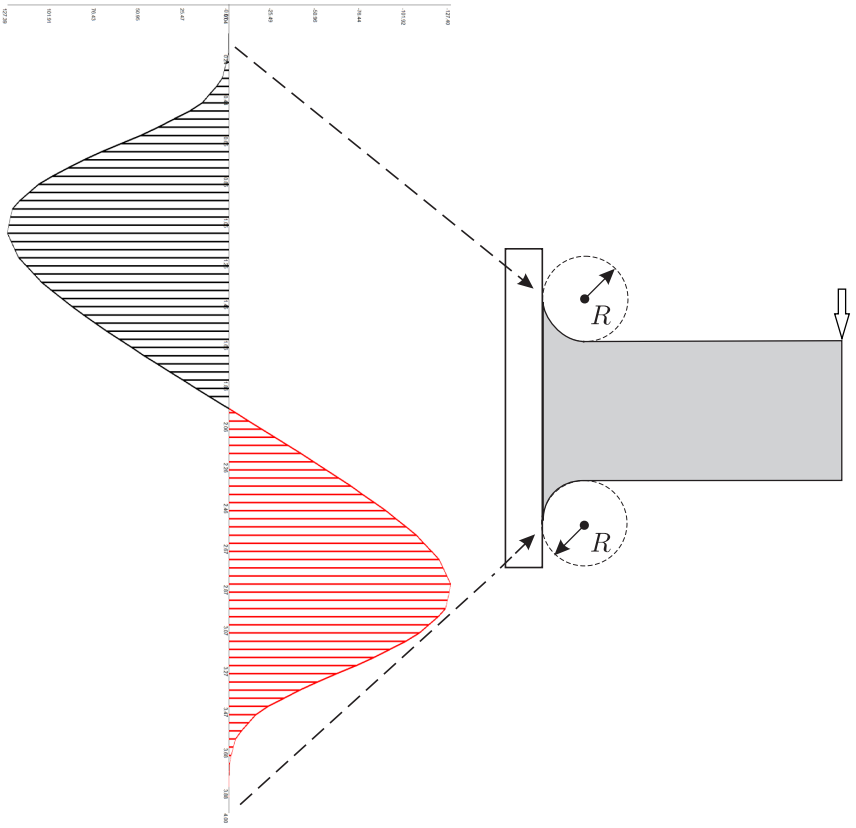


Bild 6.21. Spannungsverteilung (σ_{xx}) in der Einspannfuge, wenn die Ecken ausgerundet werden (BE-SCHEIBE, Pos. KRAGR5, Satz 2, direkt an der Wand)

Im linearen Fall kann man die Fernfeldwirkung von Störungen oder Steifigkeitsänderungen mit den Kräftepaaren $\boldsymbol{f}^+$ erfassen. Jeder kurze, nur momentane Versatz (Unstetigkeit) im Koeffizienten einer Differentialgleichung führt im Grunde zu einem solchen *‚hickup‘*. Die Lösung wackelt kurz, ist aber danach bald wieder im alten Gleis.

6.11 Almost everywhere

Wenn das Integral einer Funktion null ist

$$\int_0^l f(x)\,dx = 0\,, \tag{6.22}$$

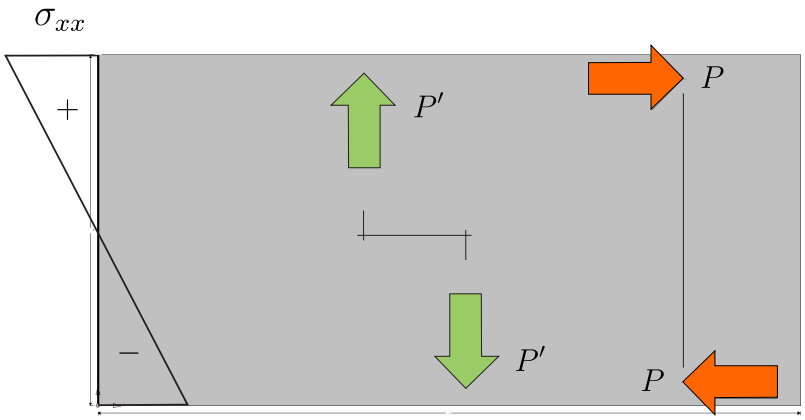


Bild 6.22. Die Biegespannungen σ_{xx} in der Einspannfuge bleiben in diesen Lastfällen endlich (BE-SCHEIBE)

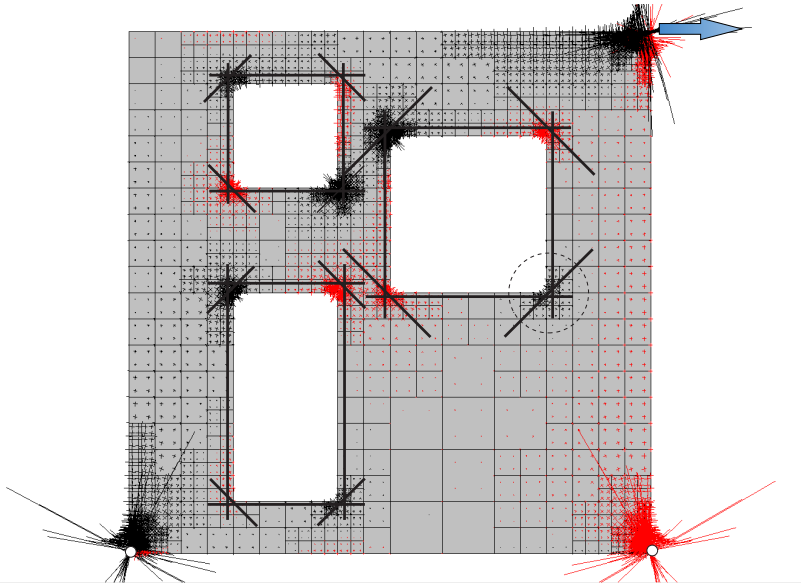
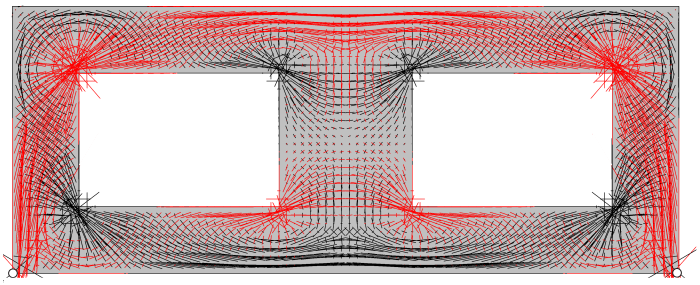
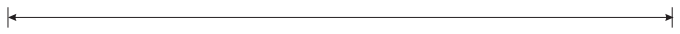
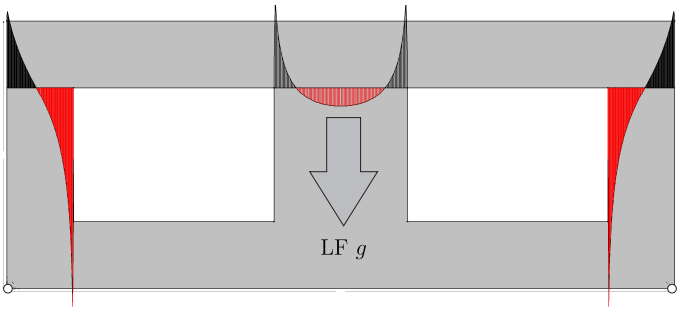


Bild 6.23. Wandscheibe mit adaptiv verfeinertem Netz. Die Spannungen in den Ecken der Öffnungen werden konstruktiv, wie angedeutet, durch Längs- und Schrägbewehrung aufgenommen. Nur die Punktlager sollte man besser durch kurze Linienlager ersetzen (WINFEM)

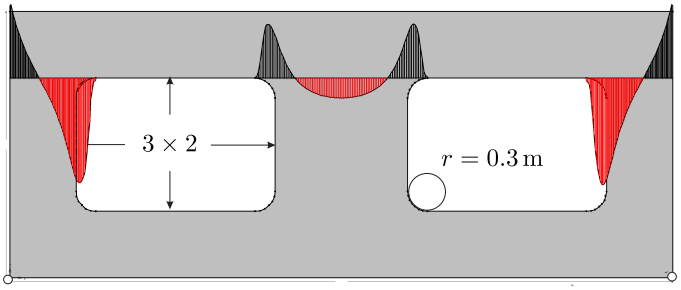


a

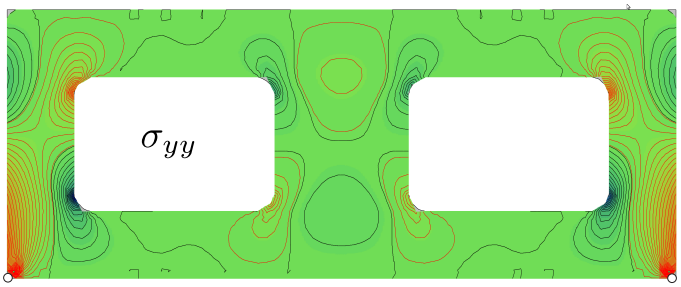




b



c



d

Bild 6.24. Wandscheibe unter Eigengewicht, **a)** Hauptspannungen **b)** Spannungen σ_{yy} in drei horizontalen Schnitten (BE-SCHEIBE Pos. R2 und R2A Satz 2). Solche Spannungen haben 1954 zum Absturz der drei Flugzeuge geführt, siehe Kapitel 3.88, **c)** ausgerundete Ecken und **d)** Niveaulinien.

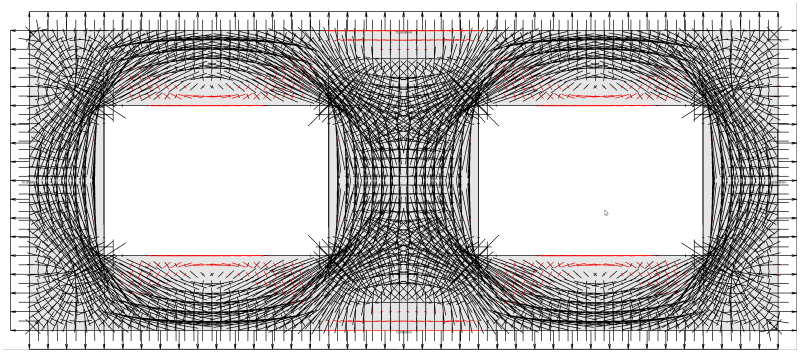


Bild 6.25. Versuch die Zugspannungen aus dem Überdruck in der Kabine durch Linienlasten zu simulieren (BE-SCHEIBE), siehe Kapitel 3.88.

dann ist die Funktion *almost everyhwere* null, aber nicht notwendig identisch null, weil der Integralbegriff solche ‚harten' *statements* nicht deckt.

Daran fühlt man sich erinnert, wenn man an die Einflussfunktionen denkt. Wenn man die Mitte einer kreisförmigen Membran mit einem runden Stab stützt und den Radius ε des Stabs gegen null gehen lässt, dann werden die Schnittkräfte, technisch der Gradient $\nabla w = \{w_{,x}\,, w_{,y}\}$, singulär. Dies bedeutet aber doch auch, dass die Einflussfunktion für $w_{,r}$ singulär wird (Polarkoordinaten und rot. sym. Belastung $p(r)$) und zwar fast überall, denn anders ist es nicht vorstellbar. Wo immer die Last angreift, ein gewisser Teil davon wird über das zentrale Lager abfließen und unendlich große Spannungen $w_{,r}$ produzieren – also muss die Einflussfunktion für $w_{,r}$ doch **überall** den Wert ∞ haben.

Ein Mathematiker dürfte hier zu Vorsicht raten, weil eine Nadel eine Menge ‚vom Maß Null' ist und es mathematisch vielleicht nicht ganz klar ist, welche Schlüsse erlaubt sind, aber das *almost everywhere* deutet sich auch auf dem Bildschirm an, wie man an dem Kragarm in Bild 6.18 sieht.

Gleich wo die Belastung auf dem Kragarm steht, die Spannung σ_{xx} in der Einspannstelle dürfte immer unendlich groß werden und daher sollte die Einflussfunktion in der Grenze einem nach unten geklappten gelenkig gelagertem Stab gleichen, an dem sich in der Tiefe nur noch der Wert $\sigma = \infty$ ablesen lässt, egal wo die Last – und sei sie noch so klein – steht.

Das gilt nicht nur hier, sondern es gilt eigentlich für alle Einflussfunktionen von singulären Punkten. Die Spannung in einer Ecke wird singulär, aber auch die Einflussfunktion für die Spannung selbst ‚läuft über', hat den Wert ∞ fast überall.

Die Knotenkräfte j_i, die die Einflussfunktion für die Lagerkraft an der Spitze der Wand in Bild 3.120 c erzeugen, werden mit der Annäherung an die Spitze immer größer, und in der Grenze müssen diese unendlich großen Kräfte, mit Abstand null von der Wand, die Umgebung so deformieren, dass

die Durchbiegung der Platte, die Einflussfunktion, *almost everywhere* unendlich groß wird.

Das können wir uns nicht vorstellen. Nach zwei, drei Zwischenlagern sollte eine Einflussfunktion auf den Pfad der Tugend zurückgefunden haben. Wir müssen den Grenzfall $h \to 0$ daher als akademische Übung ansehen. Realiter treten singuläre Spannungen $\sigma = \infty$ nicht auf. Anders geht es ja auch nicht, denn für eine singuläre Größe gibt es keine Einflussfunktion. Trotzdem ist es hilfreich, sich an solche Punkte heranzuwagen.

6.12 Zu glatt ist auch nicht gut

Um die FE-Lösung zu verbessern, kann man die Elementgröße verkleinern, ***h*-Methode**, oder den Polynomgrad der *shape functions* erhöhen, ***p*-Methode**. In der *computational mechanics* wird die *p*-Methode jedoch kaum angewandt, weil ‚glatt' nicht unbedingt gut bedeuten muss. Wir hatten ja in Kapitel 4.4 die quadratische *bubble-function* erwähnt, der es nicht gelingt die exakte Lösung im zugehörigen Knoten zu interpolieren, weil sie zu glatt ist. Aus statischer Sicht braucht man **‚grobe' Ansätze**, um die Spannungssprünge und Singularitäten im Fusspunkt der Dirac Deltas (den Auslösern der Einflussfunktionen) annähern zu können.

Das Problem der *p*-Methode ist sinngemäß dasselbe, wie bei der Interpolation von Funktionen auf einem regelmäßigen Gitter mit hohen Polynomansätzen.

Zum Exempel betrachten wir die ‚Runge-Funktion'[4]

$$w(x) = \frac{1}{1 + 25\,x^2} - \frac{1}{26} \tag{6.23}$$

mit den Endwerten $w(-1) = w(1) = 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Eine Interpolation in neun gleichabständigen Punkten mit einem Polynom achter Ordnung

$$w_h(x) = \sum_{i=0}^{8} w_i\, x^i \tag{6.24}$$

ergab das Resultat in Bild 6.26 *a*. Jede weitere Erhöhung des Polynomgrades führte zu noch größeren **Oszillationen**, [212].

Wir können dem ganzen ein statisches Gesicht geben, wenn wir die Funktion $w(x)$ als die Biegelinie eines quer gespannten Seils (Vorspannung $H = 1$) ansehen, das die Streckenlast

$$p(x) = -w''(x) = \frac{50}{(1 + 25\,x^2)^2} - \frac{5000\,x^2}{(1 + 25\,x^2)^3} \tag{6.25}$$

trägt, siehe Bild 6.26 *b*. Ist $G(y, x_i)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung in einem der neun Knoten x_i, dann gilt

[4] Auf Runge gehen die Untersuchungen zur Interpolation mit Polynomen zurück.

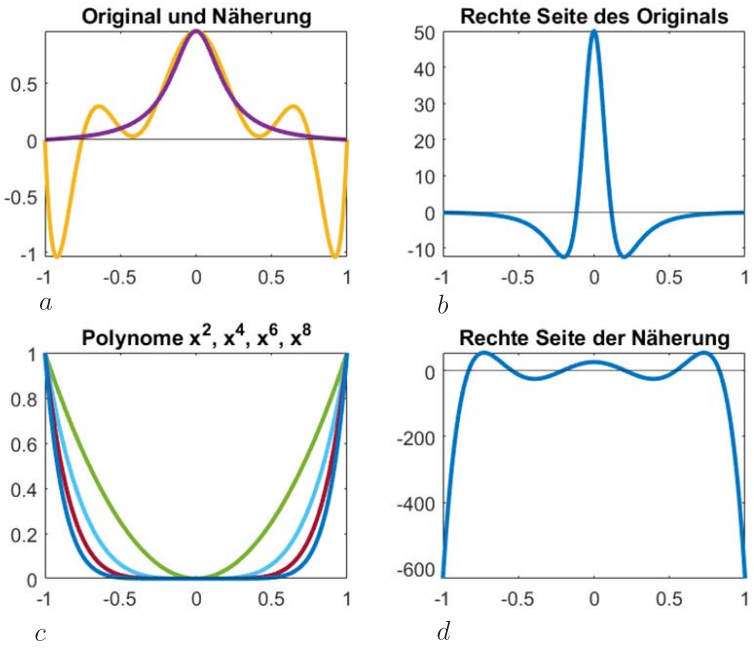


Bild 6.26. Polynominterpolation, **a)** Original und Näherung, **b)** die Belastung $-w''$ der Originals, **c)** die Ansätze x^i und **d)** die Belastung $-w_h''$ der Interpolierenden (MATLAB™)

$$w(x_i) = \int_{-1}^{+1} G(y, x_i) p(y)\, dy \tag{6.26}$$

und daher müssen wir die Gewichte w_i des Ansatzes (6.24) so einstellen, dass

$$w_h(x_i) = \int_{-1}^{+1} G(y, x_i)(-w_h''(y))\, dy = w(x_i) \tag{6.27}$$

in den sieben Innenpunkten x_i und den Enden $w_h(-1) = w_h(1) = 0$ ist. Nun ist die ‚Ersatzlast' $-w_h''(x)$ eine Entwicklung nach Potenzen von x

$$-w_h''(x) = -(w_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 + w_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^1 + \ldots + w_8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot x^6) \tag{6.28}$$

und wenn man sich die ‚Streckenlasten' x^i einmal aufzeichnet, dann sieht man, dass die Streckenlasten praktisch nur in den **Endzonen** des Intervalls leben, siehe Bild 6.26 *c*. Gleichzeitig läuft das Original in den Endzonen gegen null, $w(x) \simeq 0$, und so sind große Anstrengungen, sprich **Oszillationen** in den Gewichten w_i, nötig, um den sich dort ‚aufbäumenden' Ansatz unter Kontrolle zu halten, $w_h(x) \simeq 0$ zu erzwingen.

Bemerkung 6.2. Die Biegelinie $w(x)$ kann man auf zwei Arten schreiben,

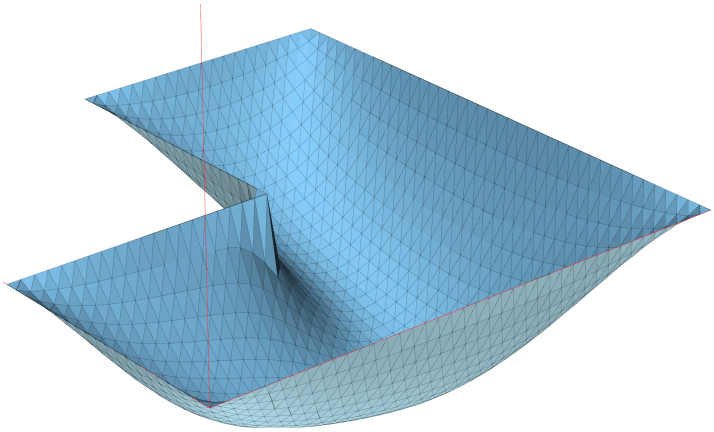


Bild 6.27. Membran über L-förmigem Grundriss unter Winddruck (BE-LAPLACE)

$$w(x) = \int_{-1}^{+1} \delta(y-x)\, w(y)\, dy = \int_{-1}^{+1} G(y,x)\, (-w''(y))\, dy \tag{6.29}$$

und die Runge-Interpolation nutzt den ersten und die Statik den zweiten Ausdruck. Mit *integration by parts* kommt man von der einen Seite zur anderen.

6.13 Singularitäten in Einflussfunktionen

Zu dem Thema *pollution* gehört auch die Auswirkung von Singularitäten auf die Ergebnisse. Bei Flächentragwerken treten in der Regel immer Singularitäten auf, d.h. Lagerkräfte oder Spannungen neigen dann zu den typischen Oszillationen. Der Ingenieur tut das in der Regel mit der Bemerkung ab, *‚das Material ist klüger‘*, und achtet nicht weiter darauf, weil er aus Erfahrung weiß, dass außerhalb der gestörten Zone die Ergebnisse doch ganz vernünftig aussehen und er sich nicht vorstellen kann, dass Singularitäten in abliegenden Ecken die Genauigkeit negativ beeinflussen sollen.

Die Singularitäten propagieren aber in die Einflussfunktionen hinein, sie verschlechtern die Qualität der Einflussfunktionen und damit der FE-Lösung – auch ‚im Feld‘, denn auch das Verschiebungsfeld einer Scheibe ist eine Potentiallösung.

FE-Programmautoren sollten sich daher – zumindest rudimentär – mit den Grundbegriffen der Potentialtheorie vertraut machen, denn sie betrifft auch die finiten Elemente, und das wortwörtlich – im Kern!

Um konkret zu werden, betrachten wir ein Segeltuch, das über einen L-förmigen Grundriss gespannt ist und das unter dem Winddruck ausbeult, siehe Bild 6.27.

Es ist klar, dass die Querkräfte v_x und v_y an der einspringenden Ecke unendlich groß werden, weil die Querkräfte proportional zu der Neigung der

Biegefläche w in x- und y-Richtung sind

$$v_x = H\, w_{,x} \qquad v_y = H\, w_{,y} \qquad H = \text{Vorspannung}\,, \tag{6.30}$$

und in der einspringenden Ecke sich die Membran an die Wände anlegen wird, $w_{,x} = \infty$ und $w_{,y} = \infty$, dort also ein singulärer Punkt liegt.

Die Querkräfte sind am Rand die Aufhängekräfte.

Wenn wir nun, wie gewohnt, die Durchbiegung (FE-Lösung) der Membran durch ihre Einflussfunktion darstellen

$$w_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{6.31}$$

dann deutet nichts darauf hin, dass der Kern $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ der Einflussfunktion von minderer Qualität sein soll. Wo versteckt sich die Singularität?

Wir wollen die Antwort nur skizzieren[5]. Wer sich mit der ***Potentialtheorie*** oder der Methode der Randelemente auskennt, siehe Kap. 5.38.1, weiß, dass man jede Lösung der Gleichung $-\Delta w = p$ wie folgt darstellen kann

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \frac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n}\, w(\boldsymbol{y}))\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{6.32}$$

Der ‚Geist' in dieser Maschine, die Funktion

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi}\, \ln |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\,, \tag{6.33}$$

heißt ***Fundamentallösung***, weil sie der Gleichung $-\Delta g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ genügt.

Man rekonstruiert also die Biegefläche w mit Hilfe von $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ aus ihren Randwerten w und $\partial w/\partial n$ und dem Winddruck p, der auf ihr lastet.

Diese Integraldarstellung kann man auch auf die Einflussfunktion $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ anwenden. Nun ist aber das p, das zu $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ gehört, ein Dirac Delta $\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ und $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ ist auf dem Rand Γ null, so dass sich die Einflussfunktion auf

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = &\int_\Gamma [g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \frac{\partial G_h}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) - \frac{\partial g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})}{\partial n}\, G(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})]\, ds_{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \underbrace{\int_\Omega g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}}_{= g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \int_\Gamma g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})\, ds_{\boldsymbol{\xi}} + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{6.34}$$

verkürzt.

Diese Formel gilt sinngemäß auch für die FE-Näherung $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, die ja die Lösung des Randwertproblems

[5] Für mehr Details siehe [117] und [126].



Bild 6.28. Falten in einem Tuch, [291]

$$-\Delta G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad G_h = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \tag{6.35}$$

ist, wobei $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ allerdings ein Flickenteppich von Lasten ist, die versuchen einer Punktlast nahe zu kommen, sie zu simulieren. Also gilt für $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ die Darstellung

$$G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y}) \frac{\partial G_h}{\partial n}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\, ds_{\boldsymbol{\xi}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\delta_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{6.36}$$

Und jetzt sieht man die **kritische Stelle**. Spannungsspitzen an der einspringenden Ecke bedeuten, dass dort die Normalableitung des Segeltuchs $\partial G_h/\partial n$, also die Neigung des Segeltuchs zum Rand hin, unendlich groß ist, weil sich das Segeltuch dort wahrscheinlich an die Wände anlegt. (Wir reden jetzt über den Lastfall $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$).

Solche **singulären Verläufe** kann man aber mit finiten Elementen sehr schlecht annähern, d.h. die Normalableitung $\partial G_h/\partial n$ der FE-Lösung wird in der Ecke sehr ungenau sein. Und weil diese Ungenauigkeit nun gemäß (6.36) auf $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ durchschlägt, ist auch $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ von minderer Qualität – nicht nur in der Ecke, sondern überall im Feld, wo immer der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ liegt – und damit auch die FE-Lösung w_h, die ja von G_h generiert wird.

Singularitäten auf dem Rand propagieren über diesen Mechanismus ins Innere und verringern die Qualität der Einflussfunktion und damit der FE-Lösung selbst.

$$\frac{\partial G}{\partial n} \quad \to \quad \frac{\partial G_h}{\partial n} \quad \to \quad G_h = \int_\Gamma (g\, \frac{\partial G_h}{\partial n} + \ldots \quad \to \quad w_h = \int_\Omega G_h\, p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}$$

Nichts kann diese Kette sprengen

Das ist wie bei einem Segeltuch, das Falten wirft, wenn die Aufhängung am Rand fehlerhaft ist, siehe Bild 6.28.

Gibb's phenomenon ist diesem Effekt geschuldet, siehe Bild 3.171. Die Singularität an der Sprungstelle $x = 0$ pflanzt sich nach Innen fort, die Fourier-Reihe kommt nicht zur Ruhe, sie oszilliert um den Mittelwert 1.

Bemerkung 6.3. Genau genommen müsste man das Gebietsintegral in (6.36) noch um die Anteile aus den Linienkräften $l_h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ (= Sprünge in der Normalableitung der Biegefläche, also den Knicken auf den Elementkanten Γ_i, wenn δ_0 im Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ steht, $\boldsymbol{\xi}$ = lfd. Koordinate auf Γ_i), erweitern

$$\int_{\Omega} g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \delta_h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} + \sum\nolimits_i \int_{\Gamma_i} g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, l_h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})\, ds_{\boldsymbol{\xi}} \,. \tag{6.37}$$

Wir können das aber in Gedanken dem Gebietsintegral zuschlagen.

Nichtlineare Probleme

Auch die Lösung einer nichtlinearen Feldgleichung ist am Ende eine Fläche, die sich elementweise über das Netz spannt. Und diese einzelnen Flächen unterliegen derselben Mathematik, wie die Lösung einer Poisson-Gleichung. Jede Fläche ist eine Funktion mit Werten u und $\partial u/\partial n$ auf dem Elementrand und Werten $-\Delta u$ im Innern des Elements[6]. Und die Güte der Funktion hängt von den Randwerten und der Genauigkeit der ‚Last' $-\Delta u$ ab. Wenn die Normalableitung in einer Elementecke ‚klemmt', oder das $-\Delta u$ ‚Kapriolen' schlägt, dann wirkt sich das negativ auf die Darstellung der Lösung aus.

Scheiben

Was bei einer Membran die Normalableitung ist, die Aufhängekräfte, sind bei einer Scheibe die Randspannungen, der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$, denn die Integraldarstellung des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \{u_1, u_2\}^T$ einer Scheibe lautet (*in Tensor Notation*)

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} (G_{ij}^F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, t_j(\boldsymbol{y}) - T_{ij}^F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, u_j(\boldsymbol{y}))\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} G_{ij}^F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_j(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{6.38}$$

Die Funktionen $G_{ij}^F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ sind die Verschiebungen ($j = 1, 2$) (x- und y-Richtung) der elastischen Ebene, wenn eine Einzelkraft $P = 1$ den Knoten $\boldsymbol{x}$ in die Richtung $i = 1, 2$ drückt und die Funktionen $T_{ij}^F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ sind die Randspannungen ($j = 1, 2$) (x- und y-Richtung) dieser Felder.

Die 2×2 Matrix $\boldsymbol{G}^F$ heißt die ***Somigliana Matrix*** und sie spielt dieselbe Rolle wie die Funktion $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ in (3.69), ihre Spalten sind die Fundamentallösungen des 2×2 Systems (7.49).

[6] $-\Delta u$ wird in der Regel keine direkte statische Bedeutung haben.

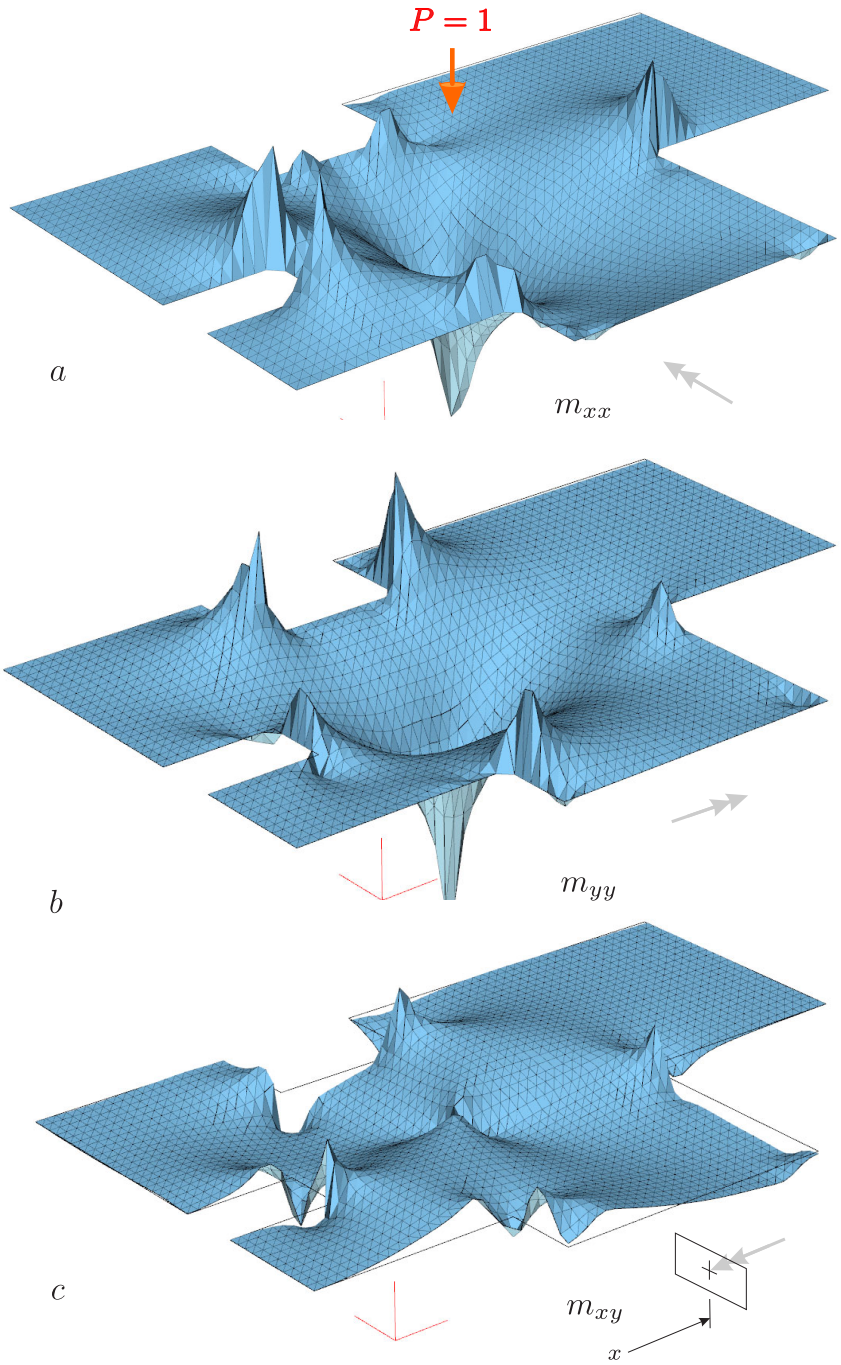


Bild 6.29. Gelenkig gelagerte Platte; Plot der Momente aus dem LF $P = 1$. Das sind also die Momente der Einflussfunktion $G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$. In den einspringenden Ecken werden die Momente singulär und das hat einen negativen Einfluss auf die Güte der FE-Einflussfunktion und damit auf w (BE-PLATTE).

Wenn wir diese Integraldarstellung auf die beiden Einflussfunktionen ($i = 1, 2$), *horizontal, vertikal*, anwenden, dann ergibt sich

$$G_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, T_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) - T^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, G_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}))\, ds_{\boldsymbol{\xi}} + \int_\Omega G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \delta_{ik}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} \tag{6.39}$$

und im Fall der FE-Lösungen

$$G^h_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \underset{\uparrow}{T^h_{ik}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) - T^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, G^h_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}))\, ds_{\boldsymbol{\xi}} + \int_\Omega G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y})\, \delta^h_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{6.40}$$

Dies genügt, um zu erkennen, dass der sensitive Teil in der Approximation die Randspannungen T^h_{ik} aus den genäherten Dirac Delta δ^h_{ik} sind, also aus den Lasten, die versuchen die Wirkung des echten Dirac Deltas im Aufpunkt anzunähern. Die Oszillationen der Randspannungen T^h_{ik} in den singulären Punkten des Randes werden die Güte von $G^h_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ in ***allen Punkten*** $\boldsymbol{x}$ der Scheibe Ω herabsetzen und damit auch die FE Lösung $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{G}_h, \boldsymbol{p})$.

Platten

Bei einer Platte sind es die **Momente** und der **Kirchhoffschub** (Querkräfte) auf dem Rand, von deren Qualität die FE-Einflussfunktionen im wesentlichen abhängen, siehe Bild 6.29. Die Formel lautet hier, in der Notation stark vereinfacht,

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, w''' + g' w'' + g'' w' + g''' w)\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\, p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{6.41}$$

wobei

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi K}\, r^2 \ln r \qquad K = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{6.42}$$

die **Fundamentallösung** ist und K die Plattensteifigkeit.

Es steht hier w' für die Verdrehung (Normalableitung) am Rand, w'' für das Einspannmoment und w''' für den Kirchhoffschub, die Lagerkraft. Die exakte Einflussfunktion G hat die Randwerte $G = 0$ und $G'' = 0$ (gelenkig gelagerter Rand), so dass sich die Formel für die Einflussfunktion einer solchen Platte auf

$$G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, G''' + g''\, G')\, ds_{\boldsymbol{y}} + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \cdot 1 \tag{6.43}$$

verkürzt.

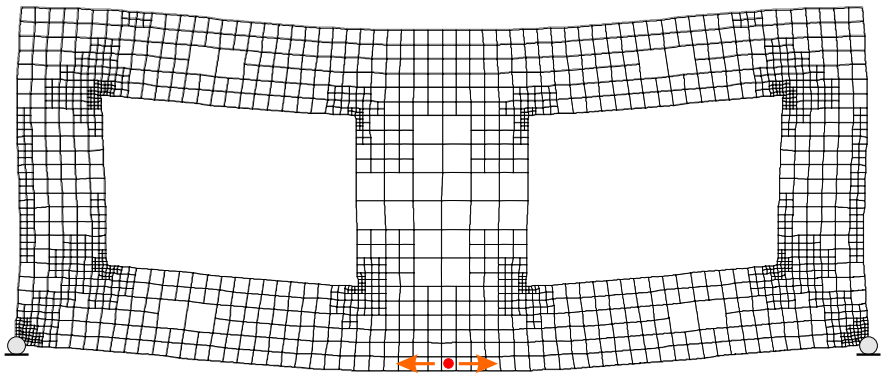


Bild 6.30. Punktgelagerte Wandscheibe im LF g, mit der adaptiven Verfeinerung wuchs die Spannung im rot markierten Punkt von $\sigma_{xx} = 168$ kN/m^2 auf $\sigma_{xx} = 220$ kN/m^2 (WINFEM)

Die FE-Einflussfunktion erfüllt die Momentenbedingung $G'' = 0$ auf dem gelenkig gelagerten Rand aber nur näherungsweise, so dass man G''_h mit berücksichtigen muss und man auch über den Flickenteppich δ_h integrieren muss, der die Punktlast δ approximiert,

$$G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, G'''_h + g' G''_h + g'' G'_h)\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\, \delta_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{6.44}$$

woran man abliest, dass die Qualität der FE-Einflussfunktion von G'_h, (der Neigung am Rand), den Randmomenten G''_h, den Randkräften G'''_h (Kirchhoffschub) und von δ_h abhängt. Wenn nun in den Ecken die Momente

$$G''_h \equiv m_{xx}\, n_x^2 + 2\, m_{xy} n_x n_y + m_{yy} n_y^2 \tag{6.45}$$

oder die Randkräfte G'''_h singulär werden, dann hat das offensichtlich einen negativen Einfluss auf die Qualität der Einflussfunktion.

Sinngemäß gilt all dies auch für die Einflussfunktionen der Schnittkräfte einer Platte, also

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G_2\, w''' + \ldots \qquad v_x(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G_3\, w''' + \ldots \tag{6.46}$$

und diese reagieren eher noch empfindlicher auf Singularitäten, weil sie ja zweite bzw. dritte Ableitungen berechnen. Man sieht das sehr schön, wenn man (6.41) für alle vier Größen w, w', w'', w''' anschreibt und nur die charakteristischen Singularitäten der Kerne zitiert

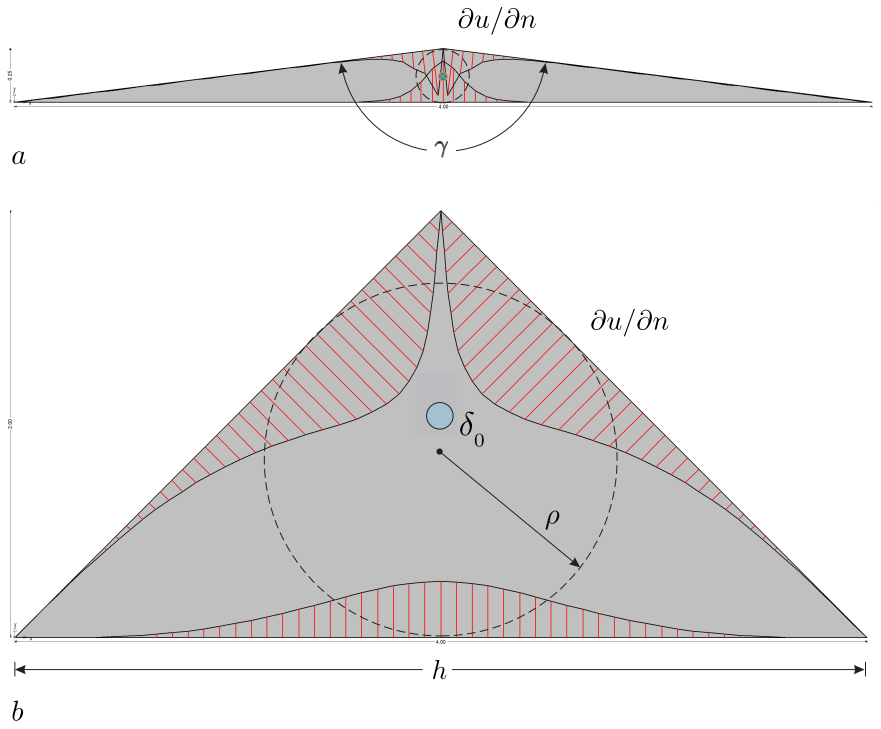


Bild 6.31. Blick auf eine Membran mit vertikaler zentrischer Punktlast **a)** Normalableitung in der stumpfen Ecke **b)** Normalableitung in einem normal geschnittenen Element (BE-LAPLACE). Die Skala im oberen Bild ist im Vergleich zu klein. Die Singularität wächst, wenn die Kraft zur Ecke wandert.

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} \boxed{r^{-1}} & \ln r & r\ln r & r^2\ln r \\ r^{-2} & \boxed{r^{-1}} & \ln r & r\ln r \\ r^{-3} & r^{-2} & \boxed{r^{-1}} & \ln r \\ r^{-4} & r^{-3} & r^{-2} & \boxed{r^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{bmatrix} ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{6.47}$$

In Spalte 1 steht der Kirchhoffschub der G_i, in Spalte 2 stehen die Momente, dann die Normalableitung und schließlich die G_i selbst. Solange der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ nicht auf dem Rand liegt, $r > 0$, sind die Randintegrale regulär. Das $r^{-1} = \varepsilon^{-1}$ macht, dass bei der Herleitung der obigen Einflussfunktionen

$$\mathscr{B}(G_i, w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G_i, w)_{\Omega_\varepsilon} = w^{(i)}(\boldsymbol{x}) - \int_\Gamma \ldots - \int_\Omega \ldots = 0 \tag{6.48}$$

in der Grenze, $\varepsilon \to 0$, aus dem Integral über den Umkreis Γ_{N_ε} des Aufpunktes $\boldsymbol{x}$ das w, w', w'', w''' herausspringt

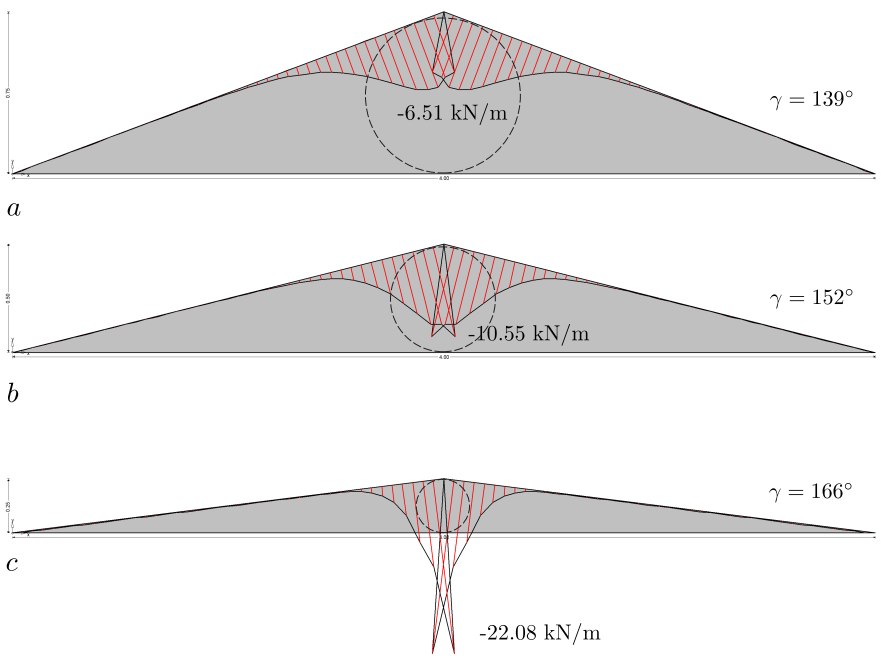


Bild 6.32. Membran, LF zentrische Einzelkraft. Die Normalableitung auf den beiden oberen Kanten für sich. In der Ecke ist sie auf beiden Seiten null, aber gleich danach schießt sie nach oben.

$$w^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon}\, w^{(i)}(\boldsymbol{y})\, \varepsilon\, d\varphi \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} . \tag{6.49}$$

So sind die Punktwerte auf der linken Seite entstanden. Wie man sieht, muss in dem Kern noch ein Faktor $(2\,\pi)^{-1}$ vorkommen.

Das Dreieck

Nicht die spitzen Ecken eines Dreiecks sind kritisch, sondern die stumpfe Ecke. In [64] wird gezeigt, dass die Güte einer linearen Interpolierenden u_h, siehe Bild 6.31, sich wie $1/\sin\gamma$ verhält,

$$|\nabla(u - u_h)| \le h(1 + \frac{2}{\sin\gamma})\|u\|_1\,, \tag{6.50}$$

also mit flacher werdendem Innenwinkel $\gamma \to 180°$ dramatisch sinkt; das ist die Abschätzung für den Interpolationsfehler in den ersten Ableitungen.

In Bild 6.31 haben wir versucht, das an einer Membran mit zentrischer Punktlast, $-\Delta u = \delta_0 \cdot 10\,\mathrm{kN}, u = 0$ auf Γ, nachzufahren. In allen drei Ecken

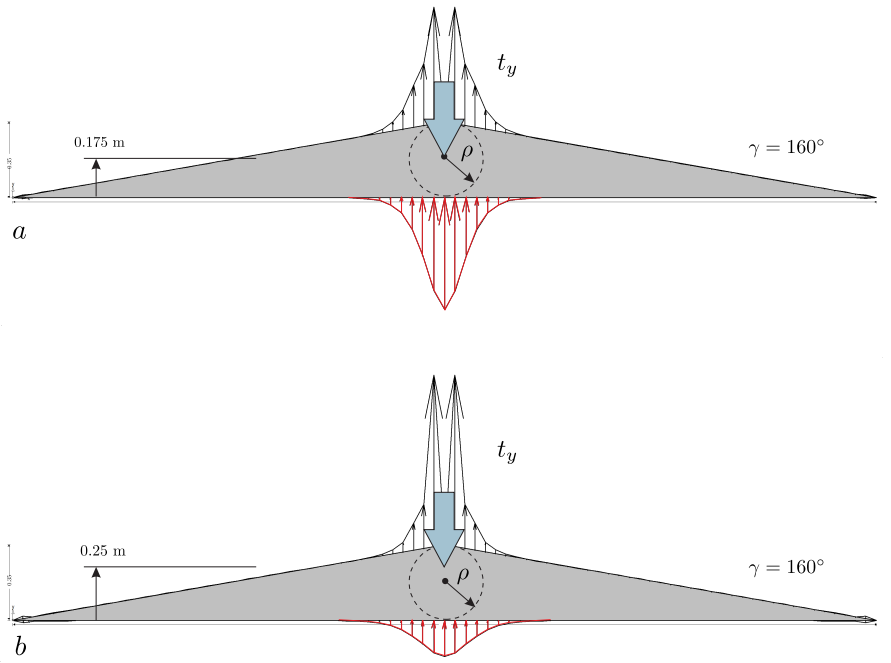


Bild 6.33. Scheibe 4×0.35 m, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ auf Γ und **a)** zentrische Einzelkraft $P = 10$ kN, **b)** nach oben versetzte Kraft. Vertikale Komponente t_y des Spannungsvektors $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ auf dem Rand (BE-SCHEIBE).

ist – wegen $u = 0$ auf den Kanten – der Gradient $\nabla u = \boldsymbol{0}$. Während die Punkteinspannung in den spitzen Winkeln harmlos ist, produziert sie in der stumpfen Ecke eine Singularität in der Normalableitung, siehe Bild 6.32, von null auf groß – *in an instant*.

Die Singularität ist umso größer, je flacher der Winkel ist, denn eine Maßzahl für die Güte eines Elements ist das Verhältnis von h/ρ, wobei ρ der Radius des größtmöglichen Innenkreises ist, [50]. In der Grenze, $\gamma \to 180°$, ist $h/0 = \infty$.

Auch die Differentialgleichung der Scheiben ist von zweiter Ordnung und daher tritt dort dasselbe Phänomen auf, siehe Bild 6.33. Wenn die Verschiebung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ auf beiden Seiten einer Ecke null ist, dann ist wegen $\nabla u_x = \nabla u_y = \boldsymbol{0}$ der Verzerrungstensor in der Ecke null

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} \\ u_{y,x} & u_{y,y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,, \tag{6.51}$$

und daher auch der Spannungstensor $\boldsymbol{S}$. Die ‚Zwangspause' $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ in der Ecke treibt die Spannungen nach oben, wenn der Eckenwinkel $\gamma > 90°$ überschreitet. Alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben Probleme mit der Einspannung im Punkt.

Bei Platten ($K\Delta\Delta = w$) versteift die Festhaltung in einer Ecke $\gamma > 90°$ die Platte zwar künstlich, was im Grenzfall zu *Babuškas Paradoxon* führt, siehe Seite 674, aber die Schnittgrößen m_{ij} und v_i (Kirchhoffschub in x- und y-Richtung) sind von zweiter und dritter Ordnung und $\nabla w = \mathbf{0}$ in einem Punkt bedeutet nicht, dass auch die zweiten oder dritten Ableitungen null sind.

Schubweiche Platten sind zwar auch von zweiter Ordnung, aber ihre abgestufte Kinematik, w, φ_x, φ_y, schützt sie besser vor Zwängungen. Das obige Paradoxon ist – soweit wir wissen – kein Thema für solche Platten.

So weit die Theorie. In der Praxis dürften jedoch die Auswirkungen von Singularitäten in der Regel nicht so dramatisch sein, denn im Bauwesen sind die **Toleranzen** doch relativ groß und der erfahrene Ingenieur hat zudem ein gut entwickeltes Gespür dafür, was glaubhaft ist und was nicht.

Finite Elemente im Bauwesen sind ja immer beides: Modellierung und ‚Rechenschieber' und der Ingenieur ist daher sehr flexibel – um nicht zu sagen: nachsichtig – bei der Interpretation von FE-Ergebnissen.

Bei der Wandscheibe in Bild 6.24 ergab sich im LF g im unteren Teil eine Zugspannung von $\sigma_{xx} = 168$ kN/m^2 und mit einer adaptiven Verfeinerung, siehe Bild 6.30, wuchs die Spannung auf $\sigma_{xx} = 220$ kN/m^2. Das ist eine ungewöhnlich große Veränderung. Nicht in allen Fällen wird die Differenz so groß ausfallen; leider kann man keine festen Regeln aufstellen. Der Tragwerksplaner muss entscheiden, was er glaubt und was nicht.

Unsere Meinung ist, dass Spannungsspitzen ‚harmlos' sind, wenn die plastische Zone, die sich eventuell ausbildet, keine massiven Ausgleichsbewegungen hervorruft. Bei der punktgelagerten Wandscheibe in Bild 6.30 ist das wohl anders, sie hat viel ‚Spiel' nach unten, wenn die Lager nachgeben.

Was jedoch nicht interpretierbar ist, das sind die Singularitäten an sich, denn die sieht man nachher in den Fensterecken als feine Risse oder es sind die Zwängungen in einer Konstruktion, die mit der Zeit zu einem kompletten Bruch/Riss des Zugbands, wie im Fall des Bogenträgers in Bild 6.34 führen.

Video: What Really Happened at the Hernando de Soto Bridge?

Vielleicht passt an diese Stelle auch ein Wort über die unterschiedliche Rolle der finiten Elemente in der Mathematik und in der Praxis. Der Mathematiker versteht unter finiten Elementen die *shape functions*, während für den Ingenieur finite Elemente kleine Balken, Scheiben und Platten sind, mit denen er ein Tragwerk nachbildet und daher interessiert den Ingenieur nicht nur der Approximationsfehler, sondern auch der **Modellfehler**.

Beide Fehler sind miteinander verschränkt. Anders als beim Hausbau, muss man bei finiten Elementen die Fundamente nachbessern, wenn man schon am Dachstuhl ist, das Modell bleibt ständig in der Schwebe. Die Analyse des Modellfehlers muss daher ***gleichgewichtig*** neben der Analyse des Approximationsfehlers stehen und hier ist vor allem der Sachverstand des Ingenieurs gefragt.



Bild 6.34. I-40 Hernando DeSoto Bridge in Tennessee, [29]

(Zu) lange Zeit konzentrierte man sich nur auf den numerischen Fehler, entwickelte ausgeklügelte asymptotische Fehlerschätzer, das sind Ausdrücke wie $\|w - w_h\| = O(h^n)$, aber nun versucht man auch Abschätzungen für den Modellfehler zu entwickeln, wie wir das im vorhergehenden Kapitel 5 getan haben. Dafür eignen sich Einflussfunktionen sehr gut, weil sie ja direkt die Sensitivitäten eines Tragwerks repräsentieren und damit näher an der Kernproblematik der numerischen Modellbildung sind.

Die Stichworte an dieser Stelle lauten ***Verification and Validation***. Wurde die Gleichung richtig gelöst – *Verification* – und ist das Modell überhaupt in der Lage die gewünschte Antwort zu liefern – *Validation*? Diese Frage zu beantworten, ist Aufgabe des Ingenieurs.

In einem Kapitel über Singularitäten ist es sicherlich auch angebracht ein Wort über den **heilsamen Effekt** von $h > 0$ zu sagen. Mit den Randelementen kann man praktisch bis in die Spannungsspitzen hineingehen wie etwa in Bild 6.24, und sieht dann erst, was sich im Material ‚wirklich' abspielt. Das bleibt den finiten Elementen erspart, weil die Elemente dafür in der Regel zu grob sind. Eine numerische Näherung hat also auch ihr ‚Gutes', sie entdramatisiert, sie dämpft, sie verschleift. Und das ist aus der Sicht der Praxis sicherlich sinnvoller, als Spannungsspitzen nachzujagen. Die Strategie $h \to 0$ schafft mehr Probleme als sie löst.

Für einen Mathematiker mag es eine Überraschung sein, dass die Genauigkeit der Ergebnisse – von Sonderbauten wie dem Omniturm abgesehen – nicht das primäre Problem in der Statik ist. Der Rechenkern in den Programmen ist mittlerweile – gedanklich – ein ‚Dreizeiler' geworden, $p\ell^2/8$ ist geschenkt, ein Klick auf den Netzgenerator und die FE-Berechnung der Decke ist fertig.

Die großen Softwarepakete leben davon, dass sie ‚normgerechte' Statiken erstellen, also dem Aufsteller garantieren, dass die Lastannahmen EC konform sind, die diversen Teilsicherheitsbeiwerte γ_i und ψ_j, die das Regelwerk vorschreibt, richtig in der Statik übernommen werden, kein Iota, kein Index, keine Fußnote, kein Sondervotum und kein Komma vergessen oder übersehen wird, [68],

$$E_d = E\Big\{ \sum_{j\geq 1} \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} \oplus \gamma_P \cdot P_k \oplus \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} \oplus \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i} \Big\} ,$$

die Risse nicht zu groß sind, die Druck- und Zugbewehrung den Regeln entspricht, *idem* die Schubbewehrung, die Durchstanzbewehrung, der Schallschutz, die Wärmedämmung, die Feuerwiderstandsklasse *perge, perge*[7].

[7] *perge, perge* (fahre fort!) ist das *pp* in *et cetera pp*.

7

Gemischte Formulierungen

Jede Differentialgleichung wie EIw^{IV} lässt sich in ein **System von Differentialgleichungen** niedrigerer Ordnung aufspalten. Dieser Aufspaltung entspricht in der Statik der Dreiklang aus ***Verzerrungen*** $\varepsilon = u'$**,** ***Materialgesetz*** $\sigma = E\,\varepsilon$ und ***Gleichgewicht*** $-N' = p$. Man nennt FE-Ansätze bei denen die Verschiebungen und die Spannungen unabhängig voneinander approximiert werden gemischte Ansätze. Sie basieren auf den Formulierungen in diesem Kapitel[1].

Unabhängig von den finiten Elementen benötigt man gemischte Formulierungen, wenn man es mit Anfangsdehnungen oder Anfangsspannungen zu tun hat. Auch die Lastfälle Temperatur gehören zu diesem Problemkreis.

7.1 Das System des Stabes

Der Stab ist ein ‚einachsiges Volumen' und so entsteht das System des Stabes, wenn man die Gleichungen (7.38) (2D und 3D sind dieselben Gleichungen) mit der Fläche A multipliziert

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{S}\cdot A = \boldsymbol{p}\ [\mathrm{N/m^3}]\cdot A \qquad \Rightarrow \qquad -N' = p_x\ [\mathrm{N/m}]\,, \tag{7.1}$$

den Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ auf einen Eintrag $\sigma_{xx} = \sigma$ reduziert und die Normalkraft $N = \sigma \cdot A$ einführt

$$\begin{aligned} \text{Dehnungen} \qquad & u' - \varepsilon = 0 && \text{(7.2a)}\\ \text{Materialgesetz} \qquad & EA\,\varepsilon - N = EA\,\varepsilon_0 && \text{(7.2b)}\\ \text{Gleichgewicht} \qquad & -N' = p_x \quad . && \text{(7.2c)} \end{aligned}$$

Die Anfangsdehnungen $\varepsilon_0 = \alpha_T \cdot T$ sind typischerweise Dehnungen aus einem Temperaturanstieg T. Das obige System stellt die Anwendung eines **Operators** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ da. Ist $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta u, \delta\varepsilon, \delta N\}$ eine

[1] Der Beitrag von Ramm und Hofmann, [247], enthält eine umfassende und detaillierte Entwicklung der Grundgleichungen der Stabstatik ausgehend von den gemischten Formulierungen.

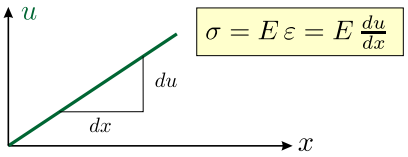


Bild 7.1. Das Hookesche Gesetz. Der E-Modul (210 GPa, Stahl) ist die Spannung, die den Stab (rechnerisch) auf die doppelte Länge streckt, $\varepsilon = 1$

beliebige Testfunktion (virtuelle Verrückung), dann ist die virtuelle äußere Arbeit der Ausdruck

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} >:= \int_0^l [(u' - \varepsilon)\,\delta N + (EA\,\varepsilon - N)\,\delta\varepsilon - N'\,\delta u]\,dx\,. \tag{7.3}$$

Partielle Integration führt auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [N\,\delta u]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.4}$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l [(u' - \varepsilon)\,\delta N + EA\,\varepsilon\,\delta\varepsilon + N(\delta u' - \delta\varepsilon)]\,dx \tag{7.5}$$

und damit direkt weiter zur zweiten Greenschen Identität

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [N\,\delta u]_0^l - [\delta N\,u]_0^l - < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > = 0\,. \tag{7.6}$$

Die erste Variation der potentiellen Energie im Punkt $\boldsymbol{\Sigma}$ (der Gleichgewichtslage) ist, wie immer, identisch mit der ersten Greenschen Identität

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0\,, \tag{7.7}$$

und daran kann man die Gestalt von $\Pi(\boldsymbol{\Sigma})$ ablesen.

Für einen Zugstab, $u(0) = 0, N(l) = P$, und mit einer Streckenlast p und einer Temperaturdehnung $\varepsilon_0 = \alpha_T \cdot T$ ergibt das

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l (p\,\delta u + EA\,\varepsilon_0\,\delta\varepsilon)\,dx + P\,\delta u(l) - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.8}$$

also

$$\Pi(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2}\,a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}) - \int_0^l (p\,u + EA\,\varepsilon_0\,\varepsilon)\,dx - P\,u(l)\,. \tag{7.9}$$

Bei den anderen Systemen, die noch folgen werden, gilt das alles sinngemäß.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Temperaturglied

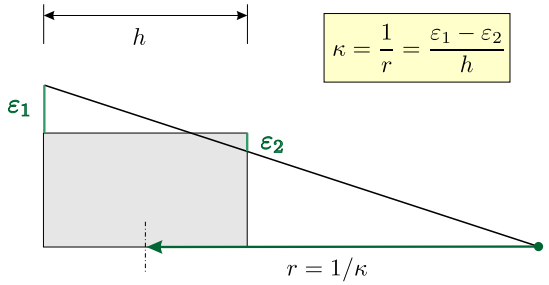


Bild 7.2. Dehnung und Krümmung am Balken

$$\bar{1} \cdot \delta = \int_0^l \alpha_T \, T \, \bar{N} \, dx \tag{7.10}$$

in der Mohrschen Arbeitsgleichung die umgestellte Gleichung

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) &= < \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}), \boldsymbol{\Sigma} > + [\bar{N} \, u]_0^l - a(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ &= 0 + \bar{1} \cdot \delta - \int_0^l \alpha_T \, T \, \bar{N} \, dx = 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

ist. Das Tripel $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = (\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{N})$ sind die Zustandsgrößen aus der Hilfskraft $\bar{1}$. Würden wir die Verlängerung eines Zugstabs unter einem Temperaturanstieg T berechnen, dann wäre $\bar{u} = x/EA, \bar{\varepsilon} = 1/EA, \bar{N} = 1$.

7.2 Das System des Balkens (Bernoulli-Balken)

Die Differentialgleichung $EI\, w^{IV}(x) = p(x)$ basiert auf dem System

Krümmungen	$\kappa - w'' = 0$	(7.12a)
Materialgesetz	$EI\, \kappa + M = EI\, \kappa_0$	(7.12b)
Gleichgewicht	$-M'' = m' + p$	(7.12c)

mit *Vorkrümmungen* κ_0, z.B. aus Temperatur $\kappa_0 = \alpha_T \Delta T/h$, Linienmomenten m [N·m/m] und der Streckenlast p. Wenn EI konstant ist, κ_0 null ist und keine Linienmomente wirken, $m = 0$, dann reduziert sich das System auf $EI\, w^{IV} = p$. Das obige System können wir als die Anwendung eines **Operators** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \kappa, M\}$ aus *Biegelinie, Krümmung* und *Moment* lesen. Ist $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta w, \delta\kappa, \delta M\}$ eine beliebige Testfunktion (virtuelle Verrückung), dann ist die virtuelle äußere Arbeit der Ausdruck

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > := \int_0^l \left[(\kappa - w'') \, \delta M + (EI\, \kappa + M) \, \delta\kappa - M'' \, \delta w \right] dx \, . \tag{7.13}$$

Partielle Integration führt auf die erste Greensche Identität

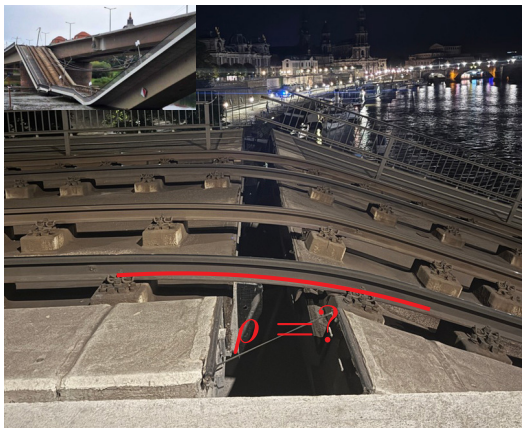


Bild 7.3. Carolabrücke in Dresden, 11.9.24 (Korrosion). Wie groß war das Fließ-Moment?

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [w'\,\delta M + M'\,\delta w]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.14}$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l [EI\,\kappa\,\delta\kappa + (\kappa - w'')\,\delta M + M\,(\delta\kappa - \delta w'')]\,dx \tag{7.15}$$

und damit direkt weiter zur zweiten Greenschen Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = &< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [w'\,\delta M + M'\,\delta w]_0^l \\ &- [\delta w'\,M + \delta M'\,w]_0^l - < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > = 0\,.\end{aligned} \tag{7.16}$$

7.2.1 LF Temperatur

Wie beim Stab basiert das Temperaturglied

$$\bar{1} \cdot \delta = \int \bar{M}\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx \tag{7.17}$$

in der Mohrschen Arbeitsgleichung auf dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) &= < \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}), \boldsymbol{\Sigma} > + [\bar{w}'\,M + \bar{M}'\,w]_0^l - a(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ &= 0 + \bar{1} \cdot \delta - \int_0^l \alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\bar{M}\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Punkt x entsteht durch die Spreizung eines dort eingebauten Gelenks. Sei $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \{w_2, M_2, \kappa_2\}$ die Einflussfunktion (in drei Teilen), also M_2 das zugehörige Biegemoment, dann folgt nach den üblichen Schritten (Zweiteilung des Felds im Aufpunkt)

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Sigma}) = -M(x) + \int_0^l \alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,M_2\,dx = 0\,, \tag{7.19}$$

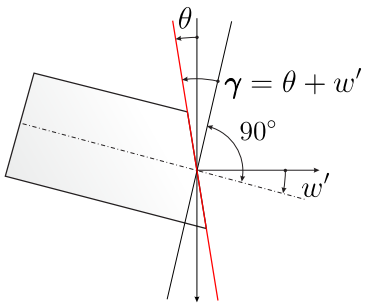


Bild 7.4. Schubweicher Balken

was genau der Mohrschen Arbeitsgleichung entspricht, wenn man $\bar{M} = M_2$ setzt. In Temperaturlastfällen kann man also mit der Mohrschen Arbeitsgleichung Schnittkräfte berechnen, was ja eigentlich nicht gehen sollte. Es geht, weil der Ausdruck (7.19) eine starke Einflussfunktion ist, die bei der Mohrschen Arbeitsgleichung als (angebliche) schwache Einflussfunktion ‚mitsegelt'.

7.3 Der schubweiche Balken (Timoshenko Balken)

Dem $EI\,w^{IV} = p$ entspricht beim schubweichen Balken das System

$$-GA_s\,(w'' + \theta') = p\,, \tag{7.20a}$$

$$-EI\,\theta'' + GA_s\,(w' + \theta) = m_y \tag{7.20b}$$

für die Durchbiegung w und die Drehung θ, siehe Bild 7.4 und [247] S. 45. Zu diesem System gehört die Identität, $M = EI\,\kappa = EI\,\theta'$, $V = GA_s\,\gamma = GA_s(w' + \theta)$,

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l -\boldsymbol{L u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\,dx + [V\,\delta w + M\,\delta\theta]_0^l - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,, \tag{7.21}$$

mit der Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) &= \int_0^l [V\,\delta\gamma + M\,\delta\kappa]\,dx \\ &= \int_0^l [GA_s(w' + \theta)\,(\delta w' + \delta\theta) + EI\,\theta'\,\delta\theta']\,dx\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Das ist die **Weggrößenformulierung** des schubweichen Balkens – also noch nicht die gemischte Formulierung – die dem $EI\,w^{IV} = p$ des Euler-Bernoulli-Balkens entspricht, nur dass es zwei Weggrößen sind, w und θ.

In der klassischen Balkenstatik (*Bernoulli-Balken*), $EI\,w^{IV} = p$, rechnen wir Balken *schubstarr*, vernachlässigen wir die Schubverformungen aus der Querkraft. Ein Querschnitt, der vor der Verformung senkrecht zur Balkenachse steht, dreht sich mit der Achse mit, wenn sie sich neigt, er behält die 90° bei, siehe Bild 7.3. Bei einem schubweichen Balken geht jedoch der Querschnitt

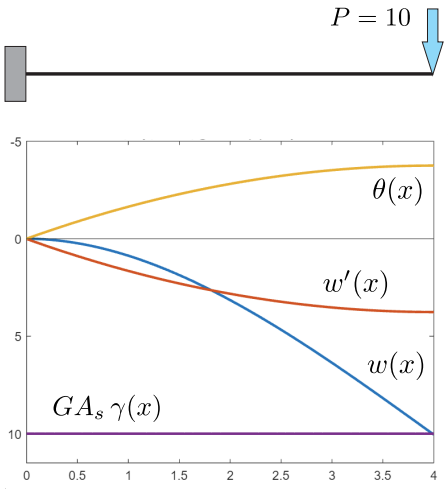


Bild 7.5. Kragträger $\theta(0) = 0$, $\gamma(0) = w'(0) = 1/80$, $GA_s = 800$, s. Kapitel 10.8 (MATLAB™)

aus dem Lot, er kippt um einen Winkel γ gegenüber der Senkrechten auf die geneigte Achse, siehe Bild 7.4 und Bild 7.5.

Nach einigen Zwischenschritten kann man zeigen, dass die homogenen Lösungen von (7.20) den Gleichungen

$$w^{IV} = 0 \qquad w' = -\theta + \frac{EI}{GA_s}\,\theta'' \tag{7.23}$$

genügen müssen. Die homogenen Lösungen der ersten Gleichung sind

$$w_n(x) = c_1 + c_2\,\xi + c_3\,\xi^2 + c_4\,\xi^3\,, \qquad \xi = x/l \tag{7.24}$$

und die dazu passende Funktion $\theta(x)$ lautet

$$\theta(x) = c_1 \cdot 0 - c_2\,\frac{1}{l} - 2\,c_3\,\frac{\xi}{l} - c_4(\frac{\eta}{2\,l} + \frac{3}{l}\,\xi^2)\,, \quad \eta = \frac{12}{l^2}\,\frac{EI}{GA_s}\,. \tag{7.25}$$

Durch die Wahl geeigneter Konstanten c_i ergeben sich daraus die Einheitsverformungen in Bild 7.6, [247] S. 198,

$$\downarrow \qquad w_1(x) = \frac{1}{1+\eta}\,[1 - 3\,\xi^2 + 2\,\xi^3 + \eta\,(1-\xi)] \tag{7.26a}$$

$$\curvearrowleft \qquad w_2(x) = \frac{l}{1+\eta}\,[-\xi + 2\,\xi^2 - \xi^3 - \frac{\eta}{2}\,(\xi - \xi^2)] \tag{7.26b}$$

$$\downarrow \qquad w_3(x) = \frac{1}{1+\eta}\,[3\,\xi^2 - 2\,\xi^3 + \eta\,\xi] \tag{7.26c}$$

$$\curvearrowleft \qquad w_4(x) = \frac{l}{1+\eta}\,[\xi^2 - \xi^3 + \frac{\eta}{2}\,(\xi - \xi^2)]\,. \tag{7.26d}$$

Die korrespondierenden Drehungen lauten

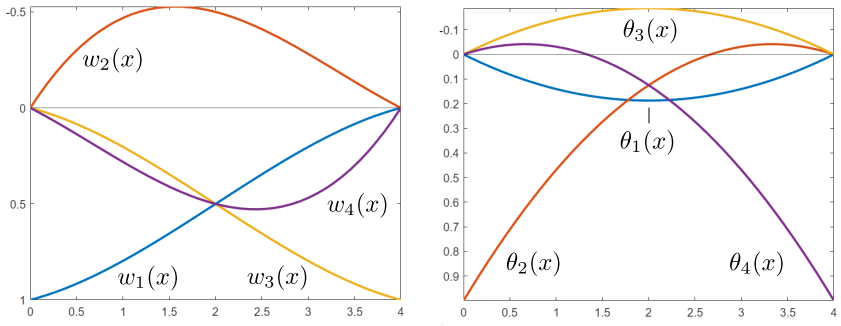


Bild 7.6. Die *shape functions*, $\eta = 1, \ell = 4$, (MATLAB™)

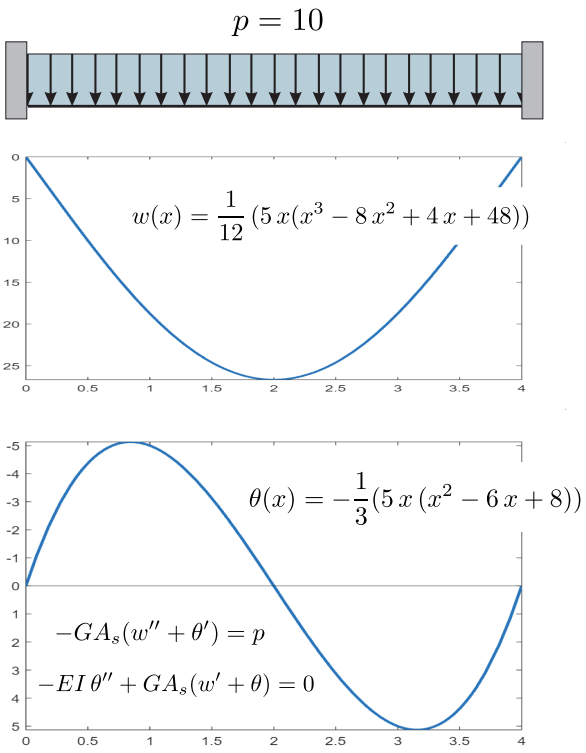


Bild 7.7. $EI = 1$, $GA_s = 1$, $\gamma = 20 - 10\,x$, Kapitel 10.8 (MATLAB™)

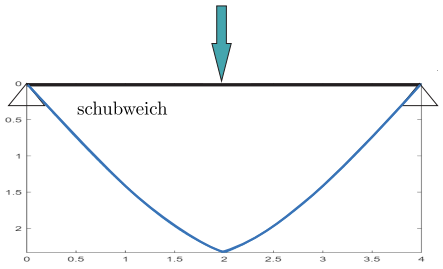


Bild 7.8. Knick unter einer Einzelkraft, Kapitel 10.8 (MATLAB™)

$$\theta_1(x) = \frac{1}{1+\eta}\left[-\frac{6}{l}\,\xi\,(\xi-1)\right] \tag{7.27a}$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{1+\eta}\left[1-4\,\xi+3\,\xi^2+(1-\xi)\,\eta\right] \tag{7.27b}$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{1+\eta}\left[-\frac{6}{l}\,\xi\,(1-\xi)\right] \tag{7.27c}$$

$$\theta_4(x) = \frac{1}{1+\eta}\left[-\xi\,(2-3\,\xi-\eta)\right]. \tag{7.27d}$$

Die Wechselwirkungsenergien $k_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)$ der vier *shape functions* $\boldsymbol{\varphi}_i(x)$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_4 = \begin{bmatrix} w_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

bestimmen die Einträge in der Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \frac{EI}{l^3\,(1+\eta)} \begin{bmatrix} 12 & -6\,l & -12 & -6\,l \\ -6\,l & (4+\eta)\,l^2 & 6\,l & (2-\eta)\,l^2 \\ -12 & 6\,l & 12 & 6\,l \\ -6\,l & (2-\eta)\,l^2 & 6\,l & (4+\eta)\,l^2 \end{bmatrix}. \tag{7.29}$$

Die Biegelinie hat natürlich eine Tangente $w'(x)$, siehe Bild 7.7, aber die spielt keine tragende Rolle mehr, weil ihr Platz jetzt von der – von außen unsichtbaren – Verdrehung $\theta(x)$ übernommen wird, $\boldsymbol{u} = \{w(0), \theta(0), w(l), \theta(l)\}^T$.

Sind Streckenlasten $\boldsymbol{p} = \{p_z, m_y\}^T$ vorhanden, dann wird $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ um deren Beiträge

$$d_i = \int_0^l \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{\varphi}_i \, dx = \int_0^l (p_z\, w_i + m_y\, \theta_i)\, dx \tag{7.30}$$

erweitert, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$.

Das gemischte System

Jetzt wechseln wir zu dem System und setzen wie üblich voraus, dass die Biegesteifigkeit EI, der Schubquerschnitt A_s und der Schubmodul G längs des Balkens konstant sind.

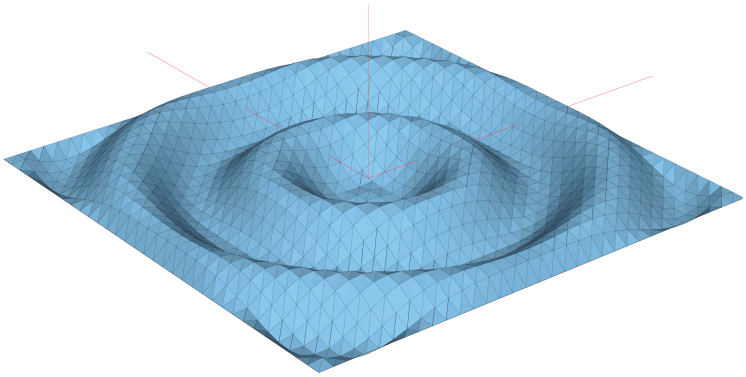


Bild 7.9. Verformung einer Membran 6×6 Meter unter wellenförmiger Belastung, $-\Delta u = 5 \cdot \sin(6\,r)$ (BE-LAPLACE)

Die direkten Kinematen sind die Durchbiegung w und die Verdrehung θ, siehe Bild 7.6.

$$\begin{aligned} \text{Verzerrungen} \quad & \theta' - \kappa = 0 \quad & w' + \theta - \gamma = 0 \quad & (7.31a) \\ \text{Materialgesetz} \quad & EI\,\kappa - M = 0 \quad & GA_s\gamma - V = 0 \quad & (7.31b) \\ \text{Gleichgewicht} \quad & -M' + V = 0 \quad & -V' = p \quad & (7.31c) \end{aligned}$$

Dieses System kann als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \theta; \kappa, \gamma; M, V\}$ gelesen werden. Dazu gehört die virtuelle äußere Arbeit

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}>: = \int_0^l & [(\theta' - \kappa)\,\delta M + (w' + \theta - \gamma)\,\delta V + (EI\,\kappa - M)\,\delta\kappa \\ & + (GA_s\gamma - V)\,\delta\gamma + (-M' + V)\,\delta\theta - V'\,\delta w]\,dx\,. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Partielle Integration der letzten beiden Terme in (7.32), der Arbeit der Gleichgewichtsterme auf den Wegen $\delta\theta$ und δw, führt auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> + [-M\,\delta\theta - V\,\delta w]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.33}$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l & [(\theta' - \kappa)\,\delta M + (\delta\theta' - \delta\kappa)M + (w' + \theta - \gamma)\,\delta V \\ & + (\delta w' + \delta\theta - \delta\gamma)V + EI\,\kappa\,\delta\kappa + GA_s\gamma\,\delta\gamma]dx\,. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Die zweite Greensche Identität ergibt sich wie gewohnt durch Spiegelung.

7.4 Poisson Gleichung

Die *Poisson Gleichung*, siehe Bild 7.9,

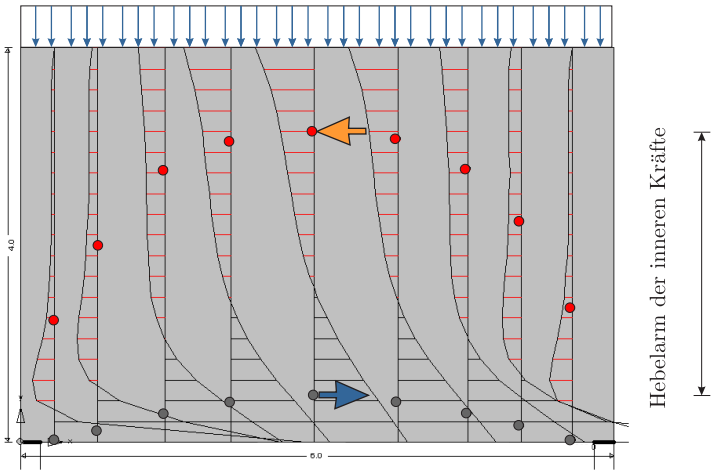


Bild 7.10. Der Spannungsbogen in einer Wandscheibe (BE-SCHEIBE)

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) \tag{7.35}$$

kann in ein System erster Ordnung

$$\nabla u - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}_{(2)} \tag{7.36a}$$
$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} = p_{(1)} \tag{7.36b}$$

für zwei Funktionen, u und $\boldsymbol{\sigma}$ oder $\boldsymbol{v} = \{u, \boldsymbol{\sigma}\}^T$ aufgespalten werden.

Zu diesem System gehört die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v}) = \int_\Omega [(\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \bullet \boldsymbol{\delta\sigma} - \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\,\delta u]\, d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{n}\,\delta u\, ds$$
$$\underbrace{- \int_\Omega (\nabla u \bullet \boldsymbol{\delta\sigma} + \nabla\delta u \bullet \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\delta\sigma}) d\Omega}_{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v})} = 0\,. \tag{7.37}$$

7.5 Die Scheibengleichung

Die konstitutiven Gleichungen lauten in der Reihenfolge *Verzerrungen, Spannungen, Gleichgewicht*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{7.38a}$$
$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_0] \tag{7.38b}$$
$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{p}\,, \tag{7.38c}$$

wobei $\boldsymbol{E} = [\varepsilon_{ij}]$ und $\boldsymbol{S} = [\sigma_{ij}]$ der Verzerrungs- bzw. Spannungstensor sind, $\boldsymbol{E}_0$ sind Anfangsdehnungen (z.B. aus Temperatur) und $\boldsymbol{E}()$ ist der Operator

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\,u_{1,1} & u_{1,2}+u_{2,1} \\ u_{2,1}+u_{1,2} & 2\,u_{2,2} \end{bmatrix}. \tag{7.39}$$

Die Divergenz des **Spannungstensors** $\boldsymbol{S}$, siehe Bild 7.11, ist der Vektor

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1}+\sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1}+\sigma_{22,2} \end{bmatrix}. \tag{7.40}$$

Mit dem Operator

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] = 2\mu \cdot \boldsymbol{E} + \lambda\,(\operatorname{tr}\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{I} \tag{7.41}$$

wird der Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ aus dem Verzerrungstensor berechnet. Es ist

$$\lambda = \frac{2\,\mu\,\nu}{1-2\,\nu} \qquad \operatorname{tr}\boldsymbol{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \qquad \text{(trace)} \tag{7.42}$$

und $\boldsymbol{I}$ ist der Einheitstensor (Einheitsmatrix).

Die linke Seite des Systems (7.38) kann man als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}(\,)$ auf das Triple $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ lesen und

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> = &\int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta} E\, d\Omega \\ &+ \int_\Omega -\operatorname{div}\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega \end{aligned} \tag{7.43}$$

ist dann die zugehörige virtuelle Arbeit mit $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\boldsymbol{\delta u}, \boldsymbol{\delta E}, \boldsymbol{\delta S}\}$ als ‚virtueller Verrückung' oder ‚Testfeld'.

Der Punkt $\bullet$ bezeichnet – wie immer – das Skalarprodukt, hier von Matrizen

$$\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E} = \sigma_{11}\,\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\,\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\,\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\,\varepsilon_{22}\,. \tag{7.44}$$

Ist $\boldsymbol{S} \in C^1(\Omega)$ eine symmetrische Matrix und $\boldsymbol{\delta u} \in C^1(\Omega)$ ein beliebiges Verschiebungsfeld, dann gilt wegen den Regeln der partiellen Integration

$$\int_\Omega -\operatorname{div}\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega = -\int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds + \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})\, d\Omega \tag{7.45}$$

und mit diesem Hilfssatz folgt

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> = &\int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta E}\, d\Omega \\ &+ \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})\, d\Omega - \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds\,. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Die drei Gebietsintegrale bilden wegen der Symmetrie $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] \bullet \boldsymbol{\delta E} = \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{\delta E}]$ eine symmetrische Bilinearform

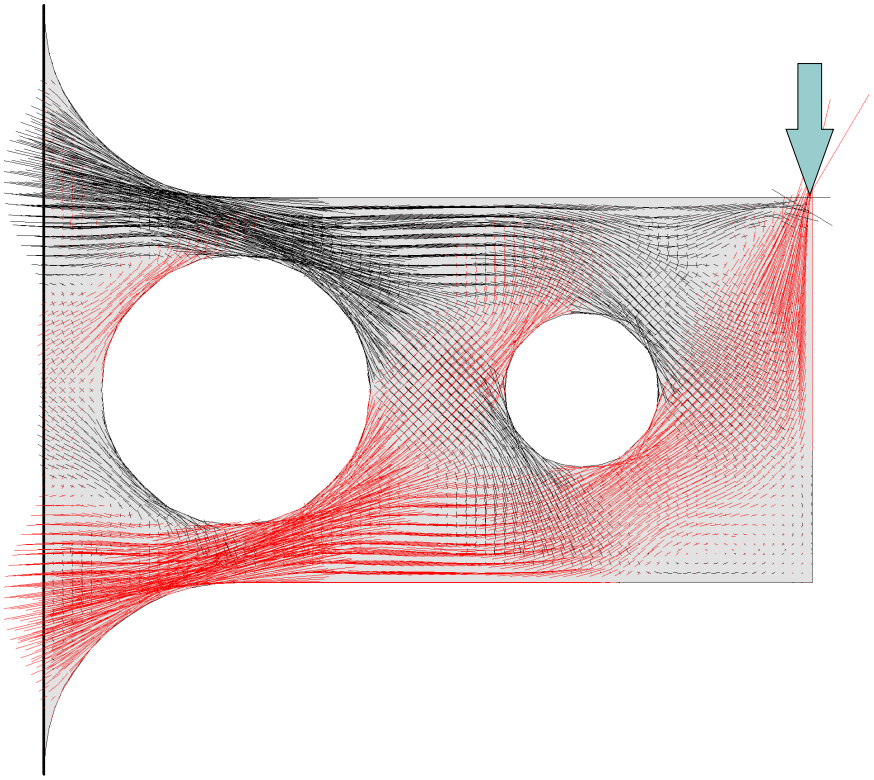


Bild 7.11. Kragträger (BE-SCHEIBE, Pos. Ausgerundet)

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) := \int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] \bullet \boldsymbol{\delta E} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u}) - \boldsymbol{\delta E}) d\Omega \,, \tag{7.47}$$

die wir die Wechselwirkungsenergie zwischen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\boldsymbol{\delta\Sigma}$ nennen. Damit lautet die erste Greensche Identität des Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + \int_\Gamma \boldsymbol{Sn} \bullet \boldsymbol{\delta u} \, ds - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \,, \tag{7.48}$$

aus der alles weitere, insbesondere auch der ***Satz von Betti*** und die Variationsprinzipe wie das ***Hu-Washizu Prinzip*** folgen, siehe Kapitel 9.25.

Das System $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ für das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ kann man nun auf ein System für das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ allein reduzieren, indem man die Gleichungen (7.38) ineinander einsetzt ($\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_0]$), siehe Bild 7.12,

$$-\boldsymbol{Lu} := -[\mu \, \Delta \boldsymbol{u} + \frac{\mu}{1 - 2\,\nu} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{p} - \operatorname{div} \boldsymbol{S}_0 \,. \tag{7.49}$$

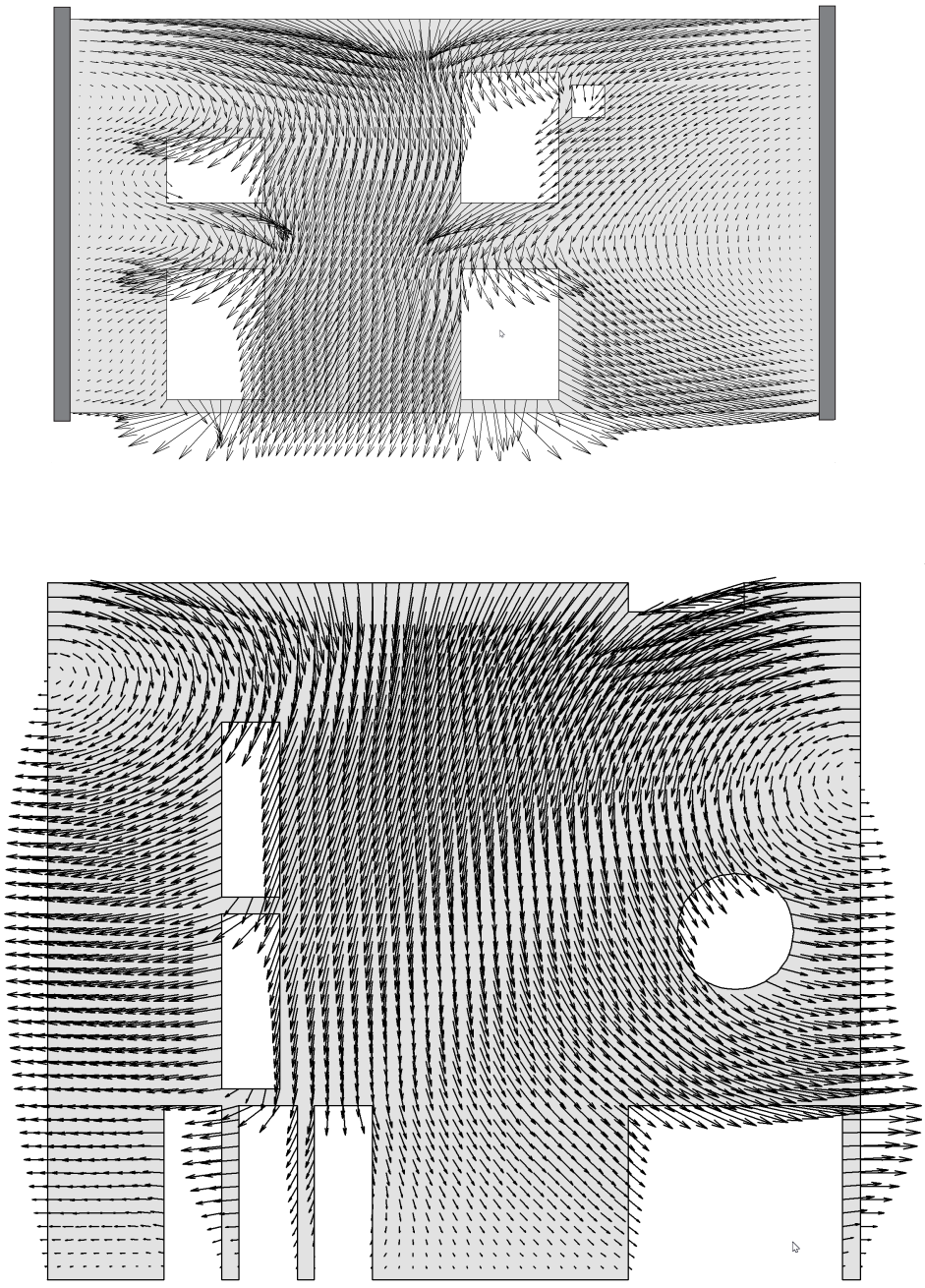


Bild 7.12. Formänderung unter Belastung, (BE-SCHEIBE, BSP7, BSP2)

Zu dem Operator $-\boldsymbol{L}$ gehört die **Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta} u) = \underbrace{\int_\Omega -\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds}_{\delta W_e} \underbrace{-\int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})]\,d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{7.50}$$

wobei $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})$ der Spannungsvektor $\boldsymbol{Sn}$ des Feldes $\boldsymbol{u}$ auf dem Rand Γ ist.

Bei einer wie folgt belasteten Scheibe mit Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) = \bar{\boldsymbol{t}} \text{ auf } \Gamma_N \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ auf } \Gamma_D \tag{7.51}$$

lautet also das ***Prinzip der virtuellen Verrückungen***, wenn $\boldsymbol{\delta u} = \boldsymbol{0}$ auf Γ_D ist,

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u}]\,d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{7.52}$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ einer Scheibe sind die Wechselwirkungsenergien zwischen den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}_i$ und $\boldsymbol{\varphi}_j$, die ja selbst Verschiebungsfelder sind, also aus horizontalen und vertikalen Verschiebungen bestehen

$$k_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}_i)\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}_j]\,d\Omega = \int_\Omega (\sigma_{xx}^{(i)}\,\varepsilon_{xx}^{(j)} + 2\,\sigma_{xy}^{(i)}\,\varepsilon_{xy}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(i)}\,\varepsilon_{yy}^{(j)})\,d\Omega\,. \tag{7.53}$$

7.6 Die schubstarre Platte (Kirchhoff)

Bei einer schubstarren Platte (Kirchhoffplatte), siehe Bild 7.13 und Bild 7.14, lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}(w) = \boldsymbol{0} \tag{7.54a}$$

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}_0] \tag{7.54b}$$

$$-\mathrm{div}^2\boldsymbol{M} = p\,, \tag{7.54c}$$

was als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}()$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ gelesen werden kann. $\boldsymbol{K}_0$ sind mögliche **Anfangskrümmungen**.

Es ist

$$\mathrm{div}^2\,\boldsymbol{M} = \mathrm{div}\begin{bmatrix} m_{xx,x} + m_{xy,y} \\ m_{yx,x} + m_{yy,y} \end{bmatrix} = m_{xx,xx} + 2\,m_{xy,xy} + m_{yy,yy}\ . \tag{7.55}$$

Der Operator $\boldsymbol{K}()$ angewandt auf w sind natürlich die ‚Krümmungen'

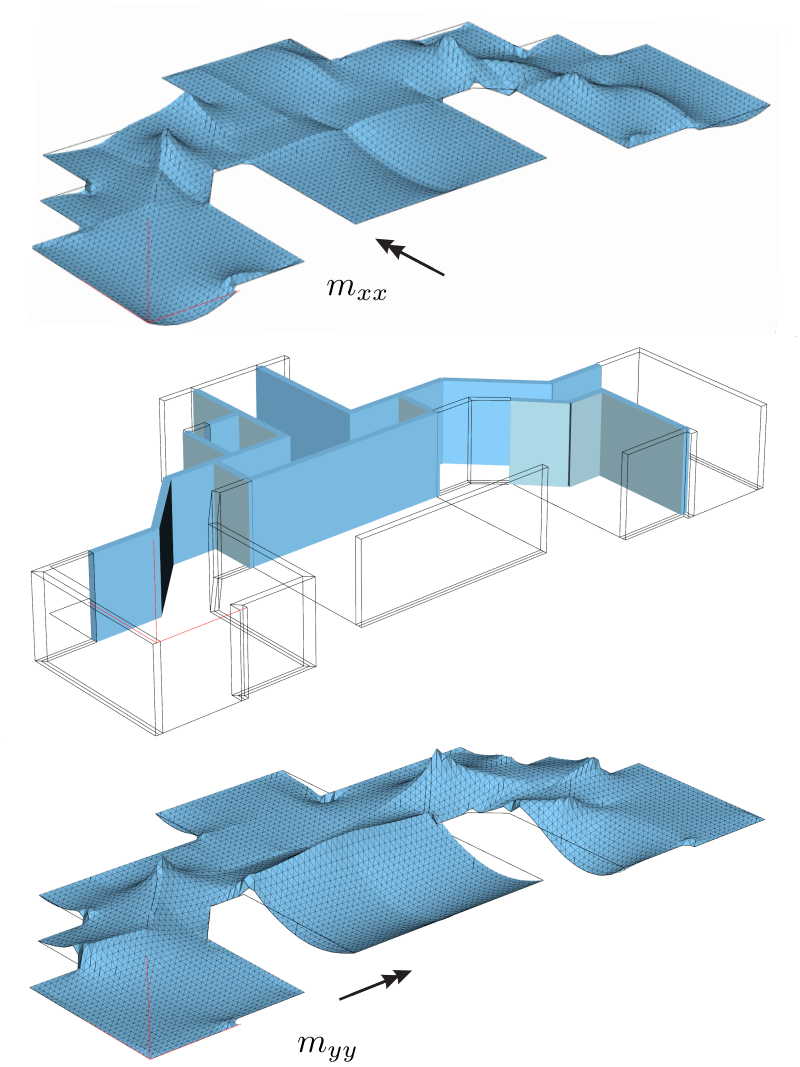


Bild 7.13. Momente in einer Deckenplatte im LF g (BE-PLATTE)

$$\boldsymbol{K}(w) = \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,yy} \end{bmatrix}, \tag{7.56}$$

und

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] = -K \begin{bmatrix} w_{,xx} + \nu\, w_{,yy} & (1-\nu) w_{,xy} \\ (1-\nu) w_{,xy} & w_{,yy} + \nu\, w_{,xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

sind die Momente.

Mit partieller Integration erhält man mit symmetrischen Matrizen $\boldsymbol{M} \in C^2(\Omega)$ und Funktionen $\delta w \in C^2(\Omega)$ das Resultat

$$\int_\Omega -\mathrm{div}^2 \boldsymbol{M}\, \delta w\, d\Omega = -\int_\Gamma (v_n\, \delta w - m_n \frac{\partial \delta w}{\partial n})\, ds - [[m_{nt}\, \delta w]] - \int_\Omega \boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{K}(\delta w) d\Omega\,, \tag{7.58}$$

wobei (in Tensorschreibweise)

$$v_n = q_n + \frac{d}{ds} m_{nt} \quad m_{nt} = m_{ij} n_i t_j \quad m_n = m_{ij} n_i n_j \quad q_n = m_{ij,i} n_j\,, \tag{7.59}$$

und $\boldsymbol{n} = \{n_1, n_2\}^T$ und $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2\}^T$ sind der Normalen- und Tangentenvektor auf dem Rand (jeweils mit der Länge 1); v_n ist der **Kirchhoffschub**.

Das System (7.54) kann man als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}()$ auf das Triple $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ lesen und

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > = \int_\Omega (\boldsymbol{K}(w) - \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] + \boldsymbol{M}) \bullet \boldsymbol{\delta} K\, d\Omega + \int_\Omega -\mathrm{div}^2 \boldsymbol{M}\, \delta w d\Omega \tag{7.60}$$

ist dann die zugehörige ‚Paarung' mit $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta w, \boldsymbol{\delta K}, \boldsymbol{\delta M}\}$ als ‚virtueller Verrückung'. Partielle Integration des letzten Integrals führt zur Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta}\Sigma) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + \int_\Gamma (v_n\, \delta w - m_n \frac{\partial \delta w}{\partial n})\, ds + [[m_{nt}\, \delta w]] - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.61}$$

mit der symmetrischen **Wechselwirkungsenergie**

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_\Omega (\boldsymbol{K}(w) + \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] \bullet \boldsymbol{\delta K}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{M} \bullet (\boldsymbol{K}(\delta w) + \boldsymbol{\delta K}) d\Omega\,. \tag{7.62}$$

Das Symbol

$$[[m_{nt}\, \delta w]] = \sum\nolimits_i F_i\, \delta w(\boldsymbol{x}_i) \tag{7.63}$$

steht für die virtuelle Arbeit der Eckkräfte F_i, die sich ja aus den Sprüngen des Torsionsmoments m_{nt} in den Ecken $\boldsymbol{x}_i$ herleiten.

Das System $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ für das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ kann man nun auf ein System für die Durchbiegung w allein reduzieren, indem man die Gleichungen (7.54) ineinander einsetzt

$$K\, \Delta\Delta w = p\,. \tag{7.64}$$

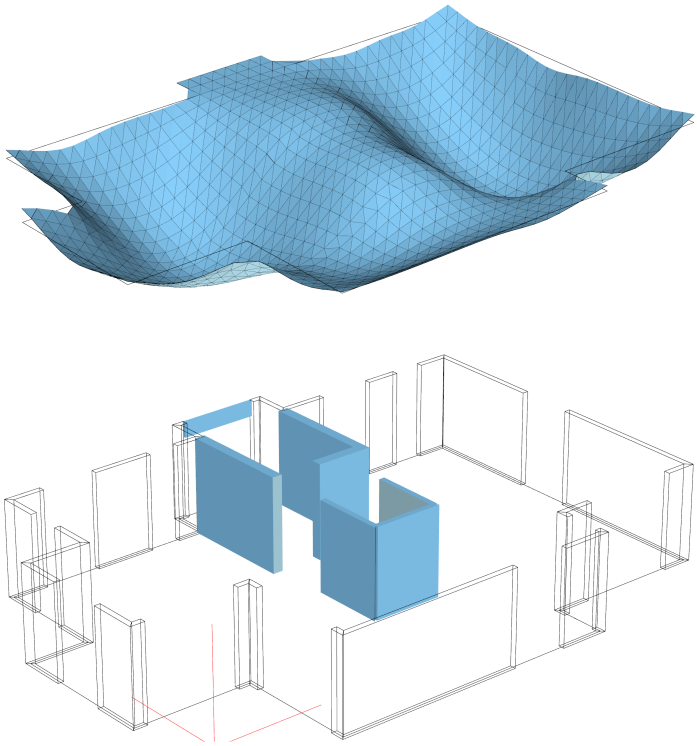


Bild 7.14. Nicht verankerte Ecken (w nicht maßstabsgetreu) (BE-PLATTE)

Zur linken Seite gehört die **Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\delta w\,d\Omega + \int_\Gamma (v_n\,\delta w - m_n\,\frac{\partial \delta w}{\partial n})\,ds + [[m_{nt}\,\delta w]]}_{\delta W_e}$$

$$\underbrace{-\int_\Omega \boldsymbol{K}(w)\bullet\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\delta w)]\,d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{7.65}$$

die das ***Prinzip der virtuellen Verrückungen*** formuliert, und die Spiegelung dieses Resultats über ‚Kreuz'

$$\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \mathscr{G}(w,\hat{w}) - \mathscr{G}(\hat{w},w) = 0 \tag{7.66}$$

also

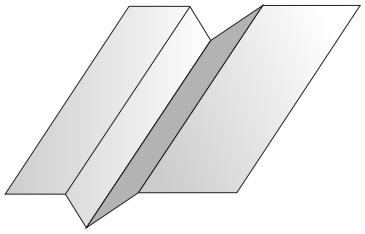


Bild 7.15. Man kann eine schubstarre Platte nicht wie ein Blech falzen, eine schubweiche Platte (theoretisch) aber schon. Wenn man mit den Fingern über eine schubweich gerechnete Platte wandert, dann spürt man an den Elementkanten überall Knicke

$$\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\hat{w}\,d\Omega + \int_\Gamma (v_n\,\hat{w} - m_n\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial n})\,ds + [[m_{nt}\,\hat{w}]] \\ - \int_\Gamma (\hat{v}_n\,w - \hat{m}_n\,\frac{\partial w}{\partial n})ds - [[\hat{m}_{nt}\,w]] - \int_\Omega K\,\Delta\Delta\hat{w}\,w\,d\Omega = 0 \tag{7.67}$$

ist der ***Satz von Betti***; ergänzende Zerlegungen von $(\Delta\Delta w, \hat{w})$ siehe [250].

7.7 Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)

Die *Kinematen* sind die Durchbiegung und die Verdrehungen um die beiden Achsen, siehe Bild 7.15,

$$w(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}^T . \tag{7.68}$$

Die zugehörigen Krümmungen und Gleitungen bestimmen sich gemäß

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}_{\,(2\times 2)} \tag{7.69a}$$
$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}_{\,(2)} . \tag{7.69b}$$

Die konstitutiven Gleichungen

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}_{\,(2\times 2)} \tag{7.70a}$$
$$a\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_{\,(2)} \tag{7.70b}$$

und die Gleichgewichtsbedingungen führen auf

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = p_{\,(1)} \tag{7.71a}$$
$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q} = b\,\nabla\, p_{\,(2)} . \tag{7.71b}$$

Es ist

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \frac{1}{2}\,(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) \\ \text{sym.} & \varphi_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) = \begin{bmatrix} \varphi_1 + w_{,1} \\ \varphi_2 + w_{,2} \end{bmatrix} \tag{7.72}$$

und

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] = K(1-\nu)\boldsymbol{K} + \nu K(\mathrm{tr}\boldsymbol{K})\boldsymbol{I} , \tag{7.73}$$

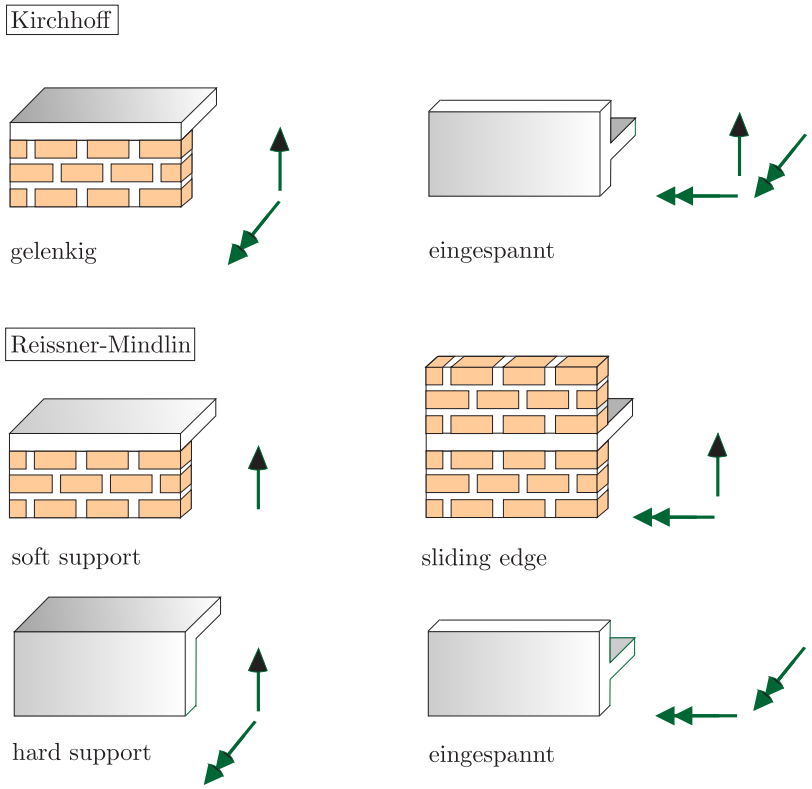


Bild 7.16. Lagerbedingungen von Kirchhoff und Reissner-Mindlin, die Pfeile und Drehpfeile geben die gesperrten Freiheitsgrade an, [130]

wobei

$$K = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \qquad a = K\,\frac{1-\nu}{2}\,\bar{\lambda}^2 \qquad b = \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{1}{\bar{\lambda}^2} \qquad \bar{\lambda}^2 = \frac{10}{h^2}\,. \tag{7.74}$$

Das Tripel $\boldsymbol{\Sigma}$ besteht nun aus den Termen

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{\varphi}_{(2)}; \boldsymbol{K}_{(2\times 2)}, \boldsymbol{\gamma}_{(2)}; \boldsymbol{M}_{(2\times 2)}, \boldsymbol{q}_{(2)}\} \tag{7.75}$$

und die virtuelle Arbeit ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> = \int_\Omega [&(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M} + (\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) - \boldsymbol{\gamma}) \bullet \boldsymbol{\delta q} \\ &+ (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{M}) \bullet \boldsymbol{\delta K} + (a\,\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{q}) \bullet \boldsymbol{\delta\gamma} + (-\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q}) \bullet \boldsymbol{\delta\varphi} \\ &+ (-\mathrm{div}\boldsymbol{q})\delta w] d\Omega\,. \end{aligned} \tag{7.76}$$

Partielle Integration (wie bei der Scheibe, siehe (7.45))

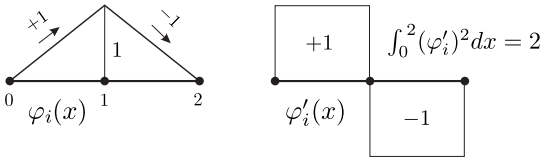


Bild 7.17. Endliche Energie (Stab) einer C^0*shape function*

$$\int_\Omega -\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}\bullet\boldsymbol{\delta\varphi}d\Omega=-\int_\Gamma \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{\delta\varphi}\,ds+\int_\Omega \boldsymbol{M}\bullet\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi})d\Omega \tag{7.77}$$

und

$$\int_\Omega -\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}\,\delta w d\Omega=-\int_\Gamma \boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{n}\,\delta w ds+\int_\Omega \boldsymbol{q}\bullet\nabla\delta w d\Omega \tag{7.78}$$

führt auf die erste **Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})=<\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}),\boldsymbol{\delta\Sigma}>+\int_\Gamma(\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{\delta\varphi}+\boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{n}\,\delta w)ds-a(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})=0 \tag{7.79}$$

mit der symmetrischen **Wechselwirkungsenergie**[2]

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})\bullet\boldsymbol{\delta M}+\boldsymbol{M}\bullet\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi})+\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}]\bullet\boldsymbol{\delta K}-\boldsymbol{K}\bullet\boldsymbol{\delta M}-\boldsymbol{M}\bullet\boldsymbol{\delta K}\\+\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w)\bullet\boldsymbol{\delta q}+\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\delta\varphi},\delta w)\bullet\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\gamma}\bullet\boldsymbol{\delta q}-\boldsymbol{q}\bullet\boldsymbol{\delta\gamma}\,.\end{aligned} \tag{7.80}$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, dann erhält man das folgende Differentialgleichungssystem für die drei Kinematen w,φ_1,φ_2

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})]+a\cdot\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w)=b\cdot\nabla p_{\,(2)} \tag{7.81a}$$

$$-\mathrm{div}\,(a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w))=p_{\,(1)}\,. \tag{7.81b}$$

Hierzu gehört die **Greensche Identität**

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi},w;\boldsymbol{\delta\varphi},\delta w)=&\int_\Omega[-\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})]\bullet\boldsymbol{\delta\varphi}-a\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w)\,\delta w]d\Omega\\&+\int_\Gamma(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})]\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{\delta\varphi}+a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w)\bullet\boldsymbol{n}\,\delta w)ds-a(\boldsymbol{\varphi},w;\boldsymbol{\delta\varphi},\delta w)=0\end{aligned} \tag{7.82}$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$a(\boldsymbol{\varphi},w;\boldsymbol{\delta\varphi},\delta w)=\int_\Omega[\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})]\bullet\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi})+a\cdot\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi},w)\bullet\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\delta\varphi},\delta w)]d\Omega\,. \tag{7.83}$$

[2] es ist $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}]\bullet\boldsymbol{\delta K}=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{\delta K}]\bullet\boldsymbol{K}$

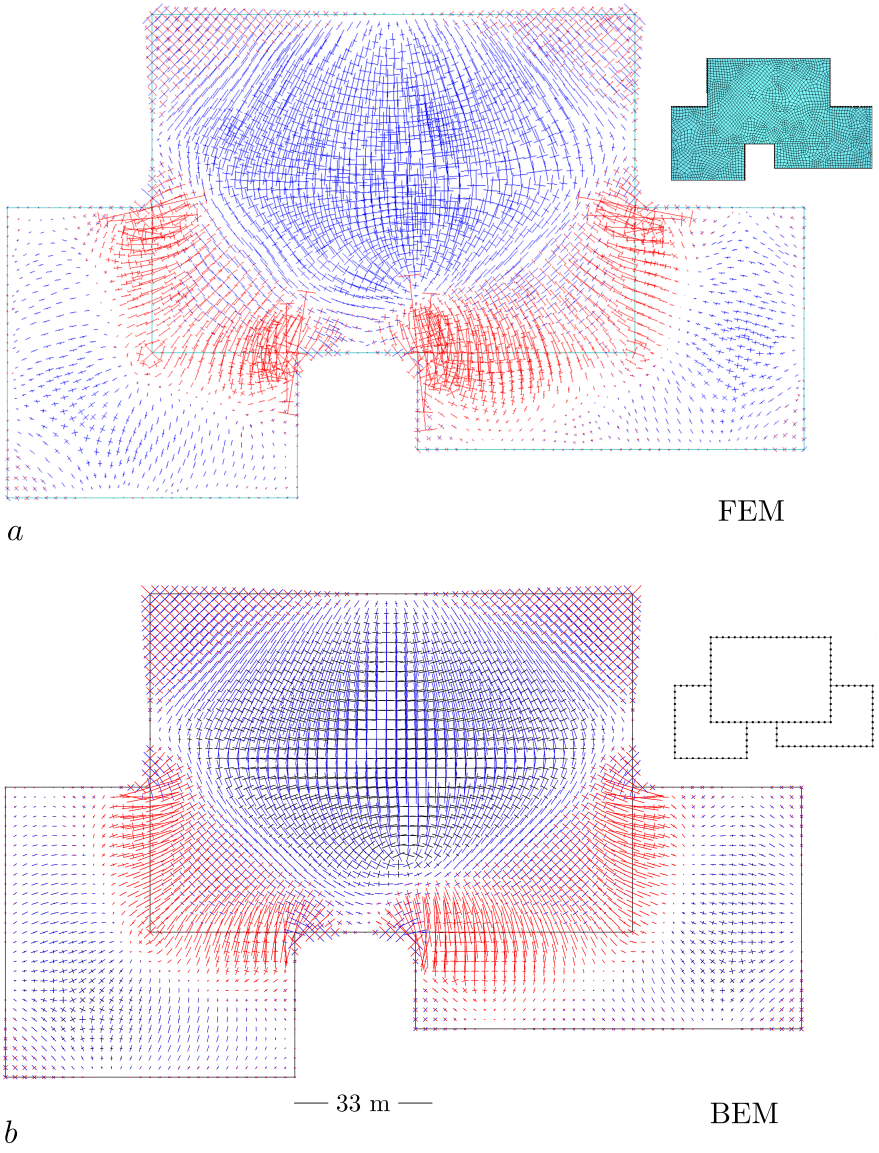


Bild 7.18. Hauptmomente im LF g, finite Elemente 0.4 × 0.4 m (SOFiSTiK) und Randelemente, Raster der Ergebnispunkte 0.4 × 0.4 m (BE-PLATTE). Die Ergebnispunkte der FEM sind die Mittelpunkte der (leicht) ‚windschiefen' Elemente, während sie bei der BEM ein gleichmäßiges Raster bilden. Im Feld betrug max m_{xx} (FEM-schubweich/BEM-schubstarr) 41.25/39.69 kNm/m und max m_{yy} 68.93/69.20 kNm/m

7.8 FE-Programme

Die FE-Programme rechnen Platten meist schubweich, weil das einfacher zu programmieren ist, siehe Bild 7.18 a. Das Differentialgleichungssystem der Reissner-Mindlin Platte ist von erster Ordnung, siehe (7.81), und daher müssen die *shape functions* nur C^0 sein statt C^1 wie bei der Kirchhoff-Platte[3]

Reissner-Mindlin	$a(\varphi_i, \varphi_j)$	1. Ableitungen
Kirchhoff	$a(\varphi_i, \varphi_j)$	2. Ableitungen

Mathematisch ähnelt eine schubweiche Platte einer Membran, die ja auch unter Linienkräften Knicke ausbildet. Mit Knicken ist ein Tuch nur noch C^0, aber nicht mehr C^1. Aber C^0 reicht. Die Energie einer schubweichen Platte mit Knicken ist endlich. Für den Programmierer bedeutet das, dass er ‚Hütchenfunktionen' als *shape functions* benutzen kann, was ihm die Arbeit wesentlich erleichtert. Statisch sind die Ergebnisse weitgehend dieselben, siehe Bild 7.19, bis auf den Effekt des *shear locking*. Für sehr dicke Platten ist die Reissner-Mindlin Platte sogar besser geeignet. Und dem Publikum fallen die Knicke in der Biegefläche nicht auf, weil sie zum einen klein sind und zum andern niemand so genau hinschaut. Die Schnittkräfte sind wichtiger und die passen im direkten Vergleich mit Kirchhoff, siehe Bild 7.18 a und b. Am deutlichsten sieht man den Unterschied in den Verformungen am eingespannten Rand. Ein schubweicher Balken kann mit einem Kick aus der Einspannung herauslaufen, siehe Bild 7.20. Diese ‚Flexibilität' ist auch der Grund, warum es je zwei unterschiedlich Festhaltungen am gelenkig gelagerten und eingespannten Rand gibt, siehe Bild 7.16.

Kirchhoff kennt nur je eine Lagerart. Wenn die Durchbiegung längs des Randes null ist, das sei hier die x-Achse, dann ist auch $w_{,x} = 0$. Die schubweiche Platte kann hingegen in Laufrichtung des Randes die Querschnitte verdrehen, ohne dass man das von außen sieht, siehe Bild 7.4, *soft support*.

In einer gelenkig gelagerten Ecke sind die Ableitungen $w_{,s}$ in Lagerrichtung beide null und daher ist der Gradient $\{w_{,x}\,, w_{,y}\}$ in der Ecke null. Eine solche Ecke gleicht damit einer Einspannung ‚in einem Punkt'.

Das versteift eine schubstarre Platte in den Ecken. Der Effekt kann gemildert werden, wenn man die Verdrehungen $w_{,x}$ und $w_{,y}$ in den Ecken frei gibt; w bleibt aber gesperrt. Wegen der Einspannwirkung konvergiert das w einer Kreisplatte, deren Rand man als Polygon approximiert, in der Grenze $h \to 0$, gegen die Biegefläche einer eingespannten Platte, *Babuškas Paradoxon*.

Um solchen Effekten eventuell gegenzusteuern, kann man in dem Programm BE-PLATTE in gelenkig gelagerten Ecken die Verdrehungen freigeben, w

[3] Die 1. Ableitungen von *piecewise* C^0 *polynomials* wie z.B. Hütchenfunktionen können springen, aber man kann sie trotzdem noch quadrat-integrieren und ebenso die 2. Ableitungen von *piecewise* C^1 *polynomials*, siehe Bild 7.17.

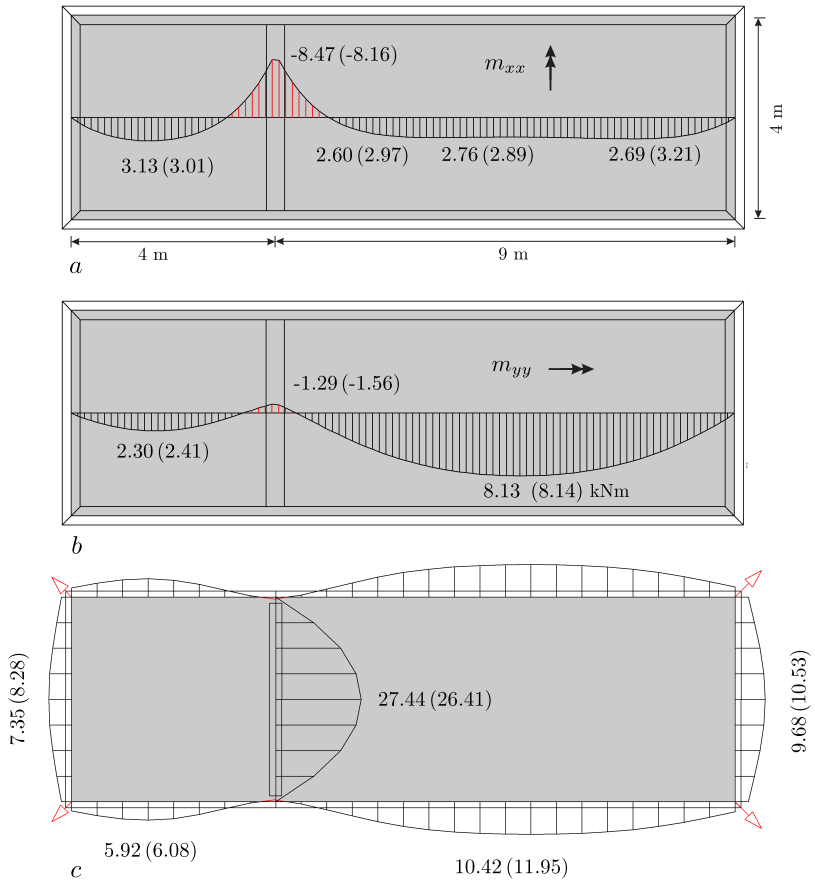


Bild 7.19. Deckenplatte 20 cm, Vergleich der Biegemomente und Lagerkräfte BEM und (FEM) im LF g, Kirchhoff und Reissner-Mindlin, (BE-PLATTE und SOFiSTiK)

bleibt aber gesperrt. Vor allem in schiefen Ecken von sehr dicken Platten, $t > 100$ cm, ist diese Maßnahme eine Erleichterung für die Platte.

7.9 Shear locking

Die Vorteile der schubweichen Platte liegen in den geringen Ansprüchen, die sie an die Stetigkeit der Ansatzfunktionen stellt und in ihrem inneren ‚Reichtum' an Kinematen. Dafür bereitet das *shear locking* Schwierigkeiten. Der Übergang von der schubweichen Platte – also relativ dicken Platten (Fundamentplatten) – zu schubstarren Platten, wie sie überwiegend im Hochbau vorkommen, bereitet Schwierigkeiten.

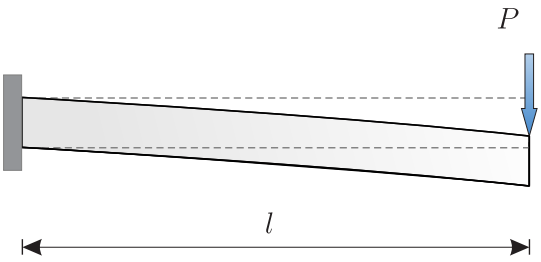


Bild 7.20. Kragträger, schubweich

Die Reissner-Mindlin-Platte enthält ja im Grunde die schubstarre Kirchhoff-Platte als Spezialfall, denn beim Übergang zur schubstarren Platte muss man nur die Gleitungen null setzen

$$\gamma_x = w_{,x} + \theta_x = 0 \qquad \gamma_y = w_{,y} + \theta_y = 0\,. \tag{7.84}$$

Da sich Schubverformungen nur bei gedrungenen Balken (und Platten) bemerkbar machen, erwarten wir, dass die Reissner-Mindlin-Platte sich bei geringer Plattenstärke wie eine schubstarre Kirchhoff-Platte verhält.

Dem ist (rechnerisch) aber leider nicht so. Mit abnehmender Plattenhöhe h versteift sich eine nach Reissner-Mindlin gerechnete Platte zusehends, die Durchbiegungen hinken den Ergebnissen nach Kirchhoff immer mehr hinterher, bis zuletzt die Ergebnisse unbrauchbar werden, weil die Platte sich kaum noch durchbiegt. Das meint man mit *shear-locking*.

Zum Verständnis sei gesagt, dass dies ein Problem der finiten Elemente ist und nicht der Plattentheorie. Könnte man die Gleichungen exakt lösen, dann würden die Ergebnisse nach Reissner-Mindlin mit abnehmender Plattenstärke h nahtlos in die Ergebnisse nach Kirchhoff übergehen, auch noch in der Grenze $h \to 0$.

Wie es zum *shear locking* kommt, kann man an einem schubweichen Kragträger, $\boldsymbol{u} = \{w, \theta\}^T$, verfolgen, siehe Bild 7.20. Die Wechselwirkungsenergie lautet

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l EI\,\theta'\,\delta\theta'\,dx + \int_0^l GA_s(w' + \theta)(\delta w' + \delta\theta)\,dx\,, \tag{7.85}$$

so dass man mit entsprechenden Einheitsverformungen – 2 für jeden Knoten

$$\underbrace{\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\text{Knoten 1}} \quad \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_3(x) = \begin{bmatrix} w_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix}}_{\text{Knoten 2}} \ldots \tag{7.86}$$

etwa in Form linearer Ansätze

$$w_i(x) = \frac{l - x}{l} \qquad \theta_j(x) = \frac{x}{l} \tag{7.87}$$

eine Beziehung wie

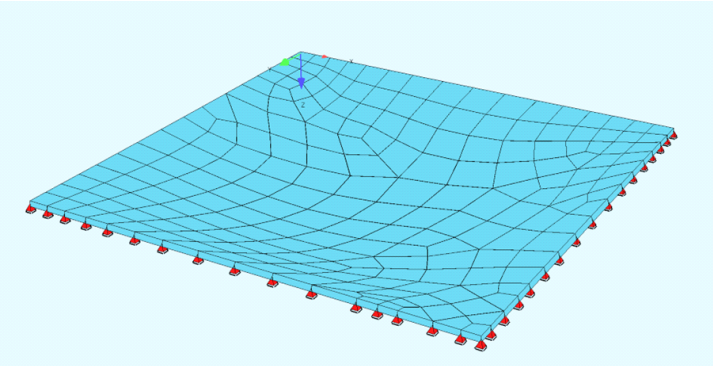


Bild 7.21. Betondecke 8×8 m, $t = 10\,\text{cm}$, $g = 2.5\ \text{kN/m}^2$, Durchbiegung im Feld schubweich $w = 15$ mm, schubstarr $w = 18$ mm. Die Feldmomente waren gleich (SOFiSTiK + BE-PLATTE)

$$(\boldsymbol{K}_B + \boldsymbol{K}_S)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{7.88}$$

erhält, wobei die Einträge in der Matrix $\boldsymbol{K}_B$ die Biegeanteile berücksichtigen und die Einträge in $\boldsymbol{K}_S$ die Schubanteile

$$k_{ij}^B = \int_0^l EI\,\theta_i'\,\theta_j'\,dx \qquad k_{ij}^S = \int_0^l GA_s(w_i' + \theta_i)(w_j' + \theta_j)\,dx\,. \tag{7.89}$$

Rechnet man den Kragträger in Abb. 7.20 schubweich, so erhält man mit einem Element für die Durchbiegung der Kragarmspitze das Resultat

$$w(l) = \frac{12(h/l)^2 + 20}{12(h/l)^2 + 5} \cdot \frac{Pl}{GA_s} \qquad A_s = \text{‚Schubfläche‘}\ . \tag{7.90}$$

Bei sehr kurzen Balken, $l \ll 1$, wird der erste Bruch ungefähr Eins, und am Trägerende zeigt sich die korrekte Schubverformung

$$w = \frac{Pl}{GA_s}\,. \tag{7.91}$$

Ist aber $l \gg h$, dann ist der erste Bruch ungefähr $20/5$, beträgt die Durchbiegung also

$$w = 4\,\frac{Pl}{GA_s} \tag{7.92}$$

und verglichen damit ist der Wert (7.91) viel zu klein. Das ist *shear-locking*.

Die Ursache für diesen **Versteifungseffekt** ist die unterschiedliche Sensitivität der Biegesteifigkeit EI und der Schubsteifigkeit GA_s gegenüber der Trägerhöhe h

$$EI = \frac{b\,h^3}{12} \qquad GA_s = b\,h \qquad \text{(Rechteckquerschnitt)}\,. \tag{7.93}$$

Lässt man die Trägerhöhe h – und damit die Schubverformungen $\gamma = w' + \theta$ – in Gedanken – gegen null gehen, dann sinkt die Biegesteifigkeit viel rascher ab als die Schubsteifigkeit. Dies führt, so wie bei einer Gleichung

$$(1 + 10^5)\,u = 10 \qquad \text{Lösung } u = 0.999^{-5} \approx 0\,, \tag{7.94}$$

dazu, dass in (7.88) die Matrix $\boldsymbol{K}_S$ wegen des stark anwachsenden Einflusses von GA_s zunehmend dominiert. Wenn man exakt rechnen könnte, dann würde der wachsende Einfluss von GA_s durch die zu null gehende Gleitung $w' + \theta = \gamma \mapsto 0$ mehr als kompensiert. In einem FE-Programm funktioniert das aber leider nicht, und deswegen muss die Lösung $\boldsymbol{u}$ des Gleichungssystems gegen null gehen, sprich es kommt zur Schubversteifung.

All dies gilt sinngemäß auch für schubweiche Platten: Der Übergang von schubweich (mittlere bis große Plattenstärke) zu schubstarr (kleine Plattenstärke) gelingt numerisch nicht.

Es sind eine ganze Reihe von Maßnahmen vorgeschlagen worden, um das *shear-locking* zu vermeiden. Am sichersten ist es, den Polynomgrad zu erhöhen. Dies gilt nicht nur hier, sondern für alle Phänomene, wo durch ***internal constraints*** die Freiwerte der Ansätze dazu gebraucht werden, die *constraints* zu erfüllen und dann keine Freiwerte mehr vorhanden sind, um die Bewegungen zu beschreiben.

In der Praxis ist das *shear locking* beherrschbar, siehe Bild 7.21. SOFiSTiK rechnet schubweich (Reissner-Mindlin) und BE-PLATTE schubstarr (Kirchhoff). Bei $t = 20$ cm lauteten die Werte $w_{RM} = 3.9$ mm und $w_K = 4.1$ mm und bei $t = 30$ cm $w_{RM} = 1.7$ mm und $w_K = 1.8$ mm. Die Feldmomente waren praktisch gleich.

7.10 Einflussfunktionen

Um die Formulierungen einfach zu halten, es geht ja hier im Grunde nur um Algebra, betrachten wir einen Stab $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ mit Anfangsdehnungen ε^+ und einer eingeprägten Normalkraft N^+

$$\begin{aligned} u' - \varepsilon &= \varepsilon^+ \\ EA\,\varepsilon - N &= N^+ \\ -N' &= p \end{aligned} \tag{7.95}$$

zu dem die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} \rangle + [N\,\delta u]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.96}$$

mit

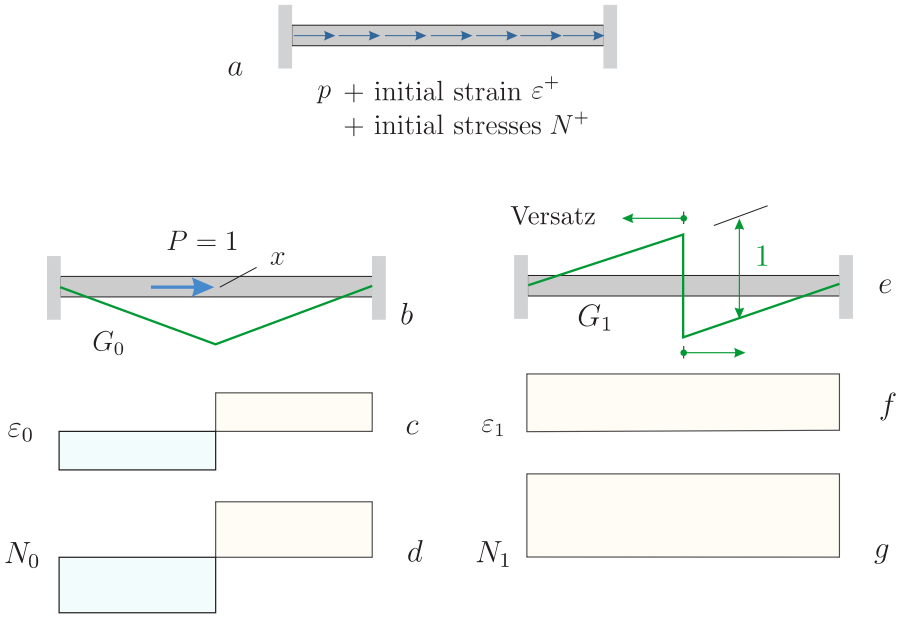


Bild 7.22. Stab, **a)** System und Belastung, **b)** Einflussfunktion G_0, **c)** Einflussfunktion G_1 und zugehörige Verzerrungen und Normalkräfte

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l (u' - \varepsilon)\, \delta N\, dx + \int_0^l EA\, \varepsilon\, \delta\varepsilon\, dx + \int_0^l N(\delta u' - \delta\varepsilon)\, dx \qquad (7.97)$$

gehört. Es ist natürlich $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ die linke Seite von (7.95). Die zweite Greensche Identität ergibt sich zu

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \rangle + [N\, \hat{u}]_0^l - [u\, \hat{N}]_0^l - \langle \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) \rangle = 0\,. \qquad (7.98)$$

Es sei nun $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}) = [\varepsilon^+, N^+, p]^T$, siehe Bild 7.22 *a*, und es sei $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \{G_0, \varepsilon_0, N_0\}$ die Lösung zum LF $P = 1$, siehe Bild 7.22 *b*, mit

$$\varepsilon_0 = \frac{d}{dy} G_0(y, x) \qquad N_0 = EA\, \varepsilon_0\,. \qquad (7.99)$$

Wie gewohnt formulieren wir die zweite Greensche Identität (7.98) erst auf dem gelochten Intervall $I_\varepsilon := [0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, l]$ und gehen dann bis zur Grenze, $\varepsilon \to 0$. Auf I_ε ist die rechte Seite der Einflussfunktion null, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_0) = [0, 0, 0]^T$, so dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_0)_{I_\varepsilon} = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle + [N\, G_0]_0^l - [u\, N_0]_0^l - u(x) = 0\,, \qquad (7.100)$$

wobei der einzelne Term $u(x)$ der Grenzwert von

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{N_0(x-\varepsilon)\,u(x-\varepsilon) - N_0(x+\varepsilon)\,u(x+\varepsilon)\} = 1\cdot u(x) \tag{7.101}$$

ist. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen an u und $\boldsymbol{\Sigma}_0$ folgt somit

$$u(x) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}), \boldsymbol{\Sigma}_0\rangle = \int_0^l (N_0\,\varepsilon^+ + \varepsilon_0\,N^+ + G_0\,p\,)\,dx\,, \tag{7.102}$$

und in analoger Weise erhalten wir die Einflussfunktion für die Normalkraft

$$N(x) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}), \boldsymbol{\Sigma}_1\rangle = \int_0^l (N_1\,\varepsilon^+ + \varepsilon_1\,N^+ + G_1\,p)\,dx\,. \tag{7.103}$$

7.11 Betti extended

Alle FE-Verfahren für gemischte Formulierungen, ob man nun das ***Hu-Washizu Prinzip*** ($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}$ als Variable) oder das ***Hellinger–Reissner Prinzip*** ($\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{S}$) benutzt, siehe [125], kann man auf die *Galerkin Orthogonalität*

$$a(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_h, \boldsymbol{\Sigma}_i) = 0 \qquad \boldsymbol{\Sigma}_i \in \mathcal{V}_h\,, \tag{7.104}$$

zurückführen, ist man also bei der klassischen Algebra der finiten Elemente. Daher ist auch die Formulierung von ***Betti extended*** für gemischte Probleme eine Wiederholung. Seien $\boldsymbol{\Sigma}_1$ und $\boldsymbol{\Sigma}_2$ zwei Gleichgewichtslagen zu rechten Seiten $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$, die jetzt auch Anfangsdehnungen und Anfangsspannungen umfassen können, wie oben beim Stab $\boldsymbol{p} = \{\varepsilon^+, N^+, p\}$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_1) = \boldsymbol{p}_1 \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_2) = \boldsymbol{p}_2\,, \tag{7.105}$$

dann dürfen im Satz von Betti $<\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{p}_2> = <\boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{p}_1>$ die FE-Lösungen die Originale ersetzen

$$<\boldsymbol{\Sigma}_{1h}, \boldsymbol{p}_2> = <\boldsymbol{\Sigma}_{2h}, \boldsymbol{p}_1> \qquad \text{Betti extended}\,. \tag{7.106}$$

Ist also $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{G}_0$ die Einflussfunktion für $u(x)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}_0) = \boldsymbol{\delta}_0 = \{0, 0, \delta_0\}$, dann ergibt die Ersetzung $\boldsymbol{G}_0 \to \boldsymbol{G}_{0h}$ und $\boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{\Sigma}_h$

$$<\boldsymbol{G}_{0h}, \boldsymbol{p}> = <\boldsymbol{\Sigma}_h, \boldsymbol{\delta}_0> \tag{7.107}$$

die Einflussfunktion für die Verschiebung der FE-Lösung

$$u_h(x) = \int_0^l (N_0^h\,\varepsilon^+ + \varepsilon_0^h\,N^+ + G_0^h\,p)\,dx\,. \tag{7.108}$$

8

Nichtlineare Probleme

In diesem Kapitel geht es um nichtlineare Probleme, genauer deren FE-Formulierung. Das Schwergewicht liegt dabei auf der Frage, welche Teile der linearen Theorie auf die nichtlinearen Probleme übertragen werden können und wo die nichtlineare Theorie von der linearen Theorie abweicht und was die charakteristischen Züge der nichtlinearen FE-Formulierungen sind, wo ihre spezifischen Schwierigkeiten liegen.

Was die Sache etwas beschwerlich macht ist, dass der Übergang zu nichtlinearen Formulierungen mit einem merklichen **Verlust von Transparenz** einhergeht, denn nichtlineare FE-Formulierungen bestehen zu einem großen Teil aus einer scheinbar endlosen Folge von Umformungen mittels der Produkt- und Kettenregel, Koordinatentransformationen, Linearisierungen und partieller Integration und das alles gewürzt mit linearer Algebra. Die Zeitschriften und Bücher sind voll davon[1].

Zudem ist der Konvergenzradius der Ergebnisse (wie groß ist der Problemkreis, der von den Ergebnissen abgedeckt wird) meist umgekehrt proportional zur Komplexität des Problems. Es sind oft hochdiffizile Insellösungen.

8.1 Einführung

Das wichtigste vorweg: **Auch bei nichtlinearen Problemen gibt es eine erste Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = a_u(u, \delta u) - (p, \delta u) = 0\,, \tag{8.1}$$

die als Vorlage für die FE-Lösung $u_h = \sum_j u_j\, \varphi_j(x)$ dient

$$a_u(u_h, \varphi_i) - (p, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{8.2}$$

Entscheidend bei einer nichtlinearen Formulierung ist, dass man die Gleichungen, also die drei Schritte $u \to \varepsilon \to \sigma \to p$, im Griff hat. Ist dieser Pfad ver-

[1] Unterstützung bei den technischen Details der FEM bietet [65].

standen und richtig gesetzt, dann ergibt sich die erste Greensche Identität von selbst und dann ist der ‚Rest' nur noch Algebra und ein schneller Computer.

Auf der rechten Seite der Gleichung[2]

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} \tag{8.3}$$

steht weiterhin die Arbeit der Belastung p auf den Wegen φ_i, aber die linke Seite ist nicht mehr die dazu äquivalente Arbeit $\boldsymbol{f}_h$ der *shape forces*, sondern es ist das Inkrement der inneren Arbeit auf den Wegen φ_i. Man bewegt sich sozusagen aus dem Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{u}$ probeweise in eine Richtung φ_i und kontrolliert, ob dabei der Zuwachs an innerer Energie gleich dem Zuwachs an äußerer Arbeit ist.

Das ist wie in der Schule. Wenn die Funktion $F(x) = f(x) - p \cdot x$ im Punkt x ein Minimum hat, dann muss in erster Näherung das Inkrement $df = f'(x)\,dx$ bei einer Störung dx gleich dem Inkrement aus p sein, $f'(x)\,dx = p\,dx$.

Dass die Einträge k_i des Vektors $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})$ die Inkremente der inneren Energie sind, liest man an der ersten Greenschen Identität ab

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = a_u(u, \varphi_i) - (p, \varphi_i) \equiv f'(x)\,dx - p\,dx = 0\,, \tag{8.4}$$

denn bei nichtlinearen Problemen steht dort nicht $a(u, \varphi_i)$, sondern die *Gateaux-Ableitung* $a_u(u, \varphi_i)$ der inneren Energie im Punkt u in Richtung von φ_i, also sinngemäß das $f'(x)\,dx$ mit $dx = \varphi_i$.

Die partielle Integration des Arbeitsintegrals $(L\,u, \varphi_i)$ führt bei nichtlinearen Problemen automatisch(!) auf diese inkrementelle Betrachtungsweise.

Anlass, sich einmal mehr zu wundern, wieviel Intelligenz in die partielle Integration eingebaut ist[3].

8.2 Gateaux Ableitung

Bei nichtlinearen Problemen tritt eine neue Ableitung auf, die sogenannte *Gateaux Ableitung*. Sei

$$J(u) = \int_0^l F(u)\,dx \tag{8.5}$$

ein (möglicherweise nichtlineares) Funktional, dann bezeichnet man den Ausdruck

$$J_u(\delta u) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon \delta u)_{|_{\varepsilon=0}} \tag{8.6}$$

als die Gateaux Ableitung von $J(u)$ in Richtung des Inkrements δu.

[2] $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})$ ist wie $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ein Vektor, der aber nichtlinear in den u_i ist.

[3] L = der Differentialoperator des Problems

Man bildet mit einer Testfunktion δu (virtuellen Verrückung) den Ausdruck $J(u+\varepsilon\delta u)$, differenziert nach ε, und setzt am Schluss den Faktor $\varepsilon = 0$.

Diese Ableitung (eigentlich ist es ein Differential, ein Inkrement) sieht ganz wie ein Notbehelf aus, wenn man etwas nicht richtig differenzieren kann, dann ersetzt man es durch einen Differenzenquotient.

Überraschenderweise erscheint diese Ableitung jedoch ***automatisch*** in vielen nichtlinearen Formulierungen, wie zum Beispiel der Greenschen Identität der nichtlinearen Elastizitätstheorie, siehe (8.53),

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds - \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}\,d\Omega = 0\,, \quad (8.7)$$

wobei

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{\delta u} + \nabla\boldsymbol{\delta u}^T + \nabla\boldsymbol{u}^T\,\nabla\boldsymbol{\delta u} + \nabla\boldsymbol{\delta u}^T\,\nabla\boldsymbol{u}\right) \quad (8.8)$$

die Gateaux Ableitung (= Zuwachs) des nichtlinearen Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ im Punkt $\boldsymbol{u}$ in Richtung von $\boldsymbol{\delta u}$ ist,

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{\delta u})]_{|_{\varepsilon=0}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\,. \quad (8.9)$$

Was – auf den ersten Blick – wie ein Trick aussieht, ist also ein wesentlicher Bestandteil der Integralformulierungen nichtlinearer Probleme.

In der **nichtlinearen Elastizitätstheorie** tritt in der ersten Greenschen Identität an die Stelle des symmetrischen Integrals

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\delta u})d\Omega = a(\boldsymbol{\delta u},\boldsymbol{u})\,, \quad (8.10)$$

das unsymmetrische Integral

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})d\Omega\,, \quad (8.11)$$

das Skalarprodukt der Gateaux Ableitung des Verzerrungstensors mit dem Spannungstensor. Dieses Integral beschreibt den Zuwachs an innerer Energie, wenn $\boldsymbol{u}$ sich in Richtung $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\delta u}$ entwickelt. Bei nichtlinearen Problemen ist die erste Greensche Identität so etwas, wie eine ‚Inkrement-Betrachtung' der Terme in der Summe $\delta W_e - \delta W_i = 0$, die aber weiterhin null ist – die Isostasie bleibt erhalten! (Wie das $df = 0$ längs einer Isolinie $f(x,y)$).

Man kann argumentieren, dass auch die lineare Theorie von einer inkrementellen Betrachtung ausgeht, nur ist die dann exakt, weil alle Ausdrücke linear sind, während die Nichtlinearität zur Linearisierung und damit zu einer echten inkrementellen Betrachtung zwingt.

Eine Konsequenz der Unsymmetrie in (8.11) ist, dass die einfache Algebra

$$\mathscr{B}(u,\hat{u}) = \mathscr{G}(u,\hat{u}) - \mathscr{G}(\hat{u},u) = 0\,, \quad (8.12)$$

auf der der Satz von Betti beruht, nicht gilt. Bei nichtlinearen Problemen gibt es daher keinen ‚Betti'.

8.3 Nichtlinearer Stab

Zum Einstieg betrachten wir den nichtlinearen Stab

$$\text{Verzerrungen} \qquad \varepsilon - (u' + \frac{1}{2}\,(u')^2) = 0 \tag{8.13a}$$

$$\text{Materialgesetz} \qquad \sigma - E\,\varepsilon = 0 \tag{8.13b}$$

$$\text{Gleichgewicht} \qquad -A(\sigma + u'\sigma)' = p \tag{8.13c}$$

Partielle Integration des Arbeitsintegrals, wir schreiben $\mathcal{N} = A\,(\sigma + u'\sigma)$,

$$\int_0^l -\mathcal{N}'\,\delta u\,dx = -[\mathcal{N}\,\delta u]_0^l + \int_0^l \mathcal{N}\,\delta u'\,dx = 0 \tag{8.14}$$

führt, es ist

$$\mathcal{N}\,\delta u' = A(\sigma + u'\sigma)\,\delta u' = (1 + u')\,\delta u'\,\sigma A = \varepsilon_u(u, \delta u)\,\sigma A\,, \tag{8.15}$$

auf die zugehörige erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -\mathcal{N}'\,\delta u\,dx + [\mathcal{N}\,\delta u]_0^l - \underbrace{\int_0^l \varepsilon_u(u, \delta u)\,\sigma\,A\,dx}_{a_u(u,\delta u)} = 0 \tag{8.16}$$

mit $\varepsilon_u(u, \delta u) := (1 + u')\,\delta u'$ als der Gateaux Ableitung

$$\frac{d}{d\eta}\varepsilon(u + \eta\,\delta u)|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta}\big(u' + \eta\,\delta u' + \frac{1}{2}\,(u' + \eta\,\delta u')^2\big)|_{\eta=0} \tag{8.17}$$

von $\varepsilon(u)$ in Richtung von δu. Auf (8.16) beruhen die FE-Weggrößenansätze.

8.3.1 Newton Verfahren

Zu bestimmen sei zum Beispiel die Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes, links festgehalten, $u(0) = 0$, und mit einem freien Ende, $N(l) = 0$.

Für die FE-Lösung machen wir den Ansatz

$$u_h = \sum\nolimits_j u_j\,\varphi_j(x) \tag{8.18}$$

und bestimmen die Knotenverschiebungen u_j so, dass

$$a_u(u_h, \varphi_i) - \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = k_i(\boldsymbol{u}) - f_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{8.19}$$

Diese n Gleichungen bilden ein System von n nichtlinearen Gleichungen $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$, das ein Computer iterativ mit dem ***Newton-Verfahren*** löst

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - (\nabla \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i))^{-1}(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.20}$$

In der Statik hat man mehr Einsicht in die Struktur der Gleichungen, kann eventuell intelligenter an die Sache herangehen, und man kommt so zu

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)\,(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.21}$$

wobei $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u}_i)$ die *tangentiale Steifigkeitsmatrix* ist. Es ist dieselbe, wie bei der Scheibe, siehe Kap. 8.6, nur ‚eindimensional'.

8.4 Geometrisch nichtlinearer Balken

Die Biegesteifigkeit EI und Längssteifigkeit EA längs des Balkens sind konstant und die Streckenlasten lauten p_x und p_z. Die Kinematen sind die Längsverschiebung u und die Durchbiegung w, die man zu $\boldsymbol{v} = \{u, w\}^T$ zusammenfassen kann,

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}\,(w')^2 \qquad \kappa = w'' \tag{8.22a}$$

$$N = EA\,\varepsilon \qquad M = -EI\,\kappa \tag{8.22b}$$

$$-N' = p_x \qquad -M'' - (N\,w')' = p_z\,. \tag{8.22c}$$

Daraus ergibt sich das folgende **System von Differentialgleichungen** für u und w

$$-EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)' = p_x \tag{8.23a}$$

$$EI\,w^{IV} - (EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)\,w')' = p_z\,, \tag{8.23b}$$

oder in einer etwas ‚transparenteren' Fassung

$$-N' = p_x \tag{8.24a}$$

$$EI\,w^{IV} - (N\,w')' = p_z\,. \tag{8.24b}$$

Es sei

$$N = N(\boldsymbol{v}) = EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)\,, \qquad M = M(w) = -EI\,w''\,, \tag{8.25}$$

und $\boldsymbol{Lv}$ bezeichne die linke Seite des obigen Systems (8.23), dann lässt sich das Arbeitsintegral mittels partieller Integration wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned}\int_0^l \boldsymbol{Lv} \bullet \boldsymbol{\delta v}\,dx &= \int_0^l ((Eq_1)\cdot\delta u + (Eq_2)\cdot\delta w)\,dx \\ &= \int_0^l [(-N'\,\delta u - (M'' + (N\,w')')\,\delta w]\,dx \\ &= -[N\delta u + (M' + N\,w')\,\delta w - M\delta w']_0^l + a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v})\,,\end{aligned} \tag{8.26}$$

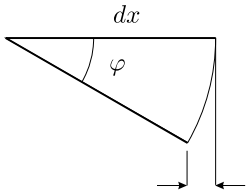


Bild 8.1. Verkürzung durch Drehung

wobei

$$a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = \int_0^l (-M\,\delta w'' + N(\delta u' + w'\,\delta w'))\,dx$$
$$= \int_0^l (\frac{M(w)\,M_w(w,\delta w)}{EI} + \frac{N(\boldsymbol{v})\,N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v})}{EA})\,dx \tag{8.27}$$

das **Inkrement der Wechselwirkungsenergie** ist, das wir im zweiten Teil unter Benutzung der *Gateaux-Ableitungen* von M bzw. N,

$$M_w(w,\delta w) = [\frac{d}{d\varepsilon}M(w+\varepsilon\,\delta w)]_{|_{\varepsilon=0}} = -EI\,\delta w'' = \delta M \tag{8.28}$$
$$N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = [\frac{d}{d\varepsilon}N(\boldsymbol{v}+\varepsilon\,\boldsymbol{\delta v})]_{|_{\varepsilon=0}} = EA(\delta u' + \frac{1}{2}(\delta w')^2) = \delta N \tag{8.29}$$

angeschrieben haben. Die erste Greensche Identität lautet somit

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = \int_0^l \boldsymbol{Lu}\bullet\boldsymbol{\delta}u\,dx + [N\delta u + (M' + N w')\,\delta w - M\delta w']_0^l$$
$$- a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = 0\,. \tag{8.30}$$

Es ist $T = M' + N w'$ die Transversalkraft. Auf diesen Gleichungen beruht die Theorie II. Ordnung bei Balken, nur ist es so, dass man von einer konstanten Normalkraft N ausgeht, die als bekannt gesetzt wird, so dass sich das System (8.23) auf

$$-EA\,N' = 0 \tag{8.31a}$$
$$EI\,w^{IV} - N\,w'' = p_z \tag{8.31b}$$

reduziert, also in dem letzten Ausdruck die bekannte **Gleichung der Theorie II. Ordnung** übrig bleibt.

Die Starrkörperbewegungen, $\delta N = \delta M = 0$, die zu dem System (8.23) gehören, lauten, a, b, c sind Konstante,

$$\delta u = -\frac{1}{2}\,(\delta w')^2\,x + c \qquad \delta w = a + b\,x\,. \tag{8.32}$$

Der erste Term berücksichtigt, dass es durch eine Drehung φ zu einer Verschiebung ($\leftarrow$) in Richtung der Stabachse kommt, siehe Bild 8.1 [233] S. 10,

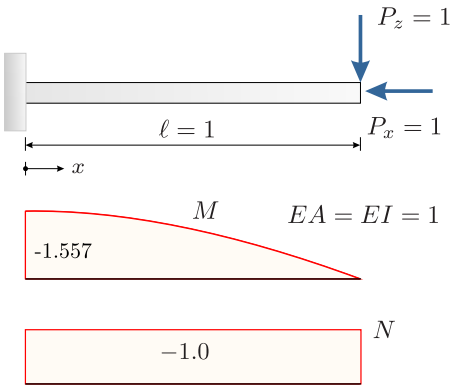


Bild 8.2. Theorie II. Ordnung

$$-(1-\cos\varphi)\,dx = -\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos\varphi}\,dx \simeq -\frac{\sin^2\varphi}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\varphi^2\,dx \tag{8.33}$$

was (8.32) entspricht, wenn wir $\varphi \simeq \delta w'$ setzen.

Bei einer Drehung des Kragträgers in Bild 8.2 um die Einspannstelle, $\delta w = a + b \cdot x = 0 + 1 \cdot x$ und $\delta u = -0.5\,x$ bleiben in der Identität (8.30) nur die Randarbeiten übrig und die sind dann null, $N = -P_x$ und $\delta u(l) = -0.5\,l$,

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v}) = [N\,\delta u + T\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = P_x \cdot 0.5\,l + P_z \cdot l + M(0) = 0\,. \tag{8.34}$$

Diese Null ist die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Drehung – Drehung im Sinne von (8.32) – des Balkens aus der neutralen Lage.

Wir sind hier aber bei der Theorie II. Ordnung und da befinden sich die Kräfte nicht mehr in der neutralen Lage, sondern in der ausgelenkten Lage, der Verformungsfigur $\boldsymbol{v}$, wenn wir an dem System wackeln; von daher ist das Ergebnis (anscheinend) akademisch.

Aber weil (8.34) für alle EA und EI gilt, gilt die Gleichung auch für $EA = EI = \infty$. Die Kräfte P_x und P_z wirken, aber es verformt sich nichts, die neutrale Lage ist die exakte Lage. Wenn man jetzt den Träger dreht, dann entsteht ein Moment $M(0) = -(P_x \cdot 0.5\,l + P_z \cdot l)$ in der Einspannstelle und dieses Moment ist nicht das elastische Moment der Lösung $\boldsymbol{v} = \{u = 0, w = 0\}$, die sowieso null ist, sondern es ist das Ausgleichsmoment, das zur Stabilisierung notwendig ist.

8.4.1 Energieerhaltungssatz

Bei einem linearen Stab ist

$$\frac{1}{2}\,\mathscr{G}(u,u) = \frac{1}{2}\int_0^l pu\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,dx = W_e - W_i \tag{8.35}$$

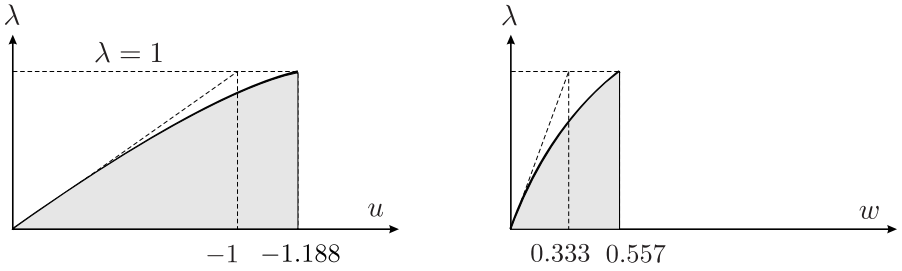


Bild 8.3. Verformungen am Trägerende

der Energieerhaltungssatz. Bei dem Kragträger in Bild 8.2,

$$\varepsilon = l\sqrt{\frac{P_x}{EI}}\,, \qquad P_x = P_z = 1\,, \qquad l = EI = 1\,, \tag{8.36}$$

der nach Theorie II. Ordnung berechnet wurde,

$$\begin{aligned} u(x) &= 1.1681 - 0.8564\,[2.7516\,x - 2\,\sin(x-2) + 0.5\,\sin(2\,x-2) \\ &\quad - 2\,\sin(x)] \qquad (8.37a) \\ w(x) &= \sin(x) - x + 1.5574\,(1-\cos(x)) \qquad (8.37b) \end{aligned}$$

gilt auch $W_e = W_i$, nur kann man die äußere Arbeit W_e nicht einfach aus den Endverformungen, siehe Bild 8.3, berechnen

$$W_e \neq \frac{1}{2}(P_x\,u(l) + P_z\,w(l)) = \frac{1}{2}(1.0\cdot 1.188 + 1.0\cdot 0.557) = 0.8725\,, \tag{8.38}$$

sondern man muss den ganzen Pfad verfolgen. Sei $\boldsymbol{dv} = \{du, dw\}$ das Verformungsinkrement bei einer Laststeigerung, dann lesen wir

$$dW_i = a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{dv}) = \int_0^l \Big(\frac{N(\boldsymbol{v})\,N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{dv})}{EA} + \frac{M(w)\,M_w(w, dw)}{EI}\Big)\,dx \tag{8.39}$$

als den Zuwachs an innerer Energie und

$$\begin{aligned} \int dW_i &= \int_0^l \Big[\int_0^N \frac{\bar{N}\,d\bar{N}}{EA} + \int_0^M \frac{\bar{M}\,d\bar{M}}{EI}\Big]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI}\Big)\,dx = 0.9670 \end{aligned} \tag{8.40}$$

als die innere Energie am Ende des Lastpfades.

Um die äußere Arbeit zu berechnen, müssen wir in Inkrementen denken und annehmen, dass die Belastung langsam gesteigert wird,

$$P_x(\lambda) = \lambda\,P_x = \lambda\cdot 1 \qquad P_z(\lambda) = \lambda\,P_z = \lambda\cdot 1 \qquad 0 \le \lambda \le 1\,. \tag{8.41}$$

Die äußere Arbeit beträgt dann, [116] p. 333

$$\int dW_e = \int_0^u \lambda \cdot 1 \, d\bar{u} + \int_0^w \lambda \cdot 1 \, d\bar{w} = \int_0^1 \lambda \, (\bar{u}_{,\lambda} + \bar{w}_{,\lambda}) \, d\lambda \,. \tag{8.42}$$

Dieses Integral wird am besten numerisch ausgewertet, $\Delta = 0.05$,

$$\int dW_e = \int_0^1 \lambda \, \big[\frac{\bar{u}(\lambda + \Delta) - \bar{u}(\lambda)}{\Delta} + \frac{\bar{w}(\lambda + \Delta) - \bar{w}(\lambda)}{\Delta} \big] d\lambda \tag{8.43}$$

und ergibt mit der *Simpson-Regel* den Wert

$$\int dW_e = 0.9669 \,, \tag{8.44}$$

der gut mit der inneren Energie übereinstimmt[4].

8.5 Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte

Die Formulierung verläuft im Grunde wie bei dem geometrisch nichtlinearen Balken, nur sind noch mehr Gleichungen anzuschreiben. Wir verweisen interessierte Leser auf S. 325-328 in [116].

8.6 Nichtlineare Elastizitätstheorie

In dem Triple $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ ist $\boldsymbol{E}$ der **Green-Lagrange Verzerrungstensor** und $\boldsymbol{S}$ ist der zweite **Piola-Kirchhoff Spannungstensor**. Wir nehmen an, dass das Material hyperelastisch ist, d.h. es gibt eine Verzerrungsenergiefunktion $\boldsymbol{W}$ derart, dass $\boldsymbol{S} = \partial \boldsymbol{W} / \partial \boldsymbol{E}$.

In der Gegenwart von Volumenlasten $\boldsymbol{p}$ genügt der elastische Zustand $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ in jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ des unverformten Körpers dem System[5]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \qquad \frac{1}{2} \, (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \; u_{k,j}) - \varepsilon_{ij} = 0 \tag{8.45a}$$

$$\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \qquad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} = 0 \tag{8.45b}$$

$$-\mathrm{div}(\boldsymbol{S} + \nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{p} \qquad -(\sigma_{ij} + u_{i,k} \; \sigma_{kj})_{,j} = p_i \tag{8.45c}$$

mit passenden Verschiebungsrandbedingungen $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$ auf dem Teil Γ_D des Randes und Spannungsrandbedingungen $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = \bar{\boldsymbol{t}}$ auf dem anderen Teil Γ_N des Randes wobei

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{S} + \nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{S}) \boldsymbol{n} \tag{8.46}$$

[4] Wegen $EA = 1$ ist das Beispiel natürlich akademisch, weil die Zusammendrückung größer ist, als die Länge des Stabes.

[5] Zur Erklärung: Bei linearen 1-D Problemen, $\sigma = E \, \varepsilon$, wäre $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{E}) = 0.5 \, E \, \varepsilon^2$.

der Spannungsvektor in einem Randpunkt mit der nach Außen gerichteten Randnormalen $\boldsymbol{n}$ ist.

Symmetrische Tensoren $\boldsymbol{S}$ genügen der Identität (part. Int.)

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\mathrm{div}(\boldsymbol{S}+\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta u}d\Omega \\ = -\int_\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds+\int_\Omega \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}d\Omega\,,\end{aligned} \tag{8.47}$$

mit

$$\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{\delta u}+\nabla\boldsymbol{\delta u}^T+\nabla\boldsymbol{u}^T\nabla\boldsymbol{\delta u}+\nabla\boldsymbol{\delta u}^T\nabla\boldsymbol{u}\right) \tag{8.48}$$

was die **Gateaux Ableitung** des Tensors $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ an der Stelle $\boldsymbol{u}$ ist,

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{\delta u})]_{|_{\varepsilon=0}} = \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\,. \tag{8.49}$$

Wir können so die erste Greensche Identität des Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$, also des Systems (8.45), anschreiben

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma}) = \underbrace{\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}),\boldsymbol{\delta\Sigma}\rangle+\int_\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds}_{\delta W_e} - \underbrace{a_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{8.50}$$

wobei

$$\begin{aligned}\langle A(\boldsymbol{\Sigma}),\boldsymbol{\delta\Sigma}\rangle :=& \int_0^l (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{E})\bullet\boldsymbol{\delta S}d\Omega+\int_\Omega(\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E})-\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta E}d\Omega \\ &+\int_\Omega -(\mathrm{div}\boldsymbol{S}+\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta u}d\Omega\end{aligned} \tag{8.51}$$

und

$$\begin{aligned}a_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma}) =& \int_\Omega(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{E})\bullet\boldsymbol{\delta S}d\Omega \\ &+\int_\Omega(\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E})-\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta E}d\Omega+\int_\Omega\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}d\Omega\,.\end{aligned} \tag{8.52}$$

Bei einer reinen Verschiebungsformulierung, bei der alles aus $\boldsymbol{u}$ hergeleitet wird, $\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\}$, und mit der Randbedingung $\boldsymbol{\delta u}=\boldsymbol{0}$ auf Γ_D, reduziert sich das System (8.50) auf ($\bar{\boldsymbol{t}}$ sind Randkräfte auf Γ_N)

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\delta u}d\Omega+\int_{\Gamma_N}\bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds-\int_\Omega\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}d\Omega=0\,, \tag{8.53}$$

wobei $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))$. Wir schreiben im Folgenden kürzer

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{S} d\Omega\,. \tag{8.54}$$

Die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_h = \sum_j u_j \boldsymbol{\varphi}_j$ bestimmt man daher sinngemäß aus

$$\int_\Omega \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}} \bullet \boldsymbol{\varphi}_i \, ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n\,, \tag{8.55}$$

oder $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, wobei $\boldsymbol{u}$ der Vektor der Knotenverschiebungen ist[6].

Alternativ kann man natürlich andere Variationsformulierungen aus (8.50) herleiten, etwa gemischte Verfahren, bei denen separate Ansätze für die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und den Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ gemacht werden, [116].

8.6.1 Linearisierung

Um $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ zu lösen, müssen wir die Gleichung linearisieren. Es sei angenommen, dass sich die Funktion $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_\Delta$ in eine Näherung $\boldsymbol{u}_h$ plus einem Inkrement $\boldsymbol{u}_\Delta$ aufspalten lässt. Dann lautet die Identität (8.53)

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{\delta u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}} \bullet \boldsymbol{\delta u} \, ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,. \tag{8.56}$$

Die Gateaux Ableitung des Ausdrucks

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) := \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) d\Omega \tag{8.57}$$

bezüglich eines Verschiebungsinkrements $\boldsymbol{u}_\Delta$ ist

$$\begin{aligned} a_T(\boldsymbol{u},&\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u}) := \left[\frac{d}{d\varepsilon}\, a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\, \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u}_\Delta \nabla \boldsymbol{\delta u} \bullet \boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)]) d\Omega\,, \end{aligned} \tag{8.58}$$

mit dem Tensor

$$\boldsymbol{C} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{E}\, \partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{E}}\, \boldsymbol{S}\,, \tag{8.59}$$

der hier die zweite Ableitung von $\boldsymbol{W}$ darstellt. Diese Ableitung ist an der Stelle $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ zu nehmen. Man beachte, dass $a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u})$ im zweiten und dritten Argument, $\boldsymbol{u}_\Delta$ und $\boldsymbol{\delta u}$, linear ist. Deswegen ist das Gleichungssystem für $\boldsymbol{u}_\Delta$ nachher linear, siehe (8.62), $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}_\Delta = \ldots$

Wir setzen nun

[6] Wir benutzen denselben Buchstaben für den Vektor $\boldsymbol{u}$ wie für die exakte Lösung $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

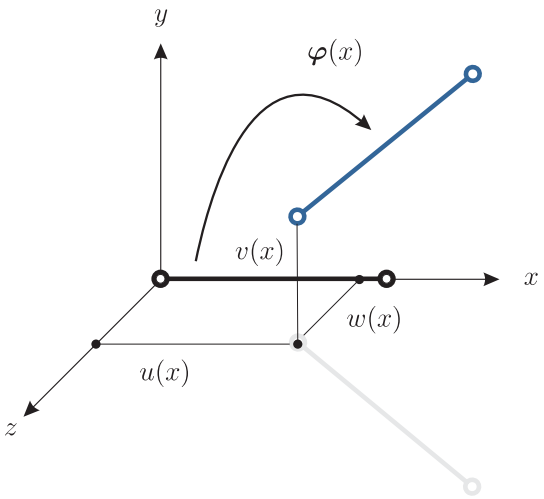


Bild 8.4. Fachwerkstab

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u}) \simeq a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) + a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u})\,, \tag{8.60}$$

so dass (8.55) übergeht in

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\varphi}_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\varphi}_i\, ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_i) - a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\varphi}_i) = 0 \quad i=1,2,\dots n\,, \tag{8.61}$$

oder

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}_\Delta = \boldsymbol{0}\,, \tag{8.62}$$

wobei nun $\boldsymbol{u}_\Delta$ der Knotenverschiebungsvektor des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}_\Delta$ ist und $\boldsymbol{K}_T$ ist die tangentiale Steifigkeitsmatrix.

$$(\boldsymbol{K}_T)_{ij} = a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_i)\,. \tag{8.63}$$

Die Iterationsvorschrift lautet jetzt

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.64}$$

8.6.2 Ein Fachwerkstab im Raum

Wir betrachten einen Fachwerkstab, der sich längs der x-Achse erstreckt, siehe Bild 8.4. Die Verschiebung der Punkte lautet

$$\boldsymbol{\varphi}(x,y,z) = (x+u(x))\,\boldsymbol{e}_1 + (y+v(x))\,\boldsymbol{e}_2 + (z+w(x))\,\boldsymbol{e}_3\,, \tag{8.65}$$

wenn $\boldsymbol{u}(x) = \{u(x), v(x), w(x)\}^T$ der Verschiebungsvektor ist. Der Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1+u' & 0 & 0 \\ v' & 1 & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}\,, \tag{8.66}$$

und der Green-Lagrange Verzerrungstensor lauten

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\,v' & \frac{1}{2}\,w' \\ \frac{1}{2}\,v' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,w' & 0 & 0 \end{bmatrix}\,, \tag{8.67}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{u}) := \varepsilon_x(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}\,((1+u')^2 + (v')^2 + (w')^2 - 1) \\ &= u' + \frac{1}{2}\,((u')^2 + (v')^2 + (w')^2) \qquad (\,)' = \frac{d}{dx}\,. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Die erste Greensche Identität wird, weil alle Terme nur Funktionen von x sind,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l -\mathrm{div}\,(\boldsymbol{S} + \nabla\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta u}\,A\,dx + [\,(\boldsymbol{S} + \nabla\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{\delta u}\,A\,]_0^l \\ - \int_0^l \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{S}\,A\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{8.69}$$

Wir setzen $\sigma = \sigma_{xx} = E\,\varepsilon$ und alle anderen $\sigma_{ij} = 0$, so dass mit $\mathcal{N} = A(\sigma + u'\,\sigma)$ folgt

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l -\mathcal{N}'\,\hat{u}\,dx + [\,\mathcal{N}\,\hat{u}\,]_0^l - \underbrace{\int_0^l \varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma\,A\,dx}_{a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})} = 0\,, \tag{8.70}$$

mit

$$\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = (1+u')\,\delta u' + v'\,\delta v' + w'\,\delta w'\,. \tag{8.71}$$

Die **Gateaux Ableitung** der Wechselwirkungsenergie $a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})$ ist

$$\begin{aligned} a_T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) &:= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^l [\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma + \varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma_{\boldsymbol{u}}]\,A\,dx\,, \end{aligned} \tag{8.72}$$

wobei

$$\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\,\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} = u'_\Delta\delta u' + v'_\Delta\,\delta v' + w'_\Delta\,\delta w' \tag{8.73}$$

und

$$\sigma_{\boldsymbol{u}} = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,\sigma(\boldsymbol{u}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}_\Delta)\right]_{\varepsilon=0} = E\,\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)\,. \tag{8.74}$$

Die Elemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix lauten daher

$$(K_T(\boldsymbol{u}))_{ij} = a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j)\,. \tag{8.75}$$

Die vektorwertigen Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_i(\xi)$ sind die Knotenverschiebungen (drei in jedem Knoten); es ist ξ die Koordinate auf dem Master-Element.

Mit linearen Ansatzfunktionen auf einem Element Ω_e der Länge l_e

$$u_e(x) = \sum_{i=1}^{2} u_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,,\; v_e(x) = \sum_{i=1}^{2} v_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,,\; w_e(x) = \sum_{i=1}^{2} w_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,, \tag{8.76}$$

erhalten wir für den Knotenvektor $\boldsymbol{u}^e = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$ die 6×6 tangentiale Steifigkeitsmatrix [334]

$$\boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) & -(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) \\ -(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) & (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) \end{bmatrix}, \tag{8.77}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{E\,A}{l_e}\begin{bmatrix} (1+u_e')^2 & (1+u_e')\,v_e' & (1+u_e')\,w_e' \\ (1+u_e')\,v_e' & (v_e')^2 & v_e'\,w_e' \\ (1+u_e')\,w_e' & v_e'\,w_e' & (w_e')^2 \end{bmatrix} \tag{8.78}$$

und

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\sigma\,A}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.79}$$

So entsteht das System

$$\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}_\Delta = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})\,, \tag{8.80}$$

das iterativ gelöst wird

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.81}$$

Bezüglich der Erweiterung auf 3-D Balken verweisen wir auf [106].

8.6.3 Ebenes Problem

Es seien $\boldsymbol{X}$ die Koordinaten in der Ausgangslage und $\boldsymbol{x}$ in der aktuellen Konfiguration, siehe Bild 8.5,

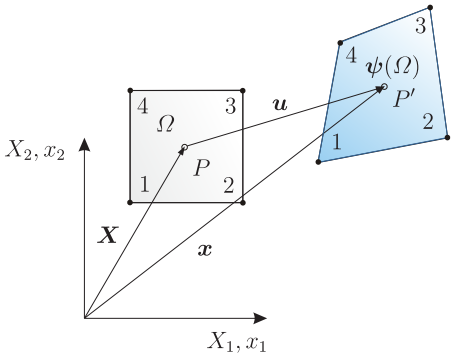


Bild 8.5. Ausgangslage und verformte Lage

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}\,, \quad \text{oder} \quad x_i = X_i + u_i\,, \tag{8.82}$$

wobei $\boldsymbol{u}$ der Verschiebungsvektor ist. Der Deformationsgradient lautet

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & 0 \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{8.83}$$

so dass der Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ \text{sym.} & E_{22} \end{bmatrix} \tag{8.84}$$

die folgenden Komponenten hat

$$\begin{aligned} E_{11} &= u_{1,1} + \frac{1}{2}\,(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) \\ E_{22} &= u_{2,2} + \frac{1}{2}\,(u_{2,2}^2 + u_{1,2}^2) \\ E_{12} &= \frac{1}{2}\,(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}\,(u_{1,1}\,u_{1,2} + u_{2,2}\,u_{2,1})\,. \end{aligned} \tag{8.85}$$

Das FE-Verschiebungsfeld kann auf zwei Arten geschrieben werden

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{\text{DOFS}} u_i\,\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) \equiv \sum\nolimits_i u_i \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{\text{NODES}} \boldsymbol{u}_i\,\psi_i(\boldsymbol{x}) \equiv \sum\nolimits_i \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \psi_i\,. \tag{8.86}$$

Entweder läuft die Summe über die Freiheitsgrade u_i oder die Knoten. Die $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ sind die Verschiebungsfelder der u_i, während die ψ_i in der zweiten Formel die skalar-wertigen *shape functions* der Knoten ($\psi_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$) sind und die Vektoren $\boldsymbol{u}_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}\}^T$ sind die Verschiebungen im Knoten i.

Wir benutzen hier die zweite Notation, so dass zum Beispiel die virtuelle äußere Arbeit der Volumenkräfte $\boldsymbol{p}$ die folgende Gestalt hat[7]

[7] Um die Notation nicht zu überfrachten, schreiben wir eine virtuelle Verrückung $\hat{\boldsymbol{u}}$ und nicht $\boldsymbol{\delta u}$ und die FE-Lösung schreiben wir ohne Index h.

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \hat{\boldsymbol{u}}\, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \hat{\boldsymbol{u}}_i\, \psi_i\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega \boldsymbol{p}\, \psi_i\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \boldsymbol{f}_i\,. \end{aligned} \tag{8.87}$$

Der Gradient des FE-Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$ lautet dann

$$\nabla \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \otimes \nabla \psi_i \tag{8.88}$$

und der Deformationsgradient ist

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \otimes \nabla \psi_i\,. \tag{8.89}$$

Der Gradient des virtuellen Verschiebungsfeldes $\hat{\boldsymbol{u}} = \sum_i \hat{\boldsymbol{u}}_i\, \psi_i$ richtet sich nach (8.88), und die Gateaux Ableitung ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}) :&= \frac{1}{2} \left(\nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^T + \nabla \boldsymbol{u}^T \nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^T\, \nabla \boldsymbol{u}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{F}^T \nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{F}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{F}^T (\hat{\boldsymbol{u}}_i \otimes \nabla \psi_i) + (\nabla \psi_i \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_i) \boldsymbol{F}]\,. \end{aligned} \tag{8.90}$$

Wie in der linearen Theorie, wo $\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\sigma}$, ist die Symmetrie von $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}})$ und $\boldsymbol{S}$ Anlass den ‚Gateaux Verzerrungs Vektor' einzuführen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}) := \begin{bmatrix} (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{11} \\ (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{22} \\ 2\,(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{B}_{L_i}\, \hat{\boldsymbol{u}}_i\,, \tag{8.91}$$

wobei

$$\boldsymbol{B}_{L_i} = \begin{bmatrix} F_{11}\, \psi_{i,1} & F_{21}\, \psi_{i,1} \\ F_{12}\, \psi_{i,2} & F_{22}\, \psi_{i,2} \\ F_{11}\, \psi_{i,2} + F_{12}\, \psi_{i,1} & F_{21}\, \psi_{i,2} + F_{22}\, \psi_{i,1} \end{bmatrix}. \tag{8.92}$$

Bei einem Material vom St. Venant Typ

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] = 2\mu \boldsymbol{E} + \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{I} \tag{8.93}$$

lautet die Vektordarstellung des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}, \tag{8.94}$$

mit

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,, \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,. \tag{8.95}$$

Die schwache Form des Gleichgewichte schreibt sich damit

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T [\underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{B}_{L_i}^T \bullet \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega}_{\boldsymbol{k}_i} - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{p}\,\psi_i\, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\,\psi_i\, ds}_{\boldsymbol{f}_i}] = 0 \tag{8.96}$$

oder $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Wie zuvor linearisieren wir diese Gleichung mit Hilfe der Gateaux Ableitung in Richtung von $\boldsymbol{u}_\Delta$

$$a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\hat{\boldsymbol{u}}) = \int_\Omega [\nabla \boldsymbol{u}_\Delta\, \boldsymbol{S} \bullet \nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u}_\Delta)]] d\Omega\,. \tag{8.97}$$

Die Diskretisierung des ersten Terms in (8.97) ergibt mit

$$\nabla \boldsymbol{u}_{\Delta_h} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}_{\Delta j} \otimes \nabla \psi_j\,, \qquad \nabla \hat{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i \otimes \nabla \psi_i \tag{8.98}$$

die sogenannte Spannungs-Steifigkeitsmatrix

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_\Delta\, \boldsymbol{S} \bullet \nabla \hat{\boldsymbol{u}} d\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega G_{ij}\, \boldsymbol{I}\, d\Omega\, \boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.99}$$

wobei

$$G_{ij} := \nabla^T \psi_i\, \boldsymbol{S}\, \nabla \psi_j = \begin{bmatrix} \psi_{i,1} & \psi_{i,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{j,1} \\ \psi_{j,2} \end{bmatrix}. \tag{8.100}$$

Mit

$$\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} [\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{u}_{\Delta j} \otimes \nabla \psi_j) + (\nabla \psi_j \otimes \boldsymbol{u}_{\Delta j})\boldsymbol{F}] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{B}_{L_j} \boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.101}$$

wird der zweite Term in (8.97)

$$\int_\Omega \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)] d\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega \boldsymbol{B}_{L_i}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{L_j}\, d\Omega\, \boldsymbol{u}_{\Delta j}\,. \tag{8.102}$$

Die Addition aller Terme ergibt

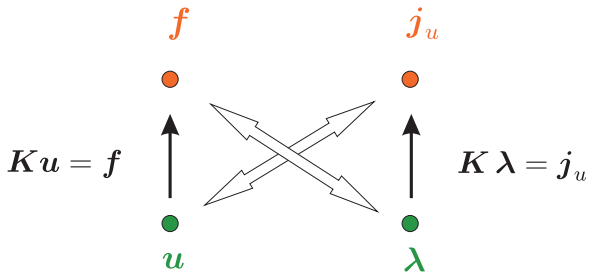


Bild 8.6. Der Lagrange Multiplikator ist hier die Gateaux-Ableitung $\boldsymbol{j_u}$ des nichtlinearen Funktionals $J(\boldsymbol{u})$, [126]

$$a_T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\Delta, \hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \boldsymbol{K}_{T_{ij}} \boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.103}$$

mit

$$\boldsymbol{K}_{T_{ij}} := \int_\Omega \left[G_{ij}\, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}_{L_i}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{L_j} \right] d\Omega\,. \tag{8.104}$$

Im Falle eines bilinearen Elementes sind die (2×2) Untermatrizen $\boldsymbol{K}_{T_{ij}}$ der Tangentialsteifigkeitsmatrix eines einzelnen Elementes wie folgt angeordnet

$$\boldsymbol{K}_T^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{T_{11}} & \boldsymbol{K}_{T_{12}} & \boldsymbol{K}_{T_{13}} & \boldsymbol{K}_{T_{14}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{21}} & \boldsymbol{K}_{T_{22}} & \boldsymbol{K}_{T_{23}} & \boldsymbol{K}_{T_{24}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{31}} & \boldsymbol{K}_{T_{32}} & \boldsymbol{K}_{T_{33}} & \boldsymbol{K}_{T_{34}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{41}} & \boldsymbol{K}_{T_{42}} & \boldsymbol{K}_{T_{43}} & \boldsymbol{K}_{T_{44}} \end{bmatrix}. \tag{8.105}$$

Nach dem Zusammenbau wird das gesamte System wieder iterativ gelöst,

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.106}$$

8.7 Nichtlineare Funktionale

Lagrange Multiplikatoren sind das Kennzeichen von Problemen mit Nebenbedingungen. Als ein solches Problem können wir auch die Auswertung eines Funktionals $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u}$ lesen. (Wir schalten direkt zu finiten Elementen um). Die Nebenbedingung ist, dass der Vektor $\boldsymbol{u}$ dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ genügt. Mit einem dritten Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ bilden wir das ***Lagrange Funktional***

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) \tag{8.107}$$

und der Punkt $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$, in dem das Funktional $\mathcal{L}$ stationär ist

$$d\mathcal{L} = \mathcal{L}_{,u_i}\ du_i - \mathcal{L}_{,\lambda_i}\ d\lambda_i = 0\,, \tag{8.108}$$

ist durch die beiden Gleichungen

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j} \tag{8.109}$$

bestimmt und so ergibt sich

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}\,, \tag{8.110}$$

woraus folgt, dass der Lagrange Multiplikator mit dem Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion identisch ist.

Wie man an (8.110) abliest ist $\boldsymbol{\lambda}$ die Ableitung, genauer der Gradient, des Funktionals $J(\boldsymbol{u})$ bezüglich der rechten Seite $\boldsymbol{f}$, [285],

$$\frac{\partial J}{\partial f_i} = \lambda_i\,. \tag{8.111}$$

Deswegen sind die Sensitivitätsplots, also die *plots* der Vektoren $\boldsymbol{g}$ $(= \boldsymbol{\lambda})$ so interessant und instruktiv, siehe Kapitel 3.53.

Ist das Funktional $J(u)$ nichtlinear, dann lauten die obigen Gleichungen

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j}_u\,, \tag{8.112}$$

wobei

$$j_{ui} := \int_0^1 J'(\boldsymbol{u} - s\,\boldsymbol{u}; \varphi_i)\, ds \tag{8.113}$$

und J' ist die Gateaux-Ableitung von $J(\boldsymbol{u})$ im Punkt $\boldsymbol{u}$, siehe Bild 8.6. In die Definition der Greenschen Funktion geht also der Punkt $\boldsymbol{u}$ ein, der Vektor $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\lambda}$ hängt von $\boldsymbol{u}$ ab, hängt davon ab, wo wir uns auf dem ‚Gleichgewichtspfad' befinden.

In analoger Weise kann man auch ‚Einflussfunktionen' für nichtlineare Probleme ableiten, genauer für die tangentiale Steifigkeitsmatrix, die also für einen speziellen Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{u}$ gelten, wenn man sich in ‚tangentialer Richtung' probeweise aus diesem Punkt entfernt. Das ist auch der Ansatz, wie man das Verfahren des *goal oriented refinement* erfolgreich auf nichtlineare Probleme anwenden kann. Für Details verweisen wir auf [126].

9

Die Algebra der Statik

Jeder, der sich intensiver mit finiten Elementen beschäftigt hat weiß, wie stark die Methode der finiten Elemente mit linearer Algebra durchsetzt ist. Der Vektor $\boldsymbol{u}$ der Knotenverschiebungen ist die Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und die Matrix $\boldsymbol{K}$ ist symmetrisch und positiv definit.

Dies hat seinen Grund natürlich darin, dass die Differentialgleichungen der klassischen Statik **linear** und **selbstadjungiert** sind, und die Statik der finiten Elemente – formal gesehen – daher im Grunde ein *exercitium* in linearer Algebra mit gelegentlichen Anleihen bei der Funktionalanalysis ist:

- Skalarprodukt
- adjungierter Operator
- Symmetrie, selbstadjungiert, positiv definit
- Lösungsbedingung $\boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{u}_0$
- virtuelle Verrückung
- virtuelle Kräfte
- quadratische Form und Variation
- Variationsrechnung, Lagrange und Hamilton
- Euler Gleichung
- Funktionale
- Dirac Delta
- Potentiale und Einflussfunktionen



Bild 9.1. *The pattern*

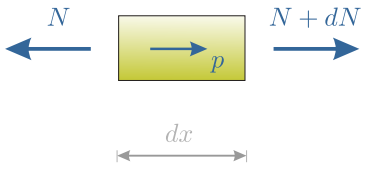


Bild 9.2. Stabelement dx

Diese formalen Aspekte dominieren zunehmend die **computational mechanics**, und der angehende Doktorand tut gut daran, sich mit diesen Aspekten vertraut zu machen, wenn er international mithalten will[1].

In diesem Kapitel wollen wir einige dieser algorithmischen Aspekte der Statik näher betrachten und mehrere Dinge ergänzen, die für das Verständnis der modernen Statik wichtig sind.

9.1 Grundlagen

Bevor wir beginnen, wollen wir kurz den Zugang zu den Gleichungen der Statik in diesem Buch schildern.

Euler Gleichung

Der Ausgangspunkt sind die ***Euler Gleichungen***, wie die Gleichung $-EAu'' = p$, die das Gleichgewicht an einem infinitesimalen Stabelement dx formuliert, siehe Bild 9.2,

$$-N + N + dN + p dx = 0 \qquad (N = EAu')\,. \tag{9.1}$$

Im zweiten Schritt überlagern wir die linke Seite von $-EAu'' = p$ mit einer Testfunktion δu

$$\int_0^l -EAu''\,\delta u\,dx\,, \tag{9.2}$$

und kommen so mittels partieller Integration zur ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \underbrace{\int_0^l -EAu''(x)\,\delta u(x)\,dx + [N\delta u]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{9.3}$$

Setzt man $\delta u = 1$, so sieht man, dass die Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ mit

[1] Wenn man auch gelegentlich den Eindruck hat, es ging dem Autor mehr darum die *community* zu beeindrucken und manche Ingenieure gar meinen, sie müssten die Mathematiker ‚links' überholen.

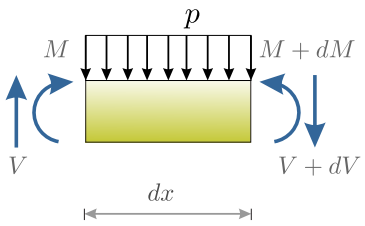


Bild 9.3. Balkenelement dx

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_0^l p \cdot 1 \, dx + N(l) \cdot 1 - N(u) \cdot 1 = 0 \tag{9.4}$$

identisch ist. Alle C^2-Funktionen $u(x)$ sind ‚horizontal' im Gleichgewicht und alle C^4-Funktionen $w(x)$ ‚vertikal', siehe (9.8), und daher sind FE-Lösungen *self-equilibrated*, siehe Seite 440.

Sinngemäß formuliert man am Balkenelement dx das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte $dV = -p\,dx$ und kommt mit der Momenten-Krümmung Beziehung $M = -EI\,w''$ und $V = EI\,M' = -EI\,w'''$ auf $EI\,w^{IV} = p$.

Die Gleichung $V = EI\,M'$ beruht auf der Momentenbedingung, siehe Bild 9.3,

$$(V + dV)\,dx \simeq V\,dx = dM \tag{9.5}$$

und an dieser Stelle kommen die Pseudodrehungen in die Balkengleichung, denn (9.5) ist gleichbedeutend damit, dass bei einer Pseudodrehung $\delta w = b\,x$, also $b = \tan\varphi$, des Balkenelements die Arbeiten null sind

$$V \tan\varphi\,dx - dM \tan\varphi = 0\,. \tag{9.6}$$

Die partielle Integration des Arbeitsintegrals

$$\int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w\,dx \tag{9.7}$$

führt dann auf die erste Greensche Identität (1.58) und setzt man $\delta w = a + b\,x$, so hat man die Gleichgewichtsbedingungen vor sich

$$\mathscr{G}(w, a + b\,x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum V = 0 \qquad \sum M = 0\,. \tag{9.8}$$

Weil die Verrückung δw aber nur eine Pseudodrehung ist, rettet man sich damit, dass man sagt: Gleichgewicht bedeutet, dass bei einer infinitesimal kleinen virtuellen Verrückung die Arbeit der Kräfte null ist.

Wenn wir darauf eingehen und δw durch Multiplikation mit $\varepsilon = 10^{-10}$ sehr klein machen, dann sehen wir aber, dass sich das ε einfach herauskürzt, siehe Kapitel 1.34,

$$\mathscr{G}(w, \varepsilon \cdot (a + b\,x)) = \varepsilon \cdot \ \mathscr{G}(w, a + b\,x) = 0\,. \tag{9.9}$$

In der linearen Mechanik sind die virtuellen Drehungen Pseudodrehungen $\delta w = a + b\,x$. Jede solcher Vektor $\boldsymbol{u}_0$ – das sind die Knotenverschiebungen eines Elements bei einer Pseudodrehung – ist orthogonal zur Steifigkeitsmatrix eines Balkens, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ und die Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ einer Verformung $\boldsymbol{u}$ sind daher orthogonal zu $\boldsymbol{u}_0$, denn $\boldsymbol{f}^T\,\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{0} = 0$. Es ist einfache Algebra und die Algebra weiß nichts von groß und klein, aber sie weiß, dass $\boldsymbol{u}_0$ ein Null-Eigenvektor von $\boldsymbol{K}$ ist.

Das soll jetzt aber auch das letzte Wort zu dem Thema ‚infinitesimal klein' gewesen sein.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Bei der umgekehrten Formulierung startet man mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen*. Man definiert, was δW_e sein soll, wie δW_i aussehen soll und verlangt, dass diese beiden Ausdrücke für alle δu gleich sein sollen

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta u\,dx = \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = \delta W_i\,. \tag{9.10}$$

Wählen wir als virtuelle Verrückung $\delta u = c$ (konstant) bzw. beim Balken

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i\,, \tag{9.11}$$

die Verrückung $\delta w = a + b\,x$, so entdecken wir die **Euler-Gleichungen**

$$-EAu'' = p \qquad\qquad EIw^{IV} = p\,. \tag{9.12}$$

Was diesen Zugang so beliebt macht, ist, dass man so die Statik scheinbar aus einem ‚erstem Prinzip' entwickelt: *Wenn ein Tragwerk im Gleichgewicht ist, dann ist bei jeder virtuellen Verrückung* $\delta W_e = \delta W_i$, wie in Bild 9.4.

Aber der Zugang ist nicht ungefährlich, weil man ja δW_i partiell integrieren kann und da muss dann δW_e herauskommen. In den Lehrbüchern werden, wenn, so vor allem die Standardgleichungen der Stabtheorie bzw. der Elastizitätstheorie eingeführt und da hat man mit der ersten Greenschen Identität eine Vorlage, ein ‚Sicherheitsnetz', weiß wie man δW_e und δW_i zu definieren hat, damit am Schluss alles zusammenpasst.

Die eigentliche Herausforderung entsteht, wenn sich mehrere Bewegungen ‚überlagern', wie etwa bei der Verformung (3-D) von offenen Profilen im Stahlbau, oder in der Schalenstatik, [231], wo vor allem die Kinematik gemeistert werden muss, um zu einem stimmigen $\delta W_e = \delta W_i$ zu kommen.

Was den Zugang $\delta W_e = \delta W_i$ in den Augen des Ingenieurs weiter favorisiert ist die Tatsache, dass das $\delta W_e = \delta W_i$ auch die Grundlage der finiten Elemente ist und man so direkt mit der Diskretisierung anfangen kann, ohne jemals eine Differentialgleichung angeschrieben zu haben. Aber die Differentialgleichung



Bild 9.4. Reste einer römischen Brücke, [246]

ist trotzdem ‚da', sie zieht die Fäden. ***Mit dem Begriff der schwachen Lösung ist man die Differentialgleichung nicht los!***

Sie kommt durch die Hintertür herein, denn wenn man (9.10) partiell integriert (es sei $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$), dann zeigt sich, dass (9.10) äquivalent ist mit

$$\int_0^l \underbrace{(-EAu'' - p)}_{\textit{Euler Glg.}} \delta u \, dx = 0 \qquad \text{für alle } \delta u \,, \tag{9.13}$$

was besagt:

Die Forderung $\delta W_e = \delta W_i$ ist *gleichbedeutend* damit, dass u die Lösung einer Differentialgleichung ist, der Euler Gleichung.

Das ganze mathematische Gerüst, das zu einem statischen Problem gehört, steckt in der Differentialgleichung, in der Euler-Gleichung, sie bildet, zusammen mit der zugehörigen Greenschen Identität, den eigentlichen Kern und alles, was die finiten Elemente machen, geht konform mit der ersten Greenschen Identität. Ja man kann mit Fug und Recht behaupten:

Ein FE-Programm ist die erste Greensche Identität in *bits* und *bytes*

9.2 Notation

Wir erinnern an die partielle Integration, die in zwei und drei Dimensionen die Gestalt

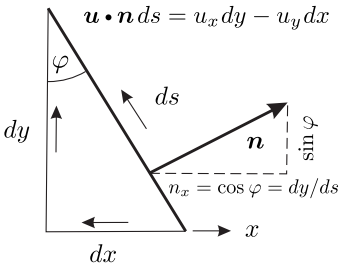


Bild 9.5. $\boldsymbol{n}ds = \{n_x, n_y\}^T ds = \{dy, -dx\}^T$

$$\int_\Omega u_{,x_i}\ \delta u d\Omega = \int_\Gamma u\, n_i\, \delta u\, ds - \int_\Omega u\, \delta u_{,x_i}\, d\Omega \tag{9.14}$$

hat, wobei n_i die i-te Komponente des Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ mit $|\boldsymbol{n}| = 1$ auf dem Rand Γ ist.

Der **Gradient** einer skalarwertigen Funktion u ist ein Vektor und der Gradient einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2\}^T$ ist eine Matrix,

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u,_1 \\ u,_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1,_1 & u_1,_2 \\ u_2,_1 & u_2,_2 \end{bmatrix} \qquad u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,. \tag{9.15}$$

Das formale Gegenstück hierzu ist der Operator div, denn die **Divergenz** einer matrixwertigen Funktion ist eine vektorwertige Funktion und die Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{q} = \{q_1, q_2\}^T$ ist eine skalarwertige Funktion

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11},_1 + \sigma_{12},_2 \\ \sigma_{21},_1 + \sigma_{22},_2 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{q} = q_1,_1 + q_2,_2\ . \tag{9.16}$$

Die folgende Identität verknüpft mittels (9.14) diese beiden Operatoren

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u} d\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds - \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \nabla \boldsymbol{\delta u} d\Omega\,. \tag{9.17}$$

Wenn $\boldsymbol{S}$ symmetrisch ist, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T$, gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\operatorname{div} \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u} d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds &= \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \nabla \boldsymbol{\delta u} d\Omega \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\delta u} + \nabla \boldsymbol{\delta u}^T) d\Omega\,, \end{aligned} \tag{9.18}$$

was das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für eine Scheibe ist, $\delta W_e = \delta W_i$, wenn man $\boldsymbol{\delta u} = \{\delta u_x, \delta u_y\}^T$ als virtuelle Verrückung interpretiert. Vektorwertige Funktionen $\boldsymbol{u} = \{u_x, u_y\}^T$ genügen der gleichen Regel

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \delta u d\Omega = \int_\Gamma (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n})\, \delta u\, ds - \int_\Omega \boldsymbol{u} \bullet \nabla \delta u d\Omega\,, \tag{9.19}$$

und bei eindimensionalen Problemen sind div $= ()'$ und $\nabla = ()'$ dasselbe

$$\int_0^l u'\,\delta u\,dx = [u\,\delta u]_0^l - \int_0^l u\,\delta u'\,dx\,. \tag{9.20}$$

Die Normale $\boldsymbol{n} = [n_x, n_y] = [t_y, -tx]$ und die Tangente $\boldsymbol{t} = [t_x, t_y] = [-n_y, n_x]$ auf dem Rand einer Scheibe stehen senkrecht aufeinander. Das Integral der Divergenz, setze in (9.19) $\delta u = 1$, ist ein Maß für den *flow in and flow out*, siehe Bild 9.5

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,d\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n}\,ds = \int_\Gamma (u_x\,dy - u_y\,dx)\,. \tag{9.21}$$

Das entspricht dem Hauptsatz $(u', 1) = u(l) - u(0)$.

Vektoren sind Spaltenvektoren und ein Punkt kennzeichnet das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren

$$\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{u} = f_x u_x + f_y u_y\,. \tag{9.22}$$

Gelegentlich benutzen wir auch die Notation $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{u}$. Der Punkt bezeichnet auch das **Skalarprodukt zwischen zwei Matrizen**, wie etwa dem Verzerrungs- und Spannungstensor

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S}\,d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{[\varepsilon_{xx}\,\sigma_{xx} + \varepsilon_{xy}\,\sigma_{xy} + \varepsilon_{yx}\,\sigma_{yx} + \varepsilon_{yy}\,\sigma_{yy}]}_{\textit{Skalarprodukt}}\,d\Omega\,. \end{aligned} \tag{9.23}$$

In der Literatur werden auch die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{S} \qquad (\text{tr} = \text{trace}) \tag{9.24}$$

benutzt, wobei $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{S}$ das ***direkte Produkt*** (*Kronecker product*) der beiden Tensoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{S}$ ist. Das direkte Produkt zweier Vektoren ist eine Matrix

$$\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \cdot u_x & f_x \cdot u_y \\ f_y \cdot u_x & f_y \cdot u_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{A} \tag{9.25}$$

mit den Elementen $a_{ij} = f_i \cdot u_j$. Solche Matrizen haben immer den Rang 1.

Die Multiplikationstabelle $\boldsymbol{T}_{(10\times 10)} = \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{z}$ der Zahlen von 1 bis 10 ist das direkte Produkt des Vektors $\boldsymbol{z} = \{1, 2, \ldots, 10\}^T$ mit sich selbst, also $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{z} \cdot 1, \boldsymbol{z} \cdot 2, \ldots, \boldsymbol{z} \cdot 10]$.

9.3 Skalarprodukt und Norm

Ein Ausdruck (u, v) ist ein Skalarprodukt, wenn mit Zahlen α und β

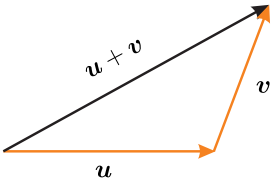


Bild 9.6. Dreiecksungleichung

Linearität	$(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\,(u, w) + \beta\,(v, w)$	(9.26a)
Symmetrie	$(u, v) = (v, u)$	(9.26b)
Definitheit	$(u, u) > 0 \quad \text{wenn } u \neq 0\,.$	(9.26c)

Ein solches Skalarprodukt definiert eine **Norm**

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}\,. \tag{9.27}$$

Die Wurzel macht, dass die Norm von $2\,u$ doppelt so groß ist, wie die Norm von u, $\|2\,u\| = 2\,\|u\|$.

Eine Norm hat die Eigenschaften

positiv semi-definit	$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{und} \quad \|u\| \geq 0$	(9.28a)
homogen	$\|\lambda u\| = \|\lambda\|\|u\|$	(9.28b)
Dreiecksungleichung	$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|\,.$	(9.28c)

Vor allem garantiert die erste Eigenschaft, dass die Norm die Elemente von $\mathcal{V}$ **trennt**

$$\|u - v\| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = v \tag{9.29}$$

sie zwischen den Elementen unterscheiden kann – sie *foolproof* ist. Diese Trennschärfe macht eine Norm erst eigentlich zu einer Norm.

Eine Vektornorm $\|\boldsymbol{u}\| = |u_1|$, die nur die erste Komponente misst, wäre keine echte Norm, denn für sie wären die Vektoren $\boldsymbol{a} = \{1, 2, 3\}^T$ und $\boldsymbol{b} = \{1, 4, 5\}^T$ identisch, weil $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = 0$.

In einem normierten Vektorraum $\mathcal{V}$ gilt die **Schwarzsche Ungleichung**

$$|(u, v)| \leq \|u\|\,\|v\|\,. \tag{9.30}$$

9.4 Gauss garantiert das

Wer jemals eine Einflussfunktion mittels des Grenzwertes

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{9.31}$$

berechnet hat, wird staunend beobachtet haben, wie jeder Singularität $+A$ eine entgegengesetzte Singularität $-A$, das Gleichgewicht hält und am Schluss

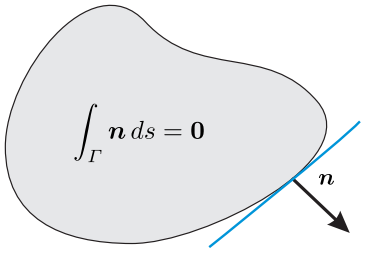


Bild 9.7. Der einfachste und wichtigste Integralsatz. In Gedanken ist man immer versucht, alle Integralsätze so zu lesen. *What flows in must flow out* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})_\Gamma = 0$ *if* $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$.

ein integrierbarer Ausdruck übrig bleibt – egal wie stark die Singularität r^{-n} in dem Kern G ist. *The singularities cancel.*[2]

Partielle Integration geht über den Rand

$$\int_0^l u\, \delta u'\, dx = [u\, \delta u]_0^l - \int_0^l u'\, \delta u\, dx\,, \tag{9.32}$$

spielt über ‚Bande' und das ist der Grund, warum in der ersten und zweiten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = 0 \qquad \mathscr{B}(w_1, w_2) = 0 \tag{9.33}$$

das Innere mit dem Rand verknüpft ist, die Identitäten den *focus* auf das Ganze richten, auf $\Omega + \Gamma$. Die meisten Integralsätze der Mechanik und Statik basieren ja auf partieller Integration.

Wie die **Selbstheilungskräfte** das Gute bewirken, möge ein Beispiel demonstrieren: Der Aufpunkt $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sei der Mittelpunkt einer Kreisscheibe Ω mit Radius 1 und auf dem gelochten Gebiet Ω_ε formulieren wir die erste Greensche Identität des Laplace Operators mit den Funktionen $G = 1/r$ und $\delta u = 1$

$$\mathscr{G}(G, 1)_{\Omega_\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} -\Delta G \cdot 1\, d\Omega + \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot 1\, ds + \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n} \cdot 1\, ds = 0\,. \tag{9.34}$$

Das Integral über den Außenrand Γ, $R = 1$, hat den Wert $-2\,\pi$, und mit $\Delta\, r^{-1} = 1/r^3$ und $\partial r^{-1}/\partial n = 1/r^2$ (auf dem Lochrand Γ_{N_ε} zeigt $\boldsymbol{n}$ auf $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ und $1/r$ wächst in dieser Richtung) folgt für die ersten beiden Integrale

$$\int_0^{2\,\pi} \int_\varepsilon^1 -\frac{1}{r^3}\, r\, dr\, d\varphi + \int_0^{2\,\pi} \frac{1}{\varepsilon^2}\, \varepsilon\, d\varphi = 2\,\pi\,(1 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon})\,, \tag{9.35}$$

dass deren Grenzwert beschränkt ist und so stimmt auch hier die Bilanz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{G}(G, 1)_{\Omega_\varepsilon} = 2\,\pi - 2\,\pi\, = 0\,. \tag{9.36}$$

[2] Gleichung (9.31) war bei uns das ‚Einfallstor' für die Identitäten. Wir wollten eine mathematisch korrekte Herleitung der Einflussfunktionen. *Seeing how easy it was, we were ‚hooked' to Green's identity from then on.*

Ein ähnliches Beispiel: Auf einen untergetauchten Körper Ω wirkt der Wasserdruck p, (der sei hier konstant), immer senkrecht zur Körperoberfläche. Die gesamte Kraft aus dem Wasserdruck auf den Körper,

$$p \int_\Gamma \boldsymbol{n}\, ds = \boldsymbol{0} \tag{9.37}$$

ist daher null, weil das Integral des Normalenvektors über die Oberfläche eines Körpers der Nullvektor ist, siehe Bild 9.7. Der Autofahrer in seinem Faradayschen Käfig verlässt sich auf diese Tatsache. Ist p nicht konstant, dann ist das Integral der Auftrieb.

9.5 Multiplikation von Matrizen

Das Produkt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ zweier $n \times n$ Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kann man auf vier Arten schreiben. (1) Als Skalarprodukt der Zeilen von $\boldsymbol{A}$ mit den Spalten von $\boldsymbol{B}$, (2) als die Matrix $\boldsymbol{A}$ mal den Spalten von $\boldsymbol{B}$, (3) als die Matrix $\boldsymbol{B}$ von links mit den Zeilen von $\boldsymbol{A}$ oder (4) als direktes Produkt der Spalten von $\boldsymbol{A}$ mit den Zeilen von $\boldsymbol{B}$.

Zusätzlich seien die Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrisch (was die Notation vereinfacht) und es seien $\boldsymbol{a}_i$ und $\boldsymbol{b}_i$ die Spalten von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\text{Einzeln} && c_{ij} = \boldsymbol{a}_i^T\, \boldsymbol{b}_j && \text{Zeile} \times \text{Spalte} && (9.38a)\\
&\text{Spalte} && \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{b}_i && \text{Matrix} \times \text{Spalte} && (9.38b)\\
&\text{Zeile} && \boldsymbol{c}_i^T = \boldsymbol{a}_i^T\, \boldsymbol{B} && \text{Zeile} \times \text{Matrix} && (9.38c)\\
&\text{Matrix} && \boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i\, \boldsymbol{b}_i^T && \text{Spalten} \times \text{Zeilen}\,. && (9.38d)
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Summe von n Matrizen der Größe $n \times n$, denn jedes Produkt Spalte $\times$ Zeile ist eine Matrix, $(2,1) \times (1,2) = (2,2)$,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix}. \tag{9.39}$$

Zu (9.38c): Zeile $\times$ Matrix heißt

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \text{Zeile } 1 + 3 \cdot \text{Zeile } 2 \\ 4 \cdot \text{Zeile } 1 + 5 \cdot \text{Zeile } 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 27 & 24 \end{bmatrix}. \tag{9.40}$$

Entsprechend diesen Varianten kann man $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ auf zwei Weisen lesen. Einmal als n Skalarprodukte, Zeile $\cdot$ Vektor, n mal ‚Wackeläquivalenz'

$$\text{Test mit } \varphi_i \qquad \sum_j a(\varphi_j, \varphi_i)\, u_j = f_i \qquad \equiv \qquad \boldsymbol{f}_i^T \boldsymbol{u} = f_i \tag{9.41}$$

oder als Summe über die n Spalten von $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]$

$$\left[\boldsymbol{f}_1\right] u_1 + \left[\boldsymbol{f}_2\right] u_2 + \ldots + \left[\boldsymbol{f}_n\right] u_n = \boldsymbol{f}\,, \tag{9.42}$$

was bedeutet, dass die gewichtete Summe der ***push-stop Kräfte*** $\boldsymbol{f}_i$ der Freiheitsgrade u_i, siehe Bild 3.86, gleich dem Knotenkraftvektor $\boldsymbol{f}$ ist.

Das geht auch mit der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$. Also liest man $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$ entweder als n Skalarprodukte, Zeile $\cdot$ Vektor,

$$\int_0^l G_h(y, x_i)\, p(y)\, dy = u_i \qquad \equiv \qquad \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f} = u_i\,, \tag{9.43}$$

siehe (3.212), oder man liest es als die gewichtete Summe der n Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$, also den Verformungen aus $f_i = 1$,

$$\left[\boldsymbol{g}_1\right] f_1 + \left[\boldsymbol{g}_2\right] f_2 + \ldots + \left[\boldsymbol{g}_n\right] f_n = \boldsymbol{u}\,. \tag{9.44}$$

Die nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ hat n^2 Einträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ und die reduzierte Matrix $\boldsymbol{K}$ entsteht daraus durch Streichen der Spalten und Zeilen, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören.

Je kleiner die Elemente werden, desto größer werden die k_{ij}, während die Unterschiede in den u_i zwischen benachbarten Knoten kleiner werden.

Push-stop Kräfte

Wir haben gesagt, dass die Spalten von $\boldsymbol{K}$ die *push-stop* Kräfte zu $u_i = 1$ und $u_j = 0$ sonst sind. Das gilt streng genommen nur, wenn die u_i so weit im Innern liegen, dass kein Randknoten mithelfen muss, die Bewegung abzustoppen. Ist es anders, dann gehören die Lagerkräfte in den Randknoten mit zu den *push-stop* Kräften. Die sieht man, wenn man $\boldsymbol{K}_G$ mit dem ‚vollen' Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ multipliziert, während in dem Vektor $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_i$ (jetzt der reduzierte Vektor) die Beiträge der Lagerknoten fehlen.

Nur am freigeschnittenen System sieht man garantiert die vollständige Liste der *push-stop* Kräfte.

9.6 FE-Notation

Ein Spaltenvektor $\boldsymbol{a}$ mal einem Zeilenvektor $\boldsymbol{b}^T$ ergibt eine Matrix

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{bmatrix}, \tag{9.45}$$

und so kann man die Steifigkeitsmatrix eines Stabes mit zwei linearen Ansatzfunktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ wie folgt schreiben

$$\boldsymbol{K}^e_{(2\times 2)} = \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} EA \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{E}} \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} dx = \int_0^{l_e} \boldsymbol{B}^T_{(2\times 1)} \boldsymbol{E}_{(1\times 1)} \boldsymbol{B}_{(1\times 2)}\, dx\,, \tag{9.46}$$

was elementweise

$$k^e_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^{l_e} \varphi_i'\, EA\, \varphi_j'\, dx \tag{9.47}$$

entspricht.

Bei einem Balkenelement mit seinen vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ ist

$$\boldsymbol{B}_{(1\times 4)} = \{-\frac{6}{l_e^2} + \frac{12\,x}{l_e^3},\quad \frac{4}{l_e} - \frac{6\,x}{l_e^2},\quad \frac{6}{l_e^2} - \frac{12\,x}{l_e^3},\quad \frac{2}{l_e} - \frac{6\,x}{l_e^2}\}\,, \tag{9.48}$$

der Vektor der zweiten Ableitungen $\varphi_i''(x)$ und die Steifigkeitsmatrix kann man so schreiben als

$$\boldsymbol{K}^e_{(4\times 4)} = \int_0^{l_e} \boldsymbol{B}^T_{(4\times 1)}\, EI_{(1\times 1)} \boldsymbol{B}_{(1\times 4)}\, dx\,. \tag{9.49}$$

Bei Scheibenelementen mit n Verschiebungsfeldern, z.B. $n = 3{\cdot}2 = 6$ bei einem *CST-Element* mit drei Knoten, die sich in x- und y-Richtung verschieben können, stehen in

$$\boldsymbol{B}_{(3\times n)} = \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_2), \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_n)\} \tag{9.50}$$

die Verzerrungen der n Felder als Vektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \{\varepsilon^{(i)}_{xx}, \varepsilon^{(i)}_{yy}, \varepsilon^{(i)}_{xy}\}^T \tag{9.51}$$

und in[3]

$$\boldsymbol{E}_{(3\times 3)} \boldsymbol{B}_{(3\times n)} = \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_2), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_n)\} \quad \boldsymbol{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \tag{9.52}$$

die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \{\sigma^{(i)}_{xx}, \sigma^{(i)}_{yy}, 2\sigma^{(i)}_{xy}\}^T\,, \tag{9.53}$$

so dass wir den vertrauten Ausdruck wiederfinden

$$\begin{aligned} k^e_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}\, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e} (\sigma^{(i)}_{xx}\, \varepsilon^{(j)}_{xx} + \sigma^{(i)}_{yy}\, \varepsilon^{(j)}_{yy} + 2 \cdot \sigma^{(i)}_{xy}\, \varepsilon^{(j)}_{xy})\, d\Omega\,. \end{aligned} \tag{9.54}$$

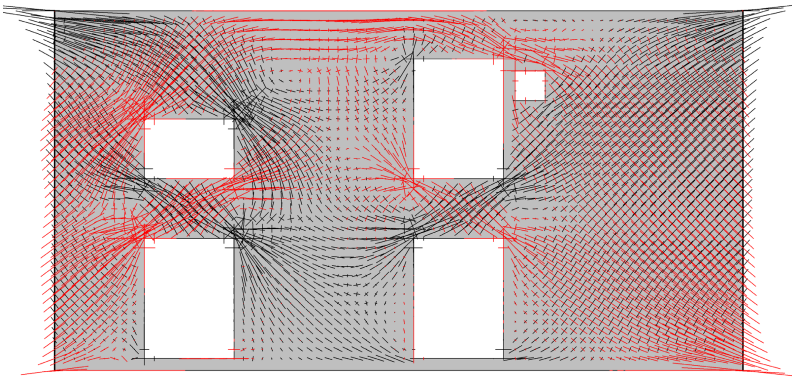


Bild 9.8. Hauptspannungen in einer Wandscheibe, die links und rechts zwischen zwei Wänden eingeklemmt ist, (BE-SCHEIBE Pos. BSP7)

9.7 Vektoren und Funktionen

Eine Funktion $u(x)$ ist ein ‚unendlich langer' Vektor $\boldsymbol{u}$, [275]. Ein linearer Operator L gleicht einer Matrix $\boldsymbol{L}$ und der Inversen der Matrix

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{9.55}$$

entspricht die Inverse L^{-1} des linearen Operators

$$L\,u = f \qquad \Rightarrow \qquad u = \int_0^l L^{-1} f \, dx\,. \tag{9.56}$$

Dem Skalarprodukt von Vektoren, $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta v}$, entspricht das L_2-Skalarprodukt von Funktionen

$$\int_0^l u(x)\,\delta v(x)\,dx = (u, \delta v)\,. \tag{9.57}$$

Der transponierten Matrix $\boldsymbol{L}^T$ oder wie man auch sagt, der adjungierten Matrix $(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u})^T\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{L}^T\,\boldsymbol{v}$, entspricht der **adjungierte Operator** L^*

$$(Lu, v) = (u, L^* v)\,. \tag{9.58}$$

In der linearen Algebra transponiert man und in der Analysis integriert man partiell.

[3] $\boldsymbol{E}$ = Ebener Spannungszustand mit $2(1-\nu)$ wegen $2\,\sigma_{xy}$

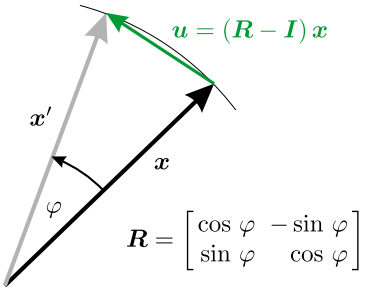


Bild 9.9. Echte Starrkörperdrehung

Lineare Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = a \cdot x$ ist $f'(x) = a$. Jede lineare Funktion (ja jedes Polynom) ist mit ihrer **Taylor-Entwicklung** um den Punkt $x = 0$ identisch

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 0 + a \cdot x\,. \tag{9.59}$$

Eine lineare Funktion trägt ihre Ableitung also immer mit sich. Es ist die Steigung mit der die Funktion den Nullpunkt verlässt. Der Gradient, die Jacobi-Matrix, der linearen, vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ selbst. Je steifer das Tragwerk, je ‚steiler' der Anstieg, umso größer werden die Kräfte $\boldsymbol{f}$ bei einer Bewegung $\boldsymbol{u}$.

Linear sind auch die Funktionale $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ und die Vektoren $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{j}$ sind die Gradienten in Richtung von $\boldsymbol{f}$ bzw. $\boldsymbol{u}$.

Starrkörperdrehungen

‚Lineare Mechanik ist eine Nullpunkt-Mechanik. Wir konzentrieren uns auf die ersten 2, 3 Millisekunden und wir machen nichts falsch, wenn wir annehmen, dass sich alles geradlinig bewegt'.

Bei einer echten Starrkörperdrehung, siehe Bild 9.9, lautet der ***Deformationsgradient*** $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}$ und der ***Green-Lagrange Verzerrungstensor*** $\boldsymbol{E} = 1/2\,(\boldsymbol{F}^T\,\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$ ist daher null, so dass dabei keine Spannungen entstehen.

Bei einer Pseudodrehung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$ einer Scheibe lautet der **Drehvektor** $\boldsymbol{b} = \{0, 0, \tan\varphi\}^T$ und wegen $\boldsymbol{u} = \{x_2 \tan\varphi, -x_1 \tan\varphi, 0\}^T$ sind die linearen Dehnungen $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = 1/2\,(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T) = \boldsymbol{0}$ null, entstehen keine Spannungen.

9.8 Finite Differenzen und finite Integrale

Jeder sieht es: Finite Elemente ist wie finite Differenzen. Die Einträge $-1\,, 2\,, -1$ in der Steifigkeitsmatrix eines Stabes, $-u'' = p$, differenzieren

$$\frac{-u_{i-1} + 2\,u_i - u_{i+1}}{h} = f_i = p_i \cdot h\,, \tag{9.60}$$

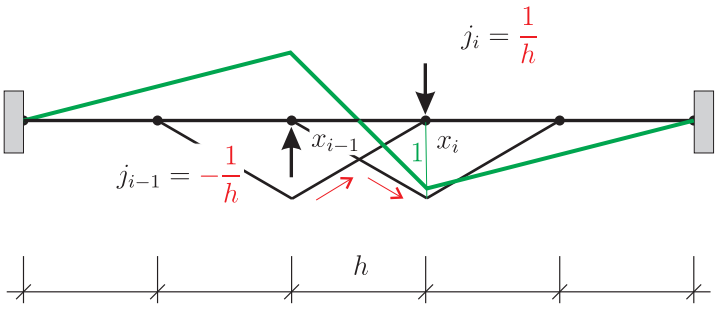


Bild 9.10. FE-Einflussfunktion für die erste Ableitung $u'(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$

denn nach Division durch h ist die linke Seite der Differenzenquotient für die zweite Ableitung $-u''$ im Knoten x_i und rechts steht $p_i = p(x_i)$.

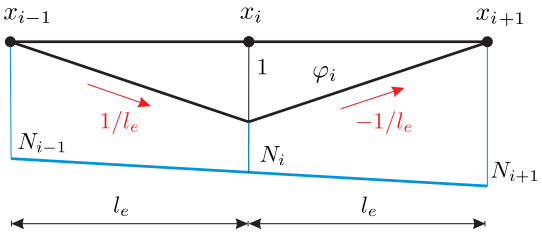


Bild 9.11. Trotz $1/l_e$ bleibt $a(u_h, \varphi_i)$ endlich für $l_e \to 0$.

Alle Funktionale,

$$J(u) = \sum\nolimits_i j_i u_i = \sum\nolimits_i J(\varphi_i)\, u_i\,, \tag{9.61}$$

nennen wir sie j**-Funktionale**, sind (im verallgemeinerten Sinn) finite Differenzen der Knotenwerte u_i und die $j_i = J(\varphi_i)$ sind die Gewichte, wie in

$$u_h'(x) = u_{i-1}\,\varphi_{i-1}'(x) + u_i\,\varphi_i'(x) = \frac{1}{h}\,(u_i - u_{i-1})\,, \tag{9.62}$$

oder bei einem Balkenelement, $l_e = 1$ und $EI = 1$, (3.160),

$$M_h(x) = (6 - 12\,x)\,w_i + (6\,x - 4)\,w_i' + (12\,x - 6)\,w_{i+1} + (6\,x - 2)\,w_{i+1}'\,. \tag{9.63}$$

Die j_i sind auch gerade die Knotenkräfte, die die Einflussfunktionen erzeugen, siehe Bild 9.10.

Schreibt man dagegen die Funktionale als Summe über die f_i (‚die zweiten Ableitungen'), wir nennen sie g**-Funktionale**,

$$J(u) = \sum\nolimits_i g_i f_i = \sum\nolimits_i g_i \cdot (\varphi_i, p)\,, \tag{9.64}$$

dann sind es Summen von **finiten Integralen**, die die Knotenkräfte $f_i = (\varphi_i, p)$ zweimal, $J(u) = u(x_i)$ oder einmal, $J(u) = u'(x_i)$, integrieren, und so die Einflussfunktionen stückweise nachfahren, $J(u) = (G, p) = \sum g_i \cdot (\varphi_i, p)$.

Die Ergebnisse sind gleich, aber die j-Funktionale leben – wie eben finite Differenzen – nur in der Umgebung des Aufpunktes, während die g-Funktionale über alle Stäbe integrieren. Anders als bei den j_i, die keine eigene Intelligenz haben, steckt in den g_i die ganze Statik des Tragwerks, weil sie die Lösung von $\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{j}$ sind. (Bei $J(u_h) = \sum_i j_i\, u_i$ steckt die Statik in den u_i).

Anmerkung: Die virtuelle innere Energie bleibt auch für $l_e \to 0$ endlich, denn die Elementlänge l_e ist gegenläufig zur Steigung $1/l_e$ der *shape functions*, siehe Bild 9.11,

$$\lim_{l_e \to 0} a(u_h, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} N_h \varphi_i'\, dx = N_h(x_i) - N_h(x_i) = 0\,. \tag{9.65}$$

Das gilt sinngemäß auch für 2-D und 3-D Elemente.

9.9 Erste Variation

Wir betrachten einen Stab

$$-EAu'' = p \qquad u(0) = u(l) = 0\,. \tag{9.66}$$

Die potentielle Energie

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l EA\,(u')^2 dx - \int_0^l p\,u\,dx = \frac{1}{2}a(u,u) - (p,u) \tag{9.67}$$

kann man nicht, wie eine Funktion, nach u ableiten. Statt dessen betrachtet man $\Pi(u)$ in einem Nachbarpunkt $u + \varepsilon\,\delta u$,

$$\begin{aligned}\Pi(u + \varepsilon\,\delta u) &= \frac{1}{2}a(u + \varepsilon\,\delta u, u + \varepsilon\,\delta u) - (p, u + \varepsilon\,\delta u) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon\,a(u,\delta u) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(\delta u, \delta u) - (p,u) - \varepsilon\,(p,\delta u)\end{aligned} \tag{9.68}$$

leitet nach dem Skalar ε ab und setzt am Schluss $\varepsilon = 0$

$$\delta\Pi(u, \delta u) = a(u, \delta u) - (p, \delta u)\,. \tag{9.69}$$

Das Ergebnis heißt **die erste Variation** von $\Pi(u)$.

Der additive Term $\varepsilon\,\delta u$ muss so beschaffen sein, dass $u + \varepsilon\,\delta u$, die Lagerbedingungen einhält und das ist garantiert, wenn δu eine virtuelle Verrückung ist, denn die sind in allen Lagern null, hier $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$. Das gilt auch, wenn es eine Lagerverschiebung wie $u(l) = \bar{u}$ gibt.

Die **zweite Variation** ist einfach derselbe Ausdruck nur zweimal nach ε abgeleitet

$$\delta\Pi^2(u,\delta u) = a(\delta u,\delta u)\,. \tag{9.70}$$

Man rechnet auch leicht, setze $\varepsilon = 1$ in (9.68), dass

$$\begin{aligned}\Pi(u+\delta u) &= \Pi(u) + a(u,\delta u) - (p,\delta u) + \frac{1}{2}a(\delta u,\delta u)\\ &= \Pi(u) + \delta\Pi(u,\delta u) + \frac{1}{2}\,\delta\Pi^2(\delta u,\delta u)\,,\end{aligned} \tag{9.71}$$

was wie eine Taylor-Reihe aussieht, nur ist das Ergebnis exakt.

Ist u die Lösung des Randwertproblems, dann ist die erste Variation null, denn $\delta\Pi$ ist im Punkt u identisch mit der ersten Greenschen Identität

$$\delta\Pi(u,\delta u) = a(u,\delta u) - (p,\delta u) = \mathscr{G}(u,\delta u) = 0 \tag{9.72}$$

und folglich ist $\Pi(u)$ der tiefste Punkt, denn

$$\Pi(u+\delta u) - \Pi(u) = \frac{1}{2}\,a(\delta u,\delta u) > 0 \qquad \text{wenn } \delta u \neq 0\,. \tag{9.73}$$

9.10 Selbstadjungiert

Symmetrische Matrizen, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$, sind selbstadjungiert,

$$\boldsymbol{\delta u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta u}\,, \tag{9.74}$$

wie auch die linearen Differentialgleichungen gerader Ordnung

$$\mathscr{B}(w,\,\hat{w}) = \int_0^l -EAu''\delta u\,dx + [N\delta u]_0^l - [u\delta N]_0^l - \int_0^l u(-EA\,\delta u'')\,dx = 0\,. \tag{9.75}$$

Deswegen gilt der Satz von Betti und deswegen ist die Wechselwirkungsenergie

$$a(u,\delta u) = \int_0^l EAu'\,\delta u'\,dx \tag{9.76}$$

symmetrisch. Der Zwillingscharakter des Prinzips der virtuellen Verrückungen und virtuellen Kräfte ist eine Konsequenz dieser Symmetrie, siehe Seite 26. Der Statiker löst im Grunde **quadratische Probleme**, denn die Gleichgewichtslage eines Tragwerks macht die potentielle Energie

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l EA(u')^2\,dx - \int_0^l pu\,dx \tag{9.77}$$

zum Minimum und die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch und positiv definit. Besser geht es nicht, denn mit finiten Elementen wird daraus

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u} \tag{9.78}$$

und weil $\boldsymbol{K}$ positiv definit ist markiert der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ das Minimum von $\Pi(\boldsymbol{u})$, jeder Schritt $\hat{\boldsymbol{u}}$ weg von $\boldsymbol{u}$ lässt Π wachsen

$$\Pi(\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{u}}) - \Pi(\boldsymbol{u}) = \hat{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{u}} > 0\,. \tag{9.79}$$

Diese einfachen Strukturen der linearen Statik und Mechanik haben wesentlich zu dem raschen Erfolg der finiten Elemente beigetragen. Der Einstieg in die Theorie der finiten Elemente war leicht: Aus Statik wurde Matrizenrechnung.

Bei nichtlinearen Problemen ist die Situation anders: Vertraute Ergebnisse stehen nicht mehr zur Verfügung, der Zugewinn an Genauigkeit verlangt einen relativ hohen Aufwand und gleichzeitig nimmt der ‚Konvergenzradius' der Ergebnisse, ihre Übertragbarkeit ab. Zum Glück ist es aber so, dass in der praktischen Baustatik in der Regel die lineare Theorie genau genug ist – Stabilitätstheorie ausgenommen, die ja von Hause aus nichtlinear ist – und die realen Probleme eher an anderer Stelle liegen.

9.11 Die Algebra der Identitäten

Für das folgende reduzieren wir die erste Greensche Identität eines Stabes – sie soll hier als Beispiel dienen, $Lu = -EAu''$ – auf

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = (L\,u, \delta u) + [N \cdot \delta u] - a(u, \delta u) = 0 \tag{9.80}$$

und lassen auch noch den Randterm weg

$$(L\,u, \delta u) - a(u, \delta u) = 0\,. \tag{9.81}$$

Zu diesem Ergebnis kommt man, wenn man $a(u, \delta u)$ in Richtung u partiell integriert (und die Randterme weglässt).

Geht man von $a(u, \delta u^*)$ in Richtung δu^*, dann entsteht bei der part. Integration der Ausdruck

$$a(u, \delta u^*) - (u, L\delta u^*) = 0\,, \tag{9.82}$$

oder wenn wir diese Gleichungen untereinander schreiben und $\delta u = \delta u^*$ in (9.81) schreiben

$$(L\,u, \delta u^*) - a(u, \delta u^*) = 0 \tag{9.83}$$

$$a(u, \delta u^*) - (u, L\delta u^*) = 0\,. \tag{9.84}$$

Partielle Integration – von $a(u, \delta u)$ aus gesehen – nach links ergibt das **Prinzip der virtuellen Verrückungen** und nach rechts das **Prinzip der virtuellen Kräfte**.

Und addiert man die beiden Gleichungen, so hat man den **Satz von Betti**

$$(L\,u, \delta u^*) - (u, L\delta u^*) = 0\,. \tag{9.85}$$

In Kapitel 9.25 gibt es noch eine weitere Variante, wenn man sich im Satz von Betti wieder zurück auf die Wechselwirkungsenergie bewegt.

Der Gleichung $a(u, \delta u)$ entspricht der Ausdruck $\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K u}$, zu dem die Identität

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K \delta u} = 0 \tag{9.86}$$

gehört. Daran kann man ablesen, dass das System $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ nur dann eine Lösung hat, wenn die rechte Seite $\boldsymbol{f}$ orthogonal zu allen Starrkörperbewegungen, $\boldsymbol{K u}_0 = \boldsymbol{0}$, ist. Diese Bedingung greift nur, wenn der Stab nicht ausreichend gelagert ist. Regulär ist $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ die einzige Lösung von $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{0}$, und zu dem Vektor $\boldsymbol{0}$ ist jeder Vektor $\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{0} = 0$ orthogonal.

Man nehme die 2×2 Steifigkeitsmatrix eines Stabelements

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.87}$$

und ziehe an dem Stab mit zwei Kräften f_1 und f_2, links und rechts. Was jedem Ingenieur einleuchtet, leuchtet auch der Mathematik ein. Die beiden Kräfte $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2\}^T$ müssen im Gleichgewicht sein, also orthogonal zu der Starrkörperbewegung $\boldsymbol{u}_0 = \{1, 1\}^T$, wenn das Experiment gelingen soll.

Oder man nehme die singuläre Steifigkeitsmatrix eines nicht festgehaltenen Stabes aus zwei Elementen. Das Produkt $\boldsymbol{Ku}$ ergibt den Vektor

$$\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2 \cdot u_2 - u_3 \\ -u_2 + u_3 \end{bmatrix}. \tag{9.88}$$

Die Zeilensumme dieses Vektors ist null

$$(u_1 - u_2) + (-u_1 + 2 \cdot u_2 - u_3) + (-u_2 + u_3) = 0 \tag{9.89}$$

wie immer auch die u_i aussehen und das bedeutet, dass das singuläre System $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ nur eine Lösung hat, wenn $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ ist, was natürlich gerade die Gleichgewichtsbedingung ist.

Bei den Funktionen

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -EAu''(x)\delta u(x)\,dx + [N\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = 0\,, \tag{9.90}$$

führt das Operieren mit den Starrkörperbewegungen wie $\delta u(x) = 1$ gerade ebenso auf die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathscr{G}(u, 1) = \int_0^l -EAu''(x) \cdot 1\,dx + N(l) \cdot 1 - N(0) \cdot 1 = 0\,. \tag{9.91}$$

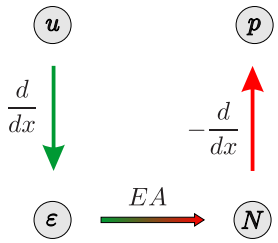


Bild 9.12. Der Dreier-Schritt, hier am Stab, $-d/dx(EA\,d/dx)u = p$

Am freigeschnittenen Stab müssen also die Normalkräfte an den Stabenden die Streckenlast $p = -EAu''(x)$ ausbalancieren.

Die Biegelinie w eines Balkens genügt den Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathscr{G}(w, ax+b) = 0 \qquad ax+b = \text{Null-Eigenlösungen}\,. \tag{9.92}$$

Analog gilt, dass das Produkt der Balkenmatrix $\boldsymbol{K}$ mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{w}$ Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{w}$ ergibt, die orthogonal zu den Null-Eigenvektoren $\boldsymbol{\delta w}_0$, Translationen und Rotationen, von $\boldsymbol{K}$ sind, $\boldsymbol{\delta w}_0^T \boldsymbol{f} = 0$, der Vektor $\boldsymbol{f}$ also den Gleichgewichtsbedingungen genügt.

Zur Algebra gehört in gewissem Sinn auch die Tatsache, dass man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ eines Stabes (und anderer Bauteile analog) als Produkt dreier Matrizen schreiben kann, [283] p. 116, entsprechend der Zerlegung der Gleichung $-EAu'' = p$ in die drei Schritte

$$u' = \varepsilon \qquad EA\,\varepsilon = N \qquad -N' = p\,. \tag{9.93}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A} = [\ldots 0 \;\; -1/l_i \;\; 1/l_i \;\; 0 \ldots]$ ($1/l_i$ auf der Diagonalen und $-1/l_i$ auf der linken Nebendiagonalen) und ihre Transponierte $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$ ‚differenzieren', sie bilden d/dx und $-d/dx$ nach und die Diagonalmatrix $\boldsymbol{C}$ enthält auf ihrer Diagonalen die Steifigkeiten EA_i der einzelnen Elemente i mit der Länge l_i. Die Verschiebungsdifferenzen $u_i - u_j$ zwischen den Knoten, $\boldsymbol{Au}$ sind die ε, führen zu Spannungen $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{CAu}$, und die wirken als Kräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\sigma}$ zurück auf die Knoten, siehe Bild 9.12 und 9.13. $\boldsymbol{Au}$ *looks at each bar and* $\boldsymbol{A}^T$ *looks at each node* (G. Strang).

Bei einem Fachwerk ist $\boldsymbol{C}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $EA_i/l_i > 0$ und deswegen ist $\boldsymbol{K}$ positiv definit, (G. Strang),

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{CAu} = (\boldsymbol{Au})^T\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Au}) > 0 \qquad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\,. \tag{9.94}$$

Ein Fachwerk ist genau dann ***statisch bestimmt***, wenn $\boldsymbol{A}$ quadratisch ist, weil man dann aus $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{N} = \boldsymbol{f}$ die Normalkräfte N_i berechnen kann und aus diesen dann im Nachlauf, $\boldsymbol{CAu} = \boldsymbol{N}$, die Knotenverschiebungen u_i.

Wenn das Fachwerk ***statisch unbestimmt*** ist, es gibt mehr Stäbe, als Knotenverschiebungen, $\boldsymbol{A}$ ist ein rechteckige Matrix, führen die Handmethoden wie der *Ritterschnitt* nicht zum Ziel, dann braucht man einen Computer,

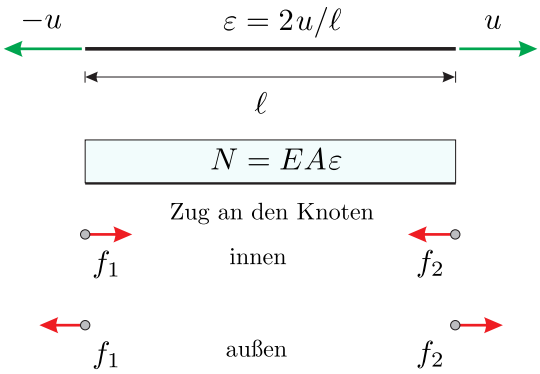


Bild 9.13. Die Verschiebungsdifferenzen $u_2 - u_1$ in den Knoten führen zu Dehnungen ε und zu Spannungen $\sigma = E\varepsilon$ in dem Stab, und damit zu Zugkräften $f_i = N = A\sigma$ in den Knoten, die durch äußere Kräfte ausgeglichen werden müssen, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

dann muss man erst aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die Knotenverschiebungen u_i berechnen und aus den Dehnungen der Stäbe dann die Normalkräfte N_i.

Zum Thema **Kondition** $\kappa(\boldsymbol{K}) = \|\boldsymbol{K}\| \cdot \|\boldsymbol{K}^{-1}\| = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ der Steifigkeitsmatrix und ihr Einfluss auf die Genauigkeit der numerischen Lösung sei auf den Beitrag von *Cleve Moler* verwiesen: What is the Condition Number of a Matrix?

9.12 Die Algebra der finiten Elemente

FE-Lösungen $u_h = \sum_i u_i \varphi_i(x)$ sind Variationslösungen

$$a(u_h - u, \varphi_i) = a(u_h, \varphi_i) - (p, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.95}$$

und daher lassen sich eine ganz Reihe von Gleichungen und Ungleichungen mit der FE-Lösung linearer Probleme formulieren.

Der **Lösungsraum** $\mathcal{V}$ enthält alle u, die die geometrischen Lagerbedingungen erfüllen und $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ ist der **Ansatzraum** der finiten Elemente, siehe Bild 9.14. Es ist u die exakte Lösung, u_h die FE-Lösung, $e = u - u_h$ ist der Fehler und v_h ist eine Testfunktion aus $\mathcal{V}_h$. In einem LF p gilt:

- Die Wechselwirkungsenergie zweier *shape functions* φ_i und φ_j ist gleich der Arbeit der *shape forces* p_i von φ_i auf den Wegen φ_j (und umgekehrt)

$$\delta W_i = k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = (p_i, \varphi_j) = (\varphi_i, p_j) = \delta W_e \,. \tag{9.96}$$

- Auf $\mathcal{V}$ ist (Achtung, dieser Ausdruck ist nur auf $\mathcal{V}_h$ null, siehe (9.101))

$$a(e, v) = (p, v) - a(u_h, v) = (p, v) - (p_h, v) \qquad v \in \mathcal{V} \,. \tag{9.97}$$

- Insbesondere also

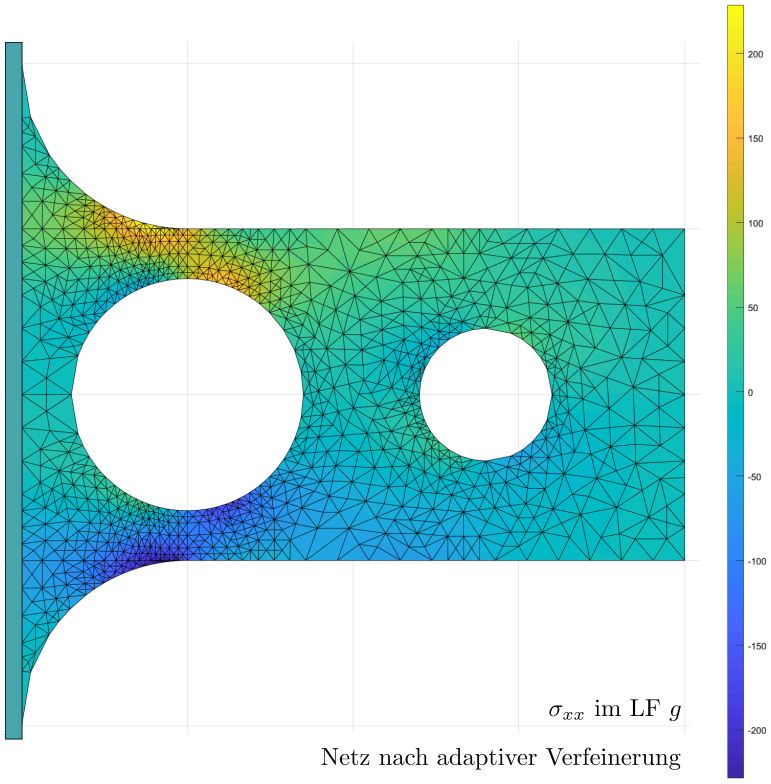


Bild 9.14. Die Ansatzfunktionen $\boldsymbol{\varphi}_i$ der freien Knoten bilden den Raum $\mathcal{V}_h$. Mit den $\boldsymbol{\varphi}_i$ der Lagerknoten wird daraus der $\mathcal{V}_h^+$ (MATLAB™ PDE Modeler)

$$(p,u) - (p,u_h) = (p,e) = a(e,u) = (p,u) - (p_h,u) \tag{9.98}$$

und daher auch

$$(p,u_h) = (p_h,u) \qquad \textit{Symmetrie} \tag{9.99}$$

- Galerkin Orthogonalität

$$a(e,v_h) = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.100}$$

- Die Fehlerkräfte $p - p_h$ sind orthogonal zu den Testfunktionen

$$a(e,v_h) = (p,v_h) - (p_h,v_h) = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{9.101}$$

- Der FE-Lastfall p_h ist orthogonal zu e

$$a(u_h,e) = (p_h,e) = 0. \tag{9.102}$$

- Die Einheitslastfälle p_i, die *shape forces* der φ_i, sind orthogonal zu e

$$a(\varphi_i, e) = (p_i, e) = 0. \tag{9.103}$$

- Die u_i stellen sich so ein, dass die kumulierten *push-stop* Kräfte $\boldsymbol{f}_i$, die Spalten der Steifigkeitsmatrix, gleich dem Vektor $\boldsymbol{f}$ sind[4]

$$\sum\nolimits_i u_i \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}\,. \tag{9.104}$$

- Die FE-Lösung minimiert den Fehler in der inneren Energie

$$a(e,e) \le a(u - v_h, u - v_h) \quad v_h \in \mathcal{V}_h\,, \tag{9.105}$$

denn für jedes $v_h \in \mathcal{V}_h$ gilt

$$a(e + v_h, e + v_h) = a(e,e) + 2\underbrace{a(e, v_h)}_{=0} + \underbrace{a(v_h, v_h)}_{>0}\,. \tag{9.106}$$

Die Energie $a(e,e)$, die nötig ist, um die FE-Lösung ‚zurechtzurücken', $u_h \to u$, ist bei der FE-Lösung im Vergleich mit allen anderen Näherungen v_h in $\mathcal{V}_h$ am kleinsten.

- Die innere Energie der FE-Lösung ist kleiner als die exakte Energie (hier ohne den Faktor 1/2)

$$0 < a(u_h, u_h) \le a(u,u) \qquad \text{in einem LF } p\,, \tag{9.107}$$

weil

$$0 < a(u,u) = a(u_h + e, u_h + e) = a(u_h, u_h) + 2\underbrace{a(e, u_h)}_{=0} + \underbrace{a(e,e)}_{>0}\,. \tag{9.108}$$

- Ebenso gilt

$$\Pi(u) \le \Pi(u_h)\,, \tag{9.109}$$

weil

$$\begin{aligned}\Pi(u_h) = \Pi(u - e) &= \frac{1}{2}\,a(u,u) - a(u,e) + \frac{1}{2}\,a(e,e) - (p,u) + (p,e) \\ &= \Pi(u) \underbrace{-a(u,e) + (p,e)}_{\mathscr{G}(u,e)=0} + \frac{1}{2}\,\underbrace{a(e,e)}_{>0}\,,\end{aligned} \tag{9.110}$$

- und auch

$$(p, u_h) = a(u_h, u_h) < a(u,u) = (p,u)\,. \tag{9.111}$$

[4] siehe Bild 3.86

- Ferner verifiziert man leicht die für alle $v_h \in \mathcal{V}_h$ gültige Identität, [283],

$$\Pi(v_h) = \frac{1}{2}\, a(v_h, v_h) - (p, v_h) = \frac{1}{2}\, a(v_h - u, v_h - u) - \frac{1}{2}\, a(u, u)\,. \quad (9.112)$$

  Die potentielle Energie einer Testfunktion v_h ist also gleich ihrem Abstand in der inneren Energie, (minus A_i, dem zweiten Term) von der exakten Lösung. Das belegt auch noch einmal, dass in der Gleichgewichtslage $\Pi(u) = -1/2\, a(u, u)$ negativ ist.

- Eine Steifigkeitsmatrix ist **singulär**, wenn die Null-Energie Funktionen u_0, d.h. die Nullstellen von $a(u, u_0) = 0$ (für alle u) in $\mathcal{V}_h$ liegen, weil dann $u_0(x) = \sum_i \bar{u}_i \varphi_i(x)$ eine Adresse in $\mathcal{V}_h$ hat, den Vektor $\bar{\boldsymbol{u}}$, der ein Eigenvektor von $\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist.

- In einem LF d (Lagersenkung) enthält der Lösungsraum $\mathcal{S} = w_\Delta \oplus \mathcal{V}$ nicht die Funktion $w = 0$, denn $\mathcal{V}$ (Lösungsraum des Trägers, in festen Lagern ist $w = 0$) wird um eine Funktion w_Δ, die die Lagersenkung beschreibt, ‚geshiftet', ist $\mathcal{S}$ also kein Vektorraum mehr, sondern nur noch eine **Mannigfaltigkeit** (die Summe $u + v$ zweier Elemente aus $\mathcal{S}$ liegt nicht in $\mathcal{S}$) und daher muss man bei der Anwendung der obigen Formeln in einem LF d aufpassen, [125].

- In einem LF d ist die innere Energie der FE-Lösung **größer** als die Energie der exakten Lösung, siehe Kapitel 9.17. Es kommen hierbei zwei Argumente zusammen: (1) In einem LF d ist die exakte Energie größer als Null, und (2) $a(u_h, u_h)$ liegt immer rechts von $a(u, u)$, siehe Bild 1.51.

- Das **Diagonalelement** g_{ii} der Inversen ist bis auf den Faktor $(-1/2)$ die potentielle Energie im LF $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$

$$\Pi(\boldsymbol{g}_i) = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{e}_i = -\frac{1}{2}\, \text{Eigenarbeit} = -\frac{1}{2}\, g_{ii} \cdot 1 \quad (9.113)$$

  also der Einflussfunktion $g_i(x) = \sum_j g_{ji}\, \varphi_j(x)$, deren Knotenwerte $\boldsymbol{g}_i$ ja die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i$ sind.

- Und jeder weiß: Ist $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dann ist

$$\frac{1}{2}\, \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \quad (9.114)$$

  die innere Energie der FE-Lösung. Energie = Skalarprodukt.
- Und ebenso: Wird ein nicht gelagertes Element verformt, (oder nimmt man ein deformiertes Element aus dem Elementverband heraus), dann sind die Kräfte $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ am Element im Gleichgewicht

$$\boldsymbol{u}_0^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_0^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}^T \boldsymbol{u} = 0\,, \quad (9.115)$$

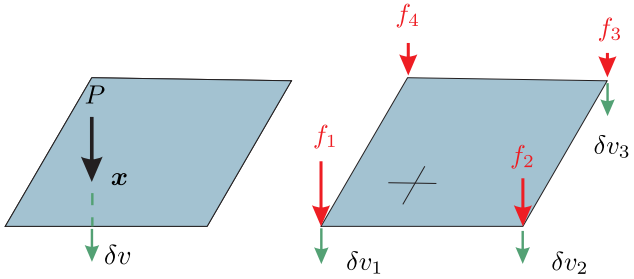


Bild 9.15. Die Arbeit der Knotenkräfte f_i auf den Wegen δv_i ist gleich $P \cdot \delta v(\boldsymbol{x})$, wenn δv aus $\mathcal{V}_h$ ist.

weil die Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0$ im **Kern** von $\boldsymbol{K}$ liegen, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$.

- Es ist elementar

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{9.116}$$

aber darauf beruhen viele FE-Ergebnisse. Man muss nur $\boldsymbol{\delta u}$ geeignet wählen. Setzt man $\boldsymbol{\delta u} = \boldsymbol{g}$ und beachtet $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ so folgt

$$\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,. \tag{9.117}$$

Eine Messung $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ gleicht also einer virtuellen Verrückung des Tragwerks in Richtung des Vektors $\boldsymbol{g}$. **Messen = Testen = Wackeln**.
- Und auch

$$P\delta v(\boldsymbol{x}) = \sum\nolimits_i P\varphi_i(\boldsymbol{x})\,\delta v_i = \sum\nolimits_i f_i\,\delta v_i \tag{9.118}$$

sei hier noch einmal wiederholt. Wenn man einem Element wackelt, wie dem Membran-Element in Bild 9.15, dann ist die virtuelle Arbeit $P\delta v(\boldsymbol{x})$ genauso groß wie die Arbeit der Knotenkräfte f_i, wenn die virtuelle Verrückung δv aus $\mathcal{V}_h$ ist. Die Auswertung einer Einflussfunktion, $\delta v = G_h$, kann an die Ecken delegiert werden, $(G_h, p) = (G_h, p_h)$.

9.13 Die Algebra der Einflussfunktionen

Wenn die Wechselwirkungsenergie symmetrisch ist, $a(u, \delta u) = a(\delta u, u)$, dann ist die Differentialgleichung selbstadjungiert und dann gilt Betti

$$W_{2,1} = w(x) = \int_0^l \delta_0(y - x) w(y)\, dy = \int_0^l G_0(y, y) p(y)\, dy = W_{2,1}\,. \tag{9.119}$$

Gemäß Betti Extended darf man w und G durch ihre FE-Näherungen ersetzen und das ist die zentrale Gleichung

$$w_h(x) = \int_0^l \delta_0(y - x) w_h(y)\, dy = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y)\, dy\,. \tag{9.120}$$

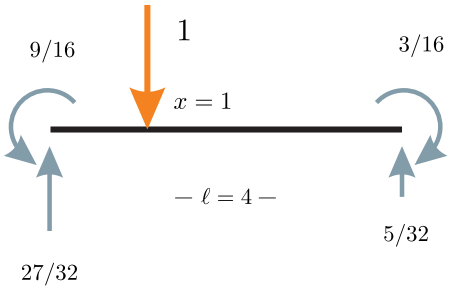


Bild 9.16. Die Festhaltekräfte $-f_i$

Übersetzt man diese Gleichung in die lineare Algebra der finiten Elemente wie auf Seite 326, dann ergibt sich

$$u_h(x) = \begin{cases} \int_0^l u_h(y)\delta(y-x)\,dy = \sum_i \varphi_i(x)u_i = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} \\ \int_0^l G_h(y,x)p(y)\,dy = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}\,, \end{cases} \tag{9.121}$$

was für **alle linearen Funktionale** ($\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$) gilt

$$J(u) = \begin{cases} \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} & = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} & = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}\,. \end{cases} \tag{9.122}$$

Verschiebt man den Aufpunkt in einem Balken, dann gilt

$$w(x+\Delta x) \simeq w(x) + w'(x)\Delta x = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy + \int_0^l G_1(x,y)\,p(y)\,dy\,\Delta x \tag{9.123}$$

was mit $G_1 = d/dx\,G_0$ konform geht; das Versatzmoment wirkt mit.

9.14 Partition of Unity

Die Summe der *shape functions* eines Balkenelements ist nicht Eins

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x) = 1 - x + \frac{3x^2}{l} - \frac{2x^3}{l^2}\,, \tag{9.124}$$

das gilt nur für $\varphi_1(x) + \varphi_3(x) = 1$, siehe Bild 3.18 und 3.63. *Partition of unity* meint also beim Balken, die *shape functions* können Translationen darstellen, wie die Absenkung $w = 1$. Sie können zusätzlich aber auch eine Drehung ψ z.B. um das linke Ende nach oben darstellen

$$0 \cdot \varphi_1(x) + \tan\psi \cdot \varphi_2(x) - \ell\tan\psi \cdot \varphi_3(x) + \tan\psi \cdot \varphi_4(x)\,. \tag{9.125}$$

Auf der Summe Eins der *shape functions* beruht die Tatsache, dass die äquivalenten Knotenkräfte j_i der EF für Schnittgrößen, also Ableitungen wie $N = EAu', \sigma_{xx} = E(\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy})$, *self-equilibrated* sind, denn

$$\sum\nolimits_i j_i = \sum\nolimits_i j(\varphi_i) = j(\sum\nolimits_i \varphi_i) = j(1) = 0\,. \tag{9.126}$$

Bei dieser Gelegenheit sei noch auf eine scheinbar merkwürdige Eigenschaft der *shape functions* hingewiesen. Wir betrachten ein zunächst frei schwebendes Element der Länge $l = 4$ und berechnen die äquivalenten Knotenkräfte der Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt $x = 1$. Die $f_i = \varphi_i(1)$

$$f_1 = \frac{27}{32} \qquad f_2 = -\frac{9}{16} \qquad f_3 = \frac{5}{32} \qquad f_4 = \frac{3}{16} \tag{9.127}$$

sind die Auflagerdrücke, und die $-f_i$ sind die Festhaltekräfte, sie halten dagegen. Eine Kontrolle überzeugt uns, dass die Gleichgewichtsbedingungen eingehalten werden, die Summe $V = -f_1 + 1 - f_3 = 0$ ist null und auch das Moment um $x = 0$ ist null, siehe Bild 9.16

$$\curvearrowright \sum M = -\frac{9}{16} - 4\,\frac{5}{32} + \frac{3}{16} + (P = 1) \cdot 1 = 0\,. \tag{9.128}$$

Nun sind die Kräfte f_i ja ihrer Größe nach eigentlich die Wege der φ_i im Punkt $x = 1$. Was wissen die Wege vom Gleichgewicht? Des Rätsels Lösung ist natürlich, dass die φ_i in ihren Knoten die Wege Eins gehen und daher die f_i sich automatisch richtig einstellen

$$\mathscr{B}(\varphi_1, G_0) = f_1 \cdot \varphi_1(0) + P \cdot \varphi_1(1) = -\frac{27}{32} \cdot 1 + P \cdot \frac{27}{32} = 0\,. \tag{9.129}$$

Das ist der Satz von Betti mit den beiden Lastfällen, deren Lösung φ_1 bzw. G_0 ist.

9.15 FEM und Gleichgewicht

Das fehlende lokale Gleichgewicht bei den finiten Elementen ist ein ‚ewiges Kümmerniss'. In [123] sind wir ausführlich darauf eingegangen und uns sei erlaubt daraus zu zitieren.

Sätze wie

- *Das globale Gleichgewicht ist erfüllt.*
- *Das Gleichgewicht im Element ist nicht erfüllt.*
- *Das Gleichgewicht an den Elementrändern ist nicht erfüllt.*
- *Das Gleichgewicht an den Knoten ist erfüllt.* (?)

stärken nicht das Vertrauen in die Methode der finiten Elemente, aber sie verlieren doch viel von ihrer Dramatik, wenn man sich daran erinnert, dass die Methode der finiten Elemente ein Ersatzlastverfahren ist. Die Schnittkräfte, die ein FE-Programm ausgibt, gehören zum äquivalenten Lastfall p_h, und daher ist es (aus Sicht der FEM) ganz natürlich, dass nichts passt, wenn man

über Kreuz vergleicht: Die Schnittkräfte eines Lastfalls A sind in der Regel nie im Gleichgewicht mit den Lasten eines Lastfalls B.

Ein FE-Programm begeht nur *einen* Fehler, den ihm ein Prüfingenieur anlasten könnte, und den gleich zu Anfang: Es ersetzt den Originallastfall durch einen äquivalenten Lastfall. Alles andere aber, was danach kommt, ist klassische Baustatik im Sinne des Regelwerkes. Das FE-Programm löst den äquivalenten Lastfall *exakt*. Daher ist das ganze Tragwerk und jedes Teilsystem im Gleichgewicht – mit den Lasten des äquivalenten Lastfalls.

Globales Gleichgewicht

Dieser Begriff hat eine ganz spezielle Bedeutung in der FEM. In der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ stehen die Beiträge der Einheitsverformungen aller Knoten, auch der Lagerknoten. Erst wenn man die Zeilen und Spalten streicht, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören, entsteht die sogenannte *reduzierte Steifigkeitsmatrix*. Zur reduzierten Steifigkeitsmatrix gehört der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, zur Gesamtsteifigkeitsmatrix hingegen der Raum $\mathcal{V}_h^+$, das ist $\mathcal{V}_h$ plus all den Einheitsverformungen der Lagerknoten.

Weil alle nur denkbaren Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ des Tragwerks in $\mathcal{V}_h^+$ liegen, fällt die Resultierende $\boldsymbol{R}_h$ der Ersatzlasten $\boldsymbol{p}_h$ mit der Resultierenden $\boldsymbol{R}$ der Originallasten $\boldsymbol{p}$ nach Größe und Richtung zusammen. Das folgt aus der Äquivalenz $(p, \varphi_i) = (p_h, \varphi_i)$ und der Tatsache, dass jedes $\boldsymbol{u}_0$ nach den φ_i entwickelbar ist. *Globales Gleichgewicht* bedeutet also $\boldsymbol{R}_h = \boldsymbol{R}$.

Sei ferner $\boldsymbol{A}$ die resultierende Lagerkraft im LF p, dann gilt $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ und dasselbe gilt sinngemäß auch für die FE-Lösung $\boldsymbol{R}_h + \boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{0}$. Wegen $\boldsymbol{R}_h = \boldsymbol{R}$ muss daher auch gelten $\boldsymbol{A}_h + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$, und deswegen haben wir Glück, denn wenn wir die Lagerkräfte (des LF p_h) addieren und sie mit der Resultierenden $\boldsymbol{R}$ des LF p vergleichen, dann ist das zwar formal eine Kontrolle über Kreuz, aber weil globales Gleichgewicht herrscht, haben wir diesmal die Logik auf unserer Seite.

Ein Beispiel. Eine Membran Ω stehe unter Druck, $-\Delta u = p$ und $u = 0$ auf Γ. Es ist

$$\mathscr{G}(u, 1) = \int_\Omega -\Delta u \cdot 1 \, d\Omega + \int_\Gamma t \cdot 1 \, ds = R + A = 0 \,. \tag{9.130}$$

Das $t = \partial u / \partial n$ ist die Aufhängekraft am Rand. Dasselbe mit der FE-Lösung

$$\mathscr{G}(u_h, 1) = \int_\Omega -\Delta u_h \cdot 1 \, d\Omega + \sum\nolimits_i \int_{\Gamma_i} \Delta t_h \cdot 1 \, ds + \int_\Gamma t_h \cdot 1 \, ds = R_h + A_h = 0 \,. \tag{9.131}$$

Die Δt_h sind die Sprünge in $\partial u / \partial n$, also die Querkraftsprünge auf den inneren Elementkanten Γ_i, die wir als Linienlasten lesen. Der FE-Lastfall p_h besteht also aus den Elementlasten $-\Delta u_h$ und diesen Δt_h und die ersten

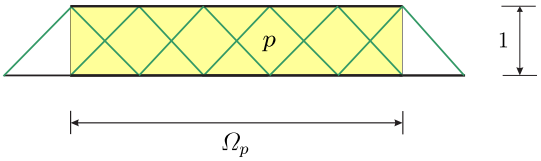


Bild 9.17. Die Überstände, die Schnipsel am Rand, stören das Gleichgewicht

beiden Integrale sind die Arbeit $(p_h, 1) = \sum_i f_{hi} = R_h$, die natürlich gleich $(p, 1) = \sum_i f_i = R$ ist, denn $a(u - u_h, \varphi_i) = f_i - f_{hi} = 0$.

Aus

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}_h + \boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{0} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{R}_h = \boldsymbol{R} \tag{9.132}$$

folgt $\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{A}$ und das ist ein bemerkenswertes Resultat, denn es impliziert, dass die Summe der f_i, über alle Lagerknoten (L),

$$\sum\nolimits_i f_i^L = \boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{A} \tag{9.133}$$

gleich der resultierenden Lagerkraft $\boldsymbol{A}$ sein muss. Die f_i^L mögen in einzelnen Lagerpunkten und Ecken ‚durch die Decke gehen', aber sie müssen Rücksicht auf das Ganze nehmen, dürfen (9.133) nicht verletzen, Oszillationen $\pm f_i^L$ müssen daher Ausreißer f_i^L abfedern, siehe Seite 423.

Lokales Gleichgewicht

Warum haben wir dann kein lokales Gleichgewicht? Warum sind die Schnittkräfte $\boldsymbol{S}_h^p$ der FE-Lösung längs des Randes eines beliebigen *patchs* Ω_p nicht im Gleichgewicht mit der Originalbelastung? Der Grund ist, dass die Starrkörperbewegungen des *patchs* über den *patch* hinausragen.

Wir betrachten einen *patch* Ω_p der Platte, der im LF p mit einer konstanten Blocklast p belastet sei, die außerhalb des *patchs* Null ist, siehe Bild 9.17. Es sei $\boldsymbol{R}^p$ die Resultierende der Originalbelastung p auf dem *patch* und $\boldsymbol{R}_h^p$ habe dieselbe Bedeutung für die FE-Belastung p_h. Wenn die Resultierenden gleich wären, $\boldsymbol{R}^p = \boldsymbol{R}_h^p$, dann wären auch die resultierenden Schnittkräfte $\boldsymbol{S}^p = \boldsymbol{S}_h^p$ gleich. Die Gleichung $\boldsymbol{R}^p = \boldsymbol{R}_h^p$ gilt genau dann, wenn

$$\int_{\Omega_p} p\, u_0^p \, d\Omega = \int_{\Omega_p} p_h\, u_0^p \, d\Omega \tag{9.134}$$

für alle Starrkörperbewegungen u_0^p des *patchs* gilt. Das Problem ist aber, dass die Starrkörperbewegungen eines solchen *patchs* nicht in $\mathcal{V}_h$ liegen. Um z.B. ein Hoch- und Runterfahren des *patchs* um ± 1 m zu simulieren, müsste die Bewegung

$$u_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{9.135}$$

in $\mathcal{V}_h$ liegen. Wegen des Versprungs von Null auf Eins, ist diese Bewegung aber unstetig, also nicht konform und liegt daher nicht in $\mathcal{V}_h$. Was aber in $\mathcal{V}_h$ liegt, ist die Bewegung, die ein Tischtuch beim Hochfahren vollführen würde, das wir über den *patch* legen. Vom Rand des hochgefahrenen *patchs* würde es in einer geraden Linie (unter $\sim 45°$) auf Null abfallen.

Weil die beiden Lastfälle p und p_h hinsichtlich aller φ_i äquivalent sind, sind sie es auch hinsichtlich des ‚Tischtuchs'. In einer symbolischen Notation gilt also

$$\int_{\Omega_{p+1}} p\,(\,\square\,)\,d\Omega = \int_{\Omega_{p+1}} p_h\,(\,\square\,)\,d\Omega\,, \tag{9.136}$$

wobei Ω_{p+1} der Teil der Platte sein soll, in dem das Tischtuch nicht Null ist. Das ist praktisch Ω_p plus eine Elementreihe. Nun ist voraussetzungsgemäß p außerhalb Ω_p Null – das macht das Ergebnis anschaulicher – und deswegen haben wir ‚fast' Gleichgewicht

$$\int_{\Omega_p} p\,\square\,d\Omega = \int_{\Omega_{p+1}} p_h\,(\,\square\,)\,d\Omega\,. \tag{9.137}$$

Zum Vergleich: Der Prüfingenieur hätte gerne

$$\int_{\Omega_p} p\,\square\,d\Omega = \int_{\Omega_p} p_h\,\square\,d\Omega\,, \tag{9.138}$$

was nur gelten würde, wenn p_h in der angrenzenden Elementreihe identisch Null wäre, was sehr unwahrscheinlich ist. Es bleibt nur das Prinzip Hoffnung: Je kleiner die Elemente werden, je kürzer also die Rampe wird, um so näher kommen wir dem angestrebten lokalen Gleichgewicht.

Diese Beispiele belegen noch einmal sehr schön die Sichtweise eines FE-Programms. Die kleinste Meßstrecke für ein FE-Programm sind nicht die einzelnen Elemente Ω_e, sondern das *cluster* von je 4 oder 5 Elementen, das den Träger T_i der einzelnen Einheitsverformung $\boldsymbol{\varphi}_i$ bildet. Die Träger erstrecken sich – von *bubble-functions* abgesehen – in der Regel über mehrere Elemente.

Die Elementspannungen sind also nicht elementweise orthogonal zu den wahren Spannungen, sondern nur bezogen auf die einzelnen Träger T_i der Einheitsverformungen

$$\int_{T_i} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \bullet \boldsymbol{\delta\varepsilon}_i \, d\Omega = 0\,. \tag{9.139}$$

Der Blick auf den Bildschirm

Die Herausforderung, die für einen Prüfingenieur – ja eigentlich für jeden Ingenieur – in den finiten Elemente steckt, ist, dass ‚völlig verquere Lastfälle' wie in Bild 3.23 brauchbare Näherungen liefern. ‚Wie kann eine Statik richtig sein, die einen ganz anderen Lastfall löst?'.

Die Wahrheit ist, dass der optische Abstand $p - p_h$ auf dem Bildschirm, anders als im 1-D, kein gutes (besser: einfaches) Maß für die Beurteilung einer 2-D oder 3-D Lösung ist – rechnerisch schon wie die adaptiven Verfahren beweisen. Die finiten Elemente schauen daher lieber auf das Fehlerquadrat der Spannungen, siehe (9.105), beim Balken wäre das

$$a(w - w_h, w - w_h) = \int_0^l \frac{(M - M_h)^2}{EI}\, dx \qquad \to \min\,, \tag{9.140}$$

denn dieses garantiert die Orthogonalität des optischen Fehlers $(p - p_h, \varphi_i) = f_i - f_{hi} = 0$. Dies ist das korrekte, aber grafisch kaum darstellbare Fehlermaß. Man müsste $p - p_h$ in einem Bild plotten und das jeweilige φ_i darüber legen.

9.16 Finite Elemente und Randelemente und Betti

Das Modellproblem sei eine vorgespannte Membran ($H = 1$)

$$-\Delta u = p \qquad u = 0 \qquad \text{auf dem Rand } \Gamma\,. \tag{9.141}$$

Der Ausgangspunkt ist die Integraldarstellung der Lösung

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{9.142}$$

die auf dem Satz von Betti beruht

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G_0, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0\,. \tag{9.143}$$

Die FEM ersetzt p durch die Näherung $p_h = -\Delta u_h$, die rechte Seite der FE-Lösung,

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_0^h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{9.144}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man G_0 durch die FE-Näherung G_0^h ersetzt und diese Näherung mit dem Original p überlagert, siehe (4.33).

Die BEM formuliert den Grenzwert (9.143) mit der Fundamentallösung $g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -1/(2\,\pi) \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ statt G_0, was auf

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, t(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial g_0}{\partial n}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \cancel{u(\boldsymbol{y})}) ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{9.145}$$

führt – die Einflussfunktion wird länger, siehe Seite 78 – denn jetzt steht dort auch die unbekannte Aufhängekraft $t = \partial u / \partial n$, die näherungsweise, $t \to t_h$, durch eine Integralgleichung auf dem Rand Γ bestimmt werden muss; mit diesem t_h statt t wird aus (9.145) die BE-Lösung $u_h(\boldsymbol{x})$.

Der Unterschied zwischen den beiden Näherungen beruht primär auf dem Unterschied in den **Belegungen** (Quellen) p_h^{FE}, t_h^{FE} und p, t_h^{BE}

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h^{\mathrm{FE}}(\boldsymbol{x}) = (G_0, p - p_h^{\mathrm{FE}}) + \sum\nolimits_i [G_0, t_h^{\mathrm{FE}}]_i + [G_0, t - t_h^{\mathrm{FE}}] \tag{9.146}$$

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h^{\mathrm{BE}}(\boldsymbol{x}) = [g_0, t - t_h^{\mathrm{BE}}]\,. \tag{9.147}$$

Die Integrale $[G_0, t_h^{FE}]_i$ sind die Beiträge der Knicke t_h^{FE} = Sprünge in der Normalableitung der FE-Lösung längs den Elementkanten (i) im Innern.

Wegen $p_h^{\mathrm{BE}} = p$ resultiert der Fehler in der BE-Lösung allein aus der Differenz auf dem Rand; $[.,.]$ = Rand- bzw. Linienintegral.

9.17 Schiefe Projektion

Wenn wir die potentielle Energie

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum} \tag{9.148}$$

in einem LF d minimieren, so suchen wir die Lösung in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{S} = w_\Delta \oplus \mathcal{V}$, siehe den vorigen Abschnitt.

Die Aufgabe lautet also: Finde bei festem (aber – bis auf die passende Lagersenkung – ansonsten beliebigem w_Δ) das Minimum von

$$\begin{aligned}
\Pi(w_\Delta + w) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(M_\Delta + M)^2}{EI}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_\Delta^2}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{M_\Delta\, M}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_\Delta^2}{EI}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^l p_\Delta\, w\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx}_{\tilde{\Pi}(w)}
\end{aligned} \tag{9.149}$$

durch Variation des additiven Terms $w \in \mathcal{V}$, wobei $p_\Delta = EI\, w_\Delta^{IV}$ die Belastung ist, die zu w_Δ gehört. (Gegebenenfalls ist dieses Arbeitsintegral um Beiträge von Einzelkräften/Einzelmomenten zu erweitern).

Nun gilt für die FE-Lösung w_h des *Teilproblems*: Finde den Minimumspunkt w_{ex} von $\tilde{\Pi}(w)$ auf $\mathcal{V}$

$$\tilde{\Pi}(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx - \int_0^l (-p_\Delta)\, w\,dx \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum} \tag{9.150}$$

die Ungleichung $\tilde{\Pi}(w_{ex}) < \tilde{\Pi}(w_h)$ und somit insgesamt, [123] (1.5), wegen

$$0 < \Pi(w_\Delta + w_{ex}) = I_1 + \tilde{\Pi}(w_{ex}) < I_1 + \tilde{\Pi}(w_h) = \Pi(w_\Delta + w_h) \tag{9.151}$$

dass die Biegeenergie der FE-Lösung in einem LF d größer ist als die Biegeenergie der exakten Lösung. Die Ungleichung $\Pi(w) \leq \Pi(w_h)$ gilt also auch

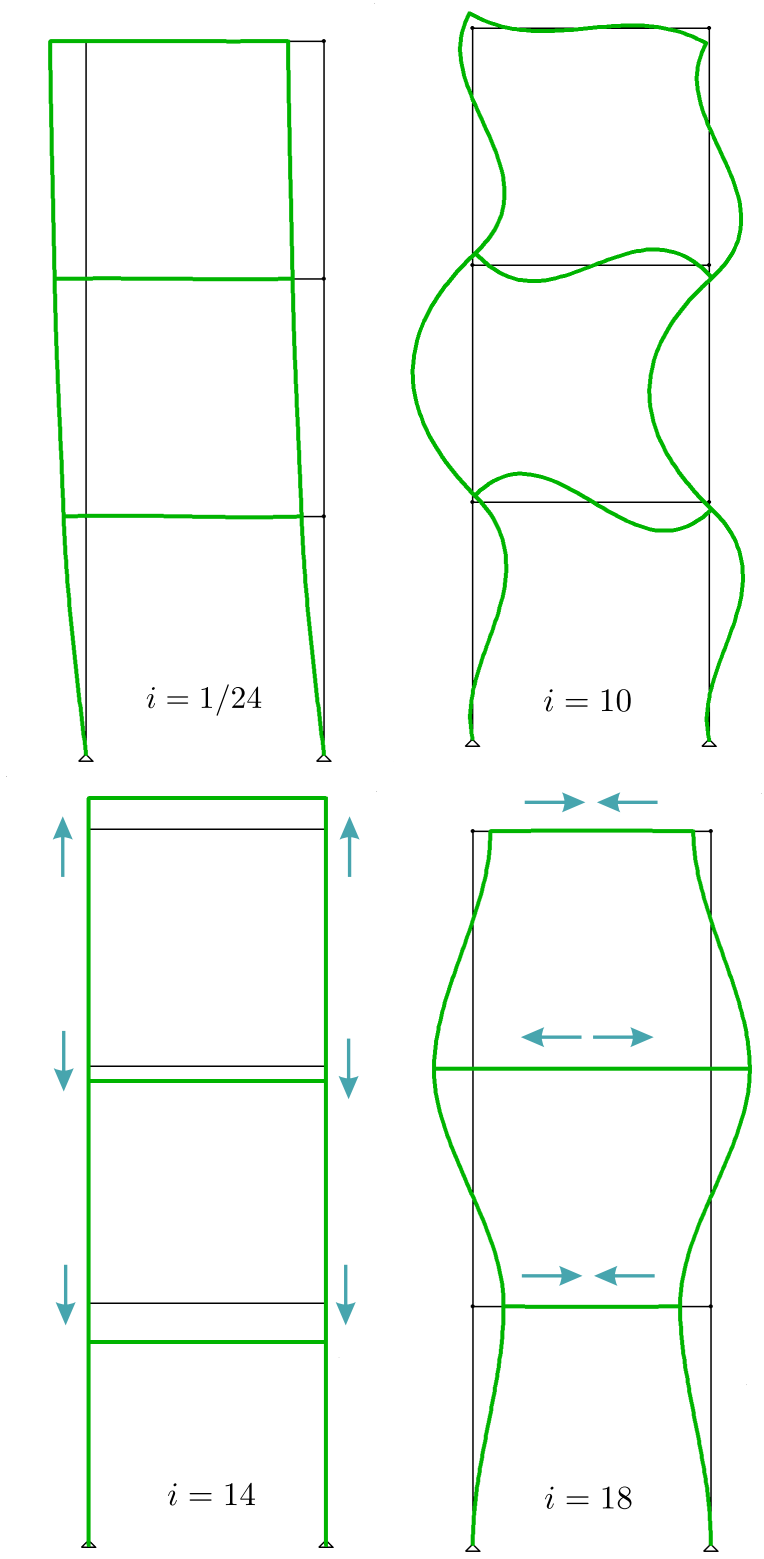


Bild 9.18. Eigenformen eines Stockwerkrahmens (BE-FRAMES + MATLAB™)

bei einer Lagersenkung. Weil $\Pi(w)$ quadratisch ist, spielt sich alles rechts vom Nullpunkt ab, $0 < \Pi(w) \leq \Pi(w_h)$ und die Ungleichung (9.107) dreht sich gerade um, $a(u,u) < a(u_h,u_h)$. Der Schatten ist länger als das Original, wie am Abend, wenn die Bäume im schrägen Sonnenlicht lange Schatten werfen.

9.18 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur linearen Algebra gehören auch die **Steifigkeitsmatrizen**. Nehmen wir die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{6\times 6}$ eines Seils mit 2 auf der Hauptdiagonalen und -1 auf den beiden Nebendiagonalen. Die **Eigenwerte** der Matrix lauten

$$\boldsymbol{\lambda} = \{0.1981, 0.7530, 1.5550, 2.4450, 3.2470, 3.8019\}^T \tag{9.152}$$

und zu dem maximalen Eigenwert λ_6 gehört der **Eigenvektor**

$$\boldsymbol{u}_6 = \{0.2319, -0.4179, 0.5211, -0.5211, 0.4179, -0.2319\}^T \qquad \|\boldsymbol{u}_6\| = 1 \tag{9.153}$$

also $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \boldsymbol{u}_6$. Wenn man das von links mit $\boldsymbol{u}_6^T$ multipliziert, dann ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_6^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \boldsymbol{u}_6^T \boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \|\boldsymbol{u}_6\|^2 = 3.8019 = \lambda_{max} \tag{9.154}$$

und das ist, wie man zeigen kann (Entwicklung der Konkurrenten $\boldsymbol{u} = \sum_i a_i \boldsymbol{u}_i$ nach den Eigenvektoren), die maximal mögliche Energie, wenn das Maximum unter allen $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ gesucht wird. Was uns hier interessiert ist, dass $\boldsymbol{u}_6$ ein ‚*auf–ab*' Vektor ist, er eine Strapaze für das Seil darstellt, während z.Bsp. der Eigenvektor, der zu $\lambda_{min} = \lambda_1$ gehört

$$\boldsymbol{u}_1 = \{0.2319, 0.4179, 0.5211, 0.5211, 0.4179, 0.2319\}^T \tag{9.155}$$

im Vergleich dazu ein ruhiger Geselle ist. Das Interessante ist, dass, wenn man iteriert, also mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{f}$ startet, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ berechnet und als neues $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ aufbringt (*power method* zur Bestimmung von λ_1), dass dann das Seil gegen die Lage $\boldsymbol{u}_1$ konvergiert.

Dem ‚*auf–ab*' entspricht, dass die Eigenlösungen von Seilen und eingespannten Stäben **Sinus-Schwingungen** sind und die mit der höchsten Frequenz erzeugt die größte Energie $a(u,u) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \lambda_{max}$.

In demselben Sinn nimmt die ‚Unruhe' der Eigenformen des Stockwerkrahmens in Bild 9.18 mit dem Index $i = 1, 2, 3, \ldots$ zu. Das sanfte Schwingen geht in immer stärkere Biege-Schwingungen über, die am Ende, in Richtung λ_{max}, dann zunehmend von Längsschwingungen abgelöst werden.

Die ersten Eigenvektoren eines Stockwerkrahmens sind also ‚biege-dominiert' und die höheren Eigenvektoren sind ‚dehnungs-dominiert', siehe Bild 9.18.

Der Durchlaufträger in Bild 9.19 hat 27 Freiheitsgrade und 27 Eigenwerte. Der Eigenvektor zum niedrigsten Eigenwert $\lambda_1 = 3.7 \cdot 10^3$ gleicht einem

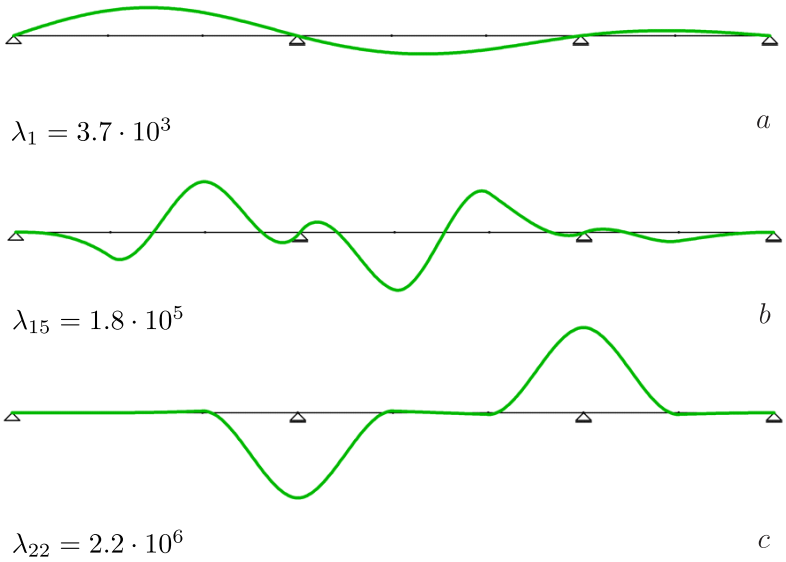


Bild 9.19. Eigenvektoren eines federnd gelagerten Durchlaufträgers mit 27 FG (BEFRAMES + MATLAB™)

sanften Schwingen des Trägers. Zur Stufe λ_{15} gehört ein deutlich unruhigerer Eigenvektor und richtig groß wird die Energie, wie im Fall $\lambda_{22} = 2.2 \cdot 10^6$, wenn der Balken gegen die elastischen Lager arbeitet oder, hier nicht gezeigt, weil nicht darstellbar, die Knoten sich in horizontaler Richtung gegenläufig bewegen (wie nach einem Hammerschlag auf die Stirnseite des Trägers). Dabei entstehen große Normalkräfte, die typischerweise zum Eigenwert $\lambda_{max} (= \lambda_{27})$ gehören.

Wenn man ein Tragwerk maximal ‚drangsalieren' will, dann muss man als Vektor $\boldsymbol{f} = \lambda_{max} \boldsymbol{u}_e$ den Eigenvektor $\boldsymbol{u}_e$ des höchsten Eigenwertes wählen.

Die Norm einer Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$

$$\|\boldsymbol{K}\| = \max \frac{|\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|} \qquad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \tag{9.156}$$

ist ein Maß dafür, um wieviel die Vektoren $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ‚gedehnt' werden, statisch wie groß $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ist. Der Eigenvektor $\boldsymbol{u}_e$ zu λ_{max} ist der Sieger in diesem Wettbewerb und die Norm von $\boldsymbol{K}$ ist gleich λ_{max}

$$\|\boldsymbol{K}\| = \max \frac{|\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_e|}{|\boldsymbol{u}_e|} = \frac{\lambda_{max}|\boldsymbol{u}_e|}{|\boldsymbol{u}_e|} = \lambda_{max} \,. \tag{9.157}$$

Höher kann man die Energie $a(u,u) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \lambda_{max}$ in der Einheitskugel, alle $|\boldsymbol{u}| = 1$, nicht treiben.

9.19 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^+$

In $\mathcal{V}_h^+$ liegen alle *shape functions* des Netz. Sie bilden eine *partition of unity*

$$\sum\nolimits_i \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{in jedem Punkt } x \text{ des Netz}\,. \tag{9.158}$$

Deswegen geht keine Belastung verloren, ist die $\sum_i f_i$ gleich der Resultierenden der Belastung p. Es ist nur so, dass die f_i, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören, direkt in die Lager reduziert werden.

Weil die Matrix $\boldsymbol{K}$ in dem zu lösenden Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die reduzierte Steifigkeitsmatrix ist, könnte man vermuten, dass die Äquivalenz

$$f_{hi} = \int_0^l p_h\,\varphi_i\,dx = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = f_i \qquad \varphi_i \in \mathcal{V}_h \tag{9.159}$$

nur bezüglich der nicht gesperrten φ_i – sie bilden den Raum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h^+$ – besteht. Das ist aber nicht richtig. Der FE-Lastfall p_h und der Original-Lastfall p sind bezüglich aller $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$ äquivalent.

Denn ist das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst, dann werden am nicht-reduzierten vollen System $\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{u}_G = \boldsymbol{f}_G$ die Lagerkräfte f_{hi} in den gesperrten Knoten berechnet und diese entsprechen gerade der Überlagerung der FE-Belastung p_h mit den gesperrten $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$. Der Vektor $\boldsymbol{u}_G$ ist natürlich der um die gesperrten Freiheitsgrade $u_i = 0$ erweiterte Vektor $\boldsymbol{u}$ und sinngemäß ist $\boldsymbol{f}_G$ der um die in die Lager reduzierten f_i erweiterte Vektor $\boldsymbol{f}$.

9.20 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^*$

Mit den *shape functions* $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$ legt man auch den Dualraum $\mathcal{V}_h^*$ fest, die Lastfälle $L\varphi_i = \psi_i$. Der kinematischen Restriktion entspricht also eine statische Restriktion, weil der wackeläquivalente Lastfall $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ unter den $\psi_i \in \mathcal{V}_h^*$ gesucht und gefunden werden muss, FEM $= \mathcal{V}_h + \mathcal{V}_h^*$.

9.21 Galerkin

Bei der Methode von Galerkin ist die FE-Lösung

$$u_h = \sum\nolimits_i u_i\,\varphi_i(\boldsymbol{x}) \tag{9.160}$$

die **Projektion** der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$

$$a(u - u_h, \varphi_i) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.161}$$

Da man das, was man projizieren will, die exakte Lösung u, nicht kennt, ersetzt man mittels der ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(w, \varphi_i) = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{9.162}$$

die virtuelle innere Arbeit $\delta W_i = a(u, \varphi_i)$ durch die virtuelle äußere Arbeit $\delta W_e = (p, \varphi_i) = f_i$ der Lasten und kommt so zu dem System

$$\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}\,. \tag{9.163}$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energien führt natürlich auf dasselbe Gleichungssystem. Das $\boldsymbol{K u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ bedeutet $\delta \Pi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{K u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, bedeutet, wie in der Schulmathematik, dass $\Pi(\boldsymbol{u})$ im tiefsten Punkt in jeder Richtung u_i eine horizontale Tangente hat.

9.22 Schwache Lösung

Für die Biegelinie $w(x)$ eines Seils

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \tag{9.164}$$

machen die finiten Elemente den Ansatz $w_h(x) = \sum_j w_j\,\varphi_j(x)$, nehmen die erste Greensche Identität des Seils als Vorlage (siehe Kapitel 1.48)

$$\mathscr{G}(w, \varphi_i) = \int_0^l -H\,w''(x)\varphi_i\,dx + [V\,\varphi_i]_0^l - \int_0^l H\,w'\varphi_i'\,dx = 0\,, \tag{9.165}$$

und bestimmen w_h so, dass

$$\int_0^l H\,w_h'\varphi_i'\,dx = \int_0^l p\varphi_i\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.166}$$

Die Lösung des Randwertproblems (9.164) nennt man eine ***starke Lösung*** und die Lösung des Variationsproblems (9.166) eine ***schwache Lösung***.

Diese Bezeichnung wird in der Ingenieurliteratur gewöhnlich damit erklärt, dass eine schwache Lösung nicht zweimal differenzierbar sein muss, wie das w in der Differentialgleichung $-H\,w'' = p$, sondern nur einmal, wie das w' im Integral der Wechselwirkungsenergie.

Treffender scheint uns die folgende Interpretation. In der Mathematik kennt man den Begriff der ***schwachen Konvergenz***. Man überzeugt sich nicht direkt davon, dass eine Schar von Funktionen $f_n(x)$ gegen eine Zielfunktion $f(x)$ konvergiert, sondern indirekt. Die Annäherung der $f_n(x)$ an $f(x)$ wird mit einer Schar von Kontrollfunktionen $\varphi_i(x)$ getestet. Man sagt, dass die Folge $f_n(x)$ *schwach* gegen $f(x)$ konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l f_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_0^l f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i\,. \tag{9.167}$$

Schwache Konvergenz gleicht der Konvergenz von Funktionalen. Jede Funktion $f_n(x)$ kann man ja einem Funktional $J_n(.)$ gleichsetzen

$$J_n(\varphi_i) = \int_0^l f_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx \tag{9.168}$$

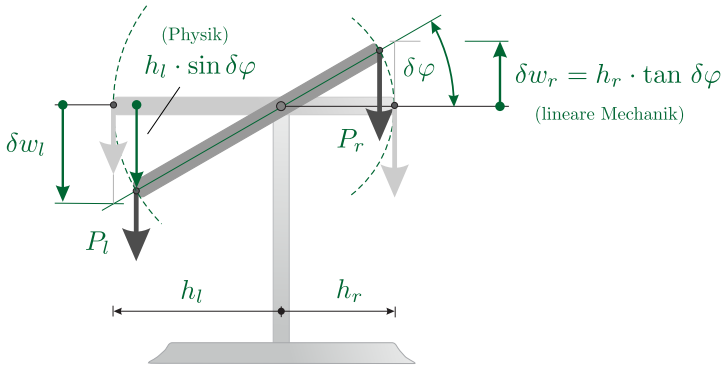


Bild 9.20. Die Marktfrau kontrolliert das Gleichgewicht einer Waage mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen

und schwache Konvergenz bedeutet, dass die Funktionale $J_n(.)$ gegen das **Zielfunktional**

$$J(\varphi_i) = \int_0^l f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \tag{9.169}$$

konvergieren – das ist wieder die **‚Wackeläquivalenz‘**.

Und diese Terminologie passt genau auf die finiten Elemente. Die FE-Lösung ist eine schwache Lösung, weil ihre Übereinstimmung mit der exakten Lösung nicht an der Differentialgleichung festgemacht wird, sondern sie indirekt durch $i = 1, 2, \ldots$ ‚Wackeltests‘ kontrolliert wird

$$\lim_{h\to 0} a(u_h, \varphi_i) = a(u, \varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i\,. \tag{9.170}$$

Wegen $\delta W_i = \delta W_e$ ist dies mit

$$\lim_{h\to 0} \int_0^l p_h\,\varphi_i\,dx = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i \tag{9.171}$$

identisch, also der Äquivalenz in den äußeren virtuellen Arbeiten. Praktisch ist es natürlich so, dass die finiten Elemente die Grenze $h \to 0$ nie erreichen, denn es werden nur endlich viele Tests gefahren, weil es auf einem Netz nur endlich viele *shape functions* φ_i gibt.

Formal betrachtet kann man die Methode der finiten Elemente als ein Verfahren ansehen, ein Funktional $J(\delta u) = (p, \delta u)$ durch ein Funktional $J_h(\delta u) = (p_h, \delta u)$ zu ersetzen, und zwar so, dass die beiden Funktionale auf $\mathcal{V}_h$ gleich sind, $J(\varphi_i) = (p, \varphi_i) = (p_h, \varphi_i) = J_h(\varphi_i)$.

Die große praktische Bedeutung des Begriffs der schwachen Lösung erkennt man, wenn man der **Marktfrau** zuschaut, siehe Bild 9.20. Auch sie schließt indirekt. Sie muss die Gleichung

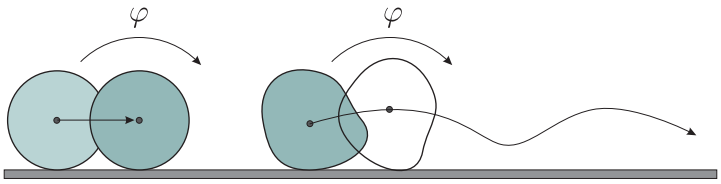


Bild 9.21. Der Werkzeugmacher prüft die Exzentrizität, indem er den Zylinder über den Tisch rollt

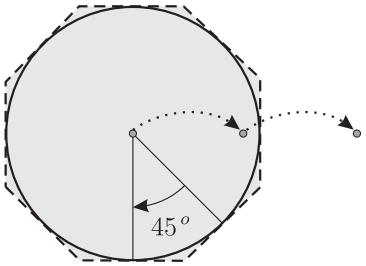


Bild 9.22. Das Achteck ist einem Zylinder für alle Drehungen, die ein Vielfaches von 45° sind, äquivalent

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \tag{9.172}$$

lösen. Das bedeutet, wie sie weiß, dass bei jeder Drehung $\delta\varphi$ des Waagebalkens die Arbeiten auf der linken und rechten Seite gleich sind[5]

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \qquad \Rightarrow \qquad P_l \cdot h_l \cdot \sin\delta\varphi = P_r \cdot h_r \cdot \sin\delta\varphi \tag{9.173}$$

und so schließt sie, indem sie an der Waage wackelt, indirekt, schließt sie **‚rückwärts'**

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \qquad \Leftarrow \qquad P_l \cdot h_l \cdot \sin\delta\varphi = P_r \cdot h_r \cdot \sin\delta\varphi\,. \tag{9.174}$$

Dasselbe macht der **Werkzeugmacher**, der einen Zylinder mit den Fingern hin und her rollt, siehe Bild 9.21. Er weiß: Wenn der Zylinder eine perfekte Kreisform hat, dann verändert der Schwerpunkt bei einer Drehung des Zylinders seine Höhe über dem Tisch nicht. Wenn der Test fehlschlägt, wenn die Finger eine leichte vertikale Bewegung spüren, dann ist es kein perfekter Zylinder.

Der **Lehrling**, der aus einem quadratischen Eisen einen Zylinder schleifen soll, macht es wie die finiten Elemente. Zu Beginn ist das quadratische Eisen einem Zylinder hinsichtlich aller Drehungen $\delta\varphi$, die ein Vielfaches von 90° sind, äquivalent, behält der Schwerpunkt bei einer 90°-Drehung seine Höhe

[5] In der linearen Mechanik gehen die Gewichte die Wege $h_l \cdot \tan\delta\varphi$ und $h_r \cdot \tan\delta\varphi$, was aber auf dasselbe hinausläuft, $P_l \cdot h_l \cdot \tan\delta\varphi = P_r \cdot h_r \cdot \tan\delta\varphi$.

bei. Indem der Lehrling nun mehr und mehr Kanten (n) in das Profil schleift, vergrößert er den Testraum, $\mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_8 \to \mathcal{V}_{16} \ldots$

$$\mathcal{V}_n = \{\text{alle Vielfachen von } \delta\varphi = \frac{360}{n}\} \qquad n = 4, 8, 16 \ldots \text{Kanten} \tag{9.175}$$

und er nähert sich so indirekt – auf dem Weg der ‚Drehäquivalenz' – dem Zylinder, siehe Bild 9.22, [130], [125].

Äquivalenz ist, wenn wir hier weiter ausholen dürfen, der Schlüsselbegriff der finiten Elemente. Die FEM löst nicht den ursprünglichen Lastfall p, sondern einen dazu äquivalenten Lastfall p_h, was bedeuten soll, dass sich die Lastfälle p und p_h in ihrer Wirkung auf die φ_i nicht unterscheiden

$$(p, \varphi_i) = f_i = f_{hi} = (p_h, \varphi_i)\,. \tag{9.176}$$

Das Merkmal der finiten Elemente ist, dass diese Äquivalenz ‚endlich' ist, d.h. wir stellen die Äquivalenz nur bezüglich endlich vieler Testfunktionen $\varphi_i, i = 1, 2, \ldots n$ her.

Bemerkung 9.1. Dem Begriff der schwachen Konvergenz ist auch der Unterschied zwischen ***schwachen*** und ***starken Randbedingungen*** geschuldet. Geometrische Lagerbedingungen, wie $w = 0$, werden von allen Ansatzfunktionen $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$ erfüllt, es sind starke Randbedingungen, während eine statische Randbedingung wie $v_n = 0$ am freien Plattenrand (Querkräfte null) nur im integralen Mittel – im schwachen Sinne – erfüllt ist, $(v_n, \varphi_i) = 0$, aber nicht punktweise. Deswegen nennt man statische Randbedingungen schwache Randbedingungen. Ihre Einhaltung ist erst in der Grenze $h \to 0$ garantiert.

9.23 Variation und Greensche Identität

Die potentielle Energie eines Stabes, links festgehalten, $u(0) = 0$, und mit einem freien Ende, $N(l) = 0$, lautet

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,dx - \int_0^l p\,u\,dx = \frac{1}{2}a(u,u) - (p,u)\,. \tag{9.177}$$

Wenn u die Gleichgewichtslage des Stabs unter der Streckenlast p ist, dann sollte die erste Variation der potentiellen Energie in diesem Punkt Null sein, $\Pi(u)$ dort eine ‚horizontale Tangente' haben.

Der Wert von Π in einem benachbarten Punkt $u + \varepsilon\,\delta u$ beträgt

$$\begin{aligned}\Pi(u + \varepsilon\delta u) &= \frac{1}{2}a(u + \varepsilon\delta u, u + \varepsilon\delta u) - (p, u + \varepsilon\delta u) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - (p,u) + \varepsilon \cdot (a(u,\delta u) - (p,\delta u)) + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{2}a(\delta u, \delta u)\,.\end{aligned} \tag{9.178}$$

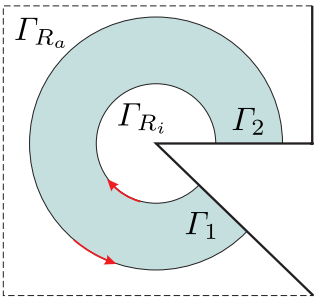


Bild 9.23. Rißspitze und Pfad des J-Integrals

Die erste Variation lautet somit

$$\delta\Pi(u,\delta u) = \frac{d}{d\varepsilon}\Pi(u+\varepsilon\delta u)|_{\varepsilon=0} = a(u,\delta u) - (p,\delta u) \tag{9.179}$$

und die ist wegen

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l p\,\delta u(x)\,dx - \int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = (p,\delta u) - a(u,\delta u) = 0 \tag{9.180}$$

null, denn die Randarbeiten [...] fallen wegen $N(l) = 0$ und $\delta u(0) = 0$ weg.

Die erste Variation der potentiellen Energie ist gleich der ersten Greenschen Identität.

9.24 A Path-Independent Integral

In der Bruchmechanik dreht sich alles um den stress-intensity factor und bei dessen Berechnung nutzt man aus, dass das sogenannte J-Integral pfadunabhängig ist [336]. Auch dahinter steckt die Null der ersten Greenschen Identität – hier allerdings gedoppelt und gespiegelt – als Satz von Betti. Wir illustrieren die Logik an Hand der Laplace Gleichung.

Sind u und v zwei homogene Lösungen, dann spielt sich Betti nur auf dem Rand ab, siehe Bild 9.23,

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} (\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n})\,ds + \int_{\Gamma_{R_i}\cup\Gamma_{R_a}} (\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n})\,ds = 0 \tag{9.181}$$

was sich, wenn u und v auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ entweder homogene Dirichlet- oder Neumann-Bedingungen erfüllen, auf

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_{\Gamma_{R_i}\cup\Gamma_{R_a}} (\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n})\,ds = 0 \tag{9.182}$$

reduziert. Die Integrale über Γ_{R_i} und Γ_{R_a} sind also gegengleich und das gilt für alle Radien R_i und R_a, solange die Bögen auf Γ_1 bzw. Γ_2 enden.

9.25 Das Grundfunktional (Hu-Washizu)

In [116] haben wir das Grundfunktional (*basic functional*) vorgestellt und gezeigt, wie man aus ihm alle weiteren Funktionale, insbesondere die **potentielle Energie** und die **komplementäre potentielle Energie**, herleiten kann. Wir wollen das hier kurz aufgreifen, um zu zeigen, dass bei einer Lagersenkung die potentielle Energie, $\Pi(u) = 1/2\, a(u,u)$, positiv ist.

Wenn man in der zweiten Greensche Identität eines Stabes

$$\mathscr{B}(u,\delta u) = \int_0^l -EAu''\delta u\, dx + [N\delta u - u\,\delta N]_0^l - \int_0^l u(-EA\delta u'')\, dx = 0 \tag{9.183}$$

das letzte Integral partiell integriert (also einen Schritt zurück in Richtung $a(u,\delta u)$ macht), erhält man den Ausdruck

$$\mathscr{V}(u,\delta u) = \left\{ \int_0^l -EAu''\delta u\, dx + [N\delta u - u\,\delta N]_0^l \right\} + [u\,\delta N]_0^l - a(u,\delta u) = 0\,. \tag{9.184}$$

In der geschweiften Klammer steht der ‚Rest' von Betti nach der partiellen Integration des letzten Integrals.

Nun ersetzt man in der geschweiften Klammer alle Terme von u durch ihre Daten, soweit sie in der Formulierung des Randwertproblems vorkommen, entfernt die Klammer und streicht alle Terme, die sich aufheben. Der so entstehende Ausdruck ist die **erste Variation** des Grundfunktionals Π_H und $\delta\Pi_H(u,\delta u) = 0$ ist das **Hu-Washizu Prinzip**.

Ist z.B. das Randwertproblem

$$-EAu'' = p \qquad u(0) = 0 \qquad u(l) = \bar{u}\,, \tag{9.185}$$

gestellt, dann ergibt sich nach obiger Regel

$$\mathscr{V}(u,\delta u) = \int_0^l p\,\delta u\, dx + [N\delta u]_0^l - \bar{u}\,\delta N(l) + [u\,\delta N]_0^l - a(u,\delta u) = 0 \tag{9.186}$$

und diese Null $\times(-1)$ ist die erste Variation des **Grundfunktionals**

$$\Pi_H = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_0^l p\,u\, dx + N(0)\,u(0) + (\bar{u} - u(l))\,N(l)\,. \tag{9.187}$$

Das Grundfunktional entspricht praktisch der Situation, dass man alle Zwangspunkte entfernt, alle u zulässt, und dann variiert. Ist R_1 die Menge aller u, die die geometrischen Lagerbedingungen, die auch inhomogen sein können, erfüllen, dann ist die Restriktion von Π_H auf R_1 die **potentielle Energie**, also im Fall des obigen Randwertproblems, wenn wir $p = 0$ setzen und $u(l) = \bar{u}$, (Lagerverschiebung),

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(u,u) \geq 0\,. \tag{9.188}$$

Und ist R_2 die Menge aller u, die die statischen Feldgleichungen $(-EAu'' = p)$ und statischen Randbedingungen erfüllen, dann ist, wie man nach einigen Zwischenschritten zeigen kann, die Restriktion von Π_H auf R_2 die **komplementäre potentielle Energie**, siehe [116] p. 116,

$$\Pi_c(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega a(u,u) + N(l)\,\bar{u}\,, \tag{9.189}$$

und die Lösung des Randwertproblems macht diese Energie auf R_2 zum Maximum, weil

$$\Pi_c(u+\delta u) - \Pi_c(u) = -\frac{1}{2}a(\delta u, \delta u) \leq 0 \qquad \text{für alle } \delta u \in R_{2,0}\,. \tag{9.190}$$

In $R_{2,0}$ liegen alle homogenen Lösungen der Feldgleichung, $-EA\,u'' = 0$.

Das ganze ist im Grunde nur Algebra. Hat man die beiden ‚Räume' R_1 und R_2 eingeführt, also nach Funktionen, die die geometrischen bzw. die statischen Bedingungen erfüllen, getrennt, dann ergibt sich die Aufspaltung in potentielle und komplementäre potentielle Energie automatisch. Man braucht nur das Grundfunktional Π_H, das ja dem ***Hu-Washizu*** Funktional der Elastizitätstheorie entspricht, bei dem u keinen Feldgleichungen und Randbedingungen genügen muss, [109], und dann betrachtet man die Restriktion auf R_1 bzw. auf R_2.

Wir merken noch an, dass das **Kraftgrößenverfahren** die Lösung im R_2 sucht, also die komplementäre potentielle Energie maximiert. Das Hauptsystem ist unter der Last im Gleichgewicht, wie $-EAu'' = p$, die Verformung liegt im R_2, und dann werden die X_i dazu addiert, die alle im $R_{2,0}$ liegen, homogene Lösungen der Feldgleichungen sind, $-EAu'' = 0$, weil wir annehmen dürfen, dass die X_i nur in den Ecken, allgemeiner den Intervallgrenzen, den Rändern angreifen.

Technisch besteht der Lösungsraum aus einem u_p (= Lösung am Hauptsystem) und den X_i im $R_{2,0}$, also $\mathcal{V} = u_p \oplus R_{2,0}$.

Um die Lösung des Randwertproblems (9.185) mittels dem Grundfunktional zu bestimmen, alle u sind zugelassen, ersetzt man die Normalkräfte an den Stabenden durch ***Lagrange Multiplikatoren***

$$\Pi_H(u,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_0^l p\;dx + \lambda_1\,u(0) + (\Delta - u(l))\,\lambda_2 \tag{9.191}$$

und bestimmt eine Funktion $u(x)$ und Zahlen λ_i so, dass Π stationär wird, [116], p. 134. *Hu-Washizu* und Lagrange Multiplikatoren sind also eng miteinander verknüpft. Die statische Bedeutung der λ_i wird spätestens dann klar, wenn man das Grundfunktional zu Rate zieht.

9.26 Kraftgrößenverfahren versus Weggrößenverfahren

Die Statik ist nicht das einzige Gebiet, in dem es die Wahl zwischen einer Weggrößen- und einer Kraftgrößenformulierung gibt. In der Elektrotechnik kann man zwischen der Kirchhoffschen Maschenregel: *Summe der Spannungsabfälle in einer Masche ist null* und der Kirchhoffschen Knotenregel : *Summe der Stromflüsse in und aus jedem Knoten ist null*, wählen[6].

In der *computational mechanics* werden, wie Gilbert Strang bemerkt hat, die **Knotenpunktsmethoden** den **Maschengleichungen** (Nullraum-Methoden) vorgezogen, *‚Loop equations versus nodal equations‘*, [283] p. 183. Das Kraftgrößenverfahren ist eine Nullraum-Methode

$$M = M_0 + \underbrace{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_n M_n}_{aus\ dem\ Nullraum}, \tag{9.192}$$

weil die Ergänzungen M_i ‚Streckenlast-frei‘ sind, $M_i'' = 0$. Bei den Maschengleichungen sind die Flüsse zwischen den Knoten, die Spannungen, hier das Moment, die primäre Größe, $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{S}]) \equiv (M \cdot 1/EI, M)$ (Mohr[7]), und bei den Knotenpunktsmethoden ist es die Weggröße w, $(\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}], \boldsymbol{E}) \equiv (EI\, w'', w'')$. Die Maschengleichungen haben heute nur noch als Handmethode bei kleinen Problemen eine Chance, sind den Knotenpunktsmethoden dann sogar überlegen. Man darf sie nur nicht in Matrizenschreibweise formulieren, das wirkt umständlich und fremd.

Unbesehen davon ist das Kraftgrößenverfahren natürlich ein hervorragendes Mittel, um Statik zu lernen!

9.27 Der adjungierte Operator und die Greensche Funktion

Wenn es ein Skalarprodukt gibt, dann gibt es zu einem Operator L den adjungierten Operator L^* und zu jedem (beschränkten) linearen Funktional gibt es eine Greensche Funktion, die in der linearen Algebra auch ein Vektor sein kann.

Die Greensche Funktion g des linearen Funktionals $J(u) = (j, u)$ ist die Lösung der adjungierten Gleichung $L^* g = j$.

Zu der symmetrischen, selbstadjungierten Matrix $\boldsymbol{K}$ gehört die Identität

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{v} = 0\,. \tag{9.193}$$

Ist $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u}$ ein lineares Funktional angewandt auf die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dann folgt

[6] In der Statik sind die Spannungsabfälle die Sprünge in den Schnittgrößen (auf einem geschlossenen Pfad im Gebirge ist das $\pm\Delta h$ der Höhen null) und die Knotenregel entspricht dem Knotengleichgewicht.

[7] Die runden Klammern sind L_2-Skalarprodukte, sind die innere Energie.

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{9.194}$$

wenn $\boldsymbol{g}$ die Lösung des adjungierten Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ ist.

Der Operator $-EAu''$ in dem Randwertproblem

$$-EAu''(x) = p(x) \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{9.195}$$

ist ebenfalls selbstadjungiert, denn

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_0^l -EAu''(x)\, v(x)\, dx + \ldots - \int_0^l u\,(-EA\, v'')\, dx = 0\,. \tag{9.196}$$

Ist nun

$$J(u) = \int_0^l j(x)\, u(x)\, dx \tag{9.197}$$

ein lineares Funktional und ist $g(x)$ die Lösung des adjungierten Randwertproblems

$$-EA\, g''(x) = j(x) \qquad g(0) = g(1) = 0\,, \tag{9.198}$$

dann folgt nach zweimaliger partiellen Integration, siehe (9.196),

$$J(u) = \int_0^l j(x)\, u(x)\, dx = \int_0^l -EA\, g''(x)\, u(x)\, dx = \int_0^l g(x)\, p(x)\, dx\,, \tag{9.199}$$

was sinngemäß $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ entspricht. Die Lösung $g(x)$ von (9.198) ist also die Greensche Funktion des Funktionals $J(u)$.

Nun betrachten wir das ***Anfangswertproblem***

$$u'(t) = f(t) \qquad u(0) = 0 \tag{9.200}$$

zu dem die Identität, ($T > 0$ beliebig),

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_0^T u'(t)\, v(t)\, dt - [u\, v]_0^T + \int_0^T u(t)\, v'(t)\, dt = 0 \tag{9.201}$$

gehört. Der Operator d/dt ist nicht selbstadjungiert, denn $(u', v) = (u, -v')$ (ohne Randwerte). Ist

$$J(u) = \int_0^T j(t)\, u(t)\, dt \tag{9.202}$$

ein lineares Funktional und ist $g(t)$ die Lösung des adjungierten Problems

$$-g'(t) = j(t) \qquad g(T) = 0\,, \tag{9.203}$$

dann liefert partielle Integration die Darstellung

$$J(u) = \int_0^T j(t)\,u(t)\,dt = [g\,u]_0^T + \int_0^T g(t)\,u'(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,f(t)\,dt\,. \tag{9.204}$$

Partielle Integration hat zwei Grenzen, $(0, l)$ oder $(0, T)$. Bei Randwertproblemen werden beide Grenzen bedient, bei Anfangswertproblemen dagegen nur die untere und deswegen muss man die Greensche Funktion bei solchen Problemen am ***oberen Ende*** T festmachen, $g(T) = 0$. Die Greensche Funktion läuft, wenn man so will, ‚rückwärts'.

Wenn man einen Berg hinaufschaut, dann ist die Steigung positiv. Wenn man, oben angekommen ($t = T$), zurückschaut, dann ist die Steigung negativ. Das mag als Erklärung für den Wechsel im Vorzeichen

$$u'(t) = f(t) \qquad\qquad -g'(t) = j(t) \tag{9.205}$$

dienen[8].

Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u' = 1 - t \qquad u(0) = 0 \tag{9.206}$$

und $J(u)$ sei das Integral der Lösung $u(t) = t - 0.5\,t^2$

$$J(u) = \int_0^T 1 \cdot u(t)\,dt = \frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6} \qquad j(t) = 1\,. \tag{9.207}$$

Die adjungierte Gleichung

$$-g' = 1 \qquad g(T) = 0 \tag{9.208}$$

hat die Lösung $g(t) = T - t$ und das Skalarprodukt von $g(t)$ und $f(t)$ ist genau der Wert in (9.207)

$$J(u) = \int_0^T g(t) f(t) dt = \int_0^T (T - t) \cdot (1 - t)\,dt = \frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6}\,. \tag{9.209}$$

[8] Man kann (9.201) ‚selbstadjungiert' machen, wenn man im zweiten Integral die Integrationsgrenzen vertauscht ($= \times(-1)$) und so das rückläufig motiviert.

9.28 Die Ableitungen der Dirac Deltas

Wir merken noch an, dass man die höheren Dirac Deltas δ_i als Ableitungen von δ_0 interpretieren kann

$$\delta_1 = -\delta_0' \quad \delta_2 = \delta_0'' \quad \delta_3 = -\delta_0''' \qquad \delta_i = (-1)^i \delta_0^{(i)}\,, \tag{9.210}$$

$(i) = i$ Ableitungen, weil

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x) &= \int_0^l \underline{\delta_i(y-x)}\, u(y)\, dy \\ &= \int_0^l \delta_0(y-x)\, u^{(i)}(y)\, dy = \underline{(-1)^i} \int_0^l \underline{\delta_0^{(i)}(y-x)}\, u(y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{9.211}$$

Das ist einfach nur partielle Integration ‚ohne Rand', weil die Randwerte der $\delta_0^{(i)}$ ja null sind.

Interessant wird das ganze, wenn die Steifigkeiten $EA(x)$ und $EI(x)$ von x abhängen, denn dann schiebt sich das $EA(x)$ bzw. $EI(x)$ mit in die Definition. Beim Stab gilt

$$\delta_1 = -\delta_0'\, EA(x) \tag{9.212}$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta_1(y-x)u(y)dy &= \int_0^l -\delta_0'(y-x)EA(x)u(y)dy \\ &= -\int_0^l -\delta_0(y-x)EA(x)\, u'(y)dy = N(u)(x)\,. \end{aligned} \tag{9.213}$$

Die Schnittkräfte des Balkens sind

$$M(x) = -EI(x)w''(x) = \int_0^l \delta_2 w\, dy \tag{9.214}$$

$$V(x) = -(EI(x)w''(x))' = \int_0^l \delta_3 w\, dy\,. \tag{9.215}$$

In Kapitel 10.4.2 auf Seite 801 zeigen wir, dass

$$\delta_2(y-x) = -EI(x)\delta_0(y-x)''\,. \tag{9.216}$$

Wir wollen hier das Resultat für die Querkraft beweisen. Wir starten mit

$$V(x) = \int_0^l \delta_0(y-x) \cdot \underbrace{(-EI(y)w'''(y) - EI'(y)w''(y))}_{V(y)}\, dy \tag{9.217}$$

und lesen die Aktion von δ_0 ‚distributiv'

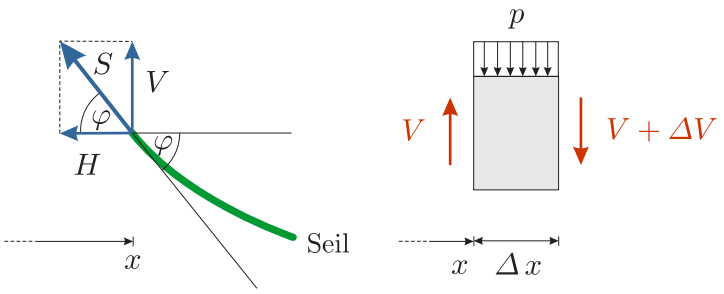


Bild 9.24. Schnittgrößen am Seil

$$V(x) = \int_0^l (-EI(x)\delta_0(y-x)w'''(y) - EI'(x)\delta_0(y-x)w''(y))\,dy\,. \quad (9.218)$$

Bei der jetzt folgenden partiellen Integration werden also $EI(x)$ und $EI'(x)$ wie Konstante behandelt

$$V(x) = \int_0^l (EI(x)\delta_0'''(y-x)w(y) - EI'(x)\delta_0''(y-x)w(y))\,dy\,, \quad (9.219)$$

und an diesem Ergebnis können wir δ_3 ablesen

$$\delta_3(y-x) = EI(x)\delta_0'''(y-x) - EI'(x)\delta_0''(y-x)\,. \quad (9.220)$$

9.29 Das Seil

Die Seilkraft S und die vertikale Kraft V und der Horizontalzug H bilden ein rechtwinkliges Dreieck, $V/H = \tan\varphi = w'$, siehe Bild 9.24. Aus dem Gleichgewicht am Element, $V + \Delta V - V + p\,\Delta x = 0$ folgt $-V' = p$ und das ergibt zusammen mit $V = H\,w'$ die **Seilgleichung** $-H\,w'' = p$.

Das Gleichgewicht wird zwar am verformten Seil aufgestellt, aber die Längsdehnung in den ausgelenkten Seilen wird nicht berücksichtigt, siehe [39]. Dort werden auch strengere Ansätze diskutiert.

Seilstatik ist nicht unbedingt einfach, obwohl für den Mathematiker schon. Er setzt die Vorspannkraft H, bestimmt die Lösung w der Differentialgleichung, und findet so rückwärts über das Integral der Bogenlänge ds die nötige Länge L des Seils. In der Praxis ist es meist umgekehrt, dann ist die Länge L gegeben und es gilt den Zug H in dem Seil zu berechnen, [234].

Soll unter Gleichlast p der Durchhang des Seils auf einen Wert f beschränkt sein, dann muss die Zugkraft den Wert

$$H = \frac{p\,l^2}{8\,f} \quad (9.221)$$



Bild 9.25. Puente de Abbas Ibn Firnás, Cordoba, Spanien

haben und die Länge L des Seils darf nicht größer sein als

$$L = \int_0^l ds \simeq l \cdot (1 + \frac{8\,f^2}{3\,l^2})\,. \tag{9.222}$$

Im Lastfall g nimmt ein Seil die Form einer Kettenlinie an, $w(x) \sim \cosh(x)$ und das führt zur Stützlinie und zum Bogen, siehe Bild 9.25.

9.30 Schalen

Es geht hier nur darum zu zeigen, dass die Gleichungen in der Schalenstatik dem allgemeinen Muster folgen und der Leser wird daher leicht in den folgenden Ausdrücken das Vertraute wiedererkennen. Wir geben die Gleichungen auch ohne ‚Vorspann', für den wir auf [116] S. 279 verweisen.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Schale lauten bei dem Modell von Koiter

$$-(n^{\alpha\beta} - b^\beta_\lambda\, m^{\lambda\,\alpha})_{|\alpha} + b^\beta_\alpha\, m^{\lambda\,\alpha}{}_{|\lambda} = p^\beta \qquad \beta = 1,2 \tag{9.223a}$$

$$-b_{\alpha\beta}\,(n_{\alpha\beta} - b^\beta_\lambda m^{\lambda\,\alpha}) - m^{\alpha\,\beta}{}_{|\alpha\,\beta} = p^3\,. \tag{9.223b}$$

Die $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\lambda\,\alpha}$ sind natürlich die Normalkräfte und Momente, die b^β_λ kommen aus der Geometrie der Schale (2. Fundamentalform) und $\boldsymbol{p} = \{p^1, p^2, p^3\}^T$ ist die Belastung.

Zu diesem System von drei Differentialgleichungen gehört die Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = &\int_\Omega -\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_\Gamma (n^{\alpha\beta}\nu_\beta - 2\,m^{\kappa\,\beta} b^\alpha_\kappa\,\nu_\beta)\,\delta u_\alpha\, ds \\ &+ \int_\Gamma (-m^{\alpha\,\beta}\,\delta u_{3_{|\alpha}}\,\nu_\beta + m^{\alpha\,\beta}{}_{|\alpha}\,\delta u_3\,\nu_\beta)\, ds - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,.\end{aligned} \tag{9.224}$$

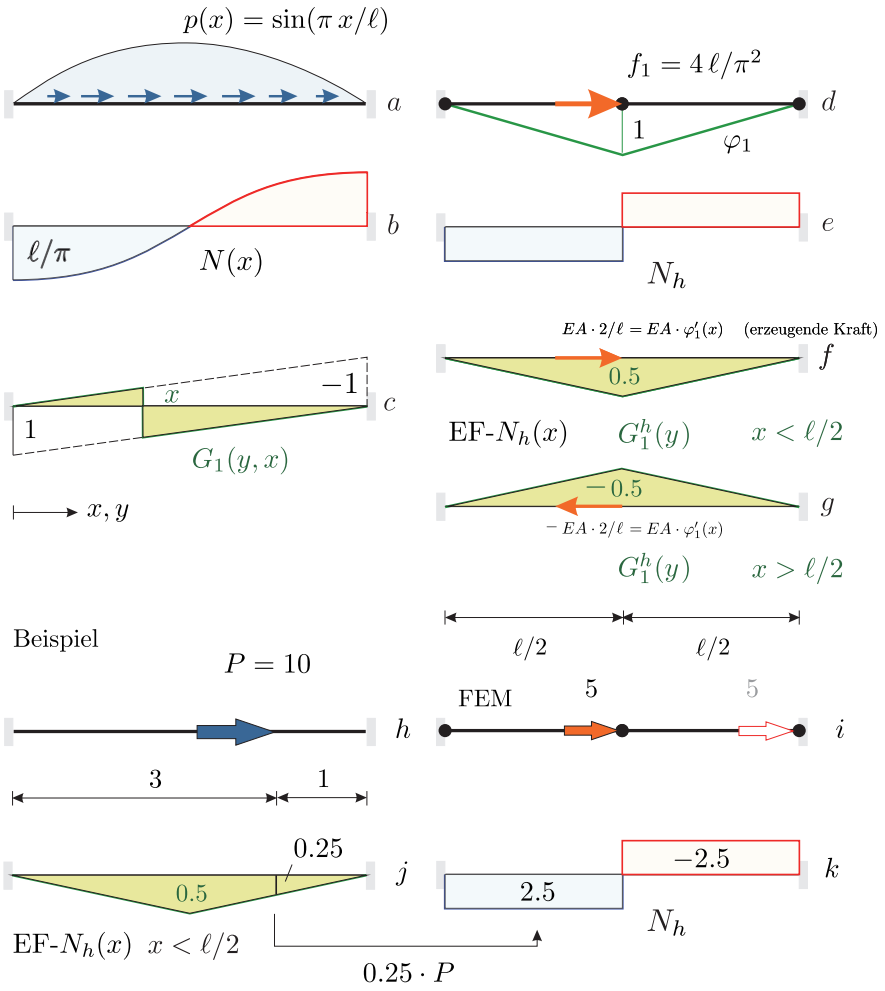


Bild 9.26. Stab unter sinusförmiger Belastung. Die beiden Einflussfunktionen **f)** und **g)** für $N_h(x)$ sind für alle Aufpunkte $x < \ell/2$ bzw. $x > \ell/2$ dieselben, daher $G_1^h(y)$ hier ohne x. Im FE-Modell wird immer nur der zentrale Knoten belastet, deswegen springen die EF nicht im Aufpunkt, außer bei $x = \ell/2$

Es ist $-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$ das obige System und ($\gamma_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon$, $\rho_{\alpha\beta} \equiv \kappa$)

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega (n^{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{u})\,\gamma_{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{\delta u}) + m^{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{u})\,\rho_{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{\delta u}))\,d\Omega \tag{9.225}$$

ist die symmetrische Wechselwirkungsenergie.

Nach einigen Umformungen zeigt sich, dass die Identität die Form

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_{\Omega} -\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u} + \ \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\delta \varphi})\, ds - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0 \tag{9.226}$$

hat, siehe [116] p. 280.

9.31 Der *h*-Vertauschungssatz

Das Beispiel in Bild 9.26 soll den h-Vertauschungssatz an einem 1-D Beispiel demonstrieren.

Verglichen wird hier die Normalkraft $N(x)$ in einem Stab unter sinusförmiger Belastung. Der Stab besteht aus zwei Elementen und so ersetzt eine Knotenkraft f_1 im zentralen Knoten die Belastung. Dieser Lastfall $p_h(= f_1)$ überlagert mit der exakten Einflussfunktion $G_1(y, x)$ ergibt an jeder Stelle x denselben Wert $N_h(x)$ wie die Überlagerung der genäherten Einflussfunktion $G_1^h(y, x)$ mit der exakten Belastung

$$J(u_h) = N_h(x) = G_1(\frac{\ell}{2}, x) \cdot f_1 = \pm 0.5\, f_1 \tag{9.227}$$

$$J_h(u) = N_h(x) = \int_0^l G_1^h(y, x)\, p(y)\, dy = \pm 0.5\, f_1\,. \tag{9.228}$$

Es ist $G_1^h(y, x) = \pm 0.5\, \varphi_1(y)$ und daher ist $(G_1^h, p) = \pm 0.5\, (\varphi_1, p) = \pm 0.5\, f_1$.

Die FE-Einflussfunktion $G_1^h(y, x)$ für $N_h(x)$ wird von der Knotenkraft $j_1 = EA\, \varphi_1'(x) = \pm EA \cdot 2/\ell$ erzeugt. Liegt der Aufpunkt x links von der Mitte ist j_1 positiv, und G_1^h ist das Dreieck in Bild 9.26 f. Für die Punkte rechts von der Mitte ist G_1^h das Dreieck in Bild 9.26 g.

Vielleicht ist auch das folgende Gedankenexperiment hilfreich. Es sei $\ell = 10$ und eine Kraft $P = 1$ wirke im Punkt $y = 9$ und der Aufpunkt $x = 7$ liege noch vor der Kraft. Im realen Stab ergibt das eine Zugkraft im Aufpunkt. Im FE-Modell erzeugt die Kraft P jedoch eine Knotenkraft f_1 im Punkt $x = 5$, die jetzt *vor* dem Aufpunkt liegt und so entsteht eine Druckkraft im Aufpunkt, N_h ist negativ, wie es die Einflussfunktion in Bild 9.26 g voraussagt.

Merke: Bei den finiten Elementen wandern die Kräfte in die Knoten und so kann aus dem dahinter ein davor werden.

9.32 Filter

Die *hat function* φ_i in Bild 9.27 ist ein ***low-pass filter*** – ein Akkumulator, ein ‚Staubsauger' – und ihre Ableitung φ_i' ist ein ***high-pass filter*** – eine ‚Waage', die auf Ungleichgewichte reagiert, sie differenziert.

Partielle Integration ergibt, wenn $N(x)$ im Knoten x_i nicht springt,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -N'\, \varphi_i(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} N\, \varphi_i'(x)\, dx\,, \tag{9.229}$$

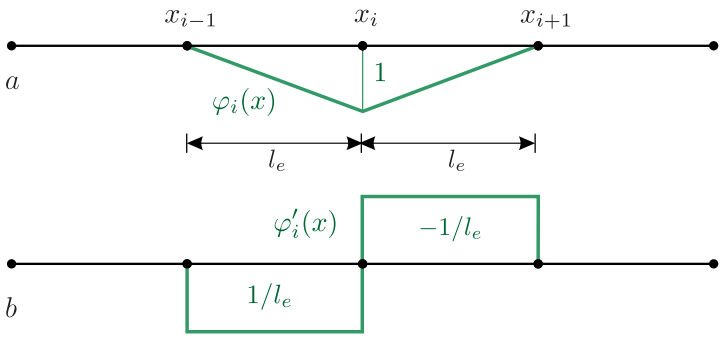


Bild 9.27. Ausschnitt aus der FE-Modellierung eines Stabes. Die Ansatzfunktion und ihre Ableitung agieren wie **a)** ein *low-pass* bzw. **b)** ein *high-pass filter*

also müssen die beiden Filter angewandt auf $p = -N'$ bzw. N zum selben Ergebnis kommen. Wenn p symmetrisch ist, dann kann N nicht symmetrisch sein, denn $sym \times anti = 0$, und wenn p antimetrisch ist – die linke Seite also null ist, dann muss N zum Knoten x_i symmetrisch sein.

Wendet man es auf einen Stab an, $-EAu'' = p$,

$$\int_0^l p\,\varphi_i\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -N'\varphi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} N\varphi_i'(x)\,dx = a(u,\varphi_i)\,, \qquad (9.230)$$

dann erkennt man darin das $\delta W_e = \delta W_i$. Das ***außen = innen*** ist also eine Folge der Symmetrie in dem **Filtergesetz** (9.229). Die Ableitung eines symmetrischen Filters ergibt einen antimetrischer Filter – mit all den Konsequenzen.

In der Grenze, $2 \cdot \Delta x = x_{i+1} - x_{i-1} \to 0$, wird aus (9.230), wegen $\varphi_i'(x_i) = \pm 1/\Delta x$ die Differentialgleichung, das Gleichgewicht im Punkt x_i

$$p(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\Delta x}(N(x_{i+1}) - N(x_{i-1})) = -N'(x_i)\,. \qquad (9.231)$$

Partielle Integration bedeutet, dass man das L_2-Skalarprodukt einer Ableitung ‚dual' schreiben kann, linke und rechte Seite in (9.229). Wenn man etwas numerisch differenziert, dann ist das also eine *duale* Formulierung, ist ***adjoint analysis***, eine Arbeit außen, $\delta W_e = (-N', \varphi_i)$, wendet man nach innen, $\delta W_i = (N, \varphi_i') = a(u, \varphi_i)$. Man setze $\varphi_i = \delta_0$ und $\varphi_i' = \delta_0' = -\delta_1$, s. (9.210).

9.33 Kopplung auf dem Rand

Die Randwerte einer Membran sind die Durchbiegung u und die Normalableitung $\partial u/\partial n = \nabla u \bullet \boldsymbol{n}$, also die Neigung des Segeltuchs am Rand. Der Ingenieur denkt, damit, dass u und ∇u den Rand erreichen und in der richtigen ‚Höhe', je nachdem was vorgegeben ist, u oder $\partial u/\partial n$, ist alles gut. Aber es wartet noch eine Aufgabe auf sie, sie müssen der Integralgleichung (9.236)

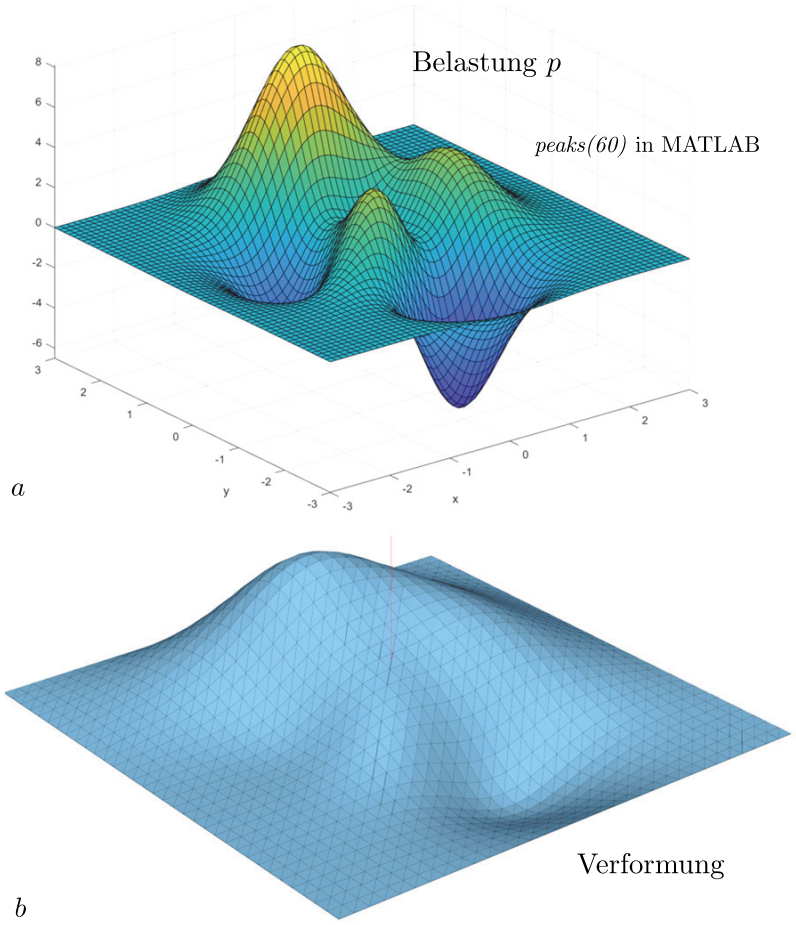


Bild 9.28. Rekonstruktion der Lösung einer Poisson Gleichung, $-\Delta u = p$, gemäß (9.236) aus ihren Randwerten $u = 0$ und $\partial u/\partial n$ (Bestimmung per Integralgleichung) und der Flächenlast p im Innern, (MATLAB™+ BE-LAPLACE)

auf dem Rand genügen, sie müssen miteinander kompatibel sein. Eine solche Forderung stellt sich bei vielen Differentialgleichungen der Physik.

Bei einer Scheibe sind die Randverschiebungen $\boldsymbol{u}$ und der Spannungsvektor $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{Sn}$ gekoppelt und bei einer Kirchhoffplatte die Randverformungen $w, \partial w/\partial n$ und die Randkräfte m_n, v_n (das Einspannmoment und der Kirchhoffschub), wie wir das in Kapitel 6.13 erläutert haben.

FE-Programme ignorieren die Kopplung, weil sie mit finiten Elementen nur in der Grenze $h \to 0$ einzuhalten ist. In der Stabstatik hingegen wird sie eingehalten, wenn die φ_i homogene Lösungen sind (also EA und EI konstant), denn sie ist mit $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ identisch. Die Randelemente machen aus der Kopp-

lungsbedingung eine Integralgleichung, um den fehlenden Randwert, u oder $\partial u/\partial n$, zu berechnen. Nun aber das Nähere zu diesem Phänomen.

Die Poisson Gleichung ist die ‚inhomogene' Laplace-Gleichung, siehe Bild 9.28,

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})\,, \tag{9.232}$$

und zu ihr gehört die Identität

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_\Omega -\Delta u(\boldsymbol{x})\delta u(\boldsymbol{x})d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n}\delta u(\boldsymbol{x})\,ds - a(u,\delta u) = 0 \tag{9.233}$$

mit der Wechselwirkungsenergie

$$a(u,\delta u) = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \bullet \nabla\,\delta u(\boldsymbol{x})d\Omega = \int_\Omega (u_{,1}\,\delta u_{,1} + u_{,2}\,\delta u_{,2}\,)d\Omega\,. \tag{9.234}$$

Die Bedeutung der Poisson Gleichung beruht darauf, dass man mit ihrer Fundamentallösung

$$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi}\ln r = \frac{1}{2\,\pi}\ln\frac{1}{r} \qquad (2\text{-}D) \qquad g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,\pi}\frac{1}{r} \qquad (3\text{-}D) \tag{9.235}$$

jede C^2-Funktionen über einem Gebiet Ω aus den Randwerten u und $\partial u/\partial n$ und den zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,11} + u_{,22} =: -p$ berechnen kann

$$c(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\,u(\boldsymbol{y})]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,p(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{9.236}$$

Die Funktion $c(\boldsymbol{x})$ heißt die *charakteristische Funktion* des Gebiets Ω, siehe (5.289). Sie hat den Wert 1 in Ω, den Wert $\Delta\varphi(\boldsymbol{x})/(2\,\pi)$ auf dem Rand, $\Delta\varphi$ ist der Eckenwinkel des Punktes, und null wenn $\boldsymbol{x}$ außerhalb liegt[9].

Bewegt man sich auf dem Rand, dann formuliert (9.236) eine Kopplungsbedingung zwischen den Randwerten $u(\boldsymbol{x})$ und $\partial u(\boldsymbol{x})/\partial n$, die man, wenn eine der beiden Funktionen unbekannt ist, benutzen kann, um die andere Funktion in ihrem Verlauf zu bestimmen. Aus (9.236) wird so eine **Integralgleichung**. Die Randelemente beschäftigen die Computer damit, diese Gleichung zu lösen.

Sie ist praktisch die Erweiterung der partiellen Integration

$$w(x) = w(0) + \int_0^x w'(y)\,dy = \int_\Gamma \ldots + \int_\Omega \ldots\,, \tag{9.237}$$

[9] Wird Ω um 1 m gesenkt, dann leistet eine Kraft $P = 1$ innerhalb von Ω die Arbeit $\delta W_e = 1\cdot 1 = 1$, auf dem Rand ist $\delta W_e = \Delta\,\varphi/(2\,\pi)\cdot 1$ und außerhalb null. In der Mohrschen Arbeitsgleichung, $1\cdot\delta$, ist das $c(x) = 1$; die 1 ist die Kraft.

auf höhere Dimensionen und sie ist, wie wir meinen, der eigentliche **Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung**. *Eine Fläche, eine Funktion, ist durch ihre ‚Spur' auf dem Rand, u und $\partial u/\partial n$, und ihre ‚Krümmung' Δu eindeutig bestimmt.* Aus den Randwerten und der Belastung $-\Delta u = p$ kann man u rekonstruieren. Das Drehwinkelverfahren basiert auf dieser Idee. Die Randelemente sind gar nicht so neu, die Ingenieure haben immer schon gewusst, wie es geht.

Dass man mit einem Lineal eine Gerade aus ihren Randwerten rekonstruieren kann, begreift jedes Kind, aber dem $\ln r$ gelingt das mit jeder C^2-Funktion, egal wie komplex das Gebiet ist, wie oft der Rand ein- und ausschwingt! Nichts demonstriert wohl besser, wie mächtig die Analysis ist.

Die Lösungen $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$ nennt man harmonische Funktionen, weil der Wert in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ der Mittelwert aus den Nachbarn im *Norden, Osten, Süden und Westen* ist; jede Gerade, $-u'' = 0$, ist eine harmonische Funktion. Bei harmonischen Funktionen entfällt das Gebietsintegral in (9.236) und dann sind es nur die Randwerte u und $\partial u/\partial n$ aus denen der $\ln r$ die Fläche u rekonstruiert und die Fläche ist C^∞ (unter milden Bedingungen an u und Γ). Jeder Wert $u(\boldsymbol{x})$ sitzt und passt. Jeder Punkt $\boldsymbol{x}$ weiß um das Ganze.

Man zeichne eine geschlossene Kurve Γ ‚in den Sand' definiere auf Γ einen in sich stetigen Verlauf u, dann kann man sicher sein, dass es eine harmonische C^∞-Funktion $u(\boldsymbol{x})$ gibt, die Ω überspannt und in den Randpunkten $\boldsymbol{x}$ die vorgegebene Höhe $u(\boldsymbol{x})$ hat.

Oder man stelle sich eine Hohlkugel Γ vor, auf der elektrische Ladungen verteilt sind. Die Natur stellt das elektrische Potential u auf der Oberfläche der Kugel und dessen Gradienten $\partial u/\partial n$ automatisch so ein, dass sie in allen Punkten $\boldsymbol{x}$ der Oberfläche der Koppelbedingung (9.236) genügen.

Die Natur hat immer schon über Bande gespielt – partiell integriert

Die Funktionen u und $\partial u/\partial n$ heißen die Cauchy Daten und was man ahnt – ihre Kopplung auf der Oberfläche der Kugel – wird in (9.236) manifest. Ebenso kann man nicht an einer Feder mit einer Kraft f ziehen und obendrein noch die Verlängerung $u = f/k$ frei wählen wollen; das beißt sich wie uns (9.236) beweist.

Beim Balken ist das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ der Gleichung (9.236) analog. Die u_i und f_i sind die Randwerte an den Enden des Balkens und wenn die Querbelastung $p = 0$ null ist, was dem ‚harmonisch' entspricht, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$, gibt es keine Auflagerdrücke aus einer Streckenlast.

Zu jeder Verformung $\boldsymbol{u}$ der Enden gibt es passende Kräfte $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ ist der Ausdruck dieser Kopplung, die Matrix $\boldsymbol{K}$ ist der *Calderón-Operator* des Ingenieurs. So heißt in der Mathematik der Operator, der die Randdaten, *Wege und Kräfte*, einer Membran, einer Scheibe, einer Platte etc. aneinander koppelt, so wie in (9.236), wenn man $\boldsymbol{x}$ längs Γ laufen lässt [151] p. 14.

Noch ein Wort zur ‚Dimension'. Der Rand eines Stabes besteht technisch aus zwei getrennten Punkten x_a, x_b, aber mathematisch gehören sie zusam-

men, bilden sie den Rand $\Gamma = \{x_a, x_b\}$. Deswegen zählen die zwei Gleichungen $\boldsymbol{K}_{(2\times 2)}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ beim Stab als *eine* Integralgleichung und beim Balken formulieren die vier Gleichungen $\boldsymbol{K}_{(4\times 4)}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ *zwei* Integralgleichungen, eine für $w(\Gamma) = \{w(x_a), w(x_b)\}$ bzw. eine für $w'(\Gamma) = \{w'(x_a), w'(x_b)\}$; zusammen ist das der Vektor $\boldsymbol{u}$.

Der Ingenieur denkt natürlich nicht an Integralgleichungen. Beim Drehwinkelverfahren (= FEM) geht es um die Bestimmung der homogenen Lösung. Die *shape functions* φ_i sind aber homogene Lösungen und die BEM operiert mit den exakten Einflussfunktionen. Das Ergebnis ist daher in beiden Fällen exakt, also müssen beide Verfahren auf dieselbe Matrix $\boldsymbol{K}$ kommen.

Wenn eine Kraft P an den Enden eines Stabes zieht, $f_1 = -P, f_2 = P$ und $-EA\,u'' = 0$ ist, dann reduziert sich der Satz von Betti auf

$$\mathscr{B}(\hat{u}, u) = \int_0^l -EA\hat{u}''\,u\,dx + [\hat{N}\,u]_0^l - [\hat{u}\,P]_0^l = 0 \quad (N = P) \tag{9.238}$$

und wählt man für die Funktion $\hat{u}$ die beiden Geraden $G_a = (l - x)/l, N = -EA/l$ und $G_b = x/l, N = EA/l = k$, die homogene Lösungen sind, $G'' = 0$, so kommt man auf die 2×2-Matrix des Stabes $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$

$$\mathscr{B}(G_a, u) = \quad k \cdot u(0) - k \cdot u(l) - f_1 = 0 \tag{9.239a}$$

$$\mathscr{B}(G_b, u) = -k \cdot u(0) + k \cdot u(l) - f_2 = 0\,. \tag{9.239b}$$

Mathematisch ist das, wie die Gleichung (9.236) – die ja auch auf dem Satz von Betti beruht – eine Integralgleichung für $\{u_1, u_2\}$ auf dem Rand $\Gamma = \{x_a, x_b\}$. Bei der Membran läuft der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ einmal im Kreis herum, kontrolliert die Integralgleichung in jedem Punkt, während er beim Stab von dem einen Ende x_a des Randes $\Gamma = \{x_a, x_b\}$ zum anderen Ende x_b springt.

Man erinnere sich an das in Kapitel 1.19 auf Seite 70 gesagte: Die Knoten eines Rahmens sind die Ränder des Rahmens. Dort wird die Integralgleichung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst. Sie gleicht der Integralgleichung der Membran aufs Wort.

Bei der Membran sind es die Funktionen $u(\boldsymbol{x})$ und $\partial u(\boldsymbol{x})/\partial n$, die sich untereinander abstimmen müssen und bei einem Rahmen sind es die u_i und f_i in den Knoten, die passen müssen. Die Arena ist der Rand $\Gamma = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ mit den Knoten $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)$ des Rahmens, und wie für Randmethoden üblich, liegt die Kontrolle bei den Randwerten, den Knotenwerten. Wenn man weiß, wie sich die Knoten verformen, weiß man wie sich der Rahmen als ganzes verformt, weil die lokalen Lösungen (‚die eingehängten Momente') ja am *clamped beam* genommen werden, $w = w_{FEM} + w_{lok}$ und die w_{lok} sind tabelliert, oder sie werden in *subroutines* mit den lokalen EF berechnet, s. Kapitel 3.29.

Unabhängig von diesen Bezügen in der Sache ist die Analogie zwischen einem linearen Gleichungssystem und einer Integralgleichung evident

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \int_0^l K(y, x)\,u(y)\,dy = f(x)\,. \tag{9.240}$$

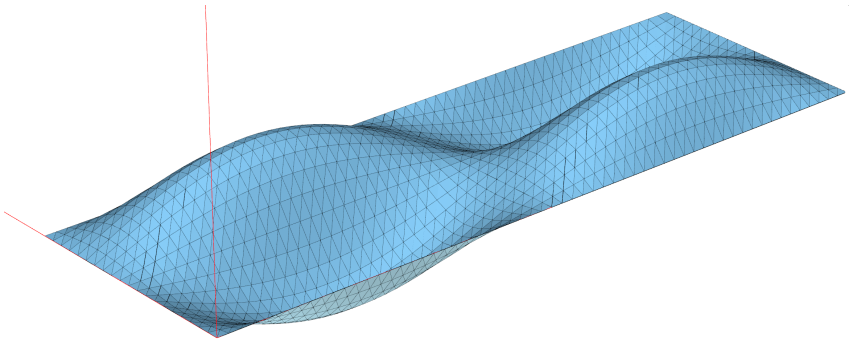


Bild 9.29. Membran 6×2 m, $w(x, y)$. Die Last $p(x, y) = \sin(\pi\, x/3) \cdot \sin(\pi\, y)$ wurde durch ein Raster (0.10×0.10) von Einzelkräften ersetzt (BE-LAPLACE)

Was die Herleitung der Steifigkeitsmatrix aus dem Satz von Betti möglich macht ist die Tatsache, dass man die Wechselwirkungsenergie äquivalent durch äußere Arbeit $W_{1,2}$ (oder $W_{2,1}$ je nach Bezeichnung) ausdrücken kann

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = (\cancel{L\,\varphi_i} = 0, \varphi_j) + [\text{Randarbeiten von } \varphi_i \text{ und } \varphi_j]\,. \quad (9.241)$$

Die Übertragung auf 2-D und 3-D Probleme gelingt leider nicht, weil die *shape functions* in der Regel keine homogenen Lösungen der Differentialgleichung sind, $L\,\varphi_i \neq 0$. Man bekommt das Gebietsintegral in

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega L\varphi_i \cdot \varphi_j\, d\Omega + \int_\Gamma \text{Randarbeiten}\, ds \quad (9.242)$$

nicht weg. Die Ausnahme ist das *CST*-Element, aber die Arbeiten längs den Elementkanten im Innern sind keine Integrale über den Rand der Scheibe; die k_{ij} lassen sich nicht auf den Rand *shiften*.

Es ist klar: Gemäß (9.236) hat bei inhomogenen Lösungen, $p \neq 0$, auch das p im Feld Einfluss auf die Koppelbedingung auf dem Rand und so kommt der Vektor $\boldsymbol{d}$ in die Stabstatik $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$.

9.33.1 Flächenlasten

Bei den Randelementen wird die Gleichung (9.236) in den Knoten $\boldsymbol{x}_i$ des Randes aufgestellt. Hinderlich ist, dass man zur Auswertung des Gebietsintegrals über die Membran Ω integrieren muss. Wenn $p = -\Delta u$ aber konstant oder stückweise konstant ist, dann kann man das Gebietsintegral in ein Randintegral umwandeln, siehe [117]. Variable Belastung p ersetzt man durch viele kleine Blocklasten, was die Biegefläche in Bild 9.29 ergab. Die Randelemente ähneln sich so vom *handling* her den finiten Elementen an. Wie bei den finiten Elementen tauchen jetzt, wenn man es so sehen will, ‚Knotenkräfte' $f_i = p(x_i, y_i) \cdot (\Delta x \cdot \Delta y)$ auf, nur dass es echte Kräfte sind, die das Bild 9.30

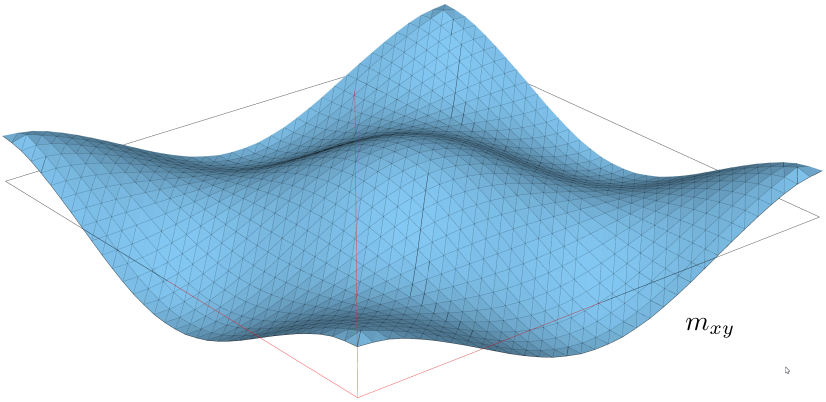


Bild 9.30. Platte 6 × 6 m, gelenkig gelagert, Momente m_{xy}. Die Last $p(x, y) = \sin(\pi\, x/3) \cdot \sin(\pi\, y/3) \cdot 5$ wurde durch ein Raster (0.18 × 0.18) von Einzelkräften (intern kleine Blocklasten) ersetzt (BE-PLATTE)

und 9.31 erzeugen; siehe auch Seite 608. Die Größe des Gleichungssystems ändert sich durch die Umwandlung $p \to f_i$ natürlich nicht, die Randelemente bleiben Randelemente[10].

Wenn sich Randelemente einsetzen lassen, dann liefern sie in der Regel genauere Ergebnisse als die finiten Elemente, siehe Bild 9.32, weil sie mit der **Grundlösung** (Fundamentallösung) der Differentialgleichung arbeiten. Das ist aber auch ihr *handicap*, weil die Grundlösung nicht immer bekannt ist und was die universelle Einsetzbarkeit betrifft, sind die finiten Elemente mit ihrem Baukastenprinzip natürlich unschlagbar, machen sie es dem Programmierer einfach. Mathematisch wird aber auch eine FE-Lösung letztendlich danach beurteilt, wie gut sie – im linearen Fall – die Einflussfunktionen annähert.

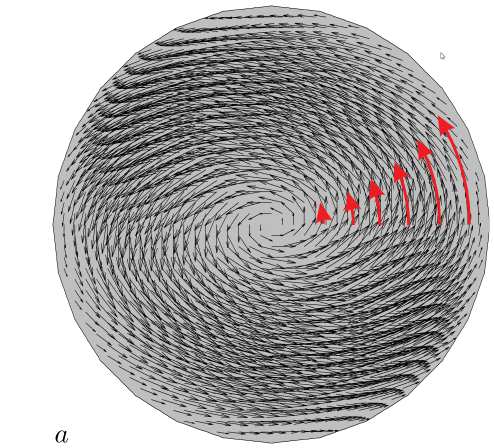
9.34 Potentiale und Potentialtheorie

Potentialtheorie ist die Lehre von den Einflussfunktionen, davon wie Quellen Felder erzeugen. Nicht von ungefähr ist die partielle Integration, wie im Gaußschen Integralsatz,

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, d\Omega = \int_\Omega (u_{x,x} + u_{y,y})\, d\Omega = \int_\Gamma (u_x n_x + u_y n_y)\, ds = \int_\Gamma \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n}\, ds \tag{9.243}$$

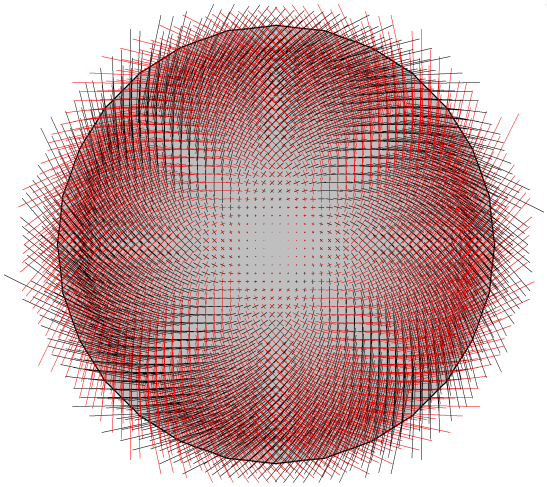
die Grundoperation der Potentialtheorie.

[10] In den 1980er hat Mercedes-Benz Kurbelwellen mit Randelementen berechnet. Man lernte jedoch schnell, dass es besser sei die Oberfläche so umzustricken, dass der Konstrukteur glaubte ein FE-Programm vor sich zu haben, [213].



a

$$p_x = -y \cdot r$$
$$p_y = x \cdot r$$



b

Bild 9.31. Eingespannte Kreisscheibe unter Drehbelastung, **a)** Verformungen und **b)** Hauptspannungen (BE-SCHEIBE)

Potentialtheorie bedeutet, vereinfacht gesagt, dass man ‚von den Kräften, von den Quellen her' denkt, wie der Physiker, für den das Schwerefeld der Erde,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \frac{G}{r}\, m(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\,, \tag{9.244}$$

ein Potential darstellt, das durch die Überlagerung der Massenverteilung $m(\boldsymbol{y})$ der Erde mit der Einflussfunktion G/r (hier ist G die Gravitationskonstante) entsteht. Es genügt der Gleichung $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = 4\,\pi\,G\,m(\boldsymbol{x})$.

Ein großer Teil der klassischen Physik ist mathematisch Potentialtheorie, siehe Bild 9.33. Es reicht zu wissen, wie das Feld in der Nähe einer Punktla-

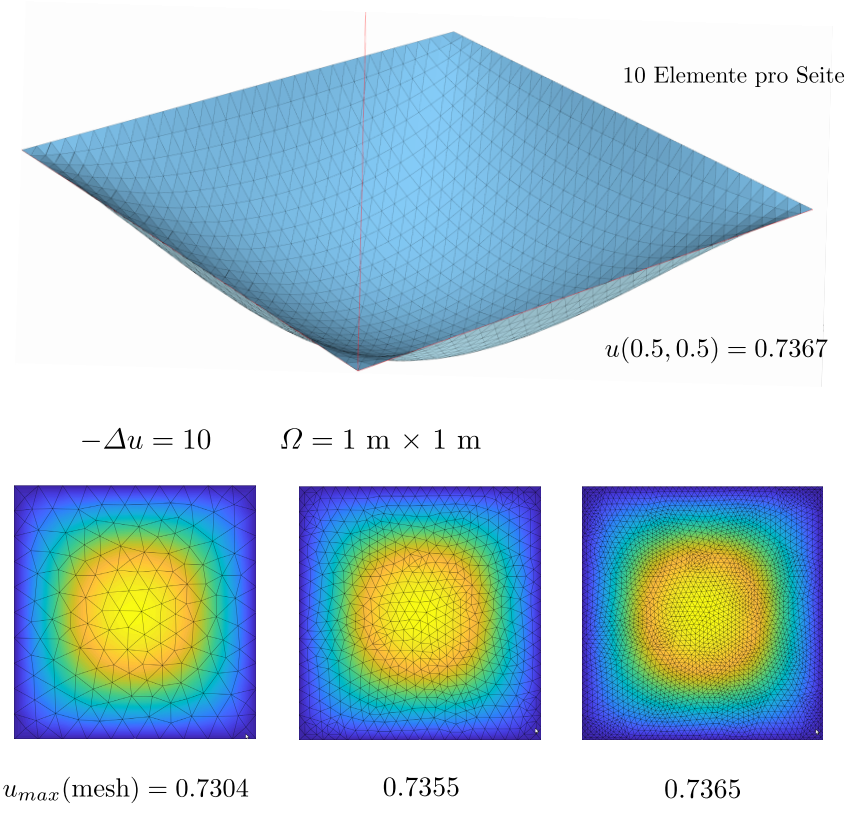


Bild 9.32. BEM und FEM. Eine vierte Verfeinerung des FE-Netz mit 10657 Knoten ergab dann die Übereinstimmung mit dem BE-Wert 0.7367, Kapitel 10.9. (BE-LAPLACE und MATLAB™ PDE Modeler)

dung aussieht, weil die Lösungen von linearen Differentialgleichungen superponiert werden können – nichts anderes macht ja eine Einflussfunktion.

Wenn man von den Quellen her denkt, dann besteht – formal gesehen – kein Unterschied zwischen finiten Elementen und Randelementen, denn beide entwickeln ja die jeweilige Lösung aus derselben Einflussfunktion, nur in den **Belegungen**, wie man in der Mathematik sagt, den Quellen, unterscheiden sie sich. Weil auch FE-Lösungen Potentiale sind, konnten wir ja in Kapitel 6.13 zeigen, wie die Singularitäten auf dem Rand in die FE-Lösung hineinpropagieren.

Bei den finiten Elementen sind die Belegungen die Kräfte p_h, wie in Bild 3.23. Bei den Randelementen stimmen im Innern die Lasten überein, $p = p_h$, aber auf dem Rand gibt es Differenzen. Der Fehler bei den Randelementen steckt also in den Randdaten, während er bei den finiten Elementen ‚flächendeckend' ist – in der Mitte der Elemente sind die Schnittgrößen ‚exakt', aber

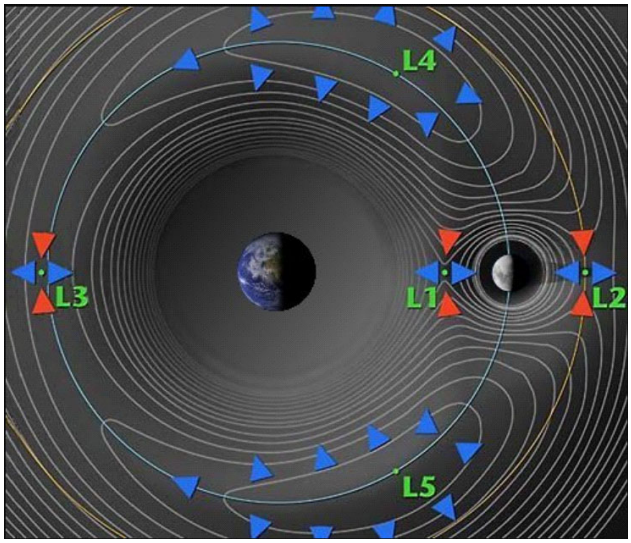


Bild 9.33. (*Not to scale*) Isolinien des Gravitationspotentials des Systems Erde-Mond mit den fünf Lagrange-Punkten [59], [330]. $L_{1,2,3}$ *are unstable saddle points*. In L_4 und L_5 (*hilltops*) sammelt sich der Staub, siehe Seite 380, denn die Coriolis Kraft hält die Staubpartikel auf festen Bahnen um $L_{4,5}$, siehe NASA und [329]. Im Punkt L_2 des Systems Sonne-Erde steht das James Webb Space Telescope.

.

an den Elementgrenzen springen sie. Man hüte sich jetzt aber davor, daraus vorschnell Schlüsse über die Genauigkeit der Lösungen zu ziehen.

Wir wollen noch erwähnen, dass die beiden Randintegrale in der Einflussfunktion (9.236)

$$P_I(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n}\,ds_{\boldsymbol{y}} \qquad P_{II}(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\,u(\boldsymbol{y})\,ds_{\boldsymbol{y}} \tag{9.245}$$

mit den Kernen

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2\,\pi}\ln r \qquad \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n} = \nabla \ln r \bullet \boldsymbol{n} \tag{9.246}$$

Potential erster Art bzw. ***Potential zweiter Art*** heißen. Es sind homogene Lösungen (außerhalb von Γ) der Laplace-Gleichung.

Der erste Kern beschreibt die Wirkung einer Einzelkraft $P = 1$ und der zweite Kern die Wirkung eines Versatz in Richtung der Schnittnormalen $\boldsymbol{n}$. Weil aber auf dem Rand Γ nun gleich eine ganze Schar von Kräften $\partial u/\partial n$ bzw. Versetzungen u, ähnlich einer ‚Stolperkante' wirken, wird integriert[11]. Die Normalableitung von u auf Γ ist ja die Aufhängekraft der Membran.

[11] Auch Versetzungen längs einer Kante oder Fläche (3-D) sind Belegungen.

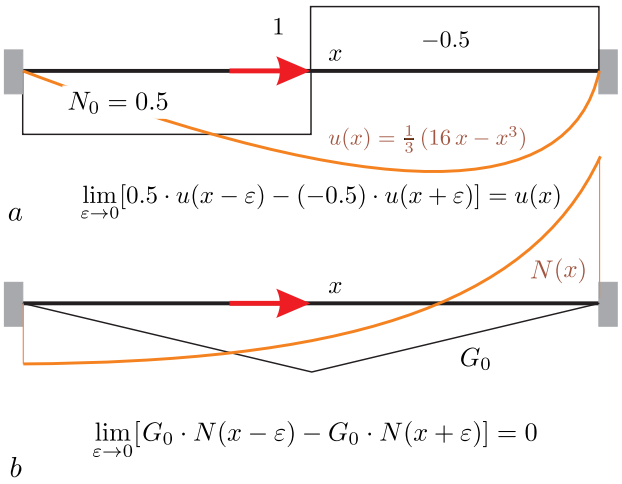


Bild 9.34. a) Wie man den Sprung in P_{II} am Stab erklären kann und **b)** warum P_I stetig ist; N ist die in x stetige Normalkraft von u (eine zufällig gewählte F.).

Das Potential P_I ist beim Durchgang durch Γ stetig, aber P_{II} springt um $u(\boldsymbol{x})$, siehe Bild 9.34. Das **Volumenpotential**, das Gebietsintegral, ist beim Übergang stetig. Es entsteht so das Bild eines ebenen Kontinuums, das längs einer geschlossenen Kurve Γ mit Kräften und Versetzungen belegt ist und in dem Gebiet Ω, das Γ umfasst, mit Kräften p, siehe Bild 9.35.

9.35 Lagrange und Hamilton

Die Dynamik der Tragwerke würde das Buch sprengen, aber nachdem wir doch alle Energie- und Variationsprinzipe mittels partieller Integration aus den Euler-Gleichungen entwickelt haben, wollen wir hier kurz skizzieren, dass das auch bei dem Prinzip von Hamilton möglich ist.

Die totale Energie einer Feder mit angehängter, schwingender Masse

$$H = K + P = \frac{1}{2} m\,\dot{u}^2 + \frac{1}{2} k\,u^2 \tag{9.247}$$

muss konstant sein

$$\frac{dH}{dt} = m\,\dot{u}\,\ddot{u} + k\,u\,\dot{u} = (m\,\ddot{u} + k\,u)\,\dot{u} = 0\,, \tag{9.248}$$

was die Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{u} + k\,u = 0 \tag{9.249}$$

für eine frei schwingende Feder ergibt.

Auf dasselbe Ergebnis kommt man über die Lagrange-Funktion $L = K - P$ und die Forderung

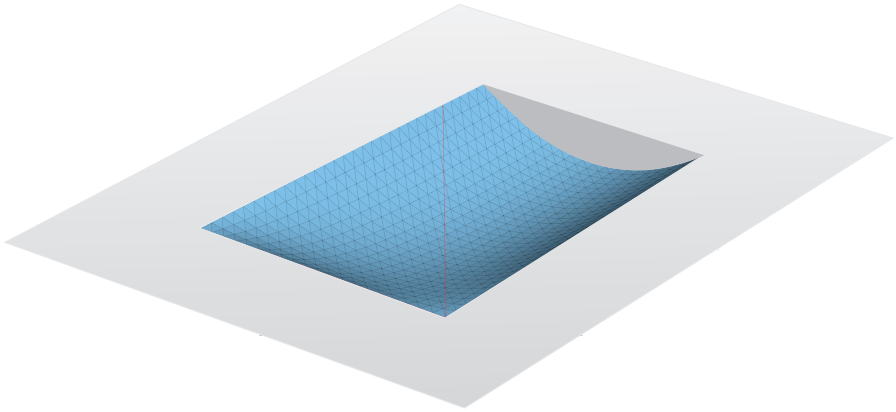


Bild 9.35. Die Durchbiegung der Membran am freien Rand zeigt sich als Versatz bei der Einbettung in das Kontinuum (BE-LAPLACE)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0\,. \tag{9.250}$$

Die erste Greensche Identität der Bewegungsgleichung lautet

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^t (m\,\ddot{u} + k\,u)\,\delta u\,dt - [m\,\dot{u}\,\delta u]_0^t + \int_0^t (m\,\dot{u}\,\delta\dot{u} - k\,u\,\delta u)\,dt = 0\,. \tag{9.251}$$

Das zweite Integral ist die erste Variation δW des Wirkungsintegrals

$$W(u) = \int_0^t L\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t (m\,\dot{u}^2 - k\,u)\,dt\,. \tag{9.252}$$

Die Variation ist null, wenn u der Differentialgleichung (9.249) genügt und δu am Anfang und am Ende der Zeitspanne null ist, $\delta u(0) = \delta u(t) = 0$. Und dies ist das ***Hamiltonsche Prinzip***: Die Bewegung zwischen den beiden Marken 0 und t läuft so ab, dass L einen Extremwert annimmt. Wenn u der Differentialgleichung (9.249) genügt, dann ist das die beste Route.

9.36 Variationsrechnung

Nur kurz, um vollständig zu sein: In der Variationsrechnung, z.B. [283] S. 724, geht es um die Minimierung von Funktionalen wie

$$\Pi(u) = \int_0^l F(u,u')\,dx - \int_0^l p\,u\,dx \qquad \text{mit} \qquad u(0) = a,\ u(l) = b\,. \tag{9.253}$$

Wenn $F(u,u')$ die ‚Taylorentwicklung‘

$$F(u+\delta u, u'+\delta u') = F(u,u') + \frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\delta u' + \dots \tag{9.254}$$

besitzt, dann muss notwendig die erste Variation δF im Extrempunkt u null sein[12], und partielle Integration der ersten Variation

$$\delta F = \int_0^l (\frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\delta u')\,dx = \int_0^l (\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'})\,\delta u\,dx + \text{Randterme} \tag{9.255}$$

führt auf die Euler-Gleichung als notwendige Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = p\,. \tag{9.256}$$

So kommt die berühmte Gleichung (9.250) in die Physik. In diesem Fall ist $F = m\,\dot{u}^2 - k\,u^2$ und wird L genannt.

Man kann all das leicht an dem Beispiel

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l (EA(u')^2 + c\,u^2)\,dx - \int_0^l p\,u\,dx \tag{9.257}$$

des (in Längsrichtung) elastisch gebetteten Stabes nachvollziehen, denn die erste Greensche Identität beschreibt genau diese Logik

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l (-EAu'' + c\,u)\,\delta u\,dx + [N\,\delta u]_0^l \\ - \int_0^l (EAu'\,\delta u' + c\,u\,\delta u)\,dx = 0\,,$$

also

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l \text{Euler-Glg.}\cdot\,\delta u + [\text{Randterme}] - a(u,\delta u) = 0\,. \tag{9.258}$$

Nur dass wir in diesem Buch mit der Euler-Gleichung starten und daraus dann mittels partieller Integration die Randterme und $a(u,\delta u)$ herleiten.

In der linearen Statik gehen die Pünktchen … in (9.254) im übrigen nur bis zum quadratischen Term, der, integriert, mit $a(\delta u,\delta u) \geq 0$ identisch ist

$$\Pi(u+\delta u) = \Pi(u) + \mathscr{G}(u,\delta u) + a(\delta u,\delta u)\,. \tag{9.259}$$

In der Gleichgewichtslage u ist $\mathscr{G}(u,\delta u) = 0$ und daher ist $\Pi(u)$ das Minimum.

[12] sonst nimmt $\Pi(u)$ in eine der beiden Richtungen $\pm\delta u$ ab

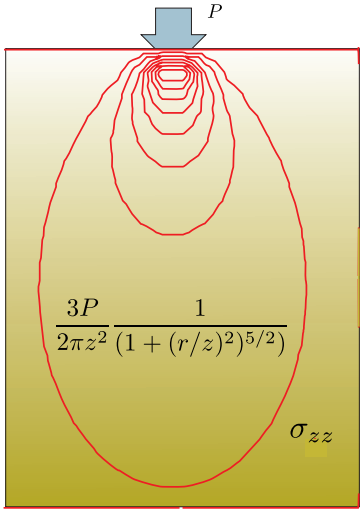


Bild 9.36. Halbraum mit konzentrierter Last, Spannung σ_{zz}, *Boussinesq-Lösung*

9.37 Einzelkraft in einer Scheibe

Das folgende ist eine Ergänzung zu dem Text in Kapitel 6.3. Greift eine Einzelkraft in einer Scheibe an, siehe Bild 9.36, dann kann man sich das wie folgt zurechtlegen. Man lässt die Einzelkraft in einer unendlichen Scheibe wirken (LF 1) und addiert zu diesem Lastfall einen zweiten Lastfall (LF 2) derart, dass die Randbedingungen an der endlichen Scheibe von den beiden Lösungen zusammen eingehalten werden. Die Spannungen aus dem LF 1 werden im Aufpunkt singulär, aber die aus dem LF 2 sind endlich, sie sind beschränkt, und daher tendieren auch die Integrale der Spannungen aus dem LF 2 über sich immer enger zusammenschnürende Kreise um den Aufpunkt gegen null, weil der Umfang der Kreise ja schrumpft. Wir müssen also nur das Integral der singulären Spannungen betrachten.

Das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe kennt man genau. Wenn in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ eine Kraft $\boldsymbol{e}_i$ angreift, dann hat der Spannungsvektor in einem Punkt $\boldsymbol{y}$ mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2\}^T$ die Komponenten, [118] Glg. (4.7),

$$T_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\,\pi\,(1-\nu)\,r}\,[\frac{\partial r}{\partial \nu}((1-2\,\nu)\,\delta_{ij} + 2\,r_{,i}\,r_{,j}\,) \\ -\,(1-2\,\nu)(r_{,i}\,\nu_j(\boldsymbol{y}) - r_{,j}\,\nu_i(\boldsymbol{y}))] \tag{9.260}$$

mit

$$r_{,i} := \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i}\,. \tag{9.261}$$

Liegt der Punkt $\boldsymbol{y}$ auf einem Kreis mit Radius r um $\boldsymbol{x}$, dann sind die ν_i und die $r_{,i}\,(= r_{,y_i}\,)$ gleich

$$\nu_1 = r_{,1} = \cos\varphi \qquad \nu_2 = r_{,2} = \sin\varphi\,, \tag{9.262}$$

und somit gilt auf dem Kreis

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = \nabla r \bullet \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,. \tag{9.263}$$

Da die Kraft in x-Richtung wirkt, setzen wir in (9.260) $i = 1$, und so hat der Spannungsvektor auf dem Kreis die beiden Komponenten

$$t_x = T_{11} = -\frac{1}{4\,(1-\nu)\,\pi\,r} \cdot [(1-2\,\nu) + 2\cos^2\varphi] \tag{9.264a}$$

$$t_y = T_{12} = -\frac{1}{4\,(1-\nu)\,\pi\,r} \cdot [2\cos\varphi\sin\varphi] \tag{9.264b}$$

und die Integration ergibt

$$\int_0^{2\,\pi} t_x\,d\varphi = -\frac{1}{r} \qquad \int_0^{2\,\pi} t_y\,d\varphi = 0\,. \tag{9.265}$$

Bemerkung 9.2. Den Normalenvektor (allgemeiner die Schnittrichtung) im Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ nennen wir $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2\}^T$ im Integrationspunkt $\boldsymbol{y}$, [118]. Die Momenten-EF G_2 einer Platte für m_{xx} und m_{yy} differieren in der Schnittrichtung $\boldsymbol{n} = \{1, 0\}^T$ und $\boldsymbol{n} = \{0, 1\}^T$.

9.38 Einzelkräfte auf der rechten Seite

Wenn ein gelenkig gelagerter Träger mit einer Einzelkraft belastet wird, dann steht auf der rechten Seite eine Einzelkraft

$$EI\,w^{IV} = \delta_0(y - x)\,, \tag{9.266}$$

aber man kann die Lösung w nicht dadurch verifizieren, dass man w viermal differenziert. Der Praktiker schaut natürlich auf das Querkraftdiagramm, aber theoretisch kann man w auch an Hand seiner **Wirkungen** – entweder im Sinne von Mohr oder von Betti – kontrollieren.

Wechselt man zur schwachen Formulierung, überlagert also (9.266) mit einer Testfunktion δw, und integriert partiell, dann wird aus δ_0 ein Funktional

$$a(w, \delta w) = \int_0^l \delta_0(y - x)\,\delta w(y)\,dy = \delta w(x) \tag{9.267}$$

und dann ist man bei **Mohr**

$$a(w, \delta w) = \boxed{\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dy = \delta w(x)} = \int_0^l \delta_0(y - x)\,\delta w(y)\,dy\,. \tag{9.268}$$

Man überprüft also nicht die Differentialgleichung (9.266), sondern prüft, ob Mohr gilt, ob die Überlagerung der Momente $\delta w(x)$ ergibt.

Der Zugang über **Betti** geschieht wie in (2.137), denn die Biegelinie $w = G_0$ ist ja auch die Einflussfunktion für die Durchbiegung im Aufpunkt x und daher muss bei der Überlagerung von G_0 mit der rechten Seite $EI\,\delta w^{IV}$ einer Testfunktion δw gerade der Punktwert $\delta w(x)$ herauskommen.

Sinngemäß gelten diese Bemerkungen auch für Einzelmomente δ_1 auf der rechten Seite. Dann ist $a(w, \delta w) = \delta w'(x)$.

9.39 Bodenplatten und Randelemente

Die Sohlfuge wird in kleine Elemente unterteilt und der elementweise konstante Druck wird beim **Steifezifferverfahren** so eingestellt, dass der Halbraum (*Boussinesq-Lösung*) [122]

$$u_3(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left[\frac{(x_3 - y_3)^2}{r^3} + 2\,\frac{1-\nu}{r}\right] P \tag{9.269}$$

und die Bodenplatte in den Mittelpunkten $\boldsymbol{x}_i$ der Elemente die gleiche Durchbiegung aufweisen, siehe Bild 1.34. Beim **Bettungszifferverfahren** kommt der Druck aus dem $c \cdot w$.

Ohne Flächenelemente geht es, wenn man mit der Grundlösung

$$g_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{a^2}{K} T_{1,0} \qquad a = \sqrt[4]{K/c} \tag{9.270}$$

der Gleichung $K\Delta\Delta w + cw$ arbeitet. Allerdings ist der mathematische Aufwand wegen der *Fourier-Bessel Integrale* $T_{i,0}$ beträchtlich. Für Details verweisen wir auf [153].

9.40 Antimetrie in den vertikalen Einflussfunktionen

Auf Seite 202 haben wir gesehen, dass bei Strukturen mit zwei horizontalen Lagern, die Einflussfunktionen für die horizontalen Lagerkräfte unter vertikaler Last antimetrisch sind, also entgegengesetzt gleich. Das beruht auf dem Satz von Betti.

Das Kräftepaar F_A in Bild 9.37 *a* erzeugt die Einflussfunktion für die Lagerkraft A und das Kräftepaar F_B die Einflussfunktion für die Lagerkraft B. Die vertikalen Lagerkräfte wurden nicht angetragen, weil sie keine Rolle spielen.

Nach dem Satz von Betti ist die Arbeit der Kräfte des Systems I (oben) auf den Wegen des Systems II (unten) genauso groß, wie die Arbeit der Kräfte des Systems II auf den Wegen des Systems I

$$W_{1,2} = -F_A\, u_B = -F_B\, u_A = W_{2,1}\,. \tag{9.271}$$

Wegen $u_A = u_B = 1.0$ sind die Kräfte also betragsmäßig gleich, nur das eine Paar drückt nach oben und das andere nach unten.

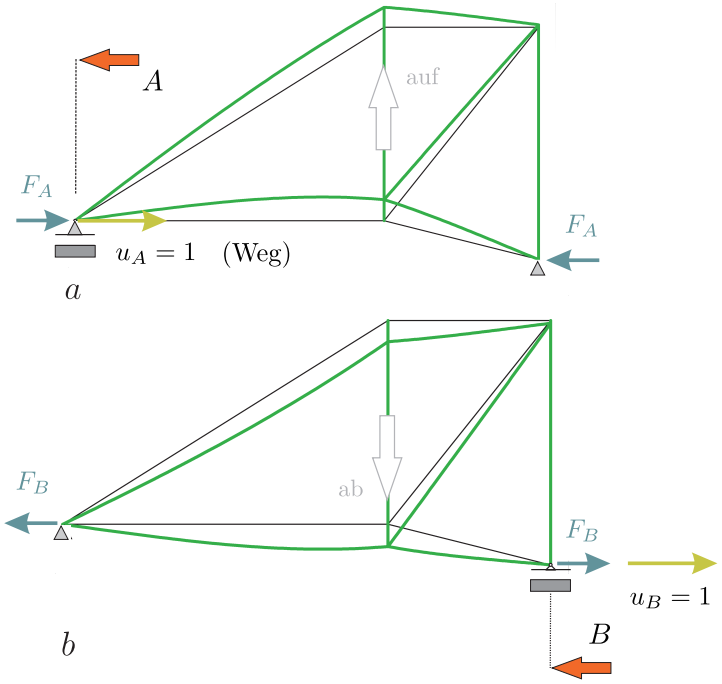


Bild 9.37. Die Einflussfunktionen für die horizontalen Lagerkräfte A und B bei vertikaler Belastung sind antimetrisch, das folgt aus dem Satz von Betti

Bei einer horizontalen Wanderlast $P = 1$ gilt $A + B + 1 = 0$, und daher können die ‚horizontalen' Einflussfunktionen nicht antimetrisch sein.

9.41 Multipole

Das Bild 9.38 und der folgende Text ist eine Ergänzung zu Seite 189. Die Taylorreihe für $w(x)$

$$w(x) = w(0) + w'(0)\,x + \frac{1}{2}\,w''(0)\,x^2 + \dots \tag{9.272}$$

führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) = &\int_0^l G_0(y,0)\,p(y)\,dy + \int_0^l G_1(y,0)\,p(y)\,dy \cdot x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^l G_2(y,0)\,p(y)\,dy \cdot x^2 + \dots \end{aligned} \tag{9.273}$$

wenn wir mit G_1 und G_2 die Einflussfunktionen für w' bzw. w'' bezeichnen.

Es ist aber ebenso gut möglich, den Kern $G_0(y,x)$ in eine Taylorreihe um den Schwerpunkt y_s der Linienlast zu entwickeln, was dann auf

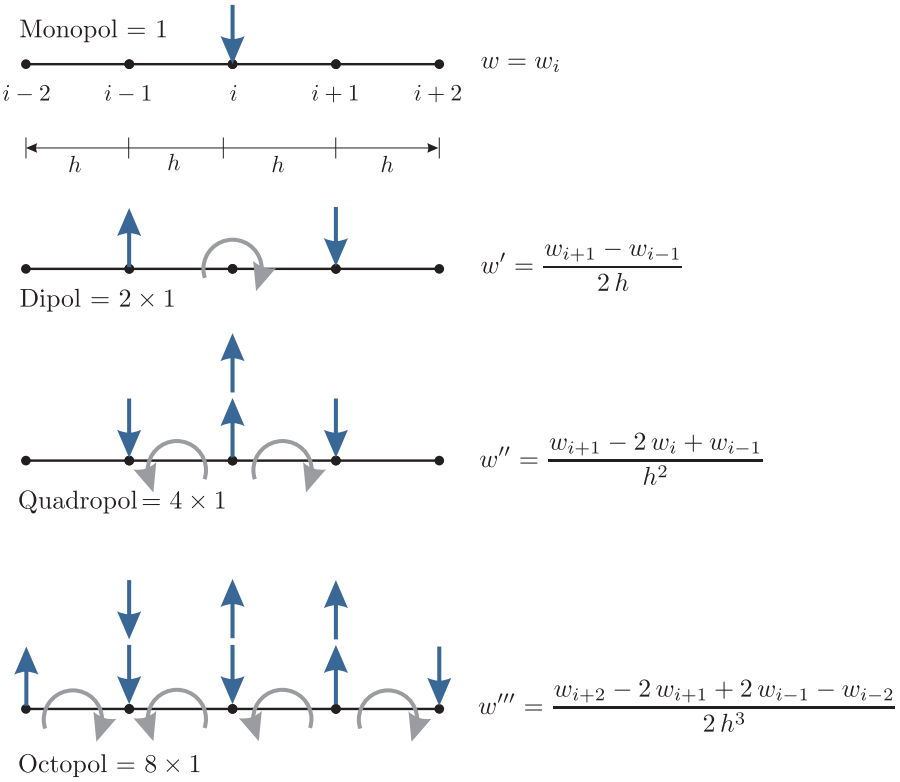


Bild 9.38. Ergänzung zu Seite 189, Monopol – Dipol – Quadropol – Octopol und finite Differenzen

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \\ &= G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,dy + \frac{d}{dy}\,G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,(y-y_s)\,dy \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,(y-y_s)^2\,dy + \ldots \end{aligned} \tag{9.274}$$

führt, also

$$w(x) = G_0(y_s,x)\,R + \frac{d}{dy}\,G_0(y_s,x)\,M + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y_s,x)\,M_2 + \ldots \tag{9.275}$$

wenn R die Resultierende der Belastung ist, $M(=0)$ das Moment der Belastung um y_s ist und M_2 das ‚quadratische' Moment der Belastung um y_s ist. Diese Entwicklung nennt man auch die *multipole expansion* von $w(x)$.

Mit der Anziehungskraft der Erde ist es ähnlich. Wenn die Erde eine perfekte, homogene Kugel wäre, dann könnte man die ganze Masse der Erde im

Mittelpunkt der Erde konzentrieren und die Satelliten würden auf perfekten Kreisbahnen die Erde umkreisen. So braucht man Computer, um die Bahnkurven der Satelliten zu bestimmen.

An Hand von (9.275) kann man den Fehler abschätzen, den man begeht, wenn man z.B. eine Trapezlast durch ihre Resultierende ersetzt.

Bemerkung 9.3. Es wäre interessant, die Formel

$$-w'''(x_i) \simeq \frac{w_{i+2} - 2\,w_{i+1} + 2\,w_{i-1} - w_{i-2}}{2\,h^3} \cdot (-1) \tag{9.276}$$

aus Bild 9.38 mit der Formel $\mathcal{V}_h(x) = \sum_i V(\varphi_i)\, w_i$ (w_i = FG der Knoten)

$$-w'''(x) = -\frac{12}{h^3}\, w_{i-1} - \frac{6}{h^2}\, w'_{i-1} + \frac{12}{h^3}\, w_{i+1} - \frac{6}{h^2}\, w'_{i+1} \tag{9.277}$$

aus Bild 3.37 *a* zu vergleichen, also den Unterschied zwischen finiten Differenzen und finiten Elementen, [282]. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und linearen Elementen ist $\boldsymbol{K}$ identisch mit der Differenzenmatrix.

9.42 Steifigkeitsmatrizen 1-D

Man formuliert die erste Greensche Identität, liest an ihr die Wechselwirkungsenergie $a(u, \delta u)$ ab, ermittelt die allgemeine homogene Lösung der Differentialgleichung und berechnet aus ihr die Einheitsverformungen φ_i. Die Elemente der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sind dann die Wechselwirkungsenergien der *shape functions*, $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, und die äquivalenten Knotenkräfte sind die Überlagerung der Belastung mit den φ_i, $f_i = (p, \varphi_i)$.

9.43 Die Dimension der f_i

Eine oft diskutierte Frage ist, welche Dimension die f_i beim Balken haben

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} . \tag{9.278}$$

Die Antwort lautet – je nachdem. Wenn man die Einträge k_{ij} der Steifigkeitsmatrix mit der Formel

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = EI \int_0^l \varphi_i''\, \varphi_j''\, dx = \mathrm{N{\cdot}m^2}\ \frac{1}{\mathrm{m}} \frac{1}{\mathrm{m}}\ \mathrm{m} = \mathrm{N{\cdot}m} \tag{9.279}$$

berechnet, wie man das bei finiten Elementen macht, dann sind die k_{ij} Arbeiten, die u_i sind hier dimensionslos, (weil wir die Wege schon in die Integrale eingearbeitet haben, $\varphi_i'' = [1/\mathrm{m}]$), und so sind die f_i Arbeiten.

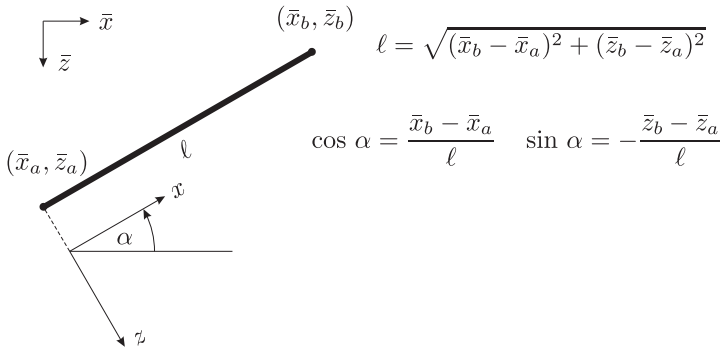


Bild 9.39. Globales und lokales Koordinatensystem

Zur Erläuterung von (9.279): wenn $\varphi_1(x)$ die Dimension Meter hat, dann haben die Ableitungen die Dimension

$$\varphi_1(x)\ [\mathrm{m}] \qquad \varphi_1'\ [\,] \qquad \varphi_1'' = [\frac{1}{\mathrm{m}}] \qquad \varphi_1''' = [\frac{1}{\mathrm{m}^2}]\,, \tag{9.280}$$

weil bei jeder Ableitung d/dx durch Meter dividiert wird.

Man kann die Matrix $\boldsymbol{K}$ aber auch auf statischem Wege herleiten, indem man die Balkenendkräfte und -momente der Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ berechnet und diese Werte in die jeweilige Spalte i einträgt. Wenn man so vorgeht, dann sind die k_{ij} der Dimension nach Kräfte bzw. Momente pro Auslenkung/Verdrehung $w_i = 1$ und das Ergebnis, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$, sind dann die Kräfte und Momente, die zur Auslenkung $\boldsymbol{w}$ gehören, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$.

9.44 Transformationen

Mit den Bezeichnungen in Bild 9.39 und der orthogonalen Matrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^T \tag{9.281}$$

transformiert sich ein Vektor $\boldsymbol{f} = \{f_x, f_z\}^T$ wie folgt

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}\,\bar{\boldsymbol{f}} \qquad \bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{f}\,. \tag{9.282}$$

Die auf die Größe 4×4 aufgeweitete Stabmatrix[13]

$$\boldsymbol{K}^e_{4\times4} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.283}$$

[13] Ein oberer Index e bedeutet – nur hier – dass sich die Matrix $\boldsymbol{K}^e$ auf das lokale KS bezieht, während sich $\boldsymbol{K}_e$ auf das globale KS bezieht.

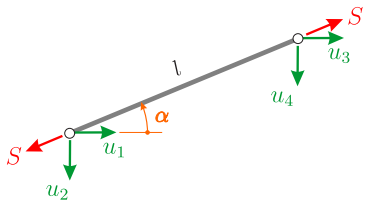


Bild 9.40. Kabelelement

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{T} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix} \tag{9.284}$$

wobei die **Transformationsmatrix** $\boldsymbol{T}$ die Gestalt

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad c = \cos\alpha\,, s = \sin\alpha \tag{9.285}$$

hat, und aus der 4×4-Seilmatrix (S = Zugkraft im Seil)

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.286}$$

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{T} = \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & cs & -s^2 & -cs \\ cs & c^2 & -cs & -c^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -c^2 & cs & c^2 \end{bmatrix}. \tag{9.287}$$

Die beiden Matrizen zusammen bilden die Steifigkeitsmatrix eines schrägen Kabelelements (Th. II. Ordnung), siehe Bild 9.40,

$$\boldsymbol{K}_e = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & -c\cdot s & -c^2 & c\cdot s \\ -c\cdot s & s^2 & c\cdot s & -s^2 \\ -c^2 & c\cdot s & c^2 & -c\cdot s \\ c\cdot s & -s^2 & -c\cdot s & s^2 \end{bmatrix} + \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & c\cdot s & -s^2 & -c\cdot s \\ c\cdot s & c^2 & -c\cdot s & -c^2 \\ -s^2 & -c\cdot s & s^2 & c\cdot s \\ -c\cdot s & -c^2 & c\cdot s & c^2 \end{bmatrix}. \tag{9.288}$$

Das Seil in Bild 9.41 besteht aus drei solchen Kabelelementen. Mit $S = 20$, $EA = 10$ und $c = 0.866, s = 0.5$ ergaben sich aus

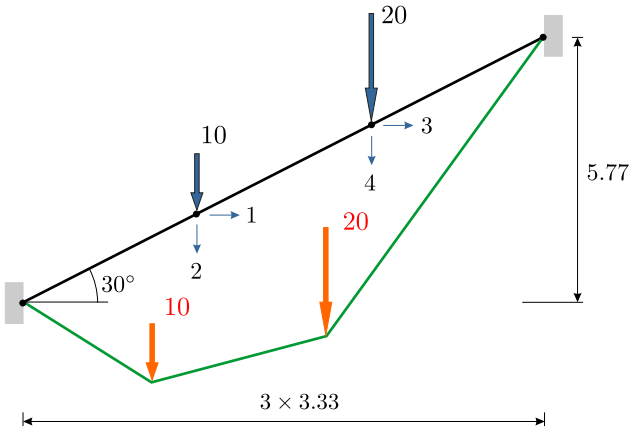
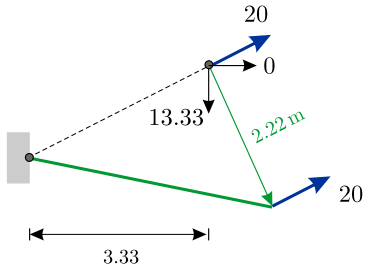


Bild 9.41. Schräges Seil aus kombinierten Stab- und Seilelementen.



$$\sum M = 13.33 \cdot 3.33 - 20 \cdot 2.22 = 0$$

Bild 9.42. Für das Momentengleichgewicht am ersten Element muss man die Verkürzung des Elements vernachlässigen. Dadurch ist das Detail nicht mehr deckungsgleich mit dem Bild davor. Die 13.33 ist das f_4 am Elementende.

$$\begin{bmatrix} 6.4952 & 2.2500 & -3.2476 & -1.1250 \\ 2.2500 & 9.0933 & -1.1250 & -4.5466 \\ -3.2476 & -1.1250 & 6.4952 & 2.2500 \\ -1.1250 & -4.5466 & 2.2500 & 9.0933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{9.289}$$

die Verschiebungen zu $\boldsymbol{u} = \{-1.1111, 3.2075, -1.3889, 4.0094\}^T$ und damit die Gesamtlänge zu 14.85 m. Will man diese ändern, muss man die Vorspannung S des Seils ändern. Im Grunde ist das Problem auch nichtlinear, weil sich unter Belastung die Geometrie ändert und damit $\boldsymbol{K}$.

Das Beispiel ist wegen der großen Verformungen ($EA = 10$) natürlich unrealistisch, siehe Bild 9.42. Aber man sieht so deutlicher, dass die Verkürzung des ersten Elements in Achsrichtung vernachlässigt werden muss, um auf $\sum M = 0$ zu kommen, siehe Kapitel 1.38. Will man in vertrauter Umgebung arbeiten, so dreht man das Seil in die Horizontale. Es ist dann eine Mischung aus ‚Stabwerk' (Last horizontal) plus Seil (Last senkrecht).

Für eine vertiefte Beschäftigung mit Seilen müssen wir auf die Literatur verweisen, Gründig [107], Linkwitz [190], Pałkowski [227], Petersen [234], Schek [266], Ströbel et alt. [288], denn die Statik von Seilen und Seilnetzen ist eine Wissenschaft für sich.

Die Transformation der Steifigkeitsmatrix des Balkenelements beruht auf der Matrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9.290}$$

Aus der Matrix

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI}{\ell^3} & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12\,EI}{\ell^3} & -\frac{6\,EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{4\,EI}{\ell} & 0 & \frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{2\,EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI}{\ell^3} & \frac{6\,EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12\,EI}{\ell^3} & \frac{6\,EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{2\,EI}{\ell} & 0 & \frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{4\,EI}{\ell} \end{bmatrix} \tag{9.291}$$

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{T} =$$

$$\begin{bmatrix} c^2\,\frac{EA}{\ell} + s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s\,6\frac{EI}{\ell^2} & -c^2\,\frac{EA}{\ell} - s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -- & s^2\,\frac{EA}{\ell} + c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} & cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s^2\,\frac{EA}{\ell} - c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -- & -- & 4\frac{EI}{\ell} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} \\ \text{sym.} & -- & -- & c^2\,\frac{EA}{\ell} + s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -- & -- & -- & -- & s^2\,\frac{EA}{\ell} + c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -- & -- & -- & -- & -- & 4\frac{EI}{\ell} \end{bmatrix} \tag{9.292}$$

download code

9.45 Konischer Stab

Beispielhaft soll die Steifigkeitsmatrix für einen konisch verlaufenden Stab

$$A(x) = A_0 + A_1 x\,, \tag{9.293}$$

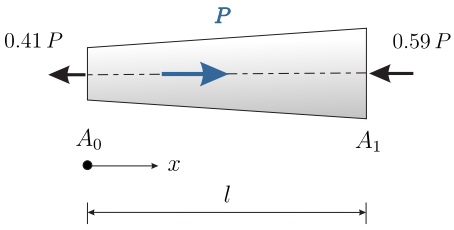


Bild 9.43. Konischer Stab $EA = EA(x)$

hergeleitet werden. Die Differentialgleichung für die Längsverschiebung

$$-EA(x)u''(x) - EA'(x)u'(x) = p(x) \tag{9.294}$$

hat die homogene Lösung

$$u_n(x) = c_2 + c_1 \frac{\ln A(x)}{A_1}\,. \tag{9.295}$$

Aus ihr ergeben sich die Einheitsverformungen

$$\varphi_1(x) = \frac{\ln A(x) - \ln A(l)}{\ln A(0) - \ln A(l)}\,, \qquad \varphi_2(x) = \frac{\ln A(0) - \ln A(x)}{\ln A(0) - \ln A(l)}\,. \tag{9.296}$$

Setzt man diese in die Wechselwirkungsenergie ein

$$k_{ij} = \int_0^l EA(x)\,\varphi_i'\varphi_j'\,dx\,, \tag{9.297}$$

dann erhält man die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \qquad k = A_1\,E\,\frac{\ln A(l) - \ln A_0}{(\ln A_1 - \ln A_0)^2}\,. \tag{9.298}$$

Gemäß $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ = Knotenlasten + in die Knoten reduzierte Lasten im Feld

$$d_1 = \int_0^l p\,\varphi_1\,dx\,, \qquad d_2 = \int_0^l p\,\varphi_2\,dx \tag{9.299}$$

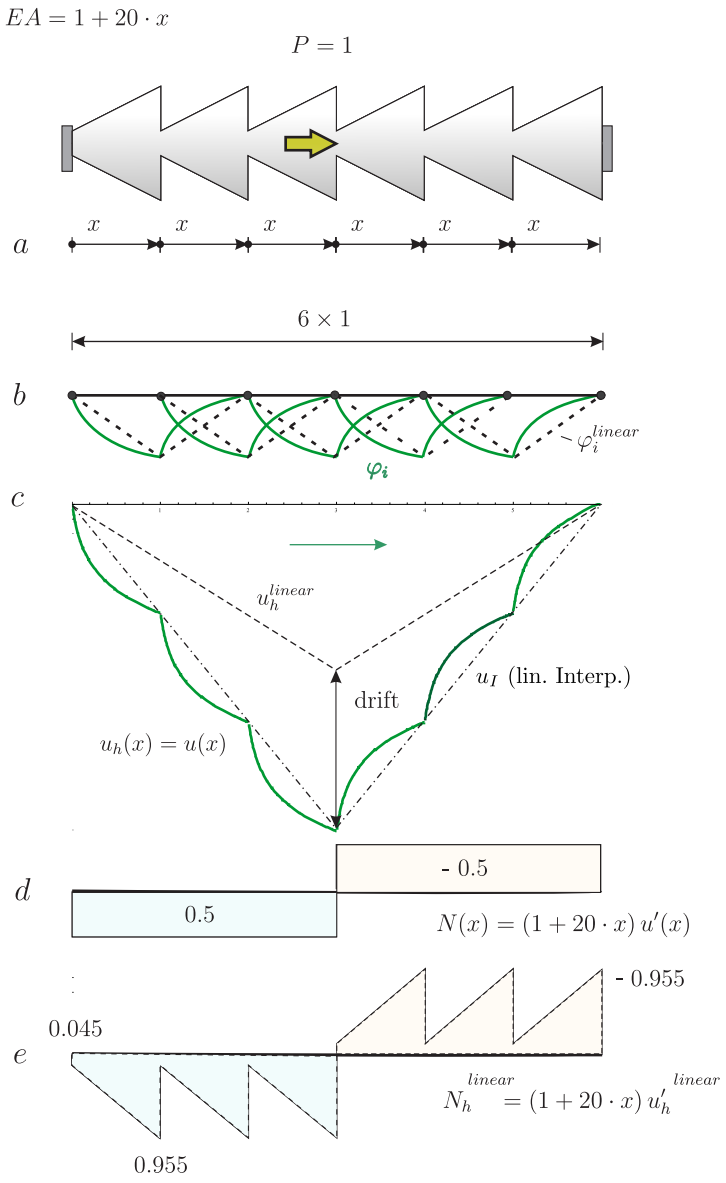
gehören zu einer Kraft P im Punkt x_P die äquivalenten Knotenkräfte

$$d_1 = P \cdot \varphi_1(x_P)\,, \quad d_2 = P \cdot \varphi_2(x_P)\,. \tag{9.300}$$

Wegen $P = d_1 + d_2$ muss in jedem möglichen Kraftangriffspunkt x die Summe $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ gleich Eins sein

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1 \qquad (100\%)\,. \tag{9.301}$$

Sei



$$\varphi_1^e(x) = -\frac{\ln(1+20\,x)}{\ln 21} + 1\,, \qquad \varphi_2^e(x) = \frac{\ln(1+20\,x)}{\ln 21}$$

Bild 9.44. Sägeblatt, $u_h(x) = u(x)$, weil die *shape functions* φ_i exakt sind, **d)** exaktes $N(x)$, **e)** $N_h(x)$ eines linearen Ansatzes mit den Standard φ_i (*hat func.*) (MATLAB™) download code

$$A(x) = A_0 + A_1 x = 1 + 1 \cdot x \qquad \text{Länge } l = 1 \tag{9.302}$$

und wirkt eine Einzelkraft P in Stabmitte, siehe Bild 9.43, dann folgt mit

$$\varphi_1(0.5) = 0.415 \qquad \varphi_2(0.5) = 0.585\,, \tag{9.303}$$

dass ungefähr 41% von P am linken Lager ziehen und etwa 59% auf das rechte Lager drücken.

Das Sägeblatt in Bild 9.44 wurde so berechnet, [126]. Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse mit linearen *shape functions* dargestellt.

9.46 Näherungen

Bei den Steifigkeitsmatrix für elastisch gebettete Balken und für die Theorie zweiter Ordnung benutzt man in der Praxis oft Näherungen, indem man die Wechselwirkungsenergien

$$k_{ij} = \int_0^\ell (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' + c\,\varphi_i\,\varphi_j)\,dx \qquad \text{elast. gebetteter Balken} \tag{9.304}$$

$$k_{ij} = \int_0^\ell (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' - P\,\varphi_i'\,\varphi_j')\,dx \qquad \text{Th. II. Ordnung} \tag{9.305}$$

mit den vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ (3.63) des normalen Balken formuliert und nicht mit den exakten Einheitsverformungen. Für einen elastisch gelagerten Balken ergibt das die Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^e = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -6\,\ell & -12 & -6\,\ell \\ -6\,\ell & 4\,\ell^2 & 6\,\ell & 2\,\ell^2 \\ -12 & 6\,\ell & 12 & 6\,\ell \\ -6\,\ell & 2\,\ell^2 & 6\,\ell & 4\,\ell^2 \end{bmatrix} + \frac{c}{420}\begin{bmatrix} 156\,\ell & -22\,\ell^2 & 54\,\ell & 13\,\ell^2 \\ -22\,\ell^2 & 4\,\ell^3 & -13\,\ell^2 & -3\,\ell^3 \\ 54\,\ell & 13\,\ell^2 & 156\,\ell & 22\,\ell^2 \\ 13\,\ell^2 & -3\,\ell^3 & 22\,\ell^2 & 4\,\ell^3 \end{bmatrix} \tag{9.306}$$

und für einen Druckstab die Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^e = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -6\ell & -12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 & 6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & 6\ell & 12 & 6\ell \\ -6\ell & 2\ell^2 & 6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30\,\ell}\begin{bmatrix} 36 & -3\,\ell & -36 & -3\,\ell \\ -3\,\ell & 4\ell^2 & 3\,\ell & -\ell^2 \\ -36 & 3\ell & 36 & 3\,\ell \\ -3\,\ell & -\ell^2 & 3\,\ell & 4\,\ell^2 \end{bmatrix}\,. \tag{9.307}$$

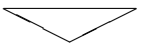
Die zweite Matrix ist die sogenannte ***geometrische Elementsteifigkeitsmatrix***. Wie die erste ist sie orthogonal zu allen Starrkörperbewegungen.

Auch für die Steifigkeitsmatrix eines *Timoshenko Balkens* gibt es solche Näherungen, [125] chapter 3.5, und ebenso für die Wölbkrafttorsion, [178].

9.47 Schwache und starke Einflussfunktionen

Wir hatten erwähnt, dass es keine schwachen Einflussfunktionen für Kraftgrößen wie etwa das Moment $M(x)$ in einem Einfeldträger gibt, weil

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(G_2, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0\,, \qquad G_2 = \quad (9.308)$$



denn das Moment der EF G_2 ist auf jedem gelochten Intervall Ω_ε null. Es ist jedoch möglich eine Folge G_2^ε von glatten Funktionen (mit ausgerundetem Knick) zu erzeugen, die gegen das Dreieck G_2 streben, so dass am Ende das Moment aus der Wechselwirkungsenergie heraus springt, siehe [126] p. 67 *‚A sequence that converges to G_1‘*, (dort $N(x)$, hier $M(x)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(w, G_2^\varepsilon) = M(x)\,. \qquad (9.309)$$

In (9.308) starten wir auf $[0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, l]$ und lassen dann $\varepsilon \to 0$ gegen Null gehen, während in (9.309) das ε die Folgenglieder $G_2^\varepsilon \to G_2$ bezeichnet.

Die erste Ableitung von G_2 ist eine Sprung-Funktion und die zweite Ableitung is ein Dirac Delta δ_0 (gegen das die Momente M_2^ε der G_2^ε streben) und so liefert die Wechselwirkungsenergie das gewünschte Ergebnis

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(w, G_2^\varepsilon) = \int_0^l M(y)\,\delta_0(y-x)\,dy = M(x)\,. \qquad (9.310)$$

So müsste man also vorgehen.

Und noch eine Bemerkung zur Beobachtung, dass man mit finiten Elementen Spannungen (scheinbar) mit schwachen Einflussfunktionen berechnen kann, siehe Seite 300. Das sieht nur so aus, denn in Wirklichkeit berechnen auch finite Elemente Spannungen, wie etwa die Normalkraft in einem Stab, mit einer starken Einflussfunktion

$$N_h(x) = \int_0^l G_1^h(y,x)\,p(y)\,dy = \int_0^l \sum\nolimits_i g_i\,\varphi_i(y)\,p(y)\,dy = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}\,, \qquad (9.311)$$

nur ist es so, dass man das wegen $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ in die schwache Form

$$N_h(x) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \qquad (9.312)$$

umschreiben kann, was dann so aussieht, als könnten finite Elemente $N_h(x)$ mit einer schwachen Einflussfunktion berechnen.

9.48 Wie kommt der Einbettungssatz zu seinem Namen?

So, wie man die Einwohner einer Stadt nach verschiedenen Kriterien ordnen kann, *Alter, Größe, …*, so kann man auch die Biegeflächen $w(\boldsymbol{x})$ einer Platte Ω in verschiedener Weise klassifizieren. Eine dieser möglichen Skalen

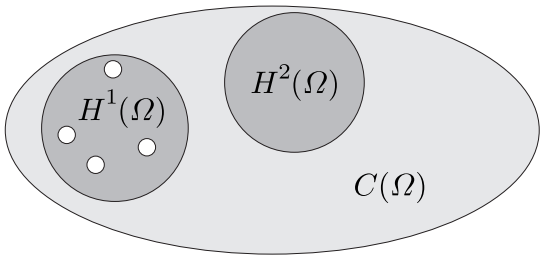


Bild 9.45. 2-D, nicht alle $u \in H^1(\Omega)$ liegen in $C(\Omega)$ aber alle $u \in H^2(\Omega)$

ist die sogenannte ***Sobolevnorm***. Die Sobolevnorm der Ordnung $m = 2$ einer Biegefläche w ist der Ausdruck

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_\Omega (w^2 + w_{,x}^2 + w_{,y}^2 + w_{,xx}^2 + w_{,xy}^2 + w_{,yx}^2 + w_{,yy}^2)\, d\Omega}\,. \tag{9.313}$$

Man kann nach diesem Muster Sobolevnormen $\|w\|_m$ beliebig hoher Ordnung m definieren: Die Ableitungen bis zur Ordnung m werden quadrat-integriert und aus der Summe die Wurzel gezogen. Die Funktionen, die eine endliche Sobolevnorm der Ordnung m haben, bilden den **Sobolevraum** $H^m(\Omega)$.

Eng damit verwandt ist der sogenannte ***Energieraum***, das sind alle Funktionen, die eine endliche Biegeenergie/Verzerrungsenergie $|a(u,u)| < \infty$ haben, deren Energienorm $\|u\|_E = \sqrt{a(u,u)}$ also beschränkt ist.

Es zeigt sich nun, dass der Energieraum einer Platte mit dem Sobolevraum H^2 identifiziert werden kann, und der Energieraum einer Scheibe mit $\boldsymbol{H}^1 = H^1 \times H^1$ (horizontale u_x und vertikale Verschiebung u_y). Weil endliche Energie endliche Sobolevnormen $\|w\|_2$ bzw. $\|\boldsymbol{u}\|_1$ bedeutet, behandelt man die Begriffe Sobolevnorm und **Energienorm** wie Synonyme[14].

Der russische Mathematiker Sobolev hat gezeigt, dass der Raum $H^m(\Omega)$ in den Raum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen über Ω eingebettet ist,

$$H^m(\Omega) \subset C(\Omega) \tag{9.314}$$

und die **Einbettung** sogar stetig ist

$$\max|w| < c \cdot \|w\|_m\,, \tag{9.315}$$

wenn die folgende Ungleichung gilt

$$m > \frac{n}{2} \tag{9.316}$$

[14] Die Energienorm $\|w\|_E$ und die Sobolevnorm $\|w\|_m$ sind auf $\mathcal{V}$ äquivalente Normen, wenn die Starrkörperbewegungen w_0 nicht in $\mathcal{V}$ liegen, weil $\|w_0\|_E = 0$ aber $\|w_0\|_m \neq 0$. Was auffällt: Mohr (die Energienorm) misst beim Balken nur die zweiten Ableitungen, aber Sobolev misst w, w' und w'', und trotzdem gilt $\|w\|_E \equiv \|w\|_2$ (äquivalent), wenn der Balken nicht ‚wegrutschen' kann.

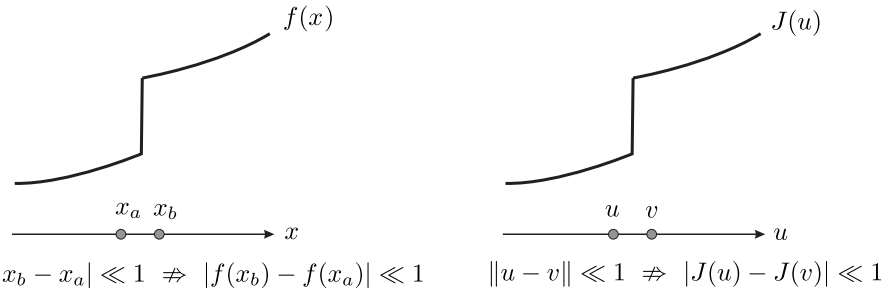


Bild 9.46. Unstetige Funktion und unstetiges Funktional: Kleiner Abstand in der Norm garantiert nicht kleinen Abstand in den Funktionswerten. Die Messung $J(u)$, setze das zweite Element $v = 0$, lässt sich durch die Norm nicht sicher eingrenzen

wenn also der Index m des Sobolevraums größer als die ‚halbe Dimension' des Raums ist, siehe Bild 9.45.

Bei einer Platte ist $n = 2$. Der Wert $\max|w|$ ist die Norm von w auf $C(\Omega)$ und (9.315) bedeutet, dass die Norm des Bildes kleiner als die Ausgangsnorm mal einem Skalenfaktor c ist. Wenn das gilt, dann sagt man, dass die Abbildung, also hier $w \in H^2(\Omega) \to w \in C(\Omega)$ stetig ist. Die Zahl c in der Ungleichung (9.315) ist eine feste Konstante, die nur von der Gestalt von Ω abhängt.

Der Sinn der Ungleichung (9.315) ist, dass ein kleiner Abstand zweier Funktionen w_1, w_2 in $H^m(\Omega)$ auch einen kleinen Abstand in $C(\Omega)$ garantiert

$$\max|w_1 - w_2| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_m \,. \tag{9.317}$$

Das Interessante an diesem Ergebnis ist der Übergang vom Integral zum Punkt. Die Sobolevnorm ist ja ein integrales Maß, aber wenn die Ungleichung (9.316) gilt, und für eine Platte, $m = 2, n = 2$, gilt sie, dann ist die Auslenkung der Platte durch die Biegeenergie begrenzt, $\max|w| < c\,\|w\|_m$. Geht die Biegeenergie gegen null, dann geht auch die Durchbiegung der Platte gegen null – überall, in jedem Punkt! ***Ein Integral majorisiert Punktwerte!***

Bei einer Scheibe ist das anders. Ihr Energieraum ist $\boldsymbol{H}^1$, aber die Zahlen $m = 1, n = 2$ erfüllen die Ungleichung (9.316) nicht, und daher garantiert eine endliche Energie $\|\boldsymbol{u}\|_1 < \infty$ nicht, dass die Einbettung stetig ist in dem Sinne, dass wenn zwei Verschiebungsfelder $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ eine kleinen Abstand in der Energie haben, dass dann auch ihre maximalen Verschiebungen nahezu gleich sind, was bei einer Platte gilt

$$\max|w_1 - w_2| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_2 \,. \tag{9.318}$$

Wenn der Leser noch etwas Geduld hat, können wir diese Ideen noch etwas weiter verfolgen.

Menschen kann man nach ihrem Alter (A) klassifizieren oder nach ihrem Gewicht (G). Auf der Menge A ist das Funktional ‚Schuhgröße' nicht stetig,

weil ein kleiner Abstand im Alter nicht garantiert, dass auch die Schuhgrößen ähnlich ausfallen. Auf der Menge G erwarten wir hingegen (näherungsweise) einen solchen Zusammenhang.

Ein Funktional ist also dann stetig, wenn aus einem kleinen Abstand im Input, $\|u_1 - u_2\| =$ ‚klein', eine kleine Differenz im Ergebnis folgt, siehe Bild 9.46,

$$|J(u_1) - J(u_2)| < c \cdot \|u_1 - u_2\| \,. \tag{9.319}$$

Genauer gesagt, wenn es eine globale Konstante c gibt, die für **alle** Funktionen u in der Ausgangsmenge gilt. Stetigkeit ist also immer davon abhängig, welche Abstandsmaße man auf der Ausgangsmenge und der Zielmenge hat. Setzt man $u_2 = 0$, dann hat man im übrigen das Ergebnis $|J(u)| < c \cdot \|u\|$.

Wenn ein lineares Funktional stetig ist, dann ist es auch beschränkt.

Bei einer Kirchhoffplatte ist das Punktfunktional

$$J(w) = w(\boldsymbol{x}) \qquad \text{Durchbiegung in einem Punkt } \boldsymbol{x} \tag{9.320}$$

auf $H^2(\Omega)$ ein stetiges und beschränktes Funktional, weil die stetige Einbettung (9.315) garantiert, dass die Differenz in zwei Werten durch die Differenz in der Energie nach oben begrenzt ist

$$|J(w_1) - J(w_2)| = |w_1(\boldsymbol{x}) - w_2(\boldsymbol{x})| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_2 \,, \tag{9.321}$$

aber bei einer Scheibe gilt dies nicht. Die Differenz in der horizontalen Verschiebung zweier Verschiebungsfelder in einem Punkt $\boldsymbol{x}$

$$|J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{v})| = |u_x(\boldsymbol{x}) - v_x(\boldsymbol{x})| \not< c \cdot \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1 \tag{9.322}$$

lässt sich nicht *für alle (!)* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ durch die Sobolevnorm $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1$ nach oben begrenzen. Die Betonung liegt auf *für alle*. Die Membranbiegefläche $u = -\ln(-1/\ln r)$ hat im Punkt $r = 0$ den Wert unendlich, $J(u) = \infty$, aber in einem Kreis Ω mit Radius $R = 0.5$ um den Nullpunkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist die H^1-Norm beschränkt, siehe [126] p. 98 und Bild 9.47. Es gibt demnach keine Zahl c so, dass

$$J(u) = u(\boldsymbol{0}) = \infty < c \cdot \|u\|_1 \qquad ? \tag{9.323}$$

Auf $H^1(\Omega)$ ist $J(u)$ also kein stetiges und beschränktes Funktional. Ein Gegenbeispiel reicht aus, um dieses Urteil fällen zu können[15].

Bei einem Stab, $n = 1$, $m = 1$, ist der Energieraum $H^1(0, l)$, und daher gilt dort

[15] Der doppelte Logarithmus, $u(r) = O(\ln(-\ln r))$ für $r \to 0$, geht ‚unendlich langsam' gegen ∞ und deswegen ist wohl die $\|u\|_1$-Norm beschränkt trotz $u(0) = \infty$.

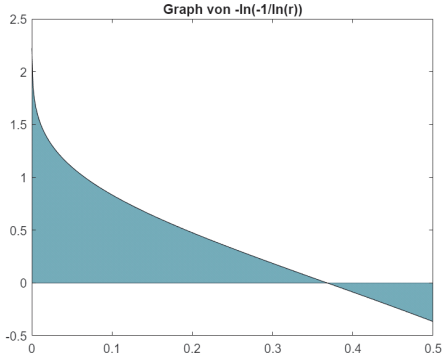


Bild 9.47. Die Funktion $u(r) = -\ln(-1/\ln r), r < 1$

$$J(u) = u(x) \qquad m - i = 1 - 0 = 1 > \frac{1}{2} \qquad \text{stetig} \tag{9.324}$$

$$J(u) = u'(x) \qquad m - i = 1 - 1 = 0 \not> \frac{1}{2} \qquad \text{unstetig} \tag{9.325}$$

Der Energieraum eines Balkens, $n = 1$, $m = 2$, ist der $H^2(0, l)$, und daher gilt, in der Reihenfolge $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\underbrace{J(w) = w(x) \qquad J(w) = w'(x)}_{stetig} \qquad \underbrace{J(w) = w''(x) \qquad J(w) = w'''(x)}_{nicht\ stetig} \tag{9.326}$$

Wenn ein Funktional stetig ist, dann ist die Energie der Greenschen Funktion endlich, sonst unendlich und dann ist es auch die äußere Arbeit $W_e = Weg \times Kraft$. *Einer der beiden Größen muss im Aufpunkt unendlich sein.*

Die Greensche Funktion für das (unstetige) Funktional $J(u) = EAu'(x)$ der Normalkraft $N(x)$ in einem Stab ist eine Einheitsversetzung, die sich nur unter dem Einsatz von unendlich großen Kräften erzeugen lässt

$$\int_0^l \frac{N^2}{EA}\, dx = \infty \qquad N = \text{Normalkraft im LF Versatz}\,. \tag{9.327}$$

Wir folgen hier dem Mathematiker, der die Sprungfunktion in eine Fourierreihe entwickelt, siehe Seite 111, und nicht dem Ingenieur, der erst ein Normalkraftgelenk einbaut und dann das Gelenk spreizt.

Nun noch ein Kommentar zur Ungleichung aus Kapitel 1, (1.311), die wir hier wiederholen

$$m - i > \frac{n}{2}\,. \tag{9.328}$$

Wenn man eine Funktion, die in $H^m(\Omega)$ liegt, differenziert, dann liegt ihre Ableitung (möglicherweise) nur noch in $H^{m-1}(\Omega)$. Dies erklärt, warum wir

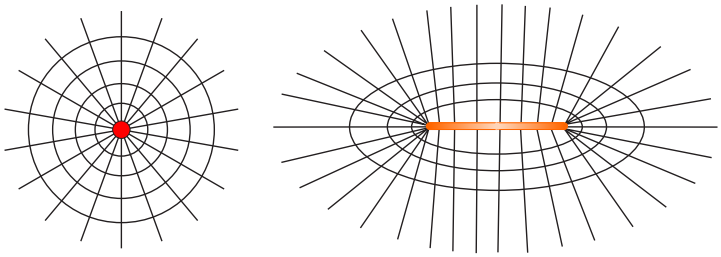


Bild 9.48. In der Nähe der Einzelkraft sind die Kraftlinien so dicht gepackt, dass das Material einer Scheibe zu fließen beginnt, während eine Linienlast die hohe Konzentration der Kraftlinien in einem Punkt vermeidet – die Energie bleibt endlich, [125]

von m den Index $i = 0, 1, 2, 3$ des Dirac Delta δ_i abziehen, also das Signal wie oft das Dirac Delta die Funktion u differenziert

$$J(u) = \int_\Omega \delta_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \cong \text{Ableitung } i\text{-ter Ordnung}\,. \tag{9.329}$$

Bemerkung 9.4. Nicht stetig heißt in (9.326): $J(w) = -EI\, w''(x) = M(x)$ ist auf $H^2(0, l)$ kein stetiges *Funktional*. Es gibt kein c so, dass *für alle* Biegelinien $w \in H^2(0, l)$ die Ungleichung

$$|J(w)| = |M(x)| < c \cdot \|w\|_2 \tag{9.330}$$

gilt. Eine Biegelinie w mit einer logarithmischen Singularität im Momentenverlauf, $M(x) = \ln(x - x_0)^2$ in einem Punkt $x_0 \in (0, l)$, hat eine endliche Norm, $\|w\|_2 < \infty$, aber $M(x_0) = \infty$.

Man kann es auch so lesen: Das singuläre $M(x)$ liegt in $H^0(0, l)$, weil man $M(x)^2$ integrieren kann, aber die Norm auf H^0, also das Integral $\|M\|_0 = (M, M)^{1/2}$, kann Punktwerte nicht majorisieren, $\max |M| < c \cdot \|M\|_0$ gilt nicht, weil die Einbettung von $H^0(0, l)$ in $C(0, l)$ nicht stetig ist, es gibt Ausreißer und einer davon ist das obige Moment. Noch einfacher:

Daraus, dass man eine Funktion $M(x)$ quadrat-integrieren kann, folgt nicht, dass die Funktion $M(x)$ auf dem Intervall $(0, l)$ beschränkt ist.

Wenn aber auch die Ableitung $M'(x)$ quadrat-integrierbar ist, wenn $M(x)$ also in $H^1(0, l)$ liegt, dann ist der Schluss zulässig, weil die Ungleichung $m > n/2$, setze $m = 1, n = 1$, dann erfüllt ist, $H^1(0, l) \subset C(0, l)$ im $\mathbb{R}^1$.

Die Ableitung $M'(x) = 2/(x - x_0)$ von $M(x) = \ln(x - x_0)^2$ ist aber nicht quadrat-integrierbar, das ‚Schlupfloch' $M \in H^1(0, l)$ steht also nicht zur Verfügung.

Bemerkung 9.5. Die mathematische Theorie der finiten Elemente – Stichwort *schwache Lösung* – hat sich parallel zu der Anwendung der finiten Elemente

in den Ingenieurwissenschaften entwickelt und im Rahmen dieser Theorie gilt: *Eine Einflussfunktion*

$$J(u) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{9.331}$$

existiert genau dann, wenn das Funktional $J(u)$ linear und beschränkt ist, $|J(u)| < c\,\|u\|$.

Folgt man dieser Vorgabe, dann dürfte es keine Einflussfunktion $G_2(y,x)$ für das Moment in einem Balken geben, weil ja das Funktional $J(w) = M(x)$ auf dem Energieraum $H^2(0,l)$ unbeschränkt ist. Dies steht aber im Widerspruch zum Vorgehen des Ingenieurs, der in der Mitte des Balkens einfach einen Knick erzeugt und mit dieser Einflussfunktion das exakte Biegemoment erhält.

Der obige Satz meint aber nur, dass es keine Einflussfunktion mit ***endlicher Energie*** gibt, keine Einflussfunktion $G_2(y,x) \in H^2(0,l)$, was sich, wenn wir nachrechnen, siehe Seite 111, bestätigt: Die Biegelinie mit dem Knick hat eine unendliche Energie, liegt nicht in $H^2(0,l)$. Jetzt kann man natürlich sagen, was liegt daran: Wenn Mathematiker so spitzfindig sind und so enge Grenzen ziehen, dann muss das den Ingenieur nicht kümmern.

Es zeigt sich hier aber eine Schwäche der mathematischen Theorie der finiten Elemente, nach der ja die FEM eine ***Energieraummethode*** ist und Lösungen, die unendliche Energie haben, liegen außerhalb dieser Theorie. Wie will man den Abstand der Näherung G_h zur exakten Einflussfunktion G in der Energie minimieren,

$$a(G-G_h, G-G_h) = \|G-G_h\|^2 \qquad \to \text{ Minimum}\,, \tag{9.332}$$

wenn die Energie der exakten Lösung, $\|G\| = \infty$, unendlich ist?

Es ist eine **kuriose Situation**: FE-Programme berechnen alle Schnittgrößen mit Einflussfunktionen, die Näherungslösungen von *schlecht gestellten Problemen* sind, weil das Ziel, die Einflussfunktion, nicht im Lösungsraum, im Energieraum liegt – alle Einflussfunktionen für Schnittgrößen ‚laufen über' haben unendliche Energie.

Eine Situation, vor der jeder Mathematiker warnt: *‚Lieber Ingenieur, überzeuge Dich doch bitte vorher, ob eine Lösung existiert, bevor Du den Computer startest...'*

9.49 Negative Normen

Es gibt auch negative Sobolev-Räume und negative Normen, wenn natürlich auch die Norm $\|p\|_{-m} \geq 0$ selbst positiv ist. Auch eine Belastung p ist ja eine Funktion, und je unruhiger sie ist, je mehr sie aus dem Rahmen fällt, desto niedriger ist die Ordnung des Sobolev-Raums

$$H^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \to H^0(\Omega) = L_2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \to H^{-2}(\Omega) \tag{9.333}$$

in dem sie liegt. Wenn sie noch nicht einmal quadrat-integrierbar ist, dann kann man keine virtuelle Arbeit

$$\delta W_e = \int_\Omega p\, \delta w d\Omega \tag{9.334}$$

berechnen – sagt der Mathematiker. Für ihn sind Einzelkräfte (Dirac Deltas) oder Linienlasten im 2-D (Dirac Deltas in ‚Reihe') **Distributionen** und die Arbeit einer Distribution kann man nicht mit einem **Riemann-Integral**[16] berechnen. Statt dessen geht man über den Satz von Betti, wie in (2.137) Kapitel 2.14, und das setzt voraus, dass die Verrückung δw hinreichend glatt ist.

Die Arbeit einer Einzelkraft δ_0 in der Mitte $\boldsymbol{x}$ einer Membran auf dem Weg δw ist genauso groß, wie die Arbeit, die die zu δw gehörige Belastung p_δ $(= -\Delta\, \delta w)$ auf dem Weg der Durchbiegung G_0 leistet

$$\delta W_e = \underbrace{\int_\Omega \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\, \delta w(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}}_{W_{1,2}} = \underbrace{\int_\Omega G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_\delta(\boldsymbol{y}) d\Omega_{\boldsymbol{y}}}_{W_{2,1}}, \tag{9.335}$$

und dieses zweite Integral ist berechenbar und hat natürlich den Wert $\delta w(\boldsymbol{x})$.

Die Funktionen oder – besser – die Lasten in H^{-m} sind so ‚holterdiepolter', dass die virtuelle Verrückung mindestens aus H^m sein muss, damit δW_e einen Sinn gibt. Was der Last an Regularität fehlt, muss der Partner ersetzen.

Die Norm

$$\|p\|_{-m} = \sup \frac{(p, u)}{\|u\|_m} \qquad \text{über alle } u \neq 0 \in H^m$$

einer solchen Belastung p is ***the most mileage***, die maximal mögliche virtuelle Arbeit δW_e, die die Funktionen in H^m aus der Belastung ziehen können, ähnlich wie in Bild 1.53, und die Lösung u des LF p gewinnt den Preis.

Der Bauingenieur rechnet sehr oft mit Belastungen aus H^{-m}, denn Linienkräfte oder Einzelkräfte auf einer Platte (Kirchhoff) liegen in H^{-2}. Weil die *shape functions* φ_i bei solchen Platten aber in H^2 liegen, lässt sich das obige Arbeitsintegral regularisieren, wenn p eine Linienlast oder eine Einzelkraft ist, und δW_e hat natürlich genau den Wert, den der Ingenieur erwartet.

Wenn man aber an einer zentrisch belasteten Kreisplatte, Einzelkraft P und Radius $R = 1$, mit der H^0-Funktion $\delta w = -\ln r$ wackelt, dann ist $\delta W_e = \infty \cdot P = \infty$. Nicht alle H^0-Funktionen taugen bei Platten also als virtuelle Verrückungen, weil manche Belastungen wie P zu scharf für einige von ihnen

[16] Das Flächenintegral einer Linienlast ist null, weil eine Linie keine Breite hat. Billigt man aber einer Linienlast eine Breite ε zu und einer Einzelkraft ebenso (und dividiert die Last durch ε) dann geht es natürlich.

sind. Man muss die δw aus H^2 wählen, um sicher zu gehen. Die $\delta w \in H^2$ sind wegen $H^2 \subset C(\Omega)$ alle stetig, sind beschränkt, $\delta w(\boldsymbol{x}) = \infty$ kommt nicht vor.

Fassen wir es so zusammen: Der Energieraum ist der jeweilige H^m. In diesem Raum liegen die konformen *shape functions*, und die möglichen Belastungen – Lastfälle mit endlicher Energie – dürfen nicht schlechter als H^{-m} sein. Bei einer Scheibe ist der H^1 der Energieraum. Linienkräfte liegen im dem dualen Raum H^{-1}, aber Einzelkräfte nicht, denn die liegen, wie wir von der Kirchhoff-Platte wissen, eine Stufe tiefer, in H^{-2}.

Der **Dualraum** H^{-m} sind einfach die Lastfälle, die von den $u \in H^m$ gelöst werden. Der Mathematiker sagt es etwas anders: Der Dualraum sind die ***stetigen linearen Funktionale*** auf H^m. Jede Last $p \in H^{-m}$ konstituiert ja vermöge des Skalarprodukts, der Kopplung $H^{-m} \times H^m$,

$$J(\delta u) = \int_\Omega p\, \delta u d\Omega \tag{9.336}$$

ein Funktional auf H^m. Es ist einfach die virtuelle Arbeit von p auf den Wegen δu. Und weil die Lösung des LF p endliche Energie hat, ist es ein stetiges, beschränktes Funktional, $|J(\delta u)| < \infty$, gibt es keine unangenehmen Überraschungen, H^m und H^{-m} passen zueinander.

Tabelle 9.1. Endliche (✓) und unendliche (∞) Energie, m = order of energy

Dimension	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 1$	Seil, Stab, Timoshenko Balken	Scheiben Reissner–Mindlin Platte	Solids
Punktlasten			
$i = 0$: ↓	✓	∞	∞
$i = 1$: ⟋⟍	∞	∞	∞
$m = 2$	Euler–Bernoulli Balken	Kirchhoff Platte	
$i = 0$: ↓	✓	✓	
$i = 1$: ↷	✓	∞	
$i = 2$: ∨	∞	∞	
$i = 3$: ⟋⟍	∞	∞	

9.50 Punktlasten und ihre Energie

Zum Schluss sei noch eine Tabelle nachgetragen, in der verzeichnet ist, welche Punktlasten, $i = 0, 1, 2, 3$, also *Einzelkräfte, Momente, Knicke* oder *Versetzungen* Verschiebungen mit endlicher Energie erzeugen.

Die Tabelle 9.1 wertet die Bedingung $m - i > n/2$ aus, die erfüllt sein muss, damit die Energie endlich bleibt. Es ist m die Ordnung der Energie

$m = 1$ Timoshenko Balken, Reissner–Mindlin Platten, Scheiben, *3-D solids*

$m = 2$ Euler–Bernoulli Balken, Kirchhoff Platte

Die Ordnung der Energie entspricht der höchsten Ableitung in der Wechselwirkungsenergie $a(u, u)$. Sie ist immer halb so groß wie die Ordnung $2\,m$ der Differentialgleichung.

Der *Timoshenko-Balken* ist ein schubweicher Balken im Gegensatz zum schubstarren Euler-Bernoulli Balken $EI\,w^{IV} = p$. Schubträger, wie z. B. kurze Konsolen, sind *Timoshenko-Balken*.

Bild 9.48 illustriert, warum man Punktlasten besser in kurze Linienlasten umwandeln sollte.

9.51 Early Birds

Wir kennen inzwischen neben der Arbeit von *Tottenham* (Southampton), [295], eine zweite zeitgleich erschienene Arbeit von *Kolář* (Brno/Brünn), [170], beide aus 1970, die das Thema finite Elemente und Einflussfunktionen behandeln.

Wahrscheinlich gibt es noch andere, frühe Arbeiten. Für Hinweise wären wir dankbar.

9.52 Physik und Mathematik

Nichts illustriert wohl besser die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik als die Geburt der Quantenmechanik aus einem mathematischen ‚Trick', [193]. Ja, die Quantenhypothese war ursprünglich ‚Notwehr'.

Die mittlere Energie der Wärmestrahlung mit der Frequenz ν in einem Ofen (black-body radiation) beträgt, k = Boltzmann-Konstante, T = Temperatur,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \bar{E}\,. \tag{9.337}$$

Der Term

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E\, e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = kT \tag{9.338}$$

ist die mittlere Energie pro Freiheitsgrad und *unit volume*. Integriert man $u(\nu, T)$ über alle ν, dann ist das Ergebnis unendlich, ultraviolet catastrophe. Keiner verstand, warum Ofen nicht schmelzen.

In dieser Situation ergriff Max Planck die Flucht nach vorn und traf die Annahme, dass Energie grundsätzlich nur in Vielfachen (n) des Energiequantums $\varepsilon = h\nu =$ Plancksche Konstante $\times$ Frequenz vorkommt, $E = n\varepsilon = nh\nu$, denn dann wird aus dem Integral eine Summe

$$\bar{E}(\nu) = \frac{\sum_{n=0}^\infty n\varepsilon e^{-n\varepsilon/kT}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-n\varepsilon/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{9.339}$$

und weil $\bar{E}(\nu)$ rasch abfällt, bleibt das Integral von $u(\nu, T)$ über alle Frequenzen ν endlich, so wie es der Erfahrung entspricht. Ofen verglühen nicht unter ihrer eigenen Hitze[17].

[17] Of course there is much more to it. For a detailed and scientific account of the genesis of Max Planck's formula see The Birth of Quantum Mechanics.

10

Shape functions und MATLAB™

Wir sind heute in der glücklichen Lage auf eine Vielzahl von Programmen zur Lösung von mathematischen Problemen bei der FE-Entwicklung zurückgreifen zu können. Die folgenden Beispiele sollen den Einsatz von MATLAB™ in der Statik demonstrieren.

10.1 Balken mit beliebiger Belastung.

Mit der Einflussfunktion des beidseitig eingespannten Balkens (3.177) kann man die exakte Lösung auch für solche Lasten bestimmen, die MATLAB™ (oder der Ingenieur) nicht mehr exakt integrieren können. Dazu wird die Belastung mit der Einflussfunktion überlagert und anschließend eine homogene Lösung so addiert, dass die Lagerbedingungen des Balkens eingehalten werden.

download code

10.2 Einheitsverformungen Th. II. Ordg.

In Kapitel 2.35.1 haben wir die Einheitsverformungen des Druckstabs schon angeschrieben. Hier wollen wir ergänzend zeigen, wie man diese oder eben auch andere Einheitsverformungen per MATLAB™ (dann mit konkreten Zahlen) berechnen kann.

Die Einheitsverformungen des Druckstabs basieren auf der homogenen Lösung, siehe (2.221) auf Seite 229,

$$\varphi_i(x) = c_{i1}\sin(\varepsilon\frac{x}{l}) + c_{i2}\cos(\varepsilon\frac{x}{l}) + c_{i3}\varepsilon\frac{x}{l} + c_{i4}\,. \tag{10.1}$$

Man muss nur die Koeffizienten c_{ij} so einstellen, dass die $\varphi_i(x)$ die entsprechenden Randwerte haben. Der MATLAB™ *code* für die *shape functions* lautet:

```
syms epsilon x l c1 c2 c3 c4

w(x) = c1*sin(epsilon*x/l) + c2*cos(epsilon*x/l)...
+ c3*epsilon*x/l + c4
```

$$\texttt{w(x)} = \quad c_4 + c_2 \cos\left(\frac{\varepsilon\, x}{l}\right) + c_1 \sin\left(\frac{\varepsilon\, x}{l}\right) + \frac{c_3\, \varepsilon\, x}{l}$$

```
wd(x) = diff(w(x));
```

```
equ1 = [w(0) == 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ2 = [w(0) == 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l)== 0];
equ3 = [w(0) == 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ4 = [w(0) == 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l)== -1];

phi1 = solve(equ1,[c1,c2, c3, c4]);
phi2 = solve(equ2,[c1,c2, c3, c4]);
phi3 = solve(equ3,[c1,c2, c3, c4]);
phi4 = solve(equ4,[c1,c2, c3, c4]);

c11 = simplify(phi1.c1); c12 = simplify(phi1.c2);
c13 = simplify(phi1.c3); c14 = simplify(phi1.c4);
c21 = simplify(phi2.c1); c22 = simplify(phi2.c2);
c23 = simplify(phi2.c3); c24 = simplify(phi2.c4);
c31 = simplify(phi3.c1); c32 = simplify(phi3.c2);
c33 = simplify(phi3.c3); c34 = simplify(phi3.c4);
c41 = simplify(phi4.c1); c42 = simplify(phi4.c2);
c43 = simplify(phi4.c3); c44 = simplify(phi4.c4);

c11, c12, c13, c14
```

$$\texttt{c11} = \quad \frac{\sin(\varepsilon)}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c12} = \quad \frac{\cos(\varepsilon) - 1}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c13} = \quad -\frac{\sin(\varepsilon)}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c14} = \quad \frac{\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 1}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 2}$$

```
c21, c22, c23, c24
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c21} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c22} &= \frac{l\,(\sin(\varepsilon)-\varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c23} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c24} &= -\frac{l\,(\sin(\varepsilon)-\varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}
\end{aligned}$$

```
c31, c32, c33, c34
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c31} &= -\frac{\sin(\varepsilon)}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c32} &= -\frac{\cos(\varepsilon)-1}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c33} &= \frac{\sin(\varepsilon)}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c34} &= \frac{\cos(\varepsilon)-1}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}
\end{aligned}$$

```
c41, c42, c43, c44
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c41} &= \frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c42} &= \frac{l\,(\varepsilon-\sin(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c43} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c44} &= -\frac{l\,(\varepsilon-\sin(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}
\end{aligned}$$

download code

Für die Greensche Funktion am beidseitig eingespannten Träger macht man, wie in Kapitel 3.29, aber nun mit den *shape functions* in (2.233), links vom Aufpunkt x, den Ansatz

$$G_0(y,x) = a_3(x)\,\varphi_3(y) + a_4(x)\,\varphi_4(y)\,, \tag{10.2}$$

weil die beiden rechten *shape functions* die Einspannung links respektieren, muss man a_3 und a_4 nur noch so bestimmen, dass das die Querkraft bzw. das Moment des Ansatzes den Lagerkräften $V(0) = f_1 = \varphi_1(x)\cdot 1$ bzw. $M(0) = f_2 = \varphi_2(x)\cdot 1$ aus der Einzelkraft $P = 1$ entsprechen

$$\begin{bmatrix} V(\varphi_3)(0) & V(\varphi_4)(0) \\ M(\varphi_3)(0) & M(\varphi_4)(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} . \tag{10.3}$$

Für die rechte Seite wählt man den Ansatz

$$G_0(y,x) = a_1(x)\,\varphi_1(y) + a_2(x)\,\varphi_1(y) . \tag{10.4}$$

Die Lagerkräfte aus der Einzelkraft sind rechts $V(l) = -f_3 = -\varphi_3(x)$ und $M(l) = -f_4 = -\varphi_4(x)$, siehe Bild 3.18, also

$$\begin{bmatrix} V(\varphi_1)(l) & V(\varphi_2)(l) \\ M(\varphi_1)(l) & M(\varphi_2)(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_3(x) \\ -\varphi_4(x) \end{bmatrix} . \tag{10.5}$$

Alternativ kann man die Greensche Funktion für den gelenkig gelagerten Träger, [233] S. 210, mittels den beiden *shape function* φ_2 und φ_4 so modifizieren, dass die Endverdrehungen null sind.

Wenn der Träger andere Lagerbedingungen aufweist, etwa gelenkig-gelenkig, dann bestimmt man die Endverformungen $u_1 = 0, u_2, u_3 = 0, u_4$ der homogenen Lösung $w_h = \sum_i u_i\,\varphi_i$, die man zu $G(y,x)$ addiert, an Hand von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, mit $f_2 = -M(0), f_4 = M(l)$ (Momente der Einflussfunktion $G(y,x)$ an den Trägerenden), siehe hierzu das Bild 3.18; f_1 und f_3 werden nicht gebraucht.

10.3 Balken, *h* linear

Balken mit linear veränderlicher Höhe $h(x)$ und 1 m Breite.

Wir bestimmen die homogene Lösung, zerlegen diese in vier Teile,

$$w_n(x) = c_1 w_{h1}(x) + c_2 w_{h2}(x) + c_3 w_{h3}(x) + c_4 w_{h4}(x) \tag{10.6}$$

das geschieht durch wiederholte Anwendung des `subs`-Befehls, und berechnen daraus durch geeignete Wahl der c_{ij} die *shape functions* $\varphi_i(x)$. Mit diesen berechnen wir dann beispielhaft die Einflussfunktion für das Moment M in den Zehntelspunkten, siehe Bild 10.1.

```
clear
syms x h(x) w(x) C1 C2 C3 C4  l EI(x) xAuf
```

```
h(x) = 1 + 1/8 * x; EI(x) = 1.0 * h(x)^3/12; l = 4;

w(x) = dsolve( diff( diff(w,2)*h(x)^3/12,2) )
```

```
w(x) =
```

$$C_3 + C_4\,x + 6144\,C_1\,\log(x+8) + \frac{589824\,C_1 - 24576\,C_2 + x\,(98304\,C_1 - 6144\,C_2)}{x^2 + 16\,x + 64} + \frac{3072\,x\,(8\,C_1 + C_2 + 2\,C_1\,x)}{(x+8)^2}$$

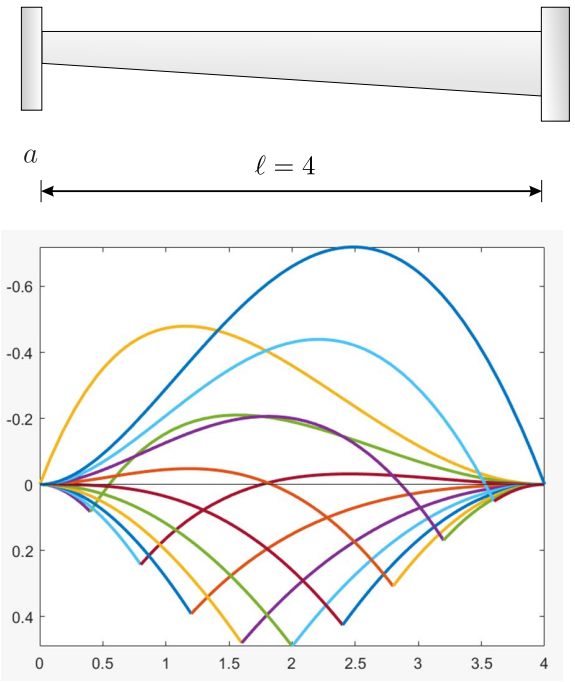


Bild 10.1. EF für das Moment $M(x)$ in den Zehntelspunkten, Stirnflächen 1:1.5

```
wd = diff(w,x); coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4])
```

coef =

$$\left(6144\,\log\left(x+8\right)+\frac{98304\,x+589824}{x^2+16\,x+64}+\frac{3072\,x\,\left(2\,x+8\right)}{\left(x+8\right)^2}\right)C_1\ldots$$
$$+\left(-\frac{6144\,x+24576}{x^2+16\,x+64}+\frac{3072\,x}{\left(x+8\right)^2}\right)C_2+C_3+x\,C_4$$

Extracting the single terms `wh{i}` (...) Ci

```
temp = subs(coef,[C2,C3,C4],[0,0,0]); % put C2,... = 0
  wh{1} = subs(temp,C1,1);  % put C1 = 1

coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C3,C4],[0,0,0]);
  wh{2} = subs(temp,C2,1);
```

```
coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C2,C4],[0,0,0]);
  wh{3} = subs(temp,C3,1);

coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C2,C3],[0,0,0]);
  wh{4} = subs(temp,C4,1);

equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
  coeff(i) = solve(equ{i},[C1,C2, C3, C4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).C1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).C2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).C3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).C4);
end

phi = cell(4,1); % cell array

for i = 1:4  % shape functions
   phi{i} = c(i,1) * wh{1} + c(i,2) * wh{2}...
    + c(i,3) * wh{3} + c(i,4) * wh{4};
 end

for i=0:10
  xAuf = 0.1 * i * l;
  Mphi1(x) = - EI(x) * diff(phi{1},2);j1= Mphi1(xAuf);
  Mphi2(x) = - EI(x) * diff(phi{2},2);j2= Mphi2(xAuf);
```

Section forces (Schnittkräfte) of phi3 and phi4

```
  Vphi3(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{3},2),1));
  Vphi4(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{4},2),1));
```

```
   Mphi3(x) = - EI(x) * diff(phi{3},2);
   Mphi4(x) = - EI(x) * diff(phi{4},2);
```

System of equations

```
   M = [Vphi3(0)  Vphi4(0); Mphi3(0)  Mphi4(0)];
   r = [j1, j2]; u = M\r';
```

GF on the left side of the source point

```
   GFL(x) = u(1) * phi{3} + u(2) * phi{4};
```

GF on the right side of the source point

Nodal forces, j3 = M(phi3)(x), j4 = M(phi4)(x), x = xAuf

```
   Mphi3(x) = - EI(x) * diff(phi{3},2);j3 =Mphi3(xAuf);
   Mphi4(x) = - EI(x) * diff(phi{4},2);j4 =Mphi4(xAuf);
```

Section forces of phi1 and phi2

```
   Vphi1(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{1},2),1));
   Vphi2(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{2},2),1));
   Mphi1(x) = - EI(x) * diff(phi{1},2);
   Mphi2(x) = - EI(x) * diff(phi{2},2);
```

System of equations

```
   M = [Vphi1(4)  Vphi2(4); Mphi1(4)  Mphi2(4)];
   r = -[j3, j4]; u = M\r';
```

GF on the right side

```
   GFR(x) = u(1) * phi{1} + u(2) * phi{2};

   fplot(GFL(x),[0,xAuf]),hold on,
   fplot(GFR(x),[xAuf,l]),axis ij,yline(0);
end
```

download code

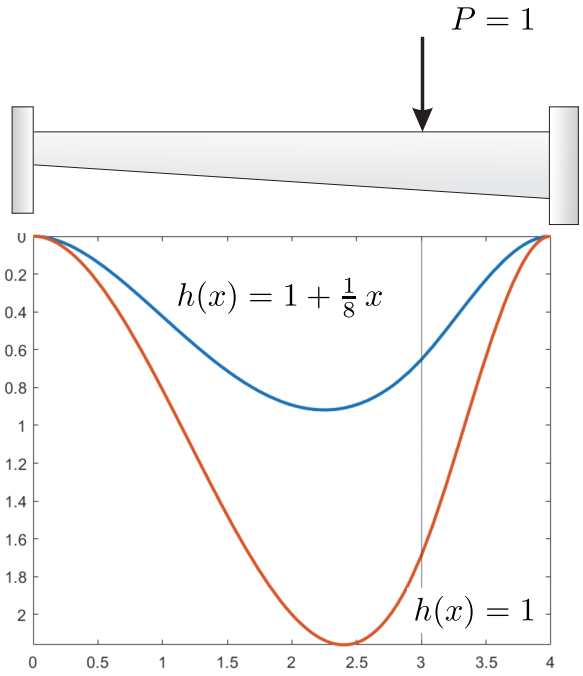


Bild 10.2. Einflussfunktion für $w(x = 3)$

Bemerkung 10.1. Das ganze hätten wir natürlich auch einfacher haben können, denn es gilt, siehe Bild 3.55 *a* auf Seite 316,

$$G_l(x) = (\ell - x) \cdot \varphi_3^e(y) - \varphi_4^e(y) \qquad G_r(x) = x \cdot \varphi_1^e(y) + \varphi_2^e(y)\,, \qquad (10.7)$$

unabhängig von der Balkengleichung $(EI(x)w''(x))'' = p$ also dem $EI(x)$, der Form des Balkens[1]. Man muss nur die *shape functions* der Differentialgleichung kennen, sie haben wir ja oben im ersten Teil bestimmt. For beams with general cross sections, see [333].

10.4 Dirac Delta

MATLAB™ kennt das **Dirac Delta**, δ_0 = `delta(x-0)`, und auch die höheren D. Deltas, δ_i = `diff(delta(x-0),i)`, (oder δ_i = `delta(i,x-0)`) und so kann man leicht die lokale Einflussfunktion für $w(x), w'(x), \ldots$ berechnen, siehe Bild 10.2.

[1] Wir haben das zumindest für linear veränderliches $EI(x)$ bestätigen können

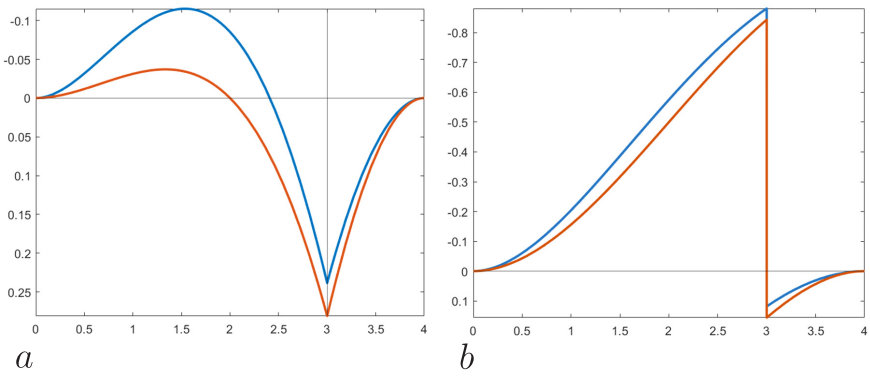


Bild 10.3. EF für $M(x)$ und $V(x)$, blau $h(x) = 1 + 1/8 \cdot x$, rot $h(x) = 1$

10.4.1 EF für $w(x)$

```
syms x  w(x) l h(x)

h(x) = 1 + 1/8 * x; l = 4; xAuf = 3; wd(x) = diff(w);
w(x) = dsolve( diff( diff(w,2)*h(x)^3/12,2)...
 == dirac(x-xAuf), w(0) == 0,wd(0) == 0, w(l) == 0,...
  wd(l) == 0);
```

download code

10.4.2 EF für $M(x)$ und $V(x)$ mit Dirac Delta

Der folgende *code* berechnet die Einflussfunktion für $M(x)$ und $V(x)$, siehe Bild 10.3, durch Lösen der Differentialgleichungen

$$(EI(y)\, G_2''(y,x))'' = -EI(x)\, \delta(y-x)'' \tag{10.8a}$$

$$(EI(y)\, G_3''(y,x))'' = \; EI(x)\, \delta(y-x)''' - EI'(x)\, \delta(y-x)''\,. \tag{10.8b}$$

Man beachte die Definition der rechten Seite! Dahinter verstecken sich die Dirac Deltas δ_2 und δ_3. Um das zu verstehen, überlagern wir die rechte Seite von (10.8a) mit einer Funktion w, und integrieren zweimal partiell

$$\int_0^l -EI(x)\, \delta(y-x)''\, w\, dy = -\int_0^l -EI(x)\, \delta(y-x)' w'\, dy \tag{10.9}$$

$$= \int_0^l -EI(x)\, \delta(y-x)\, w''\, dy = \int_0^l \delta(y-x)\, M(w)(y)\, dy = M(w)(x)\,. \tag{10.10}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist also das Dirac Delta δ_2

$$\int_0^l -EI(x)\,\delta(y-x)''w\,dy = \int_0^l \delta_2(y-x)\,w\,dy = M(w)(x)\,. \tag{10.11}$$

Entsprechendes gilt für die rechte Seite der zweiten Gleichung, die das Dirac Delta für die Querkraft

$$V(x) = -(EI(x)\,w''(x))' = -EI(x)\,w'''(x) - EI'(x)\,w''(x) \tag{10.12}$$

ist. Für weitere Details siehe Kapitel 9.28.

```
syms x  G2(x) G3(x) l h(x)

h(x) = 1 + 1/8 * x; l = 4; xAuf = 3; EI(x) = h^3 /12;
```

GF for M(x), x = xAuf

```
G2d(x) = diff(G2);

G2(x) = dsolve( diff( diff(G2,2)*EI(x),2) ==...
 -diff(EI(xAuf)*dirac(x-xAuf),2), G2(0) == 0,...
  G2d(0) == 0, G2(l) == 0, G2d(l) == 0);
```

GF for V(x), x = xAuf

```
G3d(x) = diff(G3); EId(x) = diff(EI);
G3(x) = dsolve( diff( diff(G3,2)*EI(x),2) ==...
   diff(EI(xAuf)*dirac(x-xAuf),3)...
    - diff(EId(xAuf)*dirac(x-xAuf),2),...
     G3(0) == 0, G3d(0) == 0, G3(l) == 0, G3d(l)==0);
```

download code

10.5 Stab, *h* linear

Stab mit linear veränderlicher Höhe $h(x)$ und 1 m Breite, siehe Bild 10.4.

```
syms x h(x) u(x) l shape1(x) shape2(x) C1 C2
h(x) = 1 + 2 * x;
```

Homogeneous solution

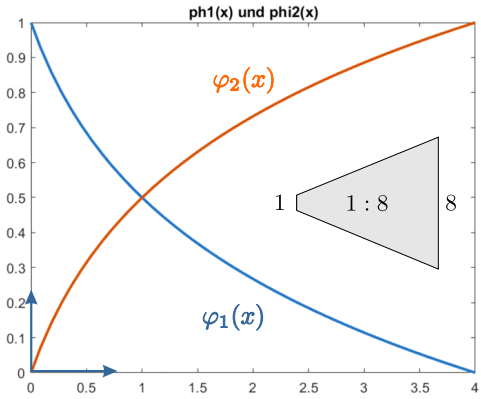


Bild 10.4. Bestimmung der homogenen Lösung eines Stabs, $-(EA(x)u')'$, und der *shape functions* mit MATLAB™

```
u(x) = -dsolve( diff( diff(u)*h(x)) )
```

$$\texttt{u(x)} = \frac{C_1 \log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2} - C_2$$

```
equ1 = [u(0) == 1, u(l) == 0];
equ2 = [u(0) == 0, u(l) == 1];

phi1 = solve(equ1,[C1,C2]);
phi2 = solve(equ2,[C1,C2]);

shape1(x) = subs(u(x),[C1,C2],[phi1.C1, phi1.C2])
```

$$\texttt{shape1(x)} = \frac{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)} - \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)}$$

```
shape2(x) = subs(u(x),[C1,C2],[phi2.C1, phi2.C2])
```

$$\texttt{shape2(x)} = \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)} + \frac{\log(2)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)}$$

download code

10.6 Gebetteter Balken

Shape functions des elastisch gebetteten Balkens

```
syms x l beta c1 c2 c3 c4

w(x) = exp(beta*x) *(c1 * cos(beta * x)...
 + c2 * sin(beta * x)) ...
  + exp(-beta * x) * (c3 * cos(beta * x)...
   + c4 * sin(beta * x))
```

w(x) =

$$e^{\beta x}\left(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x)\right)+e^{-\beta x}\left(c_3\cos(\beta x)+c_4\sin(\beta x)\right)$$

```
wd(x) = diff(w(x));
equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
  coeff(i) = solve(equ{i},[c1,c2, c3, c4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).c1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).c2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).c3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).c4);
end
```

```
c(1,1), c(1,2), c(1,3), c(1,4)
```

ans =

$$-\frac{2\,e^{2\beta l}-e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+e^{2\beta l}\sin(2\beta l)-1}{e^{4\beta l}-4\,e^{2\beta l}+2\,e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1}$$

ans =

$$\frac{e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+e^{2\beta l}\sin(2\beta l)-1}{e^{4\beta l}-4\,e^{2\beta l}+2\,e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1}$$

ans =

$$\frac{e^{2\beta l}\left(e^{2\beta l}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\beta l\right)-2\right)}{e^{4\beta l}-4\,e^{2\beta l}+2\,e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1}$$

ans =

$$\frac{e^{2\beta l}\left(e^{2\beta l}-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\beta l\right)\right)}{e^{4\beta l}-4\,e^{2\beta l}+2\,e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1}$$

```
c(2,1), c(2,2), c(2,3), c(2,4)
```

$$\texttt{ans} = -\frac{2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)^2}{\beta\left(4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)^2+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}-\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(2\,\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+1}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(2\,\beta\,l)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)^2}{\beta\left(4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)^2+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}-\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(\sin(2\,\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+1\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(2\,\beta\,l)+1\right)}$$

```
c(3,1), c(3,2), c(3,3), c(3,4)
```

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\sin(\beta\,l)-\cos(\beta\,l)+\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)+\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos(\beta\,l)-3\,\sin(\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)+\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\sin(\beta\,l)-\cos(\beta\,l)+\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)+\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos(\beta\,l)+\sin(\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)-3\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1}$$

```
c(4,1), c(4,2), c(4,3), c(4,4)
```

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\sin(\beta\,l)\,\left(\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}-1\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(2\,\beta\,l)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos(\beta\,l)+2\,\sin(\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\sin(\beta\,l)\,\left(\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}-1\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(2\,\beta\,l)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos(\beta\,l)-\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos(\beta\,l)+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin(\beta\,l)\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l}-4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}+2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos(\beta\,l)^2-1\right)+1\right)}$$

download code

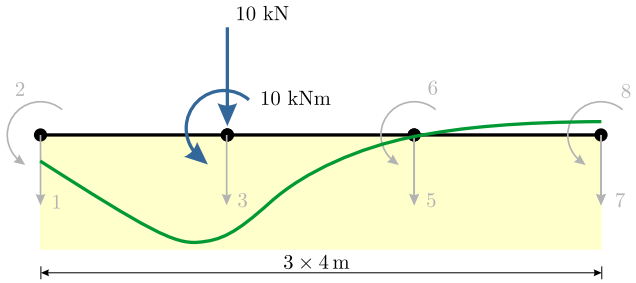


Bild 10.5. Elastisch gebetteter Träger, $\beta = 0.3976$

10.6.1 Zahlenbeispiel

Der Träger, $EI = 1$ und $c = 0.1$, siehe Bild 10.5, besteht aus drei 4 m langen Elementen. Es ist $\beta = (c/4\,EI)^{1/4} = 0.3976$.

```
syms x l beta c1 c2 c3 c4

cB = 0.1; EI = 1.0; beta = (cB/(4*EI))^(1/4), l = 4;
c = zeros(4,4); Ke = zeros(4,4); K = zeros(8,8);
```

Homogeneous solutions

```
wh = cell(4,1);

wh{1} = exp(beta*x)  * cos(beta * x);
wh{2} = exp(beta*x)  * sin(beta * x);
wh{3} = exp(-beta*x) * cos(beta * x);
wh{4} = exp(-beta*x) * sin(beta * x);

w(x) = c1*wh{1} + c2*wh{2} + c3*wh{3} + c4*wh{4};
wd(x) = diff(w(x));
```

Solving for the shape functions phi{i}

```
equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
```

```
  coeff(i) = solve(equ{i},[c1,c2, c3, c4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).c1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).c2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).c3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).c4);
end

phi = cell(4,1); % cell array

for i = 1:4
   phi{i} = c(i,1) * wh{1} + c(i,2) * wh{2}...
    + c(i,3) * wh{3} + c(i,4) * wh{4};
 end
```

Element matrix

```
for i = 1:4
  for j = 1:4
    Ke(i,j)=int(diff(phi{i},2)*diff(phi{j},2),[0,4])...
     + cB * int(phi{i}*phi{j},[0,4]);
  end
end
Ke
```

```
Ke = 4x4
    0.3325   -0.4558   -0.1393   -0.3283
   -0.4558    1.0584    0.3283    0.4567
   -0.1393    0.3283    0.3325    0.4558
   -0.3283    0.4567    0.4558    1.0584
```

Stiffness matrix

```
K(1:4,1:4) = Ke;
K(3:6,3:6) = K(3:6,3:6) + Ke;
K(5:8,5:8) = K(5:8,5:8) + Ke;
```

Load vector

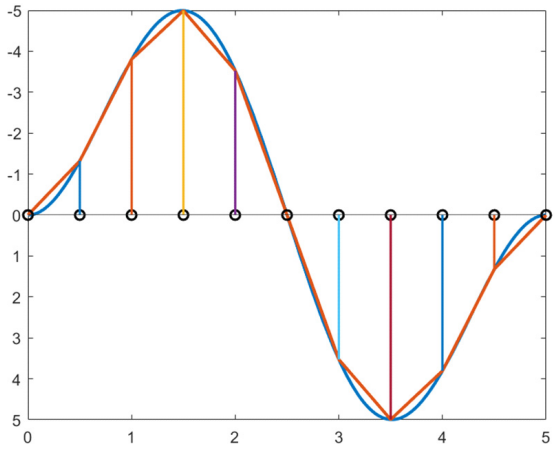


Bild 10.6. Interpolation mit linearen Elementen

```
r = zeros(1,8); r(3) = 10; r(4) = 10;
u = K\r';
Tabelle.u = u';
T = struct2table(Tabelle)
```

u							
5.9737	-6.6878	20.7913	6.5157	0.8272	2.0830	-2.0252	0.2299

download code

10.7 Seil mit finiten Elementen

Zum Schluss soll ein Seil zeigen, siehe Bild 10.6, wie man *hat-functions* in MATLAB als `triangularPulse` implementiert und wie man mit finiten Elementen Funktionen ‚interpolieren' kann.

Auf der Strecke $[0, 5]$ ist die Funktion $w(x) = x\,(x-5)\,\sin(2\,\pi\,x/L)$ mit den Randwerten $w(0) = w(L) = 0$ stückweise linear zu interpolieren. Dazu belasten wir ein Seil mit der Streckenlast $p(x) = -w(x)''$.

```
clear, clf, syms x w(x) p(x); L = 5;  elements = 10;

w(x) =  x * (x-5) * sin(x*2*pi/L) % <-- Original
p(x) =-diff(w,2);   % <-- Belastung
```

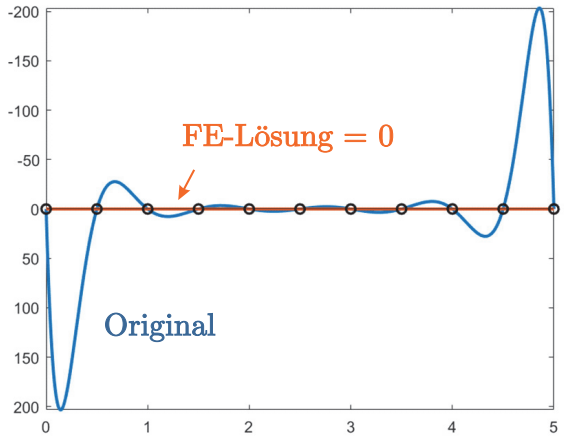


Bild 10.7. Weil das Original in allen Knoten durch null geht, sind alle $f_i = 0$ und $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ hat die Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

```
[f, nodes, deltax, xN] = NodalForces(p,L,elements);

K = elements/L * toeplitz([2,-1 zeros(1,nodes-4)]);

u = K\f; u = [0, u', 0];

fplot(w,[0,5],'LineWidth',2), axis ij, hold on

plot(xN,u,'LineWidth',2), yline(0); axis ij, hold on
plot(xN,0,'ko')
for k = 1:nodes - 1
  plot([xN(k) xN(k)],[0 u(k)]);
end
```

Hilfsfunktion (Unterprogramm in den *code* eingebettet)

```
function [f,nodes,deltax,xN]=NodalForces(load,L,elements)

syms x, nodes = elements + 1; deltax = L/elements;

xN = zeros(1,nodes); f = zeros(nodes-2,1);

% Koordinaten der Knoten
for k = 1:nodes,  xN(k) = deltax * (k-1); end
```

```
%Shape functions der Innenknoten
phi = cell(nodes,1); % cell array

for k = 2:nodes-1 % hat functions
  phi{k} = triangularPulse(xN(k-1),xN(k+1),x);
end

%Knotenkraefte
for k = 2:nodes-1
  f(k-1) =  int(load*phi{k},[0,L]);
end
end % end function
```

Und wenn die Funktion $w(x)$, wie in Bild 10.7, in allen Knoten durch null geht, dann sind alle $f_i = 0$,

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -w''\,\varphi_i\,dx = -[w'\,\varphi_i]_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} w'\varphi_i'\,dx - [w'\,\varphi_i]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'\varphi_i'\,dx = -w'(x_i)\cdot 1 + w'(x_i)\cdot 1 = 0\,, \tag{10.13}$$

weil $\varphi_i' = \pm 1/l_e$ eine Konstante ist, das Integral von w' die Differenz der Endwerte ist, $w(x_i) - w(x_{i-1}) = 0$, und $\varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = 0$ ist.

Weil die Greenschen Funktionen der Knoten in $\mathcal{V}_h$ liegen, ist die Interpolation in den Knoten im übrigen exakt, siehe Bild 10.6.

download code

10.8 Timoshenko Balken

Kragträger Bild 7.5

```
I=0.2*0.4^3/12; A=0.2*0.4; E=20000; G=0.5*E;
ell=4;  EI=E*I, GA=G*A, eta=12/ell^2*EI/GA
syms x
xi=x/ell; K=zeros(2,2);  % Zeile 3 und 4
K(1,1)=12; K(1,2)=6*ell; K(2,1)=K(1,2);
K(2,2)=(4+eta)*ell^2;
fak=EI/(ell^3*(1+eta)); K=fak*K; f=[10,0]; u=K\f';
w3(x)=1/(1+eta)*(3*xi^2 - 2*xi^3+eta*xi);
w4(x)=ell/(1+eta)*(xi^2 - xi^3+eta/2*(xi - xi^2));
w(x)=u(1)*w3(x)+u(2)*w4(x); w(x)=simplify(w(x))
wprime(x)=diff(w,1);
theta3(x)=1/(1+eta)*(-6/ell*xi*(1-xi));
```

```
theta4(x)=1/(1+eta)*(-xi *(2-3*xi - eta));
theta(x)=u(1)*theta3(x)+u(2)*theta4(x);
theta(x)=simplify(theta)
gamma(x)=theta(x)+wprime(x);gamma(x)=simplify(gamma(x));
V(x)=GA*gamma(x)
fplot(w(x),[0,ell],LineWidth=2),yline(0);axis ij,hold;
fplot(wprime(x),[0,ell], LineWidth=2),
fplot(theta(x),[0,ell], LineWidth=2),
fplot(V(x),[0,ell], LineWidth=2),
title('w,wprime,theta,V=GA_s*(wprime+theta)'),
axis([0 4 -5 11.5])
```

download code

Eingespannter Träger Bild 7.7

```
syms x  w(x)  th(x)
sol=dsolve((diff(w,2)+diff(th,1))==-10,-diff(th,2)...
+diff(w,1)+th(x)==0 w(0)==0,w(4)==0,th(0)==0,th(4)==0)
fplot(sol.w,[0,4],LineWidth=2), axis ij, title('w(x)')
figure,fplot(sol.th,[0,4],LineWidth=2),axis ij,yline(0);
title('theta(x)'), gamma(x)=diff(sol.w,1)+sol.th;
figure,fplot(gamma,[0,4],LineWidth=2),axis ij,yline(0);
title('gamma(x)')
```

download code

Einzellast Bild 7.8

```
syms x  w(x)  th(x)
ell = 4;
thprime = diff(th,1);
sol = dsolve((diff(w,2)+diff(th,1))==-dirac(x-2),...
  - diff(th,2) + diff(w,1) + th(x) == 0, w(0) == 0,...
  w(ell) == 0, thprime(0) == 0, thprime(ell) == 0)
w(x) = simplify(sol.w), th(x) = simplify(sol.th),
fplot(sol.w,[0,ell], LineWidth=2), axis ij,
title('w(x)')
figure, fplot(sol.th,[0,4],LineWidth=2), axis ij,
yline(0); title('theta(x)'), shg
kappa(x) = diff(sol.th,1)
figure, fplot(kappa,[0,ell],LineWidth=2), axis ij,
yline(0);
```

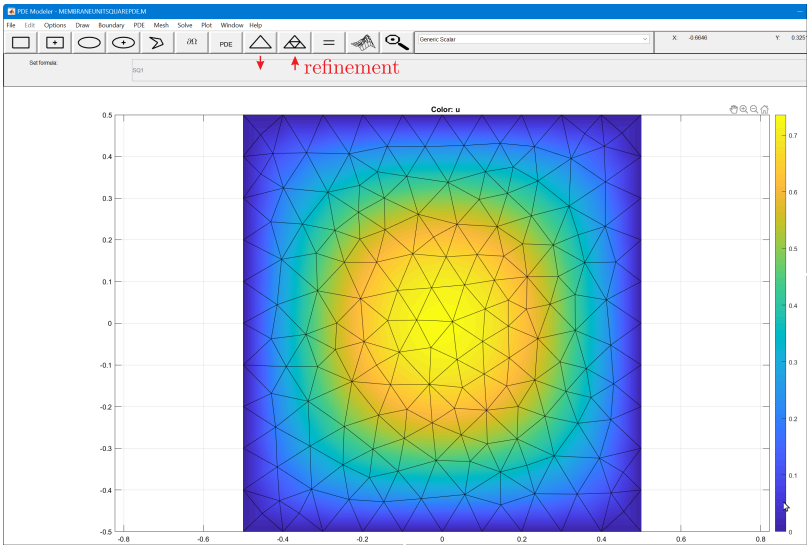


Bild 10.8. Oberfläche des PDE Modeler

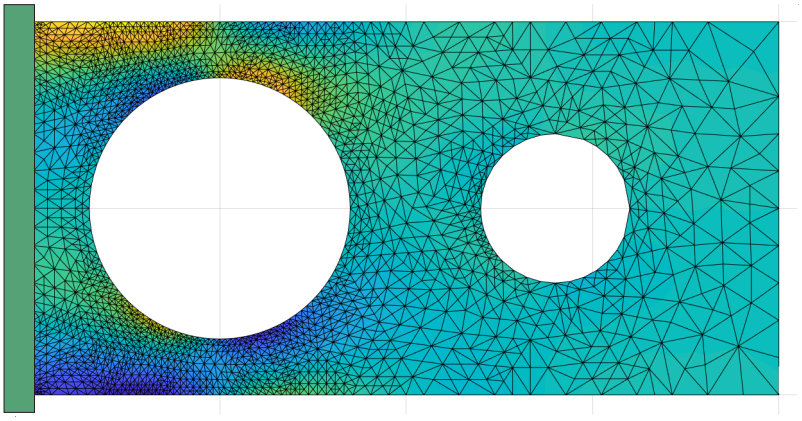


Bild 10.9. Farbprofil der Spannungen σ_{xx} in einer Kragscheibe im LF g

```
title('$$\kappa(x)$$','interpreter','latex',...
  'Fontsize',12), shg
gamma(x) = diff(sol.w,1) + sol.th;
gamma(x) = simplify(gamma(x)),figure,
fplot(gamma,[0,ell],LineWidth=2),
axis ij, yline(0); title('gamma(x)'), shg
```

download code

10.9 MATLAB™ pdetool

Download *file* which opens in the browser. Right mouse key to save file with extension .m. Start `pdetool` in the *Command Window* of MATLAB™ and load *file*. Click on icon = to start the calculation. When done click on *solve*, *export solution*, name it u and enter `max(u)` in the *Command Window* or just enjoy the pictures.

Membran in Bild 9.32

download file

Scheibe in Bild 3.1

download file

Scheibe in Bild 4.20

download file

Kragscheibe mit zwei kreisförmigen Öffnungen, siehe Bild 10.9

download file

10.10 function KTBC()

```
function[K,T,B,C] = KTBC(n)
K = toeplitz([2,-1 zeros(1,n-2)]);   % = 2 -1 0 0 0 ...
T = K; T(1,1) = 1;
B = K; B(1,1) = 1; B(n,n) = 1;
C = K; C(1,n) = -1; C(n,1) = - 1;
```

% toeplitz = each row the same as the first but shifted + wrap around

download m-file

Oft und gern gebraucht, um die Stab- oder Seilmatrix, $-1 \quad 2 \quad -1$, die einfachste FE-Matrix, (3.6),

```
K = KTBC(n)
```  (10.14)

(*Gilbert Strang's Lieblingsmatrix*) schnell zu erzeugen, [283] S. 7. Leicht zu merken: Die Determinante ist $n+1$ und die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}$ sind diskrete Sinus-Schwingungen, wie bei einem Seil unter sinus-förmiger Belastung.

11

Nachwort

Der Gedanke, ein solches Buch zu schreiben, hatte uns schon längere Zeit beschäftigt, aber den endgültigen Ausschlag gab dann ein eher zufälliger Blick in ein Statikskript, in dem der Autor die Einflussfunktion für ein Biegemoment herleitete und dies auf eine (aus mathematischer Sicht) eher wunderliche Weise.

Um Balkenstatik und Anschauung unter einen Hut zu bringen, musste er, für unser Empfinden, die Anschauung schon arg strapazieren.

Unsere Kritik und unser Standpunkt wird sicherlich nicht von allen Kollegen geteilt, deswegen haben wir sie auch hier in den Anhang verbannt, weil wir hier mehr Raum haben, unsere Sicht der Dinge darzulegen und wir hoffen zumindest Verständnis für unseren Standpunkt zu wecken. Diese Diskussion mag im Nachhinein auch unseren etwas axiomatischen Zugang rechtfertigen. Wir wollten Klarheit!

Virtuelle Arbeit ist ein Konzept der Analytischen Mechanik bzw. der Technischen Mechanik und bezeichnet sowohl die Arbeit, die eine Kraft an einem System bei einer virtuellen Verschiebung verrichtet, als auch die Arbeit, die eine virtuelle Kraft an einer realen Verschiebung leistet. Unter einer virtuellen Verschiebung versteht man eine Gestalt- oder Lageänderung des Systems, die mit den Bindungen (z. B. Lager) verträglich und „instantan", sonst aber willkürlich und außerdem infinitesimal klein ist. Das Prinzip der virtuellen Arbeit resultiert aus dem Prinzip der virtuellen Leistung und wird ebenso zur Berechnung des Gleichgewichts in der Statik und zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen (d'Alembertsches Prinzip) verwendet.

So wird in *Wikipedia* der Begriff der virtuellen Arbeit eingeführt, [319]. In ähnlichen Sätzen wird das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, der *Energieerhaltungssatz* und das *Prinzip der virtuellen Kräfte* beschrieben.

Aber was ist bitte *‚infinitesimal klein'*. Und wie passt zu dieser Forderung, dass die folgende Gleichung, die ja doch angeblich auf dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* beruht

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i, \tag{11.1}$$

auch richtig ist, wenn die Verrückung $\delta w = \sin(\pi\,x/l)$ den Balken an der maximalen Stelle um einen ganzen Meter ausgelenkt.

Und wieso kann man – das ist eigentlich das Problem – numerische Ergebnisse, wie die Gleichheit der beiden obigen Integrale, mit Prinzipien der Mechanik beweisen?

Wir meinen, man kann Sätze in einem Gebiet A (der Mathematik) nicht mit Sätzen aus einem Gebiet B (der Mechanik) beweisen. Das geht logisch nicht, wenn auch Ingenieure immer wieder dazu tendieren, weil ihnen die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik lieb und teuer sind, wie das folgende Zitat aus einer Korrespondenz mit einem Kollegen belegen mag:

‚Die Energie- und Arbeitssätze sind Naturgesetze und daher fundamental. Denn wenn der Energieerhaltungssatz nicht gelten würde, könnte man bei jeder Formänderung eines Tragwerks Arbeit bzw. Energie gewinnen: ein perpetuum mobile! Diese Sätze haben also zuerst einmal nichts mit der Mathematik zu tun, sondern bestehen an sich.’

Und weil sie nichts mit der Mathematik zu tun haben, so unsere Antwort, kann man mit ihnen kein mathematisches Ergebnis beweisen.

Die Eleganz der Mechanik, ihre Geschlossenheit, ihr innerer Reichtum, der ja nirgends so sichtbar wird, wie bei der mathematischen Formulierung, verführt Ingenieure dazu, mathematische Resultate aus mechanischen Prinzipien ‚herzuleiten‘.

Unsere Bemühungen um ein besseres Verständnis der Grundlagen quittierte ein Kollege einmal mit dem Satz: *‚Den Satz von Land kennt jeder Ingenieur, aber die zweite Greensche Identität?’* Was doch eigentlich nur beweist, dass der Kollege noch nie versucht hat, den Satz von Land herzuleiten, denn der Satz von Land beruht auf der zweiten Greenschen Identität. Mit der zweiten Greenschen Identität kann man die Ableitungen wie $M(x) = -EIw''(x)$ oder $V(x) = -EIw'''(x)$ einer Funktion $w(x)$ berechnen, und das gilt auch, wenn $w(x)$ die Zinskurve oder die Wasserstandslinie oder sonst eine Funktion ist. Man darf doch nicht den Kontext für den Grund nehmen.

Die Gründungsväter der Statik müssen sehr gut Mathematik gekonnt haben, denn es gab ja noch keinen *Mohr*, keinen *Müller-Breslau*, dem man über die Schulter schauen konnte. Man musste alles selbst herleiten und das ging nur auf mathematischem Wege, [181].

Nachdem aber das Grundgerüst stand, entdeckte man, wie sich fast spielerisch aus der Integralform des Gleichgewichts

$$\int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w dx = \int_0^l p\,\delta w dx \tag{11.2}$$

Integralsätze ergaben, die wir heute das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, das *Prinzip der virtuellen Kräfte* und den *Energieerhaltungssatz* nennen. Und

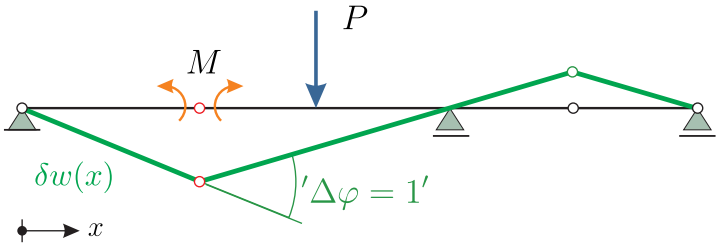


Bild 11.1. Einflussfunktion für ein Moment

das passte alles so wunderbar zueinander, dass diese Prinzipe heute nach Meinung der Ingenieure das Fundament der Statik darstellen. Wenn der Ingenieur eine Gleichung auf das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* zurückgeführt hat, dann hat er seiner Meinung nach die Gleichung bewiesen.

Solche Tendenzen haben auch den Gründungsvätern der Statik das Leben schwer gemacht. Es war Neuland und auf den Pionieren, die ja alle im Eisenbahn-Brückenbau arbeiteten, ruhte eine große Verantwortung und so suchten sie nach Rückversicherung an und in höheren Prinzipen und das führte zu langen Diskussionen, [182].

Auch für uns ist $\delta W_e = \delta W_i$ die Grundgleichung, aber wir identifizieren sie mit der ersten Greenschen Identität, $\mathscr{G}(u, \delta u) = \delta W_e - \delta W_i = 0$.

Das Problem sind die Ingenieure, die das $\delta W_e = \delta W_i$ verstanden haben, aber vergessen haben, wie man mittels partieller Integration dorthin gekommen ist und so werden aus Formeln ‚Naturgesetze'.

Jeder wird sich seine eigenen Gedanken darüber machen, wie die Grundgleichungen aus der Anschauung entstehen, und ob nicht die Identitäten einfach das wieder herausholen, was der Statiker bei der Formulierung des Gleichgewichts implizit hineingesteckt hat, aber dann sollte man den Studenten doch auch eine Möglichkeit geben mitzudenken.

Warum dreht man im Studium das ganze nicht um? Erst leitet man mittels partieller Integration aus $EIw^{IV} = p$ die Gleichung $\delta W_e = \delta W_i$ her – das verstehen die Studenten und sie sind mit im Boot – und dann formuliert man den obigen ‚Überbau'. Aber so wird die Gleichheit zweier Integrale, $\delta W_e = \delta W_i$, aus Variationsprinzipen hergeleitet, aus ‚höheren Prinzipen', und der Student sitzt zu Hause und rätselt: *Was sind diese Prinzipe? Sind es Naturgesetze, Rechenregeln, Erfahrungssätze?*

Die Schieflage, in die die Statik und die Mechanik auf diese Art und Weise gekommen ist, erkennt man am besten an dem Thema virtuelle Verrückungen. *‚Virtuelle Verrückungen müssen klein sein, oder, besser noch, infinitesimal klein sein'*. Wir haben auch schon gelesen, dass selbst virtuelle Kräfte angeblich klein sein müssen.

Zu welchen ‚Umwegen' das teilweise führt, möge das folgende Beispiel aus einem Statikskript belegen, in dem die Einflussfunktion für ein Moment hergeleitet wird.

Der Autor baut hierzu ein Momentengelenk ein, fügt zum besseren Verständnis eine Zeichnung hinzu, siehe Bild 11.1, in der er die durch eine Spreizung ‚$\Delta\varphi = 1$' ausgelöste virtuelle Verrückung anträgt, aber gleich darauf aufmerksam macht, dass die Zeichnung die Situation so darstelle, ‚wie man sie durch eine Lupe' sehe, denn in Wirklichkeit seien die Verrückungen infinitesimal klein. Seine Analyse führt ihn dann auf das Ergebnis

$$W_{1,2} = M \cdot \Delta\varphi + P \cdot \delta w(x) = 0 \tag{11.3}$$

oder aufgelöst nach $M = -P \cdot \delta w(x)/\Delta\varphi$ womit sich

$$\beta(x) = \frac{\delta w(x)}{\Delta\varphi} = \frac{\delta w(x)}{1} \tag{11.4}$$

als die gesuchte Einflussfunktion ergibt. Hierzu bemerkt der Autor: ‚Zwar ist $\delta w(x)$ infinitesimal klein, aber der Quotient β ist endlich groß, da sich die virtuellen Verrückungen bei der Division herauskürzen.'

Nun steht ‚$\Delta\varphi = 1$' für

$$\Delta\varphi = \tan\varphi_l - \tan\varphi_r = 1\,, \tag{11.5}$$

und wenn man die Endtangenten derart verdreht, dann ist $\delta w(x)$ nicht mehr ‚klein', und auch nicht beliebig skalierbar, weil es ja nur eine Kurve $\delta w(x)$ gibt, die die Bedingung (11.5) erfüllt und gleichzeitig die Lagerbedingungen des Trägers respektiert! Was der Autor wahrscheinlich meint ist, dass man das Gelenk beliebig spreizen kann, solange man nicht vergisst, die Verrückung $\delta w(x)$ durch die Spreizung $\Delta\varphi$ zu dividieren, was zulässig ist, weil die Balkengleichung $EIw^{IV}(x)$ linear ist. Die Kurven $\beta(x) = \delta w(x)/\Delta\varphi$ sind daher alle gleich, unabhängig davon, wie groß δw ist; aber es geht natürlich auch ohne Lupe, siehe Kapitel 2.3.2.

Das Grundproblem ist die Interpretation der Gleichungen. Geht es um die statische Bedeutung oder um den mathematischen Gehalt?

Bei einer Diskussion mit einem Kollegen hat der zweite Autor einmal vorgeschlagen, man könnte ja die Gleichung, über die diskutiert wurde, mit einer beliebigen Zahl multiplizieren. Worauf der Kollege den Kopf zur Seite neigte, die Augen zur Zimmerdecke richtete und einwand: *‚Das können Sie nicht, die Zahl muss sehr klein sein, eben eine virtuelle Verrückung, ansonsten kann man das nicht!'* Der Kollege hat die Mechanik hinter der Gleichung gesehen, aber nicht die Mathematik. Zu einem mathematischen Gedankenexperiment (und nur darum ging es), war er nicht bereit.

Statische Probleme werden mit mathematischen Hilfsmitteln gelöst. Aber anders als der Mathematiker, der nie den Kreis seiner abstrakten Symbole



Bild 11.2. Detail der Müngstener Brücke, [327]

verlässt, muss der Ingenieur diese Grenze überschreiten und die Mathematik auf reale Probleme anwenden. Das ist ein schwieriger Prozess, aber die Belohnung ist immens. Dass es möglich ist, mit Mathematik reale Probleme zu lösen, ist ein Wunder, wie der Nobelpreisträger *Eugene Wigner* erstaunt bemerkt hat, [314].

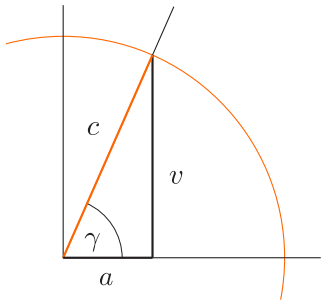
Euler fand die Knicklast einer frei stehenden Stütze

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 \, EI}{4 \, l^2} \,, \tag{11.6}$$

indem er den kleinsten Eigenwert $\lambda > 0$ einer Differentialgleichung bestimmte, aber es ist dann der Ingenieur, der den Mut haben muss, dieses mathematische Ergebnis auf die Wirklichkeit zu übertragen, Stützen danach zu dimensionieren.

Die große Leistung von Mohr war, dass er den Tragwerksplanern dafür gerade stand, dass die Arbeitsgleichung auf Fachwerke wie z.B. die Müngstener Brücke, siehe Bild 11.2, anwendbar war. Die Modellbildung und die Verifizierung der Modelle, das waren im 19. Jahrhundert die entscheidenden Schritte in der Entwicklung der Statik, [182], und sie sind es auch heute noch.

Aus mathematischer Sicht ist *Heisenbergs Unschärferelation* eine Eigenschaft der *Fouriertransformation*, aber das wahre Wunder ist, dass sie in der Welt um uns herum, in der Quantenwelt, gilt und die vielen Diskussionen, die die neue Quantenmechanik ausgelöst hat, sind ein Hinweis, dass die Frage nach dem ***Sein***, der ***physikalischen Realität*** – die in der Mathematik nie vorkommt(!) – von fundamentaler Bedeutung für den Physiker und den Ingenieur ist.



$$a^2 = c^2 - v^2$$

$$\cos\,\gamma = \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Bild 11.3. Der *cosinus* des Winkels γ ist für die Effekte der speziellen Relativitätstheorie verantwortlich, c ist die Lichtgeschwindigkeit

Angenommen man erfindet spielerisch einen Satz von Regeln (Axiomen) und man weiß nicht, ob diese Regeln vollständig und widerspruchsfrei sind und plötzlich entdeckt man physikalische Objekte, die sich genau an diese Regeln halten. Würde das ein Mathematiker als ein Beweis für Konsistenz und Vollständigkeit gelten lassen?

Die Abtriebskraft an einem Hang ist eine Funktion des *sinus* des Hangwinkels φ

$$F = m \cdot g \cdot \sin\varphi \tag{11.7}$$

und so kommt es, dass eine nichtlineare Funktion die Erosion der Hänge in den Gebirgen bestimmt.

Oder man nehme die ***Lorentz Kontraktion*** $l \to l'$ eines Objektes, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cdot \cos\gamma \tag{11.8}$$

und die ***Zeitdehnung*** $t \to t'$, die dazu gehört[1]

$$t' = t \cdot \frac{1}{\cos\gamma}\,. \tag{11.9}$$

Beide Ausdrücke hängen von dem *cosinus* des Winkels γ ab, siehe Bild 11.3,

$$\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \ldots \tag{11.10}$$

[1] Auch in der Statik gibt es den $1/\cos\gamma$-Effekt. Wenn man einen Fahnenmast am Kopf, Last $H = 1$, abspannt und der Fusspunkt des Seils rückt gegen den Fahnenmast, $\gamma \to \pi/2$, dann reißt irgendwann das Seil, denn $S = 1/\cos\gamma$



Bild 11.4. Der Schwarzsche Stiefel, [325]

Was hat Trigonometrie mit spezieller Relativitätstheorie zu tun? Die Physiker erklären uns, dass die Genauigkeit des GPS-Systems von diesen Korrekturen abhängt.

Es ist dieses enge Wechselspiel zwischen Physik und Mathematik, das es dem Ingenieur schwer macht, beides sauber zu trennen.

Aber gute Statik hat gute Mathematik nötig. Wie oft sind wir nicht gezwungen anzuerkennen, dass mathematische Fehler entsprechende Fehler in den Berechnungen zur Folge haben. *Garbage in, garbage out*, wie man im englischen sagt. Anscheinend existiert eine unterirdische Verbindung zwischen den Computern und der Mathematik. Computer honorieren gute Mathematik.

Um diese enge Verbindung zwischen Mathematik und Statik sichtbar zu machen, haben wir die ersten Kapitel dieses Buches mit einem relativ spitzen Bleistift geschrieben. Unsere Absicht war dabei nicht, die Statik zu einem Zweig der Mathematik zu machen, sondern das Ziel war, die Grundlagen der Statik besser zu verstehen.

Praxis braucht Theorie, sie ergänzen einander. Diese Isostasie ist jedoch, wenn wir uns hier diese Bemerkung erlauben dürfen, in Gefahr zu kippen, weil inzwischen immer aufwendigere Nachweise dem Ingenieur das Leben schwer machen, [265]. Die heutige **Regulierungswut** und die von den Normen immer exzessiver gepflegte **Reinraumkultur** sind im Grunde ein Missbrauch der Wissenschaft und sie schaden der Wissenschaft: Sie wird zum Gespött in den Augen der Praktiker.

Die Professoren haben *wikipedia* gekapert. Viele mathematische Artikel sind inzwischen unlesbar[2]. Und der Eurocode? So lobenswert (und auch anstrengend) das Bemühen ist, den Stand des Wissens zu kanonisieren, am Ende

[2] siehe z.B. den Satz von Stokes (15. August 2022). Englische Fassung

macht der Eurocode auf uns den Eindruck, dass er von Spezialisten (mit Dauerstellen) für Ingenieure (mit Dauerstellen) geschrieben wurde[3].

Damit aber genug der Schelte, zurück zu dem Thema dieses Kapitels!

Der Satz von Castigliano

Wie sich Mathematik und Anschauung in die Quere kommen können, macht in einer exemplarischen Weise der Satz von Castigliano deutlich. *Wikipedia* schreibt über den Satz von Castigliano, [320]:

Die partielle Ableitung der in einem linear elastischen Körper gespeicherten Formänderungsenergie nach der äußeren Kraft ergibt die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft.

Aber die Formänderungsenergie eines elastischen Körpers, der eine Einzelkraft trägt, ist unendlich groß, und daher kann man keine Ableitung berechnen und auch die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes ist unendlich groß, wie man an *Sobolevs Einbettungssatz* ablesen kann. Der Satz von Castigliano gilt zwar für Stabtragwerke, aber für Kontinua (Ausnahme Kirchhoff-Platte) im allgemeinen nicht. Der Nachsatz *‚wenn die Energie endlich ist‘* würde als Korrektur ausreichen. (Sinngemäß dasselbe gilt für den *Satz von Menabrea* und den *Satz von Engesser*).

Es hätte sich nur jemand die Mühe machen müssen, den Satz an einer Scheibe einmal auszuprobieren! Wenn es Kritik gab, so bezog sie sich nur auf Castigliano's Herleitung, [108], [181], die ihn ja dann auch übersehen ließ, dass die Erweiterung auf Kontinua unzulässig ist.

Castigliano hat gesehen, dass die elastische Energie von Fachwerken ein quadratisches Polynom in den u_i ist, siehe (1.236), worauf sein Satz beruht und er hat den Satz auf elastische Kontinua verallgemeinert, weil er sich ein solches Kontinuum als ein Fachwerk aus unendlich vielen Stäben dachte.

Aber die elastische Energie eines von Einzelkräften ‚gepieksten‘ Kontinuums (2-D und 3-D) ist kein Polynom in den u_i.

Anschauung und Intuition mögen uns auf die richtige Spur führen (oder eben auch in die Irre[4]), aber das letzte Wort hat dann doch die Mathematik. *Rechnen* in der Statik ist angewandte Mathematik. Hinter jeder Zahl im Ausdruck oder auf dem Bildschirm steht ein mathematisches Gesetz. Welche Fülle von statischen Details erschließt die Mathematik nicht in den Händen eines geschickten Ingenieurs, man schaue nur in die Bücher von *Karl Girkmann* und *Christian Petersen*!

---

[3] Merkwürdig dabei ist nur, dass – gegenläufig hierzu – in der Öffentlichkeit Argumente immer weniger zählen. *‚Nur sollte keiner mucken, der nicht so denkt wie wir‘.* Goethe zur ‚Preßfreiheit‘, Zahme Xenien (‚Gastgeschenke‘) (Auszug).

[4] In der Mathematik gibt es mehrere Beispiele, wo die Anschauung versagt, wie z.B. beim Schwarzschen Stiefel, einem endlich großen Zylinder, dessen aus immer kleiner werdenden Polygonen zusammengesetzter Mantel in der Grenze eine unendlich große Fläche hat, siehe Bild 11.4. Das Bild 11.5 versucht sich an der Bestimmung von π.

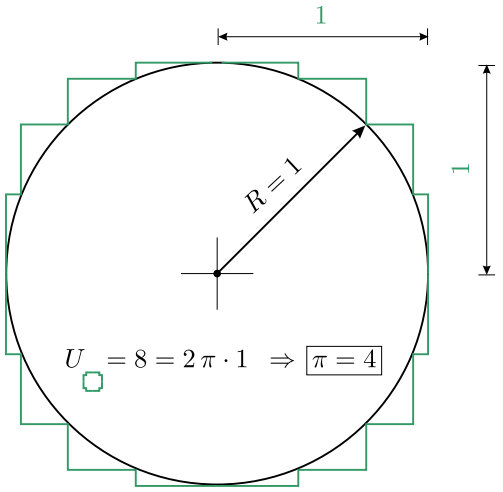


Bild 11.5. The more folds the closer is the polygon to the circle $\Rightarrow \pi = 4$, [261]. Try it with a strip of paper of length 8. A tight fight does not mean same length.

Wir wollen mit einem Zitat von Robert Taylor, dem Co-Autor von O.C. Zienkiewicz schließen, [294]. Robert Taylor kann man sicherlich nicht vorwerfen die Mathematik ihrer selbst wegen zu pflegen, dazu ist er viel zu sehr Ingenieur, aber es war auf einer Tagung in den USA, wo er vor dem Plenum verkündete

The principle of virtual displacements is nothing else than integration by parts.

Dass Robert Taylor den Mut hatte, das ‚vor versammelter Mannschaft' zu sagen und meinte, es sagen zu müssen, hat uns wiederum Mut gemacht, dieses Buch zu schreiben.

12

Software

12.1 Download

Die folgenden Programme stehen im *download* zur Verfügung:

BE-LAPLACE	Poisson Probleme
BE-PLATTE	Plattenprogramm
BE-SCHEIBE	Scheibenprogramm
BE-FRAMES	Ebene Rahmen
WINFEM	einfaches Scheibenprogramm
WINFEM-P	einfaches Plattenprogramm

Die ersten drei Programme basieren auf der Methode der Randelemente. Viele der Zeichnungen in diesem Buch wurden mit diesen drei Programmen erstellt, weil man mit Randelementen glattere Verläufe erhält, was ja gerade bei der grafischen Darstellung erwünscht ist.

Auf http://www.winfem.de/software.htm und http://www.be-statik.de liegen **englischsprachige** Versionen der Programme.

Das vierte Programm BE-FRAMES ist ein englischsprachiges Lehr-Programm zur Berechnung von ebenen Rahmen mit Focus auf der Darstellung von Einflussfunktionen. Dieses Programm demonstriert ferner die Anwendung der ***one-click-reanalysis***, siehe Kapitel 5.29, bei der man mit einfachen Mausklicks Stäbe entfernen kann oder in ihrer Steifigkeit modifizieren kann, ohne dass die Steifigkeitsmatrix neu aufgestellt werden muss.

Die WINFEM-Programme sind Programme zur Berechnung von Scheiben und Platten mit Focus auf der Berechnung von Einflussfunktionen, siehe z.B. 3.47, 3.48, 3.68, 3.78, 3.134, 3.141, 3.142, 4.15, 4.16, 4.19, 4.21, 4.23. Das Scheibenprogramm benutzt bilineare Elemente und rechnet auf Wunsch adaptiv. Das Plattenprogramm basiert auf bikubischen Elementen – also den Ansatzfunktionen des Biegebalkens, nur eben in beiden Richtungen. Beide Programme können den Lastfall p_h darstellen, siehe z.B. 3.23, 3.28.

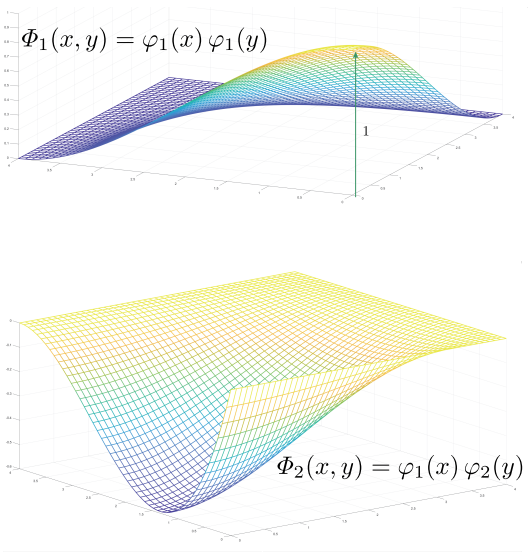


Bild 12.1. Die *shape functions* in dem Plattenprogramm WINFEM-P basieren auf den Balkenfunktionen $\varphi_i(x)$ in (3.159), (MATLAB™)

Autor von WINFEM ist Prof. Dr.-Ing. T. Grätsch, thomas.graetsch@haw-hamburg.de.

Ergänzungen: Prof. Dr.-Ing. D. Materna, daniel.materna@hs-owl.de

Handbücher

BE-LAPLACE
BE-PLATTE
BE-SCHEIBE
BE-FRAMES
WINFEM

Weitere Informationen siehe http://www.be-statik.de

12.2 Position Minnert

In dem Buch Stahlbeton-Projekt: 5-geschossiges Büro- und Geschäftshaus Konstruktion und Berechnung nach Eurocode 2 [210] des Kollegen Minnert sind die statischen Nachweise für ein 5-geschossiges Büro- und Geschäftshaus im Sinne einer ‚Musterlösung' dokumentiert. Zu den Nachweisen gehört auch die FE-Berechnung der Regelgeschossdecke mit MicroFE.

Die BE-Eingabedaten für die Platte, Position MINNERT, liegen in dem Ordner BEISPIELE des Plattenprogramms BE-PLATTE, in den drei Dateien

ACADGEO.MINNERT
ACADLAST.MINNERT
ACADPKT.MINNERT

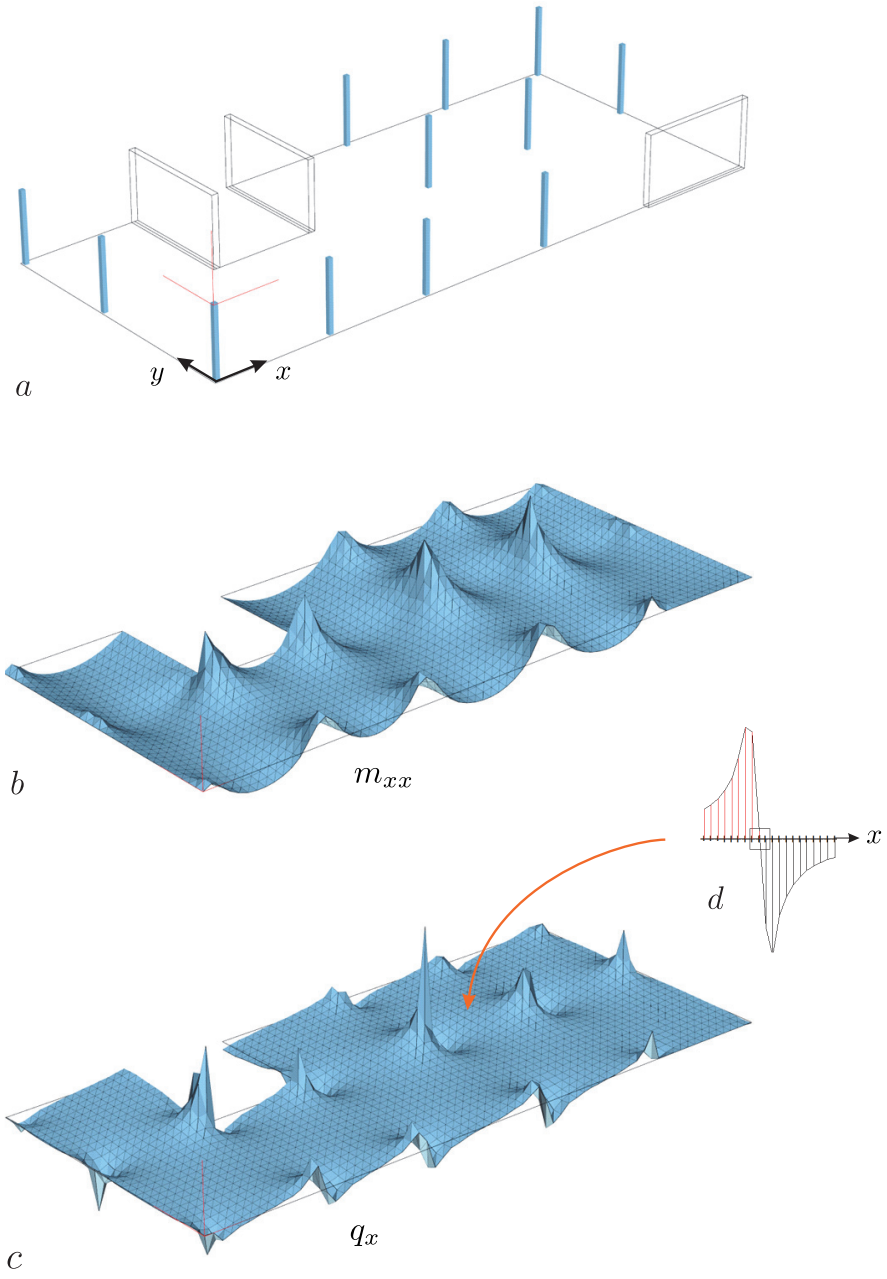


Bild 12.2. Pos. Minnert **a)** Unterkonstruktion **b)** Momente m_{xx} und **c)** Querkräfte q_x im LF g, Raster der Spannungspunkte (Ergebnispunkte) 0.4×0.4, **d)** q_x nahe der zentralen Stütze. Die Stützkraft wird als Flächenkraft, $0.3\,\mathrm{m} \times 0.3\,\mathrm{m}$, gerechnet (BE-PLATTE)

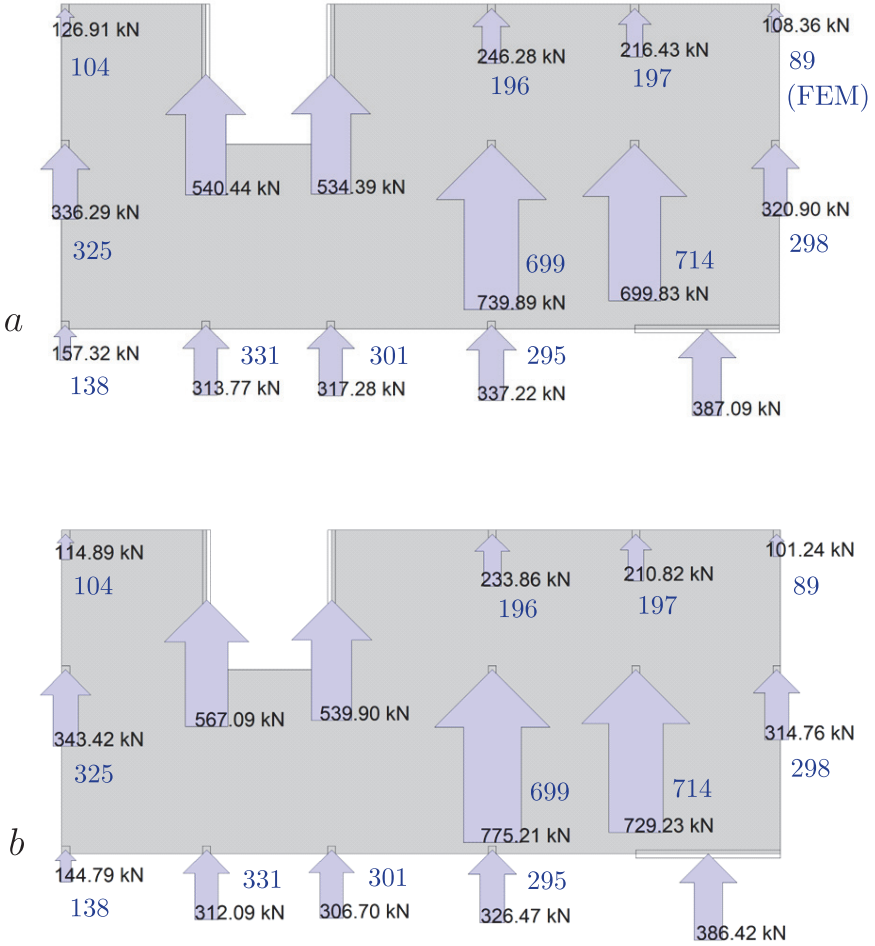


Bild 12.3. Pos. Minnert, Vergleich der BE-Lagerkräfte im GZT mit [210] Seite 66 **a)** nachgiebige Stützen, $0.3 \times 0.3 \times 3.2$ + Kopfmomente **b)** $EA = \infty$

Wir haben versucht die FE-Platte möglichst getreu nachzubilden.

Laden der Position über die Stationen:

Tools	Von ACAD-Dateien laden	ACADGEO.MINNERT

Beim *click* auf den zweiten *button* sollte sich der Ordner BEISPIELE im Programmverzeichnis von BE-PLATTE öffnen.

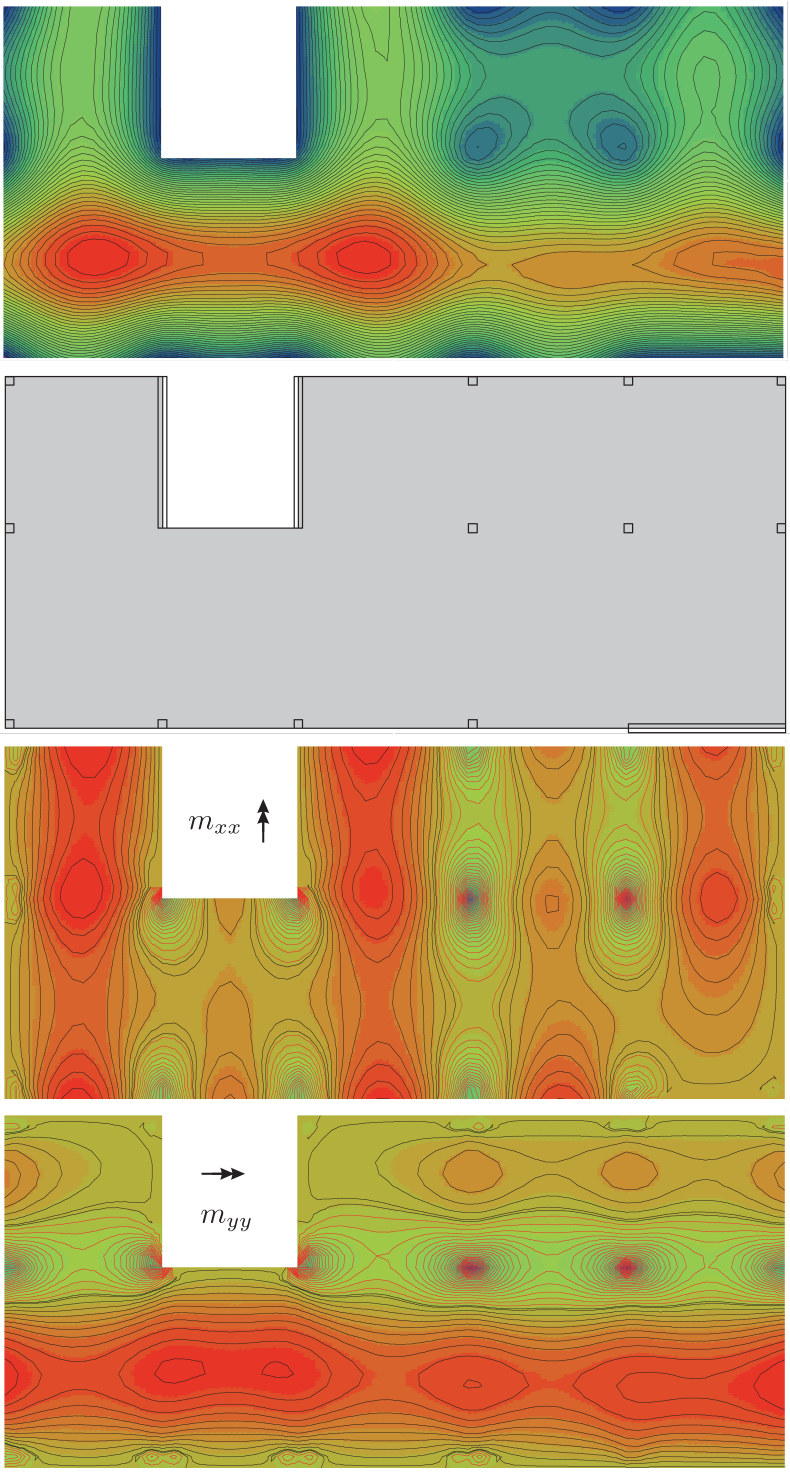


Bild 12.4. Pos. Minnert, LF g, Durchbiegung der Platte und Momente m_{xx} und m_{yy} (BE-PLATTE)

C:\Program Files (x86)\BE-STATIK\BE-PLATTE\BEISPIELE

Wählen Sie die Datei ACADGEO.MINNERT und klicken Sie auf den Button Öffnen, um die Position zu laden! Danach können Sie direkt die Berechnung starten.

Alternativ: Windows-Explorer öffnen, zum Ordner BEISPIELE gehen und die Datei ACADGEO.MINNERT auf das geöffnete Programm BE-PLATTE ziehen. Die anderen beiden Dateien werden automatisch mitgeladen.

Mit diesem Beispiel hat der Leser auch einen Vergleich zwischen einer schubweich gerechneten Platte (Reissner-Mindlin, MicroFE) und einer schubstarr gerechneten Platte (Kirchhoff, BE-PLATTE).

12.3 Spannungspunkte

Die BE-Programme kommen ohne Knoten aus, sie benutzen statt dessen Spannungspunkte, siehe Seite 81. Die Spannungspunkte bilden ein Gitter, das die ganze Platte bedeckt, oder sie formen einzelne Linien, z.B. in den Achsen der Wände oder sie bilden *cluster* von einzelnen Punkten, z.B. um die Stützen. Die Spannungspunkte sind die **Ergebnispunkte**, in denen die Durchbiegungen und Schnittkräfte berechnet werden. Anders als bei finiten Elementen kann es durchaus verschiedene Sätze von Spannungspunkten pro Position geben, der Neugier sind keine Grenzen gesetzt.

Die Schnittkräfte in den Spannungspunkten werden – für jeden Punkt einzeln – durch Integration über den Rand, durch Auswertung der Einflussfunktionen berechnet. Der Abstand der Punkte hat keinen Einfluss auf die Genauigkeit, diese hängt nur von der Größe der Elemente auf dem Rand ab.

Es wird auch nicht zwischen den einzelnen Punkten gemittelt, nicht künstlich geglättet oder interpoliert. Das geschieht erst bei der grafischen Darstellung. Das Zeichenprogramm interpoliert linear zwischen den Werten in den Spannungspunkten, was dann im Ergebnis so aussieht, als ob das BE-Programm Dreieckselemente benutzen würde, wie z.B. in Bild 12.2, aber das sind die typischen CAD-Elemente.

Literatur

1. Abdelkhalak EH, Bouchaib R (2017) Dynamics of Large Structures and Inverse Problems. Wiley ISTE
2. Abu Kassim AM, Topping BHV (1987) "Static reanalysis: a review", J. Structural Engrg. 113:1029-1045
3. Akgun MA, Garcelon JH, Haftka RT (2001) "Fast Exact Linear and Non-linear Structural Reanalysis and the Sherman-Morrison-Woodbury Formulas", Int. J. Num. Methods Eng. 50(7): 1587-1606
4. Altenbach H, Altenbach J, Kissing W (2004) Mechanics of Composite Structural Elements. Springer, Heidelberg
5. Altenbach H, Altenbach J, Naumenko K (2016) Ebene Flächentragwerke. Springer, Heidelberg, 2. Auflage
6. Alastuey A, Clusel M, Magro M, Pujol P (2016) Physics and Mathematical Tools. World Scientific Publishing
7. Arora S (1976) "Survey of Structural Reanalaysis Techniques", ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 102:783-802
8. AutoCAD DWG TrueView — DWG Viewer— Autodesk
9. Baar S (2015) Lohmeyer Baustatik 1, Lohmeyer Baustatik 2. Springer, Heidelberg
10. Babuška I (1994) "Courant element: Before and after", in Finite Element Methods: Fifty Years of the Courant element, M. Kiiiek, P. Neittaanmäki, and R. Stenberg, eds., Marcel Dekker, New York, 1994, pp. 37–51.
11. Babuška I (1997) Der Doktorand war Roland Maucher, Ort: Cafeteria der Bauhaus-Universität in Weimar, IKM-Tagung, siehe S. 82
12. Babuška I, Strouboulis T (2001) The Finite Element Method and its Reliability. Oxford University Press
13. Babuška I, Andersson B (2005) "The splitting method as a tool for multiple damage analysis", SIAM J. Sci. Comput. Vol 26, 4, 1114-1145
14. Babuška I, Whiteman JR, Strouboulis T (2011) Finite Elements, An Introduction to the Method and Error Estimation. Oxford University Press
15. Balaš J, Slădek J, Slădek V (2013) Stress Analysis by Boundary Element Methods. Elsevier
16. Bangerth W, Rannacher R. (2003) Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin
17. Barth C, Walter R (2013) Finite Elemente in der Baustatik-Praxis. Beuth
18. Başar Y, Krätzig WB (1985) Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg & Sohn
19. Bathe K-J (1996) Finite Element Procedures. Prentice Hall, New Jersey
20. Baumgart R (2020) Räumliche Aussteifung im Stahlbetonbau
21. Baumgart R (2021) Stabwerkmodelle im Stahlbetonbau
22. Bebr A (1971) "Einflusslinien torsionssteifer Trägerroste", Bautechnik 48, 7, 233-237
23. Belytschko T, Wing Kam Liu, Moran B, Elkhodary KI (2014) Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Wiley
24. Bembel (2018) The BEM-based engineering library
25. Bembel (2019) The Fast Isogeometric Boundary Element C++ Library for Laplace, Helmholtz, and Electric Equation
26. Benvenuto E (1981) La Scienza delle Costruzioni e il suo Sviluppo Storico. Sansoni, Firenze
27. Bergermann R, Göppert K (2000) "Das Speichenrad - Ein Konstruktionsprinzip für weitgespannte Dachkonstruktionen", Stahlbau 69, H. 8, 595-604

28. Beyer K (1927) Die Statik im Stahlbetonbau. Reprint Springer, Heidelberg 1987
29. Bing Images, I-40 Hernando DeSoto Bridge Tennessee, I-40
30. Bischoff MR (2010) "Statik am Gesamtmodell: Modellierung, Berechnung und Kontrolle", Der Prüfingenieur 36, 27-34
31. Bletzinger KU, Dieringer F (2014) Aufgabensammlung zur Baustatik: Übungsaufgaben zur Berechnung ebener Stabtragwerke. Hanser Verlag
32. Blaauwendraad J (2010) Plates and FEM. Springer, Heidelberg
33. Block P, Gengnagel C (2015) Faustformel Tragwerksentwurf. DVA
34. Boborykin VG (2012) "Green's function for Kirchhoff plates of irregular shape", Engineering Analysis with Boundary Elements 36, 613-625
35. Bochmann F, Kirsch W (2011) Statik im Bauwesen. Huss Medien
36. Bodendiek P (2007) Trag- und Verormungsverhalten des historischen Bahrmühlenviaduktes (Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode). Dissertation Uni Braunschweig
37. Bohn C, Vogt N (2018) "Lasttransfermethode zur Berechnung von Gründungen und Baugrundverbesserung mit starren Säulen", Bautechnik 95, H. 9, 597-606
38. de Borst R, Crisfield MA, Remmers J, Verhoosel C (2014) Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von Fekörpern und Strukturen. Wiley VCH
39. Bouma A L (1993) Mechanik schlanker Tragwerke. Springer, Heidelberg
40. Bryant J, Sangwin C (2008) How Round is your Circle? Princeton University Press
41. Büttner O, Hampe E (1977) Bauwerk Tragwerk Tragstruktur Band 1. Verlag Gerd Hatje Stuttgart
42. Busch W (1982) Das grosse Wilhelm Busch Hausbuch. Südwest Verlag München, Bild 1.1
43. Carl O, Zhang C (2010) "Static and dynamic analysis of cracked or weakened structures", Proc. Appl. Math. Mech. 10:145–146
44. Carl O (2011) Statische und dynamische Sensitivitätsanalysen von geschädigten Tragwerken mit Greenschen Funktionen, Dissertation Universität Siegen
45. Carl O, Villamil P, Zhang C (2011) "Stress and free vibration analysis of functionally graded beams using static Green's functions", Proc. Appl. Math. Mech. 11, 199–200
46. Carl O, Hartmann F, Zhang C (2017) "Schnelle Berechnung von Änderungen und Varianten bei komplexen Tragsystemen (3D-Modellen) - Neue Ansätze in der Baustatik unter Verwendung von Einflussfunktionen", Stahlbau (März 2017) 217-224
47. Carl O, Hartmann F, Zhang C (2021) Reanalysis of structures with varying cross-sectional values based on influence functions. PAMM - Proc. Appl. Math. Mech. 2021;21:1 e202100106m. Wiley-VCH,
48. Castigliano CAP (1875) Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, (2) 11 127-286, Tesi (1873)
49. Choi KK, Kim N-H (2005) Structural sensitivity analysis and optimization. Vol. 1, Linear Systems, Vol.2, Nonlinear systems and applications. Springer, New York
50. Ciarlet PG, Raviart P-A (1972) "General Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods", Arch. Ration. Mech. Anal. 46(3) 177-199
51. Çirak F, Ramm E (2000) "A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem", Int. J. Num. Methods in Eng. 47:379–393

52. Clough RW (1991) “Original Formulation of the Finite Element Method”, Finite Elements in Analysis and Design 7, 89-101,
53. Clough RW, Wilson EL (1999) Early Finite Element Research at Berkeley. Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999
54. Clough RW, Penzien J (2003) Dynamics of Structures. McGraw Hill. 3. Aufl.
55. Clough RW Early history of the finite element method from the view point of a pioneer
56. Connor J (1976) Analysis of Structural Member Systems. The Ronald Press Company (mit vielen hilfreiche Details zur Differentialgeometrie)
57. Connor J, Faraji S (2012) Fundamentals of Structural Engineering. Springer New York
58. Connor J, Laflamme, S (2014) Structural Motion Engineering. Springer, Heidelberg
59. Cornish, NJ (1998) Lagrange points
60. Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y (2009) Isogeometric analysis : toward integration of CAD and FEA. Wiley
61. Dallmann R (2015) Baustatik 1, 2, 3. Hanser Verlag
62. Dankert J, Dankert H (2013) Technische Mechanik. Springer Vieweg
63. Deif A (1986) Sensitivity Analysis in Linear Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
64. Deuflhard P, Weiser M (2020) Numerische Mathematik 3. De Gruyter. 2. Aufl.
65. Dhatt G, Touzot G, Lefrançois (2012) Finite Element Method. ISTE, Wiley
66. Dieringer R (2014) Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten mit besonderem Fokus auf der Ermittlung von Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben. Dissertation TU Darmstadt
67. Dinkler D (2014) Grundlagen der Baustatik. Springer, Heidelberg
68. DIN 1055-100:2001-03 Kombination für ständige und vorübergehende Bemessungssituationen für den Nachweis des Grenzzustandes der Tragfähigkeit, wenn sie sich nicht auf Materialermüdung bezieht. Seite 24, (14)
69. Duddeck FME (2002) Fourier BEM. Springer, Heidelberg
70. Duhamel D (2007) “Finite element computation of Green’s function”, Engineering Analysis with Boundary Elements 31, 919-930
71. Dürr H (2000) “Seilnetze, Planung, Berechnung, Ausführung und Werkplanung”, Stahlbau 69, H. 8, 585-594
72. Ebel H (1979) “Zur Berücksichtigung von Verformungslastfällen in den Reziprozitätssätzen von Betti, Maxwell und Krohn-Land”, Stahlbau 49, H. 5, 137-140
73. Estep D, Holst M, Larson M (2005) “Generalized Green’s functions and the effective domain of influence”, SIAM J. Sci. Comput. Vol. 26, No. 4, 1314-1339
74. Fastabend M (2002) “Zur ingenieurmäßigen Bestimmung des Steifigkeitsabfalls von Stahlbeton im Zustand II”, Beton- und Stahlbetonbau 97, H. 8, 415-420
75. Fastabend M, Schäfers T, Albert M, Lommen H-G (2009) “Zur sinnvollen Anwendung ganzheitlicher Gebäudemodelle in der Tragwerksplanung von Hochbauten”, Beton- und Stahlbetonbau 104, H. 10, 657-663
76. Firus A (2018) MATLAB™ Routinen zur Dynamik der Baukonstruktionen, Begleitmaterial zu dem Buch [235], Springer, Heidelberg
77. Franck SA (2016) Zum Tragsicherheitsnachweis bestehender Mauerwerksgewölbebrücken mittels nichtlinearer Finite-Elemente-Simulationen. Dissertation Universität Hannover
78. Franke W, Kunow T (2007) Kleines Einmaleins der Baustatik. Kassel University Press

79. Fingerloos F, Hegger J, Zilch K (2012) Kurzfassung des EUROCODE 2 für Stahlbetontragwerke im Hochbau. Ernst & Sohn
80. Fish J, Belytschko T (2007) A First Course in Finite Elements. John Wiley & Sons, Ltd.
81. Fuchs, M B (2016) Structures and Their Analysis. Springer, Heidelberg
82. Fußeder M, Wüchner R, Bletzinger K-U (2021) "Sensitivitätsanalyse mit verallgemeinerten Einflussfunktionen zur Tragwerksbewertung bei Modellparametervariationen", Bauingenieur, Bd. 96, Nr. 6, 191-200
83. Fußeder M, Bletzinger K-U (2021) "Sensitivitätsanalysen unterstützen die Auslegung statischer Systeme und können Sicherheitsrisiken aufdecken", Der Prüfingenieur 59, 48-55
84. Fußeder M, Wüchner R, Bletzinger K-U (2022) "Towards a computational engineering tool for structural sensitivity analysis based on the method of influence functions", Engineering Structures 265 (2022) 114402
85. Gade J, Ramm E, Kurrer K-E, Bischoff M (2022) "Marc Biguets Beitrag zur Berechnung der Seilnetztragwerke für die Olympischen Spiel 1972", Stahlbau 91, H. 9, 612-621
86. Gartz M, Schütt J (2020) "Räumliche Tragwerksentwicklung - Erfahrungen aus dem Planungsalltag..." Berichte der Fachtagung Baustatik-Baupraxis 14, Universität Stuttgart, http://dx.doi.org/10.18419/opus-10762
87. Gaul L, Fiedler C (2013) Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. Springer, 2. Auflage
88. Ghali A (2009) Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach. Taylor & Francis Ltd.
89. Gimsing NJ, Georgaki CT (2012) Cable Supported Bridges. Wiley
90. Giovannini J (2011) Cleveland Clinic Las Vegas
91. Girkmann K (2013) Flächentragwerke. Springer Wien, Nachdruck der 6. Auflage von 1986
92. Goebbels S (2015) An Inequality for Negative Norms with Applications to Error of Finite Element Methods. Technischer Bericht FB Elektrotechnik und Informatik Nr. 2015-02 Hochschule Niederrhein, ISSN 2199-031X
93. Golub GH, van Load CF (2013) Matrix Computations, 4th ed. The John Hopkins University Press Baltimore
94. Gopalakrishnan S, Ruzzene M, Hanagud S (2011) Computational Techniques for Structural Health Monitoring. Springer, Heidelberg
95. Gotische Fensterrose von 1332 Katharinenkirche in Oppenheim, Rheinland-Pfalz, Widmung Prof. Petersen. Grusskarte der Deutschen Stiftung Denkmalschutz Foto: M.-L. Preiss.
96. Graf W, Vassilev T (2006) Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik. Ernst & Sohn
97. Grätsch T, Hartmann F (2000) "Zum Gleichgewicht bei finiten Elementen", Bautechnik 77, 30-36
98. Grätsch T, Hartmann F, Katz, C (2004) "Einflussfunktionen und finite Elemente", Bauingenieur 11, 489-497
99. Grätsch T, Hartmann F (2006) "Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions", Computational Mechanics, 37, 5, 394-407
100. Grätsch T, Hartmann F (2001) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 1: Scheiben", Bautechnik 78, 327-332

101. Grätsch T, Hartmann, F (2003) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 2: Platten", Bautechnik 80, 162-168
102. Grätsch T (2002) L_2-Statik. Dissertation Universität Kassel
103. Grätsch T, Hartmann F (2003) "Finite element recovery techniques for local quantities of linear problems using fundamental solutions", Computational Mechanics, 33:15–21
104. Grätsch T, Hartmann F (2004) "Duality and Finite Elements", Finite Elements in Analysis and Design, 40, 1005–1020
105. Grätsch T, Bathe KJ (2005) "Influence functions and goal-oriented error estimation for finite element analysis of shell structures", Int. J. Num. Methods in Eng., 63(5), 631–788
106. Gruttmann F, Sauer R, Wagner W (2000) "Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic behaviour", Int. J. Num. Methods in Eng. 48: 1675–1702
107. Gründig L (1976) Die Berechnung von vorgespannten Seilnetzen und Hängenetzen unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichsrechnung. Dissertation, DGK Reihe C, Nr. 216 und SFB 64-Mitteilungen 34
108. Grüning M (1912) Theorie der Baukonstruktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. IV/2, Leipzig B.G. Teubner, S. 429-430
109. Gurtin ME (1972) The Linear Theory of Elasticity, Handbuch der Physik Band VIa/2 Festkörpermechanik II, Ed. C. Truesdell, Series Ed. S. Flügge, Springer, Heidelberg
110. Häussler-Combe U (2014) Computational Methods for Reinforced Concrete Structures. Ernst & Sohn Berlin
111. Hager WW (1989) "Updating the inverse of a matrix", SIAM Review, Vol. 31, No. 2, 221-239H
112. Hake E, Meskouris K (2001) Statik der Flächentragwerke. Springer, Heidelberg
113. Hartmann F (1981) "The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces", Journal of Elasticity, Vol. 11, 403-4023
114. Hartmann F (1982) "The physical nature of elastic layers", Journal of Elasticity, Vol. 12, 19-29
115. Hartmann, F, Pickhardt S (1985) "Der Fehler bei finiten Elementen", Bauingenieur, 60, 1985, 463-468
116. Hartmann F (1985) The Mathematical Foundation of Structural Mechanics. Springer, Heidelberg
117. Hartmann F, (1986) Methode der Randelemente. Springer, Heidelberg
118. Hartmann F, (1989) Introduction to Boundary Elements. Springer, Heidelberg
119. Hartmann F, Maucher R (1997) "Zum Momentengleichgewicht bei Tragwerksberechnungen nach Theorie zweiter Ordnung", Tagung IKM Weimar
120. Hartmann F, Jahn, P (1999) "Integral Representations for the Deflection and the Slope of a Plate on an Elastic Foundation", Journal of Elasticity 56, 145-158
121. Hartmann F, Maucher R (1999) "Corner Singularities of Kirchhoff Plates and the Boundary Element Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 173, 273-285
122. Hartmann F, Jahn P (2001) "Boundary Element Analysis of Raft Foundations on Piles", Meccanica 36, 351-366
123. Hartmann F, Katz C (2002) Statik mit finiten Elemente, 1. Aufl. Springer, Heidelberg

124. Hartmann F, Kunow T (2005) "The shift of Green's functions and the domain of influence", 2nd MIT Conference on Computational Fluids and Solid Mechanics
125. Hartmann F, Katz C (2010) Structural Analysis with Finite Elements, 2nd ed. Springer, Heidelberg
126. Hartmann F (2013) Green's Functions and Finite Elements. Springer, Heidelberg
127. Hartmann F, Jahn P (2014) "Steifigkeitsänderungen bei finiten Elementen", Bauingenieur 89, 209-215
128. Hartman F, Jahn P (2020) Statics and Influence Functions – From a Modern Perspective. 2nd ed. Springer, Heidelberg
129. Hartman F, Jahn P (2024) Statik und Einflussfunktionen – vom modernen Standpunkt, 8. Aufl., Kobra Uni-Kassel
130. Hartmann F, Katz C (2019) Statik mit finiten Elementen, 2. Aufl. Springer, Heidelberg
131. Harsuijker C, Welleman J W (1999) Engineering Mechanics. Springer, Heidelberg
132. Haug E J, Choi K K, Komkov V (1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press
133. Heller M, Hartmann T (2020) Zur Berechnung von Wandscheiben im Hochbau. pcae-GmbH
134. Herwig T, Wagner W (2017) Zur Behandlung von Vouten im Rahmen der FEM. Der Bauingenieur 92 H. 10, 444–453
135. Herzog M (2001) "Die Tragfähigkeit schiefer Platten", Beton- und Stahlbetonbau 96, H. 8, 552-560
136. Hirschfeld K (2006) Baustatik - Theorie und Beispiele. Springer, Heidelberg
137. History of FEM 1 siehe auch → Clough
138. History of FEM 2
139. Hoegel B (2022) Kontinuumsmechanik, Internet-Skript
140. Hoehland G (1957) Stützmomenten-Einflussfelder durchlaufender Platten. Springer, Heidelberg
141. Hofmann J (2021) "Normung im Bauwesen - Quo vadis?" Beton- und Stahlbetonbau 115, H. 9, 641-641 (Editorial)
142. Höffgen J (2015) Aussteifung und Stabilität im Stahlbetonbau, Formelsammlung
143. Höllig K (2003) Finite Element Methods with B-splines. SIAM
144. Holzer S (1995) "The *h*-, *p*- and *hp*-versions of the BEM in elasticity: numerical results", Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 255-265
145. Holzer S (2006) "Vom Einfluss des Analysewerkzeugs auf die Modellbildung". Bautechnik 83, 6, 428-434
146. Holzer S (2015) Statische Beurteilung historischer Tragwerke, 1 und 2. Ernst & Sohn
147. Holzer S (2021) Gerüste und Hilfskonstruktionen im historischen Baubetrieb. Ernst & Sohn
148. Homberg H (1955) Einflusslinie von Schrägseilbrücken. Stahlbau 24, H. 2, 40-44
149. Hon YC, Li M, Melnikov YA (2010) "Inverse source identification by Green's function", Engineering Analysis with Boundary Elements 34, 352-358
150. Horst H, Krings W (2017) Kleine Baustatik. Springer, Heidelberg, 18. Auflage
151. Hsiao GC, Wendland WL (2008) Boundary Integral Equations. Springer, Heidelberg

152. Irslinger J (2013) Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente Diss. Uni Stuttgart
153. Jahn P (1998) Die Randelement-Methode für elastisch gebettete Platten. Dissertation Uni Kassel
154. Karnovsky IA, Lebed O (2010) Advanced Methods of Structural Analysis. Springer, Heidelberg
155. Katz C, Stieda J (1993) "Praktische FE-Berechnung mit Plattenbalken", Bauinformatik 1/92 30-34
156. Katz C, Werner H (1982) "Implementation of nonlinear boundary conditions in finite element analysis", Computers & Structures Vol. 15, No. 3, 299-304
157. Katz C (1995) "Kann die FE-Methode wirklich alles?" FEM 95 - Finite Elemente in der Baupraxis, Ed. E. Ramm, E. Stein, W. Wunderlich Ernst & Sohn, Berlin
158. Katz C (1986) "Berechnung von allgemeinen Pfahlwerken", Bauingenieur 61 H. 12
159. Katz C (1997) "Fließzonentheorie mit Interaktion aller Stabschnittgrößen bei Stahltragwerken", Stahlbau 66, H. 4, 205-213
160. Katz C (1996) "Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser", in: Software für Statik und Konstruktion, Eds. C. Katz, B. Protopsaltis, A.A. Balkema Rotterdam, (1996)
161. Katz C (2020) "Modellierung punktgestützter Platten". Baustatik-Baupraxis 14, Uni Stuttgart, http://dx.doi.org/10.18419/opus-10762
162. Kellogg OD (1929) Foundations of Potential Theory. Springer, Heidelberg (reprint)
163. Kemmler R, Ramm E (2001) "Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente", Beton-Kalender 2001. Ernst & Sohn Berlin
164. Kersten R (1962) Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Springer, Heidelberg, 2. Auflage
165. Kindmann R, Krüger U (2013) Stahlbau Teil 1: Grundlagen. Ernst & Sohn, 5. Auflage
166. Kindmann R (2021) Stahlbau Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung. Ernst & Sohn, 5. Auflage
167. Kirsch U (2008) Reanalysis of Structures. Springer, Heidelberg
168. Kirsch W (2019) Statik im Bauwesen. Beuth
169. Knöpke B (1994) "The hypersingular integral equation for the bending moments mxx, and myy of the Kirchhoff plate" Computational Mechanics, 15, 19-30
170. Kolář V (1970) "The Influence Functions in the Finite Element Method", ZAMM 50 T 129–T 131
171. Kollár LP, Springer GS (2003) Mechanics of Composite Structures. Cambridge University Press
172. Kollmann M (2010) Sensitivity Analysis: The Direct and Adjoint Method. Masterarbeit Uni Linz
173. Kiener G, Wunderlich W (2004) Statik der Stabtragwerke. Teubner Verlag
174. Krätzig W B, Wittek U (1995) Tragwerke 1. Springer, Heidelberg
175. Krätzig W B, Harte R (2016) Tragwerke 2. Springer, Heidelberg
176. Krätzig W B, Başar Y (1997) Tragwerke 3. Springer, Heidelberg
177. Kraus M (2005) Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaus. Dissertation, Uni Bochum
178. Kraus M, Kindmann R, (2020) Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau. Ernst & Sohn, 2. Auflage

179. Krug S, Stein P (1961) Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten. Springer, Heidelberg
180. Kuna M (2008) Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. Vieweg + Teubner
181. Kurrer K-E (2016) Geschichte der Baustatik. Ernst & Sohn, 2. Auflage
182. Kurrer K-E (2018) The History of the Theory of Structures. Wiley Ernst & Sohn
183. Laggner TM, Schlicke D, Nguyen VT, Denk W-D (2020) "Statische Analyse mit linear elastischen 3D-Gebäudemodellen", Beton- und Stahlbetonbau 116, Heft 5, 360–369
184. Laggner TM, Schlicke D, Nguyen VT, Denk W-D (2021) "Statische Analyse mit 3D-Gebäudemodellen unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen in den vertikalen Bauteilen", Beton- und Stahlbetonbau 116, Heft 6, Seiten 419-430
185. Land R (1887) "Über die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen als Grundlage einer allgemeinen Darstellung der Einflusslinien aller Trägerarten, sowie einer allgemeinen Theorie der Träger überhaupt", Wochenblatt für Baukunde, pp. 14-16, 24-25, 33-35 (Quelle nach Kurrer (2018))
186. Laumann, Feldmann, Frickel, Krahwinkel, Kraus, Stranghöner, Ummenhofer (2022) Petersen Stahlbau Springer
187. Lawo M, Klingmüller O, Thierauf G (1980) Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik, 2 Bände. Vieweg
188. Lehmann C, Maurer B (2006) Karl Culmann und die graphische Statik. Ernst & Sohn
189. Link M (2014) Finite Elemente in der Statik und Dynamik. Teubner Verlag, 4. Auflage
190. Linkwitz K, Schek H-J, Gründig, L (1974) "Die Gleichgewichtsberechnung von Seilnetzen unter Zusatzbedingungen". Ingenieur-Archiv 43, 183-192
191. Linkwitz K (1999) "Arbeit auf Ehrenwort - Fritz Leonhardt und die Münchner Olympiadächer", Bautechnik 76, H. 7, 608-614
192. Lumpe G, Gensichen V (2014) Evaluierung der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software. Ernst & Sohn
193. McMahon D (2019) Quantum Mechanics Demystified. McGrawHill, p. 5
194. Mann W (1997) Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre. Teubner-Verlag
195. Maucher R, Hartmann F (1999) "Corner Singularities of Kirchhoff plates and the boundary element method". Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 173 (3), 273-285
196. Materna D, Barthold FJ (2008) "On Variational Sensitivity Analysis and Configurational Mechanics". Computational Mechanics 41(5):661–681.
197. Marti O (2020) Mechanik (Hilfe bei Transformationen und beim Umrechnen)
198. Marti P (2014) Baustatik: Grundlagen–Stabtragwerke–Flächentragwerke. Ernst & Sohn, 2. Auflage
199. Maxwell JC (1864) "On the Calculation of the Stiffness of Frames". Philosophical Magazine Vol. 27 pp. 294-299
200. mb AEC Software GmbH Tutorial 5.12.2023 Stahlbeton-Knotennachweise
201. mb AEC Software GmbH Tutorials Video-Mediathek Level A, B, C
202. Mehlhorn G, (1995) Der Ingenieurbau, 9 Bde, Baustatik/Baudynamik. Ernst & Sohn
203. Mehlhorn G, Curbach M, (2014) Handbuch Brücken. Springer, Heidelberg
204. Meissner U, Maurial A (2009) Die Methode der finiten Elemente: Eine Einführung in die Grundlagen. Springer

205. Melchers RE, Beck A (2018) Structural Reliability Analysis and Predicition. Wiley 3rd edn.
206. Melchers R, Hough R (2007) Modeling Complex Engineering Structures. ASCE Press ISBN (print): 978-0-7844-0850-6ISBN (PDF): 978-0-7844-7153-1
207. Merkel M, Öchsner A (2015) Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode. Springer, Heidelberg
208. Meskouris K, Butenweg C, Haker E, Holler S (2005) Baustatik in Beispielen. Springer, Heidelberg
209. Meskouris K, Hake E (2009) Statik der Stabtragwerke: Einführung in die Tragwerkslehre. Springer, Heidelberg
210. Minnert J (2022) Stahlbeton-Projekt: 5-geschossiges Büro- und Geschäftshaus Konstruktion und Berechnung nach Eurocode 2. Bauwerk BBB Beuth 5. Auflage
211. Michlin SG (1978) Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main
212. Moler C (2019) interp_gadget, MATLAB Central File Exchange. Retrieved January 2, 2019.
213. Möhrmann W (Mercedes-Benz AG) private Mitteilung
214. Mörsch E (1947) Statik der Gewölbe und Rahmen, Teil A und Teil B, Wittwer Stuttgart
215. Molina-Vilegas JC, Ortega JEB (2023) "Closed-form solution of Timoshenko frames using the Green's Function Stiffness Method". Int. J. Solids and Structures. 269. 112180
216. Müller-Breslau H (1927) Die graphische Statik der Baukonstruktionen. (3 Bände) Band I, Band II 1. Abteilung, Band II 2. Abteilung. Alfred Kröner Verlag Leipzig, später Stuttgart, 6. Auflage
217. Müllers I (2007) Zur Robustheit im Hochbau – Stützenausfall als Gefährdungsbild für Stahlbetontragwerke. Dissertation ETH Zürich
218. Mukherjee S, Mukherjee YX (2005) Boundary Methods, Elements, Contours and Nodes. Taylor & Francis
219. NASA Lagrange Points
220. Nasdala L (2015) FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. Springer, Heidelberg
221. Nather F (2005) "Christian Petersen 75 Jahre Stahlbau 74, 1042-1043
222. Naumes JC (2009) Biegeknicken und Biegedrillknicken von Stäben und Stabsystemen auf einheitlicher Grundlage. Dissertation TH Aachen
223. Oden JT, Reddy JN 1976 An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. John Wiley & Sons
224. Oechsner A (2020) Partial Differential Equations of Classical Structural Members. Springer, Cham
225. Oñate E (2013) Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids, Volume 2: Beams, Plates and Shells. Springer, Heidelberg
226. Pahl PJ, Damrath R (2001) Mathematical Foundations of Computational Engineering. Springer, Heidelberg
227. Pałkowski S (1989) Statik der Seilkonstruktionen Springer, Heidelberg
228. Paranova S (2010) "Modelling and static analysis of two dimensional regions containing multi-phase inclusions by Boundary Element Method", Journal of theoretical and applied mechanics, Sofia, Vol. 40, 4, 101-118
229. Peter B, Pfaff K, Sonntag D (2015) "Hospitalhof Stuttgart (BIM und die Chance eines Paradigmenwechsels)", Beton- und Stahlbetonbau 110, H. 11, 775-783

230. Peters K-H (2004) Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Dissertation Universität Hamburg
231. Petersen C (1966) Beitrag zur praktischen Berechnung zylindrischer Tonnenschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser. Dissertation TH München
232. Petersen C (2000) "Danksagung des Trägers der Auszeichnung des Deutschen Stahlbaus 2000". Stahlbau 69 Heft 12, Seite 1000
233. Petersen C (2011) Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Vieweg+Teubner
234. Petersen C (2008) Stahlbau. Vieweg, 4. Auflage, Fortführung siehe [236]
235. Petersen C, Werkle H (2018) Dynamik der Baukonstruktionen. 2. Aufl. Springer Vieweg. MATLAB™ Dateien M_05_1, ML_19_1 und ML_22_1 Kapitel 3.85, download http://www.springer.com/de/book/9783834814593.
236. Laumann, Feldmann, Frickel, Krahwinkel, Kraus, Stranghöner, Ummenhofer (2022) Petersen Stahlbau Springer
237. Pfeiffer M (2019) "Ein Hochhaus der neuen Generation", Beton- und Stahlbetonbau 114, H. 7, 505-516
238. Pfeiffer M (2021) "Ein Hochhaus mit Hüftschwung", Bautechnik 98, H. 6, 446–456.
239. Pflüger A (1978) Statik der Stabtragwerke. Springer, Heidelberg
240. Pierce NA, Giles MB (2000) "Adjoint Recovery of Superconvergent Functionals from PDE Approximations", SIAM Review, Vol. 42, No.2. 247–264
241. Pingel J (2024) Warum Ingenieure erklärbare KI benötigen, MathWorks
242. Pucher A (1941) "Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten", Ingenieur-Archiv 12, 76-100
243. Pucher A (1953) Lehrbuch des Stahlbetonbaus. Springer Verlag Wien, 2. ed.
244. Pucher A (1977) Einflussfelder elastischer Platten. Springer Wien, 7. Auflage
245. Quing-Hua Q (2007) Green's Functions and Boundary Elements of Multifield Materials. Elsevier
246. Raddato C (2023) Following Hadrian
247. Ramm E, Hofmann TJ (1996) Stabtragwerke, in Der Ingenieurbau, Bd. 5, 1-350, Ed. G. Mehlhorn. Ernst & Sohn
248. Ramm H, Reul O, Ruiken A, Kissel W, Toker E. (2020) "Hochhaus Omniturm – Baugrube und Gründung unter komplexen innerstädtischen Randbedingungen", Bautechnik 97, H. 9, 656–663
249. Reddy BD (1998) Functional Analysis. Springer. (Die FEM aus math. Sicht)
250. Rektorys K (1977) Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London
251. Renner W (2000) "Membrantragwerke, Konzepte, Bemessung, Ausführung", Stahlbau 69 H. 8, 605-611
252. Richter T, Lutz B (2010) "Berechnung einer Kombinierten Pfahl-Platten-Gründung am Beispiel des Hochhauses „Skyper" in Frankfurt/Main", Bautechnik 87, H. 4, 204-211
253. Ritz, Walter
254. RFEM (2021) Durchstanzen an Wandenden
255. Rombach G (2008) "Die Prüfung der Standsicherheit am ganzheitlichen Gebäudemodell", Der Prüfingenieur Oktober 2008, 42-52
256. Rombach G (2016) Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau, Ernst & Sohn, Berlin, 2. Auflage
257. Rothert H, Gensichen V (1987) Nichtlineare Stabstatik. Springer, Heidelberg

258. Rubin H (1993) Baustatik ebener Stabwerke, in Stahlbau-Handbuch Teil A. Stahlbau-Verlagsgesellschaft
259. Rüsch, H., A. Hergenröder, Einflussfelder der Momente schiefwinkliger Platten, 3. Auflage, Düsseldorf: Werner-Verlag 1969
260. Rust W (2011) Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen. Vieweg 2. Auflage
261. Sanderson G (2022) How to lie using visual proofs. 3Blue1Brown (11.7.22)
262. Schade D (2000) "Schnittgrößenkombinationen beim Tragsicherheitsnachweis nach den Eurocodes", Bautechnik 77, H. 8, 570-584
263. Schade D (2003) "Einflusslinien für Ausnutzungsgrade in Stabwerken", Stahlbau 72, H. 2, 79-82
264. Scheer J, Ullrich U (1978) "Zur Berechnung abgespannter Maste". Bauingenieur 53, 43-50
265. Scheffler M (2010) "Zwischenruf: Ziele und Nutzen Technischer Standards", Bautechnik 87, 6, 361-365
266. Schek H-J (1974) "The force density method for form finding and computation of general networks". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, 115-134
267. Schiefer S, Fuchs M, Brandt B, Maggauer G, Egerer A (2006) "Besonderheiten beim Entwurf semi-integraler Spannbetonbrücken", Beton und Stahlbetonbau, 790-802
268. Schier K (2011) Finite Elemente Modelle der Statik und Festigkeitslehre. Springer
269. Schlaich J, Schäfer K (2001) "Konstruieren im Stahlbetonbau", Betonkalender 2001, Teil 2, S. 376 ff.
270. Schodek DL, Bechthold M (2017) Structures. Pearson/Prentice Hall
271. Schwab AJ (2013) Begriffswelt der Feldtheorie. Spinger Vieweg 7. Auflage
272. Schwartpaul K, Zhang C, Carl O (2012) "Sensitivity Analysis of Weakened Beams on Elastic Foundation with Green's Functions", Proc. Appl. Math. Mech. Vol. 12, 233-234
273. Structural Engineers Association of North. Ca. (2023) Finite Element Method
274. Silber G, Steinwender F (2005) Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM. Teubner
275. Slater M (2023) Functions are Vectors (7.11.23)
276. SOFiSTiK AG, www.sofistik.de
277. Sopoth M, Sopoth G (2008) Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise. Diplomarbeit Universität Kassel
278. Spierig S (1963) Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 15, 1963, S.133-165, Vieweg
279. Spitzer P, Horschig R (2012) Statik im Bauwesen, 3 Bände + Aufgabensammlung. Beuth
280. Stakgold I, Holst M (2011) Green's Functions and Boundary Value Problems. Wiley, 3rd ed.
281. Starossek U (2009) Progressive Collapse of Structures. 2nd ed. Thomas Tellford
282. Strang G, Fix GJ (2008) An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley-Cambridge Press, 2nd ed.
283. Strang G (2010) Computational Science and Engineering. Wellesley-Cambridge Press. Dt. Ausgabe: Wissenschaftliches Rechnen. Springer, Heidelberg
284. Strang G (2016) Introduction to Linear Algebra.Wellesley-Cambridge Press

285. Strang G (2019) Linear Algebra and Learning from Data. Wellesley-Cambridge Press
286. Strang G (2020) Linear Algebra for Everyone. Wellesley-Cambridge Press
287. Straub H (1992) Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Birkhäuser
288. Ströbel D, Singer P, Oswald R (2007) "Seilnetze", Stahlbau 76, H. 5, 289-296
289. Strouboulis T, Copps K, Babuska I (2006) "The generalized finite element method". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 4081-4193
290. Structurae, Hoover Dam Bypass Bridge
291. Tamstorf R, Jones T, McCormick SF (2015) Smoothed Aggregation Multigrid for Cloth Simulation Walt Disney Animation Studios, University of Colorado, Boulder
292. Taranath BS (2004) Wind and Earthquake Resistant Buildings. CRC Press
293. Taranath BS (2017) Tall Building Design. CRC Press
294. Robert Taylor machte diese Bemerkung in der Vollversammlung des Ninth US Congress in Computational Mechanics in San Francisco in 2007
295. Tottenham H (1970) "Basic Principles", in: Finite Element Techniques in Structural Mechanics. (Eds. Tottenham H, Brebbia C), Southampton University Press
296. Turner MJ, Clough RW, Martin HC, Topp LJ (1956) "Stiffness and deflection analysis of complex structures", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, 805-823
297. Unterweger H (2003) "Zur maßgebenden Verkehrslaststellung bei Stahl- und Verbundbrücken". Bautechnik 80, H. 1, 24-31
298. Unterweger H (2004) "Zur maßgebenden Verkehrslaststellung bei Schrägseilbrücken". Bautechnik 81, H. 4, 258-267
299. Villaggio P (1997) Mathematical Models for Elastic Structures. Cambridge University Press
300. VDI 6201 Blatt 1:2015-12 (2015) Softwaregestütze Tragwerksberechnung - Grundlagen, Anforderungen, Modellbildung. Beuth
301. Wackerfuß J, Boungard J (2020) "Methoden zur Beurteilung der statischen Brauchbarkeit von Tragwerken", Berichte der Fachtagung Baustatik-Baupraxis 14, Universität Stuttgart, http://dx.doi.org/10.18419/opus-10762
302. Wagner R (2016) Bauen mit Seilen und Membranen. Beuth
303. Wang C-Y, Denda M, (2007) "3D BEM for general anisotropic elasticity". Int. J. Solids and Structures 44, 7073-7091
304. Wapenhans W, Richter J (2001) Die erste Statik der Welt von 1742 zur Peterskuppel in Rom. Dresden Selbstverlag www.wundr.com
305. Webhofer M (2004) Abbildung von Finite-Elemente-Modellen als kinematische Strukturen. Dissertation TU München (Kranbau, Kinematik, Starrkörper-Ketten)
306. Weischede D, Stumpf M, Spreng S (2010) "Bürohochhaus im Palais Quartier – ein besonderes Bauprojekt in der Innenstadt von Frankfurt/Main", Bautechnik 87, H. 4, 195-203
307. Wenzel H (2009) Health Monitoring of Bridges. Wiley
308. Werner K (2011) Statik im Bauwesen. Beuth
309. Werkle H (2000) "Konsistente Modellierung von Stützen bei der Finite-Element-Berechnung von Flachdecken", Bautechnik 77, 416–425
310. Werkle H (2006) Vorlesung Baustatik III, Skriptum
311. Werkle H, Slongo L (2018) "Modellierung des Baugrunds bei der Finite-Element-Berechnung von Bodenplatten", Bautechnik 95, H. 9, 607-619
312. Werkle H (2020) Finite Elemente in der Baustatik. Springer Vieweg. 4. Auflage

313. Werkle H (2020) Finite Elements in Structural Analysis - Theoretical Concepts and Modeling Procedures in Statics and Dynamics of Structures. Springer, Cham
314. Wigner E P (1960) "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959", Communications on Pure and Applied Mathematics. 13: 1–14.
315. Wikipedia Baustatik
316. Wikipedia Green's function (17.5.2021) Seite 131
317. Wikipedia Prinzip von St.Venant (17.5.2021) Seite 216
318. Wikipedia στατική τέχνη (7.7.2021) Seite 21
319. Wikipedia Virtuelle Arbeit (1. 10. 2020) Seite 815
320. Wikipedia Satz von Castigliano (7. 8. 2017) Seite 822
321. Wikipedia Satz von Stokes (7. 4. 2021) Seite 821
322. Wikipedia Hancock Tower (4. 11. 2021) Seite 118
323. Wikipedia Omniturm Bildquelle (17. 12. 2021) Seite 448
324. Wikipedia Kontinuumsmechanik (18.1.2022)
325. Wikipedia Schwarzscher Stiefel (6.6.2022) Seite 821
326. Wikipedia Schiefer Turm von Pisa (26.6.2022) Seite 201
327. Wikipedia Müngstener Brücke (29.7.2022) Seite 819
328. Wikipedia De Havilland Comet Bildquelle (2.6.2023) Seite 461
329. Wikipedia Kordylewskische Wolken (27.10.2023) Seite 378
330. Wikipedia Lagrange Punkte Bildquelle (27.10.2023) Seite 763
331. Wikipedia Chartres Foto Antoine Meissonier (1.10.23) Seite 93
332. Wikipedia Liste von Straßenbrücken in den USA (2.1.25)
333. Wilson HB, Turcotte LH, Halpern D (2003) Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using MATLAB. Chapman & Hall/CR. Die Programme liegen jetzt auf dem MATLAB server
334. Wriggers P (2001) Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer
335. Xu XF, Chen X, Shen L (2009) "A Green-function-based multiscale method for uncertainty quantification of finite body random heterogeneous materials", Computers and Structures 87:1416-–1426
336. Yosibash Z (2012) Singularities in Elliptic Boundary Value Problems and Elasticity and Their Connection with Failure Initiation. Springer
337. Yura JA, Helwig TA (2021) "Continuous Bracing Systems for Columns and Beams", ASCE J. Struct. Eng. 147(6)
338. Zhang H (2016) A General Approach for Solving Inverse Problems in Geophysical Systems by Applying Finite Element Method and Metamodel Techniques. Dissertation TU München
339. Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2006) Finite Element Method: Volume 1 – Its Basis & Fundamentals. Butterworth Heinemann
340. Zienkiewicz OC, Zhu JZ (1987) "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", Int. J. Num. Methods in Eng. 24: 337–357

The History of the Theory of Structures von Kurrer [182] enthält eine ausführliche Bibliographie zu dem Thema Statik und Einflussfunktionen in seiner geschichtlichen Entwicklung.

Die Diplomarbeiten aus Kassel sind über www.winfem.de/products.htm erreichbar.

Index

(u, v) 709
G_0 131
G_1 131
G_2 131
G_3 131
L_2-Skalarprodukt 39
R_d 387
R_{FE} 387
W_e 36
W_i 36
$W_{1,2}$ 36
δW_e 21
δW_e^* 36
δW_i 21
δW_i^* 36
δ_0 172
δ_1 172
δ_2 172
δ_3 172
$\mathcal{V}$ 240
$\mathcal{V}_h$ 244
$\mathcal{V}_h^*$ 472
div 708
∇ 708
$\otimes$ 709
$\boldsymbol{K}_G$ 252
$\boldsymbol{K}_c$ 513
$\boldsymbol{K}_{loc}$ 281
$\boldsymbol{f}_G$ 387
$\boldsymbol{u}_G$ 387
$d\Omega_{\boldsymbol{y}}$ 75
$ds_{\boldsymbol{y}}$ 75
g-Funktional 717
h-Vertauschungssatz 433, 474
j-Funktional 717
$u_{,i}$ 24
u_R 368
u_n 68
w_n 68
[N] 36
[m] 36
$\boldsymbol{d}$ 66

Abklingverhalten 216
adjoint analysis 187, 566, 754
adjungierter Operator 187
Aequiv. Spannungs Transformation 282
aequivalente Knotenkraft 67, 260
amputierter Dipol 423
  am Rand 424
Arbeitsgleichung 54
Arbeitssätze der Statik 36
artificial intelligence 549
Aufpunkt 130
  im Knoten 324
Außenraumproblem 72

Babuškas Paradoxon 648, 674
Balken, System 655
baupraktische Näherung 540
BE-FRAMES 582, 825
BE-LAPLACE 825
BE-PLATTE 825
BE-SCHEIBE 825
Belegung 596, 734, 762
BEM 77

Bernoulli-Balken 655
Betti extended 467
  gemischte Verfahren 680
Betti-Trick 299
Bettungszifferverfahren 769
Biegedrillknicken 234
Bilinearform 88
Boltzmann-Konstante 789
Boussinesq-Lösung 72, 769
Brachystochrone 611
Bremskraft 359
bubble function 479

Calderón-Operator 757
Castigliano 88
  torpediert 181
Cauchy Daten 757
cluster 732
Comet 1 461
countdown 91
Cramersche Regel 567
Cross 460
CST-Element 273, 304

Deformationsgradient 716
dichotomy 493
die Rolle der u_i 268
Differentialgleichungen der Stabstatik 31
digitaler Zwilling 350
Dipole 187
Dirac
  Ableitungen 749
  Delta 171, 800
  Energie 174
  Vektor 327
direkte Differentiation 572
direktes Produkt 709
Dirichlet Bedingung 115
Distribution 184, 787
Doppelbedeutung der Wackeläquivalenz 260
downloads 825
Drehfeder 113
Drehpol 590
Drehvektor 716
Drehwinkelverfahren 71, 368, 385
Dreieck 646
drift 500

duale Größe 184
Dualität 56, 184
Dualraum 472, 788
Duhamel-Integral 455
Durchstanznachweis 405
dynamische Probleme 594

early birds 789
Eichmatrix 69
Eigenarbeit 37
Eigenlösung 225
Eigenvektor 736
Eigenwert 225, 736
Ein-Guss Modell 449, 582
Einflussfunktion
  für σ_{yy} 307
  für N_{xy} 309
  für u_x 307
  für integrale Werte 204
  für Kraftgrößen 134
  für Lagerkräfte 164
  für Weggrößen 129
  gemischte Form 678
  lokale Lösung 311
  rechnet rückwärts 213
Einheitsverformungen 67, 242, 265
Einzelkräfte
  als Knotenkräfte 430
  maximal unfair 423
  und Einzelmomente 48, 768
  und Mohr 768
elastisch gebetteter Träger 34
Elementarregel 146
Energie-Quanten 289
Energieerhaltungssatz 36, 42
Energienorm 781
Ergebnispunkte 830
Ersatzmodell 279
Erste Greensche Identität 21
  Balken 33
  Balken elastisch gebettet 34
  Balken Th. II. Ordg. 34
  Laplace 661
  Platte (Kirchhoff) 666
  Platte (Reissner-Mindlin) 670
  Scheiben 662
  Schubverformung 32
  Seil 32
  Stab 31

Torsion 35
Wölbkrafttorsion 35
Zugbandbrücke 35
Euler Gleichung 37
exakte Werte 477

Faltungsintegral 456
FE-Lastfall 267
Federn 53
federnde Stützung 47
Fernfeldfehler 501
Festhaltekräfte 67, 263
FG 306
Fiktion 289
Filter 753
Filtergesetz 754
finite
Differenzen 716
Elemente 239
Integrale 718
fixed ends 311
Focus
Element 549
Punkt 549
Fortleitungszahl 360
Fourier
Analysis 221
Transformation 221
free body diagram 38
frozen time 91
Fundamentallösung 77, 597, 639, 756
Funktional 295

Galerkin-Orthogonalität 259
Galerkin-Verfahren 257
Gangunterschiede 540
Gateaux Ableitung 684, 692
Gauss-Jordan 587
Gauss-Seidel 368, 460
Gausspunkte 352
Gaußscher Integralsatz 760
generalisierte Einflussfunktion 300
geometrische Elementsteifigkeitsmatrix 779
geometrische Kräfte 309
Gibb's phenomenon 460, 641
Gleichgewicht 92, 390, 729
am verformten Tragwerk 95
globaler Fehler 501
globales Gleichgewicht 730
Grad der kinematischen Unbestimmtheit 366
Gradient 708
Green-Lagrange Verzerrungstensor 691
Greensche
Funktion 226
Identitäten 31
Matrix 357
Greensche Funktion 131
Grenzen von FE-Einflussfunktionen 432
Grenzwert 427
Grundfunktional (Hu-Washizu) 744
Grundlösung 760
Grundlastfall 342
guter Entwurf 177

Haltekräfte 231
Hamiltonsches Prinzip 765
harmonische Funktion 757
hat functions 242
Hauptsatz der D&I 22, 23, 757
Hauptwert 197
Heaviside-function 456
Hebelgesetz 174
Hellinger–Reissner Prinzip 680
high-pass filter 753
homogene Lösung, Th. II. Ordg. 228
homogene Lösungen 478
Homogenisierungsmethoden 526
hot spots 417
Hu-Washizu Prinzip 744
hyperelastisches Material 691

idempotent 477
infinitesimal 91
infinitesimal klein 92
infinitesimale Verrückung 91
Inklusion 375
Integraldarstellung 456
internal constraints 678
Interpolierende 500
inverse Steifigkeitsmatrix 339
Inzidenzmatrizen 281
isogeometric analysis 481

J-intergral 743

Jacobi Matrix 386

Kani 460
kanonische Randwerte 66
Kern 75, 131
  lineare Algebra 727
Kernpunktmomente 169
Kirchhoffplatte 110, 666
Kirchhoffsche
  Knotenregel 746
  Maschenregel 746
Kirchhoffschub 668
Knicklasten 592
Knotengleichgewicht 380
Knotenkräfte 260
  für Einflussfunktionen 297
Knotenpunktsmethoden 746
Knotenvektor 357
komplementäre potentielle Energie 745
Kondition von $\boldsymbol{K}$ 723
konforme Elemente 86
konjugiert 66, 85
Konter 423
Kraftgrößenverfahren 117, 322
Kragträger 621
Kronecker product 709
Kurzform 55

Längsverschiebung 31
la tangente 91
Laborergebnisse 411
Lagerdruck 248
Lagersenkung 49, 139, 338, 391
Lagrange 764
  Funktion 764
  Funktional 700
  Multiplikator 700, 745
  Punkte 375, 763
LF d 99
LF p 99
lineare Funktionen 716
Linienlager im 3-D 424
lokale
  Lösung 247
  Störungen 223
lokaler
  Fehler 500, 501
lokales Gleichgewicht 731

Lorentz Kontraktion 820
low-pass filter 753
Lupe 196

Mannigfaltigkeit 726
Maschengleichungen 746
Maschenregel der Statik 746
master element 386
MATLAB™ 793
maximale Verformungen 363
Maximumprinzip 79
Methode der Randelemente 72
Meßstrecke 732
Mischtechnik 380
Mittelung der Spannungen 352
Modalanalyse 455
model updating 365
Mohrsche Arbeitsgleichung 44, 54
Monopole 187
multifield problems 224

negative Norm 786
Newton-Verfahren 687
nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix 387
nichtlinear 641
nichtlineare Funktionale 700
nichtlinearer Stab 686
Null-Lösung 247
Null-Summen Spiel 38
Nullstellen der Querkraft 169

Omniturm 448
Optimierung 566
Oszillationen 423, 638

Parameteridentifikation 514
Parität der j_i 428
partielle Integration 22
partition of unity 262, 387, 728
patch test 491
PDE Modeler 812
Plancksche Konstante 789
Platte 666
Plattenbeulen 233
Poisson Gleichung 756
Pol 590
pollution 497
Potential
  erster Art 763

zweiter Art 763
Potentiallösung 75
Potentialtheorie 597, 761
Prinzip
der virtuellen Kräfte 36, 43
der virtuellen Verrückungen 36, 40
vom Minimum der potentiellen Energie 37, 97
von Hamilton 764
von Hu-Washizu 744
von St. Venant 216
Waage 275
Pseudo-Dipol 519
Pseudo-Lastvektor 567, 581
Pseudodrehung 90
Punktlasten, Energie 789
push-back 386
push-forward 386
push-stop Kräfte 357, 713

Quellen 596
und Senken 96
Querschnittsänderungen 372

Radius null 490
Rahmen 46
Randelemente 72, 411
Rayleigh-Quotient 229, 231
realism 281
Rechenpfennige 262
reduced row echelon form 586
Reduktion der Dimension 70
Reduktionssatz 113
Reduktionsverfahren 256
reduzierte Steifigkeitsmatrix 730
Regulierungswut 821
Reinraumkultur 821
Reissner-Mindlin Platte 110, 670
Riemann-Integral 184, 787

Satz
von Betti 36, 125
von Castigliano 88, 822
von Engesser 822
von Land 135
von Maxwell 89
von Menabrea 822
Schalen 751
Schalenelement 437
Scheibengleichung 662
Schlüssel zu den j_i 293
schräger Balken, EF 322
Schubtragfähigkeit 404
Schubverformung 32
schubweicher Balken 657
schwache
Einflussfunktion 64
Konvergenz 739
Lösung 37, 739
Randbedingung 742
schwaches Gleichheitszeichen 290
Schwarzsche Ungleichung 496
Schwarzscher Stiefel 822
Seil 750
selbstadjungiert 128, 719
Selbstheilungskräfte 711
Senkfeder 559
Sensitivitätsplots 375
Sensor 130
separierte Form 326
shape
forces 267
functions 242, 303
functions Th. II. Ordg 232
shear locking 675
Sherman-Morrison-Woodbury 579
Signatur 262
singuläre
Punkte 622
Steifigkeitsmatrizen 586
Singularitätenmethode 75
Skalarprodukt von Matrizen 709
Sobolev, Tabelle 788
Sobolevnorm 781
Sobolevscher Einbettungssatz 109, 780
soft constraint 105
software 825
Somigliana Matrix 641
Spalten von $\boldsymbol{K}$ 354
Spannungspunkte 81, 830
splines 101
Split der inneren Energie 211
Sprünge in Schnittgrößen 166
St. Venantsche Torsion 35
Störungsrechnung 435
Stab, System 653
starke
Einflussfunktion 64

Lösung 37, 739
Randbedingung 742
Starrkörperbewegung 90
Starrkörperdrehung 716
statisch
bestimmt 722
unbestimmt 722
statisches Gefühl 216
Steifigkeitsmatrix 69
des Balkens 772, 776
des Balkens, gedreht 776
des elast. geb. Balkens 779
des Seils, gedreht 774
des Stabs, gedreht 774
Th. II. Ordg 233
Stolperkante 763
strain energy product 87
stress-intensity factor 743
Streubelastung 266
strong form 37
Substrukturen 563
Superkonvergenz 502
Switches 183
Symmetriebrechung 427
symmetrische Bilinearform 88
System Th. II. Ordg. 688
Systemantwort 362

Tangens 143
Temperatur 53
Temperaturänderungen 140
Testfunktionen 81
Theorem von Graffi 455
Theorie I. Ordnung 84
Theorie II. Ordnung 227
Timoshenko Balken 657, 779, 810
Torsion 35
Transversalkraft 34
Treppenformel 23
tumbleweed 38
Turm von Pisa 202

Ueberlagerung 39
Uebertragungsmatrizen 75
unit response 131
Unschärfe der Statik 120
Unwucht 198

Variationsrechnung 765
Verfahren von Ritz 242
Vergleich FEM BEM 272, 673, 762
Verification and Validation 649
Versatz 764
Versatz im 2-D 181
Vertauschungssatz 474
Video
de Soto Bridge 648
Millennium Tower 451
Videos 236
Vierendeel 170
virtuelle innere Energie 87
Volumenpotential 764
vom Aufpunkt zur Belastung 353
Vorverformungen 431

Wölbkrafttorsion 35
Waagebalken 92
wackeläquivalent 271
Wackeläquivalenz 275
wavelets 223
weak form 37
Wechselwirkungsenergie 87
Weg und Kraft 85
Wert und Formel 197
Wiegemann-Polonceau Träger 582
Wilson-Element 499
Wirkungsintegral 131

Zahl der Weg- und Kraftgrößen 86
Zeilen von $\boldsymbol{K}$ 464
Zeitdehnung 820
zentrale Gleichung 326
Zieheffekt 180
Zugbandbrücke 35
zulässige virtuelle Verrückung 38
Zwei-Wege-Formel 571
zweite Greensche Identität
Balken 127
Platte, Kirchhoff 669
Stab 133
zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor 691