F. Hartmann, P. Jahn

Statik und Einflussfunktionen – vom modernen Standpunkt aus

(Statics and Inf uence Functions – From a Modern Perspective)

6. Auflage

6. Januar 2022

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h.c. Christian Petersen

gewidmet

Vorwort

Die neue Statik ist die alte Statik
und im Grunde ist sie heute mächtiger
als je zuvor.

Einflussfunktionen sind ein klassisches Werkzeug der Statik. Sie verknüpfen Statik mit Anschauung, denn mit ein paar geschickten Skizzen – wenn es sein muss auf einem Bierdeckel – kann man leicht dem Tragverhalten einer Struktur nachspüren und so Klarheit über kritische Punkte finden.

Leider ist aber die Anwendung der Einflussfunktionen etwas in den Hintergrund getreten, denn in Zweifelsfällen spielt man dann doch lieber Varianten mit dem Computer durch und umgeht so die Mühe, nach dem warum und wieso zu fragen und tiefer in das Verständnis des Tragverhaltens einzudringen.

Neue Ergebnisse haben jedoch das Interesse an den Einflussfunktionen wieder belebt, denn es ist nun klar, dass finite Elemente mit Einflussfunktionen rechnen. Das gleicht einer Rolle rückwärts. Man dachte, man sei der klassischen Rechenverfahren ledig, und plötzlich sieht man, dass sie in den finiten Elementen wieder auferstanden sind.

In der klassischen Statik beschränkt sich das Thema Einflussfunktionen auf den *Satz von Land* und seine Modifikationen und man verliert bald das Interesse, weil sich die Einflussfunktionen so schwer berechnen lassen.

Heute benutzen wir finite Elemente und bei finiten Elementen ist der Begriff viel weiter gefasst. Das Stichwort heißt *Funktionale*. Die Durchbiegung in der Feldmitte, das Moment über der Stütze, die Kraft im Lager, all dies sind Funktionale. Alles, was man berechnen kann, ist für die finiten Elemente ein Funktional. Und zu jedem linearen Funktional gehört eine Greensche Funktion, eine Einflussfunktion.

Nun sind Einflussfunktionen aber Biegelinien, also Verformungen und das wird mit finiten Elementen zum Problem, denn FE-Netze besitzen nur eine eingeschränkte Kinematik. Es gibt ja nur einen beschränkten Vorrat an Ansatzfunktionen (*shape functions*), um Verformungen darzustellen. Und das ist

der Grund, warum FE-Ergebnisse in der Regel nur Näherungen sind, denn das FE-Programm kann mit der eingeschränkten Kinematik eines Netzes die exakten Einflussfunktionen nicht generieren, es überlagert daher gezwungenermaßen genäherte Einflussfunktionen mit der Belastung und so sind die Ergebnisse auch nur Näherungen.

Die Einflussfunktionen sind demnach die eigentlichen, die wahren *shape functions*, die *physikalischen shape functions*. Diese muss das FE-Programm möglichst gut annähern. Wenn das gelingt, dann sind auch die FE-Ergebnisse gut.

In der Computerstatik geht das Thema Einflussfunktionen also weit über den *Satz von Land* hinaus und um diesem Umfang einigermaßen gerecht zu werden, haben wir dieses Buch geschrieben.

Es ist kein Buch für Erstsemester, der Leser sollte mit dem Thema Einflussfunktionen schon etwas vertraut sein, dem Thema in den Statik- oder Mechanikvorlesungen schon begegnet sein.

Wir behandeln die Statik auch scheinbar mit einem sehr spitzen Bleistift. Das ist aber im Grunde Notwehr, weil sich in der Statik doch viele Dinge im Laufe der Zeit eingeschliffen haben und der mathematische Hintergrund der Formeln nicht immer offenkundig und evident ist.

Wir haben jeden Respekt vor der Leistung der Ingenieure, die die Grundlagen der Statik gelegt haben. Wenn man in der Gründungsphase mit kleinen virtuellen Verrückungen an dem Tragwerk wackelte, dann ist das ‚klein' ein Symbol dafür, wie tastend die Gehversuche war.

Heute aber sind wir in der glücklichen Lage die mathematischen Strukturen zu verstehen, die hinter den Energie- und Variationsprinzipen der Statik stehen, wir wissen, dass das $\delta W_e = \delta W_i$ auf partieller Integration beruht, wie auch der Satz von Land und dass der Satz von Betti gilt, weil die klassischen Differentialgleichungen der Statik selbstadjungiert sind.

Die Statik hat mit den finiten Elementen in kurzer Zeit einen enormen Lernkurs in Sachen Mathematik bewältigen müssen und wenn das fruchtbar werden soll, dann muss doch auch in der Darstellung der Grundlagen dieser Wechsel deutlich werden.

Kassel *Friedel Hartmann, Peter Jahn*
Frühjahr 2016/2021 hartmann@be-statik.de, PJahn@uni-kassel.de

PS. Ursprünglich sollte der Titel nur *Einflussfunktionen — vom modernen Standpunkt aus* heißen. Im Zeitalter der Suchmaschinen schien es uns jedoch sinnvoll, das Wort *Statik* mit in den Titel aufzunehmen. Es war nicht unsere Absicht einen (nicht existierenden) Gegensatz zwischen alter und neuer Statik zu konstruieren. Nur der Blickwinkel auf die Einflussfunktionen hat sich mit dem Computer geändert.

Editionen

Der Text begann als gedrucktes Buch bei der Kassel-University-Press im Frühjahr 2016. Die folgenden Auflagen 2, 3, und 5 liegen als *pdf-files* auf dem Server der Universitätsbibliothek Kassel (KOBRA),[95].

Im März 2021 haben wir mit der **sechsten Auflage**, das ist dieser Text, begonnen. Die jeweils tages-aktuelle pdf-Version liegt auf den Seiten

http://simplel.ink/go/pdf und http://simplel.ink/go/winfemBook.

Download der Programme, siehe Kapitel 12.

Die erste englische Ausgabe

Statics and Influence Functions – From a Modern Perspective

erschien 2017 im Springer Verlag und die zweite englische Ausgabe (464 S.) im Herbst 2020. Die deutsche Ausgabe hat aktuell 731 Seiten.

Kassel *Friedel Hartmann, Peter Jahn*
Dezember 2021 hartmann@be-statik.de, PJahn@uni-kassel.de

Acknowledgement. Herr Kollege Werkle, Hochschule Konstanz, hat uns bei der korrekten Formulierung der *Äquivalenten Spannungs Tranformation*, Abschnitt 3.11, tatkräftig unterstützt. Dafür sei ihm an dieser Stelle herzlich gedankt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen . . . 19
1.1 Einführung . . . 19
1.1.1 Partielle Integration . . . 20
1.1.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen . . . 21
1.1.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte . . . 22
1.1.4 Der Satz von Betti . . . 23
1.1.5 Einflussfunktionen . . . 24
1.1.6 Identitäten . . . 25
1.2 Greensche Identitäten . . . 26
1.2.1 Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes . . . 29
1.2.2 Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens . . . 30
1.2.3 Durchbiegung w eines Seils . . . 30
1.2.4 Durchbiegung w eines Balkens . . . 30
1.2.5 Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung . . . 31
1.2.6 Elastisch gebetteter Träger . . . 32
1.2.7 Zugbandbrücke . . . 32
1.2.8 Torsion . . . 33
1.3 Die Arbeitssätze der Statik . . . 34
1.4 Ein Null-Summen-Spiel . . . 36
1.5 Beispiele . . . 37
1.5.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen . . . 38
1.5.2 Energieerhaltungssatz . . . 40
1.5.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte . . . 40
1.6 Rahmen . . . 43
1.7 Federnde Stützung . . . 45
1.8 Einzelkräfte und Einzelmomente . . . 45
1.9 Lagersenkung . . . 47
1.10 Federn . . . 50
1.11 Temperatur . . . 50
1.12 Die vollständige Arbeitsgleichung . . . 51
1.13 Kurzform . . . 52

1.14 Dualität . . . 53
1.15 Ganze Tragwerke . . . 57
1.16 Mohr contra Betti . . . 60
1.17 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 62
1.18 Die kanonischen Randwerte . . . 64
1.18.1 Gleichgewicht . . . 65
1.18.2 Die Herleitung von $\boldsymbol{K u = f + d}$ . . . 66
1.18.3 Steifigkeitsmatrizen . . . 67
1.19 Die Reduktion der Dimension . . . 68
1.20 Methode der Randelemente . . . 70
1.21 Finite Elemente und Randelemente . . . 73
1.22 Digital vs. analog . . . 76
1.23 Testfunktionen . . . 78
1.24 Müssen virtuelle Verrückungen klein sein? . . . 79
1.25 Theorie I. Ordnung . . . 81
1.26 Nur, wenn Gleichgewicht herrscht? . . . 81
1.27 Was ist Weg und was ist Kraft? . . . 82
1.28 Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen . . . 83
1.29 Warum das Minus in $-H\,w'' = p$? . . . 83
1.30 Die virtuelle innere Energie . . . 84
1.31 Satz von Castigliano . . . 85
1.32 Pseudodrehungen . . . 86
1.33 Gleichgewicht . . . 89
1.34 Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt . . . 90
1.35 Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht . . . 91
1.36 Gleichgewicht am verformten Tragwerk? . . . 92
1.37 Quellen und Senken . . . 92
1.38 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie . . . 93
1.38.1 Minimum oder Maximum? . . . 95
1.38.2 Wenn das Material reißt . . . 99
1.38.3 Wenn Lager entfallen . . . 99
1.39 Unendliche Energie . . . 101
1.40 Sobolevscher Einbettungssatz . . . 105
1.41 Der Reduktionssatz . . . 109
1.42 Das Kraftgrößenverfahren . . . 111
1.43 Die Diagonale . . . 113
1.44 Wo läuft es hin? . . . 114
1.45 Finite Elemente und die erste Greensche Identität . . . 116

2 Der Satz von Betti . . . 119
2.1 Grundlagen . . . 120
2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen . . . 123
2.2.1 Herleitung . . . 125
2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen . . . 128
2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$ . . . 130

2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$ . . . 131
2.3.3 Einflussfunktion für $V(x)$ . . . 132
2.3.4 Lagersenkung . . . 133
2.3.5 Temperaturänderungen . . . 134
2.3.6 Die Kette der Einflussfunktionen . . . 135
2.3.7 Lastmomente differenzieren die Einflussfunktionen . . . 136
2.3.8 Ein Rätsel . . . 136
2.4 Statisch bestimmte Tragwerke . . . 137
2.4.1 Polpläne . . . 140
2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren . 141
2.4.3 Berechnung der Verdrehungen . . . 141
2.4.4 Berechnung der Verschiebung eines Punktes . . . 144
2.4.5 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.21 . . . 145
2.4.6 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.22 . . . 146
2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.23 . . . 147
2.4.8 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.24 . . . 149
2.4.9 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.25 . . . 149
2.4.10 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.26 . . . 149
2.4.11 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.27 . . . 152
2.5 Kragträger . . . 153
2.6 Statisch unbestimmte Tragwerke . . . 154
2.7 Einflussfunktionen für Lagerkräfte . . . 156
2.8 Sprünge in Schnittgrößen . . . 161
2.9 Die Nullstellen der Querkraft . . . 162
2.10 Kernpunktmomente . . . 163
2.11 Vierendeel als Kragträger . . . 163
2.12 Dirac Deltas . . . 164
2.13 Dirac Energie . . . 167
2.14 Punktwerte bei Flächentragwerken . . . 171
2.15 Versatz in 2-D und 3-D . . . 175
2.16 Switches . . . 175
2.17 Dualität . . . 176
2.18 Der adjungierte Operator . . . 178
2.19 Monopole und Dipole . . . 178
2.20 Höhere Ableitungen . . . 184
2.21 Die Unwucht . . . 188
2.22 Handicap Rand . . . 190
2.23 Wert und Formel . . . 191
2.24 Der schiefe Turm von Pisa . . . 192
2.25 Symmetrie und Antimetrie . . . 193
2.26 Lager im Schatten . . . 194
2.27 Einflussfunktionen für integrale Werte . . . 195
2.28 Einflussfunktionen rechnen rückwärts . . . 201
2.29 Historischer Rückblick . . . 203
2.30 Das Abklingverhalten . . . 204

2.31 Prinzip von St. Venant . . . 204
2.32 Fourier . . . 206
2.33 Nichtlineare Effekte . . . 210
2.34 Eigenlösungen . . . 210
2.35 Eigenlösungen und Greensche Funktionen . . . 212
2.36 Theorie II. Ordnung . . . 212
2.36.1 Shape functions . . . 217
2.36.2 Steifigkeitsmatrix . . . 217

3 Finite Elemente . . . 221
3.1 Das Minimum . . . 222
3.2 Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind . . . 225
3.3 Addition der lokalen Lösung . . . 228
3.4 Die lokale Lösung w_p . . . 235
3.5 Projektion . . . 236
3.6 Äquivalente Knotenkräfte . . . 238
3.7 Festhaltekräfte . . . 242
3.8 Die Neutralität der shape functions . . . 244
3.9 Shape forces und der FE-Lastfall . . . 245
3.10 Wie die Lawine ins Rollen kam . . . 250
3.11 Finite Elemente mit Betti . . . 252
3.12 Der FE-Lastfall bei Platten . . . 255
3.13 Realism . . . 256
3.14 Kopplung von Bauteilen . . . 257
3.15 Äquivalente Spannungs Transformation . . . 258
3.16 Die Koppelfuge . . . 265
3.17 Einflussfunktionen . . . 266
3.17.1 Rezept . . . 267
3.17.2 Beispiel . . . 268
3.17.3 Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i . . . 268
3.18 Funktionale . . . 271
3.19 Generalisierte Einflussfunktionen . . . 274
3.20 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 274
3.21 Beispiele . . . 275
3.22 Die shape functions und ihre Spannungen . . . 284
3.23 Die lokale Einflussfunktion . . . 285
3.24 Schräger Balken . . . 295
3.25 GF-Anywhere . . . 296
3.26 Aufpunkt im Knoten . . . 298
3.27 Die zentrale Gleichung . . . 298
3.28 Darstellung einer FE-Lösung . . . 303
3.29 Stabtragwerke und $J = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ . . . 303
3.30 Handberechnung . . . 304
3.31 Zustandsvektoren und Messungen . . . 304
3.32 Der Satz von Maxwell . . . 306

3.33 Die inverse Steifigkeitsmatrix . . . 310
3.34 Beispiele . . . 310
3.35 Der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ hat zwei Basen . . . 314
3.36 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion . . . 317
3.37 Die Dominanz der Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen . . . 320
3.38 Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente . . . 320
3.39 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung . . . 322
3.40 Die Spalten von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$ . . . 324
3.41 Die Inverse als Analysetool . . . 333
3.41.1 Maximale Verformungen . . . 333
3.42 Lokale Änderungen und die Inverse . . . 334
3.43 Das Weggrößenverfahren . . . 335
3.43.1 Wie kommt man auf $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$? . . . 335
3.43.2 Handberechnung von $\boldsymbol{K}$ . . . 337
3.43.3 Drehwinkelverfahren . . . 337
3.44 Mohr und die Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ . . . 338
3.45 Querschnittsänderungen . . . 339
3.46 Sensitivitätsplots . . . 340
3.47 Knotengleichgewicht . . . 346
3.48 Genäherte shape functions . . . 350
3.49 Die Lagerkräfte der FE-Lösung . . . 351
3.50 Lagersenkung . . . 354
3.51 Einflussfunktion für ein starres Lager . . . 357
3.52 Beispiel EF Lagerkraft . . . 360
3.53 Einflussfunktion für ein nachgiebiges Lager . . . 363
3.54 Einflussfunktionen für Wände . . . 365
3.55 Der Eckenwinkel . . . 366
3.56 Querkräfte bei Platten . . . 367
3.57 Durchstanznachweis . . . 369
3.58 Genauigkeit der Lagerkräfte . . . 376
3.59 Punktlasten und Punktlager bei Scheiben . . . 376
3.60 Ein mögliches Missverständnis . . . 379
3.61 Punktlager sind hot spots . . . 380
3.62 Der amputierte Dipol . . . 382
3.63 Der Dipol am Rand . . . 387
3.64 Einzelkräfte als Knotenkräfte . . . 392
3.65 Vorverformungen . . . 393
3.66 Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen . . . 394
3.67 Ein Plädoyer für Einflussfunktionen . . . 396
3.68 Schalenelemente . . . 400
3.69 Kontrolle von FE-Berechnungen . . . 400
3.70 Die Realität . . . 407
3.71 Wie man ein FE-Programm schreibt . . . 408
3.72 Dynamische Probleme . . . 411
3.73 Die Intelligenz der Funktionen . . . 412

4 Betti Extended 417
4.1 Beweis 418
4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt? 420
4.3 Exakte Werte 426
4.4 Eindimensionale Probleme 426
4.5 Isogeometric Analysis 431
4.6 Flächentragwerke 432
4.7 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied 434
4.8 Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt 435
4.9 Patch Test 438
4.10 Adaptive Verfeinerung 439
4.11 Pollution 444
4.11.1 Ursachen 444
4.11.2 Details 447
4.12 Superkonvergenz 448

5 Steifigkeitsänderungen und Reanalysis 455
5.1 Parameteridentifikation 457
5.2 Statik am Gesamtsystem 457
5.3 Einleitung 458
5.4 Strategie 460
5.5 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten 461
5.6 Dipole und Monopole 462
5.7 Weggrößen und Kraftgrößen 465
5.8 Zustand II 467
5.9 Symmetrie und Antimetrie 468
5.10 Orthogonalität 468
5.11 Das Abklingen der Effekte 470
5.12 Die Bedeutung für die Praxis 471
5.13 Rahmen 475
5.14 Nichtlineare Effekte 477
5.15 Das Kraftgrößenverfahren 478
5.16 Kräfte $\boldsymbol{j}^+$ 479
5.17 Austausch als Alternative 480
5.18 Die Ableitung der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ 481
5.19 Die Ableitungen $\partial \boldsymbol{u}/\partial f_k$ und $\partial \boldsymbol{u}/\partial k_{ij}$ 483
5.20 Integration über das defekte Element 487
5.21 Sensitivitäten und Mohr 490
5.22 Nah und fern 493
5.23 Zusammenfassung 500
5.24 Ein naheliegender Schluss 500
5.25 Lager 501
5.26 Integrale Brücken 510
5.27 Verstärkungen 512
5.28 Klassische Formulierung 513

5.29 Direkte Differentiation 519
5.30 Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$ 520
5.30.1 Iteration 520
5.30.2 Direkte Berechnung 521
5.30.3 Lagersteifigkeit 526
5.30.4 Sherman-Morrison-Woodbury 527
5.31 Rechentechnik 528
5.32 One-Click Reanalysis 529
5.32.1 Wenn die Last ‚getroffen' wird 529
5.32.2 Singuläre Steifigkeitsmatrizen 532
5.33 Drehpole 533
5.34 Nachträglicher Einbau von Gelenken 534
5.35 Knicklasten 536
5.36 Dynamische Probleme 536
5.37 Die Vektoren $\boldsymbol{f}^+, \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{g}^+, \boldsymbol{j}^+$ 537
5.37.1 Unsymmetrie in den Ausgleichsbewegungen 538
5.38 Das Kontinuum 538
5.38.1 Potentialtheorie 539
5.38.2 Das einzelne Element und das Netz 540
5.38.3 Variierende Steifigkeiten 541
5.38.4 Beispiel 544
5.38.5 Kerne $\boldsymbol{j}^+$ 546
5.38.6 Die zwei Zugänge 547
5.38.7 Unterschiedliche Stärken 549

6 Singularitäten 553
6.1 Singuläre Spannungen 553
6.2 Singuläre Lagerkräfte 554
6.3 Einzelkräfte 556
6.4 Das Abklingen der Spannungen 559
6.5 Kragträger 563
6.6 Je weiter desto tiefer 563
6.7 Unendlich große Spannungen 564
6.8 Symmetrie der Wirkungen 568
6.9 Kragscheibe 568
6.10 Standardsituationen 573
6.11 Zu glatt ist auch nicht gut 575
6.12 Singularitäten in Einflussfunktionen 577

7 Gemischte Formulierungen 589
7.1 Das System des Stabes 589
7.2 Der vollständige Balken (Bernoulli-Balken) 591
7.2.1 LF Temperatur 592
7.3 Der schubweiche Balken (Timoshenko Balken) 592
7.4 Poisson Gleichung 594

7.5 Die Scheibengleichung . . . 594
7.6 Die schubstarre Platte (Kirchhoff) . . . 598
7.7 Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin) . . . 601
7.8 Shear locking . . . 603
7.9 Einflussfunktionen . . . 605
7.10 Betti extended . . . 607

8 Nichtlineare Probleme . . . 609
8.1 Einführung . . . 609
8.2 Gateaux Ableitung . . . 610
8.3 Nichtlinearer Stab . . . 612
8.3.1 Newton Verfahren . . . 612
8.4 Geometrisch nichtlinearer Balken . . . 613
8.4.1 Energieerhaltungssatz . . . 615
8.5 Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte . . . 617
8.6 Nichtlineare Elastizitätstheorie . . . 617
8.6.1 Linearisierung . . . 619
8.6.2 Ein Fachwerkstab im Raum . . . 620
8.6.3 Ebenes Problem . . . 622
8.7 Nichtlineare Funktionale . . . 626

9 Die Algebra der Statik . . . 629
9.1 Grundlagen . . . 630
9.2 Notation . . . 633
9.3 Gauss garantiert das . . . 634
9.4 Multiplikation von Matrizen . . . 635
9.5 FE-Notation . . . 636
9.6 Vektoren und Funktionen . . . 637
9.7 Selbstadjungiert . . . 638
9.8 Die Algebra der Identitäten . . . 639
9.9 Die Algebra der finiten Elemente . . . 642
9.10 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 644
9.11 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^+$ . . . 646
9.12 Galerkin . . . 647
9.13 Schwache Lösung . . . 648
9.14 Variation und Greensche Identität . . . 651
9.15 Das Grundfunktional (Hu-Washizu) . . . 652
9.16 Kraftgrößenverfahren versus Weggrößenverfahren . . . 654
9.17 Der adjungierte Operator und die Greensche Funktion . . . 654
9.18 Die Ableitungen der Dirac Deltas . . . 656
9.19 Das Seil . . . 658
9.20 Schalen . . . 658
9.21 Die h-Vertauschungsregel . . . 660
9.22 Filter . . . 660
9.23 Poisson Gleichung . . . 662

9.24 Potentiale und Potentialtheorie . . . 663
9.25 Lagrange und Hamilton . . . 664
9.26 Variationsrechnung . . . 665
9.27 Einzelkraft in einer Scheibe . . . 666
9.28 Multipole . . . 667
9.29 Die Dimension der f_i . . . 669
9.30 Transformationen . . . 670
9.31 Näherungen . . . 673
9.32 Schwache und starke Einflussfunktionen . . . 674
9.33 Wie kommt der Einbettungssatz zu seinem Namen? . . . 675
9.34 Negative Normen . . . 681
9.35 Punktlasten und ihre Energie . . . 682
9.36 Early Birds . . . 683

10 Shape functions und MATLAB . . . 685
10.1 Balken mit beliebiger Belastung. . . . 685
10.2 Einheitsverformungen Th. II. Ordg. . . . 685
10.3 Balken, h linear . . . 688
10.4 Dirac Delta . . . 693
10.4.1 EF für $w(x)$ . . . 693
10.4.2 EF für $M(x)$ und $V(x)$ mit Dirac Delta . . . 693
10.5 Stab, h linear . . . 695
10.6 Gebetteter Balken . . . 696
10.6.1 Zahlenbeispiel . . . 698
10.7 Seil mit finiten Elementen . . . 700

11 Nachwort . . . 705

12 Software . . . 715

Literaturverzeichnis . . . 717
Literatur . . . 717

Index . . . 727

1

Grundlagen

1.1 Einführung

Statik ist die Lehre von den Kräften und dem Gleichgewicht. In der Statik der Kontinua – im Gegensatz zur Vektorstatik – sind die Belastung und die Schnittgrößen Funktionen und die Gleichgewichtslage eines Balkens ist die Lösung einer Differentialgleichung, $EI\, w^{IV}(x) = p(x)$.

Aber die moderne Statik löst keine Differentialgleichungen mehr, sondern sie löst Variationsprobleme – wie die Marktfrau mit ihrer Waage. Aus der Statik ist eine ‚Wackelstatik' geworden: Gleichgewicht ist ein Balanceakt[1] und je kleiner man die Elemente macht, umso näher kommt man dem wahren Gleichgewichtspunkt.

Die Grundlage der Variationsprinzipe – auf denen die finite Elemente ja beruhen – ist das Skalarprodukt von *Kraft* und *Weg*

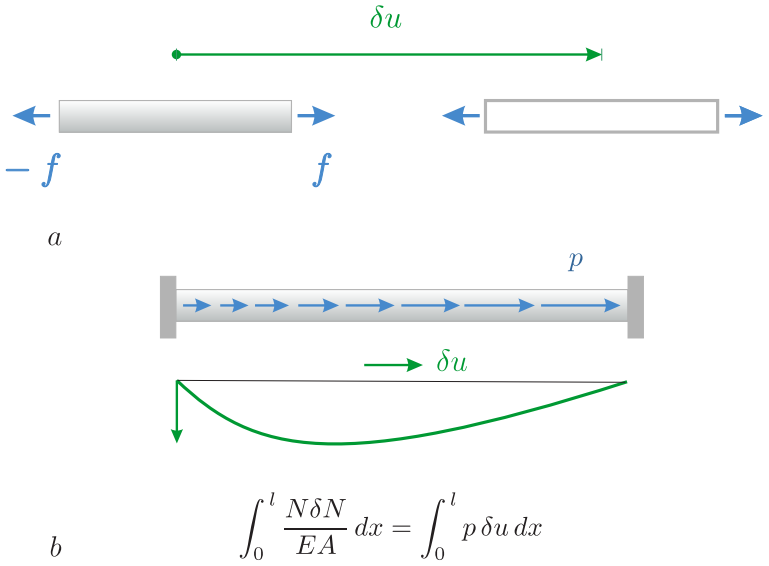
$$\int_0^l EI\, w^{IV}(x)\, \delta w(x)\, dx = Kraft \times Weg\,, \tag{1.1}$$

und weil die Kraft $EI\, w^{IV}(x) = p(x)$ die Ableitung der Biegelinie ist, kann man mittels partieller Integration das Arbeitsintegral umformen, aus der äußeren virtuellen Arbeit δW_e wird innere virtuelle Arbeit δW_i, und so entstehen wie von selbst die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik:

- **Das Prinzip der virtuellen Verrückungen**
- **Der Energieerhaltungssatz**
- **Das Prinzip der virtuellen Kräfte**
- **Der Satz von Betti**

Mathematisch beruhen diese Prinzipe auf der *ersten Greenschen Identität*. Das ist einfach die Summe der Terme, die entsteht, wenn man das obige

[1] στατικὴ τέχνη = die Kunst des Wägens, [224]



$$\int_0^l \frac{N\delta N}{EA}\,dx = \int_0^l p\,\delta u\,dx$$

Bild 1.1. Virtuelle Verrückung **a)** eines starren und frei beweglichen Stabes und **b)** eines beidseitig festgehaltenen elastischen Stabes. Die beiden Integrale sind für jedes zulässige δu gleich, siehe (1.12)

Arbeitsintegral mittels partieller Integration umformt und alles auf eine Seite bringt

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.2}$$

Diese Null ist die wichtigste Invariante der Mechanik und Statik.

1.1.1 Partielle Integration

Die partielle Integration

$$\int_0^l u'\,\delta u\,dx = [u\,\delta u]_0^l - \int_0^l u\,\delta u'\,dx\,, \tag{1.3}$$

beruht auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$\int_0^l (u\,\delta u)'\,dx = \int_0^l (u'\,\delta u + u\,\delta u')\,dx = [u\,\delta u]_0^l\,. \tag{1.4}$$

Schreiben wir (1.3) als null, als **‚Null-Summe'**,

$$\mathscr{N}(u, \delta u) = \int_0^l u' \, \delta u \, dx - [u \, \delta u]_0^l + \int_0^l u \, \delta u' \, dx = 0 \,, \tag{1.5}$$

dann ist das ein Ausdruck, der für ***alle Paare*** von Funktionen aus $C^1(0, l)$, wie $u = \sin(x)$ und $\delta u = \cos(x)$ null ist. Mit (1.5) kommt das ***für alle δu*** in die Welt, das die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik so geschickt ausnutzen, denn das Skalarprodukt von Kraft und Weg und die partielle Integration sind der Schlüssel zur Mechanik und Statik.

Die partielle Integration ist die materielle Grundlage der Variationsprinzipe.

Die Belastung ist eine Funktion, die gesuchte Biegelinie ist eine Funktion und die Bestimmung der Biegelinie geschieht nach mathematischen Regeln. Mancher Leser ist vielleicht der Meinung, dass die Variationsprinzipe an ‚Naturgesetze' grenzen, aber so weit wagen wir uns nicht hinaus. Was wir unter dem Prinzip der virtuellen Verrückungen oder dem Prinzip der virtuellen Kräfte, etc. verstehen, sind einfache Integralsätze, die ganz der Mathematik angehören und von daher ihre Gültigkeit haben. In diesem Buch geht es um das **Rechnen** in der Statik, um den Umgang mit Zahlen, Vektoren, Funktionen und Differentialgleichungen und ein Beweis, dass zwei Integrale gleich sind, $\delta W_e = \delta W_i$, muss nach mathematischen Regeln geführt werden[2].

1.1.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Wenn an einem Stab zwei gegengleiche Kräfte $\pm f$ ziehen wie in Bild 1.1 a, also

$$-f + f = 0 \,, \tag{1.6}$$

dann kann man die Gleichung mit einer beliebigen Zahl δu multiplizieren, ohne etwas an dem Ergebnis zu ändern

$$\delta u \cdot (-f + f) = -\delta u \cdot f + \delta u \cdot f = 0 \,. \tag{1.7}$$

Statisch bedeutet dies, dass man den Stab beliebig verschieben kann (δu) und jedesmal die Arbeit der beiden Stabendkräfte in der Summe null ist. Das ist die einfachste Anwendung des ***Prinzips der virtuellen Verrückungen***.

Formal beruht das Prinzip auf der einfachen Tatsache, dass, sich eine Gleichung (wir bringen alles auf eine Seite)

$$Eq = 0 \,, \tag{1.8}$$

[2] Eine Brücke zwischen Mathematik und Natur zu schlagen ist sicherlich reizvoll, und *Wikepedia* ist voll davon, aber das hat schon zu vielen Studenten das Leben schwer gemacht, und soll hier für diesmal außen vorbleiben.

nicht ändert, wenn man die Gleichung mit beliebigen Zahlen δu multipliziert

$$\delta u \cdot Eq = 0\,, \tag{1.9}$$

was natürlich auch für Funktionen u und δu gilt, siehe Bild 1.1 b. Genügt also die Funktion $u(x)$ der Differentialgleichung

$$-EA\,u''(x) - p(x) = 0 \qquad 0 < x < l\,, \tag{1.10}$$

dann folgt

$$\int_0^l (-EA\,u'' - p)\,\delta u\,dx = 0\,, \tag{1.11}$$

oder nach partieller Integration – wenn wir annehmen, dass die Randwerte $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$ null sind,

$$\int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = \int_0^l p\,\delta u\,dx\,. \tag{1.12}$$

Und schon an dieser Stelle sei betont, dass δu beliebig klein oder groß sein kann. Es würde auch keinen Sinn geben: Wenn (1.12) für ein infinitesimal kleines $\delta u = 10^{-10} \cdot \sin(\pi\,x/l)$ gilt, dann auch für $\delta u = \sin(\pi\,x/l)$, weil sich jeder Skalenfaktor wie $\varepsilon = 10^{-10}$ einfach herauskürzt, siehe (1.252), denn die Stabgleichung, $-EA\,u'' = p$, ist linear.

1.1.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Jetzt müsste eigentlich das Prinzip der virtuellen Kräfte kommen, aber das wäre eine Wiederholung,

$$\int_0^l \frac{\delta N^*\,N}{EA}\,dx = \int_0^l \delta p^*\,u\,dx\,, \tag{1.13}$$

denn mathematisch ist es dieselbe Gleichung wie beim Prinzip der virtuellen Verrückungen, siehe Seite 34,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(u, \delta u) &= 0 \qquad \text{Prinzip d. virt. Verrückungen} \\ \mathscr{G}(\delta u^*, u) &= 0 \qquad \text{Prinzip d. virt. Kräfte}\,, \end{aligned}$$

es werden nur die Namen geändert, aus u wird ein δu^* und aus δu wird ein u. In der ersten Greenschen Identität werden Kräfte und Wege überlagert

$$\mathscr{G}(\sin x, \cos x) = \text{Kräfte 1} \times \text{Wege 2} \;= 0\,, \tag{1.14}$$

und **beide mal** wackelt der *cosinus* an dem *sinus*. Ob aber der $\sin x$ ‚virtuell' ist, oder der $\cos x$, ist mathematisch irrelevant,

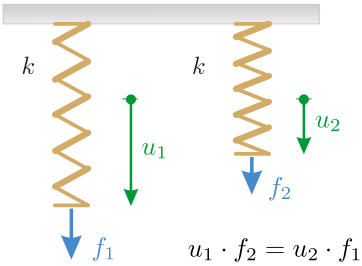


Bild 1.2. Zwei Federn und der Satz von Betti, $k = 3$

$$\mathscr{G}(u = \sin x, \delta u = \cos x) = 0 \qquad \mathscr{G}(\delta u^* = \sin x, u = \cos x) = 0\,, \quad (1.15)$$

wenn natürlich auch in der Mechanik viel Wert auf die unterschiedliche Interpretation von δu und δu^* gelegt wird.

1.1.4 Der Satz von Betti

Wenn zwei Zahlen u_1 und u_2 die beiden Zwillings-Gleichungen

$$3 \cdot u_1 = 12 \qquad 3 \cdot u_2 = 18 \quad (1.16)$$

lösen, (die 3 macht sie zu Zwillingen) und man multipliziert die beiden Gleichungen jeweils mit der anderen Zahl **‚über Kreuz'**,

$$u_2 \cdot 3 \cdot u_1 = 12 \cdot u_2 \qquad u_1 \cdot 3 \cdot u_2 = 18 \cdot u_1\,, \quad (1.17)$$

dann sind die linken Seiten gleich und daher müssen auch die rechten Seiten gleich sein, siehe Bild 1.2,

$$W_{1,2} = 12 \cdot u_2 = 18 \cdot u_1 = W_{2,1}\,. \quad (1.18)$$

Das ist der *Satz von Betti*: ***Die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die im Gleichgewicht sind, sind gleich groß***. Es ist einfache Algebra – wie auch in dem folgenden Beispiel.

Multipliziert man die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ eines Fachwerks aus zwei Lastfällen

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{f}_1 \qquad \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{f}_2\,, \quad (1.19)$$

skalar ‚über Kreuz', dann ergibt das

$$\boldsymbol{u}_2^T\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2^T\,\boldsymbol{f}_1 \qquad \boldsymbol{u}_1^T\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1^T\,\boldsymbol{f}_2 \quad (1.20)$$

und weil die linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein

$$\boldsymbol{u}_2^T\,\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{u}_1^T\,\boldsymbol{f}_2\,, \quad (1.21)$$

sind die reziproken Arbeiten der Knotenkräfte gleich groß.

Der Satz von Betti hängt also an der Symmetrie, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$, genauer, an der Tatsache, dass die Differentialgleichungen der linearen Statik **selbstadjungiert** sind.

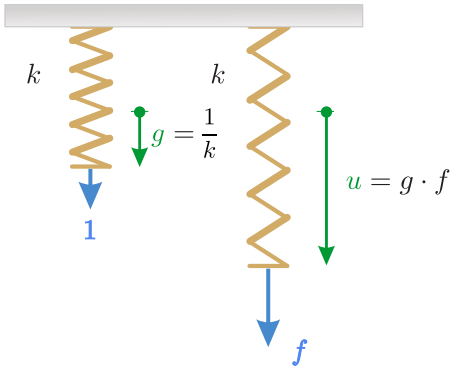


Bild 1.3. Wenn sich eine Feder unter einer Kraft $f = 1$ um $g = 1/k$ verlängert, dann verlängert sie sich unter einer Kraft f um $u = f \cdot g$

1.1.5 Einflussfunktionen

Um die Gleichung

$$3 \cdot x = 12 \tag{1.22}$$

zu lösen, dividieren wir die rechte Seite durch die Zahl 3, was man auch als Multiplikation der rechten Seite mit dem Faktor $g = 1/3$ lesen kann. ***The magic number*** g ist die Lösung der Gleichung

$$3 \cdot g = 1\,, \tag{1.23}$$

wenn also rechts eine Eins, eine ‚Punktlast' steht. Wie natürlich muss dann

$$x = g \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \tag{1.24}$$

die Lösung von (1.22) sein, siehe Bild 1.3. Das ist die Technik der ***Einflussfunktionen*** oder ***Greenschen Funktionen*** (daher der Buchstabe g).

Soll etwa die Verschiebung u_i eines Fachwerkknotens berechnet werden, so setzen wir in den Knoten eine Kraft $f_i = 1$, bestimmen die dazu gehörigen Knotenverschiebungen des Fachwerks, den Vektor $\boldsymbol{g}_i$,

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i \qquad (i\text{-ter Einheitsvektor})\,, \tag{1.25}$$

und bilden das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{f}$

$$u_i = \boldsymbol{e}_i^T\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}_i^T\,\boldsymbol{f}\,. \tag{1.26}$$

Bei einem Balken setzen wir in analoger Weise eine Einzelkraft $P = 1$ in den Aufpunkt x, bestimmen die zugehörige Biegelinie $G(y, x)$, siehe Bild 1.4, überlagern die Belastung mit dieser Biegelinie, und erhalten so die Durchbiegung $w(x)$ in dem Punkt x

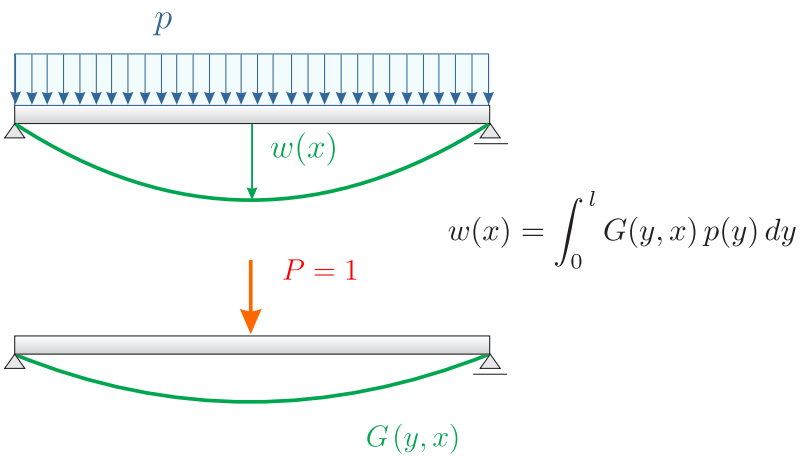


Bild 1.4. Biegebalken und Einflussfunktion für die Durchbiegung in Feldmitte

$$w(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{1.27}$$

1.1.6 Identitäten

Beim Rechnen in der Statik geht es in der Regel um das Lösen von einzelnen Gleichungen

$$k\, u = f\,, \tag{1.28}$$

oder symmetrischen Gleichungssystemen

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{1.29}$$

oder um das Lösen von Differentialgleichungen wie

$$EI\, w^{IV}(x) = p(x)\,. \tag{1.30}$$

Zu jedem der Operatoren auf der linken Seite gehört eine einfache **Identität**

$$\mathscr{B}(u, \delta u) = \delta u\, k\, u - u\, k\, \delta u = 0 \tag{1.31}$$

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta u} = 0 \tag{1.32}$$

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l EI\, w^{IV}\, \delta w\, dx + [V\, \delta w - M\, \delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M\, \delta M}{EI}\, dx = 0\,. \tag{1.33}$$

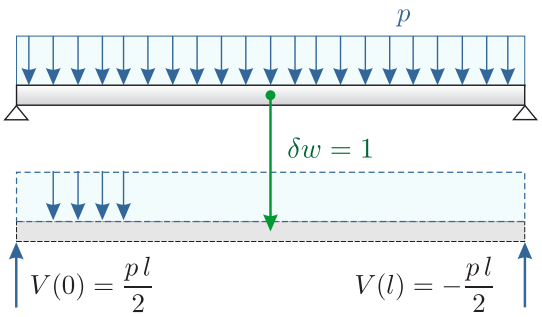


Bild 1.5. Die Kontrolle des Gleichgewichts der Kräfte an einem Balken beruht auf einer dualen Formulierung, $\mathscr{G}(w,1) = p \cdot l + V(l) - V(0) = 0$

Die letzte Identität beruht auf partieller Integration und daher müssen die Funktionen w und δw hinreichend glatt sein, also aus $C^4(0,l)$ bzw. $C^2(0,l)$ sein, damit sie gilt.

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik basieren auf den Greenschen Identitäten.

Die zentrale Rolle des Arbeitsbegriffes (= Skalarprodukt) geht auf diese Identitäten zurück, denn die wesentlichen Formulierungen der Statik und Mechanik sind ***duale Formulierungen***, sind ‚Stereo', nicht ‚Mono'. Zwei Funktionen, die Biegelinie w und die virtuelle Verrückung δw, sind in der Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{1.34}$$

miteinander verknüpft und die null bedeutet, dass bei jeder Verrückung δw die virtuelle äußere Arbeit gleich der virtuellen inneren Arbeit ist.

Und weil (1.33) für alle $\delta w \in C^2(0,l)$ richtig ist, muss es z.B. auch für die Verrückung $\delta w = 1$ gelten

$$\mathscr{G}(w,1) = \int_0^l EI\, w^{IV} \cdot 1\, dx + V(l) \cdot 1 - V(0) \cdot 1 = 0\,, \tag{1.35}$$

und damit ist das **Gleichgewicht der vertikalen Kräfte**, die zu der Biegelinie w gehören, wir setzen $EI\, w^{IV} = p$, garantiert, siehe Bild 1.5.

1.2 Greensche Identitäten

Wir stellen im Folgenden zunächst in knapper Form die wesentlichen **Differentialgleichungen** der Stabstatik vor und formulieren die zugehörigen **Identitäten**

$$\int_0^l -EA\, u''\, \delta u\, dx = \left[(-EA\, u')\, \delta u\right]_0^l - \int_0^l -EA\, u'\, \delta u'\, dx \tag{1.36}$$

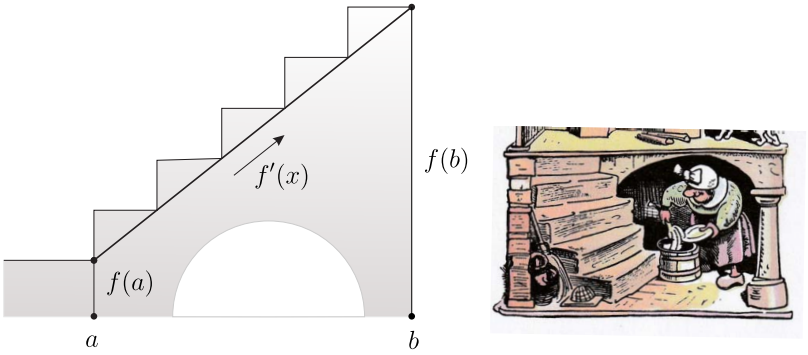


Bild 1.6. Beim Treppensteigen spürt Witwe Bolte den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

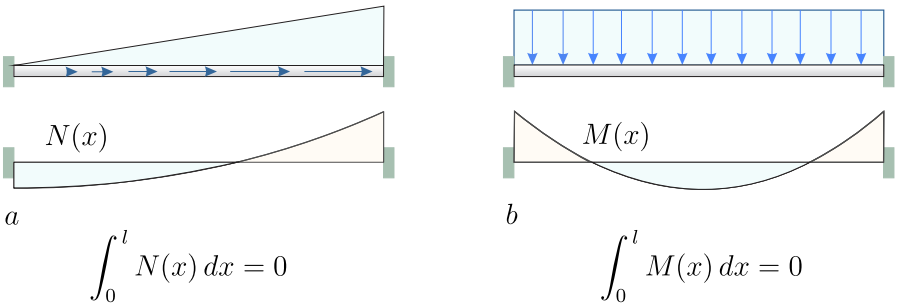


Bild 1.7. Das Integral der Normalkraft und des Biegemomentes ist null

– hier für einen Stab, $-EA\,u'' = p$.

Partielle Integration ist wie Treppensteigen (dann ist $\delta u = 1$)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,, \tag{1.37}$$

denn wenn bei jedem Schritt dx in der Horizontalen der Zuwachs an Höhe $df = f'(x)\,dx$ beträgt, steigt Witwe Bolte insgesamt um das Maß $f(b) - f(a)$ aus dem Keller nach oben, siehe Bild 1.6.

Die Treppenformel (1.37) ist der ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*** aus dem leicht folgt, dass z.B. das Integral der Normalkraft $N(x) = EA\,u'(x)$ in einem beidseitig festgehaltenen Stab null ist, siehe Bild 1.7 a,

$$\int_0^l EA\,u'(x)\,dx = [EA\,u]_0^l = EA\,(u(l) - u(0)) = 0\,, \tag{1.38}$$

und ebenso das Integral des Biegemomentes $M(x) = -EI\,w''(x)$ in einem beidseitig eingespannten Balken, siehe Bild 1.7 b,

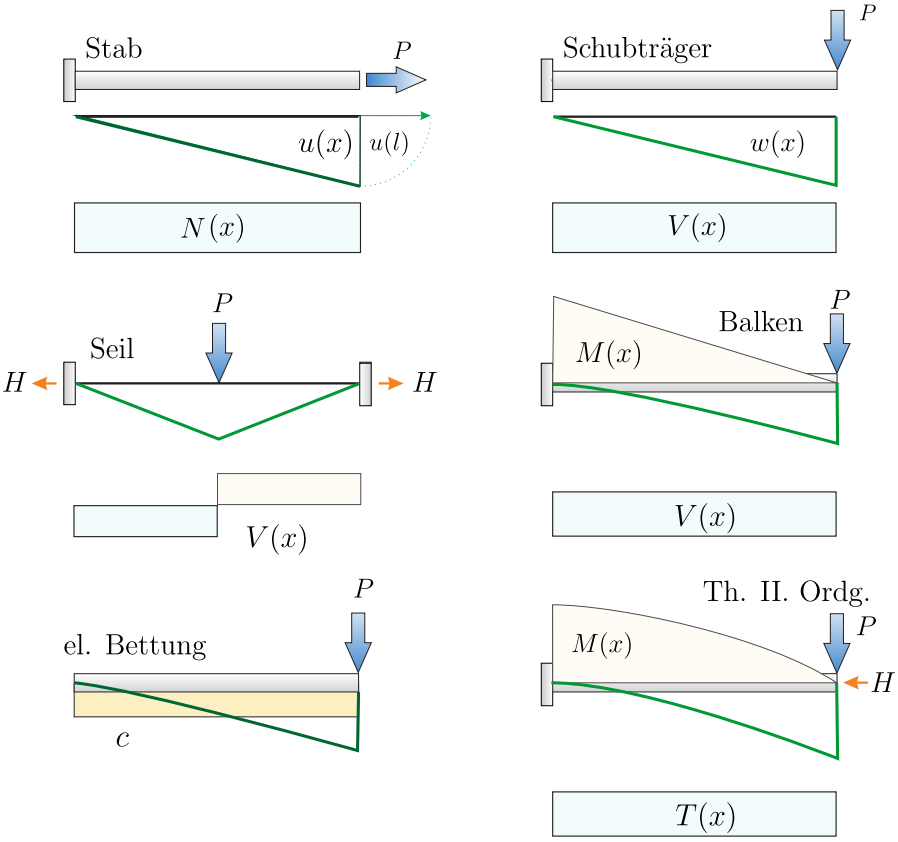


Bild 1.8. Stabverformungen

$$\int_0^l -EI\, w''(x)\, dx = -EI\,(w'(l) - w'(0)) = 0\,. \tag{1.39}$$

Bei partiellen Ableitungen lautet die Regel der partiellen Integration

$$\int_\Omega u_{,i}\; v\, d\Omega = \int_\Gamma u\, n_i\, v\, ds - \int_\Omega u\, v_{,i}\; d\Omega\,. \tag{1.40}$$

Hier ist Γ der Rand der Scheibe, der Platte Ω über die integriert wird, n_i ist die i-te Komponente des Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ (Länge $|\boldsymbol{n}| = 1$) auf Γ und $u_{,i} = \partial u/\partial x_i$ ist eine abkürzende Schreibweise für die Ableitung nach x_i.

Wenn eine Scheibe Ω an ihrem Rand Γ festgehalten wird, $u_x = u_y = 0$, ist daher das Integral der Spannung

$$\sigma_{xx} = E\,(\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy}) = E\,(u_{x,x} + \nu\, u_{y,y}\,) \tag{1.41}$$

über Ω, also der Mittelwert von σ_{xx}, null (und ebenso von σ_{yy}), denn

$$\int_\Omega E\,(u_{x,x} + \nu\, u_{y,y})\, d\Omega = \int_\Gamma E\,(u_x\, n_x + \nu\, u_y\, n_y)\, ds = 0\,. \tag{1.42}$$

1.2.1 Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes

$$-EA\, u''(x) = p(x) \tag{1.43}$$

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_0^l -EA\, u''(x)\, \delta u(x)\, dx + [N\, \delta u]_0^l}_{\text{äußere virt. Arbeit}} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\, \delta N}{EA}\, dx}_{\text{innere virt. Arbeit}} = 0\,, \tag{1.44}$$

mit der Normalkraft $N = EA\, u'$, siehe Bild 1.8.

Wenn $EA(x)$ veränderlich ist, dann lautet die Differentialgleichung des Stabes

$$-(EA(x)\, u'(x))' = p(x) \tag{1.45}$$

und partielle Integration

$$\int_0^l -(EA(x)\, u')'\, \delta u\, dx = [(-EA(x)\, u')\, \delta u]_0^l - \int_0^l -EA(x)\, u'\, \delta u'\, dx \tag{1.46}$$

führt sinngemäß auf das Ebenbild der Identität (1.44), denn die Definition von $N = EA(x)\, u'(x)$ ändert sich nicht

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -(EA(x)\, u')'\, \delta u(x)\, dx + [N\, \delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\, \delta N}{EA}\, dx = 0\,. \tag{1.47}$$

Weil $-N' = p$ dasselbe ist wie $-(EA(x)\, u')' = p$, kann man auch schreiben

$$\int_0^l -N'\, \delta u\, dx = [N\, \delta u]_0^l - \int_0^l -N\, \delta u'\, dx\,. \tag{1.48}$$

Wenn die Ausdehnung des Stabes durch Reibung (c) behindert wird, wie bei einem Ausziehversuch

$$-EA\, u''(x) + c\, u(x) = p(x)\,, \tag{1.49}$$

dann lautet die Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_0^l (-EA\, u''(x) + c\, u(x))\, \delta u(x)\, dx + [N\, \delta u]_0^l}_{\delta W_e}$$
$$- \underbrace{\int_0^l \left(\frac{N\, \delta N}{EA} + c\, u\, \delta u\right) dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.50}$$

1.2.2 Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens

$$-GA\,w_s''(x) = p(x) \tag{1.51}$$

$$\mathscr{G}(w_s, \delta w_s) = \underbrace{\int_0^l -GA\,w_s''(x)\,\delta w_s(x)\,dx + [V\,\delta w_s]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{V\,\delta V}{GA}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.52}$$

mit $V = GA\,w_s'$.

Wenn der Balken auf einer elastischen Grundlage (c) ruht,

$$-GA\,w_s''(x) + c\,w_s(x) = p(x)\,, \tag{1.53}$$

dann hat die Identität die Gestalt

$$\mathscr{G}(w_s, \delta w_s) = \underbrace{\int_0^l (-GA\,w_s''(x) + c\,w(x))\,\delta w_s(x)\,dx + [V\,\delta w_s]_0^l}_{\delta W_e}$$
$$- \underbrace{\int_0^l (\frac{V\,\delta V}{GA} + c\,w_s\,\delta w_s)dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.54}$$

1.2.3 Durchbiegung w eines Seils

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad H = \text{Vorspannung im Seil} \tag{1.55}$$

mit $V(x) = H\,w'(x)$ als der Querkraft in dem Seil (H ist das EI beim Seil)

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \underbrace{\int_0^l -H\,w''(x)\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{V\,\delta V}{H}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.56}$$

1.2.4 Durchbiegung w eines Balkens

$$EI\,w^{IV}(x) = p(x) \tag{1.57}$$

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \underbrace{\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.58}$$

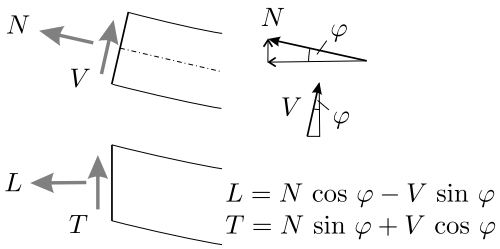


Bild 1.9. Schnittkräfte, Balken Th. II. Ordg.

mit $M(x) = -EI\,w''(x)$ und $V(x) = -EI\,w'''(x)$.

Wenn $EI(x)$ veränderlich ist, dann lautet die Differentialgleichung des Balkens

$$(EI(x)\,w''(x))'' = p(x) \tag{1.59}$$

und zweimalige partielle Integration

$$\int_0^l (EI(x)\,w'')''\,\delta w\,dx = [(EI(x)\,w'')'\,\delta w - EI(x)\,w''\,\delta w']_0^l + \int_0^l EI(x)\,w''\,\delta w''\,dx \tag{1.60}$$

führt mit $M = -EI(x)\,w''$ und $V = -(EI(x)\,w'')'$ auf die zu (1.58) analoge Identität.

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^l (EI(x)\,w'')''\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,. \tag{1.61}$$

Auch hier kann man, weil $-M'' = p$ dasselbe ist wie $(EI(x)w'')'' = p$, schreiben

$$\int_0^l -M''\,\delta w\,dx = -[M'\,\delta w]_0^l + \int_0^l M'\,\delta w'\,dx\,. \tag{1.62}$$

1.2.5 Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung

$$EI\,w^{IV}(x) + (D(x)\,w'(x))' = p_z(x) \qquad D(x) = P + \int_0^x p_x(y)\,dy \tag{1.63}$$

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) + (D(x)\,w'(x))')\,\delta w\,dx + [T\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} - D(x)\,w'(x)\,\delta w'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0 \tag{1.64}$$

mit der ***Transversalkraft***

$$T(x) = -EI\,w'''(x) - D(x)\,w'(x) = V(x) - D(x)\,w'(x)\,, \tag{1.65}$$

als der Erweiterung der Querkraft um den vertikalen Anteil aus der schräg gerichteten ($w' = \tan\varphi$) Druckkraft D, [165], S. 8.

Die Konstante P ist eine Druckkraft in dem Stab und $p_x(x)$ und $p_z(x)$ sind Linienkräfte in Achsrichtung und senkrecht dazu.

Die math. Transversalkraft[3] $T = V + N\,w'$ (hier N als Zugkraft) ist konjugiert zu δw, ist also vertikal gerichtet und N hat eine Komponente in vertikaler Richtung. Multiplikation des statischen T in Bild 1.9 mit $1/\cos\varphi$ ergibt

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,T = V + N\,\tan\varphi = V + N\,w'\,, \tag{1.66}$$

was mit dem math. T übereinstimmt, wenn wir $1/\cos\varphi \simeq 1$ setzen.

1.2.6 Elastisch gebetteter Träger

$$EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = p(x) \tag{1.67}$$

Hierzu gehört die Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x))\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + c\,w(x)\,\delta w(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{1.68}$$

1.2.7 Zugbandbrücke

Man stelle sich einen Balken vor, durch den ein vorgespanntes Seil gezogen wird, so dass Balken und Seil gemeinsam die Streckenlast p tragen

$$EI\,w^{IV}(x) - H\,w''(x) = p(x) \qquad H = \text{Vorspannkraft} \tag{1.69}$$

[3] Wie sie sich mit partieller Integration in (1.64) ergibt

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_0^l (EI\,w^{IV}(x) - H\,w''(x))\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M\,\delta M}{EI} + H\,w'(x)\,\delta w'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.70}$$

mit $V = -EI\,w'''(x) + H\,w'(x)$.

1.2.8 Torsion

Die Differentialgleichung der ***St. Venantschen Torsion***

$$-G\,I_T\,\vartheta''(x) = m_x \tag{1.71}$$

$$\mathscr{G}(\vartheta,\delta\vartheta) = \underbrace{\int_0^l -G\,I_T\,\vartheta''(x)\,\delta\vartheta(x)\,dx + [M_T\,\delta\vartheta]_0^l}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_0^l \frac{M_T\,\delta M_T}{G\,I_T}\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.72}$$

und der ***Wölbkrafttorsion***

$$EI_\omega\,\vartheta^{IV}(x) - G\,I_T\,\vartheta''(x) = m_x \tag{1.73}$$

$$\mathscr{G}(\vartheta,\delta\vartheta) = \underbrace{\int_0^l (EI_\omega\,\vartheta^{IV}(x) - G\,I_T\,\vartheta''(x))\,\delta\vartheta(x)\,dx + [M_T\,\delta\vartheta - M_\omega\,\delta\vartheta']_0^l}_{\delta W_e}$$
$$\underbrace{- \int_0^l (\frac{M_\omega\,\delta M_\omega}{EI_\omega} + G\,I_T\,\vartheta'(x)\,\delta\vartheta'(x))\,dx}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{1.74}$$

mit

$$M_\omega = -EI_\omega\,\vartheta''(x) \qquad M_T = -EI_\omega\,\vartheta'''(x) + G\,I_T\,\vartheta'(x) \tag{1.75}$$

wiederholen die obigen Muster[4].

[4] Damit ist die Liste der Differentialgleichungen der Stabstatik natürlich noch nicht zu Ende. Eine umfangreiche Zusammenstellung findet der Leser in [175].

1.3 Die Arbeitssätze der Statik

In allen Identitäten, wie

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l -EA\,u''\,\delta u\,dx + [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = 0\,, \tag{1.76}$$

werden **Kräfte** [N] und **Wege** [m] überlagert, werden **Arbeiten** = [N · m] gezählt und die Bilanz ergibt am Schluss immer null, null Arbeit. Darauf beruhen die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\boxed{\mathscr{G}(w,\delta w) = \delta W_e - \delta W_i = 0\,.} \tag{1.77}$$

Energieerhaltungssatz

Ist das zweite Argument identisch mit dem ersten, dann ist es der Energieerhaltungssatz

$$\boxed{\frac{1}{2}\;\mathscr{G}(w,w) = W_e - W_i = 0\,,} \tag{1.78}$$

der besagt, dass die äußere Eigenarbeit (deswegen der Faktor 1/2) als innere Energie gespeichert wird.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Rückt man $w(x)$ an die zweite Stelle und überlässt den ersten Platz einer Testfunktion δw^*, die man, wie es Tradition ist, mit einem Asterisk schreibt, dann ist es das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\boxed{\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,.} \tag{1.79}$$

Satz von Betti

Auch der Satz von Betti gehört an diese Stelle, weil er durch Spiegelung aus der ersten Greenschen Identität entsteht

$$\mathscr{B}(w,\,\hat{w}) = \mathscr{G}(w,\hat{w}) - \mathscr{G}(\hat{w},w) = \underbrace{\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\hat{w}(x)\,dx + [V\,\hat{w} - M\,\hat{w}']_0^l}_{W_{1,2}}$$

$$\underbrace{- [w\,\hat{V} - w'\,\hat{M}]_0^l - \int_0^l w(x)\,EI\,\hat{w}^{IV}(x)\,dx}_{W_{2,1}} = 0\,, \tag{1.80}$$

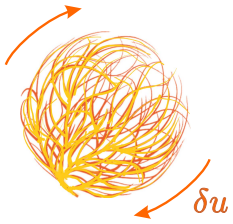


Bild 1.10. Tumbleweed

was bedeutet, dass die reziproken äußeren Arbeiten zweier Biegelinien w_1 und w_2 gleich groß sind,

$$\boxed{\mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} - W_{2,1} = 0\,,}$$

also

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \text{Kräfte } 1 \times \text{Wege } 2 - \text{Wege } 1 \times \text{Kräfte } 2 = 0\,. \tag{1.81}$$

Vorsichtshalber sei noch angemerkt: Hier wurden nicht die Identitäten an Hand der Variationsprinzipe ‚verifiziert', sondern es ist umgekehrt: Die Variationsprinzipe gelten, weil die Identitäten gelten.

Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Die potentielle Energie eines gelenkig gelagerten Einfeldträgers ist – in klassischer und moderner Notation nebeneinander – der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi(w) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx - \int_0^l p(x)\,w(x)\,dx = \frac{1}{2}\,a(w,w) - (p,w) \\ &= \frac{1}{2}\,(a(w,w) - (p,w)) - \frac{1}{2}\,(p,w)\,. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Ist w die Biegelinie des Trägers, $EI\,w^{IV} = p$, dann ist $a(w,w) - (p,w) = 0$ (das ist die erste Greensche Identität) und dann verkürzt sich das auf

$$\boxed{\Pi(w) = -\frac{1}{2}\,(p,w) = \text{halbe Eigenarbeit} \times (-1)} \tag{1.83}$$

woraus folgt, dass die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage negativ ist, weil die *Eigenarbeit* (p,w) immer positiv ist.

Addiert man zur tiefsten Lage w eine zulässige virtuelle Verrückung δw, also $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$, dann wird die potentielle Energie größer

$$\Pi(w + \delta w) = \Pi(w) + \underbrace{\mathscr{G}(w, \delta w)}_{=0} + \underbrace{a(\delta w, \delta w)}_{>0}\,, \tag{1.84}$$

was belegt, dass $\Pi(w)$ wirklich der tiefste Punkt ist. Ferner gilt:

Die erste Variation $\delta\Pi$ der potentiellen Energie ist identisch mit der ersten Greenschen Identität,

$$\delta\Pi(w,\delta w) = a(w,\delta w) - (p,\delta w) = \mathscr{G}(w,\delta w) = 0\,. \tag{1.85}$$

Deswegen bilden die Greenschen Identitäten die Vorlage für die finiten Elemente. Man konstruiert eine Lösung $w_h = \sum_j w_j\,\varphi_j(x)$ so, dass

$$\boxed{a(w_h,\varphi_i) - (p,\varphi_i) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\,.} \tag{1.86}$$

Free body diagram

Es sollte klar sein, dass die Greenschen Identitäten am frei geschnittenen System (*free body diagram*) formuliert werden, denn ohne Randarbeiten [...] wären die Ausdrücke nicht komplett. Sind nur starre Lager vorhanden, kann man auf das Freischneiden verzichten, wenn δw eine *zulässige* virtuelle Verrückung ist.

1.4 Ein Null-Summen-Spiel

Die erste Greensche Identität gleicht dem Spiel, das der Wüstenwind ($= \delta u$) mit dem ausgetrockneten *tumbleweed* ($= u$) treibt, siehe Bild 1.10. Egal wie stark der Wind bläst, und wie groß die Kapriolen sind, am Schluss ist die Bilanz immer null, $\mathscr{G}(u,\delta u) = 0$. Lesen wir diese Invariante wie eine Variationsaussage

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = 0 \qquad \text{für alle } \delta u\,, \tag{1.87}$$

dann erinnert sie an die Weg-Unabhängigkeit des Arbeitsintegrals einer Punktmasse m im Schwerefeld der Erde, siehe Bild 1.11. Nahe der Erdoberfläche hat die potentielle Energie den Wert $\Pi = m\cdot g\cdot y$ und wenn sich die Punktmasse m auf einem geschlossenen Pfad $\mathcal{C} = \{x(s), y(s)\}^T$ bewegt, dann ist die Gesamtarbeit null[5]

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \nabla\Pi \bullet \boldsymbol{ds} &= m\cdot g \int_0^L \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} ds = m\cdot g\int_0^L y'\,ds \\ &= m\cdot g\cdot (y(L) - y(0)) = 0\end{aligned} \tag{1.88}$$

unabhängig von der Gestalt der Kurve $\mathcal{C}$ – dem Pfad δu so zu sagen.

Mit dem Skalarprodukt und der partiellen Integration kommt die ***Dualität***, also das Wechselspiel von Kraft und Weg in die Mechanik hinein.

Es beginnt mit dem Skalarprodukt[6] von zwei konjugierten Größen, von einer Kraft und einem Weg,

[5] Part. Int. und $y(0) = y(L)$ mit L = Länge des Pfades

[6] Die Überlagerung zweier Funktionen nennt man ein L_2-Skalarprodukt.

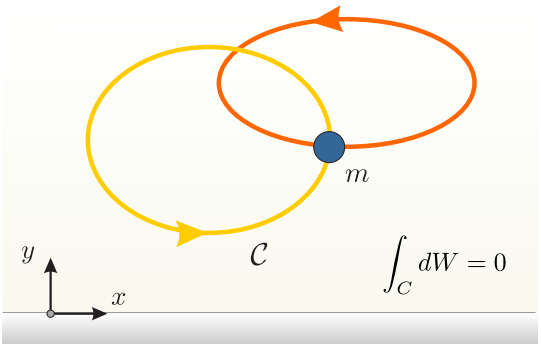


Bild 1.11. Geschlossene Pfade im Schwerefeld der Erde

$$\int_0^l -EA\,u''\,\delta u\,dx = Kraft \times Weg \tag{1.89}$$

und indem man die Integrale mittels partieller Integration umformt

$$\mathscr{N}(u,\delta u) = \int_0^l u'\,\delta u\,dx - [u\,\delta u]_0^l + \int_0^l u\,\delta u'\,dx = 0\,, \tag{1.90}$$

kann man ∞ viele Paare von Funktionen u und δu in einem solchen ‚Null-Summen-Spiel' miteinander verknüpfen

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^l -EA\,u''\,\delta u\,dx + \ldots \\ \displaystyle\int_0^l EI\,u^{IV}\,\delta u\,dx + \ldots \\ \displaystyle\int_\Omega -\Delta u\,\delta u\,d\Omega + \ldots \\ \ldots \end{array} \right\} = 0\,. \tag{1.91}$$

und kommt so automatisch zu den Variationsprinzipen der Mechanik und Statik.

Und dass es Null-Summen sind, also ***Invarianten*** – man denke an den Wüstenwind(!) – darauf beruht der große praktische Nutzen der Arbeits- und Energieprinzipe, sprich der ersten Greenschen Identität.

1.5 Beispiele

Nach dieser doch etwas knappen, schlagwortartigen Auflistung sollen nun Beispiele den Inhalt veranschaulichen.

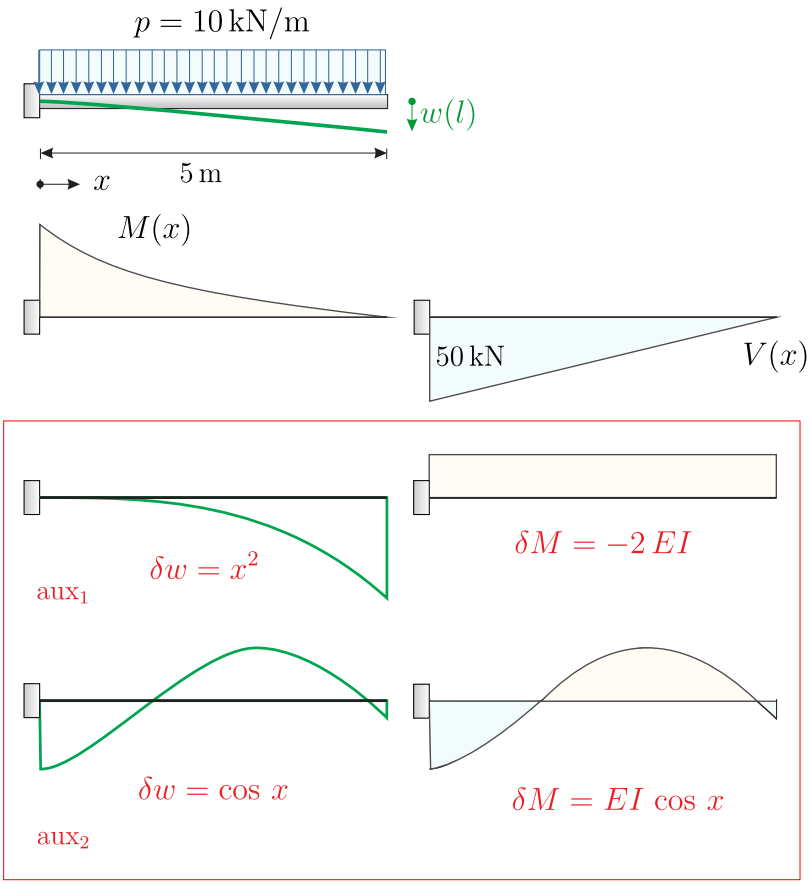


Bild 1.12. Kragträger, aux = Hilfssystem

1.5.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Die Biegelinie des Kragträger in Bild 1.12

$$EI\,w^{IV}(x) = 10 \qquad w(0) = w'(0) = 0 \qquad M(l) = V(l) = 0 \tag{1.92}$$

hat die Gestalt

$$w(x) = \frac{1}{EI}\,(\frac{10}{24}\,x^4 - \frac{50}{6}\,x^3 + \frac{125}{2}\,x^2) \tag{1.93}$$

und die Schnittkräfte lauten

$$M(x) = -5\,x^2 + 50\,x - 125 \qquad V(x) = -10\,x + 50\,. \tag{1.94}$$

Die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx+[V\,\delta w-M\,\delta w']_0^l-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=0\,, \tag{1.95}$$

reduziert sich unter Beachtung von (1.92), und wenn $\delta w(x)$ eine zulässige virtuelle Verrückung ist,

$$\delta w(0)=0\qquad \delta w'(0)=0\,, \tag{1.96}$$

auf den Ausdruck

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l 10\cdot\delta w\,dx-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=0\,, \tag{1.97}$$

der mit der Bilanz $\delta W_e-\delta W_i=0$ identisch ist.

Wählen wir z.B. als zulässige virtuelle Verrückung die Funktion $\delta w(x)=x^2$, so bestätigt sich das auch numerisch

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,x^2)&=\int_0^5 10\cdot x^2\,dx-\int_0^5(-5\,x^2+50\,x-125)\cdot(-2)\,dx\\&=\frac{1250}{3}-\frac{1250}{3}=\delta W_e-\delta W_i=0\,.\end{aligned} \tag{1.98}$$

Dagegen ist die Funktion

$$\delta w(x)=\cos x \tag{1.99}$$

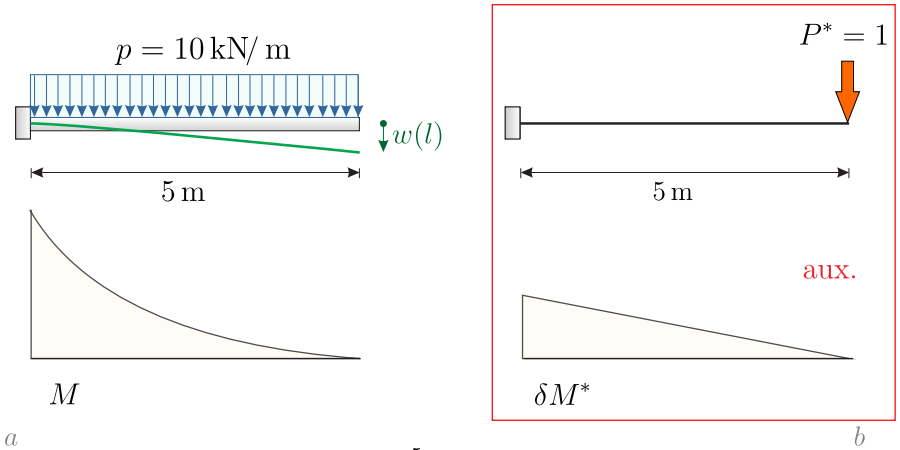
keine zulässige virtuelle Verrückung, denn bei dieser Bewegung wird das eigentlich feste linke Lager verrückt, $\delta w(0)=\cos 0=1$. Das setzt aber die Gültigkeit von $\mathscr{G}(w,\delta w)=0$ nicht außer Kraft. Man muss jetzt nur richtig zählen und beachten, dass nun auch die Querkraft $V(0)=50$ eine Arbeit leistet, und so ergibt sich mit

$$\delta M(x)=-EI\,\delta w''(x)=EI\,\cos\,x \tag{1.100}$$

auch das richtige Resultat (es ist $-50\cdot 1=-V(0)\cdot\cos 0$)

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\cos x)&=\int_0^5 10\cos x\,dx-50\cdot 1\,-\int_0^5(-5\,x^2+50\,x-125)\cos\,x\,dx\\&=\underbrace{-9.59-50}_{\delta W_e}+\underbrace{59.59}_{\delta W_i}=0\,.\end{aligned} \tag{1.101}$$

Die Starrkörperbewegungen $\delta w=a+b\,x$ sind ebenfalls keine zulässigen virtuellen Verrückungen, aber trotzdem ist ihre Anwendung erlaubt und sogar Pflicht, denn zwei spezielle Starrkörperbewegungen, $\delta w(x)=1$ und $\delta w(x)=x$, kontrollieren das **Gleichgewicht**, also die Summe der vertikalen Kräfte und die Summe der Momente um das linke Lager



$$w(l) = \int_0^5 \frac{M\,\delta M^*}{EI}\,dx$$

Bild 1.13. Kragträger

$$\mathscr{G}(w,1) = \int_0^5 10\cdot 1\,dx - V(0)\cdot 1 = 50 - 50 = 0 \qquad \delta w = 1\,, \quad (1.102)$$

$$\mathscr{G}(w,x) = \int_0^5 10\cdot x\,dx - M(0)\cdot 1 = 125 - 125 = 0 \qquad \delta w = x\,. \quad (1.103)$$

$(M(0)\cdot 1 = M(0)\cdot x')$. Nur wenn w orthogonal zu diesen beiden Verrückungen ist, herrscht Gleichgewicht am Balken.

1.5.2 Energieerhaltungssatz

Man überzeugt sich auch leicht, dass die Biegelinie des Kragträgers dem Energieerhaltungssatz genügt

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(w,w) = \frac{1}{2}\int_0^l p(x)\,w(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx = W_e - W_i$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{EI}(1562.5 - 1562.5) = 0\,, \quad (1.104)$$

dass also die äußere Eigenarbeit W_e gleich der inneren Energie W_i ist.

1.5.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Bei diesem Prinzip wird die Reihenfolge von w und δw vertauscht und man schreibt dann üblicherweise δw^* statt δw

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \int_0^l EI\,\delta w^{*IV}(x)\,w(x)\,dx + [\delta V^*\,w - \delta M^*\,w']_0^l - \int_0^l \frac{\delta M^*\,M}{EI}\,dx = 0\,. \tag{1.105}$$

Die **Mohrsche Arbeitsgleichung** basiert auf dieser Gleichung. Dort schreibt man $\delta w^* = \bar{w}$

Um auf diesem Weg die Durchbiegung am Kragarmende des Trägers in Bild 1.13 a zu berechnen, belasten wir den Träger in einem zweiten Lastfall mit einer Einzelkraft $P^* = 1$, also

$$EI\,\delta w^{*\,IV} = 0 \qquad \delta V^*(l) = 1 \qquad \delta M^*(l) = 0\,. \tag{1.106}$$

Unter Beachtung von $w(0) = w'(0) = 0$ folgt dann

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = P^* \cdot w(l) - \int_0^l \frac{\delta M^*\,M}{EI}\,dx = 0\,, \tag{1.107}$$

oder

$$1 \cdot w(l) = \int_0^l \frac{\delta M^*\,M}{EI}\,dx\,, \tag{1.108}$$

und das ist die Mohrsche Arbeitsgleichung.

Nach diesem ersten Probestück wollen wir das Prinzip der virtuellen Kräfte nun systematischer fassen. Weil $\delta w^*(x)$ in (1.105) an erster Stelle steht, werden mit der Wahl von $\delta w^*(x)$ implizit die Kraftgrößen gesetzt, also die Streckenlast

$$EI\,\delta\,w^{*IV}(x) = \delta\,p^* \tag{1.109}$$

und die Momente $\delta M^* = -EI\,\delta w^{*\prime\prime}$ und die Querkräfte $\delta V^* = -EI\,\delta w^{*\prime\prime\prime}$ an den Balkenenden. Summarisch nennen wir diese Terme die Kräfte δK^*, die zu $\delta w^*(x)$ gehören.

Weil die Weggrößen von δw^* an den Balkenenden in der ersten Greenschen Identität nicht abgefragt werden, muss δw^* keine Rücksicht auf die Lagerbedingungen des Trägers nehmen.

Die Identität $\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0$ garantiert dann, dass die äußere Arbeit δW_e^* der Kräfte δK^* auf den Wegen $w(x)$ genauso groß ist, wie die virtuelle innere Energie δW_i^*, also die Überlagerung von δM^* und M. Das ist der mathematische Hintergrund des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Ist ein System von äußeren Kräften δK^* im Gleichgewicht, dann ist die äussere Arbeit δW^* dieser Kräfte auf den Wegen w des Balkens

$$\delta W_e^* = \int_0^l EI\,\delta\,w^{*IV}\,w(x)\,dx + [\delta\,V^* w - \delta\,M^* w']_0^l\,, \tag{1.110}$$

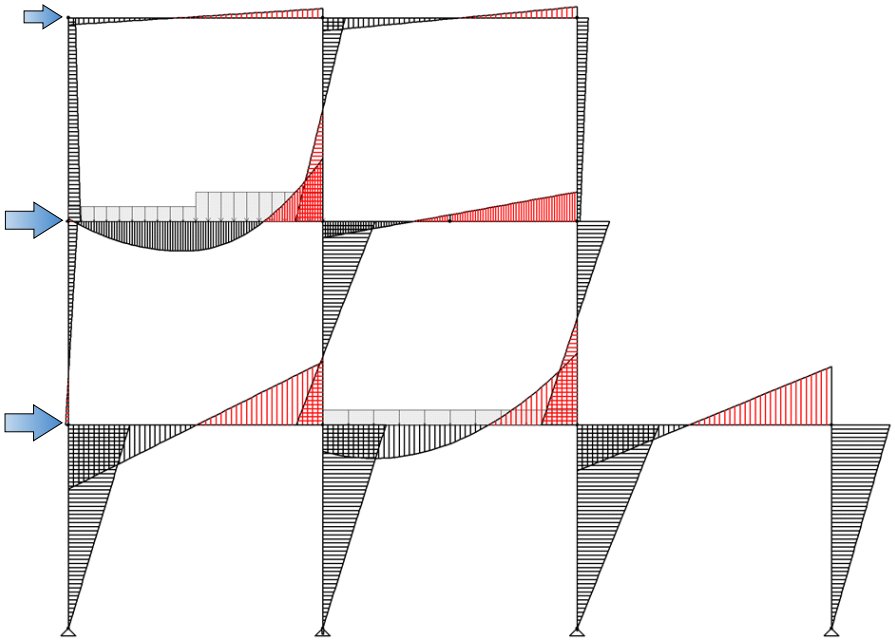


Bild 1.14. Stockwerkrahmen, Momente unter Last

gleich der virtuellen inneren Energie δW_i^**, also dem Integral*

$$\delta W_i^* = \int_0^l \frac{\delta M^* M}{EI}\, dx\,. \tag{1.111}$$

Manchmal wird behauptet, dass die Kräfte δK^* *infinitesimal klein* sein müssen, damit das gilt, aber dafür gibt es keinen sachlichen Grund, denn partielle Integration macht keinen Unterschied zwischen groß und klein.

Das Gleichgewicht der virtuellen Kräfte ist im übrigen garantiert, weil wir die Kräfte aus der Funktion δw^* (dem ‚Mutterschiff') durch Differentiation ableiten und jede Funktion $\delta w^* \in C^4(0,l)$ die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt

$$\mathscr{G}(\delta w^*, \delta w) = 0 \qquad \delta w = a + b\,x\,. \tag{1.112}$$

Anders wäre es, wenn $EI\,\delta\, w^{*IV}$ und die Balkenendkräfte $\delta\, V^*$ und δM^* nicht zueinander passen würden, wenn sie ‚gewürfelt' wären, dann wäre die Bilanz $\delta W_e^* - \delta W_i^*$ wahrscheinlich nicht null.

1.6 Rahmen

Die Erweiterung der Identitäten auf rahmenartige Tragwerke wie den Stockwerkrahmen in Bild 1.14 ist einfach, denn Nullen lassen sich beliebig oft addieren, $0 + 0 + \ldots + 0 = 0$.

Der Rahmen möge aus n Stielen und Riegeln mit entsprechenden Längs- und Biegeverformungen u_i und w_i bestehen. Für jedes u_i bzw. w_i schreiben wir die zugehörige erste Greensche Identität an und addieren all diese Identitäten

$$0 + 0 + \ldots + 0 = 0\,. \tag{1.113}$$

Im nächsten Schritt trennen wir nach äußerer und innerer Arbeit. Was in den Identitäten äußere Arbeit ist, bleibt auf der linken Seite und was innere Arbeit ist, kommt auf die rechte Seite, womit ein Ausdruck wie

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{1.114}$$

entsteht.

Der Term δW_e lässt sich in der Regel weiter vereinfachen. Die beiden zu u_i und w_i gehörigen Identitäten eines Riegels oder Stiels,

$$\mathscr{G}(u_i, \delta u_i) = 0 \quad \text{(längs)} \qquad \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = 0 \quad \text{(quer)} \tag{1.115}$$

tragen in der Summe zu δW_e einen Ausdruck wie

$$\int_0^{l_i} p_x\, \delta u_i\, dx + \int_0^{l_i} p_z\, \delta w_i\, dx + \underbrace{[\mathrm{N}_i\, \delta u_i]_0^{l_i} + [V_i\, \delta w_i - M_i\, \delta w_i']_0^{l_i}}_{\textit{Randarbeiten}} \tag{1.116}$$

bei. Das sind also die virtuellen äußeren Arbeiten der Streckenlasten p_x (längs) und p_z (quer) zwischen den Knoten, und die Randarbeiten, die die Balkenendkräfte, N_i, V_i und M_i auf den zu ihnen konjugierten virtuellen Verrückungen leisten.

Wenn in den Knoten des Rahmens keine Kräfte oder Momente angreifen, dann sind die Anschlusskräfte der Balken in den Knoten unter sich im Gleichgewicht. Was als Normalkraft N ankommt, wird als Querkraft V weitergeleitet, etc. Ferner sind die virtuellen Verrückungen der Balken in den Knoten gleich groß.

Aus dem Gleichgewicht an den Knoten und dem Gleichklang der virtuellen Verrückungen folgt, dass die Summe der Randarbeiten, also die Summe über die eckigen Klammern in jedem Knoten null ist, und damit reduziert sich die Bilanz auf

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \sum_i \Big[\int_0^{l_i} p_z\, \delta w_i\, dx + \int_0^{l_i} p_x\, \delta u_i\, dx\Big] \\ &= \sum_i \Big[\int_0^{l_i} \frac{N_i\, \delta N_i}{EA_i}\, dx + \int_0^{l_i} \frac{M_i\, \delta M_i}{EI_i}\, dx\Big] = \delta W_i\,. \end{aligned} \tag{1.117}$$

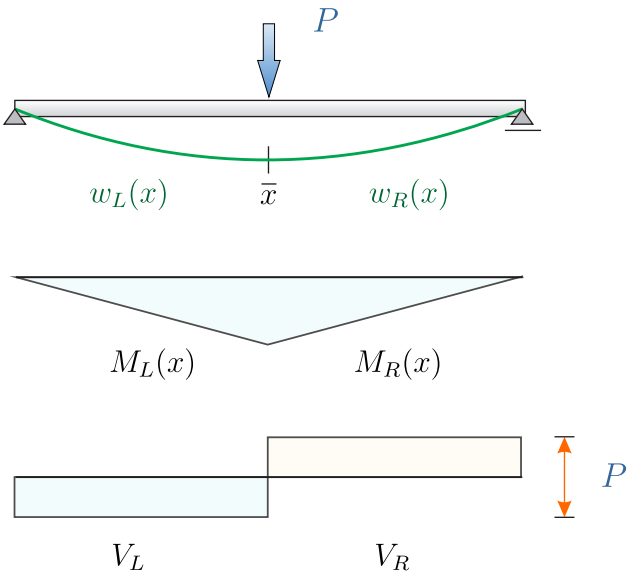


Bild 1.15. Einzelkräfte spalten einen Balken in zwei Teile

Wenn Punktlasten in den Knoten angreifen, dann springen die beteiligten Balkenendkräfte um die Höhe dieser Punktlasten, d.h. die Summe über die Randarbeiten (die eckigen Klammern) ergibt dann in dem Knoten einen Beitrag wie $P \cdot \delta w(x)$.

Den Ausdruck (1.117) kann man weiter vereinfachen, wenn man auf das Anschreiben der Integrationsgrenzen verzichtet und ebenso die Indices an u_i und w_i und EA_i und EI_i etc. weglässt, denn jeder weiß ja, welcher Teil des Rahmens gerade gemeint ist. Man schreibt also einfacher

$$\delta W_e = \int p_z \, \delta w \, dx + \int p_x \, \delta u \, dx \tag{1.118}$$

und analog

$$\int \frac{N \, \delta N}{EA} \, dx + \int \frac{M \, \delta M}{EI} \, dx = \delta W_i \,, \tag{1.119}$$

so dass aus den vielen Identitäten am Ende schließlich der bequeme Ausdruck

$$\delta W_e = \int p_z \, \delta w \, dx + \int p_x \, \delta u \, dx = \int \frac{N \, \delta N}{EA} \, dx + \int \frac{M \, \delta M}{EI} \, dx = \delta W_i \tag{1.120}$$

wird.

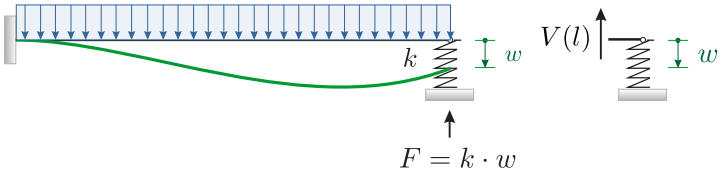


Bild 1.16. Federnde Lagerung eines Balkens, $V(l) = -k\,w(l)$

1.7 Federnde Stützung

Der Balken in Bild 1.16 ruht rechts auf einem elastischen Lager. Setzen wir in der ersten Greenschen Identität $EI\,w^{IV} = p$ und $V(l) = -k\,w(l)$, dann ergibt sich unter Berücksichtigung der übrigen Randbedingungen, $w(0) = w'(0) = M(l) = 0$, und $\delta w(0) = \delta w'(0) = 0$,

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p\,\delta w\,dx - k\,w(l)\,\delta w(l) - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,, \qquad (1.121)$$

und das ist die **erste Variation** $\delta\Pi(w, \delta w)$ der potentiellen Energie

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}k\,w^2 - \int_0^l p\,w\,dx\,. \qquad (1.122)$$

1.8 Einzelkräfte und Einzelmomente

Es ist noch zu klären, wie Einzelkräfte und Einzelmomente in die Arbeitsgleichung hineinkommen, also Terme wie $P \cdot \delta w(x)$.

Diese Terme rühren von den eckigen Klammern, den Randarbeiten, her, denn Einzelkräfte und Einzelmomente auf freier Strecke machen eine Zweiteilung der Biegelinie in $w_L(x)$ und $w_R(x)$ notwendig, weil man, anschaulich gesagt, nicht einfach über eine Einzelkraft hinweg integrieren kann. Der Rand entsteht dort, wo die beiden Hälften zusammenstoßen.

Man integriert vom linken Lager bis zum Fußpunkt $\bar{x}$ der Kraft, stoppt dort, und setzt hinter dem Lastangriffspunkt die Integration fort

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \mathscr{G}(w_L, \delta w)_{(0,\bar{x})} + \mathscr{G}(w_R, \delta w)_{(\bar{x},l)} = 0 + 0 = 0\,. \qquad (1.123)$$

Die beiden Teile der Biegelinie, $w_L(x)$ und $w_R(x)$, sind jeweils homogene Lösungen der Balkengleichung, weil wir hier der Einfachheit halber annehmen dürfen, dass keine Streckenlasten vorhanden sind

$$EI\,w_L(x) = 0 \qquad 0 < x < \bar{x} \qquad EI\,w_R(x) = 0 \qquad \bar{x} < x < l\,, \qquad (1.124)$$

und an der Stelle $\bar{x}$ gehen die beiden Lösungen stetig ineinander über, bis auf die beiden Querkräfte V_L und V_R, die um den Betrag der Einzelkraft springen, siehe Bild 1.15,

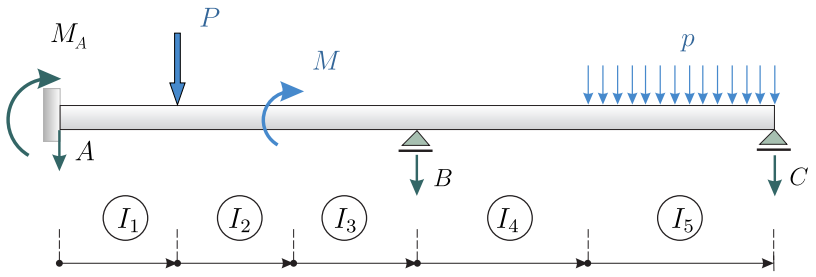


Bild 1.17. Der Träger muss in fünf Integrationsintervalle unterteilt werden

$$M_R(\bar{x}) - M_L(\bar{x}) = 0 \qquad V_L(\bar{x}) - V_R(\bar{x}) = P\,. \tag{1.125}$$

Bei der Addition der Randarbeiten, also der eckigen Klammern an der Übergangsstelle, bleibt somit allein die virtuelle Arbeit der Einzelkraft übrig

$$[V_L\,\delta w - M_L\,\delta w']_0^{\bar{x}} + [V_R\,\delta w - M_R\,\delta w']_{\bar{x}}^{l} = P \cdot \delta w(\bar{x}) \tag{1.126}$$

und somit lautet die Bilanz bei einer zulässigen virtuellen Verrückung

$$\delta W_e = P \cdot \delta w(\bar{x}) = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i\,. \tag{1.127}$$

Mit Einzelmomenten verfährt man sinngemäß.

Gegebenenfalls muss man, siehe Bild 1.17, die Integration mehrmals unterbrechen

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) &:= \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_1,x_2)} + \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_2,x_3)} + \ldots + \mathscr{G}(w,\delta w)_{(x_5,x_6)} \\ &= 0 + 0 \ldots + 0 = 0\,.\end{aligned} \tag{1.128}$$

All dies gilt natürlich auch für Lagerkräfte, die ja auch Punktkräfte sind. Damit sie in der Bilanz auftauchen, muss man allerdings virtuelle Verrückungen wählen, die offiziell nicht zulässig sind, die die ‚Ruhepflicht', die Festhaltung der Lager, ignorieren, was mathematisch ja vollkommen legitim ist.

Ist δw eine solche virtuelle Verrückung des Durchlaufträgers in Bild 1.17, die auch die Lager verschiebt, dann stehen in der ersten Greenschen Identität auch die Arbeiten der Lagerkräfte

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) = {} & M_A\,\delta w'(x_1) + A\,\delta w(x_1) + P\,\delta w(x_2) + M\,\delta w'(x_3) + B\,\delta w(x_4) \\ & + \int_{x_5}^{x_6} p\,\delta w\,dx + C\,\delta w(x_6) - \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{1.129}$$

Wir können gleich den umgekehrten Schluss ziehen:

Wenn man mit zulässigen virtuellen Verrückungen δw an einem Tragwerk ‚wackelt', dann sind die Arbeiten in den Lagern null.

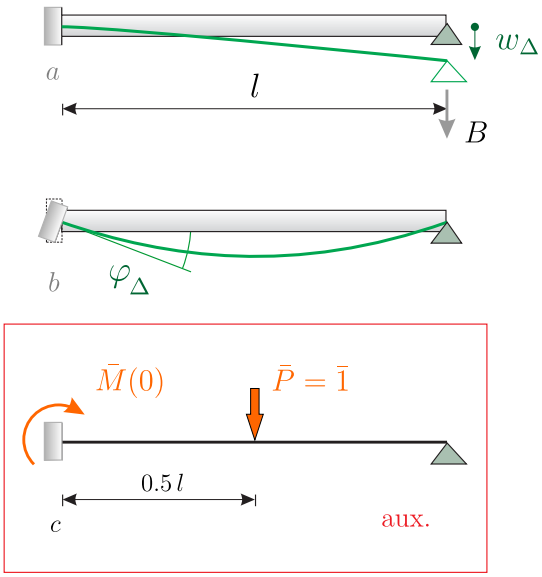


Bild 1.18. Lagersenkung und Lagerverdrehung

1.9 Lagersenkung

Im Zusammenhang mit einer Lagersenkung interessieren drei Themen:

- Der Energieerhaltungssatz
- Das Prinzip der virtuellen Verrückungen
- Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte zur Berechnung von Verformungen

Das rechte Lager des Trägers in Bild 1.18 senkt sich um ein Maß w_Δ. Für die Biegelinie des Trägers

$$EI\,w^{IV} = 0 \qquad w(0) = w'(0) = 0 \qquad M(l) = 0 \quad w(l) = w_\Delta\,, \tag{1.130}$$

machen wir einen Ansatz aus **zwei Funktionen**, einer Biegelinie $w_1(x)$ mit den korrekten Randwerten

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0 \qquad w_1(l) = w_\Delta \tag{1.131}$$

und einer zweiten Biegelinie $w_2(x)$, die ‚komplementär' zu $w_1(x)$ ist in dem Sinne, dass die Summe $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ den Gleichungen (1.130) genügt

$$EI\,w_2^{IV}(x) = -EI\,w_1^{IV}(x) \quad w_2(0) = w_2'(0) = w_2(l) = 0 \quad M_1(l) + M_2(l) = 0\,. \tag{1.132}$$

Mit finiten Elementen setzt man $w_1(x) = w_\Delta \cdot \varphi_3(x)$, bringt die Spalte $\boldsymbol{f}_3$ von $\boldsymbol{K}$ auf die rechte Seite, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = -w_\Delta \boldsymbol{f}_3$ und bestimmt aus diesen $n-1$ Gleichungen (die Zeile 3 wird gestrichen), die übrigen Knotenwerte w_i.

Energieerhaltungssatz

Zur Formulierung des Energieerhaltungssatzes gehen wir auf die Diagonale und überlagern w mit sich selbst

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,w) &= \int_0^l EI\, w^{IV}\, w\, dx + [V\, w - M\, w']_0^l - \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx \\ &= V(l)\cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = 0\,, \end{aligned} \tag{1.133}$$

was nach Multiplikation mit $1/2$

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(w,w) = \frac{1}{2}\, V(l)\cdot w_\Delta - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = 0\,, \tag{1.134}$$

der Energieerhaltungssatz ist.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Nun gehen wir auf die Nebendiagonale, δw sei eine zulässige virtuelle Verrückung, also $\delta w(0) = \delta w'(0) = \delta w(l) = 0$, und weil auch die Streckenlast null ist, $EI\, w^{IV} = 0$, ist $\delta W_e = 0$, und somit muss auch $\delta W_i = 0$ sein

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = -\int_0^l \frac{M\delta M}{EI}\, dx = -\delta W_i = 0\,. \tag{1.135}$$

Das versteht man, wenn man an die Mohrsche Arbeitsgleichung denkt: Wir berechnen in (1.135) mit Hilfe der frei gesetzten Einzelkraft $V(l)$ im rechten Lager (das Lager wird weggenommen, Reduktionssatz), um wieviel die virtuelle Verrückung dort nach unten geht, aber $\delta w(l) = 0$. Bei Lagersenkungen orientieren sich die virtuellen Verrückungen δw ja am ursprünglichen System, sind also in den (ursprünglich) festen Lagern null.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Jetzt vertauschen wir die Plätze von w und δw, das wir nun δw^* nennen, wir formulieren also das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w) = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,, \tag{1.136}$$

und wir berechnen mit diesem Prinzip beispielhaft die Durchbiegung in Balkenmitte, siehe Bild 1.18. Traditionsgemäß heißt die Biegelinie δw^* bei Mohr $\bar{w}$.

Wir lassen also eine Einzelkraft $\bar{P} = 1$ in Richtung der gesuchten Verschiebung wirken und formulieren mit den beiden Teilen der Biegelinie

$$\bar{w} = \bar{w}_L + \bar{w}_R \tag{1.137}$$

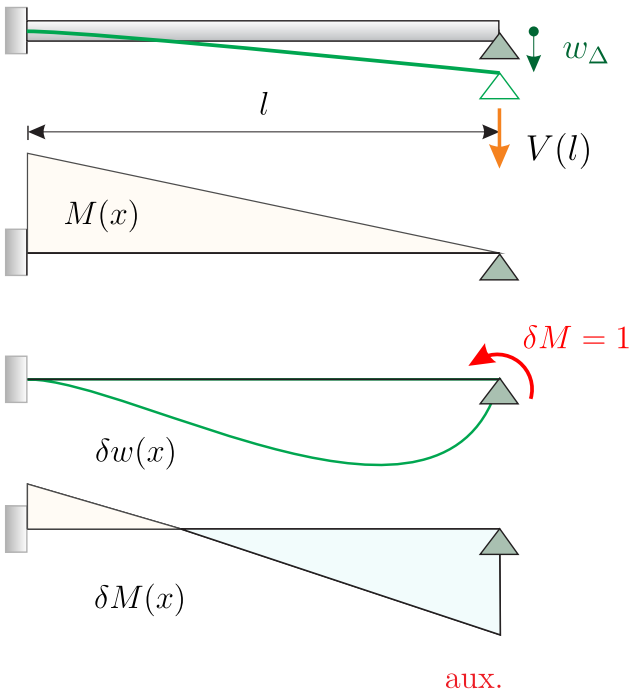


Bild 1.19. Virtuelle Verrückung, $\delta W_e = \delta W_i = 0$

und w die erste Greensche Identität und erhalten so, wir überspringen die Zwischenschritte, das Ergebnis

$$\mathscr{G}(\bar{w}_L, w)_{(0,0.5\,l)} + \mathscr{G}(\bar{w}_R, w)_{(0.5\,l,l)} = \bar{1} \cdot w(0.5\,l) + \bar{V}(l) \cdot w_\Delta - \int_0^l \frac{\bar{M}\,M}{EI}\,dx = 0\,, \qquad (1.138)$$

oder aufgelöst nach der gesuchten Durchbiegung

$$w(0.5\,l) = \int_0^l \frac{\bar{M}\,M}{EI}\,dx - \bar{V}(l) \cdot w_\Delta\,. \qquad (1.139)$$

Bei einer Lagersenkung ist also die Mohrsche Arbeitsgleichung um den Beitrag $-\bar{V}(l) \cdot w_\Delta$ zu erweitern, wobei $\bar{V}(l)$ die Lagerkraft aus $\bar{P} = 1$ ist. Der Beitrag ist negativ, weil er eigentlich auf die linke Seite gehört, zu den virtuellen äußeren Arbeiten.

Wenn sich die Einspannung um einen Winkel φ_Δ verdreht,

$$EI\,w^{IV} = 0 \qquad w'(0) = \tan\varphi_\Delta \qquad w(0) = w(l) = M(l) = 0\,, \qquad (1.140)$$

dann erhält man auf analoge Weise



Bild 1.20. Schraubenfeder

$$\bar{1} \cdot w(0.5\,l) = -\bar{M}(0) \cdot \tan\varphi_\Delta + \int_0^l \frac{\bar{M} M}{EI}\, dx\,. \tag{1.141}$$

Das Moment $\bar{M}(0)$ ist das Einspannmoment aus der Einzelkraft $\bar{P} = \bar{1}$. Eigentlich gehört es auf die linke Seite, weil es virtuelle äußere Arbeit ist, und so taucht es rechts mit dem Faktor (-1) auf.

1.10 Federn

In matrizieller Schreibweise lautet das **Federgesetz**, siehe Bild 1.20,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1.142}$$

oder, kürzer, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Zu diesem System gehört die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta u} = 0\,. \tag{1.143}$$

Ist $\boldsymbol{u}$ die Gleichgewichtslage der Feder, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dann ergibt sich daraus das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für die Feder

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta u} = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{1.144}$$

und analog das *Prinzip der virtuellen Kräfte*

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\delta u}^*, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}^* - \boldsymbol{\delta u}^{*T} \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \delta W_e^* - \delta W_i^* = 0\,. \tag{1.145}$$

1.11 Temperatur

In der linearen Statik darf man die Ergebnisse **superponieren** und so kann man den Lastfall Temperatur wie einen zusätzlichen Lastfall behandeln

$$w(x) = w_{LF\,1} + w_{LF\,2} + \ldots + w_T\,. \tag{1.146}$$

Wir dürfen weiter annehmen, dass w_T am statisch bestimmten Tragwerk berechnet wird, also die Form

$$w_T(x) = \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\, x^2 + a\,x + b\,, \qquad (a, b \text{ sind Konstante}) \tag{1.147}$$

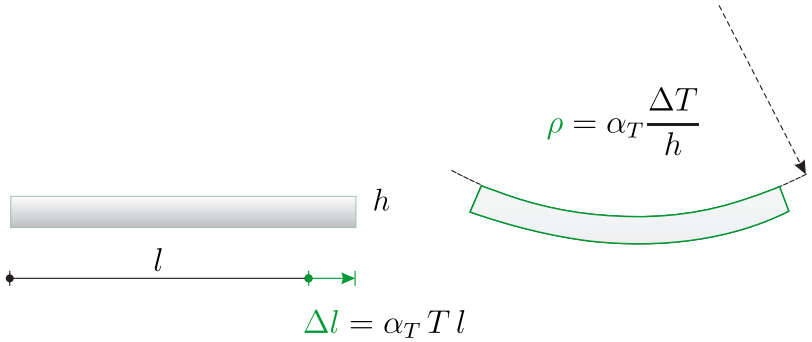


Bild 1.21. Temperaturverformungen

hat, weil eventuell nötige Korrekturen in den vorangehenden Lastfällen behandelt werden.

Das *Prinzip der virtuellen Kräfte* für eine Biegelinie w_T, wir setzen eine Punktlast $P^* = 1$ in den Aufpunkt x, lautet dann

$$\mathscr{G}(\delta w^*, w_T) = 1 \cdot w_T(x) - \int_0^l EI\, \delta w^{*\prime\prime}\, w_T''\, dx = 0 \tag{1.148}$$

oder mit $w_T'' = \alpha_T \Delta T/h$

$$w_T(x) = \int_0^l \delta M^*\, \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\, dx\,. \tag{1.149}$$

Hierbei ist $\alpha_T \sim 10^{-5}$ (Stahl, Beton) der Temperaturkoeffizient des Materials, ΔT ist die Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterkante des Trägers und h ist die Trägerhöhe, siehe Bild 1.21; wegen Details siehe Kapitel 7.2.

Genauso leitet man die Formel für die Längsverschiebung aus Temperatur ab

$$u_T(x) = \int_0^l \delta N^*\, \alpha_T\, T\, dx\,, \tag{1.150}$$

wobei T die Änderung gegenüber der Ausgangstemperatur ist.

1.12 Die vollständige Arbeitsgleichung

Wir haben nun alle Teile zusammen, um die vollständige Arbeitsgleichung, die ***Mohrsche Arbeitsgleichung***, zu formulieren

$$\bar{1}\cdot\delta = \int \frac{\bar{M}\,M}{EI}\,dx + \int \frac{\bar{N}\,N}{EA}\,dx + \int \bar{M}\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx + \int \bar{N}\,\alpha_T\,T\,dx$$
$$+ \underbrace{\sum_i \frac{\bar{F}_i\,F_i}{k_i}}_{\text{Normalkraftfedern}} + \underbrace{\sum_j \frac{\bar{M}_j\,M_j}{k_{\varphi j}}}_{\text{Biegemomentenfedern}}$$
$$- \underbrace{\sum_k \bar{F}_k\,w_{\Delta\,k}}_{\text{Lagerverschiebungen}} - \underbrace{\sum_l \bar{M}_l\,\tan\varphi_{\Delta\,l}}_{\text{Lagerverdrehungen}}\,. \tag{1.151}$$

Das δ auf der linken Seite steht, wie es in der Statik-Literatur Tradition ist, sowohl für Verschiebungen als auch Verdrehungen.

Wenn es eine Verdrehung ist, dann ist es der Tangens des Drehwinkels, weil in der ersten Greenschen Identität – auf der die Arbeitsgleichung ja beruht – das Moment mit dem Tangens gepaart ist

$$\ldots + [V\,w - M\,w'] + \ldots \tag{1.152}$$

und nicht mit dem Drehwinkel.

Nur so wird die Arbeitsgleichung auch ihrem Namen gerecht, stehen links wie rechts wirklich Arbeiten

$$\bar{M}\cdot\delta = 1\,\mathrm{N\,m}\cdot\tan\varphi = [\mathrm{N\,m}]\cdot[\ ] = \int_0^l \ldots \tag{1.153}$$

1.13 Kurzform

Es wäre nun sicherlich zu mühsam, für ein gegebenes System die Bilanz

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{1.154}$$

aus den Greenschen Identitäten der einzelnen Tragglieder zu entwickeln. Das macht kein Ingenieur so, sondern der Ingenieur weiß mit ein wenig Übung automatisch, welche Beiträge er δW_e zuschlagen muss. Das sind die Arbeiten der Streckenlasten

$$\int_0^l p_z\,\delta w\,dx \qquad \int_0^l p_z\,\delta u\,dx \tag{1.155}$$

und die Arbeiten der Punktlasten

$$P_z\,\delta w(x) \qquad P_x\,\delta u(x) \qquad M\,\delta w'(x) \qquad \text{etc.} \tag{1.156}$$

und die Beiträge zu δW_i sind auch bekannt

$$\delta W_i = \int \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx + \int \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx + \int \delta M\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx + \int \delta N\,\alpha_T\,T\,dx$$
$$+ \sum_i \frac{\delta F_i\,F_i}{k_i} + \sum_j \frac{\delta M_j\,M_j}{k_{\varphi j}} - \sum_k \delta F_k\,w_{\Delta\,k} - \sum_l \delta M_l\,\tan\varphi_{\Delta\,l}\,, \tag{1.157}$$

und sie verkürzen sich meist auf

$$\delta W_i = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx \tag{1.158}$$

oder oft noch einfacher auf

$$\delta W_i = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx\,. \tag{1.159}$$

1.14 Dualität

Die Arbeits- und Energieprinzipe des Balkens entwickeln sich, wie wir gesehen haben, spielerisch aus dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w(x)\,dx\,, \tag{1.160}$$

also dem L_2-Skalarprodukt von Kraft und Weg. Wie dies geschieht, ist in der ersten Greenschen Identität detailliert dargelegt. Und was für den Balken gilt, gilt für die anderen Bauteile ebenso.

Kraft und Weg sind die beiden Pole, um die sich die Statik dreht. Der Arbeitsbegriff ist der zentrale Begriff der Statik und die Grund-Rechenoperation der Statik ist das Skalarprodukt

Die Kunst im Umgang mit der ersten Greenschen Identität besteht eigentlich nur darin, die virtuelle Verrückung so zu wählen, dass man an die Information kommt, die man sucht:

Prinzip d. virt. Verrückungen	$\mathscr{G}(w,\delta w)=0 \;\rightarrow$ Kräfte von w
Prinzip d. virt. Kräfte	$\mathscr{G}(\delta w^*,w)=0 \;\rightarrow$ Wege von w
Satz von Betti	$\mathscr{B}(w_1,w_2)=0 \;\rightarrow$ Wege und Kräfte

Mit dem *Satz von Betti* kann man Weg- und Kraftgrößen berechnen, mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* Weggrößen und mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* Kraftgrößen, üblicherweise sind das Lagerkräfte.

Im *Prinzip der virtuellen Verrückungen* formuliert man[7]

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \text{Reale Kräfte} \times \text{virtuelle Wege} - a(w,\delta w) = 0 \tag{1.161}$$

und im *Prinzip der virtuellen Kräfte* dagegen

$$\mathscr{G}(\delta w^*,w) = \text{Virtuelle Kräfte} \times \text{reale Wege} - a(\delta w^*,w) = 0\,. \tag{1.162}$$

Um zum Beispiel die Lagerkraft A an dem Einfeldträger in Bild 1.22 zu bestimmen, kann man eine Drehung um das rechte Lager, $\delta w(x) = 1 - x/l$, als virtuelle Verrückung wählen

[7] Die Funktionen δw und δw^* sind natürlich genauso real wie w.

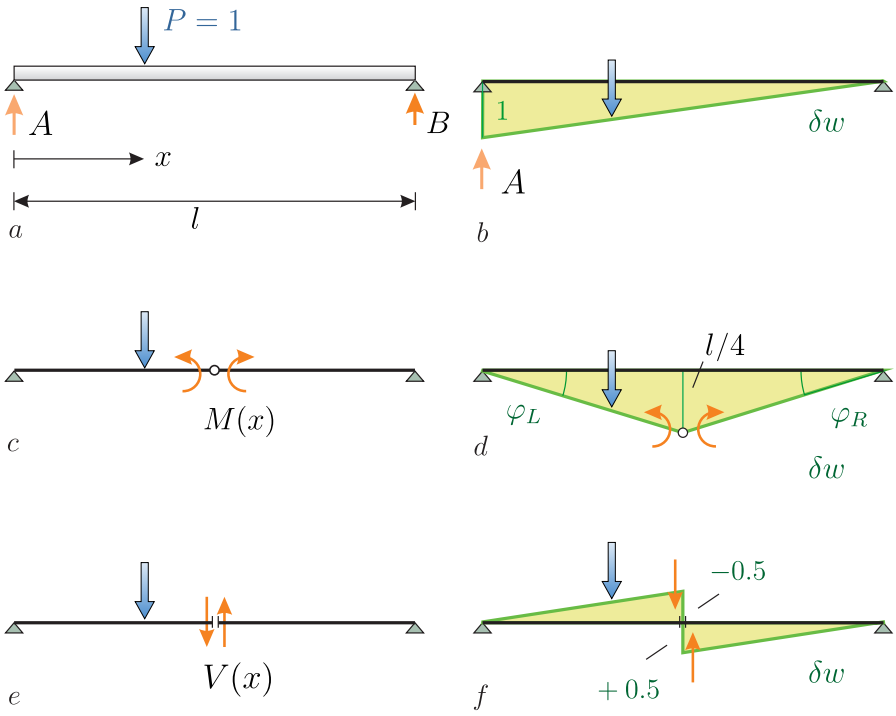


Bild 1.22. Einflussfunktionen sind Wege. Man löst ein Lager oder baut ein Gelenk ein, zeichnet das System noch einmal an und verrückt die Kopie. Es gilt $W_{1,2} = W_{2,1}$. Die Arbeiten der Null-Kräfte rechts auf den (nicht angetragenen) Wegen links ist null, $W_{2,1} = 0$, und daher sind auch die Arbeiten der Kräfte links auf den Wegen rechts null, $W_{1,2} = 0$. Zur Illustration wurden die Kräfte links rechts wiederholt, um ihre Wege zu verfolgen, aber die rechten Systeme selbst sind kräftefrei, weil sie kinematisch sind und sich daher die Bewegungen rechts ohne Kraftaufwand erzeugen lassen

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p(x)\, \delta w(x)\, dx - V(0)\, \delta w(0) = 0\,, \tag{1.163}$$

und die Identität nach $A = V(0)$ auflösen

$$A \cdot 1 = \int_0^l p \cdot (1 - \frac{x}{l})\, dx\,. \tag{1.164}$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch zeigen, wie man mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken berechnen kann, obwohl das Vorgehen eigentlich mit dem Satz von Betti identisch ist[8].

[8] Das sieht man besser, wenn man zwei Zeichnungen macht, denn Betti ist ja eigentlich ‚zwei'; einmal das Originalsystem (mit dem eingebauten Gelenk, im

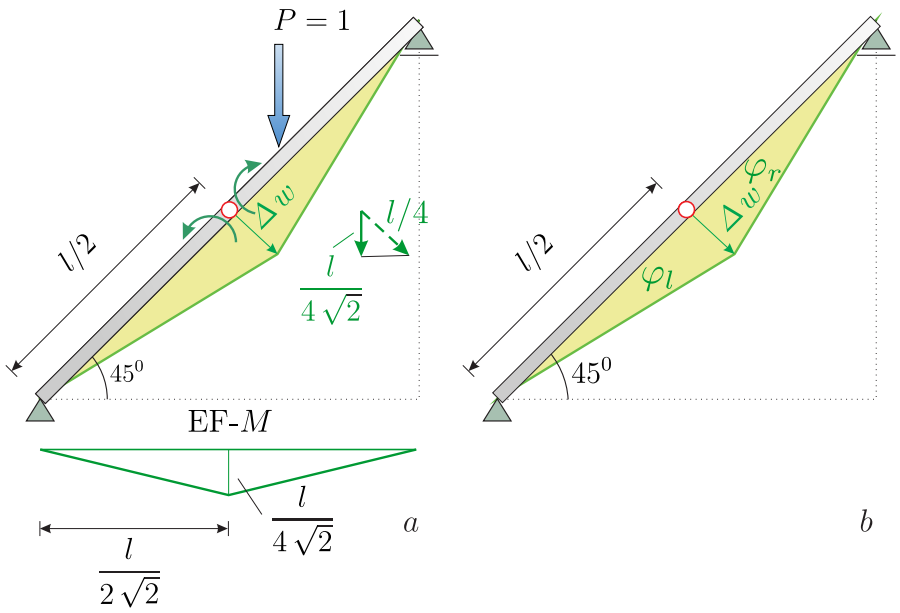


Bild 1.23. Einflussfunktion für Moment in einem Sparren **a)** ‚alles in einem' Zeichnung **b)** die Bewegung nach dem Lösen des Gelenks als separates Bild, $\tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1$ am Gelenk

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen zur Berechnung von Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken ist eigentlich eine Anwendung des Satzes von Betti.

Weil das Tragwerk nach Einbau des entsprechenden Gelenkes kinematisch ist, ist die virtuelle innere Arbeit $\delta W_i = 0$ und somit muss auch $\delta W_e = 0$ sein

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \delta W_e - 0 = 0\,, \tag{1.165}$$

während beim Satz von Betti

$$\mathscr{B}(w, \delta w) = W_{1,2} - W_{2,1} = 0 \tag{1.166}$$

die Arbeit $W_{2,1}$ null ist, siehe Seite 156, und daher muss auch $W_{1,2}$ null sein. Mathematisch sind aber δW_e und $W_{1,2}$ in dieser Situation identisch, nur werden sie anders benannt.

Um die Einflussfunktion für das Moment in Balkenmitte zu bestimmen, bauen wir ein Gelenk in Balkenmitte ein, und bringen das zuvor innere Moment M auf beiden Seiten des Gelenks als äußeres Momentenpaar auf, damit der Balken weiterhin die Wanderlast abtragen kann, siehe Bild 1.22 *c* und *d*.

Gleichgewicht gehalten durch die zuvor inneren Momente M_l und M_r am Gelenk) und dann die Verrückung des Originalsystems mit dem gelösten Gelenk. Die Verrückung ist gerade die Einflussfunktion.

Dann erteilen wir dem Balken eine virtuelle Verrückung $\delta w(x)$ derart, dass sich die Balkenmitte um einen noch näher zu bestimmenden Wert Δw absenkt. Der Stabdrehwinkel der linken Hälfte ist dabei $\delta w'_L = \Delta w/(l/2)$ und der rechten Hälfte ist $\delta w'_R = -\Delta w/(l/2)$. Gemäß dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* gilt

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \delta W_e - \delta W_i = 0\,. \tag{1.167}$$

Nun ist die virtuelle innere Arbeit bei dieser Bewegung null (wie bei einer Marionette) und daher muss auch die Summe der virtuellen äußeren Arbeiten null sein

$$\delta W_e = 1 \cdot \delta w(x) - M \cdot \delta w'_L + M \cdot \delta w'_R = 0\,. \tag{1.168}$$

Wenn man nun Δw so groß wählt, dass

$$\delta w'_L - \delta w'_R = 1 \tag{1.169}$$

ist, also $\Delta w = l/4$, dann folgt

$$M(x) = 1 \cdot \delta w(x)\,. \tag{1.170}$$

Zur Bestimmung der Einflussfunktion für die Querkraft in Balkenmitte bauen wir in die Mitte des Balkens ein Querkraftgelenk ein, siehe Bild 1.22 *e*, und korrigieren diesen Verlust an Querkrafttragfähigkeit dadurch, dass wir links und rechts von dem Gelenk die zuvor innere Kraft V als äußere Stützkraft wirken lassen. Dann spreizen wir dieses Gelenk so, dass die beiden Seiten des Gelenks jeweils um ± 0.5 m nach oben bzw. nach unten ausweichen und berechnen die virtuelle äußere Arbeit, die dabei von der Wanderlast und den beiden Kräften V geleistet wird

$$\delta W_e = 1 \cdot \delta w(x) - V(x) \cdot 0.5 - V \cdot 0.5 = 1 \cdot \delta w(x) - V(x) \cdot 1 = 0 \tag{1.171}$$

oder

$$V(x) = \delta w(x)\,. \tag{1.172}$$

Die Logik lässt sich auch auf Wandermomente anwenden, wenn also ein Moment über den Träger läuft. Ein Wandermoment $M = 1$ leistet Arbeit, wenn man es verdreht. Das Maß für diese Arbeit ist das Produkt aus dem Moment und dem Tangens des Drehwinkels, also

$$M \cdot \delta w' \tag{1.173}$$

und daher sind die Einflussfunktionen für $A(x), M(x)$ und $V(x)$ in diesem Fall identisch mit den **Ableitungen** von $\delta w(x)$. Sind Streckenlasten vorhanden, dann geschieht die Auswertung der Einflussfunktionen durch Integration

$$A(x) = \int_a^b p(x)\, \delta w(x)\, dx\,. \tag{1.174}$$

Bei schrägen Stäben, wie dem Sparren in Bild 1.23, muss man darauf achten, dass nur der Anteil von $\delta w(x)$, der in Richtung der Wanderlast fällt, gezählt wird.

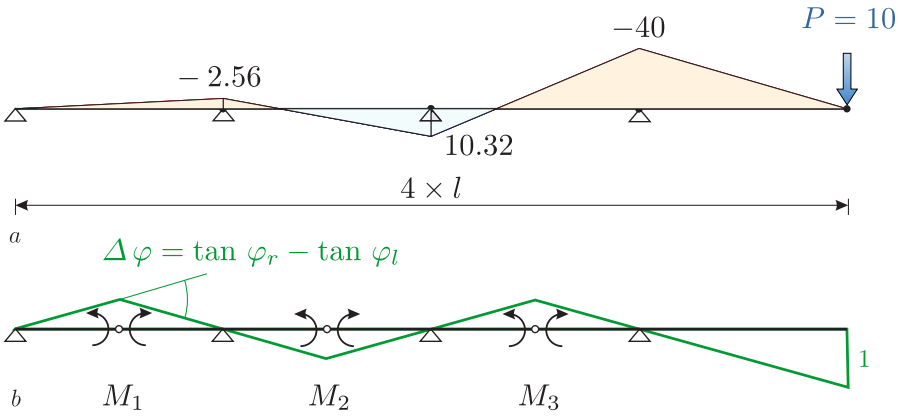


Bild 1.24. Durchlaufträger und das Prinzip der virtuellen Verrückungen **a)** Momente **b)** virtuelle Verrückung nach Einbau von Zwischengelenken

1.15 Ganze Tragwerke

Der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen an ganzen Tragwerken ist ein Summieren der einzelnen Identitäten, längs (u_i) und quer (w_i),

$$\sum_i \mathscr{G}(u_i, \delta u_i) + \sum_i \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0\,. \tag{1.175}$$

So könnte man z.B. in den Durchlaufträger in Bild 1.24 drei Gelenke einbauen – die zuvor inneren Momente werden als äußere Momente aufgebracht – und diese Gelenkkette so auslenken, dass die Einzelkraft den Weg Eins geht und man hätte das Resultat ($\delta W_i = 0$ weil die δw_i Starrkörperbewegungen sind)

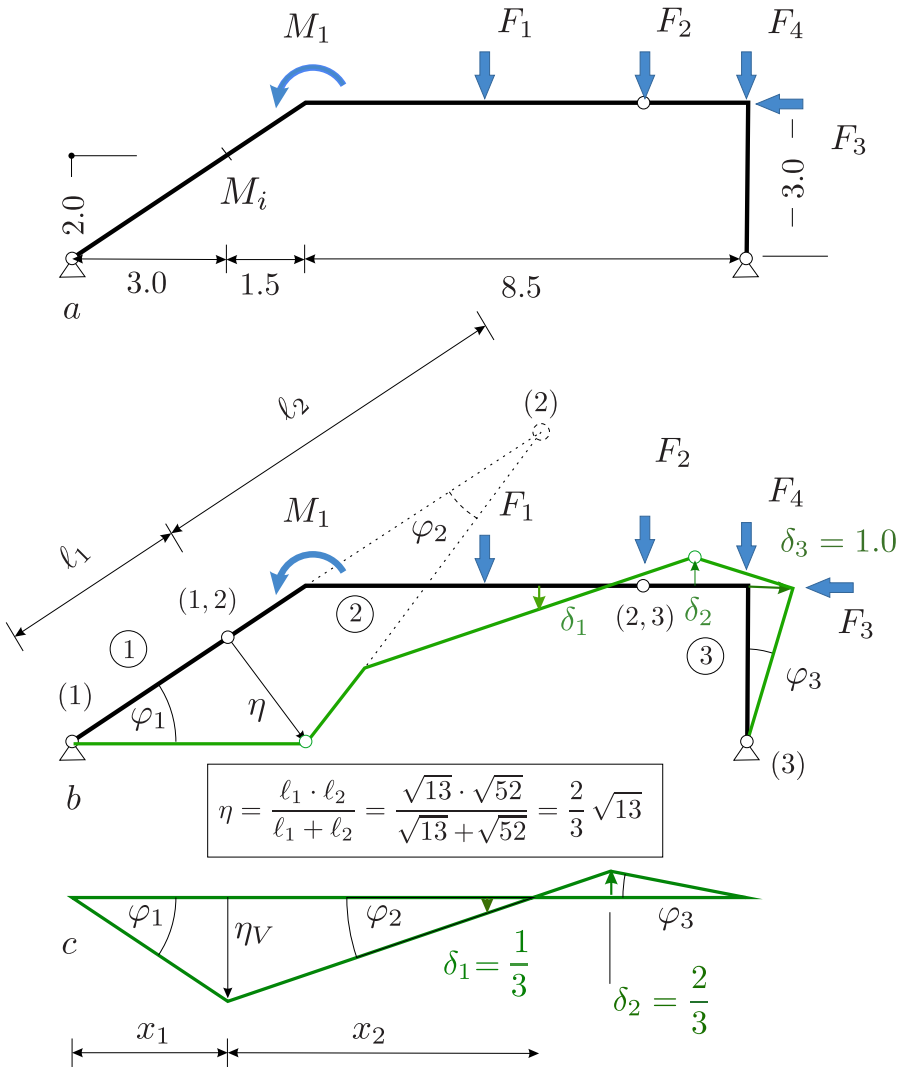
$$\sum_i \mathscr{G}(w_i, \delta w_i) = \delta W_e + \delta W_i = \sum_{k=1}^{3} M_k \cdot \Delta\varphi_k + P \cdot 1 = 0 \tag{1.176}$$

$$\Delta\varphi_k = \tan\varphi_k^r - \tan\varphi_k^l\,, \tag{1.177}$$

was einem wahrscheinlich nicht viel weiterhilft, weil man drei Schnittmomente M_k in einer Gleichung hat. Kennt man aber die Momente M_i, dann kann (1.176) als Kontrolle dienen. Ist $l = 4$ und $P = 10$, dann ergibt sich mit $\Delta\varphi_1 = 0.5, \Delta\varphi_2 = -0.5, \Delta\varphi_3 = 0.5$ und $M_1 = -1.31, M_2 = 3.98, M_3 = -14.71$ tatsächlich das richtige Ergebnis, nämlich null

$$\delta W_e = \sum_{k=1}^{3} M_k\, \Delta\varphi_k + P \cdot 1 = 0.5 \cdot (-1.31 - 3.98 - 14.71) + 10 \cdot 1 = 0\,. \tag{1.178}$$

Wichtig ist, dass die Integrationsgrenzen [...] zum einen die Lager und Gelenke und zum anderen mögliche Einzelkräfte und Einzelmomente respektieren



$$\eta_V = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \qquad \tan\varphi_1 + \tan\varphi_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$M_i = M_1 \cdot \tan\varphi_2 + F_1 \cdot \delta_1 - F_2 \cdot \delta_2 - F_3 \cdot \delta_3$$

Bild 1.25. Dreigelenkrahmen, Bestimmung des Moments M_i mittels eines Polplans **a)** System und Belastung **b)** virtuelle Verrückung nach Einbau des Gelenks **c)** vertikaler Anteil der Einflussfunktion im Lastgurt

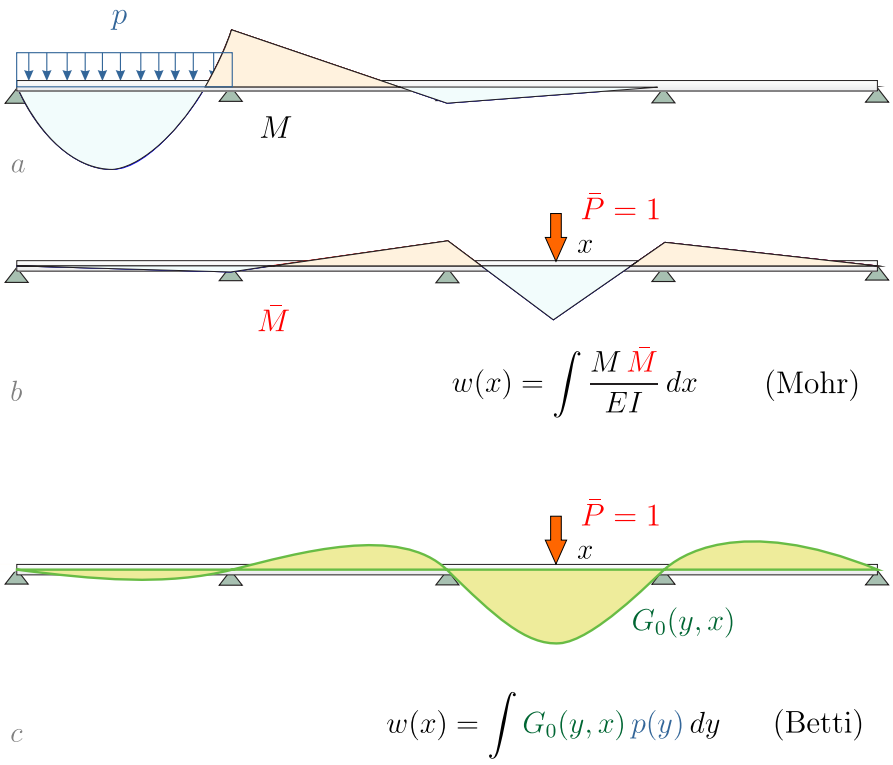


Bild 1.26. Mohr und der Satz von Betti, es ist einfacher $\bar{M}$ zu bestimmen, als die Biegelinie $G_0(y, x)$

müssen. Mit jedem Einbau von zusätzlichen Gelenken in ein Tragwerk ändert sich die Zahl der Abschnitte, über die zu integrieren ist. Bei dem Träger in Bild 1.24 sind es erst vier Identitäten, entsprechend den vier Feldern, und danach sind es sieben.

Der erfahrene Ingenieur geht natürlich nicht über die Identitäten, sondern er weiß automatisch, was er mitzunehmen hat, und was nicht. Das macht die Identitäten aber nicht überflüssig, denn sie legen ja eigentlich erst fest, was zu zählen ist, und was nicht, wie die innere Energie aussieht und die äußere Arbeit und wie sich Starrkörperbewegungen über ein Tragwerk fortpflanzen – nämlich als Pseudodrehungen – und die Identitäten garantieren schließlich erst das Endresultat $\delta W_e - \delta W_i = 0$.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist immer dann gut anwendbar, wenn das Tragwerk statisch bestimmt ist, weil man dann durch das geschickte Wegnehmen nur eines Lagers oder den Einbau eines Gelenks ein **kinematisches System** erhält, an dem man mit geeigneten Starrkörperbewegungen eine unbekannte Lagerkraft oder ein inneres Moment bestimmen kann.

Bei Rahmen, wie in Bild 1.25, muss man sich allerdings erst mit Hilfe von **Polplänen** Klarheit über die Wege verschaffen, die die Kräfte gehen. Programme können dabei helfen, wenn sie in der Lage sind dem Anwender ein ‚zuviel' an Freiheitsgraden grafisch sichtbar zu machen, also die Kinematik eines nicht ausreichend stabilisierten Rahmens offen zu legen, siehe Kapitel 5.32.2, Seite 532.

1.16 Mohr contra Betti

Man kann also die Durchbiegung eines Balkens mit der Mohrschen Arbeitsgleichung (dem *Prinzip der virtuellen Kräfte*) berechnen

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\,\bar{M}(y,x)}{EI}\,dy \qquad \mathscr{G}(G_0, w) = 0 \tag{1.179}$$

oder mit dem *Satz von Betti*

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \qquad \mathscr{B}(G_0, w) = 0\,. \tag{1.180}$$

Die letztere Gleichung benutzt aber kein Ingenieur, weil er dazu erst die Biegelinie $G_0(y,x)$ bestimmen müsste, die die Einzelkraft $\bar{P} = 1$ an dem Träger erzeugt, siehe Bild 1.26. Die Berechnung der Momente $\bar{M} = -EI\,G_0''$ fällt dem Ingenieur dagegen viel leichter, und das ist der Grund, warum Verformungen an Tragwerken mit der Mohrschen Arbeitsgleichung berechnet werden und nicht mit dem Satz von Betti.

Allerdings muss man bei Mohr mehr tun, um zum Ergebnis zu kommen, wie man in Bild 1.27 sieht, denn man muss die Momente M und $\bar{M}$ über den ganzen Rahmen integrieren, während sich dasselbe Ergebnis nach dem Satz von Betti durch eine Auswertung in einem Punkt ergibt.

Mit Blick auf die finiten Elemente scheint es so zu sein, dass Mohr die genaueren Ergebnisse liefert, weil sich die mittleren Fehler in M_h und $\bar{M}_h$ (den FE-Näherungen) besser ausgleichen, während Betti ja genau den richtigen Wert $G_0(y,x)$ am Ort y von P treffen muss. *Aber Mohr und Betti sind zwei Seiten einer Medaille!* Wenn man mit finiten Elementen rechnet, dann sind die Ergebnisse gleich genau (oder gleich ungenau), weil man Mohr mittels partieller Integration in Betti umformen kann und umgekehrt.

Bemerkung 1.1. In der Statikliteratur schreibt man für das Integral (1.179) kürzer

$$\delta = \int_0^l \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dx\,, \tag{1.181}$$

taucht der Aufpunkt x nicht auf, und deswegen kann dann die Integrationsvariable x heißen. Auch wir haben diese kurze Form bei der Arbeitsgleichung benutzt und werden sie gelegentlich weiter benutzen.

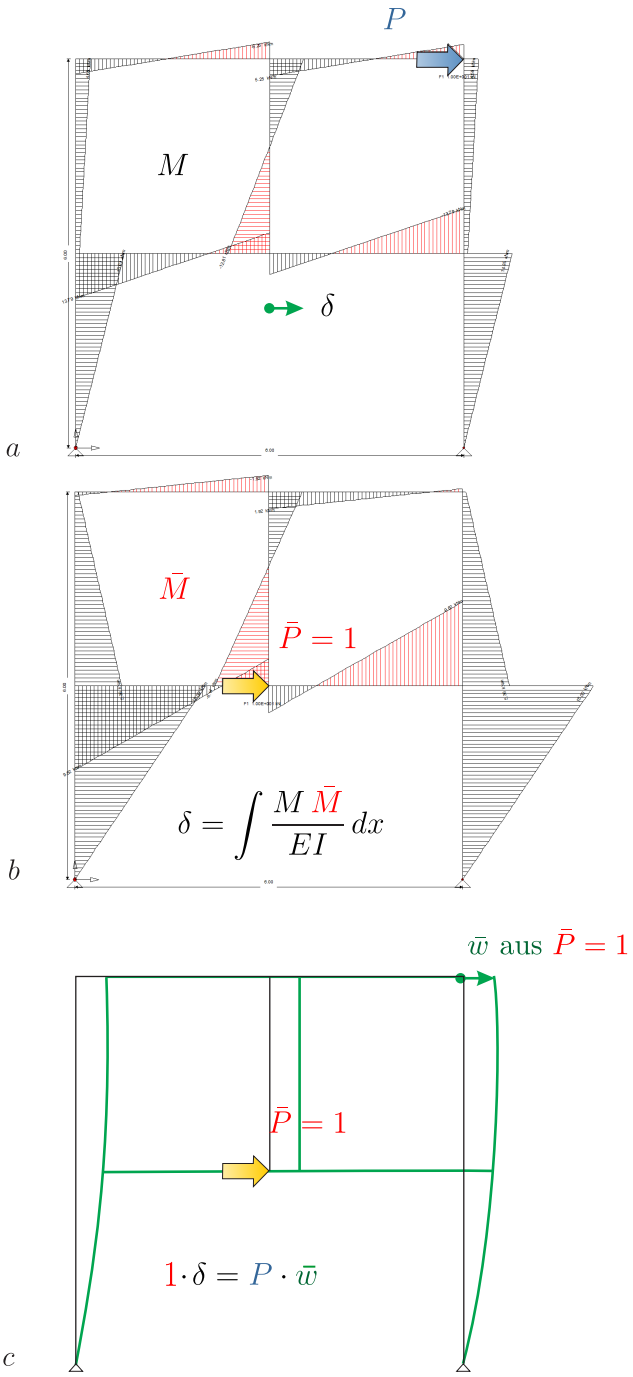


Bild 1.27. Berechnung der Horizontalverschiebung δ des mittleren Knotens mit Mohr und mit dem Satz von Betti, **a)** Momente aus Last, **b)** Momente aus $\bar{P} = 1$, **c)** Verschiebung aus $\bar{P} = 1$ (= Einflussfunktion für die Horizontalverschiebung) (BE-FRAMES)

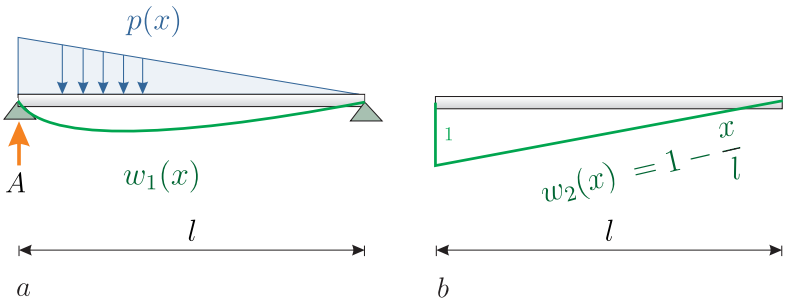


Bild 1.28. Der Satz von Betti, System 1 der reale Balken, System 2 derselbe Balken, frei schwebend, ohne Belastung, ohne Lager, sich frei um sein rechtes Ende drehend

1.17 Schwache und starke Einflussfunktionen

Die Gleichung (die Mohrsche Arbeitsgleichung)

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\,\bar{M}(y,x)}{EI}\,dy \tag{1.182}$$

nennen wir eine ***schwache Einflussfunktion*** und die Gleichung

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \tag{1.183}$$

eine ***starke Einflussfunktion***. Man kann also $w(x)$ aus den Momenten, der zweiten Ableitung von w, berechnen oder aus der Streckenlast, der vierten Ableitung von w.

Schwache Einflussfunktionen basieren auf der ersten Greenschen Identität, in der Formulierung als *Prinzip der virtuellen Kräfte*,

$$\mathscr{G}(G,w) = 0\,, \tag{1.184}$$

das G ist sozusagen das δw^*, und starke Einflussfunktionen auf der zweiten Greenschen Identität, dem *Satz von Betti*

$$\mathscr{B}(G,w) = 0\,. \tag{1.185}$$

Das Standardbeispiel für eine schwache Einflussfunktion ist die Mohrsche Arbeitsgleichung (1.182).

Mit der Mohrschen Arbeitsgleichung kann man aber keine Kraftgrößen wie etwa das Moment

$$M(x) \stackrel{?}{=} \int_0^l \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dy \tag{1.186}$$

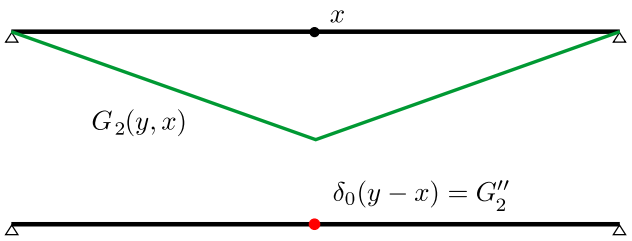


Bild 1.29. Die Einflussfunktion für $M(x)$ und ihre zweite Ableitung

berechnen. Was klar scheint, denn welche virtuelle Kraft will man anwenden, um das Moment $M(x)$ in einem Punkt zu berechnen?

Betti rechnet

$$M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\, p(y)\, dy \tag{1.187}$$

und Mohr würde gerne rechnen

$$M(x) = \int_0^l M_2(y,x)\, M(y)\, dy\,, \tag{1.188}$$

was scheinbar nicht geht, weil die zweite Ableitung, das Moment $M_2(y,x)$ des Knicks G_2 ja im Aufpunkt nicht existiert, siehe Bild 1.29.

Aber wenn wir M_2 mit dem Dirac Delta δ_0 gleichsetzen, dann wird ein Schuh daraus

$$M(x) = \int_0^l M_2(y,x)\, M(y)\, dy = \int_0^l \delta_0(y-x)\, M(y)\, dy\,. \tag{1.189}$$

Man kann also schon Kraftgrößen mit Mohr berechnen, nur schrumpfen die Integrale zu Punktfunktionalen. Man kann die Integraltafeln in der Schublade lassen. Es sind einfach die Kraftgrößen selbst im Aufpunkt. Man erfährt nichts neues, wenn man nicht schon vorher weiß, was herauskommt ...

Bemerkung 1.2. Um den Unterschied zwischen den beiden Typen von Einflussfunktionen deutlich zu machen, nehmen wir an, dass die Belastung nur aus einer einzelnen Kraft P besteht.

Im **Satz von Betti**

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = G_0(y,x) \cdot P \tag{1.190}$$

lassen wir – anschaulich gesprochen – im Aufpunkt x einen Stein (ein Dirac Delta) in das Wasser fallen, und wir beobachten, wie sich die Welle $G_0(y,x)$ über den Balken ausbreitet, um wieviel die Punktlast in der Ferne von der Welle gehoben wird.

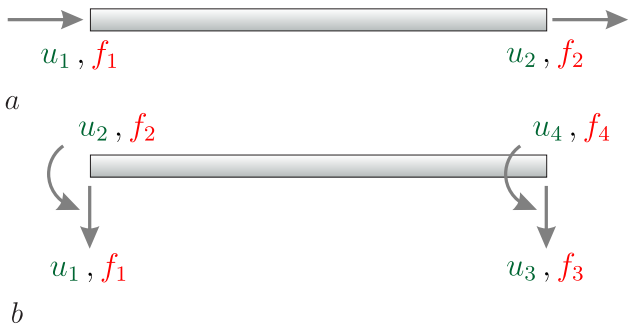


Bild 1.30. Die kanonischen Randwerte von Stab und Balken

Bei dem **Prinzip der virtuellen Kräfte (Mohr)**

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y)\, M^*(y,x)}{EI}\, dy \tag{1.191}$$

beobachten wir dagegen die Interaktion von **zwei Wellen**. Die erste Welle, $M(y)$, ist das Biegemoment, das von der Punktlast erzeugt wird, und die zweite Welle $M^*(y,x)$ ist das Biegemoment, das von dem Dirac Delta erzeugt wird. Nur die Teile des Balkens, wo beide Momente groß sind (und nicht orthogonal), sind relevant.

1.18 Die kanonischen Randwerte

Die erste Greensche Identität besteht aus einer Folge von Skalarprodukten konjugierter Größen. Dabei kommt den Weg- und Kraftgrößen in den eckigen Klammern, den **Randarbeiten**,

$$[N\,u]_0^l = N(l)\,u(l) - N(0)\,u(0) = f_2\,u_2 + f_1\,u_1 \tag{1.192}$$

$$\begin{aligned}[V\,w - M\,w']_0^l &= V(l)\,w(l) - M(l)\,w'(l) - V(0)\,w(0) + M(0)\,w'(0) \\ &= f_3\,u_3 + f_4\,u_4 + f_1\,u_1 + f_2\,u_2\,,\end{aligned} \tag{1.193}$$

eine spezielle Bedeutung zu. Sie kann man als die *kanonischen Werte* eines Stabes bzw. eines Balkens bezeichnen, siehe Bild 1.30. Das kommt am besten in den Steifigkeitsmatrizen des Stabes

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1.194}$$

und des Balkens

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{1.195}$$

zum Ausdruck.

Die Steifigkeitsmatrizen formulieren eine ***Kopplung*** zwischen den $2+2$ Weg- und Kraftgrößen eines Stabes ($-EAu'' = 0$) bzw. den $4+4$ Größen eines Balkens ($EIw^{IV} = 0$). Sind Streckenlasten vorhanden, dann sind die Gleichungen um den **Vektor** $\boldsymbol{d}$ der äquivalenten Knotenkräfte aus der Streckenlast, der *domain load*, zu erweitern,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}\,, \tag{1.196}$$

der beim Stab zwei Komponenten und beim Balken vier Komponenten hat

$$d_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i^e(x)\,dx \qquad i = 1,2 \qquad \text{(Stab)} \tag{1.197}$$

$$d_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i^e(x)\,dx \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \text{(Balken)}\,. \tag{1.198}$$

Die $\varphi_i^e(x)$ sind die zwei bzw. vier **Einheitsverformungen** des Stabes bzw. Balkens, siehe Bild 3.13 auf Seite 243. Die d_i sind die Kräfte, mit denen die Streckenlast auf die eingespannten Balken/Stabenden wirkt, um sie zum Nachgeben zu zwingen. Die ***Festhaltekräfte*** versuchen dies zu verhindern. Sie haben daher das entgegengesetzte Vorzeichen

$$\downarrow \text{ Äquivalente Knotenkräfte} = \text{Festhaltekräfte} \times(-1) \uparrow$$

Bei den finiten Elementen operiert man meist mit nur einem Vektor $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$, der beide Anteile enthält, also die Kräfte f_i, die direkt in den Knoten angreifen, und die Kräfte d_i aus der verteilten Belastung. Wenn der Ingenieur Lasten in die Knoten reduziert, dann sind das die d_i. *Eine Knotenkraft heißt äquivalent zu p, wenn sie bei einer Einheitsverformung des Knotens dieselbe Arbeit leistet, wie die Last p.*

1.18.1 Gleichgewicht

Wie immer man die Knoten eines Elements auslenkt, wie immer also der Vektor $\boldsymbol{u}$ aussieht, die Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$, die dazu nötig sind, sind immer im Gleichgewicht. Bei einem Balkenelement gilt also $f_1 + f_3 = 0$ ($\sum V = 0$), und $f_2 - f_3 \cdot \ell + f_4 = 0$ ($\sum M = 0$ um $x = 0$).

Der Grund ist, dass alle C^m-Funktionen $w(x)$ (m = Ordg. der DGL) ‚im Gleichgewicht' sind, also

$$\mathscr{G}(w,s) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,s\,dx + [V\,s - M\,s']_0^l = 0\,, \tag{1.199}$$

wenn $s = a + b\,x$ ein Starrkörperbewegung des Balkens ist. Das gilt für alle Bauteile und die assoziierten Identitäten. Als die Ingenieure bei Boeing probeweise ihr *CST-Element* auslenkten, siehe Kapitel 3.10, konnten sie sicher sein, dass das Element jedesmal im Gleichgewicht war, denn ihre Ansatzfunktionen waren Polynome und die sind C^∞.

In der Ingenieurliteratur wird das als selbstverständlich genommen, aber hier zeigt sich:

Jede Funktion ist ein verformtes Element, ein Stab, ein Balken, ...

Jede Funktion denkt mit. Ihre Kräfte sind immer im Gleichgewicht, denn $\sum V = \sum H = \sum M = 0$. In jede Funktion ist Intelligenz eingebaut, siehe Kapitel 3.73.

1.18.2 Die Herleitung von $\boldsymbol{K u = f + d}$

Auch das System $\boldsymbol{K u = f + d}$ basiert auf der ersten Greenschen Identität. Um dies zu sehen, spalten wir die Längsverschiebung $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$ eines Stabes in eine homogene Lösung

$$u_h(x) = u_1\,\varphi_1(x) + u_2\,\varphi_2(x) \tag{1.200}$$

und eine partikuläre Lösung $u_p(x)$ auf

$$-EA\,u_p''(x) = p(x) \qquad u_p(0) = u_p(l) = 0\,, \tag{1.201}$$

denn dann folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(u_h + u_p, \varphi_i^e) &= \int_0^l p\,\varphi_i^e\,dx + [N\,\varphi_i^e]_0^l - a(u_h + u_p, \varphi_i^e) \\ &= d_i + f_i - a(u_h, \varphi_i^e) - \underbrace{a(u_p, \varphi_i^e)}_{=0} = d_i + f_i - \sum_{j=1}^{2} k_{ij}\,u_j = 0\,,\end{aligned} \tag{1.202}$$

wobei wir das Resultat

$$\mathscr{G}(\varphi_i^e, u_p) = \int_0^l 0 \cdot u_p\,dx - a(\varphi_i^e, u_p) = a(\varphi_i^e, u_p) = 0 \tag{1.203}$$

benutzt haben. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Randwerte von u_p null sind und damit auch die Randarbeiten $[N_i^e\,u_p]_0^l = 0$.

In einem Balken ergibt dieselbe Aufspaltung

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w_h + w_p, \varphi_i^e) &= \int_0^l p\,\varphi_i^e\,dx + [V\,\varphi_i^e - M\,\varphi_i^{e\prime}]_0^l - a(w_h, \varphi_i^e) - \underbrace{a(w_p, \varphi_i^e)}_{=0} \\ &= d_i + f_i - \sum_{j=1}^{4} k_{ij}\,u_j = 0\,,\end{aligned} \tag{1.204}$$

wobei die $\varphi_i^e(x)$ die Einheitsverformungen der Balkenenden sind.

Der wesentlich Schluss ist, dass man mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ die Kontrolle über die **Randwerte** u_i und f_i eines Balkens hat[9]. Die u_i sind die Weggrößen und die f_i sind die Balkenendkräfte und der Vektor $\boldsymbol{d}$ sind die äquivalenten Knotenkräfte $d_i = (p, \varphi_i)$ aus der Belastung im Feld (alle Vorzeichen nach FEM). Das System sieht aus wie eine FE-Gleichung, aber es gilt unabhängig von den finiten Elementen. Eine Steifigkeitsmatrix, wenn sie auf den richtigen homogenen Lösungen φ_i basiert, stellt also so etwas wie eine **‚Eichmatrix'** dar.

- In jeder Gleichung darf es immer nur eine Unbekannte geben, wie etwa im Fall eines gelenkig gelagerten Trägers

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2\,? \\ 0 \\ u_4\,? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\,? \\ 0 \\ f_3\,? \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} . \tag{1.205}$$

- Man kann also nicht zwei konjugierte Größen *gleichzeitig* vorschreiben: An einem Stab mit einer Kraft von 10 kN ziehen und gleichzeitig verlangen, dass die Längsverschiebung $u(l)$ dabei 1 cm betragen soll.

Die eigentlich wichtige Botschaft, auf die wir gleich eingehen, ist jedoch:

- Wenn man die u_i und f_i am Balkenende kennt, dann kann man mit ihnen (zusammen mit der Belastung $p(x)$) die Verformungen und Schnittgrößen in allen Punkten dazwischen berechnen.

Dieser Schluss ist so wichtig, dass wir ihn (im nächsten Kapitel 1.19) in einen größeren Kontext stellen werden.

1.18.3 Steifigkeitsmatrizen

Steifigkeitsmatrizen sind also keine Erfindung der finiten Elemente. Zu jeder linearen Differentialgleichung der Ordnung n (gerade) gehören n linear unabhängige homogene Lösungen, deren Wechselwirkungsenergien die Einträge k_{ij} in der zugehörigen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sind

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \qquad i, j = 1, 2, \ldots n\,. \tag{1.206}$$

Das Kennzeichen **genäherter Steifigkeitsmatrizen** ist, dass die φ_i keine homogenen Lösungen sind, wie etwa im Fall eines elastisch gebetteten Balkens,

$$EI\, w^{IV}(x) + c\, w(x) = p(x)\,, \tag{1.207}$$

[9] In der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, sind die f_i hingegen Knotenkräfte

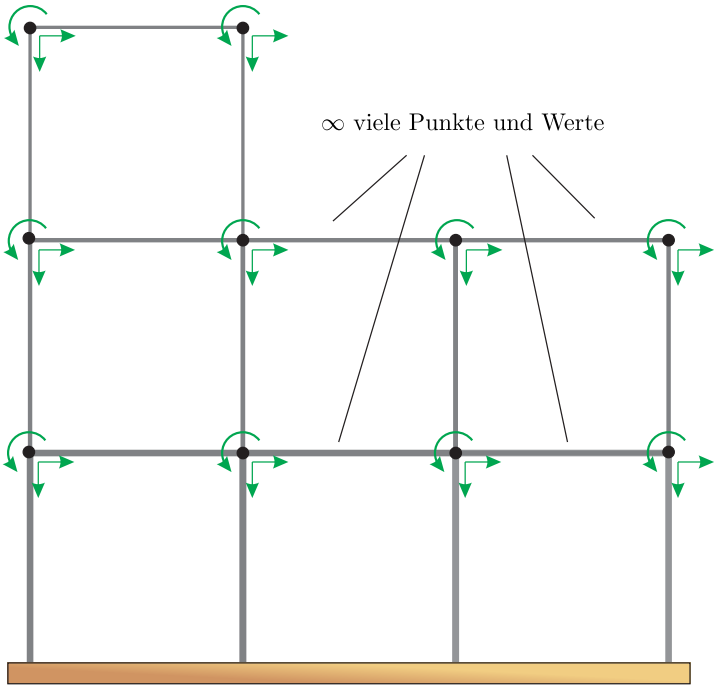


Bild 1.31. Die Knoten sind die ‚Ränder' eines Rahmens. Weiß man, wie sich die Knoten verformen, dann kann man die Verläufe von N, M und V zwischen den Knoten berechnen

wo man gern statt mit den exakten $\varphi_i(x)$ mit den homogenen Lösungen $\varphi_i(x)$ des normalen Balkens rechnet, siehe Kapitel 9.31.

Der entscheidende Schritt geschieht dann bei den Flächentragwerken, wo man sich von dem Begriff der homogenen Lösung löst und die φ_i frei nach ‚Geschmack' (und Talent) wählt. Aber weiter wollen wir hier nicht gehen, denn zu dem Technischen der finiten Elemente bei Flächentragwerken gibt es ja ausreichend Literatur.

1.19 Die Reduktion der Dimension

Beim Drehwinkelverfahren sprechen wir vom *Grad der kinematischen Unbestimmtheit* und meinen damit die Zahl der unbekannten Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen. Nachdem die Verformungen der Knoten berechnet wurden, nennen wir das Tragwerk *kinematisch bestimmt*, und wir können uns dann daran machen, aus den Knotenwerten die Verformungen und die Schnittgrößen zwischen den Knoten zu berechnen.

In der Stabstatik reicht es also offenbar aus, die Weg- und Kraftgrößen auf dem **‚Rand'** zu kennen – in den Knoten, siehe Bild 1.31 – denn nur so ist es möglich, dass sich die Statik eines Rahmens auf zwei Vektoren, $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{f}$, die

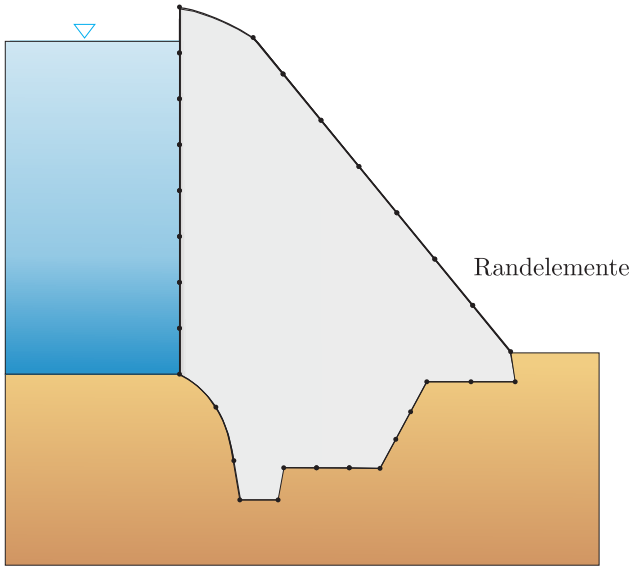


Bild 1.32. Staumauer, auf der Wasser- und Luftseite kennt man den Spannungsvektor $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ und im Fels den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Die fehlenden Werte, den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ im Fels und den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ des oberen Teils kann man durch Lösen einer Integralgleichung (‚Knotenausgleich auf der Oberfläche der Staumauer') berechnen. Anschließend kann man aus den Randwerten alle interessierenden Werte im Innern der Staumauer berechnen

dem Gleichungssystem

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{1.208}$$

genügen, reduzieren lässt ($\boldsymbol{f}_K$ = Kräfte in den Knoten). Das bedeutet:

Endlich viele Knotenwerte bestimmen unendlich viele Werte, nämlich die Verformungen $u(x), w(x), w'(x)$ und Schnittgrößen $N(x), M(x), V(x)$ in den unendlich vielen Punkten der Stiele und Riegel.

Das ist aber doch eine Reduktion um Eins. Die $n = 1$ dimensionalen Traglieder schrumpfen auf eine $n - 1 = 0$ dimensionale Menge von Punkten, von Knoten, zusammen. *Erst diese Reduktion macht das Drehwinkelverfahren möglich: Es reicht, sich mit den Knoten zu beschäftigen!*

Alle linearen, selbstadjungierten Differentialgleichungen gestatten eine solche **Reduktion der Dimension** eines Problems um Eins, $n \to (n-1)$. Der praktische Wert dieser Reduktion kann nicht hoch genug geschätzt werden.

Aus den Weg- und Kraftgrößen auf dem Rand kann man mittels Einflussfunktionen die Verformungen und Schnittgrößen im Innern berechnen.

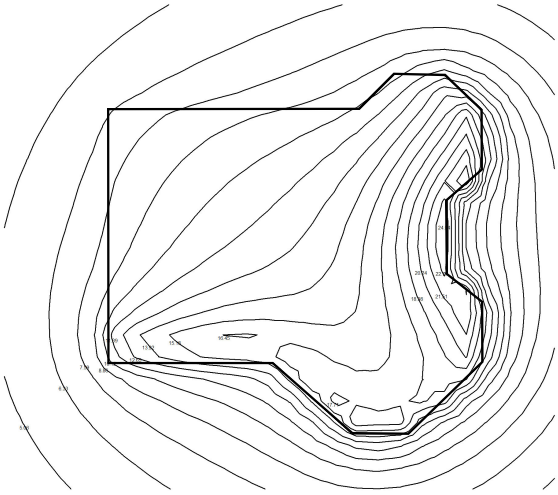


Bild 1.33. Steifezifferverfahren (BE-PLATTE)

Zur Ermittlung der Spannungen in einer Staumauer ($n = 3$), siehe Bild 1.32, reicht die Kenntnis der Verschiebungen und Spannungen auf der Oberfläche der Staumauer ($n = 2$) aus. Um eine Platte ($n = 2$) zu berechnen, reicht die Kenntnis der Weg- und Schnittgrößen längs des Randes ($n = 1$) aus und bei einem Balken ($n = 1$) muss man nur die Knotenwerte ($n = 0$) kennen. Die einfachste und elementarste Umsetzung dieser Idee ist das **Lineal**. Eine Gerade (die Lösung der Differentialgleichung $u'' = 0$) ist durch ihre beiden Randwerte eindeutig bestimmt und daher kann man die Gerade zeichnen, wenn man das Lineal an die Endpunkte anhält. *Das Lineal ist die universelle Einflussfunktion der Geraden.*

Außenraumprobleme werden gerne durch solche Methoden gelöst. Allein durch das Diskretisieren der Oberfläche eines Motorblocks kann man den Lärm – den Schalldruck – in 3 m, 30 m oder 300 m Entfernung berechnen. Beim Steifezifferverfahren ist das Außen der elastische Halbraum und die Boussinesq-Lösung bestimmt die Druckverteilung unter der Sohlplatte in Bild 1.33 wie auch bei der Pfahl-Platten-Gründung in Frankfurt, [177].

1.20 Methode der Randelemente

Die Methode der Randelemente ist die Anwendung dieser Idee auf Flächentragwerke (Scheiben und Platten) oder ganze Volumina, wie Staumauern. Sie hat ihren Namen von den kurzen Geradenstücken (Randelementen), in die der Rand der Platte oder Scheibe unterteilt wird. Eine Unterteilung des Innern

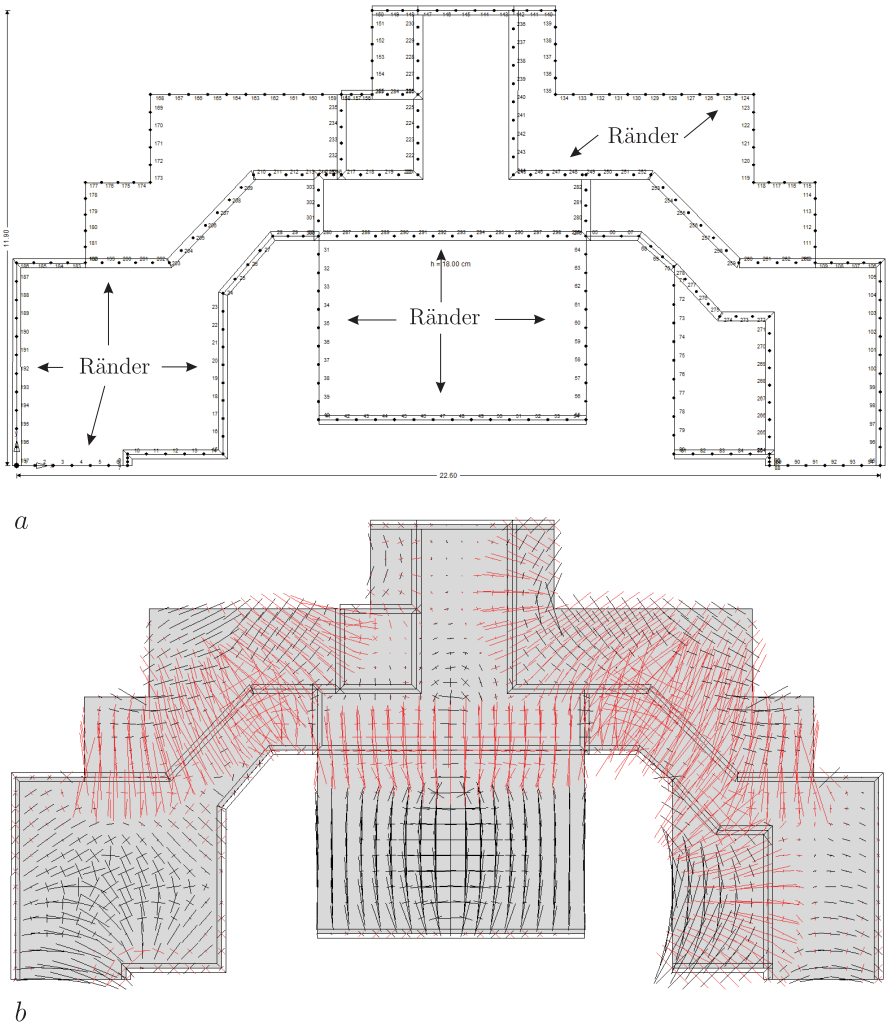


Bild 1.34. Deckenplatte, **a)** die Knoten der Randelemente und **b)** die Hauptmomente im LF g (BE-PLATTE)

wie bei den finiten Elementen ist nicht nötig, so wie ja noch nie ein Ingenieur einen Knotenausgleich ‚im Feld' geführt hat.

Man kann sich die Methode der Randelemente als eine Mischung aus dem Drehwinkelverfahren und Einflussfunktionen vorstellen. Der Rand der Platte oder Scheibe wird in Randelemente unterteilt, siehe Bild 1.34 und 1.35, um die Randverformungen und Randkräfte (= Funktionen) längs des Randes mit Polygonzügen darstellen zu können. Dann wird, wie beim Drehwinkelverfahren, ein Knotenausgleich in den Randknoten durchgeführt – allerdings nicht iterativ, sondern in einem Schritt.

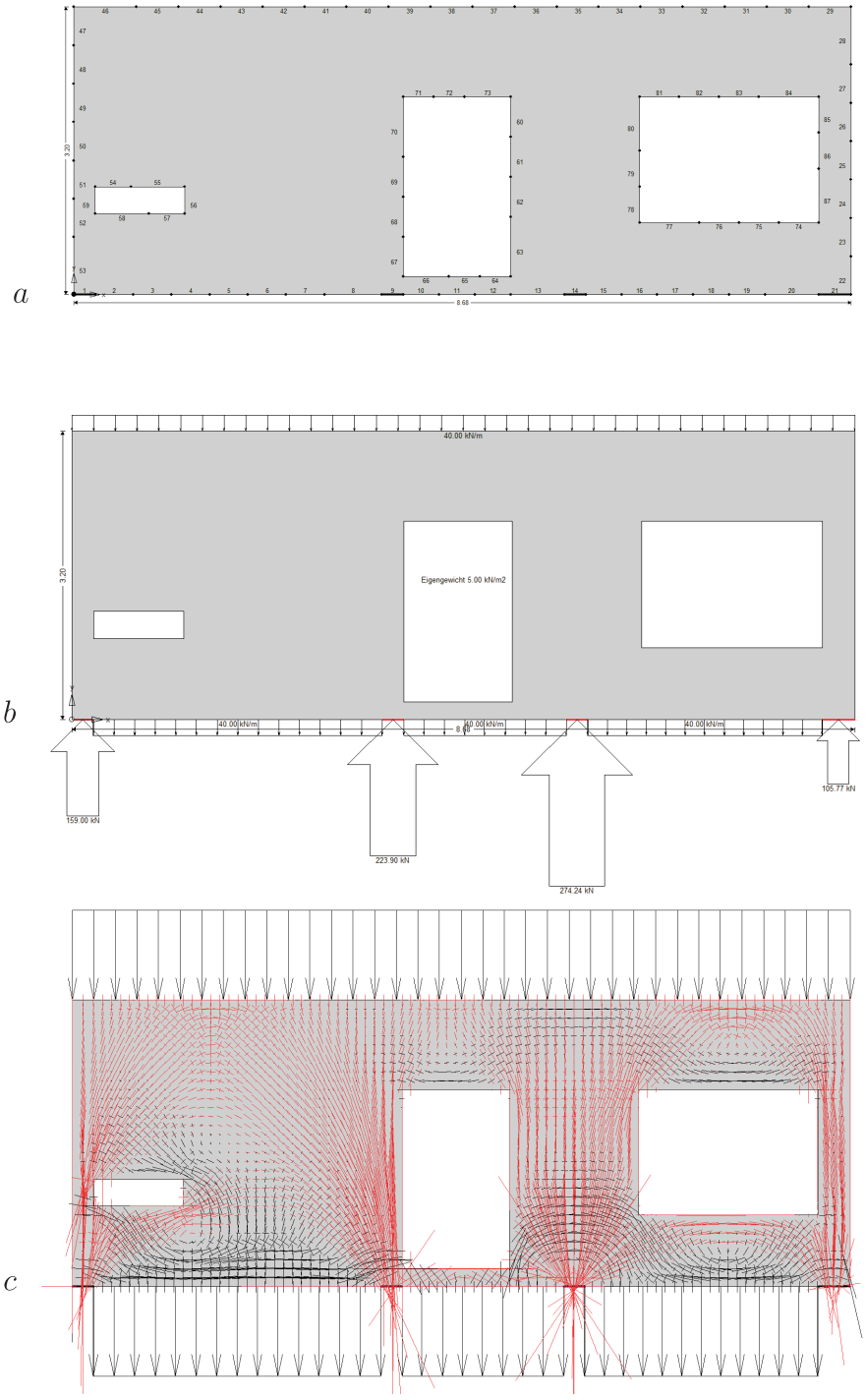


Bild 1.35. Wandscheibe, **a)** Knoten der Randelemente, **b)** Lagerkräfte, **c)** Hauptspannungen. Alle Spannungen im Innern wurden durch Integration über den Rand berechnet (BE-SCHEIBE)

Anschließend werden darauf mit Hilfe von Einflussfunktionen aus den Verformungen der Ränder und den Lagerkräften die Schnittgrößen im Innern der Platte oder Scheibe berechnet.

Das Drehwinkelverfahren ist im übrigen eine genuine Randelementmethode, bei der meist Übertragungsmatrizen die Rolle der Einflussfunktionen übernehmen, die Randwerte nach Innen fortsetzen.

Und was überraschen mag: ***Auch die Methode der finiten Elemente ist in einem gewissen Sinn eine ‚Randelementmethode'***, denn auch FE-Lösungen sind ja Potentiallösungen, und die Kerne $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ in den Einflussfunktionen[10]

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{1.209}$$

basieren auf derselben Integraldarstellung wie bei den Randelementen

$$G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \ldots ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega \ldots\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{1.210}$$

und über diese Schiene propagieren die Singularitäten auf dem Rand ins Innere, siehe Kapitel 6.12, machen, dass die FE-Einflussfunktion (1.209) und damit die FE-Lösung – im ganzen Gebiet – an Genauigkeit verliert! Die Mathematik hinter den Randelementen (die Potentialtheorie) kann erklären, warum die Ecken zu Schwierigkeiten für die finiten Elemente führen.

1.21 Finite Elemente und Randelemente

Einflussfunktionen sind also das wesentliche Werkzeug von finiten Elementen wie von Randelementen. Ein FE-Programm berechnet die Verschiebung in einem Stab – ganz klassisch – mit einer Einflussfunktion

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{1.211}$$

nur dass die Einflussfunktion $G_h(y,x)$ eine Näherung ist, siehe Bild 1.36 b, weil sie den Knick unter der Einzelkraft nicht darstellen kann (zumindest, wenn der Aufpunkt x zwischen den Knoten liegt).

Die Methode der Randelemente geht im Grunde genauso vor, aber sie benutzt eine sogenannte ***Fundamentallösung*** $g(y,x)$. Das ist eine Funktion, die zwar den richtigen Knick unter der Einzelkraft aufweist, die aber an den Enden des Stabes nicht null ist, die also die Lagerbedingungen verletzt.

Die Folge ist, dass bei der Formulierung des *Satzes von Betti*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(g,u)_{\Omega_e} = 0 \tag{1.212}$$

[10] $d\Omega_{\boldsymbol{y}}$ und $ds_{\boldsymbol{y}}$ bedeutet, dass über $\boldsymbol{y}$ integriert wird.

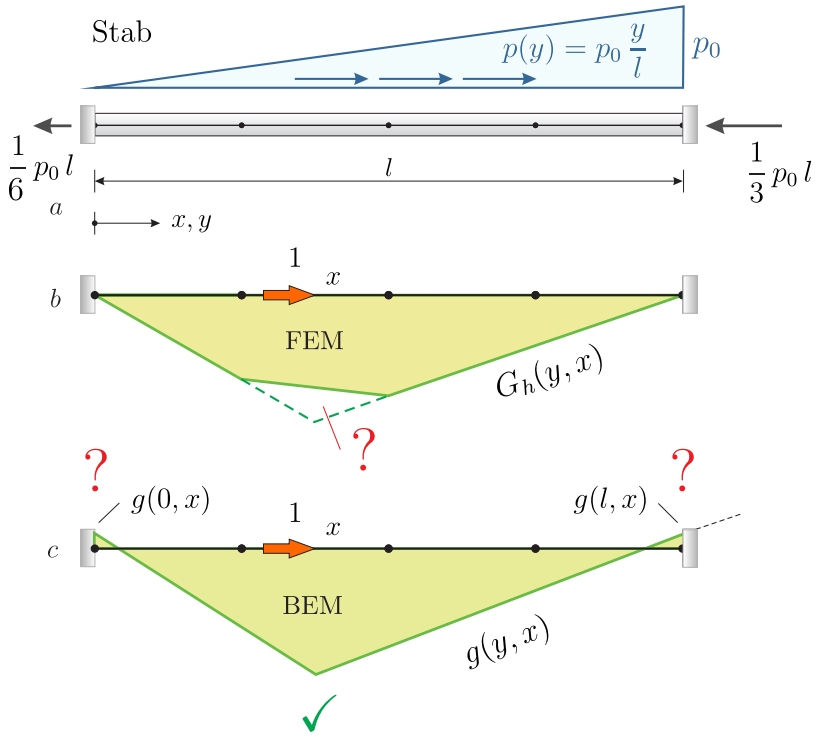


Bild 1.36. Stab, **a)** System und Belastung, **b)** genäherte Einflussfunktion – ihr fehlt der Knick, **c)** Fundamentallösung, sie hat den Knick an der richtigen Stelle, aber ihre Randwerte sind nicht null; die horizontalen Verschiebungen sind, um sie sichtbar zu machen, nach unten abgetragen (BEM = *boundary element method*)

nun auch die Normalkräfte $N(0)$ und $N(l)$ an den Endes des Stabes, siehe Bild 1.36 a, von den ‚nicht-null' Verschiebungen g verschoben werden und zur Dirac Energie beitragen, **die Einflussfunktion wird ‚länger'**

$$1 \cdot u(x) = \underbrace{\int_0^l g(y,x)\, p(y)\, dy + N(l)\, g(l,x) - N(0)\, g(0,x)}_{Dirac\ Energie} \tag{1.213}$$

verglichen mit der ursprünglichen Formulierung mit $G(y,x)$

$$1 \cdot u(x) = \underbrace{\int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy}_{Dirac\ Energie} . \tag{1.214}$$

Man beachte, dass beide Formeln denselben Wert für die Dirac Energie liefern. Aber der $g(y,x)$-Zugang muss auch die Arbeit an den Stabenden, den

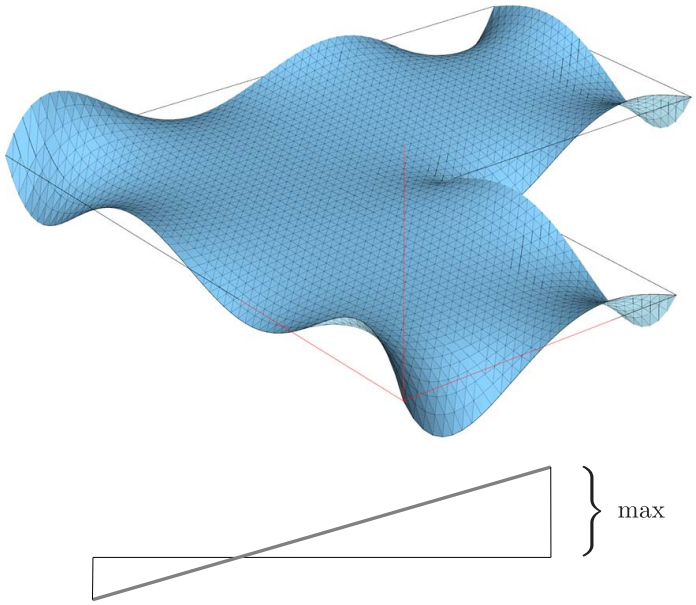


Bild 1.37. Die am Rand eingeprägten Sinus-Schwingungen verformen das Tuch so, dass das Maximum auf dem Rand liegt. Dasselbe gilt für jede Gerade, $u'' = 0$ (BE-LAPLACE)

Rändern, mitzählen, das Arbeitsintegral (p, g) allein ist ‚zu wenig'. Das ist der Unterschied.

Der Vorteil von Fundamentallösungen ist, dass sie ein ***Universalschlüssel*** sind, der überall passt. Mit ein und derselben Fundamentallösung kann man alle Platten berechnen. In BE-Programmen sind die Fundamentallösungen ‚fest verdrahtet'. *One solution suffices to rule them all.*

Der Nachteil ist, dass auch die Randkräfte und eventuell auch die Randverformungen mit zur *Dirac Energie* beitragen, so dass diese Randwerte, wenn sie unbekannt sind, durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden müssen. Technisch stellt dies kein Problem dar. Es ist nur so, dass in zwei und drei Dimensionen diese Hilfsprobleme nur näherungsweise gelöst werden können und so ist auch bei Randelementen – wie bei den finiten Elementen – die *Dirac Energie* nur eine Näherung.

Das Operieren mit Fundamentallösungen hat den weiteren Vorteil, dass eine Approximation der Einflussfunktionen für die Schnittgrößen, wie bei den finiten Elementen, nicht notwendig ist. BE-Programme benutzen die exakten Einflussfunktionen für alle Weg- und Schnittgrößen, nur die Marken auf dem Rand, an die sie sozusagen die Kurvenlineale, die Einflussfunktionen, halten, sind leicht verrutscht.

Randelemente haben auch ein besseres **Auflösungsvermögen** bei Singularitäten als finite Elemente, siehe z.B. Bild 3.98. Die Spannungen der FE-

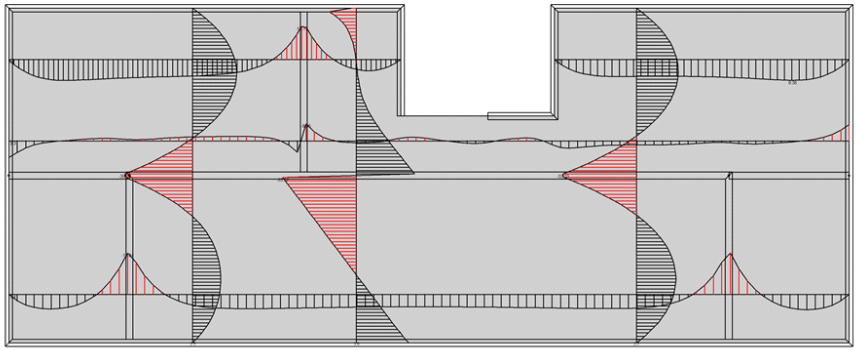


Bild 1.38. Momente und Querkräfte in einer Deckenplatte. Jeder Wert wurde einzeln durch Integration über den Rand und die Wände berechnet (BE-PLATTE)

Lösungen weichen in den Ecken deutlich von der BE-Lösung ab. Wenn man aber FE-Resultate mit BE-Resultaten vergleicht, dann sind die Abweichungen in den Schnittgrößen und der Bewehrung im Feld, entfernt von den Ecken, in der Regel gering. Da kommt man dann ins Zweifeln, ob man wirklich ein Netz in den Ecken verfeinern muss. Man sollte es sicherlich, insbesondere, wenn man vernünftige Querkräfte für den Durchstanznachweis haben will, aber wenn es nur um die Feldmomente ginge, könnte es wohl unterbleiben.

Wir wollen das Thema Rand(elemente) doch nicht vorüber gehen lassen, ohne das ***Maximumprinzip*** zu erwähnen, weil alles, wo sich in der Form der Gehalt ausprägt, den Bauingenieur höchlich interessiert. Das Maximumprinzip besagt, dass jede homogene Lösung der Laplace-Gleichung, $\Delta u = 0$, ihr Maximum auf dem Rand annimmt, siehe Bild 1.37. Im 1-dimensionalen Fall sind das die Geraden, $u'' = 0$.

Weil $EI\, w^{IV} = p$ mit $-M'' = p$ identisch ist, bedeutet dies, dass in jedem unbelasteten Feld, $p = 0$, das maximale Moment an den Enden auftritt.

1.22 Digital vs. analog

Beim *post processing*, der Ergebnisauswertung, gleichen die finiten Elemente einem ‚Raster-Verfahren', ähneln einer Digitaluhr, und die Randelemente einer Analoguhr.

Die finiten Elemente arbeiten auf einem Netz und die *shape functions* sind stückweise Polynome und die Ergebnisse werden vorzugsweise in den Knoten (Verschiebungen) bzw. den Mittelpunkten der Elemente (Spannungen) dargestellt und dazwischen wird dann interpoliert. Diese Betonung der Knoten und der Gausspunkte gibt den FE-Ergebnissen diesen ‚Rastercharakter'.

Bei den Randelementen ist es anders. Wenn man z.B. den Verlauf der Querkraft q_x in einem Schnitt darstellt, dann wird jeder Wert q_x für sich durch

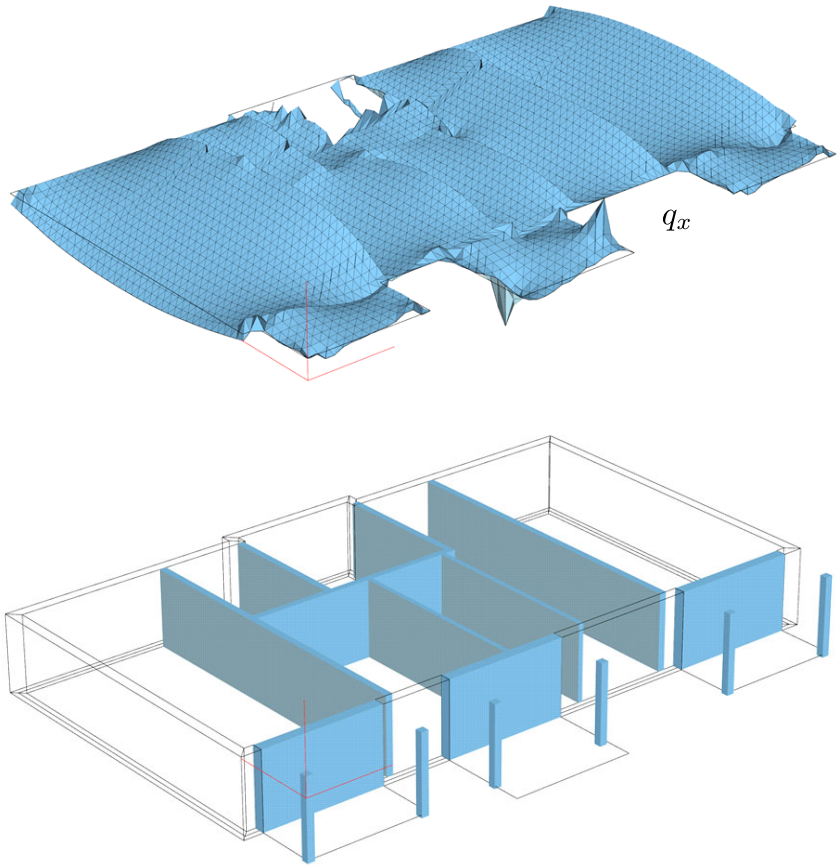


Bild 1.39. Querkräfte q_x in einer Deckenplatte. Da nicht jeder Punkt angezeigt wird, kommt es zu einer Rasterung wie bei den finiten Elementen (BE-PLATTE)

Integration über den Rand der Platte berechnet, also nicht aus den Nachbarwerten interpoliert, siehe Bild 1.38. Man erhält daher automatisch glatte Kurven – muss keine Spannungssprünge ausgleichen – weil Einflussfunktionen immer glatte Kurven liefern, die natürlich immer noch oszillieren können, (und auch falsch sein können), aber vom Ansatz her sind die Randelemente das analytischere Verfahren.

Was die beiden Verfahren wieder aneinanderrückt, sind Gesamtansichten, wie z.B. der Querkräfte q_x in Bild 1.39. Das sind Randelement-Ergebnisse, aber weil die Querkräfte nur in ausgesuchten Punkten angezeigt werden, kommt es auch hier teilweise zu Sprüngen, wenn die Gradienten groß sind.

Bei Randelementen gibt es kein Netz und deswegen muss man die Knoten, die wir dann **Spannungspunkte** nennen, künstlich erzeugen. Dazu wird

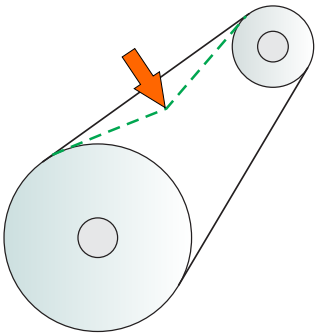


Bild 1.40. Test eines Keilriemens

eine Schaar von horizontalen Linien über die Platte gelegt auf denen gleichabständig Punkte verteilt sind. Es entsteht so der Eindruck eines Netzes, das sehr anschauliche Bilder ermöglicht, siehe z.B. die Biegefläche der Membran in Bild 1.37. Natürlich, wenn die Querkräfte (die dritten Ableitungen!) an den Wänden springen oder in der Nähe von Stützen stark ansteigen, dann wird die Darstellung der Ergebnisse auch für Randelemente schwierig, aber wie Bild 1.39 zeigt, gelingt das – bis auf einige *peaks*, die ihre Ursache in der Stützung der Platte selbst haben – immer noch ganz gut.

1.23 Testfunktionen

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik beruhen also auf der ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = 0\,, \tag{1.215}$$

und deren ‚Spiegelung', dem Satz von Betti. Die Schreibweise $\mathscr{G}(w, \delta w)$ ist geeignet deutlich zu machen, dass nichts besonders geheimnisvolles an einer virtuellen Verrückung δw ist. Mathematisch ist es einfach der Gegenpart zu w. Und wie w ist δw eine Funktion – und mehr nicht!

Leider ist der Begriff der virtuellen Verrückungen jedoch historisch so belastet, dass man versucht ist, ihn durch einen harmloseren Begriff wie den der ***Testfunktion*** zu ersetzen. Das Testen, das Wackeln, das Auslenken aus der Gleichgewichtslage ist ja ein alltägliches Manöver.

Um das Gewicht eines Koffers zu bestimmen, heben wir den Koffer hoch. Gemäß der Formel *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung* können wir aus der Beschleunigung a und der Kraft im Arm, auf die Masse M des Koffers schließen. Um die Spannung in einem Keilriemen oder den Druck in einem Fußball zu ermitteln, drücken wir mit dem Daumen dagegen, siehe Bild 1.40. Der Bauzeichner, der Risse anfertigt, projiziert das Tragwerk auf drei Ebenen, und die Risse sind das Skalarprodukt zwischen dem Tragwerk und den je zwei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ der drei Ebenen. Von je mehr Seiten wir etwas betrachten können, desto mehr lernen wir über den Gegenstand. In einem übertragenen

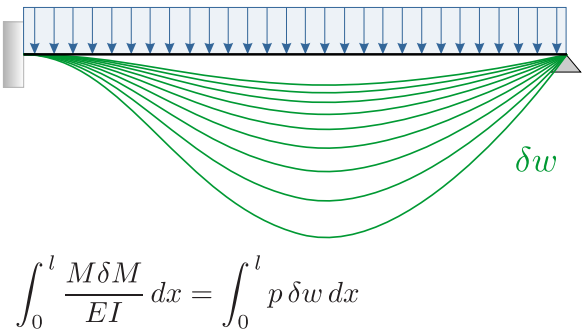


Bild 1.41. Gleichgültig, wie groß δw ist, es ist immer $\delta W_i = \delta W_e$

Sinn bedeutet das: Je öfter wir ‚wackeln', je mehr Tests φ_i wir fahren, desto deutlicher wird das Bild.

1.24 Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?

Nein. Virtuelle Verrückungen müssen nicht klein sein, siehe Bild 1.41. Die Gleichung

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i, \tag{1.216}$$

ist nicht deswegen wahr, weil $\delta W_e = \delta W_i$ ist. Das Anheften von *labels* beweist nichts!

Ja, die Energieprinzipe bilden den Kern der Mechanik und an keiner Stelle ist man der Mechanik so nahe, wie bei Formulierungen wie $\delta W_e = \delta W_i$. Es ist auch richtig, dass die statische Interpretation einer Gleichung – definitiv – die beste Kontrolle ist. Aber das verführt Ingenieure dazu Mathematik mit Mechanik zu beweisen, was nicht geht – Kontrolle ja, aber Beweis nein.

Um nicht missverstanden zu werden: Wir halten die Energieprinzipe der Mechanik für ein sehr gelungenes Konzept. Vom didaktischen Standpunkt aus gibt es keinen besseren Zugang zur Statik – Generationen von Ingenieuren haben so erfolgreich Statik gelernt.

Es ist nicht unsere Absicht, Statik in ein rigoros System von Axiomen und Theoremen zu verwandeln. Ein solcher Versuch würde mehr Unheil anrichten als dass er Gutes bewirkt. Statik kann nicht und sollte nicht im Sinne eines mathematischen Lehrbuches gelehrt werden[11]. Wir glauben nur, dass wir an

[11] Auch wenn die Lufthoheit, die die Mathematik (scheinbar) garantiert, viele junge Assistenten an den Hochschulen anzieht. Aber die Statik lebt von lebendiger Anschauung und nicht von rigider Axiomatik. *Babuška* hat sogar einmal einen Doktoranden vor den Mathematikern gewarnt: ‚*Mathematicians are very clever*'. Anders gesagt: *Don't fall into their trap*, [9]. Und um die Anekdote noch fortzusetzen: Die erste Frage von *Babuška* an den Doktoranden war: ‚*What does your hour cost?*' Ist jemand bereit, für Ihre Wissenschaft zu zahlen?

einem Punkt des Studiums den Studenten erklären sollten, warum die doch so zentrale Gleichung (1.216) richtig ist. Nicht, weil $\delta W_e = \delta W_i$, sondern weil

- $w \in C^4(0,l)$ (wie wir annehmen) eine Lösung des Randwertproblems ist

$$EI\, w^{IV} = p \qquad w(0) = w(l) = M(0) = M(l) = 0 \tag{1.217}$$

- $\delta w \in C^2(0,l)$ (wie wir annehmen) eine zulässige virtuelle Verrückung ist, $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$
- und wir daher die Regeln der partiellen Integration

$$\int_0^l w'(x)\, \delta w(x)\, dx = [w\, \delta w]_0^l - \int_0^l w(x)\, \delta w'(x)\, dx \tag{1.218}$$

zweimal anwenden dürfen, um die linke Seite von (1.216) in die rechte Seite umzuformen

$$\int_0^l p\, \delta w\, dx = \int_0^l EI\, w^{IV}\, \delta w\, dx = \int_0^l \frac{M\, \delta M}{EI}\, dx\,. \tag{1.219}$$

Da partielle Integration keinen Unterschied zwischen ‚groß' und ‚klein' macht, kann δw von beliebiger Größe sein. Auf der linken Seite steht am Ende eine Zahl und auf der rechten Seite steht eine Zahl

$$0.56789\ldots = 0.56789\ldots \tag{1.220}$$

die in allen Ziffern gleich sind. Welches mechanische Prinzip kann dies garantieren? Oder wenn wir das Argument auf den Kopf stellen, welches *mathematische Gesetz* würde missachtet werden, wenn δw groß wäre? Hat je ein Mathematiker eine Gleichung dadurch bewiesen, dass er sich auf ein Naturgesetz bezogen hat?

Die Balkenkrümmung wegen $w' \ll 1$ auf $\kappa \simeq w''$ zu reduzieren, ist ein legitimes Argument, um die Balkengleichung zu linearisieren, aber man ist dann doch erstaunt, wenn der Gesprächspartner erklärt – wie uns das mehrfach passiert ist – dass die Gleichung (1.216) nur solange richtig ist, solange δw klein ist[12].

[12] Da wünscht man sich die Mathematiker als Zuhörer, wünscht sich, dass sie einmal ihre *splendid isolation* verlassen und verstehen, was Ingenieur-Mathematik ist. ‚*Epsilontik*' ist einfach, das schwere ist die physik. Interpretation, ist das ‚Sein'! Viele Missverständnisse beruhen auf dieser *Zwi-Natur* der Ingenieur-Mathematik.

1.25 Theorie I. Ordnung

Die lineare Statik nimmt an, dass die Verformungen eines Bauteils klein sind und die Gleichgewichtsbedingungen daher am unverformten System aufgestellt werden können (Theorie I. Ordnung). Auch hier begegnet uns das Stichwort klein, nur diesmal in einer anderen Rolle.

Bei der Herleitung der Differentialgleichungen, die ja auf dem Gleichgewicht am infinitesimalen Element dx basieren, werden die Verschiebungen der Schnittufer vernachlässigt. Auf Grund dieser Annahme kommt es zu einer Linearisierung der Starrkörperbewegungen, über die wir später noch ausführlicher sprechen werden, Kapitel 1.32. Starrkörperbewegungen lassen ein Bauteil per definition spannungsfrei, und das schränkt die Starrkörperbewegungen in der linearen Stabstatik auf die Bewegungen

$$\delta w = a + b\,x \qquad \delta u = a \tag{1.221}$$

ein; es sind die einzig möglichen Lösungen mit $M = 0$ bzw. $N = 0$ der beiden Gleichungen $EI\,w^{IV} = 0$ und $EA\,u'' = 0$. Gleichzeitig aber unterliegen die Zahlen a und b keiner Größenbeschränkung, und so kommt es, dass in der Theorie I. Ordnung die virtuellen Verrückungen beliebig groß sein können. Wenn natürlich auch $\delta w = a + b\,x$ eine **Pseudodrehung** ist und keine echte Starrkörperdrehung.

Die 6×6 Steifigkeitsmatrix eines Balkens ist orthogonal zu allen Vektoren $\boldsymbol{u}_0$, die beliebig kleine/große Translationen und Pseudodrehungen darstellen, aber nicht zu echten — wenn auch noch so winzigen – Starrkörperdrehungen $\boldsymbol{u}_0$. Man drehe den Balken um sein linkes Ende, dann ist $u_1 = 0$ und $u_4 = l\,(\cos\varphi - 1)$ und so entsteht bei der Rotation eine Druckkraft $N = EA/l \cdot u_4$ in dem Balken. Echte Rotationen und die Matrix $\boldsymbol{K}$ vertragen sich nicht.

1.26 Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?

Die Identitäten beruhen auf einer Kette von Umformungen mittels partieller Integration und daher ist das Ergebnis $\mathscr{G}(w, \delta w) = 0$ immer richtig.

Nun wird aber bei der Formulierung der Arbeitsprinzipien der Statik immer davon gesprochen, dass die Systeme im Gleichgewicht sein müssen. Warum diese Einschränkung? Das liegt an den Abkürzungen, die in der Literatur an dieser Stelle genommen werden.

Um nachzuweisen, dass die Biegelinie eines Balkens,

$$EI\,w^{IV}(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \qquad M(0) = M(l) = 0\,, \tag{1.222}$$

dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* genügt, setzen wir – bei unserem Ansatz – die Biegelinie w und eine zulässige virtuelle Verrückung δw in die erste Greensche Identität ein

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w\,dx+[V\,\delta w-M\,\delta w']_0^l-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=0\,, \tag{1.223}$$

und wir erhalten so unter Berücksichtigung von

$$EI\,w^{IV}(x)=p(x)\qquad M(0)=M(l)=0\qquad \delta w(0)=\delta w(l)=0 \tag{1.224}$$

das bekannte Ergebnis

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l p(x)\,\delta w(x)\,dx-\int_0^l\frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=\delta W_e-\delta W_i=0\,. \tag{1.225}$$

Anders in der Literatur: Dort wird die zu Grunde liegende Identität (1.223) gar nicht angeschrieben, sondern die Autoren formulieren direkt die **verkürzte Identität** (1.225), was aber die Autoren dann zu dem Hinweis verpflichtet, dass das ganze nur gilt, wenn der Balken im Gleichgewicht ist (w genügt (1.222)) und δw eine zulässige virtuelle Verrückung ist.

Das steckt hinter der Bemerkung, dass die Arbeitsprinzipe nur gelten, wenn das System im Gleichgewicht ist.

1.27 Was ist Weg und was ist Kraft?

Bei der Umformung des Arbeitsintegrals

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,w(x)\,dx\qquad\text{(Eigenarbeit)} \tag{1.226}$$

mittels partieller Integration erscheinen wie von selbst die Weg- und Kraftgrößen, die zur Differentialgleichung gehören. Sie bilden paarweise die **Randarbeiten**

$$[V\,w-M\,w']_0^l=V(l)\,w(l)-M(l)\,w'(l)-V(0)\,w(0)+M(0)\,w'(0)\,, \tag{1.227}$$

woran man ablesen kann, dass die Querkraft V zu w konjugiert ist und das Moment M zu w'. Das scheint uns selbstverständlich, weil wir es nicht anders kennen, aber hier ist die Stelle, wo das amtlich gemacht wird.

Der Versuch eines Kollegen etwa die Größe $w+0.5\,w'$ als die ‚wahre' Weggröße auf dem Rand zu definieren, die zu V konjugiert ist, muss scheitern, weil es in der ersten Greenschen Identität anders steht. Sie hält uns auf dem rechten Weg.

Bei der (zweimaligen) partiellen Integration der Arbeitsgleichung des Balkens nach Theorie II. Ordnung

$$\int_0^l(EI\,w^{IV}(x)+P\,w''(x))\,w(x)\,dx=[\underbrace{(EI\,w'''(x)+P\,w'(x))}_{-T(x)}\,w+M\,w']_0^l$$
$$+\int_0^l(\frac{M^2}{EI}-P\,(w'(x))^2)\,dx \tag{1.228}$$

lernen wir z.B., dass nun der Ausdruck

$$T(x) = -EI\,w'''(x) - P\,w'(x) = V(x) - P\,w'(x)\,, \tag{1.229}$$

die Transversalkraft, zu $w(x)$ konjugiert ist und wir lesen aber auch ab, dass $M(x)$ dasselbe Moment ist, wie bei der Theorie erster Ordnung und dass M weiterhin zu w' konjugiert ist.

Die Unterscheidung zwischen Weg und Kraft ist auch für die finiten Elemente wichtig. *Shape functions* sind **konform**, wenn ihre Weggrößen stetig sind. Das ist der Grund, warum man einen Balken nicht mit Hütchenfunktionen $\varphi_i(x)$ berechnen kann. Die Sprünge in der ersten Ableitung $\varphi_i'(x)$ disqualifizieren solche Funktionen (w' gilt als Weggröße beim Balken).

1.28 Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen

Zu Differentialgleichungen **zweiter Ordnung** gehören eine Weg- und eine Kraftgröße. Bei einem Stab, $-EA\,u''(x)$, sind dies

$$u(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad N(x) = EA\,u'(x) \quad \text{1. Ableitung} \tag{1.230}$$

bei einem Seil, $-H\,w''(x)$,

$$w(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad V(x) = H\,w'(x) \quad \text{1. Ableitung} \tag{1.231}$$

oder einem Schubträger, $-GA\,w_s''(x)$,

$$w(x) \quad \text{0-te Ableitung} \qquad V(x) = GA\,w'(x) \quad \text{1. Ableitung}\,. \tag{1.232}$$

Zu Differentialgleichungen **vierter Ordnung** gehören dagegen je zwei Weg- und Kraftgrößen

$$w(x),\, w'(x) \qquad \text{0-te und 1. Ableitung} \tag{1.233}$$

$$M(x) = -EI\,w''(x), V(x) = -EI\,w'''(x) \quad \text{2. und 3. Ableitung}\,. \tag{1.234}$$

Diese Unterscheidung ist nicht ganz unwichtig, weil Einflussfunktionen für Weggrößen sowohl mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* als auch dem *Satz von Betti* berechnet werden können, während Einflussfunktionen für Kraftgrößen in der Regel nur mit dem *Satz von Betti* berechnet werden können.

1.29 Warum das Minus in $-H\,w'' = p$?

Warum beginnen eigentlich alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem Minus?

Das hängt mit dem Vorzeichenwechsel bei den **trigonometrischen Funktionen** zusammen. Eine wellenförmige Belastung $p(x) = \sin(x)$ hat ein gleichsinniges Echo, $w(x) = 1/H\,\sin(x)$, in dem Seil zur Folge, siehe Bild 1.42. Weil

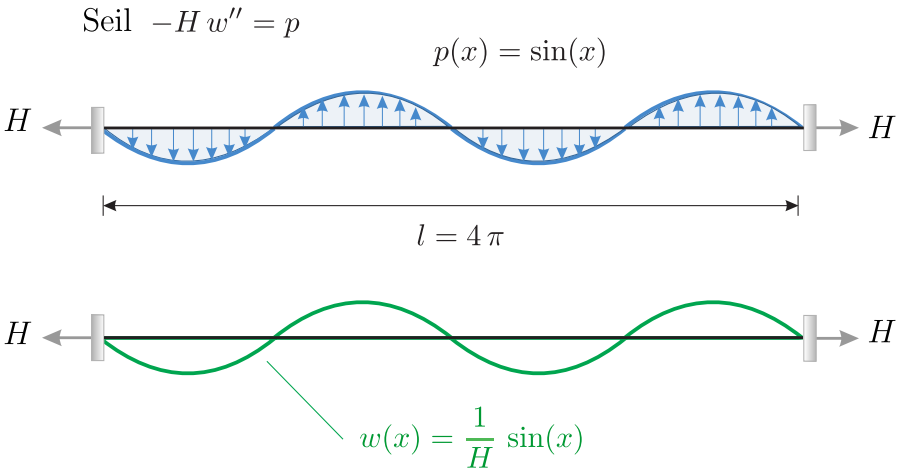


Bild 1.42. Oszillierende Belastung auf einem Seil und das getreue Echo im Seil

nun aber die zweite Ableitung des Sinus negativ ist, muss ein Minus vor der Differentialgleichung dies korrigieren

$$-H\,w''(x) = -H\,(-\frac{1}{H}\,\sin(x)) = \sin(x)\,. \tag{1.235}$$

Statisch kommt das Minus aus dem Gleichgewicht $-V+V+dV+p\,dx = 0$ am infinitesimalen Element, aber was wissen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ vom Gleichgewicht – und wie kommt es, dass der *switch* $(1)\cdot(-1)$ in $\sin(x)$ eingebaut ist, aber nicht in Polynome? Sind sie nicht identisch[13]

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{1.236}$$

Bei der Balkengleichung, $EIw^{IV}(x)$, korrigiert sich der ‚Fehler' im übrigen durch die viermalige Differentiation, $(-1)\cdot(1)\cdot(-1)\cdot(1) = 1$, von selbst.

1.30 Die virtuelle innere Energie

Das symmetrische Gebietsintegral in den Greenschen Identitäten ist die virtuelle innere Energie, die oft auch knapper

$$a(w,\delta w) := \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx \tag{1.237}$$

geschrieben wird. Wir bezeichnen sie auch als ***Wechselwirkungsenergie*** (nach Krätzig [126]) oder ***strain energy product***, weil das besser die Gleichwertigkeit der beiden Funktionen w und δw zum Ausdruck bringt.

[13] Die Reihenentwicklung von $\sin(x)$ und das alternierende Vorzeichen sind anscheinend der Grund...

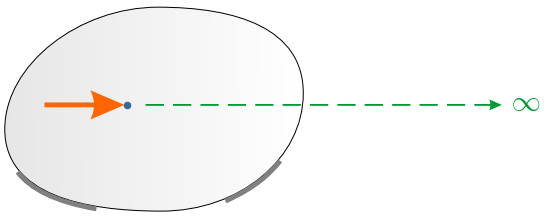


Bild 1.43. Satz von Castigliano bei einer Scheibe: *Und die Kraft wurde nie wieder gesehen...*

Auf der Diagonalen, $\delta w = w$, ist die Wechselwirkungsenergie gleich der inneren Energie

$$\frac{1}{2}\,a(w,w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx\,. \tag{1.238}$$

Sind $w(x)$ und $\delta w(x)$ zusammengesetzte Funktionen, c_i und d_i mögen beliebige Zahlen sein,

$$w(x) = c_1\,w_1(x) + c_2\,w_2(x) \qquad \delta w(x) = d_1\,\delta w_1(x) + d_2\,\delta w(x)\,, \tag{1.239}$$

dann kann man das Gesamtergebnis auf die Überlagerung der einzelnen Biegelinien zurückführen

$$\begin{aligned} a(w,\delta w) = {} & c_1\,d_1\,a(w_1,\delta w_1) + c_1\,d_2\,a(w_1,\delta w_2) \\ & + c_2\,d_1\,a(w_2,\delta w_1) + c_2\,d_2\,a(w_2,\delta w_2)\,, \end{aligned} \tag{1.240}$$

und deswegen nennt man $a(w,\delta w)$ eine ***symmetrische Bilinearform***.

1.31 Satz von Castigliano

Der oder die Sätze von Castigliano sind reine Algebra, sie beruhen darauf, dass die Wechselwirkungsenergie eine Bilinearform ist. Die Ableitung der Verzerrungsenergie der FE-Lösung

$$\frac{1}{2}\,a(u_h,u_h) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}u_iu_j \tag{1.241}$$

nach einer Knotenverschiebung u_l (gemäß Kettenregel und wegen $k_{lj} = k_{jl}$)

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\frac{1}{2}\,a(u_h,u_h) = \frac{1}{2}\sum_j k_{lj}u_j + \frac{1}{2}\sum_j k_{jl}u_j = \sum_j k_{lj}u_j = f_l \tag{1.242}$$

ist die Knotenkraft f_l.

Castigliano's erster Satz *Die Ableitung der Verzerrungsenergie in einem Tragwerk nach einer Knotenverschiebung u_l ist gleich der Kraft f_l am*

Ort von u_l in Richtung der Verschiebung (wenn die Energie endlich ist).

Wir können aber auch schreiben

$$\frac{1}{2}\,a(u_h,u_h)=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}=\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{1.243}$$

und so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial f_l}\frac{1}{2}\,a(u_h,u_h)=\sum_j k_{lj}^{(-1)}f_j=u_l\,. \tag{1.244}$$

Castigliano's zweiter Satz *Die Ableitung der Verzerrungsenergie in einem Tragwerk nach einer Kraft f_l ist gleich der Verschiebung u_l in Richtung der Kraft (wenn die Energie endlich ist).*

Wenn wir dies auf beliebige Verschiebungsfelder erweitern

$$\boldsymbol{u}=\sum_i \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{f}_i\,, \tag{1.245}$$

dann kann es sein, dass die Verzerrungsenergie von einem oder allen Verschiebungsfeldern $\boldsymbol{G}_i$ unendlich ist, $a(\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{G}_i)=\infty$, siehe Bild 1.43, und dann existiert die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial u_l}a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \tag{1.246}$$

nicht wie z.B. in der Elastizitätstheorie, wo die Punktlösungen unendliche Energie haben, siehe Kap. 1.39. Wir müssen Castigliano's Theorem also um den Nachsatz erweitern, *‚wenn die Energie endlich ist'.*

1.32 Pseudodrehungen

Am freigeschnittenen Balken herrscht Gleichgewicht, wenn die äußeren Kräfte (p + Lagerkräfte) **orthogonal** sind zu allen Funktionen δw, deren Momente null sind, denn dann ist

$$a(w,\delta w)=\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx=0\,, \tag{1.247}$$

und so bleiben in der ersten Greenschen Identität nur die Arbeiten der äußeren Kräfte übrig und die sind dann null

$$\mathscr{G}(w,\delta w)=\int_0^l p\,\delta w\,dx+[V\,\delta w-M\,\delta w']_0^l=\delta W_e=0\,. \tag{1.248}$$

Beim Balken sind die ‚Null-Energie'-Funktionen die Starrkörperbewegungen

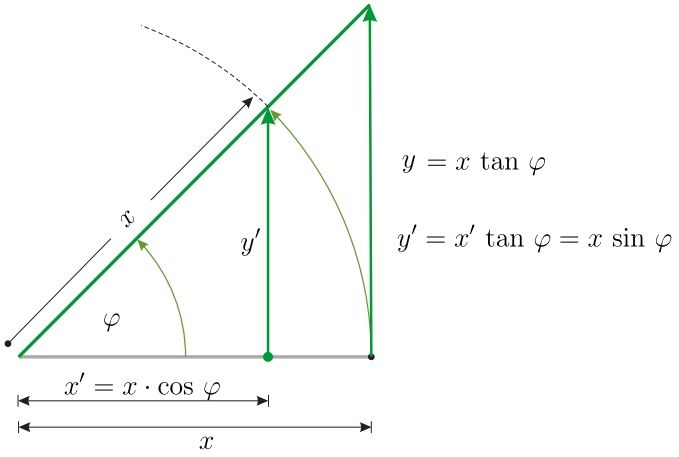


Bild 1.44. Auslenkung y' bei einer echten Drehung und Auslenkung y bei einer Pseudodrehung

$$\delta w(x) = a + b \cdot x \,, \tag{1.249}$$

also *Translationen* a und *Pseudodrehungen* $b \cdot x$. Wir nennen Drehungen wie $b \cdot x$ *Pseudodrehungen* weil, anders als bei echten Drehungen, die Punkte nicht auf dem Drehkreis bleiben, sondern sie der **Tangente an den Drehkreis** folgen, siehe Bild 1.44,

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \,. \tag{1.250}$$

Das ist kein Defekt, sondern es ist das Merkmal der linearen Statik und Mechanik. Alle Einflussfunktionen statisch bestimmter Tragwerke sind kinematische Ketten, die auf Pseudodrehungen basieren. Beim Zeichnen folgt der Stift der Tangente. *Echte Drehungen würden zu falschen Ergebnissen führen.*

Man sollte statt von infinitesimalen Bewegungen von Translationen + linearisierten Drehungen sprechen (Bewegung auf der Tangente), denn nur für solche Bewegungen ist $\delta W_e = 0$. Dann ist man auch die **crux** mit dem infinitesimal kleinen los und kann die virtuellen Verrückungen gedanklich beliebig groß machen. Infinitesimal heißt also nicht klein, nicht ‚winzig', sondern

infinitesimal ≡ linearisierte Drehungen

Dürfen wir an das **Moment einer Kraft um einen Punkt** erinnern? Die Wirkungslinie der Kraft ist mit der Tangente an den Drehkreis deckungsgleich und im 1. Semester haben wir gelernt, dass man die Kraft auf ihrer Wirkungslinie *beliebig weit* verschieben kann ohne dass sich das Moment ändert. Es gibt – zum Glück(!) – keine ‚infinitesimalen' Momente[14].

[14] *Gli italiani sono un saggio popolo antico* und bei ihnen ist *la tangente* auch das ‚Handgeld'. Ein stups, *touch and go*, hält das Rad in Bewegung, *saggio* = weise

Es ist der Momentenbegriff der **zwingend** vorschreibt, dass sich die Kräfte bei virtuellen Verrückungen auf der Tangente an den Drehkreis bewegen! Tangente und Moment sind komplementäre Begriffe. Durch den Momentenbegriff kommen im Grunde die Pseudodrehungen in die Mechanik.

Die Balkenendkräfte V und -momente M eines Balkens stehen mit der verteilten Belastung p also genau dann im Gleichgewicht, wenn (1.248) für alle $\delta w = a + b\,x$ gilt. Ein erfolgreicher Test mit $\delta w = 1$ bedeutet, dass die Summe der vertikalen Kräfte null ist, und ein Test mit $\delta w = x$, dass die Summe der Momente um das linke Lager null ist. Für die Kontrolle von $M = 0$ um andere Punkte wähle man a, b geeignet!

Man verstehe bitte, dass in der Mathematik von Bewegung nicht die Rede ist. Das $\delta w = a + b\,x$ ist ein Gewicht und die Kräfte eines frei geschnittenen Balkens sind **orthogonal** zu diesen Funktionen, wie groß auch immer a und b sind. Das ist das Resultat der partiellen Integration der Arbeitsgleichung.

Natürlich, die Anschauung versteht δw als eine Bewegung – wie einen Raketenstart, der beim *countdown* 1 Millisekunde vor der Zündung stehen bleibt. Noch eine Millisekunde – alle schauen hin und sind gespannt – und dann geht es wie $\delta w = a + b\,x$ los – aber auf der Tangente[15].

Will man Anschauung und Mathematik unter einen Hut bringen, nicht nur in einer Millisekunde, in *frozen time*, leben, dann kann man diese Gewichtsfunktionen als Pseudodrehungen interpretieren und man hat damit die ganze Fülle an Informationen und Einsichten zur Verfügung, die uns die Kinematik, das freie Spiel von Kräften und Bewegung, gewährt.

infinitesimale Verrückung = Pseudodrehung

In der Mechanik hat man statt dessen den Begriff der infinitesimalen Verrückung eingeführt, das ist wie Stillstand, aber trotzdem ein bisschen Bewegung, was aber im Grunde nicht geht und weil die Mechaniker deswegen ein schlechtes Gewissen haben, achten sie streng darauf, dass δw – um Himmels willen – ‚klein' ist. Nur, das löst das Problem auch nicht,

$$\delta w = \varepsilon \cdot (a + b\,x) \qquad \varepsilon = 10^{-10}\,, \tag{1.251}$$

weil sich jedes ε einfach herauskürzt, denn die Differentialgleichung ist linear

$$\mathscr{G}(w, \varepsilon\,\delta w) = \varepsilon \cdot \mathscr{G}(w, \delta w) = 0\,. \tag{1.252}$$

Das Problem entsteht in dem Moment, wo der Mechaniker das $\delta w = a + b\,x$ nicht nur als **Gewicht**, als Testfunktion liest, wie der Mathematiker, sondern als **Bewegung**, als Drehung. Wenn er an dieser Stelle seinen Studenten sagen würde: Für den Übergang vom Gewicht δw zur Verrückung δw müssen wir uns darauf einigen, dass in der linearen Mechanik und Statik Rotationen Pseudodrehungen sind, wäre alles gut, aber er will die Anschauung retten,

[15] Auch die Rakete bewegt sich auf einer Tangente, der Richtung des Impuls, den die Startrampe auf der rotierenden Erde zur Zeit $t = 0$ hatte.

und so muss das ‚infinitesimal klein' über ein Problem hinweghelfen, das er sich – in bester Absicht – selbst geschaffen hat.

Auch wenn wir hier *pro domo* reden: Die Einsicht, dass die Variationsprinzipe der Statik und Mechanik eine mathematische Grundlage haben, wäre auch an dieser traditionsreichen Stelle mehr als hilfreich.

Wir sollten uns von dieser historischen Bürde lösen und die virtuellen Verrückungen für das nehmen, was sie sind: Pseudodrehungen. Wir wären damit auch den ganzen Spuk um das ‚infinitesimal klein' los.

Bemerkung 1.3. Bei der Drehung eines Waagebalkens, $P_1\,h_1 = P_2\,h_2$, stehen die Änderungen $\Delta h_i = (\cos\,\varphi{-}1)\,h_i$ in den Hebelarmen in demselben Verhältnis, wie die h_i, und deswegen ist der Waagebalken auch in jeder gedrehten Lage im Gleichgewicht, $P_1\,(h_1 + \Delta h_1) = P_2\,(h_2 + \Delta h_2)$.

1.33 Gleichgewicht

Jede Funktion w aus $C^4(0,l)$ ist im Gleichgewicht, denn ihre Kraftgrößen

$$EI\,w^{IV}(x) \qquad M(x) = -EIw''(x) \qquad V(x) = -EI\,w'''(x) \tag{1.253}$$

genügen der Gleichung

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,\delta w(x)\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = 0\,, \tag{1.254}$$

wie immer die Starrkörperbewegung $\delta w(x) = a + b\,x$ aussieht – garantiert!

So ist also eine Sinus-Welle $w(x) = \sin(x)$ im Gleichgewicht

$$\mathscr{G}(\sin(x),1) = \int_0^l EI\,\sin(x)\cdot 1\,dx + [EI\,\cos(x)\cdot 1]_0^l = 0 \tag{1.255}$$

$$\mathscr{G}(\sin(x),x) = \int_0^l EI\,\sin(x)\,\cdot x\,dx + [\underbrace{EI\,\cos(x)}_{V}\cdot x - \underbrace{(EI\,\sin(x))}_{M}\cdot 1]_0^l = 0\,. \tag{1.256}$$

Bei einem **Fundamentbalken** ist das anders. Zur Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens

$$EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = p(x)\,, \tag{1.257}$$

gehört die Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w,\delta w) = &\int_0^l p(x)\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l \\ &- \int_0^l \Big(\frac{M\,\delta M}{EI} + c\,w(x)\,\delta w(x)\Big)\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{1.258}$$

Jetzt gibt es keine Funktion δw, außer $\delta w = 0$, die die virtuelle innere Energie

$$a(w, \delta w) := \int_0^l \left(\frac{M\,\delta M}{EI} + c\,w(x)\,\delta w(x)\right) dx \tag{1.259}$$

zu null macht. Gibt es also keine Gleichgewichtsbedingungen? Nun die Terme in der ersten Greenschen Identität müssen zumindest orthogonal sein zu allen Funktionen $\delta w \in C^2$. Wählen wir die Funktion $\delta w(x) = 1$, dann folgt

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^l p(x)\,dx + V(l) - V(0) - \int_0^l c\,w(x)\,dx = 0\,, \tag{1.260}$$

oder wegen $p(x) = EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x)$

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,dx + V(l) - V(0) = 0\,, \tag{1.261}$$

was uns vertraut vorkommt. Analog resultiert die Drehung $\delta w(x) = x$ in der Momentenbedingung um den linken Anfangspunkt

$$\mathscr{G}(w, x) = \int_0^l EI\,w^{IV}\,x\,dx + V(l)\,x - M(l)\cdot 1 + M(0)\cdot 1 = 0\,. \tag{1.262}$$

Allerdings wird hier immer nur der Anteil $EI\,w^{IV}$ der Gesamtbelastung $p(x) = EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x)$ bilanziert und das versteht man, wenn man die Streckenlast p in der ersten Greenschen Identität durch das ‚Original' $p = EI\,w^{IV} + c\,w$ ersetzt, denn dann sieht man, dass sich der Term $c\,w(x)\,\delta w(x)$ gegen denselben Term in der inneren Energie wegkürzt und man ist wieder bei der ersten Greenschen Identität des normalen (ungebetteten) Balkens.

Wenn am Ende eines Fundamentbalkens eine Einzelkraft $P = V(l)$ steht, dann muss folglich gelten

$$\int_0^l EI\,w^{IV}(x)\,dx + P = 0\,. \tag{1.263}$$

Wegen $EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = 0$ (keine Streckenlast) kann man $EI\,w^{IV}(x)$ mit $-c\,w(x)$ vertauschen, und daher muss auch gelten

$$P = \int_0^l c\,w(x)\,dx\,, \tag{1.264}$$

woraus man abliest, dass das Integral des Bodendrucks gleich der Kraft P ist.

1.34 Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt

Der Mathematiker weiß, dass jede Biegelinie $w(x)$ der Identität

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = 0 \tag{1.265}$$

genügt, w also orthogonal zu allen Biegelinien $\delta w(x) = a + b\,x$ sein muss. Weil in diesen Fällen aber $\delta W_i = 0$ ist, müssen notwendig die äußeren Kräfte (p + Lagerkräfte) zu jedem solchen δw orthogonal sein

$$\mathscr{G}(w, \delta w) = \int_0^l p\,\delta w\,dx + [V\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = 0\,, \tag{1.266}$$

und so entdeckt der Mathematiker die Forderung

$$\sum \text{vert. Kräfte} = 0 \qquad \sum \text{Momente} = 0\,, \tag{1.267}$$

ohne etwas von Statik zu wissen.

1.35 Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht

Das Gleichgewicht basiert im Grunde auf dem ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***

$$\int_0^l f'(x)\,dx = f(l) - f(0)\,, \tag{1.268}$$

denn weil $EI\,w^{IV}(x) = -V'(x) = p(x)$ die Ableitung der Querkraft $V(x)$ ist, gilt

$$\int_0^l -V'(x)\,dx = -V(l) + V(0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^l p(x)\,dx + V(l) - V(0) = 0\,. \tag{1.269}$$

Um zu zeigen, dass z.B. das Moment und das linke Lager null ist, $M = 0$, berechnen wir das Moment der Streckenlast $p(x) = -V'(x)$ um das linke Lager und formulieren es mittels partieller Integration um

$$\int_0^l -V'(x)\,x\,dx = [-V\,x]_0^l - \int_0^l -V(x)\cdot 1\,dx\,. \tag{1.270}$$

Wegen $V(x) = M'(x)$ ergibt dann der Hauptsatz den Ausdruck

$$\int_0^l -V'(x)\,x\,dx = [-V\,x]_0^l + M(l) - M(0)\,, \tag{1.271}$$

oder

$$\int_0^l p(x)\,x\,dx + V(l)\cdot l - M(l) + M(0) = 0\,. \tag{1.272}$$

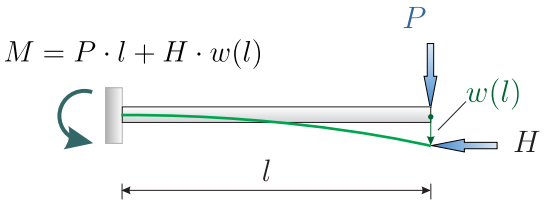


Bild 1.45. Theorie II. Ordnung

1.36 Gleichgewicht am verformten Tragwerk?

In der Theorie erster Ordnung wird das Gleichgewicht am unverformten Tragwerk aufgestellt und in der Theorie zweiter Ordnung am verformten Tragwerk – so kennen wir es. Aber das ist nicht ganz richtig. Die Theorie zweiter Ordnung ist in Wirklichkeit **eine Mischung aus beiden Theorien**, siehe Bild 1.45.

Die seitliche Auslenkung des Balkens, also die Vergrößerung der Durchbiegung geht in die Gleichgewichtsbedingung ein, aber die Verkürzung der Stabachse in Längsrichtung nicht.

Es ist daher auch nicht möglich, das Gleichgewicht eines Rahmens, der nach Theorie zweiter Ordnung berechnet wurde, zu überprüfen, denn die Knotenverformungen enthalten ja Beiträge aus Theorie I. wie II. Ordnung. Dass das in der Praxis nicht auffällt, liegt daran, dass die Verkürzungen der Stäbe sehr klein sind, so dass man bei einer Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen geneigt ist, Abweichungen auf Rundungsfehler zu schieben, [87].

Zahlenbeispiel, [165] S. 213: Der Kragträger sei ein IPE 300, Länge $l = 500$ cm, $P = 10\,\mathrm{kN}$, $H = 0.7 \cdot H_{crit} = 1.2129 \cdot 10^3\,\mathrm{kN}$. Die Durchbiegung am Kragarmende beträgt $w = 7.8336\,\mathrm{cm}$ und das Lastmoment $M = P \cdot 500 + H\,w$ stimmt mit dem Einspannmoment $M(0) = -1.4501 \cdot 10^4$ nach Th. II. Ordg. überein, aber wegen der Verkürzung $u = H\,l/EA = 0.5368$ cm des Trägers beträgt das Lastmoment eigentlich nur $M = -1.4501 \cdot 10^4 + 5.3677\,\mathrm{kNm}$.

1.37 Quellen und Senken

Aus der Sicht der Physik sind die Gleichgewichtsbedingungen ***Erhaltungssätze***. Das, was aus einer Platte Ω am Rande herausfließt, also die Lagerkräfte am Rand Γ, das ist hier der Kirchhoffschub v_n, muss in der Summe gleich der aufgebrachten Belastung sein[16]

$$\mathscr{G}(w, 1) = \int_\Omega p\, d\Omega + \int_\Gamma v_n\, ds = 0\,. \tag{1.273}$$

Die Temperaturverteilung $T(\boldsymbol{x})$ in einem Zimmer, das von einer Fußbodenheizung p (= Quellen) erwärmt wird und dessen Wände konstant auf null Grad gehalten werden, genügt der Gleichung

[16] Die Eckkräfte haben wir weggelassen.

$$-\Delta T = p \qquad T = 0 \qquad \text{am Rand } \Gamma\,. \tag{1.274}$$

Aus der ersten Greenschen Identität des Laplace-Operators,

$$\mathscr{G}(u,v) = \int_\Omega -\Delta u\, v\; d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, ds - \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v\, d\Omega = 0\,, \tag{1.275}$$

in der Formulierung

$$\mathscr{G}(T,1) = \int_\Omega p\, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial T}{\partial n}\, ds = 0\,, \tag{1.276}$$

folgt: Was an Wärme am Rand Γ wegfließt, das ist das Integral des Fluß $\partial T/\partial n$, (der ist < 0), muss gleich der im Zimmer produzierten Wärme sein.

Fachwerkstäbe sind frei von Quellen (keine Streckenlast zwischen den Stabenden) und daher müssen sich die Normalkräfte am Anfang und am Ende in der Summe aufheben, was an Kraft hineinfließt muss auch wieder herausfließen

$$\mathscr{G}(u,1) = [N \cdot 1]_0^l = N(l) - N(0) = 0\,. \tag{1.277}$$

Summarisch hat also die erste Greensche Identität, wenn man $\delta u = 1$ setzt, die Struktur

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_\Omega \mathit{Quellen\ im\ Gebiet}\; d\Omega + \int_\Gamma \mathit{Fluss\ am\ Rand}\, ds = 0\,. \tag{1.278}$$

1.38 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Gemäß dem Federgesetz

$$k\, u = f \tag{1.279}$$

ist die Auslenkung u einer Feder proportional zur aufgebrachten Kraft f, siehe Bild 1.46.

Die Kraft f, die die Feder nach unten zieht, leistet dabei eine Arbeit (weil es Eigenarbeit ist, steht hier der Faktor 1/2),

$$W_e = \frac{1}{2}\, f\, u\,, \tag{1.280}$$

und diese Arbeit wird als innere Energie in der Feder gespeichert

$$W_i = \frac{1}{2}\, k\, u^2\,. \tag{1.281}$$

Wir erwarten natürlich, dass in der Gleichgewichtslage die äußere Arbeit und die innere Energie gleich groß sind

$$W_e = \frac{1}{2}\, f\, u = \frac{1}{2}\, k\, u^2 = W_i\,, \tag{1.282}$$

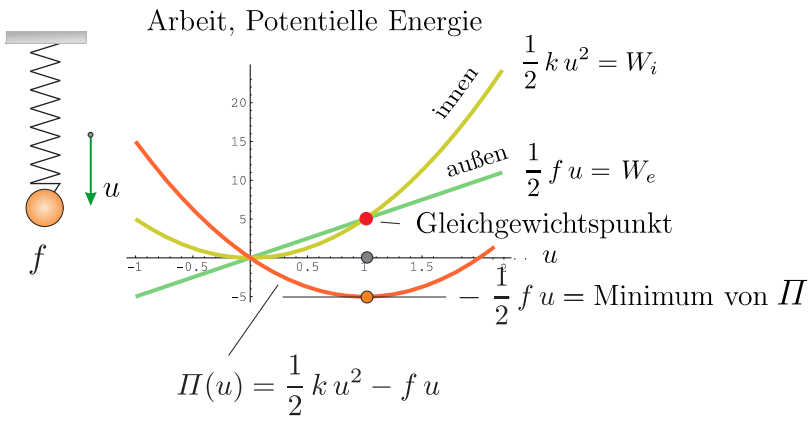


Bild 1.46. Dort, wo $W_i = W_e$ ist, liegt der Gleichgewichtspunkt u der Feder. Weil die innere Energie W_i quadratisch mit u wächst, die äußere Arbeit W_e aber nur linear, holt W_i immer W_e ein, gibt es immer eine Gleichgewichtslage

was aber durch die Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \delta u\, k\, u - u\, k\, \delta u = 0 \tag{1.283}$$

garantiert ist, denn

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(u,u) = \frac{1}{2}\,u\,k\,u - \frac{1}{2}\,u\,k\,u = \frac{1}{2}\,u\,f - \frac{1}{2}\,k\,u^2 = W_e - W_i = 0\,. \tag{1.284}$$

Trägt man den Verlauf der Funktion $1/2\,f\,u$ und der Funktion $1/2\,k\,u^2$ als Funktion der Auslenkung u auf, dann ist die Auslenkung u der Feder unter der Wirkung der Kraft f genau der Punkt u, in dem sich die beiden Kurven schneiden, siehe Bild 1.46.

Die unterste Kurve in Bild 1.46 ist die **potentielle Energie** Π der Feder

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\,k\,u^2 - f\,u\,. \tag{1.285}$$

Der Faktor $1/2$ macht, dass sich bei der Bildung der Ableitung die 2 wegkürzt

$$\Pi'(u) = k\,u - f \tag{1.286}$$

und so, wegen dem Federgesetz $k\,u = f$, die potentielle Energie im Gleichgewichtspunkt u eine horizontale Tangente hat, $\Pi'(u) = 0$, dort der tiefste Punkt liegt.

Am Anfang steigt die äußere Arbeit schneller als die innere Energie, aber dann passieren die beiden Kurven einen Punkt, von dem ab die innere Energie schneller wächst als die äußere Arbeit. Dieser Schnittpunkt ist der **Gleichgewichtspunkt**. Nur in diesem Punkt gilt $W_e = W_i$ und in diesem Punkt hat die potentielle Energie ihr Minimum.

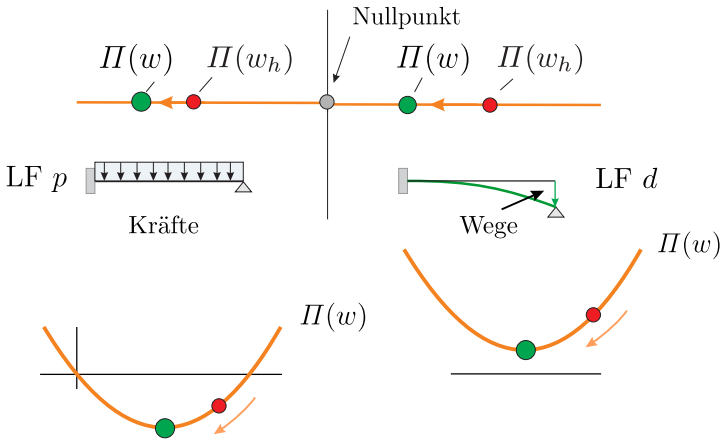


Bild 1.47. Die potentielle Energie $\Pi(w_h)$ der FE-Lösung liegt immer rechts von der exakten potentiellen Energie $\Pi(w)$, aber in beiden Fällen ist Π eine nach oben offene Parabel, muss man Energie zuführen, um die Gleichgewichtslage zu verlassen

Würde von Anfang an die innere Energie schneller steigen als die äußere Arbeit, dann würde sich die Feder überhaupt nicht bewegen, dann wäre schon im Nullpunkt der Wettlauf zu Ende.

Setzen wir alle Werte eins, also $k = 1$ und $f = 1$, dann liegt der Gleichgewichtspunkt genau bei $u = 1$. Woraus folgt, dass die ganze Statik und Mechanik im Grunde auf der Tatsache beruht, dass im Intervall $(0, 1)$ die Ungleichung $u > u^2$ gilt und danach das Umgekehrte, $u^2 > u$.

1.38.1 Minimum oder Maximum?

Man kann die Lastfälle (LF) in der Statik in zwei Typen, p und d, einteilen:

- In einem LF p werden Kräfte aufgebracht
- In einem LF d werden Lagerverschiebungen/-verdrehungen aufgebracht.

Wir werden sehen, dass der Typ des Lastfalls bestimmt, ob die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage positiv oder negativ ist.

In einem LF p ist die potentielle Energie in der tiefsten Lage negativ, wie man durch Einsetzen ($k\,u = f$) direkt verifiziert

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\,k\,u^2 - f\,u = \frac{1}{2}\,f\,u - f\,u = -\frac{1}{2}\,f\,u\,. \tag{1.287}$$

Nun ist aber die Auslenkung u der Sieger in dem Wettbewerb, die potentielle Energie möglichst klein zu machen, und das heißt doch anschaulich, dass u den ***größtmöglichen Abstand*** $|\Pi(u)|$ vom Nullpunkt hat.

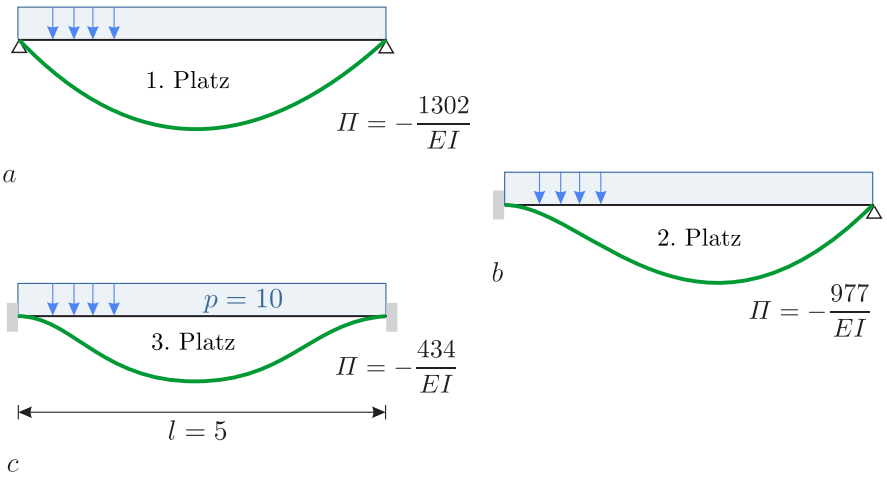


Bild 1.48. Je weniger Festhaltungen desto größer ist $\mathcal{V}$ und umso größer wird der Betrag der potentiellen Energie, $|\Pi|$, in der Gleichgewichtslage

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie ist in einem LF p eigentlich ein **Maximumprinzip**: Der Betrag $|\Pi(u)|$ wird maximiert. Nur weil die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage negativ ist, ist das dasselbe, wie das Minimum der potentiellen Energie zu finden.

Wir interpretieren das Prinzip in der Regel so, wie es die Wortwahl (anscheinend) suggeriert, mit möglichst wenig Anstrengung zum Ziel kommen, die potentielle Energie möglichst klein machen, möglichst nahe an null zu rücken, während die wahre Bedeutung genau das Gegenteil ist, siehe Bild 1.47. Je größer der Ansatzraum $\mathcal{V}$ ist, (= alle w, die an der Konkurrenz teilnehmen), je weniger Fesseln es gibt, desto negativer wird die potentielle Energie bei demselben p, desto weiter rückt $|\Pi(w)|$ von null ab, siehe Bild 1.48.

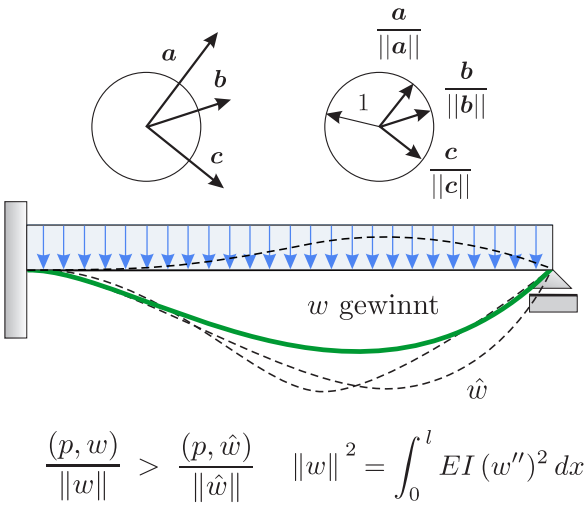
Das Bestreben der Kraft f ist es, möglichst viel Energie aus der Feder herauszuholen, $|\Pi(u)|$ möglichst groß zu machen.

Bild 1.49 illustriert dieses versteckte Maximumprinzip an einem Balken. Man kann zeigen, dass die Biegelinie w des Balkens unter allen auf Eins normierten Biegelinien $w/\|w\|$ aus $\mathcal{V}$ die ist, die die größte Wirkung, ***the most mileage***, aus dem Arbeitsintegral

$$J(w) = \int_0^l p\, w\, dx \tag{1.288}$$

zieht. Die Norm $||w|| = \sqrt{a(w,w)}$ ist die Wurzel aus dem Integral von M^2/EI.

Betrachten wir nun dagegen einen LF d wie in Bild 1.50. Wegen der fehlenden äußeren Lasten reduziert sich die potentielle Energie auf den positiven Ausdruck, siehe Kapitel 9.15,



$$\frac{(p,w)}{\|w\|} > \frac{(p,\hat{w})}{\|\hat{w}\|} \qquad \|w\|^2 = \int_0^l EI\,(w'')^2\,dx$$

Bild 1.49. Unter allen auf Eins normierten Biegelinien $w/\|w\|$ in $\mathcal{V}$, ist die Biegelinie w des Balkens die Funktion, die die größte Wirkung aus p ziehen kann, [92]

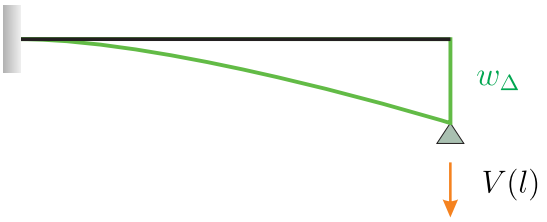


Bild 1.50. Lagersenkung

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\,a(w,w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx\,. \tag{1.289}$$

In einem LF d ist die potentielle Energie also positiv, ***liegt sie rechts vom Nullpunkt***, und wenn man jetzt die potentielle Energie minimiert, dann sucht man die Verformung u oder w, die die potentielle Energie möglichst nahe an null rückt, siehe Bild 1.47. In dieser Situation hat das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie die Bedeutung, die wir ihm normalerweise unterlegen. Das Tragwerk versucht mit möglichst wenig Widerstand, sprich mit möglichst geringen Verzerrungen, die Verformungen zu ertragen, die ihm aufgezwungen werden.

Bei der Interpolation mit ***splines*** nutzt man diese Intelligenz des Materials aus, indem man es dem Material überlässt die optimale Kurve w durch den Slalom der Pflöcke zu finden; optimal in dem Sinn, dass die Biegeenergie

$$\|w\| = \sqrt{a(w,w)} = \left[\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.290}$$

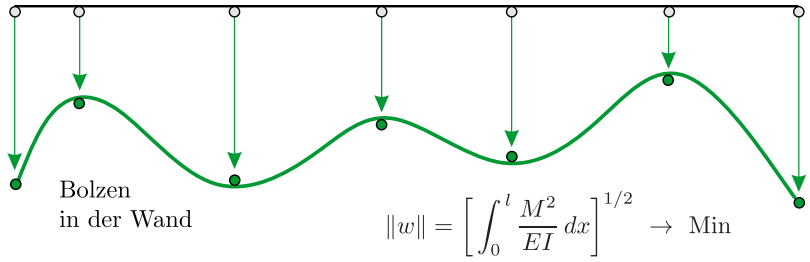


Bild 1.51. Spline Interpolation als LF Lagersenkung

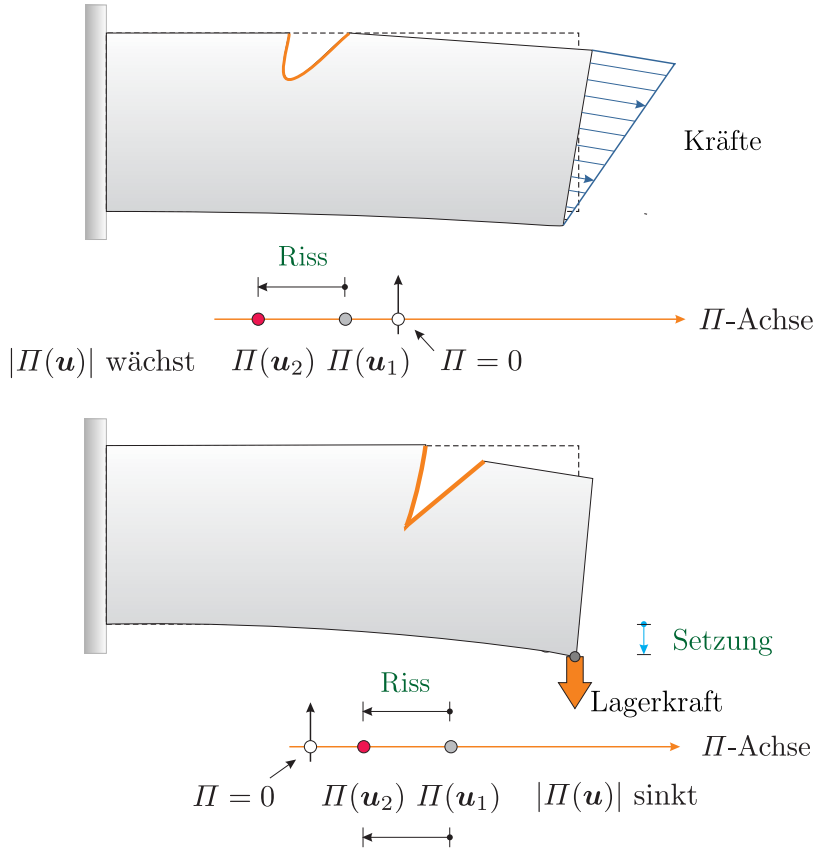


Bild 1.52. In einem LF p (Kräfte) nehmen die Spannungen zu, wenn das Material reißt, $\boldsymbol{u}_1 \rightarrow \boldsymbol{u}_2$, während sie in einem LF d (Wege) sinken

möglichst klein wird, möglichst nahe an null rückt, siehe Bild 1.51.

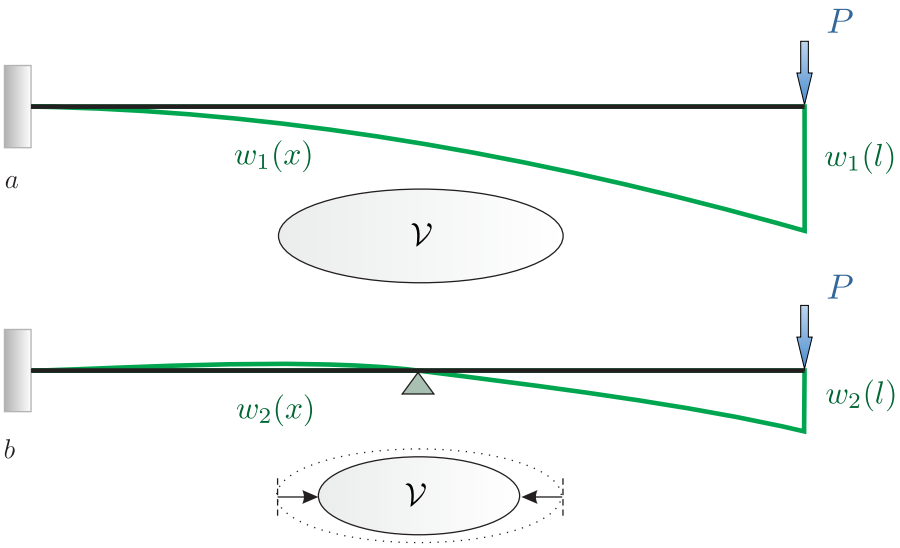


Bild 1.53. Je mehr Lager vorhanden sind, um so kleiner wird der Betrag der potentiellen Energie, weil der Ansatzraum $\mathcal{V}$ schrumpft

1.38.2 Wenn das Material reißt

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie kann auch erklären, warum die Spannungen in einem Bauteil wachsen, wenn das Bauteil Risse bekommt, siehe Bild 1.52.

Denn dann müssen die Verschiebungen auf den Flanken des Risses nicht mehr gleich sein, wie das der Fall war, solange die Flanke noch im Inneren des ungerissenen Bauteils lag. ***Risse bewirken also, dass der Ansatzraum $\mathcal{V}$ größer wird***, weil mehr Funktionen an der Konkurrenz um das Minimum teilnehmen können. Damit rutscht das Minimum aber noch weiter weg vom Nullpunkt, wird es dem Betrage nach größer, und das bedeutet, dass die potentielle Energie und damit die Spannungen in dem Bauteil steigen.

Wenn sich dagegen ein Lager senkt, haben Risse den gegenteiligen Effekt, haben sie einen heilsamen Effekt, die Spannungen sinken, weil $\Pi(\boldsymbol{u}) > 0$ jetzt näher an null rutschen kann; wieder weil der Ansatzraum $\mathcal{V}$ durch die Risse größer wird.

1.38.3 Wenn Lager entfallen

Derselben Logik unterliegen auch Durchlaufträger, bei denen die Zahl der Lager sozusagen der Größe des Ansatzraums $\mathcal{V}$ entspricht, auf dem das Minimum der potentiellen Energie gesucht wird, siehe Bild 1.53. Je mehr Lager vorhanden sind, um so kleiner ist $\mathcal{V}$, weil die wachsende Anzahl von Zwangspunkten, $w(x) = 0$, die Zahl der Konkurrenten kleiner werden lässt, $\mathcal{V}$ also

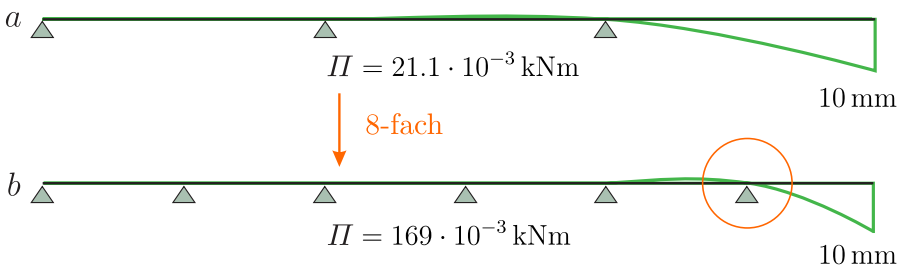


Bild 1.54. Wenn man die Zahl der Lager erhöht (+3), aber die Absenkung unverändert beibehält, dann nimmt die potentiellen Energie um das achtfache zu

schrumpft, und das bedeutet, dass die potentielle Energie in einem LF p dem Betrage nach kleiner wird.

Gerade bei Einzelkräften kann man das direkt an Hand der Verformungen verfolgen, denn bei diesen ist die potentielle Energie proportional zur Durchbiegung unter der Einzelkraft

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx - P\cdot w(l) = -\frac{1}{2}\,P\cdot w(l) \tag{1.291}$$

und wegen $|\Pi(w_2)| = 0.5\,P\,w_2(l) < |\Pi(w_1)| = 0.5\,P\,w_1(l)$ muss daher gelten, siehe Bild 1.53, dass die Kragarmdurchbiegung kleiner wird, wenn man ein Zwischenlager einbaut.

Das Umgekehrte passiert, wenn man Lager wegnimmt, denn dann wird der Ansatzraum $\mathcal{V}$ größer, weil weniger Forderungen an die Biegelinien gestellt werden, die an der Konkurrenz um das Minimum teilnehmen, und das bedeutet, dass der Betrag $|\Pi(x)|$ der potentiellen Energie wächst.

Das gegenteilige Phänomen hat man, wenn man einen Durchlaufträger, dessen Ende man um einen vorgegebenen Betrag w_Δ nach unten drückt (Lagersenkung), auf zusätzliche Lager stellt, siehe Bild 1.54. Wieder wird der Ansatzraum $\mathcal{V}$ kleiner, aber weil in einem LF d die potentielle Energie positiv ist, siehe Kap. 9.15, bedeutet dies, dass die potentielle Energie steigt. Es macht mehr Mühe, einem Träger mit $n+1$ Lagern eine Verformung aufzuzwingen, als einem Träger mit n Lagern.

Nun könnte man vermuten, dass der Raum $\mathcal{V}$ nur schrumpft, wenn zusätzlich ‚harte' Lagerbedingungen wie $w(x) = 0$ dazu kommen, aber auch ‚weiche' Nebenbedingungen lassen $\mathcal{V}$ schrumpfen. Eine Stütze, die man zum Beispiel unter das Ende eines Trägers stellt, siehe Bild 1.55, formuliert einen solchen ***soft constraint*** und $\mathcal{V}$ schrumpft trotzdem.

Um das zu verstehen, argumentieren wir mit dem Kraftgrößenverfahren. Der Balken mit der Stütze ist das statisch unbestimmte Hauptsystem und wir wählen die Normalkraft N in der Stütze als statisch Überzählige X_1. Nach dem Einbau des Normalkraftgelenkes können sich der obere und untere Teil unabhängig voneinander bewegen.

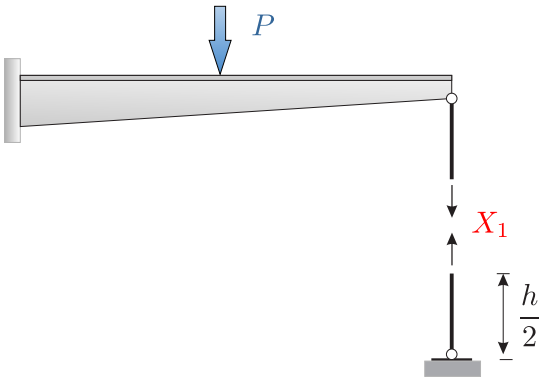


Bild 1.55. Hauptsystem

Der Raum $\mathcal{V}$ des statisch bestimmten Hauptsystems besteht aus allen Biegelinien w, die die Lagerbedingungen des Balkens erfüllen, $w(0) = w'(0) = 0$, und aus allen Längsverschiebungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ der zweigeteilten Stütze. Dieses System ist unserem ursprünglichen System äquivalent, weil die zweigeteilte Stütze keine Lasten trägt.

Die Kraft X_1 unterliegt der Bedingung, dass der obere und untere Teil der Stütze in der Mitte die gleiche Verschiebung aufweisen, $u_1(h/2) = u_2(h/2)$, und das bedeutet das die Zahl der möglichen Funktionen $u_i(x)$ kleiner wird, $\mathcal{V}$ schrumpft.

Wenn man Riegel oder Stiele zu einem Rahmen addiert, schrumpft der Raum $\mathcal{V}$, die Steifigkeit des Tragwerks nimmt zu.

1.39 Unendliche Energie

Die Erzeugung von Einflussfunktionen bedeutet für einen Rahmen eine große Strapaze, denn dabei werden konzentrierte Punktlasten aufgebracht oder ein Riegel wird geknickt (EF-M) oder gar auseinander gerissen, (Verschiebungssprung, EF-V), was bedeutet, dass die Verzerrungsenergie über alle Grenzen wächst. Das wollen wir im Folgenden näher betrachten.

Von allen Flächentragwerken ist die Membran das einfachst mögliche und daher beginnen wir mit einer kreisförmigen Membran, Radius $R = 1$, die eine Öffnung Ω überdeckt und die am ringförmigen Rand Γ gehalten wird. Unter einem Druck p bildet sich eine Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ aus, die die Lösung des Randwertproblems

$$-H\,\Delta u = p \quad \text{in } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma \tag{1.292}$$

ist. Die Konstante H ist die in x_1- und x_2-Richtung, (also x und y) gleich große Vorspannkraft in der Membran. Wir werden später $H = 1$ setzen.

Beim Seil lautet die Querkraft $V = H\,w'$ und bei einer Membran gibt es nun zwei Querkräfte v_1, v_2 (Kräfte/lfd. m)

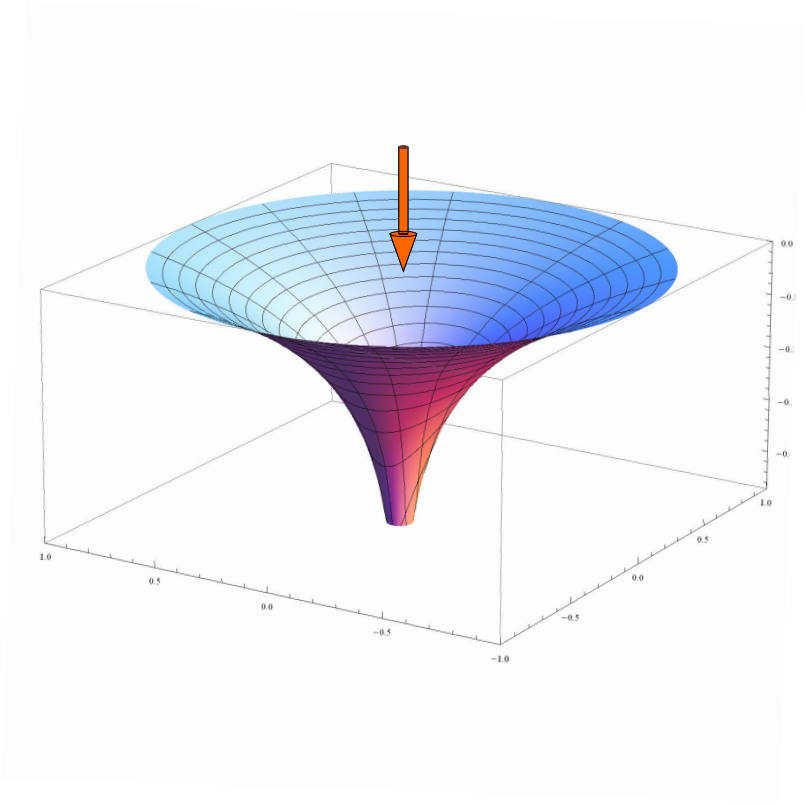


Bild 1.56. Membran und zentrische Punktlast (MATHEMATICA™)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u_{,x_1} \\ u_{,x_2} \end{bmatrix} = H \, \nabla u \,, \tag{1.293}$$

die proportional den Neigungen der Biegefläche in die beiden Richtungen x_1 bzw. x_2 sind.

Die Arbeits- und Energieprinzipe der Membran basieren auf der ersten Greenschen Identität des Laplace-Operators, also dem Ausdruck, (wir setzen $H = 1$),

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \underbrace{\int_\Omega -\Delta u \, \delta u \, d\Omega + \int_\Gamma \nabla u \bullet \boldsymbol{n} \, \delta u \, ds}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \bullet \nabla \delta u \, d\Omega}_{\delta W_i} = 0 \,. \tag{1.294}$$

Das Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und dem Normalenvektor

$$\nabla u \bullet \boldsymbol{n} = u_{,x_1} \; n_1 + u_{,x_2} \; n_2 = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{1.295}$$

ist die Normalableitung der Biegefläche, also die Neigung der Membran am Rand in Richtung des nach Außen zeigenden Normalenvektors. Wenn die Durchbiegung zum Rande hin kleiner wird, wie das die Regel ist, ist die Normalableitung negativ und wir haben Gleichgewicht zwischen der abwärts gerichteten Flächenkraft $p \downarrow$ und den aufwärts gerichteten Haltekräften $\partial u/\partial n \uparrow$ am Rand

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_\Omega p \cdot 1 \, d\Omega + \int_\Gamma \nabla u \bullet \boldsymbol{n} \cdot 1 \, ds = 0 \,. \tag{1.296}$$

Wenn wir die Membran in ihrer Mitte $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ mit einer Einzelkraft $P = 1$ belasten, siehe Bild 1.56, dann bildet sich ein unendlich tiefer Trichter aus,

$$G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi} \, \ln r \qquad r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \,, \tag{1.297}$$

weil die Membran die Einzelkraft nicht festhalten kann.

Nun wollen wir den ***Energieerhaltungssatz*** in diesem Lastfall formulieren, also die Gleichung

$$\frac{1}{2} \; \mathscr{G}(G,G) = W_e - W_i = 0 \,, \tag{1.298}$$

anschreiben, aber ohne den Faktor $1/2$, weil er für die Argumentation nicht wesentlich ist.

Der Gradient der schlauchartigen Biegefläche G verhält sich wie $1/r$

$$\nabla G = \frac{1}{2\,\pi} \, \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{1.299}$$

und wegen

$$\nabla G \bullet \nabla G = \frac{1}{4\,\pi^2} \frac{1}{r^2} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{1}{4\,\pi^2} \frac{1}{r^2} \tag{1.300}$$

ist daher die innere Energie **unendlich groß**,

$$W_i = \int_\Omega \nabla G \bullet \nabla G \, d\Omega = \int_0^{2\,\pi} \int_0^1 \frac{1}{4\,\pi^2} \frac{1}{r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \infty \,, \tag{1.301}$$

denn das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{r} \, dr = \infty \tag{1.302}$$

ist unbeschränkt. Dazu passend ist auch die äußere Arbeit unendlich groß

$$W_e = P \cdot \infty \,, \tag{1.303}$$

weil P unendlich tief abgesunken ist. In sich ist das Resultat zwar stimmig

$$W_e - W_i = \infty - \infty = 0\,, \tag{1.304}$$

aber mit unendlich kann man leider nicht rechnen, unendlich ist einfach nur ‚unzählbar viel'.

Der Grund für die unendliche Energie ist, dass wir uns bei der Formulierung von W_i auf der **Diagonalen** der ersten Greenschen Identität befinden

$$\frac{1}{2}\ \mathscr{G}(G,G) = W_e - W_i = 0 \tag{1.305}$$

und sich so die Singularität im Integral verdoppelt. Aus $1/r$ wird $1/r^2$ und das ist nicht mehr integrierbar, nicht mehr messbar.

Dies wiederholt sich in der **Elastizitätstheorie**. Wenn man eine Scheibe, die auch wieder kreisförmig sei, $R = 1$, mit einer Einzelkraft belastet, dann verhalten sich die Dehnungen und Spannungen wie $1/r$ und durch das Verdoppeln der Singularität auf der Diagonalen wird W_i unendlich groß,

$$W_i = \int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\ d\Omega \simeq \int_0^{2\,\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \infty\,. \tag{1.306}$$

Dasselbe passiert im 3-D. Bei dreidimensionalen Problemen verhalten sich die Spannungen σ_{ij} und Dehnungen ε_{ij} wie $1/r^2$ und das Volumenelement $d\Omega = r^2\,dr\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta$ kann der verdoppelten Singularität $1/r^4$ nicht paroli bieten und so wächst die innere Energie über alle Grenzen.

Belastet man dagegen eine Platte (Kirchhoff) mit einer Einzelkraft, dann hat die Biegefläche die Gestalt (c ist eine Konstante)

$$w(\boldsymbol{x}) = c\cdot\frac{1}{8\,\pi\,K}\,r^2\,\ln r + \text{reguläre Terme}\,, \tag{1.307}$$

und die Momente m_{ij} bzw. Krümmungen κ_{ij} gehen daher ‚nur' wie

$$m_{ij} \sim \ln r \tag{1.308}$$

gegen Unendlich und so ist die innere Energie in einer kreisförmigen Platte, $R = 1$,

$$W_i = \int_\Omega m_{ij}\,\kappa_{ij}\,d\Omega \sim \int_0^{2\,\pi}\int_0^1 \ln^2 r\ \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{d\Omega} + \text{endliches Integral} \tag{1.309}$$

beschränkt, ist W_i endlich, weil der Integrand in der Grenze gegen null geht, $r \to 0$ gewinnt gegenüber $\ln^2 r \to \infty$[17],

$$\lim_{r\to 0}\ r\,\ln^2 r = 0\,. \tag{1.310}$$

Wie bei der Scheibe verursacht die Punktlast $P = 1$ eine $1/r$ Singularität, hier des Kirchhoffschubs v_n (der ‚dritten' Ableitung),

[17] ‚That's a guess, no one has had the patience to wait for it yet' (Terence Tao).

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{N_\varepsilon}}\frac{1}{2\,\pi\,r}\,ds_{\boldsymbol{y}}=1\,, \tag{1.311}$$

weil aber die Plattengleichung von vierter Ordnung ist, braucht es drei Schritte von v_n hoch zu w

$$w=\int\int\int v_n(d\Omega)^3\simeq r^2\,\ln\,r \qquad \textbf{(drei Schritte)} \tag{1.312}$$

und das reicht, um die Singularität zu dämpfen. Bei Problemen zweiter Ordnung, wie der Scheibe, trennt dagegen nur eine Integrationsstufe $\sigma\simeq 1/r$ von u und das ist nicht genug

$$u\simeq\int\frac{1}{r}\,dr=\ln\,r \qquad \textbf{(ein Schritt)}\,. \tag{1.313}$$

1.40 Sobolevscher Einbettungssatz

In dieses scheinbare Durcheinander von endlicher und unendlicher Energie kann man nun mit dem *Sobolevschen Einbettungssatz* eine gewisse Systematik hineinbringen. Er erlaubt genaue Voraussagen, wann die innere Energie endlich ist und wann nicht, [92].

Eine Greensche Funktion hat eine **endliche Energie**, wenn die Ungleichung

$$m-i>\frac{n}{2} \tag{1.314}$$

erfüllt ist[18]. Es ist $2\,m$ die Ordnung des Differentialoperators, i ist die Ordnung der Singularität, die in unserer Notation identisch ist mit dem Index i an dem Dirac Delta δ_i, und n ist die Dimension des Raums. Bei Scheiben ist $n=2$, das Differentialgleichungssystem hat die Ordnung $2m=2$ und daher hat das Verschiebungsfeld, das von einer Einzelkraft, $i=0$, erzeugt wird unendliche Energie, weil die Ungleichung

$$1-0>\frac{2}{2}=1\ \ ? \tag{1.315}$$

nicht gilt, während sie im Fall der Kirchhoffplatte, $2m=4$, erfüllt ist

$$2-0>\frac{2}{2}=1\,. \tag{1.316}$$

Wir können diese Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

[18] Die Tabelle auf Seite 682 enthält eine systematische Auswertung der Ungleichung im Zusammenhang mit den Gleichungen der Statik

Die innere Energie W_i ist unendlich, wenn die äußere Arbeit W_e unendlich ist und das ist genau dann der Fall, wenn in dem Ausdruck

$$W_e = \mathit{Kraft} \times \mathit{Weg} \tag{1.317}$$

einer der beiden Terme unendlich groß ist.

Bei der Membran ist die Kraft zwar endlich, $P = 1$, aber der Weg, den die Kraft nach unten geht ist ∞. Ebenso ist es bei einer Scheibe. Anders aber bei einer Platte: Die Durchbiegung unter einer Kraft $P = 1$ ist endlich und somit auch die Arbeit $W_e = \mathit{Kraft} \times \mathit{Weg} < \infty$.

Die Energie ist immer unendlich, wenn das Material über die Fließgrenze hinaus deformiert wird, wie das zur Erzeugung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen nötig ist. Die Einflussfunktion für eine Normalkraft N in einem Stab entsteht ja durch ein Verschiebungssprung, man muss den Stab also buchstäblich zerreißen, und die Einflussfunktion für ein Moment M verlangt einen Knick, einen plötzlichen Richtungswechsel der Tangente im Aufpunkt und das geht nur, wenn man das Material vorher zum Fließen bringt.

Bei Flächentragwerken haben eigentlich alle Einflussfunktionen, auch die für Weggrößen, unendlich große Energie. Die Ausnahme ist die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ einer Kirchhoffplatte[19].

Nun kann man fragen: ‚Wenn die Energie der Einflussfunktionen unendlich ist, wieso kann man dann mit ihnen rechnen?' Der Unterschied ist, dass man bei der Anwendung des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* oder des *Prinzips der virtuellen Kräfte* auf der **Nebendiagonale** ist

$$\mathscr{G}(G, u) = \delta W_e - \delta W_i = 0\,, \tag{1.318}$$

und sich daher die Singularität nicht verdoppelt, die virtuelle innere Energie δW_i bleibt endlich

$$\delta W_e = 1 \cdot u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \nabla G \bullet \nabla u \, d\Omega = \delta W_i\,, \tag{1.319}$$

weil das $1/r$ des Gradienten ∇G durch das r in dem Flächenelement $d\Omega = r\,dr\,d\varphi$ ausgeglichen wird. Genau genommen müssen wir auch noch fordern, dass der Gradient von u beschränkt ist, $|\nabla u| \leq \infty$.

Der *Satz von Betti* ist von den Singularitäten der Einflussfunktionen auch betroffen, aber weil man am Schluss nur das Endergebnis sieht

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G, u)_{\Omega_\varepsilon} = u(\boldsymbol{x}) - \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,, \tag{1.320}$$

[19] Die Kirchhoffplatte, auch schubstarre Platte genannt, ist die Erweiterung des Biegebalkens $EI\, w^{IV}$ auf zwei Dimensionen. Im Unterschied hierzu ist die Mindlin-Reissner Platte eine schubweiche Platte, siehe Kapitel 7. Im Regelfall meint der Ingenieur die Kirchhoffplatte, wenn er von Platten spricht.

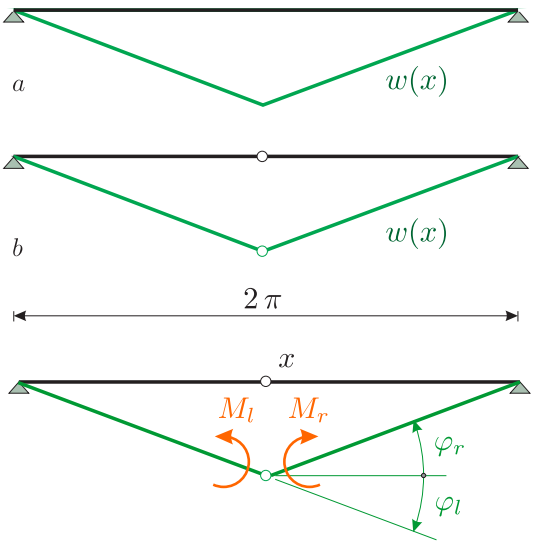


Bild 1.57. Balkenbiegelinien, **a)** mit unendlich großer Energie, $(M, M) = \infty$, **b)** mit endlicher Energie, hier sogar null

Bild 1.58. Definition der Winkel φ_l und φ_r

sieht alles glatt aus. Das, was singulär war, hat zu dem Term $u(\boldsymbol{x})$ geführt und der Rest sind alles Integrale, deren Berechnung man dem Computer überlassen kann (numerische Quadratur).

Bemerkung 1.4. Die charakteristischen Singularitäten der verschiedenen Einflussfunktionen G_i für *solids*, Scheiben und Platten, bis hinunter zu den Einflussfunktionen für Momente und Querkräfte, findet der interessierte Leser in [85] und [86]. Dort werden auch die Grenzprozesse

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{G}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(G_i, u)_{\Omega_\varepsilon} = 0\,, \tag{1.321}$$

die ja den Einflussfunktionen zu Grunde liegen, detailliert diskutiert.

Bemerkung 1.5. **Ingenieur versus Mathematiker** Ein Mathematiker wird darauf hinweisen, dass unendlich viel Energie nötig ist, um einen Knick in einem Balken zu erzeugen, und zur Bekräftigung seiner Behauptung wird er die Biegelinie w, siehe Bild 1.57 a, des Balkens in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$w(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots) \tag{1.322}$$

und die Energie berechnen

$$\frac{1}{2}\cdot EI\int_0^{2\pi}(w''(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{\pi}(1+1+1\ldots) = \infty\,. \tag{1.323}$$

Aber ein Ingenieur geht anders vor: Er installiert ein Gelenk und verdreht die beiden Seiten des Gelenkes so, dass $\tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1$. Die Biegeenergie

in dem Balken ist dann einfach die Energie, die notwendig ist, um die Balkenenden zu verdrehen und diese Energie ist endlich. Im Falle des statisch bestimmten Balkens in Bild 1.57 b ist sie sogar null, denn $w'' = 0$.

Bemerkung 1.6. In Bild 1.58 haben wir angetragen, wie wir die Winkel φ_l und φ_r zählen. Die Arbeit, die die beiden Momente, links und rechts vom Gelenk, leisten, ist

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(w, \delta w) = \; & \mathscr{G}(w_l, \delta w)_{(0,x)} + \; \mathscr{G}(w_r, \delta w)_{(x,l)} \\ & = \ldots - M_l \cdot \delta w_l' + M_r \cdot \delta w_r' + \ldots = 0\,. \end{aligned} \tag{1.324}$$

Am besten wäre es, es bei dieser Notation zu belassen, aber als Ingenieure wollen wir mit Winkeln rechnen und nicht mit ‚abstrakten' Steigungen $\delta w'$. Mit den positiven Richtungen in Bild 1.58 geht dieser Ausdruck über in

$$\begin{aligned} -M_l \cdot \delta w_l' + M_r \cdot \delta w_r' &= -(M_l \cdot \tan\varphi_l + M_r \tan\varphi_r) \\ &= -M\,(\tan\varphi_l + \tan\varphi_r)\,, \end{aligned} \tag{1.325}$$

weil $\delta w_r' = -\tan\varphi_r$. Wenn wir diesen Term auf die linke Seite bringen, dann verschwindet das Minuszeichen

$$M \cdot (\tan\varphi_l + \tan\varphi_r) = M \cdot 1 = \ldots \tag{1.326}$$

In den Büchern wird das meist geschrieben als

$$M \cdot \Delta\varphi = M \cdot 1 = \ldots\,, \tag{1.327}$$

weil für kleine Winkel $\tan\varphi \simeq \varphi$, aber einige Autoren gehen so weit $\Delta\varphi$ mit der Dimension *rad* oder *degree* zu schreiben, was nicht korrekt ist. $M \cdot \Delta\varphi$ ist eine äußere Arbeit. $\Delta\varphi$ steht für $\tan\varphi_l + \tan\varphi_r$ und der Tangens, $dw/dx = [\mathrm{m}]/[\mathrm{m}]$, hat keine Dimension. Wenn man ein Balkenende um 45° verdreht, dann leistet das Moment dabei die Arbeit

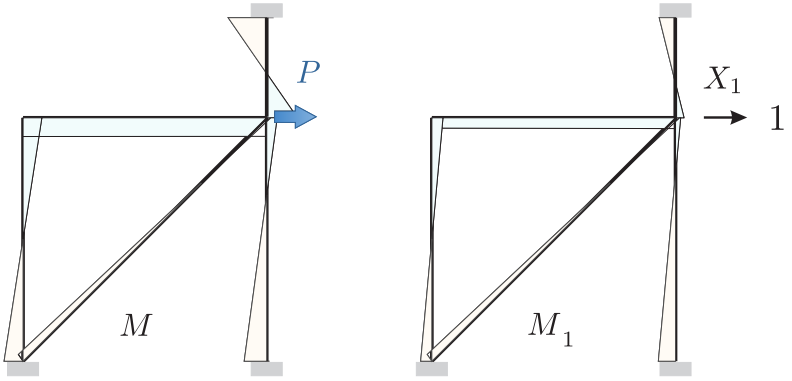
$$M \cdot \tan 45^\circ = M\,[\mathrm{kNm}] \cdot 1 = M\,[\mathrm{kNm}] \tag{1.328}$$

und nicht die Arbeit $M \cdot 45^\circ$

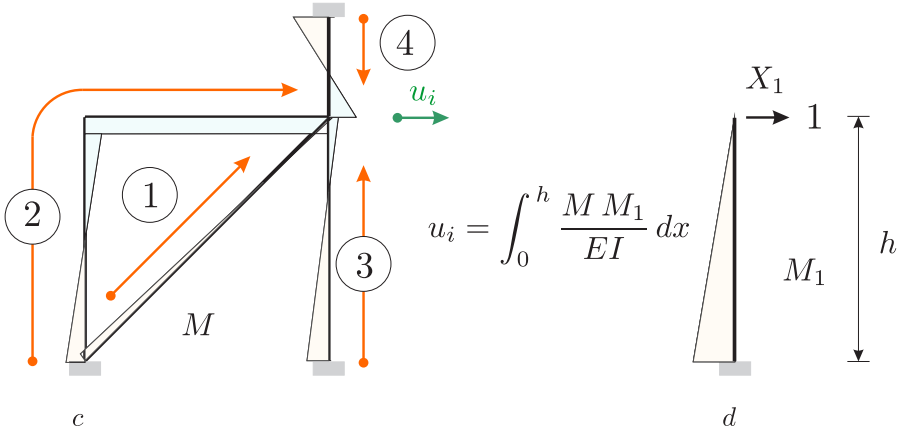
$$M \cdot 45^\circ = M\,[\mathrm{kNm}] \cdot 45^\circ[\mathrm{rad}] \qquad (?) \tag{1.329}$$

Der letzte Ausdruck hat nicht die Dimension einer Arbeit.

Bemerkung 1.7. Für weitere, ergänzende Angaben zu dem Sobolevschen Einbettungssatz siehe Kapitel 9.33.



$$1 \cdot u_i = \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{M\, M_1}{EI} + \frac{N\, N_1}{EA} \right) dx$$



$$u_i = \int_0^{h} \frac{M\, M_1}{EI}\, dx$$

Bild 1.59. Anwendung des Reduktionssatzes, **a)** und **b)** Momentenverlauf und Mohrsche Formulierung, **c)** auf unterschiedlichen Pfaden ist das Ergebnis dasselbe, **d)** Reduktionssatz

1.41 Der Reduktionssatz

Der *Reduktionssatz* ist eine spezielle Variante der Mohrschen Arbeitsgleichung. Zur Berechnung der horizontalen Verschiebung u_i des Rahmens in Bild 1.59 würde Mohr eine Kraft $X_1 = 1$ in Richtung der gesuchten Verschiebung u_i wirken lassen, und das Integral

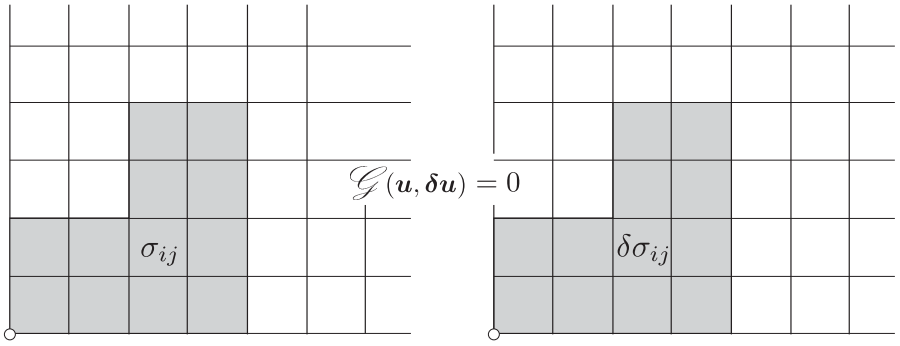


Bild 1.60. Kopplung zweier Spannungszustände auf einem Teilnetz

$$1 \cdot u_i = \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{M\, M_1}{EI} + \frac{N\, N_1}{EA}\right) dx \tag{1.330}$$

auswerten, und dabei über alle Stäbe des Rahmens integrieren.

Gemäß dem Reduktionssatz reicht es jedoch aus, die Einzelkraft $X_1 = 1$ an einem statisch bestimmten **Teilsystem** des ursprünglichen Tragwerkes wirken zu lassen.

Wir verstehen das besser, wenn wir uns klarmachen, dass der Knoten, der die Last trägt, auf vier verschiedenen Wegen angesteuert werden kann, siehe Bild 1.59 c, und dass auf jedem Pfad die Summe der horizontalen Verschiebungsinkremente du_i, ihr Integral, gleich u_i sein muss.

Wir können also u_i berechnen, indem wir zum Beispiel einfach nur über den Pfosten in Bild 1.59 d integrieren

$$1 \cdot u_i = \int_0^{l} \left(\frac{M\, M_1}{EI} + \frac{N\,(N_1 = 0)}{EA}\right) dx\,. \tag{1.331}$$

Der Reduktionssatz sagt im wesentlichen, dass das Dirac Delta, das X_1, nicht auf den ursprünglichen Rahmen aufgebracht werden muss, sondern dass es irgendein Teilsystem sein kann, das in dem ursprünglichen System ‚enthalten' ist, siehe Bild 1.59 d. Enthalten bedeutet, dass beim Übergang zum Teilsystem die Festhaltungen von Knoten gelöst werden können, aber das keine zusätzlichen Festhaltungen eingebaut werden dürfen. In der Sprache der Mathematik bedeutet dies, dass der **Dirichlet Rand** (die Lagerknoten) schrumpfen kann, aber dass er nicht wachsen darf, [92] p. 149. Die zulässigen Teilsysteme sind üblicherweise gerade die Teilsysteme, die man auch beim Kraftgrößenverfahren wählen würde, wie der einzelne Pfosten.

Der Reduktionssatz ist eine geschickte Anwendung der ersten Greenschen Identität, denn weil diese Identität für jedes einzelne Stabelement null ist

$$\sum_e \mathscr{G}(u, u_1)_e = 0\,, \tag{1.332}$$

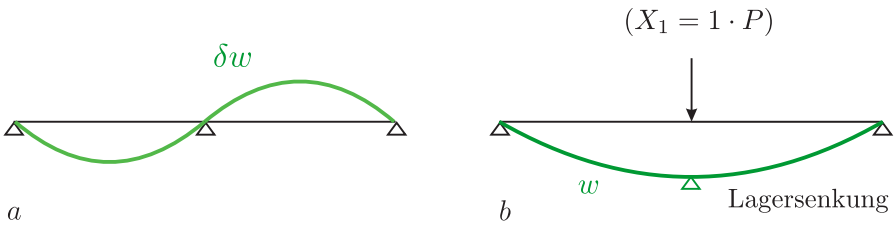


Bild 1.61. Virtuelle Verrückung und Lagersenkung

ist sie auch für jedes Teilsystem null. Der ‚Trick' besteht nun darin, Teilsysteme zu wählen, die sich leichter analysieren lassen, weil sie statisch bestimmt sind.

Nur muss man eben Systeme vermeiden, die bei der Formulierung der Identitäten $\mathscr{G}(u, u_1) = 0$, nach unbekannten Knotenverschiebungen oder Knotenkräften fragen. Das ist die Essenz der obigen ‚Dirichlet Bedingung'. Wenn man sich aber von dem Kraftgrößenverfahren leiten lässt, dann kommt man nicht in diese Verlegenheit.

Die Idee der Teilsysteme lässt sich natürlich auf jedes FE-Netz anwenden. Auf jedem Teilnetz kann man unterschiedliche Spannungszustände via der Greenschen Identität in einer Null-Summe koppeln, siehe Bild 1.60

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,. \tag{1.333}$$

Mit dem Reduktionssatz kann man auch leicht zeigen, dass Biegelinien w aus Lagersenkung orthogonal sind zu den virtuellen Verrückungen δw des Systems, siehe Bild 1.61. Die Absenkung kann man sich als Reaktion des Trägers ohne Zwischenlager (= Hauptsystem) auf eine Kraft $X_1 = 1 \cdot P$ vorstellen (auf den Faktor P kommt es nicht an) und gemäß Reduktionssatz muss gelten

$$\delta W_i(w, \delta w) = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = 0 \qquad M = P \cdot M_1\,, \tag{1.334}$$

weil dieser Ausdruck gerade das P-fache der Durchbiegung der virtuellen Verrückung δw im Zwischenlager ist, aber δw ist null, siehe Bild 1.61 a.

1.42 Das Kraftgrößenverfahren

Beim Kraftgrößenverfahren macht man ein Tragwerk durch den Einbau von M-, V- oder N-Gelenken statisch bestimmt, siehe Bild 1.62.

Die **statisch Überzähligen** X_i werden so bestimmt, dass die Klaffungen in den Gelenken null sind

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,. \tag{1.335}$$

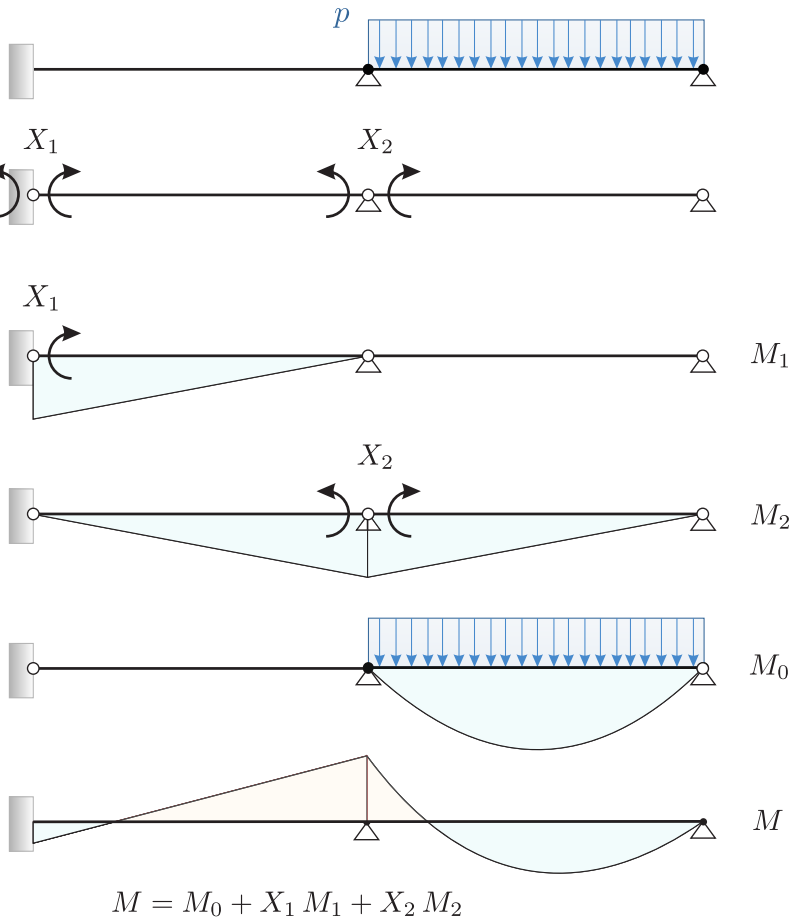


Bild 1.62. Kraftgrößenverfahren

Die δ_{ij} sind die Relativverdrehungen/Verschiebungen zwischen den X_i (links und rechts vom Gelenk) und die δ_{i0} sind dieselben Größen aus der Belastung. Ihre Berechnung beruht auf der Mohrschen Arbeitsgleichung

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i\, M_j}{EI}\, dx\,, \tag{1.336}$$

die ja wiederum mit der ersten Greenschen Identität identisch ist

$$\mathscr{G}(w_i, w_j) = \delta_{ij} - a(w_i, w_j) = \delta_{ij} - \int_0^l \frac{M_i\, M_j}{EI}\, dx = 0\,. \tag{1.337}$$

Die Biegelinien w_i und w_j sind die Biegelinien, die zu X_i und X_j gehören (sie werden zum Glück nicht gebraucht – nur ihre Momente) und der einzelne, isolierte Term



Bild 1.63. John Hancock Tower Chicago, [228]

$$\delta_{ij} = [V_i\, w_j - M_i\, w_j']_0^l \tag{1.338}$$

ist sozusagen der ‚Rest', das was von den eckigen Klammern, den Randarbeiten, in der Summe über alle Stäbe übrig bleibt. Der Rest $\delta_{ij} = Spreizung \cdot 1$ hat immer die Dimension einer Arbeit.

Zur Berechnung der δ_{i0} ersetzt man in den obigen Formeln das zweite Momente M_j durch das Moment M_0 am statisch bestimmten Hauptsystem aus der Belastung.

1.43 Die Diagonale

Ohne Diagonalen würde ein Fachwerk wie ein Kartenhaus zusammenfallen. Jedes Gerüst muss durch Diagonalen stabilisiert werden. Fehlen diese, wie bei einem Stockwerkrahmen, dann müssen Eckmomente für den seitlichen Halt

sorgen. In Gedanken ist man ja immer versucht in einen Vierendeel-Träger Diagonalen einzuziehen.

An einem Gittermast kann man verfolgen, wie die Seilkraft über die Diagonalen und die Pfosten und die Riegel nach unten in die Lager geleitet wird. Die Knoten des Fachwerks sind die Stationen auf diesem Weg nach unten, und der Kraftfluss ist so ausbalanciert, dass in jedem Knoten die ab- und zufließenden Stabkräfte im Gleichgewicht sind. Die Lage der Knoten zueinander, die Form, bestimmt implizit den Kraftfluss.

Ein gelenkig gelagerter Diagonalstab stemmt sich gegen (ungleiche) Bewegungen seiner Enden. Er ist ein ‚Splitter', denn die Strebenkraft S hat eine horizontale und vertikale Komponente

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = S_x \sqrt{1 + \tan^2 \psi} = S_y \sqrt{1 + 1/\tan^2 \psi} \tag{1.339}$$

und so kann man über die Neigung ψ des Stabes den Kraftfluss steuern und das Tragwerk aussteifen, siehe Bild 1.63.

Das rechtwinklige Dreieck zählt zu den ‚Urphänomenen' der Physik. Mit der Schrägen kommen der *Pythagoras* und der *cosinus* und der *sinus* – die Projektion – in die Physik

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \qquad \sin \varphi = l_y/l \qquad \cos \varphi = l_x/l \tag{1.340}$$

und das Steigungsdreieck

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{1.341}$$

krönt diese Bedeutung.

Die Geometrie des Dreiecks bestimmt auch die Effekte der spez. Relativitätstheorie. Die Lichtgeschwindigkeit c, die Geschwindigkeit v des Zeitreisenden und die Projektion von v auf die x-Achse bilden ein Dreieck und der $\cos\gamma$ des Winkels in diesem Dreieck bestimmt, wie groß die Zeitdilatation bzw. die Längenverkürzung ist, siehe Bild 11.2. Geht $v \to c$, dann bedeutet das $1/\cos\gamma = \infty$; die Zeit bleibt für den Reisenden praktisch stehen und die Länge seines Raumschiffs geht gegen null; beides aus der Sicht des unbewegten Beobachters.

Beim Seileck wird diese Grenze erreicht, wenn man die Vorspannung $H \to \infty$ unendlich groß macht, denn dann geht der Durchhang gegen null und $1/w' = \cos\varphi/\sin\varphi \to \infty$ geht gegen Unendlich, wenn nicht das Seil vorher reißt.

1.44 Wo läuft es hin?

Wir haben oben von der Null-Summe der ersten Greenschen Identität gesprochen. Dieser Begriff hat auch eine direkte statische Relevanz, wie die beiden folgenden Beispielen zeigen sollen.

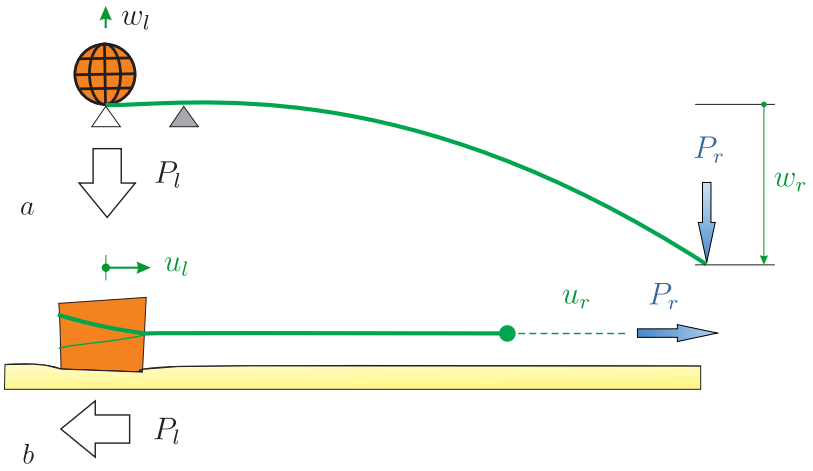


Bild 1.64. Archimedes' Dilemma: Aller Aufwand fließt in die Biegeenergie **a)** die Erde wird sich keinen Millimeter bewegen **b)** und das Gummiband wird lang und länger...

Ein fester Punkt reicht Archimedes nicht aus, um die Welt aus den Angeln zu heben. Er benötigt auch einen Hebel mit einer unendlich großen Biegesteifigkeit $EI = \infty$, siehe Bild 1.64 a, denn sonst geht seine ganze Kraft nur in die Verkrümmung des Hebels.

Wegen $\mathscr{G}(w, w) = W_e - W_i = 0$ sind zu jedem Zeitpunkt die äußere Arbeit und die Biegeenergie in dem Balken gleich groß (wir lassen den Faktor 1/2 weg)

$$W_e = P_r \cdot w_r - P_l \cdot w_l = a(w, w) = \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = W_i \tag{1.342}$$

oder aufgelöst nach dem angestrebten Effekt

$$P_l \cdot w_l = a(w, w) - P_r \cdot w_r \simeq 0\,, \tag{1.343}$$

der aber praktisch null ist, weil der ganze Aufwand von Archimedes, $P_r \cdot w_r$, in die Verkrümmung des Balkens fließt, also in die Biegeenergie $a(w, w)$, und praktisch nichts auf der linken Seite der Gleichung ankommt, nichts übrigbleibt, um die Erde anzuheben.

Dasselbe passiert, wenn man ein schweres Gewicht über den nassen Sand am Strand zieht wie in Bild 1.64 b, [91],

$$W_e = \underbrace{P_r \cdot u_r}_{Aufwand} - P_l \cdot u_l = a(u, u) = \int_0^l \frac{N^2}{EA}\, dx = W_i\,. \tag{1.344}$$

Das Seil (EA) wird lang und länger, die Verzerrungsenergie $a(u, u)$ immer größer, aber das Gewicht wird sich kaum bewegen, $u_l \simeq 0$,

$$P_l \cdot u_l = a(u,u) - P_r \cdot u_r \simeq 0\,. \tag{1.345}$$

Die erste Greensche Identität, das Null-Summen-Spiel, erlaubt es dem Balken bzw. dem Seil auszuweichen. Der Anwender hat keine Kontrolle darüber, wo sein Effort, seine Energie hinfließt. Sie muss im System stecken, aber wo genau am Schluss? Das ist, wenn man so will, die ‚Unschärfe' in der Statik.

Eine ähnliche Situation entsteht, wenn man Steifigkeiten ändert. Wie reagiert ein Tragwerk, wenn man eine Stütze wegnimmt oder in eine Wand eine Öffnung einbaut? Die Last ändert sich nicht, aber der Kraftfluss – aber wie? Wir wissen nur, siehe Kapitel 3.31, dass der Übergang in die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ nicht willkürlich geschieht, sondern dass die neue Lage $\boldsymbol{u}_c$ mit der alten Lage $\boldsymbol{u}$ kompatibel sein muss,

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}\,, \tag{1.346}$$

weil sich $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c$ nicht ändert.

1.45 Finite Elemente und die erste Greensche Identität

Wir wollen zum Schluss dieses Kapitels noch vor einem möglichen Missverständnis warnen: Die erste Greensche Identität ist identisch mit $\delta\Pi = 0$ aber nicht identisch mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Ist u die Längsverschiebung eines Stabes

$$-EAu'' = p \qquad u(0) = 0\,, \quad N(l) = 0 \tag{1.347}$$

und δu eine virtuelle Verrückung, $\delta u(0) = 0$, dann gilt

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = (p, \delta u) - a(u, \delta u) = 0 \tag{1.348}$$

und daher ebenso, wegen $\varphi_i(0) = 0$,

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = (p, \varphi_i) - a(u, \varphi_i) = 0\,. \tag{1.349}$$

Das ist die Vorlage zur Bestimmung der FE-Lösung $u_h(x) = \sum_j u_j\,\varphi_j(x)$

$$(p, \varphi_i) - a(u_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.350}$$

Man ist versucht, das mit

$$\mathscr{G}(u_h, \varphi_i) = (p_h, \varphi_i) - a(u_h, \varphi_i) = 0 \tag{1.351}$$

gleichzusetzen, also die FEM auf die bequeme Formulierung

$$\mathscr{G}(u_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.352}$$

zu reduzieren, aber die Belastung in (1.351) ist $p_h = -EA\,u_h''$ und nicht p

$$\text{FEM} = \underset{\uparrow}{(p, \varphi_i)} - a(u_h, \varphi_i) \neq \underset{\uparrow}{(p_h, \varphi_i)} - a(u_h, \varphi_i) = \mathscr{G}(u_h, \varphi_i)\,. \qquad (1.353)$$

Die FE-Gleichungen (1.350) sehen also so ähnlich aus, wie die erste Greensche Identität, (1.351), sind es aber nicht – sie versuchen nur die Identität mit der FE-Lösung u_h nachzubilden. Nur am Schluss, $h \to 0$, sind die beiden gleich, weil dann $p_h = p$ ist.

Bemerkung 1.8. Wir haben hier ein 1-D Problem als Vorlage genommen, aber eigentlich besteht die Verwechslungsgefahr nur bei Flächentragwerken. Bei Stabtragwerken, EA und EI konstant, ist $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ wirklich identisch mit der ersten Greenschen Identität, siehe Kapitel 1.18.2.

2

Der Satz von Betti

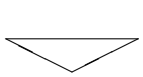
Das Thema dieses Kapitels sind **Einflussfunktionen** und ihre Berechnung mit finiten Elementen.

Die große praktische Bedeutung des Themas beruht darauf, dass alle Weg- und Kraftgrößen in der linearen Statik im Ergebnis die Überlagerung der Belastung mit der entsprechenden Einflussfunktion sind

$$u(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.1}$$

wie das uns wohl vertraute $p\,l^2/8$

$$M = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l \quad dy = \frac{p\,l^2}{8}\,, \tag{2.2}$$



das das Skalarprodukt der Einflussfunktion für $M(x)$ und der Belastung ist[1]. (Das schließt die Multiplikation zweier Zahlen, Kraft $\times$ Weg, wie zweier Vektoren natürlich mit ein).

Die Einflussfunktionen sind also der Schlüssel zur linearen Statik. Sie verkörpern die Sensitivitäten eines Tragwerks. Die Einflussfunktion und die Belastung müssen sich irgendwann einmal kreuzen, wenn im Aufpunkt etwas ankommen soll, siehe Bild 2.1.

Und die entscheidende Rolle der Einflussfunktionen überträgt sich direkt auf die finiten Elemente, siehe Bild 2.2, denn:

Jede FE-Lösung ist eine Linearkombination der Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_i$ der Knotenverschiebungen

$$\boldsymbol{u} = f_1\,\boldsymbol{g}_1 + f_2\,\boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{2.3}$$

[1] Spötter behaupten $p\,l^2/8$ sei ein Erfahrungswert der Berliner Baupolizei

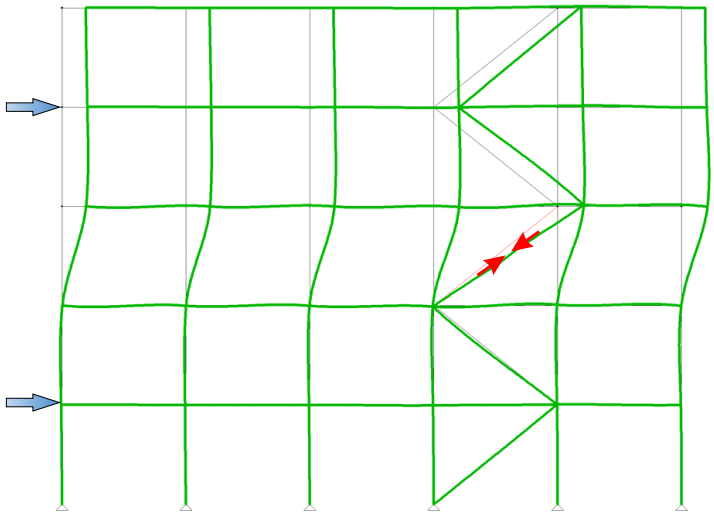


Bild 2.1. Einflussfunktion für die Normalkraft in einer Strebe

Das ist leicht zu verstehen: In der FEM werden nur die Knoten belastet. Die Verschiebungsantwort (Vektor $\boldsymbol{g}_i$) des Tragwerks auf eine Knotenkraft $f_i = 1$ ist aber gleichzeitig die Einflussfunktion für die Verschiebung des Knotens. Daher muss man nur diese Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ mit den aktuellen f_i multiplizieren und man hat die FE-Lösung. Das ist genau die obige Formel $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$, denn die $\boldsymbol{g}_i$ sind die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$.

2.1 Grundlagen

Gemäß dem *Satz von Betti* sind die reziproken äußeren Arbeiten zweier Systeme, die jedes für sich im Gleichgewicht ist, gleich groß

$$W_{1,2} = W_{2,1}\,. \tag{2.4}$$

Die Arbeiten, die die Lasten des Systems 1 auf den Wegen des Systems 2 leisten, $W_{1,2}$, sind genauso groß wie die Arbeiten, die die Lasten des Systems 2 auf den Wegen des Systems 1 leisten, $W_{2,1}$.

Dieser Satz beruht auf der zweiten Greenschen Identität $\mathscr{B}(w_1, w_2)$, die man durch Spiegelung der ersten Greenschen Identität an sich selbst und Vertauschung der Reihenfolge von w_1 und w_2 erhält

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \mathscr{G}(w_1, w_2) - \mathscr{G}(w_2, w_1) = 0 - 0 = 0\,, \tag{2.5}$$

was im Falle des Balkens zu dem Ergebnis

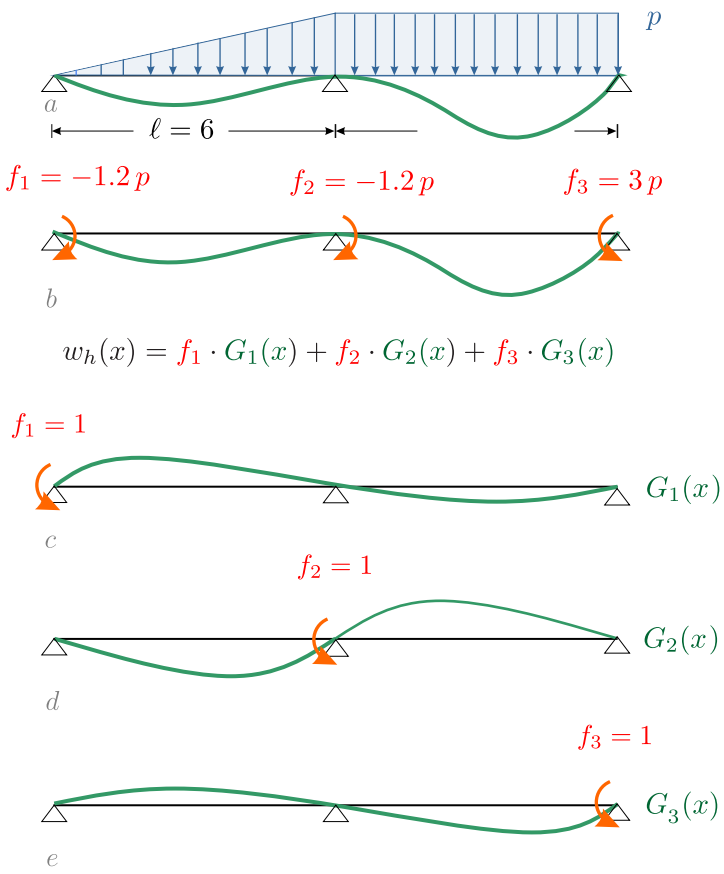


Bild 2.2. Die FE-Lösung $w_h(x)$ ist die Summe der Einflussfunktionen G_1, G_2, G_3 der drei Knotenverdrehungen und die Knotenmomente f_i sind die Gewichte (BEFRAMES)

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = \underbrace{\int_0^l EI\, w_1^{IV}\, w_2\, dx + [V_1\, w_2 - M_1\, w_2']_0^l}_{W_{1,2}}$$
$$\underbrace{- [V_2\, w_1 - M_2\, w_1']_0^l - \int_0^l w_1\, EI\, w_2^{IV}\, dx}_{W_{2,1}} = 0 \tag{2.6}$$

führt.

Man kann sich das auch so vorstellen, dass man mit dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l EI\, w_1^{IV}(x)\, w_2(x)\, dx \tag{2.7}$$

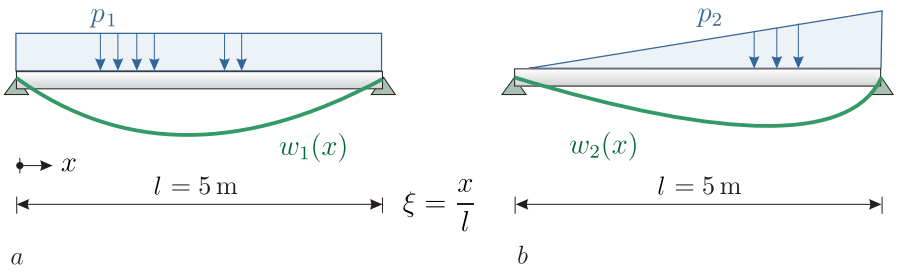


Bild 2.3. *Satz von Betti*

beginnt, und dann mittels partieller Integration die Ableitungen von w_1 vollständig auf w_2 überwälzt und so am Schluss das Spiegelbild des Ausgangsintegrals erhält.

Differentialgleichungen, bei denen auf diesem Weg das Spiegelbild entsteht, heißen ***selbstadjungiert***. Alle linearen Differentialgleichungen gerader Ordnung sind selbstadjungiert.

Differentialgleichungen ungerader Ordnung, wie $u' = p$ nennt man ***schiefsymmetrisch***, weil sie nur nach Multiplikation mit (-1) mit dem Ausgangsintegral zur Deckung zu bringen sind

$$\int_0^l u'\,\hat{u}\,dx = [u\,\hat{u}]_0^l - \int_0^l u\,\hat{u}'\,dx\,. \tag{2.8}$$

Partielle Integration ist daher, wenn man so will, eine ‚schiefsymmetrische' Operation.

Beispiel 2.1. Die beiden Balken in Bild 2.3 tragen zwar verschiedene Streckenlasten

$$p_1 = 10 \qquad w_1(x) = \frac{10 \cdot 5^4}{24\,EI}\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \qquad \xi = \frac{x}{l} \tag{2.9}$$

$$p_2 = 7\,\xi \qquad w_2(x) = \frac{7 \cdot 5^3\,x}{360\,EI}\,(7 - 10\,\xi^2 + 3\,\xi^4)\,, \tag{2.10}$$

aber ihre reziproken äußeren Arbeiten, die Arbeiten **‚über Kreuz'**, sind dennoch gleich groß

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(w_1, w_2) &= \int_0^l p_1(x)\,w_2(x)\,dx - \int_0^l p_2(x)\,w_1(x)\,dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 911.46 - \frac{1}{EI} \cdot 911.46 = 0\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

In den Statikbüchern wird der *Satz von Betti* meist gleich auf (2.11) reduziert ohne dass die zweite Greensche Identität (2.6) angeschrieben wird und deswegen heißt es in den Büchern immer, *‚wenn zwei Systeme im Gleichgewicht sind...'*, was eben bedeutet, dass die beiden Biegelinien den Differentialgleichungen $EI\,w_1^{IV} = p_1$ bzw. $EI\,w_2^{IV} = p_2$ und den Randbedingungen

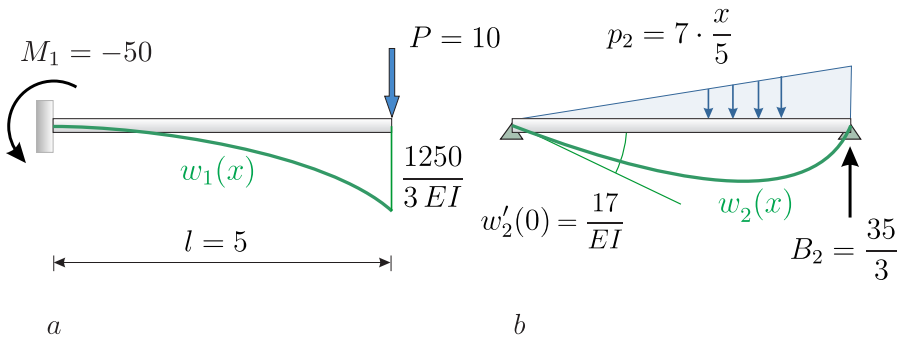


Bild 2.4. *Satz von Betti* bei zwei unterschiedlich gelagerten Systemen

genügen müssen, damit die verkürzte Identität (2.11) mit dem Original (2.6) identisch ist.

Der *Satz von Betti* gilt im übrigen auch dann, wenn die beiden Balken unterschiedlich gelagert sind, wie in Bild 2.4, denn

$$W_{1,2} = M_1(0)\, w_2'(0) = -50 \cdot \frac{17}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI} \tag{2.12}$$

ist dasselbe, wie

$$\begin{aligned} W_{2,1} &= \int_0^l p_2\, w_1(x)\, dx - B_2\, w_1(l) \\ &= \int_0^5 7 \cdot \frac{x}{5} \cdot (25\,x^2 - \frac{10}{6}\,x^3)\, \frac{1}{EI}\, dx - \frac{35}{3} \cdot \frac{1250}{3\,EI} \\ &= 4010.42 \cdot \frac{1}{EI} - 4861.1 \cdot \frac{1}{EI} = -850 \cdot \frac{1}{EI}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die unterschiedliche Lagerung bedeutet nur, dass jetzt auch die Lagerkräfte Arbeiten leisten und die müssen mitgezählt werden.

2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen

Die Einflussfunktion $G_0(y, x)$ für die Verschiebung eines Punktes x ist identisch mit der Verformung des Tragwerks, wenn eine Kraft $P = 1$ den Aufpunkt x in Richtung der gesuchten Verformung drückt. Das y ist die Laufvariable, also die Orte in denen wir die Effekt, die die Einzelkraft hervorruft, beobachten.

Die Einflussfunktion ist **symmetrisch**, $G_0(y, x) = G_0(x, y)$, man kann also jederzeit x mit y vertauschen. Ob die Kraft im Punkte x steht und wir beobachten die Verformung im Punkt y, oder ob die Kraft im Punkt y steht

und wir beobachten die Verformung im Punkt x, ist numerisch dasselbe (*Satz von Maxwell*).

Für unsere Zwecke wird es sich als sinnvoll erweisen, mit x den Aufpunkt zu bezeichnen und mit y die Punkte, in denen die Belastung steht.

Was am Anfang vielleicht etwas verwirrend ist: Um die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ zu erzeugen, setzen wir eine Kraft $P=1$ in den Aufpunkt x, wenn wir aber die Einflussfunktion auswerten

$$u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.14}$$

dann wirkt die Kraft P, wenn das zufällig die ganze Last sein sollte,[2] in dem Punkt y

$$x = \begin{cases} \text{Aufpunkt, wenn } G_0(y,x) \text{ erzeugt wird} \\ \text{Focus, wenn } G_0(y,x) \text{ ausgewertet wird.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Eine Streckenlast p kann man als eine Serie von kleinen Einzelkräften

$$dP(y) = p(y)\, dy \tag{2.16}$$

ansehen, die jede für sich die Durchbiegung im Aufpunkt x um das Maß

$$dw = G_0(y,x)\, dP(y) \tag{2.17}$$

erhöhen, und so ist die gesamte Durchbiegung die Summe über die dw, also die Überlagerung der Einflussfunktion mit der Belastung

$$w(x) = \int_0^l dw = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{2.18}$$

Besteht die Belastung nur aus einer einzelnen Kraft P in einem Punkt y, dann reduziert sich das natürlich auf den Ausdruck

$$w(x) = G_0(y,x) \cdot P\,. \tag{2.19}$$

Und so, wie die Weg- und Kraftgrößen eines Balkens aus der Biegelinie durch Differentiation hervorgehen,

$$w'(x) = \frac{d}{dx}\, w(x) \qquad M(x) = -EI\, \frac{d^2}{dx^2}\, w(x) \qquad V(x) = -EI\, \frac{d^3}{dx^3}\, w(x)\,, \tag{2.20}$$

so gehen die zugehörigen Einflussfunktionen aus $G_0(y,x)$ durch Differentiation nach dem **Aufpunkt** x hervor

[2] Die Lasten $dP = p\, dy$ werden durch $G(y,x)$ im Brennpunkt x focusiert

$$G_0(y,x) \qquad = \text{EF für } w(x) \tag{2.21a}$$

$$G_1(y,x) = \frac{d}{dx} G_0(y,x) \qquad = \text{EF für } w'(x) \tag{2.21b}$$

$$G_2(y,x) = -EI\,\frac{d^2}{dx^2} G_0(y,x) = \text{EF für } M(x) \tag{2.21c}$$

$$G_3(y,x) = -EI\,\frac{d^3}{dx^3} G_0(y,x) = \text{EF für } V(x) \tag{2.21d}$$

Wir bezeichnen die Einflussfunktionen mit dem Buchstaben G, weil in der Mathematik Einflussfunktionen ***Greensche Funktionen*** heißen, und weil die Durchbiegung die nullte Ableitung ist, schreiben wir ihre Einflussfunktion G_0 mit einem Index 0.

Der Begriff Einflussfunktion kann einmal das komplette Integral bezeichnen

$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.22}$$

oder den ***Kern*** $G_0(y,x)$ der Einflussfunktion. In der Mathematik versteht man unter der Greenschen Funktion meist den Kern der Einflussfunktion.

Die zentrale Rolle der Greenschen Funktionen kann nicht überbetont werden, da in der linearen Statik alle Ergebnisse die Überlagerung der Last mit den Punktlösungen sind, und die Schlüsselfrage daher lautet:

Wenn ich hier drücke, wie groß ist dann dort die Verschiebung?

Wenn man diese *unit response* – die Greensche Funktion – für alle Punkte eines Tragwerks parat hätte, dann bräuchte man keine finiten Elemente.

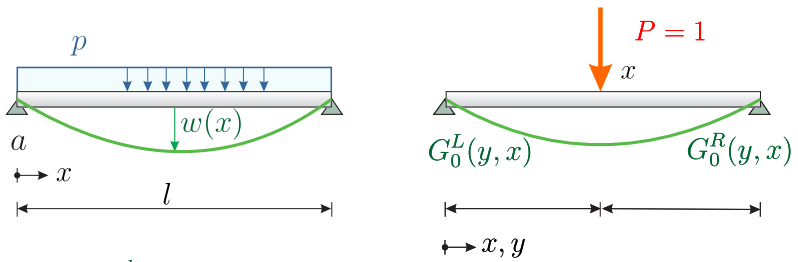
2.2.1 Herleitung

Technisch gesehen geschieht bei der Herleitung der Einflussfunktion (2.22) das folgende: Wir belasten den Träger im Aufpunkt x mit einer Einzelkraft $P = 1$, siehe Bild 2.5 a, ermitteln die zugehörige Biegelinie $G_0(y,x)$ und formulieren dann mit den beiden Biegelinien $G_0(y,x)$ und $w(y)$ den *Satz von Betti*, d.h. die zweite Greensche Identität.

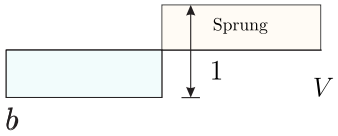
Das geht nicht in einem Stück, weil die dritte Ableitung (die Querkraft) der Einflussfunktion **im Aufpunkt springt**. Also integrieren wir vom linken Lager bis zum Aufpunkt x, unterbrechen dort, und setzen die Integration hinter dem Aufpunkt fort

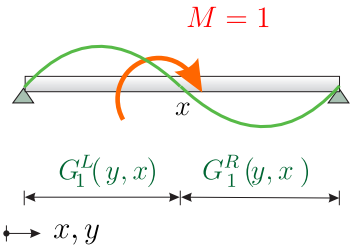
$$\mathscr{B}(G_0, w) = \mathscr{B}(G_0^l, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.23}$$

An den beiden Balkenenden sind w und M null und so verbleibt in der Summe

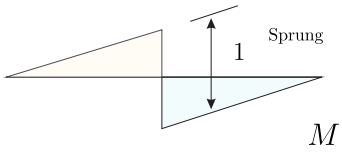


$$w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad G_0 = G_0^L + G_0^R$$





$$w'(x) = \int_0^l G_1(y,x)\, p(y)\, dy \qquad G_1 = G_1^L + G_1^R$$



c

Bild 2.5. Anwendung des Satzes von Betti bei einem Balken **a)** Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Durchbiegung $w(x)$ bzw. **b)** $G_1(y,x)$ für die Verdrehung $w'(x)$ in Balkenmitte

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}(G_0, w) &= \mathscr{B}(G_0^l, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} \\
&= V_0^l(x)\, w(x) - M_0^l(x)\, w'(x) - \int_0^x G_0^l(y,x)\, p(y)\, dy \\
&\quad - V_0^R(x)\, w(x) + M_0^R(x)\, w'(x) - \int_x^l G_0^R(y,x)\, p(y)\, dy \\
&= \underbrace{(V_0^l(x) - V_0^R(x))}_{=1}\, w(x) - \underbrace{(M_0^l(x) - M_0^R(x))}_{=0}\, w'(x) \\
&\quad - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = 1 \cdot w(x) - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

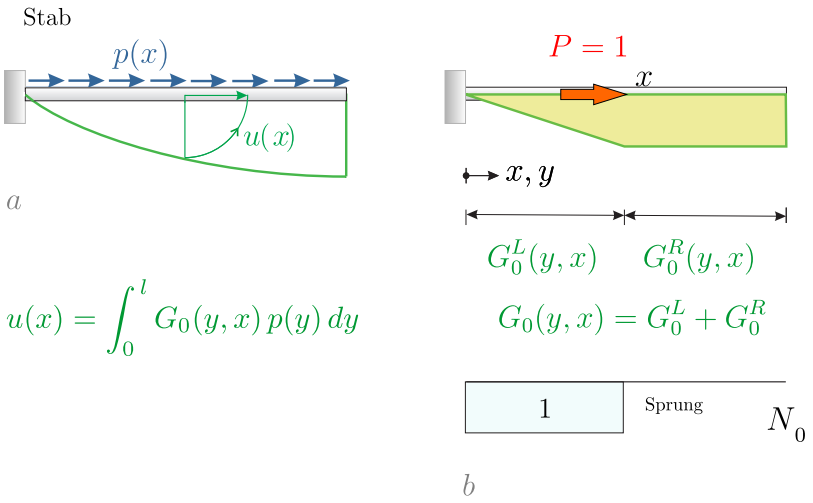


Bild 2.6. Anwendung des Satzes von Betti bei einem Stab

oder

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.25}$$

was die Einflussfunktion für $w(x)$ ist.

Einflussfunktion für $w'(x)$

Zur Berechnung von $w'(x)$ belasten wir den Träger im Aufpunkt mit einem **Einzelmoment** $M = 1$ und formulieren mit den beiden Teilen G_1^L und G_1^R den *Satz von Betti*, siehe Bild 2.5 c,

$$\mathscr{B}(G_1, w) = \mathscr{B}(G_1^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_1^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.26}$$

Der Sprung des Biegemomentes im Aufpunkt macht, dass bei der Addition der beiden Identitäten im Aufpunkt die Arbeit

$$(M_L(x,x) - M_R(x,x))\, w'(x) = 1 \cdot w'(x) \tag{2.27}$$

übrig bleibt und damit ergibt sich die Einflussfunktion für $w'(x)$

$$1 \cdot w'(x) = \int_0^l G_1(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{2.28}$$

Einflussfunktion für die Längsverschiebung $u(x)$

Die zweite Greensche Identität (*Satz von Betti*) der Differentialgleichung $-EA\, u''(x) = p(x)$ lautet

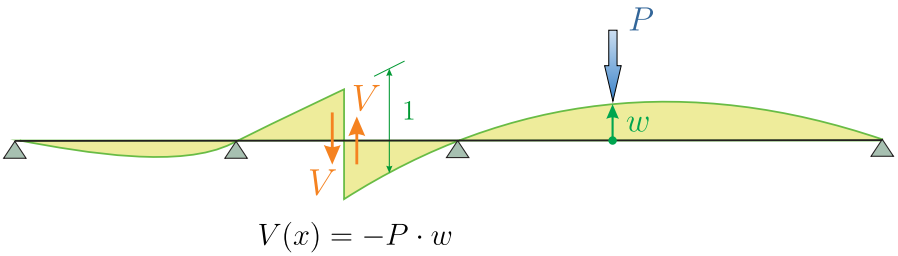


Bild 2.7. Eine Einflussfunktion gleicht einer Schaukel

$$\mathscr{B}(u,\hat{u}) = \int_0^l -EA\,u''(x)\,\hat{u}(x)\,dx + [N\,\hat{u}]_0^l$$
$$- [u\hat{N}]_0^l - \int_0^l u(x)\,(-EA\,\hat{u}''(x))\,dx = 0\,, \tag{2.29}$$

und aus ihr erhält man die Einflussfunktion für $u(x)$, indem man eine **Kraft** $P = 1$ in Richtung der Stabachse wirken lässt, siehe Bild 2.6,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_0,u) &= \mathscr{B}(G_0^l,u)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R,u)_{(x,l)} = 0+0\\ &= N_0^l(x)\,u(x) - \int_0^x G_0^l(y,x)\,p(y)\,dy\\ &\quad - N_0^R(x)\,u(x) - \int_x^l G_0^R(y,x)\,p(y)\,dy\\ &= \underbrace{(N_0^l(x) - N_0^R(x))}_{=1}\,u(x) - \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy\end{aligned} \tag{2.30}$$

oder

$$1\cdot u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.31}$$

2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen geht man – kurz gesagt – in zwei Schritten vor:

- Kraftgröße sichtbar machen!
- Schaukeln!

Erst macht man die Schnittgröße durch den Einbau eines entsprechenden Gelenkes zu einer äußeren Kraftgröße, siehe Bild 2.7, und dann bewegt man die beiden Gelenkhälften so, dass die beiden Schnittgrößen, links und rechts vom Gelenk, insgesamt den Weg -1 zurücklegen.

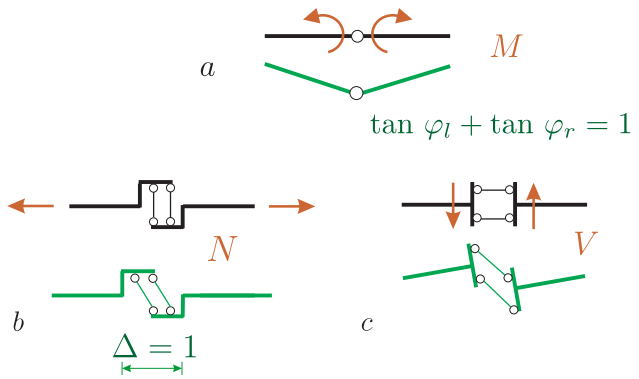


Bild 2.8. Der Einbau von Gelenken ermöglicht die Berechnung von Einflussfunktionen, **a)** M-Gelenk, **b)** N-Gelenk, **c)** V-Gelenk

In der Statik heißt dies der ***Satz von Land***, der aber im Grunde doch nur wiederholt[3], was in der zweiten Greenschen Identität steht. Man sucht in der Identität nach der Kraftgröße, schaut auf ihren Partner, also die Weggröße, mit der die Kraftgröße gepaart ist, und weiß dann, dass man diese Weggröße um Eins springen lassen muss, damit bei der Addition, siehe (2.37), die Kraftgröße ‚ans Licht kommt'.

Ist das Tragwerk statisch bestimmt, dann wird aus dem Tragwerk durch den Einbau des M-, N- oder V-Gelenks, siehe Bild 2.8, ein ***Getriebe*** und dann sind keine Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen.

Ist das Tragwerk statisch unbestimmt, dann benötigt man dafür Kräfte. Praktisch geht man dabei so vor, dass man zunächst auf beiden Seiten des Gelenkes eine Kraftgröße $X = \pm 1$ wirken lässt, die dadurch verursachte Spreizung des Gelenks ausrechnet, und dann das Paar $\pm X$ so normiert, dass die Spreizung sich genau zu Eins ergibt.

Archimedes wusste, wenn er das linke Lager an dem **Hebel** in Bild 2.9 wegnimmt, und den Hebel dort um ein δάκτυλος, einen Fingerbreit, nach unten drückt, dass dann die Arbeit der Lagerkraft A und die Arbeit der Kraft P in der Summe null sein müssen

$$W_{1,2} = A \cdot 1 - P\, h_2 \tan \varphi = 0\,, \tag{2.32}$$

und er fand so für den Wert von A das Resultat

$$A = P\, h_2 \tan \varphi = P \cdot \frac{h_2}{h_1}\,. \tag{2.33}$$

Alle Einflussfunktionen für Kraftgrößen sind im Grunde solche Schaukeln, siehe Bild 2.7, denn das **Spiel von Kräften und Bewegungen** bildet den

[3] Das soll nicht die Leistung von Land mindern. Er hat, wie viele andere Ingenieure, Pionierarbeit in der Gründungsphase der Statik geleistet. Die Geschichte der Statik ist, wie die aller Wissenschaften, Geistesgeschichte, [133].

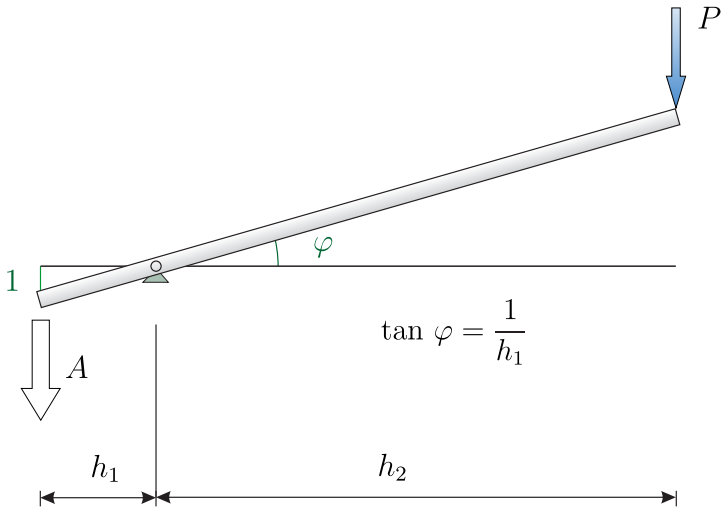


Bild 2.9. Der Hebel des Archimedes

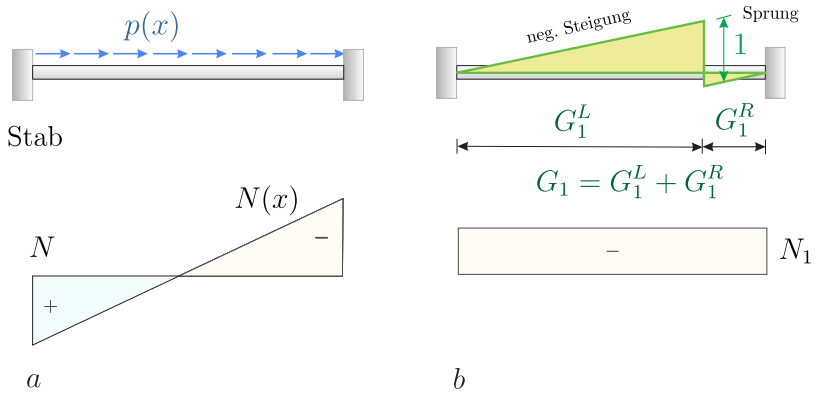


Bild 2.10. Berechnung der Einflussfunktion für die Normalkraft $N(x)$

Kern der Statik.

Statik ist nicht statisch, sondern Statik ist Kinematik.

Zu jeder Schnittkraft gehört ein Gelenk und die Bewegung, die über das Tragwerk läuft, wenn man das Gelenk spreizt, ***das Echo***, das von der Last zurückkommt, bestimmt wie groß die Schnittkraft in dem Aufpunkt ist.

2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für eine Normalkraft $N(x)$ weist im Aufpunkt x einen **Verschiebungssprung** der Größe Eins auf, siehe Bild 2.10 b,

$$G_1(x_-) - G_1(x_+) = 1\,. \tag{2.34}$$

Die Randarbeiten an den Enden des Stabes im *Satz von Betti*

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_1,u) &= \mathscr{B}(G_1^L,u)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_1^R,u)_{(x,l)} = 0+0\\ &= [\ldots]_0^x - \int_0^x G_1^L(y,x)\,p(y)\,dy + [\ldots]_x^l - \int_x^l G_1^R(y,x)\,p(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{2.35}$$

sind, wegen $u(0) = u(l) = 0$ und $G_1(0,x) = G_1(l,x) = 0$, null, und so verbleiben nur die Randarbeiten links und rechts vom Aufpunkt x.

Die zu G_1 gehörige Normalkraft N_1 ist im Aufpunkt stetig, weil G_1 links und rechts vom Aufpunkt dieselbe Steigung hat, siehe Bild 2.10 b, und auch $u(x)$ ist dort stetig, so dass die Arbeit der beiden Normalkräfte $\pm N_1(x)$, links und rechts vom Gelenk, in der Summe null ist

$$\underbrace{N_1(x_-)\,u(x)}_{links} - \underbrace{N_1(x_+)\,u(x)}_{rechts} = (N_1(x_-) - N_1(x_+))\,u(x) = 0\,, \tag{2.36}$$

und sich somit alles auf

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(G_1,u) &= N(x)(G_1(x_-) - G_1(x_+)) - \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy\\ &= N(x)\cdot 1 - \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy = 0\end{aligned} \tag{2.37}$$

reduziert, oder

$$1\cdot N(x) = \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.38}$$

2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$

Im Aufpunkt x wird ein **Momentengelenk** eingebaut und dieses wird so bewegt, dass eine Spreizung von Eins entsteht

$$G_2'(x_-) - G_2'(x_+) = 1\,. \tag{2.39}$$

Bei der Formulierung des Satzes von Betti mit den beiden Teilen der Einflussfunktion, G_2^L und G_2^R,

$$\mathscr{B}(G_2,w) = \mathscr{B}(G_2^L,w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_2^L,w)_{(x,l)} = 0+0 \tag{2.40}$$

sind die Randarbeiten an den Balkenenden null und die Randarbeiten an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich gegenseitig weg bis auf den Term

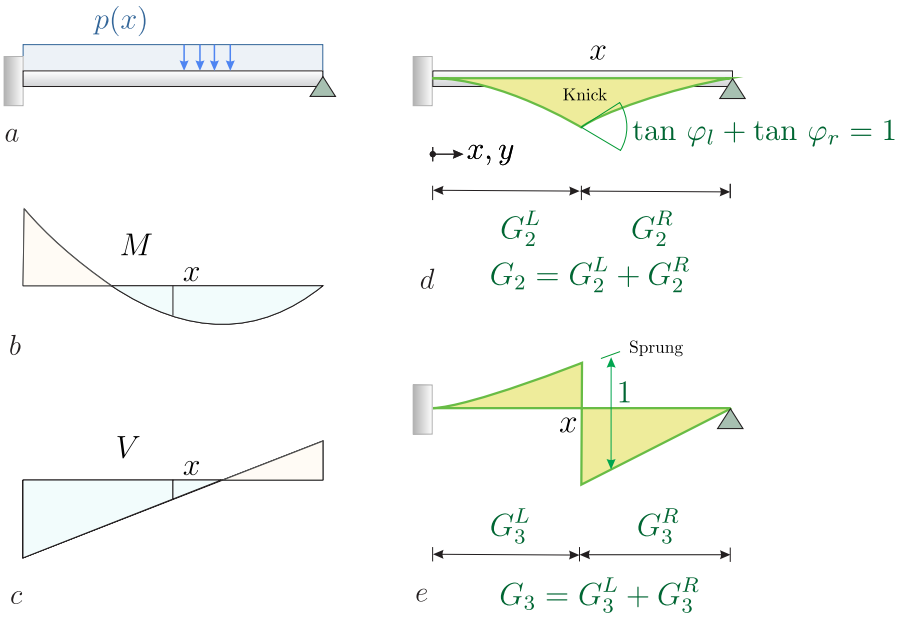


Bild 2.11. Einflussfunktionen für $M(x)$ und $V(x)$

$$G_2'(x_-)\,M(x) - G_2'(x_+)\,M(x) = 1 \cdot M(x) \tag{2.41}$$

und so folgt

$$1 \cdot M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.42}$$

2.3.3 Einflussfunktion für $V(x)$

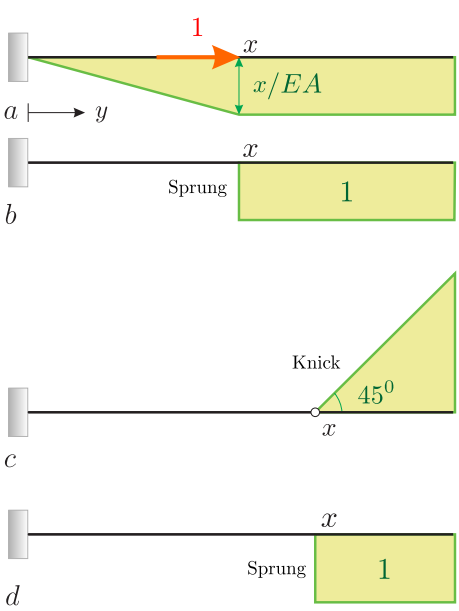
Die Querkraft machen wir durch den Einbau eines **Querkraftgelenks** sichtbar, siehe Bild 2.11 e, und spreizen es dann derart, dass die beiden Querkräfte in der Summe den Weg (-1) zurücklegen. Das bedeutet, dass die Einflussfunktion G_3 im Aufpunkt einen Versatz der Größe Eins aufweist

$$G_3(x_-) - G_3(x_+) = 1\,. \tag{2.43}$$

Entsprechend besteht die Biegelinie G_3 aus zwei Teilen, G_3^L und G_3^R, und so müssen wir auch den *Satz von Betti* zweiteilen

$$\mathscr{B}(G_3, w) = \mathscr{B}(G_3^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_3^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.44}$$

An der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich die Randarbeiten gegenseitig weg bis auf



$$G_0(y,x) = \begin{cases} \dfrac{y}{EA} \\ \dfrac{x}{EA} \end{cases} \qquad \text{EF} - u(x)$$

$$G_1 = EA\,\frac{dG_0}{dx} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \text{EF} - N(x)$$

$$G_2(y,x) = \begin{cases} 0 \\ -y + x \end{cases} \qquad \text{EF} - M(x)$$

$$G_3 = \frac{dG_2}{dx} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \text{EF} - V(x)$$

Bild 2.12. Herleitung von Einflussfunktionen durch Differentiation

$$G_3(x_-)\,V(x) - G_3(x_+)\,V(x) = 1 \cdot V(x) \tag{2.45}$$

und so ergibt sich durch Umstellung aus $W_{1,2} = 0$ das Resultat

$$1 \cdot V(x) = \int_0^l G_3(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.46}$$

2.3.4 Lagersenkung

Wenn sich ein Lager senkt, dann hat man kein p. Wie werden dann die Einflussfunktionen ausgewertet? Antwort: Indem man über die Lagerkräfte geht. Wie das genau geht, soll ein Beispiel erläutern.

Bild 2.13b zeigt die Einflussfunktion für das Biegemoment in Feldmitte des Trägers und die zur Spreizung gehörige vertikale Lagerkraft $3\,EI/(2\,l^2)$ im Lager rechtsiehe Bild 2.13a zeigt die eigentliche Lagersenkung.

Die zum LF Δw gehörige Biegelinie w ist eine homogene Lösung, $EI\,w^{IV} = 0$, und die Einflussfunktion ist eine Lösung der Gleichung $EI\,G_2^{IV}(y,x) = \delta_2(y-x)$. Das Dirac Delta ist die Spreizung in Feldmitte, die die Einflussfunktion für $M(x)$ erzeugt.

Mit diesen beiden Biegelinien, $w(y)$ aus der Lagersenkung und der Einflussfunktion $G_2(y,x)$, formulieren wir den Satz von Betti, und erhalten (wir überspringen die Zwischenschritte)

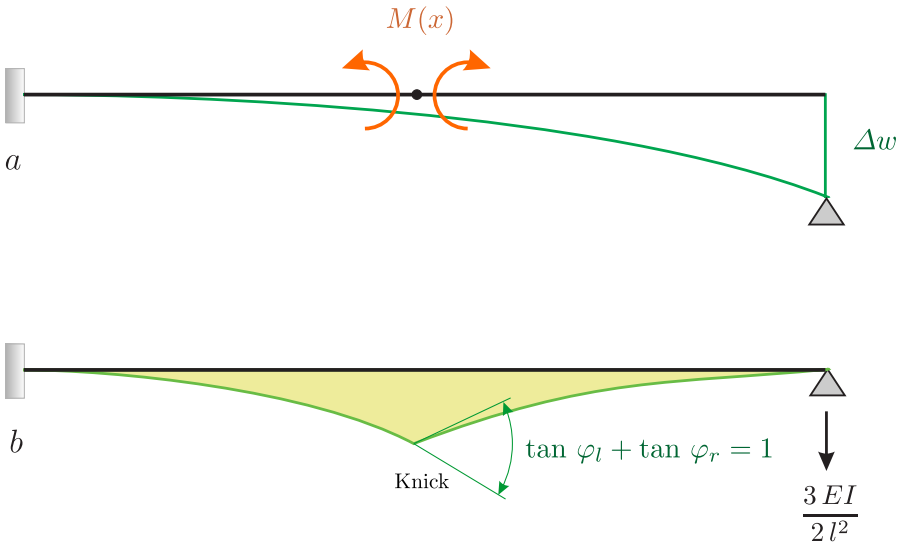


Bild 2.13. Auswertung einer Einflussfunktion bei Lagersenkung, **a)** Lagersenkung **b)** Einflussfunktion $G_2(y,x)$ für $M(x)$

$$\mathscr{B}(G_2, w) = -M(x) - V_2(l)\, w(l) = 0\,, \tag{2.47}$$

oder

$$M(x) = -V_2(l)\, w(l) = -\text{Lagerkraft aus Einflussfunktion} \times \text{Lagersenkung} \tag{2.48}$$

Das Minus in $-V_2(l)\, w(l)$ kommt aus dem Minus, das vor dem zweiten Teil von Betti steht

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \int_0^l \ldots\, dy + [\ldots]_0^l - [V_2\, w + \ldots]_0^l - \int_0^l \ldots\, dy = 0\,. \tag{2.49}$$

Fassen wir das als Regel:

Bei einer Lagerbewegung geschieht die Auswertung einer Einflussfunktion durch Multiplikation der zur Einflussfunktion gehörigen Lagerkraft mit dem Lagerweg $\times(-1)$

2.3.5 Temperaturänderungen

Auch bei Temperaturänderungen ΔT hat man kein p. Hier benutzt man die **Mohrsche Arbeitsgleichung**

$$\bar{1} \cdot \delta = \ldots + \int \bar{M}\, \alpha_T\, \frac{\Delta T}{h}\, dx + \int \bar{N}\, \alpha_T\, T\, dx\,. \tag{2.50}$$

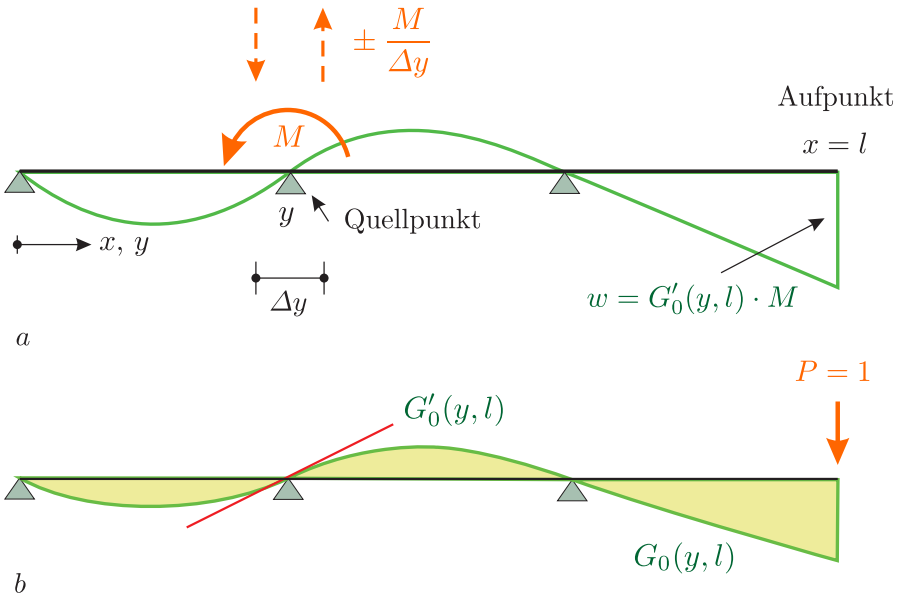


Bild 2.14. Der Einfluss eines Momentes hängt von der Neigung der Tangente an die Einflussfunktion im Quellpunkt, am Ort von M, ab, **a)** Biegelinie aus dem Moment über dem Lager, **b)** Einflussfunktion für Durchbiegung des Kragarmendes

Diese Terme kommen übrigens aus einer starken Einflussfunktion. Man könnte mit ihnen deshalb auch die Änderungen von Schnittgrößen aus Temperatur verfolgen, wenn $\bar{M}$ und $\bar{N}$ die Momente und Normalkräfte der Einflussfunktion für die Schnittkraft sind, siehe Kap. 7.2.1.

2.3.6 Die Kette der Einflussfunktionen

Es beginnt mit der Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Verschiebung bzw. die Durchbiegung in einem Punkt x und die Ableitung nach dem Aufpunkt x führt dann zu den anderen Einflussfunktionen, wie in Bild 2.12 gezeigt.

Man kann die Einflussfunktion auch **direkt differenzieren**

$$u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \qquad \rightarrow \qquad N(x) = \int_0^l EA\, \frac{d}{dx}\, G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,, \tag{2.51}$$

was aber als Differentiation eines Integrals nach einem Parameter gilt und da muss man aufpassen.

Theoretisch muss man in zwei Schritten vorgehen, wie wir am Beispiel einer Platte und der Einflussfunktion für das Moment $m_{xx}(\boldsymbol{x})$ erläutern wollen:

1. Zunächst muss man die Einflussfunktion $G_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ für das Moment m_{xx} durch Ableitung aus G_0 berechnen, $G_2 = m_{xx}(G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\,.$

2. Dann muss man den Grenzprozess

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G_2, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{2.52}$$

ausführen und das Ergebnis nach $m_{xx}(\boldsymbol{x})$ auflösen

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.53}$$

Der Praktiker wird natürlich sagen, ‚ich weiß, was heraus kommt', und das Ergebnis direkt hinschreiben.

2.3.7 Lastmomente differenzieren die Einflussfunktionen

Betrachten wir den Balken in Bild 2.14. Das Moment über dem Lager im Punkt y kann man in zwei Einzelkräfte $P = \pm M/\Delta y$ auflösen, die untereinander den Abstand Δy haben. Ist $G_0(y, l)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung am Kragarmende $x = l$, dann ist

$$w(l) = \lim_{\Delta y \to 0} (G_0(y + 0.5\,\Delta y, l) - G_0(y - 0.5\,\Delta y, l)) \cdot \frac{M}{\Delta y} = \frac{d}{dy}\, G_0(y, l) \cdot M \tag{2.54}$$

die Durchbiegung am Kragarmende aus dem Moment M über dem Lager. Entscheidend für die Wirkung des Moments auf $w(l)$ ist also die **Steigung der Einflussfunktion** am Ort von M.

Ist also $G_0(y, x)$ die Einflussfunktion für $w(x)$, dann ist die Ableitung nach y die Einflussfunktion für $w(x)$, wenn ein Moment $M = 1$ über den Träger läuft.

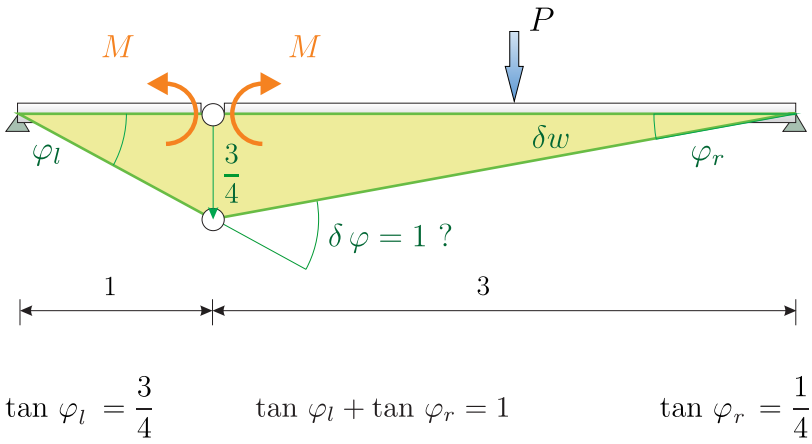
Das geht durch alle Einflussfunktionen durch. Ist $G_2(y, x)$ die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$, dann ist die Ableitung nach y die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$, wenn ein Wandermoment $M = 1$ über den Träger läuft.

2.3.8 Ein Rätsel

Bei der Herleitung der Einflussfunktion für Biegemomente wird oft die Spreizung des Gelenks, wie in Bild 2.15 gezeigt, mit $\delta\varphi = 1$ angegeben, wo man dann rätselt, was das denn genau bedeutet. Beträgt der Winkel 45° und meint $\delta\varphi = 1$ also den Tangens dieses Winkels?

Was eigentlich gemeint ist, sieht man in Bild 2.15 auch. Der linke Teil des Trägers wird um einen Winkel φ_l verdreht und der rechte um einen Winkel φ_r und zwar so, dass die Summe

$$\tan\,\varphi_l + \tan\,\varphi_r = 1 \tag{2.55}$$



$$\tan\varphi_l = \frac{3}{4} \qquad \tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1 \qquad \tan\varphi_r = \frac{1}{4}$$

Bild 2.15. Einflussfunktion für ein Moment

gleich 1 ist, denn dann erhält man prompt das gewünschte Resultat

$$-M \cdot \tan\varphi_l - M \cdot \tan\varphi_r + P \cdot \delta w = -M \cdot 1 + P \cdot \delta w = 0\,, \tag{2.56}$$

also $M = P \cdot \delta w$.

In den Statikbüchern wird oft nicht sauber getrennt zwischen dem Tangens, $\tan\varphi$, und dem Winkel φ selbst. Wenn die Autoren φ schreiben, dann meinen sie eigentlich immer den Tangens, und so auch hier

$$\delta\varphi = \varphi_l + \varphi_r = \tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1\,. \tag{2.57}$$

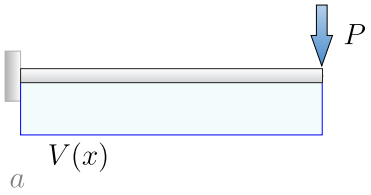
Um dem Leser aber einen Gefallen (?) zu tun, wird der Tangens oft als der Drehwinkel selbst genommen, $\tan\varphi \simeq \varphi$, und tritt dann prompt mit der Dimension *Rad* auf. Damit sind aber allen Missverständnissen Tor und Tür geöffnet, siehe Seite 108.

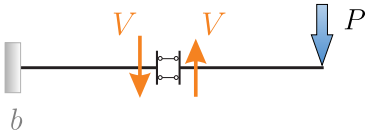
Dass der Tangens eine so dominante Rolle spielt, liegt daran, dass er die Weggröße ist, die zu M konjugiert ist (erste Greensche Identität), während der Winkel keinen ‚Partner' hat und daher nicht in den Grundgleichungen der Statik vorkommt, die ja praktisch alle Arbeitsgleichungen sind.

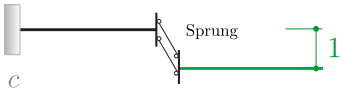
2.4 Statisch bestimmte Tragwerke

Die Einflussfunktionen für Kraftgrößen an statisch bestimmten Tragwerken sind **kinematische Ketten**, weil durch den Einbau des Zwischengelenks sich der Grad der statischen Bestimmtheit von $n = 0$ auf $n = -1$ reduziert.

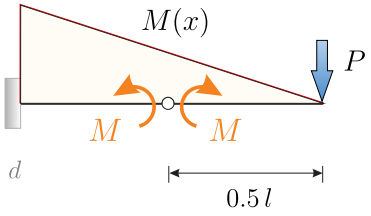
Die Schritte wiederholen sich. Man baut ein M- bzw. V-Gelenk in das Tragwerk ein, um die innere Schnittgröße sichtbar zu machen, ‚sie ans Licht zu zwingen', siehe Bild 2.16. Dann zeichnet man das so modifizierte Tragwerk noch einmal an und verformt es nun so, dass die beiden Kraftgrößen links und rechts vom Gelenk zusammen den Weg -1 gehen.

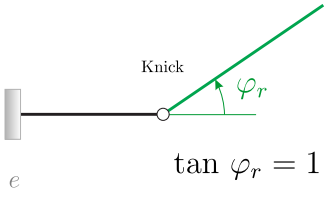






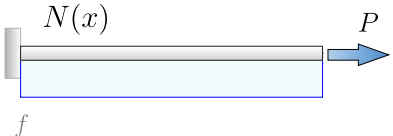
$$W_{1,2} = -V \cdot 1 + P \cdot 1 = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

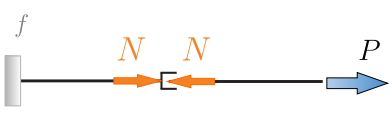


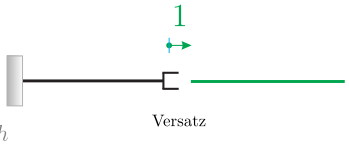


$$W_{1,2} = -M \cdot \tan\varphi_r - P \cdot \tan\varphi_r \cdot 0.5\,l = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

$$M = -P \cdot 0.5\,l$$





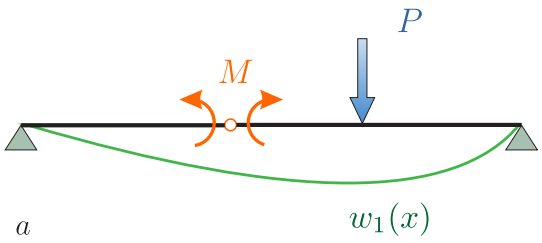


$$W_{1,2} = -N \cdot 1 + P \cdot 1 = W_{2,1} = 0 \text{ (keine Kräfte rechts)}$$

Bild 2.16. Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

Ein Beispiel soll dies erläutern. In Bild 2.17 wird die Einflussfunktion für ein Moment hergeleitet. Zunächst wird in den Träger ein Gelenk eingebaut, um das innere Moment $M(x)$ ‚sichtbar' zu machen, zu einem äußeren Momentenpaar zu machen. Dann wird der so modifizierte Träger noch einmal angezeichnet, aber ohne Belastung. Statt dessen wird er so verschoben, dass die Spreizung im Gelenk genau $\tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1$ beträgt. Weil der modifizierte Träger kinematisch ist, sind dazu keine Kräfte nötig.

Nach dem *Satz von Betti* gilt



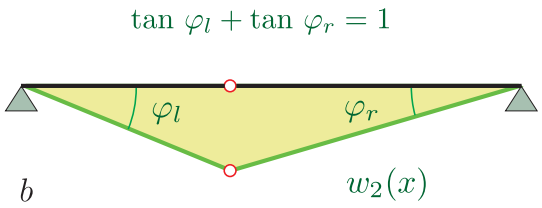
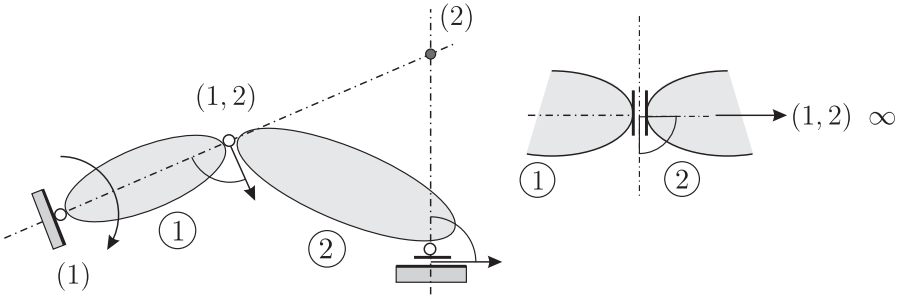


Bild 2.17. *Satz von Betti*—Einflussfunktion für ein Moment, **a)** Träger mit Belastung, **b)** dasselbe System unbelastet aber mit einer Spreizung $\tan\varphi_l + \tan\varphi_r = 1$ des Gelenks



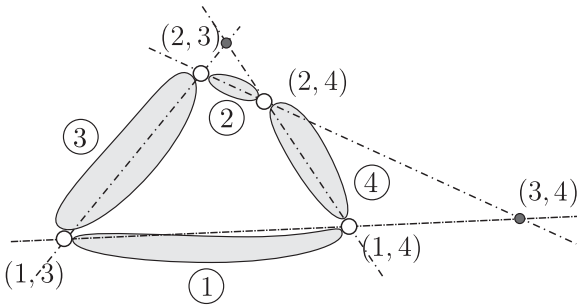


Bild 2.18. Regeln für die Polplankonstruktion

$$\mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} - W_{2,1} = 0\,. \tag{2.58}$$

Nun ist $W_{2,1} = 0$, weil die nicht vorhandenen Kräfte am Träger 2 keine Arbeit auf den Wegen $w_1(x)$ leisten. Die Arbeit der Kräfte am Träger 1 auf den Wegen $w_2(x)$ ist somit ebenso null

$$W_{1,2} = -M_L \tan \varphi_l - M_R \tan \varphi_r + P\, w_2(x) = -M \cdot 1 + P\, w_2(x) = 0 \tag{2.59}$$

oder

$$1 \cdot M = P\, w_2(x)\,, \tag{2.60}$$

was beweist, dass $w_2(x)$ die Einflussfunktion für $M(x)$ ist.

Bemerkung 2.1. Bekanntlich ändern sich die Kraftgrößen in einem statisch bestimmten Tragwerk nicht, wenn sich die Steifigkeiten ändern. Ein ‚akademischer' Beweis dieses Prinzips lässt sich wie folgt führen: wenn sich EI oder EA in einem Stab ändert, dann sind die zugehörigen f^+ Gleichgewichtskräfte, siehe Kapitel 5, und weil Gleichgewichtskräfte orthogonal sind zu allen Starrkörperbewegungen, also allen kinematischen Ketten (den Einflussfunktionen für N, M, V), ändern sich die Schnittkräfte nicht.

2.4.1 Polpläne

Bei der Konstruktion der Verschiebungsfiguren, die durch das Spreizen der Gelenke entstehen, hilft die Kenntnis der ***Drehpole*** der einzelnen Scheiben. Als Scheiben bezeichnet man einzelne Stäbe und Balken, oder biegesteife Verbindungen und unverschiebliche Konstruktionen aus diesen.

Hierzu muss man jedoch anmerken, dass diese lediglich Repräsentanten der entsprechenden Scheiben sind. Scheiben sind vielmehr unendlich große Mengen von Punkten, deren Verdrehung um den zugehörigen Hauptpol so erfolgt, dass sie sich dabei auf Geraden und nicht auf Kreisbahnen bewegen.

Die Regeln für die Konstruktion der Polpläne lauten, siehe Bild 2.18:

1. Jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen Scheibe.
2. Jedes Biegemomentengelenk bildet den Nebenpol der von diesem verbundenen Scheiben.
3. Die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers bildet den geometrischen Ort des Hauptpols der angeschlossenen Scheibe.
4. Der Nebenpol zweier, durch einen verschieblichen Anschluss (Normalkraft- oder Querkraftgelenk) verbundenen Scheiben liegt auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung im Unendlichen.

5. Die Hauptpole zweier Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden: $(i) - (i,j) - (j)$, z.B.: $(1) - (1,2) - (2)$.
6. Die Nebenpole $(i,j), (j,k), (i,k)$ dreier Scheiben I, J, K liegen auf einer Geraden: $(i,j) - (j,k) - (i,k)$, z.B.: $(1,3) - (1,4) - (3,4)$.

2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren

Am einfachsten beginnt man mit den festen Gelenklagern, denn diese sind, siehe Regel 1, der **Hauptpol** der angeschlossenen Scheibe. Momentengelenke bilden den **Nebenpol** der angeschlossenen Scheiben, siehe Regel 2.

Alle übrigen Pole bestimmt man nun mit Hilfe sogenannter ***Ortslinien***. Unter einer Ortslinie versteht man die Gerade, auf der sich gemäß den Regeln 3 bis 7 der Pol befinden muss.

- Der Schnittpunkt zweier Ortslinien für ein und denselben Pol ist der exakte geometrische Ort des Pols.
- Laufen verschiedene Ortslinien für ein und denselben Pol parallel, so liegt dieser als Schnittpunkt aller dieser Linien im Unendlichen.
- Liegt der Hauptpol einer Scheibe im Unendlichen bedeutet dies, dass sich die Scheibe nur parallel verschieben kann, ihre Verdrehung ist null.
- Liegt der Nebenpol zweier Scheiben im Unendlichen bedeutet dies, dass sich beide Scheiben um ihre jeweiligen Hauptpole um exakt denselben Winkel verdrehen. Also sind zum Beispiel Stäbe dieser beiden Scheiben, die vor der Verdrehung parallel zueinander waren, es auch danach.

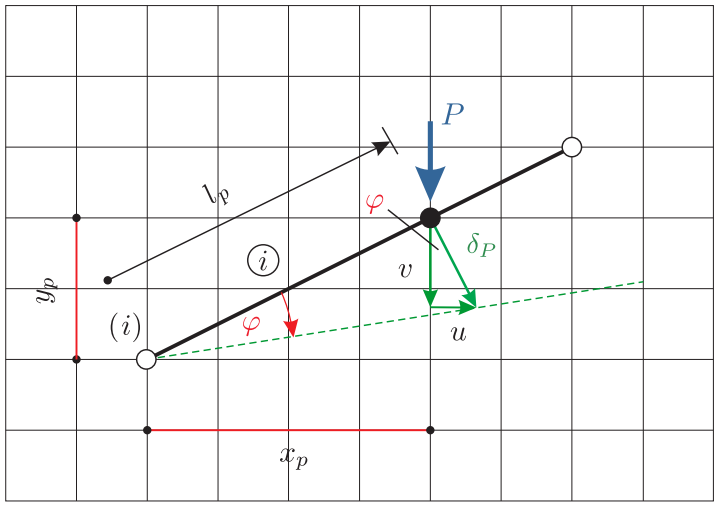
Mit diesen Regeln kann man die Verformungsfigur bestimmen, die durch das ‚normierte' Spreizen des M-, V- oder N-Gelenks entstehen. Normiert meint, dass das Gelenk so gespreizt wird, dass am Gelenk negative Arbeit auf einem Weg von 1 m geleistet wird. Der Teil der Verformungsfigur, der in Richtung der Wanderlast fällt, ist dann die gesuchte Einflusslinie. Wir sagen dazu auch, dass die Einflussfunktion die **‚Projektion'** der Verformungsfigur in Richtung der Wanderlast ist.

2.4.3 Berechnung der Verdrehungen

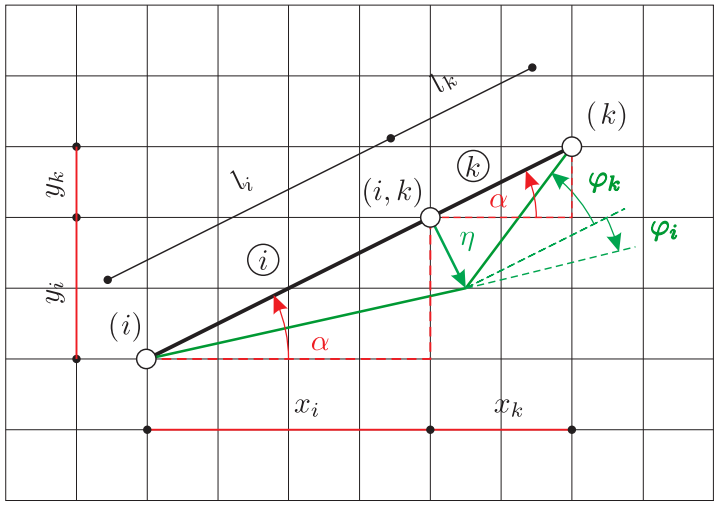
An verschiedenen Stellen benötigt man ferner die **Stabdrehwinkel** von kinematischen Ketten und ihre Abhängigkeiten untereinander. Diese Aufgabe ist sehr leicht und elegant zu lösen, wenn man sich den Zusammenhang zwischen der Verdrehung zweier Scheiben (i) und (k), die über den Nebenpol (i,k) miteinander verbunden sind, klar macht. Das Vorgehen wollen wir an Bild 2.19 b illustrieren.

Die Verdrehung φ_i des Stabes i (bzw. der Scheibe (i)) ist gegeben und die Verdrehung Stabes k in Abhängigkeit von φ_i ist gesucht.

Es bezeichne x_i den horizontalen Abstand des Hauptpols (i) vom Nebenpol (i,k) bzw. x_k den horizontalen Abstand des Hauptpols (k) vom Nebenpol



a



b

Bild 2.19. Verschiebungsberechnungen **a)** Berechnung der Verschiebungen u und v einer Kraft **b)** Berechnung der Verdrehungen zweier Scheiben zueinander

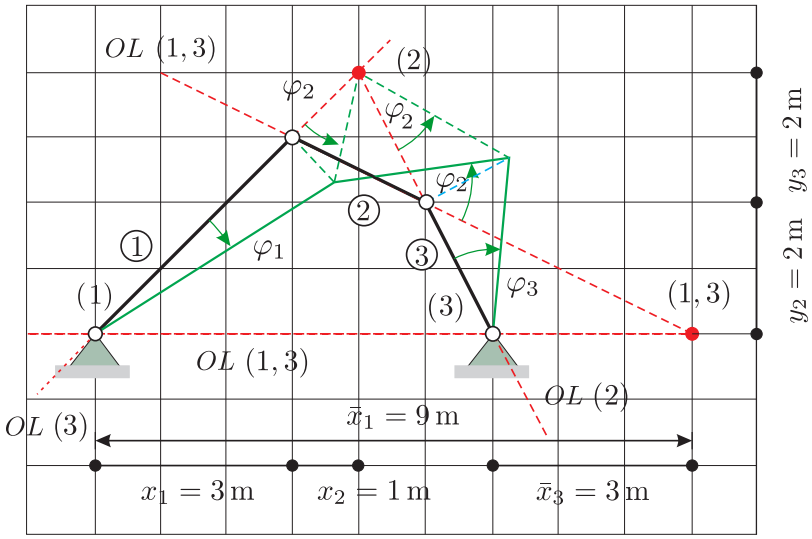


Bild 2.20. Berechnung der Verschiebungen der Scheiben bzw. Stäbe 2 und 3 bei vorgegebener Verdrehung von Scheibe 1, OL = Ortslinie

(i,k). Entsprechend bezeichnen y_i und y_k die vertikalen Abstände und l_i und l_k die Abstände der Hauptpole (i) bzw. (k) vom zugehörigen Nebenpol (i,k).

Damit gilt

$$\tan\varphi_i = \frac{\eta}{l_i} \qquad \tan\varphi_k = \frac{\eta}{l_k} \tag{2.61}$$

also

$$\boxed{l_i \cdot \tan\varphi_i = l_k \cdot \tan\varphi_k} \tag{2.62}$$

Die Hauptpole der beiden Scheiben und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen – wie immer – auf einer Geraden, die hier unter dem Winkel α geneigt ist, und daher gilt

$$\sin\alpha = \frac{y_i}{l_i} = \frac{y_k}{l_k} \tag{2.63}$$

oder aufgelöst nach den Längen

$$l_i = \frac{y_i}{\sin\alpha} \qquad l_k = \frac{y_k}{\sin\alpha} \tag{2.64}$$

und mit (2.62) folgt also

$$\boxed{y_i \cdot \tan\varphi_i = y_k \cdot \tan\varphi_k} \tag{2.65}$$

Ebenso ergibt sich aus

$$\cos\,\alpha = \frac{x_i}{l_i} = \frac{x_k}{l_k} \tag{2.66}$$

das Ergebnis

$$\boxed{x_i \cdot \tan\,\varphi_i = x_k \cdot \tan\,\varphi_k} \tag{2.67}$$

An einem System aus drei Scheiben, siehe Bild 2.20, wollen wir die Anwendung dieser Beziehungen erläutern. Gegeben ist der Winkel φ_1 mit dem Wert $\tan\varphi_1 = 1/3$. Gesucht sind die anderen beiden Drehwinkel φ_2 und φ_3. Die Verdrehung der Scheibe 2 und damit des Stabes 2 ergibt sich über (2.67) zu

$$\tan\varphi_2 = \frac{x_1 \cdot \tan\varphi_1}{x_2} = \frac{3 \cdot 1/3}{1} = 1\,. \tag{2.68}$$

Die Verdrehung der Scheibe 3 erhält man nun z.B. aus (2.65)

$$\tan\varphi_3 = \frac{y_2 \cdot \tan\varphi_2}{y_3} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \tag{2.69}$$

oder mit (2.67) über die Verdrehung der Scheibe 1

$$\tan\varphi_3 = \frac{\bar{x}_1 \cdot \tan\varphi_1}{\bar{x}_3} = \frac{9 \cdot 1/3}{3} = 1\,. \tag{2.70}$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Verdrehungen der Scheiben in Abhängigkeit von der Verdrehung der Scheibe 1 das Resultat

$$\begin{bmatrix} \tan\varphi_1 \\ \tan\varphi_2 \\ \tan\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \tan\varphi_1\,. \tag{2.71}$$

2.4.4 Berechnung der Verschiebung eines Punktes

Die Arbeit, die eine Last P auf der zugehörigen Verschiebung v leistet, ist $P \cdot v$, siehe Bild 2.19 a. Deshalb ist es häufig notwendig den Anteil v von δP zu ermitteln, der in Richtung der Last fällt. Das ist jedoch einfach, denn weil sich der Stab um seinen Hauptpol dreht, besteht zwischen der Auslenkung δP in senkrechter Richtung zum Stab und den übrigen Größen die Beziehung

$$\frac{v}{\delta P} = \frac{x_p}{l_p}\,, \tag{2.72}$$

woraus schon das Ergebnis folgt

$$v = x_p \cdot \frac{\delta P}{l_p} = x_p \cdot \tan\varphi\,. \tag{2.73}$$

Analog lässt sich auch die horizontale Verschiebung ermitteln, denn man erhält sofort

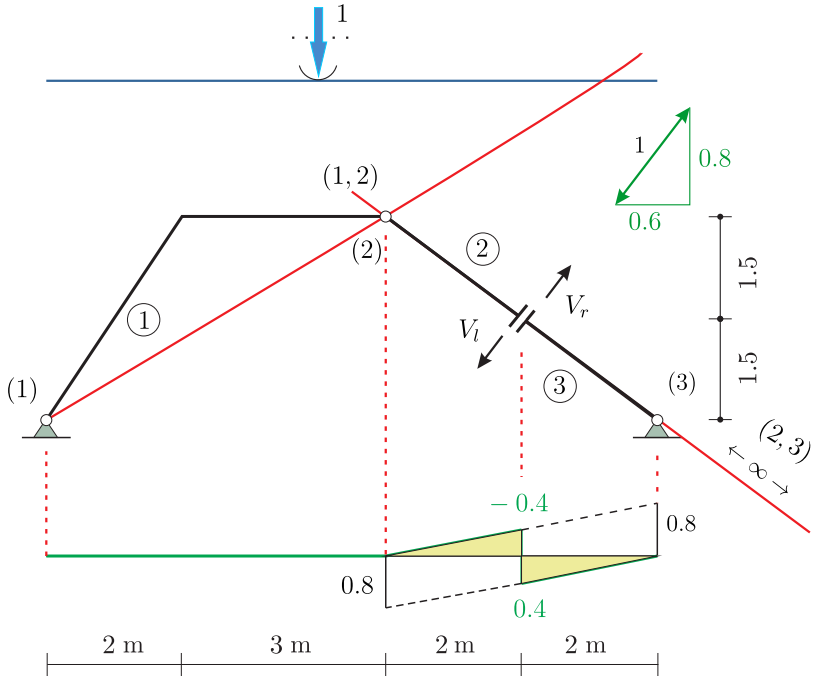


Bild 2.21. Vertikale Wanderlast und Einflussfunktion für eine Querkraft, $(1), (2), (3)$ sind die Hauptpole der Scheiben 1, 2 und 3 und $(1,2), (2,3)$ sind die Nebenpole von Scheibe 1 und 2 bzw. Scheibe 2 und 3

$$u = y_p \cdot \tan \varphi \,. \tag{2.74}$$

2.4.5 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.21

Im Bild 2.21 ist die Einflusslinie für die Querkraft in dem rechten, schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplans ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Querkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist gleichzeitig Ortslinie für den Hauptpol (2), genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). In dem Schnittpunkt der beiden Ortslinien liegt der Hauptpol (2).

Zur Generierung der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 0.8 m.

Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Bewegung der Scheiben in der Projektion nutzen, da wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Haupt-

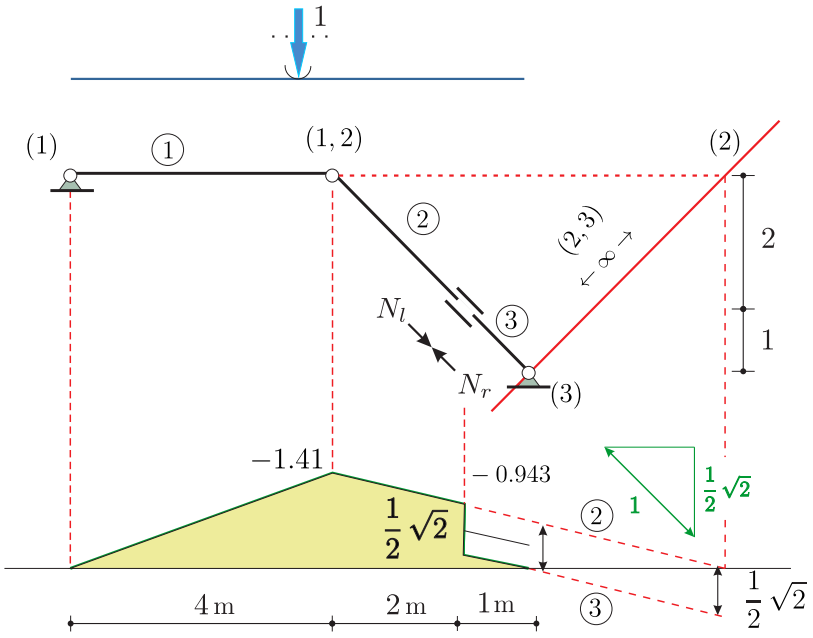


Bild 2.22. Einflussfunktion für eine Normalkraft bei vertikaler Wanderlast

pol (3) betragsmäßig 0.8 m ist und umgekehrt die Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) betragsmäßig ebenso 0.8 m.

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtes bilden die gesuchte Einflusslinie.

2.4.6 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.22

In Bild 2.22 ist die Einflusslinie für die Normalkraft in dem schräg verlaufenden Stab gesucht. Bei der Konstruktion des Polplanes ist zu beachten, dass die Ortslinie des Nebenpols (2,3) auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Normalkraftgelenkes im Unendlichen liegt, also auch auf derjenigen durch den Hauptpol (3). Diese Gerade durch den Hauptpol (3) ist auch Ortslinie für den Hauptpol (2) genauso wie die Verbindungsgerade von (1) und (1,2). Beide Ortslinien liefern in ihrem Schnittpunkt den Hauptpol (2).

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird im Normalkraftgelenk eine Spreizung von Eins erzeugt. Vertikal, also in Lastrichtung, bedeutet dies in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt und umgekehrt die

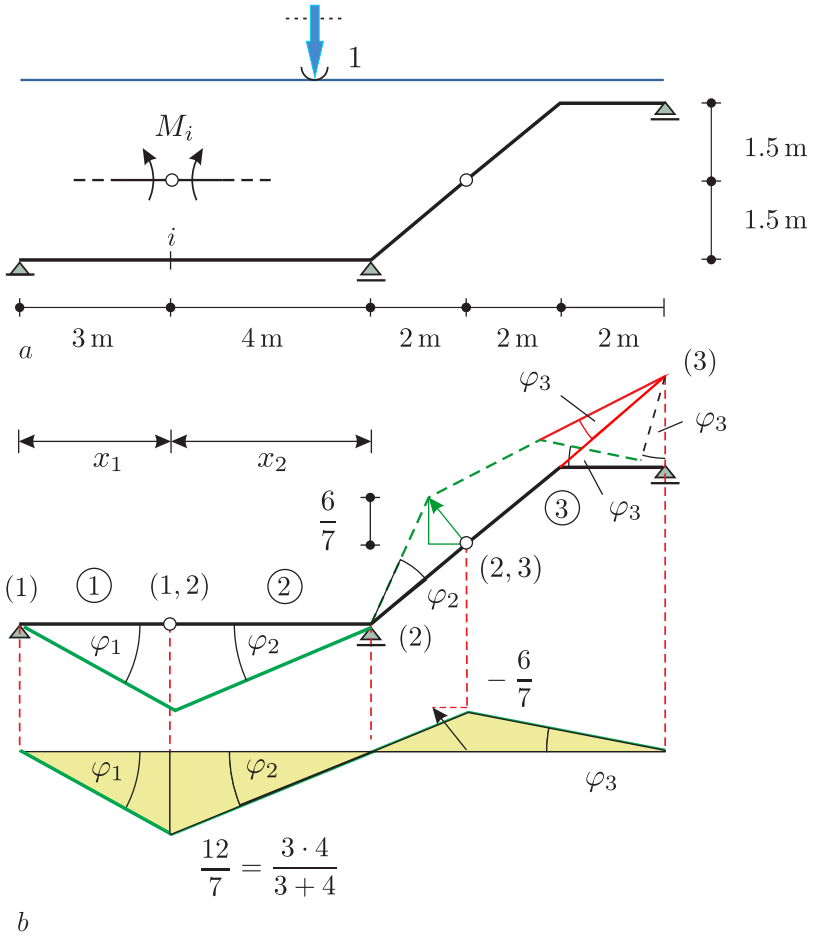


Bild 2.23. Einflussfunktion für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

Verschiebung der Scheibe 3 über dem Hauptpol (2) absolut genommen $0.5 \cdot \sqrt{2}$ m beträgt.

Die vertikalen Anteile der Bewegungen des Lastgurtes bilden wieder die gesuchte Einflusslinie.

2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.23

In Bild 2.23 ist die Einflusslinie für das Biegemoment im Punkt i gesucht, und so wird an der Stelle i zunächst ein Momentengelenk eingefügt. Das vormals statisch bestimmte System ist nun verschieblich. Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich dann über die Bedingung $\tan \varphi_r + \tan \varphi_l = 1$. Diese ist genau dann erfüllt, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

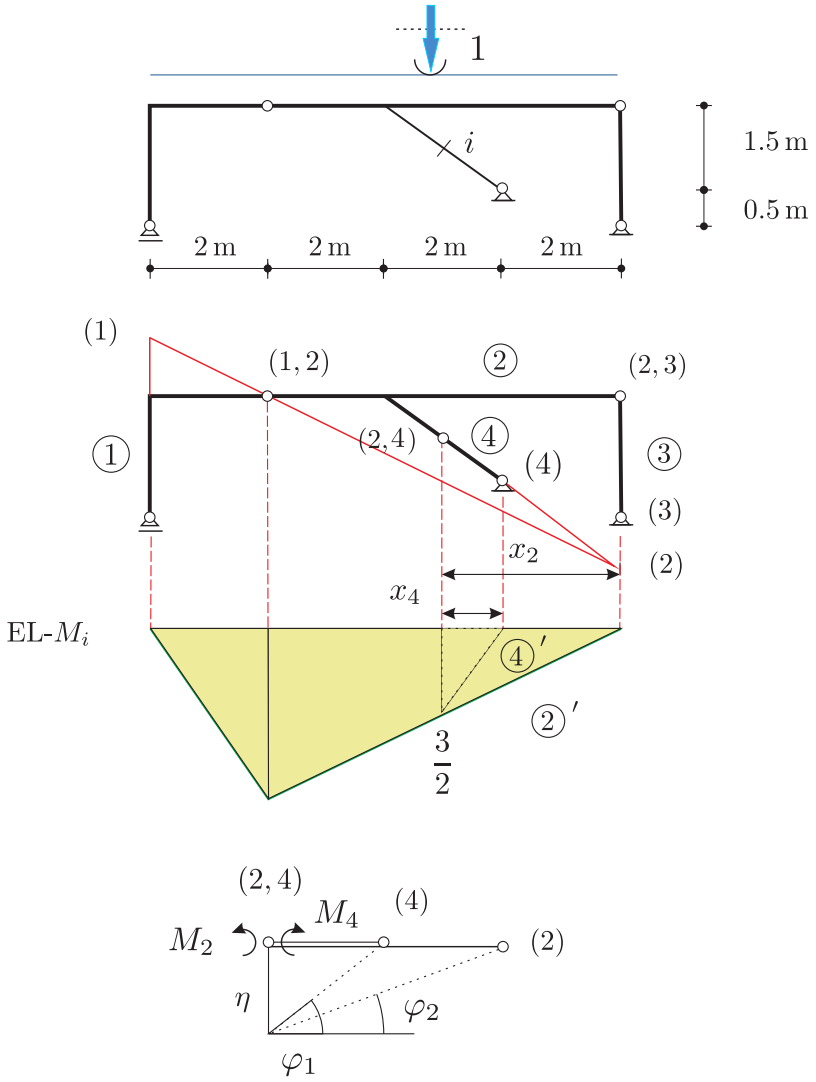


Bild 2.24. Einflussfunktion (-linie) für ein Moment bei vertikaler Wanderlast

$$\eta = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \tag{2.75}$$

hat.

Zum Schluss muss man noch die Verschiebungsfigur in die Lastrichtung projizieren. Die Verdrehungen der drei Scheiben in der Projektion stimmen mit den Verdrehungen in der Verschiebungsfigur überein. In den Hauptpolen ist die Verschiebung null und somit auch in der Projektion. Unter Beachtung dieser Zusammenhänge ist es im Allgemeinen möglich, sofort die Projektion

des Lastgurtes in der Verschiebungsfigur zu zeichnen, ohne vorher die komplette Verschiebungsfigur am verschieblichen System zu bestimmen.

2.4.8 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.24

In Bild 2.24 ist ebenfalls die Einflusslinie für ein Biegemoment in einem Punkt i gesucht. An der Stelle i wird zunächst wieder ein Momentengelenk eingefügt, wodurch das ehemals statisch bestimmte System verschieblich wird. Im Unterschied zum Beispiel in Bild 2.23 liegen beide Hauptpole der im Gelenk i, dem Nebenpol, miteinander verbundenen Scheiben, auf der rechten Seite des Gelenkes.

Die normierte Verschiebungsfigur ergibt sich nun über die Bedingung $\tan \varphi_4 - \tan \varphi_2 = 1$. Diese ist erfüllt, wenn die relative Verdrehung zwischen den beiden Scheiben 2 und 4 gleich eins ist, was genau dann der Fall ist, wenn die vertikale Verschiebung im Aufpunkt i den Wert

$$\eta = \frac{x_2 \cdot x_4}{x_2 - x_4} = \frac{3 \cdot 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} \tag{2.76}$$

hat.

2.4.9 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.25

In Bild 2.25 ist die Einflusslinie für die Querkraft im Punkt i gesucht und so wird an der Stelle i zunächst ein Querkraftgelenk eingefügt. Analog zum Beispiel in Bild 2.24 liegen beide Hauptpole der in diesem Gelenk verbundenen Scheiben rechts vom Aufpunkt i.

Zur Konstruktion der Einflusslinie wird zwischen den beiden Ufern des Querkraftgelenkes eine Spreizung von Eins erzeugt. Negative Arbeit wird dann geleistet, wenn sich die Scheibe 2 bzw. die Scheibe 3 im Uhrzeigersinn bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn um die zugehörigen Hauptpole drehen. Diese Drehrichtung findet man so auch in der Projektion wieder.

Vertikal, also in Lastrichtung, findet man in der Projektion eine relative Verschiebung der Scheiben zueinander im Gelenk und auch über den Hauptpolen von 1 m. Die relative Verschiebung über den Hauptpolen lässt sich zur Konstruktion der Scheiben in der Projektion nutzen, da hier wegen der Unverschieblichkeit der Hauptpole die Verschiebung der Scheibe 2 über dem Hauptpol (3) absolut 1 m ist und umgekehrt. Die Teile des Lastgurtes auf den Projektionen der Scheiben gehören zur gesuchten Einflusslinie.

2.4.10 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.26

In Bild 2.26 sind die Einflusslinien für die Auflagerkräfte in A und B gesucht. Nach dem Lösen der jeweiligen Fessel wird, da die Auflagerkräfte genau in Belastungs- und Projektionsrichtung liegen, der Punkt A und B um den Wert 1 entgegengesetzt zur positiven Richtung der Auflagerkraft, also nach unten, verschoben (negative Arbeit!).

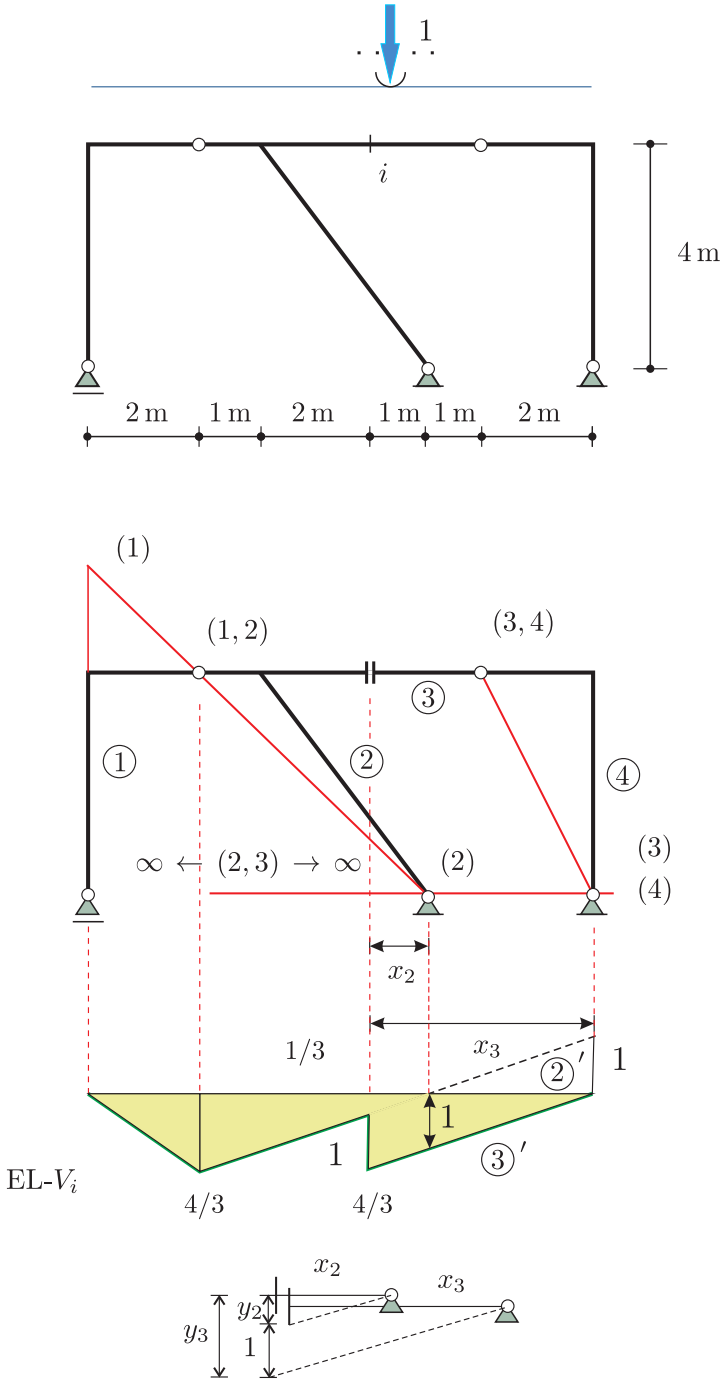


Bild 2.25. Einflussfunktion für eine Querkraft bei vertikaler Wanderlast

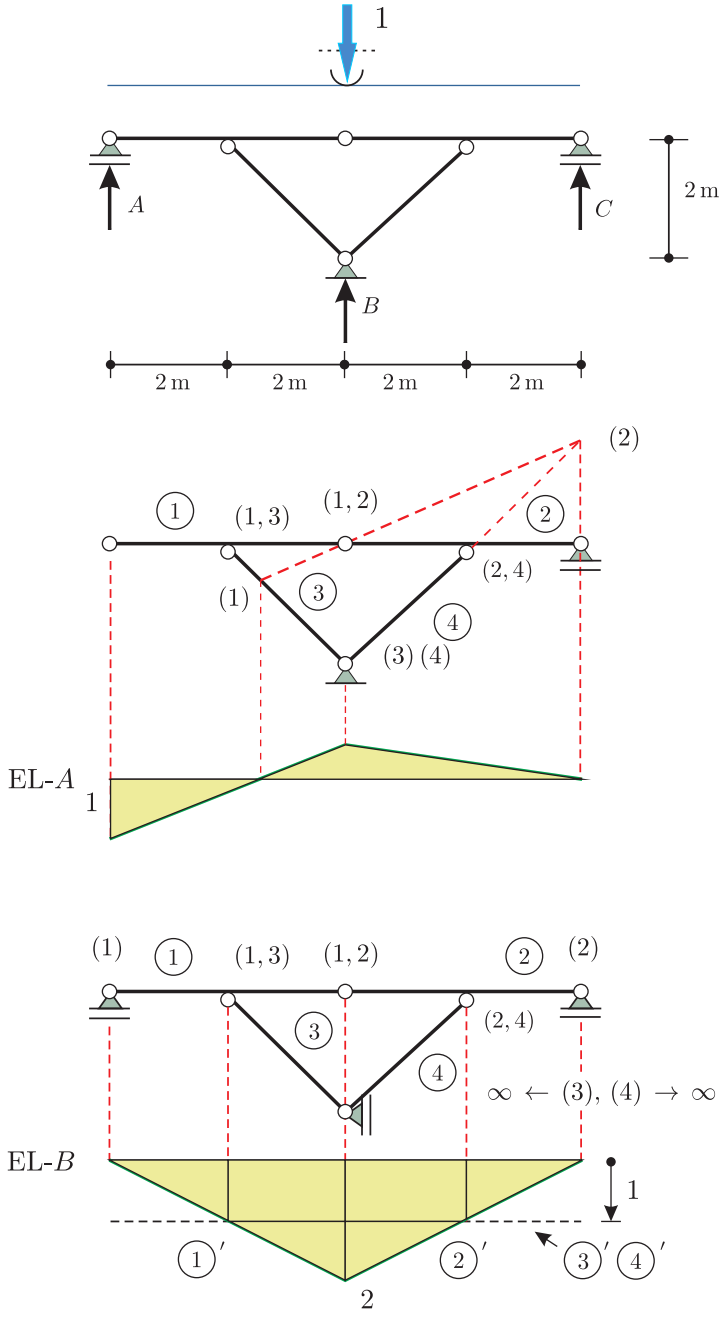


Bild 2.26. Einflussfunktionen für zwei Lagerkräfte

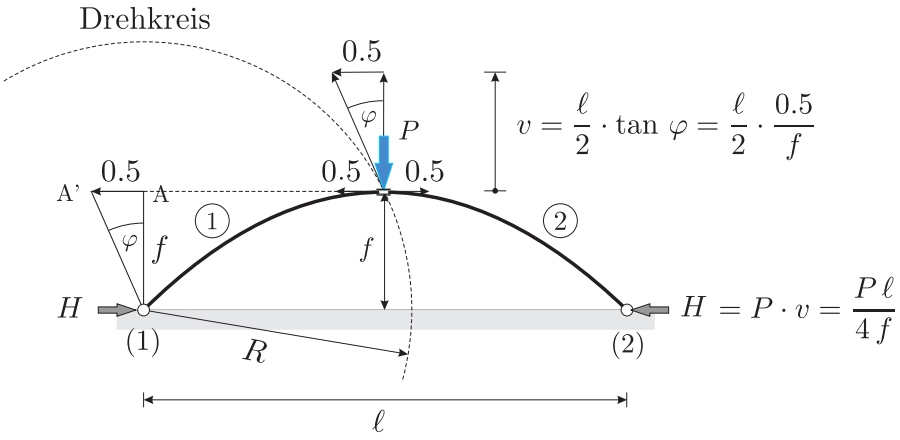


Bild 2.27. Spreizung der Bogenmitte um 1 Meter, eine für die Baustatik zentrale Figur, die zudem verdeutlicht, wie eng Statik und Kinematik zusammenhängen

Die Einflusslinie für die Auflagerkraft A lässt sich sofort ablesen, da der abgesenkte Punkt der Scheibe 1 zum Lastgurt und damit zur Einflusslinie gehört. Im Fall der Einflussfunktion für die Auflagerkraft in B gehört dieser abgesenkte Punkt jedoch zu den Scheiben 3 und 4, deren Hauptpole im Unendlichen liegen. Damit verschieben sich diese beiden Scheiben parallel ebenfalls um eins nach unten.

Auf diesen beiden Scheiben findet man nun die Bilder der zu den Scheiben 1 bzw. 2 gehörenden Nebenpole (1,3) bzw. (2,4). Die Verbindung von (1) mit (1,3) und von (2) mit (2,4) in der Projektion liefert uns die zum Lastgurt gehörenden Scheiben 1 und 2 und damit die Einflusslinie.

2.4.11 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.27

Der Kämpferdruck H eines Bogens, siehe Bild 2.27,

$$H = \frac{M}{f}\,, \tag{2.77}$$

ist gleich dem Feldmoment M am gleichlangen Einfeldträger dividiert durch den Stich f. Die richtige Balance zwischen H und f zu finden ist das Kernproblem bei der Konstruktion von Hängebrücken.

Eigentlich ist ein gelenkig gelagerter Bogen einfach statisch unbestimmt. Wenn aber die Belastung symmetrisch ist, dann ist im Scheitel des Bogens, die Querkraft null und daher kann man dann dort ein Querkraftgelenk einbauen und den Bogen somit statisch bestimmt machen.

In Bild 2.27 wird die Normalkraft $N = H$ im Zenith des Bogens durch den Einbau eines N-Gelenks ‚sichtbar gemacht'. Bei einer Spreizung der Bogenmitte um einen Meter dreht sich die linke Seite des Bogens um den Pol 1 und

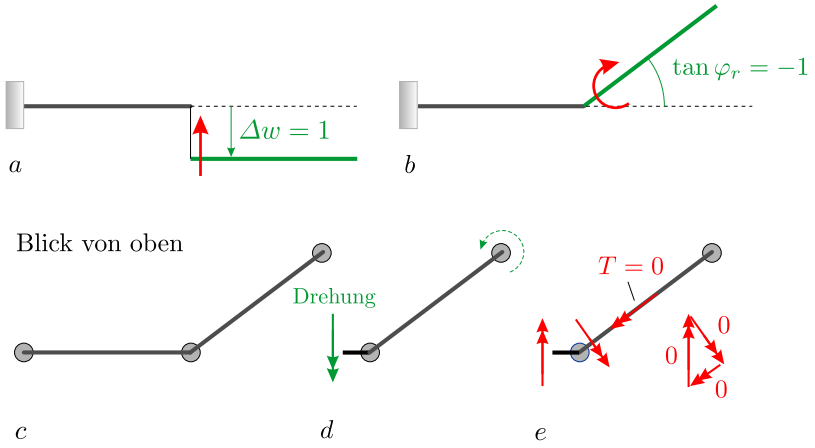


Bild 2.28. Einflussfunktionen am Kragträger und abgewinkelter Zweifeldträger

alle Punkte, die dieselbe Höhe f über dem Pol haben, schwenken um 0.5 m nach links, wie der Punkt A in Bild 2.27. Daran kann man $\tan\varphi = 0.5/f$ ablesen und alle anderen Punkte, die in der Horizontalen den Abstand $\ell/2$ vom Drehpol haben, schwenken um $v = \ell/2 \cdot \tan\varphi$ nach oben und somit ist $H = P \cdot v = P \cdot l/(4 \cdot f) = M/f$. Bei einer Gleichlast p gilt

$$H = 2 \cdot p \int_0^{\ell/2} x \cdot \tan\varphi \, dx = \frac{p \cdot \ell^2}{8 \cdot f} = \frac{M}{f} \,. \tag{2.78}$$

2.5 Kragträger

Zum Schluss noch eine Bemerkung zu den Kragträgern oder allgemeiner zu angehängten Tragwerksteilen. Warum bewegt sich immer nur die rechte Seite, das freie Ende, aber nicht der linke Teil, wenn man die Spreizung $\Delta w = 1$ bzw. $\tan\varphi_r = -1$ auslöst, siehe Bild 2.28.

Wollte man auch Bewegung in dem linken Teil sehen, dann müssten in der Schnittfuge gegengleiche Kräfte wirken, aber dann käme der rechte Teil ins ‚Trudeln', weil er nicht gelagert ist. Es geht also nur so, dass die Bewegung allein in dem rechten Teil stattfindet und zwar kräftefrei. Sobald eine Seite kinematisch ist, bewegt sich die andere Seite nicht.

Im Fall des abgeknickten Zweifeldträger auf ‚Kugellagern' in Bild 2.28 c können die Lager keine Torsionsmomente aufnehmen und so weicht der rechte Teil aus, dreht sich, wenn man das Momentengelenk (EF für M links vom mittleren Lager) spreizen will, Bild 2.28 d, d.h. im ersten Feld kommt keine Bewegung an, die EF ist dort null. Dasselbe gilt umgekehrt für das Moment rechts vom mittleren Lager. Der Zweifeldträger trägt wie eine Kette von zwei Einfeldträgern. Das Stützmoment ist immer null, [219] S. 145. Wenn die Träger

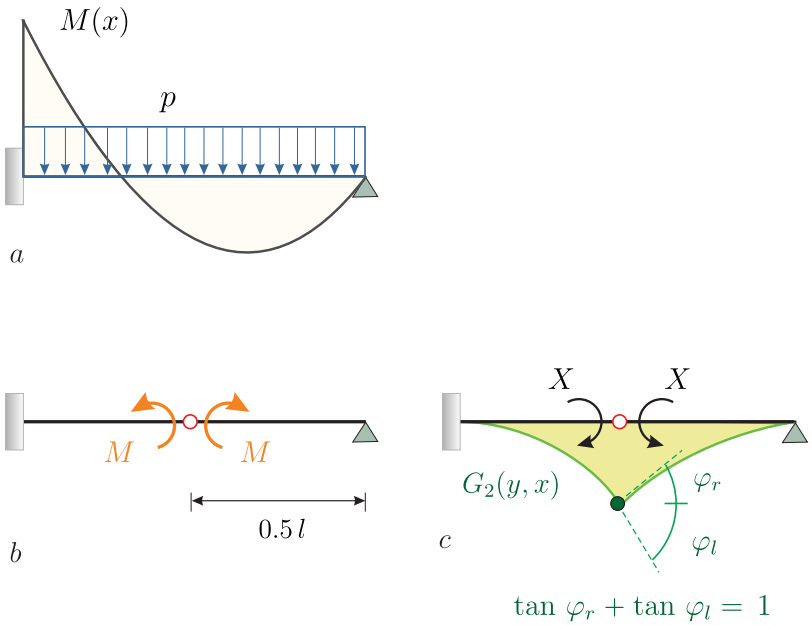


Bild 2.29. Gelenke machen die Schnittgrößen sichtbar

einen Winkel von 90° bilden, ist es evident, aber es gilt auch für jeden Winkel $\neq 180°$ dazwischen.

2.6 Statisch unbestimmte Tragwerke

Wenn das Tragwerk statisch unbestimmt ist, dann sind Kräfte nötig, um die beiden Gelenkhälften zu spreizen, aber auch dann ist $W_{2,1} = 0$ und der *Satz von Betti* reduziert sich wie oben auf

$$u218\, \mathscr{B}(w_1, w_2) = W_{1,2} = 0\,. \tag{2.79}$$

Betrachten wir den Balken in Bild 2.29. Um die Einflussfunktion für das Biegemoment in Feldmitte zu erzeugen, wird ein Momentengelenk eingebaut und die beiden Hälften so gegeneinander verdreht, dass sich eine Spreizung

$$\tan \varphi_r + \tan \varphi_l = 1 \tag{2.80}$$

einstellt. Dann integriert man von 0 bis x und von x bis zum Trägerende l

$$\mathscr{B}(G_2, w) = \mathscr{B}(G_2, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_2, w)_{(x,l)} = 0 + 0\,. \tag{2.81}$$

Die Randarbeiten an den Trägerenden sind null und an der Übergangsstelle, im Aufpunkt x, heben sich alle Randarbeiten weg, bis auf den Term

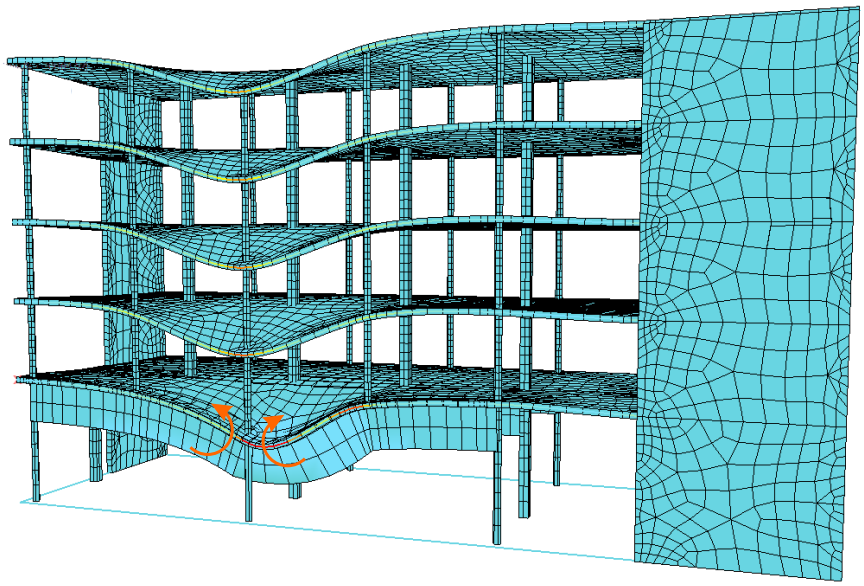


Bild 2.30. Einflussfunktion für das Moment in einem Unterzug (SOFiSTiK)

$$\underbrace{-M(x)\,w'(x_-)}_{\text{von links}} + \underbrace{M(x)\,w'(x_+)}_{\text{von rechts}} = -M(x)\cdot(\tan\varphi_r + \tan\varphi_l)\,, \tag{2.82}$$

und somit ergibt sich in der Summe

$$\mathscr{B}(G_2, w) = -M(x)\cdot\underbrace{(\tan\varphi_r + \tan\varphi_l)}_{=1} + \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy = 0 \tag{2.83}$$

oder

$$M(x) = \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{2.84}$$

Um die Spreizung zu erzeugen, müssen an dem rechten Träger links und rechts von dem Gelenk zwei gegengleiche Momente $\pm X$ wirken. In der Praxis macht man das so, dass man zunächst ein Momentenpaar $\pm X = 1$ aufbringt, die Relativverdrehung berechnet und dann das X so normiert, dass sich die gewünschte Spreizung von eins einstellt.

Das ergibt die folgende Bilanz. Die Arbeit der äußeren Kräfte am Original auf den Wegen $G_2(y,x)$ aus der Spreizung ist

$$W_{1,2} = \int_0^l G_2(y,x)\,p(y)\,dy - M\cdot(\tan\varphi_l + \tan\varphi_r)\,, \tag{2.85}$$

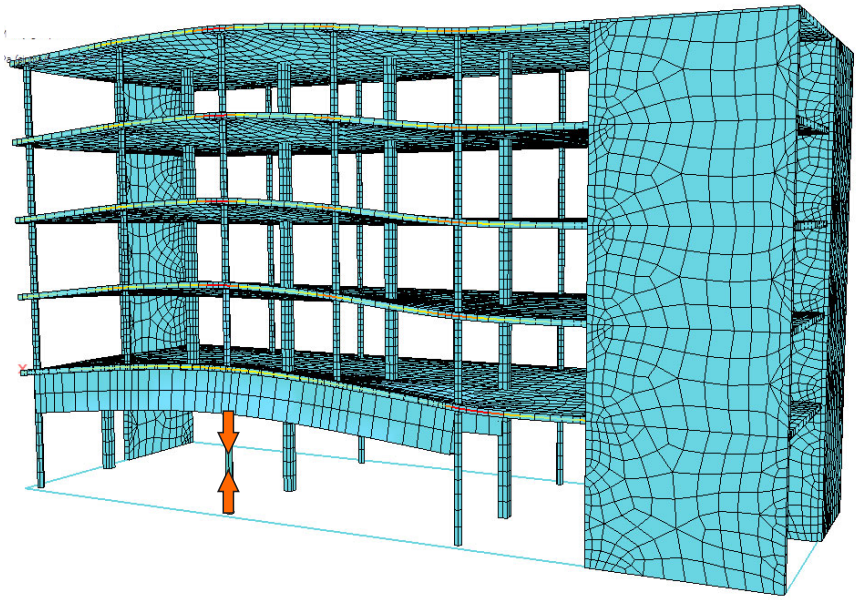


Bild 2.31. Einflussfunktion für die Normalkraft in einer Stütze (SOFiSTiK)

aber die Arbeit der Kräfte rechts auf den Wegen links ist null

$$W_{2,1} = -X \cdot w'(x) + X \cdot w'(x) = (-X + X)\, w'(x) = 0\,, \tag{2.86}$$

was immer so ist. Die Kräfte $\pm X$, also hier die Momente, die die Spreizung des Gelenks bewirken, sind gegengleich und weil die zu den beiden $\pm X$ konjugierte Weggröße des Originals im Aufpunkt stetig ist ($w'(x)$ springt nicht bei diesem Beispiel), ist die Arbeit der Kräfte $\pm X$ in der Summe null.

Sinngemäß wird so auch die Einflussfunktion für das Stützmoment in dem Unterzug in Bild 2.30 berechnet.

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen für Kraftgrößen reduziert sich der *Satz von Betti* auf die Gleichung

$$W_{1,2} = 0\,. \tag{2.87}$$

2.7 Einflussfunktionen für Lagerkräfte

Lagerkräfte können, wie andere Schnittkräfte auch, durch den Einbau eines entsprechenden Gelenks sichtbar gemacht werden. Die Einflussfunktion entsteht dann wie gewohnt durch die **Spreizung des Lagers**. Wenn der Boden

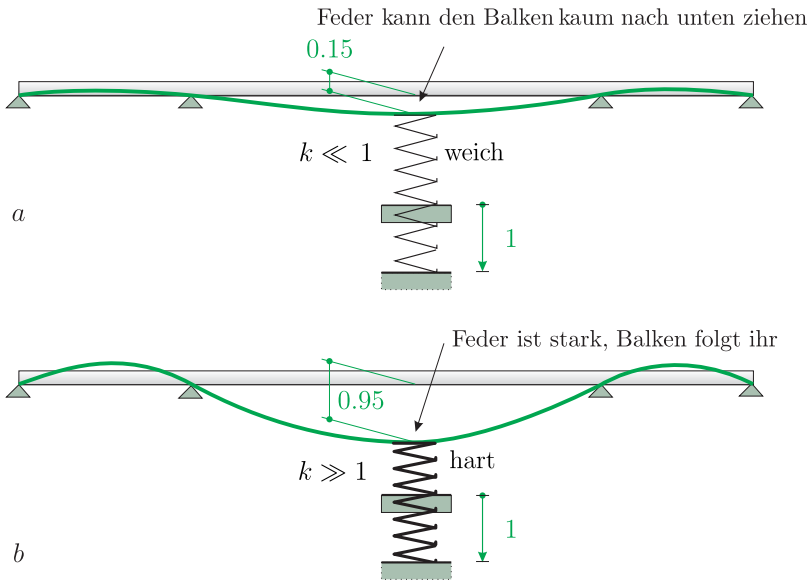


Bild 2.32. Eine weiche Feder fängt viel von der Fusspunktsbewegung auf, während eine harte Feder fast die ganze Bewegung an den Träger weitergibt und somit die Einflussfunktion für die Lagerkraft weiter ausschlägt als bei einer weichen Feder

starr ist, dann kann sich nur eine Seite des Lagers bewegen, die somit allein den vollen Weg 1 gehen muss und die 1 geht in voller Höhe in das Tragwerk, wie etwa in Bild 2.31.

Wenn der Boden elastisch ist, dann muss man durch eine lokale Analyse untersuchen, wieviel von der 1 der Boden beiträgt und wieviel das Tragwerk.

Die Kraft X, die nötig ist, um das Lager um 1 m auseinander zu drücken, beträgt

$$X = \frac{k_S\, k_B}{k_S + k_B} \qquad k_B = k\text{-Boden} \qquad k_S = k\text{-Struktur}\,. \tag{2.88}$$

Die Steifigkeit k_S der Struktur im Lager ermittelt man, indem man die Verbindung des Tragwerks mit dem Boden löst, und mit einer Kraft $X = 1$ gegen das Tragwerk drückt. Der Kehrwert der Verformung ist k_S.

Ein verwandtes Problem stellen **nachgiebige Stützen** (= Federn) dar, siehe Bild 2.32. Wenn die Feder sehr weich ist, dann wird der Weg 1, den der Fusspunkt der Feder geht, zu einem großen Teil von der Feder verschluckt und der Träger spürt wenig von der Spreizung, d.h. die Einflussfunktion verläuft sehr flach in dem Träger. Umgekehrt, wenn die Feder sehr hart ist, dann teilt sich der Weg 1 am Fuss der Feder dem Träger deutlich mit, d.h. die Feder nimmt relativ viel Last auf, weil die Einflussfunktion jetzt weit ausschwingt.

Eine **elastische Einspannung**, siehe Bild 2.33, kann durch eine Drehfeder mit der Steifigkeit k_φ simuliert werden. Bei einer Drehfeder beträgt der

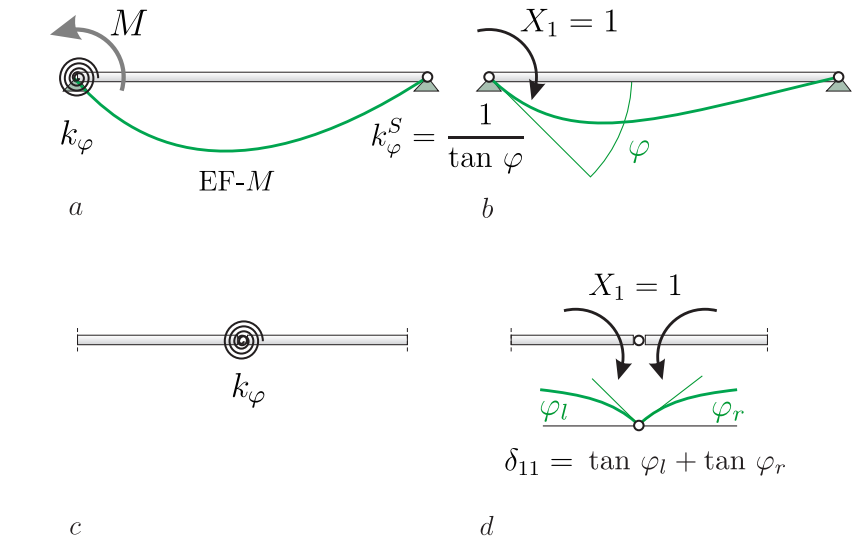


Bild 2.33. Einflussfunktion für eine elastische Einspannung

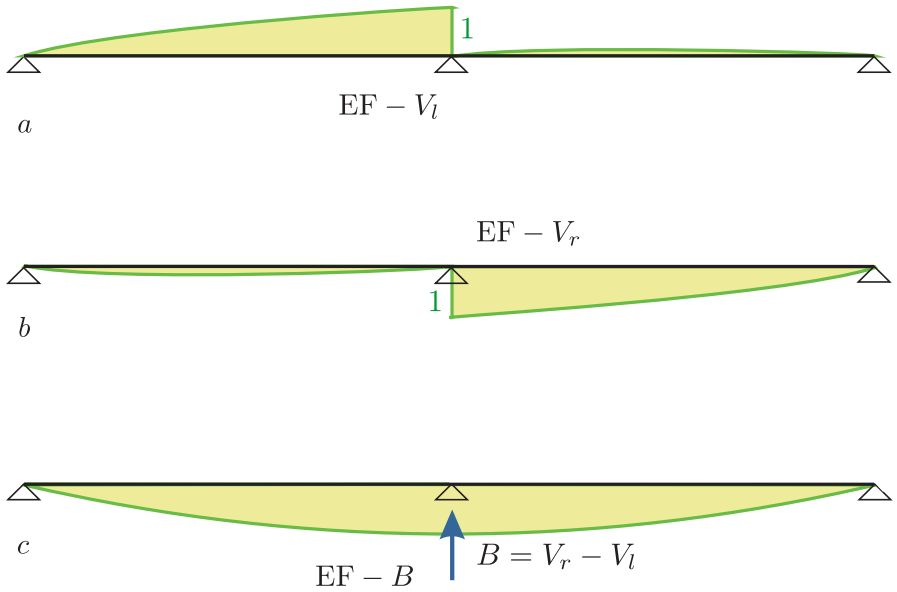


Bild 2.34. Einflussfunktionen für Querkräfte, **a)** V_l, **b)** V_r und **c)** die Lagerkraft $B = V_r - V_l$

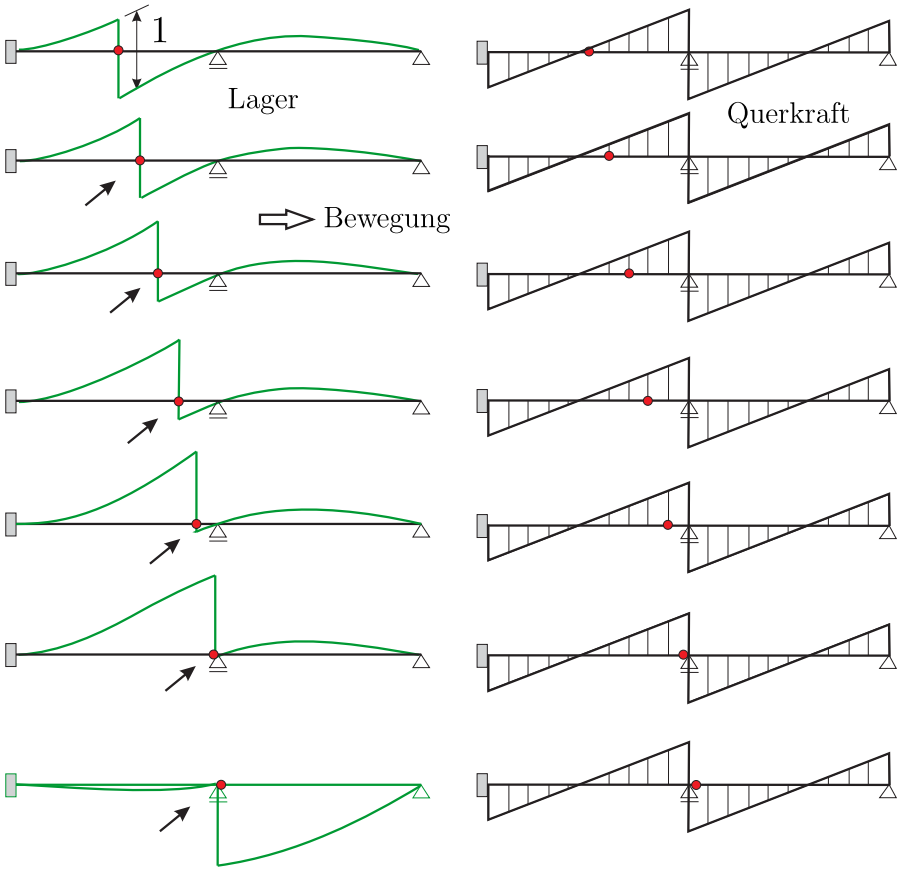


Bild 2.35. Wie die Einflussfunktion für die Querkraft über den Träger wandert und dabei im Grunde immer gleich bleibt, [92], (BE-FRAMES).

Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und dem Moment M

$$M = k_\varphi \tan \varphi \,. \tag{2.89}$$

Um die Drehfedersteifigkeit des Tragwerks zu ermitteln, denken wir uns das Tragwerk frei drehbar durch ein Gelenk mit der Einspannstelle verbunden und wir lassen ein Moment $X = 1$ wirken. Sei $\tan \varphi$ der Tangens des Drehwinkels, der sich dabei einstellt, dann beträgt die Drehsteifigkeit der Struktur (S)

$$k_\varphi^S = \frac{1}{\tan \varphi} \,, \tag{2.90}$$

und das Moment X, das für eine Spreizung 1 nötig ist, hat die Größe

$$X = \frac{k_\varphi^S \, k_\varphi}{k_\varphi^S + k_\varphi} \,. \tag{2.91}$$

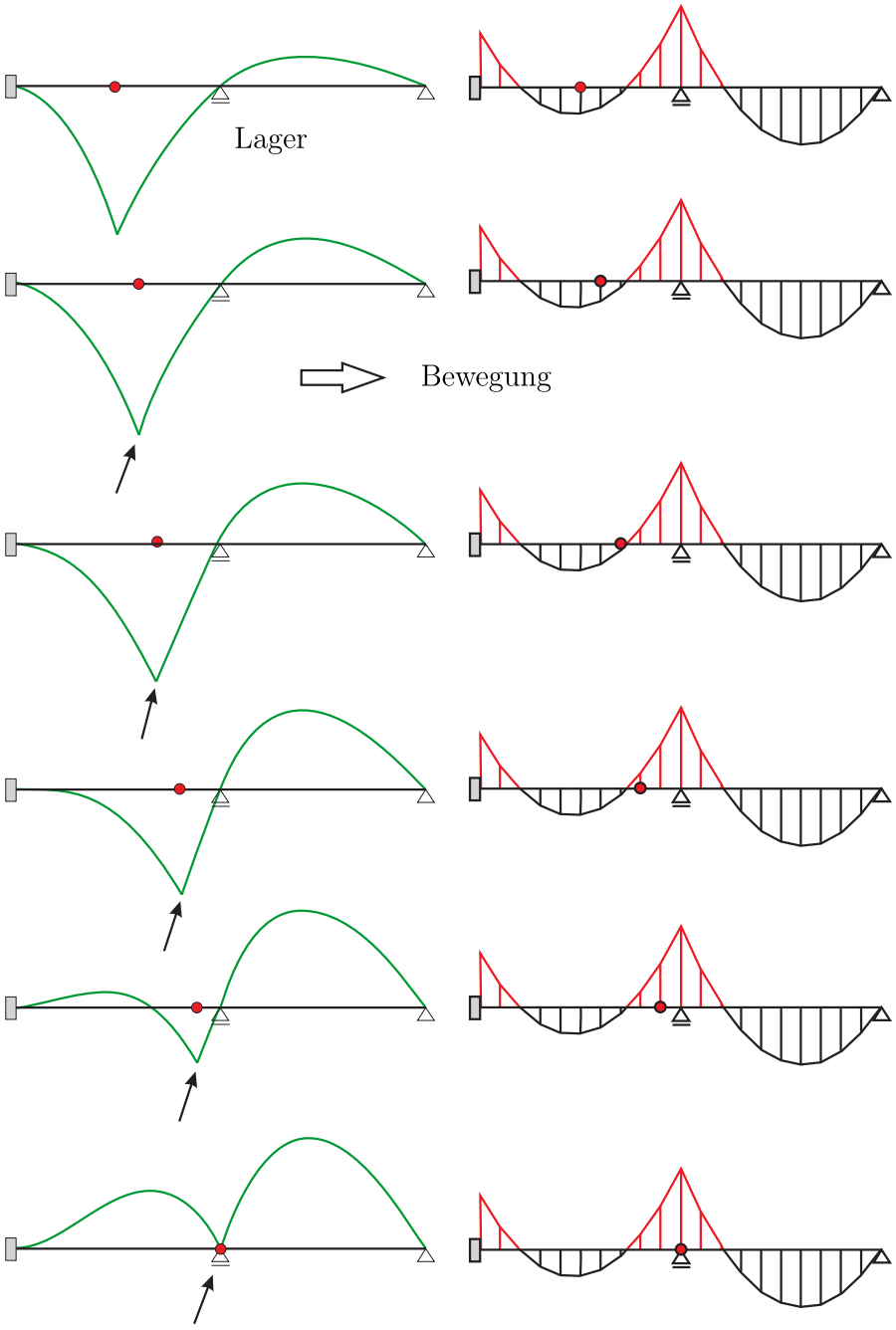


Bild 2.36. Wie die Einflussfunktion für das Biegemoment über den Träger wandert und dabei im Grunde immer gleich bleibt, [92], (BE-FRAMES).

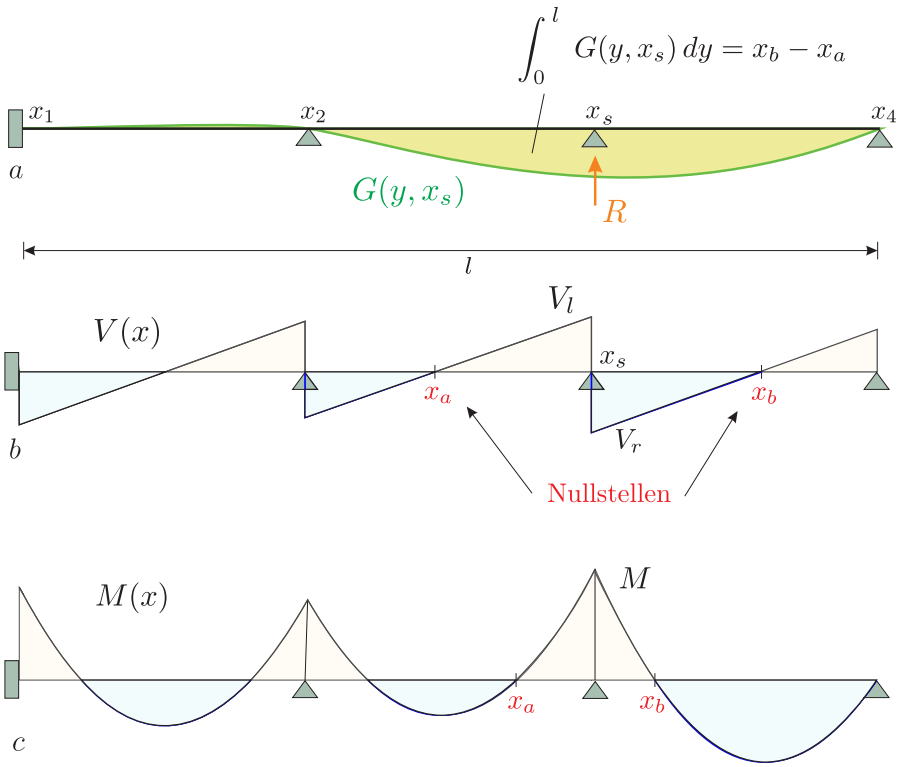


Bild 2.37. Durchlaufträger unter Gleichlast, **a)** die Einflussfunktion für die Lagerkraft, **b)** die Nullstellen der Querkraft, **c)** Momentenverlauf (BE-FRAMES)

2.8 Sprünge in Schnittgrößen

Momente M oder Querkräfte V können springen. Es macht daher keinen Sinn einen Aufpunkt genau in einen solchen Sprung, wie das Zwischenlager eines Balkens, zu legen, siehe Bild 2.34. Man kann nur eine Einflussfunktion für die linke Querkraft aufstellen und eine Einflussfunktion für die rechte Querkraft. Die Einflussfunktion für den Sprung $V_r - V_l$ ist identisch mit der Einflussfunktion für die Lagerkraft, die sich ja aus beiden Teilen zusammensetzt.

Im Angriffspunkt einer Einzelkraft $P = 1$ springt die Querkraft um eins und deswegen weisen Einflussfunktionen den typischen Sprung auf, siehe Bild 2.35. Rechnerisch kommt er durch die Spreizung des Querkraftgelenks in das System hinein.

Die Einflussfunktionen für Schnittmomente sind immer stetig, springen nicht, weil unter vertikalen Wanderlasten die Momente nicht springen, siehe Bild 2.36. Wollte man Sprünge sehen, dann müsste man die Ableitung

dG_2/dy der Einflussfunktion antragen. Diese Kurve wäre dann die Einflussfunktion für das Schnittmoment, wenn ein Wandermoment über den Träger läuft.

Wegen

$$\frac{dG_2}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{G_2(x, y + 0.5\,\Delta y) \cdot 1 - G_2(x, y - 0.5\,\Delta y) \cdot 1}{\Delta y} \tag{2.92}$$

dreht ein positives Wandermoment im Uhrzeigersinn, denn die Kraft $P = 1/\Delta y$ rechts vom Punkt y zeigt nach unten und die Kraft links davon zeigt nach oben. Dieses Kräftepaar $\pm 1/\Delta y$ ist ja dem Wandermoment äquivalent.

2.9 Die Nullstellen der Querkraft

Praktiker schätzen die Größe einer Lagerkraft über das Querkraftdiagramm ab. Je weiter die Nullstellen der Querkraft auseinander liegen, um so größer ist die Lagerkraft, siehe Bild 2.37.

Diese Abschätzung beruht auf der Formel $V'(x) = -p(x)$. Links vom Lager (Koordinate x_s) gilt

$$\int_{x_a}^{x_s} V'(x)\,dx = V_l - V(x_a) = V_l \tag{2.93}$$

und rechts vom Lager

$$\int_{x_s}^{x_b} V'(x)\,dx = V(x_b) - V_r = -V_r \tag{2.94}$$

und somit ergibt sich die Lagerkraft zu

$$R = V_r - V_l = \int_{x_s}^{x_b} p(x)\,dx + \int_{x_a}^{x_s} p(x)\,dx = \int_{x_a}^{x_b} p(x)\,dx\,. \tag{2.95}$$

In allen Lastfällen $p = c$ (konstante Streckenlast) ist bei einem Durchlaufträger die Lage und der Abstand der Nullpunkte gleich und der Abstand ist gleich der Fläche der Einflussfunktion

$$R = \int_0^l G(y, x_s) \cdot c\,dy = (x_b - x_a) \cdot c\,. \tag{2.96}$$

Ähnliches gilt für das Stützmoment $M = M_l = M_r$. Aus $M'(x) = V(x)$ folgt

$$M = M_l = \int_{x_a}^{x_s} V\,dx \qquad M = M_r = -\int_{x_s}^{x_b} V\,dx\,, \tag{2.97}$$

wenn jetzt x_a und x_b die Nullstellen im M-Verlauf bezeichnen, siehe Bild 2.37 c. Das Stützmoment ist also gleich dem Flächeninhalt von V auf der linken Seite bzw. von $-V$ auf der rechten Seite.

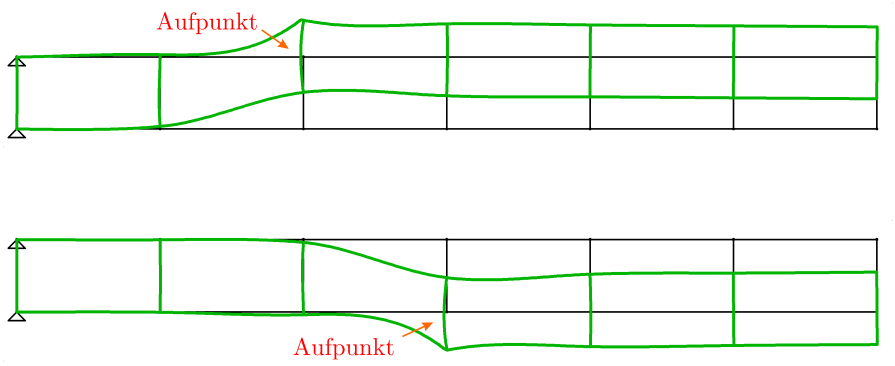


Bild 2.38. EF-$M(x)$. Die Momente in dem Vierendeelträger ändern sich nur wenig mit der Stellung der Last

2.10 Kernpunktmomente

In die Biegespannungen eines Trägers mit dem oberen und unteren Widerstandsmoment W_o und W_u

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{o,u}} < \sigma_{Rd} = \sigma_{zul} \tag{2.98}$$

gehen die Normalkräfte N und die Biegemomente M ein. Dieser Ausdruck ist äquivalent mit

$$\sigma = \frac{1}{W_{o,u}} \left[\frac{N \cdot W_{o,u}}{A} \pm M \right] = \frac{M_{ku,ko}}{W_{o,u}}\,, \tag{2.99}$$

wobei

$$M_{ko,ku} = N \cdot k_{o,u} \pm M \qquad EF{-}M_{ko,ku} = EF{-}N \cdot k_{o,u} \pm EF{-}M \tag{2.100}$$

die **Kernpunktsmomente** sind, wenn $k_{o,u} = W_{u,o}/A$ die Kernabstände oben und unten sind, [186].

Diese zweite Formulierung ist besser handhabbar, weil die beiden Einflussfunktionen für N und M, sowieso parallel laufen – ändert sich N, dann ändert sich auch M – und die Kernpunktmomente nur noch durch $W_{o,u}$ dividiert werden müssen.

2.11 Vierendeel als Kragträger

Die Option *Green's function anywhere* erlaubt es, mit den Tragwerken zu spielen und dabei zeigte es sich, dass die Einflussfunktionen für die Kragarmmomente in Vierendeel-Trägern, siehe Bild 2.38, nahezu konstant verlaufen.

Egal wo die Laufkatze steht, das Moment ändert sich kaum. Auch die Höhe der Momente selbst – im Bild die vertikale Auslenkung der EF – variiert nur wenig, wenn man den Aufpunkt ins nächste Gefach verschiebt.

2.12 Dirac Deltas

All diese Ergebnisse, die wir oben doch relativ mühsam durch Aufspalten des Integrationsbereichs in zwei Teile und dem genauen Verfolgen der einzelnen Terme hergeleitet haben, kann man mit dem Dirac Delta viel schneller hinschreiben.

Das Dirac Delta ist (mathematisch) eine **Linienlast** [N/m], die in allen Punkten y außer dem Aufpunkt x null ist

$$\delta_0(y-x) = 0 \qquad y \neq x\,, \tag{2.101}$$

und die bei einer virtuellen Verrückung w gerade die Arbeit $w(x) \cdot 1$ leistet

$$\int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy = w(x) \qquad x \in (0,l)\,. \tag{2.102}$$

Der Ingenieur interpretiert das Dirac Delta natürlich als Einzelkraft.

Die Biegelinie, die zu der Einzelkraft gehört, ist dann die Lösung der Differentialgleichung

$$EI \frac{d^4}{dy^4} G_0(y,x) = \delta_0(y-x) \tag{2.103}$$

und mit dieser Definition und aufgrund der obigen Eigenschaften des Dirac Deltas ergibt sich die Einflussfunktion für $w(x)$ sozusagen automatisch

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(G_0, w) &= \int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \\ &= w(x) - \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy = 0\,. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Die Einflussfunktionen für die zweite Weggröße, $w'(x)$, und die beiden Kraftgrößen, $M(x)$ und $V(x)$, ergeben sich analog durch Einführung weiterer Dirac Deltas

$\delta_0(y-x)$	Kraft $P=1$	$\delta_1(y-x)$	Moment $M=1$
$\delta_2(y-x)$	Knick $\Delta w' = 1$	$\delta_3(y-x)$	Versatz $\Delta w = 1$

mit entsprechenden Eigenschaften, siehe Bild 2.39,

$$\int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy = w(x) \qquad \int_0^l \delta_1(y-x)\, w(y)\, dy = w'(x) \tag{2.105a}$$

$$\int_0^l \delta_2(y-x)\, w(y)\, dy = M(x) \qquad \int_0^l \delta_3(y-x)\, w(y)\, dy = V(x)\,. \tag{2.105b}$$

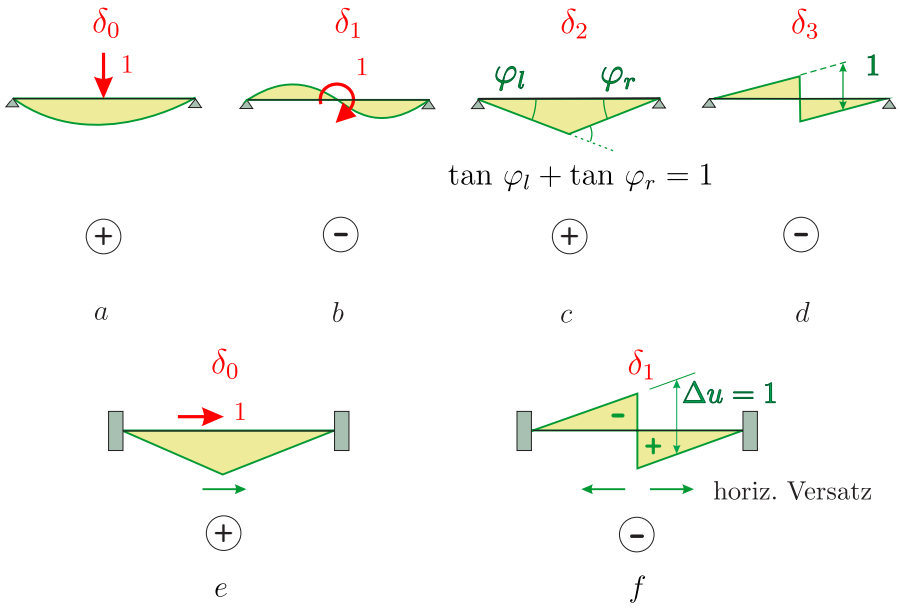


Bild 2.39. In der obersten Reihe sind die vier Einflussfunktionen eines Balkens für **a)** w, **b)** w', **c)** M und **d)** V, jeweils in der Balkenmitte, dargestellt. In der zweiten Reihe sieht man die Einflussfunktionen für einen Stab, **e)** u, **f)** N. Die Einflussfunktionen integrieren, $+$, bzw. differenzieren, $-$, die Belastung

Die Dirac Deltas sind sozusagen die Akteure, die aus der Biegelinie w die interessierende Größe herauspräparieren.

Das Operieren mit Dirac Deltas ist ein sehr eleganter Kalkül mit dem man sehr einfach die vielen Schritte, die zur Herleitung einer Einflussfunktion nötig sind, wie die Zweiteilung des Intervalls, die genaue Verfolgung des Sprungs in der Querkraft, etc., umgehen kann, aber auf der anderen Seite darf man nicht vergessen, dass man nur auf diesem analytischen Weg

$$\mathscr{B}(G_0, w) = \mathscr{B}(G_0^L, w)_{(0,x)} + \mathscr{B}(G_0^R, w)_{(x,l)} = 0 + 0 \tag{2.106}$$

die Ergebnisse wirklich herleiten kann. Wenn man danach weiß, was herauskommt, kann man die Abkürzung nehmen, aber vorher muss man wissen, was eigentlich herauskommt...

Und noch eine Anmerkung: Die Punktwerte $w(x)$ etc. entspringen gar nicht dem Gebietsintegral, wie es das Dirac Delta glauben machen will, sondern es ist die **Differenz zweier Randarbeiten**, (Querkraftsprung), die den Punktwert $w(x)$ liefert

$$\underbrace{(V_0^L(x) - V_0^R(x))}_{=1}\, w(x) = 1 \cdot w(x)\,. \tag{2.107}$$

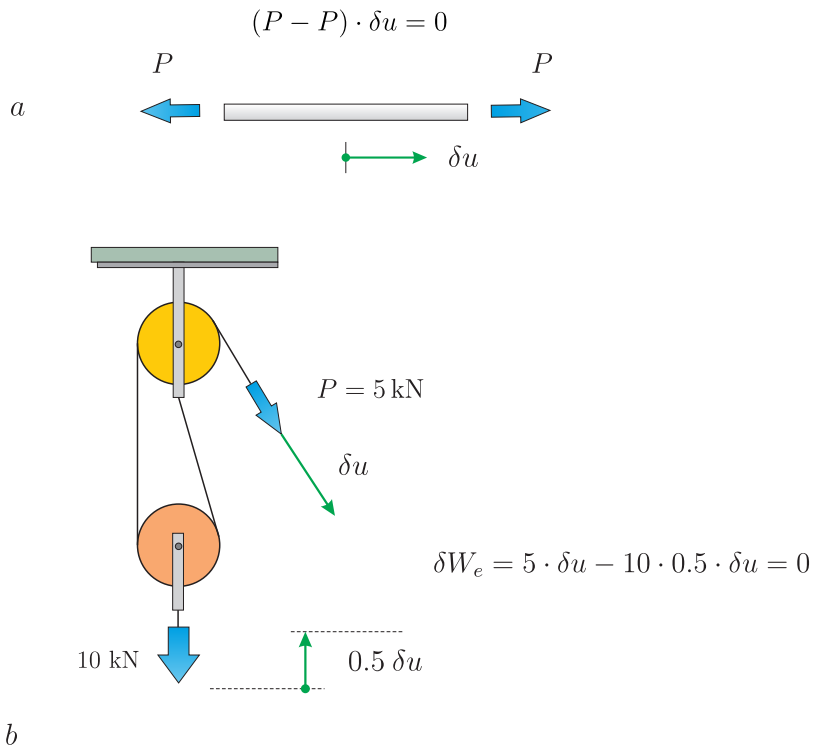


Bild 2.40. a) Gleichgewicht der Kräfte am Stab, *ut tenso sic vis*, **b)** Gleichheit der Arbeiten beim Flaschenzug

Das ist auch bei 2-D und 3-D Problemen so. Dann sind die Punktwerte die Grenzwerte von Randintegralen längs der kreisförmigen Öffnung, die den Aufpunkt umgibt, und die sich dann zu einem Punkt zusammenschnürt.

Die für uns wichtigste Eigenschaft von Dirac Deltas ist, dass man sie integrieren kann. Genauer gesagt, dass man feste Regeln dafür hat, was

$$\int_0^l \delta(y - x)\, \varphi_i(y)\, dy \tag{2.108}$$

bedeuten soll, denn so kann man die Dirac Deltas nahtlos in die Methode der finiten Elemente einfügen, kann man jedem Dirac Delta **äquivalente Knotenkräfte** zuordnen

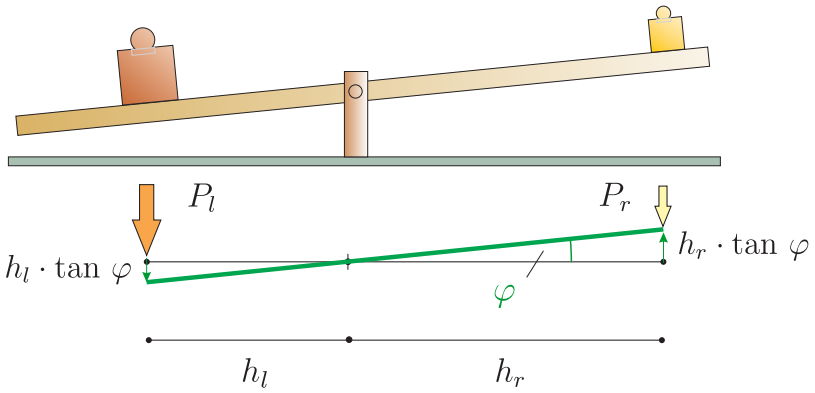


Bild 2.41. Schaukel

$$f_i = \int_0^l \delta_0(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = \varphi_i(x) \tag{2.109a}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_1(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = \varphi_i'(x) \tag{2.109b}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_2(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = M(\varphi_i)(x) \tag{2.109c}$$

$$f_i = \int_0^l \delta_3(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = V(\varphi_i)(x)\,. \tag{2.109d}$$

Hier bedeutet $M(\varphi_i)(x)$ das Moment der Ansatzfunktion φ_i im Aufpunkt x und analog ist $V(\varphi_i)(x)$ die Querkraft von φ_i im Aufpunkt x.

2.13 Dirac Energie

Das Geheimnis des Flaschenzuges ist, dass die Kraft, die am Seilende zieht, und das Gewicht dieselbe Arbeit verrichten, siehe Bild 2.40. Auch Einflussfunktionen drücken eine solche Balance aus, eine **Energiebalance**. Die Arbeit, die eine Einzelkraft $P = 1$ auf dem Weg $w(x)$ leistet

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy\,, \tag{2.110}$$

ist gleich der Arbeit, die die verteilte Belastung p auf dem Weg $G_0(y,x)$, der Durchbiegung des Balkens unter der Einzelkraft, leistet.

Der Faktor 1 ist wesentlich, weil ohne diesen Faktor die Dimensionen nicht übereinstimmen

$$[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] = 1 \cdot u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy = [\mathrm{m}\cdot\mathrm{N/m}\cdot\mathrm{m}]\,. \tag{2.111}$$

Das Ergebnis einer Einflussfunktion ist daher eine *Energie*, ein Energiequantum, das wir ***Dirac Energie*** nennen.

Die Dirac Energie ist die Arbeit, die die Belastung auf dem Wege der Einflussfunktion leistet.

Am besten sieht man das bei einer Schaukel, siehe Bild 2.41. Die Arbeit der beiden Gewichte ist bei jeder Drehung φ der Schaukel null

$$P_l\, u_l - P_r\, u_r = P_l\, \tan\varphi\, h_l - P_r\, \tan\varphi\, h_r = (P_l\, h_l - P_r\, h_r)\, \tan\varphi = 0\,, \tag{2.112}$$

weil die beiden Kräfte dem Hebelgesetz gehorchen, $P_l\, h_l = P_r\, h_r$.

In diesem Sinne gleicht jede Einflussfunktion einer Schaukel. Um die Querkraft $V(x)$ eines Trägers in einem Punkt x wie in Bild 2.7 zu berechnen, installieren wir ein Querkraftgelenk und spreizen das Gelenk so, dass die beiden Querkräfte dabei insgesamt die Arbeit $-V(x)\cdot 1$ leisten

$$-V(x)\, w(x_-) - V(x)\, w(x_+) = -V(x)\, (w(x_-) + w(x_+)) = -V(x)\cdot 1\,. \tag{2.113}$$

Die Arbeit der Punktlast P auf der Verschiebung w, die durch die Spreizung des Gelenks ausgelöst wird, muss genau das Gegenteil davon sein

$$\underbrace{-V(x)\cdot 1 + P\, w}_{W_{1,2}} = 0\,, \tag{2.114}$$

wie aus dem *Satz von Betti*, $W_{1,2} = W_{2,1}$ folgt. (Die Arbeit $W_{2,1}$ ist null, siehe die folgende Bemerkung, und daher auch die Arbeit $W_{1,2} = 0$).

Zu jeder Schnittgröße gehört also ein gewisser **Mechanismus**, eine gewisse Schaukel, siehe Bild 2.42, und wenn wir das Gelenk lösen und die Arbeit berechnen, die die Belastung auf den Wegen leistet, die durch die Spreizung des Gelenks ausgelöst werden, dann lernen wir, wie groß die Schnittgröße in dem Gelenk sein muss, damit sie die Arbeit der äußeren Belastung ins Gleiche setzt.

Bei einer FE-Berechnung behindern wir aber die freie Bewegung eines Tragwerks, wir legen dem Tragwerk sozusagen **Fesseln** an, weil die *shape functions* $\varphi_i(x)$ zu ‚ungelenk' sind, und daher bekommt das Gelenk **das falsche Signal**. Die Verschiebung im Fußpunkt von P ist ein Wert w_h

$$-V_h(x)\cdot 1 + P\cdot w_h = 0 \tag{2.115}$$

und nicht der exakte Wert w

$$-V(x)\cdot 1 + P\cdot w = 0\,, \tag{2.116}$$

und so ist $V_h(x) \neq V(x)$. ***Ein FE-Programm verschätzt sich bei den Dirac Energien***[4] Die Rückmeldung an das Gelenk ist fehlerhaft.

[4] Vor allem bei Flächentragwerken. Bei Stabtragwerken ist die Kinematik außerhalb dem Element mit dem Aufpunkt meist exakt, es sei denn EA oder EI sind nicht konstant.

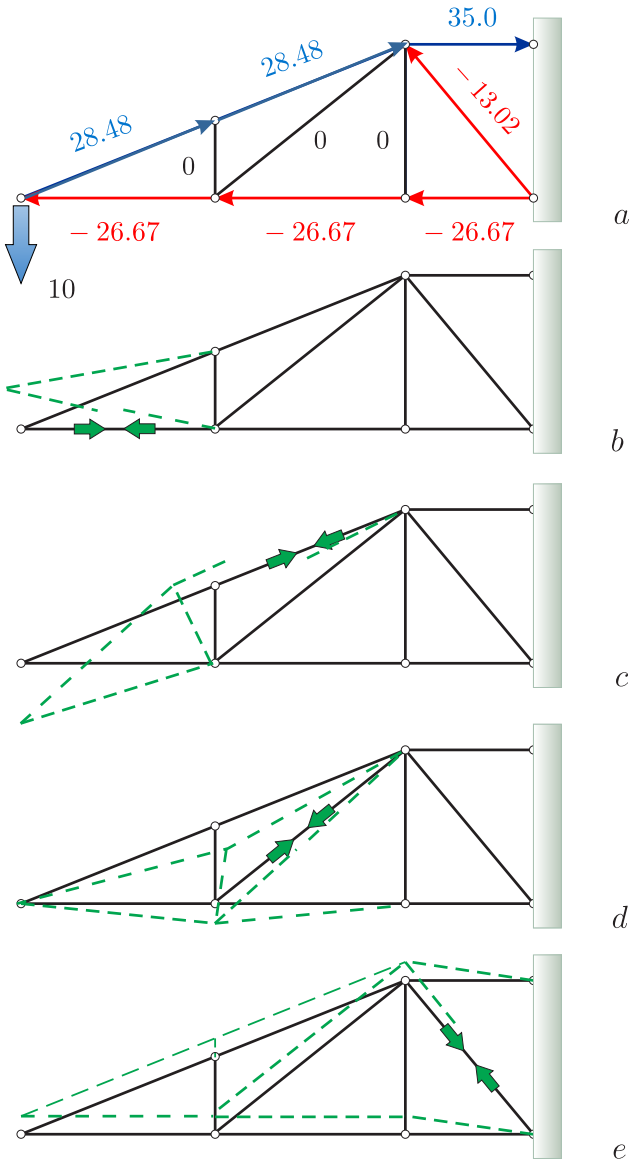


Bild 2.42. Die Kinematik eines Tragwerks bestimmt den Abtrag der Kräfte (BE-FRAMES)

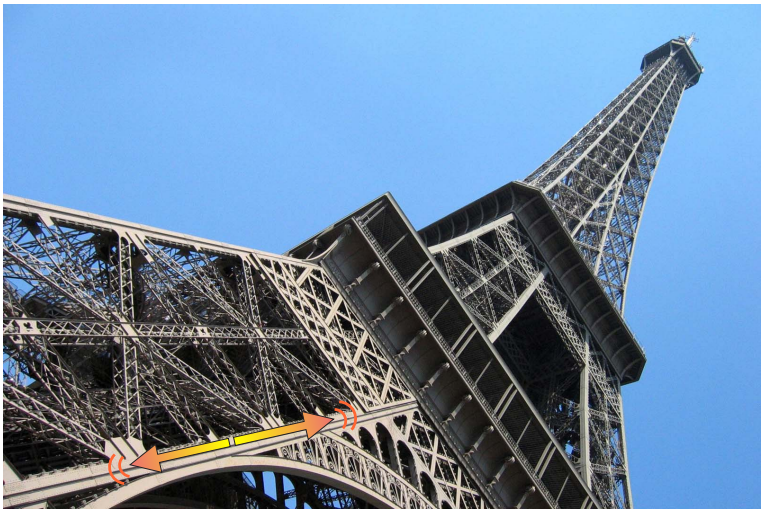


Bild 2.43. Wenn eine Punktlast an der Turmspitze angreift, dann ist die Normalkraft in der Strebe proportional zur Auslenkung der Turmspitze, die durch die Spreizung der Strebe in Achsrichtung verursacht wird

Wir ziehen also den Schluss, dass die Kinematik eines FE-Netzes, die Feinheit der Details, die Genauigkeit der FE-Lösung bestimmt.

Netz = Kinematik = Präzision der Einflussfunktionen = Güte der Ergebnisse

Wir können jetzt auch sagen, was ein **guter Entwurf** ist. Die Schaukellogik

$$V(x) = \frac{P \cdot w}{1} = P \cdot \frac{w}{1} \qquad \leftarrow \qquad \text{mache } w \text{ klein!} \tag{2.117}$$

signalisiert, dass ein Entwurf dann gut ist, wenn das, was von der auslösenden Bewegung, also hier der Spreizung 1 des Querkraftgelenks (im Nenner), im Fußpunkt der Punktlast P ankommt, das ist das w im Zähler, so klein wie möglich ist, weil dann $V(x)$ nur ein Bruchteil der Belastung P sein wird.

Wirf einen Stein ins Wasser und schau den Wellen zu! Je kleiner die Wellen sind, die die Last erreichen, um so besser. Der Hebel des Archimedes ist (ganz bewusst) das Gegenteil eines guten Entwurfs. Drückt man das kurze linke Ende um eins nach unten, dann stellt sich am rechten Ende eine sehr große Verschiebung w ein, weswegen Archimedes nur eine kleine Kraft braucht, um die Welt aus den Angeln zu heben. Umgekehrt bedeutet dies aber auch, dass Archimedes lange, lange Wege gehen muss, um die Welt nur ein *Iota* zu heben.

Bemerkung 2.2. Glg. (2.117) macht noch einmal deutlich, dass Einfluss ein **Verhältnis** $w/1$ von zwei Verschiebungen ist, und daher ist es gleichgültig,

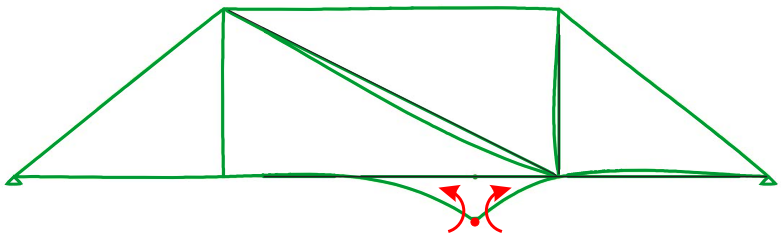


Bild 2.44. Fachwerk mit biegesteifen Knoten: Einflussfunktion für ein Moment im Zuggurt. Die Spreizung erzeugt keine Verschiebung in den Knoten und das Bild bestätigt damit die Zulässigkeit der Fachwerktheorie (BE-FRAMES)

ob die auslösende Spreizung 1 mm, 1 cm oder 1 m ist. Es kommt nur auf das Verhältnis von gespürter Bewegung zu auslösender Bewegung an.

Das Bild 2.43 soll deutlich machen, dass die Normalkraft in einer Strebe des Turms auf Grund einer Last $\boldsymbol{P} = \{P_x, P_y, P_z\}^T$ an der Spitze des Eiffelturms, davon abhängt, wie groß die Auslenkungen g_x, g_y, g_z sind, die die Spreizung der Strebe an der Spitze des Turms verursacht

$$1 \cdot N = P_x \cdot g_x + P_y \cdot g_y + P_z \cdot g_z \,. \tag{2.118}$$

Das Bild 2.44, demonstriert, dass die Kinematik die **Fachwerktheorie** bestätigt, mit der der Eiffelturm ja berechnet wurde (+ grafischer Statik(!)). Die Knoten verschieben sich bei der Spreizung des Aufpunktes nicht und so können Knotenkräfte keine Momente in dem Gurt erzeugen, d.h. die Knoten können gelenkig gerechnet werden.

Der Schadensfall in Bild 2.45 belegt eindrücklich, welche große und wichtige Rolle die Kinematik in der Statik spielt. Wir haben dieses Bild auch zu Ehren von Prof. C. Petersen eingefügt, der über Zylinderschalen mit veränderlicher Krümmung promoviert hat, [164], und sehr früh Programme (Zuse Z23) für solche Schalen geschrieben hat, [133] S. 879.

2.14 Punktwerte bei Flächentragwerken

Punktwerte, wie etwa die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens, kommen direkt in der zweiten Greenschen Identität der Balkengleichung vor und daher ist es ein einfaches, eine Einflussfunktion für $w(x)$ herzuleiten, man muss nur den Balken in zwei Teile teilen, denn dann springt wie von selbst an der Intervallgrenze mit Hilfe des dualen Lastfalls, der Einzelkraft $P = 1$, der Wert $w(x)$ heraus

$$1 \cdot w(x) = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \,. \tag{2.119}$$



Bild 2.45. Die Kinematik ‚ist das Schicksal' – sie bestimmt die Kräfte. Nach 200 Jahren wurden Sicherungsmaßnahmen an einer als Korbbogen ausgebildeten Brücke nötig, die man um 1800 nachträglich überbaut hat, *Kassel Schloss Wilhelmshöhe*. Wie immer in der Stabilitätstheorie sollen die ‚Füllstäbe' nicht die Last tragen, sondern sie sollen dafür sorgen, dass der Bogen in der Flucht bleibt

Bei Flächentragwerken ist das anders. Die Biegefläche $w(\boldsymbol{x})$ einer Membran ist die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta w = p \qquad w = 0 \;\text{ auf dem Rand } \Gamma\,, \tag{2.120}$$

und in der zugehörigen zweiten Greensche Identität,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \int_\Omega -\Delta\, w\, \hat{w}\, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial n}\, \hat{w}\, ds \\ - \int_\Gamma w\, \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}\, ds - \int_\Omega w\, (-\Delta \hat{w})\, d\Omega = 0\,,\end{aligned} \tag{2.121}$$

stehen nur Integrale, aber keine **Punktwerte**.

Der Übergang zum Punkt gelingt, weil die Biegefläche $G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, die zu einer Punktlast $P = 1$ gehört, die Eigenschaft hat, dass das Integral der Querkräfte $\partial G_0/\partial n = 1/\varepsilon$ der Membran über immer enger gezogene Kreise Γ_ε um den Aufpunkt in der Grenze den Wert 1 erreicht, siehe Bild 2.46,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} Querkraft\; ds = [\mathrm{N/m}]\,[\mathrm{m}] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial n}\, ds = 1\,[\mathrm{N}]\,. \tag{2.122}$$

Dieser Grenzwert macht den **Übergang vom Integral zum Punkt** möglich. Es ist eine sehr wichtige Eigenschaft von G_0.

Man formuliert also den *Satz von Betti* zunächst auf dem gelochten Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega - N_\varepsilon$, spart einen kleinen Kreis N_ε um den Aufpunkt aus, und lässt

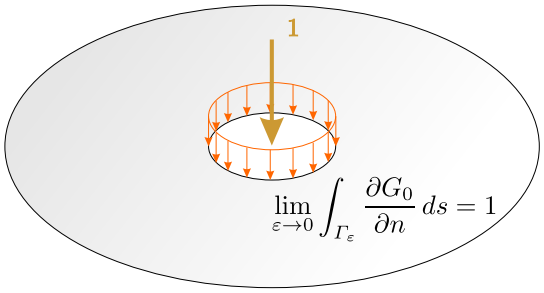


Bild 2.46. Die Kräfte gehen gegen ∞ und der Radius ε gegen null

dann den Radius $\varepsilon \to 0$ gegen null gehen. In der Grenze[5]

$$\mathscr{B}(G_0, w) := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(G_0, w)_{\Omega\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\, w(\boldsymbol{y})\; ds_{\boldsymbol{y}} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{2.123}$$

erhält man so die Einflussfunktion für $w(\boldsymbol{x})$ in dem Aufpunkt $\boldsymbol{x}$,

$$1 \cdot w(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{2.124}$$

Das $1 \cdot w(\boldsymbol{x})$ ist also der Grenzwert des Randintegrals über Γ_ε in (2.123).

Die Herleitung von Einflussfunktionen bei Flächentragwerken ist sehr technisch und nicht immer einfach, siehe [85] und [86]. Zum Glück geht das ganze mit finiten Elementen aber viel einfacher, siehe Kapitel 3.

Bemerkung 2.3. Bei einem Seil ist $V = H\,w'$ die Querkraft, bei einer Membran ist die Querkraft v_n in einem Schnitt mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{n}$ die Normalableitung der Biegefläche in Richtung von $\boldsymbol{n}$

$$v_n = H\,\frac{\partial w}{\partial n} = H\,\nabla w \bullet \boldsymbol{n} = H\,(w_{,x}\; n_x + w_{,y}\; n_y) \qquad [\mathrm{N/m}]\,. \tag{2.125}$$

H ist die Vorspannkraft, die wir oben Eins gesetzt haben.

Bemerkung 2.4. Die Singularität unter einer Punktlast macht, dass die Querkraft $v_n = 1/r$ in der Membran unendlich groß wird. Bei einer Scheibe wären es die Spannungen σ_{ij}. **Man verstehe bitte, dass das eine nicht ohne das andere geht**[6]. Das $1/r$ ist die Voraussetzung dafür, dass man mit Betti Verschiebungen ***in einem Punkt*** berechnen kann, weil sich eben die Bogenlänge $ds = r\,d\varphi$ des Lochrandes gegenläufig verhält. Auf der anderen Seite torpediert diese Singularität aber Castigliano, siehe (1.313), weil eben die Stammfunktion von $1/r$ der Logarithmus ist.

[5] Weil die Identität für alle $\varepsilon > 0$ null ist, muss sie auch in der Grenze null sein.

[6] Ein Mechanik-Kollege hatte vorgeschlagen, man solle die Mathematik ändern, damit Castigliano gilt

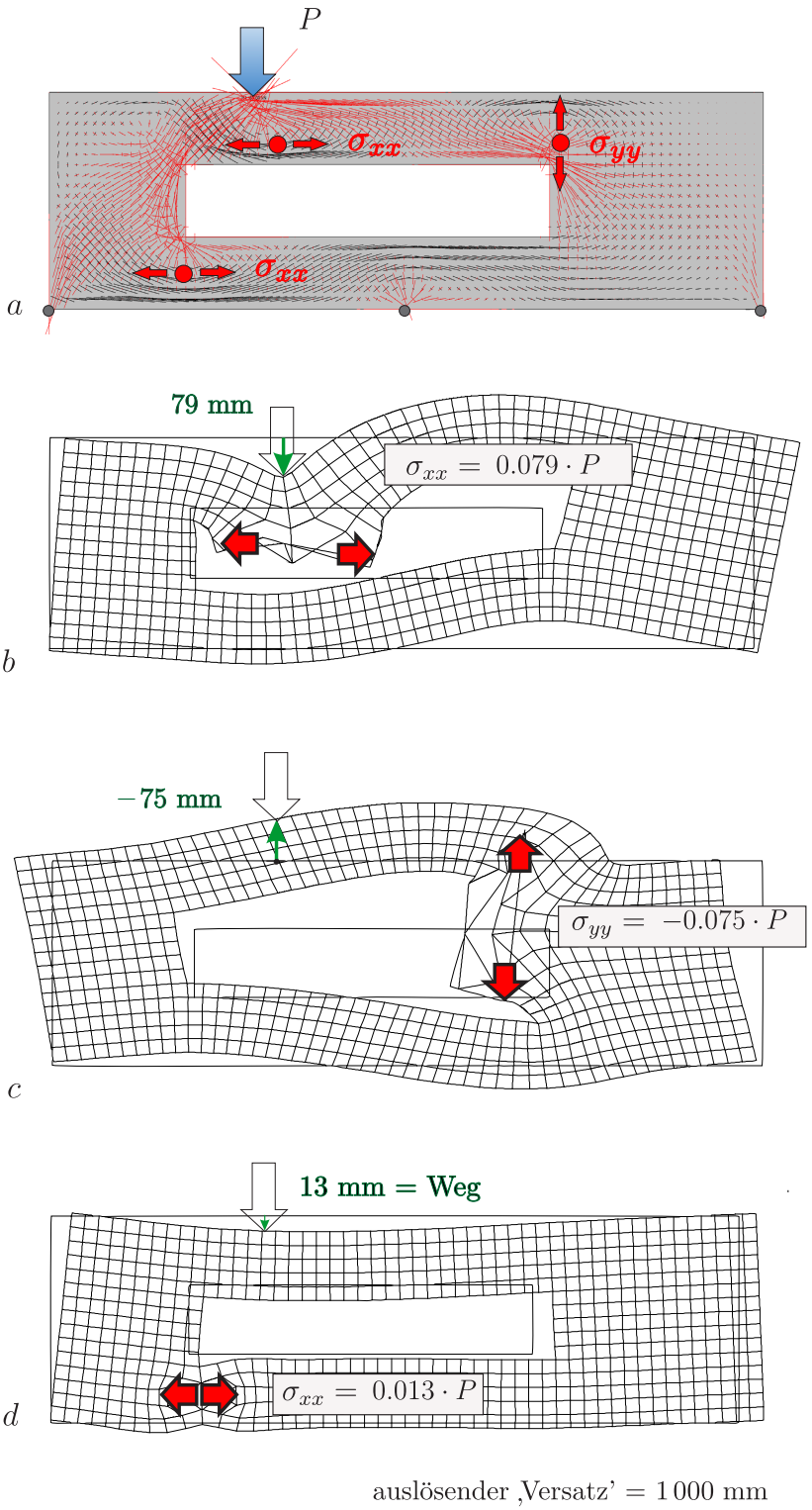


Bild 2.47. Die Spannung σ_{ii} in einem Aufpunkt ist gleich der Arbeit $P \cdot u_y$ die die Punktlast P bei der Verschiebung u_y ihres Fußpunktes leistet, wenn der Aufpunkt in x- oder y-Richtung um 1 000 mm gespreizt wird (jede andere Längeneinheit geht natürlich genauso). Die Spreizung ist nicht einfach ein Versatz um 1 000 mm, sondern es ist ein integrales Maß. Wenn man den Aufpunkt einmal umrundet erfährt man einen Versatz um 1 000 mm, [92]

2.15 Versatz in 2-D und 3-D

Wenn man von der Stabstatik kommt, dann stellt man sich einen Versatz in einer Scheibe, (= Einflussfunktion für eine Spannung), einfach als eine Klaffung $'1'$ vor, aber im 2-D und 3-D sieht man keinen Versatz, sondern ein Versatz bedeutet: Wenn man den Aufpunkt einmal umrundet, dann ist man danach 1 m weiter rechts oder weiter oben, siehe Bild 2.47.

Dasselbe gilt sinngemäß für die Einflussfunktionen von Momenten und Querkräften bei Platten. Ein Knick in einer Platte ist kein Knick im naiven Sinn und ebenso ist ein Versatz in einer Platte (= Einflussfunktion für eine Querkraft) keine deutlich sichtbare Stufe. Es sind beides **integrale Maße**

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial G_2}{\partial n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,m_{nn}(\boldsymbol{y})\,ds_{\boldsymbol{y}} = m_{xx}(\boldsymbol{x}) \tag{2.126}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} G_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,v_n(\boldsymbol{y})\,ds_{\boldsymbol{y}} = v_x(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.127}$$

Hier ist G_2 ein ‚Knick' in x-Richtung und G_3 ein Sprung in dieselbe Richtung und um die Effekte zu erleben, muss man einmal den Kreis Γ_ε, der den Aufpunkt umgibt, umrunden; m_{nn} und v_n sind M und V auf Γ_ε.

2.16 Switches

Es gibt in der linearen Statik und Mechanik zwei *switches*. Einmal kann man innen mit außen vertauschen

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{2.128}$$

und dann kann man mit Betti dasselbe auf zwei verschiedene Weisen sagen

$$W_{1,2} = W_{2,1}\,. \tag{2.129}$$

Die Einflussfunktionen basieren auf diesem zweiten ***switch***.

Bemerkung 2.5. Die Mathematiker benutzen diesen Schalter, um ‚Nicht-Standard' Lasten (dazu gehören für einen M. schon Einzelkräfte) zu behandeln. Einzelkräfte sind mathematisch *Distributionen*, weil man ihre Arbeit nicht durch ein Riemann-Integral

$$W_{1,2} = \int_\Omega P\cdot\delta w\,d\Omega = \int_\Omega G_0\,p_{\delta w}\,d\Omega = W_{2,1} \tag{2.130}$$

berechnen kann. Aber wenn man die Seite ‚wechselt', $W_{1,2} = W_{2,1}$, also die Durchbiegung G_0 aus P mit der Last $p_{\delta w}$ (= Last, die die Delle δw verursacht) überlagert, dann ist die Arbeit berechenbar, wie in Kapitel 2.14 und 9.34.

2.17 Dualität

Zu jeder Kraftgröße gibt es eine konjugierte Weggröße, V und δw, M und $\delta w'$, etc., wie man bei der partiellen Integration der Arbeitsgleichung

$$\int_0^l EI\, w^{IV}\, \delta w\, dx \tag{2.131}$$

erkennt. Wir nennen diese Paare duale Größen.

Im engeren, mathematischen Sinn bezeichnet man mit **Dualität** eine Technik, bei der man eine Messung A

$$w(x) = \int_0^l \delta_0(y-x)\, w(y)\, dy = \int_0^l G_0(y,x)\, p(y)\, dy \tag{2.132}$$

durch eine Messung B ersetzt, die denselben Wert liefert. Alle Einflussfunktionen gehen so vor, denn der Satz von Betti macht es möglich eine Messung an einer Biegelinie w durch eine Messung an der Belastung p zu ersetzen. (Wegen $p = EI\, w^{IV}$ bleibt es eine Messung an w, nur an einer ‚anderen Stelle').

Den einfachsten Zugang zu diesem Thema bietet eine Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$. Wenn man die Matrix mit einem Vektor $\boldsymbol{u}$ multipliziert, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$, und diesen Vektor dann skalar mit einem zweiten Vektor $\boldsymbol{\delta u}$, ist das Ergebnis eine Zahl $\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$.

Weil eine reelle Zahl wie π sich nicht ändert, wenn man sie transponiert, $\pi^T = \pi$, gilt

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\delta u} \tag{2.133}$$

oder

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\delta u} = 0\,. \tag{2.134}$$

Das ist der *Satz von Betti* für symmetrische Matrizen, die **selbstadjungierten Operatoren** gleichen.

Eine Steifigkeitsmatrix kann man bekanntlich als die Abbildung eines Vektors $\boldsymbol{u}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{f}$ lesen

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,. \tag{2.135}$$

Stellen wir uns nun vor, wir kennen den Vektor $\boldsymbol{f}$, der etwa die Knotenkräfte eines Fachwerks darstellt, und wir wollen die Komponente u_1 des Vektors $\boldsymbol{u}$ im LF $\boldsymbol{f}$ wissen.

Um u_1 zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{e}_1\,, \tag{2.136}$$

wir vertauschen also $\boldsymbol{f}$ mit dem ersten Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_1^T = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$. Mit der Lösung $\boldsymbol{g}_1$ und dem Vektor $\boldsymbol{u}$ gehen wir dann in die Identität (2.134)

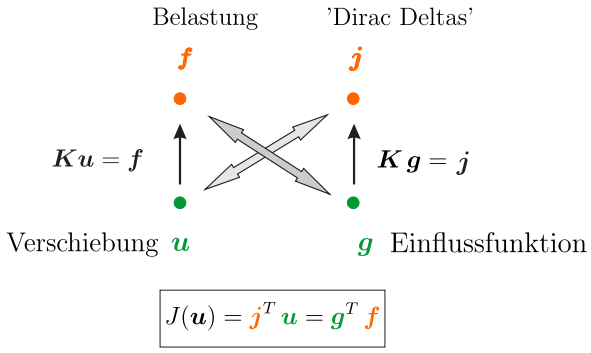


Bild 2.48. Dualität am Beispiel der linearen Algebra, Dualität = ‚über Kreuz', zwei unterschiedliche Messungen haben dasselbe Ergebnis

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f} - u_1 = 0 \tag{2.137}$$

und erhalten so die gesuchte Verschiebung

$$u_1 = \boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f}\,. \tag{2.138}$$

Zu jeder Komponente u_i gibt es einen solchen Vektor $\boldsymbol{g}_i$, der die Lösung von

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i\,, \tag{2.139}$$

ist und mit dem man u_i aus der rechten Seite $\boldsymbol{f}$ berechnen kann, siehe Bild 2.48,

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}\,. \tag{2.140}$$

Indem man also den Vektor $\boldsymbol{f}$ auf die n Vektoren $\boldsymbol{g}_i, i = 1, 2 \ldots n$ projiziert, kann man die Lösung $\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + u_n \boldsymbol{e}_n$ bestimmen, denn die **Projektion** von $\boldsymbol{f}$ auf die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ ist dasselbe, wie die Projektion von $\boldsymbol{u}$ auf die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_i\,. \tag{2.141}$$

Genau das passiert, (für alle u_i gleichzeitig), wenn wir den Vektor $\boldsymbol{f}$ mit der Inversen multiplizieren

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}\,, \tag{2.142}$$

denn die Zeilen (und Spalten) der symmetrischen Matrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind gerade die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ und daher gilt

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{g}_1^T \boldsymbol{f})\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{g}_2^T \boldsymbol{f})\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{f})\boldsymbol{e}_n\,. \tag{2.143}$$

Geht es um Funktionen, also die Lösungen von Differentialgleichungen, wie

$$-EA\,u''(x) = p(x) \qquad u(0) = u(l) = 0\,, \tag{2.144}$$

dann hat die Matrix $\boldsymbol{K}$ unendlich viele Spalten, und die Einheitsvektoren gehen in Dirac Deltas über

$$-EA\frac{d^2}{dy^2}\,G(y,x) = \delta(y-x)\,, \tag{2.145}$$

aber der Formalismus ist derselbe. Indem wir die rechte Seite p auf die Lösungen $G(y,x)$ projizieren, also das L_2-Skalarprodukt (Integral) der beiden Funktionen bilden, können wir den Wert der Lösung in jedem Punkt x berechnen

$$u(x) = \underbrace{\int_0^l \delta(y-x)\,u(y)\,dy}_{\boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{e}_i} = \underbrace{\int_0^l G(y,x)\,p(y)\,dy}_{\boldsymbol{g}_i^T\,\boldsymbol{f}}\,. \tag{2.146}$$

2.18 Der adjungierte Operator

Zur Dualität gehört der Begriff des ***adjungierten Operators***. Der adjungierte Operator L^* eines Operators L ist das ‚Spiegelbild' von L

$$(L\,u, v) = \int_0^l L\,u\,v\,dx = \int_0^l u\,L^*v\,dx = (u, L^*v)\,. \tag{2.147}$$

Bei Matrizen ist es einfach die **transponierte Matrix**

$$(\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{v})\,. \tag{2.148}$$

Der Satz von Betti (2.134) drückt das ja genau aus, nur ist $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$.

Das ‚Jonglieren' mit dem adjungierten Operator nennt man ***adjoint analysis***, also die Technik, die wir eben vorgestellt haben: Der Vektor $\boldsymbol{u}$ sei die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und durch Multiplikation von $\boldsymbol{u}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{j}$ sei eine Messung an $\boldsymbol{u}$ vorzunehmen, $J = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{j}$. Setzt man nun, dass $\boldsymbol{j}$ die rechte Seite eines Systems $\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ ist, dann folgt

$$J = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{K}^T\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^T\,\boldsymbol{g}\,. \tag{2.149}$$

Dieses Muster wird uns bei dem Rechnen mit Einflussfunktionen immer und immer wieder begegnen, denn in der linearen Statik ist *adjoint analysis* identisch mit dem Satz von Betti.

2.19 Monopole und Dipole

Die Einflussfunktion für die Verdrehung w' eines Balkens wird durch ein Einzelmoment $M = 1$ erzeugt

$$M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\,\Delta x = 1\,, \tag{2.150}$$

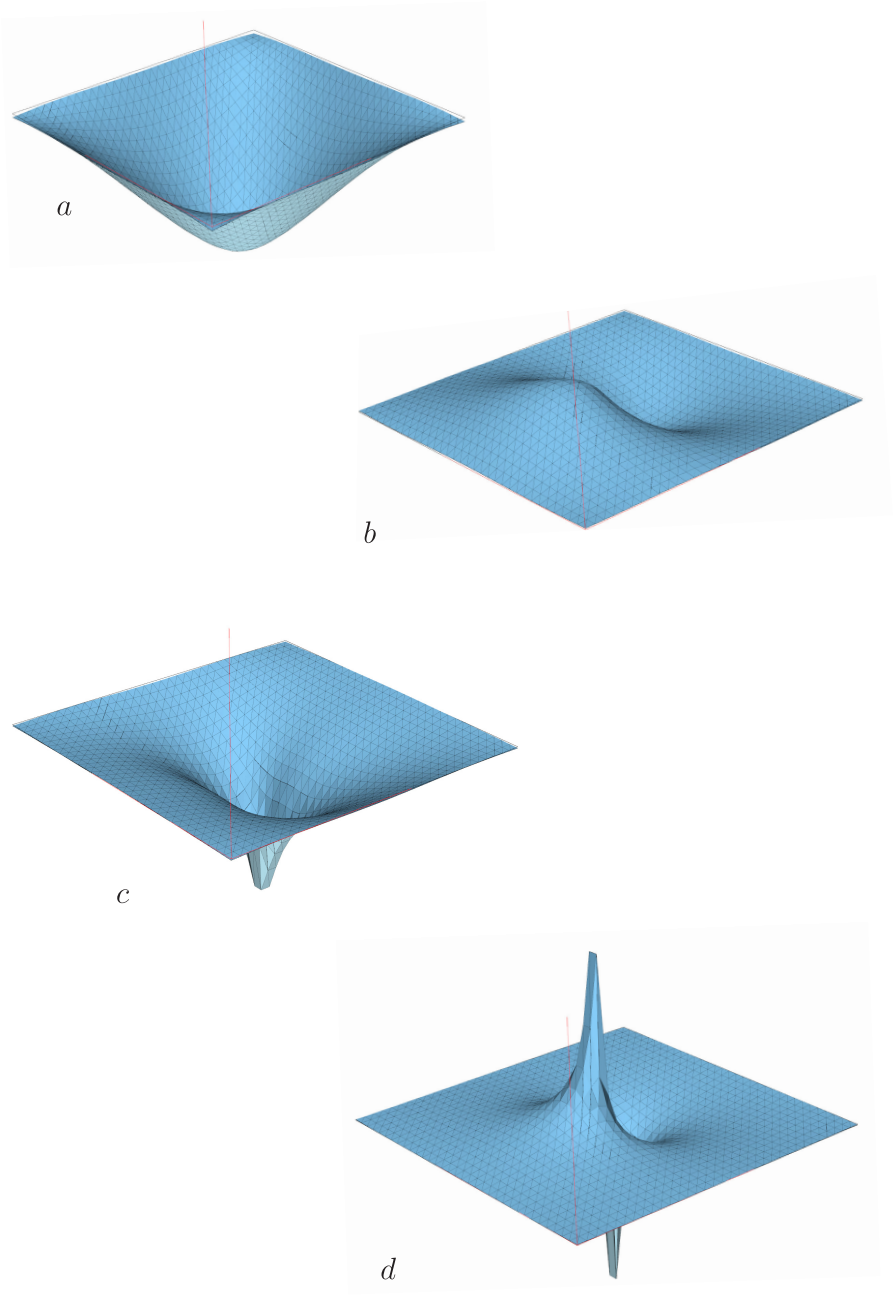


Bild 2.49. Einflussfunktionen werden von Monopolen (linke Seite) bzw. Dipolen (rechte Seite) erzeugt, Einflussfunktion für **a)** Durchbiegung, **b)** Verdrehung $w_{,x}$, **c)** Moment m_{xx}, **d)** Querkraft q_x (BE-PLATTE). Je höher die Ableitung, umso kurzsichtiger werden die Einflussfunktionen! Spiegelbildlich hierzu sind die hohen (n) Einflussfunktionen nahezu orthogonal, $(G_n, p) \simeq 0$, zu jedem glatten p

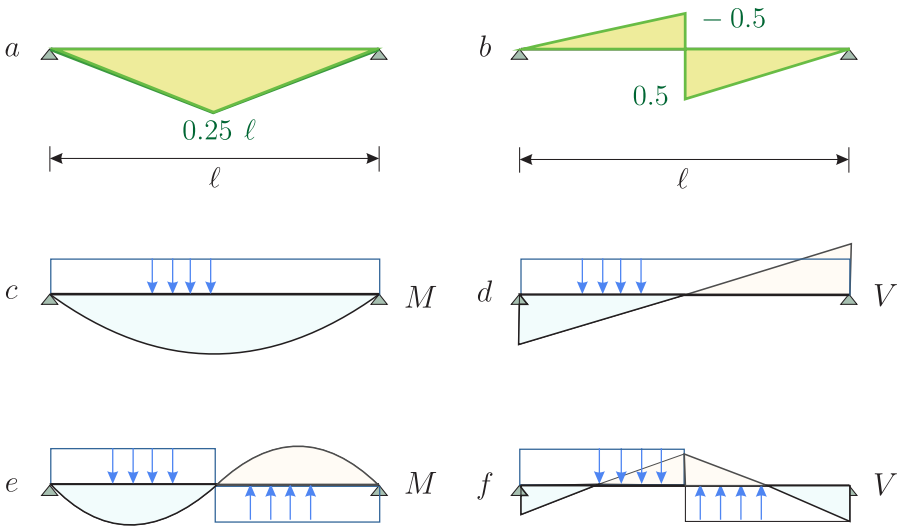


Bild 2.50. Oberste Reihe Einflussfunktionen für **a)** das Biegemoment und **b)** die Querkraft in der Mitte des Balkens, **c)** und **d)** Momente und Querkräfte unter symmetrischer Last und antimetrischer Last, **e)** und **f)**

das man sich durch zwei gegengleiche Kräfte, $P = \pm 1/\Delta x$, erzeugt denken kann, deren Abstand Δx gegen null geht, während gleichzeitig die Kräfte gegen unendlich gehen. In der Physik nennt man dies einen ***Dipol***.

Die Einflussfunktion für eine Durchbiegung $w(x)$ hingegen wird von einem ***Monopol***, einer Einzelkraft, erzeugt.

Einflussfunktionen, die von Monopolen erzeugt werden, summieren. Solche Einflussfunktionen gleichen Dellen oder Senken, siehe Bild 2.49 und 2.52 a. Alles was in die Delle hineinfällt, vergrößert die Durchbiegung der Platte.

Dipole hingegen erzeugen Scherbewegungen, die auf Ungleichgewichte reagieren, wie ein Waage, sie differenzieren, siehe Bild 2.49 und 2.52 b.

Monopole integrieren und Dipole differenzieren.

Jede der vier Einflussfunktionen in Bild 2.49 gehört sinngemäß zu einem der beiden Typen:

- EF für Durchbiegungen und Momente *summieren*.
- EF für Verdrehungen, Spannungen und Querkräfte *differenzieren*

Die Einflussfunktion für die Querkraft V wird von einem Dipol erzeugt, während die Einflussfunktion für das Biegemoment M von zwei entgegengesetzt drehenden Momenten $M = \pm 1/\Delta x$ erzeugt wird, die nach Innen drehen

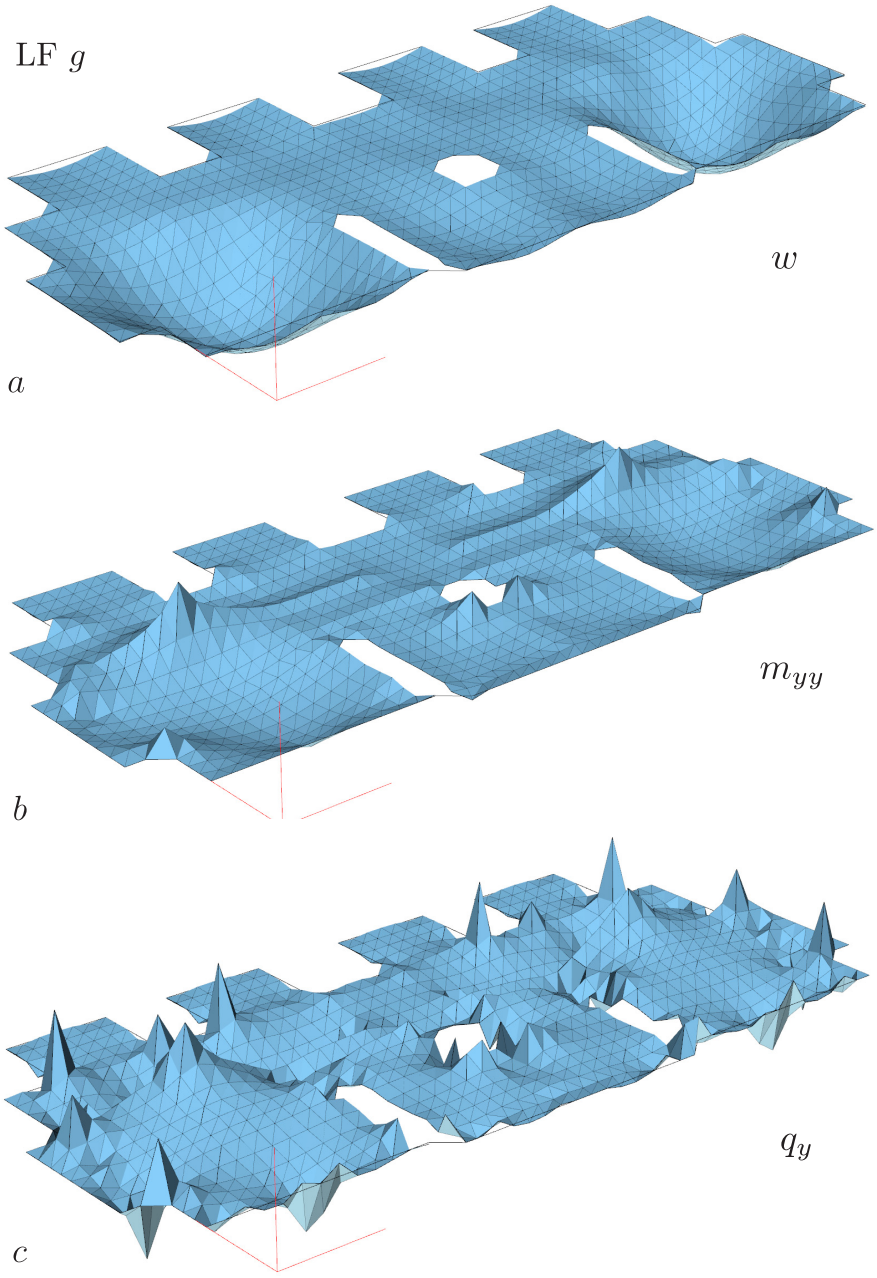


Bild 2.51. Die Steigerung der Komplexität, **a)** Durchbiegung w, **b)** Momente m_{yy}, **c)** Querkräfte q_y (BE-PLATTE)

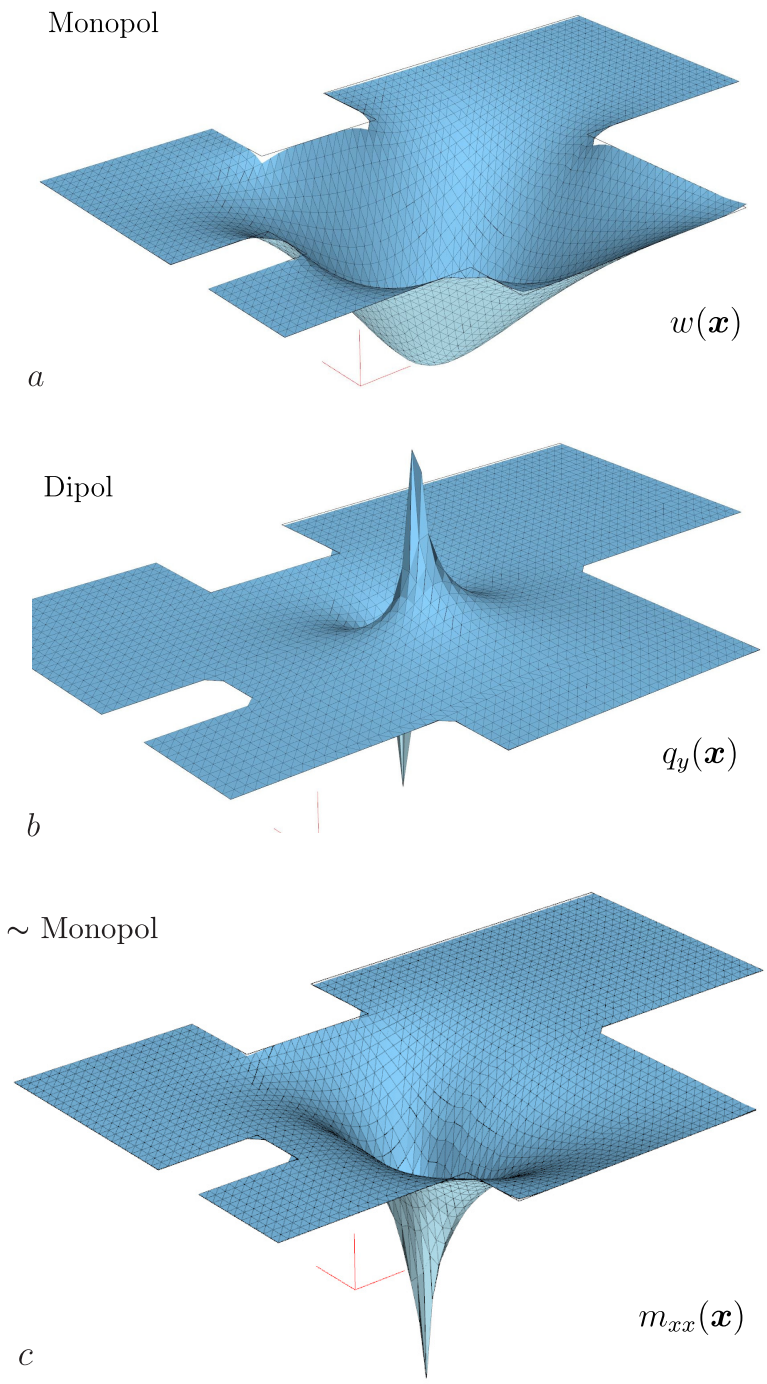


Bild 2.52. Deckenplatte Einflussfunktionen **a)** für eine Durchbiegung ($G_0 = O(r^2 \ln r)$), **b)** für eine Querkraft ($G_3 = O(r^{-1})$), **c)** für ein Moment ($G_2 = O(\ln r)$), siehe (6.46) Seite 584 letzte Spalte der Matrix (BE-PLATTE)

und so eine symmetrische Biegefigur aber mit einem scharfen Knick im Aufpunkt generieren[7].

Das maximale Ergebnis ergibt sich, wenn die Belastung und die Einflussfunktion vom selben Typ sind (***symmetrisch*** – ***symmetrisch*** oder ***antimetrisch*** – ***antimetrisch***) und der minimale Effekt, wenn sie vom entgegengesetzten Typ sind, siehe Bild 2.50.

Der Unterschied zwischen Monopolen und Dipolen ist der Grund, warum es einfacher ist, Verschiebungen und Biegemomente anzunähern, als Spannungen und Querkräfte. Es ist der Unterschied zwischen **numerischer Integration** und **numerischer Differentiation**, siehe Bild 2.51.

Bemerkung 2.6. Alle Einflussfunktionen für Lagerreaktionen integrieren, obwohl die Lagerkräfte ja Normalkräfte (Spannungen) oder Querkräfte sind und daher würden wir erwarten, dass die Einflussfunktionen differenzieren. Aber in einem festen Lager wird der eine Teil der Scherbewegung durch den Baugrund behindert, so dass der andere Teil den ganzen Weg allein gehen muss, um die vorgeschriebene Versetzung $[[u]] = 1$ zu realisieren und daher wird aus der Einflussfunktion eine einseitige Integration.

Bemerkung 2.7. Nicht alle Einflussfunktionen tendieren gegen null. Wenn Teile des Tragwerks (nach dem Einbau eines N-, V- oder M-Gelenkes) **Starrkörperbewegungen** ausführen können, dann kann es passieren, dass sich die Einflussfunktionen aufschaukeln, siehe Bild 2.53 b.

Bemerkung 2.8. Das Abklingverhalten von Einflussfunktionen hängt von der Ordnung n der Zielgröße $d^n w/dx^n$ ab, also beim Balken, $n = 0, 1, 2, 3$,

$$w(x), \quad w'(x), \quad M(x) = -EI\, w''(x), \quad V(x) = -EI\, w'''(x)\,. \tag{2.151}$$

Je niedriger die Ordnung ist, um so weiter schwingt eine Einflussfunktion aus und um so langsamer klingt sie ab, wie man an der Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$ der Platte sieht, siehe Bild 2.52 a, während die Einflussfunktion für die Querkraft q_x sehr eng gefasst ist, siehe Bild 2.52 b. Es sind praktisch zwei gegengleiche Spitzen $\pm\infty$, die aus der Platte herausragen, die dann aber sehr rasch auf null abfallen.

Natürlich sind das nur ‚Trendmeldungen' und das genaue Verhalten hängt auch von der Art der Lagerung ab, siehe Bild 2.54 und Bild 2.55, denn gerade **Kragträger**, **Kragplatten** und auch **Stockwerkrahmen** spielen diesbezüglich eine Sonderrolle, weil sie freie Enden haben.

[7] Genau genommen lautet die Folge: Monopol – Dipol – Quadropol – Octopol, entsprechend den finiten Differenzen für w, w', M, V, siehe Bild 9.13 Seite 668, aber für unsere Zwecke reicht das einfache Raster: Monopol – Dipol oder symmetrisch-antimetrisch aus.

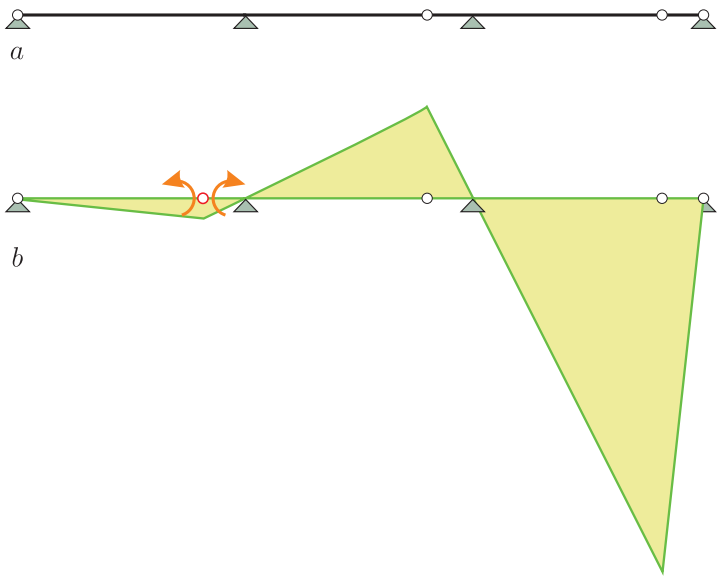


Bild 2.53. a) Gerberträger, **b)** Einflussfunktion für ein Moment M. Nicht alle Einflussfunktionen klingen ab!

Eine Sonderrolle spielen auch Einflussfunktionen für Kraftgrößen in statisch bestimmten Systemen. Weil nach dem Einbau des Gelenks das System kinematisch ist, können sich die Verformungen frei ausbilden, denn es wird keine Energie verbraucht. Nichts kann die Einflussfunktion für das Moment in einem Kragträger daran hindern den Schenkel rechts vom Aufpunkt unter 45° bis ‚in den Himmel' laufen zu lassen, denn es kostet ja nichts. Deswegen stürzen kinematische Strukturen auch so leicht ein, denn es ist keine Energie nötig, um den Einsturz auszulösen.

Statisch unbestimmte Systeme **dämpfen** also die Ausbreitung der Einflussfunktionen für Kraftgrößen, während bei statisch bestimmten Systemen eine solche Sperre fehlt.

2.20 Höhere Ableitungen

Symmetrie und Antimetrie sind in der Mathematik ‚fest verdrahtet', denn die Ableitung einer symmetrischen Funktion ist antimetrisch und umgekehrt. Die Kette der Greenschen Funktionen, $G_0 \to G_1 \to G_2 \to \ldots$, entsteht nun aber durch wiederholte Ableitung nach dem Aufpunkt x und daher ist der Wechsel von Symmetrie und Antimetrie in den Einflussfunktionen in Bild 2.39 und in Bild 2.49 ganz natürlich.

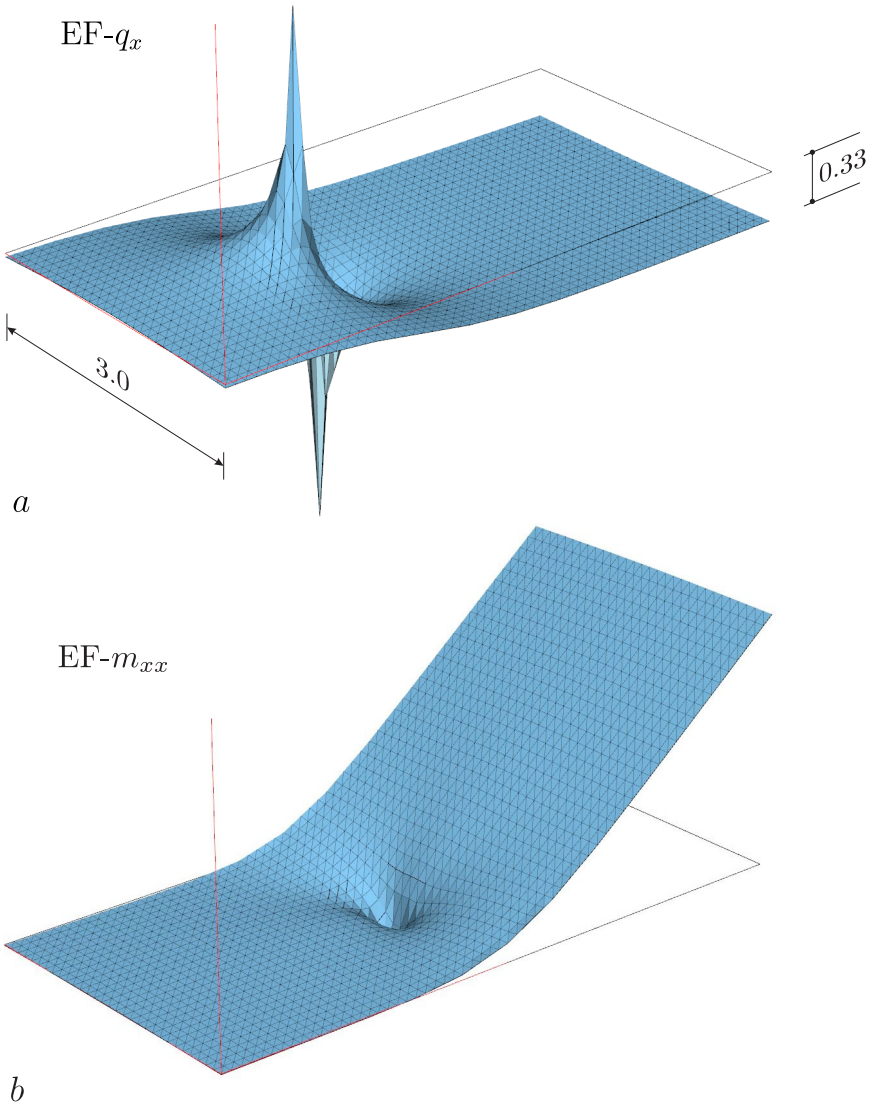
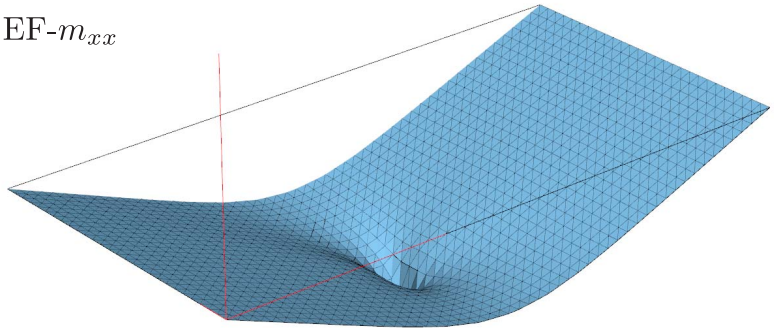
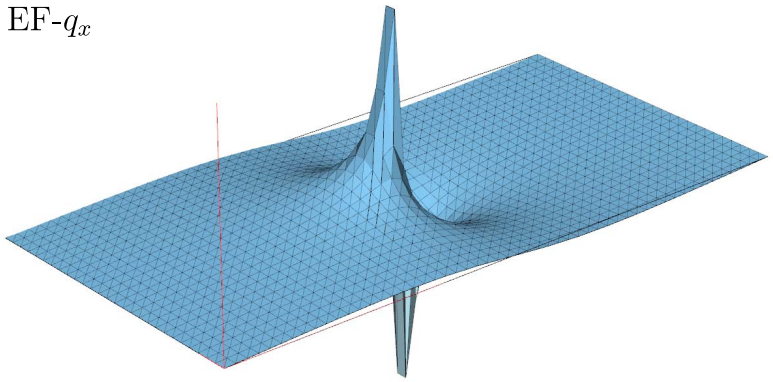


Bild 2.54. Kragplatte, **a)** Einflussfunktion für die Querkraft q_x und **b)** für das Moment m_{xx}; es ist erstaunlich, wie es mit einer ‚numerischen' Spreizung bzw. einem ‚numerischen' Knick (Randelemente) möglich ist, einen fast konstanten Versatz bzw. eine Rotation von genau 45° zu erreichen. Frage: Wie nahe kann man dem Aufpunkt kommen, bevor die Singularität, $O(1/r)$ in Bild a und $O(\ln r)$ in Bild b, durchschlägt? (BE-PLATTE)



a



b

Bild 2.55. Plattenbrücke, **a)** Einflussfunktion für das Moment m_{xx} und **b)** für die Querkraft q_x in der Plattenmitte (also in einem Punkt); die Einflussfunktion für das Integral von q_x quer durch die Mitte dürfte mit der Balkenlösung identisch sein (BE-PLATTE).

Und dass sich die Einflussfunktionen immer enger zusammenschnüren, ist auch klar. Wenn die Einflussfunktion für eine Verformung wie $1/r$ geht, dann die für die erste Ableitung wie $1/r^2$ und die für die zweite Ableitung wie $1/r^3$, etc. Es wird immer enger und immer steiler. Die höheren Ableitungen einer Verschiebungsfigur erhalten ihre Prägung daher durch **lokale Störungen** in der Belastung, lokal, weil in die Einflussfunktionen für die höheren Ableitungen wegen des r^{-n} ein **Lupeneffekt** eingebaut ist, die höheren Einflussfunktionen sind **extrem kurzsichtig**, und wegen $\cos\varphi = x/r$ und $\sin\varphi = y/r$

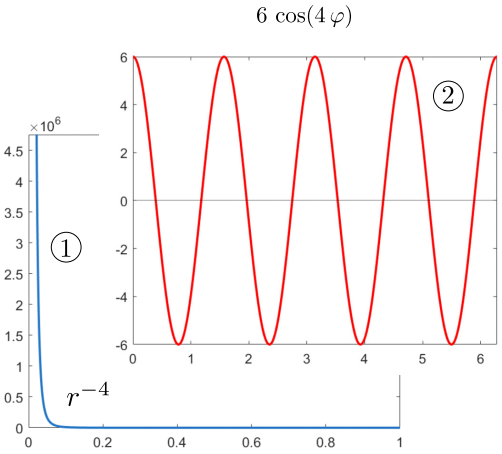


Bild 2.56. Die zwei Teile der Einflussfunktion für $\partial^4 u/\partial x_1^4$, die praktisch nur im Aufpunkt lebt, also sehr kurzsichtig ist (MATLAB)

bedeuten die hohen Potenzen von r stark schwankende Gewichte $\cos(n\,\varphi)$ und $\sin(n\,\varphi)$ in den Einflussfunktionen, siehe Bild 2.56.

So ist die Einflussfunktion für die erste Ableitung $\partial u/\partial x_1$ im Mittelpunkt einer kreisförmigen Membran, $R = 1$, die Funktion

$$\frac{\partial G_0}{\partial x_1} = -\frac{\cos(\varphi)}{2\,\pi\,r} \qquad G_0 = -\frac{1}{2\,\pi}\,\ln(r) \tag{2.152}$$

und für die vierte Ableitung ist es die Funktion

$$G_4 = \frac{\partial^4 G_0}{\partial x_1^4} = \frac{6\,\cos(4\,\varphi)}{2\,\pi\,r^4}\,. \tag{2.153}$$

Ist die Belastung $p = p(\varphi)$ rotationssymmetrisch, dann ist die vierte Ableitung in der Mitte nur dann ungleich null, wenn die Fourier-Reihe von p die Funktion $\cos(4\,\varphi)$ enthält, weil alle anderen Reihenglieder orthogonal zu $\cos(4\,\varphi)$ sind.

Eine Belastung p wird also die starken Oszillationen $\cos(n\,\varphi), \sin(n\,\varphi)$ in den höheren (n) Einflussfunktionen nur überleben, wenn sie ebenso oft schwankt, sonst wird sie ‚glatt gebügelt', sind die höheren Ableitungen im Aufpunkt null. Es ist wie bei der *Fourier-Analysis*. Die hohen G_n spüren den hohen Frequenzen nach.

Bemerkung 2.9. Zu dem Technischen noch eine Anmerkung. Die Einflussfunktion für die vierte Ableitung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} = \int_\Omega \frac{6\,\cos(4\,\varphi)}{2\,\pi\,r^4}\,p\;d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.154}$$

lässt sich wegen des r^{-4} scheinbar gar nicht berechnen. Es ist aber so: Die Einflussfunktion basiert, wie alle Einflussfunktionen, auf dem Grenzwert über das gelochte Gebiet Ω_ε

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{B}(G_4, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{2.155}$$

und dieser Grenzwert ist ‚selbstheilend', zu jedem Term $+\infty$ gibt es einen entgegengesetzten Term $-\infty$, so dass am Ende nur Ausdrücke übrig bleiben, die der Computer berechnen kann. **Gauss garantiert das.**[8]

Für eine genauere Analyse müsste man (2.155) näher betrachten, also den Grenzwert des Integrals über den Lochrand Γ_{N_ε} und das gelochte Gebiet Ω_ε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big\{ \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} (G_4 \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial G_4}{\partial n} w)\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega_\varepsilon} G_4\, p\; d\Omega_{\boldsymbol{y}} \Big\} \tag{2.156}$$

und so den *Hauptwert* von (2.154) bestimmen, siehe z.B. Kapitel 9.3. Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist die Taylorentwicklung aller Terme um den Aufpunkt $\boldsymbol{x}$. Man kann z.B. von w den linearen Anteil abziehen, weil dessen zweite Ableitungen null sind, etc.

Der Hauptwert ist, vereinfacht gesagt, das Integral ohne die singulären Terme, ohne die Terme, die sich nicht integrieren lassen. Hauptwert bedeutet aber nicht einfach, dass man das weglässt, was einem nicht gefällt, sondern hinter dem Hauptwert eines Integrals steht immer ein Grenzprozess wie (2.155).

2.21 Die Unwucht

Die Einflussfunktion für die vierte Ableitung $\partial^4 w/\partial x^4 = O(r^{-4})$ der Membran ist also sehr, sehr eng gefasst und ähnliches gilt, wenn auch schwächer, für die – im Prinzip – antimetrische Querkraft-Einflussfunktion, $O(r^{-1})$, einer Platte, siehe etwa Bild 2.55. Dieser *up-down* Kern ist praktisch auf den Aufpunkt konzentriert und die Überlagerung mit einer konstanten Belastung p dürfte wenig mehr als null ergeben.

Wo kommen dann aber die Querkräfte einer Platte her? Sie kommen von der Unwucht des Einflussintegrals.

Um das zu sehen, betrachten wir eine Membran, $-\Delta w = p$, denn das ist die einfachste partielle Differentialgleichung.

Der Schlüssel ist die Integraldarstellung der Membran, (9.157),

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\, u(\boldsymbol{y})]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\; d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{2.157}$$

gemäß der nicht nur die Belastung p im Feld, sondern auch die Randverformungen u und die Aufhängekräfte $\partial u/\partial n$, die Durchbiegung in jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ der Membran bestimmen.

[8] Das ist ein bemerkenswertes Resultat und macht deutlich wieviel Mathematik in den eigentlich ‚harmlos' aussehenden Identitäten steckt, dass jedem Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ ein gutes, stabiles Ende garantiert ist, siehe Kapitel 9.3.

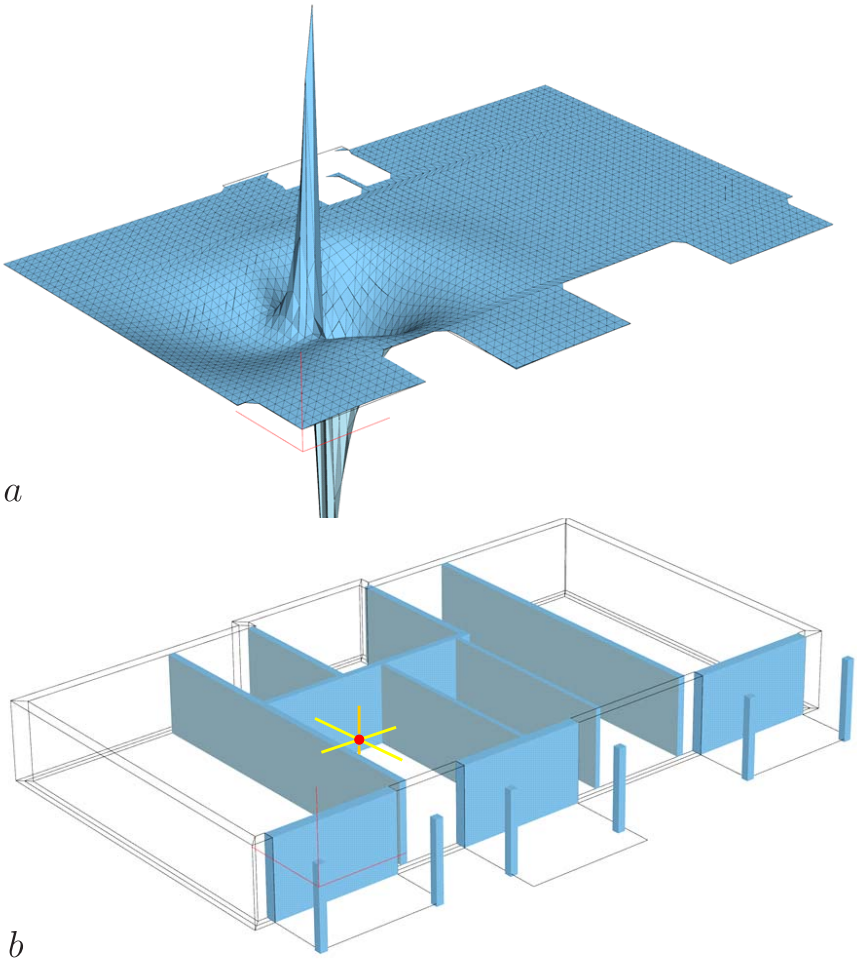


Bild 2.57. Deckenplatte, **a)** Einflussfunktion für die Querkraft q_x, **b)** Untergeschoss und Lage des Aufpunkts in der Deckenplatte

Man könnte vermuten, dass der Einfluss der Randgrößen wegen des $\ln r$ bzw. $1/r$ gering ist, aber der Rand geht einmal um die Membran herum, er hat einen langen Atem. Zum anderen ist es so, wenn wir an eine Platte denken, dass die Innenwände ja auch ‚Rand' sind und daher viel näher zu den Aufpunkten liegen, als der Rand der Platte, siehe Bild 2.57. Der zweite Effekt beruht auf der Lage des Aufpunkts im Gebiet. Ist die Membran eine Kreisscheibe, und der Aufpunkt der Mittelpunkt, dann ist das Gebietsintegral einer konstanten Last p null, wenn der Kern antimetrisch ist. Weicht die Form davon

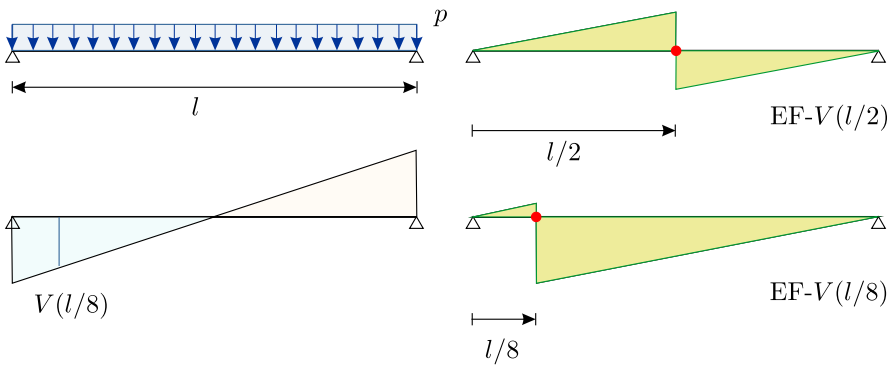


Bild 2.58. Die Einflussfunktion für die Querkraft in der Balkenmitte ist antimetrisch, ist genau ausbalanciert und so ist $V = 0$. Je näher der Aufpunkt aber zum Rand rückt, desto größer wird die Unsymmetrie, die Unwucht, und damit V

ab, dann liefern die ‚Zwickel' Beiträge zu dem Integral. Das Einflussintegral ist nicht mehr symmetrisch bzw. antimetrisch, sondern hat eine ‚Unwucht'.

Man sieht das sehr schön bei dem Einfeldträger in Bild 2.58. Die Einflussfunktion für die Querkraft in Balkenmitte ist antimetrisch und daher sind – bei Gleichlast – die Wirkungen ausbalanciert, ist die Querkraft null. Verschiebt man den Aufpunkt aber in Richtung Rand, dann wird die Einflussfunktion immer unsymmetrischer und so kommt es, dass die Querkraft ihr Maximum am Rand hat.

Weil die Einflussfunktionen für die ungeraden Ableitungen antimetrisch sind und für die geraden Ableitungen symmetrisch, sind bei Gleichlast die ungeraden Ableitungen (w' und $V = -EI\,w'''$) in der Mitte null und am Rand am größten, während es bei den geraden Ableitungen (w und $M = -EI\,w''$) gerade umgekehrt ist.

Ein Flächentragwerk ist also – wir dürfen die obige Integraldarstellung (2.157) ja verallgemeinern – ein wohl abgestimmtes Gebilde, wo jeder Punkt jeden andern beeinflusst und der Ausdruck dieser Abhängigkeit der Tragwerksteile untereinander ist sinngemäß die obige Integraldarstellung, [86]. Sie formuliert, wenn $\boldsymbol{x}$ auf dem Rand liegt, eine Kopplungsbedingung $\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{t} + \boldsymbol{p}$ zwischen den Knotenwerten der Randverformungen $\boldsymbol{u}$ und den Randkräften $\boldsymbol{t}$ einer Scheibe oder Platte, so wie die Steifigkeitsmatrix eine Kopplungsbedingung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ zwischen den Weg- und Kraftgrößen an den beiden Enden eines Balkens, dem Rand des Balkens, darstellt. Und die Einflussfunktionen binden praktisch die Punkte $\boldsymbol{x}$ im Innern an das Geschehen auf dem Rand und an die Belastung p im Feld.

2.22 Handicap Rand

Die Randelemente – wie die Mathematik auch – setzen die Randwerte nach Innen fort, ähnlich wie sich Wellenfronten längs den **Charakteristiken** fort-

pflanzen, siehe Bild 2.59. Nun ist der Rand eine sehr dünne Zone und der Übergang vom Rand $(n-1)$ aufs Gebiet (n) kann zu einem *handicap* werden, wenn in einer Ecke mehrere Platten mit unterschiedlichen Steifigkeiten zusammenstoßen. Dann ist viel Feinarbeit nötig, um die unterschiedlichen Kombinationen von Randbedingungen, Steifigkeiten und Lagerarten korrekt zu modellieren. In dem Programm BE-PLATTE sind auf jeder Seite einer Ecke zehn verschiedene Lagerbedingungen möglich. Eine solche Vielfalt von Varianten macht es bei der Programmierung nötig ganz von ‚vorne anzufangen' und die Biegefläche der Platte in eine Taylorreihe um die Ecke entwickeln, um die *conflicting conditions* unter einen Hut zu bringen und zu stimmigen Ergebnissen zu kommen.

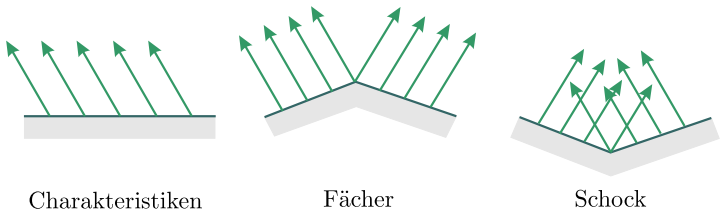


Bild 2.59. Charakteristiken lassen ahnen, wo Flächentragwerke Probleme haben, wenn auch die Gleichungen mathematisch von einem anderen Typ sind

Die finiten Elemente werden natürlich auch unter solchen Ecken leiden, aber vordergründig haben sie es einfacher. Nur der Anwender muss dann später sehen, wie er die Ergebnisse interpretiert.

2.23 Wert und Formel

An dieser Stelle sei eine Bemerkung über Einflussfunktionen erlaubt. Die Fläche $A = n \cdot \Delta A$ eines gekachelten Fußbodens ist gleich der Zahl n der Kacheln mal der Größe ΔA einer Kachel. Man kann aber auch rechnen, $A =$ Länge $\times$ Breite, so wie man die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens mittels Mohr oder Betti berechnen kann.

Man muss, und darauf wollen wir hinaus, unterscheiden zwischen **Wert** und **Formel**

$$\text{Wert} = \text{Formel}\,. \tag{2.158}$$

Der Wert $\partial^4 w/\partial x_1^4$ in dem vorangegangenen Beispiel existiert an sich. Die rechte Seite von (2.154) ist eine ‚Ansage', aber keine Formel, das Integral ist ja nicht berechenbar. Die eigentliche Formel ist das Ergebnis des Grenzwertes (2.156) – der Hauptwert, der ja dann einen *berechenbaren* Ausdruck darstellt.

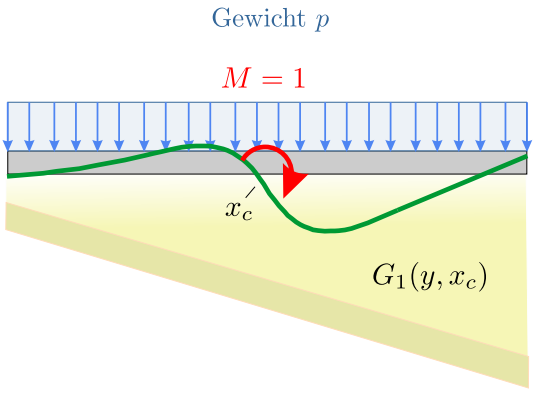


Bild 2.60. Der Boden unter dem schiefen Turm von Pisa

Eine Funktion wie

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.159}$$

wird in allen Punkten $\boldsymbol{x}$ eine Ableitung $u_{,x_1}(\boldsymbol{x})$ haben, aber ob

$$u_{,x_1}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, g(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{2.160}$$

eine Formel dafür ist, ob man die Ableitung so einfach unter das Integral ziehen kann, ist fraglich. Die Antwort auf diese Frage wird von der Gestalt des Kerns $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ abhängen.

2.24 Der schiefe Turm von Pisa

Die Symmetrie und Antimetrie der Einflussfunktionen spielen auch beim schiefen Turm von Pisa die entscheidende Rolle.

Das Problem ist, dass die Bodensteifigkeit unter dem Turm nicht einheitlich ist, so dass die Einflussfunktion $G_1(y, x)$ für die Drehung der Fundamentplatte nicht perfekt antimetrisch ist, sondern eine Tendenz zur weicheren Seite hat, und sich daher der Turm zu dieser Seite neigt, siehe Bild 2.60,

$$w'(x_c) = \int_0^l G_1(y, x_c)\, p(y)\, dy\,. \tag{2.161}$$

Damit eine Waage sich nicht verdreht müssen **zwei Dinge** stimmen: Die Arme der Waage müssen gleich lang sein und die Last muss symmetrisch sein

$$\text{antimetrisch} \times \text{symmetrisch} = 0\,.$$

Das ist eine sehr ‚wacklige' Bedingung und der Bauingenieur tut daher gut daran eine Bodenplatte gegenüber möglichen Ungleichgewichten von oben wie von unten zu stabilisieren.

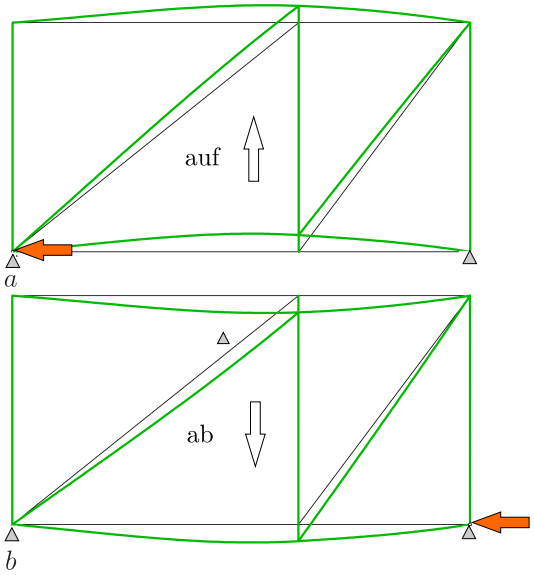


Bild 2.61. Die Einflussfunktionen (vert. Last) für die beiden horizontalen Lagerkräfte sind antimetrisch

2.25 Symmetrie und Antimetrie

Der Rahmen in Bild 2.61 ist nicht symmetrisch, aber die Einflussfunktionen für die beiden horizontalen Lagerkräfte sind antimetrisch, weil die Summe der horizontalen Lagerkräfte bei rein vertikaler Belastung null ergeben muss.

Solche Gesetzmäßigkeiten gibt es viele bei den Einflussfunktionen. So ist die Summe aller Lager-Einflussfunktionen bei einem Durchlaufträger – unabhängig von den Feldlängen – gleich Eins, weil keine Belastung verschwinden darf.

Das gilt auch schon beim eingespannten Träger, wo die beiden *shape functions* $\varphi_1(x)+\varphi_3(x) = 1$, die ja auch die Einflussfunktionen für die Lagerkräfte sind, den Wert Eins ergeben.

Bei den Momenten ist die Sache nicht so einfach. Die Summe $\varphi_2(x)+\varphi_4(x)$ der beiden Einspannmomente ist ein Polynom dritten Grades, sie steigt und fällt, weil die beiden Einspannmomente das Moment $(\varphi_3(x)-\varphi_1(x))\,l$ aus den unterschiedlichen Lagerkräften ausgleichen müssen.

Die drei Einflussfunktionen in Bild 2.62 ergeben in der Summe eine horizontale Verschiebung des Gerüsts um Eins nach rechts, weil die Summe der Lagerkräfte gleich der Last ist. Seien u_3, u_5, u_7 die Freiheitsgrade der gesperrten Lager, dann erhält man die Knotenwerte $\boldsymbol{g}_3$ der ersten Einflussfunktion, wenn man das System mit der Spalte $\boldsymbol{f}_3$ der nicht-reduzierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ belastet (es werden nur die Einträge f_{3i} der Spalte $\boldsymbol{f}_3$ übernommen, die auch in dem reduzierten System vorkommen, u_i nicht gesperrt ist)

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 \tag{2.162}$$

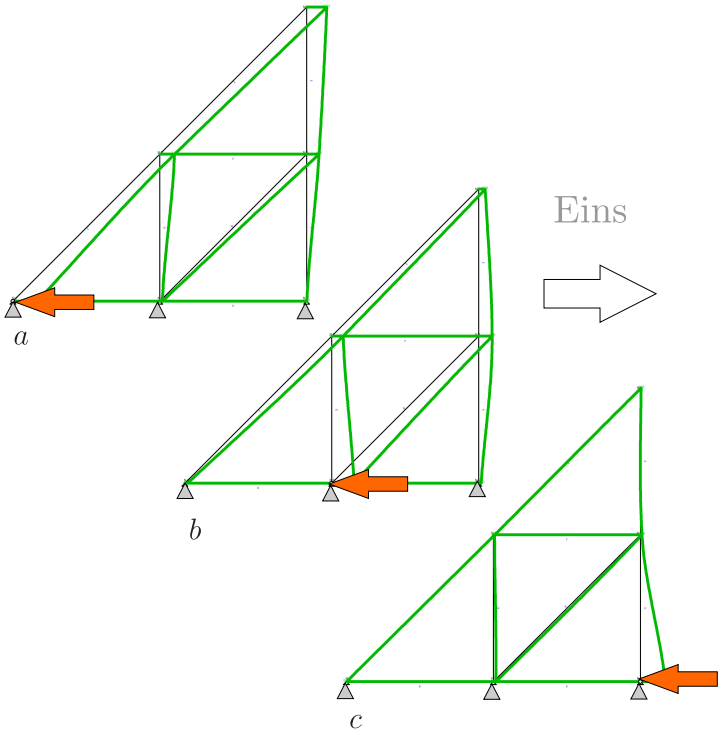


Bild 2.62. Die Einflussfunktionen (horiz. Last) der drei Lagerknoten

und den gesperrten Freiheitsgrad $u_3 = 1$ setzt. Das bedeutet für die Summe der Spalten der drei Lagerknoten, dass

$$\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_5 + \boldsymbol{f}_7) + \text{Diagonalterme} = \boldsymbol{g}_\Sigma = \text{'Eins'} \tag{2.163}$$

ist, wobei die horizontalen u_i in dem Vektor $\boldsymbol{g}_\Sigma$ alle 1 sind und die anderen null.

Man nimmt also einen leeren Vektor $\boldsymbol{u}$ (volle Länge, in dem alle u_i vertreten sind), trägt die Komponenten des obigen Vektors ein, und die ‚Diagonalterme' $u_3 = u_5 = u_7 = 1$. Das Ergebnis ist die Translation $\boldsymbol{g}_\Sigma$.

2.26 Lager im Schatten

Wir hatten am Anfang des Kapitels bemerkt, dass die Einflussfunktion und die Last sich irgendwo kreuzen müssen, damit im Aufpunkt etwas ankommt und das gilt vor allem für Lager. Es gibt Lager, die so ‚versteckt' liegen, dass sie fast nichts von der Belastung mitbekommen, weil ihre Einflussfunktionen früh versanden. Das gilt vor allem für die Eckkräfte in spitz zulaufenden Ecken, $\alpha < 90°$, siehe Bild 3.95, aber auch für die Lagerkräfte der Scheibe in Bild

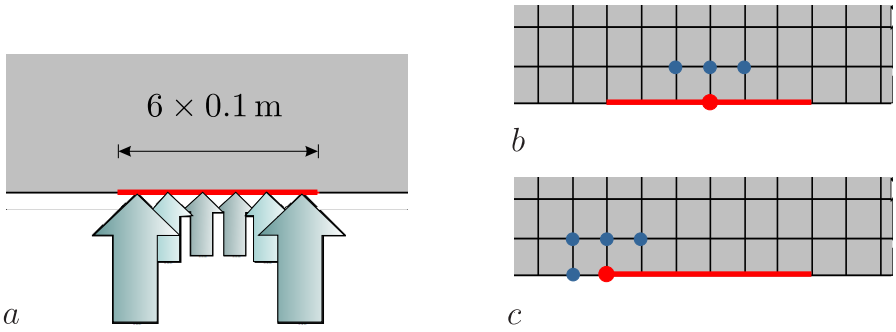


Bild 2.63. Rollenlager einer Wandscheibe

2.63. Das Rollenlager wurde in 6 Elemente unterteilt. Dargestellt sind die resultierenden Lagerkräfte pro Element, die in der Mitte des Lagers deutlich kleiner als am Rand ausfallen, weil eine Auslenkung der inneren Elemente rasch abgebremst wird. In Bild 2.63 b und c sind die Knoten markiert, in denen die f_i angreifen, die die Einflussfunktionen für die beiden einzelnen rot markierten Lagerknoten generieren.

2.27 Einflussfunktionen für integrale Werte

In einem Punkt fokussiert man den Blick auf einen einzelnen Wert des Moments, der Durchbiegung, der Querkraft, etc. Manchmal ist es jedoch sinnvoller, die Ergebnisse über eine kürzere oder längere Strecke aufzuintegrieren, also zu mitteln, weil die Punktwerte zu stark schwanken.

Warum eine solche **Mittelung** bessere Ergebnisse liefert, versteht man, wenn man sich die unterschiedlichen Einflussfunktionen anschaut. Die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in einem Punkt ist eine Spreizung des Aufpunktes in vertikaler Richtung, siehe Bild 2.64 b. Erweitern wir den Punkt zu einer kurzen Linie ℓ und entschließen uns mit dem Mittelwert der Spannungen längs dieser Linie zu rechnen

$$\sigma_{yy}^{\varnothing} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \sigma_{yy}\, ds\,, \tag{2.164}$$

dann ist die Einflussfunktion eine linienhafte Versetzung der Punkte auf der Linie und eine solche Bewegung ist einfacher mit finiten Elementen anzunähern als eine Punktversetzung. Das ist der Grund, warum eine Mittelung in der Regel bessere Werte liefert.

Wenn, wie in Bild 2.64 a, der Schnitt ganz durch die Scheibe geht, ist das Integral der Spannungen

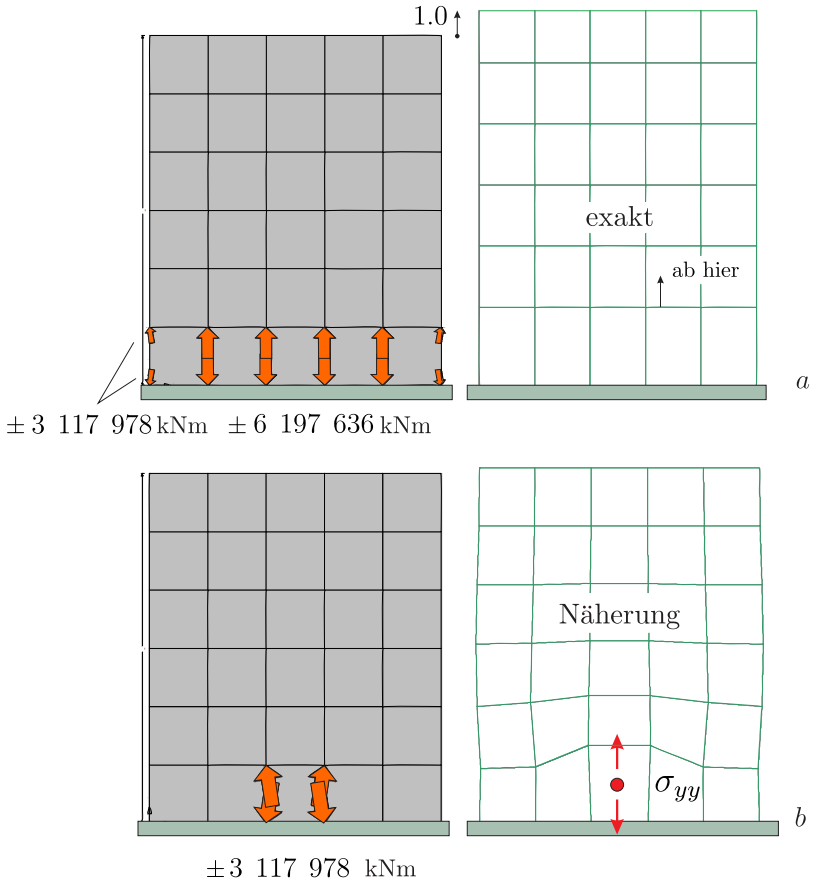


Bild 2.64. Scheibe, **a)** Einflussfunktion für N_y (exakt nach der gedehnten 1. Elementreihe), **b)** Einflussfunktion für σ_{yy}, Kräfte in kNm, Verschiebungen in m (WINFEM)

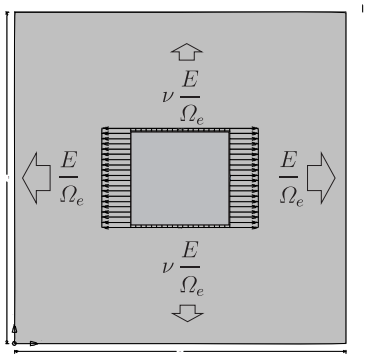
$$N_y = \int_0^l \sigma_{yy}\, dx \tag{2.165}$$

sogar exakt, weil der *lift* in $\mathcal{V}_h^+$ ($= \mathcal{V}_h$ + Starrkörperbewegungen) liegt. Dagegen dürfte die Einflussfunktion für den Punktwert σ_{yy} nur eine Näherung sein, denn so eckig sieht keine Einflussfunktion aus.

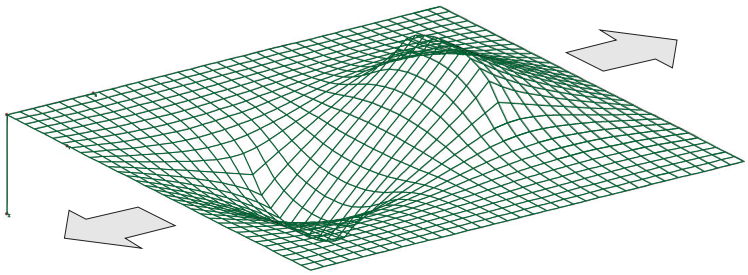
Einflussfunktionen für integrale Werte ordnen sich dem globalen Schema unter. Bei einem Punktfunktional wie $J(w) = w(x)$ sind die j_i die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ im Aufpunkt

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}\,. \tag{2.166}$$

Ist $J(w)$ hingegen ein **Integral**, etwa der Mittelwert der Durchbiegung auf einer Strecke (x_a, x_b),



a



b

Bild 2.65. Einflussfunktion für den Mittelwert von σ_{xx} in dem Element **a)** das ‚Dirac Delta' besteht aus horizontalen Linienkräften auf dem vertikalen Rand und (kleinen, ν-fachen) vertikalen Linienkräften auf dem horizontalen Rand von Ω_e, **b)** horizontale Verschiebungen, nach oben und unten in z-Richtung abgetragen. Bei bilinearen Elementen sind die Einflussfunktionen für den Mittelwert im Element und von σ_{xx} im Mittelpunkt des Elements identisch, [91], (BE-SCHEIBE)

$$J(w) = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} w(x)\, dx\,, \tag{2.167}$$

dann sind die äquivalenten Knotenkräfte die Mittelwerte der φ_i

$$j_i = \frac{1}{(x_b - x_a)} \int_{x_a}^{x_b} \varphi_i(x)\, dx\,. \tag{2.168}$$

Bei Flächentragwerken kann man die mittleren Spannungen in einem Element durch ein Randintegral ausdrücken. Die mittlere Spannung $\sigma_{xx}^{\varnothing}$ in einem Element Ω_e (hier auch die Fläche $|\Omega_e|$) ist das Integral

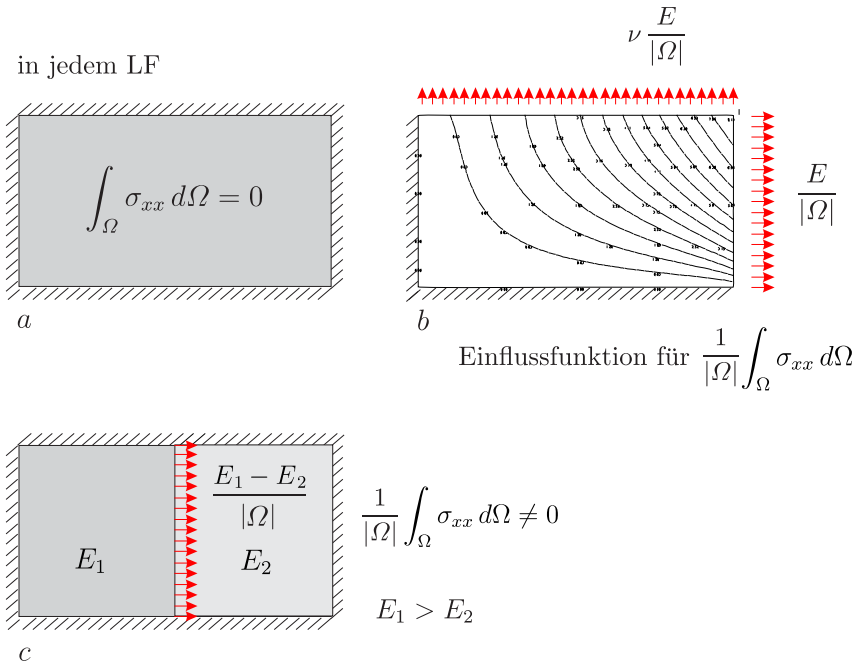


Bild 2.66. a) Der Mittelwert von σ_{xx} ist bei festgehaltenem Rand null, **b)** aber nicht, wenn freie Ränder vorhanden sind und auch nicht, **c)** wenn der E-Modul springt, [96]

$$\sigma_{xx}^{\varnothing} = \frac{1}{\Omega_e}\int_{\Omega_e} \sigma_{xx}\, d\Omega = \frac{E}{\Omega_e}\int_{\Omega_e} (\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy})\, d\Omega\,. \tag{2.169}$$

Wegen $\varepsilon_{xx} = u_{x,x}$ und $\varepsilon_{yy} = u_{y,y}$, kann das Gebietsintegral durch ein Randintegral über den Rand Γ_e des Elements ersetzt werden

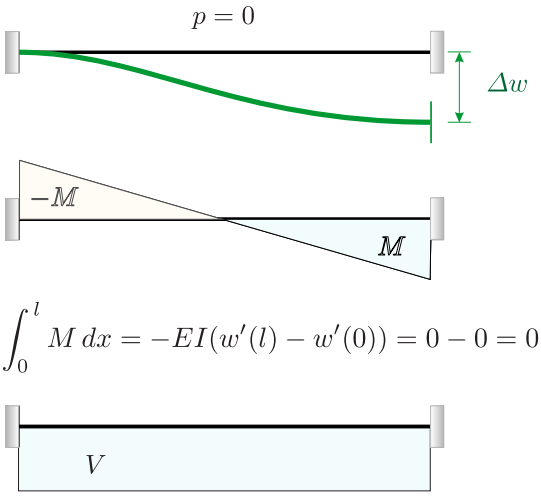
$$\sigma_{xx}^{\varnothing} = \frac{E}{\Omega_e}\int_{\Omega_e} (\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy})\, d\Omega = \frac{E}{\Omega_e}\int_{\Gamma_e} (u_x\, n_x + \nu\, u_y\, n_y)\, ds\,. \tag{2.170}$$

Die Einflussfunktion für die Verschiebung u_x bzw. u_y eines Randpunktes $\boldsymbol{x}$ ist die Verschiebung, die durch eine Einzelkraft $P_x = 1$ bzw. $P_y = 1$ ausgelöst wird, die im Punkt $\boldsymbol{x}$ angreift. Daher ist die Einflussfunktion für das Integral

$$\frac{E}{\Omega_e}\int_{\Gamma_e} (u_x\, n_x + \nu\, u_y\, n_y) ds \tag{2.171}$$

das Verschiebungsfeld, das durch horizontale bzw. vertikale Linienkräfte $E/\Omega_e \cdot n_x$ bzw. $E/\Omega_e \cdot n_y$ längs des Elementrandes Γ_e erzeugt wird, siehe Bild 2.65. (Das Ω_e im Nenner ist natürlich die Fläche des Elements.)

Eine Gleichung sagt es direkt: Es sei $\boldsymbol{G}_{\varnothing}$ die Antwort der Scheibe auf die Randkräfte $E/\Omega_e \cdot n_x$ und $\nu E/\Omega_e \cdot n_y$ in Bild 2.65, für die wir den Vektor $\boldsymbol{t}$ setzen und es sei $\boldsymbol{u}$ das Verschiebungsfeld der Scheibe, dann gilt



$$\int_0^l M\,dx = -EI(w'(l) - w'(0)) = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^l V\,dx = M(l) - M(0) = M + M = 2\,M$$

$$\int_0^l p\,dx = -(V(l) - V(0)) = -(V - V) = 0$$

Bild 2.67. Integralbeziehungen an einem Balken

$$W_{1,2} = \int_\Omega \boldsymbol{G}_\varnothing \bullet \boldsymbol{p}\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Gamma \boldsymbol{t} \bullet \boldsymbol{u}\,ds_{\boldsymbol{y}} = W_{2,1} \tag{2.172}$$

und das zweite Integral ist identisch mit (2.170).

Es folgt, dass die **mittleren Spannungen** in einer Scheibe, die am Rand festgehalten wird, siehe Bild 2.66, null sind, weil die Randkräfte der Einflussfunktion die Scheibe nicht deformieren können. Sinngemäß dasselbe gilt für Platten: Die Mittelwerte der Momente einer allseits eingespannten Platte sind null. Im eindimensionalen Fall hatten wir das schon in Kapitel 1, Glg. (1.38) und Glg. (1.39), festgestellt.

Erfahrungsgemäß sind die Spannungen in der Mitte eines Elements am genauesten. Zum einen, weil man in der Mitte von den Rändern des Elements, wo die FE-Spannungen springen, am weitesten entfernt ist, zum andern liegt es aber auch daran, dass, wenn man bilineare Elemente benutzt, die FE-Einflussfunktionen für die Spannungen in der Elementmitte die gleichen sind, wie für die Mittelwerte der Spannungen im Element. Letztere sind aber einfacher zu erzeugen, weil sie ja keine Punktversetzung simulieren müssen. Im *output* stehen dann also eigentlich die Mittelwerte der Spannungen, [91].

Partielle Integration ist auch eine Aussage über den **Mittelwert** der Ableitung einer Funktion

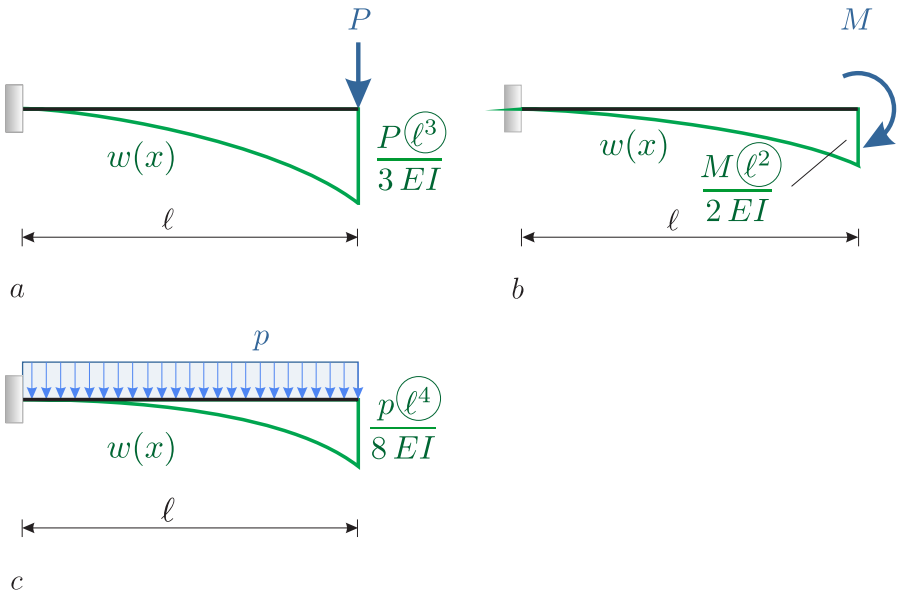


Bild 2.68. Durchbiegung am Kragarmende aus **a)** Einzelkraft – dreimal integrieren, **b)** Moment – zweimal integrieren – und **c)** Streckenlast – viermal integrieren

$$\frac{1}{l}\int_0^l u'(x)\,dx = \frac{1}{l}(u(l)-u(0)) \tag{2.173}$$

und sinngemäß ist daher das Integral der Normalkraft $N = EA\,u'(x)$ in einem Stab (wir lassen die Division durch die Länge weg) proportional zur Spreizung der Endpunkte

$$\int_0^l N(x)\,dx = EA\,(u(l)-u(0))\,. \tag{2.174}$$

Ebenso ist das Integral des Moments $M(x) = -EI\,w''(x)$ proportional zur Differenz der Endtangenten, siehe Bild 2.67,

$$\int_0^l M(x)\,dx = -EI\,(w'(l)-w'(0)), \tag{2.175}$$

und bei der Querkraft

$$\int_0^l V(x)\,dx = M(l)-M(0) \tag{2.176}$$

ist es die Differenz der Endmomente und die Resultierende der Belastung $p = -V' = EI\,w^{IV}$ ist natürlich gerade die Differenz der Querkräfte

$$\int_0^l p\,dx = -(V(l)-V(0))\,. \tag{2.177}$$

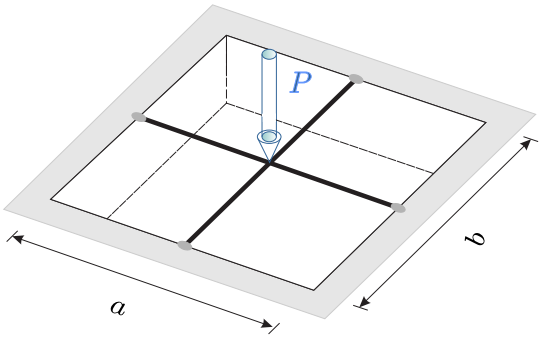


Bild 2.69. Balkenrost

2.28 Einflussfunktionen rechnen rückwärts

Wenn man differenziert, dann geht man ‚vorwärts' und wenn man integriert, dann geht man ‚rückwärts'. Einflussfunktionen rechnen rückwärts. Aus $-EA\,u'' = p$ bzw. $EI\,w^{IV} = p$ werden die Ableitungen niedrigerer Ordnung

$$u,\ N = EA\,u' \qquad w,\ w',\ M,\ V \tag{2.178}$$

berechnet.

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für die Normalkraft in einem Stab integriert die Belastung einmal

$$N(x) = \int_0^l G_1(y,x)\,p(y)\,dy \qquad (\,'') \to (\,') \tag{2.179}$$

und die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Längsverschiebung $u(x)$ integriert die Belastung zweimal

$$u(x) = \int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \qquad (\,'') \to (\ )\,. \tag{2.180}$$

Das Rückwärtsrechnen sieht man sehr schön an dem Kragträger in Bild 2.68. Die Durchbiegung w ist ja das dreifach unbestimmte Integral der Querkraft $V = -EI\,w'''$

$$w = -\int\int\int V\,dx\,dx\,dx = -\int\int\int P\,dx\,dx\,dx \tag{2.181}$$

und prompt steht ein ℓ^3 im Ergebnis, wenn eine Einzelkraft P wirkt,

$$w(\ell) = \frac{P\,\ell^3}{3\,EI} \qquad V \to w\,, \tag{2.182}$$



Bild 2.70. *Colorado Crossing*, Einflussfunktion für ein Biegemoment $M(x)$

und ist es ein Moment $M = -EI\,w''$, dann steht dort ein ℓ^2

$$w(\ell) = \frac{M\,\ell^2}{2\,EI} \qquad M \to w\,, \tag{2.183}$$

und ist es eine Streckenlast p,

$$w(\ell) = \frac{p\,\ell^4}{8\,EI} \qquad p \to w \tag{2.184}$$

dann korrespondiert das ℓ^4 dem $EI\,w^{IV} = p$.

Wir finden das ℓ^3 der Glg. (2.182) auch in der Formel

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{b^3}{a^3}\,, \tag{2.185}$$

die erklärt, wie sich eine Punktlast $P = P_a + P_b$ auf zwei Balken verteilt, siehe Bild 2.69.

Eine Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dagegen differenziert und daher finden wir den ‚inversen' Faktor EI/l^3 vor einer Balkenmatrix bzw. den Faktor EA/l vor einer Stabmatrix, $w \to V$ bzw. $u \to N$.

Bei dem ‚zurück' ist es wichtig zu wissen, wie man auf das p gekommen ist. Man differenziere die Funktion $u(x) = \sin(\pi\,x/l)$ zweimal bzw. viermal

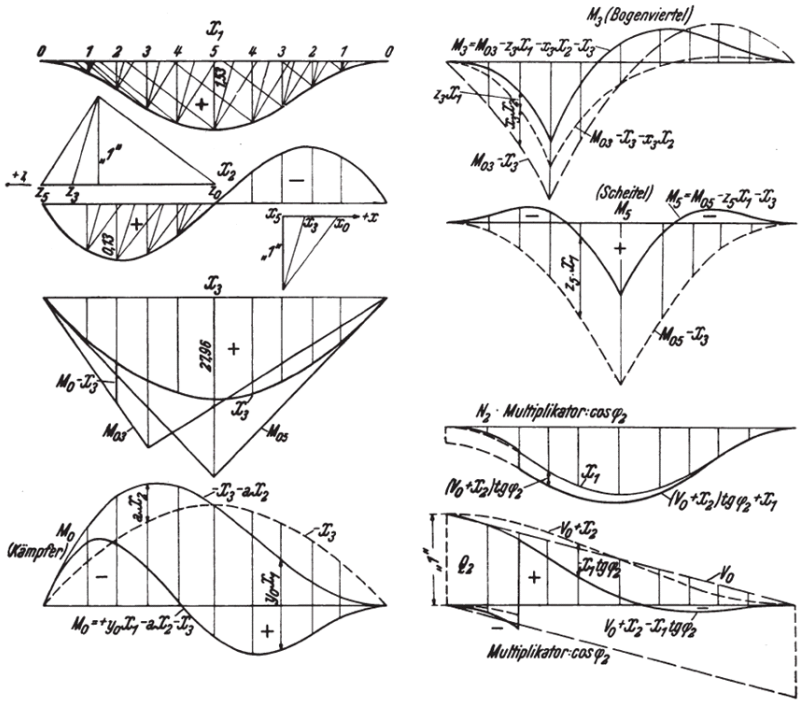


Bild 2.71. Einflussfunktionen für X_1, X_2, X_3 und das Biegemoment, und die Normal- und Querkraft eines Bogens, Pucher [171] S. 287.

$$-u'' = (\frac{\pi}{l})^2 \sin(\pi\, x/l) \qquad = p(x) \tag{2.186}$$

$$EI\, u^{IV} = (\frac{\pi}{l})^4 \sin(\pi\, x/l) \qquad = \bar{p}(x)\,. \tag{2.187}$$

Im ersten Fall ist sie die Streckenlast $p(x)$ eines vorgespannten Seils und im zweiten Fall ist sie die Streckenlast $\bar{p}(x)$ eines Balkens.

Um u im Punkt $x = l/2$ aus den rechten Seiten $p(x)$ und $\bar{p}(x)$ zu berechnen, sind verschiedene Einflussfunktionen nötig, obwohl wir nach demselben Wert fragen, $u(l/2) = \sin(0.5 \cdot \pi)$. Wir müssen also wissen, welcher Operator p aus u erzeugt hat. Wo kommen die Daten her?

2.29 Historischer Rückblick

Angesichts des heutigen Komforts – ein *click* auf irgendeinen Punkt eines Tragwerks, siehe Bild 2.70, und man sieht die gewünschte Einflussfunktion – sei daran erinnert, wie man früher Einflussfunktionen berechnet hat, siehe Bild 2.71. In der Regel benutzte man dazu das Kraftgrößenverfahren. Das Moment M_0 am statisch bestimmten Hauptsystem hatte eine Einflussfunktion,

aber auch jede statische Überzählige X_i und erst der Zusammenklang aller Einflussfunktionen ergab dann die Einflussfunktion für das Biegemoment

$$M = M_0 + X_1\, M_1 + X_2\, M_2 + \ldots \tag{2.188}$$

Das war eine Sisyphus-Arbeit und es war eine ungewohnte Arbeit, denn es waren nicht Schnittgrößen zu bestimmen, sondern Biegelinien, Verformungen, deren Verlauf über das ganze Tragwerk zu verfolgen waren. Geringer Trost, dass man Hilfsmittel kannte – *elastischer Schwerpunkt,* $\mathfrak{w}$*-Gewichte, Mohrsche Analogie*, etc. – die heute in Vergessenheit geraten sind. Die drei Bände von Müller-Breslau sind beeindruckende Zeugnisse dieser Zeit, [153].

2.30 Das Abklingverhalten

Wenn der Tragwerksplaner von seinem statischen Gefühl spricht, dann meint er die Einflussfunktionen. Sie dokumentieren nachvollziehbar das Tragverhalten einer Struktur. Da, wo ‚Material' ist, da ist Wirkung. Der leere Raum trägt nicht. Wirkung verzweigt sich nur längs den Riegeln oder Stielen.

Zum Spreizen eines Querkraft- oder Momentengelenks in einem statisch unbestimmten Rahmen benötigt man **Energie**. Je schneller diese Energie versickert, desto eher versandet auch die Einflussfunktion. Das entspricht der *Daumenregel*: Je mehr Stäbe die Umgebung des Gelenks pro m^3 enthält, desto schneller geht die Energie verloren. 3-D Modelle bremsen also die Einflussfunktionen schneller ab, weil sich die Energie einfach über mehr Stäbe verteilt als bei 2-D Modellen.

Das ist wohl auch der Grund, warum die Positionsstatik auf der sicheren Seite liegt, denn wenn das einzelne Bauteil, die Platte, die Scheibe, aus dem Tragwerk herausgelöst und für sich berechnet wird, dann fehlt die Bremswirkung der angrenzenden Bauteile. Numerische Untersuchungen bestätigen diese Vermutung, [134], [135].

Dazu kommt, dass eventuelle Rechenungenauigkeiten – etwa in einem Einspannmoment – lokalen Störungen gleichen, deren Effekte in einem 3-D Modell rasch ‚versacken'.

2.31 Prinzip von St. Venant

‚Wenn die auf einen kleinen Teil der Oberfläche eines elastischen Körpers wirkende Kraft durch ein äquivalentes Kräftesystem ersetzt wird, ruft diese Belastungsumverteilung wesentliche Änderungen nur bei den örtlichen Spannungen hervor: nicht aber in Bereichen, die groß sind im Vergleich zur belasteten Oberfläche', [222]. Dieses Prinzip ist eine direkte Konsequenz der Tatsache, dass Wirkungen per Einflussfunktionen propagieren. Einflussfunktionen sind Skalarprodukte, sind Integrale, die die Belastung p mit einem Kern $G(y, x)$ wichten und der Kern hat (gewöhnlich) die Eigenschaft, dass er mit wachsendem Abstand vom Aufpunkt gegen null tendiert. Wenn der Abstand

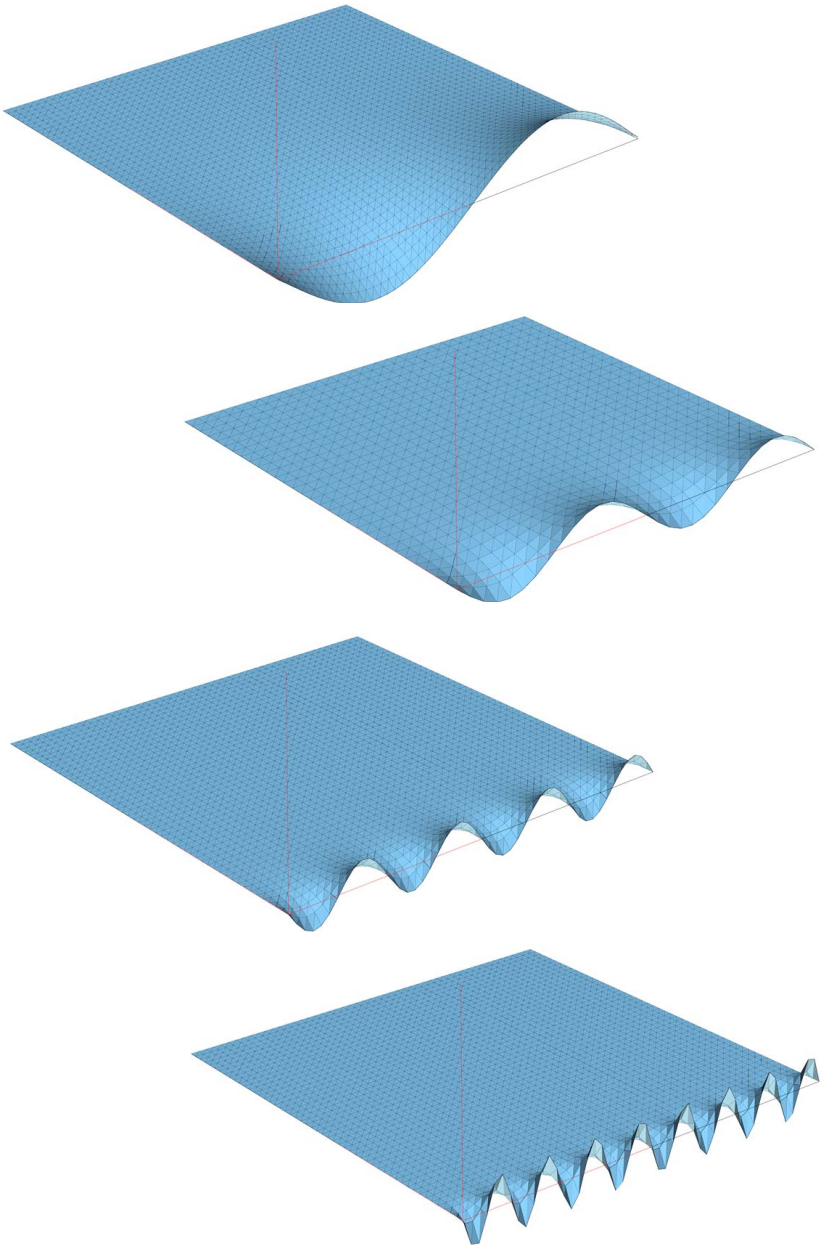


Bild 2.72. Membran mit beweglicher vorderer Kante. Je kurzwelliger die eingeprägten Randverformungen sind, desto eher klingen sie ab. Dieser Effekt ist den Einflussfunktionen geschuldet. Hochfrequente Linienlasten auf einem Flächentragwerk sind wie ‚nichts' (BE-LAPLACE)

nur groß genug ist kann man eine **Ein-Punkt-Quadratur** benutzen, d.h. man kann die Belastung durch ihre Resultierende ersetzen. Weil nun äquivalente Kräftesysteme dieselbe Resultierende haben, wirkt sich ein Austausch in der Ferne nicht aus.

Daraus folgt im übrigen, dass die Wirkungen von antimetrischen Lasten, von Lasten mit null Resultierender, besonders schnell abklingen. Ja wenn die Einflussfunktionen im Bereich der Belastung ‚flach' verläuft, keine Steigung hat, dann ist der Einfluss sofort null, $Symmetrie \times Antimetrie = 0$.

Antimetrische Belastungen ‚differenzieren' die Einflussfunktionen.

Zu dem Thema gehört im Grunde auch der Effekt von oszillierenden Lasten, die die Tendenz haben sich gegenseitig auszulöschen, siehe Bild 2.72 und 2.73.

Es reicht, dass die Last schachbrettartig angeordnet ist und die Lastflächen die Größe der finiten Elementen haben, dann sind z.B. bei einer Membran die f_i im Innern alle null. Der Algorithmus hat in solchen Fällen einen ‚blinden Fleck'. Er nimmt die Belastung nicht wahr und gibt $u = 0$ aus.

St. Venant gilt, weil die Lösungen von *elliptischen Differentialgleichungen* rasch abklingen, während sich die Lösungen von *hyperbolischen Differentialgleichungen*, wie z.B. von Schwingungsproblemen, längs den Charakteristiken ungehindert fortpflanzen. Auch Kühlturmschalen verhalten sich so. Wenn eine windschiefe Gerade um eine vertikale Achse rotiert, entsteht ein Hyperboloid, ein Kühlturm, und längs den Geraden, den Erzeugenden pflanzen sich Störungen von unten nach oben fort. In Wirklichkeit weichen Kühltürme jedoch von dieser idealen Form ab. Kühltürme sind nicht ‚durchgängig' Hyperboloide, nur im unteren Teil stimmt es.

2.32 Fourier

Beim Blick auf die Bilder 2.72 und 2.73 versteht man, warum Fourier und das JPEG-Verfahren[9] funktionieren. Die höheren Frequenzen in einer Fourier-Reihe, die kurzwelligen Oszillationen kommen nicht weit, weil ihre Effekte von den Einflussfunktionen ausgelöscht werden und darauf verlässt sich Fourier.

Die Zerlegung eines Signals in seine Frequenzen ist das eine, das andere, nicht weniger wichtig, ist, dass Effekte auf der Überlagerung des Signals mit den Einflussfunktionen beruhen. Erst beides zusammen begründet die Bedeutung der Fourier-Analysis.

Die Idee der **diskreten Fourier Transformation** ist ja, dass man einen Vektor nach seinen Wellenanteilen sortiert und dann die kurzen Wellen, die hohen Frequenzen, weglässt. Der wichtigste Vektor ist der Eins-Vektor

[9] Beim JPEG-Verfahren (DCT) wird ein Schwarz-Weiß-Bild in Blöcke aus 8×8 Pixeln unterteilt und die Grautöne in den 64 Pixeln eines Blocks bilden einen Vektor, den man Fourier-transformiert und die hohen Frequenzen weglässt.

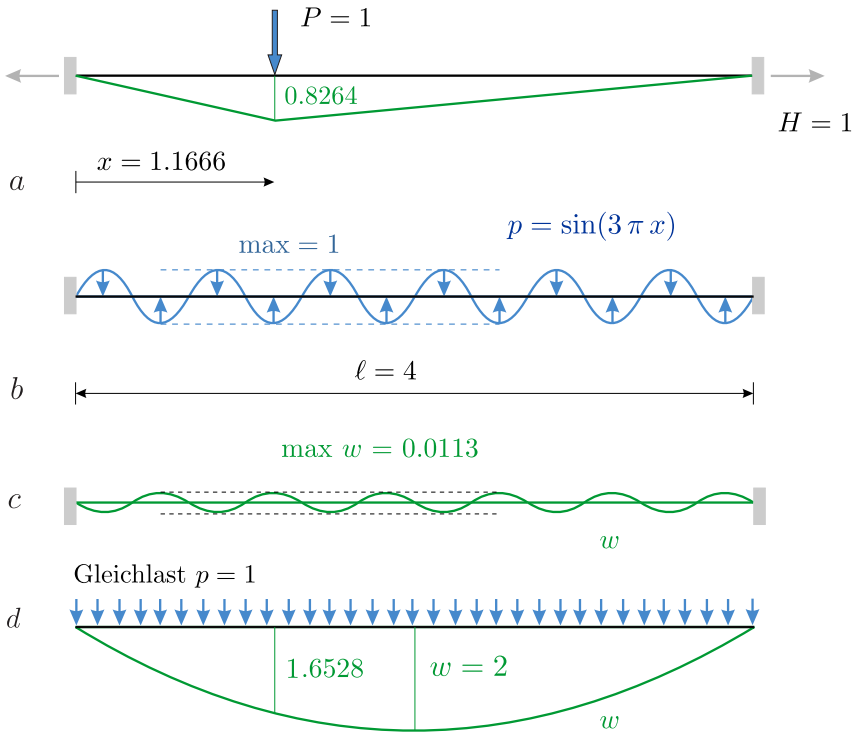


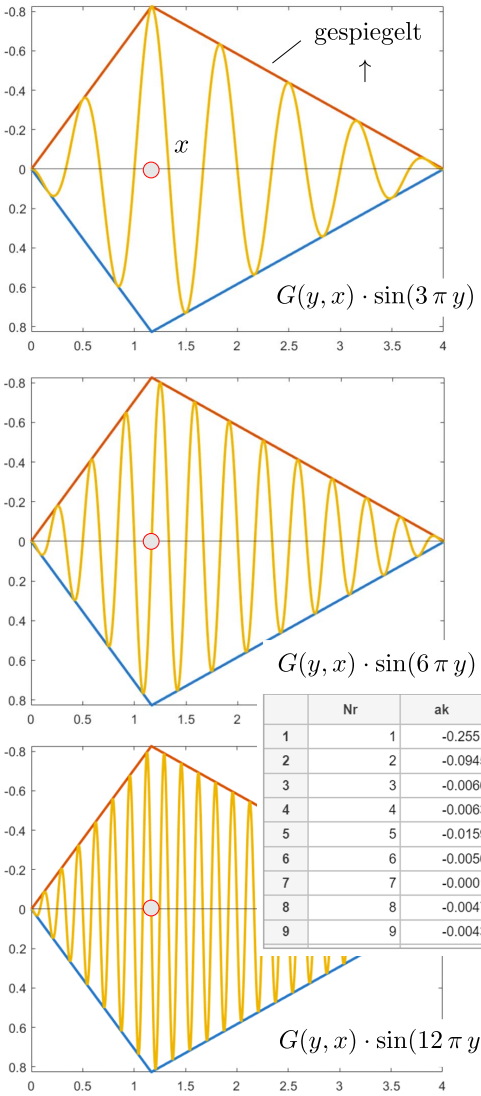
Bild 2.73. Vorgespanntes Seil, **a)** Einflussfunktion, **b)** oszillierende Belastung, **c)** Durchbiegung, **d)** zum Vergleich Durchbiegung unter Gleichlast (MATLAB)

$\boldsymbol{u} = \{1, 1, 1, \ldots\}^T$, dessen Wirkung, dessen Integral einfach die Fläche der Einflussfunktion ist, dann folgen Vektoren, die ‚eingefrorenen' Wellen wachsender Frequenz gleichen, deren Wirkung (= Integral) mit zunehmender Frequenz gegen Null geht, weil sie bei der Überlagerung mit den Einflussfunktionen ausgelöscht werden.

Der eigentliche ‚Pfiff' bei der diskreten Fourier Transformation ist die geschickt gewählte Basis aus Wellenvektoren (‚breiten Pinselstrichen'), die viel effektiver ist als die ‚pointillistische' Basis aus Euklidischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$. Will man einen Vektor $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{64} u_i \, \boldsymbol{e}_i$ senden, muss man alle 64 Komponenten u_i senden, darf kein u_i weglassen, (es könnte ja gerade das hellste Pixel sein), während Fourier sich auf die ersten 10 Komponenten beschränken kann, ohne dass es am anderen Ende der Leitung groß auffällt.

Einflussfunktionen haben viel mit **Fourier-Analysis** zu tun, weil beide auf Überlagerung beruhen. Fourier-Analysis gleicht einem ‚Ausschöpfen', siehe Bild 2.74, mittels den trigonometrischen Funktionen.

Bei der Fourier-Analysis, L = Periode, $\omega = 2\pi/L$,



	Nr	ak	bk
1	1	-0.2551	0.1958
2	2	-0.0945	-0.0253
3	3	-0.0066	-0.0159
4	4	-0.0063	0.0110
5	5	-0.0159	0.0021
6	6	-0.0056	-0.0056
7	7	-0.0001	0.0011
8	8	-0.0047	0.0027
9	9	-0.0043	-0.0018

Bild 2.74. Fourier-Zerlegung der Einflussfunktion $G(y,x)$. Die Integrale (dy) der Sinus-Glieder, die zwischen $\pm G(y,x)$ oszillieren, sind die Koeffizienten b_6, b_{12} und b_{24} (MATLAB)

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos(k\,\omega\,x)\,dx \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin(k\,\omega\,x)\,dx \tag{2.189a}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos(k\,\omega\,x) + b_k\,\sin(k\,\omega\,x))\,, \tag{2.189b}$$

wird die Einflussfunktion nach Anteilen $\cos(k\,\omega\,x)$ und $\sin(k\,\omega\,x)$ zerlegt, die paarweise orthogonal sind

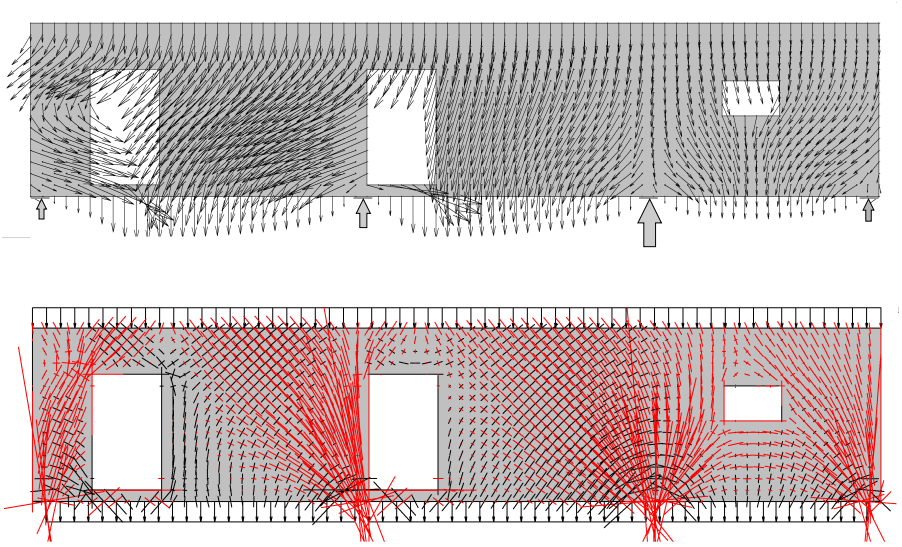


Bild 2.75. Das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ einer Scheibe und die zugehörigen Spannungen, LF g + Randlasten, (BE-SCHEIBE, BSP6)

$$\int_0^L \cos(k\,\omega\,x)\,\cos(l\,\omega\,x)\,dx = 0 \qquad \text{wenn } k \neq l \qquad \text{etc.} \tag{2.190}$$

und wenn man auch die Belastung so zerlegt, Koeffizienten c_k, d_k, so wird klar: Eine Belastung kann nur Effekt machen, wenn ihre Frequenzen im Spektrum der Einflussfunktionen vertreten sind, d.h. wenn die Koeffizienten $a_k \leftrightarrow c_k$ und $b_k \leftrightarrow d_k$ sich von der Größe her entsprechen.

Die Einflussfunktion für das Seil ist jedoch so einfach gestrickt, dass sie wenig höhere Anteile enthält und daher finden die ‚hochfrequenten' k kein passendes k in der Fourier-Reihe der Einflussfunktion.

Wenn man die Fourier-Reihen komplex schreibt[10]

$$2\,c_0 = a_0 \qquad 2\,c_k = a_k - i\,b_k \qquad 2\,c_{-k} = a_k + i\,b_k \tag{2.191}$$

also

$$G(y,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)\,e^{i\,k\,y} \qquad p(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\,e^{i\,k\,y}\,, \tag{2.192}$$

dann sieht man noch besser, dass aus der Überlagerung ein Skalarprodukt wird ($\bar{p}_k$ = konjugiert komplex)

$$J(u) = \int_0^l G(y,x)\,p(y)\,dy = l\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\bar{p}_k \tag{2.193}$$

[10] umgekehrt: $a_k = c_k + c_{-k}$, (cos. = sym.) , $b_k = i\,(c_k - c_{-k})$ (sin. = antim.)

wie bei den finiten Elementen, $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$, nur dass die finiten Elementen eine andere Basis, die φ_i, benutzen und bei der Bestimmung von $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{j}$ eine andere Metrik.

2.33 Nichtlineare Effekte

Eine Wandscheibe ist kein Fluid, sondern sie wird, auch wenn man sie nichtlinear rechnet, in großen Teilen wie eine lineare Scheibe tragen, siehe Bild 2.75. Die Nachverfolgung von nichtlinearen Effekten auf Grund von gerissenen Zugzonen oder plastifizierter Bewehrung in hochbeanspruchten Ecken ist sehr aufwendig und bleibt Spezialuntersuchungen vorbehalten. Meist konzentriert sie sich ja auch nur auf die Modellierung des Zusammenwirkens von Beton und Stahl, [79].

Im Grunde hat man als Laie (Nicht-Massivbauer) immer die Taylorreihe

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x + \dots \tag{2.194}$$

vor Augen und fragt sich, ob die ‚höheren Terme' den Aufwand wert sind.

Machen wir ein Modell: In der Ecke einer Öffnung plastifiziert der Stahl und wir modellieren diesen Bereich, indem wir den E-Modul in den drei, vier Elementen in der Ecke um 90 % reduzieren. Wir rechnen also weiterhin linear-elastisch und können so den Effekt der Steifigkeitsänderung mit Gleichgewichts-Kräften $\boldsymbol{f}^+$ in den Ecken der betroffenen Elemente modellieren. Nach allem, was wir in Kapitel 5 über die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ sagen, dürfte zu vermuten sein, dass die Fernwirkung der Kräfte gering ist.

Bei linearen *multifield problems*, wie solche Probleme heute heißen, kann man alles auf die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ zurückspielen. Bei nichtlinearen Problemen geht das nicht mehr, aber wenn wir die obige Taylor-Reihe anschauen und das ‚nichtlinear' mit den quadratischen und höheren Termen identifizieren, dann sollte zu vermuten sein, dass die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ zumindest in erster Näherung das Modell gut beschreiben.

Aber wie pflanzen sich bei nichtlinearen *multifield problems* die Ergebnisse fort? Welchen Einfluss hat die Numerik in der Zone A auf die Ergebnisse in der Zone B? Wie nichtlinear sind die nichtlinearen Effekte? Um wieviel ändern sich die Lagerkräfte oder die Schnittkräfte, wenn man nichtlinear rechnet?

2.34 Eigenlösungen

Eine Kurve w ist eine Eigenlösung der Differentialgleichung zum Eigenwert λ, wenn

$$-w'' = \lambda\, w\,. \tag{2.195}$$

Die Seilkurve in Bild 2.73 c

$$w(x) = \frac{1}{9\,\pi^2}\,\sin(3\,\pi\,x) \tag{2.196}$$

ist die Lösung der Differentialgleichung

$$-w''(x) = \sin(3\,\pi\,x)\,, \tag{2.197}$$

ist also eine Eigenlösung zum Eigenwert $\lambda = 9\,\pi^2$, denn

$$p(x) = \sin(3\,\pi\,x) = \lambda\,w = \lambda\,\frac{1}{9\,\pi^2}\,\sin(3\,\pi\,x)\,. \tag{2.198}$$

Weil es eine Eigenlösung ist, muss bei der der Überlagerung von $\lambda\,w$ mit der Einflussfunktion $G_0(y,x)$, dem Dreieck in Bild 2.73 a, die Funktion selbst herauskommen

$$w(x) = \lambda \int_0^l G_0(y,x)\,w(y)\,dy \tag{2.199}$$

und das ist merkwürdig: Das Dreieck $G_0(y,x)$ wirkt auf die Eigenlösung wie die Multiplikation mit dem Eigenwert λ. Algebraisch muss das so sein, aber technisch ist es schon merkwürdig, dass punktweise[11]

$$\boxed{\lambda \int \text{Fläche 1}\,(x) \times \text{Fläche 2} = \text{Fläche 2}\,(x)} \tag{2.200}$$

Man steckt die ‚Schlangenlinie' (= Fläche 2) hinein und es kommt die Schlangenlinie wieder heraus (bis auf den Faktor λ). Der *input* und das Echo sind im wesentlichen identisch.

Der Kern $\lambda\,G_0(y,x)$ gleicht in seiner Wirkung auf eine Eigenlösung also dem Dirac Delta

$$w(x) = \int_0^l \delta(y-x)\,w(y)\,dy = \lambda \int_0^l G_0(y,x)\,w(y)\,dy\,. \tag{2.201}$$

Der Mathematiker wird natürlich sagen, das ist evident, denn weil G_0 die Lösung von $-G_0'' = \delta(y-x)$ ist, ergibt die partielle Integration von (2.199) genau dieses Resultat. Aber für einen Ingenieur, der in Flächen denkt, ist es schon merkwürdig.

Das muss im übrigen für alle linearen, selbstadjungierten Differentialgleichungen $L\,u = p$ gelten: Die Eigenlösungen, $L\,u = \lambda\,u$, überlagert mit der Einflussfunktion $\lambda\,G_0(y,x)$ müssen gerade u ergeben

$$u(x) = \lambda \int_0^l G_0(y,x)\,u(y)\,dy\,. \tag{2.202}$$

[11] Die Glg. wird ja immer nur für einzelne Punkte x formuliert, die Fläche 1 ist eine Funktion von x, aber wenn x alle Punkte durchläuft entsteht die Fläche 2.

Und was man an Bild 2.73 auch sieht ist, dass durch das Hochintegrieren der Belastung

$$p(x) = \sin(n\,x) \qquad \rightarrow \qquad u(x) = \frac{1}{n^2}\,\sin(n\,x) \cdot \frac{1}{EA} \tag{2.203}$$

die Auslenkung ‚quadratisch' gedämpft wird. Je höher die Frequenz desto kleiner die Auslenkung. Beim Balken ist das Dämpfungsmaß n^4.

2.35 Eigenlösungen und Greensche Funktionen

Wir wollen kurz an die **lineare Algebra** erinnern. Es sei $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ eine reguläre symmetrische Matrix mit n unterschiedlichen, orthogonalen Eigenvektoren $\boldsymbol{g}_i, i = 1, 2, \ldots n$ mit der Länge $\|g_i\| = 1$ und $\boldsymbol{S}$ sei die Matrix der Eigenvektoren. Dann kann man $\boldsymbol{K}$ in eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ überführen[12]

$$\boldsymbol{S}^{-1}\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} \tag{2.204}$$

auf deren Diagonalen die Eigenwerte λ_i stehen. Wechselt man also im $\mathbb{R}^n$ von der euklidischen Basis zur Basis der Eigenvektoren, dann entspricht dem Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ das System $\boldsymbol{D}\,\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{f}}$, wenn $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}$ und $\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{f}$ die Vektoren in der neuen Basis sind und die Inverse ist eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $1/\lambda_i$. Zur rechten Seite $\bar{\boldsymbol{f}} = \sum_i \bar{f}_i\,\boldsymbol{g}_i$ gehört also die Lösung $\bar{\boldsymbol{u}} = \sum_i \bar{f}_i/\lambda_i\,\boldsymbol{g}_i$.

Wesentlich an dieser Stelle ist, dass man den inversen Operator $\boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{S}$ als eine Entwicklung nach den Eigenvektoren

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{g}_j^T \qquad (n \text{ Matrizen} = \text{Spal.} \times \text{Zeile}) \tag{2.205}$$

darstellen kann und das macht deutlich, dass man umgekehrt die Greenschen Funktionen aus den Eigenlösungen entwickeln kann. Die beiden Themen gehören eng zusammen, [223].

2.36 Theorie II. Ordnung

Die Differentialgleichung für den Balken nach Theorie zweiter Ordnung lautet

$$EI\,w^{IV}(x) + P\,w''(x) = p(x) \tag{2.206}$$

hierbei ist P der Absolutwert der Druckkraft in dem Balken und $p(x)$ die Streckenlast, siehe Bild 2.76 a. Dies ist eine lineare, selbstadjungierte Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, aber das Problem

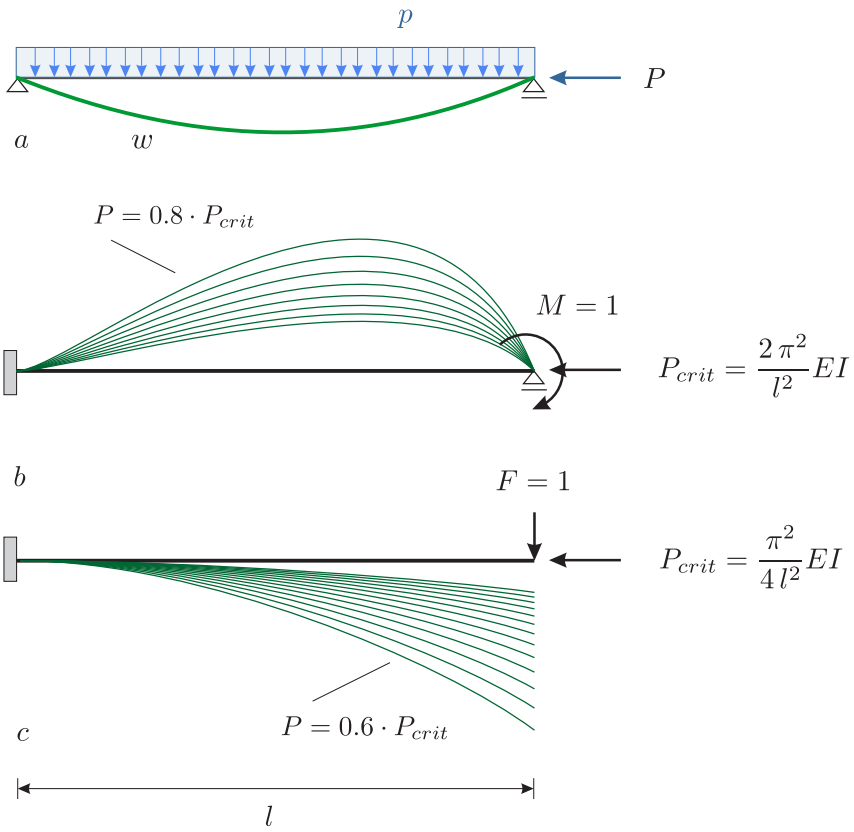


Bild 2.76. Theorie II. Ordnung **a)** Druckkraft P, **b)** Einflussfunktionen für $w'(l)$ und **c)** für $w(l)$

ist, dass der Koeffizient P Lastfall abhängig ist und daher hängt auch die Einflussfunktion von P ab.

Je mehr P sich der Knicklast P_{crit} nähert, desto mehr wölben sich die Einflussfunktionen für die Verdrehung am Balkenende, Bild 2.76 b, bzw. für die Durchbiegung, Bild 2.76 c, auf.

Diese Abhängigkeit von der Normalkraft N in den einzelnen Stielen ist der Grund, warum es nicht möglich ist, Einflussfunktionen für z.B. Hochregallager anzugeben. Erst muss die Gleichgewichtslage des Regals nach Theorie erster Ordnung gefunden werden und dann kann man diese Lösung iterativ korrigieren.

Im Prinzip ist die Theorie zweiter Ordnung ein **nichtlineares Problem**, wo die Längsverschiebung $u(x)$ und die seitliche Auslenkung $w(x)$ gemäß dem System

[12] Es ist $\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S}^{-1}$ wegen der Orthogonalität

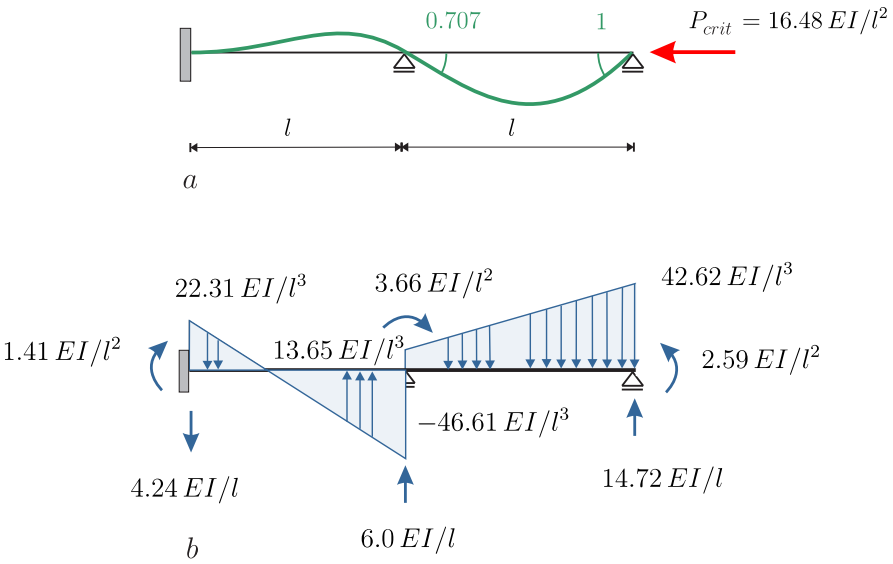


Bild 2.77. Theorie II. Ordg. mit finiten Elementen, **a)** die Knicklast und die erste Eigenform, **b)** die äußeren Kräfte hinter der Eigenform

$$-EA\left(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2\right)' = p_x \tag{2.207a}$$

$$EI\,w^{IV} - \left(EA(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)\,w'\right)' = p_z \tag{2.207b}$$

miteinander verknüpft sind, siehe Kapitel 8.4.

Nur wenn die Normalkraft

$$N = EA(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2) \tag{2.208}$$

konstant ist und ihre Größe bekannt ist, kann dieses System auf die eine Gleichung (2.206) reduziert werden. Man beachte, dass ein negatives N ein positives P in (2.206) ist.

Die homogene Lösung der Differentialgleichung (2.206) lautet

$$w(x) = c_1\,\sin(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_2\,\cos(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_3\,\varepsilon\,\frac{x}{l} + c_4 \qquad \varepsilon = l\sqrt{P/EI}\,. \tag{2.209}$$

Ist die Längskraft eine Zugkraft Z, dann lautet die Differentialgleichung

$$EI\,w^{IV}(x) - Z\,w''(x) = p(x) \tag{2.210}$$

und die homogene Lösung ist, siehe [165] S. 188,

$$w(x) = c_1\,\sinh(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_2\,\cosh(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_3\,\varepsilon\,\frac{x}{l} + c_4 \qquad \varepsilon = l\sqrt{Z/EI}\,. \tag{2.211}$$

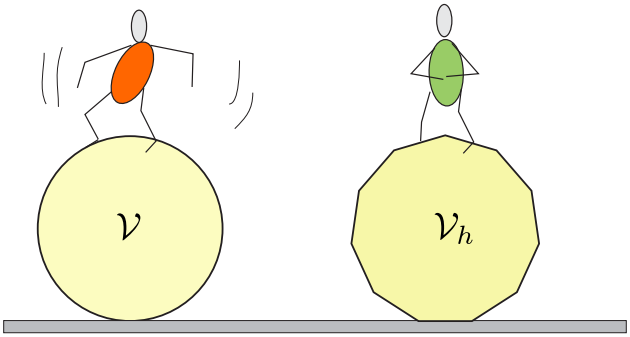


Bild 2.78. Ein Vieleck ist nicht ganz so labil wie ein Kreis

Unter Zug ist die Differentialgleichung (2.210) des Balkens dieselbe, wie bei einer Zugbandbrücke, $Z = H$ siehe (1.69). Theorie II. Ordnung ist also Rechnen mit einem ‚zug- und druckfesten' Seil, das durch den Balken gezogen wird.

Bei Knickproblemen ist die rechte Seite der Differentialgleichung (2.206) null und daher entfällt in dem Ausdruck der potentiellen Energie das Lastintegral (p, w)

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} - P(x)\,(w'(x))^2\right) dx\,. \tag{2.212}$$

Im Grundzustand, $w = 0$, wie im ausgeknickten Zustand ist die potentielle Energie null, und daher ist der Quotient

$$P = \frac{1}{EI} \cdot \frac{(M, M)}{(w', w')} \qquad \textbf{Rayleigh-Quotient} \tag{2.213}$$

gleich der Knicklast. Der erste Integrand ist ja die Biegeenergie und der zweite Integrand ist die Verzerrungsenergie in dem ‚gedrückten Seil' – die ausgelenkte Achse des Balkens ist das Seil – und im ausgeknickten Zustand sind diese beiden gleich groß, halten sie den Balken in der Schwebe, solange kein Windhauch das prekäre Gleichgewicht stört.

Ist dagegen $P < P_{crit}$ dann treiben die Rückstellkräfte den Balken bei jedem Auslenkversuch in die Ruhelage $w = 0$ zurück.

Die **Knickfigur** w ist auch die Biegelinie in $\mathcal{V}$ (= alle w, die die Lagerbedingungen einhalten), die den Rayleigh-Quotienten zum Minimum macht und dieses Minimum ist gerade die Knicklast P. Mit finiten Elementen konstruiert man eine Teilmenge $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ und bestimmt die genäherte Knicklast P_h so, dass die FE-Lösung w_h den Rayleigh-Quotienten auf $\mathcal{V}_h$ zum Minimum macht. Weil aber das Minimum auf der Teilmenge größer ist als auf der ganzen Menge, $P < P_h$, liegt die FE-Knicklast auf der unsicheren Seite.

Anders als sonst, *ein Riegel = ein Element*, muss man bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung die Riegel und Stiele in vier bis sechs Elemente unterteilen, weil die FE-Programme mit einer genäherten Steifigkeitsmatrix rechnen, siehe Kapitel 9.31, denn technisch sind die *shape functions* φ_i in

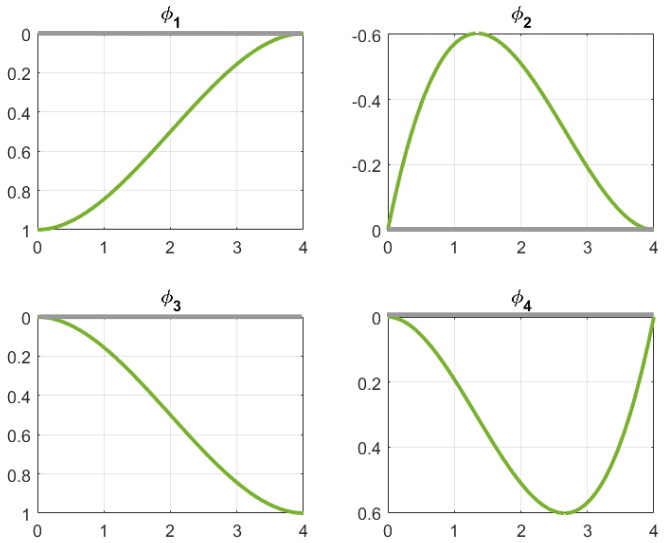


Bild 2.79. Die Einheitsverformungen des gedrückten Balkens, Th. II. Ordg., unterscheiden sich optisch nicht von den φ_i der Th. I. Ordg. (MATLAB)

(3.59) keine homogenen Lösungen der Differentialgleichung (2.206). Das sieht man in Bild 2.77, das wir aus [96] übernommen haben.

Eine FE-Berechnung des Trägers mit zwei Elementen lieferte die kritische Knicklast

$$P_{crit} = 16.48\,\frac{EI}{l^2} \qquad \text{exakt} = 12.7\,\frac{EI}{l^2} \tag{2.214}$$

und die Eigenform in Bild 2.77 a. Setzen wir die FE-Lösung w_h in die Differentialgleichung (2.206) ein und beachten noch die Sprünge in den Schnittgrößen an den Knoten, so erhalten wir den in Bild 2.77 b dargestellten Lastfall p_h. Dieses Bild ist allerdings nur eine Momentaufnahme, gibt nur einen qualitativen Eindruck, denn der Lastfall p_h ist im Grunde beliebig skalierbar, weil jedes Vielfache der ‚Knickfigur' w_h auch wieder eine mögliche ‚Knickfigur' ist.

Wir erkennen an Bild 2.77 b, dass Streckenlasten nötig sind, um den Balken in der ausgeknickten Lage zu halten. Das ist gleichbedeutend damit, dass der unverformte Balken von den dazu inversen Kräften am Ausknicken gehindert wird. So kann man sich erklären, dass die Knicklast größer ist als bei der exakten Lösung, wo ja keine Haltekräfte zu überwinden sind, [165].

Sinngemäß dasselbe Phänomen erleben zwei Artisten, siehe Bild 2.78. Der Artist auf dem Kreis befindet sich im labilen Gleichgewicht, während sein Kollege davon profitiert, dass die Ecken des Vielecks seine Drehung behindern und damit seine Lage etwas stabilisieren.

2.36.1 Shape functions

Will man exakte Ergebnisse haben, dann muss man mit den exakten *shape functions* rechnen. Die Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ des gedrückten Balkens lauten, siehe Bild 2.79, [84] p. 287,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{m}\left[\sin(\varepsilon)\,(b_3(x) - b_1(x) - \varepsilon) + (1-\cos(\varepsilon))\,(b_2(x)+1)\right] \tag{2.215a}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{m}\,\frac{l}{\varepsilon}\left[\sin(\varepsilon)\,(\varepsilon\, b_1(x) - b_2(x) + 1)\right.$$
$$\left. + (\cos(\varepsilon)-1)\,(b_1(x)+b_3(x)) + \varepsilon\,\cos(\varepsilon)\,(b_2(x)-1)\right] \tag{2.215b}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{m}[\sin(\varepsilon)\,(b_1(x) - b_3(x)) + (1-\cos(\varepsilon))\,(1-b_2(x))] \tag{2.215c}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{m}\,\frac{l}{\varepsilon}\left[(\sin(\varepsilon)-\varepsilon)\,(b_2(x)-1) + (1-\cos(\varepsilon))\,(b_1(x) - b_3(x))\right] \tag{2.215d}$$

mit

$$m = \left[2\,(1-\cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)\right], \qquad \varepsilon = l\sqrt{P/EI} \tag{2.216}$$

$$b_1(x) = \sin(\frac{\varepsilon\, x}{l}), \qquad b_2(x) = \cos(\frac{\varepsilon\, x}{l}), \qquad b_3(x) = \frac{\varepsilon\, x}{l}. \tag{2.217}$$

Damit kann man jede homogene Lösung von (2.206) darstellen

$$w(x) = u_1\,\varphi_1(x) + u_2\,\varphi_2(x) + u_3\,\varphi_3(x) + u_4\,\varphi_4(x), \tag{2.218}$$

mit $u_1 = w(0), u_2 = -w'(0), u_3 = w(l), u_4 = -w'(l)$.

2.36.2 Steifigkeitsmatrix

Mit den obigen Einheitsverformungen erhält man dann aus

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^l (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' - P(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x))\,dx \tag{2.219}$$

die Steifigkeitsmatrix des Druckstabs nach Th. II. Ordg.

$$\boldsymbol{K} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 2(A+B)-\varepsilon^2 & -(A+B)\,l & -2\,(A+B)+\varepsilon^2 & -(A+B)\,l \\ & Al^2 & (A+B)\,l & B\,l^2 \\ & & 2(A+B)-\varepsilon^2 & (A+B)\,l \\ \text{sym.} & & & A\,l^2 \end{bmatrix} \tag{2.220}$$

mit

$$A = \frac{\varepsilon\,(\sin(\varepsilon) - \varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{2\,(1-\cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)} \qquad B = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - \sin(\varepsilon))}{2\,(1-\cos(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sin(\varepsilon)}. \tag{2.221}$$

Für den Zugstab, es ist dann $\varepsilon = l\sqrt{Z/EI}$, lauten die beiden Konstanten

$$A = \frac{\varepsilon\,(\sinh(\varepsilon) - \varepsilon\,\cosh(\varepsilon))}{2\,(-1+\cosh(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sinh(\varepsilon)} \qquad B = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - \sinh(\varepsilon))}{2\,(-1+\cosh(\varepsilon)) - \varepsilon\,\sinh(\varepsilon)} \tag{2.222}$$

siehe [84] p. 288.

3

Finite Elemente

Unsere Tragwerke sind **Maschinen**, Getriebe, Mobiles, die sich – ohne dass es der Passant, der an dem Haus vorbeigeht, ahnt – ständig bewegen, ständig ihre Gleichgewichtslage ändern. Es ist ein permanenter Balanceakt, bei dem die Kräfte nach Maßgabe der Einflussfunktionen, also der Kinematik des Tragwerks, ihren Ausgleich finden, denn Gleichgewicht bedeutet, wie die Marktfrau auf dem Wochenmarkt weiß, $\delta W_e^{links} = \delta W_e^{rechts}$, die Arbeit der Gewichte auf beiden Seiten der Waage ist gleich.

Das Tragwerk in der Präsentation des Architekten mag zwar hübsch aussehen, aber es ‚lebt nicht'. Das schaffen erst Bauingenieure, die das Tragwerk mit finiten Elementen nachbilden und so aus der Skizze etwas lebendiges machen, das sich verformen und bewegen kann.

Statik ist Kinematik und finite Elemente heißt Leben, heißt Bewegung.

Natürlich, das Gebilde gleicht immer noch eher einer Gliederpuppe, einer Marionette, als der wahren Gestalt, aber selbst diese beschränkte Figur hat schon genug Leben in sich, um dem Ingenieur eine Ahnung von der Verteilung der Kräfte zu geben.

Ist das Modell einmal konstruiert, lenkt der Ingenieur die Knoten nacheinander einzeln aus, $u_i = 1$, das sind die *shape functions* φ_i, merkt sich welche Kräfte dazu nötig sind, das sind die *shape forces* p_i, und kombiniert diese Lastfälle p_i so, dass der FE-Lastfall $p_h = \sum_i u_i p_i$ bei jeder Verrückung φ_i **wackeläquivalent** zum Original-Lastfall p ist

$$\delta W_e(p, \varphi_i) = \delta W_e(p_h, \varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i \,. \tag{3.1}$$

Diese Gleichungen sind mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ identisch. Jeder möglichen Lage $\boldsymbol{u}$ des Tragwerks entspricht ein gewisser Satz von Kräften p_h – das sind die Kräfte, die das Tragwerk in die Form $\boldsymbol{u}$ drücken – und es gilt den Satz p_h zu finden, der wackeläquivalent zum Original ist. So wird **indirekt** über (3.1) die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}$ bestimmt. Es ist die Logik der Marktfrau.

Was wir hier im Vorgriff dargestellt haben, wird im folgenden sicher deutlicher werden. Zu Beginn jedoch wollen wir die finiten Elemente ganz klassisch über das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie einführen.

3.1 Das Minimum

Das ***Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie*** besagt, dass die Gleichgewichtslage eines Tragwerks die potentielle Energie des Tragwerks zum Minimum macht. Zur Konkurrenz zugelassen sind bei diesem Wettbewerb alle Funktionen, die die geometrischen Lagerbedingungen des Tragwerks erfüllen. Man nennt diese Menge üblicherweise $\mathcal{V}$ (wie ‚Vorrat').

So ist die Biegelinie des Seils in Bild 3.1

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \qquad H = \text{Vorspannung in dem Seil}\,, \tag{3.2}$$

der Sieger, wenn es darum geht, die potentielle Energie des Seils

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{V^2}{H}\,dx - \int_0^l p(x)\,w(x)\,dx \qquad (V = H\,w') \tag{3.3}$$

auf der Menge aller Funktionen, deren Durchbiegungen in den Aufhängepunkten null sind, $w(0) = w(l) = 0$, zum Minimum zu machen.

Nun ist es nicht möglich, den ganzen Raum $\mathcal{V}$ zu durchsuchen, um $w(x)$ zu finden, dazu ist er zu groß, und so beschränken wir die Suche auf einen ***endlichdimensionalen*** Teilraum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ und erklären den Sieger w_h des Wettbewerbs um das Minimum auf diesem Teilraum als die beste Näherung. Dies nennt man das ***Verfahren von Ritz***.

Der Wettbewerb beginnt damit, dass wir das Seil in mehrere finite Elemente unterteilen. Das ist einfach ein Stück Seil, (so sieht es der Ingenieur), bzw. ein Stück der x-Achse, (so sieht es der Mathematiker) auf dem zwei lineare Funktionen definiert sind, die sogenannten *Element-Einheitsverformungen*, die die Auslenkung des linken bzw. des rechten Knotens des Elements beschreiben. Indem man nun diese Verformungen über die Elementgrenzen hinweg geeignet fortsetzt, kann man ‚Hütchenfunktionen' konstruieren. Das sind stückweise lineare Verläufe $\varphi_i(x)$, die in dem Knoten x_i den Wert 1 haben und zu den Nachbarknoten hin auf null abfallen, siehe Bild 3.1. Sie stellen die ***Einheitsverformungen der Knoten*** dar, sie sind die ***shape functions***.

Die vier Einheitsverformungen der vier innenliegenden Knoten bilden also den **FE-Ansatz**

$$w_h(x) = w_1\,\varphi_1(x) + w_2\,\varphi_2(x) + w_3\,\varphi_3(x) + w_4\,\varphi_4(x)\,, \tag{3.4}$$

und wir bestimmen die Knotenverschiebungen w_i so, dass die FE-Lösung die potentielle Energie

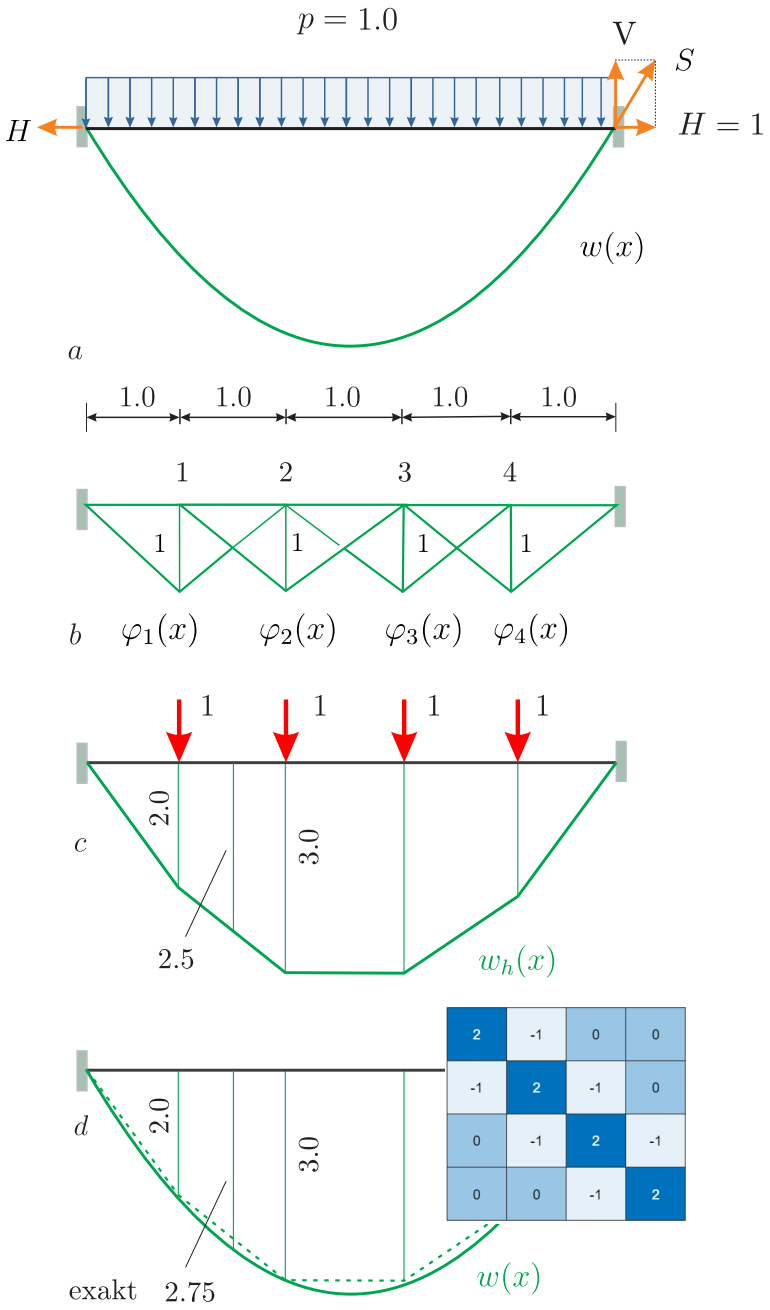


Bild 3.1. FE-Berechnung eines Seils, **a)** System und Belastung, **b)** Dach- oder Hütchenfunktionen, **c)** FE-Lösung $w_h(x)$, **d)** Vergleich $w(x)$ und $w_h(x)$ und $\boldsymbol{K}$ (MATLAB, `heatmap(K)`)

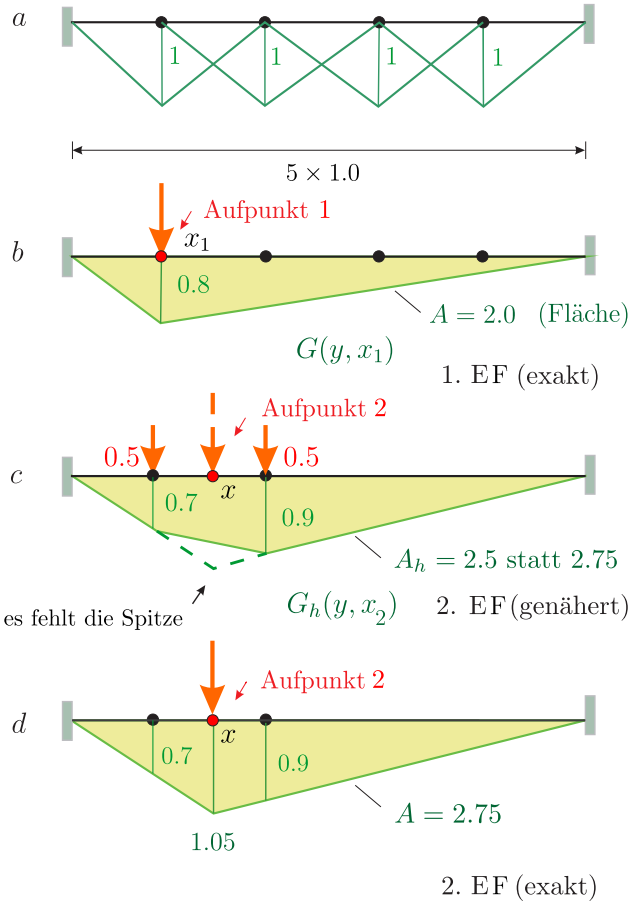


Bild 3.2. FE-Modell eines Seils, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Einflussfunktion (EF) für $w(x_1)$ und **c)** für die Durchbiegung $w(x)$ im Zwischenpunkt, **d)** die exakte Einflussfunktion für $w(x)$

$$\Pi(w_h) = \frac{1}{2}\int_0^l H\,(w_h')^2\,dx - \int_0^l p\,w_h\,dx \tag{3.5}$$

auf $\mathcal{V}_h$, das ist die Menge aller Seilecke, die sich mit den $\varphi_i(x)$ darstellen lassen, zum Minimum macht.

Der Ansatz (3.4) gewinnt den Wettbewerb genau dann, $\partial\Pi(w_h)/\partial w_i = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$, wenn der Vektor $\boldsymbol{w}$ der Knotenverschiebungen (die ‚Adresse' des Ansatzes auf $\mathcal{V}_h$) dem Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$, also

$$\frac{H}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

genügt. Die Elemente k_{ij} der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ sind die **Wechselwirkungsenergien** zwischen den Ansatzfunktionen

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^l H\,\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x)\,dx = \int_0^l \frac{V_i\,V_j}{H}\,dx\,, \tag{3.7}$$

und die **äquivalenten Knotenkräfte** $f_i = 1$ auf der rechten Seite sind die Integrale

$$f_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx\,. \tag{3.8}$$

Das System (3.6) hat die Lösung

$$w_1 = w_4 = 2 \cdot \frac{l_e}{H} \qquad w_2 = w_3 = 3 \cdot \frac{l_e}{H}\,, \tag{3.9}$$

und daher ist das Seileck ($l_e = H = 1$)

$$w_h(x) = 2 \cdot \varphi_1(x) + 3 \cdot \varphi_2(x) + 3 \cdot \varphi_3(x) + 2 \cdot \varphi_4(x) \tag{3.10}$$

auf $\mathcal{V}_h$ die beste Annäherung an die wahre Biegelinie $w(x)$.

3.2 Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind

Wenn man die FE-Lösung mit der exakten Lösung

$$w(x) = \frac{1}{2} \cdot (5\,x - x^2) \tag{3.11}$$

vergleicht, dann fällt auf, dass die FE-Lösung mit der exakten Lösung in den Knoten übereinstimmt, $w_i = w(x_i)$. Das ist kein Zufall, sondern es liegt daran, dass das FE-Programm **Einflussfunktionen** benutzt, also die Durchbiegung des Seils mit der Formel[1]

$$w(x) = \int_0^l G(y, x)\,p(y)\,dy \tag{3.12}$$

berechnet und die Einflussfunktionen G der Knoten in $\mathcal{V}_h$ liegen.

Die Einflussfunktion $G(y, x_1)$ für die Durchbiegung $w(x_1)$ im ersten Innenknoten ist das Seileck, wenn in dem Knoten x_1 eine Kraft $P = 1$ angreift, siehe Bild 3.2 b und dieses Dreieck können die vier Ansatzfunktionen darstellen.

Das ist der Grund, warum in diesem, aber ***auch in jedem anderen Lastfall***, die FE-Lösung mit der exakten Lösung im Knoten x_1 übereinstimmt

$$w_h(x_1) = \int_0^l G(y, x_1)\,p(y)\,dy = w(x_1)\,. \tag{3.13}$$

[1] Wir schreiben kürzer $G(y, x)$ statt $G_0(y, x)$ und werden das bei Gelegenheit öfter tun.

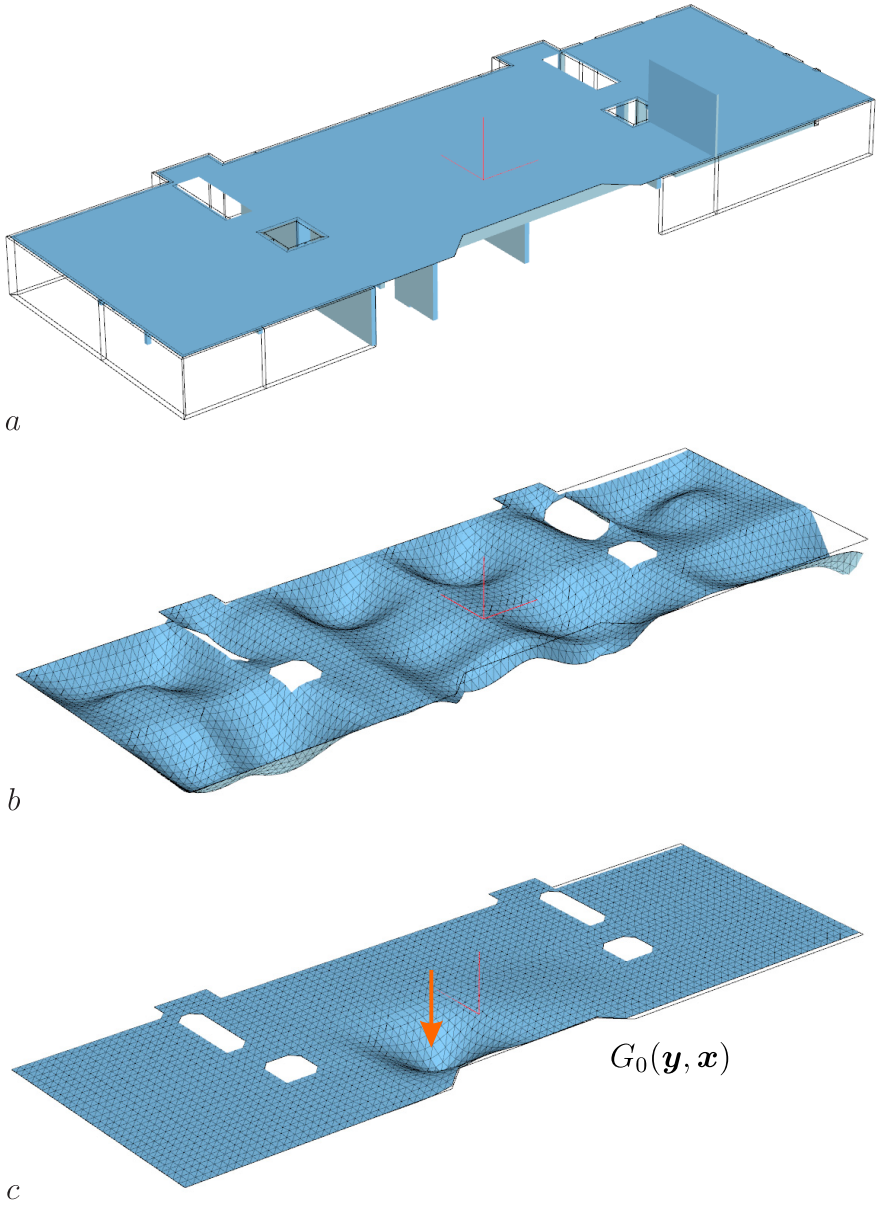


Bild 3.3. Hochbauplatte, **a)** System, **b)** Biegefläche im LF g, **c)** Einflussfunktion für die Durchbiegung w in einem Knoten $\boldsymbol{x}$ (BE-PLATTE)

Das gilt für jeden Lastfall.

Wir machen die Probe. Es sei $p(x) = \sin(\pi x/5)$, dann lauten die f_i

$$\boldsymbol{f} = \{0.5687,\ 0.9202,\ 0.9202,\ 0.5687\}^T \tag{3.14}$$

und das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ hat die Lösung $\boldsymbol{w} = \{1.489, 2.409, 2.409, 1.489\}^T$, und das sind die Knotenwerte der exakten Lösung $w(x) = 25/\pi^2 \cdot \sin(\pi x/5)$.

Wenn der Aufpunkt aber **zwischen zwei Knoten** liegt wie in Bild 3.2 c, im Punkt $x = 1.5$, dann liegt die Spitze des Seilecks zwischen den beiden Knoten, und ein solches Dreieck lässt sich mit den vier Ansatzfunktionen nicht darstellen. Das Programm setzt daher zwei Einzelkräfte $P = 0.5$ in die Nachbarknoten und überlagert die Belastung mit dieser Näherung $G_h(y, x)$

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y, x)\, p(y)\, dy = A_h \cdot 1.0 = 2.5 \neq 2.75 = w(x) \tag{3.15}$$

und erhält prompt einen zu kleinen Wert, $w_h(x) = 2.5 < 2.75 = w(x)$. Es ist so, als ob das Programm die beiden ausgelenkten Nachbarknoten mit einer Linie verbindet und die Spitze von $G(y, x)$ einfach abschneidet, Bild 3.2 c.

Nun wird der Leser einwenden wollen: Ein FE-Programm berechnet doch die Knotenwerte durch Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ und die Werte dazwischen, indem es zwischen den Knoten interpoliert.

Korrekt, aber die Werte in dem Vektor $\boldsymbol{w}$ sind genauso groß, ***als ob*** das FE-Programm sie mit den genäherten Einflussfunktionen berechnet hätte. Das ist der entscheidende Punkt. Von der klassischen Statik zu den finiten Elementen ist es ein ganz, ganz kurzer Weg.

So hat das FE-Programm die Biegefläche der Platte in Bild 3.3 (theoretisch) so berechnet, dass es in jeden Knoten $\boldsymbol{x}_i$ nacheinander eine Kraft $P = 1$ gestellt hat und die zugehörige Biegefläche $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)$ mit der Verkehrslast p überlagert hat

$$w_h(\boldsymbol{x}_i) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)\, p(\boldsymbol{y})\ d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{3.16}$$

Wir sagen theoretisch, weil natürlich das FE-Programm die Knotenwerte durch das Lösen von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ bestimmt hat, aber diese sind genau so groß, ***als ob*** das FE-Programm die Einflussfunktion (3.16) benutzt hätte.

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ ist der ‚kurze' Weg zu den w_i, das Integral (3.16) ist der ‚lange' Weg, aber die Ergebnisse sind dieselben[2], siehe Kapitel 4,

$$w_h(\boldsymbol{x}_i) = w_i = \sum_j k_{ij}^{(-1)}\, f_j = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)\, p(\boldsymbol{y})\ d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{3.17}$$

Dies ist das geheime, wenig bekannte Gesetz hinter den finiten Elementen.

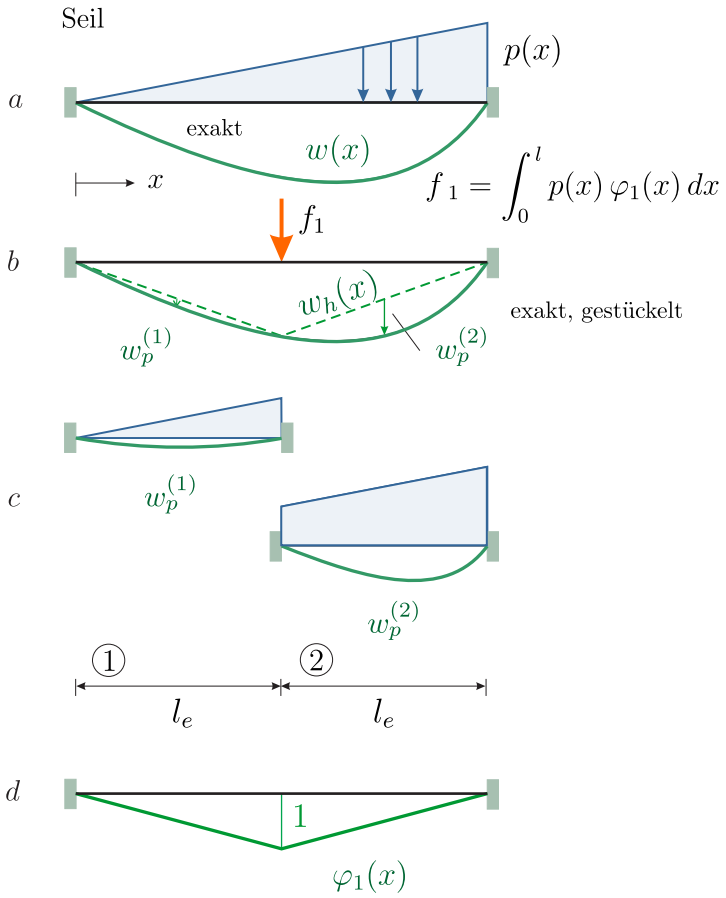


Bild 3.4. Seilberechnung mit zwei Elementen, **a)** Belastung und Biegelinie, **b)** FE-Lösung + lokale Lösungen, **c)** lokale Lösungen, **d)** Einheitsverformung des Knotens. Bemerkenswert ist, dass die Tangente im Mittenknoten automatisch stetig ist (kein Knick!), kein Sprung in der Querkraft $V = H\,w'$

So gut wie die Einflussfunktionen sind, so gut sind die FE-Ergebnisse.

3.3 Addition der lokalen Lösung

Wenn man die Durchbiegung des Seils mit einem FE-Programm berechnet, dann sieht man auf dem Bildschirm kein Seileck, sondern eine wohl geschwungene Parabel zweiten Grades, also die exakte Kurve. Wie macht das das FE-Programm? Das Programm geht genau so vor, wie wir das beschrieben haben:

[2] Ungläubige Leser dürfen die rechte Seite von (3.17) partiell integrieren

- Es unterteilt das Seil in kleine Elemente.
- Es reduziert die Belastung in die Knoten, es berechnet also die f_i.
- Es löst das Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$.

Wenn es jetzt stehen bleiben würde, dann würde man auf dem Bildschirm ein Seileck sehen.

Es folgt nun aber noch ein weiterer Schritt. Das Programm berechnet für jedes Element die sogenannte ***lokale Lösung*** w_p. Das ist die Durchbiegung, die die Streckenlast an dem *beidseitig festgehaltenen Element* erzeugt, und diese wird elementweise zu dem Seileck addiert. So ist die exakte Seilkurve in Bild 3.4 entstanden.

Denkt man sich die Lösung $w = w_h + w_p$ in eine homogene und eine partikuläre Lösung aufgespalten, dann entspricht die lokale Lösung der partikulären Lösung und deswegen schreiben wir w_p.

Im Grund ist das genau die Technik des **Drehwinkelverfahrens**. Das Drehwinkelverfahren reduziert alle Belastung in die Knoten, führt dann einen Knotenausgleich durch und hängt zum Schluss feldweise die lokalen Lösungen ein. Die finiten Elemente machen es nicht anders, denn das Gleichungssystem, das aufgestellt wird, lautet eigentlich

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}\,. \tag{3.18}$$

Die f_{Ki} sind die Einzelkräfte, die direkt in den Knoten angreifen und die Kräfte $d_i = (p, \varphi_i)$ entstehen, wenn man die Lasten p im Feld (*domain load*) in die Knoten reduziert. Beide zusammen sind die äquivalenten Knotenkräfte $f_i = f_{Ki} + d_i$. Sie drücken auf die Lager, sind der **Lagerdruck**, die (*actio*) und die **Festhaltekräfte** (*reactio*) sind spiegelbildlich dazu. Die Festhaltekräfte sind die Lagerdrücke, die äquivalenten Knotenkräfte $\times(-1)$.

In der FE-Literatur wird der Unterschied zwischen den f_{Ki} und d_i normalerweise verwischt, steht $f_i \equiv f_{Ki} + d_i$ für beide Anteile. Die f_i in dem obigen Beispiel sind eigentlich die d_i, also die in die Knoten reduzierte Streckenlast,

$$d_i^e = \int_0^{l_e} p\,\varphi_i^e\,dx \qquad \varphi_i^e = \text{Element-Einheitsverformungen}\,, \tag{3.19}$$

während die echten f_{Ki} null sind, weil keine Einzelkräfte in den Knoten angreifen.

Der Ingenieur wendet beim Drehwinkelverfahren die Formel (3.19) jeweils links und rechts vom Knoten an, und addiert dann die beiden Beiträge $d_i^L + d_i^R$, während die finiten Elemente die Belastung p mit den Knoteneinheitsverformungen $\varphi_i = \varphi_i^L + \varphi_i^R$ gleich ‚in einem Stück' überlagern

$$d_i = \int_0^{l} p\,\varphi_i\,dx = d_i^L + d_i^R\,. \tag{3.20}$$

Die enge Verwandtschaft der finiten Elemente mit dem **Drehwinkelverfahren** beruht auf dieser Formel, denn die Einflussfunktionen für die äquivalenten

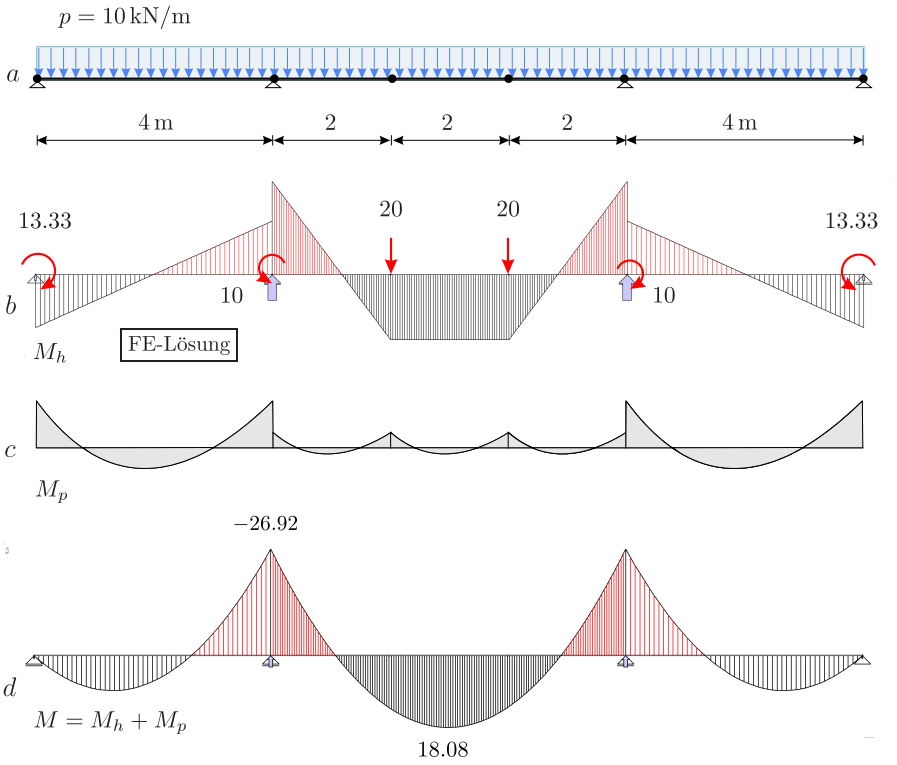


Bild 3.5. Drehwinkelverfahren oder finite Elemente ist dasselbe, **b)** erst wird die Streckenlast in die Knoten reduziert und die Knoten ausgeglichen und dann werden **c)** die lokalen Lösungen der beidseitig eingespannten Elemente **d)** dazu addiert

Lagerdrücke d_i entstehen aus den Element-Einheitsverformungen φ_i^e. Ob man die Belastung in die Knoten reduziert (Drehwinkelverfahren) oder die äquivalenten Knotenkräfte berechnet, ist dasselbe.

Bei Stabtragwerken ist die Methode der finiten Elemente mit dem Drehwinkelverfahren identisch.

Das Lösen des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ entspricht einem Knotenausgleich in einem Schritt. Elementweise werden dann nur noch die lokalen Lösungen dazu addiert, siehe Bild 3.5 und Bild 3.6.

So gelingt es also den finiten Elementen trotz ihrer beschränkten Kinematik, d.h. der Verwendung von

- linearen Ansätzen für die Element-Längsverschiebungen
- kubischen Polynomen für die Element-Durchbiegungen

die exakten Verformungen zu generieren; die lokalen Lösungen bringen den fehlenden ‚Schwung' in die Verformungsfigur. Die u_{loc} bzw. w_{loc} stehen in

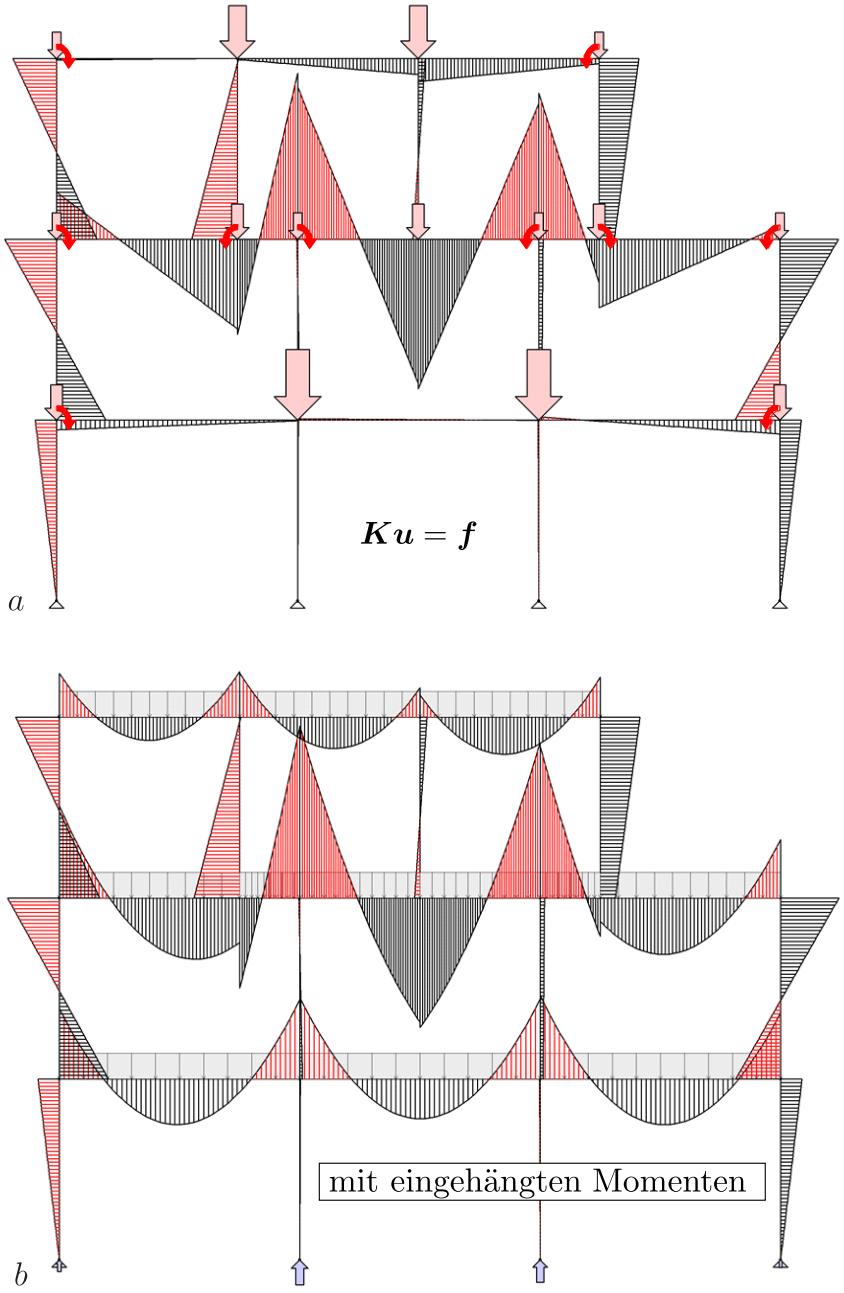


Bild 3.6. Stockwerkrahmen mit Riegellasten, zur FE-Lösung in **a)** werden die lokalen Lösungen addiert und so entsteht die exakte Lösung in **b)** – in dem Programm BE-FRAMES kann man zwischen den beiden Bildern wechseln, wenn man auf den *button* FE klickt und der *button* S zeigt die *shape functions* in Aktion

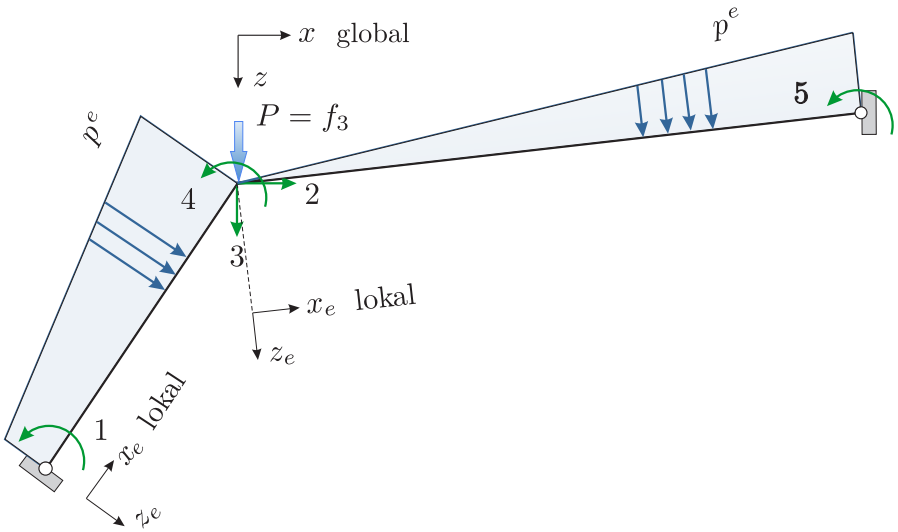


Bild 3.7. Lokales und globales Koordinatensystem

einer (aus der Statik-Literatur übernommen) Bibliothek des FE-Programms und werden von dort bei Bedarf abgerufen.

All dies gilt genau genommen nur, wenn EA bzw. EI konstant sind, weil nur dann die Element-Einheitsverformungen φ_i^e homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkendifferentialgleichung sind. Bei gevouteten Trägern liefern die finiten Elementen also nur eine Näherung, was aber auch für das Drehwinkelverfahren gilt, denn die exakte Reduktion der Belastung in die Knoten bei gevouteten Trägern beherrscht auch das Drehwinkelverfahren nicht. Ganz zu schweigen von der Kenntnis der exakten Fortleitungszahlen in einem solchen Fall.

Die Äquivalenz ***Finite Elemente = Drehwinkelverfahren*** bedeutet aber auch, dass es keinen Sinn macht, die einzelnen Stiele und Riegel eines Rahmens weiter in Elemente zu unterteilen. Es bringt nichts an Genauigkeit.

Bemerkung 3.1. Die finiten Elemente werden gerne am Balken erklärt. Wir machen das auch. Damit die finiten Elemente aber finite Elemente bleiben, müssen wir uns darauf verständigen, dass alle diese Demonstrationen sich auf den Zeitpunkt beziehen, ***bevor*** die lokale Lösung zur FE-Lösung addiert wird.

Beispiel 3.1. Da es wichtig ist, dieses Vorgehen zu verstehen, wollen wir die einzelnen Schritte an Hand des Systems in Bild 3.7 erläutern.

Im ersten Schritt stellt das FE-Programm die globale, nicht reduzierte Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ der Größe 9×9 auf. Es geht dabei (theoretisch) wie folgt vor: Es schreibt das System zunächst in entkoppelter Form (12 Gleichungen)

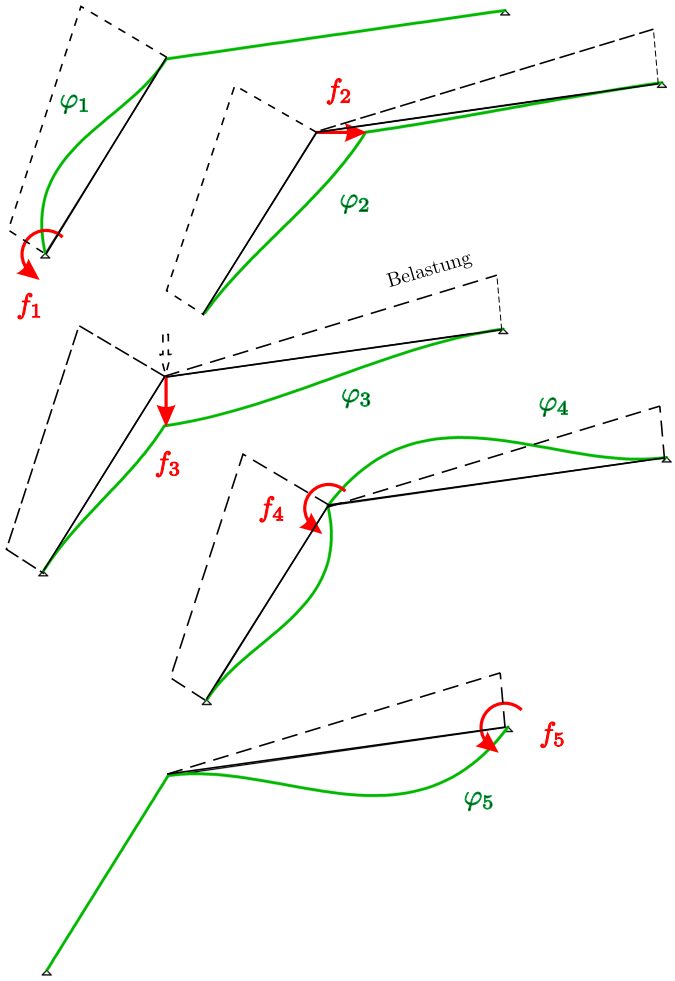


Bild 3.8. Die fünf *shape functions* – mehr Bewegungsmöglichkeiten hat das FE-Modell nicht. Nur Knotenlasten lassen sich damit rechnen, weil die horiz. und vert. Anteile der φ_i homogene Lösungen in lokaler x- und z-Richtung sind

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

wobei $\boldsymbol{K}_i$ die Elementmatrizen sind, siehe (9.201), und die Vektoren $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{f}_i$ und $\boldsymbol{d}_i$ die zugehörigen Weg- und Kraftgrößen an den Balkenenden sind. Die Kopplung der Balkenendverformungen $\boldsymbol{u}_i$ an die Knotenverformungen $\boldsymbol{u}$ kann man durch eine Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreiben

$$\text{(12 slaves)} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}_{(12)} = \boldsymbol{A}_{(12\times 9)}\, \boldsymbol{u}_{(9)} \qquad \text{(9 master)}\,. \tag{3.22}$$

Gleichzeitig müssen die Balkenendkräfte $\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{d}_i$ in jedem Knoten mit den äußeren Knotenkräften $\boldsymbol{f}$ im Gleichgewicht sein, was gerade die Gleichung

$$\boldsymbol{A}^T_{(9\times 12)} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix}_{(12)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{bmatrix}_{(12)} \right) = \boldsymbol{f}_{(9)} \tag{3.23}$$

ergibt und so kommt man auf die Beziehung

$$\boldsymbol{A}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_G \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{3.24}$$

in der die Matrix $\boldsymbol{K}_G$ die globale, nicht reduzierte Steifigkeitsmatrix des Rahmens ist. Im Anschluss streicht das Programm die Spalten und Zeilen der Matrix $\boldsymbol{K}_G$, die gesperrten Freiheitsgraden entsprechen (praktisch geht es anders vor), und reduziert so die Matrix $\boldsymbol{K}_G$ auf eine 5×5 Matrix $\boldsymbol{K}$, die den fünf *shape functions* in Bild 3.8 entspricht.

Im zweiten Schritt berechnet das FE-Programm für jedes Element die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung[3]

$$d_i^e = \int_0^{l_e} p^e(x)\, \varphi_i^e(x)\, dx\,. \tag{3.25}$$

Die Notation ist symbolisch zu nehmen, weil $p^e(x)$ zwei Richtungen haben kann, in lokale x_e- oder lokale z_e-Richtung und die Einheitsverschiebungen $\varphi_i^e(x)$ sind entsprechend die korrespondierenden Verschiebungen, zwei in x_e-Richtung und vier in z_e-Richtung.

Eine 6×6 Matrix $\boldsymbol{T}_e$ $(\ldots \sin\,\alpha, \cos\,\alpha, \ldots)$, siehe (9.199), transformiert diese Vektoren $\boldsymbol{d}^e$ in das globale Koordinatensystem $\boldsymbol{d}_e = \boldsymbol{T}_e \boldsymbol{d}^e$, wo dann aus den 2×6 Komponenten die 5 Komponenten des Vektors

$$\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2\} \rightarrow \boldsymbol{d} \tag{3.26}$$

zusammengestellt werden, der die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung in die 5 Richtungen u_i enthält.

Im zentralen dritten Schritt löst das Programm das System

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} \tag{3.27}$$

und bestimmt damit den Vektor $\boldsymbol{u}$ der Knotenverschiebungen. Der Vektor $\boldsymbol{f}_K$ enthält nur Nullen, außer $f_{K3} = P$.

Im vierten Schritt werden die Knotenverschiebungen u_i aus dem globalen Koordinatensystem in die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Elemente transformiert,

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{T}_e^T \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{T}_e^T = \boldsymbol{T}_e^{-1})\,. \tag{3.28}$$

[3] Ein oberer Index e bedeutet, dass sich die Größe auf das lokale KS des Elements bezieht

Im fünften Schritt bestimmt das Programm für jedes Element anhand des Systems (jetzt wird im lokalen KS gerechnet)

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{f}^e + \boldsymbol{d}^e \tag{3.29}$$

den Vektor der Balkenendkräfte $\boldsymbol{f}^e$

$$\boldsymbol{f}^e = \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{u}^e - \boldsymbol{d}^e \,, \tag{3.30}$$

wobei $\boldsymbol{K}^e$ die Elementmatrix der Größe 6×6 ist, (9.200). Man beachte, dass die f_i^e Balkenendkräfte sind, während die f_i in (3.27) Knotenkräfte sind.

Wenn man die Balkenendkräfte f_1^e, f_2^e, f_3^e am Anfang des Elements kennt und die Streckenlast, dann kann man mit den Gleichgewichtsbedingungen die Schnittgrößen $N(x), M(x)$ und $V(x)$ in jedem Punkt x des Elements berechnen.

Im letzten sechsten Schritt addiert das FE-Programm schließlich die lokalen Lösungen zur FE-Lösung und kommt so zur selben Lösung wie das Drehwinkelverfahren.

In einem einzelnen Balken entspricht die ganze Prozedur der Aufteilung der Biegelinie $w(x)$ in eine homogene und eine partikuläre Lösung

$$w(x) = w_0(x) + w_p(x) \,, \tag{3.31}$$

wobei die homogene Lösung (= FE-Lösung, $w_0 = w_h$), eine Entwicklung nach den Element-Einheitsverformungen (3.59) ist

$$w_0(x) = \sum_i u_i \, \varphi_i^e(x) \,, \tag{3.32}$$

und die partikuläre Lösung ist die Biegelinie am eingespannten Balken. In Glg. (1.204), Seite 66, haben wir diese Aufspaltung vorgenommen.

Nach diesem kurzen Ausflug in die Notation $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ wollen wir im Folgenden zur üblichen Notation $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ zurückkehren, bei der die rechte Seite für $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$ steht.

Wir werden auch meist die Knotenwerte mit u_i bezeichnen, auch wenn es Ergebnisse aus einer Balkenberechnung sind, weil $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die Standardnotation ist.

3.4 Die lokale Lösung w_p

Die lokale Lösung $w_p(x)$ ist die Durchbiegung w unter p am beidseitig eingespannten Balken. Die Standardfälle, $p = const.$ etc., sind natürlich tabelliert. Aber wenn man die Einflussfunktion

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} -\dfrac{(\ell - x)^3}{6}\,\varphi_3^e(y) + \dfrac{(\ell - x)^2}{2}\,\varphi_4^e(y) & y < x \\ -\dfrac{x^3}{6}\,\varphi_1^e(y) - \dfrac{x^2}{2}\,\varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.33}$$

benutzt, siehe Bild 3.40, dann kann p beliebig sein

$$w_p(x) = \int_0^\ell G_0(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.34}$$

Beispiel 3.2. Der Träger habe die Länge $\ell = 10$ m und es sei $p = 1$ kN/m. Die Durchbiegung in der Mitte $x = 5$ des Trägers beträgt dann

$$\begin{aligned} EI\, w_p(x) = &-\frac{5^3}{6}\int_0^5 \varphi_3^e(y)\, dy + \frac{5^2}{2}\int_0^5 \varphi_4^e(y)\, dy \\ &-\frac{5^3}{6}\int_5^{10} \varphi_1^e(y)\, dy - \frac{5^2}{2}\int_5^{10} \varphi_2^e(y)\, dy = 26.04\,\mathrm{m}\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Die Einflussfunktionen für die weiteren Größen[4]

$$w'(x) \qquad M(x) = -EI\, w''(x) \qquad V(x) = -EI\, w'''(x) \tag{3.36}$$

erhält man einfach durch Ableitung von $G_0(y,x)$ nach x, siehe Bild 3.42. Das **Reduktionsverfahren** zur Berechnung der Schnittkräfte in den Elementen braucht man also eigentlich nicht.

3.5 Projektion

Wir hatten oben das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie hergeleitet. Die Projektion der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, also das ***Galerkin-Verfahren***, führt jedoch, wie wir zeigen wollen, auf dasselbe System.

Das Bild bei der Projektion eines Vektors $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ auf die $x-y$-Ebene ist sein **Schatten** $\boldsymbol{x}'$, siehe Bild 3.9. Wir sehen natürlich, wo der Schatten hinfällt, aber der Computer hat keine Augen, er rechnet. Er macht für den Schatten $\boldsymbol{x}'$ den Ansatz $\boldsymbol{x}' = c_1\,\boldsymbol{e}_1 + c_2\,\boldsymbol{e}_2$ und bestimmt c_1 und c_2 so, dass der Fehler senkrecht auf $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ steht

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T \boldsymbol{e}_i = 0 \qquad i = 1,2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = x_1\,, c_2 = x_2\,, \tag{3.37}$$

was gleichbedeutend damit ist, dass der Schatten der Vektor in der Ebene ist, der den kleinstmöglichen Abstand

[4] In Kapitel 3.23 berechnen wir die EF für $M(x)$ und $V(x)$ auch von ‚Hand'

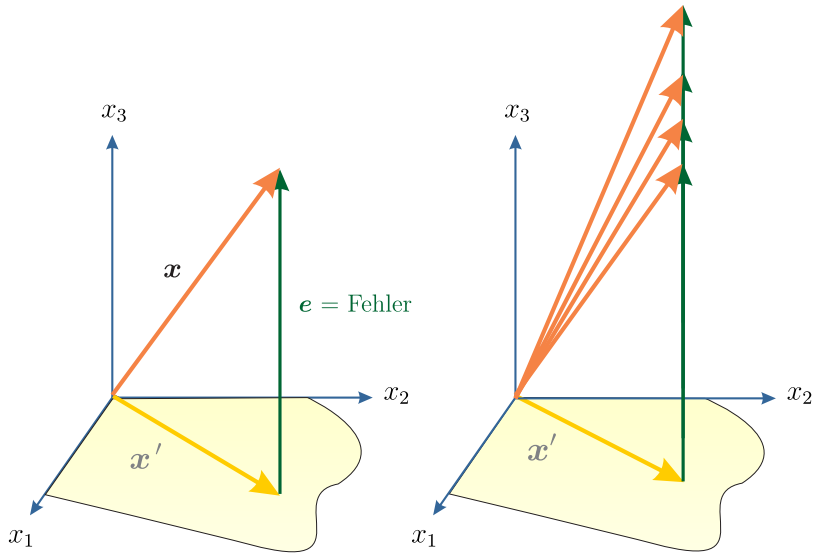


Bild 3.9. Der Fehlervektor $\boldsymbol{e}$ steht senkrecht auf der Ebene, auf die projiziert wird, und alle Vektoren, die sich in Projektionsrichtung von $\boldsymbol{x}$ nicht unterscheiden, haben dasselbe Bild

$$|\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = \text{Minimum} \tag{3.38}$$

von $\boldsymbol{x}$ hat. Dies kann man auch schreiben als (wir vergessen einmal die Wurzel zu ziehen)

$$|\boldsymbol{e}|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \text{Minimum}\,, \tag{3.39}$$

so sieht man besser die Verwandtschaft mit (3.43), denn auch bei den finiten Elementen handelt es sich, wenn man es als *Galerkin-Verfahren* interpretiert, um ein Projektionsverfahren. Nur dass die Metrik eine andere ist, nicht das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, sondern die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Funktionen ist das Maß.

Beim *Galerkin-Verfahren* wählt man als beste Näherung die Projektion der exakten Lösung w auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, also die Funktion w_h in $\mathcal{V}_h$, deren Fehler $w - w_h$ senkrecht auf allen φ_i steht

$$a(w - w_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3.40}$$

Die erste Greensche Identität, z.B. des Seils,

$$\mathscr{G}(w, \varphi_i) = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx - a(w, \varphi_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = a(w, \varphi_i) \tag{3.41}$$

legt nahe w_h wie folgt zu bestimmen, siehe Kapitel 1.45 für Details,

$$a(w_h, \varphi_i) = f_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.42}$$

und diese n Gleichungen entsprechen genau dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Diese Eigenschaft impliziert, dass w_h auf $\mathcal{V}_h$ den kleinstmöglichen Abstand in der Energiemetrik,

$$a(w - w_h, w - w_h) = \text{Minimum} \tag{3.43}$$

von w hat, was praktisch bedeutet, dass w_h im Sinne des Fehlerquadrats die kleinstmögliche Abweichung in den Schnittgrößen aufweist, [91], S. 572.

Was man in Bild 3.9 auch sieht ist, dass die nochmalige Projektion des Bildes $\boldsymbol{x}'$ nichts bringt, **die Projektion bleibt stehen**. Das ist auch der Grund, warum die Strategie, die Abweichung $p - p_h$ in den Lasten im Sinne einer Korrektur nachträglich auf die Struktur aufzubringen, zu nichts führt, die zu dem Lastfall $p - p_h$ gehörigen f_i sind null, weil der Schatten des Fehlers $\boldsymbol{e}$ der Nullvektor ist.

Glg. (3.40) ist die ***Galerkin-Orthogonalität***. Wegen $\delta W_i = \delta W_e$ kann man sie auch als Orthogonalität in den äußeren Arbeiten schreiben

$$\text{(innen)} \qquad a(w - w_h, \varphi_i) = \int_0^l (p - p_h)\, \varphi_i \, dx = 0 \qquad \text{(außen)}\,. \tag{3.44}$$

Die Differenz zwischen dem Originallastfall p und dem FE-Lastfall p_h (dessen Lösung w_h ist), ist also orthogonal zu allen φ_i, d.h. die Fehlerkräfte $p - p_h$ leisten keine Arbeit, wenn man an dem Seil mit den φ_i wackelt.

Dieser **Wechsel** von innen nach außen ist der eigentliche Pfiff bei den finiten Elementen, denn die wahren Schnittgrößen kennen wir ja nicht. Wie wollen wir den Abstand zu etwas minimieren, das wir nicht kennen? Aber weil das Abstandsmaß die Energie ist, ist der Fehler innen, genauso groß wie der Fehler außen – **und das macht die finiten Elemente möglich**.

Hier wird noch einmal deutlich, dass die Grundgleichung der finiten Elemente $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ ist, die Gleichheit der äquivalenten Knotenkräfte, der äußeren Arbeiten. $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ (innen) ist nur eine andere Schreibweise für $\boldsymbol{f}_h$ (außen).

3.6 Äquivalente Knotenkräfte

Die f_i auf der rechten Seite des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ sind keine Kräfte, sondern Arbeiten, sind Energien[5], siehe Bild 3.10,

$$f_i = \int_0^l p(x)\, \varphi_i(x)\, dx = [\mathrm{N/m}] \cdot [\mathrm{m}] \cdot [\mathrm{m}] = [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}]\,, \tag{3.45}$$

und auch auf der linken Seite stehen Energien, denn der einzelne Eintrag k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix beruht, wenn wir einen Stab als Beispiel nehmen, auf der Formel

[5] Für eine alternative Interpretation in der Stabstatik siehe Kap. 9.29 Seite 669

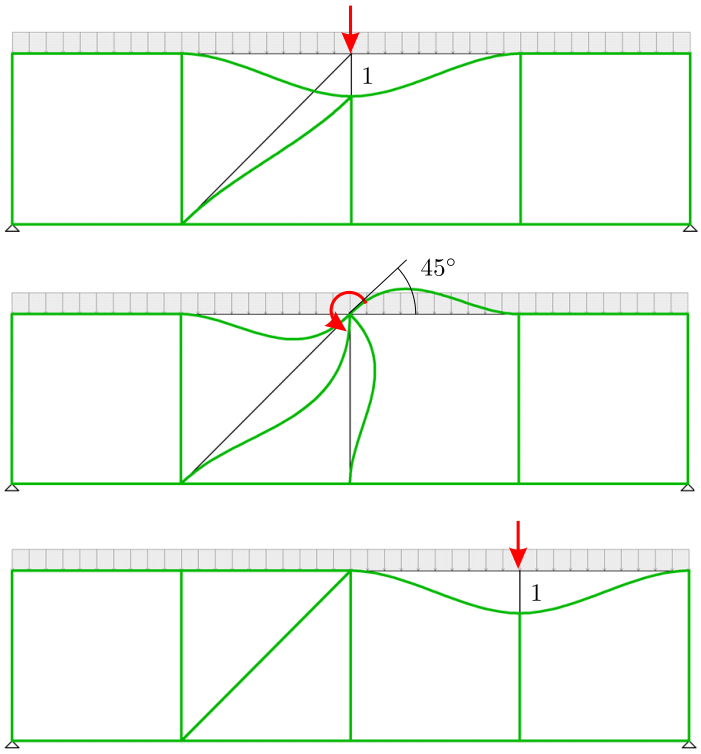


Bild 3.10. Die äquivalenten Knotenkräfte f_i sind gleich der Arbeit der Riegellast auf den Wegen φ_i (BE-FRAMES, *button* S)

$$k_{ij} = \int_0^l EA\,\varphi_i'\,\varphi_j'\,dx = [\mathrm{N}]\cdot[\ ]\cdot[\ ]\cdot[\mathrm{m}] = [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]\,, \tag{3.46}$$

und so auch beim Balken, wo die Momente, siehe Bild 3.11, überlagert werden,

$$k_{ij} = \int_0^l EI\,\varphi_i''\,\varphi_j''\,dx = [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2]\cdot[1/\mathrm{m}]\cdot[1/\mathrm{m}]\cdot[\mathrm{m}] = [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]\,. \tag{3.47}$$

Bei jeder Ableitung wird mit $[\mathrm{m}]^{-1}$ multipliziert

$$\varphi_i\ [\mathrm{m}] \qquad \varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{dx} = [\ ] \qquad \varphi_i'' = \frac{d\varphi_i'}{dx} = \frac{1}{[\mathrm{m}]}\,. \tag{3.48}$$

Bei 3-D Problemen führt die Dimensionsbetrachtung auf

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,dV = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m}^2]}\,\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{m}]}\,[\mathrm{m}^3] = [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]\,, \tag{3.49}$$

woraus bei Scheibenproblemen, d = Dicke der Scheibe und $dV = d\cdot d\Omega$, der Ausdruck

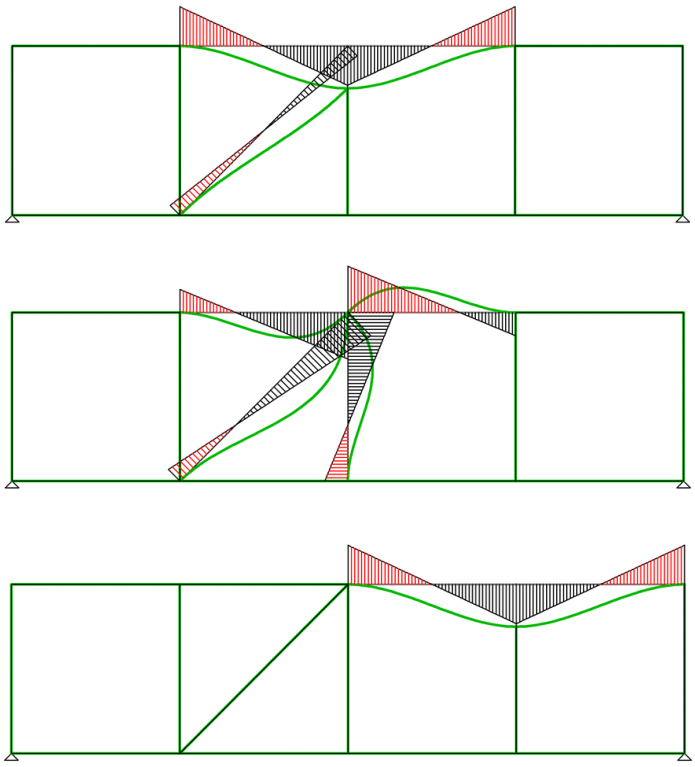


Bild 3.11. Die Momente der Einheitsverformungen. Man sieht, wie die starren Nachbarknoten die Bewegungen abblocken, (*button* S und dann Momente)

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,d\,d\Omega = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m}^2]}\,\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{m}]}\,[\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}^2] = [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \tag{3.50}$$

wird.

Eigentlich sind die Funktionen φ_i dimensionslos, denn Polynome haben keine Dimension. Die Dimension steckt in den Knotenverschiebungen u_i, also $u_i\,\varphi_i(x) = [\mathrm{m}]\,[\ ]$. Der Test mit einer virtuellen Verrückung $\delta u = \varphi_i$ ist also ein Test mit $\delta u = 1\,\mathrm{m}\cdot\varphi_i(x)$. Weil wir aber die u_i hier weglassen, müssen wir bei den Dimensionsbetrachtungen auf dieser Seite die φ_i stellvertretend so behandeln, als ob sie die Dimension einer Länge hätten.

Einflussfunktionen

Es gibt Einflussfunktionen für Lagerkräfte und es gibt Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte f_i und das sind gerade die φ_i. Die φ_i registrieren wieviel Arbeit die Belastung, das sei zunächst eine Punktlast P im Punkt x, auf dem Weg φ_i leistet

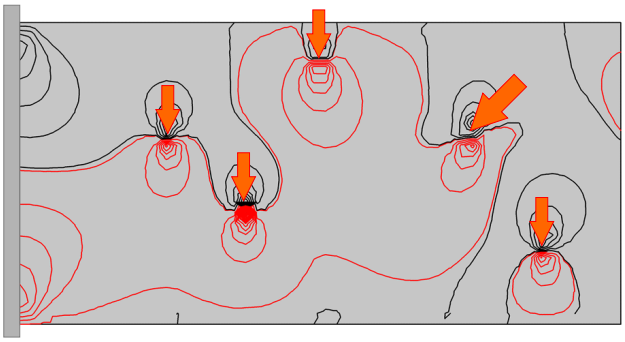


Bild 3.12. Spannungen σ_{yy} in einer Kragscheibe (BE-SCHEIBE)

$$f_i = P \cdot \varphi_i(x)\,. \tag{3.51}$$

Weil die *shape functions* φ_i eine ***partition of unity*** bilden

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{in allen Punkten } x \tag{3.52}$$

ist die Summe der f_i gleich der Einzelkraft

$$\sum_i f_i = \sum_i P \cdot \varphi_i(x) = P \cdot \sum_i \varphi_i(x) = P \cdot 1\,. \tag{3.53}$$

Das gilt auch für Streckenlasten $p(x)$, hier in einem Intervall $[0, l]$,

$$\sum_i f_i = \sum_i \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_0^l p(x)\,\sum_i \varphi_i(x)\,dx = \int_0^l p(x)\cdot 1\,dx = R \cdot 1\,, \tag{3.54}$$

wenn R die Resultierende der Streckenlast ist.

Rechenpfennige

Für ein FE-Programm sind die äquivalenten Knotenkräfte f_i *Rechenpfennige* wie ‚eins im Sinn'. Es geht von Knoten zu Knoten, verschiebt den Knoten um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung und notiert sich, wieviel Arbeit die Belastung dabei leistet. Das sind die f_i. Sie sind die **Signatur** der Belastung bezüglich den φ_i.

Hat ein horizontales f_i in einem Knoten einer Scheibe den Wert 10 kNm, so bedeutet dies, dass in der Nähe des Knotens Lasten so verteilt sind, dass sie bei einer horizontalen Auslenkung $\boldsymbol{\varphi}_i$ des Knotens um 1 m die Arbeit 10 kNm leisten.

Alles, was ein FE-Programm macht, ist, dass es dann Ersatzlasten so über die Scheibe verteilt, dass diese bei einer Auslenkung der einzelnen Knoten um

1 Meter dieselbe Arbeit leisten, wie die Originalbelastung, was man kurz als $f_{hi} = f_i$ schreiben kann.

In der Notation des übernächsten Abschnitts 3.9 ist f_{hi} die Arbeit, die die FE-Lasten

$$\boldsymbol{p}_h = \sum_j u_j \boldsymbol{p}_j \tag{3.55}$$

auf dem Weg $\boldsymbol{\varphi}_i$ leisten

$$f_{hi} = \sum_j u_j \, \delta W_e(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) \, . \tag{3.56}$$

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ sind die Kräfte, die nötig sind, um dem Tragwerk die Gestalt, die ausgelenkte Form $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}^T$ zu geben.

Wenn eine Scheibe, wie in Bild 3.12, mit Einzelkräften belastet wird, dann muss die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_h$ sich so einstellen, dass in der Nähe der belasteten Knoten das Verschiebungsfeld so ‚verwirbelt' ist, dass bei einer Auslenkung $\boldsymbol{\varphi}_i$ des Lastknotens die inneren Kräfte die Arbeit $a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = f_i$ leisten. Dort, wo keine Belastung ist, $f_i = 0$, muss das Feld so ‚glatt' sein, so *well behaved*, dass die Arbeit null ist, $a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0$.

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ ist orthogonal, $(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0$, zu allen $\boldsymbol{\varphi}_i$, die zu unbelasteten Knoten, $f_i = 0$, gehören.

Dem *split* einer Biegelinie in eine homogene und partikuläre Lösung, $w = w_h + w_p$, entspricht die Unterteilung in Knotenkräfte $f_i = 0$ und $f_i \neq 0$. In den Bereichen, wo die $f_i = 0$ sind, ist die FE-Lösung ‚homogen' und in den anderen Teilen, $f_i \neq 0$, ‚inhomogen'.

3.7 Festhaltekräfte

Wenn man die äquivalenten Knotenkräfte aus der Streckenlast berechnet,

$$d_i = \int_0^l p(x) \, \varphi_i(x) \, dx \, , \tag{3.57}$$

dann nennt man das die **Reduktion der Belastung in die Knoten**.

Wir erinnern daran, dass wir die äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d}$, in die Kräfte $\boldsymbol{f}_K$ aufspalten, die direkt in den Knoten angreifen und die Kräfte $\boldsymbol{d}$, die bei der Reduktion der Streckenlast, der *domain load*, in die Knoten entstehen. Hier behandeln wir die Kräfte d_i, die sich aus den Beiträgen d_i^e der einzelnen Elemente am Knoten zusammensetzen.

Wegen $d_i^e = (p, \varphi_i^e)$ sind *die Einheitsverformungen φ_i^e die Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte* an den Elementenden. Diese sind so groß wie die Kräfte, die (*actio*), mit denen die Last auf die beidseitig festgehaltenen bzw. eingespannten Enden des Stabes oder Balkens drücken würde.

Bei einem Stab lauten diese lokalen *shape functions*

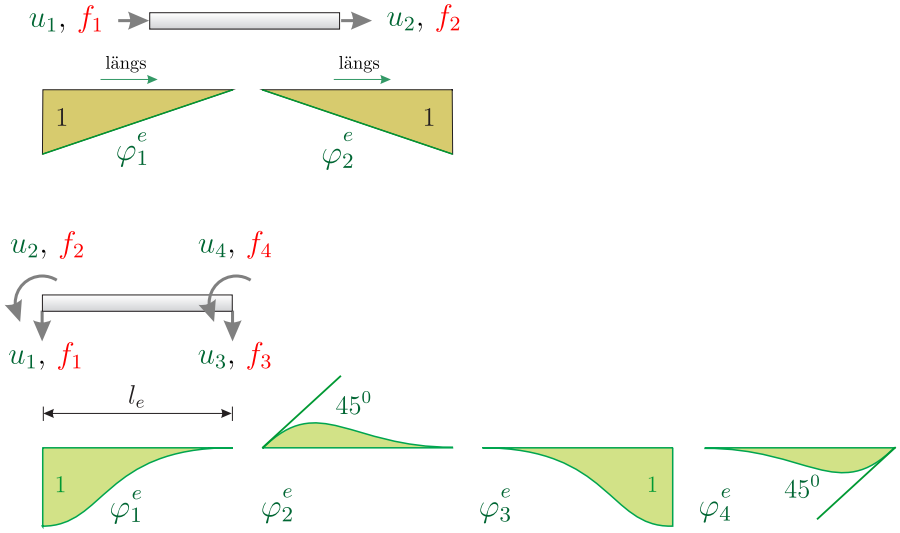


Bild 3.13. Die Einheitsverformungen am Stab (längs) und am Balken (quer) sind auch gleichzeitig die Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= \frac{1-x}{l_e} \qquad \varphi_1^e(0) = 1\,, \qquad \varphi_1^e(l_e) = 0\,, \\ \varphi_2^e(x) &= \frac{x}{l_e} \qquad \varphi_2^e(0) = 0\,, \qquad \varphi_2^e(l_e) = 1 \end{aligned} \tag{3.58}$$

und bei einem Balken sind es kubische Polynome, siehe Bild 3.13,

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & \varphi_3^e(x) &= \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} \\ \varphi_2^e(x) &= -x + \frac{2x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} & \varphi_4^e(x) &= \frac{x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2}\,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

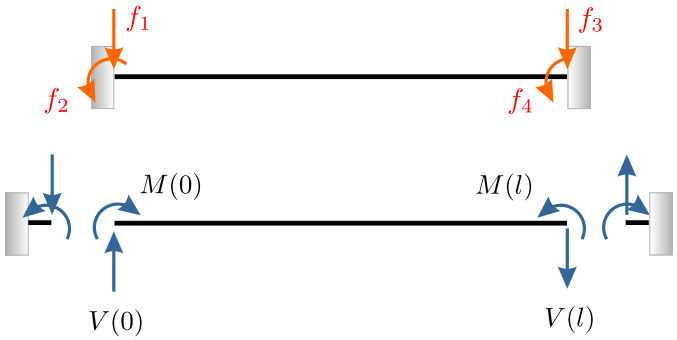
Die äquivalenten Knotenkräfte d_i^e sind dann die Größen

$$d_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\rightarrow}{p(x)}\, \varphi_i^e(x)\, dx \qquad i = 1,2 \qquad \text{Stab} \tag{3.60}$$

$$d_i^e = \int_0^{l_e} \underset{\downarrow}{p(x)}\, \varphi_i^e(x)\, dx \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \text{Balken}\,. \tag{3.61}$$

Wirkt eine Einzelkraft P bzw. ein Moment M in einem Punkt x, dann erhält man die zugehörigen d_i^e einfach durch Auswertung im Punkt

$$d_i^e = \varphi_i^e(x) \cdot P \qquad d_i^e = \varphi_i^{e\prime}(x) \cdot M\,. \tag{3.62}$$



$$f_1 = V(0) \qquad f_2 = M(0) \qquad f_3 = -V(l) \qquad f_4 = -M(l)$$

Bild 3.14. Übersetzung der Balkenendkräfte in Knotenkräfte f_i. Die Balkenendkräfte wirken an den Knoten in umgekehrter Richtung, belasten die Knoten (*actio*) wie Knotenkräfte f_i

Äquivalente Knotenkräfte und Festhaltekräfte verhalten sich wie *actio* und *reactio* zueinander. Die Festhaltekräfte sind die $d_i^e \times (-1)$.

Eventuell muss man auch noch die d_i^e in das DIN-Koordinatensystem umrechnen

$$d_1^e = -N(0) \qquad d_2^e = N(l_e) \tag{3.63}$$

$$d_1^e = -V(0) \qquad d_2^e = -M(0) \qquad d_3^e = V(l_e) \qquad d_4^e = M(l_e)\,, \tag{3.64}$$

wenn man anders mit ihnen weiterrechnen will, siehe Bild 3.14.

Bei Stabtragwerken sind die Einheitsverformungen der Knoten die Einflussfunktionen für die Festhaltekräfte $\times(-1)$.

All dies natürlich unter der Voraussetzung, dass die Elementeinheitsverformungen φ_i^e homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkengleichung sind, was man in der Regel voraussetzen kann, wenn keine gevouteten oder andere exotische Profile vorkommen, wenn also EA und EI konstant sind.

3.8 Die Neutralität der shape functions

Die Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$, die *shape functions*, verstehen wir als Biegelinien, als Verformungen, aber warum steht auf Seite 243 nirgendwo ein EI oder ein EA? Die Steifigkeiten EI und EA kommen erst durch das System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ in die FE-Lösung hinein. Wenn die Matrix $\boldsymbol{K}$ den Vorfaktor EI hat, dann hat die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ den Vorfaktor $1/EI$, und so sind die Knotenwerte u_i wegen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ alle mit dem Kehrwert $1/EI$ behaftet, wie wir es von einer Biegelinie erwarten. Die Steifigkeit steckt also in den u_i, die $\varphi_i(x)$ selbst sind neutral.

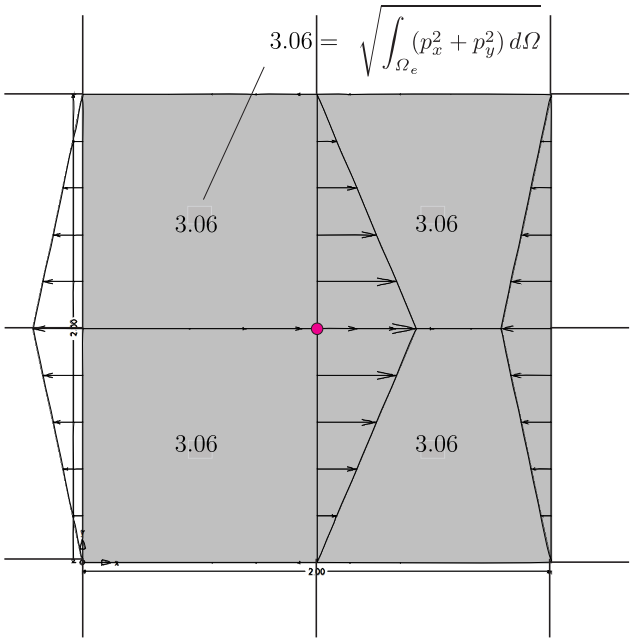


Bild 3.15. Ausschnitt aus einem FE-Netz: Die Kräfte, die den Mittenknoten um eine Längeneinheit nach rechts verschieben, und die Bewegung an den umliegenden Knoten abstoppen, sind die *shape forces*, es sind Linienkräfte auf den Elementkanten und Flächenkräfte p_x und p_y; letztere sind nur als integrale Werte angegeben. Im übrigen Netz sind die *shape forces* null, weil sich dort nichts bewegt

Man beachte auch, dass bei der Berechnung von Einflussfunktionen, etwa für ein Moment $M(x)$, die äquivalenten Knotenkräfte j_i $(= f_i)$ die Momente $j_i = M(\varphi_i) = -EI\,\varphi_i''$ sind. Wenn φ_i von Hause aus mit $1/EI$ behaftet wäre, dann ging das schief.

3.9 Shape forces und der FE-Lastfall

Um einen Knoten einer Scheibe um einen Meter horizontal oder vertikal zu verschieben – und dabei gleichzeitig alle anderen Knoten festzuhalten – sind gewisse Kräfte nötig, siehe Bild 3.15. Wir nennen diese Kräfte, in Analogie zu dem Begriff *shape functions*, die ***shape forces*** $\boldsymbol{p}_j = \{p_x^{(j)}, p_y^{(j)}\}^T$, die zu dem Freiheitsgrad u_j gehören. Es sind treibende wie haltende Kräfte. Die treibenden Kräfte lenken den Knoten aus, und die haltenden Kräfte sorgen dafür, dass die Bewegung an den umliegenden Knoten gleich wieder zum Stillstand kommt. Es sind immer Gleichgewichtskräfte, siehe Bild 3.16.

Die Summe dieser *shape-forces* – mit den Knotenverschiebungen u_j gewichtet – stellt den **FE-Lastfall** dar, also die Kräfte, die $\boldsymbol{u}$ erzeugen

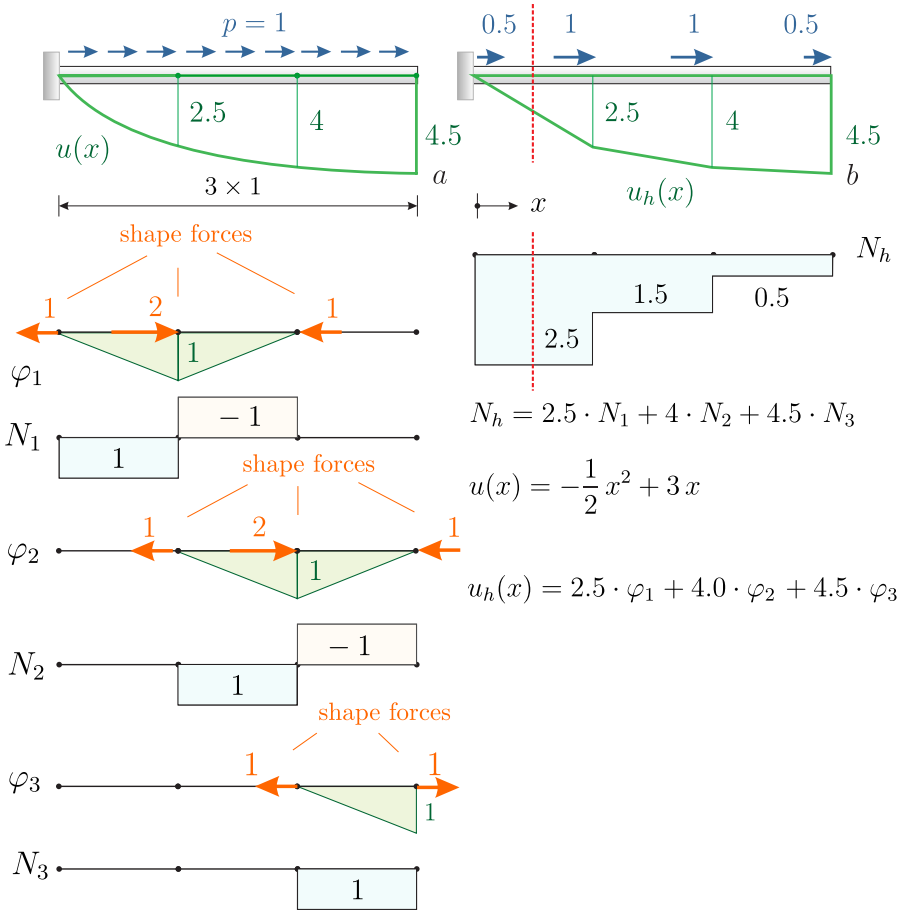


Bild 3.16. Lineare FE-Lösung eines Stabes ($EA = 1$) unter konstanter Streckenlast. Die Kräfte an den *shape functions* φ_i sind die *shape forces*

$$\boldsymbol{p}_h = \sum_j u_j \boldsymbol{p}_j = u_1 \begin{bmatrix} p_x^{(1)} \\ p_y^{(1)} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} p_x^{(2)} \\ p_y^{(2)} \end{bmatrix} + \dots \tag{3.65}$$

Während bei Flächentragwerken einiger Aufwand nötig ist, um den FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ zu berechnen, siehe Bild 3.17, muss man bei Stabtragwerken (EA und EI konstant) gar nichts tun, denn bei Stabtragwerken ist der FE-Lastfall mit den äquivalenten Knotenkräften $f_i = f_{Ki} + d_i$ identisch.

Bemerkung 3.2. Die Bild 3.17 illustriert auch sehr gut, die ‚Doppelbödigkeit' der Statik im Umgang mit finiten Elementen. Gehalten wird die Scheibe in der Nähe der Lagerknoten eigentlich von einem konzentrierten System von Flächen- und Linienkräften. Im Ausdruck stehen aber nur die äquivalenten

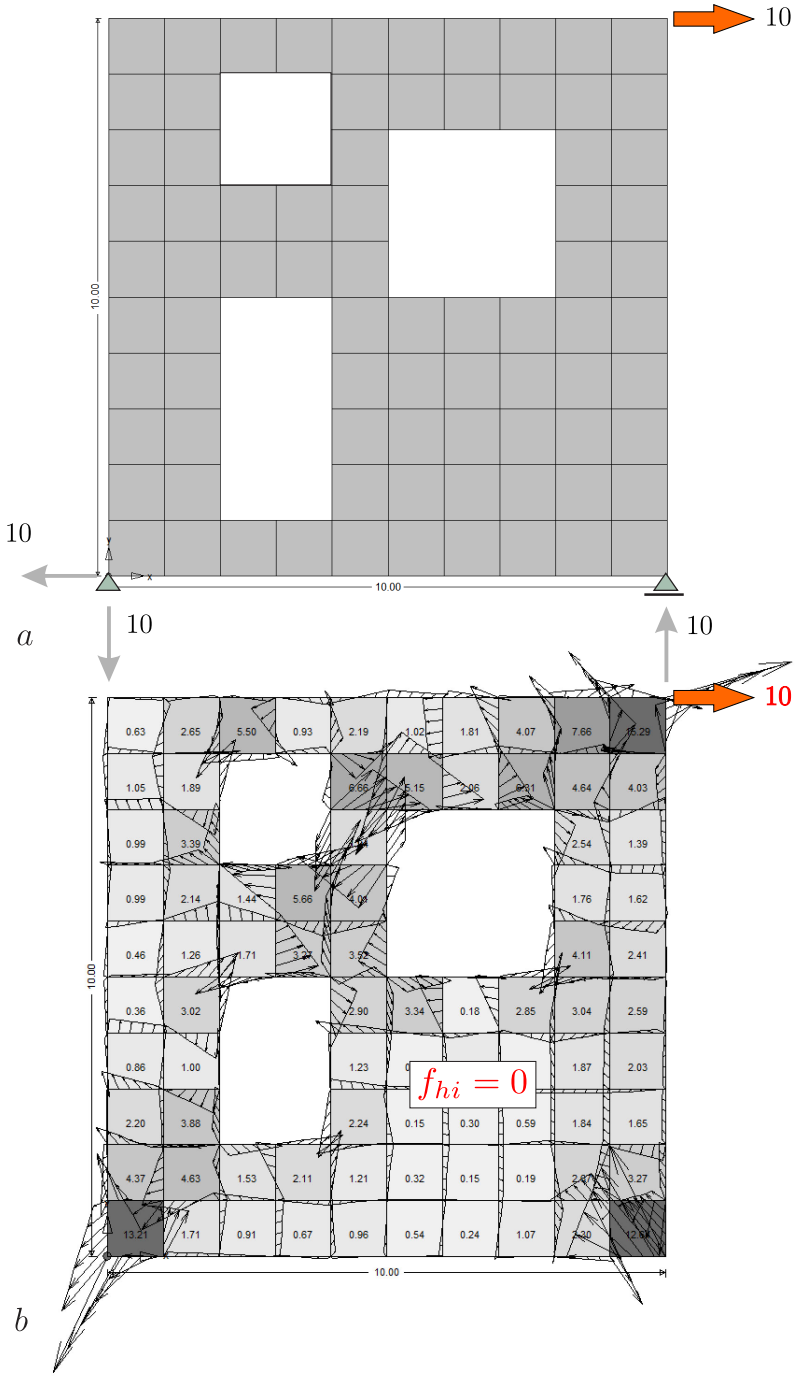


Bild 3.17. Belastung einer Scheibe mit einer Einzelkraft, **a)** System **b)** der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$; die Graustufen entsprechen der Intensität der aufintegrierten FE-Flächenlast in den bilinearen Elementen, wie in Bild 3.15. Die scheinbar ‚chaotischen' FE-Lasten leisten, bis auf $f_{hi} = 10$, keine Arbeit, $f_{hi} = 0$, (WINFEM)

Knotenkräfte f_i, die diese Haltekräfte in der ‚Summe' repräsentieren, und der Ingenieur findet (zu Recht) gar nichts dabei mit diesen f_i weiter zu rechnen, aus ihnen echte Kräfte zu machen.

Die Rolle der u_i

Der FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ wird mit Hilfe der u_i so austariert, dass die zugehörigen Knotenkräfte f_{hi} mit den äquivalenten Knotenkräften aus der Belastung übereinstimmen, also z.B. im Fall einer Scheibe die Arbeiten f_{hi} genauso groß sind, wie die Arbeiten f_i

$$f_{hi} = \int_\Omega \boldsymbol{p}_h^T \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = f_i \,. \tag{3.66}$$

Diese Forderung ist äquivalent mit dem System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, denn der Vektor $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ (die Einträge sind innere Arbeiten δW_i) ist wegen *‚innen = außen'* identisch mit dem Vektor $\boldsymbol{f}_h$ der zugehörigen äußeren Arbeiten δW_e.

Man stelle sich die Scheibe einmal mit der Originalbelastung $\boldsymbol{p}$ vor und daneben mit der FE-Belastung $\boldsymbol{p}_h$. Nun gehe man von Knoten zu Knoten und verschiebe den Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler und vertikaler Richtung. Dann wird man finden, dass die Arbeiten immer gleich sind, $f_{hi} = f_i$. In diesem Sinne gilt:

Der FE-Lastfall ist ‚wackeläquivalent' zu dem Originallastfall.

Das ist wie bei einer Waage, wo bei jeder Drehung des Waagebalkens die Arbeiten des linken und rechten Gewichts gleich sind, die beiden Gewichte ‚wackeläquivalent' sind.

Ob ein Tragwerk die Originallasten trägt oder die FE-Lasten, kann der Prüfingenieur durch Wackeln mit den $\boldsymbol{\varphi}_i$ allein nicht entscheiden, weil die Arbeiten jedesmal gleich sind.

Der FE-Lastfall ist der Lastfall, für den ein Tragwerksplaner das Tragwerk eigentlich bemisst, denn die Verformungen und die Schnittkräfte im Ausdruck gehören zu diesem Lastfall $\boldsymbol{p}_h$.

Wenn man die Belastung $\boldsymbol{p}_h$ auf das Tragwerk aufbringen würde und ein Statiker würde die Verformungen und Schnittkräfte von Hand berechnen, dann würde er genau die FE-Ergebnisse erhalten.

In Bild 3.17 b ist ein solcher Vergleich des Originallastfalls und des FE-Lastfalls einmal dargestellt. Zu berechnen waren die Wirkungen einer Einzelkraft von 10 kN, die an der rechten oberen Ecke zieht. Diesen doch eigentlich einfachen Lastfall ersetzt nun das FE-Programm durch ein sehr konfus wirkendes System von Flächenkräften und Kantenkräften, die den Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ darstellen. Weil diese Lasten so ‚merkwürdig' aussehen, werden sie normalerweise von FE-Programmen nicht gezeigt, weil ein Anwender, der mit der Theorie der finiten Elemente nicht vertraut ist, irritiert wäre.

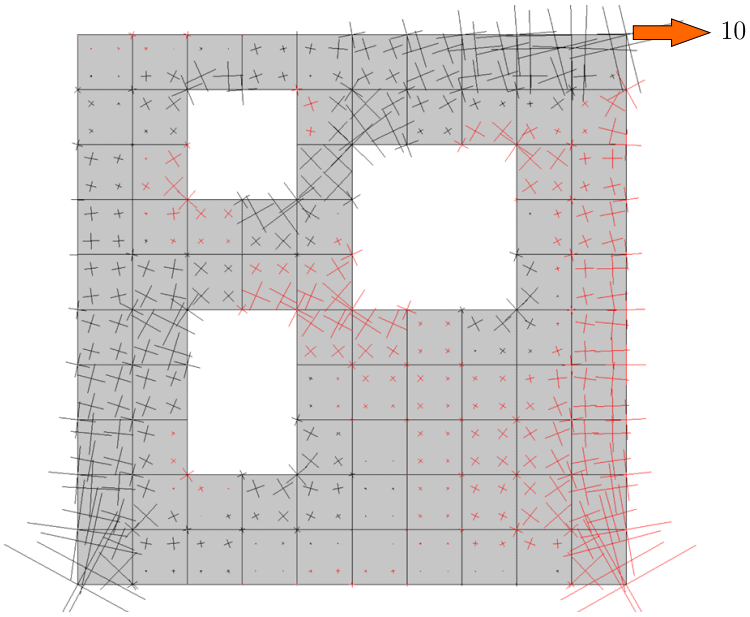


Bild 3.18. Vergleich der Hauptspannungen, **a)** grobes Netz (WINFEM), **b)** sehr enge Dichte von Ergebnispunkten (BE-SCHEIBE)

Nur darf man sich davon aber nicht abschrecken lassen, denn den Ingenieur interessieren primär die Schnittgrößen, und es ist **Spekulation** aus der Differenz $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h$ in den Lasten auf die Differenz in den Schnittgrößen schließen zu wollen. Die Differenz in der Belastung kann man berechnen, die Differenz in den Schnittkräften aber leider nicht.

Dass die FE-Ergebnisse nicht so schlecht sein können, wie dies Bild 3.17 anscheinend suggeriert, macht der direkte Vergleich der Hauptspannungen in Bild 3.18 klar. Diese wirken durchaus glaubhaft.

Wir wollen noch ein zweites, **indirektes Argument** anführen. Im Originallastfall sind alle $f_i = 0$, bis auf das $f_i = 10$ in der oberen rechten Ecke, und daher müssen auch alle $f_{hi} = 0$ sein, bis auf den Knoten in der Ecke, $f_{hi} = 10$

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_h^T \boldsymbol{\varphi}_i \, d\Omega = f_{hi} = f_i = 0 \,. \tag{3.67}$$

Das FE-Programm muss also schon kräftig jonglieren, um diese Eigenschaft zu garantieren, und das mag das ‚Chaos' in Bild 3.17 b erklären, denn all die recht willkürlich aussehenden Teile des Lastfalls $\boldsymbol{p}_h$ sind so **ausbalanciert**, dass sie keine Arbeit leisten, wenn man einen Knoten probeweise um einen Meter in horizontaler oder vertikaler Richtung verschiebt.

Der Großteil der FE-Lasten $\boldsymbol{p}_h$ ist für das FE-Programm im Sinne der Energiemetrik null, weil sie keine Knotenkräfte f_{hi} generieren.

Bemerkung 3.3. Die *shape forces* $\boldsymbol{p}_i$ sind bei einer Scheibe Flächenkräfte und Linienkräfte und die virtuelle Arbeit dieser Kräfte ist daher eigentlich eine Summe aus Gebietsintegralen und Linienintegralen über die Kanten Γ der Elemente, auf denen der Knoten liegt, zu dem φ_i gehört

$$f_{hi} = \int_\Omega \ldots d\Omega + \int_\Gamma \ldots ds \,. \tag{3.68}$$

Die Schreibweise (3.67) ist daher eine zusammenfassende Kurzschreibweise für all diese Integrale.

3.10 Wie die Lawine ins Rollen kam

Wenn wir die Gleichung $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ als die Grundgleichung der finiten Elemente ansehen, dann stimmt das mit dem Zugang in der **Originalarbeit** von *Turner et alt.* (1956) [207] überein. Die Autoren betrachteten damals ein *CST-Element* wie in Bild 3.19 und sie leiteten eine Matrix $\boldsymbol{S}$ her, die die drei Spannungen in dem Element, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$, mit den Knotenverschiebungen verknüpft[6]

[6] Wir orientieren uns hier an der Darstellung von Kurrer in [133] S. 882-883

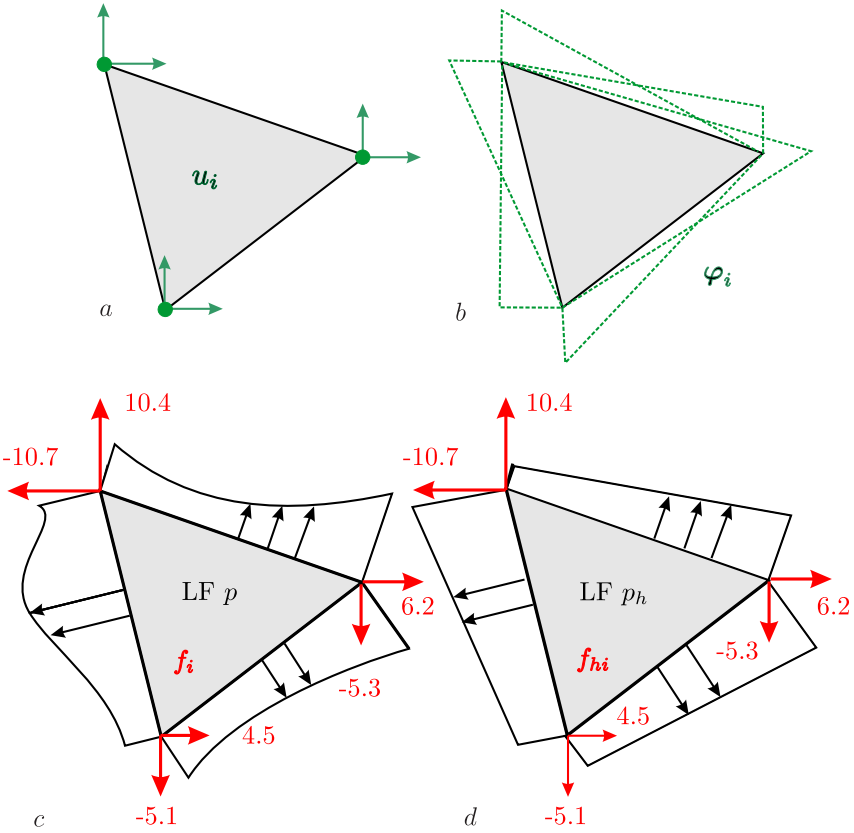


Bild 3.19. CST Element mit Randlasten (im Eq.), die beiden LF sind bezüglich den $\boldsymbol{\varphi}_i$ äquivalent, $f_i = f_{hi}$, sie werfen dieselben Schatten, **a)** Freiheitsgrade, **b)** *shape functions* (z.T. wegen besserer Sichtbarkeit nach unten und links geklappt), **c)** Originalbelastung, **d)** FE-Lastfall p_h

$$\boldsymbol{\sigma}_{(3)} = \boldsymbol{S}_{(3\times 6)}\boldsymbol{u}_{(6)}\,. \tag{3.69}$$

Das sind die Spannungen, die zu dem FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ gehören, zu den Kräften, die die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u}$ – irgendein Vektor – bewirken. Weil die Spannungen konstant sind, gibt es in einem solchen LF $\boldsymbol{p}_h$ keine Volumenkräfte, sondern nur Randkräfte. Als nächstes haben die Autoren die sechs äquivalenten Knotenkräfte, den Vektor $\boldsymbol{f}_h$, berechnet, die zu diesen Kräften gehören, sie haben also die Randkräfte mit den sechs (3×2) Einheitsverformungen $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ der 3 Knoten überlagert, was auf eine Matrix $\boldsymbol{T}$ führte

$$\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{T}_{(6\times 3)}\boldsymbol{\sigma}_{(3)} \tag{3.70}$$

oder mit (3.69) auf die Beziehung

$$\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{T}_{(6\times 3)}\boldsymbol{S}_{(3\times 6)}\boldsymbol{u}_{(6)} \tag{3.71}$$

und das ist genau die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{TS}$ des *CST-Element*. Dass hier die Steifigkeitsmatrix auftaucht, deren Einträge virtuelle *innere* Energien sind, obwohl doch eigentlich nur ‚außen' gerechnet wurde, liegt an dem ‚außen = innen', das die erste Greensche Identität garantiert.

Bezeichnet

$$\delta W_e(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_i) \bullet \boldsymbol{\varphi}_j \, ds =: f_{ij} \tag{3.72}$$

die Arbeit der *tractions* $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{\varphi}_i)$, der Randspannungen des Feldes $\boldsymbol{\varphi}_i$, auf dem Weg $\boldsymbol{\varphi}_j$, dann gilt

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = \delta W_e(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) - \delta W_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) = f_{ij} - k_{ij} = 0 \tag{3.73}$$

und somit in der Summe

$$f_{hi} = \delta W_e(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = \sum_j f_{ij}\, u_j = \sum_j k_{ij}\, u_j \,. \tag{3.74}$$

Die Elemente k_{ij} einer Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ kann man als virtuelle innere Arbeit wie als virtuelle äußere Arbeit f_{ij} lesen.

Das $k_{11} = \delta W_i(\varphi_1, \varphi_1)$ einer Balkenmatrix

$$k_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{EI}\, dx = a(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{12\,EI}{l^3} \cdot 1 = \delta W_e(\varphi_1, \varphi_1) = f_{11} \tag{3.75}$$

ist genauso groß, wie die Arbeit, die die Kraft $12\,EI/l^3$ – das ist die Kraft, die den Knoten nach unten drückt – auf dem Weg $\varphi_1(0) = 1$ leistet.

Die ‚erste' Steifigkeitsmatrix in der Geschichte der FEM war also eine Tabelle von **äußeren Arbeiten**. Erst die Äquivalenz $\delta W_i = \delta W_e$ führt auf die Interpretation, wie wir Steifigkeitsmatrizen $\boldsymbol{K}$ heute lesen, $k_{ij} = a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)$.

Bemerkenswert ist dabei, wie **simpel** die finiten Elemente begonnen haben – kein Energieprinzip, kein Galerkin, überhaupt keine höhere Mathematik, sondern ein uraltes Prinzip, das **Prinzip Waage**, die ‚Wackeläquivalenz'

$$\boxed{\delta W_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varphi}_i) = \delta W_e(\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) \qquad \text{der Start der FEM}} \tag{3.76}$$

hat die Lawine ins Rollen gebracht[7].

3.11 Finite Elemente mit Betti

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass man bei 1-D Problemen auch über den Satz von Betti zu den finiten Elementen kommen kann

[7] Erst später, als die Mathematiker an Bord kamen, hat man erkannt, dass man die Elementansätze als finite Funktionen deuten konnte und dass die Wackeläquivalenz $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$ dem $\delta \Pi = 0$ der potentiellen Energie entspricht.

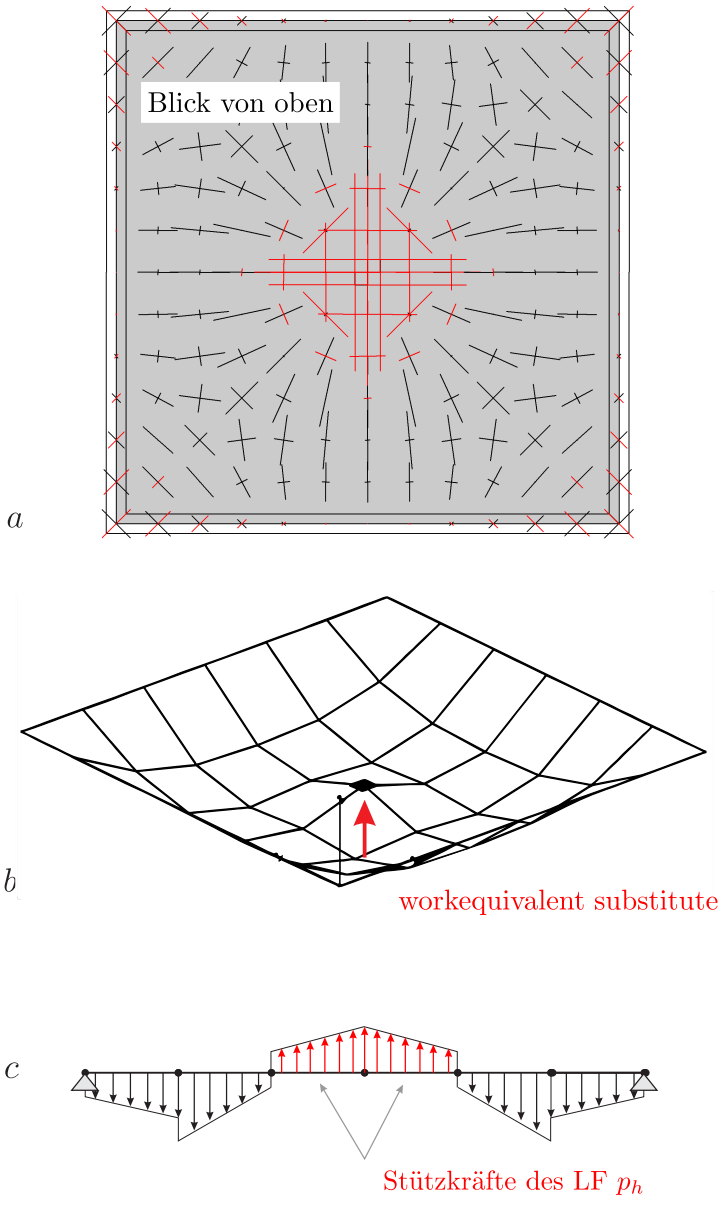


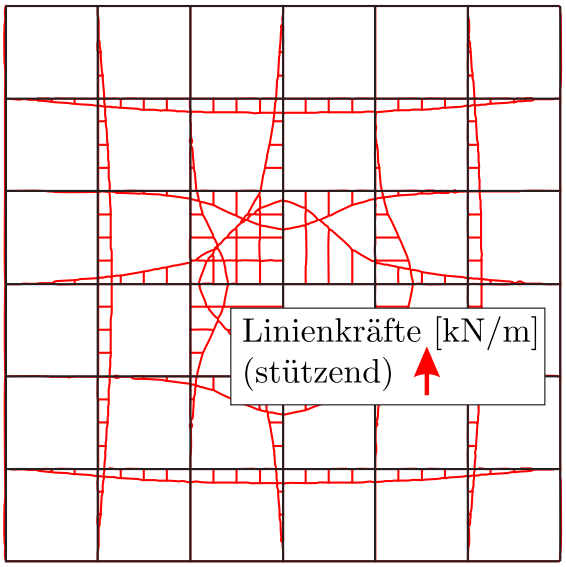
Bild 3.20. Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstütze im LF g, **a)** Hauptmomente, **b)** Biegefläche mit äquivalenter Knotenkraft in der Stütze, **c)** Längsschnitt durch die Platte mit den FE-Lasten (symbolische Darstellung). Die äquivalente Knotenkraft im mittleren Bild steht stellvertretend für die aufwärts gerichteten FE-Lasten im Bereich der Stütze, die eigentlich die Platte halten (WINFEM-P)

Blick auf die Platte

1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
1.57	3.73	-4.50	-4.50	3.73	1.57
0.51	-0.88	3.73	3.73	-0.88	0.51
1.18	0.51	1.57	1.57	0.51	1.18

Elementlasten [kN/m^2]

a



b

Bild 3.21. Der FE-Lastfall g_h, das ist der LF, den das FE-Programm für den LF g setzt, **a)** die Zahlen sind die mittleren Flächenkräfte in den Elementen, im Bereich der Innenstütze sind sie negativ, dort stützen die Flächenkräfte also die Platte, **b)** ebenso wie die Linienkräfte längs den Elementkanten im Bereich der Stütze (rote Farbe); die Linienmomente des LF g_h längs der Linien sind nicht dargestellt (WINFEM-P)

$$\mathscr{B}(w_h, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots , \tag{3.77}$$

was aber im Ergebnis dasselbe ist. Es ist so, als ob man die Wechselwirkungsenergie

$$a(w_h, \varphi_i) = f_i \tag{3.78}$$

partiell integriert (auf $[x_{i-1}, x_i]$ und $[x_i, x_{i+1}]$), also das δW_i durch äußere Arbeit δW_e ersetzt

$$a(w_h, \varphi_i) = [V(\varphi_i)\, w_h - M(\varphi_i)\, w_h']_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + P_i\, w_h(x_i)\,. \tag{3.79}$$

Die *shape function* lebe im Intervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ und P_i sei die Kraft, die den Knoten x_i um Eins nach unten drückt, also $EI\,\varphi_i^{IV} = P_i\,\delta(y - x_i)$. Wenn φ_i eine Knotenverdrehung ist, dann ist sinngemäß zu setzen $M_i\, w_h'(x_i)$.

3.12 Der FE-Lastfall bei Platten

Der FE-Lastfall und seine Interpretation ist bei Platten ähnlich ambivalent wie bei Scheiben, wie die Bilder 3.20 und 3.21 zeigen. Die Stützenkraft f_i im Ausdruck suggeriert, dass die Platte in der Mitte punktgenau von einer Einzelkraft gehalten wird, aber wenn man sich die Verteilung der FE-Lasten in Bild 3.21 ansieht, dann erkennt man, dass das symbolisch zu nehmen ist. Rechnerisch sind es aufwärts gerichtete Flächen- und Linienkräfte in der Umgebung der Stütze, die die Platte nach oben drücken, keine Einzelkraft.

Denn wäre die Stützenkraft f_i eine echte Einzelkraft, dann müssten in dem Knoten die Schubkräfte v_n bei Annäherung an die Stütze unendlich groß werden, $v_n = 1/(2\,\pi\, r)$, weil anders die Bilanz[8].

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\,\pi} v_n\, r\, d\varphi = f_i \tag{3.80}$$

nicht einzuhalten ist, siehe Bild 6.5. Aber die *shape functions* $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ sind Polynome und sie können sich nicht wie $1/r$ in einem Knoten zusammenschnüren.

Die Knotenkraft f_i im Ausdruck ist daher eine **äquivalente Knotenkraft**, also ein Arbeitsäquivalent im Sinne von ‚soviel Arbeit wie eine Einzelkraft f_i auf dem Weg 1 Meter leisten würde'.

Zwar hat die die Stützenkraft f_i direkt nichts mit der Bemessung der Platte zu tun, weil die Momente m_{xx}, m_{xy} und m_{xy} und auch die Querkräfte q_x und q_y zu dem FE-Lastfall p_h gehören, siehe Bild 3.21, bei dem eben Flächen- und Linienkräfte die Platte stützen, aber der Ingenieur wird natürlich mit der Knotenkraft f_i einen Durchstanznachweis führen und sie auch als Stützenkraft weiterleiten.

[8] siehe Kap. 6.3

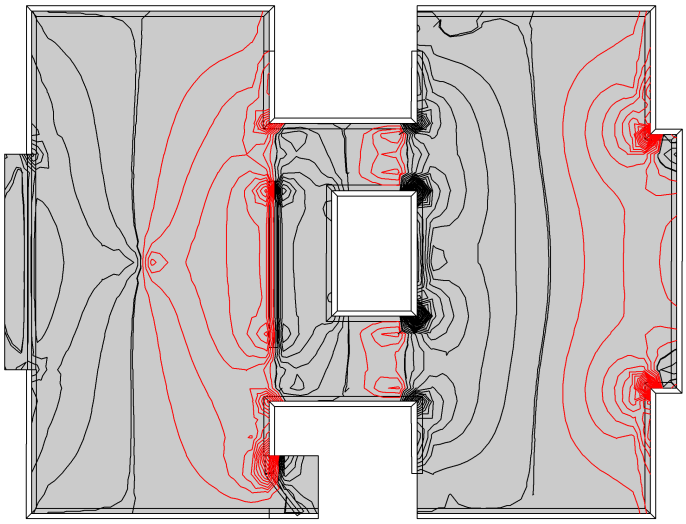


Bild 3.22. Querkräfte q_x in einer Platte (BE-PLATTE)

3.13 Realism

Uns scheint, dass diese Ambivalenz der finiten Elemente zu wenig diskutiert wird. Ein FE-Modell ist ein ***Ersatzmodell*** und es ist gar nicht eindeutig geklärt, wie man die FE-Ergebnisse auf das reale Tragwerk zu übertragen hat.

Wie stellen sich die Prüfingenieure zu der Tatsache, dass die FE-Programme gar nicht den Originallastfall lösen, sondern einen Ersatzlastfall? Diesen kann man sich auf dem Bildschirm anzeigen lassen und so hätte jeder Prüfingenieur ganz bequem die Möglichkeit die Güte einer FE-Berechnung zu kontrollieren. Was wäre besser als ein solcher direkter Vergleich?

Dem seien nun aber alle Sachverständigen vor, denn das gäbe wahrscheinlich mehr Unfug als dass es nützt. **Zwei verschiedene, aber wackeläquivalente Lastfälle werfen gleiche Schatten,** $\boldsymbol{f}_h = \boldsymbol{f}$. Das ist der Ansatz hinter den finiten Elementen und die Wackeläquivalenz, die sieht man nicht auf dem Bildschirm, deswegen tun die FE-Programme gut daran die beiden Lastfälle $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p}_h$ nicht nebeneinander auf dem Bildschirm zu zeigen, wie wir das in Bild 3.17 getan haben[9]. Das Auge registriert nur die Diskrepanz $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h$ ‚in der Fläche', aber es sieht nicht, dass der scheinbar chaotische FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ so austariert ist, dass die $f_{hi} = (\boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{\varphi}_i)$ in den freien, unbelasteten Knoten null sind, wie beim Originallastfall.

Da, wo der Massivbauer bei seinem Werkstoff ist, da wird, wenn man sich den Eurocode anschaut, mit der ‚Goldwaage' gemessen. Bis zum letzten Zu-

[9] FE-Programme, die adaptiv rechnen, nutzen diese Information schon

schlagskorn wird, so hat man als Laie den Eindruck, modelliert und man bestaunt den Ernst und die Wissenschaftlichkeit, mit der das geschieht.

Der Statiker aber stutzt. Wissen die Autoren des Eurocodes nicht, dass die Schnittkräfte auf Näherungsrechnungen basieren? Wissen die Autoren, wie FE-Programme rechnen, welche Modelle hinter den Ergebnissen stecken, wie die Elementwahl die Ergebnisse beeinflusst? Wo z.B. die kritischen Punkte bei einer schubweich gerechneten Platte liegen? Welchen Einfluss das FE-Netz auf die Ergebnisse hat?

Wenn man sieht, mit welcher Akkuratesse heute der Durchstanznachweis bei Platten geführt wird, [56], welcher Aufwand bei der Schnittführung getrieben wird, um ja alle Ecken und Kanten mitzunehmen – die Software-Häuser freut es – und wenn man dagegen weiß, **wie wacklig FE-Querkräfte sind**, siehe Bild 3.22, dann fragt man sich, ob die Relationen noch stimmen, ob die Schraube nicht überdreht ist. Offiziell kann man zwar auf der Materialseite keine Rücksicht darauf nehmen, dass Kräfte nur näherungsweise bekannt sind, man muss so tun, als ob sie exakt wären, aber exakte Resultate gibt es in der Praxis eben leider nicht und im Grunde ist es ein Unding die Dimensionierung und die Numerik getrennt zu behandeln. Statt sich um die vierte Stelle nach dem Komma zu kümmern, sollte man erst einmal sicherstellen, dass die erste sicher ist. Etwas mehr *realism* wäre unserer Meinung nach doch angesagt!

3.14 Kopplung von Bauteilen

Wenn man eine Scheibe an einem Stab – im Sinne eines Zugankers – festmacht und den Koppelknoten $\delta u_i = 1$ probehalber auslenkt, alle anderen Knoten bleiben fest, dann bedeutet $f_i^{Stab} = f_i^{Scheibe}$, dass die inneren Energien in den beiden Bauteilen dabei gleich groß sind. Es ist aber keine statische Kopplung, weil das f_i auf der Seite der Scheibe keine echte Einzelkraft ist, denn die hätte unendlich großen Spannungen zur Folge, die das Material zum Fließen bringen würden.

Nur bei eindimensionalen Problemen, $EIw^{IV} = p$, $-EAu'' = p$ etc., und dann auch nur bei konstanten Steifigkeiten, sind die f_i (dimensionsbereinigt) echte Knotenkräfte.

Wie sich die einzelnen Elemente eines Netzes zu einem Ganzen fügen, kann man mit Hilfe der ***Inzidenzmatrizen*** verfolgen.

Die beiden Elementmatrizen des Stabes in Bild 3.23 stehen auf der Diagonalen einer 4×4 Matrix[10] $\boldsymbol{K}_{loc}$

$$\boldsymbol{f}_{loc} = \begin{bmatrix} f_1^a \\ f_2^a \\ f_1^b \\ f_2^b \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{u}_{loc} \,. \tag{3.81}$$

[10] Alle Elementmatrizen einzeln, unverbunden und $\boldsymbol{u}_{loc}$ und $\boldsymbol{f}_{loc}$ sind die Weg- und Kraftgrößen an den Elementenden

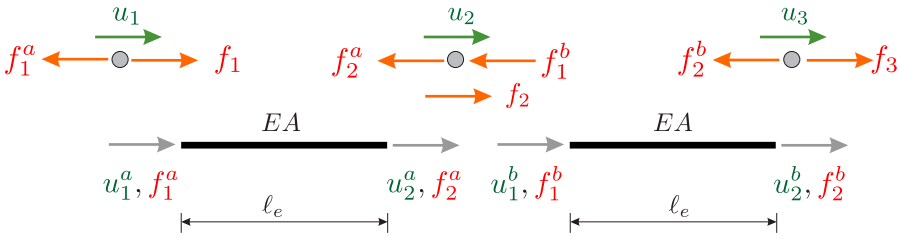


Bild 3.23. Kopplung zweier Stabelemente

Die Verschiebungen der Elementenden sind an die Knotenverschiebungen u_1, u_2, u_3 gekoppelt

$$\boldsymbol{u}_{loc} = \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\,. \tag{3.82}$$

Die Kräfte $\boldsymbol{f}_{loc}$ und die Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ müssen bei einer virtuellen Verrückung $\boldsymbol{\delta u}$ bzw. $\boldsymbol{\delta u}_{loc} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\delta u}$ die gleiche Arbeit leisten

$$\boldsymbol{f}_{loc}^T \boldsymbol{\delta u}_{loc} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\delta u} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{f}_{loc}^T \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\delta u} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\delta u}\,, \tag{3.83}$$

was $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}$ ergibt und das sind natürlich gerade die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Stabendkräften und den Knotenkräften f_i

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^a \\ f_2^a \\ f_1^b \\ f_2^b \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}\,. \tag{3.84}$$

Entsprechend erhält man durch Multiplikation der Matrix $\boldsymbol{K}_{loc}$ von links und rechts mit $\boldsymbol{A}^T$ bzw. $\boldsymbol{A}$ die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{A} = \frac{EA}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\,. \tag{3.85}$$

Das Produkt $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$ ist eine Diagonalmatrix der Größe $n \times n$, wenn n die Zahl der globalen FG ist. Der Eintrag d_i auf der Diagonalen ist gleich der Zahl der lokalen FG, die mit dem globalen FG u_i verbunden sind. Bei dem obigen Beispiel stehen die Zahlen $1, 2, 1$ auf der Diagonalen von $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$.

3.15 Äquivalente Spannungs Transformation

Die Kopplung von gleichartigen Elementen untereinander stellt also kein Problem dar. Schwieriger ist es aber z.B. Stützen (Balken) und Scheiben

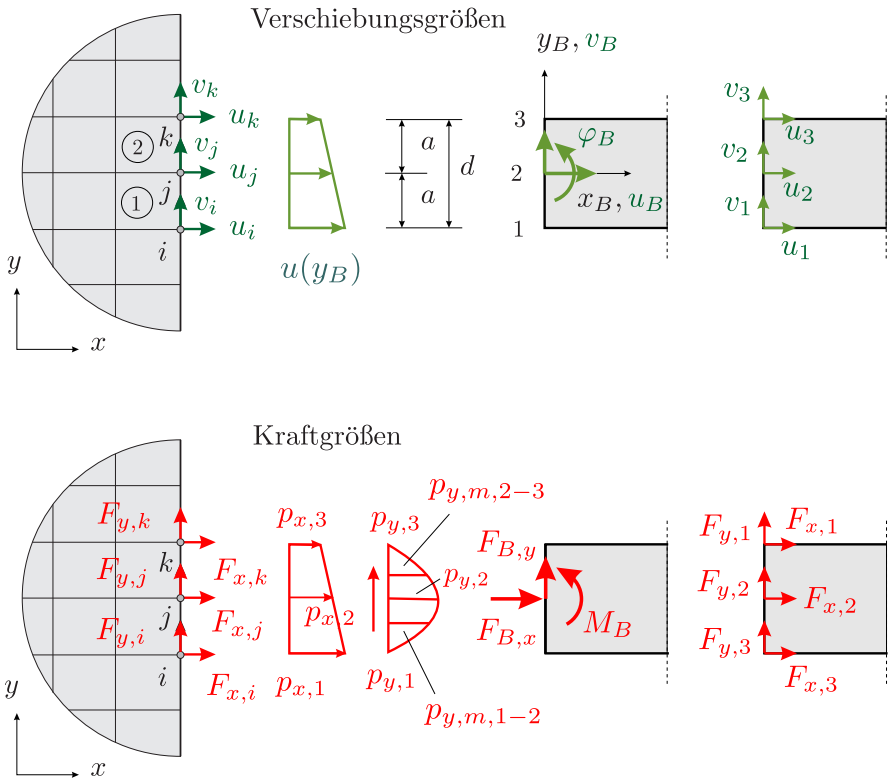


Bild 3.24. Kopplung Scheibe – Balken. Die drei Schnittkräfte $F_{B,x}, F_{B,y}, M_B$ des Balkens werden in äquivalente Knotenkräfte $F_{x,i}, F_{y,i}$ rechts umgerechnet, so dass sie zur Scheibe links passen [217]

miteinander zu koppeln, weil Balkenenden Drehfreiheitsgrade haben, die den Knoten einer Scheibe fehlen.

Die ***Äquivalente Spannungs Transformation*** (EST) von Werkle, [216], löst dieses Problem auf sehr elegante, ja natürliche Weise. Bei ihr zäumt man das Pferd sozusagen von hinten auf. Normalerweise geht man bei der Formulierung einer Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{loc} \boldsymbol{A} \tag{3.86}$$

ja so vor[11], dass man erst die Kopplung zwischen den Weggrößen beschreibt,

$$\boldsymbol{u}_{loc} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{u}_{Knoten} \tag{3.87}$$

und dann mit der Transponierten $\boldsymbol{A}^T$ die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen formuliert

[11] Auf der Diagonalen von $\boldsymbol{K}_{loc}$ stehen die Elementmatrizen, siehe (3.81)

$$\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_{loc}\,. \tag{3.88}$$

Erst berechnet man also $\boldsymbol{f}_{loc} = \boldsymbol{K}_{loc}\,\boldsymbol{u}_{loc} = \boldsymbol{K}_{loc}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}_{Knoten}$ und dann über $\boldsymbol{\delta u}^T\,\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{\delta u}_{loc}^T\,\boldsymbol{f}_{loc}$ daraus $\boldsymbol{f}_{Knoten} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_{Knoten}$.

Bei der äquivalenten Spannungs Transformation ist es umgekehrt. Bei ihr wird zuerst die Abbildung (3.88) formuliert – hier ist das statische Verständnis und das Geschick des Ingenieurs gefragt – und diese Matrix $\boldsymbol{A}^T$ wird dann in transponierter Form in (3.87) übernommen.

An dieser Stelle zeigt sich – und das war vorher nicht so deutlich – dass es **zwei Wege** gibt, den Zusammenhang $\boldsymbol{A}$ der Elemente zu beschreiben, den geometrischen Pfad $\boldsymbol{u}_{Knoten} \to \boldsymbol{u}_{loc}$ oder den statischen Pfad $\boldsymbol{f}_{loc} \to \boldsymbol{f}_{Knoten}$.

Beispiel 3.3. Wie man diese Technik nutzen kann, um eine Steifigkeitsmatrix herzuleiten, die die Kopplung eines Balkens an eine Scheibe beschreibt, soll das folgende Beispiel zeigen.

Die Situation zeigt Bild 3.24; drei Knoten mit den Freiheitsgraden u_i, v_i liegen dem Balken gegenüber. Beim geometrischen Pfad (3.87) macht man die Annahme, dass der Querschnitt des Balkens eben bleibt, also mit $a = d/2$, halbe Trägerhöhe,

$$u_1 = u_B + a\,\tan\varphi_B, \quad u_2 = u_B, \quad u_3 = u_B - a\,\tan\varphi_B, \quad v_1 = v_2 = v_3 \tag{3.89}$$

und damit lautet (3.87) ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \tan\varphi_B \end{bmatrix}. \tag{3.90}$$

Entscheidend ist, dass hier ein linearer Verlauf der Verschiebungen angenommen wurde – eine Annahme, die natürlich so nicht richtig ist. Richtig im Sinne der Elastizitätstheorie wäre ein Verschiebungsverteilung, wie sie sich bei einer Berechnung des Anschlusses als Scheibe, d.h. der Modellierung des Balkens mit Scheibenelementen, einstellt.

Beim **statischen Pfad** geht man dagegen über die Kräfte. Die Schnittgrößen F_{Bx}, F_{By} und M_B, siehe Bild 3.24, erzeugen, bei Ansatz der Biegebalkentheorie, die Spannungen[12] (Rechteckquerschnitt, t = Wandstärke)

[12] Vorzeichen gemäß Bild 3.24

$$p_x = \frac{F_{B,x}}{A} - \frac{M_B}{I}\, y_B = \frac{F_{B,x}}{d\,t} - \frac{12\,M_B}{t\,d^3}\, y_B \tag{3.91}$$

$$p_y = \frac{3}{2}\,\frac{1}{d\,t}(1 - 4\,\frac{y_B^2}{d^2})\, F_{B,y}\,, \tag{3.92}$$

in der Stirnfläche des Balkens, die man in äquivalente Knotenkräften $\boldsymbol{f}$ auf der Seite der Scheibe umrechnen kann und so kommt man zu einer Beziehung zwischen den Kräften auf den beiden Seiten des Schnittufers.

Bei dieser Technik werden erst aus dem Vektor $\boldsymbol{f}_B = \{F_{B,x}, F_{B,y}, M_B\}^T$ die Knotenwerte p_i der Spannungen σ und τ ermittelt. Die Knotenwerte fassen wir zu einem Vektor $\boldsymbol{p}$ zusammen und so kann der Übergang $\boldsymbol{f}_B \to \boldsymbol{p}$ mit einer Matrix $\boldsymbol{P}$ (wie Polynome) beschrieben werden.

Mit den y-Koordinaten der Punkte 1, 2 und 3 (Achse y_B bezogen auf den Schwerpunkt des Balkens)

$$y_{B,1} = -a, \qquad y_{B,2} = 0, \qquad y_{B,3} = a \tag{3.93}$$

erhält man mit den obigen Formeln die Knotenwerte der Spannungen zu

$$\begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{16\,t\,a^2} \begin{bmatrix} 8\,a & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9\,a & 0 \\ 8\,a & 0 & 0 \\ 0 & 12\,a & 0 \\ 0 & 9\,a & 0 \\ 8\,a & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

oder

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{f}_B\,. \tag{3.95}$$

Die Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_S$ aus den als Linienlasten aufgefassten Spannungen p_x und p_y geschieht, wie es die Regel ist, durch die Überlagerung der Spannungen mit den *shape functions*. Das Ergebnis hat formal die Gestalt

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p} \tag{3.96}$$

mit einer Matrix, die wir $\boldsymbol{Q}$ (wie Quadratur) nennen.

Diese Beziehung wird zunächst für jedes Element separat ermittelt und daraus dann die Gesamtmatrix $\boldsymbol{Q}$ gebildet. Nach Bild 3.24 sind hier zwei Scheibenelemente zu berücksichtigen. Man erhält[13], am Element 1

$$\begin{bmatrix} F_{x,1}^{(1)} \\ F_{x,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{x,2} \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

[13] nach [219] Glg. (4.78c, d), S. 259 und Glg. (4.86a, b), S. 262

und

$$\begin{bmatrix} F_{y,1}^{(1)} \\ F_{y,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{y,2} \end{bmatrix} . \tag{3.98}$$

Damit lautet am Element 1 die Beziehung

$$\begin{bmatrix} F_{x,1}^{(1)} \\ F_{y,1}^{(1)} \\ F_{x,2}^{(1)} \\ F_{y,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

und entsprechend am Element 2

$$\begin{bmatrix} F_{x,2}^{(2)} \\ F_{y,2}^{(2)} \\ F_{x,3}^{(2)} \\ F_{y,3}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix} . \tag{3.100}$$

Den Vektor der Knotenkräfte, die auf die Scheibe an der Verbindung wirken, ergibt sich durch Addition der Elementkräfte der einzelnen Elemente, siehe Bild 3.24, und man erhält so die Matrix $\boldsymbol{Q}$ zu

$$\begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{bmatrix} = \frac{a\,t}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x,1} \\ p_{y,1} \\ p_{y,m,1-2} \\ p_{x,2} \\ p_{y,2} \\ p_{y,m,2-3} \\ p_{x,3} \\ p_{y,3} \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

oder

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p} . \tag{3.102}$$

Die Kräfte $\boldsymbol{f}_S$ sind die Kräfte rechts in Bild 3.24. Mit (3.95) folgt weiter

$$\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}_B = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f}_B \tag{3.103}$$

und somit lautet die **Transformationsmatrix**

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 3/8 & 0 & 1/8 \\ 1/2\,a & 0 & 0 & 0 & -1/2\,a & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.104}$$

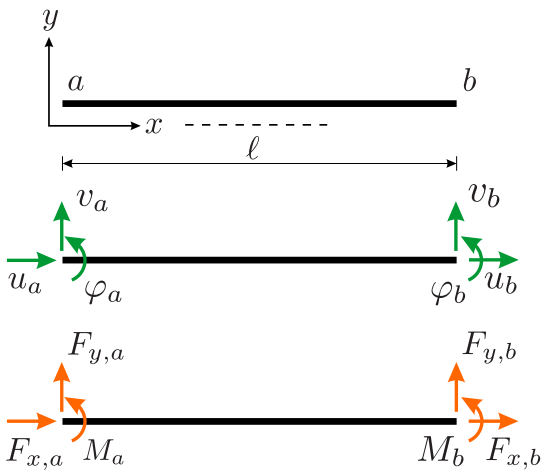


Bild 3.25. Stabelement

Die Weg- und Kraftgrößen am Stabende

$$\boldsymbol{f}_B = \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_B = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \varphi_B \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_S = \begin{bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_S = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

transformieren sich also wie

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}_{(3\times 6)}\,\boldsymbol{u}_S \qquad \boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)}\,\boldsymbol{f}_B\,. \tag{3.106}$$

Am Stab, siehe Bild 3.25, lauten die Beziehungen zwischen den Weg- und Kraftgrößen

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,a_1/\ell^2 & 6\,a_1/\ell & 0 & -12\,a_1/\ell^2 & 6\,a_1/\ell \\ 0 & 6\,a_1/\ell & 4\,a_1 & 0 & -6\,a_1/\ell & 2\,a_1 \\ -a_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\,a_1/\ell^2 & -6\,a_1/\ell & 0 & 12\,a_1/\ell^2 & -6\,a_1/\ell \\ 0 & 6\,a_1/\ell & 2\,a_1 & 0 & -6\,a_1/\ell & 4\,a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ v_b \\ \varphi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x,a} \\ F_{y,a} \\ M_a \\ F_{x,b} \\ F_{y,b} \\ M_b \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

mit

$$a_0 = \frac{EA}{\ell}\,, \quad a_1 = \frac{EI}{\ell}\,, \quad \ell = \text{Länge des Stabes.} \tag{3.108}$$

Das Balkenelement besitzt die Knoten a und b. Entsprechend wird die obige Steifigkeitsmatrix des Balkens nun in Untermatrizen, die sich auf die Knoten a und b beziehen, unterteilt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_a \\ \boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_b \end{bmatrix} . \tag{3.109}$$

Beim Anschluss des Knoten a an zwei Scheibenelemente wie in Bild 3.24 lauten die Weg- und Kraftgrößen im Knoten a in der Notation der EST

$$\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{u}_B = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \varphi_B \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{f}_B = \begin{bmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \\ M_B \end{bmatrix} . \tag{3.110}$$

Wenn die Verschiebungen in den finiten Elementen linear verlaufen, transformieren sich die Größen, s.o., gemäß

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}_{(3\times 6)}\, \boldsymbol{u}_S \tag{3.111}$$

mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ wie in (3.104). Setzen wir nun $\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_S$ in (3.109) ein, multiplizieren dann die erste Zeile von links mit $\boldsymbol{A}^T$, so ergibt sich mit

$$\boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)}\, \boldsymbol{f}_a = \boldsymbol{A}^T_{(6\times 3)}\, \boldsymbol{f}_B = \boldsymbol{f}_S \tag{3.112}$$

das Resultat

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{aa} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_S \\ \boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_S \\ \boldsymbol{f}_b \end{bmatrix} . \tag{3.113}$$

Das ist eine 9×9 Matrix, 6 *dofs* $\boldsymbol{u}_S$ an der Scheibe und 3 *dofs* $\boldsymbol{u}_b$ am Balken, und die $\boldsymbol{f}_S$ sind die sechs Knotenkräfte an der Scheibe[14].

Die Steifigkeitsmatrix (3.113) ist nun im Knoten a auf die Freiheitsgrade des Scheibenmodells und im Knoten b auf die Freiheitsgrade des Stabes bezogen. Knoten b kann, falls er ebenfalls an ein Scheibenmodell angeschlossen ist, ebenfalls transformiert werden.

Zum Verständnis sei gesagt, dass der statische Pfad hier nur zur Herleitung der Matrix (3.113) benutzt wird. Der Zusammenbau aller Elementmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix erfolgt dann wie sonst auch.

Bemerkung 3.4. Der geometrische Pfad und der statische Pfad beruhen auf unterschiedlichen Annahmen, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Beim geometrischen Pfad werden die Verschiebungsverläufe vorgegeben, und die Spannungen der Scheibenelemente passen sich diesen Vorgaben an. Beim statischen Pfad werden dagegen die Spannungsverläufe vorgegeben und die Verschiebungen (hier die Punkte 1, 2 und 3) können sich anpassen und weichen dann aber von der linearen Verteilung des geometrischen Pfads ab.

Beim geometrischen Pfad ist die Verbindung zu steif, beim statischen Pfad ist sie zu weich. Der geometrische Pfad bedeutet jedoch – insbesondere bei der Verbindung von Stützen mit Platten wie bei einer Flachdecke – einen starren

[14] *dofs* = *degrees of freedom*, Freiheitsgrade

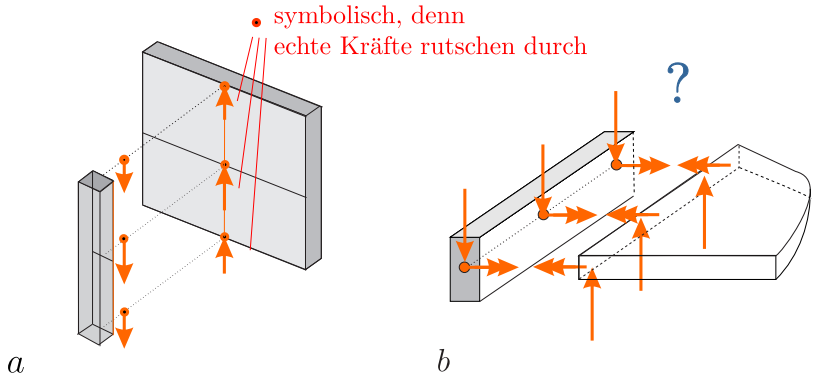


Bild 3.26. Kopplung zwischen **a)** Stab und Scheibe, **b)** Balken und Platte, [96]

Einschluss im FE-Modell. Die FEM kommt jedoch mit starren Einflüssen nicht gut klar, d.h. es ergeben sich im Verbindungsbereich Spannungssingularitäten und damit stark fehlerhafte Elementspannungen. Dies ist beim statischen Pfad nicht der Fall und daher sollte man dem statischen Pfad den Vorzug geben. Für weitere Details verweisen wir auf [219].

3.16 Die Koppelfuge

Die *insider* wissen es, aber wir wollen es hier trotzdem ansprechen: Die Kopplung zwischen unterschiedlichen Bauteilen ist keine ‚Klebeverbindung', bedeutet nicht notwendig gleiche Verformungen und gleiche Schnittkräfte, sondern es ist eine energetische Kopplung. Bei einer Verrückung $\delta u = \varphi_i$ eines Knotens in der Koppelfuge gilt $\delta W_i = \delta W_e$ (über alle beteiligten Bauteile hinweg), aber daraus folgt nicht, dass die Schnittkräfte in der Koppelfuge punktweise gleich sind und selbst die Verformungen gegenüberliegender Schnittufer müssen nicht punktweise gleich sein; das gilt nur für die Knoten, aber nicht notwendig für die Punkte dazwischen.

Angenommen man schweißt einen Steg (quadratische Stabelemente) auf ein Blech (bilineare Scheibenelemente), Bild 3.26 a. Die finiten Elemente rechnen das, aber die Längsverschiebung der Stabelemente stimmt i.a. nur in den Knoten mit der Bewegung der Scheibe überein.

Aber auch auf die Idee, dass doch wenigstens die Knotenkräfte übertragbar sein müssen, ist kein Verlass, weil eine Scheibe Einzelkräfte nicht festhalten kann. Knotenkräfte bei einer Scheibe sind statisch eine ‚Fiktion'. Die f_i sind keine Kräfte, sondern Energiequanta.

In Bild 3.26 b wird ein Balken an eine schubstarre Platte (Kirchhoff) angekoppelt, aber die Knotenmomente des Balkens lassen sich nicht auf die

Plattenseite übertragen, weil die Platte Einzelmomenten keinen Widerstand entgegensetzt (ein unendlicher Drehwurm, $\varphi = \infty$, wäre die Folge).

Würden wir die Platte schubweich rechnen, dann könnten wir noch nicht einmal die Knotenkräfte übertragen, weil Einzelkräfte bei einer schubweichen Platte, wie bei einer Scheibe, einfach ‚durchrutschen' – null Widerstand.

Oder man denke an den Brückenbau, stelle sich einen massiven Randträger vor, der auf Bohrpfählen liegt und in den die Brückenplatte einbindet. Im naiven Sinn passt hier nichts zusammen, weil die 3-D Elemente des Randträgers die Brückenplatte durchdringen, sie verformen sich anders als der Rand der Platte, und die Knotenkräfte der Bohrpfähle schießen ‚pfeilscharf' durch den (aus ihrer Sicht) butterweichen Beton des Randträgers.

Auch wenn wir uns wiederholen: Die Gleichung $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ formuliert nicht das Gleichgewicht der Knotenkräfte in der Koppelfuge, sondern die Gleichung bedeutet, dass bei der Auslenkung der Knoten die virtuelle innere und äußere Energie der beteiligten Elemente, gleich ist, $\delta W_i = \delta W_e$. Die Bauteile tauschen sich also nur über $\delta W_i = \delta W_e$, das **‚schwache Gleichheitszeichen'**, aus und über die synchron geschalteten Knotenverschiebungen.

Eigentlich müsste jetzt an dieser Stelle ein langes Kapitel über das Modellieren mit finiten Elementen folgen, nur gibt es dazu schon einen Text, [96], und inzwischen ist es auch so, dass die Kollegen aus dem Massivbau und Stahlbau selbst erkannt haben, dass das Thema ihrer Aufmerksamkeit wert ist, [79], [118], [181]. Weitere Bücher werden sicherlich folgen.

Wir wollten hier nur auf die Problematik hinweisen, daran erinnern, dass das Knotenkraftsmodell ein Schönwettermodell ist, das über weite Strecken bequem und einfach zu handhaben ist und vieles vereinfachen kann, aber eben, – von 1-D Problemen, EA und EI konstant, abgesehen – doch nur ein Modell als ob ist. Wenn man tiefer in die Materie einsteigen will oder muss, wie im Brückenbau, dann muss man die Knotenkräfte für das nehmen, was sie sind: *Energy quanta*, denn schließlich sind die finiten Elemente ja eine Energiemethode.

3.17 Einflussfunktionen

Wir kommen nun zu den Einflussfunktionen, einem zentralen Thema in der modernen Statik, denn wie wir in Kapitel 3.2 erklärt haben, hängt die Genauigkeit einer FE-Berechnung davon ab, wie gut sich die Einflussfunktionen auf einem Netz darstellen lassen. Mit der probeweisen Berechnung von Einflussfunktionen hat man also eine optische Kontrolle über die Güte eines Netzes.

Unabhängig davon sind Einflussfunktionen aber auch der Schlüssel zum Verständnis eines Tragwerks, denn sie repräsentieren die Sensitivität der Struktur. Und glückliche Fügung:

Die eigentliche Stärke des Computers ist die Visualisierung

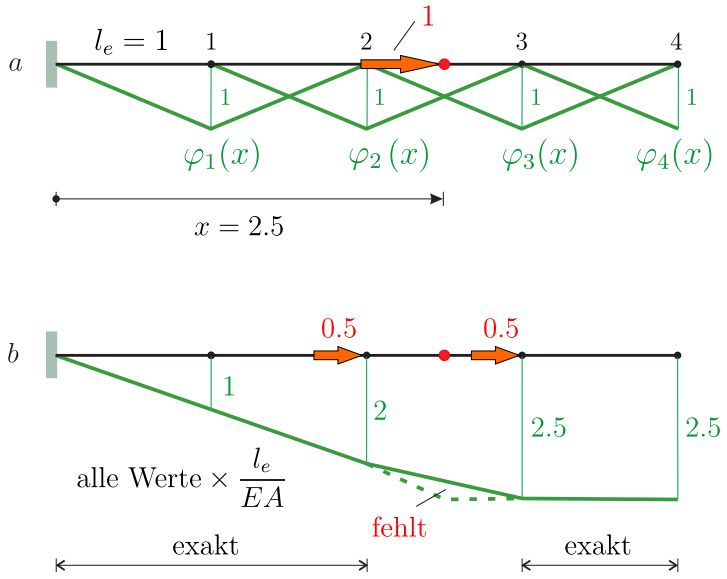


Bild 3.27. Berechnung der Einflussfunktion für eine Verschiebung $u(x)$, **a)** Dachfunktionen und Originalbelastung, **b)** Ersatzkräfte und daraus resultierende FE-Einflussfunktion

Natürlich, ohne Numerik geht es nicht, aber es ist doch erst die grafische Darstellung der Ergebnisse, das Bild der verschobenen Struktur, die *plots* der Schnittkräfte und der Hauptspannungen, die das Tragverhalten anschaulich machen. Es dürfte wohl keine Disziplin geben, die so stark am Bild hängt und vom Bild geprägt ist – die so in der Anschauung lebt – wie die Statik[15].

Und wir sagen es noch einmal: Statik ist Kinematik, ist Leben, und so regt die Bewegung, die in den Einflussfunktionen steckt, uns zum Mitdenken an, zum Nachspielen des Tragverhaltens bis wir sicher sind: ‚Ja, so muss es sein'.

Und nun die finiten Elemente: Einflussfunktionen lassen sich mit einem Computer doch ganz leicht berechnen. Das Programm löst einfach das System

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}\,, \tag{3.114}$$

was dasselbe System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ wie immer ist, nur dass wir die u_i jetzt g_i nennen und statt f_i schreiben wir j_i. Dieser Namenswechsel erleichtert das Operieren mit FE-Einflussfunktionen.

3.17.1 Rezept

Für ‚eilige' Leser hier kurz der Rechengang: Um die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in der Mitte eines Riegels zu berechnen, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$, belastet man die Knoten mit den Momenten der *shape functions* im Aufpunkt x

[15] Der erste Autor wollte einmal Grafiker werden.

$$j_i = M(\varphi_i)(x)\,. \tag{3.115}$$

Bei anderen Einflussfunktionen sind es die Verschiebungen, die Querkräfte, etc. der *shape functions*. Mit dem Vektor $\boldsymbol{g}$ kann man dann die Einflussfunktion zeichnen. Im Element mit dem Aufpunkt muss man (bei Stabtragwerken – sonst nicht) nur noch die lokale Einflussfunktion dazu addieren.

3.17.2 Beispiel

Unser erstes Probestück ist die Berechnung der Einflussfunktion für die Längsverschiebung $u(x)$ des Stabes in Bild 3.27 im Punkt $x = 2.5$. Die äquivalenten Knotenkräfte sind in diesem Fall die Verschiebungen der Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ in dem Punkt $x = 2.5$ (genau genommen $1\,\mathrm{N} \cdot \varphi_i(2.5)$)

$$\varphi_1(2.5) = 0 \qquad \varphi_2(2.5) = 0.5 \qquad \varphi_3(2.5) = 0.5 \qquad \varphi_4(2.5) = 0\,, \tag{3.116}$$

was auf das Gleichungssystem

$$\frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

für die Knotenverschiebungen g_i führt. Dieses System hat die Lösung

$$g_1 = 1 \qquad g_2 = 2 \qquad g_3 = 2.5 \qquad g_4 = 2.5 \qquad \times \frac{l_e}{EA}\,, \tag{3.118}$$

und somit hat die Einflussfunktion die Gestalt

$$G_0^h(y, x = 2.5) = \frac{l_e}{EA}\left[1 \cdot \varphi_1(y) + 2 \cdot \varphi_2(y) + 2.5 \cdot \varphi_3(y) + 2.5 \cdot \varphi_4(y)\right]. \tag{3.119}$$

Da x den Aufpunkt bezeichnet, benutzen wir als Lauf- oder Summationsvariable den Buchstaben y.

Die FE-Einflussfunktion ist, bis auf das Element, in dem der Aufpunkt x liegt, exakt. Den Fehler in dem Element beheben die FE-Programme dadurch, dass sie zur FE-Lösung die lokale Einflussfunktion addieren

$$G_0(y, x) = G_0^h(y, x) + \text{lokale Einflussfunktion}\,. \tag{3.120}$$

So gelingt es den FE-Programmen **exakte Einflussfunktionen** für Stabtragwerke zu generieren – vorausgesetzt EA und EI sind konstant.

3.17.3 Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i

Warum sind bei dem obigen Beispiel die äquivalenten Knotenkräfte j_i (= f_i) die Werte der Ansatzfunktionen im Aufpunkt, $j_i = \varphi_i(2.5)$? Der Schlüssel hierzu liegt in der Definition der äquivalenten Knotenkräfte f_i.

Eine Knotenkraft f_i ist eine Arbeit, ein **Energie-Quantum**, und zwar die Arbeit, die die Belastung $p(x)$ auf den Wegen der Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ leistet

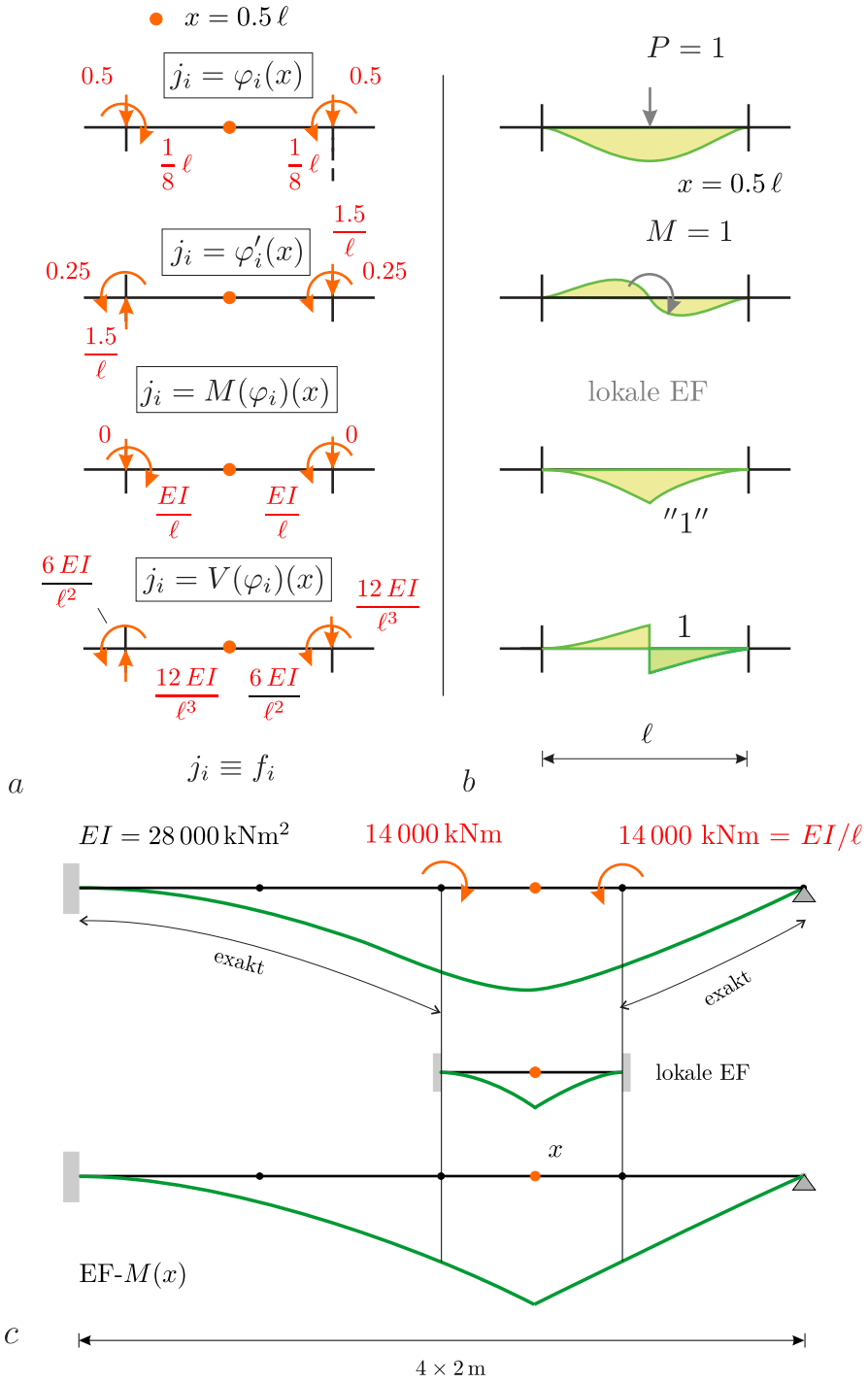


Bild 3.28. a) Die äquivalenten Knotenkräfte j_i zur Erzeugung der vier Einflussfunktionen für die Werte $w(x), w'(x), M(x), V(x)$ in der Mitte eines Balkenelements. Die j_i sind die Ziel-Werte der Ansatzfunktionen im Aufpunkt $x = 0.5\,\ell$. **b)** Wenn zu den FE-EF noch die lokalen EF rechts addiert werden, wie in Bild **c)** sind die EF auch im Element mit dem Aufpunkt exakt – sonst nur außerhalb von dem Element. Die j_i findet man in (3.152) und (3.153).

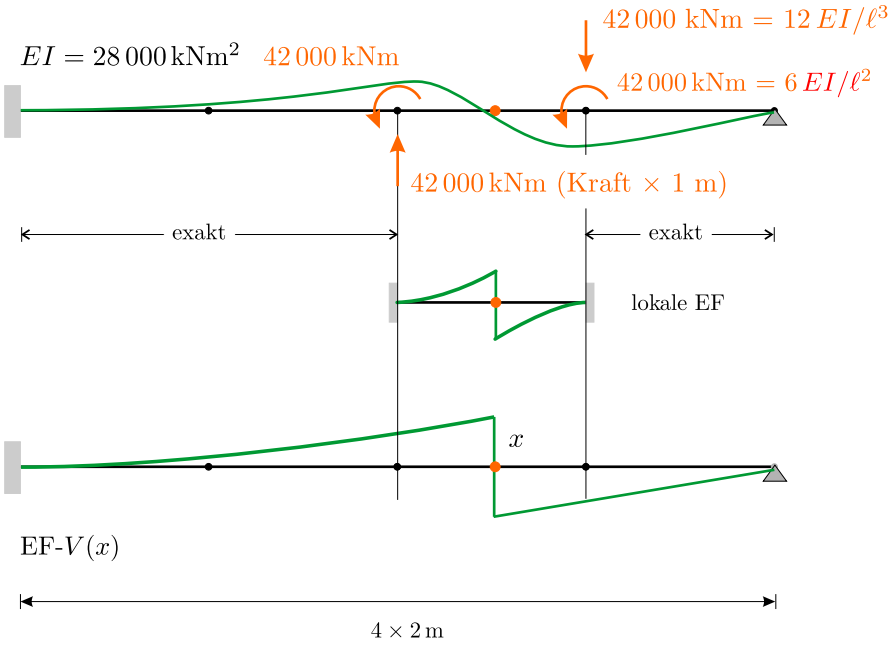


Bild 3.29. Einflussfunktion für die Querkraft $V(x)$ an demselben Träger. Wenn die Elementlänge ℓ gegen null geht, wird aus den $j_i \to \infty$ das Dirac Delta $\delta_3(y,x)$. Es ist 42 000 kNm $= (\delta_3, \varphi_1^e) = V(\varphi_1^e)(x = 0.5\ell) \times 1$ m Versatz, analog (δ_3, φ_3^e)

$$f_i = \int_0^l p(x)\,\varphi_i(x)\,dx\,. \tag{3.121}$$

Bei Einflussfunktionen steht auf der rechten Seite der Differentialgleichung aber ein Dirac Delta (eine in einem Punkt konzentrierte Linienlast)

$$-EA\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y,x) = \delta_0(y-x) \qquad \leftarrow\ [\mathrm{N/m}]\,, \tag{3.122}$$

die einer Einzelkraft im Aufpunkt $x = 2.5$ gleichwertig ist. Sie ist sozusagen das p, das zur Einflussfunktion gehört. (Wir differenzieren auf der linken Seite nach y, denn das ist hier die Laufvariable). Jetzt rechnen wir und finden, dass die äquivalenten Knotenkräfte ($[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$)

$$j_i = \int_0^l \underbrace{\delta_0(y-x)}_{[\mathrm{N/m}]}\,\underbrace{\varphi_i(y)}_{[\mathrm{m}]}\,\underbrace{dy}_{[\mathrm{m}]} = \varphi_i(x) \qquad x = 2.5 \tag{3.123}$$

zahlenmäßig einfach die Werte der vier Ansatzfunktionen φ_i im Aufpunkt $x = 2.5$ sind, so kommt die Liste (3.116) zustande, siehe auch die Bilder 3.28 und 3.29.

Bemerkung 3.5. Eigentlich muss man, siehe (3.132), die j_i in Bild 3.28 a noch mit der jeweiligen konjugierten Größe multiplizieren

$$j_i = \varphi_i(x) \cdot 1 \quad \text{Kraft} \qquad j_i = \varphi_i'(x) \cdot 1 \quad \text{Moment} \tag{3.124}$$

$$j_i = M(\varphi_i)(x) \cdot \tan(45°) \quad \text{Verdrehung} \qquad j_i = V(\varphi_i) \cdot 1 \quad \text{Versatz} \tag{3.125}$$

aber numerisch ändert sich dadurch natürlich nichts. Der Computer kennt nur Zahlen.

3.18 Funktionale

Um nun doch etwas systematischer vorzugehen, wollen wir den Begriff des Funktionals einführen. Ein Funktional ist eine *Funktion von Funktionen*. Mit den Funktionen sind im allgemeinen die Biegelinien, die Verformungen des Tragwerks gemeint.

So sind die Querkraft, die Durchbiegung, das Moment, etc., in einem Punkt x eines Trägers Funktionale[16], **Punktfunktionale**,

$$J(w) = V(x) \qquad J(w) = w(x) \qquad J(w) = M(x)\,, \tag{3.126}$$

und in der linearen Statik sind die Funktionale linear,

$$J(w_1 + w_2) = J(w_1) + J(w_2)\,. \tag{3.127}$$

Lineare Statik bedeutet lineare Funktionale.

Wichtig für das folgende ist nun, dass man in der linearen Statik die Auswertung von Funktionalen auf **Skalarprodukte** zurückführen kann. Es sei z.B. $J_i(\boldsymbol{u}) = u_i$ die i-te Komponente u_i eines Vektors $\boldsymbol{u}$, etwa des Verschiebungsvektors eines Fachwerks. Wegen

$$J_i(\boldsymbol{u}) = u_i = \boldsymbol{e}_i^T\, \boldsymbol{u} \tag{3.128}$$

entspricht das Ergebnis dem Skalarprodukt zwischen dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$, **dem diskreten Dirac Delta**, und dem Vektor $\boldsymbol{u}$, oder – statisch gesprochen – der Arbeit, die der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$ auf dem Weg $\boldsymbol{u}$ leistet.

Genauso kann man das Funktional $J(w) = w(x)$, die Durchbiegung eines Trägers in einem Punkt x, als die Überlagerung von w mit einem Dirac Delta $\delta(y - x)$ (= Punktlast)

$$J(w) = 1 \cdot w(x) = \int_0^l \delta(y - x)\, w(y)\, dy \qquad [\mathrm{N\,m}]\,, \tag{3.129}$$

[16] Wir benutzen J als generische Bezeichnung für Funktionale

lesen. Das Dirac Delta spielt hier dieselbe Rolle, wie der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_i$.

In der Statik wird daher die Auswertung eines linearen Funktionals auf ein **Arbeitsintegral**, ein L_2-Skalarprodukt zurückgeführt. Jedes Funktional $J(w)$ ist für uns das Ergebnis der Überlagerung eines bestimmten Dirac Deltas (einer statischen oder geometrischen Punktgröße, wie z.B. einer Kraft oder Versetzung) mit der Biegelinie w

$$J(w) = \int_0^l \delta(y-x)\, w(y)\, dy\,. \tag{3.130}$$

Wie wir gleich sehen werden, müssen wir gar nicht wissen, wie diese verschiedenen Dirac Deltas aussehen. Wir müssen nur wissen, was das Ergebnis $J(w)$ sein soll. Und weil wir jedes Funktional als Arbeitsintegral lesen, hat jedes so dargestellte Funktional im Ergebnis die **Dimension einer Arbeit**

$$J(w) = 1 \cdot \text{‚irgendetwas‘} \qquad [\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}] \tag{3.131}$$

wobei die 1 immer eine solche Dimension hat, dass $1 \cdot$ ‚irgendetwas‘ die Dimension einer Arbeit hat, die 1 also konjugiert zu ihrem Begleiter ist. So lesen wir die Funktionale in (3.126) wie folgt

$$J(w) = V(x)\cdot 1 \;= \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \qquad 1 = \text{Versetzung} \tag{3.132a}$$
$$J(w) = w(x)\cdot 1 \;= \mathrm{m}\cdot\mathrm{N} \qquad 1 = \text{Kraft} \tag{3.132b}$$
$$J(w) = M(x)\cdot 1 = \mathrm{N}\,\mathrm{m}\cdot[\ ] \quad 1 = \text{Knick}\ . \tag{3.132c}$$

Der Knick ist ein Sprung in der Ableitung w', im Tangens, der ja als Quotient zweier Längen, dw/dx, keine Dimension hat. Im Folgenden schreiben wir die 1 meist nicht mit an, aber wir denken sie dann immer mit.

Die Einführung der Dirac Deltas hat den Vorteil, dass wir die zugehörige Einflussfunktion als die Lösung der Balkengleichung (wir bleiben der Einfachheit halber beim Balken) mit dem Dirac Delta auf der rechten Seite interpretieren können

$$EI\,\frac{d^4}{dy^4}\,G(y,x) = \delta(y-x)\,. \tag{3.133}$$

(Weil wir den Aufpunkt mit x bezeichnen, ist y die eigentliche Laufvariable und deswegen stehen links Ableitungen nach y).

Die äquivalenten Knotenkräfte, die die Einflussfunktion generieren, sind dann einfach die Zahlen (wir nennen die f_i hier j_i)

$$j_i = \int_0^l \delta(y-x)\,\varphi_i(y)\,dy = J(\varphi_i)\,, \tag{3.134}$$

also die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen. Einfacher geht es eigentlich nicht mehr. Das bedeutet also:

(1) Die Knotenkräfte j_i, die die Einflussfunktion für die Durchbiegung eines Balkens in einem Punkt x erzeugen, sind die Durchbiegungen der Ansatzfunktionen φ_i in diesem Punkt

$$j_i = \varphi_i(x)\,. \tag{3.135}$$

(2) Die Knotenkräfte j_i, die die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Punkt x eines Balkens erzeugen,

$$j_i = -EI\,\varphi_i''(x) = M(\varphi_i)(x)\,, \tag{3.136}$$

sind die Momente der Ansatzfunktionen in diesem Punkt x – etc.

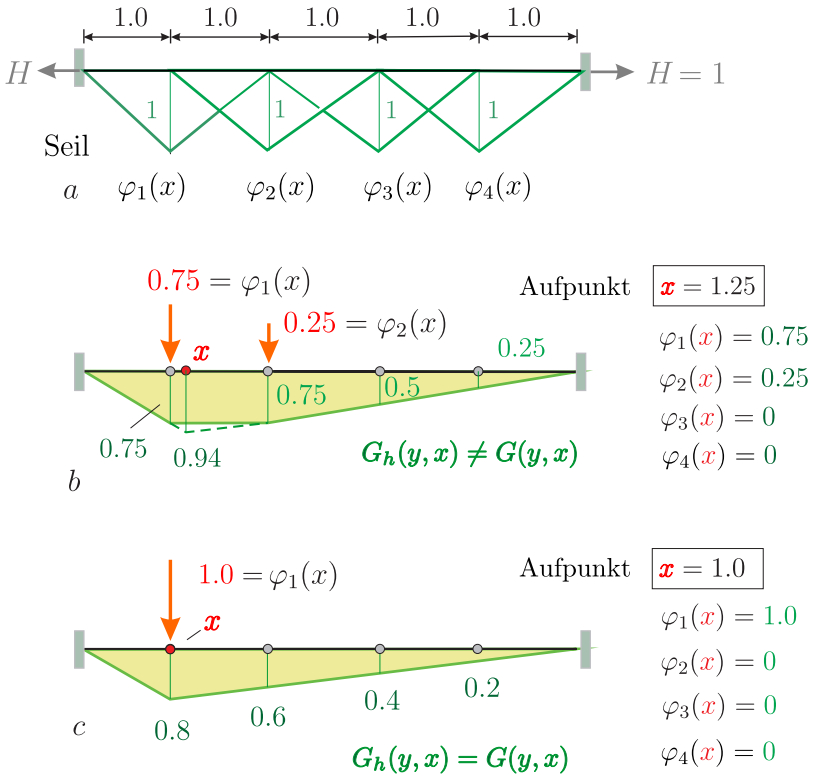


Bild 3.30. FE-Modell eines Seils, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** FE-Einflussfunktion für w im Punkt $x = 1.25$ und exakter Wert (0.94), **c)** FE-Einflussfunktion für w im ersten Knoten, die Funktion ist exakt, $G_h(y, x) = G(y, x)$

Formulieren wir das als Regel:

Theorem 3.1 (Knotenkräfte für Einflussfunktionen). *Die Einflussfunktion für ein lineares Funktional $J(u)$ wird durch die Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)$*

erzeugt. Die Knotenkräfte sind also zahlenmäßig einfach die Werte $J(\varphi_i)$ der Ansatzfunktionen.

Die Knotenwerte der Einflussfunktionen nennen wir g_i und die äquivalenten Knotenkräfte j_i, so dass das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ jetzt also

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j} \tag{3.137}$$

heißt. Die Bedeutung der $g_i \equiv u_i$ und $j_i \equiv f_i$ ändert diese Umbenennung natürlich nicht.

3.19 Generalisierte Einflussfunktionen

Jetzt werden wir kühn. Nachdem wir wissen, wie man Einflussfunktionen mit finiten Elementen berechnet, können wir das Wissen auf *beliebige* lineare Funktionale anwenden, also den Satz von Land, der nur Einflussfunktionen für $w(x), M(x)$ etc. kennt, hinter uns lassen.

Das Funktional muss nur linear sein. Mehr wird nicht verlangt. Die Einflussfunktionen, die zu diesen Funktionalen gehören, nennen wir ***generalisierte Einflussfunktionen***. Generalisiert zielt darauf ab, dass der Bereich der klassischen Einflussfunktionen überschritten wird.

3.20 Schwache und starke Einflussfunktionen

In Kapitel 1.17 haben wir über den Unterschied zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen gesprochen und gezeigt, dass es keine schwachen Einflussfunktionen für Kraftgrößen gibt.

Es mag daher eine Überraschung sein, dass die finiten Elemente (scheinbar, siehe (9.209)) nicht zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen unterscheiden. Eine FE-Einflussfunktion ist die Lösung des Variationsproblems

$$G_h \in \mathcal{V}_h : \qquad a(G_h, \varphi_i) = J(\varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h \tag{3.138}$$

und diese Funktion G_h kann in beide Formulierungen eingesetzt werden

$$J(u_h) = \underbrace{\int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy}_{stark} = \underbrace{a(G_h, u_h)}_{schwach}, \tag{3.139}$$

weil auf $\mathcal{V}_h$ die beiden Formeln – stark und schwach – zusammenfallen

$$J(u_h) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = a(G_h, u_h)\,. \tag{3.140}$$

In Matrizenschreibweise besteht der Unterschied nur darin, wie man die Gleichungen liest

$$J(u_h) = \underbrace{\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}}_{stark} = \underbrace{\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}}_{schwach} . \tag{3.141}$$

In der schwachen Formulierung $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}$ summieren wir über alle Einträge

$$\sum_{i,j} g_i \cdot k_{ij} \cdot u_j = \sum_{i,j} g_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) \cdot u_j \,, \tag{3.142}$$

was einem Gebietsintegral (wie ‚Mohr') gleichkommt, während die starke Formulierung $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ im Gegensatz dazu die Knotenverschiebungen g_i mit den Knotenkräften f_i wichtet.

3.21 Beispiele

Beispiel 3.4. Um die Einflussfunktion für die Durchbiegung $w(x)$ des Seils in Bild 3.30 im Punkt $x = 1.25$ zu berechnen, $J(w) = w(1.25)$, werden die Durchbiegungen der φ_i im Punkt x als Knotenkräfte aufgebracht

$$j_1 = \varphi_1(x) = 0.75 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0.25 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0 \,. \tag{3.143}$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

für die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion hat die Lösung

$$g_1 = 0.75 \qquad g_2 = 0.75 \qquad g_3 = 0.5 \qquad g_4 = 0.25 \tag{3.145}$$

und so lautet die Einflussfunktion

$$G(y, x) = 0.75 \cdot \varphi_1(y) + 0.75 \cdot \varphi_2(y) + 0.5 \cdot \varphi_3(y) + 0.25 \cdot \varphi_4(y) \,. \tag{3.146}$$

Ginge es um die Einflussfunktion für die Durchbiegung im ersten Knoten, $x = 1.0$, hätten die Knotenkräfte die Werte

$$j_1 = \varphi_1(x) = 1.0 \quad j_2 = \varphi_2(x) = 0 \quad j_3 = \varphi_3(x) = 0 \quad j_4 = \varphi_4(x) = 0 \,, \tag{3.147}$$

und dann wäre die FE-Einflussfunktion für $w(x)$ sogar exakt, weil die Zahlen

$$g_1 = 0.8 \qquad g_2 = 0.6 \qquad g_3 = 0.4 \qquad g_4 = 0.2 \tag{3.148}$$

genau die Knotenwerte der Einflussfunktion sind und sie dazwischen linear verläuft, siehe Bild 3.30 c.

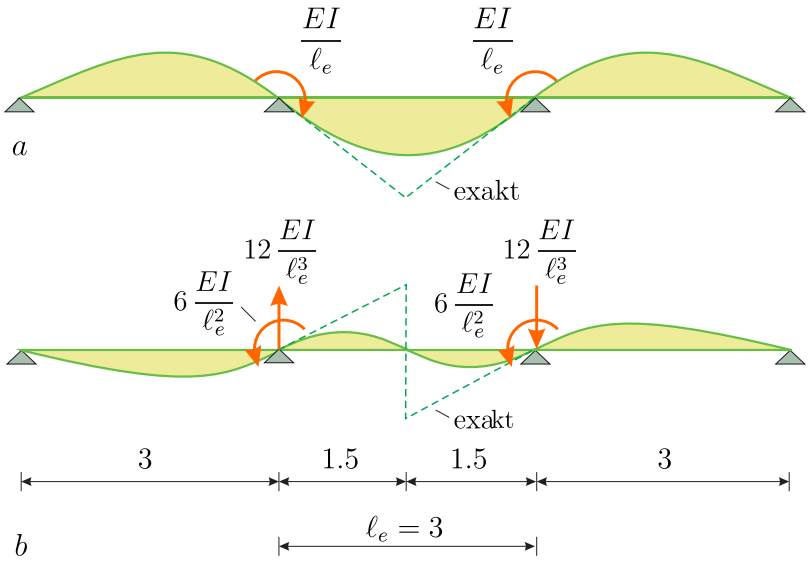


Bild 3.31. FE-Einflussfunktion für **a)** das Biegemoment M und **b)** die Querkraft V im Punkt $0.5\,\ell_e$. Die Knotenkräfte sind die $j_i = M(\varphi_i)$ bzw. $j_i = V(\varphi_i)$, s. (3.153). Hier sieht man auch: Je höher die Ableitung der Zielgröße, desto ungenauer ist die FE-Einflussfunktion — wichtig vor allem für Flächentragwerke

Bemerkung 3.6. Die g_i ändern sich mit der Lage x des Aufpunktes, sie sind also Funktionen von x, so dass eine FE-Einflussfunktion im allgemeinen in einer **separierten Form** vorliegt

$$G_h(y,x) = g_1(x)\cdot\varphi_1(y) + g_2(x)\cdot\varphi_2(y) + g_3(x)\cdot\varphi_3(y) + g_4(x)\cdot\varphi_4(y)\,. \quad (3.149)$$

Beispiel 3.5. Die Einflussfunktion für das Biegemoment $M = -EI\,w''$ des Durchlaufträgers in Bild 3.31 im Punkt $x = 4.5$ wird von den äquivalenten Knotenkräften (den Momenten der φ_i), siehe Bild 3.32,

$$j_i = -EI\,\varphi_i''(x)\cdot 1\ \ [\mathrm{N\cdot m}]\cdot[\ ] \qquad 1 = \mathrm{Knick}\,[\ ] \quad (3.150)$$

erzeugt und die Einflussfunktion für die Querkraft $V(x) = -EI\,w'''(x)$ von den Kräften (die j_i sind die Querkräfte der φ_i)

$$j_i = -EI\,\varphi_i'''(x)\cdot 1\ \ [\mathrm{N}]\cdot[\mathrm{m}] \qquad 1 = \mathrm{Versatz}\,[\mathrm{m}]\,, \quad (3.151)$$

wobei die φ_i [m] die Ansatzfunktionen (*shape functions*) sind, die auf einem einzelnen Element mit der Länge ℓ [ohne Dim.] die Gestalt

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} \qquad \varphi_2(x) = -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2} \quad (3.152a)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} \qquad \varphi_4(x) = \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2} \quad (3.152b)$$

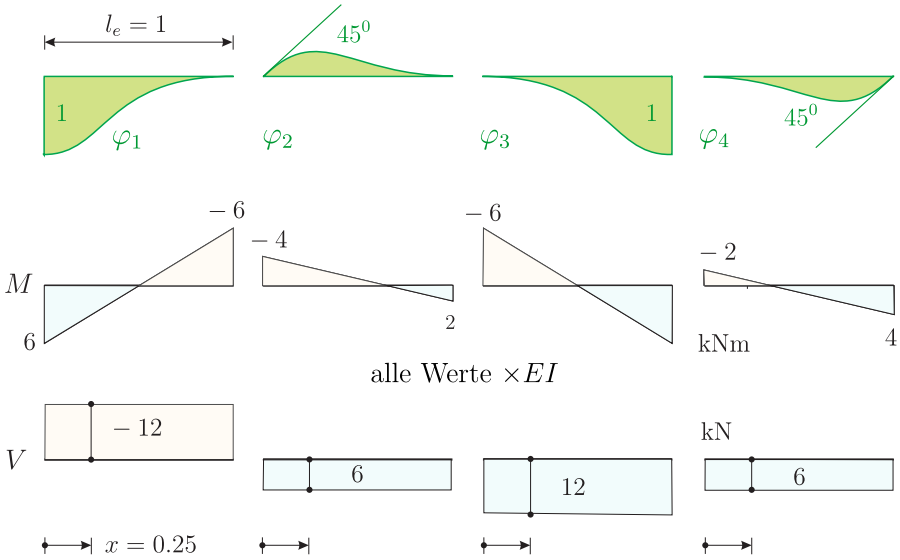


Bild 3.32. Balkenelement, **a)** die vier Ansatzfunktionen φ_i und **b)** die dazu gehörigen Biegemomente M und **c)** Querkräfte V, siehe (3.153)

haben. Ihre Schnittgrößen $M_i = -EI\,\varphi_i''$ und $V_i = -EI\,\varphi_i'''$ sind[17]

$$M_1(x) = (\frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3}) \cdot EI \qquad M_2(x) = (\frac{6x}{\ell^2} - \frac{4}{\ell}) \cdot EI \tag{3.153a}$$

$$M_3(x) = (\frac{12x}{\ell^3} - \frac{6}{\ell^2}) \cdot EI \qquad M_4(x) = (\frac{6x}{\ell^2} - \frac{2}{\ell}) \cdot EI \tag{3.153b}$$

$$V_1(x) = -\frac{12}{\ell^3} \cdot EI \qquad V_2(x) = \frac{6}{\ell^2} \cdot EI \tag{3.153c}$$

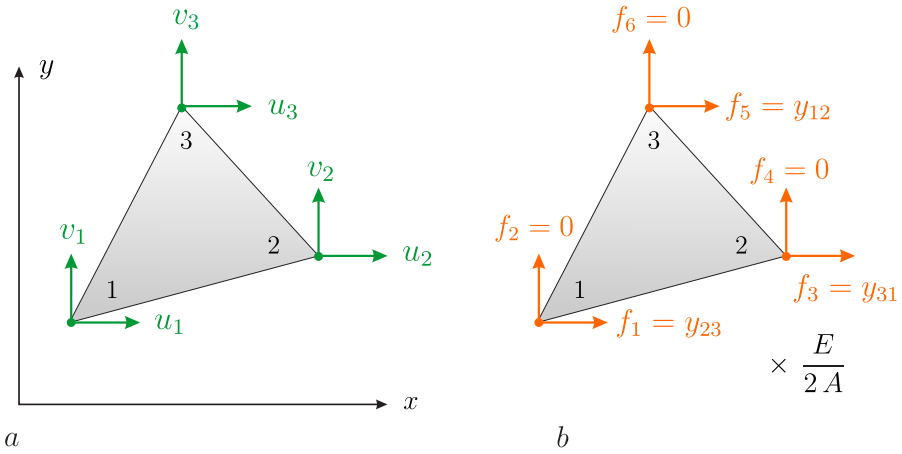
$$V_3(x) = \frac{12}{\ell^3} \cdot EI \qquad V_4(x) = \frac{6}{\ell^2} \cdot EI\,. \tag{3.153d}$$

Nur die Knoten des Elements, das den Aufpunkt x enthält, tragen Knotenkräfte j_i, weil die Ansatzfunktionen φ_i aller anderen Knoten, die weiter weg liegen, null Momente bzw. null Querkräfte im Aufpunkt x haben.

Die so erzeugten Einflussfunktionen haben **außerhalb** des Elementes, auf dem der Aufpunkt liegt, die richtige Gestalt. Das Ergebnis wird exakt, wenn wir – wie beim Drehwinkelverfahren – im Element zu der FE-Einflussfunktion die lokale Einflussfunktion addieren.

Beispiel 3.6. In einem **CST-Element** (*constant strain triangle*) wie in Bild 3.33 sind die Spannungen konstant

[17] φ_i [m], φ_i' [ ], φ_i'' [1/m], φ_i''' [1/m^2]



a *b*

Bild 3.33. CST-Element, **a)** Geometrie und Freiheitsgrade, **b)** diese Knotenkräfte erzeugen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx}. Sie ist konstant, wie es bei einem CST-Element (*constant strain element*) ja auch sein muss

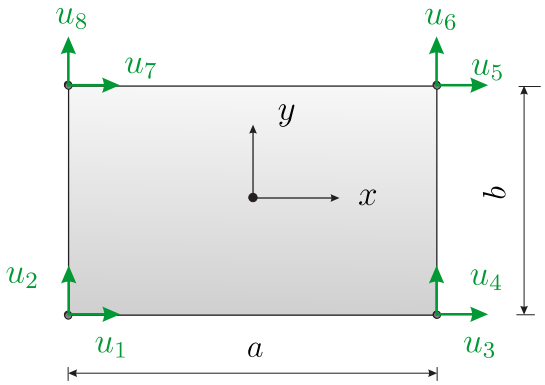


Bild 3.34. Bilineares Element

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{2\,A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} . \qquad (3.154)$$

Es bedeutet $x_{ij} = x_i - x_j$ und $y_{ij} = y_i - y_j$.

Um die Einflussfunktion für σ_{xx} zu erzeugen, lässt man in den Knoten des Elements, das den Aufpunkt enthält, die Spannungen σ_{xx} aus den Einheitsverformungen $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ der Knoten wirken, $j_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{x})$, also

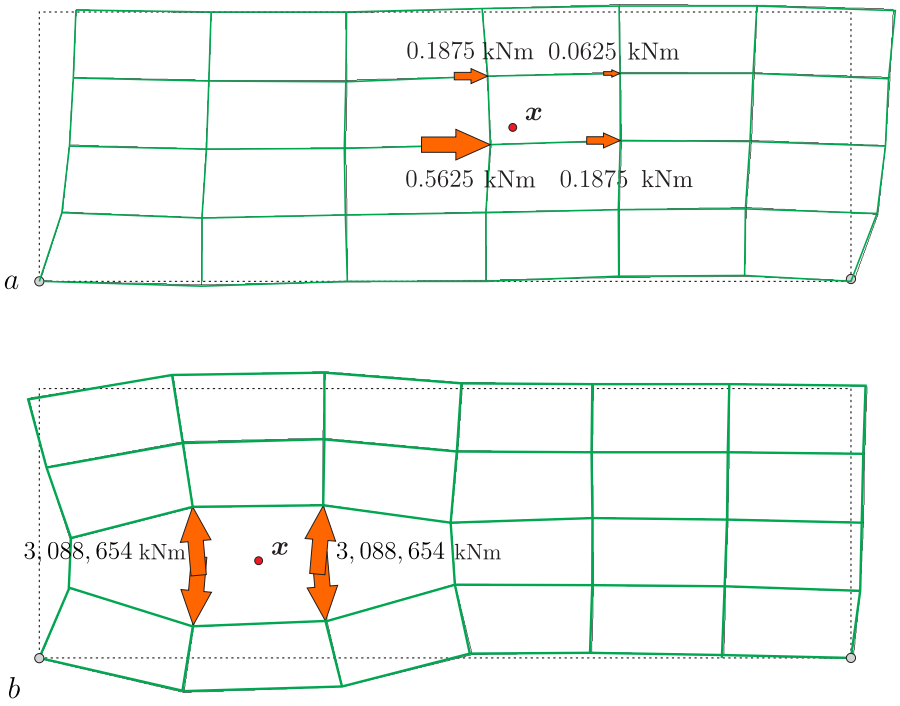


Bild 3.35. Bilineare Elemente, **a)** Einflussfunktion für $u_x(\boldsymbol{x})$ und **b)** für $\sigma_{yy}(\boldsymbol{x})$ (WINFEM)

$$j_1 = \frac{E}{2\,A}\,y_{23}\cdot 1 \quad j_3 = \frac{E}{2\,A}\,y_{31}\cdot 1 \quad j_5 = \frac{E}{2\,A}\,y_{12}\cdot 1 \quad j_2 = j_4 = j_6 = 0\,. \tag{3.155}$$

Man beachte, dass die Summe der j_i null ist

$$j_1 + j_3 + j_5 = \frac{E}{2\,A}(y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2) = 0\,. \tag{3.156}$$

Das ist bei allen Einflussfunktionen für Kraftgrößen so, weil man das Element durch gegengleiche Kräfte j_i spreizt.

Beispiel 3.7. Bei den nächsten beiden Beispielen rechnen wir mit bilinearen Scheibenelementen. Ein bilineares Element hat vier Knoten und $2\cdot 4$ Freiheitsgrade, siehe Bild 3.35. Zu jedem Freiheitsgrad (FG) gehört ein Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$, das den Knoten in horizontaler oder vertikaler Richtung auslenkt

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}\psi_1(\boldsymbol{x})\\ 0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}0\\ \psi_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_3(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}\psi_2(\boldsymbol{x})\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{etc.} \tag{3.157}$$

Die $\psi_i(\boldsymbol{x})$ sind die vier Ansatzfunktionen der vier Eckpunkte, siehe Bild 3.34,

$$\psi_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a-2x)(b-2y) \qquad \psi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a+2x)(b-2y) \tag{3.158}$$

$$\psi_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a+2x)(b+2y) \qquad \psi_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,a\,b}\,(a-2x)(b+2y)\,. \tag{3.159}$$

Wenn also ein Verschiebungsfeld einen Knoten in horizontaler Richtung drückt, dann sind alle vertikalen Verschiebungen null und umgekehrt. Solche Verschiebungsfelder machen es leicht, die Bewegungen der Knoten zu kontrollieren.

Einflussfunktion für u_x

Um die Einflussfunktion für die horizontale Verschiebung in dem Viertelspunkt eines Elementes mit der Länge $a = 2$ und Höhe $b = 1$ zu generieren, lässt man vier horizontale Kräfte in den vier Ecken des Elementes wirken. Diese Kräfte sind die Verschiebungen der vier horizontalen Verschiebungsfelder, Indices $1, 3, 5, 7$, im Aufpunkt $\boldsymbol{x} = (-0.5, -0.25)$ (Element-Koordinaten)

$$j_1 = 0.5625 \qquad j_3 = 0.1875 \qquad j_5 = 0.0625 \qquad j_7 = 0.1875\,, \tag{3.160}$$

und sie erzeugen die Verformung in Bild 3.35. (Die vier vertikalen Verschiebungsfelder haben natürlich null Horizontalverschiebungen im Aufpunkt und daher sind auch die j_i in vertikaler Richtung, j_2, j_4, j_6, j_8, alle null).

Einflussfunktion für σ_{yy}

Die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in dem Viertelspunkt entsteht, wenn man die Spannungen $\sigma_{yy}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ der 4×2 Verschiebungsfelder $\boldsymbol{\varphi}_i$ als Knotenkräfte j_i aufbringt.

In einem bilinearen Element mit der Länge a und Höhe b, wie in Bild 3.34, haben die Spannungen den Verlauf

$$\sigma_{xx}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,(u_1 - u_3) + a\,\nu\,(u_2 - u_8) + \\ + x\,\nu\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \Big] \tag{3.161}$$

$$\sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,\nu\,(u_1 - u_3) + a\,(u_2 - u_8) + \\ + x\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + y\,\nu\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \Big] \tag{3.162}$$

und

$$\sigma_{xy}(x,y) = \frac{-E}{2\,a\,b\,(1+\nu)} \cdot \Big[b\,(u_2 - u_4) + a\,(u_1 - u_7) + \\ + x\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + y\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \Big]\,. \tag{3.163}$$

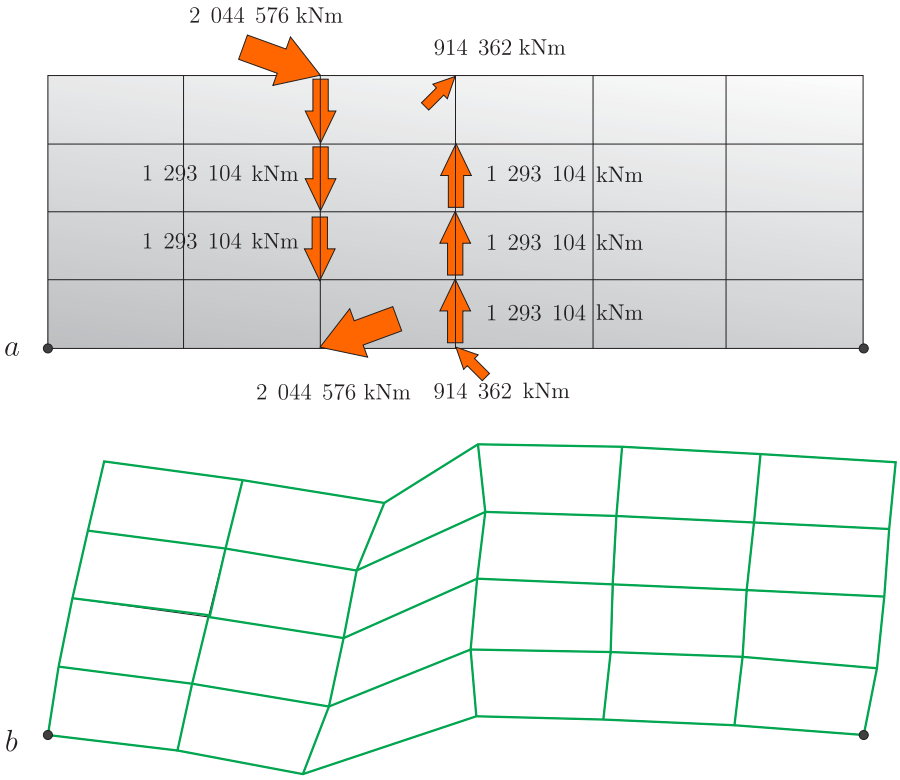


Bild 3.36. Einflussfunktion für das Integral von σ_{xy} in einem senkrechten Schnitt, **a)** äquivalente Knotenkräfte, **b)** Einflussfunktion, [92], (WINFEM)

Setzen wir $u_1 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$, so erhalten wir die Spannungen, die zu dem Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x})$ gehören. Also beträgt am ersten Knoten die äquivalente Knotenkraft j_1 in horizontaler Richtung ($u_1 = 1$)

$$j_1 = \sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[b\,\nu\,u_1 + y\,\nu\,(-u_1) \Big] = -3.07 \cdot 10^6\,\text{kNm} \quad (3.164)$$

und in vertikaler Richtung ($u_2 = 1$)

$$j_2 = \sigma_{yy}(x,y) = \frac{E}{a\,b\,(-1+\nu^2)} \cdot \Big[a\,(u_2) + x\,(-u_2) \Big] = -3.85 \cdot 10^7\,\text{kNm}\,. \quad (3.165)$$

Die anderen j_i ergeben sich nach demselben Muster. Das Ergebnis und die Knotenkräfte sind in Bild 3.35 b dargestellt.

Die j_i verhalten sich wie **‚inverse' Gummibänder** (je mehr gedehnt, desto kleiner die Kräfte), was ein Charakteristikum der Einflussfunktionen für Spannungen ist, also für den Differenzenquotient eines Verschiebungsfeldes.

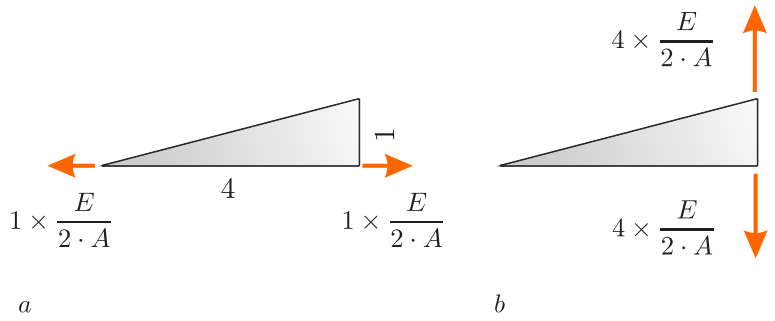


Bild 3.37. Generierung der Einflussfunktionen in einem CST-Element, **a)** für σ_{xx}, **b)** für σ_{yy}; weil die Spannungen überall gleich sind, gelten die Einflussfunktionen für jeden Punkt

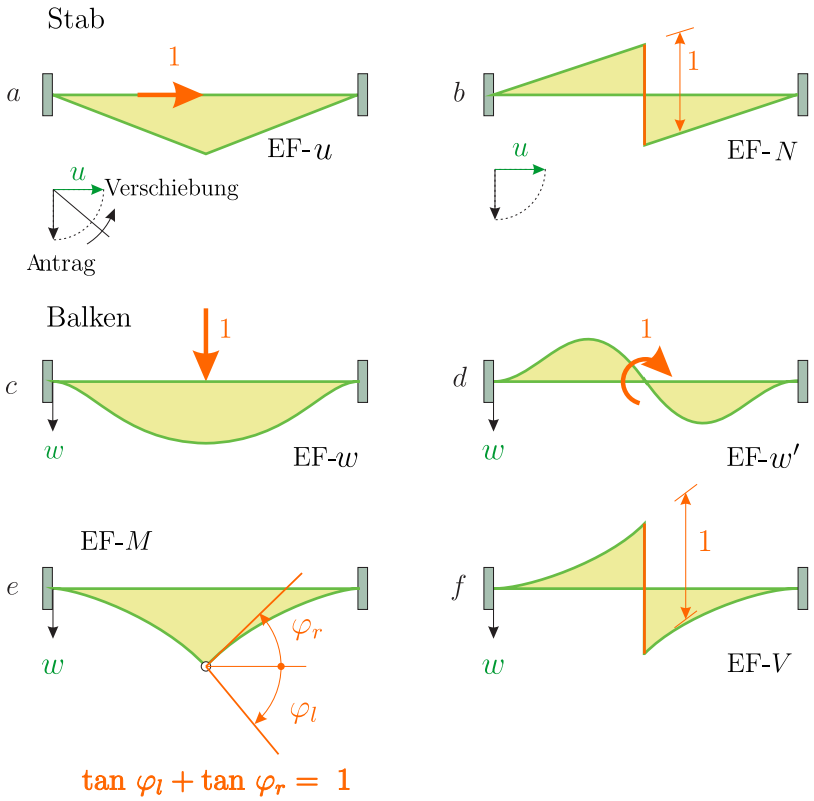


Bild 3.38. Lokale Einflussfunktionen am festgehaltenen Stab bzw. Balken

Man kann die j_i, die das Element spreizen, auch *‚geometrische Kräfte‘* nennen, weil ihre Größe vom Zuschnitt des Elements abhängt.

Bei einem langgezogenen Dreieck (CST-Element) mit dem Seitenverhältnis $l_x : l_y = 4 : 1$ braucht man z.Bsp. für die Spreizung in vertikaler Richtung das vierfache an Kraft gegenüber einer Spreizung in horizontaler Richtung, siehe Bild 3.37. Entsprechend unausgewogen sind auch die Elementbeiträge in der Steifigkeitsmatrix des Elements, weil da ja noch quadriert wird

$$\int_{\Omega_e} \varepsilon_{yy}^2 \, d\Omega : \int_{\Omega_e} \varepsilon_{xx}^2 \, d\Omega = 16 : 1 \,. \tag{3.166}$$

Bei der Berechnung einer Steifigkeitsmatrix wird zwar nichts gespreizt, sondern die Knoten werden um $u_i = 1$ ausgelenkt, aber das ist beim CST-Element dasselbe, weil die Spannungen konstant sind.

Einflussfunktion für N_{xy}

Nun soll die Einflussfunktion für das Integral der Schubspannungen

$$N_{xy} = \int_0^l \sigma_{xy} \, dy \tag{3.167}$$

in einem vertikalen Schnitt, der durch einen vorgegebenen Punkt $\boldsymbol{x} = (x, y)$ läuft, berechnet werden. Die äquivalenten Knotenkräfte sind jetzt Integrale, siehe Bild 3.36,

$$j_i = \int_0^l \sigma_{xy}(\boldsymbol{\varphi}_i) \, dy \,, \tag{3.168}$$

also die aufintegrierten Schubspannungen der Verschiebungsfelder, die zu den vier Ecken des Elementes gehören. In den vier Ecken jedes Elements, durch das der Schnitt führt, werden die folgenden äquivalenten Knotenkräfte aufgebracht

$$\begin{aligned} j_i^e = \int_0^b \sigma_{xy}(\boldsymbol{\varphi}_i) \, dy = \frac{-E}{2\,a\,(1+\nu)} \cdot \Big[& b\,(u_2 - u_4) + a\,(u_1 - u_7) + \\ & + x\,(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + \frac{b}{2}\,(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \Big] \,, \end{aligned} \tag{3.169}$$

mit x als der x-Koordinate des Schnittes.

Um j_1^e zu berechnen, setzen wir $u_1 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$. Für j_2^e setzen wir $u_2 = 1$ und alle anderen $u_i = 0$, etc. Der Index e an j_i^e soll darauf hinweisen, dass dies Elementbeiträge sind. Die resultierende Knotenkraft ergibt sich durch die Summation über alle an den Knoten angeschlossenen Elemente.

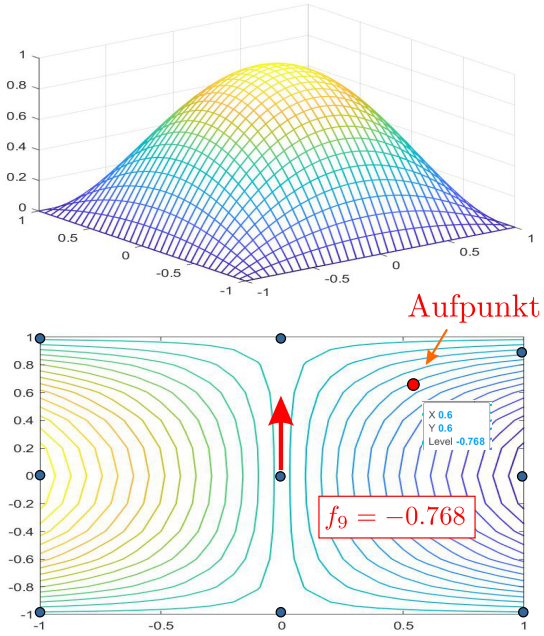


Bild 3.39. 9-Knoten Element. Zentrale *bubble function* φ_9 und ihre erste Ableitung in x-Richtung; f_9 ist natürlich senkrecht nach oben gerichtet (MATLAB)

Einflussfunktion für $u_{,x}$

Eine Membran wird mit *Nine-Node Biquadratic Quadrilaterals* berechnet. Um die Einflussfunktion für die erste Ableitung $u_{,x}$ zu berechnen, sind die Knoten mit den ersten Ableitungen $\varphi_{i,x}$ der *shape functions* im Aufpunkt zu belasten. Relativ zu dem Element in Bild 3.39 liegt der Aufpunkt an der Stelle $\boldsymbol{x} = (0.6, 0.6)$ und dort beträgt die Ableitung der zentralen *bubble function* $\varphi_{9,x} = -0.768$, was die Knotenkraft $f_9 = -0.768$ ergibt.

3.22 Die shape functions und ihre Spannungen

In linearen Elementen sind die Spannungen und die Normalkräfte konstant und in kubischen Elementen die Querkräfte. Daher muss die FE-Einflussfunktion der Querkraft in allen Punkten x eines Elements dieselbe sein. Das passt, denn die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = -EI\,\varphi_i'''(x)$, die die EF erzeugen, sind konstant. Aus dem Sprung, den die konformen *shape functions* nicht nachvollziehen können, werden zwei antimetrische Halbwellen, siehe Bild 3.31. Sinngemäß gilt dasselbe für die Normalkräfte und ihre Einflussfunktionen, $j_i = EA\,\varphi_i'(x)$, siehe Bild 3.63 d, und das $V(x)$ in einem Seil.

Aber was in der Mitte des Elementes noch richtig sein kann, (wenn die Belastung p konstant ist), ist es bestimmt nicht mehr zu den Enden hin und daher ist klar, dass die Genauigkeit der Schnittkräfte zu den Enden hin abnimmt.

3.23 Die lokale Einflussfunktion

In Rahmentragwerken ist die lokale Einflussfunktion die Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Element. Diese muss zur FE-Einflussfunktion addiert werden, um das Bild komplett zu machen. Das FE-Programm reduziert ja die Dirac Deltas in die Knoten, $\delta \to j_i$, (nur so kann ein FE-Programm rechnen), und um dass wieder rückgängig zu machen, muss man die lokale Lösung dazu addieren.

Die Einflussfunktion $G_0(y,x)$ für die Durchbiegung eines eingespannten Balkens, siehe Bild 3.40, lautet

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} -\dfrac{(\ell-x)^3}{6}\,\varphi_3^e(y) + \dfrac{(\ell-x)^2}{2}\,\varphi_4^e(y) & y < x \\ -\dfrac{x^3}{6}\,\varphi_1^e(y) - \dfrac{x^2}{2}\,\varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.170}$$

wobei die $\varphi_i^e(y)$ die lokalen *shape functions* sind, siehe (3.59), und die Einflussfunktion für die Längsverschiebung, siehe Bild 3.41,

$$G_0(y,x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} (\ell-x)\,\varphi_2^e(y) & y < x \\ x\,\varphi_1^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.171}$$

basiert auf den *shape functions* des Stabelements.

Das Aufstellen dieser Einflussfunktionen ist eine einfache Übung in linearer Algebra.

Beispiel 3.8. Zum Exempel zeigen wir, wie wir die Einflussfunktion (3.170) für die **Durchbiegung** des eingespannten Balkens berechnet haben. Die äquivalenten Knotenkräfte dieser Einflussfunktion lauten $j_i = \varphi_i(x) \cdot 1$ und demnach betragen die Lagerkräfte, siehe Bild 3.14,

$$V(0) = j_1 = \varphi_1(x) \qquad M(0) = j_2 = \varphi_2(x) \tag{3.172a}$$

$$V(l) = -j_3 = -\varphi_3(x) \qquad M(l) = -j_4 = -\varphi_4(x)\,. \tag{3.172b}$$

Die Einflussfunktion kann man nicht in geschlossener Form angeben, weil die Querkraft im Aufpunkt springt. Für die beiden Teile machen wir die Ansätze

$$G_0^L(y,x) = a(x)\,\varphi_3(y) + b(x)\,\varphi_4(y) \qquad G_0^R(y,x) = c(x)\,\varphi_1(y) + d(x)\,\varphi_2(y)\,. \tag{3.173}$$

Weil die Ansätze die Lagerbedingungen $w = w' = 0$ einhalten, müssen wir uns nur noch um die statischen Lagerbedingungen kümmern. Im linken Lager muss gelten

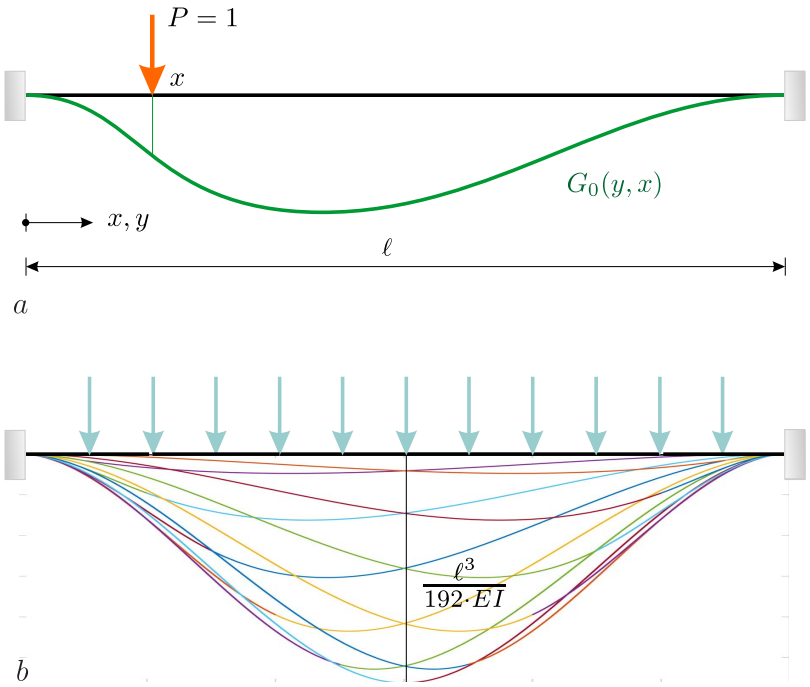


Bild 3.40. Einflussfunktion für die Durchbiegung eines eingespannten Balken

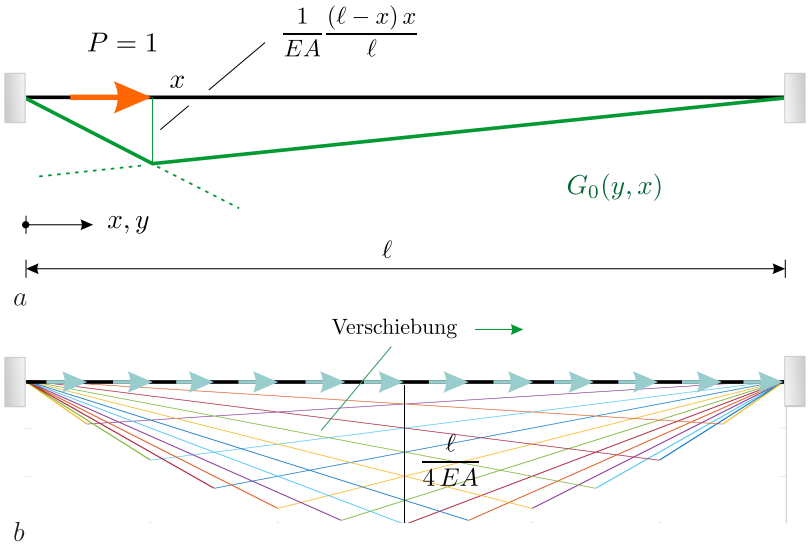


Bild 3.41. Einflussfunktion für die Längsverschiebung eines beidseitig festgehaltenen Stabes

$$\begin{bmatrix} V_3(0) & V_4(0) \\ M_3(0) & M_4(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(0) \\ M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1(x) \\ j_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}, \tag{3.174}$$

und im rechten Lager

$$\begin{bmatrix} V_1(l) & V_2(l) \\ M_1(l) & M_2(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} j_3(x) \\ j_4(x) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{bmatrix}. \tag{3.175}$$

Weil wir die Länge l und die Lage x des Aufpunkts offen lassen, brauchen wir ein Programm wie MATLAB, um die allgemeine Lösung zu bestimmen

$$a = -\frac{(l-x)^3}{6\,EI} \quad b = \frac{(l-x)^2}{2\,EI} \quad c = -\frac{x^3}{6\,EI} \quad d = -\frac{x^2}{2\,EI}. \tag{3.176}$$

So wurde die Einflussfunktion (3.170) berechnet.

Die Einflussfunktion $G_1(y,x)$ für die Verdrehung $w'(x)$ ergibt sich durch Ableitung von (3.170) nach x

$$G_1(y,x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} \dfrac{(\ell-x)^2}{2}\,\varphi_3^e(y) - (\ell-x)\,\varphi_4^e(y) & y < x \\ -\dfrac{x^2}{2}\,\varphi_1^e(y) - x\,\varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.177}$$

und sinngemäß so auch $G_2 = -EI\,d^2\,G_0/dx^2$, die Einflussfunktion für das Moment,

$$G_2(y,x) = \begin{cases} (\ell-x)\,\varphi_3^e(y) - \varphi_4^e(y) & y < x \\ x\,\varphi_1^e(y) + \varphi_2^e(y) & x < y \end{cases} \tag{3.178}$$

und die Querkraft, $G_3 = -EI\,d^3\,G_0/dx^3$, siehe Bild 3.42,

$$G_3(y,x) = \begin{cases} -\varphi_3^e(y) & y < x \\ \varphi_1^e(y) & x < y \end{cases}. \tag{3.179}$$

In Längsrichtung geht man genauso vor. Die lokale Einflussfunktion für $N(x)$ setzt sich aus den beiden horizontalen *shape functions* $\varphi_1(x) = (\ell - x)/\ell$ und $\varphi_2(x) = x/\ell$ zusammen, siehe Bild 3.42 c.

Beispiel 3.9. Wir berechnen die Einflussfunktion für das **Einspannmoment** $M(0)$ des Zweifeldträgers in Bild 3.43. Die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = M(\varphi_i)(0)$ der beiden *shape functions* $\varphi_i(x)$, siehe Bild 3.43, sind

$$j_1 = -EI\,\frac{2}{3} \qquad j_2 = 0\,. \tag{3.180}$$

Auf den ersten Wert kommt man wie folgt: Die *shape function* $\varphi_1(x)$ ist im ersten Element identisch mit der lokalen Ansatzfunktion $\varphi_4^e(x)$ und deren

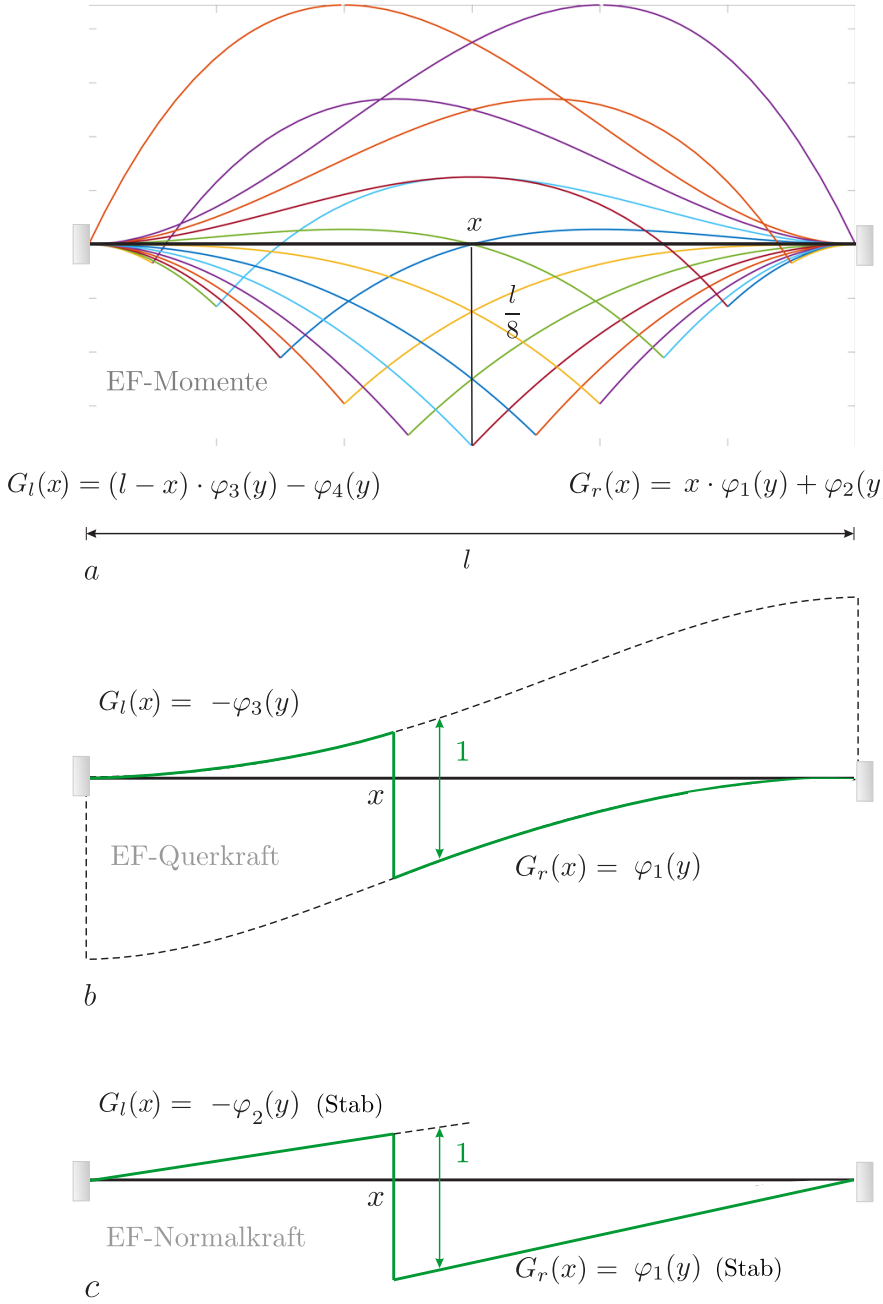


Bild 3.42. Lokale Einflussfunktionen für **a)** das Moment, **b)** die Querkraft und **c)** die Normalkraft in einem beidseitig eingespannten Stab, links und rechts vom Aufpunkt x. Die φ_i sind die Funktionen in Bild 3.13

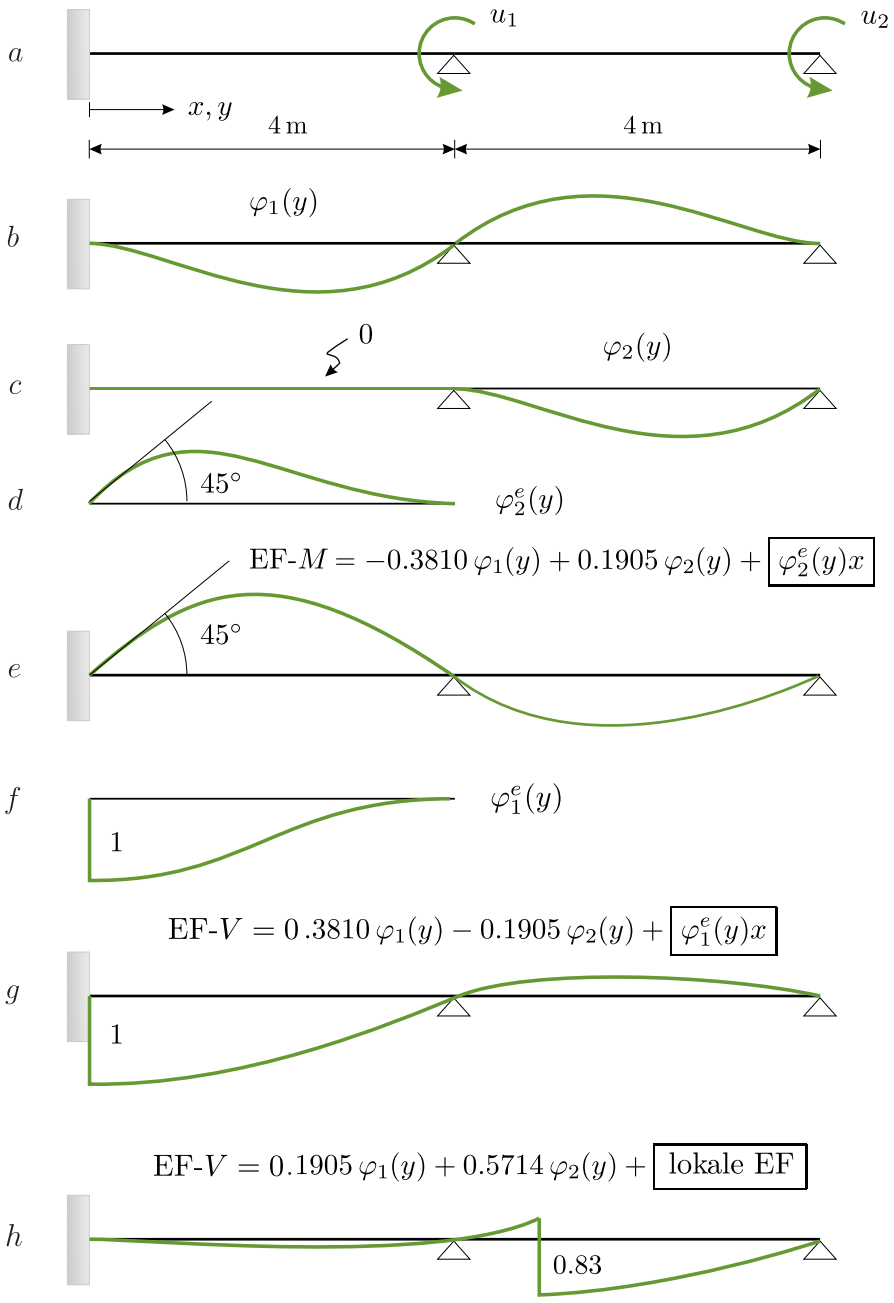


Bild 3.43. Zweifeldträger, **a)** System, **b)** und **c)** *shape functions* $\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$, **d)** lokale *shape function*, **e)** Einflussfunktion für das Einspannmoment, **g)** für die Lagerkraft (= Querkraft) und **h)** für $V(x = 5)$. Die Funktionen φ_i^e sind die Funktionen in Bild 3.32

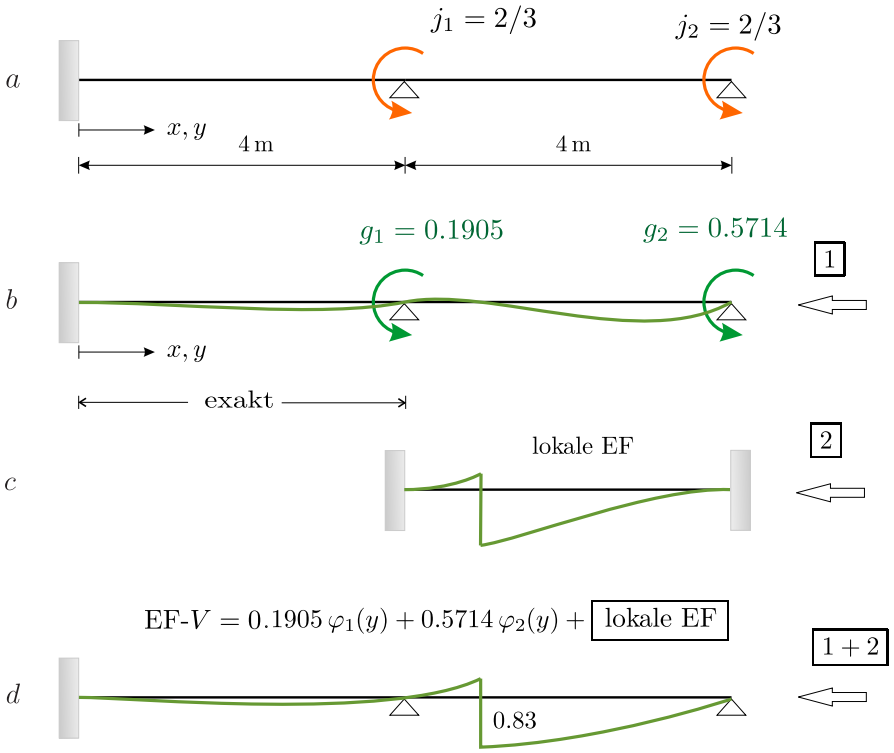


Bild 3.44. Im Detail: Berechnung der Einflussfunktion für die Querkraft $V(x = 5)$, **a)** äquiv. Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(x = 5)$ für die EF, **b)** die Verformungen g_i aus den j_i also $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$, **c)** die lokale Einflussfunktion, **d)** die endgültige EF

Moment im Punkt $x = 0$ ist $M(\varphi_4^e)(0) = -EI \cdot 2/3$. Die zweite *shape function* $\varphi_2(x)$ ist im ersten Element null und daher ist $j_2 = 0$.

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ zur Bestimmung der Knotenwerte g_i der Einflussfunktion

$$\frac{EI}{\ell_e}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.181}$$

hat die Lösung $g_1 = -0.3810$, $g_2 = 0.1905$. Im ersten Element ist zur Einflussfunktion noch die lokale Einflussfunktion $G_2^e = \varphi_2^e(y)$ zu addieren (setze in der Formel für $G_r(x)$ in Bild 3.42 a $x = 0 =$ Aufpunkt)

$$G_2(y, x = 0) = g_1\,\varphi_1(y) + g_2\,\varphi_2(y) + \boxed{\varphi_2^e(y)} \tag{3.182}$$

Beispiel 3.10. Auf demselben Weg erhalten wir die Einflussfunktion für die **Querkraft** im linken Lager. Die äquivalenten Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(0)$ betragen $j_1 = EI \cdot 2/3$ (das ist $V(\varphi_4^e)(0)$) und $j_2 = 0$, so dass das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ die Lösung

$$g_1 = 0.3810 \qquad g_2 = 0.1905 \tag{3.183}$$

hat und die Einflussfunktion lautet

$$G_3(y, x = 0) = g_1\,\varphi_1(y) + g_2\,\varphi_2(y) + \boxed{\varphi_1^e(y)} \tag{3.184}$$

Beispiel 3.11. An demselben Träger berechnen wir, siehe Bild 3.43 h, die Einflussfunktion für die **Querkraft** $V(x)$ einen Meter rechts vom mittleren Lager, $x = 5$; bezogen auf das zweite Element ist das lokal $x_e = 1$. In Bild 3.44 ist die Berechnung im Detail dargestellt. Im zweiten Element haben die *shape functions* die Gestalt

$$\varphi_1 = \varphi_2^e(x_e) \qquad \varphi_2 = \varphi_4^e(x_e) \tag{3.185}$$

und die j_i lauten daher

$$j_1 = V(\varphi_2^e)(x_e = 1) = \frac{2}{3} \qquad j_2 = V(\varphi_4^e)(x_e = 1) = \frac{2}{3}\,. \tag{3.186}$$

Das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ hat die Lösung

$$g_1 = 0.1905 \qquad g_2 = 0.5714\,, \tag{3.187}$$

und die Einflussfunktion ergibt sich zu, siehe Bild 3.44 d,

$$G_3(y, x = 5) = 0.1905\,\varphi_1(y) + 0.5714\,\varphi_2(y) + \boxed{\text{lokale EF}} \tag{3.188}$$

Je nach Lage des Punktes y, in dem die Auswertung geschieht, hat die lokale Einflussfunktion die Gestalt, siehe Bild 3.42 b,

$$\text{lokale EF} = \begin{cases} -\varphi_3^e(y) & y < x \\ \varphi_1^e(y) & x < y\,. \end{cases} \tag{3.189}$$

Beispiel 3.12. Wir berechnen die Einflussfunktion für das **Einspannmoment** des Kragträgers in Bild 3.45. Es ist $\ell = 4$. Der Vektor $\boldsymbol{j} = \{j_3, j_4\}^T$ sind die Momente der *shape functions* φ_3 und φ_4 im Aufpunkt $x = 0$, siehe (3.152), und das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ hat die Lösung

$$EI \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.3750 \\ 0.3750 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = -EI \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.190}$$

Die Einflussfunktion ist die Summe aus der FE-Einflussfunktion und der lokalen Einflussfunktion, die mit $\varphi_2(x)$ identisch ist, Verdrehung des linken Lagers um $\tan\varphi = -1$ (nach oben),

$$G_2(y, 0) = g_3 \cdot \varphi_3(y) + g_4 \cdot \varphi_4(y) + \boxed{\varphi_2(y)} = -y\,, \tag{3.191}$$

also die bekannte schräge Gerade, die wir hier mit y laufen lassen, weil $x = 0$ den Aufpunkt markiert. Weil der Balken aus einem Element besteht, gibt es keinen Unterschied zwischen φ_i und φ_i^e.

Wir merken noch an, dass sich in allen Einflussfunktionen für Kräfte das EI herauskürzt, was bestätigt, dass die Einflussfunktion bei feldweise gleichem EI nicht von EI abhängt.

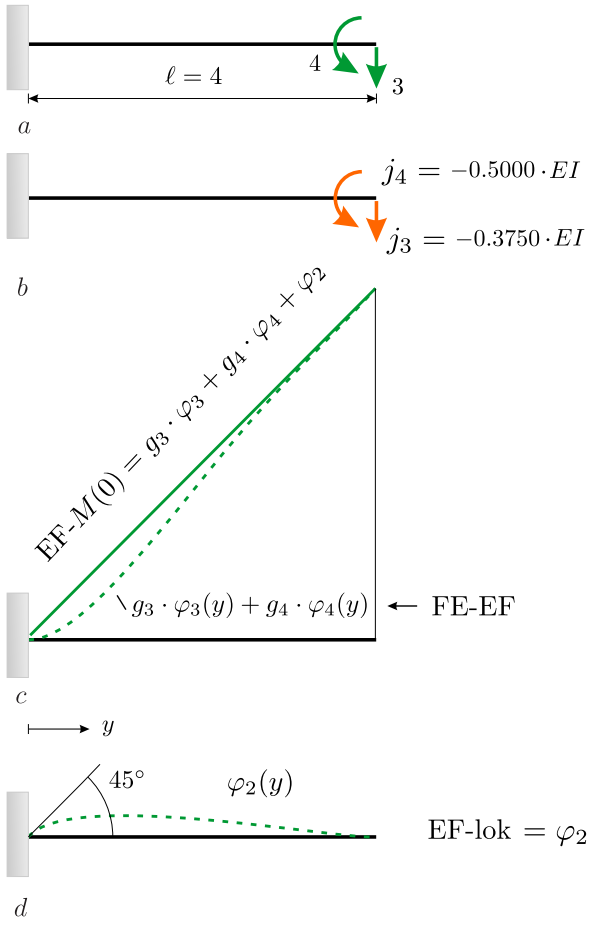


Bild 3.45. Einflussfunktion für das Einspannmoment des Kragträgers, **b)** äquiv. Knotenkräfte für die EF, **c)** die exakte EF und die FE-Näherung, **d)** die lokale Einflussfunktion, die mit φ_2 identisch ist

Beispiel 3.13. Die Einflusslinien für die Querkräfte in einem Feld sind – ausserhalb von dem Feld – alle gleich, s. Bild 3.46, weil die erzeugenden Knotenkräfte $j_i = V(\varphi_i)(x)$ nicht von x abhängen, die dritten Ableitungen der φ_i sind ja konstant. Dem entspricht, dass die Querkräfte in einem unbelasteten Feld konstant sind und die Einflusslinien daher außerhalb gleich sein müssen.

Bei Flächentragwerken gilt das auch für die Elemente selbst, weil man ja keine lokale Lösung dazu addieren kann: Die FE-Einflussfunktionen für die Spannungen σ_{kl} in einem *CST*-Element sind alle dieselben, weil die Knotenkräfte $j_i = \sigma_{kl}(\boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{x})$ für alle Punkte $\boldsymbol{x}$ denselben Wert haben.

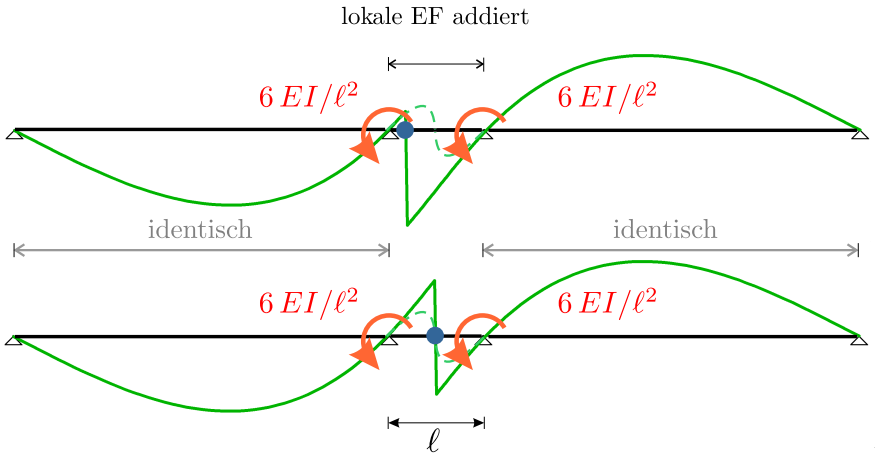


Bild 3.46. Einflussfunktionen für die Querkraft in zwei Punkten eines Feldes

Was man in Bild 3.46 auch sieht, ist, wie die Knotenmomente, die die Einflussfunktionen erzeugen, mit $\ell \to 0$ gegen ∞ gehen, und sich die Einflussfunktion immer weiter aufwölbt, $V \to \infty$, siehe Kapitel 6.2.

Die $j_i = V(\varphi_i)(x)$ sind *zahlenmäßig* die Querkräfte der vier *shape functions* φ_i, siehe (3.153),

$$j_1 = -j_3 = -\frac{12\,EI}{\ell^3} \qquad j_2 = j_4 = \frac{6\,EI}{\ell^2}\,. \tag{3.192}$$

Statisch sind j_1 und j_3 Knotenkräfte (nicht angetragen, weil null Wirkung am starren Lager) und j_2 und j_4 sind Momente, weil u_2 und u_4 Drehfreiheitsgrade sind. (Am globalen System $\boldsymbol{K}_{8\times 8}$ haben die u_i und j_i natürlich andere Indizes).

Verallgemeinerung

Diese Technik lässt sich auf alle Stabgleichungen, wie etwa den elastisch gebetteten Balken

$$EI\,w^{IV}(x) + c\,w(x) = p(x) \tag{3.193}$$

anwenden. Mit Hilfe der homogenen Lösung, siehe Glg. (4.46a),

$$w(x) = e^{\beta\,x}(c_1\,\cos\beta\,x + c_2\,\sin\beta\,x) + e^{-\beta\,x}(c_3\,\cos\beta\,x + c_4\,\sin\beta\,x) \tag{3.194a}$$

$$\beta = \sqrt[4]{c/4\,EI} \tag{3.194b}$$

kann man die vier *shape functions* $\varphi_i^e(x)$ berechnen, siehe Kapitel 10, daraus dann die Knotenkräfte der Einflussfunktionen für $M(x)$ bzw. $V(x)$

$$j_i = M(\varphi_i)(x) \qquad \text{bzw.} \qquad j_i = V(\varphi_i)(x) \tag{3.195}$$

und dann bestimmt man die Koeffizienten der lokalen Lösung links und rechts vom Aufpunkt

$$w_L(x) = a\,\varphi_3^e(x) + b\,\varphi_4^e(x) \qquad \text{links} \tag{3.196}$$

$$w_R(x) = c\,\varphi_1^e(x) + d\,\varphi_2^e(x) \qquad \text{rechts}\,, \tag{3.197}$$

wie auf Seite 285.

Invarianz bei den Schnittkräften

Geht es nur um die Einflussfunktionen für die Schnittkräfte, dann ist es noch einfacher, denn man braucht nur die *shape functions* $\varphi_i^e(x)$, die zur jeweiligen Balken- bzw. Stabgleichung gehören, weil die Formeln selbst in Bild 3.42 sich nicht ändern, wenn sich $EI(x)$ ändert. Wir haben das zumindest für linear veränderliches $EI(x)$ feststellen können.

Vielleicht kann man es damit erklären, dass die Gewichte an den $\varphi_i^e(y)$ Rotationen um 45° (EF-M) bzw. Translationen (EF-V) sind und die Starrkörperstatik für alle $EI(x)$ gleich ist. Bei den Weggrößen-EF ist es leider anders, denn bei diesen hängen die g_i von $EI(x)$ ab. Das sieht man, wenn man das EI vor die Matrix zieht, $\boldsymbol{K} \to EI \cdot \bar{\boldsymbol{K}}$,

$$EI \cdot \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{g} = \frac{1}{EI} \cdot \bar{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{j}\,, \tag{3.198}$$

was man bei konstantem EI ja machen kann. Bei variablem $EI(x)$ geht das zwar nicht, aber sinngemäß ist das der Grund. Bei den Einflussfunktionen für Kraftgrößen steht EI auf beiden Seiten, etwa im Fall einer M-EF, $j_i = M(\varphi_i)(x) = -EI\,\varphi_i''(x)$ und kürzt sich somit (im konstanten Fall) direkt weg.

Vielleicht erinnert sich der Leser noch an Statik I: Bei Durchlaufträgern (EI konstant) ändern sich die Schnittgrößen nicht, wenn sich EI ändert und daher hängen die Einflussfunktionen für $M(x)$ und $V(x)$ nicht von EI ab.

Kraftgrößenverfahren oder andere Verfahren

Zum Verständnis sei noch gesagt, dass man Einflussfunktionen nicht mit finiten Elementen berechnen muss. Wir haben zwar die Knotenkräfte mit finiten Elementen abgeleitet, aber ein klassisch ausgebildeter Statiker käme auf dieselben Knotenkräfte $j_i = J(\varphi_i)(x)$. Die Gleichgewichtslage des Tragwerks unter den Knotenkräften j_i plus der lokalen Einflussfunktion ist die Einflussfunktion – unabhängig von finiten Elementen.

Wir erwähnen das, weil das Thema Kraftgrößenverfahren und Einflussfunktionen in den Büchern oft so kompliziert dargestellt ist, dass man schon vor der Notation zurückschrickt und es lieber lässt.

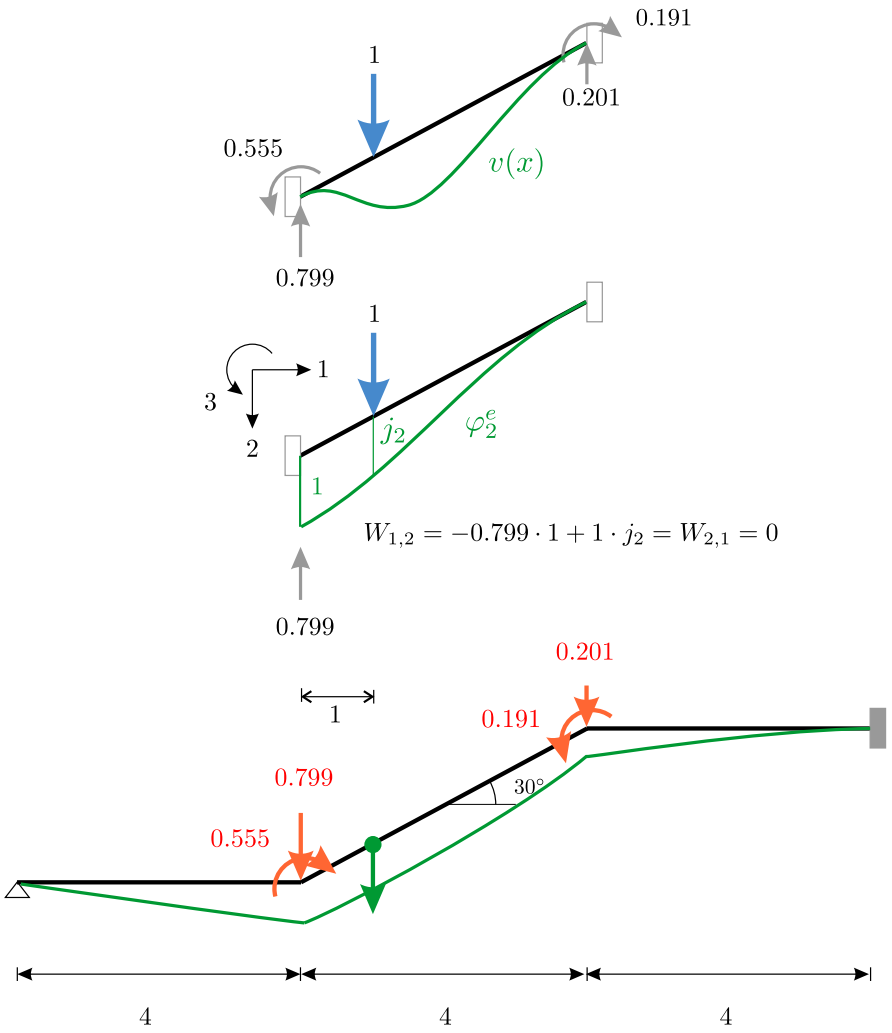


Bild 3.47. Einflussfunktion für die vertikale Verschiebung. Die j_i (rot) sind zahlenmäßig die Lagerkräfte $\times(-1)$ am eingespannten Balken

Aber es ist viel einfacher, man braucht nur die j_i (das sind die f_i) und die lokale Einflussfunktion aus Bild 3.42. Und Lastfälle mit Knotenkräften lassen sich mit dem Kraftgrößenverfahren doch leicht berechnen.

3.24 Schräger Balken

Die Normalkraft und die Querkraft in einem Balken sind ‚lokale' Größen. Ihre Einflussfunktionen werden generiert, indem man das $N(\varphi_i^e)(x)$ bzw. das $V(\varphi_i^e)(x)$ aus den vier lokalen *shape functions* φ_i^e (Balkenanteile) als Knoten-

kräfte j_i aufbringt. Weil die Schnittkräfte lokal sind, spielt die Neigung des Balkens keine Rolle.

Bei den Weggrößen ist es anders. Zur Berechnung der Einflussfunktion für die vertikale Durchbiegung (global y) eines Punktes x des schrägen Balkens muss man wissen, wie groß die Absenkungen des Punkts aus den 2×3 φ_i^e der beiden Endknoten sind; diese Verschiebungen sind die j_i.

Bevor man da den *sinus* und *cosinus* bemüht, spannt man den schrägen Balken an beiden Enden ein und belastet ihn mit einer vertikalen Kraft $P = 1$ im Aufpunkt, siehe Bild 3.47. Die Lagerkräfte aus diesem Lastfall sind nach Betti zahlenmäßig gleich den Wegen j_i, die die φ_i^e im Aufpunkt gehen

$$W_{1,2} = -0.799 \cdot 1 + 1 \cdot j_2 = W_{2,1} = 0\,. \tag{3.199}$$

Die beiden Teile (längs und quer) von φ_2^e sind homogene Lösungen der Stab- bzw. Balkengleichung — keine Lasten bei der Bewegung φ_2^e im Feld — und daher ist $W_{2,1} = 0$, weil die null Lasten im Feld null Arbeit auf dem Weg $v(x)$ (LF $P = 1$) leisten. Die Lagerkräfte aus P sind also gleich den Bewegungen j_i, die als Knotenkräfte aufgebracht die Einflussfunktion erzeugen. Und wie immer am Schluss, muss man noch die lokale Einflussfunktion im Element dazu addieren. Dazu dreht man den Balken in die Horizontale, zerlegt $P = 1$ in einen tangentialen und normalen Anteil, $P_N = 1 \cdot \cos(30)$, ermittelt die Biegelinie (= EF) aus P_N am beidseitig eingespannten Balken und trägt sie senkrecht zum schrägen Balken von der FE-Einflussfunktion ab.

3.25 GF-Anywhere

In dem Programm BE-FRAMES wird bei einem Klick auf einen Punkt x die Einflussfunktion für die gewünschte Größe

$$u(x), N(x), w(x), w'(x), M(x), V(x) \tag{3.200}$$

angezeigt, siehe Bild 3.48. Das geht sehr schnell, weil das Programm gleich nach der Eingabe der Abmessungen die inverse Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$ berechnet und abspeichert.

Angenommen die Zielgröße sei das Moment $J(w) = M(x)$ in einem Riegel. Die äquivalenten Knotenkräfte j_k^e in den beiden Knoten des Elements sind also die Momente der sechs *shape functions* $\varphi_k^e(x)$, $k = 1, 2, \ldots 6$, des Elements

$$j_k^e = M(\varphi_k^e)(x) \tag{3.201}$$

in dem Punkt x; das sind vier Zahlen j_k^e (die Längsverschiebungen $\varphi_k^e(x)$ haben keine Momente). Diese lokalen Lastgrößen werden, wie in jedem anderen Lastfall auch, in das globale Koordinatensystem transformiert, $j_k^e \to j_i$ und in den Vektor $\boldsymbol{j}$ geschrieben, der bis auf die sechs Einträge leer bleibt.

Das Produkt $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ (aus sechs Spalten) sind dann die Knotenwerte g_i der Einflussfunktion

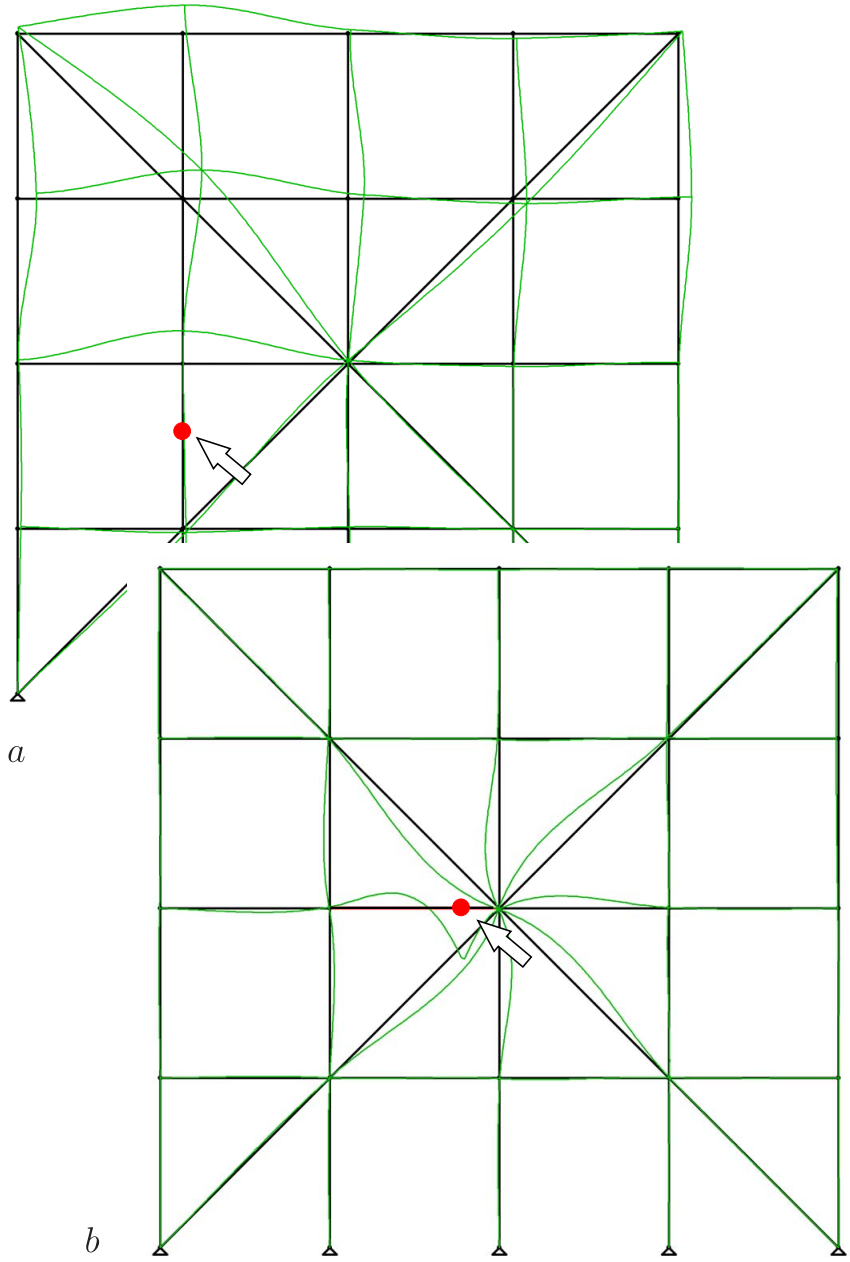


Bild 3.48. GF-Anywhere, ein einfacher *click* und man sieht sofort **a)** die EF für die Normalkraft in dem Stiel oder **b)** für das Moment in dem Riegel (BE-FRAMES)

$$G_h(y,x) = \sum_i g_i(x)\,\varphi_i(y)\,. \tag{3.202}$$

Damit lässt sich $G_h(y,x)$ zeichnen. In dem Element mit dem Aufpunkt wird nur noch die lokale Einflussfunktion dazu addiert, siehe Kapitel 3.23.

3.26 Aufpunkt im Knoten

Man kann sich Einflussfunktionen für Knotenverschiebungen und -verdrehungen anzeigen lassen, aber nicht für Schnittkräfte ‚im Knoten'; immer nur links und rechts von einem Knoten, denn die Querkraft oder das Moment links von einem Rahmenknoten ist in der Regel nicht dieselbe wie rechts vom Knoten, jede Seite hat ihre eigene Einflussfunktion. Das kennt man ja auch vom Kraftgrößenverfahren, wo man Gelenke immer nur neben einem Knoten einbauen kann.

3.27 Die zentrale Gleichung

FE-Einflussfunktionen liegen in **separierter Form** vor

$$G_h(y,x) = g_1(x)\,\varphi_1(y) + g_2(x)\,\varphi_2(y) + \ldots + g_n(x)\,\varphi_n(y)\,. \tag{3.203}$$

Das ist der Grund, warum bei der Überlagerung mit der Belastung $p(y)$ die äquivalenten Knotenkräfte erscheinen

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\,p(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \int_0^l p(y)\,\varphi_i(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,f_i\,, \tag{3.204}$$

und somit die Auswertung einer **Summation über die Knoten** gleichkommt. Für die Belastung werden die äquivalenten Knotenkräfte gesetzt und der Einfluss einer Knotenkraft f_i auf das Funktional $J(u_h) = u_h(x)$ ist gleich der Arbeit, die f_i auf der zur Einflussfunktion gehörigen Knotenverschiebung g_i leistet.

Nun kann man $u_h(x)$ aber auch berechnen, indem man das Dirac Delta mit der Biegelinie u_h überlagert

$$u_h(x) = \int_0^l \delta(y-x)\,u_h(y)\,dy\,. \tag{3.205}$$

Verknüpfen wir diese beiden Darstellungen, dann haben wir die zentrale Gleichung zu dem Thema Einflussfunktionen und finite Elemente vor uns.

Theorem 3.2 (Die zentrale Gleichung).

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l \sum_i g_i(x)\, \varphi_i(y)\, p(y)\, dy = \sum_i g_i(x)\, f_i \\ &= \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \sum_i j_i\, u_i \\ &= \sum_i \varphi_i(x)\, u_i = \int_0^l \sum_i u_i\, \varphi_i(y)\, \delta(y-x)\, dy = \int_0^l u_h(y)\, \delta(y-x)\, dy\,. \end{aligned} \tag{3.206}$$

Die Verformung $u_h(x)$ in einem Punkt x ist also das Skalarprodukt zwischen dem Vektor $\boldsymbol{g}$ der Knotenwerte der Einflussfunktion und dem Vektor der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ oder, umgekehrt, zwischen den Knotenwerten u_i der FE-Lösung und den äquivalenten Knotenkräften $j_i = \varphi_i(x)$ der Einflussfunktion

$$u_h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^l u_h(y)\, \delta(y-x)\, dy = \sum_i \varphi_i(x)\, u_i = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} \\ \displaystyle\int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,. \end{cases} \tag{3.207}$$

Diese Darstellung gilt für alle linearen Funktionale

$$J(u) = \begin{cases} \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,, \end{cases} \tag{3.208}$$

und sie ist die denkbar knappste Darstellung eines linearen Funktionals.

Da die Wirkung $J(u) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u}$ des Vektors $\boldsymbol{j}$ auf $\boldsymbol{u}$ der Wirkung des Dirac Deltas auf u gleicht

$$u(x) = \int_0^l \delta(y-x)\, u(y)\, dy\,, \tag{3.209}$$

nennen wir den Vektor $\boldsymbol{j}$ den **Dirac Vektor** des Funktionals $J(u)$.

Die erste Formel

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} &= j_1\, u_1 + j_2\, u_2 + \ldots + j_n\, u_n \\ &= J(\varphi_1)\, u_1 + J(\varphi_2)\, u_2 + \ldots + J(\varphi_n)\, u_n \end{aligned} \tag{3.210}$$

spielt die Berechnung von $J(\boldsymbol{u})$ auf die Einzelwerte $j_i = J(\varphi_i)$ zurück. Liest man die j_i als Kräfte in den Knoten, wie in Bild 3.31, dann ist $J(\boldsymbol{u})$ die Arbeit, die die j_i auf den Wegen u_i leisten.

In der zweiten Formel, $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$, werden die äquivalenten Knotenkräfte mit den g_i, den Knotenverschiebungen der FE-Einflussfunktion, gewichtet.

Die Gleichung

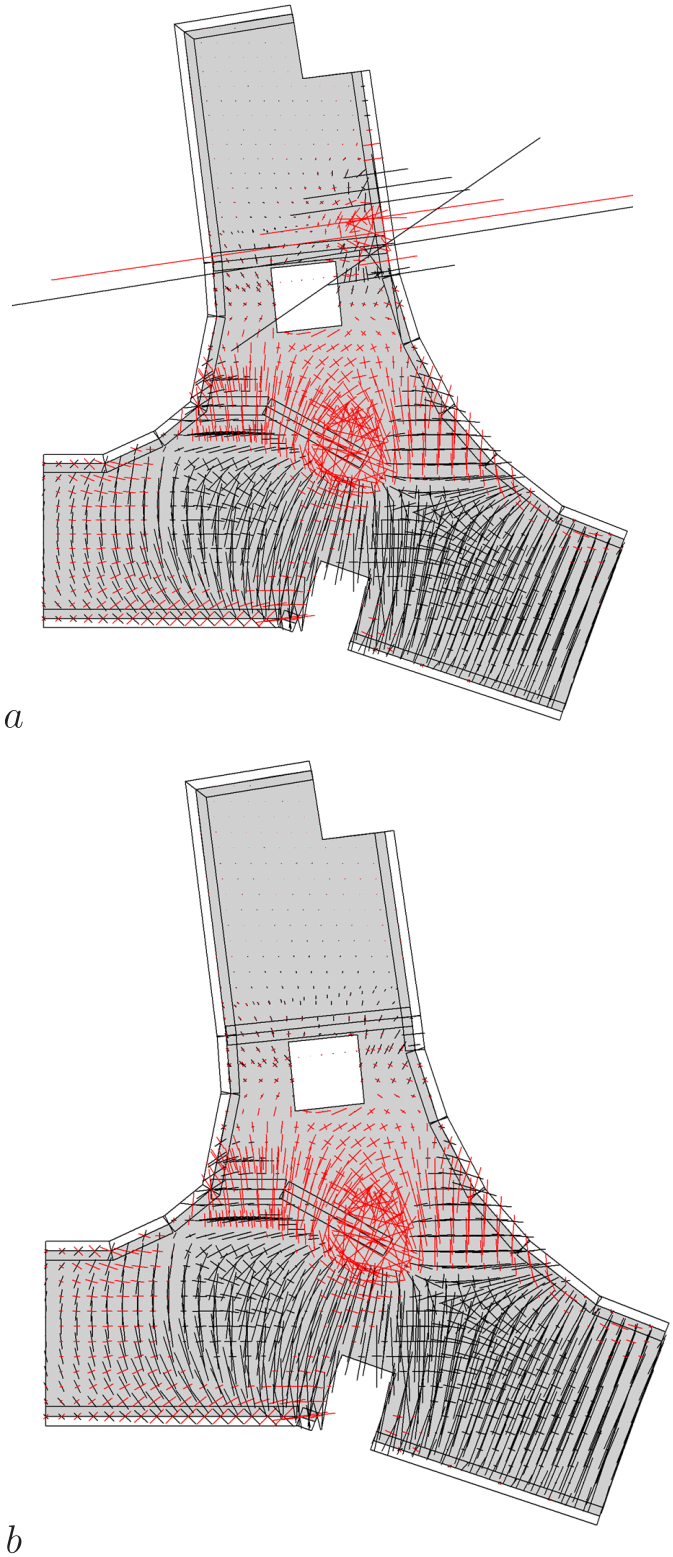


Bild 3.49. Ein nur leicht falsch gesetzter Randknoten führte zu Singularitäten in den Momenten, **a)** vorher, **b)** nachher

$$\boxed{J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}} \tag{3.211}$$

ist eigentlich die zentrale Formel, denn bei den finiten Elementen ist ‚alles' Funktional. Jede Ableitung

$$\frac{du}{dx} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \tag{3.212}$$

ist ein Funktional, jedes Ergebnis ist ein Funktional und zu jedem linearen Funktional gehört eine Einflussfunktion, ein Vektor $\boldsymbol{g}$, und das Skalarprodukt mit dem Lastvektor $\boldsymbol{f}$ ist der Wert des Funktionals.

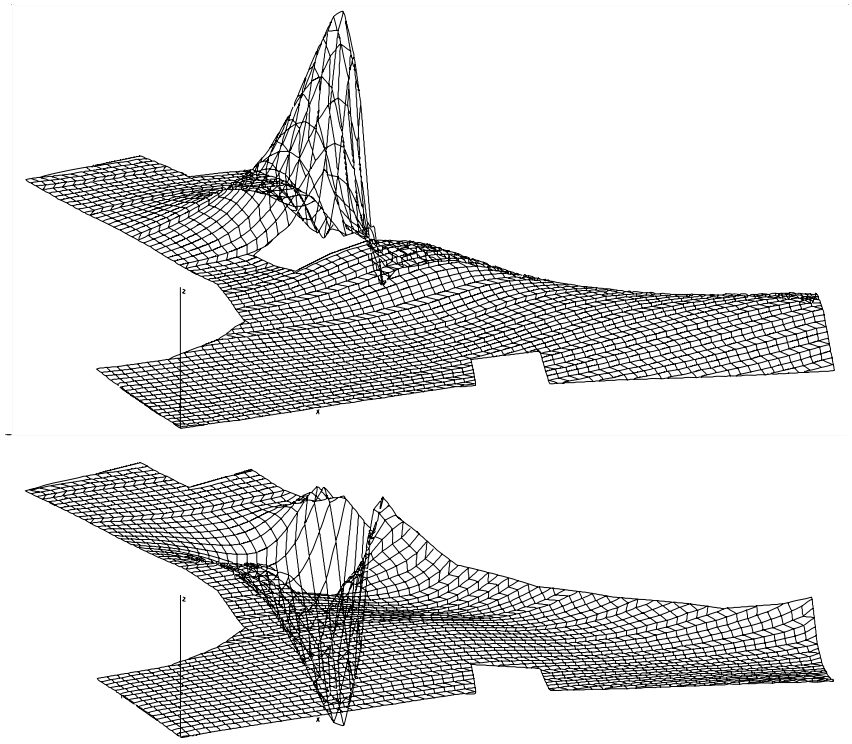


Bild 3.50. Die Einflussfunktionen für das Randmoment m_{nn} in zwei nahezu identischen Punkten haben ein entgegengesetztes Vorzeichen

Wenn man also die zweite Ableitung der Biegelinie in einem Punkt x berechnet, dann kann man die *shape functions* von Hand differenzieren, oder man bildet das Skalarprodukt

$$w''(x) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} \, . \tag{3.213}$$

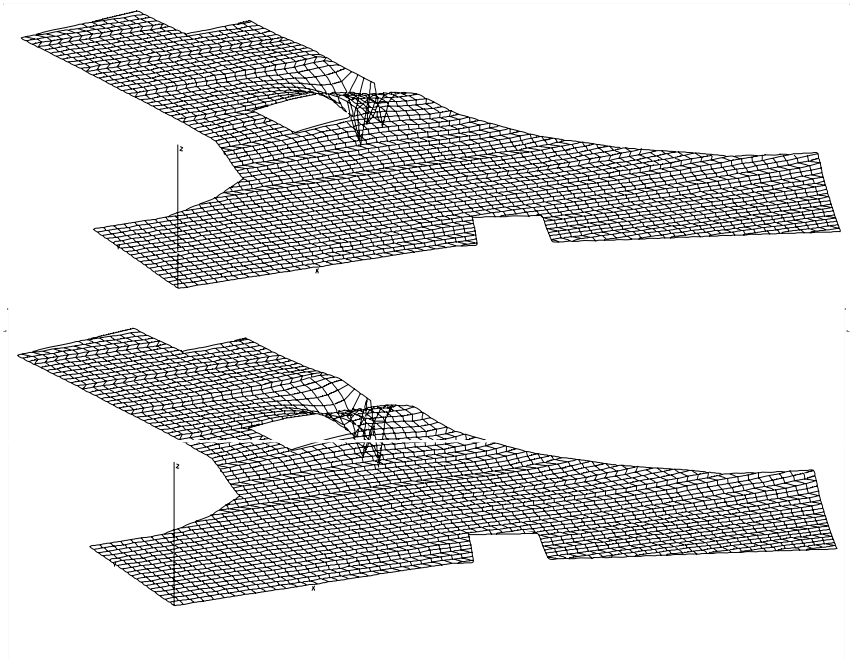


Bild 3.51. Dieselben Einflussfunktionen nachdem die Lage des Knotens korrigiert wurde, [92]

Natürlich rechnet niemand so, aber die entscheidende Botschaft ist, dass das Differenzieren, wie jede Auswertung eines linearen Funktionals, auf **lineare Algebra** zurückgeführt werden kann, $J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$. Zu jeder Messung an einem Tragwerk gibt es einen Vektor $\boldsymbol{g}$ und das *post-processing* ist theoretisch ein wiederholtes Anwenden dieser Formel.

Jetzt denke man an eine **singuläre Ecke**. Zehn Zentimeter vor und hinter der Ecke sehen wir Spannungen, wie sie unterschiedlicher nicht sein können. Das bedeutet doch aber, dass die zugehörigen Vektoren $\boldsymbol{g}$ – obwohl die Aufpunkte nur 20 cm entfernt sind – krass unterschiedlich sind. Singularitäten in den Spannungen übersetzen sich also in oszillierende Vektoren $\boldsymbol{g}$, in oszillierende Einflussfunktionen, siehe die Bilder 3.49, 3.50 und 3.51 (BE-PLATTE).

Man beachte, dass diese Vektoren $\boldsymbol{g}$ nicht LF-abhängig sind, sondern zu dem Modell gehören. Sie entstehen mit dem Modell, wie alle Einflussfunktionen, nur der spezielle Lastfall macht die Unterschiede zufällig sichtbar.

3.28 Darstellung einer FE-Lösung

Wir fassen zusammen:

So wie man den Vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}$ auf zwei Arten schreiben kann

$$\boldsymbol{u} = \sum_i f_i \, \boldsymbol{g}_i = \sum_i u_i \, \boldsymbol{e}_i \tag{3.214}$$

so auch die FE-Lösung

$$u(x) = \sum_i f_i \, g_i(x) = \sum_i u_i \, \varphi_i(x) \tag{3.215}$$

Die $g_i(x)$ sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen u_i, die $\varphi_i(x)$ sind die zugehörigen *shape functions* und die f_i sind die äquivalenten Knotenkräfte. In der Darstellung des Vektors $\boldsymbol{u}$ sind die $\boldsymbol{g}_i$ die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ und die $\boldsymbol{e}_i$ sind die Einheitsvektoren.

In Gleichung (3.215) stehen die zwei Basen des Ansatzraums $\mathcal{V}_h$ nebeneinander, siehe Kapitel 3.35.

3.29 Stabtragwerke und $J = g^T f$

In der zentralen Gleichung $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist $J(w)$ das Moment, die Querkraft, etc., wenn die Belastung in die Knoten reduziert wurde, denn die FE-Methode kann nur Lastfälle mit Knotenkräften wie in Bild 3.6 a. Bei Stabtragwerken, wenn EA und EI konstant sind, kann man jedoch das FE-Ergebnis exakt machen, indem man das lokale Ergebnis (beidseitig eingespannter Stab) zu dem Ergebnis addiert, wie in Bild 3.6 b,

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} + \int_0^{l_e} G_{lok}(y, x) \, p(y) \, dy \, . \tag{3.216}$$

Wir machen das automatisch, deswegen ist uns dieser Schritt nicht so bewusst.

Das lokale Ergebnis ist die Überlagerung der lokalen Einflussfunktion G_{lok} für $M(x)$, $V(x)$, etc. mit der Belastung im Feld. Das geht natürlich einfacher: Man berechnet einfach am beidseitig eingespannten Element das Moment oder die Querkraft – was immer $J(w)$ gerade ist – aus der Belastung p im Aufpunkt x und addiert diesen Wert zu $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$, denn er entspricht genau dem Integral.

Wenn die Belastung p wirklich so kompliziert ist, dass die Schnittkräfte nicht in den Handbüchern stehen, kann man natürlich auch die Einflussfunktion integrieren, wie das in Kapitel 3.4 gemacht wurde.

Bei Flächentragwerken geht all das leider nicht, kann man nicht ‚nachbessern', ist mit $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ Schluss, denn sonst hätten wir schon längst ein Drehwinkelverfahren für Platten und Scheiben.

3.30 Handberechnung

Die Formel

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} \tag{3.217}$$

sieht natürlich sehr elegant aus, aber wenn man sie ausschreibt

$$J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{M(\varphi_i)(x)}_{j_i} u_i \,, \tag{3.218}$$

dann erkennt man, dass sie mit der Handberechnung übereinstimmt – wie sollte es auch anders sein?

In diesem Beispiel ist $J(w) = M(x)$ das Moment in einem Riegel. Die Einträge j_i in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ sind die Momente $M(\varphi_i)(x)$ der *shape functions* in dem Aufpunkt x – der Vektor $\boldsymbol{j}$ ist also nahezu leer – und die u_i sind die Durchbiegungen und Verdrehungen der beiden Endknoten des Riegels. Zu diesem Ergebnis muss man noch das Moment der lokalen Lösung im Aufpunkt addieren, $+M_{lok}(x)$, also z.B. $p\,l^2/24$ bei Gleichlast und $x =$ Feldmitte.

Wenn wir oben gesagt haben, dass keiner so rechnet, keiner die Formel $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ benutzt, niemand Einflussfunktionen im Alltag benutzt, dann sieht man hier, dass **jeder** diese Formel benutzt, denn Handberechnung und $J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist – bis auf das fehlende lokale Ergebnis – dasselbe.

3.31 Zustandsvektoren und Messungen

In einem übertragenen Sinne repräsentiert der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ einen **Zustandsvektor** des Tragwerks und die Auswertung eines Funktionals

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u} \,, \tag{3.219}$$

die Frage nach dem Moment $J(\boldsymbol{u}) = M(x)$ oder der Querkraft $J(\boldsymbol{u}) = V(x)$ in einem Punkt, kann man als eine Messung an dem Tragwerk verstehen. Die Frage ist nun, wie sich die Messwerte verändern, wenn sich die Steifigkeitsmatrix verändert, wenn das Tragwerk aus einem System $\boldsymbol{K}$ in ein System $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ übergeht?

Die ursprüngliche schwache Formulierung (Variationsformulierung)

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} \tag{3.220}$$

und die geänderte Formulierung haben dieselbe rechte Seite

$$\boldsymbol{\delta u}^T (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}) \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} \,, \tag{3.221}$$

so dass die Differenz der beiden Gleichungen, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$, den Ausdruck

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c \tag{3.222}$$

ergibt. Setzen wir für $\boldsymbol{\delta u}$ den Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion, dann folgt

$$J(\boldsymbol{e}) = J(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c\,, \tag{3.223}$$

was ein **lokales Resultat** ist, zumindest so lokal wie die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$, weil wir zur Auswertung von $J(\boldsymbol{e})$ nur über das geänderte Element Ω_e integrieren müssen (sinngemäß ist die rechte Seite ja so etwas wie das Mohrsche Arbeitsintegral über das Element $[0, l_e]$).

Man stelle sich einen großen ebenen Rahmen vor, in dem ein einzelner Riegel reißt, $EI \to EI + \Delta EI$, $\Delta EI < 0$. Der Riss bedeutet einen Übergang von der Matrix $\boldsymbol{K}$ zu einer neuen Matrix $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, wobei die Zusatzmatrix $\boldsymbol{\Delta K} = \Delta EI/EI \cdot \boldsymbol{K}_e$ die kleine, ursprüngliche Steifigkeitsmatrix des gerissenen Elementes mit dem Vorfaktor $\Delta EI/EI$ ist – klein verglichen mit der Größe von $\boldsymbol{K}$.

Wenn der Rahmen $2\,n$ Freiheitsgrade u_i hat, dann könnten wir theoretisch (aber wirklich nur theoretisch) $2\,n$ Messungen $J_i(\boldsymbol{e}) = u_{ic} - u_i$ mit den $2\,n$ Knotenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ an dem gerissenen Element

$$J_i(\boldsymbol{e}) = u_{ic} - u_i = -\boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c \tag{3.224}$$

vornehmen und so die geänderten Knotenverschiebungen

$$u_{ic} = u_i + J_i(\boldsymbol{e}) \tag{3.225}$$

– in Matrizenschreibweise ist das

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}^{(-1)}\, \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c \tag{3.226}$$

berechnen, weil die Spalten der Inversen gerade die Knotenverschiebungsvektoren $\boldsymbol{g}_i$ der Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen u_i sind.

Das Problem dabei ist natürlich, dass wir den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ nicht kennen, den wir brauchen um $J_i(\boldsymbol{e})$ zu berechnen. In dieser Situation könnten wir für den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ näherungsweise den ursprünglichen Vektor $\boldsymbol{u}$ setzen

$$J_i(\boldsymbol{e}) \simeq \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}\,, \tag{3.227}$$

oder $\boldsymbol{u}_c$ durch Iteration bzw. eine (sehr einfache, nur wenige Zeilen) direkte Berechnung bestimmen, siehe Kap. 5.30.

Das obige Resultat (3.226) impliziert im übrigen

$$\boxed{(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\, \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}\,,} \tag{3.228}$$

was bedeutet, dass ein Tragwerk im Übergang von $\boldsymbol{K}$ zu $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ den Zuwachs $\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ nicht frei wählen kann, sondern dass der neue Zustand $\boldsymbol{u}_c$ mit dem vorherigen Zustand $\boldsymbol{u}$ **kompatibel** sein muss.

Theoretisch könnte man mit einer ganz einfachen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_0$ starten, die man dann mit weiteren Matrizen $\boldsymbol{\Delta K}_i$ anreichert

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_o + \boldsymbol{\Delta K}_1 + \boldsymbol{\Delta K}_2 + \ldots + \boldsymbol{\Delta K}_i \tag{3.229}$$

und so würde man eine Kette von Lösungen $\boldsymbol{u}_i$ produzieren, wo jeder neue Vektor $\boldsymbol{u}_{i+1}$ mit dem vorhergehenden Vektor verschränkt ist

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}_i^{-1}\boldsymbol{\Delta K}_{i+1})\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i\,. \tag{3.230}$$

3.32 Der Satz von Maxwell

Eigentlich gehört der *Satz von Maxwell* in das Kapitel 2, aber wir mussten auf den Begriff des Funktionals warten.

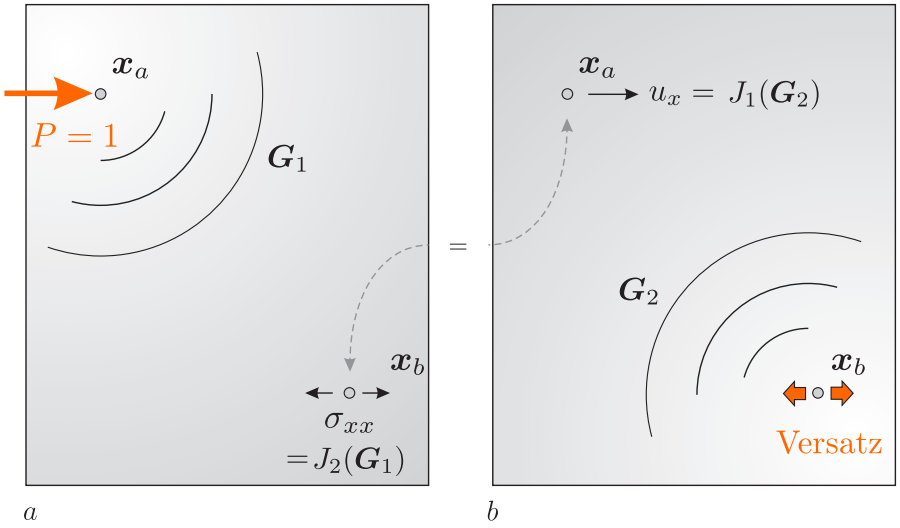


Bild 3.52. Zwei Einflussfunktionen, **a)** eine Einzelkraft generiert die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_1$ für $u_x(\boldsymbol{x}_a)$ und **b)** ein Versatz erzeugt die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$ für die Spannung σ_{xx} im Punkt $\boldsymbol{x}_b$; die beiden Kerne sind adjungiert, $J_2(\boldsymbol{G}_1) = J_1(\boldsymbol{G}_2)$

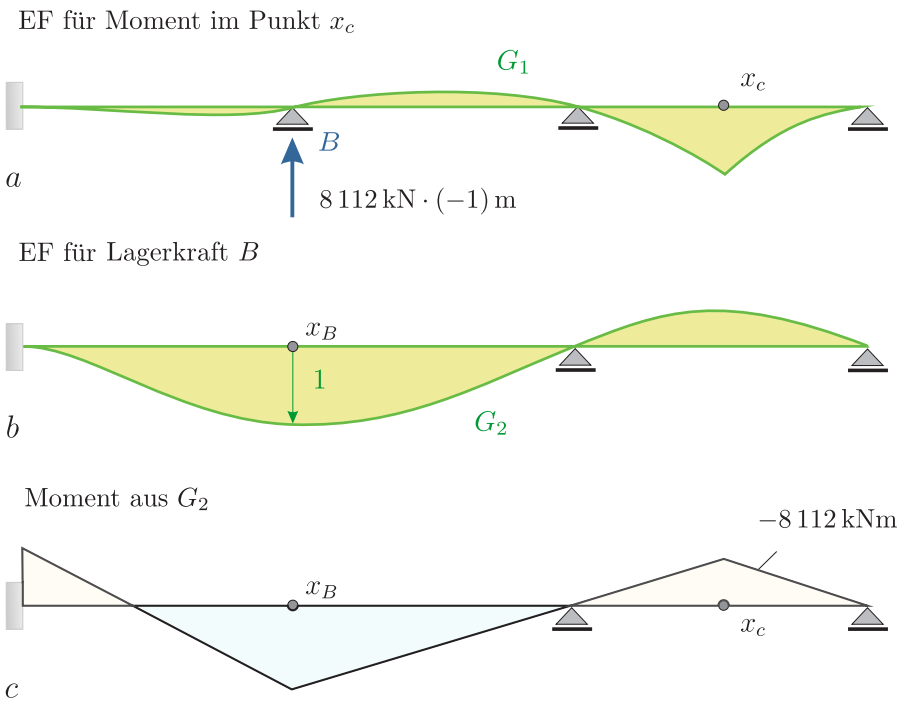
Den ***Satz von Maxwell*** kennt der Ingenieur als die Gleichung

$$w_1(x_2) = w_2(x_1)\,. \tag{3.231}$$

Die Durchbiegung, die eine Kraft $P = 1$ am Ort x_1 in einem abliegenden Punkt x_2 erzeugt, ist genauso groß, wie die Durchbiegung, die eine Kraft $P = 1$ am Ort x_2 im Punkt x_1 erzeugt, siehe Bild 4.1 Seite 418.

Wir können dies dahingehend verallgemeinern, dass die Kerne zweier Funktionale ‚über Kreuz' gleich sind, was heißen soll

$$\boxed{J_1(G_2) = J_2(G_1)}\,. \tag{3.232}$$



$$J_2(G_1) = \text{Lagerkraft } B \text{ aus } G_1 = -8\,112 = \text{Moment aus } G_2 = J_1(G_2)$$

Bild 3.53. Zwei Einflussfunktionen und ihre Gleichheit $J_2(G_1) = J_1(G_2)$ über Kreuz (BE-FRAMES)

In Worten: *Was das erste Funktional J_1 angewandt auf die Einflussfunktion G_2 liefert, ist derselbe Wert, den das zweite Funktional J_2 angewandt auf die Einflussfunktion G_1 liefert.*

Die beiden Biegelinien w_1 bzw. w_2 in (3.231), Einzelkraft $P = 1$ in x_1 bzw. x_2, sind ja gerade die Einflussfunktionen G_1 und G_2 für die beiden Funktionale,

$$J_1(w) = w(x_1) = \int_0^l G_1(y, x_1)\, p\, dy \qquad J_2(w) = w(x_2) = \int_0^l G_2(y, x_2)\, p\, dy \tag{3.233}$$

und so kommen wir auf den Ausdruck (3.232), der im übrigen für alle Paare von linearen Funktionalen und ihre Kerne gilt. Der *Satz von Maxwell* ist nicht auf Durchbiegungen begrenzt.

In einem gewissen Sinne ist das Resultat $w_1(x_2) = w_2(x_1)$ dasselbe, wie die Feststellung, dass die Entfernung von einem Punkt A zu einem Punkt B genauso groß ist, wie die Entfernung von B nach A[18].

Glg. (3.232) ist die Grundgleichung. Sie ist der Satz von Betti auf den Punkt gebracht.

Um diese Gleichung in Aktion zu sehen, betrachten wir eine quadratische Scheibe auf der zwei Punkte $\boldsymbol{x}_a$ und $\boldsymbol{x}_b$ markiert sind, siehe Bild 3.52. Im Punkt $\boldsymbol{x}_a$ messen wir die **horizontale Verschiebung** eines Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$

$$J_1(\boldsymbol{u}) = u_x(\boldsymbol{x}_a) \tag{3.234}$$

und im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ messen wir die **Spannung** σ_{xx}

$$J_2(\boldsymbol{u}) = \sigma_{xx}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_b) \tag{3.235}$$

dieses Feldes.

Die Einflussfunktion für das Funktional J_1 ist das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{G}_1$, das von einer horizontalen Einzelkraft $P = 1$ erzeugt wird, und die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$ für J_2 wird von einer horizontalen Versetzung im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ erzeugt.

Gemäß Maxwell (= Satz von Betti) gilt

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = J_2(\boldsymbol{G}_1) \tag{3.236}$$

oder

Die Verschiebung im Punkt $\boldsymbol{x}_a$ verursacht durch die Versetzung im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ ist gleich der Spannung im Punkt $\boldsymbol{x}_b$ infolge der Einzelkraft im Punkt $\boldsymbol{x}_a$.

In Bild 3.53 ist das erste Funktional

$$J_1(w) = M(x_c) \tag{3.237}$$

das **Moment** der Biegelinie w im Punkt x_c und das zweite Funktional

$$J_2(w) = B \tag{3.238}$$

ist die **Lagerkraft**, die diese Biegelinie im Lager B hat.

Zu G_1 (= Einflussfunktion für J_1) gehört die Lagerkraft $J_2(G_1) = -8\,112$ kN$\times$1 m und zur Einflussfunktion G_2 (= Einflussfunktion für B) gehört ein Moment $J_1(G_2) = -8\,112$ kNm und beide Werte sind zahlenmäßig gleich[19]

$$J_1(G_2) = J_2(G_1)\,. \tag{3.239}$$

[18] Diese Bemerkung ist nicht ganz so trivial, wie sie klingt.

[19] Das Ergebnis von Einflussfunktionen hat immer die Dimension einer *Arbeit*.

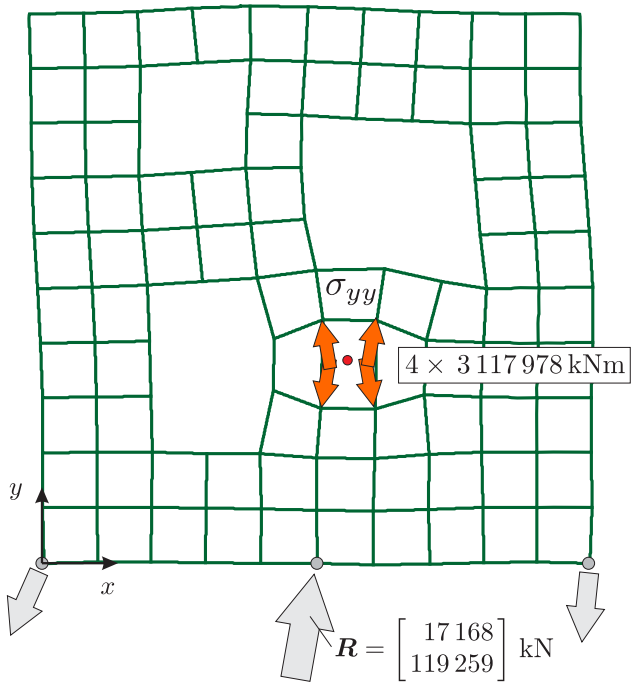


Bild 3.54. FE-Einflussfunktion für die vertikale Spannung σ_{yy} in der Elementmitte, äquivalente Knotenkräfte und zugehörige Lagerkräfte aus der Spreizung des Aufpunkts (WINFEM).

Betti extended, siehe Kapitel 4, garantiert übrigens, dass dies auch für die FE-Lösungen gilt, d.h. in der Gleichung

$$J_1(G_2) = \int_0^l \delta_1\, G_2\, dy = \int_0^l \delta_2\, G_1\, dy = J_2(G_1) \tag{3.240}$$

darf man G_1 und G_2 durch die FE-Lösungen ersetzen, $J_1(G_2^h) = J_2(G_1^h)$.

Bemerkung 3.7. Den klassischen Maxwell, $\delta_{12} = \delta_{21}$ unter Einzelkräften siehe Bild 4.1 Seite 418, kann man auch aus der Mohrschen Arbeitsgleichung herleiten, wenn man zur Berechnung der Durchbiegungen δ_{ij} schwache Einflussfunktionen benutzt, denn dann ist die Symmetrie im Ergebnis eine einfache Konsequenz der **Symmetrie der Wechselwirkungsenergie**

$$\delta_{12} = a(w_1, w_2) = a(w_2, w_1) = \delta_{21}\,. \tag{3.241}$$

Bei ‚höheren' Dirac Deltas, δ_3, δ_4 (Balken), muss man allerdings über den Satz von Betti gehen, weil es für $M(x)$ und $V(x)$ keine schwachen Einflussfunktionen gibt.

Lagersenkung

Der Satz von Maxwell beantwortet auch die Frage, wie man Einflussfunktionen auswertet, wenn sich ein Lager senkt, wie z.B. das mittlere Lager der Wandscheibe in Bild 3.54. Dargestellt ist dort die Einflussfunktion für σ_{yy} in einem Element. Die Spreizung des Aufpunktes erzeugt in dem Lager eine vertikale Lagerkraft R_y von 119 259 kN und damit ergibt sich die Spannung zu

$$\sigma_{yy} = -119\,259 \cdot \Delta_y = \text{Lagerkraft aus EF} \times \text{Lagersenkung}\,, \tag{3.242}$$

wenn Δ_y (in y-Richtung positiv) die Lagerbewegung ist.

3.33 Die inverse Steifigkeitsmatrix

Die FE-Einflussfunktion für die Verschiebung $u(x)$ in einem Knoten x_k hat die Form

$$G_h(y, x_k) = \sum_i g_i(x_k)\, \varphi_i(y)\,. \tag{3.243}$$

Der Vektor $\boldsymbol{g} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}^T$ ist die Lösung des $n \times n$ Systems

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_k \qquad (\text{Einheitsvektor } \boldsymbol{e}_k)\,, \tag{3.244}$$

was bedeutet, dass die **Spalten** $\boldsymbol{g}_k$ der inversen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{g}_k \tag{3.245}$$

die Knotenverschiebungen sind, die zu den n **Einflussfunktionen** $G_h(y, x_k)$ der n Knoten x_k gehören

$$G_h(y, x_k) = \sum_i g_{ki}\, \varphi_i(y) = \boldsymbol{g}_k^T\, \boldsymbol{\varphi}(y)\,, \tag{3.246}$$

mit $\boldsymbol{\varphi}(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_n(y)\}^T$.

Das erklärt, warum die Inverse einer **tri-diagonalen Matrix** voll besetzt ist. Schon eine einzelne Punktlast $P = 1$ zwingt alle Knoten dazu, ihre Lage zu korrigieren. Die Inverse einer Differenzenmatrix wie $\boldsymbol{K}$ (man denke an ein Seil $(\ldots 0\ \ -1\ \ 2\ \ -1\ \ 0\ \ \ldots) \cdot H/l_e$) ist also eine ‚integrierende Matrix'.

Eine Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ‚differenziert' und ihre Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ‚integriert'. Die Inverse ist *immer* voll besetzt und sie ist symmetrisch (wegen Maxwell).

3.34 Beispiele

Das mit einer Kraft H vorgespannte Seil in Bild 3.55 a wurde in fünf lineare Elemente unterteilt. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$

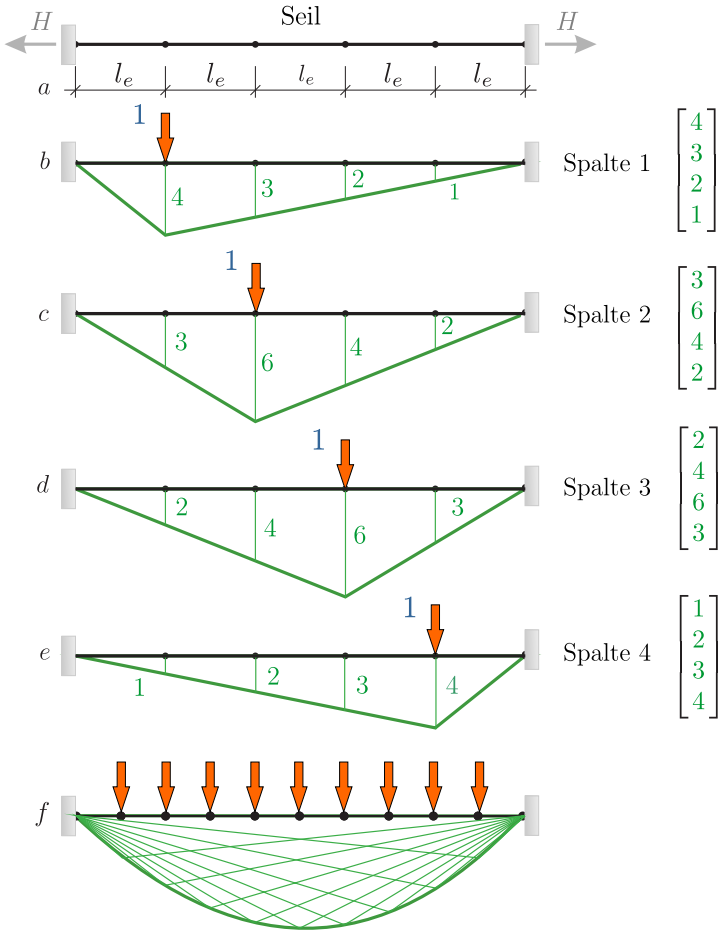


Bild 3.55. **a)** Seil aus $n = 5$ Elementen, **b-e)** die Durchbiegungen sind die Spalten der inversen Steifigkeitsmatrix (alle Werte mal $l_e/(5\,H)$), **f)** wenn n wächst, werden die Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$ immer ähnlicher, $cond(\boldsymbol{K})$ wächst

$$\boldsymbol{K} = \frac{H}{l_e}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.247}$$

ist tri-diagonal, aber die Inverse

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{l_e}{5\,H}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.248}$$

ist dagegen voll besetzt. Die Spalten $\boldsymbol{g}_k$ der Inversen, siehe die Bilder 3.55 b—f, sind die Durchbiegungen der Knoten, wenn im Knoten x_k eine Einzelkraft $P = 1$ steht – deswegen sind alle Einträge > 0 (nur beim Seil so).

Die **Zeilensumme** der Inversen, ein Vektor $\boldsymbol{s}$ mit den Einträgen $s_i = \sum_j k_{ij}^{(-1)}$ stellt ein ‚Sensitivitäts-Profil' der Matrix da, denn er verrät welche Knoten sich am stärksten verformen, wenn alle $f_j = 1$ sind, weil

$$w_h(x_i) = \int_0^l G_h(y, x_i)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{4} g_j(x_i) \int_0^l \varphi_j(y)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(-1)} f_j$$

$$= \sum_{j=1}^{4} k_{ij}^{(-1)} = s_i \qquad \text{(Summe über Zeile } i\text{)}\,. \tag{3.249}$$

Das sind hier die Knoten 2 und 3. Man kann aber auch andere Selektionskriterien anwenden, wie horizontale oder vertikale f_i.

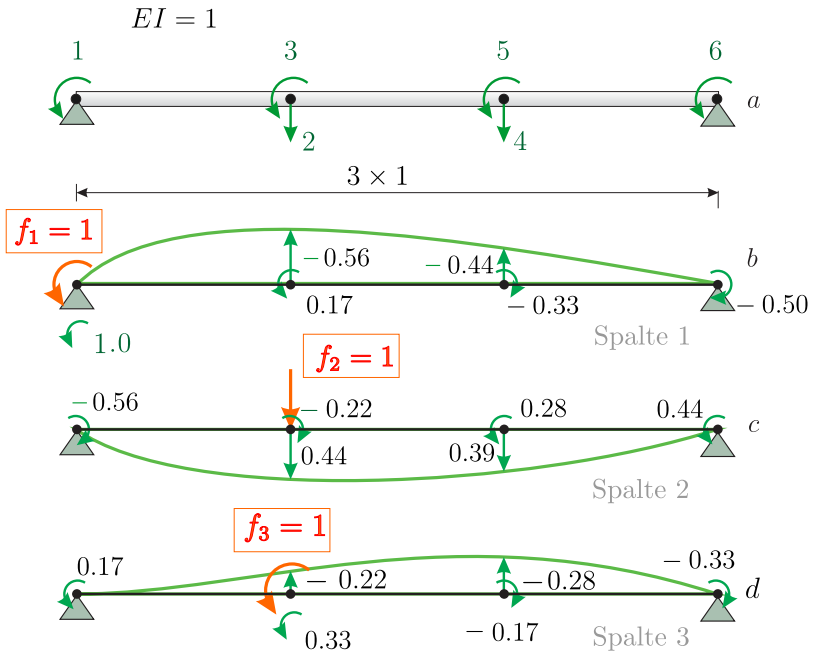


Bild 3.56. **a)** Unterteilung eines Balkens in drei Elemente, **b)** Biegelinie aus $f_1 = 1$ (Spalte 1 von $\boldsymbol{K}^{-1}$), **c)** aus $f_2 = 1$ (Spalte 2 von $\boldsymbol{K}^{-1}$), **d)** aus $f_3 = 1$ (Spalte 3)

Zu dem Balken in Bild 3.56, es sei $EI = 1$ und $l_e = 1$, gehört die Steifigkeitsmatrix

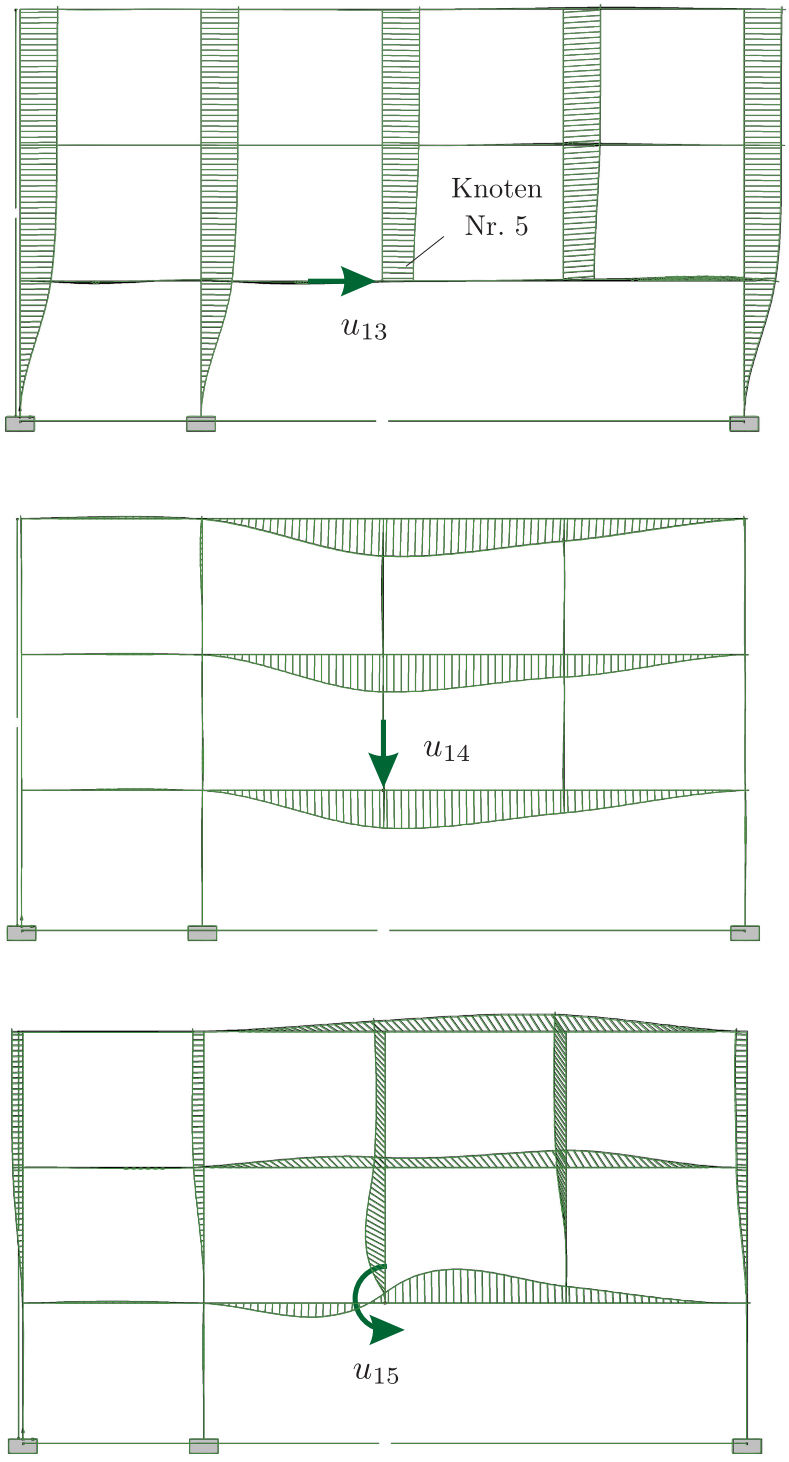


Bild 3.57. Die Knotenverschiebungen dieser drei Einflussfunktionen sind die Spalten #13, #14 , #15 der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ (BE-FRAMES)

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.250}$$

und die **Spalten der Inversen** (die ersten drei sieht man in Bild *b, c, d*)

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.56 & 0.17 & -0.44 & -0.33 & -0.50 \\ -0.56 & 0.44 & -0.22 & 0.39 & 0.28 & 0.44 \\ 0.17 & -0.22 & 0.33 & -0.28 & -0.17 & -0.33 \\ -0.44 & 0.39 & -0.28 & 0.44 & 0.22 & 0.56 \\ -0.33 & 0.28 & -0.17 & 0.22 & 0.33 & 0.17 \\ -0.50 & 0.44 & -0.33 & 0.56 & 0.17 & 1.00 \end{bmatrix} \tag{3.251}$$

sind die Knotenbewegungen in den sechs Grundlastfällen $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$, wenn also jeweils ein Knoten belastet wird, $i = 1, 2, \ldots 6$.

Dies gilt auch für ganze Rahmen, siehe Bild 3.57. Die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen (genauer: sind die Knotenwerte der EF).

Eine Einzelkraft $f_i = 1$ in Richtung eines Freiheitsgrades u_i lenkt die Knoten aus. Die Energie, die dabei erzeugt wird, steht auf der Diagonalen $\{g_{ii}\}$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$, denn

$$a(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_i) = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{e}_i = g_{ii}\,. \tag{3.252}$$

Je größer g_{ii} ist, desto weiter ist der Ausschlag, desto weicher ist das Tragwerk in Richtung von u_i, denn $2 \cdot W_e = 1 \cdot u_i = 2 \cdot W_i = g_{ii}$. Überraschend ist das nicht, denn $g_{ii} = f_{ii}$ ist ja das Diagonalelement der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$.

Bemerkung 3.8. Man beachte, dass die Spalten der inversen Balkenmatrix abwechselnd Einträge w und w' enthalten und deswegen muss man erst in Gedanken die Einträge mit den zugehörigen φ_i multiplizieren, um sich ein Bild von der Einflussfunktion machen zu können, siehe Bild 3.56 und Bild 3.59. Bei einem Seil oder Stab ist das einfacher, da sieht man das Seileck direkt.

3.35 Der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ hat zwei Basen

Alle *shapes*, alle Verformungen, die ein FE-Modell annehmen kann, sind Entwicklungen nach den *shape functions* $\varphi_i(x)$, siehe Bild 3.58,

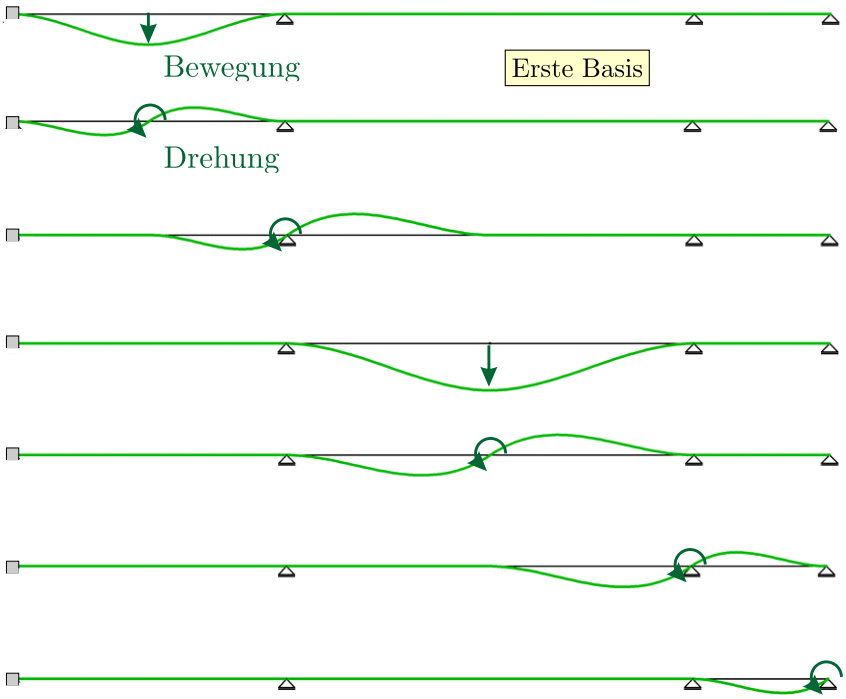


Bild 3.58. Die Einheitsverformungen der Knoten bilden eine Basis des $\mathcal{V}_h$

$$u_h(x) = \sum_i u_i \, \varphi_i(x) \, . \tag{3.253}$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}$ ist die **Adresse** der Funktion bezüglich der Basis $\varphi_i(x)$. Nun gibt es aber noch eine zweite Basis in $\mathcal{V}_h$ nach der man $u_h(x)$ entwickeln kann und zwar sind das die ***Spalten(funktionen)*** der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1} = [g_{ij}]$

$$g_j(x) = \sum_i g_{ij} \, \varphi_i(x) \, , \tag{3.254}$$

denn

$$\boxed{u_h(x) = \sum_i u_i \, \varphi_i(x) = \sum_{i,j} g_{ij} \, f_j \, \varphi_i(x) = \sum_j g_j(x) \, f_j} \, . \tag{3.255}$$

Die Funktion $g_j(x)$ ist die Verformung, wenn man die g_{ij} in Spalte j als Wege v_i nimmt, $v_i = g_{ij}$, sie ist also das lebendige Bild der Spalte j, es ist ihr ***shape***, siehe Bild 3.59,

$$g_j(x) = \sum_i v_i \, \varphi_i(x) = \sum_i g_{ij} \, \varphi_i(x) \, . \tag{3.256}$$

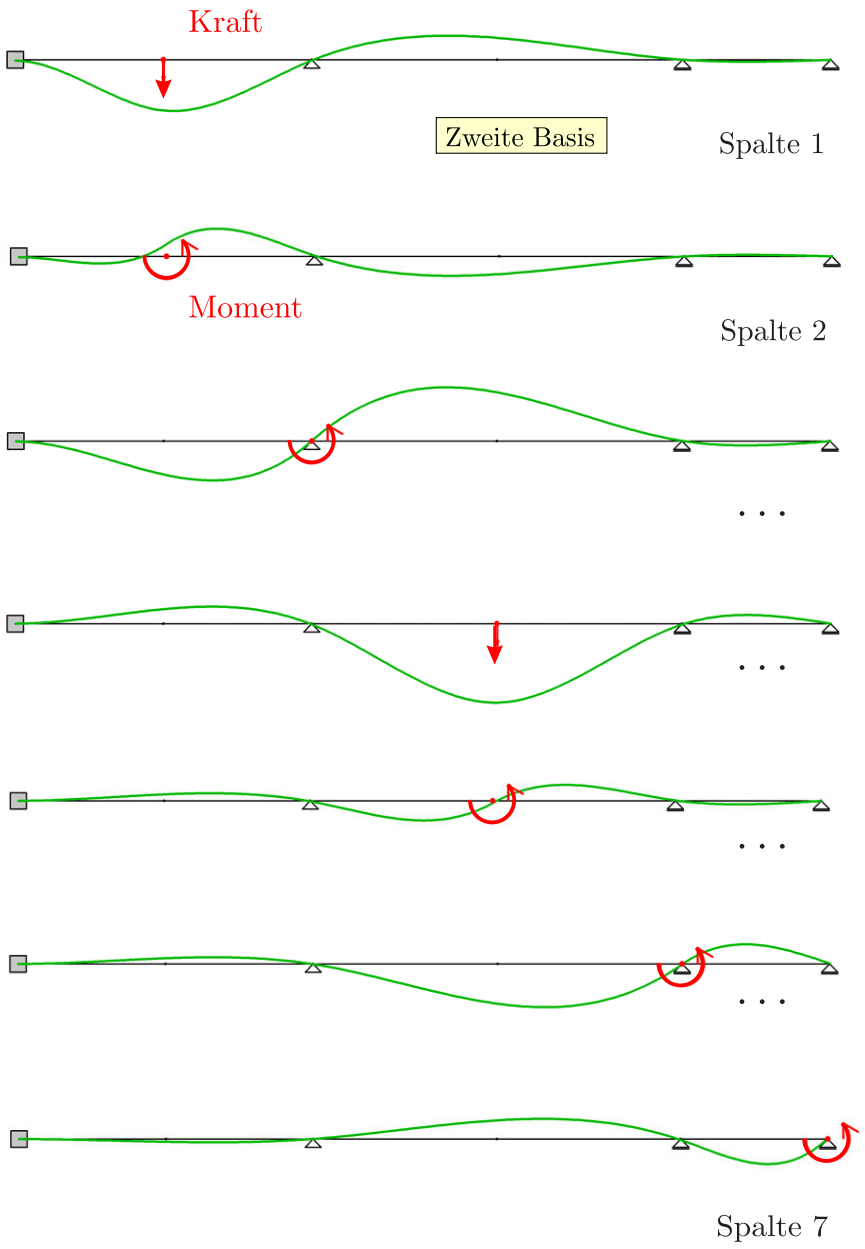


Bild 3.59. Die Spaltenfunktionen des Trägers bilden eine alternative Basis des $\mathcal{V}_h$. Jede Biegelinie entspricht einer Spalte der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$. Diese Biegelinien sind gleichzeitig die Einflussfunktionen für die zugehörigen u_i (BE-FRAMES)

Die Adresse von u_h bezüglich dieser Basis sind die Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$.

Während die eine Basis, die $\varphi_i(x)$, gestückelt ist, aus einer Aneinanderreihung von *kurzwelligen, kurzatmigen* Knotenverformungen besteht, ist die andere Basis ***langwellig***, denn die $g_i(x)$ strecken ihre Fühler über das ganze Tragwerk aus. Sie sind die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen u_i.

Eine Knotenkraft $f_1 = 1$ im Knoten x_1 (und $f_i = 0$ sonst) produziert gemäß

$$u_h(x) = \sum_j g_j(x)\, f_j \tag{3.257}$$

die Verformung $u_h(x) = 1 \cdot g_1(x)$ in dem Rahmen. Nach dem Satz von Maxwell erzeugt eine Einzelkraft $P = 1$ in einem Punkt x daher in dem Knoten x_1 die Verschiebung $g_1(x)$.

Die $g_i(x)$ stellen die anschauliche, die Ingenieur-Basis von $\mathcal{V}_h$ dar und sie markieren gleichzeitig die maximale Breite dessen, was technisch auf einem FE-Netz möglich ist – mehr geht nicht. Ein FE-Programm kennt nur n Lastfälle $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$, alle anderen Lastfälle sind Wiederholungen, sind Rekombinationen dieser Grundlastfälle mit unterschiedlichen Knotenlasten f_i.

Natürlich, in der Stabstatik kann man die FE-Lösung nachbessern, indem man stabweise die lokalen Lösungen dazu addiert, das geht aber bei Flächentragwerken leider nicht. Da sind die $g_i(\boldsymbol{x})$ wirklich ‚das Ende der Fahnenstange'.

Es sei noch angemerkt, dass auch die anderen Einflussfunktionen dem Diktat der $g_i(\boldsymbol{x})$ unterliegen. So entsteht die Einflussfunktion für ein Moment $m_{xx}(\boldsymbol{x})$ in einem Aufpunkt $\boldsymbol{x}$, wenn man als äquivalente Knotenkräfte $j_i = m_{xx}(\varphi_i(\boldsymbol{x}))$ die Momente der *shape functions* im Aufpunkt wählt. Die FE-Einflussfunktionen können nicht besser sein als die $g_i(\boldsymbol{x})$, denn alle anderen Einflussfunktionen

$$G_h(y,x) = \sum_i g_i(y)\, j_i(x) \qquad j_i(x) = J(\varphi_i)(x) \tag{3.258}$$

sind ein ‚*remix*' der $g_i(x)$, diese geben den Grundton an.

3.36 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion

Theorem 3.3 (Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion). *Es sei $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix des Tragwerks.*
(i) Die Einflussfunktion für $u_h(x)$, den Wert der FE-Lösung in einem Punkt x, ist

$$G_h(y,x) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(x) \tag{3.259}$$

wobei der Vektor

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}^T \tag{3.260}$$

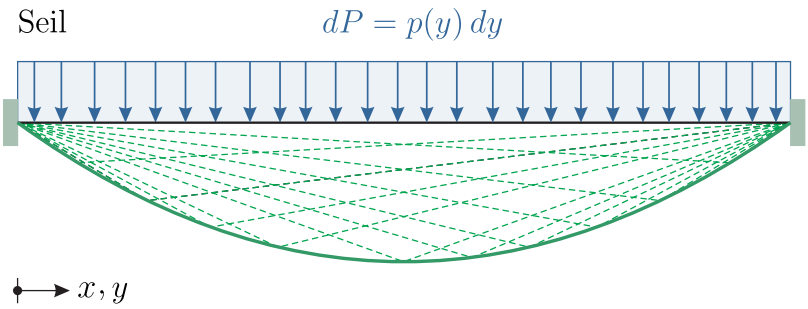


Bild 3.60. Die Biegelinie unter der Streckenlast p ist die Einhüllende der Seilecke aus den Einzelkräften dP

die Werte der Ansatzfunktionen in dem Punkt x sind, und $\boldsymbol{\varphi}(y)$ ist die Liste der Funktionen $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$.
(ii) Die Einflussfunktion für ein lineares Punktfunktional J ist

$$G_h(y,x) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{j}(x) \tag{3.261}$$

wobei der Vektor

$$\boldsymbol{j}(x) = \{J(\varphi_1), J(\varphi_2), J(\varphi_3), \ldots, J(\varphi_n)\}^T \tag{3.262}$$

die Liste der Werte $J(\varphi_i)(x)$ ist.

Die Biegelinie eines Seils ist die **Einhüllende** der unendlich vielen Einflussfunktionen, die jede für sich den Einfluss eines infinitesimalen Teils $p(y)\,dy$ der Belastung auf die Durchbiegung $w(x)$ beschreiben, siehe Bild 3.60,

$$w(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.263}$$

Im Unterschied hierzu ist die FE-Lösung $w_h(x) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\varphi}(x)$ darstellbar als eine Summe von ***endlich vielen*** Einflussfunktionen, die einzeln mit den äquivalenten Knotenkräften f_i der Knoten x_i gewichtet werden

$$w_h(x) = f_1\, G_h(x_1,x) + f_2\, G_h(x_2,x) + \ldots + f_n\, G_h(x_n,x)\,, \tag{3.264}$$

denn der Vektor $\boldsymbol{w}$ der Knotenwerte ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}^{-1}(f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= f_1\boldsymbol{g}_1 + f_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n\boldsymbol{g}_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \left[\, \boldsymbol{g}_k \,\right] \end{aligned} \tag{3.265}$$

und die Spalte $\boldsymbol{g}_k$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ entspricht $G_h(x_k, x)$.

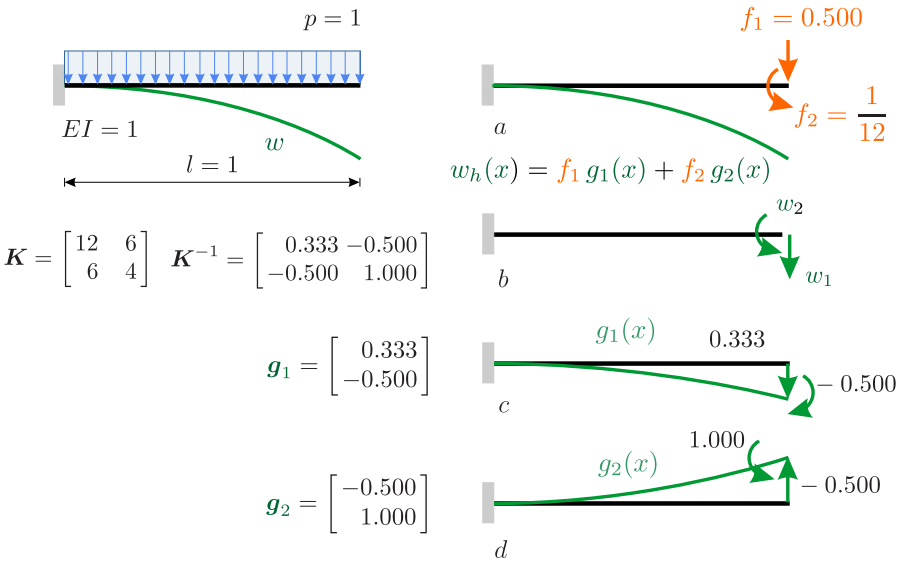


Bild 3.61. Kragträger **a)** äquivalente Knotenkräfte, **b)** Richtungen der positiven Knotenverformungen, **c)** Einflussfunktion $g_1(x)$ für w_1 und **d)** $g_2(x)$ für w_2 und in der Summe ist die FE-Lösung $w_h(x) = f_1\, g_1(x) + f_2\, g_2(x)$

Bild 3.61 illustriert dies am Beispiel eines **Kragträgers**. Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ des Trägers und ihre Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ lauten

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.500 \\ -0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{3.266}$$

und die FE-Lösung $\boldsymbol{u}$ ist eine Linearkombination der Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{u} = f_1\, \boldsymbol{g}_1 + f_2\, \boldsymbol{g}_2 = 0.5 \begin{bmatrix} 0.333 \\ -0.500 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -0.500 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -0.166 \end{bmatrix} . \tag{3.267}$$

Das $\boldsymbol{u}$ ist ein Vektor, es sind die Knotenwerte der FE-Lösung. Dasselbe gilt sinngemäß aber auch für einzelne Punkte x_P, denn

$$\begin{aligned} u_h(x_P) &= \int_0^l G_h(y, x_P)\, p(y)\, dy = \sum_k g_k(x_P) \int_0^l \varphi_k(y)\, p(y)\, dy \\ &= \sum_{k=1}^{n} g_k(x_P)\, f_k = \boldsymbol{g}(x_P)^T\, \boldsymbol{f} \,. \end{aligned} \tag{3.268}$$

Der Vektor $\boldsymbol{g}(x_P)$ ist die Lösung von $\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{g}(x_P) = \boldsymbol{j}(x_P)$ wobei der Vektor $\boldsymbol{j}$ die Komponenten $\varphi_k(x_P)$ hat. Nehmen wir an, es sind lineare Elemente und der Punkt x_P liege zwischen den Knoten x_i und x_{i+1}, dann gilt

$$\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{g}(x_P) = \boldsymbol{j}(x_P) = \varphi_i(x_P)\, \boldsymbol{e}_i + \varphi_{i+1}(x_P)\, \boldsymbol{e}_{i+1} \tag{3.269}$$

und somit ist $\boldsymbol{g}(x_P)$ eine Linearkombination der beiden benachbarten Spalten $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{g}_{i+1}$ der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$\boldsymbol{g}(x_P) = \varphi_i(x_P)\,\boldsymbol{g}_i + \varphi_{i+1}(x_P)\,\boldsymbol{g}_{i+1}\,. \tag{3.270}$$

3.37 Die Dominanz der Spalten g_i der Inversen

Man kann die obigen Resultate noch etwas prägnanter formulieren, indem man sich auf die Knotenvektoren konzentriert. Der Knotenvektor $\boldsymbol{g}$ einer Einflussfunktion

$$G(y,x) = \boldsymbol{g}^T(x)\,\boldsymbol{\varphi}(y) = \sum_i g_i(x)\,\varphi_i(y) \tag{3.271}$$

sind die Gewichte der Einflussfunktion bezüglich den *shape functions* und der Vektor $\boldsymbol{g}$ ist die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$, ist also eine Entwicklung nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen

$$\boldsymbol{g}(x) = \sum_i \boldsymbol{g}_i\, j_i(x)\,. \tag{3.272}$$

Und das gilt für jede (!) Einflussfunktion. Es ist wie ein ‚Stöckchenspiel'.

Alle Einflussfunktionen beruhen auf denselben n Spalten $\boldsymbol{g}_i$, nur wie die Spalten gewichtet werden, unterscheidet die einzelnen Einflussfunktionen.

Und wir vermuten natürlich, dass es vor allem die Spalten um den Aufpunkt herum sind, die die Summe (3.272) bestimmen. Die j_i sind also praktisch so etwas wie die Gewichte in einem Differenzenverfahren.

3.38 Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente

Wenn man die **Trennlinie** zwischen zwei Elementen überschreitet, dann springen die Spannungen. Das bedeutet aber doch, dass auch die Einflussfunktionen springen müssen. Wie kommt das?

Den Grund sieht man in Bild 3.62. Die äquivalenten Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für σ_{yy} in dem oberen Punkt $\boldsymbol{x}_1$ generieren, sind die Spannungen σ_{yy} der Knotenverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}_i$ in diesem Punkt. Weil nur die Ansatzfunktionen des Elements, in dem $\boldsymbol{x}_1$ liegt, Spannungen in dem Punkt $\boldsymbol{x}_1$ erzeugen, werden nur die vier Knoten des Elementes belastet. Wenn der Punkt in das nächste Element wandert, $\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2$, dann verschwinden diese Knotenkräfte und tauchen an den vier Knoten des Nachbarelementes auf.

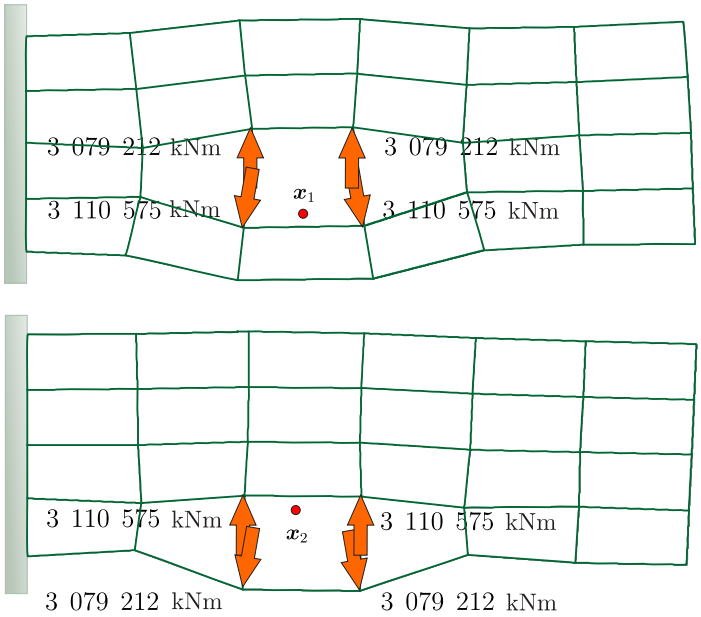


Bild 3.62. FE-Einflussfunktion für σ_{yy} in zwei benachbarten Punkten (WINFEM)

Dieser plötzliche Sprung in den belasteten Knoten ist der Grund, warum die Spannungen springen: ***Die Einflussfunktionen springen***.

Verschiebungen springen beim Überschreiten der Elementlinie nicht, weil sich die Einflussfunktionen nicht ändern. Wäre es anders, dann wären die Elemente nicht konform – dann wären die *shape functions* unstetig.

An Hand der Einflussfunktionen, siehe Bild 3.63, erkennt man im übrigen, dass Verschiebungen in den Knoten am genauesten sind (bei 1-D Problemen sind sie dort sogar exakt, wenn EA oder EI konstant sind) und Spannungen sind es in der Mitte der Elemente, siehe Bild 3.64.

Um die Durchbiegung eines Seils zwischen zwei Knoten zu berechnen, setzt man je ein halbes Dirac Delta in die beiden Nachbarknoten, man mittelt zwischen links und rechts, siehe Bild 3.2. Bei der Berechnung einer Knotenverschiebung hingegen kann man das Dirac Delta zielgenau plazieren. Es wirkt zu 100 % da, wo es wirken soll.

Wenn man Spannungen – gezwungenermaßen – an Knoten **mittelt**, dann ist das so, als ob man bei der Berechnung der Einflussfunktionen für die Spannungen die Elementgröße in der Umgebung des Knotens verdoppelt hätte.

Hierhin gehört auch das Thema ***Gausspunkte***, also die Beobachtung, dass in den Integrationspunkten die Ergebnisse genauer sind, als in den übrigen Punkten. Der Grund ist, dass der Fehler einer FE-Lösung eine ähnliche Verteilung aufweist, wie die **partikuläre Lösung** am allseits eingespannten Element – bei eindimensionalen Problemen stimmt das sogar genau – und die

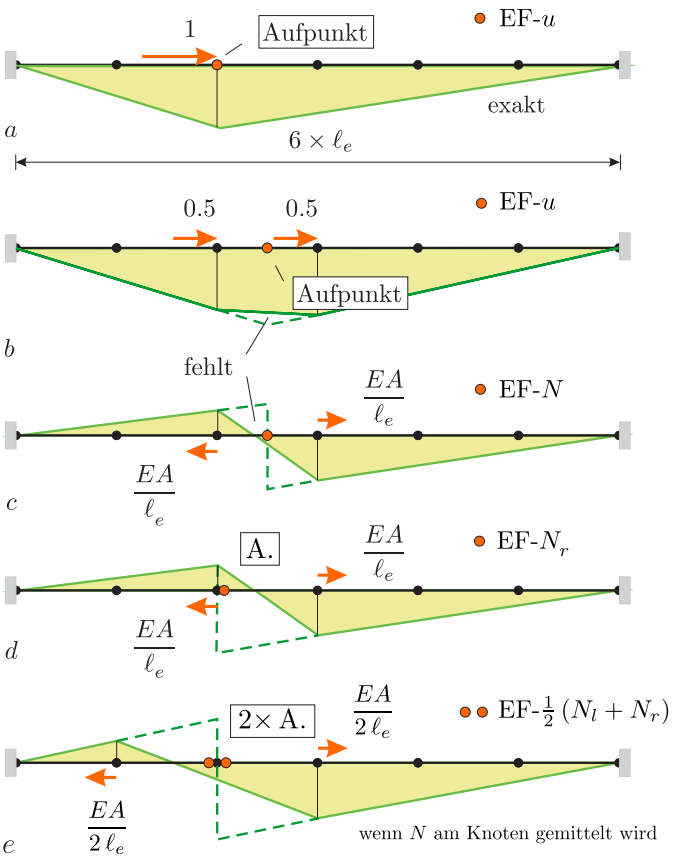


Bild 3.63. Einflussfunktionen bei einem Stab, **a)** EF für eine Knotenverschiebung, **b)** für die Verschiebung in Elementmitte, **c)** für $N(x)$ in Elementmitte, **d)** am Rand des Elements (Fehler bei Gleichlast ist größer als im Bild zuvor) und **d)** für den Mittelwert von N in einem Knoten

Nullstellen der Schnittkräfte dieser partikulären Lösungen genau in den Gausspunkten liegen, siehe Kapitel 4.12.

3.39 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung

Für eine **korrekte Kommunikation** zwischen dem Aufpunkt und der Belastung ist es wichtig, dass die Steifigkeiten auf dem Weg vom Aufpunkt zur Belastung richtig erfasst werden, weil davon sehr viel abhängt, siehe Bild 3.65.

Es ist anschaulich klar, dass diese Kommunikation um so **‚wackliger‘** wird, je weiter der Aufpunkt und die Last auseinander liegen, weil mit wachsender Entfernung immer mehr Bauteile zu passieren sind und sich so die Fehler aus nur näherungsweise richtig erfassten Steifigkeiten, $EA \pm \Delta EA$, $EI \pm \Delta EI$,

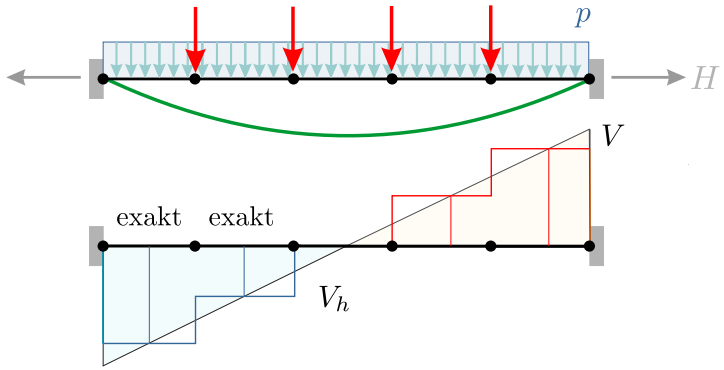


Bild 3.64. FE-Querkraft in einem vorgespannten Seil: In der Mitte der Elemente sind die Fehler in den Schnittgrößen in der Regel am kleinsten

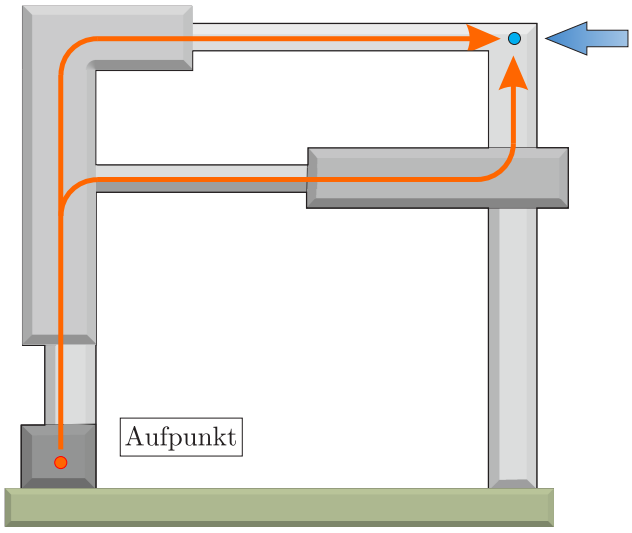


Bild 3.65. Auf dem Weg vom Aufpunkt zum Fußpunkt der Einzelkraft müssen alle Steifigkeiten richtig modelliert werden, denn nur dann werden die Einflusskoeffizienten (die Fortleitungszahlen) richtig erfasst

oder Einspanngraden $k_\varphi \pm \Delta k_\varphi$, kumulieren können, siehe Bild 3.66 und Bild 3.67. Zum Glück ist es aber so, dass in der Regel mit der Entfernung die Einflusskoeffizienten abnehmen und damit auch die Auswirkungen von möglichen Fehlern.

Bemerkung 3.9. Die Situation ist ähnlich wie in der Quantenmechanik, wo die Einflussfunktion, die ‚Summe', über alle Wegintegrale, über alle möglichen Pfade ist, die die Wellenfunktion nehmen kann. Eine kleine Änderung der

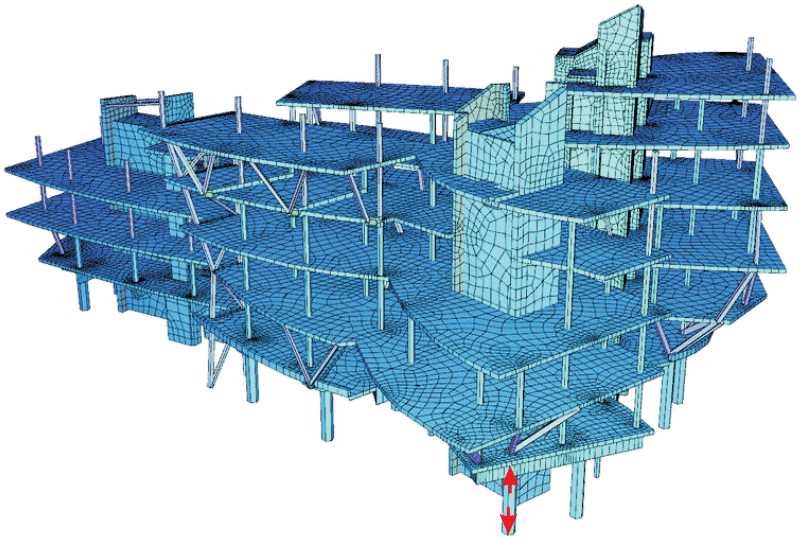


Bild 3.66. Eine Spreizung der Stütze erzeugt die Einflussfunktion für die Stützenkraft. Die korrekte Propagierung über das Tragwerk hängt von der korrekten Modellierung der Steifigkeiten ab, [193], (SOFiSTiK)

elastischen Eigenschaften in einem begrenzten Bereich und die Summe, die Einflussfunktion $G(y,x)$, ändert sich.

3.40 Die Spalten von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$

Nachdem wir jetzt auch Einflussfunktionen mit finiten Elementen berechnen können, wollen wir die Spalten der beiden Matrizen $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$ vergleichen.

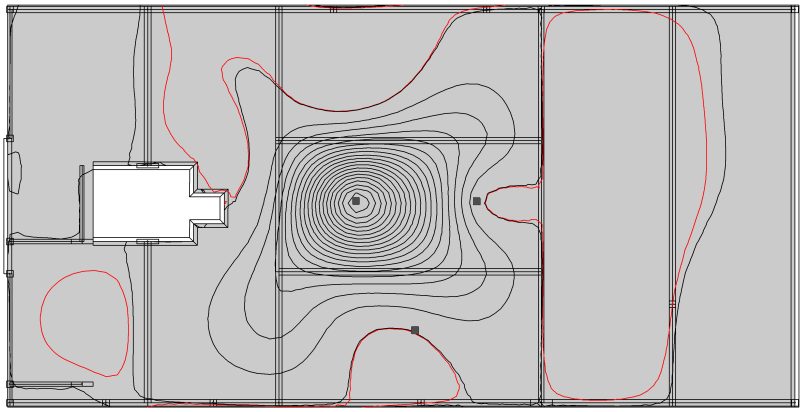
Die Spalten von $\boldsymbol{K}$

Eine Steifigkeitsmatrix lässt sich spaltenweise auf zwei Arten lesen

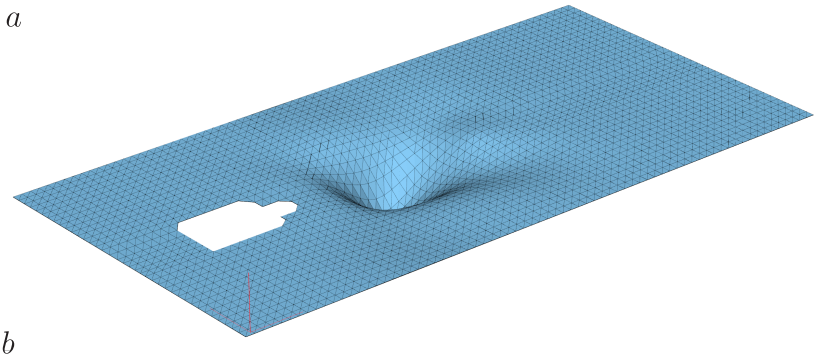
$$\boldsymbol{K} = [\underbrace{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_n}_{\delta W_i}] = [\underbrace{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n}_{\delta W_e}] \,. \tag{3.273}$$

Gemäß der zweiten Darstellung, siehe Bild 3.68

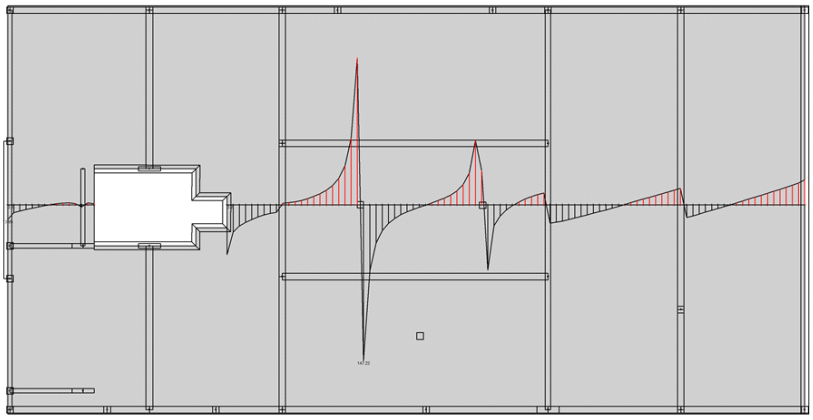
$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = u_1 \cdot \boldsymbol{f}_1 + u_2 \cdot \boldsymbol{f}_2 + \ldots + u_n \cdot \boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{f}_h \,, \tag{3.274}$$



a



b



c

Bild 3.67. Erst alle Steifigkeiten zusammen bestimmen die Form der Einflussfunktion für die zentrale Stütze unter der Hochbaudecke, **a)** Niveaulinien, **b)** 3-D Darstellung, **c)** Längsschnitt mit q_x im LF g (BE-PLATTE)

stehen in der Spalte $\boldsymbol{f}_i$ die Knotenkräfte zu den $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, denn $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$.

Wegen $\mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_j) = \delta W_e - \delta W_i = 0$, ist die Komponente f_{ij} in dem Vektor $\boldsymbol{f}_i$ gleich der Wechselwirkungsenergie $f_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = k_{ij}$, und daher können wir die Spalte $\boldsymbol{f}_i$ auch als einen Vektor $\boldsymbol{k}_i$ lesen, dessen Einträge die Überlagerung der Spannungen aus φ_i mit den Verzerrungen der verschiedenen φ_j ist.

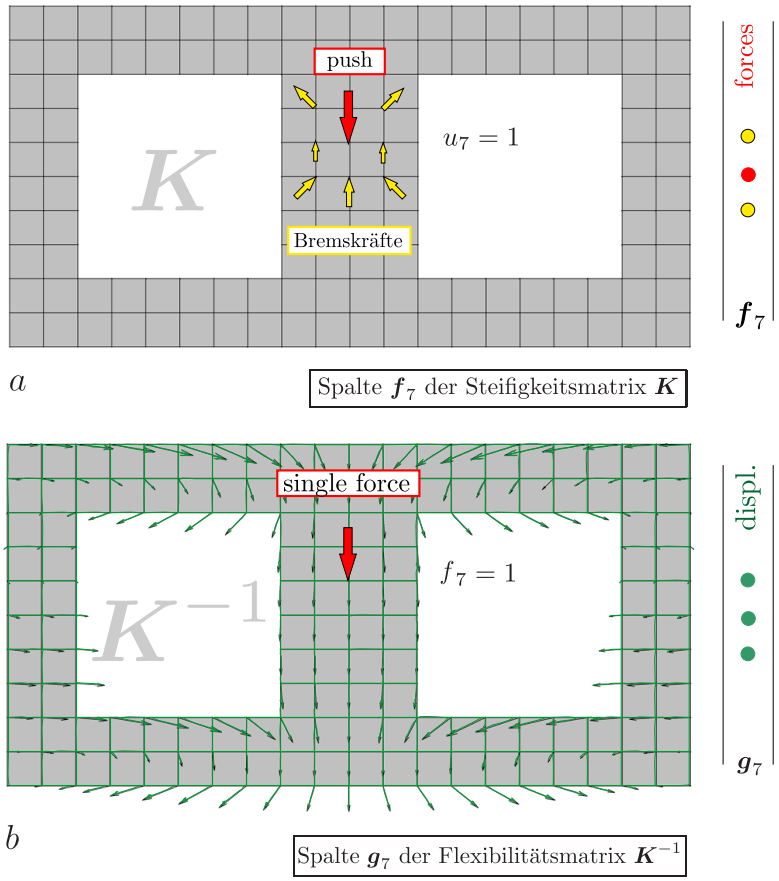


Bild 3.68. $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$, **a)** die Kräfte, die die Bewegung $u_7 = 1$ und $u_i = 0$ sonst auslösen bzw. abbremsen, stehen in Spalte $\boldsymbol{f}_7$ von $\boldsymbol{K}$ und **b)** die Verschiebungen u_i aus $f_7 = 1$ und $f_i = 0$ sonst stehen in Spalte $\boldsymbol{g}_7$ von $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$. Anders als $\boldsymbol{K}$ ist $\boldsymbol{K}^{-1}$ voll besetzt, weil alle Punkte von der Punktlast verschoben werden (WINFEM)

Die Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$

Die Matrix $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$ bildet den Vektor $\boldsymbol{f}$ der äquivalenten Knotenkräfte[20] auf den Vektor $\boldsymbol{u}$ ab

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = f_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 + f_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 + \ldots + f_n \cdot \boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{u}\,, \tag{3.275}$$

oder komponentenweise

$$u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f} = \sum_j g_{ij} f_j = \sum_j g_{ij} \int_0^l \varphi_j(y)\, p\, dy\,, \tag{3.276}$$

was belegt, dass

$$G_h(y, x_i) = \sum_j g_{ij}\, \varphi_i(y) \tag{3.277}$$

die Einflussfunktion für u_i ist

$$u_i = \int_0^l G_h(y, x_i)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.278}$$

Die g_{ij} sind die Elemente von $\boldsymbol{K}^{-1}$ und die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ sind die Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$, die ja die Knotenvektoren der Einflussfunktionen sind.

Wir notieren noch

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_i \qquad \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{f}_i\,. \tag{3.279}$$

Die Inverse heißt wegen der Richtung $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$ die **Flexibilitätsmatrix** $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$, aber man könnte sie auch ***Greensche Matrix G*** nennen.

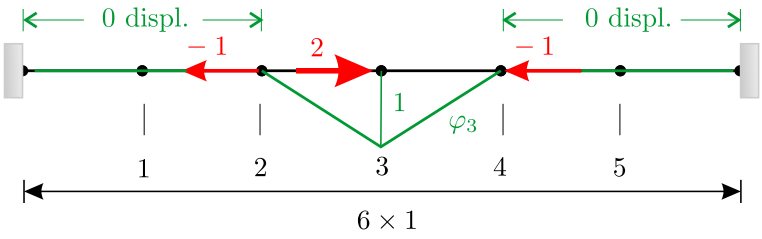
In Bild 3.68 wird z.B. ein Knoten ausgelenkt, $u_7 = 1$ und $u_j = 0$ sonst. Die äquivalenten Knotenkräfte, die den Knoten auslenken, bzw. die Bewegung in den Nachbarknoten abstoppen, stehen in Spalte $\boldsymbol{f}_7$ von $\boldsymbol{K}$. Es ist ein ‚lokales' Ereignis, denn *‚the neighborhood remains small even if the world is big'* (G. Strang), $\boldsymbol{f}_7 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_7 =$ ***schwach besetzt*** ($\boldsymbol{e}_7$ ist hier das $\boldsymbol{u}$). Die Vektoren $\boldsymbol{f}_i$ stellen die *push-stop-Kräfte* eines Netz dar; $\boldsymbol{e}_i$ ist der *push* und die Einträge in Spalte $\boldsymbol{f}_i$ sind die *stop*-Kräfte (bis auf den Knoten selbst).

Nun zu $\boldsymbol{K}^{-1}$, der Systemantwort auf die Lasten. Es reicht eine Einzelkraft $f_7 = 1$, siehe Bild 3.68 b, und die ganze Scheibe reagiert. Es ist ein ‚globales' Ereignis, der Vektor $\boldsymbol{g}_7 = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_7$ ist ***voll besetzt***, alle Knoten bewegen sich, sind ‚durchwebt' ($\boldsymbol{e}_7$ ist hier das $\boldsymbol{f}$, da nur $f_7 = 1$ besetzt ist).

Bild 3.69 zeigt diese Zusammenhänge an einem eingespannten Stab, bei dem die Indices 2 - 3 - 4 direkt aufeinander folgen.

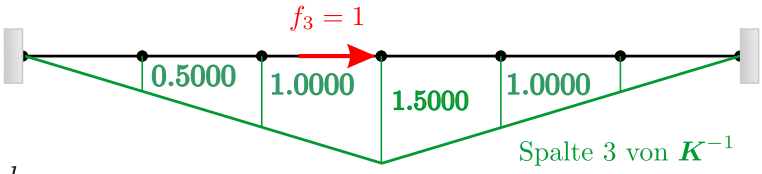
Bei einem Rahmenknoten wird es natürlich zwischen dem FG u_j an dem Knoten selbst und den FG der Nachbarknoten Sprünge in der Nummerierung

[20] Uns gehen die Symbole aus. Das $\boldsymbol{f}$ ist hier natürlich der Vektor aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$



a $EA/\ell_e = 1$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{Bremskraft} \\ \longrightarrow \text{push} \\ \longleftarrow \text{Bremskraft} \end{matrix}$$



b

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8333 & 0.6667 & \mathbf{0.5000} & 0.3333 & 0.1667 \\ 0.6667 & 1.3333 & \mathbf{1.0000} & 0.6667 & 0.3333 \\ 0.5000 & 1.0000 & \mathbf{1.5000} & 1.0000 & 0.5000 \\ 0.3333 & 0.6667 & \mathbf{1.0000} & 1.3333 & 0.6667 \\ 0.1667 & 0.3333 & \mathbf{0.5000} & 0.6667 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

Bild 3.69. Die Bedeutung der Spalten von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^{-1}$ am Beispiel eines eingespannten Stabes

geben, aber es gilt weiterhin, dass die k_{ij} der Nachbarknoten alle in **derselben** Spalte (Zeile) j stehen. Die Lücken dazwischen sind nicht besetzt, sind null. Nur Nachbarknoten, die sich ‚sehen', tauschen Energien (k_{ij}) aus, siehe Bild 3.70 und 3.71. Deswegen sind Steifigkeitsmatrizen ja schwach besetzt. Theoretisch kann man eine Steifigkeitsmatrix von Hand zusammenbauen. Man geht von Knoten zu Knoten und notiert welche Kräfte nötig sind, den Knoten auszulenken – genauer die einzelnen FG des Knotens – und wie groß die Bremskräfte sein müssen, damit die Bewegung an den umliegenden Knoten zum Stillstand kommt.

Ist die Matrix dann aufgestellt, so hält man zunächst alle Knoten – bis auf einen – fest, belastet den Knoten mit der Knotenkraft f_j und berechnet, um wieviel Weg u_j man den Knoten auslenken muss, damit die dazu nötige Kraft

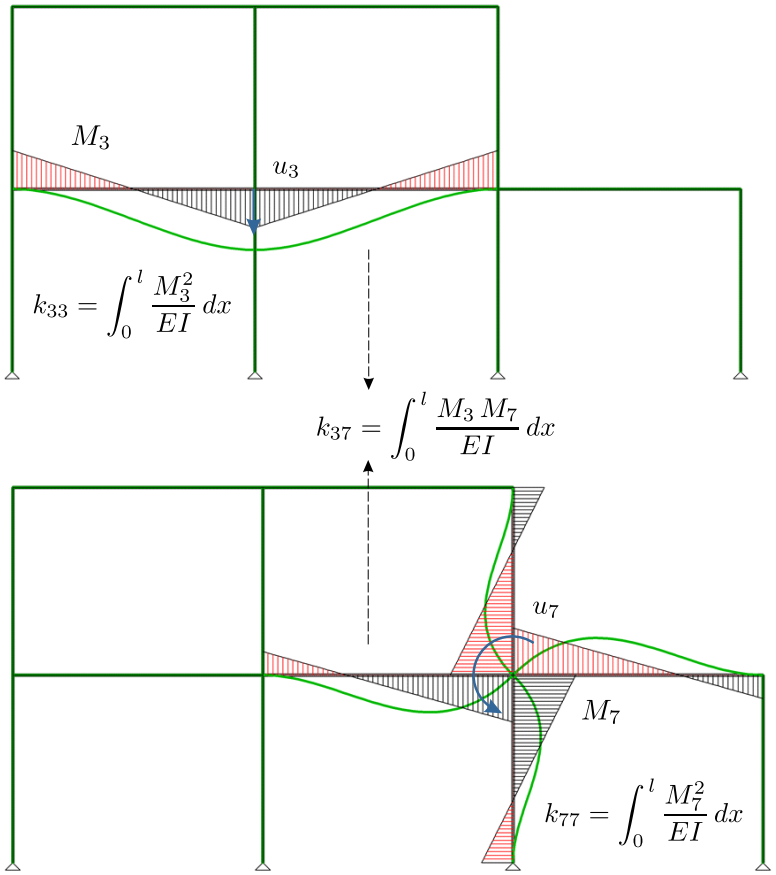


Bild 3.70. Die k_{ij} sind die Skalarprodukte der Momente der *shape functions* (im Fall $EA < \infty$ sind auch die Normalkräfte zu überlagern).

$k_{jj}\,u_j$ gerade so groß wie f_j ist

$$\text{Auslenkkraft} \;\rightarrow\quad k_{jj}\,u_j = f_j \quad\leftarrow\; \text{äußere Knotenkraft}\,. \tag{3.280}$$

Dann sperrt man den Knoten und geht zum nächsten Knoten, in dem (eventuell) eine Knotenkraft f_i wirkt und zusätzlich jetzt die Bremskraft $k_{ij}u_j$ aus dem vorherigen Knoten. Der Knoten wird ausgeglichen und das Spiel wiederholt sich, bis alle Knoten ausgeglichen sind. Am Schluss hat man das System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst. Wegen

$$\text{Bremskraft} = k_{ij}\,u_j = k_{ij}\frac{f_j}{k_{jj}} = \mu_{ij}\,f_j \tag{3.281}$$

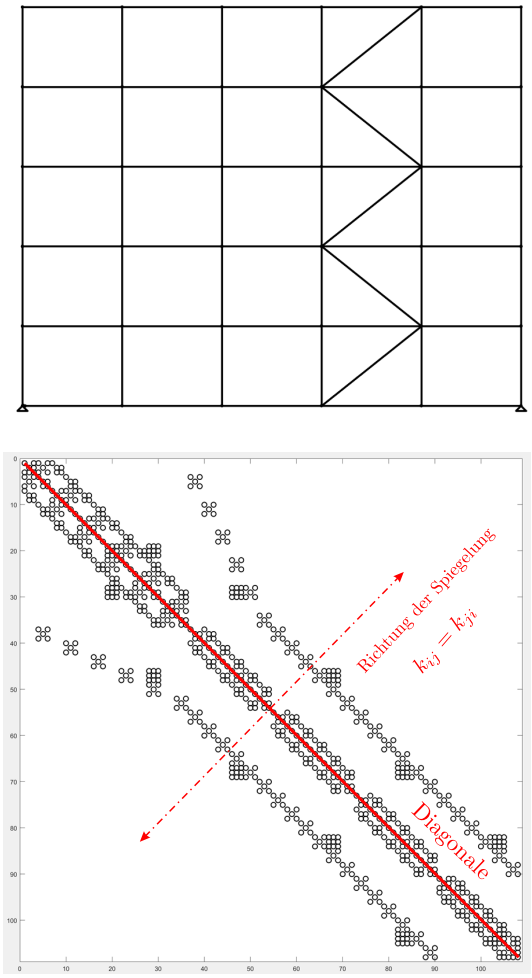


Bild 3.71. Die Einträge k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix konzentrieren sich um die Diagonale – mit gelegentlichen *‚outliern‘* (MATLAB, `spy(K)`).

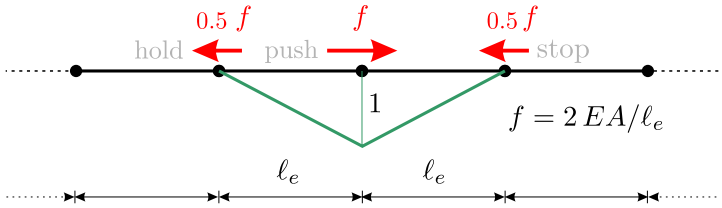


Bild 3.72. Der Übergang zum Dirac Delta mit $\ell_e \to 0$.

sind die Quotienten $k_{ij}/k_{jj} = \mu_{ij}$ die **Fortleitungszahlen**.

Die Identität $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}$

Mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ kommen wir auf die Identität

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}\,, \tag{3.282}$$

die im Grenzfall, $n \to \infty$, dem Integral

$$u(x) = \int_0^l \delta_0(y-x)\,u(y)\,dy \tag{3.283}$$

entspricht, siehe Bild 3.72. Je kleiner die Elementlänge l_e wird, umso mehr gleicht die Aktion der drei Knotenkräfte der Wirkung eines Dirac Delta.

Steifigkeit und Flexibilität

Die Gleichung

$$\frac{1}{g_{ii}} \stackrel{?}{=} k_{ii} \tag{3.284}$$

ist sehr suggestiv, aber die Diagonalen von $\boldsymbol{K}^{-1}$ und $\boldsymbol{K}$ sind natürlich nicht die jeweiligen Kehrwerte. Auf der Diagonalen der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ stehen die

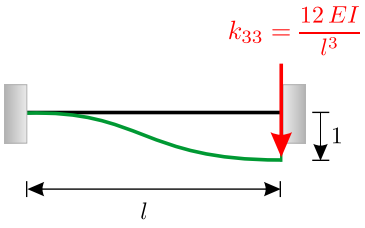


Bild 3.73. Je kürzer das Element ist, desto schwerer lässt es sich auslenken

Flexibilitäten $g_i \equiv g_{ii}$ in Richtung der u_i, und die Kehrwerte $1/g_{ii}$ sind die Steifigkeiten k_i, wenn wir sie so nennen wollen, in Richtung der u_i. Wie bei einer Feder kann man also invertieren, nur ist $1/g_{ii} \neq k_{ii}$.

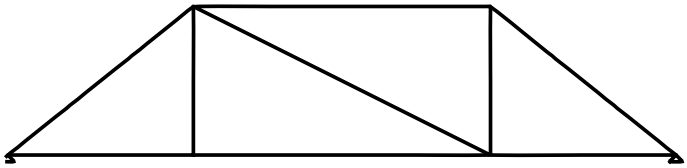
Der Eintrag k_{ii} auf der Diagonalen von $\boldsymbol{K}$ ist die Steifigkeit, die Kraft $k_{ii} \cdot 1 = f_i$, wenn nur $u_i = 1$ bewegt wird und alle anderen $u_j = 0$ gesperrt sind. Das k_{ii} weiß nichts von der weiteren Umgebung, weiß nicht ob noch drei oder vier Stockwerke folgen, während diese Information für die Bestimmung der g_{ii} wesentlich ist. Die k_{ij} sind also **lokale Größen**, hängen nur von der Nachbarschaft ab, könnten auch in jeder anderen Matrix stehen, während die g_{ij} **Systemantworten** sind, die von dem Ganzen wissen.

Steifigkeit und Elementgröße

Je kleiner die Elemente werden, desto größer werden ihre Steifigkeiten, siehe Bild 3.73. Das k_{ii} eines Stabelements ist die Kraft, die nötig ist, um einen der beiden Endknoten um 1 m zu verschieben. Hat das Element die Länge $l = 1$ m, dann ist $u = 1$ m gleichbedeutend mit $\varepsilon = \Delta u/l = 1/1 = 1$ und $\sigma = E$.

Der E-Modul ist die Spannung $\sigma = E \cdot \varepsilon$, bei der sich die Länge l eines Stabes verdoppelt, $\varepsilon = 1$.

Spannung mal Fläche ist die zugehörige Kraft k_{ii} und so erklärt sich, warum die k_{ij} in der Statik so groß sind und warum mit schrumpfender Elementlänge $l \to 0$, die Dehnungen $\varepsilon = 1/l$ und die Kräfte k_{ij} gegen ∞ gehen. Das Verhältnis ε der ‚Norm- oder Eichbewegung' $u_i = 1$ zur Elementlänge l und der E-Modul bestimmen die k_{ij}.



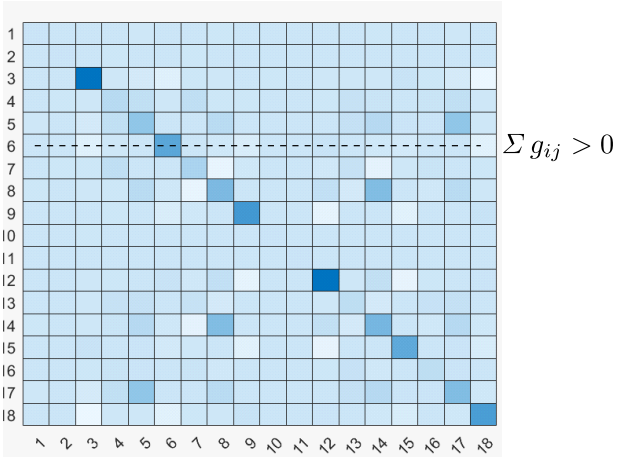


Bild 3.74. Die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ist wie $\boldsymbol{K}$ ‚diagonaldominant'. Der Effekt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f}$ einer Kraft f_j auf ein u_i ist am größten, wenn die Kraft direkt im Knoten angreift

Beim Balken entspricht dem $\sigma = E\,\varepsilon$ die Gleichung $M = EI\,\kappa$. Um einen Balken um den Einheitskreis ($\kappa = r = 1$) zu wickeln, braucht man das Moment $M = EI$. Zur Krümmung des Kreises siehe Wikepedia.

3.41 Die Inverse als Analysetool

Bei den *Gurus* gilt man schnell als *Greenhorn*, wenn man vorschlägt die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ zu berechnen, aber man verpasst so doch einfache Möglichkeiten ein Tragwerk zu analysieren.

3.41.1 Maximale Verformungen

Weil die Elemente g_{ij} der Inversen die Knotenwerte der Einflussfunktionen sind

$$u_i = \int_0^l G_h(y, x_i)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int_0^l g_{ij}\, \varphi_j(y)\, p(y)\, dy = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, f_j = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}\,, \tag{3.285}$$

kann man die g_{ij} dazu benutzen, um überschlägig die Laststellungen zu finden, die die maximale Verformung in einem Knoten x_i erzeugen, denn angenommen alle f_i sind eins, dann ist die maximal auftretende Verformung in dem Knoten die Summe über die Werte $g_{ij} > 0$ in der Spalte i

$$\max\, u_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \qquad g_{ij} > 0\,, \tag{3.286}$$

also die **Quersumme** in Zeile i (Spalte = Zeile), die Summe über die positiven Werte. Diese Knoten sind als Lastknoten zu wählen, siehe Bild 3.74.

Die typische Frage, ob denn eine Last f_j im 3. Stock einen Einfluss auf die Verformung u_i eines Knotens im 1. Stock hat, kann man also einfach an Hand der Größe des Elementes g_{ij} der Inversen beantworten.

Man könnte auch Karten (*plots*) generieren, wie weit die Kräfte f_j maximal von einem fest gewählten Knoten entfernt sein dürfen, damit noch etwas in u_i spürbar ist. Das wären dann alle Knoten mit $|g_{ij}| > \varepsilon$, also größer als eine gewisse Schranke ε.

Das geht mit jeder beliebigen Größe, sprich jedem Funktional $J(u)$. Man muss ja einfach nur rechnen

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{j} \qquad j_i = J(\varphi_i)(x) \tag{3.287}$$

und kann dann das ‚Zeilenkriterium' auf den Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion $J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ anwenden, sprich die Komponenten g_i nach positiven und negativen Werten sortieren

$$g_i \gtrless 0 \tag{3.288}$$

und weiß dann, welche $f_i \gtrless 0$ einen **positiven** bzw. **negativen** Beitrag zu $J(u)$ leisten.

3.42 Lokale Änderungen und die Inverse

Das Thema Inverse gibt uns auch Gelegenheit darauf hinzuweisen, dass **lokale Steifigkeitsänderungen** die ganze Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ ändern, auch wenn sich nur eine Zahl in $\boldsymbol{K}$ ändert.

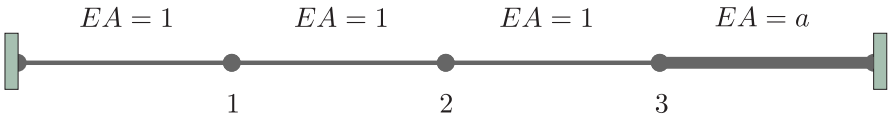


Bild 3.75. Stab aus vier Elementen

Der Stab in Bild 3.75 hat im letzten Element die Längssteifigkeit $EA = a$ im Unterschied zu den ersten drei Elementen wo $EA = 1$ ist

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1+a \end{bmatrix}, \tag{3.289}$$

aber das a taucht in jedem Element der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ auf, weil beim Lösen von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ durch die Determinante $3\,a + 1$ dividiert wird

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{3\,a+1} \begin{bmatrix} 2a+1 & a+1 & 1 \\ a+1 & 2a+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.290}$$

Eine *lokale* Steifigkeitsänderung ändert also den Verlauf der Einflussfunktionen im *ganzen* Tragwerk.

Das macht **model updating** so schwierig. Wenn Steifigkeitsänderungen jeden Koeffizienten der Inversen ändern, welches Element ist dann für die Abweichung zwischen den Rechenwerten $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ und den gemessenen Daten verantwortlich?

In Kapitel 5.19 werden wir aber sehen, dass sich die Ableitungen von $\boldsymbol{u}$ nach den k_{ij} an Hand der Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen berechnen lassen, denn

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j\, \boldsymbol{e}_i = -u_j\, \boldsymbol{g}_i}, \tag{3.291}$$

und damit lassen sich die Verschiebungsinkremente, $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = \partial \boldsymbol{u}/\partial k_{ij} \cdot \Delta k_{ij}$ abschätzen.

3.43 Das Weggrößenverfahren

Das Weggrößenverfahren basiert auf der Beobachtung, dass die Kenntnis der Weggrößen u_i an den ‚Rändern', in den Knoten, ausreicht, um die Schnittkräfte in den Stäben zu berechnen, siehe Kapitel 1.20. Die Zahl der unbekannten u_i ist der ***Grad der kinematischen Unbestimmtheit***. Die Aufgabe ist es, herauszufinden, wie sich die u_i unter Last einstellen. Dies führt auf dasselbe System, $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$, wie bei den finiten Elementen.

3.43.1 Wie kommt man auf $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$?

Wir stellen uns einen Rahmen vor, der aus mehreren Stäben besteht, zu denen je eine horizontale Verschiebung $u(x)$ und vertikale Biegelinie $w(x)$ gehört, also ein ‚Sammelsurium' von Funktionen. Wir werden uns aber im Folgenden kurz halten und in der Notation so tun, als hätten wir es nur mit einem Stab zu tun und alles auf eine Funktion $u(x)$ reduzieren, die stellvertretend für all die anderen Funktionen in dem Rahmen stehen möge. Wir betreiben ja hier mehr Algebra als Mathematik.

Zuerst werden alle Knoten festgehalten und die Belastung in die Knoten reduziert, d.h. es werden die äquivalenten Knotenkräfte, die ***actio***,

$$d_i = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx \tag{3.292}$$

berechnet, siehe Bild 3.76 b. Die Festhaltekräfte sind die ***reactio***, $-d_i$. Wichtig ist, dass man die exakten $\varphi_i(x)$ benutzt, weil nur diese die exakten Einflussfunktionen für die äquivalenten Knotenkräfte sind.

Wir erinnern daran, dass das $\boldsymbol{f}$ auf der rechten Seite von $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$ eine Summe von zwei Vektoren

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} \tag{3.293}$$

ist. In dem Vektor $\boldsymbol{f}_K$ stehen die Kräfte, die direkt in den Knoten angreifen und der Vektor $\boldsymbol{d}$ enthält die äquivalenten Knotenkräfte aus der verteilten Belastung.

Lässt man dann die Knoten los, so stellt sich die Figur $u_R(x)$ (R = reduziert, Lagerknoten gesperrt) ein, die die Gleichgewichtslage des Rahmens unter der Wirkung der Knotenlasten $f_i = f_{Ki} + d_i$ ist, siehe Bild 3.76 c.

Das Weggrößenverfahren berechnet nur die Figur $u_R(x)$. Was fehlt, wird am Schluss als lokale Lösung stabweise zu $u_R(x)$ addiert, $u(x) = u_R(x) + u_{loc}$.

Weil $u_R(x)$ eine homogene Lösung ist, kann man sie stabweise mit den *shape functions* $\varphi_i(x)$ darstellen,

$$u_R(x) = \sum_i u_i\,\varphi_i(x)\,, \tag{3.294}$$

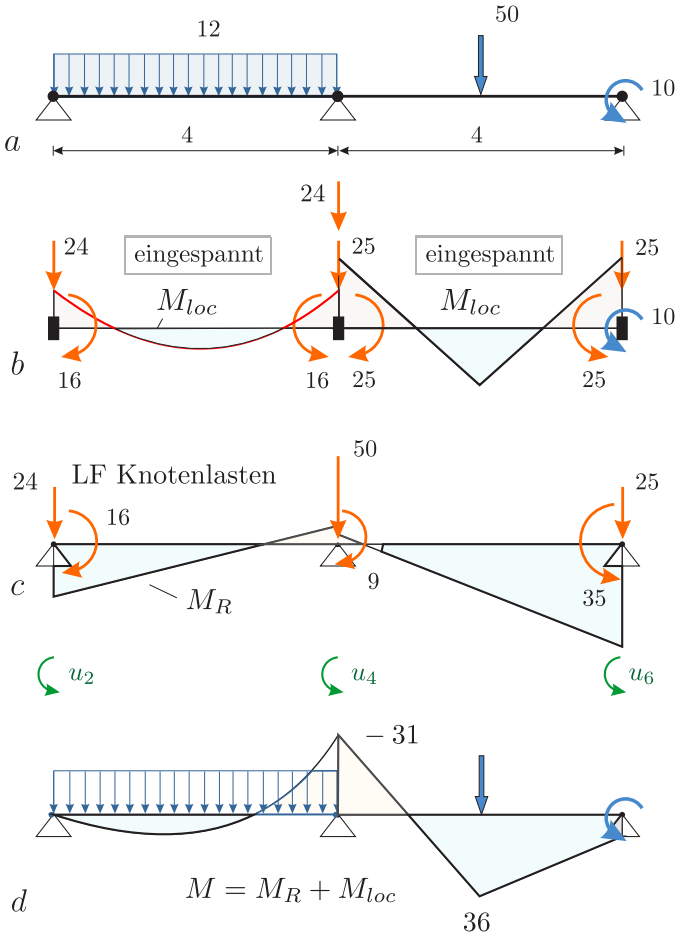


Bild 3.76. Weggrößenverfahren **a)** System, **b)** Äquivalente Knotenkräfte am festgehaltenen System und Momente der lokalen Lösung, **c)** Momente M_R im Lastfall Knotenlasten $= \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{p}$, **d)** Momente $M = M_R + M_{loc}$; M_R sind die Momente der Biegelinie w_R, wenn also erst die Streckenlasten in die Knoten reduziert wurden und dann die Knoten gelöst wurden

denn die $\varphi_i(x)$ bilden in jedem Stab **ein vollständiges System** von homogenen Lösungen.

Es fehlen noch die Knotenverschiebungen u_i. Diese bestimmen wir mit Hilfe der ersten Greenschen Identität. Die Identität $\mathscr{G}(u,v) = 0$ ist für alle Paare (u,v) von Funktionen null, und daher muss sie auch für jedes Paar $(u_R, \varphi_j), j = 1, 2, \ldots n$ null sein

$$\mathscr{G}(u_R, \varphi_j) = f_j - a(u_R, \varphi_j) = f_j - \sum_i u_i \, a(\varphi_i, \varphi_j) = 0\,, \qquad (3.295)$$

was das System

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3.296}$$

oder hier

$$\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_4\\ u_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-16\\ -9\\ 25\end{bmatrix} = \boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{d} \tag{3.297}$$

ergibt. So kommt die Steifigkeitsmatrix in das Weggrößenverfahren hinein.

Wenn man das System (3.296) in Einzelschritten löst (Verfahren von *Gauss-Seidel*), dann entspricht das dem Vorgehen des *Drehwinkelverfahren* und wenn man in es einem Schritt löst, dann macht man es wie die finiten Elemente.

Bemerkung 3.10. Dass sich in (3.295) die äußere Arbeit δW_e auf ein f_j

$$\delta W_e = f_j = [V_R\,\varphi_j - M_R\,\varphi_j']_0^l = \sum_{i=1}^{4} f_i(u_R)\,u_i(\varphi_j) \tag{3.298}$$

reduziert, ist hoffentlich klar, denn $u_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker Delta). Hier steht $u_i(\varphi_j)$ für die Weggrößen $u_1(\varphi_j) = \varphi_j(0), u_2(\varphi_j) = \varphi_j'(0), u_3(\varphi_j) = \varphi_j(l), u_4(\varphi_j) = \varphi_j'(l)$.

3.43.2 Handberechnung von K

Bei einer Handberechnung stellt man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ spaltenweise von Hand auf. Die Spalte $\boldsymbol{f}_i$ enthält ja die äquivalenten Knotenkräfte, die zur Einheitsverformung $\varphi_i(x)$ gehören. Also aktiviert man einen Freiheitsgrad (FG), $u_i = 1$, sperrt alle anderen FG und berechnet, welche Kräfte f_{ij} dies in Richtung der u_j ergibt. Das f_{ii} ist die äquivalente Knotenkraft, die den Knoten auslenkt und die anderen f_{ij} sind die äquivalenten Knotenkräfte in Richtung der übrigen u_j, die die Bewegung abstoppen.

So kann man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]$ spaltenweise direkt berechnen, was den kleinen Vorteil hat, dass man unter Umständen Freiheitsgrade sparen kann, man nicht jeden Stab als Vollstab mit $6 = 3 \times 2$ Freiheitsgraden ansetzen muss, sondern z.B. einen Pendelstab als ein 2×2 bzw. 4×4 (schräge Lage) Element behandeln kann.

Die Handberechnung wird ergänzt von der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte $\boldsymbol{f}$ und am Schluss wird das System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst.

3.43.3 Drehwinkelverfahren

Früher hat man das Aufstellen und Lösen des Systems $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ vermieden, ist man iterativ vorgegangen, wie in den Verfahren von ***Cross*** und ***Kani***,

[99]. Exemplarisch wollen wir die einzelnen Schritte am Drehwinkelverfahren erläutern.

1. Erst werden alle Knoten festgehalten und die Schnittkraftverläufe (= lokale Lösungen) und die Festhaltekräfte in den Knoten berechnet.
2. Knotenweise werden dann die Knoten ausgeglichen: Man löst einen Knoten und stellt das Gleichgewicht her, erlaubt dem Knoten also sich so zu verdrehen, dass die inneren Momente dem Lastmoment das Gleichgewicht halten können. Der Ausgleich an einem Knoten führt zur Weiterleitung von Momenten an die (weiterhin festgehaltenen) Nachbarknoten.
3. Danach wird der Knoten wieder gesperrt und der nächste Knoten ausgeglichen. Nach drei- bis viermaligen Durchläufen konvergiert das Verfahren in der Regel, weil die Größe der weiterzuleitenden Momente relativ schnell abnimmt.

Man beginnt also, wie bei den finiten Elementen, mit der Reduktion der Belastung in die Knoten. Aber während die finiten Elemente das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ heute in einem Schritt lösen, hat der Praktiker das System im Grunde früher iterativ gelöst, zeilenweise, was dem Verfahren von *Gauss-Seidel* entspricht. Das ist, aus mathematischer Sicht, im Grunde der einzige Unterschied zwischen dem Drehwinkelverfahren und den finiten Elementen. Wenn sich natürlich der Ingenieur so auch das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ erspart hat.

Bemerkung 3.11. Das Weggrößenverfahren bildet traditionsgemäß den Gegenpol zum Kraftgrößenverfahren. Die starke ‚Magnetwirkung' der finiten Elementen hat dazu geführt, dass das Verfahren heute meist in einer Matrizenschreibweise dargestellt wird.

Wir geben daher zu Bedenken, ob man das Weggrößenverfahren nicht gleich in FE-Schreibweise formulieren sollte, denn dann spart man Zeit, kann schon sehr früh die finiten Elemente (noch als exakte, homogene Lösungen) einführen und hat den ganzen Apparat zur Hand, um aus den Elementmatrizen die Steifigkeitsmatrix zu erzeugen.

Die ‚echten' finiten Elemente kann man ja dann als Galerkin-Verfahren einführen, als Projektion der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$, mit derselben Gleichung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ wie beim Weggrößenverfahren und der Student hat den Vorteil, dass er in dem Neuen das Vertraute wiedererkennt.

3.44 Mohr und die Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{K}^{-1}$

Es sei $\boldsymbol{K}$ die Steifigkeitsmatrix eines Fachwerks. Die Steifigkeit k_i des Fachwerks in Richtung des Freiheitsgrades u_i bestimmt sich gemäß

$$k_i = \frac{1}{u_i}\,, \tag{3.299}$$

wobei u_i die Verschiebung ist, die aus einer Einzelkraft $f_i = 1$ resultiert.

Der Verschiebungsvektor in diesem Lastfall ist $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i$ und dies ist der Grund, warum die Verschiebung

$$u_i = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i = g_{ii} \tag{3.300}$$

mit dem Eintrag g_{ii} auf der Diagonalen der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$ identisch ist.

Wir könnten u_i aber auch mit dem **Mohrschen Arbeitsintegral**

$$u_i = g_{ii} = \sum_e \frac{N_e^2\, l_e}{EA_e} \tag{3.301}$$

berechnen, wobei N_e die Normalkraft in dem Stab e im Lastfall $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$ ist.

Bei Stockwerkrahmen würde dieselbe Gleichung wie folgt lauten

$$u_i = g_{ii} = \sum_e \int_0^{l_e} \left(\frac{N_e^2}{EA_e} + \frac{M_e^2}{EI_e}\right) dx\,, \tag{3.302}$$

wobei N_e und M_e die korrespondierende Bedeutung haben.

In moderner Notation könnten wir das auch schreiben als

$$g_{ii} = a(u^{(i)}, u^{(i)})\,, \tag{3.303}$$

wenn $u^{(i)}$ die FE-Lösung des Lastfalls $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$ ist. Die Verallgemeinerung auf die Nebendiagonalen ist offensichtlich

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{e}_i = \sum_e \frac{N_e^{(i)}\, N_e^{(j)}\, l_e}{EA_e} = a(u^{(i)}, u^{(j)})\,. \tag{3.304}$$

3.45 Querschnittsänderungen

An den Einflussfunktionen kann man sehr schön ablesen, wie steife Zonen Kräfte anziehen und weiche Zonen vermieden werden.

Wenn, wie in Bild 3.77 b, das Material in der eingebetteten Zone härter ist als die Umgebung, dann wird die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in der Mitte der Zone weit ausstrahlen, d.h. ein relativ großer Anteil der Belastung fließt durch die steife Zone. Umgekehrt, wenn die Zone weicher ist als die Umgebung, dann wird die Umgebung die Ausbreitung der Spreizung des Aufpunktes verhindern und so wird nur ein kleiner Teil der Belastung durch den weichen Kern fließen.

Der Effekt beruht wesentlich auf dem Wechselspiel zwischen den beiden Zonen und nicht auf der Größe der f_i, mit denen das Element gespreizt wird,

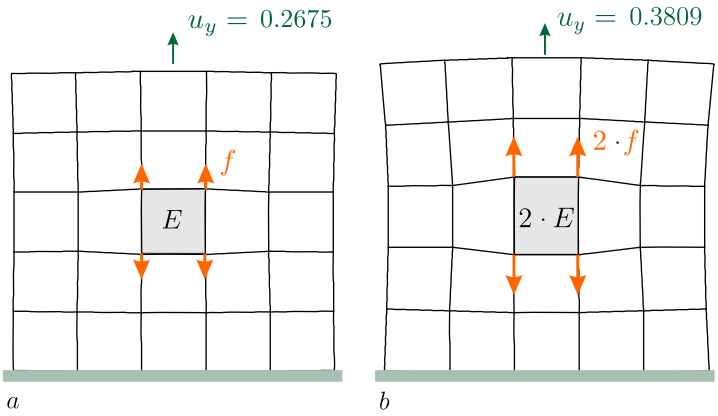


Bild 3.77. Einflussfunktion für $\sigma_{yy} \cdot t$, (Dicke), **a)** ohne Verdopplung und **b)** mit Verdopplung des E-Moduls

obwohl diese im Fall $2 \cdot E$ ungefähr doppelt so groß sind wie im Fall E. Es ist aber so, dass im Fall $2 \cdot E$ sich das gespreizte Element erfolgreicher dagegen wehrt, von den umgebenden Elementen zurückgedrückt zu werden als im Fall E, und daher ist das u_y am oberen Rand größer.

Ähnlich ist es bei der Platte in Bild 3.78, wo die Hauptmomente um den geschwächten Bereich herumfließen.

Die Bild 3.79 belegt sehr schön, wie die Effekte von Steifigkeitsänderungen bei Flächentragwerken richtungsbhängig sind (‚Richtungsquantelung'). Eine Stützenkopfverstärkung verursacht Sprünge in den Momenten m_{yy}, aber nicht in den Momenten m_{xx}, siehe Bild 3.79 a. In einem vertikalen Schnitt wäre es umgekehrt, dann würde m_{yy} durchlaufen, aber m_{xx} würde springen.

Zu dem Thema gehören auch **starre Inklusionen** in einem FE-Netz, also einzelne oder mehrere Elemente, deren Steifigkeit verglichen mit den Nachbarn sehr groß ist. Es reicht, wegen EI/l^3, dass ein Element sehr kurz ist, wie etwa eine Konsole. Dann sind die Differenzen in den Knotenverschiebungen des Elements sehr klein und das bedeutet umgekehrt, dass die Spalten der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ im Bereich des Elements sehr ähnlich sind, und es daher nahezu egal ist, in welchem Knoten der starren Inklusion eine Kraft angreift. Fast gleiche Spalten bedeutet aber auch, dass die Inverse fast singulär ist, und das FE-Programm Schwierigkeiten haben wird, die Knotenverschiebungen der Inklusion, die sich ja nur minimal unterscheiden, präzise auseinanderzuhalten.

3.46 Sensitivitätsplots

Das Ergebnis $J(u_h) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$ ist das Skalarprodukt aus dem Vektor $\boldsymbol{g}$, also den Knotenwerten der Einflussfunktion, und dem Vektor $\boldsymbol{f}$ der äquivalenten Knotenkräfte aus der Belastung. Dieses Skalarprodukt kann man als eine Summe über die N Knoten des FE-Netzes schreiben

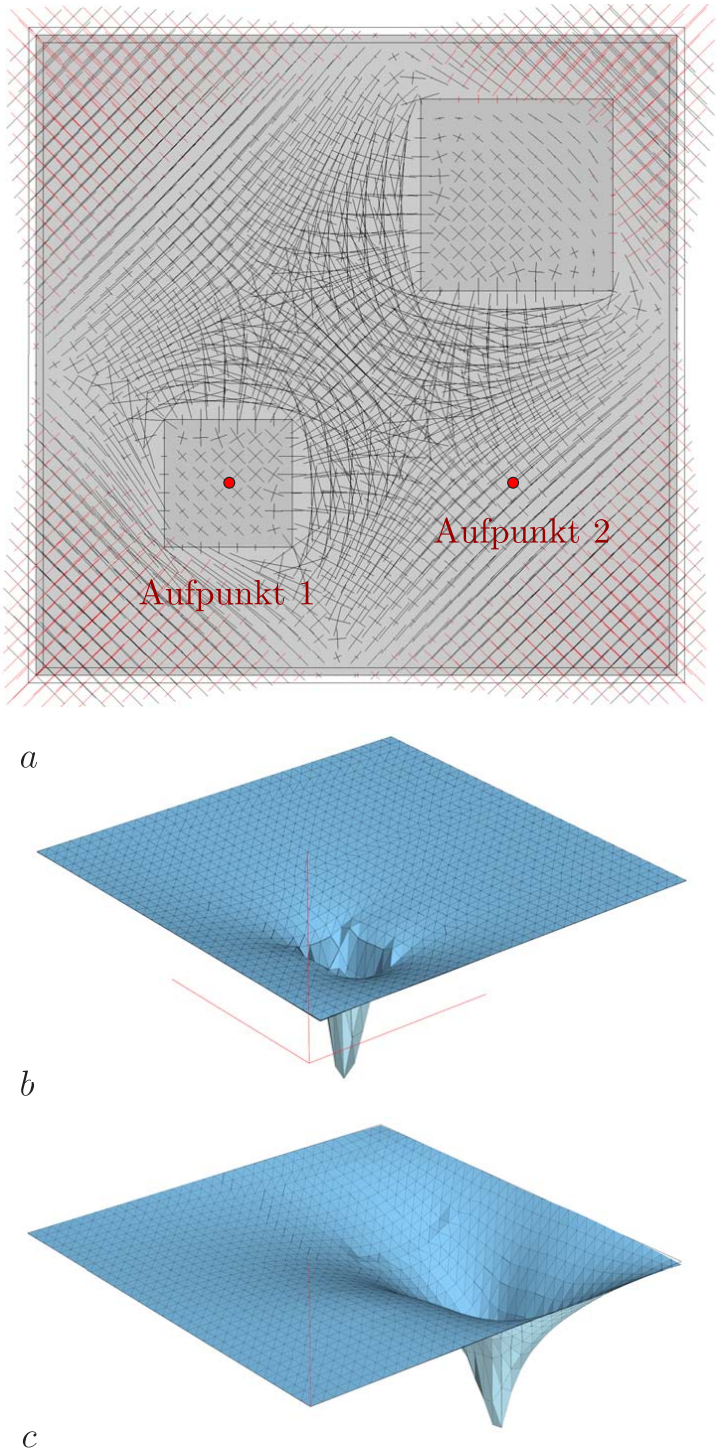
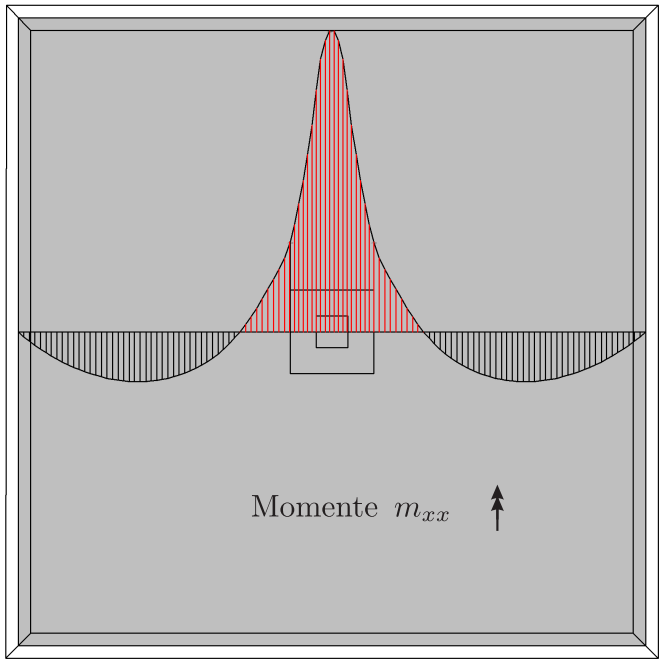
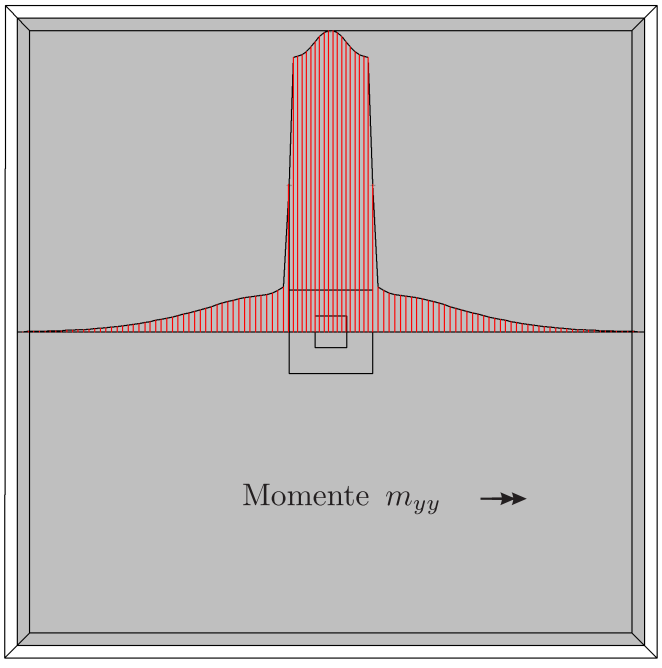


Bild 3.78. Hochbauplatte mit zwei abgeminderten Bereichen, 20 cm statt 40 cm im LF g, **a)** Hauptmomente, **b)** Einflussfunktion für m_{xx} im Aufpunkt 1 und **c)** im Aufpunkt 2 (BE-PLATTE)



a



b

Bild 3.79. Platte mit Stützenkopfverstärkung, Verteilung der **a)** Momente m_{xx} (Bew. in x-Richtung) und **b)** m_{yy} (Bew. in y-Richtung), [91], (BE-PLATTE)

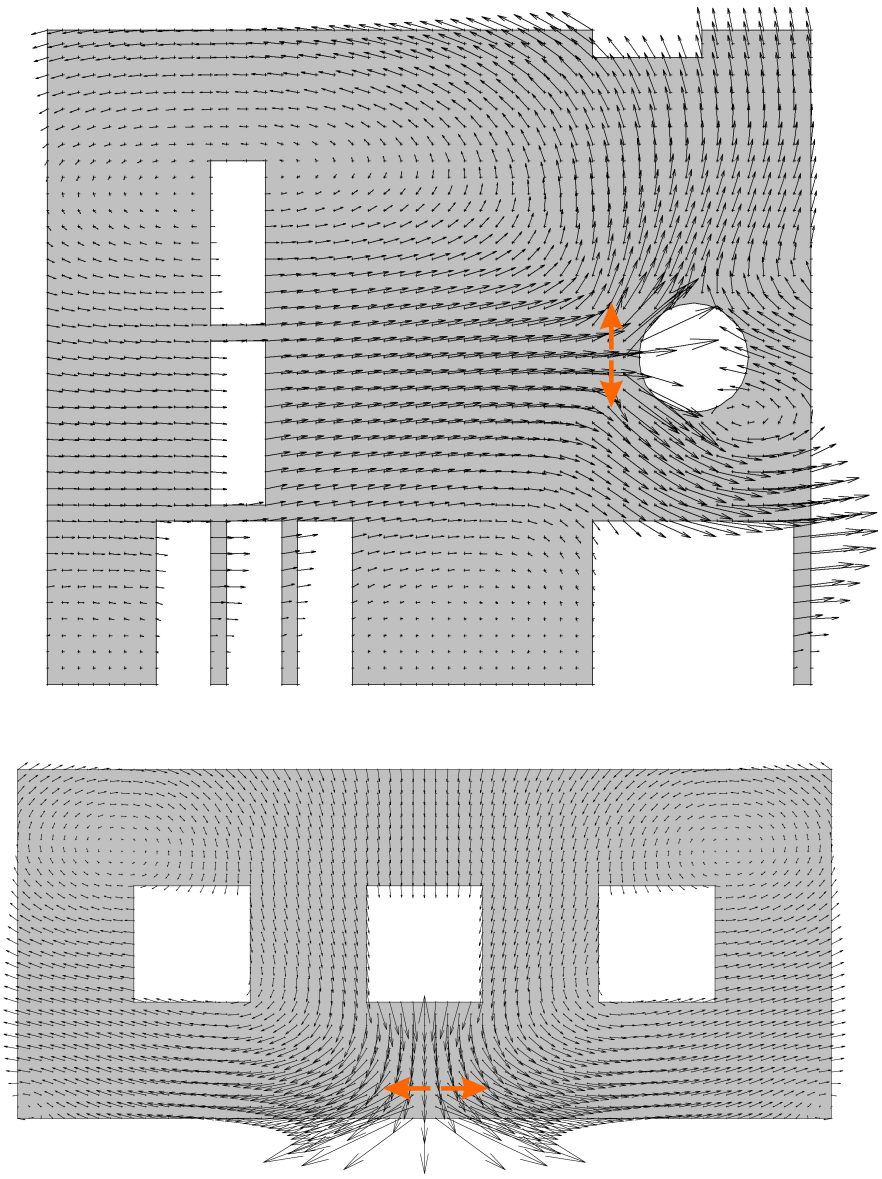


Bild 3.80. Einflussfunktionen für Spannungen σ_{yy} und σ_{xx} in zwei Scheiben. Die Pfeile sind die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{g}_i$ in den Knoten $\boldsymbol{x}_i$ aus der Spreizung des Aufpunkts. Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$ aus der Belastung, die in Richtung der $\boldsymbol{g}_i$ weisen, haben maximalen Einfluss und Knotenkräfte, die senkrecht auf den $\boldsymbol{g}_i$ stehen, keinen Einfluss (BE-SCHEIBE)

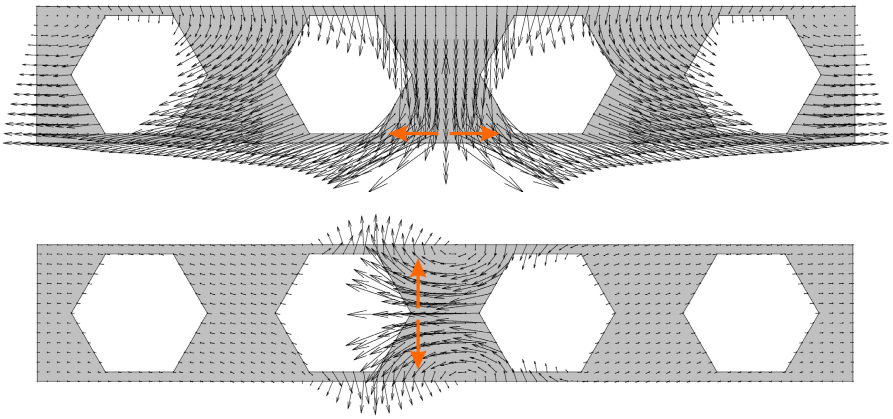


Bild 3.81. Einfeldträger, Plot der Knotenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ eines Funktionals $J(u_h) = \sigma_{xx}$ oben und $J(u_h) = \sigma_{yy}$ unten (BE-SCHEIBE)

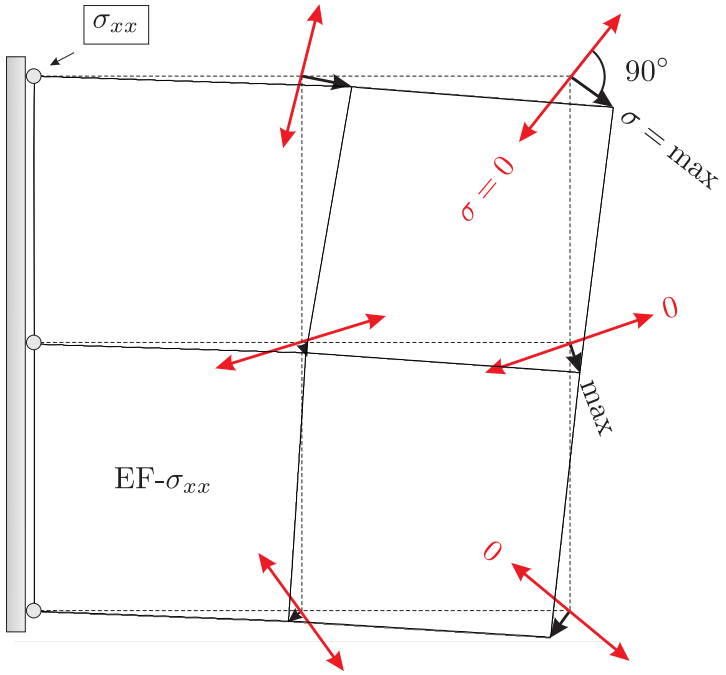


Bild 3.82. Scheibe aus vier bilinearen Elementen, Einflussfunktion für σ_{xx} im Knoten oben links. Knotenkräfte, die auf den roten Linien liegen, senkrecht zu den Verschiebungslinien der Knoten, verursachen keine Spannungen σ_{xx} in dem Knoten (WINFEM)

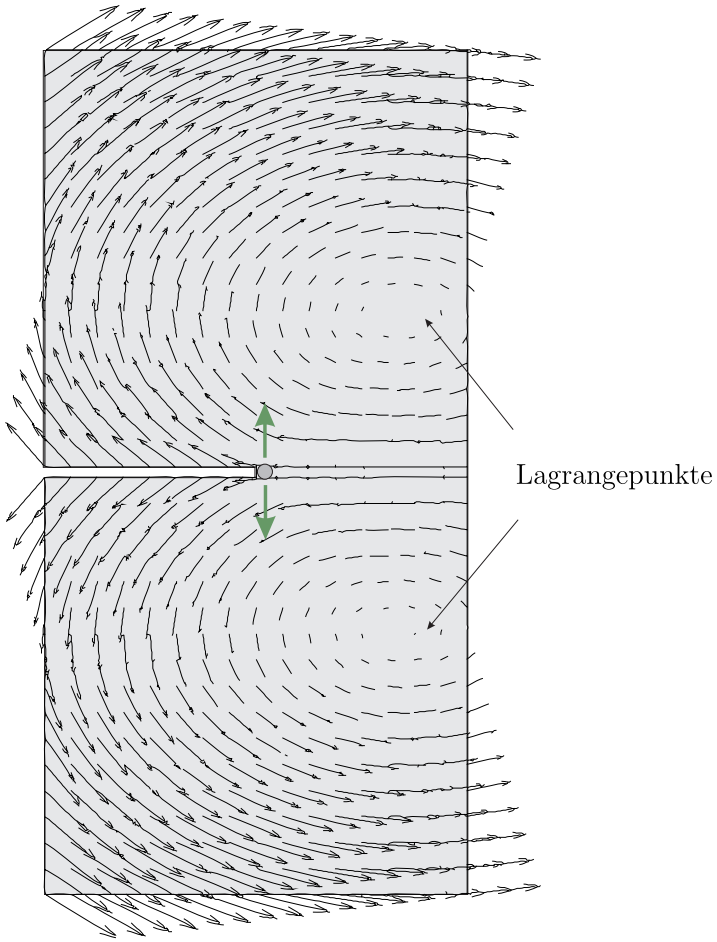


Bild 3.83. Plot der Knotenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ des Funktionals $J(u_h) = \sigma_{yy}$, also der vertikalen Spannung im Rissgrund. Die *Lagrangepunkte* sind die Punkte, in denen der Einfluss der Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$ auf σ_{yy} praktisch null ist (BE-SCHEIBE)

$$J(u_h) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}_i \qquad i = \text{Knoten}\,, \tag{3.305}$$

wobei die Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{f}_i$ die Anteile aus den großen Vektoren $\boldsymbol{g}$ and $\boldsymbol{f}$ sind, die sich auf den Knoten i beziehen

$$\boldsymbol{g} = \{\underbrace{g_1, g_2}_{\boldsymbol{g}_1}, \underbrace{g_3, g_4}_{\boldsymbol{g}_2}, \ldots, g_{2N}\}^T \qquad 2 - D\,. \tag{3.306}$$

Wenn daher $\boldsymbol{f}_i$ in einem Knoten orthogonal zu $\boldsymbol{g}_i$ ist, dann ist der Beitrag des Knotens zu $J(u_h)$ null. Der Plot der Vektoren $\boldsymbol{g}_i$ gleicht somit einem ***Sen-***

sitivitätsplot des Funktionals $J(u_h)$, siehe die Bilder 3.80, 3.81 und 3.82. Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_i$, die in dieselbe Richtung zeigen wie die $\boldsymbol{g}_i$, üben dagegen einen maximal großen Einfluss auf $J(u_h)$ aus[21].

Der Vektor $\boldsymbol{g} = \nabla J$ ist der Gradient $(\partial J/\partial f_i)$ des Funktionals $J(u_h) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}$

In Bild 3.83 ist die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund einer Zugscheibe dargestellt. Auffällig ist, dass es zwei ruhige Zonen gibt, in denen der Einfluss der Knotenkräfte auf $J(u_h)$ praktisch null ist. Wir nennen diese Punkte ***Lagrangepunkte***. In der Astronomie sind die Lagrangepunkte die Punkte, in denen sich die Gravitationskräfte der Sonne und der Erde das Gleichgewicht halten, weil sie mit gegengleichen Kräften an einem Satelliten ziehen, der dort geparkt ist[22]. Solche Lagrangepunkte findet man in fast allen diesen Plots.

Bemerkung 3.12. Mit einem FE-Programm erzeugt man diese Bilder wie folgt:

1. Man bringt die $j_i = J(\boldsymbol{\varphi}_i)$ als äquivalente Knotenkräfte auf und löst das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$.
2. Man plottet in jedem Knoten k den Vektor $\boldsymbol{g}_k = \{g_x^{(k)}, g_y^{(k)}\}^T$, also die horizontale und vertikale Verschiebung des Knotens.

Bei eindimensionalen Problemen wie einem Rahmen entstehen die Sensitivitätsplots, wenn man die Einflussfunktionen als ebene Verschiebungsfiguren anträgt, wie in Bild 3.84, also in einer Figur beide Anteile, horizontal wie vertikal, zeichnet. Wanderlasten, die maximalen Effekt erzielen wollen, müssen in Richtung der grünen Pfeile zeigen – senkrecht dazu ist die Wirkung null.

3.47 Knotengleichgewicht

Die Methode der finiten Elemente wird gerne so erklärt: Man unterteilt ein Tragwerk in kleine Elemente, die in den Knoten zusammenhängen und bestimmt an Hand des Systems $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die Knotenverformungen u_i so, dass die Knoten im Gleichgewicht sind. Dazu drei Bemerkungen:

- Die f_i sind *Energien*. In $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ [N m] stehen auf beiden Seiten Energien.
- Bei Stabtragwerken ist das ebenso, aber man kann die Methode der finiten Elemente auch als Anwendung des Drehwinkelverfahrens lesen und dann

[21] Das Verformungsbild einer Scheibe gleicht – auch in normalen Lastfällen – einer eingefrorenen Strömung.

[22] Die relative Lage der Lagrangepunkte – es gibt 5 solche Punkte – zu Sonne und Erde ändert sich nicht, wenn sich S und E um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Das JWS-Teleskop wird im Lagrangepunkt $L_2 \sim 1.5$ Mio km stehen

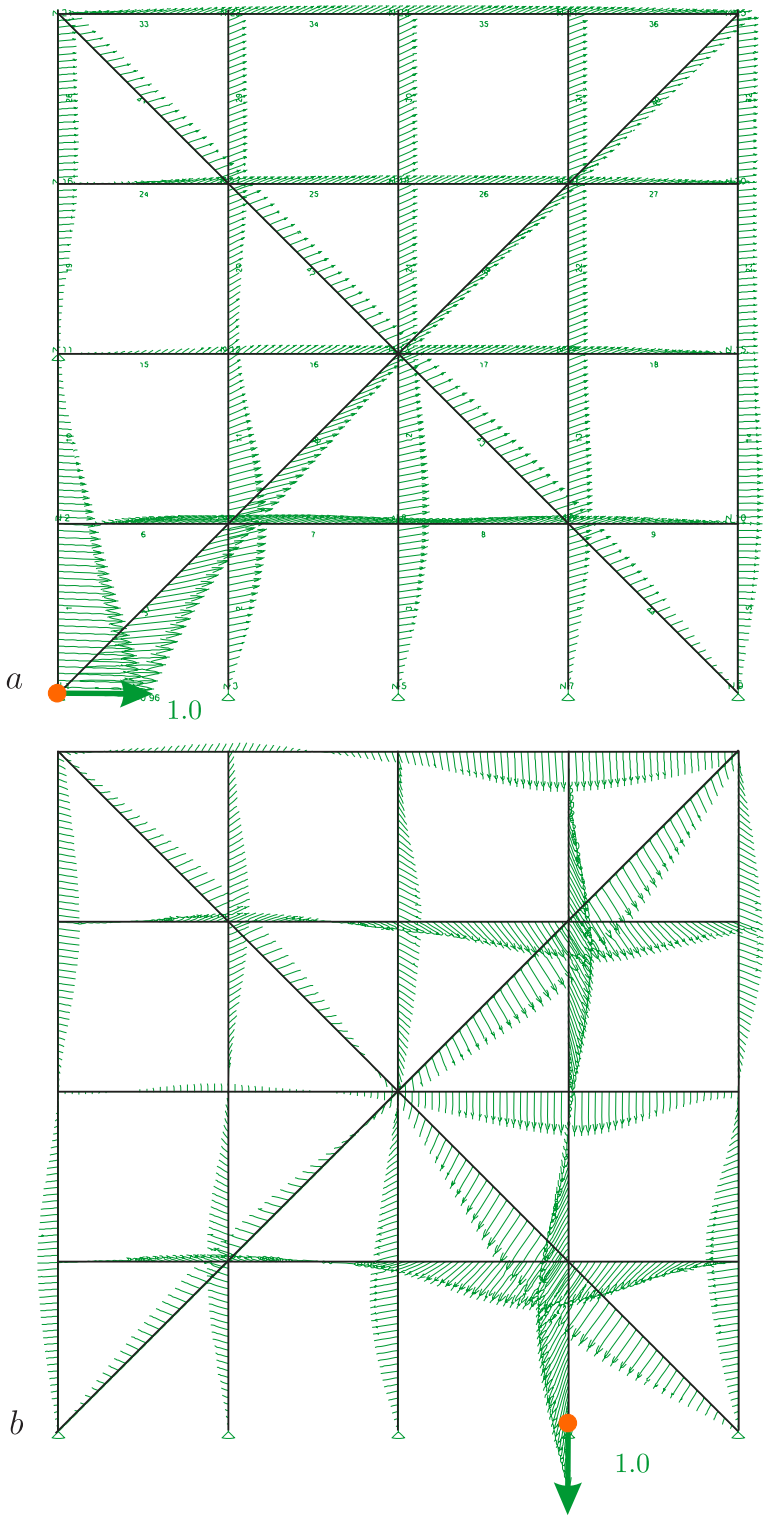


Bild 3.84. Stockwerkrahmen mit Diagonalstreben **a)** Einflussfunktion für die horizontale Lagerkraft im linken Lager **b)** für die vertikale Lagerkraft im vorletzten Lagerknoten (BE-FRAMES)

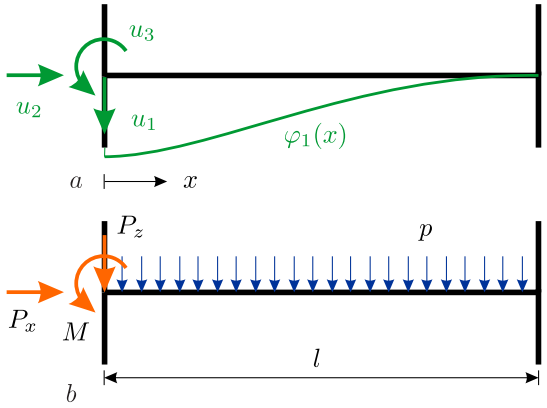


Bild 3.85. Knoten eines Rahmens, **a)** Freiheitsgrade, **b)** Belastung

sind die f_i Kräfte und man formuliert das Gleichgewicht in den Knoten, siehe Kapitel 9.29.

- Nun gibt es noch eine **Mischtechnik** und über die wollen wir hier sprechen. Die Mischtechnik liest $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ als $\delta W_i = \delta W_e$, ist aber trotzdem davon überzeugt, dass $\delta W_i = \delta W_e$ das Gleichgewicht in den Knoten formuliert.

Wie geht das? Betrachten wir hierzu den Knoten eines Rahmens, siehe Bild 3.85. Der Einfachheit halber lassen wir die Normalkräfte weg und nehmen nur die Biegeanteile mit. Der Knoten habe die drei Freiheitsgrade u_1, u_2, u_3 zu denen entsprechende *shape functions* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gehören. Die FE-Lösung wird in dem Knoten so eingestellt, dass (l_e die drei Stäbe)

$$\delta W_i = \sum_{e=1}^{3} \int_0^{l_e} \frac{M_h\, M(\varphi_i)}{EI}\, dx = \delta W_e \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.307}$$

Das δW_e sind die drei Arbeiten $f_i = f_{Ki} + d_i$. Die f_{Ki} sind die Arbeiten der Kräfte, die direkt in den Knoten angreifen, das sind hier P_x, P_z und das Moment M, auf den Wegen $\varphi_i(0)$ (jeweils Eins)

$$f_{K1} = P_z \cdot 1 \qquad f_{K2} = P_x \cdot 1 \qquad f_{K3} = M \cdot 1\,. \tag{3.308}$$

Die d_i sind die äquivalenten Knotenkräfte aus der Belastung im Feld. Wir nehmen hier an, dass nur eine vertikale Riegellast p vorhanden ist, (l = Riegel)

$$d_i = \int_0^l p\, \varphi_i(x)\, dx \qquad (d_1 = \frac{p\,l}{2} \quad d_2 = 0 \quad d_3 = -\frac{p\,l^2}{12})\,. \tag{3.309}$$

Konzentrieren wir uns auf den Riegel. Der Beitrag des Riegels zu δW_i ist das Integral

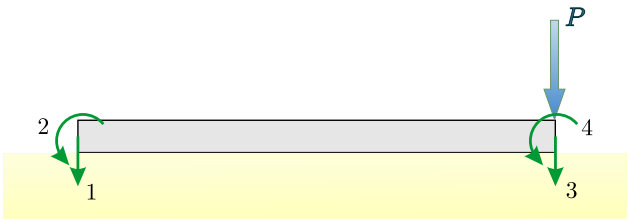


Bild 3.86. Elastisch gebetteter Träger

$$\int_0^l \frac{M_h\, M(\varphi_i)}{EI}\, dx\,. \tag{3.310}$$

Es sei nun $\varphi_i = \varphi_1$ die Absenkung des Knotens um Eins. Am Riegel (als Bauteil für sich genommen) ist die virtuelle innere Arbeit δW_i gleich der virtuellen äußeren Arbeit der Riegelkräfte, wie aus der ersten Greenschen Identität folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(w_h, \varphi_1) &= \int_0^l 0 \cdot \varphi_1\, dx + [V_h\, \varphi_1 - M_h\, \varphi_1']_0^l - \int_0^l \frac{M_h\, M(\varphi_1)}{EI}\, dx \\ &= -V_h(0) \cdot 1 - \int_0^l \frac{M_h\, M(\varphi_1)}{EI}\, dx = 0\,. \end{aligned} \tag{3.311}$$

Bei der vertikalen Verrückung φ_1 des Systems ist die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta W_e = f_1 = P_z \cdot 1 + d_1\,, \tag{3.312}$$

und die Bilanz $\delta W_i = \delta W_e$ lautet somit

$$\int_0^l \frac{M_h\, M(\varphi_1)}{EI}\, dx = -V_h(0) \cdot 1 = P_z \cdot 1 + d_1\,, \tag{3.313}$$

und nach Division durch 1 Meter ist das das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte, $P_z + d_1/1 + V_h(0) = 0$ in dem Knoten. Bei unserem vereinfachten Modell sind die Normalkräfte in den Stielen ja null, so dass sie hier nicht auftauchen und die Biegeenergie im Riegel ist die ganze Energie $\delta W_i(w_h, \varphi_1)$.

Diese Umwandlung von $\delta W_e = \delta W_i$ in ein klassisches Knotengleichgewicht geht nur bei Stabtragwerken und EA und EI müssen elementweise konstant sein; es darf keine Näherung in der Steifigkeitsmatrix stecken.

Ein einfaches **Gegenbeispiel**: Der elastisch gebettete Balken in Bild 3.86 besteht aus einem Element und das FE-Programm rechnet mit den *shape functions* $\varphi_i(x)$ des normalen Balkens, die keine homogenen Lösungen der Gleichung $EI\, w^{IV} + c\, w = 0$ sind.

Die Einzelkraft rechts geht als $f_3 = P \cdot 1$ in das System $\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ ein. Die FE-Lösung wird so eingestellt, dass beim Wackeln mit φ_3

$$a(w_h, \varphi_3) = f_3\,. \tag{3.314}$$

Naiverweise würde man jetzt erwarten, dass die linke Seite gerade die Arbeit der Querkraft $V_h(l)$ auf dem Weg Eins ist, also $V_h(l) \cdot 1 = f_3$, das wäre das echte Knotengleichgewicht, aber das ist nicht richtig,

$$a(w_h, \varphi_3) = \int_0^l (EI\, w_h^{IV} + c\, w_h)\, \varphi_3\, dx + V_h(l) \cdot 1 = \bar{f}_3 + V_h(l) \cdot 1\,, \quad (3.315)$$

weil das Integral nicht null ist, denn w_h ist keine homogene Lösung des elastisch gebetteten Balkens. Die Klammer $(\ldots)$ ist eine **Extralast**, die die Arbeit $\bar{f}_3$ auf dem Weg φ_3 leistet. Nur beide zusammen, $\bar{f}_3 + V_h(l) \cdot 1$, sind der Arbeit $f_3 = P \cdot 1$ äquivalent.

Bemerkung 3.13. Wir wollen hier noch die Gleichung für Stabtragwerke

$$\boxed{a(w_h, \varphi_i) = a(w, \varphi_i)} \quad (3.316)$$

nachtragen, die im Grunde auch schon in Kapitel 1.18 steht: *Beim Wackeln mit einer der φ_i ist die **virtuelle innere Energie** der FE-Lösung genauso groß, wie die der exakten Lösung, wenn die φ_i exakt sind.*

Wegen der ersten Greenschen Identität ist

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(w, \varphi_i) &= \int_0^l p\, \varphi_i\, dx + [\ldots \quad \ldots]_0^l - a(w, \varphi_i) \\ &= d_i + f_i - a(w, \varphi_i) = a(w_h, \varphi_i) - a(w, \varphi_i) = 0\,, \end{aligned} \quad (3.317)$$

denn

$$d_i + f_i = \sum_j k_{ij}\, w_j = a(w_h, \varphi_i)\,. \quad (3.318)$$

Der Grund ist, siehe Abschnitt 1.18, dass die partikuläre Lösung w_p keine Arbeit auf den Wegen φ_i leistet, $a(w, \varphi_i) = a(w_p, \varphi_i) + a(w_h, \varphi_i) = 0 + a(w_h, \varphi_i)$, siehe (1.203), und die FE-Lösung gleich der homogenen Lösung ist, $w_h = w_h$.

3.48 Genäherte shape functions

Sind EA und EI konstant, dann sind die *shape functions* φ_i identisch mit den homogenen Lösungen der Stab- oder Balkengleichung. Bei der Berechnung nach Theorie II. Ordnung

$$EI\, w^{IV}(x) + P\, w''(x) = p(x) \quad (3.319)$$

oder bei der Berechnung von elastisch gebetteten Trägern

$$EI\, w^{IV}(x) + c\, w(x) = p(x) \tag{3.320}$$

arbeiten die FE-Programme in der Regel statt mit den richtigen Funktionen, auch mit diesen *shape functions*. Weil diese keine homogenen Lösungen der obigen Differentialgleichungen sind, sind die äquivalenten Knotenkräfte

$$f_i = \int_0^l p(x)\, \varphi_i(x)\, dx \tag{3.321}$$

nur Näherungen und die Zweiteilung wie in Bild 3.6 – Reduktion der Belastung in die Knoten und dann Einhängen der Feldmomente – geht nicht, weil man mit den falschen φ_i keinen reinen Knotenlastfall rechnen kann. Im Feld treten ‚Phantomkräfte' auf wie z.B. in Bild 2.77,

$$EI\, \varphi_i^{IV}(x) + P\, \varphi_i''(x) = 0 + P\, \varphi_i''(x) \neq 0\,. \tag{3.322}$$

Während bei einer normalen Rahmenberechnung (EA und EI konstant) das Attribut ‚finite Elemente' im Programmnamen ein schmückendes Beiwort ist, weil es im Grunde das Drehwinkelverfahren ist, das angewandt wird, ist es bei der Theorie II. Ordnung oder elastisch gebetteten Balken anders, dann ist die Lösung wirklich eine Näherung und man kann und sollte die Genauigkeit steigern, indem man die Balken in mehrere Elemente unterteilt.

3.49 Die Lagerkräfte der FE-Lösung

Das Thema Lagerkräfte und FE-Lösungen muss man mit Vorsicht angehen. Nichts liegt näher, als die Knotenkräfte direkt wie Lagerkräfte zu behandeln. Bei Stabtragwerken sind es auch echte Kräfte, bei Flächentragwerken sind es jedoch in der Regel nur äquivalente Knotenkräfte, also Kräfte, die nicht wirklich im strengen Punktsinn vorhanden sind.

Die f_i in den Lagerknoten berechnet ein FE-Programm im Nachlauf, nachdem es das System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst hat, wie folgt:

- Es erweitert den Vektor $\boldsymbol{u}$ zunächst um die zuvor gestrichenen $u_i = 0$ in den Lagerknoten, $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_G$,
- und multipliziert **die nicht-reduzierte, globale Steifigkeitsmatrix** $\boldsymbol{K}_G$ mit dem vollen Vektor $\boldsymbol{u}_G$,
- die Einträge f_i in dem Vektor $\boldsymbol{f}_G = \boldsymbol{K}_G\,\boldsymbol{u}_G$, die zu den gesperrten Freiheitsgraden gehören, sind die Knotenkräfte in den Lagern *ohne* die Anteile der Last, die direkt in die Lager reduziert wurden. Zu diesen muss man also noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren, die wir R_d nennen, siehe Bild 3.87,

$$f_i(komplett) = f_i + R_d = R_{FE} + R_d\,. \tag{3.323}$$

- Wenn allerdings die Lager nachgiebig gerechnet wurden, dann ist das letzte Manöver nicht notwendig, dann ist $R_{FE} = u \cdot k$, der Lagerweg u mal der Lagersteifigkeit k, die volle Lagerkraft.

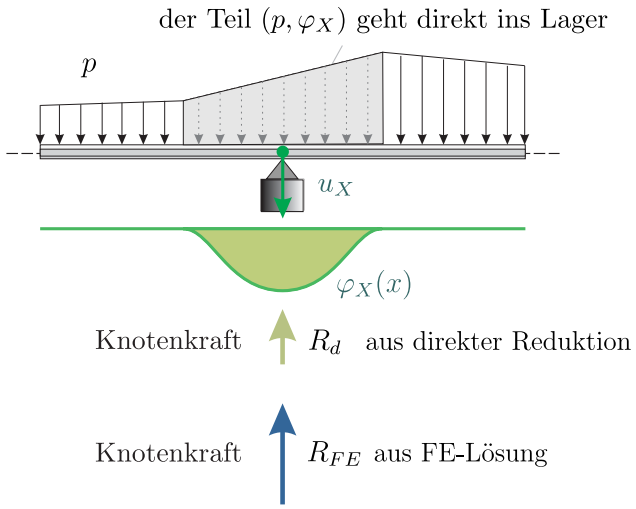


Bild 3.87. Starre Stütze, die gesamte Stützenkraft ist die Summe aus der Stützenkraft R_{FE} der FE-Lösung plus dem direkt in die Stütze reduziertem Anteil aus der Last p, also $R_d = (p, \varphi_X)$

Die Summe der $f_i(komplett)$ in den Lagern muss gleich der aufgebrachten Belastung sein, weil die *shape functions* im Regelfall eine ***partition of unity*** bilden, $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ in jedem Punkt x, und die Starrkörperbewegungen des frei geschnittenen Tragwerks in $\mathcal{V}_h^+$ liegen oder liegen sollten. Gleichbedeutend damit ist, dass die Summe über alle Einflussfunktionen für die Lagerkräfte eines Rahmens in jedem Punkt x des Rahmens gleich Eins sein muss, siehe Bild 3.89.

Der Raum $\mathcal{V}_h^+$ ist einfach der Raum, der von den Ansatzfunktionen φ_i erzeugt wird. Wenn man die φ_i streicht, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören, dann erhält man den Unterraum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h^+$ auf dem wir die FE-Lösung suchen, $\mathcal{V}_h^+ = \mathcal{V}_h$ + Starrkörperbewegungen.

Technisch ist es so, dass die $\varphi_i(x)$ in $\mathcal{V}_h$ keine *partition of unity* bilden, weil ja in den festen Lagern die Summe

$$\sum_i \varphi_i(x) = 0 \tag{3.324}$$

null ist und nicht eins – es fehlen ja die *shape function* der Lager. Trotzdem ist natürlich die Summe über alle f_i gleich der Resultierenden, weil ja die Belastung direkt in die Lagerknoten reduziert wird (und mitgezählt wird). Die f_i in den Lagerknoten sind ‚Verzierung', sie sitzen da, aber sie tun nichts, denn die Verformungen kommen nur aus den f_i in den freien Knoten.

Lokal, in irgend einem *patch*, ist das Gleichgewicht, also der Vergleich der Belastung p mit den Schnittkräften der FE-Lösung, nicht erfüllt, weil ja die FE-Lösung zu einem anderen Lastfall, dem FE-Lastfall p_h gehört.

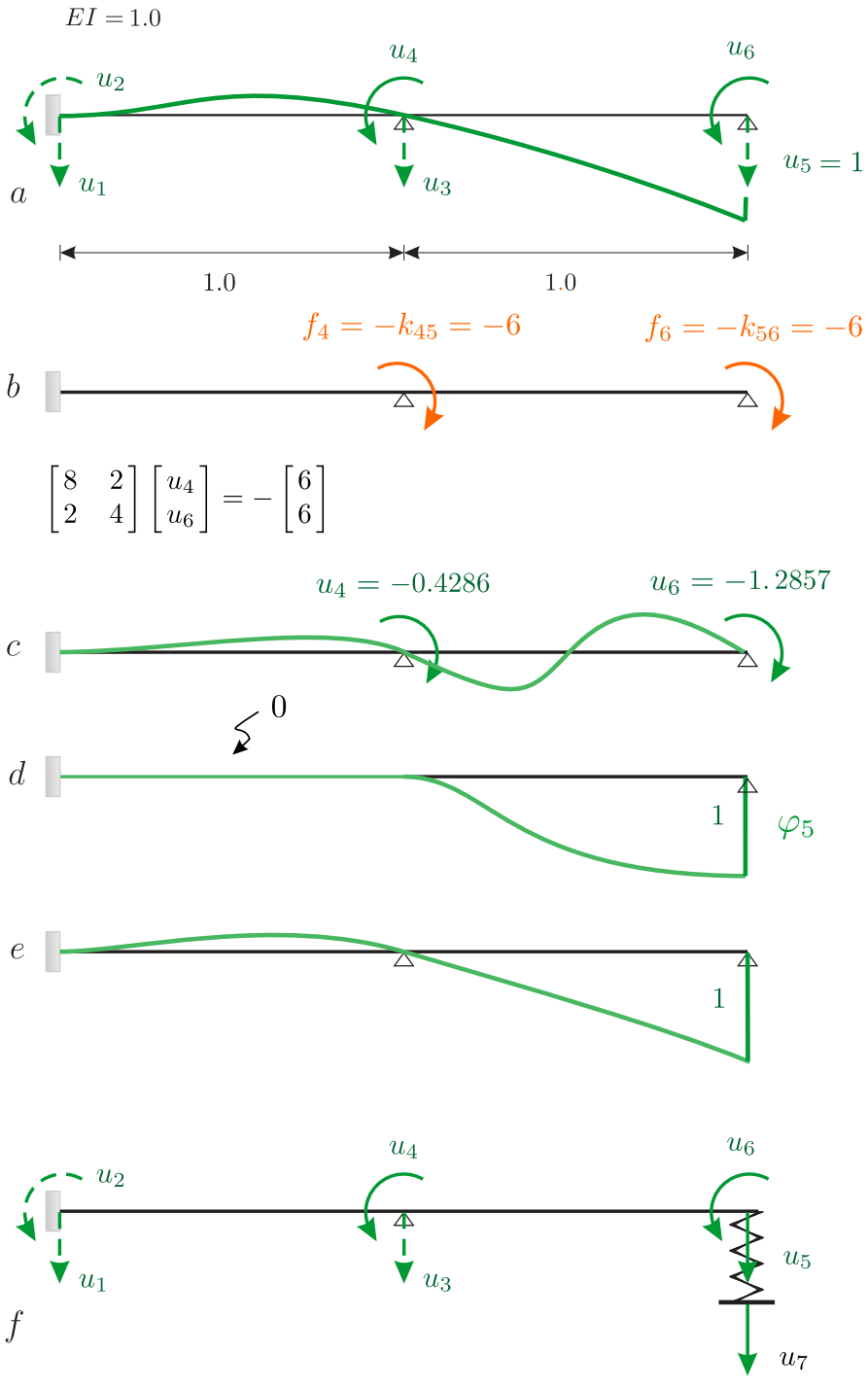


Bild 3.88. Lagersenkung, **e)** Biegelinie

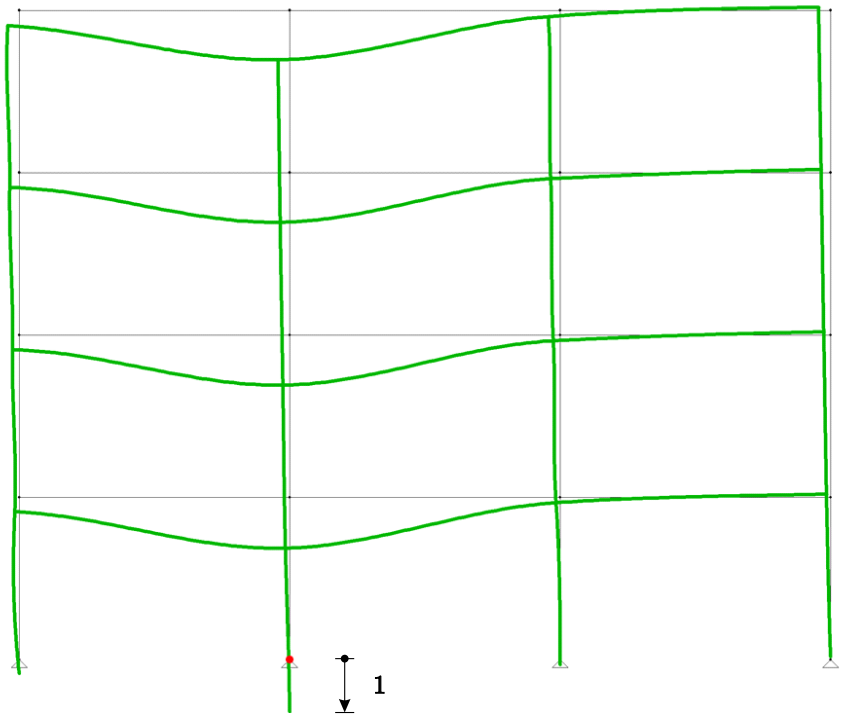


Bild 3.89. Einflussfunktion für eine Lagerkraft

Technisch ist der Grund der, dass die Starrkörperbewegungen u_0^p der lokalen *patchs* Ω_p nicht in $\mathcal{V}_h$ liegen, so dass das Programm nicht auf $(p - p_h, u_0^p) = 0$ testen kann. Die u_0^p haben den Wert 1 im *patch* und 0 außerhalb und solche fahrstuhlartigen Bewegungen kann man mit konformen (also stetigen) Ansätzen nicht darstellen.

3.50 Lagersenkung

Wie man mit Lagersenkungen umgeht, soll am Beispiel des Zweifeldträgers in Bild 3.88 erläutert werden. Zunächst die ‚Handmethode'.

Das System sei so aufbereitet, dass die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ die Größe 3×3 habe, also neben u_4 und u_6 auch die Lagerbewegung u_5 als Freiheitsgrad zur Verfügung steht. Um im Takt zu bleiben, nennen wir die drei Spalten von $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_4, \boldsymbol{f}_5, \boldsymbol{f}_6]$.

Das rechte Lager in Bild 3.88 senkt sich um 1 m. Bringt man die zu u_5 gehörige Spalte auf die rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}, \tag{3.325}$$

dann steht da

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot u_5 \ (= 1.0)\,. \tag{3.326}$$

Also belastet man den Träger mit den Kräften $f_4 = f_6 = -6$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{3.327}$$

Dieses System hat die Lösung $u_4 = -0.4286$, $u_6 = -1.2857$ und mit $u_5 = 1.0$ ergibt sich so die Biegelinie als die Summe der drei Einheitsverformungen

$$w(x) = -0.4286 \cdot \varphi_4(x) + 1.0 \cdot \varphi_5(x) - 1.2857 \cdot \varphi_6(x)\,. \tag{3.328}$$

Die Umstellung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = -\Delta w \cdot \boldsymbol{f}_5$ ist nachvollziehbar und schlüssig. Mathematisch kann man sich das wie folgt zurechtlegen: Die Biegelinien w aus Lagersenkung **orthogonal sind** zu den virtuellen Verrückungen des Systems, $\delta W_i(w, \delta w) = 0$, siehe Glg. (1.135) Seite 48. Wählen wir als δw die φ_i – mit Ausnahme von φ_5 selbst, weil man das abgesenkte aber feste Lager ja nicht verrücken kann – dann gilt also

$$\delta W_i(w, \varphi_i) = a(w_V + \Delta w \cdot \varphi_5, \varphi_i) = a(w_V, \varphi_i) + \Delta w \cdot a(\varphi_5, \varphi_i) = 0 \tag{3.329}$$

und somit

$$a(w_V, \varphi_i) = -\Delta w \cdot a(\varphi_5, \varphi_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq 5 \tag{3.330}$$

und das ist genau das verkürzte System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = -\Delta w \boldsymbol{f}_5$, weil w_V ja eine Entwicklung nach den *shape functions* φ_i ist (mit Lücke bei φ_5).

Rechentechnisch streicht man natürlich keine Zeilen und Spalten. Die nichtreduzierte Steifigkeitsmatrix, bevor also die Zeilen und Spalten der gesperrten Freiheitsgrade gestrichen werden, lautet

$$\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & -0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}. \tag{3.331}$$

Das ‚auf die rechte Seite bringen' der Handmethode setzt man so um, dass man in Richtung der Freiheitsgrade u_4 und u_6 die Knotenkräfte

$$f_4 = -k_{45} \cdot \Delta w = -6 \cdot \Delta w \qquad f_6 = -k_{65} \cdot \Delta w = -6 \cdot \Delta w \tag{3.332}$$

wirken lässt, siehe Bild 3.88 b. Zu der Verformung aus diesem Lastfall, siehe Bild 3.88 c, addiert man noch die Verformung $\varphi_5(x) \cdot \Delta w$ und erhält so die gesuchte Biegelinie

$$w(x) = u_4 \cdot \varphi_4(x) + \Delta w \cdot \varphi_5(x) + u_6 \cdot \varphi_6(x)\,. \tag{3.333}$$

Fassen wir das als **Regel**: Es sei $\boldsymbol{K}_G$ die nichtreduzierte globale Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{K}$ die reduzierte Steifigkeitsmatrix, wenn also alle Zeilen und Spalten der gesperrten u_i gestrichen wurden, und ein Lager mit dem Freiheitsgrad u_7 senke sich um Δw Meter. Dann belastet man alle freie Knoten am System $\boldsymbol{K}$ mit den Knotenkräften

$$f_i = -k_{i7} \cdot \Delta w \tag{3.334}$$

also den negativ genommenen Einträgen in Spalte 7 der Matrix $\boldsymbol{K}_G$, löst diesen Lastfall $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, und addiert am Schluss die Verformung $\varphi_7(x) \cdot \Delta w$ zu der Verformungsfigur.

Weil viele k_{i7} null sein werden (Steifigkeitsmatrizen sind schwach besetzt) und eventuell manche u_i gesperrt sind, sind das nicht viele f_i.

So kann man also auch **Einflussfunktionen** für starre Lager berechnen, dann ist $\Delta w = 1.0$.

Wenn sich ein **elastisches Lager** mit der Federsteifigkeit k senkt, $u_7 = \Delta w$, siehe Bild 3.88 f, dann geht man genauso vor und bringt die Einträge in Spalte 7 der nichtreduzierten globalen Steifigkeitsmatrix auf das System auf. Wie bei allen Lagerfedern wird es so sein, dass alle k_{i7} in Spalte 7 null sind, bis auf $k_{57} = -k$ und $k_{77} = k$

$$\text{(Ausschnitt)} \qquad \begin{bmatrix} k_{55} & k_{57} \\ k_{75} & k_{77} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,EI/\ell^3 + k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{3.335}$$

weil nur u_5 in Verbindung mit u_7 steht. Bei einer Absenkung Δw des Fusspunktes der Feder zieht also die Kraft $f_5 = -k_{57}\,\Delta w = -(-k \cdot \Delta w)$ in Richtung von u_5, wie es der Anschauung entspricht.

Bemerkung 3.14. Nach so viel Aufwand für ein einfaches statisches Problem, wollen wir noch verraten, wie man sich das ‚auf die rechte Seite bringen' einfach erklären kann.

Das Lager habe den Freiheitsgrad $u_i = 7$. In der Spalte 7 von $\boldsymbol{K}$ stehen die *push-stop* Kräfte und zwar ist k_{77} die Kraft, die den Knoten um 1 auslenkt und die k_{7j} oberhalb und unterhalb davon (gleiche Spalte 7) sind die Bremskräfte in den Nachbarknoten, ähnlich wie in Bild 3.69. Nun sind die Nachbarknoten aber nicht fest und deswegen muss man in einem zweiten Schritt, bei gesperrtem $u_7 = 0$, die Festhaltekräfte in umgekehrter Richtung aufbringen. Das gibt dem Balken eine Form wie in Bild 3.90 c. Dazu addiert man noch die Auslenkung, $u_7 = 1$, des Knotens selbst und man hat die gewünschte Biegelinie aus der Lagersenkung, wie in Bild 3.90 b.

Rezept: Bei festgehaltenem Lagerknoten, $u_i = 0$, bringt man die Kräfte k_{ij} in Spalte i in umgekehrter Richtung auf die Knoten auf und addiert am Schluss die Einheitsverformung φ_i.

3.51 Einflussfunktion für ein starres Lager

Vom Standpunkt der ‚Schulstatik' aus ist alles klar: Man entfernt das Lager und drückt den Balken um einen Meter nach unten. Die sich dabei einstellende Biegelinie ist die Einflussfunktion. Rechentechnisch entfernt man natürlich kein Lager, sondern man geht so vor, wie war in dem vorhergehenden Abschnitt beschrieben haben.

Es sei erlaubt an dieser Stelle das ganze auch etwas theoretischer anzufassen und aus der Sicht der finiten Elemente zu betrachten. Eine Lagerkraft R ist ein **Funktional**

$$R = J(w)\,, \tag{3.336}$$

angewandt auf die Biegelinie w und die FE-Einflussfunktion $\boldsymbol{g}$ für R erhält man, so lautet die Regel, wenn man in dem System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ als Knotenkräfte j_i die Lagerkräfte der Ansatzfunktionen wählt

$$j_i = R(\varphi_i)\,, \tag{3.337}$$

also die Lagerkraft, die zur Biegelinie $w = \varphi_i$ gehört.

Diese Lagerkraft ist aber gleich der **Wechselwirkungsenergie** $\times(-1)$ zwischen φ_i und der Funktion φ_l

$$a(\varphi_i, \varphi_l) = \int_0^l EI\,\varphi_i''\,\varphi_l''\,dx = -R(\varphi_i)\cdot 1\,, \tag{3.338}$$

wenn φ_l die Einheitsverformung des Lagerknotens ist, also die Funktion, bei der sich das Lager um eine Längeneinheit nach unten bewegt. Die Terme $a(\varphi_i, \varphi_l)$ bilden die Spalte l der nicht reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$.

Dieses Ergebnis beruht auf der ersten Greenschen Identität, denn (3.338) ist die Identität in der Gestalt $\delta W_i = \delta W_e$

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_l) &= \mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_l)_{(0,x)} + \mathscr{G}(\varphi_i, \varphi_l)_{(x,l)} \\ &= \underbrace{V(\varphi_i)(x_-) - V(\varphi_i)(x_+)}_{-R(\varphi_i)} - \int_0^l EI\,\varphi_i''\,\varphi_l''\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{3.339}$$

Die φ_i sind homogene Lösungen der Balkengleichung und φ_l ist in allen Knoten, bis auf den Lagerknoten, null. Dort ist $\varphi_l = 1$ und $V(\varphi_i)$ springt, wenn

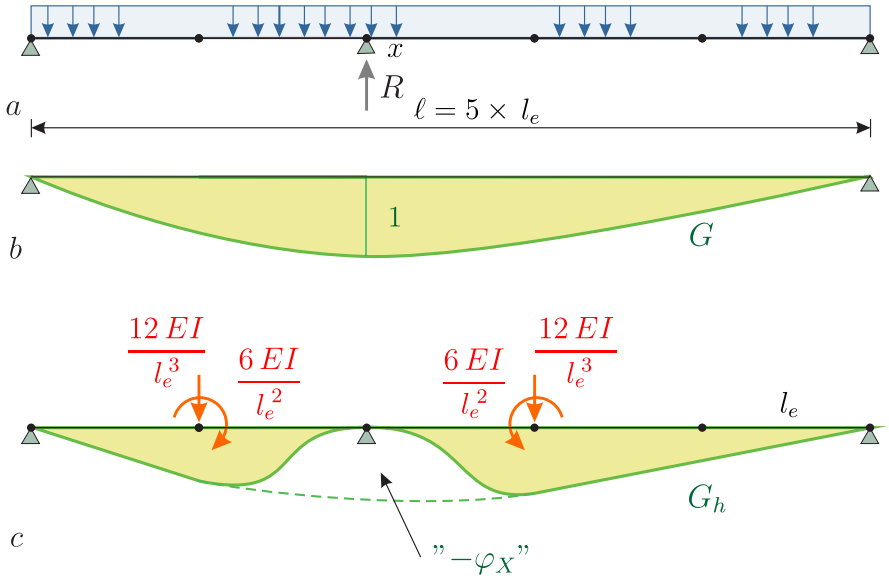


Bild 3.90. Träger, **a)** Lagerreaktion R, **b)** Einflussfunktion G für R, **c)** FE-Einflussfunktion G_h auf $\mathcal{V}_h$; die Knotenkräfte j_i, die G_h erzeugen, sind die Lagerkräfte R der Ansatzfunktionen

es dort nicht konstant null ist, und der Sprung ist die Lagerkraft. Das erklärt, warum die virtuelle äußere Arbeit sich auf den Ausdruck $-R(\varphi_i)\cdot 1$ verkürzt.

Die Lagerkraft R einer Ansatzfunktion $\varphi_i(x)$ ist gleich der Wechselwirkungsenergie $a(\varphi_i,\varphi_l)\times(-1)$ zwischen $\varphi_i(x)$ und $\varphi_l(x)$. Ist u_l der Freiheitsgrad des Lagers ist, dann ist also $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{e}_l = -\boldsymbol{f}_l$ (= Spalte l von $\boldsymbol{K}_G$).

Mit dem Vektor[23] $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_l$ lautet also die Einflussfunktion für die Lagerkraft im Knoten x (FG u_l)

$$G_h(y,x) = \sum_i g_i\,\varphi_i(y) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\varphi}(y)^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_l\,. \tag{3.340}$$

Dieser Einflussfunktion fehlt aber offensichtlich, siehe Bild 3.90 c, das Stück φ_l direkt unter dem Lager. Das muss aber so sein, weil der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ ja die Funktion φ_l nicht enthält – der Knoten wird ja festgehalten. Aber warum kommen die finiten Elemente dann trotzdem auf die richtige Lagerkraft? Das liegt daran, wie FE-Programme vorgehen.

Ist eine verteilte Last $p(x)$ gegeben, dann stellen sie in jeden Knoten die zugehörige äquivalente Knotenkraft und daher in den Lagerknoten die Kraft

[23] Im Vektor $\boldsymbol{f}_l$ werden die Einträge gestrichen, die zu gesperrten FG gehören.

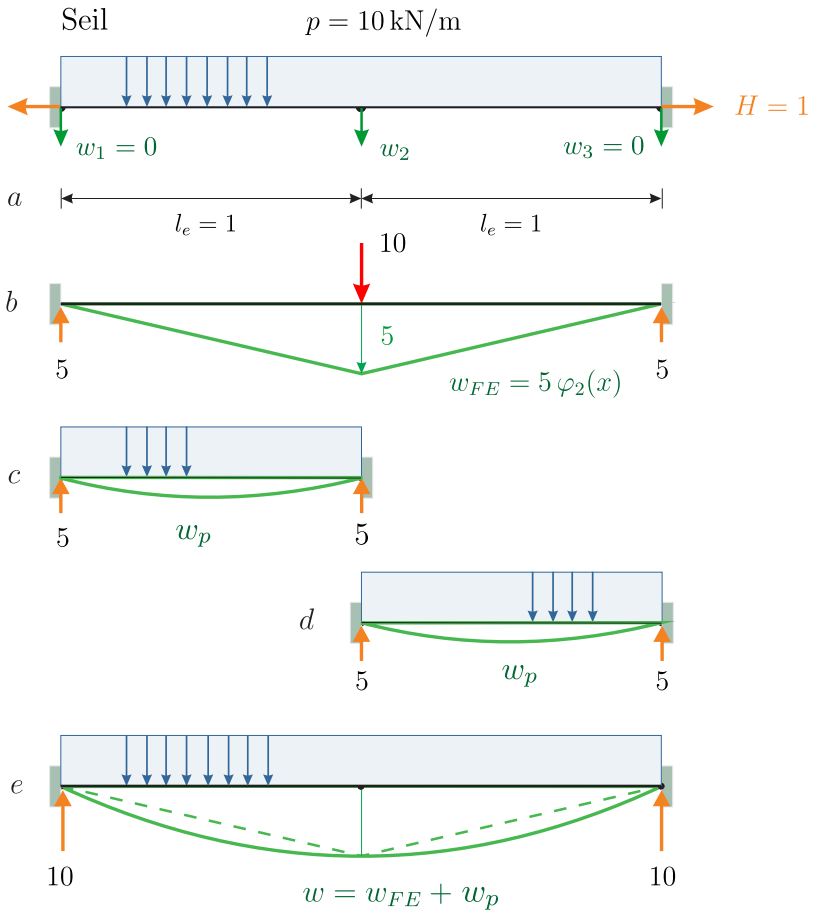


Bild 3.91. Seil, **a)** System, **b)** FE-Lösung **c)** - **d)** lokale Lösungen, **e)** exakte Lösung

$$f_l = \int_0^l p(x)\,\varphi_l(x)\,dx\,. \tag{3.341}$$

Diese Kraft **wandert aber direkt in das Lager** und beeinflusst somit die FE-Berechnung gar nicht. Alle Verformungen und alle Schnittkräfte der FE-Lösung kommen aus dem Lastfall, bei dem dieser Anteil fehlt. Und die Einflussfunktion in Bild 3.90 ist genau die Einflussfunktion für die Lagerkraft in solchen **‚amputierten' Lastfällen**.

Die direkt in die Stütze fließende Knotenkraft f_l erzeugt eine Gegenkraft in der Stütze, die wir $R_d = -f_l$ nennen.

Am Ende der Berechnung addiert das FE-Programm zu der Lagerkraft R_{FE} des ‚amputierten' Lastfalls die Lagerkraft R_d hinzu und so stimmt am Schluss wieder alles

$$R = R_{FE} + R_d \,. \tag{3.342}$$

Man kann das ganze natürlich auch ‚von hinten' aufzäumen, indem man einfach zur FE-Einflussfunktion G_h den fehlenden Anteil φ_l addiert, und so genau die Einflussfunktion G erhält

$$G = G_h + \varphi_l \,, \tag{3.343}$$

wie sie der Ingenieur sehen will. Wenn man diese mit der Belastung überlagert, ist das Ergebnis die volle Lagerkraft

$$R = R_{FE} + R_d = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \,. \tag{3.344}$$

In der Stabstatik geschieht die Addition $R = R_{FE}+R_d$ **automatisch**, nämlich in dem Moment, in dem die lokalen Lösungen elementweise zur FE-Lösung addiert werden.

Das Seil in Bild 3.91 a wird mit einer konstanten Streckenlast $p = 10\,\mathrm{kN/m}$ belastet. Eine Unterteilung in zwei lineare Elemente[24]

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 10 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{3.345}$$

hat das Ergebnis $w_2 = 5$ und damit erhält man in der Nachlaufrechnung als Lagerkräfte $f_1 = f_3 = -5$. Dazu müsste man noch die Lagerkräfte aus der direkten Reduktion addieren. Das geschieht aber automatisch wie folgt: Elementweise werden die lokalen Lösungen bestimmt, siehe Bild 3.91 c und d, und zur FE-Lösung addiert. Die Folge ist, dass der Seildurchhang $w = w_{FE} + w_{loc}$ jetzt schön rund ist, und die Lagerkräfte genau ‚passen'.

3.52 Beispiel EF Lagerkraft

Grau ist alle Theorie und daher soll ein Beispiel zeigen, wie man mit finiten Elementen Einflussfunktionen für (starre) Lager berechnen kann, ohne das System ändern zu müssen.

Die globale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ des Trägers in Bild 3.92 hat, wenn wir $EI = 1$ setzen und die Feldlänge $\ell = 1$ ist, die Gestalt

$$\boldsymbol{K}_G = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.346}$$

[24] Das ist die nicht-reduzierte globale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$.

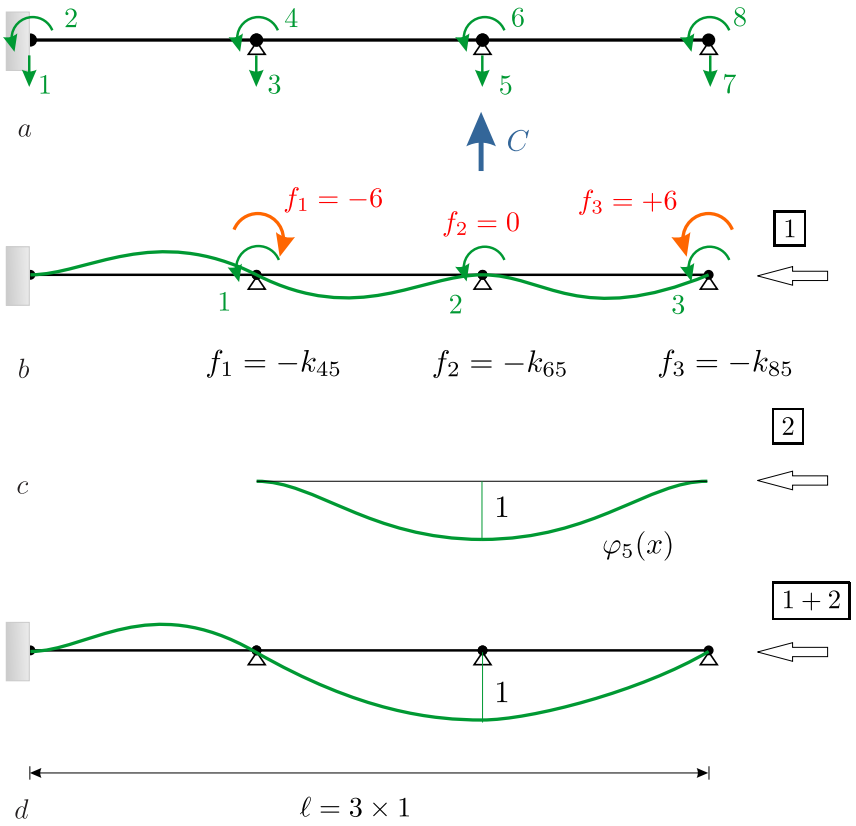
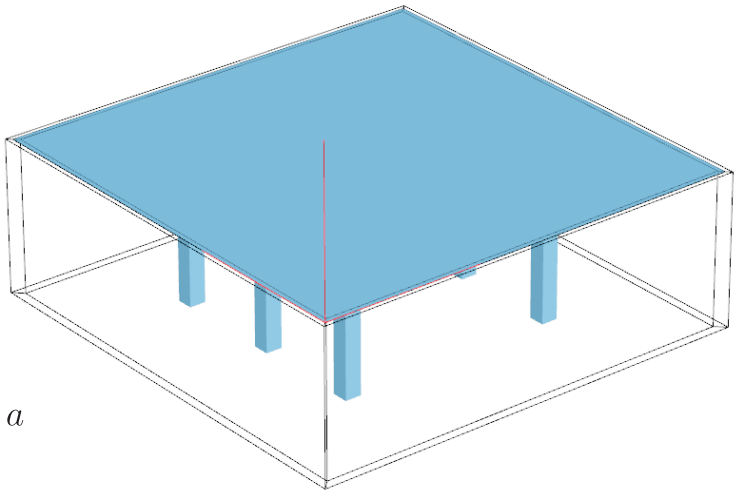


Bild 3.92. EF für die Lagerkraft C, **a)** System mit allen FG, **b)** Wirkung der Knotenkräfte f_i aus Spalte 5 am wirklichen System, **c)** *shape function* des Lagerknotens, **d)** Einflussfunktion

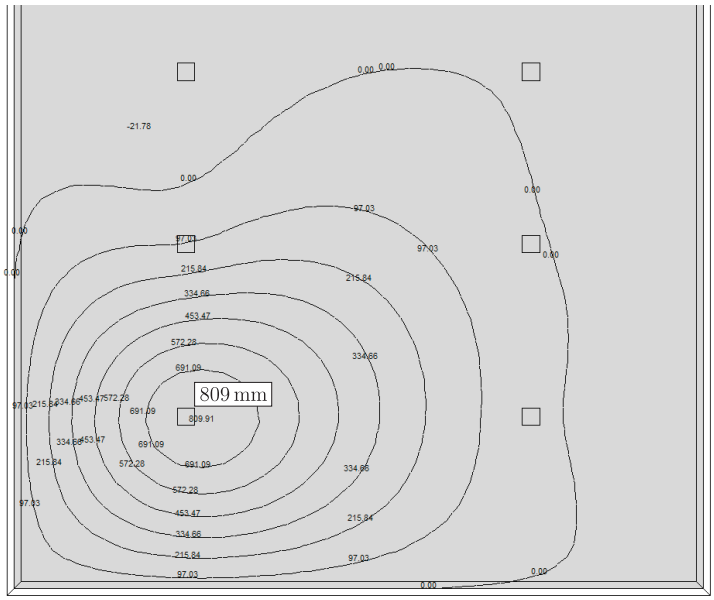
Wir wollen die Einflussfunktion für die Lagerkraft C (FG 5) berechnen. Die Einträge k_{i5} in Spalte 5 der Matrix $\boldsymbol{K}_G$ werden also mit negativem Vorzeichen auf das System in Bild 3.92 b als Knotenkräfte aufgebracht. Hierbei ist zu beachten, dass die Nummerierung beim Übergang vom nicht reduzierten System, Matrix $\boldsymbol{K}_G$, zum endgültigen System (8 FG → 3 FG) wechselt. Die Freiheitsgrade 3, 5 und 7 fallen weg und aus 4 wird 1, aus 6 wird 2 und aus 8 wird 3. Das gibt die Knotenkräfte

$$f_1 = -k_{45} = -6 \qquad f_2 = -k_{65} = 0 \qquad f_3 = -k_{85} = 6\,. \tag{3.347}$$

Zu der Verformung aus diesen Knotenkräfte, siehe Bild 3.92 b, wird noch die *shape function* φ_5 des Lagerknotens addiert und so entsteht die Einflussfunktion für die Lagerkraft in Bild 3.92 d ohne dass das Lager entfernt werden musste.



a



b

Bild 3.93. Gelenkig gelagerte Platte mit Innenstützen, **a)** System **b)** Einflussfunktion für die vordere, linke Stützenkraft. Von der angesetzten Spreizung (Lagersenkung) von 1000 mm werden ∼ 200 mm von der Stütze auf dem Weg vom Fuss bis zum Kopf ‚verschluckt'. Somit gehen rund 80 % ≙ 800 mm/1000 mm einer Punktlast über der Stütze direkt in die Stütze. Die restlichen 20% trägt die Platte. In der Praxis gibt man in solchen Plänen die Verhältniszahlen, 0.8 = 809/1000, an. (BE-PLATTE)

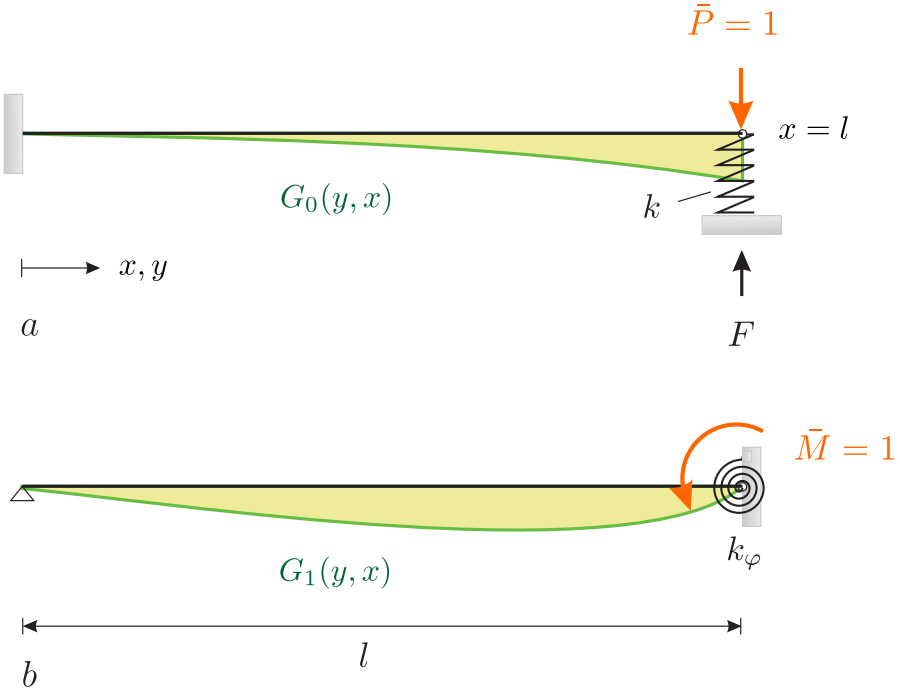


Bild 3.94. Federnde Lager, **a)** Einflussfunktion G_0 für die Absenkung der Feder und **b)** G_1 für die Verdrehung der Einspannung

3.53 Einflussfunktion für ein nachgiebiges Lager

Das Problem kann man vom Kopf oder vom Fuss her angehen. Der Fusspunkt eines elastischen Lagers ist ein fester Punkt, ein festes Lager und so kann man die Einflussfunktion für die Fusspunktskraft berechnen, siehe Bild 3.93, indem man den Fuss der Feder um 1 Meter senkt. Was oben im Balken ankommt, ist die Einflussfunktion für die Lagerkraft. Genauer gesagt: Der Wert der Einflussfunktion in einem Punkt y ist das Verhältnis von dem, was im Punkt y an Verformung ankommt, zur auslösenden Bewegung. In Bild 3.93 senkt sich der Fusspunkt der Stütze um 1000 mm (auslösende Bewegung) und davon kommen ungefähr 800 mm am Stützenkopf an. Die Einflussfunktion für die Stützenkraft hat also direkt über der Stütze den Wert $800/1000 = 0.8$, was bedeutet, dass 80 % von einer Kraft P über der Stütze in die Stütze gehen. Je weicher die Stütze ist, umso weniger wird oben von den 1000 mm ankommen.

Einfacher ist es natürlich, wenn man in den Kopf des nachgiebigen Lagers eine **Kraft** $\bar{P} = 1$ stellt, und die Reaktion $G_0(y, x)$ des Tragwerks darauf berechnet, $x =$ Ort der Feder. Die Funktion $k \cdot G_0(y, x)$ ist dann die Einflussfunktion für die Federkraft, siehe Bild 3.94 a,

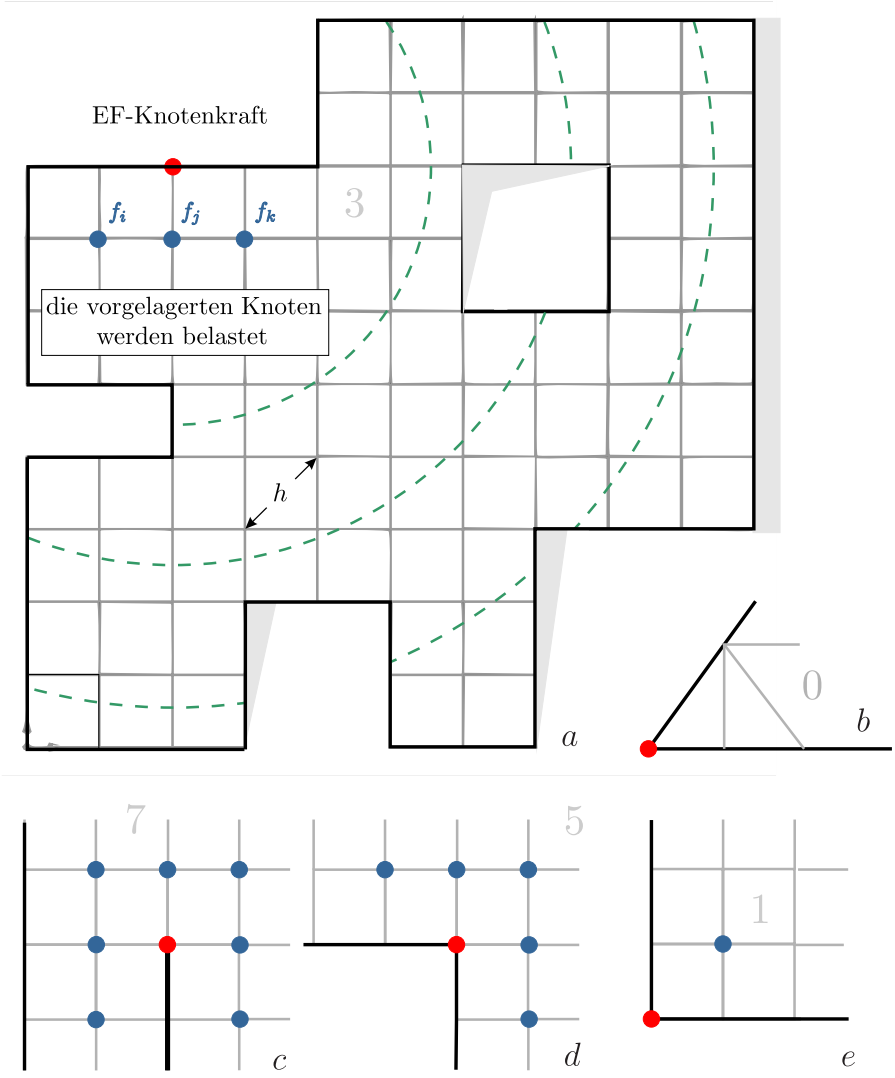


Bild 3.95. Die Einflussfunktion für die Lagerkraft in dem rot markierten Knoten wird durch Knotenkräfte in den vorgelagerten freien Knoten erzeugt. Ist u_l der FG des Knotens, dann kommen die $f_i = -k_{il}$ aus der Spalte l von $\boldsymbol{K}$. In den Knoten (genauer in den u_i), die u_l ‚sehen', wirkt eine Kraft $f_i = -k_{il}$. Je besser u_l sichtbar ist, desto mehr Knoten, $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 7$, werden also belastet, desto größer die Delle. Mit $h \to 0$ geht die einzelne Lagerkraft gegen null, weil dann die Lagerknoten dicht an dicht liegen und sie sich gegenseitig ‚das Licht wegnehmen', obwohl der Grenzwert an der Wandspitze (7 Knoten) nicht null sein wird. Übung: Man stelle sich vor, wie die verschiedenen Einflussflächen aussehen, wenn $h \to 0$ geht

$$F = k \int_0^l G_0(y,l)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.348}$$

Weil unter Verkehrslast (nicht Eigengewicht) die Kraft am Kopf und am Fuß einer Stütze gleich groß sind, sind beide Techniken anwendbar.

Sinngemäß dasselbe gilt für **Drehfedern**, siehe Bild 3.94 b. Man verdreht die Einspannung mit einem Moment $\bar{M} = 1$, berechnet die Verformungsfigur $G_1(y,x)$ und diese Biegelinie, gewichtet mit k_φ, ist die Einflussfunktion für das Moment in der Feder aus einer Streckenlast p

$$M = k_\varphi \int_0^l G_1(y,l)\, p(y)\, dy\,. \tag{3.349}$$

3.54 Einflussfunktionen für Wände

Die Einflussfunktion für die resultierende Lagerkraft R in einer Wand ist eine Delle $w = 1$ in der Platte in Richtung der Wand. Bei einer freistehenden Wand kann man sich das noch vorstellen, aber wenn die Wand in einem Verbund von Wänden steht, dann wird es schwierig mit der Anschauung. In der Situation wechselt man besser zu dem FE-Modell, ersetzt also die Wände durch elastische Knoten, durch Punktlager, denn dann kann man so vorgehen wie in dem vorangegangenen Abschnitt 3.53. Aus der Resultierenden R wird eine Summe über die einzelnen Knoten und jede Knotenkraft hat ihre eigene Einflussfunktion.

Sinngemäß dasselbe gilt natürlich, wenn die Wand starr gerechnet wird. Dann ist jeder Knoten ein starres Lager und die Einflussfunktion für die Lagerkraft f_l in Richtung des FG u_l

$$G_h(y,x) = \sum_i g_i\, \varphi_i(y) = \boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\varphi}(y)^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}_l \tag{3.350}$$

ist dieselbe, wie bei einer starren Stütze, siehe Glg. (3.340) in Kapitel 3.51.

Der Vektor $\boldsymbol{f}_l$ ist die verkürzte Spalte l der nicht reduzierten globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$; verkürzt = die Zeilen, die zu gesperrten $u_i = 0$ gehören, werden gestrichen, und so hat $\boldsymbol{f}_l$ am Schluss dieselbe Höhe wie $\boldsymbol{K}$.

Weil nur die *shape functions* der unmittelbar benachbarten Knoten Beiträge $f_i = -k_{il}$ zu dem Vektor $\boldsymbol{f}_l$ liefern, bedeutet dies, dass die Einflussfunktion für die Lagerkraft allein durch Knotenkräfte f_i in den unmittelbar **vorgelagerten Knoten** generiert wird. Diese erzeugen sozusagen eine ‚lokale' Delle in der Platte, siehe Bild 3.95.

Wird die Wand elastisch gerechnet, dann werden auch die drei Wandknoten belastet, aber der lokale Charakter bleibt erhalten.

Was wir in Kapitel 3.51 über den amputierten LF gesagt haben, gilt auch hier: Eine direkt über den Knoten abfließende Knotenlast wird von der Einflussfunktion nicht erfasst, was nur logisch ist, denn eine solche Kraft erzeugt keine Schnittkräfte in der Platte.

Zum Verständnis sei noch angemerkt, dass die f_i in den vorgelagerten Knoten **Kräfte** und **Momente** sind. Ein solcher Knoten hat drei Freiheitsgrade, u_i, u_j, u_k, eine Durchbiegung und zwei Verdrehungen und die Knotenkräfte f_i, f_j, f_k in dem vorgelagerten Knoten sind *zahlenmäßig* gleich den Auflagerkräften in dem Lagerknoten bei der Bewegung der drei *shape functions* $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$. Diese Knotenkräfte f_i sind eine Kraft und zwei Momente, weil u_i eine Durchbiegung ist und u_j und u_k Verdrehungen. Der Typ der *shape function* φ_i, genauer des FG u_i, bestimmt also den Typ der *action* f_i, Kraft oder Moment.

Und noch eine Anmerkung: Auch die Einflussfunktionen für Schnittgrößen werden durch Knotenkräfte um den Aufpunkt herum erzeugt und daher gilt das Bild 3.95 sinngemäß auch dann. Dazu kommt aber noch, dass diese Einflussfunktionen keine einfache Dellen mehr sind, sondern dass ihr Kennzeichen ein Knick oder ein Versatz im Aufpunkt ist und das macht ihre numerische Approximation doch deutlich schwieriger.

3.55 Der Eckenwinkel

Der Eckenwinkel – auch wenn es keine Ecke ist – ist der Winkel, den der Rand im Knoten hat, also 180° in einem glatten Punkt und 90° in einer Ecke, etc. Wie man in Bild 3.95 sieht, bestimmt der Eckenwinkel den Grenzwert, $h \to 0$, der Knotenkraft. In einspringenden Ecken und am glatten Rand gehen die Knotenkräfte mit $h \to 0$ gegen null; nur weil es am Ende unendlich viele, unendlich kleine Kräfte sind, ist die resultierende Lagerkraft in der Wand, nicht null.

Interessant wird es, wenn der Eckenwinkel $> 180°$ ist. Nachdem die Knotenkraft vorne an der Ecke oder am Wandende, Bild 3.95 c oder d, sicherlich nicht null ist, kann es nur so sein, dass die Delle, die in der Grenze $h \to 0$ entsteht, ein Volumen $V > 0$ hat, wahrscheinlich sogar $V = \infty$. Es ist nicht einfach sich vorzustellen, wie Knotenkräfte mit dem Abstand h von dem Wandende, die immer näher zusammenrücken, in der Grenze eine solche Einflussfläche erzeugen, aber anders kann es nicht sein.

Finite Elemente befreien also nicht von den Klippen der Kontinuumsmechanik, auch wenn nichts einfacher scheint, als eine Platte in kleine Elemente zu unterteilen und damit ‚all den Ärger mit Differentialgleichungen auf ewig' los zu sein.

In Bild 3.96 a kann man den Grenzprozess $h \to 0$ nachverfolgen. Wenn der erste Innenknoten gegen das feste Lager rückt, $l_e \to 0$, dann werden die Knotenkräfte f_i immer größer, aber weil gleichzeitig der Abstand l_e zum Lager sinkt, bleibt die Durchbiegung endlich und hat am Ende genau den Wert 1. In einem 2-D Modell ist es dagegen die Fläche, die trägt und für eine Fläche sind die f_i in der Grenze, $h \to 0$, zu ‚scharf'.

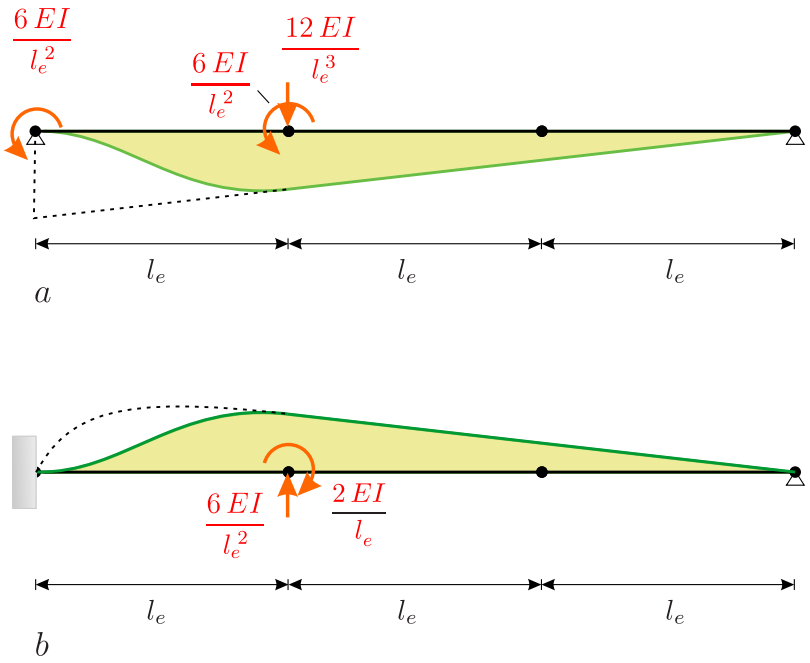


Bild 3.96. Modellierung eines Einfeldträgers mit drei Elementen, **a)** FE-Einflussfunktion für die Querkraft im Anschnitt zum Lager. Die Kräfte und Momente f_i, die die Einflussfunktion erzeugen, sind zahlenmäßig die Querkräfte der *shape functions* im ersten Element, **b)** FE-Einflussfunktion für das Moment im Anschnitt (BE-FRAMES)

3.56 Querkräfte bei Platten

Am Rand einer Platte ist die Querkraft-Tragfähigkeit nachzuweisen. Wie man in Bild 3.90 sieht, wirkt aber im Bemessungsschnitt **nicht die volle Querkraft**, sondern nur der Anteil aus der Belastung ‚im Feld', denn die Belastung unmittelbar am Lagerrand wird ja zum großen Teil dem Lager direkt zugeschlagen, fließt also gar nicht durch den Bemessungsschnitt. Ein Grund mehr bei einer FE-Berechnung einer Platte die Elemente nicht zu groß zu machen. Bei Stützen führt man in der Regel einen Durchstanznachweis mit der vollen Stützenkraft und dort gibt es das Problem nicht.

Bemerkung 3.15. Will man genau wissen, was durch den Schnitt fließt, muss man die FE-Einflussfunktion für die Querkraft in dem Schnitt mit der exakten Einflussfunktion vergleichen.

Das wird aber so sein wie bei einem Balken, wo die FE-Einflussfunktion für die Querkraft im Schnitt neben dem Lager nicht springt, sondern in einem Bogen auf null läuft, siehe Bild 3.96. Der **Zwickel** (überlagert mit der Belastung) ist der Anteil, den das FE-Programm ignoriert, der nicht durch den

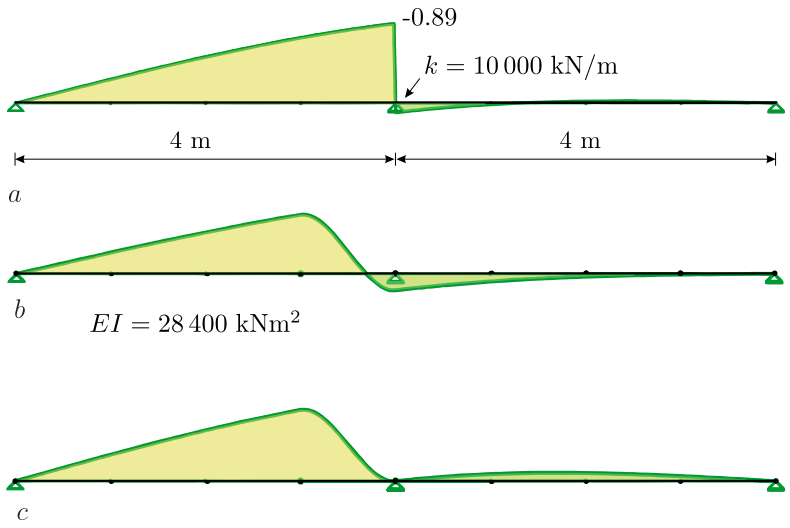


Bild 3.97. **a)** Einflussfunktion für die Querkraft links vom mittleren, federnden Lager, **b)** FE-Näherung, 4 Elemente/Feld, **c)** Näherung, wenn Lager starr ist (BE-FRAMES)

Schnitt fließt. Je kürzer man das erste Element macht, umso kleiner wird der Zwickel. Für das Einspannmoment, siehe Bild 3.96 b, gilt sinngemäß dasselbe. Und ebenso für die Randspannungen in einer Scheibe.

An nachgiebigen **Zwischenwänden** (federnde Lager) einer Platte zeigt sich dasselbe Muster, wie das Bild 3.97 sinngemäß demonstriert. All das bezieht sich auf schubstarre Platten (Kirchhoff, $K\Delta\Delta w = p$), vielleicht ist der Effekt bei schubweichen Platten etwas kleiner.

Bei Stabtragwerken (EA, EI konstant) tritt der Fehler nicht auf, weil dort zur FE-Lösung stabweise die lokale Lösung addiert wird. Die lokale Lösung hat sozusagen den fehlenden Zwickel-Anteil mit im Gepäck.

Bemerkung 3.16. Wir haben oben stillschweigend angenommen, dass man die **Schubtragfähigkeit** mit den Querkräften nachweist, aber eigentlich müsste man mit dem Kirchhoffschub $v_n = q_n + d/ds\, m_{nt}$ rechnen, denn das ist die Gleichgewichtskraft bei einer **schubstarren** Platte. Sie ist die Kraft, die konjugiert zu w ist, (und damit zu dem *lift* $w = 1$, der Bewegung, die das Gleichgewicht kontrolliert) wie man an der zweiten Greenschen Identität (7.58) ablesen kann[25]. Dass man es in der Praxis anders macht, kann man vielleicht damit rechtfertigen, dass die Torsionsmomente m_{nt} ja in die Hauptmomente einfließen, die dann die einzulegende Biegebewehrung bestimmen.

[25] Bei der Th. II. Ordnung formuliert man ja auch das Gleichgewicht mit der Transversalkraft $V = Q - P \cdot w'$ und nicht nur mit Q

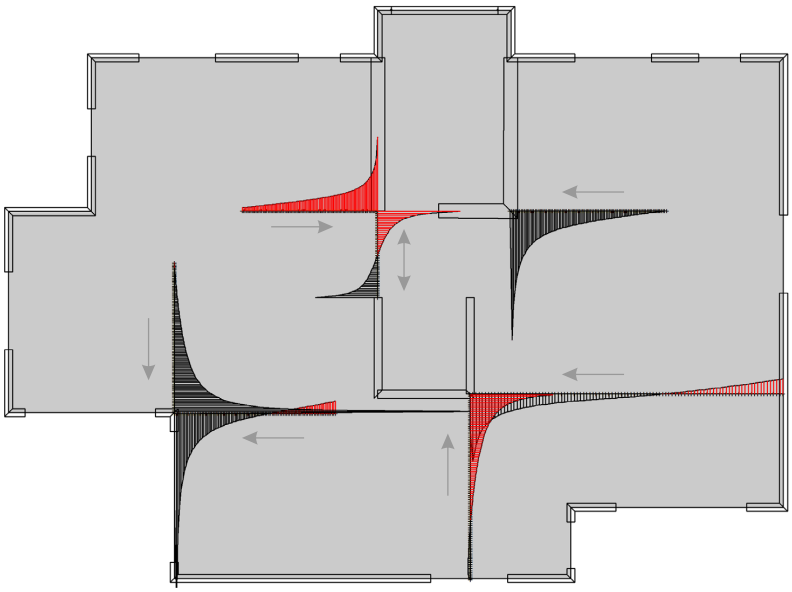


Bild 3.98. Schnittkräfte q_x und q_y in einer Platte vor den Wandenden (BE-PLATTE)

Bei **schubweichen** Platten ist die Querkraft $\boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n} = q_x\, n_x + q_y\, n_y$ senkrecht zum Schnitt wirklich die ganze Gleichgewichtskraft, siehe (7.73), denn

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi}, w; \mathbf{0}, 1) = \int_{\Omega} p \cdot 1 \, d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n} \cdot 1 \, ds = 0\,. \tag{3.351}$$

3.57 Durchstanznachweis

In den Ecken einer Platte und an den Enden von Wänden ist ein Durchstanznachweis zu führen. Das gilt natürlich auch für die Stützen, aber bei denen ist die Durchstanzkraft ja mit der Stützenkraft identisch.

In den Ecken ist das anders. Dort muss erst aus den Schnittkräften bzw. den Lagerkräften eine Durchstanzkraft ermittelt werden, mit der man dann den Nachweis führen kann. SOFiSTiK und RFEM führen dazu am Wandende einen **kreisförmigen Schnitt** und berechnen aus den Querkräften eine resultierende Durchstanzkraft, [179]. Das Programm BE-PLATTE integriert dagegen die Lagerkraft der Wand über eine gewisse Strecke des Wandendes und nimmt diese Summe als die Durchstanzkraft.

Was besser ist, wollen wir hier nicht entscheiden, sondern nur die Argumente zusammentragen.

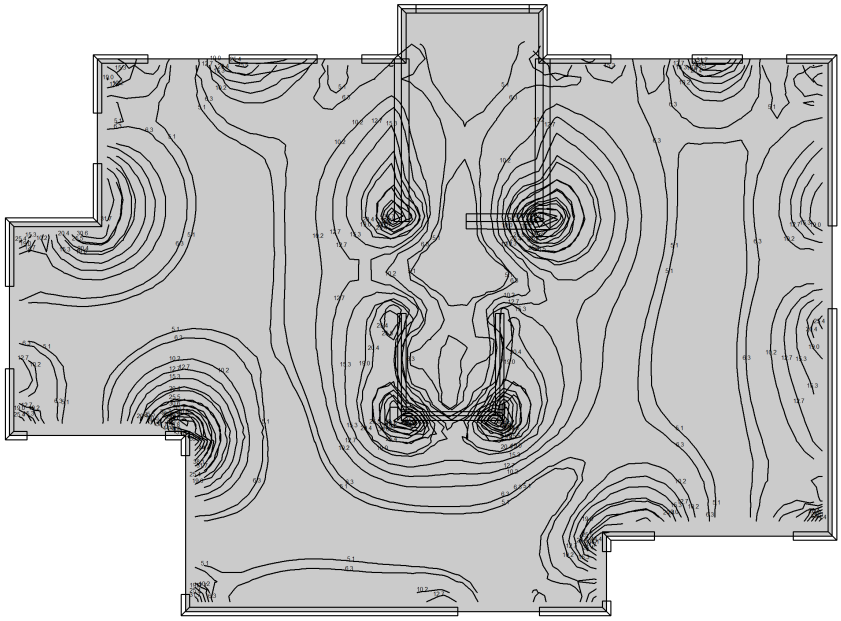


Bild 3.99. Die Niveaulinien von $\sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ (BE-PLATTE)

Beginnen wir mit den finiten Elementen. Technisch dürften die beiden Programme wie folgt vorgehen: Sie berechnen die Querkraft q_n (N/m)

$$q_n = q_x\, n_x + q_y\, n_y \qquad \boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T \tag{3.352}$$

in den Mittelpunkten der Elemente, senkrecht zum Schnitt $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$, (die Querkräfte sind elementweise konstant) und multiplizieren diesen Wert mit der jeweiligen Schnittlänge und erhalten so in der Summe über alle geschnittenen Elemente die Durchstanzkraft.

Eine gewisse ‚Willkür' steckt hier natürlich in der Größe der Elemente, denn sie bestimmt ja den Abstand von der Wand und damit die Größe der Querkräfte q_x und q_y im Mittelpunkt, wenn auch theoretisch das Integral über den Schnittrand davon unabhängig sein sollte: *Großer Kreis – kleine Querkräfte* und *kleiner Kreis – große Querkräfte*, vorausgesetzt, man macht die Rechnung mit den exakten Querkräften, siehe die Bilder 3.98 und 3.99.

So aber wird die Größe der Elemente die Güte der Querkraftverteilung beeinflussen, und um die steht es generell nicht zum besten, wenn man sich einmal die Querkräfte in der Nähe einer Ecke anschaut, siehe Bild 2.51. Die Approximation von singulären Größen mit stückweise konstanten Ansätzen hat nur den einen Vorteil, dass höhere Ansätze noch ‚wackligere' Ergebnisse liefern. Es gibt natürlich Ecken, wo man Vertrauen zu den Ergebnissen

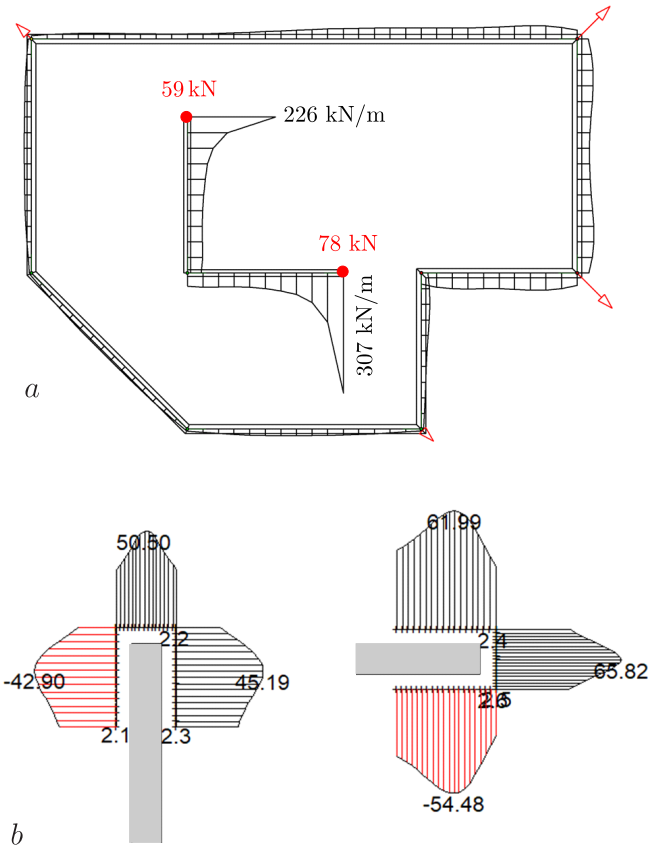
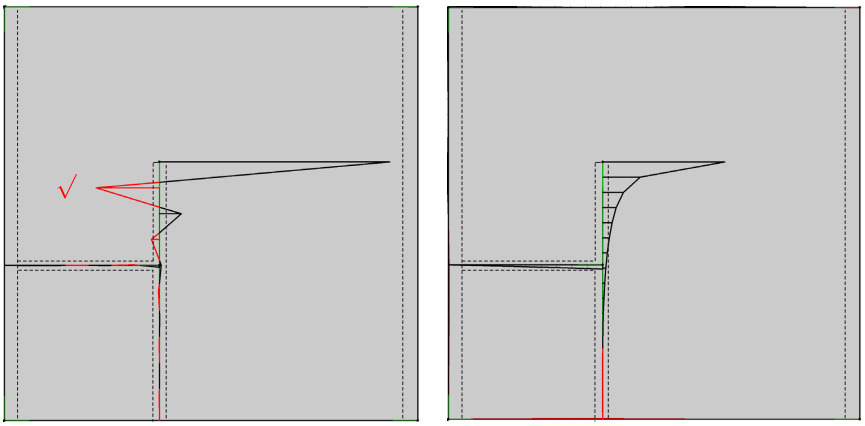


Bild 3.100. Lagerkräfte und Durchstanzkräfte in den Endpunkten zweier Wände, **b)** Querkräfte in der Platte nahe den Wandenden (BE-PLATTE)

hat, aber dann gibt es auch wieder andere Ecken, wo die Querkräfte deutlich gestört sind.

Geht man über die Lagerkraft, wie die Randelemente, dann hat man es im Prinzip einfacher, weil das letzte Stück der Lagerkraft ja genau das Integral der Querkräfte vor der Wand ist, siehe Bild 3.100. Die Frage ist nur, wie lange man das letzte Stück macht, über welche Länge (x mal Wandstärke) man summiert. Bei 17 cm Wandstärke und mit $x = 3$ ergab sich ein Wert von 59 kN bzw. 78 kN.

Macht man es wie die finiten Elementen und summiert über die Querkräfte in der Platte am Kopf der Wand, siehe Bild 3.100 b, dann ergibt sich bei einem seitlichen Abstand von 10 cm von den Wänden und einer Länge von 60 cm (parallel zu der jeweiligen langen Seite) ein Wert von 56 kN statt 59 kN bzw. 75 kN statt 78 kN.



a $EA = \infty$ *b* $EA =$ Mauerwerk

Bild 3.101. Lagerkräfte einer Wohnhausdecke 8×8 m im LF $g = 9$ kN/m^2, rechts ist ein freier Rand **a)** Lagerung auf starren Wänden **b)** Lagerung auf Mauerwerk

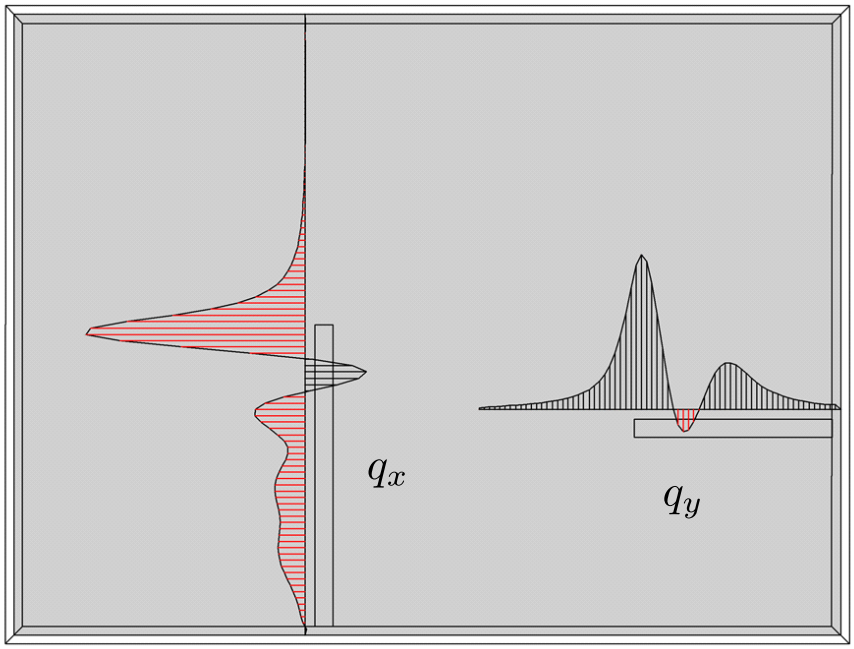


Bild 3.102. Ein zweites Beispiel, eine Stahlbetondecke, die Querkräfte an den beiden Wänden weisen im LF g deutliche Dellen auf, weil 50 cm hinter dem Wandkopf Zugkräfte in der Wand die Platte daran hindern, abzuheben (BE-PLATTE)

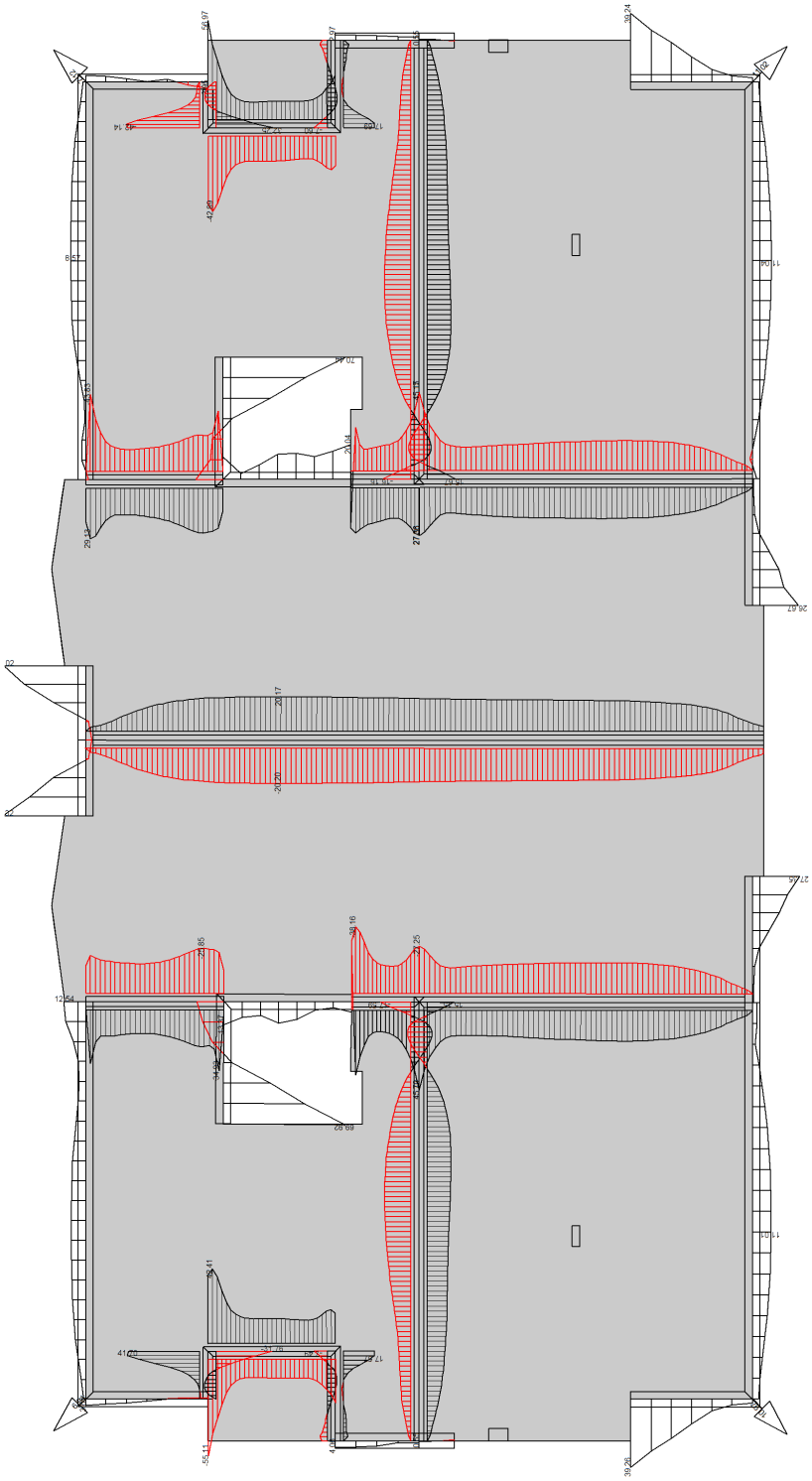


Bild 3.103. Typische Querkraftverläufe in der Nähe der Innenwände und am Rand einer Hochbaudecke (BE-PLATTE)

Das ist (ungewollt) ein gutes Ergebnis, aber es gibt natürlich andere Beispiele wo die Differenzen größer sind, einfach weil man an zu vielen Parametern drehen kann.

Verglichen wurde der Kirchhoffschub $v_n = q_n + d\,m_{nt}/ds$, der bei einer schubstarren Platte (Kirchhoff) die eigentliche Gleichgewichtskraft ist

$$\text{(schubstarr)} \qquad v_n = q_n \qquad \text{(schubweich)} \tag{3.353}$$

die dem $q_n = q_x\,n_x + q_y\,n_y$ bei der schubweichen Platte (Reissner-Mindlin) entspricht[26]. Das $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$ ist die Schnittnormale; bei achsenparallelen Schnitten ist natürlich $q_n = q_x$ bzw. $= q_y$.

Zu den Querkräften in Bild 3.100 b wurde also rechnerisch noch die Ableitung $d\,m_{nt}/ds$ des Torsionsmoments in Schnittrichtung addiert. Man beachte, wie glatt die Querkräfte in den Schnitten sind, trotz der Singularität an den Wandenden.

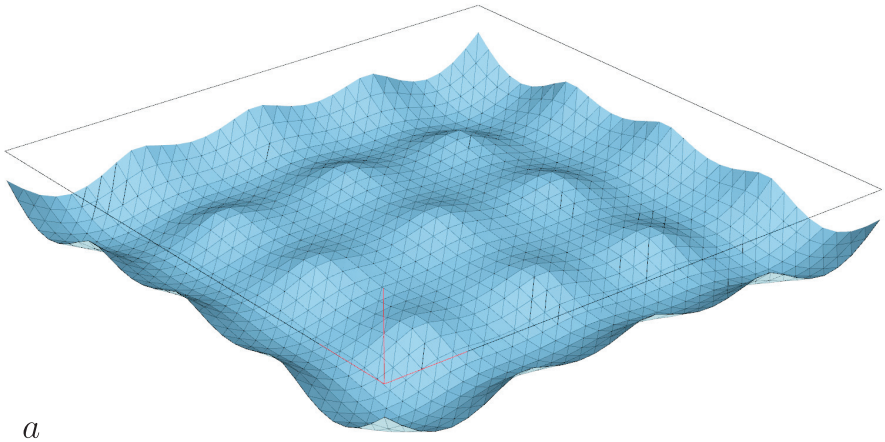
Der Vorteil der Randelemente ist, dass die Lagerkräfte (N/m) der Wände direkt in den Grundgleichungen vorkommen, siehe Bild 3.103, während die finiten Elemente ja erst aus den Wandverformungen die Lagerkräfte berechnen und zu einer Durchstanzkraft aufintegrieren müssten.

Dieser Ansatz, der aber von den FE-Programmen (wohl aus Erfahrung) bewusst nicht verfolgt wird, hätte den Vorteil, dass sich Lagerkräfte mit FE-Programmen relativ genau berechnen lassen. Die Einflussfunktion für die Knotenkraft an der vorderen Kante ist ja einfach eine Delle der Platte an dieser Stelle und solche Einflussfunktionen ähneln Einflussfunktionen für Durchbiegungen, sie sind gleich ‚harmlos'.

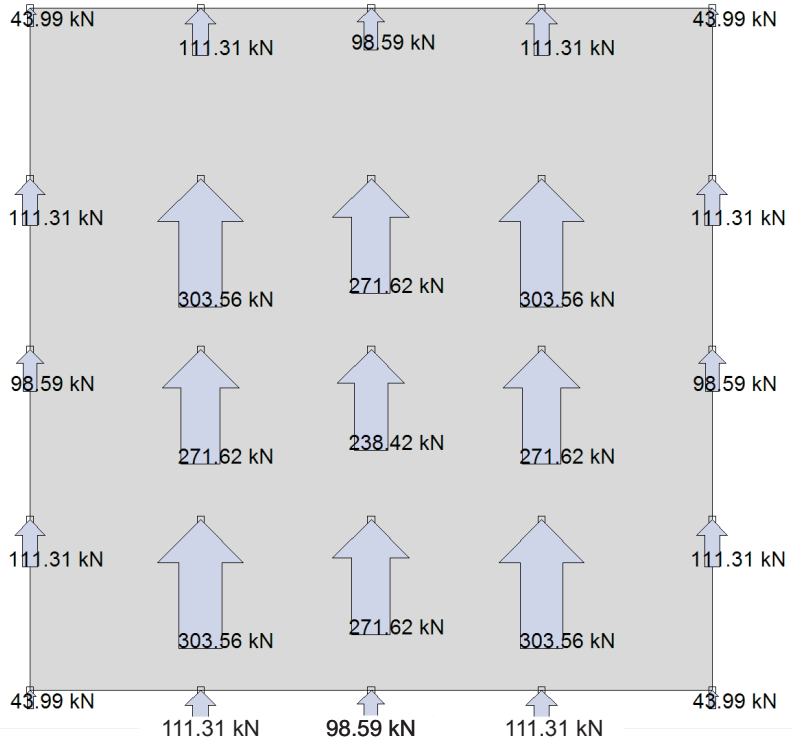
Auch das typische Oszillieren der Lagerkräfte am Wandende, siehe Bild 3.101 aus [91] und Bild 3.102, kann man so erklären. Es ist kein Fehler, sondern es beruht darauf, dass der vorletzte Knoten vor dem Wandende die Platte vor der Wand nach oben zieht, wenn er sich um einen Meter (EF für die Knotenkraft) senkt. Ausgeprägt zeigt sich das, wenn man die Platte ‚knirsch' rechnet, während mit weicher Lagerung die Effekte sich verflüchtigen.

Bemerkung 3.17. Die Randelemente sind das analytischere Verfahren gegenüber den finiten Elementen und deswegen erhält man mit Randelementen in der Regel glattere, schönere Verläufe, sehen die Ergebnisse (unter günstigen Umständen) wie Laborergebnisse aus – das als Anmerkung zu den obigen Bildern, wie auch zu vielen anderen Bildern in diesem Buch.

[26] Die FE-Programme rechnen in der Regel schubweich



a



b

Bild 3.104. Punktgestützte Platte, LF g, **a)** Biegefläche, **b)** Lagerkräfte (BE-PLATTE)

3.58 Genauigkeit der Lagerkräfte

Die Einflussfunktionen für Stützen sind einfache Senken in der Platte, die durch eine **Spreizung** der Größe Eins zwischen Stützenkopf und Platte ausgelöst werden. Sie ähneln vom Typ her den Einflussfunktionen für Durchbiegungen und sie sind daher auch schon auf relativ groben Netzen gut anzunähern. Das ist der Grund, warum man bei einer FE-Berechnung keine großen Zweifel an der Höhe der ausgewiesenen Stützenkräfte haben muss, siehe Bild 3.104. Das gilt sinngemäß auch für Wände, siehe Bild 3.105 und auch für Unterzüge, obwohl da in der Praxis zum Teil heftig diskutiert wird, was die Modellierung von Unterzügen angeht, siehe Bild 3.109.

3.59 Punktlasten und Punktlager bei Scheiben

Punktkräfte bei Scheiben führen zu unendlich großen Spannungen und so können Scheiben auch nicht auf Punktlager gesetzt werden, weil das Material einfach zu fließen anfangen würde. Andererseits erhält man aber mit finiten Elementen doch sinnvolle Ergebnisse in Punktlagern, siehe Bild 3.106. Wie geht das?

Es geht, weil auch die finiten Elemente einen gebührenden Abstand von echten Punktkräften einhalten. Im Ausdruck stehen zwar äquivalente Knotenkräfte f_i, aber sie sind ja nur **Stellvertreter** für die wahren Stützkräfte, die als Flächen- und Linienkräfte in der Umgebung des Knotens die Scheibe halten.

Auf der Lastseite gilt dasselbe. Wenn der Anwender eine Knotenkraft eingibt, dann behilft sich ein FE-Programm damit im LF p_h eine Schar von äquivalenten Flächen- und Linienkräften in die Nähe des Knotens zu plazieren, denn singuläre Spannungen $\sigma = 1/r$ kann ein FE-Programm nicht darstellen.

Dies ist die Stelle, wo man sieht, wie die finiten Elemente ihr Eigenleben entwickeln. Formal sind sie nur ein numerisches Werkzeug, aber der Ingenieur findet gar nichts dabei, die Knotenkräfte für real zu nehmen und so kommt er mit Hilfe der finiten Elemente sehr elegant über die Stolpersteine hinweg, die ihm die Elastizitätstheorie in den Weg legt.

So ist das statische Problem der Wandscheibe in Bild 3.17, die sich auf zwei Punktlager stützt, vom Standpunkt der Mathematik aus ein **schlecht gestelltes Problem**, weil die Spannungen und Verformungen der Scheibe in den Lagerpunkten gemäß der Elastizitätstheorie unendlich groß werden und echte Punktlager die Scheibe auch nicht festhalten könnten.

Mit finiten Elementen ist man jedoch noch ein gutes Stück von dieser Grenze entfernt. Zudem ist die Scheibe statisch bestimmt gelagert und so ist es nur natürlich, die f_i wie echte Kräfte zu behandeln.

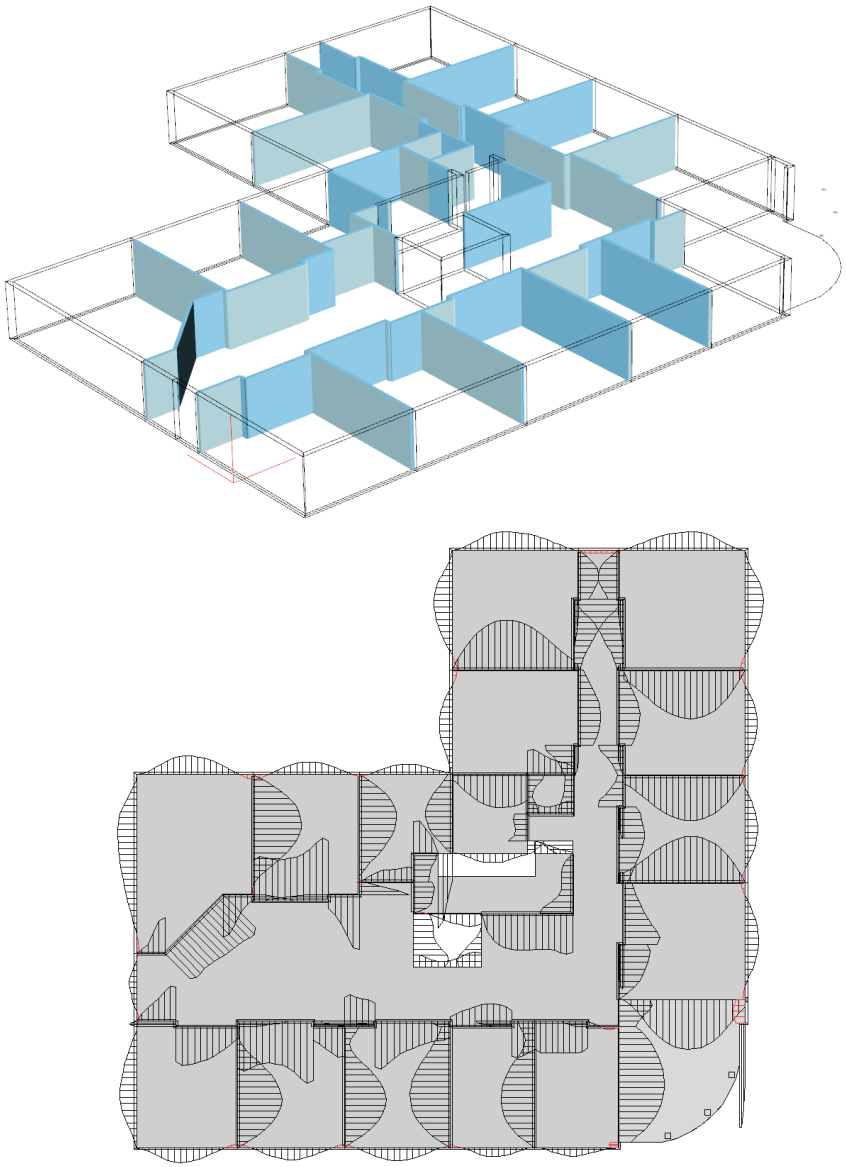


Bild 3.105. Wände unter einer Hochbaudecke, auch diese Lagerkräfte kann ein FE-Programm relativ genau ermitteln (BE-PLATTE)

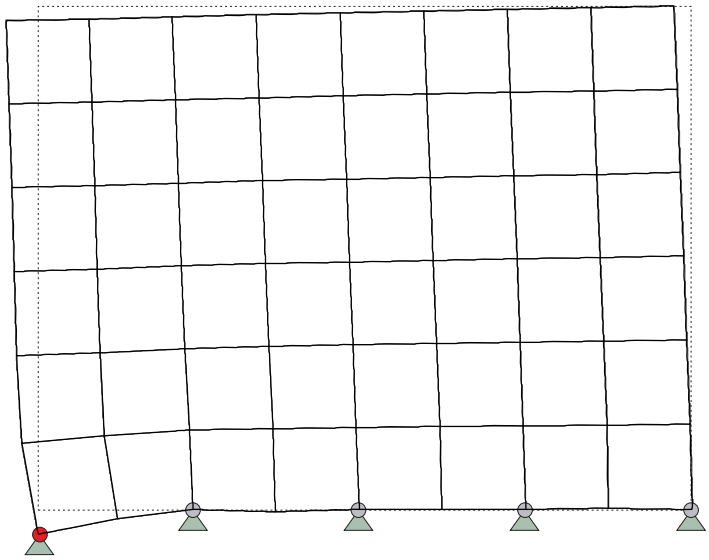


Bild 3.106. Einflussfunktion für die FE-Lagerkraft in dem Punktlager einer Scheibe (WINFEM)

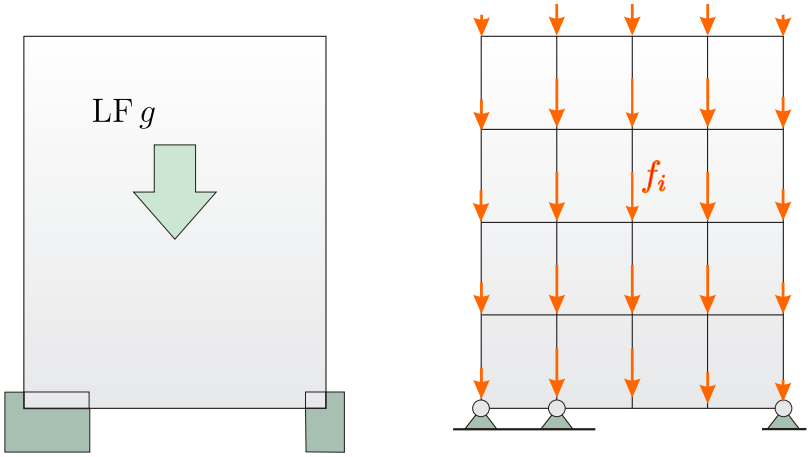


Bild 3.107. Original und FE-Netz mit äquivalenten Knotenkräften

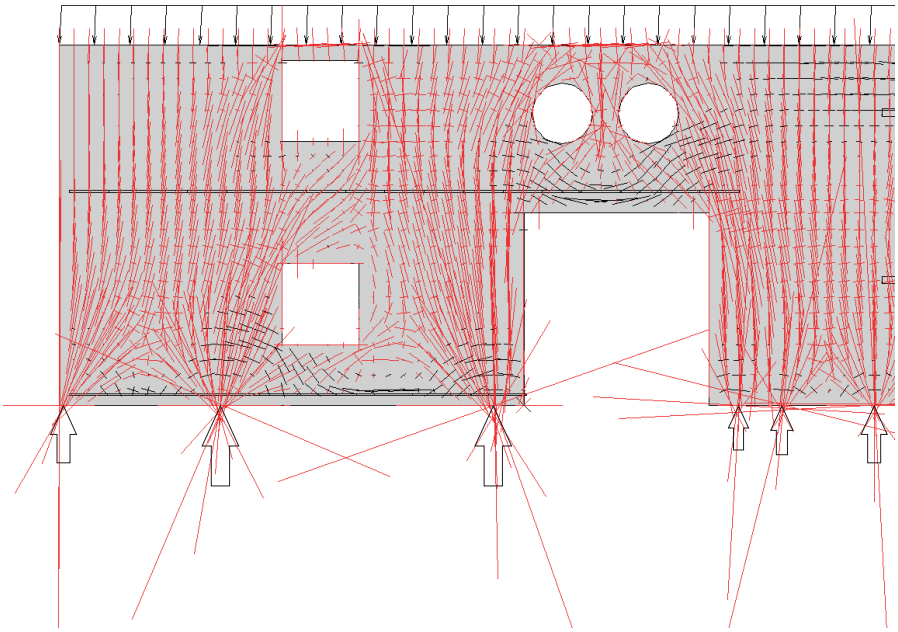


Bild 3.108. Wandscheibe auf Punktlagern (Ausschnitt) (BE-SCHEIBE)

Viele Ingenieure interpretieren das FE-Modell einer Scheibe ja als eine Art **Fachwerk**, wo kleine Scheibenelemente in den Knoten miteinander verbunden sind und wo das Gleichgewicht in den Knoten, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}$ bestimmt, siehe Bild 3.107. Das ist aber eine Interpretation ‚als ob', schon deswegen, weil auf beiden Seiten von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ Arbeiten stehen und keine Kräfte; es werden Arbeiten bilanziert.

Das (scheinbar) merkwürdige ist, dass man für diese ‚fiktiven' äquivalenten Knotenkräfte f_i Einflussfunktionen aufstellen kann. Einfach so, wie man das auch bei einem Fachwerk machen würde: man verschiebt den Lagerknoten um einen Meter und bilanziert so die Arbeiten, die von der Belastung und der Lagerkraft bei einer Verrückung des Lagers geleistet werden.

3.60 Ein mögliches Missverständnis

Der Fehler einer FE-Lösung, nehmen wir die Durchbiegung einer Membran, beruht auf der Differenz $p - p_h$

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\,(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\; d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{3.354}$$

was für eine Punktlast P bedeutet, dass scheinbar

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\,(P - P_h) \qquad ? \tag{3.355}$$

wenn wir $P_h = f_i = P$ mit der äquivalenten Knotenkraft identifizieren. Demnach müsste der Fehler der FE-Lösung null sein

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\,(P - P)\,. \tag{3.356}$$

Aber die rechte Seite der FE-Lösung u_h ist nicht die Knotenkraft $f_i = P$, sondern ein **Flickenteppich** $p_h = -\Delta u_h$ von Flächen- und Linienkräften, die die Punktlast äquivalent annähern, ähnlich wie in Bild 3.17 b. Die obige Gleichung lautet also richtig

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \cdot P - \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{3.357}$$

und dieser Ausdruck ist nur null, wenn u in $\mathcal{V}_h$ liegt, was in der Regel nicht der Fall ist, weil die stückweisen Polynome φ_i die Spannungsspitzen $1/r$ unter der Einzelkraft nicht nachbilden können.

3.61 Punktlager sind hot spots

Wenn man einen Knoten festhält, dann wird die Scheibe dort praktisch ‚geerdet'. Das ist so, als ob man mit der einen Hand eine **Hochspannungsleitung** berührt und mit der anderen die Erde. Der steile Anstieg der Verschiebungen vom festen Lager zu den freien Knoten produziert große Spannungen in den Elementen, die mit dem festen Knoten verbunden sind, siehe Bild 3.108.

Je kleiner die Elemente in der Nähe des Festpunktes werden, um so steiler ist der Verschiebungsgradient in den Elementen und um so größer sind somit auch die Spannungen in den Elementen.

Warum die Spannungen unendlich groß werden, ja unendlich groß werden müssen, versteht man, wenn man sich die finiten Elemente anschaut.

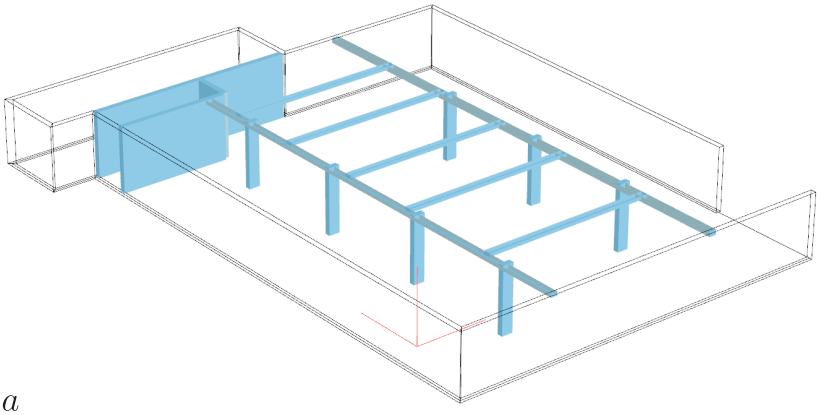
Angenommen in dem Punktlager wirkt eine vertikale Kraft $f_i = 10$ kN. Wenn man also den Lagerknoten um einen Meter nach oben drückt (das ist rein rechnerisch), dann leistet die Knotenkraft dabei die Arbeit $\delta W_e = 10$ kNm, siehe Bild 3.110.

Die Bewegung des Lagerknotens teilt sich dem Element Ω_e mit, auf dem das Lager liegt, und so muss die virtuelle innere Energie δW_i in dem Element gleich δW_e sein

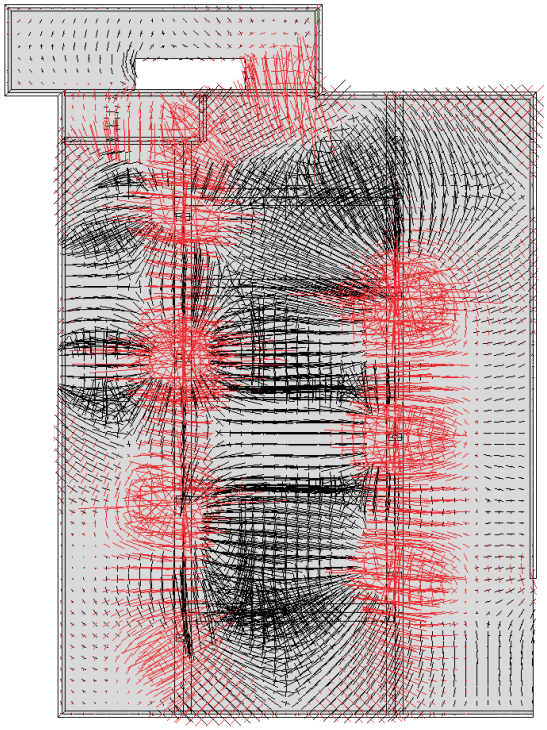
$$\delta W_e = 1 \cdot f_i = \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\Omega = \delta W_i\,. \tag{3.358}$$

Die Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ resultieren dabei aus der Lagerbewegung $u_i = 1$.

Alle anderen Elemente spüren nichts davon, weil alle anderen Knoten bei dem Manöver festgehalten werden.



a



b

Bild 3.109. Hochbauplatte, **a)** Unterkonstruktion, **b)** Hauptmomente im LF g (BE-PLATTE)

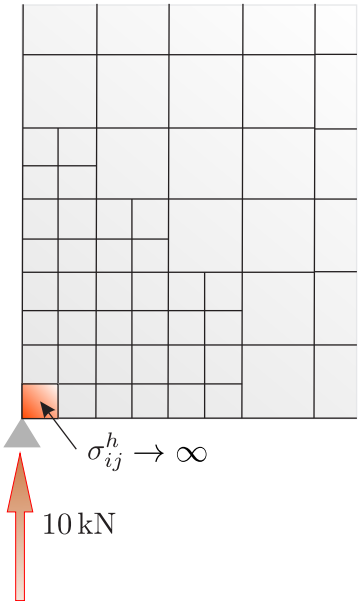


Bild 3.110. Durch das letzte Element vor dem Punktlager muss die ganze Lagerkraft fließen...

Dieses letzte vor dem Lager liegende Element muss also ganz allein die nötige Energie aufbringen, um die Lagerarbeit ins gleiche zu setzen!

Wenn nun das Element immer kleiner wird, weil man ja genaue Ergebnisse haben will..., dann müssen die Spannungen in dem Element immer mehr anwachsen, weil immer weniger Fläche vorhanden ist, über die man integrieren kann, und so hat man keine Chance irgend etwas vernünftiges zu berechnen. Man muss dann umschalten und in äquivalenten Knotenkräften denken.

3.62 Der amputierte Dipol

Um die Singularität in Punktlagern besser zu verstehen, betrachten wir die Einflussfunktion für die Querkraft q_x in einer Platte, siehe Bild 3.111, die ja durch eine **Scherbewegung** entsteht. Wenn der Aufpunkt frei im Innern liegt, dann halten sich die beiden Bewegungen die Balance und die Auslenkung der Platte bleibt, bis auf den Aufpunkt selbst, beschränkt. Rückt jedoch der Aufpunkt in die Nähe eines Punktlagers, dann wird diese Balance durch die Stütze gestört, und die Folge davon ist, dass bei Annäherung an die Stütze die Auslenkung der Platte über alle Grenzen wächst, siehe Bild 3.111 b.

Tendenziell sieht man den Effekt auch bei der über den Träger wandernden Einflussfunktion für die Querkraft in Bild 2.35, Seite 159. Je mehr der Aufpunkt sich dem Zwischenlager nähert, desto mehr wird die Einflussfunktion nach oben gedrückt, gerät die Balance zwischen links und rechts aus dem

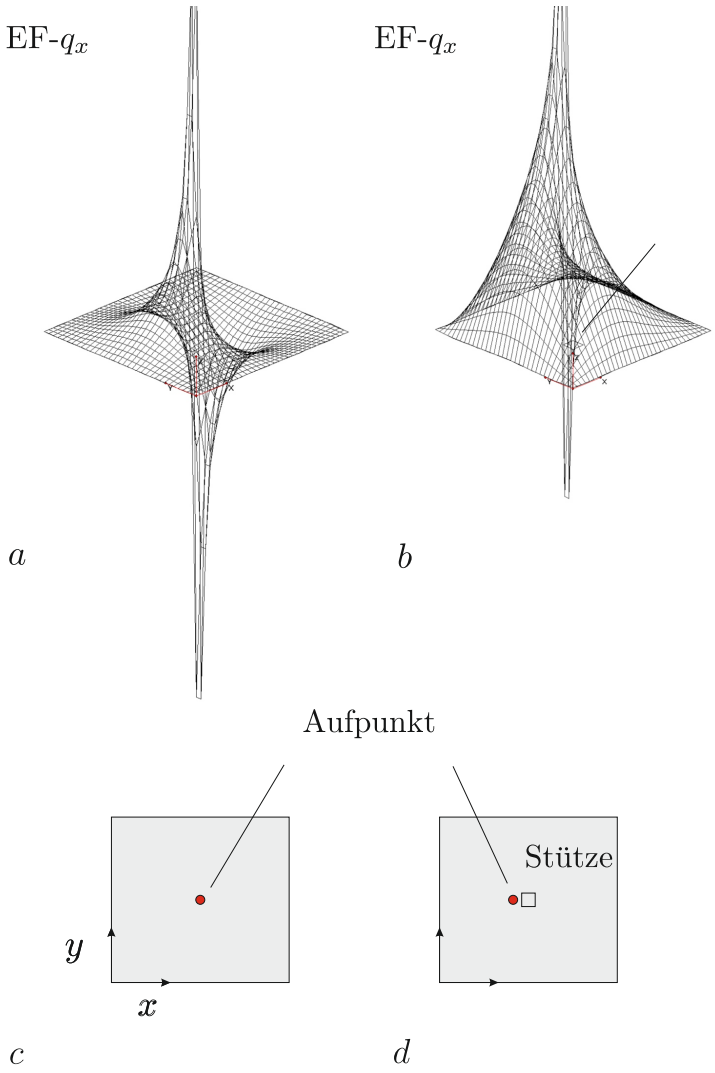


Bild 3.111. Einflussfunktion für die Querkraft q_x, **a)** die Scherbewegung kann sich frei ausbilden, **b)** die starre Stütze behindert die Scherbewegung, die weiter abliegenden Knotenkräfte sind im Übergewicht und treiben so die Platte nach oben – auch in Bereichen, die vom Aufpunkt weiter weg entfernt liegen (BE-PLATTE)

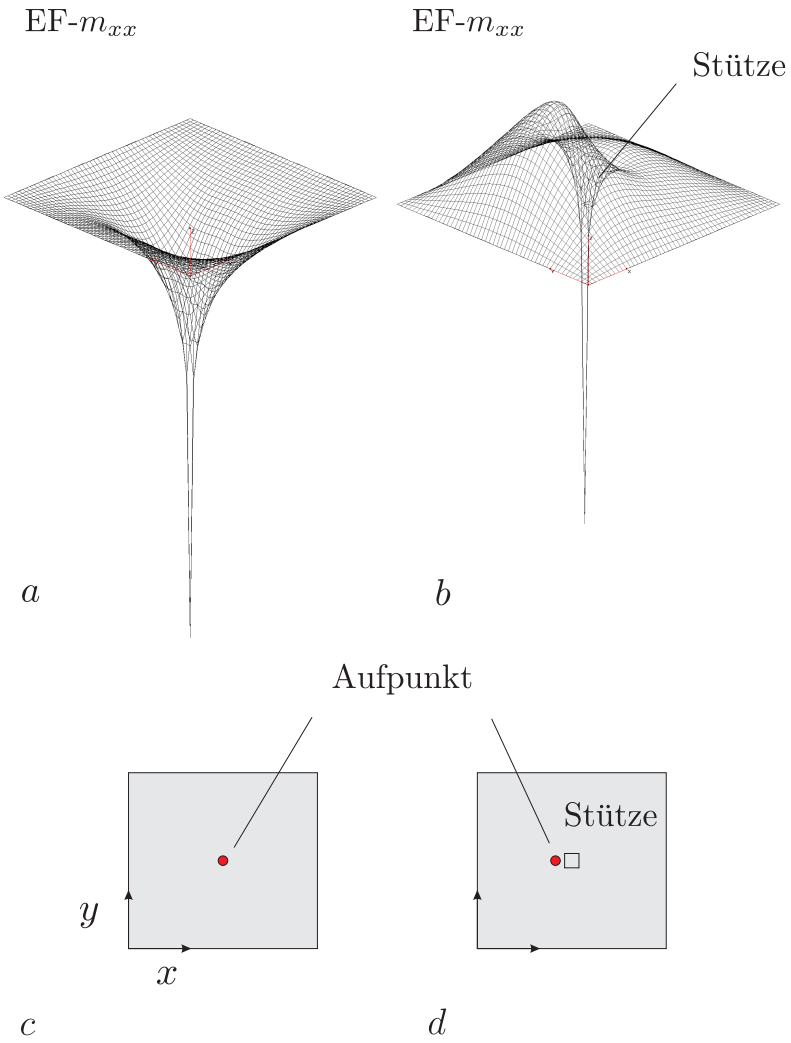
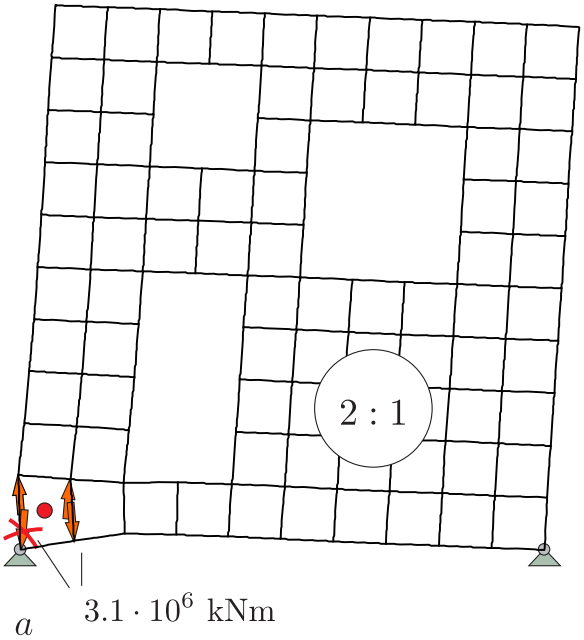


Bild 3.112. Dieselbe Platte wie in Bild 3.111; die Einflussfunktion für das Biegemoment m_{xx} (im selben Punkt) zeigt dasselbe Verhalten, aber links und rechts in **a)** und **b)** sind ausgewogener, weil die Einflussfunktion durch eine symmetrische Quelle (ein Quattropol) erzeugt wird (BE-PLATTE)



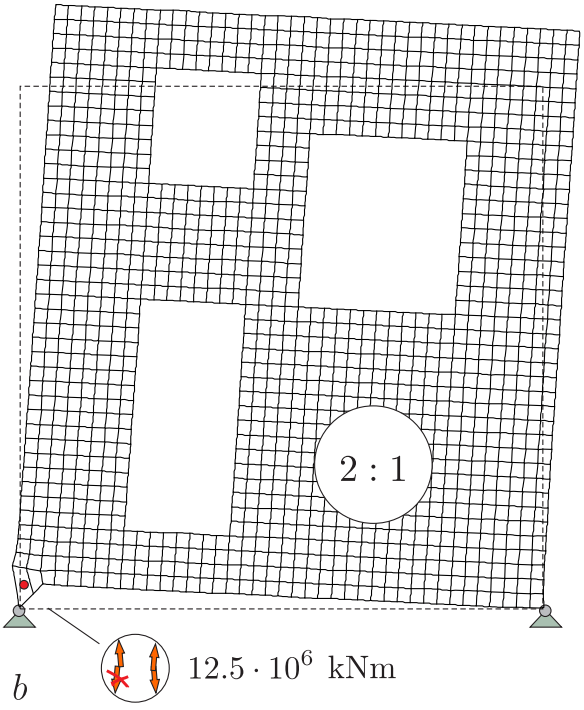
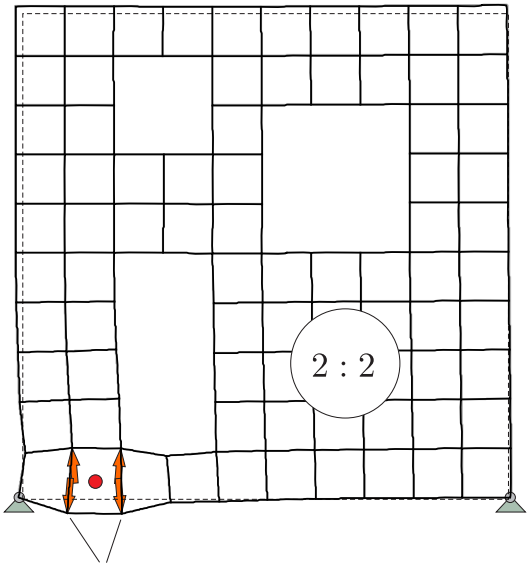


Bild 3.113. Generierung der Einflussfunktion für σ_{yy}, **a)** die Knotenkräfte, die die Spreizung (näherungsweise) erzeugen sind jeweils in allen vier Knoten gleich und hängen nur von der Maschenweite h ab, **b)** je kleiner die Elemente werden, um so größer werden die Knotenkräfte und damit die Verformung der Scheibe. Das Verhältnis zwischen den Kräften steht 2 : 1, weil das feste Lager eine Kraft neutralisiert (‚amputierter Dipol') (WINFEM)



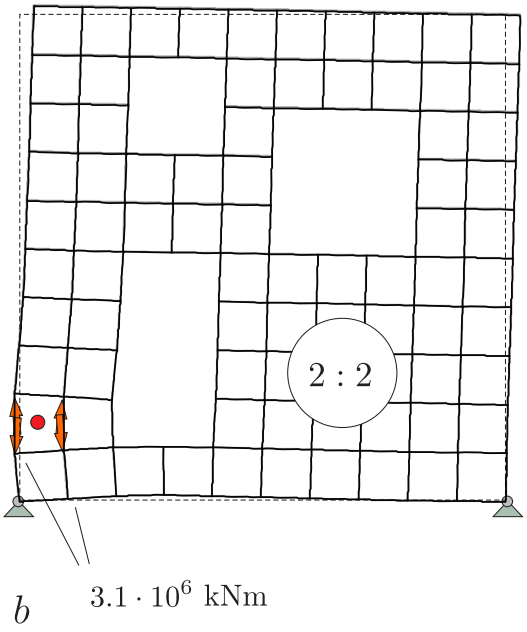


Bild 3.114. Generierung der Einflussfunktionen für σ_{yy}, **a)** und **b)** bei der Spreizung der Nachbarelemente des Lagerelementes drücken zwei Kräfte nach oben und zwei Kräfte nach unten und so bleiben die Verschiebungen auch in der Grenze, $h \to 0$, endlich (‚echter Dipol')(WINFEM)

Lot und am Ende mündet die **Scherbewegung** in einem einseitigen Versatz, einem einseitigen *uplift*. Nur ist es so, dass bei der Platte die Spitze dieses *uplifts* unendlich weit über der Stütze liegt.

Diese Argumentation können wir nun direkt auf die Scheibe übertragen, denn die Einflussfunktion für die Spannungen σ_{ij} werden auch durch solche Scherbewegungen erzeugt, siehe Bild 3.113. Numerisch sind es vier Kräfte, die dort die Einflussfunktion für σ_{yy} erzeugen.

Liegt der Aufpunkt in dem Element mit dem Lagerknoten, dann steht es **2:1** für die nach oben treibenden Kräfte, d.h. *zwei* Knotenkräfte drücken nach oben, aber nur *eine* Knotenkraft drückt nach unten, weil die Knotenkraft im Lager ausfällt. So gelingt es also den f_i die Oberkante der Scheibe in der Grenze in ‚den Himmel' zu verschieben. In den Nachbarelementen wirken hingegen, siehe Bild 3.114, alle ***vier = zwei + zwei*** Kräfte **gleichzeitig** und halten so die Balance mit der Konsequenz, dass die Auslenkung (= Spannung) endlich bleibt.

Um die Tendenz $\sigma_{ij} \to \infty$ auch statisch zu verstehen, denken wir uns der Einfachheit halber das Element als eine kleine Kreisscheibe mit einem Radius R. Die Elementverzerrungen aus der Eins-Verschiebung des Lagerknotens verhalten sich wie

$$\delta\varepsilon_{ij} = O(\frac{1}{R})\,. \tag{3.359}$$

Sinngemäß gilt daher

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega \sim \int_0^{2\,\pi}\int_0^{R} \sigma_{ij}\,\frac{1}{R}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\,\pi} \sigma_{ij}\,\frac{1}{2}\,R\,d\varphi\,, \tag{3.360}$$

und daher muss sich σ_{ij} wie $1/R$ verhalten, damit in der Grenze, $R \to 0$, die Knotenkraft f_i übrig bleibt

$$\lim_{R\to 0}\int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega = f_i\,. \tag{3.361}$$

Bemerkung 3.18. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass **Linienlager** im $3-D$ dasselbe Schicksal erleiden, wie **Punktlager** bei Scheiben, weil die Spannungen längs einem Linienlager (= unendlich feiner Draht) das Material zum Fließen bringen. Aus diesem Grund kann man theoretisch auch kein Linienlager um ein oder zwei Zentimeter senken. In der Praxis geht es natürlich schon, weil die finiten Elementen weit weg sind von solchen Fallstricken der Elastizitätstheorie.

3.63 Der Dipol am Rand

An einer Membran kann man den Effekt des **amputierten Dipols** sehr schön verfolgen. Die Einflussfunktion für die Querkraft $q_x = H\,w_{,x}$ in einer

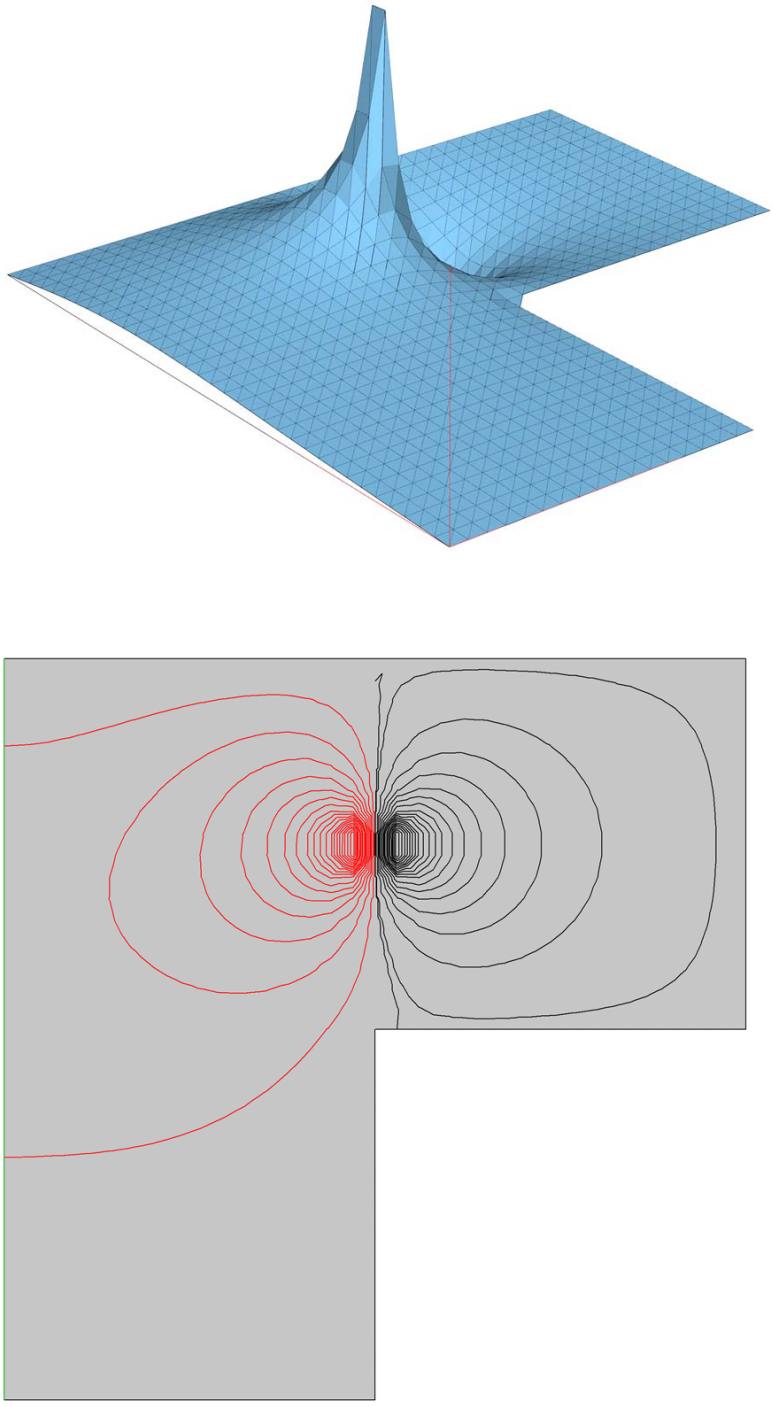


Bild 3.115. Einflussfläche für die Querkraft $q_x = H\, w_{,x}$ in einer Membran (mit freiem Rand links) in 3-D Darstellung und in Form von Niveaulinien (BE-LAPLACE)

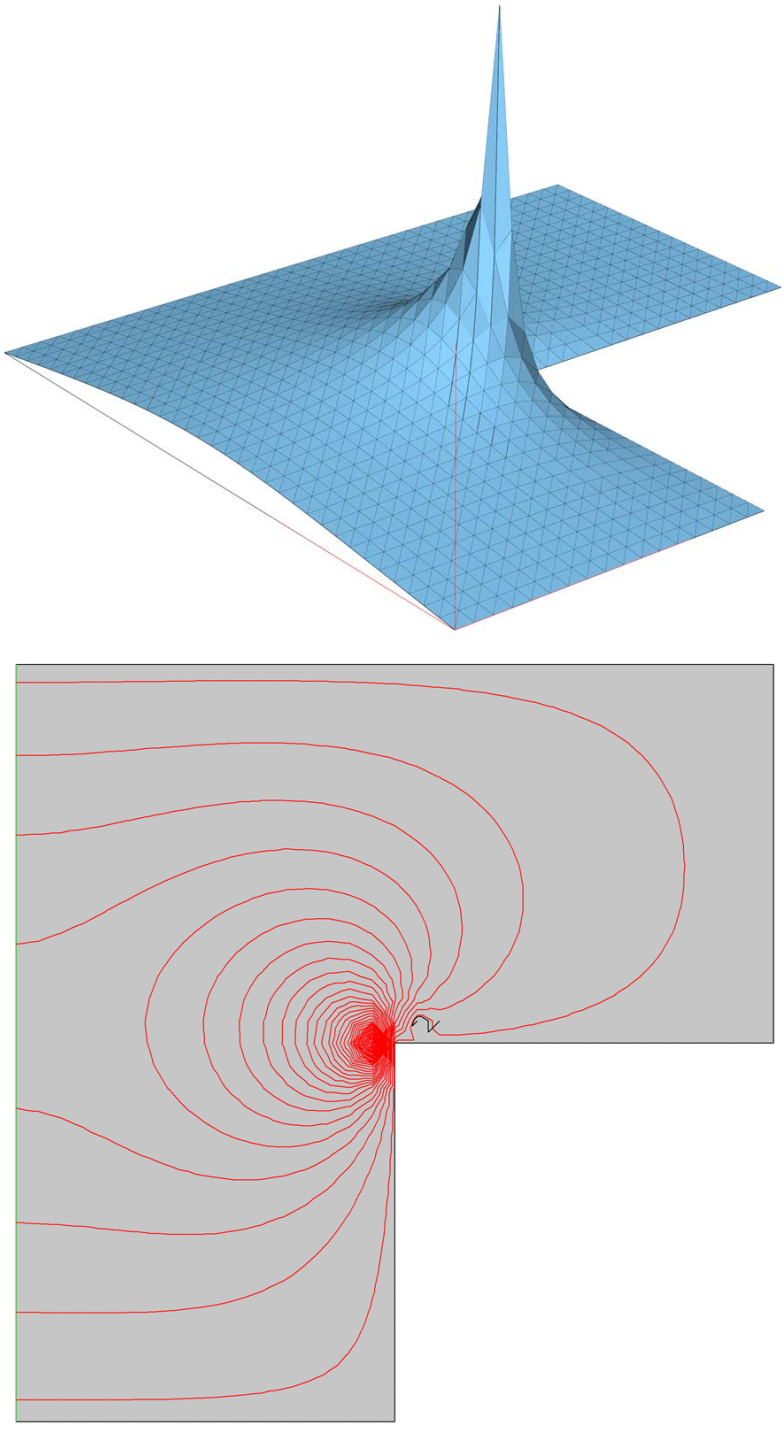


Bild 3.116. Dieselbe Einflussfläche, aber jetzt liegt der Aufpunkt an der Ecke und die Singularität dominiert, weil sich die andere Spitze nicht ausbilden kann (BE-LAPLACE)

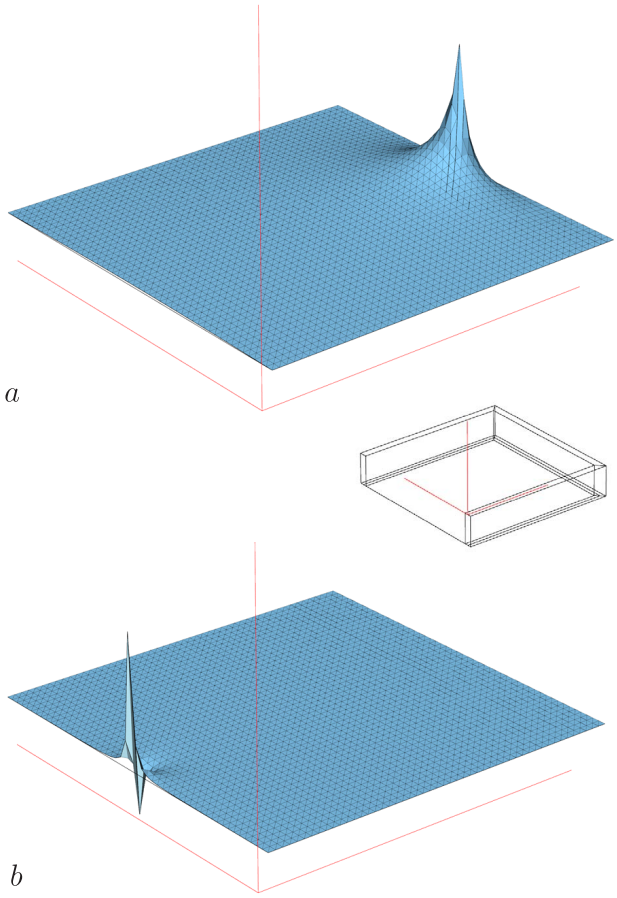


Bild 3.117. Membran, 5 m × 5 m, und Einflussfunktion $w_{,x}$ **a)** nahe dem festen Rand und **b)** nahe dem freien Rand, nahe = 5 cm vom Rand (BE-LAPLACE)

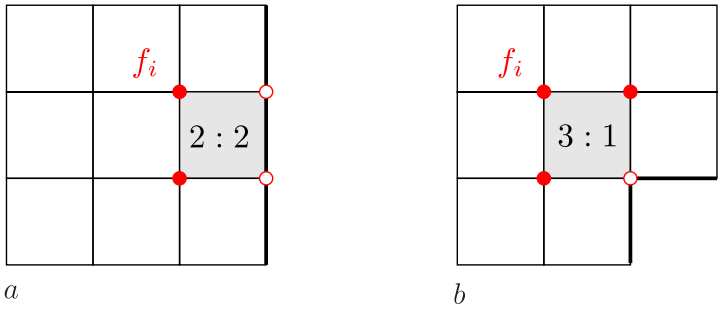
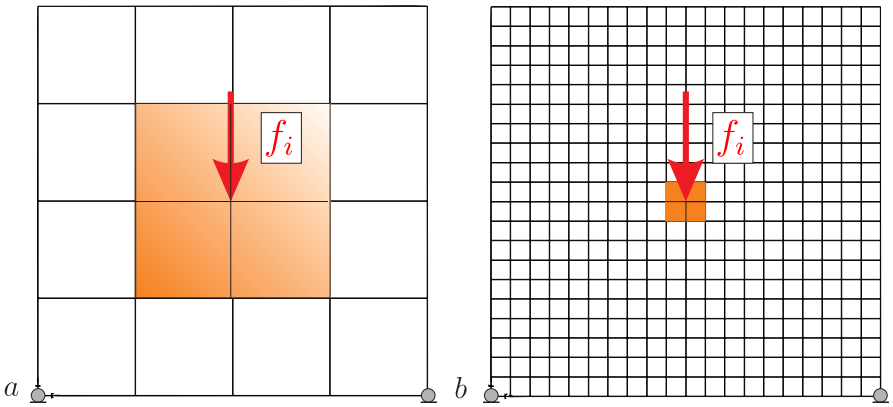


Bild 3.118. Das Element mit dem Aufpunkt und die Knotenkräfte $f_i = \mathrm{O}(1/h)$ der Einflussfunktion **a)** am glatten Rand und **b)** in der Ecke

Membran ist eine Spreizung des Aufpunktes, siehe Bild 3.115, wie bei einer Scheibe, weil σ_{xx} und $w_{,x}$ ja beide Ableitungen von erster Ordnung sind.

Liegt der Aufpunkt im Feld, siehe Bild 3.115, dann können sich die beiden Spitzen frei ausbilden und im Mittel, wenn man mit einer Gleichlast p darüber integriert, heben sich die krassen Spitzen + und − weg. Rückt der Aufpunkt jedoch in eine einspringende Ecke, siehe Bild 3.116, dann hat die Einflussfläche nur noch ein Vorzeichen und die Singularität schlägt voll durch, sprich das Volumen der Einflussfunktion vor der Ecke ist unendlich groß.

Ein Rätsel gibt es aber noch: Auch an glatten Rändern ist die Einflussfunktion für $w_{,x}$ (scheinbar) ein amputierter Dipol, aber bei der Überlagerung mit der Belastung p zeigt sich keine Singularität. Das $w_{,x}$ ist ja bis auf die Vorspannung H die Auflagerkraft $v_x = H\, w_{,x}$ (am vertikalen Rand) von der wir keine Überraschungen erwarten, wenn wir nicht gerade in einer einspringenden Ecke sind.



$$f_i = \int_{\Omega_\blacksquare} \sigma_{ij}^h \, \delta\varepsilon_{ij} \, d\Omega$$

Bild 3.119. Je kleiner die vier Elemente um die Kraft herum werden, um so größer müssen die Spannungen werden, um dieselbe äquivalente Knotenkraft f_i (= Arbeit = Kraft × Weg 1) auf schrumpfender Fläche zu erzeugen

Die Festhaltung ist wohl entscheidend. Auf welcher Länge und unter welchem Winkel wird die Membran festgehalten? In einem glatten Randpunkt beträgt der Eckenwinkel 180° und die Linienlagerung verhindert die Ausbildung einer überkritischen Singularität, siehe Bild 3.117. Bei der einspringenden Ecke mit einem Winkel von 270° wird dagegen die Singularität trotz Festhaltung überkritisch.

Im Grunde kann man es sich auch an den Fingern abzählen: An einem glatten Rand sind zwei Knoten fest und zwei können sich bewegen, siehe Bild

3.118 a. Dieses ausgewogene Verhältnis von 2:2 bindet wohl die Wirkung der Kräfte $f_i \to \pm\infty$ zurück, die Durchbiegung bleibt endlich, auch in der Grenze $h \to 0$, während in der 270° Ecke das Verhältnis 3:1 beträgt, siehe Bild 3.118 b, und die drei Kräfte f_i haben gegenüber der Eckkraft freies Spiel und so ergibt die Auswertung der Einflussfunktion in der Grenze $h \to 0$ einen unendlich großen Wert,

$$v_x = \int_\Omega G_1^h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \begin{cases} < \infty & \text{Rand} \\ \infty & \text{Ecke}\,. \end{cases} \tag{3.362}$$

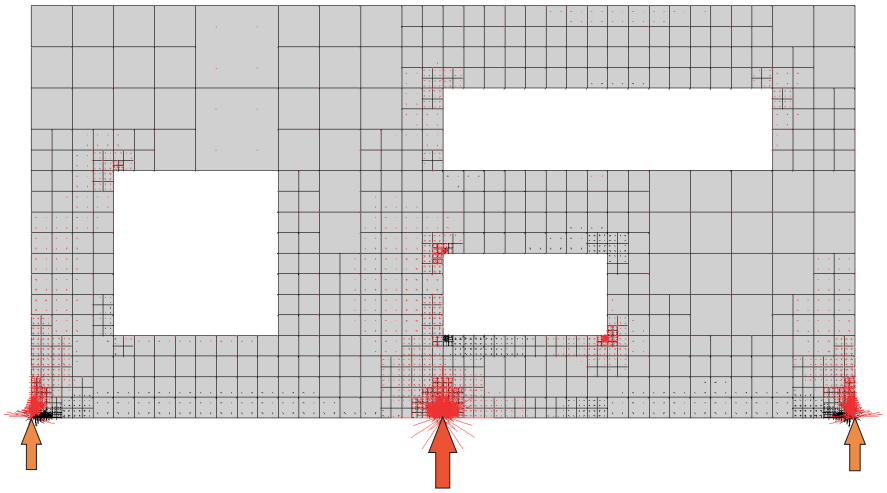


Bild 3.120. LF Eigengewicht: Die adaptive Verfeinerung in der Nähe der Punktlager mündet im Grenzfall $h \to 0$ theoretisch in Einzelkräften. Damit würde die Scheibe ihren Halt verlieren, weil die unendlich großen Spannungen das Material zum Fließen bringen würden (WINFEM)

3.64 Einzelkräfte als Knotenkräfte

Eine Einzelkraft P übersetzt das FE-Programm in eine äquivalente Knotenkraft $f_i = P \cdot 1\,[\text{N m}]$. Eine solche äquivalente Knotenkraft f_i ist für ein FE-Programm zunächst nur ein Signal, dass in der Nähe des Knotens Lasten vorhanden sind, die bei einer virtuellen Verrückung des Knotens die Arbeit f_i leisten, siehe Bild 3.119. Sollten die f_i in den Nachbarknoten null sein, dann kann es nur so sein, dass es wirklich eine Einzelkraft ist, die genau in dem Knoten angreift.

Wenn nun der Ingenieur die Elemente immer kleiner macht und weiterhin darauf beharrt, dass in diesem einen Knoten – und nur in diesem – eine äquivalente Knotenkraft f_i steht, dann ist das für das FE-Programm ein Signal, dass es die Spannungen in der Nähe dieses Knotens tendenziell unendlich groß machen muss, weil sonst die Bilanz

$$\int_{\Omega_\square} \sigma_{ij}^h \, \delta\varepsilon_{ij} \, d\Omega = f_i \tag{3.363}$$

nicht einzuhalten ist, siehe Bild 3.120.

Die Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ kommen aus der Einheitsverschiebung des Knotens in Richtung der Kraft und weil sie nur auf den Elementen nicht null sind, auf denen der Knoten liegt, $\Omega_\square$, muss **immer weniger Gebiet** immer größere Spannungen σ_{ij}^h und Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ produzieren. Auch so kommen singuläre Spannungen in die finiten Elemente hinein. Sie sind in dieser Situation eine ‚Schutzmaßnahme', um bei immer kleiner werdenden Elementen am Ziel f_i festhalten zu können.

Über die Größe der Elemente kann der Benutzer also **die Singularität** unter der Einzelkraft **steuern**. Verfeinert man ein Netz in Gegenwart von Flächenkräften oder Linienkräften, also allem was eine *Ausdehnung* hat, dann werden die f_i kleiner, wenn h kleiner wird und eine Verfeinerung ist daher unschädlich. Hier ist es aber so, dass f_i seine Höhe *beibehält* und so erzwingt $h \to 0$ die Reaktion $\sigma \to \infty$.

3.65 Vorverformungen

Wir wollen auch noch kurz erläutern, wie Vorverformungen bei Stäben, die nach Theorie II. Ordnung gerechnet werden, im Rahmen der FEM behandelt werden.

‚*Bei Ansatz von Vorverformungen bedeutet Theorie II. Ordnung die Formulierung des Gleichgewichts am* gesamtverformten *System, wobei Gesamtverformung = Vorverformung + Lastverformung ist*', [183] S. 77. Wir schreiben das als

$$w(x) = s(x) + w_L(x) \qquad s \text{ wie ‚Schlangenlinie'} \tag{3.364}$$

Die so zweigeteilte Biegelinie muss der Differentialgleichung

$$EI\, w^{IV}(x) + P\, w''(x) = p(x) \qquad P = |P| \text{ als Druckkraft} \tag{3.365}$$

oder

$$EI\, w_L^{IV}(x) + P\, w_L''(x) = p(x) - (EI\, s^{IV}(x) + P\, s''(x)) \tag{3.366}$$

genügen. Die Vorverformung wird durch ihre Interpolierende s_I ersetzt

$$s_I(x) = \sum_j s_j \, \varphi_j(x)\,, \tag{3.367}$$

wobei die s_j die Knotenwerte von $s(x)$ sind (Durchbiegungen und Verdrehungen – Hermite Interpolation!). Weil die *shape functions* elementweise homogene Lösungen sind, $EI\,\varphi_i^{IV} = 0$, reduziert sich das in jedem Element auf

$$EI\,w_L^{IV}(x) + P\,w_L''(x) = p(x) - P\,s_I''(x)\,. \tag{3.368}$$

Zu den äquivalenten Knotenkräften aus der Last sind also noch die äquivalenten Knotenkräfte der Interpolierenden zu addieren. Auf jedem Element gilt (partielle Integration)

$$\mathscr{G}_e(s_I, \varphi_i) = \int_0^{l_e} -P\,s_I''\,\varphi_i\,dx + [P\,s_I'\,\varphi_i]_0^{l_e} - P\int_0^{l_e} s_I'\,\varphi_i'\,dx = 0\,. \tag{3.369}$$

Nun hat die Hermite-Interpolierende s_I stetige erste Ableitungen in den Knoten und die $\varphi_i(x)$ sind stetig in den Knoten, so dass sich bei der Summation über die Elemente die Randarbeiten in den Innenknoten wegheben[27]

$$\sum_e \mathscr{G}_e(s_I, \varphi_i) = \int_0^{l} -P\,s_I''\,\varphi_i\,dx - P\int_0^{l} s_I'\,\varphi_i'\,dx = 0\,, \tag{3.370}$$

was mit (3.367) gerade das Resultat

$$f_{si} - \sum_j P\int_0^l \varphi_i'\,\varphi_j'\,dx\,s_j = f_{si} - \sum_j G_{ij}\,s_j = 0 \qquad G_{ij} = P\int_0^l \varphi_i'\,\varphi_j'\,dx \tag{3.371}$$

ergibt. Man erhält also den Vektor der äquivalenten Knotenkräfte aus der Vorverformung, wenn man die ***geometrische Steifigkeitsmatrix***, (9.205) Seite 674, mit den Knotenwerten $\boldsymbol{s}$ der Vorverformung multipliziert

$$\boldsymbol{f}_s = \boldsymbol{K}_G\,\boldsymbol{s}\,, \tag{3.372}$$

und mit Vorverformungen löst man das System $\boldsymbol{K}_{II}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_s$. Hierbei ist $\boldsymbol{K}_{II}$ die Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung, die aber meist durch die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_I$ nach Theorie I. Ordnung und die geometrische Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_G$ ersetzt wird

$$\boldsymbol{K}_{II} \simeq \boldsymbol{K}_I + \boldsymbol{K}_G\,. \tag{3.373}$$

3.66 Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen

Wenn wir die Einflussfunktion für die zweite Ableitung $u''(x)$ der Längsverschiebung eines Stabes aufstellen und mit der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte j_i beginnen, dann merken wir schnell, dass alle

$$j_i = \varphi_i''(x) = 0 \tag{3.374}$$



Bild 3.121. Hoover Dam Bypass Bridge, Nevada, [202]

null sind und wegen $\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{0}$ daher auch die Knotenverschiebungen g_i der Einflussfunktion, d.h. die FE-Einflussfunktion für die zweite Ableitung ist identisch null

$$G_2^h(y,x) = 0\,. \tag{3.375}$$

Das ist immer so. Man kann mit finiten Elementen Einflussfunktionen nur für Ableitungen bis zu der Ordnung der Ansatzfunktionen berechnen

$$\text{Stab} \qquad \varphi_i(x) = \text{linear} \qquad \rightarrow \qquad \max\, u'(x) \tag{3.376}$$

$$\text{Balken} \qquad \varphi_i(x) = \text{kubisch} \qquad \rightarrow \qquad \max\, u'''(x)\,. \tag{3.377}$$

Die höheren Ableitungen kennen die finiten Elemente nicht oder, anders gesagt, sie haben keine Vorstellung davon, dass es so etwas geben könnte.

Das stimmt im übrigen mit der ***h*-Vertauschungsregel** überein, siehe Seite 422,

$$J_h(u) = J(u_h)\,. \tag{3.378}$$

Denn sei $J(u) = u''(x)$, und u_h eine lineare FE-Lösung, dann ist die zweite Ableitung null, $J(u_h) = 0$, und daher muss auch $J_h(u) = 0$ null sein – für alle u, also etwa alle Polynome beliebig hoher Ordnung. Das geht nur so, dass $G_2^h(y,x)$ identisch null ist, was eben bedeutet, dass man eine Einflussfunktion für zweite Ableitungen mit linearen Elementen nicht darstellen kann.

[27] An freien Enden verbleibt ein zusätzlicher Anteil $P\,s_I' \cdot \varphi_i$ der zur Knotenkraft f_{si} zu addieren ist

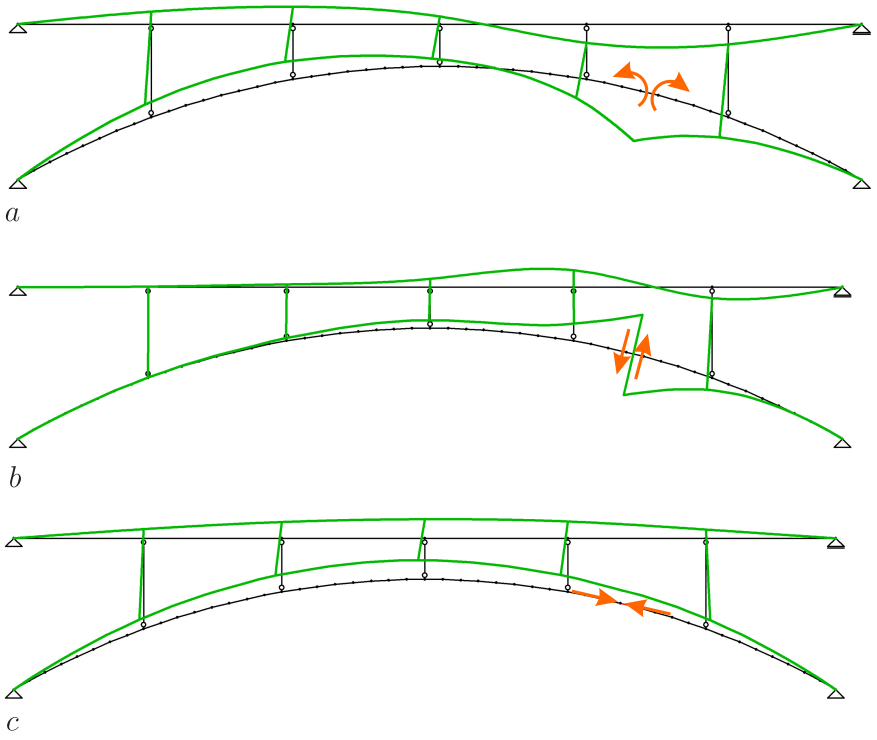


Bild 3.122. Bogen mit aufgeständerter Fahrbahn, Einflussfunktionen für **a)** das Moment, **b)** die Querkraft und **c)** die Normalkraft in einem charakteristischen Punkt des Bogens (BE-FRAMES)

3.67 Ein Plädoyer für Einflussfunktionen

Es ist so einfach Einflussfunktionen zu berechnen. Man muss ja nur den Vektor $\boldsymbol{j}$ aufstellen, also die Werte $j_i = J(\varphi_i)$ bestimmen, das sind die Querkräfte, die Momente etc. der *shape functions* in dem Aufpunkt x, was immer $J(w)$ gerade ist – und die Inverse mit dem Vektor $\boldsymbol{j}$, der in der Regel $<= 6$ Einträge $\neq 0$ enthält, multiplizieren und hat die Knotenwerte $g_i(x)$ der Einflussfunktion und kann so die Einflussfunktion zeichnen[28]

$$G(y,x) = \sum_i g_i(x)\,\varphi_i(y)\,. \tag{3.379}$$

[28] Die Einflussfunktion baut sich aus den *shape functions* $\varphi_i(y)$ auf (danach wird gezeichnet) und die $g_i(x)$ sind die Auslenkungen der Knoten, also die ‚Höhe', in der die *shape functions* die Knoten passieren.

Das geht blitzschnell, denn das Einarbeiten der lokalen Lösung, siehe Bild 3.42, also den Verlauf der Einflussfunktion im Element mit dem Aufpunkt, kann eine *subroutine* übernehmen. Die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen erhält man sogar gratis, denn deren Knotenwerte sind ja gerade die Spalten der Inversen.

MATLAB braucht für die Inverse einer Matrix $1\,000 \times 1\,000$ weniger als 0.03 sec, das sind also 1 000 Einflussfunktionen in weniger als einer Zehntel-Sekunde.

Die Fülle an Informationen, die man aus den Einflussfunktionen ziehen kann, ist so groß, dass man das keinem Anwender vorenthalten sollte. Auf keinem Wege erhält man einen besseren Einblick in der Tragverhalten einer Struktur wie in Bild 3.121 als über Einflussfunktionen, siehe Bild 3.122. Natürlich, man muss die inverse Steifigkeitsmatrix nicht berechnen und speichern, man kann für jede Einflussfunktion das System $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ neu lösen, aber dann fehlt wahrscheinlich die ‚*snappy response*', die der Anwender vom System erwartet. Er will sofort das Ergebnis sehen, egal wo er hinklickt[29].

In MATLAB wird man höflich darauf hingewiesen, dass man einen *faux-pas* begeht, wenn man die Inverse berechnet, aber das geht an der Sache vorbei. Wir benutzen die Inverse ja nicht primär, um das Gleichungssystem zu lösen, sondern um Aufschluss über das Tragverhalten und die Sensitivitäten eines Tragwerks zu bekommen. Die stecken in dem $1/k$.

Und die Rechner sind heute so schnell geworden und Speicherplatz so preiswert, dass man sich die Informationen, die in $\boldsymbol{K}^{-1}$ enthalten sind, nicht entgehen lassen sollte. Es ist ein echter Zugewinn.

Und damit sind wir beim zweiten Punkt, der auch den Nutzwert eines Programms erhöhen kann. In Kapitel 5.32 stellen wir die ***One-Click Reanalysis*** vor, wo der Anwender durch Mausklicks einzelne Riegel und Stäbe eines Rahmens nacheinander entfernen kann – das geht vorwärts wie rückwärts – und so entsteht vor seinen Augen ein lebendiges Bild des Tragwerks. Er kann so nachempfinden, welche Teile für das Tragverhalten wichtig sind, wie sich der Kräftefluss ändert, etc. Das geht alles spielerisch und darin liegt der Lerneffekt, siehe Bild 3.123.

Weil solche Klicks die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ändern, sind sie nicht so ganz leicht umzusetzen wie im Fall der Einflussfunktionen. Wir benutzen in dem Programm BE-FRAMES (wahlweise) zwei unterschiedliche Techniken, um den Aufwand zur Neuberechnung zu minimieren und es gelingt damit auch die Antwortzeiten sehr klein zu halten, sie sind kaum merkbar.

Man muss diese Techniken aber nicht benutzen, sondern man kann einfach das modifizierte Gleichungssystem $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ neu lösen. Auch das sollte heute sehr schnell gehen – in 10 Jahren wird es definitiv so sein.

[29] In dem Programm BE-FRAMES kann man das ausprobieren: *GF anywhere*

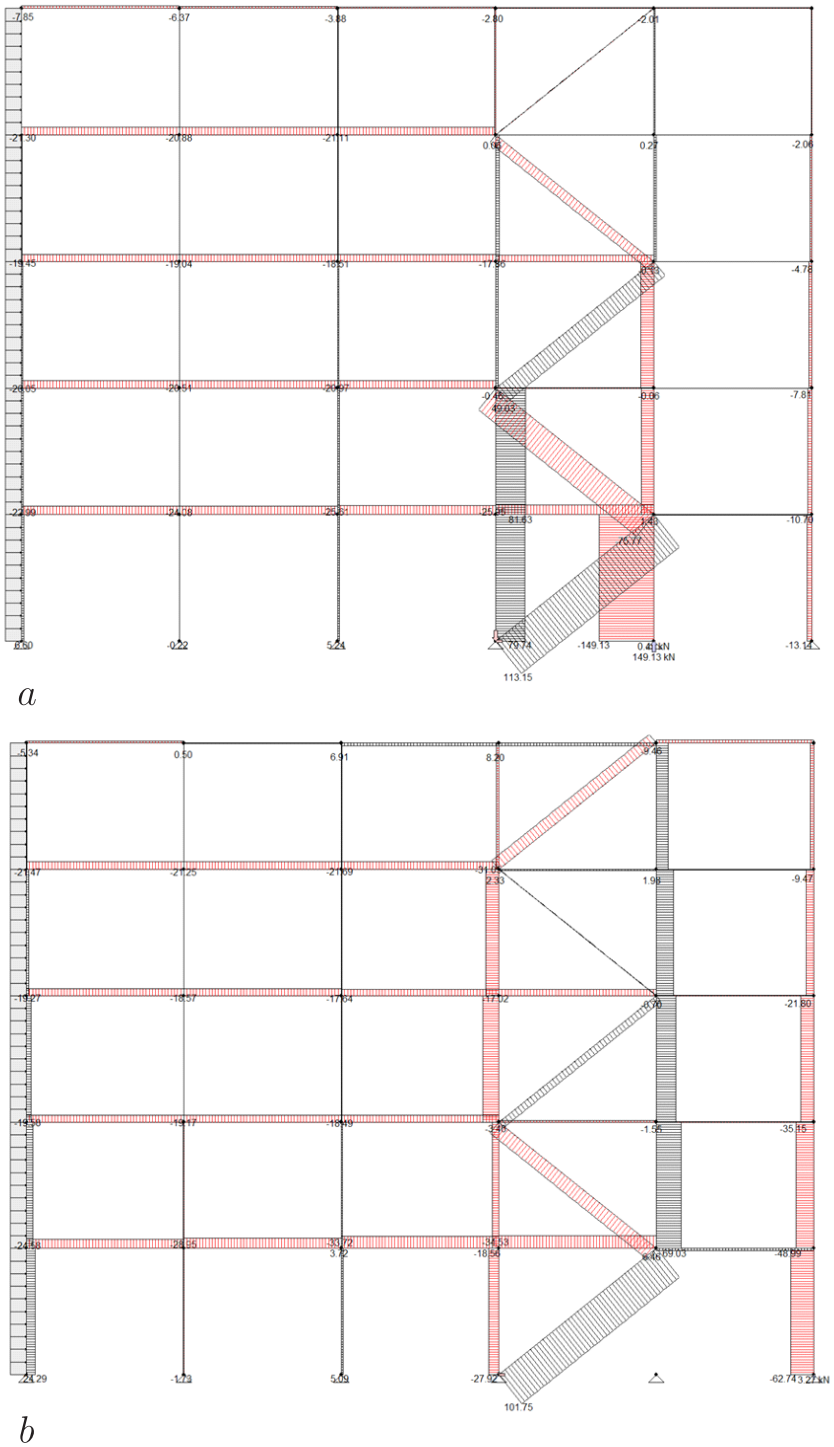


Bild 3.123. Stockwerkrahmen mit Auskreuzung, **a)** Normalkräfte unter Wind, **b)** nach Ausfall der rechten Stütze der Auskreuzung (SLW Anprall) (BE-FRAMES)

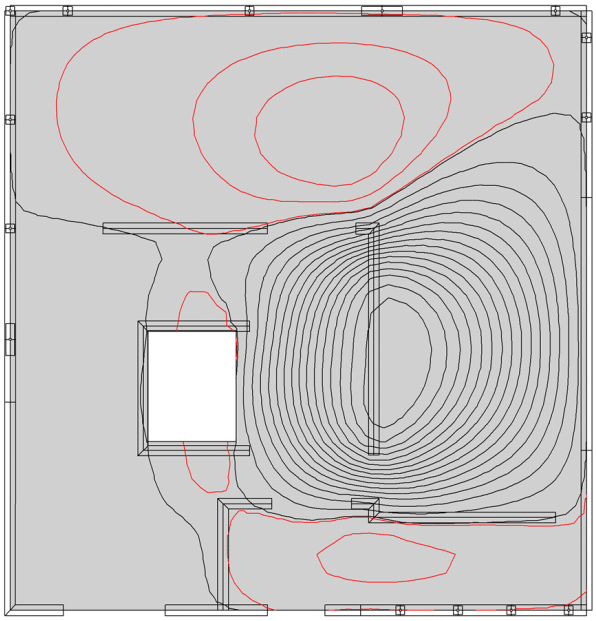


Bild 3.124. Deckenplatte und Einflussfunktion für die resultierende Lagerkraft in einer stützenden Wand. Man belastet die Wandknoten mit der Steifigkeit k der Wand und multipliziert das $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{K}^{-1}$, das ergibt die Knotenwerte $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f}$ (BE-PLATTE)

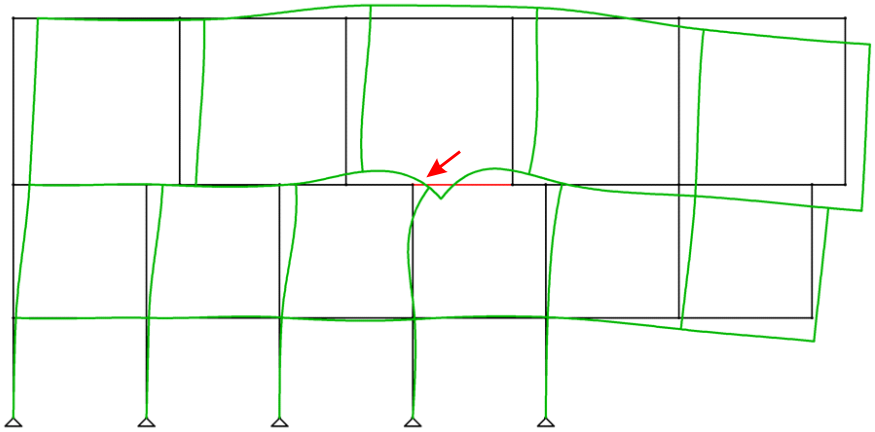


Bild 3.125. Die Einflussfunktion für das Anschnittsmoment des Riegels geht lange Wege und so gibt es viele Gelegenheiten für die FE-Einflussfunktion vom exakten Pfad abzuweichen (BE-FRAMES).

3.68 Schalenelemente

Rahmentragwerke sind eindimensionale Faltwerke. Innerhalb eines Riegels oder Stiels sind die Längs- und Querverformungen entkoppelt, aber in den Rahmenknoten wird aus einer Normalkraft im Riegel eine Querkraft im Stiel, etc.

Sinngemäß gilt dasselbe für echte Faltwerke. Unter einem Schalenelement versteht man in der Praxis ein ebenes Element, das Längs- und Querverformungen aufweist, dessen Steifigkeitsmatrix also Scheiben- und Plattenanteile enthält. Damit werden Faltwerke modelliert.

3.69 Kontrolle von FE-Berechnungen

Die Einflussfunktionen, wie in Bild 3.125, sind im Grunde der Schlüssel zu einer FE-Berechnung, denn eine Abweichung in einem Ergebnis bedeutet einfach, dass der Aufsteller B mit einer anderen Einflussfunktion gerechnet hat als der Aufsteller A, er die Lasten durch eine ‚andere Maschine geschickt' hat, als der Aufsteller A.

Eine Übereinstimmung mit einer Kontrollberechnung sollte daher umso eher gelingen, je einfacher die zugehörige Einflussfunktion ist.

Schnittgrößen sind Ableitungen

Die Fourierreihe einer glatten Funktion enthält vielleicht drei, vier wesentliche Terme. Wenn aber die Funktion ‚rau' ist, dann sind auch die höheren Terme relevant, und wenn man die Fourierreihe n-mal differenziert, dann wird jeder Term a_k und b_k mit k^n multipliziert, die Amplituden wachsen, $a_k \to k^n\, a_k$, und insbesondere die hochfrequenten ‚hinteren' Terme (große k) dominieren immer mehr. Die Oszillationen nehmen zu. Differentiation raut auf.

So ähnlich ist das bei Platten. Eine glatte Fläche mit finiten Elementen zu approximieren, ist einfach, aber die Biegefläche einer Platte ist nur scheinbar glatt, denn an Zwischenlagern steigen die Momente, die zweiten Ableitungen, stark an und die dritten Ableitungen, die Querkräfte (Kirchhoffplatte), springen. Bei einer schubweichen Platte springen schon die ersten Ableitungen von w. Das muss man mitbedenken, wenn man FE-Ergebnisse beurteilt. Man kann praktisch schon am Grundriss ablesen, wo die FE-Ergebnisse kritisch sein werden, siehe Bild 3.126.

Summe der Lagerkräfte

Das ist da erste, was der Ingenieur macht: Er kontrolliert, ob die Summe der Lagerkräfte gleich der aufgebrachten Belastung ist, aber das ist bei den finiten Elementen garantiert.

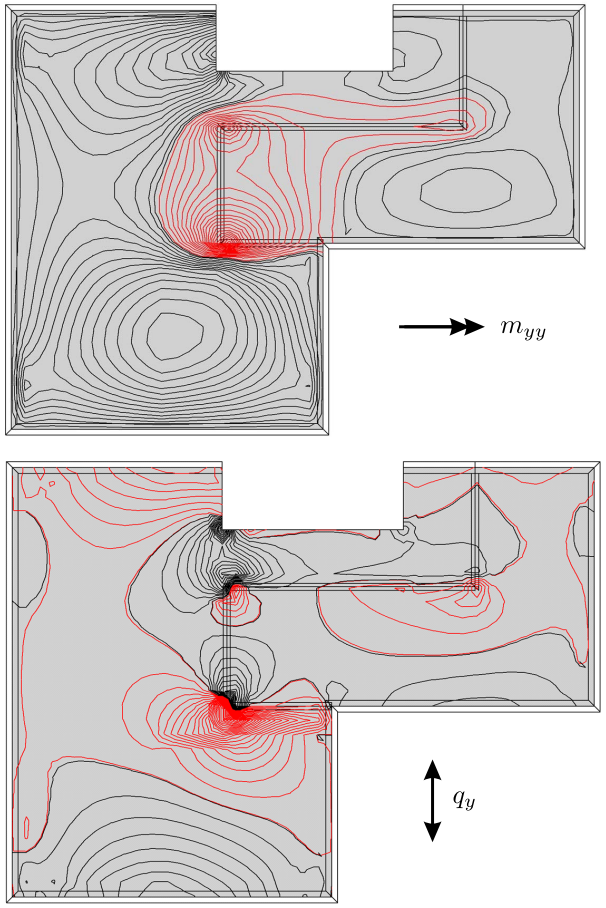


Bild 3.126. Momente m_{yy} und Querkräfte q_y in einer Hochbaudecke (BE-PLATTE)

Die Einflussfunktion für die $\Sigma V = 0$, die Summe der vertikalen Kräfte, *Lasten + Lagerkräfte*, ist mit einer virtuellen Verrückung $\delta w = -1$ des ganzen Tragwerks identisch. Eine einfachere Einflussfunktion als diesen *lift* gibt es nicht; höchstens noch eine Verschiebung des freigeschnittenen Tragwerks nach links oder rechts, $\delta u = \pm 1$, um die $\Sigma H = 0$ zu kontrollieren. Das nächst kompliziertere wäre dann eine (Starrkörper) Rotation des ganzen Tragwerks um einen Winkel $\tan\varphi = 1$, um die $\Sigma M = 0$ zu überprüfen. Alle diese drei Einflussfunktionen sind auf jedem Netz, und sei es noch so grob, exakt darstellbar, so dass es hier keine Überraschung geben darf[30].

[30] Ein Programm stellt die Lagerkräfte so ein, dass sie bei einem *lift* $\delta w = \pm 1$ dieselbe Arbeit leisten wie die Lasten. Weil die *shape functions* eine *partition of*

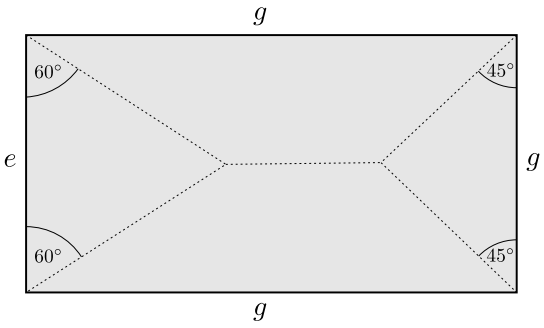


Bild 3.127. Einflussflächen für Lagerkräfte

Normalkräfte in Stützen und Wänden

Danach sind die Lagerkräfte in den Stützen und Wänden an der Reihe, die sollten stimmen, denn die Einflussfunktionen für die Stützkräfte sind ja einfache ‚Dellen' wie in Bild 3.124 oder wie bei einem Durchlaufträger dem man ein Lager weggenommen hat. Diese Einflussfunktionen lassen sich auch auf einfachen Netzen gut darstellen und daher sollte hier keine großen Diskrepanz auftreten. Abweichungen deuten eher darauf hin, dass Lasten vergessen worden sind.

Der Praktiker schätzt gerne die Lagerkräfte der Wände mittels Trapezflächen ab, wie in Bild 3.127, aber diese Einflussfunktionen sind deutlich gröber, als die die finiten Elementen benutzen, siehe Kapitel 3.70. Im Zweifelsfall sollte man für die FE-Ergebnisse votieren. Lagerkräfte können FE-Programme gut.

Knotenverschiebungen

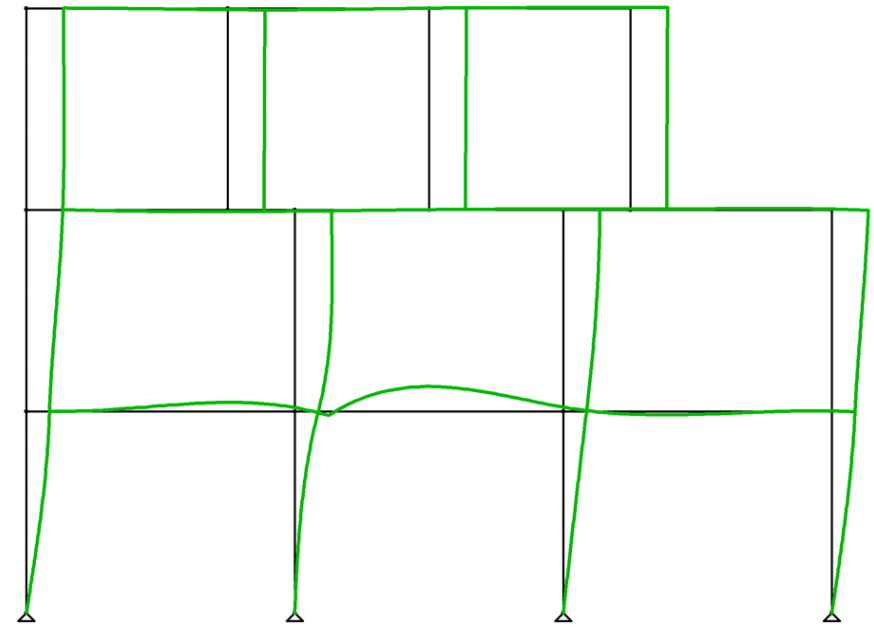
Von ähnlicher ‚Simplizität' wie die Lagerkräfte sind die Einflussfunktionen für die Knotenverschiebungen, was im Umkehrschluss bedeutet, dass eine Übereinstimmung von Verformungen in einzelnen Knoten nicht viel besagt. In den Anfangszeiten der finiten Elemente hat man bei Platten die Durchbiegung in Plattenmitte mit Reihenlösungen verglichen. Damals war man über das Ergebnis froh, aber die Beweiskraft eines solchen Ergebnisses ist gering – es ist der denkbar anspruchsloseste Test, denn die Einflussfunktion für die Durchbiegung ist eine einfach Delle in der Platte.

Feldmomente

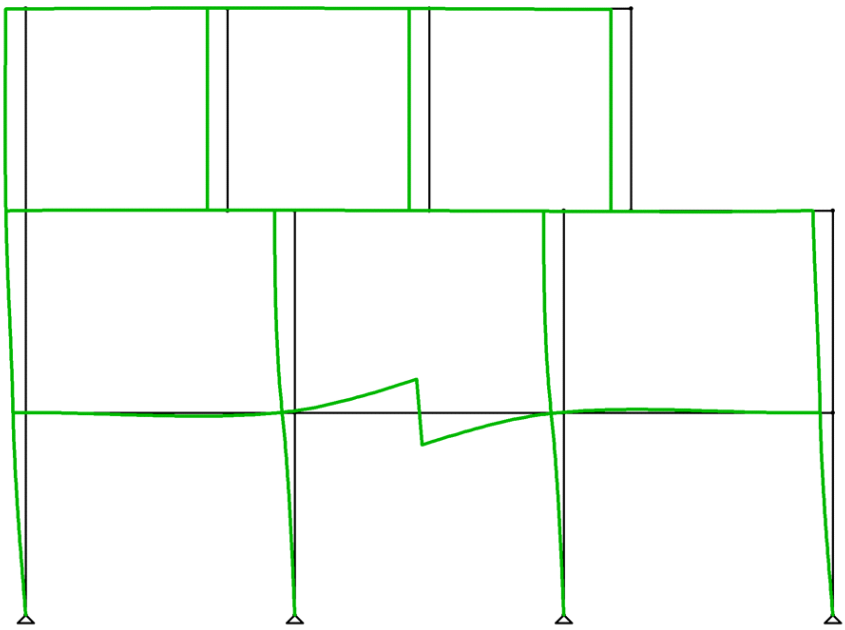
Wenn die Kontrolle der Stützkräfte erfolgreich war, kann man die Schnittgrößen in ‚glatten' Punkten, also vorzugsweise im Feld kontrollieren, denn auch die Einflussfunktionen für Feldmomente sind relativ einfach. Zudem ist

---

unity bilden und die Starrkörperbewegungen in $\mathcal{V}_h^+$ liegen, ist das garantiert, gilt $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$, $\Sigma M = 0$.



a



b

Bild 3.128. Einflussfunktion **a)** für das Anschnittsmoment im Riegel neben der Stütze und **b)** die Querkraft in Riegelmitte. Beide kommen im wesentlichen aus den horizontalen Lasten (BE-FRAMES).

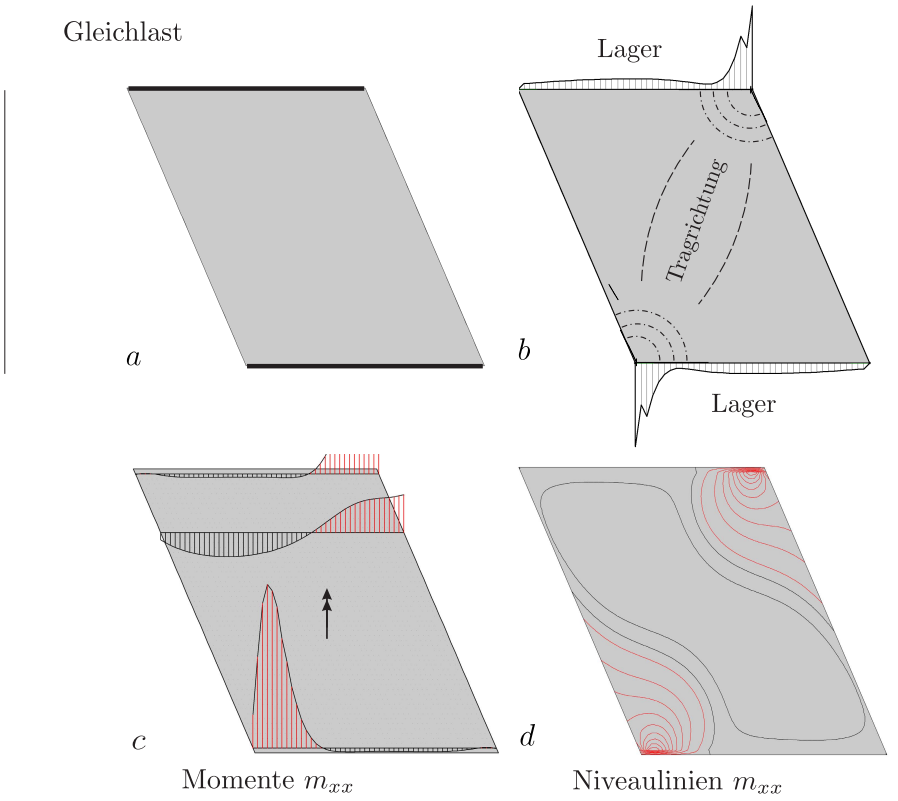


Bild 3.129. In den stumpfen Ecken der Plattenbrücke werden die Lagerkräfte und auch die Schnittmomente m_{xx} unendlich groß, [96]. In den 1960-er Jahren hat man die Einflussfunktionen für solche Brücken an Gipsmodellen abgelesen, [184], (BE-PLATTE)

es meist so, dass die Momente primär von den Lasten in der unmittelbaren Nachbarschaft bestimmt werden, weil die Einflussfunktion rasch abklingt, s. Bild 3.128. Muss der Rahmen gegen Windlasten stabilisiert werden, dann sind natürlich auch die Feldmomente in den Stielen beteiligt, d.h. ihre Einflussfunktionen bewegen sich im wesentlichen ‚seitlich'. Die Querkraft in Riegelmitte in Bild 3.128 ist allein den Windlasten geschuldet.

Stützmomente

Unkritisch sind meist auch die Stützmomente über den Zwischenwänden, obwohl man da erste Diskrepanzen in der Höhe der Momente entdecken wird. Es sei daran erinnert, dass bei dem Verfahren von *Pieper-Martens* ja nur die Feld- und Stützmomente bestimmt wurden.

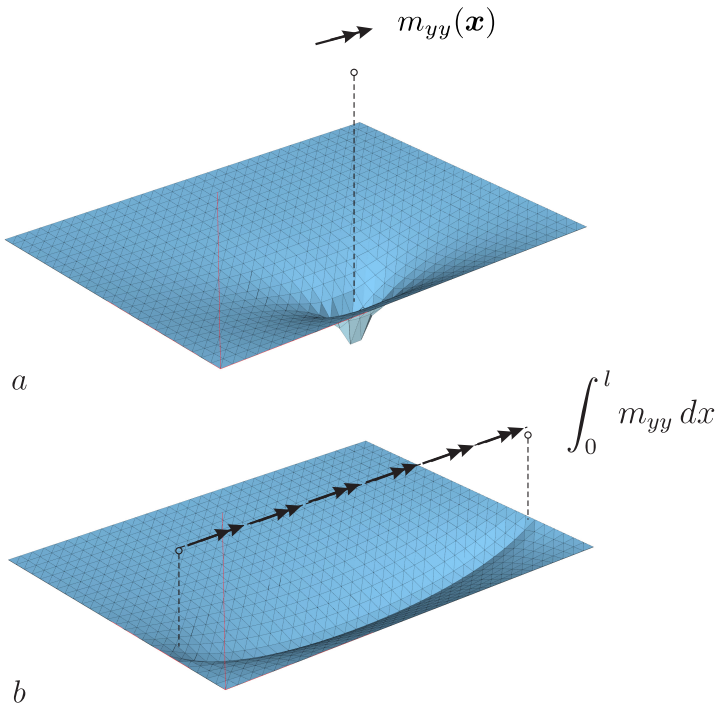


Bild 3.130. Platte: **a)** Einflussfunktion für den Punktwert $m_{yy}(\boldsymbol{x})$ und **b)** für das Integral von m_{yy}, [91], (BE-PLATTE)

Im Übrigen: Der Eurocode erlaubt zwar das Ausrunden der Stützmomente über den Wänden, aber macht es Sinn einen genäherten Wert, denn das sind ja die FE-Momente, auszurunden?

Richtig schwierig sind natürlich die Momente über Stützen, denn diese haben steile Flanken und daher hängt alles von der Modellierung der Stütze ab. Wir haben in Kapitel 3.15 Hinweise gegeben, wie man mit der *Äquivalenten Spannungs Transformation* das Problem in den Griff bekommen kann. Es ist die Aufgabe der Programmierer diese Technik umzusetzen.

Querkräfte

Die Querkräfte in Platten zu kontrollieren ist schon schwieriger, denn die Genauigkeit einer Schnittgröße fällt mit der Ordnung der Ableitung und das Ende der Kette bilden eben leider die Querkräfte. Im Grunde kann man nur ‚rückwärts' argumentieren, von den Lagern her, denn die Lagerkräfte sollten relativ genau sein und mit dieser Information im Hintergrund kann man dann den Verlauf der Querkräfte vor den Lagern beurteilen.

Auf jeden Fall ist es müßig über einzelne Werte zu streiten, dazu sind die Querkräfte zu erratisch. Es ist auch zu fragen, und das nicht nur bei den Querkräften, was ‚echt' ist – direkt aus dem Computer kommt – und was nachgebessert wurde, denn oft werden die ‚rohen' Verläufe der Schnittgrößen durch geglättete Verläufe ersetzt, die sich an den Werten in den Gausspunkten orientieren. Das ist ein durchaus legitimes Mittel.

Noch ein Wort zum Durchstanznachweis. Die Kraft in einer frei stehenden Stütze lässt sich gut ermitteln und weil der Durchstanzkegel klar definiert ist, sind Durchstanznachweise in solchen Stützen nahe an der Wirklichkeit.

In Ecken wandelt das Programm zunächst die Knotenkräfte in Lagerkräfte um, und diese liefern dann die Kraft

$$f_i\,[\mathrm{kNm}] \quad \rightarrow \quad \text{Lagerkräfte } [\mathrm{N/m}] \quad \rightarrow \quad \text{Durchstanzkraft } [\mathrm{N}]$$

mit der der Durchstanznachweis geführt wird. Wie genau diese Kraft ist, hängt wesentlich von der Lagerung der Ecke ab. Der einfachste Fall wäre eine einzelne, isolierte 90°-Ecke, wie in einer Rechteckplatte. Wenn aber die Platte in der Ecke über mehrere Kanten gebogen wird, der Rand der Platte dort also vor- und zurückspringt und die typischen Singularitäten auftreten, dann dürfte die Größe der Durchstanzkraft diskutabel sein.

Singularitäten

In jeder Ecke einer Platte oder Scheibe wird man auf Singularitäten in den Schnittgrößen stoßen, man muss nur genau hinschauen (wollen), siehe Bild 6.21, 6.22 Seite 574. Das ist nur eine Frage des Maßstabs, aber die Praxis hält zu Recht einen gesunden Abstand von diesen Punkten, denn es reicht die Spannungsspitzen in den Ecken der Öffnungen einer Wandscheibe – wie der Erfahrung zeigt – durch das Anordnen einer konstruktive Bewehrung abzudecken. Die Risse, die auftreten, wenn die Bewehrung fehlt, belegen umgekehrt, dass die Spannungen wirklich existieren.

Es gibt aber auch Singularitäten, die schwerwiegender sind, wie die Singularität in den Lagerkräften einer schiefen Plattenbrücke, siehe Bild 3.129. Konstruktive Bewehrung ist hier zu wenig, vielmehr muss wirklich im Detail die Aufnahme der singulären Lagerkräfte und Momente m_{xx} nachgewiesen werden.

In kritischen Fällen sollte man Schnitte legen und die Ergebnisse aufintegrieren, denn das ist so, als ob das FE-Programm mit der Einflussfunktion für den Mittelwert gerechnet hätte und diese Einflussfunktionen sind ausgeglichener als die für einzelne Punkte, siehe Bild 3.130. Zudem ist natürlich der **Mittelpunkt** des Elements ein ‚ruhender Pol' im möglichen Chaos, denn die Spannungen in Elementmitte profitieren davon, dass man die Mitte am leichtesten spreizen kann, sich dort also die Einflussfunktion für eine Spannung am leichtesten erzeugen lässt.



Bild 3.131. Omniturm im Frankfurter Bankenviertel, links das Japan Center, [229]

3.70 Die Realität

Der Omniturm ist ein 190 m hohes Bürogebäude im Frankfurter Bankenviertel mit 49 Geschossen, bei dem die Geschosse 14 bis 23 mit den *residential apartments* (‚RESI-area') gegeneinander verdreht sind, siehe Bild 3.131. In den Berichten des Ingenieurbüros kann man nachlesen, welche Herausforderungen bei dem Tragwerksentwurf zu meistern waren, [168], [169].

Wir wollen hier eine längere Passage aus dem ersten Bericht zitieren, bei der es um die Stützenkräfte geht.

‚Letztere wurden an mehreren verschiedenen Modellen ermittelt. Zum einen wurden die Lasten aus dem Gesamtmodell berechnet, das, wie oben beschrieben, den „Mangel" des Eingusszustands[31] *enthält. Dies kann im Extremfall bei sehr hohen Gebäuden und kräftigen Decken, die sich in den Kern einspannen, zu Zugkräften in den Stützen in der Nähe der Turmspitze führen, weil sich die vertikalen Verformungsunterschiede wie Stützensenkungen ge-*

[31] als würde es in „einem Guss" hergestellt

genüber dem Kern auswirken. Diesem Problem wurde durch fiktive Vergrößerung der Dehnsteifigkeit der Stützen begegnet, die so gewählt wurde, dass Stützen und Kern annähernd gleiche vertikale Verformungen im Eingusszustand bekommen. In einem zweiten Schritt wurden sämtliche Decken auch für deren individuelle Bemessung als ebene Tragwerke berechnet und die Auflagerkräfte für die Stützen ausgelesen. Da es sich bei den Decken unter- und oberhalb der RESI-Geschosse um Halbfertigteilkonstruktionen mit einer 15 cm-Decke aus Filigranplatten handelt, wurden zwei verschiedene Berechnungsweisen gewählt. Einmal wurden die Lasten auf die Träger „klassisch“ durch Lasteinzugsflächen ermittelt, alternativ wurde die 15 cm dicke Decke als Platte ins System eingeführt und erneut gerechnet. Dies führte für die Auflagerkräfte auf den Stützen, insbesondere in den Eckbereichen des Gebäudes, zu unerwartet großen Veränderungen. Zusätzlich wurde vom Prüfingenieur ein eigenes, unabhängiges System berechnet, das aufgrund anderer Systemannahmen wieder zu anderen, in vielen Fällen höheren Lasten führte. Für die Bemessung der Stützen und schließlich auch für die Stauchungsberechnungen wurden die jeweils ungünstigsten Werte aus den verschiedenen Modellen zugrunde gelegt. Insofern gibt es mehrere Unsicherheitsfaktoren, die eine „genaue“ Vorhersage, insbesondere für die Verformungstoleranzen der Fassade im Millimeterbereich, nicht möglich machen‘.

Jedes Ingenieurbüro, das mit finiten Elementen rechnet, dürfte über ähnliche Erlebnisse berichten können.

Bemerkung 3.19. Drei verschiedene Modelle liefern drei verschiedene Ergebnisse und weil der Aufsteller nicht weiß, was richtig ist, optiert er jeweils für den Extremwert. Man muss dem Aufsteller für seine Ehrlichkeit dankbar sein, aber die Statik und die finiten Elemente kommen dabei nicht gut weg.

Die Beurteilung und die Verifikation von FE-Ergebnissen ist – aus der Sicht der Praxis – ein sehr wichtiges Thema. Hier besteht ein großer Forschungsbedarf. Die Statik-Lehrstühle müssten nur den Mut haben sich mit diesen Problemen zu beschäftigen. Aber so, wie die Forschungslandschaft gestrickt ist, können sie sich nur mit nichtlinearen Problemen profilieren und so wird der Praktiker mit seinen Nöten allein gelassen...

3.71 Wie man ein FE-Programm schreibt

Das hätte eigentlich an den Anfang dieses Kapitels gehört, aber jetzt ist es einfacher den Gang einer FE-Berechnung darzustellen.

Beispielhaft soll die Differentialgleichung

$$-(EA(x)u'(x))' = p(x) \tag{3.380}$$

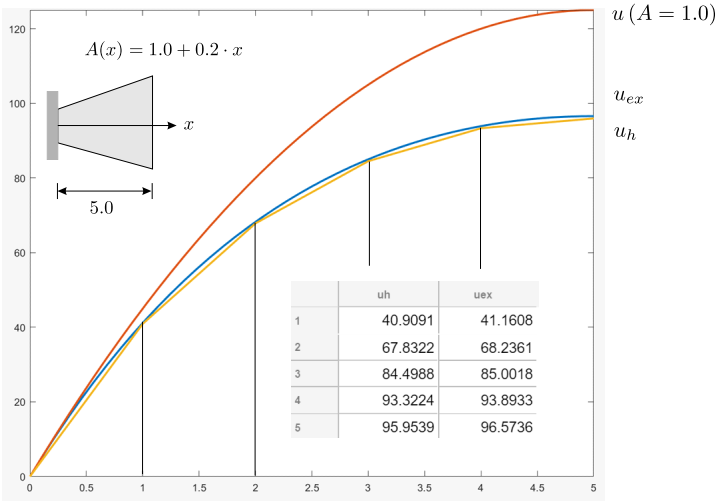


Bild 3.132. Konischer Stab, exakte Lösung u_{ex}, FE-Lösung u_h und Lösung bei konstantem Querschnitt $A = 1.0$, $E = 1.0$, Streckenlast $p = 10$ kN/m

eines Stabes mit einem veränderlichen Querschnitt $A(x)$ gelöst werden. Der Stab sei links festgehalten, rechts frei, $u(0) = 0$ und $N(l) = 0$, und mit einer Streckenlast $p(x)$ belastet.

Zunächst braucht man die erste Greensche Identität, siehe (1.47),

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -(EA(x)\,u'(x))'\,\delta u(x)\,dx + [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA(x)}\,dx = 0\,, \tag{3.381}$$

die mittels partieller Integration aus dem Arbeitsintegral

$$\int_0^l -(EA(x)u'(x))'\delta u\,dx \tag{3.382}$$

entsteht. Es ist $N(x) = EA(x)\,u'(x)$.

Dann wählt man ein passendes Element, etwa ein lineares Element mit zwei Knoten auf dem zwei lineare Ansatzfunktionen

$$\varphi_1^e(x) = 1 - \frac{x}{l_e} \qquad \varphi_2^e(x) = \frac{x}{l_e} \tag{3.383}$$

definiert sind. Denkt man sich nun mehrere Elemente aneinander gereiht, dann kann man so *shape functions* $\varphi_i(x)$ generieren (Hütchenfunktionen), die im Knoten x_i den Wert 1 haben und in allen anderen Knoten den Wert null. Mit diesen Funktionen kann man beliebige Funktionen $u(x)$ über die Länge l des Stabes linear interpolieren

$$u_h(x) = \sum_i u_i \, \varphi_i(x) \, . \tag{3.384}$$

Das soll auch gleich die Gestalt der noch zu findenden FE-Lösung sein, nur dass wir die *shape function* des ersten Knoten weg lassen, weil der Ansatz ja die wesentliche Randbedingung $u(0) = 0$ erfüllen muss.

Setzen wir in (3.381) für u die exakte Lösung und für $\delta u = \varphi_i(x)$ eine *shape function*, dann ergibt das wegen $\varphi_i(0) = 0$ und $N(l) = 0$

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = \int_0^l p \, \varphi_i \, dx - \int_0^l EA(x) u'(x) \, \varphi_i'(x) \, dx = 0 \, . \tag{3.385}$$

Nun verlassen wir den Pfad der Tugend, denn wir nehmen an, dass man die exakte Lösung $u(x)$ wie in (3.384) mit den $\varphi_i(x)$ darstellen kann, was in der Regel leider nicht gilt. Wenn $u_h(x)$ die exakte Lösung wäre, dann müsste demnach gelten

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(u_h, \varphi_i) &= \int_0^l p \, \varphi_i \, dx - \sum_j \int_0^l EA(x) \varphi_j'(x) \, \varphi_i'(x) \, dx \, u_j \\ &= f_i - \sum_j k_{ij} \, u_j = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \, . \end{aligned} \tag{3.386}$$

Unsere Aufgabe ist es somit die Einträge der Matrix $\boldsymbol{K}$ zu berechnen,

$$k_{ij} = \int_0^l EA(x) \varphi_j'(x) \, \varphi_i'(x) \, dx \, , \tag{3.387}$$

also jedes $\varphi_i(x)$ mit jedem $\varphi_j(x)$ ‚energetisch' zu überlagern.

Praktisch macht man das elementweise, überlagert also die lokalen *shape functions*

$$k_{ij}^e = \int_0^{l_e} EA(x) \, \varphi_i^{e\prime} \, \varphi_j^{e\prime} \, dx \tag{3.388}$$

– das bedeutet wegen $\varphi_i^{e\prime} = \pm 1/l_e$ (je nach Index i) –

$$\boldsymbol{K}_e = \frac{c_e}{l_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} EA(x) \, dx \tag{3.389}$$

und setzt das ganze dann gemäß dem Zusammenhang der Elemente zur globalen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ zusammen.

Bei n Ansätzen $\varphi_i(x)$ entspricht (3.386) einem System

$$\boldsymbol{K} \, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3.390}$$

von n Gleichungen, das es erlaubt die Koeffizienten u_i in dem FE-Ansatz (3.384) zu berechnen, siehe Bild 3.132.

Die so gefundene Lösung (3.384) ist zwar nicht exakt, aber sie ist auf $\mathcal{V}_h$ die Lösung mit dem geringsten Fehler,

$$a(u-u_h, u-u_h) = \int_0^l EA(x)(u'-u_h')^2\,dx \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum} \tag{3.391}$$

der Fehler in der Wechselwirkungsenergie, dem ‚Fehlerquadrat der Spannungen', ist der kleinst mögliche. Ein Ansatz dessen Knotenwerte $\boldsymbol{u}$ nicht dem System (3.390) genügen, hat einen größeren Abstand. Gleichzeitig macht u_h die potentielle Energie $\Pi(u)$ auf $\mathcal{V}_h$ zum Minimum. Das $\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}$ entspricht ja dem $f'(x) = 0$ in der Schulmathematik, und das $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ku} > 0$ ($\boldsymbol{K}$ ist positiv definit, Eigenarbeit ist immer positiv) entspricht dem $f''(x) > 0$.

Der Startpunkt ist also die Differentialgleichung (DGL) und die darauf folgenden Schritte

$$\boxed{\text{DGL} \rightarrow \ \mathscr{G}(u, \varphi_i) \rightarrow u_h = \sum_i u_i \varphi_i(x) \rightarrow \boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{f}} \tag{3.392}$$

sind – wenn man so will – reine Algebra, wo es so scheint, als ob es gar nicht mehr darauf ankommt, was für ein Problem gelöst wird, denn die Schritte sind immer die gleichen.

Das gilt auch für **nichtlineare Probleme** – auch bei diesen gibt es eine Greensche Identität – nur ist das Gleichungssystem dann nicht mehr linear, siehe Kapitel 8.

3.72 Dynamische Probleme

Dynamische Probleme sind nicht das Thema des Buches, aber wir wollen trotzdem kurz die grundlegenden Gleichungen formulieren.

Das Auf und Ab einer Punktmasse m, die an einer Feder mit der Steifigkeit k hängt, und von einer Kraft $f(t)$ in Bewegung gehalten wird,

$$m\,\ddot{u}(t) + k\,u(t) = f(t)\,, \tag{3.393}$$

verläuft, es ist $\omega = \sqrt{k/m}$, wie

$$u(t) = u(0)\,\cos(\omega t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\,\sin(\omega t) + \int_0^t \frac{1}{m\,\omega}\sin\omega(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.394}$$

Der Kern $g(t,\tau)$ in der Einflussfunktion, dem ***Duhamel-Integral***, ist die Impuls-Antwort auf einen plötzlichen Stoß, ein Dirac Delta, zum Zeitpunkt $t = 0$

$$m\,\ddot{g} + k\,g = \delta(t)\,. \tag{3.395}$$

Das $(t-\tau)$ in der Formel verschiebt den Stoß in den Zeitpunkt τ, zu dem die Kraft $f(\tau)\,d\tau$ auf die Feder wirkt. Die Kraft $f(\tau)$ wird also in lauter kleine Einzelstöße aufgelöst.

Modelliert man einen Rahmen als ein System von n Punktmassen m_k, die durch die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ aneinander gekoppelt sind, dann führt die Analyse der Eigenschwingungen auf das System, [167],

$$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\omega}_k^2 \boldsymbol{M})\, \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}\,, \tag{3.396}$$

wobei die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_k$ die Amplituden der n Eigenschwingungen $\boldsymbol{u}_k e^{i\,\omega_k t}$ sind. Weil die Eigenvektoren $\boldsymbol{M}$- bzw. $\boldsymbol{K}$-orthogonal sind

$$\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{u}_j = 0 \qquad i \neq j \qquad\qquad \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u}_j = 0 \qquad i \neq j\,, \tag{3.397}$$

kann man das System der n Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{3.398}$$

durch Multiplikation von links und rechts mit der Matrix der Eigenvektoren auf ein *entkoppeltes System* von n linearen Differentialgleichungen zurückführen, die man wie in (3.394) einzeln lösen kann (***Modalanalyse***).

Die Alternative zur Modalanalyse sind finite Differenzen, Zeit-Schritt-Verfahren, die die Lösung Schritt für Schritt aus den Anfangsdaten entwickeln, was bei nichtlinearen Problemen die einzig mögliche Strategie ist.

Ein ganz anderes Thema sind natürlich die echten Wellengleichungen, wenn man also z.B. einen Balken dynamisch rechnet

$$EI\, \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)\,. \tag{3.399}$$

Die Integralsätze, die zu Anfangswertproblemen gehören, sind wesentlich verschieden vom stationären Fall. Dem Satz von Betti entspricht bei dynamischen Problemen das **Theorem von Graffi**, [78], und dem L_2-Skalarprodukt entspricht die Faltung. Das Duhamel-Integral ist ein Faltungsintegral.

3.73 Die Intelligenz der Funktionen

Jede C^1-Funktion über einem Intervall $(0, l)$ besitzt die **Integraldarstellung**

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(y) \cdot 1\, dy = \int_\Gamma \ldots + \int_\Omega \ldots \tag{3.400}$$

– das ist einfach nur partielle Integration – und jede C^2-Funktion über einem Gebiet Ω besitzt die **Integraldarstellung**, siehe Kapitel 9.23,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, \frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\, u(\boldsymbol{y})]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, (-\Delta u(\boldsymbol{y}))\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{3.401}$$

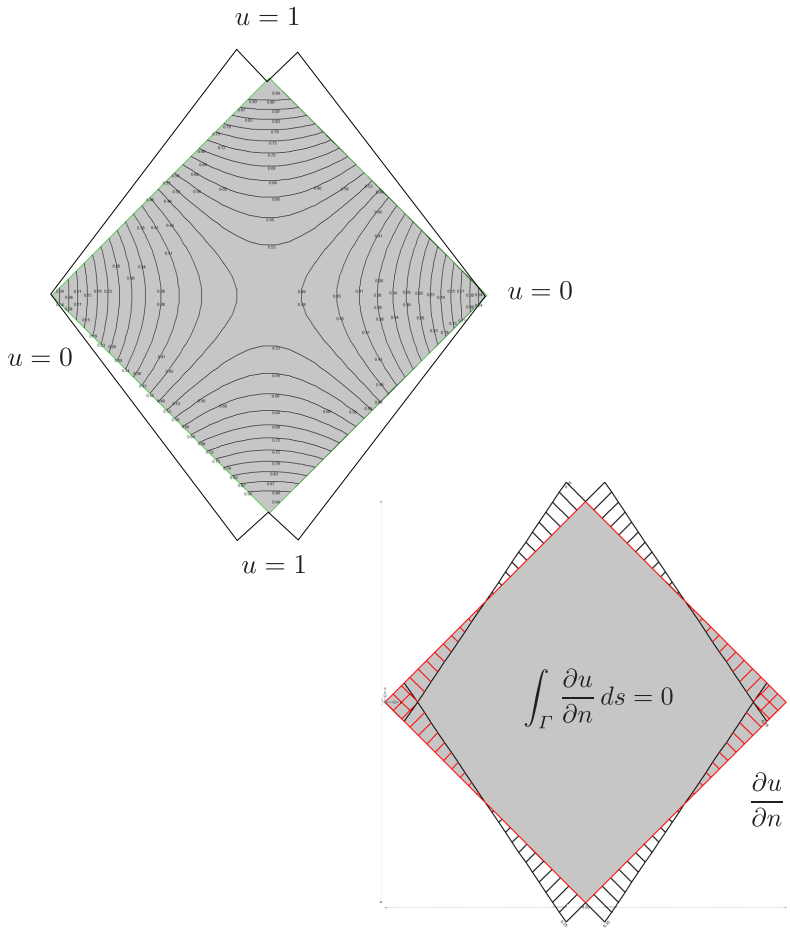


Bild 3.133. Die Randwerte u des Elements wurden vorgegeben und die Lösung, eine Sattelfläche $-\Delta u = 0$, stellt sich automatisch so ein, dass das Integral der Normalableitung null ergibt – das ist die ‚Intelligenz' eines Elements, es denkt mit (BE-LAPLACE)

Der Kern $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -1/(2\,\pi) \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ ist die Fundamentallösung der Poissongleichung, $-\Delta g = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. (Der Kern oben ist die *Heaviside-function* $g = 1$ bis zum Punkt x).

Eine C^2-Funktion in einem Gebiet Ω ist also eindeutig durch ihren Randwert u, ihre ‚Spur', und die Normalableitung $\partial u/\partial n$ auf dem Rand Γ und die ‚Last' im Feld Ω, die Summe der negativ genommenen zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,11} + u_{,22}$, bestimmt, siehe Bild 3.133.

Der Kern, der aus diese Daten $u(\boldsymbol{x})$ generiert, und somit auch festlegt, wie sich $u(\boldsymbol{x})$ ändert, wenn man sich von einem Punkt $\boldsymbol{x}_a$ zu einem Punkt $\boldsymbol{x}_b$

bewegt, ist in der Ebene der $\ln r$ und im Raum der Abstand $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ selbst vom Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ zu den Daten in $\boldsymbol{y}$.

Wir halten die Formel (3.401) für den Schlüssel zur Differential- und Integralrechnung: ***Gebiet, Rand*** und ***Funktion*** bilden mathematisch eine Einheit und die finiten Elementen sind die logische Umsetzung dieser Idee

$$\text{Jede Funktion ist ein Element} = \text{Gebiet} + \text{Rand} + \text{Verformung}\,. \tag{3.402}$$

Indem wir eine Funktion mit einer Differentialgleichung verknüpfen, die Funktion als Verformung lesen, wird aus der Funktion ein Element. Das haben die Ingenieure bei Boeing instinktiv richtig erfasst und so sind sie zu den finiten Elementen gekommen. Mathematiker oder Elektroingenieure denken nicht in *shapes*, sie hätten die finiten Elemente nicht erfinden können. Ihnen fehlt – man verzeihe uns das Vorurteil – das intuitive Verständnis für diesen Zusammenhang, das einen Bauingenieur oder Maschinenbauer auszeichnet.

Es ging nicht darum, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch kurze Hütchen-Funktionen zu ersetzen – das haben auch andere Autoren vorgeschlagen[32] – sondern das Elementkonzept, das wie natürlich aus (3.402) erwächst, ist die eigentliche Idee hinter den finiten Elementen.

Der Buchhalter, der die Punkte auf dem Papier mit einem Lineal verbindet, sieht nicht, wie der Ingenieur, der in dem Polygonzug eine Seillinie erkennt, dass in den Ecken Knotenkräfte f_i wirken, und dass die Summe über alle Knicke $f_i = \tan\varphi_r(x_i) - \tan\varphi_l(x_i)$ null ist, weil die Gleichgewichtsbedingung das so vorschreibt. Und auf Grund seines statischen Verständnisses kann der Ingenieur die Knotenkräfte f_i in Streckenlasten umwandeln und so versuchen eine glattere (Seil)Kurve durch die Punkte des Buchhalters zu legen. Statik löst Interpolationsprobleme.

Plots bekommen ein ganz anderes Gesicht, wenn man die dargestellten Kurven und Flächen als Näherungslösungen von Differentialgleichungen ansieht, weil man damit automatisch den ganzen Apparat, wir sind versucht zu sagen, die ganze **Intelligenz** zur Verfügung hat, die in einer Differentialgleichung steckt[33].

Die trigonometrischen Funktionen $\sin(k\,x)$ und $\cos(k\,x)$ sind Eigenlösungen der Seilgleichung $-u'' = p$, denn $-\sin(k\,x)'' = k^2\,\sin(k\,x)$, also stellt jede Fourier-Reihe ein Seil unter oszillierender Belastung dar. Links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen dieselben Funktionen. Oder man denke an die *splines*, die Holzlineale des Schiffsbaus, die ihre Gutmütigkeit direkt der Balkengleichung $EI\,w^{IV}(x) = 0$ verdanken.

Uns scheint, dass wir, wenn wir weiterkommen wollen, **die Intelligenz, die in den Funktionen steckt**, besser ausnützen müssen; $h \to 0$ ist nur mangels besserer Ideen eine Lösung.

[32] Solche Hinweise sind im Grunde auch nicht treffend, weil die Ingenieure bei Boeing das Element als Bauteil verstanden haben – nur später hat *Clough* abstrahiert und den Begriff des finiten Elements geprägt.

[33] Was in einer Differentialgleichung steckt kann man natürlich – der Leser dürfte es geahnt haben – an der ersten Greenschen Identität ablesen.

4

Betti Extended

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir die Tatsache benutzt, dass die FE-Lösung $u_h(x)$ die Überlagerung der **genäherten Einflussfunktion** $G_h(y,x)$ mit der Belastung $p(y)$ ist

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{4.1}$$

Diese für die finiten Elemente zentrale Gleichung beruht auf einem Satz, den wir *Betti extended* nennen.

Theorem 4.1 (Betti extended). *Man darf in dem* Satz von Betti – *bei Beibehaltung der Belastung – die exakten Lösungen u_1 und u_2 durch ihre FE-Lösungen u_{1h} und u_{2h} ersetzen.*

Mit

$$W_{1,2} = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_2}\, dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_1}\, dx = W_{2,1} \tag{4.2}$$

gilt auch die Gleichung

$$W^h_{1,2} = \int_0^l p_1 \underset{\uparrow}{u_{2h}}\, dx = \int_0^l p_2 \underset{\uparrow}{u_{1h}}\, dx = W^h_{2,1} \tag{4.3}$$

Wir behaupten nicht, dass $W_{1,2} = W^h_{1,2}$ ist, sondern nur, dass wenn $W_{1,2} = W_{2,1}$ gilt, dass dann auch $W^h_{1,2} = W^h_{2,1}$ richtig ist, also

$$(p_1, u_2) = (p_2, u_1) \qquad \Rightarrow \qquad (p_1, u_{2h}) = (p_2, u_{1h})\,. \tag{4.4}$$

Was *Betti extended* bedeutet, macht man sich am einfachsten an Hand des ***Satzes von Maxwell*** klar, siehe Bild 4.1, der ja nur eine spezielle Variante des *Satzes von Betti* ist

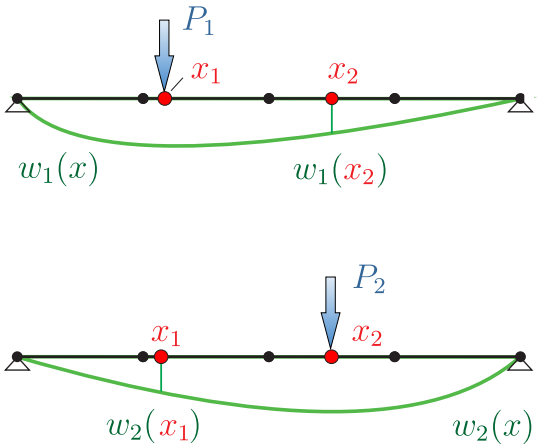


Bild 4.1. Der Satz von Maxwell

$$P_1 \cdot w_2(x_1) = P_2 \cdot w_1(x_2)\,. \tag{4.5}$$

Wenn man die beiden Biegelinien $w_1(x)$ und $w_2(x)$ mit finiten Elementen berechnet, dann sind die Durchbiegungen in den beiden Punkten x_1 und x_2 nicht exakt

$$w_{1h}(x_2) \neq w_1(x_2) \qquad w_{2h}(x_1) \neq w_2(x_1)\,, \tag{4.6}$$

aber der *Satz von Maxwell*, das ‚über Kreuz gleich', gilt gemäß *Betti extended* auch für die Näherungen

$$P_1 \cdot w_{2h}(x_1) = P_2 \cdot w_{1h}(x_2)\,. \tag{4.7}$$

Die ‚falschen' Durchbiegungen sind synchron, oder gleich, wenn $P_1 = P_2$.

Damit ist im übrigen auch gezeigt, dass der *Satz von Maxwell* auch für FE-Lösungen gilt, man setze $P_1 = P_2 = 1$, was ja nicht unbedingt selbstverständlich ist. Dass er für die Knotenwerte gelten muss, war, wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen, klar. *Betti extended* garantiert dies aber auch für alle Punkte dazwischen.

4.1 Beweis

Der Beweis für ***Betti extended*** beruht auf, siehe (9.67),

$$\int_\Omega p_{1h}\, u_{2h}\, d\Omega = \int_\Omega p_1\, u_{2h}\, d\Omega \tag{4.8a}$$

$$\int_\Omega p_{2h}\, u_{1h}\, d\Omega = \int_\Omega p_2\, u_{1h}\, d\Omega\,, \tag{4.8b}$$

und dem ***Satz von Betti***

$$\mathscr{B}(u_{1h}, u_{2h}) = \int_\Omega p_{1h}\, u_{2h}\, d\Omega - \int_\Omega p_{2h}\, u_{1h}\, d\Omega = 0\,, \tag{4.9}$$

so dass

$$\int_\Omega p_1\, u_{2h}\, d\Omega = \int_\Omega p_{1h}\, u_{2h}\, d\Omega = \int_\Omega p_{2h}\, u_{1h}\, d\Omega = \int_\Omega p_2\, u_{1h}\, d\Omega\,, \tag{4.10}$$

oder

$$\int_\Omega p_1\, u_{2h}\, d\Omega = \int_\Omega p_2\, u_{1h}\, d\Omega\,, \tag{4.11}$$

was die Erweiterung von

$$\int_\Omega p_1\, u_2\, d\Omega = \int_\Omega p_2\, u_1\, d\Omega \tag{4.12}$$

auf die FE-Lösungen ist.

Zu (4.8a) kommt man wie folgt: Die *Galerkin-Orthogonalität* besagt, dass

$$\delta W_i = a(u_1 - u_{1h}, \varphi_i) = 0 \tag{4.13}$$

oder, wenn man das mit äußerer statt mit innerer Arbeit schreibt, $\delta W_i = \delta W_e$,

$$\int_\Omega (p_1 - p_{1h})\, \varphi_i\, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega (p_1 - p_{1h})\, u_{2h}\, d\Omega = 0\,, \tag{4.14}$$

weil ja u_{2h} eine Linearkombination der φ_i ist. Sinngemäß gilt das auch für die zweite Gleichung.

Mit *Betti extended* ist der **Beweis der zentralen Gleichung** (4.1) sehr einfach, denn in der Einflussfunktion für $u(x)$

$$W_{1,2} = 1 \cdot u(x) = \int_0^l \delta(y - x)\, u(y)\, dy = \int_0^l G(y, x)\, p(y)\, dy = W_{2,1} \tag{4.15}$$

darf man u und G durch die beiden FE-Lösungen u_h und G_h ersetzen

$$W^h_{1,2} = \int_0^l \delta(y - x)\, \underset{\uparrow}{u_h}(y)\, dy = \int_0^l \underset{\uparrow}{G_h}(y, x)\, p(y)\, dy = W^h_{2,1} \tag{4.16}$$

und somit gilt

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y, x)\, p(y)\, dy\,. \tag{4.17}$$

Diese **Substitutionen**, $u \to u_h$ und $G \to G_h$, kann man bei allen linearen Funktionalen, also allen Integralen wie

$$J(u) = \int_0^l \delta(y-y)\, u(y)\, dy = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{4.18}$$

vornehmen, d.h. man darf jederzeit u und $G(y,x)$ durch ihre FE-Näherungen ersetzen und erhält so

$$J(u_h) = \int_0^l \delta(y-y)\, u_h(y)\, dy = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy\,. \tag{4.19}$$

4.2 In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?

Mit Hilfe von *Betti extended* haben wir nun auch Klarheit darüber, wann und wo FE-Ergebnisse exakt sind.

Wir studieren diese Frage an einem vorgespannten Seil und, um mit der Standard-Notation der finiten Elemente konform zu gehen, bezeichnen wir die Durchbiegung des Seils im Folgenden mit dem Buchstaben u.

Die Einflussfunktion $G(y,x)$ für die Durchbiegung des Seils, siehe Bild 4.2, in dem Punkt $x = 1.5$ ist die Antwort des Seils auf eine Einzelkraft $P = 1$, ein **Dirac Delta** $\delta(y-x)$.

Die Einzelkraft zwischen den zwei Knoten kann das FE-Programm nicht darstellen und so setzt es statt dessen zwei halb so große Einzelkräfte in die beiden Nachbarknoten. Dies ist – in unserer Notation – der Lastfall $\delta_h(y,x)$ und die zugehörige Durchbiegung $G_h(y,x)$ ist die genäherte Einflussfunktion.

Es gibt also **zwei Dirac Deltas**, das exakte und das genäherte

$$\delta(y-x) \quad \downarrow \qquad \delta_h(y-x) \quad \frac{1}{2}\downarrow + \frac{1}{2}\downarrow \tag{4.20}$$

und ebenso **zwei Einflussfunktionen**

$$G(y,x) \quad \text{(ein Knick)} \qquad G_h(y,x) \quad \text{(zwei Knicke)}\,. \tag{4.21}$$

Mit finiten Elementen suchen wir eine Näherungslösung in dem LF p (Streckenlast) für den Seildurchhang auf dem Raum $\mathcal{V}_h$, also all den Polygonzügen (Seilecken), die mit den drei $\varphi_i(x)$ dargestellt werden können. Spiegelbildlich zu diesem Raum gibt es einen ‚dualen' Raum $\mathcal{V}_h^*$, der all die Knotenkräfte f_1, f_2, f_3 enthält, die die Seilecke in $\mathcal{V}_h$ erzeugen.

Es gilt nun: Wenn eine Funktion u_h in $\mathcal{V}_h$ liegt (also ein Seileck ist), dann ist das genäherte Dirac Delta (2 halbe Einzelkräfte) so gut, wie das exakte Dirac Delta (eine Einzelkraft)

$$u_h(x) = \int_0^l \delta(y-x)\, u_h(y)\, dy = \int_0^l \delta_h(y-x)\, u_h(y)\, dy\,. \tag{4.22}$$

Konkret heißt das also hier

$$1 \cdot u_h(x) = \frac{1}{2} \cdot u_h(x_1) + \frac{1}{2} \cdot u_h(x_2)\,, \tag{4.23}$$

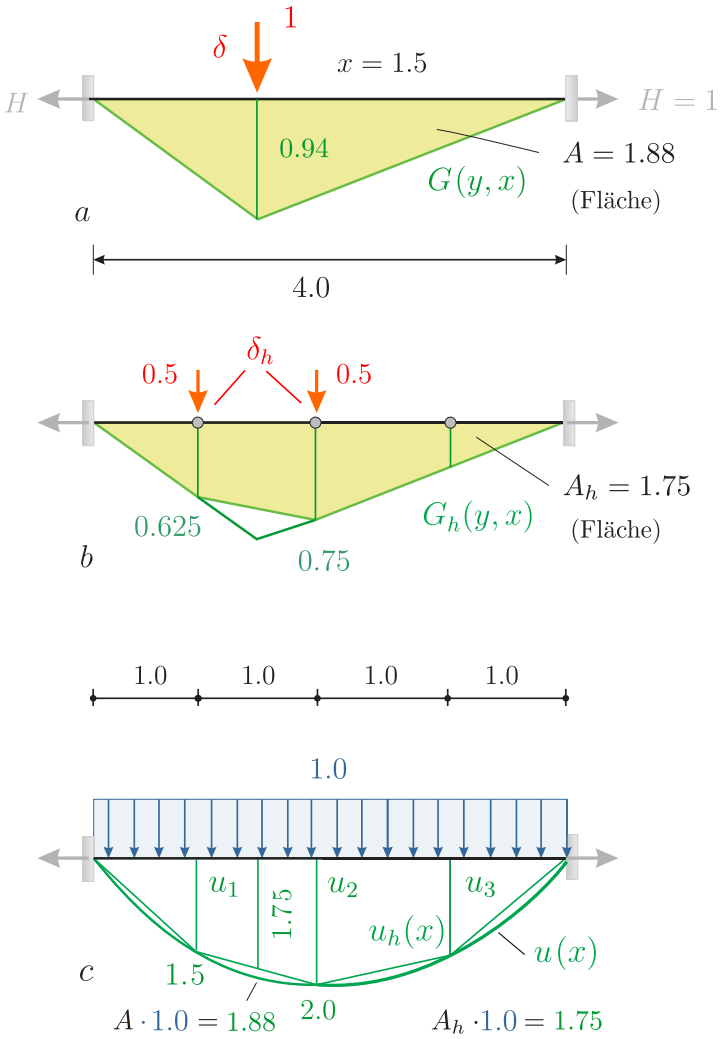


Bild 4.2. Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt $x = 1.5$, **a)** exakte Einflussfunktion, **b)** genäherte Einflussfunktion **c)** FE-Lösung unter Gleichlast $p = 1$

was einleuchtet, weil der Wert einer Geraden zwischen zwei Knoten gerade der Mittelwert der Knotenwerte ist.

Und weil der **FE-Lastfall** p_h in $\mathcal{V}_h^*$ liegt, also aus drei Knotenkräften besteht, ist die genäherte Einflussfunktion $G_h(y, x)$ so gut wie die exakte

$$u_h(x) = \int_0^l G(y, x)\, p_h(y)\, dy = \int_0^l G_h(y, x)\, p_h(y)\, dy\,. \tag{4.24}$$

Auch das ist einfach zu verstehen. Weil die Lastfälle p_h nur aus Knotenlasten f_i bestehen, wird bei der Auswertung der Einflussfunktion nicht integriert, sondern nur über die Knoten summiert

$$u_h(x) = \int_0^l G_h(y,x)\, p_h(y)\, dy = \sum_{i=1}^{3} G_h(y_i,x)\, f_i\,. \tag{4.25}$$

Die drei FE-Einflussfunktionen für die Durchbiegung der drei Knoten y_i sind aber exakt, $G_h(y_i,x) = G(y_i,x)$ in jedem Punkt x, und das erklärt, warum (4.25) in jedem Punkt x genau den richtigen Wert $u_h(x)$ liefert.

Auf $\mathcal{V}_h$ bzw. $\mathcal{V}_h^*$ sind die Ergebnisse, die man mit den Näherungen $\delta_h(y,x)$ bzw. $G_h(y,x)$ erzielt, exakt.

Um dieses Ergebnis richtig zu würdigen, muss man verstehen, dass mit u_h hier nicht notwendig die FE-Lösung gemeint ist, sondern dass u_h eine **beliebige** Funktion aus $\mathcal{V}_h$ sein kann.

Das genäherte Dirac Delta δ_h ist auf $\mathcal{V}_h$ also so gut, wie das exakte, denn (4.22) gilt für alle $u_h \in \mathcal{V}_h$. Und ist p_h der Lastfall, der dem Seil die Gestalt u_h gibt, dann kann man mit der genäherten Einflussfunktion $G_h(y,x)$ den Wert $u_h(x)$ aus p_h berechnen. Dies ist der Inhalt von (4.25).

Es ist aber noch mehr ‚drin'. Das genährte Dirac Delta, also die beiden ‚halben' Punktlasten in den Nachbarknoten, stellt ja ein eigenes Funktional

$$J_h(u) = \int_0^l \delta_h(y-x)\, u(y)\, dy = \frac{1}{2}\,(u(x_1) + u(x_2)) \tag{4.26}$$

dar, das man auf beliebige Funktionen anwenden kann – nicht nur auf die Seilecke in $\mathcal{V}_h$. Angewandt auf $u(x) = \sin \pi\, x/4$ erhält man z.Bsp. den Wert

$$J_h(u) = \frac{1}{2}\,(\sin\frac{1.0\,\pi}{4} + \sin\frac{2.0\,\pi}{4}) = 0.85 \tag{4.27}$$

während $J(u) = \sin(1.5\,\pi/4) = 0.92$ ist. Es besteht also ein Unterschied im Ergebnis und damit zwischen J und J_h.

Mit Blick auf die exakte Lösung $u(x)$ und die FE-Näherung $u_h(x)$ gilt jedoch die ***h-Vertauschungsregel***

$$\boxed{J_h(u) = J(u_h)}\,, \tag{4.28}$$

die wir im Falle des Seils auch leicht verifizieren können

$$J_h(u) = \frac{1}{2}\,(u(1.0) + u(2.0)) = \frac{1}{2}\,(1.5 + 2.0) = 1.75 \tag{4.29}$$

$$J(u_h) = u_h(1.5) = 1.75\,. \tag{4.30}$$

Das Funktional $J_h(u)$ misst u in den beiden Punkten $x = 1.0$ und $x = 2.0$, während das Funktional $J(u_h)$ die Biegelinie u_h nur im Aufpunkt $x = 1.5$ misst. Aber beide Messergebnisse sind gleich!

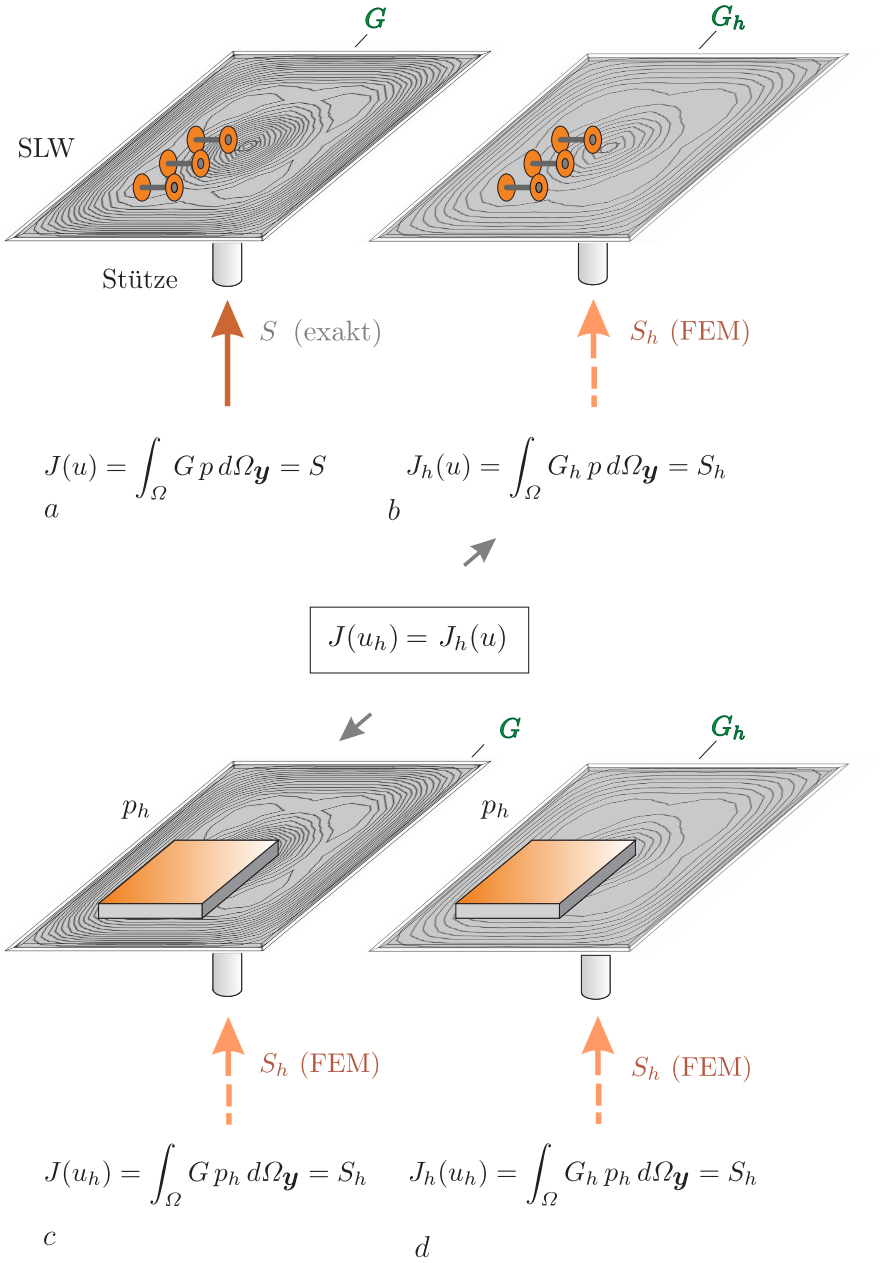


Bild 4.3. Gelenkig gelagerte Platte mit zentrischer Stütze. Wenn man die sechs Räder des SLW, LF p, auf die Einflussfläche G_h stellt, erhält man die Stützenkraft S_h der FE-Lösung. Dasselbe Ergebnis erhält man aber auch, wenn man die FE-Belastung p_h (hier in einer symbolischen Darstellung als Blocklast) auf die exakte Einflussfläche stellt. Ebenso gilt $S_h = (G_h, p) = (G_h, p_h)$ Bild b und d

Die Vertauschungsregel basiert auf der Tatsache, dass eine FE-Lösung auf sechs verschiedene Arten darstellbar ist

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G(y,x)\, p_h(y)\, dy = \int_0^l G_h(y,x)\, p(y)\, dy \\ &= \int_0^l G_h(y,x)\, p_h(y)\, dy \\ &= \int_0^l \delta(y,x)\, u_h(y)\, dy = \int_0^l \delta_h(y,x)\, u_h(y)\, dy \\ &= \int_0^l \delta_h(y,x)\, u(y)\, dy\,, \end{aligned} \tag{4.31}$$

und wenn wir noch die Formeln

$$u_h(x) = a(G, u_h) = a(G_h, u_h) = a(G_h, u) \tag{4.32}$$

mitzählen, die im Grunde **Varianten der Mohrschen Arbeitsgleichung** sind, sind es sogar neun.

Auf den ersten beiden Gleichungen

$$J(u_h) = \int_0^l G(y,x) p_h(y)\, dy = \int_0^l G_h(y,x) p(y)\, dy = J_h(u) \tag{4.33}$$

basiert die h-Vertauschungsregel, wobei wir gleich $u_h(x)$ zu $J(u_h)$ erweitert haben, denn (4.31) gilt ja nicht nur für das Punktfunktional $J(u) = u(x)$, sondern für jedes lineare Funktional J.

Ob man die exakte Einflussfunktion G mit den FE-Lasten p_h überlagert, oder die genäherte Einflussfunktion G_h mit der Originalbelastung p, macht keinen Unterschied – das Resultat ist dasselbe.

Bild 4.3 demonstriert dies am Beispiel einer Stütze unter einer Platte, auf der ein Schwerlastwagen (SLW) steht. Dargestellt ist die exakte Einflussfläche für die Stützenkraft, Bild 4.3 a, und die genäherte, Bild 4.3 b. Die Radlasten des SLW stellen den LF p dar, und die Blocklast soll symbolisch für den FE-Lastfall p_h stehen. Es gibt nur eine Formel für die exakte Stützenkraft

$$S = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.34}$$

aber **drei Möglichkeiten**, die Näherung S_h zu berechnen

$$\begin{aligned} S_h &= \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\ &= \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

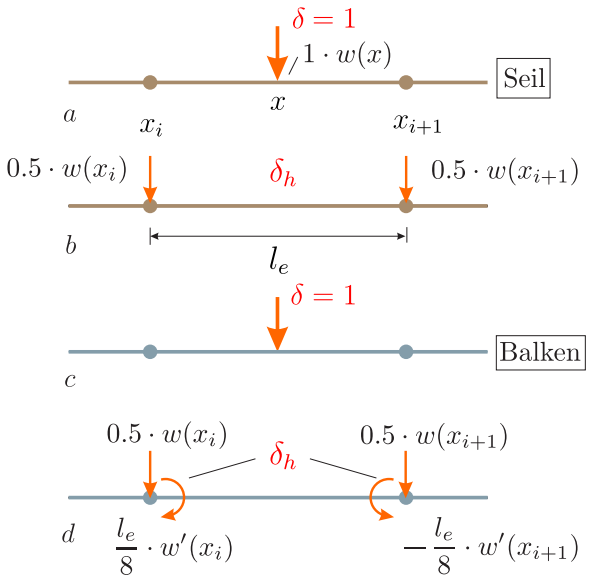


Bild 4.4. Wenn w auf l_e linear ist, ist das genäherte Dirac Delta in Bild **b)** genauso gut, wie das exakte, in Bild **a)**, und wenn w auf l_e ein kubisches Polynom ist, gilt dasselbe für **c)** und **d)**. Die genäherten Dirac Deltas sind die äquivalenten Knotenkräfte (= Festhaltekräfte $\times(-1)$) aus dem exakten Dirac Delta, wenn man sich also das Element l_e links und rechts eingespannt denkt

Bemerkung 4.1. Wie Bild 4.4 am Beispiel eines Seils bzw. eines Balkens illustriert, sind die äquivalenten Knotenkräfte aus dem Dirac Delta, das sind die Kräfte und Momente in Bild 4.4 b und d, so gut, wie das exakte Dirac Delta, wenn die Biegelinie über die Elementlänge l_e linear verläuft

$$w(x) = \int_0^l \delta(y-x)\, w(y)\, dy = \frac{1}{2}\left(w(x_i) + w(x_{i+1})\right) \tag{4.36}$$

bzw. dort kubisch ist

$$w(x) = \int_0^l \delta(y-x)\, w(y)\, dy = \frac{1}{2}\, w(x_i) + w'(x_i) \cdot \frac{l_e}{8} + \frac{1}{2}\, w(x_{i+1}) - w'(x_{i+1}) \cdot \frac{l_e}{8}\,. \tag{4.37}$$

Das ist die anschauliche Interpretation der h-Vertauschungsregel.

Aus der Sicht des FE-Programms reichen die genäherten Dirac Deltas δ_h vollkommen aus, weil sie ja auf $\mathcal{V}_h$ die exakten Werte liefern, $(\delta, \varphi_i) = (\delta_h, \varphi_i)$.

4.3 Exakte Werte

Wir können nun auch sagen, wann die FE-Lösung in einem Punkt exakt ist.

Theorem 4.2 (Exakte Werte).

Hinreichende Bedingungen

1. *Wenn die Einflussfunktion G eines Funktionals J in $\mathcal{V}_h$ liegt, dann ist die FE-Näherung G_h identisch mit G, und dann gilt*

$$J(u_h) = J_h(u) = J(u)\,, \tag{4.38}$$

oder

$$J(u_h) = (G, p_h) = (G_h, p) = (G, p) = J(u)\,. \tag{4.39}$$

2. *Wenn die exakte Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt, $u = u_h$, dann ist der Fehler in jeder Einflussfunktion orthogonal zur rechten Seite p der Lösung*

$$J(u) - J(u_h) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,. \tag{4.40}$$

Notwendige Bedingung

1. *Wenn ein Wert exakt ist, $J(u_h) = J(u)$, dann muss der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal sein zur rechten Seite p*

$$J(u) - J(u_h) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,. \tag{4.41}$$

4.4 Eindimensionale Probleme

Das obige Theorem fasst im Grunde das ganze Thema zusammen, aber vielleicht ist es sinnvoll, auf einzelne Aspekte doch noch näher einzugehen.

Weil die Einflussfunktionen stückweise homogene Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung sind, setzen exakte Knotenwerte, $u_h(x_i) = u(x_i)$, voraus, dass der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ diese Lösungen enthält.

Bei 1-D Problemen wie $-EA\,u'' = p_x$ und $EI\,w^{IV} = p_z$, ($EI, EA = const.$), sind die Knotenwerte exakt, weil die homogenen Lösungen

$$u_h(x) = c_1 + c_2\,x \tag{4.42a}$$

$$w_h(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + c_4\,x^3 \tag{4.42b}$$

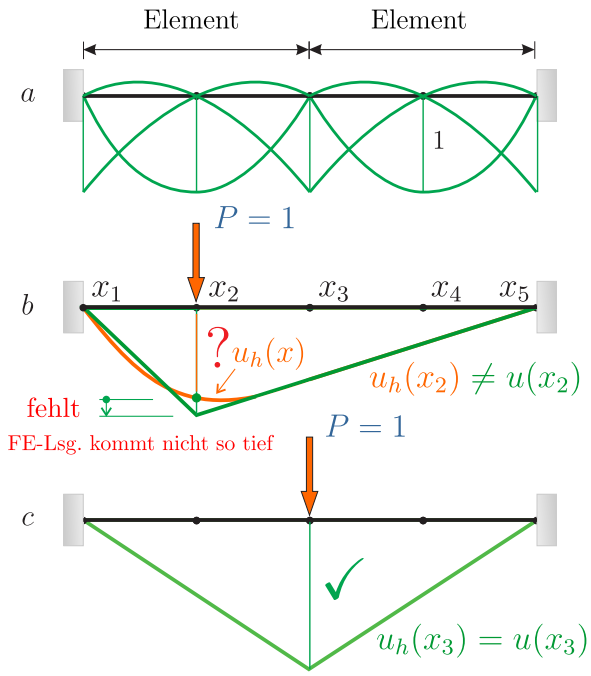


Bild 4.5. Quadratische Elemente interpolieren die exakte Lösung nicht im Mittelknoten, sondern nur an den Endknoten des Elements, weil die *bubble function* des Mittelknotens zu glatt ist, **a)** Ansatzfunktionen, **b)** Punktlast im Mittelknoten und FE–Lösung, **c)** Punktlast am Endknoten und die FE-Lösung, die in diesem Falle exakt ist

in $\mathcal{V}_h$ liegen. Die stückweise linearen Hütchenfunktionen eines Stabes können jedes $u_h(x)$ darstellen und dasselbe gilt für die vier *shape functions* eines Balkens, die jedes w_h darstellen können, siehe Bild 3.13.

Das Ganze gilt nicht mehr, wenn die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen aus diesem Raster herausfallen, wie im Fall eines in Längsrichtung gebetteten (c) Stabes

$$-EA\,u''(x) + c\,u(x) = p_x\,, \tag{4.43}$$

wo die homogene Lösung die Gestalt

$$u(x) = c_1\,e^{\alpha x} + c_2\,e^{-\alpha x} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{c}{EA}} \tag{4.44}$$

hat oder im Fall eines elastisch gelagerten Balkens,

$$EI\,w^{IV} + c\,w(x) = p_z\,, \tag{4.45}$$

wo die homogene Lösung die Gestalt

$$w(x) = e^{\beta x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + 8e^{-\beta x}(c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) \tag{4.46a}$$

$$\beta = \sqrt[4]{c/4\,EI} \tag{4.46b}$$

hat.

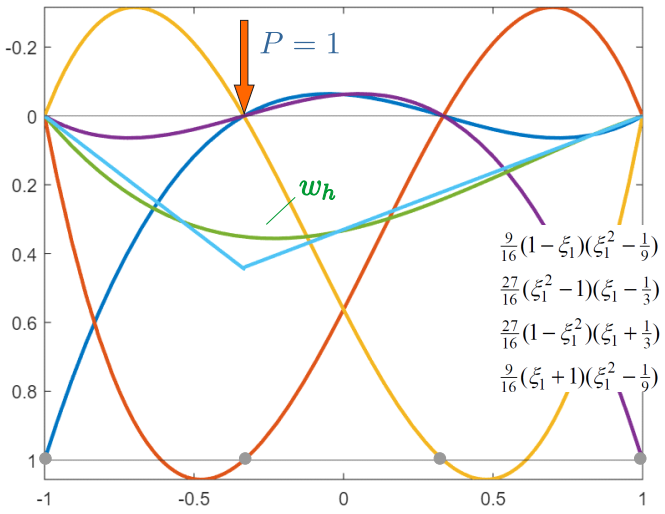


Bild 4.6. Auch kubische Ansatzfunktionen sind im Innern zu glatt (MATLAB)

Denn alle Einflussfunktionen setzen sich stückweise aus den homogenen Lösungen der zu Grunde liegenden Differentialgleichung zusammen, aber normalerweise enthält der Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ nicht solche ‚exotischen' Funktionen wie (4.44) und (4.46a).

Zu den Merkwürdigkeiten gehört auch, dass man mit eigentlich besseren Ansatzfunktionen unter Umständen die Fähigkeit **verliert**, die exakte Lösung in den Knoten zu interpolieren. Dies passiert, wenn man zum Beispiel eine Seillinie mit quadratischen Elementen annähert, siehe Bild 4.5.

In der Mitte des Elementes ist eine quadratische FE-Lösung glatt, dort regiert die ***bubble function*** des Mittenknotens. Was man aber bräuchte, wäre die Möglichkeit, dort einen **Sprung** in der ersten Ableitung darstellen zu können, damit man die Wirkung einer Einzelkraft in dem Mittenknoten wiedergeben kann. Die Ableitung der *bubble function* ist aber glatt, sie springt nicht, und deswegen stimmt z.B. die FE-Lösung des Problems

$$-u''(x) = x \qquad u(0) = u(l) = 0\,, \tag{4.47}$$

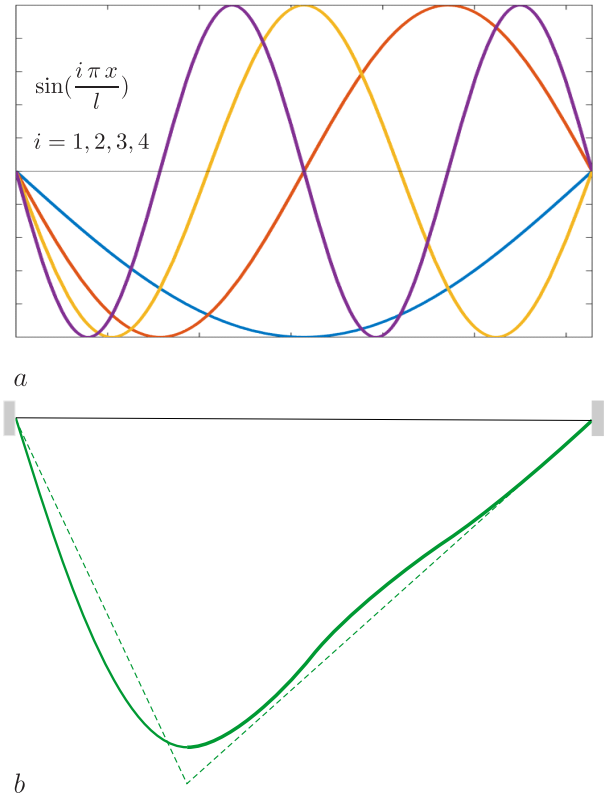


Bild 4.7. **a)** *Sinus*-Funktionen, **b)** genäherte und exakte Einflussfunktion für die Seildurchbiegung im Viertelspunkt $x = 2.5$. Weil die Seilecke nicht in $\mathcal{V}_h$ liegen, ist die Übereinstimmung, $w_h(x) = w(x)$, in einem Punkt x Zufall (MATLAB)

nicht mit der exakten Lösung in den Mittenknoten überein. Die Einflussfunktion für den Mittenknoten liegt nicht in $\mathcal{V}_h$[1] Dasselbe gilt für kubische Elemente, siehe Bild 4.6. Die Knoten liegen bei $[-1, -1/3, 1/3, 1]$.

Ein FE-Programm muss also **eine Balance finden** zwischen der Regularität, die von der Wechselwirkungsenergie gefordert wird, damit man die Beiträge $k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ der Steifigkeitsmatrix berechnen kann und der ‚Nicht-Regularität', die man braucht, um einen Sprung in der ersten Ableitung erzeugen zu können.

[1] Wenn u in $\mathcal{V}_h$ liegt, z.B. wenn u quadratisch ist, dann ist der Fehler $u(x) - u_h(x) = 0$, weil in dem Fall der Fehler in der Einflussfunktion orthogonal zu p ist, s. z.B. [192] S. 308.

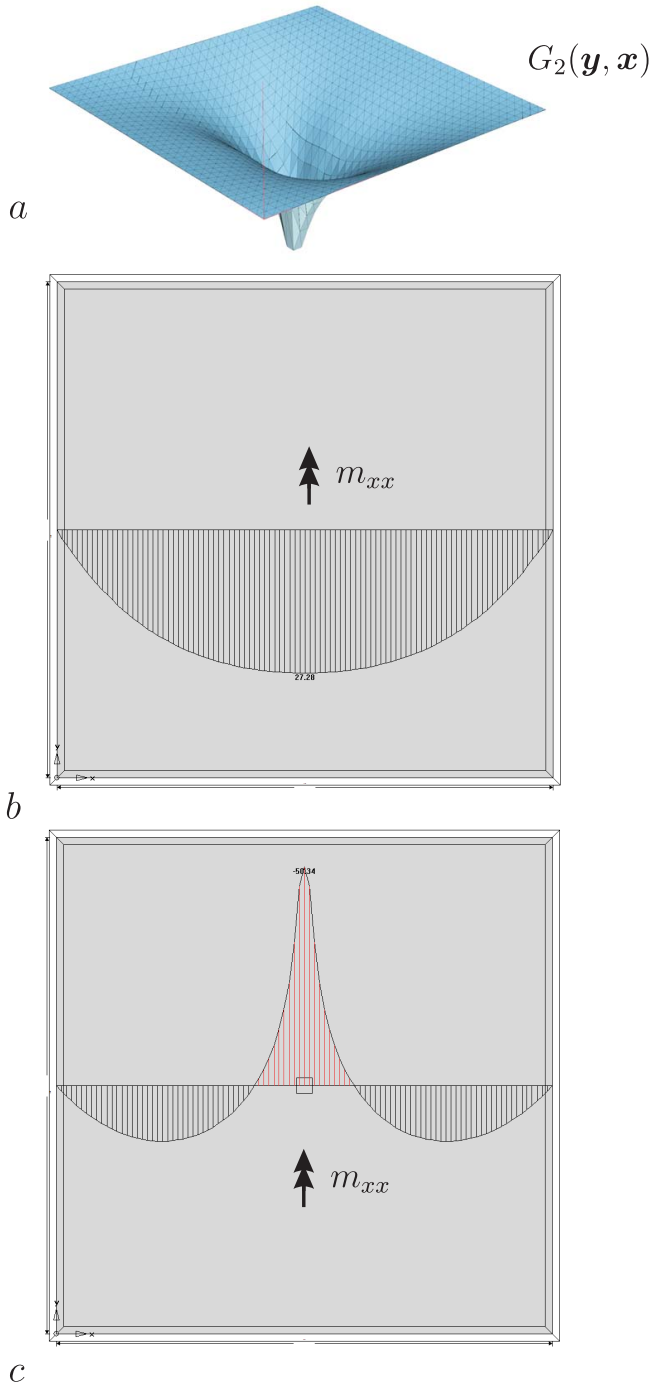


Bild 4.8. Platte im LF g, **a)** Einflussfunktion für m_{xx} in Plattenmitte, **b)** Momente m_{xx} im Längsschnitt, **c)** Momente m_{xx} mit Stütze (BE-PLATTE)

4.5 Isogeometric Analysis

In der *isogeometric analysis* benutzt man die ***splines*** (*B-splines* und *nurbs*), die das Modell erzeugen, auch als Ansatzfunktionen für die FE-Lösung, Höllig (2003) [102], Cottrell, Hughes, Bazilev (2009) [44].

Uns interessiert hier nur ein Aspekt der Methode, nämlich dass die Ansatzfunktionen in der Regel nicht mehr die FE-Lösung in den Knoten interpolieren, das vertraute $u_i(x_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Delta) verloren geht. Damit stellt sich die Frage: Gelten unsere Ergebnisse auch dann? Ja, es bleibt alles richtig. *Betti extended* gilt weiterhin und es bleibt dabei, dass die Güte der FE-Ergebnisse von der Güte der Einflussfunktionen abhängt.

Trigonometrische Ansätze haben dasselbe Problem und daher betrachten wir zum Exempel ein Seil mit der Länge $l = 10$

$$-w''(x) = 10 \qquad 0 \le x \le l \qquad w(0) = w(l) = 0\,, \tag{4.48}$$

für das wir einen viergliedrigen Ansatz aus *sinus*-Funktionen machen, siehe Bild 4.7 a,

$$\varphi_i(x) = \sin(\frac{i\,\pi\,x}{l}) \qquad i = 1, 2, 3, 4\,. \tag{4.49}$$

Die Steifigkeitsmatrix

$$k_{ij} = \int_0^l \varphi_i'\,\varphi_j'\,dx = \begin{cases} \pi^2\,i^2/20 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.50}$$

ist eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\pi^2\,i^2/20$ und die f_i sind gerade die Integrale der $\varphi_i(x)$ mal $10\,(= p)$. Die Lösung $w_h(x)$ trifft, wie zu erwarten, nicht die exakte Lösung (in welchen Knoten?), aber ***Betti extended*** gilt weiterhin

$$w_h(x) = \int_0^l G_h(y, x)\,p(y)\,dy\,, \tag{4.51}$$

wenn $G_h(y, x) = \sum_i g_i(x)\,\varphi_i(x)$ die Entwicklung der Einflussfunktion nach den *sinus*-Funktionen $\varphi_i(x)$ ist, siehe Bild 4.7. Die g_i werden wie üblich aus $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$ bestimmt mit $j_i = \varphi_i(x)$.

Wählen wir z.B. den Punkt $x = 2.5$, dann ist das Integral genau der Wert $w_h(x) = 94.6$ der FE-Lösung, aber der exakte Wert ist $w(x) = 93.75$. Hier zeigt sich wieder, dass man für Schönheit büssen muss. Glatt ist nicht immer besser, wenn es um die Annäherung an Einflussfunktionen geht. Lineare Elemente können es punktgenau.

Bemerkung 4.2. Bei diesem Problem bilden die vier Ansatzfunktionen, die vier Sinus-Funktionen, keine *partition of unity* des Intervalls $[0, 10]$ und daher ist die Summe der FE-Lagerreaktionen, $2 \cdot 45.032 \neq 100$, nicht die aufgebrachte Belastung und auch die äquivalenten Knotenkräfte

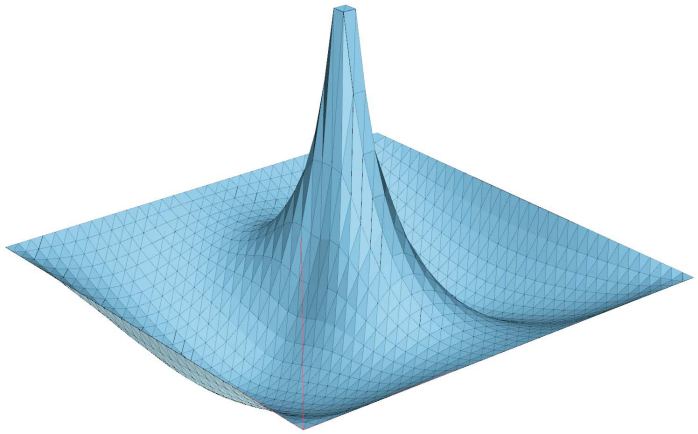


Bild 4.9. 3-D Darstellung der Momente m_{xx} der Quadratplatte mit einer zentrischen Stütze im LF g (BE-PLATTE)

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \frac{200}{\pi} + 0 + \frac{200}{3\,\pi} + 0 = 84.8826 \tag{4.52}$$

addieren sich nicht zur Belastung, da dies voraussetzen würde, dass die Starrkörperbewegung $w = 1$ in $\mathcal{V}_h^+$ liegt, was nicht der Fall ist.

4.6 Flächentragwerke

Wenn bei Flächentragwerken die Ergebnisse in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ exakt sind, dann ist das in der Regel **Zufall**. Dann kann es nur so sein, dass der Fehler $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ in der Einflussfunktion orthogonal zur Belastung p ist,

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(y)\; d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,, \tag{4.53}$$

denn die exakten Einflussfunktionen liegen bei Flächentragwerken nicht in dem Ansatzraum $\mathcal{V}_h$ der finiten Elemente, weil die verwendeten *shape functions* keine homogenen Lösungen der Scheiben- bzw. Plattengleichung sind.

Es ist aber auch klar, dass die Art der Belastung

$$\textit{Gleichlast} \qquad \textit{Linienlast} \qquad \textit{Punktlast} \tag{4.54}$$

einen Einfluss auf die Größe des Fehlers hat. Je gleichmäßiger die Belastung verteilt ist, um so eher gleichen sich die Fehler in den Einflussfunktionen im Mittel aus, wie man am Beispiel einer gelenkig gelagerten Quadratplatte sehen kann.

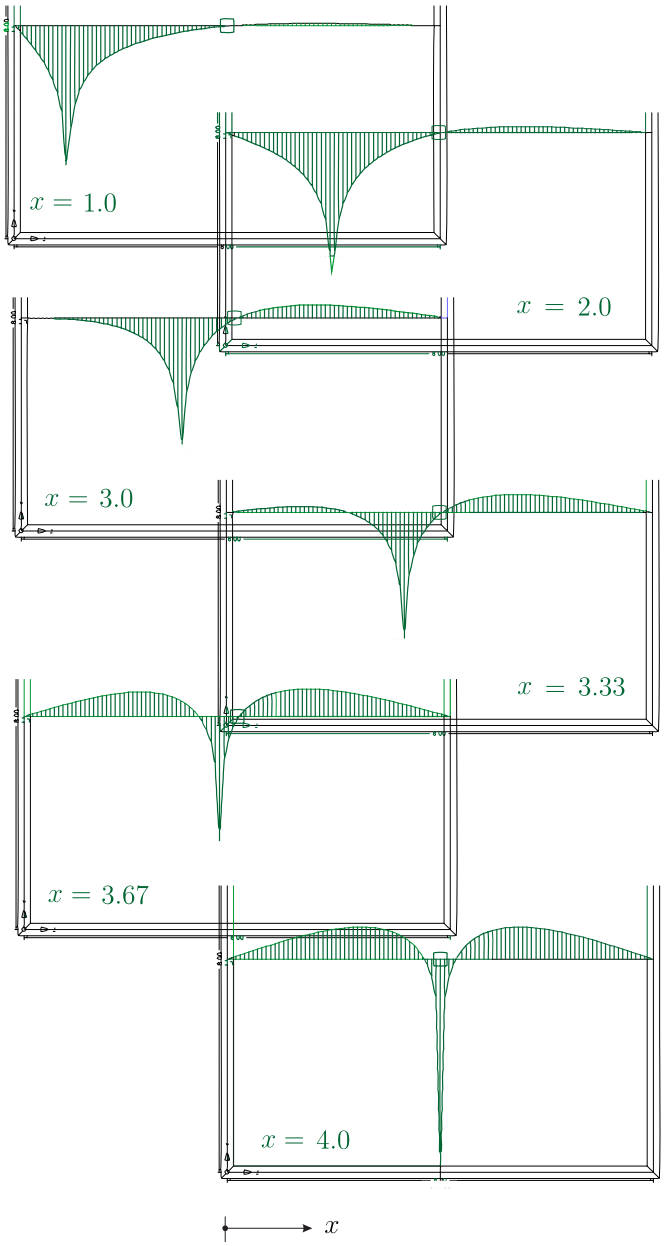


Bild 4.10. Quadratplatte, 8 m × 8 m, mit Einzelstütze in der Mitte, (dargestellt ist die untere Hälfte der Platte), Serie von Einflussfunktionen für m_{xx} auf der x-Achse (BE-PLATTE)

In Bild 4.8 a ist die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} in Plattenmitte dargestellt. Im LF g, wir schreiben p statt g, ist das Moment

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p \; d\Omega_{\boldsymbol{y}} = p \cdot \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = p \cdot V \tag{4.55}$$

gleich dem Volumen V von G_2 mal p. Und anscheinend kann das FE-Programm das Volumen der Einflussfunktionen relativ gut bestimmen, die Momentenverteilung in Bild 4.8 b wirkt überzeugend.

Eine Einzelkraft P aus einer Stütze, $\Omega_S = a \times b$, ist jedoch von einem anderen Kaliber, siehe Bild 4.9,

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, g \; d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \frac{P}{\Omega_S} \int_{\Omega_S} G_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.56}$$

denn wenn eine Einzelkraft vorkommt, dann muss G_2^h genau in einem Punkt exakt sein.

Genau genommen rechnet das Programm zwar mit einer Ersatzlast $p_h(\boldsymbol{y})$, die das Eigengewicht wie die Stützenkraft ‚äquivalent' beinhaltet

$$m_{xx}^h(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G_2^h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_h(\boldsymbol{y}) \; d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.57}$$

aber auch diese Formel kommt an dem Grundproblem, dem scharfen Anstieg von G_2 zur Stütze hin nicht vorbei.

Die Bild 4.10 illustriert, wie sich die Einflussfunktion für m_{xx} ändert, wenn sich der Aufpunkt der Stütze nähert. Im Grunde bleibt sie sich immer gleich, nur wird sie bei der Annäherung an die Stütze nach oben geschoben. Und das Maß, um wieviel sie nach oben geschoben werden muss, das ist umso schwerer zu bestimmen, je näher der Aufpunkt der Stütze kommt.

4.7 Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied

Bei Scheiben liegen die Dinge ähnlich. Es gibt jedoch einen bemerkenswerten Unterschied zwischen Scheibe und Platte.

Wenn eine Scheibe sich auf Punktlager abstützt, dann kennt man die Lagerkräfte relativ genau (bei statisch bestimmter Lagerung sogar exakt), aber das hilft einem nicht bei der Eingrenzung der (mit dem Ingenieurverstand verträglichen) maximalen Spannungen in der Nähe der Punktlager. Hier kann man sich aber so behelfen, dass man die Lagerkraft über eine gewisse Breite gleichmäßig verteilt und die Scheibe für diese Spannungen bemisst, siehe Bild 4.11 a.

Bei einer Platte ist die Situation im Grunde dieselbe. Die Lagerkräfte in den Stützen sind bei einer FE-Berechnung relativ genau, aber das hilft einem

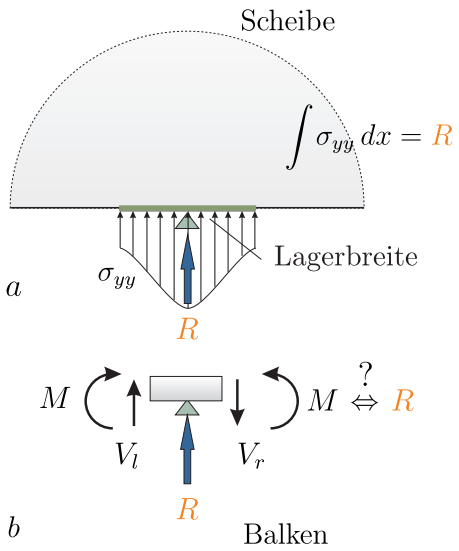


Bild 4.11. **a)** Die Lagerkraft R und die Lagerpressung bei einer Scheibe, **b)** bei einem Balken kann man jedoch keine Beziehung zwischen dem Stützmoment M und der Lagerkraft R herstellen

nicht – und das ist der Unterschied – bei der Eingrenzung der maximalen Biegemomente über der Stütze, weil es keinen direkten Zusammenhang zwischen der Stützenkraft und den Biegemomenten gibt; die **Ausmitten** e_x und e_y bleiben unbekannt.

Es reicht ein Zwischenlager eines Balkens zu betrachten, siehe Bild 4.11 b. Die Summe der Querkräfte V_l und V_r muss gleich der Lagerkraft R sein, aber es gelingt nicht, das Stützmoment M in irgendeiner Weise mit R zu verknüpfen.

Es gibt ja eine Vielzahl von Trägern, die über einem Zwischenlager bei gleicher Lagerkraft ganz unterschiedliche Momente aufweisen. Dazu passt, dass Momente keine Arbeiten leisten, wenn man sie hebt oder senkt – Kräfte schon. Man müsste die Platte neigen, um die Ausmitten e_x und e_y zu finden.

4.8 Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt

Wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt, weil zum Beispiel bilineare Ansätze ausreichen, um die Verformungen einer Scheibe darzustellen, dann ist $\boldsymbol{p}_h = \boldsymbol{p}$, d.h. dann ist der FE-Lastfall **identisch** mit dem Originallastfall. Den FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ erhält man ja, indem man die FE-Lösung in die Originalgleichung einsetzt und dabei muss in diesem Falle gerade die Belastung $\boldsymbol{p}$ herauskommen, die man aufgebracht hat.

Es bleibt aber ein Problem. Ein FE-Programm berechnet alle Werte und also auch die Spannungen mit **genäherten Einflussfunktionen**

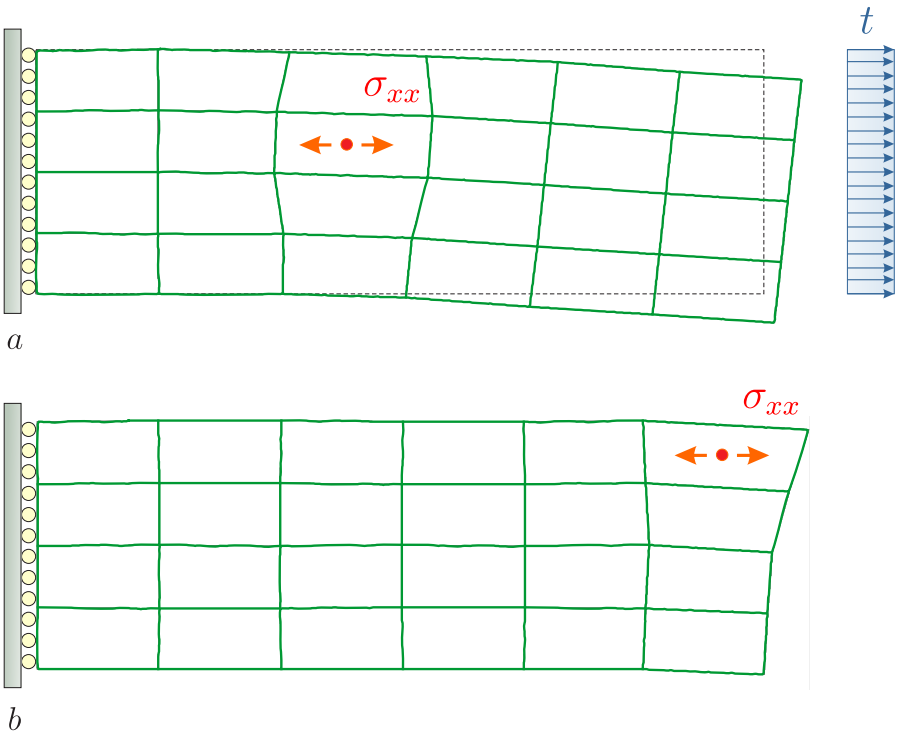


Bild 4.12. FE-Einflussfunktionen für σ_{xx}. Diesen ‚eckigen' Einflussfunktionen sieht man sofort an, dass es nur Näherungen sind, aber das Integral über den Lastrand ergibt für die beiden Aufpunkte, und für alle anderen Aufpunkte auch, den korrekten Wert für σ_{xx} (WINFEM)

$$\sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.58}$$

Also müssten die FE-Spannungen doch nur Näherungswerte sein, warum sind sie aber exakt?

Der Grund ist, dass der Fehler in den Einflussfunktionen orthogonal zu der Belastung ist, wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt,

$$\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) - \sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \underbrace{(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))}_{Fehler} \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0\,. \tag{4.59}$$

Jedes solches $\boldsymbol{p}$ ‚neutralisiert' also den Fehler in den Einflussfunktionen.

Der Fehler in einer genäherten Einflussfunktion ist orthogonal zu allen Lastfällen p, die sich auf $\mathcal{V}_h$ exakt lösen lassen

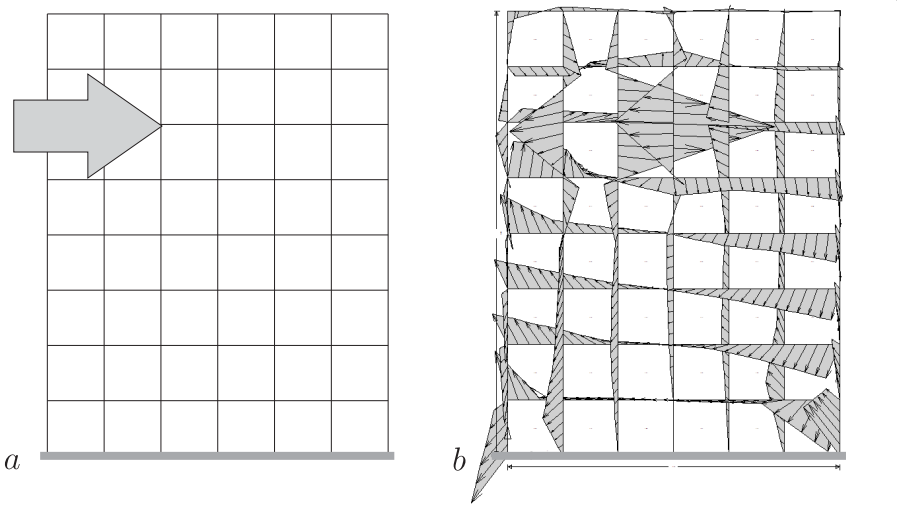


Bild 4.13. Dirac Delta $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ und das genäherte Dirac Delta $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ bei einer Scheibe, auf $\mathcal{V}_h$ liefern beide dasselbe Ergebnis (WINFEM)

Die Scheibe in Bild 4.12 ist so gelagert, dass sich unter Zug ein gleichförmiger Spannungszustand aufbaut, den man mit bilinearen Elementen exakt wiedergeben kann. **Die exakte Lösung liegt also in $\mathcal{V}_h$.**

Aber die Einflussfunktion für die horizontale Spannung σ_{xx}, gleich welchen Punkt $\boldsymbol{x}$ man betrachtet, liegt nicht in $\mathcal{V}_h$, weil dazu **Punktversetzungen** nötig sind, die sich mit bilinearen Elementen nicht erzeugen lassen, aber trotzdem sind die Ergebnisse exakt.

Das geht nur so, dass die Verschiebung des rechten Randes, wie sie von der FE-Einflussfunktion ermittelt wird, in der Summe (dem Integral) genau den exakten Wert trifft, denn sonst wäre σ^h_{xx} nicht gleich σ_{xx}

$$\sigma^h_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \sigma_{xx}(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.60}$$

Hier ist Γ der rechte Rand und $\boldsymbol{t} = \{t, 0\}^T$ ist die Randlast.

Man kann es auch so ausdrücken: Die genäherten FE-Einflussfunktionen geben auf $\mathcal{V}_h$ die exakten Werte $J(\varphi_i)$ zurück. Die Spannung, das Moment, etc. einer *shape function* φ_i in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ kann man durch Überlagerung von G_h mit der zu φ_i gehörigen *shape force* p_i exakt berechnen

$$J(\varphi_i) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_i(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = J_h(\varphi_i) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_i(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.61}$$

Bemerkung 4.3. Die Gleichung

$$\int_\Omega (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})) \bullet \boldsymbol{p}_h(\boldsymbol{y})\; d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{4.62}$$

ist das **Gegenstück zu der *Galerkin-Orthogonalität***, die ja besagt, dass die Abweichung des FE-Lastfalls $\boldsymbol{p}_h$ vom exakten Lastfall $\boldsymbol{p}$ orthogonal zu allen Ansatzfunktionen $\boldsymbol{\varphi}_i$ ist

$$\int_\Omega (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}_h(\boldsymbol{x})) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\, d\Omega = 0\,. \tag{4.63}$$

Galerkin testet mit den Ansatzfunktionen, während der Test bei den Einflussfunktionen, (4.62), die Lastfälle $\boldsymbol{p}_h$ sind, die man auf $\mathcal{V}_h$ exakt lösen kann. Für jedes solche $\boldsymbol{p}_h$ muss die Differenz $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_h$ orthogonal zu $\boldsymbol{p}_h$ sein.

Die *Galerkin-Orthogonalität* gilt auch für Punktlasten, siehe Bild 4.13, und daher ist auf $\mathcal{V}_h$ kein Unterschied zwischen dem exakten und dem genäherten Dirac Delta (φ_i^H = horizontale Komponente von $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ im Punkt $\boldsymbol{x}$)

$$\varphi_i^H(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega \boldsymbol{\delta}_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.64}$$

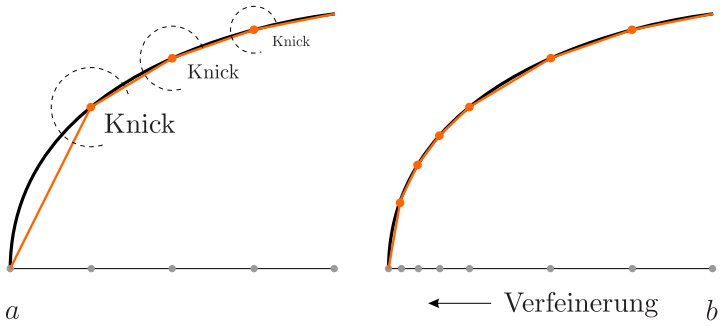


Bild 4.14. Um das Netz an den richtigen Stellen zu verfeinern, muss man die exakte Lösung nicht kennen. Dort wo die Knicke in der FE-Lösung groß sind, dort verfeinert man. In der Statik sind die Knicke die Spannungssprünge zwischen den Elementen

4.9 Patch Test

Bei einem ***patch test*** konstruiert man eine Lösung, die in $\mathcal{V}_h$ liegt, vorzugsweise sind das Lösungen mit einfachen Spannungsfeldern, und kontrolliert, ob sich die exakten Ergebnisse ergeben. Der *patch test* lebt davon, dass der Fehler in den Einflussfunktionen orthogonal zur Belastung ist, wenn die Lösung u in $\mathcal{V}_h$ liegt, wenn also $p_h = p$ ist, denn mit (4.69) gilt

$$\int_\Omega (G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, (p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.65}$$

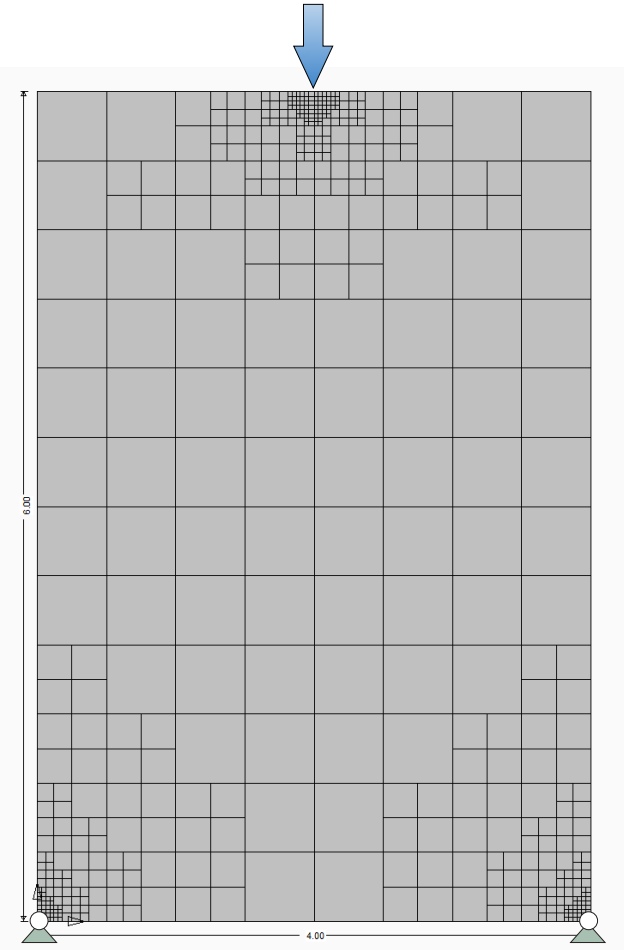


Bild 4.15. Adaptive Verfeinerung einer Scheibe in der Umgebung der kritischen Punkte (WINFEM)

und weil die rechte Seite null ist muss auch die linke Seite null sein. Tests, die garantiert schief gehen, sind Einzelkräfte bei Flächentragwerken. Sie überfordern jedes Netz. Kein $\mathcal{V}_h$ enthält die exakte Lösung.

4.10 Adaptive Verfeinerung

Den Fehler einer FE-Lösung kann man nicht direkt berechnen, denn man kennt weder die exakten Verschiebungen noch die exakten Spannungen. Man kann nur die Abweichung zwischen dem Originallastfall $\boldsymbol{p}$ und dem FE-Lastfall $\boldsymbol{p}_h$ messen und dann das Netz dort verfeinern, siehe Bild 4.15, wo diese Differenzen am größten sind.

Theoretisch geht es sogar noch einfacher, wie Bild 4.14 demonstriert: Man achtet nur auf die **‚Knicke'** (die Spannungssprünge in der FE-Lösung) und verfeinert das Netz an diesen Stellen[2].

Da es, wie so oft, nur auf die Algebra ankommt, wollen wir die Gleichungen skalar schreiben und die Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ einer Membran, die unter einem Druck p steht, betrachten.

Aus den Darstellungen

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{4.66}$$

ergibt sich der Fehler der FE-Lösung zu

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \left(G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right) p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.67}$$

Nun wissen wir aber auch, dass der Fehler einer FE-Lösung darauf beruht, dass ein FE-Programm den FE-Lastfall p_h statt des exakten Lastfalls p löst

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \left(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y})\right) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.68}$$

und somit gilt

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \left(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y})\right) d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{4.69a}$$

$$= \int_\Omega \left(G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right) p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{4.69b}$$

$$= \int_\Omega \left(G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right) \left(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y})\right) d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{4.69c}$$

Den Schritt von der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung macht die *Galerkin-Orthogonalität*

$$\int_\Omega \left(G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right) p_h(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{4.70}$$

möglich; wir haben nur eine null addiert.

Auf der ersten Gleichung (4.69a) basiert die **klassische adaptive Verfeinerung**, bei der das Netz dort verfeinert wird, wo die Abweichungen zwischen p und dem FE-Lastfall p_h groß sind.

Die andere Strategie wäre es, den Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion kleiner zu machen, wie dies (4.69b) nahelegt.

Dabei stellt sich die Frage, wie wir den Abstand $G - G_h$ messen wollen, denn wir kennen das exakte G nicht. Dies Problem lösen wir wie folgt: Zunächst ersetzen wir die Einflussfunktion (4.69b) durch ihre schwache Form

[2] Bei geraden *shape functions*, $p = 2, 4, \ldots$, sind die Fehler im Element maßgebend, während es bei ungeradem p die Knicke sind (*‚dichotomy'*), siehe [10] p. 424.

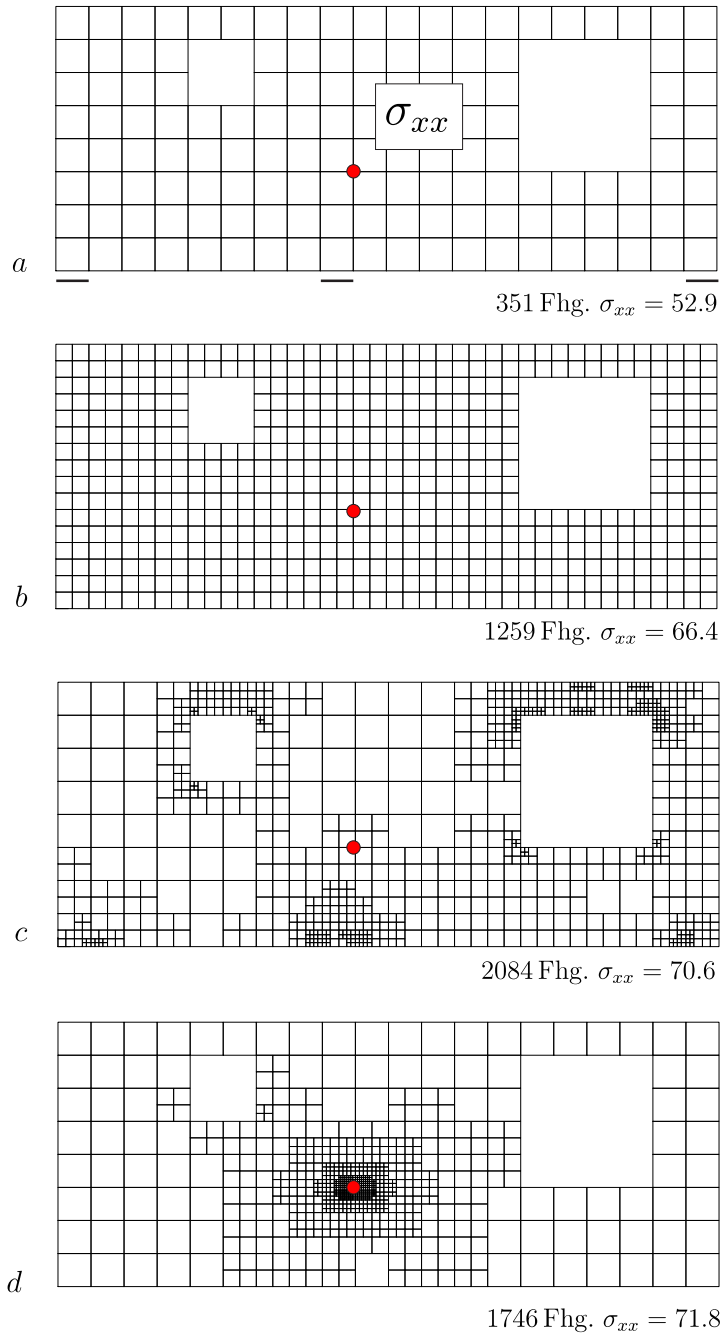


Bild 4.16. Bilineare Elemente, LF g, Berechnung von σ_{xx} **a)** Ausgangsnetz **b)** halbe Elementlänge **c)** adaptive Verfeinerung **d)** Verfeinerung mittels Dualitätstechnik (WINFEM)

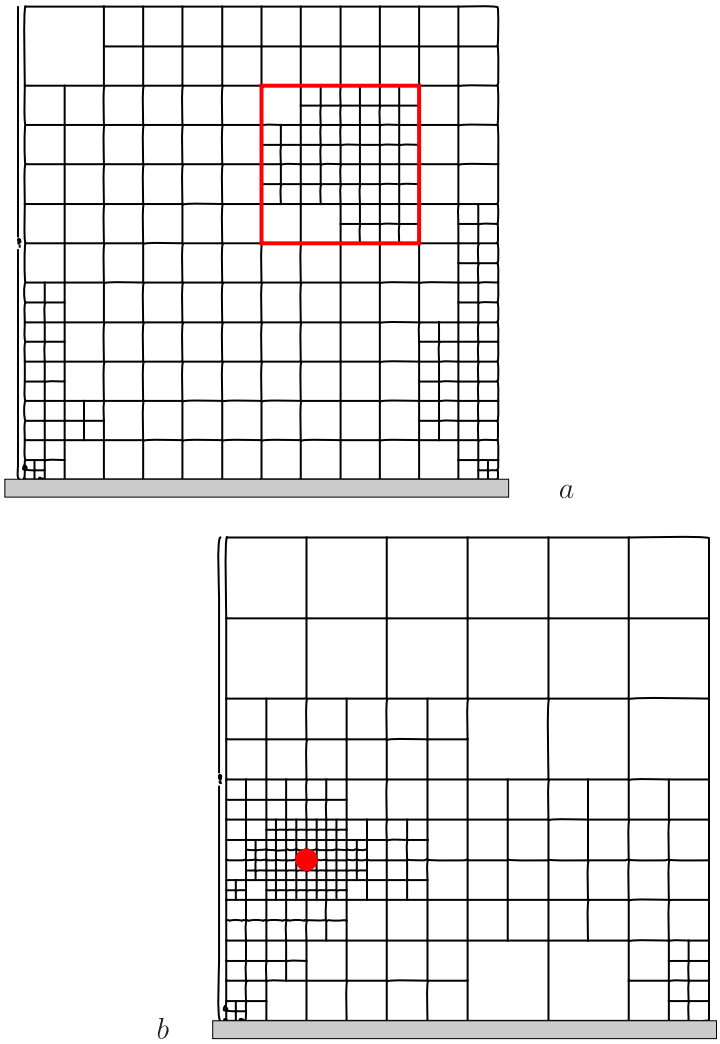


Bild 4.17. Die zwei möglichen Strategien: **a)** Verfeinerung des Lastbereichs, oder **b)** der Umgebung des Aufpunkts (WINFEM)

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = a(G - G_h, u) \tag{4.71}$$

und schreiben diese Wechselwirkungsenergie äquivalent als äußere Arbeit[3]

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = a(G - G_h, u) = \int_\Omega (\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \delta_h(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{4.72}$$

[3] Das ist der Satz von Betti, (4.71) $= W_{12} = W_{21} =$ (4.72)

und die Abweichung $\delta - \delta_h$ können wir messen, siehe Bild 4.13. Nicht direkt, weil δ ja nur ein flüchtiges Symbol ist, aber die Kräfte δ_h können wir plotten und das Netz so verfeinern, dass sie weitgehend vom Bildschirm verschwinden, sich in einem Punkt zusammenschnüren.

Die dritte Variante ist die ***zielorientierte adaptive Verfeinerung*** (*goal oriented adaptive refinement)*. Bei dieser Technik wird der Fehler $G - G_h$ in der Einflussfunktion und gleichzeitig der Fehler $p - p_h$ in der Belastung kleiner gemacht. Sie basiert auf (4.69c). Schreiben wir diese Gleichung in schwacher Form, dann lautet sie

$$u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) = a(\underbrace{G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}_{f}, \underbrace{u - u_h}_{g}) =: a(f,g) \tag{4.73}$$

und jetzt kann man die ***Schwarzsche Ungleichung*** zu Hilfe nehmen,

$$|u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x})| = |a(f,g)| \le a(f,f)^{1/2} \cdot a(g,g)^{1/2} = \|f\| \cdot \|g\| \,, \tag{4.74}$$

um die linke Seite durch die Energienorm von f und von g abzuschätzen.

Theoretisch steht (4.74) auf ‚wackligen Füßen', weil die Energienorm der Einflussfunktion ja in der Regel unendlich groß ist, aber wenn wir das schlicht ignorieren – der Erfolg gibt uns recht – dann ist das die schnellste Art, den Fehler der FE-Lösung in einem Punkt klein zu machen.

Technisch geht man bei der zielorientierten adaptiven Verfeinerung so vor, dass man neben dem ***primalen Problem*** $-\Delta u = f$ noch das ***duale Problem*** $-\Delta G = \delta_0$ löst und das Netz so optimiert, dass die Fehler in beiden Lösungen klein werden, wie bei der Scheibe in Bild 4.16, wo es darum ging die Spannung σ_{xx} in dem Aufpunkt möglichst genau zu bestimmen.

Die Idee der zielorientierten adaptiven Verfeinerung wirkt so einleuchtend, dass man sich fragt wieso eigentlich die normale adaptive Verfeinerung funktioniert, bei der die Umgebung des Aufpunktes ja nicht verfeinert wird, siehe Bild 4.17. Das Rätsel löst sich auf, wenn wir auf die Darstellung des Fehlers schauen

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) - u_h(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(p(\boldsymbol{y}) - p_h(\boldsymbol{y}))\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\ &= \int_\Omega (G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Die Verfeinerung des Netzes im Bereich der Belastung bewirkt, dass der Fehler $p - p_h$ kleiner wird und dieser Fehler wird mit dem exakten Kern gewichtet der, weil exakt, ja unabhängig von der Größe des Netzes ist. Die zweite Gleichung erklärt warum dieser Effekt unabhängig von der Nicht-Verfeinerung im Aufpunkt ist, denn wenn die Lösung in $\mathcal{V}_h$ liegt oder ‚fast' in $\mathcal{V}_h$, wenn $p - p_h$ also klein ist, dann ist der Fehler in der Greenschen Funktion orthogonal zur Belastung und dann stört es nicht, wenn die Greensche Funktion nur eine grobe Näherung ist.

Man könnte nach diesen Bemerkungen nun vermuten, dass fehlende Sprünge eine Garantie dafür sind, dass die FE-Lösung ‚genau' ist, aber das ist nicht garantiert, [91], denn **Fernfeldfehler**, Stichwort ***pollution***, können zu einem *drift* der FE-Lösung führen, den man nicht registriert, wenn man nur auf die Sprünge achtet.

4.11 Pollution

Der englische Begriff ***pollution*** meint das Phänomen, dass die Lösung in einem Teil A des Tragwerks von Fehlerquellen, die in einem abliegenden Teil B auftreten, negativ beeinflusst wird. Bei Flächentragwerken haben die Einflussfunktionen mit diesem Problem zu kämpfen, siehe Kapitel 6.12. Die Fehler in den Ecken strahlen ins Innere aus.

Die Wandscheibe in Bild 4.18 illustriert dieses Phänomen sehr gut. Die Einflussfunktion für die Scherkraft N_{yx} im horizontalen Schnitt $A-A$ ist eine Seitwärtsbewegung des Teils oberhalb des Schnittes um einen Meter nach rechts.

Auf einem FE-Netz kann man diese Bewegung aber nicht nachfahren, weil man dann die Elemente auseinander schneiden müsste. So produziert ein FE-Programm, das bilineare Elemente benutzt, die Verformungsfigur in Bild 4.18 b, bei der sich die Oberkante der Scheibe um 2.3 m nach rechts bewegt! Die Schwierigkeiten, die das FE-Programm hat, die Gleitbewegung im Schnitt $A-A$ darzustellen, führen also zu einem großen Fehler an einer anderen Stelle, der Oberkante der Scheibe. Die Konsequenz ist, dass von einer Belastung von 1 kN an der Oberkante der Scheibe das 2.3-fache im Schnitt $A-A$ ankommt, was wahrlich ein großer Fehler ist.

Wie man in Bild 4.18 d sieht, kann man durch eine adaptive Verfeinerung des Netz den Fehler in der oberen Auslenkung deutlich von 2.3 - 1.0 auf 1.2 - 1.0 verringern. Es gilt auch, dass, wenn man den Schnitt $A-A$ genau durch die *Mitte* der Elementreihe führt, sich die Oberkante wirklich um 1 m nach rechts bewegt, also die Belastung an der Oberkante richtig im Schnitt $A-A$ ankommt. Die resultierende Scherkraft N_{yx} in der Mitte des Elements ist dann also exakt.

Wenn man das sogenannte *Wilson-Element* benutzt, [91], dann werden die Ergebnisse auch für einen Schnitt $A-A$ richtig, der nicht durch die Mitte der Elementreihe geht. Nur den Schnitt innerhalb des Elements selbst, die abrupte Scherbewegung, kann man auch mit dem Wilson-Element nur ‚gleitend' nachvollziehen.

4.11.1 Ursachen

Pollution hat im wesentlichen vier Ursachen, [10]:

1. Unstetigkeiten in der Belastung, also zum Beispiel Sprünge in der Verkehrslast einer Platte (ein mildes Problem)

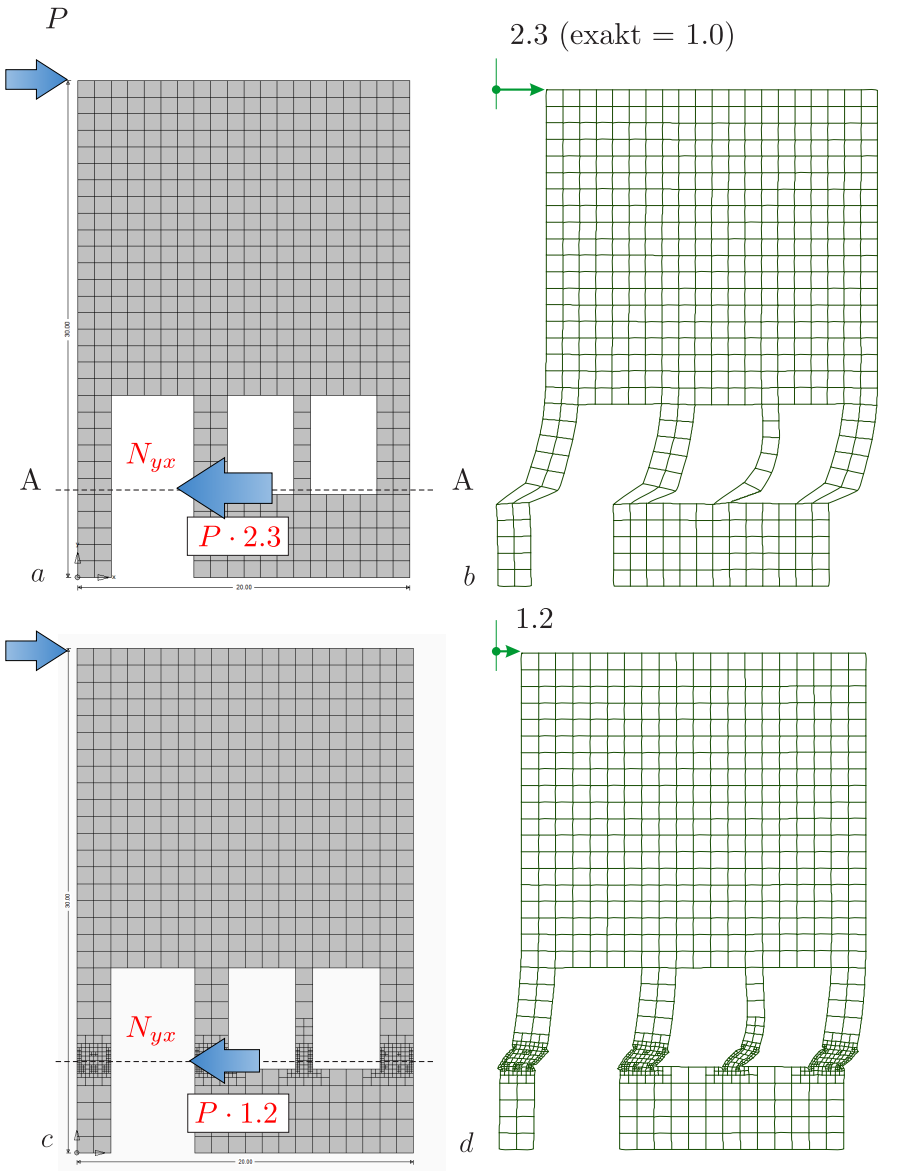


Bild 4.18. Einflussfunktion für die Scherkraft N_{yx} im Schnitt $A - A$, **a)** Wandscheibe und FE-Netz, **b)** FE-Einflussfunktion G_h, **c)** verbessertes Modell, **d)** verbesserte FE-Lösung G_h, [92], (WINFEM)

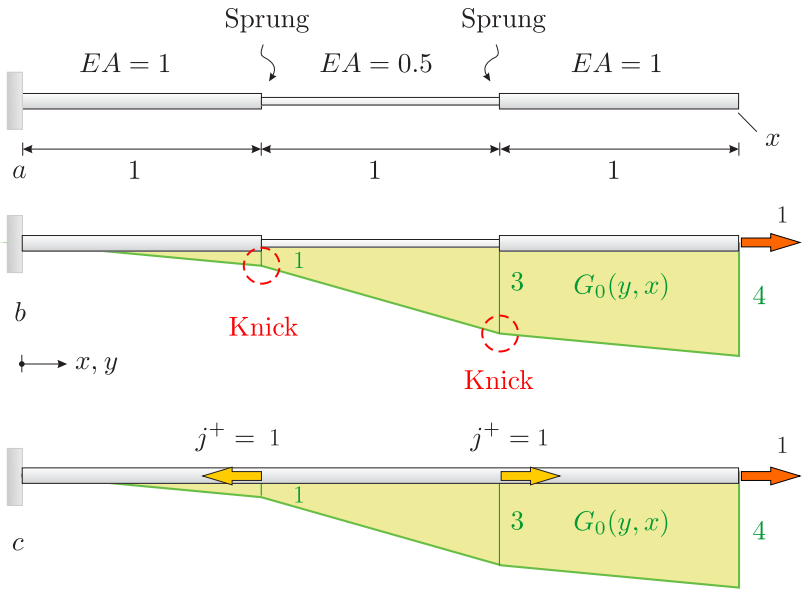


Bild 4.19. Zugstab mit sich veränderndem Querschnitt und Einflussfunktion für das Stabende **a)** System **b)** Einflussfunktion für Verschiebung des Stabendes **c)** dieselbe Figur kann man auch an einem Stab $EA = 1$ mit Hilfe von Kräften j^+ erzeugen, siehe Kap. 5.16

2. Große und kleine Elemente nebeneinander, also ein unausgewogenes Netz; andererseits gilt aber, dass man mit gradierten Netzen *pollution* dämpfen kann
3. Nicht-glatte Einflussfunktionen, siehe Bild 4.19
4. Singularitäten auf dem Rand

Wenn die Koeffizienten in der Differentialgleichung springen, weil z.B. die Dicke d der Platte springt, dann schlägt das auf die Einflussfunktionen durch, d.h. die **Regularität** (‚die Glätte') der Einflussfunktionen nimmt ab, es treten Knicke auf wie in Bild 4.19 b und damit vergrößert sich die *pollution*, weil das FE-Programm mehr Mühe hat, solche Einflussfunktionen zu approximieren.

Alle FE-Lösungen – bis auf Stabtragwerke (EA und EI konstant) – weisen einen globalen Fehler auf, kämpfen mit *pollution*.

Anschaulich äußert sich der Fehler als ***drift*** in den Knoten, [91]. Die exakte Lösung und die FE-Lösung sind in den Knoten nicht deckungsgleich. Das muss im Grunde auch so sein, es ist ein ‚Qualitätsmerkmal', weil die Interpolierende eine schlechtere Lösung als die FE-Lösung ist – die Fehler in den Spannungen sind im Mittel größer als bei der FE-Lösung.

Nur bei Stabtragwerken fallen **Interpolierende** u_I und FE-Lösung u_h zusammen, ist der Fehler in den Spannungen der beiden Lösungen daher gleich. Dieser Fehler wird behoben, indem das FE-Programm stabweise die lokalen

Lösungen zur FE-Lösung addiert und so auf die exakten Ergebnisse kommt. Vergisst man diesen Schritt, dann ist die FE-Lösung $u_h = u_I$ nicht besser als die Interpolierende und die ‚Lücken' $u - u_h$ (‚Bögen', die von Knoten zu Knoten spannen) sind die ***lokalen Fehler*** der FE-Lösung.

Interpolierende: Wenn man die exakte Lösung u kennt und man interpoliert sie in den Knoten mit den *shape functions* aus $\mathcal{V}_h$, dann ist das die Interpolierende u_I auf dem FE-Netz.

Viele Fehlerschätzer basieren auf der Tatsache, dass der Fehler der FE-Lösung $\|u - u_h\|$ (gemessen in der Energienorm $\sim$ Fehlerquadrat der Spannungen) kleiner als der Fehler $\|u - u_I\|$ der Interpolierenden ist. Netze, auf denen man Funktionen gut interpolieren kann, sind auch gute FE-Netze, weil die FE-Lösung immer noch eine Idee besser ist als die Interpolierende.

4.11.2 Details

Das Thema *Pollution* geht auf *Babuška* zurück, [10], – in der FE-Literatur findet man sonst wenig dazu. Der Anlass war, wenn wir es richtig sehen, die Bemerkung von *Zienkiewicz et Zhu*, [235], dass man nur das Residuum $p - p_h$ in den Lasten klein machen müsse, um in die Nähe der exakten Lösung zu kommen. Aber es gibt eben auch – so der Einwand – den ***drift*** in einer FE-Lösung, dem man mit der alleinigen Betrachtung des Residuums $p - p_h$ nicht auf die Spur kommt, wenn die Lösung nicht glatt ist, [12] p. 259. *Babuška*

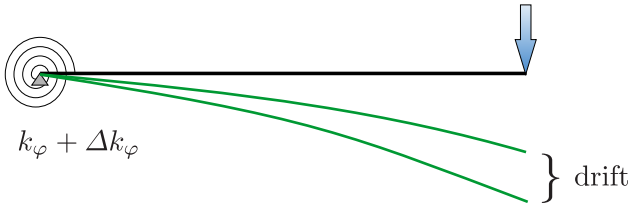


Bild 4.20. Drift einer Lösung auf Grund einer falschen Steifigkeit

definiert als den ***globalen Fehler*** oder *pollution*, den Abstand zwischen der Interpolierenden u_I und der FE-Lösung

$$u_g = u_I - u_h \tag{4.76}$$

und als den ***lokalen Fehler*** den Fehler der Interpolierenden auf den Elementen

$$u_l = u - u_I\,, \tag{4.77}$$

das sind bei 1-D Problemen die ‚Schwibbögen', die von Knoten zu Knoten spannen (in den Knoten ist $u_l = 0$ ja null).

Die Summe ist der Fehler der FE-Lösung

$$e = u_g + u_l = u_I - u_h + u - u_I = u - u_h \,. \tag{4.78}$$

Der globale Fehler äußert sich als *drift* in den Knoten und man bezeichnet ihn daher gerne auch als ***Fernfeldfehler***, weil er durch Störungen $p - p_h$ in abliegenden Tragwerksteilen oder durch Singularitäten auf dem Rand verursacht wird, siehe Kapitel 6.12. Gerade letztere ‚übersieht' ein Fehlerschätzer, der nur auf das Residuum $p - p_h$ schaut.

Die einfachste Illustration des Phänomens bietet ein drehelastisch (k_φ) eingespannter Kragträger, siehe Bild 4.20. Eine falsch angesetzte Drehsteifigkeit $k_\varphi + \Delta k_\varphi$ gleicht einer Singularität auf dem Rand und je weiter man nach außen geht, um so größer wird der *drift* in der FE-Lösung – selbst wenn $p_h = p$ ist.

4.12 Superkonvergenz

Dieses Thema ist praktisch das Gegenstück zur *pollution*. In superkonvergenten Punkten ist eine FE-Lösung genauer als es eigentlich der Ordnung der Ansatzfunktionen entspricht. Als superkonvergente Punkte zählen vor allem die ***Gausspunkte*** der numerischen Quadratur. Das können wir sogar erklären.

Beginnen wir mit einem Balken, bei dem die Einflussfunktionen G_0^h der Knoten ja mit den exakten Einflussfunktionen G_0 übereinstimmen. Nun gilt: (*i*) die *shape functions* φ_i sind homogene Lösungen, (*ii*) die Einflussfunktionen sind in allen Punkten – mit Ausnahme des Aufpunkts – homogene Lösungen, (*iii*) homogene Lösungen sind durch ihre Knotenwerte bestimmt. Es folgt also, dass der Fehler in den Einflussfunktionen G_0^h außerhalb des Elements, das den Aufpunkt x enthält, null ist und so ist eine 1-D FE Lösung in allen Punkten x, die auf unbelasteten Elementen liegen, exakt, siehe Bild 4.21.

Was passiert nun, wenn x auf einem Element liegt, das eine Gleichlast p trägt? Die exakte Biegelinie w kann in jedem Element in eine homogene Lösung w_0 und eine partikuläre Lösung w_p (*fixed ends*) aufgespalten werden

$$w(x) = w_0(x) + w_p(x) \qquad EI\, w_0^{IV}(x) = 0 \qquad EI\, w_p^{IV} = p \,, \tag{4.79}$$

und die homogene Lösung ist mit der FE-Lösung identisch: $w_h = w_0$ auf jedem Element. Der Fehler $e(x)$ in der FE-Lösung ist also $e(x) = w(x) - w_h(x) = w_p(x)$ und daher ist der Fehler im Biegemoment gerade das Biegemoment am beidseitig eingespannten Träger (l_e = Elementlänge)

$$M_p(x) = -EI\, w_p''(x) = \frac{p\, l_e^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l_e} + \frac{x^2}{l_e^2}\right). \tag{4.80}$$

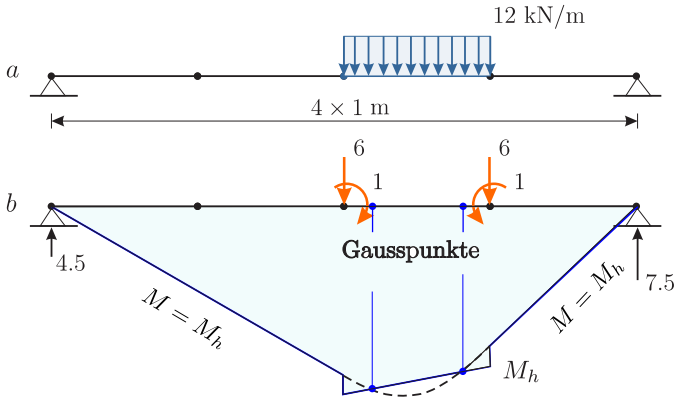


Bild 4.21. Linearer Momentenverlauf im Element, aber in den Gausspunkten sind die Momente exakt

Jetzt kommt die Überraschung! Der Fehler ist also da null, wo $M_p(x) = 0$ ist, und diese beiden Punkte $x_1 = 0.21132$ und $x_2 = 0.78868$, die Länge des Elements sei $l_e = 1$, sind genau die Gausspunkte. Wie kommt das?

(*i*) Das Integral von M_p ist null, weil die Enden eingespannt sind, $w_p'(0) = w_p'(l_e) = 0$, siehe Bild 4.22

$$\int_0^{l_e} M_p(x)\,dx = \int_0^{l_e} -EI\,w_p''(x)\,dx = -EI\,[w_p'(l_e) - w_p'(0)] = 0\,. \qquad (4.81)$$

(*ii*) $M_p(x)$ ist ein symmetrisches Polynom zweiten Grades. Daher muss die Funktion in den $n = 2$ Gausspunkten einer $2n - 1 = 3$ Formel, null sein

$$\int_0^{l_e} M_p(x)\,dx = w_1\,M_p(x_1) + w_2\,M_p(x_2) = 2\,w_1\,M_p(x_1) = 0\,. \qquad (4.82)$$

Die w_i sind hier die Gewichte der Quadratur.

Bei anderen Lasten ist es nicht garantiert, dass M_p in den Gausspunkten null ist. Dann muss man die superkonvergenten Punkte in den Plots der Festeinspannmomente suchen. Obwohl sich immer noch Regeln finden lassen. Wenn z.B. die Belastung auf dem Intervall $[-1, 1]$ dreiecksförmig ist, $p(x) = (1 + x)/2$, dann muss M_p wegen

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} M_p(x)\,dx &= \int_{-1}^{+1} [-\frac{1}{12} - \frac{x}{20} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}]\,dx \\ &= 1.0 \times M_p(-0.5775) + 1.0 \times M_p(0.5775) = 0 \end{aligned} \qquad (4.83)$$

entgegengesetzte Werte in den beiden Gausspunkten haben.

Genauso ist die Querkraft $V(x) = -EI\,w'''(x)$ in der Mitte eines Elements null, wenn die Belastung p konstant ist. Der Grund ist derselbe, wie zuvor:

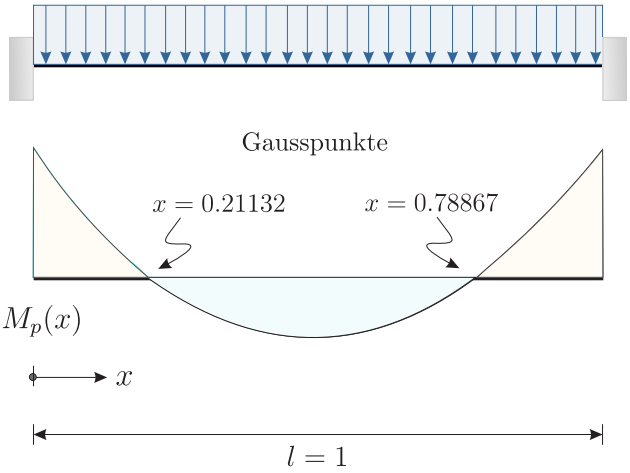


Bild 4.22. Die Nullstellen von $M_p(x)$ fallen mit den Gausspunkten zusammen

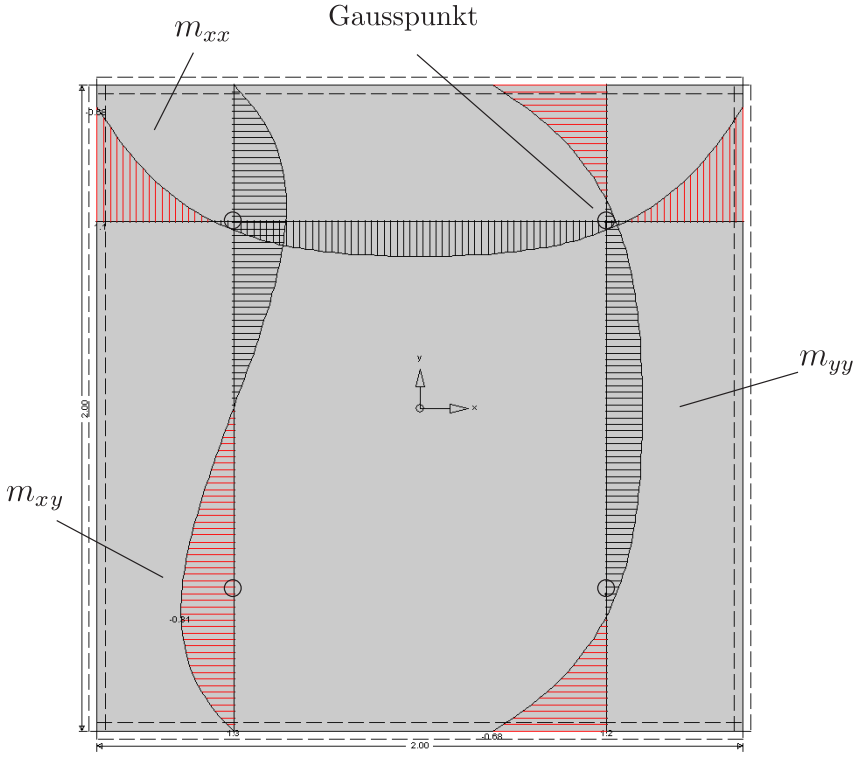


Bild 4.23. Eingespannte Platte und die Lage der vier Gausspunkte mit Plots der Momente m_{xx}, m_{xy}, und m_{yy} (BE-PLATTE)

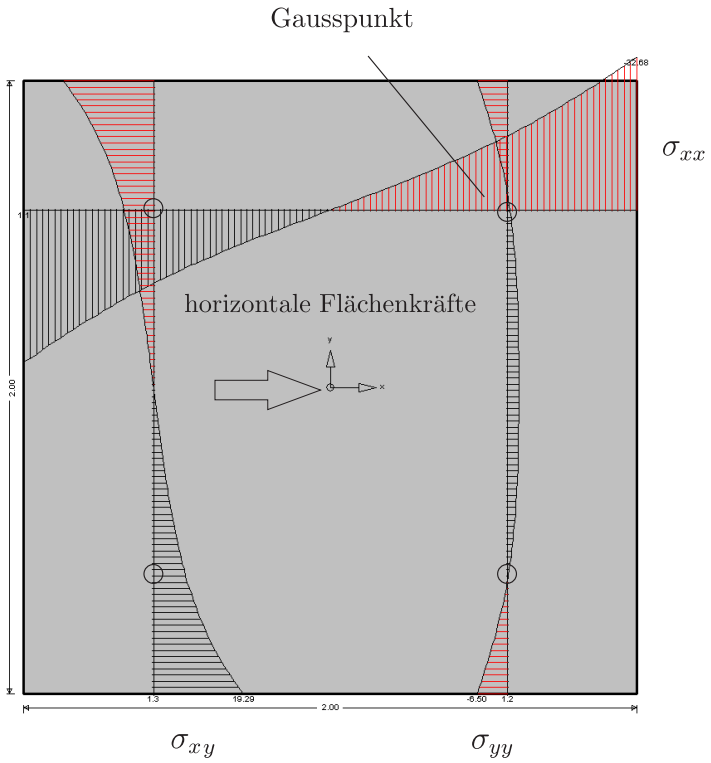


Bild 4.24. Eingespanntes Scheibenelement unter horizontalen Flächenkräften $\boldsymbol{p} = \{1, 0\}^T$; σ_{xx} und σ_{xy} verlaufen näherungsweise linear und σ_{yy} ist quadratisch (BESCHEIBE)

Das Integral von $V(x) = M'(x)$ ist null, weil die beiden Einspannmomente gleich groß sind, $M(l_e) - M(0) = 0$, und weil $V(x)$ in dem Element eine lineare Funktion ist, die mit einem Gausspunkt exakt integriert werden.

Betrachten wir nun eine rechteckige, eingespannte Platte. Weil die Normalableitung $w_n = \nabla w \bullet \boldsymbol{n} = 0$ und die Tangentialableitung $w_t = \nabla w \bullet \boldsymbol{t} = 0$ auf dem Rand null sind, ist auch der Gradient $\nabla w = [w_{,x}\,, w_{,y}]^T$ null und daher muss das Integral von m_{xx} null sein

$$\int_{\Omega_e} m_{xx}\, d\Omega = \int_{\Omega_e} (w_{,xx} + \nu\, w_{,yy})\, d\Omega = \int_{\Gamma_e} (w_{,x}\; n_x + \nu\, w_{,y}\; n_y)\, ds = 0 \tag{4.84}$$

wie auch das Integral von m_{yy} und m_{xy}.

In einem Balken ist unter einer Gleichlast $p = 1$ das Moment $M(x)$ ein Polynom zweiten Grades. Wenn dasselbe in einer Platte gelten würde, wenn die Biegemomente m_{ij} symmetrische Polynome zweiten Grades wären, dann

müssten sie in den vier Gausspunkten null sein. Aber das ist wohl nur näherungsweise richtig, siehe Bild 4.23.

In einem rechteckigen, allseitig festgehaltenen Scheibenelement, muss das Integral von $\sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{yy} = u_{x,x} + \nu\,u_{y,y}$ null sein

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{xx}\,d\Omega = E \int_{\Omega_e} (u_{x,x} + \nu\,u_{y,y})\,d\Omega = E \int_{\Gamma_e} (u_x\,n_x + \nu\,u_y\,n_y)\,ds = 0\,, \tag{4.85}$$

ebenso wie die Integrale von σ_{yy} und σ_{xy}.

Unter horizontalen Flächenkräften $\boldsymbol{p} = \{1, 0\}^T$ bildet sich näherungsweise eine lineare Spannungsverteilung σ_{xx} aus und die vertikalen Spannungen σ_{yy} sind quadratisch, siehe Bild 4.24. Lineare Spannungen σ_{xx} hätten eine Nullstelle in Elementmitte und quadratische Spannungen σ_{yy} hätten Nullstellen in allen vier Gausspunkten.

Das Problem bei all diesem ist natürlich, dass die Aufspaltung in homogene und partikuläre Lösung wie bei einem Balken, bei Flächentragwerken nicht möglich ist. Wenn natürlich auch ansatzweise, bei der Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte so vorgegangen wird. In Gedanken steht ja das Drehwinkelverfahren hinter den finiten Elementen. Nur kann man das Addieren der lokalen Lösungen nicht separat vornehmen, sondern man muss darauf vertrauen, dass das das FE-Programm das automatisch richtig macht, dass ‚irgendwie' die lokale Lösung in der FE-Lösung steckt.

5

Steifigkeitsänderungen und Reanalysis

Das Thema in diesem Kapitel sind Steifigkeitsänderungen in einzelnen Elementen und wir studieren, wie solche Änderungen durch ein Tragwerk propagieren, wie sie die Kräfteverteilung in dem Tragwerk verändern.

Eine Steifigkeitsänderung bedeutet eine neue Matrix $\boldsymbol{K}_c$ und eine neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ des Tragwerks, (c = changed),

$$\boldsymbol{K}_c \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,. \tag{5.1}$$

Wenn wir additiv denken, dann kann man das schreiben als

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.2}$$

wenn $\boldsymbol{\Delta K}$ die Änderung in der ursprünglichen Matrix $\boldsymbol{K}$ ist, und nun ist es nur noch ein kleiner Schritt zur Gleichung

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.3}$$

Der neue Vektor $\boldsymbol{u}_c$ ist also die Antwort am ursprünglichen System, wenn man den Vektor $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u}_c$ zur rechten Seite addiert[1]

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.4}$$

Diese Formulierung scheint zunächst kein großer Gewinn, aber es zeigt sich, dass $\boldsymbol{f}^+$ orthogonal zu allen Starrkörperbewegungen $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}$ ist und das impliziert, dass lokale Steifigkeitsänderungen oft rasch abklingen.

Wenn man den neuen Vektor additiv schreibt

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Delta u}\,, \tag{5.5}$$

sieht man, dass jede Steifigkeitsänderung eine kompensierende Bewegung $\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ auslöst und $\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+$ ist die Reaktion des ursprünglichen Tragwerks auf die zusätzlichen Knotenkräfte $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$.

[1] Im Englischen nennt man die Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$ am alten System *Reanalysis*

Das Problem ist natürlich, dass wir den Vektor $\boldsymbol{u}_c$, von dem der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ abhängt, nicht kennen, wenn man auch näherungsweise für $\boldsymbol{f}^+$ den Vektor $\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u}$ setzen könnte. Wir werden daneben noch andere Techniken vorstellen, um $\boldsymbol{u}_c$, zu berechnen, siehe Kapitel 5.30.2, aber an dieser Stelle sei betont, dass es uns nicht darum geht, den Computer zu schlagen, sondern es geht uns um Einsicht in die Effekte von Steifigkeitsänderungen.

Mathematisch kann man sich (5.4) so zurechtlegen: Um die Seilgleichung

$$-(H+\Delta H)u_c'' = p \tag{5.6}$$

zu lösen, kann man $-\Delta H\, u_c''$ auf die rechte Seite bringen,

$$-H\, u_c'' = p + \Delta H\, u_c'' \tag{5.7}$$

und die äquivalenten Knotenkräfte sind dann

$$\int_0^l \varphi_i\, p\, dx + \int_0^l \varphi_i\, \Delta H\, u_c''\, dx = f_i + f_i^+ . \tag{5.8}$$

Rechnen mit den alten Einflussfunktionen

Zurück zu $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Die neue Lösung $\boldsymbol{u}_c$ ist, wie die alte Lösung $\boldsymbol{u} = \sum_i f_i\, \boldsymbol{g}_i$, eine Entwicklung nach den Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen (= den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der **alten** (!) Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$)

$$\boldsymbol{u}_c = \sum_i f_i\, \boldsymbol{g}_i + \underset{\uparrow}{f_a^+}\, \boldsymbol{g}_a + \underset{\uparrow}{f_b^+}\, \boldsymbol{g}_b + \ldots = \boldsymbol{u} + \underset{\uparrow}{f_a^+}\, \boldsymbol{g}_a + \underset{\uparrow}{f_b^+}\, \boldsymbol{g}_b + \ldots \tag{5.9}$$

nur um **Zusatzgewichte** $f_a^+, f_b^+, \ldots$ ergänzt, die den geänderten Steifigkeiten k_{ab} korrespondieren.

Angenommen also die Steifigkeiten $k_{3,3}, k_{3,7}, k_{7,3}, k_{7,7}$ ändern sich, dann markieren zwei (zunächst unbekannte) Gewichte f_3^+ und f_7^+ den Unterschied zwischen neu und alt

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = f_3^+\, \boldsymbol{g}_3 + f_7^+\, \boldsymbol{g}_7 \quad \leftarrow \text{alte Spalten}\,. \tag{5.10}$$

Es kommt sozusagen nichts neues hinzu, das alte wird nur – mit altem – ergänzt. Wie die f_i^+ berechnet werden können, wird in Kapitel 5.30.2 erklärt.

Wem das merkwürdig vorkommt, sei daran erinnert, dass das im Grunde genau die Technik des **Kraftgrößenverfahrens** ist, das ja auch immer nur am statisch bestimmten Hauptsystem rechnet und alles, was dazu kommt über die $X_i\,(\equiv f_i^+)$ einbaut. Es stellt die Matrix

$$\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K} \tag{5.11}$$

nie auf, sondern berechnet alles mit der Matrix $\boldsymbol{K}$, die im übertragenen Sinn dem statisch bestimmten Hauptsystem entspricht.

Bemerkung 5.1. Wir lesen $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n]$ und $\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n]$. In Spalte $\boldsymbol{f}_i$ stehen die Kräfte, die nötig sind, um den FG $u_i = 1$ auszulenken, und die anderen $u_j = 0$ festzuhalten, und die Spalte $\boldsymbol{g}_i$ ist die Gleichgewichtslage im LF $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$. Die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ sind auch die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen u_i, denn $u_i = \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}$ (genauer: sind die Knotenwerte der Einflussfunktionen, $G_h(y, x_i) = \sum_j g_{ij} \varphi_j(y)$), siehe Seite 331.

Bemerkung 5.2. Bei einer Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ steht die Steifigkeit EA/l ‚oben' und bei der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ daher ‚unten', fängt sie mit l/EA an. Dem entspricht, dass bei den Einflussfunktionen, das sind ja die inversen Operatoren, die Steifigkeit, genauer das EA, im Nenner steht; das nur zur Erinnerung.

5.1 Parameteridentifikation

Wenn man an einer Feder mit einer Kraft f zieht und die Verlängerung u misst, kann man die Steifigkeit $k = f/u$ der Feder bestimmen. Unter Parameteridentifikation versteht man die Anpassung der Elemente k_{ij} einer Steifigkeitsmatrix an gemessene Daten, an Verschiebungsantworten. Mathematisch zählt das als (schwieriges) **inverses Problem**. Weil nun die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ die Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen sind, dreht sich alles um die Einflussfunktionen. Wie ändern sich die Systemantworten mit Korrekturen $k_{ij} \to k_{ij} + \Delta k_{ij}$? Wie muss man die k_{ij} ändern, um die Messdaten reproduzieren zu können? Wie sensitiv ist das Tragwerk gegenüber solchen Änderungen?

Das sind aber gerade die Fragen, die auch bei der Reanalysis eine große Rolle spielen, denn in Kapitel 5.19 ergibt sich, dass die Ableitung des Verschiebungsvektors nach einem Element k_{ij}

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j \, \boldsymbol{e}_i = -u_j \, \boldsymbol{g}_i \,, \tag{5.12}$$

gerade von der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}_i$ abhängt. In diesem Sinne hätte die Überschrift des Kapitels auch lauten können: *Steifigkeitsänderungen und Parameteridentifikation*.

5.2 Statik am Gesamtsystem

Bei der **Positionsstatik** wird jeder Träger, jede Decke, jede Stütze für sich betrachtet. Das ist mühsam, hat aber den unschätzbaren Vorteil, dass der Tragwerksplaner mitdenken muss und am Schluss, wenn er bei den Fundamenten angekommen ist, das Tragwerk versteht.

Die **Statik am Gesamtsystem** mit finiten Elemente – so bequem sie auch ist – gleicht dagegen eher einem Blindflug[2]. Und die komplexen Überlagerungsvorschriften, verschärfen noch das Problem. Auch dabei hilft der

[2] Aus einem Seminar: ‚Ich wusste nicht mehr wo die Kräfte hinlaufen.'

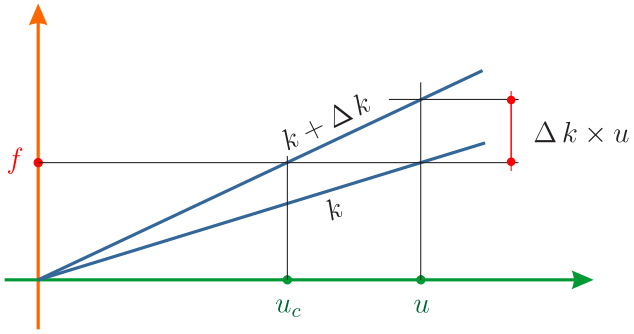


Bild 5.1. Steifigkeitsänderung in einer Feder. Die Steigung k, *the slope*, ist die bestimmende Größe bei der *sensitivity analysis*

Computer, aber der Preis für diese Erleichterung ist, dass der Aufsteller keine Kontrolle mehr über die Ergebnisse hat.

Unserer Meinung nach besteht hier dringender Handlungsbedarf: Wie verifiziert man FE-Berechnungen? Wie findet man Modellierungsfehler? Wie kann der Aufsteller sicher sein, dass die Ergebnisse ($\pm 5\%$) korrekt sind?

Ein Aspekt in diesem Themenkreis ist die Abhängigkeit der Lösung von den Steifigkeiten und von der Art der Modellierung eines Tragwerks, [134], [135]. Zur Untersuchung dieses Themas will dieses Kapitel einen Beitrag leisten.

5.3 Einleitung

Zur Einleitung betrachten wir eine Feder und ihr Federgesetz $k\,u = f$, siehe Bild 5.1. Die Reaktion der Feder auf eine Kraft $f = 1$ (das Dirac Delta) ist $G = 1/k$ und eine Änderung der Steifigkeit, $k + \Delta k$, führt zu einer geänderten Antwort $G_c = 1/(k + \Delta k)$. Übertragen auf eine beliebige Kraft f bedeutet das für die Verlängerung vorher, u, und nachher, u_c,

$$u = \frac{1}{k} f \qquad u_c = \frac{1}{k + \Delta k} f \,. \tag{5.13}$$

Eine Taylor-Entwicklung der geänderten Einflussfunktion

$$\frac{1}{k + \Delta k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \Delta k + \dots \tag{5.14}$$

macht deutlich, wie die Feder auf die Steifigkeitsänderung reagiert

$$u_c \simeq \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \frac{\Delta k}{k} \right] f = u - \frac{1}{k} \underbrace{\Delta k \cdot u}_{Kraft} \,. \tag{5.15}$$

Der Zuwachs an Steifigkeit, $k \to k + \Delta k$, führt dazu, dass das ursprüngliche u über das Ziel hinaus schießt, die Federkraft $(k + \Delta k)\, u = f + \Delta k \cdot u$ zu groß

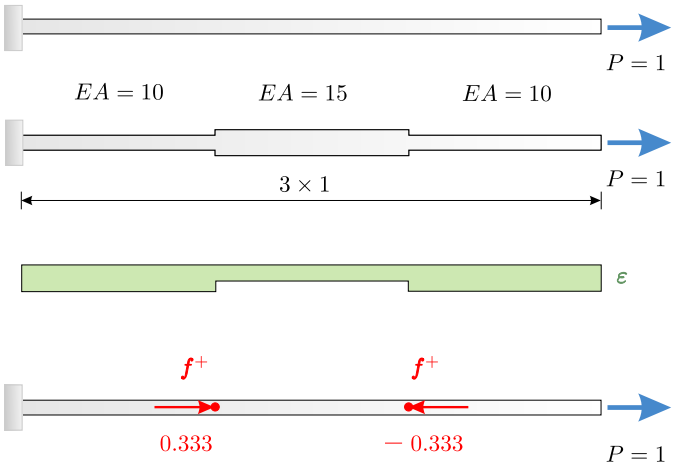


Bild 5.2. Modellierung der Steifigkeitsänderung in einem Stab mit Hilfe von Zusatzkräften $\boldsymbol{f}^+$

wird, und um dieses zuviel wieder zu beseitigen, muss eine entgegengesetzte Bewegung $\Delta u \simeq -\Delta k \cdot u/k$ stattfinden.

Bei Steifigkeitsmatrizen lautet die Taylor-Entwicklung, [46],

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})^{-1} = \boldsymbol{K}^{-1} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{K}^{-1} + \dots \tag{5.16}$$

und die Analogie zwischen (5.15) und

$$\boldsymbol{u}_c = (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})^{-1}\boldsymbol{f} \simeq \boldsymbol{u} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u} \tag{5.17}$$

ist evident. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}\,, \tag{5.18}$$

dann liegt sie (fast) in der Form vor, wie wir sie in diesem Kapitel behandeln. Nur dass wir keine Taylor-Entwicklung benutzen, sondern das ganze exakt angehen, d.h. wir ersetzen $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ durch das exakte $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c =: \boldsymbol{f}^+$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.19}$$

Die Näherung (5.17) bedeutet $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ und das kann man, wenn man es auf einen Balken anwendet, $EI \to EI + \Delta EI$, und in integraler Form schreibt

$$w_c(x) - w(x) = -\int_0^l \underbrace{G_0(y,x)}_{\boldsymbol{K}^{-1}} \underbrace{\Delta EI\,\frac{d^4}{dy^4}}_{\boldsymbol{\Delta K}} \underbrace{\int_0^l G_0(y,z)\,p(z)\,dz}_{\boldsymbol{u}}\,dy \tag{5.20}$$

sogar verstehen,

$$w_c(x) - w(x) = -\int_0^l G_0(y,x)\,\frac{\Delta EI}{EI} p(y)\,dy\,, \tag{5.21}$$

denn es bedeutet, dass eine Abnahme, $\Delta EI < 0$, mit Blick auf w einer Zunahme in der Belastung p gleichkommt[3].

Beispiel 5.1. Die drei Elemente des Stabs in Bild 5.2 hatten zunächst alle dieselbe Längssteifigkeit $EA = 10$. Dann wurde der mittlere Stab auf $EA = 15$ kN verstärkt. Es ist also

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} 25 & -15 & 0 \\ -15 & 25 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

und $\boldsymbol{f} = \{0, 0, 1\}^T$. Die Verschiebungen vorher und nachher und der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ lauten

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0.100 \\ 0.200 \\ 0.300 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 0.100 \\ 0.166 \\ 0.266 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 0.333 \\ -0.333 \\ 0.0 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Mit Hilfe des Vektors $\boldsymbol{f}^+$ kann man den neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$ mit der alten Matrix berechnen, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$.

Praktisch setzt man natürlich meist für den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ den alten Vektor $\boldsymbol{u}$ und erhält so näherungsweise

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_c &= (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c) \\ &\simeq \boldsymbol{u} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \{0.100, 0.1500, 0.2500\}^T. \end{aligned} \tag{5.24}$$

5.4 Strategie

Diese Ergebnisse nehmen wir nun zum Anlass, unsere Strategie wie folgt zu formulieren: Wir ändern nicht die Steifigkeitsmatrix, sondern die rechte Seite. Wir suchen also eine Ergänzung $\boldsymbol{f}^+$ zu dem Knotenkraftvektor $\boldsymbol{f}$ so, dass $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$ an dem System $\boldsymbol{K}$ dieselben Knotenverschiebungen verursacht, wie $\boldsymbol{f}$ an dem System $\boldsymbol{K}_c$.

Die Schwierigkeit dabei ist natürlich, dass der Vektor $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ von dem neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$ abhängt, den wir ja nicht kennen. (Näherungsweise kann man für $\boldsymbol{u}_c$ den Vektor $\boldsymbol{u}$ setzen). Aber es geht uns nicht darum, eine neue

[3] Es ist $EI\,d^4/dy^4 G_0 = \delta_0$ und wenn man EI durch ΔEI ersetzt, dann ist das $\Delta EI/EI\,\delta_0$ und damit ergibt die Überlagerung $(\Delta EI/EI\,\delta_0, p) = \Delta EI/EI \cdot p(y)$. Ferner ist $\boldsymbol{\Delta K u} = \delta W_i = \delta W_e$ und in δW_e steht der Operator $\Delta EI\,d^4/dy^4$

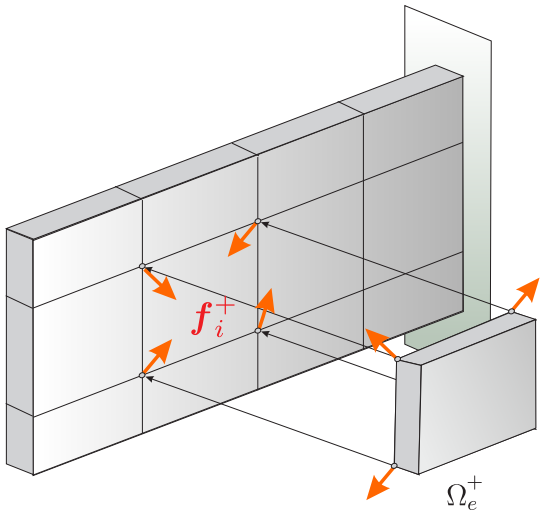


Bild 5.3. Eine Steifigkeitsänderung $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\Delta K}$ bedeutet, dass man ein Zusatzelement Ω_e^+ mit der Steifigkeit $\boldsymbol{\Delta K}$ an das Tragwerk anheftet, [92]

Rechenmethode zur Nachverfolgung von Steifigkeitsänderungen in die Praxis einzuführen, sondern primär geht es um das statische Verständnis.

Wir werden sehen, dass alle Steifigkeitsänderungen verstanden werden können, als die Addition von solchen ***Gleichgewichtskräften*** $\boldsymbol{f}^+$.

Das bedeutet: wenn $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}$ eine Starrkörperbewegung des Tragwerks ist, also eine Translation $\boldsymbol{a}$ plus einer möglichen Drehung um eine Achse $\boldsymbol{b}$, dann ist die Arbeit der Zusatzkräfte $\boldsymbol{f}^+$ null,

$$\boldsymbol{f}^{+T}\boldsymbol{u}_0 = 0\,. \tag{5.25}$$

Gleichgewichtskräfte wie der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ leisten also keine Arbeit auf Starrkörperbewegungen. Das erlaubt den folgenden wichtigen Schluss:

Steifigkeitsänderungen sind in ihren Auswirkungen lokal begrenzt, weil sich die Wirkungen der Gleichgewichtskräfte $\boldsymbol{f}^+$ in der Ferne aufheben.

5.5 Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten

Die Änderung der Steifigkeit in einem Element kann man so deuten, dass man vor das ursprüngliche Element ein zweites Element legt, dessen Steifigkeit gerade so groß ist, dass die beiden Elemente zusammen die angezielte Steifigkeit haben, siehe Bild 5.3.

Das zusätzliche Element muss nun durch **Koppelkräfte** mit dem ursprünglichen Tragwerk synchron geschaltet werden, und die dazu nötigen Koppelkräfte sind gerade die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$. Das macht auch verständlich, warum die

Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ Gleichgewichtskräfte sind, denn wären sie das nicht, dann würde das vorgeschaltete Element wegfliegen.

Dies gilt für eine Zu- wie Abnahme der Steifigkeit. Wenn die Steifigkeit des Elementes größer wird, dann haben die Koppelkräfte $\boldsymbol{f}^+$ meistens die Tendenz, die Verformung des Elementes zu behindern, sie steifen sozusagen das Element aus, sie drücken nach außen.

Umgekehrt, wenn die Steifigkeit in dem Element abnimmt, dann erhöhen die Koppelkräfte $\boldsymbol{f}^+$ noch die Verformungen des Elementes, sie wirken wie zusätzliche Lasten in den Knoten des Elementes, siehe Bild 5.4, sie ziehen das Element zusammen.

5.6 Dipole und Monopole

Zwei gegengleiche Kräfte $f_i^+ = \pm 1/h$, die über alle Grenzen wachsen, wenn ihr Abstand h gegen null geht, bilden ein Dipol.

Bleiben die beiden gegengleichen Kräfte hingegen auch im Grenzfall $h = 0$ endlich, dann nennen wir dies einen ***Pseudo-Dipol***. Das Proton (+) und das Elektron (-) in einem Wasserstoffatom bilden einen solchen Pseudo-Dipol, denn der Abstand der beiden entgegengesetzten Elementarladungen ist so klein, dass sich ihre Wirkungen auf eine Punktladung außerhalb des Atoms praktisch aufheben.

In ähnlicher Weise stellen die Kräfte f_i^+ Pseudo-Dipole dar, d.h. zu jeder aufwärts gerichteten Kraft f_i^+ gibt es eine entgegengesetzt wirkende Kraft f_j^+, so dass die beiden Kräfte f^+ aus der Ferne betrachtet einem Pseudo-Dipol gleichen, siehe Bild 5.5.

Die Wirkung der Kräfte f_i^+ auf irgendeinen Punkt x des Tragwerks hängt davon ab, wie groß die **Laufzeitunterschiede** von dem Punkt x zu der Kraft $+f_i^+$ und der Gegenkraft $-f_i^+$ sind. Wenn zwei Kräfte $\pm f_i^+$ fast deckungsgleich sind, weil das Element Ω_e sehr klein ist, dann heben sich ihre Wirkungen nahezu auf, weil die Einflussfunktion sich auf dem winzigen Element kaum ändert, $g' \simeq 0$.

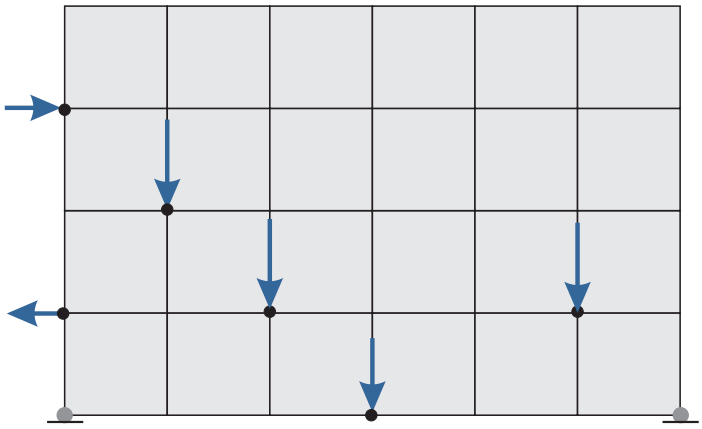
Betrachten wir ein einfaches Beispiel, ein Stab der aus einer Kette von linearen Stabelementen besteht, die in den Knoten von Knotenkräften f_i belastet werden, LF $\boldsymbol{f}$. Zunächst haben alle Elemente dieselbe Steifigkeit EA/ℓ_e, (es sei $\ell_e = 1$), aber dann ändert sich in dem Element 7, die Steifigkeit, $EA_c = EA + \Delta EA$. Wie ändert sich dadurch die Normalkraft in einem abliegenden Element, dem Element 3?

Hat die Einflussfunktion für die Normalkraft im Element 3

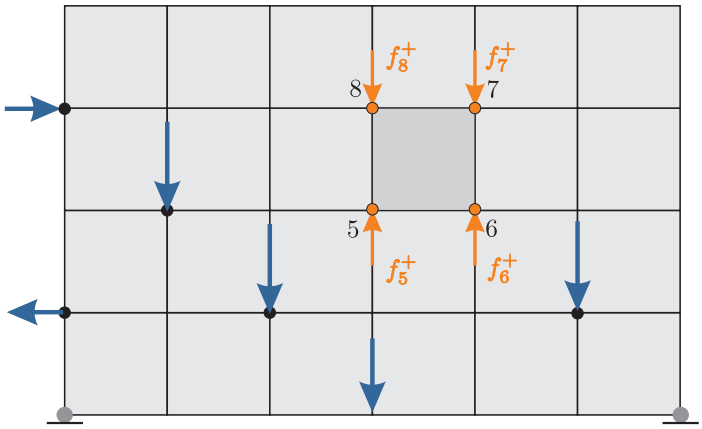
$$G(y,x) = \sum_j g_i(x)\,\varphi_i(y) \tag{5.26}$$

die Knotenwerte $g_i(x)$, dann beträgt die Normalkraft im Element 3

$$N(x) = \sum_i g_i(x) f_i\,. \tag{5.27}$$



$$a \qquad \boldsymbol{u} = \sum_i f_i \, \boldsymbol{g}_i$$



$$b \qquad \boldsymbol{u}_c = \sum_i f_i \, \boldsymbol{g}_i + f_5^+ \boldsymbol{g}_5 + f_6^+ \boldsymbol{g}_6 + f_7^+ \boldsymbol{g}_7 + f_8^+ \boldsymbol{g}_8$$

$\boldsymbol{u}$ unverändert — neu

Bild 5.4. Symbolische Darstellung – alt und neu. **a)** Die FE-Lösung $\boldsymbol{u}$ ist eine Entwicklung nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ (also den Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen). **b)** Das gilt auch für die neue Lösung $\boldsymbol{u}_c$ nur dass manche Spalten $\boldsymbol{g}_i$ zweimal vorkommen und zwar dann wenn es eine Kraft f_i^+ gibt. Wichtig ist zu sehen, dass die f_i^+ lastfallabhängig sind, die f_i aber nicht. Um die f_i^+ zu bestimmen, muss man theoretisch den Unterschied $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ kennen, deswegen die Abhängigkeit vom Lastfall

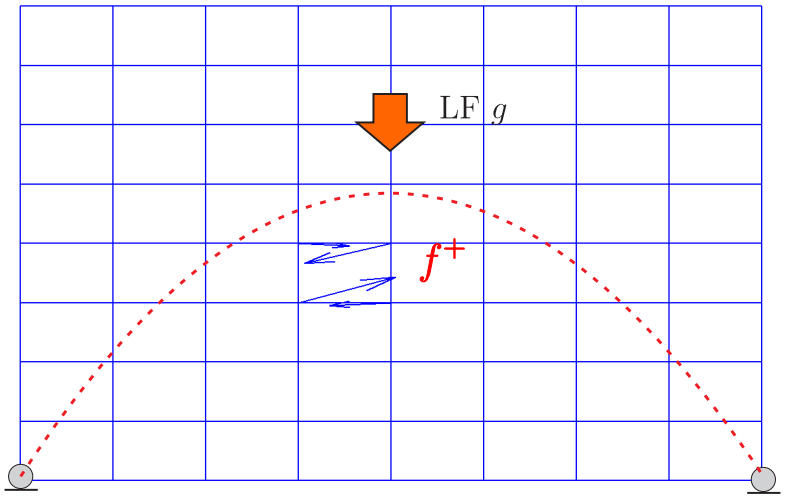


Bild 5.5. Steifigkeitsänderung in einem Element und die zugehörigen Koppelkräfte $\boldsymbol{f}_i^+$. Diese Kräfte folgen den Hauptspannungsrichtungen (- - -) und es sind Gleichgewichtskräfte, die Pseudo-Dipolen gleichen (MATLAB)

Die Steifigkeitsänderung im Element 7 führt im LF $\boldsymbol{f}$ zu Zusatzkräften f_i^+ und f_{i+1}^+ in den Knoten x_i und x_{i+1} des Elements 7, und der Unterschied in der Normalkraft im Element 3 beträgt daher (Rechnung am Element 7)

$$N_c(x) - N(x) = f_i^+ g_i - f_{i+1}^+ g_{i+1} = f_i^+ \cdot (g_i - g_{i+1}) \simeq f_i^+ \cdot G' \cdot l_e \,. \quad (5.28)$$

Die Steifigkeitsänderung wird also nur dann merkbar sein, wenn die Einflussfunktion in dem geänderten Element 7 halbwegs merkbar ansteigt oder fällt, $G' \gg 0$. Die Wirkung der $\pm f^+$ lebt also von der Differenz zwischen Elementanfang und Elementende, also kurz gesagt von G'.

Die Kräftepaare $\pm f_i^+$ registrieren die Unterschiede in den Einflussfunktionen (z.B.) am Elementanfang und Elementende, sie ‚differenzieren' die Einflussfunktionen.

Bei einem Balken sind die $\pm f_i^+$ Kräfte und Momente, die sinngemäß auf die Unterschiede in der ersten bzw. der zweiten Ableitung der Einflussfunktion an den Balkenenden reagieren. Die Momente f_i^+ liefern den Beitrag

$$J(u_c) - J(u) = f_i^+ g_i' - f_{i+1}^+ g_{i+1}' = f_i^+ \cdot (g_i' - g_{i+1}') \simeq f_i^+ \cdot G'' \cdot l_e \quad (5.29)$$

und der Beitrag der Kräfte f_i^+ ist entsprechend zu nehmen, $f_i^+ \cdot G' \cdot l_e$, so wie oben im Fall der Normalkraft.

5.7 Weggrößen und Kraftgrößen

Betrachten wir nun die Änderungen und die Rolle, die der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ dabei spielt, etwas systematischer. Es sei zunächst $J(u)$ eine Weggröße, also etwa $u(x)$ oder $w(x)$. Die Ergebnisse vor und nach der Steifigkeitsänderung lauten

$$J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j} \tag{5.30}$$

bzw.

$$J(u_c) = \boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_c^T \boldsymbol{j}_c \,. \tag{5.31}$$

Nun ist kein Unterschied zwischen den beiden Vektoren $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{j}_c$, weil in die Definition der Weggrößen die Steifigkeiten nicht eingehen.

Ist z.B. $J(u) = u(x)$ die Verschiebung in einem Punkt x, dann ist

$$\boldsymbol{j} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}^T = \boldsymbol{j}_c \tag{5.32}$$

und so folgt

$$\begin{aligned} J(u_c) - J(u) &= \boldsymbol{j}^T(\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \\ &= \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ \,. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Bei Kraftgrößen ist das unter Umständen anders. Wenn der Aufpunkt x auf dem Element liegt, dessen Steifigkeit sich ändert, $EA \to EA_c$, dann sind, es sei $J(u) = EA\, u'(x)$ eine Normalkraft, die Vektoren $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{j} = \{EA\, \varphi_1'(x), EA\, \varphi_2'(x), \ldots, EA\, \varphi_n'(x)\}^T \tag{5.34}$$

und

$$\boldsymbol{j}_c = \{EA_c\, \varphi_1'(x), EA_c\, \varphi_2'(x), \ldots, EA_c\, \varphi_n'(x)\}^T \tag{5.35}$$

nicht gleich[4], so dass nun das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} J(u_c) - J(u) &= \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f} \\ &= (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ \,. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Auf der rechten Seite stehen die **Korrekturterme**, um von $J(u)$ auf $J(u_c)$ zu kommen, wobei man die erste Korrektur, um den Fehler in der Steifigkeit, EA statt EA_c, zu beheben, an $\boldsymbol{u}$ vornehmen muss, und der zweite Term ist der Einfluss der Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ auf die Schnittgrößen. Wenn der Punkt x auf einem Element liegt, dessen Steifigkeit sich nicht ändert, dann ist wegen $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j}$ die Formel dieselbe, wie bei den Weggrößen

[4] Die meisten $\varphi_i(x)$ sind auf dem Element mit dem Aufpunkt x null, so dass die Vektoren $\boldsymbol{j}$ bzw. $\boldsymbol{j}_c$ ziemlich leer sind.

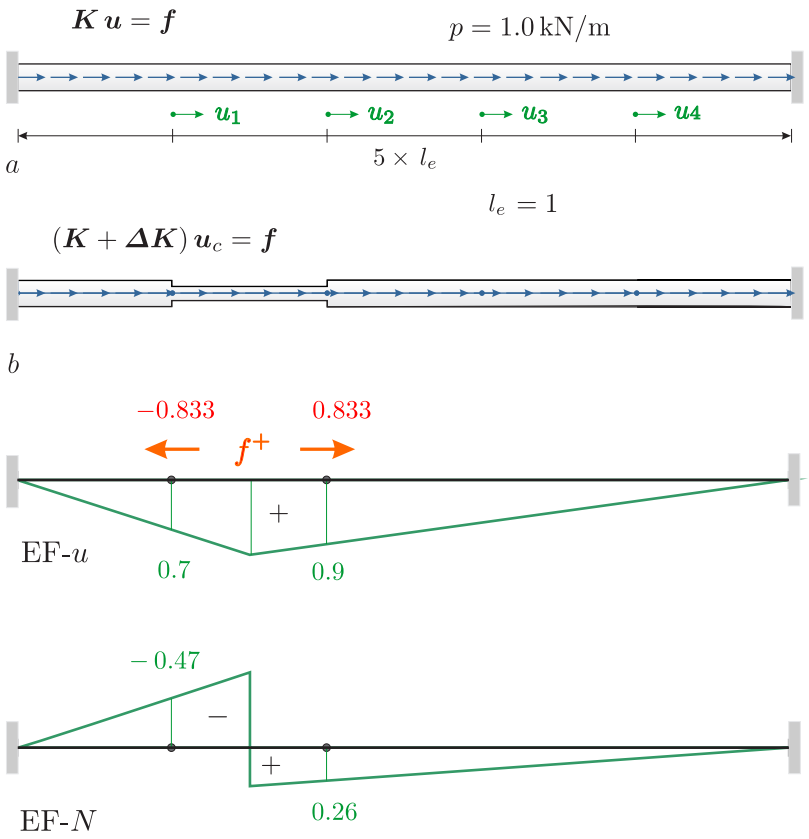


Bild 5.6. Steifigkeitsänderung in einem Stab unter einer Gleichstreckenlast, die f_i^+ sind antimetrisch, die EF-u ist symmetrisch und die EF-N ist antimetrisch. Man beachte aber, dass die genaue Änderung $N_c - N$ nicht einfach die f_i^+ mal den Knotenverschiebungen der Einflussfunktion EF-N ist, siehe (5.36)

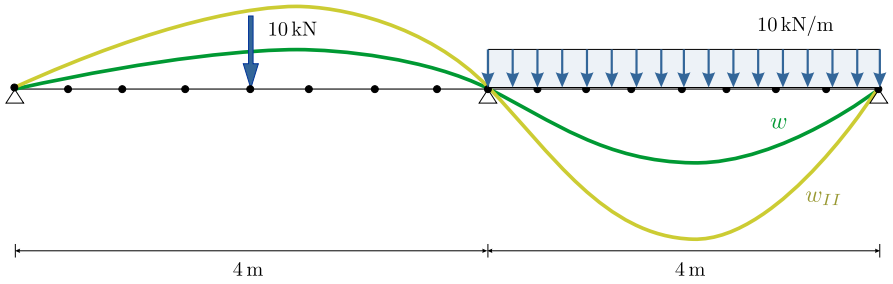


Bild 5.7. Biegelinie eines Durchlaufträgers, ungerissen und im Zustand II (BE-FRAMES)

$$J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ . \tag{5.37}$$

Bei dem Stab in Bild 5.6 halbiert sich im zweiten Element die Längssteifigkeit von $EA = 1$ auf $EA_c = 0.5$. Die Belastung ist eine Gleichlast von 1 kN/m und die Elementlänge beträgt $l_e = 1.0$ m. Die Matrizen lauten

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

und die Vektoren haben die Gestalt

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 1.833 \\ 3.500 \\ 3.333 \\ 2.167 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{f}^+ = \begin{bmatrix} -0.833 \\ 0.833 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} . \tag{5.39}$$

Es ist $\boldsymbol{j}_c = 0.5 \cdot \boldsymbol{j}$ wegen $EA_c = 0.5\, EA$.

Die Differenz der Normalkräfte in der Mitte des zweiten Elements ergibt sich somit zu

$$N_c - N = J(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) = -0.5 \cdot \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} + 0.5 \cdot \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = -0.1665 . \tag{5.40}$$

In der Praxis berechnet man $N_c - N$ natürlich direkt aus $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$. Weil die Elemente linear sind ist $N_c = 0.5 \cdot (3.500 - 1.833) = 0.8335$ und $N = 1.0 \cdot (3.0 - 2.0) = 1.0$. Es ging hier primär um den Nachweis, dass die obige Formel (5.36) das richtige Ergebnis liefert.

5.8 Zustand II

Mit den Kräften f^+ kann man auch näherungsweise gerissene Zugzonen in einer Platte oder einem Durchlaufträger berücksichtigen, siehe Bild 5.7.

Der Verlauf der Biegemomente M bestimmt die auftretenden Biegespannungen $\sigma = M/W$. In allen Elementen, in denen eine frei definierbare Zugspannung σ_{max} überschritten wird, kann man die Steifigkeit EI um einen gewissen Betrag $EI - \Delta EI$ herabsetzen, also mit einer reduzierten Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{\Delta K}$ rechnen.

Technisch ändert man die Matrix $\boldsymbol{K}$ nicht, sondern man berechnet an jedem betroffenen Element (e) Knotenkräfte $\boldsymbol{f}_e^+ = -\boldsymbol{\Delta K}_e \boldsymbol{u}$, die man zu einem Vektor $\boldsymbol{f}^+$ addiert, und dann löst man das System neu

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+, \tag{5.41}$$

oder multipliziert einfach $\boldsymbol{K}^{-1}$ (sofern vorhanden) mit der neuen rechten Seite $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Das Ergebnis ist eine Näherung, weil man die Vektoren $\boldsymbol{f}_e^+$ eigentlich mit dem Vektor $\boldsymbol{u}_c$ berechnen müsste.

Solche Übergänge in den Zustand II verlangen eine Unterteilung der Felder in mehrere Elemente, damit man in der Nachlaufrechnung die Steifigkeitsänderung möglichst genau nachfahren kann.

5.9 Symmetrie und Antimetrie

Die Einflussfunktionen für Verschiebungen bei einem Stab (Scheibe) werden durch **Monopole** erzeugt und die Einflussfunktionen für Normalkräfte (Spannungen) durch **Dipole**. Nun sind ja die f_i^+ antimetrisch und somit sollten die Effekte von Steifigkeitsänderungen bei den Spannungen (*antimetrisch* $\times$ *antimetrisch*) größer sein als bei den Verschiebungen (*antimetrisch* $\times$ *symmetrisch*). Mit

$$\frac{N_c - N}{N} = \frac{0.8335 - 1.0}{1.0} = -0.1665 \qquad \frac{u_c - u}{u} = \frac{2.667 - 2.5}{2.5} = 0.0666 \tag{5.42}$$

bestätigt sich das bei diesem Beispiel.

Bei statisch bestimmten Systemen ist es aber gerade umgekehrt: Die Verformungen ändern sich, aber die Kräfte nicht. Der Grund ist, dass die f_i^+ Gleichgewichtskräfte sind, die auf den stückweise linearen Einflussfunktionen (für N, M, V) in der Summe null Arbeit leisten. Die Einflussfunktionen für die Verformungen sind jedoch ‚krumm' zu denen die f_i^+ im energetischen Sinne nicht orthogonal sind. Deswegen ändern sich die Verformungen.

Steifigkeitsänderungen beeinflussen die Verformungen, aber nicht die Schnittkräfte in einem statisch bestimmten Tragwerk.

5.10 Orthogonalität

Sehen wir einmal von dem Fall einer Steifigkeitsänderung direkt im Aufpunkt ab, dann stellt sich eine Änderung in einem Funktional (***Focus auf einen Punkt***) als ein Skalarprodukt über die N Knoten

$$J(e) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{f}_i^+ \tag{5.43}$$

dar, zur Notation siehe (3.305). Es ist anschaulich klar, dass die Kräfte $\boldsymbol{f}_i^+$ aus einer Steifigkeitsänderung den Richtungen der Hauptspannungen folgen. Man reduziere in Gedanken die Hauptspannungen in einem Element auf zwei orthogonale Pfeile $\boldsymbol{P}_I$ und $\boldsymbol{P}_{II}$. Die äquivalenten Eckkräfte $\boldsymbol{f}_i^+$ aus einer Änderung $E \to E + \Delta E$ sind näherungsweise die virtuellen Arbeiten der Kraft $\boldsymbol{P}_\Delta = \Delta E/E \cdot (\boldsymbol{P}_I + \boldsymbol{P}_{II})$ auf den Wegen $\boldsymbol{\varphi}_i$ der Ecken. Zwei Plots bestimmen also praktisch die Größe einer Änderung

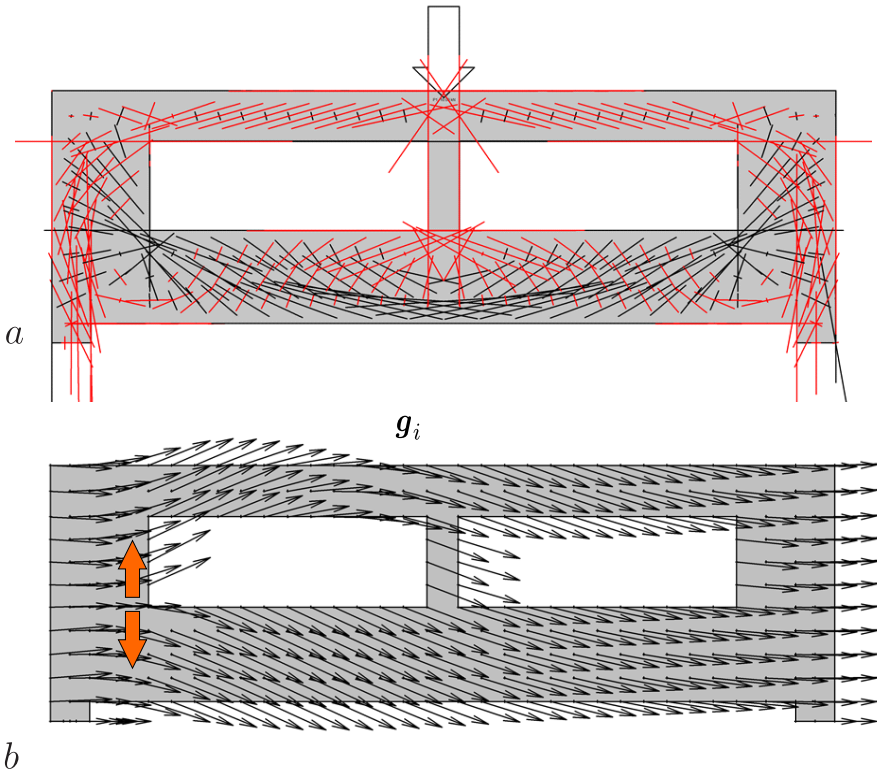


Bild 5.8. Wandscheibe **a)** Hauptspannungen aus zentrischer Druckkraft, **b)** Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} in der Ecke. Dort, wo die Richtungen der Pfeile $\boldsymbol{g}_i$ und der Hauptspannungen gleich gerichtet sind, haben Steifigkeitsänderungen, bei denen ja Kräfte $\boldsymbol{f}_i^+$ in Richtung der Hauptspannungen entstehen, den größten Einfluss auf die Spannung in der Ecke (BE-SCHEIBE)

$$J(e) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ = \text{Sensitivitätsplot} \times \text{Hauptspannungen}.$$

Der Sensitivitätsplot der Einflussfunktion zeigt die Richtung und Größe der $\boldsymbol{g}_i$ und der Plot der Hauptspannungen zeigt die Richtung der Kräfte $\boldsymbol{f}_i^+$, siehe Bild 5.8, wenn die Steifigkeit eines Elements geändert wird. Die Größe der $\boldsymbol{f}_i^+$, die im übrigen immer eine Gleichgewichtsgruppe bilden, hängt von der Größe des Elements ab und ihr Effekt davon, wie stark sich die Einflussfunktion im Element ändert, also dem Gradienten der Einflussfunktion; der steckt in der Differenz der $\boldsymbol{g}_i$ benachbarter Knoten.

Bei Platten gibt es Knotenkräfte und Knotenomente und dazu konjugiert Durchbiegungen und Verdrehungen. Dann braucht man also 2×2 Plots. Je ein Plot mit den Knotenkräften f_i^+ und Knotenmomenten f_i^+ und je ein Plot mit den Durchbiegungen $w(\boldsymbol{x}_i)$ bzw. den Verdrehungen $w(\boldsymbol{x}_i)_{,x}$ und $w(\boldsymbol{x}_i)_{,y}$

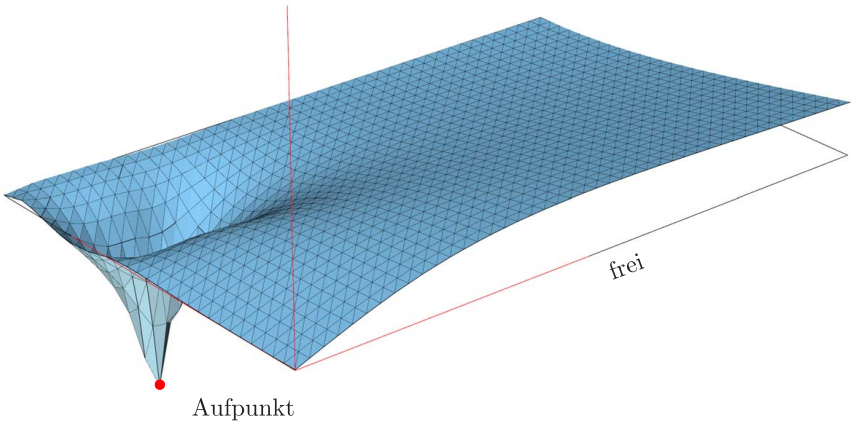


Bild 5.9. Einflussfläche für das Moment m_{yy} einer zweiseitig gelagerten Decke. Die lange Seite ist eingespannt, die kurze gelenkig gelagert. Im rechten Teil verläuft die Fläche nahezu linear, so dass die f_i^+ (Momente und Knotenkräfte) aus Steifigkeitsänderungen in diesem Teil einen geringen Einfluss auf das Moment m_{yy} im Aufpunkt haben sollten (BE-PLATTE)

der Knoten. Weil die f_i^+ Gleichgewichtsgruppen bilden, ist ihr Einfluss immer dann null, wenn die Einflussfläche im Bereich der f_i^+ eine schiefe Ebene ist wie in Bild 5.9.

5.11 Das Abklingen der Effekte

Je weiter man sich vom Aufpunkt entfernt, um so ‚linearer' wird die Einflussfunktion, siehe Bild 5.10, um so mehr dominieren die linearen Anteile in den Einflussfunktionen, d.h. der Vektor $\boldsymbol{g}$ der Knotenverschiebungen gleicht mit wachsendem Abstand mehr und mehr einem Vektor $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}$ und das bedeutet, weil der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ orthogonal zu solchen Vektoren ist, dass der Einfluss der Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ mit wachsendem Abstand vom Aufpunkt gegen null tendiert

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ \simeq (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b})^T \boldsymbol{f}^+ = 0\,. \tag{5.44}$$

Dies ist der Grund, warum es möglich ist, mit gemittelten Materialparametern genaue Ergebnisse zu erhalten.

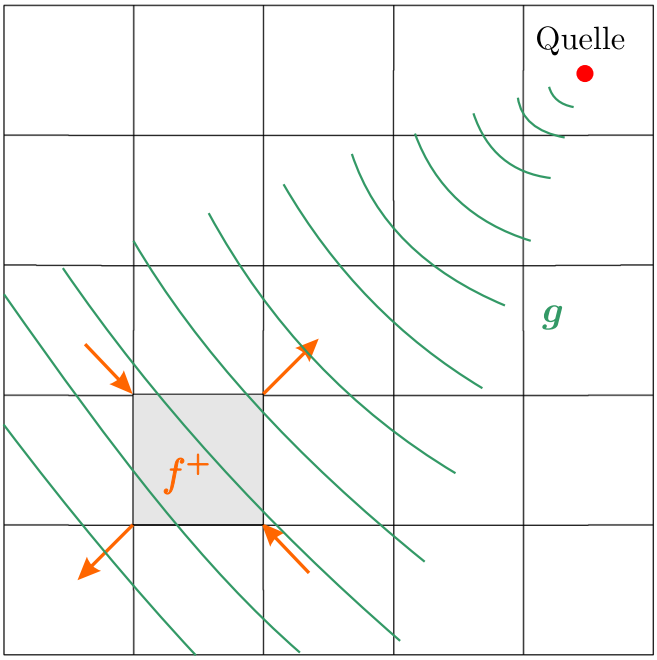


Bild 5.10. Nahezu lineares Feld $\boldsymbol{g}$ (Start oben rechts) triff auf Gleichgewichts-Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ unten links und so ist, wegen $\boldsymbol{f}^+ \perp \boldsymbol{g}$, die Wirkung gering

Wenn $J(u)$ eine Kraftgröße ist und der Aufpunkt auf dem betroffenen Element liegt, dann ist, wie oben gezeigt, die Formel um die Korrektur $EA_c - EA$ auf dem Element zu erweitern

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \underbrace{(\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u}}_{Korrektur} + \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ . \tag{5.45}$$

Die erste Korrektur ist rein lokal, geschieht nur im Aufpunkt, während der zweite Term den Einfluss der Kräfte f_i^+ erfasst, deren Effekte aber mit der Entfernung relativ rasch abklingen.

5.12 Die Bedeutung für die Praxis

Die Bedeutung dieser Ergebnisse für die Praxis liegt darin, dass sie erklären, warum ***Homogenisierungsmethoden*** erfolgreich sind.

Beton setzt sich aus den unterschiedlichsten Kiessorten und Zementstein zusammen. Jedes Zuschlagskorn hat ja einen anderen Elastizitätsmodul und daher müssten wir eigentlich jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes finites Ele-

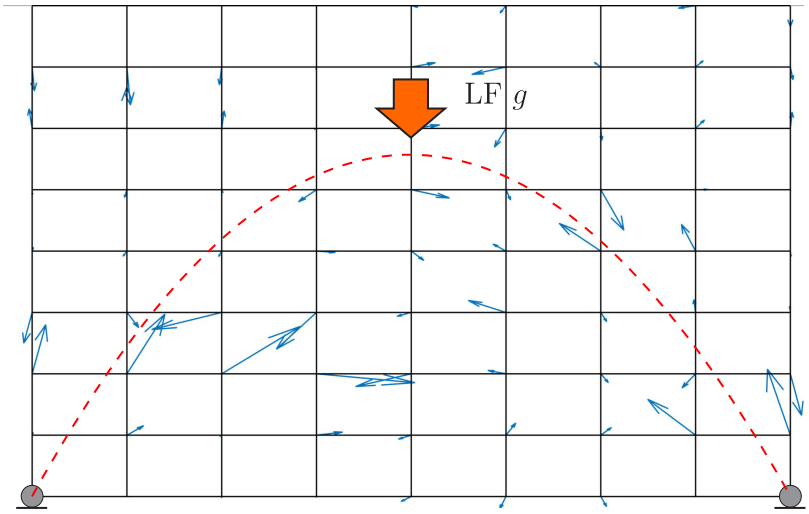


Bild 5.11. Eigengewicht und Kräfte f_i^+. Die Scheibe wurde erst mit einem einheitlichen E-Modul $E = 1$ berechnet und dann wurde der E-Modul in den Elementen zufällig, $0.5 < E_i < 1.5$, variiert, und es wurden die Kräfte f_i^+ berechnet. Diese Kräfte f_i^+ plus den Kräften f_i aus dem Lastfall Eigengewicht erzeugen in dem Modell $\boldsymbol{K}$ den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}_c$ der Scheibe, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Es ist derselbe Vektor $\boldsymbol{u}_c$ wie in dem Modell $\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ wobei die Matrix $\boldsymbol{K}_c$ auf den zufällig gestreuten Werten E_i beruht (MATLAB™)

ment modellieren. Stattdessen rechnen wir aber mit einem gemittelten Elastizitätsmodul und erhalten durchaus glaubhafte Ergebnisse.

Dies dürfte wesentlich daran liegen, dass die Knotenkräfte f_i^+ auf der Hülle des Zuschlagskorns, mit denen wir ja die Abweichungen des Elastizitätsmoduls vom Mittelwert korrigieren, Gleichgewichtskräfte sind, die nahe beieinanderliegen, und ihre Fernwirkungen daher gegen null tendieren.

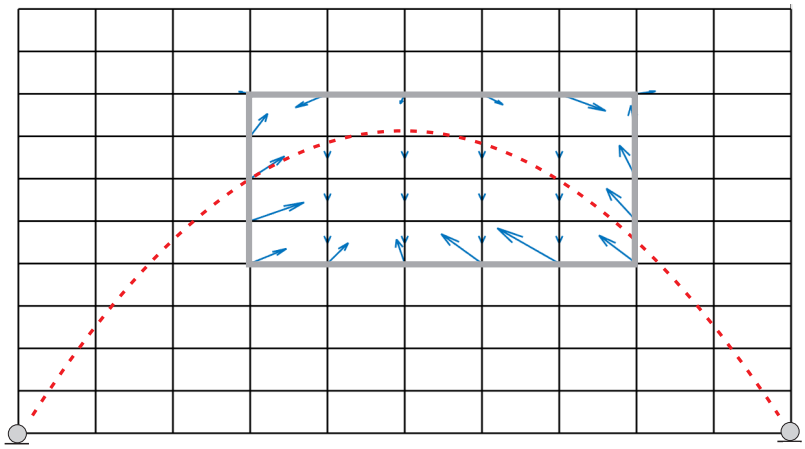
Eine Scheibe Ω bestehe z.Bsp. aus einer Reihe von unterschiedlichen Elementen, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_n$, die alle einen eigenen E-Modul E_i aufweisen, der um einen Betrag $\Delta E_i = E - E_i$ von dem Mittelwert E abweicht, siehe Bild 5.11. Der exakte Knotenverschiebungsvektor $\boldsymbol{u}_c$ wäre daher die Lösung des Systems

$$\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.46}$$

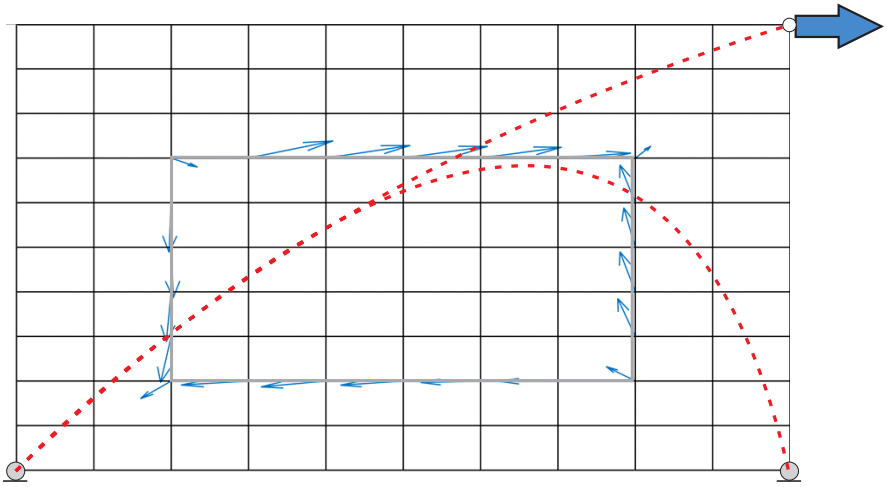
wobei die Matrix $\boldsymbol{K}_c$ sich aus den unterschiedlichen Elementmatrizen $\boldsymbol{K}_e(E_i)$ zusammensetzt. Wenn man hingegen mit einem einheitlichen E-Modul rechnet, also einer vereinfachten Matrix $\boldsymbol{K}$,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{5.47}$$

dann ist der Fehler in einer Verschiebung

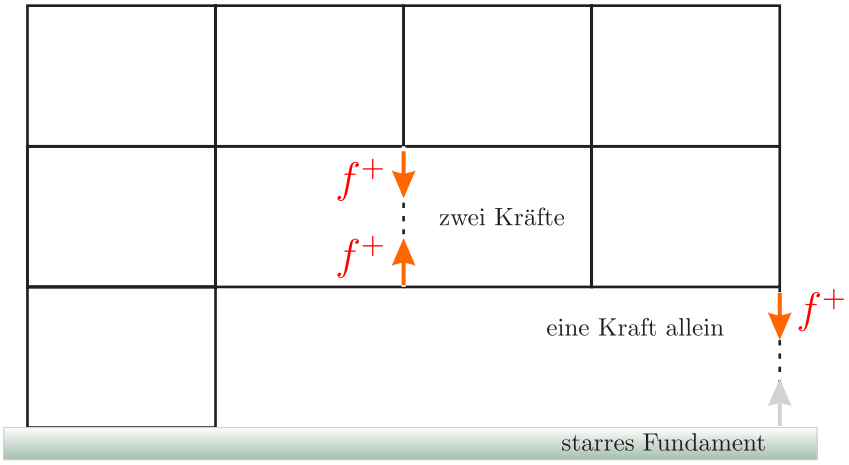


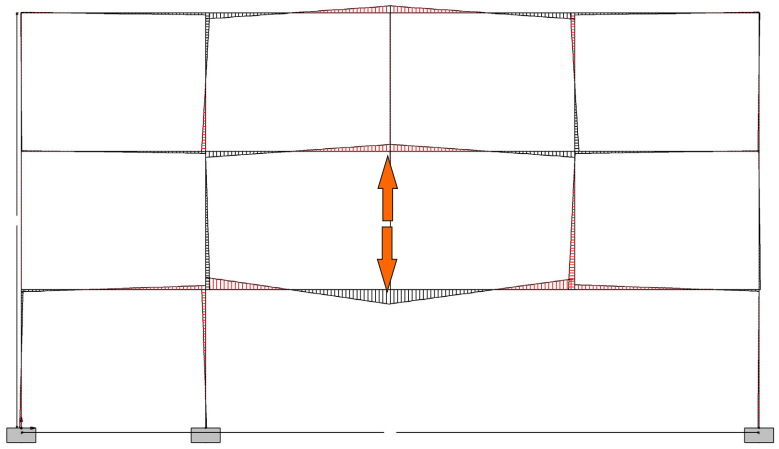
a



b

Bild 5.12. Zwei Wandscheiben **a)** unter Eigengewicht und **b)** mit Eckkraft, in den Elementen mit den Knotenkräften f_i^+ wurde der E-Modul um 90 % verringert. Im Grunde verhalten sich die geschwächten Bereiche wie Öffnungen. Typisch ist, dass die Kräfte f_i^+ auf den Rand konzentriert sind, im LF g ziehen sie die ‚Öffnung' zusammen. Die Analogie ist naheliegend: In einem Stück Blech, das man zur Verstärkung mit Heftnähten auf eine Stahlwand schweißt, dürften dieselben Kräfte auftreten, nur dass sie kontinuierlich über den geschweißten Rand verteilt sind und die umgekehrte Richtung haben, siehe Kapitel 5.38. Im LF Eckkraft ziehen die f_i^+ die Scheibe zur Ecke hin, erhöhen sie die Schiefstellung der ‚Öffnung'. Man beachte auch, dass im zweiten Lastfall keine f_i^+ im Innern auftreten, weil es keine Flächenlasten gibt. Im ersten Lastfall treten sie auf, sind aber klein im Verhältnis zu den Randkräften (MATLAB™)





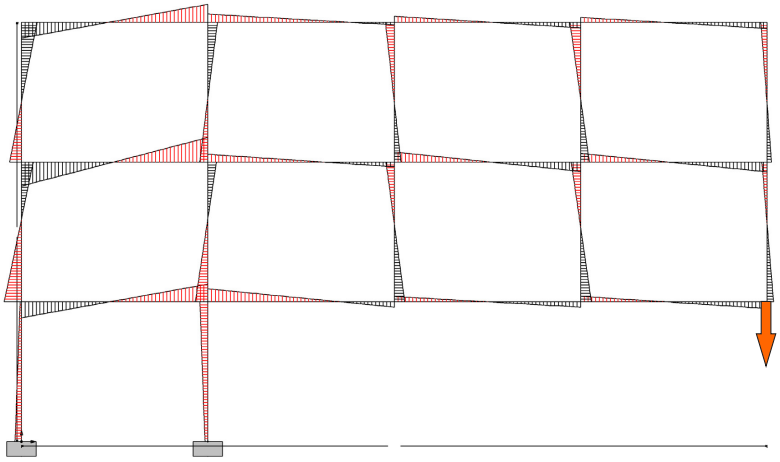


Bild 5.13. Ausfall einer Stütze zwischen zwei Decken und zwischen der untersten Decke und dem Fundament (BE-FRAMES)

$$J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ \tag{5.48}$$

relativ klein, weil die Kräfte f_i^+, die von den Fehlertermen $\Delta E_i = E_i - E$ herrühren

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+\,, \tag{5.49}$$

zum einen (1) Gleichgewichtsgruppen bilden und (2) zum andern sich positive Abweichungen $\Delta E_i > 0$ und negative Abweichungen $\Delta E_j < 0$ ungefähr die Waage halten werden, so dass diese beiden Effekte zusammen dafür sorgen, dass die Fernfeldfehler klein sein werden, siehe Bild 5.11. Man muss nicht jedes Zuschlagskorn durch ein eigenes Element darstellen, die Mathematik sorgt dafür, dass sich die Fehler aufheben.

Bei der ersten Wandscheibe in Bild 5.11 war die Streuung in den Steifigkeiten zufällig verteilt, jetzt in den Bildern 5.12 a und 5.12 b gibt es zwei Bereiche, in denen die Steifigkeit aller Elemente um denselben Betrag, um 90% reduziert wurde. Bemerkenswert ist hierbei die Dominanz der Kräfte f_i^+ am Rand der beiden Bereiche, siehe Bild 5.12.

Man ist versucht, weil die Kräfte f_i^+ Gleichgewichtskräfte sind, die immer paarweise auftreten, die durch die f_i^+ ausgelösten Effekte zu ignorieren. Wenn, wie in Bild 5.13, eine Stütze zwischen zwei Geschossen ausfällt, dann kann man das am Originaltragwerk durch den Angriff von zwei gegengleichen Knotenkräften f_i^+ korrigieren und weil beide gleich groß sind, heben sich ihre Wirkungen in der Ferne auf.

Wenn aber eine **Fundamentstütze** ausfällt, dann wirken zwar auch wieder zwei Kräfte $\pm f_i^+$, aber die untere Kraft ist am Boden verankert und so bleibt von dem Paar $\pm f_i^+$ nur die Kraft f_i^+ am Stützenkopf übrig, die, weil sie keinen Antagonisten hat, weiter ausstrahlen wird, als ein gegengleiches Kräftepaar $\pm f_i^+$.

Der Ausfall einer Fundamentstütze ist kritischer, als der Ausfall einer Zwischenstütze.

Man kann es auch so sagen: Es gibt einen Unterschied zwischen ***intern*** und ***extern***. Die **Ausgleichsbewegungen** auf Grund von Änderungen im Innern einer Struktur sind lokal begrenzt, klingen rasch ab, aber Steifigkeitsänderungen in der ‚Peripherie' – vor allem den Lagern – strahlen weiter aus. Je näher eine Ausgleichsbewegung einer **Starrkörperbewegung** kommt (‚wie ein Ruck im ganzen Tragwerk'), desto gefährlicher ist sie.

5.13 Rahmen

In Bild 5.14 a sind die Momente eines Rahmens im LF g dargestellt und darunter, in Bild 5.14 b, die Momente im selben Lastfall, wenn eine Geschoßstütze ausfällt. Statisch entspricht der Übergang von Bild a zu Bild c der Wirkung von Zusatzkräften f_i^+, wie in Bild 5.14 b gezeigt,

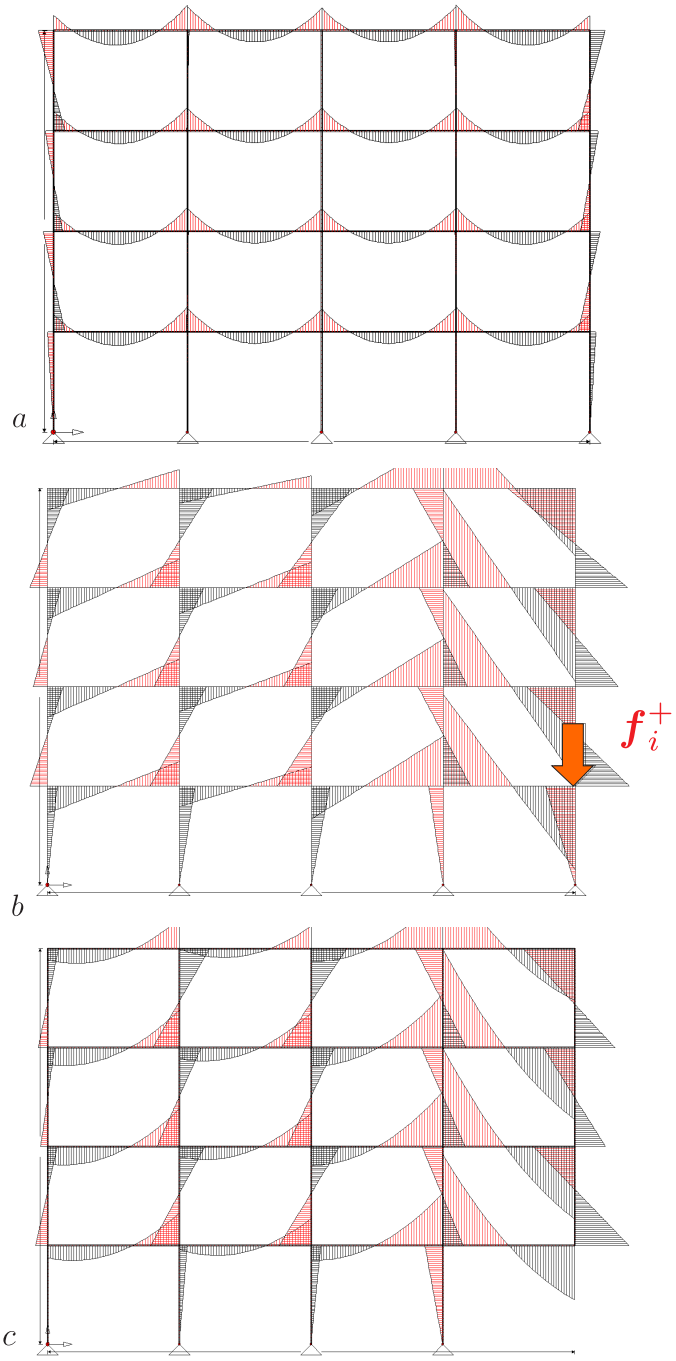


Bild 5.14. Ausfall einer Eckstütze, **a)** Momente im LF g, **b)** Kraft f^+ und zugehörige Momente, **c)** a+ b = Momente nach Ausfall der Eckstütze (BE-FRAMES)

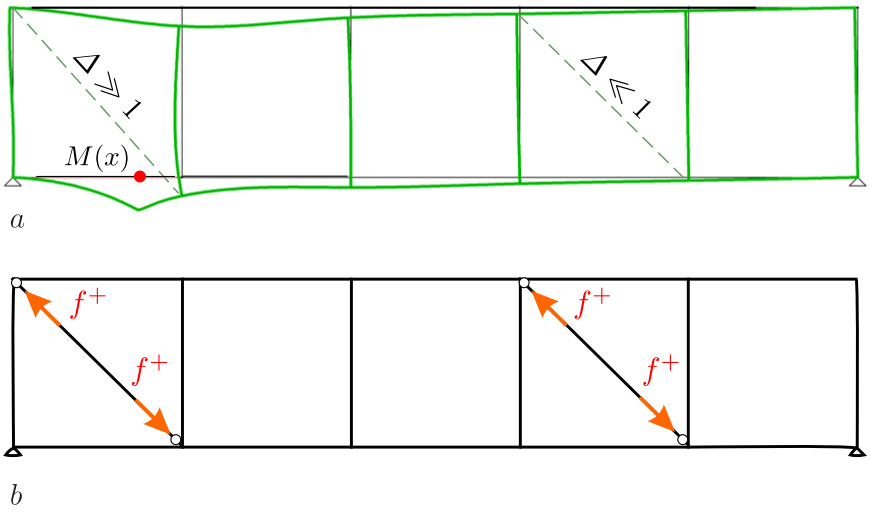


Bild 5.15. Vierendeel Träger, **a)** Einflussfunktion für ein Momente $M(x)$, **b)** Addition von Diagonalstäben (BE-FRAMES)

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+ . \tag{5.50}$$

Die Momente, die diese Kräfte f_i^+ erzeugen, zu den Momenten des Ausgangszustandes addiert, ergeben die Momente des geschwächten Systems.

In Bild 5.15 werden zwei Diagonalstäbe zu einem Vierendeel-Träger hinzugefügt. Der neue Vektor $\boldsymbol{u}_c$ ist die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Der Einfluss des ersten Paares $\pm\boldsymbol{f}^+$ auf $M(x)$ wird deutlich sein, weil die Relativverschiebung der Endpunkte relativ groß ist, $\Delta \gg 1$, (große Laufzeitdifferenzen), während die Wirkung des anderen Paares gering sein wird, weil die Knotenverschiebungen sich kaum unterscheiden $\Delta \ll 1$, (kleine Laufzeitdifferenzen).

5.14 Nichtlineare Effekte

Nichtlineare Probleme sind sehr beliebt – an den Hochschulen. In der Praxis dürften aber (geschätzt) 99 % aller Statiken auf einer linear-elastischen Berechnung beruhen. Die Statik eines Tragwerks ist so stark von der Kinematik geprägt, sprich den Einflussfunktionen – Gelenk einbauen, spreizen und die Bewegung verfolgen, die im Tragwerk entsteht – dass man an diesem Bild instinktiv auch dann festhält, wenn im Feld der Beton reißt oder in den Ecken der Stahl überdehnt wird. Eine nichtlineare Berechnung macht eine Struktur nicht zu einem Fluid.

Eine linear-elastische Berechnung hat die Möglichkeit lokale Abweichungen in den Festigkeiten durch modifizierte Elemente nachzubilden, siehe Bild 5.3.

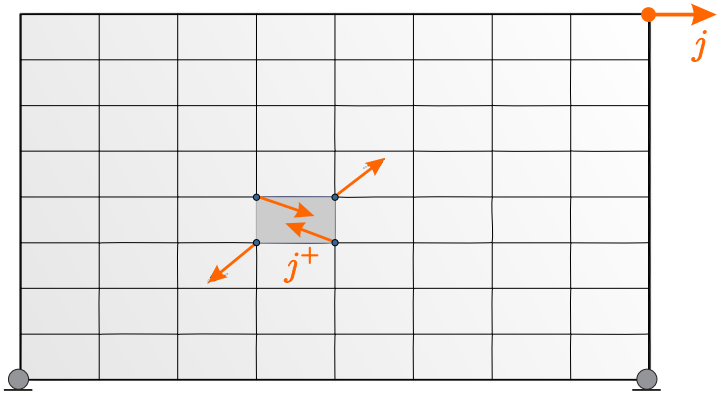


Bild 5.16. Berechnung der Einflussfunktion für eine Eckverschiebung mit einem Dirac Delta, das in diskreter Form einer Knotenkraft j gleich ist. Ändert sich in einem Element die Steifigkeit, dann braucht man auf der rechten Seite, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$, zusätzliche Knotenkräfte $\boldsymbol{j}^+$, wenn man $\boldsymbol{g}_c$ mit der Matrix $\boldsymbol{K}$ bestimmt; siehe auch Bild 4.19 auf Seite 446 (MATLAB™)

Das soll nun nicht bedeuten, dass das immer der Weisheit letzter Schluss ist, aber wie die Nachverfolgung der Kräfte f_i^+ zeigt, siehe die obigen Beispiele, sind die Wirkungen in der Ferne der entscheidende Punkt.

Wie aufwendig man die gestörten Zonen modelliert, ist zweitrangig. Die eigentliche Frage ist, wieviel von der Störung nach außen dringt, in die Ferne wirkt und ob das Auflösungsvermögen des Netzes die Effekte überhaupt transportieren kann? Dies müsste, wie wir meinen, mitbedacht werden, wenn man sich Gedanken über die Modellierung der gestörten Zonen macht. Es geht um die **Fernwirkung**. Um wieviel ändern sich die Bemessungswerte, wenn man ‚genauer' rechnet? Lohnt sich der Aufwand? Das sind sehr wichtige und interessante Fragen und alle Aufmerksamkeit wert.

5.15 Das Kraftgrößenverfahren

Zwischen dem Kraftgrößenverfahren und den f_i^+ besteht ein enger Zusammenhang, denn beim Rechnen mit den f_i^+ ändern wir nicht die Steifigkeitsmatrix, sondern wir ändern **die rechte Seite**, aus dem Vektor $\boldsymbol{f}$ wird der Vektor $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$. Genauso geht auch das Kraftgrößenverfahren vor.

Das Kraftgrößenverfahren wählt ein statisch bestimmtes ***Hauptsystem*** und alles Rechnen findet an diesem System statt. Die statisch Überzähligen X_i spielen dabei dieselbe Rolle wie die f_i^+. Während die f_i^+ das zusätzliche Element an die Struktur koppeln, beseitigen die X_i die Klaffungen. Beide, die X_i wie die f_i^+, sind ***Zusatzlasten***, die auf der rechten Seite erscheinen, während die eigentliche Analyse am unveränderten Hauptsystem (Matrix $\boldsymbol{K}$) vor sich geht.

Das hat den Vorteil, dass wir nicht zwei Sätze von Einflussfunktionen brauchen: Einen Satz für die Schnittgrößen am Hauptsystem (Matrix $\boldsymbol{K}$) und einen zweiten Satz für das statisch unbestimmte System (Matrix $\boldsymbol{K}_c$).

5.16 Kräfte $\boldsymbol{j}^+$

Die Formel $J(e) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+$ legt nahe zu probieren, ob es nicht auch eine Formel

$$J(e) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+ \tag{5.51}$$

gibt, siehe Bild 5.16.

Und die gibt es in der Tat, denn die Verschiebung $u(x)$ in einem Punkt kann man auf zwei Wegen berechnen

$$u(x) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l u(y)\, \delta(y-x)\, dy\,. \tag{5.52}$$

In der linearen Algebra der finiten Elemente lautet die zweite Gleichung

$$J(u) = u(x) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}(x)\,, \tag{5.53}$$

wenn $\boldsymbol{j}(x)$ die äquivalenten Knotenkräfte zu einem Dirac Delta im Punkt x sind, also einfach $j_i = \varphi_i(x)$. Aus $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}$ folgt

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+ \tag{5.54}$$

und nach Multiplikation von links mit $\boldsymbol{u}$ (es ist $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K} = \boldsymbol{f}^T$)

$$\underbrace{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c}_{J(\boldsymbol{u}_c)} = \underbrace{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}}_{J(\boldsymbol{u})} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+\,, \tag{5.55}$$

ergibt sich

$$J(\boldsymbol{e}) = u_c(x) - u(x) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{j}^+ \tag{5.56}$$

mit

$$\boldsymbol{j}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c\,. \tag{5.57}$$

Wenn man z.B. mit Knotenkräften $\boldsymbol{j}$ die Einflussfunktion für die Querkraft in einem Riegel im 5. Stock generiert und im 1. Stock ändert sich die Steifigkeit eines Stiels, dann muss man die Knoten dieses Stiels mit Knotenkräften $\boldsymbol{j}^+$ belasten, um am ursprünglichen Tragwerk aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$ die geänderte Einflussfunktion, $\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{g}_c$, zu berechnen. Von der Spreizung $\boldsymbol{g}_c$ im 5. Stock wird aber nicht viel im 1. Stock ankommen, so dass die notwendigen Zusatzkräfte $\boldsymbol{j}^+$ klein sein werden.

Das ganze ist insofern theoretisch, weil man ja $\boldsymbol{g}_c$ nicht kennt (man könnte $\boldsymbol{g}_c \sim \boldsymbol{g}$ setzen) und somit den Vektor $\boldsymbol{j}^+$ nicht berechnen kann, aber es veranschaulicht, was die j_i^+ bedeuten.

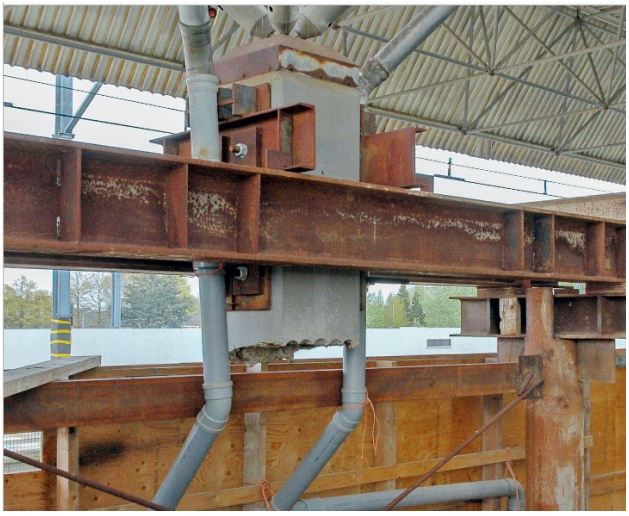


Bild 5.17. Abgefangene Stütze im Bahnhof Breda, NL, [178]

Nehmen wir eine Verschiebung als Beispiel. Um auf dem ‚alten' Netz G_c zu erzeugen, muss man zusätzlich die Kräfte j_i^+ anbringen. Formuliert man den Satz von Betti mit der *alten* Lösung u und dem *neuen* G_c so entsteht

$$1 \cdot u + \sum_i j_i^+ \, u_i = \int_\Omega G_c \, p \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = 1 \cdot u_c \,, \tag{5.58}$$

was bedeutet, dass die Arbeit der Kräfte $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{j}^+$ auf den alten Wegen $\boldsymbol{u}$ gleich dem neuen u_c im Aufpunkt ist.

5.17 Austausch als Alternative

Statt mit den Kräften f_i^+ zu operieren, gibt es auch andere Techniken. Man stelle sich vor, dass eine Stütze abgefangen werden musss, wie in Bild 5.17 oder eine Stütze zwischen zwei Decken ausgetauscht werden muss, wie in siehe Bild 5.18. Wenn die neue Stütze dieselbe Steifigkeit $k = EA$ hat, dann

- muss sie auf dem Bauhof dieselbe Länge haben, wie die alte unbelastete Stütze
- muss die neue Stütze so vorgespannt werden, dass sie bei dem Einbau dieselbe Länge hat wie die alte Stütze.

Nach dem Einbau können die Pressen an der neuen Stütze weggenommen werden und nichts hat sich geändert[5].

Wenn stattdessen die neue Stütze eine Steifigkeit $EA_c > EA$ hat, dann drücken Zusatzkräfte ($= f_i^+$) gegen die obere und untere Decke, sobald die

[5] Eigentlich $k = EA/l$, aber zu Vereinfachungen lassen wir den Faktor $1/l$ weg

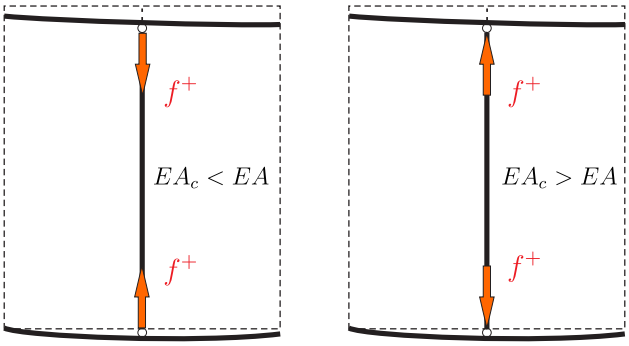


Bild 5.18. Zunahme und Abnahme von EA in einer Zwischenstütze

Pressen entfernt werden, siehe Bild 5.18. Denn um eine Stütze mit $EA_c > EA$ zusammenzudrücken, sind größere Kräfte notwendig als im Fall $EA_c = EA$. Und wenn die Pressen entfernt werden, dann drücken diese Kräfte gegen die Decken.

Wenn die neue Stütze eine geringere Steifigkeit hat, $EA_c < EA$, dann ist die Situation im Grunde dieselbe, nur müssen wir das Vorzeichen der f_i^+ umdrehen.

Statt also ein zweites Element Ω_e^+ vor das erste Element Ω_e zu legen, können wir uns auch vorstellen, dass wir das Element als Ganzes ersetzen. Weil aber die Steifigkeit *neu – alt* unterschiedlich ist, $EA_c \neq EA$, sind Zusatzkräfte f_i^+ an den Enden des Elements notwendig. Vier Szenarien sind möglich:

- $EA_c > EA$ und $N > 0$ (Zug), dann ziehen die f_i^+ die Stütze zusammen, $(\rightarrow \leftarrow)$.
- $EA_c > EA$ und $N < 0$ (Druck), dann drücken die f_i^+ die Stütze auseinander, $(\leftarrow \rightarrow)$.
- $EA_c < EA$ und $N > 0$, dann ziehen die f_i^+ die Stütze auseinander, $(\leftarrow \rightarrow)$.
- $EA_c < EA$ und $N < 0$, dann ziehen die f_i^+ die Stütze zusammen, $(\rightarrow \leftarrow)$.

Wenn $EA_c > EA$ ist, dann nehmen die Verformungen der Stütze ab und wenn $EA_c < EA$ ist, dann nehmen sie zu.

5.18 Die Ableitung der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$

Es liegt nahe Steifigkeitsänderungen mittels Taylor zu verfolgen[6], also den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ als die Funktion eines Modellparameters s anzusehen und in eine Taylorreihe zu entwickeln

$$\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{u}'(0)\,\Delta s + \dots . \tag{5.59}$$

[6] siehe auch Glg. (5.16), Taylor-Entwicklung der Inversen von $\boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{K} + s\,\boldsymbol{\Delta K}$

Wir wissen: Ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ eine Funktion einer Variablen s, dann lautet die Ableitung von $\boldsymbol{K}^{-1}$ nach s, [201] p. 163,

$$\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{K}^{-1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\,\frac{d\boldsymbol{K}}{ds}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.60}$$

Betrachten wir noch einmal den Stab in Bild 3.75 auf Seite 334. In den ersten drei Elementen ist $k = EA/l_e = 1$ und im vierten Element ist $k = a$ wofür wir jetzt $k = (1+s)$ setzen. Damit hat die Steifigkeitsmatrix die Gestalt

$$\boldsymbol{K}(s) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2+s \end{bmatrix}\,. \tag{5.61}$$

Für ein gegebenes s lautet der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{K}^{-1}(s)\,\boldsymbol{f}$. Damit ergibt sich näherungsweise

$$\boldsymbol{u}(s) = [\boldsymbol{K}^{-1}(0) + \frac{d}{ds}\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\Delta s]\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{du}(0)\,\Delta s\,. \tag{5.62}$$

Nun ist

$$\boldsymbol{K}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

und die Ableitung von $\boldsymbol{K}$ nach s enthält nur einen Eintrag, die Zahl 1 in Zeile 3, Spalte 3. Ist eine Last wie $\boldsymbol{f} = \{1,1,1\}^T$ gegeben, dann lautet das Differential somit

$$\boldsymbol{du}(0) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{K}(0)\,\boldsymbol{K}^{-1}(0)\,\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix}\,. \tag{5.64}$$

Bei einer Änderung $\Delta s = 0.5$ ergibt dies

$$\boldsymbol{u}(0.5) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 0.5 \cdot \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3125 \\ 1.6250 \\ 0.9375 \end{bmatrix}\,, \qquad \begin{bmatrix} 1.3630 \\ 1.7273 \\ 1.0909 \end{bmatrix}\ \text{(exakt)} \tag{5.65}$$

und bei einer Verdopplung, $\Delta s = 1$,

$$\boldsymbol{u}(1.0) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 1.0 \cdot \begin{bmatrix} -0.3750 \\ -0.7500 \\ -1.1250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1250 \\ 1.2500 \\ 0.3750 \end{bmatrix}\,, \qquad \begin{bmatrix} 1.2857 \\ 1.5714 \\ 0.8571 \end{bmatrix}\ \text{(exakt)}\,. \tag{5.66}$$

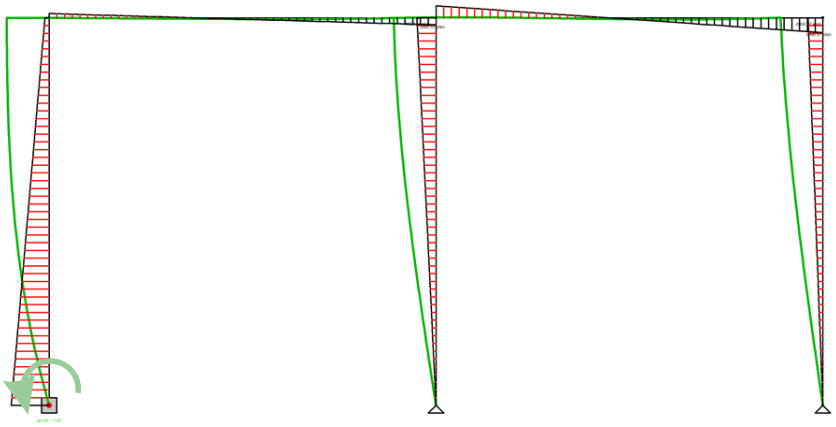


Bild 5.19. Änderung der Drehsteifigkeit eines Knotens. Einflussfunktion für die Knotenverdrehung u_i und die Momente der Einflussfunktion. Die zugehörigen Knotenverformungen bilden den Vektor $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$. Das Bild dieser Einflussfunktion ist praktisch der Unterschied zwischen $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$ (BE-FRAMES)

Mit der Ableitung der Inversen kann man also die **Sensitivität** der Steifigkeitsmatrix gegenüber Änderungen der Elementsteifigkeiten verfolgen.

Bei den Steifigkeitsmatrizen von Balken und Stäben lauten die Vorfaktoren $k = EI/l^3$ bzw. $k = EA/l$ und daher sind die Ableitungen der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ nach den Steifigkeiten k die 2×2 bzw. 4×4 Elementmatrizen ohne diese Faktoren und das Inkrement $d/dk\, \boldsymbol{K}\, \Delta k$ hat dann – hier bei einem Stabelement – sinngemäß die Gestalt

$$\frac{d}{dk}\boldsymbol{K}\,\Delta k = \Delta k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta k = \frac{\Delta EA}{l}\,. \tag{5.67}$$

Das ist die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ in dem $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$.

5.19 Die Ableitungen $\partial u/\partial f_k$ und $\partial u/\partial k_{ij}$

Die Ableitung der Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{f}$ nach einem f_k ist einfach

$$\frac{\partial}{\partial f_k}\,\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial f_k}\,(\boldsymbol{g}_1\, f_1 + \boldsymbol{g}_2\, f_2 + \ldots + \boldsymbol{g}_n\, f_n) = \boldsymbol{g}_k \tag{5.68}$$

und um die Ableitung von $\boldsymbol{u}$ nach einem k_{ij} zu bestimmen rechnen wir[7]

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\,\frac{\partial}{\partial k_{ij}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j^T\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = \frac{\partial}{\partial k_{ij}}\boldsymbol{f} = 0\,, \tag{5.69}$$

[7] Das ist $\partial/\partial k_{ij}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f})$

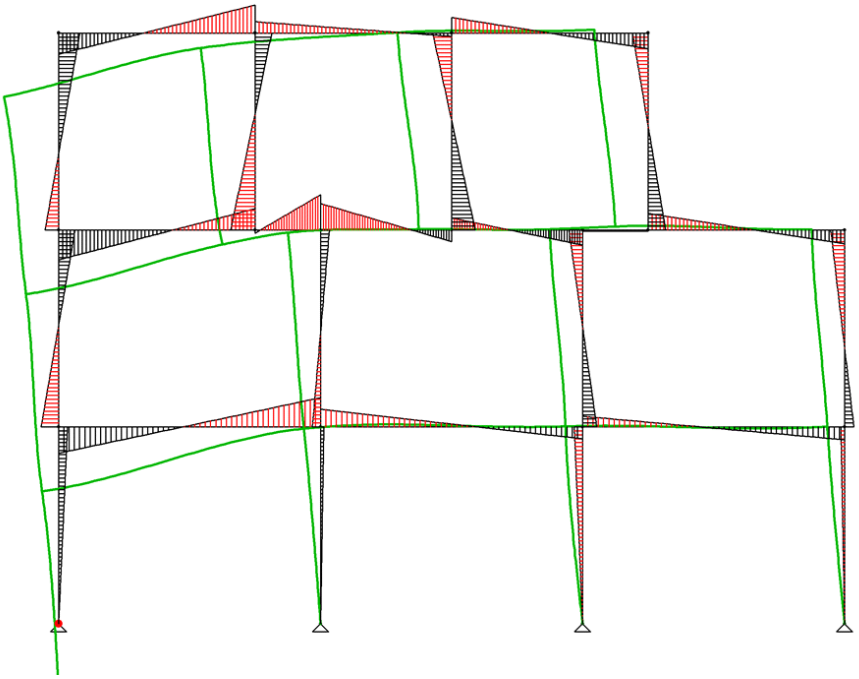


Bild 5.20. Einflussfunktion für die Lagerkraft und zugehörige Momente. Bei einer Änderung Δk_{ii} der Lagersteifigkeit geht $\boldsymbol{u}$ über in $\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} - u_i\,\boldsymbol{g}_i\,\Delta k_{ii}$ und das $-u_i\,\Delta k_{ii}$-fache der hier dargestellten Momente ist zu den Lastmomenten zu addieren. Die Änderung im Lager strahlt sichtbar weit aus (BE-FRAMES).

und das bedeutet[8]

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}} = -\boldsymbol{K}^{-1} u_j\,\boldsymbol{e}_i = -u_j\,\boldsymbol{g}_i}\,. \tag{5.70}$$

Wenn sich also z.B. eine Steifigkeit auf der Diagonalen ändert, $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$, dann kann man die Änderung in dem Verschiebungsvektor wie folgt abschätzen

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq -u_i\,\boldsymbol{g}_i\,\Delta k_{ii}\,. \tag{5.71}$$

In Richtung von u_i wirkt eine Kraft $-u_i\,\Delta k_{ii}$, die den Vektor $\boldsymbol{u}$ korrigiert, ihn kleiner oder größer macht, je nach Vorzeichen von Δk_{ii}. Das ist sinngemäß die Glg. (5.15) aus der Einleitung am Ein-Feder-Modell ($k\,u = f$) mit $\boldsymbol{g} \equiv 1/k$

$$u_c - u \simeq u\,\frac{1}{k}\,\Delta k. \tag{5.72}$$

[8] Skalar: $k\,u = f$, $du/dk = -1/k^2 \cdot f = -1/k \cdot u$

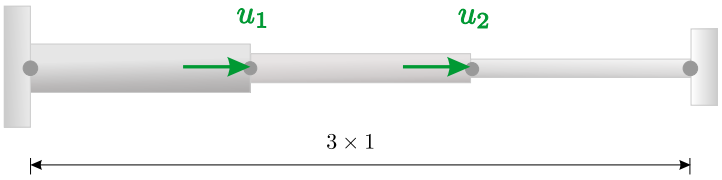


Bild 5.21. Gestufter Stab

Die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen markieren die Unterschiede zwischen $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$.

In Bild 5.19 ändert sich die Drehsteifigkeit $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$ eines Knotens und dadurch kommt es zu einem *shift* $\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq -u_i\, \boldsymbol{g}_i\, \Delta k_{ii}$ in den Verformungen und natürlich auch den Momenten

$$M_c - M = -u_i\, M(G_i)\, \Delta k_{ii}\,, \tag{5.73}$$

wobei $M(G_i)$ die Momente aus der Einflussfunktion der Knotenverdrehung u_i sind, siehe Bild 5.19. In Bild 5.20 ist es eine Lagersteifigkeit, die sich ändert, und die zugehörige Spalte $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ steuert den Übergang $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_c$.

Der Unterschied zwischen den Schnittkräften $\boldsymbol{u}_c$ und $\boldsymbol{u}$ hängt von den Schnittkräften der Einflussfunktionen ab.

Änderungen ganzer Stäbe

In der Praxis wird es meistens so sein, dass sich die Stabsteifigkeiten, etwa $EA \to EA + \Delta EA$, ändern und dann sind mehrere k_{ij} betroffen. Bei dem Stab in Bild 5.21, drei Elemente mit jeweils derselben Länge $\ell_e = 1$, und den Steifigkeiten $EA = 3, 2, 1$ verringert sich z.Bsp. die Steifigkeit EA zwischen den beiden Knoten 1 und 2, also im Element zwei, von $EA = 2$ auf $EA = 1$

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_2^{neu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.74}$$

Das bedeutet

$$\Delta k_{11} = \Delta k_{22} = -1 \qquad \Delta k_{12} = \Delta k_{21} = +1 \tag{5.75}$$

und so beträgt die Änderung in dem Verschiebungsvektor näherungsweise

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \simeq \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial k_{ij}}\, \Delta k_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} -u_j\, \boldsymbol{g}_i\, \Delta k_{ij}\,. \tag{5.76}$$

Die $\boldsymbol{g}_i$ sind die Spalten der Inversen

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2727 & 0.1818 \\ 0.1818 & 0.4545 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.77}$$

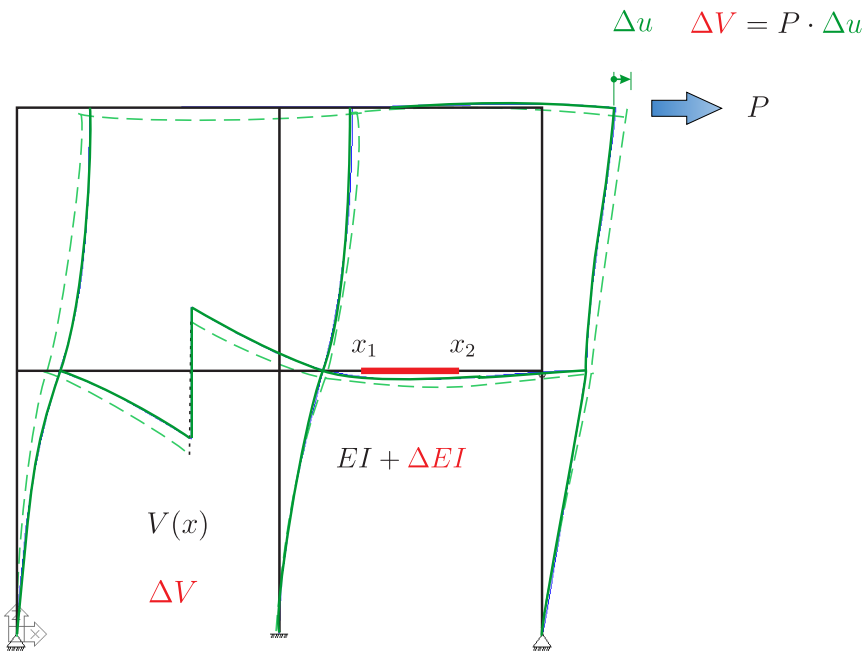


Bild 5.22. Eine lokale Steifigkeitsänderung, ändert die Einflussfunktion für $V(x)$ im ganzen Rahmen (BE-FRAMES)

und die u_j sind die Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u} = \{0.4545, 0.6364\}^T$ im Lastfall $\boldsymbol{f} = \{1, 1\}^T$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} &\simeq -\big[(u_1 \Delta k_{11} + u_2\, \Delta k_{12})\, \boldsymbol{g}_1 + (u_1\, \Delta k_{21} + u_2\, \Delta k_{22})\, \boldsymbol{g}_2\big] \\ &= \begin{bmatrix} -0.0165 \\ 0.0496 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -0.0260 \\ 0.0779 \end{bmatrix} \text{(exakt)}\,. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Probe

Wir können auch noch eine **Probe** machen, denn es muss ja gelten, siehe (3.228),

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\Delta K})\, \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.79}$$

und mit dem genäherten Vektor $\boldsymbol{u}_c = \{0.4380, 0.6860\}^T$ ergibt das

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\Delta K})\, \boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} 0.4606 \\ 0.6183 \end{bmatrix} \quad \simeq \quad \begin{bmatrix} 0.4545 \\ 0.6364 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.80}$$

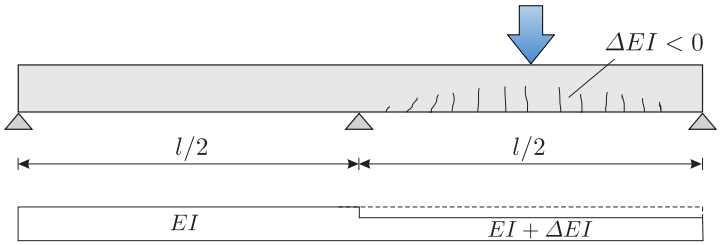


Bild 5.23. Risse in einem Balken

Der exakte Vektor $\boldsymbol{u}_c = \{0.4286, 0.7143\}^T$ liefert genau $\boldsymbol{u}$.

Wenn man (5.79) umstellt

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u}_c \tag{5.81}$$

dann sieht man, dass die Näherung (5.71) für $\boldsymbol{u}_c$ den alten Vektor $\boldsymbol{u}$ setzt.

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch $\partial f_i/\partial u_j = k_{ij}$ was direkt aus $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ folgt; es ist also $\partial \boldsymbol{f}/\partial u_j = \boldsymbol{k}_j$ (Spalte j von $\boldsymbol{K}$).

5.20 Integration über das defekte Element

Taylor ist der klassische Zugang, jetzt kommt eine neue Idee, **lokale Analyse**. Auch wenn sich nur eine Zahl k_{ij} in der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ ändert, ändert sich die ganze Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ weil wir bei der Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ durch die Determinante dividieren. Praktisch bedeutet dies z.B., dass die Schwächung eines Elementes, $EI \to EI + \Delta EI$, die Querkraft $V(x)$ in allen Punkten des Rahmens ändert

$$V_c(x) - V(x) = \sum_e \int_0^{l_e} (G_3^c(y,x) - G_3(y,x))\, p(y)\, dy\,, \tag{5.82}$$

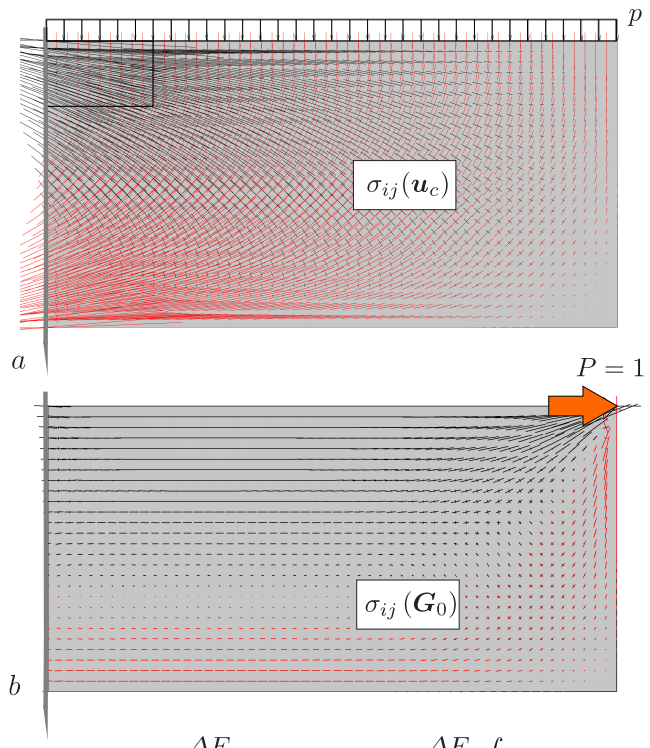
weil sich eben die Einflussfunktion, $G_3(y,x) \to G_3^c(y,x)$, **überall** ändert, und somit die Überlagerung der Belastung mit $G_3^c(y,x)$ andere Werte ergibt, siehe Bild 5.22.

Es gibt aber die Möglichkeit, das Nachrechnen auf das Element, das sich ändert, zu beschränken. Wir betrachten hierzu den Zweifeldträger in Bild 5.23. Zu Anfang ist die Steifigkeit EI in beiden Feldern gleich groß und so lautet die **schwache Form** der Balkengleichung $EI\, w^{IV} = p$

$$\int_0^l EI\, w''\, \delta w''\, dx = \int_0^l p\, \delta w\, dx\,, \tag{5.83}$$

oder kurz

$$a(w, \delta w) = (p, \delta w)\,. \tag{5.84}$$



$$u_{cx}(\boldsymbol{x}) - u_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Delta E}{E}\, a(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{u})_{\Omega_e} = -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}_c)\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{G}_0)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}$$

Bild 5.24. Die Integration über das gerissene Element oben links reicht aus, um die Änderung in der horizontalen Verschiebung zu bestimmen **a)** Spannungsverteilung nach dem Auftreten der Risse im Element oben links **b)** Spannungen aus der Einzelkraft $P = 1$ (Einflussfunktion für u_x) am oberen Ende der Kragscheibe (BESCHEIBE)

Dann ändert sich die Steifigkeit im zweiten Feld auf einen Wert $EI + \Delta EI$, die Biegelinie ändert sich mit, $w \to w_c$, und die schwache Form geht über in

$$\int_0^l EI\, w_c''\, \delta w''\, dx + \underbrace{\int_{l/2}^l \Delta EI\, w_c''\, \delta w''\, dx}_{d(w_c, \delta w)} = \int_0^l p\, \delta w\, dx \tag{5.85}$$

oder

$$a(w_c, \delta w) + d(w_c, \delta w) = (p, \delta w)\,. \tag{5.86}$$

Wenn wir die beiden Gleichungen voneinander abziehen, dann folgt

$$a(w_c - w, \delta w) + d(w_c, \delta w) = 0 \tag{5.87}$$

oder mit $e = w_c - w$

$$a(e, \delta w) = -d(w_c, \delta w)\,. \tag{5.88}$$

Wählen wir als virtuelle Verrückung δw die Einflussfunktion G eines Funktionals $J(w)$, dann ist das Ergebnis die Änderung in dem Funktional $J(e) = a(e, G) = -d(w_c, G)$, also

$$\boxed{J(e) = -d(w_c, G)}\,. \tag{5.89}$$

Man beachte, dass

$$d(w_c, \delta w) = \int_{l/2}^{l} \Delta EI\, w_c''\, \delta w''\, dx = \frac{\Delta EI}{EI} \int_{l/2}^{l} \frac{M_c\, M}{EI_c}\, dx\,. \tag{5.90}$$

In der Notation der linearen Algebra ist die Herleitung noch einfacher. Bei einer Änderung der Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, wird aus der ursprünglichen schwachen Formulierung

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K u} = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f} \tag{5.91}$$

die Gleichung

$$\boldsymbol{\delta u}^T (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}) \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{5.92}$$

so dass der Vektor $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u}$ der Gleichung

$$\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{K e} = -\boldsymbol{\delta u}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c \qquad \text{für alle } \boldsymbol{\delta u} \tag{5.93}$$

genügt. An dem Zustandsvektor $\boldsymbol{u}$ eines Systems können wir mittels einer Einflussfunktion, dem Vektor $\boldsymbol{g}$, Messungen vornehmen

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K u} \tag{5.94}$$

und so folgt, wenn wir in (5.93) für $\boldsymbol{\delta u}$ den Vektor $\boldsymbol{g}$ setzen, das Ergebnis

$$J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c \qquad (= -d(w_c, G))\,, \tag{5.95}$$

zu dessen Berechnung wir nur auf dem oder den betroffenen Element(en) messen müssen, siehe Bild 5.24. Diese Gleichung entspricht (5.89).

Im Grunde steht in (5.95) die Wechselwirkungsenergie, denn die Änderung $J(\boldsymbol{e})$ kann man, und das gilt für alle Bauteile, in der Form

$$J(\boldsymbol{e}) = -d(w_c, G) = -\alpha \cdot a(G, w_c)_{\Omega_e} \tag{5.96}$$

schreiben, also als die Wechselwirkungsenergie zwischen der Einflussfunktion G für $J(w)$ und der neuen Lösung w_c in dem Element Ω_e, dessen Steifigkeit sich ändert, wobei

$$\alpha = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta EI}{EI} = \frac{\Delta EA}{EA} = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta K}{K} \qquad \text{etc.} \tag{5.97}$$

das Verhältnis der Steifigkeitsänderung zur ursprünglichen Steifigkeit ist.

5.21 Sensitivitäten und Mohr

Nachdem nun klar ist, dass man die Effekte von Änderungen durch eine **lokale Analyse** ermitteln kann, wollen wir uns im Folgenden etwas systematischer und im Kontext der klassischen Statik mit dieser Strategie beschäftigen.

Jede Verschiebung $u(x)$ kann auf zwei Weisen berechnet werden,

$$u(x) = J(u) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l \frac{M(y)\, M_G(y,x)}{EI}\, dy = a(G,u)\,, \tag{5.98}$$

mit einer starken oder einer schwachen Einflussfunktion. Wir schreiben hier und im folgenden M_G für das Moment der Einflussfunktion.

In Kapitel 3.46 haben wir uns mit den Sensitivitäten der Einflussfunktionen nach Betti beschäftigt. Hier geht es nun um die Sensitivitäten der schwachen Einflussfunktionen, also um die Verzerrungen/Spannungen der Einflussfunktionen, deren Größe ein Maß für den Effekt von Steifigkeitsänderungen sind. Das Stichwort Mohr im Titel soll ein Synonym für die schwachen Einflussfunktionen sein.

In (5.98) haben wir die Wechselwirkungsenergie auf die Überlagerung der Momente reduziert. In Wirklichkeit ist es eine Kette von drei Integralen, wenn man alle Effekte, EI, EA, GA mitnimmt – oder eventuell noch mehr Terme (Federn). In der FEM muss man sich darum aber nicht kümmern, weil sich die Wechselwirkungsenergie einfach auf den Ausdruck

$$a(G,u) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{g} \qquad \text{‚Mohr bei der FEM‘} \tag{5.99}$$

reduziert, wenn $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{g}$ die Knotenwerte der Funktionen sind. Die Momenten-Schreibweise soll nur das Verständnis erleichtern.

Nehmen wir an, dass die Größe $J(w)$ die Durchbiegung des Balkens in einem Punkt x ist. Das Mohrsche Arbeitsintegral liefert für $J(w) = w(x)$ den Wert

$$J(w) = \int_0^l \frac{M(y)\, M_G(y,x)}{EI}\, dy\,. \tag{5.100}$$

Dann entsteht eine neue Situation: In einem Element des Balkens ändert sich die Steifigkeit, $EI \to EI + \Delta EI$. Das bedeutet, dass sich die Momente $M \to M_c$ und $M_G \to M_G^c$ ändern und wir müssen wieder von vorne anfangen

$$J(w_c) = \int_0^l \frac{M_c(y)\, M_G^c(y,x)}{EI_c}\, dy\,. \tag{5.101}$$

Hier ist EI_c die *step function*

$$EI_c = \begin{cases} EI + \Delta EI & \text{im Intervall } [x_a, x_b] \\ EI & \text{sonst} \end{cases} . \tag{5.102}$$

Nun kommt der interessante Punkt.

Wie wir oben gezeigt haben, (5.95), kann man die Änderung in $J(w)$ alleine durch Integration über das Element, in dem sich die Steifigkeit ändert, berechnen.

$$\boxed{J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c\, M_G}{EI_c}\, dy} \tag{5.103}$$

Hier ist M_c das Moment in dem Element *nach* der Änderung der Steifigkeit und M_G ist das Moment der Einflussfunktion *vor* der Änderung.

Wenn wir für das Biegemoment $M = -EIw''$ setzen, wird die Gleichung etwas transparenter

$$J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c\, M_G}{EI_c}\, dy = -\Delta EI \int_{x_a}^{x_b} w_c''\, G''\, dy\,. \tag{5.104}$$

Es ist auch nicht wichtig, ob wir M_c mit M_G überlagern oder M mit M_G^c

$$M \times M_G^c \equiv M_c \times M_G\,, \tag{5.105}$$

das Ergebnis ist dasselbe

$$\boxed{J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M\, M_G^c}{EI_c}\, dy} \tag{5.106}$$

Es sei betont, dass der Punkt x **an beliebiger Stelle** im Tragwerk liegen kann. Angenommen $J(w)$ sei die Durchbiegung oder das Moment in einem Punkt x im zehnten Stock und wir wollen herausfinden, wie sich $J(w)$ ändert, wenn Risse in einem Riegel im dritten Stock entstehen.

Die Änderung $J(e)$ im Punkt x kann alleine durch Integration über den gerissenen Riegel $[x_a, x_b]$ bestimmt werden. Wichtig ist, wieviel von der Einflussfunktion, dem Dirac Delta im Aufpunkt x im zehnten Stock, im dritten Stock ankommt, wie groß das Moment M_G der Einflussfunktion in dem gerissenen Riegel $[x_a, x_b]$ ist – und natürlich wie groß das Lastmoment M_c in dem Riegel ist.

Die Formel (5.103) hat allerdings den Nachteil, dass man den Momentenverlauf M_c am geänderten System kennen muss. Also ersetzen wir M_c durch das Moment M am ursprünglichen Tragwerk und kommen so zur Näherung

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta\, EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M\, M_G}{EI_c}\, dy\,. \tag{5.107}$$

Je nach der Art der Steifigkeitsänderung muss man diese Formel natürlich modifizieren. Wenn sich die Längssteifigkeit EA einer Stütze ändert, dann lautet die Formel

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta EA}{EA} \int_{x_a}^{x_b} \frac{NN_G}{EA_c}\, dy\,, \tag{5.108}$$

und ändert sich bei einer Scheibe in einem Element Ω_e der E-Modul, dann lautet die Formel

$$J(w_c) - J(w) \simeq -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^G\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.109}$$

und so kann diese Näherung auf alle Tragwerke und alle interessierenden Größen angewandt werden.

Wir haben bis jetzt, um die Diskussion nicht zu überfrachten, angenommen, dass $J(w)$ eine Weggröße ist. Ist $J(w)$ jedoch eine Kraftgröße, etwa ein Moment,

$$J_c(w_c) - J(w) = M_c(x) - M(x) = -\underset{\uparrow}{EI_c}\, w_c''(x) - M(x), \tag{5.110}$$

dann müssen wir berücksichtigen, dass bei der Herleitung von (5.104) die Einflussfunktion $G = G_2$ des Moments $M = -EI\, w''$ benutzt wird und daher die linke Seite in (5.104) die Differenz

$$J(w_c) - J(w) = -\underset{\uparrow}{EI}\, w_c''(x) - M(x) \tag{5.111}$$

ist und nicht (5.110). Das gilt für alle Kraftgrößen, weil die Funktionale direkt von der Steifigkeit abhängen.

Diesen Unterschied bei den Kraftgrößen zwischen (5.110) und (5.111) bitten wir im folgenden immer mitzudenken. Es wäre zu mühsam im Text immer zwischen Weg- und Kraftgrößen zu unterscheiden. Man kann das Ergebnis ja leicht nach $M_c(x)$ auflösen

$$M_c(x) = (J(w_c) - J(w) + M(x)) \cdot \frac{EI_c}{EI}\,, \tag{5.112}$$

was bedeutet

$$\tilde{\Delta}M := M_c(x) \cdot \frac{EI}{EI_c} - M(x) = J(w_c) - J(w)\,. \tag{5.113}$$

Das ist nicht $\Delta M = M_c - M$, sondern eine Differenz mit ‚Gewicht', aber es gibt die Tendenz wieder und in diesem Sinne wollen wir die Bezeichnung $\tilde{\Delta}M$ im folgenden verwenden.

Bevor man angesichts (5.112) meint, dass man $M_c(x)$ am ‚alten System' berechnen kann, sei daran erinnert, dass die Differenz $J(w_c) - J(w)$ ja nur

näherungsweise bekannt ist, siehe (5.107). Und um die Übersicht zu behalten: $J(w_c) = -EI\, w_c''$ ist nicht dasselbe, wie $J_c(w_c) = -EI_c\, w_c''$, sondern

$$\frac{EI_c}{EI}\, J(w_c) = J_c(w_c)\,, \tag{5.114}$$

was aber schon in (5.112) steht, denn $-J(w) + M(x) = 0$.

5.22 Nah und fern

Die Änderung $J(w_c) - J(w)$ wird nur dann ins Auge fallen, wenn die **Wechselwirkungsenergie** $\delta W_i = a(G, w_c)_{\Omega_e}$ in dem Element ‚groß' ist[9], was der Fall ist, wenn die Schnittgrößen aus der Einflussfunktion und gleichzeitig die Schnittgrößen aus der Belastung in dem Element groß sind.

Weil die Einflussfunktionen (in der Regel) rasch abklingen, kann man davon ausgehen, dass Steifigkeitsänderungen in weit abliegenden Bauteilen nur sehr geringen Einfluss auf die Schnittgrößen im ‚Vordergrund' haben werden.

Und weil δW_i ein **Skalarprodukt** ist, kann es, wie bei Vektoren, Funktionen M und M_G geben, die senkrecht aufeinander stehen, deren Überlagerung also null ergibt – wenn etwa M antimetrisch ist und M_G symmetrisch. In solchen Fällen ist, unabhängig von der Größe von M und M_G, die Änderung $J(w_c) - J(w)$ null.

Focus auf einen Punkt

Vor jeder Berechnung kann man also an Hand der Einflussfunktionen abschätzen, welche Steifigkeitsänderungen Effekt machen und welche nicht.

In Bild 5.25 ist die Einflussfunktion (grüne Kurve) für das Biegemoment in dem rot markierten Aufpunkt angetragen und gleichzeitig der Momentenverlauf, der zur Einflussfunktion gehört. Dieser Momentenverlauf stellt die **Sensitivität** des Moments gegenüber Steifigkeitsänderungen in der Umgebung des Aufpunktes dar, (*Focus auf einen Punkt*), denn ändert sich in einem Stiel oder Riegel die Steifigkeit, $EI \to EI + \Delta EI$, dann ändert sich das Moment im Aufpunkt um den Wert (genähert, weil wir mit M statt M_c rechnen)

$$\tilde{\Delta} M = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^{l_e} \frac{M_G\, M}{EI}\, dy\,. \tag{5.115}$$

Hier ist M das Moment aus der jeweiligen Belastung und M_G ist das Moment der Einflussfunktion, also der grünen Kurve. Die Bauteile, in denen die Momente M_G und M ***beide*** groß sind, (und nicht orthogonal zueinander), haben den größten Einfluss auf das Anschnittsmoment. Indem man in jedem Element die Wechselwirkunsenergien $\boldsymbol{g}\, \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{u}$ anträgt, erhält man einen Sensitivitätsplot für das Stielmoment.

[9] Wir lassen den Asterix an δW_i^* weg, weil er mathematisch ‚Verzierung' ist

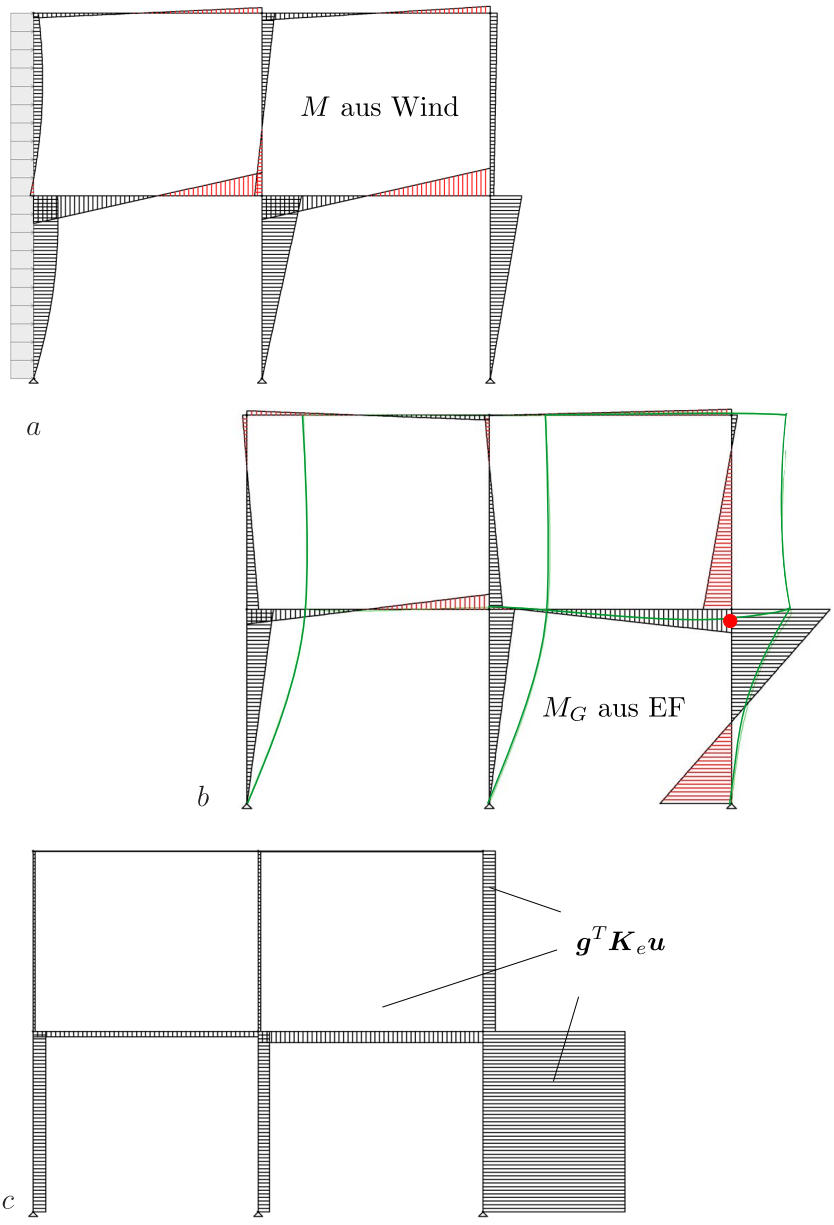


Bild 5.25. a) Moment M aus Wind, **b)** Moment M_G aus EF für das Stielmoment, **c)** die Wechselwirkungsenergie in den Elementen aus dem Wind und der EF zeigt an, wo Steifigkeitsänderungen einen großen Einfluss auf das Moment haben. In BE-FRAMES: LF laden, M anzeigen lassen, *GF-anywhere*, EF wählen, auf Aufpunkt klicken und dann auf Button *Energy*

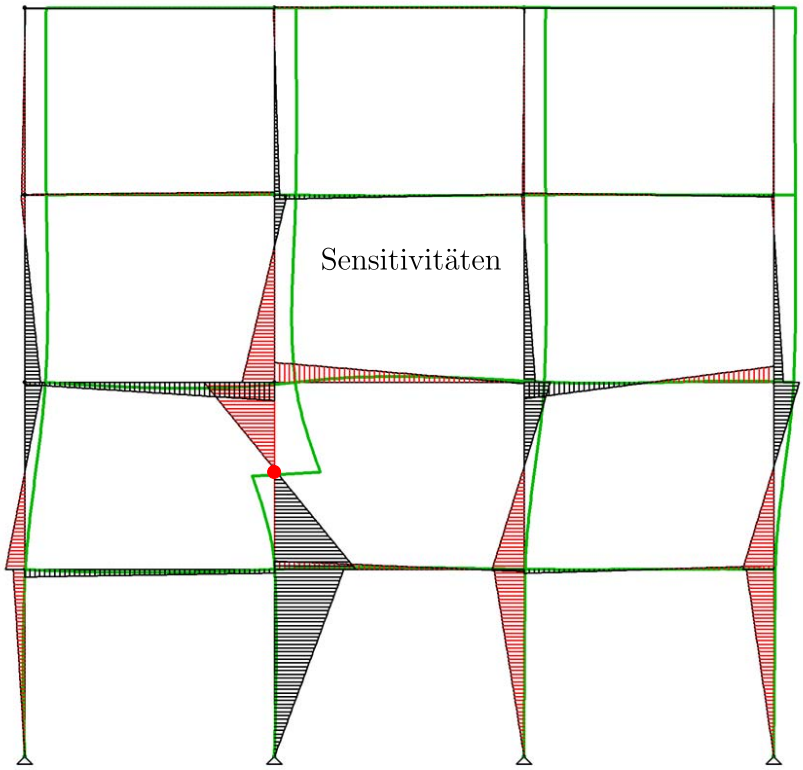


Bild 5.26. Einflussfunktion für die Querkraft in einem Stiel. Die hier gezeigten Momente aus der Einflussfunktion stellen die Sensitivität von V gegenüber Steifigkeitsänderungen $EI + \Delta EI$ in den Nachbarelementen dar (BE-FRAMES)

Dieselbe Logik gilt für die Querkraft-Einflussfunktion in Bild 5.26. Änderungen in den Steifigkeiten der Stiele und Riegel in denen das Moment der Einflussfunktion groß ist, haben einen relativ großen Effekt auf die Querkraft in dem Stiel.

Die Ergebnisse in Bild 5.27 sind natürlich keine Überraschung: Wenn man die Verschiebung des Stiels kleiner machen will, dann muss man vor allem das Geschoss darunter steifer machen, $EI \rightarrow EI + \Delta EI$ und wenn die Normalkraft kleiner werden soll, dann muss man die Abfangwirkung der Riegel darüber erhöhen, sprich die Riegel steifer machen. So kann also auch ein Computer mittels den Schnittgrößen der Einflussfunktion ein ‚statisches Gefühl' entwickeln, lässt sich ihm *artificial intelligence* antrainieren.

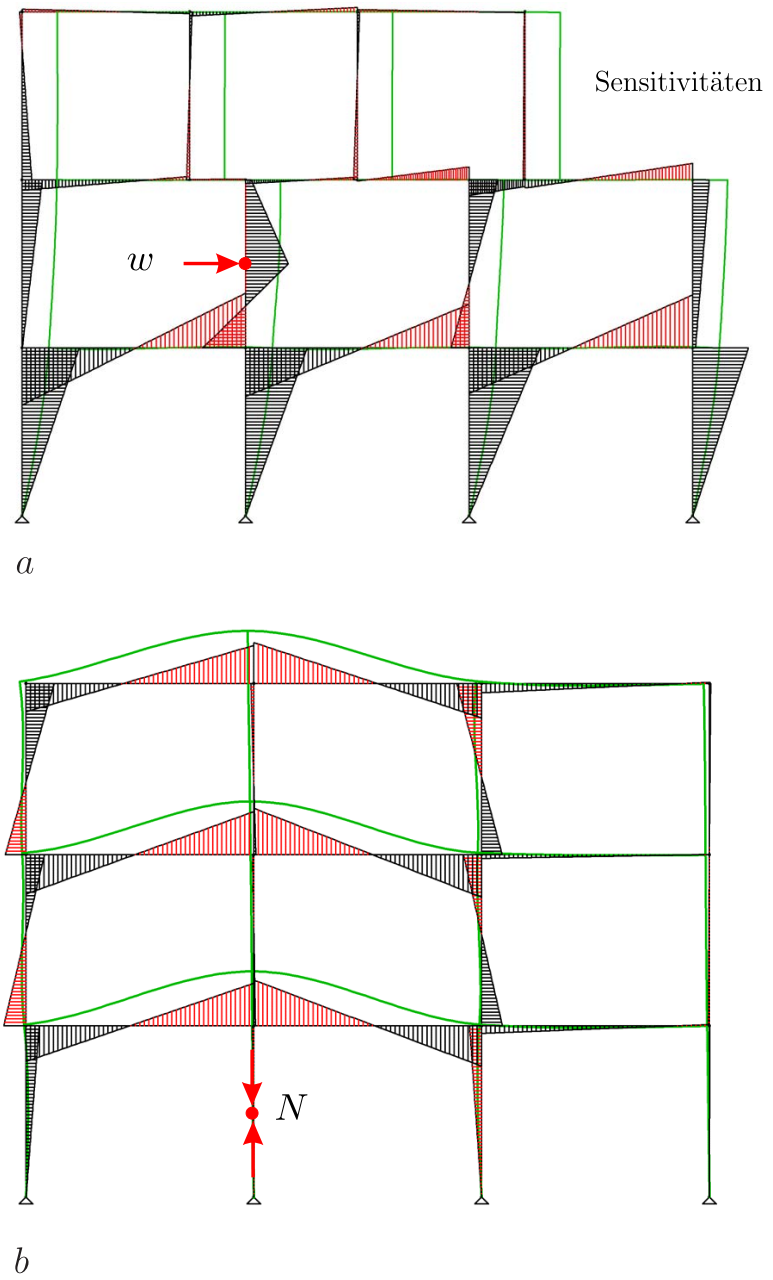


Bild 5.27. Einflussfunktionen (grüne Kurven) für **a)** die Horizontalverschiebung des Stiels und **b)** für die Normalkraft in dem Stiel im Stockwerk darunter. Angetragen sind ebenfalls die Momente M_G der Einflussfunktionen, die signalisieren, wo der Rahmen zu verstärken ist (BE-FRAMES)

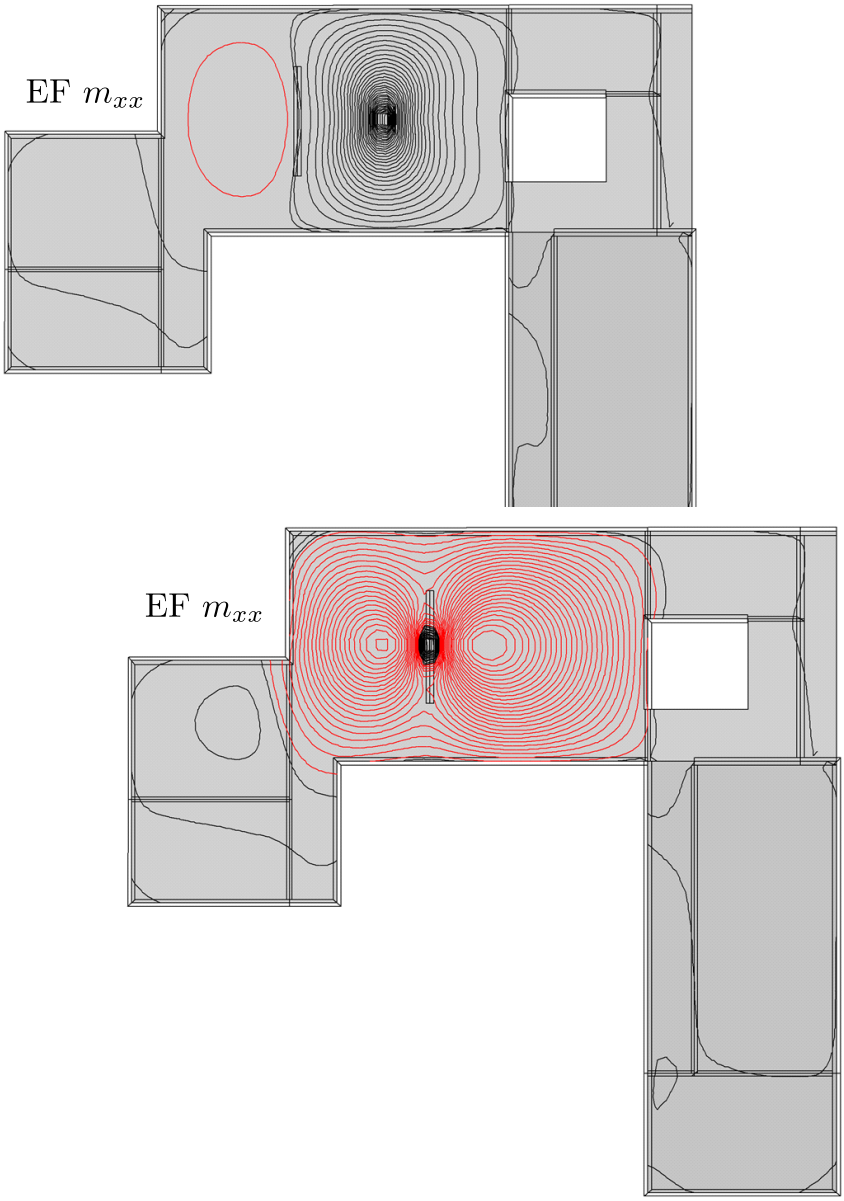


Bild 5.28. Einflussfunktion für das Moment m_{xx} einer Platte im Feld und über der Wand (BE-PLATTE)

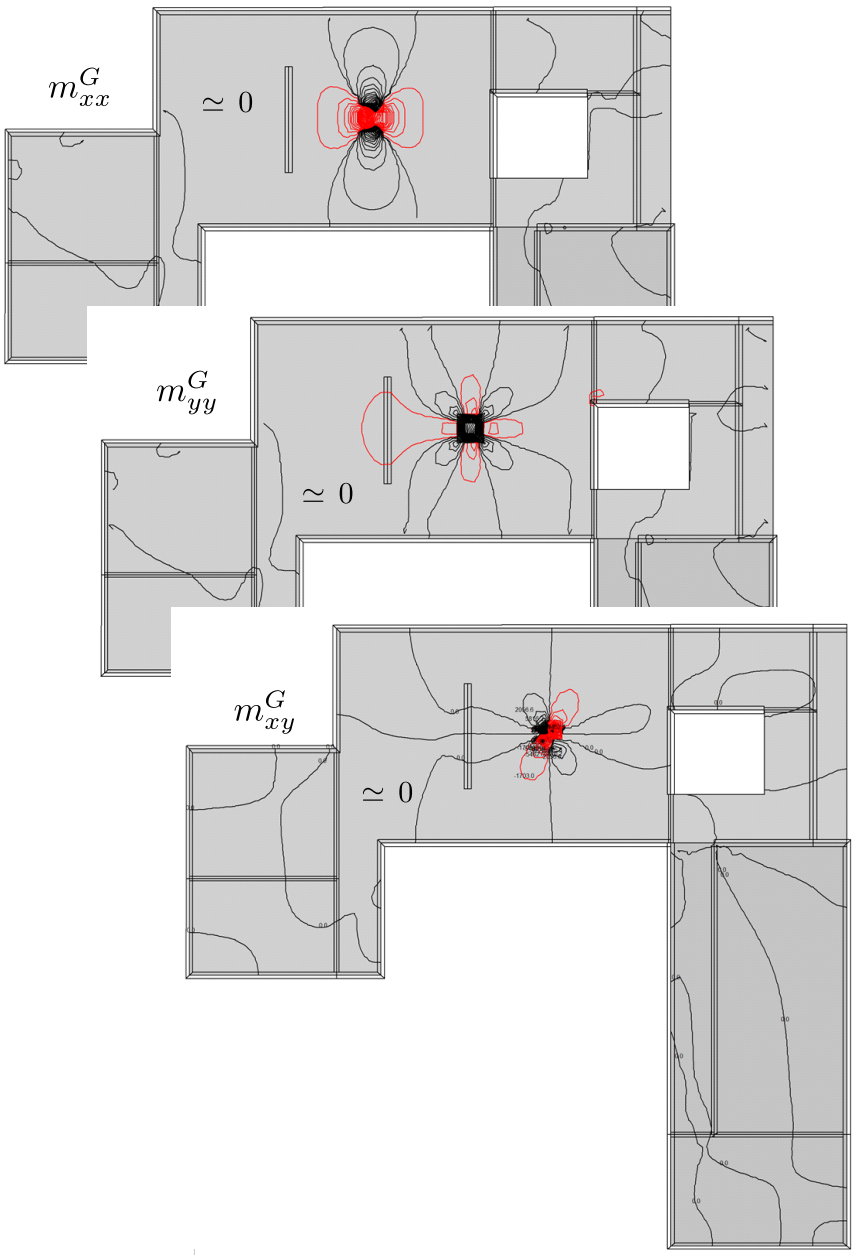


Bild 5.29. Das sind die Momente der Einflussfunktion m^G für das Moment m_{xx}, der ersten EF in dem vorhergehenden Bild 5.28 (BE-PLATTE)

Focus auf ein Element

Eine verwandte Fragestellung ist die Suche nach dem maximalen Effekt den die Steifigkeitsänderung in *einem* Element in dem Rahmen hervorruft (*Focus auf ein Element*. Das kann man schreiben als

$$max\ J(e) \qquad alle\ interessierenden\ G\,, \tag{5.116}$$

also als Suche nach der Kurve M_G, die mit M_c auf dem Element überlagert den größten Wert $J(e)$ liefert, wobei M_G das Moment der Einflussfunktion ist, die zu dem Funktional $J(w)$ gehört.

Bemerkung 5.3. In dem Programm BE-FRAMES sieht man die Momente der Einflussfunktion, wenn man nach der Markierung des Aufpunkts (*GF-Anywhere*) und der Darstellung der Einflussfunktion auf den Eintrag Moments in der Menüleiste klickt. Man kann sich natürlich auch die Normal- und Querkräfte der Einflussfunktion darstellen lassen. Das wäre dann im Sinne der erweiterten Formel (hier geht es um die Änderung in einem $M(x)$)

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}M = &-\frac{\Delta EI}{EI}\int_0^{l_e}\frac{M_c\,M_G}{EI_c}\,dx - \frac{\Delta EA}{EA}\int_0^{l_e}\frac{N_c\,N_G}{EA_c}\,dx\\ &-\frac{\Delta GA}{GA}\int_0^{l_e}\frac{V_c\,V_G}{GA_c}\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.117}$$

also um den Einfluss, den Inkremente $EI+\Delta EI$, $EA+\Delta EA$ oder $GA+\Delta GA$ haben.

Bemerkung 5.4. Bei statisch bestimmten Tragwerken setzen sich die Einflussfunktionen stückweise aus Starrkörperbewegungen zusammen, also $M_G = N_G = V_G = 0$, und daher ändert sich nichts, wenn sich die Steifigkeiten ändern, $\Delta M(x) = 0$.

Bemerkung 5.5. Bei Flächentragwerken sind die Einflussfunktionen wegen der 2-D Tragwirkung stärker gedämpft als bei Stabtragwerken, siehe Bild 5.28. Die Einflussfunktion für das Stützmoment über der Wand geht nicht über die unmittelbar benachbarten Felder hinaus.

Das Mohrsche Arbeitsintegral ist bei einer Platte die Wechselwirkungsenergie zwischen den Lastmomenten m_{ij}^c und den Momenten m_{ij}^G der Einflussfunktion, s. Bild 5.29,

$$\tilde{\Delta}m_{xx}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Delta K}{K}\frac{1}{K_c}\int_\Omega (m_{xx}^c\,m_{xx}^G + 2\,m_{xy}^c\,m_{xy}^G + m_{yy}^c\,m_{yy}^G)\;d\Omega\,. \tag{5.118}$$

Für Scheiben gilt das sinngemäß.

Was auffällt ist, dass bei Flächentragwerken auch die Effekte von Steifigkeitsänderungen (in der Regel) stärker gedämpft sind. Nur Änderungen ΔK der Plattensteifigkeit nahe dem Aufpunkt sind merkbar, wie man an Bild 5.29 erkennt.

5.23 Zusammenfassung

Änderungen in einem Ergebnis – wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass sich das Funktional J selbst nicht ändert, wie das bei Weggrößen der Fall ist –

$$J(e) = J(w_c) - J(w) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c \tag{5.119}$$

hängen also von **zwei Faktoren** ab, der Größe der Einflussfunktion $\boldsymbol{g}$ am Ort der $\boldsymbol{f}^+$ und der Größe der $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$.

Die Einflussfunktionen stellen damit direkt die Sensitivitäten gegenüber jedweder Steifigkeitsänderung $\boldsymbol{\Delta K}$ dar, und ein *plot* der Einflussfunktionen ist eine grafische Darstellung dieser Sensitivitäten.

Alternativ kann man auch die Schnittgrößen – bei Rahmen vorzugsweise die Momente – der Einflussfunktionen plotten

$$J(e) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_c M_G}{EI_c} \, dy \,, \tag{5.120}$$

was der zweiten Formel in (5.119) entspricht. Hierbei wird über das Element $[x_a, x_b]$ integriert, in dem sich die Steifigkeit ändert. Dort, wo M_G und das Lastmoment $M_c \simeq M$ groß sind, haben Steifigkeitsänderungen den größten Effekt, siehe z.B. Bild 5.25. Das ist sozusagen der Zugang im Sinne der Mohr'schen Arbeitsgleichung (schwache Einflussfunktion) zur Sensitivität. Die Momente M_G sind die Sensitivitäten.

Es bleibe nicht unerwähnt, dass man den Übergang von $\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ zu Mohr, zu dem Integral (5.120), nur machen kann, wenn das EI ein echter Vorfaktor von $\boldsymbol{\Delta K}$ ist, wenn man also mit $EA = GA = \infty$ rechnet. Bei Änderungen nur in dem E-Modul, $E \to E + \Delta E$, ginge es auch, aber im Fall $EA < \infty$ ist die obige schwache Form eine Näherung, bei der man aber wahrscheinlich nicht viel falsch macht.

5.24 Ein naheliegender Schluss

Die Zusatzkräfte $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c$ aus einer Steifigkeitsänderung in einem Element werden umso größer sein, je größer die Verformungsdifferenzen zwischen den Enden eines Elements sind. So sind in einem Stabelement

$$\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c \tag{5.121}$$

ja die Stabendkräfte f_i^+ (und damit die Normalkraft) – proportional zur Verschiebungsdifferenz $u_2^c - u_1^c$. Die Elemente mit großen ‚Gangunterschieden' zwischen den Verformungen links und rechts sind aber gerade die Elemente, die hoch beansprucht werden. Woraus folgt, dass die Elemente, deren Steifigkeitsänderungen für das Tragwerk am kritischsten sind, genau die Elemente sind, die am höchsten beansprucht werden.

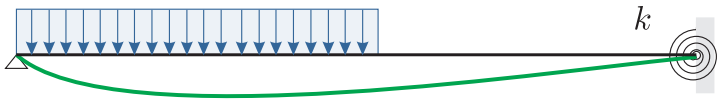


Bild 5.30. Elastische Einspannung eines Trägers

Das sind auch die Elemente deren Einflussfunktionen am meisten ‚ausschlagen', deren Einflussfunktionen ihr Maximum gerade dort haben, wo die Last steht. Im Bauwesen sind die Einflussfunktionen ja – um es einfach zu machen – von der Bauart

$$G(x,y) = \frac{1}{k}\, f(x,y) \tag{5.122}$$

und eine Änderung $k \to k + \Delta k$ bewirkt daher näherungsweise den Zuwachs

$$dG = \frac{d}{dk} G\, \Delta k = -\frac{1}{k^2} f(x,y) \cdot \Delta k = -G(x,y) \cdot \frac{\Delta k}{k}\,, \tag{5.123}$$

so dass die Änderungen in den Ergebnissen gerade proportional zu $\Delta k/k$ und zur Einflussfunktion selbst sind.

5.25 Lager

Wenn sich die Steifigkeit eines Lagers ändert, kann man die Änderung $J(e) = -d(G, w_c)$ eines Funktionals – also *eines Moments, einer Querkraft, einer Durchbiegung* – **direkt an der Feder** verfolgen kann. Gerade bei komplexen 3-D Modellen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden ist das ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

Elastische Einspannung

Die schwache Form der Balkengleichung des Trägers in Bild 5.30 lautet[10]

$$\int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\, dx + \delta w'\, w'\, k = \int_0^l p\, \delta w\, dx\,. \tag{5.124}$$

Ändert sich die Drehfedersteifigkeit, $k \to k + \Delta k$, dann wird daraus

$$\underbrace{\int_0^l \frac{M_c\,\delta M}{EI}\, dx + \delta w'\, w_c'\, k}_{a(w_c,\delta w)} + \underbrace{\Delta k\, w_c'\, \delta w'}_{d(w_c,\delta w)} = \int_0^l p\, \delta w\, dx\,. \tag{5.125}$$

Die Änderung in einem Funktional $J(w)$ ergibt sich somit zu (M_G ist das Moment der Einflussfunktion in der Feder vor der Änderung)

[10] Wir schreiben die Drehfedersteifigkeit hier k und nicht wie sonst k_φ

$$J(e) = J(w_c) - J(w) = -d(w_c, w_G) = -\Delta k\, w_c'\, w_G' = -\Delta k\, \frac{M_c}{k_c}\, \frac{M_G}{k}\,. \tag{5.126}$$

Zur Anwendung dieser Formel fehlt uns das neue Moment $M_c = k_c\, w_c'$ aus der Last, das man jedoch, wenn man nicht die Näherung $M_c \sim M$ verwenden will, entweder direkt oder durch *Iteration*, [33], bestimmen kann.

Um M_c direkt zu bestimmen, wenden wir (5.126) auf das Funktional $J(w) = M$, das Moment in der Feder selbst an, denn dann steht M_c auf beiden Seiten der Gleichung

$$J(e) = M_c - M = -\Delta k\, \frac{M_c}{k_c}\, \frac{M_G}{k}\,, \tag{5.127}$$

die man nach M_c auflösen kann,

$$M_c = M\, \frac{k_c\, k}{k_c\, k + \Delta k\, M_G}\,, \tag{5.128}$$

oder man iteriert, erzeugt eine Folge $M_c^{(i)}$, die, wie sich zeigt, schnell gegen M_c konvergiert

$$M_c^{(i+1)} = -\Delta k\, \frac{M_c^{(i)}}{k_c}\, \frac{M_G}{k} + M \qquad M_c^{(0)} = M\,. \tag{5.129}$$

Ist dann $M_c = k_c\, w_c'$ bestimmt, und damit auch w_c', kann man mit (5.126) die Änderung

$$\boxed{J(e) = -\Delta k \frac{M\, M_G}{k_c\, k + \Delta k\, M_G}} \tag{5.130}$$

in jedem Funktional $J(w)$ berechnen. Man braucht nur das Moment M_G der Einflussfunktion des Funktionals $J(w)$ in der Feder und das Moment M in der Feder aus der Last, beide am ‚alten' System.

Ändern sich m **Federn in** m **Punkten** x_i, dann geht (5.126) in ein lineares Gleichungssystem über, das man wieder per Iteration lösen kann, eventuell mit einer Konvergenzbeschleunigung wie in Kap. 5.30 beschrieben,

$$M_c^{(i+1)}(x_j) = -\sum_{l=1}^{m} \Delta k(x_l)\, \frac{M_c^{(i)}(x_l)}{k_c(x_l)}\, \frac{M_G(x_l, x_j)}{k(x_l)} + M(x_j) \quad j \quad = 1, 2, \ldots m\,. \tag{5.131}$$

Hier ist $M_G(x_l, x_j)$ das Moment ‚ante' in der Feder x_l (dem Ort), das von der Einflussfunktion für das Moment im Punkt x_j (der Ursache) in x_l erzeugt wird.

Die Stahlhallen in Bild 5.31 und 5.32 wurden so untersucht. Bei dem ersten System ging es um den Übergang von einem starren Anschluss in den Rahmenecken zu einer drehelastischen Einspannung. Bei dem zweiten System, auf

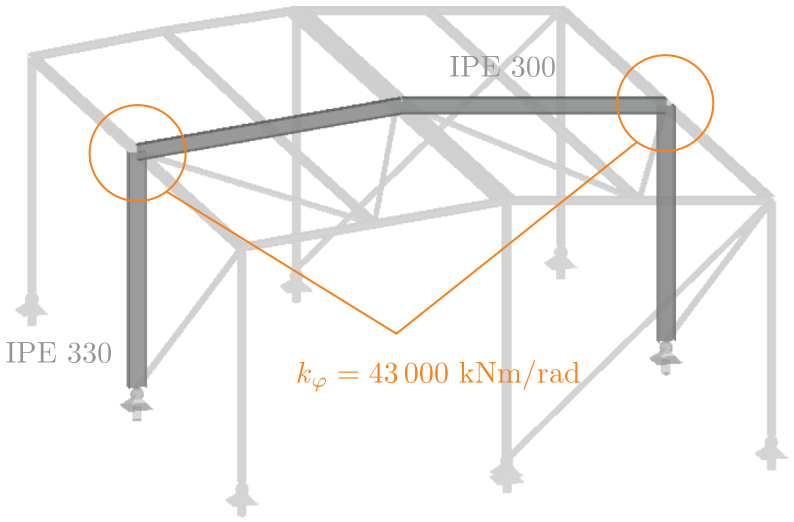


Bild 5.31. 3D-Modell eines Rahmens mit 47 Stäben und 180 Freiheitsgraden. Die drehelastische Einspannung reduzierte das Einspannmoment von $M = -86.6$ kNm auf $M_c = -75.0$ kNm, [35]

das wir hier eingehen, ging es um den Einfluss der drehelastischen Einspannung der Stützen auf die horizontale Verschiebung der Kranbahn in einem ausgewählten Punkt x_P. In einer ersten Statik waren die Stützen voll eingespannt gerechnet worden.

Zuerst wurde der Punkt mit einer horizontalen Einzelkraft $P = 100$ kN belastet (100 wegen der ‚Sichtbarkeit') und die Einspannmomente $M_G^P(x_i), i = 1, 2, \ldots 8$ dieser Einflussfunktion (am ‚alten', dem voll eingespannten System) in den acht Fundamenten berechnet. Dann wurde die Iterationsvorschrift (ein 8×8-System) zur Bestimmung der acht Einspannmomente $M_c(x_i)$ aus der Verkehrslast (*Kran (25t-Hublast) - vert. Randlasten + Schräglaufkräfte in Reihe 4*) an dem drehelastischen System aufgestellt und die $M_c(x_i)$ wie in (5.131) iterativ bestimmt. Wegen der ursprünglichen Festeinspannung $k(x_i) = \infty$ aber mit der Modifikation wie in (5.149) beschrieben

$$M_c^{(i+1)}(x_j) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{k_c(x_l)}\, M_c^{(i)}(x_l)\, M_G(x_l, x_j) + M(x_j) \quad j \quad = 1, 2, \ldots m\,. \tag{5.132}$$

Mit den auf Eins zurückgestellten Momenten $M_G^P(x_i)/100$ und den $M_c(x_i)$ konnte dann die horizontale Verschiebung $u_c(x_P)$ berechnet werden

$$u_c(x_P) = -\sum_{l=1}^{8} \frac{1}{k_c(x_l)} M_c(x_l)\, M_G^P(x_l) \frac{1}{100}\,. \tag{5.133}$$

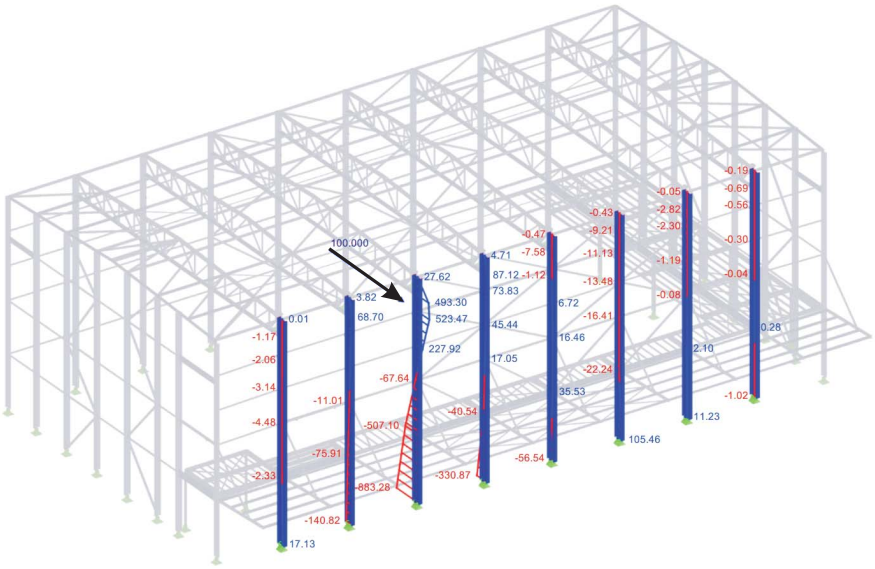


Bild 5.32. Stahlhalle, 1 643 Stäbe, 5 340 FG, 121 LF. Zu bestimmen war der Einfluss der drehelastischen Einspannung der acht Stützen auf die horizontale Verschiebung in Höhe der Kranbahn. Die hier vorgestellte Technik reduzierte das Problem auf ein 8×8 Gleichungssystem, das per Iteration gelöst wurde, [35], (RSTAB)

Sind die Einspannmomente $M_c(x_l)$ der Stützen aus dem maßgebenden Lastfall ermittelt, kann man die Änderung in jeder anderen Weg- oder Kraftgröße $J(w)$ der Halle auf Grund der Änderungen in den Lagersteifigkeiten berechnen. Was man braucht, sind nur die acht Einspannmomente $M_G(x_l)$ (am ‚alten' System), die zu der Einflussfunktion für $J(w)$ gehören, siehe Bild 5.33. Diese Momente mit den geänderten Momenten $M_c(x_l)$ aus der Verkehrslast multipliziert, sinngemäß wie in 5.133, ergibt die Änderung $J(e)$.

Die Alternative zur Iteration ist die direkte Lösung. Wir betrachten zunächst eine Feder, die Teil eines Tragwerks ist und deren Steifigkeit $k \to k + \Delta k$ sich ändert. Ist das Funktional $J(w) = w'$ der Tangens des Drehwinkels in der Feder, dann gilt

$$J(e) = w'_c - w' = -\Delta k \, w'_c \, w'_G \,, \tag{5.134}$$

was man nach w'_c auflösen kann

$$w'_c = w' \, \frac{1}{1 + \Delta k \, w'_G} \,. \tag{5.135}$$

Wenn die Feder den Drehfreiheitsgrad u_7 hat, dann ist w'_G der Eintrag $g_{7,7}$ in der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$. Mit w'_c kann man dann das geänderte Moment $M_c = (k + \Delta k) \, w'_c$ in der Feder berechnen und die Änderung $J(e)$

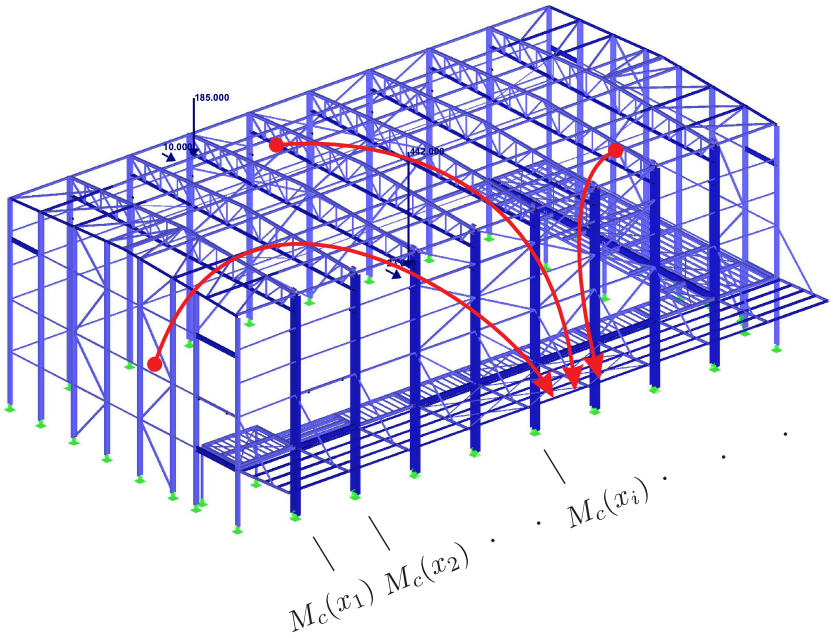


Bild 5.33. Die Einflussfunktion (G) für ein Moment, eine Querkraft, eine Durchbiegung erzeugt Momente (M_y^G) in den acht Fusspunkten der Stützen, und dieser Vektor $\boldsymbol{M}_y^G$ skalar multipliziert mit dem Vektor $\boldsymbol{M}_c$ der acht Fusspunkts-Momente $k_c^{-1}(x_i)M_c(x_i)$ ergibt die Änderung $J(e) = \boldsymbol{M}_c^T \boldsymbol{M}_y^G$ des Moments, der Querkraft, etc. im Aufpunkt beim Übergang von festen zu drehelastischen Lagern (RSTAB)

in jedem anderen Funktional, z.B. der Verschiebung u_3 in einem Knoten. Man muss nur für w'_G in (5.126) den entsprechenden Wert einsetzen. Hat die Drehfeder, wie angenommen, den Freiheitsgrad u_7, dann ist w'_G gleich dem Eintrag $g_{3,7}$ in der Flexibilitätsmatrix $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$

$$J(e) = u_{c3} - u_3 = -\Delta k\, w'_c\, g_{3,7}\,. \tag{5.136}$$

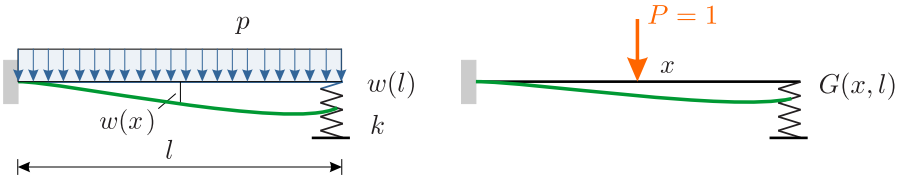
Ändern sich die Steifigkeiten in zwei Federn, die an den Stellen x_1 und x_2 liegen, dann lautet der Ergänzungsterm zur schwachen Form

$$d(w_c, \delta w) = \Delta k_1\, w'_c(x_1)\, \delta w'(x_1) + \Delta k_2\, w'_c(x_2)\, \delta w'(x_2)\,. \tag{5.137}$$

Das Ziel ist zunächst die Bestimmung von $w'_c(x_1)$ und $w'_c(x_2)$. Die Verdrehungen in den Federn sind zwei Funktionale $J_1(w)$ und $J_2(w)$

$$J_i(w) = w'(x_i) = \int_0^l G_i(y, x_i)\, p(y)\, dy \qquad i = 1, 2 \tag{5.138}$$

zu denen die Einflussfunktionen $G_i(y, x_i)$ gehören. Die Änderungen in den Verdrehungen ergeben sich zu



$$w(x) = \int_0^l \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dx + k\,w(l)\,G(x,l)$$

Bild 5.34. System mit Feder und Mohrsche Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned} J_1(e) &= w_c'(x_1) - w'(x_1) = -\Delta k_1\,w_c'(x_1)\,G_1'(x_1,x_1) - \Delta k_2\,w_c'(x_2)\,G_2'(x_1,x_2) \\ J_2(e) &= w_c'(x_2) - w'(x_2) = -\Delta k_1\,w_c'(x_1)\,G_1'(x_1,x_2) - \Delta k_2\,w_c'(x_2)\,G_2'(x_2,x_2)\,, \end{aligned} \tag{5.139}$$

was dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c'(x_1) \\ w_c'(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'(x_1) \\ w'(x_2) \end{bmatrix} \tag{5.140}$$

mit

$$a_{11} = \Delta k_1\,G_1'(x_1,x_1) \qquad a_{12} = \Delta k_2\,G_1'(x_1,x_2) \tag{5.141a}$$

$$a_{21} = \Delta k_1\,G_1'(x_1,x_2) \qquad a_{22} = \Delta k_2\,G_2'(x_2,x_2) \tag{5.141b}$$

entspricht. Wären die Drehfreiheitsgrade in den beiden Federn u_7 und u_9, dann findet man die Terme $G_i'(x_j,x_i)$ an den entsprechend bezifferten Stellen in der Inversen $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1}$

$$G_1'(x_1,x_1) = g_{7,7} \qquad G_1'(x_1,x_2) = g_{7,9} \tag{5.142a}$$

$$G_2'(x_2,x_1) = g_{9,7} \qquad G_2'(x_2,x_2) = g_{9,9}\,. \tag{5.142b}$$

Die Änderung in irgendeinem Funktional $J(w)$ beträgt dann

$$J(e) = -\Delta k_1\,w_c'(x_1)\,G'(x_1,x) - \Delta k_2\,w_c'(x_2)\,G'(x_2,x)\,, \tag{5.143}$$

wenn $G(y,x)$ die Einflussfunktion für $J(w)$ ist und die $G'(x_i,x)$ die Ableitungen in den beiden Drehfedern sind.

Senkfeder

Der Vollständigkeit halber behandeln wir auch noch den Fall einer **Senkfeder** mit sich ändernder Steifigkeit, $k \to k + \Delta k$, obwohl sich die Formulierungen im Grunde an dem zuvor gesagten ablesen lassen.

Wir betrachten beispielhaft das Funktional $J(w) = w(x)$, also die Durchbiegung in einem Punkt x. Die Grundgleichung lautet (Mohrsche Arbeitsgleichung)

$$w(x) = \int_0^l \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dy + k \cdot w(l) \cdot G(x,l) \tag{5.144}$$

wobei $\bar{M}$ das Moment der Einflussfunktion $G(x,y)$ ist; y ist die Laufvariable und x ist der Aufpunkt, siehe Bild 5.34. Nach obigem ergibt sich die Änderung in dem Funktional zu

$$J(e) = w_c(x) - w(x) = -\Delta k\, w_c(l)\, G(x,l)\,. \tag{5.145}$$

Um $w_c(l)$ zu bestimmen, wenden wir die Formel auf den Punkt $x = l$ an

$$w_c(l) - w(l) = -\Delta k\, w_c(l)\, G(l,l) \tag{5.146}$$

was

$$w_c(l) = \frac{w(l)}{1 + \Delta k\, G(l,l)} \tag{5.147}$$

ergibt und somit geht (5.145) über in

$$\boxed{J(e) = -\frac{\Delta k\, w(l)\, G(x,l)}{1 + \Delta k\, G(l,l)}}\,. \tag{5.148}$$

Damit kann man die Änderung in jedem Funktional $J(w)$ verfolgen. Es ist $w(l)$ der Federweg (= Zusammendrückung) unter Last, (alle Werte am ‚alten' System), $G(x,l)$ ist der Federweg aus dem Dirac Delta im Aufpunkt x, das zu dem Funktional gehört (Kraft $P = 1$, Moment $M = 1$, Spreizung = 1, Sprung = 1), $G(l,l)$ ist der Federweg, wenn eine Kraft $P = 1$ auf die Feder drückt, und Δk ist die Änderung der Steifigkeit. Mit $w_c(l)$ kennt man im übrigen auch die geänderte Federkraft $(k + \Delta k)\, w_c(l)$ unter Last.

Starre Lager

Wird aus einer starren Einspannung $k = \infty$ eine elastische Einspannung mit der Steifigkeit k_c, dann kommt man mit einer geschickten Umformung zum Ziel

$$J(e) = -\Delta k\, w_c'\, w_G' = -\frac{k_c - k}{k_c\, k} M_c\, M_G = -(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_c})\, M_c\, M_G = \frac{1}{k_c}\, M_c\, M_G\,. \tag{5.149}$$

Hier ist M_G das ursprüngliche Einspannmoment der Einflussfunktion des Funktionals $J(w)$ und M_c ist das Einspannmoment in der (dann elastischen) Einspannung aus der Last.

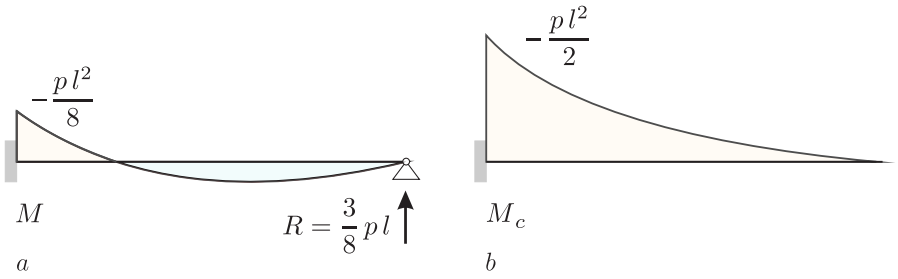


Bild 5.35. LF Gleichstreckenlast

Angewandt auf $J(e) = M_c - M$ selbst ergibt sich

$$M_c - M = \frac{1}{k_c}\, M_c\, M_G\,, \tag{5.150}$$

wobei M_G das Moment ist, das das gelenkig gemachte Balkenende um $\tan\varphi = 1$ spreizt. Das kann man nach M_c auflösen und so mit (5.149) jede Änderung $J(e)$ verfolgen, wenn man für M_G das Einspannmoment setzt, das zur Einflussfunktion für $J(w)$ am ursprünglichen Tragwerk gehört.

Sinngemäß dasselbe gilt natürlich für Senkfedern

$$\boxed{J(e) = \frac{1}{k_c}\, R_c\, R_G}\,, \tag{5.151}$$

wenn R_c und R_G die entsprechenden Lagerkräfte sind. Fällt z.B. ein starres Lager aus, siehe Bild 5.35, dann bringt der Praktiker die Lagerkraft R in umgekehrter Richtung auf das modifizierte System auf und addiert die Ergebnisse zu den ursprünglichen Resultaten.

Im Sinne der obigen Formel ist R_c die umgedrehte Lagerkraft R und die Steifigkeit am Ende des Kragträgers (dort, wo vorher das Lager war) beträgt

$$k_c = \frac{3EI}{l^3}\,. \tag{5.152}$$

Zur Einflussfunktion für das Einspannmoment gehört die Kraft $R_G = 1/l$, ferner ist $R_c = 3/8 \cdot p\,l$ und somit ergibt sich z.B. für die Änderung des Einspannmoments der Wert

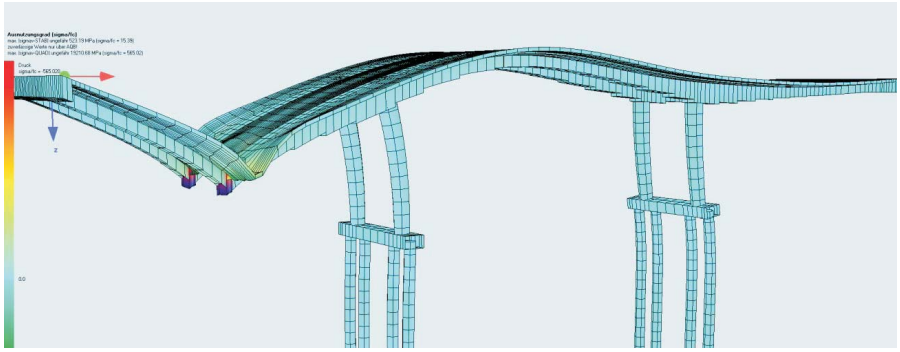
$$J(e) = M_c - M = \frac{l^3}{3\,EI} \cdot \frac{3}{8}\,p\,l \cdot \frac{1}{l} = p\,l^2\,\frac{3}{8} \tag{5.153}$$

was mit der Differenz $pl^2/2 - pl^2/8$ übereinstimmt.

Bei dem Ausfall von Lagern ist es also so, dass man das M_c bzw. R_c kennt, denn es sind gerade die umgedrehten Lagerreaktionen, und man muss sich nur die Steifigkeit k_c besorgen, also die Steifigkeit in Richtung des vorher gesperrten Freiheitsgrades.



a



b

Bild 5.36. Semi-integrale Brücke auf Pfählen **a)** FE-Modell **b)** Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ (SOFiSTiK)

5.26 Integrale Brücken

Eine beispielhafte Anwendung finden diese Ideen auch bei integralen Brücken, bei denen die Widerlager, die Pfeiler und der Überbau monolithisch miteinander verbunden sind, um die Wartungsarbeiten zu vereinfachen.

Die Idee ist relativ neu und als daher im Zuge der Autobahnerneuerung der A3 die *Fahrbachtalbrücke* bei Aschaffenburg, eine **semi-integrale Brücke** (keine monolithische Verbindung mit den Widerlagern) errichtet werden sollte, hat das Brückenbauamt für Nordbayern darauf bestanden, dass Untersuchungen an Pfählen vorgenommen wurden, um den Einfluss der Grenzwerte $c \pm \Delta c$ der elastischen Bettung c auf den Überbau abschätzen zu können, [188].

In einer Diplomarbeit wurden die hier entwickelten Ideen benutzt, um dies rechnerisch zu verfolgen, [194]. Das Beispiel eignet sich gut, weil ja zwischen den Aufpunkten im Überbau der Brücke und den Pfählen eine relativ lange ‚Strecke' liegt, siehe Bild 5.36, und der Einfluss den Weg praktisch zweimal gehen muss, vom Überbau zu den Pfählen um die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ zu erzeugen und die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ gehen denselben Weg zurück, um die Schnittgrößen zu ändern, $M(x) \to M_c(x)$, $V(x) \to V_c(x)$ etc. Eine Situation, die typisch für ***Substrukturen*** ist.

In Substrukturen spielen die Einflüsse nach einer Steifigkeitsänderung ‚Ping-Pong', wechseln die Signale zwischen dem Lastgurt und der Substruktur hin und her bis die Signale ausgeglichen sind. Die Kräfte $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+$ erzeugen die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ und die muss genau so groß sein, dass $\boldsymbol{u}_c$ die Kräfte $\boldsymbol{f}^+$ erzeugt.

Zurück zu der Brücke: Betrachten wir zum Beispiel das Moment $M(x)$ im Überbau an einer Stelle x, das sich durch die Überlagerung der Einflussfunktion $G_2(y, x)$ mit der Belastung p berechnen lässt

$$M(x) = \int_0^l G_2(y, x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,. \tag{5.154}$$

Die Frage, wie sich das Moment ändert, wenn sich der Bettungsmodul der Pfähle ändert, $c \to c + \Delta c$, zielt auf den Unterschied zwischen der Einflussfunktion G_2 (Modul c, Matrix $\boldsymbol{K}$) und der Einflussfunktion G_{2c}, die am System $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ mit dem Modul $c + \Delta c$ berechnet wird

$$M_c(x) = \int_0^l G_{2c}(y, x)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f}\,. \tag{5.155}$$

Wegen

$$\boldsymbol{g}_c^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) \tag{5.156}$$

kann man das auf die Bedeutung des Vektors $\boldsymbol{f}^+$ für das System $\boldsymbol{K}$ zurückspielen.

Die Vektoren $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{g}_c$ sind die Knotenwerte der beiden Einflussfunktionen am Modell $\boldsymbol{K}$ bzw. $\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$. Der Vektor $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c$ sind die

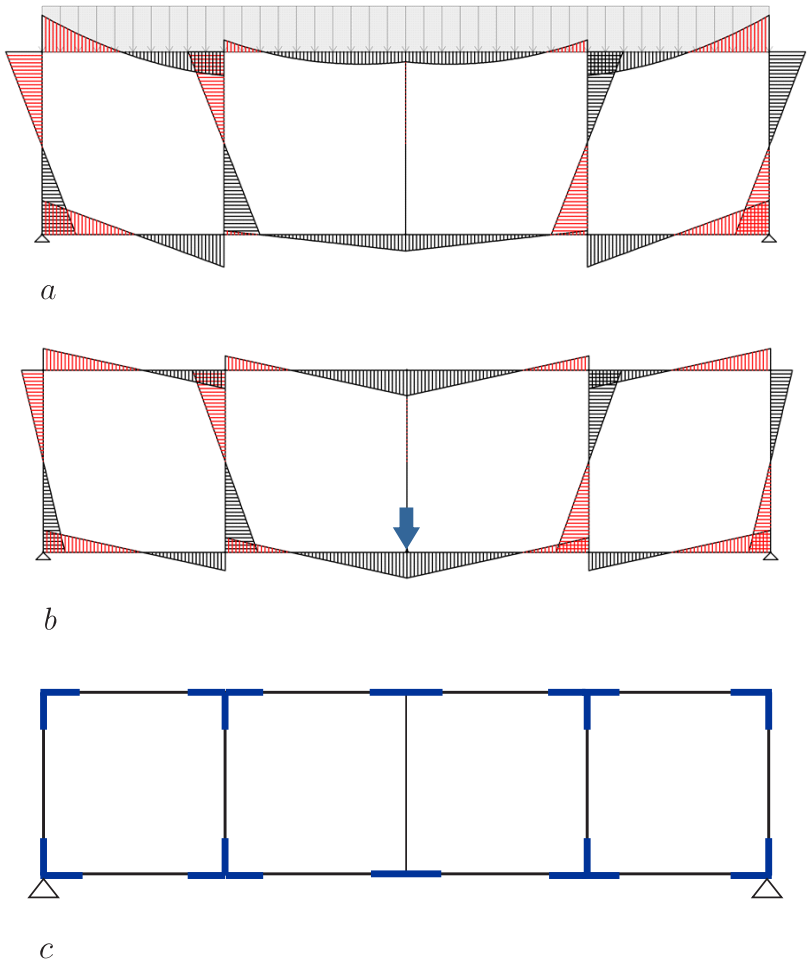


Bild 5.37. Verstärkung eines Vierendeel Träger **a)** Biegemomente aus der Riegellast **b)** Biegemomente M_G aus der Punktlast $P = 1$ (Dirac Delta δ_0) **c)** vorgeschlagene Änderungen, [91]

Zusatzkräfte in den Knoten der Pfähle aus der Änderung des Bettungsmoduls, $c \to c + \Delta$.

Schreiben wir die Biegeverformung in einem Pfahlelement in der Form

$$w_c(x) \simeq w_c(0) + w_c'(0) \cdot x + \frac{1}{2}\, w_c''(0) \cdot x^2\,, \tag{5.157}$$

dann liefert nur der quadratischen Term Beiträge zu $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$, weil in jedem Element die Zeilen von $\boldsymbol{\Delta K}_e$ (näherungsweise) orthogonal zu Starrkörperbewegungen sind – den ersten beiden Termen. Die quadratischen Terme werden jedoch die kleinsten der drei Terme sein, so dass auch $\boldsymbol{f}^+$ relativ

klein sein wird. Dazu kommt noch, dass die Pfähle relativ weit vom Überbau entfernt liegen, so dass der Einfluss der Pfahlkräfte $\boldsymbol{f}^+$ auf den Überbau, unabhängig von ihrer Größe, relativ klein sein wird. Die Rechenergebnisse bestätigten das, die Momente $M(x)$ und $M_c(x)$ weichen kaum voneinander ab.

Man kann das Ganze auch andersherum aufzäumen, indem man direkt die Änderungen $G_2(y,x) \to G_{2c}(y,x)$ verfolgt. Die Knotenwerte $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion G_2 sind die Lösung des Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ mit $j_i = M(\varphi_i)(x)$ und die Knotenwerte $\boldsymbol{g}_c$ der Einflussfunktion G_{2c} sind die Lösung des Systems

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+ \tag{5.158}$$

mit dem Vektor $\boldsymbol{j}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c$. Die durch die Spreizung des Aufpunktes x erzeugte Bewegung $g_c(x) = g_c(0) + g_c'(0)\,x + 0.5 * g_c''(0)^2/x \ldots$ (in den Pfählen) dürfte aber demselben Argument unterliegen wie oben. Die Einträge in dem Vektor $\boldsymbol{j}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{g}_c$ sollten relativ klein sein und weil die Knoten der Pfähle vom Überbau relativ weit weg liegen, sollte der Einfluss der $\boldsymbol{j}^+$ klein sein und somit auch der Unterschied zwischen den Einflussfunktionen $G_2(y,x)$ und $G_{2c}(y,x)$.

Bemerkung 5.6. Wir haben oben etwas vereinfacht: Die Differentialgleichung eines Pfahlelementes, $EI\,w^{IV} + c\,w = p$, legt es nahe, für die Elementmatrix die Näherung $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{Beam} + c \cdot \boldsymbol{M}$ zu benutzen, also die normale Balkenmatrix und die Massenmatrix $\boldsymbol{M}$, mit $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$. Nur die Zeilen von $\boldsymbol{K}_{Beam}$ sind orthogonal zu den Starrkörperbewegungen. Die Massenmatrix in $\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{K}_{Beam} + \Delta c \cdot \boldsymbol{M}$ reagiert auf die Starrkörperanteile in $\boldsymbol{u}_c$, aber der Gesamteffekt ist anscheinend sehr gering.

5.27 Verstärkungen

Die Einflussfunktionen kann man auch dazu benutzen, um Tragwerke gezielt zu verstärken, weil man Änderungen $J(e) = J(u_c) - J(u)$ allein durch Betrachtung des verstärkten Elements berechnen kann,

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c\,. \tag{5.159}$$

Man muss nur die Änderung $\boldsymbol{\Delta K}$ in der Steifigkeitsmatrix des Elements von links und rechts mit den entsprechenden Teilen der Vektoren $\boldsymbol{g}^T$ und $\boldsymbol{u}_c$ multiplizieren. Das Problem ist natürlich, dass wir die dafür nötigen Komponenten des Vektors $\boldsymbol{u}_c$ nicht kennen, aber es gibt Möglichkeiten, siehe Kapitel 5.30, an diese Werte zu kommen oder man rechnet einfach mit $\boldsymbol{u}$.

Bei Rahmentragwerken hat diese Gleichung, wenn wir uns hier auf die Biegeeffekte beschränken, ja die Gestalt

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M_G\, M_c}{EI_c}\, dx\,. \tag{5.160}$$

Hier ist ΔEI die Steifigkeitsänderung in dem Balkenstück (x_a, x_b), M_G ist das Moment aus der Einflussfunktion, die zu dem Funktional $J(u)$ gehört, und M_c ist das Moment in dem Balkenstück *nach* der Steifigkeitsänderung.

Angenommen wir wollen den Vierendeel-Träger in Bild 5.37 so verstärken, dass die Durchbiegung im unteren Riegel, kleiner wird. Hierzu belasten wir die Mitte des unteren Trägers mit einer Einzelkraft $P = 1$ – das ergibt die Einflussfunktion für die Durchbiegung – und vergleichen die Momente M_G aus der Einzelkraft mit den Momenten $M \sim M_c$ aus der Riegellast. Dort, wo beide Momente groß sind (und nicht orthogonal zueinander), dort ändern wir am besten die Steifigkeit $EI \to EI + \Delta EI$. Das sind – nicht überraschend – gerade die Ecken.

5.28 Klassische Formulierung

In der Optimierung nennt man das Operieren mit Einflussfunktionen die ***adjoint method of analysis*** und kommt auf

$$J(e) = J(u_c) - J(u) \simeq -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u} \tag{5.161}$$

als Näherung für den exakten Ausdruck

$$J(e) = J(u_c) - J(u) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u}_c = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}^+\,. \tag{5.162}$$

Wir haben hier, um die Notation nicht zu überfrachten, zunächst angenommen, dass das Funktional $J(u)$ nicht von der sich ändernden Steifigkeit $EI \to EI + \Delta EI$ abhängt, etwa, wenn $J(u) = u(x_i)$ eine Verschiebung in einem Knoten ist.

Zur Herleitung der obigen Näherung (5.161) nehmen wir an, dass die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(p_1, p_2, \ldots, p_m) \tag{5.163}$$

und ebenso der Vektor $\boldsymbol{f}$ eine Funktion von m Modellparametern p_i sind und wir fragen, wie die Ableitung der Lösung von $\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{f}$, nach den p_i aussieht. Weil $\boldsymbol{K u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ konstant ist, sind die Ableitungen null

$$\frac{d}{dp_i}(\boldsymbol{K u} - \boldsymbol{f}) = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_i}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p_i} = 0\,, \tag{5.164}$$

was

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i} = -\boldsymbol{K}^{-1}\,(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_i}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p_i}) = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p(i) \tag{5.165}$$

ergibt. Der Vektor $\boldsymbol{f}^p(i)$ heißt ***Pseudo-Lastvektor***. Es gibt m solche Vektoren entsprechend den m Parametern p_i. Im folgenden schreiben wir einfacher

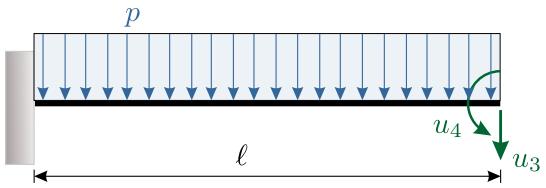


Bild 5.38. Kragarm mit konstanter Streckenlast

$\boldsymbol{f}^p$, weil wir wissen, welches (i) gemeint ist.

Beispiel 5.2. Wir studieren die Abhängigkeit der Lösung $\boldsymbol{u} = \{u_3, u_4\}^T$ des Kragträgers in Bild 5.38 von der Länge ℓ des Trägers.

$$\boldsymbol{K} = EI \begin{bmatrix} 12/\ell^3 & 6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 & 4/\ell \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{p}{EI} \begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = p \begin{bmatrix} \ell/2 \\ \ell^2/12 \end{bmatrix} . \quad (5.166)$$

Mit

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \ell^3/3 & -\ell^2/2 \\ -\ell^2/2 & \ell \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell} = EI \begin{bmatrix} -36/\ell^4 & -12/\ell^3 \\ -12/\ell^3 & -4/\ell^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell} = p \begin{bmatrix} 1/2 \\ \ell/6 \end{bmatrix} \quad (5.167)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right] \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\right] \left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right] \right) = \frac{p}{2} \begin{bmatrix} \ell^3 \\ -\ell^2 \end{bmatrix} . \quad (5.168)$$

Weil der Gradient $\partial \boldsymbol{u}/\partial l$ nicht konstant ist, ist

$$\boldsymbol{u}(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{u}(\ell) \simeq \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell} \Delta\ell \quad (5.169)$$

nur eine Näherung.

Die Ableitung der Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ nach p ist hingegen konstant

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial p}\right] \right) = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

und so ist

$$\boldsymbol{u}(p + \Delta p) - \boldsymbol{u}(p) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p} \Delta p = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix} \cdot \Delta p \quad (5.171)$$

die exakte Differenz.

Die Abhängigkeit der Lösung $\boldsymbol{u}$ von EI wiederum ist nichtlinear, weil ja beim Lösen von $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ durch die Determinante dividiert wird (das sieht man an der *Cramerschen Regel*) und so das EI im Nenner ein $-EI^{-2}$ in der Ableitung ergibt.

Es ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI} = \begin{bmatrix} 12/\ell^3 & 6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 & 4/\ell \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial EI} = \boldsymbol{0} \tag{5.172}$$

und mit $\boldsymbol{K}^{-1}\partial \boldsymbol{K}/\partial EI = EI^{-1} \cdot \boldsymbol{I}$ folgt somit

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial EI} = -\left[\boldsymbol{K}^{-1}\right]\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI}\right]\left[\boldsymbol{u}\right] - \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial EI}\right]\right) = -\frac{1}{EI}\cdot \boldsymbol{u} = -\frac{p}{EI^2}\begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix}. \tag{5.173}$$

Schätzt man also die Änderung $\boldsymbol{u}(EI) \to \boldsymbol{u}(EI + \Delta EI)$ damit ab

$$\boldsymbol{u}(EI + \Delta EI) - \boldsymbol{u}(EI) \simeq \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial EI}\cdot \Delta EI = -\frac{p}{EI^2}\begin{bmatrix} \ell^4/8 \\ -\ell^3/6 \end{bmatrix}\cdot \Delta EI\,, \tag{5.174}$$

dann ist das eine Näherung, ist das nur der erste Term in der Taylor Entwicklung. Bei gleichem ΔEI hängt die Änderung in $\boldsymbol{u}$ davon ab, wo man sich auf der Skala EI befindet. Wäre der Zusammenhang linear, dann würde die Änderung nur von ΔEI abhängen.

Funktionale

Nun betrachten wir Funktionale. Wir wollen die **Sensitivität** eines Funktionals $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ bezüglich der Parameter p_i bestimmen

$$\frac{d\,J}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}(\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}) = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}^T\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial p_i}\,. \tag{5.175}$$

Hier steht jetzt also mit $d/dp_i\,\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ auch die Ableitung von J nach p_i, was wir zu Anfang vernachlässigt haben.

Mit (5.165) folgt

$$\frac{d\,J}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boxed{\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p} = \frac{d}{dp_i}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{f}^p\,. \tag{5.176}$$

Im letzten Schritt haben wir die ***adjoint variable***, den Vektor $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}$, eingeführt. Das wird in der Literatur als ‚Trick' gesehen, mit dem man über eine adjungierte Formulierung die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ von $\boldsymbol{f}^p$ wegbewegen kann[11].

Adjungiert heißt hier einfach nur anders klammern, denn ein Skalarprodukt aus zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{b}$ kann man, (die Matrix $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T$ ist hier symmetrisch), auf zwei Arten lesen

[11] Bei diesem Zugang taucht der Vektor $\boldsymbol{g}$ (oder $\boldsymbol{\lambda}$) also auf rein algebraischem Wege auf ohne dass das Konzept von Greenschen Funktionen oder Dirac Deltas erwähnt wird. Das Endergebnis ist aber natürlich genau dasselbe.

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{a})^T \boldsymbol{b} \tag{5.177}$$

oder hier

$$\boldsymbol{j}^T (\boldsymbol{K}^{-1}\, \boldsymbol{f}^p) = (\boldsymbol{K}^{-1}\, \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{f}^p = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}^p \,. \tag{5.178}$$

Der Pfiff ist, dass $\boldsymbol{K}^{-1}$ eine Inverse ist und man so auf der rechten Seite $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}^p$ schreiben kann, wenn $\boldsymbol{\lambda}$ die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j}$ ist. Womit auch klar ist, dass der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ genau der Vektor $\boldsymbol{g}$ aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ ist.

Mit den Sensitivitäten dJ/dp_i kann man die Zuwächse

$$J(p_i + \Delta p_i) - J(p_i) \simeq \Delta J_i = \frac{dJ}{dp_i}\, \Delta p_i \tag{5.179}$$

abschätzen. Und das ist der Unterschied zu den Formeln mit den $\boldsymbol{f}^+$, die den Schritt $J(u_c) - J(u)$ in geschlossener Form geben, während in der Optimierung die Steigung, der Gradient, im Punkt p_i berechnet wird und dann auf den Zuwachs $J(u_c) - J(u)$ extrapoliert wird.

Vergleich

Weil man aber bei der geschlossenen Formulierung den Vektor $\boldsymbol{f}^+$ nicht kennt und mit der Näherung $\boldsymbol{f}^+ \simeq -\boldsymbol{\Delta K u}$ arbeiten muss, sind die beiden Zugänge auf numerischer Ebene identisch.

Mit finiten Differenzen

$$\frac{d}{d\, p_i} \boldsymbol{j}^T \boldsymbol{u} \simeq \frac{1}{\Delta p_i} (\boldsymbol{j}(p_i + \Delta p_i) - \boldsymbol{j}(p_i))^T \boldsymbol{u} = \frac{1}{\Delta p_i} (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T\, \boldsymbol{u} \tag{5.180}$$

und (wenn die Last nicht von p_i abhängt, $\partial \boldsymbol{f}/\partial p_i = \boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{f}^p = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_i}\, \boldsymbol{u} = \frac{1}{\Delta p_i} (\boldsymbol{K}(p_i + \Delta p_i) - \boldsymbol{K}(p_i))\boldsymbol{u} = \frac{1}{\Delta p_i}\, \boldsymbol{\Delta K u} \tag{5.181}$$

geht (5.179), also eigentlich (5.176), über in

$$J(p_i + \Delta p_i) - J(p_i) \simeq (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Delta K u} \,. \tag{5.182}$$

In Kapitel 5.7, (5.36), hatten wir die exakte Formel[12]

$$J(u_c) - J(u) = (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}_c^T \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{f}^+ = (\boldsymbol{j}_c - \boldsymbol{j})^T \boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{g}}_c^T \boldsymbol{\Delta K u}_c \tag{5.183}$$

hergeleitet. Sie ist dann anzuwenden, wenn der Parameter p_i auch in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ steckt, wie das bei Kraftgrößen der Fall sein kann, wenn sich die Steifigkeit, das wäre dann das p_i, **in dem Element mit dem Aufpunkt** (nur dann) ändert.

[12] Wir schreiben $\bar{\boldsymbol{g}}_c = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{j}_c$ im Unterschied zu $\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{K}_c^{-1} \boldsymbol{j}_c$

Setzt man nun in (5.183) für $\bar{\boldsymbol{g}}_c = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c \simeq \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\lambda}$ und setzt für $-\boldsymbol{\Delta K u}_c$ die Näherung $-\boldsymbol{\Delta K u}$, dann sind die beiden Formeln identisch.

Beispiel 5.3. Der Kragträger in Bild 5.38 habe die Länge $\ell = 4$ und trage eine Streckenlast $p = 10$ kN/m. Wie ändert sich das Moment an der Stelle $x = 2$, wenn der Kragträger um einen Meter verlängert wird?

Es geht also um das Funktional $J(w) = M(x)$ und dessen Änderung

$$\frac{dJ}{d\ell} = \frac{d}{d\ell}\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right). \tag{5.184}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(x) &= \{M(\varphi_3)(x), M(\varphi_4)(x)\}^T = EI\,\{-6/\ell^2 + 12\,x/\ell^3, -2/\ell + 6\,x/\ell^2\}^T \\ &= \{0, 2.5\}^T \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\lambda} = \{-2, 1\}^T = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}(x)\end{aligned} \tag{5.185}$$

und

$$\frac{d}{d\ell}\,\boldsymbol{j}(x) = EI\,\{12/\ell^3 - 36\,x/\ell^4, 2/\ell^2 - 12\,x/\ell^3\}^T = \{-0.0938, -0.250\}^T\,. \tag{5.186}$$

Die Ableitungen der Knotenkräfte $f_3 = p \cdot 0.5\,\ell$ und $f_4 = p \cdot \ell^2/12$ betragen

$$\partial \boldsymbol{f}/\partial \ell = \{0.5 \cdot p, \ell/6 \cdot p\}^T\,. \tag{5.187}$$

Ferner ist, siehe (5.167),

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell} = EI\begin{bmatrix} -0.1406 & -0.1875 \\ -0.1875 & -0.2500 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 320 \\ -106.6667 \end{bmatrix} \tag{5.188}$$

Das ergibt mit $\Delta\ell = 1$

$$\frac{dJ}{d\ell}\,\Delta\ell = \left[\frac{d}{d\ell}\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \ell}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \ell}\right)\right]\Delta\ell = -23.33\,, \tag{5.189}$$

während die exakte Differenz der FE-Momente im Punkt $x = 2$ den Wert $M_c(x) - M(x) = -54.16 + 26.66 = -27.5$ hat. (FE-Momente heißt bevor die lokalen Lösungen dazu addiert werden, also die Momente aus den Knotenkräften f_i).

Anwendung auf Steifigkeitsmatrizen

Bei Steifigkeitsmatrizen sind die Steifigkeiten k (von nun ab heißen die $p_i \rightarrow k_i$) Vorfaktoren

$$\boldsymbol{K} = k \cdot \boldsymbol{K}' \qquad k = \frac{EA}{l} \qquad k = \frac{EI}{l^3} \qquad (\boldsymbol{K}' = \frac{1}{k}\boldsymbol{K})\,. \tag{5.190}$$

Nehmen wir an, dass die rechte Seite $\boldsymbol{f}$ nicht von k abhängt und k auch nicht in dem Vektor $\boldsymbol{j}$ vorkommt (wenn etwa $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{u} = u_i$), dann folgt

$$\boldsymbol{f}^p = (\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial k}\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial k}) = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \tag{5.191}$$

und mit

$$\frac{d\,J}{dk} = \frac{d}{dk}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p = -\boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{f}^p = -\boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \tag{5.192}$$

folgt für das Inkrement genau der Ausdruck (5.161) in der Einleitung

$$J(\boldsymbol{e}) = J(k+\Delta k) - J(k) \simeq \frac{dJ}{dk}\,\Delta k = -\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}\,\Delta k = -\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}\,. \tag{5.193}$$

Schreiben wir $\boldsymbol{g}$ statt $\boldsymbol{\lambda}$ und lesen $-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ als Näherung für $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$, dann ist das genau der Ausdruck $J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+$.

Bemerkung 5.7. Der Vektor $\boldsymbol{f}^+$ ist der Vektor, den man auf das alte System zusätzlich aufbringen muss, um auf $\boldsymbol{u}_c$ zu kommen

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{f}^+\,, \tag{5.194}$$

ist also so etwas wie ein Pseudo-Lastvektor. In der Literatur wird unter dem **Pseudo-Lastvektor** jedoch der ‚Gradient' $\boldsymbol{f}^p$ von $\boldsymbol{f}^+$ verstanden

$$\boldsymbol{f}^+ \simeq -\boldsymbol{f}^p \cdot \Delta k\,, \tag{5.195}$$

der erst nach Multiplikation mit dem Inkrement Δk näherungsweise $\boldsymbol{f}^+$ ergibt. Das Minus ist dem Vorzeichenwechsel $-\boldsymbol{f}^p\Delta k = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u} \simeq \boldsymbol{f}^+$ geschuldet.

Bemerkung 5.8. Wie man klammert, ist im Grunde der wesentliche ‚Trick' bei allen *adjoint formulations* und er steckt auch hinter der ‚**Zwei-Wege-Formel**'

$$\boxed{J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}}\,, \tag{5.196}$$

die ihre Fortsetzung in dem Ausdruck

$$\boxed{J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}^+} \tag{5.197}$$

hat, siehe (5.269).

Beispiel 5.4. Das Einspannmoment des Kragarms in Bild 5.38 ändert sich nicht, wenn sich $EI \to EI + \Delta EI$ ändert. Ist J also das Funktional $J(w) = M(0)$, dann muss (5.176)

$$\frac{d\,J}{dEI} = \frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^p = \frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}^T\,\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial EI}\boldsymbol{u} = 0 \tag{5.198}$$

null sein. Das ist also eine Situation, wo auch der Dirac Vektor $\boldsymbol{j}$ von dem Parameter, hier EI, abhängt. In dem Dirac Vektor

$$\boldsymbol{j} = \{M(\varphi_3)(0), M(\varphi_4)(0)\}^T = -EI \cdot \{0.375, 0.5\}^T \tag{5.199}$$

stehen die Momente der beiden rechten *shape functions* φ_3 und φ_4 im Aufpunkt $x = 0$, siehe (3.190). Es ist

$$\frac{d}{dEI}\,\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{EI}\,\boldsymbol{j}^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\,\boldsymbol{f} \tag{5.200}$$

und $\partial\boldsymbol{K}/\partial EI = 1/EI \cdot \boldsymbol{K}$ und somit ist die Änderung null

$$\frac{d\,J}{dEI} = \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\,\boldsymbol{f} - \frac{1}{EI}\cdot\boldsymbol{g}^T\,\boldsymbol{f} = 0\,. \tag{5.201}$$

5.29 Direkte Differentiation

Noch kürzer kann man die Ergebnisse mit der *direkten Differentiation* herleiten. Das Bauteil setze sich aus zwei Elementen zusammen und jedes Element habe einen eigenen E-Modul E_i, so dass die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ eine Funktion dieser zwei Werte E_i ist

$$\boldsymbol{K}(E_1, E_2)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,. \tag{5.202}$$

Mit $\boldsymbol{K}$ ist natürlich auch der Vektor $\boldsymbol{u}$ eine Funktion der E_i. Nun kann man fragen: Wie ändert sich der Vektor $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_c$, wenn sich der Wert E_1 im ersten Element ändert?

Bezeichnen wir die Ableitung nach E_1 mit $(')$, dann gilt, wenn wir annehmen, dass der Vektor $\boldsymbol{f}$ nicht von E_1 abhängt

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0} \tag{5.203}$$

oder

$$\boldsymbol{u}' = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\,\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}\,. \tag{5.204}$$

Brechen wir die Taylor-Entwicklung nach dem ersten Glied ab, dann gilt näherungsweise

$$\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}' \cdot \Delta E_1 = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\,\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u} \cdot \Delta E_1 = -\boldsymbol{K}^{(-1)}\,\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{(-1)}\,\tilde{\boldsymbol{f}}^+\,. \tag{5.205}$$

Wenn hier $\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ stünde, dann wäre $\tilde{\boldsymbol{f}}^+$ der exakte Vektor $\boldsymbol{f}^+$. Der naheliegende Vorschlag, dass man $\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ durch $\boldsymbol{f}^+ \sim -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}$ annähert, entspricht also einer linearen Interpolation.

5.30 Berechnung von u_c

Das Grundproblem bei der Reanalysis, $J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ ist, dass die neue Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}_c$ des Tragwerks unbekannt ist bzw. ersatzweise durch den alten Vektor $\boldsymbol{u}$ angenähert werden muss. Es gibt aber zwei Techniken ***Iteration*** und ***direkte Bestimmung***, mit denen sich das Problem lösen lässt.

5.30.1 Iteration

Wir multiplizieren die Gleichung

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} \tag{5.206}$$

von links mit $\boldsymbol{K}^{-1}$

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.207}$$

und schreiben sie in der Form

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} \tag{5.208}$$

was die folgende *fixed-point iteration* für $\boldsymbol{u}_c$

$$\boldsymbol{u}_c^{i+1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c^i + \boldsymbol{u} \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{5.209}$$

mit $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}$ als Startvektor nahelegt.

Die Konvergenz kann man beschleunigen, wenn man den Vektor $\boldsymbol{u}_c^{i+1}$ aus (5.209) mit dem vorhergehenden Vektor $\boldsymbol{u}_c^i$ kombiniert, [33] und [36],

$$\boldsymbol{u}_c^{i+1} = \boldsymbol{u}_c^i \cdot c_{max} \cdot q + \boldsymbol{u}_c^{i+1} \cdot q = \frac{1}{1 + c_{max}} \cdot (\boldsymbol{u}_c^i \cdot c_{max} + \boldsymbol{u}_c^{i+1}), \tag{5.210}$$

wobei c_{max} der größte Skalenfaktor c_e unter den Änderungen $\boldsymbol{\Delta K}_e = c_e\boldsymbol{K}_e$ ist und

$$q = \frac{1}{1 + c_{max}}. \tag{5.211}$$

Theoretisch versagt die Iteration, wenn das Tragwerk durch die Wegnahme eines Elementes kinematisch wird, wenn also die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K} \tag{5.212}$$

singulär ist. Denn dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{0}$ so, dass

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.213}$$

und wenn wir diese Gleichung von links mit der Inversen $\boldsymbol{K}^{-1}$ multiplizieren, so zeigt sich,

$$\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.214}$$

dass der Vektor $\boldsymbol{u}_0$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ mit dem Eigenwert 1 ist und der Fehler $\boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i$ daher nicht schrumpft

$$\boldsymbol{e}_{i+1} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{e}_i \qquad i = 1, 2, \ldots\,, \tag{5.215}$$

weil eine Fixpunktiteration nur konvergiert, wenn die Eigenwerte der Iterationsmatrix kleiner als 1 sind.

Man beachte, dass

$$\boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_{i-1} - \boldsymbol{u} \tag{5.216}$$

$$= -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_{i-1}) = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{e}_i\,. \tag{5.217}$$

Aber es ist bemerkenswert, dass bei nicht zu großen Störungen die Iteration konvergiert, selbst dann wenn das Entfernen eines Elementes das Tragwerk instabil macht, weil das Programm nicht versucht, die nicht existierende Inverse der singulären Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$ zu berechnen.

5.30.2 Direkte Berechnung

Wiederholen wir die Gleichung, die zu lösen ist

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.218}$$

Das Produkt $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ ist eine **schwach besetzte Matrix**, weil die zur vollen Größe $n \times n$ erweiterte Elementmatrix $\boldsymbol{\Delta K}$ viel ‚Luft', viele Nullen enthält. Nehmen wir an, dass die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ nur vier Einträge enthält, die nicht null sind

$$\boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} & & & \ldots & & & & \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & k^{\Delta}_{33} & 0 & 0 & k^{\Delta}_{35} & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & 0 & k^{\Delta}_{53} & 0 & 0 & k^{\Delta}_{55} & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ & & & \ldots & & & & \end{bmatrix} \tag{5.219}$$

zwei in Zeile 3 und zwei in Zeile 5 (wenn wir zum Beispiel ein Federelement, das die beiden Freiheitsgrade u_3 und u_5 verbindet, ändern).

Das Produkt von zwei $n \times n$ Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kann als die Summe von n Matrizen geschrieben werden,

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + \boldsymbol{g}_n\boldsymbol{r}_n\,, \tag{5.220}$$

Spalte $\boldsymbol{g}_1$ von $\boldsymbol{A}$ mal Zeile $\boldsymbol{r}_1$ von $\boldsymbol{B}$ plus Spalte $\boldsymbol{g}_2$ von $\boldsymbol{A}$ mal Zeile $\boldsymbol{r}_2$ von $\boldsymbol{B}$ etc. Jedes Produkt $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{r}_i$ ist eine $(n \times n)$ Matrix.

Weil $\boldsymbol{\Delta K}$ schwach besetzt ist, es enthält ja nur zwei Zeilen, die nicht null sind, folgt

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{g}_3\,\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{g}_5\,\boldsymbol{r}_5 \qquad \text{(Summe von zwei } n \times n \text{ Matrizen)} \tag{5.221}$$

was, wenn wir das in Spaltenform schreiben, das Ergebnis

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{c}_3 \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{c}_5 \quad \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}] \qquad \text{Spaltenvektoren} \tag{5.222}$$

ergibt, mit den beiden Spalten

$$\boldsymbol{c}_3 = k^{\Delta}_{33} \cdot \boldsymbol{g}_3 + k^{\Delta}_{53} \cdot \boldsymbol{g}_5 \qquad \boldsymbol{c}_5 = k^{\Delta}_{35} \cdot \boldsymbol{g}_3 + k^{\Delta}_{55} \cdot \boldsymbol{g}_5\,, \tag{5.223}$$

die Linearkombinationen der beiden Spalten $\boldsymbol{g}_3$ und $\boldsymbol{g}_5$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ sind.

Somit geht das System (5.218) über in

$$\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{c}_3\,u_{c3} + \boldsymbol{c}_5\,u_{c5} = \boldsymbol{u}\,. \tag{5.224}$$

Wir wählen die Zeilen drei und fünf dieses Systems und bestimmen an Hand dieser beiden Gleichungen die beiden Werte u_{c3} und u_{c5}

$$\begin{bmatrix} 1 + c_{33} & c_{35} \\ c_{53} & 1 + c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \end{bmatrix}\,. \tag{5.225}$$

die ausreichen (!), um die neue Lösung zu bestimmen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_c &= -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} = -u_{c3}\boldsymbol{c}_3 - u_{c5}\boldsymbol{c}_5 + \boldsymbol{u} \\ &= -(u_{c3}\,k^{\Delta}_{33} + u_{c5}\,k^{\Delta}_{35})\boldsymbol{g}_3 - (u_{c3}\,k^{\Delta}_{53} + u_{c5}\,k^{\Delta}_{55})\boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{u} \\ &= \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 + \boldsymbol{u}\,. \end{aligned} \tag{5.226}$$

Bei Betrachtung von (5.226) erkennt man dasselbe Muster wie in Kap. 3.36

Die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_c$ ist eine Entwicklung nach den Einflussfunktionen der Knotenverschiebungen,

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 = \textstyle\sum_i f_i\,\boldsymbol{g}_i + \alpha_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 + \alpha_5 \cdot \boldsymbol{g}_5 \tag{5.227}$$

nur, dass hier die Einflussfunktionen der Freiheitsgrade u_3 und u_5 im Sinne einer Korrektur zweimal vorkommen.

Das ist im übrigen genau die Formel

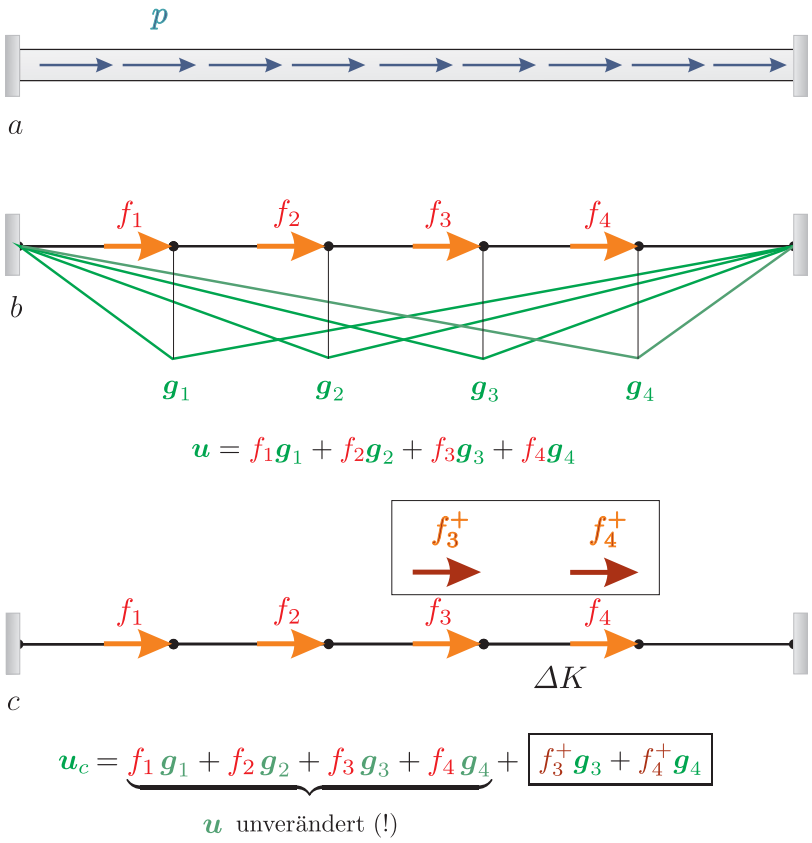


Bild 5.39. Stab, Belastung und Knotenkräfte, der Vektor $\boldsymbol{u}$ ist die gewichtete Summe über die Spalten $\boldsymbol{g}_i$ der Inversen. Steifigkeitsänderungen ΔK führen zu Zusatzkräften f_i^+

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) = \sum_i f_i\,\boldsymbol{g}_i + f_3^+ \cdot \boldsymbol{g}_3 + f_5^+ \cdot \boldsymbol{g}_5\,, \tag{5.228}$$

denn $\alpha_3 = f_3^+$ und $\alpha_5 = f_5^+$.

Steifigkeitsänderungen führen zu Zusatzkräften f_i^+ und daher sind die Spalten $f_i^+ \cdot \boldsymbol{g}_i$ zu $\boldsymbol{u} = \sum_i f_i \boldsymbol{g}_i$ zu addieren, um auf $\boldsymbol{u}_c$ zu kommen, siehe Bild 5.39.

Um die Technik allgemeiner zu fassen, schreiben wir die beiden Matrizen als eine Folge von Spaltenvektoren $\boldsymbol{g}_i$ bzw. Zeilenvektoren $\boldsymbol{r}_i$

$$\boldsymbol{K}^{-1} = [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n] \qquad \boldsymbol{\Delta K} = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n]^T\,. \tag{5.229}$$

Das System $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K} = [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n]$ hat dann die Spalten

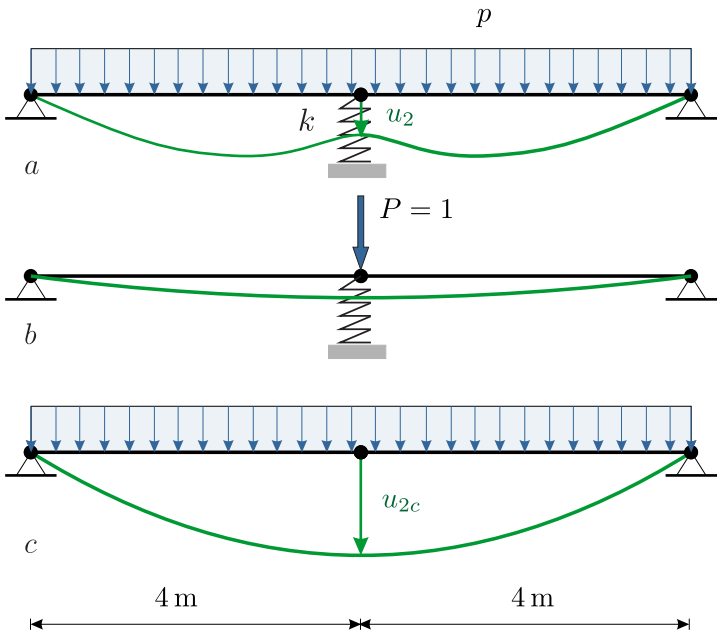


Bild 5.40. Ausfall einer Feder, $k = 10\,000$ kN/m, bei einem Zweifeldträger, $p = 10$ kN/m, $EI = 2.848 \cdot 10^4$ kNm^2

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}_j \, r_{ji} \qquad \text{(vector} \times \text{entry } i \text{ of row } \boldsymbol{r}_j) \tag{5.230}$$

und so lautet das Gleichungssystem (5.218) zeilenweise

$$u_{ci} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, u_{cj} = u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{5.231}$$

Streicht man nun alle Zeilen und Spalten, die nur Nullen enthalten, dann wird daraus ein System der Größe $z \times z$, wobei z gleich der Zahl der Änderungen $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$ auf der Hauptdiagonalen ist. In dem Beispiel oben war $z = 2$.

Die Zahl z der Änderungen auf der Hauptdiagonalen bestimmt also die Größe des zu lösenden Hilfssystem (5.231). Es sei $\boldsymbol{u}_c^z$ die zugehörige Lösung. Füllt man nun die Lösung $\boldsymbol{u}_c^z$ mit Nullen zu einem ‚vollen' Vektor, $\boldsymbol{u}_c^z \to \boldsymbol{u}_c^Z$, mit n Einträgen auf, dann erhält man aus

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c^Z + \boldsymbol{u} \tag{5.232}$$

den neuen Vektor $\boldsymbol{u}_c$.

Zum Exempel behandeln wir den Stab in Bild 5.39. Es ist $EA/l_e = 1$, nur im vierten Element wurde die Steifigkeit nachträglich verdoppelt, $EA/l_e + \Delta EA/l_e = 1+1$. Die ursprüngliche Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ hat 2 auf der

Hauptdiagonalen und -1 auf den beiden Nebendiagonalen. Mit den beiden Matrizen[13]

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.233}$$

ergibt sich das System $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}$ zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1.6 & -0.6 \\ 0 & 0 & -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} . \tag{5.234}$$

Die Lösung des (unsymmetrischen) Teilsystems

$$\begin{bmatrix} 1.6 & -0.6 \\ -0.2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 \end{bmatrix} \tag{5.235}$$

reicht aus, um die übrigen Terme bestimmen zu können

$$\begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c3} \\ u_{c4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} \tag{5.236}$$

und damit die ganze Lösung

$$\boldsymbol{u}_c = \{1.8889, 2.7778, 2.6667, 2.1111\}^T . \tag{5.237}$$

Jetzt kennen wir $\boldsymbol{u}_c$ und interessehalber können wir noch die exakten f_i^+ berechnen

$$-\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}^+ = \{0, 0, -0.5556, 0.5556\}^T \tag{5.238}$$

und so die Lösung $\boldsymbol{u}_c$ nach den Spalten $\boldsymbol{g}_i$ von $\boldsymbol{K}^{-1}$ entwickeln

$$\boldsymbol{u}_c = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{g}_i\, f_i + \boldsymbol{g}_3\, f_3^+ + \boldsymbol{g}_4\, f_4^+ = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_3 \cdot 0.5556 + \boldsymbol{g}_4 \cdot 0.5556 . \tag{5.239}$$

Fassen wir zusammen: Angenommen die Matrix $\boldsymbol{K}$ hat n Zeilen und Spalten. Dann ist auch die Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$, wenn man sie zu voller Größe ‚aufbläst' $n \times n$. In der Matrix $\boldsymbol{\Delta K}$ seien nur die Spalten (und Zeilen) 5, 6, 7 und 8 besetzt. Dann gibt es in $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\Delta K}$ vier Spalten $\boldsymbol{c}_i$, die nicht null sind, und diese sind Linearkombinationen der Spalten $\boldsymbol{g}_5, \boldsymbol{g}_6, \boldsymbol{g}_7, \boldsymbol{g}_8$ der Matrix $\boldsymbol{K}$

[13] Die Determinante der tridiagonalen Matrix $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ ist $n + 1$ $(= 5)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_5 &= k^{\Delta}_{55}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{65}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{75}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{85}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_6 &= k^{\Delta}_{56}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{66}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{76}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{86}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_7 &= k^{\Delta}_{57}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{67}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{77}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{87}\,\boldsymbol{g}_8 \\
\boldsymbol{c}_8 &= k^{\Delta}_{58}\,\boldsymbol{g}_5 + k^{\Delta}_{68}\,\boldsymbol{g}_6 + k^{\Delta}_{78}\,\boldsymbol{g}_7 + k^{\Delta}_{88}\,\boldsymbol{g}_8
\end{aligned} \tag{5.240}$$

Zu lösen ist also das System

$$\begin{bmatrix} u^c_5 \\ u^c_6 \\ u^c_7 \\ u^c_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} \\ c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} \\ c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} \\ c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^c_5 \\ u^c_6 \\ u^c_7 \\ u^c_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}, \tag{5.241}$$

und der ganze Vektor $\boldsymbol{u}_c$ ergibt sich zu

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{\Delta K}\,\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} = -u_{c5}\,\boldsymbol{c}_5 - u_{c6}\,\boldsymbol{c}_6 - u_{c7}\,\boldsymbol{c}_7 - u_{c8}\,\boldsymbol{c}_8 + \boldsymbol{u}\,, \tag{5.242}$$

unabhängig davon, ob $\boldsymbol{K}$ die Größe 100×100 oder $10\,000 \times 10\,000$ hat. In [36] wurde diese Technik bei der Ermittlung von $\boldsymbol{u}_c$ an dem 3-D Modell einer Stahlhalle eingesetzt.

5.30.3 Lagersteifigkeit

Ganz einfach wird es, wenn sich nur ein Wert k_{ii} auf der Diagonalen ändert, $k_{ii} \to k_{ii} + \Delta k_{ii}$, wie das der Fall ist, wenn sich die Steifigkeit in einem Lager ändert. Dann ist $\boldsymbol{\Delta K} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii}$ (= Spalte $\times$ Zeile) und das System

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii}))\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.243}$$

geht über in

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\Delta k_{ii})\,\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} \tag{5.244}$$

und aus der i-ten Gleichung

$$(1 + g_{ii}\,\Delta k_{ii})u_{ci} \;= u_i \tag{5.245}$$

kann man u_{ci} berechnen und das reicht aus, um ganz $\boldsymbol{u}_c$ zu bestimmen

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{e}_i^T\,\boldsymbol{u}_c\,\Delta k_{ii} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_i\,u_{ci}\,\Delta k_{ii}\,. \tag{5.246}$$

Wenn bei dem Zweifeldträger in Bild 5.40 die Feder, $k = 10\,000$ kN/m ausfällt, also $\Delta k = -k$ ist, dann rechnen wir wie folgt: Die Zusammendrückung der Feder betrug $u_2 = 5.5 \cdot 10^{-3}$ m und eine Kraft $P = 1$ drückt die Feder um $g_{22} = 88 \cdot 10^{-6}$ m zusammen. Das ergibt die Gleichung

$$(1 - 88 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4)\,u_{c2} = 5.5 \cdot 10^{-3}\,, \tag{5.247}$$

die die Lösung $u_{c2} = 45 \cdot 10^{-3}$ m hat.

5.30.4 Sherman-Morrison-Woodbury

Hat eine Matrix $\boldsymbol{K}_c$ die Gestalt $\boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T$, dann lautet ihre Inverse

$$\boldsymbol{K}_c^{-1} = \boldsymbol{K}^{-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}^T\,\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.248}$$

Das ist die *Sherman-Morrison-Woodbury Formel*, [80], [201]. Bei uns ist $-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{\Delta K}$ und wir können uns die Aufspaltung immer sinngemäß wie in

$$\boldsymbol{\Delta K} = \frac{\Delta EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T \tag{5.249}$$

vorstellen. Die Matrix $-\boldsymbol{U} = \Delta k\,\boldsymbol{I}$ ist also die Einheitsmatrix mit dem Vorfaktor Δk, der hier $\Delta EA/l$ beträgt.

Es bleibt die Aufgabe die Inverse $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}$ zu berechnen. Nehmen wir an $\boldsymbol{K}$ habe die Größe $N \times N$ und $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}$ die Größe $n \times n$ mit $n \ll N$. An dieser Stelle kann man sich den Hilfssatz zu nutze machen, dass die Inverse einer Einheitsmatrix, auf deren Diagonalen eine kleine Untermatrix steht, gleich die Einheitsmatrix plus der Inversen der Untermatrix ist – am selben Ort. Es reicht also die Inverse der $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}$ zu berechnen. Beim Einbau in das System (5.248) muss man natürlich dann das Resultat auf die volle Größe bringen, sprich mit Nullen auffüllen.

Als Beispiel betrachten wir den Stab wie in Bild 5.39, bei dem sich im vierten Element die Steifigkeit $EA/l = 1$ von 1 auf 2 erhöht ($\Delta k = 1$)

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5.250}$$

Mit den Matrizen ($\Delta k = 1$)

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad -\boldsymbol{U} = \Delta k \cdot \boldsymbol{I}\,, \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.251}$$

ergibt sich mit (5.248) genau die Inverse der Matrix $\boldsymbol{K}_c$

$$\boldsymbol{K}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.56 & 0.33 & 0.22 \\ 0.56 & 1.11 & 0.67 & 0.44 \\ 0.33 & 0.67 & 1.0 & 0.67 \\ 0.22 & 0.44 & 0.67 & 0.78 \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}^{-1} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}^{-1}\,. \tag{5.252}$$

Das Beispiel belegt auch noch einmal sehr schön, wie Steifigkeitsänderungen ***alle*** Einflussfunktionen ändern, denn keine Spalte von $\boldsymbol{K}^{-1}$ hat sich nach $\boldsymbol{K}_c^{-1}$ retten können.

5.31 Rechentechnik

Wir wollen die verschiedenen Rechentechniken kurz zusammenstellen. Wir erinnern daran, dass eine Steifigkeitsänderung einem Zusatzterm in der virtuellen inneren Energie entspricht

$$a(u,\varphi_i) = f_i \qquad \rightarrow \qquad a(u_c,\varphi_i) + d(u_c,\varphi_i) = f_i\,. \tag{5.253}$$

Weil sich die virtuelle äußere Arbeit f_i nicht ändert, muss gelten

$$a(e,\varphi_i) = -d(u_c,\varphi_i)\,. \tag{5.254}$$

Dieser Zusatzterm ‚lebt' nur in dem Element, dem Lager, dessen Steifigkeit sich ändert. Er entspricht der Mohrschen Arbeitsgleichung, wenn man sie auf das betreffende Element verkürzt.

Ändert sich die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} \rightarrow \boldsymbol{K}_c = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K}$, dann kann man das System

$$\boldsymbol{K}_c \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} \tag{5.255}$$

neu lösen, oder wenn die Inverse $\boldsymbol{K}^{-1}$ abgespeichert wurde, die neue Lösung $\boldsymbol{u}_c$ iterativ oder direkt, wie in Kapitel 5.30 beschrieben, aus der alten Lösung $\boldsymbol{u}$ berechnen. Je weniger Änderungen vorgenommen werden, umso kleiner ist das zu lösende Hilfssystem beim direkten Zugang. Bei der Änderung einer Lagersteifigkeit ist es nur eine Zeile.

Dasselbe gilt sinngemäß für die neuen Einflussfunktionen $\boldsymbol{g}_c$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_c\,\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}\,, \tag{5.256}$$

die sich auch so berechnen lassen. Bei Einflussfunktionen für Kraftgrößen kann es jedoch sein, dass sich der Vektor $\boldsymbol{j} \rightarrow \boldsymbol{j}_c$ ändert, wenn der Aufpunkt in dem betroffenen Element liegt.

Kennt man $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}_c$ kann man die Änderung in Funktionalen

$$J(\boldsymbol{e}) = J(\boldsymbol{u}_c) - J(\boldsymbol{u}) \tag{5.257}$$

direkt berechnen. Alternativ bietet sich die Möglichkeit an, die Änderungen mittels

$$J(\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K} \boldsymbol{u}_c \tag{5.258}$$

auszuwerten, was

$$J(u_c) - J(u) = a(e,G) = -d(u_c,G) \tag{5.259}$$

entspricht. Den Vektor $\boldsymbol{u}_c$ kann man dabei iterativ bestimmen, wie in Kapitel 5.25 gezeigt. Setzt man näherungsweise für $\boldsymbol{\Delta K u}_c$ den *Pseudo-Lastvektor*

$$J(\boldsymbol{e}) \simeq -\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{\Delta K u}\,, \tag{5.260}$$

dann geht es noch einfacher.

5.32 One-Click Reanalysis

In dem Programm BE-FRAMES, siehe Kapitel 12, sind beide Techniken zur Berechnung von $\boldsymbol{u}_c$, Iteration und direkte Lösung, zu Lehrzwecken als *One-Click Reanalysis* implementiert, siehe Bild 5.42. Der Student kann durch einfache Klicks Veränderungen an einem Rahmen vornehmen und die Effekte, die dadurch entstehen, studieren. Implementiert sind Änderungen der Art $\boldsymbol{\Delta K}_e = c \cdot \boldsymbol{K}_e$, also eine Skalierung einzelner Elementmatrizen mit unterschiedlichen Faktoren c, wobei $c = 0$ einem kompletten Verlust des Elements entspricht.

Eine Serie von Modifikationen, etwa Änderungen der Elemente 5, 7 und 9, bedeutet einfach, dass $\boldsymbol{\Delta K}$ eine Ansammlung von skalierten Elementmatrizen $\boldsymbol{\Delta K}_e$ ist

$$\boldsymbol{u}_c = -\boldsymbol{K}^{-1}\,(\boldsymbol{\Delta K}_5 + \boldsymbol{\Delta K}_7 + \boldsymbol{\Delta K}_9)\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u} \qquad \text{(direkte Lsg.)} \tag{5.261}$$

Natürlich können auch einzelne Lager entfernt werden, nachträglich Gelenke eingebaut werden (das geht mit Dirac Deltas) und Einflussfunktionen für alle interessierenden Größen berechnet werden.

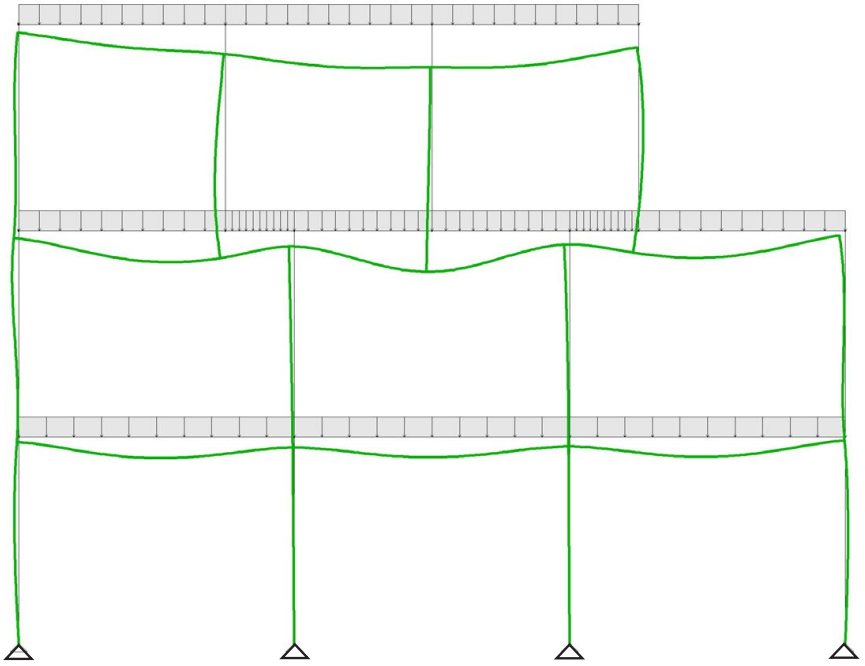
In Bild 5.43 wurde die Technik benutzt, um den Bauablauf zu simulieren. Wenn man das Tragwerk als ‚Ganzes' berechnet, als ‚Ein-Guss-Modell' , dann werden die Einspannmomente in den linken Lagern zu groß, weil die Zusammendrückung der Stützen größer ist, als es dem Bauablauf entspricht, [22]. In jedem neuen Geschoss werden die Stützenköpfe ja bis zum Plansoll hoch gezogen, und durch diesen Höhenausgleich werden die Einspannmomente kleiner. Das kann man z.B. so simulieren, ähnlich wie in [168], [169], dass man am Bildschirm die Steifigkeit der Stützen verdoppelt, $c = 2$, oder einen anderen Faktor c ausprobiert. Man sieht den Effekt sofort.

5.32.1 Wenn die Last ‚getroffen' wird

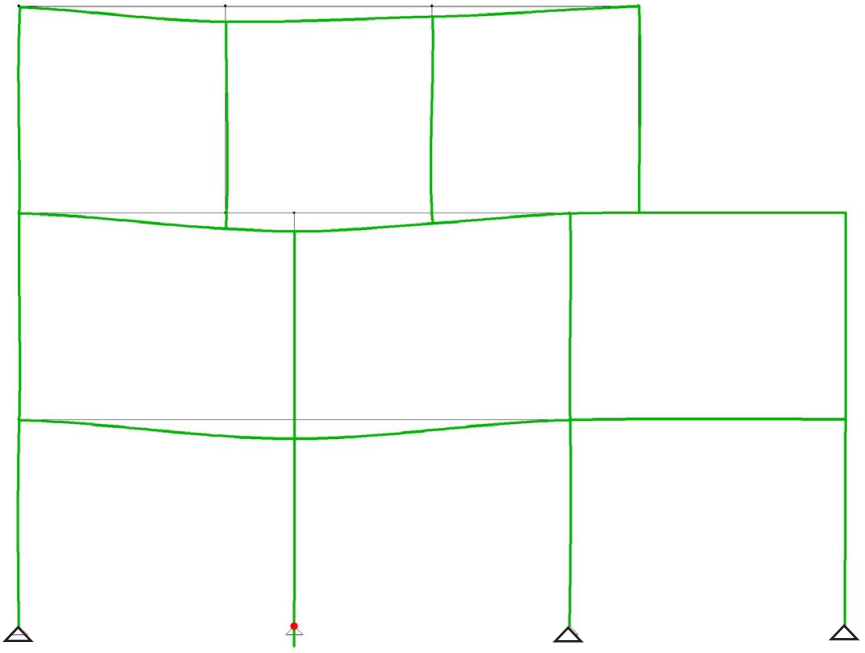
Wenn der Student ein Element Ω_e entfernt, das eine Belastung trägt, dann ist der neue Vektor $\boldsymbol{u}_c$ die Lösung des Systems

$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_e\,, \tag{5.262}$$

wobei die Einträge in dem Vektor $\boldsymbol{f}_e$ die vorherigen äquivalenten Knotenkräfte aus dem Element Ω_e sind. In diesem Fall muss das Programm also auch das Original der rechten Seite ändern, $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_e$.

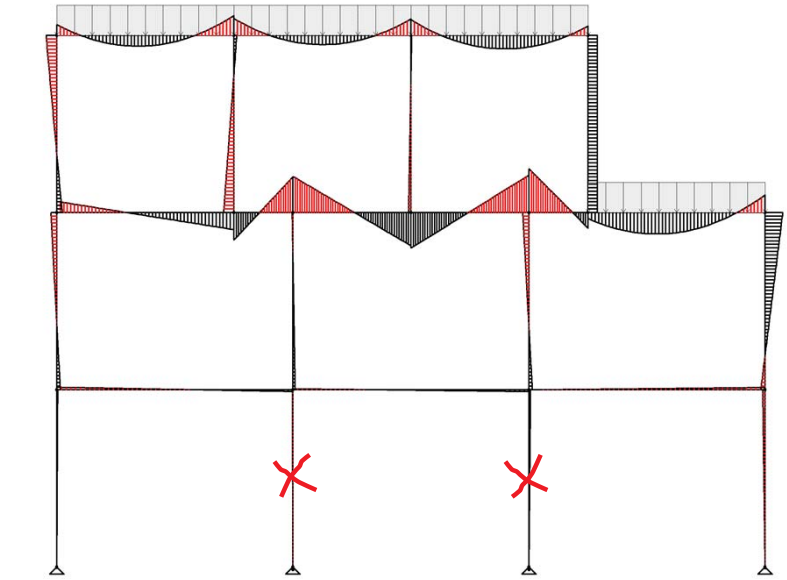


a

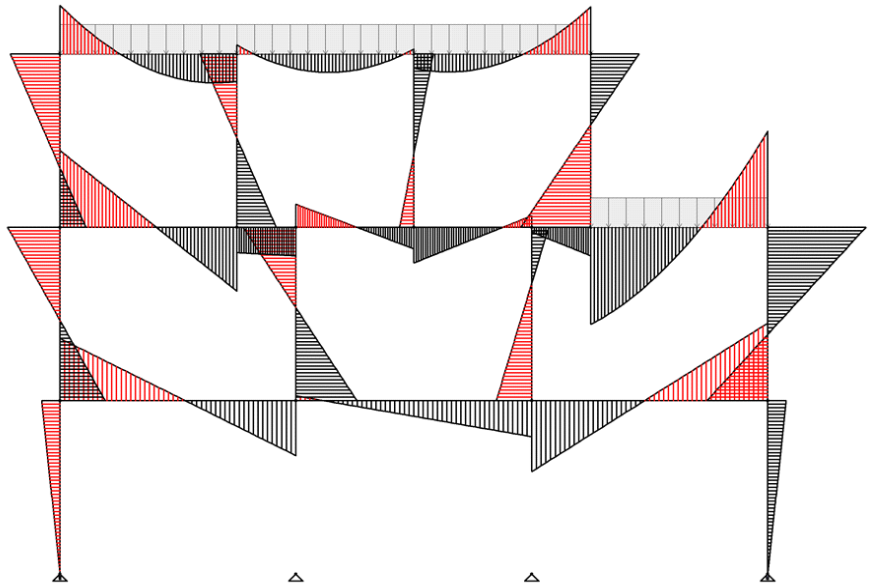


b

Bild 5.41. Stockwerkrahmen **a)** vor der Änderung der Lagersteifigkeit **b)** die Einflussfunktion für das Lager (BE-FRAMES)



a



b

Bild 5.42. One-Click Reanalysis (ohne Neuberechnung der Steifigkeitsmatrix) **a)** die angeklickten Elemente **b)** die Momentenverteilung ohne die beiden Stützen (BE-FRAMES)

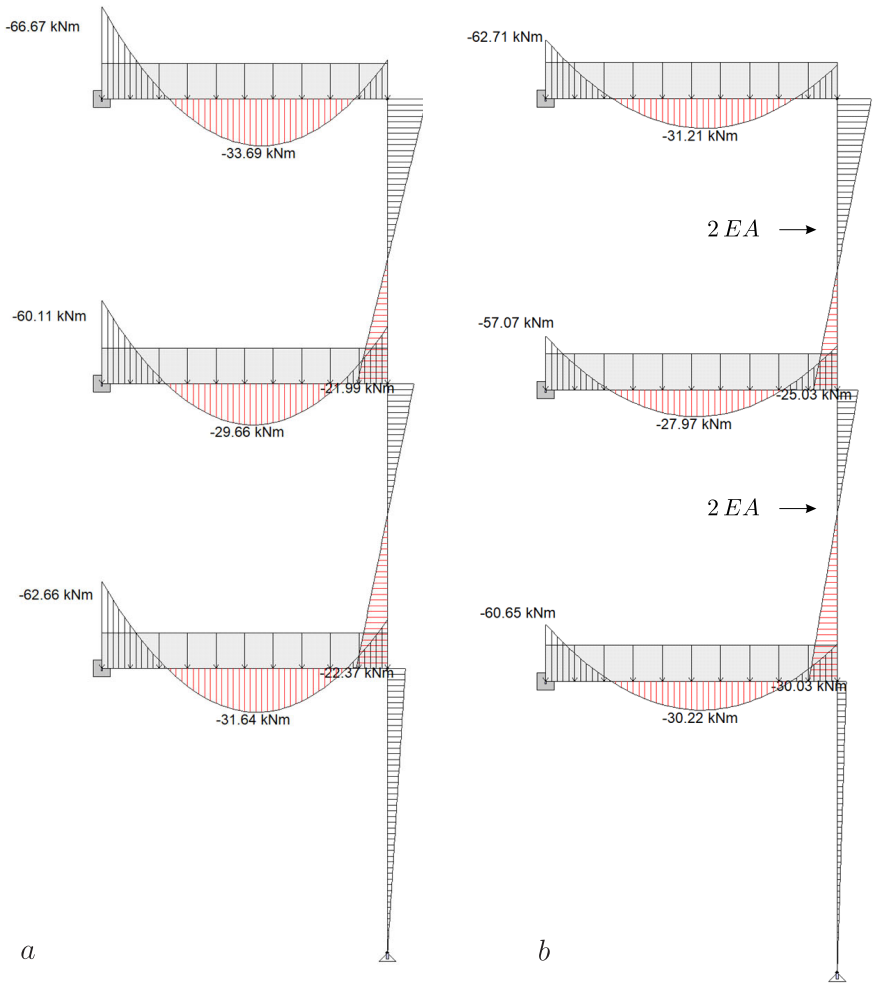


Bild 5.43. In jedem neuen Geschoss wird die Stauchung der Stützen durch ein Niveauausgleich korrigiert. Rechnerisch kann man das dadurch simulieren, dass man die Steifigkeitsmatrix der Stiele z.B. mit dem Faktor 2 multipliziert, **a)** ohne Modifikation, **b)** mit Erhöhung (BE-FRAMES)

5.32.2 Singuläre Steifigkeitsmatrizen

Weil es in dem Programm BE-FRAMES implementiert ist, sei noch erwähnt, dass man mit dem Gauss Algorithmus auch Beweglichkeiten in Rahmen aufdecken kann. Der Gauss Algorithmus formt ja die Steifigkeitsmatrix in eine obere Dreiecksmatrix um. Geht man noch einen Schritt weiter, und wendet den Gauss Algorithmus auch auf die obere Dreiecksmatrix an, dann erhält man am Schluss – bei regulären Matrizen – die Einheitsmatrix. Wenn aller-

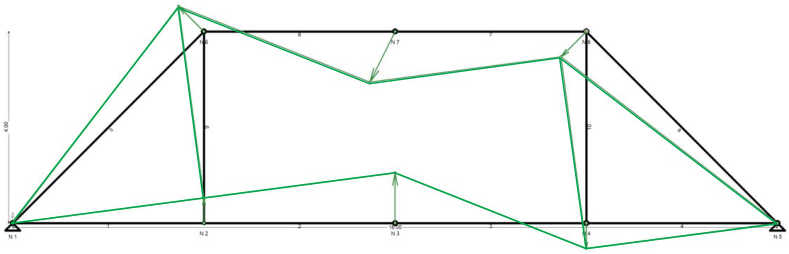


Bild 5.44. Verschieblichkeiten in einem Rahmen lassen sich mit dem ‚zweifachen' Gauss entdecken (BE-FRAMES)

dings die Matrix singulär ist, dann führen die letzten Spalten in dem Ergebnis auf die Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda = 0$, also einfach die möglichen Starrkörperbewegungen, die in dem Rahmen stecken, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Die kann man dann auf dem Bildschirm anzeigen und so den Benutzer auf fehlende Festhaltungen aufmerksam machen, siehe Bild 5.44.

Die Matrix, die bei diesem ‚zweimaligen' Gauss entsteht, nennt man die ***row reduced echelon form*** einer Matrix und unter diesem Namen findet man den Algorithmus auch in der Literatur.

5.33 Drehpole

Wenn der Rahmen verschieblich ist, zeigt das Programm BE-FRAMES die Verschiebungsfigur an. Wenn mehrere Festhaltungen fehlen wird der erste Eigenvektor $\boldsymbol{u}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ angezeigt.

Die Drehpole der Verschiebungsfigur werden mit folgendem *code snippet* ermittelt und dann auf dem Bildschirm angezeigt.

```
//uLinks, vLinks, Phi_L und uRechts, vRechts, Phi_R
//sind die Verformungen am Elementanfang und -ende

for (i = 1; i <= elemente; ++i)
{
Pol[i].infinite = FALSE;

if ((fabs(uLinks) + fabs(vLinks])) < 0.01)
{
// keine Bewegung des linken Knotens
Pol[i].PolX = Knoten[elm[i].nodeL].x;
Pol[i].PolY = Knoten[elm[i].nodeL].y;
}
else if ((fabs(uRechts) + fabs(vRechts)) < 0.01)
{
// keine Bewegung des rechten Knotens
Pol[i].PolX = Knoten[elm[i].nodeR].x;
Pol[i].PolY = Knoten[elm[i].nodeR].y;
}
```

```
else
{
// Dreieck uL, hL
if (fabs(Phi_L) > 0.01)
{
// Verdrehung des linken Knotens (= Verdrehung des Stabs) ist nicht null
hY = uLinks] / Phi_L;
// Verschiebung in x-Richtung/Verdrehung = y-Abstand des Pols
PolY = Knoten[elm[i].nodeL].y + hY;

hX = vLinks / Phi_L;
// Verschiebung in y-Richtung/Verdrehung = x-Abstand des Pols
PolX = Knoten[elm[i].nodeL].x + hX;
Pol[i].PolX = PolX;
Pol[i].PolY = PolY;
}
else if (fabs(uPhi_R) > 0.01)
{
hY = uRechts / Phi_L;
PolY = Knoten[elm[i].nodeR].y + hY;

hX = vRechts / Phi_R];
PolX = Knoten[elm[i].nodeR].x + hX;
Pol[i].PolX = PolX;
Pol[i].PolY = PolY;
}
else
{
// Element does not rotate,
// pole lies on a line normal to the element at infinity
Pol[i].infinite = TRUE;
}
}
```

Studenten können so die Polpläne, die zu M-Gelenken gehören, direkt abzeichnen. Die Polpläne, die zu N- und V-Gelenken gehören, ermitteln sie am besten, indem sie sich die Einflussfunktion (*GF-anywhere*) für N bzw. V anzeigen lassen, denn daran kann man die Lage der Drehpole ablesen.

5.34 Nachträglicher Einbau von Gelenken

Andere mögliche Defekte, die sich unter Last ausbilden, sind plastische Gelenke. Mathematisch ist ein Gelenk eine Nullstelle im Momentenverlauf, $M(x) = 0$. Was wir daher machen ist, dass wir ein Dirac Delta δ_2 im Punkt x wirken lassen, d.h. wir berechnen die Einflussfunktion für $M(x)$ in diesem Punkt und wir berechnen, wie groß das Moment $M_2(x)$ der Einflussfunktion selbst in diesem Punkt x ist. Dann skalieren wir das Dirac Delta mit einem Faktor a derart, dass $a \cdot M_2(x) + M(x) = 0$.

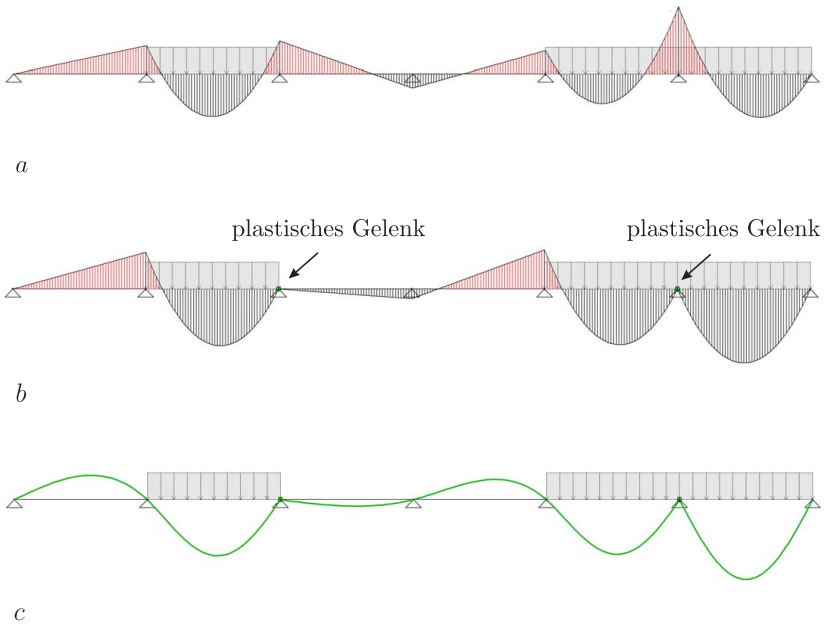


Bild 5.45. Der Einbau von plastischen Gelenken in einem Durchlaufträger **a)** ursprüngliche Momentenverteilung, **b)** nach dem Einbau der Gelenke, **c)** Biegelinie (BE-FRAMES)

So wurden die Ergebnisse in Bild 5.45 erzielt. Auch dies steht als ‚*one-click*' operation in dem Programm zur Verfügung.

Im Detail geht es wie folgt: Es sei x_0 der Punkt, an dem ein Gelenk eingebaut werden soll – oder besser – ein Moment M_p aus einem LF p zu Null gemacht werden soll. Der Punkt muss nicht am Ende eines Feldes liegen, wie die Punkte in Bild 5.45.

(1) Man berechnet zunächst die Einflussfunktion G_2 für das Moment M im Punkt x_0, indem man in den Nachbarknoten die äquivalenten Knotenkräfte, die zu der Einflussfunktion gehören, siehe Bild 3.28, aufbringt. (2) Man addiert zu dieser Lösung die lokale Einflussfunktion, also die Einflussfunktion am beidseitig eingespannten Träger. (3) Man berechnet das Moment $M_G(x)$ der so zusammengesetzten Einflussfunktion im Punkt x_0. (4) Man skaliert dann den LF Einflussfunktion so, dass das Moment $M_G(x_0)$ gerade $-M_p(x_0)$ ist. (5) Die Ergebnisse dieses Lastfalls zu dem LF p addiert, sind die Ergebnisse mit einem Gelenk im Punkt x_0 im LF p.

Werden mehrere Gelenke eingebaut, dann muss man die Spreizung der Gelenke untereinander abstimmen, also ein lineares Gleichungssystem lösen, so dass in allen Punkten gleichzeitig die Momente gegengleich zu den Momenten im LF p sind.

All das geht natürlich auch in einem normalen FE-Programm: Man berechnet die EF für $M(x)$ und deren Moment im Aufpunkt und skaliert diesen LF so, dass in der Summe $M(x) = 0$.

5.35 Knicklasten

Auch die Knicklasten – also die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ (nach Theorie II. Ordnung) – ändern sich, wenn sich Steifigkeiten ändern. Das ist ein komplexes Thema, weil ja die Rechentechnik des Ingenieurs, Stichwort: *Nachweis am Einzelstab*, mindestens eine genauso große Rolle spielt, wie die Mathematik für die wir z.B. auf [13], [98] und insbesondere [201] verweisen.

Wir betrachten hier nur die mathematische Seite und nehmen an, dass das System von einem Parameter t, etwa der Zeit oder einer speziellen Stabsteifigkeit $t \equiv EA$, abhängt und somit auch die Eigenwerte $\lambda(t)$ und die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}(t)$ sich mit t ändern

$$\boldsymbol{K}(\lambda)\,\boldsymbol{u}(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{5.263}$$

Die transponierte Matrix $\boldsymbol{K}^T$ hat dieselben Eigenwerte, aber nicht unbedingt dieselben Eigenvektoren $\boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{K}^T(t)\boldsymbol{v}(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{v}(t)\,. \tag{5.264}$$

Man kann nun die zu $\lambda(t)$ gehörigen Eigenvektoren von $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}^T$ immer so normieren, dass $\boldsymbol{u}(t)^T\,\boldsymbol{v}(t) = 1$ ist und unter dieser Voraussetzung gilt, [201],

$$\frac{d\,\lambda(t)}{dt} = \boldsymbol{v}^T(t)\,\frac{d\,\boldsymbol{K}(t)}{dt}\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{5.265}$$

Die Änderung in einem Eigenwert ist also gleich dem mit $d\,\boldsymbol{K}/dt$ gewichteten Skalarprodukt der zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{u}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t)$.

5.36 Dynamische Probleme

Auch bei harmonischen Schwingungen, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, die auf das Eigenwertproblem $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \lambda\,\boldsymbol{u}$ führen, spielen die Eigenwerte eine Rolle. Die Schwingungen einer Federkette mit n Massen lauten

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_k \boldsymbol{u}_k\,e^{i\,\lambda_k\,t}\,, \tag{5.266}$$

wobei die $\boldsymbol{u}_k$ die Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ sind und die λ_k die zugehörigen Eigenwerte. Eine Entwicklung $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta}K$ ändert also nicht nur die Eigenvektoren, sondern auch die Eigenwerte: Das ganze System schwingt anders.

5.37 Die Vektoren $\boldsymbol{f}^+, \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{g}^+, \boldsymbol{j}^+$

Wir fassen zusammen: Die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{g}$ sind Wege, die Vektoren $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{j}$ sind äquivalente Knotenkräfte. Das System $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f}$ ist identisch mit $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c$ und hat die Lösung

$$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^+) \tag{5.267}$$

wobei

$$\boldsymbol{f}^+ = -\boldsymbol{\Delta K}\boldsymbol{u}_c \qquad \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+ . \tag{5.268}$$

Ferner ist

$$J(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}^+ . \tag{5.269}$$

Das System $(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Delta K})\boldsymbol{g}_c = \boldsymbol{j}_c$ zur Berechnung der Knotenwerte g_i der Einflussfunktion für ein Funktional $J_c(\boldsymbol{u}_c) = \boldsymbol{j}_c^T\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{g}_c^T\boldsymbol{f}$ hat die Lösung

$$\boldsymbol{g}_c = \bar{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{g}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{j}_c + \boldsymbol{j}_c^+) , \tag{5.270}$$

wobei

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c \qquad \boldsymbol{j}_c^+ = -\Delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_c \qquad \boldsymbol{g}^+ = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{j}_c^+ . \tag{5.271}$$

Wenn sich die Steifigkeit des Elements, in dem $J_c(\boldsymbol{u})$ ausgewertet wird, nicht ändert, wenn also $J(\boldsymbol{u}) = J_c(\boldsymbol{u})$ ist, dann ist $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_c$, und entsprechend nennen wir $\boldsymbol{j}_c^+ = \boldsymbol{j}^+$, und $\bar{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}$, so dass dann also mit (5.56) gilt

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^+)^T\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T\boldsymbol{u} . \tag{5.272}$$

Vorsicht! Es ist nicht $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$. Der Vektor $\boldsymbol{j}^+$ ist nur eine Hilfsgröße, der die Formel

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T\boldsymbol{u} \tag{5.273}$$

möglich macht, mit der man aus dem alten $\boldsymbol{u}$ die Werte des neuen $\boldsymbol{u}_c$ berechnen kann.

Wenn $\boldsymbol{j}_c = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+$ der richtige Vektor $\boldsymbol{j}_c$ wäre, dann müsste man mit ihm $J(\boldsymbol{u}_c)$ aus $\boldsymbol{u}_c$ berechnen können,

$$J(\boldsymbol{u}_c) = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^+)^T\boldsymbol{u}_c \qquad (?) \tag{5.274}$$

was aber (5.273) widerspricht. Es kann nicht beides richtig sein.

Wie man an Bild 5.16 sieht, sind die Kräfte j_i^+ in den Ecken des geänderten Elements Zusatzkräfte, um auf dem ‚alten' Netz (Matrix $\boldsymbol{K}$) die Wirkung des Dirac Deltas (Einzelkraft in der oberen rechten Ecke) darstellen zu können, also $\boldsymbol{g}_c$ zu generieren. Ohne die j_i^+ würde das Dirac Delta den Vektor $\boldsymbol{g}$ erzeugen, mit den j_i^+ nimmt das ‚alte' Netz die Form $\boldsymbol{g}_c$ an.

In Bild 4.19 auf Seite 446 wurde diese Technik bei dem 1-D Problem eines Stabes benutzt, um mit Hilfe von Kräften j^+ die Einflussfunktion des *stepped bars* an einem Stab mit konstantem Querschnitt zu berechnen.

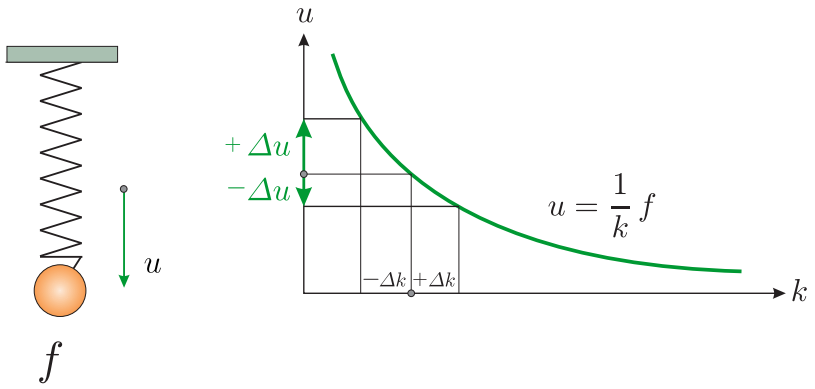


Bild 5.46. Das Federgesetz $u = 1/k \cdot f$ impliziert, dass Steifigkeitsänderungen, $\pm\Delta k$, zu unterschiedlich großen Korrekturen führen

5.37.1 Unsymmetrie in den Ausgleichsbewegungen

Zum Schluss wollen wir noch anmerken, dass, wegen $u = 1/k \cdot f$, Änderungen $k \pm \Delta k$ unsymmetrisch ablaufen, siehe Bild 5.46. Die Ausschläge Δu bei einer Abnahme $-\Delta k$ sind größer als die Verkürzungen Δu bei einer Zunahme $+\Delta k$. Anders gesagt: Wenn man die Steifigkeit k einer Feder um Δk verringert und dann wieder Δk dazu addiert, ist man nicht da, wo man vor dem Manöver war, sondern f hängt tiefer.

Der Grund ist, dass man sich bei der Abnahme auf der Kurve $u = 1/k \cdot f$ befindet und beim Rückweg auf der Kurve $u = 1/(k - \Delta k) \cdot f$.

Wenn man aus einem Reifen (5 l) ein Liter Luft (= 20 %) herauslässt und dann wieder hinzufügt, dann hat der Wagen seine alte Höhe. Aber bezogen auf das reduzierte Volumen (4 l) ist 1 Liter Luft 25 %. Rechnerisch hätte man nur 0.8 l hinzufügen dürfen, was nicht gereicht hätte, um auf die alte Höhe zu kommen.

Daumenregel: Wenn man ein Kapital K zu n Prozent Zinsen anlegt, dann hat sich das Kapital nach $72/n$ Jahren *verdoppelt* und ist n die Inflationsrate, dann hat sich die Kaufkraft in derselben Zeit *halbiert*

$$(1 + \frac{n}{100})^a \cdot K \qquad (1 - \frac{n}{100})^a \cdot K \qquad a = \text{Jahre}\,. \tag{5.275}$$

5.38 Das Kontinuum

Schon bei der Vorstellung der Randelemente, siehe Kapitel 1.21, haben wir erwähnt, dass es eine Vorstufe zu den Greenschen Funktionen gibt und das sind die **Fundamentallösungen**. Sie genügen der Differentialgleichung des Problems, hier die Membran als Beispiel,

$$-\Delta\, g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,, \tag{5.276}$$

aber sie genügen nicht den Lagerbedingungen, während die Greenschen Funktionen dies tun.

Formuliert man mit solchen Lösungen den Satz von Betti, dann erhält man die klassischen Integraldarstellungen der Potentialtheorie. Was daran bemerkenswert ist, ist dass man auf einen Blick sieht, von welchen Daten oder **Quellen**, von welchen *sources and sinks*, eine Lösung abhängt. Die Greenschen Funktionen

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{5.277}$$

zeigen ja nur den Einfluss der Belastung, die Lagerbedingungen stecken implizit in $G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, während die auf $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ basierende Integraldarstellung (5.282) auch den Einfluss der Randwerte – auch das sind ja Quellen – zeigt.

Der Ingenieur denkt nicht in Quellen, er sieht das Netz, er sieht die kleinen Platten- und Scheibenelemente, und ihm geht es vor allem darum, ihre Steifigkeiten richtig zu modellieren. Was aber am Ende auf dem Netz entsteht, ist eine **Potentiallösung** wie (5.282), die die Gleichgewichtslage unter der Wirkung der Quellen beschreibt.

Während aber das Gravitationsfeld der Sonne bis zu den Punkten $r = \infty$ reicht, sind die Lösungen der Platten- oder Scheibengleichung Potentiale, die nur innerhalb der Platte oder Scheibe leben und außerhalb davon null sind. All die verschiedenen Quellen oder **Belegungen**, wie man technisch sagt, sind so ausbalanciert, *self-equilibrated*, dass man gedanklich die Platte in eine unendlich ausgedehntes Plattenkontinuum einbetten kann und der Aussenbereich dabei glatt wie ein Spiegel bleibt. Geht man von Innen nach Außen, dann springt die Integraldarstellung der Lösung erst von u auf $1/2\, u$ (am Rand) und dann ganz auf null; im 1-D nur u und 0.

Die Lösung eines Randwertproblems ist also außerhalb von Ω null. Nicht per definition, sondern weil die Wirkungen der Quellen sich außerhalb von Ω gegenseitig neutralisieren. Dieser Blick auf die finiten Elemente aus der Sicht der Potentialtheorie ist sicherlich ungewohnt, aber er kann doch, wie wir zeigen wollen, zum besseren Verständnis der finiten Elemente beitragen.

5.38.1 Potentialtheorie

Die Potentialtheorie beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Felder, die von Punktladungen erzeugt werden. Das Charakteristikum dieser Felder

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi} \ln r \qquad 2\text{-}D \qquad g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,\pi}\frac{1}{r} \qquad 3\text{-}D \tag{5.278}$$

ist, dass sie in allen Punkten $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ Lösungen der *Laplace Gleichung* sind

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} = 0\,. \tag{5.279}$$

Wir differenzieren hier nach der Laufvariablen $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

Mit diesen *Fundamentallösungen* kann man Integraldarstellungen für beliebige C^2-Funktionen $u(\boldsymbol{x})$ herleiten

$$c(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} [g\, \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} g\, (-\Delta u)\; d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.280}$$

wenn man den Verlauf von u und der Normalableitung $\partial u/\partial n = \nabla u \bullet \boldsymbol{n}$ auf dem Rand Γ kennt und im Feld Ω die Summe der zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,11} + u_{,22}$.

Die Funktion $c(\boldsymbol{x})$ ist die sogenannte *charakteristische Funktion* des Gebiets Ω

$$c(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \Delta\varphi/2\,\pi & \boldsymbol{x} \in \Gamma \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega^c \end{cases} \tag{5.281}$$

Es ist $\Delta\varphi$ ($= \pi$ am glatten Rand) der Innenwinkel in dem Randpunkt und Ω^c ist das Komplement, also alles, was jenseits des Randes Γ liegt.

Man stelle sich ins Innere von Ω und richte den Blick auf den Rand. Dreht man sich einmal um sich selbst, dann überstreicht der Sehstrahl einen Winkel von $2\,\pi$. Steht man auf dem Rand, dann ist der Winkel gleich $\Delta\varphi$ und steht man außerhalb von Ω, dann ist der Winkel null, weil der Sehstrahl vor und zurück pendelt. Teilt man den Winkel durch 2π, dann hat man die Funktion $c(\boldsymbol{x})$.

Haben wir eine Membran Ω in ein Netz von Elementen unterteilt, dann können wir also die FE-Lösung wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{x})\, u_h(\boldsymbol{x}) = &\int_{\Gamma} [g\, \frac{\partial u_h}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\, u_h]\, ds_{\boldsymbol{y}} \\ &+ \sum_e \int_{\Omega_e} g\, p_e\; d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \sum_i \int_{\Gamma_i} g\, t_i\; ds_{\boldsymbol{y}}\,. \end{aligned} \tag{5.282}$$

Hierbei sind $p_e = -\Delta u_h$ die Flächenkräfte der FE-Lösung u_h im Element Ω_e und die t_i sind die Linienkräfte auf den Netzkanten Γ_i, also die Sprünge der Normalableitung zwischen den Elementen, die die Kante Γ_i gemeinsam haben.

Das ist eine ‚quellenmäßige' Darstellung der FE-Lösung, wenn wir u_h als die Antwort auf die ‚Lasten', die Quellen, in den Einflussfunktionen lesen.

5.38.2 Das einzelne Element und das Netz

Nehmen wir an, das Netz besteht aus 100 Dreiecken, linearen Elementen. All die t_i beeinflussen jeden Punkt der Membran (die $p_e = 0$ sind null). Wie kommt es dann aber, dass die t_i gerade so eingestellt sind, dass in jedem der 100 Elemente die Lösung $u_h = a + b\, x_1 + c\, x_2$ einen linearen Verlauf hat? Das gleicht doch einem Wunder!

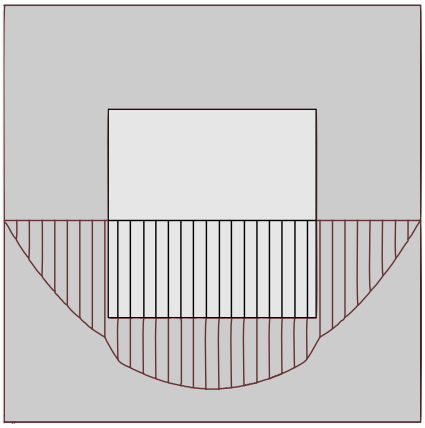


Bild 5.47. Unterschiedliche Steifigkeiten (Vorspannung) in einer Membran (BE-LAPLACE)

Das Rätsel löst sich wie folgt: Die obige Integraldarstellung erhält man, wenn man (5.281) für jedes Element einzeln formuliert und diese Gleichungen addiert; die Sprünge in der Normalableitung zwischen den Elementen sind die t_i. Ein Punkt $\boldsymbol{x}$, der in dem ersten Element Ω_1 liegt, ist jedoch ein Punkt ‚außen' für die anderen 99 Elemente, d.h. deren Beiträge sind alle null und die Einflussfunktion für $u_h(\boldsymbol{x})$ reduziert sich auf die Originalgleichung (5.282) am Element Ω_1. Die Membran Ω_1 mit linearen Randwerten u, konstanter (aber unterschiedlicher) Normalableitung $\partial u/\partial n$ auf den drei Kanten und $p_e = 0$ muss aber einen linearen Verlauf im Innern haben.

Natürlich, die anderen Elemente beeinflussen schon die Randwerte auf den Elementkanten von Ω_1, aber die Darstellung im Innern ist dann rein lokal.

Das gilt im übrigen für jede Fläche über der $x-y$-Ebene. Man schlage um irgendeinen Punkt in der Ebene Ω einen Kreis, dann kann die Fläche $u(\boldsymbol{x})$ oberhalb davon allein aus den Daten $-\Delta u$ in dem Kreis und den Funktionen u und $\partial u/\partial n$ auf dem Kreisrand berechnet werden – auch wenn die Fläche die Lösung einer nichtlinearen Gleichung ist. Die Formel (5.282) gilt für **alle** Funktionen aus $C^2(\Omega)$. Sie ist sozusagen ein ‚exakter Taylor'.

Man kann sie auch als Kontrollgleichung benutzen: Wenn die Randwerte und das $-\Delta u$ aus verschiedenen Quellen kommen, dann passen sie nur zueinander, wenn sie der Integralgleichung (5.282) auf dem Rand des Elements genügen; wenn man $\boldsymbol{x}$ auf den Rand legt, steht ja links und rechts dasselbe $\boldsymbol{u}$.

5.38.3 Variierende Steifigkeiten

Wir hatten oben in Bild 5.12 auf Seite 473 beim Betrachten der Verteilung der Knotenkräfte f_i^+ auf die Analogie mit einer Stahlwand hingewiesen, die man mit einem aufgeschweißten Blech verstärkt und die Knotenkräfte f_i^+ wie die Kräfte in einer Schweißnaht gedeutet, die das Blech fixiert, wenn sich die darunterliegende Stahlwand unter der Belastung deformiert.

Das ist kein bloßes Bild. Die Knotenkräfte f_i^+ sind nur die Übersetzung ins Diskrete von Linienkräften t, die *rechnerisch* (nicht physikalisch(!)) überall dort auftreten, wo die Steifigkeit eines Bereiches sich ändert, also z.B. dort, wo die Stärke eines Blechs sich ändert. Wenn man die Kräfte t durch die Steifigkeit dividiert, dann sind es die Sprünge in der Verzerrung zwischen den Bereichen.

Weil die folgenden Seiten sehr technisch sind, wollen wir eine kurze Zusammenfassung voranstellen. Was ist das Problem?

Das Problem ist, dass man zwei Bereiche mit unterschiedlichen Steifigkeiten hat, siehe Bild 5.47, und man sucht eine Einflussfunktion für die Lösung $u(\boldsymbol{x})$, die in beiden Bereichen gültig ist. Man kann immer zwei Einflussfunktionen getrennt für Ω_a und Ω_b aufstellen, aber das ist nicht das Ziel. Es soll eine sein.

Das geht auf zwei Weisen. Entweder man belegt das *interface* Γ_i zwischen den beiden Gebieten mit einer fiktiven äußeren Linienkraft $\bar{t}$, was dann eine Darstellung wie

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t \tag{5.283}$$

ergibt, oder man führt einen neuen Kern $\Delta H\, \partial g/\partial n$ auf dem *interface* ein

$$(c_a(\boldsymbol{x}) H_a + c_b(\boldsymbol{x}) H_b)\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.284}$$

der adjungiert zur Lösung u auf dem *interface* ist. Weil die charakteristischen Funktionen $c_a(\boldsymbol{x})$ und $c_b(\boldsymbol{x})$ in dem jeweiligen anderen Gebiet null sind, ist das ‚wie eine' Einflussfunktion für $u(\boldsymbol{x})$, keine ‚gedoppelte'. In der ersten Gleichung steht links $u(\boldsymbol{x})$, egal wo $\boldsymbol{x}$ liegt, und in der zweiten steht $H_a\, u(\boldsymbol{x})$ oder $H_b\, u(\boldsymbol{x})$, je nachdem wo man ist.

Soweit die Mathematik, nun stellen wir uns eine Membran vor, die mit einer Kraft H_a vorgespannt wird und unter Winddruck p steht

$$-H_a \Delta u = p \qquad u = 0 \;\text{ auf } \Gamma\,. \tag{5.285}$$

Die Aufhängekraft auf dem Rand ist dann $H_a \partial u/\partial n$, wie man an der ersten Greenschen Identität (9.154) ablesen kann, und die Fundamentallösung hat die Gestalt

$$g_a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{H_a}\, g \qquad g = -\frac{1}{2\,\pi}\, \ln r\,. \tag{5.286}$$

In einem Teil Ω_b im Innern der Membran habe die Vorspannung jedoch davon abweichend den Wert H_b (wie so etwas zu realisieren sei, interessiert hier nicht). Technisch bedeutet dies, dass die Biegefläche u in Ω_a und Ω_b unterschiedlichen Differentialgleichungen genügt

$$-H_a\, \Delta u = p \quad \text{in } \Omega_a \qquad -H_b\, \Delta u = p \quad \text{in } \Omega_b\,. \tag{5.287}$$

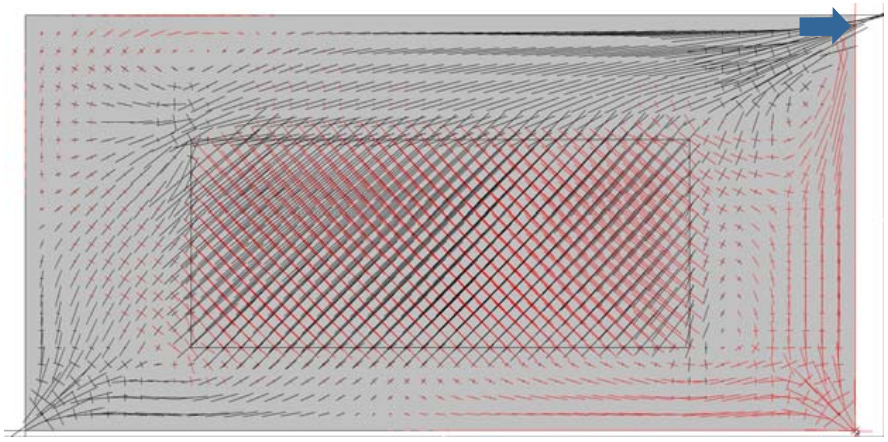


Bild 5.48. Das ist die Wandscheibe aus Bild 5.12 b. Der mittlere Teil (Reststeifigkeit 10 %) verhält sich wie ein Schubblech. Solche Probleme lassen sich mit der hier dargestellten Technik behandeln (BE-SCHEIBE)

Die Fundamentallösung im Gebiet Ω_b ist dann natürlich $1/H_b \cdot g$.

Multipliziert man (5.282) erst mit H_a und dann mit dem Kehrwert $1/H_a$, dann ist das die Integraldarstellung zu dem Operator $-H_a \Delta u$ mittels g_a

$$c(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g_a\, H_a\, \frac{\partial u}{\partial n} - H_a\, \frac{\partial g_a}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g_a\, (-H_a \Delta u)\; d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \quad (5.288)$$

Bei Lichte gesehen, hat sich aber nichts geändert. Der Ausdruck ist mit (5.282) identisch.

Formuliert man nun diese Gleichung auch für das Gebiet Ω_b (also $-H_b \Delta u = p$) und addiert die beiden Darstellungen, so erhält man

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\, \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} \quad (5.289)$$
$$+ \int_\Omega g\, (-\Delta u)\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t\,,$$

wenn Γ_i das *interface* zwischen den beiden Gebieten ist, also der Rand von Ω_b. Auf das *interface* Integral kommt man wie folgt: Auf dem *interface* ist

$$t_a = H_a\, \partial u/\partial n = -H_b\, \partial u/\partial n = -t_b\,, \quad (5.290)$$

und damit summieren sich die Beiträge von beiden Gebieten zu

$$\int_{\Gamma_i} (g_a\, t_a - g_b\, t_a)\, ds_{\boldsymbol{y}} = \int_{\Gamma_i} g\, t_a\, (\frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b})\, ds_{\boldsymbol{y}}\,. \quad (5.291)$$

Das t in (5.289) ist also das t_a. Die anderen beiden *interface* Integrale

$$\int_{\Gamma_i(\Omega_a)} \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i(\Omega_b)} \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} = 0 \tag{5.292}$$

sind in der Summe null, weil u stetig ist und der Normalenvektor an $\partial g/\partial n = \nabla g \bullet \boldsymbol{n}$ jeweils in das andere Gebiet zeigt, sich also die $u\,\partial g/\partial n$ aufheben.

Die Kräfte $\bar{t}$ auf Γ_i entsprechen den Knotenkräften f^+ in der Heftnaht, die das Blech mit der Stahlwand verbinden.

Der Ausdruck (5.289) ist die Integraldarstellung einer Membran mit überall gleicher Vorspannung $H = 1$ auf der ein Druck $-\Delta u$ lastet und längs dem *interface* Linienkräfte $\bar{t}$ wirken.

Was kann man mit der Gleichung machen? Angenommen man gibt Linienkräfte $\bar{t}$ und Gebietskräfte $p = -\Delta u$ vor, dann formuliert (5.289), wenn man $\boldsymbol{x}$ längs des Randes laufen lässt, eine Koppelbedingung zwischen den Randwerten u und $\partial u/\partial n$ der Biegefläche. Hat man zwei Randfunktionen u und $v\,(= \partial u/\partial n)$ gefunden, die der Koppelbedingung genügen, dann kann man mit (5.289) die zur Belastung $\bar{t}$ und $-\Delta u$ gehörige Biegefläche $u(\boldsymbol{x})$ darstellen.

Zurück zur der unterschiedlich vorgespannten Membran. Damit die Darstellung (5.289) die Biegefläche der Membran liefert, muss das $\bar{t}$ der Bedingung

$$\bar{t} = \frac{H_b - H_a}{Ha\, H_b}\, t_a \tag{5.293}$$

genügen, das t_a muss also die Normalableitung der Lösung in Ω_a auf dem *interface* sein. Diese Eigenschaft wurde ja bei der Herleitung ausgenutzt. Dem entspricht praktisch, dass in dem $\boldsymbol{f}^+ = \boldsymbol{\Delta K}\, \boldsymbol{u}_c$ die Lösung $\boldsymbol{u}_c$ steckt und uns $\boldsymbol{f}^+$ daher Probleme macht.

In dem $\boldsymbol{f}^+$ stecken aber auch noch Anteile aus dem Gebiet Ω_b, denn in dem ursprünglichen Vektor $\boldsymbol{f}$ stehen die Integrale $f_i = (\varphi_i, -H_a \Delta u)$ (Integration über die ganze Membran). Wenn sich nun die Vorspannung in Ω_b ändert, so muss man das zuviel oder zuwenig, also die Differenzkräfte $p/H_a - p/H_b$, mit berücksichtigen und durch ein Integral $(\varphi_i, -(H_a - H_b)\Delta u)$ über Ω_b korrigieren. Das macht einen Teil von den f_i^+ aus. Man sieht diese inneren f_i^+ in Bild 5.12, Seite 473.

5.38.4 Beispiel

Wir betrachten einen Stab, siehe Bild 5.49 a, mit zwei unterschiedlichen Steifigkeiten EA_a und EA_b. Ist $g(y, x)$ eine Fundamentallösung zu $EA = 1$, dann sind

$$g_a(y, x) = \frac{1}{EA_a} \cdot g(y, x) \qquad g_b(y, x) = \frac{1}{EA_b} \cdot g(y, x) \tag{5.294}$$

Fundamentallösungen zu Steifigkeiten EA_a bzw. EA_b. (Die Fundamentallösungen sind hier gleichzeitig auch die Einflussfunktionen, weil sie den Lagerbedingungen genügen).

Wir formulieren den Satz von Betti nun zweimal, einmal auf dem Abschnitt $[0, x_S]$ und einmal auf dem Abschnitt $[x_S, l]$

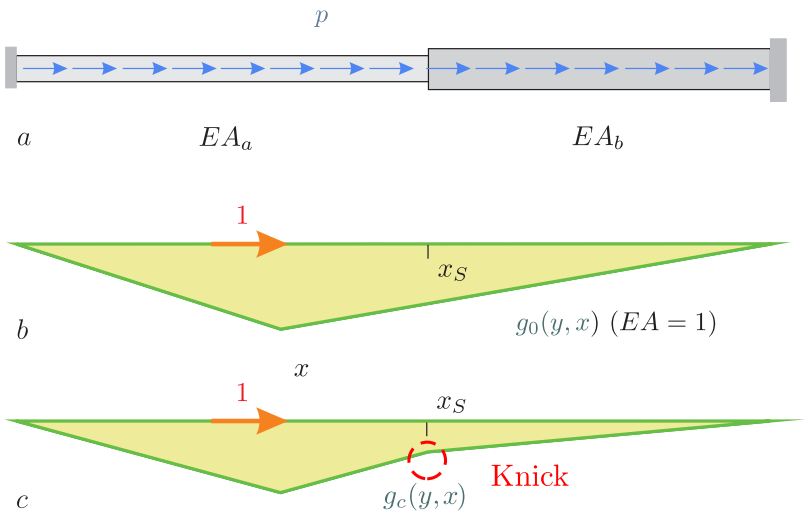


Bild 5.49. Wechselnde Steifigkeiten EA in einem Stab, **a)** System und Belastung, **b)** Einflussfunktion am homogenen Stab, **c)** exakte Einflussfunktion

$$\mathscr{B}(g_a,u)_{[0,x_S]}=0 \qquad \mathscr{B}(g_b,u)_{[x_S,l]}=0\,. \tag{5.295}$$

Das ergibt

$$c_a(x)u(x)=[g_a\,N-N(g_a)\,u]_0^{x_S}+\int_0^{x_S} g_a(y,x)\,p(y)\,dy \tag{5.296a}$$

$$c_b(x)u(x)=[g_b\,N-N(g_b)\,u]_{x_S}^{l}+\int_{x_S}^{l} g_b(y,x)\,p(y)\,dy\,. \tag{5.296b}$$

Es ist $N(g_a)=EA_a\,g_a'=g'$ und ebenso $N(g_b)=EA_b\,g_b'=g'$. Die charakteristischen Funktionen lauten[14]

$$c_a(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0,x_s]\\ 1 & 0\le x<x_S\\ (l-x_S)/l & x=x_S\end{cases} \qquad c_b(x)=\begin{cases}x_S/l & x=x_S\\ 1 & x_S<x\le l\\ 0 & x\notin[x_S,l]\end{cases} \tag{5.297}$$

Die Addition der beiden Darstellungen liefert, weil u und g an den Stabenden null sind,

[14] $(l-x_S)/l$ und x_S/l ist die Normalkraft N links und rechts vom Punkt x_S am homogenen Stab, wenn die Kraft $P=1$ im Punkt x_S steht.

$$
\begin{aligned}
(c_a(x) + c_b(x))\, u(x) &= (g_a(x, x_S) - g_b(x, x_S))\, N(x_S) \\
&\quad + \int_0^{x_S} g_a(y, x)\, p(y)\, dy + \int_{x_S}^{l} g_b(y, x)\, p(y)\, dy \\
&= g(x, x_S) \cdot F + \int_0^{x_S} g_a(y, x)\, p(y)\, dy + \int_{x_S}^{l} g_b(y, x)\, p(y)\, dy
\end{aligned} \tag{5.298}
$$

mit

$$
F = \frac{EA_a - EA_b}{EA_a EA_b}\, N(x_S)\,. \tag{5.299}
$$

Aus Sicht der Mathematik ist der Stab also zusätzlich im Punkt x_S mit einer Einzelkraft F belastet. Das kann man noch etwas umformen. Weil die Normalkraft im Punkt x_S stetig ist, $EA_a\,\varepsilon_a = EA_b\,\varepsilon_b$, gilt

$$
F = \frac{EA_a - EA_b}{EA_b}\varepsilon_a = \varepsilon_b - \varepsilon_a\,. \tag{5.300}
$$

Die ‚Kraft' ist also der Sprung in der Dehnung im Punkt x_S. Formt man um, dann kann man daraus eine wirkliche Kraft machen

$$
g(x, x_S) \cdot F = \frac{1}{EA_a}\, g(x, x_S)\, (\varepsilon_b - \varepsilon_a)\, EA_a\,. \tag{5.301}
$$

Dass es auch ohne Kraft F geht, zeigt Bild 5.49 c. Wenn man die Fundamentallösungen nicht ‚stückelt', sondern mit einer ‚durchgehenden' Fundamentallösung rechnet, bei der der Wechsel von EA_a nach EA_b eingebaut ist, dann taucht die Kraft F nicht auf

$$
u(x) = \int_0^{l} g_c(y, x)\, p(y)\, dy\,. \tag{5.302}
$$

Das wäre die richtige Einflussfunktion.

5.38.5 Kerne j^+

Wir hatten uns in Kapitel 5.16 überlegt, dass es nicht nur Kräfte f^+ gibt, sondern dass es auch Kräfte j^+ geben muss. Hier können wir das präzisieren.

Die Membran $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$ bestehe, wie oben, aus zwei unterschiedlich vorgespannten Flächen Ω_a und Ω_b. Formuliert man die Darstellung (5.282) für beide Gebiete getrennt, multipliziert die jeweilige Darstellung mit H_a bzw. H_b und addiert die beiden Gleichungen, so erhält man

$$
\begin{aligned}
(c_a(\boldsymbol{x})H_a + c_b(\boldsymbol{x})H_b)\, u(\boldsymbol{x}) &= \int_{\Gamma_a} [g\, H_a \frac{\partial u}{\partial n} - H_a \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} \\
&\quad + \int_{\Gamma_b} [g\, H_b \frac{\partial u}{\partial n} - H_b \frac{\partial g}{\partial n}\, u]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega} g\; p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \\
&\quad + \int_{\Gamma_i} (H_a - H_b) \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,.
\end{aligned} \tag{5.303}
$$

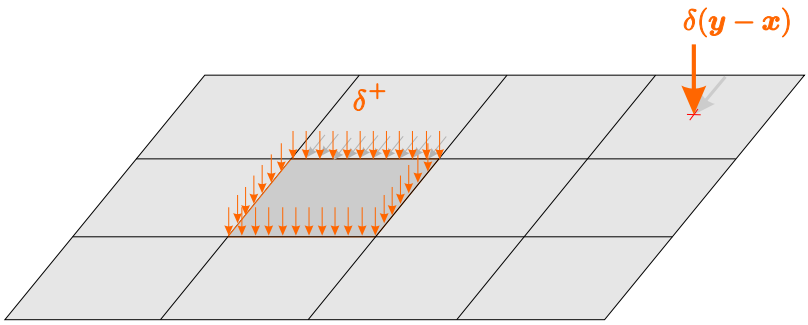


Bild 5.50. Am Rand des Elements mit der abweichenden Steifigkeit ergänzen zusätzliche Deltas δ^+ das Dirac Delta

Liegt nun wie in Bild 5.50 der Teil Ω_b im Innern, wir können uns Ω_b als ein einzelnes finites Element vorstellen, dessen Steifigkeit sich geändert hat, $H \to H + \Delta H$, dann entfällt das Integral über Γ_b

$$(c_a(\boldsymbol{x})H + c_b(\boldsymbol{x})(H+\Delta H))\,u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\,H\frac{\partial u}{\partial n} - H\frac{\partial g}{\partial n}\,u]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\,p\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \Delta H\frac{\partial g}{\partial n}\,u\,ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.304}$$

Liegt der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ z.B. in Ω_a, dann ist $c_b(\boldsymbol{x}) = 0$ und das Resultat lautet

$$H\,u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g\,H\frac{\partial u}{\partial n} - H\frac{\partial g}{\partial n}\,u]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\,p\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \Delta H\frac{\partial g}{\partial n}\,u\,ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.305}$$

Nach Division durch H ist das die Durchbiegung $u(\boldsymbol{x})$. Eine Steifigkeitsänderung führt also zu Zusatztermen δ^+ (zusätzlichen ‚Dirac Deltas') auf dem Rand des Elements

$$\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \quad \to \quad \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \delta^+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + \frac{\Delta H}{H}\frac{\partial g}{\partial n}\,, \tag{5.306}$$

gegen die die Lösung u zusätzlich arbeiten muss

$$J(u_c) = \int_\Omega \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} \delta^+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})\,ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.307}$$

um auf den Wert $u(\boldsymbol{x})$ zu kommen. Es ist klassische Potentialtheorie.

5.38.6 Die zwei Zugänge

Und damit sind wir an dem Punkt, wo wir deutlich sagen müssen, dass es *zwei* Zugänge gibt. Der eine führt zu den zusätzlichen Kräften $\bar{t}$ längs dem

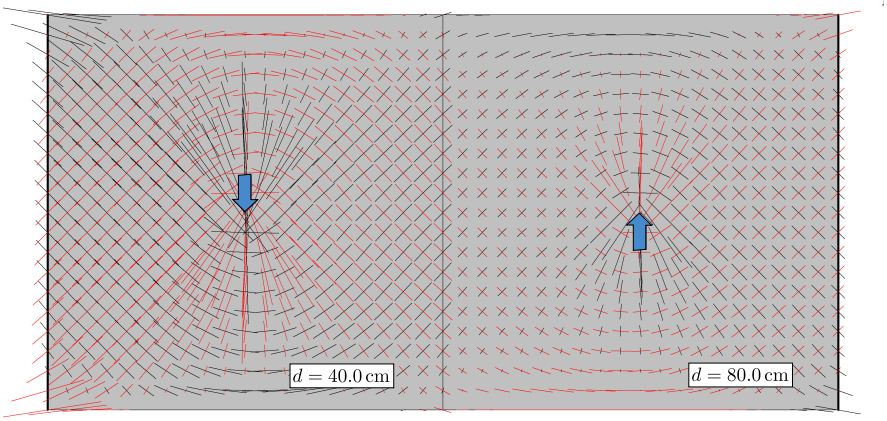


Bild 5.51. Die beiden Scheiben sind links und rechts gehalten und in der Mitte miteinander verbunden (BE-SCHEIBE, Testversion)

interface Γ_i und der andere zu den zusätzlichen Kernen δ^+ längs Γ_i. Wenn man den Satz von Betti für Ω_a und Ω_b zunächst getrennt formuliert – also mit dem jeweils eigenen Kern g_a bzw. g_b – und dann addiert, dann entsteht bei der Addition eine *Zusatzbelegung* $\bar{t}$

$$(c_a(\boldsymbol{x}) + c_b(\boldsymbol{x}))\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \qquad \bar{t} = \frac{H_b - H_a}{H_a\, H_b}\, t\,. \tag{5.308}$$

Wenn man aber die beiden Integraldarstellungen für $u(\boldsymbol{x})$, bevor man sie addiert, mit den betreffenden Steifigkeiten H_a und H_b multipliziert, dann entsteht bei der Addition ein zusätzlicher *Kern*, entstehen zusätzliche linienhafte ‚Dirac Deltas‘,

$$(c_a(\boldsymbol{x})H_a + c_b(\boldsymbol{x})H_b)\, u(\boldsymbol{x}) = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{5.309}$$

die wir δ^+ genannt haben[15]. Der Begleiter, die Belegung u auf Γ_i ist ja ein alter Bekannter, ist nicht neu.

Physikalisch gibt es keine *äußeren* Kräfte $\bar{t}$, so wie ja beim Stab dort, wo der Querschnitt springt, die Normalkräfte links und rechts gleich groß sind, keine Kraft f^+ auftritt. Aber die Kräfte $\bar{t}$ oder die Kraft f^+ sind das Vehikel, mit dem es der Potentialtheorie gelingt, den exakten Wert $u(\boldsymbol{x})$ zu ermitteln. Sie haben ihre Existenz von der Mathematik. So wie $1 + 1 = 2$ ergibt, so entstehen bei der Addition der Einflussfunktionen zweier aneinander grenzender Bereiche

[15] Je nach Lage des Aufpunkts $\boldsymbol{x}$ muss man $\Delta H \partial g/\partial n$ durch H_a bzw. H_b dividieren, um auf das korrespondierende δ^+ zu kommen.

$$\ldots \int_{\Gamma_i} g_a \frac{\partial u}{\partial n}\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} g_b \frac{\partial u}{\partial n}\, ds_{\boldsymbol{y}} = \ldots + \int_{\Gamma_i} g\, \bar{t}\, ds_{\boldsymbol{y}} \tag{5.310}$$

mit unterschiedlichen Steifigkeiten *automatisch* die Belegungen (die Kräfte) $\bar{t}$ bzw. die Kerne δ^+

$$\ldots + \int_{\Gamma_i} H_a \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Gamma_i} H_b \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}} = \ldots + \int_{\Gamma_i} \Delta H \frac{\partial g}{\partial n}\, u\, ds_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{5.311}$$

(Weil die Normalenvektoren auf Γ_i jeweils entgegengesetzt gerichtet sind, ergibt sich bei der Addition der Beitrag $\Delta H = H_a - H_b$).

Bemerkung 5.9. Die *Randelemente* basieren auf der Potentialtheorie und in dem Program BE-PLATTE, siehe Kapitel 12, wird diese Technik benutzt, um Platten mit feldweise unterschiedlichen Stärken zu berechnen, werden die Einflussfunktionen sinngemäß um zwei Integrale erweitert, (die Plattengleichung ist von vierter Ordnung), die die Durchbiegung w und die Neigung $\partial w/\partial n$ (senkrecht zum Rand der Felder) mit zwei solchen Kernen j^+ wichten, die konjugiert zu w und $\partial w/\partial n$ sind, die also aus den Sprüngen des Querkraftkerns (genauer: Kirchhoffkerns) und des Momentenkerns kommen, [86] S. 289,

$$\ldots + \int_{\Gamma_i} [M_\nu(g_0^a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))(K_a - K_b)\frac{\partial w}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) - V_\nu(g_0^a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))(K_a - K_b)w(\boldsymbol{y})]\, ds_{\boldsymbol{y}} + \ldots \tag{5.312}$$

5.38.7 Unterschiedliche Stärken

Die Stärke einer Scheibe geht nicht in die Differentialgleichung ein. Man rechnet daher mit der Scheibendicke $d = 1.0$ und skaliert die Lasten so, dass sich die Ergebnisse auf die reale Scheibe übertragen lassen. Einzelkräfte werden also durch die Scheibendicke dividiert, etc.

Wenn zwei unterschiedlich starke Scheiben miteinander verbunden sind, wie in Bild 5.48 oder 5.51, dann werden die Integralgleichungen getrennt für beide Scheiben aufgestellt und in den gegenüberliegenden Knoten der Schnittfuge, links und rechts, werden die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ gekoppelt

$$\boldsymbol{u}_L - \boldsymbol{u}_R = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{t}_L \cdot d_L + \boldsymbol{t}_R \cdot d_R = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.313}$$

Um die Kondition des Gleichungssystems zu verbessern wird die Kopplung $\boldsymbol{u}_L = \boldsymbol{u}_R$ schon beim Aufbau der Matrix implementiert (gleiche Spalten für die u_i in der Koppelfuge), so dass die Integralgleichungen nur um die Gleichgewichtsbedingungen in der Koppelfuge erweitert werden.

Bemerkung 5.10. Die Scheibe in Bild 5.51 wurde mit einer ‚Testversion' von BE-SCHEIBE berechnet. Technisch ist die oben beschriebene Kopplung zweier Scheiben (nicht von Platten!) manchmal eine ‚wacklige' Angelegenheit, denn bei Tests erwies sich, dass die Kondition des Gleichungssystems nicht immer ausreichend war – bei der Scheibe in Bild 5.51 hat es dagegen gut funktioniert. Die Kondition lässt sich aber verbessern, wenn man die zweite Gleichung in (5.313) mit dem E-Modul multipliziert.

6

Singularitäten

In diesem Kapitel geht es um die Frage, wann Spannungsspitzen auftreten, und wieso singuläre Punkte die Güte der Einflussfunktionen mindern und damit die Lösung selbst und zwar nicht nur in der Nähe der singulären Punkte, sondern in allen Punkten!

6.1 Singuläre Spannungen

Spannungen sind proportional zu den Dehnungen, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, also proportional zu den Ableitungen der Verschiebungen, siehe Bild 6.1, und so entstehen singuläre Spannungen immer dann, wenn die Verschiebungen sich schlagartig ändern, sie praktisch aus dem Stand heraus von null nach oben schießen, siehe Bild 6.1 a.

Die ***Brachystochrone***, (βραχύς = kurz), illustriert die Situation am besten. Die Brachystochrone ist die Kurve, die zwei vorgegebene Punkte A und B so verbindet, dass man mit Hilfe des Schwerefelds der Erde möglichst schnell von A nach B kommt. Die Lösung dieses berühmten Problems ist eine ***Zykloide***, siehe Bild 6.1.

Es ist also nicht der kürzeste Weg, der am schnellsten zum Ziel führt, sondern der Weg, bei dem wir am Anfang möglichst viel Geschwindigkeit holen, indem wir uns senkrecht nach unten fallen lassen.

Genauso verhalten sich die Bauteile, denn das Material will möglichst schnell weg aus der Gefahrenzone, wie etwa einem Riss, siehe Bild 6.2, und so läuft die vertikale Verschiebung u_y mit unendlich großem ‚Tempo', unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund heraus und dies führt damit natürlich zu unendlich großen Spannungen σ_{yy}.

Beim Auto sagt man: *Wo der Weg (= Bremsweg) null ist, ist die Kraft unendlich* und was beim Auto die Beschleunigung $a = dv/dt$ ist, ist bei Tragwerken die Verzerrung $\varepsilon = du/dx$ (Scheiben) bzw. die Krümmung $\kappa = d^2w/dx^2$ (Platten).

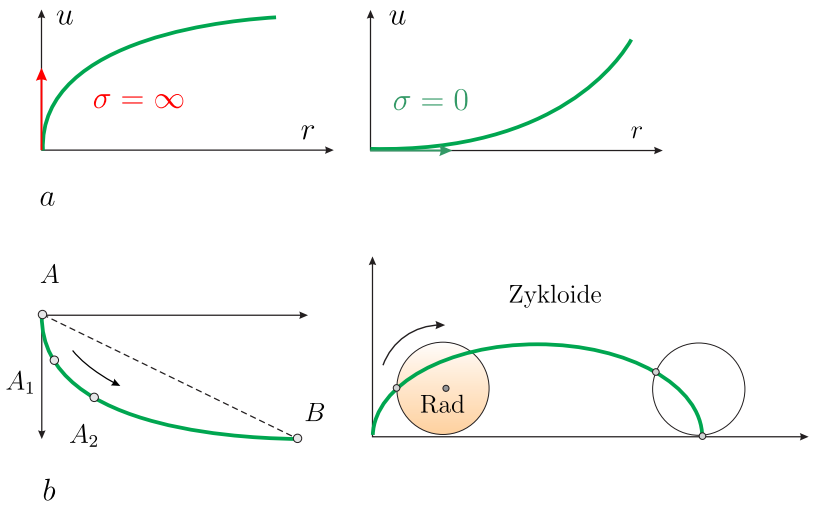


Bild 6.1. Je nachdem, wie die Verschiebungen ausklingen, sind die Spannungen endlich oder unendlich. Die schnellste Verbindung von A nach B im Schwerefeld der Erde ist nicht die kürzeste Verbindung ($- - -$), sondern eine Zykloide. Weil die Anfangsbeschleunigung in den tieferen Startpunkten A_1 bzw. A_2 kleiner ist als in A (flachere Tangenten), dauert die Reise von dort aus nach B genauso lange wie von A aus

Reißt eine Scheibe auf, dann ist, weil die Bruchflächen vorher den Abstand $dx = 0$ hatten, bei noch so kleiner Rissöffnung du die Verzerrung unendlich groß, $du/dx = du/0 = \infty$.

Sinngemäß dasselbe gilt für einen Knick in einer Platte, weil in einem solchen Punkt der Krümmungskreisradius R null ist und der Kehrwert $\kappa = 1/R$ somit unendlich groß wird.

6.2 Singuläre Lagerkräfte

Mit der ungeschickten Plazierung von Festpunkten kann man sich beliebig große Kräfte, sprich Probleme, einhandeln, siehe Bild 6.3.

Die Momente in dem Durchlaufträger aus der Einzelkraft sind zickzackförmig und je enger die beiden Innenlager beieinander stehen, um so größer wird die Querkraft, weil die Querkraft ja die Ableitung des Momentes ist

$$V = \frac{dM}{dx}\,, \tag{6.1}$$

sie also dem Steigungsdreieck des Momentes entspricht[1].

Die Einflussfunktion für die Querkraft schwingt immer weiter aus, je kürzer der Abstand der beiden Lager wird. Die Aktion, die die Einflussfunktion

[1] Wie beim Vierendeelträger: Je niedriger die Höhe, desto größer sind die Querkräfte in den Sprossen, Vierendeel = Zickzack-Momente und große Querkräfte

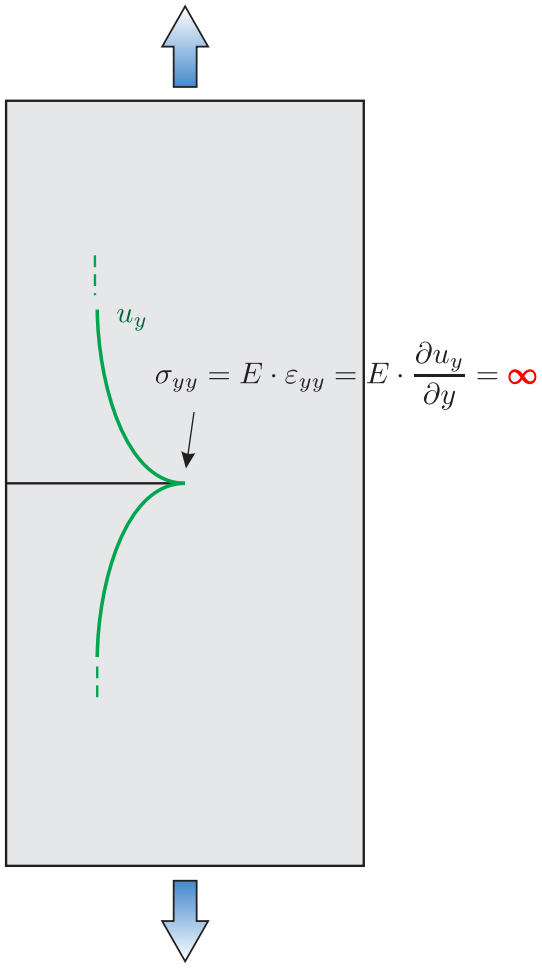


Bild 6.2. Die Spannungen σ_{yy} im Rissgrund sind unendlich groß, weil u_y mit unendlich großer Steigung aus dem Rissgrund herausläuft ($\nu = 0$)

auslöst, die Spreizung ± 0.5, ist immer gleich groß, aber die Flanken der Einflussfunktion werden mit $h \to 0$ **immer steiler** und so wölbt sich die Einflussfunktion im Feld immer weiter auf.

Bei der Deckenplatte in Bild 6.4 ist es der Versatz der Innenwände, der diesen Effekt produziert. Den Wänden gelingt es, wegen ihres kurzen Abstandes, nur sehr schwer das **Versatzmoment** auszubalancieren und auch die Platte leidet unter der Situation, wie die Oszillationen in den Hauptmomenten belegen.

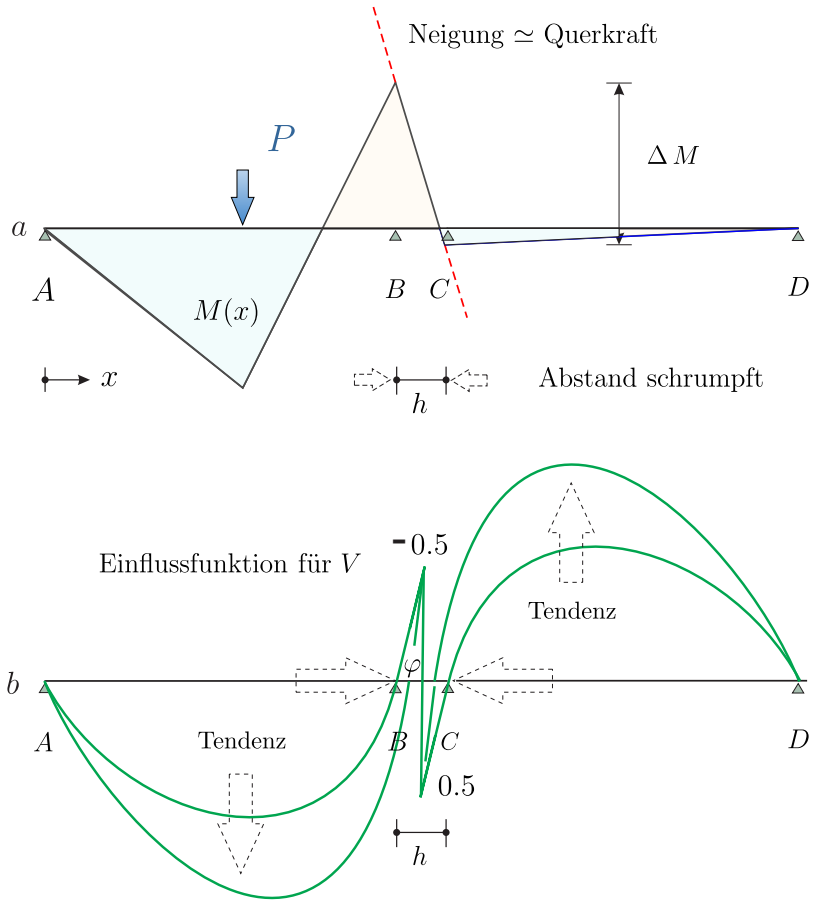


Bild 6.3. Durchlaufträger **a)** Je kürzer das mittlere Feld wird, um so steiler werden die Momente und um so größer damit die Querkraft, $V = M'$, **b)** Einflussfunktion für die Querkraft in Feldmitte

6.3 Einzelkräfte

Oft sind singuläre Spannungen ein Rätsel. ‚Liegt es an den Elementen oder liegt es an der Statik'? Dagegen ist die Situation klar, wenn eine Einzelkraft $P = 1$ in der Mitte einer Scheibe angreift, siehe Bild 6.5 a.

Wenn wir um den Aufpunkt Kreise mit dem Radius r schlagen, dann müssen die über den Kreis aufintegrierten horizontalen Spannungen die Punktlast ergeben – auch in der Grenze $r \to 0$.

Um dies nun genauer zu fassen, müssen wir etwas ausholen. Was wir über den Kreisumfang integrieren, sind nicht die horizontalen Spannungen, sondern die horizontalen ***tractions***, um hier das englische Wort zu benutzen. Ist $\boldsymbol{S}$

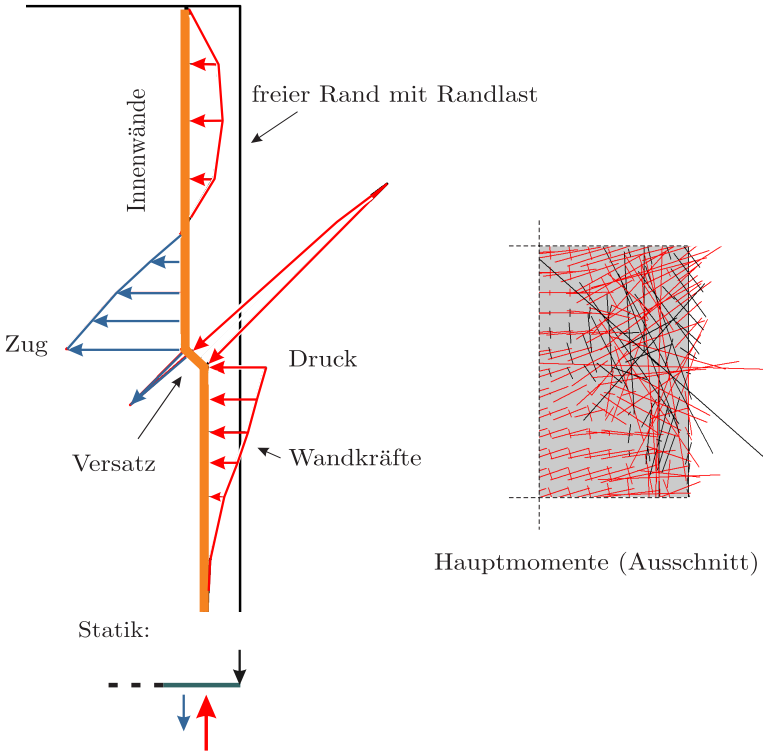


Bild 6.4. Blick auf eine Platte – ein kleiner Versatz in den tragenden Innenwänden und die großen Folgen. Die Wände wurden ‚knirsch' gerechnet. Elastische Lagerung dürfte die Effekte dämpfen

der Spannungstensor in der Scheibe,

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} , \tag{6.2}$$

dann gehört zu einem Schnitt mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}^T$ der Spannungsvektor

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \text{auf dem Kreisumfang} \tag{6.3}$$

und das Gleichgewicht verlangt, dass das Integral des Spannungsvektors über den Umfang des Kreises Γ gleich der Einzelkraft ist

$$\int_\Gamma \boldsymbol{t}\, ds + P \cdot \boldsymbol{e}_1 = \int_\Gamma \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{6.4}$$

Nun geht mit immer kleiner werdendem Radius, $r \to 0$, der Umfang des Kreises, $U = 2\,\pi\,r$, gegen null und damit am Ende das Integral der horizontalen Spannungen weiterhin den Wert -1 ergibt, muss sich t_x wie $-1/(2\,\pi\,r)$ verhalten

$$\lim_{r\to 0} \int_\Gamma t_x \, ds = \int_0^{2\,\pi} t_x \, r \, d\varphi = -\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{2\,\pi\,r} \, r \, d\varphi = -1\,, \tag{6.5}$$

und damit in der Grenze, $r \to 0$, unendlich groß werden[2].

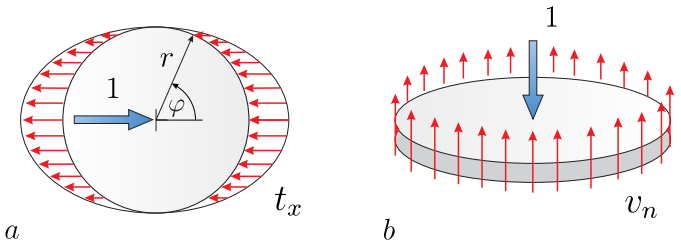


Bild 6.5. Einzelkraft bei einer Scheibe und bei einer Platte. Bei einer Platte wachsen die Querkräfte (v_n) auch wie $1/r$, aber weil w das dreifache Integral der Querkräfte ist, ist $w = r^2 \ln r$ auch im Punkt $r = 0$ endlich; v_n ist der Kirchhoffschub

Frage: Um wieviel verschiebt sich der Aufpunkt? Dies finden wir heraus, indem wir die Verzerrungen integrieren. Setzen wir der Einfachheit halber die Querdehnungszahl $\nu = 0$, dann hängt die Dehnung $\varepsilon_{xx} = 1/E \cdot \sigma_{xx}$ nur von der horizontalen Spannung ab und wegen

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2\,\pi\,r} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \simeq -\frac{1}{r} \tag{6.6}$$

folgt, dass sich die horizontale Verschiebung u wie $-\ln r$ verhält, weil dies die Stammfunktion von $-1/r$ ist. Dies bedeutet, dass die Verschiebung im Aufpunkt unendlich groß wird, denn $-\ln 0 = \infty$.

Es gilt also:

- Unter Einzelkräften werden die Spannungen unendlich groß
- Die unendlich großen Spannungen führen dazu, dass das Material fließt und der Aufpunkt unendlich weit wegwandert.
- Punktlager (= Punktkräfte) können eine Scheibe daher nicht festhalten und man kann auch keine Lagerverschiebung in einem solchen Lager vorschreiben.

Nun kann man aber, all diesem zu Trotz, bei einer FE-Berechnung Knoten festhalten und auch Knotenverschiebungen vorgeben. Wie das?

[2] Wegen Details siehe Kap. 9.27

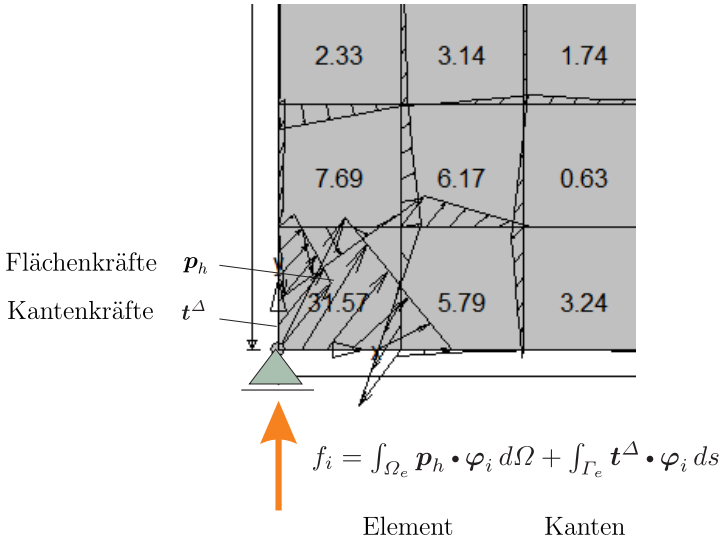


Bild 6.6. Haltekräfte = Flächenkräfte + Kantenkräfte nahe einem Lagerknoten. Die Flächenkräfte $\boldsymbol{p}_h$ sind nur über ihre Integrale, Glg. (6.7), das sind die Zahlen in den Elementen, dargestellt. Die Kantenkräfte sieht man als Pfeile (WINFEM)

Des Rätsels Lösung ist natürlich, dass die FE-Lösung keine exakte Lösung ist. In einem Lagerknoten werden die Verschiebungen $u_i = 0$ in der Tat auf null abgebremst, aber das sind verteilte Kräfte, die diesen Halt zuwege bringen, siehe Bild 6.6, und keine echten Einzelkräfte.

Im Ausdruck steht zwar eine Knotenkraft f_i, aber das ist eine rein rechnerische Größe, eine ***äquivalente Knotenkraft***, die stellvertretend für die wahren Haltekräfte wie in Bild 6.6 steht. Es sind Linienkräfte längs den Elementkanten und Flächenkräfte, die die Scheibe stützen. Die Zahlen in Bild 6.6 sind die aufintegrierten Flächenkräfte der FE-Lösung pro Element

$$\int_{\Omega_e} (p_x^2 + p_y^2)\, d\Omega\,. \tag{6.7}$$

6.4 Das Abklingen der Spannungen

Aus einem ähnlichen Grund wie oben, müssen die Spannungen und Verzerrungen mit wachsendem Abstand von der Last immer kleiner werden. Nur ist es nicht das Gleichgewicht, sondern der ***Energieerhaltungssatz***, der das zwingend vorschreibt.

Schlagen wir um den Mittelpunkt der Last einen Kreis mit Radius R, dann muss die innere Energie in der Kreisscheibe (wir lassen den Faktor 1/2 weg)

$$W_i = \int_\Omega \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,d\Omega = \int_0^R \int_0^{2\,\pi} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,r\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_0^R \int_0^{2\,\pi} (\sigma_{11}\,\varepsilon_{11} + 2\,\sigma_{12}\,\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\,\varepsilon_{22})\,r\,dr\,d\varphi \tag{6.8}$$

gleich der äußeren Arbeit $W_e(P)$ der Belastung sein, also überschlägig gleich

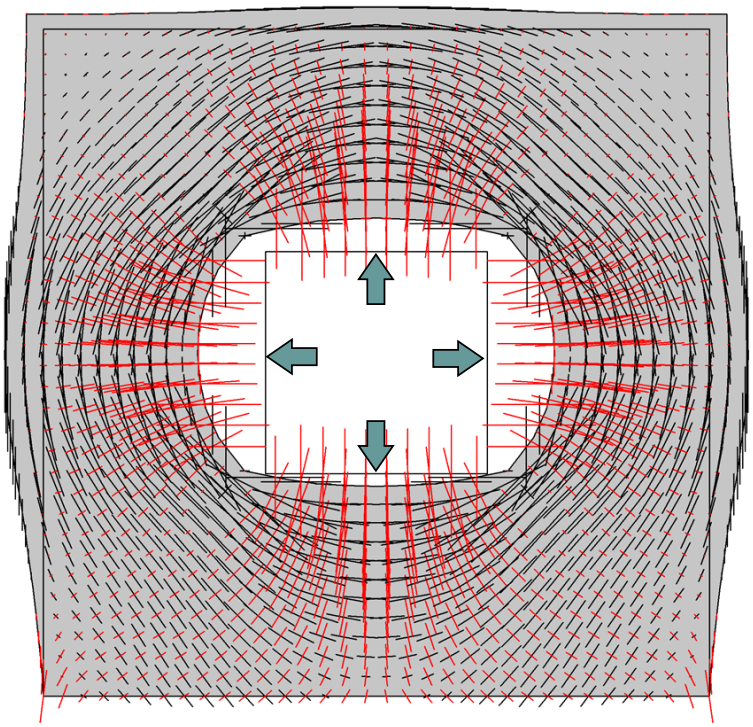


Bild 6.7. Gelochte Scheibe unter Innendruck, (BE-SCHEIBE)

der *Verformung aus der Belastung* × *der Belastung* plus der Arbeit $W_e(\Gamma)$ der Schnittkräfte entlang dem Kreisumfang Γ. Ab einem gewissen Radius R ist der Kreis groß genug, um die ganze Belastung zu umfassen, und ab diesem Zeitpunkt ändert sich die äußere Arbeit W_e nur noch, weil mit R auch der Umfang Γ wächst, siehe Bild 6.7. Die Energiebilanz verlangt

$$W_e = W_e(P) + W_e(\Gamma) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega = W_i \tag{6.9}$$

und daher ist der Term

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega - W_e(\Gamma) = W_e(P) \tag{6.10}$$

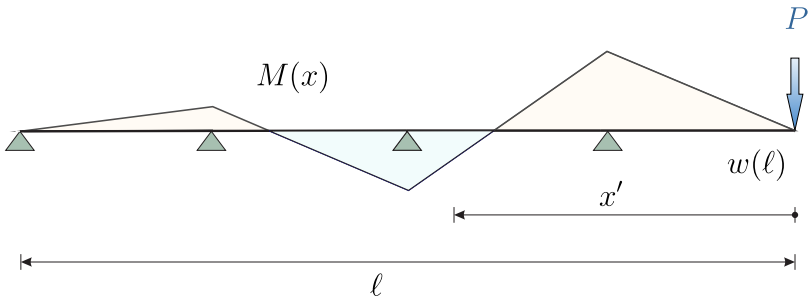


Bild 6.8. Der Energieerhaltungssatz impliziert, dass das Moment abklingt

konstant. Mit wachsendem Radius R muss sich die Verzerrungsenergie gegenläufig verhalten, um den Zuwachs an Fläche Ω und Rand Γ auszubalancieren

$$\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} \simeq \frac{1}{R^2}\,. \tag{6.11}$$

Ähnlich muss bei dem Durchlaufträger in Bild 6.8 die innere Energie W_i in jedem rechten Teil $[x', \ell]$ – von einem Punkt x' im Innern bis zum Ende – gleich der äußeren Arbeit der Kragarmlast plus der Arbeit $W_e(x')$ der Schnittkraft an der Stelle x' sein

$$W_i = \int_{x'}^{\ell} \frac{M^2}{EI}\,dx = P \cdot w(\ell) + W_e(x') = W_e\,, \tag{6.12}$$

und dies impliziert, dass M und $W_e(x')$ abfallen, je größer $x' \to \ell$ wird, je weiter es nach links rückt (im linken Lager ist $x' = \ell$).

Der Energieerhaltungssatz ist also der Grund, warum Einflussfunktionen in der Regel rasch abklingen.
Die Ausnahme sind Einflussfunktionen in statisch bestimmten Tragwerken, weil kinematische Ketten null Energie haben und sie somit nicht gegen den Energieerhaltungssatz verstoßen, wenn sie unter Umständen immer weiter anwachsen.

Bemerkung 6.1. Je größer der Abstand R eines Betrachters von der Sonne ist, um so schwächer scheint ihm das Licht, weil sich die abgestrahlte Energie E über eine immer größere Sphäre S verteilt

$$E = \int_S q\,dS = q \cdot 4\,\pi\,R^2\,, \tag{6.13}$$

und die Energiedichte $q = E/S$ pro m^2 daher wie $1/R^2$ abnimmt.

Dieses Argument benutzt implizit auch der Ingenieur, der Laständerungen in abliegenden Punkten einer Platte ignoriert, weil er weiß, dass das, was an

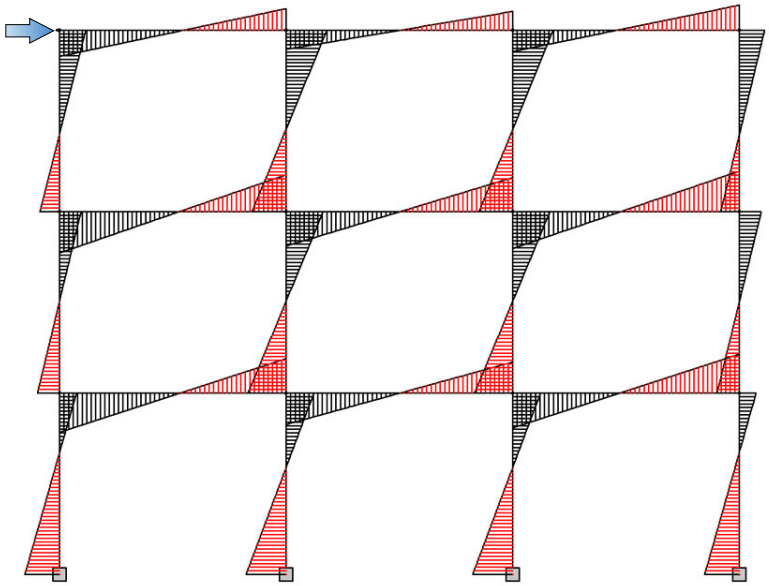


Bild 6.9. Einzelkraft an Gebäudeecke (Stockwerkrahmen) (BE-FRAMES)

Biegeenergie hinzukommt, mit zunehmenden Abstand vom Quellpunkt, wie das Licht der Sonne, abklingen muss.

Allerdings kann man die Regel nicht blindlings anwenden. Die Abmessungen und die Lagerbedingungen spielen eine große Rolle, wie etwa bei dem Stockwerkrahmen in Bild 6.9, bei dem die Fußpunkte zwar den größten Abstand vom Kraftangriffspunkt haben, aber die Fußpunktsmomente mit zu den größten Momenten gehören.

Der Stockwerkrahmen trägt zwar wie ein Schubträger, aber er ist ähnlich empfindlich wie ein sehr langer Kragträger, bei dem eine Zusatzlast ΔP am Kragarmende zu einem großen zusätzlichen Ausschlag Δw am Kragarmende führt und so die Energiebilanz

$$\Delta P \cdot \Delta w = \int_0^l \frac{\Delta M^2}{EI}\, dx \tag{6.14}$$

geradezu verlangt, dass sich das Einspannmoment merklich ändert.

Anders gesagt, wenn die Zusatzbelastung große Wege geht, ihre Eigenarbeit groß ist, dann muss man genau hinschauen, während man in allen anderen Fällen davon ausgehen kann, dass die Effekte ‚versickern'.

6.5 Kragträger

Wir wollen diese Beobachtungen zum Anlass nehmen, auf die besondere Rolle der Kragträger hinzuweisen. Bei einem Durchlaufträger klingen Momente um so schneller ab, je mehr Felder er hat. Der Kragträger ist das genaue Gegenteil. Wenn man einen Kragträger nur lang genug macht, dann kann man das Einspannmoment beliebig groß machen, ohne dass sich die Last am Kragarmende ändert, weil die Einflussfunktion für das Einspannmoment eine Verdrehung des Trägers um 45° ist.

Richtet man einen sehr starken Laserstrahl von der Erde auf den Mond, dann bewegen sich die Lichtpunkte auf dem Mond bei einer winzigen Drehung des Lasers mit einer Geschwindigkeit, die (theoretisch) größer ist als die Lichtgeschwindigkeit! (theoretisch, weil die Photonen ja nur mit c unterwegs sind).

Starrkörperdrehungen sind also mit Vorsicht zu betrachten. Wenn diese möglich sind, dann muss man mit allem rechnen...

6.6 Je weiter desto tiefer

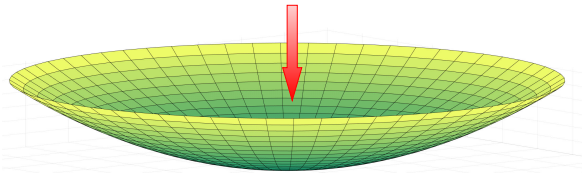


Bild 6.10. Einzelkraft und Kreisplatte (MATLAB)

Die innere Energie kennt nur eine Richtung, sie wächst quadratisch: Je größer die Platte Ω ist, siehe Bild 6.10, oder die Spannweite l des Trägers, desto größer wird sie

$$W_i = \frac{1}{2}\, a(w, w) \tag{6.15}$$

und weil der **Energieerhaltungssatz** verlangt, dass die äußere Arbeit W_e gleichzieht – wir betrachten einen Einfeldträger mit zentrischer Einzelkraft P – muss die Durchbiegung anwachsen

$$W_e = \frac{1}{2}\, P\, w(x) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI}\, dx = W_i\,. \tag{6.16}$$

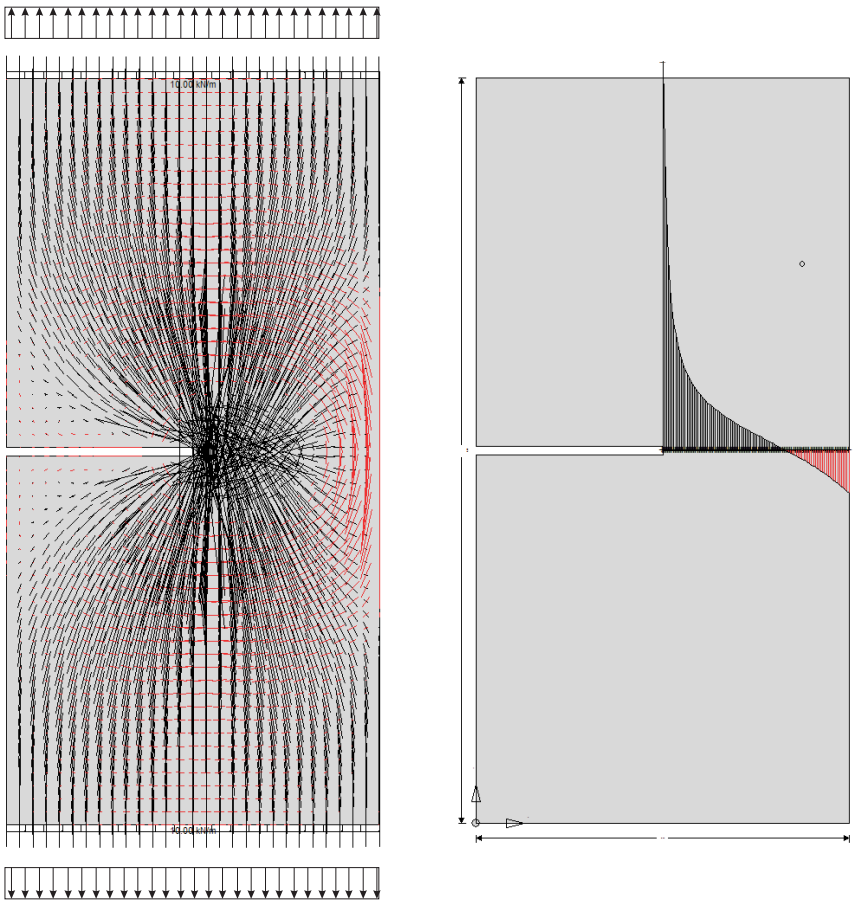


Bild 6.11. Hauptspannungen in einer geschlitzten Scheibe, rechts die Spannungen σ_{yy} (BE-SCHEIBE)

6.7 Unendlich große Spannungen

Singuläre Punkte, also Punkte, in denen die Spannungen unendlich groß werden, liegen typischerweise auf dem Rand und dort in Eckpunkten oder Punkten, in denen sich die Lagerbedingungen ändern, siehe Bild 6.11.

Wenn wir der Meinung sind, dass man mit Einflussfunktionen auch diese Spannungen – vielleicht nicht direkt in der Ecke, aber in der Nähe – voraussagen kann, dann stehen wir vor einem Problem: Wie gelingt es einer **Punktversetzung** (= Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund) den oberen und unteren Rand der Scheibe in Bild 6.12 in die Richtungen $\pm\infty$

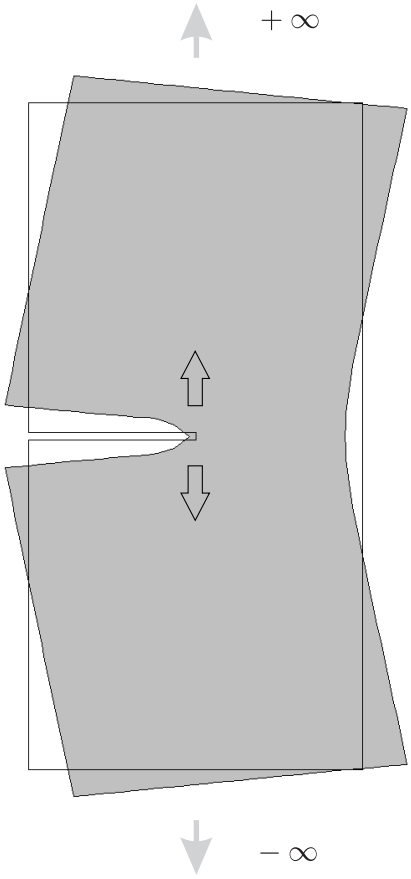


Bild 6.12. Eine Versetzung im Rissgrund, muss unendlich große Verschiebungen verursachen (BE-SCHEIBE)

zu drücken? Anders kann es ja nicht sein, wenn wir der Überzeugung sind, dass die Einflussfunktionen auch in der Nähe solcher singulärer Punkte noch anwendbar sind

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) ds_{\boldsymbol{y}} = \infty \,. \tag{6.17}$$

Wie funktioniert das? Wie kann eine Punktversetzung ein unendlich weit ausschwingendes Verschiebungsfeld erzeugen?

Im Grunde haben wir das Phänomen schon bei der Einflussfunktion für die Querkraft kennengelernt. Stellen wir uns vor, wir benutzen dreiecksförmige Elemente, die Querdehnzahl ν sei null (der Einfachheit halber), und wir wollen die Einflussfunktion für die Summe $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$ der Spannungen in den beiden Elementen, die dem Rissgrund unmittelbar benachbart sind, berechnen. Weil wir die Summe berechnen, bleibt die Symmetrie des Problems erhalten.

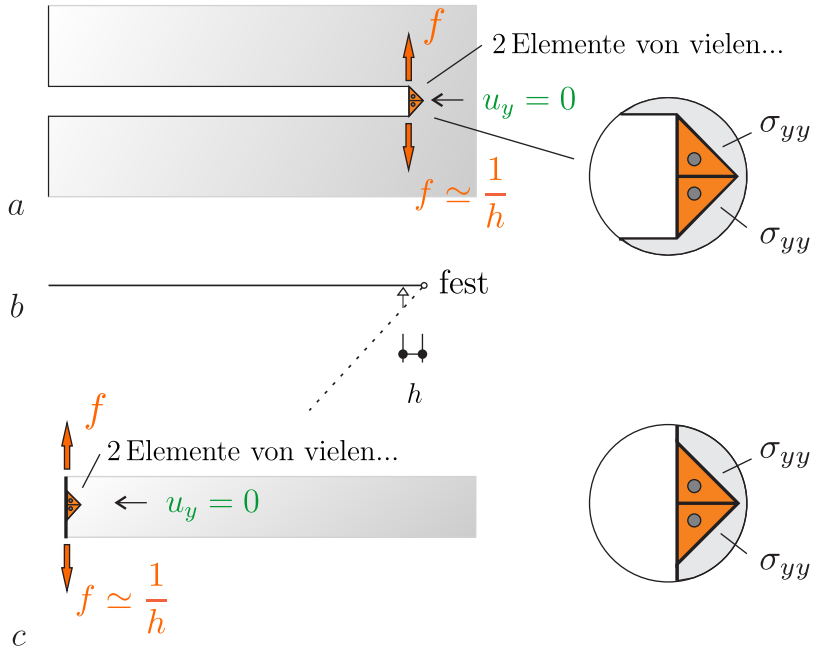


Bild 6.13. **a)** Dreiecksförmige Elemente, Erzeugung der Einflussfunktion für $2 \cdot \sigma_{yy}$ im Rissgrund, **b)** die Kinematik, **c)** am Außenrand

Wir müssen also die Spannungen σ_{yy} der Ansatzfunktionen als Knotenkräfte aufbringen. Das ergibt die Bild 6.13 a, wenn wir die Knotenkräfte, die sich gegenseitig aufheben, weglassen. In dem rückwärtigen Knoten, der ja auf der Symmetrielinie liegt, muss die vertikale Verschiebung null sein. Damit ist die Situation im Grunde dieselbe wie bei einem Kragträger. Wenn die beiden Kräfte die Risskanten auseinander treiben, dann drehen sie praktisch die freien Schenkel um diesen rückwärtigen Knoten und wenn h gegen null geht, müssen sich die Schenkel um 90° aufstellen d.h. die vertikalen Verschiebungen werden unendlich groß.

Wie ist das nun, wenn wir dasselbe Manöver an dem glatten Rand einer Scheibe fahren? Wir berechnen wieder die Einflussfunktion für $\sigma_{yy} + \sigma_{yy}$, aber nun ragt kein Teil der Scheibe über den Außenrand hinaus, siehe Bild 6.13 c. Jetzt kann sich nichts verdrehen und daher bleiben die Verformungen (in den abliegenden Punkten) endlich.

Auch die singulären Spannungen bei der L-Scheibe in Bild 6.14 rühren daher, dass die beiden Knotenkräfte, die die Einflussfunktion für die Summe der beiden schrägen Spannungen $2 \cdot \sigma_{\xi\xi}$ erzeugen, im Grenzfall, $h \to 0$, die Schenkel um 90° verdrehen.

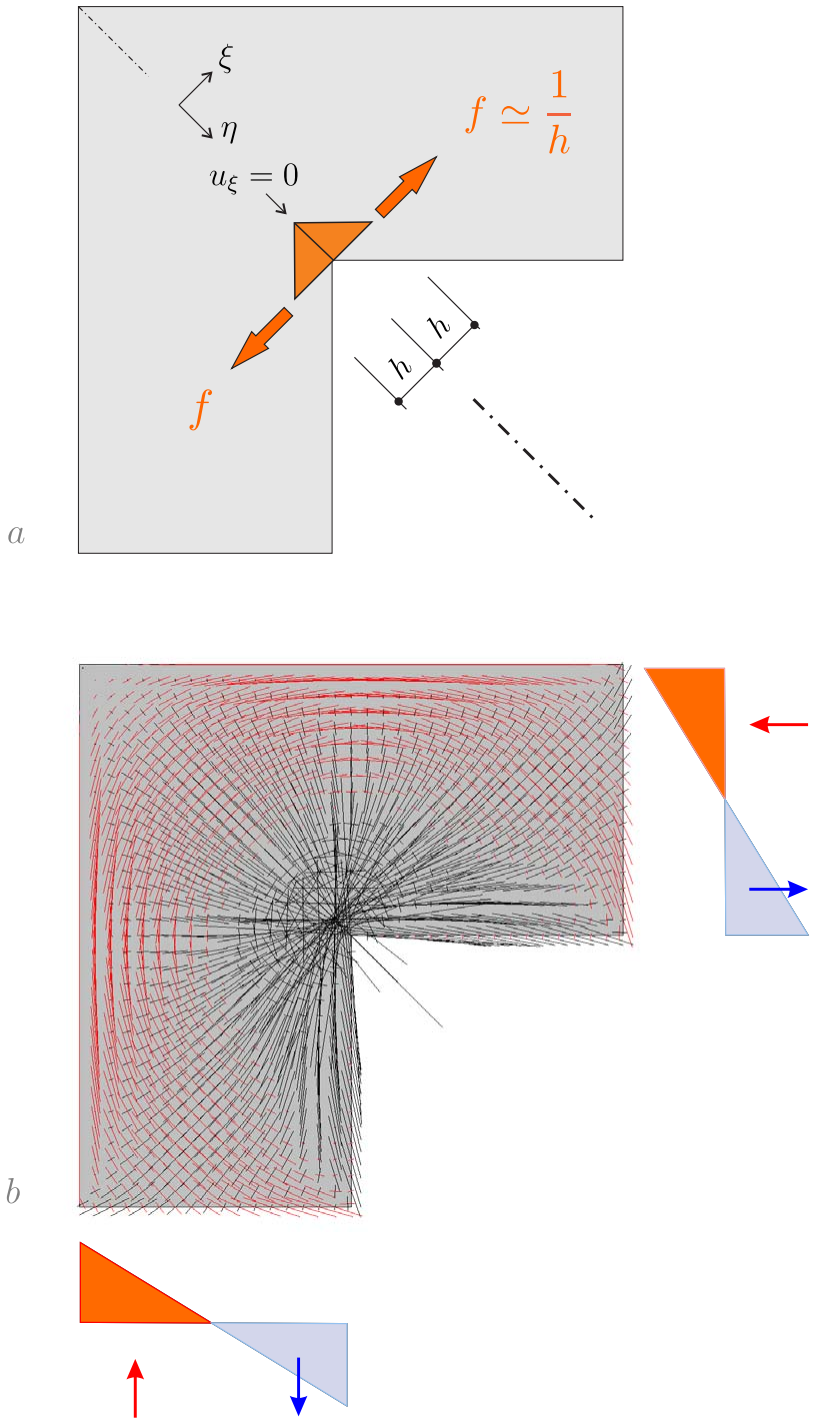


Bild 6.14. In der einspringenden Ecke werden die Spannungen unendlich groß (BESCHEIBE)

6.8 Symmetrie der Wirkungen

Es gibt noch ein theoretisches Argument, das diese Überlegungen unterstützt. Gehen wir noch einmal zurück zu der gerissenen Scheibe. Im Grunde sind hier zwei Einflussfunktionen am Werk: zum einen die Einflussfunktion für die Spannung σ_{yy} im Rissgrund und zum anderen die Einflussfunktion für die vertikalen Verschiebungen am oberen bzw. unteren Rand der Scheibe. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir je einen Punkt auf dem oberen und unteren Rand als Aufpunkte wählen, in denen wir die vertikalen Verschiebungen berechnen. Durch die Wahl von zwei Punkten, unten und oben, bleibt die Symmetrie erhalten.

Das sind also zwei Funktionale, die wir

$$J_1(\boldsymbol{u}) = \sigma_{yy}(\boldsymbol{u}) \qquad J_2(\boldsymbol{u}) = u_y(\mathit{oben\ Mitte}) + u_y(\mathit{unten\ Mitte}) \tag{6.18}$$

nennen. Zu dem ersten Funktional gehört die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_1$ und zu dem zweiten Funktional die Einflussfunktion $\boldsymbol{G}_2$.

Nun kann man zeigen, dass die beiden Funktionale ‚über Kreuz' gleich sind, d.h.

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = J_2(\boldsymbol{G}_1)\,, \tag{6.19}$$

was übrigens für alle Paare von Funktionalen und deren Einflussfunktionen gilt – nicht nur hier.

Gleich bedeutet hier das folgende: $\boldsymbol{G}_2$ wird von zwei Einzelkräften $P = \pm 1$ generiert, die am oberen und unteren Rand der Scheibe ziehen. Die Wirkung dieser beiden Kräfte führt zu unendlich großen vertikalen Spannungen σ_{yy} in der Rissfuge, also

$$J_1(\boldsymbol{G}_2) = \infty \qquad J_1 \text{ misst } \sigma_{yy} \text{ von } \boldsymbol{G}_2\,. \tag{6.20}$$

Umgekehrt führt die Spreizung der Rissfuge, wie wir uns überzeugt haben, zu unendlich großen Verschiebungen an der oberen und unteren Kante, also

$$J_2(\boldsymbol{G}_1) = \infty \qquad J_2 \text{ misst } u_y(\text{oben/unten}) \text{ von } \boldsymbol{G}_1\,, \tag{6.21}$$

und die Theorie sagt, dass diese beiden Werte gleich groß sind. Wenn also der eine Wert unendlich ist, dann muss es auch der andere sein.

6.9 Kragscheibe

Aber selbst in einer scheinbar harmlosen Standardsituation, wie der Scheibe in Bild 6.15, treten im LF g unendlich große Spannungen in den äußersten Fasern auf. Wir dürfen annehmen, dass das auch passieren würde, wenn das Eigengewicht durch eine Einzelkraft P ersetzt würde, die in irgendeinem inneren Punkt $\boldsymbol{y}_P$ der Scheibe angreift.

Wenn dies richtig ist, dann muss die Einflussfunktion für die obere Randspannung σ_{xx} den Wert ∞ in fast allen Punkten der Scheibe haben

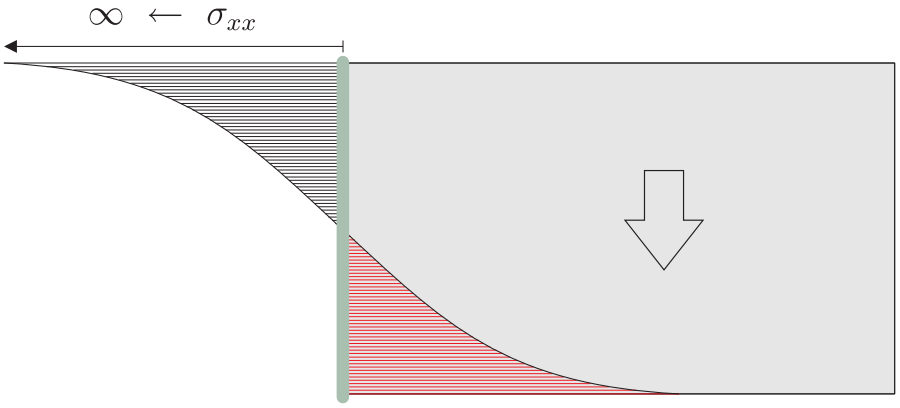


Bild 6.15. Das Eigengewicht der Kragscheibe erzeugt unendlich große Spannungen in den Randfasern (BE-SCHEIBE)

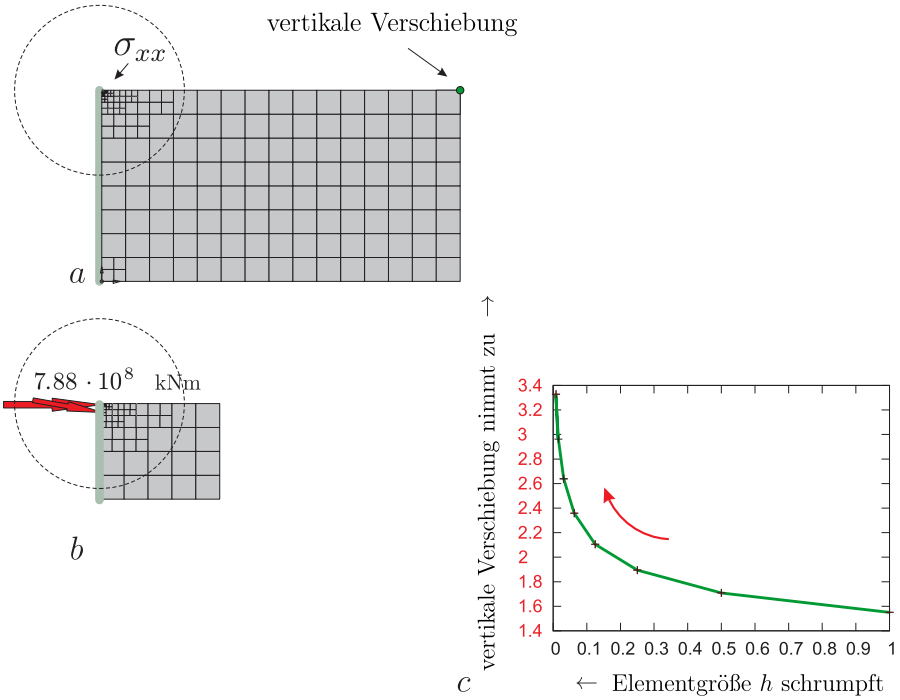


Bild 6.16. Berechnung der Einflussfunktion für die Spannung σ_{xx} im Eckpunkt, **a)** Netz, **b)** äquivalente Knotenkräfte, **c)** vertikale Verschiebung der oberen rechten Ecke in Abhängigkeit von der Elementlänge h (WINFEM)

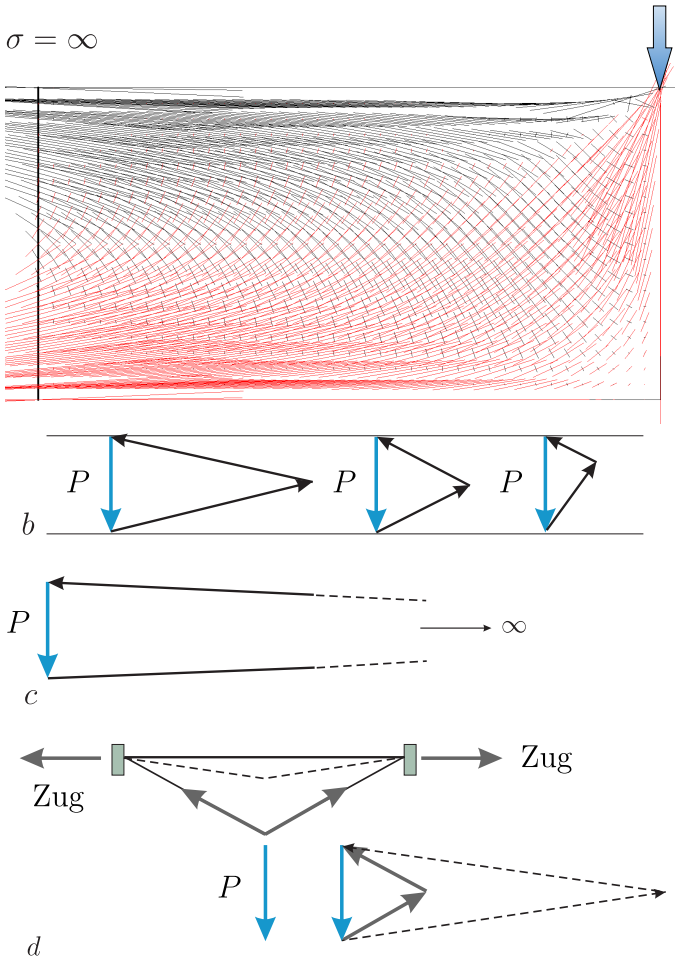


Bild 6.17. Kragscheibe, **a)** Hauptspannungen (‚Stromlinien') (BE-Scheibe), **b)** Krafteck in verschiedenen Schnitten, **c)** nahe dem linken Rand wird das Krafteck nahezu unendlich flach und unendlich lang, **d)** Straßenlaterne – dasselbe Prinzip (BE-SCHEIBE)

$$\sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_P, \boldsymbol{x}) \bullet \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\infty} \bullet \boldsymbol{P}\,. \tag{6.22}$$

Wir rechnen das nach: In dem FE-Modell muss man zur Berechnung der Einflussfunktion die Spannungen σ_{xx} der Ansatzfunktionen des Netz in dem Eckpunkt als Belastung aufbringen.

Weil nur die Ansatzfunktionen des Eckelementes selbst in der Ecke Spannungen $\sigma_{xx} \neq 0$ generieren, werden nur die Knoten des Eckelementes mit diesen Spannungen als Knotenkräfte, $f_i = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\varphi}_i)$ belastet, und diese Kräfte

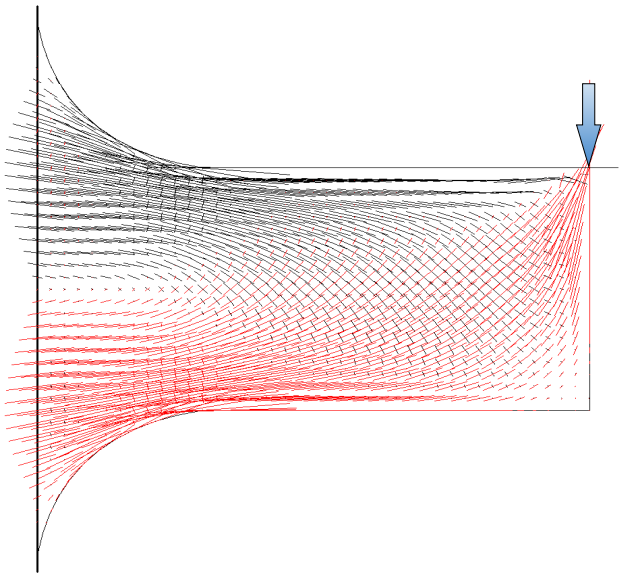


Bild 6.18. Wenn man die Ecken ausrundet, dann können sich die ‚Stromlinien' (= Hauptspannungen) verdrehen und dann haben sie es leichter der vertikalen Belastung das Gleichgewicht zu halten (BE-SCHEIBE)

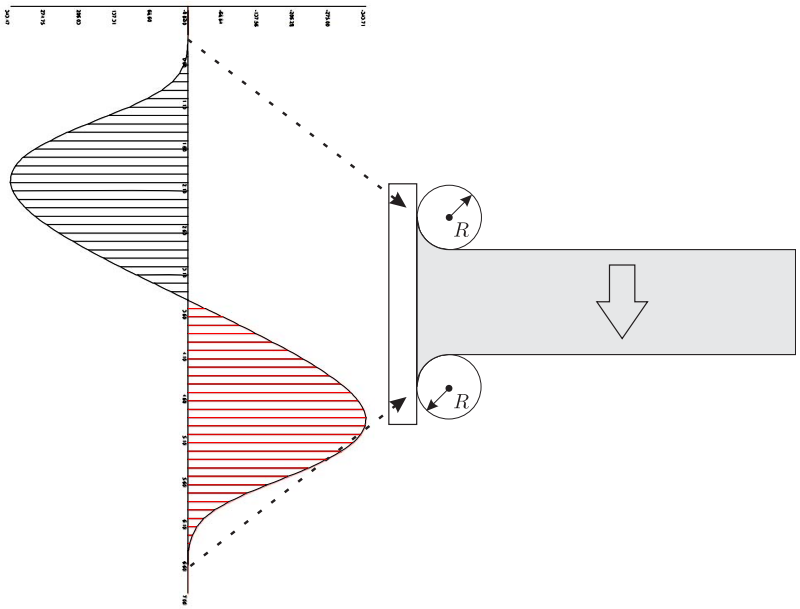


Bild 6.19. Spannungsverteilung (σ_{xx}) in der Einspannfuge, wenn die Ecken ausgerundet werden (BE-SCHEIBE)

bzw. Spannungen sind proportional zu E/h, wobei $E = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2 der E-Modul des Materials ist, und h die Elementlänge.

Beim numerischen Test, siehe Bild 6.16, mit adaptiver Verfeinerung wuchs die Eckverschiebung in der Tat exponentiell mit $h \to 0$ an.

Um hinter das Geheimnis der singulären Spannungen zu kommen, ersetzen wir in Gedanken die Hauptspannungen durch paarweise orthogonale Pfeile (**‚Stromlinien‘**), siehe Bild 6.17 a und 6.17 b. Die Vektorsumme der Pfeile muss dann gleich der Resultierenden der aufgebrachten Belastung sein. Anders gesagt, die Versetzung, die die beiden Pfeile verursachen, muss den Angriffspunkt der Resultierenden um eine Längeneinheit anheben.

Damit ist auch klar, warum die Spannungen in den äußersten Fasern singulär werden. Je näher die Stromlinien dem linken Rand kommen, um so flacher müssen sie verlaufen, weil der Rand in vertikaler Richtung festgehalten wird, und das bedeutet, dass sich die Stromlinien weiter und weiter strecken müssen, damit ihre immer kleiner werdenden vertikalen Komponenten der Belastung das Gleichgewicht halten können.

Das ist wie bei einer **Straßenlaterne**, die an einem Seil zwischen zwei Häusern hängt. Bevor man das Seil richtig straff ziehen kann, reißt das Seil.

Wenn die Ecken ausgerundet werden, dann können die Stromlinien sich drehen, und dann haben sie es leichter, das Gleichgewicht mit der vertikalen Belastung zu halten, siehe Bild 6.18 und 6.19. Dann besteht kein Grund mehr, unendlich große Spannungen zu generieren.

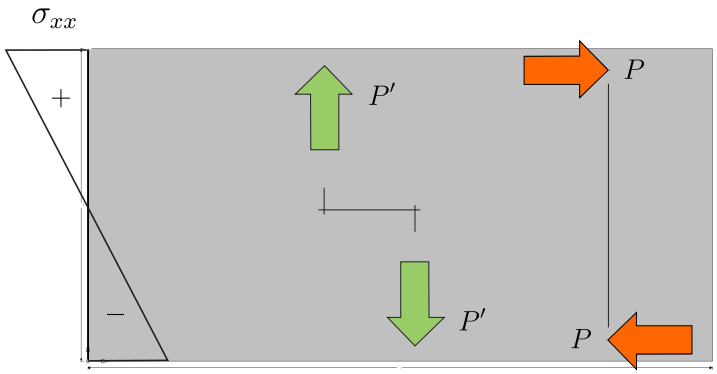


Bild 6.20. Die Biegespannungen σ_{xx} in der Einspannfuge bleiben in diesen Lastfällen endlich (BE-SCHEIBE)

Bemerkung 6.2. Numerische Tests belegen, dass horizontale Lasten, die mit einem Lastmoment einhergehen, nicht zu singulären Spannungen in der Einspannfuge führen, siehe Bild 6.20, und ebenso gilt das für vertikale Kräftepaare.

6.10 Standardsituationen

Es braucht aber nicht eine Kragscheibe, um Singularitäten zu produzieren. Singularitäten treten auch an so harmlos scheinenden Stellen wie den Ecken von Öffnungen auf, siehe Bild 6.21. In der Praxis bemerkt man diese Singularitäten in der Regel nicht, weil man nicht so stark verfeinert, gleichwohl wird man aber auch auf gröberen Netzen schon erste Anzeichen dafür entdecken. Die konstruktive Bewehrung ist aber in der Regel in der Lage, solche Effekte aufzufangen.

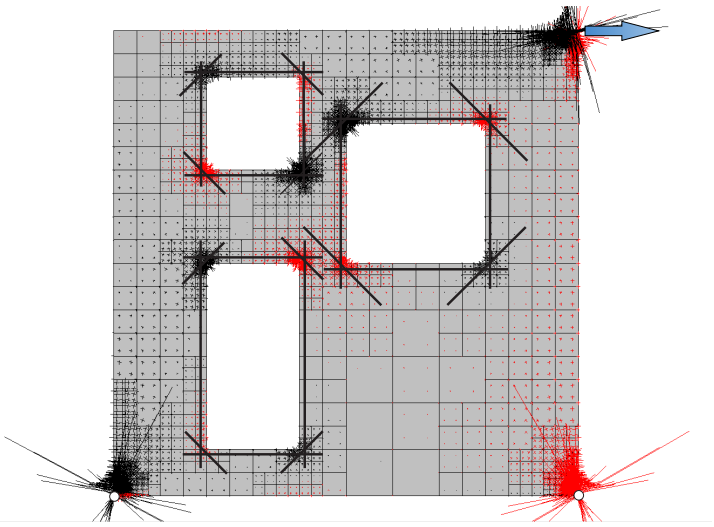


Bild 6.21. Wandscheibe mit adaptiv verfeinertem Netz. Die Spannungen in den Ecken der Öffnungen werden konstruktiv, wie angedeutet, durch Längs- und Schrägbewehrung aufgenommen. Nur die Punktlager sollte man besser durch kurze Linienlager ersetzen (WINFEM)

Wenn man aber wirklich in die Ecken hineingeht wie in Bild 6.22, dann sieht man, dass die Spannungen in der Tat unendlich groß werden. Bei hochbelasteten Bauteilen im Maschinenbau, etwa Turbinenschaufeln, sind solche Spannungsspitzen durchaus bemessungsrelevant.

Wir wollen dieses Beispiel auch zum Anlass nehmen, um aus einem Brief an einen Kollegen zu zitieren, mit dem wir über die Notwendigkeit der Modellierung von **Nichtlinearitäten** in der Scheibenstatik diskutiert haben.

Brief an einen Kollegen

„Lieber Herr Kollege, Sie haben gleich ausführlich die verschiedenen Varianten diskutiert, wie man die Nichtlinearitäten modellieren kann. Dazu bin ich zu wenig Experte, weiß zu wenig über die verschiedenen Modelle. Mein Problem ist einfacherer Natur.

Die Wandscheibe in Bild 6.22 wurde mit Randelementen gerechnet und die singulären Spannungen zeigen sich deutlich. Die BE-Lösung kann diese Singularitäten abbilden, sie sind in der Lösung enthalten. Das gilt für alle Scheiben- und Plattenberechnungen, Bild 3.98, mit Randelementen. Das muss nicht heißen, dass die Singularitäten bis auf das i-Tüpfelchen exakt sind, aber die Tendenz stimmt wenigstens.

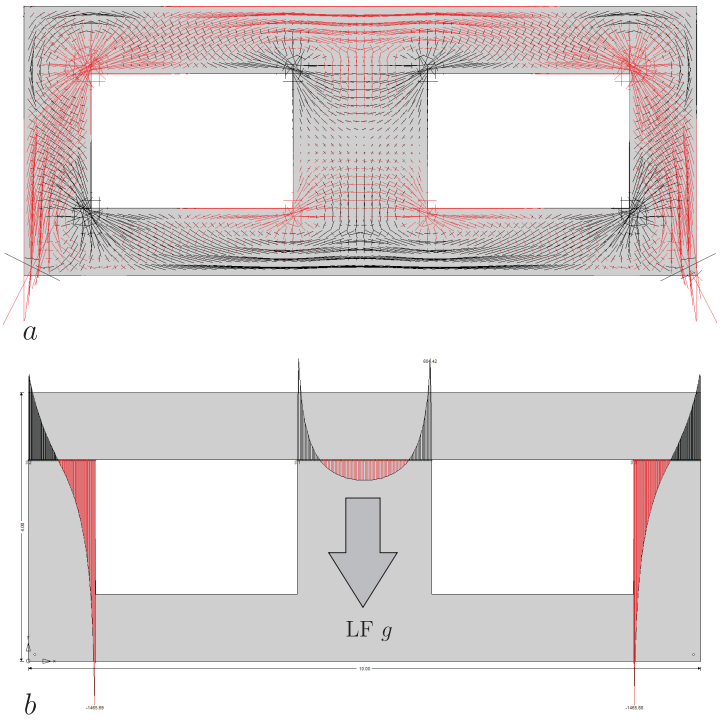


Bild 6.22. Wandscheibe unter Eigengewicht **a)** Hauptspannungen **b)** Spannungen σ_{yy} in einigen horizontalen Schnitten (BE-SCHEIBE)

FE-Netze sind dafür in der Regel zu grob. Die Spannungen der FE-Lösung weichen in den Ecken deutlich von der BE-Lösung ab. Wenn man aber FE-Resultate mit BE-Resultaten im ganzen vergleicht, dann sind die Abweichungen in den Schnittgrößen und der Bewehrung in der Regel gering.

Frage: Muss man also die Singularitäten in einer Scheibe mit finiten Elementen genau nachfahren, oder reicht es nicht aus, das Netz da zu verfeinern (oft unterbleibt auch das), wo man Probleme erwartet?

Und, angenommen man modelliert die Nichtlinearität in einer Ecke mit drei verschiedenen Modellen, *A, B, C*. Wie groß ist der Unterschied in der Ferne, was kommt im Rest der Scheibe an? Ich würde vermuten, dass die Unterschiede minimal sind.

Der Einfluss in der Ferne ist doch der entscheidende Punkt. Ausgetüftelte nichtlineare Untersuchungen oder *multi-scale models* ohne Würdigung dieses Aspekts halte ich für wenig sinnvoll. Wie breiten sich Störungen über ein Netz aus, wie beeinflusst die Modellierung der nichtlinearen Zone die Ausbreitung?

Im linearen Fall kann man die Fernfeldwirkung von Störungen oder Steifigkeitsänderungen mit den Kräftepaaren $\boldsymbol{f}^+$ erfassen. Jeder kurze, nur momentane Versatz (Unstetigkeit) im Koeffizienten einer Differentialgleichung führt im Grunde zu einem solchen *‚hickup‘*. Die Lösung wackelt kurz, ist aber danach bald wieder im alten Gleis.

Meine Vermutung ist, dass das auch für nichtlineare Scheibenprobleme gilt. Oder wenn nicht, dann müsste ein Gegenbeispiel demonstrieren, dass Nichtlinearitäten alles auf den Kopf stellen können.

In der Praxis werden im übrigen, so würde ich vermuten, Scheiben zu 99 % linear gerechnet und das doch mit Erfolg. Wenn Schäden auftreten, dann sind sie vorwiegend der Materialseite anzulasten. Für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit sind nichtlineare Untersuchungen sicherlich sinnvoll, aber die Standsicherheit selbst erfordert doch, wie Praxis zeigt, keinen solchen Aufwand.

Sie müssten mich jetzt mit Beispielen vom Gegenteil überzeugen. . . “.

6.11 Zu glatt ist auch nicht gut

Um die FE-Lösung zu verbessern, kann man die Elementgröße verkleinern, ***h*-Methode**, oder den Polynomgrad der *shape functions* erhöhen, ***p*-Methode**. In der *computational mechanics* wird die *p*-Methode jedoch kaum angewandt, weil ‚glatt‘ nicht unbedingt gut bedeuten muss. Wir hatten ja in Kapitel 4.4 das Beispiel der quadratischen *bubble-function* erwähnt, der es nicht gelingt die exakte Lösung im zugehörigen Knoten zu interpolieren, weil sie zu glatt ist. Aus statischer Sicht braucht man ‚grobe‘ Ansätze, um die Spannungssprünge und Singularitäten im Fusspunkt der Dirac Deltas (den Auslösern der Einflussfunktionen) annähern zu können.

Das Problem der *p*-Methode ist sinngemäß dasselbe, wie bei der Interpolation von Funktionen auf einem regelmäßigen Gitter mit hohen Polynomansätzen.

Zum Exempel betrachten wir die ‚Runge-Funktion‘[3]

[3] Auf Runge gehen die Untersuchungen zur Interpolation mit Polynomen zurück

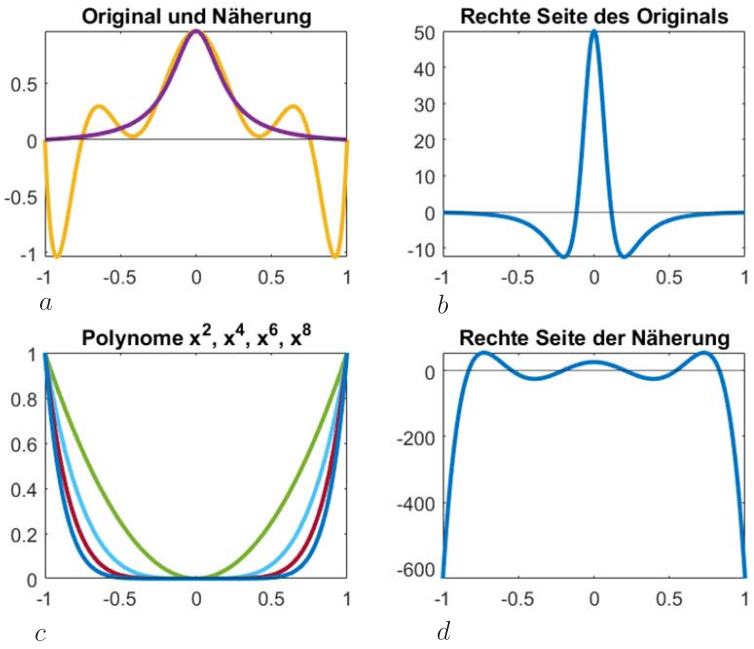


Bild 6.23. Polynominterpolation **a)** Original und Näherung **b)** die Belastung $-w''$ der Originals **c)** die Ansätze x^i und **d)** die Belastung $-w_h''$ der Interpolierenden (MATLAB™)

$$w(x) = \frac{1}{1+25\,x^2} - \frac{1}{26} \tag{6.23}$$

mit den Endwerten $w(-1) = w(1) = 0$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Eine Interpolation in neun gleichabständigen Punkten mit einem Polynom achter Ordnung

$$w_h(x) = \sum_{i=0}^{8} w_i\, x^i \tag{6.24}$$

ergab das Resultat in Bild 6.23 a. Jede weitere Erhöhung des Polynomgrades führte zu noch größeren Oszillationen, [151].

Wir können dem ganzen ein statisches Gesicht geben, wenn wir die Funktion $w(x)$ als die Biegelinie eines quer gespannten Seils (Vorspannung $H = 1$) ansehen, das die Streckenlast

$$p(x) = -w''(x) = \frac{50}{(1+25\,x^2)^2} - \frac{5000\,x^2}{(1+25\,x^2)^3} \tag{6.25}$$

trägt, siehe Bild 6.23 b. Ist $G(y, x_i)$ die Einflussfunktion für die Durchbiegung in einem der neun Knoten x_i, dann gilt

$$w(x_i) = \int_{-1}^{+1} G(y, x_i) p(y)\, dy \tag{6.26}$$

und daher müssen wir die Gewichte w_i des Ansatzes (6.24) so einstellen, dass

$$w_h(x_i) = \int_{-1}^{+l} G(y, x_i)(-w_h''(y))\, dy = w(x_i) \tag{6.27}$$

in den sieben Innenpunkten x_i und $w_h(-1) = w_h(1) = 0$. Nun ist die ‚Ersatzlast' $-w_h''(x)$ eine Entwicklung nach Potenzen von x

$$-w_h''(x) = -(w_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 + w_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^1 + \ldots + w_8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot x^6) \tag{6.28}$$

und wenn man sich die ‚Streckenlasten' x^i einmal aufzeichnet, dann sieht man, dass die Streckenlasten praktisch nur in den Endzonen des Intervalls leben, siehe Bild 6.23 c. Gleichzeitig läuft das Original in den Endzonen gegen null, $w(x) \simeq 0$, und so sind große Anstrengungen, sprich Oszillationen in den Gewichten w_i, nötig, um den sich dort ‚aufbäumenden' Ansatz unter Kontrolle zu halten, $w_h(x) \simeq 0$ zu erzwingen.

6.12 Singularitäten in Einflussfunktionen

Zu dem Thema *pollution* gehört auch die Auswirkung von Singularitäten auf die Ergebnisse. Bei Flächentragwerken treten in der Regel immer Singularitäten auf, d.h. Lagerkräfte oder Spannungen neigen dann zu den typischen Oszillationen. Der Ingenieur tut das in der Regel mit der Bemerkung ab, *‚das Material ist klüger'*, und achtet nicht weiter darauf, weil er aus Erfahrung weiß, dass außerhalb der gestörten Zone die Ergebnisse doch ganz vernünftig aussehen und er sich nicht vorstellen kann, dass Singularitäten in abliegenden Ecken die Genauigkeit negativ beeinflussen sollen.

Die Singularitäten propagieren aber in die Einflussfunktionen hinein, sie verschlechtern die Qualität der Einflussfunktionen und damit der FE-Lösung – auch ‚im Feld', denn auch die finiten Elemente sind in einem versteckten Sinn Randelemente, sind Potentiallösungen.

FE-Programmautoren sollten sich daher mit der Potentialtheorie (die Lehre von den Kraftfeldern) vertraut machen, denn sie betrifft auch ihre Programme, und das wortwörtlich – im Kern!

Um konkret zu werden, betrachten wir ein Segeltuch, also eine vorgespannte Membran, die über einen L-förmigen Grundriss gespannt ist und dem Winddruck standhalten muss, siehe Bild 6.24.

Es ist klar, dass die Querkräfte v_x und v_y in der Membran an der einspringenden Ecke unendlich groß werden, weil die Querkräfte proportional zu den Neigungen der Biegefläche w sind

$$v_x = H\, w_{,x} \qquad v_y = H\, w_{,y} \qquad H = \text{Vorspannung}\,, \tag{6.29}$$

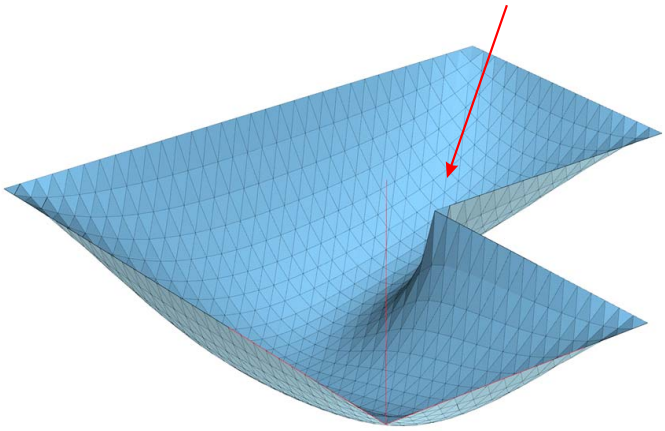


Bild 6.24. Membran über L-förmigem Grundriss unter Winddruck (BE-LAPLACE)

und in der einspringenden Ecke sich die Membran an die Wände anlegen wird, $w_{,x} = \infty$ und $w_{,y} = \infty$, dort also ein singulärer Punkt liegt.

Die Querkräfte sind am Rand die Aufhängekräfte.

Wenn wir nun, wie gewohnt, die Durchbiegung (FE-Lösung) der Membran durch ihre Einflussfunktion darstellen

$$w_h(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{6.30}$$

dann deutet nichts darauf hin, dass der Kern $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ der Einflussfunktion von minderer Qualität sein soll. Wo versteckt sich die Singularität?

Wir wollen die Antwort nur skizzieren[4]. Wer sich mit der ***Potentialtheorie*** oder der Methode der Randelemente auskennt, siehe Kap. 5.38.1, weiß, dass man jede Lösung der Gleichung $-\Delta w = p$ wie folgt darstellen kann

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, \frac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{\partial n}\, w(\boldsymbol{y}))\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{6.31}$$

Die Funktion

$$g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi}\, \ln|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \tag{6.32}$$

heißt ***Fundamentallösung***, weil sie der Gleichung $-\Delta g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ genügt.

Man rekonstruiert also die Biegefläche w mit Hilfe von $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ aus ihren Randwerten w und $\partial w/\partial n$ und dem Winddruck p, der auf ihr lastet.

[4] Für mehr Details siehe [85] und [92]



Bild 6.25. Falten in einem Tuch, [106]

Diese Integraldarstellung kann man auch auf die Einflussfunktion $G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ anwenden. Nun ist aber das p, das zu $G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ gehört, ein Dirac Delta $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ und $G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ ist auf dem Rand Γ null, so dass sich die Einflussfunktion auf

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = &\int_\Gamma [g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\,\frac{\partial G_h}{\partial n}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) - \frac{\partial g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})}{\partial n}\,G(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})]\,ds_{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \underbrace{\int_\Omega g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\,\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\,d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}}_{=g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})} = \int_\Gamma g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\,\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\,ds_{\boldsymbol{\xi}} + g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{6.33}$$

verkürzt.

Diese Formel gilt sinngemäß auch für die FE-Näherung $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, die ja die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad G_h = 0 \qquad \text{auf } \Gamma \tag{6.34}$$

ist, wobei $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ allerdings ein Flickenteppich von Lasten ist, die versuchen einer Punktlast nahe zu kommen, sie zu simulieren. Also gilt für $G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ die Darstellung

$$G_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\,\frac{\partial G_h}{\partial n}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\,ds_{\boldsymbol{\xi}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\,\delta_h(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\,d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{6.35}$$

Und jetzt sieht man die kritische Stelle. Spannungsspitzen an der einspringenden Ecke bedeuten, dass dort die Normalableitung des Segeltuchs $\partial G_h/\partial n$, also die Neigung des Segeltuchs zum Rand hin, unendlich groß ist, weil sich das Segeltuch dort wahrscheinlich an die Wände anlegt. (Wir reden jetzt über den Lastfall $\delta_h(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$).

Solche singulären Verläufe kann man aber mit finiten Elementen sehr schlecht annähern, d.h. die Normalableitung $\partial G_h/\partial n$ der FE-Lösung wird in der Ecke sehr ungenau sein. Und weil diese Ungenauigkeit nun gemäß (6.35)

auf $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ durchschlägt, ist auch $G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ von minderer Qualität – nicht nur in der Ecke, sondern überall im Feld, wo immer der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ liegt.

Singularitäten auf dem Rand propagieren über diesen Mechanismus ins Innere und verringern die Qualität der Einflussfunktion und damit der FE-Lösung selbst.

$$\frac{\partial G}{\partial n} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial G_h}{\partial n} \quad \rightarrow \quad G_h \quad \rightarrow \quad w_h = \int_\Omega G_h \, p \, d\Omega_{\boldsymbol{y}}$$

Nichts kann diese Kette sprengen

Das ist wie bei einem Segeltuch, das Falten wirft, wenn die Aufhängung am Rand fehlerhaft ist, siehe Bild 6.25.

Bemerkung 6.3. Genau genommen müsste man das Gebietsintegral in (6.35) noch um die Anteile aus den Linienkräften l_h (= Sprünge in der Normalableitung der Biegefläche, also den Knicken) auf den Elementkanten Γ_i erweitern

$$\int_\Omega g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}) \, \delta_h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} + \sum_i \int_{\Gamma_i} g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y}) \, l_h(\boldsymbol{y}) \, ds_{\boldsymbol{y}} \, . \tag{6.36}$$

Wir können das aber in Gedanken dem Gebietsintegral zuschlagen.

Nichtlineare Probleme

Auch die Lösung einer nichtlinearen Feldgleichung ist am Ende eine Fläche, die sich elementweise über das Netz spannt. Und diese einzelnen Flächen unterliegen derselben Mathematik, wie die Lösung einer Poisson-Gleichung. Jede Fläche ist eine Funktion mit Werten u und $\partial u/\partial n$ auf dem Elementrand und Werten $-\Delta u$ im Innern des Elements[5]. Und die Güte der Funktion hängt von den Randwerten und der Genauigkeit der ‚Last' $-\Delta u$ ab. Wenn die Normalableitung in einer Elementecke ‚klemmt', oder das $-\Delta u$ ‚Kapriolen' schlägt, dann wirkt sich das negativ auf die Darstellung der Lösung aus.

Scheiben

Was bei einer Membran die Normalableitung ist, die Aufhängekräfte, sind bei einer Scheibe die Randspannungen, der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$, denn die Integraldarstellung des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \{u_1, u_2\}^T$ einer Scheibe lautet (*in Tensor Notation*)

[5] $-\Delta u$ wird in der Regel keine direkte statische Bedeutung haben

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G^F_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, t_j(\underset{\uparrow}{\boldsymbol{y}}) - T^F_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, u_j(\boldsymbol{y}))\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega G^F_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, p_j(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{6.37}$$

Die Funktionen $G^F_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ sind die Verschiebungen ($j = 1,2$) (x- und y-Richtung) der elastischen Ebene, wenn eine Einzelkraft $P = 1$ den Knoten $\boldsymbol{x}$ in die Richtung $i = 1,2$ drückt und die Funktionen $T^F_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ sind die Randspannungen ($j = 1,2$) (x- und y-Richtung) dieser Felder.

Die 2×2 Matrix $\boldsymbol{G}^F$ heißt die ***Somigliana Matrix*** und sie spielt dieselbe Rolle wie die Funktion $g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ in (3.65), ihre Spalten sind die Fundamentallösungen des 2×2 Systems (4.72).

Wenn wir diese Integraldarstellung auf die beiden Einflussfunktionen ($i = 1,2$), *horizontal, vertikal*, anwenden, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} G_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = &\int_\Gamma (G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, T_{ik}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) - T^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, G_{ik}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}))\, ds_{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \int_\Omega G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, \delta_{ik}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \tag{6.38}$$

und im Fall der FE-Lösungen

$$\begin{aligned} G^h_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = &\int_\Gamma (G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, \underset{\uparrow}{T^h_{ik}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) - T^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, G^h_{ik}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}))\, ds_{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \int_\Omega G^F_{jk}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{y})\, \delta^h_{ik}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\, d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}\,. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Dies genügt, um zu erkennen, dass der sensitive Teil in der Approximation die Randspannungen T^h_{ik} aus den genäherten Dirac Delta δ^h_{ik} sind, also aus den Lasten, die versuchen die Wirkung des echten Dirac Deltas im Aufpunkt anzunähern. Die Oszillationen der Randspannungen T^h_{ik} in den singulären Punkten des Randes werden die Güte von $G^h_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ in *allen Punkten* $\boldsymbol{x}$ der Scheibe Ω herabsetzen und damit auch die FE Lösung $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{G}_h, \boldsymbol{p})$.

Platten

Bei einer Platte sind es die **Momente** und der **Kirchhoffschub** (Querkräfte) auf dem Rand, von deren Qualität die FE-Einflussfunktionen im wesentlichen abhängen, siehe Bild 6.26. Die Formel lautet hier, in der Notation stark vereinfacht,

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, w''' + g' w'' + g'' w' + g''' w)\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\, p\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \tag{6.40}$$

wobei

$$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\,\pi\, K}\, r^2\, \ln r \qquad K = \frac{E\, h^3}{12\,(1-\nu^2)} \tag{6.41}$$

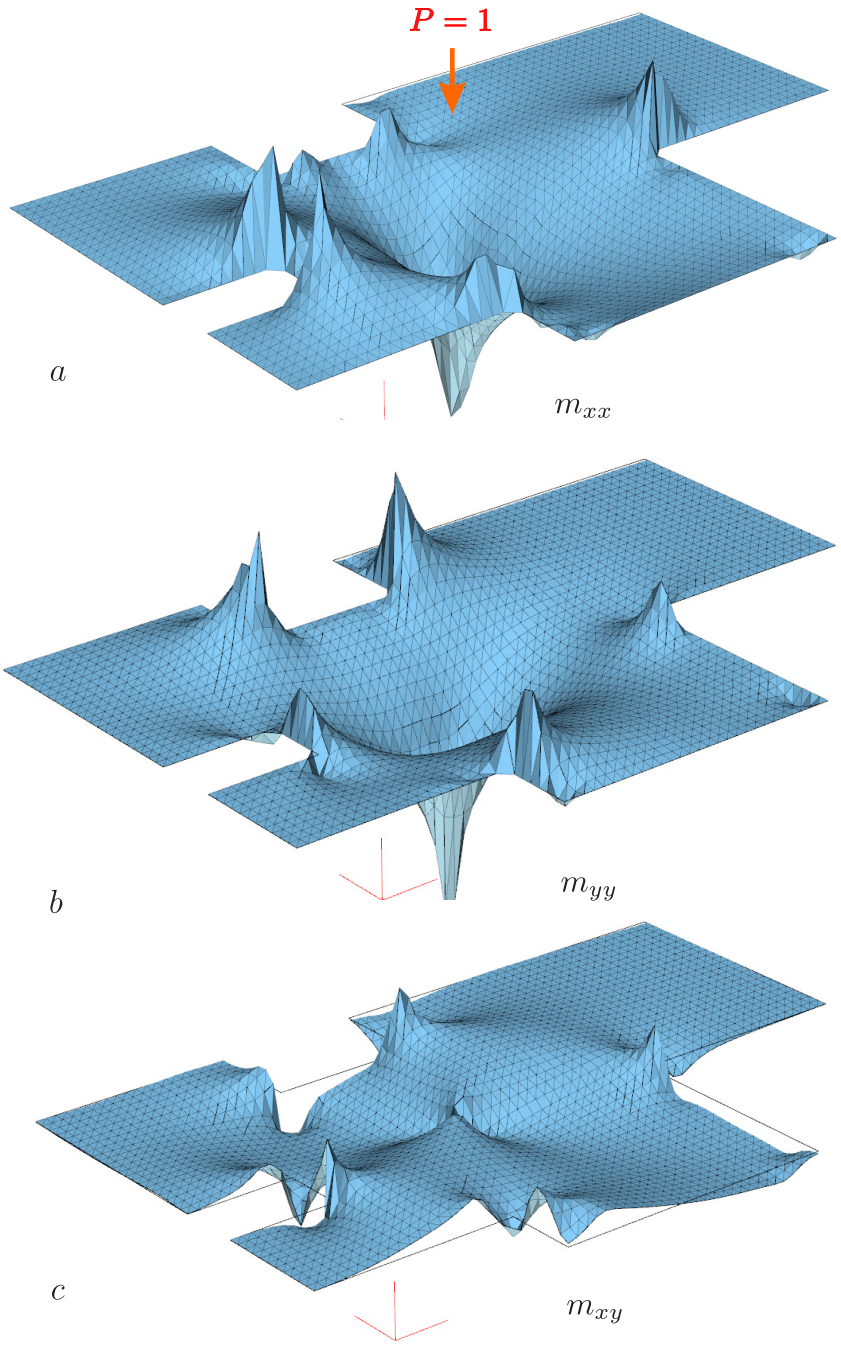


Bild 6.26. Gelenkig gelagerte Platte; Plot der Momente aus dem LF $P = 1$. Das sind also die Momente der Einflussfunktion $G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ für die Durchbiegung $w(\boldsymbol{x})$. In den einspringenden Ecken werden die Momente singulär und das hat einen negativen Einfluss auf die Güte der FE-Einflussfunktion und damit auf w (BE-PLATTE)

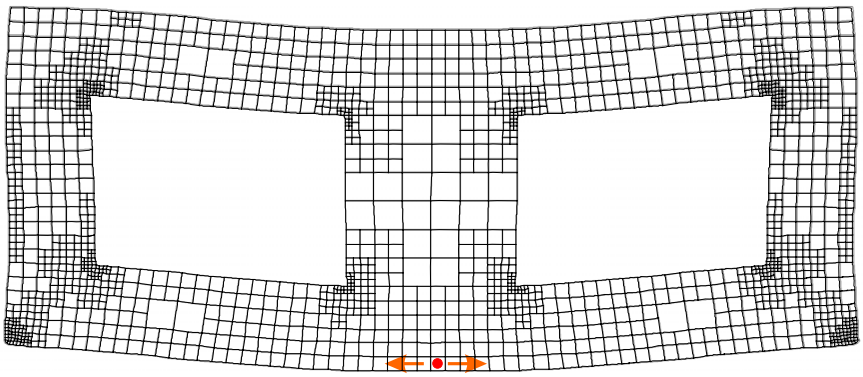


Bild 6.27. Punktgelagerte Wandscheibe im LF g, mit der adaptiven Verfeinerung wuchs die Spannung im rot markierten Punkt von $\sigma_{xx} = 168$ kN/m^2 auf $\sigma_{xx} = 220$ kN/m^2 (WINFEM)

die Fundamentallösung ist und K die Plattensteifigkeit.

Symbolisch steht hier w' für die Verdrehung (Normalableitung) am Rand, w'' für das Moment senkrecht zum Rand und w''' für den Kirchhoffschub. Die exakte Einflussfunktion G hat die Randwerte $G = 0$ und $G'' = 0$ (gelenkig gelagerter Rand), so dass sich die Formel für die Einflussfunktion einer solchen Platte auf

$$G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, G''' + g''\, G')\, ds_{\boldsymbol{y}} + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{6.42}$$

verkürzt.

Die FE-Einflussfunktion erfüllt die Momentenbedingung $G'' = 0$ auf dem gelenkig gelagerten Rand aber nur näherungsweise, so dass man G_h'' mit berücksichtigen muss

$$G_h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (g\, G_h''' + g' G_h'' + g'' G_h')\, ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g\, \delta_h\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{6.43}$$

woran man abliest, dass die Qualität der FE-Einflussfunktion von G_h', (der Neigung am Rand), und den Randmomenten G_h'' und den Randkräften G_h''' der Einflussfunktion abhängt. Wenn nun in den Ecken die Momente

$$G_h'' \equiv m_{xx}\, n_x^2 + 2\, m_{xy}\, n_x\, n_y + m_{yy}\, n_y^2 \tag{6.44}$$

oder die Randkräfte G_h''' singulär werden, dann hat das offensichtlich einen negativen Einfluss auf die Qualität der Einflussfunktion.

Sinngemäß gilt all dies auch für die Einflussfunktionen der Schnittkräfte einer Platte, also

$$m_{xx}(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G_2\, w''' + \ldots \qquad v_x(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma (G_3\, w''' + \ldots \tag{6.45}$$

und diese reagieren eher noch empfindlicher auf Singularitäten, weil sie ja zweite bzw. dritte Ableitungen berechnen. Man sieht das sehr schön, wenn man (6.40) für alle vier Größen w, w', w'', w''' anschreibt und nur die charakteristischen Singularitäten der Kerne zitiert

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} \boxed{r^{-1}} & \ln r & r \ln r & r^2 \ln r \\ r^{-2} & \boxed{r^{-1}} & \ln r & r \ln r \\ r^{-3} & r^{-2} & \boxed{r^{-1}} & \ln r \\ r^{-4} & r^{-3} & r^{-2} & \boxed{r^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{bmatrix} ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} p \, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \,. \tag{6.46}$$

In Spalte 1 steht der Kirchhoffschub der G_i, in Spalte 2 stehen die Momente, dann die Normalableitungen und schließlich die G_i selbst. Solange der Aufpunkt $\boldsymbol{x}$ nicht auf dem Rand liegt, $r > 0$, sind die Integrale berechenbar.

Das $r^{-1} = \varepsilon^{-1}$ macht, dass bei der Herleitung der obigen Einflussfunktionen

$$\mathscr{B}(G_i, w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G_i, w)_{\Omega_\varepsilon} = w^{(i)}(\boldsymbol{x}) - \int_\Gamma \ldots - \int_\Omega \ldots = 0 \tag{6.47}$$

in der Grenze, $\varepsilon \to 0$, aus dem Integral über den Umkreis Γ_{N_ε} des Aufpunktes $\boldsymbol{x}$ das w, w', w'', w''' herausspringt

$$w^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \, w^{(i)}(\boldsymbol{y}) \, \varepsilon \, d\varphi \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} . \tag{6.48}$$

So sind die Punktwerte auf der linken Seite entstanden. Wie man sieht, muss in dem Kern noch ein Faktor $(2\,\pi)^{-1}$ vorkommen.

So weit die Theorie. In der Praxis dürften jedoch die Auswirkungen von Singularitäten in der Regel nicht so dramatisch sein, denn im Bauwesen sind die Toleranzen doch relativ groß und der erfahrene Ingenieur hat zudem ein gut entwickeltes Gespür dafür, was glaubhaft ist und was nicht.

Finite Elemente im Bauwesen sind ja immer beides: Modellierung und ‚Rechenschieber' und der Ingenieur ist daher sehr flexibel – um nicht zu sagen: nachsichtig – bei der Interpretation von FE-Ergebnissen.

Bei der Wandscheibe in Bild 6.22 ergab sich im LF g im unteren Teil eine Zugspannung von $\sigma_{xx} = 168$ kN/m^2 und mit einer adaptiven Verfeinerung, siehe Bild 6.27, wuchs die Spannung auf $\sigma_{xx} = 220$ kN/m^2. Das ist eine ungewöhnlich große Veränderung. Nicht in allen Fällen wird die Differenz so groß ausfallen; leider kann man keine festen Regeln aufstellen. Der Tragwerksplaner muss entscheiden, was er glaubt und was nicht.

Unsere Meinung ist, dass Spannungsspitzen ‚harmlos' sind, wenn die plastische Zone, die sich eventuell ausbildet, keine massiven Ausgleichsbewegungen hervorruft. Bei der punktgelagerten Wandscheibe in Bild 6.27 ist das wohl anders, sie hat viel ‚Spiel' nach unten, wenn die Lager nachgeben.



Bild 6.28. I-40 Hernando DeSoto Bridge in Tennessee. *‚Inspector who twice missed crack in bridge got fired...‘*, [21]

Was jedoch nicht interpretierbar ist, das sind die Singularitäten an sich, denn die sieht man nachher in den Fensterecken als feine Risse oder sie sind der Auslöser für einen kompletten Bruch wie in Bild 6.28.

Vielleicht passt an diese Stelle auch ein Wort über die unterschiedliche Rolle der finiten Elemente in der Mathematik und in der Praxis. Der Mathematiker versteht unter finiten Elementen die *shape functions*, während für den Ingenieur finite Elemente kleine Balken, Scheiben und Platten sind, mit denen er ein Tragwerk nachbildet und daher interessiert den Ingenieur nicht nur der Approximationsfehler, sondern auch der **Modellfehler**.

Beide Fehler sind miteinander verschränkt. Anders als beim Hausbau, muss man bei finiten Elementen die Fundamente nachbessern, wenn man schon am Dachstuhl ist, das Modell bleibt ständig in der Schwebe. Die Analyse des Modellfehlers muss daher ***gleichgewichtig*** neben der Analyse des Approximationsfehlers stehen und hier ist vor allem der Sachverstand des Ingenieurs gefragt.

Lange Zeit konzentrierte man sich eigentlich nur auf den numerischen Fehler, ging das Problem rein mathematisch an, entwickelte ausgeklügelte asymptotische Fehlerschätzer, das sind Ausdrücke vom Typ $O(h^n)$, aber nun versucht man auch Abschätzungen für den Modellfehler zu entwickeln, wie wir das im vorhergehenden Kapitel 5 getan haben. Dafür eignen sich Einflussfunkti-

onen sehr gut, weil sie ja direkt die Sensitivitäten eines Tragwerks repräsentieren und damit näher an der Kernproblematik der numerischen Modellbildung sind.

Die Stichworte an dieser Stelle lauten ***Verification and Validation***. Wurde die Gleichung richtig gelöst – *Verification* – und ist das Modell überhaupt in der Lage die gewünschte Antwort zu liefern – *Validation*? Diese Frage zu beantworten, ist Aufgabe des Ingenieurs.

7

Gemischte Formulierungen

Jede Differentialgleichung wie $EI\, w^{IV}$ lässt sich in ein **System von Differentialgleichungen** niedrigerer Ordnung aufspalten. Dieser Aufspaltung entspricht in der Statik der Dreiklang aus ***Verzerrungen, Materialgesetz und Gleichgewicht***. Man nennt FE-Ansätze bei denen die Verschiebungen und die Spannungen unabhängig voneinander approximiert werden gemischte Ansätze. Sie basieren auf den Formulierungen in diesem Kapitel[1].

Unabhängig von den finiten Elementen benötigt man gemischte Formulierungen, wenn man es mit Anfangsdehnungen oder Anfangsspannungen zu tun hat. Auch die Lastfälle Temperatur gehören zu diesem Problemkreis.

7.1 Das System des Stabes

Der Stab ist ein ‚einachsiges Volumen' und so entsteht das System des Stabes, wenn man die Gleichungen (7.30) (2D und 3D sind dieselben Gleichungen) mit der Fläche A multipliziert

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{S} \cdot A = \boldsymbol{p}\ [\mathrm{N/m^3}] \cdot A \qquad \Rightarrow \qquad -N' = p_x\ [\mathrm{N/m}]\,, \tag{7.1}$$

den Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ auf einen Eintrag $\sigma_{xx} = \sigma$ reduziert und die Normalkraft $N = \sigma \cdot A$ einführt

$$\begin{aligned} \text{Dehnungen} \qquad & u' - \varepsilon = 0 && \text{(7.2a)} \\ \text{Materialgesetz} \qquad & EA\,\varepsilon - N = EA\,\varepsilon_0 && \text{(7.2b)} \\ \text{Gleichgewicht} \qquad & -N' = p_x \quad . && \text{(7.2c)} \end{aligned}$$

Die Anfangsdehnungen $\varepsilon_0 = \alpha_T \cdot T$ sind typischerweise Dehnungen aus einem Temperaturanstieg T. Das obige System stellt die Anwendung eines **Operators** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ da. Ist $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta u, \delta\varepsilon, \delta N\}$ eine

[1] Der Beitrag von Ramm und Hofmann, [175], ist eine umfassende und detaillierte Entwicklung der Grundgleichungen der Stabstatik ausgehend von den gemischten Formulierungen

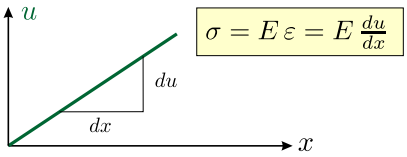


Bild 7.1. Das Hookesche Gesetz. Der E-Modul (210 N/mm^2, Stahl) ist die Spannung, die den Stab (rechnerisch) auf die doppelte Länge streckt, $\varepsilon = 1$

beliebige Testfunktion (virtuelle Verrückung), dann ist die virtuelle äußere Arbeit der Ausdruck

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} >:= \int_0^l [(u' - \varepsilon)\,\delta N + (EA\,\varepsilon - N)\,\delta\varepsilon - N'\,\delta u]\,dx\,. \tag{7.3}$$

Partielle Integration führt auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [N\,\delta u]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.4}$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l [(u' - \varepsilon)\,\delta N + EA\,\varepsilon\,\delta\varepsilon + N\,(\delta u' - \delta\varepsilon)]\,dx \tag{7.5}$$

und damit direkt weiter zur zweiten Greenschen Identität

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [N\,\delta u]_0^l - [\delta N\,u]_0^l - < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > = 0\,. \tag{7.6}$$

Die erste Variation der potentiellen Energie ist, wie immer, identisch mit der ersten Greenschen Identität

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0\,, \tag{7.7}$$

und daran kann man die Gestalt von $\Pi(\boldsymbol{\Sigma})$ ablesen.

Für einen Zugstab, $u(0) = 0, N(l) = P$, und mit einer Streckenlast p und einer Temperaturdehnung $\alpha_T T$ ergibt das

$$\delta\Pi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l (p\,\delta u\,dx + EA\,\varepsilon_0\,\delta\varepsilon)\,dx + P\,\delta u(l) - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.8}$$

also

$$\Pi(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{2}\,a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}) - \int_0^l (p\,u + EA\,\varepsilon_0\,\varepsilon)\,dx - P\,u(l)\,. \tag{7.9}$$

Bei den anderen Systemen, die noch folgen werden, gilt das alles sinngemäß.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Temperaturglied

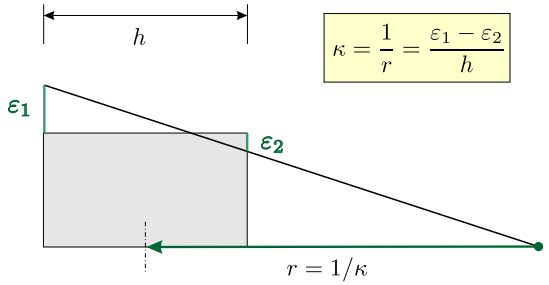


Bild 7.2. Dehnung und Krümmung am Balken

$$\bar{1} \cdot \delta = \int_0^l \alpha_T \, T \, \bar{N} \, dx \tag{7.10}$$

in der Mohrschen Arbeitsgleichung die umgestellte Gleichung

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) &= < \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}), \boldsymbol{\Sigma} > + [\bar{N} \, u]_0^l - a(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ &= 0 + \bar{1} \cdot \delta - \int_0^l \alpha_T \, T \, \bar{N} \, dx = 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

ist. Das $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = (\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{N})$ sind die Zustandsgrößen am System aus der Hilfskraft $\bar{1}$. Würden wir die Verlängerung eines Zugstabs unter einem Temperaturanstieg T berechnen, dann wären $\bar{u} = x/EA, \bar{\varepsilon} = 1/EA, \bar{N} = 1$.

7.2 Der vollständige Balken (Bernoulli-Balken)

Die Differentialgleichung $EI \, w^{IV}(x) = p(x)$ basiert auf dem System

Krümmungen	$\kappa - w'' = 0$	(7.12a)
Materialgesetz	$EI \, \kappa + M = EI \, \kappa_0$	(7.12b)
Gleichgewicht	$-M'' = m' + p$	(7.12c)

mit *Vorkrümmungen* κ_0, z.B. aus Temperatur $\kappa_0 = \alpha_T \Delta T/h$, Linienmomenten m [Nm/m] und der Streckenlast p. Wenn EI konstant ist, κ_0 null ist und keine Linienmomente wirken, $m = 0$, dann reduziert sich das System auf $EI \, w^{IV} = p$. Das obige System können wir als die Anwendung eines **Operators** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \kappa, M\}$ aus *Biegelinie, Krümmung* und *Moment* lesen. Ist $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta w, \delta\kappa, \delta M\}$ eine beliebige Testfunktion (virtuelle Verrückung), dann ist die virtuelle äußere Arbeit der Ausdruck

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > := \int_0^l \left[(\kappa - w'') \, \delta M + (EI \, \kappa + M) \, \delta\kappa - M'' \, \delta w \right] dx \, . \tag{7.13}$$

Partielle Integration führt auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> + [w'\,\delta M + M'\,\delta w]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \quad (7.14)$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l \left[EI\,\kappa\,\delta\kappa + (\kappa - w'')\,\delta M + M\,(\delta\kappa - \delta w'')\right] dx \quad (7.15)$$

und damit direkt weiter zur zweiten Greenschen Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = &<\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> + [w'\,\delta M + M'\,\delta w]_0^l \\ &- [\delta w'\,M + \delta M'\,w]_0^l - <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma}> = 0\,. \end{aligned} \quad (7.16)$$

7.2.1 LF Temperatur

Wie beim Stab basiert das Temperaturglied

$$\bar{1} \cdot \delta = \int \bar{M}\,\alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,dx \quad (7.17)$$

in der Mohrschen Arbeitsgleichung auf dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) &= <\boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}), \boldsymbol{\Sigma}> + [\bar{w}'\,M + \bar{M}'\,w]_0^l - a(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ &= 0 + \bar{1} \cdot \delta - \int_0^l \alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\bar{M}\,dx = 0\,. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die Einflussfunktion für das Moment $M(x)$ in einem Punkt x entsteht durch die Spreizung eines dort eingebauten Gelenks. Sei $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \{w_2, M_2, \kappa_2\}$ die Einflussfunktion (in drei Teilen), also M_2 das zugehörige Biegemoment, dann folgt nach den üblichen Schritten (Zweiteilung des Felds im Aufpunkt)

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Sigma}) = -M(x) + \int_0^l \alpha_T\,\frac{\Delta T}{h}\,M_2\,dx = 0 \quad (7.19)$$

was genau der Mohrschen Arbeitsgleichung entspricht, wenn man $\bar{M} = M_2$ setzt. In Temperaturlastfällen kann man also mit der Mohrschen Arbeitsgleichung Schnittkräfte berechnen, was ja eigentlich nicht gehen sollte. Es geht, weil der Ausdruck (7.19) eine starke Einflussfunktion ist, die bei der Mohrschen Arbeitsgleichung als (angebliche) schwache Einflussfunktion ‚mitsegelt'.

7.3 Der schubweiche Balken (Timoshenko Balken)

Dem $EI\,w^{IV} = p$ entspricht beim schubweichen Balken das System

$$-EI\,\theta'' + GA_s\,(w' + \theta) = 0 \quad (7.20a)$$

$$-GA_s\,(w'' + \theta') = p\,, \quad (7.20b)$$

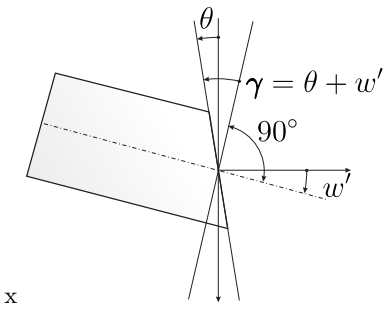


Bild 7.3. Schubweicher Balken

für die Durchbiegung w und die Drehung θ, siehe Bild 7.3. Zu diesem System gehört die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l -\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, dx + [V\,\delta w + M\,\delta\theta]_0^l - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,, \tag{7.21}$$

mit der Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) &= \int_0^l [V\,\delta\gamma + M\,\delta\kappa]\, dx \\ &= \int_0^l [GA_s(w' + \theta)\,(\delta w' + \delta\theta) + EI\,\theta'\,\delta\theta']\, dx\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Das ist die **Weggrößenformulierung** des schubweichen Balkens.

Jetzt wechseln wir zu dem System und setzen wie üblich voraus, dass die Biegesteifigkeit EI, der Schubquerschnitt A_s und der Schubmodul G längs des Balkens konstant sind.

Die direkten Kinematen sind die Durchbiegung w und die Verdrehung θ (siehe Bild 7.3).

Verzerrungen	$\theta' - \kappa = 0$	$w' + \theta - \gamma = 0$	(7.23a)
Materialgesetz	$EI\,\kappa - M = 0$	$GA_s\gamma - V = 0$	(7.23b)
Gleichgewicht	$-M' + V = 0$	$-V' = p$	(7.23c)

Dieses System kann als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \theta; \kappa, \gamma; M, V\}$ gelesen werden. Dazu gehört die virtuelle äußere Arbeit

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> := \int_0^l &[(\theta' - \kappa)\,\delta M + (w' + \theta - \gamma)\,\delta V + (EI\,\kappa - M)\,\delta\kappa \\ &+ (GA_s\gamma - V)\,\delta\gamma + (-M' + V)\,\delta\theta - V'\,\delta w]\, dx\,. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Partielle Integration der letzten beiden Terme, der Arbeit der Gleichgewichtsterme, führt auf die erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + [-M\,\delta\theta - V\,\delta w]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.25}$$

mit der symmetrischen Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l & [(\theta' - \kappa)\,\delta M + (\delta\theta' - \delta\kappa)M + (w' + \theta - \gamma)\,\delta V \\ & + (\delta w' + \delta\theta - \delta\gamma)V + EI\,\kappa\,\delta\kappa + GA_s\gamma\,\delta\gamma]dx\,. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Die zweite Greensche Identität ergibt sich wie gewohnt durch Spiegelung.

7.4 Poisson Gleichung

Die *Poisson Gleichung*

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) \tag{7.27}$$

kann in ein System erster Ordnung

$$\nabla u - \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}_{\,(2)} \tag{7.28a}$$

$$-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = p_{\,(1)} \tag{7.28b}$$

für zwei Funktionen, u und $\boldsymbol{\sigma}$ oder $\boldsymbol{v} = \{u, \boldsymbol{\sigma}\}^T$ aufgespalten werden.

Zu diesem System gehört die Identität

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v}) = & \int_\Omega [(\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \bullet \boldsymbol{\delta\sigma} - \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\,\delta u]\; d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{n}\,\delta u\,ds \\ & \underbrace{- \int_\Omega (\nabla u \bullet \boldsymbol{\delta\sigma} + \nabla\delta u \bullet \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\delta\sigma})\, d\Omega}_{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v})} = 0\,. \end{aligned} \tag{7.29}$$

7.5 Die Scheibengleichung

Die konstitutiven Gleichungen lauten in der Reihenfolge *Verzerrungen, Spannungen, Gleichgewicht*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{7.30a}$$

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_0] \tag{7.30b}$$

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{p}\,, \tag{7.30c}$$

wobei $\boldsymbol{E} = [\varepsilon_{ij}]$ und $\boldsymbol{S} = [\sigma_{ij}]$ der Verzerrungs- bzw. Spannungstensor sind, $\boldsymbol{E}_0$ sind Anfangsdehnungen (z.B. aus Temperatur) und $\boldsymbol{E}()$ ist der Operator

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\,u_{1,1} & u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{2,1} + u_{1,2} & 2\,u_{2,2} \end{bmatrix}. \tag{7.31}$$

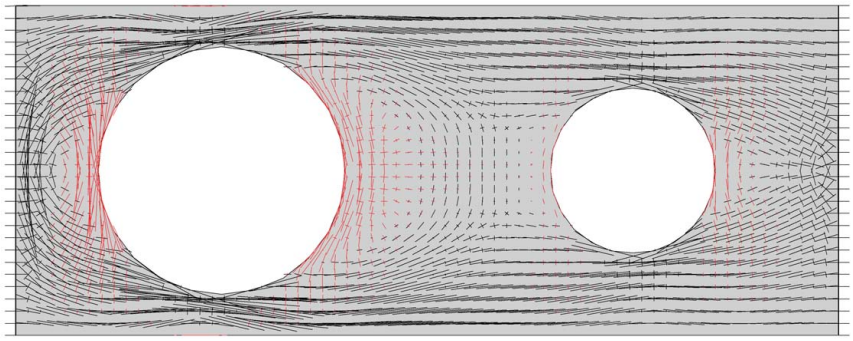


Bild 7.4. Gelochte Scheibe unter Zug (BE-SCHEIBE)

Die Divergenz des Spannungstensors $\boldsymbol{S}$, siehe Bild 7.4, ist der Vektor

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \end{bmatrix} . \tag{7.32}$$

Mit dem Operator

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] = 2\mu \cdot \boldsymbol{E} + \lambda \, (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{I} \tag{7.33}$$

wird der Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ aus dem Verzerrungstensor berechnet. Es ist

$$\lambda = \frac{2\,\mu\,\nu}{1-2\,\nu} \qquad \operatorname{tr} \boldsymbol{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \qquad \text{(trace)} \tag{7.34}$$

und $\boldsymbol{I}$ ist der Einheitstensor (Einheitsmatrix).

Die linke Seite des Systems (7.30) kann man als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}(\,)$ auf das Triple $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ lesen und

$$\begin{aligned} < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > = & \int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S} \, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta} E \, d\Omega \\ & + \int_\Omega - \operatorname{div} \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega \end{aligned} \tag{7.35}$$

ist dann die zugehörige virtuelle Arbeit mit $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\boldsymbol{\delta u}, \boldsymbol{\delta E}, \boldsymbol{\delta S}\}$ als ‚virtueller Verrückung' oder ‚Testfeld'. Der Punkt $\bullet$ bezeichnet hier das Skalarprodukt von zwei Matrizen

$$\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E} = \sigma_{11}\,\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\,\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\,\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\,\varepsilon_{22} \, . \tag{7.36}$$

Ist $\boldsymbol{S} \in C^1(\Omega)$ eine symmetrische Matrix und $\boldsymbol{\delta u} \in C^1(\Omega)$ ein beliebiges Verschiebungsfeld, dann gilt wegen den Regeln der partiellen Integration

$$\int_\Omega - \operatorname{div} \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega = - \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u} \, ds + \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u}) \, d\Omega \tag{7.37}$$

und mit diesem Hilfssatz folgt

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > = \int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] - \boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta E}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})\, d\Omega - \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds\,. \tag{7.38}$$

Die drei Gebietsintegrale bilden wegen der Symmetrie $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] \bullet \boldsymbol{\delta E} = \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{\delta E}]$ eine symmetrische Bilinearform

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) := \int_\Omega (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}) \bullet \boldsymbol{\delta S}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] \bullet \boldsymbol{\delta E}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u}) - \boldsymbol{\delta E})\, d\Omega\,, \tag{7.39}$$

die wir die Wechselwirkungsenergie zwischen $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\boldsymbol{\delta\Sigma}$ nennen. Damit lautet die erste Greensche Identität des Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0\,, \tag{7.40}$$

aus der alles weitere, insbesondere auch der ***Satz von Betti*** und die Variationsprinzipe wie das ***Hu-Washizu-Prinzip*** folgen, siehe Kapitel 9.15.

Das System $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ für das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ kann man nun auf ein System für das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ allein reduzieren, indem man die Gleichungen (1.112) ineinander einsetzt ($\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_0]$)

$$-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} := -[\mu\, \Delta\boldsymbol{u} + \frac{\mu}{1 - 2\,\nu}\, \nabla\, \mathrm{div}\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{p} - \mathrm{div}\boldsymbol{S}_0\,. \tag{7.41}$$

Zu dem Operator $\boldsymbol{L}$ gehört die **Identität**

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta}u) = \underbrace{\int_\Omega -\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})]\, d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{7.42}$$

wobei $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u})$ der Spannungsvektor $\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ des Feldes $\boldsymbol{u}$ auf dem Rand Γ ist.

Bei einer wie folgt belasteten Scheibe mit Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) = \bar{\boldsymbol{t}} \text{ auf } \Gamma_N \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ auf } \Gamma_D \tag{7.43}$$

lautet also das ***Prinzip der virtuellen Verrückungen***, wenn $\boldsymbol{\delta u} = \boldsymbol{0}$ auf Γ_D ist,

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u}]\, d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,. \tag{7.44}$$

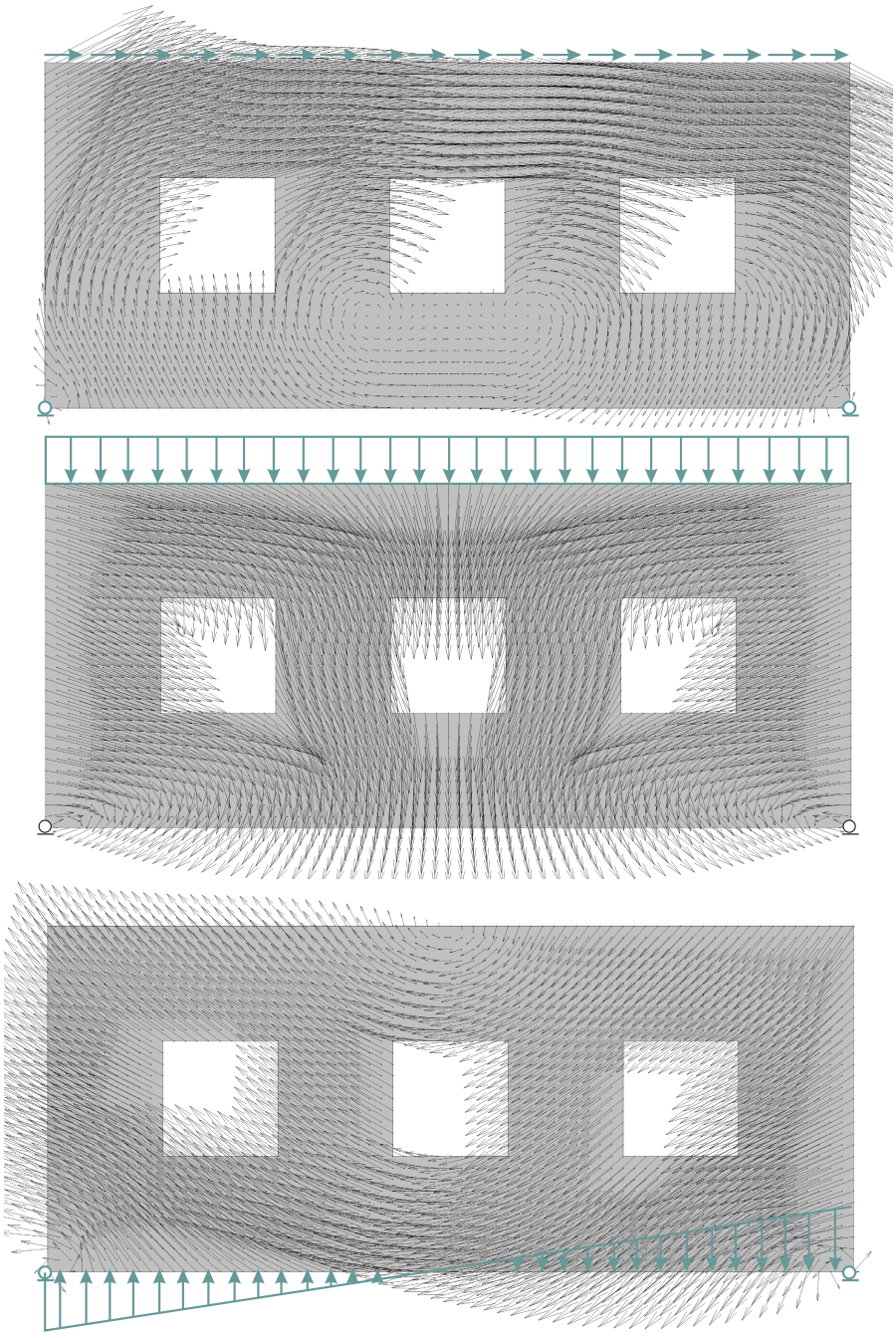


Bild 7.5. Formänderungen einer Scheibe unter Belastung, [96]

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ einer Scheibe sind die Wechselwirkungsenergien zwischen den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}_i$ und $\boldsymbol{\varphi}_j$, die ja selbst Verschiebungsfelder sind, also aus horizontalen und vertikalen Komponenten bestehen

$$k_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}_i) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varphi}_j] \, d\Omega = \int_\Omega (\sigma_{xx}^{(i)} \, \varepsilon_{xx}^{(j)} + 2 \, \sigma_{xy}^{(i)} \, \varepsilon_{xy}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(i)} \, \varepsilon_{yy}^{(j)}) \, d\Omega \, . \tag{7.45}$$

7.6 Die schubstarre Platte (Kirchhoff)

Bei einer schubstarren Platte (Kirchhoffplatte) lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}(w) = \boldsymbol{0} \tag{7.46a}$$

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}_0] \tag{7.46b}$$

$$-\mathrm{div}^2 \boldsymbol{M} = p \, , \tag{7.46c}$$

was als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}()$ auf das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ gelesen werden kann. $\boldsymbol{K}_0$ sind mögliche **Anfangskrümmungen**.

Es ist

$$\mathrm{div}^2 \, \boldsymbol{M} = \mathrm{div} \begin{bmatrix} m_{xx,x} + m_{xy,y} \\ m_{yx,x} + m_{yy,y} \end{bmatrix} = m_{xx,xx} + 2 \, m_{xy,xy} + m_{yy,yy} \, . \tag{7.47}$$

Der Operator $\boldsymbol{K}()$ angewandt auf w sind natürlich die ‚Krümmungen'

$$\boldsymbol{K}(w) = \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,yy} \end{bmatrix} \, . \tag{7.48}$$

Mit partieller Integration erhält man mit symmetrischen Matrizen $\boldsymbol{M} \in C^2(\Omega)$ und Funktionen $\delta w \in C^2(\Omega)$ das Resultat

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\mathrm{div}^2 \boldsymbol{M} \, \delta w \, d\Omega = &- \int_\Gamma (V_n \, \delta w - M_n \, \frac{\partial \delta w}{\partial n}) \, ds - [[M_{nt} \, \delta w]] \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{K}(\delta w) \, d\Omega \, , \end{aligned} \tag{7.49}$$

wobei (in Tensorschreibweise)

$$V_n = \frac{d}{ds} \, M_{nt} + Q_n \quad M_{nt} = M_{ij} \, n_i \, t_j \quad M_n = M_{ij} \, n_i \, n_j \quad Q_n = M_{ij,i} \, n_j \, , \tag{7.50}$$

und $\boldsymbol{n} = \{n_1, n_2\}^T$ und $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2\}^T$ sind der Normalen- und Tangentenvektor auf dem Rand (jeweils mit der Länge 1).

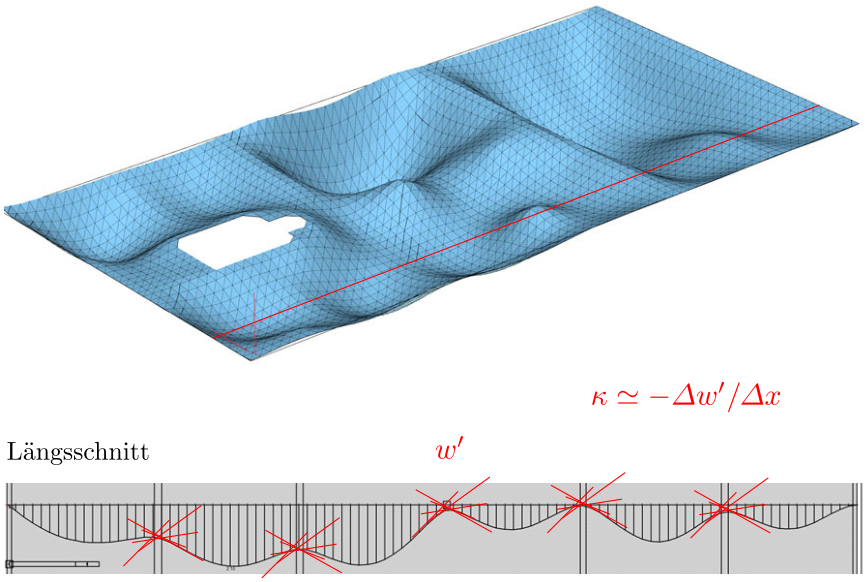


Bild 7.6. Die rasche Änderung von w' über den Zwischenlagern bedeuten starke Krümmungen $\kappa = -w''$ in der Platte und das gibt große Momente (BE-PLATTE)

Das System (7.46) kann man als die Anwendung eines Operators $\boldsymbol{A}()$ auf das Triple $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ lesen und

$$< \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > = \int_\Omega (\boldsymbol{K}(w) - \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] + \boldsymbol{M}) \bullet \boldsymbol{\delta} K\, d\Omega + \int_\Omega -\mathrm{div}^2\, \boldsymbol{M}\, \delta w\, d\Omega \tag{7.51}$$

ist dann die zugehörige ‚Paarung' mit $\boldsymbol{\delta\Sigma} = \{\delta w, \boldsymbol{\delta K}, \boldsymbol{\delta M}\}$ als ‚virtueller Verrückung'. Partielle Integration des letzten Integrals führt zur Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta}\Sigma) = < \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} > + \int_\Gamma (V_n\, \delta w - M_n\, \frac{\partial \delta w}{\partial n})\, ds + [[M_{nt}\, \delta w]] - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.52}$$

mit der symmetrischen **Wechselwirkungsenergie**

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_\Omega (\boldsymbol{K}(w) + \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] \bullet \hat{\boldsymbol{K}}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{M} \bullet (\boldsymbol{K}(\delta w) + \boldsymbol{\delta K})\, d\Omega\,. \tag{7.53}$$

Das Symbol

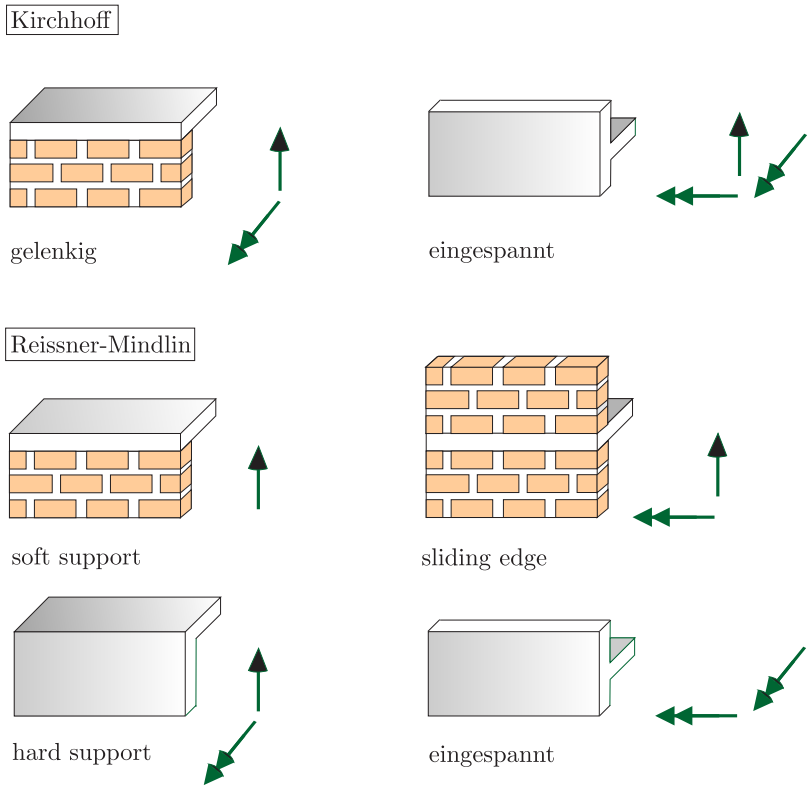


Bild 7.7. Lagerbedingungen von Kirchhoff und Reissner-Mindlin, die Pfeile und Drehpfeile geben die gesperrten Freiheitsgrade an, [96]

$$[[M_{nt}\,\delta w]] = \sum_i F_i\,\delta w(\boldsymbol{x}_i) \tag{7.54}$$

steht für die virtuelle Arbeit der Eckkräfte F_i, die sich ja aus den Sprüngen des Torsionsmoment M_{nt} in den Ecken $\boldsymbol{x}_i$ herleitet.

Das System $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ für das Tripel $\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}\}$ kann man nun auf ein System für die Durchbiegung w allein reduzieren, indem man die Gleichungen (7.46) ineinander einsetzt

$$K\,\Delta\Delta w = p\,. \tag{7.55}$$

Zur linken Seite gehört die Identität

$$\mathscr{G}(w,\delta w) = \underbrace{\int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\delta w\,d\Omega + \int_\Gamma (V_n\,\delta w - M_n\,\frac{\partial \delta w}{\partial n})\,ds + [[M_{nt}\,\delta w]]}_{\delta W_e}$$
$$- \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{K}(w) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\delta w)]\,d\Omega}_{\delta W_i} = 0\,, \tag{7.56}$$

die das ***Prinzip der virtuellen Verrückungen*** formuliert, und

$$\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \mathscr{G}(w,\hat{w}) - \mathscr{G}(\hat{w},w) = 0 \tag{7.57}$$

also

$$\mathscr{B}(w,\hat{w}) = \int_\Omega K\,\Delta\Delta w\,\hat{w}\,d\Omega + \int_\Gamma (V_n\,\hat{w} - M_n\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial n})\,ds + [[M_{nt}\,\hat{w}]]$$
$$- \int_\Gamma (\hat{V}_n\,w - \hat{M}_n\,\frac{\partial w}{\partial n})\,ds - [[\hat{M}_{nt}\,w]] - \int_\Omega K\,\Delta\Delta\hat{w}\,w\,d\Omega = 0 \tag{7.58}$$

ist der ***Satz von Betti***.

7.7 Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)

Die Kinematen sind die Durchbiegung und die Verdrehungen um die beiden Achsen

$$w(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}\,. \tag{7.59}$$

Die zugehörigen Krümmungen und Gleitungen bestimmen sich gemäß

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}_{\,(2\times 2)} \tag{7.60a}$$
$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}_{\,(2)}\,. \tag{7.60b}$$

Die konstitutiven Gleichungen sind

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}_{\,(2\times 2)} \tag{7.61a}$$
$$a\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_{\,(2)} \tag{7.61b}$$

und die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q} = b\,\nabla p_{\,(2)} \tag{7.62a}$$
$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = p_{\,(1)}\,. \tag{7.62b}$$

Es ist

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \frac{1}{2}\,(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) \\ \text{sym.} & \varphi_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) = \begin{bmatrix} \varphi_1 + w_{,1} \\ \varphi_2 + w_{,2} \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

und

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] = K\,(1-\nu)\,\boldsymbol{K} + \nu\,K\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K})\,\boldsymbol{I}\,, \tag{7.64}$$

wobei

$$K = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \qquad a = K\,\frac{1-\nu}{2}\,\bar{\lambda}^2 \qquad b = \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{1}{\bar{\lambda}^2} \qquad \bar{\lambda}^2 = \frac{10}{h^2}\,. \tag{7.65}$$

Das Tripel $\boldsymbol{\Sigma}$ besteht nun aus den Termen

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{w, \boldsymbol{\varphi}_{(2)}; \boldsymbol{K}_{(2\times2)}, \boldsymbol{\gamma}_{(2)}; \boldsymbol{M}_{(2\times2)}, \boldsymbol{q}_{(2)}\} \tag{7.66}$$

und die virtuelle Arbeit ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> = \int_\Omega [&(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{K}) \bullet \boldsymbol{\delta M} + (\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) - \boldsymbol{\gamma}) \bullet \boldsymbol{\delta q} \\ &+ (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{M}) \bullet \boldsymbol{\delta K} + (a\,\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{q}) \bullet \boldsymbol{\delta\gamma} + (-\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} + \boldsymbol{q}) \bullet \boldsymbol{\delta\varphi} \\ &+ (-\mathrm{div}\,\boldsymbol{q})\,\delta w]\,d\Omega\,. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Partielle Integration (wie bei der Scheibe, siehe (7.37))

$$\int_\Omega -\mathrm{div}\,\boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{\delta\varphi}\,d\Omega = -\int_\Gamma \boldsymbol{M}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta\varphi}\,ds + \int_\Omega \boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi})\,d\Omega \tag{7.68}$$

und

$$\int_\Omega -\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}\,\delta w\,d\Omega = -\int_\Gamma \boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n}\,\delta w\,ds + \int_\Omega \boldsymbol{q} \bullet \nabla\delta w\,d\Omega \tag{7.69}$$

führt auf die erste **Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = <\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma}> + \int_\Gamma (\boldsymbol{M}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta\varphi} + \boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n}\,\delta w)\,ds - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.70}$$

mit der symmetrischen **Wechselwirkungsenergie**[2]

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = {} & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) \bullet \boldsymbol{\delta M} + \boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi}) + \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] \bullet \boldsymbol{\delta K} - \boldsymbol{K} \bullet \boldsymbol{\delta M} - \boldsymbol{M} \bullet \boldsymbol{\delta K} \\ & + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) \bullet \boldsymbol{\delta q} + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w) \bullet \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\gamma} \bullet \boldsymbol{\delta q} - \boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{\delta\gamma}\,. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, dann erhält man das folgende Differentialgleichungssystem für die drei Kinematen w, φ_1, φ_2

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})] + a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) = b\,\nabla\,p_{\,(2)} \tag{7.72a}$$

$$-\mathrm{div}\,(a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w)) = p_{\,(1)}\,. \tag{7.72b}$$

[2] es ist $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}] \bullet \boldsymbol{\delta K} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{\delta K}] \bullet \boldsymbol{K}$

Hierzu gehört die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\varphi}, w; \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w) = \int_\Omega [-\operatorname{div} \boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})] \bullet \boldsymbol{\delta\varphi} - a \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w)\, \delta w]\, d\Omega + \int_\Gamma (\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})]\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta\varphi} + a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) \bullet \boldsymbol{n}\, \delta w)\, ds - a(\boldsymbol{\varphi}, w; \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w) = 0 \tag{7.73}$$

mit der symmetrischen Bilinearform

$$a(\boldsymbol{\varphi}, w; \boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w) = \int_\Omega [\boldsymbol{C}[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi})] \bullet \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\delta\varphi}) + a\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}, w) \bullet \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\delta\varphi}, \delta w)]\, d\Omega\,. \tag{7.74}$$

7.8 Shear locking

Die Vorteile der schubweichen Platte liegen in den geringen Ansprüchen, die sie an die Stetigkeit der Ansatzfunktionen stellt und in ihrem inneren ‚Reichtum' an Kinematen. Dafür bereitet das *shear locking* Schwierigkeiten. Der Übergang von der schubweichen Platte – also relativ dicken Platten (Fundamentplatten) – zu schubstarren Platten, wie sie überwiegend im Hochbau vorkommen, bereitet Schwierigkeiten.

Die Reissner-Mindlin-Platte enthält ja im Grunde die schubstarre Kirchhoff-Platte als Spezialfall, denn beim Übergang zur schubstarren Platte muss man nur die Gleitungen null setzen

$$\gamma_x = w_{,x} + \theta_x = 0 \qquad \gamma_y = w_{,y} + \theta_y = 0\,. \tag{7.75}$$

Da sich Schubverformungen nur bei gedrungenen Balken (und Platten) bemerkbar machen, erwarten wir, dass die Reissner-Mindlin-Platte sich bei geringer Plattenstärke wie eine schubstarre Kirchhoff-Platte verhält.

Dem ist (rechnerisch) aber leider nicht so. Mit abnehmender Plattenhöhe h versteift sich eine nach Reissner-Mindlin gerechnete Platte zusehends, die Durchbiegungen hinken immer mehr den Ergebnissen nach Kirchhoff hinterher, bis zuletzt die Ergebnisse unbrauchbar werden, weil die Platte sich kaum noch durchbiegt. Das meint man mit *shear-locking*.

Zum Verständnis sei gesagt, dass dies ein Problem der finiten Elemente ist und nicht der Plattentheorie. Könnte man die Gleichungen exakt lösen, dann würden die Ergebnisse nach Reissner-Mindlin mit abnehmender Plattenstärke h nahtlos in die Ergebnisse nach Kirchhoff übergehen, auch noch in der Grenze $h \to 0$.

Wie es zum *shear locking* kommt, kann man an dem schubweichen Kragträger, $\boldsymbol{u} = \{w, \theta\}^T$, verfolgen, siehe Bild 7.8. Die Wechselwirkungsenergie ist

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l EI\, \theta'\, \delta\theta'\, dx + \int_0^l GA_s\, (w' + \theta)\, (\delta w' + \delta\theta)\, dx\,, \tag{7.76}$$

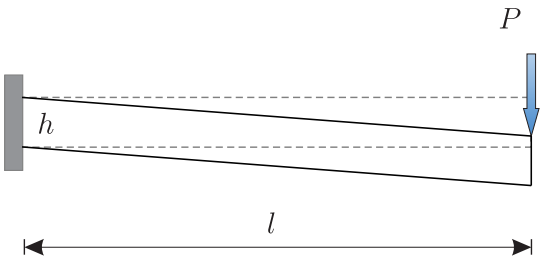


Bild 7.8. Kragträger, schubweich

so dass man mit entsprechenden Einheitsverformungen – 2 für jeden Knoten –

$$\underbrace{\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\text{Knoten 1}} \quad \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_3(x) = \begin{bmatrix} w_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix}}_{\text{Knoten 2}} \dots \tag{7.77}$$

etwa in Form linearer Ansätze

$$w_i(x) = \frac{l-x}{l} \qquad \theta_j(x) = \frac{x}{l} \tag{7.78}$$

eine Beziehung wie

$$(\boldsymbol{K}_B + \boldsymbol{K}_S)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{7.79}$$

erhält, wobei die Einträge in der Matrix $\boldsymbol{K}_B$ die Biegeanteile berücksichtigen und die Einträge in $\boldsymbol{K}_S$ die Schubanteile

$$k_{ij}^B = \int_0^l EI\,\theta_i'\,\theta_j'\,dx \qquad k_{ij}^S = \int_0^l GA_s\,(w_i' + \theta_i)\,(w_j' + \theta_j)\,dx\,. \tag{7.80}$$

Rechnet man den Kragträger in Abb. 7.8 schubweich, so erhält man mit einem Element für die Durchbiegung der Kragarmspitze das Resultat

$$w(l) = \frac{12(h/l)^2 + 20}{12(h/l)^2 + 5} \cdot \frac{Pl}{GA_s} \qquad A_s = \text{‚Schubfläche‘}\ . \tag{7.81}$$

Bei sehr kurzen Balken, $l \ll 1$ wird der erste Bruch ungefähr Eins, und am Trägerende zeigt sich die korrekte Schubverformung

$$w = \frac{Pl}{GA_s}\,. \tag{7.82}$$

Ist $l \gg h$, also die Länge l groß gegen die Trägerhöhe h, dann wird der erste Bruch ungefähr 20/5 und man erhält eine viel zu geringe Durchbiegung

$$w = 4\frac{Pl}{GA_s} \tag{7.83}$$

für die Kragarmspitze. Das ist *shear-locking*.

Die Ursache für diesen Versteifungseffekt ist die unterschiedliche Sensitivität der Biegesteifigkeit EI und der Schubsteifigkeit GA_s gegenüber der Trägerhöhe h

$$EI = \frac{b\,h^3}{12} \qquad GA_s = b\,h \qquad \text{(Rechteckquerschnitt)}\,. \tag{7.84}$$

Lässt man die Trägerhöhe h – und damit die Schubverformungen $\gamma = w' + \theta$ – in Gedanken gegen null gehen, dann sinkt die Biegesteifigkeit viel rascher ab als die Schubsteifigkeit. Dies führt, so wie bei der Gleichung

$$(1 + 10^5)\,u = 10 \qquad \text{Lösung } u = 0.999^{-5} \approx 0\,, \tag{7.85}$$

dazu, dass in (7.79) die Matrix $\boldsymbol{K}_S$ wegen des stark anwachsenden Einflusses von GA_s zunehmend dominiert. Wenn man exakt rechnen könnte, dann würde der wachsende Einfluss von GA_s durch die zu null gehende Gleitung $w' + \theta = \gamma \mapsto 0$ mehr als kompensiert. In einem FE-Programm funktioniert das aber leider nicht, und deswegen muss die Lösung $\boldsymbol{u}$ des Gleichungssystems gegen null gehen, sprich es kommt zur Schubversteifung.

All dies gilt sinngemäß auch für schubweiche Platten: Der Übergang von schubweich (mittlere bis große Plattenstärke) zu schubstarr (kleine Plattenstärke) gelingt numerisch nicht.

Es sind eine ganze Reihe von Maßnahmen vorgeschlagen worden, um das *shear-locking* zu vermeiden. Am sichersten ist es, den Polynomgrad zu erhöhen. Dies gilt nicht nur hier, sondern für alle Phänomene, wo durch *internal constraints* die Freiwerte der Ansätze dazu gebraucht werden, die *constraints* zu erfüllen und dann keine Freiwerte mehr vorhanden sind, um die Bewegungen zu beschreiben.

7.9 Einflussfunktionen

Um die Formulierungen einfach zu halten, es geht ja hier im Grunde nur um Algebra, betrachten wir einen Stab $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ mit Anfangsdehnungen ε^+ und einer eingeprägten Normalkraft N^+

$$\begin{aligned} u' - \varepsilon &= \varepsilon^+ \\ EA\,\varepsilon - N &= N^+ \\ -N' &= p \end{aligned} \tag{7.86}$$

zu dem die Identität

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\delta\Sigma} \rangle + [N\,\delta u]_0^l - a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = 0 \tag{7.87}$$

mit

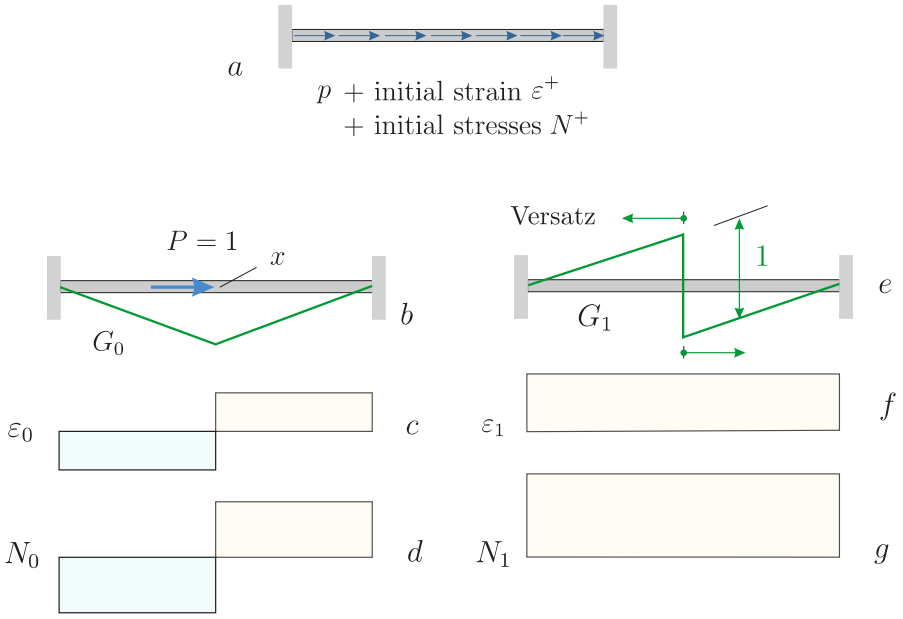


Bild 7.9. Stab **a)** System und Belastung, **b)** Einflussfunktion G_0 **c)** Einflussfunktion G_1 und zugehörige Verzerrungen und Normalkräfte

$$a(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\delta\Sigma}) = \int_0^l (u' - \varepsilon)\, \delta N\, dx + \int_0^l EA\, \varepsilon\, \delta\varepsilon\, dx + \int_0^l N\, (\delta u' - \delta\varepsilon)\, dx \qquad (7.88)$$

gehört. Es ist natürlich $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$ die linke Seite von (7.86). Die zweite Greensche Identität ergibt sich zu

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \rangle + [N\, \hat{u}]_0^l - [u\, \hat{N}]_0^l - \langle \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) \rangle = 0\,. \qquad (7.89)$$

Es sei nun $\boldsymbol{\Sigma} = \{u, \varepsilon, N\}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}) = [\varepsilon^+, N^+, p]^T$, siehe Bild 7.9 a, und es sei $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \{G_0, \varepsilon_0, N_0\}$ die Lösung zum LF $P = 1$, siehe Bild 7.9 b, mit

$$\varepsilon_0 = \frac{d}{dy}\, G_0(y, x) \qquad N_0 = EA\, \varepsilon_0\,. \qquad (7.90)$$

Wie gewohnt formulieren wir die zweite Greensche Identität (7.89) erst auf dem gelochten Intervall $I_\varepsilon := [0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, l]$ und gehen dann bis zur Grenze, $\varepsilon \to 0$. Auf I_ε ist die rechte Seite der Einflussfunktion null, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_0) = [0, 0, 0]^T$, so dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_0)_{I_\varepsilon} = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle + [N\, G_0]_0^l - [u\, N_0]_0^l - u(x) = 0\,, \qquad (7.91)$$

wobei der einzelne Term $u(x)$ der Grenzwert von

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{N_0(x-\varepsilon)\,u(x-\varepsilon) - N_0(x+\varepsilon)\,u(x+\varepsilon)\} = 1\cdot u(x) \tag{7.92}$$

ist. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen an u und $\boldsymbol{\Sigma}_0$ folgt somit

$$u(x) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}), \boldsymbol{\Sigma}_0\rangle = \int_0^l [N_0\,\varepsilon^+ + \varepsilon_0\,N^+ + G_0\,p]\,dx\,, \tag{7.93}$$

und in analoger Weise erhalten wir die Einflussfunktion für die Normalkraft

$$N(x) = \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}), \boldsymbol{\Sigma}_1\rangle = \int_0^l [N_1\,\varepsilon^+ + \varepsilon_1\,N^+ + G_1\,p]\,dx\,. \tag{7.94}$$

7.10 Betti extended

Alle FE-Verfahren für gemischte Formulierungen, ob man nun das ***Hu-Washizu Prinzip*** ($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}$ als Variable) oder das ***Hellinger–Reissner Prinzip*** ($\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{S}$ als Variable) benutzt, siehe [91], kann man auf die *Galerkin Orthogonalität*

$$a(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_h, \boldsymbol{\Sigma}_i) = 0 \qquad \boldsymbol{\Sigma}_i \in V_h\,, \tag{7.95}$$

zurückführen, ist man also bei der klassischen Algebra der finiten Elemente. Daher ist die Formulierung von ***Betti extended*** für gemischte Probleme eine Wiederholung. Seien $\boldsymbol{\Sigma}_1$ und $\boldsymbol{\Sigma}_2$ zwei Gleichgewichtslagen zu rechten Seiten $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$, die jetzt auch Anfangsdehnungen und Anfangsspannungen umfassen können, wie oben beim Stab $\boldsymbol{p} = \{\varepsilon^+, N^+, p\}$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_1) = \boldsymbol{p}_1 \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}_2) = \boldsymbol{p}_2\,, \tag{7.96}$$

dann dürfen im Satz von Betti $<\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{p}_2> = <\boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{p}_1>$ die FE-Lösungen die Originale ersetzen

$$<\boldsymbol{\Sigma}_{1h}, \boldsymbol{p}_2> = <\boldsymbol{\Sigma}_{2h}, \boldsymbol{p}_1> \qquad \text{Betti extended}\,. \tag{7.97}$$

Ist also $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{G}_0$ die Einflussfunktion für $u(x)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}_0) = \boldsymbol{\delta}_0 = \{0, 0, \delta_0\}$, dann ergibt die Ersetzung $\boldsymbol{G}_0 \to \boldsymbol{G}_{0h}$ und $\boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{\Sigma}_h$

$$<\boldsymbol{G}_{0h}, \boldsymbol{p}> = <\boldsymbol{\Sigma}_h, \boldsymbol{\delta}_0> \tag{7.98}$$

die Einflussfunktion für die Verschiebung der FE-Lösung

$$u_h(x) = \int_0^l [N_0^h\,\varepsilon^+ + \varepsilon_0^h\,N^+ + G_0^h\,p]\,dx\,. \tag{7.99}$$

8

Nichtlineare Probleme

In diesem Kapitel geht es um nichtlineare Probleme, genauer deren FE-Formulierung. Das Schwergewicht liegt dabei auf der Frage, welche Teile der linearen Theorie auf die nichtlinearen Probleme übertragen werden können und wo die nichtlineare Theorie von der linearen Theorie abweicht und was die charakteristischen Züge der nichtlinearen FE-Formulierungen sind, wo ihre spezifischen Schwierigkeiten liegen.

Was die Sache etwas beschwerlich macht ist, dass der Übergang zu nichtlinearen Formulierungen mit einem merklichen Verlust von Transparenz einhergeht, denn nichtlineare FE-Formulierungen bestehen zu einem großen Teil aus einer scheinbar endlosen Folge von Umformungen mittels der Produkt- und Kettenregel, Koordinatentransformationen, Linearisierungen und partieller Integration und das alles gewürzt mit linearer Algebra. Die Zeitschriften und Bücher sind voll davon[1].

Zudem ist der Konvergenzradius der Ergebnisse (wie groß ist der Problemkreis, der von den Ergebnissen abgedeckt wird) meist umgekehrt proportional zur Komplexität des Problems. Es sind oft hochdiffizile Insellösungen.

8.1 Einführung

Das wichtigste vorweg: **Auch bei nichtlinearen Problemen gibt es eine erste Greensche Identität**

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = a_u(u, \delta u) - (p, \delta u) = 0\,, \tag{8.1}$$

die als Vorlage für die FE-Lösung $u_h = \sum_j u_j\, \varphi_j(x)$ dient

$$a_u(u_h, \varphi_i) - (p, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{8.2}$$

Entscheidend bei einer nichtlinearen Formulierung ist, dass man die Gleichungen, also die drei Schritte $u \to \varepsilon \to \sigma \to p$, im Griff hat. Ist dieser Pfad ver-

[1] Unterstützung bei den technischen Details der FEM bietet [47]

standen und richtig gesetzt, dann ergibt sich die erste Greensche Identität von selbst und dann ist der ‚Rest' nur noch Algebra und ein schneller Computer.

Auf der rechten Seite der Gleichung[2]

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f} \tag{8.3}$$

steht weiterhin die Arbeit der Belastung p auf den Wegen φ_i, aber die linke Seite ist nicht mehr die dazu äquivalente Arbeit $\boldsymbol{f}_h$ der *shape forces*, sondern es ist das Inkrement der inneren Arbeit auf den Wegen φ_i. Man bewegt sich sozusagen aus dem Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{u}$ probeweise in eine Richtung φ_i und kontrolliert, ob dabei der Zuwachs an innerer Energie gleich dem Zuwachs an äußerer Arbeit ist.

Das ist wie in der Schule. Wenn die Funktion $F(x) = f(x) - p \cdot x$ im Punkt x ein Minimum hat, dann muss in erster Näherung das Inkrement $df = f'(x)\,dx$ bei einer Störung dx gleich dem Inkrement aus p sein, $f'(x)\,dx = p\,dx$.

Dass die Einträge k_i des Vektors $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})$ die Inkremente der inneren Energie sind, liest man an der ersten Greenschen Identität ab

$$\mathscr{G}(u, \varphi_i) = a_u(u, \varphi_i) - (p, \varphi_i) \equiv f'(x)\,dx - p\,dx = 0\,, \tag{8.4}$$

denn bei nichtlinearen Problemen steht dort nicht $a(u, \varphi_i)$, sondern die *Gateaux-Ableitung* $a_u(u, \varphi_i)$ der inneren Energie im Punkt u in Richtung von φ_i, also sinngemäß das $f'(x)\,dx$ mit $dx = \varphi_i$.

Die partielle Integration des Arbeitsintegrals $(L\,u, \varphi_i)$ führt bei nichtlinearen Problemen automatisch(!) auf diese inkrementelle Betrachtungsweise.

Anlass, sich einmal mehr zu wundern, wieviel Intelligenz in die partielle Integration eingebaut ist[3].

8.2 Gateaux Ableitung

Bei nichtlinearen Problemen tritt eine neue Ableitung auf, die sogenannte *Gateaux Ableitung*. Sei

$$J(u) = \int_0^l F(u)\,dx \tag{8.5}$$

ein (möglicherweise nichtlineares) Funktional, dann bezeichnet man den Ausdruck

$$J_u(\delta u) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon \delta u)_{|_{\varepsilon=0}} \tag{8.6}$$

als die Gateaux Ableitung von $J(u)$ in Richtung des Inkrements δu.

[2] $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})$ ist wie $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ein Vektor, der aber nichtlinear in den u_i ist

[3] L = der Differentialoperator des Problems

Man bildet mit einer Testfunktion δu (virtuellen Verrückung) den Ausdruck $J(u+\varepsilon\delta u)$, differenziert nach ε, und setzt am Schluss den Faktor $\varepsilon = 0$.

Diese Ableitung (eigentlich ist es ein Differential, ein Inkrement) sieht ganz wie ein Notbehelf aus, wenn man etwas nicht richtig differenzieren kann, dann ersetzt man es durch einen Differenzenquotient.

Überraschenderweise erscheint diese Ableitung jedoch ***automatisch*** in vielen nichtlinearen Formulierungen, wie zum Beispiel der Greenschen Identität der nichtlinearen Elastizitätstheorie, siehe (8.53),

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds - \int_\Omega \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}\,d\Omega = 0\,, \quad (8.7)$$

wo

$$\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{\delta u} + \nabla\boldsymbol{\delta u}^T + \nabla\boldsymbol{u}^T\,\nabla\boldsymbol{\delta u} + \nabla\boldsymbol{\delta u}^T\,\nabla\boldsymbol{u}\right) \quad (8.8)$$

die Gateaux Ableitung (= Zuwachs) des nichtlinearen Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ im Punkt $\boldsymbol{u}$ in Richtung von $\boldsymbol{\delta u}$ ist,

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{\delta u})]_{|_{\varepsilon=0}} = \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\,. \quad (8.9)$$

Was – auf den ersten Blick – wie ein Trick aussieht, ist also ein wesentlicher Bestandteil der Integralformulierungen nichtlinearer Probleme.

In der nichtlinearen Elastizitätstheorie tritt in der ersten Greenschen Identität an die Stelle des symmetrischen Integrals

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\delta u})\,d\Omega = a(\boldsymbol{\delta u},\boldsymbol{u})\,, \quad (8.10)$$

das unsymmetrische Integral

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,d\Omega\,, \quad (8.11)$$

das Skalarprodukt der Gateaux Ableitung des Verzerrungstensors mit dem Spannungstensor. Dieses Integral beschreibt den Zuwachs an innerer Energie, wenn $\boldsymbol{u}$ sich in Richtung $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\delta u}$ entwickelt. Bei nichtlinearen Problemen ist die erste Greensche Identität so etwas, wie eine ‚Inkrement-Betrachtung' der Terme in der Summe $\delta W_e - \delta W_i = 0$, die aber weiterhin null ist – die Isostasie bleibt erhalten! (Wie das $df = 0$ längs einer Isolinie $f(x,y)$).

Man kann argumentieren, dass auch die lineare Theorie von einer inkrementellen Betrachtung ausgeht, nur ist die dann exakt, weil alle Ausdrücke linear sind, während die Nichtlinearität zur Linearisierung und damit zu einer echten inkrementellen Betrachtung zwingt.

Eine Konsequenz der Unsymmetrie in (8.11) ist, dass die einfache Algebra

$$\mathscr{B}(u,\hat{u}) = \mathscr{G}(u,\hat{u}) - \mathscr{G}(\hat{u},u) = 0\,, \quad (8.12)$$

auf der der Satz von Betti beruht, nicht zur Verfügung steht. Bei nichtlinearen Problemen gibt es keinen ‚Betti'.

8.3 Nichtlinearer Stab

Zum Einstieg betrachten wir den nichtlinearen Stab

$$\text{Verzerrungen} \qquad \varepsilon - (u' + \frac{1}{2}\,(u')^2) = 0 \tag{8.13a}$$

$$\text{Materialgesetz} \qquad \sigma - E\,\varepsilon = 0 \tag{8.13b}$$

$$\text{Gleichgewicht} \qquad -A(\sigma + u'\sigma)' = p \tag{8.13c}$$

Partielle Integration des Arbeitsintegrals, wir schreiben $\mathcal{N} = A\,(\sigma + u'\sigma)$,

$$\int_0^l -\mathcal{N}'\,\delta u\,dx = -[\mathcal{N}\,\delta u]_0^l + \int_0^l \mathcal{N}\,\delta u'\,dx = 0 \tag{8.14}$$

führt, es ist

$$\mathcal{N}\,\delta u' = A(\sigma + u'\sigma)\,\delta u' = (1 + u')\,\delta u'\,\sigma A = \varepsilon_u(u, \delta u)\,\sigma A\,, \tag{8.15}$$

auf die zugehörige erste Greensche Identität

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^l -\mathcal{N}'\,\delta u\,dx + [\mathcal{N}\,\delta u]_0^l - \underbrace{\int_0^l \varepsilon_u(u, \delta u)\,\sigma\,A\,dx}_{a_u(u,\delta u)} = 0 \tag{8.16}$$

mit $\varepsilon_u(u, \delta u) := (1 + u')\,\delta u'$ als der Gateaux Ableitung

$$\frac{d}{d\eta}\varepsilon(u + \eta\,\delta u)|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta}\big(u' + \eta\,\delta u' + \frac{1}{2}\,(u' + \eta\,\delta u')^2\big)|_{\eta=0} \tag{8.17}$$

von $\varepsilon(u)$ in Richtung von δu. Auf (8.16) beruhen die FE-Weggrößenansätze.

8.3.1 Newton Verfahren

Zu bestimmen sei zum Beispiel die Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes, links festgehalten, $u(0) = 0$, und mit einem freien Ende, $N(l) = 0$.

Für die FE-Lösung machen wir den Ansatz

$$u_h = \sum_j u_j\,\varphi_j(x) \tag{8.18}$$

und bestimmen die Knotenverschiebungen u_j so, dass

$$a_u(u_h, \varphi_i) - \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = k_i(\boldsymbol{u}) - f_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{8.19}$$

Diese n Gleichungen bilden ein System von n nichtlinearen Gleichungen $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$, das ein Computer z.B. iterativ mit dem *Newton-Verfahren* löst

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - (\nabla \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i))^{-1}(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.20}$$

In der Statik hat man mehr Einsicht in die Struktur der Gleichungen, kann eventuell intelligenter an die Sache herangehen, und man kommt so zu

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)\,(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.21}$$

wobei $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u}_i)$ die *tangentiale Steifigkeitsmatrix* ist. Es ist dieselbe, wie bei der Scheibe, siehe Kap. 8.6, nur ‚eindimensional'.

8.4 Geometrisch nichtlinearer Balken

Die Biegesteifigkeit EI und Längssteifigkeit EA längs des Balkens sind konstant und die Streckenlasten lauten p_x und p_z. Die Kinematen sind die Längsverschiebung u und die Durchbiegung w, die man zu $\boldsymbol{v} = \{u, w\}^T$ zusammenfassen kann,

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}\,(w')^2 \qquad \kappa = w'' \tag{8.22a}$$

$$N = EA\,\varepsilon \qquad M = -EI\,\kappa \tag{8.22b}$$

$$-N' = p_x \qquad -M'' - (N\,w')' = p_z\,. \tag{8.22c}$$

Daraus ergibt sich das folgende System von Differentialgleichungen für u und w

$$-EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)' = p_x \tag{8.23a}$$

$$EI\,w^{IV} - (EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)\,w')' = p_z\,, \tag{8.23b}$$

oder in einer etwas ‚transparenteren' Fassung

$$-N' = p_x \tag{8.24a}$$

$$EI\,w^{IV} - (N\,w')' = p_z\,. \tag{8.24b}$$

Es sei

$$N = N(\boldsymbol{v}) = EA\,(u' + \frac{1}{2}\,(w')^2)\,, \qquad M = M(w) = -EI\,w''\,, \tag{8.25}$$

und $\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}$ bezeichne die linke Seite des obigen Systems (8.23), dann lässt sich das Arbeitsintegral mittels partieller Integration wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned}\int_0^l \boldsymbol{L}\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{\delta v}\,dx &= \int_0^l ((Eq_1)\cdot\delta u + (Eq_2)\cdot\delta w)\,dx \\ &= \int_0^l [(-N'\,\delta u - (M'' + (N\,w')')\,\delta w]\,dx \\ &= -[N\,\delta u + (M' + N\,w')\,\delta w - M\,\delta w']_0^l + a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v})\,,\end{aligned} \tag{8.26}$$

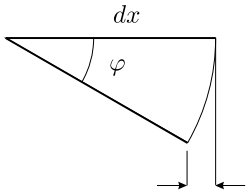


Bild 8.1. Verkürzung durch Drehung

wobei

$$a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = \int_0^l (-M\,\delta w'' + N\,(\delta u' + w'\,\delta w'))\,dx$$
$$= \int_0^l (\frac{M(w)\,M_w(w,\delta w)}{EI} + \frac{N(\boldsymbol{v})\,N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v})}{EA})\,dx \tag{8.27}$$

das Inkrement der Wechselwirkungsenergie ist, das wir im zweiten Teil unter Benutzung der *Gateaux-Ableitungen* von M bzw. N,

$$M_w(w,\delta w) = [\frac{d}{d\varepsilon}M(w+\varepsilon\,\delta w)]_{|_{\varepsilon=0}} = -EI\,\delta w'' = \delta M \tag{8.28}$$
$$N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = [\frac{d}{d\varepsilon}N(\boldsymbol{v}+\varepsilon\,\boldsymbol{\delta v})]_{|_{\varepsilon=0}} = EA(\delta u' + \frac{1}{2}(\delta w')^2) = \delta N \tag{8.29}$$

angeschrieben haben. Die erste Greensche Identität lautet somit

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = \int_0^l \boldsymbol{L u}\bullet\boldsymbol{\delta} u\,dx + [N\,\delta u + (M' + N\,w')\,\delta w - M\,\delta w']_0^l$$
$$- a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta v}) = 0\,. \tag{8.30}$$

Es ist $T = M' + N\,w'$ die Transversalkraft. Auf diesen Gleichungen beruht die Theorie II. Ordnung bei Balken, nur ist es so, dass man von einer konstanten Normalkraft N ausgeht, die als bekannt gesetzt wird, so dass sich das System (8.23) auf

$$-EA\,N' = 0 \tag{8.31a}$$
$$EI\,w^{IV} - N\,w'' = p_z \tag{8.31b}$$

reduziert, also in dem letzten Ausdruck die bekannte Gleichung der Theorie II. Ordnung übrig bleibt.

Die Starrkörperbewegungen, $\delta N = \delta M = 0$, die zu dem System (8.23) gehören, lauten, $a, b, c =$ konstant,

$$\delta u = -\frac{1}{2}\,(\delta w')^2\,x + c \qquad \delta w = a + b\,x\,. \tag{8.32}$$

Der erste Term berücksichtigt, dass es durch eine Drehung φ zu einer Verschiebung ($\leftarrow$) in Richtung der Stabachse kommt, siehe Bild 8.1 [165] S. 10,

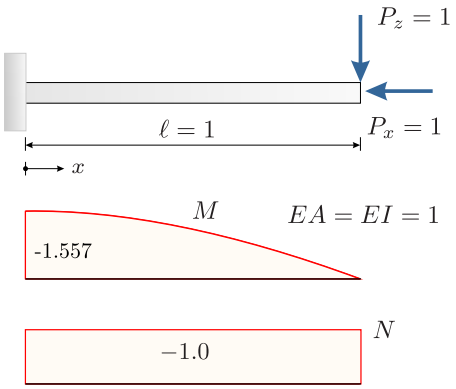


Bild 8.2. Theorie II. Ordnung

$$-(1-\cos\varphi)\,dx = -\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos\,\varphi}\,dx \simeq -\frac{\sin^2\varphi}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\varphi^2\,dx \tag{8.33}$$

was (8.32) entspricht, wenn wir $\varphi \simeq \delta w'$ setzen.

Bei einer Drehung des Kragträgers in Bild 8.2 um die Einspannstelle, $\delta w = a + b \cdot x = 0 + 1 \cdot x$ und $\delta u = -0.5\,x$ bleiben in der Identität (8.30) nur die Randarbeiten übrig und die sind dann null, $N = -P_x$ und $\delta u(l) = -0.5\,l$,

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta v}) = [N\,\delta u + T\,\delta w - M\,\delta w']_0^l = P_x \cdot 0.5\,l + P_z \cdot l + M(0) = 0\,. \tag{8.34}$$

Diese Null ist die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Drehung – Drehung im Sinne von (8.32) – des Balkens aus der neutralen Lage.

Wir sind hier aber bei der Theorie II. Ordnung und da befinden sich die Kräfte nicht mehr in der neutralen Lage, sondern in der ausgelenkten Lage, der Verformungsfigur $\boldsymbol{v}$, wenn wir an dem System wackeln; von daher ist das Ergebnis (anscheinend) akademisch.

Aber weil (8.34) für alle EA und EI gilt, gilt die Gleichung auch für $EA = EI = \infty$. Die Kräfte P_x und P_z wirken, aber es verformt sich nichts, die neutrale Lage ist die exakte Lage. Wenn man jetzt den Träger dreht, dann entsteht ein Moment $M(0) = -(P_x \cdot 0.5\,l + P_z \cdot l)$ in der Einspannstelle und dieses Moment ist nicht das elastische Moment der Lösung $\boldsymbol{v} = \{u = 0, w = 0\}$, die sowieso null ist, sondern es ist das Ausgleichsmoment, das zur Stabilisierung notwendig ist.

8.4.1 Energieerhaltungssatz

Bei einem linearen Stab ist

$$\frac{1}{2}\,\mathscr{G}(u,u) = \frac{1}{2}\int_0^l p\,u\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,dx = W_e - W_i \tag{8.35}$$

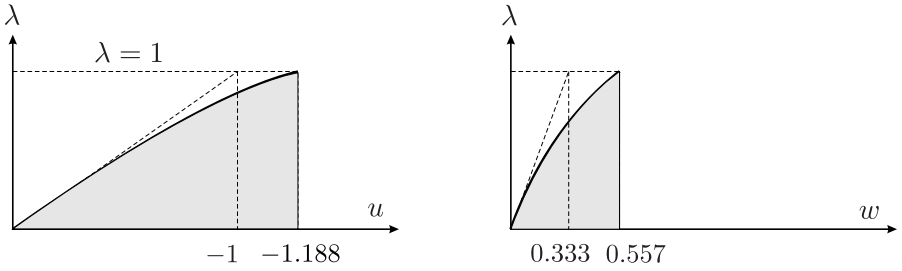


Bild 8.3. Verformungen am Trägerende

der Energieerhaltungssatz. Bei dem Kragträger in Bild 8.2,

$$\varepsilon = l\sqrt{\frac{P_x}{EI}}\,, \qquad P_x = P_z = 1\,, \qquad l = EI = 1\,, \tag{8.36}$$

der nach Theorie II. Ordnung berechnet wurde,

$$\begin{aligned} u(x) &= 1.1681 - 0.8564\,[2.7516\,x - 2\,\sin(x-2) + 0.5\,\sin(2\,x-2) \\ &\quad - 2\,\sin(x)] \qquad (8.37a) \\ w(x) &= \sin(x) - x + 1.5574\,(1-\cos(x)) \qquad (8.37b) \end{aligned}$$

gilt auch $W_e = W_i$, nur kann man die äußere Arbeit W_e nicht einfach aus den Endverformungen, siehe Bild 8.3, berechnen

$$W_e \neq \frac{1}{2}(P_x\,u(l) + P_z\,w(l)) = \frac{1}{2}(1.0\cdot 1.188 + 1.0\cdot 0.557) = 0.8725\,, \tag{8.38}$$

sondern man muss den ganzen Pfad verfolgen. Sei $\boldsymbol{dv} = \{du, dw\}$ das Verformungsinkrement bei einer Laststeigerung, dann lesen wir

$$dW_i = a_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{dv}) = \int_0^l \Big(\frac{N(\boldsymbol{v})\,N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{dv})}{EA} + \frac{M(w)\,M_w(w, dw)}{EI}\Big)\,dx \tag{8.39}$$

als den Zuwachs an innerer Energie und

$$\begin{aligned} \int dW_i &= \int_0^l \Big[\int_0^N \frac{\bar{N}\,d\bar{N}}{EA} + \int_0^M \frac{\bar{M}\,d\bar{M}}{EI}\Big]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \Big(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI}\Big)\,dx = 0.9670 \end{aligned} \tag{8.40}$$

als die innere Energie am Ende des Lastpfades.

Um die äußere Arbeit zu berechnen, müssen wir in Inkrementen denken und annehmen, dass die Belastung langsam gesteigert wird,

$$P_x(\lambda) = \lambda\,P_x = \lambda\cdot 1 \qquad P_z(\lambda) = \lambda\,P_z = \lambda\cdot 1 \qquad 0 \le \lambda \le 1\,. \tag{8.41}$$

Die äußere Arbeit beträgt dann, [84] p. 333

$$\int dW_e = \int_0^u \lambda \cdot 1 \, d\bar{u} + \int_0^w \lambda \cdot 1 \, d\bar{w} = \int_0^1 \lambda \, (\bar{u}_{,\lambda} + \bar{w}_{,\lambda}) \, d\lambda \,. \tag{8.42}$$

Dieses Integral wird am besten numerisch ausgewertet, $\Delta = 0.05$,

$$\int dW_e = \int_0^1 \lambda \, \big[\frac{\bar{u}(\lambda + \Delta) - \bar{u}(\lambda)}{\Delta} + \frac{\bar{w}(\lambda + \Delta) - \bar{w}(\lambda)}{\Delta} \big] d\lambda \tag{8.43}$$

und ergibt mit der *Simpson-Regel* den Wert

$$\int dW_e = 0.9669 \,, \tag{8.44}$$

der gut mit der inneren Energie übereinstimmt[4].

8.5 Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte

Die Formulierung verläuft im Grunde wie bei dem geometrisch nichtlinearen Balken, nur sind noch mehr Gleichungen anzuschreiben. Wir verweisen daher interessierte Leser auf S. 325-328 in [84].

8.6 Nichtlineare Elastizitätstheorie

In dem Triple $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ ist $\boldsymbol{E}$ der **Green-Lagrange Verzerrungstensor** und $\boldsymbol{S}$ ist der zweite **Piola-Kirchhoff Spannungstensor**. Wir nehmen an, dass das Material hyperelastisch ist, d.h. es gibt eine Verzerrungsenergiefunktion $\boldsymbol{W}$ derart, dass $\boldsymbol{S} = \partial \boldsymbol{W} / \partial \boldsymbol{E}$.

In der Gegenwart von Volumenlasten $\boldsymbol{p}$ genügt der elastische Zustand $\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}\}$ in jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ des unverformten Körpers dem System[5]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \qquad \frac{1}{2} \, (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \; u_{k,j}) - \varepsilon_{ij} = 0 \tag{8.45a}$$

$$\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \qquad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} = 0 \tag{8.45b}$$

$$-\mathrm{div}(\boldsymbol{S} + \nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{p} \qquad -(\sigma_{ij} + u_{i,k} \; \sigma_{kj})_{,j} = p_i \tag{8.45c}$$

mit passenden Verschiebungsrandbedingungen $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$ auf dem Teil Γ_D des Randes und Spannungsrandbedingungen $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = \bar{\boldsymbol{t}}$ auf dem anderen Teil Γ_N des Randes wobei

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{S} + \nabla \boldsymbol{u} \boldsymbol{S}) \boldsymbol{n} \tag{8.46}$$

[4] Wegen $EA = 1$ ist das Beispiel natürlich akademisch, weil die Zusammendrückung größer ist, als die Länge des Stabes.

[5] Zur Erklärung: Bei linearen 1-D Problemen, $\sigma = E \, \varepsilon$, wäre $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{E}) = 0.5 \, E \, \varepsilon^2$

der Spannungsvektor in einem Randpunkt mit der nach Außen gerichteten Randnormalen $\boldsymbol{n}$ ist.

Symmetrische Tensoren $\boldsymbol{S}$ genügen der Identität (part. Int.)

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\mathrm{div}(\boldsymbol{S}+\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega \\ = -\int_\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds+\int_\Omega \boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}\,d\Omega\,,\end{aligned}\tag{8.47}$$

mit

$$\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}):=\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{\delta u}+\nabla\boldsymbol{\delta u}^T+\nabla\boldsymbol{u}^T\nabla\boldsymbol{\delta u}+\nabla\boldsymbol{\delta u}^T\nabla\boldsymbol{u}\right)\tag{8.48}$$

was die Gateaux Ableitung des Tensors $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ an der Stelle $\boldsymbol{u}$ ist,

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{\delta u})]_{|_{\varepsilon=0}}=\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\,.\tag{8.49}$$

Wir können so die erste Greensche Identität des Operators $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma})$, also des Systems (8.45), anschreiben

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})=\underbrace{\langle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\Sigma}),\boldsymbol{\delta\Sigma}\rangle+\int_\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds}_{\delta W_e}-\underbrace{a_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})}_{\delta W_i}=0\,,\tag{8.50}$$

wobei

$$\begin{aligned}\langle A(\boldsymbol{\Sigma}),\boldsymbol{\delta\Sigma}\rangle :=\int_0^l(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{E})\bullet\boldsymbol{\delta S}\,d\Omega+\int_\Omega(\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E})-\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta E}\,d\Omega \\ +\int_\Omega -(\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}+\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega\end{aligned}\tag{8.51}$$

und

$$\begin{aligned}a_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\delta\Sigma})=\int_\Omega(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{E})\bullet\boldsymbol{\delta S}\,d\Omega \\ +\int_\Omega(\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E})-\boldsymbol{S})\bullet\boldsymbol{\delta E}\,d\Omega+\int_\Omega\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}\,d\Omega\,.\end{aligned}\tag{8.52}$$

Bei einer reinen Verschiebungsformulierung, bei der alles aus $\boldsymbol{u}$ hergeleitet wird, $\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\}$, und mit der Randbedingung $\boldsymbol{\delta u}=\boldsymbol{0}$ auf Γ_D, reduziert sich das System (8.50) auf ($\bar{\boldsymbol{t}}$ sind Randkräfte auf Γ_N)

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})=\int_\Omega\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,d\Omega+\int_{\Gamma_N}\bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\delta u}\,ds-\int_\Omega\boldsymbol{E_u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u})\bullet\boldsymbol{S}\,d\Omega=0\,,\tag{8.53}$$

wobei $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))$. Wir schreiben im Folgenden kürzer

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{S}\, d\Omega\,. \tag{8.54}$$

Die FE-Lösung $\boldsymbol{u}_h = \sum_j u_j \boldsymbol{\varphi}_j$ bestimmt man daher sinngemäß aus

$$\int_\Omega \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{\varphi}_i\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}} \bullet \boldsymbol{\varphi}_i\, ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n\,, \tag{8.55}$$

oder $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, wobei $\boldsymbol{u}$ der Vektor der Knotenverschiebungen ist[6].

Alternativ kann man natürlich andere Variationsformulierungen aus (8.50) herleiten, etwa gemischte Verfahren, bei denen separate Ansätze für die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und den Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ gemacht werden, [84].

8.6.1 Linearisierung

Um $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ zu lösen, müssen wir die Gleichung linearisieren. Es sei angenommen, dass sich die Funktion $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_\Delta$ in eine Näherung $\boldsymbol{u}_h$ plus einem Inkrement $\boldsymbol{u}_\Delta$ aufspalten lässt. Dann lautet die Identität (8.53)

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,. \tag{8.56}$$

Die Gateaux Ableitung des Ausdrucks

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) := \int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\, d\Omega \tag{8.57}$$

bezüglich eines Verschiebungsinkrements $\boldsymbol{u}_\Delta$ ist

$$\begin{aligned} a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u}) &:= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\, a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\, \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega [\nabla \boldsymbol{u}_\Delta \nabla \boldsymbol{\delta u} \bullet \boldsymbol{W}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)]]\, d\Omega\,, \end{aligned} \tag{8.58}$$

mit dem Tensor

$$\boldsymbol{C} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{E}\, \partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{E}}\, \boldsymbol{S}\,, \tag{8.59}$$

der hier die zweite Ableitung von $\boldsymbol{W}$ darstellt. Diese Ableitung ist an der Stelle $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ zu nehmen. Man beachte, dass $a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u})$ im zweiten und dritten Argument, $\boldsymbol{u}_\Delta$ und $\boldsymbol{\delta u}$, linear ist. Deswegen ist das Gleichungssystem für $\boldsymbol{u}_\Delta$ nachher linear, siehe (8.62), $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}_\Delta = \ldots$

Wir setzen nun

[6] Wir benutzen denselben Buchstaben für den Vektor $\boldsymbol{u}$ wie für die exakte Lösung $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

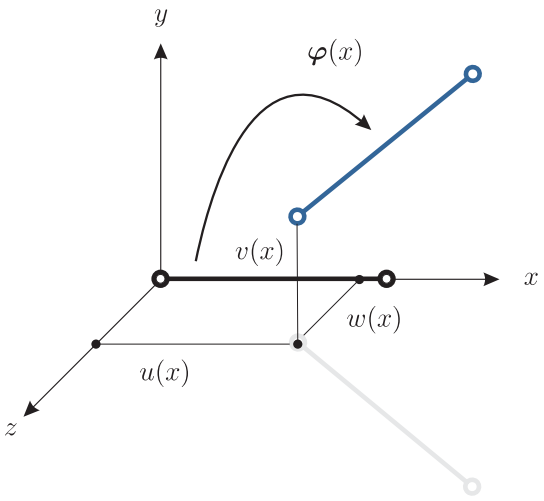


Bild 8.4. Fachwerkstab

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u}) \simeq a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\delta u}) + a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\delta u})\,, \tag{8.60}$$

so dass (8.55) übergeht in

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{\varphi}_i\,d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\boldsymbol{t}}\bullet\boldsymbol{\varphi}_i\,ds - a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_i) - a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\boldsymbol{\varphi}_i) = 0 \quad i=1,2,\dots n\,, \tag{8.61}$$

oder

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}_\Delta = \boldsymbol{0}\,, \tag{8.62}$$

wobei nun $\boldsymbol{u}_\Delta$ der Knotenverschiebungsvektor des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}_\Delta$ ist und $\boldsymbol{K}_T$ ist die tangentiale Steifigkeitsmatrix.

$$(\boldsymbol{K}_T)_{ij} = a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_i)\,. \tag{8.63}$$

Die Iterationsvorschrift lautet jetzt

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.64}$$

8.6.2 Ein Fachwerkstab im Raum

Wir betrachten einen Fachwerkstab, der sich längs der x-Achse erstreckt, siehe Bild 8.4. Die Verschiebung der Punkte lautet

$$\boldsymbol{\varphi}(x,y,z) = (x+u(x))\,\boldsymbol{e}_1 + (y+v(x))\,\boldsymbol{e}_2 + (z+w(x))\,\boldsymbol{e}_3\,, \tag{8.65}$$

wenn $\boldsymbol{u}(x) = \{u(x), v(x), w(x)\}^T$ der Verschiebungsvektor ist. Der Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1+u' & 0 & 0 \\ v' & 1 & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}\,, \tag{8.66}$$

und der Green-Lagrange Verzerrungstensor lauten

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{F}^T\,\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\,v' & \frac{1}{2}\,w' \\ \frac{1}{2}\,v' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,w' & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.67}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{u}) := \varepsilon_x(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}\,((1+u')^2 + (v')^2 + (w')^2 - 1) \\ &= u' + \frac{1}{2}\,((u')^2 + (v')^2 + (w')^2) \qquad (\,)' = \frac{d}{dx}\,. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Die erste Greensche Identität wird, weil alle Terme nur Funktionen von x sind,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = &\int_0^l -\mathrm{div}\,(\boldsymbol{S} + \nabla\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{S}) \bullet \boldsymbol{\delta u}\,A\,dx + [(\boldsymbol{S} + \nabla\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{\delta u}\,A\,]_0^l \\ &- \int_0^l \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) \bullet \boldsymbol{S}\,A\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{8.69}$$

Wir setzen $\sigma = \sigma_{xx} = E\,\varepsilon$ und alle anderen $\sigma_{ij} = 0$, so dass mit $\mathcal{N} = A(\sigma + u'\,\sigma)$ folgt

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_0^l -\mathcal{N}'\,\hat{u}\,dx + [\mathcal{N}\,\hat{u}\,]_0^l - \underbrace{\int_0^l \varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma\,A\,dx}_{a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})} = 0\,, \tag{8.70}$$

mit

$$\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = (1+u')\,\delta u' + v'\,\delta v' + w'\,\delta w'\,. \tag{8.71}$$

Die **Gateaux Ableitung** der Wechselwirkungsenergie $a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})$ ist

$$\begin{aligned} a_T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) &:= \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^l [\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma + \varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u})\,\sigma_{\boldsymbol{u}}]\,A\,dx\,, \end{aligned} \tag{8.72}$$

wobei

$$\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u}) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u} + \varepsilon\,\boldsymbol{u}_\Delta, \boldsymbol{\delta u})\right]_{\varepsilon=0} = u'_\Delta \delta u' + v'_\Delta\,\delta v' + w'_\Delta\,\delta w' \tag{8.73}$$

und

$$\sigma_{\boldsymbol{u}} = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\,\sigma(\boldsymbol{u}+\varepsilon\,\boldsymbol{u}_\Delta)\right]_{\varepsilon=0} = E\,\varepsilon_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)\,. \tag{8.74}$$

Die Elemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix lauten daher

$$(K_T(\boldsymbol{u}))_{ij} = a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j)\,. \tag{8.75}$$

Die vektorwertigen Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_i(\xi)$ sind die Knotenverschiebungen (drei in jedem Knoten); es ist ξ die Koordinate auf dem Master-Element.

Mit linearen Ansatzfunktionen auf einem Element Ω_e der Länge l_e

$$u_e(x) = \sum_{i=1}^{2} u_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,,\; v_e(x) = \sum_{i=1}^{2} v_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,,\; w_e(x) = \sum_{i=1}^{2} w_i^e\,\varphi_i^e(\xi)\,, \tag{8.76}$$

erhalten wir für den Knotenvektor $\boldsymbol{u}^e = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$ die 6×6 tangentiale Steifigkeitsmatrix [231]

$$\boldsymbol{K}_T^e(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) & -(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) \\ -(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) & (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2) \end{bmatrix}, \tag{8.77}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{E\,A}{l_e}\begin{bmatrix} (1+u_e')^2 & (1+u_e')\,v_e' & (1+u_e')\,w_e' \\ (1+u_e')\,v_e' & (v_e')^2 & v_e'\,w_e' \\ (1+u_e')\,w_e' & v_e'\,w_e' & (w_e')^2 \end{bmatrix} \tag{8.78}$$

und

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\sigma\,A}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.79}$$

So entsteht das System

$$\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}_\Delta = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{u})\,, \tag{8.80}$$

das iterativ gelöst wird

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.81}$$

Bezüglich der Erweiterung auf 3-D Balken verweisen wir auf [77].

8.6.3 Ebenes Problem

Es seien $\boldsymbol{X}$ die Koordinaten in der Ausgangslage und $\boldsymbol{x}$ in der aktuellen Konfiguration, siehe Bild 8.5,

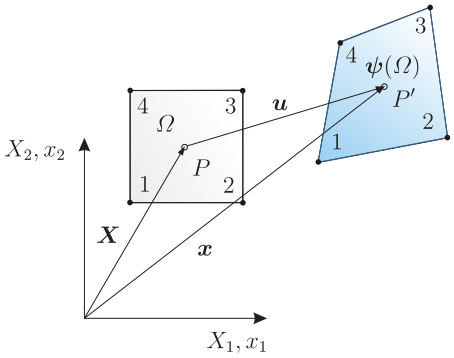


Bild 8.5. Ausgangslage und verformte Lage

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}\,, \quad \text{oder} \quad x_i = X_i + u_i\,, \tag{8.82}$$

wobei $\boldsymbol{u}$ der Verschiebungsvektor ist. Der Deformationsgradient lautet

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & 0 \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,, \tag{8.83}$$

so dass der Green-Lagrange Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ \text{sym.} & E_{22} \end{bmatrix} \tag{8.84}$$

die folgenden Komponenten hat

$$\begin{aligned} E_{11} &= u_{1,1} + \frac{1}{2}\,(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) \\ E_{22} &= u_{2,2} + \frac{1}{2}\,(u_{2,2}^2 + u_{1,2}^2) \\ E_{12} &= \frac{1}{2}\,(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}\,(u_{1,1}\,u_{1,2} + u_{2,2}\,u_{2,1})\,. \end{aligned} \tag{8.85}$$

Das FE-Verschiebungsfeld kann auf zwei Arten geschrieben werden

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{\text{DOFS}} u_i\,\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_i u_i \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\,, \quad \boldsymbol{u}_h = \sum_{i=1}^{\text{NODES}} \boldsymbol{u}_i\,\psi_i(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_i \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \psi_i\,. \tag{8.86}$$

Entweder läuft die Summe über die Freiheitsgrade u_i oder die Knoten. Die $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ sind die Verschiebungsfelder der u_i, während die ψ_i in der zweiten Formel die skalar-wertigen *shape functions* der Knoten ($\psi_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$) sind und die Vektoren $\boldsymbol{u}_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}\}^T$ sind die Verschiebungen im Knoten i.

Wir benutzen hier die zweite Notation, so dass zum Beispiel die virtuelle äußere Arbeit der Volumenkräfte $\boldsymbol{p}$ die folgende Gestalt hat[7]

[7] Um die Notation nicht zu überfrachten, schreiben wir eine virtuelle Verrückung $\hat{\boldsymbol{u}}$ und nicht $\boldsymbol{\delta u}$ und die FE-Lösung schreiben wir ohne Index h.

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \hat{\boldsymbol{u}}\, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{p}^T \hat{\boldsymbol{u}}_i\, \psi_i\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega \boldsymbol{p}\, \psi_i\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \boldsymbol{f}_i\,. \end{aligned} \tag{8.87}$$

Der Gradient des FE-Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$ lautet dann

$$\nabla \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \otimes \nabla \psi_i \tag{8.88}$$

und der Deformationsgradient ist

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \otimes \nabla \psi_i\,. \tag{8.89}$$

Der Gradient des virtuellen Verschiebungsfeldes $\hat{\boldsymbol{u}} = \sum_i \hat{\boldsymbol{u}}_i\, \psi_i$ richtet sich nach (8.88), und die Gateaux Ableitung ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}) :&= \frac{1}{2}\left(\nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^T + \nabla \boldsymbol{u}^T \nabla\, \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla\, \hat{\boldsymbol{u}}^T \nabla\, \boldsymbol{u}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \nabla \hat{\boldsymbol{u}} + \nabla\, \hat{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{F}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{F}^T (\hat{\boldsymbol{u}}_i \otimes \nabla \psi_i) + (\nabla \psi_i \otimes \hat{\boldsymbol{u}}_i) \boldsymbol{F}]\,. \end{aligned} \tag{8.90}$$

Wie in der linearen Theorie, wo $\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \boldsymbol{\sigma}$, ist die Symmetrie von $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}})$ und $\boldsymbol{S}$ Anlass den ‚Gateaux Verzerrungs Vektor' einzuführen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}) := \begin{bmatrix} (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{11} \\ (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{22} \\ 2\,(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}))_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{B}_{L_i}\, \hat{\boldsymbol{u}}_i\,, \tag{8.91}$$

wobei

$$\boldsymbol{B}_{L_i} = \begin{bmatrix} F_{11}\, \psi_{i,1} & F_{21}\, \psi_{i,1} \\ F_{12}\, \psi_{i,2} & F_{22}\, \psi_{i,2} \\ F_{11}\, \psi_{i,2} + F_{12}\, \psi_{i,1} & F_{21}\, \psi_{i,2} + F_{22}\, \psi_{i,1} \end{bmatrix}. \tag{8.92}$$

Bei einem Material vom St. Venant Typ

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}] = 2\mu \boldsymbol{E} + \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{I} \tag{8.93}$$

lautet die Vektordarstellung des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}, \tag{8.94}$$

mit

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,, \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,. \tag{8.95}$$

Die schwache Form des Gleichgewichte schreibt sich damit

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T [\underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{B}_{L_i}^T \bullet \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega}_{\boldsymbol{k}_i} - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{p}\,\psi_i\, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}}\,\psi_i\, ds}_{\boldsymbol{f}_i}] = 0 \tag{8.96}$$

oder $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. Wie zuvor linearisieren wir diese Gleichung mit Hilfe der Gateaux Ableitung in Richtung von $\boldsymbol{u}_\Delta$

$$a_T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta,\hat{\boldsymbol{u}}) = \int_\Omega [\nabla \boldsymbol{u}_\Delta\, \boldsymbol{S} \bullet \nabla\hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_\Delta)]]\, d\Omega\,. \tag{8.97}$$

Die Diskretisierung des ersten Terms in (8.97) ergibt mit

$$\nabla \boldsymbol{u}_{\Delta_h} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}_{\Delta j} \otimes \nabla\psi_j\,, \qquad \nabla\hat{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i \otimes \nabla\psi_i \tag{8.98}$$

die sogenannte Spannungs-Steifigkeitsmatrix

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_\Delta\, \boldsymbol{S} \bullet \nabla\hat{\boldsymbol{u}}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega G_{ij}\, \boldsymbol{I}\, d\Omega\, \boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.99}$$

wobei

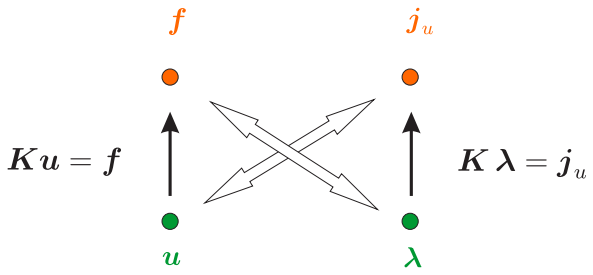
$$G_{ij} := \nabla^T\psi_i\, \boldsymbol{S}\, \nabla\psi_j = \begin{bmatrix} \psi_{i,1} & \psi_{i,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{j,1} \\ \psi_{j,2} \end{bmatrix}. \tag{8.100}$$

Mit

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} [\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{u}_{\Delta j} \otimes \nabla\psi_j) + (\nabla\psi_j \otimes \boldsymbol{u}_{\Delta j})\boldsymbol{F}] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{B}_{L_j}\boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.101}$$

wird der zweite Term in (8.97)

$$\int_\Omega \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{u}}) \bullet \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\Delta)]\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \int_\Omega \boldsymbol{B}_{L_i}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_{L_j}\, d\Omega\, \boldsymbol{u}_{\Delta j}\,. \tag{8.102}$$



$$\boxed{J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}_u^T\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}^T\, \boldsymbol{f}}$$

Bild 8.6. Der Lagrange Multiplikator ist hier die Gateaux-Ableitung $\boldsymbol{j_u}$ des nichtlinearen Funktionals $J(\boldsymbol{u})$, [92]

Die Addition aller Terme ergibt

$$a_T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\Delta, \hat{\boldsymbol{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{\boldsymbol{u}}_i^T \boldsymbol{K}_{T_{ij}} \boldsymbol{u}_{\Delta j} \tag{8.103}$$

mit

$$\boldsymbol{K}_{T_{ij}} := \int_\Omega \left[G_{ij}\, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}_{L_i}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{L_j} \right] d\Omega\,. \tag{8.104}$$

Im Falle eines bilinearen Elementes sind die (2×2) Untermatrizen $\boldsymbol{K}_{T_{ij}}$ der Tangentialsteifigkeitsmatrix eines einzelnen Elementes wie folgt angeordnet

$$\boldsymbol{K}_T^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{T_{11}} & \boldsymbol{K}_{T_{12}} & \boldsymbol{K}_{T_{13}} & \boldsymbol{K}_{T_{14}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{21}} & \boldsymbol{K}_{T_{22}} & \boldsymbol{K}_{T_{23}} & \boldsymbol{K}_{T_{24}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{31}} & \boldsymbol{K}_{T_{32}} & \boldsymbol{K}_{T_{33}} & \boldsymbol{K}_{T_{34}} \\ \boldsymbol{K}_{T_{41}} & \boldsymbol{K}_{T_{42}} & \boldsymbol{K}_{T_{43}} & \boldsymbol{K}_{T_{44}} \end{bmatrix}. \tag{8.105}$$

Nach dem Zusammenbau wird das gesamte System wieder iterativ gelöst,

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{f})\,. \tag{8.106}$$

8.7 Nichtlineare Funktionale

Lagrangesche Multiplikatoren sind das Kennzeichen von Problemen mit Nebenbedingungen. Als ein solches Problem können wir auch die Auswertung eines Funktionals $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\, \boldsymbol{u}$ lesen. (Wir schalten direkt zu finiten Elementen um). Die Nebenbedingung ist, dass der Vektor $\boldsymbol{u}$ dem System $\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ genügt. Mit einem dritten Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ bilden wir das ***Lagrange Funktional***

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) \tag{8.107}$$

und der Punkt $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$, in dem das Funktional $\mathcal{L}$ stationär ist

$$d\mathcal{L} = \mathcal{L}_{,u_i}\; du_i - \mathcal{L}_{,\lambda_i}\; d\lambda_i = 0\,, \tag{8.108}$$

ist durch die beiden Gleichungen

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j} \tag{8.109}$$

bestimmt und so ergibt sich

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda}^T\,\boldsymbol{f}\,, \tag{8.110}$$

woraus folgt, dass der Lagrange Multiplikator mit dem Vektor $\boldsymbol{g}$ der Einflussfunktion identisch ist.

Wie man an (8.110) abliest ist $\boldsymbol{\lambda}$ die Ableitung, genauer der Gradient, des Funktionals $J(\boldsymbol{u})$ bezüglich der rechten Seite $\boldsymbol{f}$, [201],

$$\frac{\partial J}{\partial f_i} = \lambda_i\,. \tag{8.111}$$

Deswegen sind die Sensitivitätsplots, also die *plots* der Vektoren $\boldsymbol{g}$ $(= \boldsymbol{\lambda})$ so interessant und instruktiv, siehe Kapitel 3.46.

Ist das Funktional $J(u)$ nichtlinear, dann lauten die obigen Gleichungen

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{j}_u\,, \tag{8.112}$$

wobei

$$j_{ui} := \int_0^1 J'(\boldsymbol{u} - s\,\boldsymbol{u}; \varphi_i)\, ds \tag{8.113}$$

und J' ist die Gateaux-Ableitung von $J(\boldsymbol{u})$ im Punkt $\boldsymbol{u}$, siehe Bild 8.6. In die Definition der Greenschen Funktion geht also der Punkt $\boldsymbol{u}$ ein, der Vektor $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\lambda}$ hängt von $\boldsymbol{u}$ ab, hängt davon ab, wo wir uns auf dem ‚Gleichgewichtspfad' befinden.

In analoger Weise kann man auch ‚Einflussfunktionen' für nichtlineare Probleme ableiten, genauer für die tangentiale Steifigkeitsmatrix, die also für einen speziellen Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{u}$ gelten, wenn man sich in ‚tangentialer Richtung' probeweise aus diesem Punkt entfernt. Das ist auch der Ansatz, wie man das Verfahren des *goal oriented refinement* erfolgreich auf nichtlineare Probleme anwenden kann. Für Details verweisen wir auf [92].

9

Die Algebra der Statik

Jeder, der sich intensiver mit finiten Elementen beschäftigt hat weiß, wie stark die Methode der finiten Elemente mit linearer Algebra durchsetzt ist. Der Vektor $\boldsymbol{u}$ der Knotenverschiebungen ist die Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ und die Matrix $\boldsymbol{K}$ ist symmetrisch und positiv definit.

Dies hat seinen Grund natürlich darin, dass die Differentialgleichungen der klassischen Statik **linear** und **selbstadjungiert** sind, und die lineare Mechanik und Statik – formal gesehen – daher im Grunde ein *exercitium* in linearer Algebra mit gelegentlichen Anleihen bei der Funktionalanalysis ist:

- Skalarprodukt
- adjungierter Operator
- Symmetrie, selbstadjungiert, positiv definit
- Lösungsbedingung $\boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{u}_0$
- virtuelle Verrückung
- virtuelle Kräfte
- quadratische Form und Variation
- Variationsrechnung, Lagrange und Hamilton
- Euler Gleichung
- Funktionale
- Dirac Delta
- Potentiale und Einflussfunktionen

Diese formalen Aspekte dominieren zunehmend die **computational mechanics**, und der angehende Doktorand tut gut daran, sich mit diesen Aspekten vertraut zu machen, wenn er international mithalten will[1].

In diesem Kapitel wollen wir einige dieser algorithmischen Aspekte der Statik näher betrachten und mehrere Dinge ergänzen, die für das Verständnis der modernen Statik wichtig sind.

[1] Wenn man auch gelegentlich den Eindruck hat, es geht mehr darum die *community* zu beeindrucken und manche Autoren gar meinen, sie müssten die Mathematiker ‚links' überholen. *Quo vadis computational mechanics?*

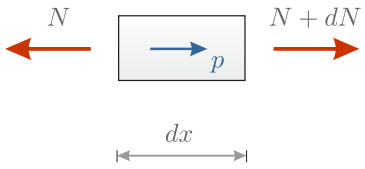


Bild 9.1. Stabelement dx

9.1 Grundlagen

Bevor wir beginnen, wollen wir kurz den Zugang zu den Gleichungen der Statik in diesem Buch schildern.

Euler Gleichung

Der Ausgangspunkt in diesem Buch sind die ***Euler Gleichungen***, wie die Gleichung $-EAu'' = p$, die das Gleichgewicht an einem infinitesimalen Stabelement dx, siehe Bild 9.1, formuliert

$$-N + N + dN + p\,dx = 0 \qquad (N = EAu')\,. \tag{9.1}$$

Im zweiten Schritt überlagern wir die linke Seite von $-EA\,u'' = p$ mit einer Testfunktion δu

$$\int_0^l -EA\,u''\,\delta u\,dx\,, \tag{9.2}$$

und kommen so mittels partieller Integration zur ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \underbrace{\int_0^l -EA\,u''(x)\,\delta u(x)\,dx + [N\,\delta u]_0^l}_{\text{virt. äußere Arbeit}} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx}_{\text{virt. innere Energie}} = 0\,. \tag{9.3}$$

Setzt man $\delta u = 1$, so sieht man, dass die Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ mit

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_0^l p\cdot 1\,dx + N(l)\cdot 1 - N(u)\cdot 1 = 0 \tag{9.4}$$

identisch ist. Man beachte, dass die $\sum H = 0$ nicht an ein $\delta u =$ ‚klein' gebunden ist. Anschauung und Mathematik stimmen an dieser Stelle überein.

Sinngemäß formuliert man am Balkenelement dx das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte $dV = -p\,dx$ und kommt mit der Momenten-Krümmung Beziehung $M = -EI\,w''$ und $V = EI\,M' = -EI\,w'''$ auf $EI\,w^{IV} = p$.

Die Gleichung $V = EI\,M'$ beruht auf der Momentenbedingung, siehe Bild 9.2,

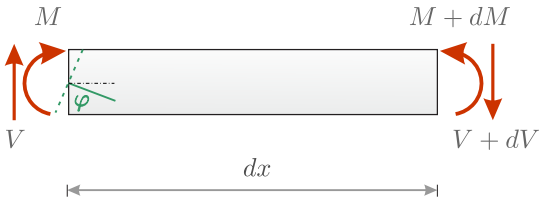


Bild 9.2. Balkenelement dx

$$(V + dV)\,dx \simeq dV\,dx = dM \tag{9.5}$$

und an dieser Stelle kommen die Pseudodrehungen in die Balkengleichung, denn (9.5) ist gleichbedeutend damit, dass bei einer Pseudodrehung $\delta w = b\,x$, also $b = \tan\varphi$, des Balkenelements die Arbeiten null sind

$$dV\,\tan\varphi\,dx - dM\,\tan\varphi = 0\,. \tag{9.6}$$

Die partielle Integration des Arbeitsintegrals

$$\int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w\,dx \tag{9.7}$$

führt dann auf die erste Greensche Identität (1.58) und setzt man $\delta w = a + b\,x$ so sieht man die Gleichgewichtsbedingungen vor sich

$$\mathscr{G}(w, a + b\,x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum V = 0 \qquad \sum M = 0\,. \tag{9.8}$$

Weil die Verrückung δw aber nur eine Pseudodrehung ist, rettet man sich damit, dass man sagt: Gleichgewicht bedeutet, dass bei einer infinitesimal kleinen virtuellen Verrückung die Arbeit der Kräfte null ist.

Wenn wir aber dieser Forderung nachgeben und δw durch Multiplikation mit $\varepsilon = 10^{-10}$ sehr klein machen, dann sehen wir, dass sich das ε einfach herauskürzt

$$\mathscr{G}(w, \varepsilon \cdot (a + b\,x)) = \varepsilon \cdot\ \mathscr{G}(w, a + b\,x) = 0\,, \tag{9.9}$$

denn in der linearen Mechanik fallen Skalenfaktoren einfach heraus. Wenn etwas für kleine ε richtig ist, dann auch für große ε.

Dann sollte man aber auch die Konsequenzen ziehen und das Verwirrspiel beenden und sagen: In der linearen Mechanik sind die virtuellen Drehungen Pseudodrehungen $\delta w = a + b\,x$ und Gleichgewicht herrscht, wenn die äußeren Kräfte des Balkens orthogonal sind zu allen Pseudodrehungen $\delta w = a + b\,x$, egal wie groß a und b sind. Hat man das einmal verstanden, so braucht man sich um das infinitesimal klein nicht mehr zu kümmern. Die Mathematik (und der Computer) kümmern sich ja auch nicht darum. Wie sollten sie auch?

Jede Pseudodrehung $\boldsymbol{u}_0$ ist orthogonal zur Steifigkeitsmatrix eines Balkens, $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ und die Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ einer Verformung $\boldsymbol{u}$ sind orthogonal zu $\boldsymbol{u}_0$, denn $\boldsymbol{f}^T\,\boldsymbol{u}_0 = 0$. Es ist einfache Algebra und die Algebra weiß nichts von groß und klein, aber sie weiß, dass $\boldsymbol{u}_0$ ein Null-Eigenvektor von $\boldsymbol{K}$ ist.

Für mehr zum Thema Pseudodrehungen, siehe Kapitel 1.32.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Bei der umgekehrten Formulierung startet man mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen*. Man definiert, was δW_e sein soll, wie δW_i aussehen soll und verlangt, dass diese beiden Ausdrücke für alle δu gleich sein sollen

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta u\,dx = \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = \delta W_i\,. \tag{9.10}$$

Wenn wir die virtuelle Verrückung $\delta u = c$ (konstant) bzw. beim Balken

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i\,. \tag{9.11}$$

$\delta w = a + b\,x$ wählen, dann entdecken wir die Euler-Gleichungen

$$-EA\,u'' = p \qquad\qquad EI\,w^{IV} = p\,. \tag{9.12}$$

Was diesen Zugang so beliebt macht, ist, dass man so die Statik scheinbar aus einem ‚erstem Prinzip' entwickelt: *Wenn ein Tragwerk im Gleichgewicht ist, dann ist bei jeder virtuellen Verrückung* $\delta W_e = \delta W_i$

Aber der Zugang ist nicht ungefährlich, weil man ja δW_i partiell integrieren kann und da muss dann δW_e herauskommen. In den Lehrbüchern werden, wenn, so vor allem die Standardgleichungen der Stabtheorie bzw. der Elastizitätstheorie eingeführt und da hat man mit der ersten Greenschen Identität eine Vorlage, ein ‚Sicherheitsnetz', weiß wie man δW_e und δW_i zu definieren hat, damit am Schluss alles zusammenpasst.

Die eigentliche Herausforderung entsteht, wenn sich mehrere Bewegungen ‚überlagern', wie etwa bei der Verformung (3-D) von offenen Profilen im Stahlbau, oder in der Schalenstatik, [164], wo vor allem die Kinematik gemeistert werden muss, um zu einem stimmigen $\delta W_e = \delta W_i$ zu kommen.

Was den Zugang $\delta W_e = \delta W_i$ in den Augen des Ingenieurs weiter favorisiert ist die Tatsache, dass das $\delta W_e = \delta W_i$ auch die Grundlage der finiten Elemente ist und man so direkt mit der Diskretisierung anfangen kann, ohne jemals eine Differentialgleichung angeschrieben zu haben. Aber die Differentialgleichung ist trotzdem ‚da', sie zieht die Fäden. ***Mit dem Begriff der schwachen Lösung ist man die Differentialgleichung nicht los!***

Sie kommt durch die Hintertür herein, denn wenn man (9.10) partiell integriert (es sei: $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$), dann zeigt sich, dass (9.10) äquivalent ist mit

$$\int_0^l \underbrace{(-EA\,u'' - p)}_{Euler\ Glg.}\,\delta u\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \delta u\,, \tag{9.13}$$

was besagt:

Die Forderung $\delta W_e = \delta W_i$ ist *gleichbedeutend* damit, dass u die Lösung einer Differentialgleichung ist, der Euler Gleichung.

Das ganze mathematische Gerüst, das zu dem statischen Problem gehört, steckt in der Differentialgleichung, in der Euler-Gleichung, sie bildet, zusammen mit der zugehörigen Greenschen Identität, den eigentlichen Kern und alles, was die finiten Elemente machen, geht konform mit der ersten Greenschen Identität. Ja man kann mit Fug und Recht behaupten:

Ein FE-Programm ist die erste Greensche Identität in *bits* und *bytes*

9.2 Notation

Wir erinnern an die partielle Integration, die in zwei und drei Dimensionen die Gestalt

$$\int_\Omega u_{,x_i}\ \delta u\, d\Omega = \int_\Gamma u\, n_i\, \delta u\, ds - \int_\Omega u\, \delta u_{,x_i}\ d\Omega \tag{9.14}$$

hat, wobei n_i die i-te Komponente des Normalenvektors $\boldsymbol{n}$ mit $|\boldsymbol{n}| = 1$ auf dem Rand Γ ist.

Der **Gradient** einer skalarwertigen Funktion u ist ein Vektor und der Gradient einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2\}^T$ ist eine Matrix,

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u,_1 \\ u,_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1,_1 & u_1,_2 \\ u_2,_1 & u_2,_2 \end{bmatrix} \qquad u_i,_j := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,. \tag{9.15}$$

Das formale Gegenstück hierzu ist der Operator div, denn die **Divergenz** einer matrixwertigen Funktion ist eine vektorwertige Funktion und die Divergenz einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{q} = \{q_1, q_2\}^T$ ist eine skalarwertige Funktion

$$\text{div}\ \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11},_1 + \sigma_{12},_2 \\ \sigma_{21},_1 + \sigma_{22},_2 \end{bmatrix} \qquad \text{div}\boldsymbol{q} = q_1,_1 + q_2,_2\ . \tag{9.16}$$

Die folgende Identität verknüpft mittels (9.14) diese beiden Operatoren

$$\int_\Omega \text{div}\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds - \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \nabla \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega\,. \tag{9.17}$$

Wenn $\boldsymbol{S}$ symmetrisch ist, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\text{div}\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, ds &= \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \nabla \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{S} \bullet \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\delta u} + \nabla \boldsymbol{\delta u}^T)\, d\Omega \end{aligned} \tag{9.18}$$

was das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für eine Scheibe ist, $\delta W_e = \delta W_i$, wenn man $\boldsymbol{\delta u} = \{\delta u_x, \delta u_y\}^T$ als virtuelle Verrückung interpretiert.

Vektorwertige Funktionen $\boldsymbol{u} = \{u_x, u_y\}^T$ genügen der gleichen Regel

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \delta u \, d\Omega = \int_\Gamma (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n})\, \delta u \, ds - \int_\Omega \boldsymbol{u} \bullet \nabla \delta u \, d\Omega \,, \tag{9.19}$$

und bei eindimensionalen Problemen sind $\operatorname{div} = ()'$ und $\nabla = ()'$ dasselbe

$$\int_0^l u' \, \delta u \, dx = [u \, \delta u]_0^l - \int_0^l u \, \delta u' \, dx \,. \tag{9.20}$$

Vektoren sind Spaltenvektoren und ein Punkt kennzeichnet das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren

$$\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{u} = f_x \, u_x + f_y \, u_y \,. \tag{9.21}$$

Gelegentlich benutzen wir auch die Notation $\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{u}$. Der Punkt bezeichnet ebenso das Skalarprodukt zwischen zwei Matrizen, wie etwa dem Verzerrungs- und Spannungstensor

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \underbrace{[\varepsilon_{xx} \, \sigma_{xx} + \varepsilon_{xy} \, \sigma_{xy} + \varepsilon_{yx} \, \sigma_{yx} + \varepsilon_{yy} \, \sigma_{yy}]}_{\textit{Skalarprodukt}} \, d\Omega \,. \end{aligned} \tag{9.22}$$

In der Literatur werden auch die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{S} = \operatorname{tr} (\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{S} \qquad (\operatorname{tr} = \text{trace}) \tag{9.23}$$

benutzt, wobei $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{S}$ das ***direkte Produkt*** der beiden Tensoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{S}$ ist. Das direkte Produkt zweier Vektoren ist eine Matrix

$$\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \cdot u_x & f_x \cdot u_y \\ f_y \cdot u_x & f_y \cdot u_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}\, \boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{A} \tag{9.24}$$

mit $a_{ij} = f_i \cdot u_j$. Solche Matrizen haben immer den Rang 1.

Die Multiplikationstabelle $\boldsymbol{T}_{(10\times 10)} = \boldsymbol{z} \otimes \boldsymbol{z}$ der Zahlen von 1 bis 10 ist das direkte Produkt des Vektors $\boldsymbol{z} = \{1, 2, \ldots, 10\}^T$ mit sich selbst, also $[\boldsymbol{z} \cdot 1, \boldsymbol{z} \cdot 2, \ldots, \boldsymbol{z} \cdot 10]$.

9.3 Gauss garantiert das

Dass der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{B}(G, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{9.25}$$

immer existiert, egal wie stark die Singularität der Einflussfunktion G ist, liegt an der partiellen Integration und der Geometrie des Raums.

Ein einfaches Beispiel: Der Aufpunkt $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sei der Mittelpunkt einer Kreisscheibe Ω mit Radius 1 und auf dem gelochten Gebiet Ω_ε formulieren wir die erste Greensche Identität des Laplace Operators mit den Funktionen $G = 1/r$ und $\delta u = 1$

$$\mathscr{G}(G,1)_{\Omega_\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} -\Delta G \cdot 1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_{N_\varepsilon}} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot 1 \, ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot 1 \, ds = 0 \,. \quad (9.26)$$

Das Integral über den Außenrand Γ, $R = 1$, hat den Wert $-2\,\pi$, und mit $\Delta\, r^{-1} = 1/r^3$ und $\partial r^{-1}/\partial n = 1/r^2$ (auf dem Lochrand Γ_{N_ε} zeigt $\boldsymbol{n}$ auf $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ und $1/r$ wächst in dieser Richtung) folgt für die ersten beiden Integrale

$$\int_0^{2\,\pi} \int_\varepsilon^1 -\frac{1}{r^3}\, r \, dr \, d\varphi + \int_0^{2\,\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon \, d\varphi = 2\,\pi\,(1 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}) \,, \quad (9.27)$$

dass deren Grenzwert beschränkt ist und so stimmt auch hier die Bilanz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{G}(G,1)_{\Omega_\varepsilon} = 2\,\pi - 2\,\pi \; = 0 \,. \quad (9.28)$$

Ein ähnliches Beispiel: Auf einen untergetauchten Körper Ω wirkt der Wasserdruck p, (der sei hier konstant), immer senkrecht zur Körperoberfläche. Die gesamte Kraft aus dem Wasserdruck auf den Körper,

$$p \int_\Gamma \boldsymbol{n} \, ds = \mathbf{0} \quad (9.29)$$

ist daher null, weil das Integral des Normalenvektors über die Oberfläche eines Körpers der Nullvektor ist. Der Autofahrer in seinem Faradayschen Käfig verlässt sich auf diese Tatsache.

9.4 Multiplikation von Matrizen

Das Produkt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ zweier $n \times n$ Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kann man auf vier Arten schreiben. (1) Als Skalarprodukt der Zeilen von $\boldsymbol{A}$ mit den Spalten von $\boldsymbol{B}$, (2) als die Matrix $\boldsymbol{A}$ mal den Spalten von $\boldsymbol{B}$, (3) als die Matrix $\boldsymbol{B}$ von links mit den Zeilen von $\boldsymbol{A}$ oder (4) als direktes Produkt der Spalten von $\boldsymbol{A}$ mit den Zeilen von $\boldsymbol{B}$.

Es seien $\boldsymbol{c}_j$ und $\bar{\boldsymbol{c}}_j$ die Spalten und Zeilen von $\boldsymbol{C}$, und analog gelte diese Bezeichnung für die anderen beiden Matrizen. Dann ist

Einzeln	$c_{ij} = \bar{\boldsymbol{a}}_i \, \boldsymbol{b}_j$	Zeile × Spalte	(9.30a)
Spalte	$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{b}_i$	Matrix × Spalte	(9.30b)
Zeile	$\bar{\boldsymbol{c}}_i = \bar{\boldsymbol{a}}_i \, \boldsymbol{B}$	Zeile × Matrix	(9.30c)
Matrix	$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \, \bar{\boldsymbol{b}}_i$	Spalten × Zeilen .	(9.30d)

Der letzte Ausdruck ist eine Summe von n Matrizen der Größe $n \times n$, denn Spalte $\times$ Zeile ist eine Matrix.

Zu (9.30c): Zeile $\times$ Matrix heißt, man multipliziert die Zeile mit der Spalte 1 der Matrix $\boldsymbol{B}$ skalar, dann mit der Spalte 2, etc. und die n Ergebnisse sind die Komponenten des Zeilenvektors $\bar{\boldsymbol{c}}_i$.

Sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrisch, dann ist das Produkt $\boldsymbol{C}$ nur dann symmetrisch, wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ kommutieren, wenn $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.

9.5 FE-Notation

Ein Spaltenvektor $\boldsymbol{a}$ mal einem Zeilenvektor $\boldsymbol{b}^T$ ergibt also eine Matrix

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 \end{bmatrix} . \tag{9.31}$$

In der FE-Literatur wird daher die Steifigkeitsmatrix eines Stabes mit zwei linearen Ansatzfunktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ meist wie folgt geschrieben

$$\boldsymbol{K}^e_{(2\times 2)} = \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} EA \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{E}} \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} dx = \int_0^{l_e} \boldsymbol{B}^T_{(2\times 1)}\, \boldsymbol{E}_{(1\times 1)}\, \boldsymbol{B}_{(1\times 2)}\, dx\,, \tag{9.32}$$

was elementweise

$$k^e_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^{l_e} \varphi_i'\, EA\, \varphi_j'\, dx \tag{9.33}$$

entspricht.

Bei einem Balkenelement mit seinen vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ ist

$$\boldsymbol{B}_{(1\times 4)} = \{-\frac{6}{l_e^2} + \frac{12\,x}{l_e^3},\quad -\frac{4}{l_e} + \frac{6\,x}{l_e^2},\quad \frac{6}{l_e}^2 - \frac{12\,x}{l_e^3},\quad -\frac{2}{l_e} + \frac{6\,x}{l_e^2}\}\,, \tag{9.34}$$

der Vektor der zweiten Ableitungen der $\varphi_i(x)$ und die Steifigkeitsmatrix kann man schreiben als

$$\boldsymbol{K}^e_{(4\times 4)} = \int_0^{l_e} \boldsymbol{B}^T_{(4\times 1)}\, EI_{(1\times 1)}\, \boldsymbol{B}_{(1\times 4)}\, dx\,. \tag{9.35}$$

Bei Scheibenelementen mit n Verschiebungsfeldern, z.B. $n = 3{\cdot}2 = 6$ bei einem *CST-Element* mit drei Knoten, die sich in x- und y-Richtung verschieben können, stehen in

$$\boldsymbol{B}_{(3\times n)} = \{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_2), \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_n)\} \tag{9.36}$$

die Verzerrungen der n Felder als Vektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \{\varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}, \varepsilon_{xy}^{(i)}\}^T \tag{9.37}$$

und in[2]

$$\boldsymbol{E}_{(3\times3)}\boldsymbol{B}_{(3\times n)} = \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_2), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_n)\} \qquad \boldsymbol{E} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \{\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, 2\sigma_{xy}^{(i)}\}^T\,, \tag{9.39}$$

so dass wir unseren gewohnten Ausdruck wiederfinden

$$\begin{aligned} k_{ij}^e = a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}\, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e} (\sigma_{xx}^{(i)}\,\varepsilon_{xx}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(i)}\,\varepsilon_{yy}^{(j)} + 2\cdot\sigma_{xy}^{(i)}\,\varepsilon_{xy}^{(j)})\, d\Omega\,. \end{aligned} \tag{9.40}$$

9.6 Vektoren und Funktionen

Eine Funktion $u(x)$ ist ein ‚unendlich langer' Vektor $\boldsymbol{u}$. Ein linearer Operator L gleicht einer Matrix $\boldsymbol{L}$ und der Inversen einer Matrix

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{f} \tag{9.41}$$

entspricht die Inverse L^{-1} eines linearen Operators

$$L\,u = f \qquad \Rightarrow \qquad u = \int_0^l L^{-1} f\, dx\,. \tag{9.42}$$

Dem Skalarprodukt von Vektoren, $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta v})$, entspricht das L_2-Skalarprodukt

$$\int_0^l u(x)\,\delta v(x)\, dx = (u, \delta v)\,. \tag{9.43}$$

Der transponierten Matrix $\boldsymbol{L}^T$ oder wie man auch sagt, der adjungierten Matrix $(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u})^T\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{L}^T\,\boldsymbol{v}$ entspricht der **adjungierte Operator** L^*

$$(Lu, v) = (u, L^* v)\,. \tag{9.44}$$

In der linearen Algebra transponiert man und in der Analysis integriert man partiell.

[2] $\boldsymbol{E}$ = Ebener Spannungszustand mit $2(1-\nu)$ wegen $2\,\sigma_{xy}$

Lineare Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = a \cdot x$ ist $f'(x) = a$. Jede lineare Funktion (ja jedes Polynom) ist mit ihrer **Taylor-Entwicklung** um den Punkt $x = 0$ identisch

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 0 + a \cdot x \,. \tag{9.45}$$

Eine lineare Funktion trägt ihre Ableitung also immer mit sich. Es ist die Steigung mit der die Funktion den Nullpunkt verlässt. Der Gradient, die Jacobi-Matrix, der linearen, vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}$ ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ selbst. Je steifer das Tragwerk, je ‚steiler' der Anstieg, den die Matrix $\boldsymbol{K}$ symbolisiert, umso größer werden die Kräfte $\boldsymbol{f}$ bei einer Bewegung $\boldsymbol{u}$.

Linear sind auch die Funktionale $J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ und die Vektoren $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{j}$ sind die Gradienten der Funktionale in Richtung von $\boldsymbol{f}$ bzw. $\boldsymbol{u}$.

9.7 Selbstadjungiert

Symmetrische Matrizen, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^T$, sind selbstadjungiert,

$$\boldsymbol{\delta u}^T\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta u} \tag{9.46}$$

wie auch alle linearen Differentialgleichungen gerader Ordnung

$$\mathscr{B}(w,\,\hat{w}) = \int_0^l -EA\,u''\delta u\,dx + [N\,\delta u]_0^l - [u\,\delta N]_0^l - \int_0^l u\,(-EA\delta u'')\,dx = 0\,. \tag{9.47}$$

Deswegen gilt der Satz von Betti und deswegen ist die Wechselwirkungsenergie

$$a(u,\delta u) = \int_0^l EA\,u'\,\delta u'\,dx \tag{9.48}$$

symmetrisch. Der Zwillingscharakter des Prinzips der virtuellen Verrückungen und virtuellen Kräfte ist eine Konsequenz dieser Symmetrie, siehe Seite 22. Der Statiker löst im Grunde quadratische Probleme, denn die Gleichgewichtslage eines Tragwerks macht die potentielle Energie

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l EA\,(u')^2\,dx - \int_0^l p\,u\,dx \tag{9.49}$$

zum Minimum und die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch und positiv definit. Besser geht es nicht, denn mit finiten Elementen wird daraus

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^T\,\boldsymbol{u} \tag{9.50}$$

und weil $\boldsymbol{K}$ positiv definit ist, ist der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, die Nullstelle der ersten Ableitung, auch das Minimum von $\Pi(\boldsymbol{u})$.

Diese einfachen Strukturen der linearen Statik und Mechanik haben wesentlich zu dem raschen Erfolg der finiten Elemente beigetragen. Der Einstieg in die Theorie der finiten Elemente war leicht: Aus Statik wurde Matrizenrechnung.

Bei nichtlinearen Problemen ist die Situation anders: Vertraute Ergebnisse stehen nicht mehr zur Verfügung, der Zugewinn an Genauigkeit verlangt einen relativ hohen Aufwand und gleichzeitig nimmt der ‚Konvergenzradius' der Ergebnisse, ihre Übertragbarkeit ab. Zum Glück ist es aber so, dass in der praktischen Baustatik in der Regel die lineare Theorie genau genug ist – Stabilitätstheorie ausgenommen, die ja von Hause aus nichtlinear ist – und die realen Probleme eher an anderer Stelle liegen.

9.8 Die Algebra der Identitäten

Die primäre Rechenoperation in der Statik ist das Skalarprodukt und der duale Charakter des Skalarprodukts führt automatisch zu dem Begriff des adjungierten Operators, der adjungierten Matrix und zu den Greenschen Identitäten deren Algebra die Variationsrechnung in der Statik prägt.

Mit Matrizen lässt sich die Algebra der Identitäten am einfachsten behandeln, wir entschuldigen uns aber zugleich, wenn das Thema trotzdem noch zu mathematisch geraten ist.

Die zweite Greensche Identität ist nicht auf quadratische Matrizen $\boldsymbol{A}$ beschränkt

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}_n^T \boldsymbol{A}_{n\times m}^T \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_m^T \boldsymbol{A}_{m\times n} \boldsymbol{u}_n = 0\,. \tag{9.51}$$

Bezeichne $C(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}^m$ den Spaltenraum , $R(\boldsymbol{A}) = C(\boldsymbol{A}^T) \subset \mathbb{R}^n$ den Zeilenraum und $N(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $N(\boldsymbol{A}^T) \subset \mathbb{R}^m$ den Nullraum von $\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{A}^T$, also

- Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$, alle $\boldsymbol{y}$ in $\mathbb{R}^m$ beruhend auf $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$,
- Zeilenraum von $\boldsymbol{A}$, alle $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$ beruhend auf $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$,
- Nullraum von $\boldsymbol{A}$, alle $\boldsymbol{x}$ in $\mathbb{R}^n$ für die $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
- Nullraum von $\boldsymbol{A}^T$, alle $\boldsymbol{y}$ in $\mathbb{R}^m$ für die $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

Subspace	Subspace of	Symbol	Dimension
column space $C(\boldsymbol{A})$	$\mathbb{R}^m$	$\mathrm{im}(\boldsymbol{A})$	$r = \mathrm{rank}$
nullspace (kernel) $N(\boldsymbol{A})$	$\mathbb{R}^n$	$\ker(\boldsymbol{A})$	$n - r$
row space $C(\boldsymbol{A}^T)$	$\mathbb{R}^n$	$\mathrm{im}(\boldsymbol{A}^T)$	r
left nullspace (kernel) $N(\boldsymbol{A}^T)$	$\mathbb{R}^m$	$\ker(\boldsymbol{A}^T)$	$m - r$

(der Nullraum von $\boldsymbol{A}^T$ wird auch als *left nullspace* von $\boldsymbol{A}$ bezeichnet), dann folgt aus der obigen Identität, dass die Vektoren $\boldsymbol{v} \in N(\boldsymbol{A}^T)$ orthogonal zu

den Vektoren in $C(\boldsymbol{A})$ sind, also allen Vektoren $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}$,

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{0} - \boldsymbol{v}^T\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} = 0\,, \tag{9.52}$$

und analog die Vektoren $\boldsymbol{u} \in N(\boldsymbol{A})$ orthogonal zu den Vektoren in $C(\boldsymbol{A}^T)$. In Kurzschreibweise ist das

$$C(\boldsymbol{A}) \perp N(\boldsymbol{A}^T) \qquad\qquad C(\boldsymbol{A}^T) \perp N(\boldsymbol{A})\,. \tag{9.53}$$

Jeder Vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_C + \boldsymbol{x}_{N'} \in \mathbb{R}^m$ ist ein Teil $\boldsymbol{x}_C$ aus $C(\boldsymbol{A})$ und ein Teil $\boldsymbol{x}_{N'}$ aus $N(\boldsymbol{A}^T)$ und analog ist eine solche Aufspaltung des $\mathbb{R}^n$ möglich, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^n$, *‚The four fundamental subspaces‘* [199].

In der Statik ist $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}$ die symmetrische Steifigkeitsmatrix eines Tragwerks und $C(\boldsymbol{K}) = R(\boldsymbol{K})$ und $N(\boldsymbol{K}) = N(\boldsymbol{K}^T)$ enthält, wenn das Tragwerk nicht kinematisch ist, nur den Nullvektor $\boldsymbol{0}$. Ist es beweglich, dann ist eine Gleichgewichtslage $\boldsymbol{u}$ nur möglich, wenn die Kräfte $\boldsymbol{f}$ orthogonal zu den $\boldsymbol{u}_0$ sind, $\boldsymbol{u}_0^T\,\boldsymbol{f} = 0$, wenn es also Gleichgewichtskräfte sind – denn dann ist garantiert, dass $\boldsymbol{f}$ in $C(\boldsymbol{K})$ liegt, dass es eine Lösung $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gibt. Die Regel lautet ja, siehe (9.53),

$$\boldsymbol{f} \in C(\boldsymbol{K}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{f} \perp N(\boldsymbol{K}^T)\,. \tag{9.54}$$

Man nehme die 2×2 Steifigkeitsmatrix eines Stabelements

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.55}$$

Jeden Vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{u}_N \in \mathbb{R}^2$ kann man in eine Translation $\boldsymbol{u}_N = c\,\{1,1\}^T$, c beliebig, des Elements und eine Streckung $\boldsymbol{u}_R$ des Elements aufspalten. Für jedes $\boldsymbol{u}_R$ sind die Kräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_R$ im Gleichgewicht, sind sie orthogonal zu den $\boldsymbol{u}_{N'} = c\,\{1,1\}^T \in N(\boldsymbol{K}^T) = N(\boldsymbol{K})$.

Der Vektor $\boldsymbol{f} = \{1,0\}^T$ steht nicht senkrecht auf $N(\boldsymbol{K}^T)$, liegt also nicht in $C(\boldsymbol{K})$ und daher hat $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ keine Lösung $\boldsymbol{u}$.

Wir haben diese Beispiele aus der linearen Algebra hier so ausführlich diskutiert, weil die Greenschen Identitäten ja im Grunde auch solche Null-Summen sind und viele wichtige Ergebnisse, man denke nur an die Galerkin Orthogonalität, $a(u - u_h\,, \varphi_i) = 0$, algebraischer Natur sind.

Bei Funktionen, wie etwa beim Stab,

$$\mathscr{G}(u,\hat{u}) = \int_0^l -EA\,u''(x)\,\hat{u}(x)\,dx + [N\,\hat{u}]_0^l - \int_0^l \frac{N\,\hat{N}}{EA}\,dx = 0\,, \tag{9.56}$$

führt die Orthogonalität, das Operieren mit den Starrkörperbewegungen, $\hat{u}(x) = 1$, zum Beispiel gerade auf die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathscr{G}(u,1) = \int_0^l -EA\,u''(x)\cdot 1\,dx + N(l)\cdot 1 - N(0)\cdot 1 = 0\,. \tag{9.57}$$

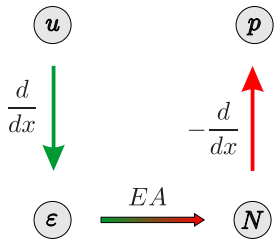


Bild 9.3. Der Dreier-Schritt, hier am Stab, $-d/dx\,(EA\,d/dx)\,u = p$

Am freigeschnittenen Stab müssen also die Normalkräfte an den Stabenden die Streckenlast ausbalancieren.

Ein anderes Beispiel: Die Momente M_i der X_i beim Kraftgrößenverfahren sind orthogonal zum endgültigen Momentenverlauf, $(M_i, M) = 0$ und jede Biegelinie w aus einer Lagersenkung ist orthogonal zu den virtuellen Verrückungen des Systems, $a(w, \delta w) = 0$.

Oder man nehme die singuläre Steifigkeitsmatrix eines nicht festgehaltenen Stabes aus zwei Elementen. Das Produkt $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ ergibt den Vektor

$$\frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 + 2\cdot u_2 - u_3 \\ -u_2 + u_3 \end{bmatrix}. \tag{9.58}$$

Die Zeilensumme dieses Vektors ist null

$$(u_1 - u_2) + (-u_1 + 2\cdot u_2 - u_3) + (-u_2 + u_3) = 0 \tag{9.59}$$

wie immer auch die u_i aussehen und das bedeutet, dass das singuläre System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ nur eine Lösung hat, wenn $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ ist, was natürlich gerade die Gleichgewichtsbedingung ist.

Im Sinne der obigen Formulierungen ist es die Forderung $\boldsymbol{f} \perp N(\boldsymbol{K}^T) = N(\boldsymbol{K})$ also $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u}_0 = f_1 + f_2 + f_3 = 0$, denn $\boldsymbol{u}_0 = \{1, 1, 1\}^T$ ist der Vektor, der $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{K}^T)$ aufspannt.

Jede Biegelinie w eines Balkens genügt den Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathscr{G}(w, a\,x + b) = 0 \qquad a\,x + b = \text{Null-Eigenlösungen}\,. \tag{9.60}$$

Analog gilt, dass das Produkt der Balkenmatrix $\boldsymbol{K}$ mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{w}$ Knotenkräfte $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{w}$ ergibt, die orthogonal zu den Null-Eigenvektoren $\boldsymbol{\delta w}_0$, Translationen und Rotationen, von $\boldsymbol{K}$ sind, $\boldsymbol{\delta w}_0^T\boldsymbol{f} = 0$, der Vektor $\boldsymbol{f}$ also den Gleichgewichtsbedingungen genügt.

Zur Algebra gehört in gewissem Sinn auch die Tatsache, dass man die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ eines Stabes (und anderer Bauteile analog) als Produkt dreier Matrizen schreiben kann, entsprechend der Zerlegung der Gleichung $-EA\,u'' = p$ in die drei Teile

$$u' = \varepsilon \qquad EA\,\varepsilon = N \qquad -N' = p\,. \tag{9.61}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A} = [\ldots 0\ 1/l_i\ -1/l_i\ 0\ldots]$ ($1/l_i$ auf der Diagonalen und $-1/l_i$ auf der rechten Nebendiagonalen) und ihre Transponierte $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$ ‚differenzieren', sie bilden d/dx und $-d/dx$ nach und die Diagonalmatrix $\boldsymbol{C}$ enthält auf ihrer Diagonalen die Steifigkeiten EA_i der einzelnen Elemente i mit der Länge l_i. Dieses Schema, siehe Bild 9.3, durchzieht die ganze Mechanik, [199].

Ein Fachwerk ist genau dann ***statisch bestimmt***, wenn $\boldsymbol{A}$ quadratisch ist, weil man dann aus $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{N} = \boldsymbol{f}$ die Normalkräfte N_i berechnen kann und aus diesen dann im Nachlauf, $\boldsymbol{CA}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}$, die Knotenverschiebungen u_i.

Wenn das Fachwerk ***statisch unbestimmt*** ist, es gibt mehr Stäbe, als Knotenverschiebungen, $\boldsymbol{A}$ ist ein rechteckige Matrix, führen die Handmethoden wie der *Ritterschnitt* nicht zum Ziel, dann braucht man einen Computer, dann muss man erst aus $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die Knotenverschiebungen u_i berechnen und aus den Dehnungen der Stäbe dann die Normalkräfte N_i.

9.9 Die Algebra der finiten Elemente

FE-Lösungen $u_h = \sum_i u_i\varphi_i(x)$ sind Variationslösungen

$$a(u_h, \varphi_i) - (p, \varphi_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.62}$$

und daher lassen sich eine ganz Reihe von Gleichungen und Ungleichungen mit der FE-Lösung linearer Probleme formulieren, [96] Chapter 7.12, *Important equations and inequalities*. Wir präsentieren einen Ausschnitt.

Der **Lösungsraum** $\mathcal{V}$ enthält alle u, die die geometrischen Lagerbedingungen erfüllen und $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ ist der **Ansatzraum** der finiten Elemente. Es ist u die exakte Lösung, u_h die FE-Lösung, $e = u - u_h$ ist der Fehler und v_h ist eine Testfunktion aus $\mathcal{V}_h$. In einem LF p gilt:

- Auf $\mathcal{V}$ gilt (Achtung, dieser Ausdruck ist nur auf $\mathcal{V}_h$ null, siehe (9.67))

$$a(e, v) = (p, v) - a(u_h, v) = (p, v) - (p_h, v) \qquad v \in \mathcal{V}\,. \tag{9.63}$$

- Insbesondere also

$$(p, u) - (p, u_h) = (p, e) = a(e, u) = (p, u) - (p_h, u) \tag{9.64}$$

  und daher auch

$$(p, u_h) = (p_h, u) \qquad \textit{Symmetrie} \tag{9.65}$$

- Galerkin Orthogonalität

$$a(e, v_h) = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.66}$$

- Die Fehlerkräfte $p - p_h$ sind orthogonal zu den Testfunktionen

$$a(e, v_h) = (p, v_h) - (p_h, v_h) = 0 \quad v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{9.67}$$

- Der FE-Lastfall p_h ist orthogonal zu e

$$a(u_h, e) = (p_h, e) = 0. \tag{9.68}$$

- Die Einheitslastfälle p_i, die *shape forces*, sind orthogonal zu e

$$a(\varphi_i, e) = (p_i, e) = 0. \tag{9.69}$$

- Die FE-Lösung minimiert den Fehler in der inneren Energie

$$a(e, e) \leq a(u - v_h, u - v_h) \quad v_h \in \mathcal{V}_h\,, \tag{9.70}$$

denn für jedes $v_h \in \mathcal{V}_h$ gilt

$$a(e + v_h, e + v_h) = a(e, e) + 2\underbrace{a(e, v_h)}_{=0} + \underbrace{a(v_h, v_h)}_{>0}\,. \tag{9.71}$$

Die Energie $a(e, e)$, die nötig ist, um die FE-Lösung ‚zurechtzurücken', $u_h \to u$, ist bei der FE-Lösung im Vergleich mit allen anderen Näherungen v_h in $\mathcal{V}_h$ am kleinsten.

- Die innere Energie der FE-Lösung ist kleiner als die exakte Energie (hier ohne den Faktor 1/2)

$$a(u_h, u_h) \leq a(u, u) \qquad \text{in einem LF } p\,, \tag{9.72}$$

weil

$$\begin{aligned} 0 < a(u, u) &= a(u_h + e, u_h + e) \\ &= a(u_h, u_h) + 2\underbrace{a(e, u_h)}_{=0} + \underbrace{a(e, e)}_{>0}\,. \end{aligned} \tag{9.73}$$

- Es gilt

$$\Pi(u) \leq \Pi(u_h)\,, \tag{9.74}$$

weil

$$\begin{aligned} \Pi(u_h) = \Pi(u - e) &= \frac{1}{2}\,a(u, u) - a(u, e) + \frac{1}{2}\,a(e, e) - (p, u) + (p, e) \\ &= \Pi(u)\underbrace{-a(u, e) + (p, e)}_{G(u,e)=0} + \frac{1}{2}\,\underbrace{a(e, e)}_{>0}\,, \end{aligned} \tag{9.75}$$

- und ebenso

$$(p, u_h) = a(u_h, u_h) < a(u, u) = (p, u)\,. \tag{9.76}$$

- Ferner verifiziert man leicht die für alle $v_h \in \mathcal{V}_h$ gültige Identität, [199],

$$\Pi(v_h) = \frac{1}{2}\, a(v_h, v_h) - (p, v_h) = \frac{1}{2}\, a(v_h - u, v_h - u) - \frac{1}{2}\, a(u, u)\,. \quad (9.77)$$

  Die potentielle Energie einer Testfunktion v_h ist also gleich ihrem Abstand (minus einem konstanten Term) von der exakten Lösung in der inneren Energie. Das belegt auch noch einmal, dass in der Gleichgewichtslage $\Pi(u) = -1/2\, a(u, u)$ negativ ist.
- Eine Steifigkeitsmatrix ist **singulär**, wenn die Null-Energie Funktionen u_0, d.h. die Nullstellen von $a(u, u_0) = 0$ (für alle u) in $\mathcal{V}_h$ liegen, weil dann $u_0(x) = \sum_i \bar{u}_i \varphi_i(x)$ eine Adresse in $\mathcal{V}_h$ hat, den Vektor $\bar{\boldsymbol{u}}$, der ein Eigenvektor von $\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist.

In einem LF d (Lagersenkung) enthält der Lösungsraum $\mathcal{S} = w_\delta \oplus \mathcal{V}$ nicht die Funktion $w = 0$, denn $\mathcal{V}$ wird um eine feste Funktion w_δ, die die Lagersenkung beschreibt, ‚geshiftet', ist $\mathcal{S}$ also kein Vektorraum mehr, sondern nur noch eine **Mannigfaltigkeit** (die Summe $u + v$ zweier Funktionen aus $\mathcal{S}$ liegt nicht in $\mathcal{S}$) und daher muss man bei der Anwendung der obigen Formeln in einem LF d aufpassen, [91].

Wir notieren noch: Das **Diagonalelement** g_{ii} der Inversen ist bis auf den Faktor $(-1/2)$ die potentielle Energie (LF $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_i$)

$$\Pi(g_i) = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{g}_i^T \boldsymbol{e}_i = -\frac{1}{2}\, \text{Eigenarbeit} = -\frac{1}{2} g_{ii} \cdot 1 \quad (9.78)$$

der Einflussfunktion $g_i(x) = \sum_j g_{ji}\, \varphi_j(x)$, deren Knotenwerte $\boldsymbol{g}_i$ ja die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{e}_i$ sind.

9.10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur linearen Algebra gehören auch die **Steifigkeitsmatrizen**. Nehmen wir die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{6\times 6}$ eines Seils mit 2 auf der Hauptdiagonalen und -1 auf den beiden Nebendiagonalen. Die **Eigenwerte** der Matrix lauten

$$\boldsymbol{\lambda} = \{0.1981, 0.7530, 1.5550, 2.4450, 3.2470, 3.8019\}^T \quad (9.79)$$

und zu dem maximalen Eigenwert λ_6 gehört der **Eigenvektor**

$$\boldsymbol{u}_6 = \{0.2319, -0.4179, 0.5211, -0.5211, 0.4179, -0.2319\}^T \qquad \|\boldsymbol{u}_6\| = 1 \quad (9.80)$$

also $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \boldsymbol{u}_6$. Wenn man das von links mit $\boldsymbol{u}_6^T$ multipliziert, dann ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_6^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \boldsymbol{u}_6^T\, \boldsymbol{u}_6 = 3.8019 \cdot \|\boldsymbol{u}_6\|^2 = 3.8019 = \lambda_{max} \quad (9.81)$$

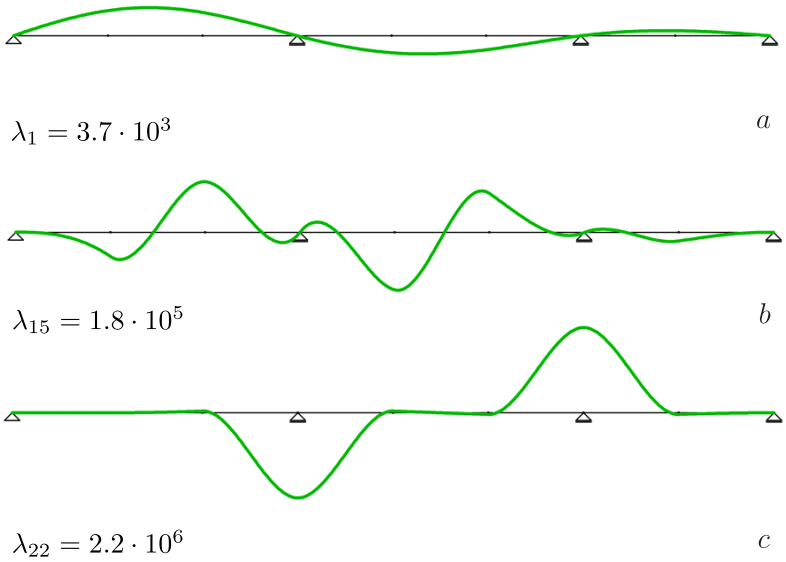


Bild 9.4. Eigenvektoren eines federnd gelagerten Durchlaufträgers mit 27 FG (BEFRAMES + MATLAB™)

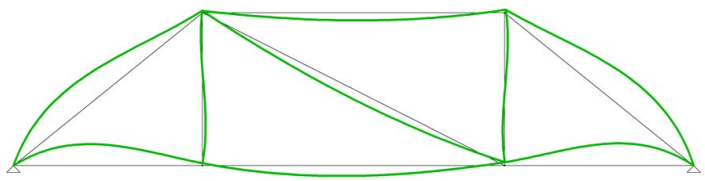
und das ist, wie man zeigen kann (Entwicklung der Konkurrenten $\boldsymbol{u} = \sum_i a_i \boldsymbol{u}_i$ nach den Eigenvektoren), die maximal mögliche Energie, wenn das Maximum unter allen $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ gesucht wird. Was uns hier interessiert ist, dass $\boldsymbol{u}_6$ ein ‚*auf–ab*' Vektor ist, er eine Strapaze für das Seil darstellt, während z.Bsp. der Eigenvektor, der zu $\lambda_{min} = \lambda_1$ gehört

$$\boldsymbol{u}_1 = \{0.2319, 0.4179, 0.5211, 0.5211, 0.4179, 0.2319\}^T \tag{9.82}$$

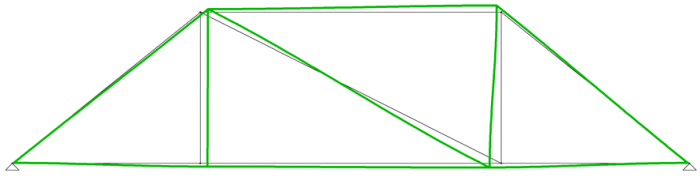
im Vergleich dazu ein ruhiger Geselle ist. Das Interessante ist, dass, wenn man iteriert, also mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{f}$ startet, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}$ berechnet und als neues $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ aufbringt (*power method* zur Bestimmung von λ_1), dass dann das Seil gegen die Lage $\boldsymbol{u}_1$ konvergiert.

Dem ‚*auf–ab*' entspricht, dass die Eigenlösungen von Seilen und eingespannten Stäben **Sinus-Schwingungen** sind und die mit der höchsten Frequenz erzeugt die größte Energie $a(u,u) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{u}$.

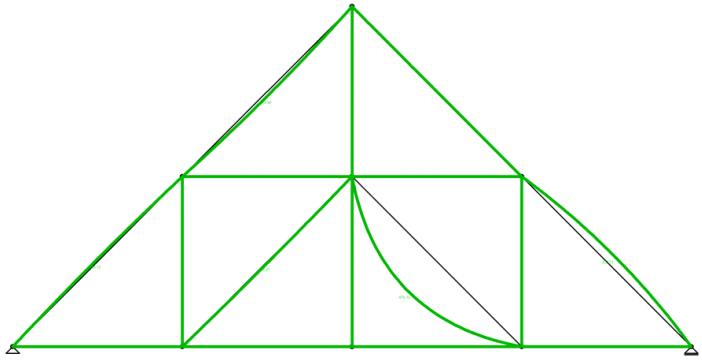
Der Durchlaufträger in Bild 9.4 hat 27 Freiheitsgrade und 27 Eigenwerte. Der Eigenvektor zum niedrigsten Eigenwert $\lambda_1 = 3.7 \cdot 10^3$ gleicht einem sanften Schwingen des Trägers. Zur Stufe λ_{15} gehört ein deutlich unruhigerer Eigenvektor und richtig groß wird die Energie, wie im Fall $\lambda_{22} = 2.2 \cdot 10^6$, wenn der Balken gegen die elastischen Lager arbeitet oder, hier nicht gezeigt, weil nicht darstellbar, die Knoten sich in horizontaler Richtung gegenläufig bewegen (wie nach einem Hammerschlag auf die Stirnseite des Trägers). Dabei entstehen große Normalkräfte, die typischerweise zum Eigenwert $\lambda_{max} (= \lambda_{27})$ gehören.



a



b



c

Bild 9.5. Biegesteife Knoten, **a)** niedriger Eigenvektor – biegedominiert, **b)** höherer Eigenvektor – Normalkraft dominiert, **c)** wenn ein Fachwerk (Gelenke in den Knoten) mit Biegebalken modelliert wird, treten auch solche Eigenvektoren auf (BEFRAMES + MATLAB™)

Die ersten Eigenvektoren eines Stockwerkrahmens sind also ‚biege-dominiert' und die höheren Eigenvektoren sind ‚dehnungs-dominiert', siehe Bild 9.5.

Wenn man ein Tragwerk maximal ‚drangsalieren' will, dann muss man als Vektor $\boldsymbol{f} = \lambda_{max}\boldsymbol{u}_e$ den Eigenvektor $\boldsymbol{u}_e$ des höchsten Eigenwertes wählen.

Der Befehl `truss` in MATLAB *animates 12 natural ... modes of a two-dimensional truss*.

9.11 $\mathcal{V}_h$ und $\mathcal{V}_h^+$

In $\mathcal{V}_h^+$ liegen alle *shape functions* des Netz. Sie bilden eine *partition of unity*

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{in jedem Punkt } x \text{ des Netz}\,. \tag{9.83}$$

Deswegen geht keine Belastung verloren, ist die $\sum_i f_i$ gleich der Resultierenden der Belastung p. Es ist nur so, dass die f_i, die zu gesperrten Freiheitsgraden gehören, direkt in die Lager reduziert werden.

Weil die Matrix $\boldsymbol{K}$ in dem zu lösenden Gleichungssystem $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ die reduzierte Steifigkeitsmatrix ist, könnte man vermuten, dass die Äquivalenz

$$f_{hi} = \int_0^l p_h\,\varphi_i\,dx = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx = f_i \qquad \varphi_i \in \mathcal{V}_h \tag{9.84}$$

nur bezüglich der nicht gesperrten φ_i – sie bilden den Raum $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h^+$ – besteht. Das ist aber nicht richtig. Der FE-Lastfall p_h und der Original-Lastfall p sind bezüglich aller $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$ äquivalent.

Denn ist das System $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ gelöst, dann werden am nicht-reduzierten vollen System $\boldsymbol{K}_G\boldsymbol{u}_G = \boldsymbol{f}_G$ die Lagerkräfte f_{hi} in den gesperrten Knoten berechnet und diese entsprechen gerade der Überlagerung der FE-Belastung p_h mit den gesperrten $\varphi_i \in \mathcal{V}_h^+$. Der Vektor $\boldsymbol{u}_G$ ist natürlich der um die gesperrten Freiheitsgrade $u_i = 0$ erweiterte Vektor $\boldsymbol{u}$ und sinngemäß ist $\boldsymbol{f}_G$ der um die in die Lager reduzierten f_i erweiterte Vektor $\boldsymbol{f}$.

9.12 Galerkin

Bei der Methode von Galerkin ist die FE-Lösung

$$u_h = \sum_i u_i\,\varphi_i(\boldsymbol{x}) \tag{9.85}$$

die **Projektion** der exakten Lösung auf den Ansatzraum $\mathcal{V}_h$

$$a(u - u_h, \varphi_i) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.86}$$

Da man das, was man projizieren will, die exakte Lösung u, nicht kennt, ersetzt man mittels der ersten Greenschen Identität

$$\mathscr{G}(w, \varphi_i) = \delta W_e - \delta W_i = 0 \tag{9.87}$$

die virtuelle innere Arbeit $\delta W_i = a(u, \varphi_i)$ durch die virtuelle äußere Arbeit der Lasten $\delta W_e = (p, \varphi_i) = f_i$ und kommt so zu dem System

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,. \tag{9.88}$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energien führt natürlich auf dasselbe Gleichungssystem. Das $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ bedeutet $\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, bedeutet, wie in der Schulmathematik, dass $\Pi(\boldsymbol{u})$ im tiefsten Punkt in jeder Richtung u_i eine horizontale Tangente hat.

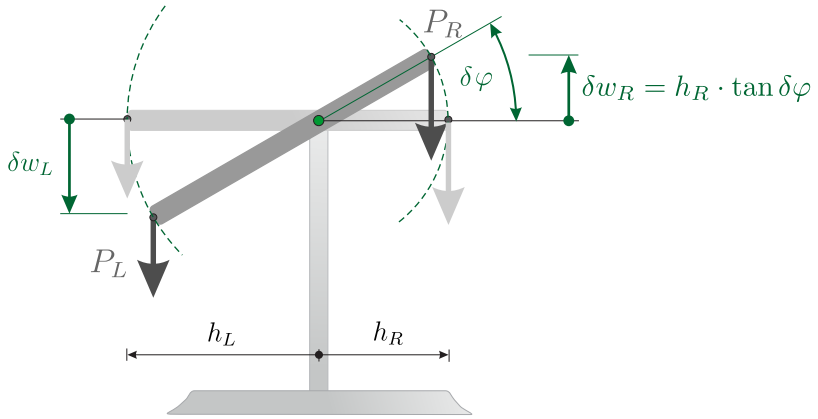


Bild 9.6. Die Marktfrau kontrolliert das Gleichgewicht einer Waage mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen

9.13 Schwache Lösung

Für die Biegelinie $w(x)$ eines Seils

$$-H\,w''(x) = p(x) \qquad w(0) = w(l) = 0 \tag{9.89}$$

machen die finiten Elemente den Ansatz $w_h(x) = \sum_j w_j\,\varphi_j(x)$ und bestimmen w_h so, dass

$$\int_0^l H\,w_h'\,\varphi_i'\,dx = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i \in \mathcal{V}_h\,. \tag{9.90}$$

Die Lösung des Randwertproblems (9.89) nennt man eine ***starke Lösung*** und die Lösung des Variationsproblems (9.90) eine ***schwache Lösung***.

Diese Bezeichnung wird gewöhnlich damit erklärt, dass eine schwache Lösung nicht zweimal differenzierbar sein muss, wie das w in der Differentialgleichung $-H\,w'' = p$, sondern nur einmal, wie das w' im Integral der Wechselwirkungsenergie.

Treffender scheint uns die folgende Interpretation. In der Mathematik kennt man den Begriff der ***schwachen Konvergenz***. Man überzeugt sich nicht direkt davon, dass eine Schar von Funktionen $f_n(x)$ gegen eine Zielfunktion $f(x)$ konvergiert, sondern indirekt. Die Annäherung der $f_n(x)$ an $f(x)$ wird mit einer Schar von Kontrollfunktionen $\varphi_i(x)$ getestet. Man sagt, dass die Folge $f_n(x)$ *schwach* gegen $f(x)$ konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l f_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_0^l f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i\,. \tag{9.91}$$

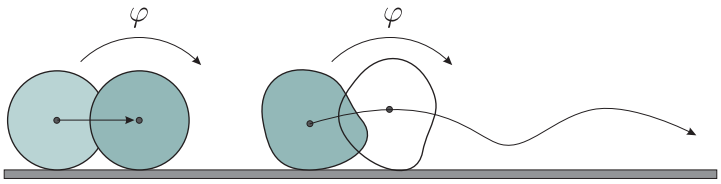


Bild 9.7. Der Werkzeugmacher prüft die Exzentrizität, indem er den Zylinder über den Tisch rollt

Schwache Konvergenz ist so etwas, wie die Konvergenz von Funktionalen. Jede Funktion $f_n(x)$ kann man ja einem Funktional $J_n(.)$ gleichsetzen

$$J_n(\varphi_i) = \int_0^l f_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx \tag{9.92}$$

und schwache Konvergenz bedeutet, dass die Funktionale $J_n(.)$ gegen das **Zielfunktional**

$$J(\varphi_i) = \int_0^l f(x)\,\varphi_i(x)\,dx \tag{9.93}$$

konvergieren – das ist wieder die ‚Wackeläquivalenz'.

Und diese Terminologie passt genau auf die finiten Elemente. Die FE-Lösung ist eine schwache Lösung, weil ihre Übereinstimmung mit der exakten Lösung nicht an der Differentialgleichung festgemacht wird, sondern sie indirekt durch $i = 1, 2, \ldots$ ‚Wackeltests' kontrolliert wird

$$\lim_{h\to 0} a(u_h, \varphi_i) = a(u, \varphi_i) \qquad \text{für alle } \varphi_i\,. \tag{9.94}$$

Wegen $\delta W_i = \delta W_e$ ist dies mit

$$\lim_{h\to 0} \int_0^l p_h\,\varphi_i\,dx = \int_0^l p\,\varphi_i\,dx \qquad \text{für alle } \varphi_i \tag{9.95}$$

identisch, also der Äquivalenz in den äußeren virtuellen Arbeiten. Praktisch ist es natürlich so, dass die finiten Elemente die Grenze $h \to 0$ nie erreichen, denn es werden nur endlich viele Tests gefahren, weil es auf einem Netz nur endlich viele *shape functions* φ_i gibt.

Formal betrachtet kann man die Methode der finiten Elemente als ein Verfahren ansehen, ein Funktional $J(\delta u) = (p, \delta u)$ durch ein Funktional $J_h(\delta u) = (p_h, \delta u)$ zu ersetzen, bzw., wenn man unendlich viel Geduld hat, $h \to 0$, durch eine Folge von Funktionalen $J_h(\delta u) = (p_h, \delta u)$ anzunähern.

Die große praktische Bedeutung des Begriffs der schwachen Lösung erkennt man, wenn man der Marktfrau zuschaut, siehe Bild 9.6. Auch sie schließt indirekt. Sie muss die Gleichung

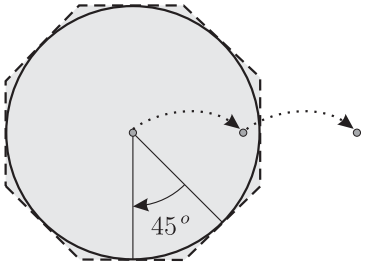


Bild 9.8. Das Achteck ist einem Zylinder für alle Drehungen, die ein Vielfaches von 45° sind, äquivalent

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \tag{9.96}$$

lösen. Diese Gleichung bedeutet, wie sie weiß, dass bei jeder Drehung $\delta\varphi$ des Waagebalkens die Arbeiten auf der linken und rechten Seite gleich sind

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \qquad \Rightarrow \qquad P_l \cdot h_l \cdot \tan\delta\varphi = P_r \cdot h_r \cdot \tan\delta\varphi \tag{9.97}$$

und so schließt sie, indem sie an der Waage wackelt, indirekt, schließt sie **‚rückwärts'**

$$P_l \cdot h_l = P_r \cdot h_r \qquad \Leftarrow \qquad P_l \cdot h_l \cdot \tan\delta\varphi = P_r \cdot h_r \cdot \tan\delta\varphi\,. \tag{9.98}$$

Dasselbe macht der Werkzeugmacher, der einen Zylinder mit den Fingern hin und her rollt, siehe Bild 9.7. Er weiß: Wenn der Zylinder eine perfekte Kreisform hat, dann verändert der Schwerpunkt bei einer Drehung des Zylinders seine Höhe über der Tischkante nicht. Wenn der Test fehlschlägt, wenn die Finger eine leichte vertikale Bewegung spüren, dann ist es kein perfekter Zylinder.

Der Lehrling, der aus einem quadratischen Eisen einen Zylinder schleifen soll, macht es wie die finiten Elemente. Zu Beginn ist das quadratische Eisen einem Zylinder hinsichtlich aller Drehungen $\delta\varphi$, die ein Vielfaches von 90° sind, äquivalent, ändert der Schwerpunkt bei einer 90°-Drehung seine Höhe nicht. Indem der Lehrling nun mehr und mehr Kanten (n) in das Profil schleift, vergrößert er den Testraum, $\mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_8 \to \mathcal{V}_{16} \ldots$

$$\mathcal{V}_n = \{\text{alle Vielfachen von } \delta\varphi = \frac{360}{n}\} \qquad n = 4, 8, 16 \ldots \text{Kanten} \tag{9.99}$$

und er nähert sich so indirekt (auf dem Weg der ‚Drehäquivalenz') dem Zylinder, siehe Bild 9.8, [96], [91].

Äquivalenz ist, wenn wir hier weiter ausholen dürfen, der Schlüsselbegriff der finiten Elemente. Die FEM löst nicht den ursprünglichen Lastfall, sondern einen dazu äquivalenten Lastfall. Eine Äquivalenzrelation liegt vor, wenn aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt, dass auch $a \sim c$, also

$$p \sim \varphi_i \qquad \text{und} \qquad p_h \sim \varphi_i \qquad \Rightarrow \qquad p \sim p_h \,. \tag{9.100}$$

Das Merkmal der finiten Elemente ist, dass diese Äquivalenz ‚endlich' ist, d.h. wir stellen die Äquivalenz nur bezüglich endlich vieler Testfunktionen $\varphi_i, i = 1, 2, \ldots n$ her.

Wenn wir mit einem Zollstock die Länge zweier Bretter A und B vergleichen, nutzen wir eine Äquivalenzrelation. Die Bretter sind gleich lang, sind äquivalent, wenn sie mit dem Zollstock in identischen Relationen stehen. Äquivalenz ist indirekte Gleichheit, ist wie die schwache Konvergenz, und sie mündet in eine echte Identität, $A \equiv B$, (alle Stellen nach dem Komma sind gleich), wenn die Relation alle Tests besteht, also auch den Test mit dem Urmeter in Paris...

Bemerkung 9.1. Dem Begriff der schwachen Konvergenz ist auch der Unterschied zwischen ***schwachen*** und ***starken Randbedingungen*** geschuldet. Geometrische Lagerbedingungen, wie $w = 0$, werden von allen Ansatzfunktionen $\varphi_i \in \mathcal{V}_h$ erfüllt, sind starke Randbedingungen, während eine statische Randbedingung wie $v_n = 0$ am freien Plattenrand (Querkräfte null) nur im integralen Mittel – im schwachen Sinne – erfüllt ist, $(v_n, \varphi_i) = 0$, aber nicht punktweise. Deswegen nennt man statische Randbedingungen schwache Randbedingungen. Ihre Einhaltung ist erst in der Grenze $h \to 0$ garantiert.

9.14 Variation und Greensche Identität

Die potentielle Energie eines Stabes, links festgehalten, $u(0) = 0$, und mit einem freien Ende, $N(l) = 0$, lautet

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,dx - \int_0^l p\,u\,dx = \frac{1}{2}a(u,u) - (p,u)\,. \tag{9.101}$$

Wenn u die Gleichgewichtslage des Stabs unter der Streckenlast p ist, dann sollte die erste Variation der potentiellen Energie in diesem Punkt Null sein, $\Pi(u)$ dort eine ‚horizontale Tangente' haben.

Der Wert von Π in einem benachbarten Punkt $u + \varepsilon\,\delta u$ beträgt

$$\begin{aligned}\Pi(u+\varepsilon\delta u) &= \frac{1}{2}a(u+\varepsilon\delta u, u+\varepsilon\delta u) - (p, u+\varepsilon\delta u)\\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon\cdot a(u,\delta u) + \varepsilon^2\cdot\frac{1}{2}a(\delta u,\delta u) - (p,u) - \varepsilon\cdot(p,\delta u)\end{aligned} \tag{9.102}$$

und damit lautet die erste Variation

$$\delta\Pi(u,\delta u) = \frac{d}{d\varepsilon}\Pi(u+\varepsilon\delta u)|_{\varepsilon=0} = a(u,\delta u) - (p,\delta u) \tag{9.103}$$

was mit

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l p\,\delta u(x)\,dx - \int_0^l \frac{N\,\delta N}{EA}\,dx = (p,\delta u) - a(u,\delta u) = 0 \quad (9.104)$$

identisch ist, denn die Randarbeiten [...] fallen wegen $N(l) = 0$ und $\delta u(0) = 0$ weg.

Die erste Variation der potentiellen Energie ist gleich der ersten Greenschen Identität.

9.15 Das Grundfunktional (Hu-Washizu)

In [84] haben wir das Grundfunktional (*basic functional*) eingeführt und gezeigt, wie man aus ihm alle weiteren Funktionale, insbesondere die **potentielle Energie** und die **komplementäre potentielle Energie**, herleiten kann. Wir wollen das hier kurz aufgreifen, um zu zeigen, dass bei einer Lagersenkung die potentielle Energie, $\Pi(u) = 1/2\,a(u,u)$, positiv ist.

Indem man in der zweiten Greensche Identität eines Stabes

$$\mathscr{B}(u,\delta u) = \int_0^l -EAu''\delta u\,dx + [N\,\delta u - u\,\delta N]_0^l - \int_0^l u(-EA\delta u'')\,dx = 0 \quad (9.105)$$

das letzte Integral partiell integriert (also einen Schritt zurück in Richtung $a(u,\delta u)$ macht), erhält man den Ausdruck

$$\mathscr{V}(u,\delta u) = \left\{\int_0^l -EAu''\delta u\,dx + [N\,\delta u - u\,\delta N]_0^l\right\} + [u\delta N]_0^l - a(u,\delta u) = 0\,. \quad (9.106)$$

In der geschweiften Klammer steht der ‚Rest' von Betti nach der part. Integration des letzten Integrals.

Nun ersetzt man in der geschweiften Klammer alle Terme von u durch ihre Daten, soweit sie in der Formulierung des Randwertproblems vorkommen, entfernt die Klammer und streicht alle Terme, die sich aufheben. Der so entstehende Ausdruck ist die erste Variation des Grundfunktionals Π_H.

Es sei z.B. das Randwertproblem

$$-EAu'' = p \qquad u(0) = 0 \qquad u(l) = \Delta\,, \quad (9.107)$$

gestellt, dann ergibt sich nach obiger Regel

$$\mathscr{V}(u,\delta u) = \int_0^l p\,\delta u\,dx + [N\delta u]_0^l - \Delta\,\delta N(l) + [u\,\delta N]_0^l - a(u,\delta u) = 0 \quad (9.108)$$

und diese Null $\times(-1)$ ist die erste Variation des **Grundfunktionals**

$$\Pi_H = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_0^l p\ dx + N(0)\,u(0) + (\Delta - u(l))\,N(l)\,. \tag{9.109}$$

Ist R_1 die Menge aller u, die die geometrischen Lagerbedingungen, die auch inhomogen sein können, erfüllen, dann ist die Restriktion von Π_H auf R_1 die **potentielle Energie**, also im Fall des obigen Randwertproblems, wenn wir $p = 0$ setzen und $u(l) = \Delta$, (nur Lagerverschiebung),

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(u,u) \geq 0\,. \tag{9.110}$$

Und ist R_2 die Menge aller u, die die statischen Feldgleichungen $(-EAu'' = p)$ und statischen Randbedingungen erfüllen, dann ist, wie man nach einigen Zwischenschritten zeigen kann, die Restriktion von Π_H auf R_2 die **komplementäre potentielle Energie**, siehe [84] p. 116,

$$\Pi_c(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega a(u,u) + N(l)\Delta\,, \tag{9.111}$$

und die Lösung des Randwertproblems macht diese Energie auf R_2 zum Maximum, weil

$$\Pi_c(u+\delta u) - \Pi_c(u) = -\frac{1}{2}a(\delta u, \delta u) \leq 0 \qquad \text{für alle } \delta u \in R_{2,0}\ . \tag{9.112}$$

In $R_{2,0}$ liegen alle homogenen Lösungen, $-EA\,\delta u'' = 0$, der Feldgleichung.

Das ganze ist im Grunde nur Algebra. Hat man die beiden ‚Räume' R_1 und R_2 eingeführt, also nach Funktionen, die die geometrischen bzw. die statischen Bedingungen erfüllen, getrennt, dann ergibt sich die Aufspaltung in potentielle und komplementäre potentielle Energie automatisch. Man braucht nur das Grundfunktional Π_H, das ja dem ***Hu-Washizu*** Funktional der Elastizitätstheorie entspricht, bei dem u keinen Feldgleichungen und Randbedingungen genügen muss, [78], und dann betrachtet man die Restriktion auf R_1 bzw. auf R_2.

Wir merken noch an, dass das **Kraftgrößenverfahren** die Lösung in R_2 sucht, also die komplementäre potentielle Energie maximiert. Das Hauptsystem ist unter der Last im Gleichgewicht, wie $-EAu'' = p$, die Verformung liegt in R_2, und dann werden die X_i dazu addiert, die alle in $R_{2,0}$ liegen, homogene Lösungen der Feldgleichungen sind, $-EAu'' = 0$, weil wir annehmen dürfen, dass die X_i nur in den Ecken, allgemeiner den Intervallgrenzen, den Rändern angreifen.

Technisch besteht der Lösungsraum aus einem u_p (= Lösung am Hauptsystem) und den X_i in $R_{2,0}$, also $\mathcal{V} = u_p \oplus R_{2,0}$.

Um die Lösung des Randwertproblems (9.107) mittels dem Grundfunktional zu bestimmen, alle u sind zugelassen, ersetzt man die Normalkräfte an den Stabenden durch ***Lagrange Multiplikatoren***

$$\Pi_H(u,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}a(u,u) - \int_0^l p\ dx + \lambda_1\, u(0) + (\Delta - u(l))\,\lambda_2 \qquad (9.113)$$

und bestimmt eine Funktion $u(x)$ und Zahlen λ_i so, dass Π stationär wird, [84], p. 134. *Hu-Washizu* und Lagrange Multiplikatoren sind also eng miteinander verknüpft. Die statische Bedeutung der λ_i wird spätestens dann klar, wenn man das Grundfunktional zu Rate zieht.

9.16 Kraftgrößenverfahren versus Weggrößenverfahren

Die Statik ist nicht das einzige Gebiet, in dem es die Wahl zwischen einer Weggrößen- und einer Kraftgrößenformulierung gibt. In der Elektrotechnik kann man zwischen der Kirchhoffschen Maschenregel: Summe der Spannungsabfälle in einer Masche ist null, (dem entspricht, dass die Einheitsspannungszustände der X_i Gleichgewichtszustände sind), und der Kirchhoffschen Knotenregel: Summe der Spannungen in jedem Knoten ist null, (‚Knotengleichgewicht') wählen.

In der *computational mechanics* werden, wie Gilbert Strang bemerkt hat, die **Knotenpunktsmethoden** den Maschengleichungen (= Einheitsspannungszustände X_i) vorgezogen, *‚Loop equations versus nodal equations'*, [199] p. 158. Die Maschengleichungen haben heute nur noch als Handmethode bei kleinen Problemen eine Chance, sind den Knotenpunktsmethoden dann sogar überlegen. Man darf sie nur nicht in Matrizenschreibweise formulieren, das wirkt umständlich und fremd.

Unbesehen davon ist das Kraftgrößenverfahren natürlich ein hervorragendes Mittel, um Statik zu lernen!

9.17 Der adjungierte Operator und die Greensche Funktion

Wenn es ein Skalarprodukt gibt, dann gibt es zu einem Operator L den adjungierten Operator L^* und zu jedem (beschränkten) linearen Funktional gibt es eine Greensche Funktion, die in der linearen Algebra auch ein Vektor sein kann.

Die Greensche Funktion g des linearen Funktionals $J(u) = (j,u)$ ist die Lösung der adjungierten Gleichung $L^*g = j$.

Zu der symmetrischen, selbstadjungierten Matrix $\boldsymbol{K}$ gehört die Identität

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = 0\,. \qquad (9.114)$$

Ist $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u}$ ein lineares Funktional angewandt auf die Lösung von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, dann folgt

$$J(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}\,, \qquad (9.115)$$

wenn $\boldsymbol{g}$ die Lösung des adjungierten Systems $\boldsymbol{K}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{j}$ ist.

Der Operator $-EAu''$ in dem Randwertproblem

$$-EA\,u''(x) = p(x) \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{9.116}$$

ist ebenfalls selbstadjungiert, denn

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_0^l -EA\,u''(x)\,v(x)\,dx + \ldots - \int_0^l u\,(-EA\,v'')\,dx = 0\,. \tag{9.117}$$

Ist nun

$$J(u) = \int_0^l j(x)\,u(x)\,dx \tag{9.118}$$

ein lineares Funktional und ist $g(x)$ die Lösung des adjungierte Randwertproblems

$$-EA\,g''(x) = j(x) \qquad g(0) = g(1) = 0\,, \tag{9.119}$$

dann folgt nach zweimaliger partiellen Integration, siehe (9.117),

$$J(u) = \int_0^l j(x)\,u(x)\,dx = \int_0^l -EA\,g''(x)\,u(x)\,dx = \int_0^l g(x)\,p(x)\,dx\,, \tag{9.120}$$

was sinngemäß $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{f}$ entspricht. Die Lösung $g(x)$ von (9.119) ist also die Greensche Funktion des Funktionals $J(u)$.

Nun betrachten wir das ***Anfangswertproblem***

$$u'(t) = f(t) \qquad u(0) = 0 \tag{9.121}$$

zu dem die Identität, ($T > 0$ beliebig),

$$\mathscr{B}(u,v) = \int_0^T u'(t)\,v(t)\,dt - [u\,v]_0^T + \int_0^T u(t)\,v'(t)\,dt = 0 \tag{9.122}$$

gehört. Der Operator d/dt ist, wie man sieht, nicht selbstadjungiert, denn $(u', v) = (u, -v')$ (ohne Randwerte).

Ist

$$J(u) = \int_0^T j(t)\,u(t)\,dt \tag{9.123}$$

ein lineares Funktional und ist $g(t)$ die Lösung des adjungierten Problems

$$-g'(t) = j(t) \qquad g(T) = 0\,, \tag{9.124}$$

dann liefert partielle Integration die Darstellung

$$J(u) = \int_0^T j(t)\, u(t)\, dt = [g\, u]_0^T + \int_0^T g(t)\, u'(t)\, dt = \int_0^T g(t)\, f(t)\, dt\,. \tag{9.125}$$

Partielle Integration hat zwei Grenzen, $(0, l)$ oder $(0, T)$. Bei Randwertproblemen werden beide Grenzen bedient, bei Anfangswertproblemen dagegen nur die untere und deswegen muss man die Greensche Funktion bei solchen Problemen am ***oberen Ende*** T festmachen, $g(T) = 0$. Die Greensche Funktion läuft, wenn man so will, ‚rückwärts'.

Wenn man einen Berg hinaufschaut, dann ist die Steigung positiv. Wenn man, oben angekommen ($t = T$), zurückschaut, dann ist die Steigung negativ. Das mag als Erklärung für den Wechsel im Vorzeichen

$$u'(t) = f(t) \qquad\qquad -g'(t) = j(t) \tag{9.126}$$

dienen[3].

Beispiel

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u' = 1 - t \qquad u(0) = 0 \tag{9.127}$$

und $J(u)$ sei das Integral der Lösung $u(t) = t - 0.5\, t^2$

$$J(u) = \int_0^T 1 \cdot u(t)\, dt = \frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6} \qquad j(t) = 1\,. \tag{9.128}$$

Die adjungierte Gleichung

$$-g' = 1 \qquad g(T) = 0 \tag{9.129}$$

hat die Lösung $g(t) = T - t$ und das Skalarprodukt von $g(t)$ und $f(t)$ ist genau der Wert in (9.128)

$$J(u) = \int_0^T g(t) f(t) dt = \int_0^T (T - t) \cdot (1 - t)\, dt = \frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6}\,. \tag{9.130}$$

9.18 Die Ableitungen der Dirac Deltas

Wir merken noch an, dass man die höheren Dirac Deltas δ_i als Ableitungen von δ_0 interpretieren kann

[3] Man kann (9.122) ‚selbstadjungiert' machen, wenn man im zweiten Integral die Integrationsgrenzen vertauscht ($= \times(-1)$) und so das rückläufig motiviert.

$$\delta_1 = -\delta_0' \quad \delta_2 = \delta_0'' \quad \delta_3 = -\delta_0''' \qquad \delta_i = (-1)^i \delta_0^{(i)}\,, \tag{9.131}$$

($(i) = i$ Ableitungen), weil

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x) &= \int_0^l \underline{\delta_i(y-x)}\, u(y)\, dy \\ &= \int_0^l \delta_0(y-x)\, u^{(i)}(y)\, dy = \underline{(-1)^i} \int_0^l \underline{\delta_0^{(i)}(y-x)}\, u(y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{9.132}$$

Das ist einfach nur partielle Integration ‚ohne Rand', weil die Randwerte der $\delta_0^{(i)}$ ja null sind.

Interessant wird das ganze, wenn die Steifigkeiten $EA(x)$ und $EI(x)$ von x abhängen, denn dann schiebt sich das $EA(x)$ bzw. $EI(x)$ mit in die Definition. Beim Stab gilt

$$\delta_1 = -\delta_0'\, EA(x) \tag{9.133}$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta_1(y-x)\, u(y)\, dy &= \int_0^l -\delta_0'(y-x)\, EA(x)\, u(y)\, dy \\ &= -\int_0^l -\delta_0(y-x)\, EA(x)\, u'(y)\, dy = N(u)(x)\,. \end{aligned} \tag{9.134}$$

Die Schnittkräfte des Balkens sind

$$M(x) = -EI(x)\, w''(x) = \int_0^l \delta_2\, w\, dy \tag{9.135}$$

$$V(x) = -(EI(x)\, w''(x))' = \int_0^l \delta_3\, w\, dy\,. \tag{9.136}$$

In Kapitel 10.4.2 auf Seite 693zeigen wir, dass

$$\delta_2(y-x) = -EI(x)\, \delta_0(y-x)''\,. \tag{9.137}$$

Wir wollen hier das Resultat für die Querkraft beweisen. Wir starten mit

$$V(x) = \int_0^l \delta_0(y-x) \cdot \underbrace{(-EI(y)\, w'''(y) - EI'(y)\, w''(y))}_{V(y)}\, dy \tag{9.138}$$

und lesen die Aktion von δ_0 ‚distributiv'

$$V(x) = \int_0^l (-EI(x)\, \delta_0(y-x)\, w'''(y) - EI'(x)\, \delta_0(y-x)\, w''(y))\, dy\,. \tag{9.139}$$

Bei der jetzt folgenden partiellen Integration sind also $EI(x)$ und $EI'(x)$ Konstante

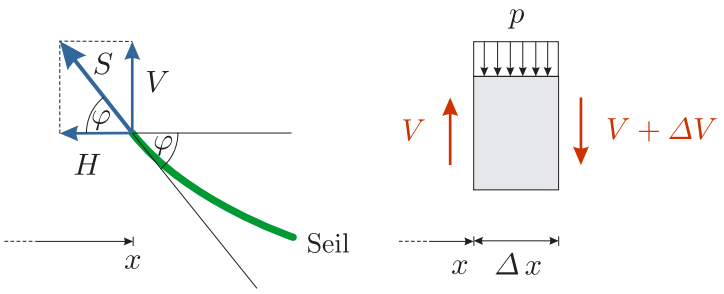


Bild 9.9. Die Statik des Seils

$$V(x) = \int_0^l (EI(x)\,\delta_0'''(y-x)\,w(y) - EI'(x)\,\delta_0''(y-x)\,w(y))\,dy\,, \qquad (9.140)$$

und an diesem Ergebnis können wir δ_3 ablesen

$$\delta_3(y-x) = EI(x)\,\delta_0'''(y-x) - EI'(x)\,\delta_0''(y-x)\,. \qquad (9.141)$$

9.19 Das Seil

Wir wollen hier kurz die Herleitung der **Seilgleichung** $-Hw'' = p$ nachtragen. Die Seilkraft S und die vertikale Kraft V und der Horizontalzug H bilden ein rechtwinkliges Dreieck, $V/H = \tan\varphi = w'$, siehe Bild 9.9. Aus dem Gleichgewicht am Element, $V + \Delta V - V + p\,\Delta x = 0$ folgt $-V' = p$ und das ergibt zusammen mit $V = H\,w'$ die Seilgleichung $-H\,w'' = p$.

Seilstatik ist nicht unbedingt einfach, obwohl für den Mathematiker schon. Er setzt die Vorspannkraft H, bestimmt die Lösung w der Differentialgleichung, und findet so rückwärts über das Integral der Bogenlänge ds die nötige Länge L des Seils. In der Praxis ist es meist umgekehrt, dann ist die Länge L gegeben und es gilt den Zug H in dem Seil zu berechnen.

Soll unter Gleichlast p der Durchhang des Seils auf einen Wert f beschränkt sein, dann muss die Zugkraft den Wert

$$H = \frac{p\,l^2}{8\,f} \qquad (9.142)$$

haben und die Länge L des Seils darf nicht größer sein als

$$L = \int_0^l ds \simeq l \cdot (1 + \frac{8\,f^2}{3\,l^2})\,. \qquad (9.143)$$

9.20 Schalen

Es geht hier nur darum zu zeigen, dass die Gleichungen in der Schalenstatik dem allgemeinen Muster folgen und der Leser wird daher leicht in den folgenden Ausdrücken das vertraute wiedererkennen. Wir geben die Gleichungen auch ohne ‚Vorspann', für den wir auf [84] S. 279 verweisen.

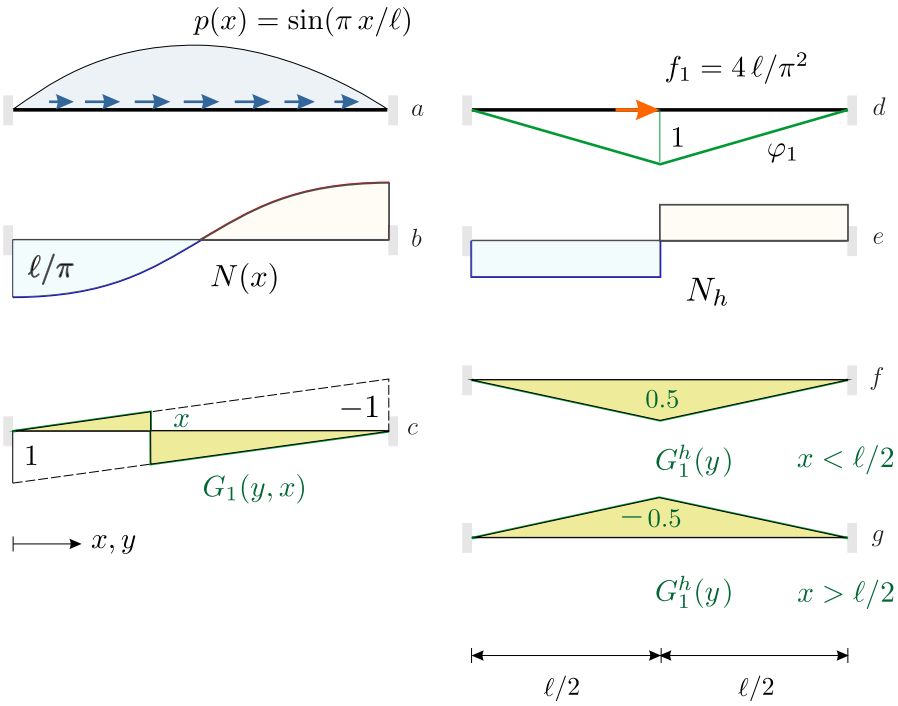


Bild 9.10. Stab unter sinusförmiger Belastung mit exaktem und genähertem Verlauf der Normalkraft. Die beiden Einflussfunktionen rechts sind für alle $x < \ell/2$ bzw. $x > \ell/2$ dieselben, deswegen schreiben wir $G_1^h(y)$ ohne x

Die Gleichgewichtsbedingungen der Schale lauten bei dem Modell von Koiter

$$-(n^{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta\, m^{\lambda\,\alpha})_{|\alpha} + b_\alpha^\beta\, m^{\lambda\,\alpha}{}_{|\lambda} = p^\beta \qquad \beta = 1,2 \tag{9.144a}$$

$$-b_{\alpha\beta}\,(n_{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta m^{\lambda\,\alpha}) - m^{\alpha\,\beta}{}_{|\alpha\,\beta} = p^3\,. \tag{9.144b}$$

Die $n^{\alpha\beta}$ und $m^{\lambda\,\alpha}$ sind natürlich die Normalkräfte und Momente, die b_λ^β kommen aus der Geometrie der Schale (2. Fundamentalform) und $\boldsymbol{p} = \{p^1, p^2, p^3\}^T$ ist die Belastung.

Zu diesem System von drei Differentialgleichung gehört die Identität

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = &\int_\Omega -\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\, d\Omega + \int_\Gamma (n^{\alpha\beta}\nu_\beta - 2\,m^{\kappa\,\beta} b_\kappa^\alpha\,\nu_\beta)\,\delta u_\alpha\, ds \\ &+ \int_\Gamma (-m^{\alpha\,\beta}\,\delta u_{3_{|\alpha}}\,\nu_\beta + m^{\alpha\,\beta}{}_{|\alpha}\,\delta u_3\,\nu_\beta)\, ds - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0\,.\end{aligned} \tag{9.145}$$

Es ist $-\boldsymbol{Lu}$ das obige System und ($\gamma_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon$, $\rho_{\alpha\beta} \equiv \kappa$)

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega (n^{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{u})\,\gamma_{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{\delta u}) + m^{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{u})\,\rho_{\alpha\,\beta}(\boldsymbol{\delta u}))\,d\Omega \tag{9.146}$$

ist die symmetrische Wechselwirkungsenergie.

Nach einigen Umformungen zeigt sich, dass die Identität die Form

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = \int_\Omega -\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{\delta u}\,d\Omega + \int_\Gamma (\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{\delta u} + \ \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\delta\varphi})\,ds - a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\delta u}) = 0 \tag{9.147}$$

hat, siehe [84] S. 280.

9.21 Die *h*-Vertauschungsregel

Das Beispiel in Bild 9.10 soll die h-Vertauschungsregel an einem 1-D Beispiel demonstrieren.

Verglichen wird hier die Normalkraft $N(x)$ in einem Stab unter sinusförmiger Belastung. Der Stab besteht aus zwei Elementen und so ersetzt eine Knotenkraft f_1 im zentralen Knoten die Belastung. Dieser Lastfall $p_h(= f_1)$ überlagert mit der exakten Einflussfunktion $G_1(y, x)$ ergibt an jeder Stelle x denselben Wert $N_h(x)$ wie die Überlagerung der genäherten Einflussfunktion $G_1^h(y, x)$ mit der exakten Belastung

$$J(u_h) = N_h(x) = G_1(\frac{\ell}{2}, x) \cdot f_1 = \pm 0.5\, f_1 \tag{9.148}$$

$$J_h(u) = \int_0^l G_1^h(y, x)\, p(y)\, dy = \pm 0.5\, f_1\,. \tag{9.149}$$

Es ist $G_1^h(y, x) = \pm 0.5\,\varphi_1(y)$ und daher ist $(G_1^h, p) = \pm 0.5\,(\varphi_1, p) = \pm 0.5\, f_1$.

Die FE-Einflussfunktion $G_1^h(y, x)$ für $N_h(x)$ wird von der Knotenkraft $j_1 = \varphi_1'(x) = \pm 1/(0.5\,\ell)$ erzeugt wird. Liegt der Aufpunkt x links von der Mitte ist j_1 positiv, und G_1^h ist das Dreieck in Bild 9.10 f. Für die Punkte rechts von der Mitte ist G_1^h das Dreieck in Bild 9.10 g.

Vielleicht ist auch das folgende Gedankenexperiment hilfreich. Es sei $\ell = 10$ und eine Kraft $P = 1$ wirke im Punkt $y = 9$ und der Aufpunkt sei $x = 7$, liege also noch vor der Kraft. Im realen Stab ergibt das eine Zugkraft im Aufpunkt. Im FE-Modell erzeugt die Kraft P jedoch eine Knotenkraft f_1 im Punkt $x = 5$, die jetzt *vor* dem Aufpunkt liegt und so entsteht eine Druckkraft im Aufpunkt, N ist negativ, wie es die Einflussfunktion in Bild 9.10 g voraussagt.

Merke: Bei den finiten Elementen wandern die Kräfte in die Knoten und so kann aus dem dahinter ein davor werden.

9.22 Filter

Die *hat function* φ_i in Bild 9.11 ist ein ***low-pass filter*** – ein Akkumulator, ein ‚Staubsauger' – und ihre Ableitung φ_i' ist ein ***high-pass filter*** – eine ‚Waage', die wie jede Waage auf Ungleichgewichte reagiert, sie differenziert.

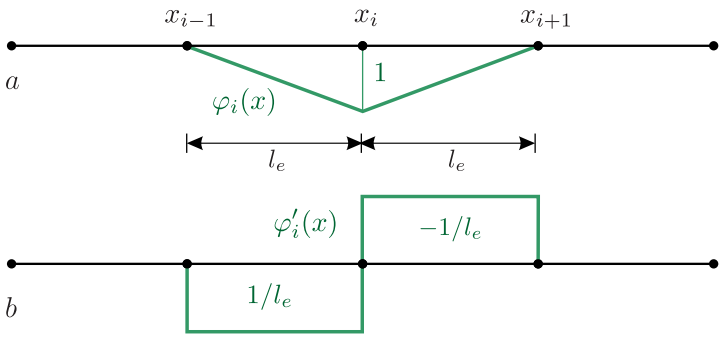


Bild 9.11. Ausschnitt aus der FE-Modellierung eines Stabes. Die Ansatzfunktion und ihre Ableitung agieren wie ein *low-pass* bzw. ein *high-pass filter*, unteres Bild

Partielle Integration ergibt, wenn $N(x)$ im Knoten x_i nicht springt,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -N'\,\varphi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} N\,\varphi_i'(x)\,dx\,, \tag{9.150}$$

also müssen die beiden Filter angewandt auf $p = -N'$ bzw. N zum selben Ergebnis kommen. Wenn p symmetrisch ist, dann kann N nicht symmetrisch sein, denn $sym \times anti = 0$, und wenn p antimetrisch ist – die linke Seite also null ist, dann muss N zum Knoten x_i symmetrisch sein.

Wendet man es auf einen Stab an, $-EAu'' = p$,

$$\int_0^l p\,\varphi_i\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -N'\,\varphi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} N\,\varphi_i'(x)\,dx = a(u,\varphi_i)\,, \tag{9.151}$$

dann erkennt man darin das $\delta W_e = \delta W_i$. Das ***außen = innen*** ist also eine Folge der Symmetrie in dem **Filtergesetz** (9.150). Die Ableitung eines symmetrischen Filters ergibt einen antimetrischer Filter – mit all den Konsequenzen.

In der Grenze, $2 \cdot \Delta x = x_{i+1} - x_{i-1} \to 0$, wird aus (9.151), wegen $\varphi_i'(x_i) = \pm 1/\Delta x$ die Differentialgleichung, das Gleichgewicht im Punkt x_i

$$p(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{\Delta x}(N(x_{i+1}) - N(x_{i-1})) = -N'(x_i)\,. \tag{9.152}$$

Partielle Integration bedeutet im übrigen auch, dass man das L_2-Skalarprodukt einer Ableitung ‚dual' schreiben kann – die rechte Seite von (9.150).

Wenn man etwas numerisch differenziert, dann ist das also eine *duale* Formulierung, ist *adjoint analysis*, eine Arbeit außen, $\delta W_e = (-N', \varphi_i)$, wendet man nach innen, $\delta W_i = (N, \varphi_i') = a(u, \varphi_i)$.

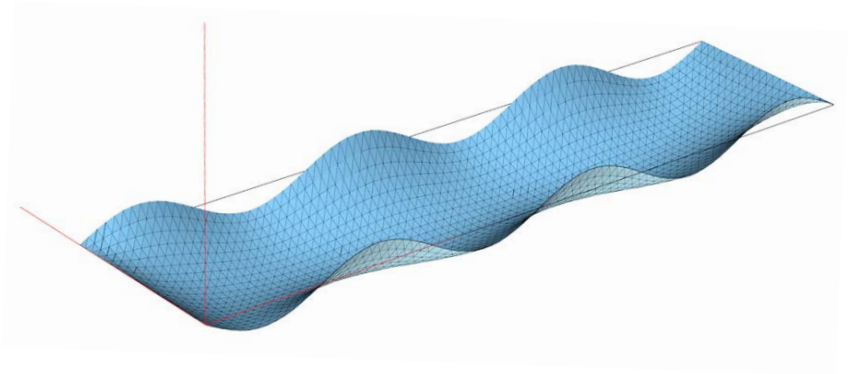


Bild 9.12. Rekonstruktion der Lösung einer Poisson Gleichung aus ihren sinusförmigen Randwerten und der Belastung $-\Delta u = p$ im Innern (BE-LAPLACE)

9.23 Poisson Gleichung

Die Poisson Gleichung ist die ‚inhomogene' Laplace-Gleichung, siehe Bild 9.12,

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})\,. \tag{9.153}$$

Zu ihr gehört die Identität

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_\Omega -\Delta u(\boldsymbol{x})\,\delta u(\boldsymbol{x})\,d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n}\,\delta u(\boldsymbol{x})\,ds - a(u,\delta u) = 0 \tag{9.154}$$

mit der Wechselwirkungsenergie

$$a(u,\delta u) = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \bullet \nabla\,\delta u(\boldsymbol{x})\,d\Omega = \int_\Omega (u_{,x_1}\;\delta u_{,x_1} + u_{,x_2}\;\delta u_{,x_2}\,)\,d\Omega\,. \tag{9.155}$$

Die Bedeutung der Poisson Gleichung beruht darauf, dass man mit ihrer Fundamentallösung

$$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\,\pi}\ln r \qquad (2\text{-}D) \qquad g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\,\pi}\frac{1}{r} \qquad (3\text{-}D) \tag{9.156}$$

jede C^2-Funktionen über einem Gebiet Ω aus den Randwerten u und $\partial u/\partial n$ und den zweiten Ableitungen $\Delta u = u_{,x_1x_1} + u_{,x_2x_2}$ berechnen kann

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma [g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial n} - \frac{\partial g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial n}\,u(\boldsymbol{y})]\,ds_{\boldsymbol{y}} + \int_\Omega g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,(-\Delta u(\boldsymbol{y}))\;d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,. \tag{9.157}$$

Diese Gleichung ist praktisch die Erweiterung der Gleichung (partielle Integration)

$$w(x) = w(0) + \int_0^x w'(y)\,dy = \int_\Gamma \ldots + \int_\Omega \ldots\,, \tag{9.158}$$

auf höhere Dimensionen und sie ist, wie wir meinen, der eigentliche **Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung**. *Eine Fläche, eine Funktion, ist durch ihre ‚Spur' auf dem Rand, u und $\partial u/\partial n$, und ihre ‚Krümmung' Δu eindeutig bestimmt.*

Die Lösungen $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$ nennt man harmonische Funktionen. Der Wert in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ ist der Mittelwert aus den Nachbarn im Norden, Osten, Süden und Westen. Jede Gerade, $-u'' = 0$, ist eine harmonische Funktion.

9.24 Potentiale und Potentialtheorie

Potentialtheorie ist, wenn man so will, die Lehre von den Einflussfunktionen – oder besser – davon, wie sich Wirkungen fortpflanzen. Nicht von ungefähr ist die partielle Integration, wie im Gaußschen Integralsatz,

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \cdot 1\,d\Omega = \int_\Omega u_{x,x} + u_{y,y}\,d\Omega = \int_\Gamma u_x\,n_x + u_y\,n_y\,ds = \int_\Gamma \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{n}\,ds \tag{9.159}$$

die Grundoperation der Potentialtheorie.

Potentialtheorie bedeutet, vereinfacht gesagt, dass man ‚von den Kräften, von den Quellen her' denkt, wie der Physiker, für den das Schwerefeld der Erde,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \frac{G}{r}\,m(\boldsymbol{y})\,d\Omega_{\boldsymbol{y}} \qquad r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\,, \tag{9.160}$$

ein Potential darstellt. Es entsteht durch die Überlagerung der Massenverteilung $m(\boldsymbol{y})$ der Erde mit der Einflussfunktion G/r (hier ist G die Gravitationskonstante), und es genügt der Gleichung $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = 4\,\pi\,G\,m(\boldsymbol{x})$.

Ein großer Teil der klassischen Physik ist mathematisch Potentialtheorie, denn es reicht zu wissen, wie das Feld in der Nähe einer Punktladung aussieht, weil die Lösungen von linearen Differentialgleichungen superponiert werden können – nichts anderes macht ja eine Einflussfunktion.

Wenn man so von den Quellen her denkt, dann besteht formal gesehen, kein Unterschied zwischen finiten Elementen und Randelementen, denn beide entwickeln ja die jeweilige Lösung aus derselben Einflussfunktion, nur in den ‚Belegungen' wie man in der Mathematik sagt, den Lasten, unterscheiden sie sich. Weil auch FE-Lösungen Potentiale sind, konnten wir ja in Kapitel 6.12 zeigen, wie die Singularitäten auf dem Rand in die FE-Lösung hineinpropagieren.

Bei den finiten Elementen sind die Belegungen, die Kräfte p_h, wie in Bild 3.17. Bei den Randelementen stimmen im Innern die Lasten überein, $p = p_h$, aber auf dem Rand gibt es Differenzen. Der Fehler bei den Randelementen steckt also in den Randdaten, während er bei den finiten Elementen ‚flächendeckend' ist – in der Mitte der Elemente sind die Schnittgrößen ‚exakt', aber an den Elementgrenzen springen sie. Man hüte sich jetzt aber davor, daraus vorschnelle Schlüsse über die Genauigkeit zweier Lösungen zu ziehen.

9.25 Lagrange und Hamilton

Die Dynamik der Tragwerke würde das Buch sprengen, aber nachdem wir doch alle Energie- und Variationsprinzipe aus den Euler-Gleichungen mittels partieller Integration entwickelt haben, wollen wir hier kurz skizzieren, dass das auch bei dem Prinzip von Hamilton möglich ist.

Die totale Energie einer Feder mit angehängter, schwingender Masse

$$H = K + P = \frac{1}{2} m\,\dot{u}^2 + \frac{1}{2} k\,u^2 \tag{9.161}$$

muss konstant sein

$$\frac{dH}{dt} = m\,\dot{u}\,\ddot{u} + k\,u\,\dot{u} = (m\,\ddot{u} + k\,u)\,\dot{u} = 0\,, \tag{9.162}$$

was die Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{u} + k\,u = 0 \tag{9.163}$$

für eine frei schwingende Feder ergibt.

Auf dasselbe Ergebnis kommt man über die Lagrange-Funktion $L = K - P$ und die Forderung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0\,. \tag{9.164}$$

Die erste Greensche Identität der Bewegungsgleichung lautet

$$\mathscr{G}(u, \delta u) = \int_0^t (m\,\ddot{u} + k\,u)\,\delta u\,dt - [m\,\dot{u}\,\delta u]_0^t + \int_0^t (m\,\dot{u}\,\delta\dot{u} - k\,u\,\delta u)\,dt = 0\,. \tag{9.165}$$

Das zweite Integral ist die erste Variation δW des Wirkungsintegrals

$$W(u) = \int_0^t L\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t (m\,\dot{u}^2 - k\,u)\,dt\,. \tag{9.166}$$

Die Variation ist null, wenn u der Differentialgleichung (9.163) genügt und δu am Anfang und am Ende der Zeitspanne null ist, $\delta u(0) = \delta u(t) = 0$. Und dies ist das ***Hamiltonsche Prinzip***: Die Bewegung zwischen den beiden

Marken 0 und t läuft so ab, dass L einen Extremwert annimmt. Wenn u der Differentialgleichung (9.163) genügt, dann ist das die beste Route.

9.26 Variationsrechnung

Nur ganz kurz, um vollständig zu sein: In der Variationsrechnung, z.B. [199] S. 724, geht es um die Minimierung von Funktionalen wie

$$\Pi(u) = \int_0^l F(u,u')\,dx - \int_0^l p\,u\,dx \qquad \text{mit} \qquad u(0)=a,\ u(l)=b\,. \tag{9.167}$$

Wenn $F(u,u')$ die Taylorentwicklung

$$F(u+\delta u, u'+\delta u') = F(u,u') + \frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\delta u' + \dots \tag{9.168}$$

besitzt, dann muss notwendig die erste Variation δF im Extrempunkt u null sein[4], und partielle Integration der ersten Variation

$$\delta F = \int_0^l \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\delta u'\right) dx = \int_0^l \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\delta u\,dx + \text{Randterme} \tag{9.169}$$

führt auf die Euler-Gleichung als notwendige Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = p\,. \tag{9.170}$$

So kommt die berühmte Gleichung (9.164) in die Physik. In diesem Fall ist $F = m\,\dot u^2 - k\,u^2$ und wird L genannt.

Man kann all das leicht an dem Beispiel

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^l (EA(u')^2 + c\,u^2)\,dx - \int_0^l p\,u\,dx \tag{9.171}$$

des (in Längsrichtung) elastisch gebetteten Stabes nachvollziehen, denn die erste Greensche Identität beschreibt genau diese Logik

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l (-EA\,u'' + c\,u)\,\delta u\,dx + [N\,\delta u]_0^l - \int_0^l (EA\,u'\,\delta u' + c\,u\,\delta u)\,dx = 0\,,$$

also

$$\mathscr{G}(u,\delta u) = \int_0^l \text{Euler-Glg.}\cdot\,\delta u + [\text{Randterme}] - \delta\Pi = 0\,. \tag{9.172}$$

[4] sonst nimmt $\Pi(u)$ in eine der beiden Richtungen $\pm\delta u$ ab

Nur dass wir in diesem Buch mit der Euler-Gleichung starten und daraus dann mittels partieller Integration die Randterme und $\delta\Pi$ herleiten.

In der linearen Statik gehen die Pünktchen ... in (9.168) im übrigen nur bis zum quadratischen Term, der, integriert, mit $a(\delta u, \delta u) \geq 0$ identisch ist

$$\Pi(u + \delta u) = \Pi(u) + \mathscr{G}(u, \delta u) + a(\delta u, \delta u)\,. \tag{9.173}$$

In der Gleichgewichtslage u ist $\mathscr{G}(u, \delta u) = 0$ und daher ist $\Pi(u)$ das Minimum.

9.27 Einzelkraft in einer Scheibe

Das folgende ist eine Ergänzung zu dem Text in Kap. 6.3. Greift eine Einzelkraft in einer Scheibe an, dann kann man sich das wie folgt zurechtlegen. Man lässt die Einzelkraft in einer unendlichen Scheibe wirken (LF 1) und addiert zu diesem Lastfall einen zweiten Lastfall (LF 2) derart, dass die Randbedingungen an der endlichen Scheibe von den beiden Lösungen zusammen eingehalten werden.

Die Spannungen aus dem LF 1 werden im Aufpunkt singulär, aber die aus dem LF 2 sind endlich, sie sind beschränkt, und daher tendieren auch die Integrale der Spannungen aus dem LF 2 über sich immer enger zusammenschnürende Kreise um den Aufpunkt gegen null, weil der Umfang der Kreise ja schrumpft. Wir müssen also nur das Integral der singulären Spannungen betrachten.

Das Spannungsfeld in der unendlich ausgedehnten Scheibe kennt man genau. Wenn in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ eine Kraft $\boldsymbol{e}_i$ angreift, dann hat der Spannungsvektor in einem Punkt $\boldsymbol{y}$ mit der Schnittnormalen $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1, \nu_2\}^T$ die Komponenten, [86], Glg. (4.7),

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\,\pi\,(1-\nu)\,r}\,[\frac{\partial r}{\partial \nu}((1-2\,\nu)\,\delta_{ij} + 2\,r_{,i}\;r_{,j}\,) \\ -\,(1-2\,\nu)(r_{,i}\;\nu_j(\boldsymbol{y}) - r_{,j}\;\nu_i(\boldsymbol{y}))] \end{aligned} \tag{9.174}$$

mit

$$r_{,i} := \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{r}\,. \tag{9.175}$$

Liegt der Punkt $\boldsymbol{y}$ auf einem Kreis mit Radius r um $\boldsymbol{x}$, dann sind die ν_i und die $r_{,i}$ gleich

$$\nu_1 = r_{,1} = \cos\,\varphi \qquad \nu_2 = r_{,2} = \sin\,\varphi\,, \tag{9.176}$$

und somit gilt auf dem Kreis

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = \nabla r \bullet \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \cos\,\varphi \\ \sin\,\varphi \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\,\varphi \\ \sin\,\varphi \end{bmatrix} = \cos^2\,\varphi + \sin^2\,\varphi = 1\,. \tag{9.177}$$

Da die Kraft in x-Richtung wirkt, setzen wir in (9.174) $i = 1$, und so hat der Spannungsvektor auf dem Kreis die beiden Komponenten

$$t_x = T_{11} = -\frac{1}{4\,(1-\nu)\,\pi\,r} \cdot [(1-2\,\nu) + 2\,\cos^2\,\varphi] \tag{9.178}$$

$$t_y = T_{12} = -\frac{1}{4\,(1-\nu)\,\pi\,r} \cdot [2\,\cos\varphi\,\sin\,\varphi] \tag{9.179}$$

und die Integration ergibt

$$\int_0^{2\,\pi} t_x\,d\varphi = -\frac{1}{r} \qquad \int_0^{2\,\pi} t_y\,d\varphi = 0\,. \tag{9.180}$$

Bemerkung 9.2. Gelegentlich gibt es auch einen Richtungsvektor im Aufpunkt $\boldsymbol{x}$, der dann $\boldsymbol{n}$ heißt, und deshalb nennen wir, um die Vektoren auseinanderzuhalten, den Normalenvektor im Integrationspunkt $\boldsymbol{y}$ hier $\boldsymbol{\nu}$ und nicht $\boldsymbol{n}$ wie auf Seite 557.

9.28 Multipole

Das Bild 9.13 und der folgende Text ist eine Ergänzung zu Seite 183. Die Taylorreihe für $w(x)$

$$w(x) = w(0) + w'(0)\,x + \frac{1}{2}\,w''(0)\,x^2 + \ldots \tag{9.181}$$

führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) = &\int_0^l G_0(y,0)\,p(y)\,dy + \int_0^l G_1(y,0)\,p(y)\,dy \cdot x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^l G_2(y,0)\,p(y)\,dy \cdot x^2 + \ldots \end{aligned} \tag{9.182}$$

wenn wir mit G_1 und G_2 die Einflussfunktionen für w' bzw. w'' bezeichnen.

Es ist aber ebenso gut möglich, den Kern $G_0(y,x)$ in eine Taylorreihe um den Schwerpunkt y_s der Linienlast zu entwickeln, was dann auf

$$\begin{aligned} w(x) = &\int_0^l G_0(y,x)\,p(y)\,dy \\ &= G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,dy + \frac{d}{dy}\,G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,(y-y_s)\,dy \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y_s,x)\int_0^l p(y)\,(y-y_s)^2\,dy + \ldots \end{aligned} \tag{9.183}$$

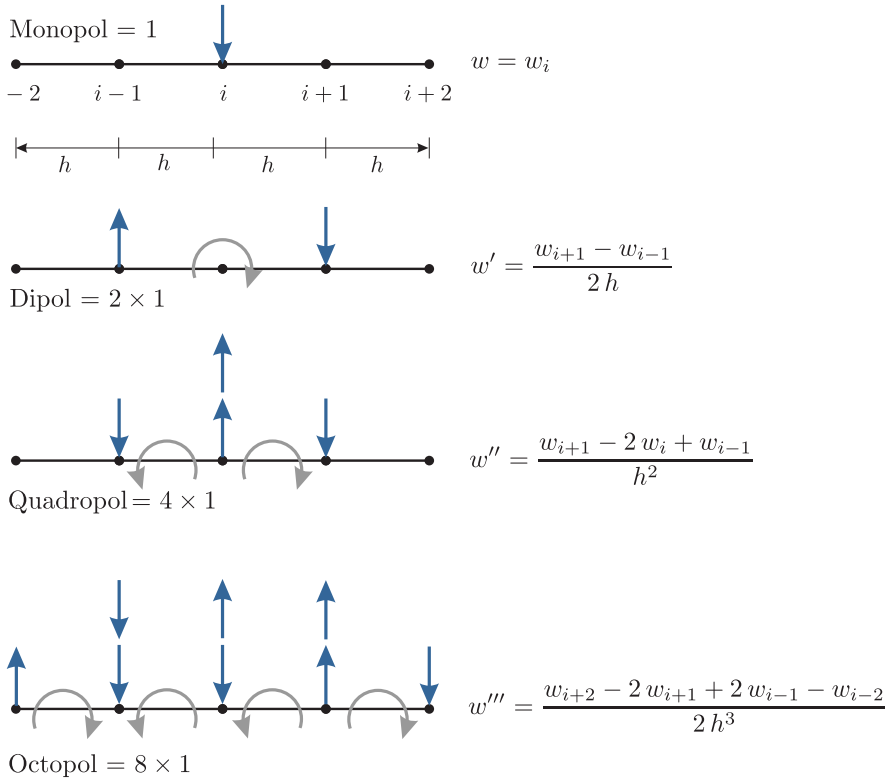


Bild 9.13. Ergänzung zu Seite 183, Monopol – Dipol – Quadropol – Octopol und finite Differenzen

führt, also

$$w(x) = G_0(y_s, x)\,R + \frac{d}{dy}\,G_0(y_s, x)\,M + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dy^2}\,G_0(y_s, x)\,M_2 + \dots \qquad (9.184)$$

wenn R die Resultierende der Belastung ist, $M(=0)$ das Moment der Belastung um y_s ist und M_2 das ‚quadratische' Moment der Belastung um y_s ist. Diese Entwicklung nennt man auch die *multipole expansion* von $w(x)$.

Mit der Anziehungskraft der Erde ist es ähnlich. Wenn die Erde eine perfekte, homogene Kugel wäre, dann könnte man die ganze Masse der Erde im Mittelpunkt der Erde konzentrieren und die Satelliten würden auf perfekten Kreisbahnen die Erde umkreisen. So braucht man Computer, um die Bahnkurven der Satelliten zu bestimmen.

An Hand von (9.184) kann man den Fehler abschätzen, den man begeht, wenn man z.B. eine Trapezlast durch ihre Resultierende ersetzt.

Bemerkung 9.3. Es wäre interessant, die Formel

$$-w'''(x_i) \simeq \frac{w_{i+2} - 2\,w_{i+1} + 2\,w_{i-1} - w_{i-2}}{2\,h^3} \cdot (-1) \tag{9.185}$$

aus Bild 9.13 mit der Formel (h = Elementlänge)

$$-w'''(x) = -\frac{12}{h^3}\,w_{i-1} - \frac{6}{h^2}\,w'_{i-1} + \frac{12}{h^3}\,w_{i+1} - \frac{6}{h^2}\,w'_{i+1} \tag{9.186}$$

aus Bild 3.28 a zu vergleichen, also den Unterschied zwischen finiten Differenzen und finiten Elementen, [198]. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und linearen Elementen ist $\boldsymbol{K}$ identisch mit der Differenzenmatrix.

9.29 Die Dimension der f_i

Eine oft diskutierte Frage ist, welche Dimension die f_i beim Balken haben

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} . \tag{9.187}$$

Die Antwort lautet – je nachdem. Wenn man die Einträge k_{ij} der Steifigkeitsmatrix mit der Formel

$$k_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = EI \int_0^l \varphi_i'' \, \varphi_j'' \, dx = \mathrm{kNm}^2 \, \frac{1}{\mathrm{m}} \frac{1}{\mathrm{m}} \, \mathrm{m} = \mathrm{kNm} \tag{9.188}$$

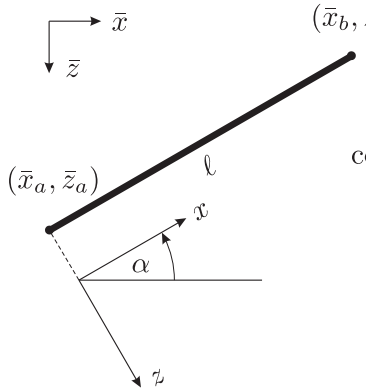
berechnet, wie man das bei finiten Elementen macht, dann sind die k_{ij} Arbeiten, die u_i sind hier dimensionslos, (weil wir die Wege schon in die Integrale eingearbeitet haben, $\varphi_i'' = [1/\mathrm{m}]$), und so sind die f_i Arbeiten.

Zur Erläuterung von (9.188): wenn $\varphi_1(x)$ die Dimension Meter hat, dann haben die Ableitungen die Dimension

$$\varphi_1(x)\ [\mathrm{m}] \qquad \varphi_1'\ [\,] \qquad \varphi_1'' = [\frac{1}{\mathrm{m}}] \qquad \varphi_1''' = [\frac{1}{\mathrm{m}^2}]\,, \tag{9.189}$$

weil bei jeder Ableitung d/dx durch Meter dividiert wird.

Man kann die Matrix $\boldsymbol{K}$ aber auch auf statischem Wege herleiten, indem man die Balkenendkräfte und -momente der Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ berechnet und diese Werte in die jeweilige Spalte i einträgt. Wenn man so vorgeht, dann sind die k_{ij} der Dimension nach Kräfte bzw. Momente pro Auslenkung/Verdrehung $w_i = 1$ und das Ergebnis, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$, sind dann die Kräfte und Momente, die zur Auslenkung $\boldsymbol{w}$ gehören, $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$.



$$\ell = \sqrt{(\bar{x}_b - \bar{x}_a)^2 + (\bar{z}_b - \bar{z}_a)^2}$$

$$\cos\,\alpha = \frac{\bar{x}_b - \bar{x}_a}{\ell} \qquad \sin\,\alpha = -\frac{\bar{z}_b - \bar{z}_a}{\ell}$$

Bild 9.14. Globales und lokales Koordinatensystem

9.30 Transformationen

Mit den Bezeichnungen in Bild 9.14 und der orthogonalen Matrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^T \tag{9.190}$$

transformiert sich ein Vektor $\boldsymbol{f} = \{f_x, f_z\}^T$ wie folgt

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}\,\bar{\boldsymbol{f}} \qquad \bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{f}\,. \tag{9.191}$$

Die auf die Größe 4×4 aufgeweitete Stabmatrix[5]

$$\boldsymbol{K}^e_{4\times 4} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.192}$$

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{T} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix} \tag{9.193}$$

wobei die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ die Gestalt

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad c = \cos\alpha\,, s = \sin\alpha \tag{9.194}$$

[5] Ein oberer Index e bedeutet, dass sich die Matrix $\boldsymbol{K}^e$ auf das lokale Koordinatensystem bezieht.

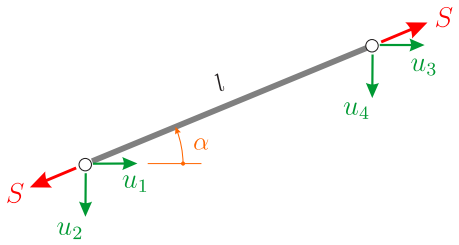


Bild 9.15. Kabelelement

hat, und aus der 4×4-Seilmatrix (S = Zugkraft im Seil)

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9.195}$$

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{T} = \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & cs & -s^2 & -cs \\ cs & c^2 & -cs & -c^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -c^2 & cs & c^2 \end{bmatrix} . \tag{9.196}$$

Die beiden Matrizen zusammen bilden die Steifigkeitsmatrix eines schrägen Kabelelements (Th. II. Ordnung), siehe Bild 9.15,

$$\boldsymbol{K}_e = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & -c\cdot s & -c^2 & c\cdot s \\ -c\cdot s & s^2 & c\cdot s & -s^2 \\ -c^2 & c\cdot s & c^2 & -c\cdot s \\ c\cdot s & -s^2 & -c\cdot s & s^2 \end{bmatrix} + \frac{S}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & c\cdot s & -s^2 & -c\cdot s \\ c\cdot s & c^2 & -c\cdot s & -c^2 \\ -s^2 & -c\cdot s & s^2 & c\cdot s \\ -c\cdot s & -c^2 & c\cdot s & c^2 \end{bmatrix} . \tag{9.197}$$

Das Seil in Bild 9.16 besteht aus drei solchen Kabelelementen. Mit $S = 20$, $EA = 10$ und $c = 0.866, s = 0.5$ ergaben sich aus

$$\begin{bmatrix} 6.4952 & 2.2500 & -3.2476 & -1.1250 \\ 2.2500 & 9.0933 & -1.1250 & -4.5466 \\ -3.2476 & -1.1250 & 6.4952 & 2.2500 \\ -1.1250 & -4.5466 & 2.2500 & 9.0933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{9.198}$$

die Verschiebungen zu $\boldsymbol{u} = \{-1.1111, 3.2075, -1.3889, 4.0094\}^T$ und damit die Gesamtlänge zu 14.85 m. Will man diese ändern, muss man die Vorspannung S des Seils ändern.

Das Beispiel ist wegen der großen Verformungen ($EA = 10$) natürlich unrealistisch, siehe Bild 9.17. Aber man sieht so deutlicher, dass die Verkürzung

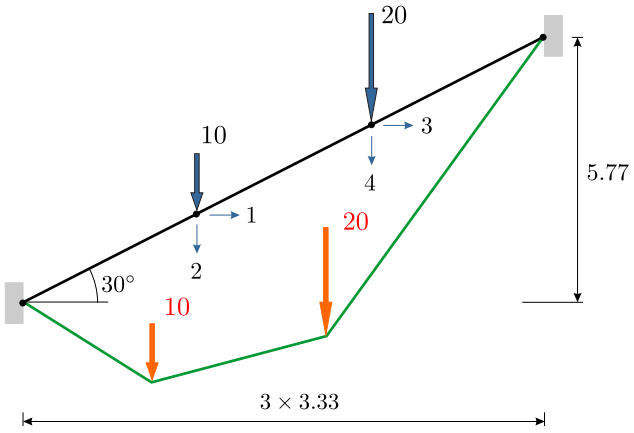
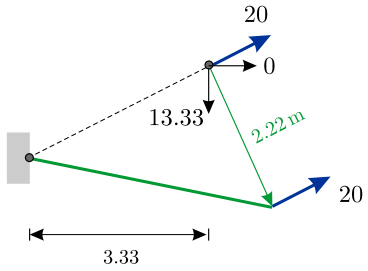


Bild 9.16. Schräges Seil aus kombinierten Stab- und Seilelementen.



$$\sum M = 13.33 \cdot 3.33 - 20 \cdot 2.22 = 0$$

Bild 9.17. Für das Momentengleichgewicht am ersten Element muss man die Verkürzung des Elements vernachlässigen. Dadurch ist das Detail nicht mehr deckungsgleich mit dem Bild davor. Die 13.33 ist das f_4 am Elementende.

des ersten Elements in Achsrichtung vernachlässigt werden muss, um auf $\sum M = 0$ zu kommen, siehe Kapitel 1.36.

Will man die Verkürzung mitnehmen, dann führt das zur sog. Theorie III. Ordnung, [219] S. 477.

Die Transformation der Steifigkeitsmatrix des Balkenelements beruht auf der Matrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9.199}$$

Aus der Matrix

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI}{\ell^3} & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12\,EI}{\ell^3} & -\frac{6\,EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{4\,EI}{\ell} & 0 & \frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{2\,EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI}{\ell^3} & \frac{6\,EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12\,EI}{\ell^3} & \frac{6\,EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{2\,EI}{\ell} & 0 & \frac{6\,EI}{\ell^2} & \frac{4\,EI}{\ell} \end{bmatrix} \tag{9.200}$$

wird die Matrix

$$\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{T} =$$

$$\begin{bmatrix} c^2\,\frac{EA}{\ell} + s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s\,6\frac{EI}{\ell^2} & -c^2\,\frac{EA}{\ell} - s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & s^2\,\frac{EA}{\ell} + c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} & cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s^2\,\frac{EA}{\ell} - c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -s\,6\frac{EI}{\ell^2} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} \\ -c^2\,\frac{EA}{\ell} - s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} & c^2\,\frac{EA}{\ell} + s^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ cs\,\frac{EA}{\ell} - cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & -s^2\,\frac{EA}{\ell} - c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} & -cs\,\frac{EA}{\ell} + cs\,12\frac{EI}{\ell^3} & s^2\,\frac{EA}{\ell} + c^2\,12\frac{EI}{\ell^3} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} \\ -s\,6\frac{EI}{\ell^2} & -c\,6\frac{EI}{\ell^2} & 2\frac{EI}{\ell} & s\,6\frac{EI}{\ell^2} & c\,6\frac{EI}{\ell^2} & 4\frac{EI}{\ell} \end{bmatrix} \tag{9.201}$$

9.31 Näherungen

Bei den Steifigkeitsmatrix für elastisch gebettete Balken und für die Theorie zweiter Ordnung benutzt man in der Praxis oft Näherungen, indem man die Wechselwirkungsenergien

$$k_{ij} = \int_0^\ell (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' + c\,\varphi_i\,\varphi_j)\,dx \qquad \text{elast. gebetteter Balken} \tag{9.202}$$

$$k_{ij} = \int_0^\ell (EI\,\varphi_i''\,\varphi_j'' + P\,\varphi_i'\,\varphi_j')\,dx \qquad \text{Th. II. Ordnung} \tag{9.203}$$

mit den vier Einheitsverformungen $\varphi_i(x)$ (3.59) des normalen Balken formuliert und nicht mit den exakten Einheitsverformungen. Für einen elastisch gelagerten Balken ergibt das die Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^e = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -6\,\ell & -12 & -6\,\ell \\ -6\,\ell & 4\,\ell^2 & 6\,\ell & 2\,\ell^2 \\ -12 & 6\,\ell & 12 & 6\,\ell \\ -6\,\ell & 2\,\ell^2 & 6\,\ell & 4\,\ell^2 \end{bmatrix} + \frac{c}{420}\begin{bmatrix} 156\,\ell & -22\,\ell^2 & 54\,\ell & 13\,\ell^2 \\ -22\,\ell^2 & 4\,\ell^3 & -13\,\ell^2 & -3\,\ell^3 \\ 54\,\ell & 13\,\ell^2 & 156\,\ell & 22\,\ell^2 \\ 13\,\ell^2 & -3\,\ell^3 & 22\,\ell^2 & 4\,\ell^3 \end{bmatrix} \tag{9.204}$$

und für einen Druckstab die Matrix

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^e = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -6\ell & -12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 & 6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & 6\ell & 12 & 6\ell \\ -6\ell & 2\ell^2 & 6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30\,\ell}\begin{bmatrix} 36 & -3\,\ell & -36 & -3\,\ell \\ -3\,\ell & 4\ell^2 & 3\,\ell & -\ell^2 \\ -36 & 3\ell & 36 & 3\,\ell \\ -3\,\ell & -\ell^2 & 3\,\ell & 4\,\ell^2 \end{bmatrix}. \tag{9.205}$$

Die zweite Matrix ist die sogenannte ***geometrische Elementsteifigkeitsmatrix***. Wie die erste ist sie orthogonal zu allen Starrkörperbewegungen.

Auch für die Steifigkeitsmatrix eines *Timoshenko Balkens* gibt es solche Näherungen, [91] chapter 3.5 und ebenso für die Wölbkrafttorsion, [118].

9.32 Schwache und starke Einflussfunktionen

Wir hatten erwähnt, dass es keine schwachen Einflussfunktionen für Kraftgrößen wie etwa das Moment $M(x)$ in einem Einfeldträger gibt, weil

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(G_2, w)_{\Omega_\varepsilon} = 0\,. \tag{9.206}$$

Es ist jedoch möglich eine Folge G_2^ε von glatten Funktionen G_2 zu erzeugen, die gegen das Dreieck G_2 streben so dass am Ende das Moment aus der Wechselwirkungsenergie herausspringt, siehe [92] p. 67 ‚*A sequence that converges to* G_1‘, (dort $N(x)$, hier $M(x)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(w, G_2^\varepsilon) = M(x)\,. \tag{9.207}$$

In (9.206) starten wir auf $[0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, l]$ und lassen dann $\varepsilon \to 0$ gegen Null gehen, während in (9.207) das ε die Folgenglieder $G_2^\varepsilon \to G_2$ bezeichnet.

Die erste Ableitung von G_2 ist eine Sprung-Funktion und die zweite Ableitung is ein Dirac Delta δ_0 und so liefert die Wechselwirkungsenergie das gewünschte Ergebnis

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a(w, G_2^\varepsilon) = \int_0^l M(y)\, \delta_0(y-x)\, dy = M(x)\,. \tag{9.208}$$

So müsste man also vorgehen. Wenn man aber die Zielfunktion $G_2(y,x)$ in (9.206) einsetzt, dann erhalten wir null und nicht $M(x)$.

Und noch eine Bemerkung zur Beobachtung, dass man mit finiten Elementen Spannungen (scheinbar) mit schwachen Einflussfunktionen berechnen kann, siehe Seite 274. Das sieht nur so aus, denn in Wirklichkeit berechnen auch finite Elemente Spannungen, wie etwa die Normalkraft in einem Stab, mit einer starken Einflussfunktion

$$N_h(x) = \int_0^l G_1^h(y,x)\, p(y)\, dy = \int_0^l \sum_i g_i\, \varphi_i(y)\, p(y)\, dy = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f}\,, \tag{9.209}$$

nur ist es so, dass man das wegen $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$ in die schwache Form

$$N_h(x) = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} \tag{9.210}$$

umschreiben kann, was dann so aussieht, als könnten finite Elemente $N_h(x)$ mit einer schwachen Einflussfunktion berechnen.

9.33 Wie kommt der Einbettungssatz zu seinem Namen?

So, wie man die Einwohner einer Stadt nach verschiedenen Kriterien ordnen kann, *Alter, Größe, ...*, so kann man auch die Biegeflächen $w(\boldsymbol{x})$ einer Platte Ω in verschiedener Weise klassifizieren. Eine dieser möglichen Skalen ist die sogenannte ***Sobolevnorm***. Die Sobolevnorm der Ordnung $m = 2$ einer Biegefläche w ist der Ausdruck

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_\Omega (w^2 + w_{,x}^2 + w_{,y}^2 + w_{,xx}^2 + w_{,xy}^2 + w_{,yx}^2 + w_{,yy}^2)\, d\Omega}\,. \tag{9.211}$$

Man kann nach diesem Muster Sobolevnormen $\|w\|_m$ beliebig hoher Ordnung m definieren: Die Ableitungen bis zur Ordnung m werden quadrat-integriert und aus der Summe die Wurzel gezogen. Die Funktionen, die eine endliche Sobolevnorm der Ordnung m haben, bilden den **Sobolevraum** $H^m(\Omega)$.

Eng damit verwandt ist der sogenannte ***Energieraum***, das sind alle Funktionen, die eine endliche Biegeenergie/Verzerrungsenergie $|a(u,u)| < \infty$ haben.

Es zeigt sich nun, dass der Energieraum einer Platte mit dem Sobolevraum H^2 identifiziert werden kann, und der Energieraum einer Scheibe mit $\boldsymbol{H}^1 = H^1 \times H^1$ (horizontale u_x und vertikale Verschiebung u_y). Weil endliche Energie endliche Sobolevnormen $\|w\|_2$ bzw. $\|\boldsymbol{u}\|_1$ bedeutet, behandelt man die Begriffe Sobolevnorm und **Energienorm** wie Synonyme[6].

Der russische Mathematiker Sobolev hat gezeigt, dass der Raum $H^m(\Omega)$ in den Raum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen über Ω eingebettet ist,

$$H^m(\Omega) \subset C(\Omega) \tag{9.212}$$

und die **Einbettung** sogar stetig ist

$$\max|w| < c \cdot \|w\|_m \,, \tag{9.213}$$

wenn die folgende Ungleichung gilt

$$m > \frac{n}{2} \,, \tag{9.214}$$

wenn also der Index m des Sobolevraums größer als die ‚halbe Dimension' des Raums ist.

Bei einer Platte ist $n = 2$. Der Wert $\max|w|$ ist die Norm von w auf $C(\Omega)$ und (9.213) bedeutet, dass die Norm des Bildes kleiner als die Ausgangsnorm mal einem Skalenfaktor c ist. Wenn das gilt, dann sagt man, dass die Abbildung, also hier $w \in H^2(\Omega) \to w \in C(\Omega)$ stetig ist. Die Zahl c in der Ungleichung (9.213) ist eine feste Konstante, die nur von der Gestalt von Ω abhängt.

Der Sinn der Ungleichung (9.213) ist, dass ein kleiner Abstand in $H^m(\Omega)$ auch einen kleinen Abstand in $C(\Omega)$ garantiert, (w_1, w_2 seien zwei Funktionen),

$$\max|w_1 - w_2| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_m \,. \tag{9.215}$$

Das Interessante an diesem Ergebnis ist der Übergang vom Integral zum Punkt. Die Sobolevnorm ist ja ein integrales Maß, aber wenn die Ungleichung (9.214) gilt, und für eine Platte, $m = 2, n = 2$, gilt sie, dann ist die maximale Auslenkung der Platte durch die Biegeenergie begrenzt. Geht die Biegeenergie gegen null, dann geht auch die Durchbiegung der Platte gegen null – überall, in jedem Punkt! ***Ein Integral majorisiert Punktwerte!***

Bei einer Scheibe ist das anders. Ihr Energieraum ist $\boldsymbol{H}^1$, aber die Zahlen $m = 1, n = 2$ erfüllen die Ungleichung (9.214) nicht, und daher garantiert eine endliche Energie $\|\boldsymbol{u}\|_1 < \infty$ nicht, dass die Einbettung stetig ist in dem Sinne, dass wenn zwei Verschiebungsfelder $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ eine kleinen Abstand in der

[6] Technisch ist es so, dass die Energienorm $\|w\|_E = \sqrt{a(w,w)}$ und die Sobolevnorm $\|w\|_m$ äquivalente Normen sind, wenn die Starrkörperbewegungen ausgeschlossen sind.

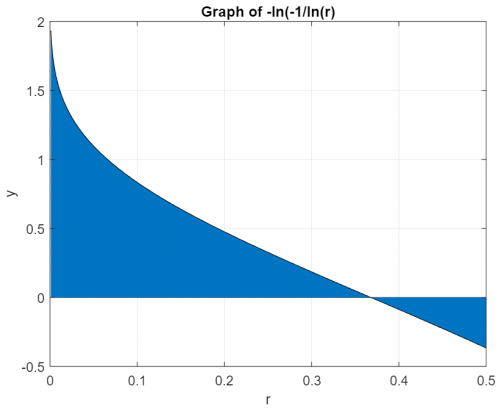


Bild 9.18. Die Funktion $u(r) = -\ln(-1/\ln r)$

Energie haben, dass dann auch ihre maximalen Verschiebungen nahezu gleich sind, was bei einer Platte gilt

$$\max |w_1 - w_2| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_2 \,. \tag{9.216}$$

Wenn der Leser noch etwas Geduld hat, können wir diese Ideen noch etwas weiter verfolgen.

Menschen kann man nach ihrem Alter (A) klassifizieren oder nach ihrem Gewicht (G). Auf der Menge A ist das Funktional ‚Schuhgröße' nicht stetig, weil ein kleiner Abstand im Alter nicht garantiert, dass auch die Schuhgrößen ähnlich ausfallen. Auf der Menge G erwarten wir hingegen (näherungsweise) einen solchen Zusammenhang.

Ein Funktional ist also dann stetig, wenn aus einem kleinen Abstand im Input eine kleine Differenz im Ergebnis folgt

$$|J(u_1) - J(u_2)| < c \cdot \|u_1 - u_2\| \,. \tag{9.217}$$

Genauer gesagt, wenn es eine globale Konstante c gibt, die für **alle** Funktionen u in der Ausgangsmenge gilt. Stetigkeit ist also immer davon abhängig, welche Abstandsmaße man auf der Ausgangsmenge und der Zielmenge hat. Setzt man $u_2 = 0$, dann steht $|J(u)| < c \cdot \|u\|$ da.

Wenn ein lineares Funktional stetig ist, dann ist es auch beschränkt.

Bei einer Kirchhoffplatte ist das Punktfunktional

$$J(w) = w(\boldsymbol{x}) \qquad \text{Durchbiegung in einem Punkt } \boldsymbol{x} \tag{9.218}$$

auf $H^2(\Omega)$ ein stetiges und beschränktes Funktional, weil die stetige Einbettung (9.213) garantiert, dass die Differenz in zwei Werten durch die Differenz in der Energie nach oben begrenzt ist

$$|J(w_1) - J(w_2)| = |w_1(\boldsymbol{x}) - w_2(\boldsymbol{x})| < c \cdot \|w_1 - w_2\|_2 \,, \tag{9.219}$$

aber bei einer Scheibe gilt dies nicht mehr. Die Differenz in der horizontalen Verschiebung zweier Verschiebungsfelder in einem Punkt $\boldsymbol{x}$

$$|J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{v})| = |u_x(\boldsymbol{x}) - v_x(\boldsymbol{x})| \not< c \cdot \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1 \tag{9.220}$$

lässt sich nicht *für alle (!)* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ durch die Sobolevnorm $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1$ nach oben begrenzen.

Die Betonung liegt auf *für alle*. Die Membranbiegefläche $u = -\ln(-\ln^{-1} r)$ hat im Punkt $r = 0$ den Wert unendlich, $J(u) = \infty$, aber in einem Kreis Ω mit Radius $R = 0.5$ um den Nullpunkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist die H^1-Norm beschränkt, siehe [92] p. 98 und Bild 9.18. Es gibt demnach keine Zahl c so, dass

$$J(u) = u(\boldsymbol{0}) = \infty < c \cdot \|u\|_1 \qquad ? \tag{9.221}$$

Auf $H^1(\Omega)$ ist $J(u)$ also kein stetiges und beschränktes Funktional. Ein Gegenbeispiel reicht aus, um dieses Urteil fällen zu können[7].

Bei einem Stab, $n = 1$, $m = 1$, ist der Energieraum $H^1(0, l)$, und daher gilt dort

$$J(u) = u(x) \qquad m - i = 1 - 0 = 1 > \frac{1}{2} \qquad \text{stetig} \tag{9.222}$$

$$J(u) = u'(x) \qquad m - i = 1 - 1 = 0 \not> \frac{1}{2} \qquad \text{unstetig} \tag{9.223}$$

Der Energieraum eines Balkens, $n = 1$, $m = 2$, ist der $H^2(0, l)$, und daher gilt, in der Reihenfolge $i = 0, 1, 2, 3$,

$$\underbrace{J(w) = w(x) \qquad J(w) = w'(x)}_{stetig} \qquad \underbrace{J(w) = w''(x) \qquad J(w) = w'''(x)}_{nicht\ stetig} \tag{9.224}$$

Wenn ein Funktional stetig ist, dann ist die Energie der Greenschen Funktion endlich, sonst unendlich und dann ist es auch die äußere Arbeit $W_e = Weg \times Kraft$. *Einer der beiden Größen muss im Aufpunkt unendlich sein.*

Die Greensche Funktion für das (unstetige) Funktional $J(u) = EA\,u'(x)$ der Normalkraft $N(x)$ in einem Stab ist eine Einheitsversetzung, die sich nur unter dem Einsatz von unendlich großen Kräften erzeugen lässt

$$\int_0^l \frac{N^2}{EA}\, dx = \infty \qquad N = \text{Normalkraft aus Versatz}\,. \tag{9.225}$$

[7] Der doppelte Logarithmus, $u(r) = O(\ln(-\ln r))$ für $r \to 0$, geht ‚unendlich langsam' gegen ∞ und deswegen ist wohl die $\|u\|_1$-Norm beschränkt trotz $u(0) = \infty$.

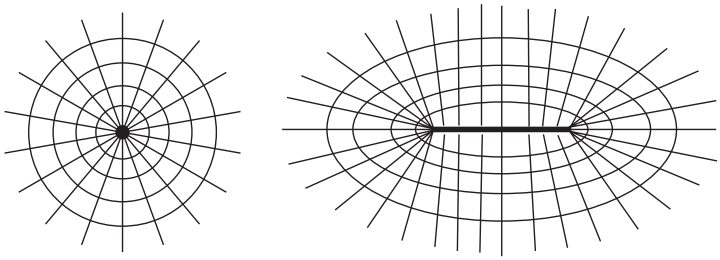


Bild 9.19. In der Nähe der Einzelkraft sind die Kraftlinien so dicht gepackt, dass das Material einer Scheibe zu fließen anfängt, während eine Linienlast die hohe Konzentration der Kraftlinien in einem Punkt vermeidet – die Energie bleibt endlich, [91]

Wir folgen hier dem Mathematiker, der die Sprungfunktion in eine Fourierreihe entwickelt, siehe Seite 107, und nicht dem Ingenieur, der erst ein Normalkraftgelenk einbaut und dann das Gelenk spreizt.

Nun noch ein Kommentar zur Ungleichung aus Kapitel 1, (1.314), die wir hier wiederholen

$$m - i > \frac{n}{2}\,. \tag{9.226}$$

Wenn man eine Funktion, die in $H^m(\Omega)$ liegt, differenziert, dann liegt ihre Ableitung (möglicherweise) nur noch in $H^{m-1}(\Omega)$. Dies erklärt, warum wir von m den Index $i = 0, 1, 2, 3$ des Dirac Delta δ_i abziehen, also das Signal wie oft das Dirac Delta die Funktion u differenziert

$$J(u) = \int_\Omega \delta_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} \cong \text{Ableitung } i\text{-ter Ordnung}\,. \tag{9.227}$$

Bemerkung 9.4. Nicht stetig heißt in (9.224): $J(w) = -EI\, w''(x) = M(x)$ ist auf $H^2(0,l)$ kein stetiges *Funktional*. Es gibt kein c so, dass *für alle* Biegelinien $w \in H^2(0,l)$ die Ungleichung

$$|J(w)| = |M(x)| < c \cdot \|w\|_2 \tag{9.228}$$

gilt. Eine Biegelinie w mit einer logarithmischen Singularität im Momentenverlauf, $M(x) = \ln(x - x_0)^2$ in einem Punkt $x_0 \in (0,l)$, hat eine endliche Norm, $\|w\|_2 < \infty$, aber $M(x_0) = \infty$.

Man kann es auch so lesen: Das singuläre $M(x)$ liegt in $H^0(0,l)$, weil man $M(x)^2$ integrieren kann, aber die Norm auf H^0, also das Integral $\|M\|_0 = (M,M)^{1/2}$, kann Punktwerte nicht majorisieren, $\max|M| < c \cdot \|M\|_0$ gilt nicht, weil die Einbettung von $H^0(0,l)$ in $C^0(0,l)$ nicht stetig ist, es gibt Ausreißer und einer davon ist das obige Moment. Noch einfacher:

Daraus, dass man eine Funktion $M(x)$ quadrat-integrieren kann, folgt nicht, dass die Funktion $M(x)$ auf dem Intervall $(0,l)$ beschränkt ist.

Wenn aber auch die Ableitung $M'(x)$ quadrat-integrierbar ist, wenn $M(x)$ also in $H^1(0,l)$ liegt, dann ist der Schluss zulässig, weil die Ungleichung $m > n/2$, setze $m = 1, n = 1$, dann erfüllt ist.

Die Ableitung $M'(x) = 2/(x - x_0)$ von $M(x) = \ln(x - x_0)^2$ ist aber nicht quadrat-integrierbar, das ‚Schlupfloch' $M \in H^1(0,l)$ steht also nicht zur Verfügung.

Bemerkung 9.5. Die mathematische Theorie der finiten Elemente hat sich parallel zu der Anwendung der finiten Elemente in den Ingenieurwissenschaften entwickelt und liegt heute in abgeschlossener Form vor. Uns interessiert hier der folgende Satz aus der Theorie der schwachen Lösungen: *Eine Einflussfunktion*

$$J(u) = \int_0^l G(y,x)\, p(y)\, dy \tag{9.229}$$

existiert genau dann, wenn das Funktional $J(u)$ linear und beschränkt ist, $|J(u)| < c\,\|u\|$.

Folgt man dieser Vorgabe, dann dürfte es keine Einflussfunktion $G_2(y,x)$ für das Moment in einem Balken geben, weil ja das Funktional $J(w) = M(x)$ auf dem Energieraum $H^2(0,l)$ unbeschränkt ist. Dies steht aber im Widerspruch zum Vorgehen des Ingenieurs, der in der Mitte des Balkens einfach einen Knick erzeugt und mit dieser Einflussfunktion das exakte Biegemoment erhält.

Der obige Satz meint aber nur, dass es keine Einflussfunktion mit ***endlicher Energie*** gibt, keine Einflussfunktion $G_2(y,x) \in H^2(0,l)$, was sich, wenn wir nachrechnen, siehe Seite 107, bestätigt: Die abgeknickte Biegelinie hat eine unendliche Energie, liegt nicht in $H^2(0,l)$. Jetzt kann man natürlich sagen, was liegt daran: Wenn Mathematiker so spitzfindig sind und so enge Grenzen ziehen, dann muss das den Ingenieur nicht kümmern.

Es zeigt sich hier aber eine Schwäche der mathematischen Theorie der finiten Elemente, nach der ja die FEM eine ***Energieraummethode*** ist und Lösungen, die unendliche Energie haben, liegen außerhalb dieser Theorie. Wie will man den Abstand zur exakten Einflussfunktion G in der Energie minimieren,

$$a(G - G_h, G - G_h) = \|G - G_h\|^2 \qquad \to \text{ Minimum}\,, \tag{9.230}$$

wenn die Energie der exakten Lösung, $\|G\| = \infty$, unendlich ist?

Es ergibt sich so eine kuriose Situation: Ein FE-Programm berechnet alle Schnittgrößen mit Einflussfunktionen, die Näherungslösungen von *schlecht gestellten Problemen* sind, schlecht gestellt, weil die exakten Lösungen nicht im Lösungsraum, im Energieraum liegen – alle Einflussfunktionen für Schnittgrößen haben eine unendliche Energie.

Eine Situation, vor der jeder Mathematiker warnt: *‚Lieber Ingenieur, überzeuge Dich doch bitte vorher, ob eine Lösung existiert, bevor Du den Computer startest...'*

9.34 Negative Normen

Es gibt auch negative Sobolev-Räume und ‚negative' Normen, $\|p\|_{-n} \geq 0$. Auch eine Belastung p ist ja eine Funktion, und je mehr sie springt, desto niedriger ist die Ordnung des Sobolev-Raums

$$H^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \to H^0(\Omega) = L_2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \to H^{-2}(\Omega) \tag{9.231}$$

in dem sie liegt. Wenn sie noch nicht einmal quadrat-integrierbar ist, dann kann man keine virtuelle Arbeit

$$\delta W_e = \int_\Omega p\, \delta w \, d\Omega \tag{9.232}$$

berechnen – sagt der Mathematiker. Für ihn sind Einzelkräfte (Dirac Deltas) oder Linienlasten im 2-D (Dirac Deltas in ‚Reihe') **Distributionen** und die Arbeit einer Distribution kann man nicht mit einem Riemann-Integral[8] berechnen. Statt dessen geht man über den Satz von Betti, wie in Kapitel 2.14, und das setzt voraus, dass δw hinreichend glatt ist.

Die Arbeit einer Einzelkraft δ_0 in der Mitte $\boldsymbol{x}$ einer Membran auf dem Weg δw ist genauso groß, wie die Arbeit, die die zu δw gehörige Belastung p_δ $(= -\Delta\, \delta w)$ auf dem Weg G_0 leistet

$$\delta W_e = \int_\Omega \delta_0(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\, \delta w(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega G_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\, p_\delta(\boldsymbol{y})\, d\Omega_{\boldsymbol{y}}\,, \tag{9.233}$$

und dieses zweite Integral ist berechenbar und hat natürlich den Wert $\delta w(\boldsymbol{x})$.

Die Funktionen oder – besser – die Lasten in H^{-n} sind so ‚verquer', dass die virtuelle Verrückung mindestens aus H^n sein muss, damit δW_e einen Sinn gibt. Was der Last an Regularität fehlt, muss der Partner ersetzen.

Die Norm

$$\|p\|_{-n} = \sup \frac{(p, u)}{\|u\|_n} \qquad \text{über alle } u \neq 0 \in H^n$$

einer solchen Belastung p *is the most mileage*, die maximal mögliche virtuelle Arbeit δW_e, die die Funktionen in H^n aus der Belastung ziehen können, ähnlich wie in Bild 1.49.

Der Bauingenieur rechnet sehr oft mit Belastungen aus H^{-n}, denn Linienkräfte oder Einzelkräfte auf einer Platte (Kirchhoff) liegen in H^{-2}. Weil die *shape functions* φ_i bei solchen Platten aber in H^2 liegen, lässt sich das obige

[8] Das Flächenintegral einer Linienlast ist null, weil eine Linie keine Breite hat. In der FE-Literatur wird dieses Problem, und wie man es umgeht, meist übersprungen, weil am Schluss doch das Ingenieur-Ergebnis herauskommt.

Arbeitsintegral regularisieren, wenn p eine Linienlast oder eine Einzelkraft ist, und δW_e hat natürlich genau den Wert, den der Ingenieur erwartet.

Wenn man aber z.B. an einer zentrisch belasteten Kreisplatte, Einzelkraft P und Radius $R = 1$, mit der H^0-Funktion $\delta w = -\ln r$ wackelt, dann ist $\delta W_e = \infty \cdot P = \infty$. Nicht alle H^0-Funktionen taugen bei Platten also als virtuelle Verrückungen, weil manche Belastungen wie P zu scharf für einige von ihnen sind. Man muss die δw aus H^2 wählen, um sicher zu gehen. Die $\delta w \in H^2$ sind wegen $H^2 \subset C(\Omega)$ alle stetig, sind beschränkt, $\delta w(\boldsymbol{x}) = \infty$ kommt nicht vor.

Fassen wir es so zusammen: Der Energieraum ist der jeweilige H^n. In diesem Raum liegen die *shape functions*, und die möglichen Belastungen – Lastfälle mit endlicher Energie – dürfen nicht schlechter als H^{-n} sein. Bei einer Scheibe ist der H^1 der Energieraum. Linienkräfte liegen im dem dualen Raum H^{-1}, aber Einzelkräfte nicht, denn die liegen, wie wir von der Kirchhoff-Platte wissen, eine Stufe tiefer, in H^{-2}.

Der **Dualraum** H^{-n} sind einfach die Lastfälle, die von den $u \in H^n$ gelöst werden. Der Mathematiker sagt es etwas anders: Der Dualraum sind die *stetigen linearen Funktionale* auf H^n. Jede Last $p \in H^{-n}$ konstituiert ja vermöge des Skalarprodukts, der Kopplung $H^{-n} \times H^n$,

$$J(\delta u) = \int_\Omega p\, \delta u \, d\Omega \tag{9.234}$$

ein Funktional auf H^n. Es ist einfach die virtuelle Arbeit von p auf den Wegen δu. Und weil die Lösung des LF p endliche Energie hat, ist es ein stetiges, beschränktes Funktional, $|J(\delta u)| < \infty$, gibt es keine unangenehmen Überraschungen, H^n und H^{-n} passen zueinander.

Zum Thema FEM und negative Normen siehe z.B. [64].

9.35 Punktlasten und ihre Energie

Zum Schluss sei noch eine Tabelle nachgetragen, in der verzeichnet ist, welche Punktlasten, $i = 0, 1, 2, 3$, also *Einzelkräfte, Momente, Knicke* oder *Versetzungen* Verschiebungen mit endlicher Energie erzeugen.

Die Tabelle 9.1 wertet die Bedingung $m - i > n/2$ aus, die erfüllt sein muss, damit die Energie endlich bleibt. Es ist m die Ordnung der Energie

$m = 1$ Timoshenko Balken, Reissner–Mindlin Platten, Scheiben, *3-D solids*

$m = 2$ Euler–Bernoulli Balken, Kirchhoff Platten

Die Ordnung der Energie entspricht der höchsten Ableitung in der Wechselwirkungsenergie $a(u, u)$. Sie ist immer halb so groß wie die Ordnung $2\,m$ der Differentialgleichung.

Der *Timoshenko-Balken* ist der schubweiche Balken im Gegensatz zum schubstarren Euler-Bernoulli Balken $EI\, w^{IV} = p$. Schubträger, wie kurze Konsolen, sind *Timoshenko-Balken*.

Tabelle 9.1. Endliche (✓) und unendliche (∞) Energie

Dimension	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=1$	Seil, Stab, Timoshenko Balken	Reissner–Mindlin Platte	E-Th.
Punktlasten			
$i=0$: ↓	✓	∞	∞
$i=1$: ⚡	∞	∞	∞
$m=2$	Euler–Bernoulli Balken	Kirchhoff Platte	
$i=0$: ↓	✓	✓	
$i=1$: ↷	✓	∞	
$i=2$: ⌄	∞	∞	
$i=3$: ⚡	∞	∞	

Bild 9.19 illustriert, warum man Punktlasten besser in kurze Linienlasten umwandeln sollte.

9.36 Early Birds

Wir kennen inzwischen neben der Arbeit von *Tottenham* (Southampton), [206], eine zweite zeitgleich erschienene Arbeit von *Kolář* (Brno/Brünn), [122], beide aus 1970, die das Thema finite Elemente und Einflussfunktionen behandeln.

Wahrscheinlich gibt es noch andere, frühe Arbeiten. Für Hinweise wären wir dankbar.

10

Shape functions und MATLAB

Wir sind heute in der glücklichen Lage auf eine Vielzahl von Programmen zur Lösung von mathematischen Problemen bei der FE-Entwicklung zurückgreifen zu können. Die folgenden Beispiele sollen den Einsatz von MATLAB in der Statik demonstrieren.

10.1 Balken mit beliebiger Belastung.

Mit der Einflussfunktion des beidseitig eingespannten Balkens (3.170) kann man die exakte Lösung auch für solche Lasten bestimmen, die MATLAB (oder der Ingenieur) nicht mehr exakt integrieren können. Dazu wird die Belastung mit der Einflussfunktion überlagert und anschließend eine homogene Lösung so addiert, dass die Lagerbedingungen des Balkens eingehalten werden.

download code

10.2 Einheitsverformungen Th. II. Ordg.

In Kapitel 2.36.1 haben wir die Einheitsverformungen des Druckstabs schon angeschrieben. Hier wollen wir ergänzend zeigen, wie man diese oder eben auch andere Einheitsverformungen per MATLAB (dann mit konkreten Zahlen) berechnen kann.

Die Einheitsverformungen des Druckstabs basieren auf der homogenen Lösung, siehe (2.209) auf Seite 214,

$$\varphi_i(x) = c_{i1}\,\sin(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_{i2}\,\cos(\varepsilon\,\frac{x}{l}) + c_{i3}\,\varepsilon\,\frac{x}{l} + c_{i4}\,. \tag{10.1}$$

Man muss nur die Koeffizienten c_{ij} so einstellen, dass die $\varphi_i(x)$ die entsprechenden Randwerte haben. Der MATLAB *code* für die *shape functions* lautet:

```
syms epsilon x l c1 c2 c3 c4

w(x) = c1*sin(epsilon*x/l) + c2*cos(epsilon*x/l)...
+ c3*epsilon*x/l + c4
```

$$\texttt{w(x)} = \quad c_4 + c_2 \cos\left(\frac{\varepsilon\, x}{l}\right) + c_1 \sin\left(\frac{\varepsilon\, x}{l}\right) + \frac{c_3\, \varepsilon\, x}{l}$$

```
wd(x) = diff(w(x));
```

```
equ1 = [w(0) == 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ2 = [w(0) == 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l)== 0];
equ3 = [w(0) == 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ4 = [w(0) == 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l)== -1];

phi1 = solve(equ1,[c1,c2, c3, c4]);
phi2 = solve(equ2,[c1,c2, c3, c4]);
phi3 = solve(equ3,[c1,c2, c3, c4]);
phi4 = solve(equ4,[c1,c2, c3, c4]);

c11 = simplify(phi1.c1); c12 = simplify(phi1.c2);
c13 = simplify(phi1.c3); c14 = simplify(phi1.c4);
c21 = simplify(phi2.c1); c22 = simplify(phi2.c2);
c23 = simplify(phi2.c3); c24 = simplify(phi2.c4);
c31 = simplify(phi3.c1); c32 = simplify(phi3.c2);
c33 = simplify(phi3.c3); c34 = simplify(phi3.c4);
c41 = simplify(phi4.c1); c42 = simplify(phi4.c2);
c43 = simplify(phi4.c3); c44 = simplify(phi4.c4);

c11, c12, c13, c14
```

$$\texttt{c11} = \quad \frac{\sin(\varepsilon)}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon\sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c12} = \quad \frac{\cos(\varepsilon) - 1}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon\sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c13} = \quad -\frac{\sin(\varepsilon)}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon\sin(\varepsilon) - 2}$$

$$\texttt{c14} = \quad \frac{\cos(\varepsilon) + \varepsilon\sin(\varepsilon) - 1}{2\cos(\varepsilon) + \varepsilon\sin(\varepsilon) - 2}$$

```
c21, c22, c23, c24
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c21} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c22} &= \frac{l\,(\sin(\varepsilon)-\varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c23} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c24} &= -\frac{l\,(\sin(\varepsilon)-\varepsilon\,\cos(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}
\end{aligned}$$

```
c31, c32, c33, c34
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c31} &= -\frac{\sin(\varepsilon)}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c32} &= -\frac{\cos(\varepsilon)-1}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c33} &= \frac{\sin(\varepsilon)}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}\\
\texttt{c34} &= \frac{\cos(\varepsilon)-1}{2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2}
\end{aligned}$$

```
c41, c42, c43, c44
```

$$\begin{aligned}
\texttt{c41} &= \frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c42} &= \frac{l\,(\varepsilon-\sin(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c43} &= -\frac{l\,(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}\\
\texttt{c44} &= -\frac{l\,(\varepsilon-\sin(\varepsilon))}{\varepsilon\,(2\,\cos(\varepsilon)+\varepsilon\,\sin(\varepsilon)-2)}
\end{aligned}$$

download code

Für die Greensche Funktion am beidseitig eingespannten Träger macht man, wie in Kapitel 3.23, aber nun mit den *shape functions* in (2.215), links vom Aufpunkt x, den Ansatz

$$G_0(y,x) = a_3(x)\,\varphi_3(y) + a_4(x)\,\varphi_4(y)\,, \tag{10.2}$$

weil die beiden rechten *shape functions* die Einspannung links respektieren, muss man a_3 und a_4 nur noch so bestimmen, dass das die Querkraft bzw.

das Moment des Ansatzes den Lagerkräften $V(0) = f_1 = \varphi_1(x) \cdot 1$ bzw. $M(0) = f_2 = \varphi_2(x) \cdot 1$ aus der Einzelkraft $P = 1$ entsprechen

$$\begin{bmatrix} V(\varphi_3)(0) & V(\varphi_4)(0) \\ M(\varphi_3)(0) & M(\varphi_4)(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} . \tag{10.3}$$

Für die rechte Seite wählt man den Ansatz

$$G_0(y,x) = a_1(x)\,\varphi_1(y) + a_2(x)\,\varphi_1(y) . \tag{10.4}$$

Die Lagerkräfte aus der Einzelkraft sind rechts $V(l) = -f_3 = -\varphi_3(x)$ und $M(l) = -f_4 = -\varphi_4(x)$, siehe Bild 3.14, also

$$\begin{bmatrix} V(\varphi_1)(l) & V(\varphi_2)(l) \\ M(\varphi_1)(l) & M(\varphi_2)(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_3(x) \\ -\varphi_4(x) \end{bmatrix} . \tag{10.5}$$

Alternativ kann man die Greensche Funktion für den gelenkig gelagerten Träger, [165] S. 210, mittels den beiden *shape function* φ_2 und φ_4 so modifizieren, dass die Endverdrehungen null sind.

Wenn der Träger andere Lagerbedingungen aufweist, etwa gelenkig-gelenkig, dann bestimmt man die Endverformungen $u_1 = 0, u_2, u_3 = 0, u_4$ der homogenen Lösung $w_h = \sum_i u_i\,\varphi_i$, die man zu $G(y,x)$ addiert, an Hand von $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, mit $f_2 = -M(0), f_4 = M(l)$ (Momente der Einflussfunktion $G(y,x)$ an den Trägerenden), siehe hierzu das Bild 3.14; f_1 und f_3 werden nicht gebraucht.

10.3 Balken, *h* linear

Balken mit linear veränderlicher Höhe $h(x)$ und 1 m Breite.

Wir bestimmen die homogene Lösung, zerlegen diese in vier Teile,

$$w_h(x) = c_1\,w_{h1}(x) + c_2\,w_{h2}(x) + c_3\,w_{h3}(x) + c_4\,w_{h4}(x) \tag{10.6}$$

das geschieht durch wiederholte Anwendung des `subs`-Befehls, und berechnen daraus durch geeignete Wahl der c_{ij} die *shape functions* $\varphi_i(x)$. Mit diesen berechnen wir dann beispielhaft die Einflussfunktion für das Moment M in den Zehntelspunkten, siehe Bild 10.1.

```
clear
syms x h(x) w(x) C1 C2 C3 C4  l EI(x) xAuf
```

```
h(x) = 1 + 1/8 * x; EI(x) = 1.0 * h(x)^3/12; l = 4;

w(x) = dsolve( diff( diff(w,2)*h(x)^3/12,2) )
```

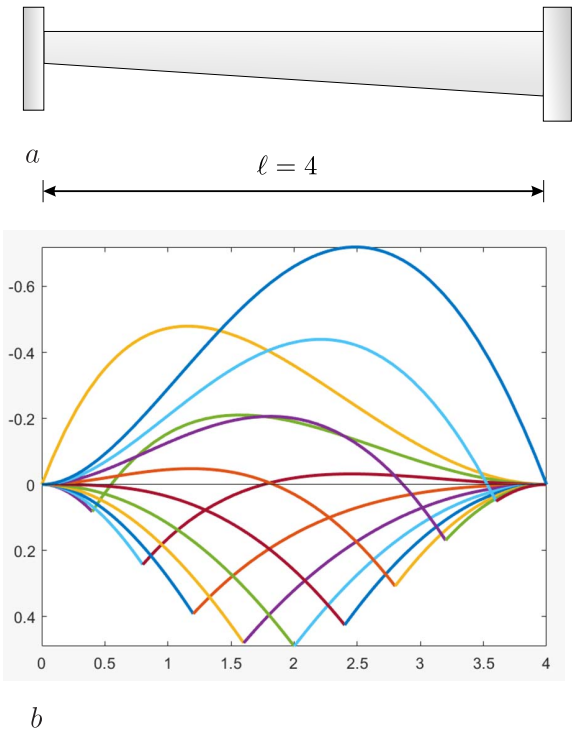


Bild 10.1. EF für das Moment $M(x)$ in den Zehntelspunkten, Stirnflächen 1:1.5

```
w(x) =
```

$$C_3+C_4\,x+6144\,C_1\,\log\left(x+8\right)+\frac{589824\,C_1-24576\,C_2+x\,\left(98304\,C_1-6144\,C_2\right)}{x^2+16\,x+64}+\frac{3072\,x\,\left(8\,C_1+C_2+2\,C_1\,x\right)}{\left(x+8\right)^2}$$

```
wd = diff(w,x); coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4])
```

```
coef =
```

$$\left(6144\,\log\left(x+8\right)+\frac{98304\,x+589824}{x^2+16\,x+64}+\frac{3072\,x\,\left(2\,x+8\right)}{\left(x+8\right)^2}\right)C_1\ldots$$
$$+\left(-\frac{6144\,x+24576}{x^2+16\,x+64}+\frac{3072\,x}{\left(x+8\right)^2}\right)C_2+C_3+x\,C_4$$

Extracting the single terms `wh{i}` (...) Ci

```
temp = subs(coef,[C2,C3,C4],[0,0,0]); % put C2,... = 0
  wh{1} = subs(temp,C1,1);  % put C1 = 1

coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C3,C4],[0,0,0]);
  wh{2} = subs(temp,C2,1);

coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C2,C4],[0,0,0]);
  wh{3} = subs(temp,C3,1);

coef = collect(w(x),[C1, C2, C3, C4]);
temp = subs(coef,[C1,C2,C3],[0,0,0]);
  wh{4} = subs(temp,C4,1);

equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
  coeff(i) = solve(equ{i},[C1,C2, C3, C4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).C1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).C2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).C3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).C4);
end

phi = cell(4,1); % cell array

for i = 1:4  % shape functions
   phi{i} = c(i,1) * wh{1} + c(i,2) * wh{2}...
    + c(i,3) * wh{3} + c(i,4) * wh{4};
 end

for i=0:10
  xAuf = 0.1 * i * l;
  Mphi1(x) = - EI(x) * diff(phi{1},2);j1= Mphi1(xAuf);
  Mphi2(x) = - EI(x) * diff(phi{2},2);j2= Mphi2(xAuf);
```

Section forces (Schnittkräfte) of phi3 and phi4

```
Vphi3(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{3},2),1));
Vphi4(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{4},2),1));
Mphi3(x) = - EI(x) * diff(phi{3},2);
Mphi4(x) = - EI(x) * diff(phi{4},2);
```

System of equations

```
M = [Vphi3(0)  Vphi4(0); Mphi3(0)  Mphi4(0)];
r = [j1, j2]; u = M\r';
```

GF on the left side of the source point

```
GFL(x) = u(1) * phi{3} + u(2) * phi{4};
```

GF on the right side of the source point

Nodal forces, j3 = M(phi3)(x), j4 = M(phi4)(x), x = xAuf

```
Mphi3(x) = - EI(x) * diff(phi{3},2);j3 =Mphi3(xAuf);
Mphi4(x) = - EI(x) * diff(phi{4},2);j4 =Mphi4(xAuf);
```

Section forces of phi1 and phi2

```
Vphi1(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{1},2),1));
Vphi2(x) = - (diff(EI(x) * diff(phi{2},2),1));
Mphi1(x) = - EI(x) * diff(phi{1},2);
Mphi2(x) = - EI(x) * diff(phi{2},2);
```

System of equations

```
M = [Vphi1(4)  Vphi2(4); Mphi1(4)  Mphi2(4)];
r = -[j3, j4]; u = M\r';
```

GF on the right side

```
GFR(x) = u(1) * phi{1} + u(2) * phi{2};

fplot(GFL(x),[0,xAuf]),hold on,
```

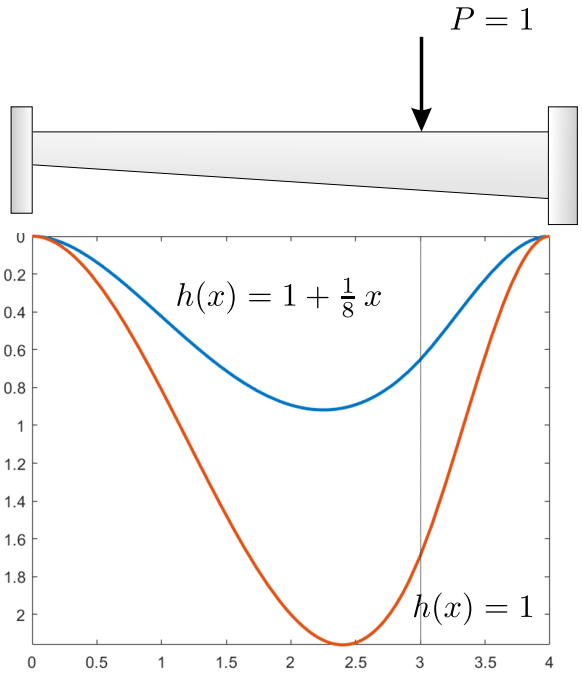


Bild 10.2. Einflussfunktion für $w(x = 3)$

```
  fplot(GFR(x),[xAuf,l]),axis ij,yline(0);
end
```

download code

Bemerkung 10.1. Das ganze hätten wir natürlich auch einfacher haben können, denn es gilt, siehe Bild 3.42 a auf Seite 288,

$$G_l(x) = (\ell - x) \cdot \varphi_3^e(y) - \varphi_4^e(y) \qquad G_r(x) = x \cdot \varphi_1^e(y) + \varphi_2^e(y)\,, \tag{10.7}$$

unabhängig von der Balkengleichung $(EI(x)w''(x))'' = p$ also dem $EI(x)$, der Form des Balkens[1]. Man muss nur die *shape functions* der Differentialgleichung kennen, sie haben wir ja oben im ersten Teil bestimmt. For beams with general cross sections, see [230].

[1] Wir haben das zumindest für linear veränderliches $EI(x)$ bestätigen können

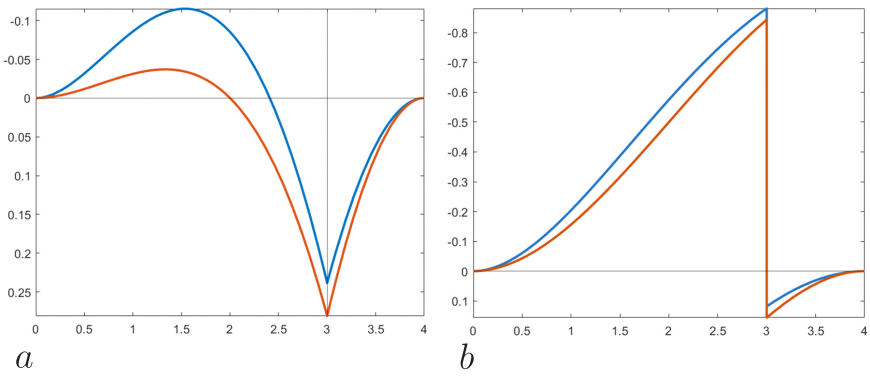


Bild 10.3. EF für $M(x)$ und $V(x)$, blau $h(x) = 1 + 1/8 \cdot x$, rot $h(x) = 1$

10.4 Dirac Delta

MATLAB kennt das **Dirac Delta**, $\delta_0 =$ `delta(x-0)`, und auch die höheren Dirac Deltas, $\delta_i =$ `diff(delta(x-0),i)`, (oder $\delta_i =$ `delta(i,x-0)`) und so kann man leicht die lokale Einflussfunktion für $w(x), w'(x), \ldots$ berechnen, siehe Bild 10.2.

10.4.1 EF für $w(x)$

```
syms x  w(x) l h(x)

h(x) = 1 + 1/8 * x; l = 4; xAuf = 3; wd(x) = diff(w);
w(x) = dsolve( diff( diff(w,2)*h(x)^3/12,2)...
 == dirac(x-xAuf), w(0) == 0,wd(0) == 0, w(l) == 0,...
  wd(l) == 0);
```

download code

10.4.2 EF für $M(x)$ und $V(x)$ mit Dirac Delta

Der folgende *code* berechnet die Einflussfunktion für $M(x)$ und $V(x)$, siehe Bild 10.3, durch Lösen der Differentialgleichungen

$$(EI(y)\, G_2''(y,x))'' = -EI(x)\, \delta(y-x)'' \tag{10.8a}$$

$$(EI(y)\, G_3''(y,x))'' = \; EI(x)\, \delta(y-x)''' - EI'(x)\, \delta(y-x)''\,. \tag{10.8b}$$

Man beachte die Definition der rechten Seite! Dahinter verstecken sich die Dirac Deltas δ_2 und δ_3. Um das zu verstehen, überlagern wir die rechte Seite von (10.8a) mit einer Funktion w, und integrieren zweimal partiell

$$\int_0^l -EI(x)\,\delta(y-x)''\,w\,dy = -\int_0^l -EI(x)\,\delta(y-x)'w'\,dy \tag{10.9}$$

$$= \int_0^l -EI(x)\,\delta(y-x)\,w''\,dy = \int_0^l \delta(y-x)\,M(w)(y)\,dy = M(w)(x)\,. \tag{10.10}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist also das Dirac Delta δ_2

$$\int_0^l -EI(x)\,\delta(y-x)''w\,dy = \int_0^l \delta_2(y-x)\,w\,dy = M(w)(x)\,. \tag{10.11}$$

Entsprechendes gilt für die rechte Seite der zweiten Gleichung, die das Dirac Delta für die Querkraft

$$V(x) = -(EI(x)\,w''(x))' = -EI(x)\,w'''(x) - EI'(x)\,w''(x) \tag{10.12}$$

ist. Für weitere Details siehe Kapitel 9.18.

```
syms x  G2(x) G3(x) l h(x)

h(x) = 1 + 1/8 * x; l = 4; xAuf = 3; EI(x) = h^3 /12;
```

GF for M(x), x = xAuf

```
G2d(x) = diff(G2);

G2(x) = dsolve( diff( diff(G2,2)*EI(x),2) ==...
 -diff(EI(xAuf)*dirac(x-xAuf),2), G2(0) == 0,...
  G2d(0) == 0, G2(l) == 0, G2d(l) == 0);
```

GF for V(x), x = xAuf

```
G3d(x) = diff(G3); EId(x) = diff(EI);
G3(x) = dsolve( diff( diff(G3,2)*EI(x),2) ==...
   diff(EI(xAuf)*dirac(x-xAuf),3)...
    - diff(EId(xAuf)*dirac(x-xAuf),2),...
     G3(0) == 0, G3d(0) == 0, G3(l) == 0, G3d(l)==0);
```

download code

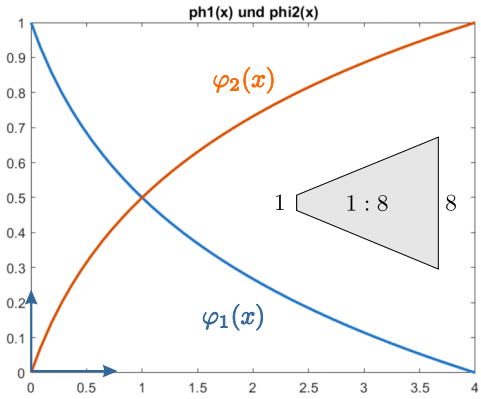


Bild 10.4. Bestimmung der homogenen Lösung eines Stabs, $-(EA(x)u')'$, und der *shape functions* mit MATLAB

10.5 Stab, h linear

Stab mit linear veränderlicher Höhe $h(x)$ und 1 m Breite, siehe Bild 10.4.

```
syms x h(x) u(x) l shape1(x) shape2(x) C1 C2
h(x) = 1 + 2 * x;
```

Homogeneous solution

```
u(x) = -dsolve( diff( diff(u)*h(x)) )
```

$$\texttt{u(x)} = \frac{C_1 \log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2} - C_2$$

```
equ1 = [u(0) == 1, u(l) == 0];
equ2 = [u(0) == 0, u(l) == 1];

phi1 = solve(equ1,[C1,C2]);
phi2 = solve(equ2,[C1,C2]);

shape1(x) = subs(u(x),[C1,C2],[phi1.C1, phi1.C2])
```

$$\texttt{shape1(x)} = \frac{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)} - \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)}$$

```
shape2(x) = subs(u(x),[C1,C2],[phi2.C1, phi2.C2])
```

$$\texttt{shape2(x) =}\quad \frac{\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)}+\frac{\log(2)}{\log\left(l+\frac{1}{2}\right)+\log(2)}$$

download code

10.6 Gebetteter Balken

Shape functions des elastisch gebetteten Balkens

```
syms x l beta c1 c2 c3 c4

w(x) = exp(beta*x) *(c1 * cos(beta * x)...
 + c2 * sin(beta * x)) ...
  + exp(-beta * x) * (c3 * cos(beta * x)...
   + c4 * sin(beta * x))
```

$$\texttt{w(x) =}$$
$$e^{\beta x}\left(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x)\right)+e^{-\beta x}\left(c_3\cos(\beta x)+c_4\sin(\beta x)\right)$$

```
wd(x) = diff(w(x));
equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
  coeff(i) = solve(equ{i},[c1,c2, c3, c4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).c1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).c2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).c3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).c4);
end
```

```
c(1,1), c(1,2), c(1,3), c(1,4)
```

$$\texttt{ans} = -\frac{2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} - \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(2\,\beta\,l\right) - 1}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(2\,\beta\,l\right) - 1}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\,\beta\,l\right) - 2\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} - \sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\,\beta\,l\right)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1}$$

```
c(2,1), c(2,2), c(2,3), c(2,4)
```

$$\texttt{ans} = -\frac{2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)^2}{\beta\left(4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)^2 + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} - \mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(2\,\beta\,l\right) - \mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 1}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)^2}{\beta\left(4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)^2 + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} - \mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(\sin\left(2\,\beta\,l\right) - \mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 1\right)}{\beta\left(\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(2\,\beta\,l\right) + 1\right)}$$

```
c(3,1), c(3,2), c(3,3), c(3,4)
```

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\sin\left(\beta\,l\right) - \cos\left(\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos\left(\beta\,l\right)^2 - 1\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos\left(\beta\,l\right) - 3\,\sin\left(\beta\,l\right) - \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos\left(\beta\,l\right)^2 - 1\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\sin\left(\beta\,l\right) - \cos\left(\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(\beta\,l\right) + \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos\left(\beta\,l\right)^2 - 1\right) + 1}$$

$$\texttt{ans} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\,l}\left(\cos\left(\beta\,l\right) + \sin\left(\beta\,l\right) - \mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\cos\left(\beta\,l\right) - 3\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\sin\left(\beta\,l\right)\right)}{\mathrm{e}^{4\,\beta\,l} - 4\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l} + 2\,\mathrm{e}^{2\,\beta\,l}\left(2\cos\left(\beta\,l\right)^2 - 1\right) + 1}$$

```
c(4,1), c(4,2), c(4,3), c(4,4)
```

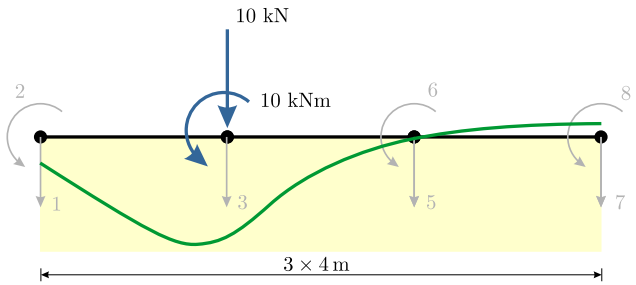


Bild 10.5. Elastisch gebetteter Träger, $\beta = 0.3976$

$$\texttt{ans} = \frac{e^{\beta l}\sin(\beta l)\left(e^{2\beta l}-1\right)}{\beta\left(e^{4\beta l}-4e^{2\beta l}+2e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = \frac{e^{\beta l}\left(\cos(\beta l)+2\sin(\beta l)-e^{2\beta l}\cos(\beta l)\right)}{\beta\left(e^{4\beta l}-4e^{2\beta l}+2e^{2\beta l}\left(2\cos(\beta l)^2-1\right)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{e^{\beta l}\sin(\beta l)\left(e^{2\beta l}-1\right)}{\beta\left(e^{4\beta l}-4e^{2\beta l}+2e^{2\beta l}\cos(2\beta l)+1\right)}$$

$$\texttt{ans} = -\frac{e^{\beta l}\left(\cos(\beta l)-e^{2\beta l}\cos(\beta l)+2e^{2\beta l}\sin(\beta l)\right)}{\beta\left(e^{4\beta l}-4e^{2\beta l}+2e^{2\beta l}\left(2\cos(\beta l)^2-1\right)+1\right)}$$

download code

10.6.1 Zahlenbeispiel

Der Träger, $EI = 1$ und $c = 0.1$, siehe Bild 10.5, besteht aus drei 4 m langen Elementen. Es ist $\beta = (c/4\,EI)^{1/4} = 0.3976$.

```
syms x l beta c1 c2 c3 c4

cB = 0.1; EI = 1.0; beta = (cB/(4*EI))^(1/4), l = 4;
c = zeros(4,4); Ke = zeros(4,4); K = zeros(8,8);
```

Homogeneous solutions

```
wh = cell(4,1);

wh{1} = exp(beta*x)  * cos(beta * x);
wh{2} = exp(beta*x)  * sin(beta * x);
wh{3} = exp(-beta*x) * cos(beta * x);
wh{4} = exp(-beta*x) * sin(beta * x);
```

```
w(x) = c1*wh{1} + c2*wh{2} + c3*wh{3} + c4*wh{4};
wd(x) = diff(w(x));
```

Solving for the shape functions phi{i}

```
equ = cell(4,1);

equ{1}=[w(0)== 1, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{2}=[w(0)== 0, wd(0) == -1, w(l) == 0, wd(l) == 0];
equ{3}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 1, wd(l) == 0];
equ{4}=[w(0)== 0, wd(0) == 0, w(l) == 0, wd(l) == -1];

for i = 1:4
  coeff(i) = solve(equ{i},[c1,c2, c3, c4]);
end

for i = 1:4
  c(i,1) = simplify(coeff(i).c1);
  c(i,2) = simplify(coeff(i).c2);
  c(i,3) = simplify(coeff(i).c3);
  c(i,4) = simplify(coeff(i).c4);
end

phi = cell(4,1); % cell array

for i = 1:4
   phi{i} = c(i,1) * wh{1} + c(i,2) * wh{2}...
    + c(i,3) * wh{3} + c(i,4) * wh{4};
 end
```

Element matrix

```
for i = 1:4
  for j = 1:4
    Ke(i,j) = int(diff(phi{i},2)*diff(phi{j},2),[0,4])...
     + cB * int(phi{i}*phi{j},[0,4]);
  end
end
Ke
```

```
Ke = 4x4
    0.3325   -0.4558   -0.1393   -0.3283
   -0.4558    1.0584    0.3283    0.4567
```

```
-0.1393    0.3283    0.3325    0.4558
-0.3283    0.4567    0.4558    1.0584
```

Stiffness matrix

```
K(1:4,1:4) = Ke;
K(3:6,3:6) = K(3:6,3:6) + Ke;
K(5:8,5:8) = K(5:8,5:8) + Ke;
```

Load vector

```
r = zeros(1,8); r(3) = 10; r(4) = 10;
u = K\r';
Tabelle.u = u';
T = struct2table(Tabelle)
```

u							
5.9737	-6.6878	20.7913	6.5157	0.8272	2.0830	-2.0252	0.2299

download code

10.7 Seil mit finiten Elementen

Zum Schluss soll ein Seil zeigen, siehe Bild 10.6, wie man *hat-functions* in MATLAB als `triangularPulse` implementiert und wie man mit finiten Elementen Funktionen ‚interpolieren' kann.

Auf der Strecke $[0, 5]$ ist die Funktion $w(x) = x\,(x-5)\,\sin(2\,\pi\,x/L)$ mit den Randwerten $w(0) = w(L) = 0$ stückweise linear zu interpolieren. Dazu belasten wir ein Seil mit der Streckenlast $p(x) = -w(x)''$.

```
clear, clf, syms x w(x) p(x); L = 5;  elements = 10;

w(x) =  x * (x-5) * sin(x*2*pi/L) % <-- Original
p(x) =-diff(w,2);   % <-- Belastung

[f, nodes, deltax, xN] = NodalForces(p,L,elements);

K = elements/L * toeplitz([2,-1 zeros(1,nodes-4)]);

u = K\f; u = [0, u', 0];
```

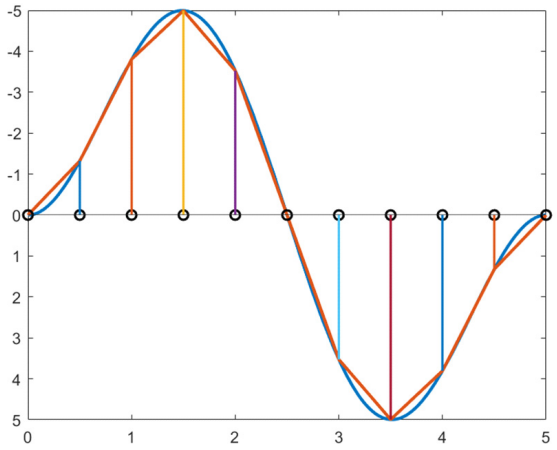


Bild 10.6. Interpolation mit linearen Elementen

```
fplot(w,[0,5],'LineWidth',2), axis ij, hold on

plot(xN,u,'LineWidth',2), yline(0); axis ij, hold on
plot(xN,0,'ko')
for k = 1:nodes - 1
  plot([xN(k) xN(k)],[0 u(k)]);
end
```

Hilfsfunktion (Unterprogramm in den *code* eingebettet)

```
function [f, nodes, deltax, xN] = NodalForces(load,L,elements)

syms x, nodes = elements + 1; deltax = L/elements;

xN = zeros(1,nodes); f = zeros(nodes-2,1);

% Koordinaten der Knoten
for k = 1:nodes,  xN(k) = deltax * (k-1); end

%Shape functions der Innenknoten
phi = cell(nodes,1); % cell array

for k = 2:nodes-1 % hat functions
  phi{k} = triangularPulse(xN(k-1),xN(k+1),x);
end
```

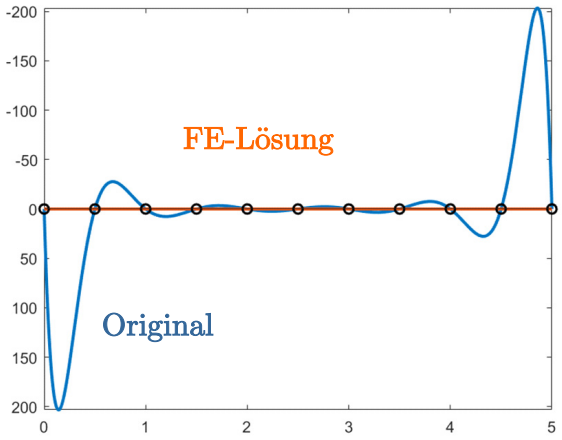


Bild 10.7. Weil das Original in allen Knoten durch null geht, sind alle $f_i = 0$ und $\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ hat die Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

```
%Knotenkraefte
for k = 2:nodes-1
  f(k-1) =  int(load*phi{k},[0,L]);
end
end % end function
```

Und wenn die Funktion $w(x)$, wie in Bild 10.7, in allen Knoten durch null geht, dann sind alle $f_i = 0$,

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -w''\,\varphi_i\,dx = -[w'\,\varphi_i]_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} w'\varphi_i'\,dx - [w'\,\varphi_i]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} w'\varphi_i'\,dx = -w'(x_i)\cdot 1 + w'(x_i)\cdot 1 = 0\,, \tag{10.13}$$

weil $\varphi_i' = \pm 1/l_e$ eine Konstante ist, das Integral von w' die Differenz der Endwerte ist, $w(x_i) - w(x_{i-1}) = 0$, und $\varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = 0$ ist.

Weil die Greenschen Funktionen der Knoten in $\mathcal{V}_h$ liegen, ist die Interpolation in den Knoten im übrigen exakt, siehe Bild 10.6.

download code

11

Nachwort

Der Gedanke, ein solches Buch zu schreiben, beschäftigte uns schon längere Zeit, aber den endgültigen Ausschlag gab dann ein eher zufälliger Blick in ein Statikskriptum, in dem der Autor die Einflussfunktion für ein Biegemoment herleitete und dies auf eine (aus mathematischer Sicht) eher wunderliche Weise.

Um Balkenstatik und Anschauung unter einen Hut zu bringen, musste er, für unser Empfinden, die Anschauung schon arg strapazieren.

Unsere Kritik und unser Standpunkt wird sicherlich nicht von allen Kollegen geteilt, deswegen haben wir sie auch hier in den Anhang verbannt, weil wir hier mehr Raum haben, unsere Sicht der Dinge darzulegen und wir hoffen zumindest Verständnis für unseren Standpunkt zu wecken. Diese Diskussion mag im Nachhinein auch unseren etwas axiomatischen Zugang rechtfertigen. Wir wollten Klarheit!

Virtuelle Arbeit ist ein Konzept der Analytischen Mechanik bzw. der Technischen Mechanik und bezeichnet sowohl die Arbeit, die eine Kraft an einem System bei einer virtuellen Verschiebung verrichtet, als auch die Arbeit, die eine virtuelle Kraft an einer realen Verschiebung leistet. Unter einer virtuellen Verschiebung versteht man eine Gestalt- oder Lageänderung des Systems, die mit den Bindungen (z. B. Lager) verträglich und „instantan", sonst aber willkürlich und außerdem infinitesimal klein ist. Das Prinzip der virtuellen Arbeit resultiert aus dem Prinzip der virtuellen Leistung und wird ebenso zur Berechnung des Gleichgewichts in der Statik und zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen (d'Alembertsches Prinzip) verwendet.

So wird in *Wikipedia* der Begriff der virtuellen Arbeit eingeführt, [225]. In ähnlichen Sätzen wird das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, der *Energieerhaltungssatz* und das *Prinzip der virtuellen Kräfte* beschrieben.

Aber was ist bitte *‚infinitesimal klein'*. Und wie passt zu dieser Forderung, dass die folgende Gleichung, die ja doch angeblich auf dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* beruht

$$\delta W_e = \int_0^l p\,\delta w\,dx = \int_0^l \frac{M\,\delta M}{EI}\,dx = \delta W_i, \tag{11.1}$$

auch richtig ist, wenn der Balken von der Verrückung $\delta w = \sin(\pi\,x/l)$ an der maximalen Stelle um einen Meter ausgelenkt wird.

Und wieso kann man – das ist eigentlich das Problem – numerische Ergebnisse, wie die Gleichheit der beiden obigen Integrale, mit Prinzipien der Mechanik beweisen? Nur wenige Ingenieure verstehen überhaupt, dass diese Frage doch berechtigt ist.

Denn man kann Sätze in einem Gebiet A (der Mathematik) nicht mit Sätzen aus einem Gebiet B (der Mechanik) beweisen. Das geht logisch nicht, wenn auch Ingenieure immer wieder dazu tendieren, weil ihnen die Arbeits- und Energieprinzipe der Statik lieb und teuer sind, wie das folgende Zitat aus einer Korrespondenz mit einem Kollegen belegen mag:

‚Die Energie- und Arbeitssätze sind Naturgesetze und daher fundamental. Denn wenn der Energieerhaltungssatz nicht gelten würde, könnte man bei jeder Formänderung eines Tragwerks Arbeit bzw. Energie gewinnen: ein perpetuum mobile! Diese Sätze haben also zuerst einmal nichts mit der Mathematik zu tun, sondern bestehen an sich.’

Und weil sie nichts mit der Mathematik zu tun haben, so unsere Antwort, kann man mit ihnen kein mathematisches Ergebnis beweisen.

Die Eleganz der Mechanik, ihre Geschlossenheit, ihr innerer Reichtum, der ja nirgends so sichtbar wird, wie bei der mathematischen Formulierung, verführt Ingenieure dazu, mathematische Resultate aus mechanischen Prinzipien ‚herzuleiten‘, was aber nicht geht.

Unsere Bemühungen um ein besseres Verständnis der Grundlagen quittierte ein Kollege einmal mit dem Satz: *‚Den Satz von Land kennt jeder Ingenieur, aber die zweite Greensche Identität?’* Was doch eigentlich nur beweist, dass der Kollege noch nie versucht hat, den Satz von Land herzuleiten, denn der Satz von Land beruht auf der zweiten Greenschen Identität. Mit der zweiten Greenschen Identität kann man die Ableitungen wie $M(x) = -EIw''(x)$ oder $V(x) = -EIw'''(x)$ einer Funktion $w(x)$ berechnen, und das gilt auch, wenn $w(x)$ eine Zinskurve oder die Wasserstandslinie oder sonst eine Funktion ist. Man darf doch nicht den Kontext für den Grund nehmen.

Die Gründungsväter der Statik müssen sehr gut Mathematik gekonnt haben, denn es gab ja noch keinen *Mohr*, keinen *Müller-Breslau*, dem man hätte über die Schulter schauen können. Man musste alles selbst herleiten und das ging nur auf mathematischem Wege, [132].

Nachdem aber das Grundgerüst stand, entdeckte man, wie sich fast spielerisch aus der Integralform des Gleichgewichts

$$\int_0^l EI\,w^{IV}\,\delta w\,dx = \int_0^l p\,\delta w\,dx \tag{11.2}$$

Integralsätze ergaben, die wir heute das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, das *Prinzip der virtuellen Kräfte* und den *Energieerhaltungssatz* nennen. Und

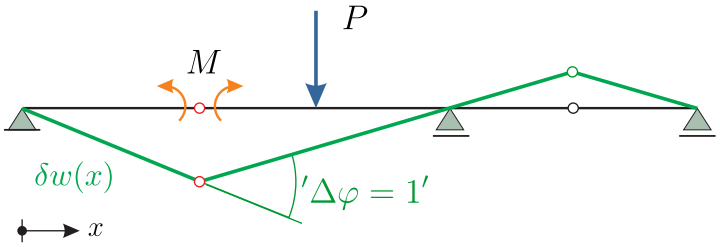


Bild 11.1. Einflussfunktion für ein Moment

das passte alles so wunderbar zueinander, dass diese Prinzipe heute nach Meinung der Ingenieure das Fundament der Statik darstellen. Wenn der Ingenieur eine Gleichung auf das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* zurückgeführt hat, dann hat er seiner Meinung nach die Gleichung bewiesen.

Solche Tendenzen haben auch den Gründungsvätern der Statik das Leben schwer gemacht. Es war Neuland und auf den Pionieren, die ja alle im Eisenbahn-Brückenbau arbeiteten, ruhte eine große Verantwortung und so suchten sie nach Rückversicherung an und in höheren Prinzipen und das führte zu langen Diskussionen, [133].

Auch für uns ist $\delta W_e = \delta W_i$ die Grundgleichung, aber wir identifizieren sie mit der ersten Greenschen Identität, $\mathscr{G}(u, \delta u) = \delta W_e - \delta W_i = 0$.

Das Problem sind die Ingenieure, die das $\delta W_e = \delta W_i$ verstanden haben, aber vergessen haben, wie man mittels partieller Integration dorthin gekommen ist und so werden aus Formeln ‚Naturgesetze'.

Jeder wird sich seine eigenen Gedanken darüber machen, wie die Grundgleichungen aus der Anschauung entstehen, und ob nicht die Identitäten einfach das wieder herausholen, was der Statiker bei der Formulierung des Gleichgewichts implizit hineingesteckt hat, aber dann sollte man den Studenten doch auch eine Möglichkeit geben mitzudenken.

Warum dreht man im Studium das ganze nicht um? Erst leitet man mittels partieller Integration aus $EI\, w^{IV} = p$ die Gleichung $\delta W_e = \delta W_i$ her – das verstehen die Studenten und sie sind mit im Boot – und dann formuliert man den obigen ‚Überbau'. Aber so wird die Gleichheit zweier Integrale, $\delta W_e = \delta W_i$, aus Variationsprinzipen hergeleitet, aus ‚höheren Prinzipen', und der Student sitzt zu Hause und rätselt: *Was sind diese Prinzipe? Sind es Naturgesetze, Rechenregeln, Erfahrungssätze?*

Die Schieflage, in die die Statik und die Mechanik auf diese Art und Weise gekommen ist, erkennt man am besten an dem Thema virtuelle Verrückungen. *‚Virtuelle Verrückungen müssen klein sein, oder, besser noch, infinitesimal klein sein'*. Wir haben auch schon gelesen, dass virtuelle Kräfte angeblich klein sein müssen.

Zu welchen ‚Umwegen' das teilweise führt, möge das folgende Beispiel aus einem Statikskript belegen, in dem die Einflussfunktion für ein Moment hergeleitet wird.

Der Autor baut hierzu ein Momentengelenk ein, fügt zum besseren Verständnis eine Zeichnung hinzu, siehe Bild 11.1, in der er die durch eine Spreizung ‚$\Delta\varphi = 1$' ausgelöste virtuelle Verrückung anträgt, aber gleich darauf aufmerksam macht, dass die Zeichnung die Situation so darstelle, ‚wie man sie durch eine Lupe' sehe, denn in Wirklichkeit seien die Verrückungen infinitesimal klein. Seine Analyse führt ihn dann auf das Ergebnis

$$W_{1,2} = M \cdot \Delta\varphi + P \cdot \delta w(x) = 0 \tag{11.3}$$

oder aufgelöst nach $M = -P \cdot \delta w(x)/\Delta\varphi$ womit sich

$$\beta(x) = \frac{\delta w(x)}{\Delta\varphi} = \frac{\delta w(x)}{1} \tag{11.4}$$

als die gesuchte Einflussfunktion ergibt. Hierzu bemerkt der Autor: ‚Zwar ist $\delta w(x)$ infinitesimal klein, aber der Quotient β ist endlich groß, da sich die virtuellen Verrückungen bei der Division herauskürzen.'

Nun lautet die mathematische Definition der Spreizung ‚$\Delta\varphi = 1$'

$$\Delta\varphi = \tan\,\varphi_l + \tan\,\varphi_r = 1\,, \tag{11.5}$$

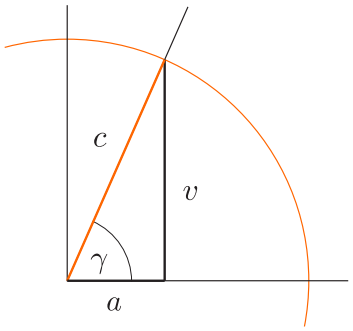
und wenn man die Endtangenten derart verdreht, dann ist $\delta w(x)$ nicht mehr ‚klein', und auch nicht beliebig skalierbar, weil es ja doch nur eine Kurve $\delta w(x)$ gibt, die die Bedingung (11.5) erfüllt und gleichzeitig die Lagerbedingungen des Trägers einhält!

Was der Autor wahrscheinlich meint ist, dass man das Gelenk beliebig spreizen kann, solange man nicht vergisst, die dadurch ausgelöste Verrückung des Balkens $\delta w(x)$ durch die Größe der Spreizung $\Delta\varphi = \tan\,\varphi_l + \tan\,\varphi_r$ zu dividieren. Dann bleibt das Ergebnis $\beta(x) = \delta w(x)/\Delta\varphi$ immer gleich, weil die Balkengleichung $EI\,w^{IV}(x)$ linear ist und dann kann δw beliebig groß oder klein sein; aber es geht natürlich auch ohne Lupe, siehe Kapitel 2.3.2.

Das Grundproblem ist die Interpretation der Gleichungen. Geht es um die statische Bedeutung oder um den mathematischen Gehalt?

Bei einer Diskussion mit einem Kollegen hat der zweite Autor einmal vorgeschlagen, man könnte ja die Gleichung, über die diskutiert wurde, mit einer beliebigen Zahl multiplizieren. Worauf der Kollege den Kopf zur Seite neigte, die Augen zur Zimmerdecke richtete und einwand: *‚Das können Sie nicht, die Zahl muss sehr klein sein, eben eine virtuelle Verrückung, ansonsten kann man das nicht!'* Der Kollege hat die Mechanik hinter der Gleichung gesehen, aber nicht die Mathematik. Zu einem mathematischen Gedankenexperiment (nur darum ging es), war er nicht bereit.

Statische Probleme werden mit mathematischen Hilfsmitteln gelöst. Aber anders als der Mathematiker, der nie den Kreis seiner abstrakten Symbole



$$a^2 = c^2 - v^2$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Bild 11.2. Der *cosinus* des Winkels γ ist für die Effekte der speziellen Relativitätstheorie verantwortlich

verlässt, muss der Ingenieur diese Grenze überschreiten und die Mathematik auf reale Probleme anwenden. Das ist ein schwieriger Prozess, aber die Belohnung ist immens. Dass es möglich ist, mit Mathematik reale Probleme zu lösen, ist ein Wunder, wie *Eugene Wigner* erstaunt bemerkt hat, [221].

Euler fand die Knicklast einer frei stehenden Stütze

$$P_{krit} = \frac{\pi^2\, EI}{4\, l^2}\,, \tag{11.6}$$

indem er den kleinsten Eigenwert $\lambda > 0$ einer Differentialgleichung bestimmte, aber es ist dann der Ingenieur, der den Mut haben muss, dieses mathematische Ergebnis auf die Wirklichkeit zu übertragen, Stützen danach zu dimensionieren.

Aus mathematischer Sicht ist *Heisenbergs Unschärferelation* eine Eigenschaft der *Fouriertransformation*, aber das wahre Wunder ist, dass sie in der Welt um uns herum, in der Quantenwelt, gilt und die vielen Diskussionen, die die neue Quantenmechanik ausgelöst hat, sind ein Hinweis, dass die Frage nach dem ***Sein***, dem ‚***Was ist?***‘ – die in der Mathematik nie vorkommt(!) – von fundamentaler Bedeutung für den Physiker und den Ingenieur ist.

Angenommen man erfindet spielerisch einen Satz von Regeln (Axiomen) und man weiß nicht, ob diese Regeln vollständig und widerspruchsfrei sind und plötzlich entdeckt man physikalische Objekte, die sich genau an diese Regeln halten. Würde das ein Mathematiker als ein Beweis für Konsistenz und Vollständigkeit gelten lassen?

Die Abtriebskraft an einem Hang ist eine Funktion des *sinus* des Hangwinkels φ

$$F = m \cdot g \cdot \sin\varphi \tag{11.7}$$

und so kommt es, dass eine nichtlineare Funktion die Erosion der Hänge in den Gebirgen bestimmt.

Oder man nehme die *Lorentz Kontraktion* $l \to l'$ eines Objektes, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cdot \cos\,\gamma \tag{11.8}$$

und die *Zeitdehnung* $t \to t'$, die dazu gehört[1]

$$t' = t \cdot \frac{1}{\cos\,\gamma}\,. \tag{11.9}$$

Beide Ausdrücke hängen von dem *cosinus* des Winkels γ ab, siehe Bild 11.2,

$$\cos\,\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \ldots \tag{11.10}$$

Was hat Trigonometrie mit spezieller Relativitätstheorie zu tun? Die Physiker erklären uns, dass die Genauigkeit des GPS-Systems von diesen Korrekturen abhängt.

Es ist dieses enge Wechselspiel zwischen Physik und Mathematik, das es dem Ingenieur schwer macht, beides sauber zu trennen.

Aber gute Statik hat gute Mathematik nötig. Wie oft sind wir nicht gezwungen anzuerkennen, dass mathematische Fehler entsprechende Fehler in den Berechnungen zur Folge haben. *Garbage in, garbage out*, wie man im englischen sagt. Anscheinend existiert eine unterirdische Verbindung zwischen den Computern und der Mathematik. Computer honorieren gute Mathematik.

Um diese enge Verbindung zwischen Mathematik und Statik sichtbar zu machen, haben wir die ersten Kapitel dieses Buches mit einem relativ spitzen Bleistift geschrieben. Unsere Absicht war dabei nicht, die Statik zu einem Zweig der Mathematik zu machen, sondern das Ziel war, die Grundlagen der Statik besser zu verstehen.

Praxis braucht Theorie, sie ergänzen einander. Diese Isostasie ist jedoch, wenn wir uns hier diese Bemerkung erlauben dürfen, in Gefahr zu kippen, weil inzwischen immer aufwendigere Nachweise dem Ingenieur das Leben schwer machen, [187]. Die heutige **Regulierungswut** und die von den Normen immer exzessiver gepflegte **Reinraumkultur** sind im Grunde ein Missbrauch der Wissenschaften, sie schaden der Wissenschaft: Sie wird zum Gespött in den Augen des Praktikers.

Die Professoren haben *wikipedia* gekapert. Viele mathematische Artikel sind inzwischen unlesbar[2]. Und der Eurocode? So lobenswert (und auch anstrengend) das Bemühen ist, den Stand des Wissens zu kanonisieren, am Ende

[1] Auch in der Statik gibt es den $1/\cos\,\gamma$-Effekt. Wenn man einen Fahnenmast am Kopf, Last $H = 1$, abspannt und der Fusspunkt des Seils rückt gegen den Fahnenmast, $\gamma \to \pi/2$, dann reißt irgendwann das Seil, denn $S = 1/\cos\,\gamma$

[2] siehe z.B. den Satz von Stokes (7. 4. 2021)

macht der Eurocode auf uns den Eindruck, dass er von Spezialisten (mit Dauerstellen) für verbeamtete Ingenieure (mit Dauerstellen) geschrieben wurde.

Damit aber genug der Schelte, zurück zu dem Thema dieses Kapitels!

Der Satz von Castigliano

Wie sich Mathematik und Anschauung in die Quere kommen können, macht in einer exemplarischen Weise der Satz von Castigliano deutlich. *Wikipedia* schreibt über den Satz von Castigliano, [226]:

Die partielle Ableitung der in einem linear elastischen Körper gespeicherten Formänderungsenergie nach der äußeren Kraft ergibt die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes in Richtung dieser Kraft.

Aber die Formänderungsenergie eines elastischen Körpers, der eine Einzelkraft trägt, ist unendlich groß, und daher kann man keine Ableitung berechnen und auch die Verschiebung v_k des Kraftangriffspunktes ist unendlich groß, wie man an *Sobolevs Einbettungssatz* ablesen kann. Der Satz von Castigliano gilt zwar für Stabtragwerke, aber für 2-D und 3-D Probleme, wozu auch elastische Körper gehören, gilt er, mit Ausnahme der Kirchhoff-Platte, nicht. Der Nachsatz *‚wenn die Energie endlich ist‘* würde als Korrektur ausreichen. (Sinngemäß dasselbe gilt für den *Satz von Menabrea* und den *Satz von Engesser*).

Wenn doch nur einer der vielen Autoren, die den Satz von Castigliano zitiert haben, sich die Mühe gemacht hätte, den Satz zu beweisen oder an einer Scheibe seinen Lesern einmal vorzurechnen!

Castigliano hat den nach ihm benannten Satz zunächst für Fachwerke aufgestellt und dann auf elastische Körper verallgemeinert, weil er sich einen solchen Körper als ein Fachwerk mit unendlich vielen Stäben dachte.

Natürlich klingt der Satz von Castigliano so schön, dass man ihn allein schon deswegen für richtig hält, aber Castigliano's Schluss vom Fachwerk auf elastische Körper ist eben voreilig. Man kann nicht mathematische Ergebnisse aus Sätzen der Mechanik herleiten!

Auch dann nicht, wenn die Sätze *Energieerhaltungssatz* oder *Prinzip der virtuellen Verrückungen* heißen. Diese Sätze haben keine Autorität im Gebiet der Mathematik. Und *Rechnen* in der Statik ist doch angewandte Mathematik. Hinter jeder Zahl im Ausdruck oder auf dem Bildschirm steht ein mathematisches Gesetz. Welche Fülle von statischen Details erschließt die Mathematik nicht in den Händen eines geschickten Ingenieurs, man lese nur die Bücher von *Karl Girkmann* und *Christian Petersen*!

Wir wollen mit einem Zitat von Robert Taylor, dem Co-Autor von O.C. Zienkiewicz schließen, [205]. Robert Taylor kann man sicherlich nicht vorwerfen die Mathematik ihrer selbst wegen zu pflegen, dazu ist er viel zu sehr Ingenieur, aber es war auf einer Tagung in den USA, wo er vor dem Plenum verkündete

The principle of virtual displacements is nothing else than integration by parts.

Dass Robert Taylor den Mut hatte, das ‚vor versammelter Mannschaft' zu sagen und dass er meinte, es sagen zu müssen, hat uns wiederum Mut gemacht, dieses Buch zu schreiben.

12

Software

Die folgenden Programme stehen im *download* zur Verfügung:

BE-LAPLACE	Poisson Probleme
BE-PLATTE	Plattenprogramm
BE-SCHEIBE	Scheibenprogramm
BE-FRAMES	Ebene Rahmen
WINFEM	einfaches Scheibenprogramm
WINFEM-P	einfaches Plattenprogramm

Die ersten drei Programme basieren auf der Methode der Randelemente. Viele der Zeichnungen in diesem Buch wurden mit diesen drei Programmen erstellt, weil man mit Randelementen glattere Verläufe erhält, was ja gerade bei der grafischen Darstellung erwünscht ist.

Auf http://www.winfem.de/software.htm und http://www.be-statik.de liegen **englischsprachige** Versionen der Programme.

Das vierte Programm BE-FRAMES ist ein englischsprachiges Lehr-Programm zur Berechnung von ebenen Rahmen mit Focus auf der Darstellung von Einflussfunktionen. Dieses Programm demonstriert ferner die Anwendung der ***one-click-reanalysis***, siehe Kapitel 5.32, bei der man mit einfachen Mausklicks Stäbe entfernen kann oder in ihrer Steifigkeit modifizieren kann, ohne dass die Steifigkeitsmatrix neu aufgestellt werden muss.

Die WINFEM-Programme sind Programme zur Berechnung von Scheiben und Platten mit Focus auf der Berechnung von Einflussfunktionen, siehe z.B. 3.35, 3.36, 3.54, 3.62, 3.106, 3.113, 3.114, 4.12, 4.13, 4.15, 4.16, 4.18. Das Scheibenprogramm rechnet auf Wunsch adaptiv, 3.120. Beide Programme können den Lastfall p_h darstellen, siehe z.B. 3.17, 3.21.

Autor von WINFEM ist Prof. Dr.-Ing. T. Grätsch, thomas.graetsch@haw-hamburg.de.

Ergänzungen: Prof. Dr.-Ing. D. Materna, daniel.materna@hs-owl.de

Handbücher

BE-LAPLACE
BE-PLATTE
BE-SCHEIBE
BE-FRAMES
WINFEM

Weitere Informationen siehe http://www.be-statik.de

Literatur

1. Abdelkhalak EH, Bouchaib R (2017) Dynamics of Large Structures and Inverse Problems. Wiley ISTE
2. Abu Kassim AM, Topping BHV (1987) "Static reanalysis: a review" , J. Structural Engrg. 113:1029-1045
3. Akgun MA, Garcelon JH, Haftka RT (2001) "Fast Exact Linear and Non-linear Structural Reanalysis and the Sherman-Morrison-Woodbury Formulas" , Int. J. Num. Methods Eng. 50(7): 1587-1606
4. Altenbach H, Altenbach J, Kissing W (2004) Mechanics of Composite Structural Elements. Springer, Heidelberg
5. Altenbach H, Altenbach J, Naumenko K (2016) Ebene Flächentragwerke. Springer, Heidelberg, 2. Auflage
6. Alastuey A, Clusel M, Magro M, Pujol P (2016) Physics and Mathematical Tools. World Scientific Publishing
7. Arora S (1976) "Survey of Structural Reanalaysis Techniques" , ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 102:783-802
8. Baar S (2015) Lohmeyer Baustatik 1, Lohmeyer Baustatik 2. Springer, Heidelberg
9. Babuška I (1997) Der Doktorand war Roland Maucher, Ort: Cafeteria der Bauhaus-Universität in Weimar, IKM-Tagung, siehe S. 79
10. Babuška I, Strouboulis T (2001) The Finite Element Method and its Reliability. Oxford University Press
11. Babuška I, Andersson B (2005) "The splitting method as a tool for multiple damage analysis" , SIAM J. Sci. Comput. Vol 26, 4, 1114-1145
12. Babuška I, Whiteman JR, Strouboulis T (2011) Finite Elements, An Introduction to the Method and Error Estimation. Oxford University Press
13. Bangerth W, Rannacher R. (2003) Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations. Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin
14. Barth C, Walter R (2013) Finite Elemente in der Baustatik-Praxis. Beuth
15. Başar Y, Krätzig WB (1985) Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg & Sohn
16. Bathe K-J (1996) Finite Element Procedures. Prentice Hall, New Jersey
17. Bebr A (1971) "Einflusslinien torsionssteifer Trägerroste" , Bautechnik 48, 7, 233-237
18. Belytschko T, Wing Kam Liu, Moran B, Elkhodary KI (2014) Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Wiley
19. Benvenuto E (1981) La Scienza delle Costruzioni e il suo Sviluppo Storico. Sansoni, Firenze
20. Beyer K (1927) Die Statik im Stahlbetonbau. Reprint Springer, Heidelberg 1987
21. Bing Images, I-40 Hernando DeSoto Bridge Tennessee, I-40
22. Bischoff MR (2010) "Statik am Gesamtmodell: Modellierung, Berechnung und Kontrolle" . Der Prüfingenieur 36, 27-34
23. Bletzinger KU, Dieringer F (2014) Aufgabensammlung zur Baustatik: Übungsaufgaben zur Berechnung ebener Stabtragwerke. Hanser Verlag
24. Blaauwendraad J (2010) Plates and FEM. Springer, Heidelberg
25. Block P, Gengnagel C (2015) Faustformel Tragwerksentwurf. DVA
26. Boborykin VG (2012) "Green's function for Kirchhoff plates of irregular shape" . Engineering Analysis with Boundary Elements 36, 613-625
27. Bochmann F, Kirsch W (2011) Statik im Bauwesen. Huss Medien
28. Bohn C, Vogt N (2018) "Lasttransfermethode zur Berechnung von Gründungen und Baugrundverbesserung mit starren Säulen" . Bautechnik 95, H. 9, 597-606

29. de Borst R, Crisfield MA, Remmers J, Verhoosel C (2014) Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von Festkörpern und Strukturen. Wiley VCH
30. Bouma A L (1993) Mechanik schlanker Tragwerke. Springer, Heidelberg
31. Busch W (1982) Das grosse Wilhelm Busch Hausbuch. Südwest Verlag München, Bild 1.6
32. Carl O, Zhang C (2010) "Static and dynamic analysis of cracked or weakened structures" , Proc. Appl. Math. Mech. 10:145–146
33. Carl O (2011) Statische und dynamische Sensitivitätsanalysen von geschädigten Tragwerken mit Greenschen Funktionen, Dissertation Universität Siegen
34. Carl O, Villamil P, Zhang C (2011) "Stress and free vibration analysis of functionally graded beams using static Green's functions" , Proc. Appl. Math. Mech. 11, 199–200
35. Carl O, Hartmann F, Zhang C (2017) "Schnelle Berechnung von Änderungen und Varianten bei komplexen Tragsystemen (3D-Modellen) - Neue Ansätze in der Baustatik unter Verwendung von Einflussfunktionen" , Stahlbau (März 2017) 217-224
36. Carl 0, Hartmann F, Zhang C (2021) Reanalysis of structures with varying cross-sectional values based on influence functions.. PAMM - Proc. Appl. Math. Mech. 2021;21:1 e202100106m. Wiley-VCH,
37. Choi KK, Kim N-H (2005) Structural sensitivity analysis and optimization. Vol. 1, Linear Systems, Vol.2, Nonlinear systems and applications. Springer, New York
38. Çirak F, Ramm E (2000) "A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem" , Int. J. Num. Methods in Eng. 47:379–393
39. Clough RW, Penzien J (2003) Dynamics of Structures. McGraw Hill. 3. Aufl.
40. Clough RW, Wilson EL (1999) Early Finite Element Reasearch at Berkeley. Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999
41. Connor J (1976) Analysis of Structural Member Systems. The Ronald Press Company (enthält viel Differentialgeometrie)
42. Connor J, Faraji S (2012) Fundamentals of Structural Engineering. Springer New York
43. Connor J, Laflamme, S (2014) Structural Motion Engineering. Springer, Heidelberg
44. Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y (2009) Isogeometric analysis : toward integration of CAD and FEA. Wiley
45. Dallmann R (2015) Baustatik 1, 2, 3. Hanser Verlag
46. Deif A (1986) Sensitivity Analysis in Linear Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
47. Dhatt G, Touzot G, Lefrançois (2012) Finite Element Method. ISTE, Wiley
48. Dieringer R (2014) Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten mit besonderem Fokus auf der Ermittlung von Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben. Dissertation TU Darmstadt
49. Dinkler D (2014) Grundlagen der Baustatik. Springer, Heidelberg
50. Duhamel D (2007) "Finite element computation of Green's function" . Engineering Analysis with Boundary Elements 31, 919-930
51. Ebel H (1979) "Zur Berücksichtigung von Verformungslastfällen in den Reziprozitätssätzen von Betti, Maxwell und Krohn-Land" , Stahlbau 49, Heft 5, 137-140
52. Fastabend M (2002) "Zur ingenieurmäßigen Bestimmung des Steifigkeitsabfalls von Stahlbeton im Zustand II" . Beton- und Stahlbetonbau 97, Heft 8, 415-420

53. Fastabend M, Schäfers T, Albert M, Lommen H-G (2009) "Zur sinnvollen Anwendung ganzheitlicher Gebäudemodelle in der Tragwerksplanung von Hochbauten" . Beton- und Stahlbetonbau 104, Heft 10, 657-663
54. Franck SA (2016) Zum Tragsicherheitsnachweis bestehender Mauerwerksgewölbebrücken mittels nichtlinearer Finite-Elemente-Simulationen. Dissertation Universität Hannover
55. Franke W, Kunow T (2007) Kleines Einmaleins der Baustatik. Kassel University Press
56. Fingerloos F, Hegger J, Zilch K (2012) Kurzfassung des EUROCODE 2 für Stahlbetontragwerke im Hochbau. Ernst & Sohn
57. Fuchs, M B (2016) Structures and Their Analysis. Springer, Heidelberg
58. Fußeder M, Wüchner R, Bletzinger K-U (2021) "Sensitivitätsanalyse mit verallgemeinerten Einflussfunktionen zur Tragwerksbewertung bei Modellparametervariationen" . Bauingenieur, Bd. 96, Nr. 6, 191-200
59. Fußeder M, Bletzinger K-U (2021) "Sensitivitätsanalysen unterstützen die Auslegung statischer Systeme und können Sicherheitsrisiken aufdecken" . Der Prüfingenieur 59, 48-55
60. Gaul L, Fiedler C (2013) Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. Springer, 2. Auflage
61. Ghali A (2009) Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach. Taylor & Francis Ltd.
62. Gimsing NJ, Georgaki CT (2012) Cable Supported Bridges. Wiley
63. Girkmann K (2013) Flächentragwerke. Springer Wien, Nachdruck der 6. Auflage von 1986
64. Goebbels S (2015) An Inequality for Negative Norms with Applications to Error of Finite Element Methods. Technischer Bericht FB Elektrotechnik und Informatik Nr. 2015-02 Hochschule Niederrhein, ISSN 2199-031X
65. Golub GH, van Load CF (2013) Matrix Computations, 4th ed. The John Hopkins University Press Baltimore
66. Gopalakrishnan S, Ruzzene M, Hanagud S (2011) Computational Techniques for Structural Health Monitoring. Springer, Heidelberg
67. Graf W, Vassilev T (2006) Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik. Ernst & Sohn
68. Grätsch T, Hartmann F (2000) "Zum Gleichgewicht bei finiten Elementen" , Bautechnik 77, 30-36
69. Grätsch T, Hartmann F, Katz, C (2004) "Einflussfunktionen und finite Elemente" , Bauingenieur 11, 489-497
70. Grätsch T, Hartmann F (2006) "Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions" , Computational Mechanics, 37, 5, 394-407
71. Grätsch T, Hartmann F (2001) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 1: Scheiben" , Bautechnik 78, 327-332
72. Grätsch T, Hartmann, F (2003) "Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 2: Platten" , Bautechnik 80, 162-168
73. Grätsch T (2002) L_2-Statik. Dissertation Universität Kassel
74. Grätsch T, Hartmann F (2003) "Finite element recovery techniques for local quantities of linear problems using fundamental solutions" , Computational Mechanics, 33:15–21
75. Grätsch T, Hartmann F (2004) "Duality and Finite Elements" , Finite Elements in Analysis and Design, 40, 1005–1020

76. Grätsch T, Bathe KJ (2005) “Influence functions and goal-oriented error estimation for finite element analysis of shell structures” , Int. J. Num. Methods in Eng., 63(5), 631–788
77. Gruttmann F, Sauer R, Wagner W (2000) “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic behaviour” , Int. J. Num. Methods in Eng. 48: 1675–1702
78. Gurtin ME (1972) The Linear Theory of Elasticity, Handbuch der Physik Band VIa/2 Festkörpermechanik II, Ed. C. Truesdell, Series Ed. S. Flügge, Springer, Heidelberg
79. Häussler-Combe U (2014) Computational Methods for Reinforced Concrete Structures. Ernst & Sohn Berlin
80. Hager WW (1989) “Updating the inverse of a matrix” , SIAM Review, Vol. 31, No. 2, 221-239
81. Hake E, Meskouris K (2001) Statik der Flächentragwerke. Springer, Heidelberg
82. Hartmann F (1982) “The physical nature of elastic layers” , Journal of Elasticity, Vol. 12, 19-29
83. Hartmann, F, Pickhardt S (1985) “Der Fehler bei finiten Elementen” . Bauingenieur, 60, 1985, 463-468
84. Hartmann F (1985) The Mathematical Foundation of Structural Mechanics. Springer, Heidelberg
85. Hartmann F, (1986) Methode der Randelemente. Springer, Heidelberg
86. Hartmann F, (1989) Introduction to Boundary Elements. Springer, Heidelberg
87. Hartmann F, Maucher R (1997) “Zum Momentengleichgewicht bei Tragwerksberechnungen nach Theorie zweiter Ordnung” , Tagung IKM Weimar
88. Hartmann F, Jahn, P (1999) “Integral Representations for the Deflection and the Slope of a Plate on an Elastic Foundation” , Journal of Elasticity 56, 145-158
89. Hartmann F, Jahn P (2001) “Boundary Element Analysis of Raft Foundations on Piles” , Meccanica 36, 351-366
90. Hartmann F, Kunow T (2005) “The shift of Green’s functions and the domain of influence” , 2nd MIT Conference on Computational Fluids and Solid Mechanics
91. Hartmann F, Katz C (2010) Structural Analysis with Finite Elements, 2nd ed. Springer, Heidelberg
92. Hartmann F (2013) Green’s Functions and Finite Elements. Springer, Heidelberg
93. Hartmann F, Jahn P (2014) “Steifigkeitsänderungen bei finiten Elementen” , Bauingenieur 89, 209-215
94. Hartman F, Jahn P (2020) Statics and Influence Functions – From a Modern Perspective. 2nd ed. Springer, Heidelberg
95. Hartman F, Jahn P (2021) Statik und Einflussfunktionen – vom modernen Standpunkt, 5. Aufl., doi:10.17170/kobra-202103013388
96. Hartmann F, Katz C (2019) Statik mit finiten Elementen, 2. Aufl. Springer, Heidelberg
97. Harsuijker C, Welleman J W (1999) Engineering Mechanics. Springer, Heidelberg
98. Haug E J, Choi K K, Komkov V (1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press
99. Hirschfeld K (2006) Baustatik - Theorie und Beispiele. Springer, Heidelberg
100. Hoehland G (1957) Stützmomenten-Einflussfelder durchlaufender Platten. Springer, Heidelberg

101. Hofmann J (2021) “Normung im Bauwesen - Quo vadis?” Beton- und Stahlbetonbau 115, Heft 9, 641-641 (Editorial)
102. Höllig K (2003) Finite Element Methods with B-splines. SIAM
103. Holzer S (2015) Statische Beurteilung historischer Tragwerke, 1 und 2. Ernst & Sohn
104. Hon YC, Li M, Melnikov YA (2010) “Inverse source identification by Green’s function” . Engineering Analysis with Boundary Elements 34, 352-358
105. Hsiao GC, Wendland WL (2008) Boundary Integral Equations. Springer, Heidelberg
106. Internet (2021) Cloth simulation (vorgespanntes Tuch)
107. Irslinger J (2013) Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente Diss. Uni Stuttgart
108. Karnovsky IA, Lebed O (2010) Advanced Methods of Structural Analysis. Springer, Heidelberg
109. Katz C, Stieda J (1993) “Praktische FE-Berechnung mit Plattenbalken” . Bauinformatik 1/92 30-34
110. Katz C, Werner H (1982) “Implementation of nonlinear boundary conditions in finite element analysis” . Computers & Structures Vol. 15, No. 3, 299-304
111. Katz C (1995) “Kann die FE-Methode wirklich alles?” FEM 95 - Finite Elemente in der Baupraxis, Ed. E. Ramm, E. Stein, W. Wunderlich Ernst & Sohn, Berlin
112. Katz C (1986) “Berechnung von allgemeinen Pfahlwerken” . Bauingenieur 61 Heft 12
113. Katz C (1997) “Fließzonentheorie mit Interaktion aller Stabschnittgrößen bei Stahltragwerken” . Stahlbau 66, Heft 4, pp. 205-213, (1997)
114. Katz C (1996) “Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser” , in: Software für Statik und Konstruktion, Eds. C. Katz, B. Protopsaltis, A.A. Balkema Rotterdam, (1996)
115. Kellogg OD (1967) Foundations of Potential Theory. Springer, Heidelberg (reprint)
116. Kemmler R, Ramm E (2001) “Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente” , Beton-Kalender 2001. Ernst & Sohn Berlin
117. Kersten R (1962) Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Springer, Heidelberg, 2. Auflage
118. Kraus M, Kindmann R, (2020) Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau. Ernst & Sohn, 2. Auflage
119. Kirsch U (2008) Reanalysis of Structures. Springer, Heidelberg
120. Kirsch W (2019) Statik im Bauwesen. Beuth
121. Köppl C (2009) Einflusslinien und ihre Anwendung. Bachelor Projekt TU Graz
122. Kolář V (1970) “The Influence Functions in the Finite Element Method” , ZAMM 50 T 129–T 131
123. Kollár LP, Springer GS (2003) Mechanics of Composite Structures. Cambridge University Press
124. Kiener G, Wunderlich W (2004) Statik der Stabtragwerke. Teubner Verlag
125. Krätzig W B, Wittek U (1995) Tragwerke 1. Springer, Heidelberg
126. Krätzig W B, Harte R (2016) Tragwerke 2. Springer, Heidelberg
127. Krätzig W B, Başar Y (1997) Tragwerke 3. Springer, Heidelberg
128. Kraus M (2005) Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaus. Dissertation, Uni Bochum
129. Krings W (2015) Kleine Baustatik. Springer, Heidelberg

130. Krug S, Stein P (1961) Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten. Springer, Heidelberg
131. Kuna M (2008) Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. Vieweg + Teubner
132. Kurrer K-E (2016) Geschichte der Baustatik. Ernst & Sohn, 2. Auflage
133. Kurrer K-E (2018) The History of the Theory of Structures. Wiley Ernst & Sohn
134. Laggner TM, Schlicke D, Nguyen VT, Denk W-D (2021) (2021) "Statische Analyse mit linear elastischen 3D-Gebäudemodellen" . Beton- und Stahlbetonbau 116, Heft 5, 360–369, https://doi. org/10.1002/best.202000055
135. Laggner TM, Schlicke D, Nguyen VT, Denk W-D (2021) "Statische Analyse mit 3D-Gebäudemodellen unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen in den vertikalen Bauteilen" . Beton- und Stahlbetonbau 116, Heft 6, 419-430, https://doi.org/10.1002/best.202100017
136. Land R (1887) "Über die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen als Grundlage einer allgemeinen Darstellung der Einflusslinien aller Trägerarten, sowie einer allgemeinen Theorie der Träger überhaupt" . Wochenblatt für Baukunde, pp. 14-16, 24-25, 33-35 (Quelle nach Kurrer (2018))
137. Lawo M, Klingmüller O, Thierauf G (1980) Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik, 2 Bände. Vieweg
138. Lehmann C, Maurer B (2006) Karl Culmann und die graphische Statik. Ernst & Sohn
139. Link M (2014) Finite Elemente in der Statik und Dynamik. Teubner Verlag, 4. Auflage
140. Lumpe G, Gensichen V (2014) Evaluierung der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software. Ernst & Sohn
141. Mann W (1997) Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre. Teubner-Verlag
142. Materna D, Barthold FJ (2008) On Variational Sensitivity Analysis and Configurational Mechanics. Computational Mechanics 41(5):661–681.
143. Marti O (2020) Mechanik (Hilfe bei Transformationen und beim Umrechnen)
144. Marti P (2014) Baustatik: Grundlagen–Stabtragwerke–Flächentragwerke. Ernst & Sohn, 2. Auflage
145. Mehlhorn G, (1995) Der Ingenieurbau, 9 Bde, Baustatik/Baudynamik. Ernst & Sohn
146. Melchers RE, Beck A (2018) Structural Reliability Analysis and Predicition. Wiley 3rd edn.
147. Melchers R, Hough R (2007) Modeling Complex Engineering Structures. ASCE Press ISBN (print): 978-0-7844-0850-6ISBN (PDF): 978-0-7844-7153-1
148. Merkel M, Öchsner A (2015) Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode. Springer, Heidelberg
149. Meskouris K, Butenweg C, Haker E, Holler S (2005) Baustatik in Beispielen. Springer, Heidelberg
150. Meskouris K (2009) Statik der Stabtragwerke: Einführung in die Tragwerkslehre. Springer, Heidelberg
151. Moler C (2019) interp_gadget, MATLAB Central File Exchange. Retrieved January 2, 2019.
152. Mörsch E (1947) Statik der Gewölbe und Rahmen, Teil A und Teil B, Wittwer Stuttgart

153. Müller-Breslau H (1927) Die graphische Statik der Baukonstruktionen. (3 Bände) Band I, Band II 1. Abteilung, Band II 2. Abteilung. Alfred Kröner Verlag Leipzig, später Stuttgart, 6. Auflage
154. Müllers I (2007) Zur Robustheit im Hochbau – Stützenausfall als Gefährdungsbild für Stahlbetontragwerke. Dissertation ETH Zürich
155. Mukherjee S, Mukherjee YX (2005) Boundary Methods, Elements, Contours and Nodes. Taylor & Francis
156. Nasdala L (2015) FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. Springer, Heidelberg
157. Oechsner A (2020) Partial Differential Equations of Classical Structural Members. Springer, Cham
158. Oñate E (2013) Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids, Volume 2: Beams, Plates and Shells. Springer, Heidelberg
159. Pahl PJ, Damrath R (2001) Mathematical Foundations of Computational Engineering. Springer, Heidelberg
160. Palkowski S (1989) Statik der Seilkonstruktionen Springer, Heidelberg
161. Paranova S (2010) "Modelling and static analysis of two dimensional regions containing multi-phase inclusions by Boundary Element Method" , Journal of theoretical and applied mechanics, Sofia, Vol. 40, 4, 101-118
162. Peter B, Pfaff K, Sonntag D (2015) "Hospitalhof Stuttgart (BIM und die Chance eines Paradigmenwechsels)" . Beton- und Stahlbetonbau 110, Heft 11, 775-783, https://doi.org/10.1002/best.201500051
163. Peters K-H (2004) Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Dissertation Universität Hamburg
164. Petersen C (1966) Beitrag zur praktischen Berechnung zylindrischer Tonnenschalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser. Dissertation TH München
165. Petersen C (2011) Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Vieweg+Teubner
166. Petersen C (1990) Stahlbau. Vieweg
167. Petersen C, Werkle H (2018) Dynamik der Baukonstruktionen. 2. Aufl. Springer Vieweg
168. Pfeiffer M (2019) "Ein Hochhaus der neuen Generation" . Beton- und Stahlbetonbau 114, H. 7, 505-516
169. Pfeiffer M (2021) "Ein Hochhaus mit Hüftschwung" . Bautechnik 98, H. 6, 446–456.
170. Pflüger A (1978) Statik der Stabtragwerke. Springer, Heidelberg
171. Pucher A (1953) Lehrbuch des Stahlbetonbaus. Springer Verlag Wien
172. Pierce NA, Giles MB (2000) "Adjoint Recovery of Superconvergent Functionals from PDE Approximations" . SIAM Review, Vol. 42, No.2. 247–264
173. Pucher A (1977) Einflussfelder elastischer Platten. Springer Wien, 7. Auflage
174. Quing-Hua Q (2007) Green's Functions and Boundary Elements of Multifield Materials. Elsevier
175. Ramm E, Hofmann TJ (1996) Stabtragwerke, in Der Ingenieurbau, Bd. 5, 1-350, Ed. G. Mehlhorn. Ernst & Sohn
176. Ramm H, Reul O, Ruiken A, Kissel W, Toker E. (2020) "Hochhaus Omniturm – Baugrube und Gründung unter komplexen innerstädtischen Randbedingungen" . Bautechnik 97, H. 9, 656–663

177. Richter T, Lutz B (2010) "Berechnung einer Kombinierten Pfahl-Platten-Gründung am Beispiel des Hochhauses „Skyper" in Frankfurt/Main" . Bautechnik 87, Heft 4, 204-211
178. Roletschek, R (2021) Abfangung einer Stütze
179. RFEM (2021) Durchstanzen an Wandenden
180. Rombach G (2008) "Die Prüfung der Standsicherheit am ganzheitlichen Gebäudemodell" . Der Prüfingenieur Oktober 2008, 42-52
181. Rombach G (2016) Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau, Ernst & Sohn, Berlin, 2. Auflage
182. Rothert H, Gensichen V (1987) Nichtlineare Stabstatik. Springer, Heidelberg
183. Rubin H (1993) Baustatik ebener Stabwerke, in Stahlbau-Handbuch Teil A. Stahlbau-Verlagsgesellschaft
184. Rüsch, H., A. Hergenröder, Einflussfelder der Momente schiefwinkliger Platten, 3. Auflage, Düsseldorf: Werner-Verlag 1969
185. Rust W (2011) Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen. Vieweg 2. Auflage
186. Schade D (2003) "Einflusslinien für Ausnutzungsgrade in Stabwerken" . Stahlbau 72, Heft 2, 79-82
187. Scheffler M (2010) "Zwischenruf: Ziele und Nutzen Technischer Standards" . Bautechnik 87, 6, 361-365
188. Schiefer S, Fuchs M, Brandt B, Maggauer G, Egerer A (2006) "Besonderheiten beim Entwurf semi-integraler Spannbetonbrücken" , Beton und Stahlbetonbau, 790-802
189. Schier K (2011) Finite Elemente Modelle der Statik und Festigkeitslehre. Springer
190. Schodek DL, Bechthold M (2017) Structures. Pearson/Prentice Hall
191. Schwartpaul K, Zhang C, Carl O (2012) "Sensitivity Analysis of Weakened Beams on Elastic Foundation with Green's Functions" . Proc. Appl. Math. Mech. Vol. 12, 233-234
192. Silber G, Steinwender F (2005) Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM. Teubner
193. SOFiSTiK AG, www.sofistik.de
194. Sopoth M, Sopoth G (2008) Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise. Diplomarbeit Universität Kassel
195. Spitzer P, Horschig R (2012) Statik im Bauwesen, 3 Bände + Aufgabensammlung. Beuth
196. Stakgold I, Holst M (2011) Green's Functions and Boundary Value Problems. Wiley, 3rd ed.
197. Starossek U (2009) Progressive Collapse of Structures. 2nd ed. Thomas Tellford
198. Strang G, Fix GJ (2008) An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley-Cambridge Press, 2nd ed.
199. Strang G (2010) Computational Science and Engineering. Wellesley-Cambridge Press. Dt. Ausgabe: Wissenschaftliches Rechnen. Springer, Heidelberg
200. Strang G (2016) Introduction to Linear Algebra.Wellesley-Cambridge Press
201. Strang G (2019) Linear Algebra and Learning from Data. Wellesley-Cambridge Press
202. Structurae, Hoover Dam Bypass Bridge
203. Taranath BS (2004) Wind and Earthquake Resistant Buildings. CRC Press
204. Taranath BS (2017) Tall Building Design. CRC Press
205. Robert Taylor machte diese Bemerkung in der Vollversammlung des Ninth US Congress in Computational Mechanics in San Francisco in 2007

206. Tottenham H (1970) “Basic Principles” , in: Finite Element Techniques in Structural Mechanics. (Eds. Tottenham H, Brebbia C), Southampton University Press
207. Turner MJ, Clough RW, Martin HC, Topp LJ (1956) “Stiffness and deflection analysis of complex structures” . Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, 805-823
208. Unterweger H (2003) Zur maßgebenden Verkehrslaststellung bei Stahl- und Verbundbrücken. Bautechnik 80, Heft 1, 24-31
209. Unterweger H (2004) Zur maßgebenden Verkehrslaststellung bei Schrägseilbrücken. Bautechnik 81, Heft 4, 258-267
210. VDI 6201 Blatt 1:2015-12 (2015) Softwaregestütze Tragwerksberechnung - Grundlagen, Anforderungen, Modellbildung. Beuth
211. Wagner R (2016) Bauen mit Seilen und Membranen. Beuth
212. Webhofer M (2004) Abbildung von Finite-Elemente-Modellen als kinematische Strukturen. Dissertation TU München
213. Weischede D, Stumpf M, Spreng S (2010) “Bürohochhaus im Palais Quartier – ein besonderes Bauprojekt in der Innenstadt von Frankfurt/Main” . Bautechnik 87, Heft 4, 195-203
214. Wenzel H (2009) Health Monitoring of Bridges. Wiley
215. Werner K (2011) Statik im Bauwesen. Beuth
216. Werkle H (2000) “Konsistente Modellierung von Stützen bei der Finite-Element-Berechnung von Flachdecken” , Bautechnik 77, 416–425
217. Werkle H (2006) Vorlesung Baustatik III, Skriptum
218. Werkle H, Slongo L (2018) “Modellierung des Baugrunds bei der Finite-Element-Berechnung von Bodenplatten” . Bautechnik 95, Heft 9, 607-619
219. Werkle H (2020) Finite Elemente in der Baustatik. Springer Vieweg. 4. Auflage
220. Werkle H (2020) Finite Elements in Structural Analysis - Theoretical Concepts and Modeling Procedures in Statics and Dynamics of Structures. Springer, Cham
221. Wigner E P (1960) “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959” . Communications on Pure and Applied Mathematics. 13: 1–14.
222. Wikipedia Prinzip von St.Venant
223. Wikipedia Green’s function
224. Wikipedia στατικὴ τέχνη
225. Wikipedia Virtuelle Arbeit (1. 10. 2020)
226. Wikipedia Satz von Castigliano (7. 8. 2017)
227. Wikipedia Satz von Stokes (7. 4. 2021)
228. Wikipedia Hancock Tower (4. 11. 2021)
229. Wikipedia Omniturm Bildquelle (17. 12. 2021)
230. Wilson HB, Turcotte LH, Halpern D (2003) Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using MATLAB. Chapman & Hall/CRC
231. Wriggers P (2001) Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer
232. Xu XF, Chen X, Shen L (2009) “A Green-function-based multiscale method for uncertainty quantification of finite body random heterogeneous materials” . Computers and Structures 87:1416-–1426
233. Zhang H (2016) A General Approach for Solving Inverse Problems in Geophysical Systems by Applying Finite Element Method and Metamodel Techniques. Dissertation TU München

234. Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2006) Finite Element Method: Volume 1 – Its Basis & Fundamentals. Butterworth Heinemann
235. Zienkiewicz OC, Zhu JZ (1987) "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis" , Int. J. Num. Methods in Eng. 24: 337–357

The History of the Theory of Structures von Kurrer [133] enthält eine ausführliche Bibliographie zu dem Thema Statik und Einflussfunktionen in seiner geschichtlichen Entwicklung.

Die Diplomarbeiten aus Kassel sind über www.winfem.de/products.htm erreichbar.

Index

G_0 125
G_1 125
G_2 125
G_3 125
L_2-Skalarprodukt 36
W_e 34
W_i 34
$W_{1,2}$ 34
δW_e 19
δW_e^* 34
δW_i 19
δW_i^* 34
δ_0 164
δ_1 164
δ_2 164
δ_3 164
$\mathcal{V}$ 222
$\mathcal{V}_h$ 225
$\mathcal{V}_h^*$ 420
div 633
∇ 633
$\otimes$ 634
$\partial \boldsymbol{u}/\partial f_k$ 483
$\partial \boldsymbol{u}/\partial k_{ij}$ 483
$\boldsymbol{K}_c$ 456
$\boldsymbol{K}_{loc}$ 257
$d\Omega_{\boldsymbol{y}}$ 73
$ds_{\boldsymbol{y}}$ 73
h-Vertauschungsregel 395, 422
$u_{,i}$ 28
[N] 34
[m] 34

Abklingverhalten 204
adjoint analysis 178, 661
adjoint method of analysis 513
adjungierter Operator 178
Aequiv. Spannungs Transformation 259
aequivalente Knotenkräfte 238
aequivalente Knotenkraft 65
amputierter Dipol 382
amputierter Dipol am Rand 387
Arbeitssätze der Statik 34
artificial intelligence 495
Aufpunkt 124
Aufpunkt im Knoten 298

Balken, vollständig 591
BE-FRAMES 529, 715
BE-LAPLACE 715
BE-PLATTE 715
BE-SCHEIBE 715
Belegung 539
BEM 74
Bernoulli-Balken 591
Betti extended 417
Betti extended, gemischte Verfahren 607
Bilinearform 85
Boussinesq-Lösung 70
Brachystochrone 553
Bremskraft 329
Brief an einen Kollegen 574
bubble function 428

Castigliano 85
Castigliano, torpediert 173

countdown 88
Cramersche Regel 514
CST-Element 250, 278

dichotomy 440
die Rolle der u_i 248
Differentialgleichungen der Stabstatik 26
Dipole 178
Dirac Delta 164, 693
Dirac Delta, Ableitungen 656
Dirac Energie 167, 168
Dirac Vektor 299
direkte Differentiation 519
direktes Produkt 634
Dirichlet Bedingung 111
Distributionen 175, 681
downloads 715
Drehpol 533
Drehwinkelverfahren 69, 337, 351
drift 446
Dualität 53, 176
Dualraum 682
Duhamel-Integral 411
Durchbiegung, Balken Th. I. Ordg. 30
Durchbiegung, Balken Th. II. Ordg. 31
Durchbiegung, Seil 30
Durchstanznachweis 369
dynamische Probleme 536

early birds 683
Eichmatrix 67
Eigenlösung 210
Eigenvektor 644
Eigenwert 210, 644
Ein-Guss-Modell 407, 529
Einflussfunktion für σ_{yy} 280
Einflussfunktion für N_{xy} 283
Einflussfunktion für u_x 280
Einflussfunktion, lokale Lsg 285
Einflussfunktionen für integrale Werte 195
Einflussfunktionen für Kraftgrößen 128
Einflussfunktionen für Lagerkräfte 156
Einflussfunktionen für Weggrößen 123
Einflussfunktionen gemischte Form 605
Einflussfunktionen rechnen rückwärts 201
Einheitsverformungen 65, 222
Einzelkräfte als Knotenkräfte 392
Einzelkräfte und Einzelmomente 45
elastisch gebetteter Träger 32
Energieerhaltungssatz 34, 40
Energienorm 676
Energiequanta 265
Ersatzmodell 256
exakte Werte 426

Fachwerkmodell 379
Faltungsintegral 412
FE-Lastfall 245
Federn 50
federnde Stützung 45
Fernfeldfehler 448
Fernwirkung 478
Festhaltekräfte 65, 242
FG 279, 337
Fiktion 265
Filter 660
Filtergesetz 661
finite Elemente 221
Focus Element 499
Focus Punkt 493
Fortleitungszahl 331
Fourier Analysis 207
Fourier Transformation 206
free body diagram 36
frozen time 88
Fundamentallösung 73, 540, 578, 662
Funktional 271

Galerkin-Orthogonalität 238
Gateaux Ableitung 610, 618
Gauss-Seidel 337
Gausspunkte 321
Gaußscher Integralsatz 663
generalisierte Einflussfunktion 274
geometrische Elementsteifigkeitsmatrix 674
geometrische Kräfte 283
Gleichgewicht 89, 352
Gleichgewicht am verformten Tragwerk 92

globaler Fehler 447
Grad der kinematischen Unbestimmtheit 335
Gradient 633
Green-Lagrange Verzerrungstensor 617
Greensche Funktion 125
Greensche Identität der Platte 600
Greensche Identität der Scheibe 596
Greensche Identität der schubweichen Platte 603
Greensche Identitäten 26
Greensche Matrix 327
Grenzen von FE-Einflussfunktionen 394
Gummibänder 281
guter Entwurf 170

Hütchenfunktionen 222
Haltekräfte 216
Hamiltonsches Prinzip 664
harmonische Funktion 663
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 27, 663
Hauptwert 188
Heaviside-function 413
Hebelgesetz 168
Hellinger–Reissner Prinzip 607
high-pass filter 660
homogene Lösung, Th. II. Ordg. 214
homogene Lösungen 426
Homogenisierungsmethoden 471
hot spots 380
Hu-Washizu 652
Hu-Washizu-Prinzip 596
hyperelastisches Material 617

infinitesimal 87
infinitesimal klein 89
Inklusion 340
Integraldarstellung 412
Interpolierende 447
inverse Steifigkeitsmatrix 310
Inzidenzmatrizen 257
isogeometric analysis 431

kanonische Randwerte 64
Kern 73, 125
Kernpunktmomente 163
Kirchhoffplatte 106, 598
Kirchhoffsche Knotenregel 654
Kirchhoffsche Maschenregel 654
Knicklasten 536
Knotengleichgewicht 346
Knotenkräfte 238
Knotenkräfte für Einflussfunktionen 273
Knotenpunktsmethoden 654
kommutieren 636
komplementäre potentielle Energie 653
konforme Elemente 83
konjugiert 64, 82
Kraftgrößenverfahren 111, 294
Kragträger 563
Kurzform 52
kurzsichtig 186

Längsverformung 29
la tangente 87
Laborergebnisse 374
Lagerdruck 229
Lagersenkung 47, 133, 310, 354
Lagrange 664
Lagrange Funktional 626
Lagrange Multiplikator 653
Lagrange-Funktion 664
Lagrangepunkt 346
Lagrangescher Multiplikator 626
LF d 95
LF p 95
lineare Funktionen 638
Linienlager $3-D$ 387
lokale Lösung 229
lokaler Fehler 447
Lorentz Kontraktion 710
low-pass filter 660
Lupeneffekt 186

Maschengleichungen 654
MATLAB 685
maximale Verformungen 333
Maximumprinzip 76
Methode der Randelemente 70
Mischtechnik 348
Mittelung der Spannungen 321
Modalanalyse 412
model updating 334

Mohrsche Arbeitsgleichung 41, 51
Monopole 175, 178
multifield problems 210

negative Norm 681
Newton-Verfahren 613
nicht-reduzierte Steifigkeitsmatrix 351
nichtlinear 580
nichtlineare Funktionale 626
nichtlinearer Stab 612
Null-Summen-Spiel 36
Nullraum 639
Nullstellen der Querkraft 162

Omniturm 407
Optimierung 513

Parameteridentifikation 457
partielle Integration 21, 633
partition of unity 352, 402, 646
Patch-Test 438
Platte 598
Poisson Gleichung 662
Pole 533
pollution 444
Positionsstatik 457
Potentiallösung 73
Potentialtheorie 539, 663
Prinzip der virtuellen Kräfte 34, 40
Prinzip der virtuellen Verrückungen 34, 38
Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie 35, 93
Prinzip von Hamilton 664
Prinzip von St. Venant 204
Prinzip Waage 252
Pseudo-Dipol 462
Pseudo-Lastvektor 513, 529
Pseudodrehung 88
Pseudodrehungen 87
Punktlasten, Energie 682
push-stop-Kräfte 327

Quellen 539
Quellen und Senken 92
Querschnittsänderungen 339

Rahmen 43
Randelemente 70, 374
Rayleigh-Quotient 215
realism 257
reanalysis 455
Rechenpfennige 241
Reduktion der Dimension 68
Reduktionssatz 109
Reduktionsverfahren 236
Regulierungswut 710
Reinraumkultur 710
Reissner-Mindlin Platte 106, 601
Rezept 267
Riemann-Integral 681
row reduced echelon form 533

Satz von Betti 34, 119
Satz von Castigliano 85, 711
Satz von Engesser 711
Satz von Land 129
Satz von Menabrea 711
Schalen 658
Schalenelement 400
Schalenelemente 400
Scheibengleichung 594
Schlüssel zu den j_i 268
schräger Balken, EF 296
Schubtragfähigkeit 368
Schubverformung 30
schubweicher Balken 592
schwache Einflussfunktion 62
schwache Konvergenz 648
schwache Lösung 648
schwache Randbedingung 651
schwaches Gleichheitszeichen 266
Schwarzsche Ungleichung 443
Seil 658
selbstadjungiert 122, 638
Senkfeder 506
Sensitivitätsplots 340
shape forces 245
shape functions 222, 245, 276
shape functions, Th. II. Ordg 217
shear locking 603
Sherman-Morrison-Woodbury 527
Signatur 241
singuläre Punkte 564
Skalarprodukt von Matrizen 634
Sobolev, Tabelle 682
Sobolevnorm 675
Sobolevscher Einbettungssatz 105, 675

software 715
Somigliana Matrix 581
Spalten von $\boldsymbol{K}$ 324
Spalten von $\boldsymbol{K}^{-1}$ 324
Spaltenraum 639
Spannungspunkte 77
splines 97
Sprünge in Schnittgrößen 161
St. Venantsche Torsion 33
Stöckchenspiel 320
starke Einflussfunktion 62
starke Lösung 648
starke Randbedingung 651
Starrkörperbewegung 86
statisch bestimmt 642
statisch unbestimmt 642
statisches Gefühl 204
Steifigkeitsmatrix 67
Steifigkeitsmatrix des Balkens 669, 672
Steifigkeitsmatrix des Balkens, gedreht 673
Steifigkeitsmatrix des elast. geb. Balkens 674
Steifigkeitsmatrix des Seils, gedreht 671
Steifigkeitsmatrix des Stabs, gedreht 670
Steifigkeitsmatrix, Th. II. Ordg 217
strain energy product 84
Substrukturen 510
Superkonvergenz 448
Switches 175
symmetrische Bilinearform 85
System Th. II. Ordg. 614
System, Stab 589
Systemantwort 331

Tangens 137
Temperatur 50
Temperaturänderungen 134
Testfunktionen 78
Theorem von Graffi 412
Theorie I. Ordnung 81
Theorie II. Ordnung 212
Timoshenko Balken 592, 674
Torsion 33
Transversalkraft 32
Treppenformel 27
tumbleweed 36
Turm von Pisa 192

Ueberlagerung 36
unit response 125
Unschärfe der Statik 116
Unwucht 188

Variationsrechnung 665
Verfahren von Ritz 222
Verification and Validation 586
Versatz in 2-D 175
Vertauschungsregel 422
Vierendeel 163
virtuelle innere Energie 84
vollständige Arbeitsgleichung 51
vom Aufpunkt zur Belastung 322
Vorverformungen 393

Wölbkrafttorsion 33
Waagebalken 89
wackeläquivalent 248
Wechselwirkungsenergie 84
Weg und Kraft 82
Wert und Formel 191
Wilson-Element 444

Zahl der Weg- und Kraftgrößen 83
Zeilenraum 639
Zeitdehnung 710
zentrale Gleichung 299
Zugbandbrücke 32
zulässige virtuelle Verrückung 36
Zwei-Wege-Formel 518
zweite Greensche Identität des Balkens 120
zweite Greensche Identität des Stabes 128
zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor 617
Zykloide 553