

# **Materialeigenschaften der Viskoplastizität**

## **Experimente, Modellbildung und Parameteridentifikation**

Vom Fachbereich Maschinenbau der  
**Universität Gesamthochschule Kassel**  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte  
**Dissertation**

von  
Dipl.-Phys. Alexander Lion  
aus Kassel/Hessen

Kassel, Juni 1994

Referent:  
Korreferent:  
Tag der Einreichung:  
Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr.-Ing. P. Haupt  
Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns  
15. Februar 1994  
3. Juni 1994

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor  
Institut für Mechanik  
Universität Gesamthochschule Kassel

Organisation und Verwaltung

Susanne Blum  
Institut für Mechanik  
Universität Gesamthochschule Kassel  
Mönchebergstraße 7  
34109 Kassel

©

1994

Alexander Lion  
Institut für Mechanik  
Universität Gesamthochschule Kassel  
34109 Kassel

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

**Für meine Eltern**

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel und wurde vom dortigen Fachbereich Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Allen Personen, die diese Dissertation durch Kritik, Anregungen und Diskussionen gefördert haben, möchte ich herzlich danken.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinem Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Haupt für die gute fachliche Betreuung und die Übernahme des Referates bedanken. Seine stete Bereitschaft zur wissenschaftlichen Diskussion und seine Persönlichkeit haben diese Dissertation entscheidend gefördert.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns gilt mein besonderer Dank für sein großes Interesse an dieser Arbeit und vor allem für die bereitwillige Übernahme des Korreferates. Außerdem danke ich ihm für seine Kritik und wertvolle fachliche Anregungen.

Ferner möchte ich Herrn Dr.-Ing. L. Schreiber für zahlreiche fachliche und nichtfachliche Gespräche und die Bereitstellung eines Programmcodes zur Parameteroptimierung danken.

Den Herren Dipl.-Ing. G. Linek und W. Zugreif danke ich für die stets gute Unterstützung bei technischen Problemen.

Meinen Kollegen Dr.-Ing. St. Hartmann, Dipl.-Phys. M. Horz, Dipl.-Ing. M. Kamlah sowie Herrn Dr.-Ing. M. Korzen von der Bundesanstalt für Materialforschung danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit und die ständige Bereitschaft zum wissenschaftlichen Gedankenaustausch.

Letztendlich möchte ich mich bei meiner Frau Brigitte bedanken, die für das persönliche Umfeld sorgte und mich während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von einigen häuslichen Pflichten entbunden hat.

Alexander Lion

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1. Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2. Experimentelle Beobachtungen</b>	<b>6</b>
2.1 Idealisierende Annahmen	6
2.2 Experimenteller Aufbau	11
2.3 Systematik der Versuche	13
2.4 Eindimensionale Experimente, monoton	16
2.5 Eindimensionale Experimente, zyklisch	20
2.6 Zweidimensionale Experimente, zyklisch	29
2.7 Zur Materialabhängigkeit	33
<b>3. Modellbildung</b>	<b>35</b>
3.1 Phänomenologische Klasseneinteilung des Materialverhaltens	35
3.2 Ein Materialmodell der Viskoplastizität	39
3.2.1 Allgemeiner Aufbau	39
3.2.2 Das Funktional der Überspannung	41
3.2.3 Das Funktional der Gleichgewichtsspannung	48
3.2.4 Verallgemeinerung der Materialgleichungen	62
3.2.5 Analytische Untersuchung ausgewählter Phänomene	85
<b>4. Numerische Ergebnisse</b>	<b>103</b>
4.1 Identifikation der Materialparameter	103
4.1.1 Die Evolutionsstrategie	103
4.1.2 Das Funktional der Überspannung	107
4.1.3 Das Funktional der Gleichgewichtsspannung	110
4.2 Modellrechnungen	118
4.2.1 Zur Darstellbarkeit von Phänomenen	119
4.2.2 Zur Vorhersagbarkeit von Phänomenen	123
4.3 Bemerkungen zum Ratchetting der Gleichgewichtsspannung	132
4.4 Schlußfolgerung	140
<b>5. Zusammenfassung</b>	<b>142</b>
<b>6. Literatur</b>	<b>145</b>

## Bezeichnungen

### Skalare

$\rho$	: Massendichte
$\sigma, \tau$	: Komponenten des Spannungstensors
$\sigma_{eq}, \tau_{eq}$	: Komponenten des Tensors der Gleichgewichtsspannung
$s$	: Komponente der Überspannung
$t$	: Zeit
$x$	: Komponente der kinematischen Verfestigung
$p$	: Innere Variable
$\varepsilon, \gamma, \varepsilon_q$	: Komponenten des Verzerrungstensors
$\varepsilon_p$	: Komponente des plastischen Verzerrungstensors
$\Delta\varepsilon, \varepsilon_m$	: Dehnungsamplitude, Mitteldehnung
$\Delta\tau, \tau_m$	: Spannungsamplitude, Mittelspannung
$\mu_0, \mu_{eq}, \kappa_0, \kappa_{eq}$	: Elastizitätskonstanten
$g_0$	: Fließspannung
$c_k, b_k, \alpha_p, \alpha_\delta, s_{0p}, s_{0\delta}$	: Parameter der kinematischen Verfestigung
$z_{0k}, \lambda_k, s_0$	: Parameter der Überspannung
$M$	: Maßstabsfunktion
$F$	: Fließfläche

### Vektoren

$\mathbf{u}$	: Verschiebungsvektor
$\mathbf{k}$	: Volumenkraft
$\mathbf{v}$	: Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{e}_i$	: Einheitsvektoren

### Tensoren

$\mathbf{T}$	: Spannungstensor
$\mathbf{T}_{eq}$	: Gleichgewichtsspannung
$\mathbf{S}$	: Überspannung
$\mathbf{X}$	: kinematische Verfestigung
$\mathbf{F}$	: Deformationsgradient
$\mathbf{E}$	: Linearisierter Greenscher Verzerrungstensor
$\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_{pnr}$	: Plastische Verzerrungstensoren

Alle anderen in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen, die hier nicht aufgeführt sind, werden im Text definiert.

## 1. Einleitung

Das Verhalten von materiellen Körpern unter mechanischen Beanspruchungen wird im allgemeinen von mehreren Faktoren bestimmt. Dies sind im einzelnen die Geometrie, die Materialeigenschaften und die Belastung. Zur Auslegung von technischen Bauteilen oder zur Berechnung von Strömungsvorgängen, muß das gegenseitige Wechselspiel dieser Faktoren bekannt sein. Geht man davon aus, daß die kleinste geometrische Abmessung des betrachteten Körpers groß gegenüber einer für das Material charakteristischen Längenskala ist (repräsentatives Volumenelement), dann darf das zugrundeliegende Material als Punktkontinuum aufgefaßt werden (siehe z. B. [2]). Es kann also durch die Feldgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik, d. h. die Massen-, die Impuls- und die Drehimpulsbilanz [1] beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 && \text{(Masse)} \\ \rho \dot{\mathbf{v}} &= \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{k} && \text{(Impuls)} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^T && \text{(Drehimpuls)}\end{aligned}$$

Dabei ist  $\rho(\mathbf{x},t)$  das Dichtefeld,  $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  das Geschwindigkeitsfeld,  $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$  der Cauchysche Spannungstensor und  $\mathbf{k}(\mathbf{x},t)$  eine Volumenkraft pro Masseneinheit.

Diese partiellen Differentialgleichungen reichen jedoch nicht aus, alle Feldgrößen zu berechnen. Formal ist dies einsehbar, wenn man sich die Volumenkraft  $\mathbf{k}(\mathbf{x},t)$  als vorgegeben denkt. Dann sind 10 skalarwertige Funktionen gesucht, wofür nur 4 Bestimmungsgleichungen vorliegen. Eine anschauliche Begründung für die Notwendigkeit weiterer Gleichungen ist die Tatsache, daß sich verschiedene Materialien unter denselben äußeren Belastungen unterschiedlich verhalten. Es wäre also unphysikalisch, wenn die Bilanzgleichungen allein zur Berechnung der Felder ausreichen würden.

Offensichtlich es ist sinnvoll, den Satz der Bilanzrelationen durch Beziehungen zu vervollständigen, die das individuelle Materialverhalten charakterisieren. Sie werden als *Materialgleichungen* bezeichnet und verknüpfen die aktuelle Spannung  $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$  am Ort  $\mathbf{x}$  eines materiellen Körpers mit der Bewegungsgeschichte aller Punkte des betrachteten Körpers. Dabei kommt ein allgemeines Prinzip, das sogenannte *Prinzip des Determinismus*, zum Ausdruck. Die Wissenschaft, die sich mit der physikalisch und mathematisch konsistenten Konstruktion von Materialgleichungen beschäftigt, ist die *Materialtheorie*.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Konstruktion spezieller Materialgleichungen, die das inelastische Verhalten metallischer Werkstoffe darstellen. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist nicht etwa die Beschreibung einzelner Phänomene, die bei speziellen Lastfällen auftreten, sondern die mathematische Darstellung der Materialeigenschaften über ein größeres Spektrum von Belastungsprozessen. Um den Unterschied zu verdeutlichen, ist eine gewisse Abstraktion sinnvoll in der man sich das Material als einen 'Operator' vorstellen kann, der Spannungs- und Verzerrungsgeschichten einander zuordnet [3]. Dabei können die Übertragungs-

eigenschaften dieses Operators als stellvertretend für die Materialeigenschaften interpretiert werden, die es zu modellieren gilt. Die Materialgleichungen sind also im allgemeinsten Fall *Funktionale*. Mathematisch werden diese Funktionale in der Regel implizit dargestellt, d. h. durch Systeme von gewöhnlichen und im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen (siehe z. B. [4, 5, 6, 81]). Diese enthalten sogenannte *Materialparameter*, die zur quantitativen Darstellung der Materialeigenschaften für jeden speziellen Stoff ermittelt werden müssen. Die Identifikation solcher Parameter ist ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit. Dazu und natürlich auch zur Konstruktion der Materialgleichungen müssen vor allem Experimente durchgeführt werden.

Da die inelastischen Materialeigenschaften bei hochlegierten Stählen besonders ausgeprägt sind, wurde für diese Arbeit der Stahl XCrNi18.9 ausgewählt. Er ist aufgrund seiner chemischen Zusammensetzung mit den aus der Fachliteratur bekannten Stahlsorten AISI 304 und AISI 316 eng verwandt. Über die Eigenschaften dieser Stähle, die in der Technik beispielsweise für den Bau hochbeanspruchter Reaktorkomponenten eingesetzt werden, ist von der experimentellen Seite her vieles bekannt. Einige typische Phänomene sollen im folgenden erwähnt werden, wobei die angegebenen Literaturstellen lediglich als stellvertretend für die Vielzahl der zu diesem Themenbereich erschienenen Arbeiten anzusehen sind.

Für monotone Prozesse charakteristisch ist die Abhängigkeit der Spannungs - Dehnungskennlinien von der Geschwindigkeit der Steuergröße (Spannung oder Dehnung), sowie Kriechen und Relaxation. Diese Phänomene lassen sich der Gruppe der geschwindigkeitsabhängigen Materialeigenschaften zuordnen und wurden am Stahl AISI 304 beispielsweise von Krempl [7], Krempl und Kallianpur [8] bzw. Kujawski, Krempl und Kallianpur [9] untersucht und an AISI 316 unter anderem von Jones und El - Assal [14].

Weitere Phänomene können bei eindimensionalen zyklischen Belastungen beobachtet werden. Dazu zählen insbesondere die Verfestigungseigenschaften bei dehnungsgesteuerten Prozessen. Das zyklische Ver- und Entfestigungsverhalten des Stahls CK 15 wurde beispielsweise von Bruhns, Lehmann und Pape [10], bzw. Kikillus [80] über einen großen Bereich von Belastungsprozessen untersucht. Chaboche, Dang Van und Cordier [11] bzw. Ohno [12] haben sich mit der Abhängigkeit der Verfestigung von der Dehnungsamplitude bei den Stählen AISI 304 und AISI 316 beschäftigt.

Bei zyklischen spannungsgesteuerten Belastungen tritt ein weiteres Phänomen auf: Wenn der Mittelwert der Spannung von Null verschieden ist, dann beobachtet man ein monotones Anwachsen der Mitteldehnung mit der Zyklenzahl, das sogenannte Ratchetting. Die Untersuchung dieses Phänomens war ebenso Gegenstand zahlreicher Arbeiten: Von Hassan und Kyriakides [13] wurde beispielsweise der Einfluß der Mittelspannung und der Spannungsamplitude auf die Dehnungsakkumulation der Stähle CS 1020 und CS 1026 untersucht. Bruhns und Kikillus haben in [86] das entsprechende Verhalten am Stahl CK 15 analysiert. Im Gegensatz zu anderen Autoren haben sie ihre Experimente allerdings nicht mit konstantem Betrag der Spannungsgeschwindigkeit gefahren. Sie haben eine dem Betrage nach konstante Dehnungs-

geschwindigkeit gewählt und diese immer dann umgekehrt, wenn die Spannung ihre Maximalwerte erreicht hatte. Die Autoren Ruggles und Krempl [15, 16] bzw. Chaboche und Nouailhas [17] haben sich mit dem Ratchettingverhalten von AISI 304 und AISI 316 auseinandergesetzt. Von Ruggles und Krempl wurde zudem noch die Temperaturabhängigkeit untersucht.

Die in dieser Aufzählung letzte Klasse von Phänomenen wird bei mehrdimensionalen zyklischen Prozessen beobachtet: Unter nichtradialen dehnungsgesteuerten Belastungen zeigen hochlegierte Stähle eine vergleichsweise stark ausgeprägte Verfestigung, deren Größe insbesondere von der Form der Belastungstrajektorie abhängt. Die experimentelle Analyse dieses Verhaltens war ebenfalls Gegenstand vieler Arbeiten. Siehe z. B. Krempl und Lu [18], Pape [19], Kikillus [80], Tanaka, Murakami und Oaka [20], Benallal, Le Gallo und Marquis [21] oder Benallal und Marquis [22].

Ein Materialmodell der Viskoplastizität sollte in der Lage sein, alle genannten Phänomene in angemessener Weise darzustellen. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer rein phänomenologischen Theorie, so daß auf die kristallphysikalischen Ursachen der Inelastizität nicht eingegangen wird. Im diesem Zusammenhang wird stellvertretend auf die Arbeiten von Bruhns [2], Steck [82], Lösche [85], Diehl [81] und Bischoff-Beiermann [83] verwiesen.

Zur phänomenologischen Konstruktion von Materialmodellen ist es sinnvoll, das Spektrum des beobachtbaren Materialverhaltens zu ordnen. Diese Ordnung wird nach einem Vorschlag von Haupt [4] in Abhängigkeit von bestimmten *Materialeigenschaften* vorgenommen. Als wesentlich wird dabei die Beobachtung von *Gleichgewichtszuständen* erachtet. Diese können experimentell näherungsweise durch die Wahl hinreichend kleiner Belastungsgeschwindigkeiten oder aber durch Einfügen von Haltezeiten in den Verlauf des Prozesses erfaßt werden. Der Abstand zwischen einem aktuellen Zustand und dem zugehörigen Gleichgewichtszustand ist in der Regel geschwindigkeitsabhängig. Diese Materialeigenschaft wird als *Geschwindigkeitsabhängigkeit* bezeichnet.

Eine ebenso wichtige Materialeigenschaft ist die Form der Kennlinien, auf denen sich die Gleichgewichtszustände befinden. Weist die sogenannte *Gleichgewichtskennlinie* bei zyklischen Belastungen eine Hysterese auf, so wird diese Materialeigenschaft als *Gleichgewichtshysterese* bezeichnet.

Ausgehend von diesem Konzept werden in Kapitel 2 dieser Arbeit die Materialantworten des Stahls XCrNi18.9 auf spannungs- und dehnungsgesteuerte Zug / Druck- und Torsionsbelastungen bei Raumtemperatur diskutiert. Dabei werden zur Analyse der Geschwindigkeitsabhängigkeit zunächst monotone Experimente mit verschiedenen Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten durchgeführt. Zum Studium der Prozeßabhängigkeit der Gleichgewichtskennlinien müssen dagegen zyklische Experimente mit Haltezeiten gewählt werden. Durch diese Vorgehensweise und das von Haupt in [4] vorgeschlagene Konzept kann eine additive Zerlegung der Spannung in eine geschwindigkeitsunabhängige *Gleichgewichts-* und eine geschwindigkeitsabhängige *Überspannung* motiviert werden,

In Kapitel 3 werden zunächst physikalisch plausible Ansätze für die Funktionale der Gleichgewichts- und der Überspannung an eindimensionalen Experimenten motiviert. Dabei wird die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit der Überspannung mit Hilfe einer Maßstabsfunktion [23, 24] beschrieben, die physikalisch als prozeßabhängige Relaxationszeit interpretiert werden kann. Das Verhalten der Gleichgewichtsspannung und dabei insbesondere das der Verfestigung kann mit Hilfe einer Bogenlängentransformation dargestellt werden, die auf eine Idee von Haupt, Kamlah und Tsakmakis zurückgeht [25]. Anschließend werden diese Materialgleichungen unter Berücksichtigung der experimentellen Ergebnisse aus zweidimensionalen Prozessen auf räumliche Zustände verallgemeinert. Damit steht das Materialmodell fest.

Kapitel 4 dieser Arbeit setzt sich zunächst mit der Identifikation der Materialparameter auseinander und im Anschluß daran mit der Analyse der Modellrechnungen. Um den Erfolg der Parameteridentifikation zur veranschaulichen und um die Vorhersagefähigkeit des Modells zu testen, wird dabei eine Zweiteilung vorgenommen: Im ersten Teil werden die Antworten des Materialmodells auf die Belastungen berechnet, die der Parameteridentifikation als Grundlage gedient haben. Dagegen werden im zweiten Teil solche Prozesse berechnet und mit Experimenten verglichen, die nicht in die Modellbildung einbezogen wurden. Am Schluß folgt noch eine Diskussion der Ergebnisse.

## 2. Experimentelle Beobachtungen

### 2.1 Idealisierende Annahmen

Zur experimentellen Ermittlung der mechanischen Materialeigenschaften eines Probenkörpers ist die Erzeugung von homogenen Deformationszuständen [26] bei konstanter Temperatur sinnvoll. Diese sind durch einen ortsunabhängigen Deformationsgradienten bzw. durch ortsunabhängige Verzerrungsfelder ausgezeichnet. Zur näherungsweise Realisierung solcher Zustände wurden dünnwandige Hohlzylinderproben aus dem hochlegierten Stahl XCrNi18.9 durch Zug und Torsion belastet. Die Probengeometrie ist in Abbildung 2.1.1 dargestellt.

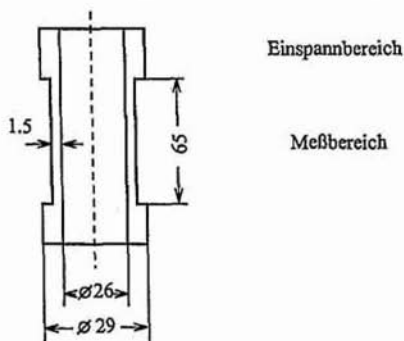


Abbildung 2.1.1: Probengeometrie

Eine innerhalb der Probe räumlich und zeitlich konstante Temperatur konnte durch den Einbau von Kühlsegmenten in die Einspannfutter der Prüfmaschine erreicht werden. Die räumlichen Temperaturdifferenzen zwischen den Probenenden lagen im stationären Betriebszustand der Prüfmaschine bei maximal 1K bis 2K. Die im Laufe eines Tages auftretenden zeitlichen Schwankungen der Probentemperatur waren um etwa eine Größenordnung geringer. Sämtliche Messungen wurden bei Raumtemperatur durchgeführt.

Die aufgebrachten Belastungen wurden so klein gehalten, daß störende Geometrieänderungen, etwa durch Torsionsbeulen, entweder überhaupt nicht auftraten oder vernachlässigt werden konnten. Damit und unter der Annahme kleiner Verzerrungen sind die im Meßbereich der Probe herrschenden Spannungen und Dehnungen proportional zu den der Messung zugänglichen Kraft- und Weggrößen und können aus diesen berechnet werden.

Um zu veranschaulichen, an welchen Stellen der Spannungs- und Verzerrungsberechnung die Symmetrie und die Dünnwandigkeit der Probe Einfluß nehmen, soll die folgende Betrachtung durchgeführt werden:

Ausgehend von der lokalen Impulsbilanz mit dem Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$ ,

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{k} ,$$

und der Drehimpulsbilanz

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T,$$

die eine Aussage über die Symmetrie des Spannungstensors macht, wird man für vernachlässigbare Beschleunigungen und Volumenkräfte ( $\mathbf{k} = 0$ ) auf die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad 2.1.1$$

geführt. Führt man das in Abbildung 2.1.2 dargestellte Zylinderkoordinatensystem ein,

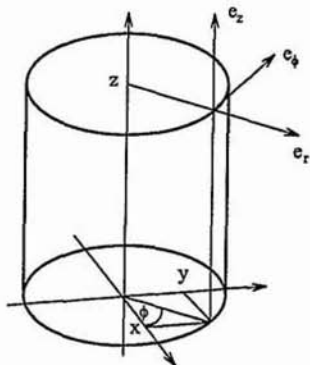


Abbildung 2.1.2: Zylinderkoordinatensystem

dann ergeben sich aus der vektoriellen Gleichgewichtsbedingung (Gl. 2.1.1) die Komponentengleichungen (siehe z.B. [1], [84])

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial z} + 2 \frac{T_{r\phi}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} = 0.$$

Aus der Zylindersymmetrie folgt die Unabhängigkeit aller Spannungen vom Winkel  $\phi$ , d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$

Die Annahme, daß innerhalb des Meßbereiches keine Störeinflüsse durch die Probeneinspannung auftreten, liefert die Unabhängigkeit der Spannungen von der Koordinate  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Damit hängen die Spannungen nur noch von  $r$  ab und die Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich zu

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} = 0 \quad 2.1.2$$

$$\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + 2 \frac{T_{r\phi}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{T_{rz}}{r} = 0 .$$

Davon können die beiden letzten Gleichungen sofort zu

$$T_{r\phi}(r) = \frac{C_1}{r^2}$$

und 
$$T_{rz}(r) = \frac{C_2}{r}$$

integriert werden, wobei die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  verschwinden müssen, da die Schubspannungen  $T_{r\phi}$  und  $T_{rz}$  auf den Mantelflächen der Probe null sind. Damit bleibt nur noch die Gleichgewichtsbedingung Gl. 2.1.2 übrig und der Spannungstensor nimmt die Form

$$\mathbf{T}(r) = \begin{pmatrix} T_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & T_{\phi\phi}(r) & T_{\phi z}(r) \\ 0 & T_{\phi z}(r) & T_{zz}(r) \end{pmatrix}$$

an. Macht man von der Dünnwandigkeit der Rohrproben Gebrauch, dann kann die Änderung von  $T_{rr}(r)$  über der Wandstärke vernachlässigt werden. Damit vereinfacht sich auch noch die letzte Gleichgewichtsbedingung:

$$T_{rr} = T_{\phi\phi} \quad \text{mit} \quad T_{rr} = \text{const} \quad 2.1.3$$

Aufgrund des Verschwindens von  $T_{rr}$  auf den Zylindermantelflächen, müssen wegen Gl. 2.1.3 die Spannungen  $T_{rr}$  und  $T_{\phi\phi}$  auch im Probeninnern verschwinden, so daß sich für  $\mathbf{T}$  schließlich die Matrixdarstellung

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\phi z} \\ 0 & T_{\phi z} & T_{zz} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} \quad 2.1.4$$

ergibt.

Um die Ortsabhängigkeit der Schubspannung bei Proben mit endlicher Wandstärke abzuschätzen, wird die Torsion eines Zylinders aus linear verfestigendem Material untersucht. Dabei werden die Spannungs / Dehnungskennlinien im inelastischen Bereich durch den Ausdruck  $\tau = \tau_F + G_T(\varepsilon - \tau_F/G_0)$  dargestellt. Der Tangentenmodul  $G_T$  beträgt bei XCrNi18.9 ca. 1600 MPa, der Schubmodul  $G_0$  etwa 140000 MPa und  $\tau_F$  liegt im Mittel bei ca. 150 MPa (Abbildung 2.4.1). Der Zylinder habe den Außenradius  $R_a = 14.5$  mm den Innenradius  $R_i = 13$  mm und die Länge  $L = 65$  mm. Die Relativverdrehung der Stirnflächen betrage  $\psi = 7^\circ$ . Für die Scherdehnung  $\varepsilon_{\phi z}(r)$  ergibt sich mit Gl. 2.1.7 und Gl. 2.1.8 die Beziehung

$$\varepsilon_{\phi z}(r) = \frac{\psi}{L} r, \quad \text{mit} \quad R_i \leq r \leq R_a . \quad 2.1.5$$

Damit schätzt man ab, daß die Schubspannungen an den Mantelflächen um etwa 1.3% von denen in der Mitte der Probe abweichen. Im weiteren wird diese Abhängigkeit vernachlässigt und der Spannungstensor in Gl. 2.1.4 als räumlich konstant angenommen.

Zur Analyse des Verzerrungstensors muß auf die Grundlagen der Kontinuumsmechanik zurückgegriffen werden. Die räumliche Bewegung eines materiellen Körpers wird durch eine orts- und zeitabhängige Abbildung

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

beschrieben. Dabei werden mit  $\mathbf{X}$  die Orte der materiellen Punkte in einer festen Referenzkonfiguration bezeichnet, die der Körper beispielsweise zur Zeit  $t = t_0$  eingenommen haben könnte. Die Variable  $\mathbf{x}$  bezeichnet die Orte dieser Punkte in der (aktuellen) Momentankonfiguration zur Zeit  $t$ .

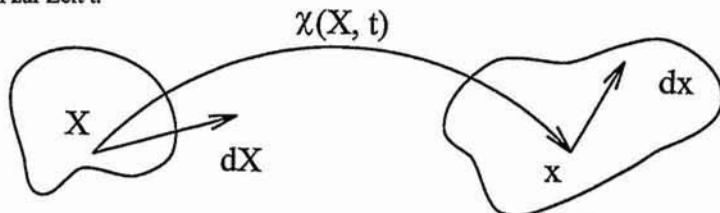


Abbildung 2.1.3: Referenz- und Momentankonfiguration

Zur Einführung eines sinnvollen Verzerrungsmaßes muß die Abbildung  $\chi$  lokal, d. h. in der Nachbarschaft von  $\mathbf{X}$  untersucht werden. Ein infinitesimal zu  $\mathbf{X}$  benachbarter materieller Punkt  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  geht durch die Bewegung  $\chi$  über in  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , d. h.:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + d\mathbf{x} &= \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{x} + \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{F} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

Der Tensor  $\mathbf{F}$  heißt Deformationsgradient und beschreibt die Transformation materieller Linienelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration. Damit kann die Frage beantwortet werden, wie sich die Abstände infinitesimal benachbarter materieller Punkte beim Übergang zwischen beiden Konfigurationen ändern. Hierzu wird die Differenz der Abstandsquadrate solcher Punkte gebildet.

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 &= 2 d\mathbf{X} \cdot \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1} \right] d\mathbf{X} \\ &= 2 d\mathbf{X} \cdot \left[ \mathbf{E} d\mathbf{X} \right] \end{aligned}$$

Der Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ist ein mögliches Maß für diese Abstandsänderungen. Geht man davon aus, daß die Referenzkonfiguration vom Körper eingenommen wird, dann kann zur Beschreibung der Bewegung anstelle von  $\chi$  auch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  gemäß

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

eingeführt werden. Für den Greenschen Verzerrungstensor ergibt sich dann die Beziehung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right) \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

mit dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$ . Bei kleinen Verschiebungsableitungen (kleine Verzerrungen und Drehungen) darf der quadratische Anteil  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  vernachlässigt werden, so daß sich für den linearisierten Verzerrungstensor die Darstellung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) \quad 2.1.6$$

ergibt. Zur Berechnung des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  in dem in Abbildung 2.1.2 dargestellten Zylinderkoordinatensystem aufgestellt.

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r + u_\phi(r, z) \mathbf{e}_\phi + u_z(z) \mathbf{e}_z$$

Wegen der Rotationssymmetrie der Probe entfällt die Abhängigkeit der Verschiebungskomponenten von der Winkelkoordinate  $\phi$  und unter der Annahme, daß der Meßbereich der Probe nicht durch die Einspannungen gestört wird, darf die Radialverschiebung  $u_r$  als unabhängig von  $z$  und die Axialverschiebung  $u_z$  als unabhängig von  $r$  angenommen werden. Für den Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ergibt sich nach Gl. 2.1.6 die Matrix

$$\mathbf{E}(r, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) & \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nimmt man an, daß in Analogie zum Spannungstensor  $\mathbf{T}$  auch der Verzerrungstensor unabhängig von der Koordinate  $z$  ist, dann hängt  $\mathbf{E}$  nur von  $r$  ab und seine Komponenten vereinfachen sich wie folgt:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = A(r) = \varepsilon = \text{const}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial z} = B(r) \Rightarrow u_\phi = z B(r) + C(r) \quad 2.1.7$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) = D(r) \Rightarrow B(r) = b r \quad 2.1.8$$

Dabei sind  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  zunächst beliebige Funktionen von  $r$ . Die Funktion  $A$  stellt sich sofort als Konstante heraus, weil  $u_z$  nicht von  $r$  abhängt. Unter der Annahme der Dünnwandigkeit darf die Koordinate  $r$  in Gl. 2.1.7 und Gl. 2.1.8 durch den mittleren Probenradius  $r_m = \frac{1}{2} (R_a + R_i)$  ersetzt werden. Damit ergibt sich  $u_\phi = b r_m z + C(r_m)$ . Mit der Randbedingung  $u_\phi(r_m, 0) = 0$  ergibt sich  $C = 0$  und mit Gl. 2.1.8 auch  $D = 0$ . Die radiale Verzerrung  $\partial u_r / \partial r$  darf wegen der Dünnwandigkeit der Probe auch über der Wandstärke als konstant angenommen werden und es folgt für die verbleibenden Verzerrungskomponenten:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_r}{r} = \varepsilon_q = \text{const}$$

Nach diesen Überlegungen nimmt die Matrix des Verzerrungstensors folgende Gestalt an:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_q & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_q & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \quad 2.1.9$$

Dabei werden die Komponenten  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ , und  $\varepsilon_q$  als Axial-, Scher- und Querdehnungen bezeichnet.

Es soll noch darauf verwiesen werden, daß mit der hier verwendeten Zug/Druck und Torsionsprüfmaschine lediglich der Spannungstensor komplett als Steuergröße vorgegeben werden kann. Bei verzerrungsgesteuerten Experimenten können nur die Axialdehnung und die Scherdehnung vorgegeben werden. Die Querdehnungen stellen sich dann über die Spannungsrandbedingungen und die Materialeigenschaften ein. Schon beim einachsigen Zug liegt also keine reine Dehnungssteuerung vor. Diese ist im Rahmen einer Theorie kleiner Deformationen nur bei reiner Torsion möglich.

## 2.2 Experimenteller Aufbau

Die folgende Abbildung 2.2.1 gibt skizzenhaft den Versuchsaufbau wieder.

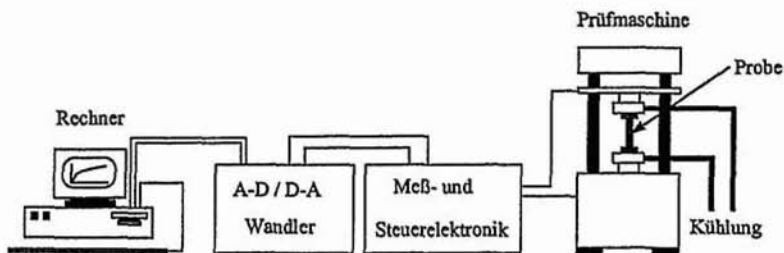


Abbildung 2.2.1.: Versuchsaufbau

Zur mechanischen Beanspruchung der Proben wurde eine servohydraulische Zweiachs-Prüfmaschine eingesetzt. Sie kann sowohl Zug/Druck als auch Torsionsbelastungen in Kraft- und in Weggrößensteuerung aufbringen.

Die Einspannung der Proben wurde über hydraulisch betriebene Backenfutter realisiert [27]. Diese wurden zur Gewährleistung einer räumlich konstanten Probentemperatur mit zusätzlichen Kühlsegmenten versehen.

Die Messung von Axialkraft und Moment erfolgte mit auf DMS - Basis arbeitenden Meßdo-  
sen. Zur Erfassung der Weggrößen (Axialverschiebung, Winkel) wurden bei sämtlichen ein-  
dimensionalen Experimenten die in die Maschine integrierten induktiven Aufnehmer benutzt.  
Die Meßsignale wurden anschließend bezüglich der Maschinensteifigkeiten korrigiert. Diese  
konnten unter der Annahme, daß sich die Prüfmaschine rein elastisch deformiert, mit einer  
sehr steifen und mit Dehnungsmeßstreifen versehenen Vollzylinderprobe ermittelt werden.  
Bei den zweidimensionalen Versuchen mußten beide Weggrößen durch externe Aufnehmer  
abgegriffen werden (Abbildung 2.2.2):

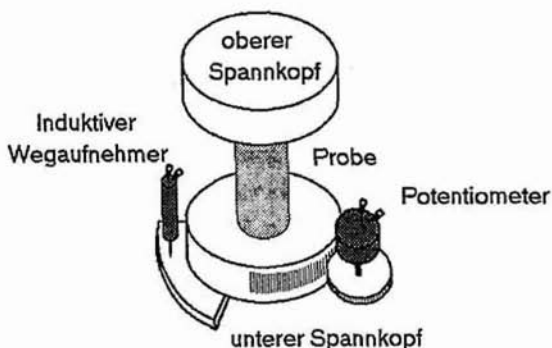


Abbildung 2.2.2.: Winkel- und Wegmessung durch externe Aufnehmer

Die Relativverschiebung der Spannköpfe wurde mit einem induktiven Wegaufnehmer ge-  
messen. Dieser wurde senkrecht nach unten zeigend am oberen Spannkopf angebracht. Er  
läuft mit seiner Meßspitze auf einer am unteren Spannkopf befestigten horizontalen Platte.  
Dabei wurde sichergestellt, daß sein Meßsignal unabhängig von den Torsionsbewegungen des  
unteren Spannkopfes ist. Die Relativverdrehung zwischen beiden Köpfen wurde durch die  
Abrollbewegung eines hochauflösenden Potentiometers gemessen. Dieses wurde mit seinem  
Gehäuse am oberen Spannkopf angebracht. Seine mit einem Zahnrad versehene Achse konnte  
dann auf einem am unteren Spannkopf befestigten Zahnriemen spielfrei ablaufen. Um dem  
unteren Spannkopf bei angebautem Potentiometer axiale Bewegungen zu ermöglichen,  
entspricht die Breite des Zahnriemens etwa der dreifachen Breite des Zahnrades. Die Un-  
abhängigkeit des Winkelsignals von axialen Bewegungen konnte ebenfalls sichergestellt wer-  
den.

Zur Steuerung der Experimente und zur Meßdatenaufzeichnung wurde ein mit entsprechender  
Hard- und Software ausgestatteter 80386 Personalcomputer eingesetzt. Die Hardware bestand  
im wesentlichen aus einer Datenerfassungskarte mit einer Auflösung von 16 Bit (A/D-  
Wandler) und einer Ausgabekarte mit 12 Bit Auflösung (D/A-Wandler). Die Software  
bestand aus einem in der Programmiersprache Pascal erstellten Steuer- und Meßprogramm  
[28]. Bei der Programmierung wurde Wert darauf gelegt, die maximal mögliche Anzahl der

einzelnen Meßdaten hoch zu halten. Die Datenverwaltung arbeitet daher mit Adresszeigern (siehe [29]). Um bei einer vom Benutzer vorgebbaren Abtastrate der Meßsignale eine in optimaler Auflösung arbeitende Versuchssteuerung sicherzustellen, arbeiten Messung und Steuerung mit zwei voneinander unabhängigen Zeitrastern. Dies konnte durch eine entsprechende Interruptsteuerung (siehe z.B. [29]) realisiert werden.

Um besonders bei Langzeitversuchen den Einfluß von Netzstörungen auf die Versuchführung klein zu halten, wurden der Personalcomputer und die Elektronik der Prüfmaschine von einer unterbrechungsfreien Spannungsversorgung (USV) gespeist.

### 2.3 Systematik der Versuche

In der phänomenologischen Kontinuumsmechanik ist es hilfreich, sich die zu untersuchende Materialprobe und die Materialgleichung als Operator vorzustellen [3]. Beide liefern bei Vorgabe von Belastungsgeschichten oder Inputs  $I(t)$  einen bestimmten Output  $O(t)$ , der auch Materialantwort genannt wird. Die Aufgabe der Materialtheorie besteht darin, Gleichungen zu konstruieren, die einerseits im Einklang mit den Grundgesetzen der Mechanik und der Thermodynamik stehen und andererseits die mechanischen Materialeigenschaften des 'Operators' Material in angemessener Weise darstellen.

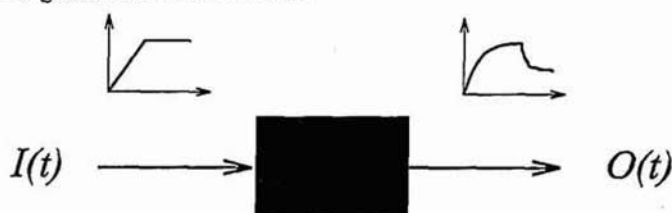


Abbildung 2.3.1.: Probe und Materialgleichung als Operator

Durch Beobachtung der Materialantworten auf unterschiedliche Belastungsgeschichten bekommt man Informationen über das Verhalten des Operators. Sie können zur Gestaltung der Materialgleichungen herangezogen werden. Einschränkungen müssen jedoch dahingehend gemacht werden, daß es bereits bei eindimensionalen Prozessen unmöglich ist, jede beliebige Belastungsgeschichte  $I(t)$  zu realisieren. Es ist also schon wegen beschränkter Experimentiermöglichkeiten unmöglich, 'alles' über ein Material in Erfahrung zu bringen.

Sinnvoll ist es, die Belastungsgeschichten so zu wählen, daß die charakteristischen Eigenschaften des Materials erfaßt werden können. Die Frage welche das sind, hängt in der Regel von der jeweiligen technischen Anwendung und der experimentellen Realisierbarkeit ab und kann nicht allgemein beantwortet werden.

Bei der Auswahl der Belastungen kann auch eine iterative Vorgehensweise zweckmäßig sein: Zukünftige Belastungsgeschichten können in Abhängigkeit von dem, was man bereits über das Material in Erfahrung gebracht hat, gestaltet werden.

Nach dieser Diskussion erscheint es sinnvoll, zunächst die Materialantworten auf relativ einfache und zwar streng monotone spannungs- und dehnungsgesteuerte Belastungen mit konstanter Geschwindigkeit zu untersuchen. Motiviert durch die Materialantworten, wurden diese Belastungen in weiteren Experimenten durch Haltezeiten unterbrochen (Abbildung 2.3.2).

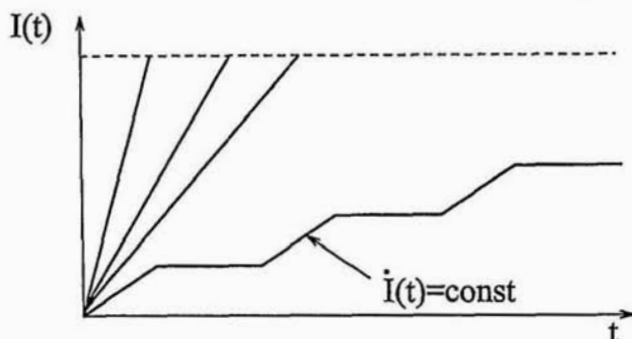


Abbildung 2.3.2.: Monotone Experimente

In weiteren Versuchen wurden periodische spannungs- und dehnungsgesteuerte Belastungsgeschichten mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit und mit Haltezeiten gewählt. Die Amplitude und der Mittelwert der Belastung waren zunächst konstant und wurden in weiteren Experimenten auch variiert.

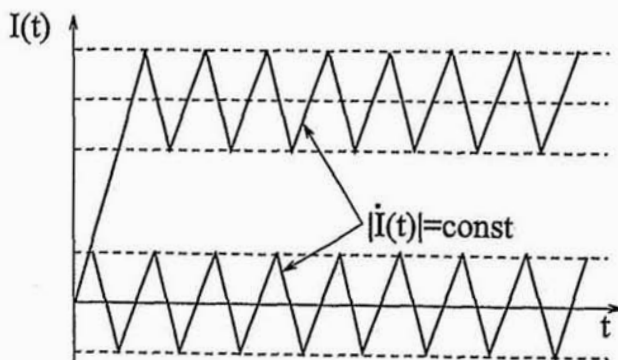


Abbildung 2.3.3.: Zyklische Experimente

Im letzten Schritt wurden zweidimensionale periodische dehnungsgesteuerte Belastungen zugrunde gelegt (Abbildung 2.3.4). Sowohl die Norm der Belastungsgeschwindigkeit als auch die Norm der Belastung waren zunächst konstant. Anschaulich bedeutet dies, daß in der Axial/Scherdehnungsebene konzentrische Kreise beschrieben wurden. Diese wurden mit konstanter Bahngeschwindigkeit umlaufen. In weiteren Experimenten wurden auch andere

geometrische Figuren (Viereck, Sanduhr) als Belastung gewählt. Bei diesen Figuren war die Norm der Belastung einmal schwach und das andere Mal stark veränderlich.

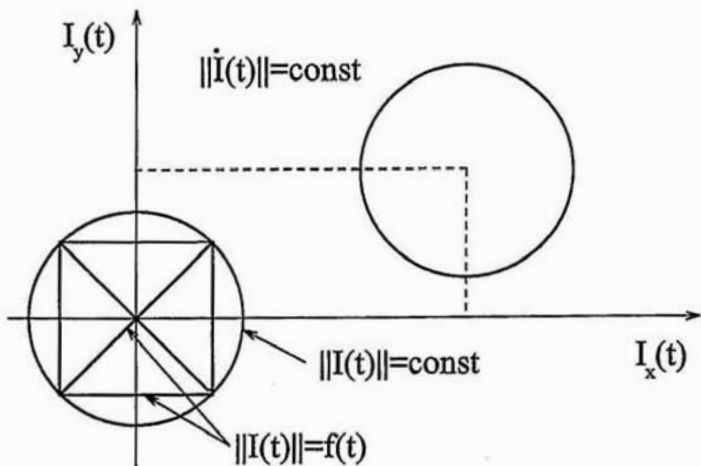


Abbildung 2.3.4.: Zweidimensionale Experimente

Die Abhängigkeit vom Mittelwert der Belastung wurde im Zweidimensionalen ebenfalls untersucht.

## 2.4 Eindimensionale Experimente, monoton

Im folgenden werden die experimentellen Ergebnisse aus monotonen spannungs- und dehnungsgesteuerten Zug- und Torsionsprozessen bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten mit und ohne Haltezeiten analysiert.

Hierzu zeigt die Abbildung 2.4.1 die Materialantworten auf monotone dehnungsgesteuerte Torsionsbelastungen.

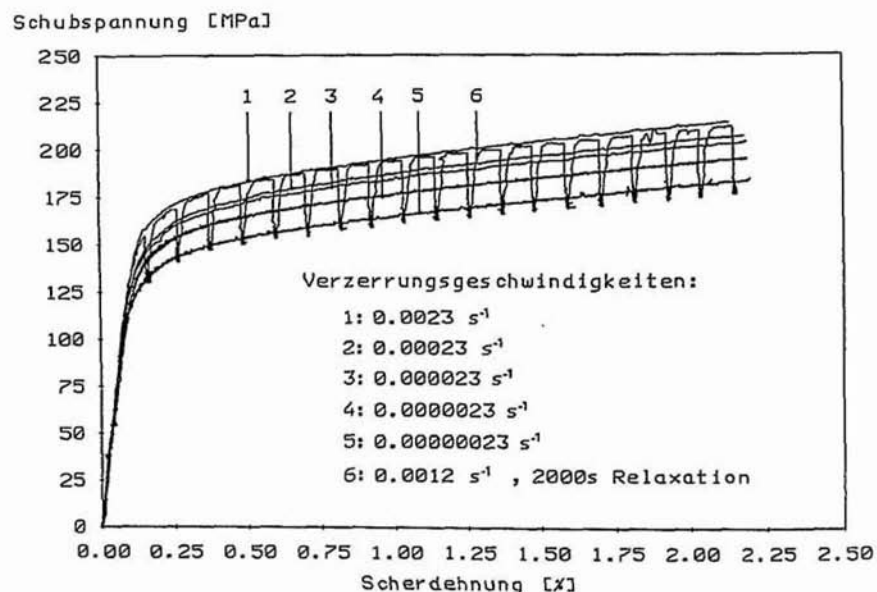


Abbildung 2.4.1.: Dehnungssteuerung, monoton

In den Experimenten 1 bis 5 wurden konstante Verzerrungsgeschwindigkeiten vorgegeben und über 5 Größenordnungen variiert. Ein Vergleich der Messungen zeigt, daß die Spannungsantwort von der Geschwindigkeit abhängt, wobei diese Abhängigkeit bei kleinen Spannungen ( $< 100 \text{ MPa}$ ) wenig ausgeprägt ist. Bei größeren Spannungen ist sie monoton und unterlinear.

Bei Versuch Nr. 6 wurde die konstante Verzerrungsgeschwindigkeit durch mehrere Haltezeiten mit einer Dauer von jeweils 2000 s unterbrochen. Dabei stellt man fest, daß Relaxation auftritt, wenn die Spannungen oberhalb von etwa 100 MPa liegen. Weiterhin fällt auf, daß die Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge unterhalb der Kennlinie liegen, die zur kleinsten Verzerrungsgeschwindigkeit ( $2,3 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ) gehört. Diese Beobachtung kann so interpretiert werden, daß die Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge nahe bei zeitunabhängigen Gleichgewichtspunkten liegen. Die Verbindungskurve solcher Gleichgewichtspunkte wird als

*Gleichgewichtskennlinie* bezeichnet und die Differenz zwischen den Gleichgewichts- und den zur selben Dehnung gehörigen Spannungspunkten als *Überspannung*.

Offensichtlich ist zur experimentellen Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie aus Zeitgründen die Durchführung von Versuchen mit Haltezeiten günstiger als die Durchführung von Versuchen mit kleinen Geschwindigkeiten.

Am Ende jeder Haltezeit, wurde die Dehnung weiter erhöht. Dabei beobachtet man, daß die Steigung der resultierenden Materialantwort in der Nähe der Gleichgewichtszustände unabhängig von der Dehnung ist und daß sie etwa denselben Wert hat wie zu Versuchsbeginn.

Abbildung 2.4.2 zeigt zum Vergleich monotone Zugversuche, bei denen die Axialverzerungsgeschwindigkeit über 4 Größenordnungen variiert wurde.

Axialspannung [MPa]

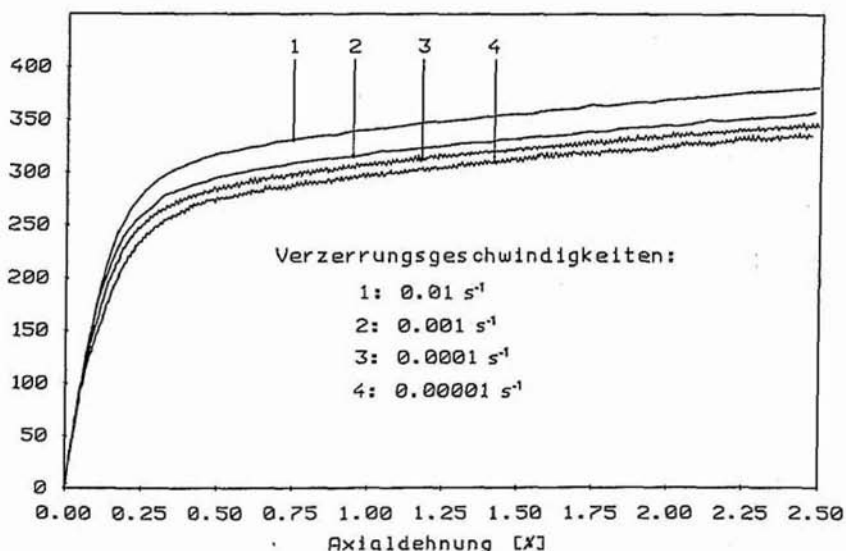


Abbildung 2.4.2.: Zugversuche, monoton

Man sieht, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit bei Zugbelastungen dieselben wesentlichen Merkmale aufweist wie bei Torsionsbelastungen.

Durch zwei weitere in Abbildung 2.4.4 dargestellte Experimente wurde überprüft, ob die Vorgeschichte einen Einfluß auf die Geschwindigkeitsabhängigkeit hat (vergleiche mit [30]). Dazu wurden eine jungfräuliche und eine vorbelastete Probe demselben Belastungsprozeß unterzogen. Er ist in Abbildung 2.4.3 dargestellt.

Zunächst wurde eine Geschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  zugrunde gelegt. Diese wurde nach Erreichen einer Dehnung von 0,45% um zwei Dekaden reduziert und nach weiteren 0,45% auf den ursprünglichen Wert erhöht, usw.. Die Antwort der jungfräulichen Probe trägt die

Bezeichnung (1).

Danach wurde die Probe aus- und wieder eingespannt und 50 mal zyklisch mit einer Amplitude von 1% und einer Verzerrungsgeschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  belastet. Anschließend wurde die Probe ein weiteres mal mit dem in Abbildung 2.4.3 dargestellten Prozeß belastet. Die Spannungsantwort ist mit (2) bezeichnet.

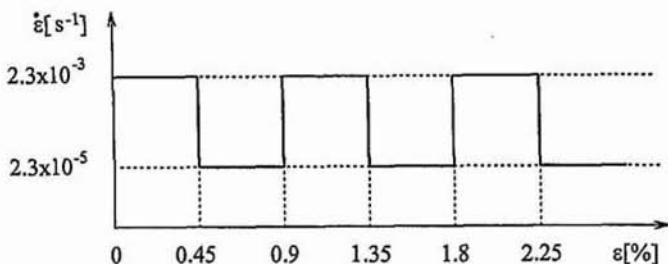


Abbildung 2.4.3.: Belastungsprozeß zum Experiment in Abbildung 2.4.4

Schubspannung [MPa]

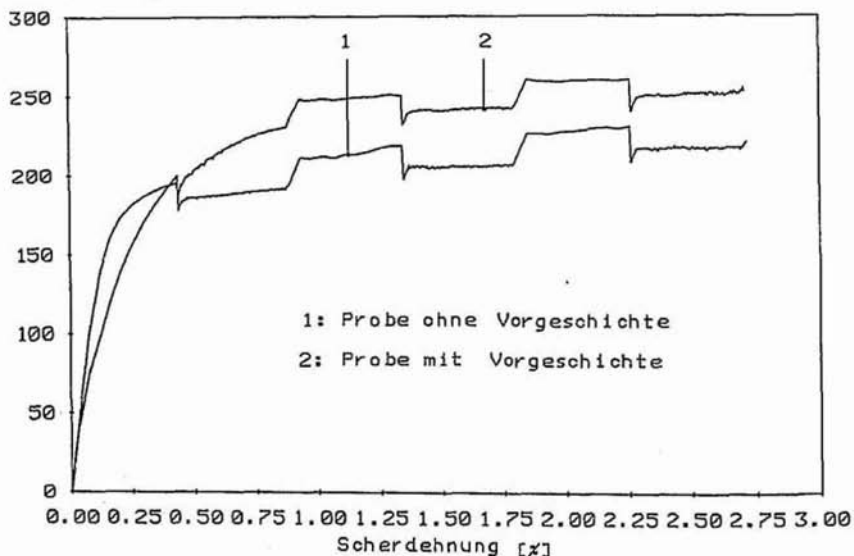


Abbildung 2.4.4.: Geschwindigkeitsabhängigkeit mit und ohne Vorgeschichte

Die Messergebnisse zeigen, daß das Material auf Sprünge in den Verzerrungsgeschwindigkeiten mit Spannungsdifferenzen antwortet, deren Werte schnell stationär werden. Durch Vergleich der Kurven (1) und (2) sieht man, daß die stationären Spannungsdifferenzen unabhän-

gig von der Vorgeschichte der Probe sind. Sie können nach Krempl [30] als Maß für die Geschwindigkeitsabhängigkeit interpretiert werden. Sie erweist sich damit als unabhängig von der Probenvorgeschichte, also der Verzerrungsgeschichte: Lediglich der Absolutwert der Spannung hat sich mit der Vorbelastung geändert. Er ist größer geworden.

Diese Resultate stehen im Einklang mit den Beobachtungen von Krempl [30] und Krempl und Lu [18] am Stahl AISI 304. Nach den Messungen von El - Assal und Jones [31] könnte beim Stahl AISI 316 die Größe der stationären Spannungsdifferenzen schwach davon abhängen, mit welcher Verzerrungsgeschwindigkeit, die Vorgeschichte durchlaufen wurde.

Schubspannung [MPa]

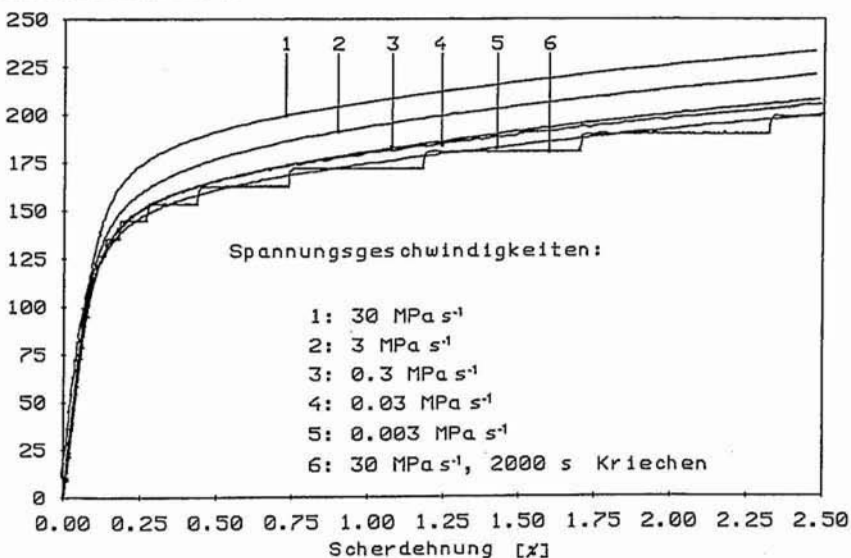


Abbildung 2.4.5.: Spannungssteuerung, monoton

Abbildung 2.4.5 zeigt die Antworten der Probe auf monotone spannungsgesteuerte Torsionsbelastungen. In den Versuchen 1 bis 5 wurden konstante Spannungsgeschwindigkeiten vorgegeben und über 5 Größenordnungen variiert. Der Vergleich der Materialantworten zeigt, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit dieselben wesentlichen Merkmale aufweist, wie unter Dehnungssteuerung.

Bei Versuch Nr. 6 wurde die konstante Spannungsgeschwindigkeit durch mehrere Haltezeiten von 2000 s Dauer unterbrochen und die resultierenden Kriechvorgänge aufgezeichnet. Dabei beobachtet man, daß bei Spannungen die unterhalb von etwa 100 MPa liegen, kein meßbares Kriechen auftritt. Mit größeren Spannungen wird das Kriechen jedoch immer ausgeprägter.

Nach diesen Beobachtungen ist es sinnvoll, die Abbruchpunkte der Kriechvorgänge mit denen der Relaxationsvorgänge zu vergleichen. Die folgende Abbildung 2.4.6 zeigt, daß die

Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge bei gleichen Haltezeiten unterhalb derer der Kriechvorgänge liegen.

Schubspannung [MPa]

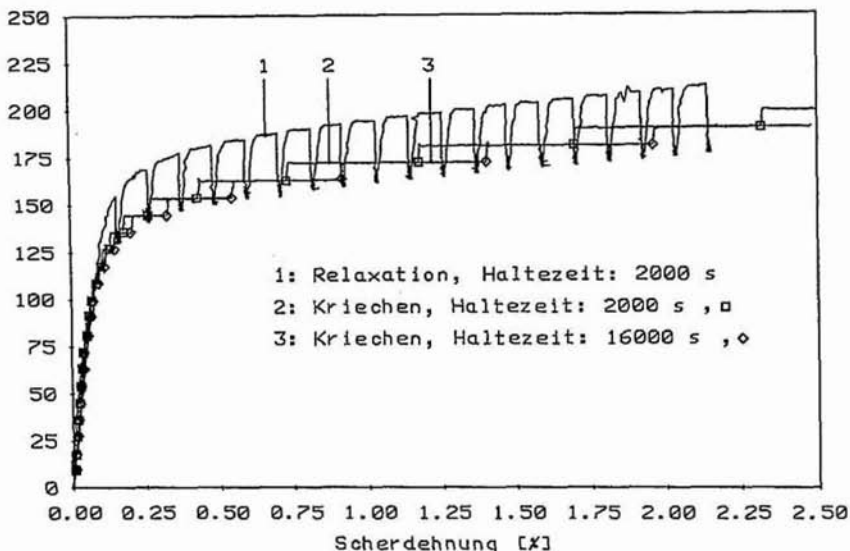


Abbildung 2.4.6.: Vergleich zwischen Relaxation und Kriechen

Man beobachtet allerdings, daß nach einer Erhöhung der Haltezeiten auf 16000 s die Differenzen zwischen den Abbruchpunkten aus Kriechen und Relaxation kleiner geworden sind. Es scheint demnach möglich zu sein, die Gleichgewichtskennlinie sowohl durch verzerrungsgesteuerte als auch durch spannungsgesteuerte Versuche mit Haltezeiten zu ermitteln. Wegen der notwendigerweise größeren Dauer der Kriechexperimente wurden zur weiteren Ermittlung der Gleichgewichtseigenschaften Relaxationsexperimente durchgeführt. Solche Versuche werden nun diskutiert.

## 2.5 Eindimensionale Experimente, zyklisch

In diesem Abschnitt werden die Messergebnisse aus zyklischen spannungs- und dehnungsgesteuerten Zug / Druck - und Torsionsversuchen mit konstantem Betrag der Belastungsgeschwindigkeit analysiert.

Die folgenden Abbildungen 2.5.1 und 2.5.2 zeigen dazu drei zyklische verzerrungsgesteuerte Torsionsexperimente. Dabei sind in Abbildung 2.5.1 zwei Experimente bei verschiedenen aber festen Mitteldehnungen dargestellt. Abbildung 2.5.2 zeigt einen Versuch, wo die Mitteldehnung im Verlauf der Belastung verlagert wurde.

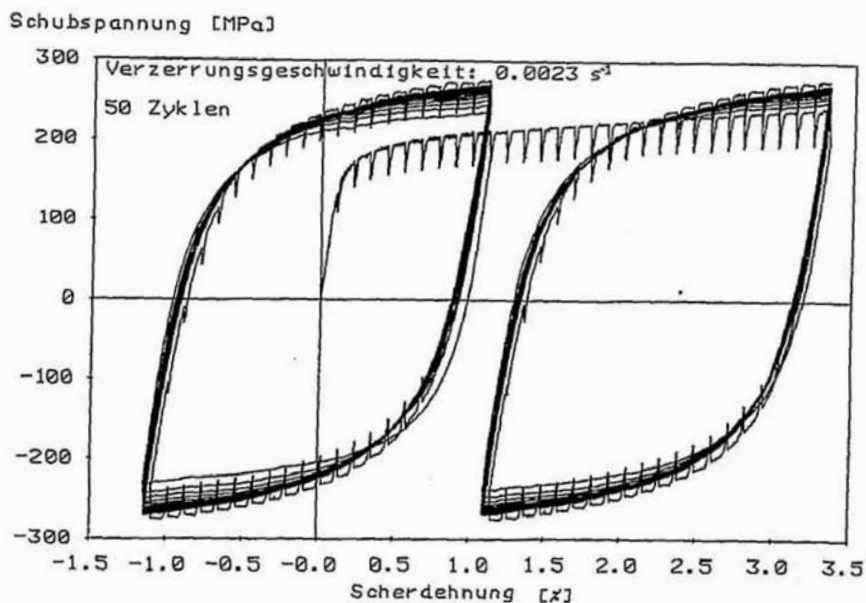


Abbildung 2.5.1.: Dehnungssteuerung, zyklisch, verschiedene Mitteldehnungen

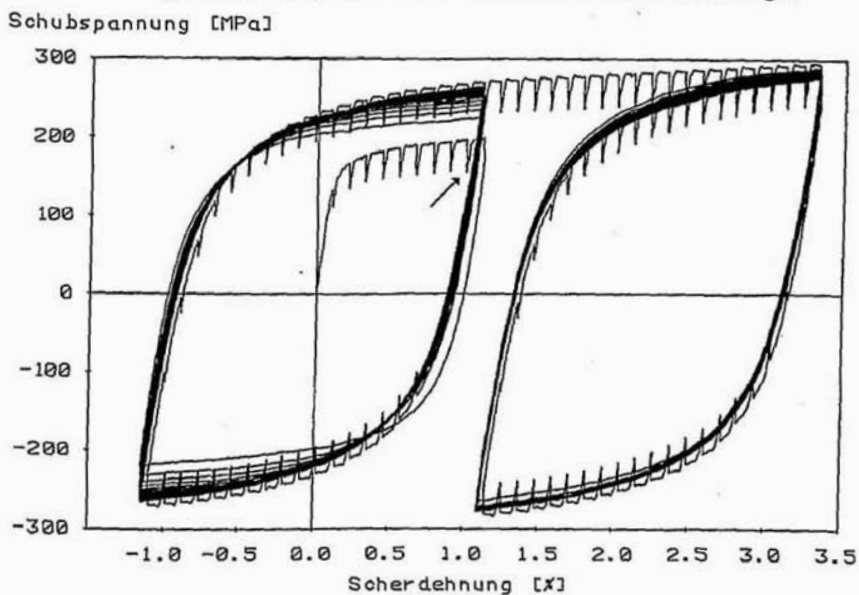


Abbildung 2.5.2.: Dehnungssteuerung, zyklisch, Verlagerung der Mitteldehnung

Der Betrag der Verzerrungsgeschwindigkeit hatte in allen drei Experimenten denselben Wert von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  und die Dehnungsamplitude betrug 1%. Für die Mitteldehnung wurden die Werte 0% und 2,2% gewählt. Zunächst wurde die Dehnung monoton erhöht und die konstante Verzerrungsgeschwindigkeit durch mehrere Haltezeiten von 2000 s Dauer unterbrochen. Anschließend wurden 50 Zyklen ohne Haltezeiten gefahren und der letzte Zyklus zur Erfassung der Gleichgewichtskennlinie durch Haltezeiten unterbrochen.

In allen Experimenten stellt man während der zyklischen Belastung ein monotonen Anwachsen der Spannungsamplitude mit der Zyklenzahl fest, was in der Literatur als *zyklische Verfestigung* bezeichnet wird (z. B. [5, 6, 19]). Dabei ist nach etwa 20 Zyklen eine stationäre Hysterese erreicht.

Bei dem in Abbildung 2.5.2 dargestellten Versuch wurde die Mitteldehnung nach Erreichen der stationären Hysterese von 0% auf 2,2% erhöht und anschließend 50 weitere Zyklen mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit durchgeführt. Der letzte Zyklus wurde erneut durch Haltezeiten unterbrochen.

Durch Vergleich dieser Messungen sieht man, daß die stationäre Hysterese in guter Näherung unabhängig von der Mitteldehnung ist. Nach den Messergebnissen von Bruhns, Lehmann und Pape [10] bzw. Pape [19] liegt bei dem Stahl CK 15 ein ähnliches Verhalten vor, so daß die Unabhängigkeit der stationären Hysterese von der Mitteldehnung vermutlich eine charakteristische Eigenschaft von Stahl ist. Kikillus hat in [80] zyklische Experimente mit einer mittleren Dehnung von 2% und einer Amplitude von 0,7% gefahren. Er hat am Stahl Ck15 beobachtet, daß die nach etwa 300 Zyklen noch verbleibende Mittelspannung im Bereich von etwa 1,2% der Spannungsamplitude liegt. Solche Effekte werden hier vernachlässigt.

Die sich aus den Abbruchpunkten der Relaxationsvorgänge ergebende Hystereseschleife ist offensichtlich die Gleichgewichtskennlinie, die zur stationären Hysterese gehört. Sie wird als stationäre *Gleichgewichtshysterese* bezeichnet.

Nun werden die Spannungsdifferenzen untersucht, die aus den Relaxationsvorgängen resultieren. Im Bereich von etwa 1% Dehnung sieht man, daß sie stationär geworden und damit unabhängig von der Dehnung sind (Pfeil in Abbildung 2.5.2). Vergleicht man nun die Änderungen, die zum ersten Viertelzyklus gehören mit denen der stationären Hysterese, dann sieht man, daß sie gleich sind. Damit hängen sie nicht von der Verzerrungsgeschichte ab.

Interpretiert man diese Spannungsdifferenzen als Maß für die Geschwindigkeitsabhängigkeit, dann zeigt sich ein weiteres Mal, daß die geschwindigkeitsabhängigen Eigenschaften von XCrNi18.9 im stationären Fall unabhängig von der Verzerrungsgeschichte sind (siehe Krcmpl und Lu [18]). Unter instationären Bedingungen liegt allordings eine Geschichtabhängigkeit vor, die man erkennt, indem man beispielsweise die erste Relaxation des ersten Viertelzyklus mit der zur selben Dehnung gehörigen der stationären Hysterese vergleicht.

Die zyklische Verfestigung hängt dagegen vergleichsweise stark von der Verzerrungsgeschichte ab. Sie muß den Gleichgewichtseigenschaften des Materials zugeordnet werden.

Abbildung 2.5.3 zeigt zum Vergleich die Spannungsantwort auf eine zyklische Zug / Druck - Belastung, wobei der Betrag der Verzerrungsgeschwindigkeit einen Wert von  $1,2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  hatte. Die Versuchsführung war ansonsten dieselbe wie bei dem in Abbildung 2.5.1 dargestellten Torsionsversuch ohne Mitteldehnung.

Axialspannung [100 MPa]

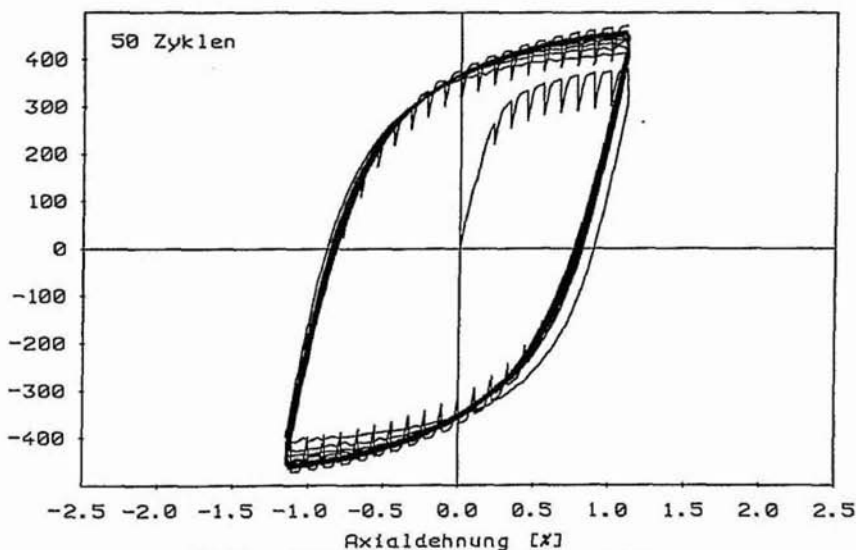


Abbildung 2.5.3.: Zug / Druck - Belastung, zyklisch

An der Kennlinie sieht man, daß in Bezug auf die Verfestigung und die Geschwindigkeitsabhängigkeit bei axialen Belastungen ein ähnliches Verhalten vorliegt wie bei Torsionsbelastungen.

Durch das in Abbildung 2.5.4 dargestellte Experiment wurde das Verfestigungsverhalten von XCrNi18,9 bei verschiedenen Dehnungsamplituden untersucht.

Im ersten Abschnitt des Versuchs wurde die Probe monoton mit Haltezeiten bis zu einer Dehnung von 0,5% belastet. Anschließend fand eine zyklische Belastung bei 3 verschiedenen Dehnungsamplituden statt. Es wurden jeweils 50 Zyklen durchgeführt und der Betrag der Dehnrate betrug  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Die Amplitude hatte zunächst einen Wert von 0,5%, bei der zweiten Zyklenschar einen Wert von 1% und bei der dritten wieder einen von 0,5%. Der jeweils letzte Zyklus wurde zur Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie durch Haltezeiten unterbrochen.

Zunächst fällt auf, daß die zur Dehnungsamplitude von 1% gehörige Gleichgewichtshysterese deckungsgleich mit den in den Abbildungen 2.5.1 und 2.5.2 dargestellten ist. Die Beobachtung, daß die stationäre Gleichgewichtshysterese unabhängig von zyklischen Vorbelastungen bei kleineren Amplituden und unabhängig von der Mitteldehnung ist, läßt vermuten, daß das

Gleichgewichtsverhalten durch ein nachlassendes Gedächtnis ausgezeichnet ist. Diese Eigenschaft bezieht sich jedoch nicht auf die Zeit sondern auf eine andere Größe, die bei dieser Versuchsführung proportional zur Zyklenzahl ist.

Schubspannung [MPa]

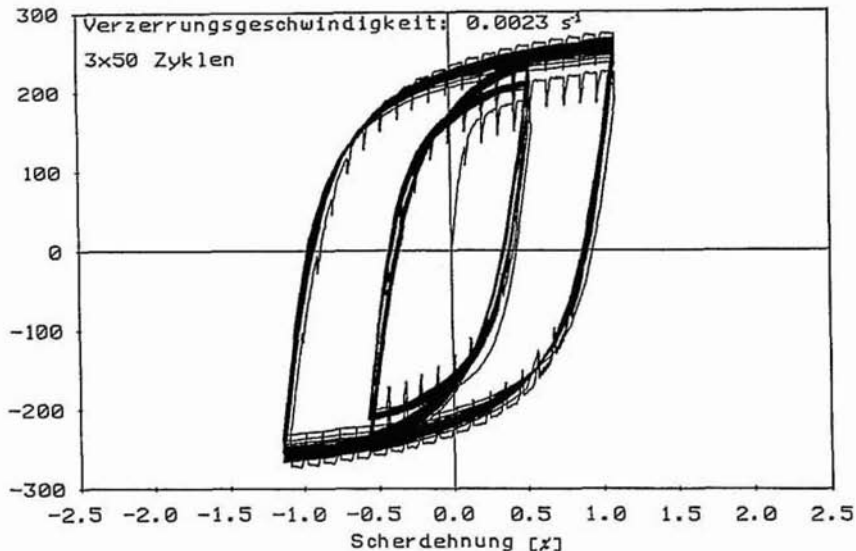


Abbildung 2.5.4.: Dehnungssteuerung, zyklisch, verschiedene Dehnungsamplituden

Bei der Verringerung der Dehnungsamplitude auf ihren ursprünglichen Wert von 0,5% antwortet das Material mit einer monotonen Abnahme der Spannungsamplitude. Sie wird als *zyklische Entfestigung* bezeichnet. Die Entfestigung läuft jedoch erheblich langsamer ab als die Verfestigung. Sie ist am Ende des Experimentes noch nicht abgeschlossen. Wegen der nachlassenden Gedächtniseigenschaft wird vermutet, daß sich nach vollständiger Entfestigung auch eine stationäre Hysterese einstellt und zwar dieselbe wie die, die sich nach vollständiger Verfestigung ergibt. Lediglich die Zyklenzahlen bis zum Erreichen der Stationarität sind geschichtsabhängig. Die stationäre Gleichgewichtshysterese hängt damit nur von der Dehnungsamplitude ab.

Die Autoren Tanaka, Murakami und Oaka [20] haben in diesem Zusammenhang auch Experimente mit mehreren Folgen von Dehnungsamplituden durchgeführt. Sie haben beobachtet, daß die stationäre Hysterese genau dann unabhängig von zyklischen Vorbelastungen bei anderen Amplituden ist, wenn die größte Dehnungsamplitude im Verlauf des Prozesses einen gewissen Grenzwert nicht übersteigt. Er liegt nach Angabe der Autoren beim Stahl AISI 316 bei etwa 0,4%.

Von Kikillus [80] wurde der Stahl Ck 15 mit einer Amplitudenfolge von 0,7%, 1% und 0,7%

beansprucht und jeweils 100, 100 und 400 Zyklen gefahren. Die Spannungsamplituden wurden mit denen aus einem weiteren Experiment verglichen, bei dem 600 Zyklen mit konstanter Amplitude von 0.7% durchgeführt wurden. Nach Angabe des Autors ist auch bei diesem Material das stationäre Hystereseverhalten unabhängig von zyklischen Vorbelastungen bei größeren Amplituden. Die Unabhängigkeit zeigt sich jedoch erst nach einigen 100 Zyklen.

Die Experimente von Chaboche, Dang Van und Cordier [11] deuten darauf hin, daß das stationäre Hystereseverhalten geschichtsabhängig wird, wenn die Dehnungsamplituden sehr groß werden (ca. 3%). Dann ist die Form der stationären Hysterese abhängig von zyklischen Vorbelastungen bei größeren Amplituden.

Durch die folgenden Experimente wurde das Verhalten von XCrNi18.9 bei besonders kleinen Dehnungsamplituden untersucht.

Schubspannung [MPa]

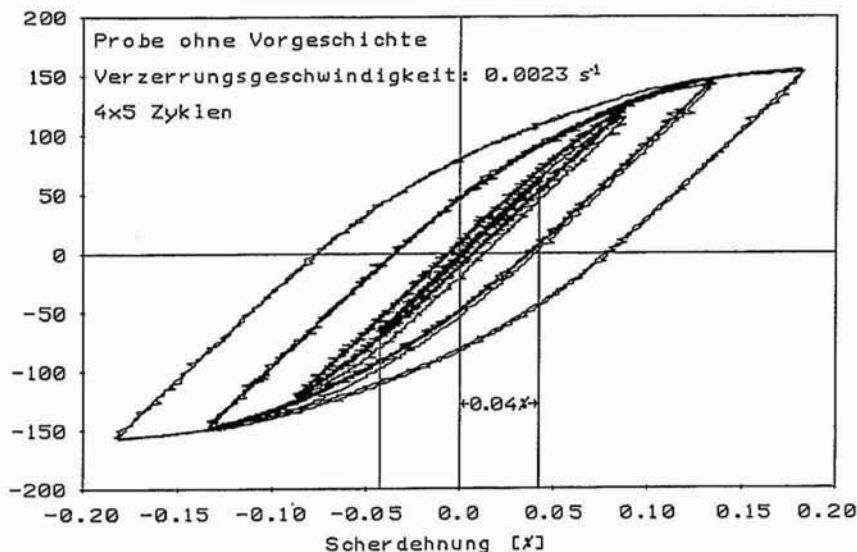


Abbildung 2.5.5: Dehnungssteuerung, zyklisch, kleine Dehnungsamplituden

Bei dem in Abbildung 2.5.5 dargestellten Versuch wurden in aufsteigender Folge 4 Amplituden im Bereich von 0,04% bis 0,18% zugrunde gelegt, wobei jeweils 5 Zyklen mit einer Geschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  durchgeführt wurden. Man beobachtet, daß das Material auch bei kleinen Dehnungsamplituden mit Hysterese antwortet. Bei der kleinsten Amplitude von 0,04% tritt allerdings keine messbare Hysterese auf, so daß die Deformationen hier vollständig reversibel und damit elastisch sind. Anschließend wurde die Probe zur Untersuchung der Geschichtsabhängigkeit des elastischen Bereiches 15 mal zyklisch mit einer Amplitude von 1% belastet und das beschriebene Programm nochmals durchgeführt.

Die Meßergebnisse sind in Abbildung 2.5.6 dargestellt. Wegen der Vorbelastung sind die Hystereseschleifen unsymmetrisch zu den Koordinatenachsen. Ein elastischer Bereich wird jedoch wieder identifiziert. Die Steigung der Kennlinie ist hier dieselbe wie bei der jungfräulichen Probe in Abbildung 2.5.5 und damit unabhängig von der Verzerrungsgeschichte.

Schubspannung [MPa]

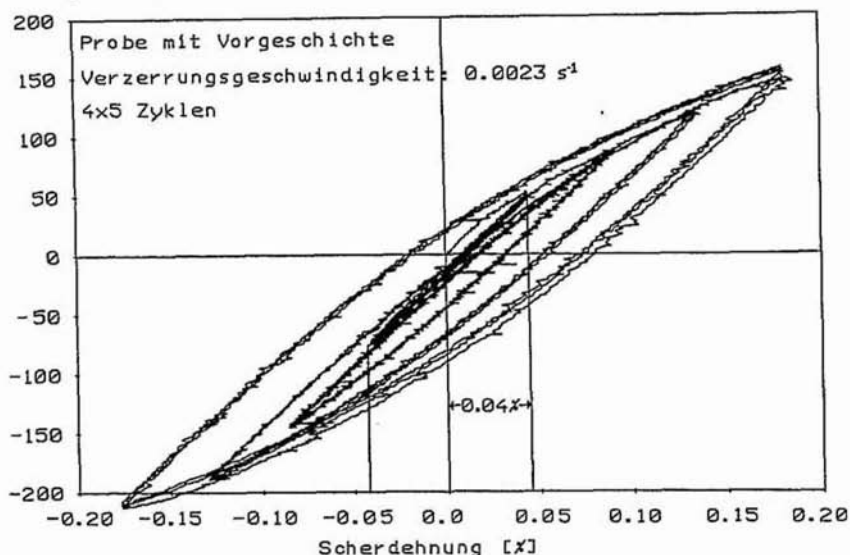


Abbildung 2.5.6: Dehnungssteuerung, zyklisch, wie 2.5.5 jedoch mit Vorbelastung

Die folgenden Torsionsversuche wurden unter zyklischer Spannungssteuerung durchgeführt. Dabei wurde zunächst die Spannung mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $25 \text{ MPa s}^{-1}$  auf einen Wert von  $200 \text{ MPa}$  erhöht. Danach wurde sie 50 mal zyklisch zwischen dieser und einer unteren Grenze variiert, wobei an beiden Spannungsgrenzen Haltezeiten mit einer Dauer von  $540 \text{ s}$  eingelegt wurden. Die obere Grenze hatte in allen Experimenten denselben Wert und die untere diente als Parameter. Sie wurde zwischen  $150 \text{ MPa}$  und  $-150 \text{ MPa}$  variiert. Die Meßdaten sind in den Abbildungen 2.5.7 bis 2.5.10 dargestellt.

Man beobachtet bei allen vier Experimenten eine Dehnungsakkumulation, d. h. ein monotonen Anwachsen der Mitteldehnung mit der Zyklenzahl. Dieses Phänomen wird in der Literatur als *Ratchetting* bezeichnet [15, 16, 17, 80].

Das Wesentliche an den in den Abbildungen 2.5.7 und 2.5.8 dargestellten Materialantworten ist, daß nur an der oberen Spannungsgrenze ein ausgeprägtes Kriechen stattfindet. Weiterhin fällt auf, daß die Übergänge zwischen den Spannungsgrenzen linear verlaufen. Durch die Haltezeiten an der unteren Grenze werden praktisch die Kriechvorgänge an der oberen Spannungsgrenze für die Dauer der Haltezeit an der unteren Grenze unterbrochen.

Schubspannung [MPa]

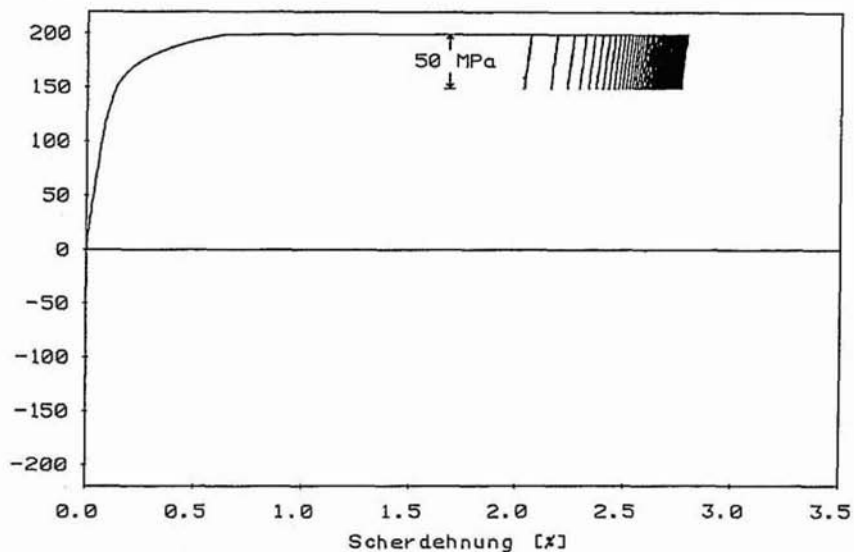


Abbildung 2.5.7.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: 150 MPa

Schubspannung [100 MPa]

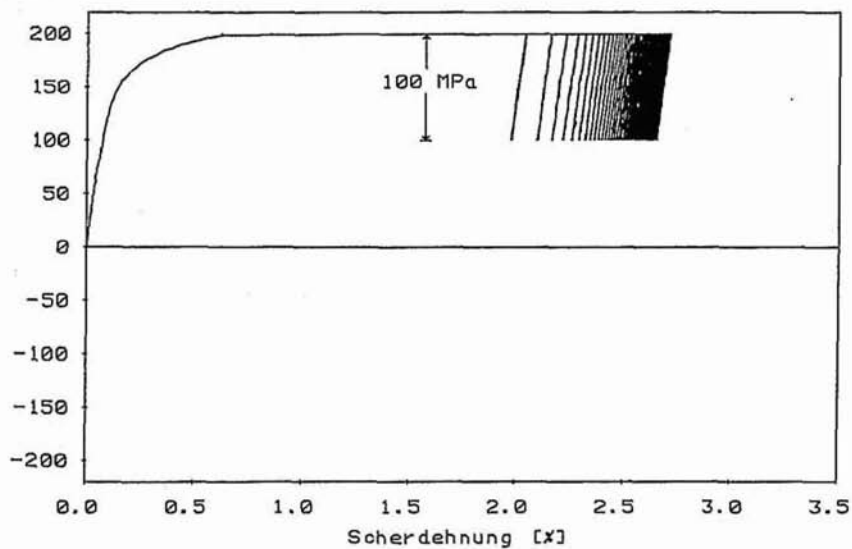


Abbildung 2.5.8.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: 100 MPa

Schubspannung [MPa]

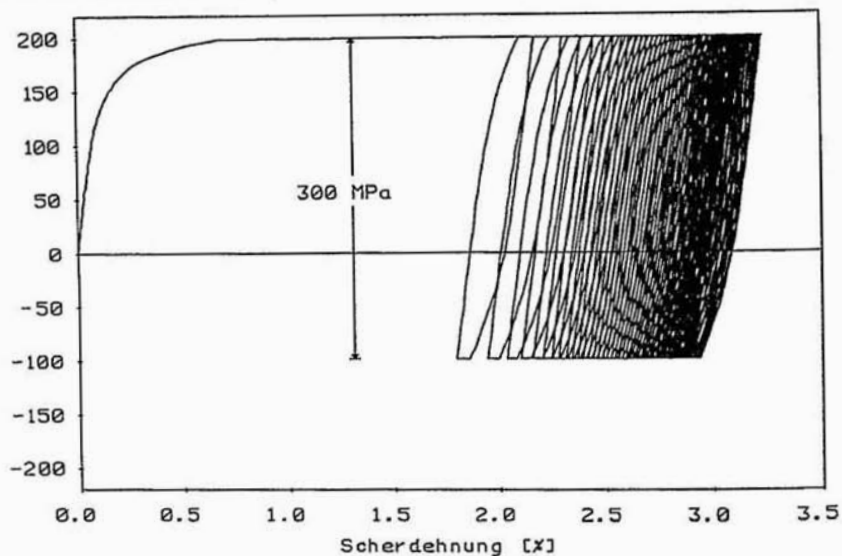


Abbildung 2.5.9.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: -100 MPa

Schubspannung [MPa]

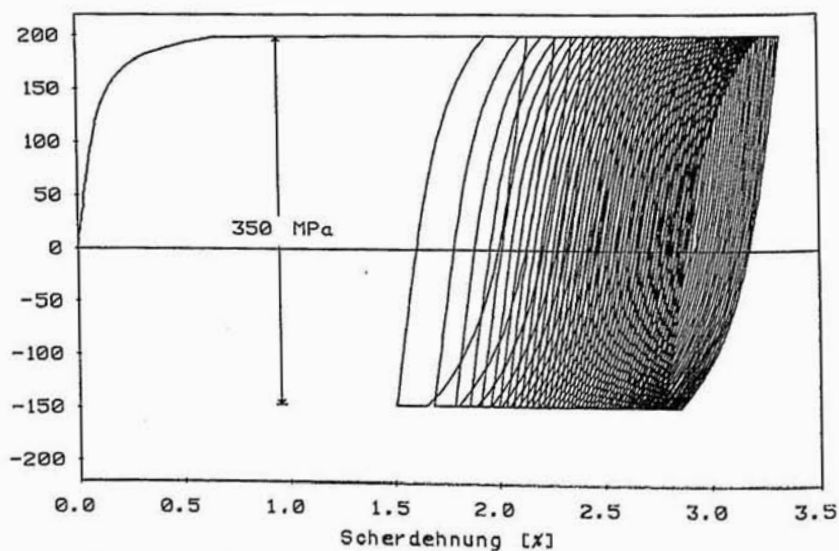


Abbildung 2.5.10.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: -150 MPa

Die Experimente von Ruggles und Krempl in [15] zeigen hierzu, daß sich der Stahl AISI 304 bei zyklischen Belastungen ohne Haltezeiten und nicht zu großen Spannungsintervallen ähnlich verhält. Nur im Bereich der oberen Spannungsgrenze wird Dehnung akkumuliert.

Das Bemerkenswerte an den in den Abbildungen 2.5.9 und 2.5.10 dargestellten Materialantworten bei großen Spannungsamplituden ist, daß auch an der unteren Spannungsgrenze ausgeprägte Kriechvorgänge zu beobachten sind. Dabei trägt die Kriechrate aber ein anderes Vorzeichen als an der oberen Grenze. Trotzdem beobachtet man zu Versuchsende einen größeren Wert der Mitteldehnung als bei Experimenten mit kleineren Spannungsamplituden.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Versuchsgruppen besteht in den Vorzeichen der auftretenden Kriechraten und in der Größe der akkumulierten Dehnungen. Wenn das überstrichene Spannungsintervall klein ist, dann haben die Kriechraten nur ein Vorzeichen und die Dehnungsakkumulation ist relativ klein. Andernfalls beobachtet man einen Vorzeichenwechsel der Kriechraten und die Dehnungsakkumulation wird größer.

Die Experimente von Kikillus an Ck 15 in [80] sind mit diesen nur qualitativ vergleichbar, da er seine Proben zwischen den Spannungsgrenzen mit konstantem Betrag der Dehnungsgeschwindigkeit belastet hat. Es zeigt sich jedoch auch, daß die Dehnungsakkumulation mit steigenden Spannungsamplituden ausgeprägter wird.

## 2.6 Zweidimensionale Experimente, zyklisch

Durch die folgenden Versuche wurde das Materialverhalten bei nichtradialen zyklischen Belastungen unter Dehnungssteuerung untersucht. Als Lastpfade wurden verschiedene geometrische Figuren in der  $\varepsilon - \gamma/\sqrt{3}$  - Ebene zugrunde gelegt. Sie wurden mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit von  $4,1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  umlaufen.

Zunächst wurden konzentrische Kreise als Belastung gewählt. Der Radius diente als Parameter und hatte die Werte 0,3% und 0,6%. Nach Erhöhung der Axialdehnung  $\varepsilon$  auf den Wert des Kreisradius wurden jeweils 50 Belastungszyklen durchgeführt. Der letzte Zyklus wurde zur Ermittlung der Gleichgewichtskennlinie durch Haltezeiten mit einer Dauer von 2000 s unterbrochen. Die registrierten Spannungsantworten sind in Abbildung 2.6.1 in einem  $\sigma - \sqrt{3}\tau$  - Diagramm aufgetragen.

Dabei erkennt man, daß der Radius der Spannungstrajektorie monoton mit der Zyklenzahl anwächst, d. h., daß auch bei mehrdimensionalen Belastungen eine zyklische Verfestigung auftritt. Ein stationärer Zyklus ist nach etwa 20 - 30 Zyklen erreicht. An der Größe der Spannungen an den Abbruchpunkten der Relaxationsvorgänge sieht man, daß die Verfestigung auch bei diesen Prozessen den Gleichgewichtseigenschaften des Materials zuzuordnen ist.

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

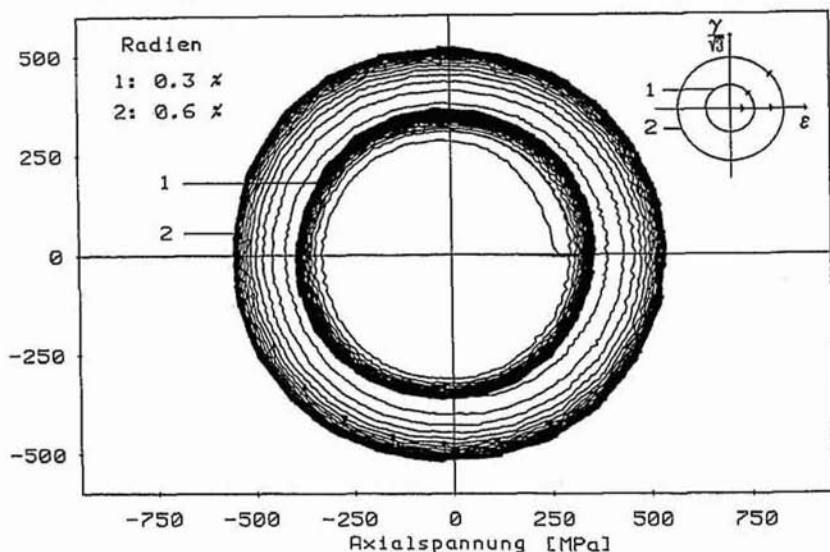


Abbildung 2.6.1.: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional, verschiedene Amplituden

Legt man bei ein- und zweidimensionalen steuerten Belastungen 'vergleichbare' Dehnungsamplituden zugrunde, dann stellt man durch Vergleich der Spannungmaxima in den Abbildungen 2.5.4 und 2.6.1 fest, daß die Mehrdimensionalität Anlaß zu einer Zusatzverfestigung gibt (siehe auch [21, 32, 33, 80]). Dabei bedeutet 'vergleichbar', daß die Scherdehnungsamplitude bei beiden Prozessen dieselbe ist. Bei dem zweidimensionalen Prozeß ist ihr zusätzlich eine um  $90^\circ$  phasenverschobene Axialdehnung überlagert, so daß Kreise entstehen. Ein Radius von  $\gamma/\sqrt{3} = 0,6\%$  entspricht also bei eindimensionalen Prozessen einer Dehnungsamplitude von  $\gamma/2 = 0,52\% \approx 0,5\%$ .

Die Abbildungen 2.6.2 und 2.6.3 geben die Materialantworten auf dehnungsgesteuerte Kreise mit einem Radius von  $0,45\%$  bei verschiedenen Werten der Mitteldehnung ( $\epsilon_M, \gamma_M/\sqrt{3}$ ) wieder. Bis auf die Haltezeiten im letzten Zyklus war die Versuchsführung dieselbe, wie die bei den in Abbildung 2.6.1 dargestellten Experimenten.

Der Vergleich der Meßergebnisse zeigt, daß auch unter zweidimensionalen Belastungen der stationäre Zyklus unabhängig von der Mitteldehnung ist. In diesem Zusammenhang sei noch auf eine Arbeit von Benallal, Le Gallo und Marquis [34] verwiesen, wo die Aluminiumlegierung 2024 untersucht wurde. Nach Angabe der Autoren liegt auch bei diesem Material keine Abhängigkeit der stationären Spannungsantwort von der Mitteldehnung vor.

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

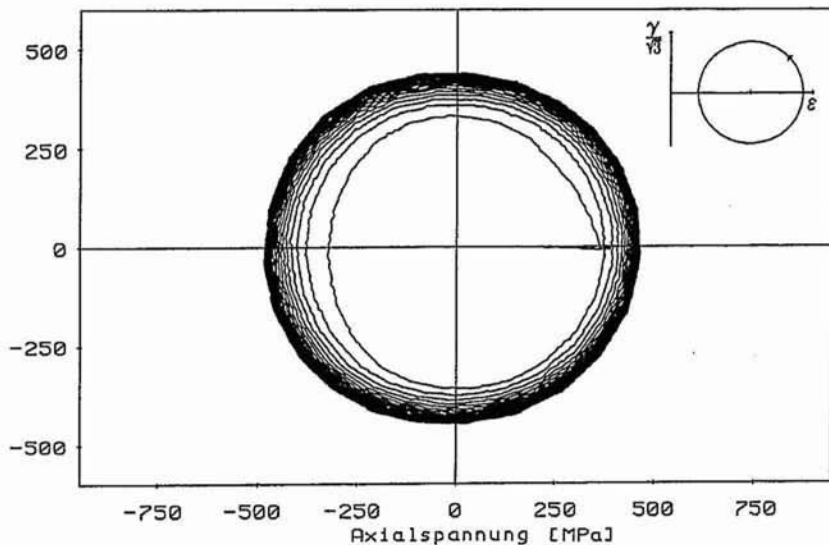


Abbildung 2.6.2.: Dehnungssteuerung, zyklisch,  $\epsilon_M = 1,2\%$ ,  $\gamma_M/\sqrt{3} = 0\%$

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

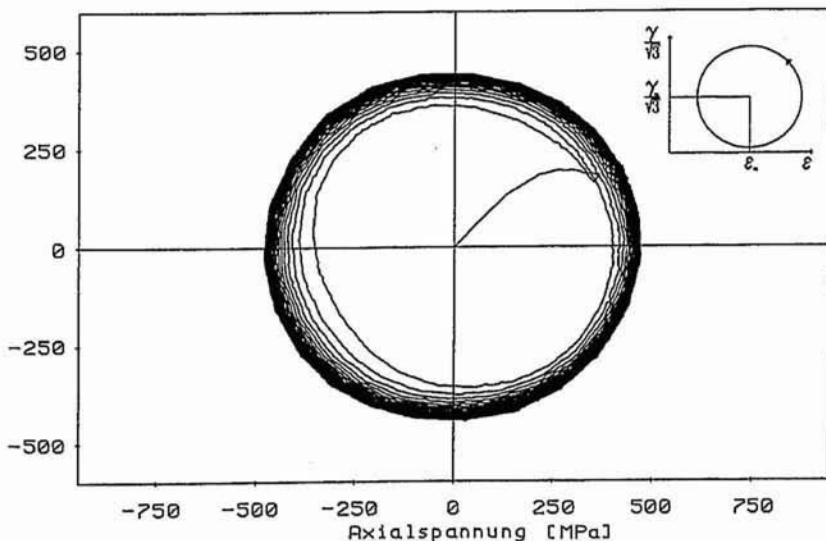


Abbildung 2.6.3.: Dehnungssteuerung, zyklisch,  $\epsilon_M = 1,2\%$ ,  $\gamma_M/\sqrt{3} = 1,2\%$

Im Versuch in Abbildung 2.6.4 wurde ein achsenparalleles Quadrat mit einer Kantenlänge von 0,72% als Belastung zugrunde gelegt. Zunächst wurde die Axialdehnung bis auf den Wert der halben Kantenlänge erhöht und danach 50 Belastungszyklen entgegen dem Uhrzeigersinn durchgeführt. Der letzte Zyklus wurde durch Haltezeiten unterbrochen.

Man beobachtet, daß sich als stationäre Spannungsantwort auf das achsenparallele Quadrat ein entgegen dem Uhrzeigersinn verdrehtes Viereck mit etwa gleichen Kantenlängen ergibt. Die Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge weisen darauf hin, daß diese Verdrehung ein Effekt ist, der den Gleichgewichtseigenschaften des Materials zugeordnet werden sollte.

Als letztes wurde ein sanduhrähnlicher Dehnungspfad gewählt. Er entsteht aus dem Quadrat indem man seine Eckpunkte durch Diagonalen verbindet und die Seitenlinien auslöscht. Der Umlaufsinn wurde so gewählt, daß die oberen Kanten von Quadrat und Sanduhr in derselben Richtung durchlaufen werden. Die Spannungsantwort ist in Abbildung 2.6.5 dargestellt.

Es fällt auf, daß auch die Materialantwort von sanduhrartiger Gestalt ist. Sie erscheint jedoch auf ihrer linken Seite zusammengedrückt. Ihre obere Kante ist etwa deckungsgleich mit der des Quadrates (gleiche Durchlaufrichtung) und ihre untere Kante geht durch Achsenspiegelung aus der oberen hervor (entgegengesetzte Durchlaufrichtung). Der Kreuzungspunkt der Diagonalen ist stark in die Richtung negativer Axialspannungen verschoben.

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

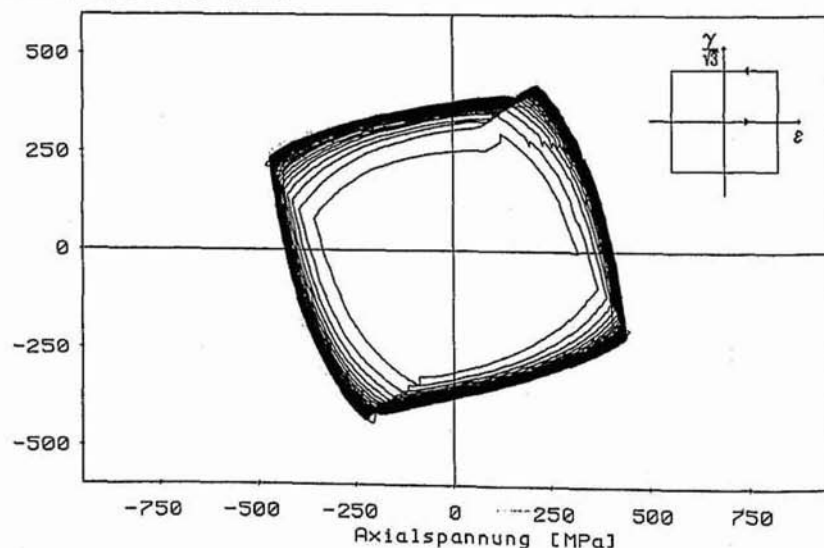


Abbildung 2.6.4.: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional, Quadrat

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

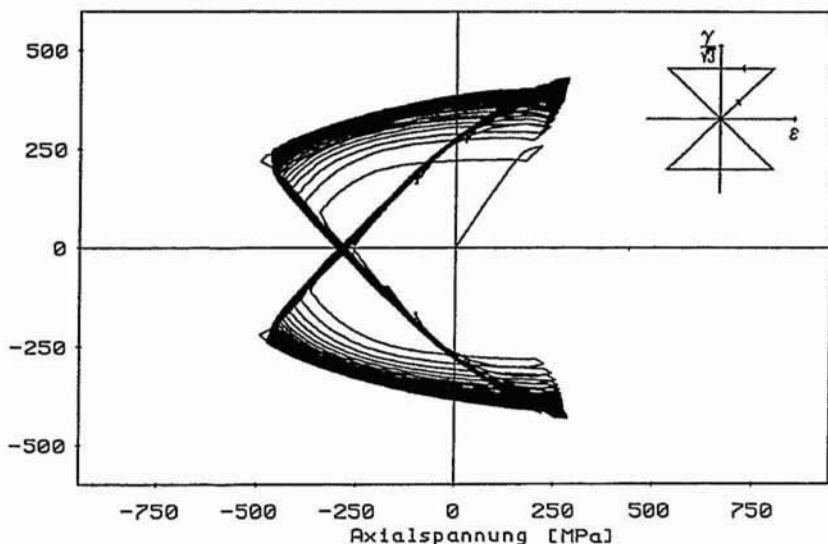


Abbildung 2.6.5.: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional, Sanduhr

## 2.7 Zur Materialabhängigkeit

Bevor mit der Materialbeschreibung begonnen wird, sollen noch einige Bemerkungen zur Materialabhängigkeit der beobachteten Phänomene gemacht werden. Im Rahmen einer konsistenten Theorie sollten Materialmodelle alle wesentlichen Phänomene darstellen können. Die Frage, welche das in dieser Arbeit sind, wird in Form einer Aufzählung beantwortet.

Wesentlich bei monotonen Prozessen ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit. Sie wird an den Stählen XCrNi18.9 (Abbildung 2.4.1), AISI 304 [7, 8, 9] und AISI 316 [14], verschiedenen Titan - [14, 28, 36, 39] und Aluminium - [37] bzw. Nickel - Legierungen [35] beobachtet und ist je nach Material mehr oder weniger stark ausgeprägt.

Charakteristisch für zyklische eindimensionale Prozesse ist das Verhalten der Verfestigung bei Dehnungs- und das des Ratchetting bei Spannungssteuerung. Bei Dehnungssteuerung hängt der stationäre Wert der Verfestigung monoton von der Dehnungsamplitude ab, nicht aber von der Mitteldehnung. Beobachtet wurde dies an XCrNi18.9 (Abbildungen 2.5.1 und 2.5.4), CK 15 [10, 80], AISI 304 [32] und AISI 316 [11, 20, 22], und der Legierung INCONEL 718 [38]. Das Verhalten des Ratchetting wurde an XCrNi18.9 (Abbildungen 2.5.7 bis 2.5.10), CS 1020 und CS 1026 [13], AISI 304 [15, 16] und AISI 316 [17], Ck 15 [80, 86], der Titan Legierung Ti-7-Al-2Cb-1Ta [36] und der Legierung INCONEL 718 [38] unter-

sucht. Wesentlich dabei ist, daß die Akkumulation der Mitteldehnung mit steigenden Mittelspannungen und Spannungsamplituden größer wird.

Typisch für mehrdimensionale Belastungen ist die Abhängigkeit der Spannungsantwort von der Form der Verzerrungstrajektorie. Das an XCrNi18.9 (Abbildung 2.6.1), AISI 304 [18, 32], AISI 316 [20], A-516 Gr. 70 [40] und CK 15 [10, 80] beobachtete Phänomen, daß die Verfestigung bei kreisförmigen dehnungsgesteuerten Prozessen stärker ist als bei vergleichbaren eindimensionalen Belastungen, scheint bei Stahl und Kupfer [62] besonders ausgeprägt zu sein. Dagegen wurde von Olschewski, Sievert und Bertram [35] eine Nickel - Legierung untersucht, die praktisch keine Zusatzverfestigung aufweist. Ähnliches Verhalten wurde von Krempf und Lu [37] bzw. Yao und Krempf [63] an einer Aluminium Legierung beobachtet.

Komplizierter werden die Abhängigkeiten bei nicht kreisförmigen Belastungen. In diesem Zusammenhang sei stellvertretend auf die Arbeiten von Pape [10], Kikillus [80], Benallal und Marquis [41], Delobelle und Lachat [79] und Jinghong und Xianghe [32] verwiesen, wo die Spannungsantworten auf kompliziertere dehnungsgesteuerte Belastungen zu finden sind.

### 3. Modellbildung

#### 3.1 Phänomenologische Klasseneinteilung des Materialverhaltens

Für einfache und homogene Materialien läßt sich der aktuelle Wert des Cauchyschen Spannungstensors  $\mathbf{T}(t)$  in einem materiellen Punkt eindeutig aus den vergangenen Werten des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  an dieser Stelle berechnen [26]:

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{H}[\mathbf{F}(t-s)] \quad 3.1.1$$

Dabei läßt sich das Funktional  $\mathcal{H}$  durch das Antwortspektrum des Materials auf homogene Deformationsgeschichten vollständig bestimmen. Deformationen werden als homogen bezeichnet, wenn der Deformationsgradient räumlich konstant ist.

Unter Berücksichtigung des Prinzips der materiellen Objektivität [1] und unter der Annahme kleiner Verzerrungen geht Gl. 3.1.1 über in die reduzierte Form

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}[\mathbf{E}(t-s)] \quad 3.1.2$$

wobei  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$  der linearisierte Verzerrungstensor und  $\mathbf{H}$  der Verschiebungsgradient ist. Der aktuelle Spannungszustand ist also bei kleinen Verzerrungen ein Funktional der Geschichte des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$ . Dieses Funktional ist im allgemeinen nichtlinear.

Zur weiteren Vereinfachung der allgemeinen Materialgleichung Gl. 3.1.2 ist es sinnvoll, das Spektrum des beobachtbaren Materialverhaltens zu ordnen. Ausgehend von den in Kapitel 2 diskutierten Experimenten läßt sich dabei eine gewisse Einteilung einführen. Sie wird nach einem Vorschlag von Haupt [4] in Abhängigkeit von bestimmten *Materialeigenschaften* vorgenommen. Als wesentlich wird dabei die Beobachtung von *Gleichgewichtszuständen* bzw. Gleichgewichtskennlinien erachtet. Sie können experimentell näherungsweise durch die Wahl hinreichend kleiner Belastungsgeschwindigkeiten oder durch die Einfügung von Haltezeiten in den Verlauf des Prozesses erfaßt werden.

Der Abstand zwischen einem aktuellen Zustand und dem dazugehörigen Gleichgewichtszustand ist in der Regel geschwindigkeitsabhängig und hängt vom Material ab. Diese Materialeigenschaft wird als *Geschwindigkeitsabhängigkeit* bezeichnet.

Eine ebenso wichtige Materialeigenschaft bezieht sich auf die Form der Gleichgewichtskennlinien bei nichtmonotonen Prozessen. Weist die Gleichgewichtskennlinie bei zyklischen Belastungen eine Hysterese auf, so wird diese Materialeigenschaft als *Gleichgewichtshysterese* bezeichnet.

Nach Einführung der Begriffe Geschwindigkeitsabhängigkeit und Gleichgewichtshysterese lassen sich, je nachdem ob ein Material die eine, die andere bzw. beide Eigenschaften aufweist oder nicht, vier verschiedene Klassen des Materialverhaltens einführen. Diese werden mit *Elastizität*, *Plastizität*, *Viskoelastizität* und *Viskoplastizität* bezeichnet.

In Bezug auf die Modellierung der Materialeigenschaften zeigt sich, daß die Materialgleichungen für jede dieser vier Klassen eine bestimmte mathematische Darstellung besitzen.

**Elastizität:** Zeigt ein Material weder Geschwindigkeitsabhängigkeit noch Gleichgewichtshysterese, so wird es als elastisch bezeichnet (Abbildung 3.1.1).

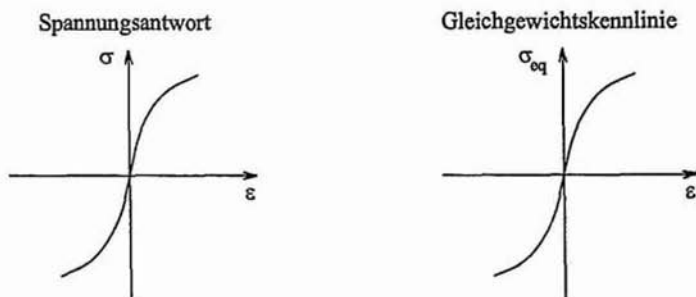


Abbildung 3.1.1: Elastizität

Die aktuelle Spannung  $\mathbf{T}(t)$  ist mit der Gleichgewichtsspannung identisch und läßt sich mathematisch als Funktion der aktuellen Verzerrung  $\mathbf{E}(t)$  darstellen:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{G}[\mathbf{E}(t)]$$

Hierbei kann die Funktion  $\mathbf{G}$  nichtlinear sein. Die Verzerrungsgeschichte hat keinen Einfluß auf den gegenwärtigen Wert der Spannung.

**Plastizität:** Dieser Gruppe gehören Stoffe an, die bei zyklischen Belastungen Hysterese zeigen, aber keine Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweisen. Damit ist die Spannungsantwort mit der Gleichgewichtskennlinie identisch (Abbildung 3.1.2).

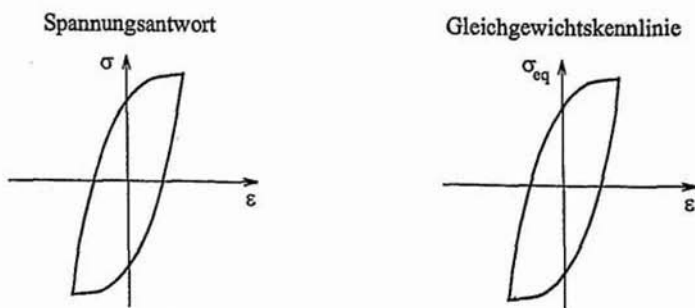


Abbildung 3.1.2: Plastizität

Wegen des Hystereseverhaltens hängt die aktuelle Spannung  $\mathbf{T}(t)$  allerdings im Gegensatz zur Elastizität von der gesamten Verzerrungsgeschichte ab.

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}_{\text{eq}} \int_{s \geq 0} [\mathbf{E}(t-s)]$$

Dabei ist  $\mathcal{F}_{\text{eq}}$  ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional. Nach Pipkin und Rivlin sind solche Funktionale im Rahmen der Bogenlängenparametrisierung der Verzerrungsgeschichte darstellbar [43]. Von Valanis wurden auf diese Weise Materialgleichungen der sogenannten endochronen Plastizität formuliert [42]. Von Haupt [77] und Fazio [78] wurden solche Materialgleichungen untersucht und mit Modellen der klassischen Plastizität verglichen.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des geschwindigkeitsunabhängigen Hystereseverhaltens besteht in der impliziten Darstellung von Funktionalen: Neben den beobachtbaren Größen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{E}$  werden zusätzliche Variable  $q_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) eingeführt. Die Evolution dieser *Inneren Variablen* wird durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben, die homogen vom Grad 1 in den Geschwindigkeiten sind. Die aktuelle Spannung  $\mathbf{T}(t)$  hängt in dieser Theorie nur noch von aktuellen Werten ab und zwar von  $\mathbf{E}(t)$  und von  $q_k(t)$ .

**Viskoelastizität:** Ein Material wird als viskoelastisch bezeichnet, wenn es Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweist, jedoch keine Gleichgewichtshysterese zeigt (Abbildung 3.1.3). Damit ist die aktuelle Spannungsantwort von der Gleichgewichtskennlinie verschieden.

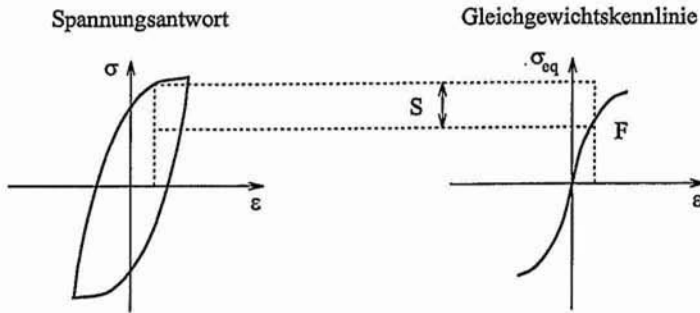


Abbildung 3.1.3: Viskoelastizität

Mathematisch setzt sich die Spannung  $\mathbf{T}(t)$  additiv aus zwei Anteilen zusammen:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{E}(t)] + \mathcal{J} \int_{s \geq 0} [\mathbf{E}(t-s)]$$

Hierbei ist der erste Anteil  $\mathbf{F}$  eine Funktion der aktuellen Verzerrung  $\mathbf{E}(t)$ . Er wird als Gleichgewichtsspannung bezeichnet. Der zweite Anteil, die Überspannung  $\mathcal{J}$ , ist ein geschwindigkeitsabhängiges Funktional der Verzerrungsgeschichte. Es gilt  $\mathcal{J} = \mathbf{0}$  für konstante Verzerrungsgeschichten. Weiter wird angenommen, daß die Überspannung  $\mathcal{J}$ , für Prozesse mit sehr kleinen Geschwindigkeiten oder für Prozesse mit Haltezeiten asymptotisch verschwindet. Man spricht von einer Relaxations- oder Fading - Memory Eigenschaft (siehe [1], [44]) bzw. von einem nachlassenden Gedächtnis.

Bei Prozessen mit endlichen Geschwindigkeiten hängt die Spannung  $\mathbf{T}(t)$  allerdings von der Verzerrungsgeschichte ab. Mit langsamer werdenden Belastungen verschwindet diese Abhängigkeit immer mehr, bis im Grenzfall die Spannung eine reine Funktion der aktuellen Dehnung ist [44]. Mathematisch entspricht dies einer Stetigkeitseigenschaft des Spannungsfunktionals (siehe z. B. [44]).

**Viskoplastizität:** Dies ist der allgemeinste Fall des Materialverhaltens. Ein Material wird als viskoplastisch bezeichnet, wenn Geschwindigkeitsabhängigkeit und Gleichgewichtshysteresere vorliegen (Abbildung 3.1.4).

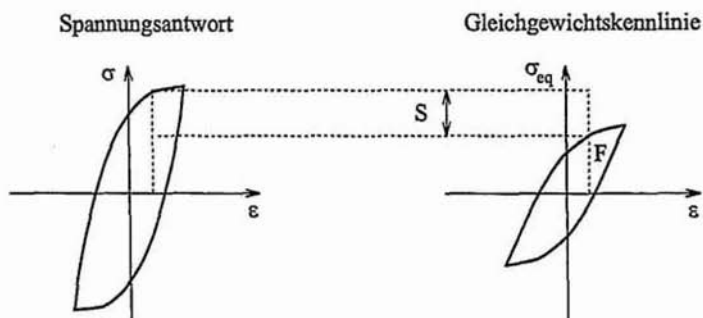


Abbildung 3.1.4: Viskoplastizität

Dabei setzt sich die aktuelle Spannung  $\mathbf{T}(t)$  additiv aus zwei Anteilen zusammen. Der Unterschied zur Viskoelastizität besteht darin, daß hier beide Anteile Funktionale sind:

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}[\mathbf{E}(t-s)] + \mathcal{L}[\mathbf{E}(t-s)]$$

Das Funktional  $\mathcal{L}$  der Überspannung hat dieselben Eigenschaften wie das in der Viskoelastizität, es verschwindet asymptotisch für langsame Belastungen.

Das Funktional der Gleichgewichtsspannung  $\mathcal{F}$  beschreibt die Geschichtsabhängigkeit der Gleichgewichtshysteresere. Dabei muß je nach Material damit gerechnet werden, daß die Form der Gleichgewichtshysteresere auch davon abhängen kann, mit welcher Geschwindigkeit ein Verzerrungsprozeß durchlaufen wurde, d. h. daß das Funktional  $\mathcal{F}$  geschwindigkeitsabhängig vom Verzerrungsprozeß abhängt. Es zeigt sich jedoch später, daß diese Abhängigkeit bei dem Stahl XCrNi18.9 nicht vorliegt.

Die Frage, ob sich die mechanischen Eigenschaften eines bestimmten Materials der einen oder der anderen Klasse zuordnen lassen, kann nicht pauschal beantwortet werden. Es ist vielmehr so, daß unter einem bestimmten Spektrum von Belastungsgeschichten bestimmte Eigenschaften weniger und andere vielleicht stärker ausgeprägt sind. Eine angemessene Zuordnung kann also nur anhand experimenteller Ergebnisse und aufgrund von Idealisierungen stattfinden.

## 3.2 Ein Materialmodell der Viskoplastizität

### 3.2.1 Allgemeiner Aufbau

Anhand der in den Abschnitten 2.4 bis 2.6 diskutierten Experimente und der in Abschnitt 3.1 eingeführten Einteilung des Materialverhaltens, ist das Verhalten des hochlegierten Stahls XCrNi18.9 der Viskoplastizität zugeordnet. Der aktuelle Spannungszustand  $\mathbf{T}(t)$  besteht daher aus der Summe zweier geschichtsabhängiger Funktionale:

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}[\mathbf{E}(t-s)] + \mathcal{D}[\mathbf{E}(t-s)]$$

Das geschwindigkeitsabhängige Funktional  $\mathcal{D}$  der Überspannung geht mit abnehmenden Verzerrungsgeschwindigkeiten oder bei Prozessen mit Haltezeiten gegen Null. Die Gleichgewichtskennlinie wird dann durch das Funktional  $\mathcal{F}$  der Gleichgewichtsspannung beschrieben, das auch je nach Material mehr oder weniger stark geschwindigkeitsabhängig sein kann.

Schubspannung [MPa]

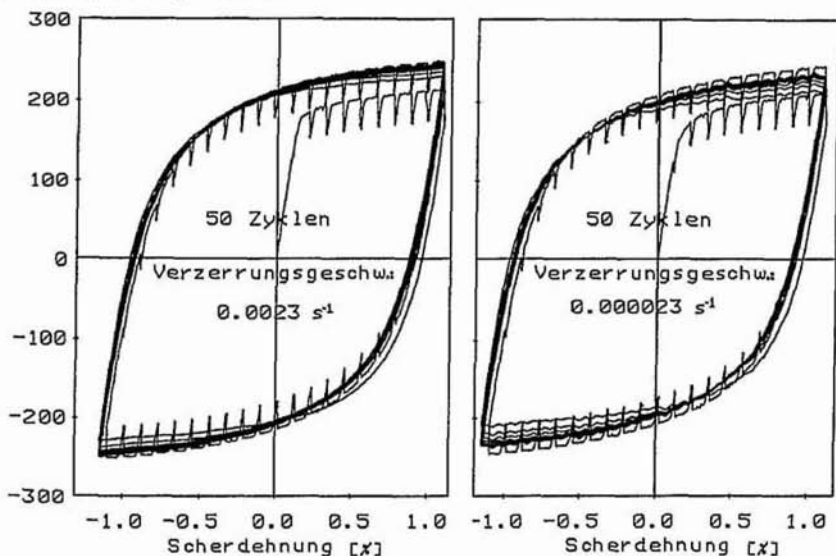


Abbildung 3.2.1.1: Zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Gleichgewichtsspannung

Durch das in Abbildung 3.2.1.1 dargestellte Experiment sollte herausgefunden werden, wie stark  $\mathcal{F}$  im Fall von XCrNi18.9 von der Geschwindigkeit des Verzerrungsprozesses abhängt. Hierzu wurden zwei jungfräuliche Proben mit derselben Verzerrungstrajektorie aber unterschiedlichen Geschwindigkeiten belastet.

Zuerst wurden beide Proben einem monotonen Prozeß mit Haltezeiten und einer Verzerungsgeschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  unterzogen. Nach Erreichen einer Dehnung von 1% wurden 50 Zyklen mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit durchgeführt. Bei der links in Abbildung 3.2.1.1 dargestellten Messung betrug diese  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  und bei der rechts dargestellten Messung war sie um zwei Größenordnungen kleiner. Der letzte Zyklus wurde zur Ermittlung der Gleichgewichtskennlinien durch mehrere Haltezeiten von 2000 s Dauer unterbrochen.

Durch Vergleich der Materialantworten sieht man, daß beide Gleichgewichtshysteresen, d. h. die Kurven, die sich aus der Verbindung der Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge ergeben, deckungsgleich sind. Ihre Form hängt demnach nicht davon ab, mit welcher Geschwindigkeit die Verzerrungstrajektorie durchlaufen wurde. An dieser Stelle ist zu erwähnen, daß Tsou und Quesnel [45] an polykristallinem Aluminium ähnliche Beobachtungen gemacht haben.

Nach diesen Ergebnissen kann das Funktional der Gleichgewichtsspannung durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional  $\mathcal{F}_{\text{eq}}$  dargestellt werden:

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}_{\text{eq}}[\mathbf{E}(t-s)] + \mathcal{J}[\mathbf{E}(t-s)] \quad 3.2.1.1$$

Damit wird die Geschwindigkeitsabhängigkeit allein durch das Funktional  $\mathcal{J}$  der Überspannung beschrieben, so daß durch Gl. 3.2.1.1 eine getrennte Modellierung von geschwindigkeitsabhängigen und geschwindigkeitsunabhängigen Materialeigenschaften möglich ist.

Als nächstes sollen unter Berücksichtigung der experimentell beobachteten Phänomene Ansätze für die Funktionale  $\mathcal{J}$  und  $\mathcal{F}_{\text{eq}}$  konstruiert werden. Die kristallphysikalischen Ursachen der Inelastizität (Punktdefekte, Scherbänder, Versetzungen, Korngrenzen, ...), die in einigen Fällen wertvolle Informationen zur Konstruktion von Materialgleichungen liefern können, werden dabei nicht betrachtet (siehe dazu z.B. Diehl [81], Steck [82], Bischoff-Beiermann [83]). Im weiteren wird eine eindimensionale Formulierung gewählt, die unter der Annahme materieller Isotropie auf räumliche Zustände übertragen werden kann.

### 3.2.2 Das Funktional der Überspannung

Nun wird anhand der in den Abbildungen 2.4.1 und 2.4.4 dargestellten Experimente ein Ansatz für das Funktional der Überspannung konstruiert. Hierzu wird von der eindimensionalen Form der Materialgleichung Gl. 3.2.1.1 für Torsionsbelastungen ausgegangen:

$$\tau = \tau_{eq} + s \quad 3.2.2.1$$

Mit  $\tau$  wird die Schubspannung bezeichnet und mit  $\tau_{eq}$  bzw.  $s$  die Gleichgewichts- bzw. Überspannung. Zur Konstruktion eines Modells für  $s$  werden zunächst die Relaxationsvorgänge aus Abbildung 2.4.1 betrachtet.

Da  $\tau_{eq}$  durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional dargestellt werden soll, gilt während der Haltezeiten bei konstanter Dehnung auch  $\tau_{eq} = \text{const}$ . Die Relaxation der Gesamtspannung auf den Wert der Gleichgewichtsspannung muß also durch die Relaxation der Überspannung auf den Wert Null beschrieben werden.

Ein einfaches Modell zur qualitativen Wiedergabe solcher Vorgänge ist beispielsweise durch die lineare Differentialgleichung

$$\dot{s} = -\frac{1}{z_0} s$$

gegeben. Dabei ist der Materialparameter  $z_0 > 0$  ein Maß für die Dauer der Relaxationsvorgänge.

Ferner wurde in Abbildung 2.4.1 beobachtet, daß sich die Überspannung  $s$  in der Nähe der Gleichgewichtszustände, d. h. bei  $s = 0$ , bei Belastung linear mit der Dehnung ändert. Dies kann mathematisch durch die Beziehung

$$\dot{s} = \alpha \dot{\epsilon} \quad 3.2.2.2$$

ausgedrückt werden. Für die Gesamtspannung  $\tau$  motivieren die Experimente einen entsprechenden Zusammenhang, wobei der Parameter  $\mu_0$  als spontaner Schubmodul bezeichnet wird:

$$\dot{\tau} = \mu_0 \dot{\epsilon} \quad 3.2.2.3$$

Damit die am Experiment motivierten Gleichungen Gl. 3.2.2.2 und Gl. 3.2.2.3 konsistent mit dem Ansatz nach Gl. 3.2.2.1 sind, dürfen  $\alpha$  und  $\mu_0$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Aus  $\dot{\tau} = \dot{\tau}_{eq} + \dot{s}$  bzw.

$$\mu_0 \dot{\epsilon} = \left( \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} + \alpha \right) \dot{\epsilon} \quad 3.2.2.4$$

folgt, daß zwischen ihnen die Relation

$$\alpha = \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \quad 3.2.2.5$$

gelten muß.

Zu einem einfachen Modell, das neben der Relaxation auch das Verhalten von  $s$  bei Belastung in der Nähe der Gleichgewichtszustände beschreibt, gelangt man, indem man in Gl. 3.2.2.2 die Änderung der Überspannung  $\dot{s}$  durch den Ausdruck  $\dot{s} + \frac{1}{z_0} s$  ersetzt und den Zusammenhang (Gl. 3.2.2.5) zwischen  $\alpha$  und  $\mu_0$  berücksichtigt. Es ergibt sich:

$$\dot{s} = \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{1}{z_0} s \quad 3.2.2.6$$

Die Rate der Überspannung setzt sich damit additiv aus einem Produktions- und einem Begrenzungsterm zusammen. Um sicherzustellen, daß der Produktionsterm immer dasselbe Vorzeichen trägt wie die Dehnungsgeschwindigkeit, muß die Steigung der Gleichgewichtskennlinie kleiner sein als der spontane Schubmodul:

$$\frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} < \mu_0$$

Zur weiteren Verbesserung des durch Gl. 3.2.2.6 definierten Ansatzes wird die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Überspannung bei konstanten Dehnraten  $\dot{\varepsilon}_0$  betrachtet. Die Experimente in Abbildung 2.4.1 zeigen, daß sich die Neigung der Gleichgewichtskennlinie bei größeren Dehnungen nur noch unwesentlich ändert. Dabei ist die Überspannung näherungsweise konstant geworden und ihr stationärer Wert hängt stark von der vorgegebenen Dehnrate ab. Diese Abhängigkeit ist monoton und unterlinear. Das Modell (Gl. 3.2.2.6) würde bei solchen Belastungen jedoch eine lineare Beziehung zwischen Dehnrate  $\dot{\varepsilon}_0$  und stationärem Wert der Überspannung  $s_{stat}$  liefern:

$$s_{stat} = z_0 \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.2.2.7$$

Eine Möglichkeit, trotzdem mit der durch Gl. 3.2.2.6 gegebenen Struktur die unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit darstellen zu können, ist die Annahme, daß die Relaxationszeit  $z_0$  keine Materialkonstante ist, sondern eine Funktion einer geeignet gewählten Variablen. Physikalische Überlegungen legen nahe, daß die Überspannung  $s$  diese geeignete Variable ist. Dies läßt sich motivieren, indem man die Alternativen diskutiert:

Was würde eine Abhängigkeit der Relaxationszeit von  $\varepsilon$ ,  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\tau$ ,  $\dot{\tau}$ ,  $\tau_{eq}$ ,  $\dot{\tau}_{eq}$ ,  $\dot{s}$  oder  $s$  physikalisch bedeuten?

- Die Dehnung  $\varepsilon$  oder die Rate der Überspannung  $\dot{s}$  würden nicht die lineare Geschwindigkeitsabhängigkeit von  $s_{stat}$  beseitigen.
- Durch die Einführung der Dehnrate  $\dot{\varepsilon}$  als Argument von  $z_0$  könnte das nichtlineare Verhalten eventuell richtig beschrieben werden. Allerdings bliebe bei Relaxationsvorgängen ( $\varepsilon = \text{const}$ )  $z_0$  konstant und bei Kriechprozessen ( $\tau = \text{const}$ ) wäre  $z_0$  eine Funktion der im allgemeinen veränderlichen Dehnrate.
- Für die Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{\tau}$  ergäbe sich eine entsprechende Unsymmetrie.
- Die Rate der Gleichgewichtsspannung  $\dot{\tau}_{eq}$  scheidet wegen ihrer Proportionalität zur Dehnrate

$$\dot{\tau}_{eq} = \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \dot{\epsilon}$$

ebenso aus.

- Da die Gesamtspannung  $\tau$  und die Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$  von der Verzerrungsgeschichte abhängen (siehe Abbildung 2.5.2), dürfen auch diese Größen nicht zur Modifikation der Geschwindigkeitsabhängigkeit herangezogen werden. Die Experimente in Abbildung 2.4.3 haben nämlich gezeigt, daß der stationäre Wert der Überspannung unabhängig von der Verzerrungsgeschichte ist.

- Übrig bleibt damit nur noch die Überspannung  $s$  selbst, d. h. die Konstante  $z_0$  in Gl. 3.2.2.7 wird durch das Produkt  $z_0 M(s_{stat})$  ersetzt,

$$s_{stat} = z_0 M(s_{stat}) \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \right) \dot{\epsilon}_0, \quad 3.2.2.8$$

wobei die Normierung  $M(0) = 1$  eingeführt und die Materialkonstante  $z_0$  beibehalten wurde. Mit Gl. 3.2.2.8 hängt der stationäre Wert der Überspannung bei konstanter Neigung der Gleichgewichtskennlinie nur noch von der Dehnrage ab. Dabei entspricht das Produkt  $z_0 M(s)$  in seiner physikalischen Bedeutung einer prozeß- oder spannungsabhängigen Relaxationszeit, sowie einer materialabhängigen Transformation des Zeitmaßstabs (siehe unten).

An dieser Stelle ist anzumerken, daß im VBO - Modell (Viscoplasticity Based on Overstress) von Liu und Krempl [75] bzw. Krempl, McMahon und Yao [76] die Relaxationszeit auch eine Materialfunktion ist, die nur von der Überspannung abhängt.

Ferner wurde eine solche Abhängigkeit auch von Haupt und Korzen in [46] zur Darstellung der nichtlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit vorgeschlagen.

Wegen der Unabhängigkeit der Relaxationszeit vom Vorzeichen der Überspannung (z. B. bei Torsionsbelastungen) und der plausiblen Annahme, daß steigende Überspannungen kleinere Relaxationszeiten bewirken sollten, ist es sinnvoll, zusätzlich die Bedingungen

$$M(s) = M(-s), \quad M > 0 \quad \text{und} \quad \frac{dM}{ds} \leq 0 \quad 3.2.2.9$$

an  $M$  zu stellen. Der mathematische Hintergrund dieser Anforderungen wird deutlich, wenn man Gl. 3.2.2.8 nach der Dehnrage  $\dot{\epsilon}_0$  differenziert. Dann ergibt sich die Beziehung

$$\frac{ds_{stat}}{d(\dot{\epsilon}_0)} = \frac{z_0 \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \right) M(s_{stat})}{1 - z_0 \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \right) \dot{\epsilon}_0 \frac{dM}{ds}(s_{stat})}$$

Sie beschreibt die Änderung der stationären Überspannung mit der Dehnrage. Mit den Bedingungen, die in Gl. 3.2.2.9 an  $M$  gestellt wurden, ist also die im Versuch beobachtete monotone Geschwindigkeitsabhängigkeit der Überspannung sichergestellt, d. h.:

$$\frac{ds_{stat}}{d(\dot{\epsilon}_0)} > 0 \quad \text{für} \quad \dot{\epsilon}_0 > 0$$

In Abbildung 3.2.2.1 ist die grafische Lösung der nichtlinearen Gleichung Gl. 3.2.2.8 für die stationäre Überspannung dargestellt.

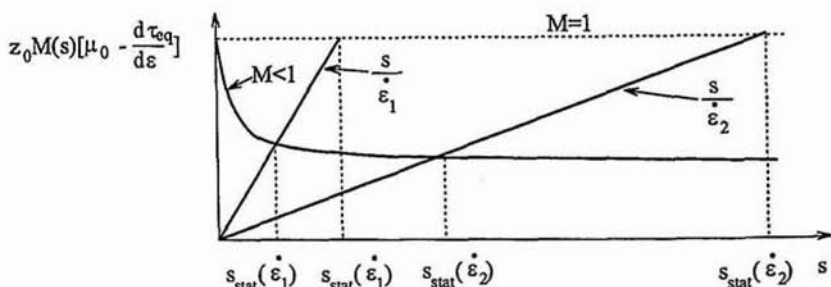


Abbildung 3.2.2.1.: Zur Bedeutung der Maßstabsfunktion

Sie veranschaulicht gleichzeitig die Bedeutung der Maßstabsfunktion. Die beiden Pfeile stellen die Änderung von  $s_{stat}$  beim Übergang von einer Dehnrates  $\dot{\varepsilon}_1$  zu einer anderen  $\dot{\varepsilon}_2$  dar. Der längere Pfeil entspricht dem linearen Überspannungsmodell mit  $M = 1$ , und der kürzere dem nichtlinearen Modell mit  $M < 1$ .

Nach dieser Diskussion nimmt die Differentialgleichung zur Modellierung des Verhaltens von  $s$  ihre vorläufige Form an. Sie ist durch

$$\dot{s} = \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{1}{M(s) z_0} s \quad 3.2.2.10$$

definiert und soll im weiteren verallgemeinert werden.

Dazu ist es sinnvoll, sie in ein Funktional bzw. eine Integralgleichung zu überführen. Hierzu wird zunächst eine Transformation des Zeitmaßstabs auf die neue Variable  $z$  durchgeführt:

$$z(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}(t) = \frac{1}{M(s(t))} \quad 3.2.2.11$$

Die Maßstabsfunktion  $M$  beschreibt diese Transformation. Dadurch wird auch die Bezeichnung motiviert. Multiplikation von Gl. 3.2.2.10 mit dem integrierenden Faktor  $\exp(z/z_0)$  liefert unter Beachtung von Ketten- und Produktregel den Zusammenhang

$$\frac{d}{dz} \left[ s(z) \exp \left( \frac{z}{z_0} \right) \right] = \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \exp \left( \frac{z}{z_0} \right) \frac{dc}{dz}(z)$$

und nach Integration das Funktional

$$s(t) = \int_{-\infty}^z \exp \left( -\frac{z-\zeta}{z_0} \right) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon}(\varepsilon(\zeta)) \right] \frac{dc}{d\zeta}(\zeta) d\zeta$$

für die Überspannung. Die Exponentialfunktion im Kern dieses Funktionals kann als Gedächtnisfunktion interpretiert werden, die den Einfluß der Verzerrungsgeschichte auf den aktuellen Wert der Überspannung darstellt. Dabei ist der Materialparameter  $z_0$  ein Maß für die Reichweite dieses Gedächtnisses. Zur detaillierteren Modellierung solcher Gedächtniseigenschaften ist es sinnvoll, eine Verallgemeinerung vorzunehmen. Sie besteht darin, den Kern des Funktionals durch eine Funktion  $\lambda(z)$  zu ersetzen, die für große Werte ihres Arguments verschwindet ( $\lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) = 0$ ):

$$s(t) = \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \frac{d\varepsilon}{d\zeta} d\zeta \quad 3.2.2.12$$

Der Kern  $\lambda$  heißt auch Relaxationsfunktion, wobei diese Bezeichnung im folgenden klar wird. Um einen physikalisch sinnvollen Ansatz hierfür zu motivieren, wird die Antwort des durch Gl. 3.2.2.12 definierten Funktionals auf den folgenden Prozeß berechnet und der anschließende Relaxationsvorgang untersucht.

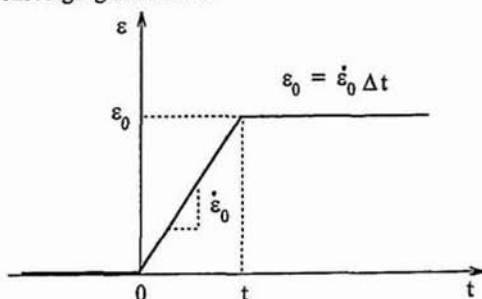


Abbildung 3.2.2.2.: Belastung zur Untersuchung des Funktionals der Überspannung

Hierzu wird die Dehnung zwischen den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = \Delta t$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_0$  auf den Wert  $\varepsilon_0$  erhöht (Abbildung 3.2.2.2). Anschließend wird der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  mit der Nebenbedingung  $\dot{\varepsilon}_0 \Delta t = \varepsilon_0$  durchgeführt. Zur Berechnung der Antwort des Funktionals wird Gl. 3.2.2.12 zunächst in die Zeitdarstellung transformiert:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\Delta t} \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 \dot{\varepsilon}(\tau) - \dot{\tau}_{eq}(\varepsilon(\tau)) \right] d\tau$$

Nach partieller Integration ergibt sich für  $t > \Delta t$ :

$$s(t) = \left[ \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 \varepsilon(\tau) - \tau_{eq}(\varepsilon(\tau)) \right] \right]_{\tau = -\infty}^{\tau = \Delta t} + \int_0^{\Delta t} \lambda(z(t) - z(\tau)) \frac{1}{M(s(\tau))} \left[ \mu_0 \varepsilon(\tau) - \tau_{eq}(\varepsilon(\tau)) \right] d\tau \quad 3.2.2.13$$

$$\text{mit } z(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))} \quad 3.2.2.14$$

Der erste Term in Gl. 3.2.2.13 liefert aufgrund der Belastungsgeschichte keinen Beitrag an der unteren Integrationsgrenze, sondern nur einen an der oberen. Bildet man den Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$ , dann verschwindet auch das Integral in Gl. 3.2.2.13. Unter Beachtung der Nebenbedingung  $\dot{\varepsilon}_0 \Delta t = \varepsilon_0$  erhält man für die Überspannung und ihre Ableitungen schließlich folgenden Satz von Gleichungen:

$$s(t) = \left[ \mu_0 \varepsilon_0 - \tau_{\text{eq}}(\varepsilon_0) \right] \lambda(z(t)) \quad 3.2.2.15$$

$$\dot{s}(t) = \left[ \mu_0 \varepsilon_0 - \tau_{\text{eq}}(\varepsilon_0) \right] \frac{d\lambda}{dz} \frac{1}{M(s)} \quad 3.2.2.16$$

$$\ddot{s}(t) = \left[ \mu_0 \varepsilon_0 - \tau_{\text{eq}}(\varepsilon_0) \right] \frac{1}{M^2} \left[ \frac{d^2\lambda}{dz^2} - \left[ \mu_0 \varepsilon_0 - \tau_{\text{eq}}(\varepsilon_0) \right] \left( \frac{d\lambda}{dz} \right)^2 \frac{dM}{ds} \frac{1}{M} \right]. \quad 3.2.2.17$$

Die Variable  $z(t)$  berechnet sich dabei nach Gl. 3.2.2.14. Man sieht, daß der zeitliche Verlauf der Überspannung wesentlich durch der Verlauf der Relaxationsfunktion  $\lambda$  bestimmt wird. Das Spektrum der mathematisch möglichen Funktionen für  $\lambda$  soll nun so eingeschränkt werden, daß das vom Modell vorhergesagte Relaxationsverhalten im Einklang mit den Versuchsergebnissen steht.

Schubspannung [MPa]

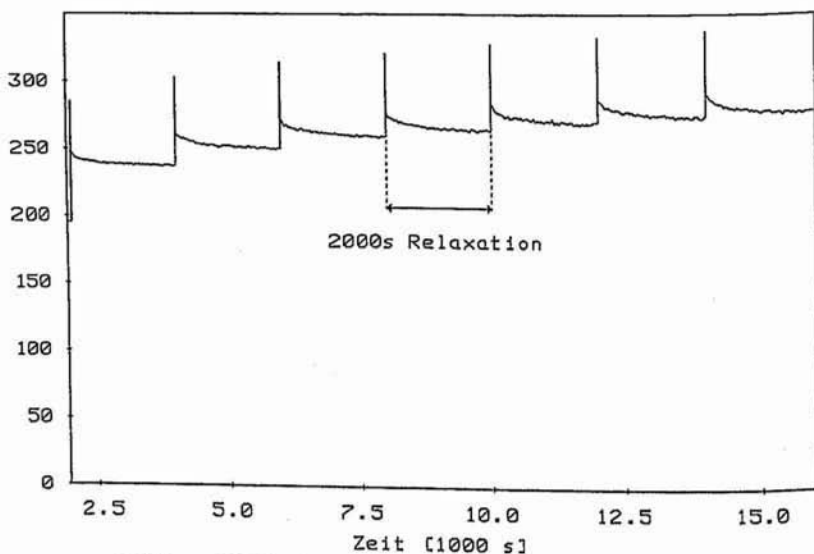


Abbildung 3.2.2.3.: Ausschnitt aus einem Relaxationsexperiment

Dazu sind in Abbildung 3.2.2.3 einige experimentelle Relaxationskurven dargestellt. Man beobachtet eine monotone Abnahme der Spannung mit der Zeit, so daß zu fordern ist, daß die Rate der Überspannung in Gl. 3.2.2.16 negativ ist. Außerdem sieht man, daß die gemittelte Krümmung der Relaxationskurven positiv ist, so daß die zweite Ableitung von  $s$  (Gl. 3.2.2.17) auch diese Eigenschaft besitzen sollte. Damit ergeben sich für  $\lambda$  die Anforderungen

$$\lambda > 0, \quad \frac{d\lambda}{dz} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\lambda}{dz^2} > 0 .$$

Es ist offenbar sinnvoll, für  $\lambda$  einen Ansatz in Form einer Exponentialsumme mit positiven Koeffizienten  $\lambda_k$  und Abklingkonstanten  $z_{0k}$  zu wählen. Solche Funktionen besitzen alternierende Ableitungen und zwar unabhängig von den Werten der Parameter. Man gelangt damit zur Darstellung

$$\lambda(z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \exp\left[-\frac{z}{z_k}\right] . \quad 3.2.2.18$$

Die Vorgabe dieses Ansatzes liefert die Möglichkeit, die Integralgleichung Gl. 3.2.2.12 mit der Zeittransformation Gl. 3.2.2.11 durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auszudrücken:

$$s = \sum_{k=1}^n s_k \quad 3.2.2.19$$

$$\dot{s}_k = \lambda_k \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} - \frac{1}{M(s) z_{0k}} s_k \quad 3.2.2.20$$

mit  $M > 0, \quad M(s) = M(-s), \quad M(0) = 1, \quad \frac{dM}{ds} \leq 0$

und  $\lambda_k > 0$  bzw.  $z_{0k} > 0$  für  $k = 1, \dots, n$

Damit die Spannungsantwort in der Nähe der Gleichgewichtszustände ( $s_k = 0$  für  $k = 1, \dots, n$ ) weiterhin durch das spontane Elastizitätsgesetz nach Gl. 3.2.2.3 dargestellt wird, dürfen die Materialparameter  $\lambda_k$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Mit den Gleichungen Gl. 3.2.2.1 und Gl. 3.2.2.19 bzw. Gl. 3.2.2.20 ergibt sich für die Rate der Spannungsantwort

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_{\text{eq}} + \sum_{k=1}^n \dot{s}_k$$

und damit

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_{\text{eq}} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k \right] + \mu_0 \dot{\varepsilon} \sum_{k=1}^n \lambda_k .$$

Es ist also noch die einschränkende Bedingung

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

an die Materialparameter  $\lambda_k$  zu stellen.

### 3.2.3 Das Funktional der Gleichgewichtsspannung

In Abschnitt 3.2 wurde experimentell nachgewiesen, daß das Verhalten der Gleichgewichtsspannung des Stahls XCrNi18.9 durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional dargestellt werden kann. Hierzu wird zunächst die Konstruktion solcher Stoffgleichungen diskutiert. Dabei ist wesentlich, daß durch Funktionale Geschichten bzw. Prozesse zugeordnet werden, d. h. jedem Verzerrungsprozeß wird ein Spannungsprozeß zugeordnet und umgekehrt. Die analytische Darstellung der Funktionale ist dabei nicht eindeutig. Sie hängt z. B. davon ab, wie die Eingangsprozesse parametrisiert werden (Abbildung 3.2.3.1).

Zeitlicher Verlauf der Verzerrungsgeschichte

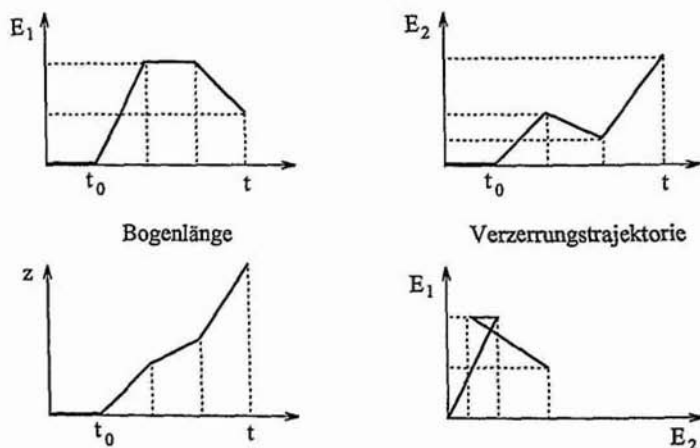


Abbildung 3.2.3.1.: Zur Parametrisierung der Verzerrungsgeschichte

Wenn der Verzerrungsprozeß innerhalb des Zeitintervalls  $[t_0, t]$  bezüglich der Zeit  $t$  parametrisiert wird, kann die aktuelle Spannung  $T(t)$  als

$$T(t) = \mathcal{F} \left[ \mathbf{E}(\sigma) \right] = \mathcal{F} \left[ \mathbf{E}(t - \tau) \right] \quad 3.2.3.1$$

$t_0 \leq \sigma \leq t$                        $0 \leq \tau \leq t - t_0$

dargestellt werden.

Eine weitere Möglichkeit ist die Parametrisierung bezüglich einer Bogenlänge  $z(t)$ , die geschwindigkeitsunabhängig mit dem Verzerrungsprozeß verknüpft ist. Das Funktional hängt in diesem Fall von zwei Variablen ab: Die erste ist die mit  $z$  parametrisierte Verzerrungsgeschichte, wodurch die Abhängigkeit der Spannung von der Form der Verzerrungstrajektorie dargestellt werden kann. Die zweite Variable ist die Geschichte der akkumulierten Bogenlänge  $z(t)$ . Sie bringt die Geschwindigkeitsabhängigkeit zum Ausdruck. Mit dieser Begriffsbildung kann die durch Gl. 3.2.3.1 beschriebene Prozeßzuordnung auch durch ein anderes Funktional  $\mathcal{H}$  ausgedrückt werden: Es ist durch

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}_{0 \leq \tau \leq t - t_0} [\mathbf{E}(t - \tau)] = \mathcal{J}_{\substack{0 \leq \tau \leq t - t_0 \\ 0 \leq \zeta \leq z(t)}} [\mathbf{E}(z(t) - \zeta), z(t - \tau)] \quad 3.2.3.2$$

definiert. Dieses Funktional hängt dann geschwindigkeitsunabhängig vom Verzerrungsprozeß ab, wenn die Abhängigkeit von der zweiten Variablen wegfällt (siehe z.B. [78]), d. h.:

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{J}_{0 \leq \zeta \leq z(t)} [\mathbf{E}(z - \zeta)] \quad 3.2.3.3$$

Eine Möglichkeit zur Konstruktion von geschwindigkeitsunabhängigen Stoffgleichungen besteht in der impliziten Darstellung von Funktionalen durch Systeme von Differentialgleichungen [4]: Der aktuelle Wert der Spannung  $\mathbf{T}(t)$  hängt über eine algebraische Gleichung von der aktuellen Verzerrung  $\mathbf{E}(t)$  und weiteren Variablen  $q_k(t)$  ab. Die Größen  $q_k$  werden dabei als *Innere Variable* bezeichnet.

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{E}(t), q_1(z(t)), \dots, q_n(z(t))) \quad 3.2.3.4$$

Die Werte der Inneren Variablen werden durch ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung berechnet, das bezüglich einer Bogenlänge  $z(t)$  formuliert ist.

$$\frac{dq_k}{dz} = \mathbf{Q}_k(\mathbf{E}(z), q_1(z), \dots, q_n(z)), \quad k = 1, \dots, n \quad 3.2.3.5$$

Denkt man sich dieses System gelöst, dann ist jede der Inneren Variablen  $q_k$  ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional und mit Gl. 3.2.3.4 auch die Spannung  $\mathbf{T}$ .

### Konstruktion der Gleichungen:

Die in Abschnitt 3.2.2 gewählte Vorgehensweise bei der Konstruktion des Funktional der Überspannung hat gezeigt, daß sich Differentialgleichungen für Innere Variable in gewissen Fällen gut an Experimenten motivieren lassen. Zur Verallgemeinerung und zur physikalischen Interpretation solcher Modelle kann dagegen die funktionale Darstellung Hinweise liefern. Diese Vorgehensweise wird auch bei der Konstruktion des Funktional der Gleichgewichtsspannung gewählt.

Hierzu wird von einer eindimensionalen Formulierung für Torsionsbelastungen ausgegangen.

$$\tau_{\text{eq}} = \mathcal{F}_{s \geq 0}^{\text{eq}}(\varepsilon(t - s)) \quad 3.2.3.6$$

Dabei ist  $\varepsilon$  die Scherdehnung und  $\tau_{\text{eq}}$  die Gleichgewichtsschubspannung.

Das in Abbildung 2.5.5 dargestellte Experiment zeigt, daß der Stahl XCrNi18.9 bei sehr kleinen Dehnungsamplituden einen linear elastischen Bereich aufweist. Belastet man die Probe allerdings über eine gewisse *Fließspannung* hinaus, dann weicht die Gleichgewichtskennlinie vom elastischen Verhalten ab (siehe z. B. Abbildung 2.5.1). Eine anschließende Entlastung motiviert die in der Plastizitätstheorie kleiner Deformationen übliche Zerlegung der Dehnung in einen elastischen Anteil  $\varepsilon_e$  und einen plastischen Anteil  $\varepsilon_p$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

3.2.3.7

Die Gleichgewichtsspannung hängt nur vom aktuellen Wert von  $\varepsilon_e$  ab und kann durch das lineare Elastizitätsgesetz

$$\tau_{eq}(t) = \mu_{eq} \varepsilon_e(t) = \mu_{eq} (\varepsilon(t) - \varepsilon_p(t)) \quad 3.2.3.8$$

dargestellt werden. Dabei wird mit  $\mu_{eq}$  wird der Gleichgewichtsschubmodul bezeichnet. Er hängt nach Abbildung 2.5.6 nicht von der Verzerrungsgeschichte ab. Bei sehr großen Zyklenzahlen können sich die Elastizitätskonstanten allerdings aufgrund von Materialermüdung während der Belastung ändern.

Zwei Größen, die den elastischen Bereich charakterisieren, sind sein Radius und die Lage seines Mittelpunktes. Dabei hängt die Lage des Mittelpunktes nach Abbildung 2.5.1 stark von der Verzerrungsgeschichte ab.

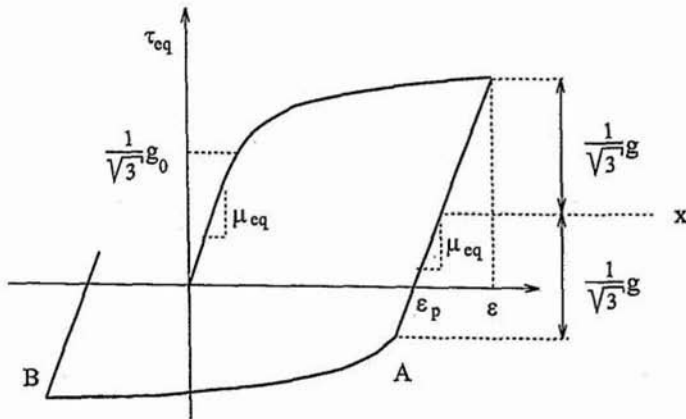


Abbildung 3.2.3.2.: Zur Modellierung von elasto-plastischem Materialverhalten

Sie läßt sich nach Abbildung 3.2.3.2 durch eine Innere Variable  $x$  erfassen, die als *kinematische Verfestigung* bezeichnet wird (z. B. Chaboche [6]). Der Radius des elastischen Bereiches wird durch eine weitere Innere Variable  $g$  beschrieben, wobei Änderungen von  $g$  als *isotrope Verfestigung* bezeichnet werden [6].

Zur mathematischen Modellierung der Geschichtsabhängigkeit dieser Verfestigungsvariablen müssen Evolutionsgleichungen formuliert werden. Im Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie, die hier verwendet werden soll, ändern sich die Werte dieser Variablen nur dann, wenn sich die plastische Dehnung ändert (siehe z. B. [6]). Dies ist dann der Fall, wenn der Abstand zwischen  $\tau_{eq}$  und  $x$  gleich dem Radius des elastischen Bereiches ist und wenn die Belastungsbedingung B erfüllt ist (Abbildung 3.2.3.2), d. h.:

$$\dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad \text{wenn} \quad F = (\tau_{eq} - x)^2 - \frac{1}{3}g^2 = 0 \quad \text{und} \quad B = (\tau_{eq} - x) \dot{\tau}_{eq} > 0 \quad 3.2.3.9$$

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{in allen andern Fällen}$$

Dabei wird die Funktion  $F$  als Fließfunktion bezeichnet. Sinnvoll ist noch die Annahme, daß die plastische Dehnrate das Vorzeichen von  $\tau_{eq} - x$  trägt:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda (\tau_{eq} - x) \quad \text{mit } \lambda > 0 \quad 3.2.3.10$$

Dies ist die sogenannte Fließregel [6], wobei der Faktor  $\lambda$  kein Materialparameter ist, sondern wie folgt bestimmt wird: Um sicherzustellen, daß in jedem Zeitpunkt eines elasto - plastischen Prozesses die Funktion  $F(\tau_{eq}(t), x(t), g(t))$  verschwindet, muß neben Gl. 3.2.3.9 auch die Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = 0 \Leftrightarrow \dot{F} = 2 (\tau_{eq} - x) \dot{\tau}_{eq} - (\tau_{eq} - x) \dot{x} - \frac{2}{3} g \dot{g} = 0 \quad 3.2.3.11$$

erfüllt sein. Die Variablen  $\varepsilon_p$ ,  $x$  und  $g$  und  $\tau_{eq}$  dürfen sich demnach nicht unabhängig voneinander ändern. Aus Gl. 3.2.3.11 läßt sich bei gegebenen Evolutionsgleichungen für  $x$ ,  $g$  und dem Elastizitätsgesetz für  $\tau_{eq}$  der Faktor  $\lambda$  ermitteln und in Gl. 3.2.3.10 einsetzen. Die Fließregel wird damit geschwindigkeitsunabhängig.

#### Experimentelle Analyse der Verfestigung:

Nun müssen die Evolutionsgleichungen für  $x$  und  $g$  konstruiert werden. Dazu ist es sinnvoll, sie im Verlauf von zyklischen Experimenten zu verfolgen, wozu der in Abbildung 3.2.3.4 dargestellte Versuch durchgeführt wurde. Die Auswertung dieses Versuches wird zeigen, daß die isotrope Verfestigung bei XCrNi18.9 vernachlässigbar ist.

Der Versuch wurde mit einer dem Betrag nach konstanten Verzerrungsgeschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  gefahren. Dabei wurden drei verschiedene Dehnungsamplituden von 0,7%, 1% und 1,4% zugrundegelegt und jeweils 15 Zyklen durchgeführt.

Man beobachtet eine von der Dehnungsamplitude abhängige zyklische Verfestigung. Da die geschwindigkeitsabhängigen Materialeigenschaften von XCrNi18.9 unter stationären Bedingungen unabhängig von der Verzerrungsgeschichte sind (Abbildung 2.4.3), überträgt sich das Hystereseverhalten der Gleichgewichtsspannung auf die Gesamtspannung.

Die Auswertung dieses Versuchs fand nach einem Verfahren statt, welches in ähnlicher Weise von Lehmann, Raniecki und Trampczynski [48] bzw. Pape [19] bei geschwindigkeitsunabhängigem Materialverhalten angewendet wurde.

Schubspannung [MPa]

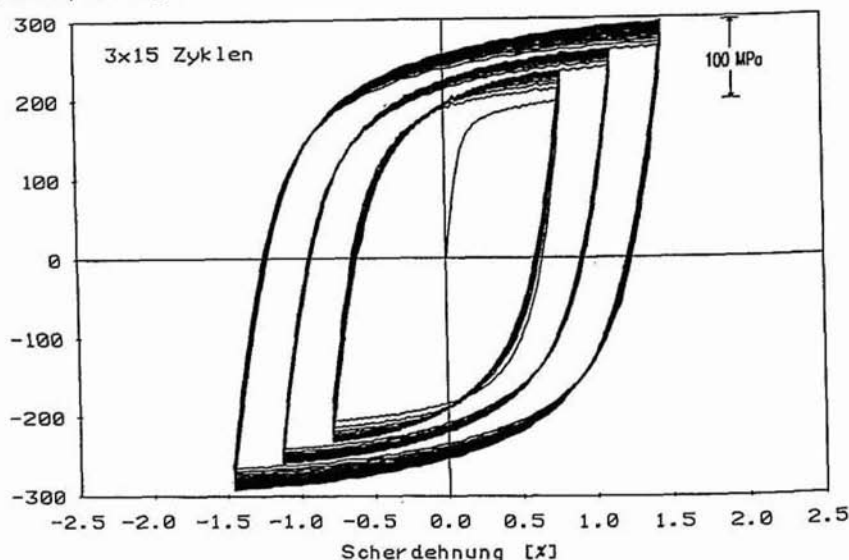


Abbildung 3.2.3.3.: Zyklisches Experiment zur Analyse der Verfestigung

Die Experimente in Abbildung 2.4.1 zeigen, daß die Spannungsantwort in einem gewissen Bereich durch eine lineare Funktion approximiert werden kann. Ihre Steigung hat etwa den Wert der Elastizitätskonstanten  $\mu_{eq}$  und ist kaum geschwindigkeitsabhängig. Die Länge dieses Bereiches hängt stärker von der Geschwindigkeit ab. Sie wird mit  $L$  bezeichnet und wird wegen der geschwindigkeitsabhängigen Überspannung erwartungsgemäß etwas größer sein, als der elastische Bereich der Gleichgewichtskennlinie:

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{3}} g$$

Wird ausgenutzt, daß die geschwindigkeitsabhängigen Materialeigenschaften von XCrNi18.9 kaum von der Verzerrungsgeschichte abhängen, dann dürfen Änderungen von  $L$ , die im Verlauf des Prozesses beobachtet werden, als Maß für Änderungen von  $g$  benutzt werden, also als Maß für die isotrope Verfestigung.

Nun wird das Auswerteverfahren beschrieben:

Dabei werden durch die in Abbildung 3.2.3.4 dargestellten Bereiche lineare Regressionsgeraden der Form

$$\varepsilon(\tau) = A + B \tau \quad 3.2.3.12$$

gelegt, wobei nach jeder Umkehr der Verzerrungsgeschwindigkeit die Koeffizienten  $A$  und  $B$  zu berechnen sind. Die Werte der Spannung an den Umkehrpunkten werden mit  $\tau_0$  bezeichnet. Sie können nach jedem Halbzyklus abgelesen werden.

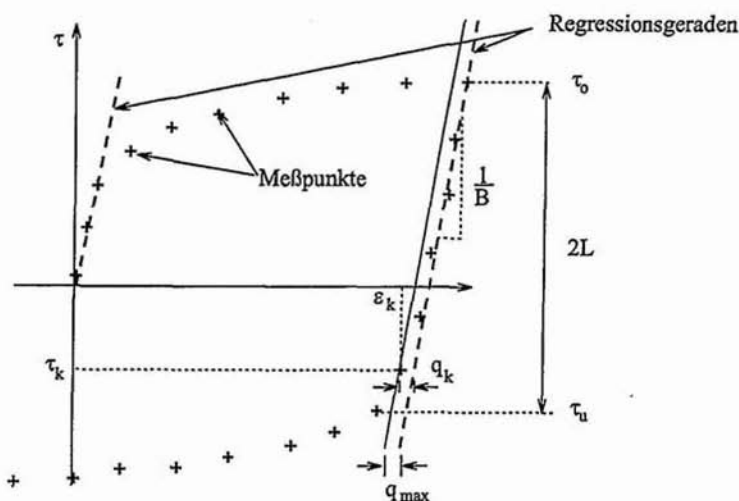


Abbildung 3.2.3.4.: Auswerteverfahren zur Analyse der Verfestigungsmechanismen

Bei der Bestimmung der Spannung  $\tau_u$  muß anders verfahren werden: Im Anschluß an die Ermittlung der Koeffizienten wird das Qualitätsmaß (Abweichung zwischen Meßpunkt und Regressionsgerade)

$$q_i = |\varepsilon(\tau_i) - \varepsilon_i|$$

für die folgenden Meßpunkte berechnet. Dabei ist  $\varepsilon_i$  die zur gemessenen Spannung  $\tau_i$  gehörige Dehnung und  $\varepsilon(\tau_i)$  die von der Regressionsgeraden gelieferte Dehnung, die sich durch Einsetzen von  $\tau_i$  in Gl. 3.2.3.12 ergibt. Die Spannung  $\tau_u$  wurde ermittelt, indem sie auf den Meßwert gesetzt wurde, ab dem die Qualität der Approximation einen Grenzwert  $q_{\max}$  überschritten hatte, d. h.:

$$q_k = |\varepsilon(\tau_k) - \varepsilon_k| \geq q_{\max} \Rightarrow \tau_u = \tau_k \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{2} |\tau_0 - \tau_u|$$

Die damit für  $L$  gewonnenen Werte sind in Abbildung 3.2.3.5 für verschiedene Werte von  $q_{\max}$  gegen die Anzahl der Halbzyklen aufgetragen.

Zunächst fällt auf, daß die für  $L$  ermittelten Werte von der Schärfe des Qualitätskriteriums abhängen: Größere Werte von  $q_{\max}$  ziehen größere Werte von  $L$  nach sich. Entsprechende Erfahrungen wurden von Kikillus in [80] im Zusammenhang mit der experimentellen Analyse der Verfestigung gemacht. Das Anwachsen bei etwa 30 und 60 Halbzyklen (siehe Pfeile) kann auf die aus der Erhöhung der Dehnungsamplitude resultierenden größeren Krümmungsradien der Kennlinien zurückgeführt werden. Für sinnvolle Werte von  $q_{\max}$  zeigt sich, daß  $L$  und damit auch  $g$  kaum von der Zyklenzahl abhängen. Diese Abhängigkeit liegt

für  $q_{\max} = 4 \times 10^{-4}$  bei etwa 25 MPa. Das Experiment liefert dagegen eine zyklische Verfestigung von etwa 100 MPa (siehe Abbildung 3.2.3.3).

Länge des linearen Bereiches [MPa]

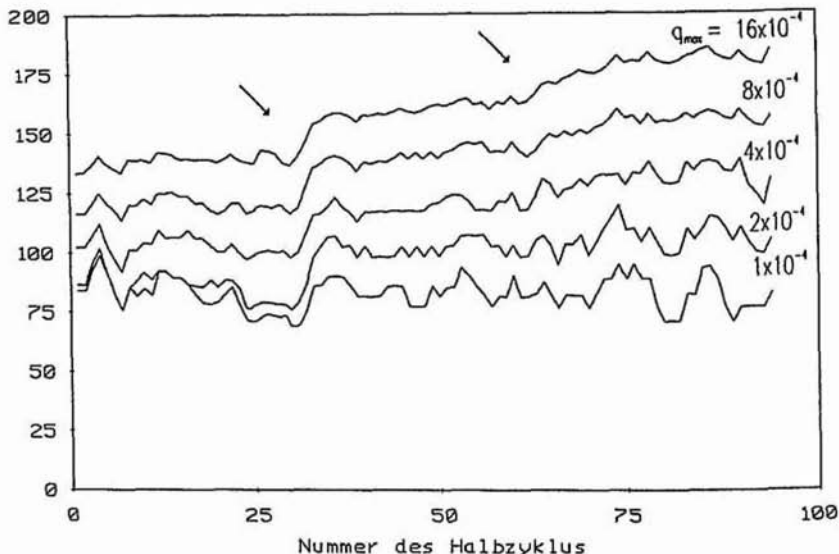


Abbildung 3.2.3.5.: Auswertung zur Analyse der Verfestigung

Der wesentliche Beitrag zur Verfestigung ist also kinematisch, so daß isotrope Verfestigungseffekte im Rahmen einer ersten Näherung vernachlässigt werden dürfen, d. h.:

$$g = g_0 = \text{const.}$$

Das Verfestigungsverhalten von XCrNi18.9 wird von nun an allein durch die kinematische Verfestigung  $x$  modelliert.

Interessanterweise zeigt der Stahl Ck 15 qualitativ ein ähnliches Verhalten [80]. Auch bei diesem Werkstoff ist bei vernünftig gewählten Werten von  $q_{\max}$  (Offsetdehnung) die isotrope Verfestigung vernachlässigbar klein im Vergleich zur kinematischen.

#### Konstruktion der Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung:

Zur Konstruktion der Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung wird zunächst ein in Abbildung 2.5.1 dargestelltes Experiment mit Haltezeiten ausgewertet um den Verlauf  $x(e_p)$  zu ermitteln: Aus den Abbruchpunkten der Relaxationsvorgänge ergeben sich die Werte der Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$ , und daraus mit Hilfe der Fließfunktion  $F$  aus Gl. 3.2.3.9 und der Annahme  $g = g_0 = \text{const}$  die Werte von  $x$ :

$$x = \tau_{eq} + \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0$$

Die plastischen Dehnungen ergeben sich aus dem Elastizitätsgesetz für die Gleichgewichtsspannung (Gl. 3.2.3.8):

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\tau_{eq}}{\mu_{eq}}$$

Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in Abbildung 3.2.3.6 aufgetragen.

Verfestigung [MPa]

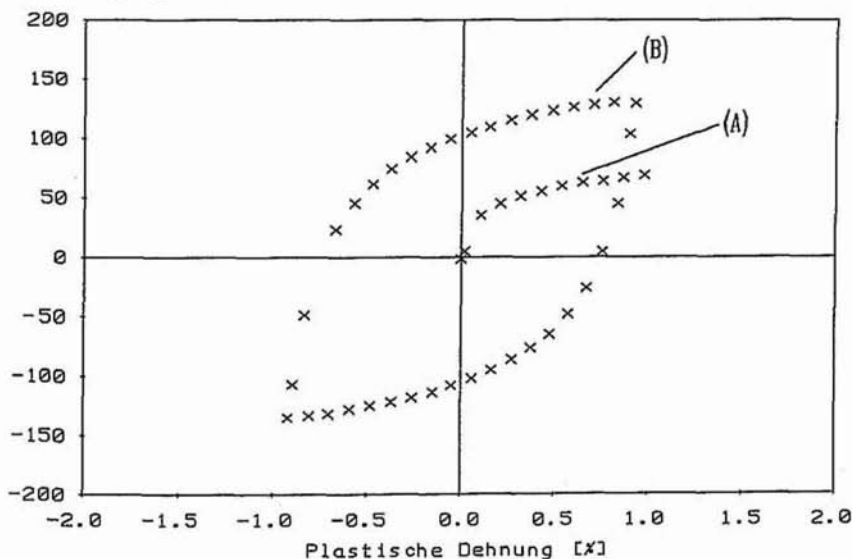


Abbildung 3.2.3.6: Verfestigung gegen plastische Dehnung

Hier findet man die zum monotonen Teil der Kennlinie gehörige Verfestigungskurve (A) und den Grenzyklus der Verfestigung (B) wieder.

Ein Ansatz zur Darstellung dieses Verhaltens ergibt sich aus dem Verlauf Steigung von Kurve (A):

$$\frac{dx}{d\varepsilon_p} = c + \frac{2}{\sqrt{3}} b x \quad 3.2.3.13$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit einem Produktions- und einem Begrenzungsterm, wobei das + Zeichen vor dem Begrenzungsterm für negative und das - Zeichen für positive plastische Dehnraten gilt. Durch Umformen erhält man

$$\dot{x} = c \dot{\varepsilon}_p - \frac{2}{\sqrt{3}} |\dot{\varepsilon}_p| b x .$$

Die Steigung der Verfestigung ist bei  $x = 0$  durch den Parameter  $c$  gegeben und ihr Grenzwert ( $\dot{x} = 0$ ) beträgt  $\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b}$ . Dieses Modell wurde 1966 von Armstrong und Frederick [49] vorge-

schlagen. Mit gewissen Modifikationen wird es beispielsweise von Chaboche [5, 6, 38, 51], Chaboche und Rousselier [50] bzw. Benallal und Marquis [22, 41] verwendet.

Um mit der durch Gl 3.2.3.13 gegebenen Struktur das zyklische Verfestigungsverhalten von XCrNi18.9 darstellen zu können, müssen noch Modifikationen vorgenommen werden. Dazu wird Gl. 3.2.3.13 für den in Abbildung 3.2.3.6 dargestellten Prozess ausgewertet. Die Belastungsgeschichte  $\varepsilon_p(t)$  ist in Abbildung 3.2.3.7 dargestellt.

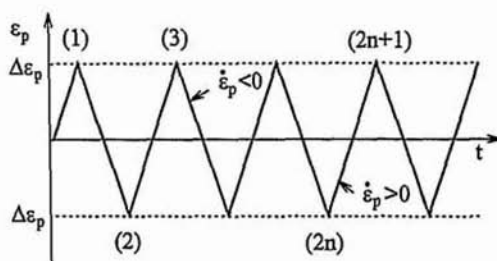


Abbildung 3.2.3.7.: Belastungsgeschichte zu Abbildung 3.2.3.6

Mit der Anfangsbedingung  $x(\varepsilon_{p0}) = x_0$  ist die allgemeine Lösung von Gl. 3.2.3.13 durch

$$x(\varepsilon_p) = x_0 \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b |\varepsilon_p - \varepsilon_{p0}|\right] \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b} \left[1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b |\varepsilon_p - \varepsilon_{p0}|\right]\right] \quad 3.2.3.14$$

gegeben, wobei das + Zeichen für positive und das - Zeichen für negative plastische Dehnraten gilt. Am Punkt (1) am Ende der monotonen Belastung ergibt sich mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  für die Verfestigung der Wert

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b} \left[1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta\varepsilon_p\right]\right].$$

Mit den Abkürzungen

$$\eta = \exp\left[-2 \frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta\varepsilon_p\right] \quad \text{und} \quad \Delta x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b} \left[1 - \exp\left[-2 \frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta\varepsilon_p\right]\right]$$

erhält man durch mehrmaliges Anwenden von Gl. 3.2.3.14 an den Punkten (2), (3), (4), (5),... die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \eta - \Delta x \\ x_3 &= x_2 \eta + \Delta x = x_1 \eta^2 + \Delta x (1 - \eta) \\ x_4 &= x_3 \eta - \Delta x = x_1 \eta^3 - \Delta x (1 - \eta + \eta^2) \\ x_5 &= x_4 \eta + \Delta x = x_1 \eta^4 + \Delta x (1 - \eta + \eta^2 - \eta^3) \\ &\dots \end{aligned}$$

Allgemein ergeben sich nach n Belastungszyklen die Gleichungen

$$x_{2n+1} = x_1 \eta^{2n} + \Delta x \sum_{k=0}^{2n-1} (-\eta)^k \quad (\text{rechts})$$

$$x_{2n} = x_1 \eta^{2n-1} - \Delta x \sum_{k=0}^{2n-1} (-\eta)^k + \Delta x \eta^{2n-1} \quad (\text{links})$$

für die Verfestigung an den Umkehrpunkten. Wegen  $\eta < 1$  wird der Einfluß der anfänglichen monotonen Belastung (gegeben durch  $x_1$ ) auf die Verfestigung  $x_{2n}$  bzw.  $x_{2n+1}$  mit steigenden Zyklenzahlen immer geringer.

Durch die Evolutionsgleichung Gl. 3.2.3.13 wird also ein nachlassendes Gedächtnis bezüglich der Zyklenzahl bzw. der akkumulierten plastischen Dehnung formuliert, was im Einklang mit den Versuchsergebnissen steht. Die stationären Werte der zyklischen Verfestigung  $x_\infty$  sind schließlich unabhängig von  $x_1$ . Man ermittelt sie durch Grenzwertbildung ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \Delta x \sum_{k=0}^{\infty} (-\eta)^k = \frac{\sqrt{3} c}{2 b} \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta \epsilon_p\right) \quad 3.2.3.15$$

Die Beobachtung, daß die Amplitude der stationären Hysterese nur von der Dehnungsamplitude  $\Delta \epsilon_p$  abhängt, wird also wiedergegeben.

Das Verhältnis zwischen der stationären zyklischen Zusatzverfestigung ( $x_\infty - x_1$ ) und der Verfestigung  $x_1$  am Ende des monotonen Prozesses kann durch

$$\frac{x_\infty - x_1}{x_1} = \frac{\tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta \epsilon_p\right)}{1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta \epsilon_p\right]} - 1$$

berechnet werden. Diese Größe wird im Vergleich zum Experiment unterschätzt und zwar deshalb, weil sich die beiden Funktionen  $\tanh(y)$  und  $(1 - \exp(-y))$  für gleiche Werte ihrer Argumente kaum unterscheiden.

Zur Modifikation der Verfestigung wird auf eine Idee von Haupt, Kamlah und Tsakmakis [25] zurückgegriffen. Sie besteht darin, den Materialparameter  $b$  von einer inneren Variablen abhängig zu machen: Dazu wird die Konstante  $b$  in Gl. 3.2.3.13 durch den Quotienten

$$\frac{b}{1 + \alpha_p p}$$

ersetzt, wobei die innere Variable  $p$  der Evolutionsgleichung

$$\dot{p} = \frac{\dot{s}}{s_0 p} \left[ \sqrt{2} |x| - p \right] \quad \text{mit} \quad \dot{s} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\dot{\epsilon}_p| \quad 3.2.3.16$$

genügt und mit  $s$  die akkumulierte plastische Dehnung bezeichnet wird. Für die Verfestigung ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$\dot{x} = c \dot{\epsilon}_p - \dot{s} \frac{b}{1 + \alpha_p p} x \quad 3.2.3.17$$

Um  $p$  physikalisch interpretieren zu können, wird ihre Evolutionsgleichung in ein Funktional überführt. Dazu wird Gl. 3.2.3.16 mit einem integrierenden Faktor multipliziert

$$\left( p \exp\left(\frac{s}{s_{0p}}\right) \right)' = \frac{\dot{s}}{s_{0p}} \sqrt{2} |x(s)| \exp\left(\frac{s}{s_{0p}}\right)$$

und integriert. Schließlich ergibt sich:

$$p(s) = \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \int_0^s \exp\left[-\frac{s-\sigma}{s_{0p}}\right] |x(\sigma)| d\sigma .$$

Die Variable  $p$  ist also ein Funktional der Prozeßgeschichte, das als gewichteter Mittelwert der Funktion  $|x|$  interpretiert werden kann. Da  $|x|$  bei stationären zyklischen Prozessen monoton von der Dehnungsamplitude abhängt, kann  $p$  auch als Maß für die plastische Dehnungsamplitude angesehen werden [25]. Damit beschreibt der Materialparameter  $\alpha_p$  den Einfluß der Dehnungsamplitude auf den Begrenzungsterm der Evolutionsgleichung Gl. 3.2.3.17 und damit auf die zyklische Verfestigung.

Die Gewichtung der Geschichte des Betrags der Verfestigung wird durch eine Exponentialfunktion zum Ausdruck gebracht, so daß nur solche Werte von  $|x|$  einen wesentlichen Einfluß auf den aktuellen Wert von  $p$  haben, die nicht wesentlich weiter als  $s_{0p}$  in der Vergangenheit liegen. Damit kann  $s_{0p}$  als Gedächtnislänge interpretiert werden, bzw. als Maß dafür, nach wievielen Zyklen die Hysterese stationär geworden ist. Dieser Parameter beschreibt also das transiente Verhalten der Verfestigung.

Zur Darstellung der zyklischen Verfestigung sei bemerkt, daß von Pape [10] und Kikillus [80] eine sogenannte 'Mikrofläche'  $M = |x|^2 - l^2$  im Raum der kinematischen Verfestigung benutzt wird. Ihr Radius  $l$  ist in Analogie zur inneren Variablen  $p$  ein Maß für die stationäre Amplitude der kinematischen Verfestigung. Um das Ver- und Entfestigungsverhalten des Stahls Ck 15 darstellen zu können, hängen die Evolutionsgleichungen für die isotrope und die kinematische Verfestigung nichtlinear vom Radius  $l$  der Mikrofläche ab.

Zur experimentellen Untersuchung des transienten Verfestigungsverhaltens wurde der Versuch in Abbildung 2.5.4 bei verschiedenen Dehnungsamplituden durchgeführt. Dabei hat sich gezeigt, daß zum Aufbau der Verfestigung weniger Zyklen gefahren werden müssen als zum Abbau.

Um diese Beobachtung mit dem Modell darstellen zu können, sollte sich  $p$  bei einer Vergrößerung der Dehnungsamplitude nach weniger Zyklen auf seinen stationären Wert einstellen als bei einer Verringerung, d. h.  $s_{0p}$  sollte keine Konstante sein, sondern vom Prozeß abhängen.

Dies erreicht man durch folgende Modifikation: Der Parameter  $s_{0p}$  in Gl. 3.2.3.16 wird durch ein geschichtsabhängiges Funktional ersetzt.

$$\dot{p} = \frac{\dot{s}}{s_{0p} (1 + \alpha_\delta \delta)} \left( \sqrt{2} |x| - p \right) \quad 3.2.3.18$$

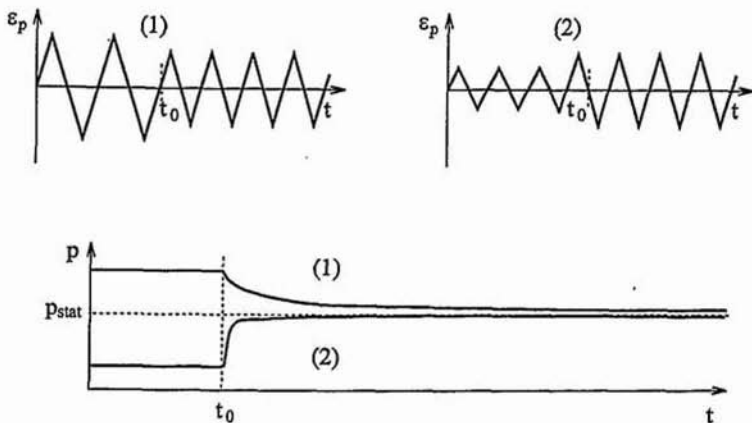


Abbildung 3.2.3.8.: Zur Modellierung der zyklischen Entfestigung (Skizze)

Hierzu wurde eine weitere Variable  $\delta$  und der Materialparameter  $\alpha_\delta$  eingeführt. Um zu erreichen, daß bei gleichen Dehnungsamplituden Entfestigungsvorgänge mehr Zyklen in Anspruch nehmen als Verfestigungsvorgänge, muß die Variable  $\delta$  bei Entfestigungsvorgängen größer sein als bei Verfestigungsvorgängen. Abbildung 3.2.3.8 veranschaulicht, daß die mittlere Dehnungsamplitude diese Eigenschaft hat. Die Voraussetzung dafür ist allerdings, daß der Prozeß der Mittelwertbildung über einen großen Bereich von Zyklen geht. Nutzt man aus, daß die Variable  $p$  ein Maß für die 'aktuelle' Dehnungsamplitude ist, dann kann der Mittelungsprozeß mathematisch durch die Differential- bzw Integralgleichung

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{s}}{s_{0\delta}} (p - \delta) \quad \Leftrightarrow \quad \delta(s) = \frac{1}{s_{0\delta}} \int_0^s \exp\left[-\frac{s-\sigma}{s_{0\delta}}\right] p(\sigma) d\sigma$$

dargestellt werden. Damit ist  $\delta$  gewichteter Mittelwert von  $p$ , der sich für große Werte von  $s_{0\delta}$ , d. h.  $s_{0\delta} \gg s_{op}$  sehr langsam entwickelt. Sein stationärer Wert ist mit dem stationären Wert von  $p$  identisch. Der Einfluß von  $\delta$  auf die Evolution von  $p$  in Gl. 3.2.3.18 sorgt damit für eine Unsymmetrie in den Sättigungsgeschwindigkeiten zwischen Ver- und Entfestigung (Abbildung 3.2.3.8). Durch den Parameter  $\alpha_\delta$  kann die Größe dieser Unsymmetrie modifiziert werden.

Zum Zweck einer Verallgemeinerung wird der Verfestigungsansatz nun in ein Funktional überführt. Mit der Bogenlängentransformation

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{1 + \alpha_p p}$$

wird aus Gl. 3.2.3.17 die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dz} = c \frac{dc_p}{dz} - b x ,$$

die nach Multiplikation mit einem integrierenden Faktor in das Funktional

$$x(z) = \int_0^z c \exp(-b(z-\zeta)) \frac{dc_p}{d\zeta}(\zeta) d\zeta , \quad 3.2.3.19$$

mit

$$z(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{1 + \alpha_p p(\sigma)}$$

überführt werden kann. Dabei kann der Kern des durch Gl. 3.2.3.19 gegebenen Funktionals als Gedächtnisfunktion interpretiert werden, die den Einfluß der Deformationsgeschichte beschreibt. Auch hier bietet sich eine Verallgemeinerung an, d. h. den Kern durch eine Funktion  $\mu(z)$  zu ersetzen:

$$x(z) = \int_0^z \mu(z-\zeta) \frac{dc_p}{d\zeta}(\zeta) d\zeta \quad 3.2.3.20$$

Es erscheint sinnvoll,  $\mu$  durch eine Summe von fallenden Exponentialfunktionen darzustellen:

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^n c_k \exp[-b_k z] \quad \text{mit } c_k, b_k \geq 0 \quad \text{für } k=1, \dots, n \quad 3.2.3.21$$

Dieser Ansatz wird plausibel, wenn man Gl. 3.2.3.20 für  $\alpha_p = 0$  für monotone dehnungsge- steuerte Belastungen auswertet. Dann ergibt sich für die Verfestigung und ihre Ableitungen:

$$x(\varepsilon_p) = \int_0^{\varepsilon_p} \mu(\sigma) d\sigma , \quad \frac{dx}{d\varepsilon_p} = \mu(\varepsilon_p) > 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{d\varepsilon_p^2} = \frac{d\mu}{d\varepsilon_p}(\varepsilon_p) < 0$$

Vergleicht man diese Resultate mit dem experimentellen Ergebnis in Abbildung 3.2.3.7, dann wird die Darstellung von  $\mu$  durch eine Gl. 3.2.3.21 motiviert.

Mit diesem Kern kann das durch Gl. 3.2.3.19 definierte Funktional implizit dargestellt werden, also in ein System von Differentialgleichungen überführt werden. Das gesamte Funktional für die Gleichgewichtsspannung nimmt damit folgende Form an:

Zerlegung der Deformation:	$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$	3.2.3.22
Elastizitätsgesetz:	$\tau_{eq} = \mu_{eq}(\varepsilon - \varepsilon_p)$	3.2.3.23
Fließregel:		3.2.3.24
	$\dot{\varepsilon}_p = \lambda(\tau_{eq} - x) \quad \text{für } F = (\tau_{eq} - x)^2 - \frac{1}{3} g_0^2 = 0 \quad \text{und} \quad B = (\tau_{eq} - x) \dot{\tau}_{eq} > 0$	
	$\dot{\varepsilon}_p = 0$	in allen andern Fällen

<i>Verfestigung:</i>	$x = \sum_{k=1}^n x_k, \quad \dot{s} = \frac{2}{\sqrt{3}}  \dot{\epsilon}_p $	3.2.3.25
mit	$\dot{x}_k = c_k \dot{\epsilon}_p - \frac{b_k}{1 + \alpha_p p} \dot{s} x_k$	3.2.3.26
und	$\dot{p} = \frac{\dot{s}}{s_{0p} (1 + \alpha_\delta \delta)} (\sqrt{2}  x  - p)$	3.2.3.27
bzw.	$\dot{\delta} = \frac{\dot{s}}{s_{0\delta}} (p - \delta)$	3.2.3.28

Die zu identifizierenden Parameter sind dabei der statische Schubmodul  $\mu_{eq}$ , die Fließspannung  $g_0$  und die Verfestigungsparameter  $c_k$ ,  $b_k$ ,  $\alpha_p$ ,  $s_{0p}$ ,  $\alpha_\delta$  und  $s_{0\delta}$ .

### 3.2.4 Verallgemeinerung der Materialgleichungen

Im folgenden sollen die anhand eindimensionaler Experimente für das Material XCrNi18.9 konstruierten Modelle für die Gleichgewichts- und die Überspannung verallgemeinert werden: Einerseits um die Klasse der modellierbaren Materialeigenschaften zu erweitern und andererseits um die Materialantworten bei räumlichen Belastungen darstellen zu können.

#### Das Funktional der Überspannung:

Zur Beschreibung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens wurde in Abschnitt 3.2.2 (siehe Gl. 3.2.2.11 und Gl. 3.2.2.12) das Funktional der Überspannung

$$s = \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \frac{d}{d\zeta} \left( \mu_0 \varepsilon(\zeta) - \tau_{eq}(\zeta) \right) d\zeta \quad 3.2.4.1$$

mit der Zeittransformation 
$$z = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))}$$

konstruiert. Für die Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$  wurde ein Materialmodell der klassischen Plastizitätstheorie motiviert, welches mit einer additiven Zerlegung der Deformation in elastische und plastische Anteile arbeitet (siehe Gl. 3.2.3.22 bis Gl. 3.2.3.28):

$$\tau_{eq} = \mu_{eq} \varepsilon_o = \mu_{eq} \left( \varepsilon - \varepsilon_p \right)$$

Setzt man diese Materialgleichung und die Zerlegung der Deformation in Gl. 3.2.4.1 ein, dann ergibt sich der Zusammenhang

$$s = \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \left( \mu_0 - \mu_{eq} \right) \frac{d\varepsilon_e}{d\zeta} d\zeta + \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \mu_0 \frac{d\varepsilon_p}{d\zeta} d\zeta$$

$$\Rightarrow s = s_e + s_p .$$

Man erkennt hieran, daß sich die Überspannung additiv aus zwei Anteilen zusammensetzt. Dabei hängt das Funktional  $s_e$  nur vom elastischen Anteil und  $s_p$  nur vom plastischen Anteil der Deformationsgeschichte ab.

Bemerkenswert ist, daß die Bewertung der Deformationsgeschichte in beiden Funktionalen durch dieselbe Relaxationsfunktion  $\lambda$  erfolgt. Damit scheinen die Mechanismen, die den geschwindigkeitsabhängigen Eigenschaften von XCrNi18.9 als Ursache zugrunde liegen, unabhängig vom Typ der Deformation zu sein. Aufgrund der physikalischen Unterschiede zwischen elastischen und plastischen Formänderungen, muß jedoch bei anderen Stoffen damit gerechnet werden, daß sich die Ursachen der Geschwindigkeitsabhängigkeit mit dem Charakter der Deformation ändern können. Im Rahmen einer Verallgemeinerung des Überspan-

nungsmodells kann es also sinnvoll sein, für  $s_e$  und  $s_p$  unterschiedliche Relaxationsfunktionen  $\lambda_e$  und  $\lambda_p$  bzw. Maßstabsfunktionen  $M_e$  und  $M_p$  zuzulassen, d. h.

$$s = \int_{-\infty}^{z_e} \lambda_e(z_e - \zeta) \left[ \mu_0 - \mu_{eq} \right] \frac{dc_e}{d\zeta} d\zeta + \int_{-\infty}^{z_p} \lambda_p(z_p - \zeta) \mu_0 \frac{dc_p}{d\zeta} d\zeta .$$

mit

$$z_e = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M_e(s_e(\xi), s_p(\xi))} \quad \text{und} \quad z_p = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M_p(s_e(\xi), s_p(\xi))} .$$

Mit dieser Erweiterung läßt sich beispielsweise das in Abbildung 3.2.4.1 qualitativ dargestellte Verhalten von gewissen Kunststoffen unter Belastungen mit konstanten Dehnraten beschreiben. Man erkennt die geschwindigkeitsabhängige Nichtmonotonie im Bereich von  $\tau_F$ . Experimentelle Daten können z. B. in [52] gefunden werden.

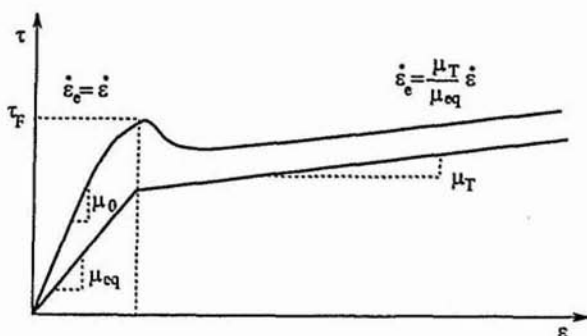


Abbildung 3.2.4.1.: Verhalten von Kunststoffen unter Dehnungssteuerung

Man überzeugt sich davon, indem man einen bilinearen Verlauf für die Gleichgewichtskennlinie annimmt und fordert, daß  $\lambda_p$  klein im Vergleich zu  $\lambda_e$  ist. Dann liefern plastische Deformationen im Vergleich zu elastischen nur einen kleinen Beitrag zur Überspannung.

Abbildung 3.2.4.1 veranschaulicht, daß sich bei  $\tau = \tau_F$  der elastische Anteil der Dehnrate um den Faktor  $\mu_T/\mu_{eq}$  reduziert. Diese Unstetigkeit führt zu einem Abbau der Überspannung  $s_e$  und zwar solange, bis sie sich auf einen für die neue Geschwindigkeit charakteristischen stationären Wert eingestellt hat. Dieser Vorgang läuft parallel zur Dehnungserhöhung ab und führt zu dem dargestellten Kennlinienverlauf.

Nach diesem Ausblick wird wieder das für den Werkstoff XCrNi18.9 konstruierte Funktional (Gl. 3.2.4.1) betrachtet. Es soll zur Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit bei mehrdimensionalen Prozessen erweitert werden. Dabei wird ausgenutzt, daß Werkstoffproben aus polykristallinem Material bei geeigneter Wahl der Geometrie als isotrop angenommen werden

dürfen: Typische Korngrößen liegen im Bereich von etwa 0,1 mm [53] und die kleinste geometrische Abmessung der verwendeten Proben liegt bei 1,5 mm.

Motiviert durch die Vorgehensweise in der Theorie der linearen Viskoelastizität (siehe Pipkin [54]) kann die Verallgemeinerung von Gl. 3.2.4.1 unter der Annahme der Isotropie durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^D + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{1} \quad , \quad z = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M(\text{tr}(\mathbf{S}(\xi)), \|\mathbf{S}^D(\xi)\|)} \quad 3.2.4.2$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{S}^D = \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \left[ \mu_0 - \mu_{eq} \right] \frac{d\mathbf{E}_e^D}{d\zeta} d\zeta + \int_{-\infty}^z \lambda(z-\zeta) \mu_0 \frac{d\mathbf{E}_p^D}{d\zeta} d\zeta \quad 3.2.4.3$$

$$\text{und} \quad \text{tr}(\mathbf{S}) = \int_{-\infty}^z \eta(z-\zeta) \left[ \kappa_0 - \kappa_{eq} \right] \text{tr} \left[ \frac{d\mathbf{E}_e}{d\zeta} \right] d\zeta + \int_{-\infty}^z \eta(z-\zeta) \kappa_0 \text{tr} \left[ \frac{d\mathbf{E}_p}{d\zeta} \right] d\zeta \quad 3.2.4.4$$

und den Nebenbedingungen  $\lambda(0) = 1$  bzw.  $\eta(0) = 1$  dargestellt werden. Mit  $\kappa_0$  und  $\kappa_{eq}$  werden der spontane und der statische Kompressionsmodul bezeichnet und die Relaxationsfunktion  $\eta$  beschreibt die Geschichtsabhängigkeit des Kugelanteils der Überspannung.

Zur Vereinfachung dieser Gleichungen wird von der üblichen Annahme ausgegangen, daß unter rein hydrostatischen Spannungszuständen keine plastischen Deformationen auftreten (siehe z. B. [5, 6]). Hierzu wurden von Pond [56] Zugversuche mit Kupfer und von Bridgman [55] Kompressionsexperimente an Eisen, Aluminium und einkristallinem Nickel durchgeführt. Die erreichten Drücke betragen etwa 3000 MPa. Dabei wurden zwar teilweise Phasenübergänge zwischen verschiedenen Kristallgittertypen festgestellt, die zu Nichtlinearitäten in den Kennlinien führten. Plastische Volumendeformationen blieben nach Angabe der Autoren jedoch aus, d. h.

$$\text{tr}(\mathbf{E}_p) = 0 \quad .$$

Der zweite Anteil von Gl. 3.2.4.4 braucht also nicht weiter berücksichtigt zu werden.

#### Die Argumente der Maßstabsfunktion:

Die folgende Diskussion beschäftigt sich mit der Maßstabsfunktion  $M$  (Gl. 3.2.4.2). Als skalarwertige Funktion eines Tensors darf sie bei isotropem Materialverhalten nur von den Invarianten der Überspannung  $\text{tr}(\mathbf{S})$ ,  $\|\mathbf{S}^D\|$  und  $\det(\mathbf{S})$  abhängen. Eine eventuelle Abhängigkeit von der Determinante wird hier jedoch ausgeklammert, da sie physikalisch nicht plausibel erscheint, so daß zunächst von einem Ansatz der Form

$$M = M(\text{tr}(\mathbf{S}), \|\mathbf{S}^D\|)$$

ausgegangen wird.

Nun soll abgeschätzt werden, wie stark die Funktion  $M$  von den Argumenten  $\text{tr}(\mathbf{S})$  und  $\|\mathbf{S}^D\|$  abhängt und zwar mit dem Ziel, eine der beiden Variablen vernachlässigen zu können. Die Rechnung wird zeigen, daß der Anteil  $\text{tr}(\mathbf{S})$  vernachlässigt werden kann.

Dazu wurden zunächst die beiden Kompressionsmoduli ermittelt. Es ergaben sich die Werte  $\kappa_0 = 683000 \text{ MPa}$  und  $\kappa_{\text{eq}} = 664000 \text{ MPa}$ . Ihre Differenz  $\Delta = \kappa_0 - \kappa_{\text{eq}}$  ist also relativ klein, so daß nach Gl. 3.2.4.4 der hydrostatische Anteil " $\text{tr}(\mathbf{S})$ " auch klein sein wird.

Die Idee der folgenden Rechnung besteht darin, die stationären Werte der Überspannung für Prozesse mit konstanten Verzerrungsgeschwindigkeiten zu berechnen und ihre Abhängigkeit von den Kompressionsmoduli für kleine Werte von  $\Delta$  zu linearisieren.

Dazu wird eine monotone Scherdeformation mit konstanter Verzerrungsgeschwindigkeit zugrundegelegt, der eine monotone Kompression mit konstanter Geschwindigkeit überlagert ist. Der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  wird bei dieser Untersuchung als

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \varepsilon^K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \varepsilon^K & \varepsilon^D \\ 0 & \varepsilon^D & \frac{1}{3} \varepsilon^K \end{pmatrix} \quad \text{mit } \dot{\varepsilon}^K = \text{const} \quad \text{und} \quad \dot{\varepsilon}^D = \text{const}$$

angenommen und der Tensor  $\mathbf{S}$  der Überspannung hat dieselbe Struktur. Für die Relaxationsfunktionen  $\lambda$  und  $\eta$  werden Exponentialfunktionen mit den Abklingkonstanten  $z_0^D$  und  $z_0^K$  angenommen. Hiermit und unter Berücksichtigung der Inkompessibilität plastischer Deformationen geht das durch Gl. 3.2.4.2 bis Gl. 3.2.4.4 definierte Funktional über in die Differentialgleichungen

$$\dot{s}^D = \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon^D} \right] \dot{\varepsilon}^D - \frac{1}{M(s^D, s^K) z_0^D} s^D \quad 3.2.4.5$$

$$\text{und} \quad \dot{s}^K = \Delta \dot{\varepsilon}^K - \frac{1}{M(s^D, s^K) z_0^K} s^K . \quad 3.2.4.6$$

Dabei wurden die Abkürzungen  $\text{tr}(\mathbf{S}) = s^K$  und  $\|\mathbf{S}^D\| = s^D$  eingeführt. Außerdem sind die beiden Gleichungen durch die Maßstabsfunktion  $M(s^D, s^K)$  gekoppelt.

Von diesem System sollen die stationären Lösungen  $s_{\text{stat}}^K$  und  $s_{\text{stat}}^D$  unter der Annahme einer konstanten Neigung der Gleichgewichtskennlinie berechnet werden. Für diesen Fall ergibt sich das Gleichungssystem

$$s_{\text{stat}}^D(\Delta) = M(s_{\text{stat}}^D, s_{\text{stat}}^K) z_0^D \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon^D} \right] \dot{\varepsilon}^D$$

$$\text{und} \quad s_{\text{stat}}^K(\Delta) = \Delta M(s_{\text{stat}}^D, s_{\text{stat}}^K) z_0^K \dot{\varepsilon}^K , \quad 3.2.4.7$$

welches zur Bestimmung der stationären Überspannungen verwendet wird. Die lineare Approximation an der Stelle  $\Delta = 0$  lautet:

$$s_{\text{stat}}^D(\Delta) = s_{\text{stat}}^D(0) + z_0^D \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon^D} \right] \dot{\varepsilon}^D \left[ \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^D} \frac{ds_{\text{stat}}^D}{d\Delta} + \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^K} \frac{ds_{\text{stat}}^K}{d\Delta} \right] \Big|_{\Delta=0} \Delta$$

$$s_{\text{stat}}^K(\Delta) = s_{\text{stat}}^K(0) + z_0^K \dot{\epsilon}^K \left[ M + \Delta \left( \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^D} \frac{ds_{\text{stat}}^D}{d\Delta} + \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^K} \frac{ds_{\text{stat}}^K}{d\Delta} \right) \right] \Big|_{\Delta=0} \Delta$$

Wegen Gl. 3.2.4.7 verschwindet der Anteil  $s_{\text{stat}}^K(0)$ , so daß sich dieses System zu

$$s_{\text{stat}}^D(\Delta) = s_{\text{stat}}^D(0) \left[ 1 + \frac{z_0^K \dot{\epsilon}^K \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^K}}{1 - z_0^D \dot{\epsilon}^D \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\epsilon^D} \right] \frac{\partial M}{\partial s_{\text{stat}}^D}} \Delta \right] \quad 3.2.4.8$$

$$s_{\text{stat}}^K(\Delta) = z_0^K \dot{\epsilon}^K M(s_{\text{stat}}^D(0), 0) \Delta \quad 3.2.4.9$$

vereinfacht, wobei der Anteil  $s_{\text{stat}}^D(0)$  in Gl. 3.2.4.8 durch Lösung der Gleichung

$$s_{\text{stat}}^D(0) = M(s_{\text{stat}}^D(0), 0) z_0^D \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\epsilon^D} \right] \dot{\epsilon}^D \quad 3.2.4.10$$

berechnet werden kann.

An Gl. 3.2.4.9 erkennt man, daß der Kugelanteil  $s_{\text{stat}}^K(\Delta)$  homogen von der Differenz  $\Delta$  der Kompressionsmoduli abhängt. Der deviatorische Anteil  $s_{\text{stat}}^D(\Delta)$  hängt nach Gl. 3.2.4.8 nicht homogen davon ab: Für  $\Delta = 0$  ist er exakt und für kleine Werte von  $\Delta$  ist er näherungsweise durch  $s_{\text{stat}}^D(0)$  gegeben. Folglich kann seine Abhängigkeit von  $\partial M / \partial s_{\text{stat}}^K$  für kleine  $\Delta$  vernachlässigt werden.

Physikalisch kann dies wie folgt interpretiert werden: Wenn die Maßstabsfunktion  $M$  vom Kugelanteil der Überspannung abhängen würde, d. h.  $\partial M / \partial s_{\text{stat}}^K \neq 0$ , hätte das bei schwach ausgeprägter Volumenviskosität ( $\Delta \approx 0$ ) keinen Einfluß auf die stationären Werte der Überspannung  $\mathbf{S}$ . Sie sind damit unabhängig von  $\partial M / \partial s_{\text{stat}}^K$ .

Unterstellt man, daß die durchgeführten Näherungen bei XCrNi18.9 zutreffend sind, dann braucht eine eventuelle Abhängigkeit der Funktion  $M$  von  $\text{tr}(\mathbf{S})$  nicht weiter berücksichtigt zu werden. Daher wird zunächst von dem Ansatz

$$M = M(|\mathbf{S}^D|) \quad 3.2.4.11$$

ausgegangen.

### Die Relaxationsfunktion $\eta$ :

Die folgende Betrachtung beschäftigt sich mit der Relaxationsfunktion  $\eta$ , die in Gl. 3.2.4.4 den Einfluß der Deformationsgeschichte auf den Kugelanteil der Überspannung beschreibt. Dazu wird die Antwort des Modells auf reine Volumendeformationen mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten untersucht. Unter Berücksichtigung von Gl. 3.2.4.11 vereinfacht sich das Funktional für  $\text{tr}(\mathbf{S})$  zu

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = \int_{-\infty}^t \eta(t-\tau) \left[ \kappa_0 - \kappa_{\text{eq}} \right] \text{tr} \left[ \frac{d\mathbf{E}}{d\tau}(\tau) \right] d\tau .$$

Solche Funktionale besitzen folgende Eigenschaft: Für unendlich schnelle Prozesse gilt

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = \eta(0) \left[ \kappa_0 - \kappa_{eq} \right] \text{tr}(\mathbf{E}) = \left[ \kappa_0 - \kappa_{eq} \right] \text{tr}(\mathbf{E})$$

und für unendlich langsame gilt

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = \eta(\infty) \left[ \kappa_0 - \kappa_{eq} \right] \text{tr}(\mathbf{E}) = 0 .$$

Für endliche Geschwindigkeiten ist der Verlauf der Funktion  $\eta$  von Bedeutung. Berücksichtigt man, daß der hydrostatische Anteil der Gleichgewichtsspannung über die Beziehung

$$\text{tr}(\mathbf{T}_{eq}) = \kappa_{eq} \text{tr}(\mathbf{E}) \quad 3.2.4.12$$

mit der Verzerrung zusammenhängt (siehe Gl. 3.2.4.18), dann kann mit Hilfe von

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{S}) + \text{tr}(\mathbf{T}_{eq}) \quad 3.2.4.13$$

die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Kugelanteils der Gesamtspannung abgeschätzt werden. Sie liegt, bezogen auf den Kugelanteil der Gleichgewichtsspannung, bei höchstens 3%, so daß sich aufgrund dieser schwachen Abhängigkeit Schwierigkeiten bei der experimentellen Identifikation von  $\eta$  ergeben würden.

Deshalb wird die Annahme gemacht, daß die Relaxationsfunktionen  $\lambda$  und  $\eta$  identisch sind, so daß die schwach ausgeprägte Volumenviskosität nur qualitativ beschrieben wird.

Die Relaxationsfunktion  $\lambda$ , die Geschwindigkeitsabhängigkeit des deviatorischen Anteils der Überspannung beschreibt, kann dagegen in den Bereichen identifiziert werden, wo die Geschwindigkeitsabhängigkeit groß ist, also dort wo plastische Deformationen auftreten. Bei Stoffen, die unter Volumendeformationen eine hohe Geschwindigkeitsabhängigkeit zeigen, ist diese Vorgehensweise jedoch nicht mehr zu rechtfertigen.

Wenn die Relaxationsfunktion  $\lambda$  durch eine Exponentialsumme gemäß Gl. 3.2.2.18 darstellt wird, dann ergibt sich für das Funktional der Überspannung das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^D + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}_k) \mathbf{1} \quad 3.2.4.14$$

$$\dot{\mathbf{S}}_k^D = \lambda_k \left[ \mu_0 \dot{\mathbf{E}}^D - \dot{\mathbf{T}}_{eq}^D \right] - \frac{1}{z_{0k} M(|\mathbf{S}_k^D|)} \mathbf{S}_k^D \quad 3.2.4.15$$

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{S}}_k) = \lambda_k (\kappa_0 - \kappa_{eq}) \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}) - \frac{1}{z_{0k} M(|\mathbf{S}_k^D|)} \text{tr}(\mathbf{S}_k) \quad 3.2.4.16$$

$$\text{mit der Bedingung} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad 3.2.4.17$$

Dabei müssen folgende Parameter aus den Experimenten ermittelt werden: Die spontanen und statischen Elastizitätskonstanten  $\mu_0$ ,  $\kappa_0$ ,  $\mu_{eq}$ ,  $\kappa_{eq}$ , die Gewichtungsfaktoren  $\lambda_k$ , die Relaxationszeiten  $z_{0k}$  und die Maßstabsfunktion  $M$ .

## Das Funktional der Gleichgewichtsspannung

Nun wird das Funktional der Gleichgewichtsspannung verallgemeinert. Hierzu müssen neben dem Modell für die Verfestigung  $\mathbf{X}$  auch die Fließfunktion  $F$ , das Belastungskriterium  $B$  und die Fließregel (Gl. 3.2.3.9 und Gl. 3.2.3.10) auf räumliche Spannungs- und Verzerrungszustände übertragen werden. Die Fließfunktion macht eine Aussage über den aktuellen Zustand des Materials. Dieser ist im Rahmen einer Theorie mit inneren Variablen vollständig durch die Angabe von  $\mathbf{T}_{eq}$ ,  $\mathbf{E}$  und den aktuellen Werte der inneren Variablen (z. B.  $\mathbf{X}$ ) gekennzeichnet. Ist  $F < 0$ , dann sind nur elastische Zustandsänderungen möglich. Der Fall  $F > 0$  ist ausgeschlossen. Für  $F = 0$  können, je nach Belastungsrichtung, auch plastische Zustandsänderungen auftreten. Die Richtungen plastischer Deformationsänderungen stimmen im allgemeinen jedoch nicht mit der Belastungsrichtung überein. Man wird erwarten, daß die möglichen Richtungen, in denen sich überhaupt plastische Deformationen entwickeln können, unabhängig davon sind, aus welcher Richtung die auf der Fließfläche liegenden Spannungspunkte angefahren wurden. Andererseits scheinen sich plastische Verzerrungen auch nicht entgegen dieser Richtung ausbilden zu können (Richtung von  $\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{T}_0$  in Abbildung 3.4.4.2).

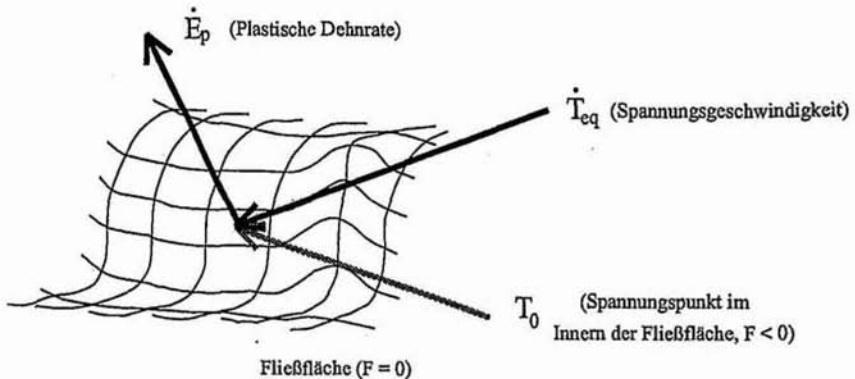


Abbildung 3.2.4.2.: Zur Entwicklung plastischer Deformationen

Um eine plausible Beschreibung der Plastizität unter räumlichen Belastungen sicherzustellen, müssen offenbar gewisse Anforderungen an die Materialgleichungen gestellt werden.

Um sie zu formulieren, werden sogenannte *Stabilitätspostulate* ausgenutzt. Sie machen Aussagen über das Vorzeichen der mechanischen Arbeit bei infinitesimalen Prozessen oder bei Kreisprozessen. Von Il'ushin wurde beispielsweise ein geschlossener Pfad im Dehnungsraum [57] vorgeschlagen. Beim Stabilitätspostulat von Drucker wird dagegen ein Prozeß im Spannungsraum [58] zugrundegelegt. Wegen der einfacheren Auswertbarkeit wird hier das Postulat von Drucker verwendet.

Zunächst muß aber das Elastizitätsgesetz für die Gleichgewichtsspannung auf räumliche Belastungszustände übertragen werden. Unter Berücksichtigung der Inkompressibilität plastischer Deformationen und unter der Annahme materieller Isotropie ergibt sich mit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_p$  der Zusammenhang

$$\mathbf{T}_{eq} = \mu_{eq} \left( \mathbf{E}^D - \mathbf{E}_p \right) + \frac{1}{3} \kappa_{eq} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} , \quad 3.2.4.18$$

mit den Elastizitätskonstanten  $\mu_{eq}$  und  $\kappa_{eq}$ .

Als nächstes müssen die Evolutionsbeziehungen für die plastische Dehnung  $\mathbf{E}_p$  verallgemeinert werden. Dazu werden die Stabilitätspostulate benötigt.

Nach [58] bzw. [59] ist ein Material, das sich bei konstanter Temperatur in einem zeitunabhängigen Gleichgewichtszustand befindet stabil, wenn die durch äußere Störungen hervorgerufenen Spannungs- und Verzerrungsänderungen eine nicht negative Arbeit leisten, d. h.:

$$\delta = \dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad 3.2.4.19$$

Nun wird die inkrementelle Spannungsleistung  $\delta$  für das konstruierte Materialmodell berechnet. Dabei sind Gleichgewichtszustände durch verschwindende Überspannung, d. h.  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  ausgezeichnet.

$$\delta = \left[ \dot{\mathbf{T}}_{eq} + \dot{\mathbf{S}} \Big|_{\mathbf{S}=\mathbf{0}} \right] \cdot \dot{\mathbf{E}}$$

Durch Einsetzen der Evolutionsgleichungen für  $\mathbf{S}$  (Gl. 3.2.4.14 bis Gl. 3.2.4.16) folgt der Ausdruck

$$\delta = \left[ \dot{\mathbf{T}}_{eq} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \left[ \mu_0 \dot{\mathbf{E}}^D + \frac{1}{3} \kappa_0 \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}) \mathbf{1} - \dot{\mathbf{T}}_{eq} \right] \right] \cdot \dot{\mathbf{E}} ,$$

der sich unter Ausnutzung von  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$  (Gl. 3.2.4.17) weiter vereinfacht. Schließlich ergibt sich

$$\delta = \mu_0 \|\dot{\mathbf{E}}^D\|^2 + \frac{1}{3} \kappa_0 \text{tr}(\dot{\mathbf{E}})^2 .$$

Die inkrementelle Spannungsleistung ist also für jede echte Störung positiv. Damit sind die Gleichgewichtszustände des Materialmodells bei nicht verschwindender Geschwindigkeitsabhängigkeit im Sinne von Gl. 3.2.4.19 stabil und zwar unabhängig von der Gleichgewichtsspannung, bzw. den Evolutionsbeziehungen für die plastische Dehnung.

Um trotzdem eine Aussage über die Evolution plastischer Dehnungen zu gewinnen, wird gefordert, daß auch dann Stabilität vorliegt, wenn überhaupt keine Geschwindigkeitsabhängigkeit auftritt, also wenn die Überspannung  $\mathbf{S}$  identisch verschwindet:

$$\delta = \dot{\mathbf{T}}_{eq} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad 3.2.4.20$$

Die Auswertung dieser Bedingung führt unter Ausnutzung von Gl. 3.2.4.18 und der Zerlegung der Deformation  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$  auf die Ungleichung

$$\delta = \mu_{eq} \|\dot{\mathbf{E}}_{el}^D\|^2 + \frac{1}{3} \kappa_{eq} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{el})^2 + \dot{\mathbf{T}}_{eq} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p \geq 0 .$$

Sie ist auf jeden Fall dann für beliebige Störungen der Gleichgewichtszustände erfüllt, wenn die mit der plastischen Dehnungsgeschwindigkeit gebildete inkrementelle Spannungsleistung

$$\dot{\mathbf{T}}_{eq} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p \geq 0 \quad 3.2.4.21$$

nicht negativ ist. Um dieser Stabilitätsforderung Rechnung zu tragen, wird gefordert, daß sich plastische Deformationen nur dann entwickeln dürfen, wenn ihre Projektion auf die Richtung der Belastung nicht negativ ist, also Gl. 3.2.4.21 erfüllt.

### Die plastische Dehnrate und die Fließfläche:

Um eine Aussage hinsichtlich der Form von Fließflächen zu gewinnen und um die Frage zu beantworten, ob die Richtungen der plastischen Dehnungszuwächse unabhängig von der Fließfunktion  $F$  gewählt werden dürfen, wird das Stabilitätspostulat von Drucker [58, 59] ausgewertet. Es macht die folgende Energieaussage über einen geschlossenen Spannungszyklus, der zum Zeitpunkt  $t = t_0$  anfängt und bei  $t = t_c$  endet:

$$\psi = \int_{t_0}^{t_c} [\mathbf{T}_{eq}(t) - \mathbf{T}_0] \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) dt \geq 0 \quad 3.2.4.22$$

Der Prozeß ist in Abbildung 3.2.4.3 dargestellt und beginnt im Innern der Fließfläche bei  $\mathbf{T}_{eq}(t_0) = \mathbf{T}_0$ .

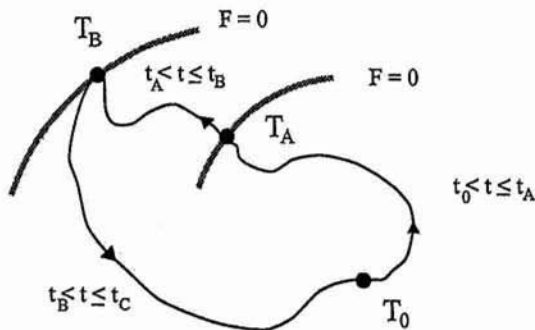


Abbildung 3.2.4.3: Spannungszyklus nach Drucker

Nun wird elastisch belastet, bis die Spannung den Wert  $\mathbf{T}_{eq}(t_A) = \mathbf{T}_A$  auf der Fließfläche erreicht hat. Anschließend findet bis zur Spannung  $\mathbf{T}_{eq}(t_B) = \mathbf{T}_B$  eine clasto - plastische Bela-

stung statt. Danach wird solange elastisch entlastet bis der Spannungspunkt  $\mathbf{T}_{\text{eq}}(t_c) = \mathbf{T}_0$  wieder erreicht ist.

Unter Berücksichtigung der Zerlegung der Deformation und unter der Voraussetzung, daß die Spannung nur eine Funktion des elastischen Teils der Dehnung ist, ergibt sich aus Gl. 3.2.4.22

$$\psi = \int_{t_0}^{t_c} (\mathbf{T}_{\text{eq}}(\mathbf{E}_e(t)) - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{E}}_e(t) dt + \int_{t_A}^{t_B} (\mathbf{T}_{\text{eq}}(\mathbf{E}_e(t)) - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p(t) dt \geq 0 .$$

Da das lineare Elastizitätsgesetz für  $\mathbf{T}_{\text{eq}}$  aufgrund der Existenz einer Formänderungsenergie integrierbar ist und wegen  $\mathbf{E}_e(t_c) = \mathbf{E}_e(t_0)$ , liefert der erste Summand keinen Beitrag zu  $\psi$ . Also darf, nach Aussage des Postulats, der zweite Summand nicht negativ sein und zwar bei jedem beliebigen elasto - plastischen Prozeß zwischen  $\mathbf{T}_A$  und  $\mathbf{T}_B$ . Für Prozesse, wo die Änderung des Integranden infinitesimal bleibt, darf das Integral durch seine lineare Approximation berechnet werden. Es ergibt sich die Bedingung

$$(\mathbf{T}_{\text{eq}}(\mathbf{E}_e(t_A)) - \mathbf{T}_0) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p(t_A) \geq 0 . \quad 3.2.4.23$$

Sie muß für jeden Spannungspunkt  $\mathbf{T}_0$  erfüllt sein, der zum Inneren der Fließfläche gehört. Damit müssen alle diese Punkte bei festem  $\mathbf{T}_A$  nach Abbildung 3.2.4.4 unterhalb der Ebene liegen, die orthogonal auf der plastischen Dehnrate  $\dot{\mathbf{E}}_p$  steht.

Da Gl. 3.2.4.23 außerdem bei festem  $\mathbf{T}_0$  für alle Spannungspunkte  $\mathbf{T}_A$  erfüllt sein muß, die auf der Fließfläche liegen, muß  $F$  konvex sein. Die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit steht damit senkrecht auf der Tangentialebene von  $F$ , d. h.

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}_{\text{eq}}} \quad \text{mit } \lambda > 0 . \quad 3.2.4.24$$

Dies ist die Normalenregel (siehe z. B. [6]): Sie verknüpft die Richtung der plastischen Dehnungsentwicklung mit der Ableitung der Fließfunktion nach den Spannungen.

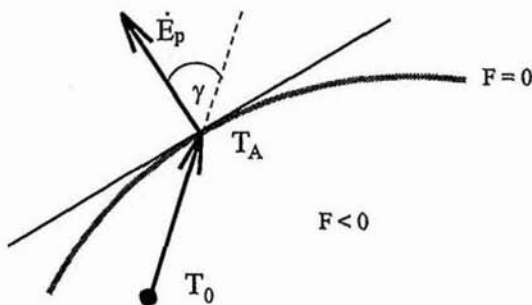


Abbildung 3.2.4.4: Zur Konstruktion der Normalenregel

Aus der Fließregel und Gl. 3.2.4.21 gewinnt man schließlich noch die Belastungsbedingung:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}_{eq}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{eq} \geq 0 \quad 3.2.4.25$$

Nachdem plausibel gemacht wurde, wie die plastische Dehnrate  $\dot{\mathbf{E}}_p$  mit der Fließfunktion  $F$  zusammenhängen sollte, ist im nächsten Schritt  $F$  auf räumliche Zustände zu verallgemeinern. Für  $F$  wurde anhand eindimensionaler Experimente der Ansatz

$$F = (\tau_{eq} - x)^2 - \frac{1}{3} g_0^2$$

motiviert (Gl. 3.2.3.9), wobei  $x$  die kinematische Verfestigung und  $g_0$  die Größe des elastischen Bereiches ist. Bei räumlichen Belastungen werden Spannung und Verfestigung durch die Tensoren  $\mathbf{T}_{eq}$  und  $\mathbf{X}$  beschrieben. Damit muß  $F$  unter der Annahme materieller Isotropie von den drei Invarianten der Differenz  $\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{X}$  abhängen. Eine Abhängigkeit von der Determinante wird nicht berücksichtigt, da sie hier etwas formal erscheint. Es ergibt sich:

$$F = F(\text{tr}(\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{X}), \|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|)$$

Mit diesem Ansatz liefert die Berechnung der plastischen Dehnrate nach Gl. 3.2.4.24 den Ausdruck

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial (\text{tr}(\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{X}))} \mathbf{1} + \frac{\partial F}{\partial (\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|)} \frac{\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D}{\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|} \right\},$$

von dem wegen der Inkompressibilität plastischer Deformationen die Spur verschwinden muß, d. h. die partielle Ableitung  $\partial F / \partial (\text{tr}(\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{X}))$  muß Null sein. Damit ergibt sich

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial (\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|)} \frac{\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D}{\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|} \right\}. \quad 3.2.4.26$$

Da  $F$  nicht von  $\text{tr}(\mathbf{T}_{eq} - \mathbf{X})$  abhängen darf, wird sie zunächst in der allgemeinen Form

$$F = F(\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|) =: \Phi(n) - \sqrt{\frac{2}{3}} g_0$$

mit

$$n = \|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|$$

dargestellt. Solche Funktionen stellen im 6-dimensionalen Spannungsraum Kugeln dar mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{X}$  und erfüllen die Anforderung der Konvexität.

Nun soll die Funktion  $\Phi$  diskutiert werden. Dazu wird die Konsistenzbedingung ( $\dot{F} = 0$ ) unter Anwendung der Kettenregel ausgewertet, woraus sich der Ausdruck

$$\dot{F} = 0 = \frac{d\Phi}{dn} \left[ \frac{\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D}{n} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{eq}^D - \frac{\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D}{n} \cdot \dot{\mathbf{X}} \right] \quad 3.2.4.27$$

ergibt. Zur weiteren Vereinfachung wird ausgenutzt, daß  $\mathbf{X}$  durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional der Geschichte von  $\mathbf{E}_p$  dargestellt werden soll. Dann gilt:

$$\dot{\mathbf{X}} = \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \frac{d\mathbf{X}}{dz} \quad \text{mit} \quad z = \|\dot{\mathbf{E}}_p\|$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. 3.2.4.27 ein, dann kann der Faktor  $\lambda$  in der Fließregel (Gl. 3.2.4.26) bestimmt werden. Für spannungsgesteuerte Prozesse ergibt sich beispielsweise

$$\left( \lambda \frac{d\Phi}{dn} \right) = \frac{(\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D) \cdot \dot{\mathbf{T}}_{eq}^D}{(\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dz}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{E}}_p = \left( \lambda \frac{d\Phi}{dn} \right) \frac{\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D}{n} .$$

Dabei erkennt man, daß die Fließregel unabhängig von der Funktion  $\Phi$  ist. Da die erste Ableitung von  $\Phi$  wegen Gl. 3.2.4.27 nicht verschwinden darf, erscheint die Wahl einer linearen Funktion zweckmäßig, d. h.:

$$F = \|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_0 \quad 3.2.4.28$$

Die wesentliche dabei Annahme ist, daß  $\Phi$  von der Größe  $\|\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}^D\|$  abhängt.

#### Das Funktional der Verfestigung:

Nun wird das Modell für die kinematische Verfestigung  $\mathbf{X}$  auf räumliche Zustände übertragen, wobei die Annahmen der materiellen Isotropie und der Volumenkonstanz plastischer Deformationen ausgenutzt werden. Durch formale Verallgemeinerung der an eindimensionalen Prozessen motivierten Beziehungen (Gl. 3.2.3.25 bis Gl. 3.2.3.28) ergeben sich folgende Evolutionsgleichungen:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k \quad \text{mit} \quad \dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \quad 3.2.4.29$$

$$\text{mit} \quad \dot{\mathbf{X}}_k = c_k \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{b_k}{1 + \alpha_p} \dot{s} \mathbf{X}_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad 3.2.4.30$$

$$\text{und} \quad \dot{p} = \frac{\dot{s}}{s_{0p} (1 + \alpha_\delta \delta)} ( \|\mathbf{X}\| - p ) \quad 3.2.4.31$$

$$\text{bzw.} \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{s}}{s_{0\delta}} ( p - \delta ) . \quad 3.2.4.32$$

Dieses Differentialgleichungssystem soll nun bezüglich der Darstellung des Materialverhaltens bei nichtradialen Prozessen untersucht und verbessert werden.

Dabei wird ein tensorwertiger Prozeß  $\mathbf{Y}(t)$  als radial bezeichnet, wenn er sich für alle Zeiten  $t$  in der Form

$$\mathbf{Y}(t) = y(t) \mathbf{Y}_0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}_0 = \text{const}$$

darstellen läßt, d. h. wenn sich alle Komponenten proportional zueinander ändern. Andernfalls ist er als nichtradial.

Bei mehrdimensionalen Prozessen haben die Experimente aus Abbildung 2.6.1 gezeigt, daß die Nichtradialität bei XCrNi18.9 Anlaß zu einer zusätzlichen Verfestigung gibt. In der Literatur wurden diese Effekte auch beobachtet und untersucht [10, 22, 18]. Nach Benallal und Marquis [22] bzw. Krempl und Lu [18] kann das Verhalten der hochlegierten Stähle AISI 304 und AISI 316 bei beliebigen radialen Prozessen mit den Materialgleichungen dargestellt werden, die auch reine Zug / Druck- oder Torsionsprozesse beschreiben. Damit liegt die Ursache der Zusatzverfestigung in der Nichtradialität.

Eine Abschätzung für die Größe der nichtradialen Verfestigung bei XCrNi18.9 gewinnt man durch Vergleich der in den Abbildungen 2.5.4 und 2.6.1 dargestellten Experimente. Bei eindimensionalen Belastungen mit einer Dehnungsamplitude von  $\Delta\varepsilon_p = 0.5\%$  liegt der Sättigungswert der Gleichgewichtsspannung bei etwa 185 MPa. Bei vergleichbaren Amplituden unter zweidimensionalen Belastungen (Kreise im Dehnungsraum) ergeben sich ca. 270 MPa, so daß die Zusatzverfestigung bei etwa 85 MPa liegt.

Das Verfestigungsmodell wird nun daraufhin untersucht, ob es die Zusatzverfestigung für die stationären Zyklen richtig wiedergibt. Hierzu wird in Gl. 3.2.4.29  $n = 1$  angenommen und der Parameter  $\alpha_s$  in Gl. 3.2.4.31 auf Null gesetzt, so daß im weiteren die Differentialgleichungen Gl. 3.2.4.30 und Gl. 3.2.4.31 betrachtet werden.

Als Lastpfade werden die beiden folgenden zyklischen ein- und zweidimensionalen Prozesse zugrundegelegt, wobei die plastischen Dehnungen gesteuert werden. Dabei sollen die mit  $\Delta\varepsilon_p$  bzw.  $\|\mathbf{E}_p\|$  bezeichneten Dehnungsamplituden als Parameter vorgegeben werden.

Bei dem eindimensionalen Prozeß besitzt der plastische Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_p$  die Darstellung

$$\mathbf{E}_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{pyz}(t) \\ 0 & \varepsilon_{pyz}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{E}_p\| := \sqrt{2} \Delta\varepsilon_p = \text{const} ,$$

wobei sich seine Komponenten periodisch in den Grenzen  $[-\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_p]$  ändern sollen (siehe Abbildung 3.4.2.5). Da das Verfestigungsmodell geschwindigkeitsunabhängig ist, spielt der zeitliche Verlauf von  $\varepsilon_{pyz}(t)$  keine Rolle.

Der zweite Prozeß ist zyklisch und zweidimensional:

$$\mathbf{E}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_{pzz}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_{pzz}(t) & \varepsilon_{pyz}(t) \\ 0 & \varepsilon_{pyz}(t) & \varepsilon_{pzz}(t) \end{pmatrix} \quad 3.2.4.33$$

Dabei sollen sich die Komponenten von  $\mathbf{E}_p$  gemäß

$$\varepsilon_{pzz}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\varepsilon_p \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad \varepsilon_{pyz}(t) = \Delta\varepsilon_p \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{E}_p\| := \sqrt{2} \Delta\varepsilon_p$$

verhalten (Abbildung 3.2.4.5), so daß die Scherdehnung  $\varepsilon_{pyz}(t)$  dieselbe Amplitude besitzt wie bei dem eindimensionalen Prozeß. Ihr ist lediglich eine um  $90^\circ$  phasenverschobene Axialdehnung  $\varepsilon_{pzz}(t)$  überlagert.

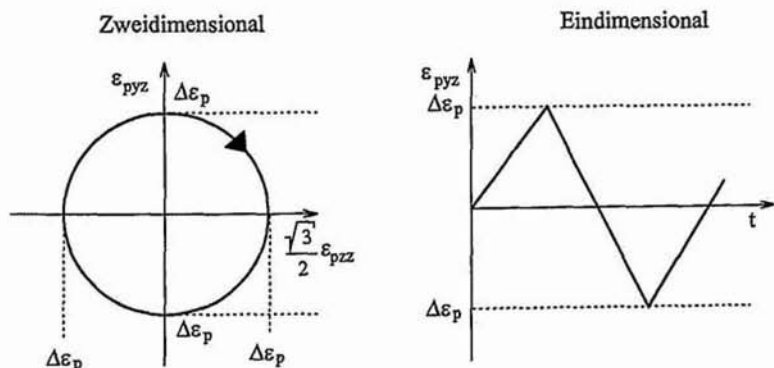


Abbildung 3.2.4.5.: Zyklische Belastungen mit vergleichbaren Dehnungsamplituden

#### Analytische Untersuchung des eindimensionalen Prozesses:

Zunächst wird das Verfestigungsmodell für den eindimensionalen Prozeß ausgewertet, wofür sich aus Gl. 3.2.4.30 und Gl. 3.2.4.31 die beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{du} = c \frac{d\varepsilon_{pyz}}{du} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p} x \quad 3.2.4.34$$

und 
$$\frac{dp}{du} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{s_{0p}} \left( \sqrt{2} |x| - p \right) \quad \text{mit } \dot{u} = |\dot{\varepsilon}_{pyz}| \quad 3.2.4.35$$

ergeben. Die wesentliche Schwierigkeit besteht darin, daß dieses System für zyklische Belastungen nicht geschlossen lösbar ist.

Um die numerische Integration zu vermeiden und um die Parameterabhängigkeit der Lösung zu untersuchen, soll eine analytische Näherungslösung von Gl. 3.2.4.34 und Gl. 3.2.4.35 berechnet werden. Motiviert durch die Existenz der stationären Lösung für den Fall  $\alpha_p = 0$  (siehe Gl. 3.2.3.15) wird davon ausgegangen, daß auch für  $\alpha_p \neq 0$  ein stationärer Grenzzyklus existiert. Unter Berücksichtigung der Periodizität von  $x$  und  $p$  im Grenzzyklus,

$$x(u + 2\Delta\varepsilon_p) = -x(u) \quad \text{und} \quad p(u + 2\Delta\varepsilon_p) = p(u)$$

und unter gewissen Näherungsannahmen werden nun Beziehungen zur Abschätzung der Amplitude der stationären Hysterese abgeleitet.

Hierzu wird Gl. 3.2.4.34 mit einem integrierenden Faktor multipliziert, die Kettenregel angewendet und eine Integration durchgeführt. Damit ergibt sich für  $x$  die Darstellung

$$x(u) = \int_0^u c \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u, \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_{pyz}}{d\sigma} d\sigma \quad 3.2.4.36$$

wobei die Funktion  $z(u, \sigma)$  durch

$$z(u, \sigma) = \int_{\sigma}^u \frac{dz}{1 + \alpha_p p(z)}$$

definiert ist. Auf ähnliche Weise erhält man für die Variable  $p$  die Darstellungsformel

$$p(u) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} s_{0p}} \int_0^u |x(\sigma)| \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u - \sigma}{s_{0p}}\right] d\sigma \quad 3.2.4.37$$

Nun wird die Verfestigung mit Hilfe von Gl. 3.2.4.36 an der Stelle  $u - 2\Delta\varepsilon_p$  berechnet:

$$x(u - 2\Delta\varepsilon_p) = \int_0^{u - 2\Delta\varepsilon_p} c \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u - 2\Delta\varepsilon_p, \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_{pyz}}{d\sigma} d\sigma$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von  $z(u - 2\Delta\varepsilon_p, \sigma) = z(u, \sigma) - z(u, u - 2\Delta\varepsilon_p)$

$$x(u - 2\Delta\varepsilon_p) = \exp\left[\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u, u - 2\Delta\varepsilon_p)\right] \int_0^{u - 2\Delta\varepsilon_p} c \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u, \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_{pyz}}{d\sigma} d\sigma$$

und unter Ausnutzung der Periodizität von  $x$  schließlich die Darstellungsformel

$$x(u) = \frac{1}{1 + \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u, u - 2\Delta\varepsilon_p)\right]} \int_{u - 2\Delta\varepsilon_p}^u c \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b z(u, \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_{pyz}}{d\sigma} d\sigma \quad 3.2.4.38$$

Für  $p$  gewinnt man aus Gl. 3.2.4.37 durch eine ähnliche Rechnung das Resultat

$$p(u) = \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2\Delta\varepsilon_p}{s_{0p}}\right]} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} s_{0p}} \int_{u - 2\Delta\varepsilon_p}^u |x(\sigma)| \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u - \sigma}{s_{0p}}\right] d\sigma \quad 3.2.4.39$$

Durch die beiden Funktionale Gl. 3.2.4.38 und Gl. 3.2.4.39 ist die stationäre Hysterese vollständig bestimmt, d. h. daß sie aus dem Verlauf der Verzerrungsgeschichte innerhalb eines einzigen Halbzyklus berechnet werden kann (Integrationsbereich der Länge  $2\Delta\varepsilon_p$ ).

Diese Funktionale werden nun weiter ausgewertet. Dazu wird daran erinnert, daß  $p$  in [25] als Maß für die Dehnungsamplitude eingeführt wurde. Die Variable  $p$  sollte also im Verlauf der stationären Zyklen näherungsweise konstant sein, womit Gl. 3.2.4.39 nur Sinn macht, wenn der Parameter  $s_{0p}$  groß im Vergleich zur Dehnungsamplitude  $\Delta\varepsilon_p$  ist. Dann variiert  $p$  nur schwach im Verlauf eines Zyklus und die Exponentialfunktionen in Gl. 3.2.4.39 dürfen durch

die ersten Glieder ihrer Taylorentwicklungen ersetzt werden. Die Variable  $p$  ist im Rahmen dieser Näherung konstant, d. h.  $p(u) = p_\infty$ , und die Funktion  $z(u, \sigma)$  darf durch

$$z(u, \sigma) = \int_{\sigma}^u \frac{dz}{1 + \alpha_p p(z)} \approx \frac{u - \sigma}{1 + \alpha_p p_\infty}$$

berechnet werden. Damit ergibt sich

$$x(u) \approx \frac{1}{1 + \exp(-2b_p \Delta \varepsilon_p)} \int_{u - 2\Delta \varepsilon_p}^u c \exp\left[-b_p(u - \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_{pyz}}{d\sigma} d\sigma \quad 3.2.4.40$$

$$\text{und} \quad p(u) \approx p_\infty = \frac{\sqrt{2}}{2\Delta \varepsilon_p} \int_{u - 2\Delta \varepsilon_p}^u |x(\sigma)| d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2\Delta \varepsilon_p} \int_{-\Delta \varepsilon_p}^{\Delta \varepsilon_p} |x(\sigma)| d\sigma \quad 3.2.4.41$$

wobei die Abkürzung

$$b_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_\infty}$$

eingeführt wurde. Die stationäre Hysterese erweist sich damit, als unabhängig von  $s_{0p}$ . Dieser Parameter beeinflusst das Übergangsverhalten in den stationären Zustand.

Die Amplitude  $x_\infty$  der Verfestigung berechnet man durch Integration von Gl. 3.2.4.40 über einen Halbzyklus mit  $d\varepsilon_{pyz}/d\sigma = 1$ . Man erhält schließlich

$$x_\infty = \frac{c}{b_p} \tanh\left[b_p \Delta \varepsilon_p\right], \quad 3.2.4.42$$

also formal dasselbe Ergebnis wie für  $\alpha_p = 0$  (siehe Gl. 3.2.3.15), allerdings mit einem modifizierten Wert für den Parameter  $b$ , der von  $p_\infty$  abhängt. Dieser Wert läßt sich mit Gl. 3.2.4.41 unter einer weiteren Näherung berechnen:

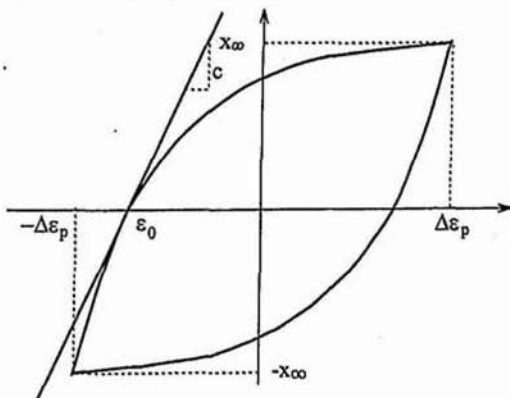


Abbildung 3.2.4.6.: Zur Abschätzung von  $p_\infty$

Abbildung 3.2.4.6 motiviert, daß  $p_\infty$  bei nicht zu kleinen Dehnungsamplituden durch

$$p_{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2\Delta\epsilon_p} \int_{-\Delta\epsilon_p}^{\Delta\epsilon_p} |x(\sigma)| d\sigma \approx \frac{\sqrt{2}}{2\Delta\epsilon_p} \int_{-\Delta\epsilon_p}^{\Delta\epsilon_p} x(\sigma) d\sigma \quad 3.2.4.43$$

abgeschätzt werden kann. Die Fläche zwischen  $-\Delta\epsilon_p$  und  $\epsilon_0$  geht zwar mit falschem Vorzeichen in das Integral ein, der Fehler ist aber relativ klein. Mit dem Verlauf der Verfestigung für monotone Prozesse (Integration von Gl. 3.2.4.34 für  $p = p_{\infty}$ )

$$x(\sigma) = -x_{\infty} \exp[-b_p(\sigma + \Delta\epsilon_p)] + \frac{c}{b_p} \left[ 1 - \exp[-b_p(\sigma + \Delta\epsilon_p)] \right]$$

liefert die Auswertung von Gl. 3.2.4.43 unter Beachtung von Gl. 3.2.4.42 die Näherungsformel

$$p_{\infty} = \sqrt{2} \frac{c}{b_p} \left[ 1 - \frac{\tanh(b_p \Delta\epsilon_p)}{b_p \Delta\epsilon_p} \right] \quad \text{mit} \quad b_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_{\infty}} \quad 3.2.4.44$$

Daran erkennt man, daß auch  $p_{\infty}$  unabhängig vom Materialparameter  $s_{0p}$  ist. Weiterhin sieht man anhand von Gl. 3.2.3.31, daß für konstantes  $p$  auch die Variable  $\delta$  konstant ist und durch den stationären Wert  $\delta_{\infty} = p_{\infty}$  gegeben ist. Damit ist das stationäre Verhalten des Verfestigungsmodells unabhängig von der Variablen  $\delta$ . Sie modifiziert lediglich das transiente Verhalten.

Durch numerische Lösung von Gleichung Gl. 3.2.4.44 und Einsetzen der Lösung  $p_{\infty}$  in Gl. 3.2.4.42 kann bei gegebenem  $\Delta\epsilon_p$  die stationäre Verfestigungsamplitude  $x_{\infty}$  ermittelt werden. Unter Ausnutzung der Fließfunktion (Gl. 3.2.4.28) erhält man für die Amplitude der Gleichgewichtsspannung noch den Zusammenhang

$$\|\mathbf{T}_{eq}^D\|_{\text{eindim}} = \sqrt{2} \left[ x_{\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}} g_0 \right] \quad 3.2.4.45$$

Damit ist es gelungen, das stationäre Verhalten der Differentialgleichungen Gl. 3.2.4.34 und Gl. 3.2.4.35 bei zyklischen Prozessen durch die Lösung von zwei transzendenten Gleichungen zu ermitteln.

#### Analytische Untersuchung des zweidimensionalen Prozesses:

Zum Vergleich wird nun der zweidimensionale Prozeß aus Abbildung 3.2.4.5 untersucht. Dabei wird wieder von  $n = 1$  und  $\alpha_g = 0$  ausgegangen und zunächst die stationäre Lösung  $\mathbf{X}_{\infty}$  des Verfestigungsmodells gesucht. Aus der Evolutionsgleichung für  $p$  (Gl. 3.2.4.31) entnimmt man, daß der stationäre Wert  $p_{\infty}$  durch

$$p_{\infty} = \|\mathbf{X}_{\infty}\| = \text{const}$$

gegeben ist, womit sich Gl. 3.2.4.30 zu

$$\frac{d\mathbf{X}_{\infty}}{du} = c \frac{d\mathbf{E}_p}{du} - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} b}{1 + \alpha_p \|\mathbf{X}_{\infty}\|} \mathbf{X}_{\infty} \quad \text{mit} \quad \dot{u} = \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \quad 3.2.4.46$$

vereinfacht. Nach Multiplikation mit dem integrierenden Faktor  $\exp(b_\infty u)$ , verschiedenen Umformungen und anschließender Integration gelangt man unter Ausnutzung der Periodizität des Grenzzykus  $\mathbf{X}_\infty(u) = \mathbf{X}_\infty(u + 2\pi\sqrt{2}\Delta\varepsilon_p)$  zu dem Funktional

$$\mathbf{X}_\infty(u) = \frac{1}{1 - \exp(-b_\infty L)} \int_{u-L}^u c \exp(-b_\infty(u-\sigma)) \frac{d\mathbf{E}_p}{d\sigma} d\sigma \quad 3.2.4.47$$

Dabei wurden die beiden Abkürzungen

$$b_\infty = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} b}{1 + \alpha_p \|\mathbf{X}_\infty\|} \quad \text{und} \quad L = 2\pi\sqrt{2}\Delta\varepsilon_p$$

eingeführt. Zur Auswertung von Gl. 3.2.4.47 werden die harmonischen Funktionen für die beiden Tensorkomponenten von  $\mathbf{E}_p$  eingesetzt (Gl. 3.2.4.33) und die Integration über einen Zyklus ausgeführt. Die Bildung der Norm liefert schließlich die implizite Gleichung

$$\|\mathbf{X}_\infty\| = \frac{c \|\mathbf{E}_p\|}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \frac{b \|\mathbf{E}_p\|}{1 + \alpha_p \|\mathbf{X}_\infty\|} \right)^2}} \quad 3.2.4.48$$

zur Bestimmung von  $\|\mathbf{X}_\infty\|$ .

Zur Ermittlung der Norm  $\|\mathbf{T}_{eq}^D\|_{\text{zweidim}}$  des Deviators der Gleichgewichtsspannung wird von der Identität  $\mathbf{T}_{eq}^D = \mathbf{X}_\infty + (\mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X}_\infty)$  ausgegangen. Unter Ausnutzung von Fließregel und Fließfunktion (Gl. 3.2.4.24 und Gl. 3.2.4.28) ergibt sich daraus

$$\|\mathbf{T}_{eq}^D\|_{\text{zweidim}} = \sqrt{\|\mathbf{X}_\infty\|^2 + \frac{2}{3} \varepsilon_0^2 + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_0 \|\mathbf{X}_\infty\| \cos(\mathbf{X}_\infty, \dot{\mathbf{E}}_p)} \quad 3.2.4.49$$

Dabei berechnet sich der Kosinus des Winkels zwischen der plastischen Dehnrate und der Verfestigung durch skalare Multiplikation von Gl. 3.2.4.45 mit  $\mathbf{X}_\infty$  zu

$$\cos(\mathbf{X}_\infty, \dot{\mathbf{E}}_p) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{c} \|\mathbf{X}_\infty\|}{1 + \alpha_p \|\mathbf{X}_\infty\|} \quad 3.2.4.50$$

Mit den Gleichungen Gl. 3.2.4.48 bis 3.2.4.50 kann bei gegebener Dehnungsamplitude  $\|\mathbf{E}_p\|$  die Norm der stationären Gleichgewichtsspannung  $\|\mathbf{T}_{eq}^D\|$  für den zweidimensionalen Prozeß ermittelt werden.

### Vergleich der Ergebnisse:

Nun können die Ergebnisse veranschaulicht werden. Dazu werden die nichtlinearen Gleichungen zur Bestimmung von  $\|\mathbf{T}_{eq}^D\|$  für die beiden Prozesse numerisch ausgewertet. Für den eindimensionalen Prozeß sind dies Gl. 3.2.4.42, Gl. 3.2.4.44 und Gl. 3.2.4.45 und für den zweidimensionalen Gl. 3.2.4.48, Gl. 3.2.4.49 und Gl. 3.2.4.50. Dabei wurden für die Materialparameter die Werte  $c = 63000 \text{ MPa}$ ,  $b = 700$  und  $\alpha_p = 0.0076 \text{ MPa}^{-1}$  gewählt. Die statio-

nären Spannungsamplituden sind in Abbildung 3.2.4.7 gegen die Verzerrungsamplitude  $\|E_p\|$  aufgetragen.

Zunächst wird der Fall  $\alpha_p = 0$  betrachtet, wo die Variable  $p$  bedeutungslos ist. Dabei erkennt man, daß  $\|T_{eq}^D\|$  bei dem nichtradialen Prozeß kleiner ausfällt als bei dem radialen Prozeß. Die experimentelle Beobachtung einer durch die Nichtradialität bedingten Zusatzverfestigung wird also für  $\alpha_p = 0$  nicht dargestellt.

Wenn die Werte von  $\|E_p\|$  groß werden, dann konvergieren die Spannungsamplituden beider Prozesse gegen denselben Grenzwert. Man ermittelt ihn mit Hilfe von Gl. 3.2.4.42, Gl. 3.2.4.44, Gl. 3.2.4.45 bzw. Gl. 3.2.4.48, Gl. 3.2.4.49 und Gl. 3.2.4.50 durch Grenzwertbildung. Er ist durch

$$\lim_{\|E_p\| \rightarrow \infty} \|T_{eq}^D\|_{\alpha_p=0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{b} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

gegeben und setzt sich aus additiv dem Grenzwert der Verfestigung und dem Radius der Fließfläche zusammen. Da der Kosinus des Winkels zwischen  $X_\infty$  und der plastischen Dehnrate für große Werte von  $\|E_p\|$  gegen 1 geht (Gl. 3.2.4.47 und Gl. 3.2.4.49), wird der zwei-dimensionale Prozeß im Grenzfall großer Dehnungsamplituden radial.

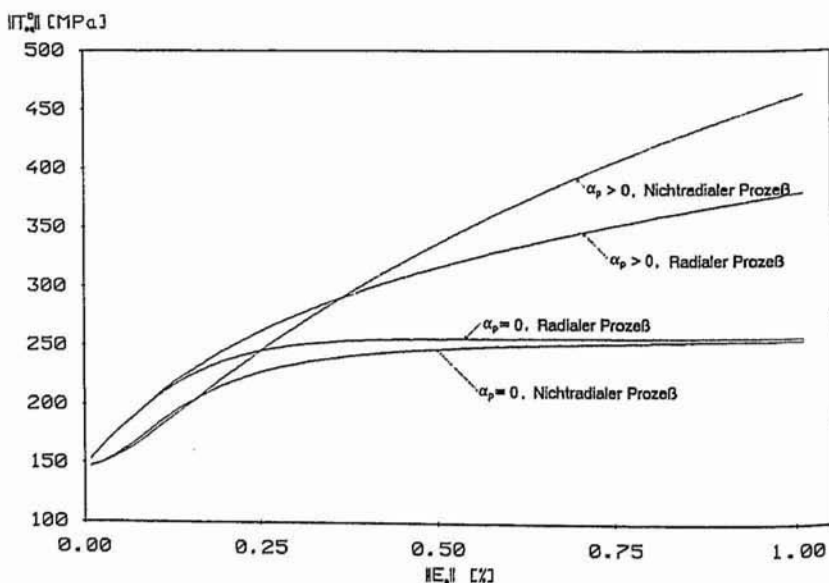


Abbildung 3.2.4.7.: Stationäre Spannungsamplituden bei radialen und nichtradialen Prozessen  
Für  $\alpha_p > 0$  werden die Spannungsamplituden bei kleinen Werten von  $\|E_p\|$  nur unwesentlich modifiziert (Abbildung 3.2.4.7), da die Variable  $p$  noch keinen Einfluß auf das Verhalten des Verfestigungsmodells hat.

Mit wachsenden Amplituden findet eine immer stärkere Bewertung der Nichtradialität statt und zwar solange, bis der Prozeß größere Spannungen liefert als der radiale. Im Grenzfall sehr großer Dehnungsamplituden laufen beide Spannungsamplituden gegen den gleichen Grenzwert (in Abbildung 3.2.4.7 nicht dargestellt). Er wird mit denselben Gleichungen ermittelt wie zuvor und ist durch

$$\lim_{\|E_p\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}_{cq}^D\|_{\alpha_p > 0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{b} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{b} \alpha_p} + \sqrt{\frac{2}{3}} g_0$$

gegeben. Er setzt sich, wie für  $\alpha_p = 0$ , aus dem Grenzwert der Verfestigung und dem Radius der Fließfläche zusammen. Auch hier wird der Prozeß im Grenzfall großer Amplituden radial.

Nun sind die Untersuchungen abgeschlossen und die am Werkstoff XCrNi18.9 beobachtete Verfestigung kann mit den Vorhersagen des Modells verglichen werden. Bei den im Versuch zugrundegelegten Amplituden von  $\|E_p\| = \sqrt{2} \cdot 0.5\% \approx 0.7\%$  liefert das Modell eine zusätzliche Verfestigung von etwa 40 MPa (Abbildung 3.2.4.7), wogegen das Experiment ca. 85 MPa liefert. Die Verfestigung unter nichtradialen Belastungen wird also unterschätzt.

#### Modifikation des Verfestigungsmodells:

Eine naheliegende Möglichkeit zur Verbesserung der Eigenschaften des Verfestigungsmodells besteht darin, die Materialparameter von inneren Variablen abhängig zu machen, die bei den zugrundegelegten zyklischen nichtradialen Prozessen stationär werden.

Um auch dann physikalisch plausible Lösungen sicherzustellen, ist es sinnvoll, den Wertebereich abzuschätzen, in dem die Parameter liegen dürfen. Dazu wird der Grenzwert von  $\|\mathbf{X}_\infty\|$  aus Gl. 3.2.4.48 für große Dehnungsamplituden berechnet. Es gilt

$$\lim_{\|E_p\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_\infty\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{b} \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{c}{b} \alpha_p},$$

woraus sich wegen der positiven Definitheit der Norm eine obere Schranke für  $\alpha_p$  ergibt:

$$\alpha_p < \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{b}{c} \quad 3.2.4.51$$

Sie liegt bei den verwendeten Materialparametern bei etwa  $0.0091 \text{ MPa}^{-1}$  und damit nur unwesentlich über dem für  $\alpha_p$  angenommenen Wert von  $0.0076 \text{ MPa}^{-1}$ . Eine Modifikation dieses Parameters durch innere Variable führt vermutlich nicht zum Erfolg. Geht man davon aus, daß  $\alpha_p$  anhand eindimensionaler Experimente identifiziert wurde, dann kann Gl. 3.2.4.51 als Schranke für die Parameter  $b$  und  $c$  interpretiert werden.

Sinnvoller ist eine andere Vorgehensweise: Die Verfestigungsvariablen  $\mathbf{X}$  oder  $g$  werden durch additive Zusatzbeiträge  $\hat{\mathbf{X}}$  oder  $\hat{g}$  modifiziert, in die Nichtradialität eingeht, d. h.

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}} \quad \text{oder} \quad g = \bar{g} + \hat{g}. \quad 3.2.4.52$$

Dabei werden mit  $\bar{X}$  und  $\bar{g}$  die Anteile der Verfestigung bezeichnet, die das Materialverhalten unter radialen Belastungen darstellen. Die Zusatzbeiträge  $\hat{X}$  und  $\hat{g}$  sollen bei rein radialen Prozessen entweder null oder konstant sein.

Von Benallal und Marquis wurde in [22] und [41] eine Modifikation der isotropen Verfestigung vorgeschlagen, die sich im Sinne von Gl. 3.2.4.52 als Zusatzverfestigung  $\hat{g}$  interpretieren läßt. Dabei ist die Evolutionsgleichung für  $\hat{g}$  so aufgebaut, daß sich ihr stationärer Wert bei zyklischen nichtradiellen Belastungen mit dem Wert einer skalaren Variablen ändert. Diese Variable ist in [22] ein Maß für den Winkel zwischen Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeit und in [41] der Cosinus des Winkels zwischen  $\dot{X}$  und  $\dot{X}$ , also ein Maß für die Nichtradialität des Prozesses. Ferner sind die Evolutionsgleichungen für  $\hat{g}$  bezüglich der plastischen Bogenlänge formuliert, so daß die Zusatzverfestigung durch geeignete radiale Prozesse prinzipiell vollständig abgebaut werden kann.

Bei Kikillus [80] hängt ebenfalls die Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung von einem skalaren Maß für die Nichtradialität ab. Dieses Maß leitet sich geometrisch aus einem Mehrflächenmodell ab.

Die Arbeit von Pape [10] und eine neuere Arbeit von Benallal, Le Gallo und Marquis [21] deuten allerdings darauf hin, daß die durch nichtradielle Prozesse aufgebaute Verfestigung bei Stählen und verschiedenen Aluminiumlegierungen nicht mehr vollständig durch radiale Prozesse abbaubar ist. Es liegt offenbar ein gewisser Erinnerungseffekt vor.

In diesem Zusammenhang wurde von Tanaka, Murakami und Oaka [20] der Stahl AISI 316 mit einer Folge von dehnungsgesteuerten Kreisen mit verschiedenen Amplituden belastet. Sie haben beobachtet, daß die stationäre Spannungsantwort davon abhängt, wie groß der größte Dehnungskreis im Verlauf des Prozesses gewesen ist. Die Zusatzverfestigung ist demnach auch durch nichtradielle Prozesse nicht mehr vollständig abbaubar.

Von Krempl [60] wurde daher ein anderes Modell der isotropen Verfestigung vorgeschlagen. Dabei sind die Evolutionsgleichungen bezüglich einer Bogenlänge formuliert, die den nichtradial zurückgelegten Deformationsweg mißt. Diese sogenannte "nichtradielle" Bogenlänge hat die Eigenschaft, daß sie bei radialen Prozeßführungen zum Stehen kommt. Werden die Evolutionsgleichungen für die nichtradielle Verfestigung bezüglich einer solchen Größe formuliert, dann kann die Zusatzverfestigung durch radiale Prozesse nicht mehr vollständig abgebaut werden, so daß Erinnerungseffekte berücksichtigt werden können.

Im Gegensatz zu den Vorschlägen von Krempl und Benallal, Le Gallo und Marquis, wurden von Guionnet in [61] die Parameter  $c$  und  $b$  der kinematischen Verfestigung  $X$  durch ein skalares Maß für die Nichtradialität modifiziert.

Zur Entscheidung, ob die Zusatzverfestigung isotrop oder kinematisch ist oder ob die Fließfläche aufgrund der Nichtradialität gar ihre Form ändert, sollte das Experiment gefragt werden. Dazu müßte die Fließfläche im Verlauf zweidimensionaler Prozesse identifiziert werden. Einerseits wegen der damit verbundenen Schwierigkeiten und andererseits wegen der Beobachtung, daß bei XCrNi18.9 die isotrope Verfestigung bei eindimensionalen Prozessen

vernachlässigbar ist, wird im folgenden die kinematische Verfestigung im Sinne von Gl. 3.2.4.52 modifiziert.

#### Das Modell der nichtradialen kinematischen Verfestigung:

Dazu bietet es sich an für die Zusatzverfestigung  $\hat{\mathbf{X}}$  zunächst von einem zu Gl. 3.2.4.29 bis Gl. 3.2.4.31 analogen Ansatz der Form

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^{\hat{n}} \hat{\mathbf{X}}_k \quad \dot{s}_{nr} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}_{pnr}\| \quad 3.2.4.53$$

mit 
$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}_k = \hat{c}_k \dot{\mathbf{E}}_{pnr} - \hat{b}_k \frac{\dot{s}_{nr}}{1 + \hat{\alpha} \hat{p}} \hat{\mathbf{X}}_k \quad 3.2.4.54$$

und 
$$\dot{\hat{p}} = \frac{\dot{s}_{nr}}{\hat{s}_{0p}} \left( \|\hat{\mathbf{X}}\| - \hat{p} \right) \quad 3.2.4.55$$

auszugehen. Dabei ist die treibende Kraft für  $\hat{\mathbf{X}}$  eine sogenannte nichtradiale Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{E}}_{pnr}$ . Bei rein radialen Prozeßführungen soll  $\dot{\mathbf{E}}_{pnr}$  Null sein und bei Prozessen, die radiale und nichtradiale Anteile beinhalten, soll er im Fall der Radialität asymptotisch verschwinden. Die Größe  $s_{nr}$  ist die zugehörige Bogenlänge, die als geometrische Länge des nichtradial zurückgelegten Deformationsweges interpretiert werden kann. Damit lassen sich Erinnerungseffekte an vergangene nichtradiale Prozesse berücksichtigen.

Zur Darstellung der Abhängigkeit der Zusatzverfestigung von der Dehnungsamplitude wurde in Analogie zur inneren Variablen  $p$ , eine weitere Variable  $\hat{p}$  eingeführt. Sie berechnet sich nach Gl. 3.2.4.55.

Es bleibt noch der Tensor  $\dot{\mathbf{E}}_{pnr}$  zu konstruieren. Da die gesamte Verfestigung  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}$  weiterhin ein Funktional bleiben sollte, das aus der Geschichte von  $\mathbf{E}_p$  berechnet werden kann, sollte  $\dot{\mathbf{E}}_{pnr}$  nicht von Spannungsgrößen abhängen. Ferner sollte das Maß für die Nichtradialität nicht nur von Größen abhängen, die von Aussen steuerbar sind, sondern auch von solchen Größen, die den inneren (Verfestigungs-) Zustand des Materials charakterisieren. Plausibel ist die Annahme, daß  $\dot{\mathbf{E}}_{pnr}$  eine tensorwertige Funktion der folgenden Gestalt ist:

$$\dot{\mathbf{E}}_{pnr} = \Phi(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{E}}_p)$$

Der Tensor  $\mathbf{E}_p$  im Argument von  $\Phi$  wurde ausgelassen, da er zu einer Abhängigkeit der stationären Spannungsantwort von der Mitteldehnung führen würde. Dies wurde experimentell nicht beobachtet (Abbildungen 2.6.2 und 2.6.3, bzw. [34]).

Die Zeitableitung der Verfestigung im Argument von  $\Phi$  würde unter Umständen eine implizite Differentialgleichung für  $\dot{\mathbf{X}}$  nach sich ziehen, so daß diese Möglichkeit aus numerischen Gründen ausgeklammert werden sollte. Übrig bleibt also der Ansatz

$$\dot{\mathbf{E}}_{pnr} = \Phi(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{E}}_p) .$$

In dieser Arbeit wurde für  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}$  der Anteil der plastischen Dehnrate  $\dot{\mathbf{E}}_p$  gewählt, der in der von  $\mathbf{X}$  und  $\dot{\mathbf{E}}_p$  aufgespannten Ebene liegt und orthogonal auf der aktuellen Verfestigung  $\mathbf{X}$  steht:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \left( \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \right) \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}} \quad 3.2.4.56$$

Abbildung 3.2.4.8 veranschaulicht diesen Ansatz. Bei radialen Prozessen verschwindet  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}$ .

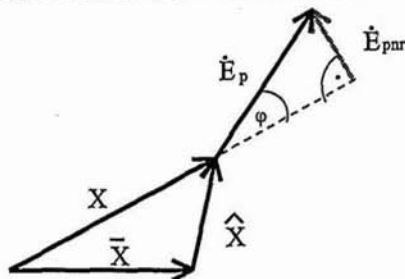


Abbildung 3.2.4.8.: Tensorielles Maß für die Nichtradialität eines Prozesses

Durch diese Konstruktion kann die Zusatzverfestigung, anhand der Geschichte von  $\bar{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{E}_p$  durch Integration weiterer Differentialgleichungen ermittelt werden. Wesentlich ist, daß durch  $\hat{\mathbf{X}}$  keine weitere Kopplung zwischen den Evolutionsgleichungen verursacht wird.

Der Tensor  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}$  hat eine wichtige Eigenschaft: Er bewertet Nichtradialitäten bei Prozessen mit kleinen Dehnungsamplituden, d. h. bei  $\|\dot{\mathbf{E}}_p\| \approx 0$ , stärker als solche bei großen Amplituden. Dies wird plausibel, wenn man die Norm von Gl. 3.2.4.56 bildet und dabei die Zusatzverfestigung  $\hat{\mathbf{X}}$  unberücksichtigt läßt. Dann gilt

$$\|\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}\| = \sqrt{\|\dot{\mathbf{E}}_p\|^2 - \left[ \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \frac{\bar{\mathbf{X}}}{\|\bar{\mathbf{X}}\|} \right]^2}.$$

Im stationären Fall bei dehnungsgesteuerten Kreisen, d. h. für  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_\infty$ , ergibt sich

$$\|\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}\| = \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \sqrt{1 - \left[ \frac{\dot{\mathbf{E}}_p \cdot \bar{\mathbf{X}}_\infty}{\|\dot{\mathbf{E}}_p\| \|\bar{\mathbf{X}}_\infty\|} \right]^2} = \|\dot{\mathbf{E}}_p\| \sqrt{1 - \cos^2(\dot{\mathbf{E}}_p, \bar{\mathbf{X}}_\infty)}$$

und mit den Gleichungen Gl. 3.2.4.48 und Gl. 3.2.4.50 für  $\alpha_p = 0$  schließlich

$$\|\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}\| = \frac{\|\dot{\mathbf{E}}_p\|}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} b^2 \|\dot{\mathbf{E}}_p\|^2}}.$$

Damit gilt bei kleinen Dehnungsamplituden  $\|\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}\| \approx \|\dot{\mathbf{E}}_p\|$  und für sehr große gilt  $\|\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}\| \approx 0$ . Es besteht also die Hoffnung, daß die Schwäche des an eindimensionalen Experimenten entwickelten Verfestigungsmodells (Gl. 3.2.4.29 bis Gl. 3.2.4.32), Nichtradialitäten bei kleinen Dehnungsamplituden zu schwach zu bewerten, beseitigt werden kann. Den Erfolg dieser Modifikation werden die Modellrechnungen zeigen.

### 3.2.5 Analytische Untersuchung ausgewählter Phänomene

In diesem Abschnitt sollen einige charakteristische Phänomene der Viskoplastizität untersucht und physikalisch interpretiert werden. Sie lassen sich allgemein in zwei Klassen einteilen und zwar in Abhängigkeit davon, ob die Überspannung oder die Gleichgewichtsspannung der dominante Faktor ist.

Typische geschwindigkeitsabhängige Effekte werden wesentlich vom Verhalten der Überspannung bestimmt. Sie treten bereits bei monotonen Prozessen mit stückweise konstanten Belastungsgeschwindigkeiten auf. Hierzu gehören beispielsweise *Relaxation* und *Kriechen*. Bei zyklischen spannungsgesteuerten Prozessen, wo das überstrichene Spannungsintervall klein im Vergleich zum elastischen Bereich ist, tritt ein weiteres solches Phänomen auf: Wenn der Mittelwert der Spannung von Null verschieden ist, beobachtet man eine Dehnungsakkumulation, die das Vorzeichen der Mittelspannung trägt und die stark von der Spannungsgeschwindigkeit abhängt (siehe z. B. [15, 16]). Dieses Phänomen wurde von Chaboche und Nouhailhas in [17] mit dem Begriff des "Ratchetting Type B" bezeichnet. In dieser Arbeit soll dafür der Begriff des "Überspannungs - Ratchetting" verwendet werden.

Typische Effekte bei denen das Verhalten der Gleichgewichtsspannung wesentlich ist, sind dagegen nur bei speziellen zyklischen Belastungen zu beobachten: Dabei muß das überstrichene Spannungsintervall groß im Vergleich zum elastischen Bereich sein. Hierzu gehört neben der Ver- und Entfestigung, die zyklische Relaxation der Mittelspannung und eine andere Art des Ratchetting. Sie kann bei von Null verschiedenen Mittelspannungen beobachtet werden und wurde von Chaboche und Nouhailhas mit dem Begriff des "Ratchetting Type A" bezeichnet [17]. In dieser Arbeit soll dafür der Begriff des "Gleichgewichtsspannungs - Ratchetting" verwendet werden.

#### Monotone Prozesse mit konstanten Geschwindigkeiten:

Zunächst werden geschwindigkeitsabhängige Phänomene untersucht, wo die Überspannung der dominante Faktor ist. Dazu sollen die Antworten des Materialmodells auf monotone Belastungen mit konstanten Geschwindigkeiten berechnet werden.

#### Dehnungssteuerung:

Für dehnungsgesteuerte Prozesse mit konstanter Geschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_0$  lauten die Materialgleichungen

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \dot{\epsilon}_0 + \dot{s}, \quad z(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))}$$

$$\text{und } s(t) = \dot{\varepsilon}_0 \int_{-\infty}^t \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon}(\varepsilon(\tau)) \right] d\tau \quad \text{mit } \dot{\varepsilon}_0 = \text{const} \quad 3.2.5.1$$

Hiervon werden nun Lösungen berechnet, wo die Überspannung  $s$  nicht mehr von der Zeit abhängt, also stationär ist. Dazu wird die Integration von Gl. 3.2.5.1 in zwei Bereiche aufgeteilt. Dabei soll im zweiten Bereich  $[t^*, t]$  die Neigung der Gleichgewichtskennlinie konstant sein und den Wert  $\mu_T$  haben, d. h.

$$\frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon} = \mu_T = \text{const} \quad \text{für große Werte von } \varepsilon \text{ bzw. } t^*.$$

Für einen Prozeß, der zum Zeitpunkt  $t = 0$  begonnen hat, gilt damit die Zerlegung

$$s(t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ \int_0^{t^*} \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon}(\varepsilon(\tau)) \right] d\tau + (\mu_0 - \mu_T) \int_{t^*}^t \lambda(z(t) - z(\tau)) d\tau \right].$$

Der erste Term liefert wegen  $z(t) - z(\tau) \geq t - \tau$  und damit

$$\int_0^{t^*} \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{\text{eq}}}{d\varepsilon}(\varepsilon(\tau)) \right] d\tau \leq \mu_0 t^* \lambda(t - t^*) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

keinen Beitrag zur stationären Überspannung. Wenn  $t^*$  hinreichend groß gewählt wurde, dann darf  $s$  bei der Berechnung des zweiten Integrals bereits als stationär angesehen werden und die Zeittransformation vereinfacht sich zu

$$z(t) - z(\tau) = \int_{\tau}^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))} = \frac{t - \tau}{M(s_{\text{stat}})} \quad \text{für } t, \tau > t^*.$$

Damit ergibt sich für den stationären Wert  $s_{\text{stat}}$  der Überspannung die implizite Formel

$$s_{\text{stat}} = \dot{\varepsilon}_0 M(s_{\text{stat}}) (\mu_0 - \mu_T) \int_0^{\infty} \lambda(z) dz \quad 3.2.5.2$$

Um die Existenz einer Lösung von Gl. 3.2.5.2 sicherzustellen, muß die Relaxationsfunktion  $\lambda$  integrierbar sein, was für die in Gl. 3.2.2.18 gewählte Exponentialsummandarstellung auch erfüllt ist.

### Spannungssteuerung:

Nun werden Prozesse mit konstanter Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_0$  untersucht. Das Materialmodell hierfür lautet:

$$\dot{s} = \dot{\tau}_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} \qquad z(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\xi}{M(s(\xi))} \quad 3.2.5.3$$

$$\text{und } s(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(z(t) - z(\tau)) \left[ \mu_0 \left( \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right)^{-1} - 1 \right] \left[ \dot{\tau}_0 - \dot{s} \right] d\tau \quad \text{mit } \dot{\tau}_0 = \text{const} \quad 3.2.5.4$$

An den Unterschieden der beiden Funktionale für die Überspannung (Gl. 3.2.5.1 und Gl. 3.2.5.4) sieht man, daß die Materialantworten von der Art der Steuerung abhängen. Im Gegensatz zu Dehnungssteuerung können bei Spannungssteuerung Lösungen mit stationären Überspannungen nur auftreten, wenn die Neigung der Gleichgewichtskennlinie von Null verschieden ist. Andernfalls gilt  $\dot{s} = \dot{\tau}_0$ , so daß die Überspannung linear mit der Zeit zunimmt. Für den Fall, daß die Neigung der Gleichgewichtskennlinie bei großen Dehnungen durch den konstanten Wert  $\mu_T$  gegeben ist, führt eine analoge Rechnung auf die Formel

$$s_{stat} = \frac{\dot{\tau}_0}{\mu_T} M(s_{stat}) (\mu_0 - \mu_T) \int_0^{\infty} \lambda(z) dz \quad 3.2.5.5$$

Dabei kann der Quotient  $\dot{\tau}_0 / \mu_T$  durch Nullsetzen der Überspannungsrate in Gl. 3.2.5.3 als stationärer Wert der resultierenden Dehnrate interpretiert werden kann. Damit zeigt sich, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit im stationären Fall bei spannungs- und dehnungsgesteuerten Prozessen durch dieselbe Gleichung beschrieben wird. Sie ist unabhängig von der Belastungsgeschichte.

### Relaxation und Kriechen bei monotonen Belastungen:

Nach den in den Abbildungen 2.4.1, 2.4.5 und 2.4.6 dargestellten Messungen treten bei XCrNi18.9 bei Prozessen mit Haltezeiten weitere geschwindigkeitsabhängige Effekte auf und zwar Relaxation und Kriechen. Dabei entspricht dem Kriechen eine Dehnungsänderung bei konstanter Spannung und der Relaxation eine Spannungsänderung bei festgehaltener Dehnung. In den Versuchen wurde beobachtet, daß Kriechvorgänge sehr viel länger dauern als Relaxationsvorgänge (siehe Abbildung 2.4.6).

Zur Interpretation dieser Beobachtung wird das Materialmodell für die im oberen Teil von Abbildung 3.2.5.1 dargestellten Prozesse (R) und (C) ausgewertet. Zunächst sollen die Belastungen erläutert werden.

Um Relaxations- und Kriechvorgänge miteinander vergleichen zu können, ist es sinnvoll, das zeitliche Verhalten der Überspannung zu untersuchen. Dazu muß das Material zu Beginn der Haltezeiten (bei  $t_0$ ) bei beiden Prozessen dieselbe Belastungsgeschichte erfahren haben. Im ersten Teilintervall  $(-\infty, 0]$  sollen die Belastungen Null sein und im zweiten  $(0, t_0]$  sollen beide Proben dieselbe monotone Belastung erfahren, was wie folgt realisiert werden kann:

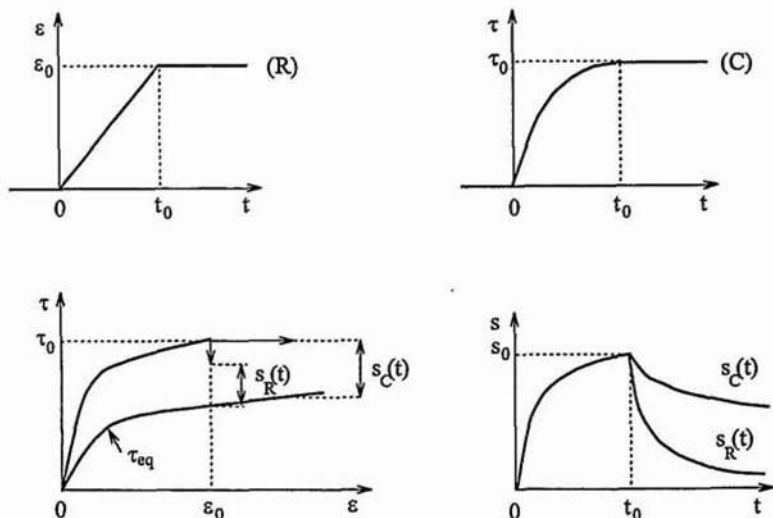


Abbildung 3.2.5.1.: Zur physikalischen Interpretation von Kriech- und Relaxationsvorgängen  
 Bei dem Relaxationsprozeß wird die Dehnung z. B. mit konstanter Geschwindigkeit bis auf den Wert  $\varepsilon_0$  erhöht und der Verlauf der Spannung  $\tau(t)$  aufgezeichnet. Bei Kriechprozeß wird dieser Zeitverlauf für die Spannung vorgegeben. Der resultierende Verlauf der Dehnung  $\varepsilon(t)$  entspricht dann genau dem Verlauf, der bei dem Relaxationsprozeß vorgegeben wurde.  
 Vom Zeitpunkt  $t_0$  an unterscheiden sich beide Belastungen: Für  $t > t_0$  wird im Fall (R) die Dehnung und Fall (C) die Spannung konstant gehalten.  
 Für das Verhalten der Überspannung  $s_R$  während des Relaxationsprozesses (R) ergeben sich für  $t > t_0$  aus dem Materialmodell die Beziehungen

$$\dot{\tau} = \dot{s}_R \quad \text{mit} \quad s_R(t) = \int_{-\infty}^{t_0} \lambda(z_R(t) - z_R(\tau)) \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad 3.2.5.6$$

$$z_R(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon}{M(s_R(\varepsilon))} \quad \text{und} \quad \dot{s}_R(t) = \frac{1}{M(s_R(t))} \int_{-\infty}^{t_0} \frac{d\lambda}{dz}(z_R(t) - z_R(\tau)) \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau,$$

wobei mit  $z_R$  die zugehörige transformierte Zeit bezeichnet wird.

Für den Kriechprozeß (C) und  $t > t_0$  ergibt sich für die Überspannung  $s_C$  folgender Satz von Gleichungen

$$\dot{s}_C = -\frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad s_C(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(z_C(t) - z_C(\tau)) \left( \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad 3.2.5.7$$

$$\text{und} \quad \dot{\epsilon}_C(t) = \frac{d\tau_{eq}(t)}{d\epsilon} \frac{1}{\mu_0 M(s_C(t))} \int_{-\infty}^t \frac{d\lambda}{dz} (z_C(t) - z_C(\tau)) \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon} \right] \dot{\epsilon}(\tau) d\tau,$$

wobei sich  $z_C$  in Analogie zu  $z_R$  berechnet. Durch Vergleich von Gl. 3.2.5.6 mit Gl. 3.2.5.7 stellt man einen wesentlichen Unterschied fest: Er liegt darin, daß das Verhalten der Überspannung während der Relaxation durch den Verlauf der Verzerrungsgeschichte bis zum Beginn der Haltezeit bestimmt ist. In das Verhalten der Überspannung bei Kriechvorgängen geht dagegen noch die weitere Verzerrungsgeschichte ein (zwischen  $t_0$  und  $t$ ).

Wertet man die Integrale für die Geschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}_C$  und  $\dot{\epsilon}_R$  bei  $t = t_0$  aus, dann stellt man einen weiteren Unterschied fest: Es gilt nämlich

$$\dot{\epsilon}_C(t_0) = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\tau_{eq}}{d\epsilon}(t_0) \dot{\epsilon}_R(t_0) =: \frac{\mu_T}{\mu_0} \dot{\epsilon}_R(t_0) =: \delta \dot{\epsilon}_R(t_0),$$

so daß sich die Überspannung bei Kriechvorgängen mit einer kleineren Geschwindigkeit abbaut als bei Relaxationsvorgängen. Dabei kann der Faktor  $\delta < 1$  bei gegebener Dauer eines Relaxationsvorganges als Maß für die Dauer des entsprechenden Kriechvorganges interpretiert werden.

Falls der Tangentenmodul  $\mu_T$  verschwindet und die Spannung  $\tau_0$  hinreichend groß ist, kann sich bei Kriechvorgängen eine stationäre Überspannung mit dem Wert  $s_{stat} = \tau_0 - \tau_{eq\infty}$  einstellen. Dabei ist  $\tau_{eq\infty}$  der asymptotische Wert der Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$ . Durch eine elementare Rechnung ergibt sich die Formel

$$\tau_0 - \tau_{eq\infty} = M(\tau_0 - \tau_{eq\infty}) \mu_0 \dot{\epsilon}_{stat} \int_0^{\infty} \lambda(z) dz,$$

woraus die stationäre Kriechrate  $\dot{\epsilon}_{stat}$  ermittelt werden kann. Man spricht dann von dem sogenannten 'Sekundären Kriechen' [53]. Auch diese Beziehung ist analog zu den beiden, die das stationäre Verhalten bei Prozessen mit konstanten Geschwindigkeiten beschreiben. Die stationäre Kriechrate ist zwar eine Funktion der stationären Überspannung  $\tau_0 - \tau_{eq\infty}$  aber ein Funktional der Spannungsgeschichte.

### Überspannungs - Ratchetting:

Zur Untersuchung des Ratchetting - Effektes wurden die in den Abbildungen 2.5.7 bis 2.5.10 dargestellten Messungen unter zyklischer Spannungssteuerung durchgeführt. An den beiden Intervallgrenzen wurden Haltezeiten der Dauer  $\Delta t_H$  eingelegt und die Mittelspannung  $\tau_m$  war von Null verschieden. Die Belastungsparameter wurden so gewählt, daß die Breite  $\Delta\tau$  des überstrichenen Spannungsintervalles in einer Versuchsreihe wesentlich kleiner (Abbildungen 2.5.7 und 2.5.8) und in der anderen wesentlich größer war (Abbildungen 2.5.9 und 2.5.10) als der elastische Bereich von XCrNi18.9.

Dabei haben die Experimente gezeigt, daß in beiden Fällen ein monotonen Anwachsen der Mitteldehnung mit der Zyklenzahl stattfindet. Bei kleinen Spannungsintervallen beobachtet man nur am oberen Spannungsniveau wesentliche Dehnungsänderungen, bei großen dagegen an beiden Niveaus. Hier ist auch der Wert der Mitteldehnung am Ende des Versuches größer. Zunächst soll der Fall kleiner Spannungsintervalle analysiert werden. Dabei wird das Ratcheting wesentlich durch das Verhalten der Überspannung bestimmt. Die Belastungsgeschichte wird in der folgenden Form idealisiert.

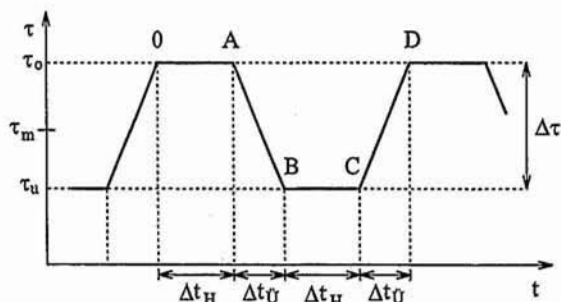


Abbildung 3.2.5.2: Idealisierte Belastungsgeschichte

Die Spannungsniveaus werden mit  $\tau_u$  und  $\tau_o$  bezeichnet und die Übergänge dazwischen als spontan angenommen. Experimentell kann dies dadurch realisiert werden, daß die Dauer  $\Delta t_U$  der Übergänge klein gegenüber einer charakteristischen Kriechzeitkonstanten gewählt wird. Die folgende Abbildung 3.2.5.3 soll die Interpretation der Messungen veranschaulichen. Dabei wird mit  $\tau$  die Materialantwort und mit  $\tau_{eq}$  die Gleichgewichtsspannung bezeichnet.

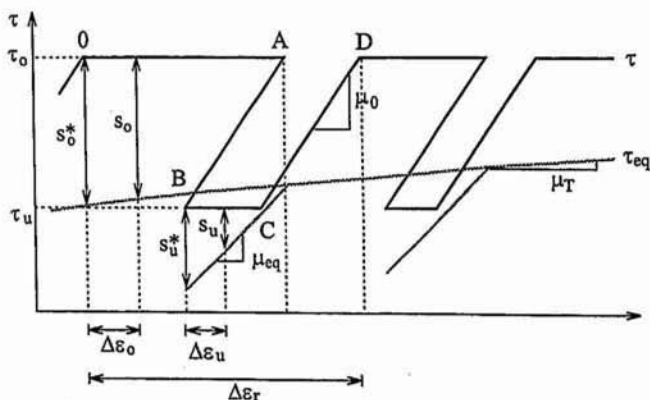


Abbildung 3.2.5.3: Zur physikalischen Interpretation des (Überspannungs-) Ratchetting

Die beiden Größen  $\Delta \varepsilon_0$  und  $\Delta \varepsilon_u$  bezeichnen die Dehnungsänderungen während der Haltezeiten und  $s_0$  bzw.  $s_u$  die zugehörigen Überspannungen.

Nun wird der Vorgang des Ratchetting im einzelnen erläutert: Zwischen den Punkten 0 und A hat die Spannung den konstanten Wert  $\tau_0$  und die Dehnung nimmt wegen der positiven Überspannung  $s_0$  zu. Dies bewirkt eine Änderung der Gleichgewichtsspannung, die durch die Materialgleichungen der Elasto - Plastizität beschrieben wird (Gl. 3.2.3.22 bis Gl. 3.2.3.28).

Bei der spontanen Entlastung von A nach B ändert sich die Dehnung gemäß der spontanen Elastizitätsrelation (Gl. 3.2.2.3) und die Gleichgewichtsspannung nach ihrer Elastizitätsbeziehung (Gl. 3.2.3.8). Wenn die Überspannung  $s_u$  positiv ist, dann nimmt die Dehnung während der Haltezeit von B nach C weiter zu und die Gleichgewichtsspannung ändert sich entsprechend ihrem Elastizitätsgesetz. Der andere Fall wird später diskutiert.

Von C nach D findet eine spontane Belastung statt. Dabei ändert sich die Gleichgewichtsspannung solange elastisch bis die Fließbedingung wieder erfüllt ist und dann elasto - plastisch.

Insgesamt sieht man, daß die Gleichgewichtsspannung mit jedem Zyklus (0, A, B, C, D) einen gewissen Zuwachs erfährt, dessen Größe wesentlich vom Verhalten der Überspannung und vom Tangentenmodul  $\mu_T$  bestimmt wird. Außerdem treten bei dieser Prozeßführung nur monotone plastische Dehnungsänderungen auf, die in ihrer Summe sie zu der beobachteten Dehnungsakkumulation führen.

Zur Abschätzung der Dehnungsänderungen  $\Delta \varepsilon_0$  und  $\Delta \varepsilon_u$  bzw. Dehnraten an den beiden Spannungsniveaus wird eine vereinfachte Form des Materialmodells betrachtet und zwar

$$\tau = \tau_{eq} + s \quad \text{mit} \quad \tau_{eq}(t) = \int_{z \geq 0}^T [\varepsilon(t - s)]$$

$$\text{und} \quad \dot{s} = \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} - \frac{1}{M(s) z_0} s \quad . \quad 3.2.5.8$$

Durch Differentiation der Beziehung  $\tau = \tau_{eq} + s$  nach der Zeit gewinnt man Gleichungen, die die Änderung der Überspannung bei  $\tau_u$  und  $\tau_0$  beschreiben. Es ergibt sich

$$\dot{s} = - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad \text{und damit} \quad \dot{s}_u = - \mu_{eq} \dot{\varepsilon}_u \quad \text{bzw.} \quad \dot{s}_0 = - \mu_T \dot{\varepsilon}_0 \quad , \quad 3.2.5.9$$

wobei  $\mu_{eq}$  der statische Schubmodul und  $\mu_T$  der Tangentenmodul der Gleichgewichtskennlinie ist. Nimmt man  $\mu_T$  im Verlauf einer Haltezeit als konstant an, dann können die beiden Differentialgleichungen unter Gl. 3.2.5.9 integriert werden. Es ergibt sich

$$s_u(t) = s_u^* - \mu_{eq} \Delta \varepsilon_u(t) \quad \text{und} \quad s_0(t) = s_0^* - \mu_T \Delta \varepsilon_0(t) \quad ,$$

wobei mit  $s_u^*$  und  $s_0^*$  die Werte der Überspannung am Beginn der Haltezeiten bezeichnet werden (siehe Abbildung 3.2.5.3). Die Überspannung baut sich also linear mit der Dehnung ab. Damit und mit Auflösung von Gl. 3.2.5.8 nach der Dehnraten ergeben sich zur Bestimmung der Dehnungsänderungen  $\Delta \varepsilon_0(t)$  und  $\Delta \varepsilon_u(t)$  die Differentialgleichungen

$$\Delta \dot{\varepsilon}_o = \frac{s_o(t)}{\mu_0 M(s_o(t)) z_0} = \frac{s_o^* - \mu_T \Delta \varepsilon_o}{\mu_0 M(s_o^* - \mu_T \Delta \varepsilon_o) z_0} \quad \text{und} \quad \Delta \dot{\varepsilon}_u = \frac{s_u^* - \mu_{eq} \Delta \varepsilon_u}{\mu_0 M(s_u^* - \mu_{eq} \Delta \varepsilon_u) z_0} \quad 3.2.5.10$$

Geht man davon aus, daß die Elastizitätskonstanten  $\mu_0$  und  $\mu_{eq}$  etwa gleich sind und daß der Tangentenmodul  $\mu_T$  relativ klein ist, dann sind die Anfangswerte  $s_u^*$  und  $s_o^*$  von etwa gleicher Größenordnung.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Differentialgleichungen für  $\Delta \varepsilon_u$  und  $\Delta \varepsilon_o$  besteht darin, daß sich eine zu Beginn der Haltezeit gegebene Überspannung an der unteren Spannungsgrenze erheblich schneller abbaut als an der oberen (siehe auch Gl. 3.2.5.9,  $\mu_0 \gg \mu_T$ ). Damit wird die experimentelle Beobachtung verständlich, daß die Kriechvorgänge bei  $\tau_o$  wesentlich stärker ausgeprägt sind als bei  $\tau_u$ .

Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß das Kriechen bei  $\tau_u$  begrenzt ist, bei  $\tau_o$  dagegen nicht immer, und zwar dann nicht, wenn durch den Kriechvorgang kein Gleichgewichtspunkt erreichbar ist ( $\mu_T = 0$  und  $\tau_o$  hinreichend groß).

Schließlich erhält man durch Nullsetzen der Zeitableitungen in Gl. 3.2.5.10 und unter der Annahme  $s_o^* \approx s_u^*$  noch eine Abschätzung für das Verhältnis der maximalen Dehnungszuwächse

$$\frac{\Delta \varepsilon_{o\max}}{\Delta \varepsilon_{u\max}} = \frac{\mu_{eq}}{\mu_T}$$

Diese Form des Ratchetting kann also als "Kriechen" interpretiert werden, wobei die Kriechvorgänge am oberen Spannungsniveau für die Dauer der Haltezeit am unteren Niveau unterbrochen werden.

Nun wird der Fall diskutiert, daß nach der spontanen Entlastung von A nach B die Überspannung an der unteren Spannungsgrenze negativ ist, d. h.  $s_u < 0$ . An Abbildung 3.2.5.3 erkennt man, daß dies für  $\mu_T > 0$  immer eintreten kann. Die Gleichgewichtsspannung nimmt nämlich mit jedem Belastungszyklus um ein Inkrement der Größenordnung  $\Delta \tau_{eq} = \mu_T \Delta \varepsilon$  zu.

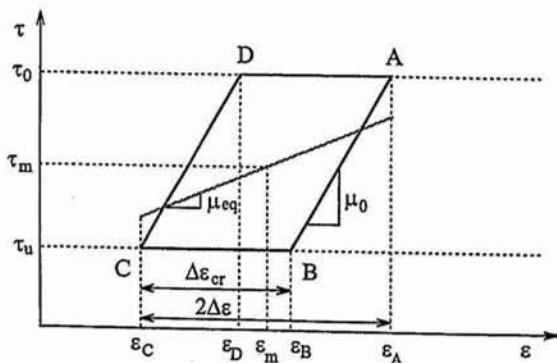


Abbildung 3.2.5.4: Stationärer Zyklus bei geschwindigkeitsabhängigem Ratchetting

Dadurch werden die Überspannungen mit fortlaufender Zyklenzahl immer kleiner und  $s_u$  kann sogar negativ werden. Da die Dehnrate das Vorzeichen der Überspannung trägt, findet dann bei  $\tau_u$  ein sogenanntes 'Rückwärtskriechen' statt. Dabei kann sich nach genügend vielen Zyklen ein stationärer Zyklus einstellen (Abbildung 3.2.5.4). Er ist Gegenstand der folgenden Untersuchung. Nach Abbildung 3.2.5.4 kann dieser Zyklus durch seine Amplitude  $\Delta\varepsilon$  und den Wert der Mitteldehnung  $\varepsilon_m$  charakterisiert werden. Für die Amplitude leitet man aus Abbildung 3.2.5.4 die Abschätzungsformel

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \Delta\varepsilon_{cr} + \frac{\tau_o - \tau_u}{\mu_o} \right] \leq \frac{\Delta\tau}{2} \left( \frac{1}{\mu_{eq}} + \frac{1}{\mu_o} \right)$$

her. Daraus ergibt sich mit einer Spannungsdifferenz von  $\Delta\tau = 200$  MPa für den Grenzzzyklus eine Amplitude, die weniger als 0,15% beträgt.

Ferner ergeben sich aus Gl. 3.2.5.9 und Gl. 3.2.5.10 mit dem Verfahren der Trennung der Variablen und mit Hilfe von Abbildung 3.2.5.4 die Beziehungen

$$-\frac{\Delta t_H}{\mu_o z_o} = \int_0^{\Delta\varepsilon_{cr}} \frac{M(\tau_u - \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta))}{\tau_u - \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta)} d\delta \quad \text{und} \quad \frac{\Delta t_H}{\mu_o z_o} = \int_0^{\Delta\varepsilon_{cr}} \frac{M(\tau_o - \tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta))}{\tau_o - \tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta)} d\delta \quad 3.2.5.11$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_B = \varepsilon_m + \frac{1}{2} \left[ \Delta\varepsilon_{cr} - \frac{\tau_o - \tau_u}{\mu_o} \right] \quad \text{und} \quad \varepsilon_D = \varepsilon_m - \frac{1}{2} \left[ \Delta\varepsilon_{cr} - \frac{\tau_o - \tau_u}{\mu_o} \right].$$

Damit können die exakten Werte von  $\Delta\varepsilon_{cr}$  und  $\varepsilon_m$  ermittelt werden. Diese sind bei gegebenen Materialdaten und Haltezeiten  $\Delta t_H$  unter gewissen Näherungen analytisch berechenbar und können zur Konstruktion des stationären Zyklus verwendet werden.

Hier wird eine anschaulichere Vorgehensweise gewählt und zwar soll die geometrische Konstruktion des Grenzzzyklus erläutert werden. Da die Summe der beiden Integrale in Gl. 3.2.5.11 für Prozesse mit beliebigen Haltezeiten  $\Delta t_H$  und damit für alle möglichen Werte von  $\Delta\varepsilon_{cr}$  verschwinden muß, muß die Summe der Integranden Null sein, d. h.

$$\frac{M(\tau_u - \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta))}{\tau_u - \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta)} + \frac{M(\tau_o - \tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta))}{\tau_o - \tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta)} = 0.$$

Mit der fallenden Monotonie der Funktion M ergibt sich daraus die Symmetriebeziehung

$$\tau_u - \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta) = -(\tau_o - \tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta)) \quad \text{bzw.} \quad \tau_m = \frac{1}{2} (\tau_{eq}(\varepsilon_D + \delta) + \tau_{eq}(\varepsilon_B - \delta)). \quad 3.2.5.12$$

Sie besagt, daß im Grenzzzyklus die mittlere Gleichgewichtsspannung identisch mit der angelegten Mittelspannung  $\tau_m$  ist.

Dieses Ergebnis kann zur Konstruktion des Grenzzzyklus verwendet werden. Die stationäre Mitteldehnung stellt sich auf den Wert  $\varepsilon_m$  ein, wo die Symmetrirelation von Gl. 3.2.5.12 durch den funktionalen Verlauf der Gleichgewichtsspannung erfüllt werden kann.

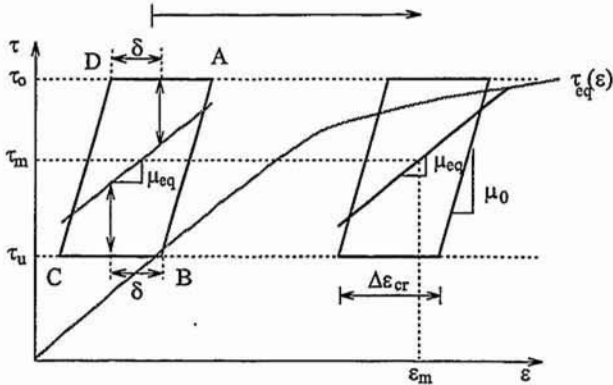


Abbildung 3.2.5.5: Grafische Konstruktion des stationären Zyklus

Nach Abbildung 3.2.5.5 wird zunächst der Grenzzyklus (links im Bild) konstruiert und dann seine Lage solange verändert, bis er die dargestellte Position erreicht hat.

#### Zyklische Relaxation der Mittelspannung:

Nun sollen Phänomene untersucht werden, bei denen das funktionale Verhalten der Gleichgewichtsspannung eine wesentliche Rolle spielt. Sie werden bei zyklischen Prozessen beobachtet, wo das überstrichene Spannungsintervall groß gegenüber dem Durchmesser des elastischen Bereiches ist. Unter dieser Voraussetzung treten nichtmonotone plastische Deformationen auf.

Zunächst wird das Phänomen der zyklischen Relaxation der Mittelspannung untersucht, wozu die in den Abbildungen 2.5.1 und 2.5.2 dargestellten Experimente betrachtet werden. Sie wurden unter zyklischer Dehnungssteuerung bei verschiedenen Mitteldehnungen durchgeführt. Dabei wurde beobachtet, daß die stationären Gleichgewichtshysteresen symmetrisch zur Dehnungsachse verlaufen und deckungsgleich sind. Sie sind also unabhängig von der Mitteldehnung. In den instationären Zyklen war der Mittelwert der Gleichgewichtsspannung allerdings von Null verschieden und ist mit fortlaufender Zyklenzahl gegen Null relaxiert. Das erkennt man daran, daß der von den Hystereseschleifen überstrichene Spannungsbereich an der Dehnungsuntergrenze größer ist als an ihrer Obergrenze, was auf eine Überlagerung von zyklischer Verfestigung und zyklischer Relaxation mit gleichen bzw. unterschiedlichen Vorzeichen zurückgeführt werden kann (siehe Abbildung 2.5.1).

Die zyklische Relaxation kann der Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$  zugeordnet werden, da die Überspannung im stationären Fall nicht von der Verzerrungsgeschichte abhängt und an den beiden Dehnungsgrenzen bereits stationär geworden ist.

Da sich im Rahmen des Materialmodells die Gleichgewichtsspannung und die kinematische Verfestigung  $x$  nur um die konstante Fließspannung unterscheiden und die elastischen Deh-

nungen im allgemeinen klein sind, ist die Untersuchung der Verfestigung zur Interpretation ausreichend. Der Einfachheit halber wird zunächst das Verfestigungsmodell für den Spezialfall  $\alpha_p = 0$  (Gl. 3.2.3.25 und Gl. 3.2.3.26) ausgewertet. Es besitzt die funktionale Darstellung:

$$x = \mu_\infty \varepsilon_p + \int_0^s (\mu(s - \sigma) - \mu_x) \frac{dc_p}{d\sigma} d\sigma, \quad \mu(s) = c_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b_i s\right], \quad \dot{s} = |\dot{\varepsilon}_p| \quad 3.2.5.13$$

Für die Materialparameter gelte  $c_i, b_i > 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $c_n \geq 0$  und damit  $\mu(\infty) = \mu_\infty = c_n$ . Nun wird die Antwort dieses Funktionals auf die in Abbildung 3.2.5.6 dargestellte Belastung untersucht. Die plastische Dehnung  $\varepsilon_p$  wird dabei periodisch um eine Mitteldehnung  $\varepsilon_{pm}$  variiert und die Dehnungsamplitude hat den Wert  $\Delta\varepsilon_p$ .

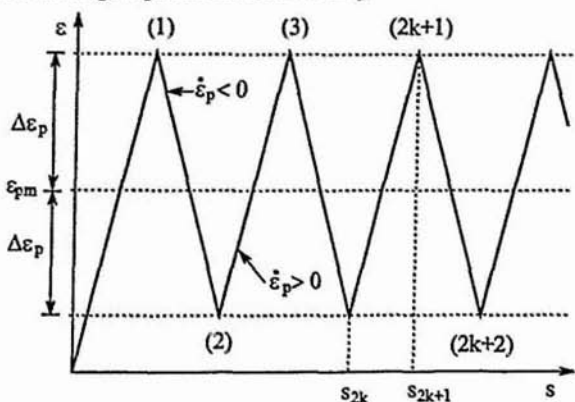


Abbildung 3.2.5.6.: Zyklische Belastung mit Mitteldehnung

Mit den Bezeichnungen  $s_{2k+1} = s_{2k} + 2\Delta\varepsilon_p$  und  $x_k = x(s_k)$  erhält man aus Gl. 3.2.5.13 die beiden Beziehungen

$$x_{2k} = \mu_\infty (c_{pm} - \Delta\varepsilon_p) + \int_0^{\varepsilon_{pm} - \Delta\varepsilon_p} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_x) d\sigma - \int_{\varepsilon_{pm} + \Delta\varepsilon_p}^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_x) \frac{dc_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma \quad 3.2.5.14$$

und

$$x_{2k+1} = \mu_\infty (c_{pm} + \Delta\varepsilon_p) + \int_0^{\varepsilon_{pm} + \Delta\varepsilon_p} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_x) d\sigma + \int_{\varepsilon_{pm} + \Delta\varepsilon_p}^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_x) \frac{dc_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma, \quad 3.2.5.15$$

wobei in das rechte Integral von Gl. 3.2.5.14 der Zusammenhang (Periodizität)

$$\frac{dc_p}{d\sigma}(\sigma - 2\Delta\varepsilon_p) = -\frac{dc_p}{d\sigma}(\sigma)$$

eingearbeitet wurde. Sie geben die Werte der Verfestigung  $x$  an den beiden Umkehrpunkten an. Durch Addition und Subtraktion von Gl. 3.2.5.14 und Gl. 3.2.5.15 können die Amplitude  $\Delta x_k = \frac{1}{2} (x_{2k+1} - x_{2k})$  und der Mittelwert  $x_{mk} = \frac{1}{2} (x_{2k+1} + x_{2k})$  der Verfestigung errechnet werden. Es ergeben sich die Ausdrücke

$$x_{mk} = \mu_{\infty} \varepsilon_{pm} + \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\varepsilon_{pm} + \Delta \varepsilon_p} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) d\sigma + \int_0^{\varepsilon_{pm} - \Delta \varepsilon_p} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) d\sigma \right] \quad 3.2.5.16$$

und

$$\begin{aligned} \Delta x_k = \mu_{\infty} \Delta \varepsilon_p + \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\varepsilon_{pm} + \Delta \varepsilon_p} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) d\sigma - \int_0^{\varepsilon_{pm} - \Delta \varepsilon_p} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) d\sigma \right] + \\ + \int_{\varepsilon_{pm} + \Delta \varepsilon_p}^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma \quad 3.2.5.17 \end{aligned}$$

An Gl. 3.2.5.16 erkennt man, daß der Mittelwert  $x_{mk}$  das Vorzeichen der Mitteldehnung  $\varepsilon_{pm}$  trägt und daß in seine Entwicklung mit der akkumulierten plastischen Dehnung wesentlich der monotone Verlauf der Deformationsgeschichte eingeht. Damit liegt eine ähnliche Abhängigkeit vor wie bei der geschwindigkeitsabhängigen Relaxation bei konstanter Dehnung (Gl. 3.2.5.6).

Wegen des Abklingverhaltens der Kernfunktion  $\mu$  für große Argumente und wegen des beschränkten Integrationsbereiches klingen beide Integrale in Gl. 3.2.5.16 für große Zyklenzahlen ( $k \rightarrow \infty$ ) ab. Damit ist der stationäre Mittelwert der Verfestigung durch den Ausdruck

$$x_m = \mu_{\infty} \varepsilon_{pm} = c_n \varepsilon_{pm} \quad 3.2.5.18$$

gegeben. Durch Einsetzen der Exponentialdarstellung für  $\mu$  in Gl. 3.2.5.16 und Ausführung der Integration kann gezeigt werden, daß die Geschwindigkeit der zyklischen Relaxation wesentlich durch die Parameter  $b_1$  und die Dehnungsamplitude  $\Delta \varepsilon_p$  bestimmt wird [28].

Nun wird die Amplitude  $\Delta x$  der stationären Hysterese berechnet. Dafür ergibt sich mit analogen Überlegungen (Abklingeigenschaft der eingeklammerten Integrale in Gl. 3.2.5.17) für große Zyklenzahlen der Ausdruck

$$\Delta x = \mu_{\infty} \Delta \varepsilon_p + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon_{pm} + \Delta \varepsilon_p}^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma,$$

der mit der Exponentialsummandarstellung für  $\mu$  weiter ausgewertet werden kann. Die Periodizität der stationären Amplitude, d. h.  $\Delta x(s_{2k+1}) = \Delta x(s_{2k+1} + 4\Delta \varepsilon_p) = \Delta x(s_{2(k+1)+1})$  ergibt, daß  $\Delta x$  im Fall großer Zyklenzahlen unabhängig von  $k$  sein muß. Durch eine zu Gl. 3.2.4.36 bis Gl. 3.2.4.38 analoge Rechnung folgt schließlich die Beziehung

$$\Delta x = c_n \Delta \varepsilon_p + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 + \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b_i 2 \Delta \varepsilon_p\right]} \int_{s_{2k+1} - 2 \Delta \varepsilon_p}^{s_{2k+1}} \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b_i (s_{2k+1} - \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_p(\sigma)}{d\sigma} d\sigma,$$

die durch Auswertung der Integrale in die Formel

$$\Delta x = c_n \Delta \varepsilon_p + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_i}{b_i} \tanh\left[\frac{2}{\sqrt{3}} b_i \Delta \varepsilon_p\right] \quad 3.2.5.19$$

überführt werden kann. Nun werden die Ergebnisse physikalisch interpretiert:

An Gl. 3.2.5.18 sieht man, daß der Mittelwert der stationären Hysterese über den Parameter  $c_n$  für  $b_n = 0$  von der Mitteldehnung  $\varepsilon_{pm}$  abhängt. Die Amplitude in Gl. 3.2.5.19 ist dagegen unabhängig von  $\varepsilon_{pm}$ .

Um mit solchen Modellen das Verhalten der Verfestigung von XCrNi18.9 unter zyklischer Dehnungssteuerung darstellen zu können, muß  $c_n$  also verschwinden. Demnach müssen die Parameter  $c_i$  und  $b_i$  paarweise von null verschieden sein.

An dieser Stelle ist noch zu bemerken, daß die Bogenlängentransformation ( $\alpha_p \neq 0$ )

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{1 + \alpha_p p} \quad \text{mit} \quad \frac{dp}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{s_{0p}} \left[ \sqrt{2} |x| - p \right],$$

die zur detaillierten Beschreibung der zyklischen Verfestigung eingeführt wurde, unter der Annahme  $s_{0p} \gg \Delta \varepsilon_p$  keinen Einfluß auf die Abhängigkeit der stationären Hysterese von der Mitteldehnung ausübt. Lediglich die Parameter  $b_k$  müssen durch

$$\frac{b_k}{1 + \alpha_p p_\infty},$$

ersetzt werden, wobei  $p_\infty$  den stationären Wert von  $p$  bezeichnet (siehe Gl. 3.2.4.34 bis Gl. 3.2.4.44). Damit wird nur die Geschwindigkeit der zyklischen Relaxation modifiziert, nicht aber ihr Grenzwert. Die Amplitude der stationären Hysterese wird allerdings von  $p$  beeinflusst.

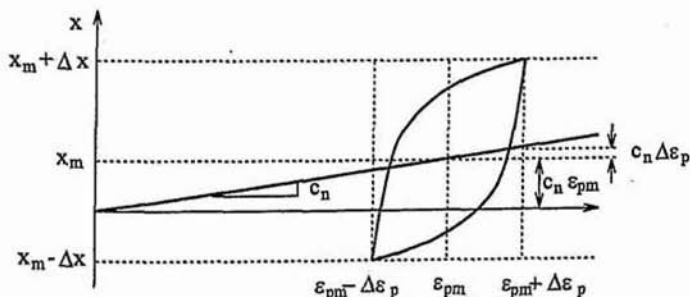


Abbildung 3.2.5.7.: Stationäre Hystereseschleife

Abbildung 3.2.5.7 veranschaulicht die Ergebnisse der Rechnung. Man erkennt die Abhängigkeit des Mittelwertes der Verfestigung von der Mitteldehnung. Sie verschwindet für  $c_n = 0$ .



Dazu wird dieselbe Vorgehensweise gewählt, wie bei der Untersuchung der zyklischen Relation, d. h. daß zunächst das Verfestigungsmodell für  $\alpha_p = 0$  ausgewertet wird. Ferner werden die Dehnungsänderungen zwischen den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  mit  $2\Delta\varepsilon_{p_{i+1}}$  bezeichnet und die Abkürzungen

$$\begin{aligned} x(s_{2k}) &= x_m - \Delta x, & x(s_{2k+1}) &= x_m + \Delta x, \\ s_{2k} &= s_{2k-1} + |2\Delta\varepsilon_{p_{2k}}| & \text{und} & & s_{2k+1} &= s_{2k} + |2\Delta\varepsilon_{p_{2k+1}}| \end{aligned}$$

eingeführt. Damit liefert die Auswertung des Verfestigungsmodells Gl. 3.2.5.13 die beiden Beziehungen

$$x(s_{2k+1}) = x_m + \Delta x = \mu_\infty \varepsilon_{p_{2k+1}} + \int_0^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p(\sigma)}{d\sigma} d\sigma$$

$$\text{und} \quad x(s_{2k}) = x_m - \Delta x = \mu_\infty \varepsilon_{p_{2k}} + \int_0^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p(\sigma)}{d\sigma} d\sigma.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen ergeben sich für den Mittelwert der Dehnung  $\varepsilon_{pm2k} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{p_{2k+1}} + \varepsilon_{p_{2k}})$  und die Dehnungsamplitude  $\Delta\varepsilon_{p_{2k}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{p_{2k+1}} - \varepsilon_{p_{2k}})$  die Ausdrücke

$$\Delta\varepsilon_{p_{2k}} = \frac{1}{\mu_\infty} \left[ \Delta x - \frac{1}{2} \int_0^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma} d\sigma \right] \quad 3.2.5.20$$

und

$$\varepsilon_{pm2k} = \frac{1}{\mu_\infty} \left[ x_m - \frac{1}{2} \int_0^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma} d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma} d\sigma \right]. \quad 3.2.5.21$$

Die Abschätzung der Integrale in Gl. 3.2.5.20 und Gl. 3.2.5.21 führt auf die beiden Ausdrücke

$$|\Delta\varepsilon_{p_{i+1}}| \leq \frac{1}{\mu_\infty} \left[ |\Delta x| + \int_0^\infty (\mu(\sigma) - \mu_\infty) d\sigma \right] \quad \text{und} \quad |\varepsilon_{pmi}| \leq \frac{1}{\mu_\infty} \left[ |x_m| + \int_0^\infty (\mu(\sigma) - \mu_\infty) d\sigma \right].$$

für die Beträge von Mitteldehnung und Amplitude. Daran erkennt man, daß die Dehnungsamplitude und die Mitteldehnung dann beschränkt bleiben, wenn  $\mu_\infty > 0$  ist, also wenn der Materialparameter  $c_n$  nicht verschwindet und dabei  $b_n > 0$  gilt.

Für genau diesen Fall können unter gewissen Konvergenzannahmen die stationären Werte von  $\varepsilon_{pm2k}$  und  $\Delta\varepsilon_{p_{2k}}$  berechnet werden. Dazu wird zunächst in Gl. 3.2.5.20 eine Transformation der Integrationsvariable gemäß  $\sigma - |2\Delta\varepsilon_{p_{2k+1}}| = u$  durchgeführt und eine additive Aufspaltung der Integrale vorgenommen. Für die Dehnungsamplitude ergibt sich damit

$$\Delta \varepsilon_{p2k} = \frac{1}{\mu_{\infty}} \left[ \Delta x - \frac{1}{2} \int_{s_{n_0}}^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) - \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma \right] +$$

$$- \frac{1}{2\mu_{\infty}} \left[ \int_0^{|2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma + \int_0^{s_{n_0}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) - \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma \right],$$

wobei  $n_0$  eine feste natürliche Zahl ist. Für die Mitteldehnung erhält man aus Gl. 3.2.5.21 durch eine analoge Rechnung den Ausdruck

$$\varepsilon_{pm2k} = \frac{1}{\mu_{\infty}} \left[ x_m - \frac{1}{2} \int_{s_{n_0}}^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) + \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma \right] -$$

$$- \frac{1}{2\mu_{\infty}} \left[ \int_0^{|2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_{\infty}) \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) d\sigma + \int_0^{s_{n_0}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) + \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma \right].$$

Wegen der Abklingeneigenschaft der Kernfunktion  $\mu$  und der endlichen Integrationsbereiche verschwinden jeweils die beiden unteren Integrale für große Zyklenzahlen ( $k \rightarrow \infty$ ).

Zur weiteren Auswertung wird angenommen, daß die Folgen der Mitteldehnung  $\varepsilon_{pmi}$  und der Amplitude  $|2\Delta \varepsilon_{pi}|$  konvergent sind, also daß Grenzwerte existieren. Dann existiert zu jeder beliebigen Fehlerschranke  $\varepsilon > 0$  ein Index  $n_0$ , so daß für alle weiteren Indizes mit  $i, j > n_0$  die Abschätzung  $||2\Delta \varepsilon_{pi}| - |2\Delta \varepsilon_{pj}|| \leq \varepsilon$  gilt (siehe z. B. [64]). Entsprechendes gilt für die Folge der Mitteldehnungen.

Zur Ermittlung des Grenzwertes der Mitteldehnung wird von der Umformung

$$2(x_m - \mu_{\infty} \varepsilon_{pm2k}) = \int_{s_{n_0}}^{s_{2k}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) + \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma$$

$$= \sum_{i=n_0}^{2k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\mu(s_{2k} - \sigma) - \mu_{\infty}) \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) + \frac{d\varepsilon_p}{d\sigma}(\sigma) \right) d\sigma =: \sum_{i=n_0}^{2k-1} I_i \quad 3.2.5.22$$

ausgegangen, wobei in Gl. 3.2.5.22 eine Aufspaltung der Integration vorgenommen wurde. Nun wird der eingeklammerte Teil des Integranden von Gl. 3.2.5.22 analysiert. Dazu veranschaulicht Abbildung 3.2.5.9, daß im größten Teil des Integrationsbereiches ( $s_i \leq \sigma \leq s_{i+1}$ ) die Beziehung  $\varepsilon_p'(\sigma + |2\Delta \varepsilon_{p2k+1}|) = -\varepsilon_p'(\sigma)$  gilt, so daß der Integrand "fast überall" verschwindet. Er ist wegen der Konvergenz der Folge  $|2\Delta \varepsilon_{pi}|$  für  $i+1, 2k+1 > n_0$  höchstens auf einem Intervall der Länge  $2\varepsilon$  von Null verschieden. Sein Betrag hat dort den Wert 2.

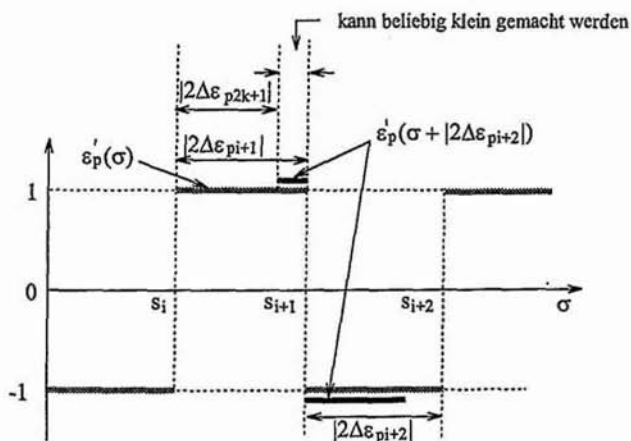


Abbildung 3.2.5.9.: Zur Berechnung der stationären Mitteldehnung

Damit folgt die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=n_0}^{2k-1} I_i \right| \leq \sum_{i=n_0}^{2k-1} |I_i| \leq 4\epsilon \sum_{i=n_0}^{2k-1} (\mu(s_{2k} - s_{i+1}) - \mu_\infty) \leq 4 \epsilon M ,$$

wobei mit Hilfe des Integralkriteriums für Reihen [64] gezeigt werden kann, daß die Summe für  $k \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Der asymptotische Grenzwert der Mitteldehnung kann also durch die einfache Formel

$$\epsilon_{pm} = \frac{1}{\mu_\infty} x_m = \frac{1}{c_n} x_m \quad 3.2.5.23$$

berechnet werden. Sie ist analog zu Gl. 3.2.5.18, also der Beziehung, die den asymptotischen Mittelwert der Verfestigung bei zyklischer Steuerung der plastischen Dehnung angibt.

Mit einer ähnlichen Argumentation wie der, die von Gl. 3.2.5.20 auf Gl. 3.2.5.23 geführt hat, wird man zur Berechnung der stationären Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon_p$  auf den Ausdruck

$$\Delta\epsilon_p = \frac{1}{\mu_\infty} \left[ \Delta x + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{s_{n_0} + 2\Delta\epsilon_{p2k+1}}^{s_{2k+1}} (\mu(s_{2k+1} - \sigma) - \mu_\infty) \frac{d\epsilon_p}{d\sigma} d\sigma \right] \quad 3.2.5.24$$

geführt, womit  $\Delta\epsilon_p$  durch Einsetzen der Darstellung für  $\mu$  ermittelt werden kann. Nutzt man die Periodizität des Grenzzyklus aus, d. h.  $\Delta\epsilon_p(s_{2k+1}) = \Delta\epsilon_p(s_{2k+1} + 4\Delta\epsilon_p) = \Delta\epsilon_p(s_{2(k+1)+1})$ , dann muß die Amplitude  $\Delta\epsilon_p$  unabhängig von  $k$  sein und es folgt die Beziehung

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{1}{c_n} \left[ \Delta x + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b_i 4 \Delta \varepsilon_p\right) - 1} \int_{s_{2k+1}}^{s_{2k+1} + 4 \Delta \varepsilon_p} \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b_i (s_{2k+1} - \sigma)\right] \frac{d\varepsilon_p(\sigma)}{d\sigma} d\sigma \right],$$

woraus sich nach Ausführung der Integration die implizite Gleichung

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{1}{c_n} \left[ \Delta x + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_i}{b_i} \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b_i \Delta \varepsilon_p\right) \right]. \quad 3.2.5.25$$

zur Ermittlung der stationären Dehnungsamplitude ergibt. Sie ist analog zu Gl. 3.2.5.19, die für zyklische Dehnungssteuerung zur Berechnung der Verfestigungsamplitude ermittelt wurde.

Das stationäre Verhalten des Verfestigungsmodells unter zyklischer Vorgabe von  $x$  wird damit durch dieselben Gleichungen beschrieben, die das stationäre Verhalten unter zyklischer Vorgabe von  $\varepsilon_p$  beschreiben. Zur Veranschaulichung der Ergebnisse siehe Abbildung 3.2.5.7. Da die Bogenlängentransformation bei stationären zyklischen Prozessen nur die Parameter  $b_i$  modifiziert (siehe Gl. 3.2.4.34 bis Gl. 3.2.4.44), hat sie keinen Einfluß auf den Wert der stationären Mitteldehnung (Gl. 3.2.5.23). Lediglich die Dehnungsamplitude der stationären Hysterese wird davon beeinflusst.

## 4. Numerische Ergebnisse

### 4.1 Identifikation der Materialparameter

Nachdem mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse ein mathematisches Modell zur Darstellung der Materialeigenschaften von XCrNi18.9 konstruiert wurde, müssen nun die darin vorkommenden Materialparameter und -funktionen identifiziert werden. Das Ziel dieser Identifikation besteht darin, eine quantitative Beschreibung des Materialverhaltens zu ermöglichen. Dabei kann natürlich nur dann mit Erfolg gerechnet werden, wenn das Modell unabhängig von speziellen Zahlenwerten der Parameter in der Lage ist, die beobachteten Befunde zumindest qualitativ zu beschreiben. Daß diese Eigenschaft bei vielen Phänomenen vorhanden ist, wie z. B. der Geschwindigkeitsabhängigkeit und der zyklischen Verfestigung, wurde in Abschnitt 3.2 bei der Konstruktion der Materialgleichungen gezeigt. In einem weiteren Schritt wird untersucht, ob das Modell mit dem anhand dieser Phänomene identifizierten Parametersatz auch dazu in der Lage ist, die Materialantworten auf Prozesse vorherzusagen, die nicht der Identifikation gedient haben.

Zunächst soll das bei der Parameteridentifikation gewählte Vorgehen erläutert werden, wobei sich bereits hier einige Fragen aufwerfen: Wie kann die Güte eines Parametersatzes bzw. die Qualität der Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung gemessen werden? Wird besonderer Wert darauf gelegt, ein ausgewähltes Experiment sehr genau wiedergeben zu können, oder ist es sinnvoller, möglichst viele Phänomene im Rahmen einer gewissen Streubreite darstellen zu können? Welche Experimente müssen zu einer weitgehend eindeutigen Parameterbestimmung zugrundegelegt werden?

Ein weiteres Problem bei der Identifikation ist, daß die Materialkenngrößen als Parameter in Differentialgleichungen stehen, deren Lösungen nichtlinear von den Parametern abhängen.

#### 4.1.1 Die Evolutionsstrategie

Das hier zur Parameterbestimmung verwendete Optimierungsverfahren ist stochastischer Natur und basiert auf der Strategie der in der Natur vorkommenden Evolution [66, 67]. Es wurde von Schreiber [65] in Anlehnung an Rechenberg [66] in einen Programmcode umgesetzt und zur Verfügung gestellt.

Die Grundidee dieses Verfahrens besteht in einem wiederholten Variieren und Testen von Parametersätzen, was in der Evolutionstheorie als Mutation und Selektion bezeichnet wird. Dabei ist die Art und Weise dieser Variation an die natürlichen Evolutionsmechanismen angelehnt (siehe z. B. [66, 67]). Durch Berechnung der Modellantwort und Vergleich mit den zugrundeliegenden Meßdaten kann jedem Parametersatz eine gewisse Qualität zugeordnet werden, die eine Selektion zuläßt. Der Satz von Parametern der nach einer gegebenen Anzahl von Variationsschritten (Mutationen) die beste Qualität aufweist, wird dann als endgültiger Parametersatz bezeichnet.

Zum Zweck der Optimierung ist es sinnvoll, alle zu ermittelnden Parameter  $p_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) zu entdimensionieren und auf Werte zwischen 0,1 und 1 zu transformieren. Damit sind alle Parameter von etwa derselben Größenordnung und in einem gewissen Sinne "gleichwertig". Schließlich werden sie noch zu einem Vektor  $\mathbf{p}$  zusammengefaßt.

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Nun wird eine Gruppe gebildet, die aus einer festen Anzahl  $m$  solcher Parametervektoren  $\mathbf{p}_i$  besteht. Durch den Index  $i$  wird zum Ausdruck gebracht, daß sich die Werte ihrer Komponenten unterscheiden können, d. h.  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ .

Um Selektieren zu können, muß die Antwort des Modells für jeden dieser Parametervektor berechnet und mit den der Optimierung zugrundeliegenden Meßdaten verglichen werden. Dabei wurde als Qualitätsmaß die gewichtete Summe der Abstandskquadrate zwischen den Meßdaten  $y_i^{\text{Mess}}$  und den Modelldaten  $y_i^{\text{Modell}}(\mathbf{p}_i)$  benutzt:

$$Q(\mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^m w_i \left[ y_i^{\text{Mess}} - y_i^{\text{Modell}}(\mathbf{p}_i) \right]^2 \quad 4.1.1.1$$

Der Index  $i$  läuft dabei über alle Meßpunkte und kann beispielsweise eine diskrete Zeitvariable sein. Die positiven Zahlen  $w_i$  sind Gewichtungsfaktoren, die eingeführt wurden, um eventuell gewisse Meßpunkte gesondert gewichten zu können. Durch Gl. 4.1.1.1 kann also jedem Parametersatz  $\mathbf{p}_i$  ein bestimmter Qualitätswert  $Q(\mathbf{p}_i)$  zugewiesen werden. Damit ist eine Bewertung möglich und die getesteten Parametervektoren  $\mathbf{p}_i$  können in Abhängigkeit von ihrer Qualität geordnet werden.

Als nächstes werden die Evolutionsmechanismen erläutert. Dazu wird die Gruppe der  $m$  Parametervektoren betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}) & \Rightarrow & Q(\mathbf{p}_1) \\ \mathbf{p}_2 &= (p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n}) & \Rightarrow & Q(\mathbf{p}_2) \\ & \dots & & \dots \\ \mathbf{p}_m &= (p_{m1}, p_{m2}, \dots, p_{mn}) & \Rightarrow & Q(\mathbf{p}_m) \end{aligned}$$

Hiervon werden nun per Zufall zwei "Eltern"  $\mathbf{p}_k$  und  $\mathbf{p}_l$  ausgewählt, kopiert und nach dem in Abbildung 4.1.1.1 dargestellten Beispiel variiert.

Durch den einfachsten Mechanismus der Evolution, die Genmutation, werden zufällig herausgegriffene Komponenten von  $\mathbf{p}_k$  und  $\mathbf{p}_l$  zufällig variiert (im Beispiel  $p_{2k}$ ,  $p_{6k}$  und  $p_{3l}$ ). Dabei finden die Variationen im Sinne einer Normalverteilung statt, wodurch kleine Änderungen wesentlich häufiger vorkommen als große. Interpretiert man die Vektoren als Punkte in einem  $n$ -dimensionalen Parameterraum, dann kann durch Variation ihrer Komponenten prinzipiell der gesamte Raum mit Punkten überdeckt werden, so daß durch die Genmutation jeder mögliche Parametersatz erzeugt werden kann.

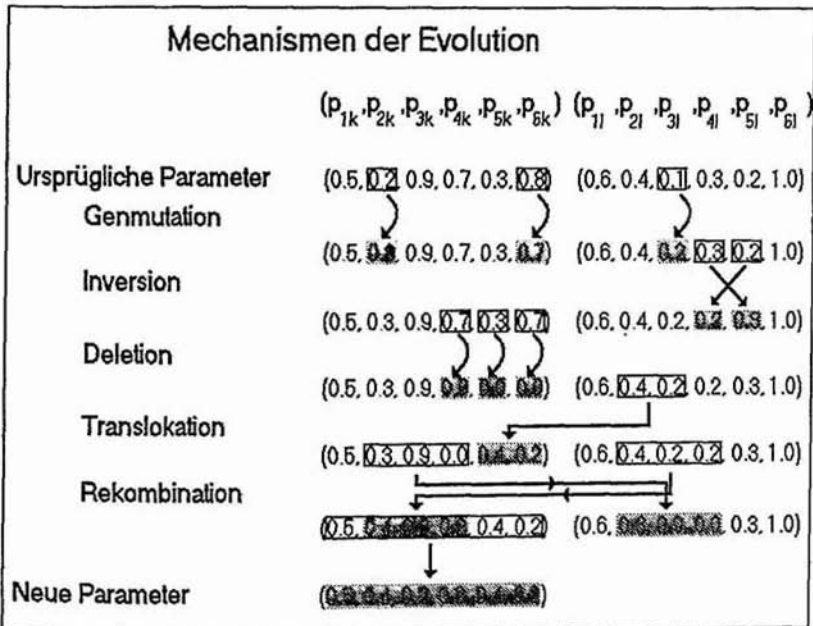


Abbildung 4.1.1.1.: Mechanismen der Evolution

Ein weiterer Mechanismus ist die Chromosomenmutation. Hierzu gehören die Deletion, die Translokation und die Inversion. Durch die Inversion werden zufällig herausgegriffene Komponenten von  $p_k$  bzw.  $p_l$  miteinander vertauscht, wobei die Vertauschung aber nur innerhalb eines Vektors stattfindet (Vertauschung von  $p_{4l}$  mit  $p_{5l}$  im Beispiel). Die Deletion entspricht einem Nullsetzen von Parametern und die Translokation dem Kopieren von Parametern des einen Satzes auf zu Null gesetzte Werte des anderen Satzes.

Der letzte Mechanismus in dieser Aufzählung ist die Rekombination. Sie vertauscht zufällig herausgegriffene Gruppen von Parametern zwischen  $p_k$  und  $p_l$ .

Diese Variationsmechanismen treten mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auf und liefern zwei neue Parametersätze, von denen einer als "Nachkomme" per Zufall ausgewählt wird. Für diesen neuen Parametersatz  $p^*$  wird die Qualität  $Q(p^*)$  ermittelt und mit den Qualitäten  $Q(p_1), \dots, Q(p_m)$  aller zur Gruppe gehörigen Vektoren verglichen. Hat  $p^*$  eine bessere Qualität als der schlechteste in der Gruppe befindliche Parametervektor, dann wird er in die Gruppe aufgenommen und der schlechteste gestrichen. Andernfalls wird er gestrichen. Im nächsten Schritt des Evolutionsvorganges werden aus der Gruppe wieder zwei Vektoren per Zufall herausgegriffen und das geschilderte Verfahren erneut durchgeführt.

Nun kann gezeigt werden, daß das Verfahren der Evolutionsstrategie gegen den besten Parametervektor konvergiert und zwar unter der Voraussetzung, daß die Qualitätsfunktion ein absolutes Maximum aufweist [66]: Dazu wird angenommen, daß das Maximum an der Stelle  $p_{opt}$  liegt und die zugehörige Qualität den Wert  $Q(p_{opt})$  hat. Nun wird eine Folge von

Vektoren konstruiert, indem nach jedem Evolutionsschritt (gekennzeichnet durch einen Index  $r$ ), der Parametervektor mit der besten Qualität herausgesucht wird. Er wird mit  $\mathbf{p}_r$  bezeichnet und seine Qualität mit Wert  $Q(\mathbf{p}_r)$ . Für die Folge der Qualitäten der Vektoren dieser Folge gilt  $Q(\mathbf{p}_{r-1}) \geq Q(\mathbf{p}_r) \geq Q(\mathbf{p}_{r+1}) \geq \dots$ . Sie ist monoton fallend und nach Voraussetzung, da  $Q$  ein absolutes Maximum besitzt, beschränkt. Also ist sie konvergent und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{p}_r = \mathbf{p}_{\text{opt}},$$

im Sinne der durch Gl. 4.1.1.1 definierten Norm. Eine Aussage über die Geschwindigkeit der Konvergenz kann allerdings nicht gemacht werden.

Auf die geschilderte Weise kann selbstverständlich nur eine endliche Menge von Parametersätzen getestet werden. Der Vektor, der entweder nach einer festgelegten Zahl von Evolutionsschritten die beste Qualität aufweist oder ein anderes Abbruchkriterium erfüllt, wird dann als bester Parametersatz bezeichnet, wobei nicht ausgeschlossen werden kann, daß er noch weit entfernt von  $\mathbf{p}_{\text{opt}}$  liegt.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur Ermittlung von Materialparametern können die der Optimierung zugrundeliegenden Meßdaten prinzipiell aus den Datensätzen verschiedener Experimente zusammengestellt werden.

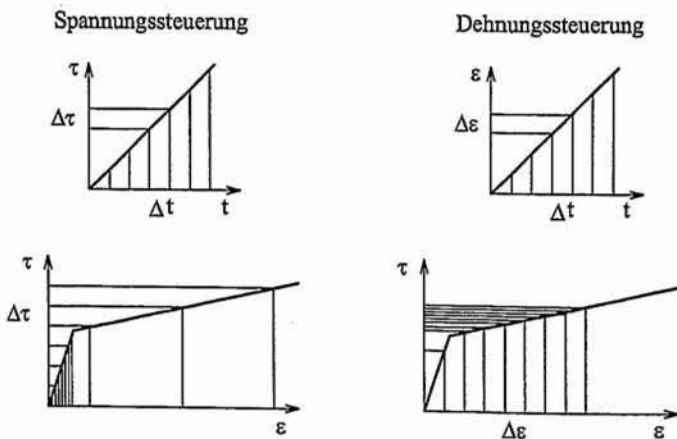


Abbildung 4.1.1.2.: Einfluß der Versuchssteuerung bzw. der Datenaufzeichnung

Durch entsprechende Wahl der Gewichtungsfaktoren  $w_i$  lassen sich beispielsweise einzelne Experimente oder bestimmte Meßpunkte eines Experimentes besonders gewichten. Der Sinn einer nachträglichen Gewichtung wird deutlich, wenn man bedenkt, daß durch die Art der Versuchssteuerung und der Datenaufzeichnung schon eine gewisse Gewichtung vorgenommen wird.

Abbildung 4.1.1.2 veranschaulicht dies anhand monotoner spannungs- und dehnungsgesteuerter Prozesse: Wenn der zeitliche Abstand zwischen der Aufnahme zweier Meßpunkte den

Wert  $\Delta t$  hat, dann liegen bei Dehnungssteuerung im flachen Teil der Kennlinie sehr viele Meßpunkte und im steilen Teil relativ wenige. Bei Spannungssteuerung sind die Verhältnisse genau umgekehrt.

Außerdem kann es sinnvoll sein, mehrere Experimente bei der Parameteroptimierung zu berücksichtigen. Besonders deutlich wird dies bei der Bestimmung der Materialparameter, die dazu eingeführt wurden, das Verhalten der Verfestigung unter nichtradiellen Belastungen zu beschreiben. Diese Größen können prinzipiell nicht aus monotonen Versuchen ermittelt werden.

Aufgrund der allgemeinen Struktur des Materialmodells, die in der Zerlegung der Gesamtspannung  $\mathbf{T}$  in eine Gleichgewichtsspannung  $\mathbf{T}_{eq}$  und eine Überspannung  $\mathbf{S}$  besteht, ist eine weitgehend getrennte Modellierung der Gleichgewichts- und der Nichtgleichgewichtseigenschaften möglich. Dabei wird das Verhalten der Gleichgewichtsspannung bei XCrNi18.9 durch ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional dargestellt, so daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit allein durch das Funktional  $\mathbf{S}$  der Überspannung beschrieben wird. Bei der Identifikation der Materialparameter der beiden Funktionale wird von folgender Idee Gebrauch gemacht:

Bei monotonen Prozessen ist die zur Gesamtspannung  $\tau$  gehörige Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$  lediglich eine Funktion der aktuellen Dehnung, die aus dem Relaxationsexperiment von Abbildung 2.4.1 bekannt ist. Damit kann die beobachtete Geschwindigkeitsabhängigkeit zur Identifikation der Materialparameter des Funktionals  $s$  der Überspannung benutzt werden.

Das Funktional  $\tau_{eq}$  beschreibt dagegen die Geschichtsabhängigkeit der Gleichgewichtshysterese und damit die Form der Verbindungskurve der Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge bei zyklischen Belastungen. Diese Gleichgewichtshysteresen können also zur Ermittlung der Parameter von  $\tau_{eq}$  benutzt werden. Damit kann jedoch noch nicht das Materialverhalten unter nichtradiellen Belastungen modelliert werden.

Zur Bestimmung der Parameter die in das Modell der nichtradiellen Verfestigung eingehen, wird das komplette Materialmodell für zweidimensionale Belastungen ausgewertet und die bereits identifizierten Parameter festgehalten. Die freien Parameter der nichtradiellen Verfestigung werden dann so optimiert, daß das Materialverhalten unter zweidimensionalen Belastungen dargestellt werden kann.

#### 4.1.2 Das Funktional der Überspannung:

Nun wird die Vorgehensweise erläutert, die bei der Identifikation der Parameter des Funktionals der Überspannung benutzt wurde. Dazu werden die monotonen spannungs- und dehningsgesteuerten Torsionsversuche aus den Abbildungen 2.4.1 und 2.4.5 zugrundegelegt und von dem in Abschnitt 3.2 konstruierten Modell für die Überspannung ausgegangen (Gl. 3.2.4.14 bis Gl. 3.2.4.17). Die Formulierung für Torsionsbelastungen lautet

$$\tau = \tau_{eq} + s \quad \text{mit} \quad s = \sum_{k=1}^n s_k$$

$$\dot{s}_k = \lambda_k \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon} - \frac{1}{M(\sqrt{2}|s|) z_{0k}} s_k \quad 4.1.2.1$$

mit  $M > 0$ ,  $M(0) = 1$ ,  $\frac{dM}{d|s|} \leq 0$

und  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ,  $\lambda_k > 0$ , bzw.  $z_{0k} > 0$  für  $k = 1, \dots, n$ ,

wobei die folgenden Materialparameter und -funktionen zu ermitteln sind: Der spontane Schubmodul  $\mu_0$ , die Maßstabsfunktion  $M$ , die Relaxationszeiten  $z_{0k}$ , die Gewichtungsfaktoren  $\lambda_k$  und der spontane Kompressionsmodul  $\kappa_0$ .

Der Schubmodul  $\mu_0$  wurde durch Anpassung einer Geraden an den Anfangsbereich der Kennlinie mit der Dehnungsgeschwindigkeit von  $2,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  ermittelt. Sein Wert beträgt

$$\mu_0 = 140000 \text{ MPa} .$$

Der spontane Kompressionsmodul  $\kappa_0$  wurde auf entsprechende Weise aus dem spontanen Elastizitätsmodul  $E_0$  der monotonen Zugversuche und dem Modul  $\mu_0$  zu

$$\kappa_0 = \frac{E_0 \mu_0}{3\mu_0 - 2E_0} = 683000 \text{ MPa}$$

ermittelt. Bei der Bestimmung der Maßstabsfunktion  $M$  wurde die Beobachtung ausgenutzt, daß die Überspannung  $s$  bei Prozessen mit konstanten Spannungs- oder Dehnungsgeschwindigkeiten bei großen Dehnungen stationär wird. Für die Materialgleichungen bedeutet dies, daß in Gl. 4.1.2.1 sämtliche Zeitableitungen  $\dot{s}_k$  verschwinden, d. h.

$$\lambda_k \left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon}_0 - \frac{1}{M(\sqrt{2}|s_{stat}|) z_{0k}} s_{kstat} = 0 \quad 4.1.2.2$$

für alle  $k$  und  $\dot{\varepsilon}_0 = \text{const}$ . Für Prozesse mit konstanten Spannungsgeschwindigkeiten  $\dot{\tau}_0$  folgt eine entsprechende Beziehung, wobei sich der in Gl. 4.1.2.2 für die stationäre Dehnrate einzusetzende Ausdruck durch Differentiation von  $\tau = \tau_{eq} + s_{stat}$  nach der Zeit ergibt. Durch Summation über alle Indizes  $k$  erhält man schließlich zwei Bestimmungsgleichungen:

$$M(\sqrt{2}|s_{stat}|) \sum_{k=1}^n z_{0k} \lambda_k = \frac{s_{stat}}{\left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \dot{\varepsilon}_0} \quad (\text{Dehnungssteuerung})$$

$$M(\sqrt{2}|s_{stat}|) \sum_{k=1}^n z_{0k} \lambda_k = \frac{s_{stat}}{\left[ \mu_0 - \frac{d\tau_{eq}}{d\varepsilon} \right] \dot{\tau}_0} \quad (\text{Spannungssteuerung}) \quad 4.1.2.3$$

Damit kann  $M$  durch Auftragung der experimentell ermittelten Werte für die stationären Überspannungen bestimmt werden. Die Maßstabsfunktion ist proportional zu den Quotienten

der rechten Seiten von Gl. 4.1.2.3, wobei die Steigung der Gleichgewichtskennlinie aus den Abbruchpunkten der Relaxationsvorgänge von Abbildung 2.4.1 ermittelt werden kann.

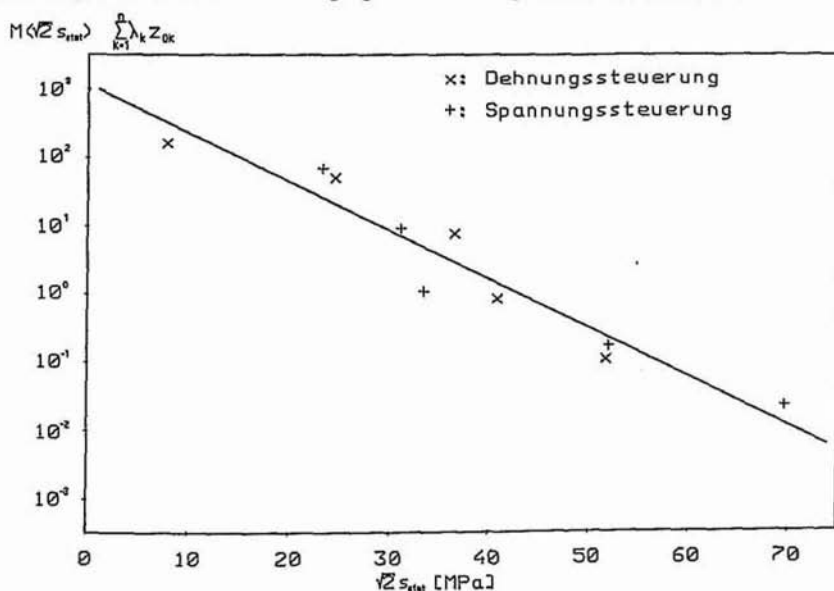


Abbildung 4.1.2.1.: Maßstabsfunktion gegen die Überspannung

Durch Auftragung dieser Quotienten gegen die stationären Werte der Überspannung  $\sqrt{2} |s_{stat}|$  gewinnt man das in Abbildung 4.1.2.1 dargestellte Bild von  $M$ , welches den einfachen Ansatz

$$M(\sqrt{2} |s|) = \exp\left[-\frac{\sqrt{2} |s|}{s_0}\right] \quad 4.1.2.4$$

mit dem Materialparameter  $s_0$  motiviert. Dazu sei bemerkt, daß die Verwendung von komplizierteren Funktionen, beispielsweise in Form von

$$M(\sqrt{2} |s|) = M_1 \exp\left[-\frac{\sqrt{2} |s|}{s_1}\right] + (1 - M_1) \exp\left[-\frac{\sqrt{2} |s|}{s_2}\right] \quad \text{oder} \quad M(\sqrt{2} |s|) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2} |s|}{s_0}\right)^r$$

zu keiner sichtbaren Qualitätssteigerung in der Darstellung der Spannungs / Dehnungs - Kennlinien führt. Kompliziertere Ansätze sind also nicht zu rechtfertigen. Durch Anpassung einer Geraden an die in Abbildung 4.1.2.1 dargestellten Meßdaten wurde für  $s_0$  ein Wert von 6,1 MPa ermittelt.

Die nächste Aufgabe besteht in der Identifikation der Relaxationszeiten  $z_{0k}$  und der Gewichtsfaktoren  $\lambda_k$ . Diese Parameter beschreiben das instationäre Verhalten von Gl. 4.1.2.1, so daß zu ihrer Ermittlung das Materialverhalten im Bereich nicht konstanter Überspannungen herangezogen werden muß. Dazu bieten sich die Übergangsbereiche der monotonen Kennlinien und das zeitliche Verhalten der Relaxations- und Kriechvorgänge an.

Zur Bestimmung dieser Parameter müssen die Differentialgleichungen (Gl. 4.1.2.1) für die zugrundegelegten Prozesse integriert werden. Die Integration wurde mit einem Runge - Kutta Verfahren durchgeführt und die Parameter mit der Evolutionsstrategie ermittelt. Dabei wurde die Anpassung simultan an alle dehnungs- und spannungsgesteuerten Versuche mit und ohne Haltezeiten aus den Abbildungen 2.4.1 und 2.4.5 vorgenommen. Um das Modell der Überspannung so einfach wie möglich zu gestalten, wurde zunächst von nur einer Differentialgleichung ausgegangen, d. h.  $n = 1$  und  $\lambda_1 = 1$ . Für die Relaxationszeit  $z_{01}$  wurde ein Wert von 1190 s ermittelt.

Anschließend wurde das Modell verfeinert und  $n = 2$  zugelassen. Der bereits anhand des stationären Verhaltens ermittelte Parameter  $s_0$  der Maßstabsfunktion wurde nun auch zur weiteren Optimierung freigegeben. Das Ergebnis der Parameteridentifikation lautet:

$$\begin{array}{ll} n = 2, & s_0 = 6.75 \text{ MPa} \\ \lambda_1 = 0,96 & z_{01} = 180 \text{ s} \\ \lambda_2 = 0.04 & z_{02} = 7900 \text{ s} \end{array}$$

Dabei fällt auf, daß sich der Wert von  $s_0$  trotz des anderen Identifikationsverfahrens nicht wesentlich geändert hat.

Der identifizierte Parametersatz kann so interpretiert werden, daß sich die gesamte Überspannung  $s$  additiv aus zwei Anteilen  $s_1$  und  $s_2$  zusammensetzt. Dabei klingt der Hauptanteil  $s_1$  relativ schnell und der zweite Anteil sehr langsam ab. Kompliziertere Ansätze für die Überspannung mit 3 Differentialgleichungen brachten ebenso wie kompliziertere Ansätze für Maßstabsfunktion in der Darstellung der experimentellen Daten keine sichtbare Verbesserung. Die Materialparameter und -funktionen des Funktional der Überspannung sind damit vollständig bestimmt.

#### 4.1.3 Das Funktional der Gleichgewichtsspannung:

Nun wird das Vorgehen erläutert, das bei der Identifikation der Parameter des Funktional der Gleichgewichtsspannung  $T_{eq}$  gewählt wurde. Dabei wird bei XCrNi18.9 die Geschichtsabhängigkeit von  $T_{eq}$  durch die kinematische Verfestigung  $\bar{X}$  bestimmt. Diese setzt sich additiv aus zwei Anteilen zusammen, die mit  $\bar{\bar{X}}$  und  $\hat{\bar{X}}$  bezeichnet werden. Der Anteil  $\bar{\bar{X}}$  beschreibt das Verhalten der Verfestigung unter radialen Belastungen und  $\hat{\bar{X}}$  wurde zur Darstellung der Zusatzverfestigung bei nichtradialen Prozessen eingeführt. Bei der Identifikation der Materialparameter wird diese Eigenschaft ausgenutzt.

Im ersten Schritt werden die Parameter von  $\bar{\bar{X}}$  anhand der zyklischen Torsionsversuche aus den Abbildungen 2.5.1 und 2.5.4 ermittelt. Die Parameter von  $\hat{\bar{X}}$  sind bei diesen Prozessen bedeutungslos. Sie werden anschließend durch Anpassung des gesamten Verfestigungsmodells an die nichtradialen Prozesse aus Abbildung 2.6.1 ermittelt, wobei die bereits identifizierten Parameter von  $\bar{\bar{X}}$  festgehalten werden.

Die Identifikation der Parameter von  $\bar{X}$  wird nun im Detail beschrieben: Zur Darstellung des Verhaltens der Gleichgewichtsspannung wurde in Abschnitt 3.2.3 ein modifiziertes Modell der klassischen Plastizitätstheorie motiviert. Es besitzt für Torsionsbelastungen die folgende Darstellung:

$$\text{Zerlegung der Deformation:} \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad 4.1.3.1$$

$$\text{Elastizitätsgesetz:} \quad \tau_{eq} = \mu_{eq} (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad 4.1.3.2$$

$$\text{Fließregel:} \quad 4.1.3.3$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda (\tau_{eq} - \bar{\kappa}) \quad \text{für} \quad F = (\tau_{eq} - \bar{\kappa})^2 - \frac{1}{3} g_0^2 = 0 \quad \text{und} \quad B = (\tau_{eq} - \bar{\kappa}) \dot{\tau}_{eq} > 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{in allen andern Fällen}$$

$$\text{Verfestigung:} \quad \bar{\kappa} = \sum_{k=1}^n \bar{\kappa}_k, \quad \dot{\kappa} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\dot{\varepsilon}_p| \quad 4.1.3.4$$

$$\text{mit} \quad \dot{\bar{\kappa}}_k = \bar{c}_k \dot{\varepsilon}_p - \frac{\bar{b}_k}{1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}} \dot{s} \bar{\kappa}_k \quad 4.1.3.5$$

$$\text{und} \quad \dot{\bar{p}} = \frac{\dot{s}}{\bar{s}_{0p} (1 + \alpha_s \delta)} (\sqrt{2} |\bar{\kappa}| - \bar{p}) \quad 4.1.3.6$$

$$\text{bzw.} \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{s}}{s_{0\delta}} (\bar{p} - \delta) \quad 4.1.3.7$$

Dabei sind die zu identifizierenden Parameter die Gleichgewichtsschub- und Kompressionsmoduli  $\mu_{eq}$  und  $\kappa_{eq}$ , die Fließspannung  $g_0$ , die Verfestigungsparameter  $\bar{c}_k$  und  $\bar{b}_k$  sowie die Parameter  $\bar{\alpha}_p$ ,  $\alpha_s$ ,  $\bar{s}_{0p}$  und  $s_{0\delta}$ , die zur Darstellung der Verfestigung bei zyklischen Prozessen eingeführt wurden.

Der Schubmodul  $\mu_{eq}$  wurde anhand des monotonen Torsionsversuches mit einer Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\varepsilon} = 2,3 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$  ermittelt (Abbildung 2.4.1). Er beträgt

$$\mu_{eq} = 134000 \text{ MPa} .$$

Der Kompressionsmodul  $\kappa_{eq}$  wurde aus dem statischen Elastizitätsmodul  $E_{eq}$  der monotonen Zugversuche aus Abbildung 2.4.2 und dem Modul  $\mu_{eq}$  zu

$$\kappa_{eq} = \frac{E_{eq} \mu_{eq}}{3\mu_{eq} - 2E_{eq}} = 664000 \text{ MPa}$$

ermittelt. Die Fließspannung  $g_0$  wurde durch Anpassung zweier Geraden und Bestimmung des Schnittpunktes an das Torsionsexperiment mit der kleinsten Verzerrungsgeschwindigkeit aus Abbildung 2.4.1 identifiziert. Ihr Wert beträgt

$$g_0 = 180 \text{ MPa} .$$

### Das Funktional der Verfestigung:

Mit diesen Parametern und Gl. 4.1.3.1 bzw. Gl. 4.1.3.2 kann aus den Abbruchpunkten der Relaxationsvorgänge der Verlauf der kinematischen Verfestigung  $\bar{\kappa}$  über der plastischen Dehnung  $\varepsilon_p$  ermittelt werden: Durch Anwendung des Elastizitätsgesetzes auf die Meßwerte der Gleichgewichtsspannung  $\tau_{eq}$  und der Dehnung  $\varepsilon$  ergeben sich mittels

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{1}{\mu_{eq}} \tau_{eq}$$

die plastischen Dehnungen und mit der Fließbedingung die Werte der Verfestigung:

$$\bar{\kappa} = \tau_{eq} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} g_0$$

Nach diesem Verfahren wurden die in den Abbildungen 2.5.1 und 2.5.4 dargestellten zyklischen Experimente bei verschiedenen Mitteldehnungen und Amplituden ausgewertet. Die Auswertung des Versuches ohne Mitteldehnung ist in Abbildung 3.2.3.6 und die der beiden anderen Experimente in Abbildung 4.1.2.2 dargestellt.

Verfestigung [MPa]

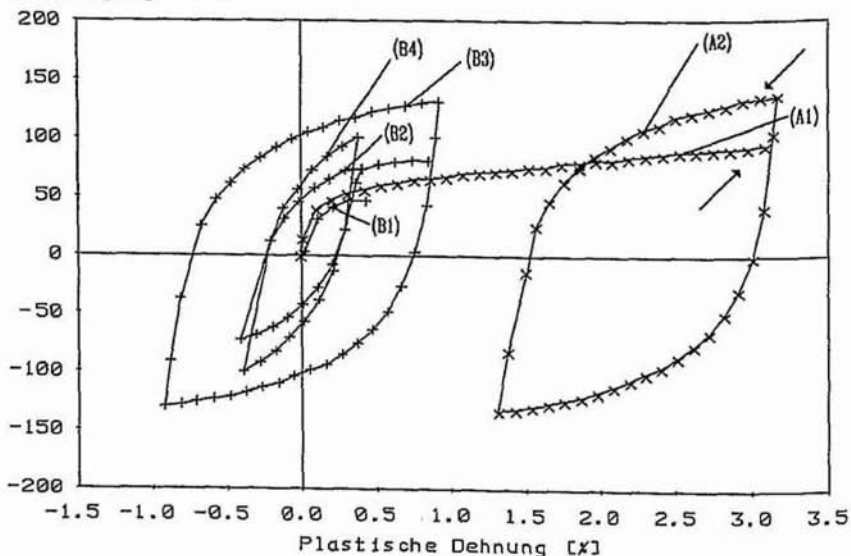


Abbildung 4.1.2.2.: Verfestigung gegen plastische Dehnung

Dabei ist mit (A1) die monotone Kennlinie des Versuchs mit 2% Mitteldehnung bezeichnet und mit (A2) der stationäre Grenzzyklus. Mit (B1) ist der monotone Teil der Kennlinie des Experiments aus Abbildung 2.5.4 bezeichnet, mit (B2) die stationäre Hysterese bei 0.5% Dehnungsamplitude, mit (B3) die stationäre Hysterese bei 1% Amplitude und mit (B4) die Hysterese, die 50 Zyklen nach der Amplitudenverringern auf 0.5% gemessen wurde.

Die Identifikation der Verfestigungsparameter  $\bar{\tau}_k$ ,  $\bar{b}_k$ ,  $\bar{\alpha}_p$ ,  $\alpha_s$ ,  $\bar{s}_{0p}$  und  $s_{0s}$  wurde mit der Evolutionsstrategie durchgeführt, wozu die sieben ausgewerteten Prozesse als Datenbasis zugrundegelegt und die Evolutionsgleichungen Gl. 4.1.3.4 bis Gl. 4.1.3.7 numerisch integriert wurden.

Dabei ist allerdings zu beachten, daß das stationäre Verhalten des Verfestigungsmodells nicht von allen Parametern abhängt. Es ist unabhängig von  $\bar{s}_{0p}$  und der Variablen  $\delta$  (siehe Gl. 3.2.4.34 bis Gl. 3.2.4.44), d. h. die Parameter  $\bar{s}_{0p}$ ,  $s_{0s}$  und  $\alpha_s$  können nicht aus den stationären Hystereseen ermittelt werden. Um sie zu identifizieren, muß das transiente Verhalten der Verfestigung berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise wird an einem Beispiel erläutert:

Zunächst wurden die Gleichungen Gl. 4.1.3.4 bis Gl. 4.1.3.7 für den monotonen Teil des Prozesses (A1) integriert und die Lösung mit den Meßdaten aus Abbildung 4.1.2.2 durch Berechnung der Summe der Abstandsquadrate verglichen (Gl. 4.1.1.1). Anschließend wurde der Prozeß fortgesetzt und das Modell für 20 Zyklen um die Mitteldehnung integriert. Die Integrationsergebnisse des 20. Zyklus wurden mit den Meßwerten der Hysterese (A2) verglichen. Danach wurde das Modell für 30 weitere Zyklen integriert und der letzte Zyklus mit denselben Daten verglichen (A2). Damit wird erzwungen, daß sich die Werte der Parameter  $\bar{s}_{0p}$ ,  $s_{0s}$  und  $\alpha_s$  so einstellen, daß die Antwort des Modells nach etwa 20 Zyklen stationär ist. Da die Hysterese (B4) aufgrund der langsamen Entfestigung noch nicht stationär ist, wurde damit kein doppelter Vergleich durchgeführt.

Da die stationären Hystereseen bei dieser Strategie einen relativ starken Einfluß auf die Zahlenwerte der Parameter haben, wurden die Abstandsquadrate, die bei den monotonen Kennlinien und dem Zyklus (B4) auftraten, durch geeignete Wahl der Gewichtungsfaktoren in Gl. 4.1.1.1 stärker berücksichtigt.

Bei der Identifikation wurde zunächst von  $\bar{n} = 1$  ausgegangen und die Datenbasis auf die Kennlinien (A1) und (A2) eingeschränkt. Ferner wurde der Parameter  $\alpha_s$  auf Null gesetzt. Gerechtfertigt wird dies dadurch, daß die Variable  $\delta$  in Gl. 4.1.3.6 zur Darstellung des transienten Entfestigungsverhaltens eingeführt wurde und sich gemessen an allen anderen Variablen langsam entwickeln soll ( $s_{0s} \gg \bar{s}_{0p}$ ). Damit ist  $\delta$  im Verlauf der monotonen Belastung praktisch Null. Außerdem ist die Form der stationären Hystereseen unabhängig von  $\delta$ .

Es bleiben also Gl. 4.1.3.5 und 4.1.3.6 übrig. Bei der Bestimmung der zugehörigen Parameter  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{\alpha}_p$  und  $\bar{s}_{0p}$  zeigte sich, daß es mit diesem einfachen Ansatz nicht möglich ist, die monotone Kennlinie und die stationäre Hysterese gleichzeitig mit einer vorgebbaren Genauigkeit darzustellen. Dabei ist ein typischer Parametersatz durch die Werte

$$\begin{array}{ll} \bar{\tau}_1 = 58000 \text{ MPa} & \bar{b}_1 = 1350 \\ \bar{s}_{0p} = 0.009 & \bar{\alpha}_p = 0.0144 \text{ MPa}^{-1} \end{array}$$

gegeben. Bemerkenswert ist, daß der Parameter  $\bar{s}_{0p}$ , der die Evolutionsgeschwindigkeit der Variablen  $\bar{p}$  bestimmt, klein im Vergleich zur Dehnung am Ende der monotonen Belastung, ist. Damit entwickelt sich  $\bar{p}$  schon während des monotonen Prozesses.

Daß die schnelle Evolution bei diesem einfachen Verfestigungsansatz zur Darstellung der monotonen Kennlinie notwendig ist, erkennt man daran, daß die Lösung

$$x(\varepsilon_p) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_1}{b_1} \left[ 1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b_1 \varepsilon_p\right] \right] .$$

von Gl. 4.1.3.5 für  $\bar{n} = 1$  und  $\bar{p} = 0$  sehr schnell in eine Sättigung gerät. Damit allein kann das Verhalten der Steigung von Kurve (A1) nicht dargestellt werden [28, 68].

In Abbildung 4.1.2.2 deuten Pfeile auf die Stellen hin, wo weitere Abweichungen auftraten: Die Steigung der stationären Hysterese ist im Experiment kurz vor dem Umkehrpunkt der Dehnungsgeschwindigkeit im allgemeinen größer als die zur selben Dehnung gehörige Steigung der monotonen Kennlinie. Dieses Verhalten wird vom Modell für  $\bar{n} = 1$  auch nicht richtig wiedergegeben und soll daher analysiert werden.

Da das Richtungsfeld der Verfestigung das Verhalten der Steigung beschreibt, ist die Untersuchung seiner Geschichtsabhängigkeit für kleine Werte von  $\bar{s}_{0p}$  Gegenstand der folgenden Diskussion. Dazu wird die Differenz der Steigungen der zyklischen und der monotonen Kennlinie beim selben Wert der Dehnung untersucht. Der Wert der Verfestigung der monotonen Kennlinie betrage  $\bar{x}$  und der der zyklischen  $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ . Die Steigung der monotonen Kennlinie ist für  $\bar{n} = 1$  durch

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon_p}(\bar{x}, \varepsilon_p) = \bar{c}_1 - \frac{\bar{b}_1}{1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}(\bar{x}, \varepsilon_p)} \bar{x} \quad 4.1.3.8$$

gegeben und für die gesuchte Differenz Steigungen ermittelt man die Beziehung

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon_p}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \varepsilon_p) - \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon_p}(\bar{x}, \varepsilon_p) = -\bar{b}_1 \frac{\Delta\bar{x} (1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}(\bar{x}, \varepsilon_p)) - \bar{\alpha}_p \bar{x} (\bar{p}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \varepsilon_p) - \bar{p}(\bar{x}, \varepsilon_p))}{(1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}(\bar{x}, \varepsilon_p)) (1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \varepsilon_p))} . \quad 4.1.3.9$$

Dabei kann über das Vorzeichen von Gl. 4.1.3.9 nur eine Aussage gemacht werden, wenn die Geschichtsabhängigkeit der Variablen  $\bar{p}$  bekannt ist. Dazu wird mit Hilfe der funktionalen Darstellung von  $\bar{p}$  (Gl. 3.2.4.37) gezeigt, daß der Zusammenhang

$$\bar{p}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\bar{s}_{0p}} \int_0^s |\bar{\kappa}(\sigma)| \exp\left[-\frac{s-\sigma}{\bar{s}_{0p}}\right] d\sigma = \sqrt{2} |\bar{\kappa}(s)| + \sqrt{2} \int_0^s \frac{d|\bar{\kappa}(\sigma)|}{d\sigma} \exp\left[-\frac{s-\sigma}{\bar{s}_{0p}}\right] d\sigma$$

gilt. Diese Beziehung kann für den Fall kleiner Werte von  $\bar{s}_{0p}$  vereinfacht werden. Die Berechnung des Grenzwertes ( $\bar{s}_{0p} \rightarrow 0$ ) liefert schließlich den Ausdruck

$$\lim_{\bar{s}_{0p} \rightarrow 0} \bar{p}(s) = \sqrt{2} |\bar{\kappa}(s)| , \quad 4.1.3.10$$

womit Gl. 4.1.3.9 ausgewertet werden kann. Durch Einsetzen von Gl. 4.1.3.10 in Gl. 4.1.3.9 ergibt sich die Folgerung

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon_p}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \varepsilon_p) < \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon_p}(\bar{x}, \varepsilon_p) ,$$

die im Widerspruch zu den Meßergebnissen steht. Das im Experiment beobachtete Verhalten der Steigung, d. h.  $\bar{\kappa}(\bar{\kappa} + \Delta\bar{\kappa}, \varepsilon_p) > \bar{\kappa}(\bar{\kappa}, \varepsilon_p)$ , kann offenbar nur dargestellt werden, wenn der Zähler von Gl. 4.1.3.9 negativ ist. Dazu muß der Zuwachs  $\Delta\bar{p}$  die Anforderung

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}(\bar{\kappa} + \Delta\bar{\kappa}, \varepsilon_p) - \bar{p}(\bar{\kappa}, \varepsilon_p) > \frac{\Delta\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} \left[ \bar{p}(\bar{\kappa}, \varepsilon_p) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p} \right] \quad 4.1.3.11$$

erfüllen, d. h. je größer der zum monotonen Prozeß gehörige Wert  $\bar{p}(\bar{\kappa}, \varepsilon_p)$  ist, desto größer muß auch  $\Delta\bar{p}$  sein.

Gl. 4.1.3.11 kann offenbar am ehesten erfüllt werden, wenn die Variable  $\bar{p}$  nicht zur Darstellung der monotonen Kennlinie benötigt wird und dies ist dann der Fall, wenn das Verfestigungsmodell bereits für  $\bar{p} = 0$  in der Lage ist, die monotone Kennlinie darzustellen. Nach [68] ist dies möglich, allerdings für  $\bar{n} = 2$ , d. h.  $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_1 + \bar{\kappa}_2$ . Dazu muß der Parameter  $\bar{s}_{0p}$  groß gegenüber der Dehnung am Ende des monotonen Prozesses sein. Dann entwickelt sich  $\bar{p}$  erst nach einigen Zyklen.

Daher wurde das Verfestigungsmodell auf  $\bar{n} = 2$  erweitert und die Parameter des nun aus 4 Differentialgleichungen bestehenden Systems an alle in den Abbildungen 3.2.3.6 und 4.1.2.2 dargestellten Prozesse simultan angepaßt. Die folgenden Werte wurden identifiziert:

$$\begin{array}{ll} \bar{c}_1 = 40370 \text{ MPa} , & \bar{c}_2 = 2340 \text{ MPa} , \\ \bar{b}_1 = 650 , & \bar{b}_2 = 120 , \\ \bar{s}_{0p} = 0.065 , & \bar{\alpha}_p = 0.0078 \text{ MPa}^{-1} , \\ s_\delta = 2.4 , & \alpha_\delta = 0.004 \text{ MPa}^{-1} . \end{array}$$

Zunächst sieht man, daß der Wert von  $\bar{s}_{0p}$  wesentlich größer ist als bei dem Verfestigungsansatz mit  $\bar{n} = 1$ . Die Vorstellung, daß die Variable  $\bar{p}$  für  $\bar{n} = 2$  am Ende des monotonen Prozesses klein sein wird, hat sich bestätigt. Außerdem erkennt man, daß die Parameter  $\bar{c}_2$  und  $\bar{b}_2$ , die das Verhalten von  $\bar{\kappa}_2$  bestimmen, klein im Vergleich zu  $\bar{c}_1$  und  $\bar{b}_1$  sind, so daß in dem zugrundegelegten Verfestigungsmodell ein gewisser Approximationscharakter liegt. Ferner sieht man, daß der Parameter  $s_{0\delta}$ , der die Evolutionsgeschwindigkeit von  $\delta$  bestimmt, groß im Vergleich zu  $\bar{s}_{0p}$  ist. Die Vorstellung, daß sich  $\delta$  im Vergleich zu allen anderen Variablen langsam entwickelt, hat sich demnach auch bestätigt.

#### Das Funktional der nichtradialen Verfestigung:

Damit sind die Materialparameter des Funktional  $\bar{\mathbf{X}}$  identifiziert und mit dieser Basis können die Parameter von  $\hat{\mathbf{X}}$ , dem Funktional zur Darstellung der nichtradialen Verfestigung, ermittelt werden. In Abschnitt 3.2.4 (Gl. 3.2.4.53 - Gl. 3.2.4.55) wurde hierfür das folgende Modell konstruiert

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}} \quad \hat{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^{\hat{n}} \hat{\mathbf{X}}_k , \quad 4.1.3.12$$

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}_k = \hat{c}_k \dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}} - \hat{b}_k \frac{\dot{s}_{\text{nr}}}{1 + \hat{\delta} \hat{p}} \hat{\mathbf{X}}_k, \quad 4.1.3.13$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{\dot{s}_{\text{nr}}}{\hat{s}_{0p}} \left( \|\hat{\mathbf{X}}\| - \hat{p} \right) \quad 4.1.3.14$$

wobei die nichtradiale Komponente  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}}$  der plastischen Dehnungsgeschwindigkeit durch

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{pnr}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \left( \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \right) \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}. \quad 4.1.3.15$$

definiert ist. Die zu identifizierenden Konstanten sind die Verfestigungsparameter  $\hat{c}_k$  und  $\hat{b}_k$ , sowie die Parameter  $\hat{\delta}$  und  $\hat{s}_{0p}$ , die zur Darstellung der Amplitudenabhängigkeit und des transienten Verhaltens der nichtradialen Verfestigung eingeführt wurden.

Die Grundlage für die Identifikation wird von den beiden nichtradialen Prozessen mit unterschiedlichen Dehnungsamplituden aus Abbildung 2.6.1 bereitgestellt. Bei diesen Experimenten wurden kreisförmige dehnungsgesteuerte Belastungen zugrundegelegt und jeweils 50 Zyklen gefahren, wobei die Spannungsantwort nach etwa 20 Zyklen stationär geworden ist. Aus dem letzten Zyklus, der durch Haltezeiten unterbrochen wurde, können durch Auswertung der Elastizitätsbeziehung für die Gleichgewichtsspannung (Gl. 3.2.4.18), die plastischen Dehnungen  $\varepsilon_p$  und  $\gamma_p$  ermittelt werden:

$$\varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \frac{\mu_{\text{eq}} + 2\nu_{\text{eq}}}{3\mu_{\text{eq}}\kappa_{\text{eq}}} \sigma_{\text{eq}}(t), \quad \frac{1}{2} \gamma_p(t) = \frac{1}{2} \gamma(t) - \frac{1}{\mu_{\text{eq}}} \tau_{\text{eq}}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p & \frac{1}{2} \gamma_p \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma_p & \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

Dabei werden  $\sigma_{\text{eq}}$  und  $\tau_{\text{eq}}$  die Meßwerte der Gleichgewichtsspannung, d. h. der Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge, bezeichnet. Der Verlauf des plastischen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}_p(t)$  ist damit bekannt und das gesamte Verfestigungsmodell (Gl. 4.1.3.12 - Gl. 4.1.3.15) kann für gegebene Materialparameter numerisch integriert werden.

Geht man davon aus, daß die elastischen Dehnungen klein sind, dann beschreiben die plastischen Dehnungen näherungsweise Kreise. Unter der Annahme, daß auch für die nichtradiale Verfestigung eine stationäre Lösung  $\hat{\mathbf{X}}_\infty$  mit  $\|\hat{\mathbf{X}}_\infty\| = \text{const}$  existiert, können die Ergebnisse aus Gl. 3.2.4.46 bis Gl. 3.2.4.48 singemäßig übertragen werden. In diesem Fall ist  $\hat{\mathbf{X}}_\infty$  unabhängig von  $\hat{s}_{0p}$  (Gl. 4.1.3.13 und Gl. 4.1.3.14), so daß zur Ermittlung dieses Parameters genauso verfahren wurde, wie bei der Bestimmung von  $\bar{s}_{0p}$  im Funktional  $\bar{\mathbf{X}}$  (siehe oben).

Durch Integration des gesamten Verfestigungsmodells und mit Hilfe von Gl. 3.2.4.49 kann die Norm des Deviators der Gleichgewichtsspannung

$$\|\mathbf{T}_{\text{eq}}^D\|^2 = \|\hat{\mathbf{X}}_\infty + \bar{\mathbf{X}}_\infty\|^2 + \frac{2}{3} g_0^2 + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} g_0 \left( \hat{\mathbf{X}}_\infty + \bar{\mathbf{X}}_\infty \right) \cdot \frac{\dot{\mathbf{E}}_p}{\|\dot{\mathbf{E}}_p\|}$$

berechnet und mit den Meßwerten

$$\|T_{eq}^D\|^2 = \frac{2}{3} \sigma_{eq}^2 + 2 \tau_{eq}^2$$

durch Berechnung der Summe der Abstandsquadrate (Gl. 4.1.1.1) verglichen werden. Für das Modell der nichtradialen Verfestigung wurde zunächst von einem Ansatz mit  $\hat{n} = 1$  ausgegangen d. h. von einer tensoriellen und einer skalaren Differentialgleichung (Gl. 4.1.2.16 - Gl. 4.1.2.18). Die mit der Evolutionsstrategie identifizierten Parameter haben die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= 90000 \text{ MPa} , & \hat{b}_1 &= 1000 , \\ \hat{\alpha} &= 0.009 \text{ MPa}^{-1} , & \hat{s}_{0p} &= 0.065 . \end{aligned}$$

Eine Verfeinerung dieses Modells auf  $\hat{n} = 2$  brachte keine Verbesserung in der Darstellung der Materialantworten, so daß die Parameter der nichtradialen Verfestigung vollständig identifiziert sind.

#### Tabellarische Zusammenfassung aller Materialparameter:

Damit ist die Identifikation aller Parameter des in dieser Arbeit entwickelten Materialmodells abgeschlossen. Insgesamt wurden folgende Zahlenwerte ermittelt:

Überspannung		
Spontane Elastizität:	$\mu_0 = 140000 \text{ MPa} ,$	$\kappa_0 = 683000 \text{ MPa}$
Maßstabsfunktion:	$s_0 = 6.75 \text{ MPa}$	
Überspannung $S_1$ :	$\lambda_1 = 0,96$	$z_{01} = 180 \text{ s}$
Überspannung $S_2$ :	$\lambda_2 = 0.04$	$z_{02} = 7900 \text{ s}$
Gleichgewichtsspannung		
Fließspannung:	$g_0 = 180 \text{ MPa}$	
Statische Elastizität:	$\mu_{eq} = 134000 \text{ MPa} ,$	$\kappa_{eq} = 664000 \text{ MPa}$
Verfestigung, radial		
Verfestigung $\bar{X}_1$ :	$\bar{c}_1 = 40370 \text{ MPa} ,$	$\bar{b}_1 = 650 ,$
Verfestigung $\bar{X}_2$ :	$\bar{c}_2 = 2340 \text{ MPa} ,$	$\bar{b}_2 = 120 ,$
Zyklische Verfestigung:	$\bar{s}_{0p} = 0.065 ,$	$\bar{\alpha}_p = 0.0078 \text{ MPa}^{-1} ,$
Zyklische Entfestigung:	$s_{\delta} = 2.4 ,$	$\alpha_{\delta} = 0.004 \text{ MPa}^{-1} .$
Verfestigung, nichtradial		
Verfestigung $\hat{X}_1$ :	$\hat{c}_1 = 90000 \text{ MPa} ,$	$\hat{b}_1 = 1000 ,$
Zyklische Verfestigung:	$\hat{\alpha} = 0.009 \text{ MPa}^{-1} ,$	$\hat{s}_{0p} = 0.065 .$

## 4.2 Modellrechnungen

Nachdem alle Materialparameter identifiziert sind, kann die Qualität der mathematischen Darstellung des Materialverhaltens von XCrNi18.9 untersucht werden. Dazu werden im folgenden die Antworten des Materialmodells für die Belastungen berechnet, die den Experimenten in den Abschnitten 2.4 - 2.6 zugrundegelegt haben.

Hierzu wird eine Zweiteilung vorgenommen: In Abschnitt 4.2.1 werden die Prozesse betrachtet, die der Modellbildung und der Parameteridentifikation gedient haben. Daran kann beurteilt werden, ob das Modell dazu in der Lage ist, die Phänomene, anhand derer es entwickelt wurde, quantitativ wiederzugeben. Liegt diese Eigenschaft vor, so können mit dem Modell auch Vorhersagen gewagt werden. Dazu werden in Abschnitt 4.2.2 die Prozesse untersucht, die nicht zur Parameteridentifikation beigetragen haben. Die Modellrechnungen haben damit einen gewissen Vorhersagecharakter und können durch Vergleich mit den Experimenten Hinweise auf Unvollkommenheiten in der Materialbeschreibung liefern.

Zur besseren Orientierung wird der Satz der Materialgleichungen, der im weiteren verwendet wird, nochmals in vollständiger Form angegeben:

<p>- Zerlegung der Spannung: <math>\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \mathbf{S}</math></p> <p>- Überspannung: <math>\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2</math>, <math>\dot{\mathbf{S}}_k = \lambda_k \left[ \mu_0 \dot{\mathbf{E}}^D + \frac{1}{3} \kappa_0 \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}) \mathbf{1} - \dot{\mathbf{T}}_{eq} \right] - \frac{1}{z_{0k} M(\ \mathbf{S}^D\ )} \mathbf{S}_k</math></p> <p>- Maßstabsfunktion: <math>M(\ \mathbf{S}^D\ ) = \exp\left[-\frac{\ \mathbf{S}^D\ }{s_0}\right]</math></p> <p>- Gleichgewichtsspannung: <math>\mathbf{T}_{eq} = \mu_{eq} \left[ \mathbf{E}^D - \mathbf{E}_p \right] + \frac{1}{3} \kappa_{eq} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1}</math></p> <p>- Plastische Dehnungen: <math>\dot{\mathbf{E}}_p = \lambda \left[ \mathbf{T}_{eq}^D - \mathbf{X} \right]</math>, <math>\dot{\mathbf{E}}_{pnr} = \dot{\mathbf{E}}_p - \left( \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \frac{\mathbf{X}}{\ \mathbf{X}\ } \right) \frac{\mathbf{X}}{\ \mathbf{X}\ }</math></p> <p>- Plastische Bogenlängen: <math>\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ \dot{\mathbf{E}}_p\ </math>, <math>\dot{s}_{nr} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ \dot{\mathbf{E}}_{pnr}\ </math></p> <p>- Verfestigung: <math>\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_1 + \bar{\mathbf{X}}_2 + \hat{\mathbf{X}}_1</math>,</p> <p>- Radial: <math>\dot{\bar{\mathbf{X}}}_k = \bar{\tau}_k \dot{\mathbf{E}}_p - \bar{b}_k \frac{\dot{s}}{1 + \bar{\alpha}_p \bar{p}} \bar{\mathbf{X}}_k</math>,</p> <p><math>\dot{\bar{p}} = \frac{\dot{s}}{\bar{s}_{0p} (1 + \alpha_s \delta)} \left( \ \bar{\mathbf{X}}\  - \bar{p} \right)</math>, <math>\dot{\delta} = \frac{\dot{s}}{s_{0\delta}} (\bar{p} - \delta)</math></p> <p>- Nichtradial: <math>\dot{\hat{\mathbf{X}}}_k = \hat{c}_k \dot{\mathbf{E}}_{pnr} - \hat{b}_k \frac{\dot{s}_{nr}}{1 + \hat{\alpha} \hat{p}} \hat{\mathbf{X}}_k</math>, <math>\dot{\hat{p}} = \frac{\dot{s}_{nr}}{\hat{s}_{0p}} \left( \ \hat{\mathbf{X}}\  - \hat{p} \right)</math></p>
---

Zur Integration dieser Gleichungen wurde ein Runge - Kutta Verfahren mit Schrittweitensteuerung verwendet. Vergleichsrechnungen mit einem anderen Algorithmus, einem impliziten Integrationsverfahren nach Gear [69], wurden ebenfalls durchgeführt. Sie lieferten bei sinnvollen Schrittweiten dieselben Ergebnisse.

#### 4.2.1 Zur Darstellbarkeit von Phänomenen

Zunächst werden die Antworten des Materialmodells für die Prozesse berechnet, die zur Modellbildung beigetragen haben und zur Parameterbestimmung verwendet wurden. Zur besseren Bewertbarkeit der Ergebnisse wird in Abhängigkeit davon, ob die Über- oder die Gleichgewichtsspannung den wesentlichen Einfluß auf die Materialantwort hat, eine Reihenfolge eingeführt. Sie ist dadurch vorgegeben, daß das Funktional  $S$  der Überspannung anhand der Geschwindigkeitsabhängigkeit bei monotonen Prozessen konstruiert und identifiziert wurde und das Funktional der Gleichgewichtsspannung anhand zyklischer Prozesse.

Um festzustellen, ob das Funktional  $S$  die Geschwindigkeitsabhängigkeit auch quantitativ richtig wiedergibt, werden die Materialgleichungen zunächst für die Prozesse integriert, mit denen die Parameteridentifikation durchgeführt wurde. Dabei sind die Versuche in den Abbildungen 2.4.1, 2.4.4 und 2.4.5 und die Rechnungen in den Abbildungen 4.2.1.1 bis 4.2.1.3 dargestellt.

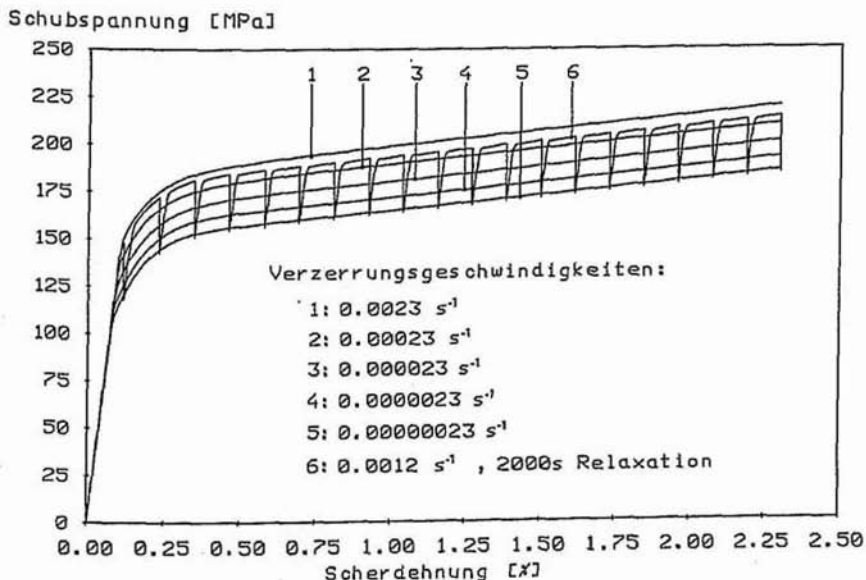


Abbildung 4.2.1.1.: Dehnungssteuerung, monoton, Torsion

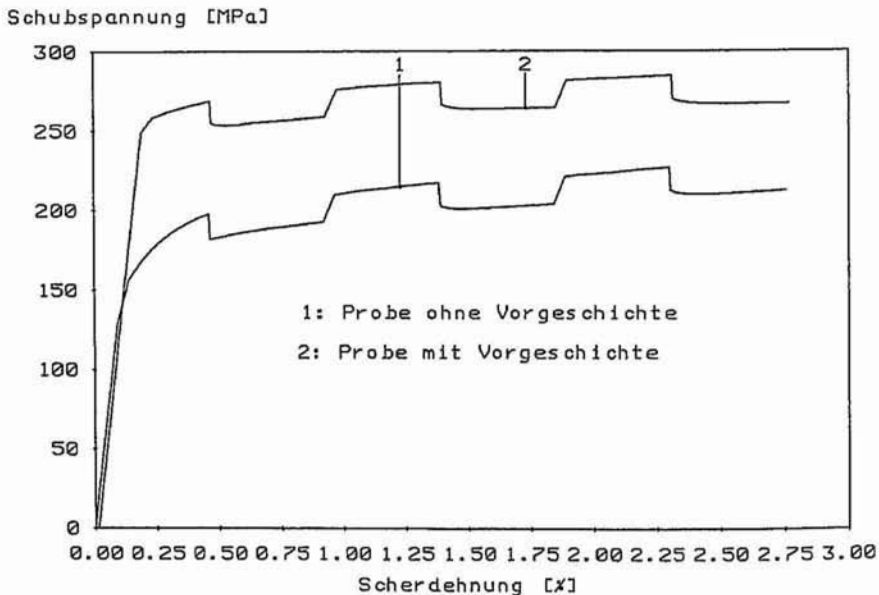


Abbildung 4.2.1.2.: Geschwindigkeitsabhängigkeit mit und ohne Vorgeschichte, Torsion

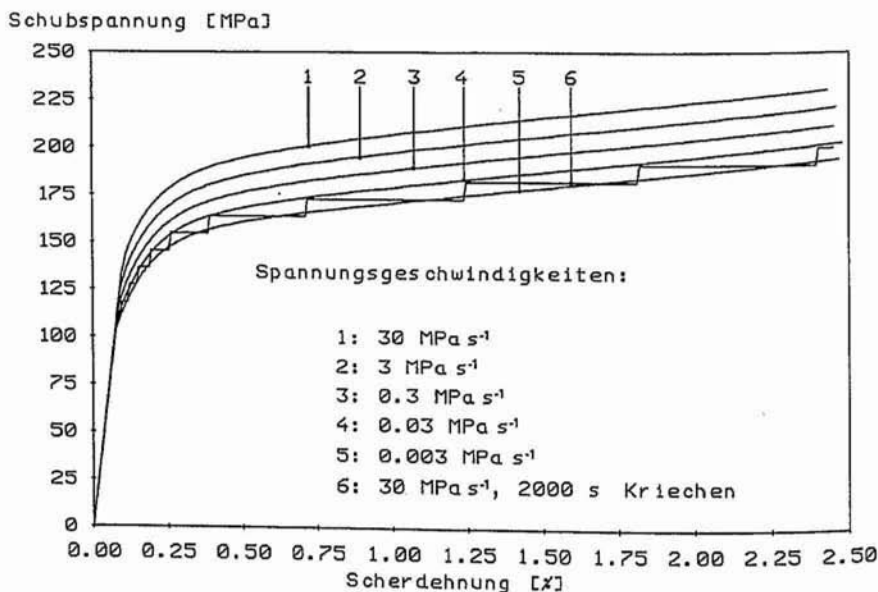


Abbildung 4.2.1.3.: Spannungssteuerung, monoton, Torsion

Der Vergleich zwischen den Meß- und Rechenergebnissen zeigt, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit quantitativ richtig wiedergegeben wird. Dies bezieht sich auf die unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit bei monotonen spannungs- und dehnungsgesteuerten Prozessen mit konstanten Geschwindigkeiten, auf Relaxation und Kriechen, sowie auf die Unabhängigkeit der stationären Überspannung von der Prozeßgeschichte (siehe Abschnitt 2.4).

Zur Konstruktion und zur Ermittlung der Parameter des Funktionals  $T_{eq}$  der Gleichgewichtsspannung bzw. der Verfestigung  $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}$  wurden zyklische Versuche benutzt. Dabei wurden zur Parameteridentifikation von  $\bar{\mathbf{X}}$  die dehnungsgesteuerten Torsionsexperimente aus den Abbildungen 2.5.1 und 2.5.4 verwendet. Die zugehörigen Modellrechnungen sind in den Abbildungen 4.2.1.4 und 4.2.1.5 dargestellt.

Durch Vergleich mit den Messungen sieht man, daß das Materialverhalten unter zyklischen dehnungsgesteuerten Belastungen richtig wiedergegeben wird. Dazu gehören die zyklische Verfestigung und ihre Abhängigkeit von der Dehnungsamplitude, die Unabhängigkeit des Grenzzyklus von der Mitteldehnung, sowie die Unterschiede in den 'Geschwindigkeiten' mit denen sich die stationären Hysteresen bei Ver- und Entfestigungsvorgängen einstellen (siehe Abschnitt 2.5).

Schubspannung [MPa]

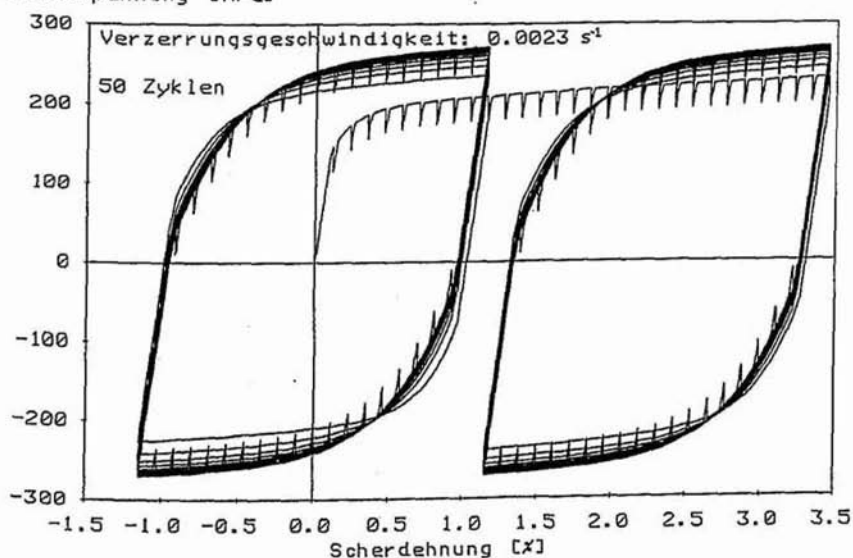


Abbildung 4.2.1.4.: Dehnungsteuerung, zyklisch, verschiedene Mitteldehnungen

Schubspannung [MPa]

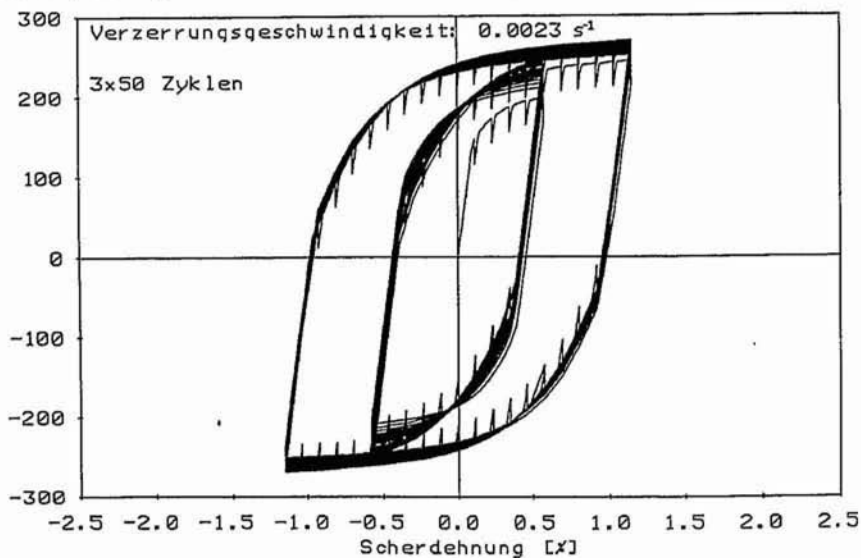


Abbildung 4.2.1.5.: Dehnungssteuerung, zyklisch, verschiedene Dehnungsamplituden

√ Schubspannung [MPa]

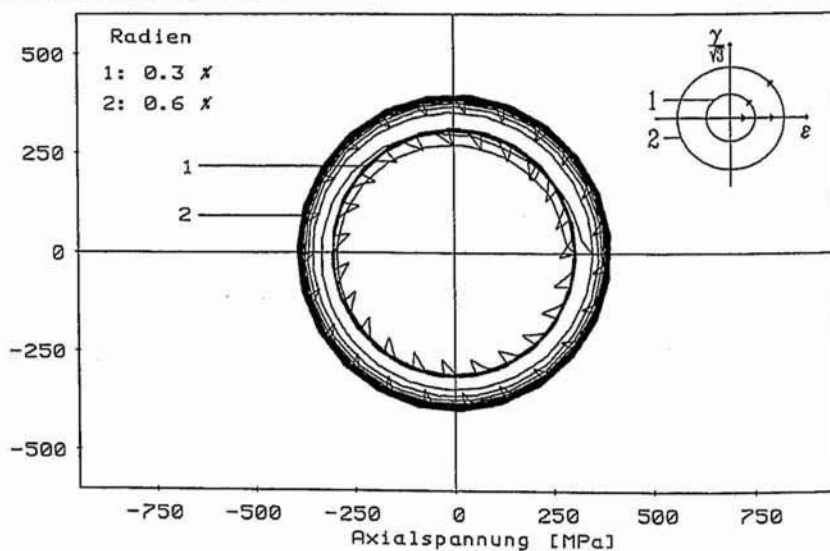


Abbildung 4.2.1.6.: Zweidimensional, ohne Berücksichtigung der Zusatzverfestigung

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

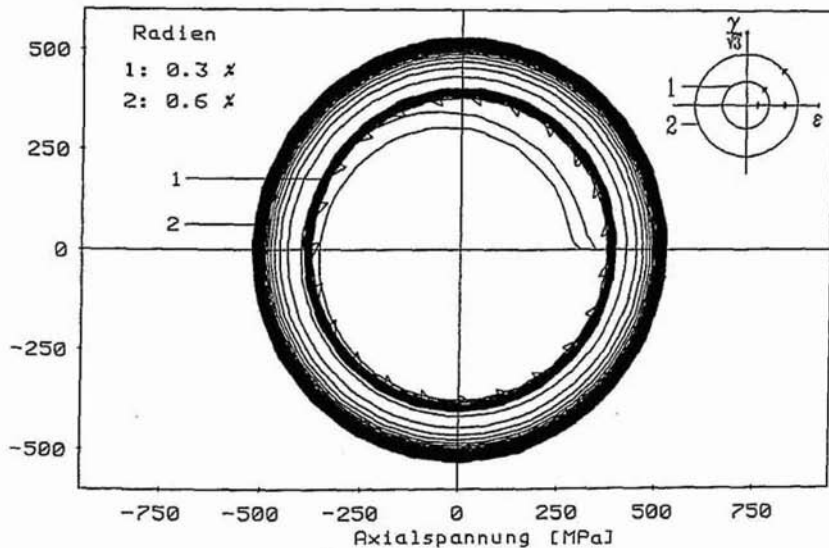


Abbildung 4.2.1.7.: Zweidimensional, mit Berücksichtigung der Zusatzverfestigung

Der Konstruktion des Funktionals  $\hat{X}$  der nichtradialen Verfestigung und der Ermittlung der Parameter wurden die zweidimensionalen dehnungsgesteuerten Prozesse aus Abbildung 2.6.1 zugrundegelegt. Durch die Modellrechnung in Abbildung 4.2.1.6 soll nochmals die Notwendigkeit der Einführung von  $\hat{X}$  gerechtfertigt werden: Dargestellt ist die Antwort des Materialmodells ohne Berücksichtigung von  $\hat{X}$ . Dabei sieht man, daß die stationären Spannungsamplituden unterschätzt werden.

Demgegenüber sind in Abbildung 4.2.1.7 die Antworten des gesamten Materialmodells dargestellt, also unter Berücksichtigung der Zusatzverfestigung  $\hat{X}$ . Die Abbildung zeigt, daß eine quantitativ zutreffende Darstellung des Verfestigungsverhaltens unter speziellen zweidimensionalen Belastungen möglich ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß das Materialmodell, das aufgrund experimenteller Befunde konstruiert und identifiziert wurde, die beobachteten Phänomene nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ zutreffend wiedergibt.

#### 4.2.2 Zur Vorhersagbarkeit von Phänomenen

Nachdem anhand von Beispielrechnungen veranschaulicht werden konnte, daß das Materialmodell in der Lage ist, bestimmte Phänomene quantitativ wiederzugeben, kann die Frage nach der Vorhersagbarkeit weiterer Phänomene gestellt werden. Hierzu wurde das Materialmodell für diejenigen Prozesse aus den Abschnitten 2.4 bis 2.6 ausgewertet, die weder zur

Modellbildung noch zur Parameteridentifikation herangezogen wurden. Dabei handelt es sich um die folgenden Phänomene:

- 1) Geschwindigkeitsabhängigkeit der Materialantwort bei monotonen Zugbelastungen.
- 2) Ratchettingverhalten unter Spannungssteuerung bei kleinen und mittleren Spannungsamplituden.
- 3) Zyklisches Verhalten unter Dehnungssteuerung beim Wechsel der Mitteldehnung.
- 4) Zyklisches Verhalten unter Dehnungssteuerung bei Zug / Druck - Beanspruchung.
- 5) Ratchettingverhalten bei großen Spannungsamplituden.
- 6) Nichtradiale Belastung unter Dehnungssteuerung: Abhängigkeit der Materialantwort von der Mitteldehnung bei kreisförmiger Belastung.
- 7) Nichtradiale Belastung unter Dehnungssteuerung: Materialantwort auf zyklische quadrat- und sanduhrartige Dehnungsprozesse.

Zur getrennten Untersuchung der Funktionale  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{T}_{eq}$  wird wieder eine Reihenfolge eingeführt. Dabei werden zunächst die Prozesse betrachtet, bei denen das Funktional  $\mathbf{S}$  der Überspannung die wesentliche Rolle einnimmt.

Zu 1) zeigt Abbildung 4.2.2.1 die numerisch berechneten Spannungsantworten auf monotone dehnungsgesteuerte Zugbelastungen. Durch Vergleich mit den Experimenten sieht man, daß das Materialverhalten, d. h. die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit, zutreffend vorhergesagt wird. Die Versuchsergebnisse sind in Abbildung 2.4.2 dargestellt.

Zu 2) wird ein weiterer Test des Modells der Überspannung durchgeführt und zwar anhand zyklischer spannungsgesteuerter Prozesse. Sie haben die Eigenschaft, daß die Materialantwort, in diesem Fall die Dehnung, sehr empfindlich von den viskosen Materialeigenschaften bzw. ihrer mathematischen Modellierung, abhängt. Die analytischen Untersuchungen in Abschnitt 3.2.5 haben gezeigt, daß die Dehnungsakkumulation bei kleinen Spannungsintervallen und großen Mittelspannungen wesentlich vom Verhalten der Überspannung bestimmt wird. Daher wird das Materialmodell nun für die Belastungen ausgewertet, die den Experimenten aus den Abbildungen 2.5.7 und 2.5.8 zugrundegelegt haben. Die Modellrechnungen sind in den Abbildungen 4.2.2.2 und 4.2.2.3 dargestellt.

Durch Vergleich stellt man fest, daß die Kennlinien richtig vorhergesagt werden. Allerdings werden die am Ende der Prozesse akkumulierten Dehnungen etwas überschätzt.

Axialspannung [MPa]

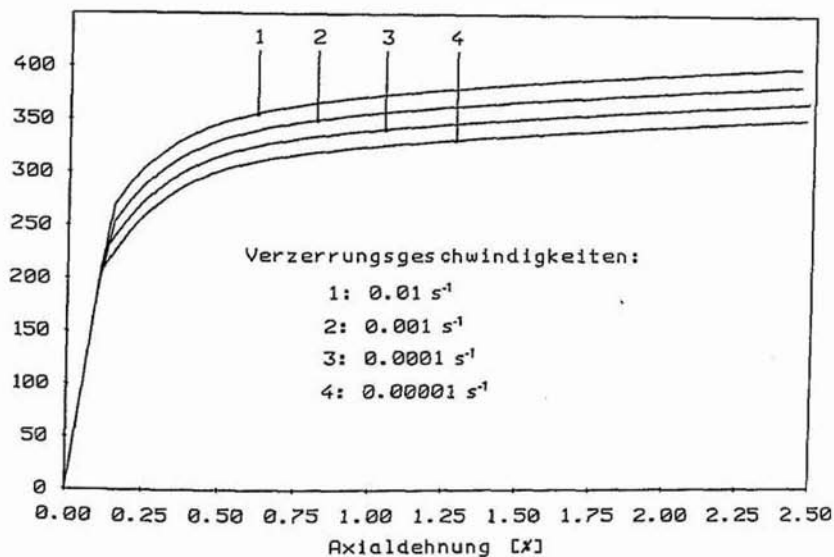


Abbildung 4.2.2.1.: Zugbelastung, monoton

Schubspannung [MPa]

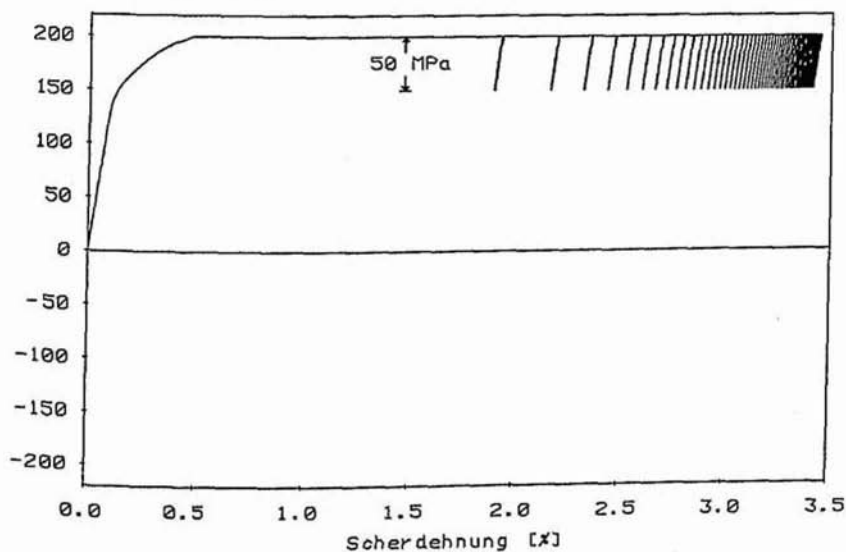


Abbildung 4.2.2.2.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: 150 MPa

Schubspannung [MPa]

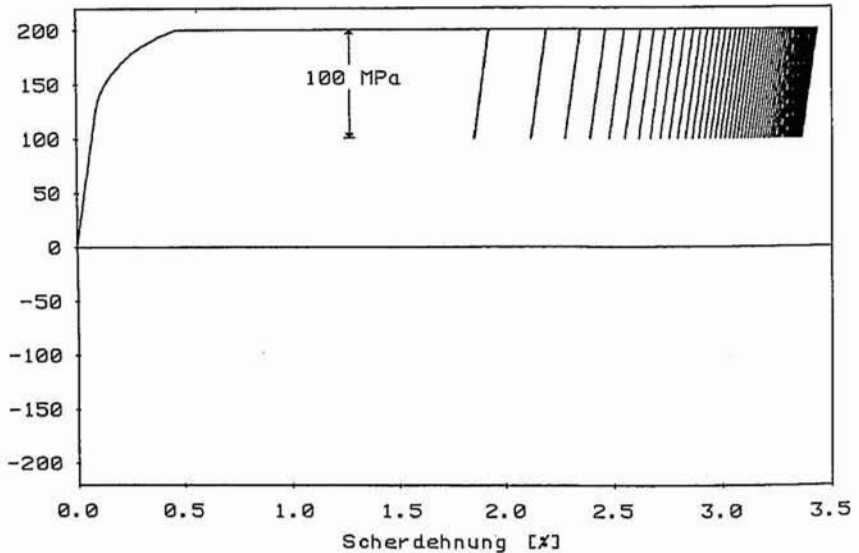


Abbildung 4.2.2.3.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: 100 MPa

Die folgende Untersuchung setzt sich mit Prozessen auseinander, wo das funktionale Verhalten der Gleichgewichtsspannung einen wesentlichen Einfluß auf die Materialantwort hat. Dabei wird die Geschichtsabhängigkeit von den beiden Verfestigungsfunktionalen  $\bar{X}$  und  $\bar{X}^{\Delta}$  dargestellt, wobei  $\bar{X}$  anhand spezieller Torsionsbelastungen konstruiert wurde. Dieses Funktional soll nun für weitere Prozesse getestet werden.

Zu 3) zeigt Abbildung 4.2.2.4 die Modellvorhersage zu dem Torsionsversuch aus Abbildung 2.5.2, wo die Mitteldehnung im Verlauf der Belastung verlagert wurde. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß eine gute Übereinstimmung vorhanden ist.

Zu 4) wurde das Modell für eine zyklische Zug / Druck - Belastung ausgewertet. Dabei ist das Experiment in Abbildung 2.5.3 und die Rechnung in Abbildung 4.2.2.5 zu finden. Man sieht, daß auch hier die Materialantwort richtig vorhergesagt wird.

Zu 5) sind in den Abbildungen 4.2.2.6 und 4.2.2.7 die Vorhersagen des Modells auf zyklische spannungsgesteuerte Belastungen bei großen Spannungsamplituden dargestellt. Dabei treten im Vergleich zu Prozessen bei kleinen Amplituden zusätzlich nichtmonotone plastische Deformationen auf, so daß das Materialverhalten wesentlich vom funktionalen Verhalten der Gleichgewichtsspannung bestimmt wird (siehe Abschnitt 3.2.5).

Die Experimente sind in den Abbildungen 2.5.9 und 2.5.10 zu finden. Durch Vergleich sieht man, daß die Dehnungsakkumulation vom Modell stark überschätzt wird. Abgesehen davon, wird das Materialverhalten in den sonstigen Details qualitativ richtig vorhergesagt.

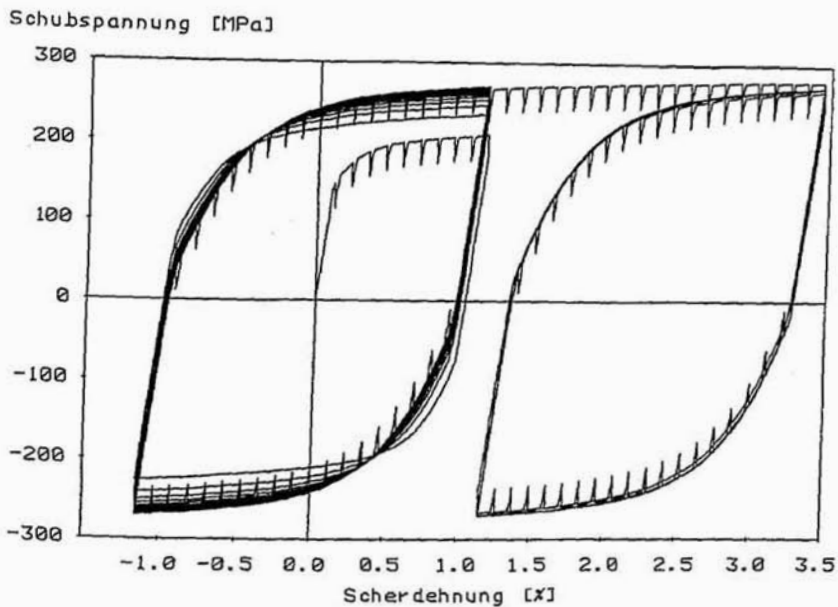


Abbildung 4.2.2.4.: Dehnungssteuerung, zyklisch, Verlagerung der Mitteldehnung  
Axialspannung [MPa]

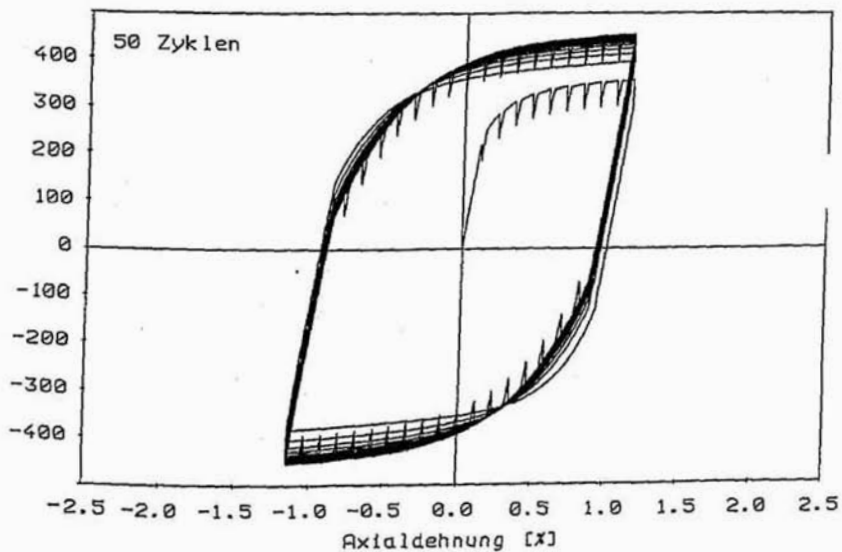


Abbildung 4.2.2.5.: Zug / Druck - Belastung, zyklisch

Schubspannung [MPa]

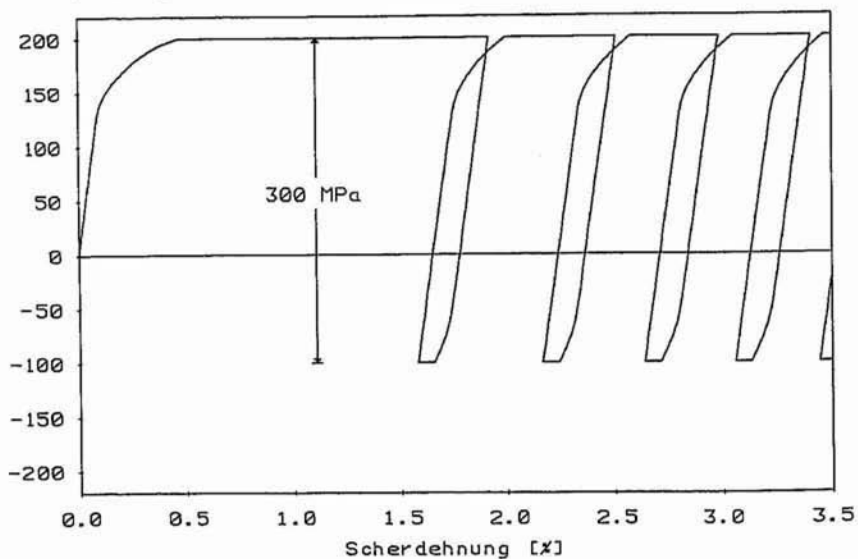


Abbildung 4.2.2.6.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: -100 MPa

Schubspannung [MPa]

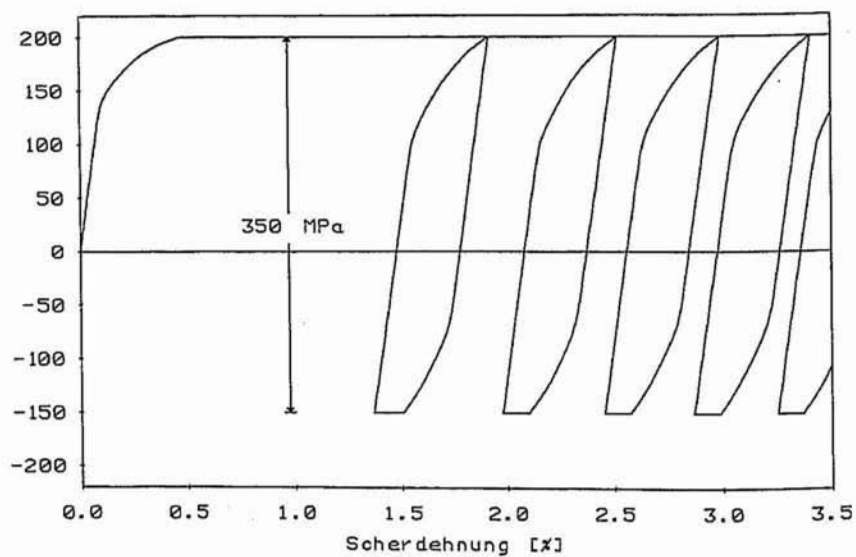


Abbildung 4.2.2.7.: Spannungssteuerung, zyklisch, untere Grenze: -150 MPa

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

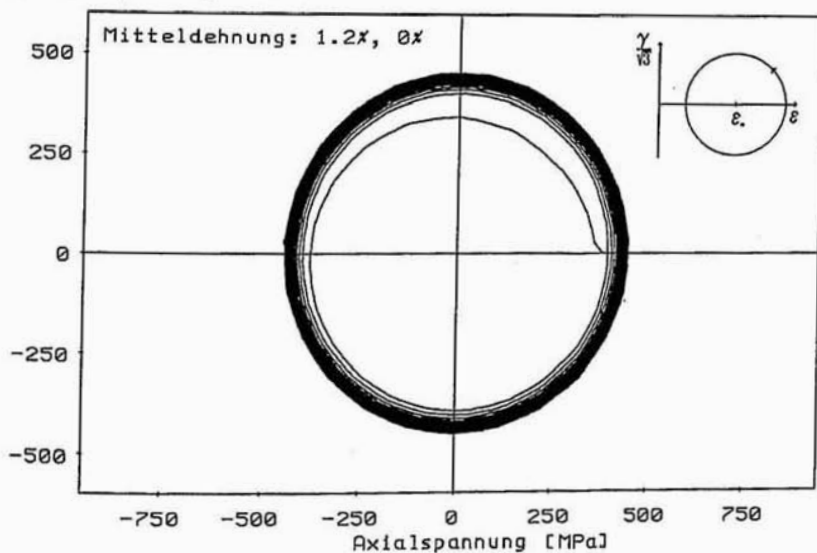


Abbildung 4.2.2.8: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional,  $\epsilon_M = 1,2\%$ ,  $\gamma_M/\sqrt{3} = 0\%$

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

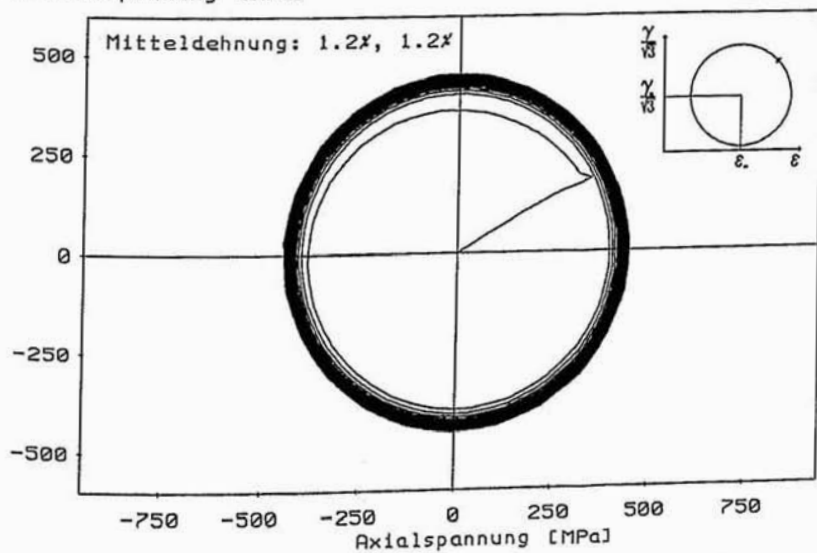


Abbildung 4.2.2.9: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional,  $\epsilon_M = 1,2\%$ ,  $\gamma_M/\sqrt{3} = 1,2\%$

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

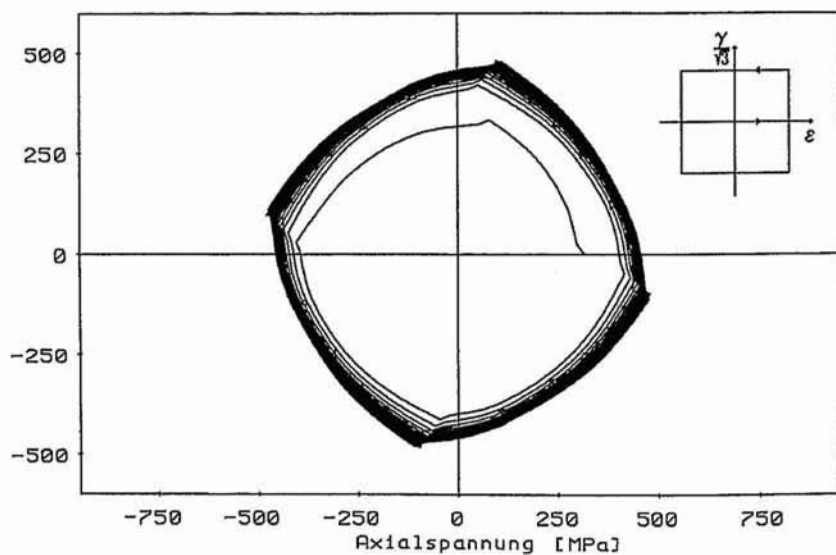


Abbildung 4.2.2.10: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional, Quadrat

$\sqrt{3}$  Schubspannung [MPa]

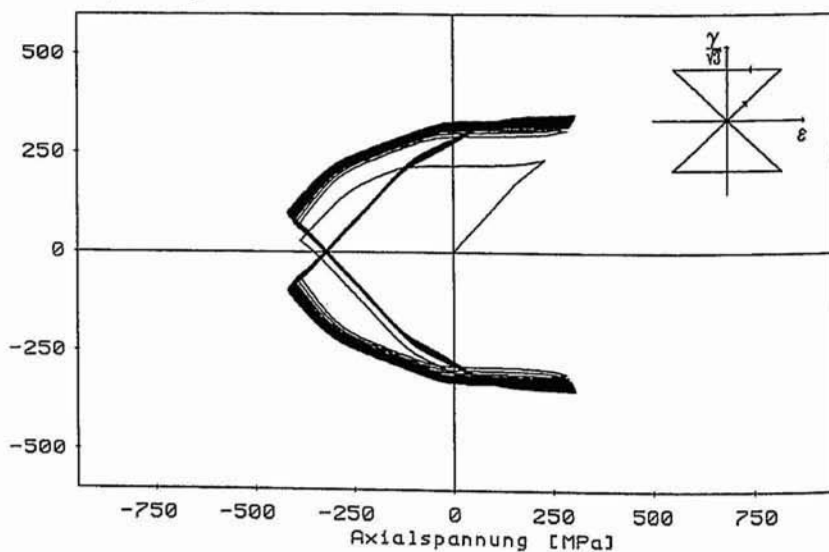


Abbildung 4.2.2.11: Dehnungssteuerung, zyklisch, zweidimensional, Sanduhr

Zum Test der Vorhersagbarkeit von Phänomenen, die charakteristisch für zweidimensionale Prozesse sind, wurde das Modell für weitere nichtradiale Belastungen ausgewertet. Dabei ist für die Darstellung des Materialverhaltens neben dem Funktional  $\bar{X}$  auch der nichtradiale Anteil  $\hat{X}$  der Verfestigung von Bedeutung, so daß die folgende Untersuchung ein Test des gesamten Verfestigungsmodells ist.

Zu 6) sind die Versuche aus den Abbildungen 2.6.2 bis 2.6.5 und die Modellrechnungen aus den Abbildungen 4.2.2.8 bis 4.2.2.11 zu betrachten. Durch Vergleich der Antworten auf die kreisförmigen dehnungsgesteuerten Belastungen sieht man, daß die Größe der Spannungsamplitude und ihre Unabhängigkeit von der Mitteldehnung richtig vorhergesagt werden.

Diese Prozesse sind durch eine Nichtradialität charakterisiert, die im stationären Grenzzyklus konstant ist. Bei nicht kreisförmigen Prozessen ändert sie sich im allgemeinen im Verlauf des Grenzzyklus.

Zu 7) sind die Abbildungen 2.6.4 und 2.6.5 bzw. 4.2.2.10 und 4.2.2.11 zu betrachten. Dabei ist das dehnungsgesteuerte Quadrat aus Abbildung 2.6.4 durch eine schwach veränderliche Nichtradialität gekennzeichnet. Durch Vergleich mit der Rechnung in Abbildung 4.2.2.10 sieht man, daß die vorhergesagte stationäre Spannungstrajektorie gegenüber der gemessenen etwas stärker verdreht ist. Die Größe der Amplitude wird jedoch richtig vorhergesagt.

Bei dem sanduhrartigen dehnungsgesteuerten Prozeß aus Abbildung 2.6.5 liegt eine vergleichsweise stark veränderliche Nichtradialität vor. Durch Vergleich mit der Rechnung aus Abbildung 4.2.2.11 sieht man, daß der Verlauf der stationären Spannungsantwort qualitativ richtig vorhergesagt wird. Es treten allerdings Abweichungen auf, die im wesentlichen darin bestehen, daß die Spannungen etwas unterschätzt werden.

### 4.3 Bemerkungen zum Ratchetting der Gleichgewichtsspannung

Die Modellvorhersagen auf zyklische spannungsgesteuerte Prozesse mit großen Spannungsamplituden haben gezeigt, daß das Ratchettingverhalten, d. h. die Dehnungsakkumulation im allgemeinen stark überschätzt wird (Abbildungen 4.2.2.6, 4.2.2.7 und 2.5.9, 2.5.10). Die Form der Kennlinien wird jedoch qualitativ richtig dargestellt.

Bei Spannungsamplituden, die klein gegenüber dem Durchmesser des elastischen Bereiches sind, treten diese Probleme in der Regel nicht auf. Dazu sei auf die Modellrechnungen in Abschnitt 4.2.2, die analytischen Untersuchungen in Abschnitt 3.2.5 und auf die Arbeiten von Krempl und Ruggles [69] bzw. Chaboche und Nouailhas [17, 72] verwiesen.

Ferner soll an dieser Stelle angemerkt werden, daß die Probleme bezüglich der quantitativen Darstellung des Ratchetting bei großen Spannungsamplituden auch in der Literatur intensiv diskutiert werden (siehe Guionnet [61], Hassan [13], Chaboche [71] und Kikillus [80]). Chaboche bemerkt dazu in [71]:

"One of the unsolved difficulties concerns the problem of ratchetting, that is, the progressive strain accumulation, cycle - by - cycle, induced by the superposition of a cyclic secondary load to a constant primary load."

Von Chaboche und Nouailhas wurden in [70] mehrere Verfestigungsmodelle untersucht. Danach scheint ein wesentliches Problem darin zu liegen, daß die Modifikationen, die zur quantitativen Darstellung des Ratchettingverhaltens notwendig sind, bei anderen Belastungen zu physikalisch unsinnigen Materialantworten führen können (siehe auch [70]).

Eine solche aber trotzdem interessante Modifikation eines Armstrong - Frederick Modells wurde von Rousselier in [73] vorgeschlagen. In der hier verwendeten Schreibweise lauten die Evolutionsgleichungen

$$\dot{x} = c \dot{\epsilon}_p - \frac{2}{\sqrt{5}} |\dot{\epsilon}_p| b (x - y) \quad \text{mit} \quad \dot{y} = \frac{|\dot{x}|}{s_y} (x - y) ,$$

wobei die innere Variable  $y$  ein gewichteter Mittelwert der Verfestigung ist. Dabei ist  $s_y$  ein Maß für die Größe des Mittelungsintervalles. Die physikalische Bedeutung von  $y$  besteht darin, den Begrenzungsterm in der Differentialgleichung für  $x$  in Abhängigkeit vom Mittelwert der Verfestigung zu vergrößern, das Modell also zu 'versteifen'.

Für  $y = 0$  wurde in Abschnitt 3.2.5 nachgewiesen, daß der arithmetische Mittelwert von  $x$  bei zyklischen dehnungsgesteuerten Prozessen verschwindet. Damit besteht die Hoffnung, daß die Variable  $y$  klein bleibt und keinen Einfluß auf das zyklische Verfestigungsverhalten bei Dehnungsvorgabe ausübt. Trotzdem hat das Modell den Nachteil, daß die stationären Hysteresen von der gesamten Verzerrungsgeschichte abhängen. Sie sind also im Gegensatz zu den Meßergebnissen, keine eindeutige Funktion der Dehnungsamplitude (ein analytischer Nachweis hierfür ist möglich).

Zur Veranschaulichung der Probleme, die bei der simultanen Beschreibung von plastischem Materialverhalten unter Spannungs- und Dehnungssteuerung auftreten können, wird im folgenden das hier vorgeschlagene Verfestigungsmodell untersucht. Dabei wird insbesondere die Abhängigkeit des Ratchetting und der zyklischen Verfestigung von den Materialparametern und der inneren Variablen  $p$  studiert.

Dazu muß zunächst das Intervall abgeschätzt werden, in dem die Verfestigung variiert. In den beiden Versuchen aus Abbildung 2.5.9 und 2.5.10 hatte die obere Spannungsgrenze  $\tau_o$  jeweils einen Wert von 200 MPa und die untere Grenze  $\tau_u$  die Werte -100 MPa und -150 MPa. Mit der Zerlegung der Gesamtspannung  $\tau = \tau_{eq} + s$  und der Fließfunktion  $|\tau_{eq} - x| = 1/\sqrt{3} g_0$  ergeben sich die Intervalle, die von der Verfestigung  $x$  überstrichen werden:

$$x_o = \tau_o - s_o - \frac{1}{\sqrt{3}} g_0 \quad \text{und} \quad x_u = \tau_u - s_u + \frac{1}{\sqrt{3}} g_0$$

Durch Einsetzen typischer Werte für die Überspannungen  $s_o$  und  $s_u$  von etwa 30 MPa ergibt sich für  $x_o$  ein Wert von etwa 70 MPa und für  $x_u$  die beiden Werte -20 MPa und 30 MPa. Für die folgende Untersuchung wird die Näherung  $x_u \approx 0$  getroffen.

Nun wird die Antwort des Verfestigungsmodells (Gl. 3.2.3.25 bis Gl. 3.2.3.28) bei zyklischer Vorgabe von  $x$  berechnet, was für einen reinen Armstrong - Frederick Ansatz bereits von Tsakmakis in [74] durchgeführt wurde.

In Abschnitt 3.2.5 wurde nachgewiesen, daß die Dehnungsakkumulation dann beschränkt ist, wenn einer der Materialparameter  $b_k$  verschwindet und dabei  $c_k > 0$  gilt. Andernfalls ist sie unbegrenzt. Für diesen Fall werden nun die Dehnungszuwächse pro Zyklus berechnet, wozu aus Gründen der Vereinfachung das folgende Modell angenommen wird:

$$\dot{x} = c \dot{\epsilon}_p - \frac{2}{\sqrt{3}} |\dot{\epsilon}_p| \frac{b}{1 + \alpha_p p} x \quad 4.3.1$$

$$\dot{p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{|\dot{\epsilon}_p|}{s_{0p}} (\sqrt{2} |x| - p)$$

Bei Steuerung der Verfestigung  $x(t)$  ergeben sich aus den beiden Evolutionsgleichungen die Beziehungen

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\dot{x}}{c - v \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p} x} \quad \text{mit} \quad v = 1 \quad \text{für} \quad \dot{x} \geq 0 \quad \text{und} \quad v = -1 \quad \text{für} \quad \dot{x} < 0 \quad 4.3.2$$

$$\text{und} \quad \dot{p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\dot{y}}{s_{0p} \left( c - v \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p} x \right)} (\sqrt{2} |x| - p) \quad \text{mit} \quad y(t) = \int_0^t |\dot{x}(\tau)| d\tau, \quad 4.3.3$$

die für den Prozeß aus Abbildung 4.3.1 ausgewertet werden. Dazu wird angenommen, daß sich der Dehnungszuwachs pro Zyklus nach vielen Zyklen auf einen stationären Wert  $\Delta \epsilon_{pr}$  einstellt. Dann ist  $p$  eine periodische Funktion der Bogenlänge  $y$  der Verfestigung. Das Peri-

odizitätsintervall  $\Delta$  hat nach Abbildung 4.3.1 die Länge  $2(x_o - x_u)$  und es gilt  $p(y) = p(y + \Delta)$ , wobei  $y(t)$  durch Gl. 4.3.3 definiert wurde.

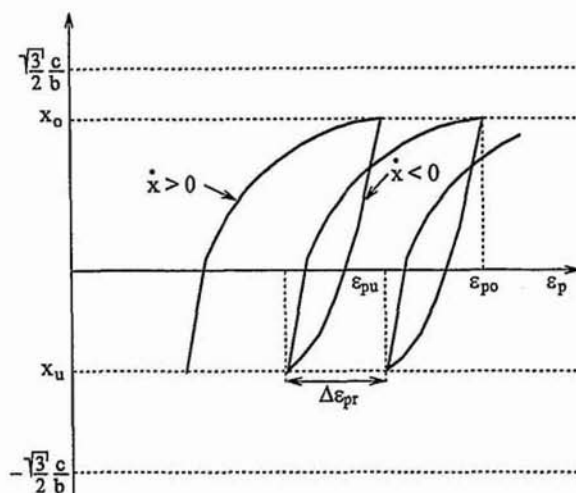


Abbildung 4.3.1.: Prozeß zur Berechnung der Dehnungsakkumulation

In Analogie zu Gl. 3.2.4.39, die für stationäre dehnungsgesteuerte Prozesse abgeleitet wurde, soll die Variable  $p$  durch ein Integral über das Periodizitätsintervall  $\Delta$  ausgedrückt werden. Dazu ergibt sich aus Gl. 4.3.3

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{s_{0p}} r'(y) p(y) = \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} r'(y) |x(y)|, \quad 4.3.4$$

wobei die Abkürzung 
$$r'(y) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left[ c - v \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p} x(y) \right]} \quad 4.3.5$$

eingeführt wurde. Multiplikation von Gl. 4.3.4 mit einem integrierenden Faktor führt auf

$$\frac{d}{dy} \left[ p(y) \exp \left[ \frac{r(y)}{s_{0p}} \right] \right] = \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \exp \left[ \frac{r(y)}{s_{0p}} \right] r'(y) |x(y)|,$$

woraus sich nach Integration das Funktional

$$p(y) = \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \int_0^y \exp \left[ -\frac{r(y) - r(u)}{s_{0p}} \right] |x(u)| r'(u) du \quad 4.3.6$$

ergibt. Die Auswertung von Gl 4.3.6 an der Stelle  $y + \Delta$  führt auf die Beziehung

$$p(y + \Delta) = \left[ p(y) + \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \int_y^{y+\Delta} \exp\left[-\frac{r(y)-r(u)}{s_{0p}}\right] |x(u)| r'(u) du \right] \exp\left[-\frac{r(y+\Delta)-r(y)}{s_{0p}}\right],$$

die unter Ausnutzung der Periodizität von  $p$  die Darstellungsformel

$$p(y) = \frac{1}{\exp\left[\frac{r(y+\Delta)-r(y)}{s_{0p}}\right] - 1} \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \int_y^{y+\Delta} \exp\left[-\frac{r(y)-r(u)}{s_{0p}}\right] |x(u)| r'(u) du \quad 4.3.7$$

liefert. Sie wird nun für  $x_0 = 0$ , d. h.  $|x(u)| = x(u)$  weiter ausgewertet: Für große Werte von  $s_{0p}$  sind die Argumente der Exponentialfunktionen in Gl. 4.3.7 wenig von Null verschieden, so daß  $p$  im Verlauf der Zyklen nur schwach um einen mittleren Wert  $p_\infty$  oszilliert. Hiermit, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von  $\dot{x}$  und unter Beachtung der Integrationsregeln für periodische Funktionen ergibt sich (siehe auch Gl. 4.3.5):

$$r(y+\Delta) - r(y) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_y^{y+\Delta} \frac{du}{c - v b_p x(u)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{b_p} \int_{c - b_p x_0}^{c + b_p x_0} \frac{du}{u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{b_p} \ln \left[ \frac{1 + b_p \frac{x_0}{c}}{1 - b_p \frac{x_0}{c}} \right] =: \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{b_p} \ln \left[ \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right]$$

$$\text{mit} \quad b_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_\infty} \quad \text{und} \quad \varepsilon = b_p \frac{x_0}{c} \quad 4.3.8$$

Für  $\varepsilon \ll 1$  ist der Wert des Logarithmus kaum verschieden von Null, so daß die beiden Exponentialfunktionen in Gl. 4.3.7 durch die ersten Glieder ihrer Taylorentwicklungen ersetzt werden dürfen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} p(y) &\approx \frac{1}{1 + \frac{r(y+\Delta)-r(y)}{s_{0p}}} \frac{\sqrt{2}}{s_{0p}} \int_y^{y+\Delta} \left[ 1 - \frac{r(y)-r(u)}{s_{0p}} \right] |x(u)| r'(u) du \approx \frac{\sqrt{2}}{r(y+\Delta)-r(y)} \int_0^\Delta |x(u)| r'(u) du \\ &= \frac{\sqrt{2} b_p}{\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon)} \int_0^{2x_0} \frac{x(u) du}{c - v b_p x(u)} = \frac{c}{b_p} \frac{\sqrt{2}}{\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon)} \int_0^{\frac{c^2}{c^2 - b_p^2 x_0^2}} \frac{dv}{v} =: p_\infty \end{aligned}$$

und schließlich

$$p_\infty = \sqrt{2} \frac{c}{b_p} \frac{\ln(1-\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon)}{\ln(1-\varepsilon) - \ln(1+\varepsilon)} = \sqrt{2} \frac{x_0}{2} \frac{2}{\varepsilon} \frac{\ln(1-\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon)}{\ln(1-\varepsilon) - \ln(1+\varepsilon)} =: \sqrt{2} \frac{x_0}{2} \Psi(\varepsilon(p_\infty)) \quad 4.3.9$$

Diese Gleichung wird nun dazu benutzt, den stationären Wert  $p_\infty$  der Variablen  $p$  zu ermitteln. Hierzu muß der Schnittpunkt der beiden Funktionen

$$y_1(p_\infty) = p_\infty \quad \text{und} \quad y_2(p_\infty) = \sqrt{2} \frac{x_0}{2} \Psi(\varepsilon(p_\infty))$$

bestimmt werden. Um die Abhängigkeit der Lösung von den Materialparametern zu studieren, muß zunächst die Funktion  $\Psi(\varepsilon)$  diskutiert werden. Durch Anwendung der l'Hospital'schen Regeln [64] ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\varepsilon) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \Psi(\varepsilon) = 2 .$$

Die Funktion  $\Psi$  ist in Abbildung 4.3.2 dargestellt. Sie ist monoton steigend, d. h.  $\frac{d\Psi}{d\varepsilon} > 0$ .

$\Psi$  [dimensionslos]

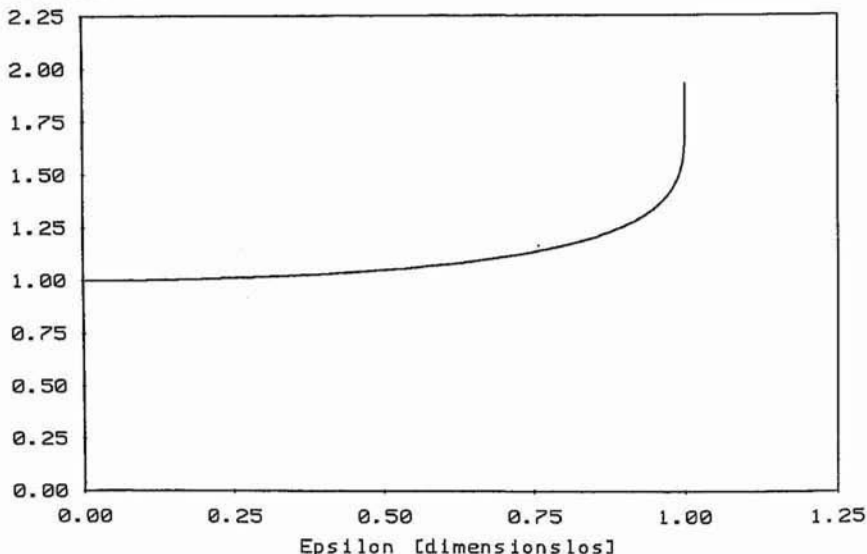


Abbildung 4.3.2.: Graph der Funktion  $\Psi$ .

Durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion  $y_2$  ergibt sich

$$\frac{dy_2}{dp_\infty} = \sqrt{2} \frac{x_0}{2} \frac{d}{dp_\infty} \Psi(\varepsilon(p_\infty)) = - \frac{d\Psi}{d\varepsilon} \frac{\alpha_p \varepsilon}{1 + \alpha_p p_\infty} .$$

Sie ist also eine monoton fallende Funktion von  $p_\infty$  und stellt die Existenz einer eindeutigen Lösung von Gl. 4.3.9 sicher (siehe Abbildung 4.3.3).

Nun wird die Abhängigkeit dieser Lösung, d. h. des Schnittpunktes von  $y_1$  und  $y_2$  von den Parametern  $b$  und  $c$  studiert: Da die Variable  $\varepsilon$  im Argument von  $\Psi$  eine monoton wachsende Funktion von  $b/c$  ist (Gl. 4.3.8), verschiebt sich die Lösung  $p_\infty$  von Gl. 4.3.9 mit fallendem  $b/c$  zu kleineren Werten (Abbildung 4.3.3), d. h. wenn das Verfestigungsmodell durch Modifikationen der Materialparameter 'versteift' werden soll, wird der stationäre Wert von  $p$  kleiner.

$y(p)$  [MPa]

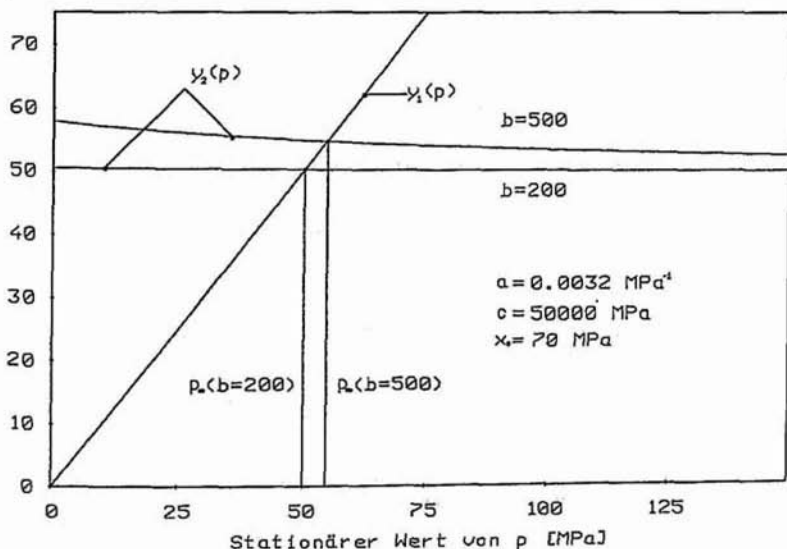


Abbildung 4.3.3.: Bestimmung des stationären Wertes von  $p$  bei Steuerung der Verfestigung  
 Nun wird der stationäre Dehnungszuwachs  $\Delta \epsilon_{pr}$  ermittelt. Dazu wird  $p_0$  in Gl. 4.3.2 eingesetzt, so daß sich

$$d\epsilon_p = \frac{dx}{c - v b_p x} \quad \text{mit} \quad b_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_0}$$

ergibt. Damit kann unter Berücksichtigung der Vorzeichen von  $\dot{x}$  und Integration über einen stationären Zyklus die Größe  $\Delta \epsilon_{pr}$  berechnet werden. Es ergibt sich

$$\Delta \epsilon_{pr} = \int_{x_u}^{x_0} \frac{dx}{c - b_p x} + \int_{x_0}^{x_u} \frac{dx}{c + b_p x} = \frac{1}{b_p} \ln \left( \frac{c^2 - b_p^2 x_u^2}{c^2 - b_p^2 x_0^2} \right) = -\frac{x_0}{c} \frac{\ln(1 - \epsilon^2)}{\epsilon}, \quad \text{für } x_u = 0,$$

wobei  $\epsilon$  in Gl. 4.3.8 definiert wurde. Da das Argument des Logarithmus für kleine Werte von  $\epsilon$  sehr nahe bei 1 liegt, wird im weiteren die für  $|\epsilon| < 1$  konvergente Reihenentwicklung

$$\ln(1 - \epsilon^2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \epsilon^{2k}$$

verwendet [75]. Damit erhält man für den Dehnungszuwachs die Beziehung

$$\Delta \epsilon_{pr} = \frac{x_0}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \epsilon^{2k-1} \approx \frac{x_0}{c} \left( \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon^3 + \frac{1}{3} \epsilon^5 + \dots \right) \quad \text{mit } \epsilon = b_p \frac{x_0}{c},$$

aus der sich für kleine Werte von  $\frac{x_0}{c}$  die Näherungsformel

$$\Delta \varepsilon_{pr} \approx \frac{x_0}{c} \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_\infty} \left( \frac{x_0}{c} \right)^2 \quad 4.3.10$$

ergibt. Damit kann die Parameterabhängigkeit von  $\Delta \varepsilon_{pr}$  untersucht werden: Zunächst wird der Fall  $\alpha_p = 0$  betrachtet. Dann ist  $\Delta \varepsilon_{pr}$  praktisch proportional zu  $b$ , d. h. um die vom Modell vorhergesagten Dehnungszuwächse zu reduzieren, müßte der Parameter  $b$  in entsprechendem Maße reduziert werden.

Diese Modifikation bleibt jedoch nicht ohne Folgen: Sie würde bei dehnungsgesteuerten Prozessen zu einer starken Überschätzung der Verfestigung führen. Dies wird deutlich, indem man die folgenden Gleichungen (siehe Gl. 3.2.4.42 - Gl. 3.2.4.44) untersucht.

$$x_\infty(b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b} \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta \varepsilon_p\right) \quad \text{für } \alpha_p = 0 \quad 4.3.11$$

$$\text{und } x(\varepsilon_p) = -x_\infty \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b (\varepsilon_p + \Delta \varepsilon_p)\right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b} \left[1 - \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}} b (\varepsilon_p + \Delta \varepsilon_p)\right]\right] \quad 4.3.12$$

Dabei stellt Gl. 4.3.11 die Abhängigkeit der Amplitude der Verfestigung von der Dehnungsmplitude  $\Delta \varepsilon_p$  dar und Gl. 4.3.12 beschreibt die Form der stationären Hysterese.

Die Beschreibung der experimentellen Hysteresen mit Gl. 4.3.12 verlangt, daß das Argument der Exponentialfunktion, also das Produkt  $b\Delta \varepsilon_p$ , nicht zu klein ist. Andernfalls entartet die Verfestigung zu einer linearen Funktion der plastischen Dehnung  $\varepsilon_p$ . Wenn das Produkt  $b\Delta \varepsilon_p$  aber eine bestimmte Größe hat, dann hängt der hyperbolische Tangens in Gl. 4.3.11 nur schwach von  $b$  ab. Wird in diesem Fall der Parameter  $b$  durch einen um  $\delta$  reduzierten Wert ersetzt, dann ändert sich auch das Maximum der Verfestigung. Es gilt

$$x_\infty\left(\frac{b}{\delta}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c}{b/\delta} \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{\delta} \Delta \varepsilon_p\right) = \delta x_\infty(b) \frac{\tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{\delta} \Delta \varepsilon_p\right)}{\tanh\left(\frac{2}{\sqrt{3}} b \Delta \varepsilon_p\right)},$$

$$\approx \delta x_\infty(b) \quad \text{für große Werte von } b\Delta \varepsilon_p,$$

d. h.  $x_\infty$  hängt praktisch linear von  $\delta$  ab. Die Verfestigung würde demnach stark überschätzt, wenn  $b$  zur Darstellung des Ratchettingverhaltens modifiziert würde.

Eine weitere Möglichkeit zur Verringerung von  $\Delta \varepsilon_{pr}$  besteht nach Gl. 4.3.10 in einer Vergrößerung des Materialparameters  $c$ . Dabei gilt zwar  $\Delta \varepsilon_{pr} \sim 1/c^2$ , jedoch hängt die Amplitude der Hysterese nach Gl. 4.3.11 und Gl. 4.3.12 linear von  $c$  ab. Dies würde ebenso zu einer Überschätzung der Verfestigung bei Dehnungssteuerung führen.

Auf dieser Basis kann der Fall  $\alpha_p > 0$  untersucht werden. Dann beeinflusst die Variable  $p$  das Verhalten des Modells. Zuvor wurde gezeigt, daß der stationäre Wert  $p_\infty$  bei Steuerung von  $x$  monoton vom Verhältnis  $b/c$  der Parameter abhängt. Wenn das Modell also 'versteift' werden soll, was einer Verringerung von  $b/c$  entspricht, wird  $p_\infty$  kleiner. Dann hängt nach Gl. 4.3.10 der Dehnungszuwachs  $\Delta \varepsilon_{pr}$  schwach unterlinear von  $b$  bzw.  $1/c^2$  ab, so daß das Verhalten der Variablen  $p$  der 'Versteifung' entgegenwirkt.

Nun wird die Parameterabhängigkeit für  $\alpha_p > 0$  bei dehnungsgesteuerten Prozessen untersucht. Die Gleichungen, die das stationäre Verhalten darstellen, wurden in Abschnitt 3.2.4 abgeleitet. Sie lauten

$$x_\infty = \frac{c}{b_p} \tanh(b_p \Delta \varepsilon_p) \quad \text{für } \alpha_p > 0 \quad b_p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{b}{1 + \alpha_p p_\infty} \quad 4.3.13$$

$$p_\infty = \sqrt{2} \frac{c}{b_p} \left[ 1 - \frac{\tanh(b_p \Delta \varepsilon_p)}{b_p \Delta \varepsilon_p} \right] =: \Phi(p_\infty) \quad 4.3.14$$

und 
$$x(\varepsilon_p) = -x_\infty \exp[-b_p (\varepsilon_p + \Delta \varepsilon_p)] + \frac{c}{b_p} \left[ 1 - \exp[-b_p (\varepsilon_p + \Delta \varepsilon_p)] \right] \quad 4.3.15$$

Dabei dient Gl. 4.3.14 zur näherungsweise Berechnung von  $p_\infty$  bei Dehnungssteuerung (siehe Abbildung 3.2.4.6) und Gl. 4.3.13 und Gl. 4.3.15 beschreiben die Amplitude und die Form der stationären Hysteresis.

Zur Bestimmung und zur Analyse der Parameterabhängigkeit von  $p_\infty$  wird ähnlich wie oben verfahren. Dazu wird der Schnittpunkt der Funktionen  $y_1 = p_\infty$  und  $y_2 = \Phi(p_\infty)$  grafisch ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.3.4 aufgetragen.

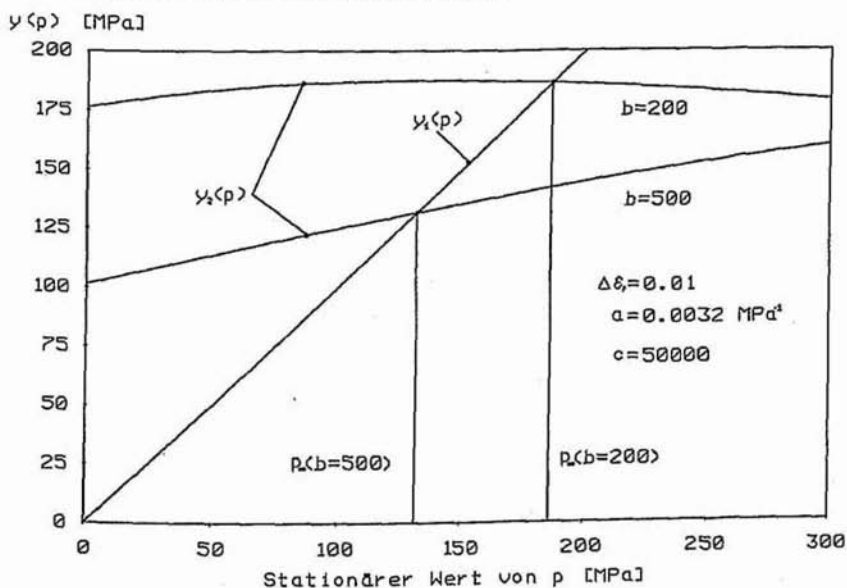


Abbildung 4.3.4.: Bestimmung des stationären Wertes von  $p$  bei Dehnungssteuerung

Man erkennt, daß  $p_\infty$  bei dehnungsgesteuerten Prozessen mit abnehmendem  $b$  größer wird. Entsprechendes gilt nach Gl. 4.3.14 auch für wachsendes  $c$ . Dies führt dazu, daß die Verfesti-

gung, wenn die Parameter  $b$  und  $c$  zur Darstellung des Ratchettingverhaltens modifiziert würden, noch stärker überschätzt würde als für  $\alpha_p = 0$ .

Durch verallgemeinerte Verfestigungsmodelle vom Armstrong - Frederick - Typ, die nach Einführung der inneren Variablen  $p$  die Darstellung des zyklischen Verfestigungsverhaltens bei dehnungsgesteuerten Prozessen ermöglichen, kann die Dehnungsakkumulation bei spannungsgesteuerten Prozessen nicht dargestellt werden.

#### 4.4. Schlußfolgerung

Materialmodelle der Viskoplastizität, die Materialantworten auf komplexe Belastungsprozesse qualitativ und quantitativ zutreffend wiedergeben sollten, müssen grundsätzlich eine größere Zahl von Materialparametern enthalten. Das vorliegende Modell enthält zur Darstellung des viskoplastischen Verhaltens bei Raumtemperatur maximal 21 Parameter. Unter Verzicht auf feinere Details im Zusammenhang mit der Nichtradialität, der zyklischen Entfestigung und der Geschwindigkeitsabhängigkeit kommt man mit 9 Parametern aus. Zur Identifikation der Materialparameter wird eine Datenbasis benötigt, die aus monotonen und zyklischen Experimenten mit und ohne Haltezeiten abzuleiten ist.

Bei der mathematischen Darstellung der Viskoplastizität wurde auf einen klaren und möglichst einfachen Aufbau des Materialmodells besonderer Wert gelegt: A priori wurde der gesamte Spannungszustand additiv in Gleichgewichts- und Überspannungsanteile zerlegt, die voneinander unabhängig modellierbar sind.

Die physikalische Nichtlinearität wurde beim Überspannungsanteil mit der Maßstabsfunktion und beim Gleichgewichtsanteil im wesentlichen durch das Konzept der verallgemeinerten Bogenlänge berücksichtigt. Ein weiteres Merkmal des Gleichgewichtsanteils ist die weitgehend entkoppelte Modellierung der nichtradialen Effekte.

Eine Folge der relativ einfachen bzw. übersichtlichen Struktur des Modells ist die Möglichkeit, durch analytische Lösungen bzw. Näherungslösungen die physikalische Aussagekraft des Modells insgesamt zu erkennen, sowie auch die physikalische Bedeutung einzelner Materialparameter abzuschätzen. Dies erleichtert insbesondere den Prozeß ihrer quantitativen Ermittlung (Identifikation).

Zum Abschluß der vorausgegangenen Untersuchungen haben die Modellrechnungen des Abschnitts 4.2.1 den Erfolg der Parameteridentifikation gezeigt, der aus der Gegenüberstellung der Resultate des 'Curve - Fitting' mit den experimentellen Daten ersichtlich ist. Die Antwort auf die Frage, ob eine ausreichende Kurvenanpassung überhaupt existiert, hängt selbstverständlich entscheidend von der Struktur des gewählten Materialmodells ab.

Die Aufgabe der Materialtheorie beschränkt sich nicht nur auf die bloße Wiedergabe der experimentellen Daten. Das ideale Ziel ist die Modellierung des Materialverhaltens insgesamt. Dazu ist sicherzustellen, daß ein Materialmodell auch Vorhersagen treffen kann, eine Eigenschaft, die an die Struktur des Modells noch wesentlich höhere Anforderungen stellt. Der

strukturelle Aufbau des in dieser Arbeit weiterentwickelten Materialmodells wurde in der Hoffnung gewählt, breitere Möglichkeiten für eine Vorhersage von Phänomenen der Inelastizität zu schaffen. Die Ergebnisse des Abschnitts 4.2.2 können vielleicht als erste Erfolge in der Frage der Vorhersage angesehen werden. Zu einer vollständigen Verifikation des Materialmodells wären allerdings noch viele weitere Untersuchungen theoretischer, experimenteller und numerischer Art notwendig. Diese sollten sich wahrscheinlich in erster Linie auf das Materialverhalten unter nichtradialen Belastungen beziehen.

## 5. Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden im wesentlichen vier Schwerpunkte behandelt, die durch die folgenden Stichworte bezeichnet werden können:

- Experimentelle Ermittlung der Materialeigenschaften von XCrNi18.9
- Konstruktion eines Materialmodells zur Darstellung des Materialverhaltens
- Identifikation der Materialparameter
- Verifikation der Materialtheorie

1) Die experimentellen Untersuchungen werden bei Raumtemperatur an dünnwandigen Rohrproben mit kreiszylindrischem Querschnitt durchgeführt. Dazu werden monotone und zyklische, spannungs- und dehnungsgesteuerte Torsions- und Zug / Druckversuche sowie kombinierte Versuche gefahren.

Bei monotonen Belastungen ist zu beobachten, daß die Kennlinien von der Belastungsgeschwindigkeit abhängen und daß diese sogenannte *Geschwindigkeitsabhängigkeit* stark unterlinear ist.

Während der Unterbrechung solcher Prozesse durch Haltezeiten bei konstanter Dehnung werden Relaxationsvorgänge beobachtet. Bei hinreichend langen Haltezeiten dürfen die Abbruchpunkte dieser Vorgänge als Gleichgewichtszustände interpretiert werden. Die Kurve, auf der sie sich befinden, wird als *Gleichgewichtskennlinie* bezeichnet und für ihre Differenz zur aktuellen Spannung der Begriff der *Überspannung* eingeführt. Diese wird im Fall konstanter Belastungsgeschwindigkeiten bei großen Dehnungen stationär.

Die Unterbrechung spannungsgesteuerter Prozesse durch Haltezeiten zeigt, daß Gleichgewichtszustände auch durch Kriechvorgänge erreichbar sind. Die Zeit bis zum Erreichen der Gleichgewichtszustände ist allerdings um ein Vielfaches größer als bei Relaxationsvorgängen, so daß zur experimentellen Untersuchung der Gleichgewichtseigenschaften von XCrNi18.9 ausschließlich dehnungsgesteuerte Belastungen mit Haltezeiten gewählt werden.

Zyklische Experimente, die in diesem Sinne durchgeführt werden, führen zu folgenden Aussagen: Während der Belastung wird ein monotoner Anwachsen der Spannungsamplitude mit der Zyklenzahl festgestellt, wobei sich nach etwa 20 Zyklen eine stationäre Hysterese eingestellt hat. Dieses Verhalten wird als *zyklische Verfestigung* bezeichnet. Die zu dieser stationären Hysterese gehörigen Abbruchpunkte der Relaxationsvorgänge liegen auch auf einer Hystereseschleife, der sogenannten *Gleichgewichtshysterese*. Ein Vergleich dieser Relaxationsvorgänge mit den entsprechenden, die zu monotonen Prozessen gehören zeigt, daß die stationären Überspannungen jeweils gleich sind. Sie sind damit unabhängig von der Belastungsgeschichte, so daß die zyklische Verfestigung der Gleichgewichtsspannung zuzuordnen ist.

Bei zyklischen spannungsgesteuerten Prozessen mit von Null verschiedener Mittelspannung wird ein monotoner Anwachsen der mittleren Dehnung mit der Zyklenzahl beobachtet, das in Richtung der Mittelspannung geht. Dieses Phänomen wird als *Ratchetting* bezeichnet, wobei

herausgefunden wird, daß es einen physikalischen Zusammenhang zwischen der Ursache der Dehnungsakkumulation und der Größe der Spannungsamplitude gibt. Bei kleinen Spannungsamplituden treten im Verlauf der Zyklen nur monotone plastische Deformationen auf und das Ratchetting wird wesentlich vom Verhalten der Überspannung bestimmt. Wenn die Spannungsamplituden groß gegenüber den Abmessungen des elastischen Bereiches sind, dann treten auch nichtmonotone plastische Belastungen auf und die Dehnungsakkumulation ist wesentlich stärker ausgeprägt.

Bei nichtradialen dehnungsgesteuerten Prozessen wird eine zyklische Verfestigung beobachtet, die ähnlich wie bei Torsionsbelastungen nach etwa 20 Zyklen in eine Sättigung gerät. Diese sogenannte *nichtradiale Verfestigung* ist allerdings erheblich größer als bei vergleichbaren eindimensionalen Prozessen. Außerdem hängt sie stark von der Form der Belastungstrajektorie ab.

2) Zur mathematischen Modellierung des Materialverhaltens wird davon ausgegangen, daß sich die Spannung additiv aus einer Gleichgewichts- und einer Überspannung zusammensetzt. Weitere Experimente zeigen, daß die stationäre Gleichgewichtshysterese bei zyklischen Prozessen nicht davon abhängt, welche Verzerrungsgeschwindigkeiten gewählt werden. Damit kann das Verhalten der Gleichgewichtsspannung mathematisch durch ein *geschwindigkeitsunabhängiges Funktional* dargestellt werden. Hierfür wird ein Modell der klassischen Plastizitätstheorie mit Fließfläche gewählt, wobei das Verhalten der zyklischen Verfestigung durch ein modifiziertes Verfestigungsmodell vom Armstrong - Frederick - Typ dargestellt wird [25]. Das Verhalten der Verfestigung unter nichtradialen Belastungen wird durch Einführung eines additiven Zusatzbeitrags zur kinematischen Verfestigung beschrieben. Die treibende Kraft für die Zusatzverfestigung ist ein nichtradialer Anteil der plastischen Dehnrate.

Während das Verhalten der Gleichgewichtsspannung mathematisch einem geschwindigkeitsunabhängigen Funktional der Gesamtverzerrung entspricht, beschreibt das Funktional der Überspannung die geschwindigkeitsabhängigen Materialeigenschaften. Hierfür wird ein Modell konstruiert, das die unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit durch eine prozeß- bzw. spannungsabhängige Relaxationszeit darstellt [24, 46, 68].

3) Zur Identifikation der Materialparameter wird das Verfahren der Evolutionsstrategie gewählt [65, 66, 67]. Dabei werden die Materialgleichungen für ausgewählte Prozesse und eine Vielzahl von Parametersätzen, die entsprechend der Evolutionsstrategie erzeugt werden, numerisch integriert. Die Lösungen werden mit den Meßdaten verglichen. Der Parametersatz, der im Rahmen eines zugrundegelegten Qualitätsmaßes die beste Übereinstimmung zwischen Modellrechnung und Experiment liefert, wird als endgültiger Materialparametersatz bezeichnet. Bei der Anwendung dieses Verfahrens wird die allgemeine Struktur des Materialmodells ausgenutzt: Die Modellierungen der Gleichgewichtsspannung und der Überspannung sind voneinander unabhängig, was die Möglichkeit der unabhängigen Identifikation der Materialparameter zur Folge hat. Die Parameter des Funktionals der Überspannung werden anhand

monotoner Torsionsversuche mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten ermittelt und die des Funktionals der Gleichgewichtsspannung anhand der Gleichgewichtshysterese bei Torsionsbelastungen und speziellen zweidimensionalen Belastungen (dehnungsgesteuerte Kreise).

4) Zur Veranschaulichung des Erfolgs der Identifikation werden zunächst Modellrechnungen für die Prozesse durchgeführt, die der Parameteridentifikation als Grundlage gedient haben. Dazu kann gesagt werden, daß das Modell mit den quantitativ identifizierten Parametern alle beobachteten Phänomene in angemessener Weise wiedergibt. Dies bezieht sich auf die unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit bei monotonen spannungs- und dehnungsgesteuerten Torsionsbelastungen, sowie auf das Verhalten der Verfestigung bei dehnungsgesteuerten zyklischen eindimensionalen und speziellen zweidimensionalen Prozessen.

Anschließend werden Modellrechnungen zu solchen Prozessen durchgeführt, die nicht zur Identifikation der Parameter beigetragen haben und damit einen gewissen Vorhersagecharakter haben. Dies waren monotone Zugbelastungen mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten, zyklische Zug / Druckbelastungen sowie weitere Torsionsbelastungen unter Dehnungssteuerung, zyklische Torsionsbelastungen unter Spannungssteuerung (Ratchetting) und zweidimensionale Prozesse mit veränderlicher Nichtradialität (Quadrat, Sanduhr). Dazu kann zusammenfassend festgestellt werden, daß auch diese Prozesse qualitativ richtig und quantitativ im wesentlichen richtig wiedergegeben werden. Im einzelnen bedeutet dies, daß das Materialverhalten unter dehnungsgesteuerten Zug / Druck- und Torsionsbelastungen qualitativ und quantitativ richtig vorhergesagt wird. Bei zyklischen Torsionsprozessen unter Spannungssteuerung wird die Dehnungsakkumulation bei kleinen Spannungsintervallen leicht und bei größeren Spannungsintervallen stärker überschätzt. Das Materialverhalten wird ansonsten qualitativ richtig dargestellt. Bei zweidimensionalen Belastungen mit veränderlicher Nichtradialität wird die Form der stationären Spannungstrajektorien qualitativ richtig vorhergesagt. Die Spannungen selbst werden bei Prozessen mit schwach veränderlicher Nichtradialität leicht überschätzt und bei stärker veränderlicher Nichtradialität etwas unterschätzt.

## 6. Literatur

- [1] L. E. Malvern: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice - Hall, New Jersey, 1969.
- [2] O. T. Bruhns: *Neue Materialgleichungen der Plastomechanik*, ZAMM, Z. angew. Math. Mech., Vol. 74, 4 - 5, pp. 6 - 19, 1993.
- [3] M. Korzen: *Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch - plastischen Typ*, Dissertation, Darmstadt, 1988.
- [4] P. Haupt: *On the Mathematical Modeling of Material Behavior*, Acta Mechanica, 1993.
- [5] J. L. Chaboche: *Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity*, International Journal of Plasticity, Vol. 5, pp. 247 - 302, 1989.
- [6] J. L. Chaboche: *Time - Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity*, International Journal of Plasticity, Vol. 2, pp. 149 - 188, 1986.
- [7] E. Krempl: *An Experimental Study of Room - Temperature Rate - Sensitivity, Creep and Relaxation of AISI Type 304 Stainless Steel*, J. Mech. Solids, Vol. 27, No. 4, pp. 363 - 375, 1979.
- [8] E. Krempl: *V. Kallianpur, Some Critical Uniaxial Experiments for Viscoplasticity at Room Temperature*, J. Mech. Solids, Vol. 32, No. 4, pp. 301 - 314, 1984.
- [9] D. Kujawski, E. Krempl, V. Kallianpur: *An Experimental Study of Uniaxial Creep, Cyclic Creep and Relaxation of AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature*, J. Mech. Solids, Vol. 28, pp. 129 - 148, 1980.
- [10] O. T. Bruhns, T. Lehmann, A. Pape: *On the Description of Transient Cyclic Hardening Behaviour of Mild Steel CK 15*, International Journal of Plasticity, Vol. 8, pp. 331 - 359, 1992.
- [11] J. L. Chaboche, K. Dang Van, G. Cordier: *Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel*. Transactions of the 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 1979, North - Holland Publishing Company for the Commission of the European Communities.
- [12] N. Ohno: *A Constitutive Model of Cyclic Plasticity With a Nonhardening Strain Region*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 721 - 727, 1982.
- [13] T. Hassan, S. Kyriakides: *Ratchetting in Cyclic Plasticity, Part 1: Uniaxial Behavior*, International Journal of Plasticity, Vol. 8, pp. 91 - 116, 1992.
- [14] D. L. Jones, A. M. El - Assal: *Experimental Study of Strain Rate Sensitivity of Two Engineering Materials, Developments in Production Engineering, Design and Control*, Fourth Alexandria University PEDAC, Alexandria, Dec. 27 - 29, 1989.

- [15] M. B. Ruggles, E. Krempl: The Interaction of Cyclic Hardening and Ratchetting for AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature - 1. Experiments, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, pp. 575 - 585, 1990.
- [16] M. B. Ruggles, E. Krempl: The Influence of Test Temperature on the Ratchetting Behavior of AISI Type 304 Stainless Steel, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 378 - 383, 1989.
- [17] J. L. Chaboche, D. Nouailhas: Constitutive Modeling of Ratchetting Effects - Part 1: Experimental Facts and Properties of the Classical Models, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 384 - 392, 1989.
- [18] E. Krempl, H. Lu: The Hardening and Rate- Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial In - Phase and Out - of - Phase Strain Cycling at Room Temperature, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 106, pp. 376 - 382, 1984.
- [19] A. Pape: Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells, Dissertation, Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, 1988.
- [20] E. Tanaka, S. Murakami, M. Oaka: Effects of Plastic Strain Amplitudes on Non - Proportional Cyclic Plasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 57, pp. 167 - 182, 1985.
- [21] A. Benallal, P. Le Gallo, D. Marquis: An Experimental Investigation of Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel and of 2024 Aluminium Alloy Under Multiaxial Loadings, *Nuclear Engineering and Design* Vol. 114, pp. 345 - 353, 1989.
- [22] A. Benallal, D. Marquis: Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto - Viscoplasticity, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 109, pp. 326 - 336, 1987.
- [23] P. Haupt, M. Korzen: On the Mathematical Modeling of Material Behavior in Continuum Mechanics, *Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials*, F. Jing hong, S. Marakami, Chongqing, China, Pergamon Press Kronberg, 456 - 459, 1989.
- [24] P. Haupt, A. Lion: Experimental Identification and Mathematical Modeling of Viscoplastic Material Behavior, zur Veröffentlichung angenommen, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*.
- [25] P. Haupt, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis: Continuous Representation of Hardening Properties in Cyclic Plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 8, pp. 803 - 817, 1992.
- [26] E. Becker, W. Bürger: *Kontinuumsmechanik*, Teubner Studienbücher Stuttgart, 1975.
- [27] G. Schneider: Entwurf einer Einspannvorrichtung für zylindrische Voll- und Hohlproben, Diplomarbeit, Kassel, 1985
- [28] P. Haupt, A. Lion: Experimentelle Identifikation von Materialparametern zur Darstellung des inelastischen Materialverhaltens, DFG - Forschungsbericht IID4 - HA 767/10 - 1, Institut für Mechanik Kassel, Mitteilung Nr. 9, 1992.

- [29] M. Tischer: *PC Intern, Data Becker*, 1988.
- [30] E. Krempl: Models of Viscoplasticity, Some Comments on Equilibrium (Back) Stress and Drag Stress, *Acta Mechanica*, Vol. 69, pp 25 - 42, 1987.
- [31] D. L. Jones, A. M. El - Assal: Strain and Strain - Rate History Effect on the Dual Rate Tensile Response of two Engineering Materials, 3rd Int. Ain Shams Univ. Conf. on Prod. Eng. and Des. for Development, Cairo, Dec, 29 - 29, 1990.
- [32] F. Jinghong, P. Xianghe: A Physically Based Constitutive Description for Nonproportional Cyclic Plasticity, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 113, pp. 254 - 262, 1991.
- [33] Y. Takahashi, T. Ogata: Description of Nonproportional Cyclic Plasticity by a Two Surface Model, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 58, pp. 623 - 630, 1991
- [34] A. Benallal, P. Le Gallo, D. Marquis: The Role of Mean Strain in Cyclic Plasticity, *Proceedings of Plasticity '89, Second International Symposium on Plasticity and its Current Applications*, Pergamon Press, 1989.
- [35] J. Olschewski, R. Sievert, A. Bertram: A Comparison of the Predictive Capabilities of Two Unified Constitutive Models at Elevated Temperatures, *Proceedings of the Third International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, ASME Press New York, 1991.
- [36] D. Kujawski, E. Krempl: The Rate (Time) - Dependent Behavior of Ti-7Al-2Cb-1Ta Titanium Alloy at Room Temperature Under Quasi - Static Monotonic and Cyclic Loading, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 55 - 63, 1981.
- [37] E. Krempl, H. Lu: Comparison of the Stress Responses of an Aluminium Alloy Tube to Proportional and Alternate Axial and Shear Strain Paths at Room Temperature, *Mechanics of Materials*, Vol. 2, pp. 183 - 192, 1983.
- [38] J. L. Chaboche, D. Nouailhas, D. Pacou, P. Paulmier: Modeling of the Cyclic Response and Ratchetting Effects on INCONEL-718 Alloy, *Eur. J. Mech, A/Solids*, pp. 101 - 121, 1991.
- [39] S. R. Bodner, Y. Partom: Constitutive Equations for Viscoplastic Strain - Hardening Materials, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 395 - 389, 1975.
- [40] Z. Xia, F. Ellyn: Nonproportional Multiaxial Cyclic Experiments and Constitutive Modeling, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 317 - 325, 1991.
- [41] A. Benallal, D. Marquis: Effects of Non - Proportional Loadings in Cyclic Elasto - Viscoplasticity: Experimental, Theoretical and Numerical Aspects, *Eng. Comput.* Vol. 5, pp. 241 - 247, 1988.
- [42] K. C. Valanis: A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface, Part 2. *Archives of Mechanics* Vol. 23, 4, pp. 535 - 551, 1971.
- [43] A. C. Pipkin, R. S. Rivlin: Mechanics of Rate - Independent Materials, *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 16, pp 313 - 326, 1965.

- [44] C. Truesdell: The Elements of Continuum Mechanics, Springer - Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.
- [45] J. C. Tsou, D. J. Quesnel: Internal Stress Measurements during the Saturation Fatigue of Polycrystalline Aluminium, Materials Science and Engineering Vol. 56, 289 - 299, 1982.
- [46] P. Haupt, M. Korzen: On the Mathematical Modeling of Material Behavior in Continuum Mechanics, Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials, F. Jing hong, S. Marakami, Chongqing, China, Pergamon Press Kronberg, 456 - 459, 1989.
- [47] C. Truesdell, W. Noll: Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik III/2, S. Flügge, Springer Verlag Berlin, 1965.
- [48] Th. Lehmann, B. Raniecki, W. Trampczynski: The Bauschinger Effect in Cyclic Plasticity, J. Mech., Vol. 37, pp. 643 - 659, 1985
- [49] P. J. Armstrong, C. O. Frederick: A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, G.E.G.D. Report RD/D/N 731, 1966.
- [50] J. L. Chaboche, G. Rousselier: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations, Part I and Part II, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, pp. 153 ff, 1983.
- [51] J. L. Chaboche: On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects, International Journal of Plasticity, Vol. 7, pp. 661 - 678, 1991.
- [52] G. W. Ehrenstein: Polymerwerkstoffe - Struktur und mechanisches Verhalten, Hanser Verlag München Wien, 1978.
- [53] D. K. Felbeck, A. G. Atkins: Strength and Fracture of Engineering Solids, Prentice Hall Englewood, 1984.
- [54] A. C. Pipkin: Lectures on Linear Viscoelasticity, Springer Verlag New York Berlin Heidelberg, 1972
- [55] Bridgman: The Large Deformation of Solids Under High Hydrostatic Stress, Handbuch der Physik, Mechanics of Solids I, S. Flügge, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [56] J. F. Bell: On Experiments leading toward a General Theory of Plasticity for the Loading Response of Annealed Crystalline Solids, Mechanics of Solids I, S. Flügge, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [57] A. Il'ushin: On the Postulate of Plasticity, J. Appl. Math. Mech., Vol. 25, Nr. 3, pp. 503 - 507, 1961.
- [58] D. C. Drucker: On the Postulate of Stability of Material in the Mechanics of Continua, Journal de Mecanique, Vol. 3 Nr. 2, pp. 235 - 249, 1964
- [59] S. Kalinsky: Plastizitätslehre, VDI - Verlag GmbH, 1984.
- [60] E. Krempl, S. H. Choi: Viscoplasticity Based on Overstress: The Modeling of Ratchetting and Cyclic Hardening of AISI Type 304 Stainless Steel, Nuclear Engineering and Design, Vol. 133, pp. 401 - 410, 1992.

- [61] C. Guionnet: Modeling of Ratchetting in Biaxial Experiments, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 114, pp. 56 - 61, 1992
- [62] H. S. Lamba, O. M. Sidebottom: Cyclic Plasticity for Nonradial Paths: Part I - Cyclic Hardening, Erasure of Memory, and Subsequent Strain Hardening Experiments, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 100, pp. 96 - 103, 1978
- [63] D. Yao, E. Krempl: Viscoplasticity based on Overstress. The Prediction of Monotonic and Cyclic Proportional and Nonproportional Loading Paths of an Aluminium Alloy, *International Journal of Plasticity*, Vol. 1, pp. 259 - 274, 1985.
- [64] C. Burg, H. Haf. F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1, Analysis, Teubner Verlag Stuttgart, 1989.
- [65] L. Schreiber: Parameteridentifikation bei Stoffmodellen mit der Evolutionsstrategie, *Z. angew. Math. Mech*, Vol. 73, 4 - 5, pp. 343 - 345, 1993.
- [66] I. Rechenberg: Evolutionsstrategie, Friedrich Fromman Verlag Stuttgart - Bad Cannstadt, 1973
- [67] A. Scheel: Beitrag zur Theorie der Evolutionsstrategie, Dissertation, TU Berlin, 1985
- [68] P. Haupt, L. Schreiber, A. Lion: Experimentelle Untersuchung des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens bei nichtradialen Belastungen, *Z. angew. Math. Mech*, Vol. 73, 4 - 5, pp. 325 - 325, 1993
- [69] E. Krempl, M. B. Ruggles: The Interaction of Cyclic Hardening and Ratchetting for AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature II. Modeling With the Viscoplasticity Theory Based on Overstress, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, pp. 587 - 597, 1990.
- [70] J. L. Chaboche, D. Nouailhas: Constitutive Modeling of Ratchetting Effects - Part II: Possibilities of Some Additional Hardening Rules, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 409 - 416, 1989.
- [71] J. L. Chaboche: On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects, *International Journal of Plasticity*, Vol. 7, pp. 661 - 678, 1991
- [72] J. L. Chaboche, D. Nouailhas: A Unified Constitutive Model for Cyclic Viscoplasticity and its Applications to various Stainless Steels, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, pp. 424 - 430, 1989.
- [73] G. Rousselier, J. J. Engel, J. C. Masson: Etude Comparative de Modeles de Comportement Pour la Simulation d'Essays un Traction - Pression sur Tubes en Acier Inoxydable, Document EDF - DER, Annexe de Rapport Nr. 8 du GIS Rupture a Chaud, 1985.
- [74] Ch. Tsakmakis: Über Inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen, Dissertation, TH Darmstadt, 1987.
- [75] M. C. Liu, E. Krempl: A Uniaxial Viscoplastic Model Based on Total Strain and Overstress, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 377 - 391, 1979

- [76] E. Krempl, J. J. Mc Mahon, D. Yao: Viscoplasticity Based on Overstress With a Differential Growth Law for the Equilibrium Stress, *Mechanics of Materials*, Vol. 5, pp. 35 - 48, 1986.
- [77] P. Haupt: Viskoelastizität und Plastizität - Thermomechanisch konsistente Materialgleichungen, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [78] C. J. Fazio: Eine Untersuchung der Grundlagen der endochronen Plastizitätstheorie und ihre Übertragung auf große Deformationen, sowie ein Vergleich mit herkömmlichen Plastizitätstheorien, Dissertation, TH Darmstadt, 1987.
- [79] P. Delobelle, R. Lachat: Viscoplastic Behavior and Modelization of an Austenitic Stainless Steel (17-12 SPH) at High Temperature ( $T = 600\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), Under In and Out of Phase Cyclic Tension - Torsion Loading, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 115, pp. 68 - 76, 1993.
- [80] U. Kikillus: Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15, Dissertation Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 84, 1993.
- [81] H. Diehl: Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder, Dissertation, Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, 1989.
- [82] E. Steck: A Stochastic Model for the High Temperature Plasticity of Metals, *International Journal of Plasticity*, pp. 243 - 258, 1985.
- [83] B. Bischoff-Beiermann: Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Molekülanisotropie, Dissertation Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 82, 1992.
- [84] J. Betten: Elastizitäts- und Plastizitätslehre, Vieweg Verlag Braunschweig, 1985.
- [85] T. Lösche, Zur Entwicklung eines Werkstoffgesetzes für die Hochtemperaturplastizität über einen Marvov-Prozeß, Dissertation TU Braunschweig, 1985.
- [86] O. T. Bruhns, U. Kikillus: Cyclic Creep of Carbon Steel Ck 15: Experiments and Constitutive Modeling, Fourth International Symposium on Plasticity and its Current Applications, July 19 - 23, 1993, erscheint in A. S. Khan, *Proceedings of Plasticity '93*.