

**Mechanische Materialeigenschaften von Polymerwerkstoffen
am Beispiel Polyamid 6.6**

**Experimentelle Untersuchungen,
physikalische Modellbildung und
numerische Parameteridentifikation**

Vom Fachbereich Maschinenbau der
Universität Gesamthochschule Kassel
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte
Dissertation

von

M.Sc. Federico Hübscher

Kassel, Februar 1997

Referent:

Prof. Dr.-Ing. P. Haupt

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. A. Bledzki

Tag der Einreichung:

27. Februar 1997

Tag der mündlichen Prüfung:

9. Mai 1997

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Gesamthochschule Kassel

Berichte des Instituts für Mechanik (Bericht 2/1997)

Verlag

Gesamthochschul-Bibliothek
Diagonale 10
34127 Kassel

ISBN 3-88122-905-1

Organisation und Verwaltung

S. Hartmann
Institut für Mechanik
Universität Gesamthochschule Kassel
Mönchebergstraße 7
34109 Kassel

©

1997

Federico Hübscher
Institut für Mechanik
Universität Gesamthochschule Kassel
34109 Kassel

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Für Maria Adela und Federico Raul

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Gesamthochschule Kassel. Allen Mitgliedern des Instituts bin ich für die Unterstützung zur Realisierung dieser Arbeit dankbar.

Besonders möchte ich meinen Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Haupt für seine ausgezeichnete Betreuung aussprechen. Durch seine ständige Bereitschaft zur wissenschaftlichen Diskussion und durch die Übernahme des Hauptreferats wurde ich von ihm gefördert und unterstützt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Bledzki gilt mein Dank für die Bereitstellung der Einrichtungen des Instituts für Kunststoff- und Recyclingtechnik, für sein Interesse an dieser Arbeit, und nicht zuletzt für die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Herzlich bedanke ich mich bei meinem Zimmerkollegen Dr.-Ing. A. Lion, der ein Wegbereiter gewesen ist, für äußerst fruchtbare wissenschaftliche Anregungen und Diskussionen. Darüber hinaus danke ich ihm für seinen beharrlichen Beistand, welcher den Abschluß dieser Arbeit erheblich erleichterte.

Den Herren G. Linek und W. Zugreif danke ich für die Unterstützung im Labor. Herrn K. Farr danke ich für die EDV Unterstützung.

Für das gute Arbeitsklima und auch für nicht-wissenschaftliche Unterhaltungen bei einem Kaffee oder Bier danke ich den Kollegen A. Lion, L. Schreiber, M. Kamlah, S. Hartmann, G. Lührs, G. Gloth, M. Horz, K. Sedlan, D. Helm, J. Belz, F. Reuter, T. Kreuzinger-Janik, C. Klöhn, M. Hohlrieder, G. Schneider ebenso den Sekretärinnen S. Blum, C. Ellrich und J. Kurth.

Meinen Eltern und Großeltern danke ich für die zusätzliche Unterstützung.

Meiner Frau Ana bin ich für ihre aufmerksame und stets begleitende Liebe zu Dank verpflichtet.

Federico Hübscher

Inhaltsverzeichnis

Resümee	
1. Einleitung	1
2. Experimentelle Untersuchungen	5
2.1 Idealisierungen	5
2.2 Experimenteller Aufbau	11
2.3 Zug/Druck-Experimente an Polyamid 6.6	12
2.4 Zusammenfassende Interpretation der Experimente	44
3. Physikalische Modellbildung	46
3.1 Elementare Theorie des Materialverhaltens	46
3.2 Rheologische Grundmodelle	47
3.3 Das viskoelastische Verhalten	48
3.4 Modellbildung durch degenerierte rheologische Modelle mit Nicht-Newtonschen Dämpfern	99
3.4.1 Das nichtlineare viskoelastische Modell	102
3.4.2 Das viskoplastische Modell ohne Fließfläche	105
4. Numerische Ergebnisse	108
4.1 Identifikation der Materialparameter	108
4.2 Ein Materialparametersatz für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität	111
4.2.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten	112
4.2.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens	115
4.3 Ein weiterer Satz der Überspannungsparameter für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität	132
4.3.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten	133
4.3.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens	137
4.4 Ein Materialparametersatz für das Modell der Viskoplastizität ohne Fließfläche	152
4.4.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten	153
4.4.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens	156
4.5 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	168
5. Ausblick	171
Literaturverzeichnis	172
Anhang	178

Resümee

Ziel dieser Arbeit ist die *experimentelle Identifikation der mechanischen Materialeigenschaften* des Polymerwerkstoffs *Polyamid 6.6* bei Raumtemperatur und Raumfeuchtigkeit (ca. 23°C und 50% rel. Luftfeuchtigkeit). Dabei handelt es sich um einen kommerziell erworbenen teilkristallinen Thermoplast. Eine Analyse dieses Werkstoffs unter den Gesichtspunkten der Mikromechanik bzw. des chemischen Aufbaus ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Dies wird z.B. in [13 und 14] für eine Vielfalt von Polymerwerkstoffen durchgeführt.

Im Kapitel 2 dieser Arbeit werden die gemessenen Materialantworten des Thermoplasts Polyamid 6.6 bei Raumtemperatur auf *dehnungsgesteuerte Zug-/Druck-Belastungen* ohne und mit *Haltezeiten* diskutiert. Hält man nach einem beliebig vorgegebenen Belastungsprozeß die geometrischen Randbedingungen einer Struktur zeitlich konstant - Haltezeit -, so strebt der Spannungszustand in jedem Körperpunkt einem zeitlich konstanten Wert zu, der generell vom Belastungsprozeß abhängt. Diese zeitlich konstante Spannung entspricht einem *Gleichgewichtszustand* [7] im Material und wird als *Gleichgewichtsspannung* bezeichnet. Die Abweichung des gemessenen Spannungszustands von der Gleichgewichtsspannung wird *Überspannung* genannt. Diese Abweichung hängt im Allgemeinen von der Geschwindigkeit des Belastungsprozesses ab. Ein zeitlich konstanter Wert der Spannung konnte in Relaxationsversuchen während 5stündiger Haltezeiten nicht erreicht werden. Dies motiviert zwei grundsätzlich unterschiedliche physikalische Interpretationen der Relaxationabbruchpunkte und zwar, *Interpretation a*: Die nach 5 Stunden ermittelten Relaxationsabbruchpunkte entsprechen in erster Näherung den Gleichgewichtszuständen des Materials, und *Interpretation b*: Die Relaxationsabbruchpunkte entsprechen nicht Gleichgewichtspunkten des Materials.

Die *mathematische Beschreibung* des in Kapitel 2 experimentell ermittelten Materialverhaltens motiviert die in Kapitel 3 dargestellte Konstruktion zweier unterschiedlicher *Materialmodelle*. Im Rahmen der Interpretation a wird ein Modell der *Viskoplastizität ohne Fließfläche* dargestellt und auf der Grundlage der Interpretation b wird ein Modell der *nichtlinearen Viskoelastizität* konzipiert. Beide Modelle basieren auf der Zerlegung der Spannung in einem *geschwindigkeitsunabhängigen* Gleichgewichtsanteil und einen *geschwindigkeitsabhängigen* Überspannungsanteil [7]. Die Überspannungsanteile beider Modelle sind identisch und entsprechen in ihrer physikalischen Bedeutung einem rheologischen Modell mit *Nicht-Newtonschen Dämpfern* und einer *Zwangsbedingung*, die einen nichtmonotonen Spannungs-Dehnungs-Verlauf ermöglicht.

Die *Identifikation der Materialparameter* wird in Kapitel 4 dieser Arbeit erläutert. Zur Identifikation der Materialparameter wird ein Optimierungsverfahren verwendet, das auf der *Evolutionsstrategie* basiert [12]. Auf der Grundlage der identifizierten Materialparameter werden für die bei der Identifikation herangezogenen Prozesse die Modellantworten berechnet. Diese geben im Zusammenhang mit der qualitativen und quantitativen Darstellung der Meßdaten Auskunft über den Erfolg der Identifikation. Der Vergleich der Ergebnisse der Modellantworten für Prozesse, die bei der Identifikation nicht verwendet wurden, mit deren Meßdaten gibt Hinweis auf die *Vorhersagefähigkeit* der Modelle. Auf der Basis der gerechneten Materialantworten werden die zwei Modelle verglichen und bezüglich der Interpretation der Versuchsergebnisse diskutiert.

1. Einleitung

Polymerwerkstoffe haben in den letzten 3 Jahrzehnten zunehmend Metalle bei der Konstruktion von Bauteilen ersetzt [14]. Wichtige Gründe dafür sind zum einen technologischer Natur (besondere Eigenschaften der Polymerwerkstoffe) und zum anderen von wirtschaftlichem Charakter (niedriger Preis). Die stets wachsende Produktion der Polymerwerkstoffe und das günstige Verhältnis der Energiekosten zu dem Produktionswert [73] sind für die ökonomischen Aspekte verantwortlich. Die geringere Dichte bzw. die ausgeprägten viskosen Eigenschaften kennzeichnen die Polymerwerkstoffe besonders für den Einsatz im Leichtbau, wie z.B. bei Luft-Ansaugsystemen von modernen Verbrennungsmaschinen bzw. als Dämpfungs-Systeme bei Elastomer-Lagern. Eine Übersicht des aktuellen Wissenstandes in der Werkstofftechnik mit Polymerwerkstoffen wird in [2] gegeben.

Unerlässlich bei allen Methoden, die eine quantitative Vorhersage des mechanischen Verhaltens von *materiellen Körpern* anstreben, sind die Kenntnisse der *materiellen Eigenschaften*. Darüber hinaus müssen die Geometrie sowie die auftretenden Belastungen bekannt sein. Unter der Annahme, daß die kleinste geometrische Abmessung des Körpers groß gegenüber einer für das Material charakteristischen Skala ist (repräsentatives Volumenelement), darf das zugrundeliegende Material als Punktkontinuum aufgefaßt werden [1]. Für die Behandlung solcher Probleme stellt dann die Feldtheorie der klassischen *Kontinuumsmechanik* ein geeignetes Werkzeug zur Verfügung [74, 75].

In der Festkörpermechanik führen die allgemein gültigen Bilanzgleichungen (geometrie- und materiell-unabhängig) für Masse, Impuls und Drehimpuls auf ein System von insgesamt 3 gekoppelten Differentialgleichungen, die die lokale Form der Impulsbilanz ausdrücken:

$$\rho \dot{\underline{v}} = \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \rho \underline{k} \quad 1.1$$

Hier ist $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ das Geschwindigkeitsfeld in der räumlichen Darstellung; ρ bezeichnet die Massendichte, $\underline{\underline{T}}$ den *Cauchyschen* Spannungstensor und \underline{k} die Volumenkraftdichte. Das Gleichungssystem (1.1) enthält insgesamt 9 skalarwertige Funktionen, nämlich 3 Geschwindigkeits- oder Verschiebungskomponenten und 6 Komponenten des Spannungstensors, der aufgrund der Drehimpulsbilanz symmetrisch ist:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \quad 1.2$$

Eine eindeutige Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bzw. des Verschiebungsfeldes $\underline{u}(\underline{X}, t)$ allein aus den Bilanzrelationen (1.1) und (1.2) ist nicht möglich: Man braucht insgesamt 6 zusätzliche Gleichungen. Diese modellieren die individuellen Eigenschaften der Werkstoffe, aus denen das zu untersuchende System jeweils aufgebaut ist.

Diese zusätzlichen Gleichungen werden daher *Materialgleichungen* genannt. Die Notwendigkeit, die Bilanzrelationen durch individuell gültige Materialgleichungen zu ergänzen, entspricht der offensichtlichen Tatsache, daß äußerlich gleiche materielle Körper sich unter gleichen Belastungen sehr verschieden verhalten können.

Ziel dieser Arbeit ist die *experimentelle Identifikation* der Materialeigenschaften des Polymerwerkstoffs *Polyamid 6.6* bei Raumtemperatur und Raumfeuchtigkeit (ca. 23°C und 50% rel. Luftfeuchtigkeit). Dabei handelt es sich um einen kommerziell erworbenen teilkristallinen Thermoplast. Eine Analyse dieses Werkstoffs unter den Gesichtspunkten der Mikromechanik bzw. des chemischen Aufbaus ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Dies wird z.B. in [13, 14 und 55] für eine Vielfalt von Polymerwerkstoffen durchgeführt.

Experimentelle Identifikation von Materialeigenschaften bedeutet, *Materialparameter* aus *Versuchsdaten* zu bestimmen. Dazu werden zunächst Versuche durchgeführt, aus denen die wesentlichen Eigenschaften des Werkstoffs Polyamid 6.6 interpretierbar sind. Dies entspricht einer *Charakterisierung* der Materialeigenschaften. Ausgehend von rheologischen Modellen werden in einem zweiten Schritt mathematische Modelle konstruiert [6, 25], die dazu geeignet sind, die typischen Merkmale des Werkstoffverhaltens wiederzugeben, welche aus den experimentellen Beobachtungen sichtbar geworden sind. Die eigentliche *Bestimmung* bzw. Identifikation der Materialparameter entspricht der Lösung einer *Optimierungsaufgabe* [70]. Die identifizierten Werte der Materialparameter machen die Abweichung der Modellantwort von den Versuchsdaten im Sinne einer geeignet definierten Norm zu einem *relativen Minimum*.

Im Kapitel 2 dieser Arbeit werden die gemessenen Materialantworten des Thermoplasts Polyamid 6.6 bei Raumtemperatur auf *dehnungsgesteuerte Zug-/Druck-Belastungen* ohne und mit *Haltezeiten* diskutiert. Hält man nach einem beliebig vorgegebenen Belastungsprozeß die geometrischen Randbedingungen einer Struktur zeitlich konstant (Haltezeit), so strebt der Spannungszustand in jedem Körperpunkt einem zeitlich konstanten Wert zu, der generell vom Belastungsprozeß abhängt. Diese zeitlich konstante Spannung entspricht einem *Gleichgewichtszustand* [7] im Material und wird als *Gleichgewichtsspannung* bezeichnet. Die Menge aller derartigen Gleichgewichtszustände bildet die sogenannte *Gleichgewichtskennlinie*. Die Abweichung des gemessenen Spannungszustands von der Gleichgewichtsspannung wird *Überspannung* [7, 8] genannt. Diese Abweichung hängt im allgemeinen von der Geschwindigkeit des Belastungsprozesses ab. In diesem Zusammenhang sind die Experimente von Krempl [17] erwähnenswert.

Ein zeitlich konstanter Wert der Spannung konnte in Relaxationsversuchen während 24stündiger Haltezeiten nicht erreicht werden. Das heißt, daß eine eindeutige Identifikation der nach den 24stündigen Haltezeiten erreichten Spannungen - *Relaxationsabbruchpunkte* - mit Gleichgewichtszuständen im Material nicht möglich war, weil eine weitere Relaxation der Spannung nicht ausgeschlossen werden konnte [13, 14 und 15]. Dies motivierte zwei grundsätzlich unterschiedliche physikalische Interpretationen der Relaxationabbruchpunkte, nämlich:

Interpretation a) Die nach 5 Stunden ermittelten Relaxationsabbruchpunkte entsprechen im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten in erster Näherung den Gleichgewichtszuständen des Materials. Hierbei sind die Relaxationsvorgänge im Vergleich zur Spannungsabnahme in den ersten Sekunden einer Haltezeit im Wesentlichen abgeschlossen.

Interpretation b) Die Relaxationsabbruchpunkte entsprechen nicht Gleichgewichtszuständen des Materials, das heißt: Die Relaxationsvorgänge sind auch nach 24 Stunden Haltezeit noch nicht abgeschlossen. Sie können aber im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten nicht weiterhin erfaßt werden.

Die mathematische Beschreibung des in Kapitel 2 experimentell ermittelten Materialverhaltens und die daraus folgenden zwei unterschiedlichen Interpretationen der Relaxationsabbruchpunkte motivierten die in Kapitel 3 dargestellte Konstruktion zweier unterschiedlicher Materialmodelle. Konstruiert wurde:

- 1) Ein Modell der *nichtlinearen Viskoelastizität*
- 2) Ein Modell der *Viskoplastizität ohne Fließfläche*

Beide Modelle basieren auf der Zerlegung der Spannung in einem *geschwindigkeitsunabhängigen* Gleichgewichtsanteil und einen *geschwindigkeitsabhängigen* Überspannungsanteil. Der Gleichgewichtsanteil des viskoelastischen Modells ist eine lineare Feder, die der Elastizität entspricht. Der Gleichgewichtsanteil des viskoplastischen Modells besteht aus einer nichtlinearen Feder und einem Armstrong-Frederick-Ansatz, welcher für die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtshysterese verantwortlich ist und stellvertretend für die Plastizität steht. Die Überspannungsanteile beider Modelle sind identisch und entsprechen in ihrer physikalischen Bedeutung einem *degenerierten rheologischen 6-Parameter-Modell mit Nicht-Newtonschen Dämpfern*. Die Degeneration des rheologischen Modells wird durch eine *Zwangsbedingung* erzeugt, die einen nichtmonotonen Spannungs-Dehnungs-Verlauf ermöglicht.

Die Identifikation der Materialparameter wird in Kapitel 4 dieser Arbeit erläutert. Zur Identifikation der Materialparameter wird ein Optimierungsverfahren verwendet, das auf der *Evolutionstrategie* basiert [12, 49]. Auf der Grundlage der identifizierten Materialparameter werden für die bei der Identifikation herangezogenen Prozesse die Modellantworten berechnet. Diese geben im Zusammenhang mit der qualitativen und quantitativen Darstellung der Meßdaten Auskunft über den Erfolg der Identifikation. Der Vergleich der Ergebnisse der Modellantworten für Prozesse, die bei der Identifikation nicht teilgenommen haben, mit deren Meßdaten gibt Hinweis auf die *Vohersagefähigkeit* der Modelle. Auf der Basis der gerechneten Materialantworten werden die zwei Modelle verglichen und bezüglich der Interpretation der Versuchsergebnisse diskutiert.

Im Anhang werden die Materialmodelle formal auf eine dreidimensionale Darstellung erweitert.

2. Experimentelle Untersuchungen

2.1 Idealisierungen

Zur experimentellen Ermittlung von mechanischen Materialeigenschaften müssen an Proben aus homogenem Material (*Materialproben*) räumlich homogene Spannungs- und Verzerrungszustände erzeugt werden. Dies gelingt nur in eingeschränktem Maß und unter idealisierenden Annahmen. Die physikalische bzw. geometrische Rechtfertigung dieser Annahmen sowie ihre experimentelle Verifikation sind maßgebend für die Qualität der Versuche (s. dazu z. B. [1]).

Für die Experimente an dem Thermoplast Polyamid 6.6 wurden Vollzylinderproben gefertigt, die im mittleren Bereich einen konstanten Querschnitt mit 12mm Durchmesser aufweisen. Die Geometrie der verwendeten Materialproben ist in Abb. 2.1.1 dargestellt. Im Folgenden wird angenommen, daß die Materialeigenschaften der Proben homogen verteilt sind, und das in der gewählten Meßlänge von 25mm Abweichungen von einem räumlich konstanten Verzerrungs- und Spannungszustand vernachlässigbar klein sind.

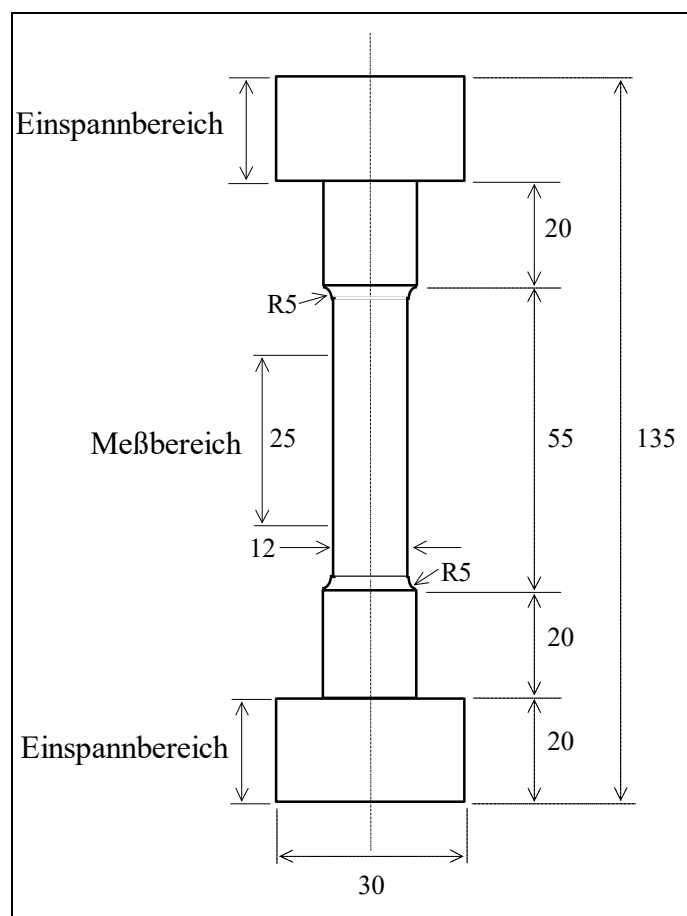


Abbildung 2.1.1: Probengeometrie (Maße in mm).

Die Annahme eines homogenen Spannungszustandes im Meßbereich wird durch die Geometrie der Probe sowie durch die Einspannvorrichtung der Prüfmaschine gerechtfertigt. Dabei sorgt die Geometrie hauptsächlich für ein stetiges und „schnelles“ Abklingen des inhomogenen Spannungszustandes im Einspannbereich, so daß im Meßbereich der Probe ein homogener Spannungszustand erreicht wird. Die axiale Spannung wird dann durch

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{\frac{\pi}{4} d_0^2} \quad 2.1.1$$

angegeben (s. Abb. 2.1.1). Durch die Konstruktion und Ausführung der Einspannvorrichtung muß sichergestellt werden, daß die Richtung der resultierenden Axialkraft mit der Symmetrieachse des Probekörpers übereinstimmt, und daß keinerlei Torsions- und Biegemomente entstehen. Darüber hinaus müssen Spannungskonzentrationen minimiert werden.

Unter diesen Voraussetzungen wird durch eine Bewegung der Einspannvorrichtung (Verschiebung der Traverse der Prüfmaschine) im Meßbereich ein räumlich konstanter Verzerrungszustand erzeugt, der durch eine Längsdehnung

$$\varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} \quad 2.1.2a$$

und eine Querdehnung

$$\varepsilon_Q(t) = \frac{d(t) - d_0}{d_0} \quad 2.1.2b$$

gekennzeichnet ist (s. Abb. 2.1.2)

Aufgrund der Inhomogenität des Spannungs- und Verzerrungszustandes im Bereich der Krafteinleitung sowie im Zusammenhang mit der *Geschwindigkeitsabhängigkeit* des Materialverhaltens ist die Längenänderung

$$\Delta l(t) = l(t) - l_0 \quad 2.1.2c$$

im Bereich der Meßlänge nicht proportional zur Verschiebung der Traverse der Prüfmaschine. Dies geht aus Abb. 2.1.3 hervor, wo ein Zug/Druck-Versuch mit Haltezeiten unter Traversensteuerung wiedergegeben ist. Die Traversegeschwindigkeit betrug $\pm 5,0 \cdot 10^{-3}$ mm/s bei der Zugbelastung bzw. Druckbelastung und Null mm/s bei den Haltezeiten. Die Dehnung entspricht der gemessenen Verschiebung im Meßbereich der Probe (s. dazu Gl. 2.1.2a). Man sieht, daß während der Haltezeiten (eingekreiste Bereiche in Abb. 2.1.3) die gemessene Dehnung ε keineswegs konstant ist, da sie nicht senkrecht verläuft. Daher ist zur Realisierung der Dehnungssteuerung eine Regelung der Traverse der Prüfmaschine erforderlich, die die Realisierung eines vorgegebenen Verlaufes von $\Delta l(t)$ gewährleistet.

Eine Vorgabe der Kraft $P(t)$ entspricht der Spannungssteuerung eines Zug/Druck-Versuches, die Vorgabe von $l(t)$ bzw. $\varepsilon(t)$ der Dehnungssteuerung.

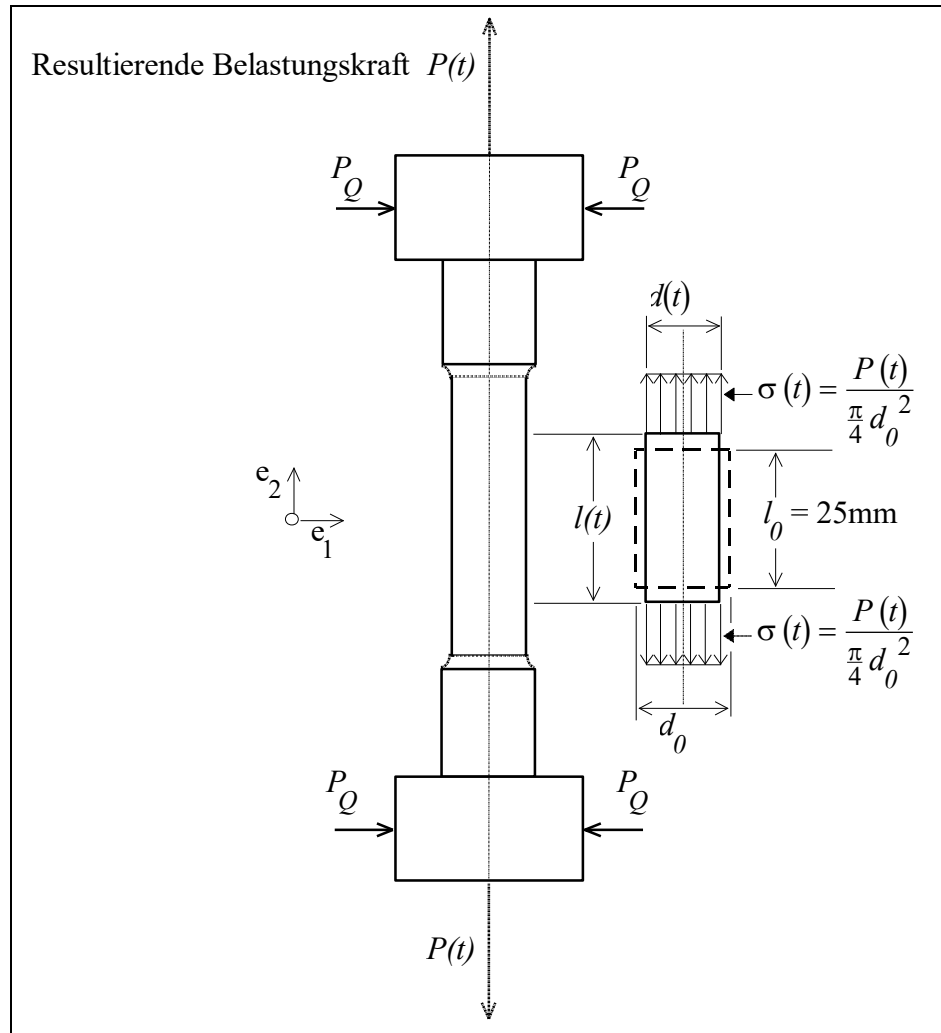


Abbildung 2.1.2: Freigeschnittener Probekörper (idealisiert).

Zur experimentellen Verifikation der Annahme eines homogenen Verzerrungszustandes bei dehnungsgesteuerten Druck-Versuchen wurden durch angebrachte DMS im Meßbereich der Probe Messungen des Biegeanteils durchgeführt. Ein derartiges Experiment entspricht einer Untersuchung der Zentrierung und des Einflusses der Einspannköpfe auf dem Verzerrungsverlauf im Meßbereich der Probe. In Abbildung 2.1.4 wird der Verlauf des Betrags der Axialdehnung und des Biegeanteils gezeigt. Der gemessene Biegeanteil war zwei Größenordnungen kleiner als die gemessene axiale Deformation und ist damit vernachlässigbar klein. Dieses Ergebnis konnte mit unterschiedlichen Proben reproduziert werden. Bei dehnungsgesteuerten Zug-Experimenten wurden Biegedehnungen gemessen, die drei Größenordnungen kleiner waren als die Axialdehnungen. Darüber hinaus wurden Einschnürungen nicht beobachtet ([4], vgl. dazu [66]).

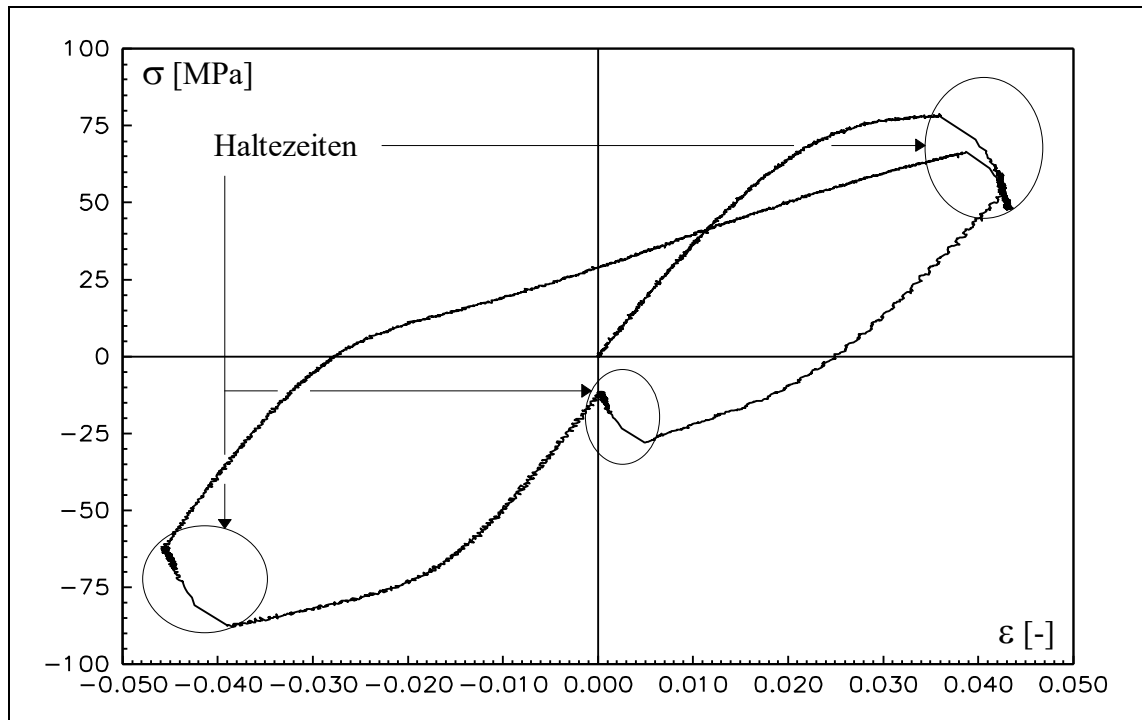


Abbildung 2.1.3: Traversengesteuertes Experiment. Traversengeschwindigkeit $|v| = 5,0 \cdot 10^{-3}$ bzw. 0 mm/s bei der Haltezeit. Nichtsenkrechter Verlauf der Kennlinien während der Haltezeiten in den eingekreisten Bereichen. Originale Meßdaten.

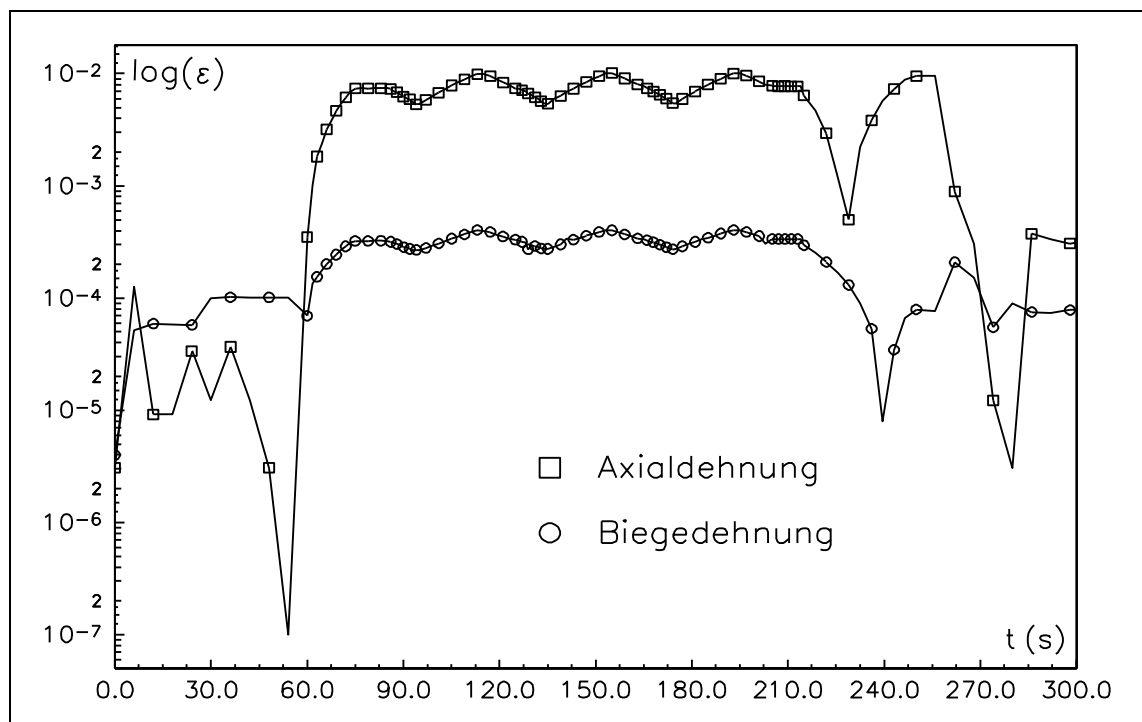


Abbildung 2.1.4: Logarithmische Darstellung der Beträge der Axial- und Biegedehnung bei einem dehnungsgesteuerten Druck-Versuch.

2.2 Experimenteller Aufbau

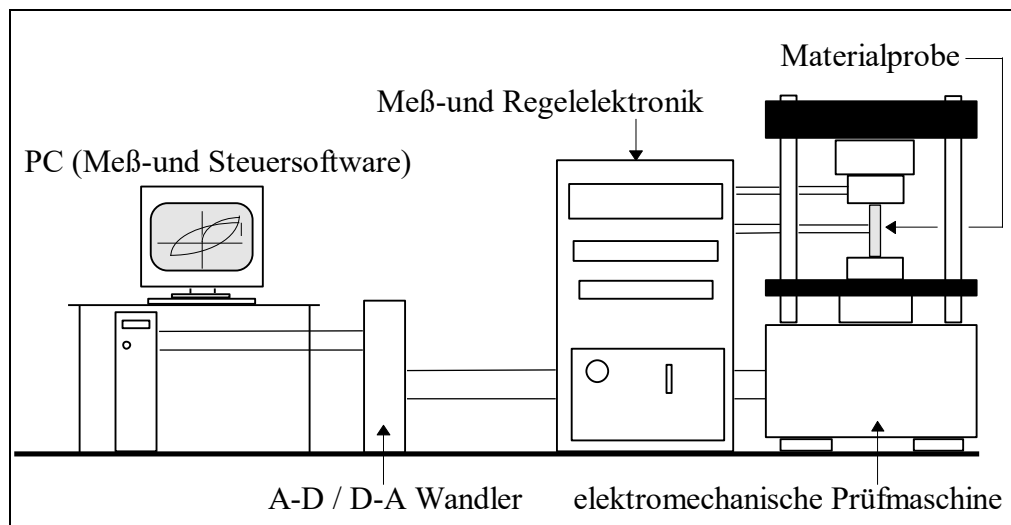


Abbildung 2.2.1: Versuchsaufbau (Schema).

Zur Belastung der Proben wurde eine elektromechanische Einachs-Prüfmaschine eingesetzt, mit der Zug- und Druckbelastungen in geregelter Kraft- und Weggrößensteuerung aufgebracht werden können.

Die Einspannung der Probe wurde durch zwei hydraulisch betriebene Kolben bewerkstelligt. Die Messung der Axialkraft erfolgte durch eine auf DMS-Basis arbeitende Meßdose mit einer Auflösung von 400N. Zur Ermittlung der axialen Dehnungen wurde ein von der Firma Hottinger Baldwin Meßtechnik (HBM) entwickelter Anklemm-Dehnungsaufnehmer benutzt. Dieses ebenfalls auf DMS-Basis arbeitende Verschiebungs-Meßgerät der Genauigkeitsklasse 0,1, wurde am Meßbereich der Probe so angebracht, daß der anfängliche Abstand zwischen den Meßzungen des Aufnehmers immer 25mm betrug. Eine Einführung in die Meßverfahren der experimentellen Mechanik wird in [19 und 20] gegeben. Erwähnenswerte Experimente und experimentelle Methoden der Festkörpermechanik werden von James F. Bell in „The Experimental Foundations of Solid Mechanics“ beschrieben [24].

Die Steuerung bzw. die Steuersignal-Ausgabe und die Meßdatenaufzeichnung der Experimente wurden mit einem 386er PC durchgeführt. Die Hardware zur Steuerung bestand aus der Meß- und Steuerelektronik der Prüfmaschine, aus einer Datenerfassungskarte mit einer Auflösung von 16 Bit (A/D-Wandler) und einer Ausgabekarte mit 12 Bit Auflösung (D/A-Wandler). Die PC Software zur Steuersignal-Ausgabe und Meßdatenaufzeichnung bestand aus einem Steuer- und Meßprogramm, das von A. Lion [5] entwickelt wurde.

2.3 Zug-/Druck-Experimente an Polyamid 6.6

Gegenstand der experimentellen Untersuchungen ist eine *phänomenologische Charakterisierung* ausgewählter *makroskopischer Materialeigenschaften* [1, 6 und 7] des Materials Polyamid 6.6.

Auf der Grundlage der experimentell charakterisierten Materialeigenschaften werden *Materialmodelle* im Rahmen der phänomenologischen Kontinuumsmechanik konstruiert. In einem weiteren Schritt werden die in den Modellen vorkommenden *Materialparameter* und *Materialfunktionen identifiziert*.

Der Entwurf des Versuchsprogramms stand unter dem allgemeinen Gesichtspunkt, daß in die Auswahl der konkreten Versuche sowie auch in die Aufzeichnung der Meßergebnisse noch keine konkreten Vorstellungen über die Modellierung des Materialverhaltens einfließen sollten. Lediglich die folgende generelle Annahme war für die Auswahl der Experimente maßgebend, die sich an einer ganz allgemeinen Erfahrung orientiert: Hält man nach einem beliebig vorgegebenen Belastungsprozeß die geometrischen Randbedingungen einer Struktur zeitlich konstant, so strebt der Spannungszustand in jedem Körperpunkt einem zeitlich konstanten Wert zu, der generell vom Belastungsprozeß abhängt. Diese zeitlich konstante Spannung entspricht einem *Gleichgewichtszustand* [7] im Material und wird als *Gleichgewichtsspannung* bezeichnet. Die Menge aller derartigen Gleichgewichtszustände bildet die sogenannte *Gleichgewichtskennlinie*. Die Abweichung des gemessenen Spannungszustands von der Gleichgewichtsspannung wird *Überspannung* [7, 8] genannt. Diese Abweichung hängt im Allgemeinen von der Geschwindigkeit des Belastungsprozesses ab.

Diese allgemeine Erfahrung und das von Haupt in [7] vorgeschlagene Konzept motiviert eine additive Zerlegung der Spannung in eine geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung und eine geschwindigkeitsabhängige Überspannung (s. dazu Kap.3).

In diesem Abschnitt werden die experimentellen Ergebnisse aus monotonen und zyklischen dehnungsgesteuerten Zug- und Druckversuchen mit und ohne Haltezeiten dargestellt und diskutiert, das heißt physikalisch interpretiert. Die Auswertung der Versuche im Zusammenhang mit konkreten Modellvorstellungen führt dann zu einer Charakterisierung bestimmter Materialeigenschaften.

Insgesamt wurden 15 Versuche bzw. Versuchsserien durchgeführt, alle unter Dehnungssteuerung. In den nachfolgenden Abbildungen sind die Verläufe der originalen Meßdaten skizziert. Die Auflösung der Diagramme (kleinster Strichabstand der Achsen) entspricht näherungsweise der Auflösung der verwendeten Meßinstrumente (Meßgenauigkeit unter 5%).

Obwohl eine Analyse dieses kommerziell erworbenen Werkstoffs unter den Gesichtspunkten der Mikromechanik bzw. des chemischen Aufbaus nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, wurden in Zusammenarbeit mit dem Institut für Werkstofftechnik (Kunststoff- und Recyclingtechnik) der GhK zwei wichtige strukturelle Eigenschaften ermittelt, und zwar der Feuchtigkeitsgehalt (0,3%) und der Kristallinitätsgrad (40%). Die Abbildungen 2.3.1 und 2.3.2 zeigen den Verlauf der Kurven, aus denen diese Werte ablesbar sind. Diese beide Eigenschaften haben einen starken Einfluß auf die mechanischen Materialeigenschaften von Polyamid 6.6 [2, 3 und 23]. Darüber hinaus wurden z. B. Einflüsse des Molekulargewichts von Stampfer und Ehrenstein untersucht [21].

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Feuchtigkeitsgehalt in Polyamid-Teilen einstellt, ist bei Raumtemperatur klein (kleine Diffusionsgeschwindigkeit). Für den praktischen Einsatz bedeutet das, daß bei kurzfristigen Schwankungen der Feuchtigkeit in der Umgebung einer Materialprobe nur geringe Änderungen im Wassergehalt des Werkstoffs auftreten können. Die damit verbundenen Änderungen der mechanischen Eigenschaften des Materials sind dann natürlich auch gering [3]. Es ist anzunehmen, daß solche auf die Temperatur zurückzuführende Effekte im Vergleich zu den mechanischen Beanspruchungen vernachlässigbar klein sind, und daß dieser Werkstoff auch bei „kleinen“ Schwankungen der Zimmertemperatur stets konstante Materialeigenschaften aufweist. Dies soll aber nicht bedeuten, daß temperaturbedingte Ausdehnungseffekte im voraus als vernachlässigbar klein angenommen werden. Im Gegenteil, der thermische Ausdehnungskoeffizient des Polyamids 6.6 beträgt ca. $10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ [3, 4] und ist damit zehnmal größer als beispielsweise der Ausdehnungskoeffizient von einigen Stählen.

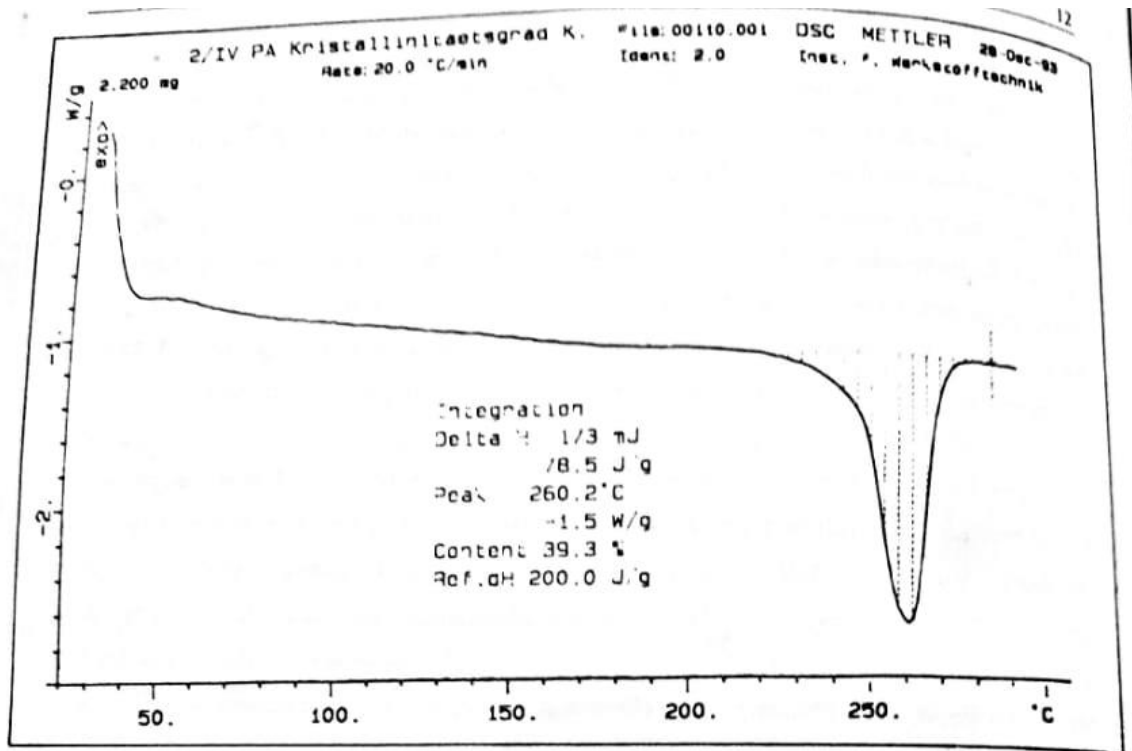


Abbildung 2.3.1: Verlauf der zugefügten Wärmedifferenz über der Temperatur.

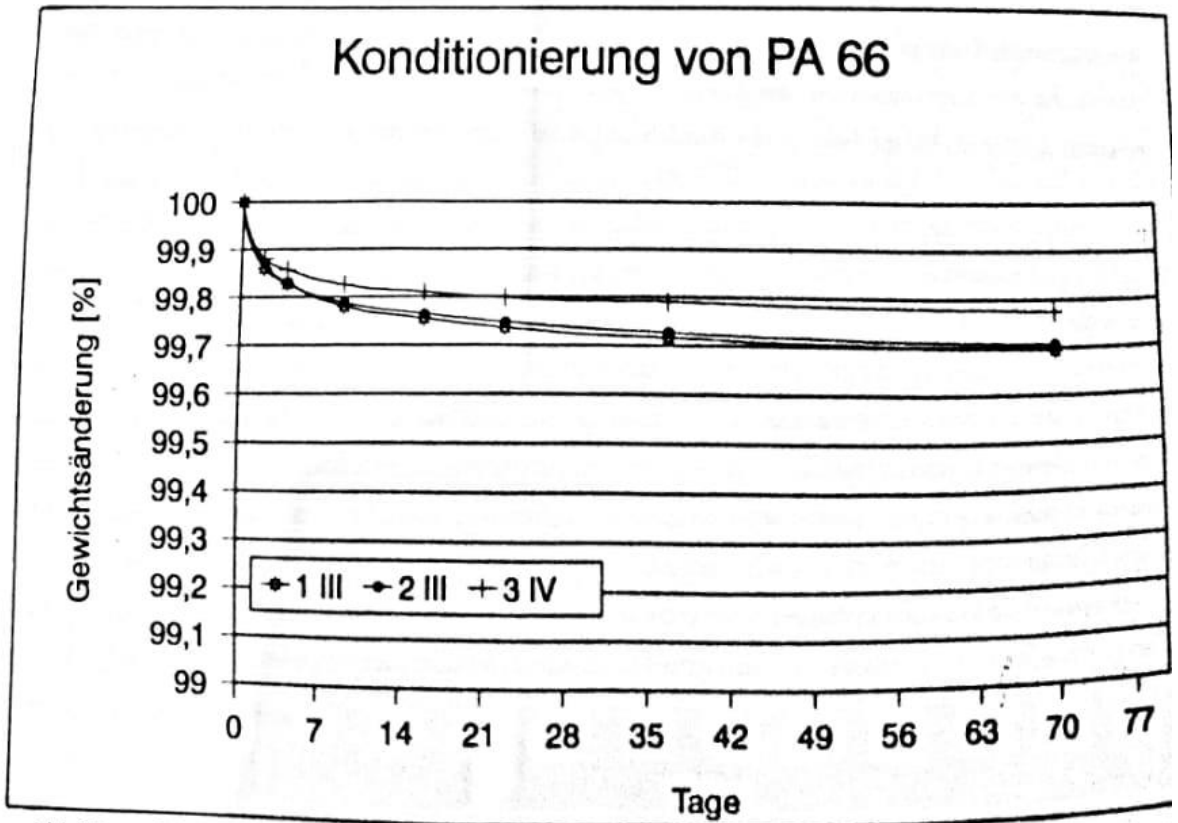


Abbildung 2.3.2: Verlauf der relativen Gewichtsänderung über der Zeit.

Zyklische Versuche an *neuen Proben* zeigen, daß die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im ersten Viertelzyklus anders verlaufen als in den folgenden Zyklen. Neu soll hier bedeuten, daß die mechanische Geschichte der Probe lediglich durch ihren Herstellungsprozeß gekennzeichnet ist. Bei Polyamid 6.6 wird ein erheblicher Unterschied zwischen dem monotonen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie bei erstmaliger Belastung und dem Verlauf nach weiteren zyklischen Belastungen beobachtet. Abbildung 2.3.3 zeigt den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien des Versuches Nr.1.

Versuch Nr.1:

- 20 Zyklen an einer neuen Probe
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung der Materialprobe

Versuch Nr.1.1:

- Monotoner Zugversuch
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $\dot{\varepsilon} = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Abbildung 2.3.4 zeigt die monotonen Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien vor und nach der Wartezeit bzw. die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der neuen Probe und der Probe mit zyklischem *Vorprozeß*. Dieser Vorprozeß entspricht einem sogenannten *Training* bzw. „*breaking in*“ des Materials [9]. Vergleicht man die Kurven in Abbildung 2.3.4, so kann man ein geringeres Spannungsniveau der Kennlinie der trainierten Probe im *zweiten Bereich* erkennen. Dieser Effekt entspricht einer *einmaligen Entfestigung* des Materials. Bei Elastomeren (gefülltem Gummi) wird ein derartiges Phänomen als *Mullins-Effekt* bezeichnet und auf Schädigungsmechanismen zurückgeführt [10, 68]. Einige Metalle (z.B. hochlegierte Stähle) zeigen ebenfalls ähnliche Entfestigungseffekte [63].

Darüber hinaus kann man in Abbildung 2.3.4 im zweiten Bereich eine unterschiedliche Krümmung beider Kurven erkennen. Durch den zyklischen Vorprozeß bzw. das Training wird das mechanische Materialverhalten *stabilisiert*, das heißt:

Der Vorprozeß ermöglicht das Erreichen eines *stabilen Materialzustands* („*stable state*“ bzw. „*rest state*“ [9, 11 und 65]). Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien sind nach dem Vorprozeß und nach einer 72 stündigen kräftefreien Lagerung im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten gut reproduzierbar.

Zur mathematischen Erläuterung der Begriffe Training (*Bearbeitung der Probe*) und Zustand (*state*) siehe Krawietz ([6] Kap. 3.4 und 3.5).

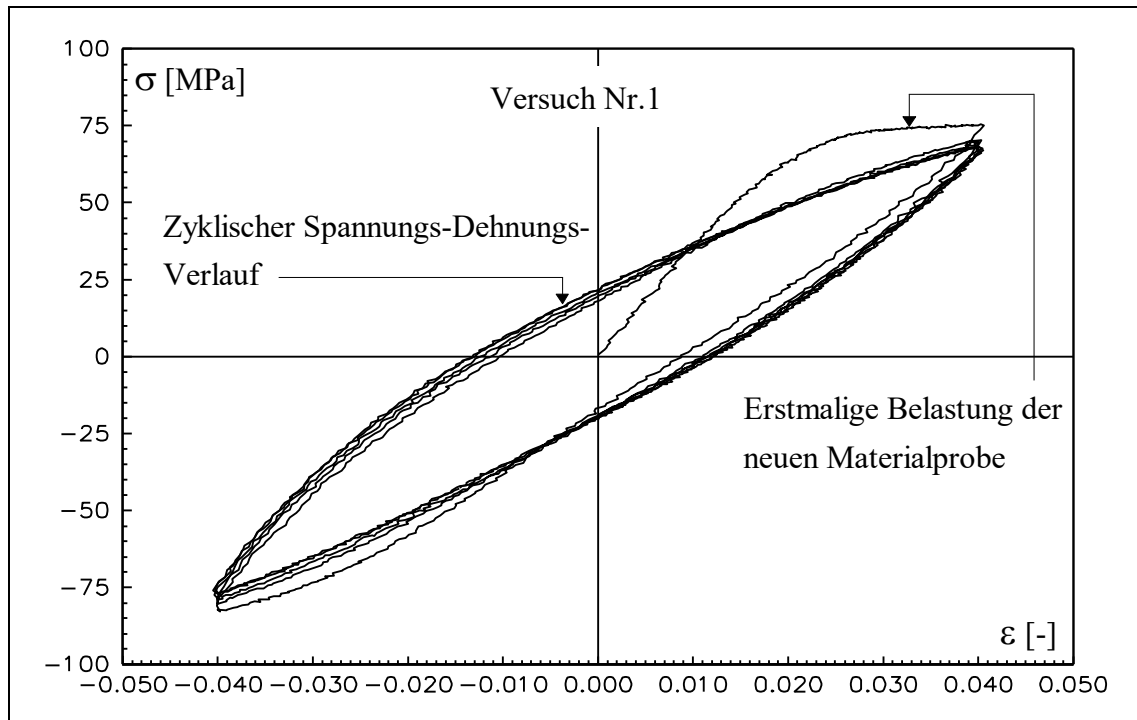


Abbildung 2.3.3: Versuch Nr.1: 20 Zyklen mit einer neuen Probe. Gesteuerte Dehnungsgeschwindigkeit: $|\dot{\epsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Es sind die ersten drei und die letzten zwei Zyklen dargestellt.

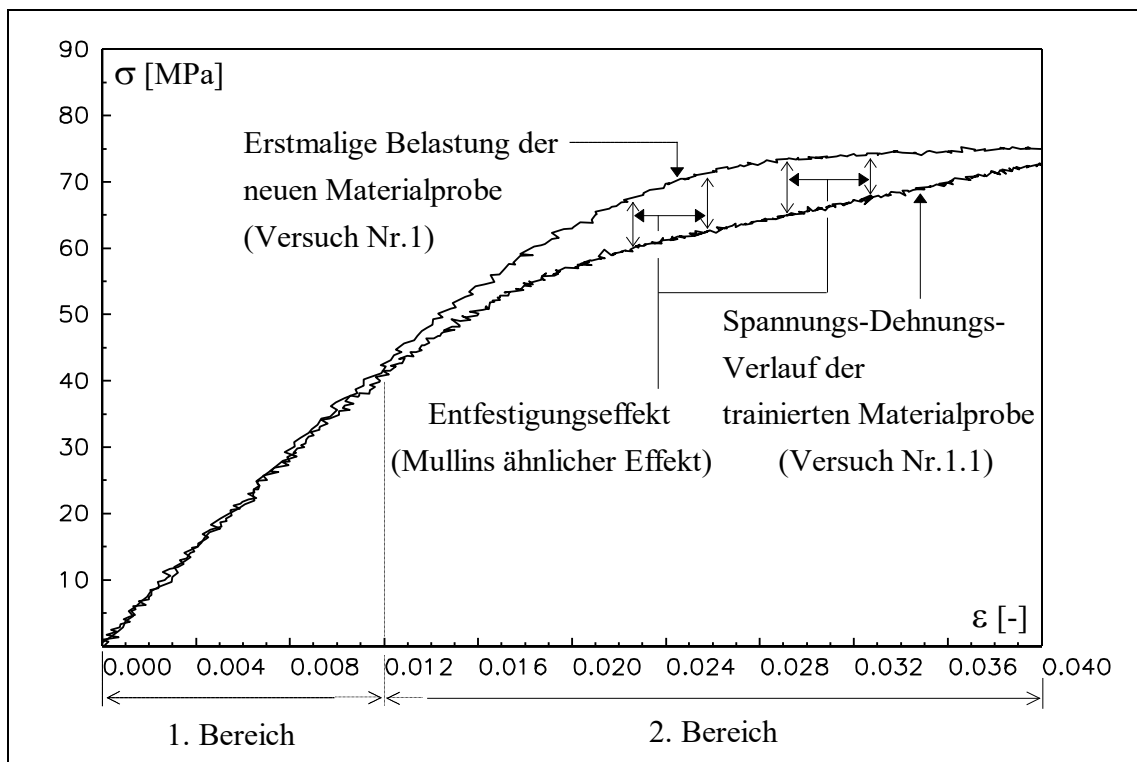


Abbildung 2.3.4: Monotone Kennlinien des Versuchs Nr.1 und des Versuch Nr.1.1.

Versuch Nr.2:

- Belastung und Entlastung mit Haltezeit von 24 Stunden bei $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Versuch Nr.3:

- Wie Versuch Nr.2 mit einer neuen Materialprobe

Versuch Nr.4:

- Be- und Entlastung mit 3 Haltezeiten von je 24 Stunden bei $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Kräftefreie Lagerung für unbestimmte Zeit

Versuch Nr.4.1:

- Wie Versuch Nr.4 mit 3 Haltezeiten von je 5 Stunden

Um die Bestimmung von Gleichgewichtszuständen zu ermöglichen, wurden Zugversuche bzw. Zug-/Druck-Versuche mit Haltezeiten durchgeführt. Die Haltezeiten müssen dabei hinreichend lang sein, um zu gewährleisten, daß die Relaxationsabbruchpunkte möglichst genau den Gleichgewichtszuständen im Material entsprechen (s. dazu z.B. [12, 63]).

Zur Gewinnung einer Orientierung über die Dauer der Haltezeiten, wurden zunächst mit zwei unterschiedlichen neuen Materialproben zwei Zugversuche mit nachfolgender Entlastung und Haltezeit gefahren (Versuche Nr.2 und Nr.3). Die in Abbildung 2.3.6 gezeigten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien entsprechen der Materialantwort dieser Proben. Nach der Entlastung bei Dehnung null wurden jeweils Haltezeiten von 24 Stunden (86400s) eingelegt. Die gemessenen Spannungs-Zeit-Kennlinien sind in Abbildung 2.3.5 wiedergegeben (Versuche Nr.2 und Nr.3). Die Abbildungen 2.3.5 und 2.3.6 illustrieren ferner den Versuch Nr.4, der zwei zusätzliche Haltezeiten bei Dehnung 0,025 enthält. Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Versuche Nr.2 bis Nr.4 werden in Abbildung 2.3.6 gezeigt. Hierbei liefert der im Rahmen der Meßgenauigkeit senkrechte Verlauf der Relaxationskennlinien einen Hinweis auf die Qualität der Dehnungssteuerung, die mit der zur Verfügung stehenden Versuchseinrichtung realisiert werden konnte.

In Abbildung 2.3.5 kann man während der ersten 12 Stunden der Haltezeiten einen monotonen Verlauf der Spannungen beobachten; danach treten Nichtmonotonien bzw. Oszillationen auf. Bei näherer Überprüfung konnten diese Nichtmonotonien mit den Tag/Nacht Temperaturschwankungen im Labor korreliert werden. Längere Haltezeiten würden ohne eine konstant geregelte Temperatur keine zusätzliche experimentelle Information liefern. Eine Begrenzung der Haltezeiten auf 5 Stunden stellt in dieser Situation einen sinnvollen Kompromiß dar, der in den weiteren Versuchen gewählt wurde.

Eine eindeutige Identifikation der nach 24stündiger Haltezeit erreichten Spannungen mit Gleichgewichtszuständen im Material ist ohnehin nicht möglich, weil eine weitere Relaxation der Spannung nicht ausgeschlossen werden kann s. dazu z.B. [13, 14 und 15]. Dies erlaubt bzw. erzwingt zwei grundsätzlich unterschiedliche physikalische Interpretationen der Relaxationabbruchpunkte nämlich:

Interpretation a) Die nach 5 Stunden ermittelten Relaxationsabbruchpunkte entsprechen im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten in erster Näherung den Gleichgewichtszuständen des Materials. Hierbei sind die Relaxationsvorgänge im Vergleich zur Spannungsabnahme in den ersten Sekunden einer Haltezeit im wesentlichen abgeschlossen.

Interpretation b) Die Relaxationsabbruchpunkte entsprechen nicht Gleichgewichtszuständen des Materials, das heißt: Die Relaxationsvorgänge sind auch nach 24 Stunden Haltezeit noch nicht abgeschlossen. Sie können aber im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten nicht weiterhin erfaßt werden.

Im Hinblick auf die Modellbildung führen diese beiden Interpretationen zu sehr unterschiedlichen Folgerungen: Prinzipiell können die vorliegenden Meßdaten durch zwei verschiedene Materialmodelle dargestellt werden (s. dazu Kap. 3.5 bzw. [7]).

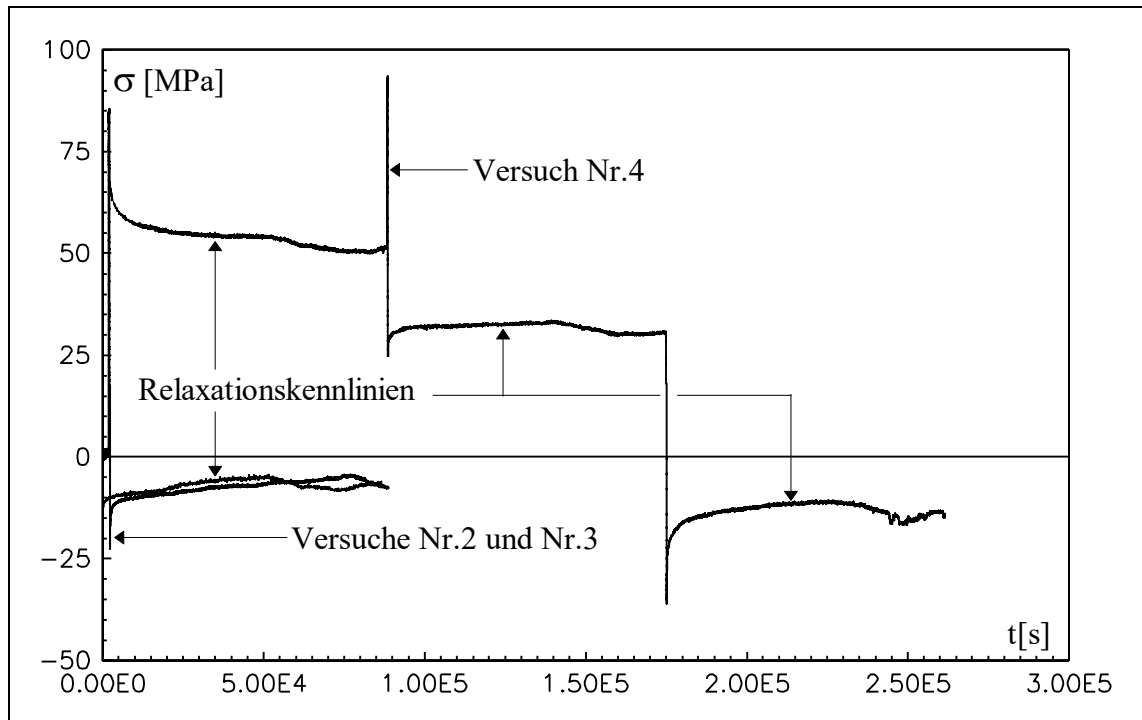


Abbildung 2.3.5: Experimente zur Gewinnung von Informationen über die Dauer der Haltezeiten. Dehnungsgeschwindigkeit aller Versuche: $|\dot{\epsilon}| = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. 24stündige Haltezeiten.

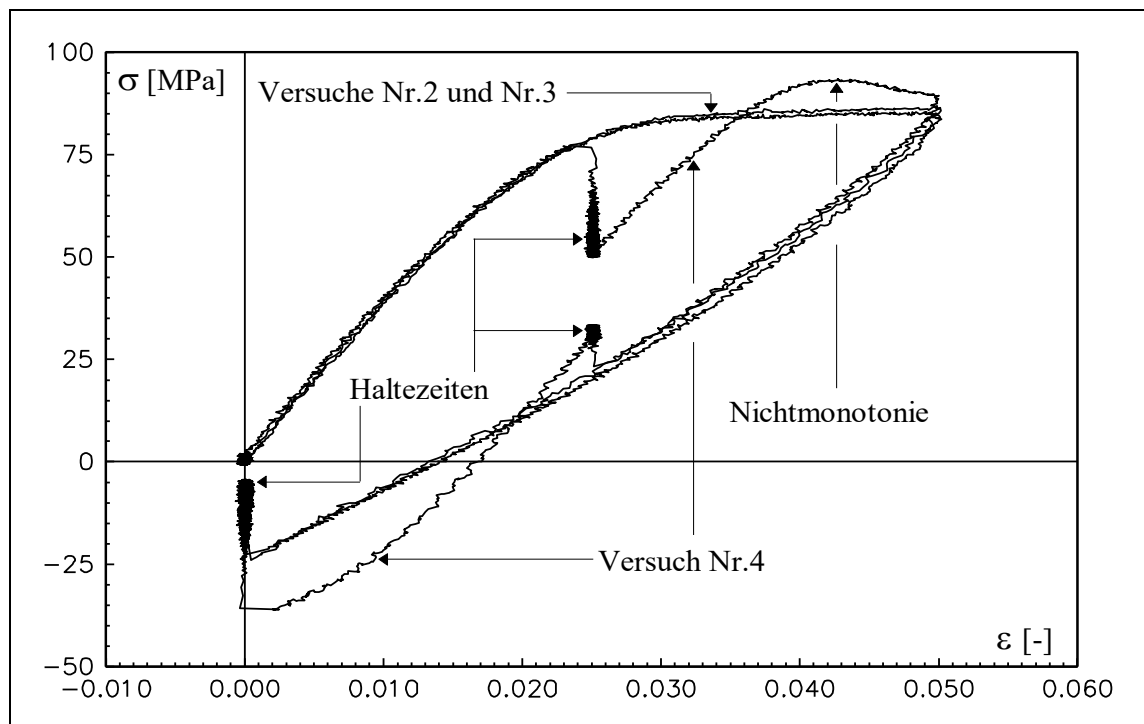


Abbildung 2.3.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Versuche Nr.2, Nr.3 und Nr.4.

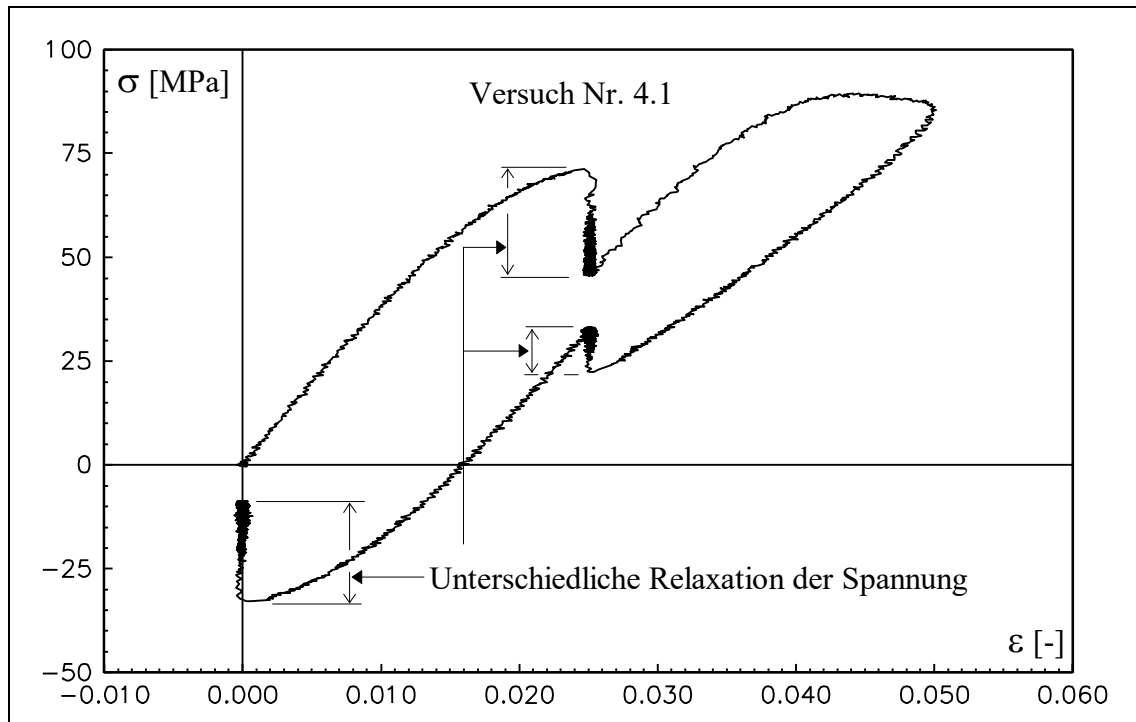


Abbildung 2.3.7: Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.4.1, der mit der Materialprobe des Versuchs Nr.4 und mit 5stündigen Haltezeiten realisiert wurde.

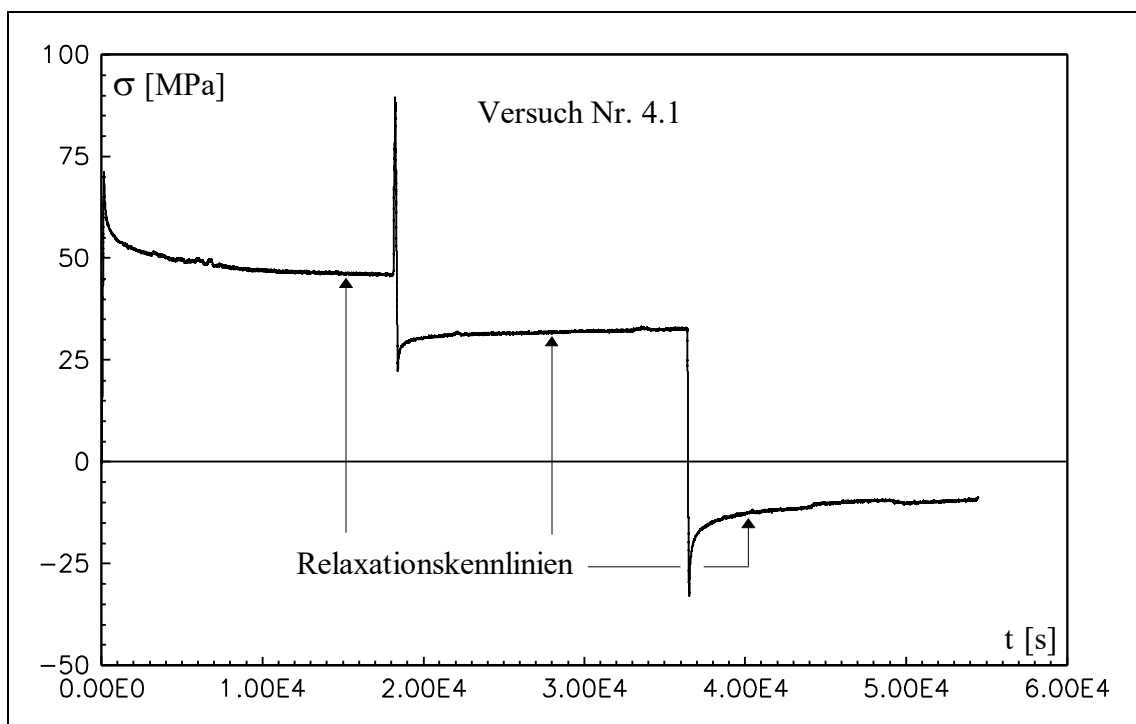


Abbildung 2.3.8: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.4.1.

Der Versuch Nr.4.1, dessen Ergebnis die Abbildungen 2.3.7 und 2.3.8 veranschaulichen, ist dementsprechend eine Wiederholung des Versuchs 4 mit der gleichen Probe und mit den kürzeren Haltezeiten von 5 Stunden. Dabei ist der Entfestigungseffekt noch einmal zu erkennen. Insbesondere die Nichtmonotonien im Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie nach der ersten Haltezeit im Zug-Bereich sind deutlich geringer. Nichtmonotone Spannungs-Dehnungs-Kennlinien nach Haltezeiten („overshoot“) wurden auch von Krempf bzw. Sell und Jonas beobachtet [4, 22] vgl. dazu ebenso [63].

Das im Versuch Nr.4.1 (Abbildung 2.3.7) festgestellte Spannungs-Dehnungs-Verhalten wurde in verschiedenen weiteren Experimenten im Hinblick auf seine Reproduzierbarkeit bzw. auf seine Abhängigkeit von eventuellen Vorbelastungen (Prozeßabhängigkeit) überprüft [6 und 13]. Zu diesem Zweck wurden im nächsten Versuch 150 Zyklen durchgeführt und danach der Versuch Nr.5.1.

Versuch Nr.5:

- 150 Zyklen an einer neuen Probe
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 48 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.5.1:

- Be- und Entlastung mit 3 Haltezeiten von 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien zeigt Abbildung 2.3.9, wobei nur die ersten 5 und die letzten 5 Zyklen dargestellt sind. Hierbei kann, wie bei den Kennlinien des Versuchs Nr.1 (Abbildung 2.2.3.) ein unterschiedlicher Verlauf der ersten bzw. der folgenden Spannungs-Dehnungs-Kennlinien beobachtet werden. Darüber hinaus ist eine *zyklische Relaxation* zu erkennen, d.h. eine zyklische Abnahme der Mittelspannung [16]. Nach dem letzten Zyklus wurde die Probe entspannt aus der Prüfmaschine herausgenommen und für 48 Stunden in einem spannungsfreien Zustand im Labor belassen. Danach wurde mit derselben Probe der Be- und Entlastungsversuch Nr.4.1 wiederholt. Abbildung 2.3.10 zeigt, daß der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien mit dem Verlauf der Kennlinien von Abbildung 2.3.7 im Rahmen der Meßgenauigkeit übereinstimmt. Dies läßt vermuten, daß die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im wesentlichen nur innerhalb der ersten Belastung modifiziert werden.

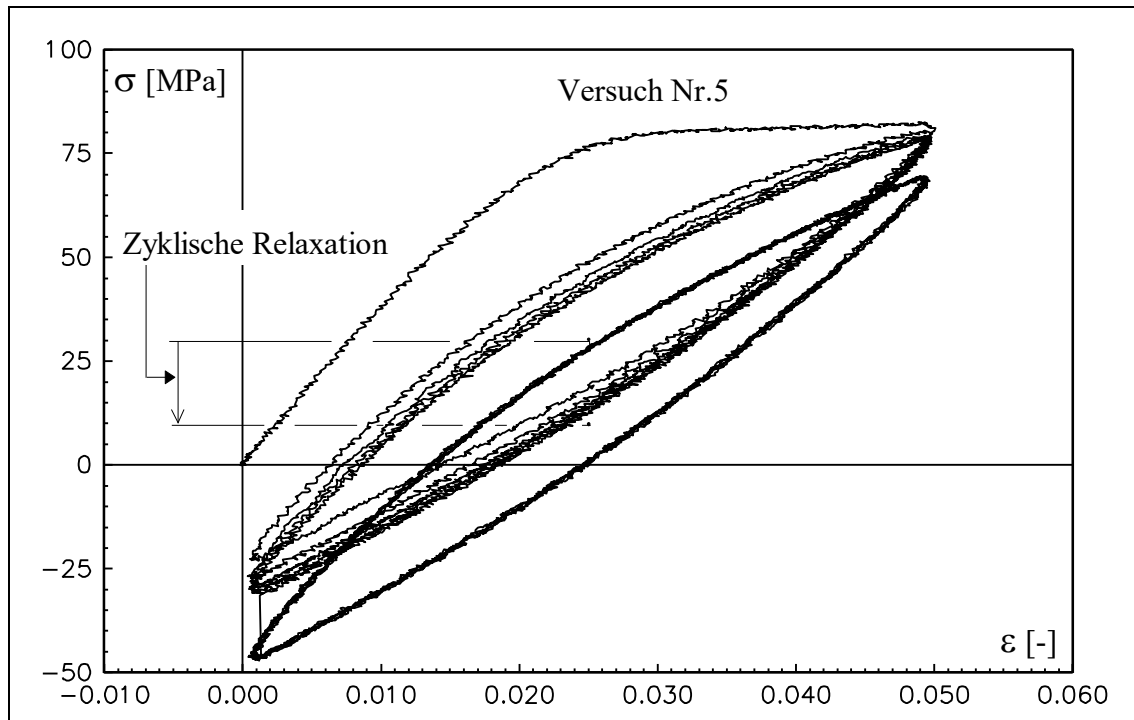


Abbildung 2.3.9: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des zyklischen Prozesses des Versuchs Nr.5. Vorprozeß zum Versuch 5.1. Der Pfeil zeigt die Größenordnung und die Richtung der zyklischen Relaxation (zyklische Abnahme der Mittelspannung).

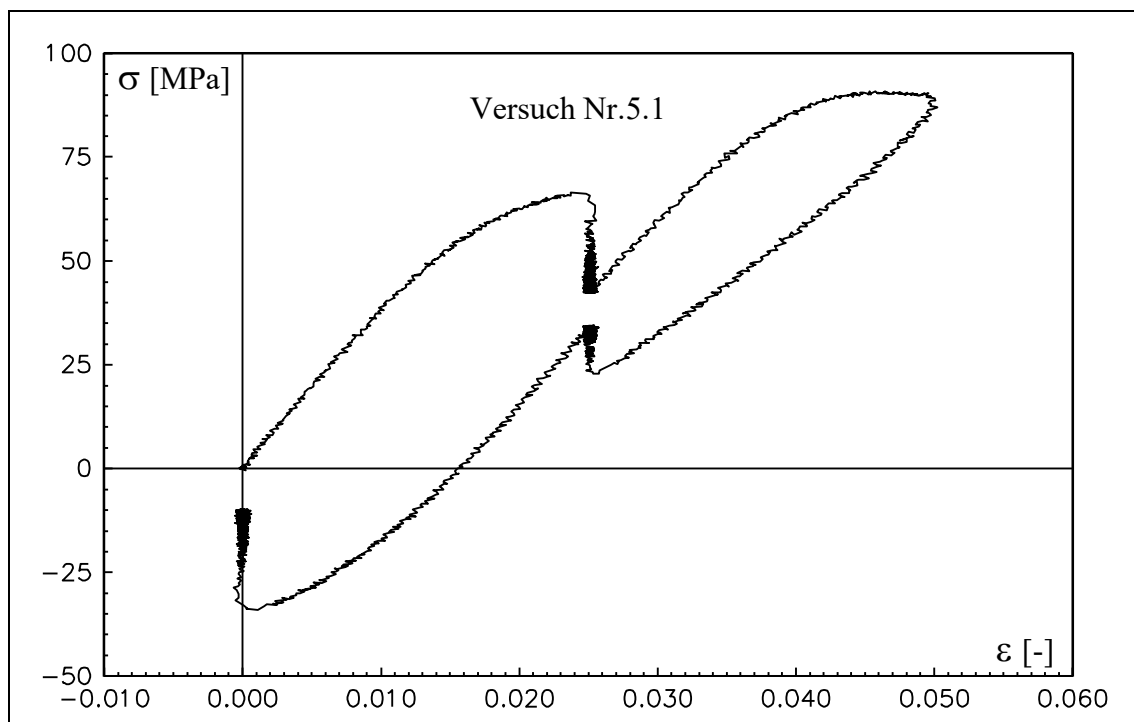


Abbildung 2.3.10: Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.5.1 mit 5stündigen Haltezeiten.

Um den Einfluß einer zyklischen Vorbelastung auf die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien definitiv festzustellen, wurde der Prozeß des Versuchs Nr.5.1 mit einer neuen Probe noch zweimal hintereinander gefahren, ohne die Probe zu entspannen und aus der Prüfmaschine herauszunehmen (Versuch Nr.6). Hiermit sollten auch eventuelle Einflüsse aus der Entspannung der Probe ausgeschlossen werden.

Versuch Nr.6:

- Be- und Entlastung mit 3 Haltezeiten von je 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,000$ (Teil 1)
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 100 Zyklen
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 1 Haltezeit von 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,000$
- Be- und Entlastung mit 3 Haltezeiten von je 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,000$ (Teil 2)
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Herausnahme der Probe und kräftefreie Lagerung über mehrere Tage

Der Versuch Nr.6 ist in Abbildung 2.3.11 wiedergegeben, die 100 Zyklen, die die beiden Teile des Versuchs trennen, sind hier weggelassen. Man bemerkt einen deutlichen Unterschied zwischen den zu Teil 1 bzw. Teil 2 gehörenden Kennlinien. Dieser Unterschied entspricht zu einem Teil der zyklischen Relaxation (zyklische Abnahme der Mittelspannung), die bei dem zyklischen Experiment (Versuch Nr.5) in Abbildung 2.3.9 deutlicher zu erkennen ist, und zum anderen Teil der einmaligen Entfestigung der neuen Probe. Hierbei ist eine Abnahme der Nichtmonotonie [4] ein weiteres Mal zu erkennen.

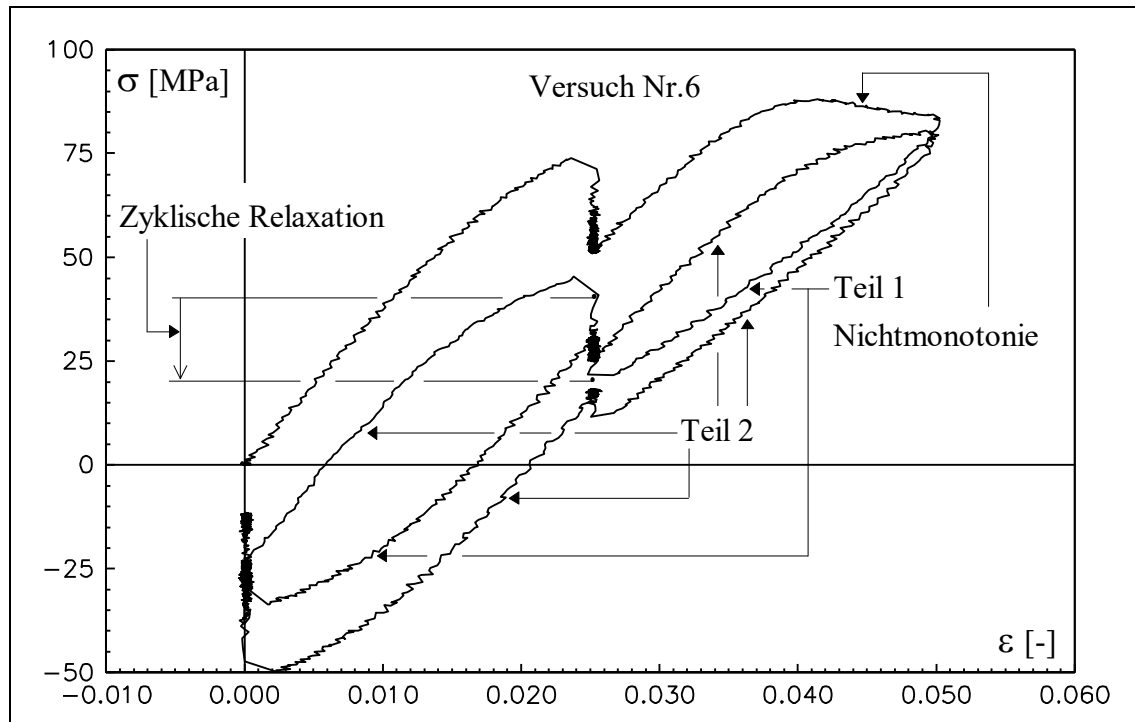


Abbildung 2.3.11: Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.6 mit 5stündigen Haltezeiten und 100 Zyklen (nicht dargestellt) zwischen Teil Nr.1 und Teil Nr.2.

Versuch Nr.6.1:

- Be- und Entlastung mit 3 Haltezeiten von je 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,025$; $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,050$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Der Einfluß der zyklischen Relaxation klingt im Verlauf einer Ruhepause ab: Nach Beendigung des Versuchs Nr.6 wurde die Probe aus der Prüfmaschine herausgenommen. Nach einer Wartezeit von mehreren Tagen wurde der Prozeß des Versuchs Nr. 5.1 bzw. Nr.4.1 noch ein letztes Mal wiederholt (Versuch Nr.6.1). Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie dieses Versuches wird in Abbildung 2.3.12 wiedergegeben. Der Verlauf der Kennlinien von Versuch 5.1 und Versuch 6.1 stimmt im Rahmen der Meßgenauigkeit überein.

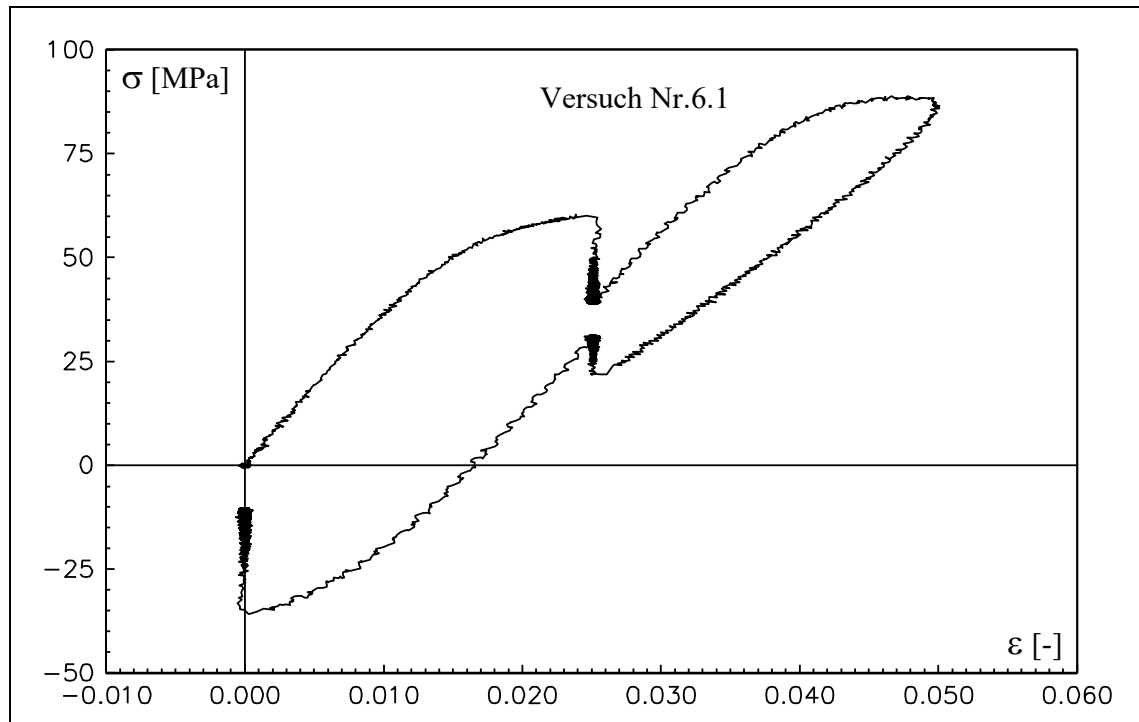


Abbildung 2.3.12: Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.6.1. Mit der Probe des Versuchs Nr.6 und mit dem Prozeß des Versuchs Nr.4.1 bzw. Nr.5.1 realisiert.

Versuch Nr.7:

- 1 Zyklus mit 20 Haltezeiten à 5 Stunden an einer neuen Probe
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
 Teil 1: Haltezeiten 1 bis 4
 Teil 2: Haltezeiten 5 bis 20

Dieser Versuch diente der Gewinnung von weiteren Informationen zur Gleichgewichtskennlinie. Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien dieses Versuchs bis zur 4. Haltezeit (Teil 1) wird in Abbildung 2.3.13 dargestellt. Teil 1 des Versuchs Nr.7 entspricht dem Materialverhalten einer neuen Probe bei erstmaliger Belastung.

Teil 2 des Versuchs Nr.7 ist in Abbildung 2.3.14 dargestellt und entspricht dem Materialverhalten einer vorbelasteten Probe. Die Vorbelastung der Materialprobe beim 2. Teil dieses Versuchs besteht hier aus der Belastung und den ersten 4 Haltezeiten. Man beobachtet, daß die ersten vier Relaxationsabbruchpunkte deutlich oberhalb der letzten vier Relaxationsabbruchpunkte liegen, und daß die maximalen Spannungen der 2., 3. und 4. Haltezeit größer sind als die maximalen Spannungen zu Beginn der letzten 3 Haltezeiten (s. dazu Abb. 2.3.15).

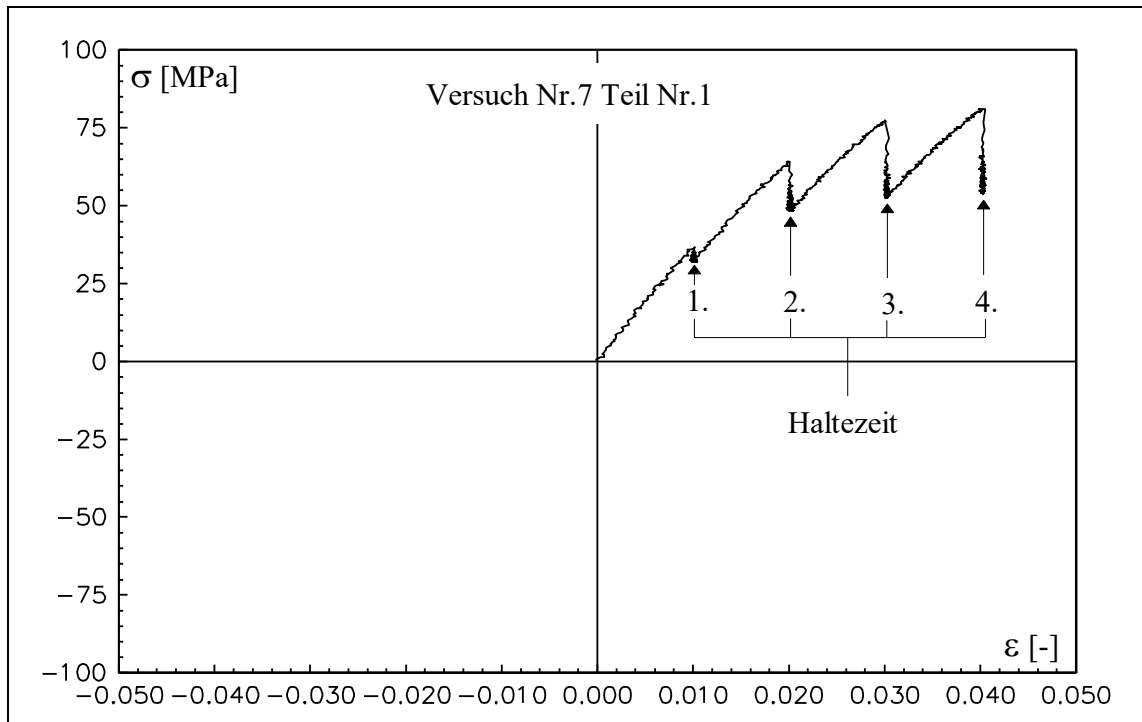


Abbildung 2.3.13: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr.7 bis zur 4. Haltezeit.
Dehnungsgeschwindigkeit: $2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Dauer der Haltezeiten: 5 Std.

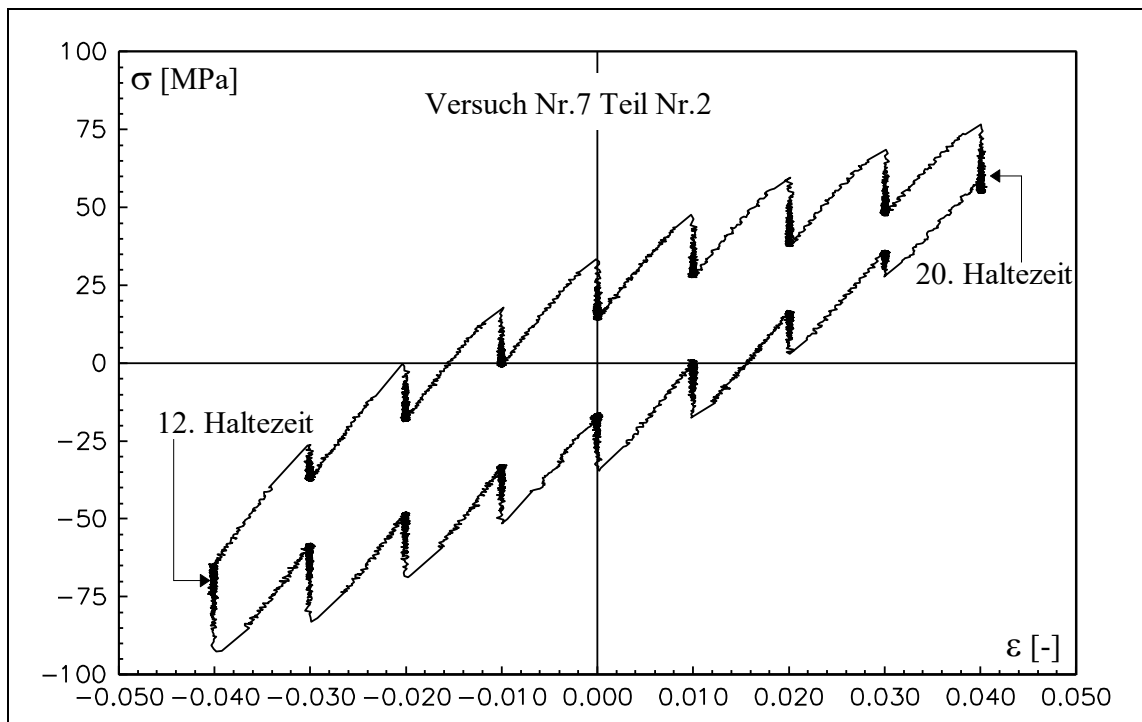


Abbildung 2.3.14: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr.7 von der 4. bis zur 20. Haltezeit. Dauer aller Haltezeiten: 5 Std.

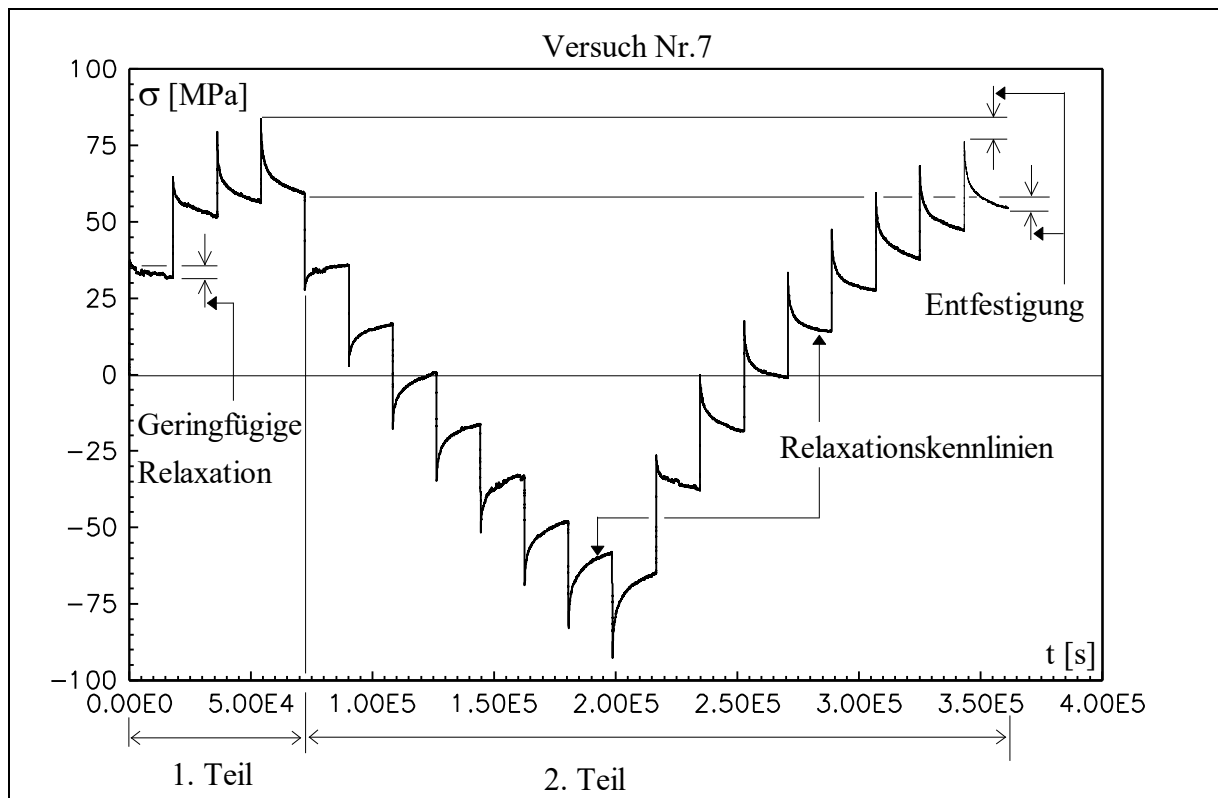


Abbildung 2.3.15: Spannungs-Zeit-Verlauf des gesamten Versuchs Nr.7. Bemerkenswert ist die geringfügige Relaxation der Spannung während der 1. Haltezeit.

Identifiziert man die Relaxationsabbruchpunkte mit Gleichgewichtszuständen des Materials (Interpretation a), so läßt dieses Ergebnis erkennen, daß sich der Entfestigungseffekt sowohl auf die Gleichgewichtsspannung als auch auf die Überspannung auswirkt. In diesem Fall kann in Abbildung 2.3.14 eine im Vergleich zu dem Versuch Nr.6.1 breite Gleichgewichtshysterese als Verbindungslinie der Relaxationsabbruchpunkte festgestellt werden. Abbildung 2.3.15 zeigt den zeitlichen Verlauf der Spannung des gesamten Versuchs Nr.7. Hierbei ist der Entfestigungseffekt ebenfalls deutlich zu erkennen.

Zur Überprüfung des Verlaufs der Gleichgewichtshysterese (Interpretation a) bzw. der Relaxations-Kennlinien auf ihre Reproduzierbarkeit und auf Einflüsse der zyklischen Belastung wurde der Prozeß des Versuchs Nr.7 noch zweimal unter unterschiedlichen Bedingungen wiederholt.

Versuch Nr.8:

- 1 Zyklus mit 20 Haltezeiten à 5 Stunden an einer neuen Probe
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Teil 1)
- 100 Zyklen
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Teil 2)
- 1 Zyklus mit 17 Haltezeiten à 5 Stunden
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Teil 3)

In Abbildung 2.3.16 wird der 1. Teil des Versuchs Nr.8 dargestellt. Der Entfestigungseffekt ist auch hier zu erkennen. Abbildung 2.3.17 zeigt den Spannungs-Dehnungs-Verlauf der 3 ersten und der beiden letzten zwischengeschalteten Zyklen. In Abbildung 2.3.18 wird der 3. Teil des Versuchs dargestellt. Durch den Vergleich der Relaxationsabbruchpunkte des 2. Teils von Versuch Nr.7 und des 1. Teils bzw. des 3. Teils von Versuch Nr.8 kann man erkennen, daß die Verbindungslinie der Relaxationsabbruchpunkte im Rahmen der Meßgenauigkeit reproduzierbar sind und von der zyklischen Belastung, in erster Näherung nicht beeinflußt werden. Der Spannungs- Zeitverlauf des gesamten Versuchs Nr.8 wird in Abb. 2.3.19 wiedergegeben.

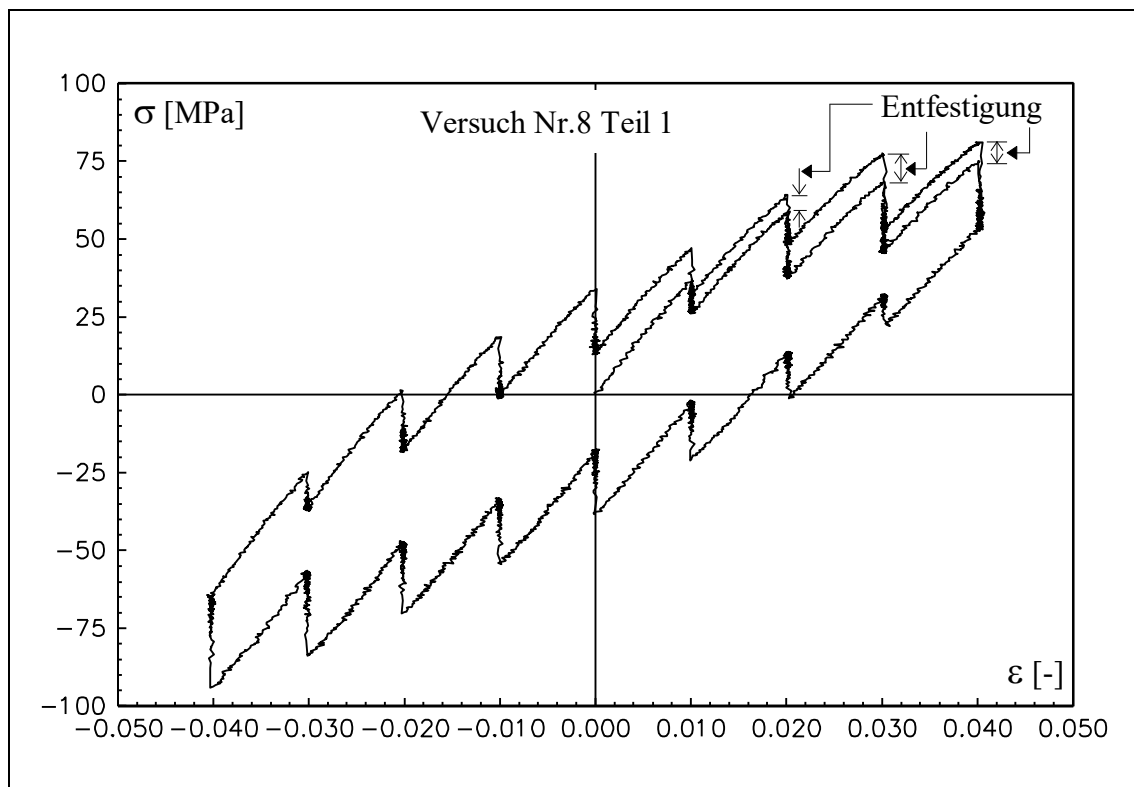


Abbildung 2.3.16: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des 1. Teils des Versuchs Nr.8 mit den ersten 20 Haltezeiten à 5 Std. $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

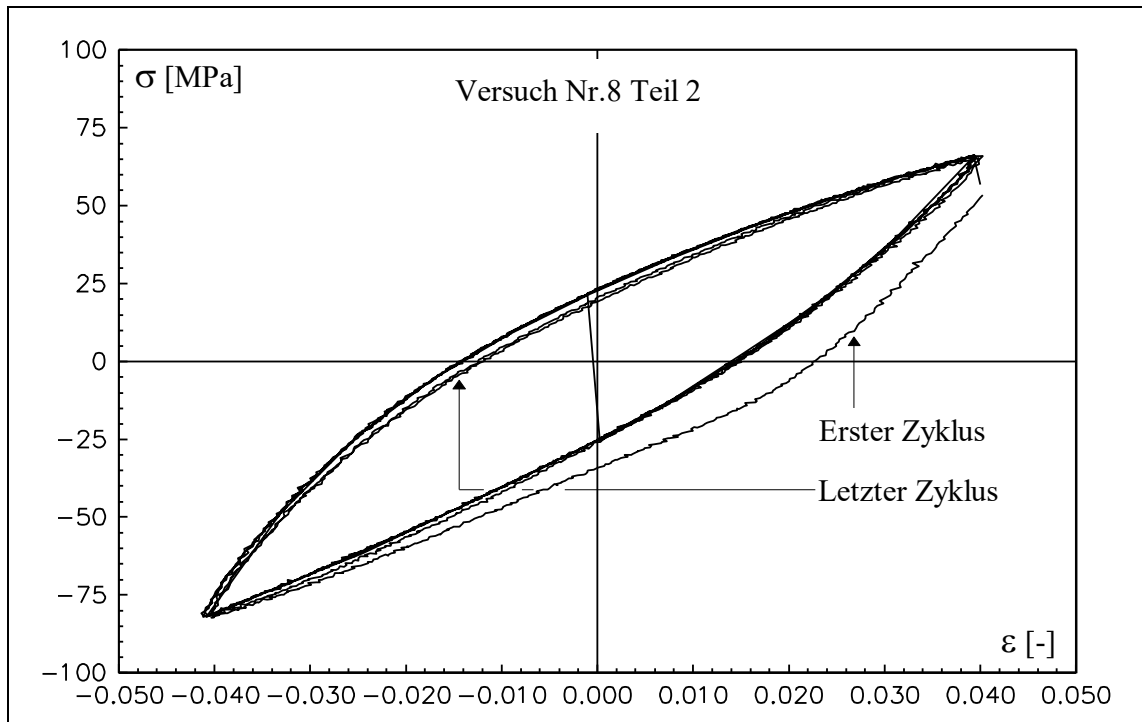


Abbildung 2.3.17: Zyklischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr. 8.

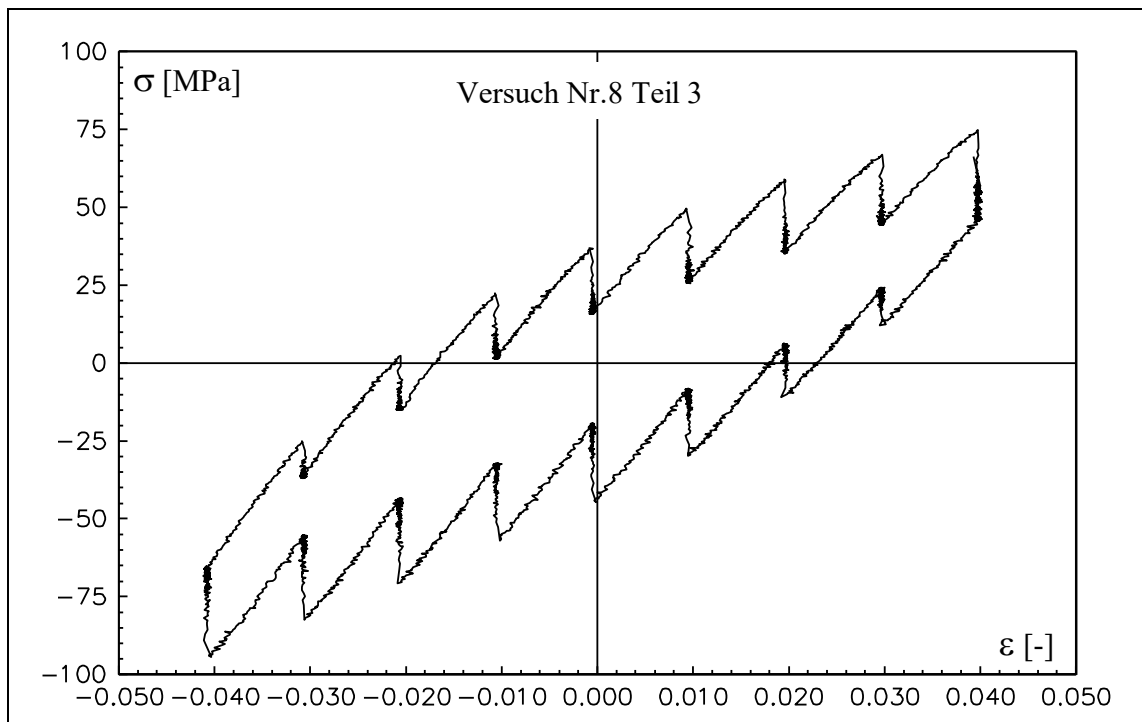
Prozeßgeschwindigkeit: $|\dot{\epsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Abbildung 2.3.18: Spannungs-Dehnungs-Verlauf des letzten Teils des Versuchs Nr.8 mit

17 Haltezeiten à 5 St. $|\dot{\epsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

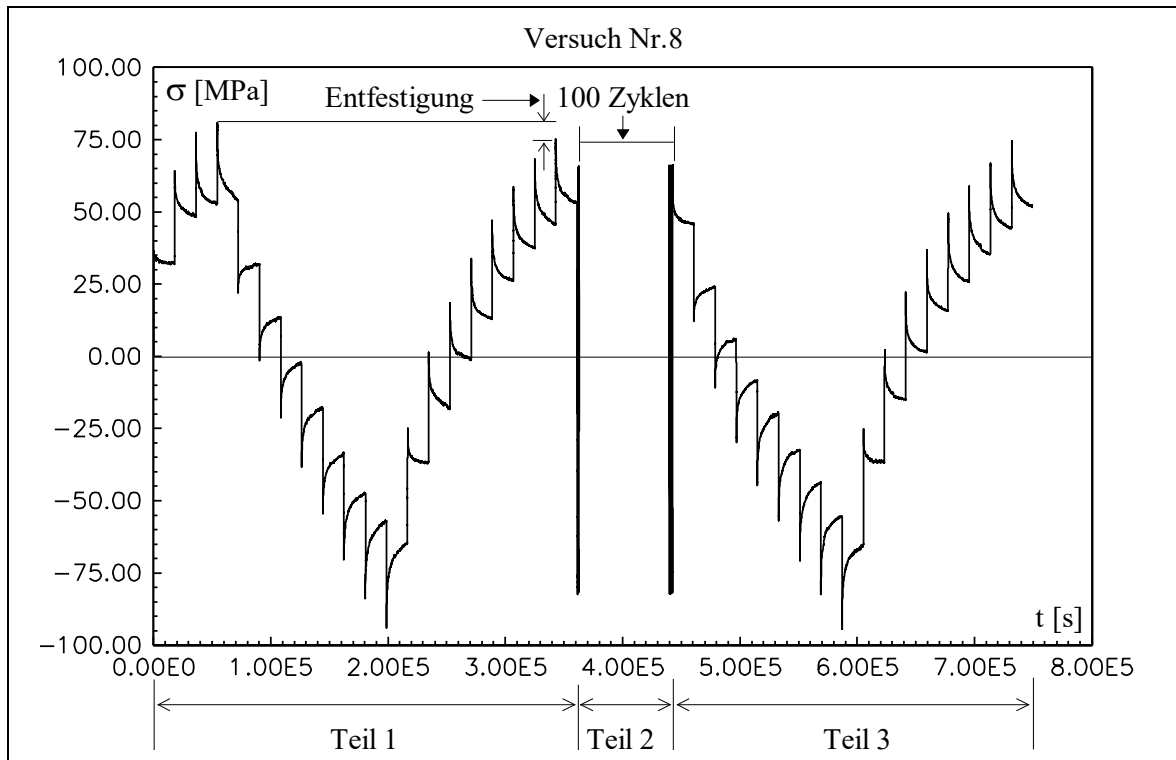


Abbildung 2.3.19: Spannungs-Zeit-Verlauf des gesamten Versuchs Nr.8.

Die gemessene Spannung unterscheidet sich von der Gleichgewichtsspannung um den Überspannungsanteil, der von der Geschwindigkeit des Prozesses abhängt. Die *Geschwindigkeitsabhängigkeit* [7, 8, 12] wird durch das Erreichen unterschiedlicher Spannungsniveaus bei unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet. Zur Ermittlung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens wurden mit ein und derselben Materialprobe Zug- und Enlastungs-Prozesse mit 5 verschiedenen konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten realisiert. Bei den zwei langsamsten Versuchen wurden nach der Entlastung Haltezeiten von 5 Stunden eingelegt. Abbildung 2.3.20 veranschaulicht die Spannungs-Dehnungs-Kurven.

Versuch Nr.9:

- Training: 20 Zyklen mit einer neuen Probe
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.1:

- Be- und Entlastung
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 6,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.2:

- Be- und Entlastung
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.3:

- Be- und Entlastung
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.4:

- Be- und Entlastung mit einer Haltezeit à 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.5:

- Be- und Entlastung mit einer Haltezeit à 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
- 72 Stunden kräftefreie Lagerung

Versuch Nr.9.6:

- Be- und Entlastung mit zwei Haltezeiten à 5 Stunden bei
 $\varepsilon = 0,040$ und $\varepsilon = 0,000$
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Kräftefreie Lagerung

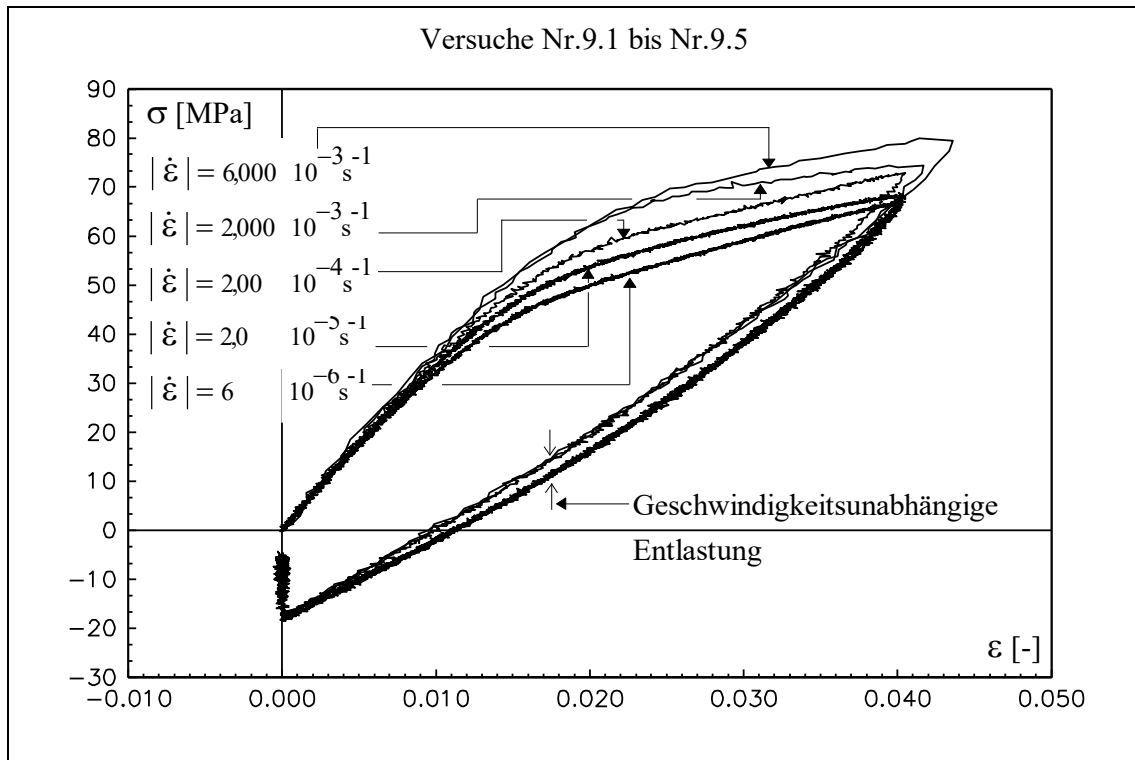


Abbildung 2.3.20: Spannungs-Dehnungs-Verlauf einer trainierten Probe für Zug- und Entlastungs-Prozesse mit Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen $6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Im Zugbereich ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit (unterschiedliche Spannungsniveaus) ausgeprägt. Die zwei langsamsten Prozesse besitzen 5stündigen Haltezeiten nach der Entlastung.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit ist im Zugbereich ausgeprägt, und zwar offensichtlich stark unterlinear [2, 3 und z.B. 22]. Im Entlastungsbereich ist eine Geschwindigkeitsabhängigkeit im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht zu erkennen. Dies wurde auch von Krempl in [17] beobachtet.

Im Rahmen der Interpretation a) diente der Versuch Nr. 9.6, dessen Spannungs-Dehnungs-Kennlinie in Abbildung 2.3.25 wiedergegeben wird, der Gewinnung weiterer Informationen über die Gleichgewichtskennlinie. Die dabei zu erkennende Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im Zug-Bereich ist ein Hinweis auf die Reproduzierbarkeit des Materialverhaltens. Darüber hinaus kann ein unterschiedlicher Verlauf der Entlastungs-Kennlinien mit und ohne Haltezeit bei $\varepsilon = 0,040$ erkannt werden. Abb. 2.3.26 zeigt die Relaxationskennlinien der 5 stündigen Haltezeiten.

Unmittelbar nach jedem der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 wurde die Materialprobe aus der Prüfmaschine herausgenommen und für 72 Stunden spannungsfrei gelagert. Für die Prozesse mit Dehnungsgeschwindigkeiten von $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und $2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ wurden nach der Entlastung bei Dehnung null Haltezeiten von 5 Stunden hinzugefügt.

Man beobachtet, daß die Spannungen näherungsweise bis auf den Nullwert relaxieren. Bei den zwei schnellsten Prozessen bemerkt man, daß der Wert 0,040 der Dehnung überschritten wurde. In diesen Fällen war die Regelung der Prüfmaschine nicht in der Lage, die Dehnung genau bis auf 0,040 zu steuern. Diese Störung wird im Hinblick auf das Materialverhalten als vernachlässigbar angesehen.

Die folgenden Versuche 10 bis 14 zeigen, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens bei neuen bzw. trainierten Proben unterschiedlich ist:

Versuche Nr.10 bis Nr.14:

- Monotone Zugversuche jeweils an neuen Probe
 $0 \leq \varepsilon \leq 0,040$
- $\dot{\varepsilon} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ (Versuch Nr. 10)
- $\dot{\varepsilon} = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ (Versuch Nr. 11)
- $\dot{\varepsilon} = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (Versuch Nr. 12)
- $\dot{\varepsilon} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (Versuch Nr. 13)
- $\dot{\varepsilon} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (Versuch Nr. 14)

Abbildung 2.3.21 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der 5 monotonen Zug-Prozesse mit Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen $4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ und $4,000 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Hier wurden alle Versuche mit neuen Proben gefahren. In Abb. 2.3.22 werden zum Vergleich die Zug-Prozesse der Versuche Nr. 9.1 bis 9.5 in der Skalierung der Abbildung 2.3.21 wiederholt.

Ein Vergleich der in Abbildungen 2.3.21 und 2.3.22 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ermöglicht eine genauere Charakterisierung des Entfestigungsverhaltens. Man beobachtet eine Abnahme des Spannungsniveaus für alle Geschwindigkeiten der Zug-Prozesse und eine starke Veränderung der Krümmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im zweiten Bereich. Insbesondere verändert sich der sehr flache fast waagerechte Verlauf der Kennlinien der neuen Probe ab ca. Dehnung 0,025 stark. Das trainierte Material zeigt im Vergleich dazu einen konstanten Anstieg der Spannungen (s. dazu Abb. 2.3.23). Man kann erkennen, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit neuer Proben stärker ausgeprägt ist. Die mechanische Vorgeschichte verursacht eine Abnahme der Intensität der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materials. Im 1. Bereich bis ca. 0,010 Dehnung sind im Wesentlichen keine Unterschiede zwischen den Spannungs-Dehnungs-Kennlinien neuer und trainierter Proben erkennbar.

Abbildung 2.3.24 veranschaulicht den Spannungs-Dehnungs-Verlauf von je einem Zug-Prozeß der Versuche Nr.9.4 und Nr.12. Das Beispiel dieser Kennlinien zeigt, daß eine Mißachtung der mechanischen Vorgeschichte zu einer falschen Einschätzung der Geschwindigkeitsabhängigkeit führen kann.

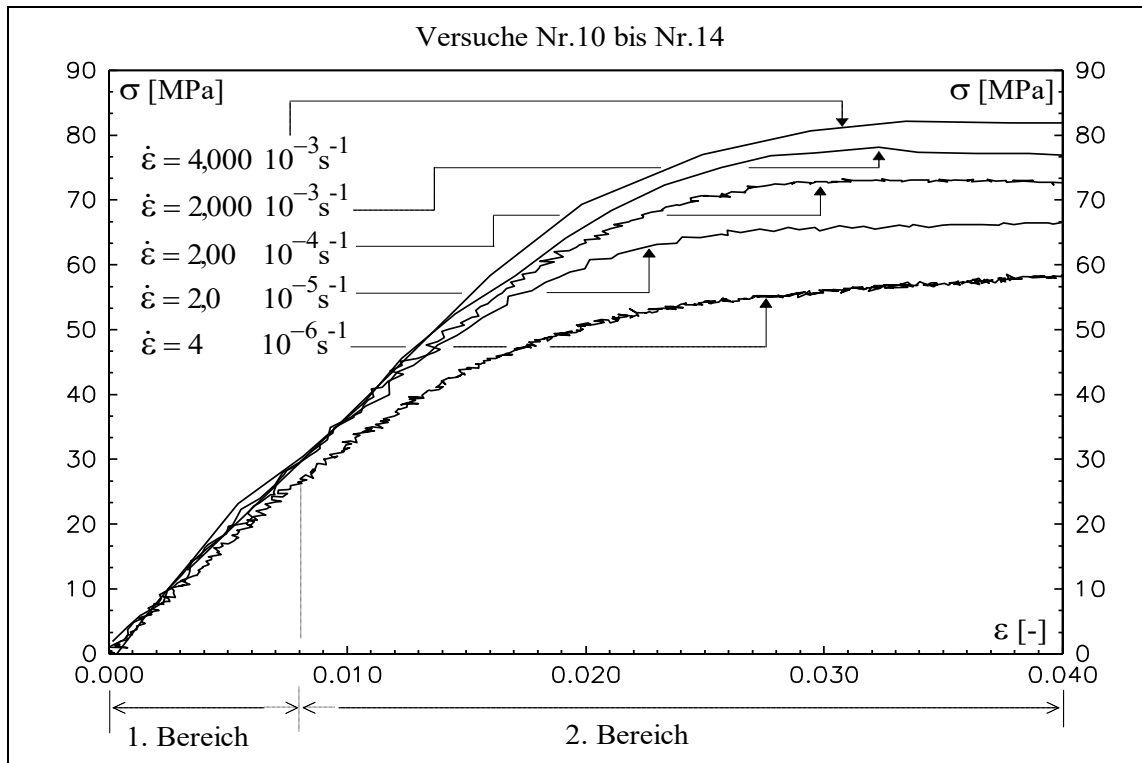


Abbildung 2.3.21: Spannungs-Dehnungs-Verlauf neuer Proben für Belastungs-Prozesse mit Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen $4,000 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

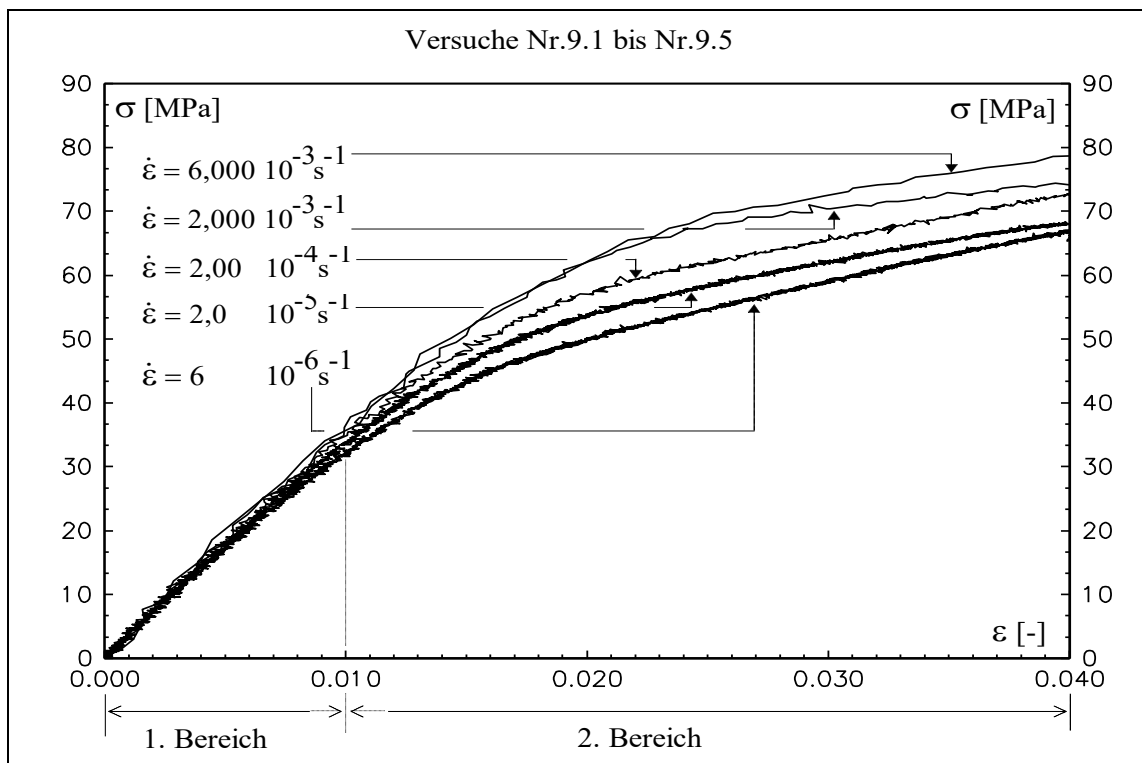


Abbildung 2.3.22: Zug-Prozesse der Versuche von Abbildung 2.3.20 in vergrößertem Maßstab. Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen $6,000 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ mit ein und derselben trainierten Materialprobe.

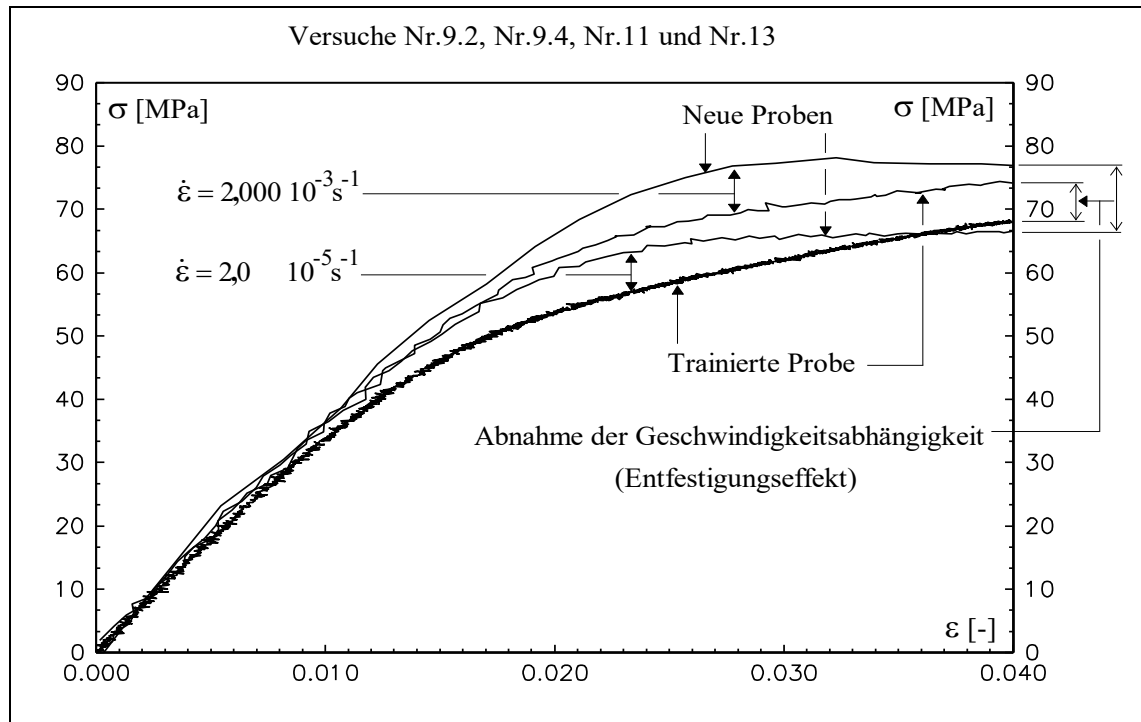


Abbildung 2.3.23: Vergleich des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs neuer und trainierter Proben für 2 Geschwindigkeiten. Der Entfestigungseffekt entspricht der Abnahme des Spannungsniveaus und der Geschwindigkeitsabhängigkeit.

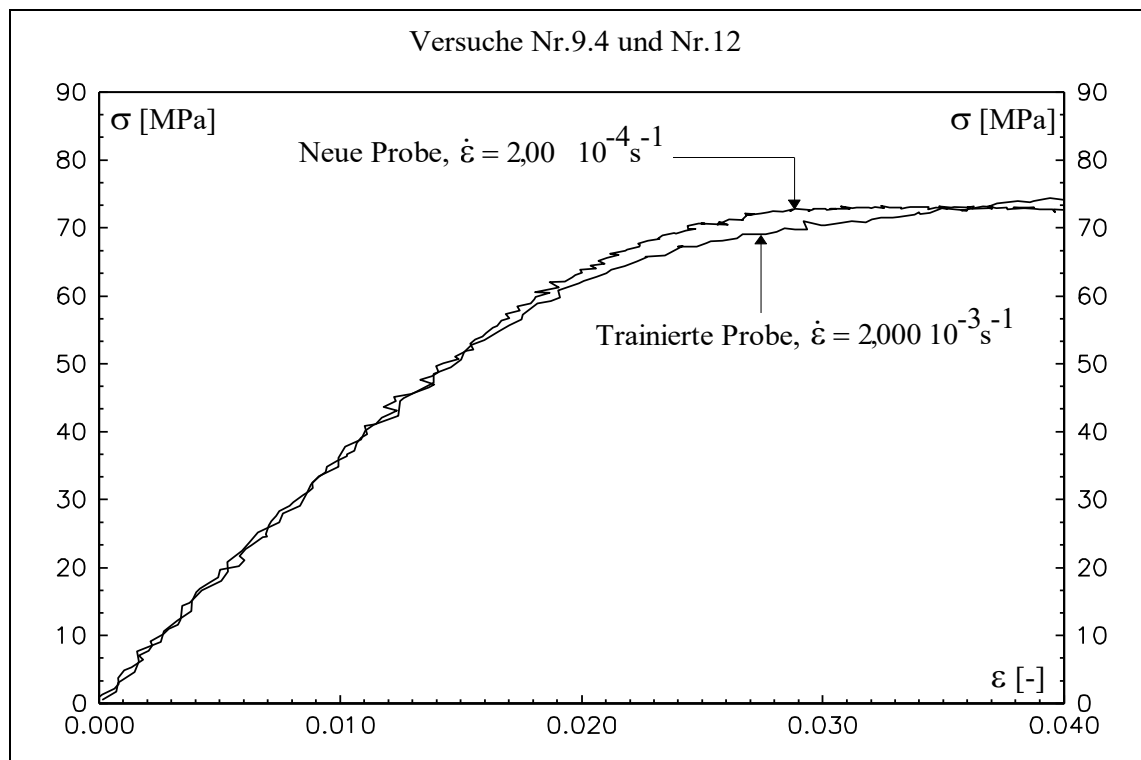


Abbildung 2.3.24: Vergleich des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs neuer und trainierter Materialproben für 2 unterschiedliche Geschwindigkeiten.

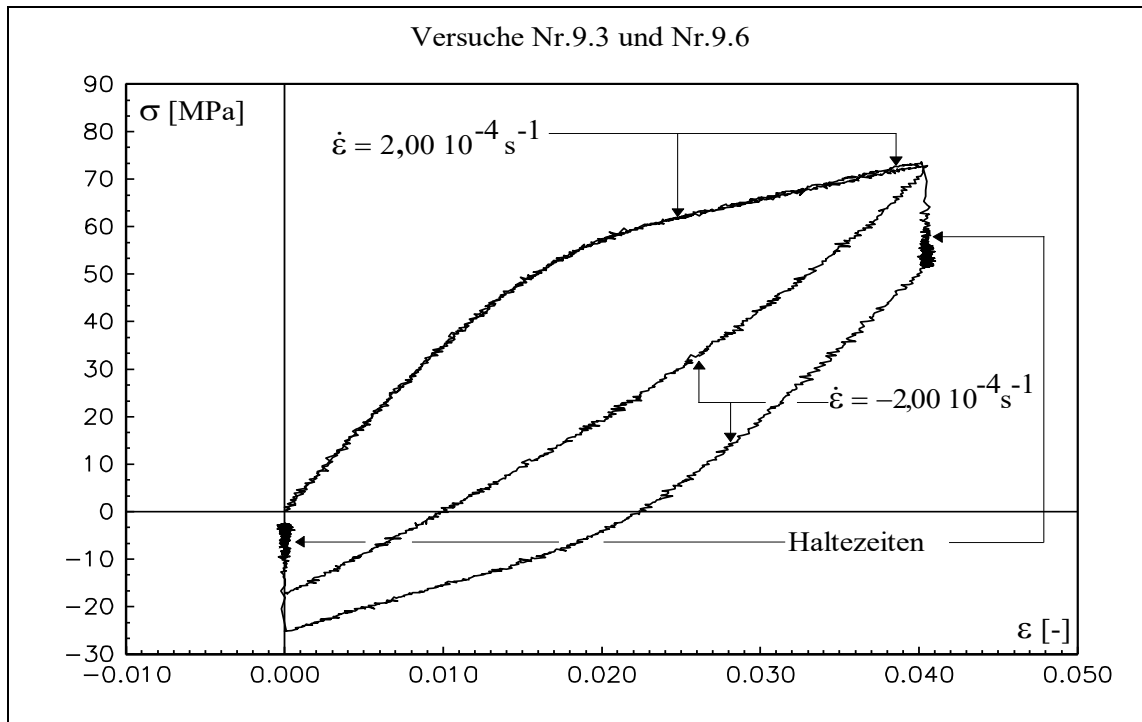


Abbildung 2.3.25: Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Zug- und Entlastungs-Versuche mit und ohne Haltezeiten.

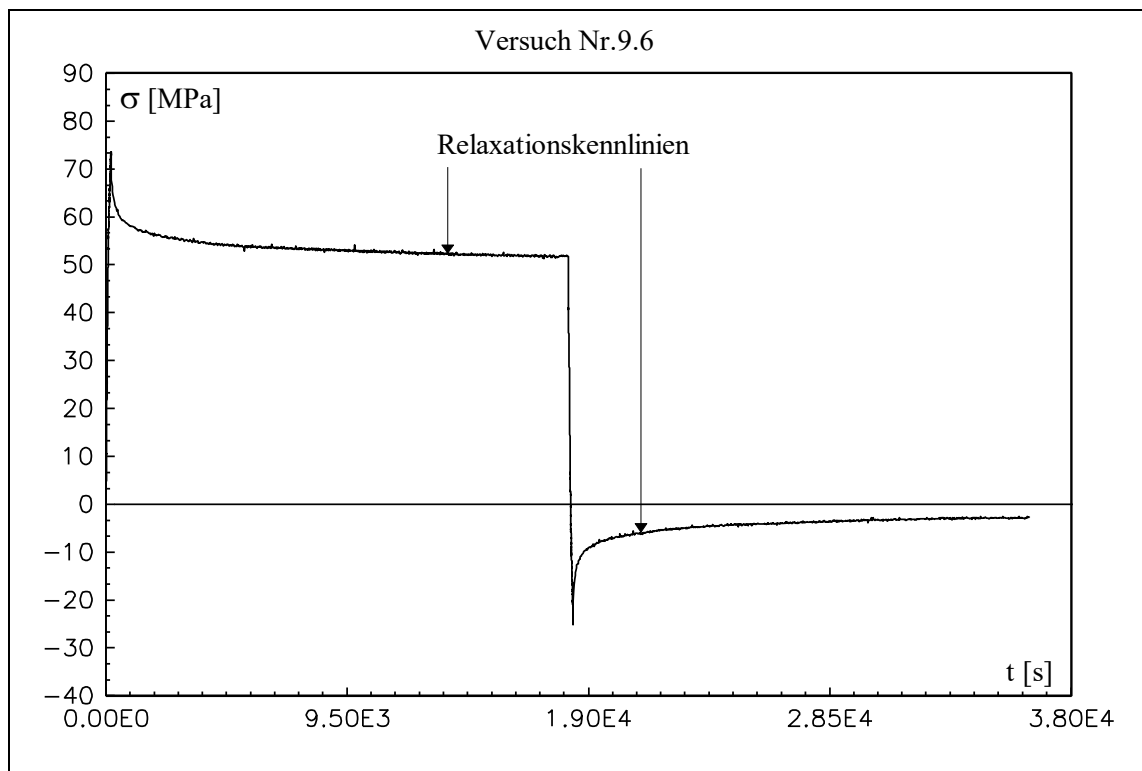


Abbildung 2.3.26: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.9.6.

Versuch Nr.15:

- 1 Zyklus
 $-0,020 \leq \varepsilon \leq 0,020$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Versuch Nr.15.1:

- 1 Zyklus
 $-0,024 \leq \varepsilon \leq 0,024$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Versuch Nr.15.2:

- 1 Zyklus
 $-0,026 \leq \varepsilon \leq 0,026$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.3:

- Einspannung
- 1 Zyklus mit einer Haltezeit à 7200s bei $\varepsilon = 0,000$
 $-0,028 \leq \varepsilon \leq 0,028$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.4:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,030 \leq \varepsilon \leq 0,030$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.5:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,032 \leq \varepsilon \leq 0,032$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.6:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,034 \leq \varepsilon \leq 0,034$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

- Ausspannung

Versuch Nr.15.7:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,036 \leq \varepsilon \leq 0,036, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.8:

- Einspannung
- 1 Zyklus mit einer Haltezeit à 36000s bei
 $\varepsilon = 0,000$
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Versuch Nr.15.9:

- 1 Zyklus
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.10:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,040 \leq \varepsilon \leq 0,040, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.11:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,042 \leq \varepsilon \leq 0,042, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.12:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,048 \leq \varepsilon \leq 0,048, |\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.13:

- Einspannung
- 1 Zyklus
 $-0,060 \leq \varepsilon \leq 0,060$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Versuch Nr.15.14:

- Einspannung
- 1 Zyklus mit 5 unterschiedlichen Haltezeiten bei
 $\varepsilon = 0,030$, $\varepsilon = 0,030$, $\varepsilon = 0,000$ $\varepsilon = -0,030$, $\varepsilon = -0,030$
 $-0,060 \leq \varepsilon \leq 0,060$, $|\dot{\varepsilon}| = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- Ausspannung

Die Versuche Nr.15 liefern zusätzliche Informationen über die Prozeßabhängigkeit des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs bei symmetrischen dehnungsgesteuerten Experimenten (Mittelspannung gleich Null). Mit ein und derselben Probe wurde mit zunehmender Dehnungsamplitude jeweils ein ganzer Zyklus gefahren. Dabei betrug die Dehnungsgeschwindigkeit aller Prozesse $2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Der Prozeß des Versuchs Nr.15.3 enthält eine Haltezeit bei Dehnung Null von 7200s (s. dazu Abb. 2.3.28). Der Prozeß des Versuchs Nr.15.8 enthält an derselben Dehnung eine Haltezeit von 10 Stunden (s. dazu Abb. 2.3.30). Die Prozesse der Versuche Nr.15.10 bis Nr.15.12 wurden zuerst im Druckbereich gefahren ($\dot{\varepsilon} = -2,00 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$), um die jeweilige maximale Druckspannung im ersten Viertel-Zyklus zu erreichen. Der Prozeß des letzten Versuchs (Versuch Nr.15.14) enthält 5 unterschiedlich lange Haltezeiten.

Die in Abbildung 2.3.27 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Versuche Nr.15 ($-0,020 \leq \varepsilon \leq 0,020$) und Nr.15.1 ($-0,024 \leq \varepsilon \leq 0,024$) zeigen einen im Rahmen der Meßgenauigkeit linearen Verlauf ohne Spannungs-Dehnungs-Hysterese. Die Prozesse dieser Experimente wurden hintereinander gefahren, daß heißt es wurde keine Wartezeit zwischen beide Versuche gelegt.

Der Versuch 15.2, der eine Dehnungsamplitude von 0,026 aufwies, zeigt einen nichtlinearen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ab einer Dehnung von ca. 0,016 und insgesamt eine schmale Hysterese. Vergleicht man die in diesem Fall erreichten Spannungen mit denen von Versuch 15.1 in Abbildung 2.3.27, so erkennt man ab Dehnung ca. 0,016 eine Abnahme des gesamten Spannungsniveaus. Dieses Ergebnis entspricht dem Entfestigungseffekt, der beim „Verlassen“ des 1. Bereichs eintritt.

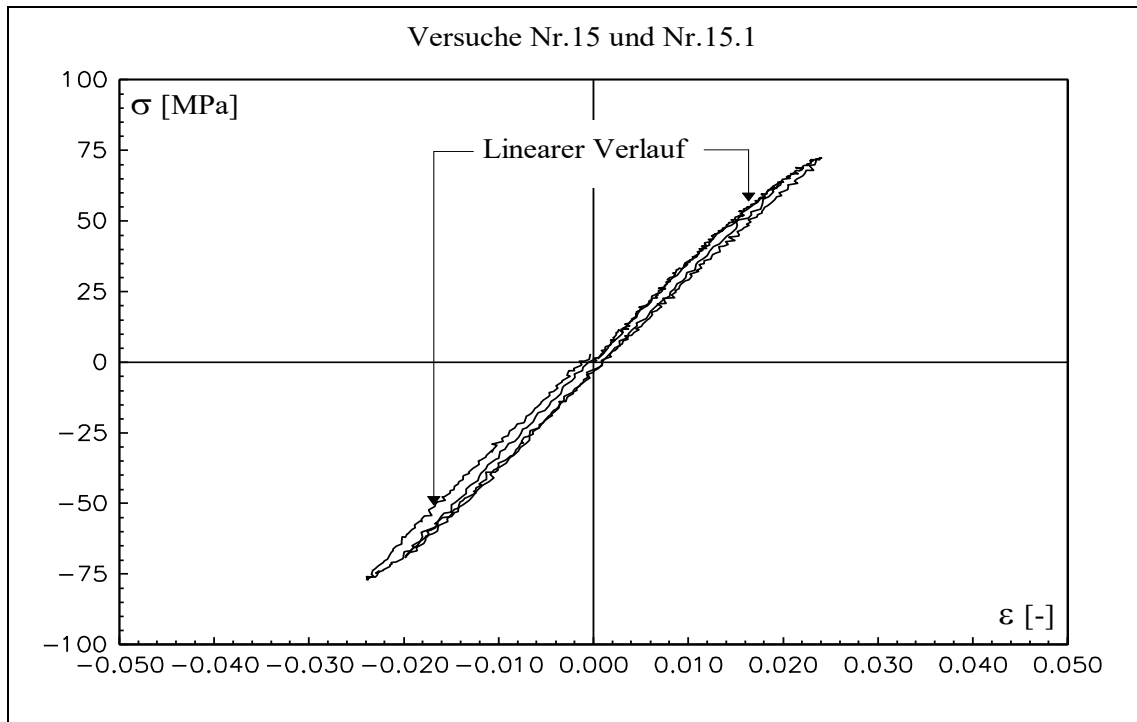


Abbildung 2.3.27: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Zyklen mit 0,020 und 0,024 Dehnungsamplitude. $|\dot{\epsilon}| = 0,20 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

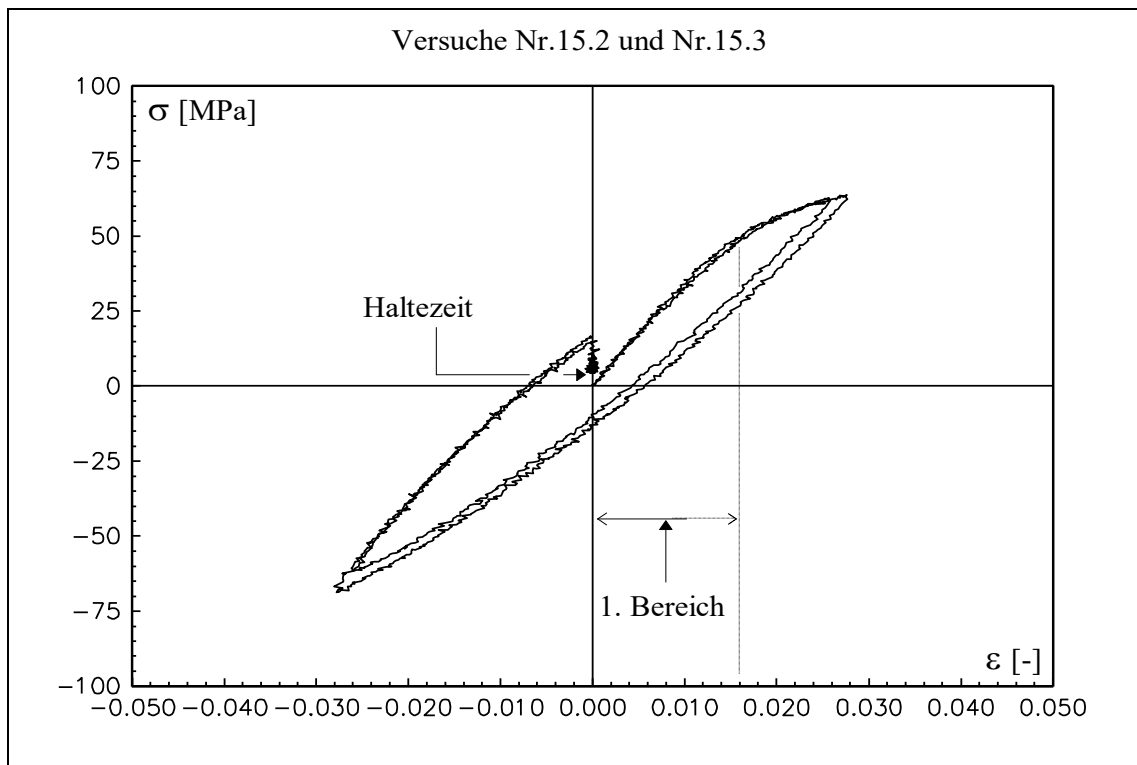


Abbildung 2.3.28: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Prozesse mit 0,026 und 0,028 Dehnungsamplitude. Versuch Nr.15.3 enthält eine Haltezeit von 7200s.

Der Prozeß des Versuchs Nr.15.3, dessen Spannungsantwort in Abb. 2.3.28 zu beobachten ist, wurde unmittelbar nach dem Versuch Nr.15.2 gefahren und zwar mit einer Dehnungsamplitude von 0,028 und einer darauffolgenden Haltezeit von 7200s. Danach wurde die Probe ausgespannt, neu eingespannt und der Prozeß des Versuchs Nr.15.4 mit einer Dehnungsamplitude von 0,030 gefahren. Die Spannungs-Dehnungskennlinien dieses Versuchs, in Abb. 2.3.29 wiedergegeben, weisen im Zugbereich ein höheres Spannungsniveau auf als die Kennlinien der unmittelbar danach gefahrenen Versuche. Zwischen den Versuchen 15.4 und 15.7 wurde die Materialprobe jeweils ausgespannt. Die Versuche 15.4 bis 15.7 wurden bis zu einer Dehnungsamplitude von 0,036 gefahren, und zwar wurde die Dehnungsamplitude in Schritten von 0,002 erhöht. Man beobachtet in der Tendenz eine kontinuierliche Abnahme des Spannungsniveaus im nichtlinearen Zugbereich.

In Abbildung 3.2.30 werden die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9 dargestellt, die mit einer Dehnungsamplitude von 0,040 gesteuert wurden. Der Prozeß des Versuchs Nr.15.8 enthält außerdem eine Haltezeit von 36000s bei Dehnung 0,000. Unmittelbar nach Beendigung der Haltezeit wurde der Prozeß des Versuchs Nr.15.9 durchgefahren. Ein ausgeprägter Anstieg des Spannungsniveaus im Zugbereich ab ca. 0,010 Dehnung nach der Haltezeit kann beobachtet werden. Dies entspricht einer *Erholung des Materials* während der Haltezeit und wird als *Erholungseffekt* (*recovery* bzw. *recovery of state* vgl. [13, 18, 40 und 64]) bezeichnet.

Die Prozesse der in Abb. 3.2.31 gezeigten Spannungsantworten wurden zunächst im Druckbereich gefahren. Der Versuch 15.10 wurde unmittelbar nach dem Versuch Nr.15.9 bis 0,040 Dehnungsamplitude durchgeführt. Man erkennt, daß die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kennlinie mit der von Versuch 15.8 im wesentlichen übereinstimmt. Nach der Aus- und Einspannprozedur wurde der Versuch Nr.15.11 bis einer Dehnungsamplitude von 0,042 gefahren. Danach wurde der Prozeß des Versuchs Nr. 15.12 mit einer Dehnungsamplitude von 0,048 gesteuert.

Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der Versuche Nr.15.13 und 15.14, wiedergegeben in Abbildung 2.3.32, sind durch Prozesse bis 0,060 Dehnung gekennzeichnet. Der Prozeß des Versuchs Nr.15.14 enthält zwei Haltezeiten von 18000s, eine Haltezeit von 11000s bei Dehnung Null und zwei weitere Haltezeiten von 10000s im Druckbereich.

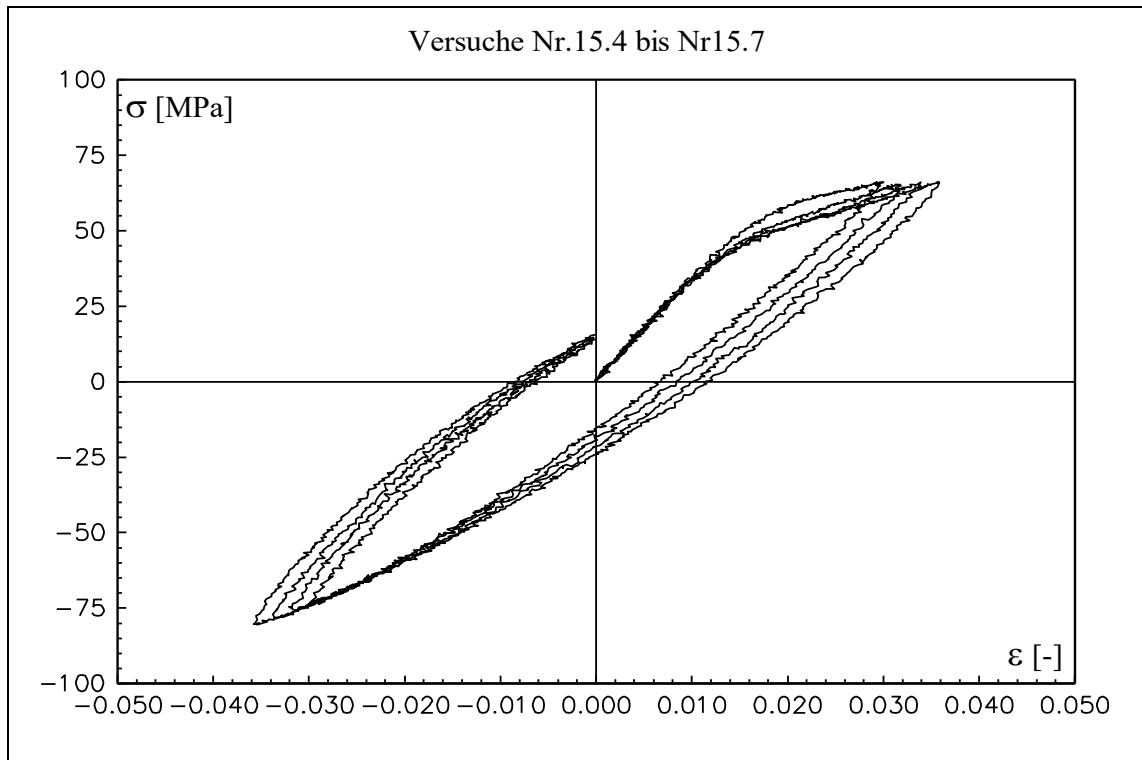


Abbildung 2.3.29: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Prozesse mit 0,030, 0,032, 0,034 und 0,036 Dehnungsamplitude.

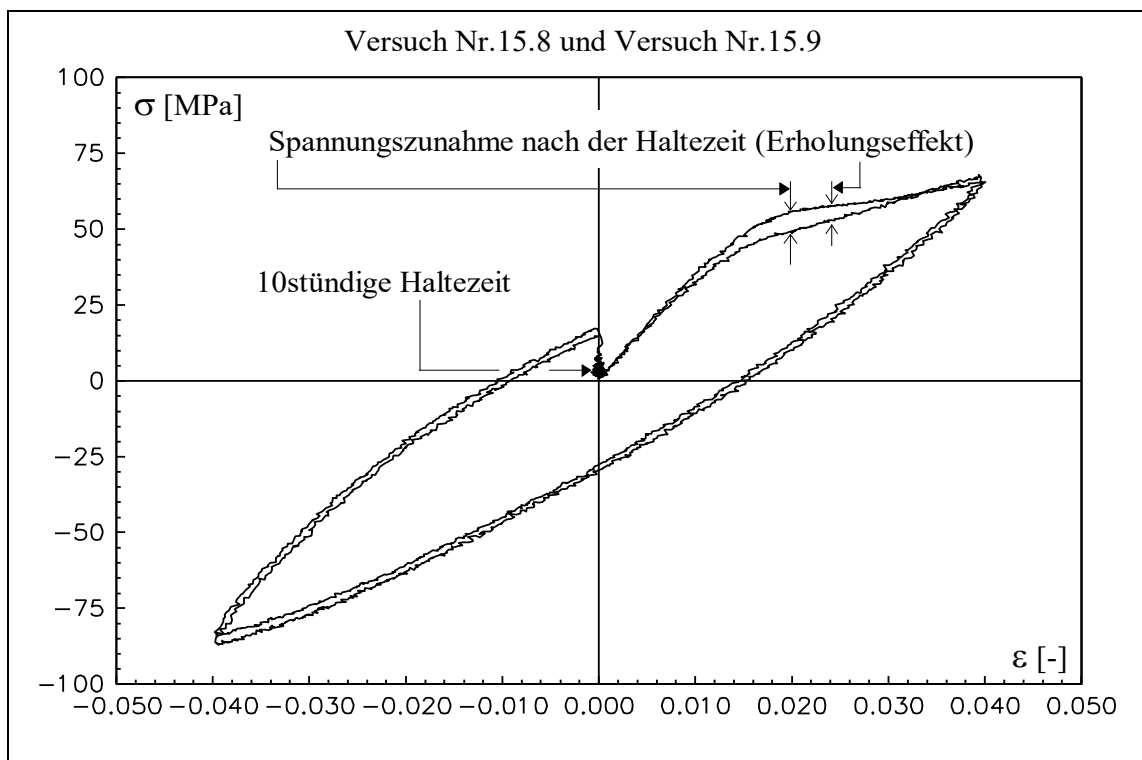


Abbildung 2.3.30: Verlauf der Kennlinien der Prozesse mit 0,040 Dehnungsamplitude. Der Versuch 15.8 enthält eine Haltezeit von 36000s. Danach wird im Zugbereich ein höheres Spannungsniveau erreicht (Versuch Nr.15.9 Erholungseffekt).

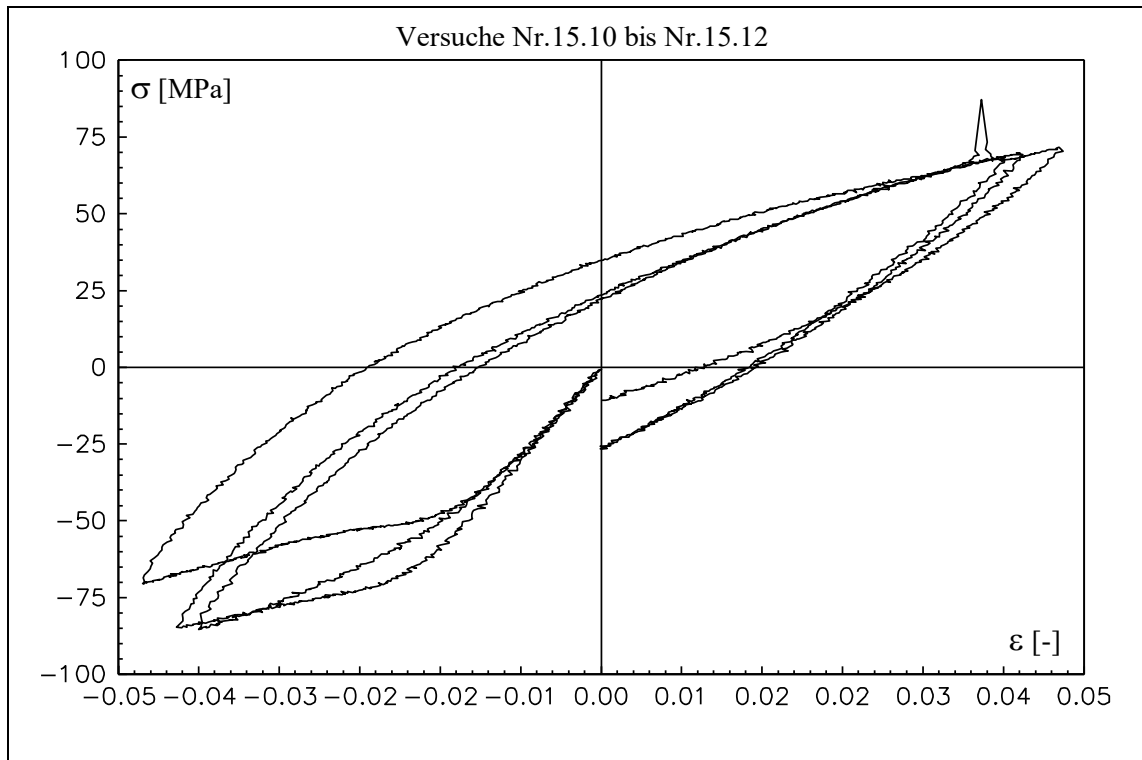


Abbildung 2.3.31: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Prozesse mit 0,040, 0,042 und 0,048 Dehnungsamplitude. Die Kennlinie des Versuchs Nr.15.12 enthält bei ca. 0,028 Dehnung ein „Spannungs-Peak“.

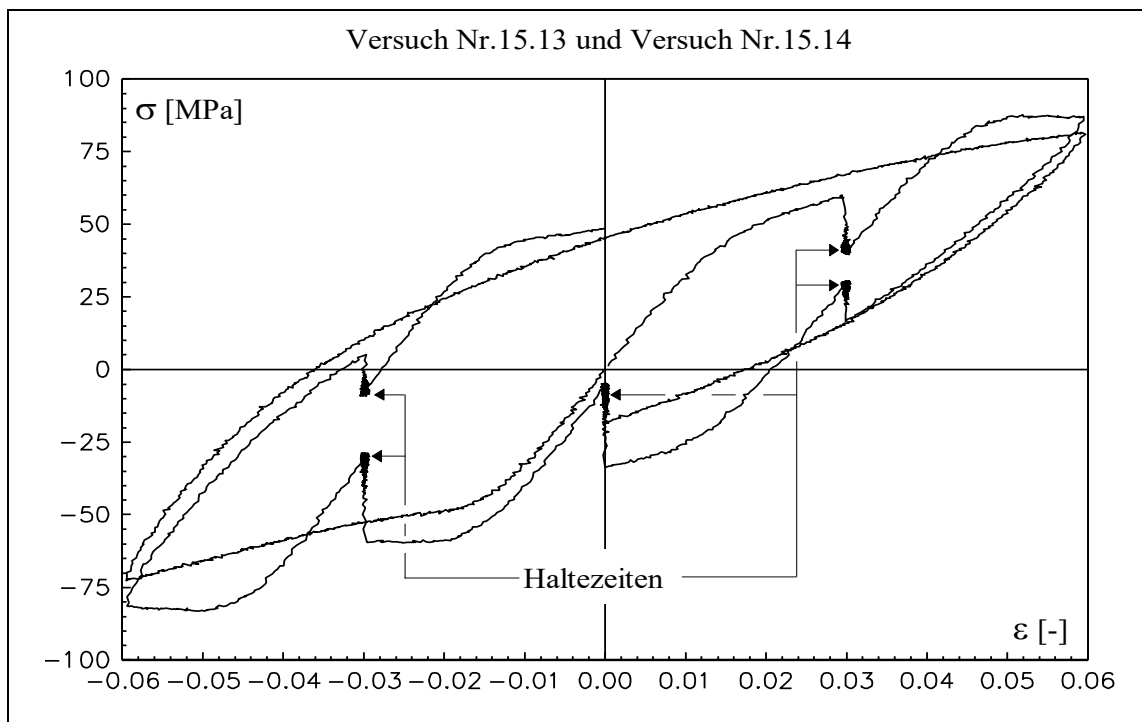


Abbildung 2.3.32: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Prozesse mit 0,060 Dehnungsamplitude. Der Versuch 15.14 enthält 5 unterschiedlich lange Haltezeiten.

Die Abbildungen 2.3.33 und 2.3.34 dienen einer gemeinsamen Darstellung der Versuche: Nr.7 Teil 2, Nr.8 Teil 2 1. Zyklus, Nr.9.6, Nr.15.8 und Nr.15.9. Alle Prozesse zu diesen Versuchen wurden bis zu einer maximalen Dehnungsamplitude von 0,040 gesteuert. In Abb. 2.3.33 kann durch die unterschiedlich erreichten Spannungsniveaus im nichtlinearen Zugbereich der Erholungseffekt in seinen unterschiedlichen Stufen beobachtet werden. In diesem Zusammenhang ist es möglich, die Prozeßabhängigkeit [6, 7] (vgl dazu [63]) des Spannungsniveaus zu erkennen. Dazu ist es zunächst sinnvoll, den Begriff einer *Unterbrechung* einer Belastung bzw. einer *ununterbrochenen Belastung* zu präzisieren: Eine Unterbrechung einer Belastung ist eine Wartezeit bzw. eine Haltezeit. Eine ununterbrochene Belastung entspricht dem Teil eines Prozesses, in dem keine Unterbrechungen vorliegen.

Der erste Zyklus des Versuchs Nr.8 Teil 2 besitzt im Vergleich mit den in Abb. 2.3.33 und 2.3.34 dargestellten weiteren Versuchen die zeitlich längste ununterbrochene Belastung. Diese Belastung führt zum niedrigsten Spannungsniveau aller Versuche. Der Versuch Nr.7 Teil 2 besitzt die zeitlich kürzesten ununterbrochenen Belastungen. Sie führen zu den höchsten Spannungsniveaus aller Versuche mit trainierten Materialproben (s. dazu Abb. 2.3.34).

Der Erholungseffekt wird während der Belastung nach einer Unterbrechung sichtbar. Die Intensität des Erholungseffekts hängt von der Dauer der Unterbrechung (Dauerabhängigkeit vgl. dazu [63]) und von der Belastung vor dieser Unterbrechung ab (Belastungsabhängigkeit). Eine 3tägige Wartezeit ermöglicht die maximale Erholung des trainierten Materials, d.h. das Erreichen des maximalen Spannungsniveaus trainierter Materialproben nach der Wartezeit (s. dazu Versuch Nr.9.6 in Abb. 2.3.34). In diesem Fall ist der Erholungseffekt belastungsunabhängig. Eine partielle Erholung wird am Beispiel der hintereinander geführten Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9 veranschaulicht (Dauerabhängigkeit). Die 10stündige Haltezeit nach dem ununterbrochenen Zyklus (Versuch Nr.15.8) ermöglicht eine partielle Erholung, die durch eine Erhöhung (bis ca. 0,022 Dehnung) und darauffolgende Senkung des Spannungsniveaus charakterisiert wird (Versuch Nr.15.9 in Abb. 2.3.33). Die unterschiedlichen Belastungen (Belastungsabhängigkeit) vor den 5 stündigen Haltezeiten bei 0,040 Dehnung des Versuchs Nr. 9.6 und des 1. Zyklus des Versuchs Nr.8 Teil 2 erzeugen die unterschiedlichen Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien bei der Entlastung dieser Versuche (s. dazu Abb. 2.3.34). Die kürzere ununterbrochene Belastung vor der 5stündigen Haltezeit (Teil 1 von Versuch Nr.8) führt zum höheren Spannungsniveau. Die längere ununterbrochene Belastung vor der 5stündigen Haltezeit (Belastung des Versuchs Nr.9.6) führt zum niedrigeren Spannungsniveau.

Man kann also allgemein erkennen, daß kürzere ununterbrochenen Belastungen höhere Spannungsniveaus erlauben und, daß längere ununterbrochenen Belastungen niedrigere Spannungsniveaus verursachen.

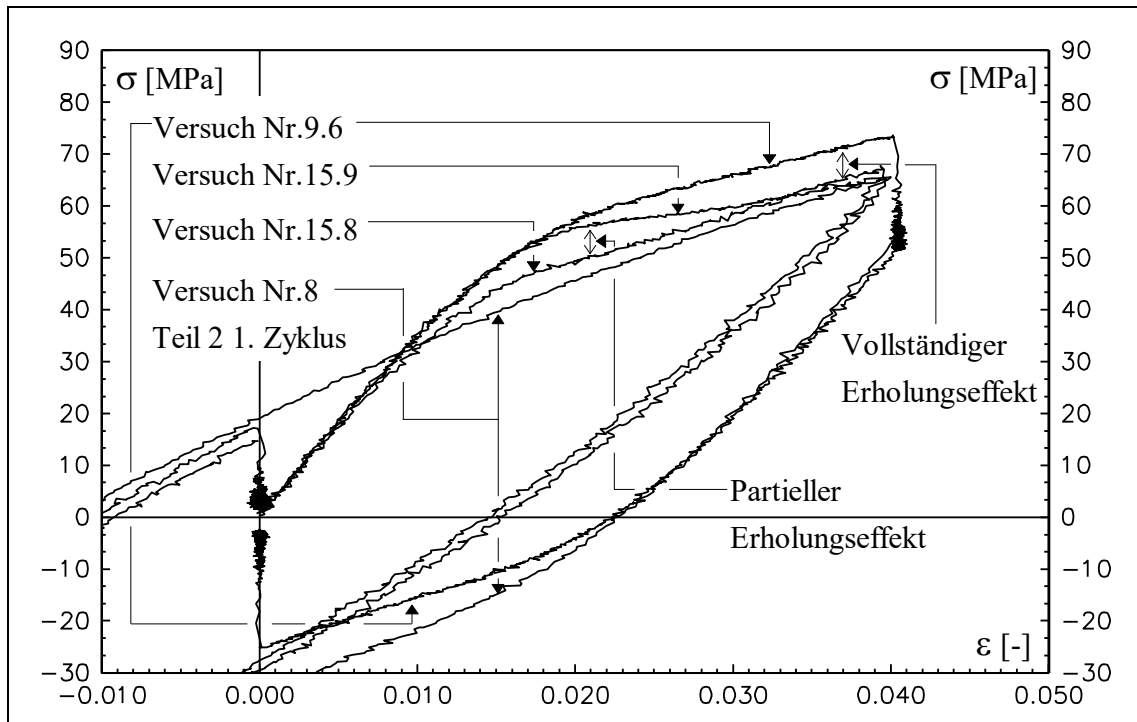


Abbildung 2.3.33: Darstellung des Erholungseffekts in seinen unterschiedlichen Stufen.

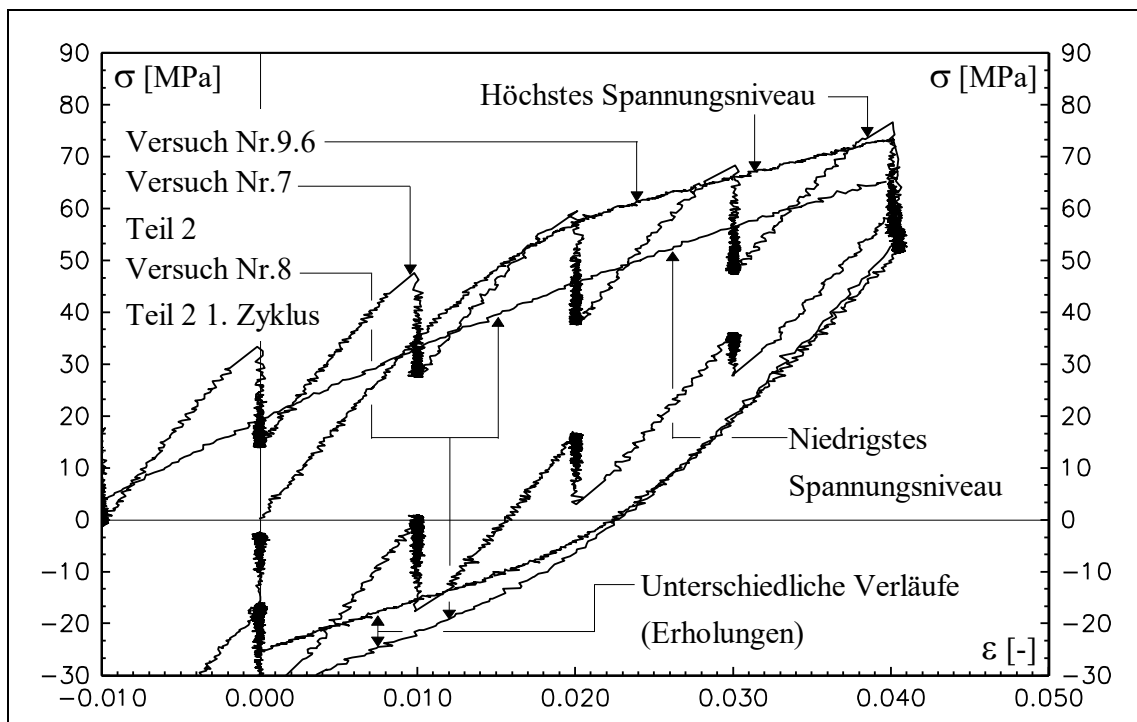


Abbildung 2.3.34: Darstellung der höchsten und niedrigsten Spannungsniveaus im nichtlinearen Zugbereich. Zeitlich kürzere ununterbrochene Belastungen ermöglichen höhere Spannungsniveaus. Zeitlich längere ununterbrochene Belastungen verursachen niedrigere Spannungsniveaus.

2.4 Zusammenfassende Interpretation der Experimente

1. Der Thermoplast Polyamid 6.6 zeigt bei Raumtemperatur (ca. 23°C) im untersuchten Belastungsspektrum ($-10^{-2} < \varepsilon < 10^{-2}$ und $10^{-6} < |\dot{\varepsilon}| < 10^{-3} \text{ s}^{-1}$) im wesentlichen ein reproduzierbares Materialverhalten.
2. Im untersuchten Geschwindigkeitsspektrum zeigt das Materialverhalten für Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten zwei unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Bereiche:
 - I) In einem 1. Bereich bis ca. 0,010 Dehnung sind die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im Rahmen der experimentellen Meßgenauigkeiten geschwindigkeitsunabhängig. Dabei kann ein linearer Verlauf der Kennlinien beobachtet werden. Fügt man nach einem vorgegebenen Prozeß eine Haltezeit hinzu, das heißt, hält man nach einem Prozeß die Dehnung der Materialprobe konstant, so kann eine geringe Relaxation der Spannung beobachtet werden (s. Abb. 2.3.13). Unter der Annahme, daß die relaxierte Spannung vernachlässigbar klein ist, wird dieser 1. Bereich als linear-elastisch charakterisiert (s. Abbn. 2.3.21 und 2.3.22).
 - II) In einem 2. Bereich ab ca. 0,010 Dehnung liegt im allgemeinen ein nichtlinearer Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien vor. Dabei ist eine stark ausgeprägte nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit erkennbar. Während der Haltezeiten ist eine deutliche Relaxation der Spannungen zu beobachten (s. dazu Abbn. 2.3.21 und 2.3.22).
3. Das Materialverhalten neuer, das heißt nicht vorbelasteter Proben wird durch die erste Zug-Belastung, die zum Verlassen des ersten Bereichs führt, verändert. Die Veränderung des Materialverhaltens entspricht zum einen einer Abnahme der Geschwindigkeitsabhängigkeit, und zum anderen einer Abnahme des maximal erreichbaren Spannungsniveaus der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien (s. dazu Abbn. 2.3.4, 2.3.21, 2.3.22 und 2.3.23). Dies wird als Entfestigungseffekt bezeichnet. Die Entfestigung wird durch das Einlegen von Haltezeiten bzw. Wartezeiten von mehreren Tagen nicht rückgängig gemacht. Der linear-elastische Bereich bleibt durch die erste Belastung unverändert.
4. Hält man nach einem vorgegebenen Dehnungsprozeß die Dehnung der Materialprobe konstant (Haltezeit), so strebt die Spannung einem Wert zu, der im allgemeinen vom Belastungsprozeß abhängt. Ein zeitlich konstanter Wert dieser Spannung (Gleichgewichtszustand) konnte experimentell während 24stündiger Haltezeiten nicht erreicht werden (s. dazu Abb. 2.3.5). Das heißt, daß eine eindeutige Identifikation der nach den 24-stündigen Haltezeiten erreichten Spannungen (Relaxationsabbruchpunkte) mit Gleichgewichtszuständen im Material nicht möglich war.

Dies erlaubt bzw. erzwingt zwei unterschiedliche Interpretationen der Relaxationsabbruchpunkte, nämlich:

Interpretation a) Die nach 5 Stunden herbeigeführten Relaxationsabbruchpunkte entsprechen im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten in erster Näherung Gleichgewichtszuständen des Materials. Hierbei werden die Relaxationsvorgänge im Vergleich zur Spannungsabnahme in den ersten Sekunden einer Haltezeit im wesentlichen als abgeschlossen angesehen.

Interpretation b) Den Relaxationsabbruchpunkten entsprechen keine Gleichgewichtszustände im Material. Die Relaxationsvorgänge sind auch nach 24 Stunden Haltezeit nicht abgeschlossen. Sie können aber im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten nicht weiterhin erfaßt werden.

6. Die Spannungsantwort trainierter Materialproben auf Zug- und Entlastungsprozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ist im Entlastungsbereich im Rahmen der Meßgenauigkeit geschwindigkeitsunabhängig (s. dazu Abb. 2.3.20).
7. Neben der Geschwindigkeitsabhängigkeit zeigt das erreichte Spannungsniveau der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien trainierter Materialproben weitere Prozeßabhängigkeiten: Ununterbrochene Belastungen (Prozesse ohne Haltezeiten bzw. Wartezeiten) mit ein und derselben Dehnungsgeschwindigkeit und unterschiedlich langen Belastungen erzeugen unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Kennlinien. Längere ununterbrochene Belastungen verursachen niedrigere Beträge des Spannungsniveaus der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien. Kürzere ununterbrochene Belastungen erzeugen höhere Spannungsniveaus (s. dazu Abb. 2.3.34).
8. Unterbrechungen bewirken eine Erholung des Materials, die beim darauffolgenden Prozeß das Erreichen höherer Beträge des Spannungsniveaus erlauben (Erholungseffekt). Eine Wartezeit von 3 Tagen nach einem beliebigen Prozeß führt zu einer vollständigen Erholung des trainierten Materials.
9. Die Prozeßabhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie (bei Versuchen mit ein und derselben Dehnungsgeschwindigkeit) verursacht auch eine Prozeßabhängigkeit der Spannungswerte der Relaxationsabbruchpunkte. Haltezeiten, die bei höheren Spannungsniveaus eingelegt werden, führen zu höheren Spannungswerten an den Relaxationsabbruchpunkten. Haltezeiten, die bei niedrigeren Spannungsniveaus (an derselben Dehnung) eingelegt werden, führen zu niedrigeren Spannungswerten der Relaxationsabbruchpunkte. Danach ist die Verbindung der Relaxationsabbruchpunkte (im Rahmen der Interpretation a) die Gleichgewichtskennlinie) offensichtlich stark prozeßabhängig.

3. Physikalische Modellbildung

3.1 Elementare Theorie des Materialverhaltens

Im Hinblick auf den im Kapitel 2 dargestellten experimentellen Aufbau kann man die Werkstoffprobe als ein System ansehen, an dessen Eingang (input) man einen zeitlichen Verlauf z.B. einer Weggröße anlegt, und das an seinem Ausgang (output) den Verlauf z.B. einer Kraftgröße ausgibt. Eine Theorie, welche die Verknüpfung von Eingabe und Ausgabe zu beschreiben sucht, ohne die innere Struktur des Systems zu erforschen, diese also als „*black box*“ behandelt, wird phänomenologische Theorie genannt.

Ein wichtiges Hilfsmittel der elementaren phänomenologischen Materialtheorie ist die Anwendung rheologischer Modelle. Rheologische Modelle sind aus einer endlichen Anzahl von Federn, Dämpfern und Reibungselementen aufgebaute mechanische Systeme mit folgenden nützlichen Eigenschaften:

- Sie sind so einfach gebaut, daß ihr gesamtes Eingabe-Ausgabe-Verhalten mit elementaren mathematischen Mitteln dargestellt werden kann. Das Verhalten läßt sich bei einiger Übung sogar ohne jede Rechnung qualitativ aus der Anschauung ableiten.
- Sie gestatten die Modellierung der Grundmuster mechanischen Verhaltens (Elastizität, Plastizität, Visko-Plastizität, Relaxation, Kriechen usw.), die an realen Materialien beobachtet werden.
- Sie ermöglichen nach Aufstellung der Grundbegriffe der Materialtheorie (Zustand, Geschichtsfunktional usw.) deren anschauliche Deutung.
- Sie geben Anhaltspunkte zur Formulierung der Stoffgleichungen für reale Materialien.

Es sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß im allgemeinen nicht daran gedacht ist, mit den rheologischen Modellen den Aufbau der inneren Struktur realer Materialien zu erklären. Es interessiert vielmehr allein ihr Eingabe-Ausgabe-Verhalten. Dieses soll in diesem Kapitel für die wichtigsten rheologische Modelle diskutiert werden [6, 76].

3.2 Rheologische Grundmodelle

Die drei rheologischen Grundmodelle (Elemente) sind:

a) Die lineare Feder

Schraubenfeder, Länge x , entspannte Länge x_0 , Materialparameter: Federsteifigkeit \mathbf{E}

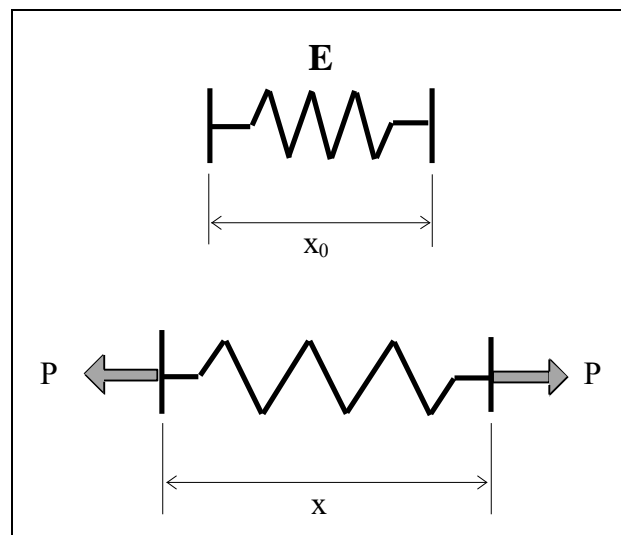


Abbildung 3.2.1: Das *Hooke*-Modell.

Hookesche-Materialgleichung:
$$P = \mathbf{E} (x - x_0) \quad 3.2.1$$

Das *Hookesche*-Modell steht stellvertretend für das *elastische* Materialverhalten.

b) Der lineare Dämpfer

Kolben in einem Zylinder mit zäher Flüssigkeit, Materialparameter: Dämpfungskonstante η

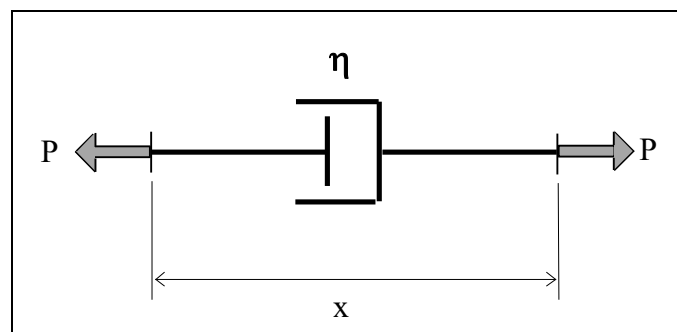


Abbildung 3.2.2: Das *Newton*-Modell.

Newtonsche -Materialgleichung:
$$P = \eta \frac{d x}{d t} \quad 3.2.2$$

Das *Newtonsche*-Modell steht stellvertretend für das *viskose* Materialverhalten.

c) Das Reibelement

Stein auf rauher Unterlage, Materialparameter: Reibungskonstante λ

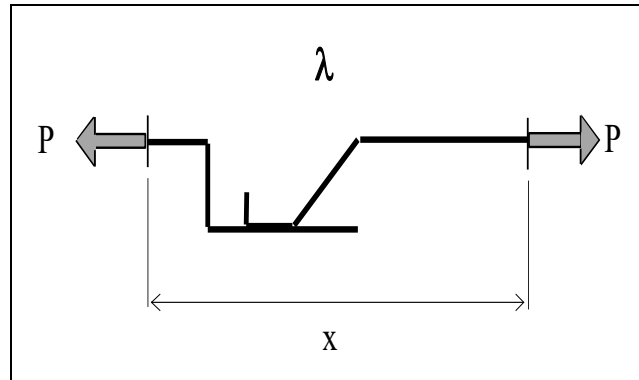


Abbildung 3.2.3: Das *St.-Venant*-Modell.

St.-Vénantsche Materialgleichung:

$$P \leq \lambda \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

$$P = \lambda \frac{dx/dt}{|dx/dt|} \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

3.2.3

Das *St.-Vénantsche*-Modell steht stellvertretend für das *starrplastische* Materialverhalten.

3.3. Das viskoelastische Verhalten

Die Modellbildung des viskoelastischen Verhaltens ergibt sich aus der Reihen- bzw. Parallelschaltung von Newton- und Hooke-Modellen. Die Zusammensetzung der rheologischen Grundmodelle liefert komplexere rheologische Modelle bzw. Netzwerke, die qualitativ unterschiedliche mechanische Eigenschaften besitzen [6, 25, 26, 27 und 32 u.a.]. Namentlich bekannt sind unter anderen das Maxwell-Modell, das Kelvin-Voigt-Modell und das Poynting-Thomson-Modell.

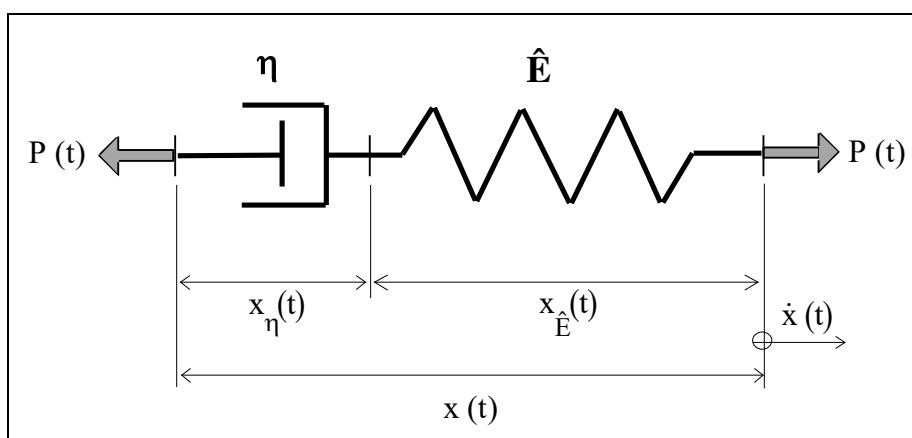


Abbildung 3.3.1: Das *Maxwell*-Modell.

Das *Maxwell*-Modell steht stellvertretend für das *viskoelastische* Materialverhalten.

Die Materialgleichungen, die das mechanische Verhalten eines beliebig vorgegebenen Netzwerkes beschreiben, sind Differentialgleichungen. Man erhält diese Differentialgleichungen aus einer Kombination von 3 Gleichungssystemen:

- *Kompatibilitätsbedingungen*
- *Gleichgewichtsbedingungen*
- *Materialgleichungen für die rheologischen Elemente*

Das Ziel der Herleitung ist im konkreten Fall die Elimination der „inneren“ Größen, die im Zusammenhang mit dem Freischneiden der einzelnen rheologischen Elemente entstehen. Um diese Elimination zu ermöglichen, müssen die einzelnen Gleichungen eventuell nach der Zeit differenziert werden.

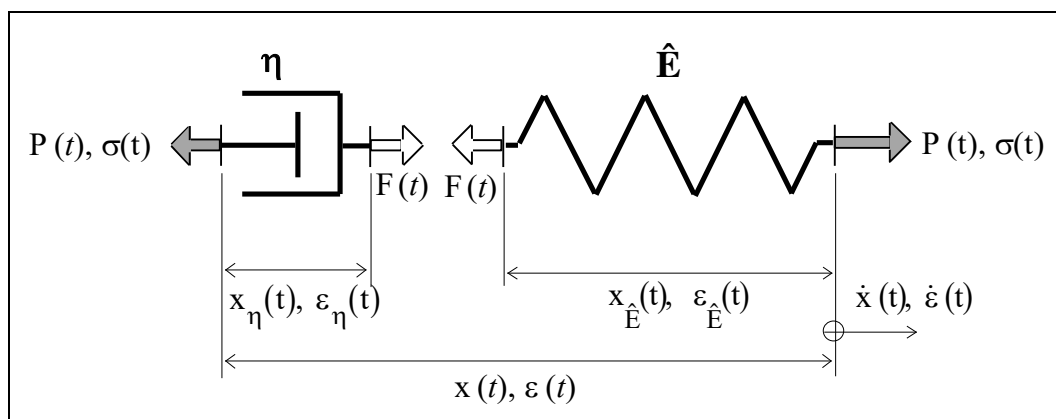


Abbildung 3.3.2: Freikörperbild des Maxwell-Modells.

Ein einfaches Netzwerk ist das in Abb. 3.3.1 skizzierte Maxwell-Modell, für das Abb. 3.3.2 die entsprechenden Freikörperbilder zeigt. In diesem Sonderfall entstehen die inneren Größen $x_{\hat{E}}$, x_{η} , F und man erhält die folgenden Gleichungen:

Kompatibilitätsbedingung

$$x = x_{\eta} + x_{\hat{E}} \quad 3.3.1a$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_{\hat{E}} = \dot{x} - \dot{x}_{\eta} \quad 3.3.1b$$

Gleichgewichtsbedingung

$$P = F \quad 3.3.2a$$

$$\Leftrightarrow \dot{P} = \dot{F} \quad 3.3.2b$$

Materialgleichungen der rheologischen Elemente

$$\text{Feder: } F = \hat{E} (x_{\hat{E}} - x_0) \quad 3.3.3a$$

$$\Leftrightarrow \dot{F} = \hat{E} \dot{x}_{\hat{E}} \quad 3.3.3b$$

$$\text{Dämpfer: } F = \eta \dot{x}_\eta \quad 3.3.4$$

der Eliminationsprozeß ist hier besonders einfach und führt auf

$$\dot{F} = \hat{\mathbf{E}} \dot{x}_{\hat{\mathbf{E}}} = \hat{\mathbf{E}} \left(\dot{x} - \dot{x}_\eta \right) = \hat{\mathbf{E}} \left(\dot{x} - \frac{F}{\eta} \right) \quad 3.3.5a$$

bzw. auf

$$\dot{P}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{x}(t) - \frac{\hat{\mathbf{E}}}{\eta} P(t). \quad 3.3.5b$$

Ersetzt man hierin die Kraft P durch die Spannung σ und die Verschiebung x durch die Dehnung ε , so kommt man zur resultierenden Materialgleichung

$$\dot{\sigma}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) - \frac{\hat{\mathbf{E}}}{\eta} \sigma(t). \quad 3.3.5c$$

Der Quotient

$$\tau = \frac{\eta}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.5d$$

hat die Dimension Zeit und wird als Relaxationszeit (Zeitkonstante) bezeichnet, da diese Größe für die Geschwindigkeit von Relaxationsvorgängen maßgebend ist. Mit der Relaxationszeit τ lautet die Materialgleichung des Maxwell-Modells

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau} \sigma(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t). \quad 3.3.5e$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen inhomogenen Differentialgleichung für beliebig vorgegebene Dehnungsprozesse $\varepsilon(t)$ wird durch das Verfahren der Variation der Konstanten ermöglicht, d.h. durch den Ansatz

$$\sigma(t) = K(t) \sigma_H(t) \quad 3.3.6$$

Darin ist $K(t)$ eine noch zu bestimmende Zeitfunktion und $\sigma_H(t)$ die Lösung der homogenen Differentialgleichung, d.h.

$$\sigma_H(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 3.3.7$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf

$$\dot{K}(t) = \hat{\mathbf{E}} e^{\frac{t}{\tau}} \dot{\varepsilon}(t) \quad 3.3.8$$

Integration liefert

$$K(t) = \sigma_0 + \int_0^t \hat{\mathbf{E}} e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}} \varepsilon'(\bar{t}) d\bar{t} \quad 3.3.9a$$

mit
$$\varepsilon'(\bar{t}) = \frac{d\varepsilon(\bar{t})}{d\bar{t}} \quad 3.3.9b$$

Setzt man dieses Ergebnis in den Ansatz 3.3.8 ein, so erhält man die allgemeine Lösung

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t \hat{\mathbf{E}} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\bar{t})} \varepsilon'(\bar{t}) d\bar{t} . \quad 3.3.10a$$

Für die Anfangsbedingung $\sigma_0 = \sigma(0) \equiv 0$ ergibt sich daraus

$$\sigma(t) = \int_0^t \hat{\mathbf{E}} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\bar{t})} \varepsilon'(\bar{t}) d\bar{t} . \quad 3.3.10b$$

Die Spannungsantwort 3.3.10 ist ein Faltungsintegral und damit ein lineares Funktional der Dehnungsgeschichte $\varepsilon'(\bar{t})$. $\varepsilon'(\bar{t})$ steht stellvertretend für alle Dehnungsgeschwindigkeiten, die das Material vom Zeitpunkt 0 bis t erfahren hat. Hiermit ist die Spannung σ zum Zeitpunkt t von der gesamten Dehnungsgeschichte abhängig. Die Darstellung der Materialantwort als Funktional erleichtert die Vorstellung des Materials als „black-box“, an deren Eingang (input) man einen zeitlichen Verlauf, z.B. eine Dehnungsgröße anlegt, und das an seinem Ausgang (output) den Verlauf z.B. der Spannungsgröße ausgibt.

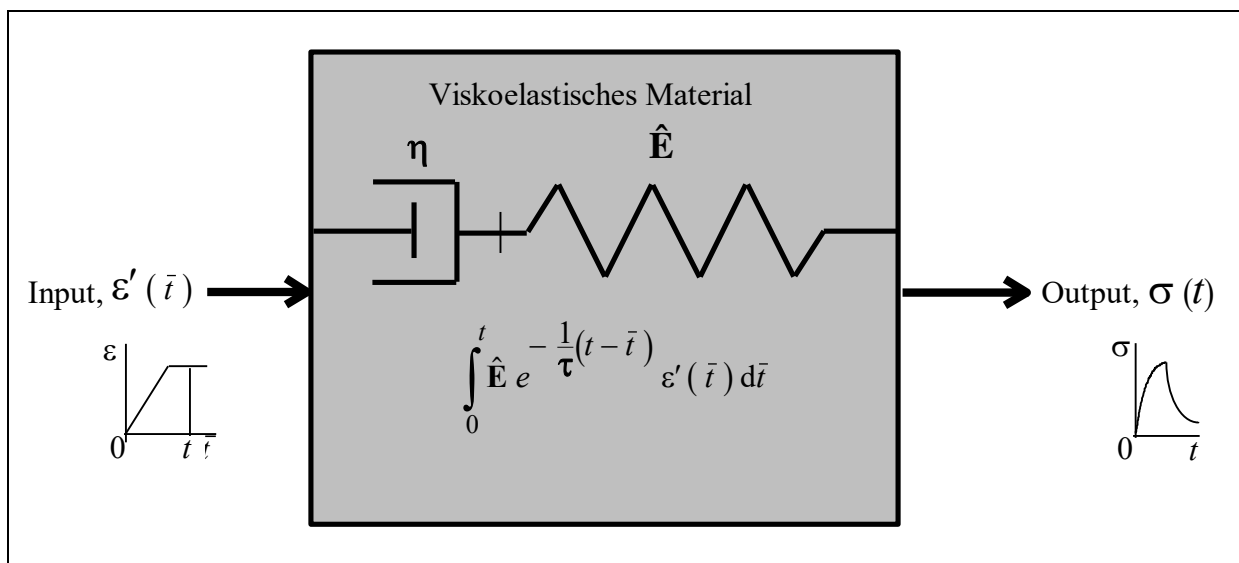


Abbildung 3.3.3: Darstellung des Materials als „black-box“ mit Dehnungsprozeß als Eingang (input) und Spannungsantwort als Ausgang (output).

Das Feder-Dämpfer-System dient als Hilfsmittel zur Veranschaulichung des viskoelastischen Materialverhaltens, soll aber über den Aufbau der inneren Struktur eines realen Materials nichts aussagen. Das Antwortfunktional ist eine Darstellung des makroskopischen Materialverhaltens, die die Lösung der durch das Feder-Dämpfer-System gewonnenen Differentialgleichung ist. Dieses Funktional beinhaltet ebenfalls keinerlei Informationen über die Mikrostruktur der „black-box“.

Das Materialverhalten kann durch Differentialgleichungen oder -äquivalent dazu- durch Funktionale dargestellt werden. Im ersten Fall wird die Spannungsgeschwindigkeit bzw. die Spannung zum Zeitpunkt t mit einer vorgegebenen Dehnungs- bzw. Prozeßgeschwindigkeit verknüpft. Im zweiten Fall liefert das Geschichtsintegral die Spannungsantwort für einen vorgegebenen Dehnungsprozeß zwischen den Zeitpunkten 0 und t . Es verknüpft damit die Spannung zum Zeitpunkt t mit der gesamten Prozeßgeschichte zwischen den Zeitpunkten 0 und t . Offensichtlich muß in beiden Fällen zur Gewinnung der Spannung der Dehnungsprozeß als explizite Funktion der Zeit bekannt sein.

Im Folgenden soll der in Abb. 3.3.4 skizzierte Prozeß untersucht werden.

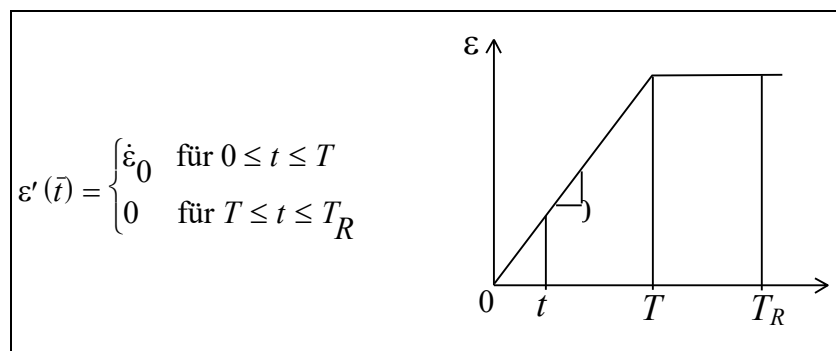


Abbildung 3.3.4: Prozeß mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit.

Gemäß Gl. 3.3.10b folgt:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \sigma(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}_0 \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-\bar{t})} d\bar{t} = \hat{\mathbf{E}} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad 3.3.11a$$

$$T \leq t \leq T_R \Rightarrow \sigma(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}_0 \int_0^T e^{-\frac{1}{\tau}(t-\bar{t})} d\bar{t} + 0 = \hat{\mathbf{E}} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) e^{-\frac{t-T}{\tau}} \quad 3.3.11b$$

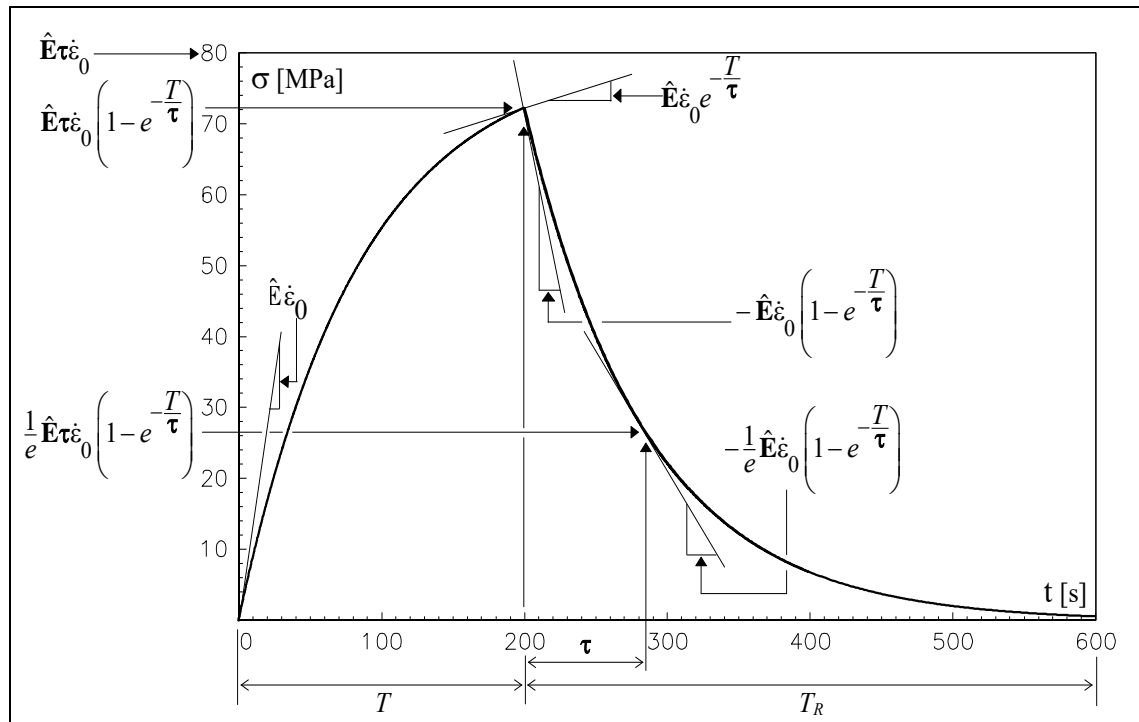


Abbildung 3.3.5: Spannungs-Zeit-Antwort zum Zug-Prozeß mit anschließender Haltezeit.

In Abbildung 3.3.5 wird der zeitliche Verlauf der Spannungsantwort des Maxwell-Modells auf den in Abbildung 3.3.4 dargestellten Prozeß wiedergegeben. In diesem Beispiel beträgt die Dehnungsgeschwindigkeit $2,00 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, die Dauer des Zug-Prozesses 200s und die Dauer des Relaxations-Prozesses 400s. Darüber hinaus beträgt der numerische Wert des Materialparameters \hat{E} 4,7 GPa und der des Parameters τ 85s. Diese Parameter-Werte ermöglichen eine qualitative Übereinstimmung der Spannungsantwort des Zug-Prozesses ($0 \leq t \leq T$) mit der Antwort des Zug-Prozesses im Versuch Nr.9.6 (s. Abb. 2.3.25). Für $t > T$ gibt es keine qualitative Übereinstimmung mehr: Während der Haltezeit relaxiert die Spannung des Maxwell-Modells nach τ Sekunden Haltezeit bis auf 0,37 seines Anfangswertes (72 MPa), d.h. bis auf 26,5 MPa und nach 340s (3τ) bis auf 0,018 des Anfangswertes bzw. 1,3 MPa. Hiermit wird die physikalische Bedeutung der Relaxationszeit τ als Maß für die Dauer des Relaxations-Prozesses quantitativ deutlich. Gemäß Gl. 3.3.11 erhält man:

$$t = T_R \text{ und } T_R - T \gg \tau \Rightarrow \sigma(T_R) = \hat{E} \tau \dot{\epsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) e^{-\frac{T_R - T}{\tau}} \cong 0 \quad 3.3.12$$

Das heißt, für Haltezeiten ($T_R - T$) die „wesentlich größer“ sind als die Relaxationszeit relaxiert die Spannung näherungsweise auf den Wert null. Der Wert 85s für die Relaxationszeit verursacht eine „schnellere“ Relaxation der Spannung als die, die in Versuch Nr.9.6 beobachtet wird (s. Abb. 2.3.25) [18, 23].

Eine Relaxationszeit des Maxwells-Modells in der Größenordnung der Haltezeit von Versuch Nr.9.6 ($\tau \approx 10^4\text{s}$) verursacht für Zug-Prozesse, die wesentlich kürzer dauern als diese Relaxationszeit ($T \ll \tau$) einen linearen Verlauf der Spannungsantwort:

$$t = T \ll \tau \Rightarrow \quad \sigma(t) = \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cong \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right] = \hat{E} \dot{\varepsilon}_0 t \quad 3.3.13$$

Dabei wird sichtbar, daß der Materialparameter τ auch ein Maß für die Dauer eines Zug-Prozesses ist. Zug-Prozesse von langer ($T \gg \tau$) Dauer erzeugen einen konstanten Wert der Spannung:

$$t = T \gg \tau \Rightarrow \quad \sigma(t) = \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cong \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.3.14a$$

Dieser Wert wird *stationäre Spannung* genannt:

$$t = T \gg \tau \Rightarrow \quad \sigma_{stat.} = \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.3.14b$$

und beträgt im Beispiel 80 MPa. Stationär bedeutet in diesem Fall, daß die zeitliche Änderung der Spannung null ist. Offensichtlich folgt für $\dot{\sigma}(t) = 0$ aus der Evolutionsgleichung 3.3.5e der stationäre Wert der Spannung.

Die Darstellung der Spannung als Funktion der Dehnung kann im Fall eines Zug-Prozesses mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit durch Einsetzen des Quotienten $\frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}_0}$ für die Zeit t in

Gleichung 3.3.11a erreicht werden:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T \Rightarrow \quad \sigma(\varepsilon) = \hat{E} \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau \dot{\varepsilon}_0} \varepsilon} \right) \quad 3.3.15a$$

dabei ist:

$$\varepsilon_T = \dot{\varepsilon}_0 T \quad 3.3.15b$$

die Dehnung, die zum Zeitpunkt T vom Zug-Prozeß erreicht wird.

Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ermöglichen die Darstellung verschiedener zeitlich unterschiedlich langer Prozesse in einem linearen Diagramm. Dabei wird unterstellt, daß die Spannungen und Dehnungen der unterschiedlichen Prozesse dieselbe Größenordnung haben. Darüber hinaus erlaubt die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie eines Zug-Prozesses die direkte Identifikation z.B. des Materialparameters \hat{E} durch ihre Anfangssteigung (siehe dazu Abbildung 3.3.6).

Andererseits verursacht die Elimination der Variable Zeit in der Spannungs-Dehnungs-Darstellung den Verlust von Informationen über zeitliche Verläufe z.B. des Relaxations-Prozesses.

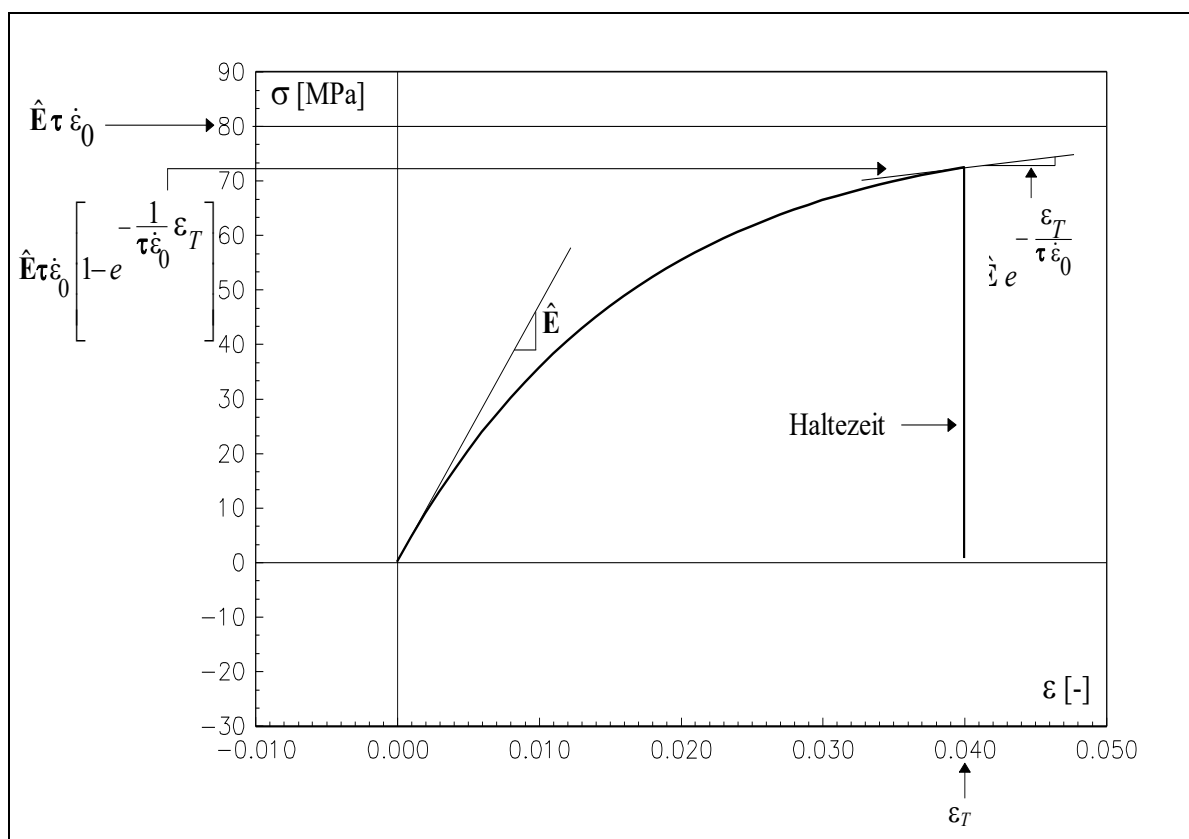


Abbildung 3.3.6: Spannungs-Dehnungs-Diagramm zum Zug-Prozeß mit anschließender Haltezeit.

Das in Abbildung 3.3.7 dargestellte Diagramm der dimensionlosen Funktion $N(\theta)$ ermöglicht die Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit von Zug-Prozessen mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten. Für solche Prozesse, die in der Zeit T zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden, erhält man gemäß Gl. 3.3.11a nach Einsetzen von $t=T$ und $\dot{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{T}$:

$$\sigma(T) = \hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0 \frac{\tau}{T} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}T} \right) \quad 3.3.16$$

Durch die Variablen-Transformation:

$$\frac{\tau}{T} = \theta \quad 3.3.17a$$

und

$$\frac{\sigma(T)}{\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0} = N(\theta) \quad 3.3.17b$$

erhält man:

$$N(\theta) = \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}} \right) \quad 3.3.17c$$

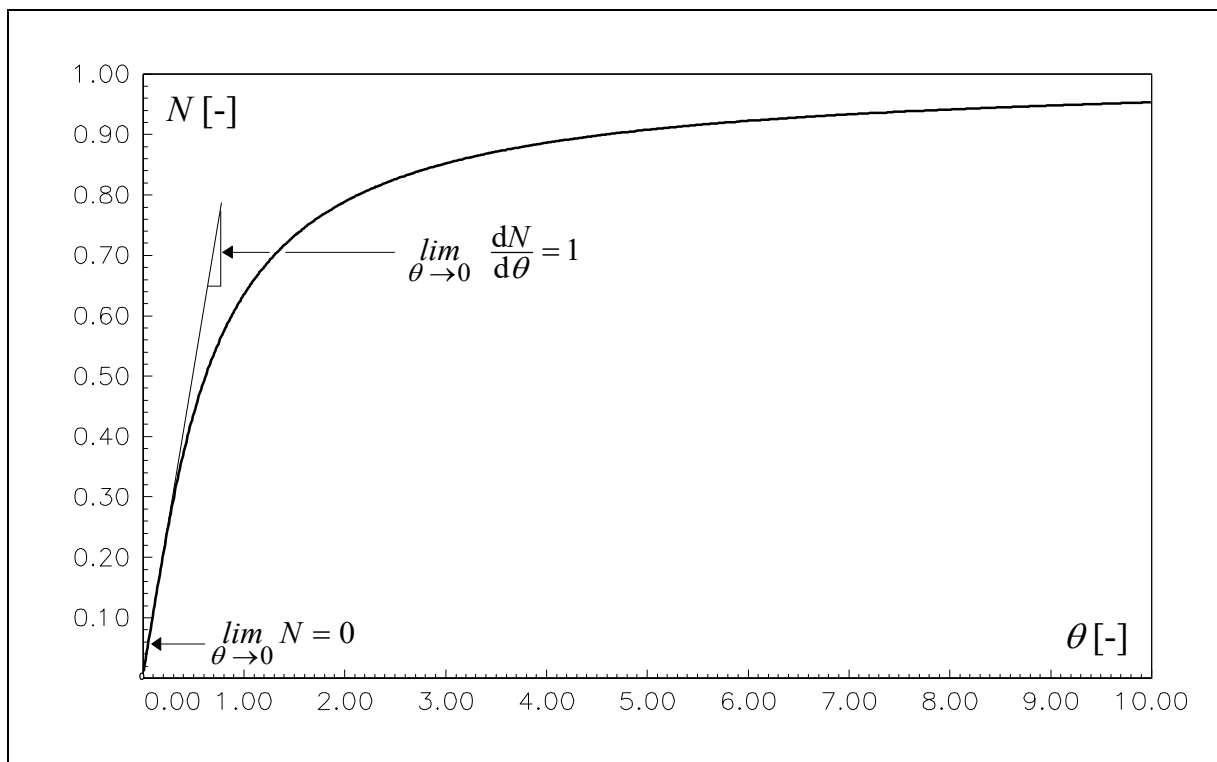


Abbildung 3.3.7: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit für Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten.

Die Größe $\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0$ normiert die Spannung $\sigma(T)$ und entspricht der Spannung, die von einem Hooke-Modell mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$ bei einer Dehnung ε_0 erreicht wird. Hiermit ist der dimensionslose Quotient $\frac{\sigma(T)}{\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0}$ das Verhältnis der Spannung σ zum Zeitpunkt T zur maximal erreichbaren Spannung $\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0$. Die Variable θ ist ein dimensionsloses Maß, das die Relaxationszeit τ auf die Dauer des Prozesses T bezieht. Darüber hinaus ist der Quotient $\frac{\tau}{T}$ bzw. die Variable θ proportional zur Dehnungsgeschwindigkeit des gefahrenen Prozesses (vgl. dazu *Deborah number* z. B. in [29]). Die Ergebnisse der Kurvendiskussion, die mit Hilfe der Gleichungen 3.3.13 und 3.3.14 durchgeführt wurden, werden im Diagramm der Abbildung 3.3.7 graphisch veranschaulicht. Für Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten, die in der Zeit T zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden, gelten die folgenden Aussagen:

- a) Prozesse, die wesentlich länger dauern als die Relaxationszeit ($T \gg \tau$) zeigen eine lineare Geschwindigkeitsabhängigkeit. Dies wird durch die in Abbildung 3.3.7 dargestellte Tangente im Nullpunkt wiedergegeben und entspricht der Vernachlässigung der Exponentialfunktion gegenüber dem Wert 1 (s.dazu Gl. 3.3.14a):

$$\theta \ll 1 \Rightarrow N(\theta) \cong 1 \theta \Rightarrow \sigma(T) \cong \hat{\mathbf{E}}\tau \frac{\varepsilon_0}{T} \Rightarrow \sigma\left(\dot{\varepsilon}_0\right) \cong \eta \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.3.18$$

Die Spannungsantwort des Maxwells-Modells nimmt ihren stationären Zustand an (Gl. 3.3.14b), der der Materialantwort des Newtonschen-Dämpfers mit Viskosität η entspricht und eine lineare Geschwindigkeitsabhängigkeit besitzt.

- b) Prozesse, die wesentlich kürzer dauern als die Relaxationszeit ($T \ll \tau$) geben eine konstante Spannung wieder. Diese ist durch den Grenzwert 1 für „große“ θ s der $N(\theta)$ Funktion gegeben und entspricht einer linearen Entwicklung der Exponentialfunktion (s.d. Gl. 3.3.13). In diesem Fall ist die Spannungsantwort geschwindigkeitsunabhängig:

$$\theta \gg 1 \Rightarrow N(\theta) \cong 1 \Rightarrow \sigma \cong \hat{\mathbf{E}} \varepsilon_0 \quad 3.3.19$$

Die Spannungsantwort des Maxwell-Modells entspricht damit der Materialantwort der Hookeschen-Feder mit Federkonstante $\hat{\mathbf{E}}$. Offensichtlich ist dann die Spannungsantwort geschwindigkeitsunabhängig [7].

- c) Prozesse, mit einer Dauer der Größenordnung der Relaxationszeit ($T \approx \tau$) geben eine nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit wieder. Dies wird durch die in Abbildung 3.3.7 dargestellte nichtlineare Beziehung zwischen N und θ für θ s der Größenordnung der Einheit gegeben:

$$\theta \approx 1 \Rightarrow N(\theta) = \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}} \right) \Rightarrow \sigma\left(\dot{\varepsilon}_0\right) = \hat{\mathbf{E}}\tau \dot{\varepsilon}_0 \left[1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{\tau}\right) \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0}} \right] \quad 3.3.20$$

Gemäß Gleichung 3.3.11a folgt eine weitere dimensionslose Darstellung für Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten, die in ein und derselben Zeit T in diesem Fall zur Dehnung $\varepsilon(T)$ gefahren werden:

$$\frac{\sigma(T)}{\hat{\mathbf{E}}} \frac{1}{\varepsilon(T)} = \frac{\hat{\varepsilon}(T)}{\varepsilon(T)} = \frac{\hat{\varepsilon}(T)}{\hat{\varepsilon}(T) + \varepsilon_{\eta}(T)} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} T}\right)}{\frac{T}{\tau}} \quad 3.3.21$$

Die Größe $\frac{\sigma(T)}{\hat{\mathbf{E}}}$ ist die Dehnung der Feder zum Zeitpunkt T ($\hat{\varepsilon}(T)$). Die Gesamt-Dehnung ($\varepsilon(T)$) ist die Summe der Dehnung der Feder ($\hat{\varepsilon}(T)$) und der Dehnung des Dämpfers ($\varepsilon_{\eta}(T)$).

Durch die Variablen-Transformation:

$$\frac{T}{\tau} = \Phi \quad 3.3.22a$$

und

$$\frac{\hat{\varepsilon}(T)}{\varepsilon(T)} = M(\Phi) \quad 3.3.22b$$

erhält man:

$$M(\Phi) = \frac{1}{\Phi} \left(1 - e^{-\Phi}\right) \quad 3.3.22c$$

Die Funktion $M(\Phi)$ gibt den Verlauf des Quotienten der Dehnung der Feder zur Gesamt-Dehnung wieder.

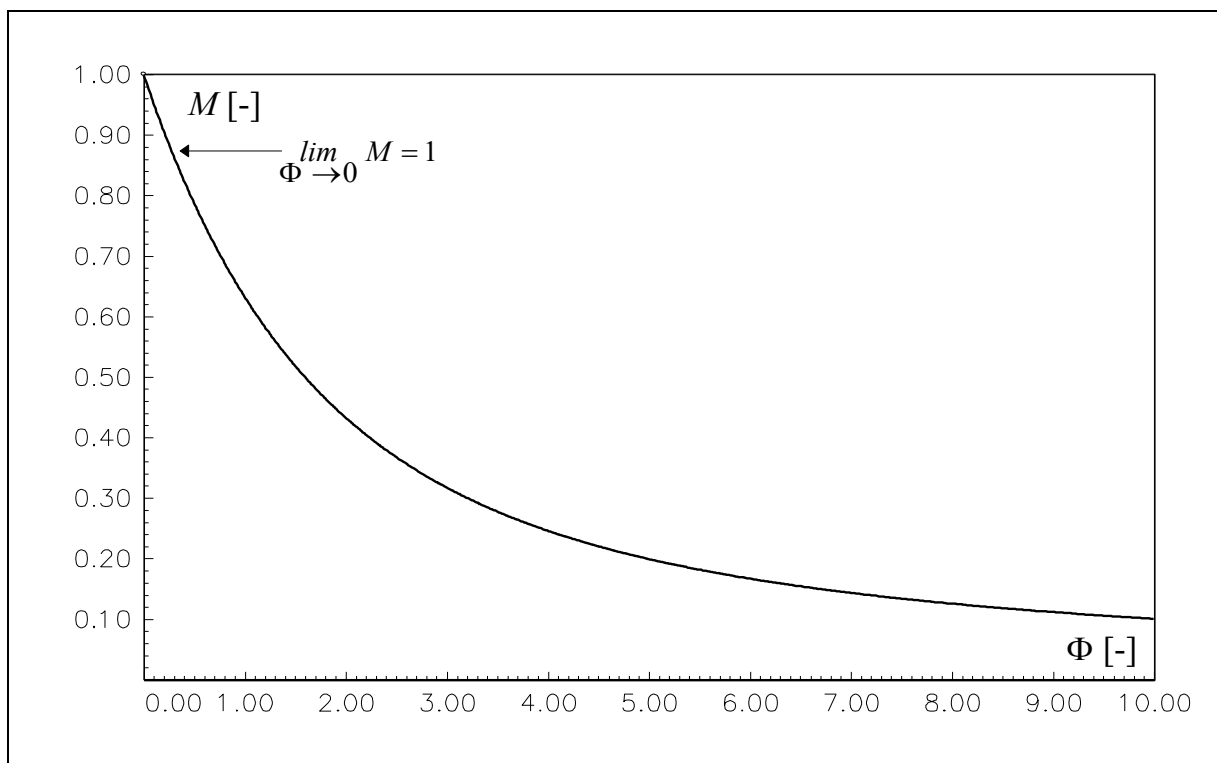


Abbildung 3.3.8: Geschwindigkeitsunabhängige Darstellung des Quotienten der Dehnung der Feder zur Gesamt-Dehnung für Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten (dimensionslos).

Der in Abbildung 3.3.8 dargestellte Verlauf des dimensionslosen Quotienten M ermöglicht folgende Erkenntnisse:

- 1) Für Zug-Prozesse, die wesentlich kürzer dauern als die Relaxationszeit ($T \ll \tau$) ist die Dehnung des Dämpfers im Vergleich zur Dehnung der Feder vernachlässigbar klein:

$$\Phi \ll 1 \Rightarrow M(\Phi) \cong 1 \Rightarrow \varepsilon_{\eta}(T) \ll \hat{\varepsilon}(T) \Rightarrow \hat{\varepsilon}(T) \cong \varepsilon(T) \quad 3.3.23$$

Hierbei hat der Dämpfer keine Zeit zu wirken bzw. wirkt als starres Element und kann dem Prozeß nicht folgen, die Wirkung der Feder ist maximal. Das heißt, daß die Dehnung des Dämpfers sich nicht entwickelt, und die Dehnung der Feder der Gesamt-Dehnung näherungsweise gleich ist (vgl. dazu Gl. 3.3.19 es gilt, $\Phi = \frac{1}{\theta}$).

- 2) Für Zug-Prozesse, die wesentlich länger dauern als die Relaxationszeit ($T \gg \tau$) ist die Dehnung der Feder im Vergleich zur Dehnung des Dämpfers vernachlässigbar klein:

$$\Phi \gg 1 \Rightarrow M(\Phi) \cong 0 \Rightarrow \hat{\varepsilon}(T) \ll \varepsilon_{\eta}(T) \Rightarrow \varepsilon_{\eta}(T) \cong \varepsilon(T) \quad 3.3.24$$

In diesem Fall hat der Dämpfer Zeit, dem Prozeß zu folgen, und die Wirkung der Feder verschwindet asymptotisch. Das heißt, daß die Dehnung des Dämpfers der Dehnung des Prozesses entspricht. Die Dehnung der Feder bleibt konstant bzw. maximal (vgl. dazu Gl. 3.3.18).

- 3) Für Zug-Prozesse mit einer Dauer der Größenordnung der Relaxationszeit ($T \approx \tau$) erhält man:

$$\Phi \approx 1 \Rightarrow M(\Phi) = \frac{1}{\Phi} \left(1 - e^{-\Phi}\right) \Rightarrow \varepsilon_{\eta}(T) \approx \hat{\varepsilon}(T) \quad 3.3.25$$

In diesem allgemeinsten Fall kann der Dämpfer den Prozeß teilweise folgen und die Wirkung der Feder ist nicht konstant. Die Dehnung des Dämpfers entwickelt sich und ist von der Größenordnung der Dehnung der Feder (vgl. dazu Gl. 3.3.20).

Die durchgeführte Diskussion der Funktionen $N(\theta)$ und $M(\Phi)$ wurde durch die Variation der Dauer der Prozesse (T) bei konstant gehaltener Relaxationszeit (τ) realisiert. Eine Variation der Relaxationszeit (τ) bei konstant gehaltener Dauer des Prozesses (T) entspricht ebenso einer Variation von θ bzw. Φ . Daraus geht hervor, daß eine komplette Darstellung der Materialantwort durch Spannungs-Zeit und Dehnungs-Zeit-Diagramme erreichbar ist. Abbildung 3.3.10 zeigt eine Möglichkeit zur eindeutigen Darstellung der Materialantwort [28, 35]. Hierbei wird auch der vorgegebene Prozeß angegeben. Eine derartige Darstellung ist aus Platzgründen nicht immer möglich. Daher werden oft alleinstehende Spannungs-Dehnungs-Diagramme mit einer Beschreibung des Prozesses bevorzugt.

Zur qualitativen Veranschaulichung dieser Erkenntnisse werden für den Zug-Prozeß mit $\dot{\varepsilon}_0 = 2,00 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und mit den Parameterwerten $\hat{E} = 4,7 \text{ GPa}$ und $\tau = 85 \text{ s}$ die Verläufe der Dehnungen der Feder und des Dämpfers in Abb. 3.3.9 dargestellt. Gleichung 3.3.26 gibt die Verläufe der Dehnung der Feder und des Dämpfers für Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten wieder:

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}_{\varepsilon_{\hat{E}}(t) = \frac{\sigma(t)}{\hat{E}}} + \underbrace{\dot{\varepsilon}_0 t + \tau \dot{\varepsilon}_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)}_{\varepsilon_{\eta}(t) = \int_0^t \frac{\sigma(\bar{t})}{\hat{E}\tau} d\bar{t}} = \dot{\varepsilon}_0 t \quad 3.3.26$$

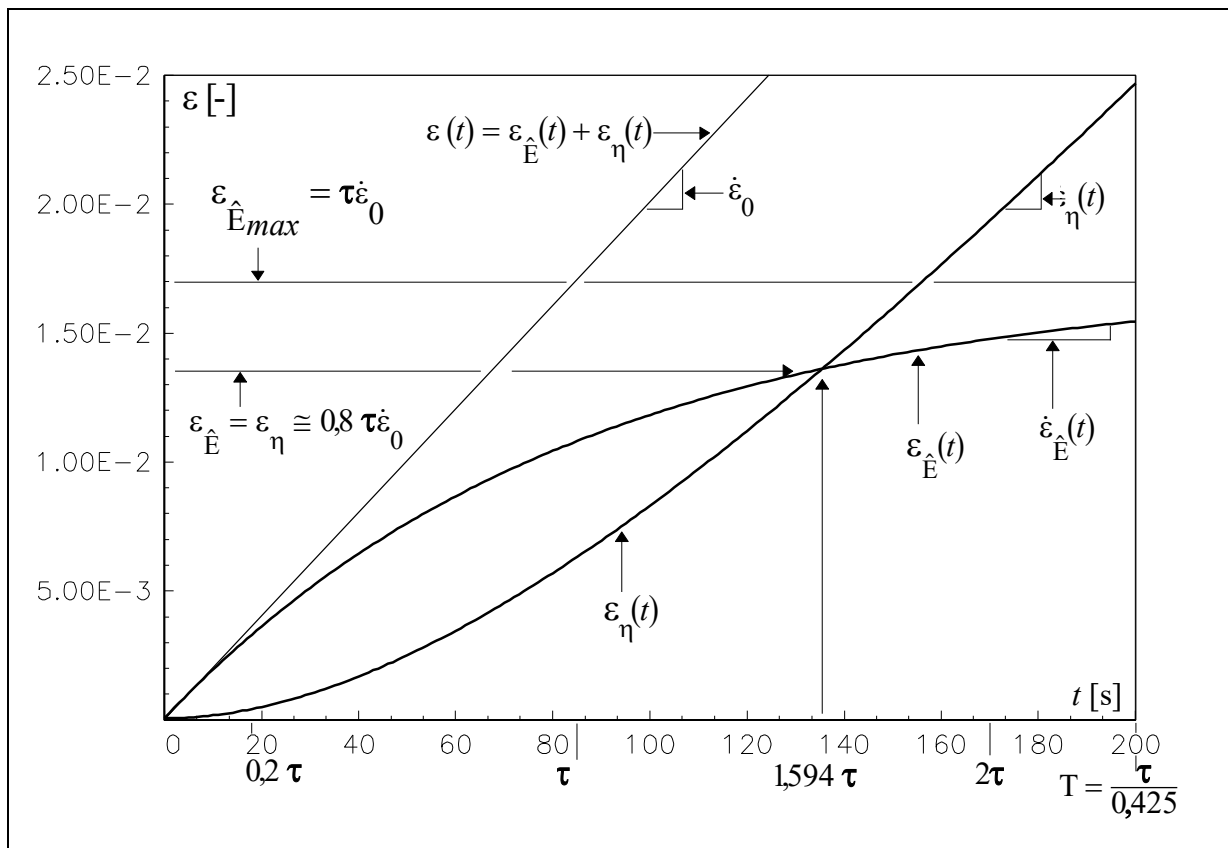


Abbildung 3.3.9: Zeitliche Verläufe der Gesamt-Dehnung, der Dehnung der Feder und der Dehnung des Dämpfers für den Zug-Prozeß mit $\dot{\varepsilon}_0 = 2,00 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

In Abb. 3.3.9 erkennt man, daß am Ende des Prozesses ($T=200\text{s}$) die Dehnung der Feder ca. 90% ihres maximalen Wertes erreicht hat, in der Tendenz kann man den Fall 2 ($T \gg \tau$) erkennen. Darüber hinaus kann die laufende Zeit t als Dauer T unterschiedlich langer Prozesse betrachtet werden. Entsprechend wird der Fall 1 ($T \ll \tau$) veranschaulicht. Dabei wirkt der Dämpfer als starres Element, d.h. seine Dehnung bleibt *eingefroren* [28]. Der Fall 3 wird z.B. für $T = 1,594 \tau$ deutlich, dabei nehmen die Dehnung der Feder und die Dehnung des Dämpfers denselben Wert an.

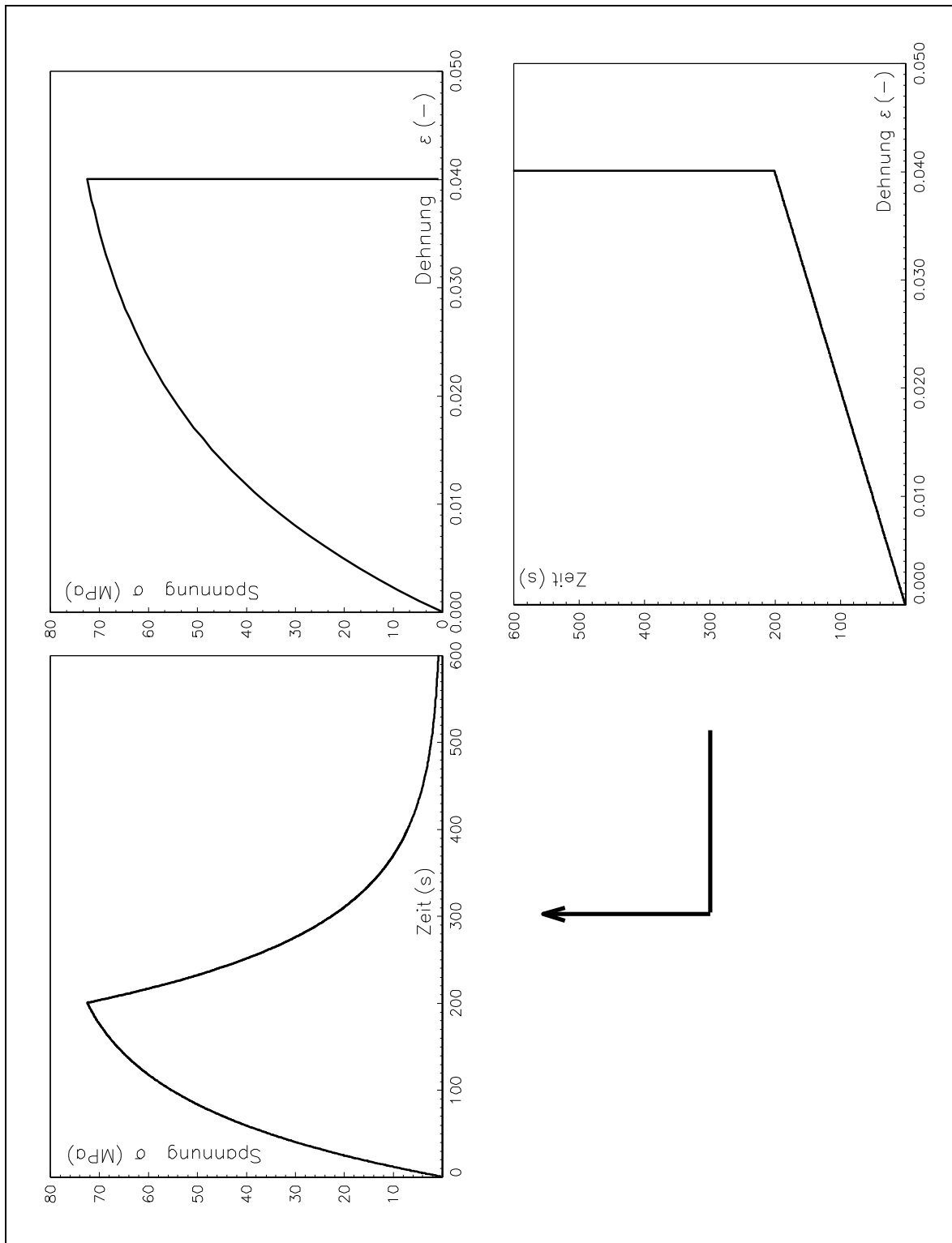


Abbildung 3.3.10: Spannungsantwort zum Zug-Prozess mit anschließender Haltezeit. Der Pfeil zeigt die Ein-/Ausgaberrichtung.

Die Dehnungsantwort des spannungsgesteuerten Prozesses:

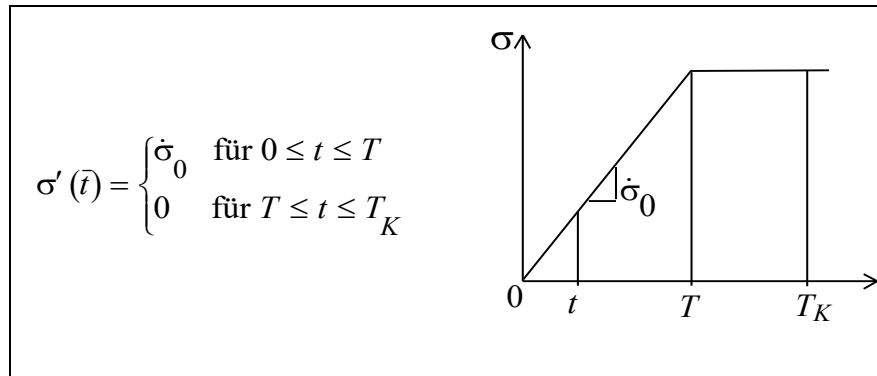


Abbildung 3.3.11: Prozeß mit konstanter Spannungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit.

wird durch Umschreibung und Integration der Evolutionsgleichung 3.3.5e erreicht:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \int_0^t \left[\sigma'(\bar{t}) + \frac{1}{\tau} \sigma(\bar{t}) \right] d\bar{t} \quad 3.3.27$$

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma}_0 \left(t + \frac{1}{2\tau} t^2 \right) \quad 3.3.28a$$

$$T \leq t \leq T_K \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma}_0 \left(T + \frac{1}{2\tau} T^2 \right) + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}\tau} \dot{\sigma}_0 T (t - T) \quad 3.3.28b$$

Mit den Materialparametern $\hat{\mathbf{E}}=4,7$ GPa und $\tau=85$ s, die mit dem Beispiel des dehnungsgesteuerten Prozesses übereinstimmen, erhält man für den in Abb. 3.3.11 dargestellten Prozeß mit einer Spannungsgeschwindigkeit von $8,80 \times 10^{-2}$ MPa s⁻¹, die 852s dauert und einen 648s langen Kriechprozeß ($\dot{\sigma}_0 = 0$) die in Abbildung 3.3.12 wiedergegebene Materialantwort.

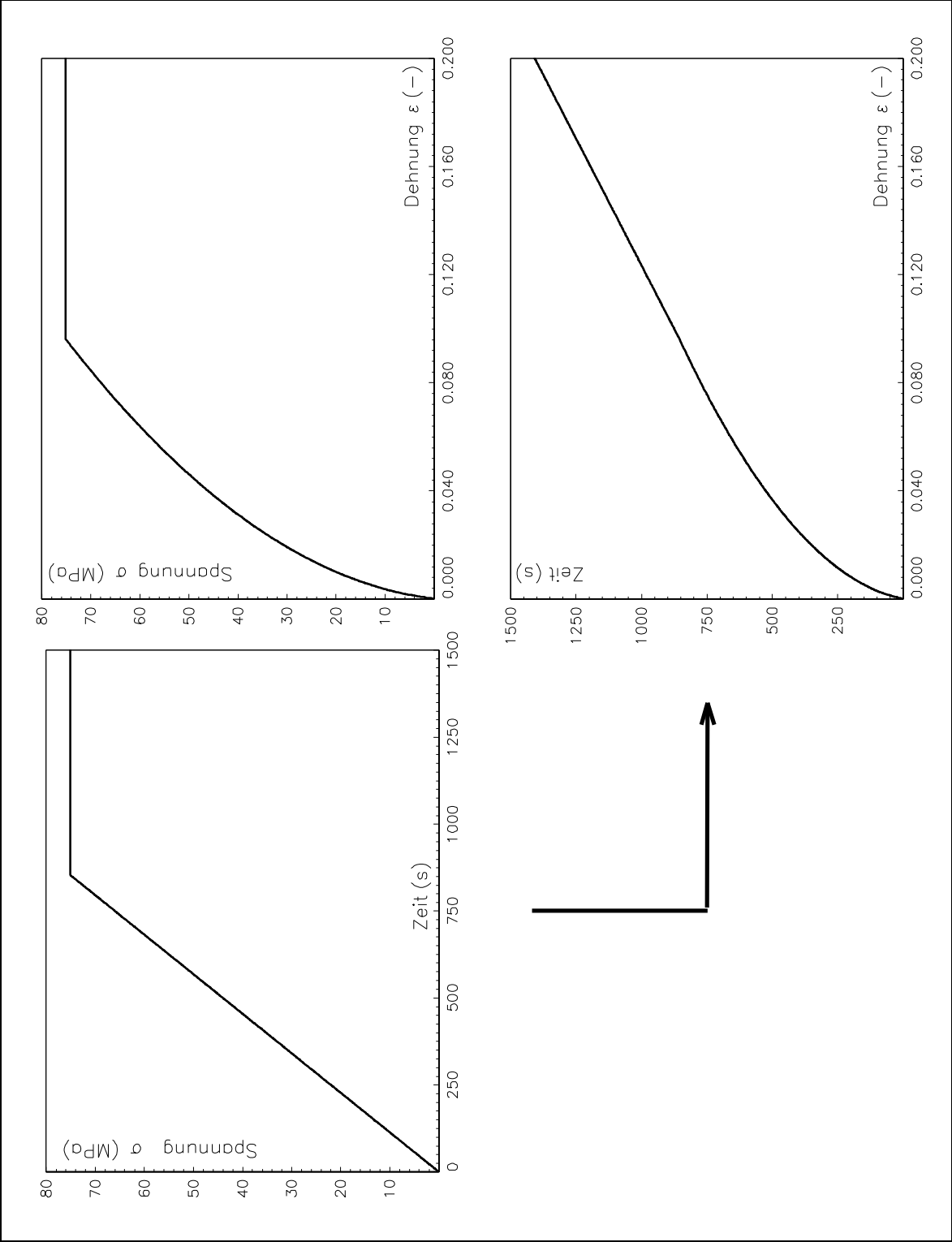


Abbildung 3.3.12: Dehnungsantwort zum Zug-Prozeß mit anschließender Haltezeit. Der Pfeil zeigt die Ein-/Ausgaberrichtung.

Gemäß 3.3.28a und mit der Variablentransformation 3.3.17a folgt für Prozesse mit konstanten Spannungsgeschwindigkeiten, die in der Zeit T zu ein und derselben Spannung σ_0 gefahren werden:

$$\hat{\mathbf{E}} \frac{\varepsilon(T)}{\sigma_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{T}\right)} \Rightarrow N_s(\theta) = 1 + \frac{1}{2\theta}. \quad 3.3.29$$

Dies ist eine dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit (s. dazu Abb 3.3.13).

Es gelten qualitativ dieselben physikalischen Interpretationen der Grenzübergänge der Funktion $N_s(\theta)$ und $N(\theta)$. Für kurze bzw. schnelle Prozesse verhält sich das Maxwell-Modell elastisch mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$. Für lange bzw. langsame Prozesse dagegen entspricht die Dehnungsantwort der eines Newtonschen Dämpfers mit Viskosität η ($N_s(\theta) \cong \frac{1}{\theta}$).

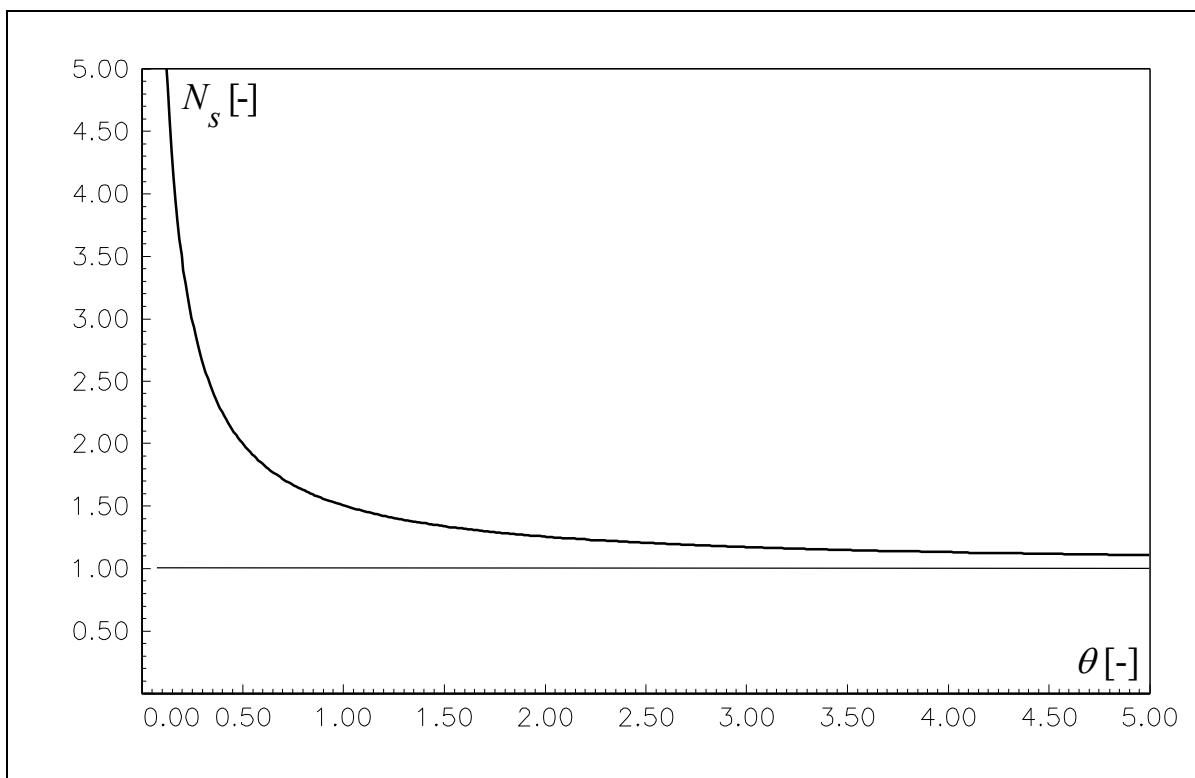


Abbildung 3.3.13: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit für Zug-Prozesse mit konstanten Spannungsgeschwindigkeiten.

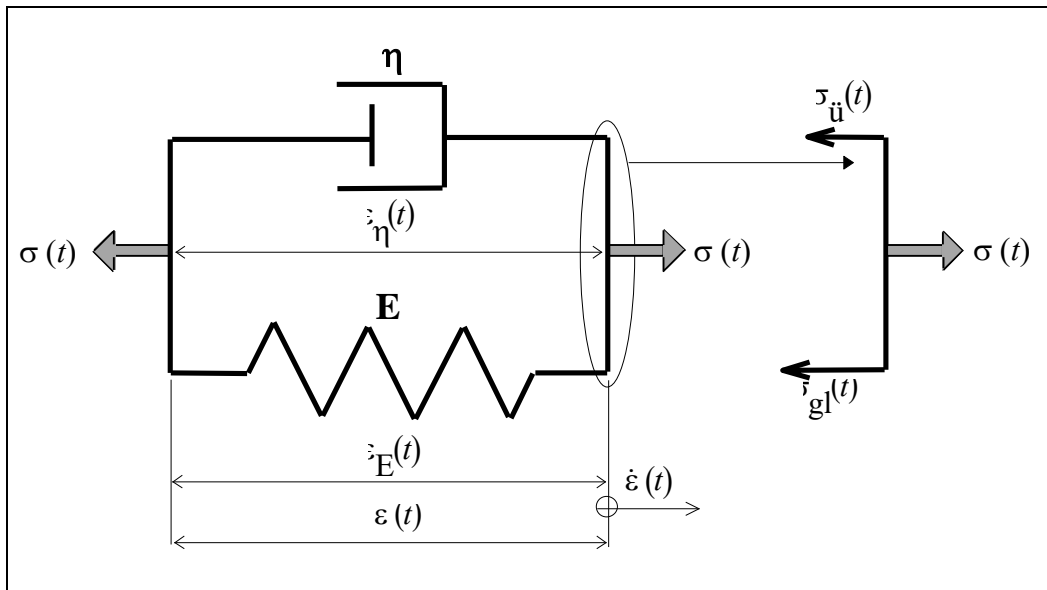


Abbildung 3.3.14: Das Kelvin-Voigt-Modell [6] mit Freikörperbild.

Die Kompatibilitätsbedingung, die Materialgleichungen der einzelnen Elemente und die Gleichgewichtsbedingung ermöglichen die Gewinnung der Evolutionsgleichung, die das Materialverhalten des in Abbildung 3.3.10 dargestellten Kelvin-Voigt-Modells beschreibt:

$$\sigma(t) = \mathbf{E} \left[\varepsilon(t) + \tau_K \dot{\varepsilon}(t) \right] \quad 3.3.30a$$

wobei die Größe

$$\tau_K = \frac{\eta}{\mathbf{E}} \quad 3.3.30b$$

Retardationszeit genannt wird. Gleichung 3.3.30a entspricht der Gleichgewichtsbedingung.

Für Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit (s. Abb. 3.3.4) erhält man gemäß der Gleichung 3.3.30a:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \sigma(t) = \mathbf{E} \tau_K \dot{\varepsilon}_0 + \mathbf{E} \dot{\varepsilon}_0 t \quad 3.3.31a$$

$$T \leq t \leq T_R \Rightarrow \sigma(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}_0 T \quad 3.3.31b$$

Das Kelvin-Voigt-Modell liefert für den Zug-Prozeß eine lineare Spannungsantwort, die aus der Summe der Spannung des Dämpfers und der Feder besteht. Zum Zeitpunkt 0 springt die Spannung auf den Wert $\eta \dot{\varepsilon}_0$, der dem Wert der Spannung im Dämpfer entspricht. Zum Zeitpunkt T , der den Anfang der Haltezeit entspricht, springt die Spannung auf den konstanten Wert $\mathbf{E} \dot{\varepsilon}_0 T$, die Spannung der Feder.

Für Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten, die in der Zeit T zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden, folgt aus Gleichung 3.3.31a mit der Abkürzung

$$\theta_K = \frac{\tau_K}{T} \quad 3.3.32a$$

die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannungsantwort des Kelvin-Voigt-Modells:

$$\frac{\sigma(T)}{\mathbf{E}\varepsilon_0} = \frac{\tau_K}{T} + 1 \Rightarrow N_K(\theta_K) = 1 + \theta_K \quad 3.3.32b$$

In diesem Fall ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit linear.

Für Spannungsgesteuerte Prozesse erhält man gemäß der Gleichung 3.3.30a die Evolutionsgleichung:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \int_0^t \frac{1}{\mathbf{E}\tau_K} \sigma'(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{1}{\tau_K} \varepsilon(t) \quad 3.3.33$$

Für Prozesse mit konstanter Spannungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit (s. dazu Abb. 3.3.11) erhält man gemäß der Evolutionsgleichung 3.3.33:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{\mathbf{E}} \dot{\sigma}_0 t - \frac{1}{\mathbf{E}} \tau_K \dot{\sigma}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_K} t} \right) \quad 3.3.34a$$

$$T \leq t \leq T_K \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{\mathbf{E}} \dot{\sigma}_0 T - \frac{1}{\mathbf{E}} \tau_K \dot{\sigma}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_K} T} \right) e^{-\frac{1}{\tau_K} (t-T)} \quad 3.3.34b$$

Mit den Materialparametern $\mathbf{E}=4,7$ GPa und $\tau=85$ s erhält man für den in Abb. 3.3.11 dargestellten Prozeß mit einer Spannungsgeschwindigkeit von $8,80 \times 10^{-2}$ MPa s⁻¹, die 682s dauert und einen 838s langen Kriechprozeß ($\dot{\sigma}_0 = 0$) die in Abb. 3.3.16 wiedergegebene Materialantwort.

Gemäß Gleichung 3.3.34a und durch die Variablentransformation 3.3.32a gewinnt man die für diesen Fall geltende Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit spannungsgesteuerter monotoner Zug-Prozesse des Kelvin-Voigt-Modells:

$$\frac{\mathbf{E}\varepsilon(T)}{\sigma_0} = 1 - \frac{\tau_K}{T} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_K} T} \right) \Rightarrow N_{Ks}(\theta_K) = 1 - \theta_K \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_K}} \right) \quad 3.3.35$$

Der Verlauf der Funktion $N_{Ks}(\theta_K)$ wird in Abbildung 3.3.15 wiedergegeben.

Bemerkenswert ist, daß für lange bzw. langsame Spannungsgesteuerte Prozesse das Kelvin-Voigt-Modell eine lineare geschwindigkeitsabhängige Dehnungsantwort zeigt:

$$\theta_K \ll 1 \Rightarrow N_{Ks}(\theta_K) \cong 1 - \theta_K \Rightarrow \varepsilon(T) \cong \frac{\sigma_0}{\mathbf{E}} \left(1 - \frac{\tau_K}{T} \right) \Rightarrow \varepsilon(\dot{\sigma}_0) \cong \frac{\sigma_0}{\mathbf{E}} - \frac{\tau_K \dot{\sigma}_0}{\mathbf{E}} \quad 3.3.36$$

der Term $1 - \frac{\tau_K}{T}$ ($\frac{\tau_K}{T} \ll 1$) entspricht einer „Verzögerung“ der elastischen Wirkung $\left(\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\mathbf{E}} \right)$

man spricht auch von *verzögerter Elastizität, elastischer Nachwirkung oder Anelastizität* [6].

Für kurze bzw. schnelle Prozesse gilt:

$$\theta_K \gg 1 \Rightarrow N(\theta_K) \cong 0 \Rightarrow \sigma_0 - \underbrace{\mathbf{E} \varepsilon}_{\cong 0} = \sigma_0 - \underbrace{\sigma_{gl}}_{\cong 0} = \sigma_{\ddot{u}} \Rightarrow \sigma_0 \cong \sigma_{\ddot{u}} \quad 3.3.37$$

Das heißt, daß die Spannung der Feder σ_{gl} vernachlässigbar klein ist im Vergleich zur Gesamtspannung σ_0 (s.d. Gl. 3.3.35). Dann gleicht diese Gesamt-Spannung der Spannung des Dämpfers und die Dehnungsantwort des Kelvin-Voigt-Modells entspricht der eines Newtonschen-Dämpfers mit Viskosität η .

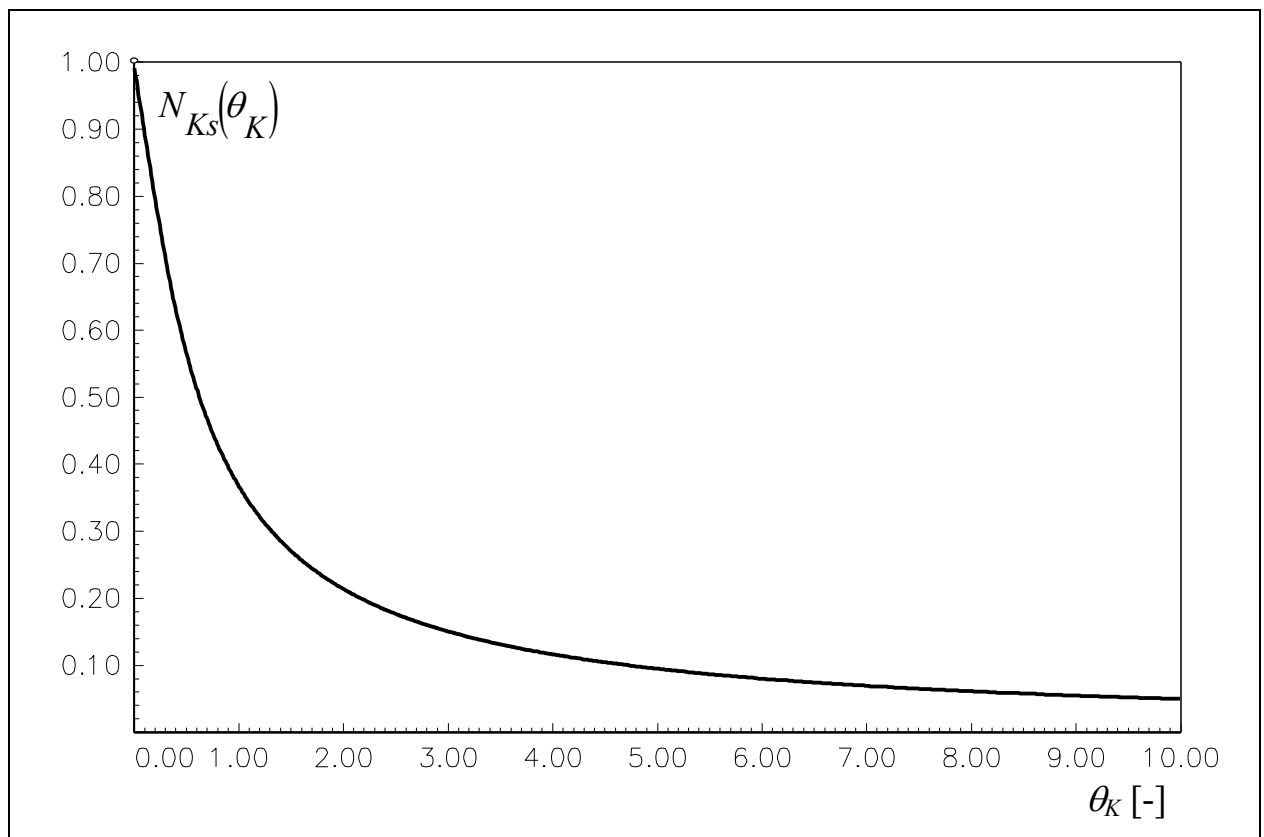


Abbildung 3.3.15: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit für Zug-Prozesse mit konstanten Spannungsgeschwindigkeiten des Kelvin-Voigt Modells.

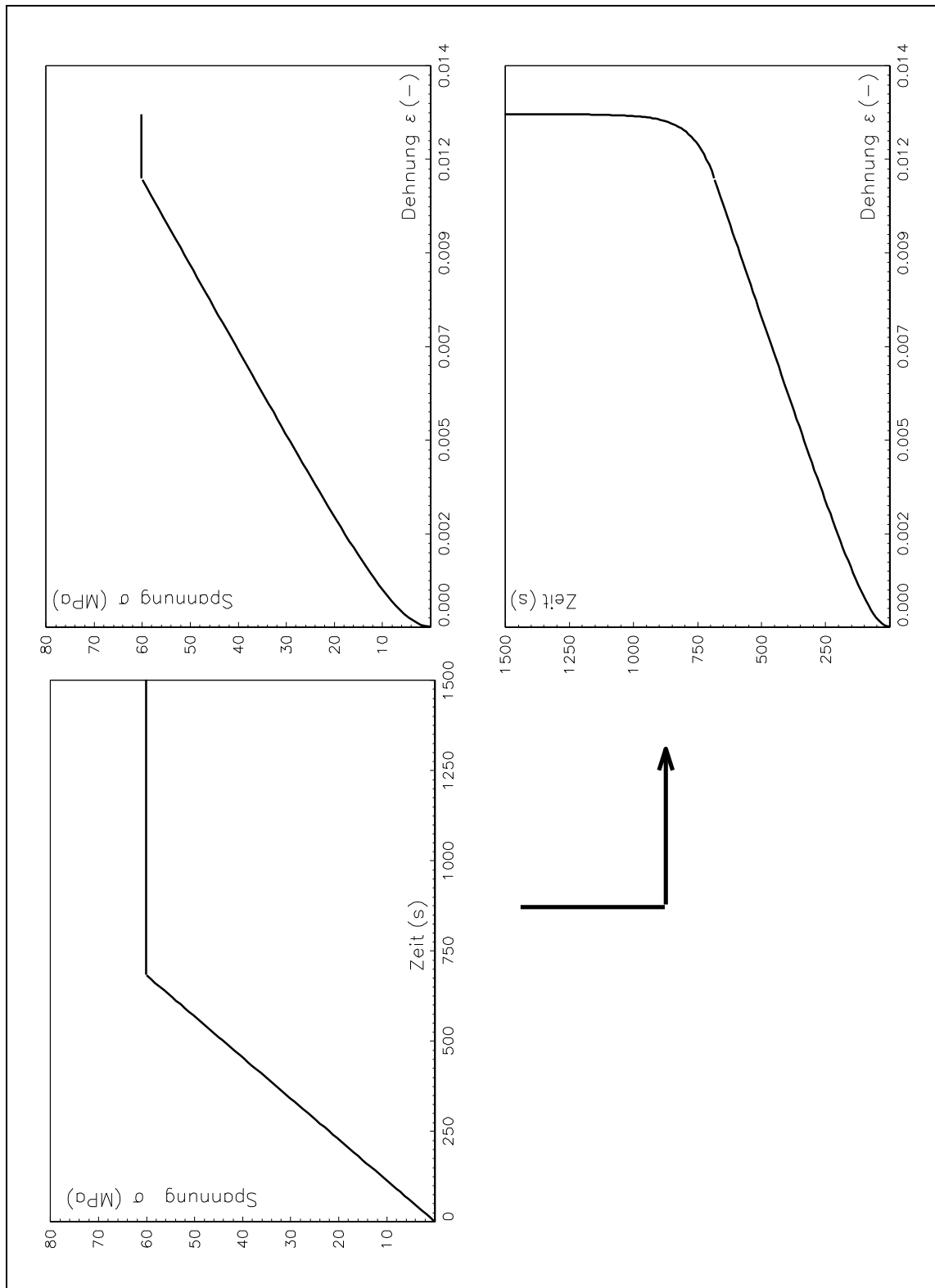


Abbildung 3.3.16: Dehnungsantwort zum Zug-Prozess mit anschließender Haltezeit. Der Pfeil zeigt die Ein-/Ausgaberichtung.

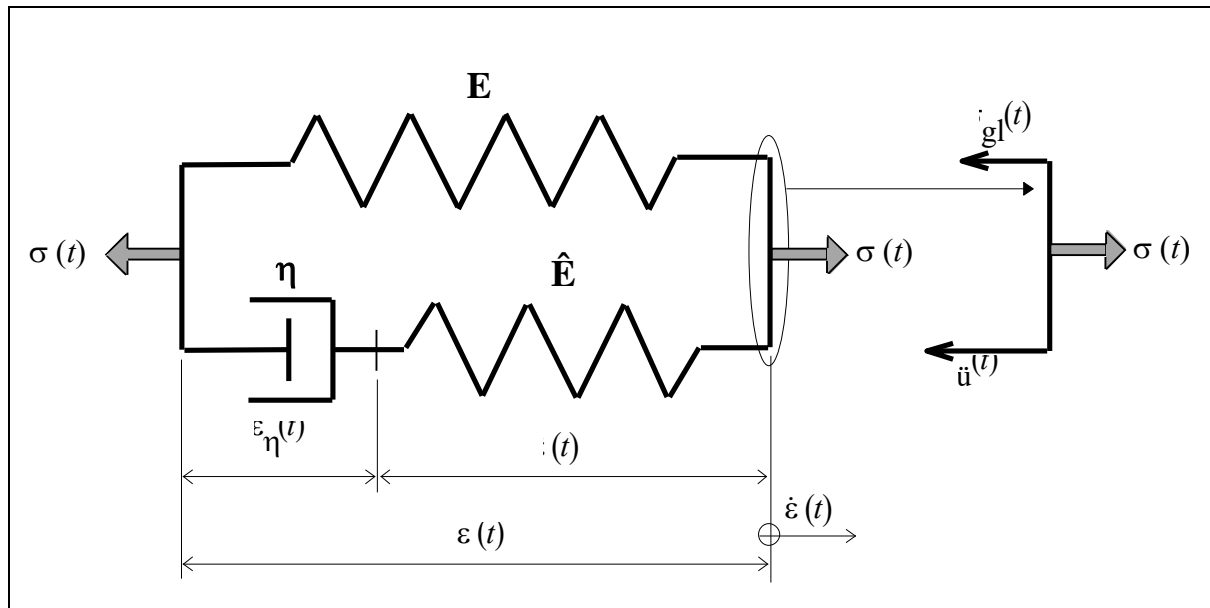


Abbildung 3.3.17: Der lineare Standard-Festkörper (standard solid, ein 3-Parameter-Modell) [30] mit Freikörperbild.

Die Kompatibilitätsbedingung, die Materialgleichungen der einzelnen Elemente und die Gleichgewichtsbedingung ermöglichen die Gewinnung der Differentialgleichung (Gl. 3.3.46b), die das Materialverhalten des in Abb. 3.3.17 dargestellten 3-Parameter-Modells beschreibt:

Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} + \varepsilon_{\eta} \quad 3.3.38a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\hat{\varepsilon}} + \dot{\varepsilon}_{\eta} \quad 3.3.38b$$

Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma = \sigma_{gl} + \sigma_{\ddot{u}} \quad 3.3.39a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{gl} + \dot{\sigma}_{\ddot{u}} \quad 3.3.39b$$

Materialgleichungen der rheologischen Elemente

$$\text{Feder:} \quad \sigma_{gl} = \mathbf{E}\varepsilon \quad 3.3.40a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma}_{gl} = \mathbf{E}\dot{\varepsilon} \quad 3.3.40b$$

$$\sigma_{\ddot{u}} = \hat{\mathbf{E}}\hat{\varepsilon} \quad 3.3.41a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma}_{\ddot{u}} = \hat{\mathbf{E}}\dot{\hat{\varepsilon}} \quad 3.3.41b$$

$$\text{Dämpfer:} \quad \sigma_{\dot{\varepsilon}} = \eta \dot{\varepsilon}_{\eta} \quad 3.3.42$$

Das Einsetzen der Materialgleichungen der rheologischen Elemente in die Kompatibilitätsbedingung (Gl. 3.3.43), die Multiplikation der Gl. 3.3.40b mit dem Faktor $\frac{1}{\hat{\mathbf{E}}}$ (Gl. 3.3.44) bzw. der Gl. 3.3.40a mit dem Faktor $\frac{1}{\eta}$ (Gl. 3.3.45),

$$\frac{\dot{\sigma}_{\ddot{u}}}{\hat{\mathbf{E}}} + \frac{\sigma_{\ddot{u}}}{\eta} = \dot{\varepsilon} \quad 3.3.43$$

$$\frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma}_{gl} = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{E} \dot{\varepsilon} \quad 3.3.44$$

$$\frac{1}{\eta} \sigma_{gl} = \frac{1}{\eta} \mathbf{E} \varepsilon \quad 3.3.45$$

und der Eliminationsprozeß (Summe der Gln. 3.3.43 bis 3.3.45 unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung) führen auf

$$\frac{\dot{\sigma}}{\hat{\mathbf{E}}} + \frac{\sigma}{\eta} = \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{\mathbf{E}}{\eta} \varepsilon \quad 3.3.46a$$

bzw. auf

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\hat{\mathbf{E}}}{\eta} \sigma(t) = (\hat{\mathbf{E}} + \mathbf{E}) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{\hat{\mathbf{E}}}{\eta} \mathbf{E} \varepsilon(t). \quad 3.3.46b$$

Das in Abb. 3.3.17 dargestellte 3-Parameter-Modell besteht aus einem Maxwell-Modell ($\hat{\mathbf{E}}$ und η) und einer Hookeschen Feder (\mathbf{E}) in Parallelschaltung. Darüber hinaus sind die Materialgleichungen für die Überspannung und für die Gleichgewichtsspannung entkoppelt (s. dazu Gln. 3.3.43 bzw. 3.3.47b und 3.3.44 bzw. 3.3.47a) und können daher für beliebige dehnungsgesteuerte Prozesse vollständig getrennt betrachtet werden:

$$\dot{\sigma}_{gl}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t) \quad 3.3.47a$$

$$\dot{\sigma}_{\ddot{u}}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau} \sigma_{\ddot{u}}(t), \quad 3.3.47b$$

wobei

$$\tau = \frac{\eta}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.47c$$

die Relaxationszeit des Standardkörpers ist, die der des Maxwell-Modells entspricht. Die Gesamtspannung ist durch:

$$\sigma(t) = \sigma_{gl}(t) + \sigma_{\ddot{u}}(t) \quad 3.3.48$$

gegeben.

Gleichung 3.3.48 ist die Gleichgewichtsbedingung und steht stellvertretend für die Zerlegung der Spannung in einen *geschwindigkeitsunabhängigen Gleichgewichtsanteil* σ_{gl} und einen *geschwindigkeitsabhängigen Überspannungsanteil* $\sigma_{\ddot{u}}$. Das heißt, daß das Verhalten des Überspannungsanteils dem Verhalten eines Maxwell-Modells mit Relaxationszeit τ entspricht, das mit einer Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_0$ beansprucht wird. Das Verhalten des Gleichgewichtsanteils entspricht dem Verhalten einer Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} , welche auch mit einer Geschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_0$ belastet wird.

Für den Prozeß mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit (Abb. 3.3.4) erhält man:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \sigma(t) = \mathbf{E}\dot{\varepsilon}_0 t + \hat{\mathbf{E}}\tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad 3.3.49a$$

$$T \leq t \leq T_R \Rightarrow \sigma(t) = \mathbf{E}\dot{\varepsilon}_0 T + \hat{\mathbf{E}}\tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}T} \right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-T)} \quad 3.3.49b$$

Die in Abbildung 3.3.18 gezeigte Materialantwort wurde mit den Parametern $\mathbf{E} = 1125 \text{ MPa}$, $\tau = 30 \text{ s}$, $\hat{\mathbf{E}} = 5,2 \text{ GPa}$ gerechnet. In diesem Beispiel beträgt die Dehnungsgeschwindigkeit $2,00 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, die Dauer des Zug-Prozesses 200s und die Dauer des Relaxations-Prozesses 400s. Die Parameter-Werte ermöglichen eine qualitative Übereinstimmung der Spannungsantwort des Zug-Prozesses ($0 \leq t \leq T$) mit der Antwort des Zug-Prozesses im Versuch Nr.9.6 (s. Abb. 2.3.25). Für $t > T$ gibt es keine qualitative Übereinstimmung mehr: Während der Haltezeit relaxiert die Spannung des Maxwells-Modells nach τ Sekunden Haltezeit bis auf 0,37 seines Anfangswertes. Hiermit erfolgt die Relaxation der Spannung bzw. der Überspannung „schneller“ als die beobachtete Relaxation dieses Versuchs. Die Überspannung des Standard-Festkörpers relaxiert „vollständig“, das heißt, sie wird stationär und kann gegenüber der Gleichgewichtsspannung vernachlässigt werden für Relaxationsdauern ($T_R - T$), die „viel größer“ als die Relaxationszeit τ sind. Die Spannung relaxiert dann bis zur Gleichgewichtsspannung, die ungleich null ist. Gemäß Gl. 3.3.49b erhält man

$$t = T_R \text{ und } T_R - T \gg \tau \Rightarrow \sigma \cong \mathbf{E} \dot{\varepsilon}_0 T = \mathbf{E} \varepsilon_0 = \sigma_{gl}, \quad 3.3.50a$$

und

$$\sigma_{\ddot{u}}(T_R) = \hat{\mathbf{E}}\tau \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}T} \right) e^{-\frac{1}{\tau}(T_R - T)} \ll \mathbf{E} \varepsilon_0. \quad 3.3.50b$$

Dies entspricht einer qualitativen Änderung der Materialantwort gegenüber der des Maxwell-Modells. Im Gegensatz zum Maxwell-Modell ist dieses 3-Parameter-Modell in der Lage, bei Relaxationsprozessen für die stationären Spannungen nicht verschwindende Werte wiederzugeben. Physikalisch entspricht die nicht verschwindende Spannung der Spannung der Feder mit Federsteifigkeit E bzw. der Gleichgewichtsspannung (s. dazu Gl. 3.3.50a bzw. Abb. 3.318). Dies kann zur Unterscheidung eines Festkörpers und einer Flüssigkeit in einem rheologischen Sinn benutzt werden. Aus diesem Grund wird wahrscheinlich das 3-Parameter-Modell als Standard-Festkörper bezeichnet [31].

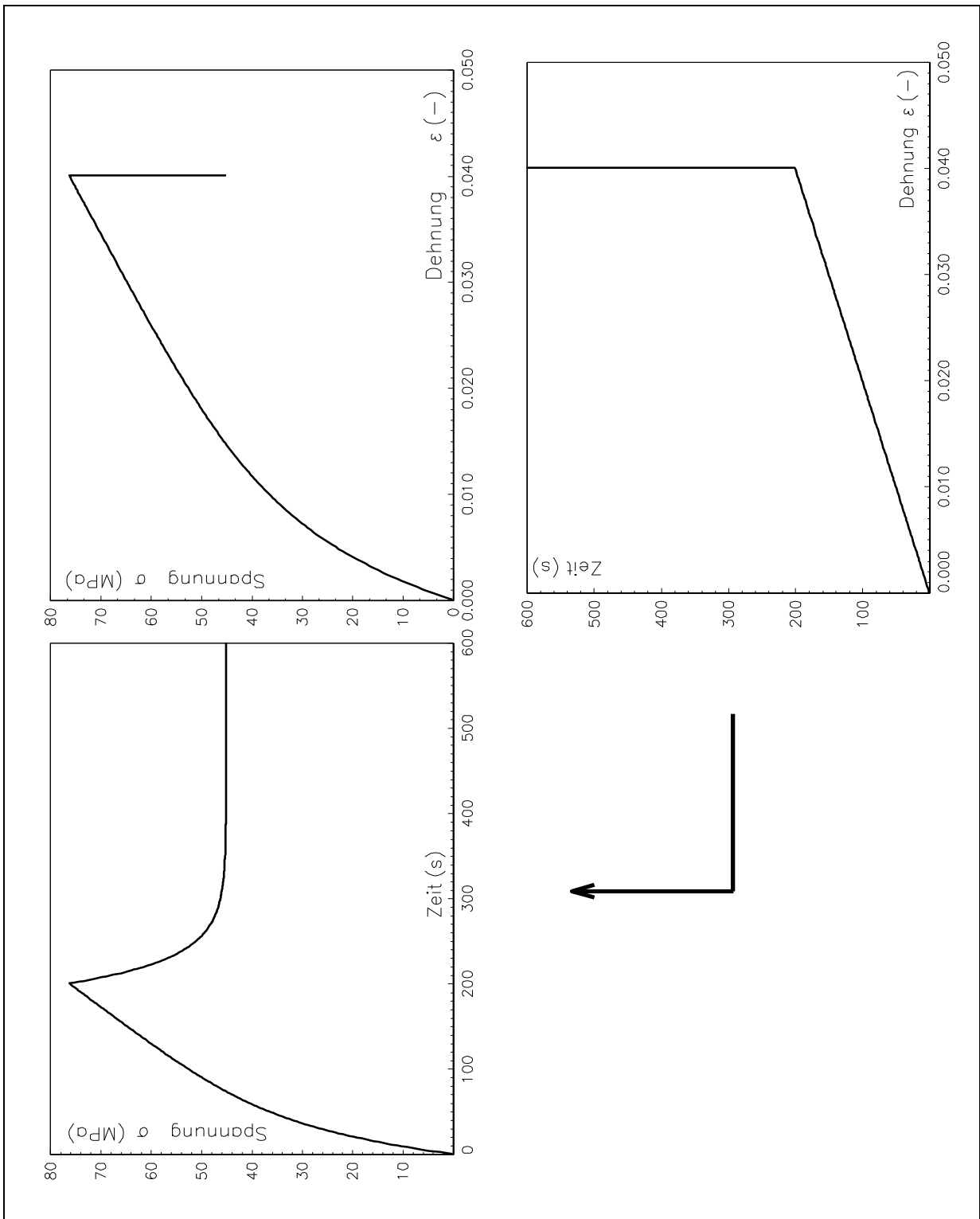


Abbildung 3.3.18: Spannungsantwort zum Zug-Prozeß mit anschließender Haltezeit. Der Pfeil zeigt die Ein-/Ausgaberichtung.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit dehnungsgesteuerter Prozesse des Standard-Festkörpers, die in der Zeit T zu ein und der selben Dehnung ε_0 gefahren werden, wird gemäß Gleichung 3.3.49a gegeben,

$$\frac{\sigma(T)}{\hat{\mathbf{E}}\varepsilon_0} = \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}} + \frac{\tau}{T} \left(1 - e^{-\frac{1}{T} \frac{\tau}{T}} \right) = N_{3P}(\theta) = \mathbf{K} + \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}} \right), \quad 3.3.51a$$

wobei die dimensionslose Konstante \mathbf{K} der Quotient der Federsteifigkeiten ist:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.51b$$

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standardkörpers unterscheidet sich von der des Maxwell-Modells (Gl.3.3.17c) durch die Konstante \mathbf{K} . Die Variable θ entspricht der des Maxwell-Modells. Für Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit, die in der Zeit T zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden, hat die Funktion $N_{3P}(\theta)$ die folgenden Eigenschaften:

a) Prozesse, die wesentlich länger dauern als die Relaxationszeit ($T \gg \tau$) zeigen eine lineare Geschwindigkeitsabhängigkeit. Dies wird durch die in Abb. 3.3.18 dargestellte Tangente im Nullpunkt angedeutet:

$$\theta \ll 1 \Rightarrow N_{3P}(\theta) \cong \mathbf{K} + \theta \Rightarrow \sigma(T) \cong \mathbf{E} \varepsilon_0 + \hat{\mathbf{E}} \tau \frac{\dot{\varepsilon}_0}{T} \Rightarrow \sigma(\dot{\varepsilon}_0) \cong \mathbf{E} \varepsilon_0 + \boldsymbol{\eta} \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.3.52$$

Der Term $\mathbf{E} \varepsilon_0$ ist die Gleichgewichtsspannung. Der Term $\boldsymbol{\eta} \dot{\varepsilon}_0$ entspricht der Überspannung, weil die Spannungsantwort weiterhin aus der Summe der Gleichgewichtsspannung und der Überspannung besteht. Das heißt, daß die Spannung der Feder mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$ ihre Wirkung verliert. Die Spannungsantwort entspricht dann der Spannungsantwort eines Kelvin-Voigt-Modells mit Federsteifigkeit \mathbf{E} und Viskosität $\boldsymbol{\eta}$, das mit Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_0$ beansprucht wird.

b) Prozesse die wesentlich kürzer dauern als die Relaxationszeit ($T \ll \tau$) geben eine konstante Spannung wieder. Diese wird durch den Grenzwert $\mathbf{K} + 1$ für „große“ θ der Funktion $N_{3P}(\theta)$ gegeben. In diesem Fall ist die Spannung geschwindigkeitsunabhängig:

$$\theta \gg 1 \Rightarrow N_{3P}(\theta) \cong \mathbf{K} + 1 \Rightarrow \sigma \cong (\mathbf{E} + \hat{\mathbf{E}}) \varepsilon_0 \quad 3.3.53$$

Der Term $\hat{\mathbf{E}} \varepsilon_0$ entspricht dann der Spannung der Feder mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$, die mit einer Dehnung ε_0 belastet wird. Daraus folgt, daß der Dämpfer als starres Element wirkt und daß die Spannungsantwort aus der Summe der Spannungen in zwei parallel geschalteten Federn besteht, die mit einer Dehnung ε_0 beansprucht werden.

c) Für Prozesse mit einer Dauer der Größenordnung der Relaxationszeit ($T \approx \tau$) wird eine nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit wiedergeben. Dies wird durch die in Abbildung 3.3.18 dargestellte nichtlineare Beziehung zwischen $N_{3P}(\theta)$ und θ für θ s der Größenordnung der Einheit gegeben:

$$\theta \approx 1 \Rightarrow N_{3P}(\theta) = K + \theta \left[1 - e^{-\frac{1}{\theta}} \right] \Rightarrow \sigma(\dot{\epsilon}_0) = \mathbf{E}\epsilon_0 + \hat{\mathbf{E}}\tau \dot{\epsilon}_0 \left[1 - e^{-\left(\frac{\epsilon_0}{\tau}\right) \frac{1}{\dot{\epsilon}_0}} \right] \quad 3.3.54$$

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit ist offensichtlich unterlinear. Man erkennt, daß die Überspannung aus der Zusammenwirkung des Dämpfers und der Feder mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$ besteht. Hierbei entspricht der Term $\dot{\epsilon}_0 \left[1 - e^{-\left(\frac{\epsilon_0}{\tau}\right) \frac{1}{\dot{\epsilon}_0}} \right]$ der Dehnungsgeschwindigkeit

des Dämpfers (s.dazu Gl. 3.3.26).

Abbildung 3.3.19 zeigt den Verlauf der Funktion $N_{3P}(\theta)$ für $\mathbf{E} = 1125$ MPa und $\hat{\mathbf{E}} = 5,2$ GPa.

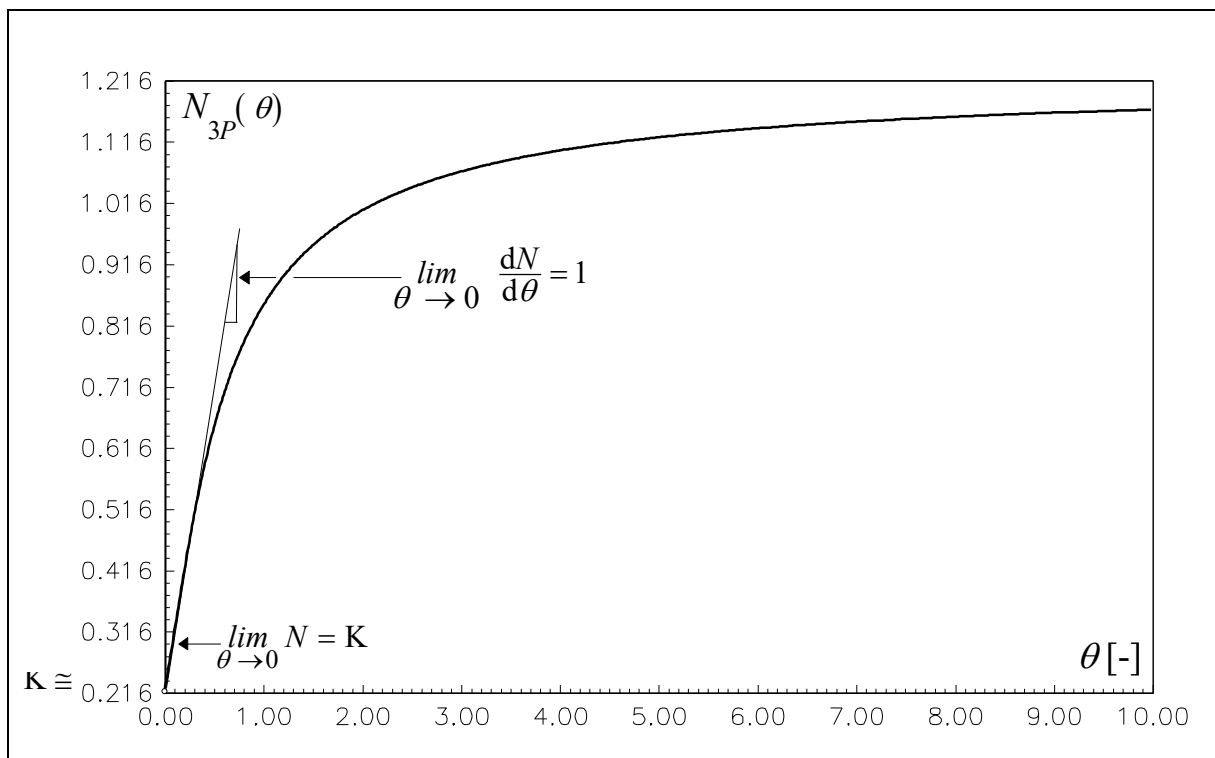


Abbildung 3.3.19: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standardkörpers für Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten.

Für vernachlässigbar kleine Werte von K im Vergleich zu $\theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)$ geht die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standardkörpers in die eines Maxwell-Modells über. Das heißt, daß für

$$K \ll \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) \quad 3.3.55a$$

die Näherung

$$N_{3P}(\theta) \cong \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) = N(\theta) \quad 3.3.55b$$

gilt. Bemerkenswert ist, daß für diesen Übergang eine alleinige Einschränkung der elastischen Parameter ($\hat{\mathbf{E}} \gg \mathbf{E}$) bzw. des Quotients K ($K \ll 1$) im Allgemeinen nicht ausreichend ist. Insbesondere für langsame Prozesse ($\theta \ll 1$ s. dazu Gl. 3.3.52) muß die Konstante K mit der *prozessabhängigen Größe* θ verglichen werden ($K \ll \theta$), damit

$$N_{3P}(\theta) \cong N(\theta) \quad 3.3.55c$$

gilt.

Die Bedingung 3.3.55a erlaubt einen uneingeschränkten Übergang der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standard-Festkörpers in die des Maxwell-Modells ($K \ll \theta \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) \Rightarrow K \ll \theta$). Für schnelle Prozesse ist eine alleinige Einschränkung der elastischen Parameter ($K \ll 1$) ausreichend für den Übergang der Spannungsantwort des Standardkörpers auf Zug-Prozesse in die des Maxwell-Modells, denn mit der Bedingung

$$K \ll 1, \quad 3.3.56a$$

erhält man gemäß Gl. 3.3.53:

$$N_{3P}(\theta) = N(\theta) \cong 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma \cong \hat{\mathbf{E}} \varepsilon_0 \quad 3.3.56b$$

Ein Übergang der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standard-Festkörpers in die des Kelvin-Voigt-Modells ist lediglich für langsame bzw. lange Prozesse ($\theta \ll 1$) gewährleistet. Durch

$$\theta_K = \frac{1}{K} \theta \quad 3.3.57a$$

erhält man gemäß Gl. 3.3.32b

$$N_K(\theta) = \frac{1}{K} (K + \theta). \quad 3.3.57b$$

Man erkennt, daß der Term $K + \theta$ in Gl. 3.3.57b der Gleichung 3.3.52 entspricht. Daraus folgt:

$$N_{3P}(\theta) \cong K N_K(\theta) \quad \Rightarrow \quad \sigma \cong \mathbf{E} \varepsilon_0 + \eta \dot{\varepsilon}_0 \quad 3.3.57c$$

Das heißt, daß der Übergang der Spannungsantwort des Standardkörpers auf monotone Zug-Prozesse in die des Kelvin-Voigt-Modells unabhängig von K ist.

Die Differentialgleichung, die das Eingabe-/Ausgabe-Verhalten des Standardkörpers für Prozesse mit konstanter Spannungsgeschwindigkeit wiedergibt, wird durch Umformung der Differentialgleichung 3.3.46b gegeben

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{1}{(1+K)\tau_K} \varepsilon(t) = \frac{1}{(1+K)} \left(\frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} + \frac{t}{\tau_K} \frac{1}{\mathbf{E}} \right) \dot{\sigma}_0 \quad 3.3.58$$

wobei τ_K die Retardationszeit des Standardkörpers ist, die der des Kelvin-Voigt Modells entspricht (s. dazu Gl. 3.3.30b).

Durch Intergration der Evolutionsgleichung 3.3.58 erhält man die Dehnungsantwort für den in Abb. 3.3.11 gegebenen Prozeß:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}_0 t}{\mathbf{E}} - \frac{\dot{\sigma}_0 \tau_K}{\mathbf{E}} \left(1 - e^{-\frac{1}{(1+K)\tau_K} t} \right) \quad 3.3.59a$$

$$T \leq t \leq T_K \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}_0 T}{\mathbf{E}} - \frac{\dot{\sigma}_0 \tau_K}{\mathbf{E}} \left(1 - e^{-\frac{1}{(1+K)\tau_K} T} \right) e^{-\frac{1}{(1+K)\tau_K} (t-T)}. \quad 3.3.59b$$

Dabei wird die *Kriech-Gleichgewichtsdehnung* durch:

$$\varepsilon_{\text{kgl}} = \frac{\dot{\sigma}_0 T}{\mathbf{E}} \quad 3.3.60$$

definiert. Die Kriech-Gleichgewichtsdehnung entspricht nicht der Dehnung der Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} des Standardkörpers zum Zeitpunkt T ($\varepsilon(T)$, s. dazu Gl. 3.3.59a).

Es ist nicht möglich, das Verhalten des Standardkörpers unter Spannungssteuerung als die Zusammensetzung eines spannungsgesteuerten Maxwell-Modells und einer parallel dazu geschalteten Feder mit der Federsteifigkeit \mathbf{E} (unter derselben Spannungssteuerung) zu betrachten.

Die in Abbildung 3.3.20 gezeigte Materialantwort wurde für den in Abb. 3.3.11 gezeigten Prozeß mit $T = 852$ s, $\dot{\sigma}_0 = 8,8 \times 10^{-2}$ MPa s⁻¹, $T_K = 1500$ s und mit den Materialparametern $\mathbf{E} = 1125$ MPa, $\tau = 30$ s und $\hat{\mathbf{E}} = 5,2$ GPa gerechnet. Für sehr lange Kriech-Prozesse kriecht die Dehnung bis zur Kriech-Gleichgewichtsdehnung. Gemäß Gl. 3.3.59b erhält man:

$$t = T_K \text{ und } T_K - T \gg (1+K) \tau_K \Rightarrow \varepsilon(T_K) = \varepsilon_{\text{kgl}}(T_K) \cong \frac{\dot{\sigma}_0 T}{\mathbf{E}} = \frac{\overbrace{\sigma_{\text{gl}}(T_K) + \sigma_{\text{ü}}(T_K)}^{\sigma_{\text{gl}}(T_K) \gg \sigma_{\text{ü}}(T_K)}}{\mathbf{E}} \quad 3.3.61$$

Bemerkenswert ist, daß der Standardkörper längere Zeit braucht zum Kriechen bis zur Gleichgewichtsdehnung als zum Relaxieren bis zur Gleichgewichtsspannung. Der Faktor $1 + \frac{1}{K}$ ist ein Maß für diesen Unterschied ($(1+K) \tau_K = \tau \left(1 + \frac{1}{K}\right)$). Der Standardkörper kriecht um den Faktor $1 + K$ langsamer als das Kelvin-Voigt-Modell (vergleiche dazu Gl. 3.3.59b mit Gl. 3.3.34b).

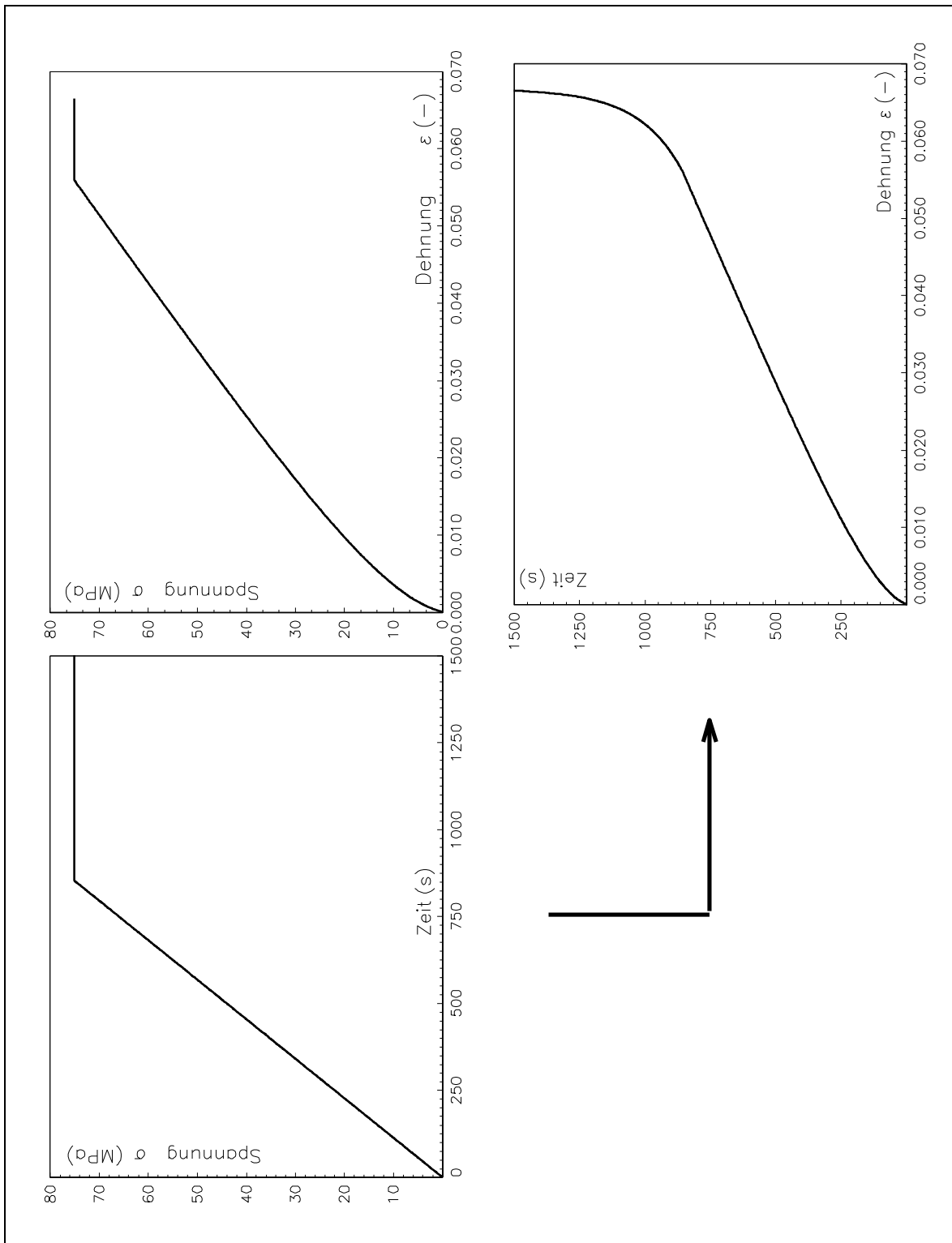


Abbildung 3.3.20: Dehnungsantwort zum Zug-Prozess mit anschließender Haltezeit.
Der Pfeil zeigt die Ein-/Ausgaberrichtung.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit monotoner spannungsgesteuerter Zug-Prozesse des Standardkörpers, die in der Zeit T zu ein und derselben Spannung σ_0 gefahren werden, wird gemäß Gleichung 3.3.59a gegeben:

$$\frac{\mathbf{E}\varepsilon(T)}{\sigma_0} = N_{3Ps}(\bar{\theta}_K) = 1 - \frac{1}{1+K} \bar{\theta}_K \left(1 - e^{-\frac{1}{\bar{\theta}_K}} \right), \quad 3.3.62a$$

wobei

$$\bar{\theta}_K = (1+K) \frac{\tau_K}{T} \quad 3.3.62b$$

ein dimensionsloses Maß für die Dauer des Prozesses ist. Die Spannungsgeschwindigkeitsabhängigkeit des Standardkörpers unterscheidet sich von der des Kelvin-Voigt-Modells durch den Faktor $\frac{1}{1+K}$ (s. dazu Gl. 3.3.35).

Erwähnenswert ist, daß für lange bzw. langsame spannungsgesteuerte Prozesse der Standardkörper eine lineare geschwindigkeitsabhängige Dehnungsantwort zeigt:

$$\bar{\theta}_K \ll 1 \Rightarrow N_{3Ps}(\bar{\theta}_K) \cong 1 - \frac{1}{1+K} \bar{\theta}_K \Rightarrow \varepsilon(T) \cong \frac{\sigma_0}{\mathbf{E}} \left(1 - \frac{\tau_K}{T} \right) \Rightarrow \varepsilon(\dot{\sigma}_0) \cong \frac{\sigma_0}{\mathbf{E}} - \frac{\tau_K \dot{\sigma}_0}{\mathbf{E}} \quad 3.3.63$$

Die Dehnungsantwort auf langsame spannungsgesteuerte Prozesse des Standardkörpers und des Kelvin-Voigt-Modells (Gl. 3.3.36) sind identisch.

Für kurze bzw. schnelle Prozesse gilt:

$$\bar{\theta}_K \gg 1 \Rightarrow N_{3Ps}(\bar{\theta}_K) \cong \frac{1}{1 + \frac{1}{K}} \Rightarrow \varepsilon \cong \frac{\sigma_0}{\mathbf{E} + \hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.64$$

In diesem Fall ist die Dehnungsantwort geschwindigkeitsunabhängig. Das Verhalten des Standardkörpers entspricht der Summe von parallel geschalteten Federn, die mit einer Spannung σ_0 beansprucht werden, das heißt, daß der Dämpfer als starres Element wirkt. Für kleine Werte von K ($K \ll 1$) geht die Dehnungsantwort des Standardkörpers in die des Kelvin-Voigt-Modells über.

Bemerkenswert ist, daß die notwendige Bedingung, $K \ll 1$ ausreichend ist, damit die Geschwindigkeitsabhängigkeit bzw. die Dehnungsantwort des Standardkörpers in die des Kelvin-Voigt-Modells übergeht. Für langsame Prozesse ist dieser Übergang unabhängig von K gewährleistet (s. dazu Gl. 3.3.63).

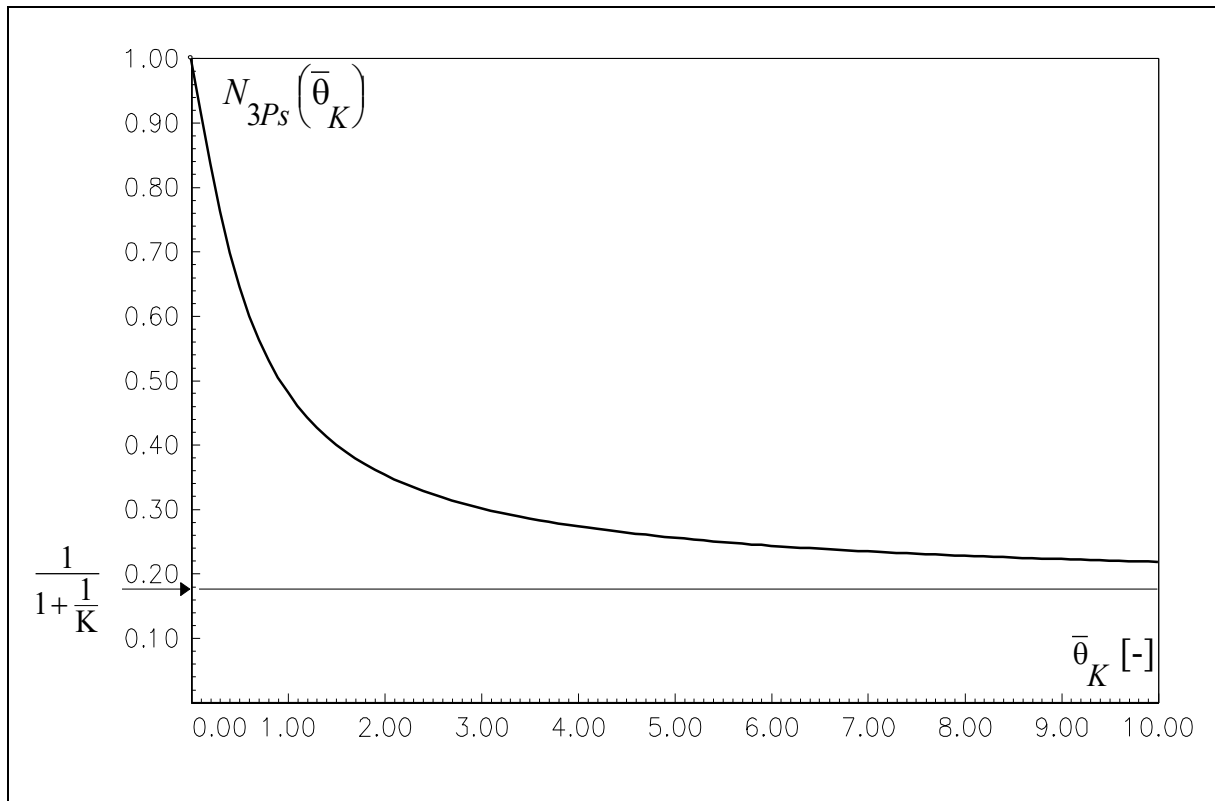


Abbildung 3.3.21: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Standardkörpers für Zug-Prozesse mit konstanten Spannungsgeschwindigkeiten für $\mathbf{E} = 1125 \text{ MPa}$ und $\hat{\mathbf{E}} = 5,2 \text{ GPa}$.

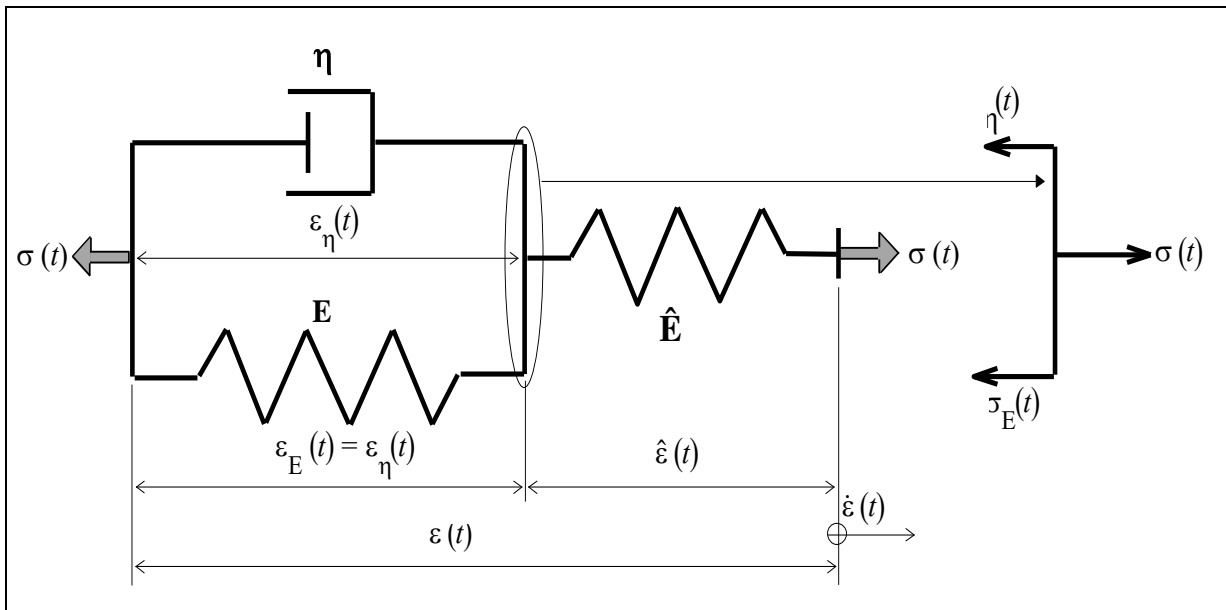


Abbildung 3.3.22: Das Poynting-Thomson-Modell [6] (Ein 3-Parameter-Modell) mit Freikörper-Bild.

Die Kompatibilitätsbedingung, die Materialgleichungen der einzelnen Elemente und die Gleichgewichtsbedingung ermöglichen die Gewinnung der Differentialgleichung, die das Materialverhalten des in Abb. 3.3.22 dargestellten Poynting-Thomson-Modells beschreibt:

Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \hat{\varepsilon} = \varepsilon_\eta + \hat{\varepsilon} \quad 3.3.65a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\hat{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_\eta + \dot{\hat{\varepsilon}} \quad 3.3.65b$$

Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma = \sigma_\eta + \sigma_E \quad 3.3.66a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_\eta + \dot{\sigma}_E \quad 3.3.66b$$

Materialgleichungen der rheologischen Elemente

$$\text{Dämpfer:} \quad \sigma_\eta = \eta \dot{\varepsilon}_\eta \quad 3.3.67$$

$$\text{Feder:} \quad \sigma = \hat{\mathbf{E}} \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.68a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{\varepsilon}} = \frac{\dot{\sigma}}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.68b$$

$$\sigma_E = \mathbf{E} \varepsilon_E \Leftrightarrow \varepsilon_E = \frac{\sigma_E}{\mathbf{E}} \quad 3.3.69a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_E = \frac{\dot{\sigma}_E}{\mathbf{E}} \quad 3.3.69b$$

Das Einsetzen der Materialgleichungen der rheologischen Elemente in die Gleichgewichtsbedingung (Gl. 3.3.70), die Multiplikation der Gl. 3.3.68b mit dem Parameter η (Gl. 3.3.71) bzw. der Gl. 3.3.68a mit dem Parameter \mathbf{E} (Gl. 3.3.72),

$$\eta \dot{\varepsilon}_{\eta} + \mathbf{E}\varepsilon_{\mathbf{E}} = \sigma \quad 3.3.70$$

$$\eta \dot{\varepsilon} = \eta \frac{\dot{\sigma}}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.71$$

$$\mathbf{E}\hat{\varepsilon} = \mathbf{E} \frac{\sigma}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.72$$

und der Eliminationsprozeß (Summe der Gln. 3.3.70 bis 3.3.72 unter Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingung) führen auf

$$\eta \dot{\varepsilon} + \mathbf{E}\varepsilon = \frac{\eta}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma} + \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right) \sigma \quad 3.3.73a$$

bzw. auf

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau_{\text{PT}}} \sigma(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) + \frac{\mathbf{E}\hat{\mathbf{E}}}{\eta} \varepsilon(t), \quad 3.3.73b$$

wobei

$$\tau_{\text{PT}} = \frac{\eta}{\mathbf{E} + \hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.73c$$

die Relaxationszeit des Poynting-Thomson-Modells ist.

Durch Integration von Gl. 3.3.73b erhält man für den Prozeß mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit und anschließender Haltezeit (Abb. 3.3.4):

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \sigma(t) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \dot{\varepsilon}_0 t + \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{E}} \tau_{\text{PT}} \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_{\text{PT}}} t}\right) \quad 3.3.74a$$

$$T \leq t \leq T_R \Rightarrow \sigma(t) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \dot{\varepsilon}_0 T + \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{E}} \tau_{\text{PT}} \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_{\text{PT}}} T}\right) e^{-\frac{1}{\tau_{\text{PT}}}(t-T)} \quad 3.3.74b$$

Für Relaxationsprozesse, die erheblich länger als die Relaxationszeit τ_{PT} dauern ($T_R - T \gg \tau_{PT}$) wird der zweite Term der Gl. 3.3.74b, der einer geschwindigkeitsabhängigen Überspannung entspricht, stationär bzw. vernachlässigbar klein im Vergleich zum ersten Term

$$t = T_R \text{ und } T_R - T \gg \tau_{PT} \Rightarrow \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{E}} \tau_{PT} \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_{PT}} T}\right) e^{-\frac{1}{\tau_{PT}}(T_R - T)} \ll \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \dot{\varepsilon}_0, \quad 3.3.75a$$

dann erhält man für die Spannung den Grenzwert

$$\sigma(T_R) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}}\right)^{-1} \dot{\varepsilon}_0 T. \quad 3.3.75b$$

Die Spannung $\sigma(T_R)$ entspricht einer geschwindigkeitsunabhängigen Gleichgewichtsspannung. Eine Zerlegung der Spannungsantwort in „Kelvin-Voigt“ und Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} ist nicht möglich (s. dazu Gln. 3.3.31).

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit dehnungsgesteuerter Prozesse des Poynting-Thomson-Modells, die in der Zeit T zu ein und der selben Dehnung ε_0 gefahren werden, wird gemäß

Gl. 3.3.74a durch

$$\frac{\sigma(T)}{\mathbf{E}\varepsilon_0} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}} + \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}} \frac{\hat{\mathbf{E}} \tau_{PT}}{\mathbf{E} T} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_{PT}} T}\right) = N_{PT}(\theta_{PT}) = \frac{1}{1 + \mathbf{K}} + \frac{1}{\mathbf{K}} \frac{1}{(1 + \mathbf{K})} \theta_{PT} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_{PT}}}\right) \quad 3.3.76a$$

angegeben. Wobei

$$\theta_{PT} = \frac{T}{\tau_{PT}} \quad 3.3.76b$$

das dimensionslose Maß für die Dauer des Prozesses ist, und

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}} \quad 3.3.76c$$

das Verhältnis der Federkonstanten.

Ein Übergang der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Poynting-Thomson-Modells in die des Kelvin-Voigt-Modells ist lediglich für langsame Prozesse mit der Bedingung $\mathbf{K} \ll 1$ möglich. Dabei gilt gemäß 3.3.76a

$$N_{PT}(\theta_{PT}) \cong \frac{1}{1 + \mathbf{K}} + \frac{1}{\mathbf{K}} \frac{1}{(1 + \mathbf{K})} \theta_{PT} \cong \frac{1}{1 + \mathbf{K}} + \frac{1}{(1 + \mathbf{K})^2} \theta_K \cong 1 + \theta_K, \quad 3.3.77a$$

wobei

$$\theta_{PT} = \frac{\mathbf{K}}{1 + \mathbf{K}} \theta_K \quad 3.3.77b$$

Die Differentialgleichung, die das Eingabe-/Ausgabe-Verhalten des Poynting-Thomson-Modells für spannungsgesteuerte Prozesse wiedergibt, wird durch Umformung der Differentialgleichung 3.3.73a gegeben,

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{1}{\tau_K} \varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} (1 + K) \sigma(t), \quad 3.3.78$$

wobei τ_K die Retardationszeit des Poynting-Thomson-Modells ist, die der des Kelvin-Voigt-Modells entspricht (s. dazu Gl. 3.3.10b).

Die Differentialgleichung für die Dehnung des Dämpfers bzw. für die Dehnung der Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} und für die Dehnung der Feder mit Federsteifigkeit $\hat{\mathbf{E}}$ sind entkoppelt (s. dazu Gln. 3.3.79) und können daher für beliebige spannungsgesteuerte Prozesse vollständig getrennt betrachtet werden. Gemäß Gl. 3.3.70 mit $\varepsilon_{\mathbf{E}} = \varepsilon_{\eta}$ und Gln. 3.3.65a bzw. 3.3.68 folgt für Prozesse mit konstanter Spannungsgeschwindigkeit

$$\dot{\varepsilon}_{\eta}(t) = \frac{1}{\mathbf{E}\tau_K} \dot{\sigma}_0 t - \frac{1}{\tau_K} \varepsilon_{\eta}(t) \quad 3.3.79a$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \dot{\sigma}_0 t + \varepsilon_{\eta}(t) \quad 3.3.79b$$

Für den in Abb. 3.3.11 dargestellten Prozeß erhält man:

$$0 \leq t \leq T \Rightarrow \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \right) \dot{\sigma}_0 t - \frac{1}{\mathbf{E}} \tau_K \dot{\sigma}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_K} t} \right) \quad 3.3.80a$$

$$T \leq t \leq T_K \Rightarrow \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \right) \dot{\sigma}_0 T - \frac{1}{\mathbf{E}} \tau_K \dot{\sigma}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_K} T} \right) e^{-\frac{1}{\tau_K} (t-T)} \quad 3.3.80b$$

Die Kriech-Gleichgewichtsdehnung des Poynting-Thomson-Modells wird durch:

$$\varepsilon_{\text{kgI}_{\text{PT}}} = \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \right) \dot{\sigma}_0 T \quad 3.3.81$$

definiert und entspricht der mit einer Spannung $\dot{\sigma}_0 T$ belasteten hintereinander geschalteten Federn. Für sehr lange Kriech-Prozesse ($T_K - T \gg \tau$) kriecht die Dehnung bis zur Kriech-Gleichgewichtsdehnung. Gemäß Gl. 3.3.80b erhält man

$$t = T_K \text{ und } T_K - T \gg \tau \Rightarrow \varepsilon(T_K) \cong \left(\frac{1}{\mathbf{E}} + \frac{1}{\hat{\mathbf{E}}} \right) \dot{\sigma}_0 T = \varepsilon_{\text{kgI}_{\text{PT}}}. \quad 3.3.82$$

Das Poynting-Thomson-Modell kriecht um den Faktor $1 + \frac{1}{K}$ langsamer als es relaxiert.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit monotoner spannungsgesteuerter Zug-Prozesse des Poynting-Thomson-Modells wird gemäß Gleichung 3.3.80a

$$\frac{\mathbf{E}\varepsilon(T)}{\sigma_0} = \left(1 + \frac{\mathbf{E}}{\hat{\mathbf{E}}}\right) - \frac{\tau_K}{T} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_K} \frac{\tau_K}{T}}\right) = N_{PTs}(\theta_K) = 1 + K - \theta_K \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_K}}\right) \quad 3.3.83a$$

angegeben. Wobei,

$$\theta_K = \frac{\tau}{T} \quad 3.3.83b$$

das dimensionslose Maß für die Dauer des Prozesses ist. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Poynting-Thomson-Modells und die des Kelvin-Voigt-Modells unterscheiden sich durch den Faktor K. Qualitativ kann dasselbe Verhalten der Geschwindigkeitsabhängigkeit erkannt werden (s.d. Gl. 3.3.35).

Für

$$K \ll 1 - \theta_K \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_K}}\right) \quad 3.3.84a$$

erhält man

$$N_{PTs}(\theta_K) \cong 1 - \theta_K \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_K}}\right) = N_{Ks}(\theta_K). \quad 3.3.84b$$

Die Bedingung 3.3.84a ermöglicht einen Übergang der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Poynting-Thomson-Modells in die des Kelvin-Voigt-Modells. Eine ausführliche mathematische Untersuchung des Poynting-Thomson-Modells wurde mit dem Konzept der beschleunigten Prozeßgeschichten von Tsakmakis [33] realisiert.

Die Zerlegung der Dehnung bzw. die daraus folgende Zerlegung der Dehnungsantwort in ein geschwindigkeitsabhängiges Kelvin-Voigt-Modell und eine geschwindigkeitsunabhängige Feder macht das Poynting-Thomson-Modell zur Beschreibung spannungsgesteuerter Prozesse geeignet (s. dazu z.B. [18]).

Die Zerlegung der Spannung bzw. die daraus folgende Zerlegung der Spannungsantwort in ein geschwindigkeitsabhängiges Maxwell-Modell und eine geschwindigkeitsunabhängige Feder macht den Standardkörper zur Beschreibung dehnungsgesteuerter Prozesse geeignet (s. dazu z.B. [18]). Hierbei ermöglicht diese Zerlegung eine vollständig getrennte Identifikation der Parameter für die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtsspannung und der Parameter für die geschwindigkeitsabhängige Überspannung (s. dazu Kapitel 4).

Die Parallelschaltung von Maxwell-Modellen ermöglicht eine Erweiterung der im instationären Bereich eines einzigen Maxwell-Modells vorkommenden nichtlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit. Zwei parallelgeschaltete Maxwell-Modelle sind ausreichend, um dies zu zeigen.

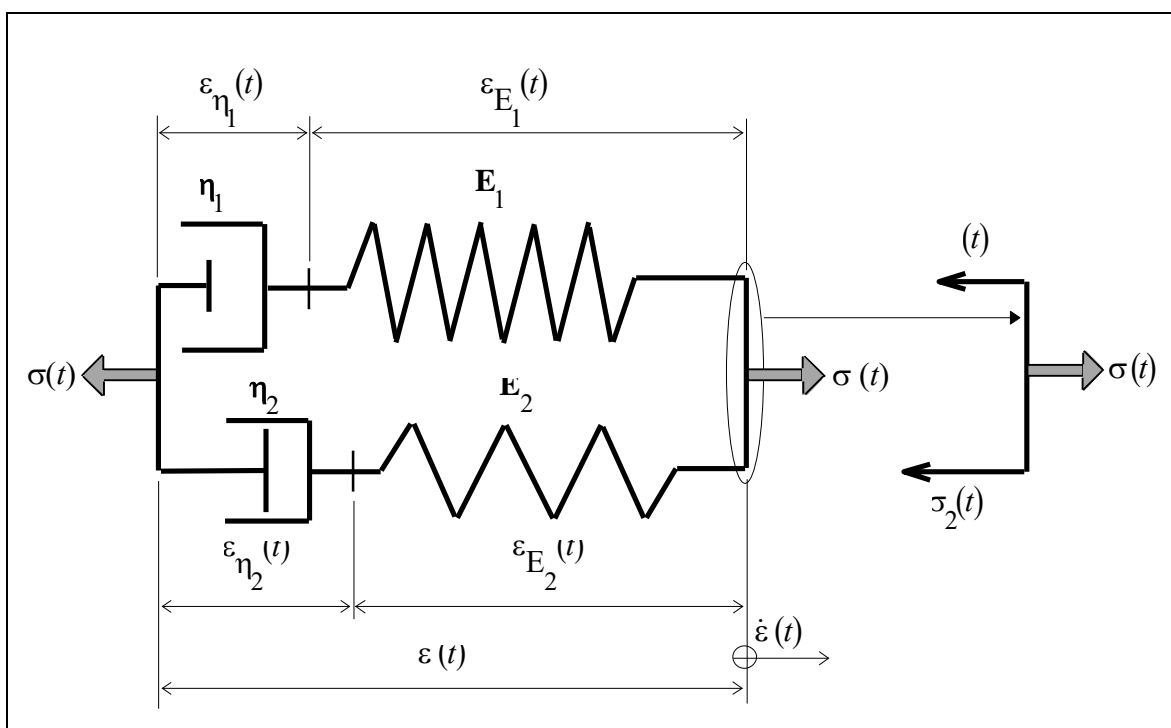


Abbildung 3.3.23: Parallelschaltung zweier Maxwell-Modelle mit Freikörper-Bild.

Die übliche Vorgehensweise ermöglicht die Gewinnung der Evolutionsgleichungen, die das Verhalten des in Abb. 3.3.23 dargestellten Modells beschreiben:

$$\dot{\sigma}_1(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 \quad 3.3.85a$$

$$\dot{\sigma}_2(t) = \mathbf{E}_2 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau_2} \sigma_2, \quad 3.3.85b$$

wobei

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{\mathbf{E}_1} \text{ und } \tau_2 = \frac{\eta_2}{\mathbf{E}_2} \quad 3.3.85c$$

die Relaxationszeiten der einzelnen Maxwell-Modelle sind.

Aus den Differentialgleichungen erster Ordnung 3.3.85a und 3.3.85b lässt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung gewinnen [34], die das Ein-/Ausgabe-Verhalten des in Abb. 3.3.23 dargestellten 4-Parameter-Modells beschreibt,

$$\ddot{\sigma}(t) + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \sigma = \left(\frac{\mathbf{E}_1}{\tau_2} + \frac{\mathbf{E}_2}{\tau_1} \right) \dot{\varepsilon}(t) + (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \ddot{\varepsilon}(t), \quad 3.3.86$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\sigma(0) = 0 \quad 3.3.86a$$

$$\dot{\sigma}(0) = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \dot{\varepsilon}(0). \quad 3.3.86b$$

Die Anfangsbedingung 3.3.86b ist eine Folgerung der starren Materialantwort der Newtonschen Dämpfern zum Zeitpunkt $t = 0$ (s. dazu Gl. 3.3.23 bzw. 3.3.26 und Abb. 3.3.9) und entspricht den Anfangsbedingungen $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$ der Gln. 3.3.85a und 3.3.85b.

Für monotone Zug-Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit ($\ddot{\varepsilon}(t) = 0$; $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_0$) erhält man die Spannungsantwort:

$$\sigma(t) = \mathbf{E}_1 \tau_1 \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_1} t} \right) + \mathbf{E}_2 \tau_2 \dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_2} t} \right), \quad 3.3.87a$$

die in eine dimensionslose Form überführt werden kann,

$$\frac{\sigma(t)}{\mathbf{E}_1 \tau_1 \dot{\varepsilon}_0} = F(\phi_1, \beta, K) = 1 - e^{-\phi_1} + \beta \left(1 - e^{-\frac{K}{\beta} \phi_1} \right), \quad 3.3.87b$$

mit den dimensionslosen Größen

$$\phi_1 = \frac{t}{\tau_1}, \quad 3.3.87c$$

$$\beta = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad 3.3.87d$$

und

$$K = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1}. \quad 3.3.87e$$

Für $K = 1$ erhält man aus Gl. 3.3.87b die Funktion:

$$F(\phi_1, \beta, 1) = 1 - e^{-\phi_1} + \beta \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta} \phi_1} \right) \quad 3.3.87f$$

Abbildung 3.3.24 gibt den Verlauf der Funktion $F(\phi_1, \beta, 1)$ wieder, die einer dimensionslosen Darstellung der Spannungs-Zeit bzw. Spannungs-Dehnungs-Verläufe entspricht.

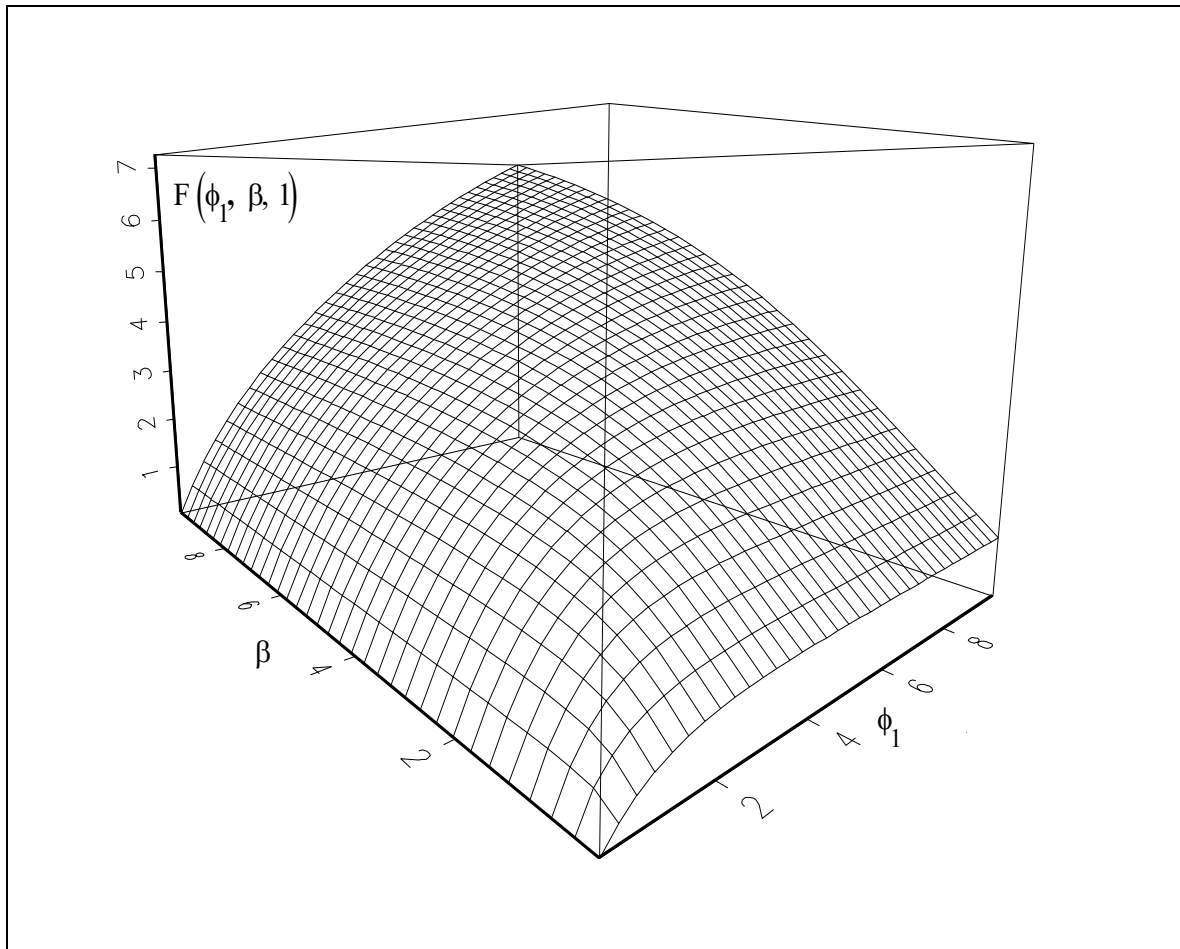


Abbildung 3.3.24: Dimensionslose Darstellung der Spannungsantwort der Parallelschaltung zweier Maxwell-Modelle für monotone Zug-Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit.

Für monotone Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten ist eine dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der in Abb. 3.3.23 gezeigten Parallelschaltung zweier Maxwell-Modelle möglich. Gemäß Gl. 3.3.87a folgt für Prozesse, die in der Zeit T bis zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden:

$$\frac{\sigma(T)}{\mathbf{E}_1 \varepsilon_0} = N_{4P}(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_1}} \right) + K \theta_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_2}} \right) \quad 3.3.88a$$

wobei

$$K = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \quad 3.3.88b$$

eine gegebene Konstante ist und

$$\theta_1 = \frac{\tau_1}{T} \quad 3.3.88c$$

und

$$\theta_2 = \frac{\tau_2}{T} \quad 3.3.88d$$

die Variablen darstellen, die für die Dauer des Prozesses maßgebend sind.

Es gelten sinngemäß dieselben physikalischen Bedeutungen für die Funktion $N(\theta)$ und $N_{4P}(\theta_1, \theta_2)$ (s. dazu z.B. Gl. 3.3.17c).

Abbildung 3.3.25 zeigt den Verlauf der Funktion N_{4P} und drei Kurven $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \textit{konstant}$, die die Geschwindigkeitsabhängigkeit der parallelgeschalteten Maxwell-Modelle wiedergeben. Die Erweiterung der unterlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit kann durch den Vergleich der Kurven „ $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \textit{konstant}$ “ und „ θ_1 bzw. $\theta_2 = \textit{konstant}$ “ veranschaulicht werden.

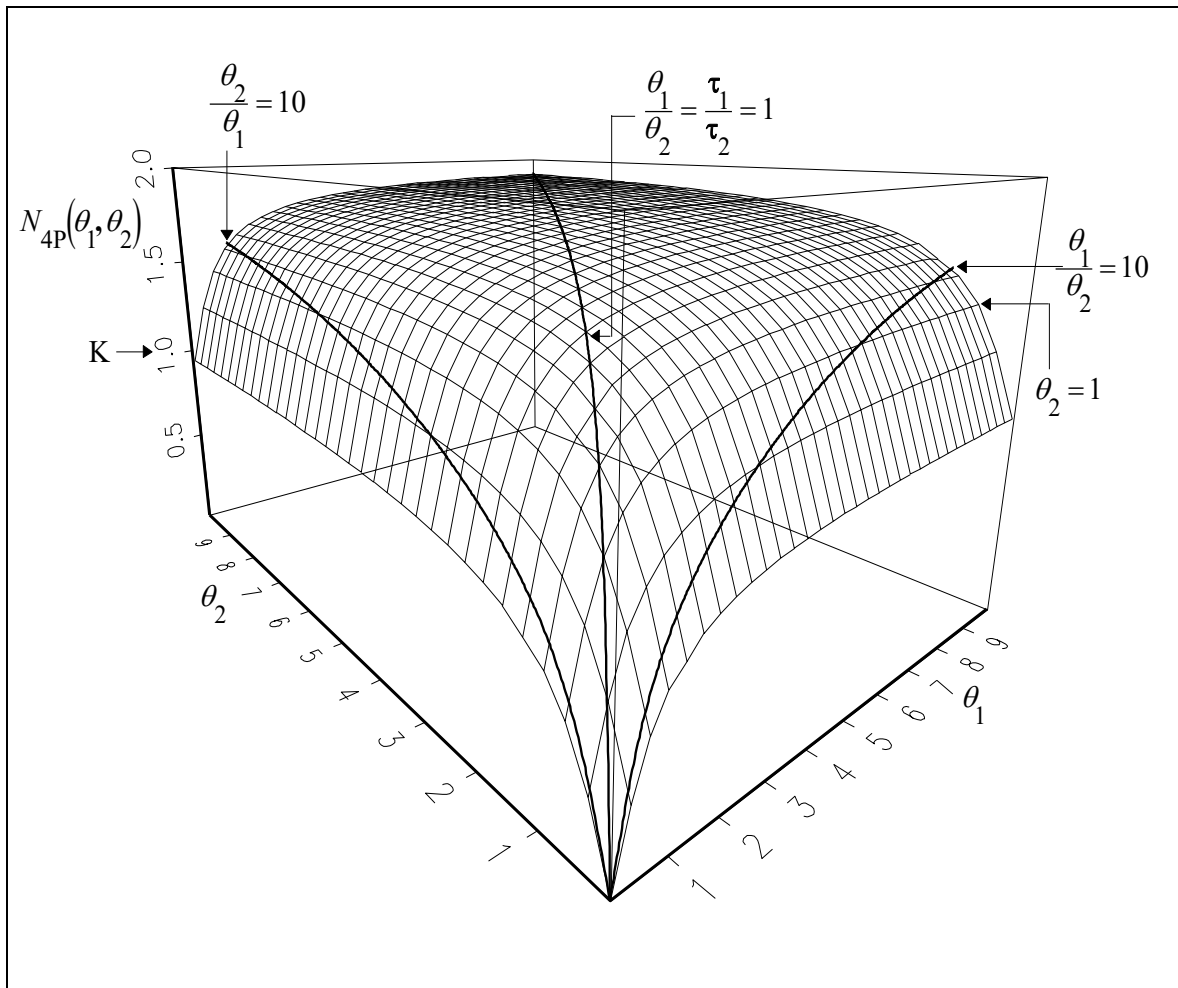


Abbildung 3.3.25: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Parallelschaltung zweier Maxwell-Modelle für monotone Zug-Prozesse mit $K = 1$.

Eine Erweiterung des linearen Bereichs der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Maxwell-Modells kann durch Hintereinanderschaltung von weiteren Newtonschen-Dämpfern erzeugt werden (s. dazu Abb. 3.3.26). Insbesondere wird durch die Summe von Relaxationszeiten (s. dazu Gl. 3.3.89b) eine geringere Steigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit langer bzw. langsamer Prozesse erreicht.

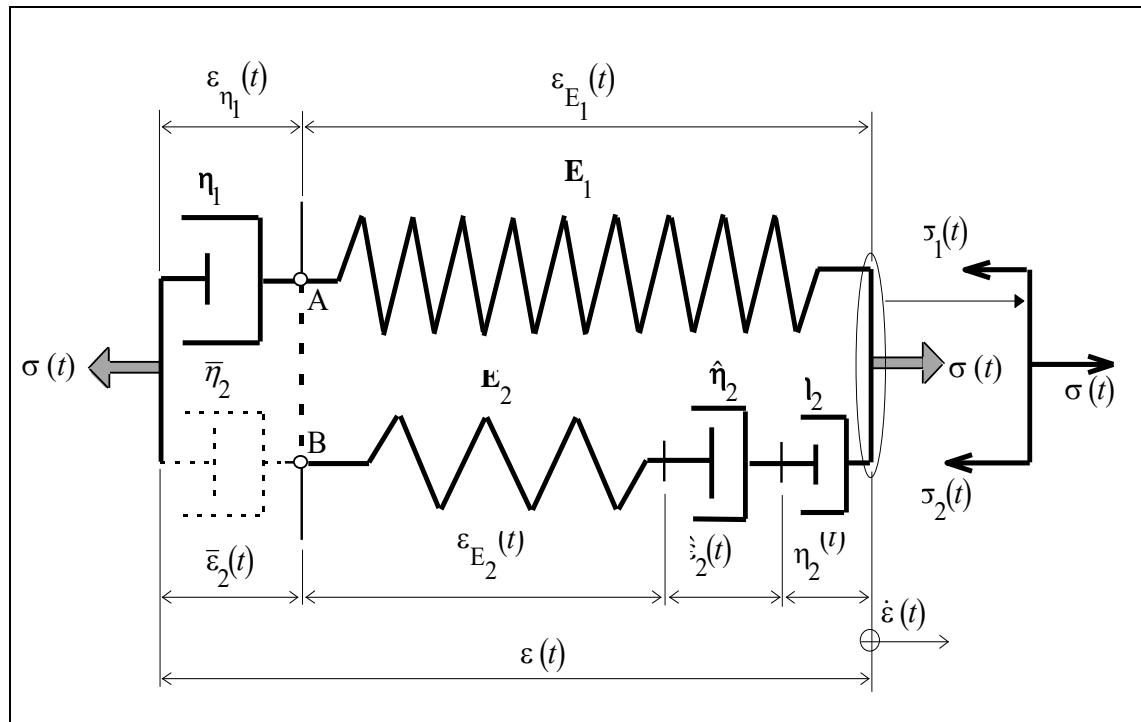


Abbildung 3.3.26: 6-Parameter-Modell mit Zwangsbedingung (Verbindung AB).

Durch Einsetzen der Materialgleichungen der einzelnen Elemente in die Kompatibilitätsbedingungen,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{E_1}(t) + \varepsilon_{\eta_1}(t) \quad 3.3.89a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_{E_1}(t) + \dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) \quad 3.3.89b$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{E_2}(t) + \varepsilon_{\eta_2}(t) + \bar{\varepsilon}_2(t) + \hat{\varepsilon}_2(t) \quad 3.3.90a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_{E_2}(t) + \dot{\varepsilon}_{\eta_2}(t) + \dot{\bar{\varepsilon}}_2(t) + \dot{\hat{\varepsilon}}_2(t) \quad 3.3.90b$$

gewinnt man zunächst die Differentialgleichungen, die stellvertretend für das Verhalten (ohne die Verbindung \overline{AB}) des in Abb. 3.3.26 dargestellten 6-P-Modells stehen.

Gemäß Gl. 3.3.89b folgt,

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_1(t)}{\mathbf{E}_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad 3.3.91a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma}_1(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 \quad 3.3.91b$$

und gemäß Gl. 3.3.90b folgt,

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_2(t)}{\mathbf{E}_2} + \frac{\mathbf{E}_2}{\eta_2} \sigma_2 + \frac{\mathbf{E}_2}{\bar{\eta}_2} \sigma_2 + \frac{\mathbf{E}_2}{\hat{\eta}_2} \sigma_2 \quad 3.3.92a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\sigma}_2(t) = \mathbf{E}_2 \dot{\varepsilon}(t) - \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\hat{\tau}_2} + \frac{1}{\tau_2} \right) \sigma_2, \quad 3.3.92b$$

wobei

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{\mathbf{E}_1} \quad 3.3.93a$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\bar{\eta}_2}{\mathbf{E}_2} \quad 3.3.93b$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{\hat{\eta}_2}{\mathbf{E}_2} \quad 3.3.93c$$

$$\tau_2 = \frac{\eta_2}{\mathbf{E}_2} \quad 3.3.93d$$

die Relaxationszeiten sind.

Nach Einsetzen von Gl. 3.3.91a in Gl.3.3.92b folgt

$$\dot{\sigma}_2(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_1(t) - \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\hat{\tau}_2} \right) \sigma_2 + \frac{\mathbf{E}_2}{\eta_1} \sigma_1 - \frac{\mathbf{E}_2}{\bar{\eta}_2} \sigma_2. \quad 3.3.94$$

In dieses Modell wird nun die folgende Zwangsbedingung eingefügt,

$$\varepsilon_{\eta_1}(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) \quad 3.3.95a$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) = \dot{\bar{\varepsilon}}_2(t). \quad 3.3.95b$$

Die Verbindung \overline{AB} steht stellvertretend für die Zwangsbedingung, die einer Bedingung an die Parameter entspricht. Daraus folgt

$$\frac{\sigma_1}{\eta_1} = \frac{\sigma_2}{\bar{\eta}_2}, \quad 3.3.96$$

und gemäß Gl. 3.3.96 geht Gl. 3.3.94 in Gl 3.3.97 über:

$$\dot{\sigma}_2(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_1(t) - \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\hat{\tau}_2} \right) \sigma_2. \quad 3.3.97$$

Mit der zusätzlichen *Parameter-Annahme*:

$$\frac{\hat{\eta}_2}{\mathbf{E}_2} = \frac{\eta_1}{\mathbf{E}_1} \quad 3.3.98a$$

$$\Leftrightarrow \hat{\tau}_2 = \tau_1 \quad 3.3.98b$$

erhält man als Ergebnis die folgenden Evolutionsgleichungen:

$$\dot{\sigma}_1(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 \quad 3.3.99a$$

$$\dot{\sigma}_2(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_1(t) - \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \sigma_2 \quad 3.3.99b$$

Die Differentialgleichungen 3.3.99 beschreiben das mechanische Verhalten des „6-Parameter-Modells“ mit einer Zwangsbedingung (Gl. 3.3.95a) und mit einer Parameter-Annahme (Gl. 3.3.98b). Ein derartiges Modell soll mit dem Begriff *degeneriertes rheologisches Modell* bezeichnet werden. In diesem Fall degeneriert das rheologische 6-Parameter-Modell in ein 4-Parameter-Modell mit den Relaxationszeiten

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{\mathbf{E}_1} \quad 3.3.99c$$

und

$$\tau_2 = \frac{\eta_2}{\mathbf{E}_2}, \quad 3.3.99d$$

dabei kommt die Größe $\bar{\eta}_2$ in den Gln. 3.3. 99 nicht vor.

Aus den Evolutionsgleichungen erster Ordnung 3.3.99, läßt sich die Evolutionsgleichung zweiter Ordnung gewinnen, die das Eingabe-/Ausgabe-Verhalten des in Abb. 3.3.26 dargestellten degenerierten 6-Parameter-Modells beschreibt:

$$\ddot{\sigma}(t) + \left(\frac{2}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau_1} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \sigma = \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) + (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \ddot{\varepsilon}(t) \quad 3.3.100$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\sigma(0) = 0 \quad 3.3.100a$$

$$\dot{\sigma}(0) = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \dot{\varepsilon}(0) \quad 3.3.100b$$

Die Anfangsbedingung 3.3.100b ist eine Folgerung der starren Materialantwort der Newtonschen Dämpfer zum Zeitpunkt $t = 0$ (s. dazu Gl. 3.3.23 bzw. 3.3.26 und Abb. 3.3.9) und entspricht den Anfangsbedingungen $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$ der Gln. 3.3.99a und 3.3.99b.

Für monotone Zug-Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit ($\ddot{\epsilon}(t) = 0$; $\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_0$) erhält man die Spannungsantwort

$$\sigma(t) = E_1 \tau_1 \dot{\epsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_1} t} \right) + E_2 \tau_2 \dot{\epsilon}_0 \left(e^{-\frac{1}{\tau_1} t} - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) t} \right), \quad 3.3.101a$$

die in eine dimensionslose Form überführt werden kann:

$$\frac{\sigma(t)}{E_1 \tau_1 \dot{\epsilon}_0} = F_d(\phi_1, \beta, K) = 1 - e^{-\phi_1} + \beta \left(1 - e^{-K \frac{1}{\beta} \phi_1} \right) e^{-\phi_1} \quad 3.3.101b$$

Darin ist

$$\phi_1 = \frac{t}{\tau_1}, \quad 3.3.101c$$

$$\beta = \frac{E_2 \tau_2}{E_1 \tau_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}. \quad 3.3.101d$$

und

$$K = \frac{E_2}{E_1} \quad 3.3.101e$$

Für $K=1$ erhält man aus 3.3.101b den Sonderfall

$$F_d(\phi_1, \beta, 1) = 1 - e^{-\phi_1} + \beta \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta} \phi_1} \right) e^{-\phi_1}. \quad 3.3.102$$

Abbildung 3.3.27 gibt den Verlauf der Funktion $F_d(\phi_1, \beta, 1)$ wieder, die einer dimensionslosen Darstellung der Spannungs-Zeit bzw. Spannungs-Dehnungs-Verläufe entspricht.

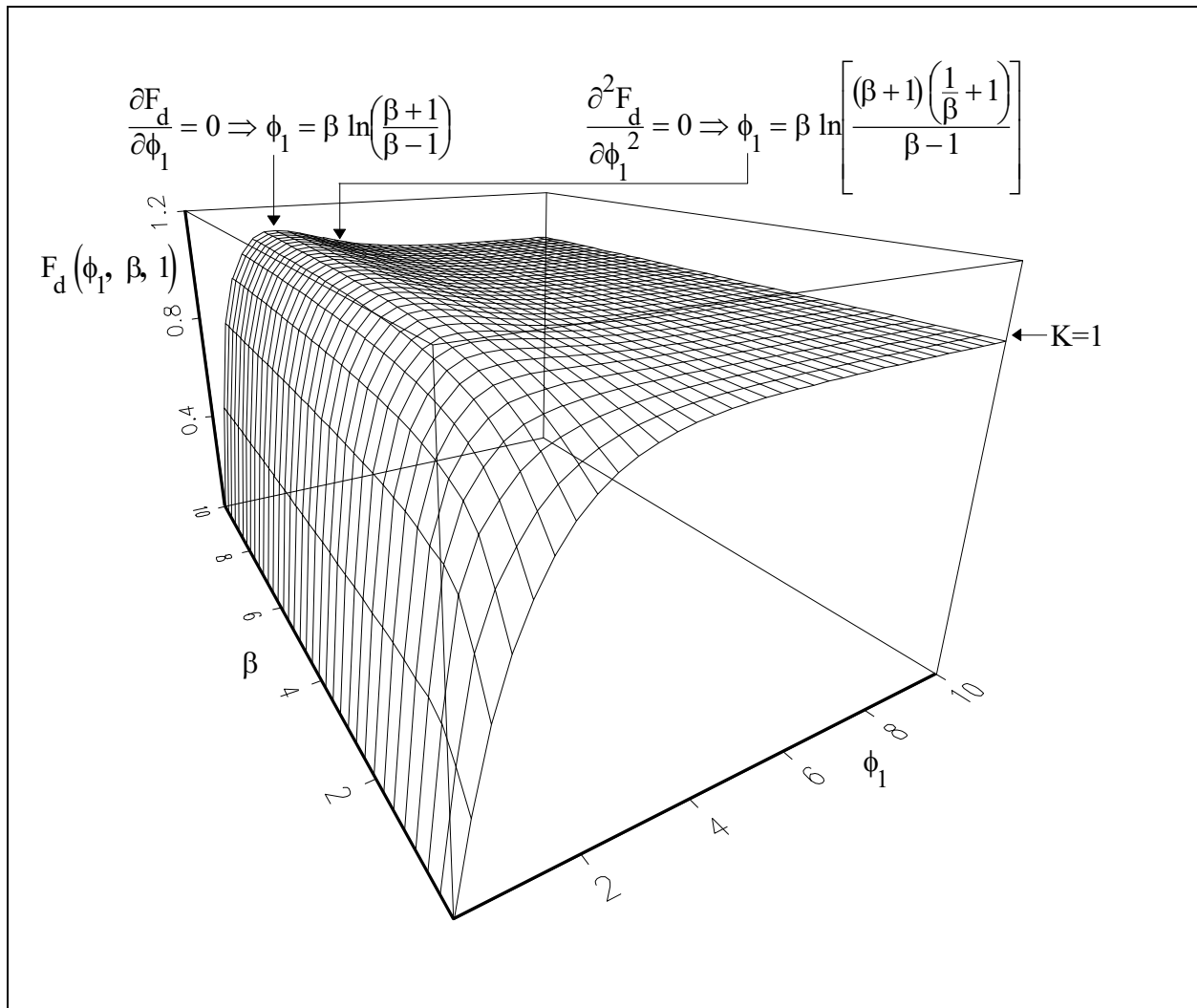


Abbildung 3.3.27: Dimensionslose Darstellung der Spannungsantwort des in Abb.3.3.26 dargestellten 6-Parameter-Modells mit Zwangsbedingung für monotone Zug-Prozesse mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit und $K=1$.

Für $\beta > 1$ ist das degenerierte 6-Parameter-Modell in der Lage, einen nichtmonotonen Spannungs-Zeit bzw. Spannungs-Dehnungs-Verlauf wiederzugeben, weil für positive Werte von ϕ_1 verschwindende Ableitungen ($\frac{\partial F_d}{\partial \phi_1} = 0$ und $\frac{\partial^2 F_d}{\partial \phi_1^2} = 0$) möglich sind (s. dazu Abb. 3.3.27).

Dies ist bei rheologischen 4-Parameter-Modellen nicht möglich, denn aus $\phi_1 \geq 0$ folgt

$\frac{\partial F_d}{\partial \phi_1} \neq 0$ und $\frac{\partial^2 F_d}{\partial \phi_1^2} \neq 0$ (s. dazu z.B. Gl. 3.3.87f und Abb. 3.3.24). Die Nichtmonotonie ist von

entscheidender Bedeutung bei der Simulation der stark veränderlichen Krümmungen der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien sowie bei der Wiedergabe der unterschiedlichen Spannungsniveaus der Prozesse mit einer und derselben Dehnungsgeschwindigkeit. Ein nichtmonotones Verhalten ist auch für die Relaxationskennlinien des degenerierten 6-Parameter-Modells möglich.

Nichtmonotone Kennlinien von Zug-Prozessen werden von Krawietz und Cheng [6, 36 und 39] mit nichtlinearem bzw. *thixotropischem* viskoelastischen Verhalten in Verbindung gebracht. Materialmodelle für das thixotropische Verhalten werden von Berker, VanArsdale und Krawietz [6, 37] vorgestellt und analysiert. Bestimmte prozeßabhängige Eigenschaften von Elastomeren werden ebenso z.B. von Ferry und Payne (Payne-Effekt) als thixotropisch bezeichnet [13 und 69].

Für monotone Zug-Prozesse mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten ist eine dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des degenerierten 6-Parameter-Modells aus Abb. 3.3.26 möglich. Gemäß Gl. 3.3.101a folgt für Prozesse, die in der Zeit T bis zu ein und derselben Dehnung ε_0 gefahren werden:

$$\frac{\sigma(T)}{E_1 \varepsilon_0} = N_{\text{d6P}}(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_1}} \right) + K \theta_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_2}} \right) e^{-\frac{1}{\theta_1}}, \quad 3.3.103$$

wobei die dimensionslose Konstante K der Quotient der Federsteifigkeiten ist ($K = \frac{E_2}{E_1}$) und

$\theta_1 = \frac{\tau_1}{T}$ und $\theta_2 = \frac{\tau_2}{T}$ die dimensionslosen Variablen darstellen, die für die Dauer des Prozesses maßgebend sind.

Es gelten sinngemäß dieselben physikalischen Bedeutungen für die Funktion $N(\theta)$ und $N_{\text{d6P}}(\theta_1, \theta_2)$ (s. dazu z.B. Gl. 3.3.17c). Abb. 3.3.28 zeigt den Verlauf der Funktion N_{d6P} und drei Kurven $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \text{konstant}$, die die Geschwindigkeitsabhängigkeit des degenerierten 6-Parameter-Modells wiedergeben.

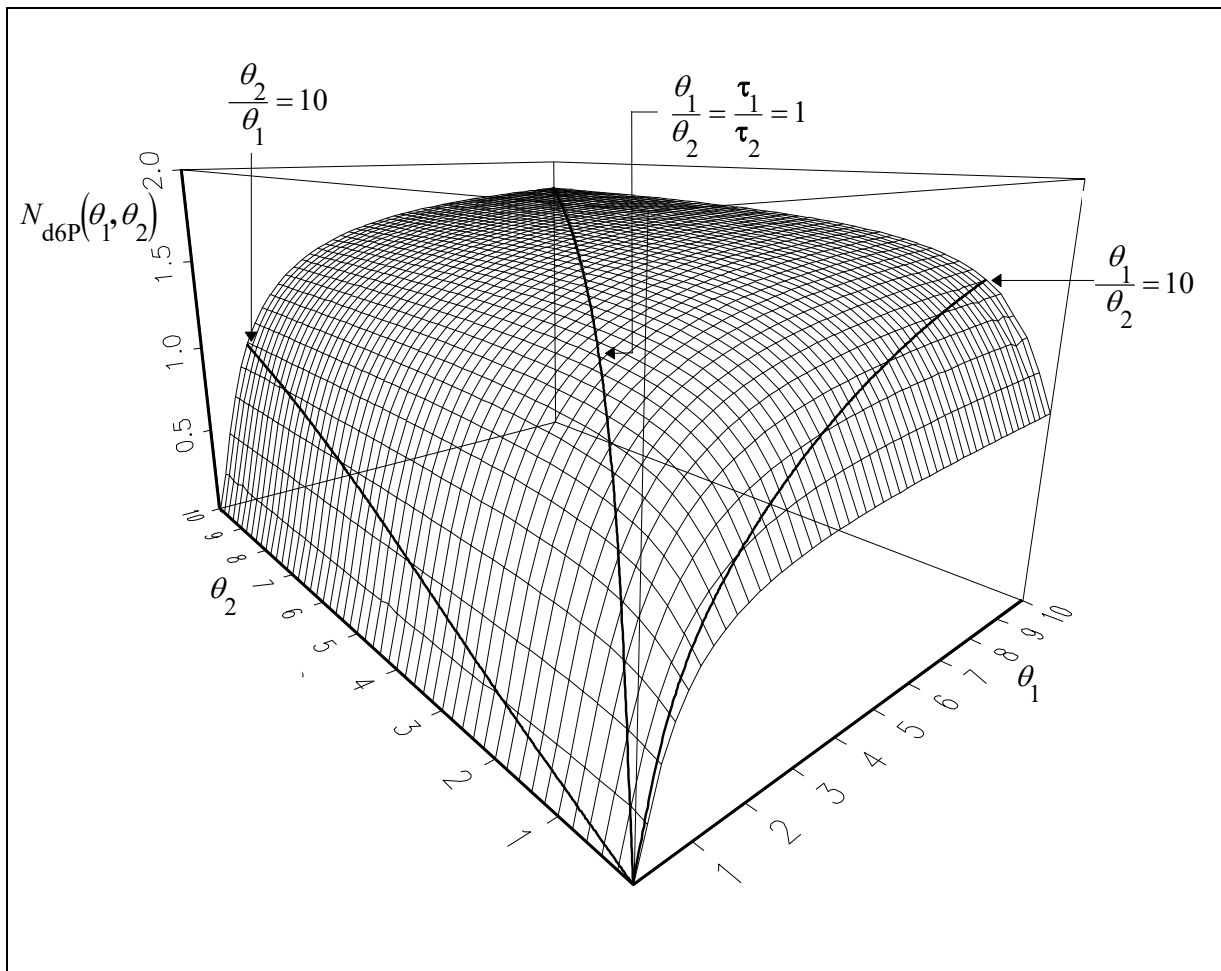


Abbildung 3.3.28: Dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsabhängigkeit des in Abb. 3.3.25 dargestellten degenerierten 6-Parameter-Modells für Zug-Prozesse (N_{d6P}) mit $K = 1$.

3.4 Modellbildung durch degenerierte rheologische Modelle mit Nicht-Newton'schen Dämpfern

Auf der Grundlage des in Abschnitt 3.3 erläuterten degenerierten rheologischen 6-Parameter-Modells bzw. ausgehend vom System der Evolutionsgleichungen 3.3.99, die aufgrund der getroffenen Zusatzannahmen nun 4 Materialparameter enthalten (Degeneration), werden die Evolutionsgleichungen für die Überspannungen des nichtlinearen viskoelastischen bzw. des viskoplastischen Modells gewonnen. Der Vollständigkeit halber werden die Gln. 3.3.99a und 3.3.99b wiederholt:

$$\dot{\sigma}_1(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\tau_1} \sigma_1 \quad 3.4.1a$$

$$\dot{\sigma}_2(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_1(t) - \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \sigma_2 \quad 3.4.1b$$

Zur Berücksichtigung der experimentell ermittelten, stark nichtlinear geschwindigkeitsabhängigen Spannungsantworten (s. dazu z.B. Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 und Versuche Nr.10 bis Nr.14), werden die konstanten Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 in den Gln. 3.4.1 bzw. die Viskositäten η_1 und η_2 der Newton'schen Dämpfer formal durch *Materialfunktionen* ersetzt, die positiv sind und monoton abfallen (s.dazu z. B. [40, 41] und Abb. 3.4.1). Das heißt,

$$\tau_i = \frac{1}{\mathbf{E}_i} \eta_i \rightarrow \mathbf{z}_i \mathbf{M}_i = \mathbf{z}_i \mathbf{M}_i(\sigma_{iii}) \quad 3.4.2a$$

wobei die Funktionen \mathbf{M}_i dimensionslos sind mit den Eigenschaften

$$\mathbf{M}_i(0) = 1 \text{ und } \mathbf{M}'_i(\bullet) \leq 0. \quad 3.4.2b$$

Dabei sind die Parameter \mathbf{z}_i Zeiten und die Parameter \mathbf{s}_i Spannungen.

Der Einfachheit halber sollen die Materialfunktionen lediglich von einer Variablen abhängen ($\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i(x_i)$). Im Hinblick auf die rheologischen Modelle ist die Abhängigkeit der Materialfunktionen von der jeweiligen Überspannung (s. dazu Gl. 4.4.2a) motiviert. Die einzigen Größen, die direkt mit den Newton'schen-Dämpfern in Verbindung stehen, sind die entsprechenden Überspannungen, die Überspannungsgeschwindigkeiten, die entsprechenden Dehnungen und die Dehnungsgeschwindigkeiten (s. dazu Abb. 3.4.1).

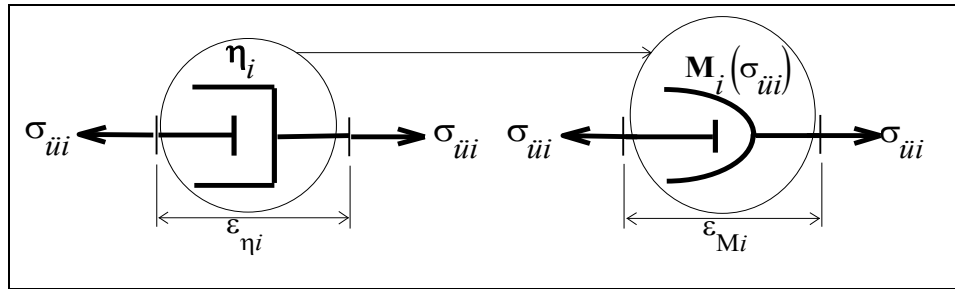


Abb. 3.4.1: Newtonsche und Nicht-Newtonsche Dämpfer mit den direkt in Verbindung stehenden Variablen.

Für die Wiedergabe der unterlinearen Geschwindigkeitsabhängigkeit hat es sich als ausreichend erwiesen, die Materialfunktionen von den entsprechenden Überspannungen abhängen zu lassen (s. dazu z.B. [8, 44, 11, 38 und 45]):

$$\sigma_{iii} = \eta_i(\sigma_{iii}) \dot{\epsilon}_{\eta_i} \quad . \quad 3.4.3$$

Mit der Modifikation 3.4.2a bzw. mit der Materialgleichung 3.4.3 erhalten die Evolutionsgleichungen für die Überspannungen die folgende Form:

$$\dot{\sigma}_{i1}(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\epsilon}(t) - \frac{1}{\mathbf{z}_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i1})} \sigma_{i1} \quad 3.4.4a$$

$$\dot{\sigma}_{i2}(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{i1}(t) - \left[\frac{1}{\mathbf{z}_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i1})} + \frac{1}{\mathbf{z}_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{i2})} \right] \sigma_{i2} \quad 3.4.4b$$

Zur Vervollständigung der Gln. 3.4.4 werden die Materialfunktionen \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 folgendermaßen gewählt:

$$\mathbf{M}_1(\sigma_{i1}) = e^{-\left(\frac{|\sigma_{i1}|}{s_1}\right)^n} \quad 3.4.4c$$

$$\mathbf{M}_2(\sigma_{i2}) = e^{-\left(\frac{|\sigma_{i2}|}{s_2}\right)^m} \quad 3.4.4d$$

Andere Ansätze - z.B. Potenz-Gesetze - zur Beschreibung des nichtlinearen viskoelastischen Verhalten werden z.B. in [57, 58] beschrieben. In diesem Zusammenhang sind ebenso die Arbeiten von Lion [61], Koeller [67] und Caputo und Mainardi [68] erwähnenswert.

Die Exponentialfunktion bzw. die Funktionen der Form 3.4.4c und 3.4.4d mit den dimensionslosen Exponenten n und m erfüllen die Bedingung 3.4.2b. Die Exponenten sind Materialparameter, die es zu identifizieren gilt.

Für $n = m = 1$ entsprechen die Materialfunktionen 3.4.4 in gewisser Weise der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannung, die von Eyring und Krausz in deren *mikroskopischer Platzwechseltheorie (theory of rate processes)* vorgeschlagen wird (s. dazu [6, 42, 54]). Darüber hinaus ist für eine einzige Materialfunktion von Typ 3.4.4 eine formale Interpretation als Transformation des Zeitmaßstabes möglich (s. dazu z.B. [12, 32]). In diesem Zusammenhang sind ebenso erwähnenswert die makroskopischen phänomenologischen Experimente an Polymer-Schmelzen, die eine Abhängigkeit der Viskosität von der Verzerrungsgeschwindigkeit zeigen (s. dazu die Stichworte Non-Newtonian Flow, Nicht-Newtonische Viskosität in [13, 14]).

Die in Kapitel 2 erläuterten Interpretationen der Relaxationsabbruchpunkte ermöglichen bzw. erzwingen zwei unterschiedliche Ansätze zu deren mathematischer Beschreibung. In diesem Zusammenhang führen die physikalischen Interpretationen auf zwei unterschiedliche Modellklassen:

A Plastizität Interpretation a) führt auf Modelle vom Typ der Plastizität bzw. Viskoplastizität [7, 64]. Dabei ist die Verbindungslinie der Relaxationsabbruchpunkte im Spannungs-Dehnungs-Diagramm im Allgemeinen eine stark prozeßabhängige Gleichgewichtskennlinie (s. dazu z.B. Versuche Nr.6.1, Nr.7 und Nr.15.17). Die Relaxationsabbruchpunkte des Versuchs Nr.7 zeigen eine ausgeprägte Gleichgewichtshysterese.

B Viskoelastizität Interpretation b) führt auf Modelle vom viskoelastischen Typ [7, 56]. Hierbei wird für die Gleichgewichtskennlinie eine Funktion der Dehnung angenommen, die in erster Näherung eine Gerade sein kann.

3.4.1 Das nichtlineare vikoelastische Modell

Unter der Interpretation b) wird das Modell vom viskoelastischen Typ (Modellklasse B) durch Parallelschaltung einer Hookeschen Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} zum degenerierten 6-Parameter-Modell mit Nicht-Newtonschen Dämpfern konstruiert (s. dazu Abb. 3.4.1.1). Die Feder mit Federsteifigkeit \mathbf{E} ist ein geschwindigkeitsunabhängiges Gleichgewichtselement und sorgt bei Relaxationsprozessen für die Relaxationsrichtung und für nicht verschwindende Werte der stationären Spannungen. Dabei bleibt die Struktur der Differentialgleichungen des degenerierten 6-Parameter-Modells erhalten. Das heißt, daß zu den Differentialgleichungen 3.4.4 lediglich eine zusätzliche Gleichung (Gl. 3.4.1.1c) hinzugefügt wird.

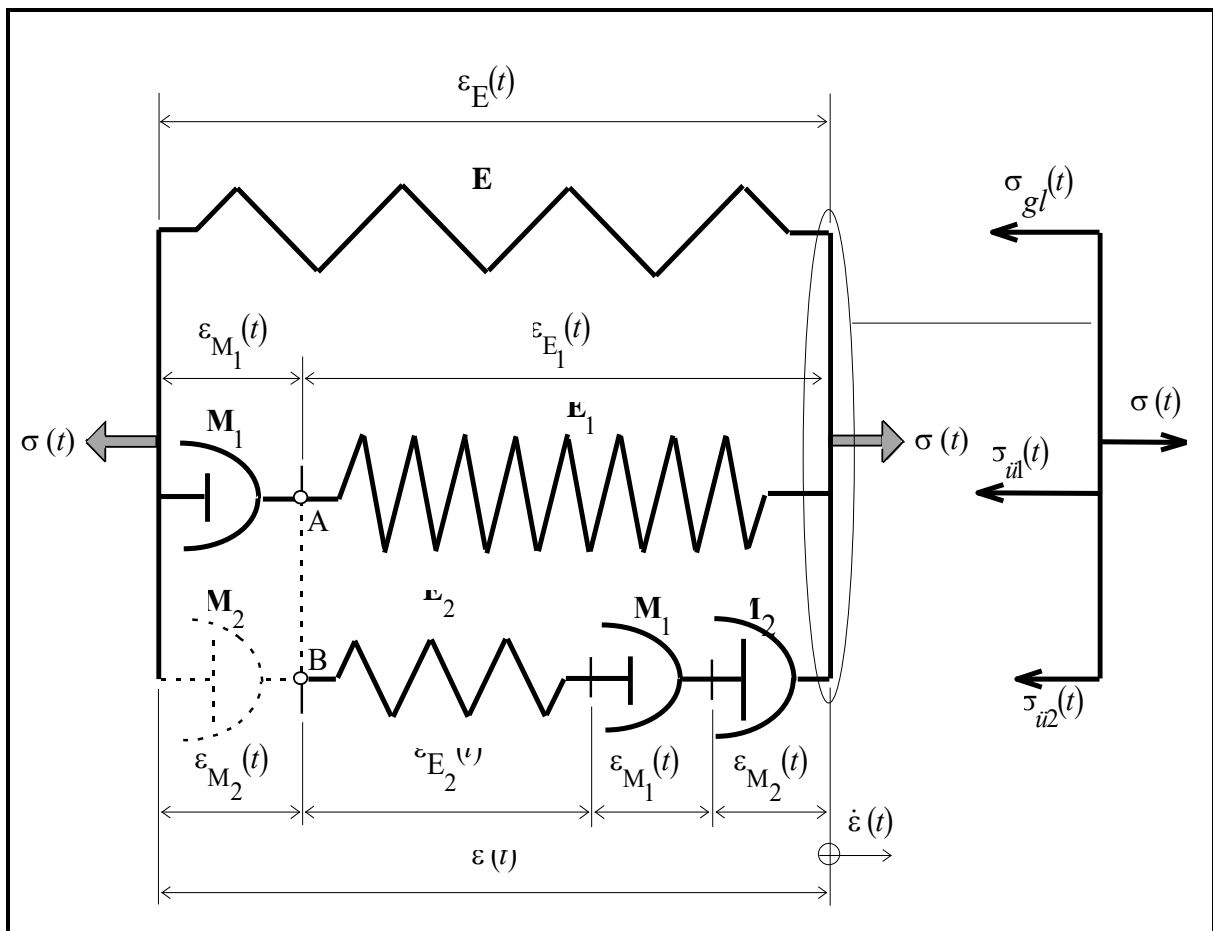
Die momentane Spannung σ besteht aus der Summe einer geschwindigkeitsunabhängigen Gleichgewichtsspannung σ_{gl} und einer geschwindigkeitsabhängigen Überspannung σ_{ii}

(Gl. 3.4.1.1a). Die Überspannung wiederum ist aus zwei Summanden zusammengesetzt

(Gl. 3.4.1.1b). Die Gleichgewichtsspannung (Gl. 3.4.1.1c) ist das Hooksche-Elastizitätsgesetz mit Elastizitätsmodul \mathbf{E} , welcher die Steigung der Gleichgewichtsggeraden im Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht. Die Evolutionsgleichung für den Überspannungsanteil σ_{ii} enthält einen zum Parameter \mathbf{E}_1 proportionalen Produktionsterm, der von der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ angetrieben wird (Gl. 3.4.5d). Der Anteil σ_{ii2} wird demgegenüber nach (3.4.5e) durch die Spannungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma}_{ii}$ angetrieben und ist proportional zum Quotienten $\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1}$. Hiermit steuern die beiden Parameter \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 die Produktion der Überspannungen.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_{gl}(t) + \sigma_{ii}(t) & 3.4.1.1a \\ \sigma_{ii}(t) &= \sigma_{ii1}(t) + \sigma_{ii2}(t) & 3.4.1.1b \\ \dot{\sigma}_{gl}(t) &= \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t) & 3.4.1.1c \\ \dot{\sigma}_{ii1}(t) &= \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{ii1})} \sigma_{ii1} & 3.4.1.1d \\ \dot{\sigma}_{ii2}(t) &= \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{ii1}(t) - \left[\frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{ii1})} + \frac{1}{z_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{ii2})} \right] \sigma_{ii2} & 3.4.1.1e \\ \mathbf{M}_1(\sigma_{ii1}) &= e^{-\left(\frac{|\sigma_{ii1}|}{s_1} \right)^n} & 3.4.1.1f \\ \mathbf{M}_2(\sigma_{ii2}) &= e^{-\left(\frac{|\sigma_{ii2}|}{s_2} \right)^m} & 3.4.1.1g \end{aligned}$$

Das nichtlineare viskoelastische Modell

Abbildung 3.4.1.1: Veranschaulichung des nichtlinearen viskoelastischen Modells mit Nicht-Newtonschen Dämpfern \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 .

Der Quotient

$$\beta_M(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}) = \frac{\mathbf{E}_2 \mathbf{z}_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{i2})}{\mathbf{E}_1 \mathbf{z}_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i1})} \quad 3.4.1.2$$

ist analog zum dimensionslosen Quotient β der Gl. 3.3.101d. Dabei ist β_M eine Funktion der Überspannungen und weiterhin maßgebend für die Nichtmonotonie der Überspannung (s. dazu zum Vergleich Abb. 3.3.27).

Sehr kurze bzw. sehr schnelle Prozesse werden durch die Summe der Parameter $\mathbf{E} + \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1}$ gekennzeichnet, welche der Anfangssteigung eines Zug-Prozesses im Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht. Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie sehr langsamer Prozesse wird durch die elastische Beziehung mit dem Materialparameter \mathbf{E} dargestellt (s. dazu Gl. 3.4.1.1c).

Die Begrenzungsterme in den Evolutionsgleichungen hängen durch die beiden Materialfunktionen \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 nichtlinear von der Überspannung ab; dies entspricht jeweils einer spannungsabhängigen Relaxationszeit und sorgt für die nichtlineare Abhängigkeit der Überspannung von der Dehnungsgeschwindigkeit.

3.4.2 Das viskoplastische Modell ohne Fließfläche

Unter der Interpretation a) wird das Modell vom viskoplastischen Typ (Modellklasse A) zunächst durch Parallelschaltung eines nichtrheologischen Elementes zum degenerierten rheologischen 6-Parameter-Modell mit Nicht-Newtonschen Dämpfern konstruiert (s. dazu Abb. 3.4.2.1). Das nicht-rheologische Element wird durch die Differentialgleichung eines Armstrong-Frederick Ansatzes [43] mit Materialparametern \mathbf{E} und \mathbf{K}

$$\dot{\sigma}_{gl}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t) - \mathbf{E}\mathbf{K} |\dot{\varepsilon}(t)| \sigma_{gl} \quad 3.4.2.1$$

dargestellt. In diesem Fall entspricht der Armstrong-Frederick-Ansatz einem Anteil der Gleichgewichtsspannung $\sigma_{gl}(t)$, und ist ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional der Gesamt-Deformation. Nach Pipkin und Rivlin [46] sind solche Funktionale im Rahmen der *Bogenlängenparametrisierung* als Funktional der *Deformationsgeschichte* darstellbar. Von Valanis wurden auf diese Weise Materialgleichungen der *endochronen Plastizität* formuliert [47]. Von Haupt [32] und Fazio [48] wurden solche Materialgleichungen untersucht und mit Modellen der klassischen Plastizität verglichen. Darüber hinaus haben Haupt, Kamlah und Tsakmakis [52, 53] Modifikationen des Armstrong-Frederick-Ansatzes zu einer genaueren Beschreibung der Verfestigung von hochlegierten Stählen vorgeschlagen.

Die erste Gleichgewichtsspannung ist für die Modellierung der Gleichgewichtshysterese zuständig und entspricht damit einem Modell der Plastizität ohne Fließfläche [47]. Darüber hinaus zeigt der Armstrong-Frederick-Ansatz eine Erhöhung des Spannungs-Niveaus bei zyklischer Belastung, die als zyklische *Verfestigung* bezeichnet wird. Lion [12] hat gezeigt, daß das Verhältnis zwischen der stationären zyklischen *Zusatzverfestigung* σ_{gl}^n ($n \rightarrow \infty$, $n = \text{Anzahl der halben Zyklen}$), welche durch eine Dehnungsamplitude $\Delta\varepsilon$ verursacht wurde, und der Verfestigung am Ende des monotonen Prozesses σ_{gl}^1 (erster Viertelzyklus) durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{gl}^n}{\sigma_{gl}^1} = \frac{\tanh(\mathbf{E}\mathbf{K} \Delta\varepsilon)}{1 - e^{-\mathbf{E}\mathbf{K} \Delta\varepsilon}} \quad 3.4.2.2a$$

gegeben ist.

Im instationären Fall ist das Verhältnis $\frac{\sigma_{gl}^n}{\sigma_{gl}}$ immer größer als die Einheit:

$$\frac{\sigma_{gl}^n}{\sigma_{gl}} > 1. \quad 3.4.2.2b$$

Das heißt, daß der instationäre Fall durch eine Zusatzverfestigung gekennzeichnet ist.

In einem weiteren Schritt wird zum Armstrong-Frederick-Ansatz eine nichtlineare Feder mit den Materialparametern $\hat{\mathbf{E}}$ und \mathbf{C} addiert (s. dazu Abb. 3.4.2.1). Die nichtlineare Feder kann durch die Differentialgleichung

$$\dot{\sigma}_{gl2}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{C} \dot{\varepsilon}(t) \sigma_{gl2} \quad 3.4.2.2$$

angegeben werden, sie ist eine Funktion der Gesamt-Dehnung.

Die Zusammensetzung der nichtlinearen Feder, welche durchaus als rheologisches Element interpretierbar ist, und des Armstrong-Frederick-Ansatzes ermöglicht durch geeignete Parameterwahl eine Aufhebung der zyklischen Zusatzverfestigung im nichtstationären Fall, so daß

$$\frac{\sigma_{gl}^n}{\sigma_{gl}} \cong 1, \quad 3.4.2.3$$

gilt, mit

$$\sigma_{gl} = \sigma_{gl1} + \sigma_{gl2}. \quad 3.4.2.4$$

$$\sigma(t) = \sigma_{gl}(t) + \sigma_{i\dot{u}}(t) \quad 3.4.2.5a$$

$$\sigma_{gl}(t) = \sigma_{gl1}(t) + \sigma_{gl2}(t) \quad 3.4.2.5b$$

$$\sigma_{i\dot{u}}(t) = \sigma_{i\dot{u}1}(t) + \sigma_{i\dot{u}2}(t) \quad 3.4.2.5c$$

$$\dot{\sigma}_{gl1}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t) - \mathbf{EK} |\dot{\varepsilon}(t)| \sigma_{gl1} \quad 3.4.2.5d$$

$$\dot{\sigma}_{gl2}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{C} \dot{\varepsilon}(t) \sigma_{gl2} \quad 3.4.2.5e$$

$$\dot{\sigma}_{i\dot{u}1}(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i\dot{u}1})} \sigma_{i\dot{u}1} \quad 3.4.2.5d$$

$$\dot{\sigma}_{i\dot{u}2}(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{i\dot{u}1}(t) - \left[\frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i\dot{u}1})} + \frac{1}{z_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{i\dot{u}2})} \right] \sigma_{i\dot{u}2} \quad 3.4.2.5e$$

$$\mathbf{M}_1(\sigma_{i\dot{u}1}) = e^{-\left(\frac{|\sigma_{i\dot{u}1}|}{s_1}\right)^n}, \quad \mathbf{M}_2(\sigma_{i\dot{u}2}) = e^{-\left(\frac{|\sigma_{i\dot{u}2}|}{s_2}\right)^m} \quad 3.4.2.5f, g$$

Das viskoplastische Modell

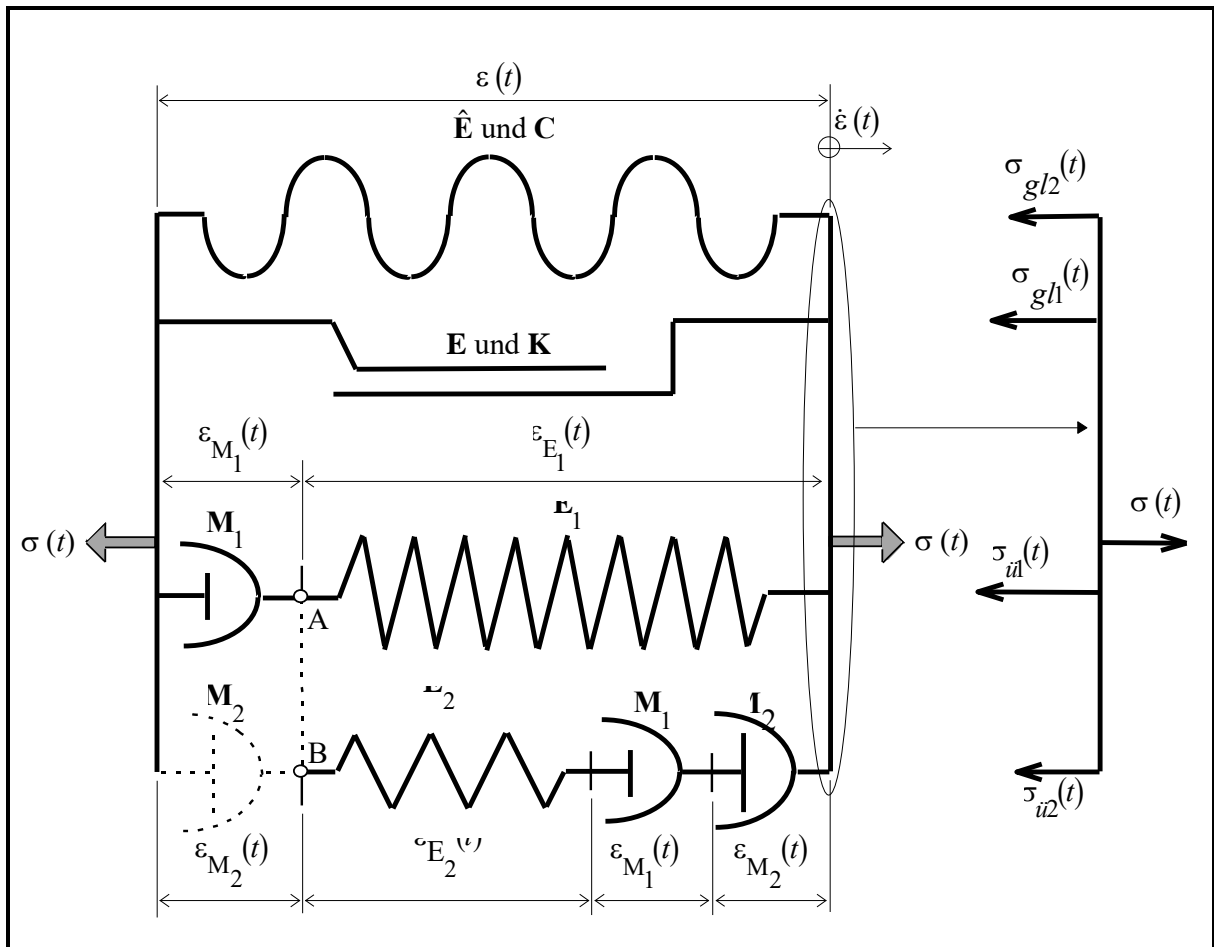


Abbildung 3.4.2.1: Veranschaulichung des viskoplastischen Modells ohne Fließfläche.

4. Numerische Ergebnisse

4.1 Identifikation der Materialparameter

Ziel der numerischen Identifikation der Materialparameter und Materialfunktionen eines vorgegebenen Materialmodells ist es, eine möglichst genaue quantitative Beschreibung des beobachteten Materialverhaltens zu ermöglichen. Hierbei muß ein *inverses Problem* gelöst werden (*Identifizierungsproblem*) [70]. Zunächst sollte allerdings sichergestellt werden, daß das zugrundegelegte Materialmodell in der Lage ist, das gewünschte Verhalten zumindest qualitativ wiederzugeben. Die eigentliche Bestimmung bzw. Identifikation der Materialparameter entspricht der Lösung einer Optimierungsaufgabe. Die identifizierten Werte der Parameter machen die Abweichung der Modellantwort von den Versuchsdaten im Sinne einer geeignet definierten Norm zu einem Minimum.

Das Hauptproblem bei der Identifikation in diesem Fall ist, daß die Materialkenngrößen als Parameter in nichtlinearen Differentialgleichungen stehen, deren Lösungen nichtlinear von den Parametern abhängen (s. dazu Kap. 3.4.1 bzw. [12], [54]). Die Lösung der Identifikationsaufgabe muß nicht unbedingt eindeutig bestimmt sein. Die Parameterbestimmung kann stark von den zugrundegelegten Experimenten abhängen. In diesem Zusammenhang ist die Auswahl der zur Identifikation herangezogenen experimentellen Daten von entscheidender Bedeutung.

Zur Identifikation der Materialparameter wurde ein Optimierungsverfahren verwendet, das auf der Evolutionsstrategie beruht. Dieses Verfahren wurde von Schreiber [49] in ein Programmsystem umgesetzt und zur Verfügung gestellt. Die Grundidee besteht in einem wiederholten Variieren und Testen von Parametersätzen. Dabei ist die Art und Weise dieser Variation an die natürlichen Evolutionsmechanismen angelehnt, s.dazu [50, 51].

Weitere Optimierungsverfahren (Simplex- und Gradientenmethode) werden in [71] vorgestellt und in [72] zur Identifikation von Materialparametern angewandt. Ein Vergleich unterschiedlicher Optimierungsverfahren wurde z.B. von DeNatale zusammengestellt [59].

Zum Zweck der Optimierung ist es sinnvoll, alle zu ermittelnden Parameter p_k ($k = 1, 2 \dots n$) zu entdimensionieren und auf Werte zwischen 0 und 1 zu transformieren (s. dazu Kap. 3). Damit sind alle Parameter von derselben Größenordnung und in einem gewissen Sinne gleichwertig. Schließlich sollen sie zu einem Vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_n)$ zusammengefaßt werden. Nun wird eine Gruppe gebildet, die aus einer festen Anzahl m solcher Parametervektoren \mathbf{p}_i ($i = 1, \dots m$) besteht. Durch den Index i wird zum Ausdruck gebracht, daß sich die Werte ihrer Komponenten unterscheiden können, d.h. $\mathbf{p}_i = (p_{1i}, p_{2i}, \dots p_{ni})$.

Um selektieren zu können, muß die Antwort des Modells für jeden dieser Parametervektoren berechnet und mit den der Optimierung zugrundeliegenden Meßdaten verglichen werden.

Dabei wird als Qualitätsmaß die gewichtete Summe der Abstandsquadrate zwischen den Meßdaten y_i^{Mess} und den Modelldaten $y_i^{\text{Modell}}(\mathbf{p}_i)$ verwendet:

$$Q(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^m w_j \left[y_j^{\text{Mess}} - y_j^{\text{Modell}}(\mathbf{p}_i) \right]^2. \quad 4.1.1$$

Der Index j läuft über alle Meßpunkte und kann z.B. eine diskrete Zeitvariable repräsentieren. Die positiven Zahlen w_j sind Gewichtungsfaktoren, die eingeführt werden, um eventuell gewisse Meßpunkte gesondert gewichten zu können. Durch Gl. 4.1.1 kann also jedem Parametersatz ein bestimmter Qualitätswert zugewiesen werden. Damit ist eine Bewertung möglich, und die getesteten Parametervektoren \mathbf{p}_i können in Abhängigkeit von ihrer Qualität geordnet werden.

Eine kurze Erläuterung der Evolutionsmechanismen kann z. B. in [12] gefunden werden. Es kann gezeigt werden, daß das Verfahren der Evolutionsstrategie gegen den besten Parametervektor konvergiert und zwar unter der Voraussetzung, daß die Qualitätsfunktion ein absolutes Minimum aufweist.

Eine Aussage über die Geschwindigkeit der Konvergenz kann nicht gemacht werden. Auf die geschilderte Weise kann nur eine endliche Menge von Parametersätzen getestet werden. Der Vektor, der entweder nach einer festgelegten Zahl von N Evolutionsschritten die beste Qualität aufweist oder ein anderes Abbruchkriterium erfüllt, wird dann als bester Parametersatz bezeichnet, wobei nicht ausgeschlossen werden kann, daß er noch weit entfernt vom Minimum liegt.

Durch entsprechende Wahl der Gewichtungsfaktoren w_j lassen sich beispielsweise einzelne Experimente oder bestimmte Meßpunkte eines Experiments besonders gewichten. Der Sinn einer nachträglichen Gewichtung wird deutlich, wenn man bedenkt, daß durch die Art der Datenaufzeichnung schon eine gewisse Gewichtung vorgenommen werden kann [60].

Die Identifikation der Materialparameter wurde für zwei unterschiedliche Materialmodelle durchgeführt. Dabei wurden für jedes Modell jeweils mehrere Parametersätze ermittelt. Der Sinn dieser Vorgehensweise ergibt sich aus der Tatsache, daß ein und derselbe Satz von experimentellen Daten einerseits durch unterschiedliche Materialmodelle approximiert werden kann sowie andererseits - auf der Basis eines Materialmodells - sogar auch durch unterschiedliche Parametersätze.

Zur Identifikation der Materialparameter wurde grundsätzlich nur ein Teil der experimentellen Daten herangezogen, nämlich die Versuche Nr. 7 Teil 2 und Nr. 9.1 bis Nr. 9.6. Die übrigen Daten wurden dazu benutzt, die physikalische Aussagekraft des jeweiligen Materialmodells im Hinblick auf eine Vorausberechnung des Materialverhaltens zu testen. Dementsprechend werden die numerischen Ergebnisse in den folgenden Abschnitten unter zwei Gesichtspunkten dargestellt: Der eine Aspekt betrifft den Erfolg der Parameteridentifikation, daß heißt die Approximation der Meßdaten, die zur Identifikation herangezogen wurden. Dieser Gesichtspunkt wird jeweils unter der Überschrift „Wiedergabe der experimentellen Daten“ berücksichtigt.

Der zweite Aspekt betrifft die Frage, ob das gewählte Materialmodell in der Lage ist, auch diejenigen Versuchsdaten zu approximieren, die nicht zur Parameteridentifikation benutzt wurden. Diese Frage wird unter der Überschrift „Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens“ untersucht.

4.2 Ein Materialparametersatz für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität

Zerlegung der Spannung				
σ	=	Gleichgewichtsspannung g	+	Überspannung
		σ_{gl}		$\sigma_{\ddot{u}}$
				Zerlegung der Überspannung
				$\sigma_{\ddot{u}} = \sigma_{\ddot{u}1} + \sigma_{\ddot{u}2}$
				Evolutionsgleichungen der Überspannungen
				$\dot{\sigma}_{\ddot{u}1}(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1})} \sigma_{\ddot{u}1}$ $\dot{\sigma}_{\ddot{u}2}(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{\ddot{u}1}(t) - \left[\frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1})} + \frac{1}{z_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{\ddot{u}2})} \right] \sigma_{\ddot{u}2}$
				Materialfunktionen
				$\mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1}) = e^{-\left(\frac{ \sigma_{\ddot{u}1} }{s_1}\right)^n} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_2(\sigma_{\ddot{u}2}) = e^{-\left(\frac{ \sigma_{\ddot{u}2} }{s_2}\right)^m}$
		Evolutionsgleichung der Gleichgewichtsspannung		
		$\dot{\sigma}_{gl}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t)$		

Tabelle 4.2.1: Das Materialmodell der nichtlinearen Viskoelastizität.

Gleichgewichtsparameter		Überspannungsparameter							
\mathbf{E}		\mathbf{E}_1	\mathbf{E}_2	z_1	s_1	\mathbf{n}	z_2	s_2	\mathbf{m}
GP	GP	GP	GP	GS	MPa	-	Ms	MPa	-
1,125		0,944	1,784	0,254	7,040	2,403	0,207	2,403	1,125

Tabelle 4.2.2: Ein Parametersatz für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität.

4.2.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten

Auf der Grundlage der Zerlegung der momentanen Spannung in eine Gleichgewichtsspannung und eine Überspannung ist eine vollständig getrennte Identifikation der Gleichgewichtsparameter und der Überspannungsparameter möglich.

Unter der in Abschnitt 2.3 erläuterten Annahme b) wurde für die Gleichgewichtskennlinie eine Spannungs-Dehnungs-Gerade mit der Steigung $E = 1,125 \text{ GPa}$ identifiziert, s. dazu Tabelle 4.2.1 und Abb. 4.2.1.1. Sie approximiert in erster Näherung die arithmetischen Mittelwerte der Relaxationsabbruchpunkte. Der Zug- und Entlastungsbereich (positive Dehnungen) wurde besonders stark gewichtet.

Zur Bestimmung der Überspannungsparameter müssen die Evolutionsgleichungen für die zugrundegelegten Prozesse integriert werden. Die Integration wurde mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit automatischer Steuerung der Integrationsschrittweite durchgeführt und die Materialparameter mit Hilfe der Evolutionsstrategie ermittelt. Dabei wurden die experimentellen Spannungs-Dehnungs-Daten der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zugrundegelegt (Spannungs-Dehnungs-Punkte der Versuche Nr. 9.1 bis Nr. 9.5, s. dazu Abb. 2.3.20 und Abb. 4.2.1.2). Das Ergebnis der Parameteridentifikation wird in Tabelle 4.2.2 wiedergegeben.

Auf der Grundlage der identifizierten Materialparameter werden Modellrechnungen durchgeführt, die über den Erfolg der Identifikation im Zusammenhang mit der qualitativen und quantitativen Darstellung der Meßergebnisse Auskunft geben. In diesem Sinne zeigt Abb. 4.2.1.2 die numerischen Ergebnisse der Zugprozesse der Versuche (Nr.9.1 bis Nr.9.5). Die experimentellen Meßpunkte werden durch Symbole dargestellt. Dabei kann eine angemessene Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Verläufe der numerischen Simulation mit den experimentellen Daten festgestellt werden.

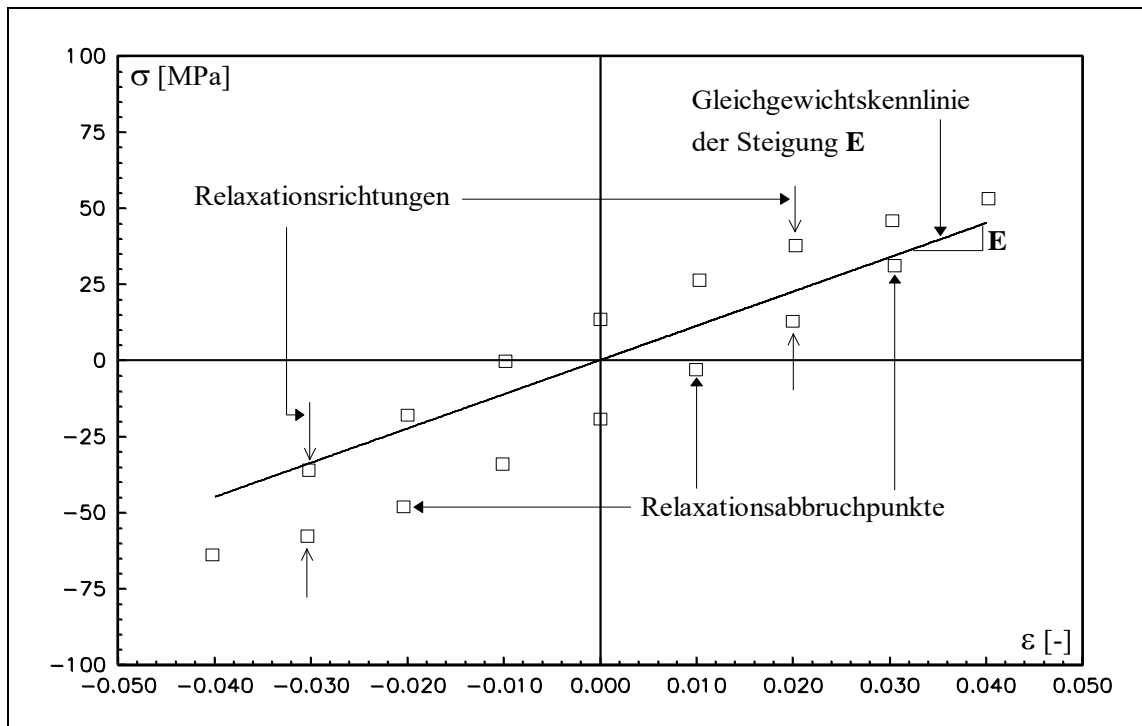


Abbildung 4.2.1.1: Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der numerischen Simulation der Gleichgewichtskennlinie und die zur Identifikation des Gleichgewichtsparameters herangezogenen experimentell ermittelten Relaxationsabbruchpunkte des Versuchs Nr.7, Teil 2.

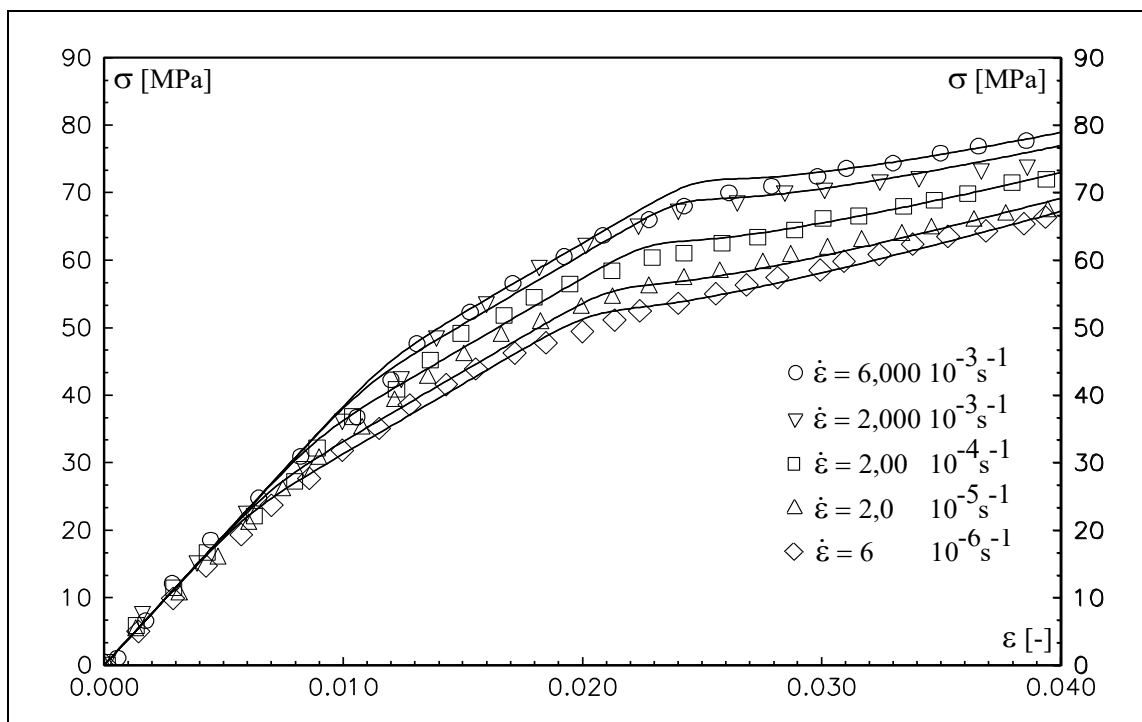


Abbildung 4.2.1.2: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation (durchgezogene Linie) der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (Versuche Nr.9.1 bis 9.5) und die zur Identifikation der Überspannungparameter herangezogenen experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs- Punkte.

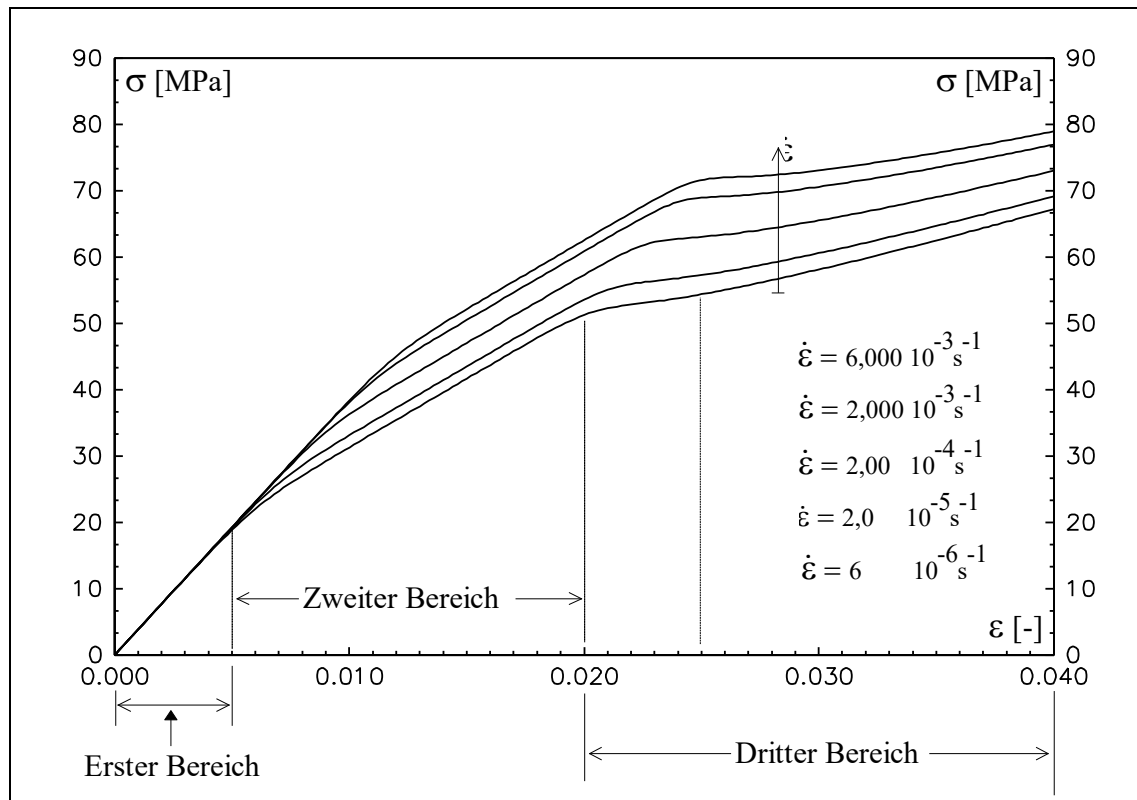


Abbildung 4.2.1.3: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten.

Um eine deutlichere Betrachtung der berechneten Spannungsantworten der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu ermöglichen, werden die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien in der Abbildung 4.2.1.3 ohne die experimentellen Daten gezeigt. Im ersten Dehnungsbereich bis ca. 0,005 Dehnung ist keine Geschwindigkeitsabhängigkeit zu beobachten. Das heißt, die Spannungsantwort ist im Geschwindigkeitsspektrum 10^{-3} bis 10^{-6} s^{-1} nahezu linear-elastisch bzw. geschwindigkeitsunabhängig. Danach, mit steigender Dehnung, (zweiter Dehnungsbereich) ist eine erste deutliche Änderung der Krümmung der Kennlinien bei gleichzeitigem Eintreten der geschwindigkeitsabhängigen Effekte zu beobachten. Mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit ist eine Erhöhung der Spannungen sowie eine in Richtung größerer Dehnungen verschobene Krümmungsänderung der Kennlinien erkennbar. Ab ca. 0,02 Dehnung kann eine zweite deutliche Änderung der Krümmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien beobachtet werden, die mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit auch nach rechts verschoben ist (dritter Dehnungsbereich). Darüber hinaus ist bei ca. 0,025 Dehnung (gestrichelte Linie) der größte Spannungsunterschied zwischen den verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten festzustellen. Dieses Verhalten des Modells ist in der Tendenz bei den experimentellen Daten wiederzufinden.

4.2.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens

Die zur Identifikation der Materialparameter eines Modells nicht herangezogenen Experimente bzw. die zugehörigen numerischen Simulationen können dazu dienen, die Fähigkeit des Materialmodells zur Vorausberechnung des Materialverhaltens zu testen. In diesem Sinne dienen die in den folgenden Abbildungen dargestellten Modellrechnungen im Zusammenhang mit der qualitativen und quantitativen Darstellung der Meßergebnisse der Verifikation des nichtlinearen viskoelastischen Modells mit den in Tabelle 4.2.2 angegebenen Parametern.

Abbildung 4.2.2.1 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der gerechneten Modellantwort des zyklischen Prozesses mit Haltezeiten (Versuch Nr.7). Die maximalen Spannungsniveaus bzw. die Spannungen der Relaxationsabbruchpunkte der drei letzten Haltezeiten liegen unterhalb der Werte der ersten drei maximalen Spannungsniveaus bzw. Relaxationsabbruchpunkte. Dies entspricht in gewisser Weise dem in Kap.2 beschriebenen Entfestigungseffekt, welcher in diesem Fall als Spannungsabnahme bezeichnet wird. Die unterschiedlichen Bezeichnungen sollen nachdrücklich auf die unterschiedlichen Charakteristika beider Effekte hinweisen. Wichtigster Unterschied ist dabei, daß das Materialmodell so konstruiert bzw. identifiziert wurde, daß es nicht dazu geeignet ist, die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien neuer Proben wiederzugeben (s. dazu Abbn. 4.2.2.2 und 4.2.2.3).

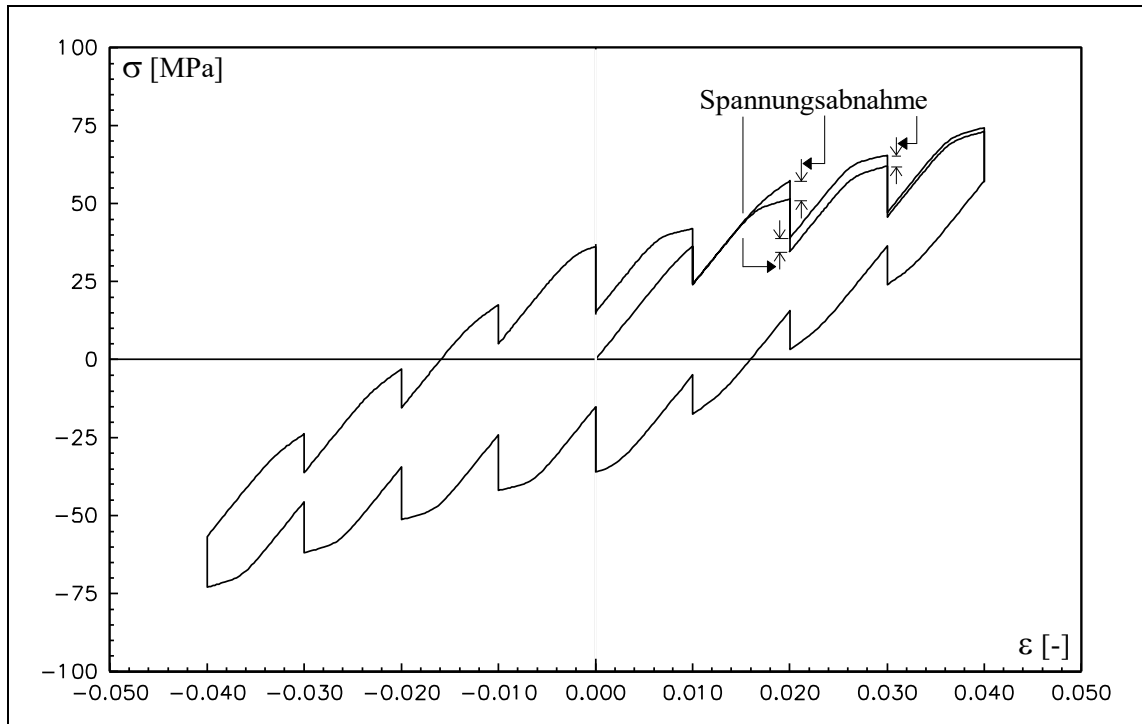


Abbildung 4.2.2.1: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7.

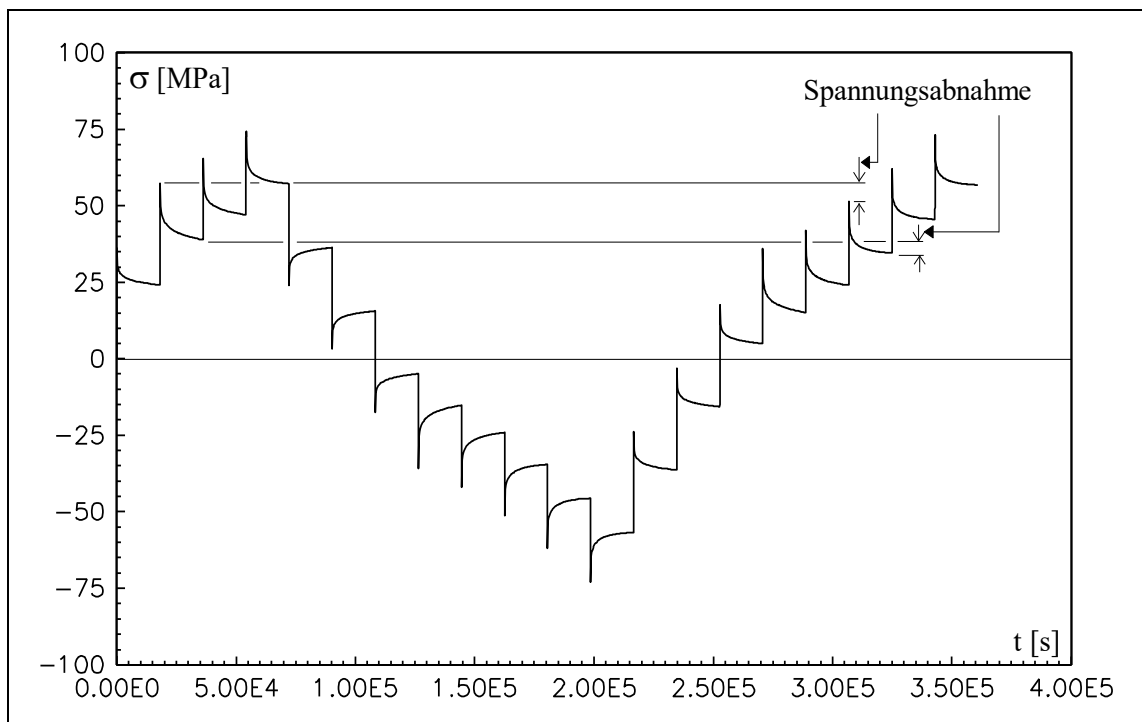


Abbildung 4.2.2.2: Spannungs-Zeit-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7.

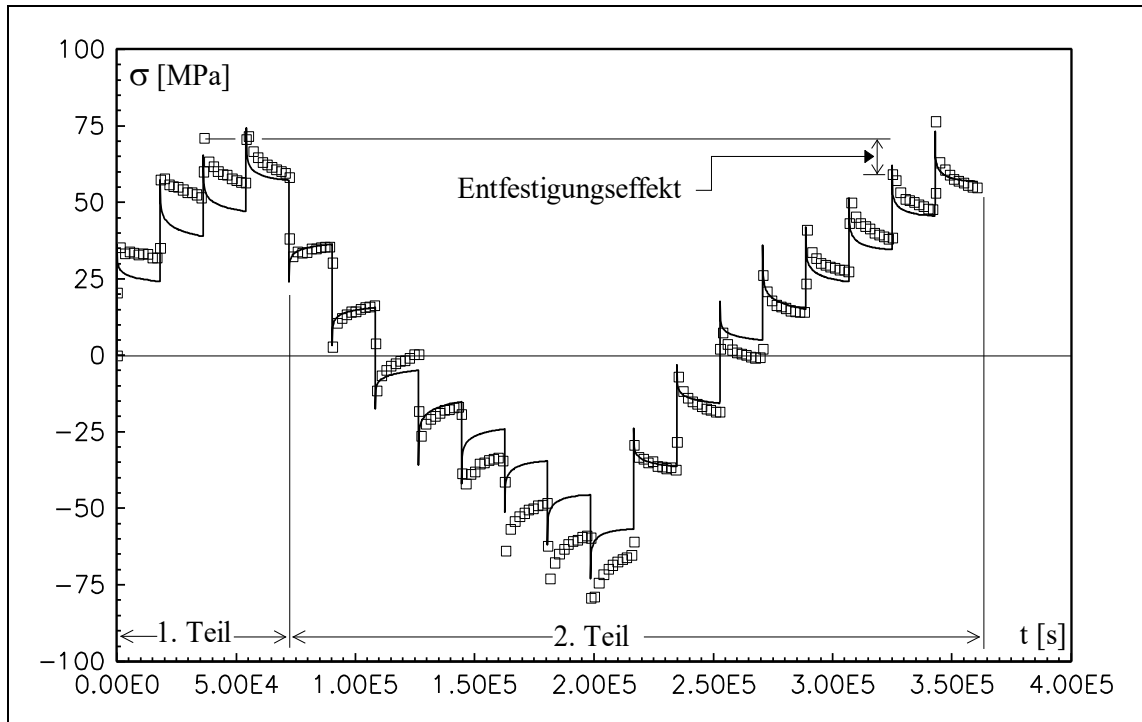


Abbildung 4.2.2.3: Spannungs-Zeit-Kennlinien der numerischen Simulation (durchgezogene Linie) des Versuchs Nr.7 und einige dazugehörige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte.

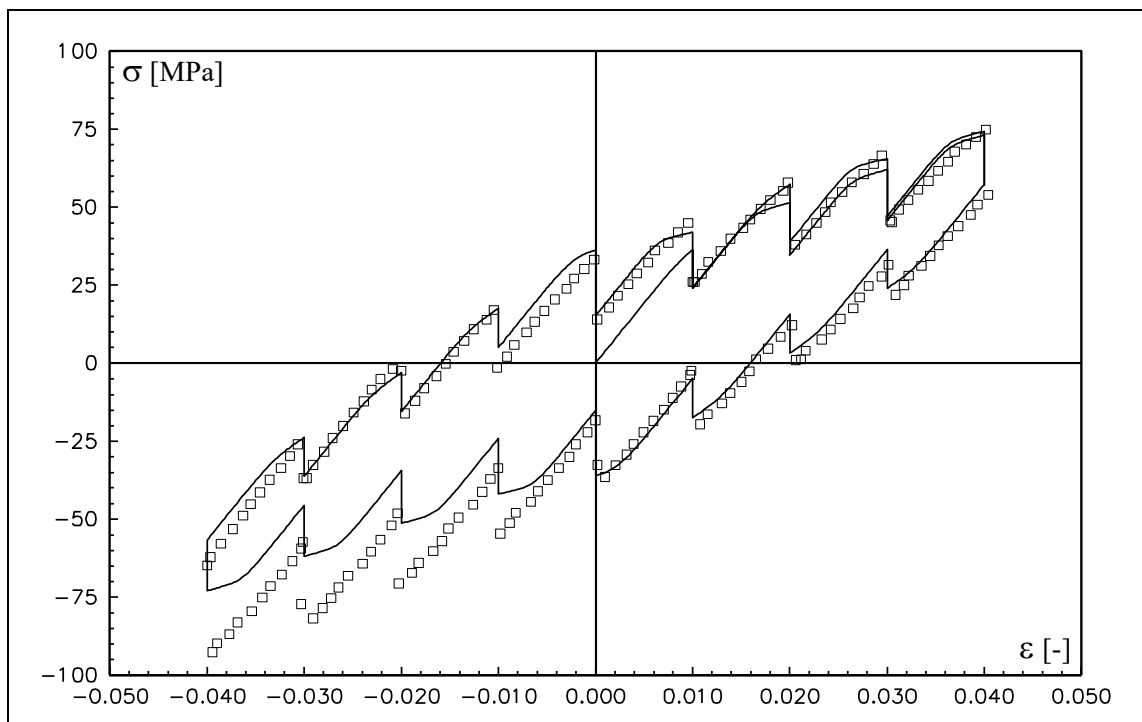


Abbildung 4.2.2.4: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation (durchgezogene Linie) des Versuchs Nr.7 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des 2. Teils dieses Versuchs.

In Abb. 4.2.2.3 kann eine angemessene Übereinstimmung der gerechneten Spannungs-Zeit-Verläufe während der Haltezeiten mit den experimentellen Daten des 2. Teils des Versuchs Nr.7 festgestellt werden. Im Druckbereich sind die Verläufe der numerischen Simulation in Richtung größerer Spannungen verschoben.

Eine angemessene Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ist in Abb. 4.2.2.4 sichtbar. Insbesondere im Zug- und Entlastungs-Bereich werden die maximalen Spannungsniveaus und die Relaxationsabbruchpunkte gut wiedergegeben.

Das zyklische Verhalten aus dem Versuch Nr.8 wird in Abb. 4.2.2.5 dargestellt. Auch in diesem Fall ist eine adäquate Übereinstimmung der numerischen Simulation mit den experimentellen Daten zu erkennen. Hierbei wurde der 1. Teil des Versuchs vollständig gerechnet, aber zu einer besseren Darstellung der Zyklen weggelassen. Auch der unterschiedliche Verlauf im ersten Viertelzyklus der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie im Entlastungs-Bereich wird vom Modell qualitativ angemessen vorhergesagt (vgl. Abb. 2.3.17).

Das zyklische Verhalten ohne Vorprozeß und die dazugehörige numerische Simulation werden in Abb. 4.2.2.6 gezeigt. Hierbei ist der einmalige experimentell ermittelte Entfestigungseffekt und eine im Vergleich zum ersten Viertelzyklus niedrigere Spannung (Spannungsabnahme ab ca. 0,015 Dehnung), welche den Entfestigungseffekt nicht simulieren soll, zu erkennen. Die durch diesen Prozeß erzeugte zyklische Hysterese wird adäquat wiedergegeben.

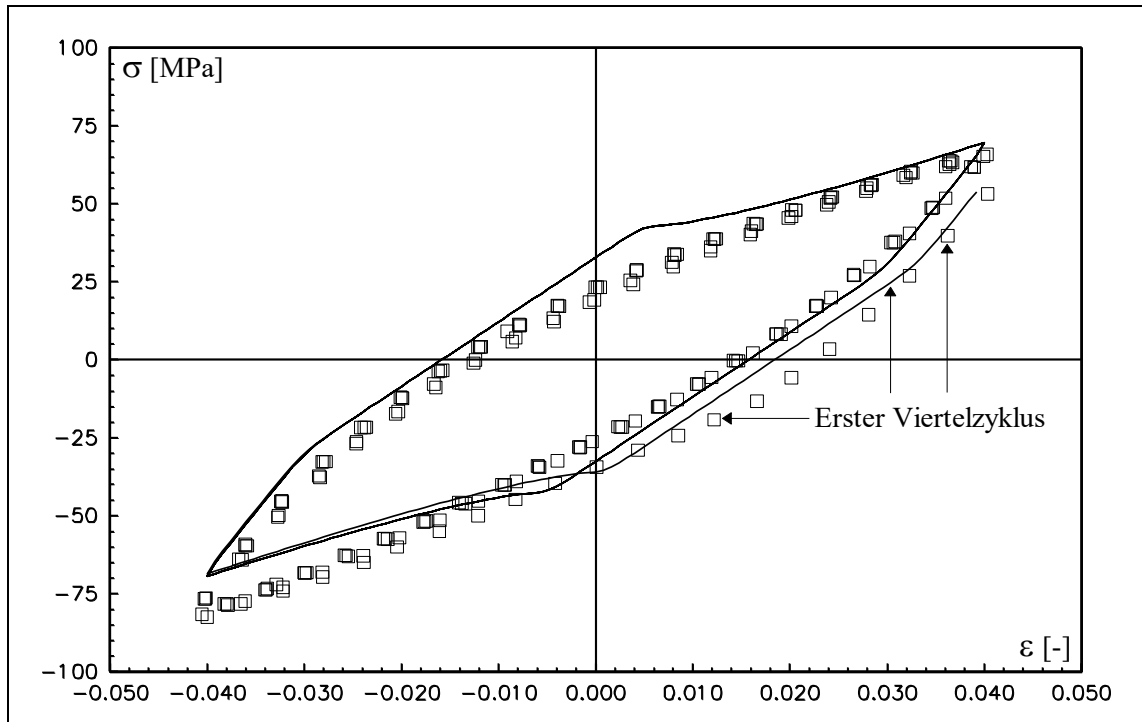


Abbildung: 4.2.2.5: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Zyklen des Versuchs Nr.8 Teil Nr.2 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte der Zyklen dieses Versuchs.

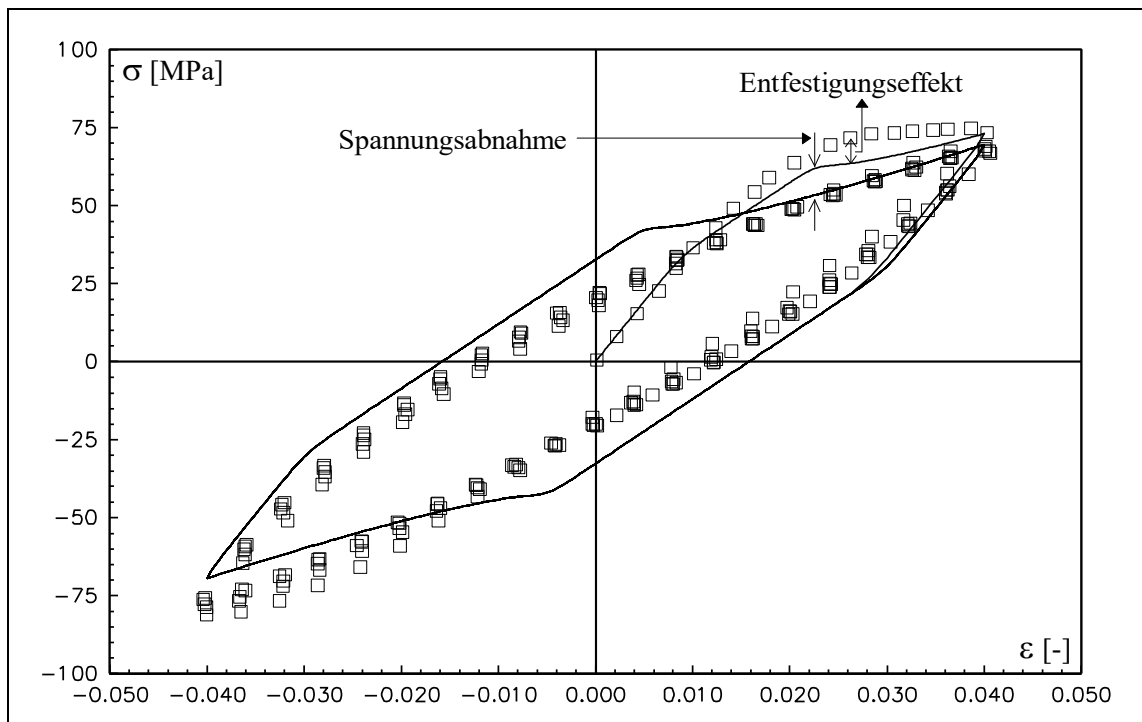


Abbildung 4.2.2.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.1 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

Abbildung 4.2.2.7 zeigt die gerechnete Spannungsantwort der Zug- und Entlastungsprozesse mit anschließenden Haltezeiten für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten. Hierbei kann man eine deutliche Geschwindigkeitsabhängigkeit der Entlastung erkennen. Abbildung 4.2.2.8 ermöglicht einen direkten Vergleich der experimentellen Daten mit den zugehörigen numerisch simulierten Spannungsantworten. Insbesondere erkennt man, daß das Modell mit den in Tabelle 4.2.2 identifizierten Materialparametern nicht dazu geeignet ist, die experimentell ermittelte geschwindigkeitsunabhängige Entlastungsantwort wiederzugeben. Darüber hinaus kann in Abb. 4.2.2.8 ein weniger angemessener Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Entlastung erkannt werden. Dies verursacht unter anderem eine schlechtere Wiedergabe der Relaxationsabbruchpunkte nach der Entlastung bei Dehnung 0.

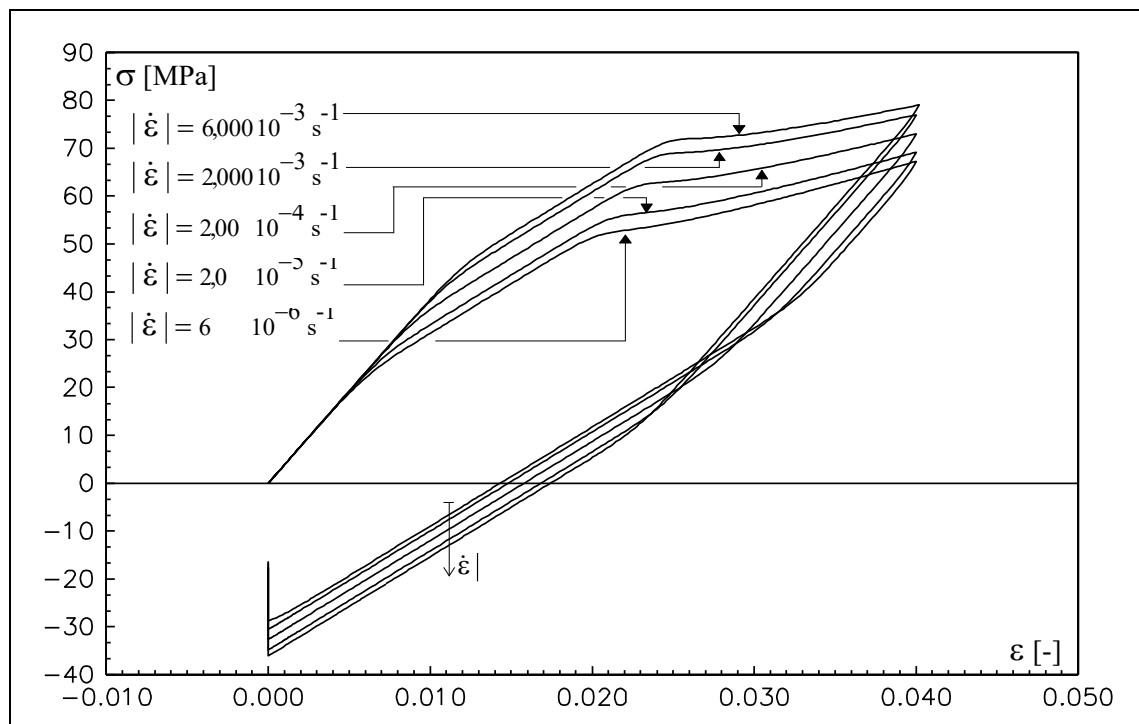


Abbildung 4.2.2.7: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der kompletten Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5.

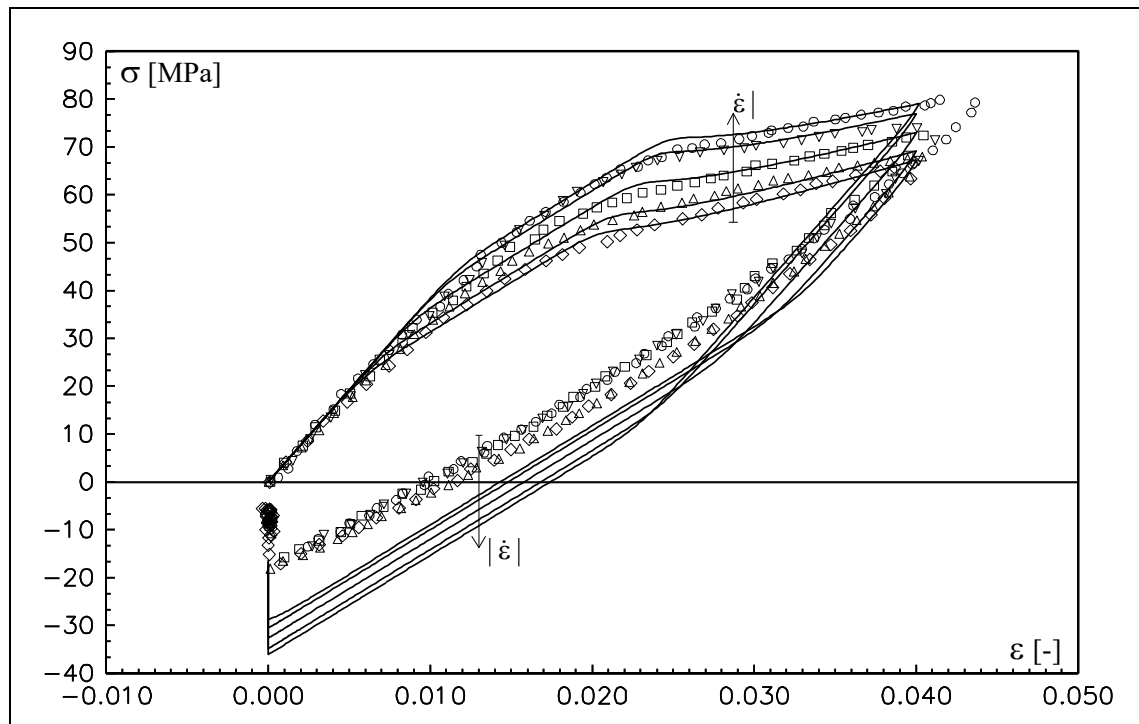


Abbildung 4.2.2.8: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

Der gerechnete Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr.9.6 wird in Abb. 4.2.2.9 wiedergegeben. Erwähnenswert ist, daß der Relaxationsabbruchpunkt nach der Belastung bei Dehnung 0,040 gut wiedergegeben wird. Der Relaxationsabbruchpunkt nach der Entlastung bei Dehnung 0,000 wird, auch in diesem Fall bedingt durch den weniger adäquaten Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Entlastung, quantitativ weniger gut dargestellt. In Abb. 4.2.2.10 wird der zeitliche Verlauf der Relaxations-Kennlinien deutlich gemacht. Bei der ersten Haltezeit ist die gerechnete Spannungs-Zeit-Kennlinie im Vergleich zur gemessenen Kennlinie in Richtung größerer Spannungen verschoben. Die in Abb. 4.2.2.11 dargestellten ersten 1500s der Haltezeit des Versuchs Nr. 9.6 zeigen, daß die experimentell ermittelte Anfangssteigung der Relaxationskennlinie deutlich kleiner ist als die der numerischen Simulation [61, 62]. Dies verursacht die Verschiebung der gerechneten Kennlinie in Richtung größerer Spannungen.

In Abb. 4.2.2.12 wird der Verlauf der einzelnen inneren Variablen bzw. Spannungen für den Prozeß des Versuchs Nr.9.6 über der Dehnung wiedergegeben. Hierbei kann die nichtmonotone Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der 2. Überspannung deutlich erkannt werden. Sie ist für die erste Änderung der Krümmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie verantwortlich und trägt auch zur zweiten Krümmungsänderung bei. Abb. 4.2.2.13 zeigt die unterschiedlichen Verläufe der Materialfunktionen \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 .

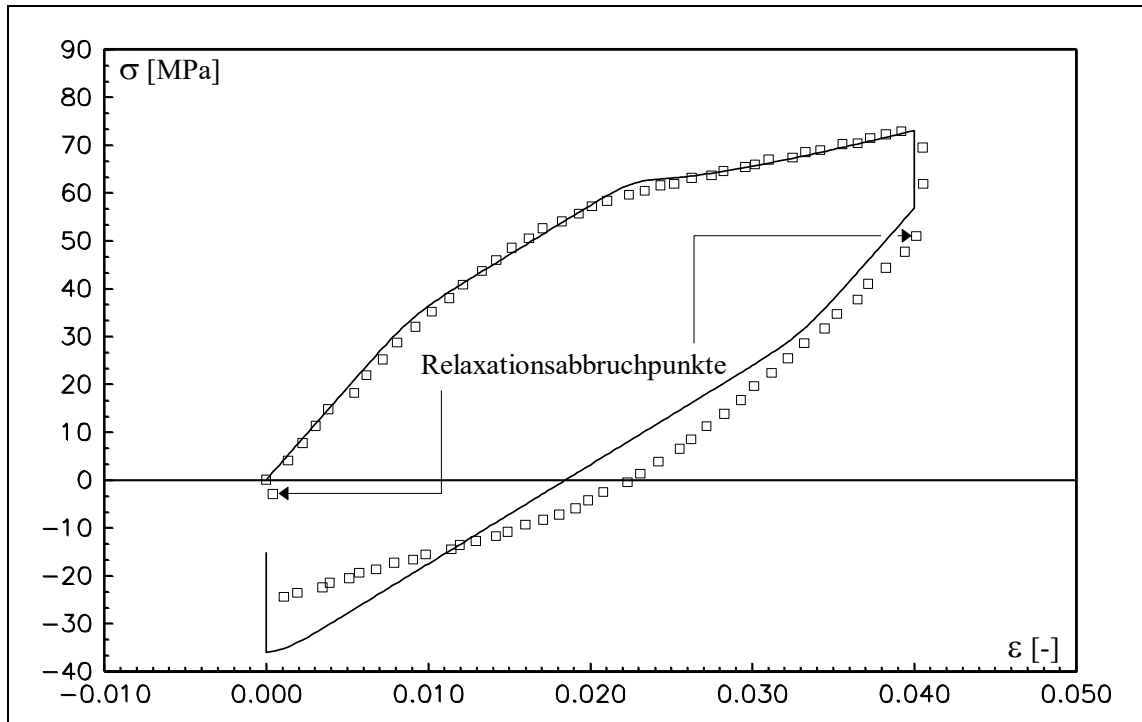


Abbildung 4.2.2.9: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

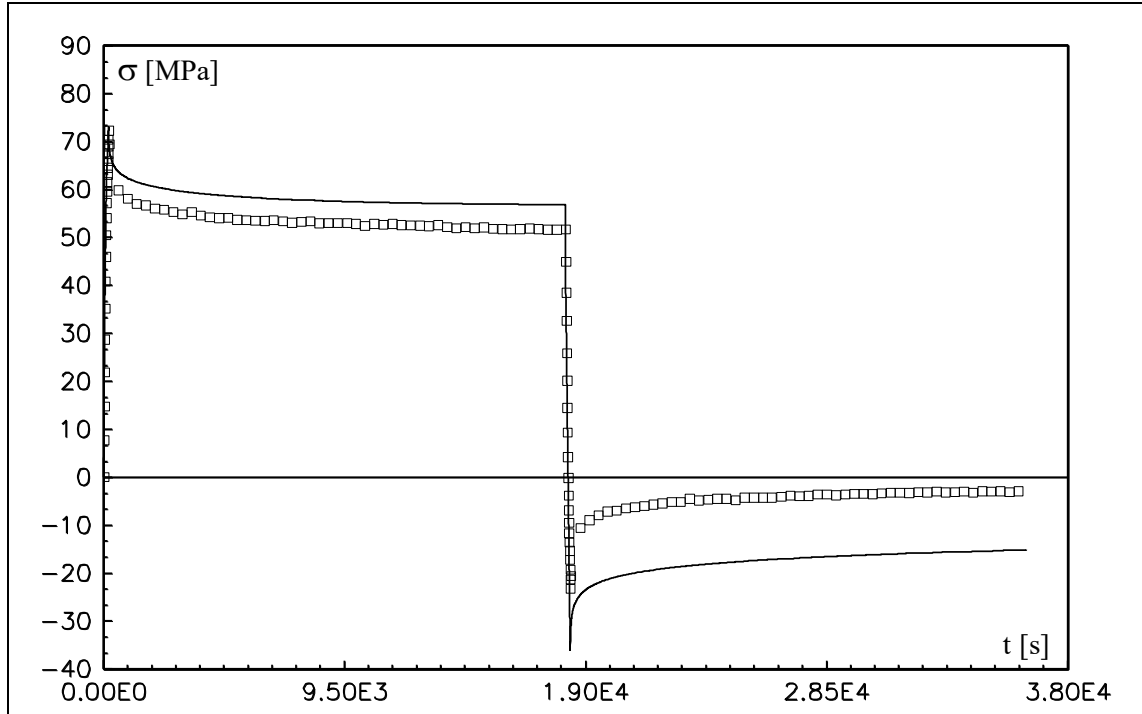


Abbildung 4.2.2.10: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

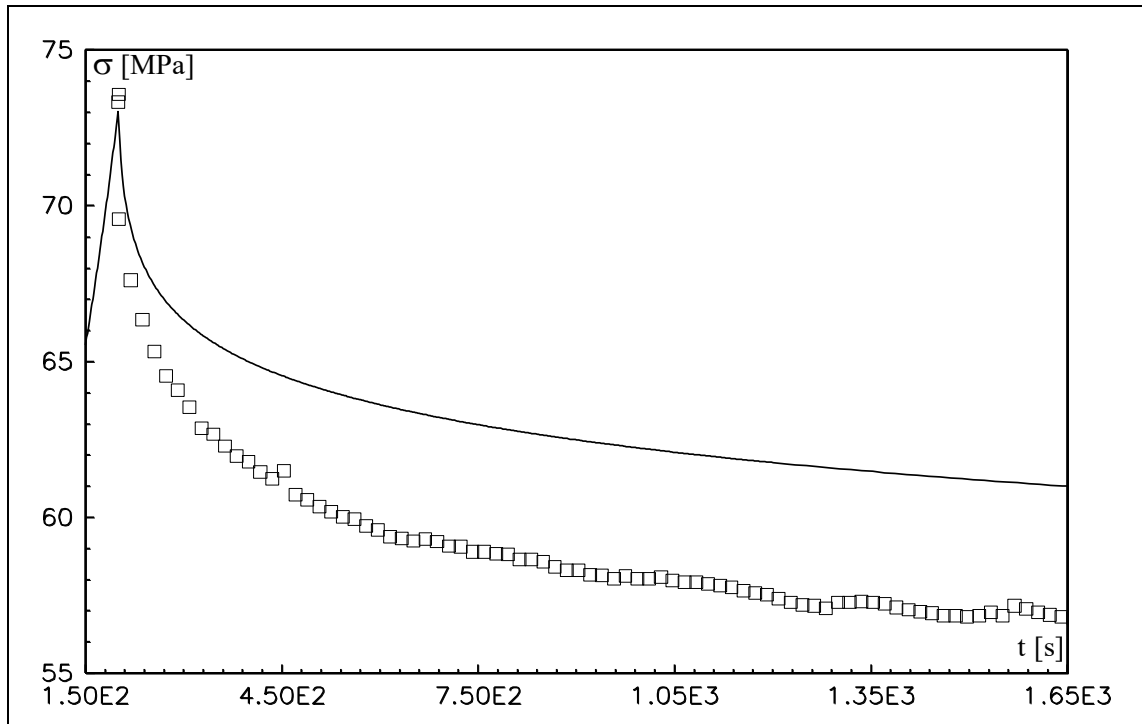


Abbildung 4.2.2.11: „Zoom“ der ersten 1500s Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

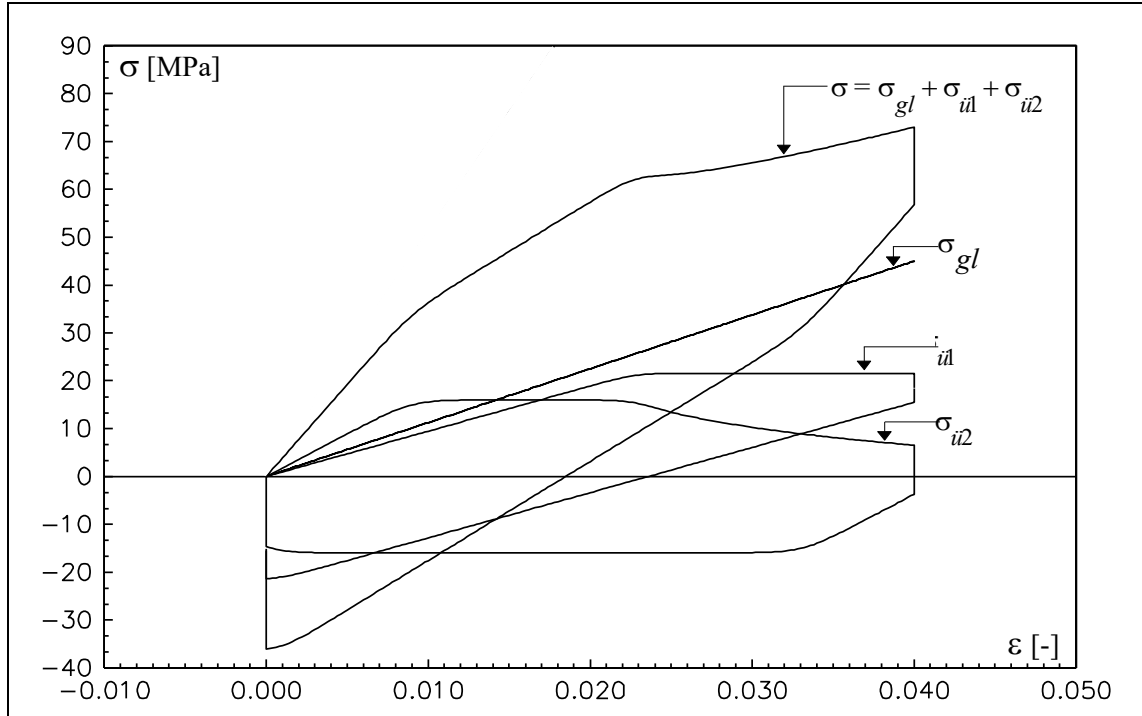


Abbildung 4.2.2.12: Gleichgewichts und Überspannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.9.6.

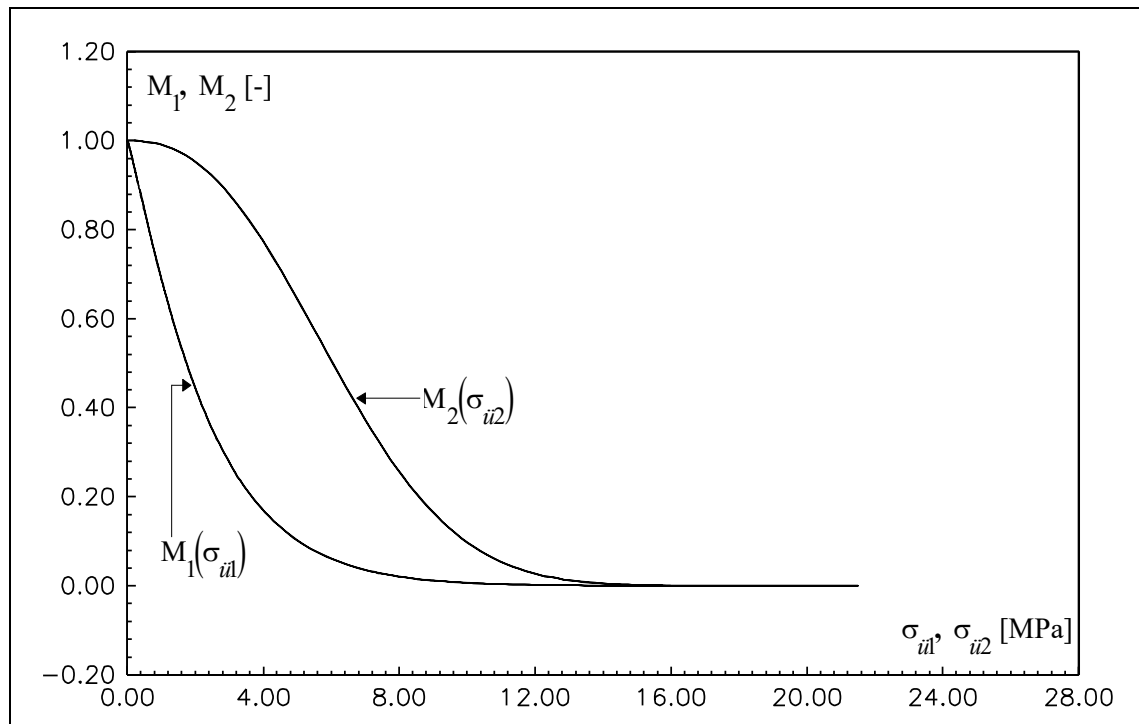


Abbildung 4.2.2.13: Verlauf der Materialfunktionen über der jeweilige Überspannung.

Der Deutlichkeit halber wird in Abb. 4.2.2.14 der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 ohne experimentelle Daten gezeigt. Dabei kann ab ca. Dehnung 0,036 ein höheres Spannungsniveau (Spannungszunahme) im Vergleich zur Kennlinie des Zug-Prozesses beobachtet werden, die hauptsächlich durch den nichtmonotonen Verlauf der 2. Überspannung erzeugt wird. Das Materialmodell zeigt keine zyklische Spannungsrelaxation. In Abb. 4.2.2.15 können die gerechneten Kennlinien und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte verglichen werden. Hierbei ist der Entfestigungseffekt deutlich zu beobachten. Darüber hinaus kann man erkennen, daß die experimentell ermittelte stationäre zyklische Hysterese, hauptsächlich bedingt durch die zyklische Relaxation des Materials, nicht angemessen wiedergegeben wird.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.6.1 ist in Abb. 4.2.2.16 dargestellt. Eine quantitativ gute Übereinstimmung der gerechneten Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Zug-Prozesses bis zur ersten Haltezeit kann beobachtet werden. Danach treten Differenzen auf, insbesondere ab ca. 0,030 Dehnung erreicht die gerechnete Kennlinie ein niedrigeres Spannungsniveau. Nach der zweiten Haltezeit erkennt man wieder eine bessere Übereinstimmung der Kennlinien. Dies wird auch durch den in Abb. 4.2.2.17 dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannungsantwort deutlich. Darüber hinaus kann man in Abb. 4.2.2.16 erkennen, daß - bedingt durch die schlechtere Wiedergabe des Entlastungsverlaufs der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie bis zur zweiten Haltezeit - die Verbindungslinie der gerechneten Relaxationsabbruchpunkte eine Hysterese aufweist, die breiter ist als die der experimentellen Daten.

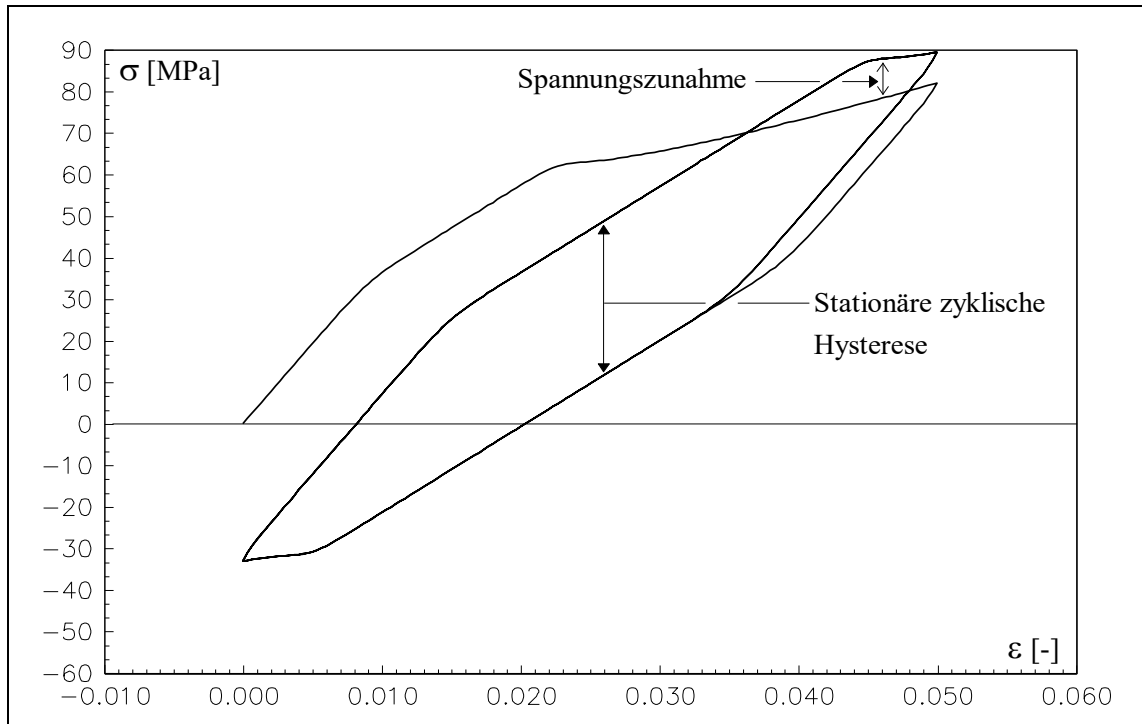


Abbildung 4.2.2.14: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5.

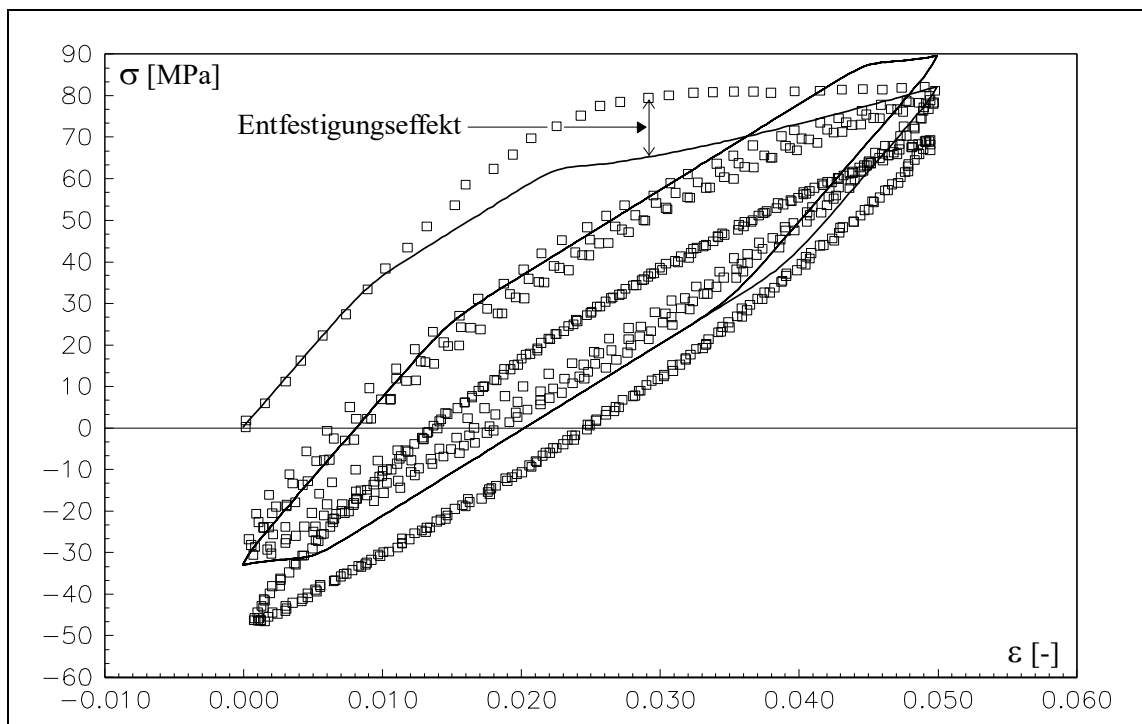


Abbildung 4.2.2.15: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

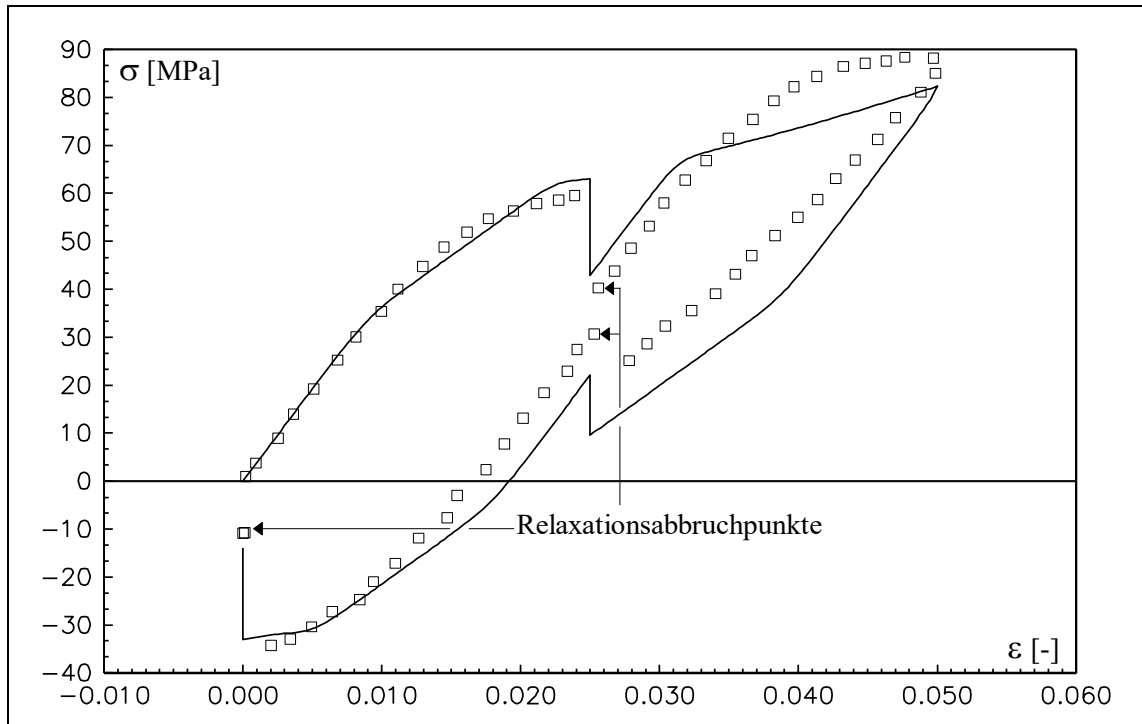


Abbildung 4.2.2.16: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.6.1 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

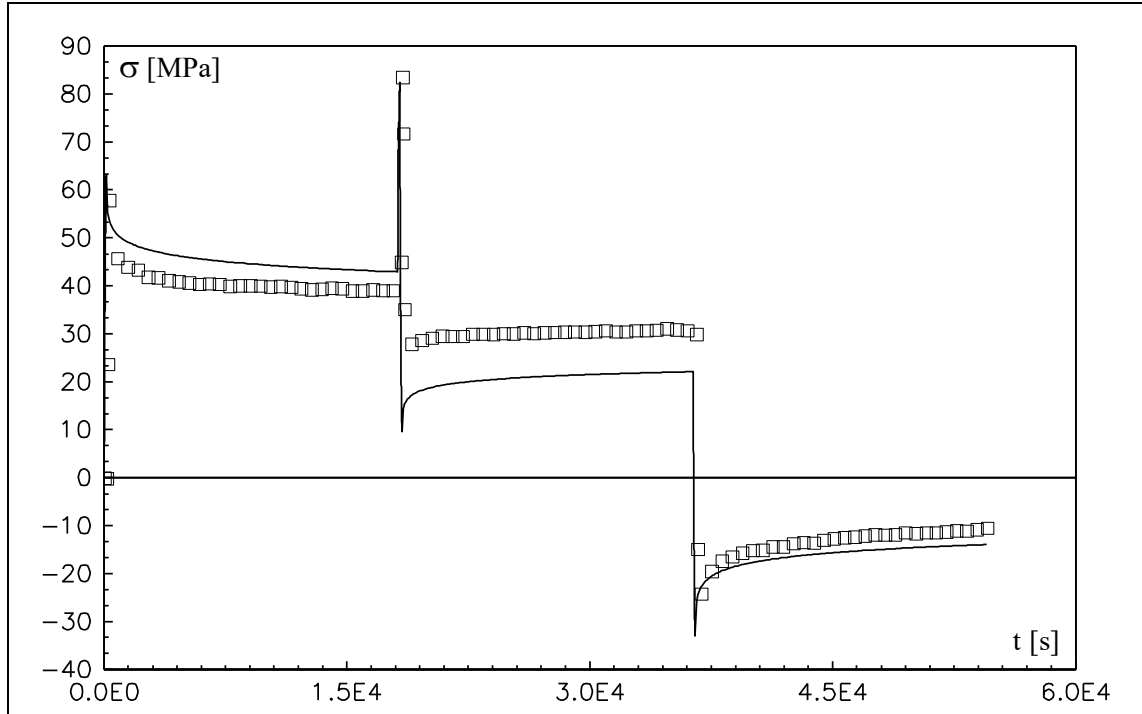


Abbildung 4.2.2.17: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.6.1 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

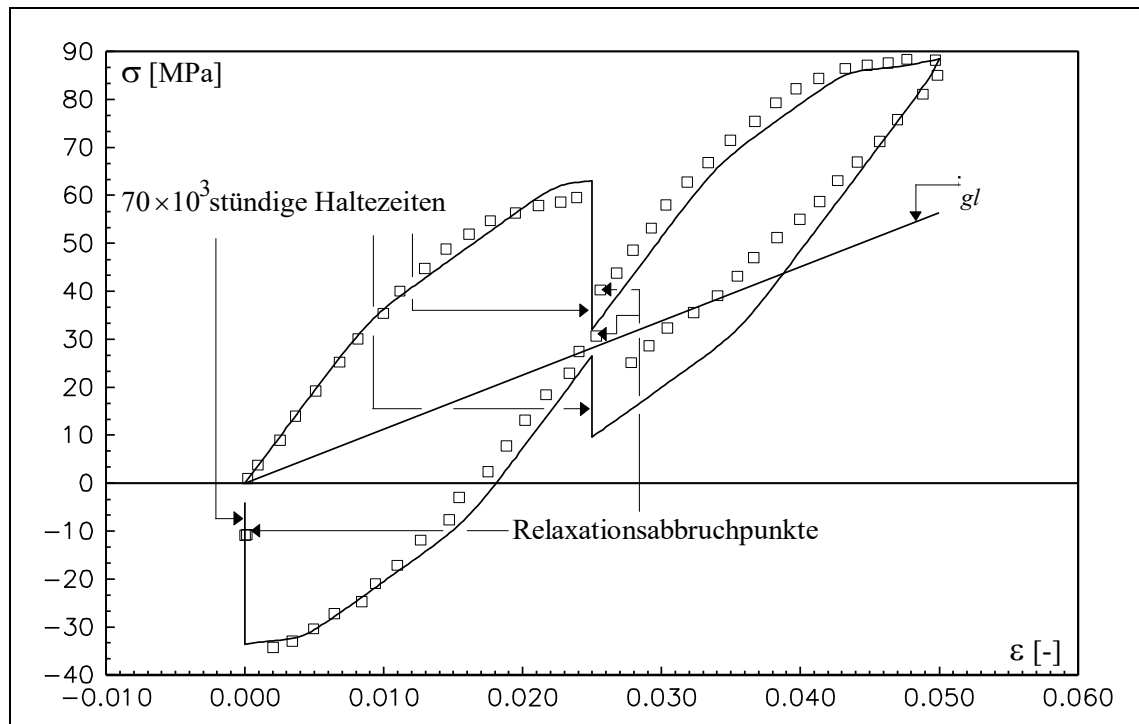


Abbildung 4.2.2.18 Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.6.1 mit Haltezeiten der Größenordnung der größten Relaxationszeit und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des dazugehörigen Versuchs.

Zu einem genaueren Verständnis des Modells wurde der Prozeß des Versuchs Nr.6.1 mit Haltezeiten der Größenordnung der größeren Relaxationszeit ($z_1 \cong 70 \times 10^3$ Std.) gerechnet.

Abb. 4.2.2.18 zeigt die dazugehörige Spannungs-Dehnungs-Kennlinie und die Gleichgewichtsspannung. Bemerkenswert ist, daß in diesem Fall der gesamte Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie besser wiedergegeben wird. Hierbei relaxiert die gerechnete Spannung bei der ersten Haltezeit bis auf ein niedrigeres Spannungsniveau. Die längere Haltezeit ermöglicht eine „Erholung“ des Materials, welche einen adäquateren Aufbau der Überspannungen danach erlaubt. Das heißt, durch das Erreichen einer dem Gleichgewichtszustand näheren Spannung kann danach eine größere Überspannung aufgebaut werden.

Die in Abbildungen 4.2.2.19 bis 4.2.2.21 wiedergegebenen numerischen Simulationen der Prozesse der hintereinander geführten Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9 ermöglichen eine Veranschaulichung des Erholungseffekts bei Prozessen mit Mitteldehnung null. In Abb. 4.2.2.19 wird die numerische Simulation ohne die experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte gezeigt. Hierbei erkennt man, daß die 10stündige Haltezeit keinen erkennbaren Erholungseffekt bewirkt. Abb. 4.2.2.20 erlaubt einen direkten Vergleich der Simulation mit den experimentellen Daten. Dabei wird der gerechnete Relaxationsabbruchpunkt, bedingt durch die quantitativ unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Simulation und des Versuchs im Druck-Bereich, weniger angemessen wiedergegeben.

Eine *Test-Simulation* der Prozesse der Versuche Nr. 15.8 und Nr.15.9 mit einer Haltezeit in der Größenordnung von z_1 wird in Abb. 4.2.2.21 veranschaulicht. Ein deutlich höheres Spannungsniveau nach der Haltezeit kann erkannt werden. In diesem Fall ermöglicht die längere Haltezeit einen größeren Abfall bzw. einen darauffolgenden größeren Aufbau der Überspannungen. Das heißt, die längere Haltezeit erlaubt eine „*Simulation*“ des Erholungseffektes.

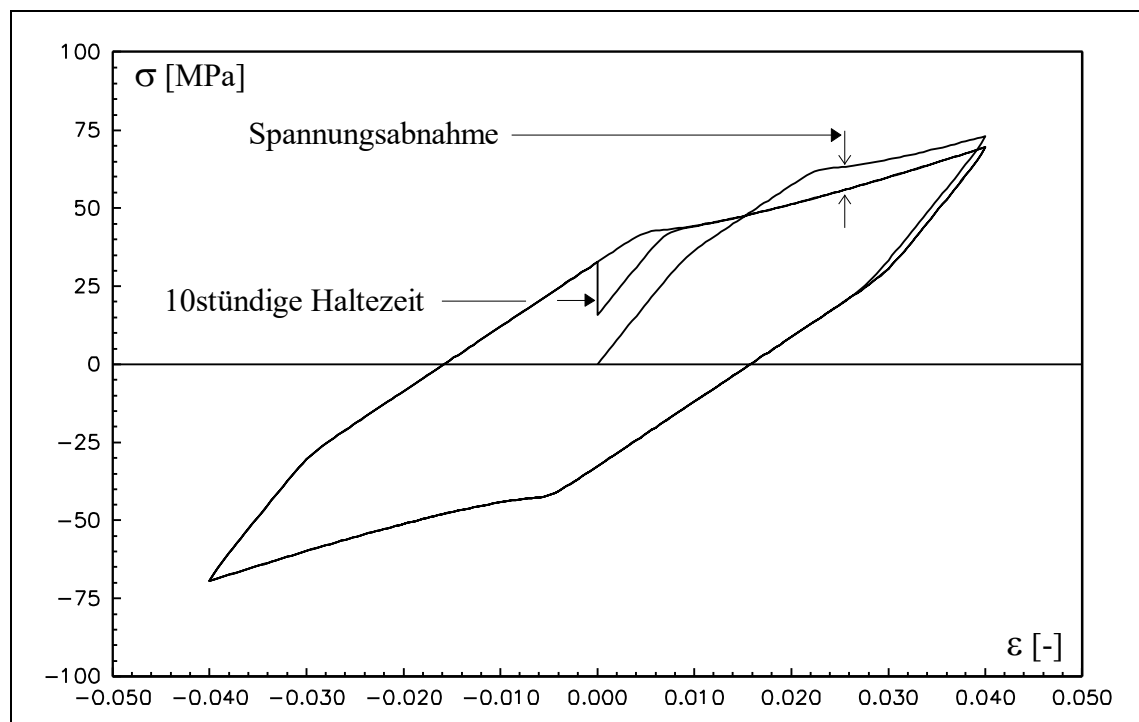


Abbildung 4.2.2.19: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9. Der Erholungseffekt ist nicht erkennbar.

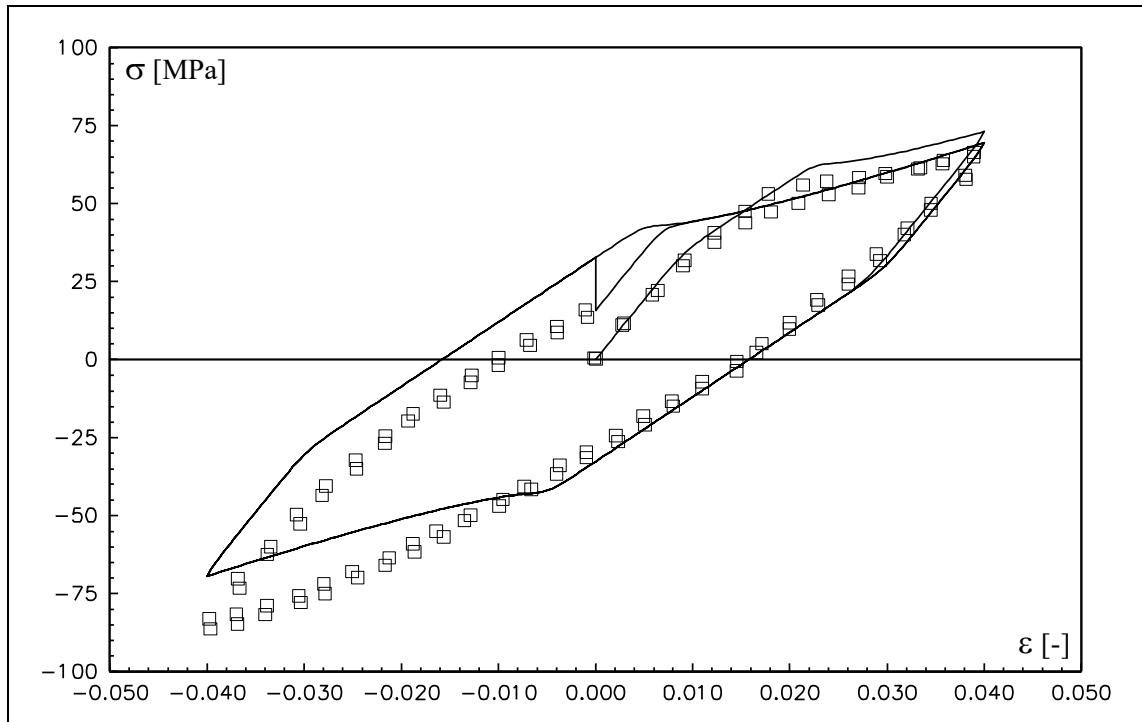


Abbildung 4.2.2.20: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und 15.9 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

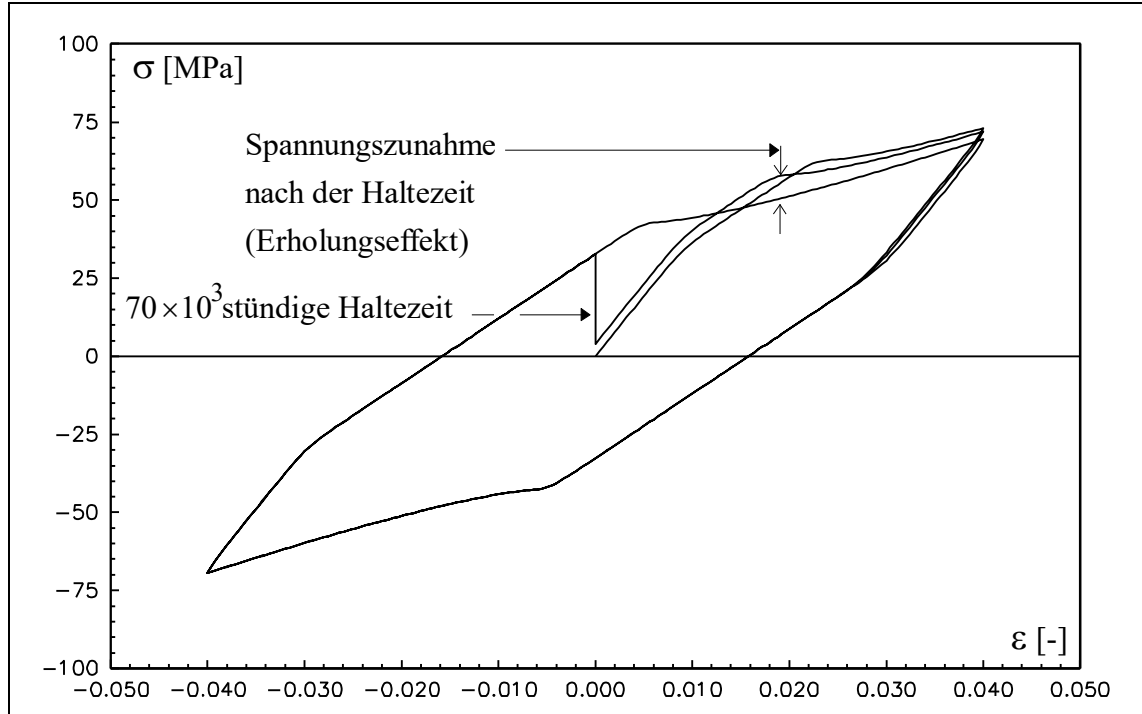


Abbildung 4.2.2.21: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und 15.9 mit einer Haltezeit der Größenordnung in der größten Relaxationszeit.

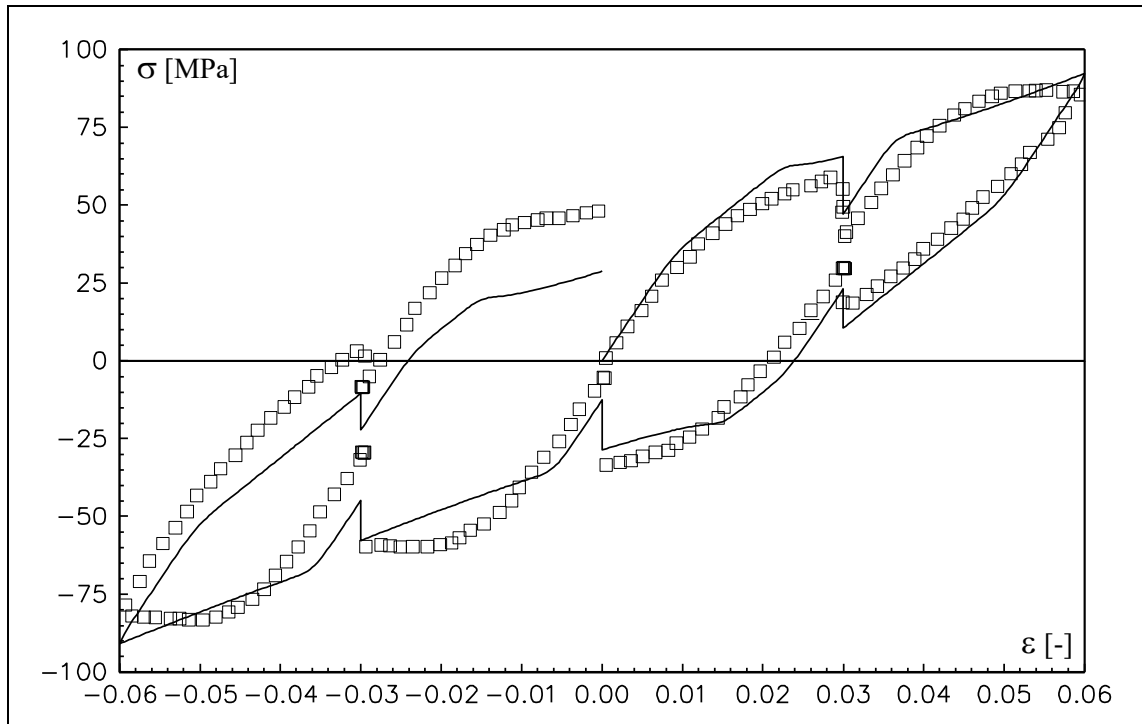


Abbildung 4.2.2.22: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.15.14 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

Abbildung 4.2.2.22 zeigt die gerechnete Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr. 15.14 und einige dazugehörige experimentelle Punkte. Eine zufriedenstellende Übereinstimmung kann im Zug- und Entlastungsbereich beobachtet werden.

4.3 Ein weiterer Satz der Überspannungsparameter für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität

Zerlegung der Spannung			
σ	=	Gleichgewichtsspannung g	Überspannung σ_{ii}
		σ_{gl}	
		Evolutionsgleichung der Gleichgewichtsspannung $\dot{\sigma}_{gl}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t)$	Zerlegung der Überspannung $\sigma_{ii} = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$
			Evolutionsgleichungen der Überspannungen
			$\dot{\sigma}_{i1}(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i1})} \sigma_{i1}$
			$\dot{\sigma}_{i2}(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{i1}(t) - \left[\frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{i1})} + \frac{1}{z_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{i2})} \right] \sigma_{i2}$
			Materialfunktionen $\mathbf{M}_1(\sigma_{i1}) = e^{-\left(\frac{\sigma_{i1}}{s_1}\right)^n}$ und $\mathbf{M}_2(\sigma_{i2}) = e^{-\left(\frac{\sigma_{i2}}{s_2}\right)^m}$

Tabelle 4.3.1: Das Materialmodell der nichtlinearen Viskoelastizität.

	Gleichgewichtsparameter	Überspannungsparameter							
	\mathbf{E} GPa	\mathbf{E}_1 GPa	\mathbf{E}_2 GPa	z_1 Gs	s_1 MPa	n -	z_2 Ms	s_2 MPa	m -
	1,125	1,290	1,438	0,125	5,676	1,739	0,153	1,534	1,125

Tabelle 4.3.2: Ein Parametersatz für das Modell der nichtlinearen Viskoelastizität.

4.3.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten

Für das Materialmodell der nichtlinearen Viskoelastizität wurde ein weiterer Satz der Überspannungsparameter identifiziert. Der Gleichgewichtsparameter wurde nicht modifiziert. Die weiteren Materialparameterwerte sind in Tabelle 4.3.2 wiedergegeben. In diesem Fall wurden zur Identifikation der Materialparameter die experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Daten der Zug-Prozesse ohne Entlastung der Versuche Nr.9.1, 9.2, 9.4 und Nr.9.5, einige experimentelle Spannungs-Dehnungs-Punkte der Entlastung des Versuchs Nr. 9.3 und die experimentellen Spannungs-Dehnungs-Daten des Versuchs Nr.9.6 verwendet (s. dazu Abb. 4.3.1.1).

Die numerischen Ergebnisse der Simulation dieser Prozesse und einige dazugehörige experimentelle Spannungs-Dehnungs-Punkte sind in Abb. 4.3.1.1 wiedergegeben. Eine adäquate Übereinstimmung des Verlaufs der gerechneten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien mit den experimentellen Daten kann mit der in Abb. 4.3.1.3 dargestellten Vergrößerung des Zug-Bereichs genauer betrachtet werden. Ein Vergleich der gerechneten und der experimentellen Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Entlastungs-Prozesse läßt deutliche Unterschiede erkennen (s. dazu Abb. 4.3.1.1). Eine bessere Übereinstimmung der Entlastungs-Kennlinien ohne Verlust der Übereinstimmungsqualität der Zug-Kennlinien ist nicht gelungen.

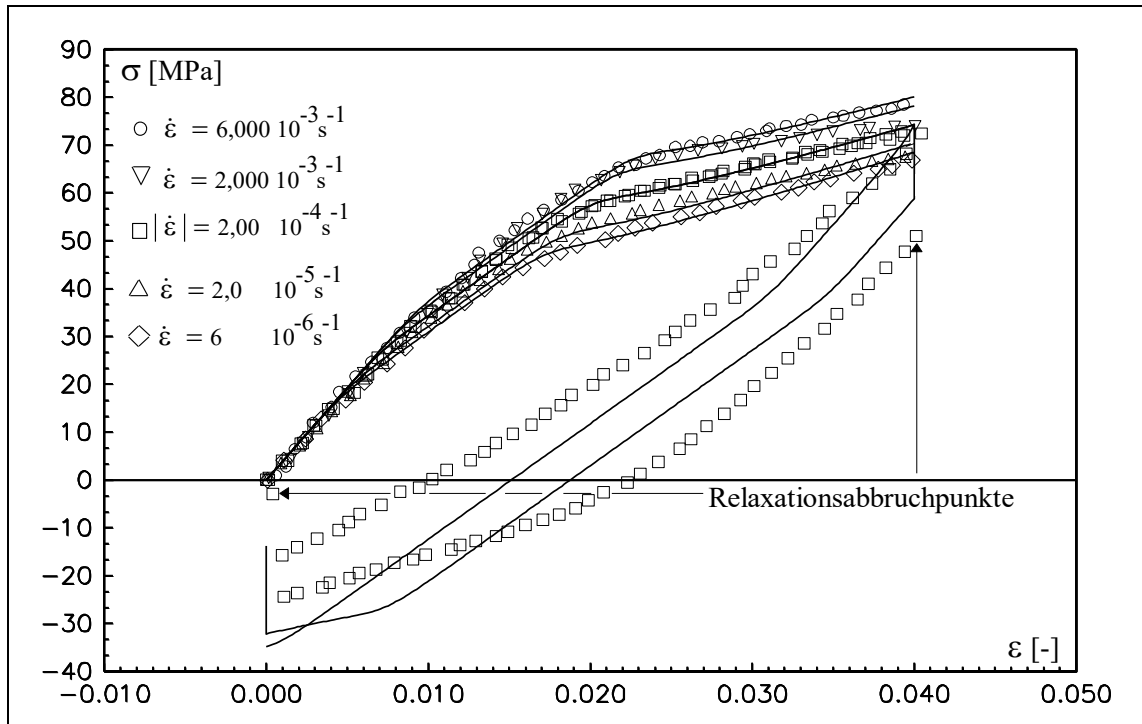


Abbildung 4.3.1.1: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1, 9.2, 9.4 und 9.5 (ohne Entlastung), des Versuchs Nr.9.3 mit Entlastung sowie des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentelle Daten dieser Versuche.

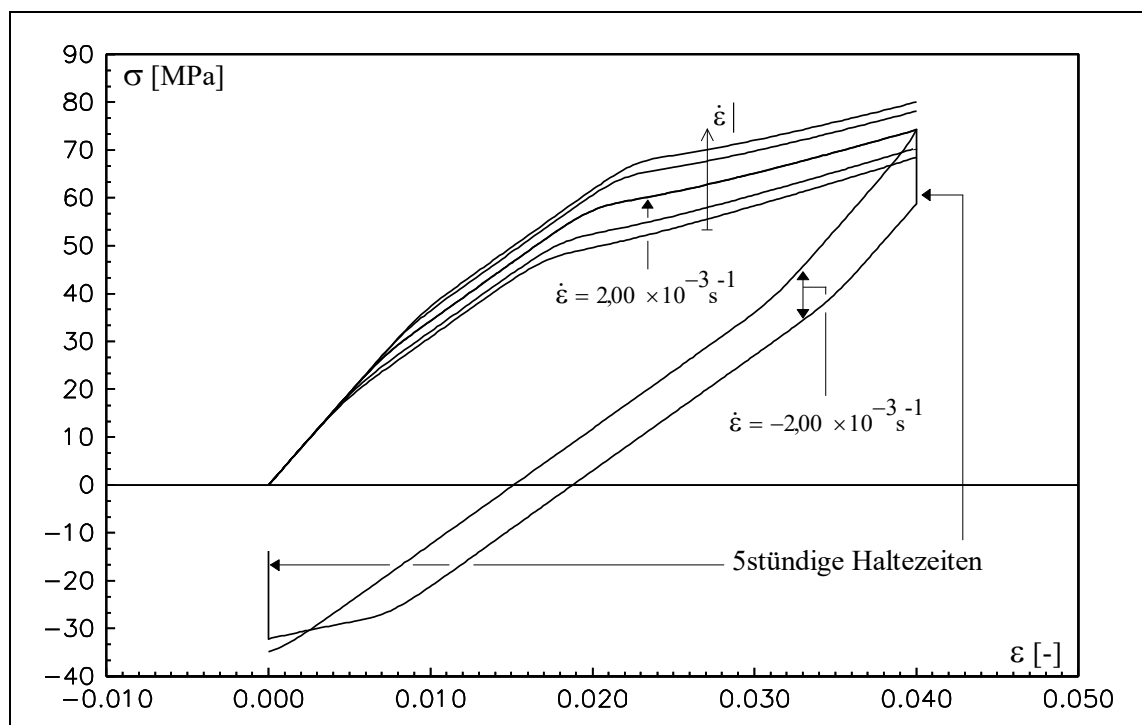


Abbildung 4.3.1.2: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1, 9.2, 9.4 und 9.5 (ohne Entlastung), des Versuchs Nr.9.3 mit Entlastung sowie des Versuchs Nr.9.6.

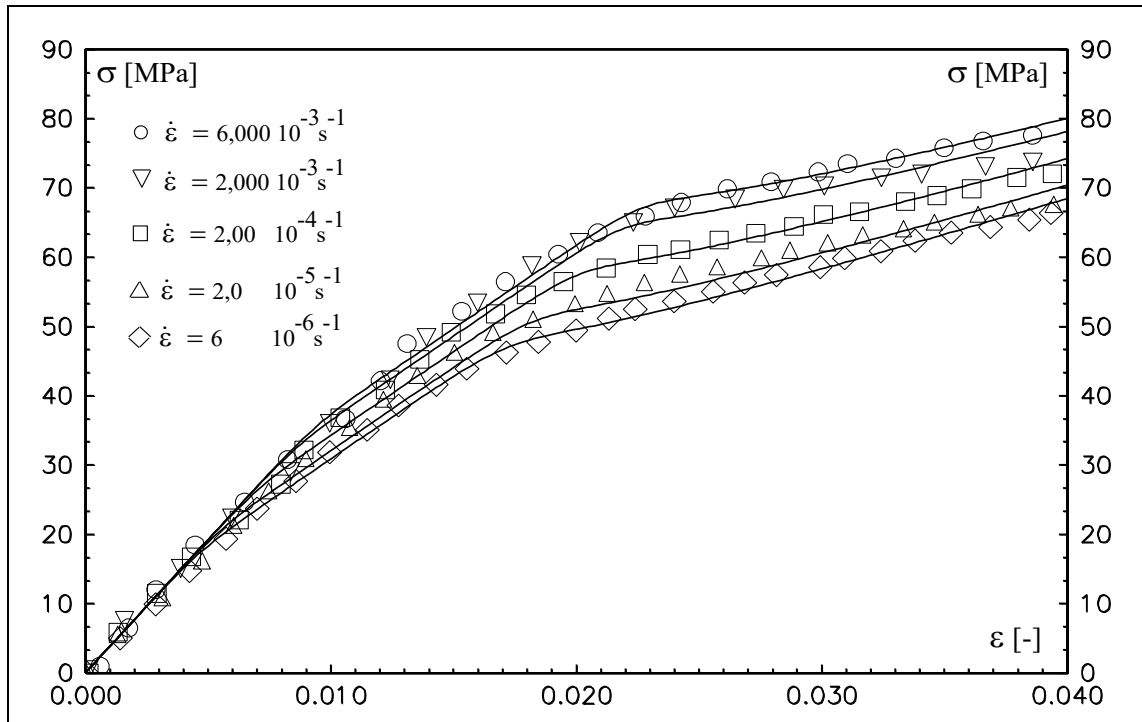


Abbildung 4.3.1.3: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis 9.5 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte.

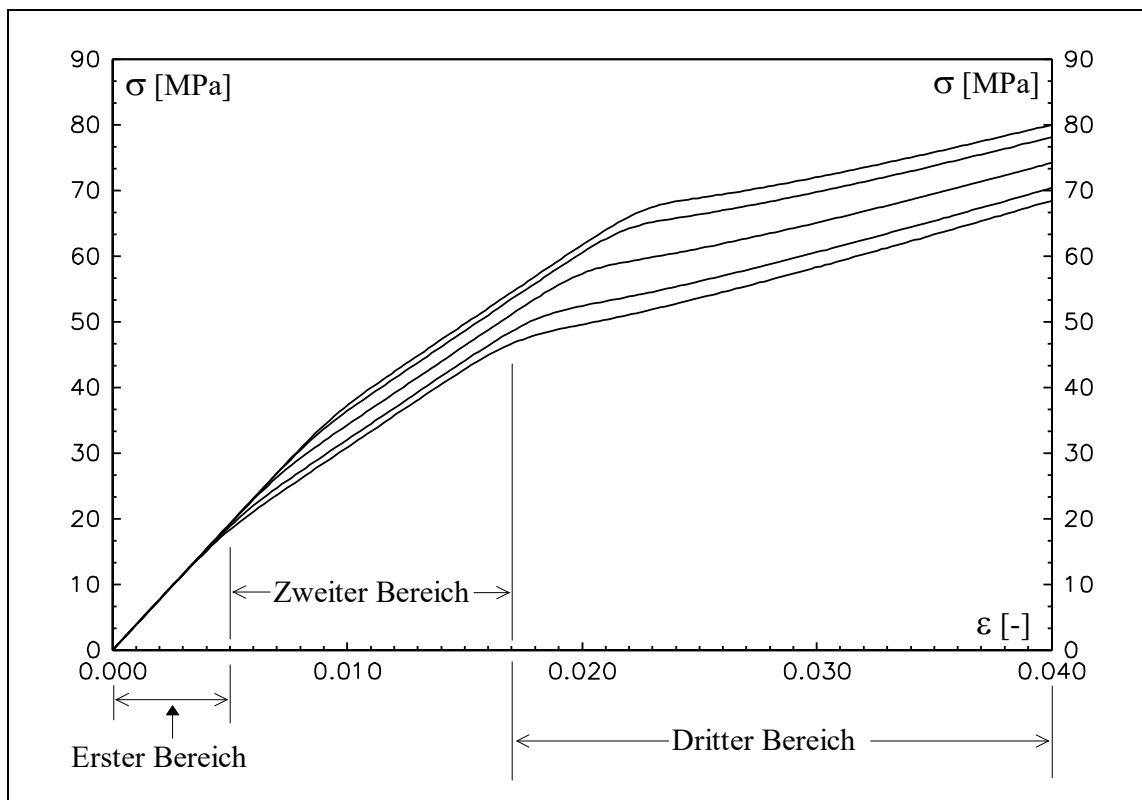


Abbildung 4.3.1.4: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (Versuche Nr.9.1 bis 9.5).

Abbildungen 4.3.1.2 und 4.3.1.4 dienen einer deutlicheren Betrachtung der gerechneten Spannungsantworten der zur Identifikation zugrundegelegten Prozesse. Zwei deutliche Krümmungsänderungen der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien im Zug-Bereich und drei Dehnungsbereiche mit unterschiedlich ausgeprägter Geschwindigkeitsabhängigkeit sind mit diesem Parametersatz ebenfalls erkennbar.

Eine Zunahme des dritten Dehnungsbereichs bzw. eine Verringerung der ersten zwei Dehnungsbereiche können als quantitative Unterschiede zu den Kennlinien des ersten Parametersatzes beobachtet werden. Auch mit diesem Parametersatz kann mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit, eine in Richtung größerer Dehnungen verschobene Krümmungsänderung der Kennlinien dargestellt werden.

4.3.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens

Abbildung 4.3.2.5 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der gerechneten Modellantwort des zyklischen Prozesses mit Haltezeiten (Versuch Nr.7). Dabei ist mit diesem Parametersatz eine Spannungsabnahme kaum zu erkennen (vgl. dazu Abb. 4.2.2.1). Eine angemessene Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien ist in Abb. 4.3.2.6 sichtbar. Im Zug- und Entlastungs-Bereich werden die maximalen Spannungsniveaus und die Relaxationsabbruchpunkte angemessen wiedergegeben. Insbesondere die unterschiedliche Relaxation der Spannungen bei ein und derselben Dehnung (wie z. Beispiel bei 0,030 und -0,020) werden vom Materialmodell mit den in Tabelle 4.3.2 identifizierten Parametern adäquat vorhergesagt.

In Abb. 4.3.2.7 kann eine angemessene Übereinstimmung der gerechneten Spannungs-Zeit-Verläufe während der Haltezeiten mit den experimentellen Daten des 2. Teils des Versuchs Nr. 7 festgestellt werden. Im Druckbereich sind die Verläufe der numerischen Simulation in Richtung größerer Spannungen verschoben.

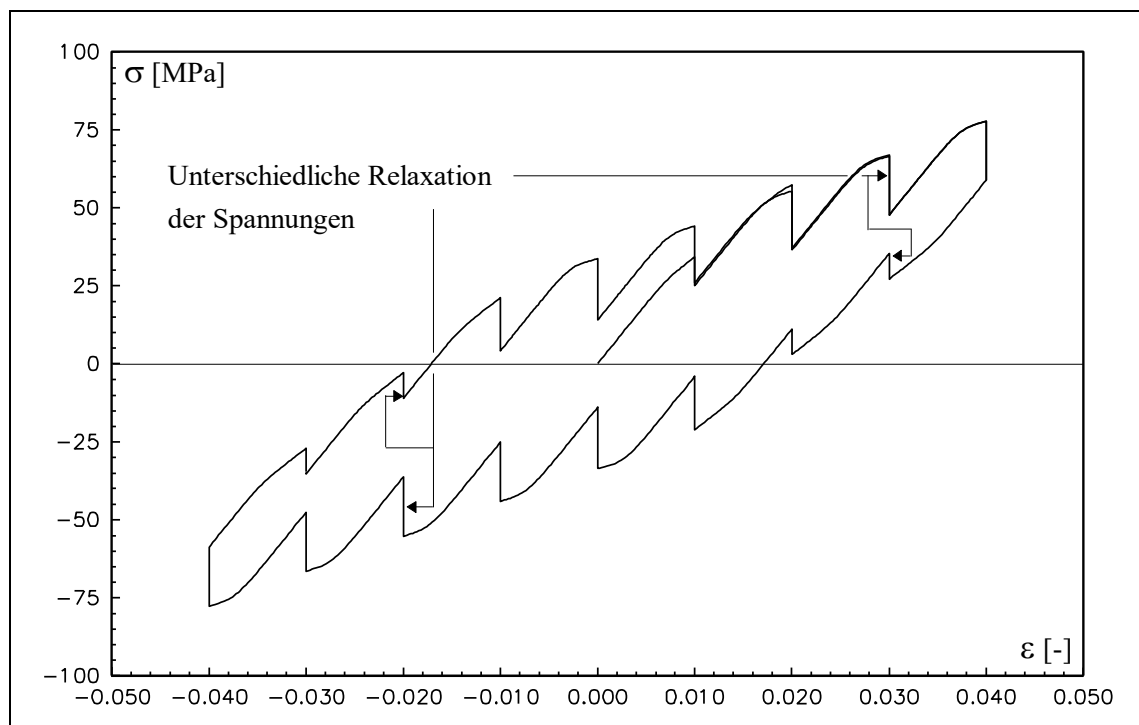


Abbildung 4.3.2.5: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7.

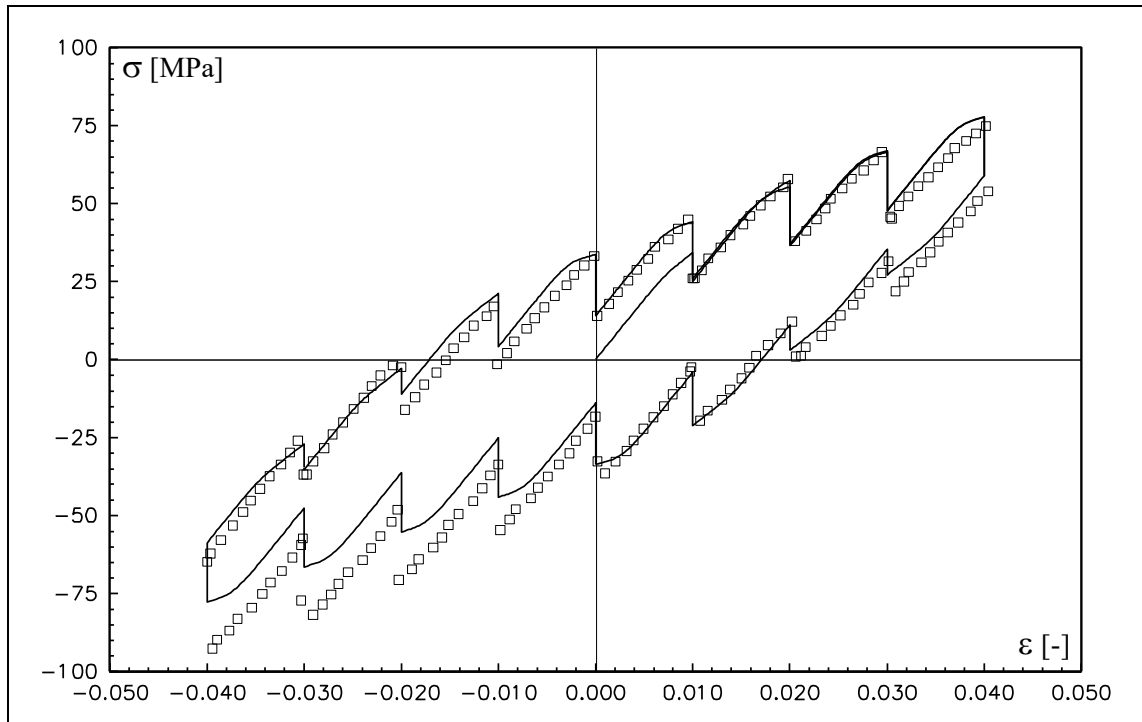


Abbildung 4.3.2.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des 2. Teils dieses Versuchs.

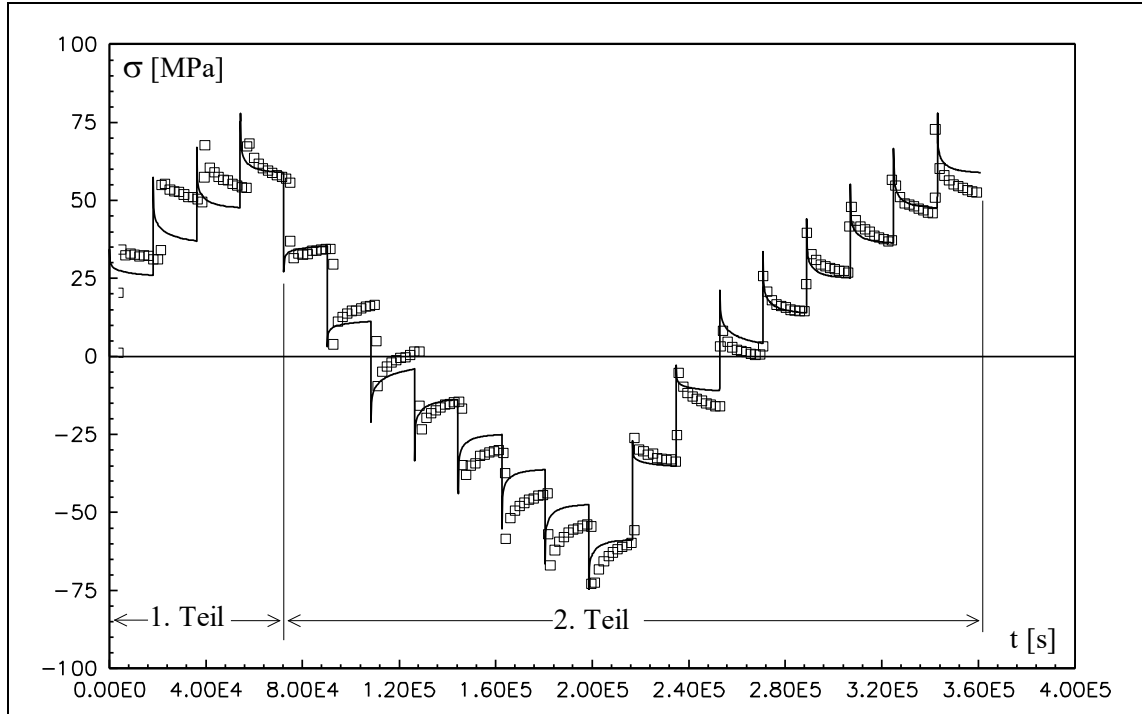


Abbildung 4.3.2.7: Spannungs-Zeit-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7 und einige dazugehörige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit Punkte.

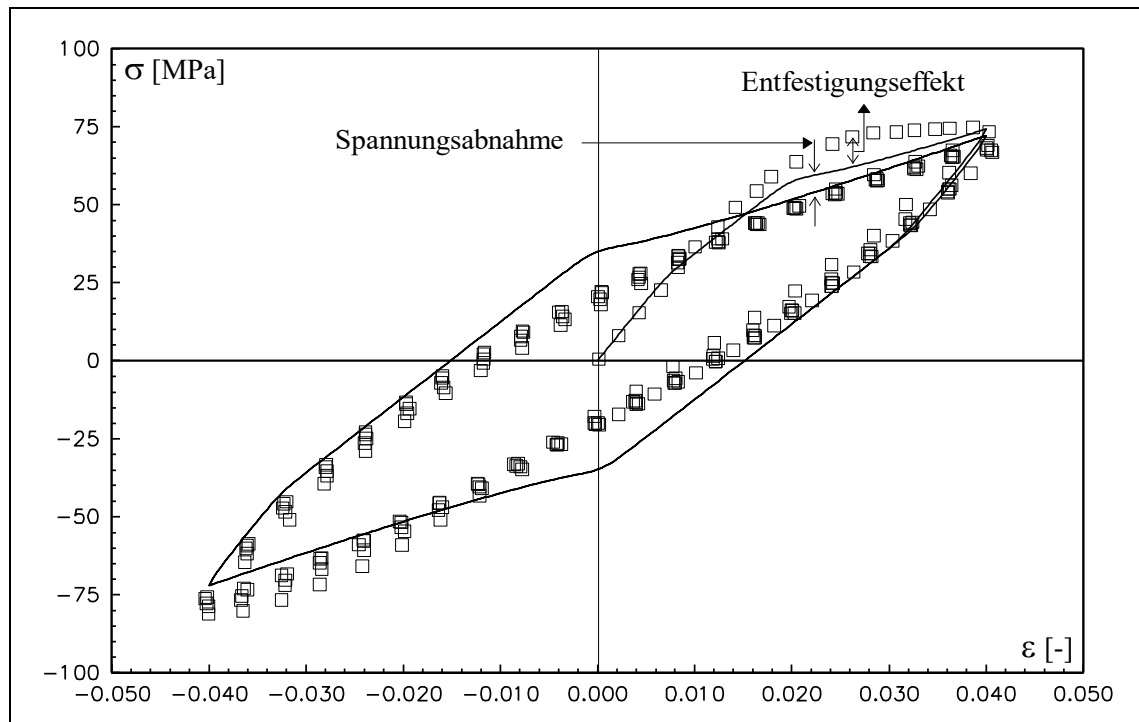


Abbildung 4.3.2.8: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

Die numerische Simulation des zyklischen Verhaltens und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des Versuchs Nr.1 werden in Abb. 4.3.2.8 gezeigt. Dabei ist der einmalige Entfestigungseffekt und die Spannungsabnahme ab ca. 0,015 Dehnung zu erkennen. Darüber hinaus kann eine angemessene Wiedergabe der zyklischen Hysterese beobachtet werden.

In Abbildung 4.3.2.9 wird die gerechnete Spannungsantwort der Zug- und Entlastungsprozesse mit anschließender Haltezeit für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten gezeigt. In Abbildung 4.3.2.10 kann man erkennen, daß das Materialmodell mit den in Tabelle 4.3.2 identifizierten Materialparametern in der Lage ist, die experimentell ermittelte geschwindigkeitsunabhängige Entlastungsantwort qualitativ und quantitativ richtig vorherzusagen. Dagegen wird ein weniger angemessener Spannungs-Dehnungs-Verlauf bei der Entlastung (ab 0,020 Dehnung) dargestellt. Dies verursacht unter anderem eine quantitativ weniger gute Wiedergabe der Relaxationsabbruchpunkte nach der Entlastung bei Dehnung null.

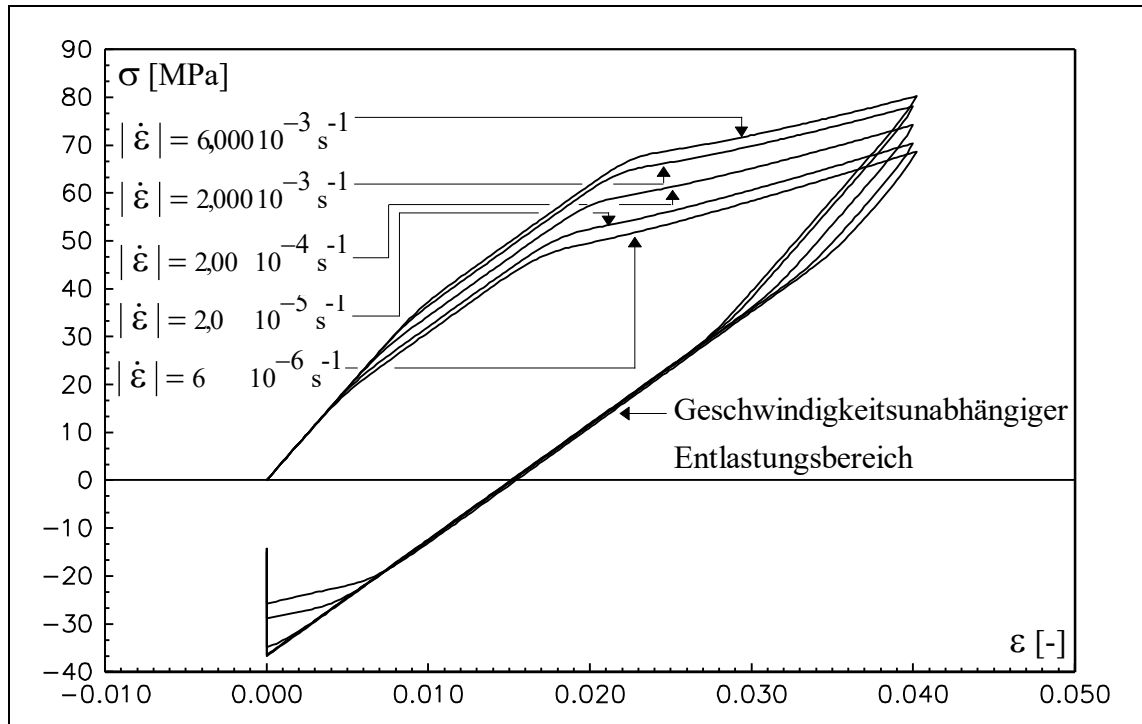


Abbildung 4.3.2.9: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5.

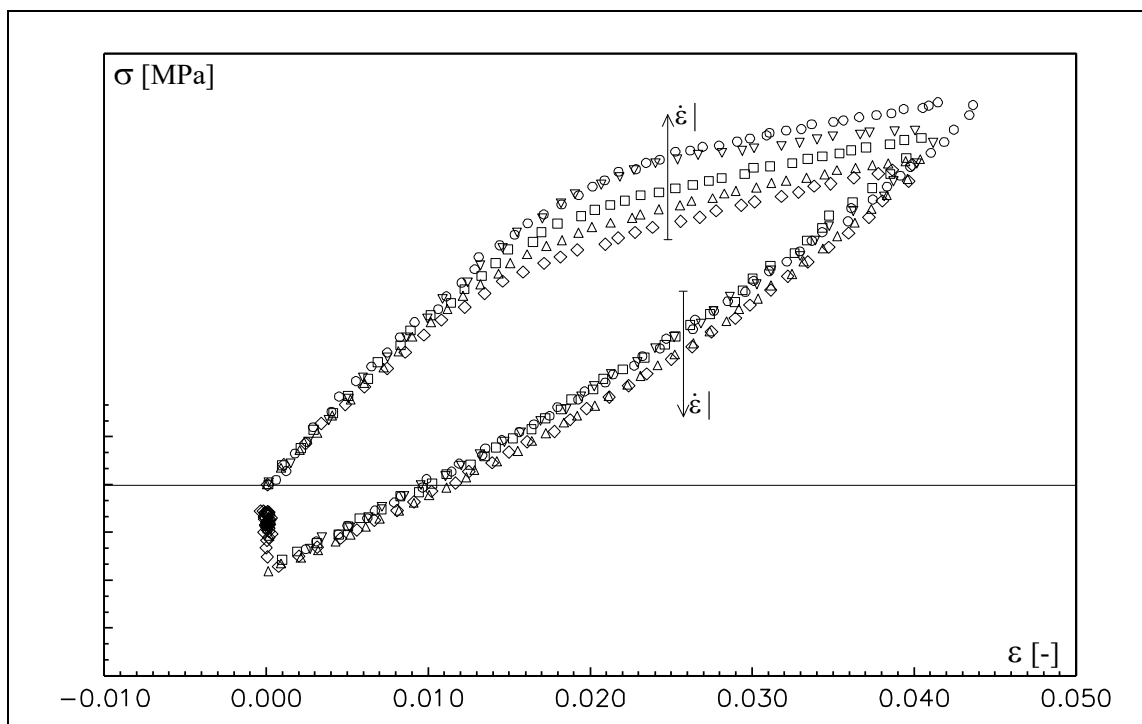


Abbildung 4.3.2.10: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

Der gerechnete Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr.9.6 wird der Übersichtlichkeit halber noch einmal in Abb. 4.3.2.11 wiedergegeben. Diese Spannungs-Dehnungs-Simulation ist offensichtlich keine Vorhersage des Materialmodells. Erwähnenswert ist, daß auch in diesem Fall der Relaxationsabbruchpunkt nach der Entlastung bei Dehnung 0,000, bedingt durch den weniger adäquaten Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Entlastung quantitativ weniger angemessen wiedergegeben wird.

In Abb. 4.3.2.12 wird der zeitliche Verlauf der Relaxations-Kennlinien deutlich gemacht. Bei der ersten Haltezeit ist die gerechnete Spannungs-Zeit-Kennlinie im Vergleich zur gemessenen Kennlinie in Richtung größerer Spannungen verschoben. Die in Abb. 4.3.2.13 dargestellten ersten 1500s der Haltezeit des Versuchs Nr. 9.6 zeigen, daß die experimentell ermittelte Anfangssteigung der Relaxationskennlinie deutlich kleiner ist als die der numerischen Simulation [62]. Dies ist die Hauptursache der Verschiebung der gerechneten Kennlinie in Richtung größerer Spannungen.

In Abb. 4.3.2.14 wird der Verlauf der einzelnen Spannungen für den Prozeß des Versuchs Nr.9.6 über der Dehnung wiedergegeben. Hierbei ist die nicht monotone Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der 2. Überspannung deutlich zu erkennen. Sie ist, wie bei dem ersten Parametersatz, für die erste Krümmungsänderung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie verantwortlich und trägt auch zur zweiten Krümmungsänderung bei. In diesem Fall bauen sich beide Überspannungen mit ungefähr derselben Geschwindigkeit auf, und die erste Überspannung erreicht ein deutlich höheres Spannungsniveau. Abbildung 4.3.2.15 zeigt die unterschiedlichen Verläufe der Materialfunktionen.

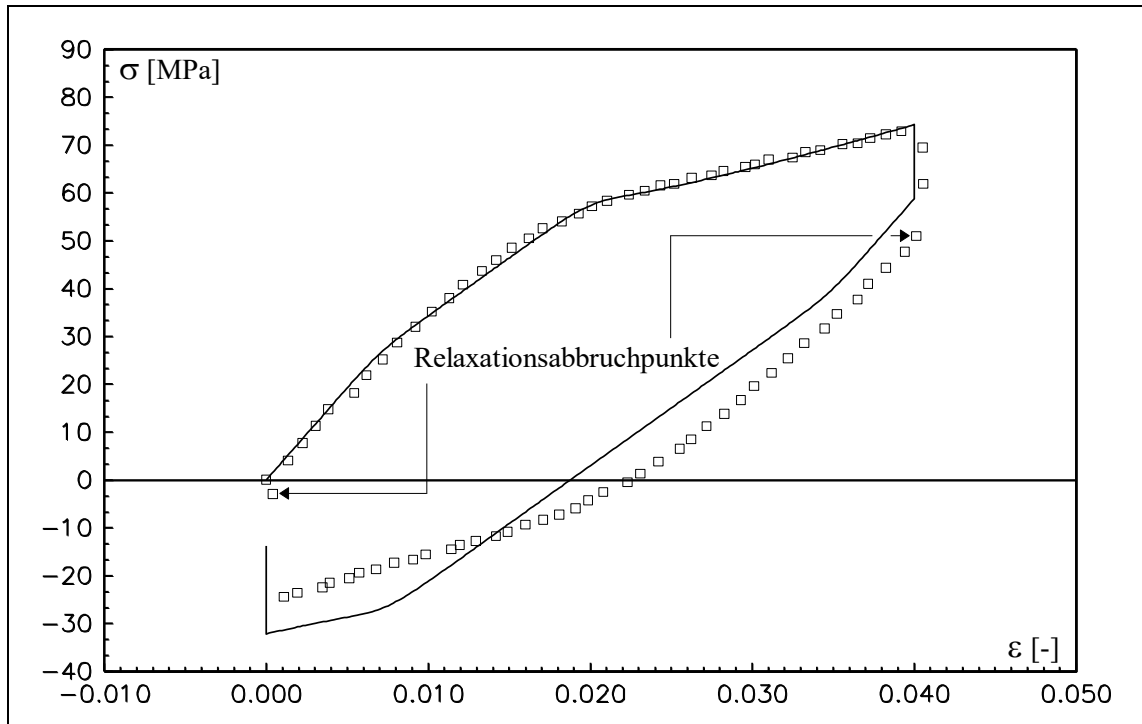


Abbildung 4.3.2.11: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation (keine Vorhersage) des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

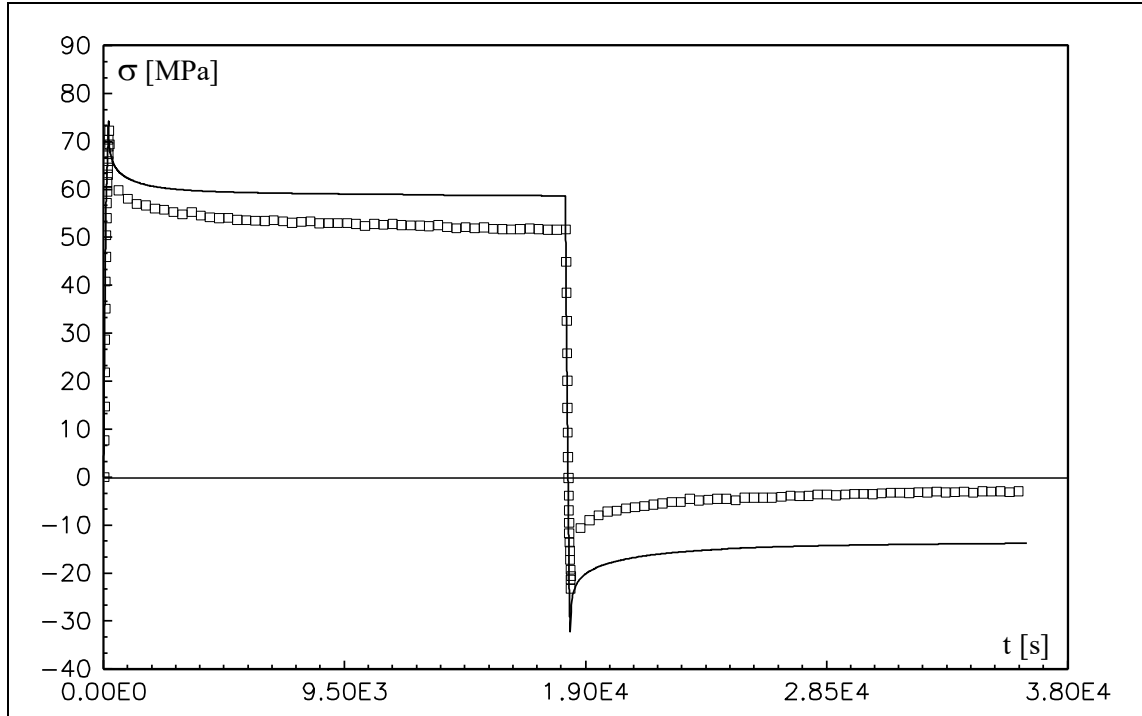


Abbildung 4.3.2.12: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Prozesses des Versuchs Nr.9.7 (Vorhersage) und einige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

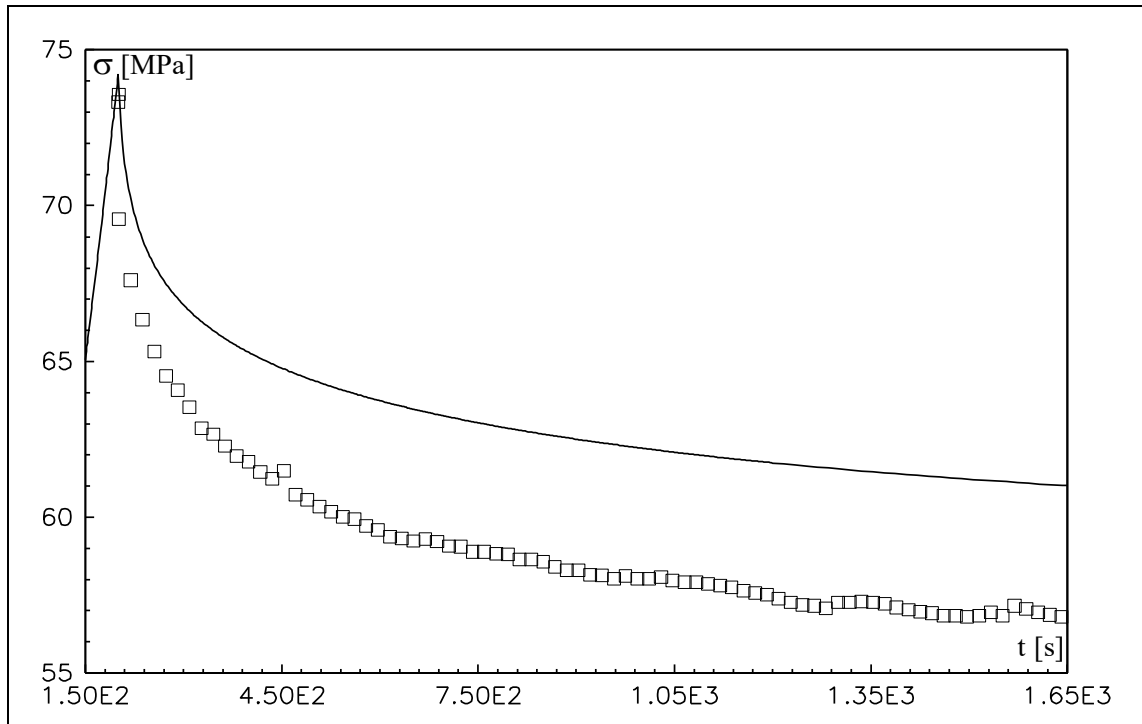


Abbildung: 4.3.2.13: „Zoom“ der ersten 1500s Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

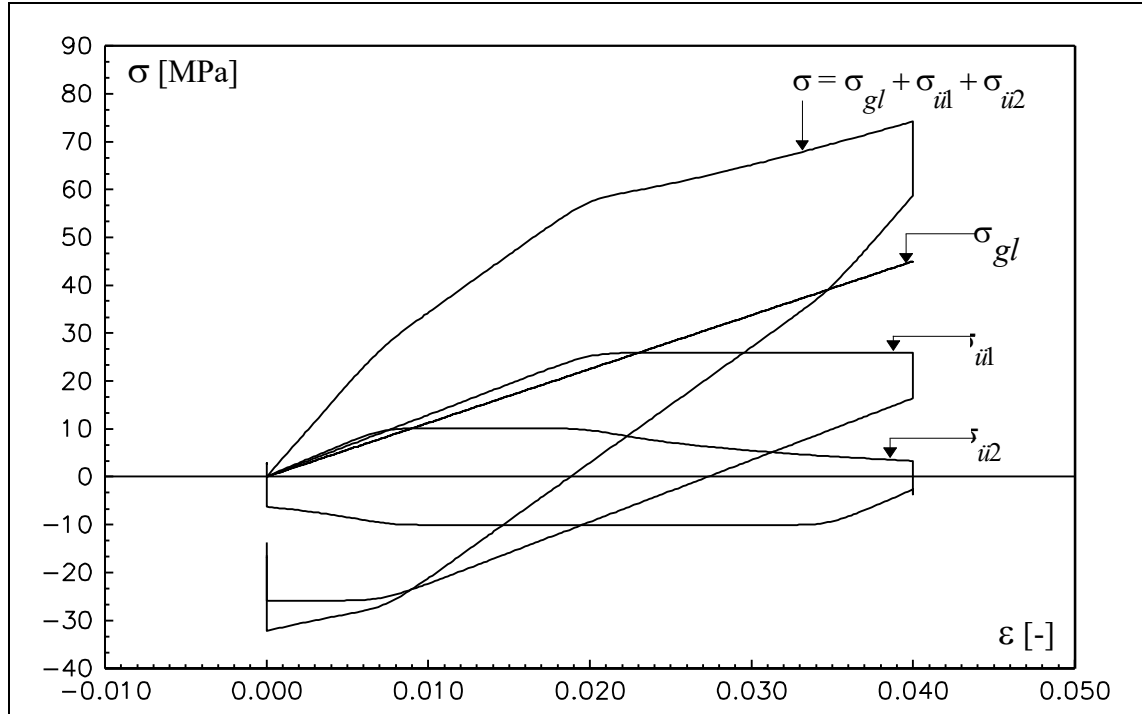


Abbildung 4.3.2.14: Gleichgewichts- und Überspannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.9.6.

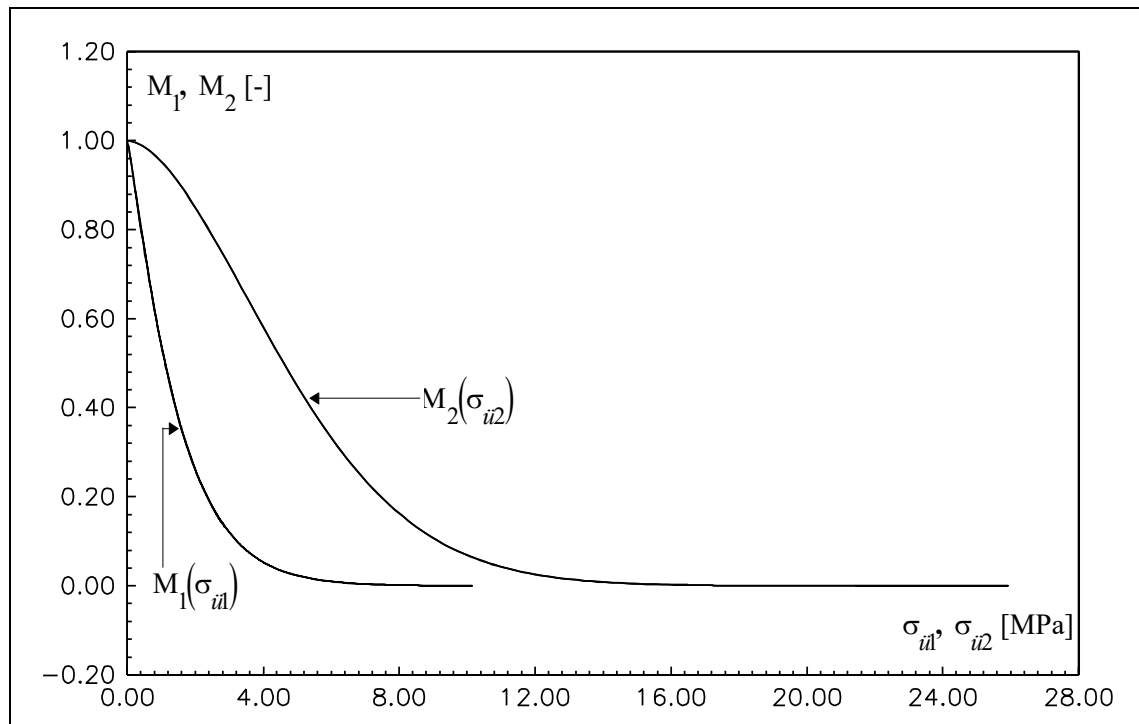


Abbildung 4.3.2.15: Verlauf der Materialfunktionen über der jeweilige Überspannung für den Prozeß des Versuchs Nr.9.7.

Der Deutlichkeit halber wird in Abb. 4.3.2.16 der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 ohne experimentelle Daten gezeigt. Dabei kann ab ca. Dehnung 0,035 ein höheres Spannungsniveau (Spannungszunahme) im Vergleich zur Kennlinie des Zug-Prozesses beobachtet werden, die durch den nichtmonotonen Verlauf der 2. Überspannung erzeugt wird. Das viskoelastische Modell zeigt keine zyklische Spannungsrelaxation. In Abb. 4.3.2.17 können die gerechneten Kennlinien und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte verglichen werden. Hierbei ist der Entfestigungseffekt deutlich zu beobachten. Darüber hinaus kann man erkennen, daß die experimentell ermittelte stationäre zyklische Hysterese, hauptsächlich bedingt durch die zyklische Relaxation, nicht angemessen wiedergegeben wird.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr.6.1 wird in Abb. 4.3.2.18 dargestellt. Eine quantitativ angebrachte Übereinstimmung der gerechneten Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Zug-Prozesses bis zur ersten Haltezeit kann beobachtet werden.

Danach treten Differenzen auf: in diesem Fall erreicht die gerechnete Kennlinie ein niedrigeres Spannungsniveau erst ab ca. 0,035 Dehnung (s. Abb. 4.2.2.19 zum Vergleich mit dem ersten Parametersatz). Nach der zweiten Haltezeit erkennt man eine angemessene Übereinstimmung der Kennlinien. Dies wird auch durch den in Abb. 4.3.2.19 dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannungsantwort deutlich. Darüber hinaus kann man in Abb. 4.3.2.18 erkennen, daß, bedingt durch die nicht angemessene Wiedergabe des Entlastungsverlaufs der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie bis zur zweiten Haltezeit, die Verbindungslinie der gerechneten Relaxationsabbruchpunkte eine breitere Hysterese aufweist als die experimentellen Daten. Die in diesem Fall deutlich unterschiedliche Relaxation der Spannungen bei Dehnung 0,025 wird angemessen wiedergegeben.

Zum genaueren Verständnis des Modells wurde der Prozeß des Versuchs Nr.6.1 mit Haltezeiten der Größenordnung der größeren Relaxationszeit ($z_1 \cong 35 \times 10^3$ St.) gerechnet. Abbildung 4.3.2.18 zeigt die dazugehörige Spannungs-Dehnungs-Kennlinie und die Gleichgewichtsspannung. Bemerkenswert ist, daß in diesem Fall der gesamte Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie nicht deutlich besser wiedergegeben wird. Hierbei relaxiert die gerechnete Spannung bei der ersten Haltezeit auf ein niedrigeres Niveau. Die längere Haltezeit ermöglicht eine Erholung des Materials, welche danach einen adäquateren Aufbau der Überspannungen erlaubt. Das heißt, durch das Erreichen eines dem Gleichgewichtszustand näheren Spannungsniveaus während der Haltezeit kann danach eine größere Überspannung aufgebaut werden.

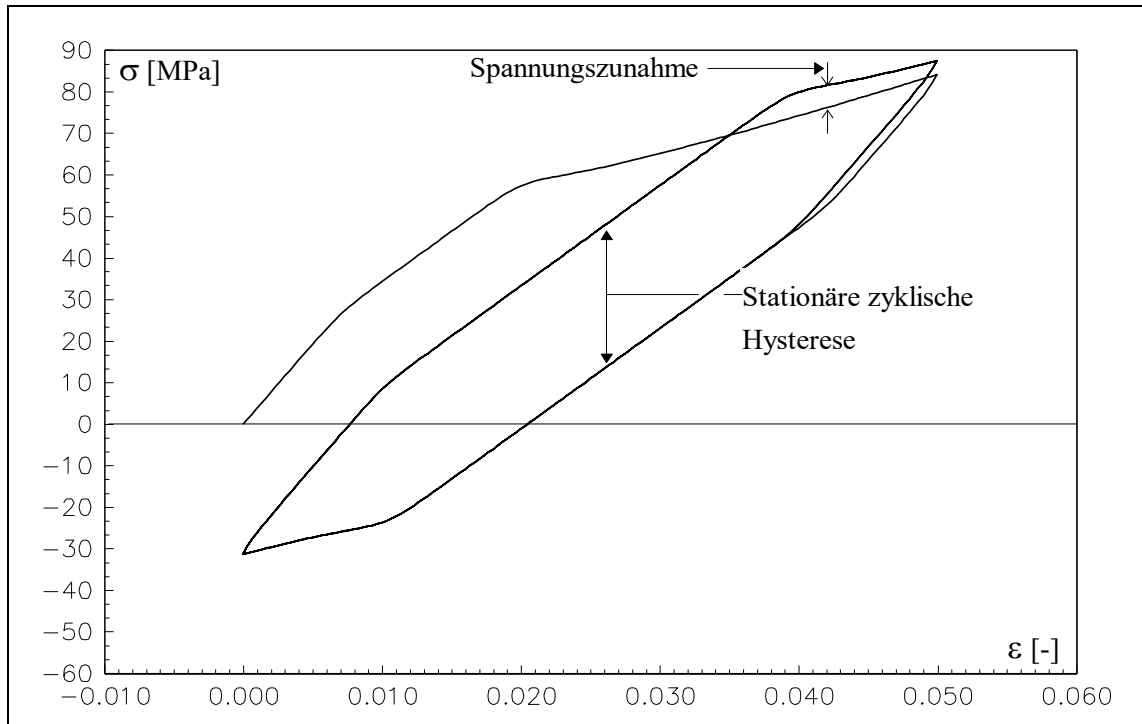


Abbildung 4.3.2.16: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5.

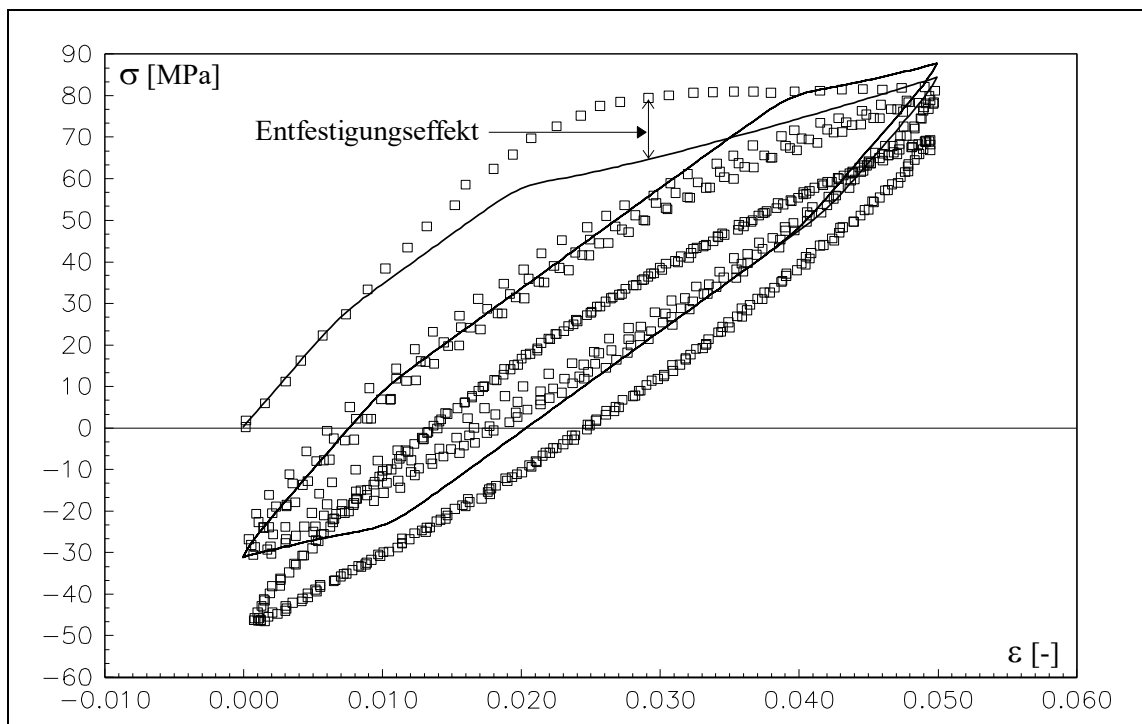


Abbildung 4.3.2.17: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

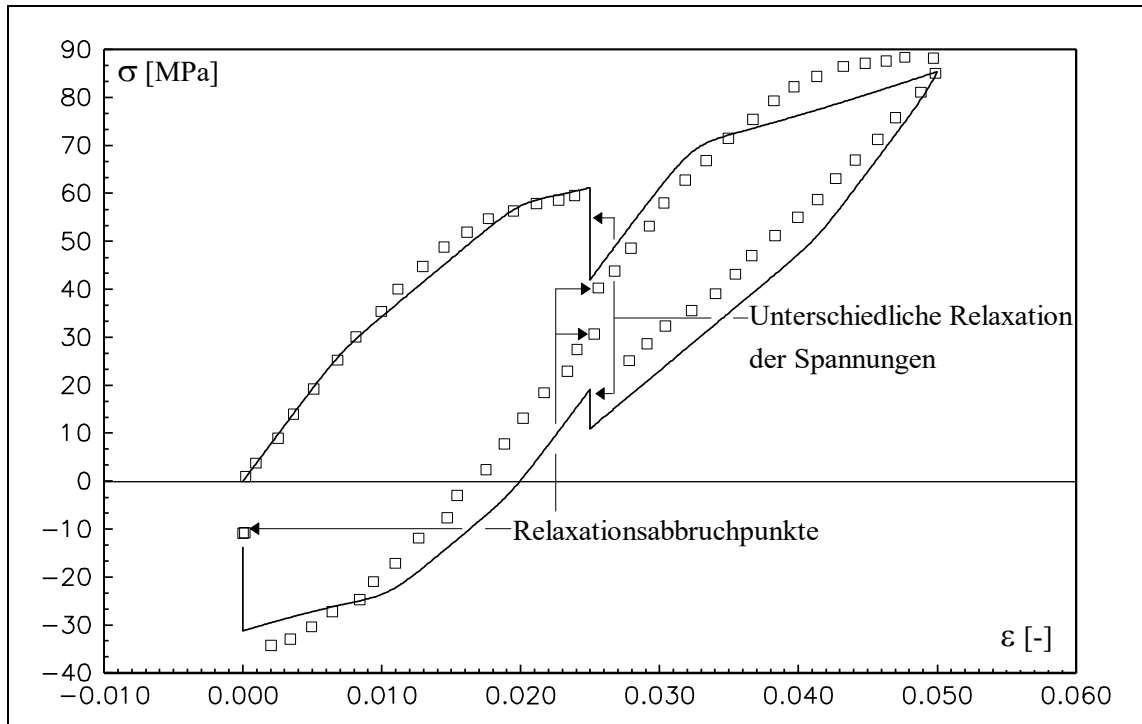


Abbildung 4.3.2.18: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.6.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

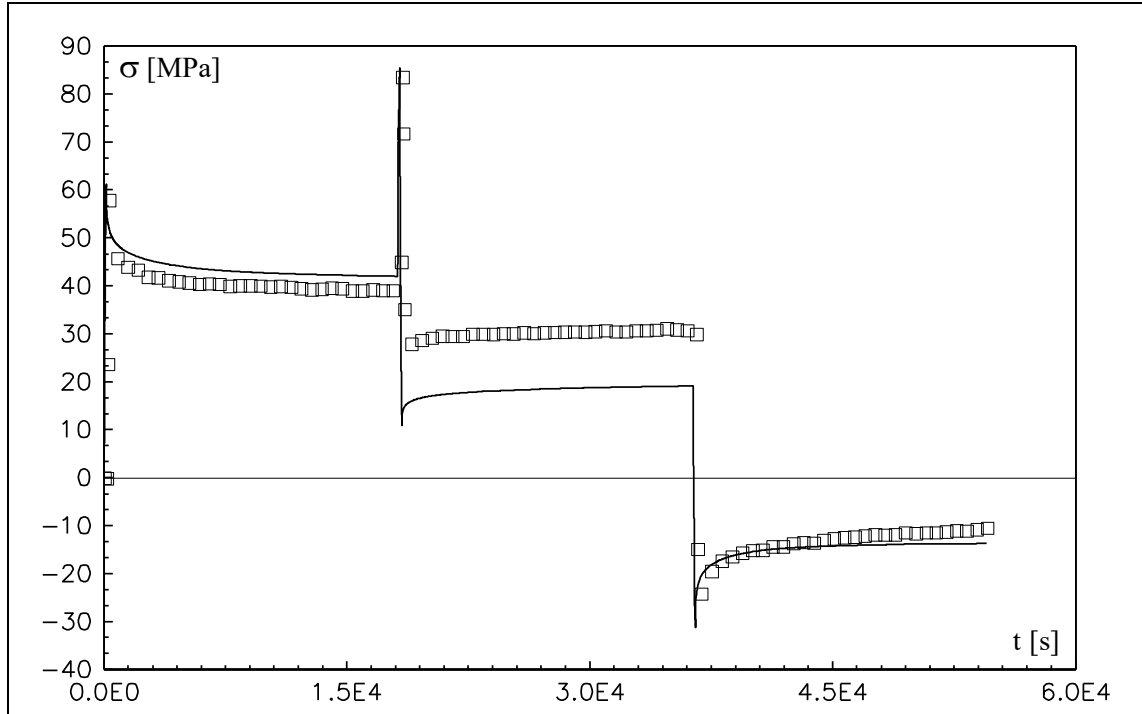


Abbildung 4.3.2.19: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuch Nr.6.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

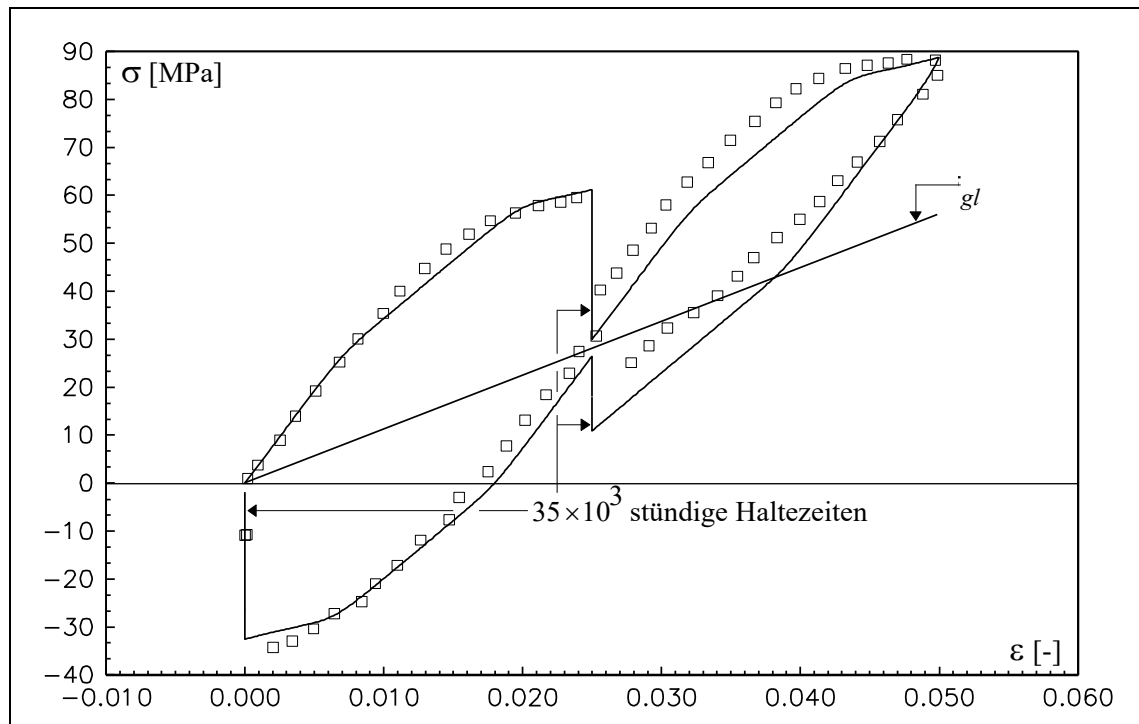


Abbildung 4.3.2.20: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.6.1 mit Haltezeiten der Größenordnung der größten Relaxationszeit und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des Versuchs Nr. 6.1.

Die in Abbildungen 4.3.2.21 bis 4.3.2.23 wiedergegebene numerischen Simulationen der hintereinander geführten Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9 ermöglichen eine Veranschaulichung des Erholungseffektes bei Prozessen mit Mitteldehnung null. In Abb. 4.3.2.21 wird die numerische Simulation ohne die experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte gezeigt. In diesem Fall erkennt man, daß die 10stündige Haltezeit einen erkennbaren Erholungseffekt ermöglicht. Abb. 4.3.2.22 erlaubt einen direkten Vergleich der Simulation mit den experimentellen Daten. Dabei wird der gerechnete Relaxationsabbruchpunkt, bedingt durch die quantitativ unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Simulation und des Versuchs im Druck-Bereich, weniger angemessen wiedergegeben.

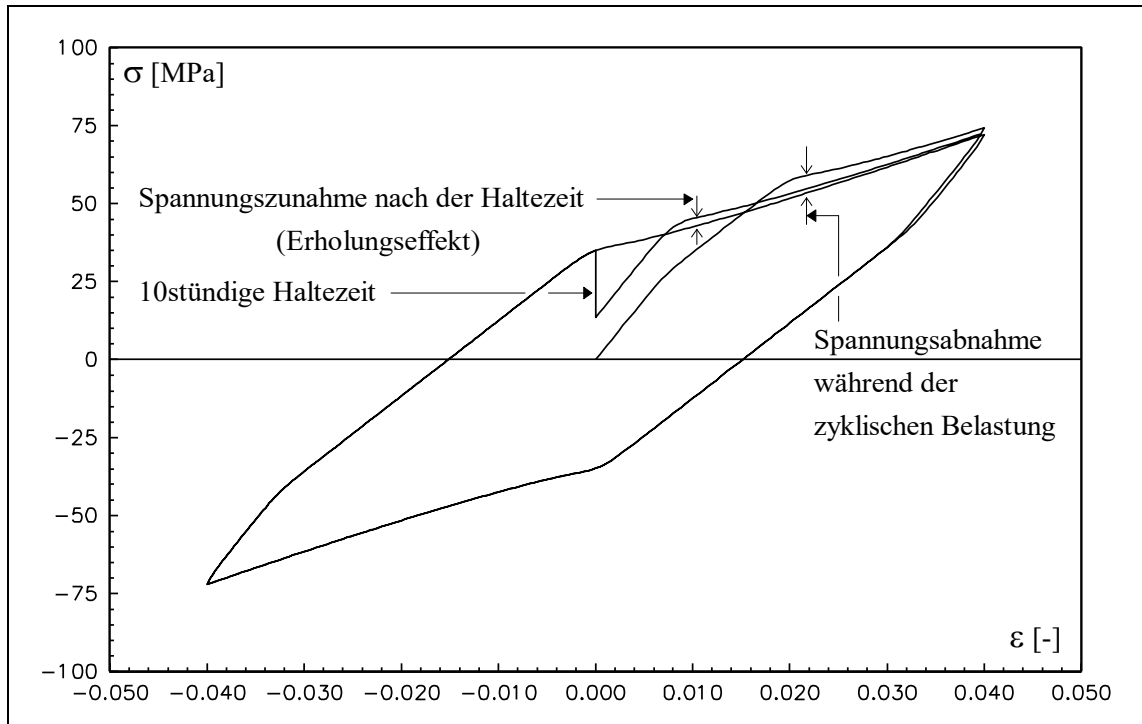


Abbildung 4.3.2.21: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9.

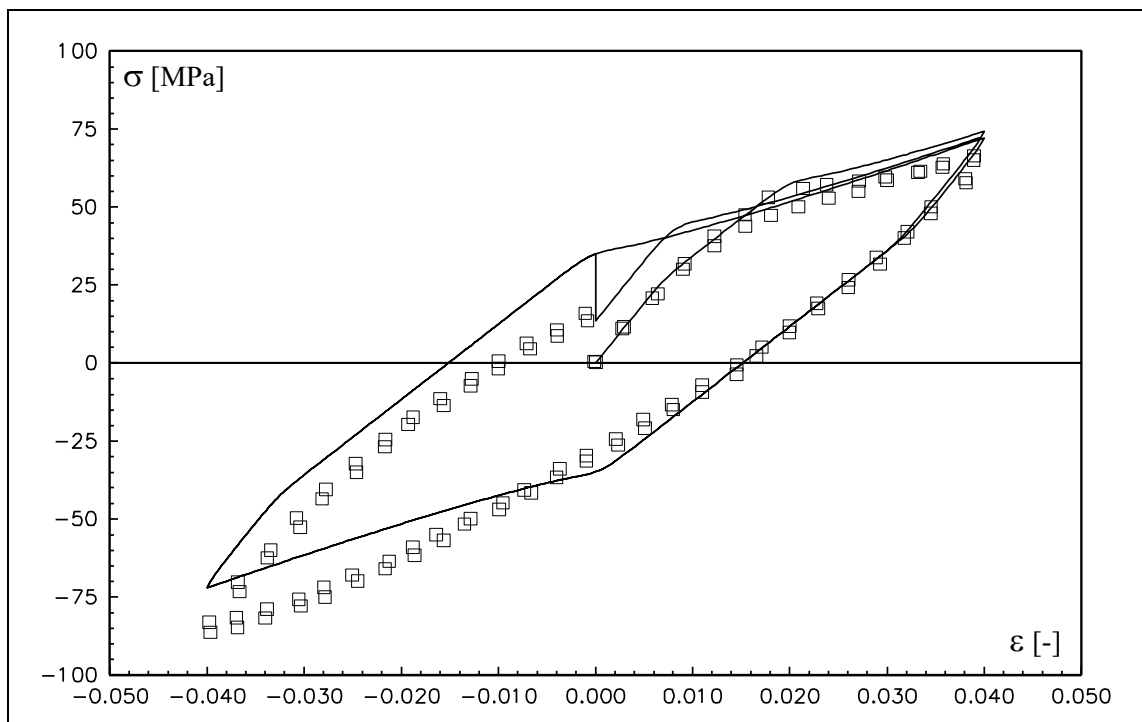


Abbildung 4.3.2.22: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und 15.9 und einige experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

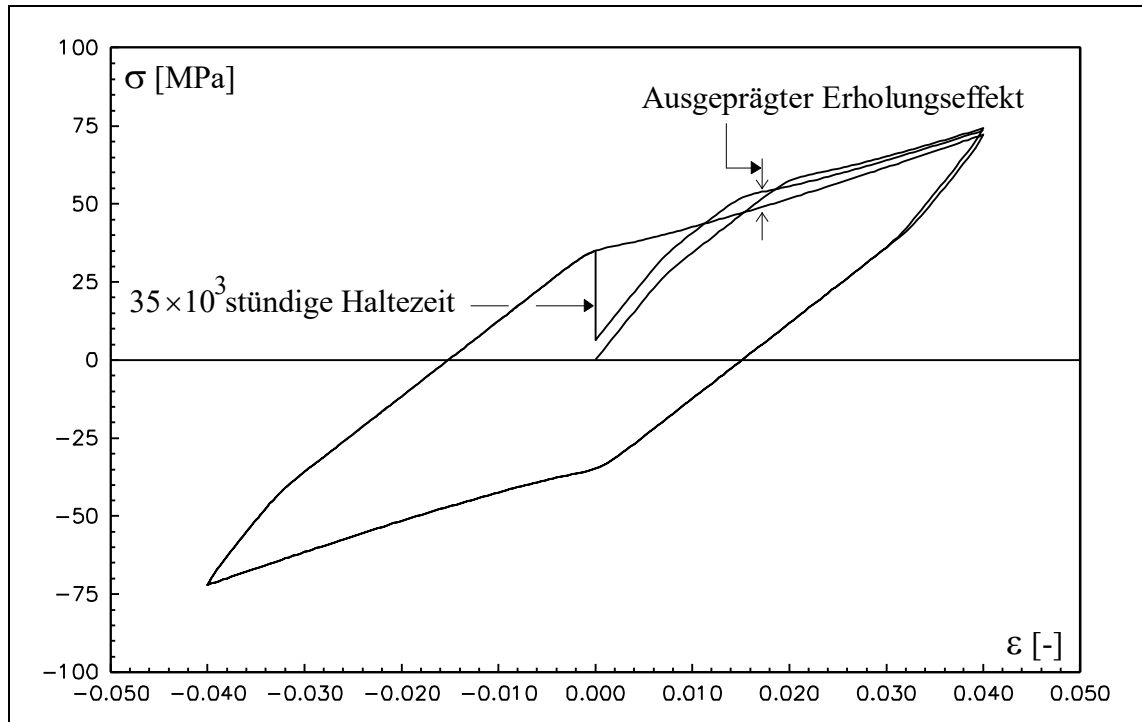


Abbildung 4.3.2.23: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und 15.9 mit einer Haltezeit in der Größenordnung der größten Relaxationszeit.

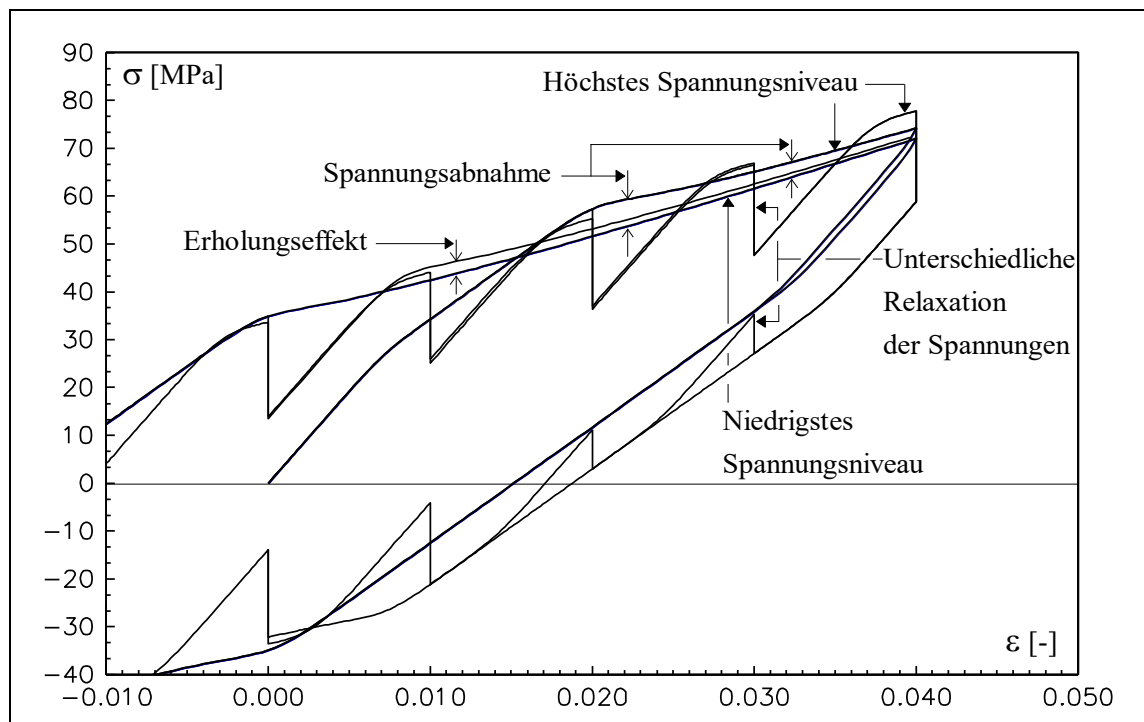


Abbildung 4.3.2.24: Numerische Simulation der Versuche Nr. 7 Teil 2, Nr. 9.6, Nr. 15.8 und Nr. 15.9 (vgl. dazu Abbn. 2.3.33 und 2.3.34).

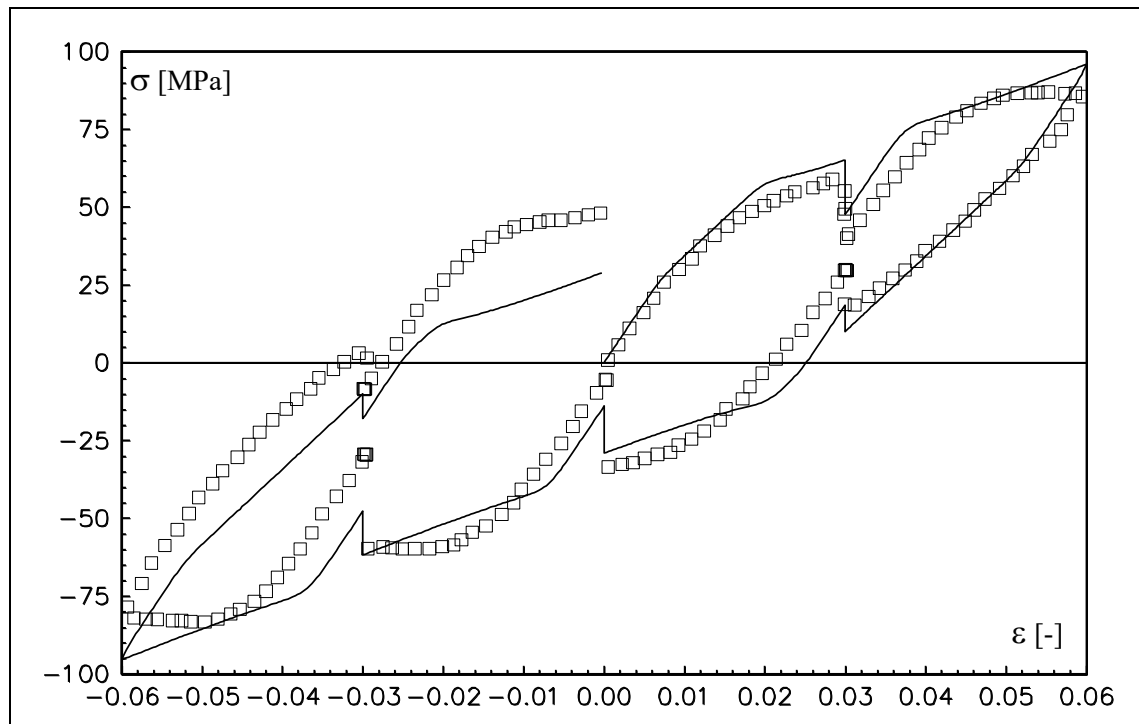


Abbildung 4.3.2.25: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.15.14 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

Eine *Test-Simulation* der Versuche Nr. 15.8 und Nr.15.9 mit einer Haltezeit der Größenordnung von \mathbf{z}_1 wird in Abb. 4.3.2.23 veranschaulicht. Ein deutlich höheres Spannungsniveau nach der Haltezeit kann erkannt werden. In diesem Fall ermöglicht die längere Haltezeit einen ausgeprägteren Erholungseffekt.

Abbildung 4.3.2.24 veranschaulicht die unterschiedlichen Stufen des Erholungseffekts bzw. der Spannungsabnahmen. Ein Vergleich der gerechneten Spannungsantworten mit den experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der in Abbn. 2.3.31 und 2.3.32 läßt eine qualitativ angemessene Übereinstimmung dieser Effekte erkennen.

Abbildung 4.3.2.25 zeigt die gerechnete Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr. 15.14 und einige dazugehörige experimentelle Punkte. Eine zufriedenstellende Übereinstimmung ist im Zug- und Entlastungs-Bereich zu beobachten.

4.4 Ein Materialparametersatz für das Modell der Viskoplastizität ohne Fließfläche

		Zerlegung der Spannung	
		Gleichgewichtsspannung	Überspannung
σ	=	σ_{gl}	+ $\sigma_{\ddot{u}}$
		Zerlegung der Gleichgewichtsspannung	Zerlegung der Überspannung
		$\sigma_{gl} = \sigma_{gl1} + \sigma_{gl2}$	$\sigma_{\ddot{u}} = \sigma_{\ddot{u}1} + \sigma_{\ddot{u}2}$
		Evolutionsgleichungen der Gleichgewichtsspannungen	Evolutionsgleichungen der Überspannungen
		$\dot{\sigma}_{gl1}(t) = \mathbf{E} \dot{\varepsilon}(t) - \mathbf{E}\mathbf{K} \dot{\varepsilon}(t) \sigma_{gl1}$ $\dot{\sigma}_{gl2}(t) = \hat{\mathbf{E}} \dot{\varepsilon}(t) - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{C} \dot{\varepsilon}(t) \sigma_{gl2}$	$\dot{\sigma}_{\ddot{u}1}(t) = \mathbf{E}_1 \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\mathbf{z}_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1})} \sigma_{\ddot{u}1}$ $\dot{\sigma}_{\ddot{u}2}(t) = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} \dot{\sigma}_{\ddot{u}1}(t) - \left[\frac{1}{\mathbf{z}_1 \mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1})} + \frac{1}{\mathbf{z}_2 \mathbf{M}_2(\sigma_{\ddot{u}2})} \right] \sigma_{\ddot{u}2}$
	Materialfunktionen		
		$\mathbf{M}_1(\sigma_{\ddot{u}1}) = e^{-\left(\frac{ \sigma_{\ddot{u}1} }{s_1}\right)^n} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_2(\sigma_{\ddot{u}2}) = e^{-\left(\frac{ \sigma_{\ddot{u}2} }{s_2}\right)^m}$	

Tabelle 4.4.1: Das viskoplastische Materialmodell.

Gleichgewichtsparameter					Überspannungsparameter							
\mathbf{E}	\mathbf{K}	$\hat{\mathbf{E}}$	\mathbf{C}		\mathbf{E}_1	\mathbf{E}_2	\mathbf{z}_1	s_1	\mathbf{n}	\mathbf{z}_2	s_2	\mathbf{m}
GPa	kPa ⁻¹	GPa	kPa ⁻¹		GPa	GPa	ks	MPa	-	ks	MPa	-
1,014	63,79	1,133	8,919		0,979	0,784	18	12,27	3,853	3,997	4,975	2,403

Tabelle 4.4.2: Parametersatz für das Modell der Viskoplastizität.

4.4.1 Die Wiedergabe der experimentellen Daten

Unter der in Abschnitt 2.3 erläuterte Annahme a wurden für die Materialparameter \mathbf{E} , \mathbf{K} , $\hat{\mathbf{E}}$ und \mathbf{C} der Gleichgewichtskennlinie die in Tabelle 4.4.2 gegebenen Werte identifiziert. Die daraus folgende geschwindigkeitsunabhängige stationäre Gleichgewichtshysterese approximiert die Verbindungslinie der experimentell ermittelten Relaxationsabbruchpunkte (s. dazu Abb. 4.4.1.1). Abbildung 4.4.1.2 dient der Veranschaulichung der Verläufe von den einzelnen Terme der Gleichgewichtskennlinie. Die erste Gleichgewichtsspannung (σ_{g1}) produziert die Hysterese der Gleichgewichtskennlinie. Die Zug-Druck-Asymmetrie wird durch den zweiten Term der Gleichgewichtsspannung (σ_{g2}) erzeugt. Zur Bestimmung der Überspannungsparameter dieses Modells wurden lediglich die experimentellen Spannungs-Dehnungs-Daten der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 verwendet. Das Ergebnis dieser Identifikation ist in Tabelle 4.4.2 wiedergegeben. Hierbei wurde die Relaxationszeit z_1 auf 5 Stunden festgesetzt.

Abbildung. 4.4.1.3 zeigt die numerischen Ergebnisse der Zugprozesse der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5. Dabei kann eine angemessene Übereinstimmung der Spannungs-Dehnungs-Verläufe der numerischen Simulation mit den experimentellen Daten festgestellt werden. Der Deutlichkeit halber werden die gerechneten Spannungsantworten der zur Identifikation zugrundegelegten Prozesse in Abbildung 4.4.1.4 noch einmal gezeigt. Dabei ist bei geringeren Dehnungsgeschwindigkeiten ein sanfter Übergang zwischen den Dehnungsbereichen zu bemerken. Darüber hinaus kann mit steigender Dehnungsgeschwindigkeit eine in Richtung größere Dehnungen verschobene Krümmungsänderung der Kennlinien beobachtet werden. Im Vergleich mit dem anderen Materialmodell nimmt der erste Dehnungsbereich ab. Dies entspricht einem Eintreten der geschwindigkeitsabhängigen Effekte bei kleineren Dehnungen.

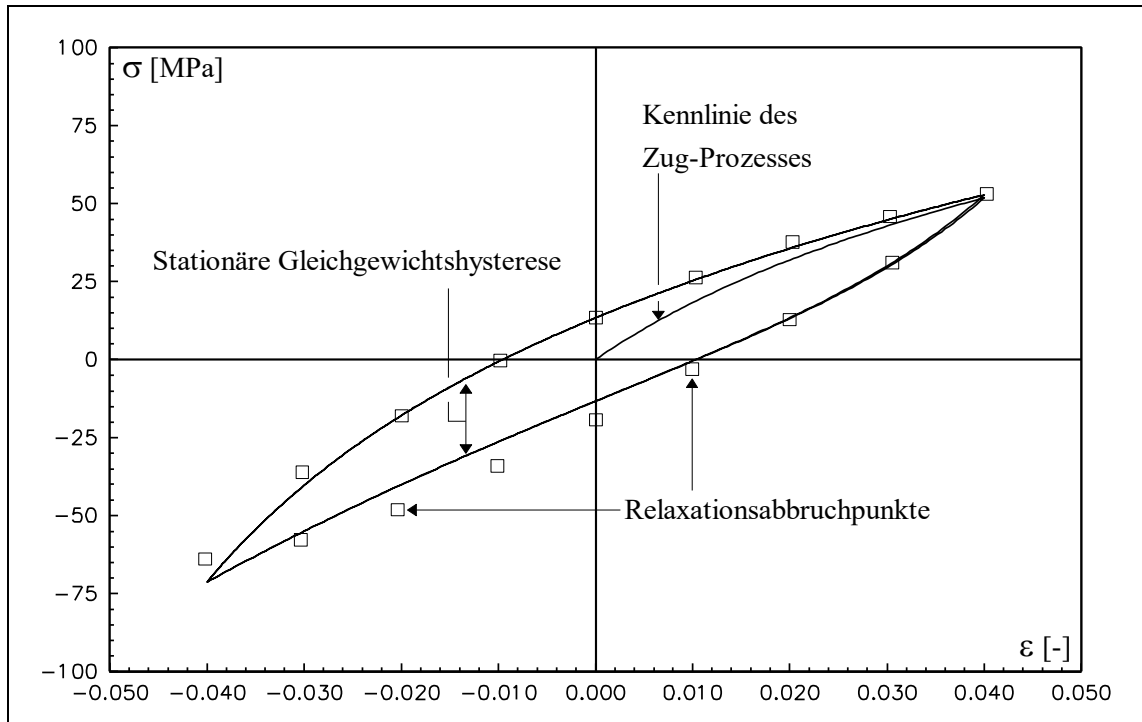


Abbildung 4.4.1.1: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Gleichgewichtskennlinie und die zur Identifikation der Gleichgewichtsparameter herangezogenen experimentell ermittelten Relaxationsabbruchpunkte (Versuch Nr.7 Teil 2).

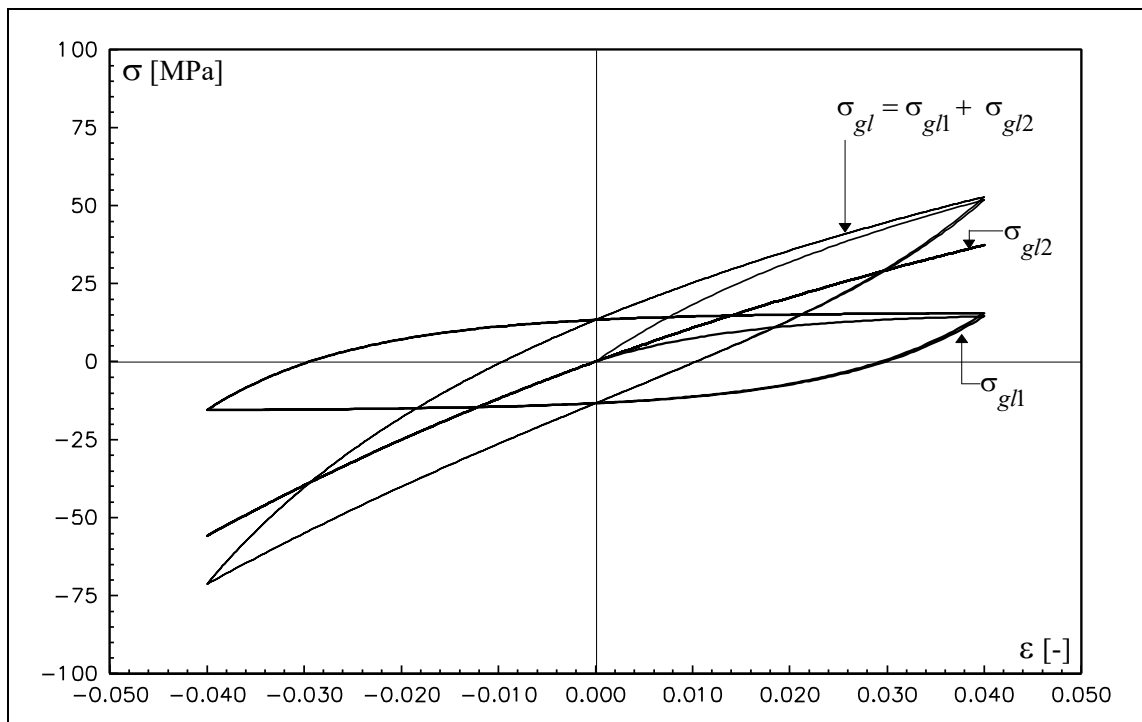


Abbildung 4.4.1.2: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der einzelnen Terme der numerischen Simulation der Gleichgewichtskennlinie.

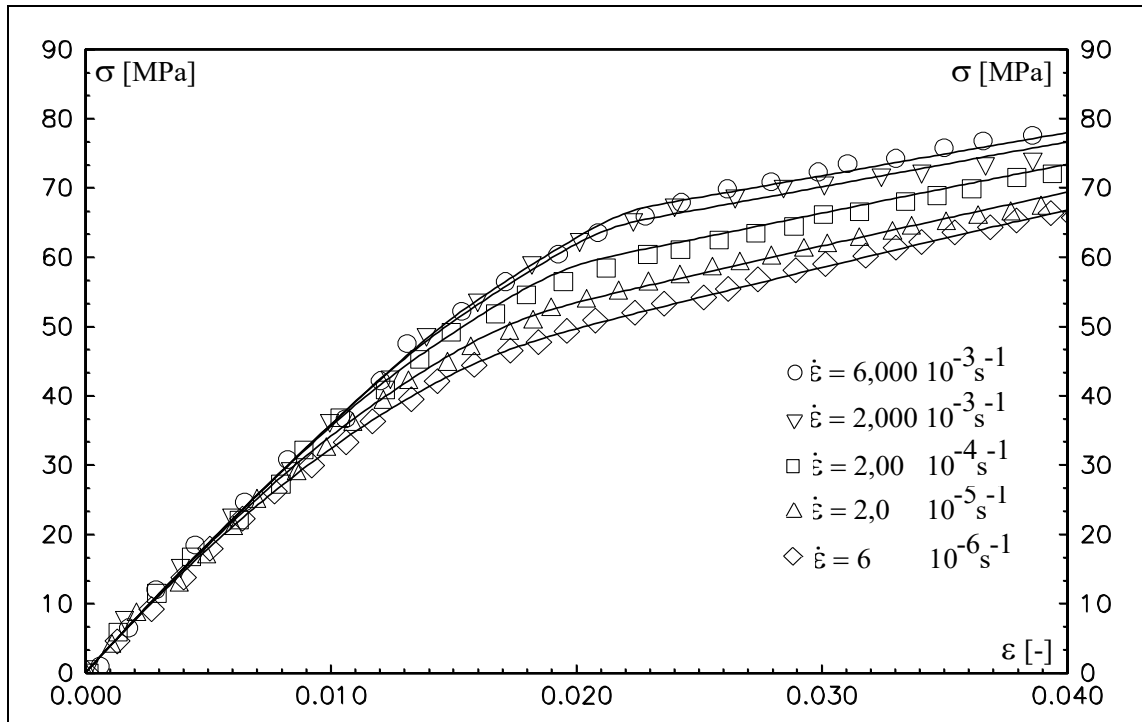


Abbildung 4.4.1.3: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (Versuche Nr.9.1 bis 9.5) und die zur Identifikation der Überspannungparameter herangezogenen experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Daten.

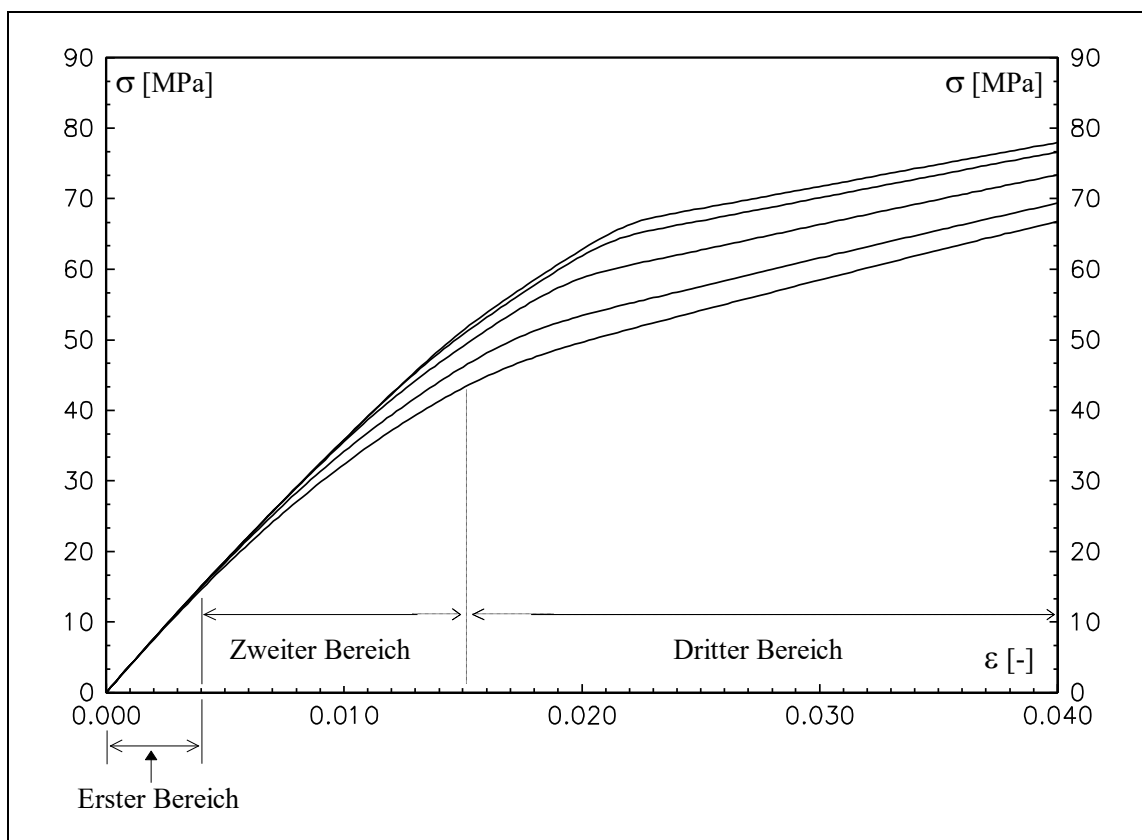


Abbildung 4.4.1.4: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten.

4.4.2 Die Vorhersagbarkeit des Materialverhaltens

Abbildung 4.4.2.1 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der gerechneten Modellantwort des zyklischen Prozesses mit Haltezeiten (Versuch Nr.7). In diesem Fall ist nach dem ersten Viertel-Zyklus eine Spannungszunahme (Zusatzverfestigung) zu erkennen. Die maximalen Spannungsniveaus und Relaxationsabbruchpunkte werden gut wiedergegeben (s. dazu Abb. 4.4.2.2).

In Abb. 4.4.2.3 können die gerechneten Spannungs-Zeit-Verläufe während der Haltezeiten mit den experimentellen Daten des Versuchs Nr.7 verglichen werden, dabei kann auch recht gute Übereinstimmung festgestellt werden.

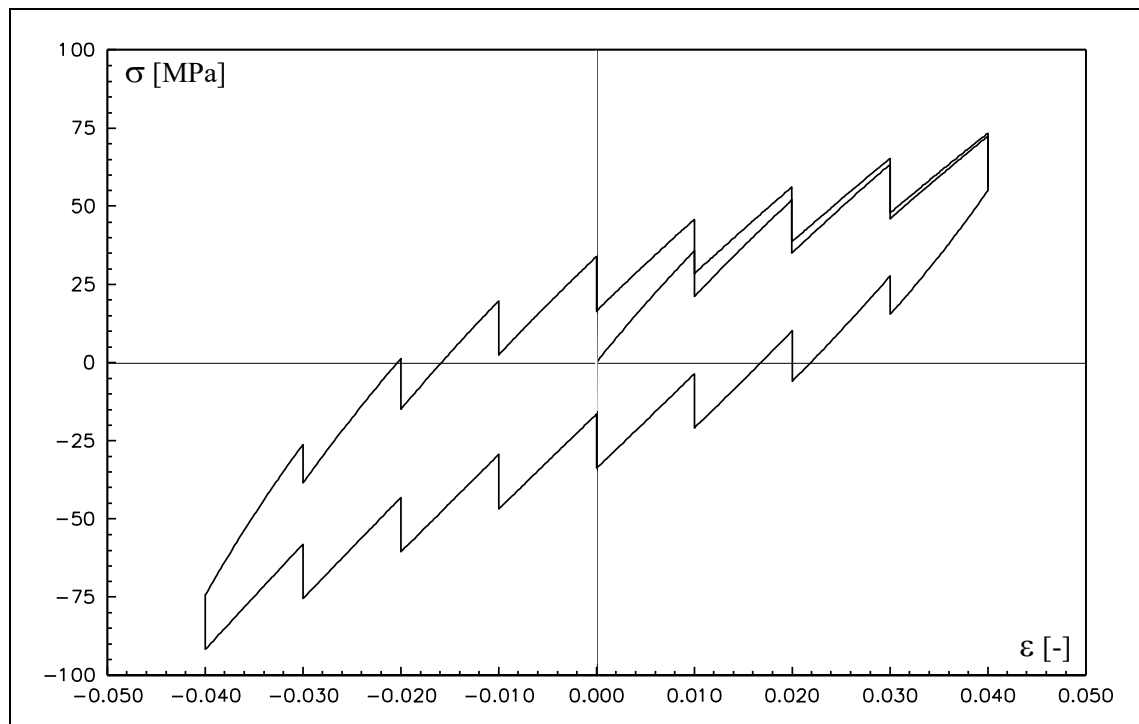


Abbildung 4.4.2.1: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Prozess des Versuchs Nr.7.

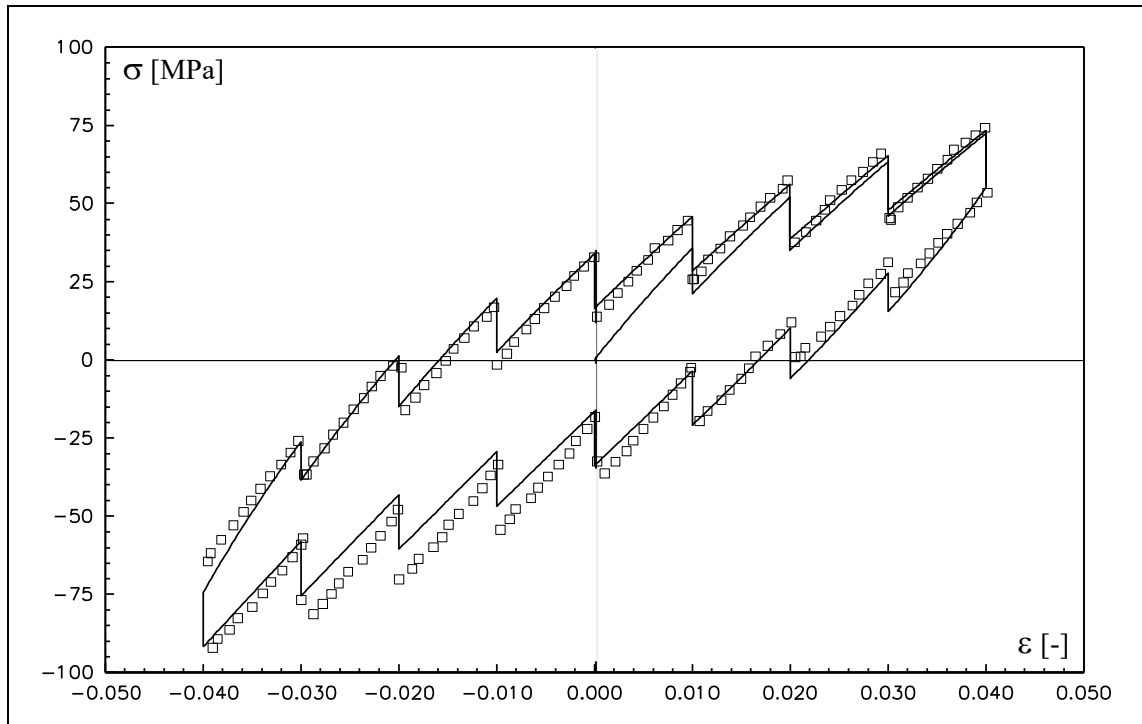


Abbildung 4.4.2.2: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des 2. Teils dieses Versuchs.

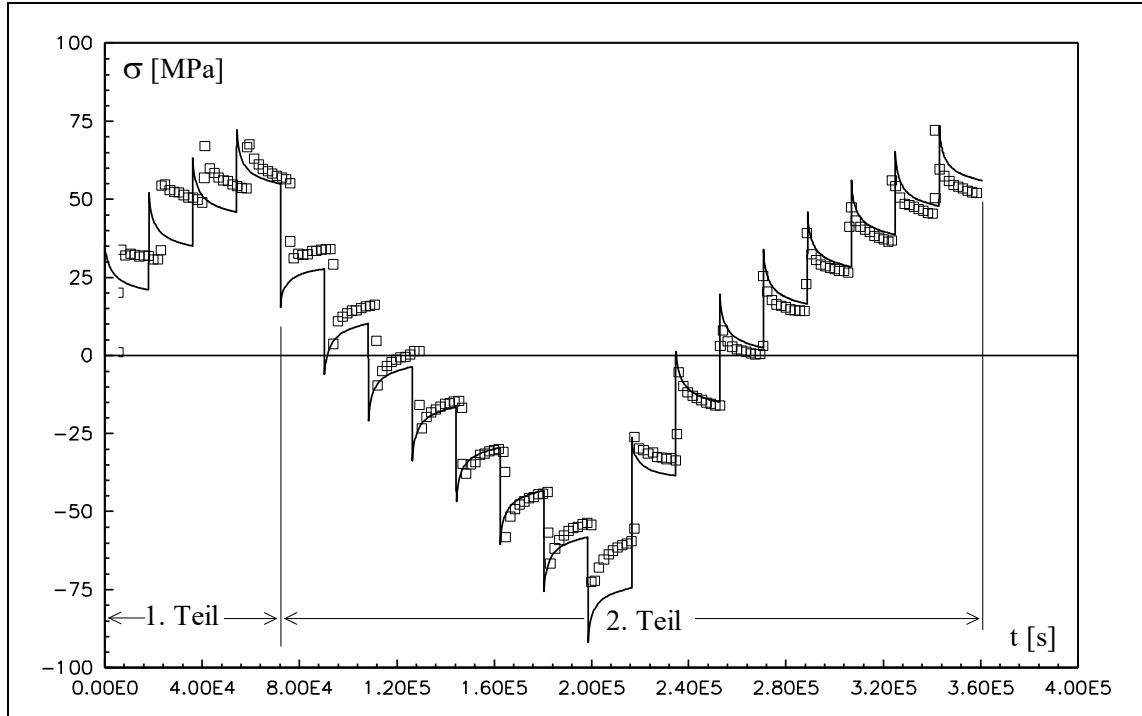


Abbildung 4.4.2.3: Spannungs-Zeit-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.7 und einige dazugehörigen experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte.

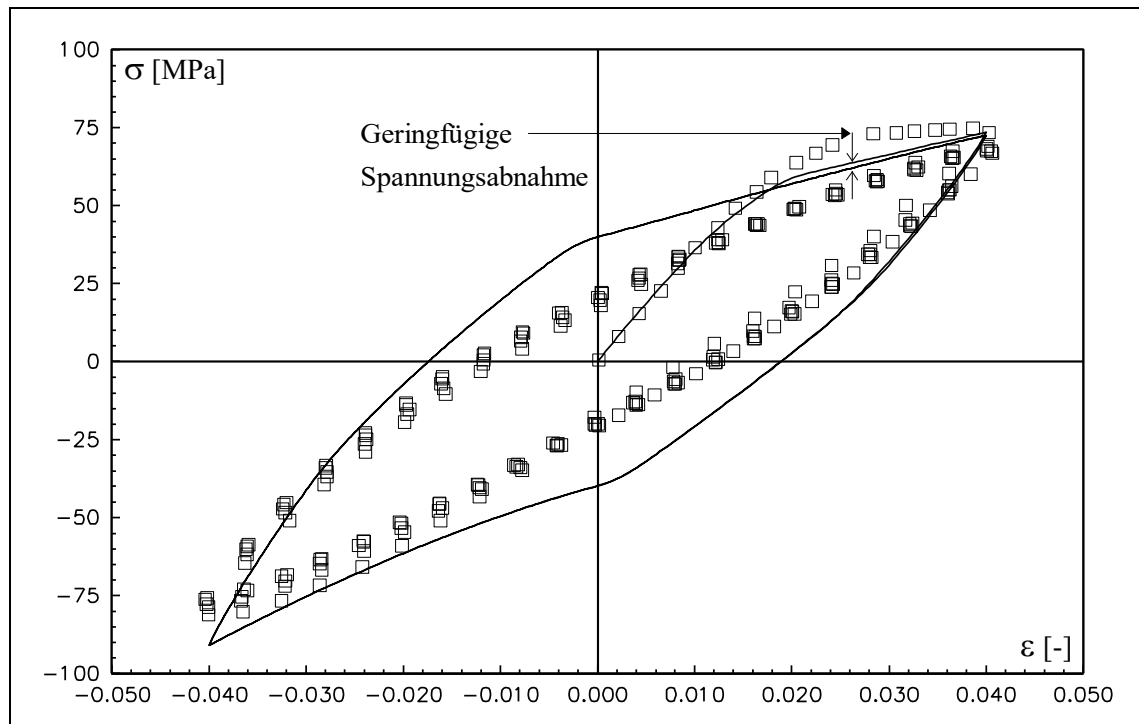


Abbildung 4.4.2.4: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

Die numerische Simulation des zyklischen Verhaltens und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte des Versuchs Nr.1 werden in Abb. 4.4.2.4 gezeigt. Die Vorhersage der zyklischen Hysterese ist breiter als die experimentell erfaßte Spannungs-Dehnungs-Hysterese. Eine geringfügige Spannungsabnahme kann beobachtet werden.

In Abbildung 4.4.2.5 wird die gerechnete Spannungsantwort der Zug- und Entlastungsprozesse mit anschließender Haltezeit für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten gezeigt. In Abbildung 4.4.2.6 kann man erkennen, daß das viskoplastische Materialmodell mit den in Tabelle 4.4.2 identifizierten Materialparametern nicht in der Lage ist, die experimentell ermittelte geschwindigkeitsunabhängige Entlastungsantwort qualitativ richtig wiederzugeben. Darüber hinaus wird ein weniger angemessener Spannungs-Dehnungs-Verlauf bei der Entlastung dargestellt. Dies verursacht unter anderem eine quantitativ schlechtere Wiedergabe der Relaxationsabbruchpunkte nach der Entlastung bei Dehnung null.

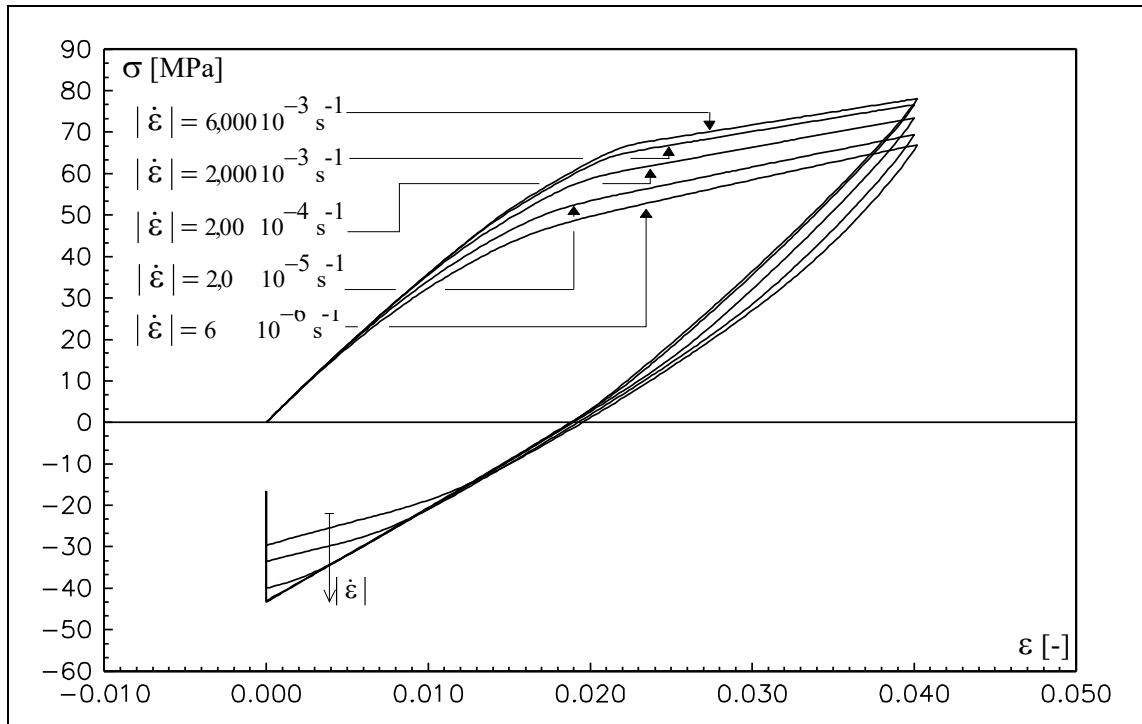


Abbildung 4.4.2.5: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5.

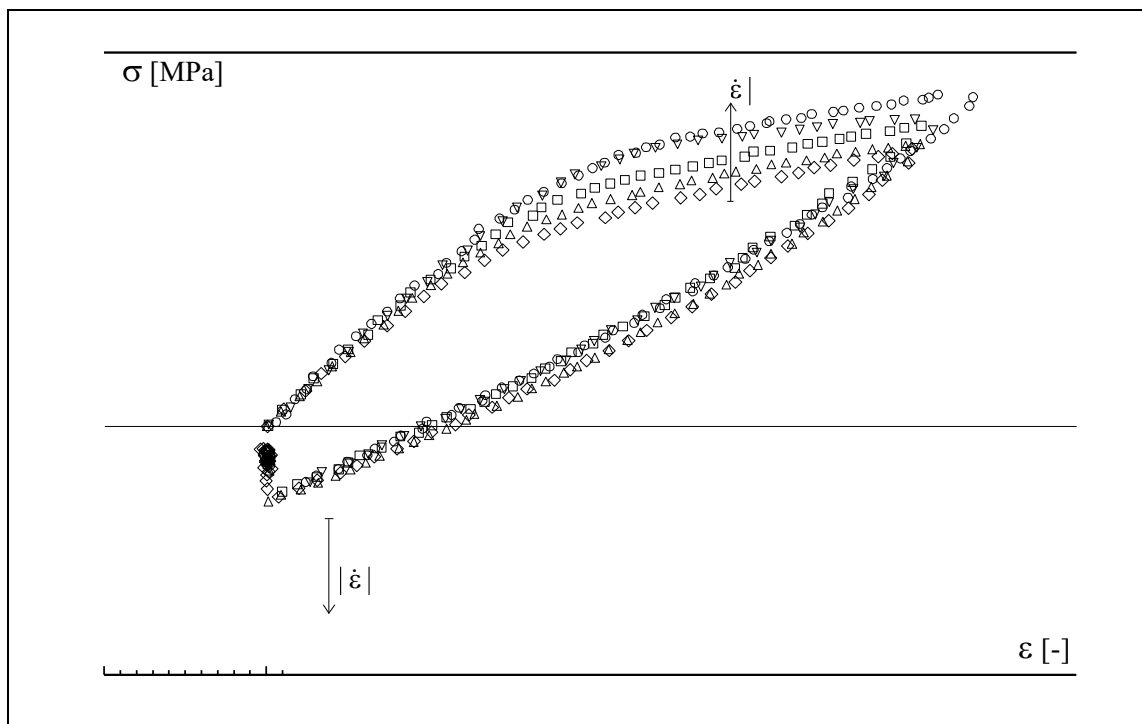


Abbildung 4.4.2.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

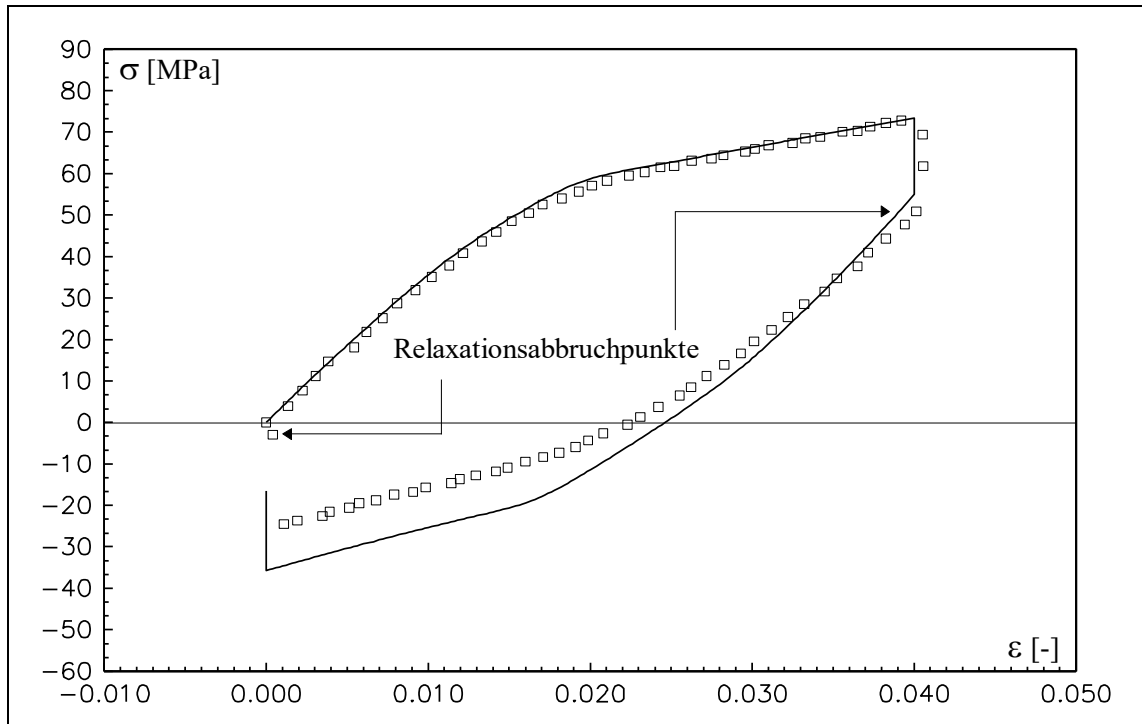


Abbildung 4.4.2.6: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

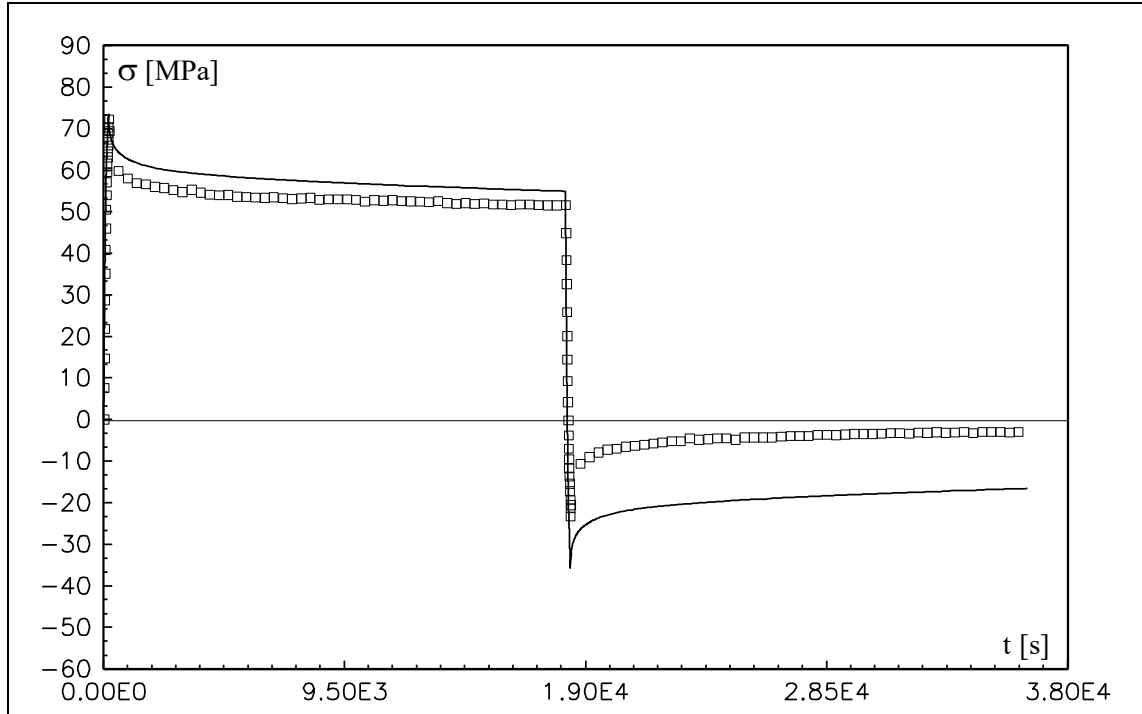


Abbildung 4.4.2.7: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuch Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

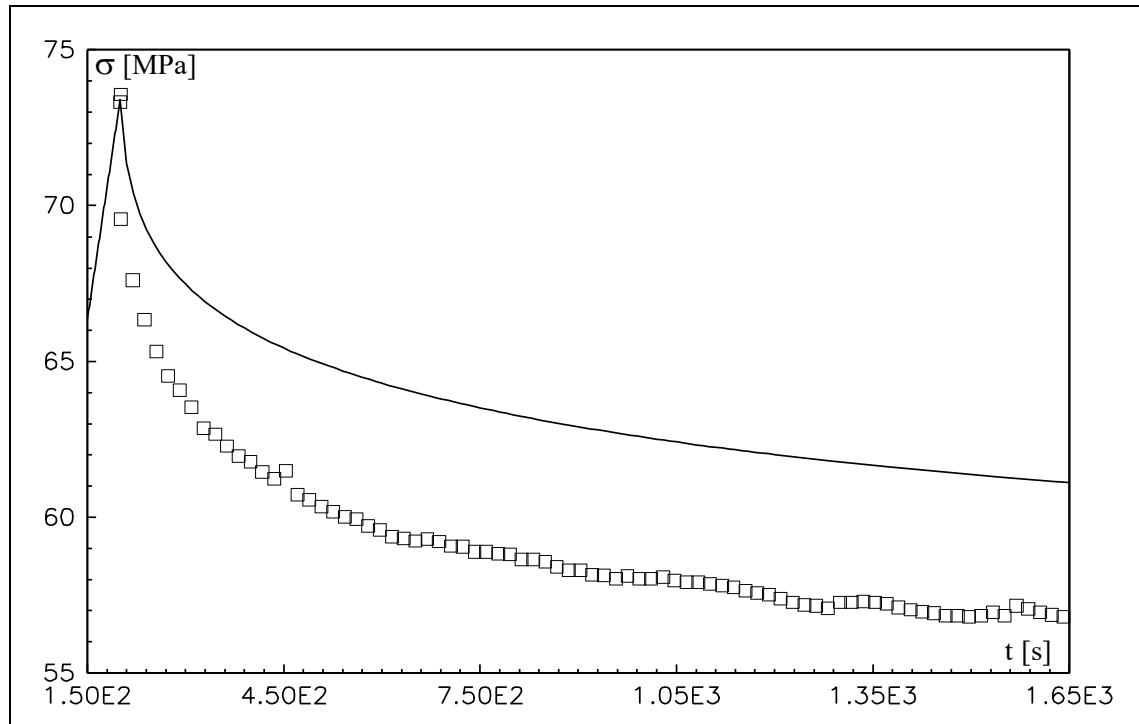


Abbildung 4.4.2.8: „Zoom“ der ersten 1500s Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuchs Nr.9.6 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs Punkte dieses Versuchs.

Der gerechnete Spannungs-Dehnungs-Verlauf des Versuchs Nr.9.6 wird in Abb. 4.4.2.6 wiedergegeben. Bemerkenswert ist, daß der Relaxationsabbruchpunkt nach der Belastung bei Dehnung 0,040 angemessen wiedergegeben wird. Der Relaxationsabbruchpunkt nach der Entlastung bei Dehnung 0,000 wird, auch in diesem Fall bedingt durch den weniger adäquaten Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Entlastung, quantitativ weniger angemessen wiedergegeben. In Abb. 4.4.2.7 wird der zeitliche Verlauf der Relaxations-Kennlinien deutlich gemacht. Die in Abb. 4.4.2.8 dargestellten ersten 1500s der Haltezeit des Versuchs Nr. 9.6 zeigen, daß die experimentell ermittelte Anfangssteigung der Relaxationskennlinie deutlich kleiner ist als die der numerischen Simulation [62]. Dies verursacht die Verschiebung der gerechneten Kennlinie in Richtung größerer Spannungen.

In Abb. 4.4.2.9 wird der Verlauf der einzelnen inneren Variablen bzw. Spannungen für den Prozeß des Versuchs Nr.9.6 über der Dehnung wiedergegeben. Hierbei kann die nichtmonotone Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der 2. Überspannung deutlich erkannt werden. Sie ist für die erste Änderung der Krümmung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie verantwortlich und trägt auch zur zweiten Krümmungsänderung bei. Abbildung 4.4.2.10 zeigt die unterschiedlichen Verläufe der Materialfunktionen \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 .

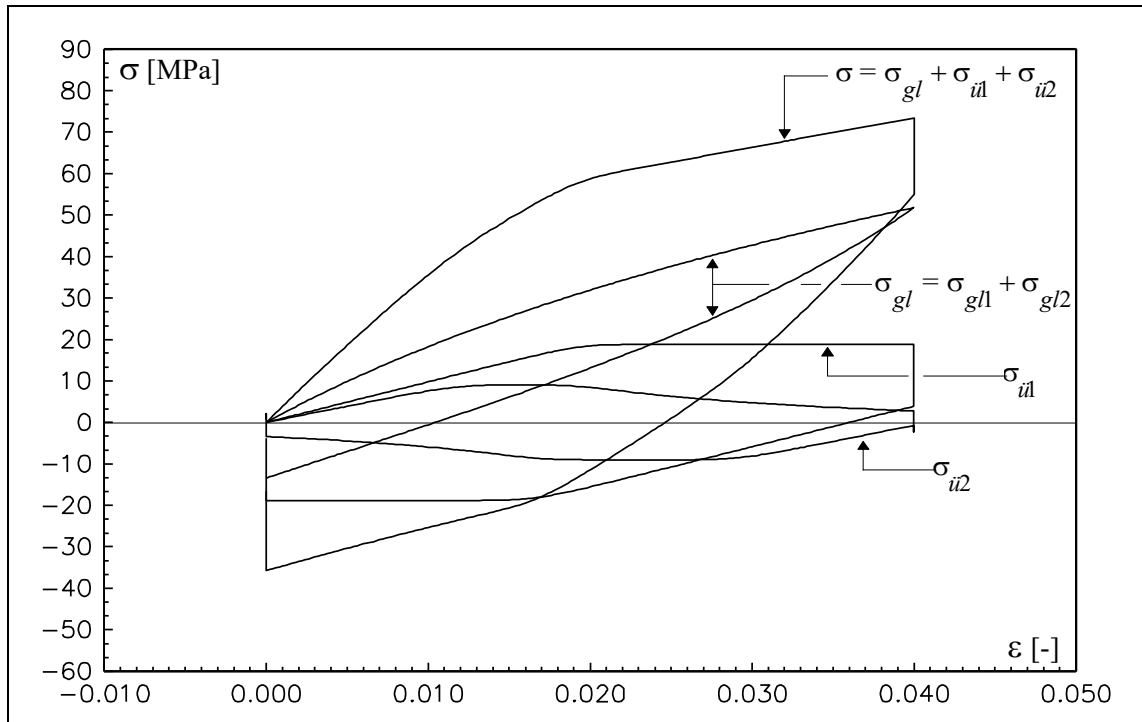


Abbildung 4.4.2.9: Gleichgewichtshysterese und Überspannungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Prozesses vom Versuch Nr.9.6.

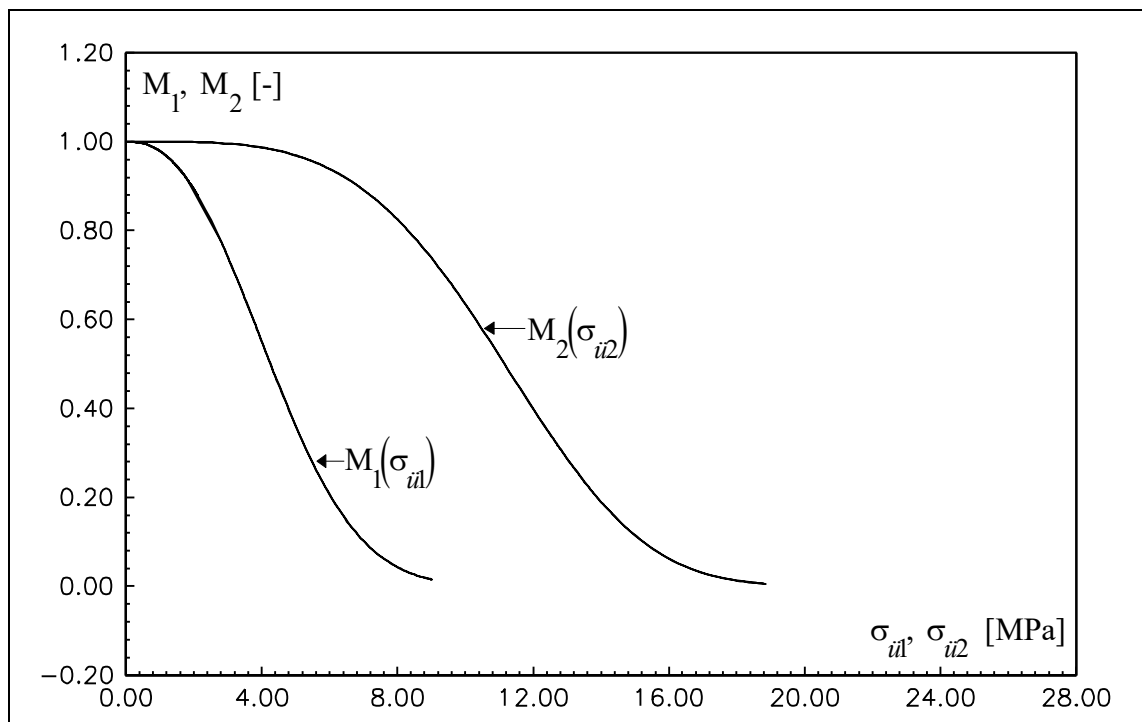


Abbildung 4.4.2.10: Verlauf der Materialfunktionen.

Der genaueren Betrachtung halber wird in Abb. 4.4.2.11 der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 ohne experimentelle Daten gezeigt. Dabei kann ab ca. Dehnung 0,034 ein höheres Spannungsniveau (Spannungszunahme) im Vergleich zur Kennlinie des Zug-Prozesses beobachtet werden, die durch den nichtmonotonen Verlauf der 2. Überspannungen erzeugt wird. Das viskoplastische Modell mit den in Tabelle 4.4.2 identifizierten Materialparametern zeigt keine zyklische Spannungsrelaxation. In Abb. 4.4.2.12 können die gerechneten Kennlinien und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Daten verglichen werden. Hierbei ist der Entfestigungseffekt deutlich zu beobachten. Darüber hinaus kann man erkennen, daß die gerechnete stationäre zyklische Spannungs-Dehnungs-Hysterese breiter ist als die experimentell ermittelte stationäre zyklische Hysterese.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie vom Versuch Nr. 6.1 wird in Abb. 4.4.2.13 dargestellt. Eine quantitativ gute Übereinstimmung der gerechneten Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Zug-Prozesses nach der ersten Haltezeit kann bis ca. 0,040 Dehnung beobachtet werden. Danach treten geringe Differenzen auf, ab ca. 0,04 Dehnung erreicht die gerechnete Kennlinie ein niedrigeres Spannungsniveau. Dies wird auch durch den in Abb. 4.4.2.14 dargestellten zeitlichen Verlauf der Spannungsantwort deutlich. Darüber hinaus kann man in Abb. 4.4.2.13 erkennen, daß bedingt durch die Gleichgewichtshysterese die Verbindungslinie der gerechneten Relaxationsabbruchpunkte eine erheblich breitere Hysterese aufweist als die experimentellen Daten. Während der 5stündigen Haltezeit relaxiert die Spannung näherungsweise bis zur Gleichgewichtskennlinie. Diese Haltezeit ist in der Größenordnung der größten Relaxationszeit und erlaubt danach einen maximalen Aufbau der Spannung.

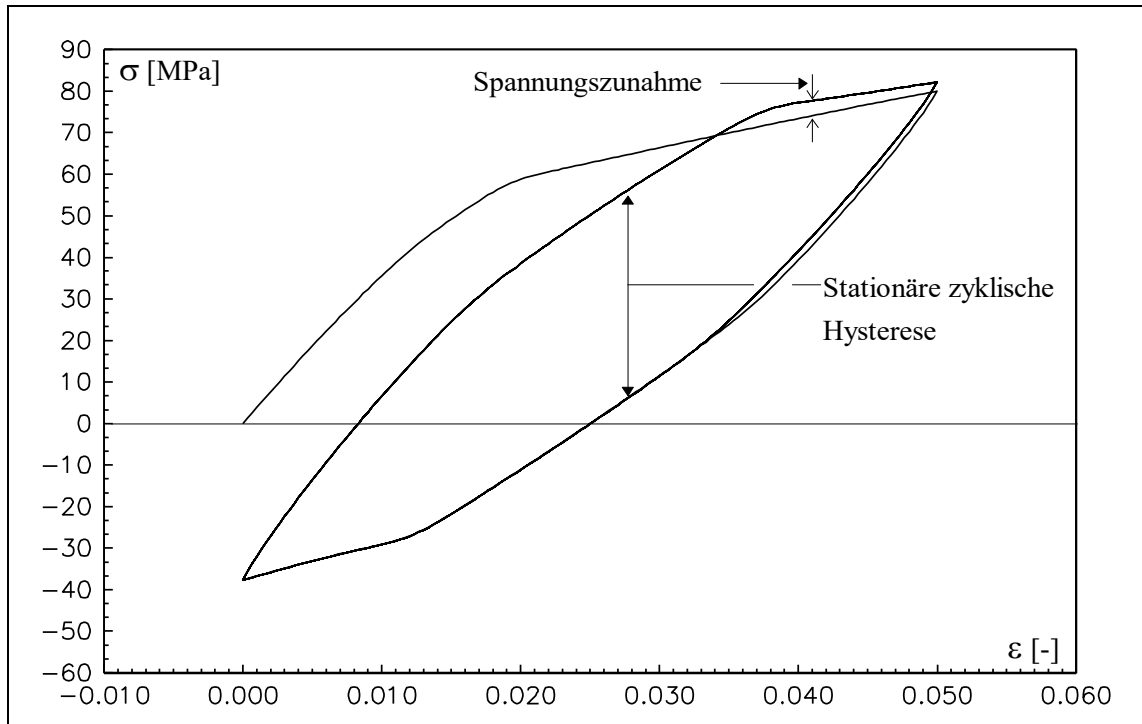


Abbildung 4.4.2.11: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5.

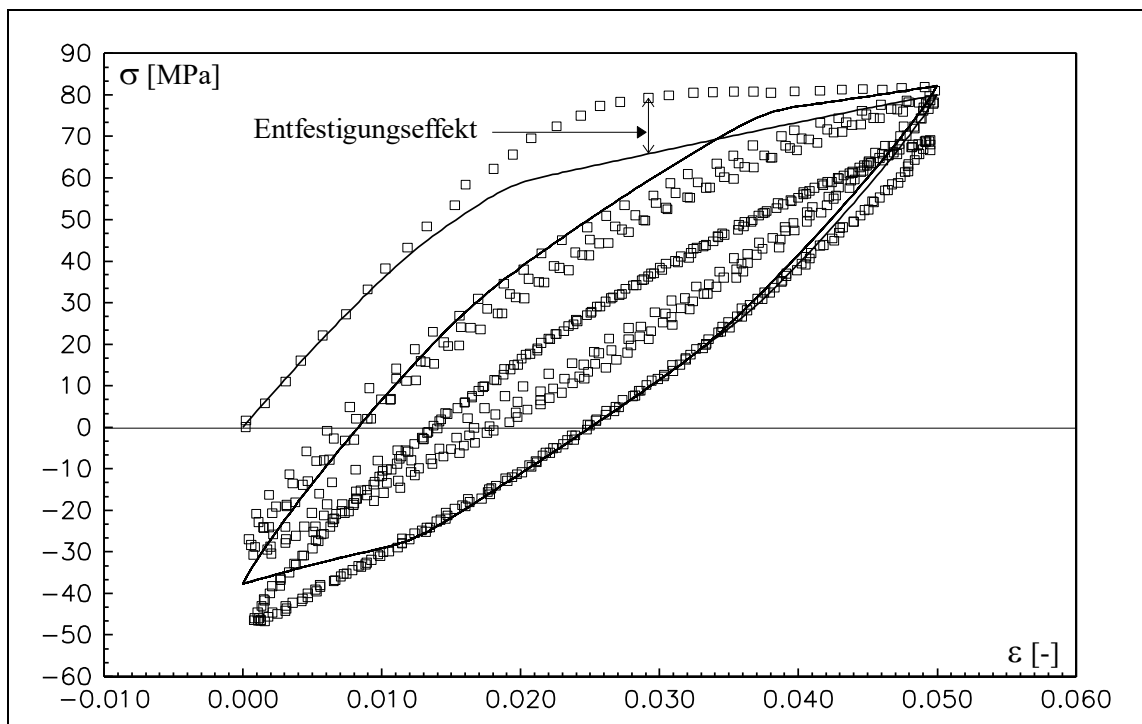


Abbildung 4.4.2.12: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr. 5 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

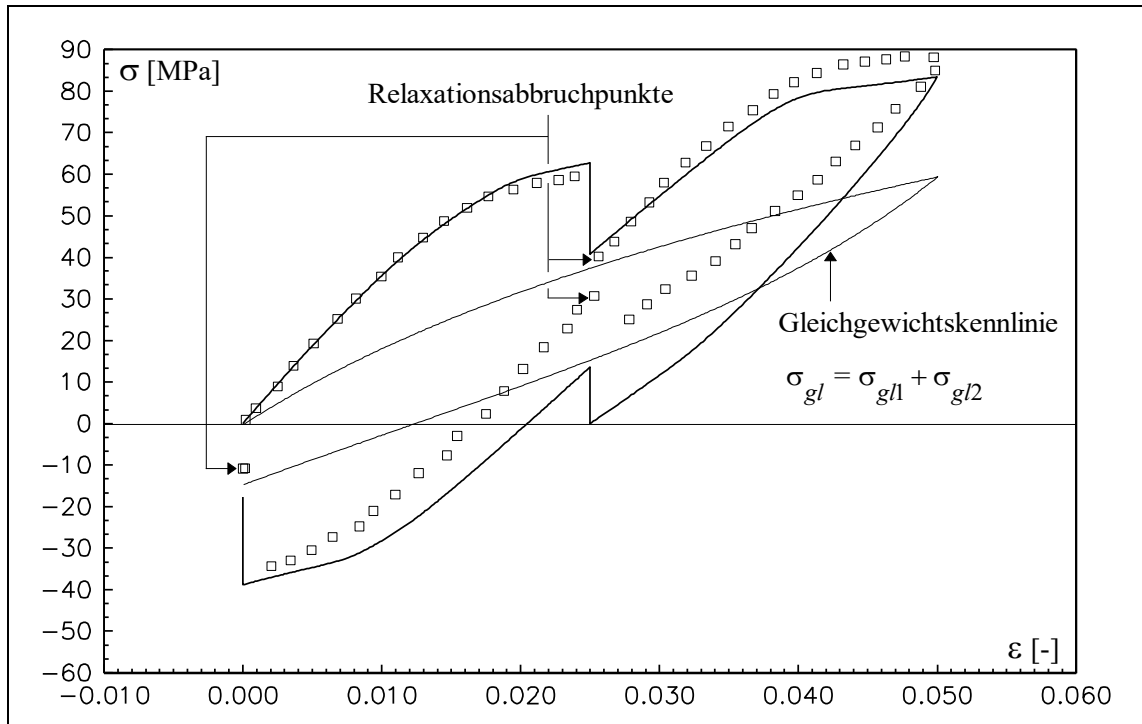


Abbildung 4.4.2.13: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.6.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

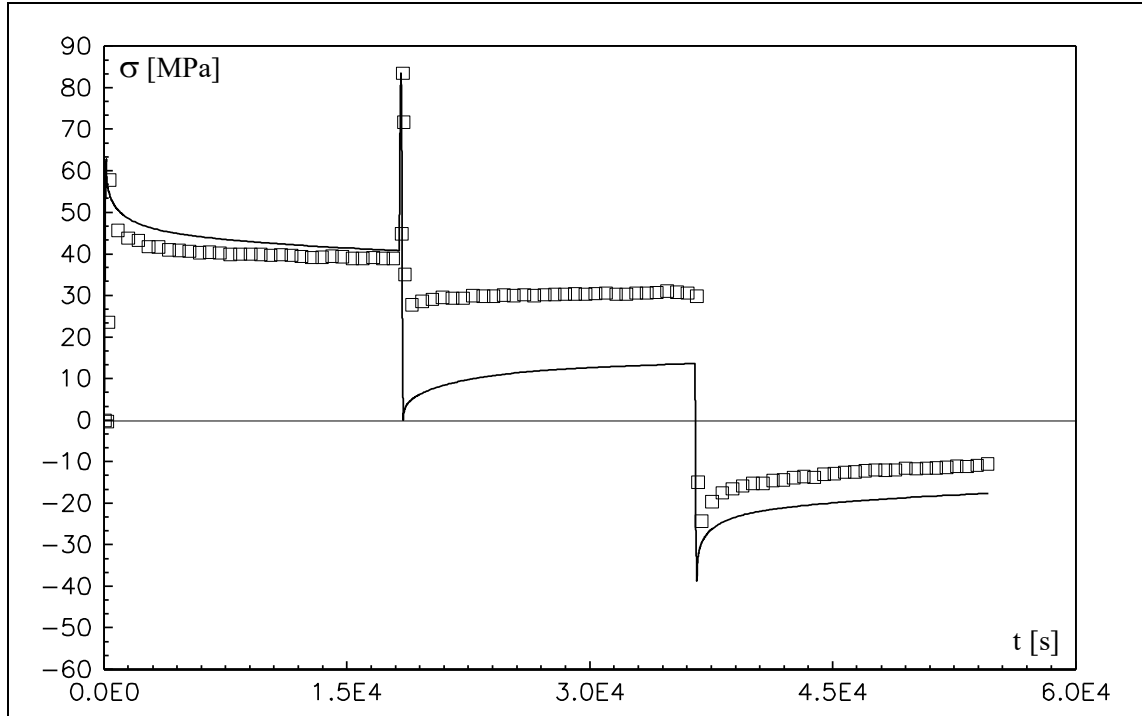


Abbildung 4.4.2.14: Spannungs-Zeit-Kennlinien des Versuch Nr.6.1 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Zeit-Punkte dieses Versuchs.

Die in den Abbildungen 4.4.2.15 und 4.4.2.16 wiedergegebene numerische Simulation der Prozesse der hintereinander geführten Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9 ermöglicht eine deutliche Veranschaulichung des Erholungseffektes bei Prozessen mit Mitteldehnung null. In Abb. 4.4.2.15 wird die numerische Simulation ohne die ermittelten Spannungs-Dehnungs-Punkte gezeigt. In diesem Fall erkennt man, daß die 10stündige Haltezeit einen ausgeprägten Erholungseffekt ermöglicht. Abb. 4.4.2.16 erlaubt einen direkten Vergleich der Simulation mit den experimentellen Daten. Dabei wird der gerechnete Relaxationsabbruchpunkt, bedingt durch die quantitativ unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Simulation und des Versuchs im Druck-Bereich, weniger angemessen wiedergegeben.

Abbildung 4.4.2.17 zeigt die gerechnete Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des Versuchs Nr. 15.14 und einige dazugehörige experimentelle Punkte. Eine zufriedenstellende Übereinstimmung kann im Zug- und Entlastungsbereich beobachtet werden. Der asymmetrische Verlauf der Gleichgewichtshysterese verursacht im Druck-Bereich ab ca. 0,04 Dehnung ein zu hohes Spannungsniveau der Kennlinien.

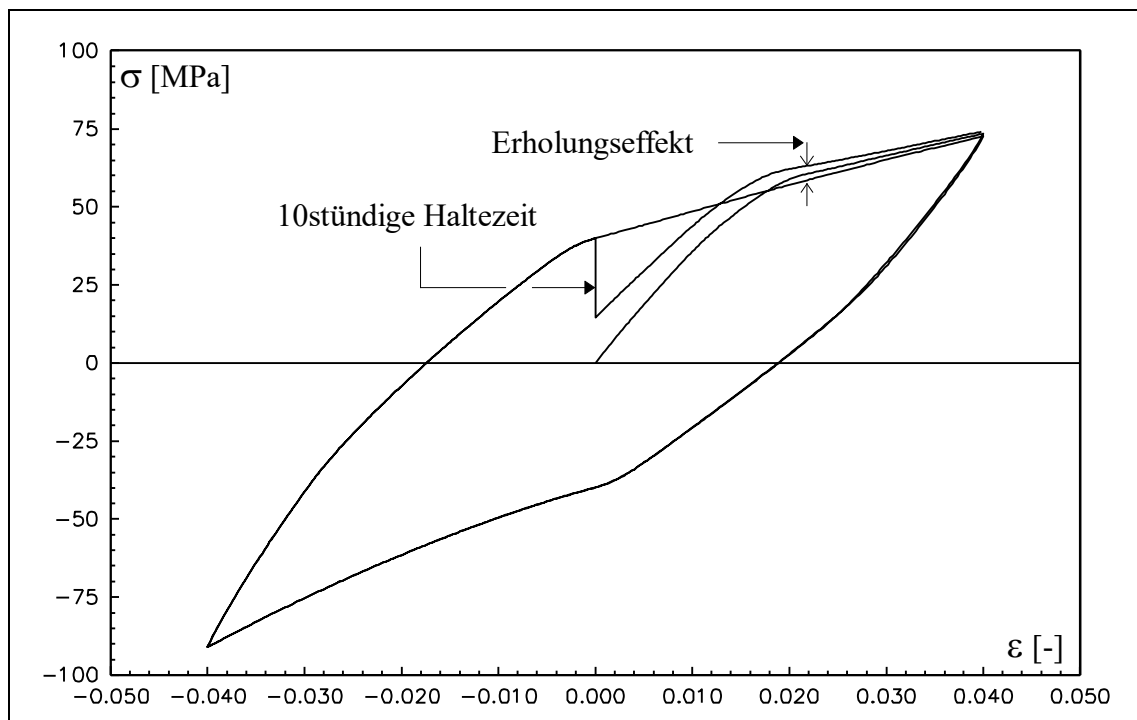


Abbildung 4.4.2.15: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und Nr.15.9.

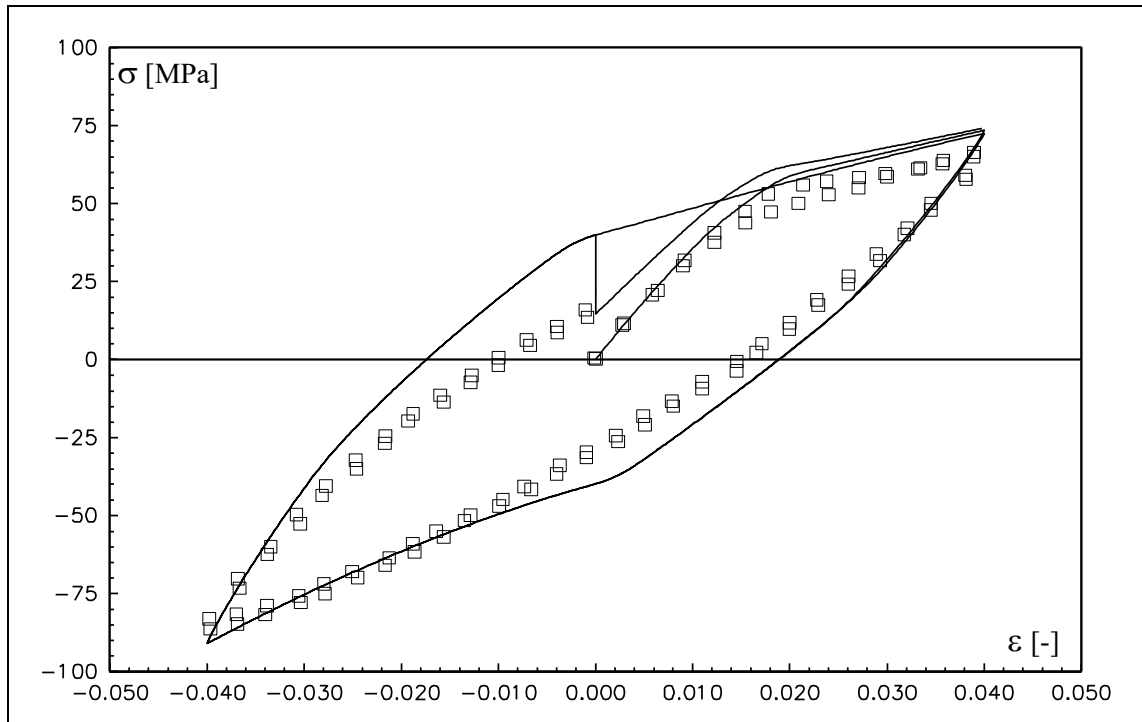


Abbildung 4.4.2.16: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation der Versuche Nr.15.8 und 15.9 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieser Versuche.

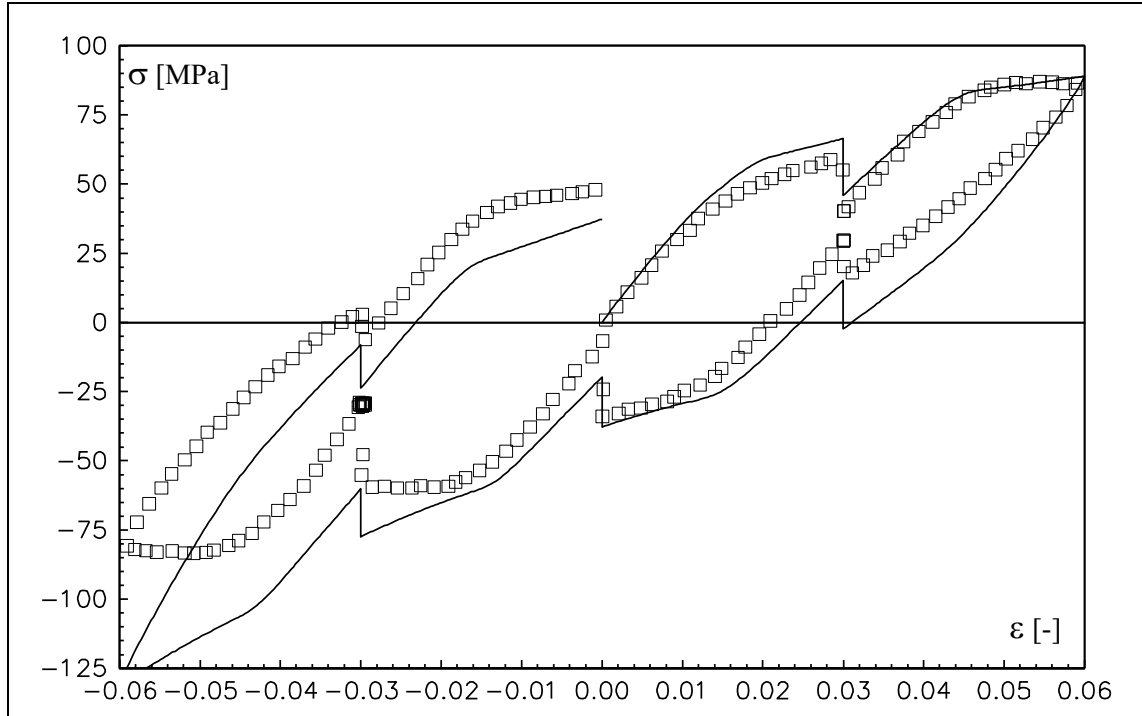


Abbildung 4.4.2.17: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der numerischen Simulation des Versuchs Nr.15.14 und einige experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Punkte dieses Versuchs.

4.5 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

- Die mathematische Beschreibung des in Kapitel 2 experimentell ermittelten Materialverhaltens und die daraus folgenden zwei unterschiedlichen Interpretationen der Relaxationsabbruchpunkte erzwangen die Konstruktion zweier unterschiedlicher Materialmodelle. Konstruiert wurde
 - 1) Ein Modell der nichtlinearen Viskoelastizität
 - 2) Ein Modell der Viskoplastizität ohne Fließfläche

Beide Modelle basieren auf der Zerlegung der Spannung in einen geschwindigkeitsunabhängigen Gleichgewichtsanteil und einen geschwindigkeitsabhängigen Überspannungsanteil. Der Gleichgewichtsanteil des viskoelastischen Modells ist eine lineare Feder, die der Elastizität entspricht. Der Gleichgewichtsanteil des viskoplastischen Modells besteht aus einer nichtlinearen Feder und einem Armstrong-Frederick-Ansatz, welcher für die geschwindigkeitsunabhängige Gleichgewichtshysterese verantwortlich ist, und stellvertretend für die Plastizität steht. Die Überspannungsanteile beider Modelle sind identisch und entsprechen in ihrer physikalischen Bedeutung einem degenerierten rheologischen 6-Parameter-Modell mit Nicht-Newtonschen Dämpfern. Die Degeneration des rheologischen Modells wird durch eine Zwangsbedingung erzeugt, die einen nichtmonotonen Spannungs-Dehnungs-Verlauf ermöglicht. In diesem Zusammenhang spielt die zweite Überspannung σ_{ii2} eine wesentliche Rolle bei der Simulation der stark veränderlichen Krümmungen der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien sowie bei der Wiedergabe der unterschiedlichen Spannungsniveaus der Prozesse mit einer und derselben Dehnungsgeschwindigkeit (s. dazu Abbildungen 2.3.33 und 2.3.34 bzw. 4.3.2.24).

- Zur Identifikation der in den Materialmodellen vorkommenden Parameter und Funktionen wurde ein Optimierungsverfahren verwendet, das auf der Evolutionstrategie beruht. Dabei wurden einige ausgewählte experimentelle Daten herangezogen. Zur Identifikation der Gleichgewichtsparameter wurden die Spannungs-Dehnungs-Relaxationsabbruchpunkte des Versuchs Nr.7 Teil 2 zugrundegelegt. Zur Identifikation der Überspannungsparameter beider Modelle hat man zunächst die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der monotonen Zug-Prozesse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (Versuche Nr.9.1 bis Nr.9.5 ohne Entlastung) benutzt. In einem weiteren Schritt wurden zur Identifikation der Überspannungsparameter des viskoelastischen Modells die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Versuche Nr.9.6 und 9.3 (mit Entlastung) herangezogen.

- Die zur Identifikation der Materialparameter herangezogenen Experimente werden von beiden Modellen angemessen wiedergegeben. Dabei ist das nichtlineare-viskoelastische Modell mit den zwei unterschiedlichen Parametersätzen in der Lage (mit geringfügigen Unterschieden), diese Experimente gut wiederzugeben. Dies ist ein Hinweis auf die Mehrdeutigkeit des Identifikationsproblems. (s. dazu Abb. 4.2.1.1, 4.2.1.2, 4.3.1.1 und 4.4.1.1 bzw. 4.4.1.3)
- Zur Vorhersagbarkeit beider Modelle sind folgende Punkte erwähnenswert:
 - 1) Sowohl das viskoplastische Modell als auch das nichtlineare-viskoelastische Modell mit den zwei Parametersätzen ist in der Lage, die höchsten Spannungsniveaus von kurzen ununterbrochenen Prozessen und die Relaxationsabbruchpunkte nach 5stündigen Haltezeiten angemessen zu simulieren. Dabei zeigt das viskoplastische Modell durch die nichtsymmetrische Gleichgewichtshysterese im Druck-Bereich eine genauere Übereinstimmung. Die unterschiedlichen Relaxationen sind beim viskoelastischen Modell ausgeprägter. (s. dazu Abbn. 4.2.2.3, 4.3.2.6 und 4.4.2.2)
 - 2) Bei der Simulation der Relaxationskennlinien zeigen beide Modelle dieselben Schwächen. Sie sind nicht in der Lage, die sehr steile Anfangssteigung der Spannungs-Zeit-Kennlinien wiederzugeben. Dies ist die Hauptursache der Verschiebung der gerechneten Kennlinie beider Modelle in Richtung größerer Spannungen. (s. dazu Abbn. 4.2.2.11, 4.3.2.13 und 4.4.2.8)
 - 3) Lediglich das viskoelastische Modell mit dem zweiten Parametersatz ist in der Lage, über einen nennenswerten Bereich der Entlastung einen geschwindigkeitsunabhängigen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien wiederzugeben. (s. dazu Abb. 4.3.2.10)
 - 4) Beide Modelle sind nicht in der Lage, die experimentell beobachtete zyklische Relaxation bei Versuchen mit Mitteldehnung zu simulieren. Dabei zeigen sie eine Spannungszunahme nach dem ersten Viertelzyklus, die experimentell nicht beobachtet wird. (s. dazu z.B. Abbn. 4.3.2.17 und 4.4.2.12). Ebenso sind beide Modelle nicht dazu geeignet, die Relaxationsabbruchpunkte der Haltezeiten nach längeren ununterbrochenen Experimenten wiederzugeben (s. dazu z.B. Abbn. 4.3.2.10 und 4.4.2.6).
 - 5) Die zyklische Hysterese wird vom viskoelastischen Modell mit den beiden Parametersätzen angemessen simuliert. Hierbei wird die Spannungsabnahme nach dem ersten Viertelzyklus gut wiedergegeben. Die Fläche der zyklischen Hysterese des viskoplastischen Modells, welche die dissipierte Energie darstellt, wird überschätzt, und die Spannungsabnahme wird unterschätzt. (s. dazu Abbn. 4.2.2.6, 4.3.2.8 und 4.4.2.4)

- 6) Der Erholungseffekt wird vom viskoplastischen Modell angemessen wiedergegeben (s. dazu Abb. 4.4.2.13 und 4.4.2.15). Das viskoelastische Modell zeigt mit dem ersten Parametersatz nach einer 10stündigen Haltezeit keinen Erholungseffekt (Abb. 4.2.2.19). Bemerkenswert ist dabei, daß beim Versuch Nr.6.1 nach einer Haltezeit der Größenordnung der Relaxationszeit z_1 eine angemessene Spannungs-Dehnungs-Kennlinie wiedergegeben wird. Dies weist daraufhin, daß das viskoelastische Modell nach einer 5-stündigen Haltezeit nicht nahe genug an den Gleichgewichtszustand gekommen ist (s. dazu Abb. 4.2.2.16 und 4.2.2.18). Mit dem zweiten Parametersatz zeigt das viskoelastische Modell eine erkennbare Erholung (s. dazu 4.3.2.21), die beim Versuch Nr.6.1 unterschätzt wird (s. dazu Abb. 4.3.2.18). Auch in diesem Fall sind die unterschiedlichen Relaxationen im Zug- und Entlastungs-Bereich beim viskoelastischen Modell ausgeprägter.
- 7) Die unterschiedlichen Spannungsniveaus bei ein und derselben Dehnungsgeschwindigkeit werden lediglich durch das viskoelastische Modell mit dem zweiten Parametersatz qualitativ wiedergegeben. Die Unterschätzung des Erholungseffekts erlaubt keine quantitativ angemessene Wiedergabe der partiellen Erholung (s. dazu Abb. 4.3.2.24). Das viskoplastische Modell, bedingt durch die zyklische Verfestigung der Gleichgewichtskennlinie, unterschätzt die zyklische Spannungsabnahme und überschätzt dadurch das Spannungsniveau wie z.B. beim Versuch Nr.15.9 (s. dazu Abb. 4.4.2.15).
- Abschließend kann folgendes bemerkt werden:
 - a) Monotone und kürzere ununterbrochene Prozesse werden vom nichtlinearen viskoelastischen Modell und vom viskoplastischen Modell gut simuliert. Hierbei wird von beiden Modellen die Geschwindigkeitsabhängigkeit angemessen wiedergegeben. In diesen Fällen wird der Erholungseffekt vom viskoplastischen Modell besser simuliert.
 - b) Zyklische und längere ununterbrochene Prozesse werden vom nichtlinearen viskoelastischen Modell angemessener simuliert, wobei insbesondere die zyklische Spannungs-Dehnungs-Hysterese und die Spannungsabnahme besser wiedergegeben werden.
 - c) Aus a) und b) folgt, daß eine eindeutige Entscheidung für das „bessere Modell“ nicht möglich ist. Lediglich im Zusammenhang mit bestimmten Eigenschaften bzw. Prozessen könnte man einen Modelltyp bevorzugen.

5. Ausblick

Aus den abschließenden Bemerkungen a) und b) von Kapitel 4 folgt, daß zu einer angemesseneren Beschreibung des Materialverhaltens das viskoplastische Modell und das nichtlineare viskoelastische Modell modifiziert werden könnten.

Die Gleichgewichtskennlinie des viskoplastischen Modells müßte dabei in der Lage sein, die experimentell beobachtete Prozeßabhängigkeit der Relaxationsabbruchpunkte (Gleichgewichtszustände) wiederzugeben (siehe dazu z.B. Punkt 9 der zusammenfassenden Interpretation der Experimente in Kap. 2). Ferner sollte die Gleichgewichtskennlinie in Kombination mit den Überspannungen dafür sorgen, daß die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie längerer ununterbrochener Prozesse besser simuliert wird (vergleiche dazu z.B. Punkt 5 der Zusammenfassung bzw. abschließende Bemerkung b) in Kap. 4). Ob eine derartige starke Prozeßabhängigkeit der Gleichgewichtskennlinie weiterhin durch geschwindigkeitsunabhängige Evolutionsgleichungen darstellbar ist, müßte näher untersucht werden. Eine angemessenere Simulation der Relaxationskennlinie könnte durch mehrere Überspannungen mit unterschiedlichen Relaxationszeiten erreicht werden (vergleiche dazu Punkt 2 der Zusammenfassung).

Beim nichtlinearen viskoelastischen Modell könnten die Materialfunktionen, die stellvertretend für die Viskosität stehen (s. dazu Gl. 3.4.2) von weiteren Variablen abhängen (wie z.B. von der Dehnung der Dämpfer), um eine genauere Wiedergabe der Prozeßabhängigkeit der Relaxationsabbruchpunkte und des Erholungseffekts zu ermöglichen. Darüber hinaus könnten diese Funktionen gezielt durch Evolutionsgleichungen ersetzt werden. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang Modelle für das thixotropische viskoelastische Verhalten (s. dazu [6, 36 und 39]). Hierbei könnten die prozeßabhängigen Viskositäten auch für eine bessere Simulation der Relaxationskennlinien beitragen, insbesondere für ihre sehr steile Anfangssteigung (s. dazu z.B. Abb. 4.3.2.13 bzw. Punkt 2 der Zusammenfassung).

Eine Aufhebung der Zweideutigkeit der physikalischen Interpretation von den Relaxationsabbruchpunkten könnte vielleicht durch zeitlich längere und genauere Relaxations-Experimente realisiert werden. Hierbei müßte zum einen sichergestellt werden, daß während dieser Experimente die Raumtemperatur konstant bleibt und zum anderen müßten genauere Messungen der relaxierten Spannungen erfolgen. Dies könnte mit Hilfe einer Temperatorkammer bzw. durch ein genaueres System der Kraftmessung erfolgen. Dabei könnte man genauere Informationen über die Gestalt der eventuell unterschiedlichen Relaxationskennlinien gewinnen, und diese mit der Prozeßabhängigkeit der Relaxationsabbruchpunkte korrelieren. Damit wäre eine experimentell fundierte Entscheidung für das viskoplastische oder für das viskoelastische Konzept möglich. Spannungsgesteuerte bzw. mehrachsige Experimente würden zu einem kompletteren Bild des Materialverhaltens vom Thermoplast Polyamid 6.6 beitragen.

Literaturverzeichnis

- [1] J. LEMAITRE AND J.-L. CHABOCHE: Mechanics of solid materials, Cambridge University Press, 1990.
- [2] G.W. EHRENSTEIN: Polymer Werkstoffe - Struktur und mechanisches Verhalten, Hanser Verlag, 1987.
- [3] K. OBERBACH: Kunststoff-Kennwerte für Konstrukteure, Hanser Verlag 1980.
- [4] C.M. BORDONARO, E. KREMPL: The Rate-Dependent Behavior of Plastics. A comparison between Nylon 6/6, Ultem and Peek, Materials and Mechanics Issues V.K. Stokes ed., MD Vol. 46, ASME New York, N.Y. 1993, 43 - 56.
- [5] A. LION: DFG-Forschungsbericht IID4 - HA 767/10 - 1 Kassel, 1992.
- [6] A. KRAWIETZ: Materialtheorie Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhalten, Springer Verlag, 1986.
- [7] P. HAUPT: On the Mathematical Modeling of Material Behavior, Acta Mechanica, 1993.
- [8] M.C. LIU, E. KREMPL: Uniaxial Viscoplastic Model based on Total Strain and Overstress, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, pp. 377 - 391, 1979.
- [9] K. HAUSLER, M. B. SAYIR: Nonlinear Viscoelastic Response of Carbon Black Reinforced Rubber derived from Moderately Large Deformations in Torsion, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 43, No. 2 pp. 295-318, 1995.
- [10] L. MULLINS: Softening of Rubber by Deformation Rubber, Chemistry and Technology 42, 339, 1969.
- [11] A. LION: A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation, Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 8, # 3, 153-169, 1996.
- [12] A. LION: Materialeigenschaften der Viskoplastizität Experimente, Modellbildung und Parameteridentifikation, Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.
- [13] J. D. FERRY: Viscoelastic Properties of Polymers, 3th Ed. John Wiley & Sons Inc., 1980.
- [14] F. R. SCHWARZL: Polymermechanik Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren, Springer Verlag, 1990.

- [15] ARTHUR V. TOBOLSKY bearbeitet und erweitert von M. HOFFMANN: Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren, Berliner Union Stuttgart, 1967.
- [16] O. T. BRUHNS, T. LEHMANN, A. PAPE: On the Description of Transient Cyclic Hardening Behavior of Mild Steel CK 15, International Journal of Plasticity, Vol. 8, 331 - 359, 1992.
- [17] C.M. BORDONARO, E. KREMPL: The Effect of Strain Rate on the Deformation and Relaxation Behavior of 6/6 Nylon at Room Temperature, Polymer Engineering and Science, Vol. 32, No. 16, August 1992.
- [18] W. N. FINDLEY, J. S. LAI AND K. ONARAN: Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic Materials With an Introduction to Linear Viscoelasticity, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [19] J. W. DALLY, W. F. RILEY, K. G. Mc. CONNEL: Instrumentation for Engineering Measurements, Wiley, 1985.
- [20] J. HEYMANN, A. LINGER: Meßverfahren der experimentellen Mechanik, Springer-Verlag, 1986.
- [21] S. STAMPFER, G. W. EHRENSTEIN: Einfluß des Molekulargewichts und des Glasfasergehalts auf das Kriechen von Thermoplasten, Glasfaserverstärkte Thermoplaste, 372 - 378 GAK., 6/1995.
- [22] C. G' SELL, J. J. JONAS: Journal of Materials Science, 16, 1956 - 1974, 1981.
- [23] B. SARABI: Das Anstrengungsverhalten von Polymerwerkstoffen infolge ein- und zweiachsigen Kriechens Ermittlung von Lanzeitbemessungskennwerten, Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, 1984.
- [24] J. F. BELL: Handbuch der Physik, Band VIa/1, Festkörpermechanik I, Springer-Verlag, 1973.
- [25] N. W. TSCHOEGL: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior An Introduction, Springer-Verlag, 1989.
- [26] W. FLÜGGE: Viscoelasticity, Second Edition, Springer-Verlag, 1975.
- [27] R. M. CHRISTENSEN: Theory of Viscoelasticity An Introduction Second Edition Academic Press, 1982.

- [28] M. KORZEN: Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom Viskoelastisch-Plastischen Typ, Dissertation, Darmstadt 1989, D 17.
- [29] G. A. MAUGIN, W. MUSCHIK: Thermodynamics with Internal Variables Part I. General Concepts, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, Vol. 19, pages 217 - 249, 1994.
- [30] N. ILIAS: Zur numerischen Behandlung gekoppelter thermoviskoelastischer Probleme, Dissertation, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 159. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1994.
- [31] P. GUMMERT: Materialgesetze des Kriechens und Relaxation, Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 5 Nr. 38. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1978.
- [32] P. HAUPT: Viskoelastizität und Plastizität Thermomechanisch konsistente Materialgleichungen, Berlin/Heidelberg Springer-Verlag, 1977.
- [33] C. TSAKMAKIS: Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen, Habilitationsschrift, Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.
- [34] E. KREYSZIG: *Matemática Superior*, 2^a edição, Livros Técnicos e Científicos S.A., 1985.
- [35] S. STAUS: Analytische und numerische Untersuchungen eines Materialmodells der nichtlinearen Viskoelastizität, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1990.
- [36] D. C.-H. CHENG: Yield stress: A time-dependent property and how to measure it, *Rheol. Acta* 25: 542 - 554, 1986.
- [37] A. BERKER, W.E. VANARSDALE: Phenomenological models of viscoplastic, thixotropic, and granular materials, *Rheol. Acta* 31: 119 - 138, 1992.
- [38] M. KORZEN, P. HAUPT: Abschlussbericht zum Forschungsprojekt „Materialgleichungen der Viskoplastizität“ - Vergleichende Darstellung und Diskussion.
- [39] D. C.-H. CHENG, F. EVANS: Phenomenological characterization of the rheological behavior of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids, *Brit. J. Appl. Phys.*, Vol 16, 1965.
- [40] A. LION: A Physically based Method to represent the Thermomechanical behaviour of Elastomers, accepted for publication, *Acta Mechanica*, 1996.
- [41] A. R. JOHNSON AND C. J. QUIGLEY: A Viscohyperelastic Maxwell Model for Rubber Viscoelasticity, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol 65., Nr. 1, pp. 137 - 153, 1992.

- [42] L. MASCIA: Thermoplastics Materials Engineering, Second Edition, Elsevier Applied Science, 1989.
- [43] P. J. ARMSTRONG, C. O. FREDERICK: A mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, G.E.G.D. Report RD/D/N 731, 1996.
- [44] E. KREMPL, J. J. MC MAHON, D. YAO: Viscoplasticity based on Overstress with a differential Growth Law for the Equilibrium Stress, Mechanics of Materials, Vol. 5, pp. 35 - 48, 1986.
- [45] P. HAUPT, M. KORZEN: On the Mathematical Modeling of Material Behavior in Continuum Mechanics, Advances in Constitutive Laws for Engineering Vol. 56, 289 - 299, 1982.
- [46] A. C. PIPKIN, R. S. RIVLIN: Mechanics of Rate-Independent Materials, Z. Angew. Math. Phys., Vol 16, pp 313 - 326, 1995.
- [47] K. C. VALANIS: A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface, Part 2, Archives of Mechanics Vol. 23, 4, pp. 535 - 551, 1971.
- [48] C. J. FAZIO: Eine Untersuchung der Grundlagen der endochronen Plastizitätstheorie und ihre Übertragung auf große Deformationen, sowie ein Vergleich mit herkömmlichen Plastizitätstheorien, Dissertation, TH Darmstadt, 1987.
- [49] L. SCHREIBER: Parameteridentifikation bei Stoffmodellen mit der Evolutionsstrategie, Z. angew. Math. Mech., Vol. 73 4 - 5, pp. 343 - 345, 1993.
- [50] I. RECHENBERG: Evolutionsstrategie, Friedrich Fromman Verlag Stuttgart - Bad Cannstadt, 1973.
- [51] A. SCHEEL: Beitrag zur Theorie der Evolutionsstrategie, Dissertation, TU Berlin, 1985.
- [52] P. HAUPT, M. KAMLAH, CH. TSAKMAKIS: Continuous Representation of Hardening Properties in Cyclic Plasticity, International Journal of Plasticity, Vol. 8, pp. 803 - 817, 1992.
- [53] M. KAMLAH: Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik, Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.

- [54] P. E. SENSENY, N. S. BRODSKY, K. L. DEVRIES: Parameter Evaluation for a Unified Constitutive Model, *Journal of Engineering materials and Technology*, Vol. 115, 157 - 162 Transactions of the ASME, 1993.
- [55] J. M. G. COWIE: *Chemie und Physik der Polymeren Eine Einführung*, Verlag Chemie Weinheim, 1976.
- [56] P. HAUPT: *Viskoelastizität inkompressibler isotroper Stoffe: Approximation der Allgemeinen Materialgleichung und Anwendungen*, Dissertation, Technische Universität Berlin, 1971.
- [57] F. J. LOCKETT: *Nonlinear Viscoelastic Solids*, Academic Press, 1972.
- [58] C. F. POPELAR AND C. H. POPELAR AND V. H. KENNER: Viscoelastic Material Characterization and Modeling for Polyethylene, *Polymer Engineering and Science*, Vol. 30, No. 10, 1990.
- [59] J. S. DENATALE: Computer-Aided Calibration of Constitutive Models, *Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications*, 1181-1188, Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1987.
- [60] H. P. SCHWEFEL: *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie*, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1977.
- [61] A. LION: On the Thermodynamics of Fractional Damping Elements within the Framework of Rheological Models, eingereichte Arbeit.
- [62] JU. N. RABOTNOW, A. A. ILJUSCHIN: *Methoden der Viskoelastizitätstheorie*, Carl Hanser Verlag, München, 1970.
- [63] M. B. RUGGLES, S. CHENG AND E. KREMPL: The rate-dependent mechanical behavior of modified 9wt.%Cr-1wt.%Mo steel at 538 °C, *Materials Science and Engineering*, A 186, 15-21, Elsevier Sequoia, 1994.
- [64] P. S. MAJORS AND E. KREMPL: The isotropic viscoplasticity theory based on overstress applied to the modeling of 9wt.%Cr-1wt.%Mo steel at 538 °C, *Materials Science and Engineering*, A 186, 15-21, Elsevier Sequoia, 1994.
- [65] J. A. C. HARWOOD AND A. SCHALLAMACH: Dynamic Behavior of Natural Rubber during Large Extensions, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 11, 1835-1850, 1967.

- [66] J. A. C. HARWOOD AND A. R. PAYNE: Stress Softening in Natural Rubber Vulcanizates. Part IV. Unfilled Vulcanizates.
- [67] R. C. KOELLER: Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, 299-307, 1984.
- [68] M. CAPUTO, F. MAINARDI: Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Il Nuovo Cimento (Ser. II)*, Vol. 1, pp 161-198, 1971.
- [69] A. R. PAYNE: A Note on the Existence of a Yield Point in the Dynamic Modulus of Loaded Vulcanizates, *Research Association of British Rubber Manufacturers*, 1959.
- [70] A. K. LOUIS: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner Studienbücher, Stuttgart 1989.
- [71] R. O'NEIL: Function Minimization using a Simplex Procedure, *Journal of Applied Statistics*, Vol. 20, No.3, 1971.
- [72] J. U. JU, J. C. SIMO, K. S. PISTER, R. L. TAYLOR: *A Parameter Estimation Algorithm for Inelastic Material Models, Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- [73] A. BLEDZKI: *Polymerwerkstoffe mit speziellen Eigenschaften*, Vorlesungsskript.
- [74] L. E. MALVERN: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
- [75] C. TRUESDELL; W. NOLL: *Nonlinear Field Theories of Mechanics*, *Handbuch der Physik* III/2, S. Flügge, Springer Verlag Berlin, 1965.
- [76] H. GIESEKUS: *Phänomenologische Rheologie Eine Einführung*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg 1994.
- [77]

Anhang

Die dreidimensionale Darstellung des viskoelastischen Modells wird durch Ersetzen der Größen σ und ε durch den Cauchyschen Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und den linearisierten Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$ erreicht. Man erhält:

$$\underline{\underline{T}}(t) = \underline{\underline{T}}_{gl} + \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}}(t) \quad \text{A.1}$$

$$\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}}(t) = \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}(t) + \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}2}(t) \quad \text{A.2}$$

$$\underline{\underline{T}}_{gl} = 2\mathbf{G} \left[\underline{\underline{E}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{1}} \right] \quad \text{A.3}$$

$$\dot{\underline{\underline{T}}}_{\ddot{u}1}^d(t) = 2\mathbf{G}_1 \dot{\underline{\underline{E}}}_{\ddot{u}1}^d(t) - \frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1 \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}^d\|} \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}^d \quad \text{A.4a}$$

$$\dot{\underline{\underline{T}}}_{\ddot{u}2}^d(t) = \frac{\mathbf{G}_2}{\mathbf{G}_1} \dot{\underline{\underline{T}}}_{\ddot{u}1}^d(t) - \left[\frac{1}{z_1 \mathbf{M}_1 \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}^d\|} + \frac{1}{z_2 \mathbf{M}_2 \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}2}^d\|} \right] \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}2}^d \quad \text{A.4b}$$

$$\mathbf{M}_1 \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}^d\| = e^{-\left(\frac{\|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}1}^d\|}{s_1}\right)^n} \quad \text{A.2}$$

$$\mathbf{M}_2 \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}2}^d\| = e^{-\left(\frac{\|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}2}^d\|}{s_2}\right)^m} \quad \text{A.2}$$

Dabei gilt

$$\underline{\underline{T}}^d = \underline{\underline{T}} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{\underline{T}}) \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{E}}^d = \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{1}} \quad \text{und} \quad \|\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}}^d\| = \sqrt{\text{Sp}(\underline{\underline{T}}_{\ddot{u}}^d \underline{\underline{T}}_{\ddot{u}}^d)},$$

das heißt, daß die Überspannungen keine Volumenänderungen erzeugen.

Gleichung A.3 ist das sogenannte verallgemeinerte Hookesche-Elastizitätsgesetz. Der Parameter \mathbf{G} steht stellvertretend für den Gleichgewichtsschubmodul. Die Parameter \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 entsprechen Überspannungsmoduli und die Funktionen \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 sind Materialfunktionen, die in exponentieller Form von der Norm des Spannungstensors abhängen.

Das dreidimensionale viskoplastische Modell lautet:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}}(t) \quad \text{A.6}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl1} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl2} \quad \text{A.7}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}(t) + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}2}(t) \quad \text{A.8}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}_{gl1}(t) = \mathbf{E}\underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(t) - \mathbf{EK}\sqrt{\frac{3}{2}}|\underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(t)|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl1} \quad \text{A.9}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{gl2} = \mathbf{f}\left(\mathbf{I}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\right)\left[\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \frac{\mathbf{v}}{1-2\mathbf{v}}Sp\left(\underline{\underline{\mathbf{E}}}\right)\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right] \quad \text{A.10}$$

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{I}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\right) = \frac{1-2\mathbf{v}}{\mathbf{c}(1+\mathbf{v})\mathbf{I}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}}\left[1 - e^{-\check{\mathbf{E}}\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{I}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}}{1-2\mathbf{v}}\right)}\right] \quad \text{A.10b}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}_{\ddot{u}1}^d(t) = 2\mathbf{G}_1\underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}^d(t) - \frac{1}{z_1\mathbf{M}_1\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}^d\|}\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}^d \quad \text{A.11a}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}_{\ddot{u}2}^d(t) = \frac{\mathbf{G}_2}{\mathbf{G}_1}\underline{\underline{\dot{\mathbf{T}}}}_{\ddot{u}1}^d(t) - \left[\frac{1}{z_1\mathbf{M}_1\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}^d\|} + \frac{1}{z_2\mathbf{M}_2\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}2}^d\|}\right]\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}2}^d \quad \text{A.11b}$$

$$\mathbf{M}_1\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}^d\| = e^{-\left(\frac{\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}1}^d\|}{s_1}\right)^n} \quad \text{A.12a}$$

$$\mathbf{M}_2\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}2}^d\| = e^{-\left(\frac{\|\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\ddot{u}2}^d\|}{s_2}\right)^m} \quad \text{A.12b}$$

In diesem Fall bestimmen die Gleichungen A.9 und A.10 die Gleichgewichtskennlinien. Dabei sind \mathbf{E} , \mathbf{K} , $\check{\mathbf{E}}$, \mathbf{C} und \mathbf{v} Materialparameter. Die Funktion $\mathbf{f}\left(\mathbf{I}_{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}\right)$ ist eine Materialfunktion, die von der ersten Invarianten des Verzerrungstensors abhängt und so bestimmt wird, daß für den einachsigen Zug die Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Gl. 3.4.2.5e wiedergegeben wird. Die Differentialgleichungen und Materialfunktionen der Überspannungen bleiben erhalten.