

Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann
Fachgebiet Baustatik
Fachbereich 14 Bauingenieurwesen

U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T

Diplomarbeit 2

Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen

von

Oliver Carl

Bearbeitungszeit: 13. Mai 2004 bis 04. August 2004

Betreuer:
Prof. Dr.-Ing. F. Hartmann

2. Prüfer:
Prof. Dr.-Ing. W. Seim

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Gliederung	5
2	Theoretische Grundlagen	7
2.1	Der Satz von Betti	7
2.2	Die schwache Formulierung	10
2.3	Die Einflussfunktion	12
2.3.1	Einflussfunktionen in der Statik	13
2.3.2	Rechenregeln für die Diracsche-Delta-Funktion	15
2.4	Die Methode der finiten Elemente	18
2.4.1	Einflussfunktionen und finite Elemente	20
3	Steifigkeitsänderungen und Einflussfunktionen	26
3.1	Änderungen der Lagersteifigkeiten	30
3.1.1	Grundlagen der Theorie am elastisch gelagerten Kragträger	31
3.1.2	Lagerausfall am elastische gelagerten Kragträger	38
3.1.3	Ausfall eines Lagers am Durchlaufträger	40
3.1.4	Schubstarre Platte	46
3.1.5	Scheibe	51
3.2	Änderungen der Biegesteifigkeiten	55
3.2.1	Grundlagen der Theorie am einseitig eingespannten Einfeldträger	55
3.2.2	Bestimmung der Änderung von Punktgrößen mittels 'Randintegralen'	60
3.2.3	Ebenes Fachwerk	62
3.2.4	Ausfall eines Stabes in einem Fachwerk	64
3.2.5	Rahmentragwerk	66
3.2.6	Ausfall eines Balkens in einem Rahmentragwerk	67
3.2.7	Schubstarre Platte	71
3.2.8	Scheibe	75

4	Numerische Ergebnisse	78
4.1	Darstellungsform der Ergebnisse	78
4.2	Änderung von Lagersteifigkeiten	79
4.2.1	Beispiel - Durchlaufträger	80
4.2.2	Möglichkeit zur Vereinfachung der Berechnungen	82
4.2.3	Beispiel - Durchlaufträger mit Lagerausfall	85
4.2.4	Beispiel 1 - Platte	87
4.2.5	Beispiel 2 - Platte	90
4.2.6	Beispiel - Wandscheibe	95
4.3	Änderung von Biegesteifigkeiten	97
4.3.1	Beispiel - Durchlaufträger	97
4.3.2	Lösung mittels 'Randintegralen' am Beispiel des Balkens	100
4.3.3	Beispiel - Ebenes Fachwerk	102
4.3.4	Beispiel - Ausfall eines Fachwerkstabes	105
4.3.5	Beispiel - Rahmentragwerk	108
4.3.6	Beispiel - Platte	111
4.3.7	Beispiel - Platte mit Öffnung	116
5	Zusammenfassung	119

1 Einleitung

Treten in einem Tragwerk Steifigkeitsänderungen auf, resultieren daraus auch meist Änderungen in den Lager- und Schnittkräften und es ergeben sich unterschiedliche Verformungen. Die Intensität dieser Änderungen ist ganz wesentlich von dem Typ der jeweiligen Einflussfunktion abhängig, der zu einer Weg- oder Kraftgröße gehört.

Einflussfunktionen für Weggrößen besitzen einen verhältnismäßig großen Einzugsbereich, im Gegensatz zu Einflussfunktionen für Kraftgrößen. Diese sammeln sich stärker in lokalen Bereichen. Aus diesem Grund werden sich auch Steifigkeitsänderungen in Momenten und Querkräften nur lokal bemerkbar machen.

In der Baustatik hat sich in den letzten Jahren zunehmend der Einsatz von computerorientierten Berechnungsverfahren zur Ermittlung von Lager- und Schnittkräften an Tragwerken durchgesetzt. Eine interessante Weiterentwicklung dieser computerorientierten Berechnungen wäre die Berücksichtigung von Steifigkeitsänderungen in bestimmten Bereichen eines Tragwerks durch eine entsprechende Eingabe und die Darstellung der daraus resultierenden Änderungen in den Lager- und Schnittkräften.

In dieser Arbeit wird dargestellt, auf welche Weise man den Einfluss von Steifigkeitsänderungen auf Weg- oder Kraftgrößen bestimmen kann.

Berücksichtigt werden Steifigkeitsänderungen eines Punktlagers, z.B. an einem Durchlaufträger und Steifigkeitsänderungen in einem bestimmten Bereich, z.B. die Lagerung einer Platte auf Wänden. Darüberhinaus wird auch der komplette Ausfall eines Punktlagers oder einer Wand bei der Herleitung berücksichtigt.

Außerdem wird dargestellt, wie man Dehn- oder Biegesteifigkeitsänderungen in einzelnen Stäben, Balken und Bereichen einer Platte oder Scheibe berücksichtigen kann. Auch für den Ausfall eines Stabs in einem ebenen Fachwerk oder eines Balkens in einem Rahmentragwerk werden Formeln hergeleitet, mit denen man die Änderung einer Punktgröße für diesen Fall ermitteln kann.

Die hergeleiteten Formeln basieren auf der schwachen Formulierung, die mit-

tels partieller Integration aus der Differentialgleichung hervorgeht,

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}).$$

Man betrachtet den Unterschied der inneren Energie eines ungeschwächten Systems 1 und eines geschwächten Systems 2 und setzt anstelle der virtuellen Verrückung \hat{w} , die Einflussfunktion für die gesuchte Weg- oder Kraftgröße im System 1 ein.

Das Ergebnis der Herleitung ist eine Gleichung, mit der man Steifigkeitsänderungen in Tragwerken und deren Einfluss auf Punktgrößen berücksichtigen kann.

1.1 Gliederung

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen, die für eine Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen von Bedeutung sind.

Zu Beginn wird der Satz von Betti an einem Balken hergeleitet, mit dessen Hilfe man einen allgemeinen Zugang zu den Einflussfunktionen erhält.

Darüberhinaus wird der Begriff der schwachen Formulierung erläutert und die Erzeugung von Einflussfunktionen durch aufbringen von Singularitäten dargestellt.

Nachfolgend wird der Ansatz für die Methode der finiten Elemente betrachtet und die Vorgehensweise zur Erzeugung von Einflussfunktion mit der FE-Methode und deren Bedeutung im Hinblick auf die ermittelten FE-Lösungen beschrieben.

In **Kapitel 3** werden aus der Betrachtung der schwachen Formulierung Formeln hergeleitet, mit deren Hilfe man den Einfluss von Steifigkeitsänderungen auf Weg- und Kraftgrößen an unterschiedlichen Tragwerken bestimmen kann. Ebenso wird der Ausfall von Lagerungen oder eines Bauteils untersucht und die daraus resultierende Änderung der Verformung und der Schnittkräfte dargestellt.

In **Kapitel 4** wird eine numerische Umsetzung des Konzepts an unterschiedlichen Tragwerken dargestellt. Es werden die Änderungen von Lagersteifig-

keiten, der Ausfall einer Lagerung, die Änderung von Dehn- und Biegesteifigkeiten und der Ausfall ganzer Bauteile mit Hilfe von mehreren Programmen untersucht.

Kapitel 5 beinhaltet eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen bereitgestellt, die für die Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen von Bedeutung sind.

Zu Beginn werden die Greenschen Identitäten für den Balken formuliert.

Als nächstes wird der Begriff 'schwache Formulierung' erläutert. Die 'schwache Formulierung' wird mittels partieller Integration aus der Differentialgleichung hergeleitet und bildet die Basis für die späteren Herleitungen der Steifigkeitsänderungen.

Im Abschnitt Einflussfunktionen wird die Anwendung und die Erzeugung von Einflussfunktionen durch aufbringen einer Singularität beschrieben, wobei man die Diracsche-Delta-Funktion anwendet.

Und schließlich wird der Ansatz der Methode der finiten Elemente und die Vorgehensweise angegeben, um mittels der FE-Methode eine genäherte Einflussfunktion zu erzeugen. Die Methode der finiten Elemente wird aus dem Grund dargestellt, weil der Einfluss von Steifigkeitsänderungen auf Punktgrößen, deren Grundlagen in dieser Arbeit hergeleitet werden, später einmal in FE-Programmen implementiert werden könnte und dadurch eine nützliche Anwendung für den Benutzer wäre.

2.1 Der Satz von Betti

Der Satz von Betti besitzt in der Statik eine zentrale Bedeutung. Mittels des Satzes von Betti kann man alle Weg- oder Kraftgrößen eines Tragwerks bestimmen. Unter anderem beruht auch die Methode der Randelemente, [9], auf diesem Satz.

Mit seiner Hilfe kann man aber auch einen allgemeinen Zugang zu den Einflussfunktionen erhalten, siehe Kapitel 2.3.1.

Im folgenden wird der Satz von Betti beispielhaft für einen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI hergeleitet.

Die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens genügt der Differentialgleichung

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad \forall x \in [0, l]. \quad (2.1)$$

Zwängt man dem Balken nun eine virtuelle Verrückung $\hat{w}(x)$ auf, dann erhält man für die virtuelle äußere Arbeit der Belastung $p(x)$ auf den virtuellen Wegen $\hat{w}(x)$ das Integral

$$\int_0^l EI w^{IV}(x) \hat{w}(x) dx. \quad (2.2)$$

Durch Umformung mittels zweimaliger partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^l EI w^{IV}(x) \hat{w}(x) dx &= [-EI w'''(x) \hat{w}(x) + EI w''(x) \hat{w}'(x)]_0^l \\ &+ \int_0^l EI w''(x) \hat{w}''(x) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Für die Querkraft gilt $Q(x) = -EI w(x)'''$ und für das Biegemoment $M(x) = -EI w(x)''$. Setzt man die Gleichungen in (2.3) ein, entspricht dies in der Statik dem Prinzip der virtuellen Verrückungen und in der Mathematik der ersten Greenschen Identität

$$\begin{aligned} G(w, \hat{w}) &= \underbrace{\int_0^l p(x) \hat{w}(x) dx + [Q(x) \hat{w}(x) - M(x) \hat{w}'(x)]_0^l}_{\text{virtuelle äußere Arbeit}} \\ &- \underbrace{\int_0^l \frac{M(x) \hat{M}(x)}{EI} dx}_{\text{virtuelle innere Arbeit}} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierbei müssen die Glattheitsforderungen

$$w(x) \in C^4 [0, l] \quad \text{und} \quad \hat{w}(x) \in C^2 [0, l]$$

erfüllt sein. Mit C bezeichnet man den Raum der stetigen Funktionen. C^2 und C^4 bedeutet, dass die zweite bzw. vierte Ableitung der Funktion noch stetig sein muss.

Die erste Greensche Identität in der Darstellungsweise von (2.4) entspricht dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, $\delta A_a = \delta A_i$, mit den virtuellen äußeren Arbeiten

$$\delta A_a = \int_0^l p(x) \hat{w}(x) dx + [Q(x) \hat{w}(x) - M(x) \hat{w}'(x)]_0^l := (p, \hat{w}) \quad (2.5)$$

und den virtuellen inneren Arbeiten

$$\delta A_i = \int_0^l \frac{M(x) \hat{M}(x)}{EI} dx := a(w, \hat{w}). \quad (2.6)$$

Vertauscht man die Plätze von $w(x)$ und $\hat{w}(x)$, erhält man das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\begin{aligned} G(\hat{w}, w) &= \int_0^l \hat{p}(x) w(x) dx + [Q(\hat{x}) w(x) - \hat{M}(x) w'(x)]_0^l \\ &\quad - \int_0^l \frac{\hat{M}(x) M(x)}{EI} dx = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\forall \hat{w} \in C^4 [0, l] \quad \text{und} \quad w \in C^2 [0, l].$$

Subtrahiert man die beiden Identitäten,

$$B(w, \hat{w}) = G(w, \hat{w}) - G(\hat{w}, w) = 0, \quad (2.8)$$

so erhält man den Satz von Betti, die zweite Greensche Identität

$$\begin{aligned} B(w, \hat{w}) &= \int_0^l p(x) \hat{w}(x) dx + [Q(x) \hat{w}(x) - M(x) \hat{w}'(x)]_0^l \\ &\quad - [w(x) \hat{Q}(x) - w'(x) \hat{M}(x)]_0^l - \int_0^l w(x) \hat{p}(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Der Satz von Betti besagt, dass die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems auf den Wegen des zweiten Systems leisten, gleich den Arbeiten sind,

die die Kräfte des zweiten Systems auf den Wegen des ersten Systems leisten, [8], S. 56 ff.. Man bezeichnet den Satz von Betti auch als Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeiten.

$G(w, \hat{w}) = 0$	Prinzip der virtuellen Verrückungen
$G(\hat{w}, w) = 0$	Prinzip der virtuellen Kräfte
$B(w, \hat{w}) = G(w, \hat{w}) - G(\hat{w}, w) = 0$	Satz von Betti

Tab. 2.1: Zusammenfassung der Greenschen Identitäten.

Die Herleitung des Satzes von Betti kann für die unterschiedlichsten Differentialgleichungen erfolgen, die in [8] angegeben sind.

2.2 Die schwache Formulierung

In diesem Abschnitt wird der Begriff der schwachen Formulierung erläutert. Die schwache Formulierung für den Balken, $a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w})$, erhält man aus der zweimaligen partiellen Integration der Differentialgleichung. Die mathematischen Grundlagen sind in [13] dargestellt.

Die Differentialgleichung aus (2.1) steht für das Gleichgewicht des Balkens im klassischen Sinn. Unter Beachtung aller geometrischen und statischen Randbedingungen erhält man als Lösung die Biegelinie $w(x)$ eines Balkens. Man löst also ein Randwertproblem, wobei alle möglichen Biegelinien $w(x)$ den unendlich dimensionalen Verformungsraum V bilden.

Alternativ zu diesem Lösungsprinzip kann gezeigt werden, dass man das ursprüngliche Randwertproblem mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen als ein Variationsproblem formulieren kann. Dazu schränkt man die virtuellen Verrückungen $\hat{w}(x)$ des Balkens auf sogenannte zulässige Verrückungen ein, die mit den Lagerbedingungen verträglich sind. Der Einfachheit halber ein gelenkig gelagerter Balken auf starren Lagern, siehe Abb. 2.1.

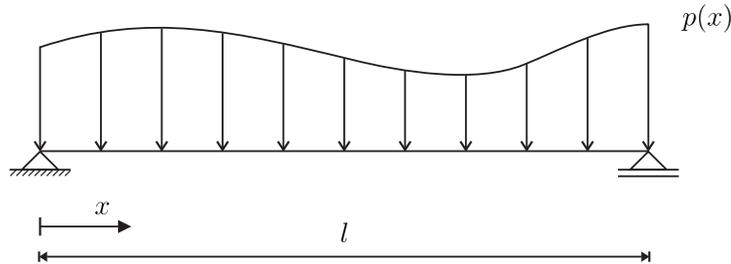


Abb. 2.1: Balken mit konstanter Biegesteifigkeit.

Desweiteren führt man für die virtuelle innere Arbeit oder auch Wechselwirkungsenergie zwischen $w(x)$ und der virtuellen Verrückung $\hat{w}(x)$

$$\delta A_i = a(w, \hat{w}) = \int_0^l \frac{M(x)\hat{M}(x)}{EI} dx = \int_0^l EI w''(x) \hat{w}''(x) dx \quad (2.10)$$

ein, siehe auch (2.6), und für die virtuelle äußere Arbeit, (2.5),

$$\delta A_a = (p, \hat{w}) = \int_0^l p(x) \hat{w}(x) dx. \quad (2.11)$$

Das Variationsproblem lautet somit, [5]:

Finde eine Biegelinie $w(x) \in V$, welche die Variationsgleichung

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad (2.12)$$

für alle $\hat{w}(x) \in V$ erfüllt.

Man erreicht einen Gleichgewichtszustand, in dem der Balken alle nötigen Tests durch die Testfunktion $\hat{w}(x)$ aus dem unendlich dimensionalen Funktionenraum V besteht.

Die Variationsaussage und die Differentialgleichung gehen mittels partieller Integration auseinander hervor. Beide Formulierungen sind gleichwertig.

Alle denkbaren Lösungen der Variationsgleichung (2.12), wie z.B. die FE-Lösungen, werden als die schwache Lösung des Randwertproblems bezeichnet.

Der Grund dafür ist, dass die schwache Form des Balkens, $a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w})$, auch dann noch betrachtet werden kann, wenn man $w(x) \in C^2[0, l]$ und $\hat{w}(x) \in C^2[0, l]$ wählt, denn in der Gleichung ist nur noch die zweite Ableitung, $M(x) = -EI w''(x)$, vorhanden, während die Differentialgleichung (2.1) voraussetzt, dass die vierte Ableitung von $w(x)$ existiert, [10].

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie die des Stabs, $-EA u''(x) = p(x)$, kann die schwache Form, $a(u, \hat{u}) = (p, \hat{u})$, auch dann noch betrachtet werden, wenn $u(x) \in C^1[0, l]$ und $\hat{u}(x) \in C^1[0, l]$ ist, obwohl in der Differentialgleichung die zweite Ableitung existiert. Der Grund dafür ist, dass in der schwachen Formulierung nur noch $N = EA u(x)'$, die erste Ableitung, vorhanden ist.

Man kann sagen, dass die klassische Statik von der Differentialgleichung auf die schwache Form schließt

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad \Longrightarrow \quad a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}),$$

und die moderne Statik, zu der z. B. die Methode der finiten Elemente und die Methode der Randelemente zählt, genau den umgekehrten Schritt geht und von der schwachen Form auf die Differentialgleichung schließt

$$EI w^{IV}(x) = p(x) \quad \Longleftarrow \quad a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}),$$

um ein Problem zu lösen.

2.3 Die Einflussfunktion

In der klassischen Statik verwendet man Einflussfunktionen zur übersichtlichen Erfassung des Einflusses von ortsveränderlichen Lasten auf einzelne Zustandsgrößen. Mit Hilfe von Einflussfunktionen ist es möglich, jede beliebige Weg- oder Kraftgröße an einem Tragwerk zu bestimmen.

Um eine Einflussfunktion zu erzeugen, bringt man 'Singularitäten' δ_i als Belastung auf, siehe Tab. 2.2 und 2.3. Die Einflussfunktion ist die Biegelinie, die aus diesem Lastfall resultiert.

Die theoretischen Grundlagen zur Ermittlung von Einflussfunktionen in der Statik an statisch bestimmten und statisch unbestimmten Tragwerken sind

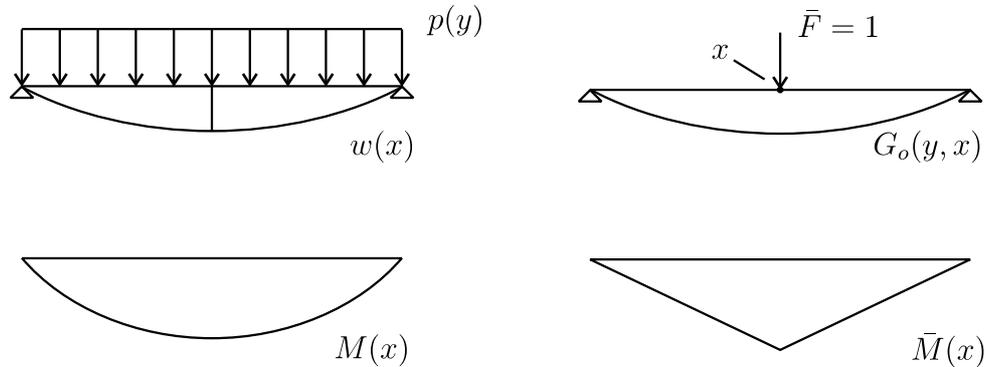


Abb. 2.2: Ermittlung der Durchbiegung an einem gelenkig gelagerten Balken auf starren Lagern mittels Einflussfunktion.

in [14] und [15] angegeben.

In diesem Abschnitt wird basierend auf den Greenschen Funktionen und der Diracschen-Delta-Funktion mit Hilfe des Satzes von Betti der allgemeine Zugang zu den Einflussfunktionen am Beispiel des Balkens hergeleitet.

Darüberhinaus wird in Abschnitt 2.4.1 ein Zusammenhang zwischen den Einflussfunktionen und der Methode der finiten Elemente dargestellt.

2.3.1 Einflussfunktionen in der Statik

Für den in Abb. 2.2 dargestellten Balken soll die Durchbiegung $w(x)$ an einer beliebigen Stelle x bestimmt werden.

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte wird das Moment $M(x)$ mit dem Moment $\bar{M}(x)$ aus der Einzelkraft $\bar{F} = 1$ überlagert und man erhält in diesem Fall wie in der Abbildung zu sehen, die Durchbiegung (hier in Balkenmitte)

$$1 \times w(x) = \int_0^l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx. \quad (\text{Mohrsche Arbeitsgleichung}) \quad (2.13)$$

Es besteht aber auch die Möglichkeit, die Durchbiegung mittels Einflussfunktionen zu ermitteln.

Bei diesem einfachen statisch bestimmten System hat man die Möglichkeit, die Einflussfunktion über die Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, siehe [14], S. 176 ff., und kann damit die Verformung an der gewünschten Stelle x ablesen.

Einen allgemeineren Zugang zu den Einflussfunktionen und zur Ermittlung der Durchbiegung im vorliegenden Fall liefert aber der Satz von Betti.

In Kapitel 2.1 wurde der Satz von Betti für einen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit hergeleitet. Wendet man nun den Satz auf die beiden Systeme aus Abb. 2.2 an, dann folgt aus (2.9)

$$B(w, \hat{w}) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy - 1 \times w(x) = 0,$$

wobei $w(x)$ die Biegelinie aus der Gleichlast p und $G_0(y, x)$ die Biegelinie aus der Einzelkraft $\bar{F} = 1$ ist, die man als Greensche Funktion¹ bezeichnet, [8], S. 207 ff. Die Greensche Funktion ist eine symmetrische Funktion, es gilt $G_0(y, x) = G_0(x, y)$.

Im obigen Beispiel wird der Angriffspunkt der Punktlast, die über den Balken wandert (Laufvariable) mit y und die Stelle an der die Durchbiegung bestimmt werden soll mit x bezeichnet.

Für die Durchbiegung erhält man an einer beliebigen Stelle x damit

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy. \quad (2.14)$$

Alle Einflussfunktionen sind von der gleichen Bauart (2.14), nur der Kern $G_i(y, x)$ ändert sich.

Der Index i gibt dabei an, welche duale Größe benutzt wird, siehe Abschnitt 2.3.2. In diesem Beispiel der Index 0, der auf eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$ verweist, mit deren Hilfe man die Durchbiegung an einer Stelle x bestimmt.

Beim Balken sind die Greenschen Funktionen für die Durchbiegung $w(x)$, die Verdrehung $w'(x)$, das Moment $M(x)$ oder die Querkraft $Q(x)$ in einem gesuchten Punkt x die Biegelinien, die entstehen, wenn man diesen Punkt mit einer Einzelkraft, einem Moment, einem Knick oder einer Versetzung der 'Intensität' 1 belastet, siehe Abb. 2.3.

Für den allgemeinen Fall ergibt sich also damit

$$\partial^i w(x) = \int_{\Omega} G_i(y, x) p(y) d\Omega. \quad (2.15)$$

¹Zur Erklärung: Der Begriff Greensche Funktion ist hier der mathematische Ausdruck, während man in der Statik von Einflussfunktion spricht.

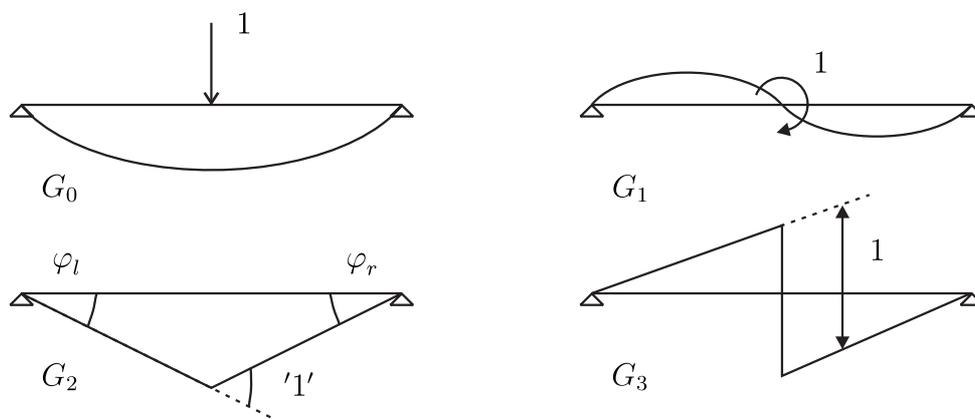


Abb. 2.3: Die vier Singularitäten des Balkens, [7]. Mit $'1' \equiv \tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$.

2.3.2 Rechenregeln für die Diracsche-Delta-Funktion

Um zum Beispiel die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ aus dem vorigen Beispiel darzustellen, verwendet man die Diracsche-Delta-Funktion. Das Dirac-Delta ist wie folgt definiert:

$$\delta_i(y, x) = \begin{cases} 0 & y \neq x \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_i(y, x) dy = 1. & \end{cases} \quad (2.16)$$

Mit Hilfe des Dirac-Deltas beschreibt man eine Funktion, die nur an der Stelle x auftritt und die Intensität $'1'$ besitzt.

Betrachtet man das vorige Beispiel, dann kann man zeigen, dass die Arbeit, die die Diracsche-Delta-Funktion auf den Verformungen $w(x)$ leistet, gerade die Verformung $w(y)$ ist,

$$\int_0^l \delta_0(y, x) w(y) dy = w(x) \times 1 = w(x) \quad \text{Einzelkraft } \bar{F} = 1.$$

Das bedeutet, ein Dirac Delta $\delta_i(y, x)$, überlagert mit einer beliebigen Funktion $w(y)$, ergibt 'den Wert von w an der Stelle x , der konjugiert zu $\delta_i(y, x)$ ist'.

Für den Balken erhält man darüberhinaus

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta_1(y, x) w(y) dy &= w'(x) && \text{Moment } \bar{M} = 1 \\ \int_0^l \delta_2(y, x) w(y) dy &= M(x) && \text{Knick der Größe 1} \\ \int_0^l \delta_3(y, x) w(y) dy &= Q(x) && \text{Versatz der Größe 1} \end{aligned}$$

und für die schubstarre Platte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= w(\mathbf{x}) && \text{Einzelkraft } \bar{F} = 1 \\ \int_{\Omega} \delta_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= w_{,x}(\mathbf{x}) && \text{Moment } m_{xx} = 1 \\ \int_{\Omega} \delta_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= w_{,y}(\mathbf{x}) && \text{Moment } m_{yy} = 1 \\ \int_{\Omega} \delta_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= w_{,xy}(\mathbf{x}) && \text{Moment } m_{xy} = 1 \\ \int_{\Omega} \delta_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= m_{xx}(\mathbf{x}) && \text{Knick in } \mathbf{x}\text{-Richtung} \\ \int_{\Omega} \delta_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= m_{yy}(\mathbf{x}) && \text{Knick in } \mathbf{y}\text{-Richtung} \\ \int_{\Omega} \delta_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= m_{xy}(\mathbf{x}) && \text{Knick} \\ \int_{\Omega} \delta_3(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= q_x(\mathbf{x}) && \text{Versatz in } \mathbf{x}\text{-Richtung} \\ \int_{\Omega} \delta_3(\mathbf{y}, \mathbf{x}) w(\mathbf{y}) d\Omega &= q_y(\mathbf{x}) && \text{Versatz in } \mathbf{y}\text{-Richtung.} \end{aligned}$$

Betrachtet man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, z.B. den Stab mit $-EA u''(x) = p(x)$, erhält man nur zwei Dirac Deltas

$$\begin{aligned} \int_0^l \delta_0(y, x) u(y) dy &= u(x) && \text{Einzelkraft } \bar{F} = 1 \\ \int_0^l \delta_1(y, x) u(y) dy &= N(x) && \text{Versatz der Größe 1} \end{aligned}$$

und für die Scheibe

$$\int_{\Omega} \delta_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{Einzelkraft } \bar{F} = 1$$

$$\int_{\Omega} \delta_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad \text{Versatz der Größe 1.}$$

Bei der Scheibe ist zu beachten, dass man die Einzelkraft oder den Versatz jeweils in horizontaler bzw. vertikaler Richtung ansetzt.

In Tabelle 2.2 und 2.3 ist angegeben, welche duale Belastung aufgebracht werden muss, um eine bestimmte Greensche Funktion an einem Tragwerk zu bestimmen.

Duale Belastung			Greensche Funktion
Einzelkraft	δ_0	\downarrow	$G_0(y, x)$
Moment	δ_1	\circlearrowright	$G_1(y, x)$
Knick	δ_2	∇	$G_2(y, x)$
Versatz	δ_3	\mathcal{N}	$G_3(y, x)$

Tab. 2.2: Duale Größen zur Berechnung von Einflussfunktionen am Balken und der schubstarren Platte.

Duale Belastung			Greensche Funktion
Einzelkraft	δ_0	\downarrow	$G_0(y, x)$
Versatz	δ_1	\mathcal{N}	$G_1(y, x)$

Tab. 2.3: Duale Größen zur Berechnung von Einflussfunktionen am Stab und an der Scheibe.

2.4 Die Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente stellt mittlerweile auch im Bauwesen ein etabliertes Simulationsverfahren dar, um komplexe Tragwerke zu analysieren.

Allerdings basiert die FE-Methode auf einem Näherungsverfahren, dessen Genauigkeit unter anderem von der verwendeten Elementformulierung und der Einteilung des FE-Netzes abhängt.

Im folgenden soll nun die Herleitung der FE-Methode erfolgen, da die Ergebnisse dieser Arbeit sinnvoller Weise einmal in ein FE-Programm implementiert werden könnten.

Der Ansatz für die Methode der finiten Elemente besteht darin, die schwache Form des Gleichgewichts (2.12) nicht mehr für den Raum V zu formulieren, sondern nur noch für einen endlich dimensionalen Teilraum $V_h \subset V$, siehe Abb. 2.4.

Das zugehörige Variationsproblem lautet somit, [5]:

Finde eine Funktion $w_h(x) \in V_h \subset V$, welche die Variationsgleichung

$$a(w_h, \hat{w}_h) = (p, \hat{w}_h) \quad (2.17)$$

für alle $\hat{w}_h(x) \in V_h \subset V$ erfüllt.

Als Testfunktionen $\hat{w}_h(x)$ wählt man die Ansatzfunktionen $\phi_j(x)$, die den Raum V_h aufspannen und erhält

$$a(w_h, \phi_j) = (p, \phi_j). \quad (2.18)$$

Darüberhinaus ist auch die FE-Lösung $w_h(x)$ eine Entwicklung nach diesen Ansatzfunktionen

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x), \quad (2.19)$$

mit den jeweiligen Knotenverschiebungen w_i und den zugehörigen Einheitsverformungen $\phi_i(x)$ aus V_h .

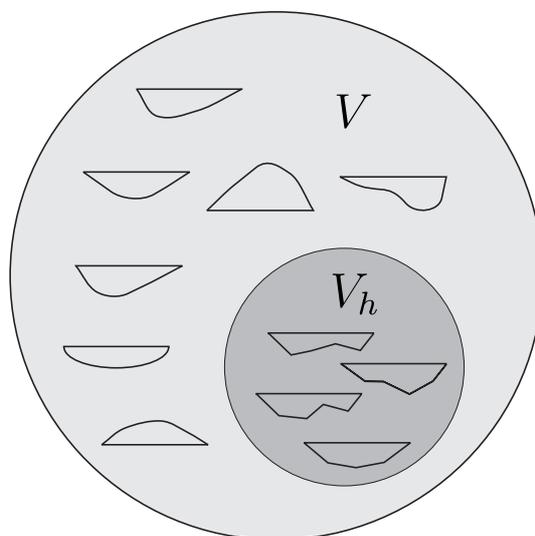


Abb. 2.4: Alle möglichen Verformungen, die ein FE-Programm darstellen kann, liegen in dem endlich dimensionalen Verformungsraum V_h , der in V liegt. Bleibt man beim Beispiel Balken, enthält V alle möglichen Biegelinien des Balkens.

Die Variationsgleichung (2.18) führt somit auf das bekannte Gleichungssystem $\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{f}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^l EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx, \\ \mathbf{f} &= f_j = (p, \phi_j) = \int_0^l p(x) \phi_j(x) dx \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{und} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

wobei \mathbf{K} die symmetrische Steifigkeitsmatrix, \mathbf{w} den Vektor der gesuchten Verformungen und \mathbf{f} den Vektor der äquivalenten Knotenkräfte bezeichnet.

Ausführlicher behandelt wird der Ansatz der Methode der finiten Elemente z.B. in [2], [11] oder [20].

2.4.1 Einflussfunktionen und finite Elemente

Durch Anwendung von (2.14) war es möglich, die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens an einem beliebigen Punkt x zu bestimmen, indem man die Greensche Funktion $G_0(y, x)$ mit der Belastung $p(y)$ überlagert.

Aber auch die FE-Lösung $w_h(x)$ kann durch eine solche Einflussfunktion dargestellt werden, wie in [10], S. 58 ff., gezeigt wird. Man erhält

$$w_h(x) = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy. \quad (2.21)$$

Im Gegensatz zu (2.14) wird hier nicht die Greensche Funktion $G_0(y, x)$ verwendet, sondern ihre Projektion G_0^h auf V_h , welche einfach gesagt die FE-Lösung des Lastfalls Balken unter Einzelkraft $F = 1$ an der gesuchten Stelle x ist.

Für den Fall, dass das verwendete FE-Programm diesen Lastfall exakt lösen kann, ist $w_h(x) = w(x)$. Das bedeutet, die Greenschen Funktionen sind identisch, $G_0^h = G_0$, und man erhält keinen Unterschied im Ergebnis aus (2.14) und (2.21).

Dies stellt allerdings den Idealfall dar, der nur in ganz seltenen Ausnahmefällen erreicht wird. Im Allgemeinen ist das Ergebnis einer FE-Berechnung eine Näherung und zwar die Projektion G_0^h auf V_h , die nicht mit der exakten Greenschen Funktion G_0 übereinstimmt, wie in [5] und [10] gezeigt wird.

Die Genauigkeit einer FE-Lösung hängt also davon ab, wie genau das FE-Programm die Einflussfunktion für die gesuchte Weg- oder Kraftgröße darstellen kann.

Natürlich ermittelt das FE-Programm nicht die Greensche Funktion, um mit deren Hilfe z.B. eine Spannung zu berechnen. Im Programm werden vielmehr die Funktionen, die die Verschiebung oder die Spannung im Element darstellen, in den Punkten ausgewertet. Die Ergebnisse dieser beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen sind aber identisch.

Man könnte es so beschreiben, dass die Einflussfunktionen aus mathematischer Sicht eine Art Kontrollinstanz sind, die nie aufgerufen werden. Doch tatsächlich wird die FE-Lösung in jedem Punkt stets so aussehen, dass das FE-Ergebnis und das Ergebnis, dass man mit Hilfe der genäherten Einflussfunktion erhalten würde, übereinstimmt, [7].

Aber wie kann man mit einem FE-Programm die Greensche Funktion ermitteln?

In Abb. 2.3 wird dargestellt, wie man die Greenschen Funktionen für einen Balken ermitteln kann und genauso kann man sie auch mit einem finiten Element-Programm ermitteln.

Man setzt eine Einzelkraft, ein Moment, einen Knick oder einen Versatz in dem gesuchten Punkt x an und löst diesen Lastfall. Die Biegelinie, die von dem FE-Programm berechnet wird, ist damit die Greensche Funktion bzw. die Einflussfunktion für die Verschiebungen, für die Spannungen, etc.

Damit das FE-Programm diese Belastung 'wahrnehmen' kann, muss aber z.B. diese angesetzte Einzelkraft noch in äquivalente Knotenkräfte umgewandelt werden.

Welche äquivalente Knotenkräfte müssen aber aufgebracht werden, um eine genäherte Greensche Funktion mit Hilfe eines FE-Programms zu bestimmen?

Die Einflussfunktionen sind Verformungsfiguren und, um beim Beispiel des Balkens zu bleiben, sind es Biegelinien, die man erhält, wenn man in einem Punkt x , wie zuvor beschrieben, eine zur veränderlichen Größe $w(x)$, $w'(x)$, $M(x)$ oder $V(x)$ duale Belastung (das Dirac-Delta) aufbringt.

Bei der Berechnung mit den finiten Elementen interessieren nicht die Lasten, sondern die Arbeiten, die von den Lasten in einem Punkt x geleistet werden, wenn man sie virtuell verrückt.

Zur Darstellung der Einzelkraft $\bar{F} = 1$ aus dem vorigen Beispiel, wird wie in Kap. 2.3.2 dargestellt, die Diracsche-Delta-Funktion verwendet und als virtuelle Verrückung wird in diesem Fall die Einheitsverformung $\phi_i(y)$ benutzt. Die Arbeit der Diracschen-Delta-Funktion auf den Wegen der Einheitsverformung $\phi_i(y)$ ist gerade $\phi_i(x)$,

$$\int_0^l \delta_0(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i(x). \quad (2.22)$$

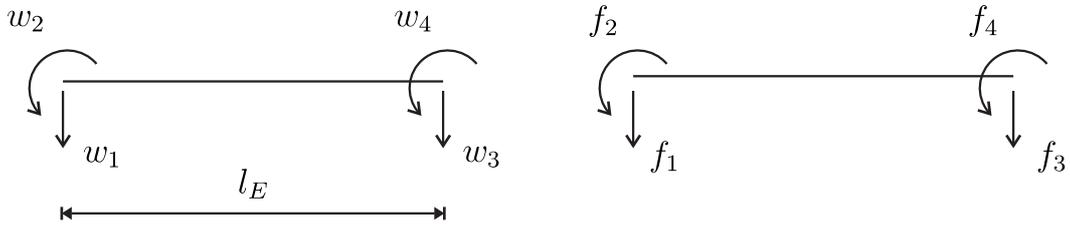


Abb. 2.5: Verschiebungen und Knotenkräfte am Balkenelement der Länge l_E .

Um alle weiteren dualen Größen zu beschreiben, werden höhere Dirac-Deltas eingeführt, siehe [10], S. 62. Sie lauten für den Balken:

$$\int_0^l \delta_1(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i'(x) \quad \text{Moment}$$

$$\int_0^l \delta_2(y, x) \phi_i(y) dy = M_i(x) \quad \text{Knick}$$

$$\int_0^l \delta_3(y, x) \phi_i(y) dy = Q_i(x) \quad \text{Versatz}$$

Die äquivalenten Knotenkräfte f_i , die nötig sind, um die Einflussfunktion zu erzeugen, sind damit die Arbeiten, die man aus

$$f_i = \int_0^l \delta_0(y, x) \phi_i(y) dy = \phi_i(x) \quad (2.23)$$

erhält. Das gleiche gilt für alle höheren Dirac-Deltas.

Beispiel: Will man die Einflussfunktion für das Moment $M(l/2)$ in Balkenmitte bestimmen, siehe Abb 2.7, muss man einen Knick $w'(x_+) - w'(x_-) = 1$ anbringen.

Die äquivalenten Knotenkräfte

$$f_i = \int_0^l \delta_2(y, \frac{l}{2}) \phi_i(y) dy = M_i(\frac{l}{2}), \quad (2.24)$$

für diesen Lastfall sind die Momente der Einheitsverformungen ϕ_i an der Stelle $x = l/2$.

Vorgehensweise im einzelnen:

Zuerst formuliert man den Verschiebungsansatz für das jeweilige Balkenelement. Gewählt wird ein Polynom 3. Grades, weil man damit schon die möglichen Verschiebungszustände exakt abbilden kann.

Die Ansatzfunktion für den Verschiebungsverlauf folgt aus, [16], S. 85,

$$w_h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (2.25)$$

Die Ansatz- bzw. Formfunktionen des schubstarren Bernoulli-Balkens, die man auch als Hermit-Polynome bezeichnet, lauten, [16], S. 87,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l_E^2} + \frac{2x^3}{l_E^3} \\ \phi_2(x) &= \left(-\frac{x}{l_E} + \frac{2x^2}{l_E^2} - \frac{x^3}{l_E^3}\right)l_E \\ \phi_3(x) &= \frac{3x^2}{l_E^2} - \frac{2x^3}{l_E^3} \\ \phi_4(x) &= \left(\frac{x^2}{l_E^2} - \frac{x^3}{l_E^3}\right)l_E. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sie beschreiben den Verschiebungsverlauf infolge der Einheitsverformungen, siehe Abb. 2.6. Die äquivalenten Knotenkräfte für die Einflussfunktion des Moments ergeben sich aus (2.24). Sie sind demnach die Momente von $\phi_i(x)$ an der Stelle $x = l/2$, die infolge der Einheitsverformungen entstehen.

Bei einem Balkenelement mit konstanter Biegesteifigkeit folgt

$$M_i(x) = -EI \phi_i''(x), \quad (2.27)$$

mit $\phi_i(x)$ als Biegelinie des Balkenelements aus der Einheitsverschiebung.

Unterteilt man einen Balken in fünf Elemente der Länge l_E , dann erhält man

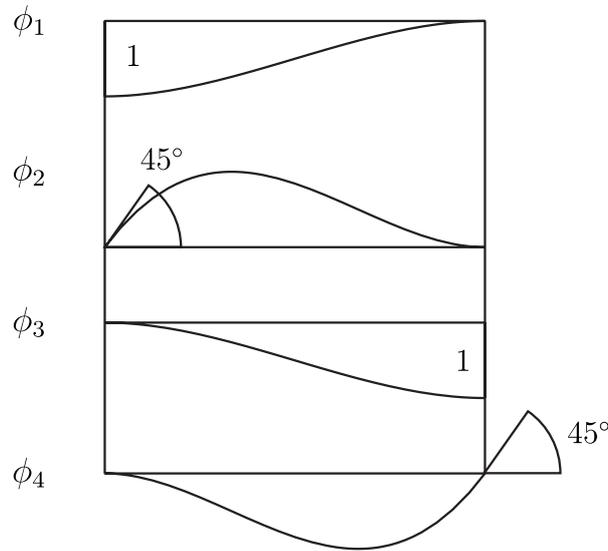


Abb. 2.6: Einheitsverformungen des schubstarren Bernoulli-Balkens, [10].

für die äquivalenten Knotenkräfte f_i an dem mittleren Balkenelement

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= M_1(x) = -EI \phi_1''(x) = -EI \left(-\frac{6}{l_E^2} + \frac{12x}{l_E^3} \right) \\
 f_2(x) &= M_2(x) = -EI \phi_2''(x) = -EI \left(\frac{4}{l_E} - \frac{6x}{l_E^2} \right) \\
 f_3(x) &= M_3(x) = -EI \phi_3''(x) = -EI \left(\frac{6}{l_E^2} - \frac{12x}{l_E^3} \right) \\
 f_4(x) &= M_4(x) = -EI \phi_4''(x) = -EI \left(\frac{2}{l_E} - \frac{6x}{l_E^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Setzt man in (2.28) $x = l_E/2$ ein, folgen die in Abb. 2.7 dargestellten äquivalenten Knotenkräfte und erzeugen die genäherte Einflussfunktion G_2^h . Ebenfalls eingezeichnet ist die exakte Einflussfunktion G_2 .

Da man die äquivalenten Knotenkräfte f_i elementweise ermittelt, entstehen nur an dem Element Kräfte, an dem der Knick angesetzt wurde.

Man kann erkennen, dass ein FE-Programm aus mathematischen Gründen nicht in der Lage ist, einen Knick exakt darzustellen, deshalb weicht die Einflussfunktion für das Moment von der exakten Einflussfunktion ab. In allen übrigen Elementen wird die Einflussfunktion exakt wiedergegeben, $G_2 = G_2^h$.

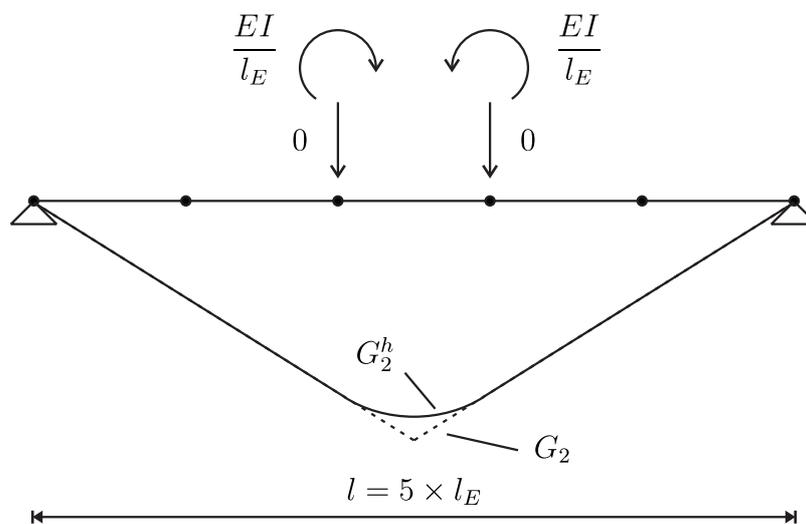


Abb. 2.7: Die exakte und die genäherte Einflussfunktion für das Moment in Balkenmitte.

Analog zu dem hier gezeigten Beispiel lassen sich nicht nur für den Balken Einflussfunktionen ermitteln, sondern auch bei allen übrigen Stab- und Flächentragwerken, ausführlicher dargestellt in [7] und [11].

3 Steifigkeitsänderungen und Einflussfunktionen

Treten in einem Tragwerk Steifigkeitsänderungen auf, führen diese auch meist zu Änderungen in den Lager- und Schnittkräften. Die Intensität dieser Änderungen hängt ganz wesentlich von dem Typ der Einflussfunktion ab, der zu einer Weg- oder Kraftgröße gehört.

Einflussfunktionen für Weggrößen besitzen einen verhältnismäßig großen Einzugsbereich, im Gegensatz zu Einflussfunktionen für Kraftgrößen. Diese sammeln sich stärker in lokalen Bereichen. Aus diesem Grund werden sich auch Steifigkeitsänderungen in Momenten und Querkräften nur lokal bemerkbar machen, wie in Abb. 3.1 am Beispiel der Platte dargestellt.

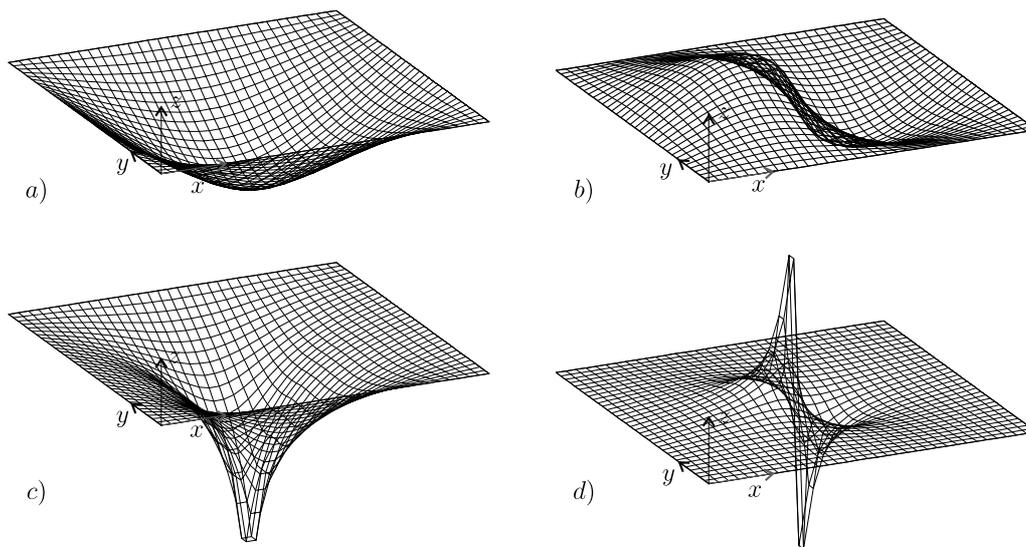


Abb. 3.1: Einflussfunktionen für **a)** die Durchbiegung w , **b)** die Verdrehung $w_{,x}$, **c)** das Biegemoment m_{xx} und **d)** die Querkraft q_x im Mittelpunkt einer gelenkig gelagerten Platte.

Nur so weit, wie die Einflussfunktionen reichen, machen sich auch Änderungen in Steifigkeiten bemerkbar.

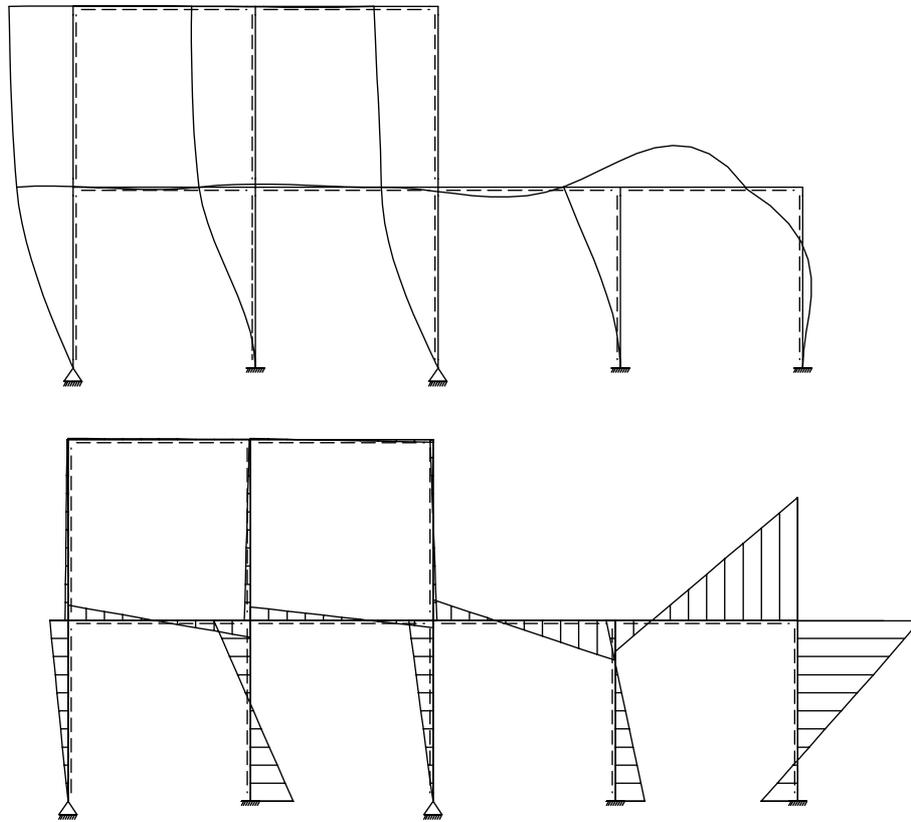


Abb. 3.2: **Oben:** Einflussfunktionen für das Biegemoment M_{St} in der rechten Stütze unterhalb des Anschnitts. **Unten:** Momente aus der Einflussfunktion

In Abb. 3.2 ist die Einflussfunktion für das Biegemoment M_{St} in der rechten Stütze - unterhalb des Anschnitts - eines zweigeschossigen Rahmens und die zugehörigen Momente aus der Einflussfunktion dargestellt.

Der Einfluss einer Änderung der Biegesteifigkeit auf Punktgrößen bei einem Rahmen hängt unter anderem von der zweiten Ableitung der jeweiligen Einflussfunktion ab, also dem Moment aus der Einflussfunktion. Das bedeutet, dass vor allem Steifigkeitsänderungen in Bereichen Auswirkungen auf das Biegemoment M_{St} haben, in denen die Momente aus der Einflussfunktion besonders groß sind.

Bei einer Änderung der Biegesteifigkeit im linken oberen Teil des Tragwerks erwartet man einen geringen Einfluss und bei einer Veränderung der Steifigkeit EI im unteren Bereich des Rahmens einen größeren Einfluss auf M_{St} .

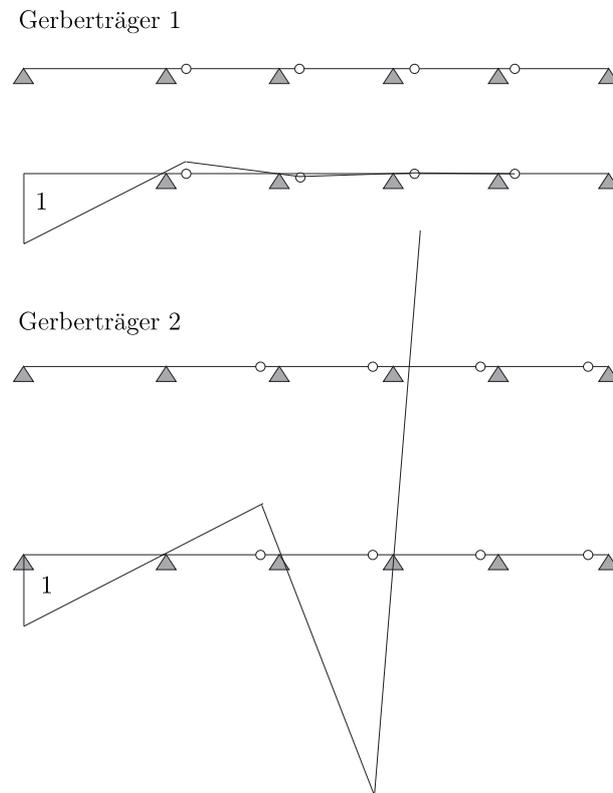


Abb. 3.3: Einflussfunktionen für die Lagerkraft A bei zwei unterschiedlichen Gerberträgern.

Das Einflussfunktionen nicht in jedem Fall in entfernten Bereichen abklingen, soll das Beispiel Gerberträger in Abb. 3.3 verdeutlichen, (Grundlagen zur Ermittlung von Einflussfunktionen am Gerberträger in [12], S. 66 ff.).

Bei statisch bestimmten Systemen hängen die Einflussfunktionen für Kraftgrößen nicht von der Steifigkeit EI ab. Für alle EI erhält man demnach dieselben Schnitt- und Lagerkräfte. Im Gegensatz dazu hängen die Einflussfunktionen für Weggrößen auch von den Steifigkeiten ab, also werden Änderungen in Steifigkeiten auch die Durchbiegungen und Verdrehungen beeinflussen, siehe Abb 3.4.

Bei statisch unbestimmten Systemen hängen die Einflussfunktionen für Kraftgrößen bis auf Ausnahmefälle (z.B. Zweifeldträger, EL für Lagerkraft der Innenstütze) von der Steifigkeit ab, siehe Abb. 3.5.

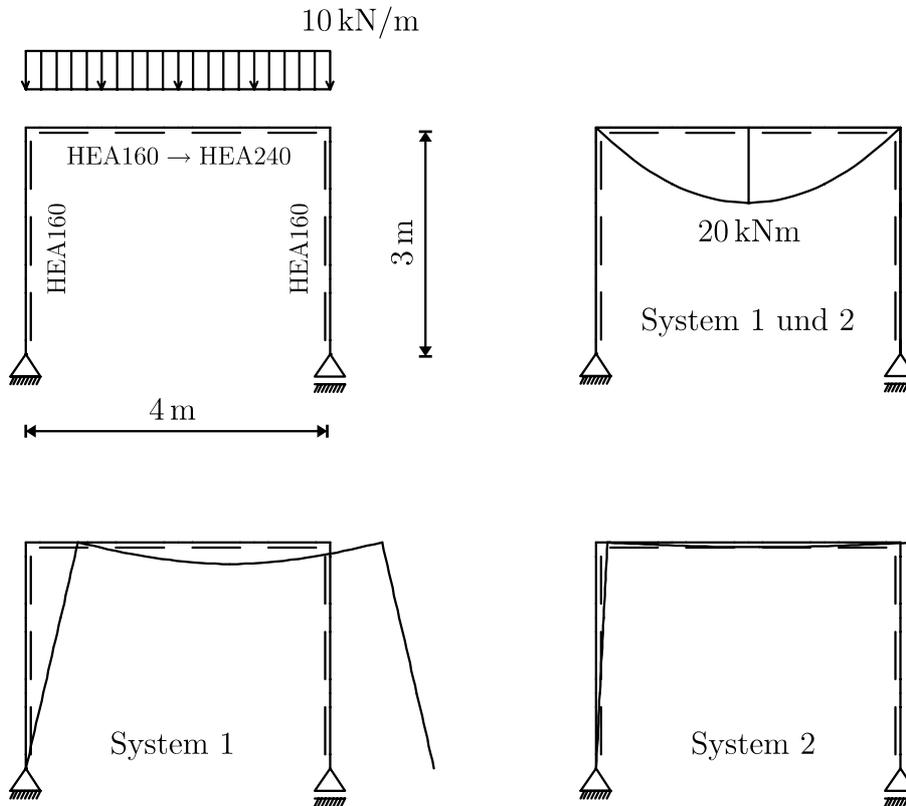


Abb. 3.4: Oben: Statisch bestimmter Rahmen mit Steifigkeitsänderung im Riegel. Biegemoment und Lagerkräfte an beiden Systemen identisch. Unten: Verformungsfiguren vor und nach der Steifigkeitsänderung.

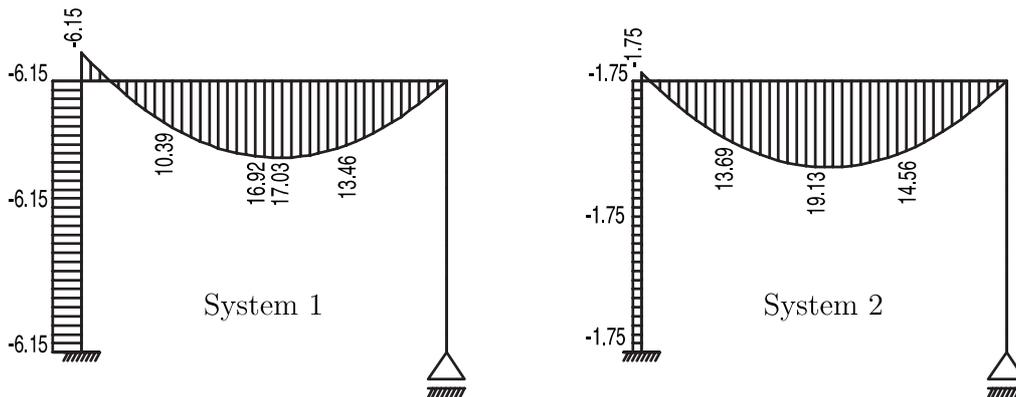


Abb. 3.5: Statisch unbestimmter Rahmen mit Steifigkeitsänderung, HEA 160 → HEA 240, im Riegel. Dargestellt ist der Einfluss der Steifigkeitsänderung auf die Biegemomente.

In diesem Kapitel wird nun prinzipiell versucht, diesen 'Einfluss' sichtbar zu machen und damit die Effekte, die Änderungen in den Steifigkeiten verursachen, zu beurteilen.

Im Folgenden werden Formeln hergeleitet, durch deren Lösung man den Einfluss von Änderungen der Lagersteifigkeiten oder Biegesteifigkeiten auf Punktgrößen unterschiedlicher Tragwerke ermitteln kann.

Die Formeln werden mit Hilfe von etwas Algebra und etwas Mathematik aus der Betrachtung der 'schwachen Form' entwickelt, indem man den Unterschied der inneren Energie nach einer Steifigkeitsänderung betrachtet und dadurch auf die Änderung einer gewünschten Weg- oder Kraftgröße schließt. Für das Beispiel Balken werden ausführlich alle Schritte der Herleitung für Änderungen von Lagersteifigkeiten und Biegesteifigkeiten auf den folgenden Seiten dargestellt. Für die übrigen Stab- und Flächentragwerke werden basierend auf den Ergebnissen am Balken die Vorgehensweisen übernommen und nur noch die wichtigsten Schritte angegeben, die zur gewünschten Formel führen.

3.1 Änderungen der Lagersteifigkeiten

Die Motivation besteht darin, zu studieren, welchen Einfluss Änderungen in Lagersteifigkeiten auf z.B. die Verformungen eines Tragwerks an einer beliebigen Stelle haben.

Für den Fall, dass solche Änderungen eintreten, bedeutet dies, dass sich die innere Energie eines Tragwerks ändert, dargestellt durch die Bilinearform $a(w, \hat{w})$.

Man muss also verfolgen, worin sich zwei Lösungen bzw. Biegelinien $w_1(x)$ am System 1

$$a_1(w_1, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad (3.1)$$

und $w_2(x)$ am System 2 unterscheiden,

$$a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}). \quad (3.2)$$

3.1.1 Grundlagen der Theorie am elastisch gelagerten Kragträger

Untersucht werden die beiden Biegelinien $w_1(x)$ und $w_2(x)$ eines Kragträgers, dessen freies Ende auf einer Feder der Steifigkeit k gelagert ist, siehe Abb. 3.6. Es wird deshalb statt eines starren Lagers eine Feder angenommen, da sich die Herleitung einer Formel zur Bestimmung einer gesuchten Punktgröße dadurch vereinfacht.

Im folgenden wird mit System 1 immer das System mit der ursprünglichen Steifigkeit bezeichnet und mit System 2 das System nach Veränderung einer Steifigkeit. Im System 1 besitzt die Feder die Steifigkeit k_1 und im System 2 die Federsteifigkeit k_2 .

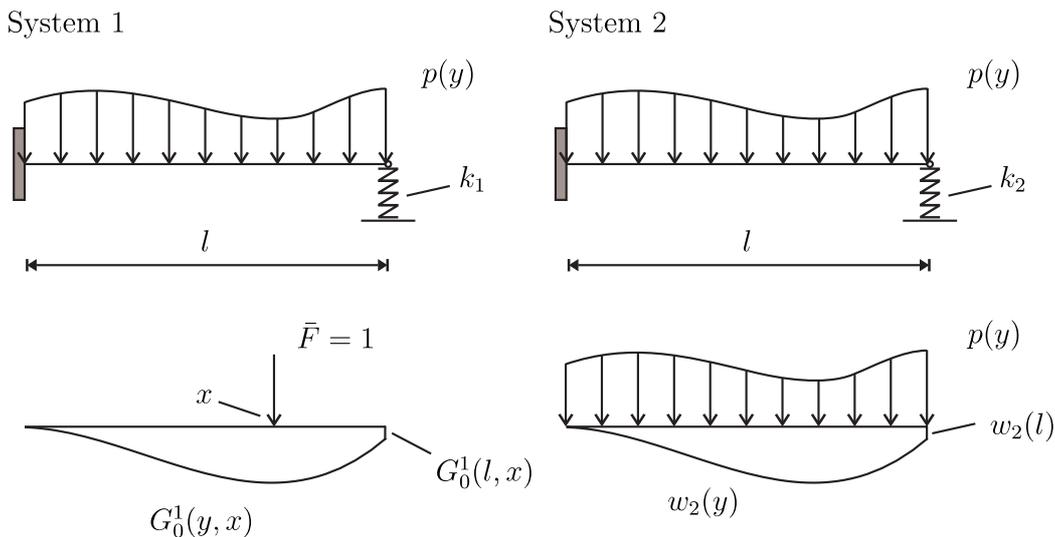


Abb. 3.6: Oben: Kragträger mit unterschiedlich elastischer Endlagerung. Unten: Einflussfunktion $G_0^1(y, x)$ am System 1, aus der Einzelkraft an der Stelle x und Biegelinie $w_2(y)$ am System 2 aus Originalbelastung.

Zunächst wird eine Formel hergeleitet, die den Unterschied der inneren Energie auf die Differenz in den Lagersteifigkeiten zurückführt. Die 'schwache Formulierung' für die beiden Biegelinien lautet

$$a_1(w_1, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \in V \tag{3.3}$$

$$a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \in V, \quad (3.4)$$

mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} a_1(w_1, \hat{w}) &:= a(w, \hat{w}) + k_1 w(l) \hat{w}(l) & \forall w, \hat{w} \in V \\ a_2(w_2, \hat{w}) &:= a(w, \hat{w}) + k_2 w(l) \hat{w}(l) & \forall w, \hat{w} \in V. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sie unterscheiden sich einzig in der unterschiedlichen Federsteifigkeit. Der Beitrag der Feder zur Formänderungsenergie des Tragwerks lautet

$$\text{Federkraft} \times \text{Federweg} = k w(l) \times \hat{w}(l).$$

Außerdem ist

$$a(w, \hat{w}) = \int_0^l EI w''(x) \hat{w}''(x) dx = \int_0^l \frac{M(x) \hat{M}(x)}{EI} dx.$$

Setzt man in beide Bilinearformen die Biegelinie $w_2(x)$ des Systems 2 ein, erhält man als Differenz

$$\begin{aligned} \Delta a_2(w_2, \hat{w}) &= a_1(w_2, \hat{w}) - a_2(w_2, \hat{w}) \\ &= \int_0^l EI w_2''(x) \hat{w}''(x) dx + k_1 w_2(l) \hat{w}(l) \\ &\quad - \int_0^l EI w_2''(x) \hat{w}''(x) dx - k_2 w_2(l) \hat{w}(l) \\ &= (k_1 - k_2) w_2(l) \hat{w}(l) \end{aligned} \quad (3.6)$$

oder

$$a_2(w_2, \hat{w}) = a_1(w_2, \hat{w}) - \Delta a_2(w_2 - \hat{w}). \quad (3.7)$$

Aus der ersten Greenschen Identität folgt, dass die inneren Arbeiten am System 1 und 2 gleich den äußeren Arbeiten der Systeme sind

$$a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}) = a_1(w_1, \hat{w}) \quad (3.8)$$

oder mit (3.7)

$$a_1(w_2, \hat{w}) - \Delta a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}) = a_1(w_1, \hat{w}). \quad (3.9)$$

Somit erhält man aus (3.9) und (3.6)

$$\begin{aligned} \Delta a_2(w_2, \hat{w}) &= a_1(w_2, \hat{w}) - a_1(w_1, \hat{w}) \\ &= (k_1 - k_2) w_2(l) \hat{w}(l) \end{aligned} \quad (3.10)$$

oder

$$a_1(w_2, \hat{w}) - a_1(w_1, \hat{w}) = (k_1 - k_2) w_2(l) \hat{w}(l) \quad (3.11)$$

und schließlich

$$a_1(w_2 - w_1, \hat{w}) = \underbrace{(k_1 - k_2) w_2(l)}_{\text{Federkraft}} \underbrace{\hat{w}(l)}_{\text{Federweg}}. \quad (3.12)$$

Die zuvor dargestellte Gleichung (3.12) ist die gesuchte Grundformel. Mit ihrer Hilfe kann man den Einfluss, den die Änderung der Lagersteifigkeit auf die Verformungen an einer Stelle x des Kragträgers hat, bestimmen.

Nebenbetrachtung:

Normalerweise besteht die innere Energie eines Balkens nur aus der Verzerungsenergie, aber in diesem Fall kommt zusätzlich die Arbeit in der Feder hinzu. Die innere Energie oder Energienorm zum Quadrat am Balken mit der Deformation $w(x)$ lautet

$$a_1(w, w) = \int_0^l EI (w''(x))^2 dx + k_1 w(l)^2 =: \|w\|_{E_1}^2 \quad (3.13)$$

Setzt man für die virtuelle Verrückung $\hat{w} = w_2 - w_1$ ein, dann folgt aus (3.12)

$$a_1(w_2 - w_1, w_2 - w_1) = (k_1 - k_2) w_2(l) (w_2(l) - w_1(l)) \quad (3.14)$$

oder als Energienorm zum Quadrat

$$\|w_2 - w_1\|_{E_1}^2 = \underbrace{(k_1 - k_2) w_2(l)}_{\text{Federkraft}} \underbrace{(w_2(l) - w_1(l))}_{\text{Federweg}}. \quad (3.15)$$

Das bedeutet, die Differenz der Biegeenergien beider Biegelinien kann damit alleine aus der Energiedifferenz in dem federnden Lager ausgedrückt werden.

Auswirkungen auf die Durchbiegung:

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie sich die beiden Biegelinien $w_1(x)$ und $w_2(x)$ in einzelnen Punkten x unterscheiden.

Gesucht ist die Differenz der Durchbiegung $w_2(x) - w_1(x)$ an einer beliebigen Stelle x des elastisch gelagerten Kragträgers unter Anwendung von (3.12).

Die 'schwache Form' des Systems 1 lautet

$$a_1(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \in V.$$

Der Trick zur Ermittlung der Lösung liegt nun darin, dass man anstelle der virtuellen Verrückung $\hat{w}(x)$ die Greensche Funktion bzw. Einflussfunktion $G_0^1(y, x)$ einsetzt. Der obere Index 1 soll im folgenden immer auf das System 1 hinweisen und der untere Index 0 auf eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$, die man aufbringen muss, um die Einflussfunktion für die Durchbiegung am Balken zu erhalten, siehe auch Kap. 2.3.2.

Aus (3.12) folgt

$$a_1(w_2 - w_1, G_0^1) = (k_1 - k_2) w_2(l) G_0^1(l, x). \quad (3.16)$$

Die schwache Formulierung genügt nach Einsetzen der Greenschen Funktion und der dazu dualen Belastung

$$a_1(w_2 - w_1, G_0^1) = (w_2 - w_1, \delta_0). \quad (3.17)$$

Setzt man (3.17) in (3.16) ein, erhält man als Differenz der Durchbiegung in einem beliebigen Punkt x nach Änderung der Lagersteifigkeit

$$1 \times (w_2(x) - w_1(x)) = (k_1 - k_2) w_2(l) G_0^1(l, x) \quad (3.18)$$

oder

$$w_2(x) - w_1(x) = (k_1 - k_2) w_2(l) G_0^1(l, x). \quad (3.19)$$

Die Bezeichnung $G_0^1(l, x)$ beschreibt die Absenkung der Feder an der Stelle l , wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ aus der Greenschen Funktion an der Stelle x

angreift und $w_2(l)$ ist die Absenkung der Feder durch den angesetzten Lastfall p von System 2, siehe dazu Abb. 3.6.

Besonderheit: Betrachtet man (3.19) fällt auf, dass die Differenz der Verformung nicht nur aus Werten eines Systems gewonnen wird, sondern auf Werte von beiden Systemen zurückgegriffen wird.

Drückt man die Federsteifigkeit k_2 über die Federsteifigkeit von System 1 aus folgt

$$k_2 = \alpha k_1, \quad (3.20)$$

mit dem Vorfaktor α als Koeffizient zur Berücksichtigung der Steifigkeitsänderung

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1}. \quad (3.21)$$

Ersetzt man die Federsteifigkeit des Systems 2 in (3.19) erhält man

$$w_2(x) - w_1(x) = k_1 (1 - \alpha) w_2(l) G_0^1(l, x). \quad (3.22)$$

Die Lagersteifigkeit k_1 multipliziert mit der Absenkung an der Stelle des Lagers $G_0^1(l, x)$ ist aber gerade die Auflagerkraft $B_{G_0^1}$, wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$, zur Ermittlung der Einflussfunktion, an der Stelle x steht. Daraus folgt

$$w_2(x) - w_1(x) = (1 - \alpha) w_2(l) B_{G_0^1}. \quad (3.23)$$

Zahlenbeispiel 1:

Gesucht ist die Änderung der Durchbiegung in der Mitte des Kragträgers, wenn sich die Federsteifigkeit halbiert, $\alpha = 0.5$.

Der Träger ist durch eine Gleichlast von 10 kN/m beansprucht, die über die komplette Länge $l = 5.0$ m des Tragwerks wirkt. Die Federsteifigkeit k_1 beträgt 1000 kN/m. Material: C 20/25, Rechteckquerschnitt $h/b = 50/30$. Daraus folgt

$$w_2(x) - w_1(x) = (1 - 0.5) \times 48.531 \text{ mm} \times 0.2457 \text{ kN} = 5.9684 \text{ mm}.$$

Kontrolle: Bestimmt man die beiden Verformungen mit Hilfe eines Stabwerkprogramms erhält man

$$w_2(x) - w_1(x) = 20.9294 \text{ mm} - 14.9609 \text{ mm} = 5.9685 \text{ mm.} \quad \checkmark$$

Die Werte sind, bis auf einen Rundungsfehler nach der vierten Kommastelle, identisch. Die Herleitung ist damit erfolgreich.

Nochmals zur Verdeutlichung:

Natürlich besteht auch die Möglichkeit, die Differenz der Durchbiegungen auf die klassische Weise zu bestimmen. Einmal mit Hilfe der Mohrschen Arbeitsgleichung

$$w(x) = \int_0^l \frac{M(y) M_0(y, x)}{EI} dy \quad M_0(y, x) = \text{Moment aus } G_0(y, x)$$

oder mit dem Satz von Betti

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy.$$

Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass in beiden Fällen eine Integration über den kompletten Balken notwendig ist, im Gegensatz dazu benötigt man in (3.19) bzw. (3.23) nur Werte am Punkt der Lagerung.

Auswirkungen auf die Momente:

Mit Hilfe von (3.19) bzw. (3.23) kann man den Unterschied der Durchbiegung an einem beliebigen Punkt x nach Änderung der Lagersteifigkeit bestimmen. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie man die Differenz des Moments an einem beliebigen Punkt x bestimmen kann, wenn sich die Lagersteifigkeit ändert.

Das Moment $M_1(x)$ aus System 1 genügt der Überlagerung der Einflussfunktion $G_2^1(y, x)$ (Biegelinie im System 1 aus Knick der Größe 1 an der Stelle x) mit der Belastung $p(y)$

$$M_1(x) = \int_0^l G_2^1(y, x) p(y) dy \quad (3.24)$$

und das Moment $M_2(x)$ am System 2

$$M_2(x) = \int_0^l G_2^2(y, x) p(y) dy. \quad (3.25)$$

Die Differenz der beiden obigen Gleichungen ist

$$\Delta M(x) = M_2(x) - M_1(x) = \int_0^l (G_2^2(y, x) - G_2^1(y, x)) p(y) dy. \quad (3.26)$$

Durch Anwendung des Satzes von Betti hat man das klassische Resultat (3.26) erhalten, um die Differenz des Momentes zu ermitteln.

Betrachtet man (3.19) und (3.23), dann muss aber auch gelten

$$\begin{aligned} \Delta M(x) = M_2(x) - M_1(x) &= (k_2 - k_1) w_2(l) G_2^1(l, x) \\ &= (1 - \alpha) w_2(l) B_{G_2^1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit $G_2^1(l, x)$ als Absenkung der Feder im System 1 auf Grund der dualen Größe δ_2 , Knick an der Stelle x und $B_{G_2^1}$ als Auflagerkraft aus der Einflussfunktion $G_2^1(y, x)$ am System 1. Die Absenkung $w_2(l)$ der Feder aus dem Lastfall $p(y)$ im System 2, kann man auch mit Hilfe einer Einflussfunktion bestimmen. Es gilt

$$w_2(l) = \int_0^l G_0^2(y, l) p(y) dy. \quad (3.28)$$

Zahlenbeispiel 2:

Übernimmt man die Vorgaben aus Zahlenbeispiel 1 erhält man für die Differenz der Momente an der Stelle $x = l/2$ nach Änderung der Lagersteifigkeit

$$\begin{aligned} M_2(x) - M_1(x) &= (1 - 0.5) \times 0.0485831 \text{ m} \times (-1068.79376) \text{ kN} \\ &= -25.9627 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Kontrolle: Mit Hilfe eines Stabwerkprogramms berechnet man

$$M_2(x) - M_1(x) = -3.5423 \text{ kNm} - 22.4204 \text{ kNm} = -25.9627 \text{ kNm}. \quad \checkmark$$

Die Vorgehensweise lässt sich also auch anwenden, wenn man die Differenz des Moments an einer beliebigen Stelle x nach Änderung der Lagersteifigkeit bestimmen will.

Genauso lässt sich auch die Differenz für die Verdrehung $\Delta w'(x)$ und die Querkraft $\Delta Q(x)$ an einem beliebigen Punkt x berechnen, nur die Greensche Funktion ändert sich. Es gilt

$$\begin{aligned} w_2'(x) - w_1'(x) &= (k_2 - k_1) w_2(l) G_1^1(l, x) \\ &= (1 - \alpha) w_2(l) B_{G_1^1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

und

$$\begin{aligned} Q_2(x) - Q_1(x) &= (k_2 - k_1) w_2(l) G_3^1(l, x) \\ &= (1 - \alpha) w_2(l) B_{G_3^1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.1.2 Lagerausfall am elastische gelagerten Kragträger

Auf Grund von (3.19) ist bei einer Änderung der Lagersteifigkeit, $k_1 \rightarrow k_2$, die Differenz der Durchbiegung $w(x)$ an der Stelle x

$$w_2(x) - w_1(x) = (k_1 - k_2) w_2(l) G_0^1(l, x).$$

Nachfolgend wird untersucht, wie man den Ausfall eines Lagers berücksichtigt.

Fällt das rechte Auflager des elastisch gelagerten Kragträgers aus, Abb. 3.7, setzt man die Federsteifigkeit k_2 gleich Null und erhält dadurch

$$w_2(x) - w_1(x) = (k_1 - 0) w_2(l) G_0^1(l, x) = w_2(l) B_{G_0^1}, \quad (3.31)$$

wobei $B_{G_0^1} = k_1 G_0^1(l, x)$ die Lagerkraft am System 1 ist, wenn die Einzelkraft $F = 1$ (das Dirac-Delta δ_0) in dem Punkt x steht.

Betrachtet man (3.31), entspricht die Änderung der Durchbiegung der Auflagerkraft $B_{G_0^1}$ aus dem Lastfall δ_0 am System 1, multipliziert mit der Durchbiegung des nun freien Endes am System 2, aus der dort aufgebracht Belastung p . Die Durchbiegung $w_2(l)$ lässt sich auch wieder mit Hilfe einer Einflussfunktion bestimmen. Es gilt

$$w_2(l) = \int_0^l G_0^2(y, l) p(y) dy, \quad (3.32)$$

mit $G_0^2(y, l)$ als Einflussfunktion für die Durchbiegung, die man erhält, wenn an der Stelle l im System 2 eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$ wirkt.

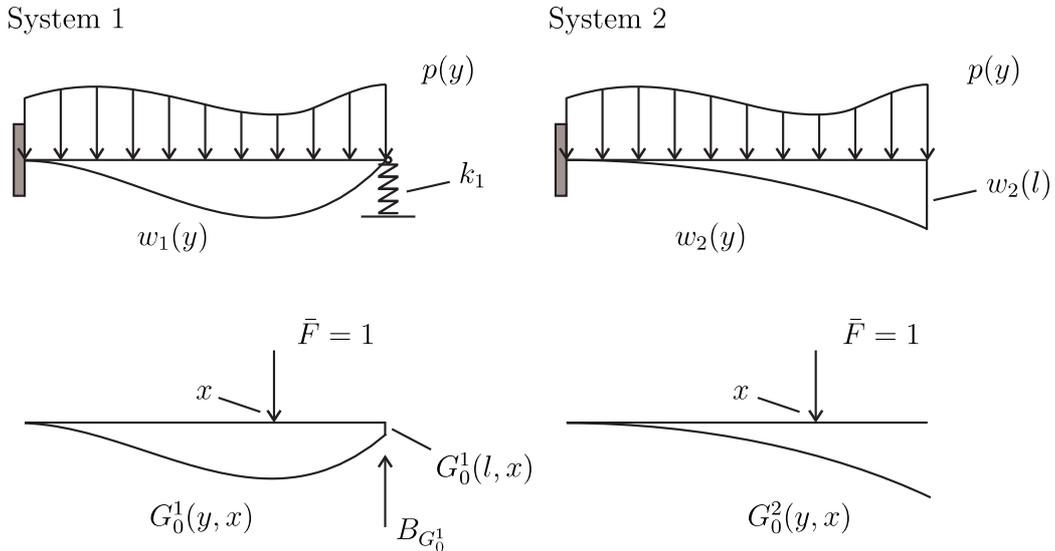


Abb. 3.7: Ausfall des rechten Auflagers beim elastisch gelagerten Kragträger.

Das oben hergeleitete gilt genauso für die Differenz von Verdrehungen, Momenten und Querkräften an einer beliebigen Stelle x nach Ausfall des Lagers. Es ist

$$w_2'(x) - w_1'(x) = w_2(l) B_{G_1^1} \tag{3.33}$$

$$M_2(x) - M_1(x) = w_2(l) B_{G_2^1} \tag{3.34}$$

$$Q_2(x) - Q_1(x) = w_2(l) B_{G_3^1}, \tag{3.35}$$

mit der jeweils unterschiedlichen Vorgehensweise bei der Bestimmung der Lagerkraft $B_{G_i^1}$ durch aufbringen eines Momentes, Knicks oder Versatzes im System 1.

Zahlenbeispiel 3:

Die System- und Materialeigenschaften sind aus Zahlenbeispiel 1 übernommen. Untersucht wird die Differenz der Querkraft an der Stelle $x = l/2$ bei

Ausfall des rechten Auflagers mit Hilfe von (3.35)

$$Q_2(x) - Q_1(x) = w_2(l) \times B_{G_3^1} = 0.1379 \text{ m} \times 213.7588 \text{ kN} = 29.48 \text{ kN}.$$

Kontrolle: Mittels eines Stabwerkprogramms erhält man

$$Q_2(x) - Q_1(x) = 50.00 \text{ kN} - 20.42 \text{ kN} = 29.48 \text{ kN}. \quad \checkmark$$

Im Grunde muss man den Weg über ein federndes Auflager nicht gehen, er diene nur der Herleitung.

Man multipliziert einfach die Lagerkraft aus der Einflussfunktion (System 1) mit dem Weg an der Stelle des entfernten Lagers (System 2) und erhält die Änderung der gesuchten Punktgröße an einer beliebigen Stelle x .

3.1.3 Ausfall eines Lagers am Durchlaufträger

An dem Durchlaufträger in Abb. 3.8 soll nun untersucht werden, welchen Einfluss der Ausfall des Lagers B auf die Durchbiegung im Punkt x_{CD} hat. In Analogie zu den obigen Überlegungen am Kragträger ist

$$w_2(x_{CD}) - w_1(x_{CD}) = w_2(x_B) B_{G_0^1}, \quad (3.36)$$

mit $B_{G_0^1}$ als Auflagerkraft B , wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im Punkt x_{CD} des Systems 1 angreift und $w_2(x_B)$ als Durchbiegung am modifizierten System 2 an der Stelle x_B (Stelle an der das Lager entfernt wurde), wenn der Originallastfall p aufgebracht ist.

Beide Größen kann man auch mit Hilfe von Einflussfunktionen bestimmen. Es ist

$$w_2(x_B) = \int_0^l G_0^2(y, x_B) p(y) dy \quad (3.37)$$

und

$$B_{G_0^1} = \int_0^l G_B(y, x_B) \delta_0(y, x_{CD}) dy = G_B(x_{CD}, x_B), \quad (3.38)$$

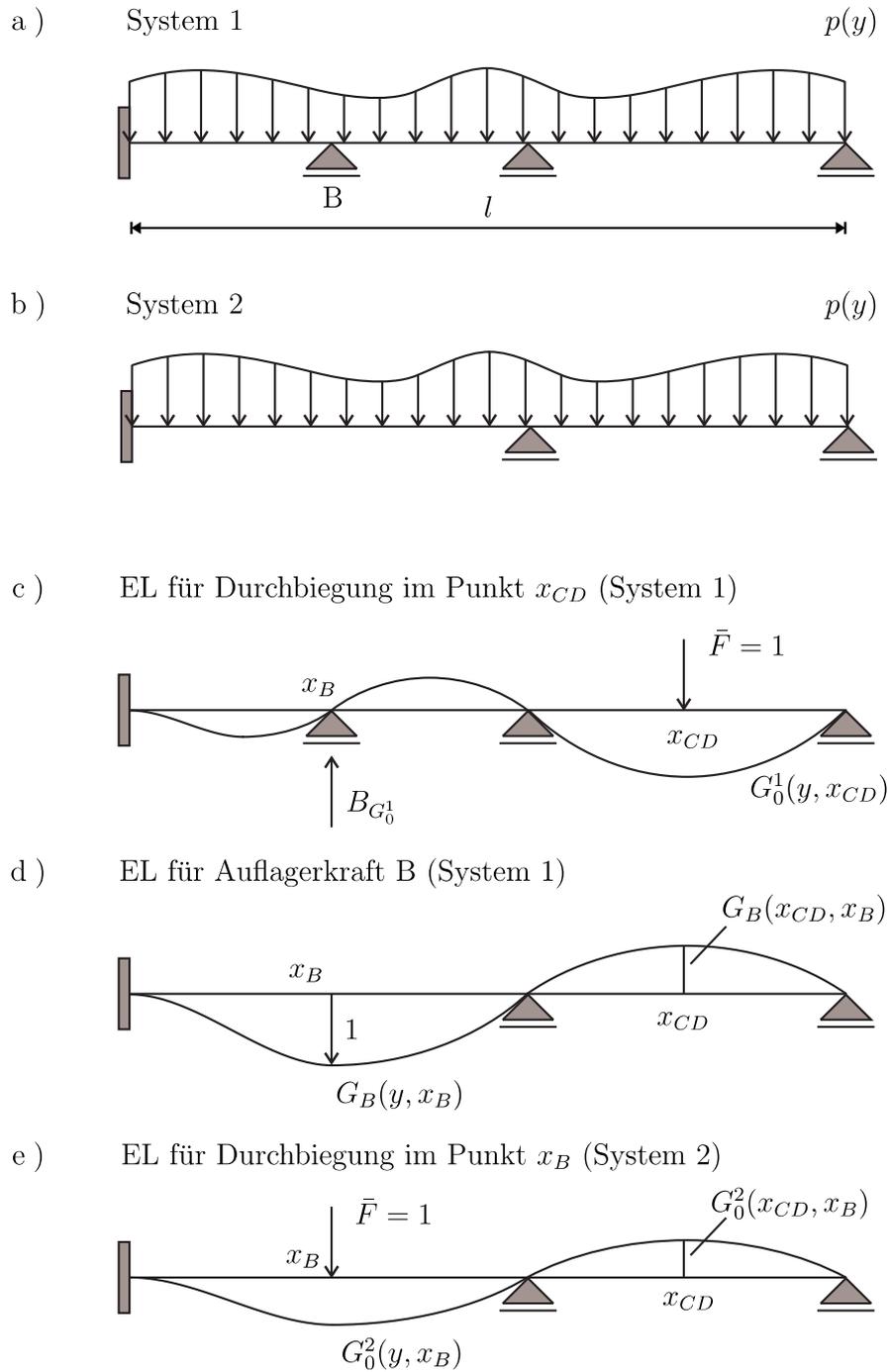


Abb. 3.8: Durchlaufträger - Ausfall eines Lagers; **a)** und **b)** Durchlaufträger unter Streckenlast, System vor und nach dem Ausfall des Lagers und **c), d)** und **e)** Einflussfunktionen zur Ermittlung der Änderungen der Durchbiegung im Punkt x_{CD} nach Ausfall des Auflagers B.

mit

$w_2(x_B)$	Durchbiegung am Punkt x_B im System 2, Abb. 3.8 b,
$G_0^2(y, x_B)$	Einflussfunktion der Durchbiegung im System 2, wenn im Punkt x_B eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$ wirkt, Abb. 3.8 e,
$p(y)$	Originallastfall, Abb. 3.8 a und b,
$B_{G_0^1}$	Auflagerkraft B, wenn im System 1 eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im Punkt x_{CD} angreift, Abb. 3.8 c,
$G_B(y, x_B)$	Einflussfunktion für die Auflagerkraft B, Abb. 3.8 d,
$\delta_0(y, x_{CD})$	Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im Punkt x_{CD} , Abb. 3.8 c,
$G_B(x_{CD}, x_B)$	Wert der Einflussfunktion für die Auflagerkraft B an der Stelle x_{CD} , Abb. 3.8 d.

Die beiden Einflussfunktionen $G_0^2(y, x_B)$, siehe Abb. 3.8 e, und $G_B(y, x_B)$, siehe Abb. 3.8 d, sind bis auf einen Faktor identisch. Es ist

$$G_B(y, x_B) = \frac{G_B(y, x_B)}{G_B(x_B, x_B)} = \frac{1}{G_0^2(x_B, x_B)} G_0^2(y, x_B), \quad (3.39)$$

mit $G_B(x_B, x_B) = 1$, da zur Ermittlung der Einflussfunktion G_B das Lager B um '1' abgesenkt wird.

Somit folgt

$$\begin{aligned} w_2(x_{CD}) - w_1(x_{CD}) &= w_2(x_B) G_B(x_{CD}, x_B) \\ &= \int_0^l G_0^2(y, x_B) p(y) dy \times \frac{G_0^2(x_{CD}, x_B)}{G_0^2(x_B, x_B)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wegen (3.39) ist die Durchbiegung $w_2(x_B)$ am System 2 proportional zur Auflagerkraft B_p am System 1. Der Index p steht für den Originallastfall.

Setzt man (3.39) in (3.37) ein, folgt

$$\begin{aligned} w_2(x_B) &= G_0^2(x_B, x_B) \int_0^l G_B(y, x_B) p(y) dy \\ &= G_0^2(x_B, x_B) B_p \end{aligned} \quad (3.41)$$

und schließlich durch Einsetzen von (3.41) in (3.36)

$$w_2(x_{CD}) - w_1(x_{CD}) = G_0^2(x_B, x_B) B_p B_{G_0^1}. \quad (3.42)$$

Um die Änderung der Durchbiegung an einer beliebigen Stelle x nach dem Ausfall eines Lagers des Durchlaufträgers zu bestimmen, benötigt man demnach die Lagerkraft B_p aus dem Originallastfall, die Lagerkraft $B_{G_0^1}$ aus dem Lastfall Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im gesuchten Punkt am System 1 und die Durchbiegung an der Stelle des ausgefallenen Lagers aus dem Lastfall Einzelkraft $\bar{F} = 1$ an derselben Stelle im System 2.

Natürlich können bei der Bestimmung der Lagerkraft B_p zahlreiche Lastfallkombinationen aus Eigengewicht und Verkehrslasten berücksichtigt werden.

Ausfall eines Lagers - Einfluss auf das Biegemoment

In Analogie zu (3.42) kann nun auch die Änderung im Biegemoment bestimmt werden, wenn ein Lager ausfällt. Die Lagerkraft $B_{G_2^1}$ wird durch Aufbringen eines Knicks der Größe 1 im Punkt x_{CD} am System 1 berechnet.

Mathematisch ist der Knick ein Dirac-Delta $\delta_2(y, x_{CD})$. Das Dirac-Delta steht für die Belastung und aus diesem Grund ist die Lagerkraft B aus der Belastung δ_2 einfach die Überlagerung der Einflussfunktion für B mit der Belastung, d. h. dem Dirac-Delta,

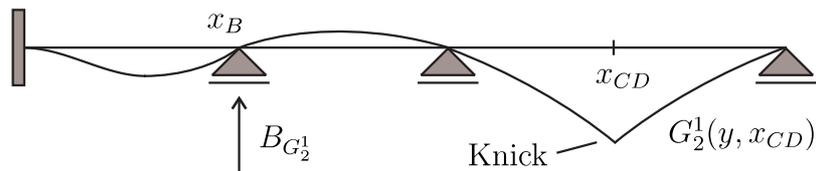
$$B_{G_2^1} = \int_0^l G_B(y, x_B) \delta_2(y, x_{CD}) dy = M_B(x_{CD}) \quad (3.43)$$

und das ist - siehe Rechenregeln für die Diracsche-Delta-Funktion, Kap. 2.3.2 - das Moment der Biegelinie $G_B(y, x_B)$ im Punkt x_{CD} , siehe Abb. 3.9.

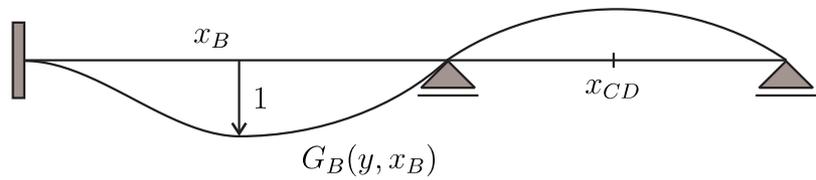
Damit folgt

$$\begin{aligned} M_2(x_{CD}) - M_1(x_{CD}) &= w_2(x_B) B_{G_2^1} \\ &= \int_0^l G_0^2(y, x_B) p(y) dy \times M_B(x_{CD}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

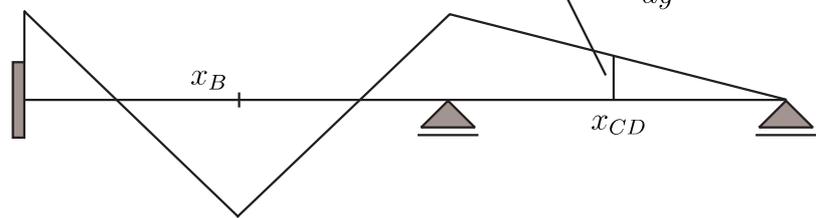
a) EL für Moment im Punkt x_{CD} (System 1)



b) EL für die Auflagerkraft B (System 1)



c) Moment aus $G_B(y, x_B)$ $M(x_{CD}) = -EI \frac{d^2}{dy^2} G_B(y, x_B)|_{y=x_{CD}}$



d) EL für Durchbiegung im Punkt x_B (System 2)

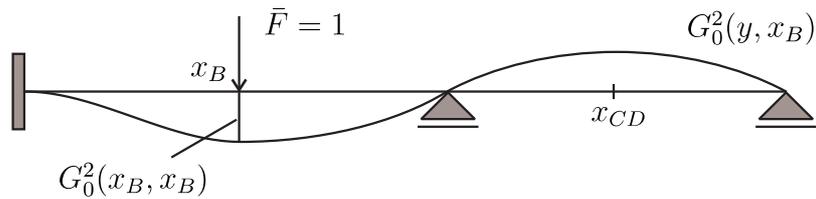


Abb. 3.9: Durchlaufträger - Ausfall eines Lagers. **a)** Einflussfunktion für das Moment im Punkt x_{CD} am System 1; **b)** Einflussfunktion für die Auflagerkraft B aus Absenkung des Auflagers um 1; **c)** Moment aus der Biegelinie $G_B(y, x_B)$; **d)** Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt x_B am System 2.

Die Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt x_B und die Lagerkraft B_p im Punkt x_B sind bis auf einen Faktor identisch, siehe (3.39), deswegen kann man statt der Durchbiegung $w_2(x_B)$ an der Stelle des ehemaligen Lagers auch die Lagerkraft B_p aus dem Originallastfall im System 1 multipliziert mit $G_0^2(x_B, x_B)$ setzen

$$\begin{aligned}
 M_2(x_{CD}) - M_1(x_{CD}) &= w_2(x_B) B_{G_2^1} \\
 &= w_2(x_B) M_B(x_{CD}) \\
 &= G_0^2(x_B, x_B) B_p M_B(x_{CD})
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Demnach hängt die Änderung des Moments im wesentlichen von zwei Faktoren ab: (i) der Lagerkraft in dem Lager und (ii) von dem Einflusskoeffizient M_B , also von dem Biegemoment aus der Einflussfunktion $G_B(y, x_{CD})$ im Punkt x_{CD} .

Ausfall eines Lagers - Einfluss auf Verdrehung und Querkraft

Nach derselben Logik kann auch die Änderung in der Querkraft bei Lagerausfall am Durchlaufträger hergeleitet werden. Es ist

$$\begin{aligned}
 Q_2(x_{CD}) - Q_1(x_{CD}) &= w_2(x_B) Q_B(x_{CD}) \\
 &= \int_0^l G_0^2(y, x_B) p(y) dy \times Q_B(x_{CD}) \\
 &= G_0^2(x_B, x_B) B_p Q_B(x_{CD})
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Für die Differenz der Verdrehung erhält man

$$w_2'(x_{CD}) - w_1'(x_{CD}) = G_0^2(x_B, x_B) B_p w_B'(x_{CD}). \tag{3.47}$$

3.1.4 Schubstarre Platte

Allgemein:

Die gleiche Logik, die bei den Herleitungen für den Balken angewendet wurde, soll nun auf die schubstarre Platte übertragen werden. Gesucht wird wieder eine Formel, mit der man den Einfluss von Änderungen der Lagersteifigkeiten auf Punktgrößen der Platte ermitteln kann. Die Punktgrößen sind die Verschiebung $w(x, y)$, die Verdrehungen $w_{,x}(x, y)$ und $w_{,y}(x, y)$, die Momente $m_{xx}(x, y)$, $m_{yy}(x, y)$, $m_{xy}(x, y)$, $m_{yx}(x, y)$ und die Querkräfte q_x , q_y , (Grundlagen der Plattentheorie in [17]).

In Abbildung 3.10 sind die Schnittgrößen der Platte nochmals dargestellt.

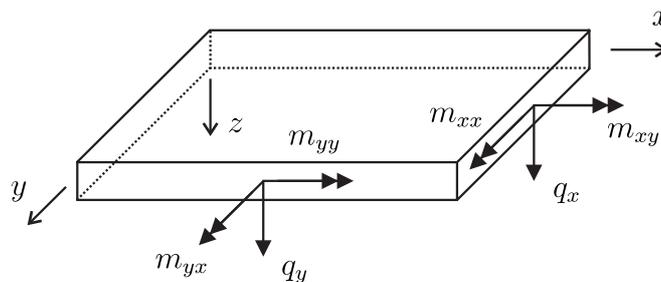


Abb. 3.10: Schnittkräfte der Platte.

Die Momente m_{xx} werden durch Eisen in x -Richtung abgetragen und die Momente m_{yy} durch Eisen in y -Richtung.

Herleitung:

In Abb. 3.11 ist eine an den Rändern elastisch gelagerte Platte dargestellt. Die Wände, die die Platte stützen werden nicht starr, sondern als elastische Lager modelliert. Der Grund dafür ist wieder derselbe wie schon beim Balken, denn dadurch vereinfacht sich die Herleitung einer Formel, mit der die Änderungen in Lagersteifigkeiten berücksichtigt werden können.

Untersucht wird nun, welchen Einfluss die Änderungen der Lagersteifigkeiten am Rand Γ_a auf eine Punktgröße an einer beliebigen Stelle $\mathbf{x} = \{x, y\}$ der Platte haben.

In System 1 haben die Federn die Steifigkeit k_1 und in System 2 die Stei-

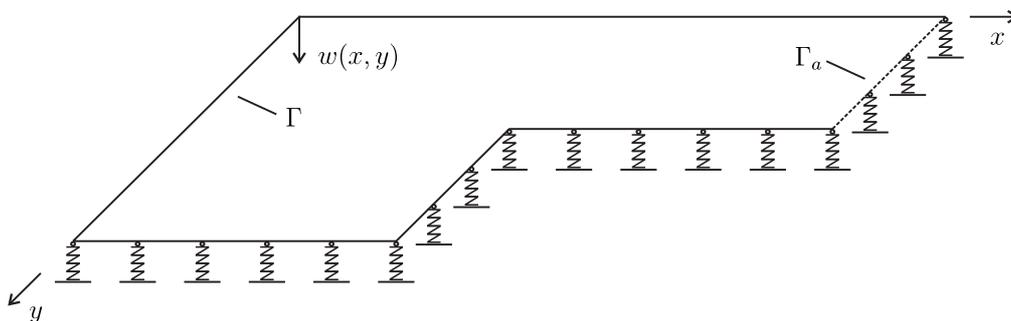


Abb. 3.11: Elastisch gelagerte Platte.

figkeit k_2 . Es sei Γ_a der Rand mit veränderlicher Lagersteifigkeit und Γ der übrige Rand mit konstanter Lagersteifigkeit k_1 .

Die schwache Formulierung für die schubstarre Platte lautet

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \in V \quad (3.48)$$

mit den Bilinearformen

$$a_1(w, \hat{w}) = a(w, \hat{w}) + \int_{\Gamma} k_1 w(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_a} k_1 w(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) d\Gamma_a$$

und

$$a_2(w, \hat{w}) = a(w, \hat{w}) + \int_{\Gamma} k_1 w(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_a} k_2 w(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) d\Gamma_a.$$

Die Idee wird vom Balken übernommen und man erhält schließlich analog zu (3.12) und (3.19) für die Platte

$$a_1(w_2 - w_1, \hat{w}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{x}) \hat{w}(\mathbf{x}) d\Gamma_a \quad (3.49)$$

und nachdem man als virtuelle Verrückung die Greensche Funktion $G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ einsetzt

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y}, \quad (3.50)$$

mit $G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ als Verformung längs des Randes Γ_a , wenn im Punkt $\mathbf{x} = \{x, y\}$ das zugehörige Dirac-Delta δ_0 als Belastung am System 1 aufgebracht

wird und mit $w_2(\mathbf{y})$, der Verformung längs des Randes Γ_a am System 2 mit Originalbelastung. Diesen Term kann man wieder durch eine Einflussfunktion ausdrücken

$$w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G_0^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_y, \quad (3.51)$$

wobei $G_0^2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ die Einflussfunktion aus der Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im Punkt \mathbf{x} am System 2 ist.

Der Unterschied zwischen (3.19) und (3.50) besteht darin, dass man nicht ein Lager an einem bestimmten Punkt betrachtet, sondern über einen bestimmten Bereich integriert.

Drückt man die Lagersteifigkeit k_2 wieder über k_1 aus, erhält man $k_2 = \alpha k_1$, mit α als Koeffizient, der die Steifigkeitsänderung beschreibt. Aus (3.50) folgt analog zu (3.22)

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} k_1 (1 - \alpha) w_2(\mathbf{y}) G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y}. \quad (3.52)$$

Die Lagersteifigkeit k_1 multipliziert mit $G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ist wieder die Lagerkraft $A(\mathbf{y})$, siehe (3.23). In diesem Fall aber die Auflagerkraft über den Rand Γ_a und nicht wie beim Balken an einem bestimmten Punkt. Die Änderung der Durchbiegung lautet somit

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (1 - \alpha) w_2(\mathbf{y}) A_{G_0^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y}. \quad (3.53)$$

Für die weiteren Punktgrößen erhält man in der Schreibweise aus (3.50) folgende Resultate:

Verdrehungen:

$$w_{,x2}(\mathbf{x}) - w_{,x1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_1^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.54)$$

$$w_{,y2}(\mathbf{x}) - w_{,y1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_1^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.55)$$

$$w_{,xy2}(\mathbf{x}) - w_{,xy1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_1^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.56)$$

Momente:

$$m_{xx2}(\mathbf{x}) - m_{xx1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_2^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.57)$$

$$m_{yy2}(\mathbf{x}) - m_{yy1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_2^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.58)$$

$$m_{xy2}(\mathbf{x}) - m_{xy1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_2^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.59)$$

Querkräfte:

$$q_{x2}(\mathbf{x}) - q_{x1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_3^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.60)$$

$$q_{y2}(\mathbf{x}) - q_{y1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (k_1 - k_2) w_2(\mathbf{y}) G_3^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.61)$$

Zur Erzeugung der jeweiligen Einflussfunktion $G_i^1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ siehe auch Rechenregeln für die Diracsche-Delta-Funktion, Kap. 2.3.2.

Idee zur praktischen Anwendung:

In (3.53) wird die Verformungsfigur am System 2 mit der Auflagerkraft am System 1 aus der Einflussfunktion überlagert. Um dieses Integral vereinfacht auszuwerten, hat man die Möglichkeit, die Verformungsfunktion $w_2(\mathbf{y})$ durch $A_2(\mathbf{y})/k_2$ auszudrücken (Absenkung des Lagers = Lagerkraft / Federsteifigkeit des Lagers)

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (1 - \alpha) \frac{A_2(\mathbf{y})}{k_2} A_{G_0^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y}. \quad (3.62)$$

Ermittelt man die resultierende Lagerkraft R_2 aus $A_2(\mathbf{y})$ und multipliziert sie mit der resultierenden Lagerkraft $R_{G_0^1}$ aus der Einflussfunktion am System 1 längs des Randes Γ_a , erhält man nach der Division durch die Länge des Randes Γ_a einen genäherten Wert für die Änderung der Durchbiegung an der Stelle \mathbf{x} , deren Abweichung akzeptabel ist, siehe Kap. 4.2.4.

Drückt man k_2 wieder über k_1 aus folgt also

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{l_{\Gamma_a}} \frac{1}{k_1} R_2 R_{G_0^1}. \quad (3.63)$$

Vereinfacht nimmt man hier an, dass die Verläufe der Lagerkräfte konstant sind.

Weiteres Beispiel - Ausfall der Lagerung am Rand Γ_a

Betrachtet man die Änderung der Durchbiegung, wenn die Lagerung über den Rand Γ_a komplett ausfällt, folgt aus (3.50)

$$\begin{aligned} w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_a} (k_1 - 0) w_2(\mathbf{y}) G_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Gamma_{a_y} \\ &= \int_{\Gamma_a} w_2(\mathbf{y}) A_{G_0^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y} \end{aligned} \quad (3.64)$$

mit $w_2(\mathbf{y})$ als Durchbiegung der Platte über den Rand Γ_a am System 2 aus der Originalbelastung und mit $A_{G_0^1}(\mathbf{y})$ als Auflagerkraft über den Rand Γ_a am System 1 aus der Einflussfunktion G_0^1 .

Auf die übrigen Punktgrößen lassen sich die Ideen wieder übertragen und man erhält z.B. für die Weg- und Kraftgrößen in x -Richtung

$$w_{,x2}(\mathbf{x}) - w_{,x1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} w_2(\mathbf{y}) A_{G_1^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.65)$$

$$m_{xx2}(\mathbf{x}) - m_{xx1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} w_2(\mathbf{y}) A_{G_2^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y} \quad (3.66)$$

$$q_{x2}(\mathbf{x}) - q_{x1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} w_2(\mathbf{y}) A_{G_3^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y}. \quad (3.67)$$

Der einzige Unterschied besteht in der Ermittlung der Auflagerkraft. Sie resultiert aus der zugehörigen Einflussfunktion, die man durch das Aufbringen eines Moments, eines Knicks oder eines Versatzes in x -Richtung erhält.

3.1.5 Scheibe

Allgemein:

Bei der Scheibe setzt man voraus, dass die äußeren Lasten tangential in Richtung der Mittelebene angreifen, dadurch bildet sich ein membranartiger Spannungs- und Dehnungszustand aus, siehe Abb. 3.12, (Grundlagen der Scheibentheorie in [17]).

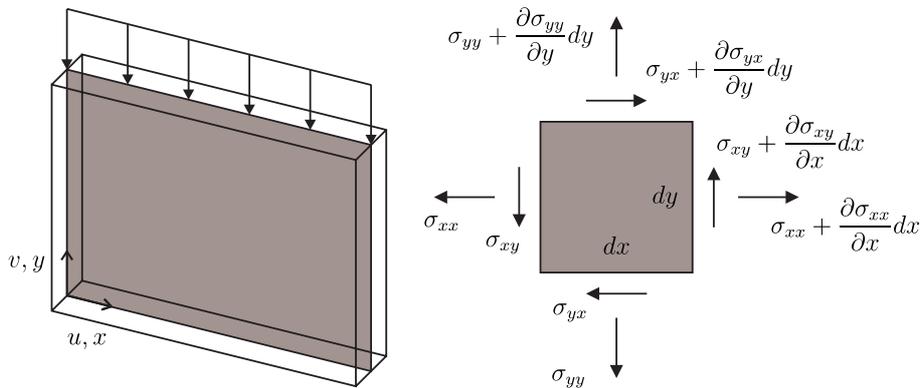


Abb. 3.12: Wandscheibe.

Das Verschiebungsfeld einer Scheibe wird durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

beschrieben. Hier ist u der horizontale Anteil und v der vertikale Anteil der Verschiebung.

Herleitung:

Welchen Einfluss hat die Änderung von Lagersteifigkeiten auf die Durchbiegungen oder die Normalkräfte an einer beliebigen Stelle $\mathbf{x} = \{x, y\}$ der Scheibe?

Um diese Frage zu beantworten, sollen die obigen Ideen auf die elastisch gelagerte Kragscheibe in Abb. 3.13 übertragen werden. Mit $\mathbf{l} = \{l, 0\}$ wird der Angriffspunkt der horizontalen und der vertikalen Feder bezeichnet.

Analog zu (3.19) bzw. (3.23) erhält man für den horizontalen Anteil $u(\mathbf{x})$,

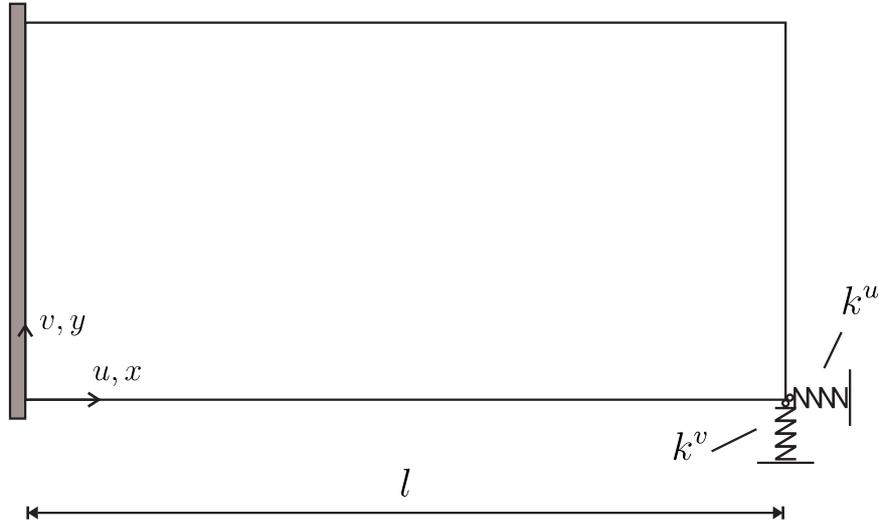


Abb. 3.13: Kragsscheibe mit elastischer Lagerung.

wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ zur Ermittlung der Einflussfunktion $\mathbf{G}_0^1(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ in x -Richtung wirkt

$$\begin{aligned}
 u_2(\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^T \mathbf{k}_{(2 \times 2)} \mathbf{G}_0^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) & (3.68) \\
 &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} k_1^u - k_2^u & 0 \\ 0 & k_1^v - k_2^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \\ G_0^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \\
 &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (k_1^u - k_2^u) \times G_0^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \\ (k_1^v - k_2^v) \times G_0^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \\
 &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (1 - \alpha^u) \times B_{G_0^1}^u \\ (1 - \alpha^v) \times B_{G_0^1}^v \end{bmatrix} \\
 &= u_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^u) B_{G_0^1}^u + v_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^v) B_{G_0^1}^v,
 \end{aligned}$$

mit $u_2(\mathbf{l})$ und $v_2(\mathbf{l})$ als Verschiebung an der Stelle $l = \{l, 0\}$ am System 2 aus Originalbelastung, mit k_1^u als Federsteifigkeit am System 1 in horizontaler Richtung und $G_0^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ bzw. $G_0^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ als horizontale bzw. vertikale

Verschiebung an der Stelle \mathbf{l} aus der Einflussfunktion, wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ in horizontaler Richtung im Punkt $\mathbf{x} = \{x, y\}$ angreift und mit $B_{G_0^1}^u$ bzw. $B_{G_0^1}^v$ als horizontale bzw. vertikale Auflagerkraft aus der Einflussfunktion. Durch den Koeffizient α wird wieder die Steifigkeitsänderung der Feder in horizontaler bzw. in vertikaler Richtung angegeben, es ist $k_2 = \alpha k_1$.

Anstelle der Absenkung des Lagers am System 2 $u_2(\mathbf{l})$ bzw. $v_2(\mathbf{l})$ kann man auch wieder die Lagerkraft am System 2 aus der Originalbelastung dividiert durch die Federsteifigkeit am System 2 der jeweiligen Feder verwenden.

Natürlich muss die Lagerungsart nicht zwangsläufig ein Punktlager sein, wenn die Lagerung über einen Rand Γ verläuft muss man genauso wie schon im letzten Abschnitt bei der Platte über den Bereich des Lagers, dessen Steifigkeit sich ändert, integrieren.

Den vertikalen Anteil $v(\mathbf{x})$ erhält man, wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ zur Ermittlung der Einflussfunktion $\mathbf{G}_0^1(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ in y -Richtung wirkt

$$\begin{aligned}
 v_2(\mathbf{x}) - v_1(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (k_1^u - k_2^u) \times G_0^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \\ (k_1^v - k_2^v) \times G_0^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \\
 &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (1 - \alpha^u) \times B_{G_0^1}^u \\ (1 - \alpha^v) \times B_{G_0^1}^v \end{bmatrix} \quad (3.69) \\
 &= u_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^u) B_{G_0^1}^u + v_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^v) B_{G_0^1}^v.
 \end{aligned}$$

Die Änderungen der Normalkräfte spalten sich auch wieder in einen horizontalen und einen vertikalen Teil auf, den man erhält, wenn man zur Ermittlung der Einflussfunktion $\mathbf{G}_1^1(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ einen Versatz in x - bzw. in y -Richtung aufbringt

$$N_2^u(\mathbf{x}) - N_1^u(\mathbf{x}) = [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (k_1^u - k_2^u) \times G_1^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \\ (k_1^v - k_2^v) \times G_1^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (1 - \alpha^u) \times B_{G_1^1}^u \\ (1 - \alpha^v) \times B_{G_1^1}^v \end{bmatrix} \quad (3.70) \\
&= u_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^u) B_{G_1^1}^u + v_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^v) B_{G_1^1}^v
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
N_2^v(\mathbf{x}) - N_1^v(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (k_1^u - k_2^u) \times G_1^{1u}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \\ (k_1^v - k_2^v) \times G_1^{1v}(\mathbf{l}, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \\
&= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} (1 - \alpha^u) \times B_{G_1^1}^u \\ (1 - \alpha^v) \times B_{G_1^1}^v \end{bmatrix} \quad (3.71) \\
&= u_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^u) B_{G_1^1}^u + v_2(\mathbf{l}) (1 - \alpha^v) B_{G_1^1}^v.
\end{aligned}$$

Die Differenz der Spannungen in der Scheibe erhält man, in dem man die Differenz der Normalkräfte durch die Scheibendicke t dividiert.

Weiteres Beispiel - Lagerausfall

Welchen Einfluss hat der Ausfall des Auflagers B der Wandscheibe in Abb. 3.13 auf die Verformungen und Normalkräfte in einem beliebigen Punkt $\mathbf{x} = \{x, y\}$?

Setzt man in (3.68) und (3.69) die Federsteifigkeit $k_2 = 0$, erhält man für die Änderung der Verformungen

$$\begin{aligned}
u_2(\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} B_{G_0^1}^u \\ B_{G_0^1}^v \end{bmatrix} \quad (3.72) \\
&= u_2(\mathbf{l}) B_{G_0^1}^u + v_2(\mathbf{l}) B_{G_0^1}^v
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
v_2(\mathbf{x}) - v_1(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} B_{G_0^1}^u \\ B_{G_0^1}^v \end{bmatrix} \quad (3.73) \\
&= u_2(\mathbf{l}) B_{G_0^1}^u + v_2(\mathbf{l}) B_{G_0^1}^v,
\end{aligned}$$

wobei man natürlich wieder die Einflussfunktion G_0^1 in horizontaler oder vertikaler Richtung benutzt.

Für die Normalkräfte folgt analog dazu

$$\begin{aligned} N_2^u(\mathbf{x}) - N_1^u(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} B_{G_1^1}^u \\ B_{G_1^1}^v \end{bmatrix} \\ &= u_2(\mathbf{l}) B_{G_1^1}^u + v_2(\mathbf{l}) B_{G_1^1}^v \end{aligned} \quad (3.74)$$

und

$$\begin{aligned} N_2^v(\mathbf{x}) - N_1^v(\mathbf{x}) &= [u_2(\mathbf{l}), v_2(\mathbf{l})]^T \begin{bmatrix} B_{G_1^1}^u \\ B_{G_1^1}^v \end{bmatrix} \\ &= u_2(\mathbf{l}) B_{G_1^1}^u + v_2(\mathbf{l}) B_{G_1^1}^v. \end{aligned} \quad (3.75)$$

3.2 Änderungen der Biegesteifigkeiten

In diesem Kapitel sollen nun die obigen Ideen auf die Änderung von Biegesteifigkeiten in Tragwerken übertragen werden. Für den Fall, dass sich Biegesteifigkeiten in einem Teilbereich eines Tragwerks ändern, wird der Einfluss auf Punktgrößen untersucht und es werden Formeln hergeleitet, mit denen man die Änderungen bestimmen kann.

3.2.1 Grundlagen der Theorie am einseitig eingespannten Einfeldträger

Das einfachste Beispiel, um die Grundlagen herzuleiten, wäre sicherlich der gelenkig gelagerte Einfeldträger auf starren Lagern. Doch wie in Abb. 3.4 gezeigt wurde, haben Steifigkeitsänderungen bei statisch bestimmten Systemen nur einen Einfluss auf die Weggrößen und nicht auf die Normalkräfte, Querkräfte oder Momente. Deswegen werden die Untersuchungen an einem eingespannten Balken durchgeführt, Abb. 3.14.

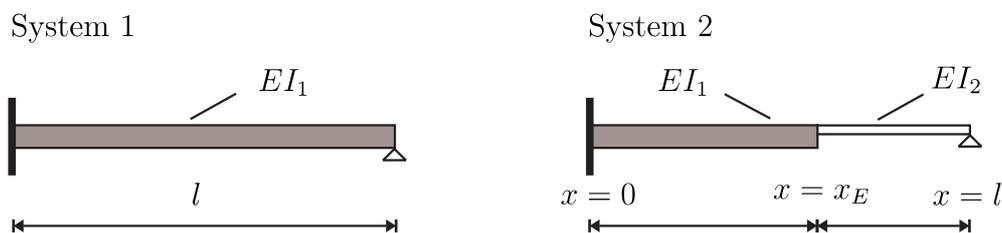


Abb. 3.14: Rechts: Einseitig eingespannter Träger mit konstanter Biegesteifigkeit EI_1 . **Links:** Mit veränderter Biegesteifigkeit, $EI_1 \rightarrow EI_2$, im Bereich $[x_E, l]$.

Mit System 1 wird der Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI_1 bezeichnet und mit System 2 der Balken, bei dem sich die Biegesteifigkeit in einem Bereich verändert, $EI_1 \rightarrow EI_2$.

Im folgenden soll nun untersucht werden, welchen Einfluss diese Abminderung auf die Verformung des Tragwerks hat.

Die schwache Formulierung lautet

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall w, \hat{w} \in V. \quad (3.76)$$

Die Bilinearformen der beiden Systeme genügen

$$\begin{aligned} a_1(w, \hat{w}) &= \int_0^{x_E} EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx + \int_{x_E}^l EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx \\ &= \int_0^l EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$a_2(w, \hat{w}) = \int_0^{x_E} EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx + \int_{x_E}^l EI_2 w''(x) \hat{w}''(x) dx.$$

Übernimmt man die Vorgehensweise aus den vorigen Beispielen, dann erhält man durch Einsetzen der Biegelinie $w_2(x)$

$$\begin{aligned} \Delta a_2(w_2, \hat{w}) &= a_1(w_2, \hat{w}) - a_2(w_2, \hat{w}) \\ &= \int_{x_E}^l (EI_1 - EI_2) w_2''(x) \hat{w}''(x) dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Die Terme in dem Bereich $[0, x_E]$ mit der unveränderten Biegesteifigkeit entfallen, nur die Integrale über den Bereich $[x_E, l]$ mit der veränderten Biegesteifigkeit bleiben erhalten. Somit ist wieder

$$a_2(w_2, \hat{w}) = a_1(w_2, \hat{w}) - \Delta a_2(w_2, \hat{w}) \quad (3.79)$$

und

$$a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}) = a_1(w_1, \hat{w}) \quad (3.80)$$

oder

$$a_1(w_2, \hat{w}) - \Delta a_2(w_2, \hat{w}) = (p, \hat{w}) = a_1(w_1, \hat{w}) \quad (3.81)$$

oder

$$\Delta a_2(w_2, \hat{w}) = a_1(w_2, \hat{w}) - a_1(w_1, \hat{w}) \quad (3.82)$$

und schließlich in Analogie zu (3.12)

$$a_1(w_2 - w_1, \hat{w}) = \int_{x_E}^l (EI_1 - EI_2) w_2''(x) \hat{w}''(x) dx. \quad (3.83)$$

Setzt man als virtuelle Verrückung $\hat{w}(x)$ wieder die Greensche Funktion $G_0^1(y, x)$ in die schwache Form ein, erhält man aus (3.83)

$$a_1(w_2 - w_1, G_0^1) = \int_{x_E}^l (EI_1 - EI_2) w_2''(y) \frac{d^2}{dy^2} G_0^1(y, x) dy. \quad (3.84)$$

Natürlich gilt auch wieder

$$a_1(w_2 - w_1, G_0^1) = (w_2 - w_1, \delta_0) \quad (3.85)$$

und das bedeutet, die Differenz der Verschiebungen in einem beliebigen Punkt x lautet

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_{x_E}^l (EI_1 - EI_2) w_2''(y) \frac{d^2}{dy^2} G_0^1(y, x) dy, \quad (3.86)$$

mit $d^2/dy G_0^1(y, x)$ als zweimalige Ableitung der Greenschen Funktion im Bereich $[x_E, l]$ nach y , wenn die Einzelkraft $\bar{F} = 1$ an der Stelle x steht oder

einfacher gesagt, das Moment aus der Einflussfunktion dividiert durch die Biegesteifigkeit EI_1 und mit $w_2''(y)$ als zweite Ableitung der Biegelinie aus dem auf System 2 wirkenden Lastfall im Bereich $[x_E, l]$, also dem Moment dividiert durch die Biegesteifigkeit EI_2

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_{x_E}^l (EI_1 - EI_2) \frac{M_2(y) M_{G_0^1}(y)}{EI_2 EI_1} dy. \quad (3.87)$$

Drückt man die Biegesteifigkeit am System 2 über die am System 1 aus, erhält man

$$EI_2 = \alpha EI_1 \quad (3.88)$$

mit dem Koeffizienten α , der die Änderung der Biegesteifigkeit beinhaltet (z.B. Abminderung auf 90 % von $EI_1 \rightarrow \alpha = 0.9$).

Setzt man (3.88) in (3.87) ein, folgt

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_{x_E}^l \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_2(y) M_{G_0^1}(y) dy. \quad (3.89)$$

Die Änderung der Verformung erhält man demzufolge aus der Überlagerung der Momentenlinie aus System 2 mit Originalbelastung mit der Momentenlinie am System 1 aus der Einflussfunktion.

In Analogie zu (3.89) gilt für die Abweichung der Verdrehung $\Delta w'(x)$, des Moments $\Delta M(x)$ und der Querkraft $\Delta Q(x)$

$$w_2'(x) - w_1'(x) = \int_{x_E}^l \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_2(y) M_{G_1^1}(y) dy. \quad (3.90)$$

$$M_2(x) - M_1(x) = \int_{x_E}^l \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_2(y) M_{G_2^1}(y) dy. \quad (3.91)$$

$$Q_2(x) - Q_1(x) = \int_{x_E}^l \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_2(y) M_{G_3^1}(y) dy. \quad (3.92)$$

Man kann erkennen, dass der einzige Unterschied zwischen (3.89), (3.90), (3.91) sowie (3.92) die unterschiedlichen Greenschen Funktionen bzw. Einflussfunktionen am System 1 sind.

Zahlenbeispiel 4:

Gesucht wird die Änderung der Durchbiegung an einem gelenkig gelagerten Einfeldträger mit starrer Lagerung an den drei Stellen $x_1 = 3.0$ m, $x_2 = 4.0$ m und $x_3 = 4.5$ m. Der Einfeldträger hat die Länge 5 m und besitzt die konstante Biegesteifigkeit $EI_1 = 30000$ kNm². Im Bereich von $x_A = 4.0$ m bis $x_E = 5.0$ m soll sich die Steifigkeit des Systems auf 60% der ursprünglichen Steifigkeit verringern, $\alpha = 0.6$. Mit Hilfe von (3.90) folgt

$$\begin{aligned} w_2(x_1) - w_1(x_1) &= \frac{(1 - 0.6)}{0.6} \frac{1}{30000 \text{ kNm}^2} \int_4^5 M_2(x) \times M_{G_0^1}(x) dx \\ &= \frac{1}{45000 \text{ kNm}^2} \times \frac{1}{6} \times (2 \times 11.25 \text{ kNm} \\ &\quad + 20 \text{ kNm}) \times 0.6 \text{ kNm} \times 1 \text{ m} \\ &= 9.4 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0944 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(x_2) - w_1(x_2) &= \frac{(1 - 0.6)}{0.6} \frac{1}{30000 \text{ kNm}^2} \int_4^5 M_2(x) \times M_{G_0^1}(x) dx \\ &= \frac{1}{45000 \text{ kNm}^2} \times \frac{1}{6} \times (2 \times 11.25 \text{ kNm} \\ &\quad + 20 \text{ kNm}) \times 0.8 \text{ kNm} \times 1 \text{ m} \\ &= 1.262 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.1262 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(x_3) - w_1(x_3) &= \frac{(1 - 0.6)}{0.6} \frac{1}{30000 \text{ kNm}^2} \int_4^5 M_2(x) \times M_{G_0^1}(x) dx \\ &= \frac{1}{45000 \text{ kNm}^2} \times \left[\frac{1}{6} \times (20 \text{ kNm} \times 0.4 \text{ kNm} \right. \\ &\quad \left. + 2 \times 15.925 \text{ kNm} (0.4 \text{ kNm} + 0.45 \text{ kNm}) \right. \\ &\quad \left. + 11.25 \text{ kNm} \times 0.45 \text{ kNm} \right) \times 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \times 0.45 \text{ kNm} (2 \times 5.925 \text{ kNm} + 11.25 \text{ kNm}) \\
& \times 0.5 \text{ m}] \\
& = 9.357 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0936 \text{ mm}.
\end{aligned}$$

Die Integrale wurden mit Hilfe von Überlagerungstafeln berechnet, [19].

Kontrolle: Mit Hilfe eines Stabwerkprogramms ermittelt man

Punkt x	$w_2(x)$	$w_1(x)$	Differenz
$x_1 = 3.0 \text{ m}$	2.6778 mm	2.5833 mm	0.0945 mm
$x_2 = 4.0 \text{ m}$	1.7370 mm	1.6111 mm	0.1259 mm
$x_3 = 4.5 \text{ m}$	0.9452 mm	0.8516 mm	0.0936 mm

3.2.2 Bestimmung der Änderung von Punktgrößen mittels 'Randintegralen'

In diesem Abschnitt wird eine weitere Möglichkeit erörtert, um den Einfluss von Änderungen in Biegesteifigkeiten auf Punktgrößen zu ermitteln. Die Methode basiert auf den Grundlagen aus Abschnitt 3.2.1.

Die Grundgleichung (3.83) lautet

$$a_1(w_2 - w_1, \hat{w}) = \Delta a_2(w_2, \hat{w}) = ((EI_1 - EI_2) w_2'', \hat{w}'') \quad (3.93)$$

oder nach einsetzen der Greenschen Funktion $G_0^1(y, x)$ anstelle der virtuellen Verrückung $\hat{w}(x)$

$$\begin{aligned}
a_1(w_2 - w_1, G_0^1) &= \Delta a_2(w_2, G_0^1) = ((EI_1 - EI_2) w_2'', G_0^{1''}) \\
&= u_2(x) - u_1(x).
\end{aligned} \quad (3.94)$$

Damit ist nach (3.78)

$$a_1(w_2, G_0^1) - a_2(w_2, G_0^1) = ((EI_1 - EI_2) w_2'', G_0^{1''}). \quad (3.95)$$

Betrachtet wird dieser Ausdruck nun auf einem Gebiet $\Omega = \Omega_a + \Omega_b$, wobei der Quellpunkt der Greenschen Funktion in Ω_b liegt. Es ist K_1 die Biegesteifigkeit in Ω (homogener Fall), während die Steifigkeit im zweiten Fall den Wert K_2 in Ω_a und K_1 in Ω_b hat.

Es ist

$$\begin{aligned} a_1(w_2, G_0^1)_\Omega &= a_1(w_2, G_0^1)_{\Omega_a} + a_1(w_2, G_0^1)_{\Omega_b} \\ &= (K_1 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} + (K_1 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_b} \end{aligned} \quad (3.96)$$

und

$$\begin{aligned} a_2(w_2, G_0^1)_\Omega &= a_2(w_2, G_0^1)_{\Omega_a} + a_2(w_2, G_0^1)_{\Omega_b} \\ &= (K_2 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} + (K_1 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_b}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Somit folgt aus (3.95)

$$\begin{aligned} a_1(w_2, G_0^1) - a_2(w_2, G_0^1) &= (K_1 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} - (K_2 w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} \\ &= ((K_1 - K_2) w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} \\ &= (K_X w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (K_X w_2'', G_0^{1''})_{\Omega_a} &= (K_X w_2^{IV}, G_0^1) + [V_X(w_2), G_0^1] - [M_X(w_2), G_0^{1'}] \\ &= (K_X w_2^{IV}, G_0^1) + [-K_X w_2''', G_0^1] - [-K_X w_2'', G_0^{1'}] \\ &= (K_X \frac{p}{K_2}, G_0^1) + [-K_X \frac{-V_2}{K_2}, G_0^1] - [-K_X \frac{-M_2}{K_2}, G_0^{1'}] \\ &= \frac{K_X}{K_2} \{(p, G_0^1) + [V_2, G_0^1] - [M_2, G_0^{1'}]\}_{\Omega_a} \end{aligned} \quad (3.99)$$

und damit

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{K_1 - K_2}{K_2} \{(p, G_0^1) + [V_2, G_0^1] - [M_2, G_0^{1'}]\}_{\Omega_a}. \quad (3.100)$$

In Analogie zum Balken aus Abschnitt 3.2.1 erhält man für die Differenz der Verschiebung an einer beliebigen Stelle x nach der Steifigkeitsänderung

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^{l_j} (EA_1 - EA_2) u'_{2j}(y) \frac{d}{dy} G_0^1(y, x) dy. \quad (3.103)$$

Für die Normalkräfte muss damit gelten

$$N_2(x) - N_1(x) = \int_0^{l_j} (EA_1 - EA_2) u'_{2j}(y) \frac{d}{dy} G_1^1(y, x) dy. \quad (3.104)$$

Die Greensche Funktion $G_0^1(y, x)$ ist die Verformungsfigur des Fachwerks, wenn an der Stelle x eine Einzelkraft $\bar{F} = 1$ angesetzt wird und $G_1^1(y, x)$ ist die Verformungsfigur des Fachwerks, wenn an der Stelle x der betrachtete Stab aufgeschnitten wird und die beiden Schnittufer um den Weg 1 auseinandergedrückt werden.

Eine andere Darstellungsweise für (3.103) und (3.104) ist

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^{l_j} (EA_1 - EA_2) \frac{N_2(y)}{EA_2} \frac{N_{G_0^1}(y)}{EA_1} dy \quad (3.105)$$

oder

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EA_1} N_2(y) N_{G_0^1}(y) dy \quad (3.106)$$

und

$$N_2(x) - N_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EA_1} N_2(y) N_{G_1^1}(y) dy. \quad (3.107)$$

Die Änderungen folgen aus der Überlagerung der Normalkraft an System 2 bei Originalbelastung mit der Normalkraft am System 1 aus der Einflussfunktion im Stab j .

Interessant ist ein Vergleich zwischen den eben hergeleiteten Formeln und den Ergebnissen aus dem klassischen Zugang über den Satz von Betti

$$u_2(x) - u_1(x) = \sum_i \int_0^{l_i} (G_0^2(y, x) - G_0^1(y, x)) p(y) dy \quad (3.108)$$

$$N_2(x) - N_1(x) = \sum_i \int_0^{l_i} (G_1^2(y, x) - G_1^1(y, x)) p(y) dy. \quad (3.109)$$

Es fällt auf, dass man mit Hilfe des Satzes von Betti weitaus mehr Aufwand betreiben muss, um dasselbe Ergebnis zu erhalten, wie aus (3.106) bzw. (3.107), da man über alle Stäbe des Fachwerks integriert. Löst man das Problem mit (3.106) bzw. (3.107) integriert man nur über den Stab, in dem sich die Steifigkeit geändert hat. Diese Tatsache spricht für eine einfachere und schnellere Bearbeitung des vorliegenden Problems.

3.2.4 Ausfall eines Stabes in einem Fachwerk

Bei dem in Abb. 3.16 dargestellten Fachwerk wird der Ausfall des linken Stabes untersucht.

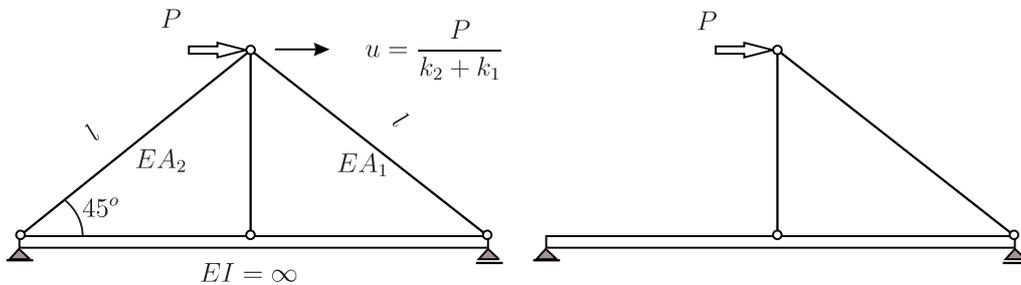


Abb. 3.16: Fachwerk - Ausfall des linken Stabes

Betrachtet man die globalen Steifigkeitsbeziehungen eines ebenen Fachwerkelements, [15], S. 269, erhält man die Steifigkeiten der beiden Fachwerkstäbe in horizontaler Richtung

$$k_2 = \frac{EA_2}{l} \cos^2 \varphi \quad k_1 = \frac{EA_1}{l} \cos^2 \varphi \quad \cos \varphi = \cos 45^\circ. \quad (3.110)$$

Aus der Gleichung

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.111)$$

folgt die Knotenverschiebung

$$u = \frac{P}{k_1 + k_2}. \quad (3.112)$$

Die horizontale Kraft P_2 am oberen Ende des linken Fachwerkstabs lautet $P_2 = k_2 u$ und die daraus resultierende Normalkraft im linken Stab

$$\begin{aligned} N_2 &= \underbrace{P_2 \cos \varphi}_{\text{horizontaler Anteil}} + \underbrace{P_2 \sin \varphi}_{\text{vertikaler Anteil}} = P_2 \sqrt{2} \\ &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} P \sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.113)$$

und wenn $k_2 = \alpha k_1$ ist, folgt

$$N_2 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} P \sqrt{2}. \quad (3.114)$$

In diesem Beispiel ist die Beziehung $\alpha = k_2/k_1$ gleichbedeutend mit dem Ausdruck $\alpha = EA_2/EA_1$.

Betrachtet man (3.106) und setzt (3.114) ein, erhält man

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{1}{EA_1} \int_0^l \frac{\alpha}{1 + \alpha} P \sqrt{2} N_{G_0^1} dy \\ &= \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \int_0^l \frac{P \sqrt{2} N_{G_0^1}}{EA_1} dy. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Fällt der linke Stab aus, ist $\alpha = 0$ und

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^l \frac{P \sqrt{2} N_{G_0^1}}{EA_1} dy. \quad (3.116)$$

In Bezug dazu für die Änderung der Normalkraft an einer beliebigen Stelle x nach Stabausfall in diesem Beispiel

$$N_2(x) - N_1(x) = \int_0^l \frac{P \sqrt{2} N_{G_0^1}}{EA_1} dy. \quad (3.117)$$

Kontrolle:

Aus (3.112) erhält man die horizontale Verschiebung im System 1

$$u_1(x_P) = \frac{Pl}{EA_1}$$

sowie die horizontale Verschiebung am geschwächten System 2

$$u_2(x_P) = \frac{2Pl}{EA_1}.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$u_2(x_P) - u_1(x_P) = \frac{Pl}{EA_1}.$$

Bestimmt man die Änderung der horizontalen Verschiebung mit (3.116) an der Stelle x_P , erhält man $N_{G_0^1} = 1 \times \cos \varphi$ aus der Einflussfunktion (Einzelkraft $\bar{F}_x = 1$ an der Stelle x_P) und eingesetzt

$$u_2(x_P) - u_1(x_P) = \int_0^l \frac{P \sqrt{2} \cos \varphi}{EA_1} dy = \frac{Pl}{EA_1}.$$

Die Ergebnisse sind identisch. Ein weiteres etwas anspruchsvolleres Beispiel ist zur Verdeutlichung der Vorgehensweise in Abschnitt 4.3.4 dargestellt.

3.2.5 Rahmentragwerk

Auf die gleiche Art und Weise wie beim Fachwerk, lässt sich die Idee auch auf ein Rahmentragwerk übertragen. Untersucht wird am Rahmen in Abb. 3.17 welchen Einfluss die Änderung der Biegesteifigkeit des mittleren Stiels auf die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle x hat. Die Verformungsfigur des Rahmens ist die Kette $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ der Biegelinien der einzelnen Stützen und Riegel.

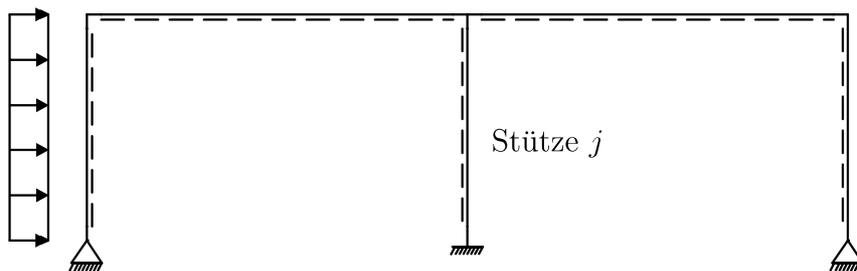


Abb. 3.17: Dreistieliges Rahmentragwerk.

Die innere Energie des Rahmens im System 1 lautet

$$a_1(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \sum_i \int_0^{l_i} EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx \quad (3.118)$$

und nach der Steifigkeitsänderung der rechten Stütze, $EI_1 \rightarrow EI_2$, für das System 2

$$a_2(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \sum_{i \neq j} \int_0^{l_i} EI_1 w''(x) \hat{w}''(x) dx + \int_0^{l_j} EI_2 w''(x) \hat{w}''(x) dx. \quad (3.119)$$

Folgt man wieder den bekannten Schritten, wie schon beim Fachwerk, erhält man für die Differenz der Verschiebung im Punkt x

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_0^{l_j} (EI_1 - EI_2) w''_{2j}(y) \frac{d^2}{dy^2} G_{0j}^1(y, x) dy \quad (3.120)$$

oder

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_{2j}(y) M_{G_{0j}^1} dy. \quad (3.121)$$

Natürlich gilt dann für die Differenz der Verdrehungen, der Momente und der Querkräfte im Punkt x

$$w'_2(x) - w'_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_{2j}(y) M_{G_{1j}^1} dy \quad (3.122)$$

$$M_2(x) - M_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_{2j}(y) M_{G_{2j}^1} dy \quad (3.123)$$

$$Q_2(x) - Q_1(x) = \int_0^{l_j} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_{2j}(y) M_{G_{3j}^1} dy. \quad (3.124)$$

Weitere Erläuterungen, z.B. Änderungen von Normalkräften in Stützen, siehe Beispiel Rahmentragwerk in Abschnitt 4.3.5.

3.2.6 Ausfall eines Balkens in einem Rahmentragwerk

Um den Einfluss eines Balkenausfalls bei einem Rahmentragwerk auf Weg- und Kraftgrößen zu bestimmen, ist es möglich, die Vorgehensweise aus dem Beispiel Ausfall eines Fachwerkstabs in Abschnitt 3.2.4 und 4.3.4 zu übernehmen.

Bei dem in Abb. 3.18 dargestellten Rahmen wird untersucht, welchen Einfluss der Ausfall des linken Balkens auf die horizontale Verformung besitzt.

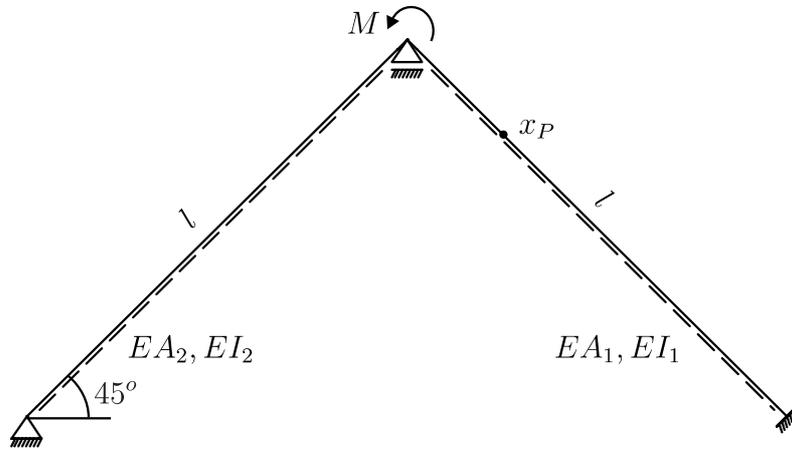


Abb. 3.18: Rahmen - Ausfall eines Balkens.

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix lautet nach [15], S. 269 und [18],

$$\mathbf{K}_{red} = (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \frac{4 EI_1 D}{l} & \frac{6 EI_1 D}{l^2} s & \frac{2 EI_1 D}{l} \\ \frac{6 EI_1 D}{l} s & \frac{EA_1}{l} c^2 + \frac{12 EI_1}{l^3} s^2 & \frac{6 EI_1}{l^2} s \\ \frac{2 EI_1 D}{l} & \frac{6 EI_1}{l^2} s & \frac{4 EI_1}{l} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

mit $EI_2 = \alpha EI_1$, $EA_2 = \alpha EA_1$, $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ und $D = \alpha/(1 + \alpha)$.

Aus der bekannten Gleichung

$$\mathbf{K}_{red} \mathbf{w} = \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

folgen die Verdrehungen im Fuß- und Kopfpunkt und die horizontale Verformung im Kopfpunkt des linken Balkens

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}_{red}^{(-1)} \mathbf{f} \quad (3.127)$$

oder ausgeschrieben und umgeformt

$$\begin{aligned}
 w'_{Fu\beta} &= \frac{1}{1+\alpha} \times \frac{M(EA_1 l^3 c^2 - 6EI_1 l s^2)}{2EI_1((-4+D)EA_1 l^2 c^2 + 12(-1+D)EI_1 s^2)} \\
 w_{Kopf} &= -\frac{1}{1+\alpha} \times \frac{3(-2+D)M l^2 s}{(-4+D)EA_1 l^2 c^2 + 12(-1+D)EI_1 s^2} \\
 w'_{Kopf} &= -\frac{1}{1+\alpha} \times \frac{Ml(EA_1 l^2 c^2 + 3(4-3D)EI_1 s^2)}{EI_1((-4+D)EA_1 l^2 c^2 + 12(-1+D)EI_1 s^2)}.
 \end{aligned}$$

Das Biegemoment im linken Balken ist in diesem Fall eine lineare Funktion in x mit dem Endwert (oben)

$$\begin{aligned}
 M_{Kopf} &= \alpha \times \left\{ \frac{2EI_1}{l} \times w'_{Fu\beta} + s \frac{6EI_1}{l^2} \times w_{Kopf} + \frac{4EI_1}{l} \times w'_{Kopf} \right\} \\
 &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \times \frac{3M((1+\alpha)EA_1 l^2 c^2 + 6EI_1 s^2)}{(4+3\alpha)EA_1 l^2 c^2 + 12EI_1 s^2}.
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

Das Moment im Fußpunkt $M_{Fu\beta}$ ist in diesem Beispiel gleich Null. Die Funktion für das Moment M_2 im linken Stab lautet somit

$$M_2(x) = M_{oben} \cos \varphi x. \tag{3.129}$$

Setzt man (3.129) in (3.121) ein, erhält man die Änderung der Verformung

$$\begin{aligned}
 w_2(x) - w_1(x) &= \int_0^l \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{\alpha}{1+\alpha} \times \frac{1}{EI_1} \\
 &\quad \times \frac{3M((1+\alpha)EA_1 l^2 c^2 + 6EI_1 s^2)c}{(4+3\alpha)EA_1 l^2 c^2 + 12EI_1 s^2} y \times M_{G_0^1}(y) dy.
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

Bei Balkenausfall gilt $\alpha = 0$ und damit

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_0^l \frac{1}{EI_1} \frac{3M(EA_1 l^2 c^2 + 6EI_1 s^2)c}{4EA_1 l^2 c^2 + 12EI_1 s^2} y \times M_{G_0^1}(y) dy. \tag{3.131}$$

Die Gleichungen für die übrigen Weg- und Kraftgrößen sind bis auf das Moment aus der Einflussfunktion $M_{G_i^1}(y)$ identisch mit (3.131).

Zahlenbeispiel 5:

Im Folgenden wird die Änderung der horizontalen Verschiebung an der Stelle $\mathbf{x}_P = \{7 \text{ m}, -3 \text{ m}\}$ bei Ausfall des linken Balkens untersucht, siehe Abb. 3.18.

Es ist $l = 7.071 \text{ m}$, $EA_1 = 210000 \text{ kN}$, $EI_1 = 210 \text{ kNm}^2$ und $M = 10 \text{ kNm}$.

Die Änderung der horizontalen Verformung beträgt somit

$$w_2(x_P) - w_1(x_P) = 6.056 \text{ cm} - 3.461 \text{ cm} = 2.595 \text{ cm}.$$

Mit Hilfe von (3.131) ermittelt man (Überlagerung zweier Dreiecksflächen)

$$w_2(x_P) - w_1(x_P) = \frac{7.071 \text{ m}}{210 \text{ kNm}^2} \times \frac{7.5 \text{ kNm} \times 0.3085 \text{ kNm}}{3} = 0.02596 \text{ m}.$$

Die Ergebnisse stimmen überein. Der Wert 7.5 kNm lässt sich mit (3.128) ermitteln, in dem man $\alpha = 0$ setzt. Der Koeffizient α im Zähler zu Beginn der Gleichung bleibt unbeachtet, da er in (3.130) herausfällt.

Vereinfachte Annahme:

Eine Idee zur vereinfachten Bestimmung der Verformungsänderung wäre anstelle des hergeleiteten Moments aus (3.128), das Moment $M_1(y)$ im System 1 zu verwenden und den Koeffizient α entfallen zu lassen. Näherungsweise erhält man

$$w_2(x) - w_1(x) \approx \int_0^l \frac{1}{EI_1} \times M_1(y) \times M_{G_0^1}(y) dy. \quad (3.132)$$

Es ist

$$w_2(x_P) - w_1(x_P) = \frac{7.071 \text{ m}}{210 \text{ kNm}^2} \times \frac{4.286 \text{ kNm} \times 0.3085 \text{ kNm}}{3} = 0.01484 \text{ m}.$$

Die horizontale Verformung ist damit $w_2(x_P) = 4.945 \text{ cm}$. Das entspricht einer Abweichung von 18.4% im Gegensatz zum exakten Ergebnis. Die Anwendung dieser Vereinfachung ist fragwürdig, da sie größere Abweichungen zum exakten Ergebnis aufweist.

3.2.7 Schubstarre Platte

Grundlagen:

Die Differentialgleichung der schubstarken Platte (Kirchhoff Platte)

$$K \Delta \Delta w = p \quad (3.133)$$

erhält man, indem man (3.134) und (3.135) in (3.136) einsetzt

$$\text{Kinematik:} \quad \mathbf{E} - \mathbf{E}(w) = \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \quad (3.134)$$

$$\text{Material:} \quad \mathbf{C}[\mathbf{E}] + \mathbf{M} = \mathbf{0}_{(2 \times 2)} \quad (3.135)$$

$$\text{Gleichgewicht:} \quad -\text{div}^2 \mathbf{M} = \mathbf{p}_{(1)}. \quad (3.136)$$

Hier ist $\mathbf{E} = [\varepsilon_{ij}]$ der Krümmungstensor und $\mathbf{E}(\cdot)$ der Operator,

$$\mathbf{E}(w) = \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,yy} \end{bmatrix} = \nabla \nabla w \quad (3.137)$$

$\mathbf{M} = [M_{ij}]$ ist der Momententensor und $\mathbf{C}[\cdot]$ ist der Elastizitätstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[\mathbf{E}] &= K \{ (1 - \nu) \mathbf{E} + \nu (sp \mathbf{E}) \mathbf{I} \} \\ &= K \left\{ (1 - \nu) \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.138) \\ &= K \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} & (1 - \nu) \varepsilon_{xy} \\ (1 - \nu) \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei $K = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ die konstante Plattensteifigkeit ist und h die Dicke der Platte. Außerdem ist ν die Querdehnungszahl (POISSONSche Konstante), sp ist die mathematische Schreibweise für Spur (engl.: trace; tr) und beschreibt eine mathematische Anwendung auf den Tensor, siehe [1], und

\mathbf{I} ist die Einheitsmatrix. Die Grundlagen sind [8], S. 34, und [17], S. 46 ff., entnommen.

Die Wechselwirkungsenergie zweier Biegeflächen $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ einer Platte ist das Skalarprodukt des Momententensors \mathbf{M} von w mit dem Krümmungstensor $\hat{\mathbf{E}}$ von \hat{w}

$$\begin{aligned} a(w, \hat{w}) &= \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{E}} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (m_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + 2m_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy} + m_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.139)$$

In der FE-Literatur ist die Vektorschreibweise üblich, damit erhält man aus (3.139) in einer äquivalenten Notation mit dem Momentenvektor $\mathbf{m} = [m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}]^T$ und dem Krümmungsvektor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_{xx}, \hat{\varepsilon}_{yy}, 2\hat{\varepsilon}_{xy}]^T$, siehe [11], S. 334 ff.,

$$\begin{aligned} a(w, \hat{w}) &= \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{m}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} K (\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} K \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Der Elastizitätstensor wird in der neuen Schreibweise zu einer 3×3 -Matrix \mathbf{D} . Es ist

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}} = K \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.141)$$

Steifigkeitsänderung:

Bei der in Abb. 3.19 dargestellten allseitig gelenkig gelagerten Platte ändert sich die Dicke h und damit die Plattensteifigkeit K in dem Teilbereich Ω_b , $K_1 \rightarrow K_2$. Wie schon beim Balken hergeleitet, soll nun herausgefunden werden, welchen Einfluss diese Änderung auf die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle der Platte hat.

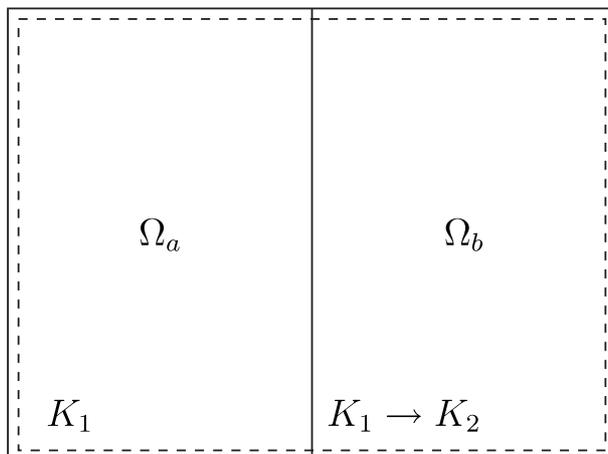


Abb. 3.19: Vierseitig gelenkig gelagerte Platte.

Die Bilinearform für das System 1 mit der konstanten Plattensteifigkeit K_1 lautet

$$a_1(w, \hat{w}) = \int_{\Omega_a} K_1 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \Omega_a + \int_{\Omega_b} K_1 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega_b \quad (3.142)$$

und für das System 2 mit der Steifigkeitsänderung $K_1 \rightarrow K_2$ in Ω_b

$$a_1(w, \hat{w}) = \int_{\Omega_a} K_1 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \Omega_a + \int_{\Omega_b} K_2 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega_b. \quad (3.143)$$

Wendet man die gleichen Ideen wie beim Balken an, erhält man für die Änderung der Durchbiegung an einer beliebigen Stelle \boldsymbol{x}

$$w_2(\boldsymbol{x}) - w_1(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega_b} (K_1 - K_2) \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{G_0^1} \Omega_b \quad (3.144)$$

mit $\boldsymbol{\varepsilon}_2^T$ als Krümmungsvektor am System 2 aus der Originalbelastung und mit $\boldsymbol{\varepsilon}_{G_0^1}$ als Krümmungsvektor aus der Einflussfunktion am System 1 (Einzelkraft $\bar{F} = 1$ im Punkt \boldsymbol{x}).

Natürlich kann die gleiche Logik auch für die Änderungen der Verdrehungen, der Momente oder der Querkräfte angewendet werden. Dabei muss man beachten, dass die jeweils zugehörige Einflussfunktion G_i^1 verwendet wird, um den Krümmungsvektor zu bestimmen.

Zur Erleichterung der Darstellungsweise wird die Querdehnungszahl $\nu = 0$ angenommen. Aus (3.144) folgt demnach

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (K_1 - K_2) \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{T(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{(G_0^1)} d\Omega_{by}$$

und unter Beachtung von (3.141)

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{(K_1 - K_2)}{K_1 K_2} (m_{xx2} m_{xxG_0^1} + m_{yy2} m_{yyG_0^1} + 2 m_{xy2} m_{xyG_0^1}) d\Omega_{by} \quad (3.145)$$

mit den Momenten am System 2 bei Originalbelastung und den Momenten aus der Einflussfunktion für die Durchbiegung am System 1.

Es ist wieder $K_2 = \alpha K_1$, um die Plattensteifigkeit aus System 2 über K_1 auszudrücken. Damit folgt

$$w_2(\mathbf{x}) - w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{K_1} (m_{xx2} m_{xxG_0^1} + m_{yy2} m_{yyG_0^1} + 2 m_{xy2} m_{xyG_0^1}) d\Omega_{by}. \quad (3.146)$$

Beispiel: Gesucht ist die Änderung des Moments m_{xx} an der Stelle \mathbf{x}

$$m_{xx2}(\mathbf{x}) - m_{xx1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{K_1} (m_{xx2} m_{xxG_2^1} + m_{yy2} m_{yyG_2^1} + 2 m_{xy2} m_{xyG_2^1}) d\Omega_{by}. \quad (3.147)$$

Die Momente stammen einmal aus System 2 bei Originalbelastung und aus System 1, wenn im gesuchten Punkt \mathbf{x} ein Knick in x-Richtung angesetzt wird.

Die übrigen Änderungen der Weg- und Kraftgrößen können auf die gleiche Art ermittelt werden, nur der Typ der Einflussfunktion variiert.

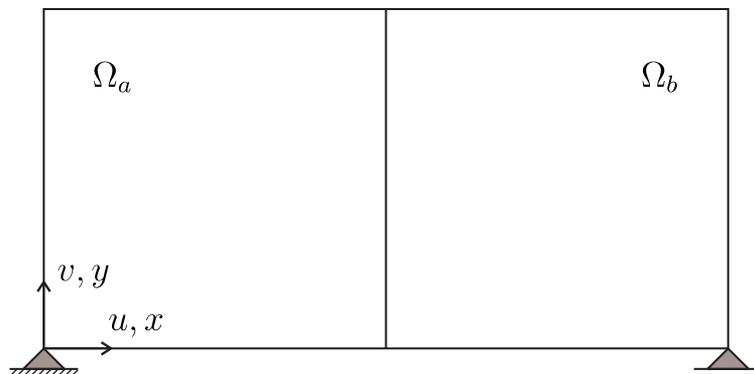


Abb. 3.20: Wandscheibe mit Steifigkeitsänderung im Bereich Ω_b .

3.2.8 Scheibe

Bei der Wandscheibe in Abb. 3.20 ändert sich die Dicke t und damit die Steifigkeit im Bereich Ω_b . Wie schon bei der Platte, wird nun untersucht, welchen Einfluss die Änderung auf die Verformungen und die Spannungen an einem beliebigen Punkt \mathbf{x} hat.

Die Grundlagen der Scheibentheorie sind [8], S. 37 ff., und [17], S. 4 ff., entnommen, sollen hier aber nicht so ausführlich wie bei der Platte im vorigen Abschnitt dargestellt werden, da sich die Vorgehensweise gleicht.

Die Formänderungsenergie zweier Verformungsfiguren $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ bei der Scheibe ist das Skalarprodukt des Spannungsvektors von \mathbf{u} mit dem Verzerrungsvektor von $\hat{\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) &= t \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \\
 &= t \int_{\Omega} [\sigma_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy} + 2\sigma_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy}] d\Omega \\
 &= t \int_{\Omega} (\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon})^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = t \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

Voraussetzung ist, dass in der Scheibe ein ebener Spannungszustand vorliegt, $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$ und die Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes, das besagt, die Spannungen sind den Verzerrungen proportional.

Damit ist

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.149)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnungszahl ν und

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}. \quad (3.150)$$

Zur Vereinfachung der Darstellungsweise wird die Querdehnungszahl $\nu = 0$ angenommen. Damit erhält man aus (3.148) die Bilinearform für System 1 mit konstanter Steifigkeit

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) &= Et_1 \int_{\Omega_a} (\varepsilon_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + \varepsilon_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy}) d\Omega_a \\ &+ Et_1 \int_{\Omega_b} (\varepsilon_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + \varepsilon_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy}) d\Omega_b \end{aligned} \quad (3.151)$$

und für das System 2 mit unterschiedlicher Dicke

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) &= Et_1 \int_{\Omega_a} (\varepsilon_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + \varepsilon_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy}) d\Omega_a \\ &+ Et_2 \int_{\Omega_b} (\varepsilon_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} + \varepsilon_{yy} \hat{\varepsilon}_{yy} + 2\varepsilon_{xy} \hat{\varepsilon}_{xy}) d\Omega_b. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Nach Anwendung der Ideen vom Balken ist die Änderung der Verschiebung an einer beliebigen Stelle \mathbf{x}

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{(t_1 - t_2)}{E} \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_{G_0^1} d\Omega_{by} \quad (3.153)$$

oder mit $t_2 = \alpha t_1$

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{t_1(1-\alpha)}{E} \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_{G_0^1} d\Omega_{by} \quad (3.154)$$

mit $\boldsymbol{\sigma}_2$ als Spannung am System 2 aus Originalbelastung und mit $\boldsymbol{\sigma}_{G_0^1}$ als Spannung am System 1, aus der Einflussfunktion (Einzelkraft $\bar{F} = 1$ an der Stelle \mathbf{x}). Um den horizontalen Anteil der Differenz der Verschiebung zu erhalten, muss die Einzelkraft in x -Richtung angesetzt werden und in y -Richtung für den vertikalen Anteil.

Die Änderung der Spannungen an einer beliebigen Stelle \mathbf{x} erhält man aus

$$\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{(t_1 - t_2)}{E} \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_{G_1^1} d\Omega_{by} \quad (3.155)$$

oder

$$\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_b} \frac{t_1(1-\alpha)}{E} \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_{G_1^1} d\Omega_{by} \quad (3.156)$$

Die Normalkräfte erhält man, indem man die Spannungen mit der Scheibendicke t multipliziert.

Die Änderungen sind abhängig von den Spannungen am System 2 aus dem Originallastfall und den Spannungen am System 1, aus der Einflussfunktion, wenn im Punkt \mathbf{x} ein Versatz der Größe 1 in die x - oder y -Richtung angesetzt wird.

4 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die hergeleiteten Formeln auf unterschiedliche Tragwerke angewendet.

Die Ergebnisse sind mit Hilfe der folgenden Software ermittelt worden:

- TWODFRAME → Berechnung von ebenen Stabtragwerken,
- SOFISTIK → FE-Programm für Scheiben und Platten,
- BE-PLATTE → RE-Programm für Platten und
- BE-SCHEIBE → RE-Programm für Scheiben.

4.1 Darstellungsform der Ergebnisse

Implementiert man die Ergebnisse der Herleitungen aus Kapitel 3 in Software zur Berechnung von ebenen Stabtragwerken oder in FE- bzw. RE-Programme, stellt sich die Frage, in welcher Form man Änderungen eingibt und wie man die Ergebnisse von Berechnungen darstellen kann.

Im Folgenden wird eine Möglichkeit vorgestellt, die auch bei der Darstellung der numerischen Ergebnisse in diesem Kapitel angewendet wurde.

Um den Einfluss von **Änderungen der Lagersteifigkeiten** auf Punktgrößen darzustellen, wählt man die gewünschte Stelle x , an der die Änderung der Verformung, des Momentes etc. ermittelt werden soll.

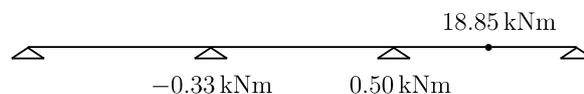
Danach markiert man das Lager, dessen Steifigkeit sich verändert und gibt die Größe der Änderung an. Im Folgenden wird die Änderung der Steifigkeit mit α bezeichnet. Verringert sich die Lagersteifigkeit um 30%, erhält man $\alpha = 0.7$.

Die Ergebnisse der Berechnung werden, wie in Abb. 4.1 für einen Durchlaufträger und eine Platte, grafisch dargestellt.

Am gewählten Punkt x ist z.B. das ursprüngliche Moment $M_1(x)$ (im System 1)² angegeben und unter dem entsprechenden Lager die Änderung des Momentes, wenn die Steifigkeit in diesem Lager variiert.

²Mit System 1 wird das Tragwerk vor einer Steifigkeitsänderung bezeichnet und mit System 2 nach Änderung der Lager- oder Biegesteifigkeit.

Beispiel Durchlaufträger



Beispiel Platte

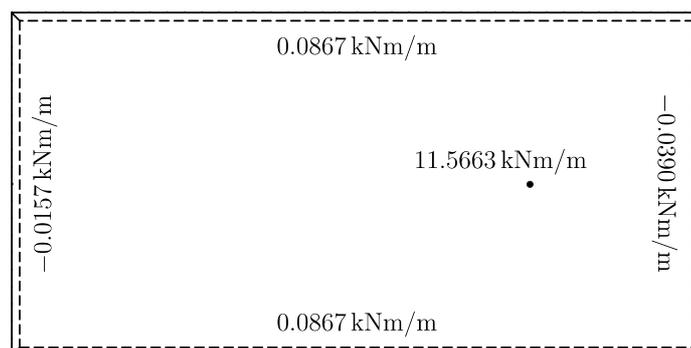


Abb. 4.1: Oben: Abminderung der Lagersteifigkeit in Lager 2 oder 3 am Durchlaufträger und Einfluss auf das Feldmoment. **Unten:** Abminderung der Lagersteifigkeiten einer gelenkig gelagerten Platte und Einfluss auf das Moment m_{xx} .

Alternativ dazu kann natürlich auch eine Darstellung der Ergebnisse in Tabellenform erfolgen.

Um den Einfluss von **Änderungen der Biegesteifigkeiten** in bestimmten Bereichen eines Tragwerks auf Punktgrößen darzustellen, wählt man zuerst einen Bereich, indem sich zum Beispiel die Dicke einer Platte ändert.

Dann markiert man eine Stelle x , an der man die Änderung der Verschiebung, des Momentes etc. ermitteln will.

In einem separaten Dialogfeld oder direkt in der Grafik wird dann wieder das z. B. ursprüngliche Moment und die Änderung angegeben.

4.2 Änderung von Lagersteifigkeiten

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Änderungen der Lagersteifigkeiten auf Weg- und Kraftgrößen bei unterschiedlichen Tragwerken untersucht.

4.2.1 Beispiel - Durchlaufträger

Im Folgenden wird die Änderung der Durchbiegung und des Momentes in den Punkten $x_1 = 7.50$ m und $x_2 = 12.50$ m untersucht. Die Lagersteifigkeit in Lager B verringert sich um 50% ($\alpha = 0.5$).

Der Stahlbetonträger (C 20/25, Rechteckquerschnitt $h/b = 50$ cm/30 cm), siehe Abb. 4.2, liegt auf quadratischen Betonstützen ($a = 30$ cm) der Höhe 2.75 m auf.

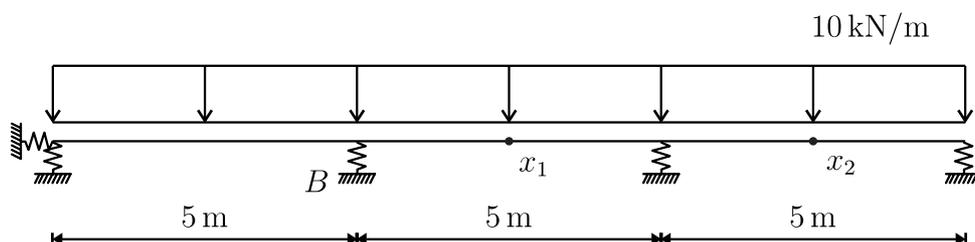


Abb. 4.2: Beispiel Durchlaufträger

Daraus folgt die Lagersteifigkeit

$$k_1 = \frac{EA}{l} = \frac{2.88 \times 10^7 \text{ kNm} \times 0.3 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}}{2.75 \text{ m}} = 942545 \text{ kN/m}.$$

Um die Änderung der Durchbiegung und des Momentes an den Stellen x_1 und x_2 zu bestimmen, wendet man (3.23) und (3.27) an. Man erhält, siehe auch Abb. 4.3,

$$\begin{aligned} w_2(x_1) - w_1(x_1) &= (1 - 0.5) \times 0.1158 \text{ mm} \times 0.5744 \text{ kN} \\ &= 0.0333 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2(x_2) - w_1(x_2) &= (1 - 0.5) \times 0.1158 \text{ mm} \times (-0.1450) \text{ kN} \\ &= -0.0084 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(x_1) - M_1(x_1) &= (1 - 0.5) \times 0.1158 \text{ mm} \times 2171 \text{ kN} \\ &= 0.126 \text{ kNm} \end{aligned}$$

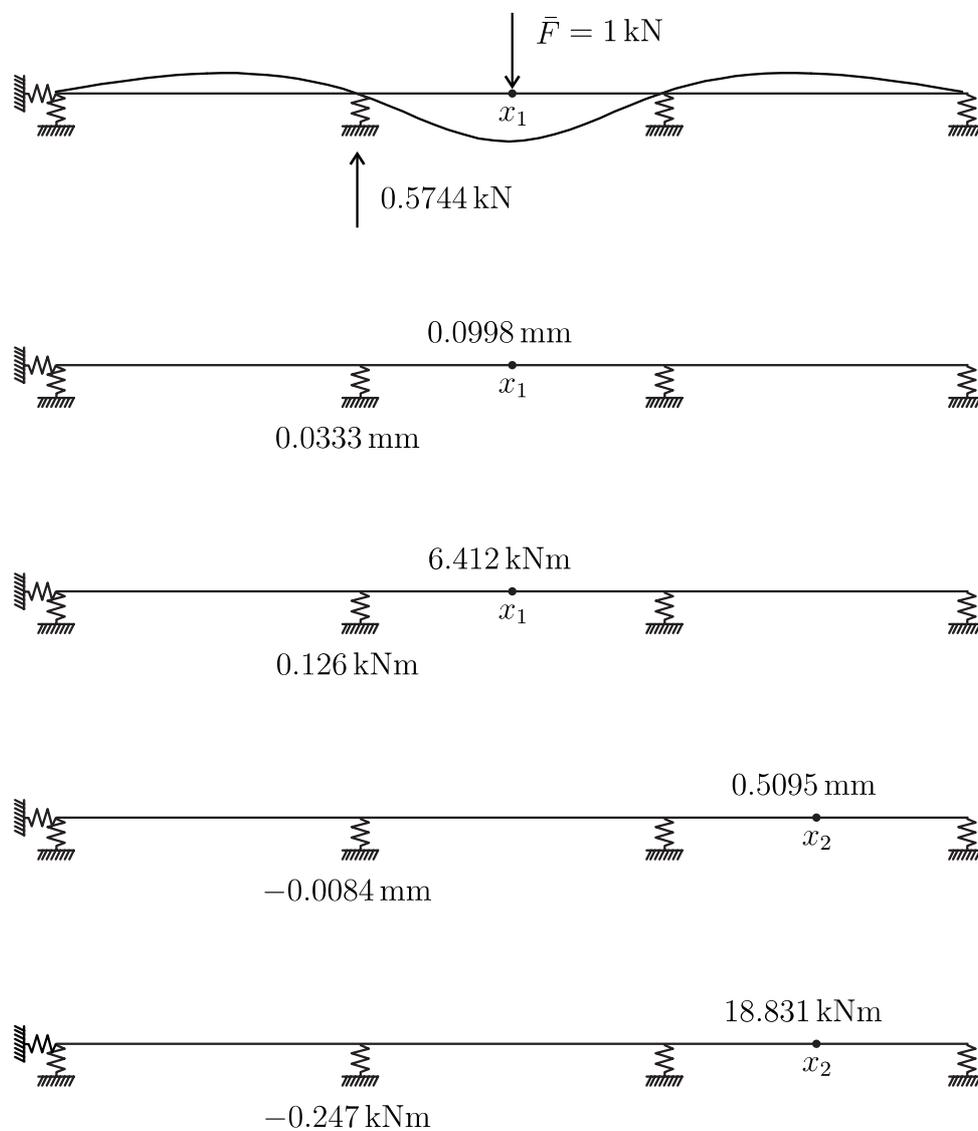


Abb. 4.3: Oben: Beispiel für die Einflussfunktion $G_0^1(y, x_1)$ der Durchbiegung an der Stelle x_1 und die daraus resultierende Lagerkraft in Lager B , die zur Bestimmung der Änderung benötigt wird. Unten: Veränderung der Durchbiegungen und Momente nach Abminderung der Steifigkeit in Lager B um 50%. An der Stelle x_i ist der ursprüngliche Wert aus System 1 dargestellt und unter dem Lager die Veränderung der Weg- oder Kraftgröße.

$$\begin{aligned}
 M_2(x_2) - M_1(x_2) &= (1 - 0.5) \times 0.1158 \text{ mm} \times (-4270) \text{ kN} \\
 &= -0.247 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Änderungen benötigt man also die Abminderung der Steifigkeit, die Absenkung des Lagers nach der Steifigkeitsänderung im System 2 unter Originalbelastung und die Lagerkraft vor der Steifigkeitsänderung im System 1 aus der zugehörigen Einflussfunktion.

Die Lagerkraft aus der Einflussfunktion hängt von der Stelle x ab, an der man die Abminderung ermitteln will und von dem Typ der Einflussfunktion.

4.2.2 Möglichkeit zur Vereinfachung der Berechnungen

Um z.B. die Änderung der Durchbiegung oder des Momentes zu bestimmen, bedient man sich den Formeln (3.23) oder (3.27), die Werte aus System 1 und Werte aus System 2 enthalten.

Im Folgenden soll nun untersucht werden, welche Auswirkungen es auf die Ergebnisse hat, wenn man anstatt der Absenkung des Lagers im System 2, den Wert aus System 1 verwendet, um dadurch den Rechenaufwand zu verringern, denn man betrachtet jetzt nur noch das System 1.

Die Gleichung (3.27) zur Bestimmung der Änderung des Momentes an einer Stelle x nach Abminderung einer Lagersteifigkeit lautet

$$M_2(x) - M_1(x) = (1 - \alpha) w_2(l) B_{G_2^1} \quad \text{mit} \quad w_2(l) = \frac{B_2}{k_2} = \frac{B_2}{\alpha k_1}.$$

Hierbei ist B_2 die Lagerkraft im System 2 aus Originalbelastung und k_2 die Steifigkeit des Lagers nach Abminderung.

Annahme:

Es werden zwei unterschiedliche Varianten betrachtet:

- (I) $B_2 \sim B_1$
- (II) $B_2 \sim (1 - \alpha) B_1.$

Verwendet man Variante I, folgt aus (3.27)

$$M_2(x) - M_1(x) = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{B_1}{k_1} B_{G_2^1} \quad (4.1)$$

und für Variante II

$$M_2(x) - M_1(x) = \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha} \frac{B_1}{k_1} B_{G_2^1} \quad (4.2)$$

Übernimmt man die Vorgaben aus dem vorigen Beispiel und wertet die Gleichungen (3.27), (4.1) sowie (4.2) für unterschiedliche Steifigkeitsänderungen im Lager B und deren Einfluss auf das Moment an der Stelle x_1 aus, erhält man die in Tab. 4.1 angegebenen Ergebnisse.

α	$\Delta M(x_1)_{\text{exakt}}$ [kN/m]	Variante I [kN/m]	Variante II [kN/m]
0.1	1.0694	1.1402 (6.6 %)	1.0261 (-4.0 %)
0.2	0.4920	0.5067 (3.0 %)	0.4054 (-17.6 %)
0.3	0.2904	0.2956 (1.8 %)	0.2069 (-28.7 %)
0.4	0.1878	0.1900 (1.2 %)	0.1140 (-39.3 %)
0.5	0.1257	0.1267 (0.8 %)	0.0633 (-49.6 %)
0.6	0.0840	0.0845 (0.6 %)	0.0338 (-60.0 %)
0.7	0.0541	0.0543 (0.4 %)	0.0163 (-69.9 %)
0.8	0.0316	0.0317 (0.3 %)	0.0063 (-80.1 %)
0.9	0.0140	0.0141 (<0.3 %)	0.0014 (-90.0 %)

Tab. 4.1: Änderung der Momente an der Stelle x_1 , ermittelt mit Hilfe von (3.27), (4.1) und (4.2). In Klammern sind die Abweichung vom exakten Ergebnis aus Spalte 2 in % dargestellt.

Variante I: Da man anstelle der Lagerkraft B_2 im System 2 die Lagerkraft B_1 im System 1 zur Berechnung verwendet, werden die ermittelten Änderungen der Momente etwas größer, als die exakten Lösungen. Der Grund dafür ist, dass sich im System 2 die Lagerkraft umso mehr verringert, je geringer die Steifigkeit des Lagers ist. Man nimmt aber an, dass $B_2 \sim B_1$ ist. Daraus folgt, je größer die Steifigkeitsänderung, desto höher ist die Abweichung vom exakten Wert.

Variante II: Die ermittelten Änderungen der Momente sind stets geringer, als die exakten Lösungen, da der Vorfaktor $(1 - \alpha)$ aus der Annahme $B_2 \sim (1 - \alpha) B_1$ die Lagerkraft im System 1 stärker abmindert, als sich die tatsächliche Lagerkraft im System 2 verringert.

Auswertung der Betrachtungen: In Tab. 4.1 sind ebenfalls die Abweichungen vom exakten Ergebnis in Prozent angegeben.

Die Variante II ist unbrauchbar, da die Abweichungen weit über einer akzeptablen Toleranzgrenze liegen. Allerdings fällt auf, dass man bei großen Steifigkeitsänderungen besser Ergebnisse erhält, als bei geringen Steifigkeitsänderungen.

Betrachtet man die Abweichungen aus Variante I, kann festgehalten werden, dass die Ergebnisse selbst bei großen Steifigkeitsänderungen nur geringfügig vom exakten Wert abweichen.

In Tab. 4.2 sind noch einmal die Ergebnisse aus den gleichen Untersuchungen für die Änderung der Durchbiegung im Punkt x_2 nach Abminderung der Steifigkeit in Lager B aufgelistet, die die obigen Aussagen belegen.

Fazit der Vereinfachung:

Um den Rechenaufwand zu verringern, ist es also möglich, die Änderungen von Weg- oder Kraftgrößen auch mit Hilfe von Variante I zu bestimmen, allerdings erhält man dann nur eine Näherungslösung, die aber gerade bei geringen Steifigkeitsänderung nur unwesentlich vom exakten Wert abweicht.

Natürlich kann man die Variante I genauso auch auf die übrigen Formeln zur Ermittlung der Änderung von Verdrehungen und Querkräften übertragen.

α	$\Delta w(x_2)_{\text{exakt}}$ [mm]	Variante I [mm]	Variante II [mm]
0.1	-0.0714	-0.0762 (6.7 %)	-0.0685 (-4.1 %)
0.2	-0.0329	-0.0338 (2.7 %)	-0.0271 (-17.6 %)
0.3	-0.0194	-0.0197 (1.5 %)	-0.0138 (-28.9 %)
0.4	-0.0125	-0.0127 (1.6 %)	-0.0076 (-39.2 %)
0.5	-0.0084	-0.0085 (1.2 %)	-0.0042 (-50.0 %)
0.6	-0.0056	-0.0056 (1.0 %)	-0.0023 (-58.9 %)
0.7	-0.0036	-0.0036 (<1.0 %)	-0.0011 (-69.4 %)
0.8	-0.0021	-0.0021 (<1.0 %)	-0.0004 (-81.0 %)
0.9	-0.0009	-0.0009 (<1.0 %)	-0.0001 (-88.9 %)

Tab. 4.2: Änderung der Durchbiegungen an der Stelle x_2 , ermittelt mit Hilfe von (3.23) und den zugehörigen Formeln für Variante I und II. In Klammern die Abweichung vom exakten Ergebnis in %.

Bei einem Lagerausfall ist die Vorgehensweise nach Variante I nicht möglich, da in diesem Fall $k_2 = 0$ und damit auch $\alpha = 0$ ist. In (4.1) erhält man dadurch eine Null im Nenner.

4.2.3 Beispiel - Durchlaufträger mit Lagerausfall

Bei dem in Abb. 4.4 dargestellten Durchlaufträger mit 3 Feldern wird die Änderung der Durchbiegung und des Momentes bei Lagerausfall an der Stelle des Auflagers C untersucht.

Die Änderung der Durchbiegung kann man mit Hilfe von (3.31) oder (3.42) bestimmen. Im Zahlenbeispiel obere und mittlere Zeile.

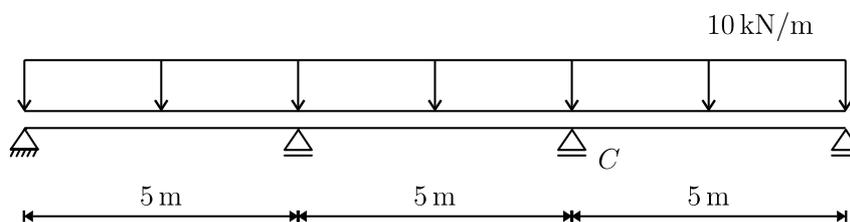


Abb. 4.4: Stahlbetonträger auf starren Lagern (C20/25, Rechteckquerschnitt $h/b = 50 \text{ cm}/30 \text{ cm}$).

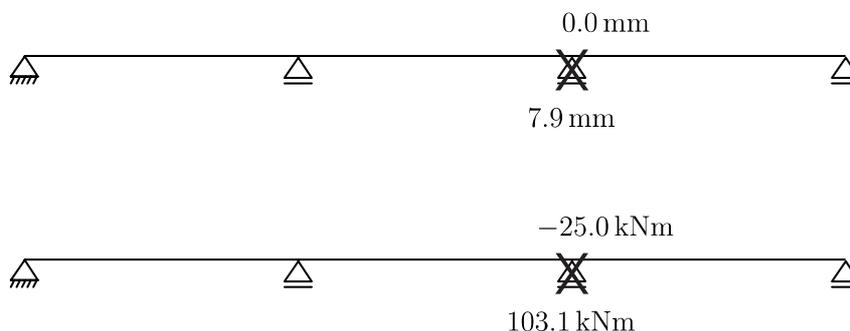


Abb. 4.5: Veränderung der Durchbiegung und des Momentes nach Ausfall des Lagers C . Oberhalb des Tragwerks ist der ursprüngliche Wert im System 1 dargestellt und unterhalb des ausgefallenen Lagers die Änderung der untersuchten Weg- oder Kraftgröße.

Es folgt

$$\begin{aligned}
 w_2(x_C) - w_1(x_C) &= 7.9 \text{ mm} \times 1.0 \text{ kN} \\
 &= 0.1437 \text{ mm} \times 55.0 \text{ kN} \times 1.0 \text{ kN} \\
 &= 7.9 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

und für die Änderung des Momentes folgt aus (3.34) oder (3.45)

$$\begin{aligned}
 M_2(x_C) - M_1(x_C) &= 7.9 \text{ mm} \times 13050 \text{ kN} \\
 &= 0.1437 \text{ mm} \times 55.0 \text{ kN} \times 13050 \text{ kN} \\
 &= 103.1 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

In Abb. 4.5 sind die Ergebnisse noch einmal grafisch dargestellt.

4.2.4 Beispiel 1 - Platte

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Änderungen der Lagersteifigkeiten bei einer Platte auf das Moment m_{xx} an der Stelle \mathbf{x} untersucht. Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise zuerst an einem einfachen Beispiel.

Betrachtet wird eine allseitig gelenkig gelagerte Platte, siehe Abb. 4.6, und die Änderung des Momentes m_{xx} an der Stelle $x = 3.50$ m und $y = 3.50$ m, wenn die Lagersteifigkeit längs eines der vier Ränder um 50% verringert wird.

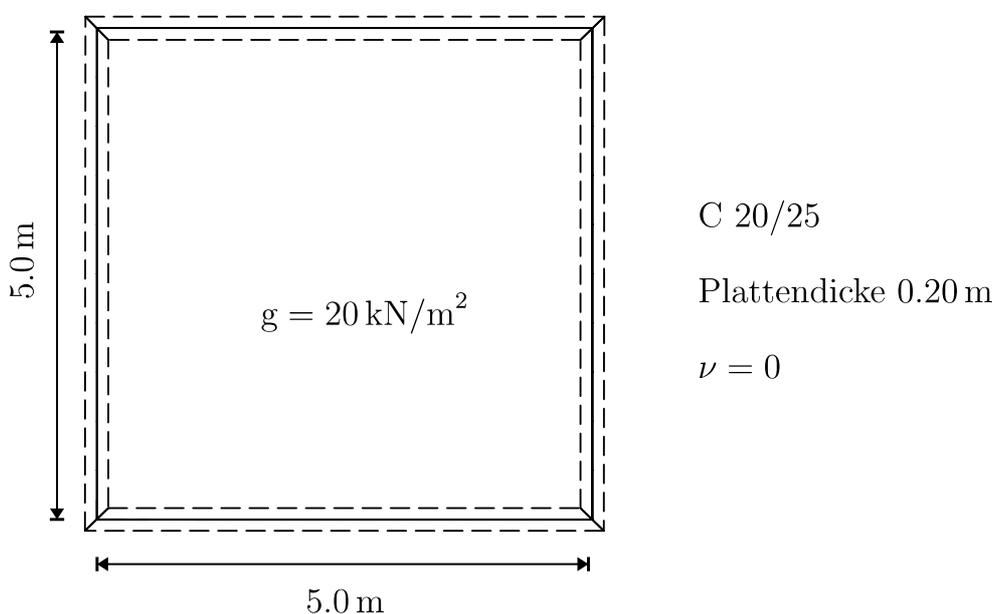


Abb. 4.6: Vierseitig gelenkig gelagerte Platte.

Bemerkung: Die Lagerungen (Wände oder Stützen) einer Platte sollten bei Berechnungen mittels FE- oder RE-Programmen grundsätzlich als elastisch angenommen werden, denn die Verteilung der Schnitt- und Lagerkräfte hängt ganz wesentlich von den Steifigkeiten der Subkonstruktionen ab, siehe [6], [10], S. 366 ff. und [21], S. 79 ff..

In diesem Beispiel werden Wände aus Mauerwerk ($d = 0.24$ m, $h = 2.75$ m) gewählt, mit $k_1 = 523636,4$ kN/m pro lfd. m.

Um die Änderungen des Momentes m_{xx} exakt zu bestimmen, wendet man (3.57) an.

In der Schreibweise von (3.62) folgt für die Änderung des Momentes

$$m_{xx2}(\mathbf{x}) - m_{xx1}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_a} (1 - \alpha) \frac{A_2(\mathbf{y})}{k_2} A_{G_2^1}(\mathbf{y}) d\Gamma_{a_y}. \quad (4.3)$$

Für den Fall, dass sich die Lagersteifigkeiten längs des oberen Randes um 50% verringert, erhält man für $A_2(\mathbf{y})$ und $A_{G_2^1}(\mathbf{y})$ die in Abb. 4.7 dargestellten Lagerkraftverläufe.

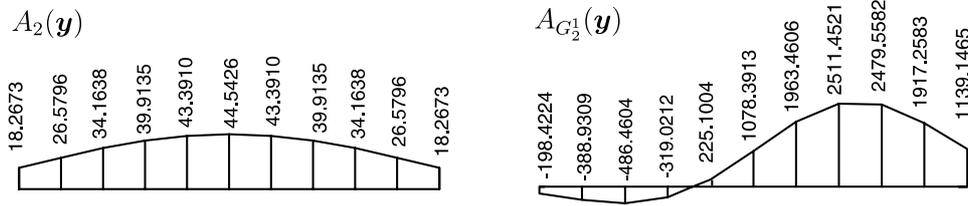


Abb. 4.7: Links: Lagerkraftverlauf $A_2(\mathbf{y})$ längs des oberen Randes aus System 2 mit Originalbelastung. **Rechts:** Lagerkraftverlauf $A_{G_2^1}(\mathbf{y})$ aus der Einflussfunktion für das Moment m_{xx} an der Stelle \mathbf{x} .

Löst man (4.3), erhält man $m_{xx2} = 13.80$ kNm/m nach Abminderung der Lagersteifigkeit längs des oberen Randes (vorher: $m_{xx1} = 13.55$ kNm/m).

Eine Möglichkeit zur praktischen Anwendung ist (siehe auch S. 49), nur die resultierende Lagerkraft zu betrachten und so die Änderungen des Momentes zu bestimmen. Aus (3.63) folgt für das Moment

$$m_{xx2}(\mathbf{x}) - m_{xx1}(\mathbf{x}) = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{l_\Gamma} \frac{1}{k_1} R_2 R_{G_2^1}. \quad (4.4)$$

Die resultierende Lagerkraft R_2 im System 2 mit Originalbelastung ist in diesem Beispiel 175.45 kN und $R_{G_2^1} = 5268.88$ kN im System 1 aus der Einflussfunktion. Vereinfacht nimmt man hier einen konstanten Verlauf der Lagerkräfte an und erhält $m_{xx2} = 13.90$ kNm/m. Aus der Vereinfachung resultiert ein Fehler von 0.7%, bezogen auf das 'exakte' Moment, der sehr minimal ist.

Um den Rechenaufwand weiter zu vereinfachen wurde beim Beispiel Durchlaufträger die Variante I eingeführt. Wendet man die Vorgehensweise auf die

Platte an, ersetzt man in diesem Fall die Resultierende R_2 in (4.4) durch die Resultierende R_1 , also die resultierende Lagerkraft im System 1 aus Originalbelastung. Es ist $R_1 = 179.52$ kN und daraus folgt $m_{xx2} = 13.91$ kNm/m. Der Fehler ist wiederum sehr gering.

In Abb. 4.8 sind die Ergebnisse für dieses einfache Beispiel noch einmal dargestellt. Die Werte an den Lagern geben die Änderung des ursprünglichen Momentes m_{xx1} an, nachdem jeweils eine der Lagersteifigkeiten um 50% abgemindert wurde. Die Ergebnisse wurden nach dem vereinfachten Verfahren mit Hilfe der Resultierenden R_1 ermittelt.

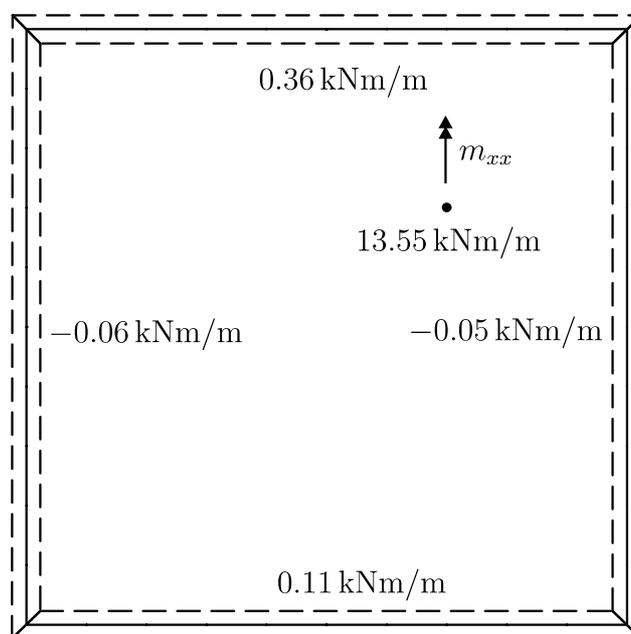


Abb. 4.8: Einfluss auf das Moment m_{xx} an der Stelle $x = 3.50$ m und $y = 3.50$ m nach Abminderung der Lagersteifigkeit um 50%.

Für alle übrigen Weg- oder Kraftgrößen ist die Vorgehensweise identisch, die einzige Änderung betrifft nur den Typ der Einflussfunktion, der angesetzt werden muss.

4.2.5 Beispiel 2 - Platte

Die Ergebnisse des folgenden Beispiels sind alle mit Hilfe der vereinfachten Methode und der Resultierenden R_1 ermittelt worden.

In Abb. 4.9 ist eine Platte ($h = 20$ cm) dargestellt. Sie ist komplett mit einer Gleichlast von 20 kN/m^2 belastet. Die Außen- und Innenwände bestehen aus Mauerwerk ($d = 0.24$ m, $h = 2.75$ m).

Mit Hilfe der hergeleiteten Formeln wird der Einfluss auf die Durchbiegung an der Stelle $x = 3.85$ m und $y = 3.50$ m, das Moment m_{xx} an der Stelle $x = 29.00$ m und $y = 7.00$ m und das Moment m_{yy} an der Stelle $x = 15.00$ m sowie $y = 13.00$ m für den Fall untersucht, dass die Lagersteifigkeit sich auf 50% verringert. In Abb. 4.9 ist außerdem noch die resultierende Lagerkraft R_1 aus dem Originallastfall Gleichlast für jeden einzelnen Wandbereich angegeben.

In den Abb 4.10, 4.11 und 4.12 sind oben jeweils die resultierenden Lagerkräfte $R_{G_i^1}$ aus der zugehörigen Einflussfunktion im System 1 angegeben und unten die Änderungen der Durchbiegung bzw. der Momente nach Abminderung der Lagersteifigkeit. Die Ergebnisse sind so angegeben, dass immer nur die Lagersteifigkeit in einer Wand abgemindert wird und in diesem Fall der übrige Bereich die ursprüngliche Lagersteifigkeit beibehält.

Betrachtet man die Abbildungen, kann man an den resultierenden Lagerkräften und den Ergebnissen das Abklingverhalten der Einflussfunktionen erkennen. Beispielsweise den lokalen Charakter von Einflussfunktionen für Kraftgrößen, denn z.B. in Abb. 4.11 erhält man fast gar keinen Einfluss mehr in den Bereichen 1 und 2 aus dem Knick in x -Richtung.

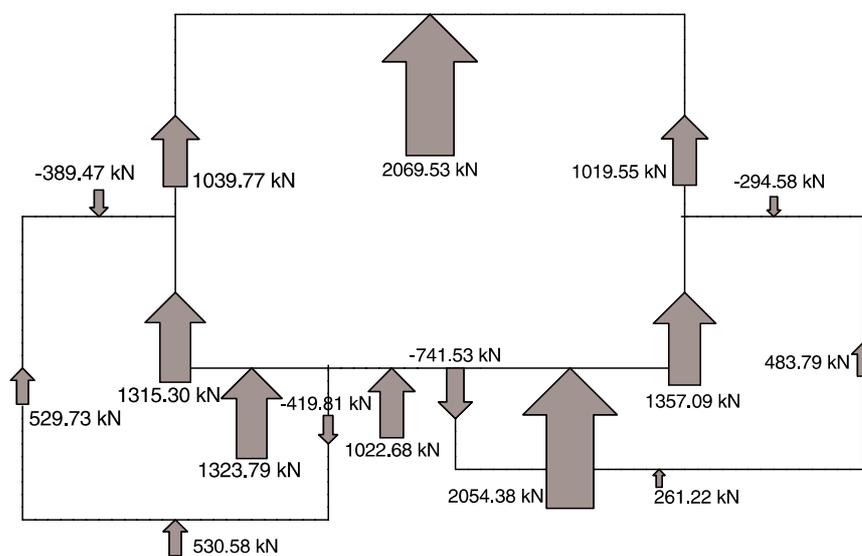
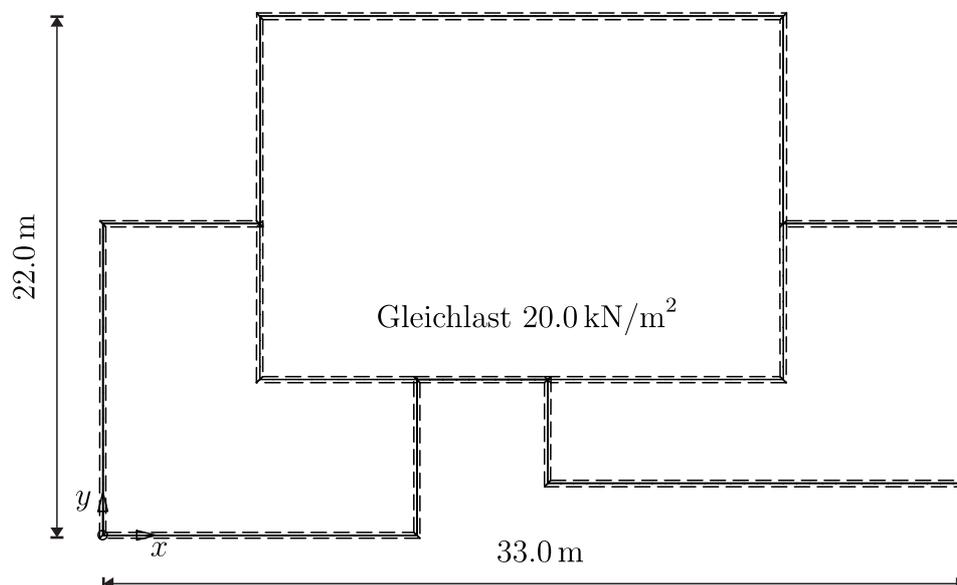


Abb. 4.9: Oben: Deckenplatte auf Mauerwerk ($\nu = 0$). Unten: Resultierende Lagerkräfte R_1 im System 1 aus dem Lastfall Gleichlast zur vereinfachten Ermittlungen des Einflusses auf Punktgrößen nach Abminderung der Lagersteifigkeiten.

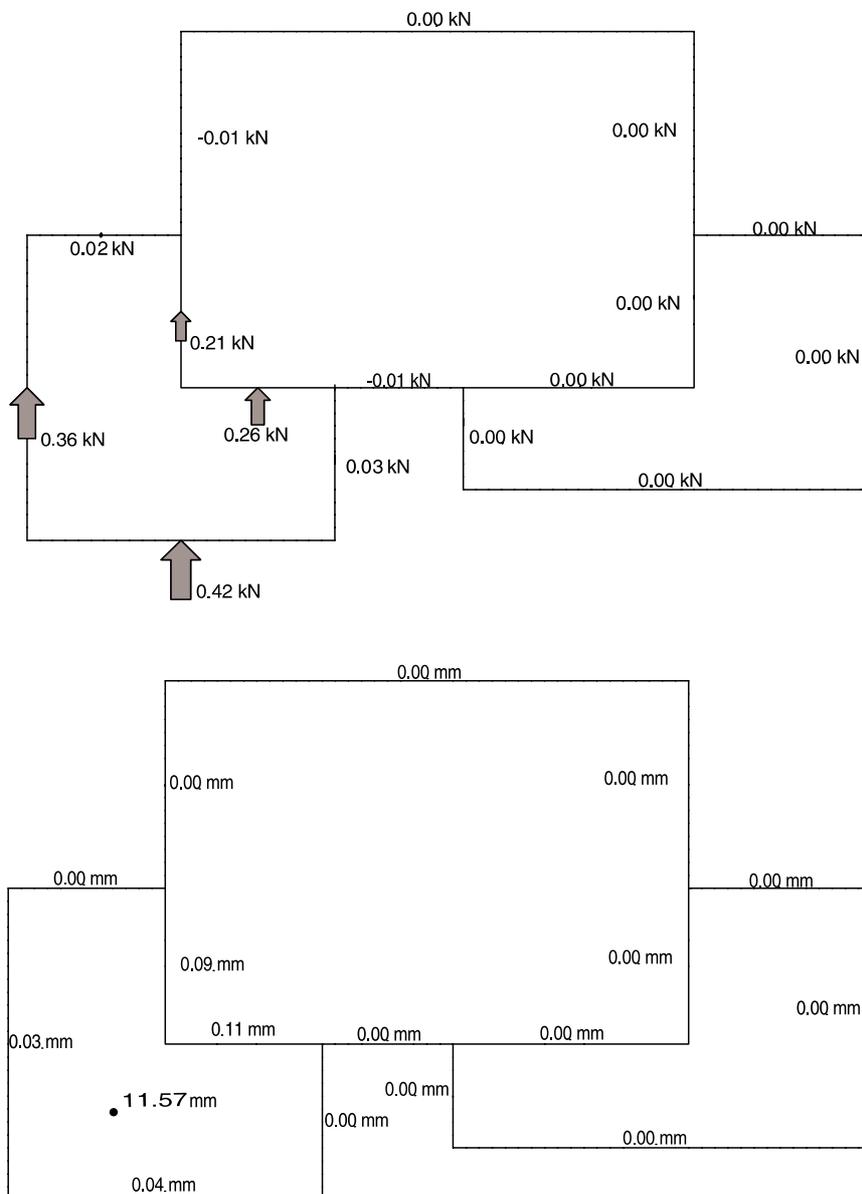


Abb. 4.10: Oben: Resultierende Lagerkräfte $R_{G_0^1}$ aus der Einflussfunktion für die Durchbiegung an der Stelle $x = 3.85$ m und $y = 3.50$ m im System 1. **Unten:** Änderungen der Durchbiegung $w_1(x) = 11.57$ mm nach Abminderung der Lagersteifigkeit um 50%.

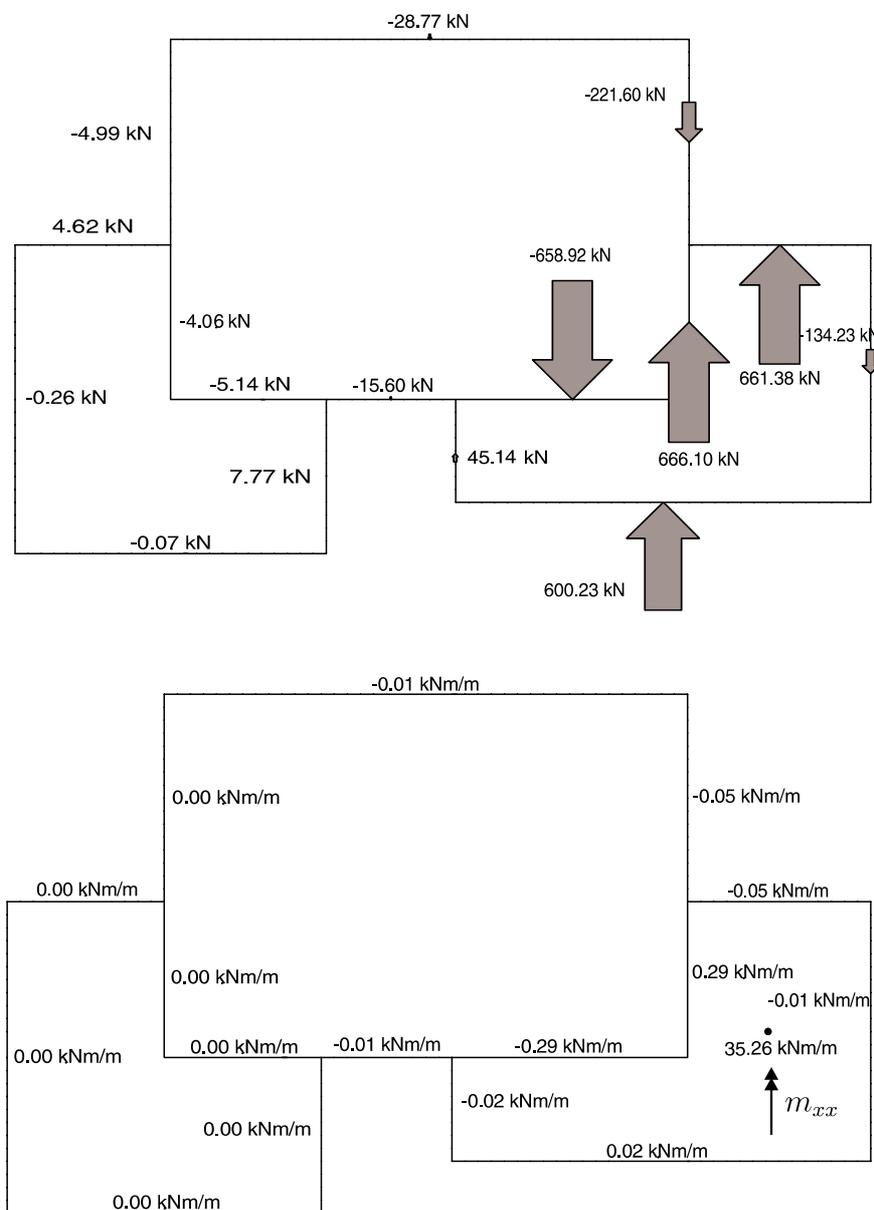


Abb. 4.11: Oben: Resultierende Lagerkräfte $R_{G_2^1}$ aus der Einflussfunktion für das Moment m_{xx} an der Stelle $x = 29.00 \text{ m}$ und $y = 7.00 \text{ m}$ im System 1. Unten: Änderungen des Momentes $m_{xx1}(x) = 35.26 \text{ kNm/m}$ nach Abminderung der Lagersteifigkeit um 50%.

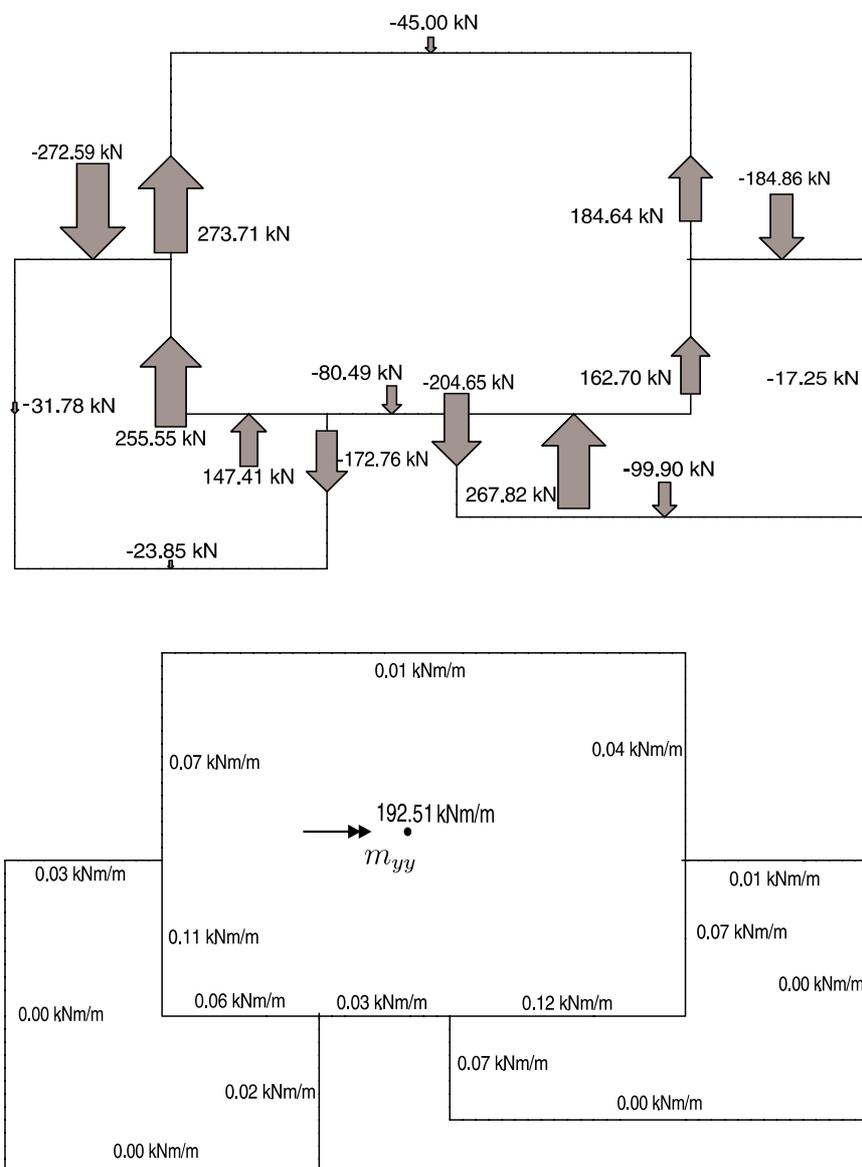


Abb. 4.12: Oben: Resultierende Lagerkräfte $R_{G_2^1}$ aus der Einflussfunktion für das Moment m_{yy} an der Stelle $x = 15.00$ m und $y = 13.00$ m im System 1. **Unten:** Änderungen des Momentes $m_{yy1}(x) = 192.51$ kNm/m nach Abminderung der Lagersteifigkeit um 50%.

4.2.6 Beispiel - Wandscheibe

Nachfolgend wird der Einfluss von Änderungen der Lagersteifigkeit auf die Verformung in vertikaler Richtung und auf die Normalspannung σ_{xx} an der Wandscheibe in Abb. 4.13 untersucht.

Die Lagersteifigkeit k^v in vertikaler Richtung beträgt 418909 kN/m und resultiert aus einer Stütze $A = 0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$, $h = 2.75 \text{ m}$, $C 20/25$. Sie soll auf 60 % abgemindert werden.

Am linken Auflager ist die Wandscheibe zusätzlich noch horizontal gehalten, $k^u \gg k^v$. Die Steifigkeit des horizontalen Lagers bleibt im Beispiel unverändert.

Im System 1 mit Lastfall Eigengewicht beträgt die vertikale Verformung an der Stelle $x = 3.0 \text{ m}$ und $y = 0.5 \text{ m}$, $v_1(\mathbf{x}) = 0.672 \text{ mm}$ und die Normalspannung $\sigma_{xx1}(\mathbf{x}) = 159.2 \text{ kN/m}^2$.

Die Änderung der Verformung lässt sich mit Hilfe von (3.69) und die Änderung der Normalspannung mit (3.70) bestimmen.

Aus (3.70) folgt z.B. für die Änderung der Normalspannung $\sigma_{xx1}(\mathbf{x})$ nach Abminderung der Lagersteifigkeit im mittleren Lager

$$\begin{aligned} \sigma_{xx2}(\mathbf{x}) - \sigma_{xx1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{0.2 \text{ m}} \left(\frac{0.816 \text{ mm}}{1000 \text{ mm/m}} \times (1 - 0.6) \times 29755.57 \text{ kN} \right) \\ &= 48.6 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

und damit $\sigma_{xx2}(\mathbf{x}) = 207.8 \text{ kN/m}^2$ als Normalspannung im System 2. Für die Umrechnung Normalkraft \rightarrow Normalspannung dividiert man durch die Scheibendicke $t = 0.2 \text{ m}$.

In Abb. 4.13 sind die Auswertungen der Formeln für alle drei Lager dargestellt. Die Änderungen sind wieder unterhalb des Lagers angegeben.

Natürlich kann man (3.69) und (3.70) wieder umstellen, dann ist $u_2(\mathbf{l}) = B_2^u/k_2$ und $v_2(\mathbf{l}) = B_2^v/k_2$ mit $k_2 = \alpha k_1$ (Verformung des Lagers = Lagerkraft / Lagersteifigkeit).

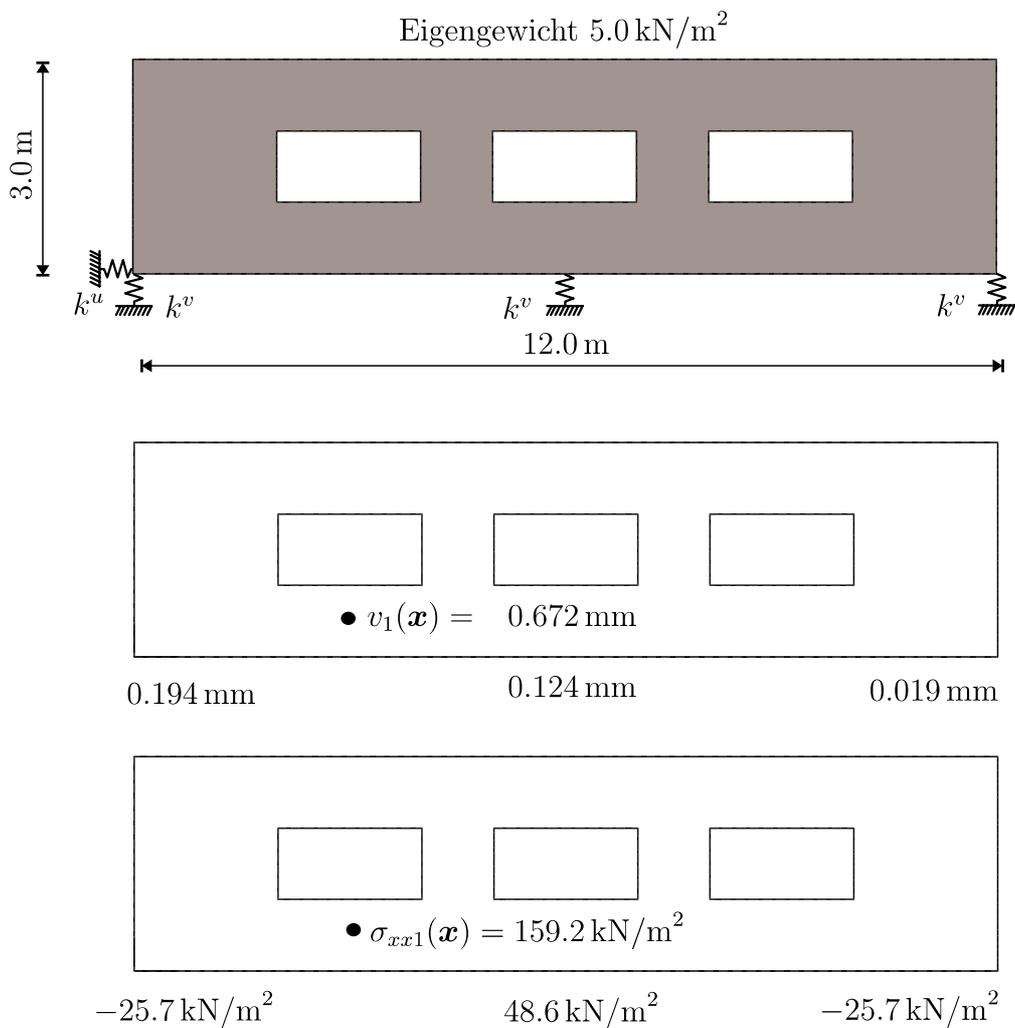


Abb. 4.13: Oben: Wandscheibe mit Öffnungen auf elastischen Lagern. Mitte: Änderungen der Verformung in vertikaler Richtung $v_1(\mathbf{x}) = 0.672 \text{ mm}$ nach Abminderung der Lagersteifigkeit auf 60%. Unten: Änderungen der Normalspannung $\sigma_{xx1}(\mathbf{x}) = 159.2 \text{ kN/m}^2$ nach Abminderung der Lagersteifigkeit auf 60%.

Wie in den vorangegangenen Beispielen kann man vereinfacht statt der Lagerkraft aus System 2 auch wieder die Lagerkraft aus System 1 verwenden und erhält nur geringe Abweichungen in den Ergebnissen.

Ausfall des mittleren Lagers

Mit Hilfe von (3.73) und (3.74) kann die Änderung der vertikalen Verformung und der Normalspannung bestimmt werden, falls z.B. das mittlere Lager ausfällt. Aus (3.73) folgt

$$\begin{aligned} v_{xx2}(\mathbf{x}) - v_{xx1}(\mathbf{x}) &= 0.816 \text{ mm} \times 0.381 \text{ kN} \\ &= 0.494 \text{ mm} \end{aligned}$$

und aus (3.74)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx2}(\mathbf{x}) - \sigma_{xx1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{0.2 \text{ m}} \left(\frac{1.298 \text{ mm}}{1000 \text{ mm/m}} \times 29755.57 \text{ kN} \right) \\ &= 193.1 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

Lagerung längs eines Randes

Wählt man anstelle einer Punktlagerung eine Lagerung längs eines Randes, muss über den Bereich des Randes, in dem sich die Steifigkeit verändert, integriert werden, siehe Beispiel Platte.

4.3 Änderung von Biegesteifigkeiten

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Änderungen der Biegesteifigkeiten auf Weg- und Kraftgrößen eines Tragwerks in einem Teilbereich untersucht und am Beispiel eines Durchlaufträgers, eines ebenen Fachwerks, eines Rahmens und einer Platte dargestellt.

4.3.1 Beispiel - Durchlaufträger

Im Folgenden wird die Änderung des Momentes an dem in Abb. 4.14 dargestellten Stahlbetonträger ($C 20/25$, $h/b = 50 \text{ cm}/30 \text{ cm}$) für den Fall untersucht, dass sich die Biegesteifigkeit in Feld 3 verringert ($EI_1 = 90000 \text{ kNm}^2$,

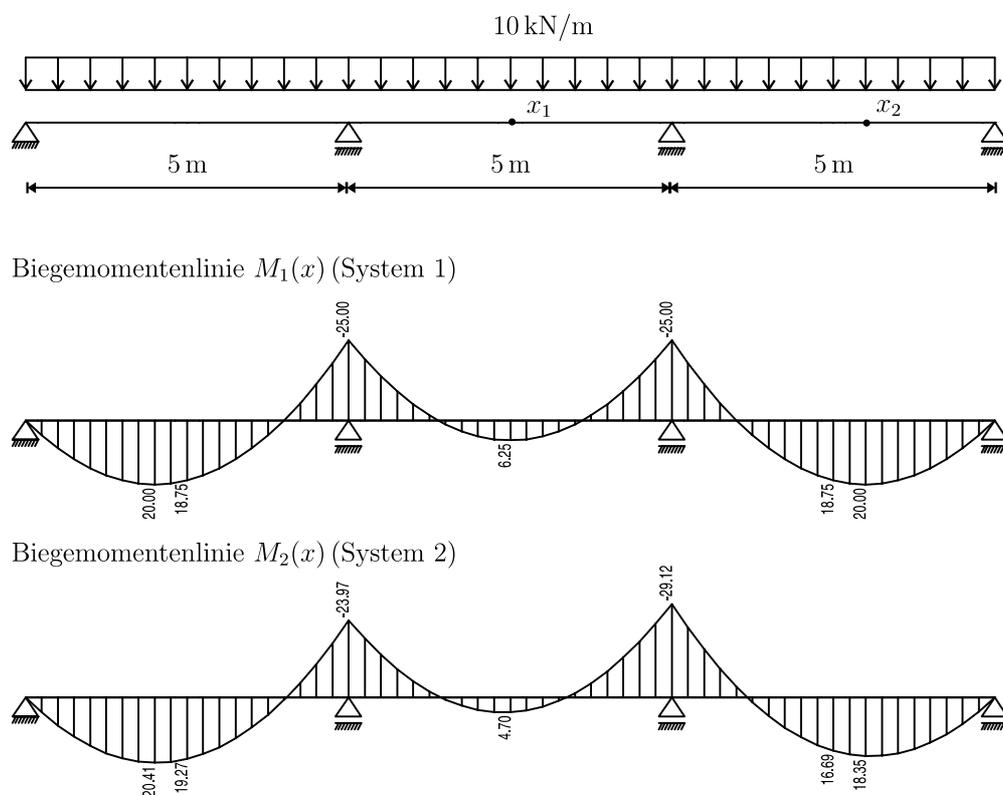


Abb. 4.14: Oben: Stahlbetonträger mit 3 Feldern. **Mitte:** Biegemomentenlinie im System 1 aus Originalbelastung. **Unten:** Biegemomentenlinie im System 2 (nach Änderung der Biegesteifigkeit in Feld 3) aus Originalbelastung

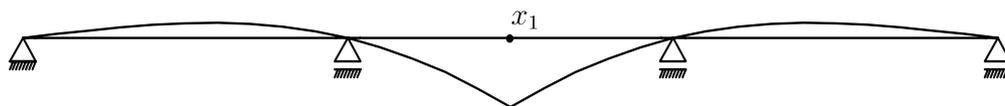
$\alpha = 0.216$).

In Abb. 4.14 sind zusätzlich noch die Biegemomentenlinien $M_1(x)$ im System 1 und $M_2(x)$ im geschwächten System 2 dargestellt, die mit der angegebenen Software ermittelt wurden.

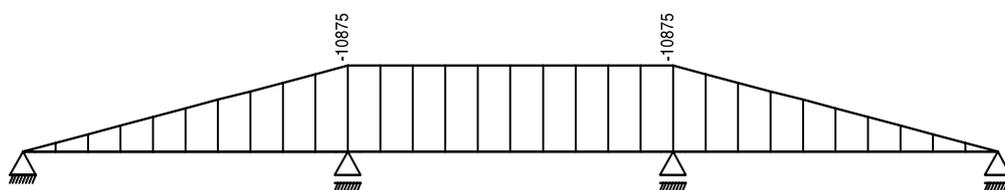
Liest man die Momente an der Stelle $x_1 = 7.50$ m und $x_2 = 13.00$ m ab, erhält man Änderungen von $\Delta M(x_1) = -1.55$ kNm und $\Delta M(x_2) = -1.65$ kNm. Diese Werte dienen zur Kontrolle.

Ermittelt man die Änderungen der Momente mit Hilfe von (3.91) benötigt man neben der Biegesteifigkeit im System 1 und dem Koeffizienten α , die Biegemomentenlinie $M_2(x)$ in Feld 3 und die Biegemomentenlinie $M_{G_2^1}(x)$ in Feld 3, die man durch Aufbringen eines Knicks an der Stelle x_1 bzw. x_2

Einflussfunktion $G_2^1(y, x_1)$



Biegemomentenlinie aus $G_2^1(y, x_1)$



Einflussfunktion $G_2^1(y, x_2)$



Biegemomentenlinie aus $G_2^1(y, x_2)$

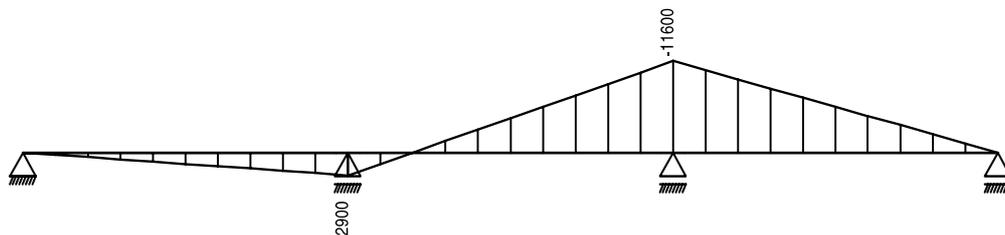


Abb. 4.15: Einflussfunktionen für die Momente an den Stellen x_1 und x_2 und die zugehörigen Biegemomentenlinien aus den Einflussfunktionen.

erhält, siehe Abb. 4.15.

Überlagert man die beiden Biegemomentenlinien mit Hilfe der Simpsonschen Formel, siehe [1], und löst (3.91), erhält man für die Änderung des Momentes an der Stelle x_1 und x_2

$$\begin{aligned} M_2(x_1) - M_1(x_1) &= \int_{x_C}^{x_D} \frac{(1 - 0.216)}{0.216} \frac{1}{90000 \text{ kNm}^2} M_2(y) M_{G_2^1}(y) dy \\ &= -1.52 \text{ kNm} \quad (\text{exakt: } -1.55 \text{ kNm}) \end{aligned}$$

$$M_2(x_2) - M_1(x_2) = -1.62 \text{ kNm} \quad (\text{exakt: } -1.65 \text{ kNm}).$$

Die Abweichungen der Ergebnisse resultieren aus der Anwendung der Simpsonschen Regel bei der Berechnung.

4.3.2 Lösung mittels 'Randintegralen' am Beispiel des Balkens

In diesem Abschnitt werden die Änderungen der Durchbiegung

$$w_2(x) - w_1(x) = 10.15 \text{ cm} - 5.41 \text{ cm} = 4.74 \text{ cm}$$

an der Stelle $x = 7.0 \text{ m}$ des Einfeldträgers in Abb. 4.16 berechnet.

Die Änderung wird auf zwei verschiedene Arten ermittelt. Einmal mit Hilfe von 'Randintegralen', siehe (3.100) aus Abschnitt 3.2.2, sowie zum Vergleich mit der aus dem vorigen Beispiel bekannten Methode nach Gleichung (3.89) aus Abschnitt 3.2.1.

Aus (3.100) folgt

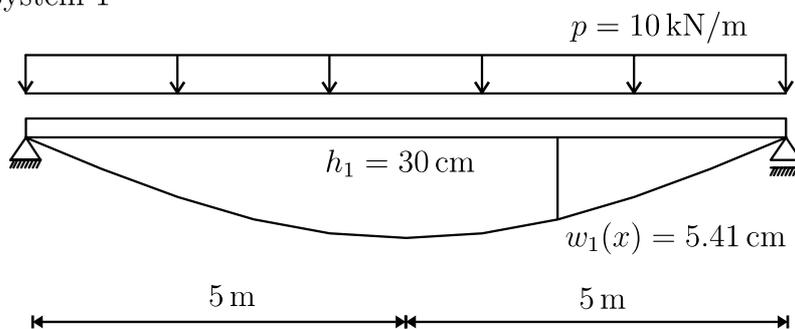
$$\begin{aligned} w_2(x) - w_1(x) &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \{ (p, G_0^1) + V_2(0) G_0^1(0) + V_2(5) G_0^1(5) \\ &\quad - M_2(0) G_0^{1'}(0) - M_2(5) G_0^{1'}(5) \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Einige Terme sind gleich Null und entfallen somit, z.B. die Durchbiegung aus der Einflussfunktion $G_0^1(0)$ am linken Auflager, die Querkraft $V_2(5)$ im System 2 an der Stelle $x = 5 \text{ m}$ und das Moment $M_2(0)$ im System 2 am linken Auflager.

Damit erhält man

$$w_2(x) - w_1(x) = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \{ (p, G_0^1) - M_2(5) G_0^{1'}(5) \} \quad (4.6)$$

System 1



System 2

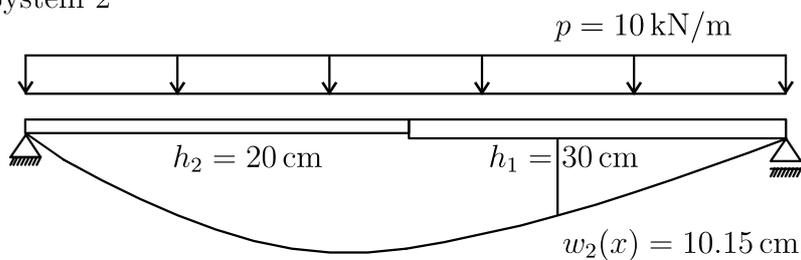
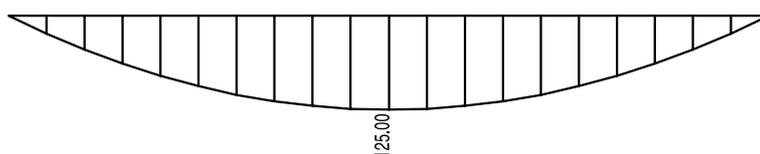
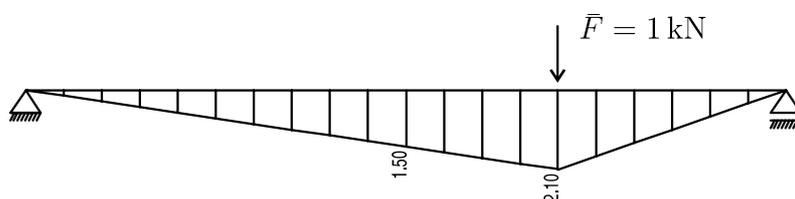
Biegemomentenlinie $M_1(x)$ und $M_2(x)$ Biegemomentenlinie aus der Einflussfunktion G_0^1 

Abb. 4.16: Betonbalken: $C 20/25$, $E = 2.88 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $b = 30 \text{ cm}$, $EI_1 = 19440 \text{ kNm}^2$, $EI_2 = 5760 \text{ kNm}^2$, $\alpha = 0.296$.

mit

$$(p, G_0^1) = \int_0^5 p(y) G_0^1(y, x) dy = 0.02506 \text{ m.} \quad (4.7)$$

Das obige Integral ist die Durchbiegung an der Stelle $x = 7.0 \text{ m}$ an dem Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI_1 , wenn die Gleichlast p nur in $y \in [0, 5]$ angreift.

Damit ist

$$\begin{aligned} w_2(x) - w_1(x) &= \frac{1 - 0.296}{0.296} \times (0.02506 \text{ m} - 125 \text{ kNm} \times 4.087 \times 10^{-5}) \\ &= 0.0474 \text{ m.} \end{aligned}$$

Zum Vergleich die Änderung der Durchbiegung aus (3.89), bestimmt mit Hilfe von Integraltafeln,

$$\begin{aligned} w_2(x) - w_1(x) &= \frac{1 - 0.296}{0.296} \times \frac{5 \text{ m}}{19440 \text{ kNm}} \times \frac{5}{12} \times 1.5 \text{ kN} \times 125 \text{ kNm} \\ &= 0.0477 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Bestimmung von Änderungen mittels 'Randintegralen' liefert ebenfalls das exakte Ergebnis.

4.3.3 Beispiel - Ebenes Fachwerk

Die in Kapitel 3.2.3 hergeleiteten Formeln sollen jetzt an dem in Abb. 4.17 dargestellten einfach statisch unbestimmten Fachwerk angewendet werden. Bei einem Fachwerk soll die Belastung nur aus Einzelkräften bestehen, die in den Knotenpunkten angreifen. Auf Grund dieser Voraussetzung können Kräfte nur an den Stabenden wirken. Die Normalkraft verläuft stets konstant über einen Stab, (Grundlagen ebener Fachwerke in [3], S. 148 ff., und [4], S. 194 ff.).

Für die Stäbe E01 bis E07 ist $EA = 420000 \text{ kN}$ und für die Stäbe E08 und E09 ist $EA = 210000 \text{ kN}$. Untersucht werden die Änderungen der Verschiebungen und Normalkräfte für den Fall, dass die Steifigkeit in Stab E09 sich um 50% verringert, $\alpha = 0.5$.

Mit Hilfe von (3.106) erhält man für die Änderung der Verschiebung in Knoten N03 in horizontaler Richtung

$$u_2(x_3) - u_1(x_3) = \int_0^l \frac{1 - 0.5}{0.5} \frac{1}{210000 \text{ kN}} N_2(y) N_{G_0^1}(y) dy.$$

Die Normalkraft im Stab E09 am geschwächten System 2 aus Originalbelastung ist konstant über den Stab, $N_2 = -1.0976 \text{ kN}$. Die Normalkraft aus der Einflussfunktion (Einzelkraft $\bar{F}_x = 1$ in Knoten N03 in horizontaler Richtung) ist $N_{G_0^1} = 0.1173 \text{ kN}$.

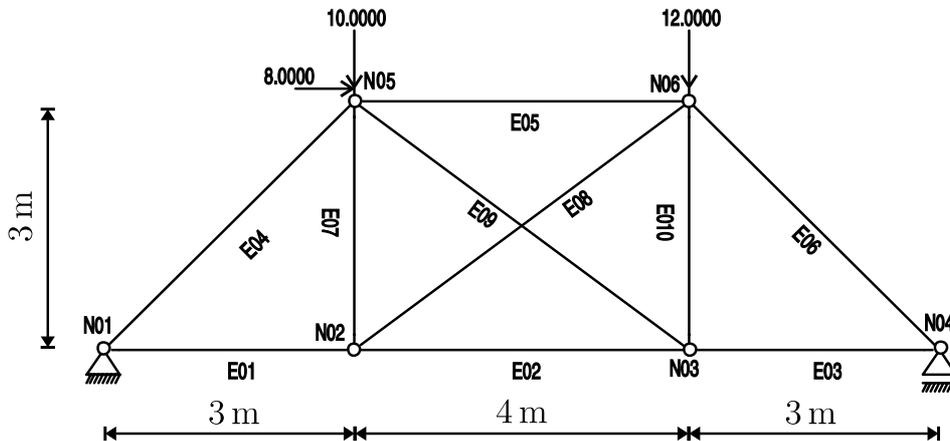


Abb. 4.17: Ebenes Fachwerk.

Als Ergebnis der Berechnung ermittelt man eine Änderung der horizontalen Verformung von $u_2(x_3) - u_1(x_3) = -0.0031 \text{ mm}$. Die Verformung am Knoten N03 in System 1 ist $u_1(x_3) = 0.2586 \text{ mm}$. Subtrahiert man davon die Änderung erhält man $u_2(x_3) = 0.2555 \text{ mm}$. Die Kontrolle mit Hilfe eines Stabwerkprogramms bestätigt das gewonnene Ergebnis.

Um die vertikale Verformung des ebenen Fachwerks in Knoten N03 zu bestimmen, ändert sich nur die Normalkraft aus der Einflussfunktion. Man setzt in Knoten N03 eine vertikale Kraft $\bar{F}_z = 1$ und es folgt $N_{G_0^1} = 0.3160 \text{ kN}$. Die Änderung der Verformung in vertikaler Richtung ist $u_2(x_3) - u_1(x_3) = -0.0083 \text{ mm}$. Die Verformung in System 1 war $u_1(x_3) = 0.4781 \text{ mm}$ und nach der Steifigkeitsänderung kommt man zu dem Resultat $u_2(x_3) = 0.4698 \text{ mm}$.

Den Einfluss von Änderungen der Steifigkeiten auf Normalkräfte in einzelnen Stäben ermittelt man mit (3.107). Untersucht wird wieder eine Steifigkeitsänderung in Stab E09. In diesem Fall kann man die obigen Werte übernehmen und muss nur die Normalkraft aus der Einflussfunktion neu bestimmen.

Die Normalkraft in Stab E05 in System 1 ist $N_1 = -15.0$ kN und nach der Steifigkeitsänderung $N_2 = -15.3219$ kN. Zur Bestimmung der Änderung benötigt man die Normalkraft in Stab E09 aus der Einflussfunktion, die man aus einem aufgebrauchten Versatz der Größe 1 in Stabrichtung in Stabmitte des betrachteten Elementes E05 erhält, $N_{G_1^1} = 12316.7155$ kN. Setzt man die bekannten Werte in (3.107) ein, folgt $N_2 - N_1 = -0.3219$ kN.

In Tabelle 4.3 sind die Änderungen der Normalkräfte in weiteren Stäben angegeben.

Normalkräfte	E07 [kN]	E09 [kN]
$N_{G_1^1}$	9237.5367	-15395.8944
N_1	-0.9000	-1.5000
$N_2 - N_1$	-0.2414	0.4042
N_2	-1.1414	-1.0976

Tab. 4.3: Änderungen der Normalkräfte in den Stäben E07 und E09.

Die Ergebnisse lassen sich auch in dem Stab (E09), in dem die Steifigkeitsänderung stattfindet, problemlos ermitteln.

An diesem Beispiel wird noch einmal deutlich, dass nur die Normalkraft aus der Einflussfunktion variiert und die restlichen Werte übernommen werden können, um die Änderungen der Verformungen und der Normalkräfte zu bestimmen. Voraussetzung ist natürlich, dass immer derselbe Stab eine Steifigkeitsänderung erfährt. Ändert sich die Steifigkeit in einem anderen Stab müssen alle Werte neu bestimmt werden.

4.3.4 Beispiel - Ausfall eines Fachwerkstabes

Eine Idee zur vereinfachten Bestimmung der Veränderung von Punktgrößen nach einem Stabausfall wäre, anstatt der Normalkraft im System 2 einfach die Normalkraft im System 1 in (3.106) einzusetzen und den Koeffizient α entfallen zu lassen. Damit folgt näherungsweise

$$u_2(x) - u_1(x) \approx \int_0^l \frac{1}{EA_1} N_1(y) N_{G_0^1} dy. \quad (4.8)$$

Die Untersuchungen beim Balkenausfall in einem Rahmen aus Abschnitt 3.2.6 und die Ergebnisse unten haben aber gezeigt, dass man dadurch relativ ungenaue Ergebnisse erzielt. Aus diesem Grund wird die Vorgehensweise aus Abschnitt 3.2.4 hier nochmals auf ein zweites Beispiel angewendet, um die exakte Vorgehensweise darzustellen.

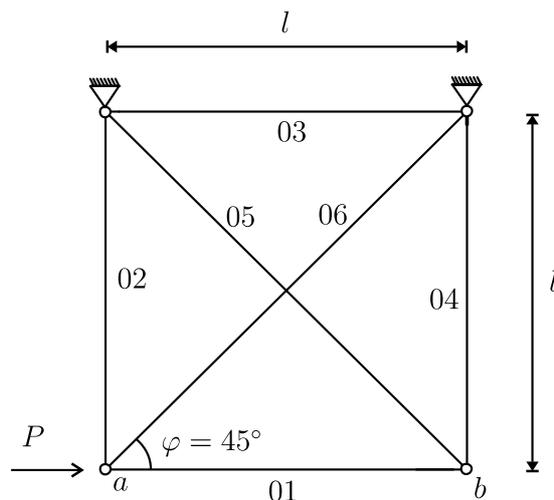


Abb. 4.18: Fachwerk - Ausfall des Stabes 05.

Untersucht wird der Ausfall des Stabes 05 mit der Länge

$$l_{\angle} = \sqrt{l^2 + l^2}. \quad (4.9)$$

An dem abgebildeten Fachwerk treten nur Verformungen an den Knoten a und b auf, da die übrigen beiden Knoten durch die Lagerung gehalten werden. Verformungen in horizontaler Richtung werden im Folgenden mit u und in vertikaler Richtung mit v bezeichnet.

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{red} ist

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l} + \frac{EA_2}{l_\perp} c^2 & -\frac{EA_2}{l_\perp} s c & -\frac{EA_1}{l} & 0 \\ -\frac{EA_2}{l_\perp} s c & \frac{EA_1}{l} + \frac{EA_2}{l_\perp} c^2 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{l} & 0 & \frac{EA_1}{l} + \frac{EA_1}{l_\perp} c^2 & -\frac{EA_1}{l_\perp} s c \\ 0 & 0 & -\frac{EA_1}{l_\perp} s c & \frac{EA_1}{l} + \frac{EA_1}{l_\perp} c^2 \end{bmatrix}$$

mit $c = \cos \varphi$ und $s = \sin \varphi$. Es bezeichne EA_1 die Steifigkeit der Stäbe im System 1 und EA_2 die Steifigkeit des Stabes der ausfällt.

Es gilt

$$\mathbf{K}_{red} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

und damit folgt für die Verformungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_{red}^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.11)$$

Die horizontale Verschiebung am Knoten a lautet mit $\varphi = 45^\circ$

$$u_a = \frac{2(l + l_\perp)(EA_2 l + 2EA_1 l_\perp) P}{EA_1(3EA_2 l + 2EA_1 l_\perp + 2EA_2 l_\perp)} \quad (4.12)$$

und die vertikale

$$v_a = \frac{2EA_2 l(l + l_\perp) P}{EA_1(3EA_2 l + 2EA_1 l_\perp + 2EA_2 l_\perp)}. \quad (4.13)$$

Die horizontale Kraft P_2 am unteren Ende des Fachwerkstabs 05 ist

$$P_2 = \frac{EA_2}{l_\perp} c^2 u_a - \frac{EA_2}{l_\perp} s c v_a \quad (4.14)$$

und daraus folgt die Normalkraft

$$N_2 = \underbrace{P_2 \cos \varphi}_{\text{horizontaler Anteil}} + \underbrace{P_2 \sin \varphi}_{\text{vertikaler Anteil}} . \quad (4.15)$$

Setzt man (4.15) in (3.106) ein, folgt mit $EA_2 = \alpha EA_1$

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^{l_\perp} \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{\alpha}{EA_1} \times \frac{2\sqrt{2}EA_1(l+l_\perp)P}{3\alpha EA_1 l + 2EA_1 l_\perp + 2\alpha EA_1 l_\perp} N_{G_0^1} dy \quad (4.16)$$

und mit $\alpha = 0$ bei Stabausfall

$$u_2(x) - u_1(x) = \int_0^{l_\perp} \frac{\sqrt{2}(l+l_\perp)P}{EA_1 l_\perp} N_{G_0^1} dy \quad (4.17)$$

In diesem Beispiel besitzen alle Fachwerkstäbe die gleiche Steifigkeit. Für den Fall das unterschiedliche Steifigkeiten vorhanden sind, ist es möglich diese über weitere Koeffizienten β_i auszudrücken, so dass man dann die Biegesteifigkeit $EA_i = \beta_i EA_1$ erhält.

Zahlenbeispiel:

Die Länge l sei 5 m, die Steifigkeit $EA_1 = 493500$ kN, $\varphi = 45^\circ$ und die Belastung $P = 5$ kN.

Die Änderung der horizontalen Verformung am Knoten a beträgt

$$u_2(x_a) - u_1(x_a) = 0.2446 \text{ mm} - 0.1082 \text{ mm} = 0.1364 \text{ mm}.$$

Es werden zwei unterschiedliche Möglichkeiten betrachtet, um die Änderung der Verformung zu bestimmen.

Zuerst die vereinfachte Berechnung mit der Normalkraft N_1 am ungeschwächten System, anstelle von N_2 . Aus (4.8) folgt

$$u_2(x_a) - u_1(x_a) = \frac{7.071 \text{ m}}{493500 \text{ kN}} \times (-3.944 \text{ kN}) \times (-0.788 \text{ kN}) = 4.453 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Durch die angewendete Vereinfachung erhält man die Verformung $u_2(x_a) = 0.1527$ mm. Das entspricht einer Abweichung von fast 38% vom exakten Wert. Die Näherungslösung ist in Frage zu stellen.

Als nächstes die Ermittlung mit der hergeleiteten Gleichung (4.17)

$$\begin{aligned} u_2(x_a) - u_1(x_a) &= -\frac{\sqrt{2} \times (5 \text{ m} + 7.071 \text{ m}) \times 5 \text{ kN}}{493500 \text{ kN}} \times (-0.788 \text{ kN}) \\ &= 1.363 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (4.17) ermittelt man die exakte Verformungsänderung nach Stabausfall.

Natürlich kann (4.17) auch zur Ermittlung aller übrigen Verformungsänderungen angewendet werden, nur die Normalkraft aus der Einflussfunktion ändert sich in dem Fall. Analog zu (4.17) kann man die Änderung der Normalkraft bei Stabausfall bestimmen, in dem man den Typ der Einflussfunktion austauscht.

Je mehr Knoten ein Fachwerk besitzt, um so aufwendiger wird auch der Rechenaufwand zur Bestimmung von Verformungs- oder Normalkraftänderungen bei Stabausfall sein.

4.3.5 Beispiel - Rahmentragwerk

Am Beispiel des Rahmens in Abb. 4.19 sollen die in Kap. 3.2.5 hergeleiteten Formeln zur Bestimmung von Änderungen in Punktgrößen angewendet werden. Der Einfachheit halber besitzen die Riegel und Stützen im System 1 jeweils den selben Querschnitt, HEA 240. Daraus folgt die Biegesteifigkeit $EI_1 = 16296 \text{ kNm}^2$.

Es wird der Einfluss von Änderungen der Biegesteifigkeit in der mittleren eingespannten Stütze auf Punktgrößen untersucht. Anstelle eines HEA 240 besteht die mittlere Stütze im geschwächten System 2 aus einem HEA 160. Daraus folgt die Biegesteifigkeit $EI_2 = 3507 \text{ kNm}^2$ und $\alpha = 0.2152$.

Untersucht werden die Änderungen der Weg- und Kraftgrößen auf halber Höhe ($h = 1.50 \text{ m}$) in der linken Stütze für den Fall, dass sich die Biegesteifigkeit in der mittleren Stütze auf 21.52% verringert.

Um die Änderung der Verschiebung zu bestimmen, wendet man (3.121) an.

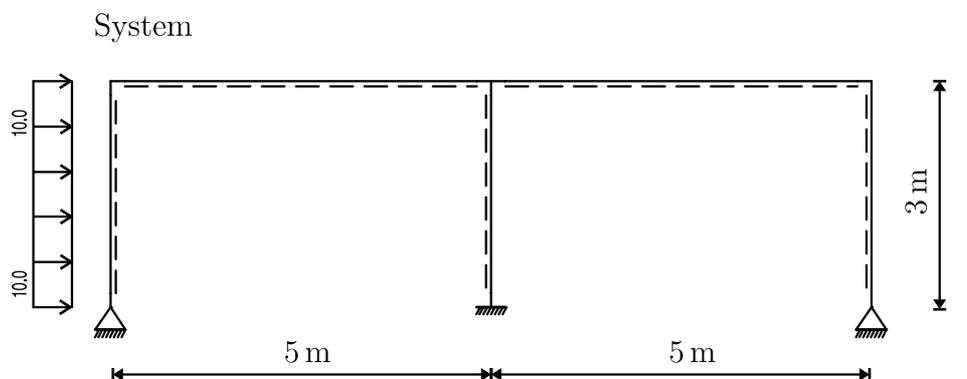
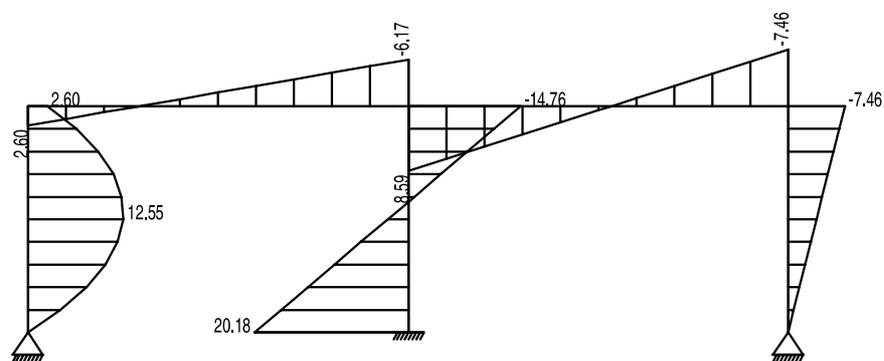
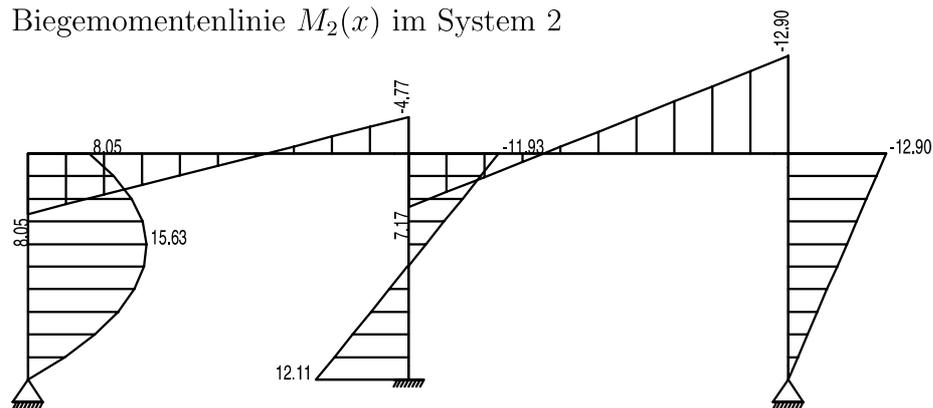
Biegemomentenlinie $M_1(x)$ im System 1Biegemomentenlinie $M_2(x)$ im System 2

Abb. 4.19: Biegemomentenlinie $M_1(x)$ am ungeschwächten System 1 und Biegemomentenlinie $M_2(x)$ am geschwächten System 2 (mittlere Stütze HEA 240 \rightarrow HEA 160).

Wichtig ist, dass man bei der Ermittlung der Einflussfunktion beachtet, ob man eine horizontale oder eine vertikale Verformungsänderung bestimmen will, da die zugehörige Einzelkraft in der gewollten Richtung angesetzt werden muss. In Abb. 4.20 ist der Momentenverlauf aus der Einflussfunktion für die horizontale Richtung angegeben.

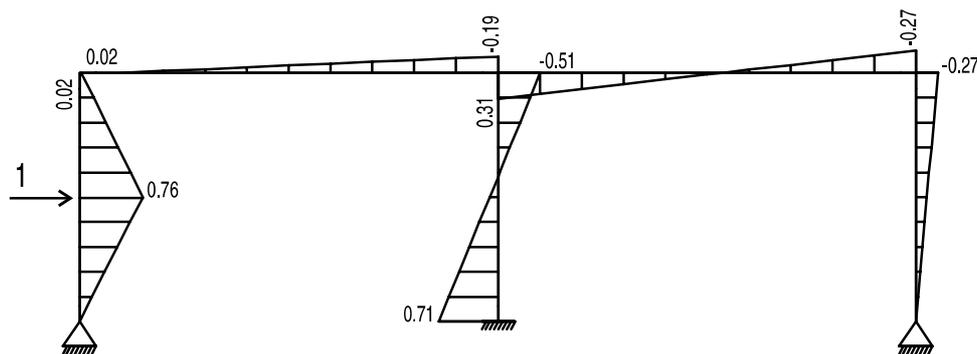


Abb. 4.20: Biegemomentenlinie aus der Einflussfunktion $G_0^1(y, x)$ zur Bestimmung der horizontalen Verformung.

Setzt man die zugehörigen Werte in (3.121) ein, erhält man für die horizontale Verformungsänderung auf halber Stützhöhe

$$\begin{aligned}
 w_2(x_{St1}) - w_1(x_{St1}) &= \frac{1 - 0.2152}{0.2152} \times \frac{1}{16296 \text{ kNm}^2} \times \frac{1}{6} \times (-11.93 \text{ kNm} \\
 &\quad \times (2 \times -0.51 \text{ kNm} + 0.71 \text{ kNm}) + 12.11 \text{ kNm} \\
 &\quad \times (-0.51 \text{ kNm} + 2 \times 0.71 \text{ kNm})) \times 3.0 \text{ m} \\
 &= 1.65 \text{ mm} \quad (\text{exakt: } 1.635 \text{ mm})
 \end{aligned}$$

Die Ungenauigkeit resultiert aus der Tatsache, dass nur zwei Stellen hinter dem Komma betrachtet wurden. Das Ergebnis ist mit Hilfe von Integraltafeln bestimmt worden.

Im System 1 beträgt die Verformung in horizontaler Richtung $w_1(x_{St1}) = 1.937 \text{ mm}$ im Punkt x_{St1} und im System 2 $w_2(x_{St1}) = 3.572 \text{ mm}$. Die ermittelte Änderung der Verformung ist somit exakt.

Die Änderungen der übrigen Punktgrößen sind in Tabelle 4.4 dargestellt.

	System 1	System 2	Änderung
$w'(x_{St1})$ [mrad]	0.82	1.82	1.00
$M(x_{St1})$ [kNm]	12.55	15.28	2.73
$Q(x_{St1})$ [kN]	0.87	2.69	1.82
$N(x_{St1})$ [kN]	1.75	2.56	0.81

Tab. 4.4: Änderungen der Weg- und Kraftgrößen an der Stelle x_{St1} , ermittelt mit Hilfe von (3.122), (3.123) und (3.124).

Mit Hilfe von (3.124) bestimmt man die Änderung der Querkraft an der Stelle x_{St1} . Das Moment $M_{G_3^1}$ resultiert aus der Einflussfunktion $G_3^1(y, x_{St1})$, die man durch Aufbringen eines Versatzes der Größe 1 senkrecht zur Stabachse im Punkt x_{St1} erhält. Um die Änderung der Normalkraft an dieser Stelle zu bestimmen, setzt man einen Versatz der Größe 1 in Richtung der Stabachse an und erhält daraus die Einflussfunktion und schließlich das Moment.

In Abb. 4.21 sind die Einflussfunktionen aus einem Versatz senkrecht zur Stabachse und längs der Stabachse, sowie die daraus resultierenden Biegemomentenlinien noch einmal dargestellt.

Um die Änderung der Querkraft bzw. der Normalkraft zu bestimmen, benötigt man unter anderem den Momentenverlauf in der mittleren Stütze.

4.3.6 Beispiel - Platte

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Steifigkeitsänderungen auf Weg- und Kraftgrößen bei einer Platte untersucht.

Die in Abb. 4.22 dargestellte Platte ist 30 cm dick (System 1). Im Bereich Ω_b verringert sich die Dicke auf 20 cm (System 2). Daraus folgt die Plattensteifigkeit $K_1 = 64800 \text{ kNm}^2$, $K_2 = 19200 \text{ kNm}^2$ und $\alpha = 0.3$.

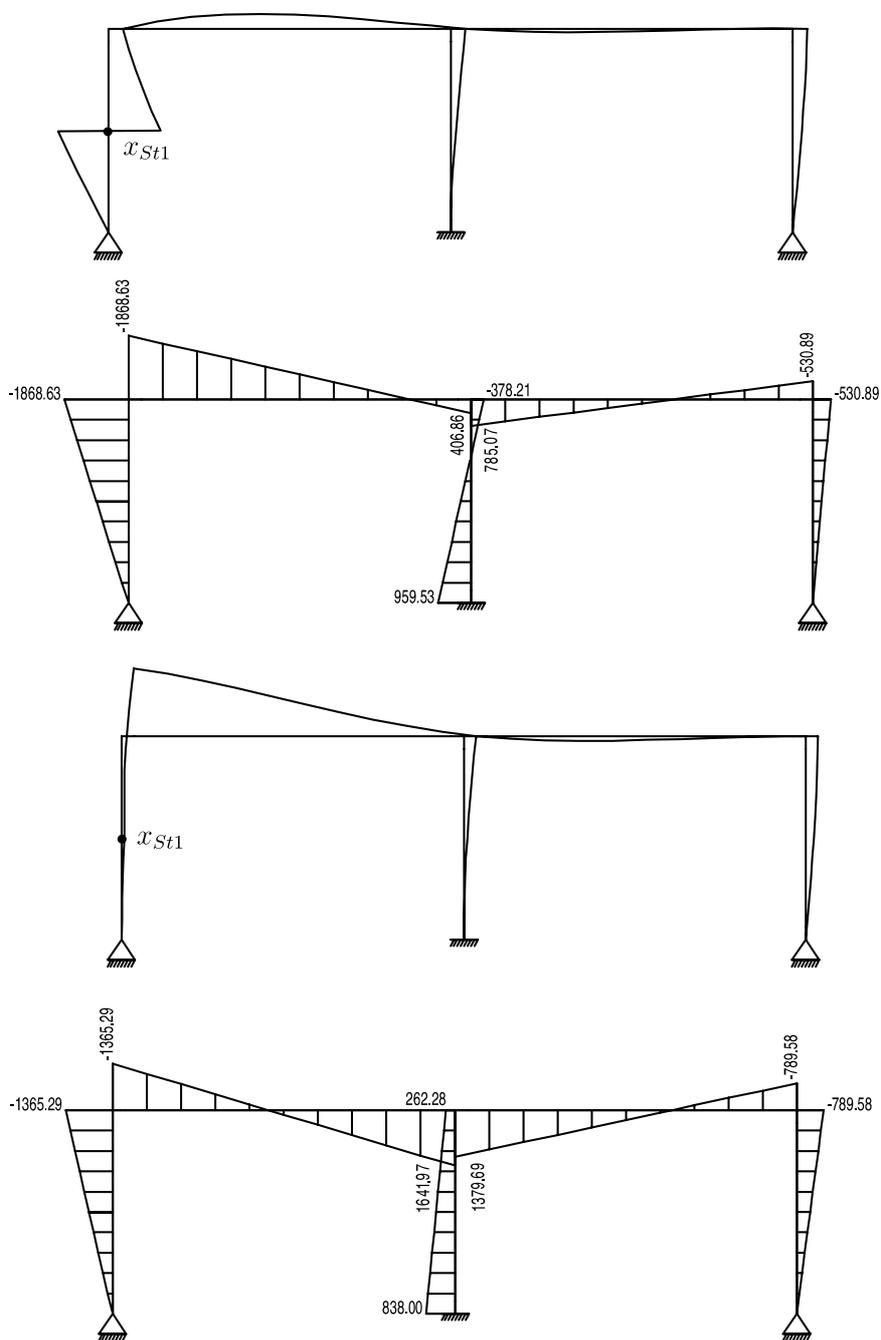


Abb. 4.21: Oben: Einflussfunktion $G_3^1(y, x_{St1})$ ermittelt aus einem Versatz der Größe 1 senkrecht zur Stabachse an der Stelle x_{St1} und zugehörige Biegemomentenlinie $M_{G_3^1}(x)$. Unten: Einflussfunktion ermittelt aus einem Versatz der Größe 1 längs der Stabachse an der Stelle x_{St1} und zugehörige Biegemomentenlinie.

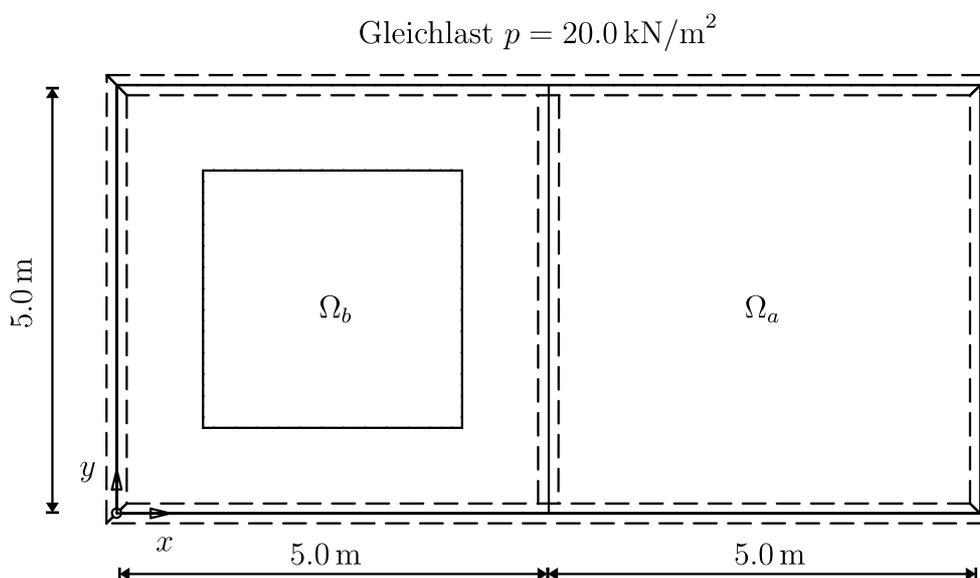


Abb. 4.22: Gelenkig gelagerte Platte mit Innenwand.

Welchen Einfluss hat diese Steifigkeitsänderung auf die Durchbiegung an der Stelle $x = 7.5 \text{ m}$ und $y = 2.5 \text{ m}$?

Die Platte besteht aus Normalbeton C 20/25 und ist auf Betonwänden ($d = 0.24 \text{ m}$, $h = 2.75 \text{ m}$) gelagert. Für die weiteren Berechnungen wird angenommen, dass die Querdehnungszahl $\nu = 0$ ist.

Die Änderung der Durchbiegung an der Stelle \boldsymbol{x} ist nach einer Berechnung mit einem RE-Programm

$$w_2(\boldsymbol{x}) - w_1(\boldsymbol{x}) = 0.5600 \text{ mm} - 0.5915 \text{ mm} = -0.0315 \text{ mm}.$$

Mit Hilfe der hergeleiteten Formel (3.146) ermittelt man die Änderung

$$w_2(\boldsymbol{x}) - w_1(\boldsymbol{x}) = -0.0263 \text{ mm},$$

in dem man die Momente im System 2 aus dem Bereich Ω_b mit den Momenten aus der Einflussfunktion (Einzelkraft an der Stelle \boldsymbol{x}) im System 1 in demselben Bereich überlagert.

Die Durchbiegung im System 2 ist somit $w_2(\boldsymbol{x}) = 0.5653 \text{ mm}$. Das entspricht einer Abweichung der beiden Werte von 0.9%.

In Abb. 4.23 ist die Durchbiegung der Platte im System 2 aus Originalbelastung und die Einflussfunktion für die Durchbiegung im Punkt \boldsymbol{x} dargestellt.

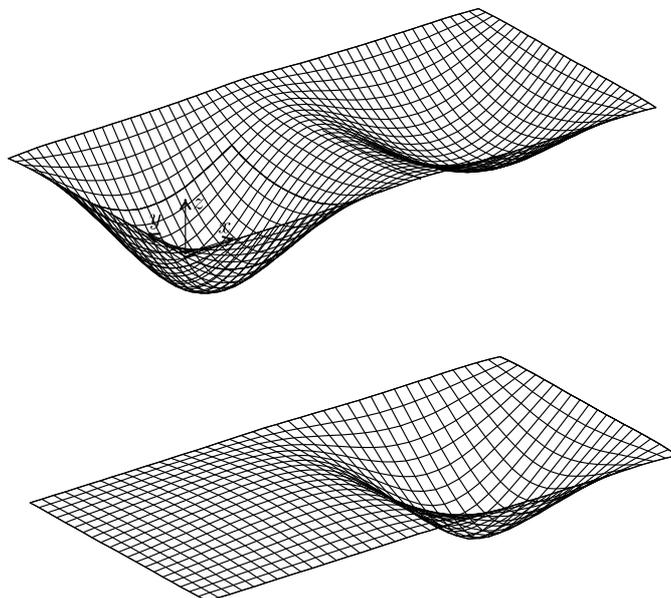


Abb. 4.23: Oben: Durchbiegung der Platte im geschwächten System 2 unter Originalbelastung. **Unten:** Einflussfunktion für die Durchbiegung an der Stelle $\boldsymbol{x} = \{7.5 \text{ m}, 2.5 \text{ m}\}$.

Die Momente aus der Einflussfunktion werden zur Berechnung mittels (3.146) benötigt.

Änderung des Momentes $m_{xx}(\boldsymbol{x})$:

Als nächstes wird die Änderung des Momentes m_{xx} an der Stelle $\boldsymbol{x}_A = \{7.5 \text{ m}, 2.5 \text{ m}\}$ und $\boldsymbol{x}_B = \{2.5 \text{ m}, 2.5 \text{ m}\}$ untersucht. Der Punkt \boldsymbol{x}_A liegt außerhalb und der Punkt \boldsymbol{x}_B innerhalb des Bereiches, in dem die Steifigkeitsänderung stattfindet.

In Abb. 4.24 sind die Einflussfunktionen für die beiden Momente (aus Knick in x -Richtung an der Stelle \boldsymbol{x}) dargestellt. Zur Berechnung mit (3.147) werden die Momente aus den Einflussfunktionen benötigt.

Die Momentenänderungen aus der RE-Berechnung sind

$$m_{xx2}(\boldsymbol{x}_A) - m_{xx1}(\boldsymbol{x}_A) = 15.120 \text{ kNm/m} - 15.820 \text{ kNm/m} = -0.700 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xx2}(\boldsymbol{x}_B) - m_{xx1}(\boldsymbol{x}_B) = 9.585 \text{ kNm/m} - 15.820 \text{ kNm/m} = -6.235 \text{ kNm/m}.$$

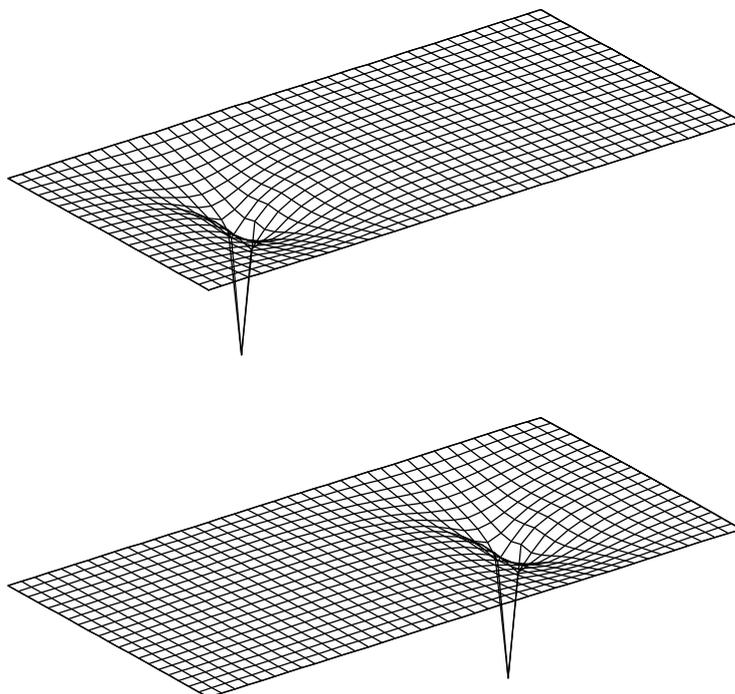


Abb. 4.24: Einflussfunktionen für das Moment $m_{xx}(\mathbf{x}_B)$ und $m_{xx}(\mathbf{x}_A)$.

Mit Hilfe von (3.147) ermittelt man

$$m_{xx2}(\mathbf{x}_A) - m_{xx1}(\mathbf{x}_A) = -0.307 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xx2}(\mathbf{x}_B) - m_{xx1}(\mathbf{x}_B) = -0.720 \text{ kNm/m}.$$

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Berechnungen mit denen aus dem RE-Programm fällt auf, dass $m_{xx2}(\mathbf{x}_B) = 15.1 \text{ kNm/m}$ um 57.5% vom Ergebnis oben abweicht.

Dagegen besitzt $m_{xx2}(\mathbf{x}_A) = 15.52 \text{ kNm/m}$ eine minimale Abweichung von 2.6% und kann als exakt betrachtet werden.

Der Grund für die enorme Ungenauigkeit ist das Moment aus der Einflussfunktion. In Abb. 4.24 ist die Einflussfunktion der beiden Momente an der Stelle \mathbf{x} abgebildet.

Ein FE-Programm ist nicht in der Lage die Einflussfunktion exakt darzustellen. Es entsteht eine Spitze an der Stelle, an der man den Knick aufbringt. An dieser Stelle wird auch das Moment stark anwachsen.

Die Einflussfunktion für das Moment m_{xx} im Punkt \boldsymbol{x}_A ist in dem Bereich, in dem die Steifigkeitsänderung stattfindet glatt, genauso werden auch die Momente in diesem Bereich gut sein.

Die Einflussfunktion für das Moment im Punkt \boldsymbol{x}_B hingegen weist im Bereich der Steifigkeitsänderung diese Spitze auf, daraus folgt, dass die Momente hier ebenfalls einen 'Sprung' machen. In (3.147) werden aber genau die Momente aus dem Bereich Ω_b für die Berechnung der Momentenänderung benötigt. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse hier ungenau.

Eine alternative Idee zur Bestimmung der Momentenänderung an der Stelle \boldsymbol{x}_B , wäre die Berechnung mittels 'Randintegralen', siehe Kap. 3.2.2. In diesem Fall würde man die Überlagerung der Momente im Bereich Ω_b umgehen.

4.3.7 Beispiel - Platte mit Öffnung

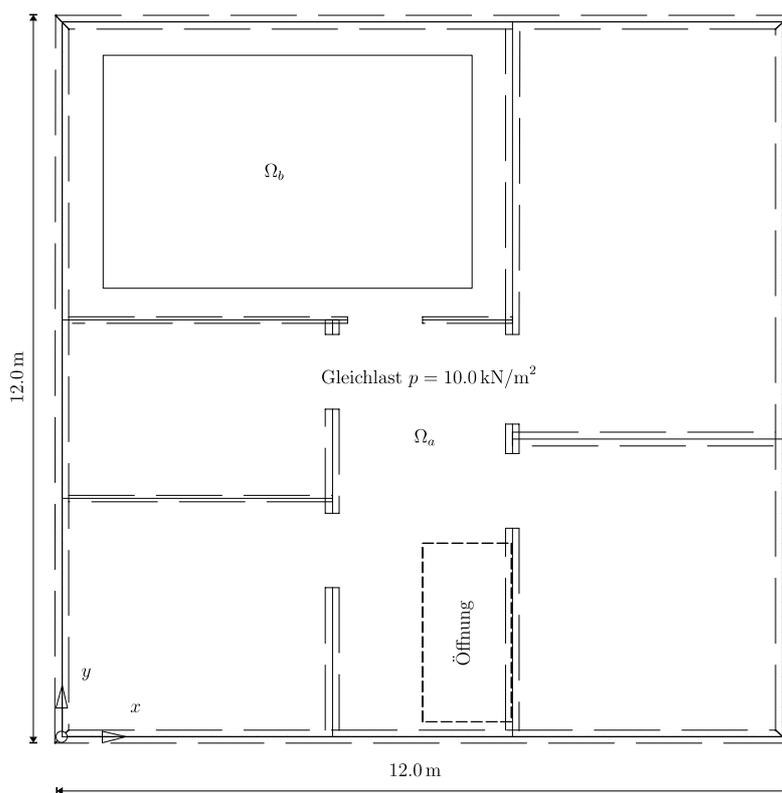


Abb. 4.25: Kellerdecke mit Öffnung für Treppenlauf.

	x [m]	y [m]	System 1	System 2	Änderung
m_{xx} [kNm/m]	9.5	9.5	8.674	7.890	-0.784
m_{xx} [kNm/m]	1.5	5.5	4.094	4.267	0.173
q_y [kN/m]	3.0	6.0	-6.358	-7.058	-0.700
q_y [kN/m]	9.5	11.5	-8.434	-7.596	0.838
m_{yy} [kNm/m]	9.5	2.0	6.720	6.723	0.003

Tab. 4.5: Änderungen der Momente und der Querkräfte an unterschiedlichen Stellen nach Abminderung der Plattensteifigkeit in Bereich Ω_b .

Bei der in Abb. 4.25 dargestellten Platte mit Öffnung ändert sich die Plattendicke im Bereich Ω_b von vorher 25 cm auf 18 cm. Daraus folgen die Plattensteifigkeiten $K_1 = 37500 \text{ kNm}^2$ und $K_2 = 14000 \text{ kNm}^2$ und $\alpha = 0.37$. Die Platte liegt auf Mauerwerkswänden auf.

Untersucht werden die Änderungen von Querkräften und Momenten an unterschiedlichen Stellen \boldsymbol{x} , siehe Tab. 4.5. Die Ergebnisse wurden mit den Formeln aus Kap. 3.2.7 ermittelt.

In Abb. 4.26 sind die Einflussfunktionen für die Querkraft q_y an der Stelle $x = 3.0 \text{ m}$ und $y = 6.0 \text{ m}$ und die Einflussfunktion für das Moment m_{yy} an der Stelle $x = 9.5 \text{ m}$ und $y = 2.0 \text{ m}$ dargestellt.

Betrachtet man die Einflussfunktion für das Moment m_{yy} , kann man deutlich das Abklingverhalten bzw. den lokalen Charakter der Einflusslinie erkennen. Der Wert der Momentenänderung aus Tab. 4.5 bestätigt die Aussage, denn man erhält nur eine minimale Änderung, nachdem die Plattensteifigkeit im Bereich Ω_b variiert.

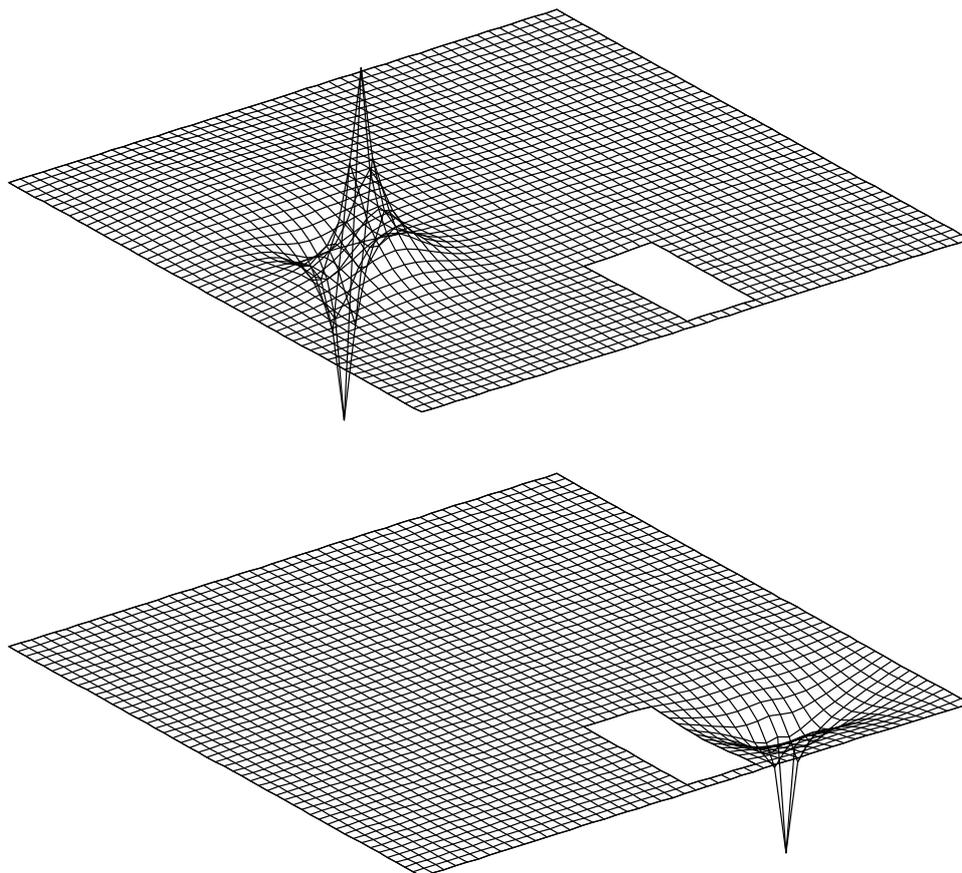


Abb. 4.26: **Oben:** Einflussfunktion für die Querkraft q_y an der Stelle $x = 3.0$ m und $y = 6.0$ m. **Unten:** Einflussfunktion für das Moment m_{yy} an der Stelle $x = 9.5$ m und $y = 2.0$ m.

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit sind zunächst die Grundlagen der klassischen Statik, wie z.B. die Greenschen Identitäten und die Erzeugung von Einflussfunktionen durch Aufbringen von Singularitäten dargestellt. Darüberhinaus wird der Zusammenhang zwischen einer FE-Berechnung und Einflussfunktionen beschrieben.

Im Hauptteil dieser Arbeit werden Untersuchungen an Stab- und Flächen-tragwerken durchgeführt, um den Einfluss von Steifigkeitsänderungen auf Weg- und Kraftgrößen zu ermitteln.

Ausgehend von der schwachen Formulierung

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w})$$

werden die Unterschiede der inneren Energie eines ungeschwächten Systems 1 und eines geschwächten System 2 betrachtet. In dem man anstelle der virtuellen Verrückung \hat{w} die Greensche Funktion bzw. Einflussfunktion für die gesuchte Punktgröße einsetzt, erhält man die Änderung der gewünschten Weg- oder Kraftgröße.

Weiterhin sind unterschiedliche Steifigkeitsänderungen betrachtet worden. Im einzelnen, die Änderung von Lagersteifigkeiten in Punktlagern, z.B. am Balken und in Lagern längs eines Randes, z.B. bei einer Platte, sowie der Ausfall eines Lagers. Außerdem sind Formeln zur Berücksichtigung von Dehn- und Biegesteifigkeitsänderungen am Balken, ebenen Fachwerk, Rahmentragwerk und der Scheibe und Platte angegeben. Auch der Ausfall eines Stabs in einem Fachwerk oder eines Balkens in einem Rahmentragwerk ist dargestellt.

Anhand unterschiedlicher Beispiele wird gezeigt, dass man mit Hilfe der hergeleiteten Formeln den Einfluss einer Steifigkeitsänderung auf Weg- und Kraftgrößen exakt bestimmen kann.

Das interessante an dieser Formulierung ist, dass man anders als beim klassischen Zugang über den Satz von Betti nicht über das gesamte Tragwerk integrieren muss, um eine Steifigkeitsänderung zu berücksichtigen, sondern nur den Bereich untersucht, in dem die Steifigkeitsänderung stattfindet. Bei

Steifigkeitsänderungen in einem Punktlager werden die veränderten Weg- oder Kraftgrößen nur aus Werten an der Stelle des Punktlagers bestimmt und für den Fall, dass sich die Dehnsteifigkeit eines Fachwerkstabs ändert, lassen sich z.B. die Änderung der Normalkräfte für jeden beliebigen Stab des Fachwerks aus einer Integration über den einen geschwächten Stab ermitteln.

Allerdings muss beachtet werden, dass man bei der Anwendung der Formeln jeweils eine Größe aus dem geschwächten System 2 und eine aus dem ungeschwächten System 1 benötigt, um die exakte Lösung zu erhalten. Will man z.B. den Einfluss einer Biegesteifigkeitsänderung auf die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle x eines Zweifeldträgers bestimmen, ist (3.89)

$$w_2(x) - w_1(x) = \int \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{EI_1} M_2(y) M_{G_0^1}(y) dy.$$

Neben der Änderung der Steifigkeit muss man das Moment aus dem geschwächten System 2 aus Originalbelastung und das Moment aus der Einflussfunktion im ungeschwächten System 1 überlagern.

Im Abschnitt *Numerische Ergebnisse* ist zusätzlich noch eine Vereinfachung untersucht worden, bei der man anstatt des Wertes aus System 2 den des ungeschwächten Systems 1 einsetzt. Die Ergebnisse aus Berechnungen für Punktlager sind auch bei großen Steifigkeitsänderungen noch relativ genau ($< 7\%$ Abweichung vom exakten Wert). Diese Vereinfachung lässt sich auch bei Platten mit einer Lagerungen längs eines Randes anwenden.

Bei Biegesteifigkeitsänderungen ist die Vereinfachung vor allem bei geringen Steifigkeitsänderungen problemlos anzuwenden. Allerdings sollte beachtet werden, dass die Abweichung ansteigt, je größer die Steifigkeitsänderung ist und je größer der Bereich ist, in dem die Steifigkeitsänderung stattfindet.

Ein Problem tritt in bestimmten Fällen bei Berechnungen von Weg- oder Kraftgrößen an Platten auf, deren Biegesteifigkeit sich in einem Teilbereich verändert hat. Will man z.B. die Änderung des Momentes an einer Stelle innerhalb dieses Teilbereich mit der Steifigkeitsänderung bestimmen, können große Ungenauigkeiten auftreten. Der Grund dafür ist, dass ein FE-Programm nicht in der Lage ist die Einflussfunktion (Knick an der Stelle x) exakt darzustellen, es entsteht eine 'Spitze', siehe Abb. 4.24 und das Moment aus der

Einflussfunktion steigt in diesem Bereich stark an. Genau dieses Moment aus der Einflussfunktion benötigt man aber zur Berechnung, aus diesem Grund wird das Ergebnis ungenau.

Literatur

- [1] BARTSCH, H.-J.: *Taschenbuch mathematischer Formeln*. Fachbuchverlag, Leipzig, 17. Auflage, 1997.
- [2] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2002.
- [3] BOCHMANN, F., KIRSCH, W.: *Statik im Bauwesen, Band 1: Statisch bestimmte Systeme*. HUSS-MEDIEN GmbH, Verlag Bauwesen, Berlin, 21. Auflage, 2003.
- [4] BOCHMANN, F., KIRSCH, W.: *Statik im Bauwesen, Band 3: Statisch unbestimmte ebene Systeme*. HUSS-MEDIEN GmbH, Verlag Bauwesen, Berlin, 13. Auflage, 2003.
- [5] GRÄTSCH, T.: *L₂-Statik*. Dissertation Universität Kassel, 2002.
- [6] GRÄTSCH, T., HARTMANN, F.: *Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrössenermittlung mit finiten Elementen, Teil 2: Platten*. Bautechnik 80, 2003, S. 162-168.
- [7] GRÄTSCH, T., HARTMANN, F., KATZ, C.: *Einflussfunktionen und finite Elemente*. Bauingenieur 78, 2003, S. 489-497.
- [8] HARTMANN, F.: *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [9] HARTMANN, F.: *Methode der Randelemente*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [10] HARTMANN, F., KATZ, C.: *Statik mit finiten Elementen*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] HARTMANN, F., KATZ, C.: *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] HIRSCHFELD, K.: *Baustatik*. Erster und Zweiter Teil, Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 2. bericht. Nachdr., 1984.

- [13] KALIK, K., KOLBE, W., STEINBACH, O., WENDLAND, W.L.: *Mathematik*. In: Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Band: Mathematik, Technische Mechanik. Ernst & Sohn, Berlin, 1999, S. 1-315.
- [14] KRÄTZIG, W. B., WITTEK, U.: *Tragwerke 1*. Springer-Verlag, 3. Auflage, Berlin, 1995.
- [15] KRÄTZIG, W. B.: *Tragwerke 2*. Springer-Verlag, 3. Auflage, Berlin, 1998.
- [16] LINK, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. B.G.Teubner-Verlag, Stuttgart, 3. Auflage, 2002.
- [17] MANG, H.: *Flächentragwerke*. In: Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Band: Rechnerorientierte Baumechanik. Ernst & Sohn, Berlin, 1995, S. 1-139.
- [18] RAMM, E., HOFMANN, T. J.: *Stabtragwerke*. In: Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Band: Baustatik, Baudynamik. Ernst & Sohn, Berlin, 1995, S. 1-349.
- [19] SCHNEIDER, K.-J.: *Bautabellen für Ingenieure*. Werner Verlag, Düsseldorf, 15. Auflage, 2002.
- [20] WERKLE, H.: *Finite Elemente in der Baustatik*. Vieweg-Verlag, 2. Auflage, Braunschweig, 2001.
- [21] WERNER, D.: *Fehler und ihre Vermeidung bei Tragkonstruktionen im Hochbau*. Ernst & Sohn, Berlin, 2002.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Oliver Carl, dass die Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe, nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt worden ist.

Kassel, 04. August 2004 _____
Oliver Carl