

Schwingungsinduzierte Sedimentation
in viskoplastischen Fluiden

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor–Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Olaf Wunsch

aus Lingen

Hamburg, 1993

Referent: Univ.–Prof. Dr. G. Böhme, UniBw Hamburg
Korreferent: Univ.–Prof. Dr. H. Buggisch, Univ. Karlsruhe
Mündliche Prüfung: 5. November 1993

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bzw. wissenschaftlicher Assistent am Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen der Universität der Bundeswehr Hamburg.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer und Referenten, Herrn Univ.–Prof. Dr. G. Böhme meinen besonderen Dank aussprechen. Er gab die Anregung zu dieser Arbeit und unterstützte sie durch wertvolle Hinweise sowie durch seine stetige Gesprächsbereitschaft. Herrn Univ.–Prof. Dr. H. Buggisch danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Hamburg, im November 1993

Olaf Wunsch

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einleitung und Übersicht	1
2 Stationäre Sedimentation eines kugelförmigen Einzelpartikels	5
2.1 Sedimentation in newtonschen Fluiden	6
2.2 Sedimentation in Bingham–Fluiden	10
2.3 Extremalprinzip für die schleichende Kugelumströmung	13
2.3.1 Potentiale für Deformationsgeschwindigkeit und Spannung	14
2.3.2 Zweiseitige Schranken für den Stokeschen Widerstandskoeffizienten	15
2.3.3 Anwendung für Bingham–Fluide	17
2.4 Finite–Elemente–Berechnung nach Beris et.al.	21
3 Experimentelle Bestimmung Bingham'scher Stoffparameter	28
3.1 Versuchsaufbau	29
3.2 Auswertung	31
3.3 Ergebnisse	34
4 Instationäre Sedimentation eines kugelförmigen Partikels in viskoplastischen Fluiden	41
4.1 Bewegung unterhalb der Fließgrenze	42
4.1.1 Schwingende Kugel in einem ruhenden Festkörper	42
4.1.2 Kugel in einem schwingenden Festkörper	48
4.2 Beginn der Sedimentation	55
5 Mechanisches Ersatzmodell	62
5.1 Modellaufbau	63
5.2 Identifizierung der Modellparameter	67
5.3 Gesamtmodell	71

6	Experimentelle Verifikation	78
6.1	Ermittlung der Stoffparameter	79
6.2	Instationäre Messungen	83
6.3	Ergebnisse	88
6.3.1	Kugelschwingungen unterhalb der Fließgrenze	88
6.3.2	Beginn der Sedimentation einer schwingenden Kugel	95
6.3.3	Instationäre Sedimentation	97
7	Zusammenfassung und Ausblick	106
8	Literaturverzeichnis	108

Zusammenstellung der wichtigsten Symbole

Symbol	Dimension ¹⁾	Bedeutung
a	LZ^{-2}	Beschleunigungsvektor
a_1, a_2	MZ^{-1}	Dämpferkonstanten
c	—	Konzentration
c_1	MZ^{-2}	Federkonstante
d	L	Durchmesser
D	Z^{-1}	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
f	$ML^{-2}Z^{-2}$	Volumenkraftdichte
F_h	MLZ^{-2}	Reibkonstante
F_w	MLZ^{-2}	Widerstandskraft
G	—	Greenscher Verzerrungstensor
g	LZ^{-2}	Erdbeschleunigung
K	—	Abkürzung (siehe Gl.(4.15))
m	M	Kugelmasse
m_a	M	virtuelle Masse
m'	M	"Auftriebsmasse"
p	$ML^{-1}Z^{-2}$	Druck
P	ML^2Z^{-3}	Dissipationsleistung
R, ϑ, φ	$L, -, -$	Kugelkoordinaten
R_0	L	Kugelradius
S	$ML^{-1}Z^{-2}$	Spannungstensor
t	Z	Zeit
T	$ML^{-1}Z^{-2}$	Reibungsspannungstensor
U_0	L	Verschiebungsamplitude
u	L	Verschiebungsvektor
V_w	LZ^{-1}	Absetzgeschwindigkeit
v	LZ^{-1}	Geschwindigkeitsvektor
W_0	L	Erregungsamplitude
x, y, z	L, L, L	kartesische Koordinaten
x_f, x_k	L, L	Führungs-, Kugelkoordinaten
Y_g	—	Grenzwert (=0.14334)
γ	—	Scherwinkel
$\dot{\gamma}$	Z^{-1}	Deformationsgeschwindigkeit
ζ	L	Verschiebungskoordinate
η	$ML^{-1}Z^{-1}$	Scherviskosität

VIII

$\hat{\eta}$	$ML^{-1}Z^{-1}$	differentielle Viskosität
$\eta^* = \eta' - i\eta''$	$ML^{-1}Z^{-1}$	komplexe Viskosität
$\mu^* = \mu' + i\mu''$	$ML^{-1}Z^{-2}$	komplexer Gleitmodul
λ	$ML^{-1}Z^{-2}$	Lamescher Koeffizient
ρ	ML^{-3}	Dichte
τ	$ML^{-1}Z^{-2}$	Schubspannungsinvariante
τ_f	$ML^{-1}Z^{-2}$	Fließspannung
Ω	Z^{-1}	Kreisfrequenz

Indizes

k	Kugel
f	Fluid

Dimensionslose Kennzahlen

$Bi = \frac{2\tau_f R_0}{\hat{\eta} V_\omega}$	Binghamzahl
$C = \frac{F_w}{6\pi\hat{\eta}V_\omega R_0}$	Stokesscher Widerstandskoeffizient
$Re = \frac{\rho_f V_\omega d}{\eta}$	Reynoldszahl
$V = \frac{\mu''}{\mu'}$	Viskoelastizitätsmaß
$Y = \frac{2\pi\tau_f R_0^2}{F_w}$	Fließzahl
$Z^2 = \frac{\rho_f (i\Omega)^2 R_0^2}{\mu^*}$	modifizierte Stokeszahl
$\Gamma = \frac{\rho_k}{\rho_f}$	Dichteverhältnis
$\delta = \frac{R_a}{R_0}$	Radienverhältnis

1) Im Internationalen Einheitensystem mit Masse [M], Länge [L], und Zeit [Z] als Basisgrößen.

1 Einleitung und Übersicht

Unter Sedimentation versteht man i.allg. die Trennung dispers verteilter Partikel aus einer flüssigen oder gasförmigen Phase unter der Wirkung der Schwerkraft. Im Bereich der Chemie- und Verfahrenstechnik gehört die Sedimentation zu den Standardoperationen der mechanischen Trennverfahren und wird vornehmlich zur Trennung von festen und flüssigen Phasen, aber auch bei der Trennung von Emulsionen eingesetzt. Dabei erstreckt sich die Größenordnung der Partikel im Bereich von weniger als 10^{-4} m bis ca. 10^{-1} m. Man denke hier beispielsweise an die Klärung von Abwässern in Absetzapparaten oder an das Trennen von Öl-Wasser Gemischen mit Ölabscheidern. Reicht die Schwerkraft als treibende Kraft nicht aus, sei es, weil sich die Größen der Partikel im unteren Bereich der Größenskala bewegen oder die Sedimentationszeiten nicht den prozeßbedingten Anforderungen genügen, so lassen sich abgewandelte oder erweiterte Verfahren wie das Zentrifugieren bzw. elektrische Abscheider einsetzen. An Stelle der Schwerkraft treten dann Zentrifugalkräfte oder elektrostatische Kräfte, wobei sich die Grundlagen zur Berechnung dieser Trennprozesse an denen der Schwerkraftsedimentation orientieren.

Den Ausgangspunkt zur Berechnung von Sedimentationsvorgängen unter isothermischen Bedingungen bilden die Bilanzgleichungen von Impuls und Masse für das Fluid. Diese Bilanzen führen i.allg. auf ein nichtlineares System von Differentialgleichungen. Unter gewissen Bedingungen läßt sich das System analytisch behandeln. So kann im Falle einer Einzelkugel in einem newtonschen Fluid bei schleichender Strömung die stationäre Absetzgeschwindigkeit theoretisch berechnet werden. Allerdings besteht in vielen verfahrenstechnischen Anwendungen die fluide Phase aus Substanzen, die keine newtonschen Stoffeigenschaften besitzen. Polymerlösungen, Kunststoffschmelzen, Farben und auch Hautcremes gehören beispielsweise dazu. Solche Stoffe zeigen schon beim stationären Fließen Erscheinungen, die sich nur durch zusätzliche stoffliche Eigenschaften beschreiben lassen. Dazu zählt u.a. eine von der Beanspruchung abhängige Viskosität. So nimmt bei strukturviskosen Fluiden die Scherviskosität mit wachsender Schergeschwindigkeit ab. Andere Fließer-

scheinungen sind auf Normalspannungsdifferenzen zurückzuführen oder auch auf die Existenz einer Fließgrenze. Alle diese Stoffeigenschaften erschweren die Berechnungen der Sedimentation zusätzlich, da die Stoffmodelle, die das Reibungsverhalten solcher Fluide beschreiben, nichtlinear sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die Sedimentation in Fluiden mit Fließgrenze behandelt. Diese plastischen oder viskoplastischen Substanzen beginnen definitionsgemäß erst dann zu fließen, wenn im Fluid eine Mindestspannung erreicht wird.

Einige Autoren sind in der neueren Zeit der Meinung, daß die Existenz der Fließspannung lediglich auf ungenaue Meßmethoden zurückzuführen ist [1.1]. Dieser Standpunkt hat in der Literatur eine breite Diskussion ausgelöst [1.2—1.5]. Es bereitet nämlich gewisse Schwierigkeiten zu entscheiden, ob und wann genau ein Material fließt. So wird der Chemiker in diesem Zusammenhang auf mikroskopische Veränderungen des Materials achten, während der Ingenieur an makroskopischen Eigenschaften interessiert ist. Im Rahmen einer modellhaften Beschreibung von viskoplastischen Substanzen ist die Fließgrenze jedoch i.allg. anerkannt. Sie läßt sich auch in Experimenten gut beobachten.

Für die Sedimentation von Partikeln hat diese Stoffeigenschaft zweierlei Auswirkungen. Einerseits verlangsamen sich die Absinkgeschwindigkeiten der Partikel und damit verlängern sich die Absetzzeiten. Andererseits kann es unter bestimmten Voraussetzungen passieren, daß die Partikel in dem Fluid feststecken und keine Sedimentation unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft stattfindet.

Besonders das letztere Verhalten ist gerade bei Trennprozessen in der industriellen Praxis nicht erwünscht. Will man erreichen, daß auch die feststeckenden Partikel sedimentieren, muß man zusätzliche Maßnahmen ergreifen. Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wird eine Möglichkeit dargestellt. Sie beruht darauf, daß das Partikel zu einer harmonischen Bewegung angeregt wird und es so zu einer schwingungsinduzierten, instationären Sedimentation kommen kann.

Doch zunächst werden im zweiten Kapitel die theoretischen Grundlagen der Sedimentation eines kugelförmigen Einzelpartikels unter stationären Bedingungen dargestellt. Ausgehend von der bekannten Bewegung einer Kugel in newtonschen Fluiden sind hier die Grundgleichungen angegeben, welche die Sedimentation in einer einfachen viskoplastischen Substanz, einem Bingham-Fluid, beschreiben. Auf Grund dieses nichtlinearen Stoffmodells kann das entstehende System nicht mehr analytisch behandelt werden. Mittels des Extremalprinzips für die schleichende Kugelumströmung lassen sich jedoch zweiseitige Schranken für die stationäre Sinkgeschwindigkeit angeben. Abschließend werden in diesem Kapitel die Ergebnisse einer numerischen Simulation der Sedimentation in einem Bingham-Fluid erläutert, die in der Literatur veröffentlicht sind. Sie bilden den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen.

Diese Ergebnisse der numerischen Berechnungen ermöglichen es, einen Versuchsaufbau zu entwerfen, mit dem die Bingham'schen Stoffparameter einer viskoplastischen Flüssigkeit simultan bestimmt werden können. Der Aufbau basiert auf dem Prinzip eines Kugelfallviskosimeters, bei dem in einem fluidgefüllten Zylinder die stationären Sinkgeschwindigkeiten fallender Kugeln gemessen werden. Die Versuchstechnik ist im dritten Kapitel zusammen mit experimentellen Ergebnissen für verschiedene viskoplastische Fluide erläutert.

Die schwingungsinduzierte Sedimentation eines unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft feststeckenden Partikels wird in den folgenden Kapiteln behandelt. Zunächst ist dafür die theoretische Analyse der Bewegung eines solchen, zu harmonischen Schwingungen angeregten Partikels erforderlich. Dies erfolgt unter Verwendung gewisser Modellvorstellungen in Kapitel 4. Die Ergebnisse der Analyse führen auf ein Grenzkriterium. Es besagt, daß zum Einsetzen der Sedimentation die Schwingungsparameter der Anregung gewisse Werte überschreiten müssen.

Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen in Kapitel 4 wird im fünften Kapitel ein mechanisches Ersatzmodell mit konzentrierten Parametern entwickelt. Unter der Voraussetzung gewisser Grenzfälle kann dieses Modell die Bewegung einer Einzelkugel in einem viskoplastischen Fluid beschreiben. Damit ist es möglich, nicht nur das Einsetzen der instationären Sedimentation vorherzusagen, sondern auch die mittlere Sinkgeschwindigkeit der Kugel zu prognostizieren.

Um die oben vorgestellten theoretischen Modelle für die instationäre Sedimentation beurteilen zu können, werden im sechsten Kapitel die Ergebnisse einer experimentellen Untersuchung für zwei verschiedene viskoplastische Fluide den theoretischen Prognosen gegenübergestellt. Es zeigen sich gute Übereinstimmungen, insbesondere beim Einsetzen der Sedimentation.

2 Stationäre Sedimentation eines kugelförmigen Einzelpartikels

Bei Sedimentationsvorgängen von Suspensionen in der industriellen Praxis ist man vorrangig an den Absetzgeschwindigkeiten der Partikel interessiert. Meist geht es um die Bewegung einer großen Anzahl von Teilchen (Partikelschwarm), wobei es zu Wechselwirkungen der Partikel untereinander kommt. Diese Wechselwirkungen beeinflussen die Absetzgeschwindigkeiten mehr oder weniger stark. Bei Untersuchungen in der Literatur zu diesem Thema geht jedoch als wesentliche Größe immer die Sinkgeschwindigkeit eines einzelnen Teilchens ein. Diese wird dann durch Koeffizienten, die u.a. vom Anteil des Partikelvolumens zum Fluidvolumen abhängen, korrigiert (siehe z.B. [2.1]). Im Rahmen dieser Arbeit soll daher ausschließlich die Bewegung eines Einzelpartikels studiert werden.

An dieser Stelle seien die weiteren Voraussetzungen genannt, die in den folgenden mathematischen Beschreibungen einfließen:

- bei dem Partikel handelt es sich um eine starre, homogene Kugel mit konstanter Dichte ρ_k ;
- das Fluid verhält sich wie ein Kontinuum mit konstanter Dichte ρ_f und haftet an festen Wänden (Inkompressibilität, Haftbedingung);
- alle thermischen Effekte werden vernachlässigt (isotherme Strömung).

Ausgangspunkt bei der Berechnung von Strömungsvorgängen unter diesen Bedingungen sind die Bilanzgleichungen der Masse und des Impulses für ein kleines materielles Volumenteilchen des Fluids. Die Kontinuitätsgleichung für ein dichtebeständiges Fluid

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.1}$$

verlangt das Verschwinden der Divergenz des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} , und die Bewegungsgleichung

$$\rho_f \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{f}, \tag{2.2}$$

bringt die Beschleunigung des Fluids \mathbf{a} mit dem Spannungstensor \mathbf{S} und der Volumen-

kraftdichte \mathbf{f} in Verbindung. Der Spannungstensor \mathbf{S} ist in einem ruhenden Fluid kugelsymmetrisch. Üblicherweise spaltet man daher den Tensor \mathbf{S} in einen kugelsymmetrischen Anteil $p\mathbf{E}$ mit dem hydrostatischen Druck p und dem Einheitstensor \mathbf{E} und in die Reibungsspannungen \mathbf{T} auf:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{E} + \mathbf{T} . \quad (2.3)$$

Weiterhin ist die Beschleunigung \mathbf{a} die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit, so daß aus den beiden Gl.(2.2) und (2.3) die Beziehung

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} (\text{grad } \mathbf{v}) \right] = -\text{grad } p + \text{div } \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (2.4)$$

folgt. Zur Berechnung konkreter Durch- oder Umströmungsprobleme sind einerseits noch Rand- und Anfangsbedingungen festzulegen, andererseits für den Reibungstensor \mathbf{T} noch, je nach Fluid, ein physikalisch sinnvolles Stoffgesetz zu formulieren.

2.1 Sedimentation in newtonschen Fluiden

Im Fall eines newtonschen Fluids verbindet das Stoffgesetz die Reibungsspannungen linear mit dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D}

$$\mathbf{T} = 2 \eta \mathbf{D} + \eta_v (\text{sp } \mathbf{D}) \mathbf{E} , \quad (2.5)$$

wobei $\mathbf{D} = 1/2 [\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T]$ den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradiententensors darstellt. Die Stoffkonstanten η (Scherviskosität) und η_v (Volumenviskosität) sind von der Deformation unabhängig. Für ein dichtebeständiges Fluid entfällt der zweite Term auf der rechten Seite von Gl.(2.5). Durch Einsetzen des Stoffgesetzes in Gl.(2.4) gelangt man dann zu der sogenannten Navier–Stokesschen Gleichung

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} (\text{grad } \mathbf{v}) \right] = -\text{grad } p - \eta \text{rot rot } \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.6)$$

für ein inkompressibles Fluid, wenn dabei die Identitäten $\text{div grad } \mathbf{v} \equiv \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}$ sowie $\text{div } (\text{grad } \mathbf{v})^T \equiv \text{grad div } \mathbf{v}$ und die Kontinuitätsgleichung berücksichtigt werden.

Die Trägheit des Fluids ist mit der Dichte ρ_f verbunden, spiegelt sich also auf der linken Seite der Gl.(2.6) wider, während die Reibung durch den Term mit der Viskosität ausgedrückt wird. In der Praxis sind die Abmessungen der sedimentierenden Partikel i.allg. klein und die gebräuchlichen Fluide recht zäh. Für die weiteren Betrachtungen ist es daher vernünftig, sich zunächst über die Größenordnungen einzelner Terme in der Navier–Stokes–Gleichung Klarheit zu verschaffen. Unter stationären Bedingungen verschwindet die lokale Beschleunigung $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Der verbleibende konvektive Trägheitsterm und der Reibungsterm können mit für die Sedimentation charakteristischen Größen, der Absetzgeschwindigkeit V_∞ und dem Partikeldurchmesser $d = 2 R_0$, abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \text{Trägheit:} \quad & \rho_f \mathbf{v} (\text{grad } \mathbf{v}) \sim \rho_f V_\infty^2 / d, \\ \text{Reibung:} \quad & \eta \text{rot rot } \mathbf{v} \sim \eta V_\infty / d^2. \end{aligned}$$

Das Verhältnis beider Terme ergibt die Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{\rho_f V_\infty d}{\eta}. \quad (2.7)$$

Unter den o.g. Bedingungen kleiner Partikeldurchmesser und hoher Viskosität wird die Re–Zahl klein ($\text{Re} \ll 1$), so daß die trägen Eigenschaften des Fluids gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt werden können (schleichende Strömung). Dann vereinfacht sich die Navier–Stokes–Gleichung wesentlich zu

$$0 = -\text{grad } p - \eta \text{rot rot } \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (2.8)$$

Natürlich ist die Sedimentation einer Kugel aus der Sicht eines Beobachters in einem Laborsystem, in dem das Fluid ruht, ein instationärer Vorgang. Dies ändert sich, wenn man das Problem von einem mit der Kugel bewegten System (Relativsystem) aus betrachtet. Man sieht dann ein bewegtes Fluid, welches eine ruhende Kugel umströmt. Dieser Vorgang ist äquivalent zu der Bewegung im Laborsystem (vgl. z.B. [2.2]), so daß die Bewegungsgleichung in der Form (2.8) angewendet werden kann.

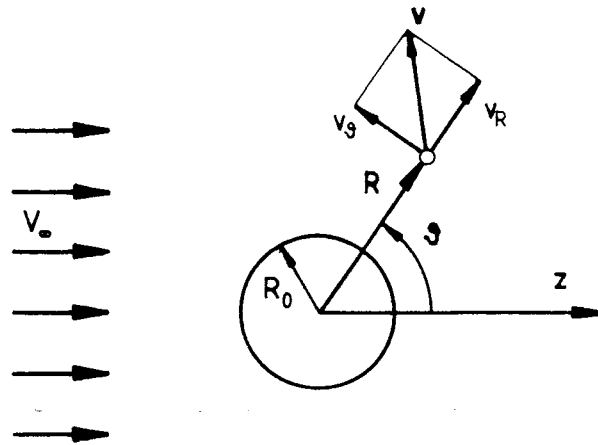


Bild 2.1: Schleichende Kugelströmung

Eine solche, in Bild 2.1 skizzierte, schleichende Kugelströmung ohne Volumenkräfte ($f = 0$, horizontale Anströmung) in einem unendlich ausgedehnten Fluid ist als erstes von Stokes [2.3] theoretisch untersucht worden. Die Herleitung des Ergebnisses soll hier kurz angegeben werden. Sinnvollerweise verwendet man zur Beschreibung der Strömung Kugelkoordinaten R, ϑ, φ . Wegen $v_\varphi = 0$ und der Rotationssymmetrie um die Achse ($\partial/\partial\varphi = 0$) treten nur zwei Geschwindigkeitskomponenten $v_R(R, \vartheta)$ und $v_\vartheta(R, \vartheta)$ auf. Die Kontinuitätsgleichung kann durch einen Ansatz für den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} in der Form

$$\mathbf{v} = \text{rot} \left\{ \frac{\psi}{R \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right\}, \quad \text{d.h.} \quad v_R = \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \quad (2.9a)$$

$$v_\vartheta = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (2.9b)$$

mit der Stromfunktion $\psi(R, \vartheta)$ befriedigt werden. Durch Anwendung der Rotation auf Gl.(2.8) läßt sich der Druck eliminieren. Mit dem Geschwindigkeitsansatz Gl.(2.9) resultiert dann eine partielle, lineare Differentialgleichung (DGL) vierter Ordnung für die Stromfunktion

$$\mathcal{L} \mathcal{L} \psi = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{mit dem Operator } \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \vartheta}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right].$$

Mit der Haftbedingung des Fluids an der Kugeloberfläche (an der Stelle $R = R_0$) und der

Vorgabe der Fluidgeschwindigkeit in weiter Entfernung von der Kugel sind die erforderlichen Randbedingungen im kugelfesten Koordinatensystem festgelegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(R = R_0) &= \mathbf{0} & \text{d.h.} & \quad \psi = 0 \\ \mathbf{v}(R \rightarrow \infty) &= V_\infty \mathbf{e}_z & & \quad \psi = \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Separiert man in der Stromfunktion die Winkelabhängigkeit in der Form $\psi = \sin^2 \vartheta f(R)$, reduziert sich Gl.(2.10) auf eine lineare DGL 4.Ordnung vom Euler Typ für $f(R)$. Mit Berücksichtigung der Randbedingungen lautet dann die Lösung

$$\psi = \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2 \vartheta \left[1 - \frac{3}{2} X + \frac{1}{2} X^3 \right], \quad (2.12)$$

mit $X = R_0/R$. Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich somit sofort aus (2.9a) und (2.9b) zu:

$$v_R = V_\infty \left[1 - \frac{3}{2} X + \frac{1}{2} X^3 \right] \cos \vartheta, \quad (2.13a)$$

$$v_\vartheta = V_\infty \left[-1 + \frac{3}{4} X + \frac{1}{4} X^3 \right] \sin \vartheta. \quad (2.13b)$$

Mit Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes können aus Gl.(2.8) das Druckfeld und mit dem Stoffgesetz (2.5) der Tensor der Reibungsspannungen ermittelt werden. Für die weiteren Berechnungen sind neben dem Druck speziell die Reibungsspannungen τ_{RR} und $\tau_{R\vartheta}$ von Interesse,

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{3}{2} \frac{\eta}{R_0} V_\infty X^2 \cos \vartheta, \\ \tau_{RR} &= 3 \frac{\eta}{R_0} V_\infty (X^2 - X^4) \cos \vartheta, \quad \tau_{R\vartheta} = -\frac{3}{2} \frac{\eta}{R_0} V_\infty X^4 \sin \vartheta, \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante p_0 geeignet festzulegen ist (Bezugsdruck auf der Kugel am Äquator). Die von dem Fluid auf die Kugel ausgeübte Kraft \mathbf{F}_w ergibt sich nämlich gerade aus der Summe der an der Kugeloberfläche A_0 wirkenden Spannungen, d.h.:

$$\mathbf{F}_w = \int_0^\pi \{ (-p(R_0) + \tau_{RR}(R_0)) \cos \vartheta - \tau_{R\vartheta}(R_0) \sin \vartheta \} dA \mathbf{e}_z. \quad (2.14)$$

$$\text{mit } dA = 2 \pi R_0 \sin \vartheta R_0 d\vartheta$$

Die Durchführung der Integration (2.14) führt schließlich auf das bemerkenswert einfache Ergebnis

$$\mathbf{F}_w = 6 \pi \eta V_\infty R_0 \mathbf{e}_z, \quad (2.15)$$

wobei sich diese Kraft zu 1/3 aus dem Druckterm und zu 2/3 aus dem Reibungsterm zusammensetzt.

Die Kenntnis der durch Reibung und Druck verursachten Widerstandskraft ermöglicht in einfacher Weise die Berechnung der Sinkgeschwindigkeit einer Kugel in einem ruhenden Fluid unter Wirkung der Schwerkraft. Unter stationären Bedingungen muß Gleichgewicht zwischen den an der Kugel angreifenden Kräften, der Gewichtskraft $F_g = 4/3 \pi \rho_k g R_0^3$, (g ist die Erdbeschleunigung), der Auftriebskraft $F_a = 4/3 \pi \rho_f g R_0^3$ und der oben berechneten Widerstandskraft herrschen

$$F_g - F_a = F_w, \quad (2.16)$$

so daß man durch Einsetzen von Gl.(2.15) auf das bekannte Ergebnis für die Sinkgeschwindigkeit V_∞ einer einzelnen Kugel in einem unendlich ausgedehnten Fluid

$$V_\infty = \frac{2(\rho_k - \rho_f)gR_0^2}{9\eta} \quad (2.17)$$

gelangt, die manchmal auch Stokesgeschwindigkeit genannt wird.

Diese Ergebnisse sind unter der Bedingung schleichender Strömung hergeleitet worden, was mit der Forderung $Re \ll 1$ zusammenhängt. Bemerkenswert ist jedoch, daß sogar noch bei $Re \approx O(1)$ die theoretischen Prognosen mit Experimenten in sehr guter Übereinstimmung stehen (siehe z.B. [2.4]).

2.2 Sedimentation in Bingham-Fluiden

Fluide mit newtonschen Stoffeigenschaften, z.B. Wasser oder Öle, stellen einen Spezialfall in der Klasse der rheologisch einfachen Fluide dar [2.5]. Interessiert man sich jedoch für Strömungsvorgänge, beispielsweise in Kunststoffschmelzen oder Polymerlösungen, so reicht der lineare Zusammenhang zwischen \mathbf{T} und \mathbf{D} zur Beschreibung nicht aus. Das Stoffgesetz muß durch einen Ausdruck ersetzt werden, der im allgemeinen nichtlinear ist und außerdem

auch noch von der Bewegung des Fluids in der Vergangenheit abhängen kann. Zu solchen nicht-newtonschen Fluiden gehören auch die mit einer Fließgrenze (viskoplastische oder plastische Fluide). Diese Stoffe beginnen erst dann zu fließen, wenn die Spannungen im Strömungsfeld eine gewisse Fließspannung τ_f überschreiten. Unterhalb dieses *kritischen* Wertes wird das Material nicht bleibend verformt, sondern es verhält sich wie ein Festkörper. Spielen Gedächtniseigenschaften und Normalspannungen in dem betrachteten Stoff keine Rolle, so ist das einfachste und wohl auch bekannteste Modell zur Beschreibung des Fließverhaltens eines viskoplastischen Fluids das von Bingham [2.6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2 (\hat{\eta} + \tau_f/\dot{\gamma}) \mathbf{D} && \text{für } \tau > \tau_f, \\ \mathbf{D} &= 0 && \text{für } \tau \leq \tau_f. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Hier tritt als zweiter Stoffparameter neben der Fließspannung die differentielle Viskosität $\hat{\eta}$ auf. Die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ und die Spannungsinvariante τ berechnen sich aus den zweiten Invarianten der Tensoren \mathbf{D} und \mathbf{T} :

$$\dot{\gamma}^2 = 2 \operatorname{sp} \mathbf{D}^2, \quad (2.19a)$$

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathbf{T}^2. \quad (2.19b)$$

Deutet man den Klammerausdruck $(\hat{\eta} + \tau_f/\dot{\gamma})$ im Stoffgesetz (2.18) als eine von der Deformationsgeschwindigkeit abhängige dynamische Viskosität $\eta(\dot{\gamma})$, so spricht man im Bereich des Fließens ($\tau > \tau_f$) auch von einem verallgemeinerten newtonschen Fluid, das sich in der Form

$$\mathbf{T} = 2 \eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D} \quad (2.20)$$

schreiben läßt. Übrigens erhält man durch Umkehrung der Beziehung (2.20) eine andere Schreibweise des Stoffgesetzes,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \phi(\tau) \mathbf{T} \quad (2.21)$$

die manchmal zweckmäßiger ist. Die Funktion $\phi(\tau)$ ist dann gerade der Kehrwert der Viskosität $\eta(\dot{\gamma})$.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß die dynamische Viskosität (Scherviskosität) definiert ist zu

$$\eta = \tau / \dot{\gamma}.$$

Im Gegensatz dazu wird die differentielle Viskosität aus

$$\hat{\eta} = d\tau/d\dot{\gamma}$$

gebildet. Daraus ergibt sich als Konsequenz, daß in einem Bingham-Fluid die differentielle Viskosität immer kleiner ist als die dynamische Viskosität.

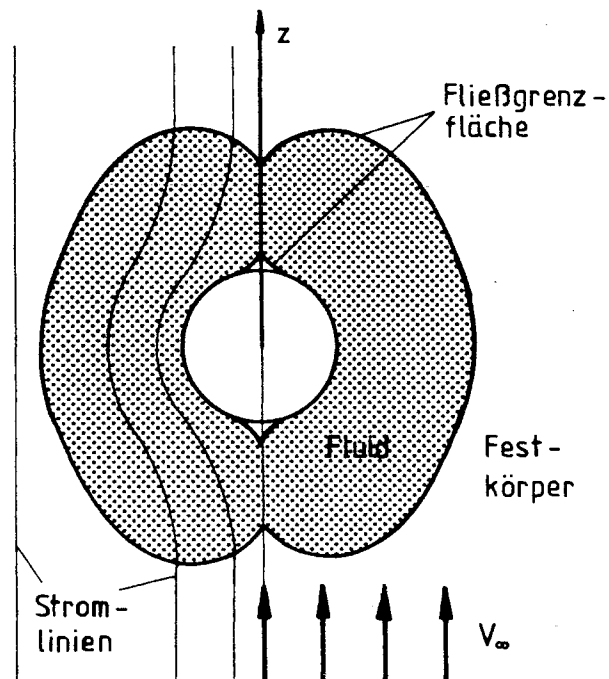


Bild 2.2: Zur Sedimentation in einem Bingham-Fluid

Die Sedimentation einer Kugel (oder auch allgemein eines Partikels) in einem Bingham-Fluid unterscheidet sich daher von der in einem newtonschen Fluid in wesentlichen Dingen. Durch die Existenz der Fließgrenze lassen sich in der Umgebung einer bewegten Kugel zwei Gebiete (Bild 2.2) unterscheiden. In unmittelbarer Nähe fließt der Stoff, da die Spannungen im Feld (repräsentiert durch die Invariante τ) größer sind als die Fließspannung. Mit Entfernung von der Kugel verringern sich die Spannungen, bis sie schließlich die Fließspannung erreichen. Nach dem nichtlinearen Stoffgesetz Gl.(2.18) verschwindet dann der Tensor D und es schließt sich ein Gebiet an, das sich wie ein Festkörper verhält. Je nach Höhe der Fließspannung kann es passieren, daß im Feld um die Kugel die Fließspannung an keiner Stelle überschritten wird. Das hat zur Folge, daß die Kugel dann nicht sedimentieren kann, sondern in dem Material feststeckt, da das Fluid sozusagen eingefroren ist.

Die Berechnung der stationären Kugelgeschwindigkeit auf analytischem Wege, wie im Falle der newtonschen Sedimentation, ist aufgrund des nichtlinearen Stoffgesetzes nicht möglich. Ein empirischer Ansatz, der auf eine Erweiterung des newtonschen Ergebnisses (Gl.(2.17)) aufbaut, ist in [2.7] angegeben. Dort zeigt der Vergleich mit experimentellen Daten gute Übereinstimmung. Es läßt sich jedoch ein häufig in der Literatur verwendetes Verfahren (siehe z.B. [2.8]) dazu nutzen, eine analytische Näherung für die Sinkgeschwindigkeit zu berechnen. Diese Methode wird im nächsten Abschnitt erläutert.

2.3 Extremalprinzip für die schleichende Kugelumströmung

Bewegt sich ein Körper in einer zähen Flüssigkeit, so wird im gesamten Strömungsgebiet Energie pro Zeiteinheit dissipiert. Diese Dissipationsleistung P läßt sich sowohl aus dem Integral der Dissipationsfunktion $\text{sp}(\mathbf{T} \mathbf{D})$ über das gesamte Volumen als auch über die Leistung der Oberflächenspannungen

$$P = \int_V \text{sp}(\mathbf{T} \mathbf{D}) \, dV = \int_{A_O} (\mathbf{S} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dA \quad (2.22)$$

berechnen. Der Vektor \mathbf{n} kennzeichnet die äußere Normale. Dabei entspricht die Leistung der Oberflächenspannungen der gegen den Widerstand geleisteten Arbeit pro Zeiteinheit, so daß im Fall der Kugelumströmung die rechte Seite von Gl.(2.22) auch als Produkt der Widerstandskraft mit der Absetzgeschwindigkeit geschrieben werden kann:

$$P = F_w V_\infty \quad (2.23)$$

Diese letzten beiden Gleichungen bilden den Ausgangspunkt eines Verfahrens zur näherungsweisen Berechnung der Sinkgeschwindigkeit V_∞ . Da der Widerstand F_w nach Gl.(2.16) gleich dem reduzierten Gewicht der Kugel ist (unabhängig vom Stoffgesetz), würde eine Näherung für die Dissipationsleistung zusammen mit Gl.(2.23) auf die gesuchte Größe V_∞ führen. Dies gelingt durch die Anwendung des Extremalprinzips, welches zweiseitige scharfe Schranken für die Funktion $\text{sp}(\mathbf{T} \mathbf{D})$ liefert.

2.3.1 Potentiale für Deformationsgeschwindigkeit und Spannung

Das Stoffgesetz eines verallgemeinerten newtonschen Fluids in Form (2.20) bzw. (2.21) kann auch in alternativer Weise als Ableitungen eines Potentials für die Deformationsgeschwindigkeit $\Omega(\dot{\gamma})$ bzw. eines Spannungspotentials $\bar{\Omega}(\tau)$ geschrieben werden:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Omega(\dot{\gamma})}{\partial \mathbf{D}}, \quad \text{mit } \Omega(\dot{\gamma}) = \int_0^{\dot{\gamma}} \eta(\dot{\gamma}') \dot{\gamma}' d\dot{\gamma}', \quad (2.24)$$

bzw.

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \bar{\Omega}(\tau)}{\partial \mathbf{T}}, \quad \text{mit } \bar{\Omega}(\tau) = \int_0^{\tau} \phi(\tau') \tau' d\tau'. \quad (2.25)$$

Bei realen Fluiden ist die differentielle Viskosität i.allg. positiv, so daß die Potentiale $\Omega(\dot{\gamma})$ und $\bar{\Omega}(\tau)$ konvexe Funktionen darstellen. Dann läßt sich zeigen, daß für zwei beliebige Zustände $\dot{\gamma}$ und $\dot{\gamma}^*$ bzw. τ und τ^{**} gilt:

$$\Omega(\dot{\gamma}^*) - \Omega(\dot{\gamma}) \geq \text{sp} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{D}} (\mathbf{D}^* - \mathbf{D}) \right] \quad (2.26)$$

und

$$\bar{\Omega}(\tau^{**}) - \bar{\Omega}(\tau) \geq \text{sp} \left[\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T}^{**} - \mathbf{T}) \right]. \quad (2.27)$$

Von diesen beiden Zusammenhängen zwischen den Potentialen und tensoriellen Größen wird später Gebrauch gemacht.

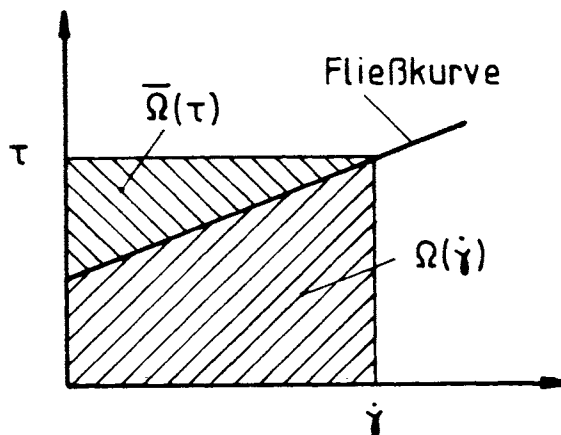


Bild 2.3: Bedeutung der Potentiale

Die Bedeutung der Potentiale läßt sich im Bild 2.3 veranschaulichen. Dort ist als durchgezogene Kurve der qualitative Verlauf der Spannungsinvariante τ über der Invariante $\dot{\gamma}$ für

ein Bingham–Fluid aufgetragen. Die skizzierten Flächen unterhalb bzw. oberhalb dieser Fließkurve sind mit den Potentialen identisch. Beide Flächen zusammen sind aber nichts anderes als die dissipierte Energie bezogen auf das Volumen, also

$$\text{sp}(\mathbf{T D}) = \tau \dot{\gamma} = \Omega(\dot{\gamma}) + \bar{\Omega}(\tau). \quad (2.28)$$

Da bei einem Bingham–Fluid die differentielle Viskosität den Wert der dynamischen Viskosität nicht übersteigt, gilt der Zusammenhang $\bar{\Omega}(\tau) \leq \Omega(\dot{\gamma})$ (siehe auch Bild 2.3). Somit kann die volumenbezogene Dissipationsleistung von zwei Seiten durch das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ sicher eingeschränkt werden:

$$\Omega(\dot{\gamma}) \leq \text{sp}(\mathbf{T D}) \leq 2 \Omega(\dot{\gamma}). \quad (2.29)$$

Die Beziehung (2.29) gilt nicht nur bei einem Fluid mit Bingham'schen Stoffeigenschaften. Solange die Fließkurve monoton ansteigt, ist die Einschränkung auch für andere Fluide anwendbar. Geht die Kurve durch den Koordinatenursprung und verläuft dann mit einer konstanten Steigung (d.h. newtonsches Fluid), gilt gerade das rechte Gleichheitszeichen, also $\Omega(\dot{\gamma}) = 1/2 \text{ sp}(\mathbf{T D})$.

2.3.2 Zweiseitige Schranken für den Stokesschen Widerstandskoeffizienten

Um das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ einzuschränken, betrachte man neben dem exakten, aber unbekanntem Strömungsfeld \mathbf{v} ein (beliebiges) Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}^* , das jedoch der Kontinuitätsgleichung und den kinematischen Randbedingungen genügen soll. Dann kann das Oberflächenintegral in Gl.(2.22) auch mit dem Vergleichsfeld \mathbf{v}^* gebildet werden, da ja die Geschwindigkeiten beider Felder die Randbedingungen erfüllen. Das Skalarprodukt im Argument $(\mathbf{S n}) \cdot \mathbf{v}^*$ kann mit Hilfe der Beziehung (2.3) in einen Ausdruck $-p \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T}^T \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}$ umgeformt werden. Überführt man nun durch Anwendung des Gaußschen Satzes das Oberflächenintegral

$$\int_{A_O} (-p \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T}^T \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \text{div} (-p \mathbf{v}^* + \mathbf{T}^T \mathbf{v}^*) dV \quad (2.30)$$

in ein Volumenintegral und berücksichtigt sowohl die Kontinuitätsgleichung als auch die

Bewegungsgleichung unter schleichenden Bedingungen für das exakte Spannungsfeld, so erhält man in Verbindung mit Gl.(2.22)

$$\int_{A_O} (\mathbf{S} \mathbf{n}) \mathbf{v}^* dA = \int_V \text{sp} (\mathbf{T} \mathbf{D}^*) dV = \int_V \text{sp} (\mathbf{T} \mathbf{D}) dV . \quad (2.31)$$

Dann ist aber die rechte Seite von Gl.(2.26) nach Integration über das Volumen identisch Null und das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ kann nach oben durch den Ausdruck

$$\int_V \Omega(\dot{\gamma}) dV \leq \int_V \Omega(\dot{\gamma}^*) dV \quad (2.32)$$

eingeschränkt werden.

Für die Konstruktion der unteren Schranke wählt man ein Spannungsfeld $\mathbf{S}^{**} = -p^{**} \mathbf{E} + \mathbf{T}^{**}$, das die Bewegungsgleichung erfüllen muß. Setzt man dieses Vergleichsfeld in die rechte Seite der Gl.(2.27) ein und berücksichtigt, daß \mathbf{D} hier ein Deviator ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) ist, kann dieser Teil auch in der Form $\text{div}[(\mathbf{S}^{**} - \mathbf{S}) \mathbf{v}] - \mathbf{v} \text{div}(\mathbf{S}^{**} - \mathbf{S})$ geschrieben werden. Durch Einsetzen der Bewegungsgleichung entfällt der Summand auf der rechten Seite und die Integration über das Volumen führt zusammen mit der Anwendung des Gaußschen Satzes auf

$$\int_V \bar{\Omega}(\tau^{**}) dV - \int_V \bar{\Omega}(\tau) dV \geq \int_{A_O} (\mathbf{S}^{**} \mathbf{n}) \mathbf{v} dA - \int_{A_O} (\mathbf{S} \mathbf{n}) \mathbf{v} dA . \quad (2.33)$$

Die nicht gesternten Ausdrücke lassen sich mit Hilfe von Gl.(2.22) und Gl.(2.28) durch das Volumenintegral über das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ ersetzen, so daß sich schließlich die untere Schranke zu

$$\int_V \Omega(\dot{\gamma}) dV \geq \int_{A_O} (\mathbf{S}^{**} \mathbf{n}) \mathbf{v} dA - \int_V \bar{\Omega}(\tau^{**}) dV \quad (2.34)$$

ergibt. Entsprechend der Nomenklatur in der Literatur, in der vielfach in der Gl.(2.32) und Gl.(2.34) noch der Faktor 2 hineinmultipliziert wird, bezeichnet man die obere Schranke mit

$$H = 2 \int_V \Omega(\dot{\gamma}^*) dV , \quad (2.35)$$

und die untere Schranke mit

$$K = 2 \int_{A_0} (\mathbf{S}^{**} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dA - 2 \int_V \overline{\Omega}(\tau^{**}) \, dV. \quad (2.36)$$

Das hier eingeschränkte Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ hat selbst keine anschauliche physikalische Bedeutung. Um zu dem in der Praxis interessierenden Widerstandsverhalten bzw. zu der Sinkgeschwindigkeit der Kugel zu gelangen, nutzt man neben den Beziehungen (2.35) und (2.36) noch die Einschränkung der Dissipationsfunktion nach Gl.(2.29), sowie die Berechnung der Leistung P nach Gl.(2.22) und Gl.(2.23) aus. Zur Normierung wird üblicherweise der dimensionslose Stokessche Widerstandskoeffizient C eingeführt,

$$C = \frac{F_w}{6\pi\hat{\eta}V_\omega R_0}, \quad (2.37)$$

der die Widerstandskraft auf eine Kraft bezieht, die analog dem newtonschen Fall gebaut ist (allerdings mit der differentiellen Viskosität $\hat{\eta}$). Dann folgt für den Koeffizient C mit den o.g. Beziehungen die Einschränkung

$$\frac{K}{2} \leq C \leq H, \quad (2.38)$$

mit den dimensionslosen Größen $\overline{H} = H/(6\pi\hat{\eta}V_\omega^2 R_0)$ und $\overline{K} = K/(6\pi\hat{\eta}V_\omega^2 R_0)$.

An dieser Stelle wird ein gewisses Dilemma deutlich. Je besser die Ansätze für \mathbf{v}^* und \mathbf{S}^* sind, desto kleiner wird die Differenz zwischen H und K . Beide Schranken fallen zusammen, wenn die exakten Felder eingesetzt werden (vgl. Gl.(2.32) und Gl.(2.34)). Trotzdem ergibt sich in diesem Fall für die interessierende Größe C nach Gl.(2.38) ein Intervall in der Größe des Faktors $1/2$, d.h. die untere Schranke kann bestenfalls 50% der oberen Schranke betragen. Es ist mittels des Extremalprinzips nicht möglich, das Widerstandsverhalten einer schleichenden Kugelumströmung in einem verallgemeinerten newtonschen Fluid besser zu bestimmen.

2.3.3 Anwendung für Bingham-Fluide

Trotz dieses Dilemmas findet das Extremalprinzip vielfach in der Literatur bei der schleichenden Kugelumströmung Anwendung. Besonders für scherentzähende Modellfluide ohne Fließgrenze (power law, Ellis, Carreau) sind viele Beispiele zu finden (vgl. z.B. [2.9–2.13]). In jüngerer Zeit wird diese Technik auch für Fluide mit Fließgrenze angewendet [2.14, 2.15].

Durch Einsetzen des Stoffgesetzes (Gl.(2.18)) errechnen sich im Fall eines Bingham-Fluides die Schranken zu

$$\mathbf{H} = \int_V (\hat{\eta} \dot{\gamma}^{2*} + 2\tau_f \dot{\gamma}^*) dV, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K} = 2 \int_{A_O} (\mathbf{S}^{**} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \frac{1}{\eta} \int_V (|\tau^{**} - \tau_f| + \tau^{**} - \tau_f)^2 dV. \quad (2.40)$$

Die Bedingung des Stoffgesetzes $\tau > \tau_f$ ist in dieser Schreibweise der Gl.(2.40) mit eingeflossen. Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, die Binghamzahl Bi als eine weitere dimensionslose Kennzahl einzuführen:

$$\text{Bi} = \frac{2\tau_f R_0}{\hat{\eta} V_\infty}. \quad (2.41)$$

Sie hat die Bedeutung einer normierten Fließspannung. Um auf eine dimensionslose Formulierung zu gelangen, werden die anderen beteiligten Größen in (2.39) und (2.40) ebenfalls normiert. Dies erfolgt mit der Geschwindigkeit V_∞ , dem Kugelradius R_0 und der differentiellen Viskosität $\hat{\eta}$, so daß sich die dimensionslosen überstrichenen Größen zu

$$\overline{\dot{\gamma}}^* = \dot{\gamma}^* \frac{R_0}{V_\infty}, \quad \overline{\mathbf{v}}^* = \frac{\mathbf{v}^*}{V_\infty}, \quad \overline{\mathbf{S}}^{**} = \mathbf{S}^{**} \frac{R_0}{\hat{\eta} V_\infty}$$

berechnen. Dann sind zur Ermittlung der Schranken Integrale in der Form

$$\mathbf{H} = \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^1 \overline{\dot{\gamma}}^{2*} X^{-4} \sin \vartheta dX d\vartheta + \frac{\text{Bi}}{3} \int_0^\pi \int_0^1 \overline{\dot{\gamma}}^* X^{-4} \sin \vartheta dX d\vartheta \quad (2.42)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \frac{2}{3} \int_0^\pi (-\overline{\mathbf{p}}^{**} \overline{\mathbf{v}}_R^* + \overline{\tau}_{RR}^{**} \overline{\mathbf{v}}_R^* + \overline{\tau}_{R\vartheta}^{**} \overline{\mathbf{v}}_\vartheta^*) X^{-2} \sin \vartheta d\vartheta \\ & - \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^1 \left[|\overline{\tau}^{**} - \frac{\text{Bi}}{2}| + \overline{\tau}^{**} - \frac{\text{Bi}}{2} \right]^2 X^{-4} \sin \vartheta dX d\vartheta \end{aligned} \quad (2.43)$$

auszuwerten. In diese Schreibweise ist eingeflossen, daß bei der unteren Schranke \mathbf{K} das erste Integral lediglich über die Oberfläche der äußeren Begrenzung des Fluids zu bilden ist, da an der Stelle $R=R_0$ die Geschwindigkeit \mathbf{v} verschwindet.

Zur numerischen Auswertung der Schranken können beliebige, nur den o.g. Einschränkungen unterliegende Felder \mathbf{S}^{**} und \mathbf{v}^* gewählt werden. Zweckmäßigerweise verwendet man Ansätze mit freien Parametern, die dadurch bestimmt werden, daß die obere Grenze \bar{H} minimiert und die untere Grenze \bar{K} maximiert wird. Mit Hilfe einfacher, sich an dem newtonschen Fall orientierenden Testfunktionen sollen diese Optimierungen hier durchgeführt werden. Für das Geschwindigkeitsfeld wird ein Ansatz in Form einer Stromfunktion

$$\bar{\psi}^* = \frac{1}{2} X^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{3}{2} X^a + \frac{1}{2} X^{2a}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{\psi}^* = \psi^* / R_0^2 V_\infty$$

mit dem freien Parameter a verwendet, für das Spannungsfeld ebenfalls einparametrische Ansätze in der Form

$$\bar{p}^* = -b X^2 \cos \vartheta$$

$$\bar{\tau}_{RR}^{**} = 2b (X^2 - X^4) \cos \vartheta, \quad \bar{\tau}_{\vartheta\vartheta}^{**} = \bar{\tau}_{\varphi\varphi}^{**} = -\frac{1}{2} \bar{\tau}_{RR}^{**}, \quad \bar{\tau}_{R\vartheta}^{**} = -b X^4 \sin \vartheta,$$

in denen b als zu optimierender Faktor eingeht.

Beim Einsetzen der Spannungsansätze in die Gl.(2.43) erkennt man, daß der Faktor b in unterschiedlichen Potenzen vor den einzelnen Integralen auftaucht. Die Optimierung nach diesem Faktor läßt sich dann sogar analytisch ausführen.

Die Auswertung der Integrale erfolgt, soweit sie nicht analytisch zu berechnen sind, durch eine numerische Integration nach Gauß. Das Integrationsgebiet unterteilt sich in X - und ϑ -Richtung jeweils in 64 Teilgebiete, die Integrationsordnung ist $m=5$. Zur Bestimmung der freien Parameter durch die Minimierung bzw. Maximierung kommt ein Newtonverfahren [2.16] zur Anwendung.

Die Berechnungsergebnisse der Schranken \bar{H} und \bar{K} sind als Symbole in Bild 2.4 im Vergleich zu Literaturwerten [2.14] in Abhängigkeit von der Binghamzahl, d.h. in Abhängigkeit von der Fließspannung, dargestellt. Im Fall eines Fluids ohne Fließspannung ($Bi = 0$) liegt ein rein newtonsches Verhalten vor, die Schranken \bar{H} bzw. \bar{K} besitzen dann den theoretischen Bestwert $\bar{H} = \bar{K} = 1$. Mit steigender Bi -Zahl ist ein Ansteigen der Schranken zu erwarten,

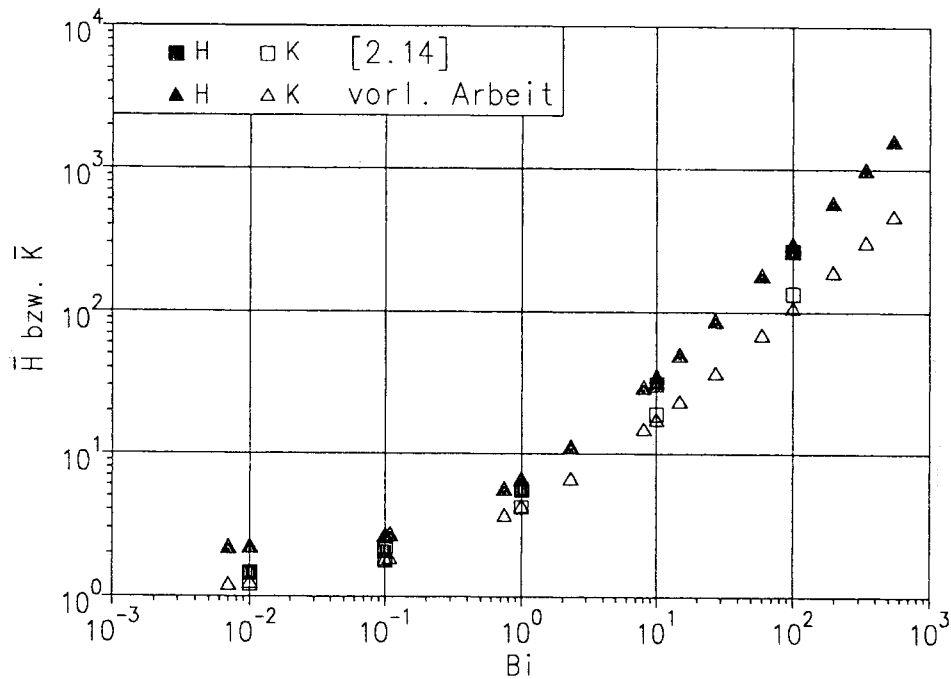


Bild 2.4: Schranken für das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ in Abhängigkeit der Bi-Zahl

da sich durch den zunehmenden Einfluß der Fließspannung das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ erhöht (vgl. z.B. Bild 2.3). Im Bild 2.4 wird dieses Verhalten recht deutlich. Die Schranken steigen im gezeichneten Bereich schon um drei Zehnerpotenzen. Es ist jedoch zu erkennen, daß die obere und untere Schranke, insbesondere bei großen Bi-Zahlen weder bei den hier verwendeten Testfunktionen, noch bei den Literaturwerten [2.14], sehr nahe zusammenliegen. Bei kleinen Bi-Zahlen sind die Ergebnisse von [2.14] für die oberen Schranken besser, bei größeren Bi-Zahlen die Berechnungen für die unteren Schranken. Die Ursache liegt in der Wahl der Ansätze, die in [2.14] mehr freie Parameter aufweisen. Doch auch mit den in dieser Arbeit verwendeten einfachen Testfunktionen bekommt man eine Näherung für die Abhängigkeit der Schranken von der Bi-Zahl, die zumindest die Größenordnung abzuschätzen gestattet. Durch den Zusammenhang (2.38) vergrößert sich natürlich der Abstand der beiden Schranken für den Widerstandskoeffizienten C noch einmal um den Faktor 2, so daß das Intervall, in dem der eigentliche Wert für C liegt, ziemlich groß wird. Im nächsten Abschnitt soll daher das Ergebnis einer numerischen Simulation der schleichenden Kugelumströmung aus der Literatur dargestellt werden.

2.4 Finite-Elemente-Berechnung der schleichenden Kugelumströmung nach Beris et. al.

Beris et. al. haben in [2.17] die schleichende Kugelumströmung in einem unbegrenzten Bingham-Fluid mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente untersucht. Das Geschwindigkeits- und Druckfeld im Fließbereich der Kugel und die Gestalt der Trennfläche zwischen Fließbereich und Festkörpergebiet wurden in dimensionsloser Formulierung für diskrete Werte der Bi-Zahl berechnet. Die Berechnungen dieses freien Randwertproblems basieren auf einem Galerkin Finite-Elemente Algorithmus. In einem kugelfesten Koordinatensystem wurden zunächst die Koordinaten des krummlinig berandeten Gebietes in Kugelkoordinaten transformiert. Dabei sind neben den Unbekannten des Geschwindigkeits- und Druckfeldes die ebenfalls unbekannt Funktionen zur Beschreibung der Grenzfläche zwischen Fließbereich und Festkörper eingeführt worden. Das durch die Transformation von Feldgleichungen, Randbedingungen und unbekannter Grenzfläche entstandene neue Differentialgleichungssystem wurde durch die Anwendung einer Galerkin/Penalty Finite-Elemente Formulierung auf ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem abgebildet. Dieses System ist dann für feste Bi-Zahlen mit einem Newton-Verfahren simultan gelöst worden.

Die Berechnungen, dargestellt in Form von Stromlinienbildern, zeigen die schon in Bild 2.2 skizzierte Strömungsform. Dabei ergibt die Parameterstudie für unterschiedliche Bi-Zahlen, daß sich mit wachsendem Einfluß der Fließspannung der Fließbereich um die Kugel verringert. Während sich im newtonschen Fall die Bewegung des Fluides bis ins Unendliche erstreckt, ist ab $Bi \approx 0.1$ der Bereich des Fließens in merkliche Nähe der Kugel gerückt. Außerhalb dieses Bereiches ist $D = 0$, die Stromlinien setzen sich als Geraden in dem Festkörperbereich fort. Außerdem zeigt die Parameterstudie, daß die größten Ausdehnungen des Fließbereichs in radialer Richtung bei $\vartheta = \pi/2$ (Äquator) liegen. Bei diesem Winkel verringert sich der "flüssige" Bereich von $R/R_0=10.6$ für $Bi=0.108$ über $R/R_0=3.0$ für $Bi=14.9$ bis $R/R_0=2.3$ für $Bi=544$. Auch die Form der Fließgrenzfläche entspricht dabei der in Bild 2.2 skizzierten Gestalt. Es kommt zu Ausbildung von *Kappen* an den Polen

($\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$), in denen ebenfalls die Deformationsgeschwindigkeiten verschwinden. Ab $Bi \approx 700$ wachsen die Spitzen der *Kappen* mit der äußeren Fließgrenzfläche zusammen.

Der Fließbereich um die Kugel verringert sich in radialer Richtung mit steigender *Bi*-Zahl. Damit erhöht sich in diesem Bereich die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$. So steigt der Maximalwert der Invariante $\dot{\gamma}$ (bei $\vartheta = \pi/2$, in der Nähe der Kugeloberfläche) bei $Bi = 14.9$ schon auf das 12-fache des Wertes der newtonschen Umströmung.

Durch den zunehmenden Einfluß der Fließspannung kommt es letztendlich zu der schon im Extremalprinzip prognostizierten Erhöhung des Widerstandskoeffizienten C gegenüber dem newtonschen Fall ($\tau_f = 0$, $\hat{\eta} \rightarrow \eta$). Auf die Sedimentation einer Kugel übertragen bewirkt dies eine Erniedrigung der Geschwindigkeit V_∞ , da ja wegen des globalen Kräftegleichgewichtes die Widerstandskraft konstant bleiben muß. Das Anwachsen des Koeffizienten C ist in [2.17] in Abhängigkeit der *Bi*-Zahl bzw. einer in diesem Zusammenhang auch gebräuchlichen Kennzahl, der Fließzahl Y

$$Y = \frac{2\pi\tau_f R_0^2}{F_w} \quad (2.44)$$

angegeben.

Die Fließzahl Y , von der Bedeutung her auch eine normierte Fließspannung, ist zwar von dem Koeffizienten C und der *Bi*-Zahl nicht unabhängig, es gilt der Zusammenhang:

$$Y = \frac{Bi}{6C}$$

Sie hat jedoch den Vorteil, daß sie im Gegensatz zur *Bi*-Zahl nur mit einer für ein Bingham-Fluid relevanten Stoffkonstante gebildet wird.

Ausgewählte Berechnungswerte sind in der Tabelle 1 verzeichnet. Die Genauigkeit der Finite-Elemente Resultate kann an Hand der ebenfalls in Tabelle 1 verzeichneten Werte für die Schranken \bar{H} und \bar{K} beurteilt werden. Diese sind aus dem berechneten Geschwindigkeits- und Druckfeld entsprechend Gl. (2.42) und (2.43) gebildet worden. Die Schranken fallen fast zusammen, was auf eine recht genaue Berechnung dieser Felder hinweist.

Tabelle 1: Ausgewählte Werte der Finite-Elemente Berechnungen [2.17]

Bi	Y	C	\bar{H}	\bar{K}	
0.0	0.0	1.0	1.0	1.0	(exakte Lösung)
0.007	0.001	1.17	1.228	1.227	
0.108	0.01	1.74	2.068	2.068	
0.747	0.036	3.46	4.828	4.827	
2.299	0.06	6.39	9.907	9.897	
8.047	0.088	15.24	26.11	26.11	
14.91	0.1	24.85	44.21	44.21	
27.36	0.11	41.45	76.00	76.01	
59.59	0.12	82.77	156.33	156.31	
197.5	0.13	253.2	491.68	491.38	
340.7	0.133	426.9	838.50	836.97	
544.6	0.135	672.3	1323.7	1313.6	

Alle diskreten Berechnungswerte im Bereich $0.007 < Bi < 544.6$ können durch die in [2.17] angegebene Funktion

$$C = 1 + a \sqrt{Bi} + b Bi, \quad (2.45)$$

mit $a = 1.874$ und $b = 1.152$ mit einer relativen Genauigkeit kleiner als 2.5% beschrieben werden. Diese Abhängigkeit des Koeffizienten C von der Bi-Zahl ist in Bild 2.5 zu sehen.

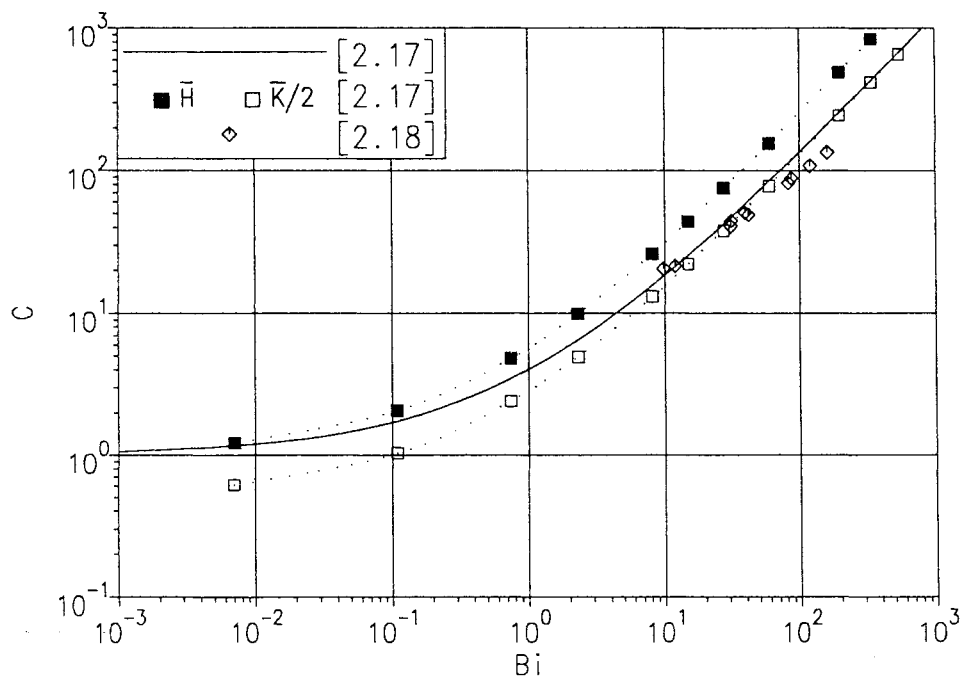


Bild 2.5: Widerstandszahl in Abhängigkeit der Bi-Zahl

Als gestrichelte Linien sind die beiden Schranken \bar{H} und $\bar{K}/2$ (mit dem *numerischen* Ergebnis gebildet) verzeichnet. Erwartungsgemäß schmiegt sich die durchgezogene Kurve bei kleinen Bi-Zahlen der oberen Grenze \bar{H} an, da im Grenzfall des newtonschen Fluids nach Gl.(2.29) (bzw. Anmerkung auf S. 15) und Gl.(2.38) die obere Grenze gerade die exakte Lösung darstellt. Andererseits überwiegt bei hohen Bi-Zahlen der Einfluß der Fließspannung. In diesem Fall läßt sich die Dissipationsleistung allein durch das Potential $\Omega(\dot{\gamma})$ ausdrücken (vgl. Gl.(2.28) und Bild 2.3: $sp(\mathbf{T D}) \rightarrow \Omega(\dot{\gamma})$). In integrierter Form ist dies nach Gl.(2.35) nichts anderes als $\bar{H}/2$. Da bei der numerischen Lösung die beiden Schranken \bar{H} und \bar{K} zusammenfallen, äußert sich dies in Bild 2.5 darin, daß der Koeffizient C sich dann der unteren Schranke anschmiegt. Die zusätzlich in diesem Bild eingezeichneten Symbole kennzeichnen Versuchsergebnisse aus [2.18], die gut mit der Theorie übereinstimmen. Weitere Meßergebnisse sind in [2.19] zu finden, allerdings verhalten sich die dort verwendeten Substanzen nicht wie reine Bingham-Fluide.

Das Anwachsen der Fließspannung führt also bei Übertragung der obigen Ergebnisse auf den Fall der Sedimentation einer Kugel zu immer geringeren Absetzgeschwindigkeiten. Ab Kapitel 4 dieser Arbeit wird gerade der Bereich höherer Bi-Zahlen eine große Rolle spielen. Ein spezielles Ergebnis für diesen Grenzfall, welches später aufgegriffen wird, soll daher an dieser Stelle motiviert werden [2.17].

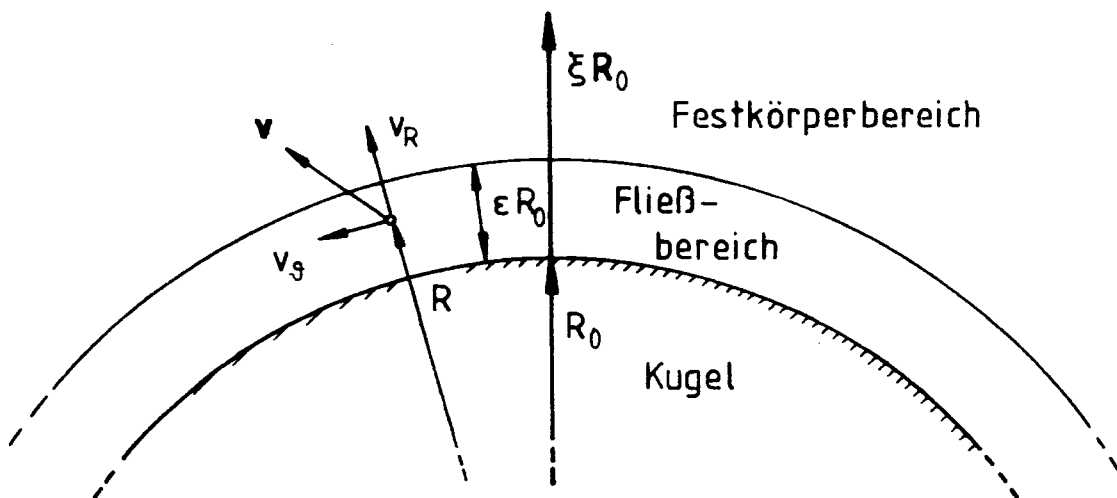


Bild 2.6: Zur Grenzschichtbetrachtung bei hohen Bi-Zahlen

Nach den numerischen Ergebnissen findet bei $Bi \rightarrow \infty$ die Fließbewegung praktisch nur in einer kleinen Schicht um die Kugel statt. Man kann diese Form der Bewegung dann als eine Art Grenzschichtströmung bezeichnen, die durch das spezielle Stoffgesetz entsteht. Unter diesen Bedingungen läßt sich die Strömung durch vereinfachte Beziehungen beschreiben, die hier in kurzer Form dargestellt werden sollen. Alle im folgenden genutzten Größen sind dimensionslos, wobei hier neben den schon verwendeten noch

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0},$$

hinzukommt. Man führt gemäß Bild 2.6 eine neue radiale, auf den Kugelradius bezogene Koordinate ξ ein, so daß innerhalb der Grenzschicht der Zusammenhang

$$\bar{R} = 1 + \epsilon \xi \quad (2.46)$$

gilt. Darin stellt ϵ die dimensionslose Dicke der Grenzschicht dar, von der vorausgesetzt wird, daß sie sehr klein ist, $\epsilon \ll 1$. In einiger Entfernung von den Polen, an denen sich die Kappen ausbilden, werden in der Grenzschicht die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_R und v_ϑ von verschiedener Größenordnung sein. Im Rahmen einer Näherung lassen sich dann die Geschwindigkeiten in Abhängigkeit des Parameters ϵ entwickeln. Skaliert man die Stromfunktion in der Form

$$\bar{\psi}(\bar{R}, \vartheta) = \epsilon \varphi(\xi, \vartheta), \quad (2.47)$$

wobei $\varphi(\xi, \vartheta) = O(1)$ ist, so hat die azimutale Geschwindigkeitskomponente v_ϑ die Ordnung $O(1)$ und die radiale Komponente v_R die Ordnung $O(\epsilon)$. Die Deformationsgeschwindigkeit ergibt sich dann nach Gl.(2.19a) zu

$$\bar{\gamma}(\bar{R}, \vartheta) = \frac{1}{\epsilon} \chi(\xi, \vartheta), \quad (2.48)$$

$$\text{mit } \chi(\xi, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \vartheta} \{ \varphi_{\xi\xi} - \epsilon(2\varphi_\xi + \xi\varphi_{\xi\xi}) \} + O(\epsilon^2) = O(1),$$

wobei die Indizes ξ und ϑ jeweils partielle Ableitungen ($\partial/\partial\xi$ bzw. $\partial/\partial\vartheta$) darstellen sollen.

Das Bingham'sche Stoffgesetz (2.18) kann in dimensionsloser Schreibweise in der Form

$$\mathbf{T} = 2 \left(1 + \frac{\text{Bi}}{2 \bar{\gamma}} \right) \mathbf{D} \quad (2.49)$$

geschrieben werden. Setzt man nun die so skalierten Beziehungen in die Bewegungsgleichung (2.4) ein und vernachlässigt wegen $\text{Re} \ll 1$ (insgesamt schleichende Strömung) die Terme der linken Seite, so resultieren nach längerer Rechnung zwei Gleichungen für den dimensionslosen Druck \bar{p} :

$$\bar{p}_\xi = \frac{1}{\sin \vartheta} \varphi_{\xi\xi\vartheta} + \text{Bi} \left[\frac{\epsilon}{2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\varphi_{\xi\vartheta} / \chi \right] + O(\epsilon^2) \right] + O(\epsilon), \quad (2.50)$$

$$\bar{p}_\vartheta = -\frac{1}{\epsilon^2 \sin \vartheta} \varphi_{\xi\xi\xi} - \text{Bi} \left[\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi + \varphi_\xi / (2 \varphi_{\xi\xi}) \right] + O(\epsilon) \right] + O(\epsilon^{-1}). \quad (2.51)$$

Man kann einerseits erkennen, daß die wesentlichen Anteile zur Berechnung des Druckes in der Gl.(2.51) stecken. Andererseits gilt diese Beziehung nur unter der Bedingung großer Bi-Zahlen (d.h. Bildung einer Grenzschicht) und damit darf der zweite Term der rechten Seite von Gl.(2.51) nicht gegenüber dem ersten Term vernachlässigt werden. Daher muß man auf den Zusammenhang

$$\text{Bi} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad (2.52)$$

schließen. Der Druck \bar{p} ist also in dieser betrachteten Näherung von der Ordnung $O(\epsilon^{-2})$.

Die Reibungsspannungen in der Grenzschicht lassen sich ebenfalls in Abhängigkeit der Grenzschichtdicke entwickeln. Die zur Berechnung der Widerstandskraft nach Gl.(2.14) notwendigen Komponenten sind dann

$$\bar{\tau}_{\text{RR}} = \frac{2}{\sin \vartheta} \varphi_{\xi\vartheta} + \text{Bi} \left[\frac{\epsilon}{\sin \vartheta} \varphi_{\xi\vartheta} / \chi \right] \quad (2.53)$$

$$\bar{\tau}_{\text{R}\vartheta} = -\frac{1}{\epsilon \sin \vartheta} \varphi_{\xi\xi} + \text{Bi} \left[-\frac{1}{2 \sin \vartheta} \varphi_{\xi\xi} / \chi + O(\epsilon) \right] + O(1). \quad (2.54)$$

Mit dem Zusammenhang (2.52) ist also $\bar{\tau}_{\text{RR}} \sim 1/\epsilon$ und $\bar{\tau}_{\text{R}\vartheta} \sim 1/\epsilon^2$. In der Widerstandskraft

dominiert also neben dem Druckterm noch die Schubspannung $\bar{\tau}_{R\theta}$, so daß auch der Stokesche Widerstandskoeffizient C in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke

$$C \approx \frac{1}{\epsilon^2} \{c_1 + \epsilon c_2 + O(\epsilon^2)\} \quad (2.55)$$

entwickelt werden kann (c_1, c_2 sind Konstanten).

Nutzt man nun die Relation (2.52) aus und ersetzt die Bi -Zahl durch die Fließzahl Y , kann der normierte Widerstand für den Bereich großer Bi -Zahlen auch in der Form

$$C = \frac{\alpha Y}{(\beta - Y)^2} \quad (2.56)$$

geschrieben werden. Die beiden neuen Konstanten α und β sind in [2.17] durch Anpassung diskreter Lösungen der Finite-Elemente Berechnungen an die Beziehung (2.56) bestimmt worden. Sie ergeben sich für den Bereich $Bi > 100$ zu $\alpha = 0.344$ und $\beta = 0.14334$ mit einem Fehler von kleiner als 1%.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Grenzschichtbetrachtung ist, daß der Widerstand $C \rightarrow \infty$ geht, wenn die Fließzahl Y sich dem asymptotischen Wert

$$Y_g = 0.14334 \quad (2.57)$$

annähert, vgl. Gl.(2.56). Auf die Bedeutung dieses Grenzwertes wird in den nächsten Kapiteln näher eingegangen.

Mit den Gleichungen (2.45) und (2.56) stehen somit zwei Beziehungen zur Verfügung, welche die stationäre, schleichende Sedimentation einer Kugel in einem Bingham-Fluid beschreiben können. Eine praktische Anwendung ist Inhalt des folgenden Kapitels.

3 Experimentelle Bestimmung Bingham'scher Stoffparameter

Zur Bestimmung der Fließspannung und des Fließverhaltens eines viskoplastischen Fluids sind in der Literatur eine Reihe von Techniken beschrieben. Für den Bereich des Fließens kommen häufig rheometrische Standardgeräte zum Einsatz. Sie erzeugen durch unterschiedlichste Geometrien (z.B. Platte–Platte, Couette) eine Schichtenströmung, in der das Fluid mit einer vorgegebenen Scherrate $\dot{\gamma}$ geschert wird. Unter dieser Bedingung reduziert sich das Stoffgesetz (2.18) eines Bingham–Fluids auf die Beziehung

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \tau_f + \hat{\eta} \dot{\gamma} && \text{für } |\tau| > \tau_f, \\ \dot{\gamma} &= 0 && \text{für } |\tau| \leq \tau_f. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Durch die Messung der Spannung τ bei festen Schergeschwindigkeiten kann mit solchen Rheometern das Fließverhalten punktweise bestimmt werden. Das Bild 3.1 zeigt als Beispiel die Meßergebnisse für ein viskoplastisches Fluid unter solchen Bedingungen. Während im

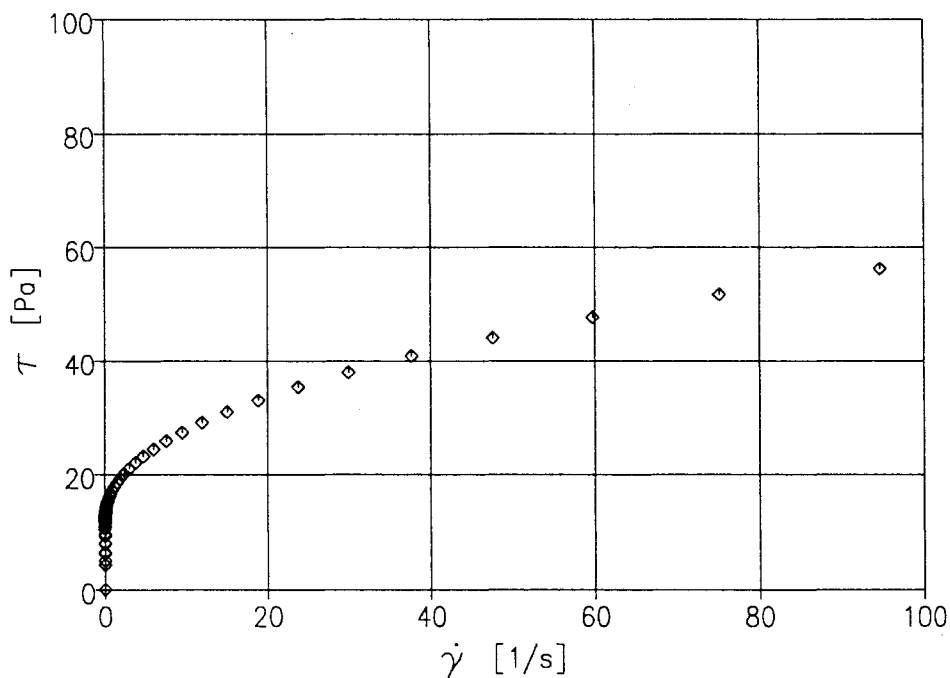


Bild 3.1: Meßwerte der Fließkurve eines viskoplastischen Fluids

Bereich höherer Schergeschwindigkeiten im wesentlichen Bingham'sches Fließverhalten ($\hat{\eta}$ nahezu konstant) zu erkennen ist, gestaltet sich die Detektierung der Fließspannung

problematisch. Je geringer $\dot{\gamma}$ gewählt wird, desto mehr macht sich τ_f im Scherspalt bemerkbar. Es kommt dann zu Unregelmäßigkeiten in der Strömung (Wandgleiten, etc.), die sich in zu kleinen Spannungsmesswerten äußern. Die Fließspannung wäre hier also lediglich durch Extrapolation der Fließkurve (im Bereich $\hat{\eta} = \text{konst.}$) in Richtung $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ zu ermitteln.

Durch diese Schwierigkeiten motiviert, sind in der Literatur [3.1–3.3] unterschiedliche Methoden zur Messung der Fließspannung vorgeschlagen und experimentell überprüft worden. Ein Vergleich in [3.4] faßt die Vor- und Nachteile einiger Methoden zusammen.

Seit kurzem sind auch spannungsgesteuerte Rheometer auf dem Markt (z.B. von der Fa. Rheometrics, Fa. Physica etc.). Diese Geräte eignen sich sehr gut zur Bestimmung der Fließspannung, da dort bei vorgegebener Spannung die verursachte Deformation gemessen wird.

Vielfach werden die Fließeigenschaften von Fluiden auch durch sogenannte Kugelfallviskosimeter bestimmt. Geräte dieser Art basieren auf Messungen der stationären Sinkgeschwindigkeiten von Kugeln in einem mit dem Fluid gefüllten zylindrischen Gefäß. Dieses Meßprinzip findet schon seit langem Anwendung zur Ermittlung der dynamischen Viskosität newtonscher Flüssigkeiten, wird aber in neuerer Zeit auch bei nicht-newtonschen Fluiden ohne Fließgrenze eingesetzt ([3.5, 3.6]). Nun beschreiben die im letzten Kapitel erläuterten theoretischen Ergebnisse gerade die Situation in einem Kugelfallviskosimeter, so daß sich aus den Sinkgeschwindigkeiten fallender Kugeln auch die Bingham'schen Stoffparameter eines viskoplastischen Fluids berechnen lassen [3.7].

3.1 Versuchsaufbau

Ein senkrecht stehendes, zylindrisches Rechteckrohr aus Plexiglas (Bild 3.2) ist mit dem zu untersuchenden Fluid gefüllt. Im oberen Flansch befindet sich seitlich ein kleines Rohr in der Art, daß Kugeln auf der Mittelachse des Fallzylinders in das Fluid gelangen können. Die

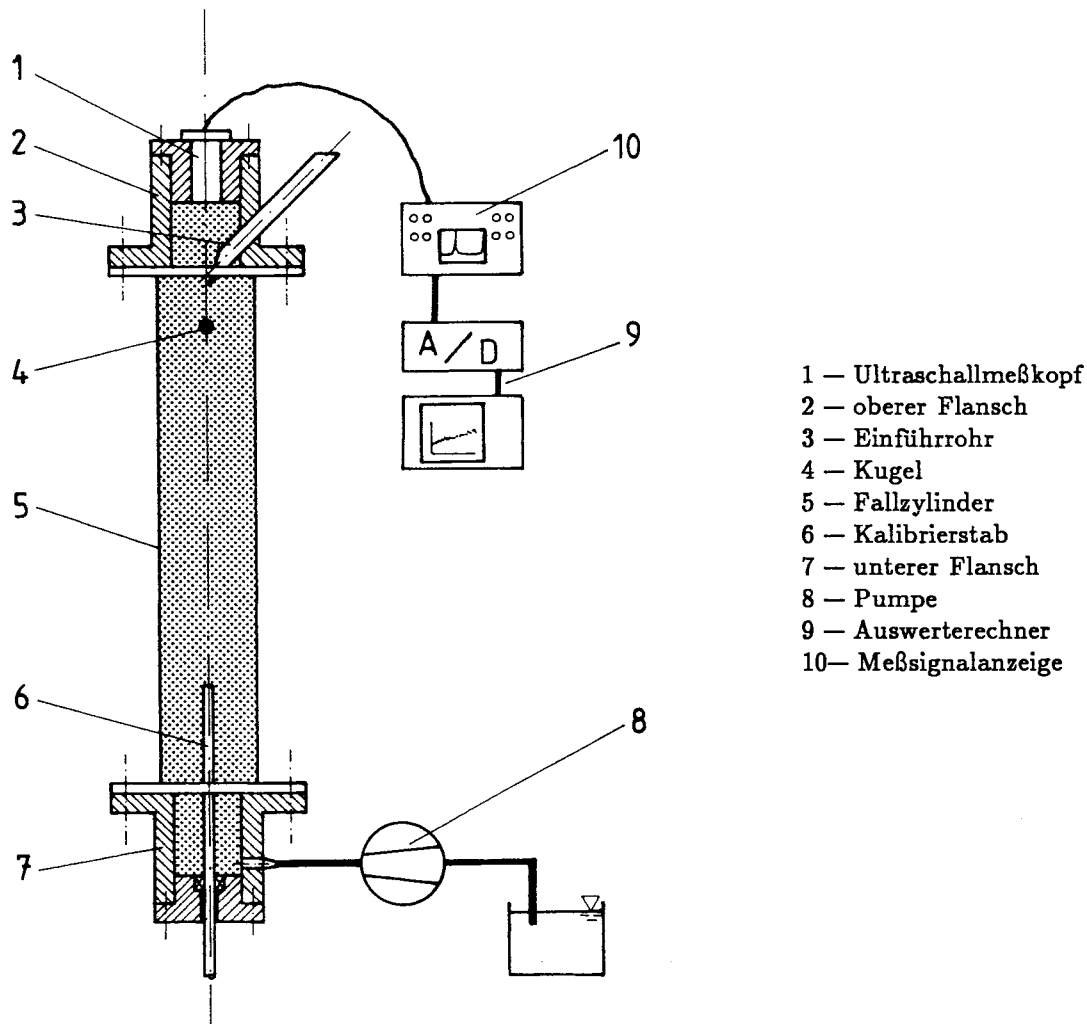


Bild 3.2: Versuchsaufbau zur Bestimmung Bingham'scher Stoffparameter

Messung der Sinkgeschwindigkeit erfolgt mittels der Ultraschallmeßtechnik. Dazu ist im oberen Flansch ein Ultraschallprüfkopf (Sender und Empfänger) eingebaut. Dieser sendet Longitudinalwellenpakete mit einer Frequenz $f_s = 1 \text{ MHz}$ durch das Fluid. Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, beispielsweise Fluid/Kugel, so wird ein Teil reflektiert. Dieses Echo empfängt der Prüfkopf und die Zeitdifferenz zwischen Signal und Echo ermöglicht es dann, den Abstand zwischen Prüfkopf und Kugel bei entsprechender Eichung zu ermitteln. Das analoge Abstandssignal wird zur Weiterverarbeitung über einen Analog/Digital-Wandler an einen Rechner übergeben. Die Wellengeschwindigkeiten von Signal und Echo sind gegenüber der Sinkgeschwindigkeit der Kugel sehr groß, so daß durch Abstandsmessungen zu diskreten Zeitpunkten die Kugelgeschwindigkeit ermittelt werden kann.

Der Fallzylinder wird durch einen Anschluß im unteren Flansch mittels einer Pumpe befüllt. Dabei ist darauf zu achten, daß keine Luftblasen im Fluid eingeschlossen werden, da auch an der Grenzfläche Luft/Fluid die Longitudinalwellen reflektiert und das Meßsignal verrauschen würden. Zur Eichung der Abstandsmessung im befüllten Zylinder kann durch den unteren Flansch ein Stab an definierten Punkten des gesamten Meßbereichs eingebracht werden.

3.2 Auswertung

Ausgangspunkt der Auswertung ist die Näherungsfunktion Gl.(2.45), durch die eine quantitative Bestimmung der beiden Stoffparameter $\hat{\eta}$ und τ_f durch die Messung der stationären Sinkgeschwindigkeit fallender Kugeln möglich wird. Allerdings ist es zweckmäßig, die Funktion in einer etwas anderen Form darzustellen. Bei großen Bi-Zahlen ist der Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten C und der Bi-Zahl nahezu proportional, da dann der konstante Faktor und der Wurzelterm vernachlässigt werden können. In beide Kennzahlen geht aber die Viskosität $\hat{\eta}$ im Nenner ein, so daß sie bei $C \sim Bi$ herausfallen würde. Dieser Umstand kann bei der Auswertung zu Schwierigkeiten führen. So ist es besser, die Näherungsfunktion als einen Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten C und der Fließzahl Y darzustellen

$$C = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = f(Y), \quad (3.2)$$

$$p = \frac{12bY - 6a^2Y - 2}{(6bY - 1)^2}, \quad q = \frac{1}{(6bY - 1)^2},$$

mit den schon in Kapitel 2 angegebenen Konstanten $a = 1.874$ und $b = 1.152$, wobei nur der positive Wurzel Ausdruck eine physikalische Bedeutung hat. Bild 3.3 zeigt den Verlauf dieser Funktion. Auch hier ist als erster Grenzfall der newtonsche Fall ($C = 1$) für die Fließzahl $Y = 0$ zu erkennen. Interessant ist in dieser Darstellung jedoch der zweite Grenzfall. Der Koeffizient C wächst über alle Grenzen, wenn sich die Fließzahl dem Grenzwert $Y_g = 0.14334$ annähert. Eine Kugel kann daher nur dann in einem Bingham-Fluid unter Wirkung der Schwerkraft sedimentieren, wenn die nach (2.44) gebildete Kennzahl Y kleiner ist als dieser Wert. Da in diese Kennzahl von den Bingham'schen Stoffparametern nur

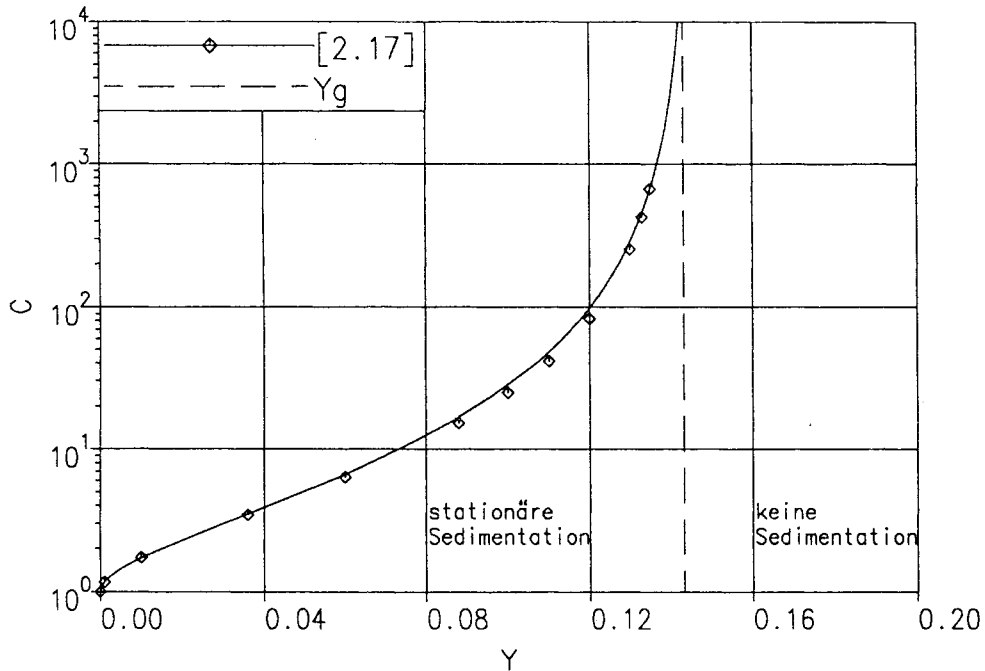


Bild 3.3: Widerstandskoeffizient C als Funktion der Fließzahl Y

die Fließspannung eingeht, andererseits die Widerstandskraft gemäß dem Kräftegleichgewicht an der Kugel durch die reduzierte Gewichtskraft $F_g - F_a$ ersetzt werden kann, entsteht eine Beziehung

$$Y = \frac{3\tau_f}{2(\rho_k - \rho_f)gR_0}, \quad (3.3)$$

mit deren Hilfe die Größenordnung der Fließspannung durch einen einfachen Versuch ermittelt werden kann [3.8]. Nach dem Ersetzen der Fließzahl Y durch den o.g. Grenzwert Y_g und dem Einsetzen der Meßwerte (Dichte, Radius) einer steckengebliebenen Kugel sowie der Dichte des Fluids kann die Gl.(3.3) bezüglich der Spannung τ_f umgeformt werden. Diese kann dann als untere Schranke der Fließspannung verstanden werden. Die Meßgrößen einer gerade noch absinkenden Kugel liefern dann eine obere Schranke, so daß man ein Intervall angeben kann, in dem sich die Fließspannung des Fluids befindet. Die Intervallgröße ist von den Stoffwerten ρ_f und ρ_k und insbesondere von dem Kugelradius abhängig. Durch die langsamen Sinkgeschwindigkeiten ist die Beantwortung der Frage, wann eine Kugel als "steckengeblieben" aufzufassen ist, sicherlich mit Schwierigkeiten verbunden.

Die Gl. (3.3) kann zusammen mit dem Grenzwert Y_g auch anders gelesen werden. Bei bekannter Fließspannung gibt sie denjenigen Durchmesser d_{grenz} an,

$$d_{\text{grenz}} = \frac{3\tau_f}{(\rho_k - \rho_f)gY_g}, \quad (3.4)$$

den eine Kugel haben darf, damit sie in dem Fluid gerade noch steckenbleibt.

Beide Bingham'sche Stoffparameter lassen sich jedoch simultan bestimmen, wenn die stationären Sinkgeschwindigkeiten von mindestens zwei verschiedenartigen Kugeln (unterschiedliche Durchmesser und/oder Dichten) gemessen werden. Die Auswertung erfolgt durch die Ausnutzung des Zusammenhangs (3.2). Aus den Meßgrößen für die einzelnen Kugeln (Geschwindigkeit, Dichte und Radius) und der bekannten Fluidichte bildet man die Kennzahlen Y_i (nach Gl.(3.3)) und C_i (die sich nach Einsetzen der Widerstandskraft aus Gl.(2.37) ergibt):

$$Y_i = \frac{3\tau_f}{2(\rho_k - \rho_f)gR_{0i}}, \quad C_i = \frac{2(\rho_k - \rho_f)gR_{0i}}{9\hat{\eta}V_i}.$$

In diesen beiden Beziehungen sind jetzt nur noch die Stoffparameter τ_f und $\hat{\eta}$ unbekannt. Eingesetzt in (3.2) ergeben sich aus zwei Messungen zwei Gleichungen, aus denen sofort diese Unbekannten berechnet werden können. In der Regel führt man mehr als zwei Versuche für ein Fluid durch, so daß man sich zur Auswertung statistische Methoden zu Nutze machen kann. Hier wird die Methode der kleinsten relativen Fehlerquadrate angewendet, die auf das Funktional

$$G = \sum_{i=1}^n \left[\frac{C_i}{f(Y_i)} - 1 \right]^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (3.5)$$

führt, wobei i den Laufindex der einzelnen Versuche darstellt. Bei der numerischen Auswertung des Funktionals (3.5) kommt das schon im Kapitel 2 erwähnte Newton-Verfahren zum Einsatz.

3.3 Ergebnisse

Die Versuche werden mit wässrigen Polymer-Lösungen (Carbopol 941) durchgeführt, deren Massenanteile an zugesetztem Carbopol sich in einem Bereich von $0.7\% \leq c \leq 1.6\%$ erstrecken. Zum Einsatz kommen Kugeln aus Glas ($\rho_{\text{Gl}} = 2500 \text{ kg/m}^3$) und Nickel ($\rho_{\text{Ni}} = 8000 \text{ kg/m}^3$) im Durchmesserbereich $5 \text{ mm} \leq d_{\text{Gl}} \leq 20 \text{ mm}$ bzw. $3 \text{ mm} \leq d_{\text{Ni}} \leq 7 \text{ mm}$.

Der Gültigkeitsbereich der Gl.(3.2) unterliegt Randbedingungen, die bei den Versuchen berücksichtigt werden müssen. Dadurch ist insbesondere die Größe der eingesetzten Kugeln durch zwei Bedingungen eingeschränkt. Einerseits müssen in der Strömung die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften überwiegen. Dieses Kriterium der schleichenden Strömung wird eingehalten, wenn die Reynoldszahl Re sehr klein bleibt (vgl. Kap. 2). Da in einem Bingham-Fluid die dynamische Viskosität von der Schergeschwindigkeit abhängt, soll das Kriterium durch die Bildung einer repräsentativen Reynoldszahl

$$Re_r = \frac{\rho_f V_\infty d}{\hat{\eta}} \quad (3.6)$$

berücksichtigt werden. Die differentielle Viskosität ist stets kleiner als die Scherviskosität (vgl. Bemerkung auf Seite 12), so daß es zulässig erscheint, die Bedingung $Re \ll 1$ dann durch die Bedingung $Re_r \leq O(1)$ zu ersetzen. Konkret werden zur Auswertung daher lediglich Versuche mit $Re_r \leq 3$ herangezogen.

Andererseits ist jeder im Versuch verwendete Fallzylinder in seinen Abmessungen begrenzt, so daß die Bedingung unbegrenztes Fluid nicht realisiert werden kann. Es stellt sich daher die Frage, ob Randeinflüsse durch die Zylinderwände in der Ermittlung der Sinkgeschwindigkeiten zu berücksichtigen sind. In der Literatur wird dieser Einfluß durch den Formfaktor

$$f = \frac{V}{V_\infty}, \quad (3.7)$$

dem Verhältnis von Kugelgeschwindigkeit V im begrenzten Fluid zu der im unbegrenzten

Fluid, zum Ausdruck gebracht. Für Kugeln, die sich in einem newtonschen Fluid bewegen, ist der Formfaktor eine Funktion des Verhältnisses Kugel- zu Fallzylinderabmessung R_0/R_z und der Reynoldszahl. Bei schleichender Strömung steigt der Formfaktor erst bei einem Verhältnis von $R_0/R_z = 0.004$ auf einen Wert $f = 0.99$ an [3.9]. In nicht-newtonschen Fluiden wird der Bereich, in dem sich der Randeffect auswirkt, i.allg. kleiner. Dies ist in [3.10] numerisch für ein "power-law" Fluid und in [3.11] experimentell für verschiedene Flüssigkeiten nachgewiesen worden. Da ein viskoplastisches Fluid nur in der Nähe der Kugel fließt, ist anzunehmen, daß sich der Randeffect nur in dem eigentlichen Fließbereich auswirkt. Dieser Bereich ist für ein Bingham-Fluid eine Funktion des Winkels ϑ (vgl. Bild 2.2) und der Fließzahl Y . In Bild 3.4 wird der von Beris et.al. [2.17] angegebene Fließbereich $\sigma_f = R_0/R_f$ für den Äquator ($\vartheta = \pi/2$), der Stelle der größten radialen Ausdehnung,

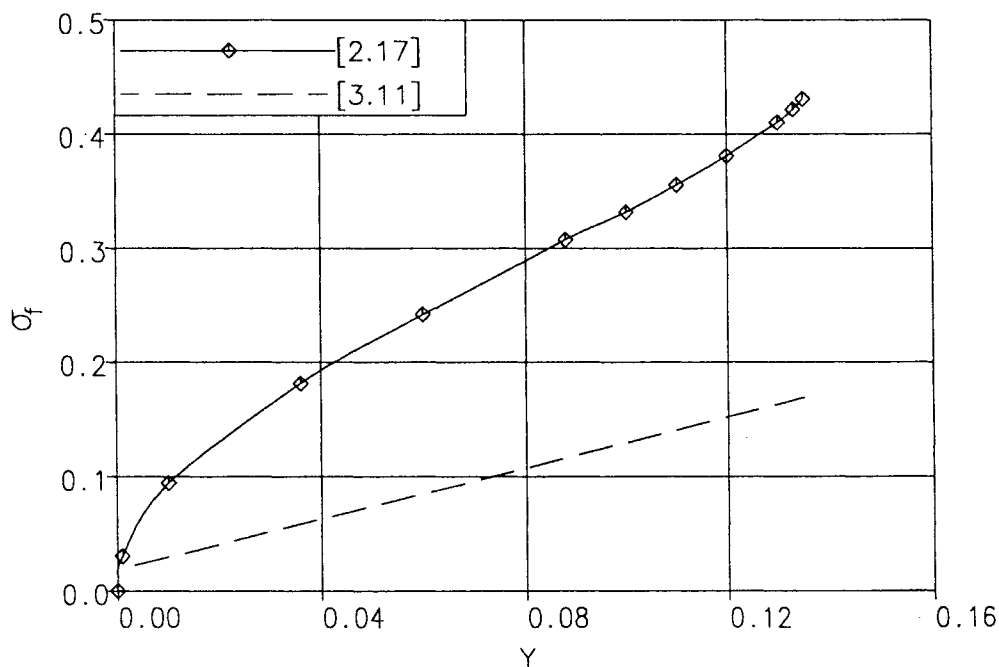


Bild 3.4: Dimensionsloser Fließbereich σ_f als Funktion der Fließzahl Y für ein Bingham-Fluid (—) und ein Herschel-Bulkley Fluid (— —)

als Funktion der Fließzahl als durchgezogene Kurve gezeigt. Demnach wäre bei einem Experiment, bei dem das Verhältnis R_0/R_z den Fließbereich σ_f erreicht bzw. überschreitet, eine Korrektur der Sinkgeschwindigkeit angebracht. Über die Größenordnung der Korrektur wird jedoch in [2.17] keine Aussage gemacht.

Für ein ausgeprägtes Herschel–Bulkley–Fluid, das sich im wesentlichen durch $\dot{\gamma}^n$ anstatt $\dot{\gamma}$ (power law Index n) im Stoffgesetz von einem Bingham–Fluid unterscheidet, ist in [3.12] ein aus Experimenten ermittelter Fließbereich in Abhängigkeit der Fließzahl angegeben. Dieser ist ebenfalls in Bild 3.4 als gestrichelte Linie eingezeichnet. Er unterscheidet sich deutlich von den numerischen Ergebnissen aus [2.17]. Dies wird einerseits durch das unterschiedliche Stoffgesetz (Herschel–Bulkley statt Bingham) und andererseits durch die etwas unsichere Art der Fließgrenzenbestimmung (schergeschwindigkeitsgesteuertes Rheometer bzw. Momentenmessung beim Rühren) begründet sein. Unter den hier vorausgesetzten Bingham'schen Fließbedingungen wird von den numerischen Ergebnissen nach [2.17] ausgegangen.

Um daher den Randeinfluß im Experiment zu vernachlässigen, muß man sicherstellen, daß bei den Versuchen der Fließbereich immer kleiner ist als die radiale Abmessung des Fallzylinders. Hier kommt ein quadratischer Zylinder mit einer Kantenlänge von 60 mm zum Einsatz. Die Versuche werden für jede Testsubstanz mit einer Anzahl Kugeln verschiedener Durchmesser und eventuell unterschiedlicher Dichte durchgeführt. Bild 3.5 zeigt das Ergebnis der Ultraschall–Abstandsmessung eines Versuchs. Über die Zeit ist der Abstand der Kugel zum Meßkopf aufgetragen. Die Meßpunkte lassen sich durch eine Gerade

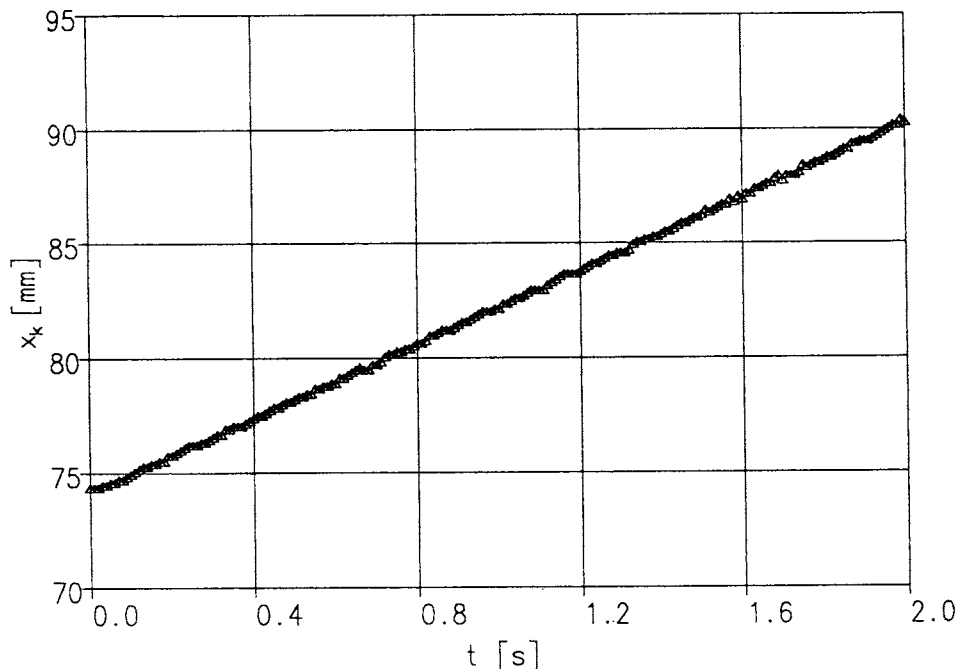


Bild 3.5: Abstandsmessung Kugel/Meßkopf eines Versuchs

approximieren, deren Steigung die Sinkgeschwindigkeit der Kugel darstellt. In Tabelle 3.1 sind die Meßwerte einer Versuchsreihe zu sehen. Die Werte der Sinkgeschwindigkeit repräsentieren den arithmetischen Mittelwert aus vier aufeinanderfolgenden Versuchen mit

Tabelle 3.1: Meßwerte einer 1.44 %-igen wäßrigen Carbopol 941-Lösung

d [m]	ρ_k [kg/m ³]	ρ_f [kg/m ³]	V_∞ [m/s]	Re_r [-]	d_{grenz} [m]	R_0/R_z [-]	σ_f [-]
0.006	8000.0	997.0	0.1093	2.64	0.002	0.10	0.22
0.005	8000.0	997.0	0.0578	1.16	0.002	0.08	0.24
0.016	2500.0	997.0	0.0412	2.65	0.010	0.27	0.31
0.015	2500.0	997.0	0.0315	1.90	0.010	0.25	0.33
0.014	2500.0	997.0	0.0232	1.31	0.010	0.23	0.33

Kugeln gleichen Durchmessers und gleicher Dichte. Die Auswertung erfolgt mit der in Kapitel 3.2 beschriebenen Methode. Zusätzlich zu den reinen Meßwerten sind in der Tabelle 3.1 die aus den berechneten Größen $\hat{\eta}$ und τ_f gebildeten Werte der Reynoldszahl Re_r , der Grenzdurchmesser d_{grenz} (berechnet aus Gl.(3.4)), die Größenverhältnisse R_0/R_z und die Fließbereiche σ_f angegeben. Bei allen Versuchen bleiben die Reynoldszahlen im Rahmen der gewünschten Größenordnung. Auch der Fließbereich bleibt stets – wie gefordert – unterhalb der Abmessungen des Fallzylinders. Die Meßergebnisse sind in Abhängigkeit vom Massenanteil Carbopol in der Testflüssigkeit in Tabelle 3.2 und in den Bildern 3.6 und 3.7 dargestellt. Erwartungsgemäß steigt die Fließspannung kontinuierlich mit Erhöhung des Massenanteils (Bild 3.6) an. Ungewöhnlich ist jedoch das Verhalten der differentiellen

Tabelle 3.2: Bingham'sche Stoffparameter wäßriger Carbopol 941-Lösungen

c [%]	$\hat{\eta}$ [Pa s]	τ_f [Pa]
0.70	0.144	1.35
0.80	0.164	1.75
0.90	0.246	1.83
0.98	0.256	2.31
1.08	0.252	2.98
1.18	0.297	3.27
1.27	0.437	3.68
1.36	0.455	4.42
1.44	0.248	7.07
1.52	0.267	8.73
1.60	0.313	10.27

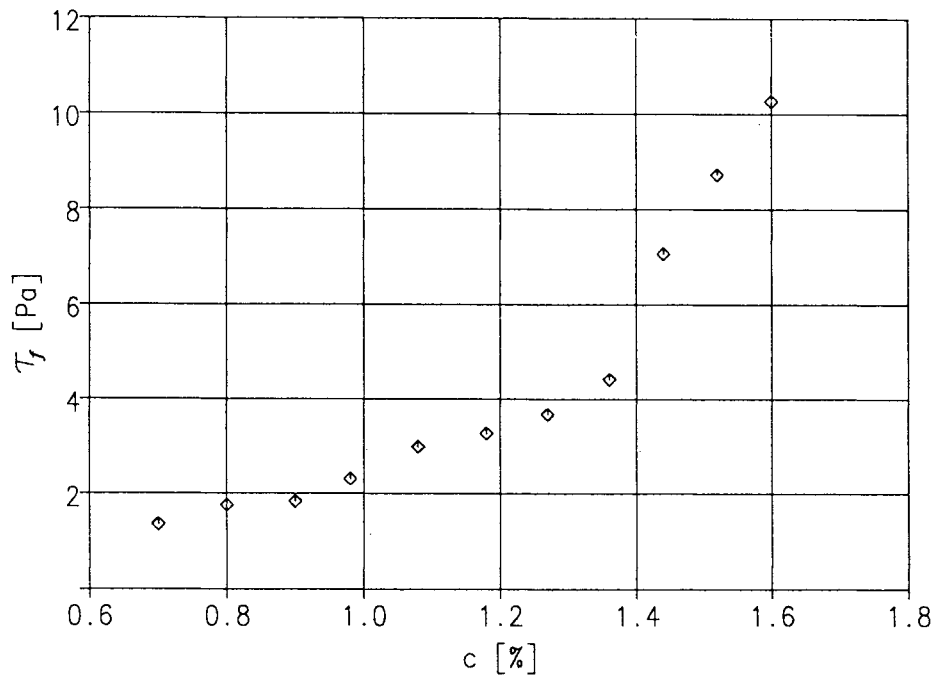


Bild 3.6: Fließspannung wäßriger Carbopol 941-Lösungen

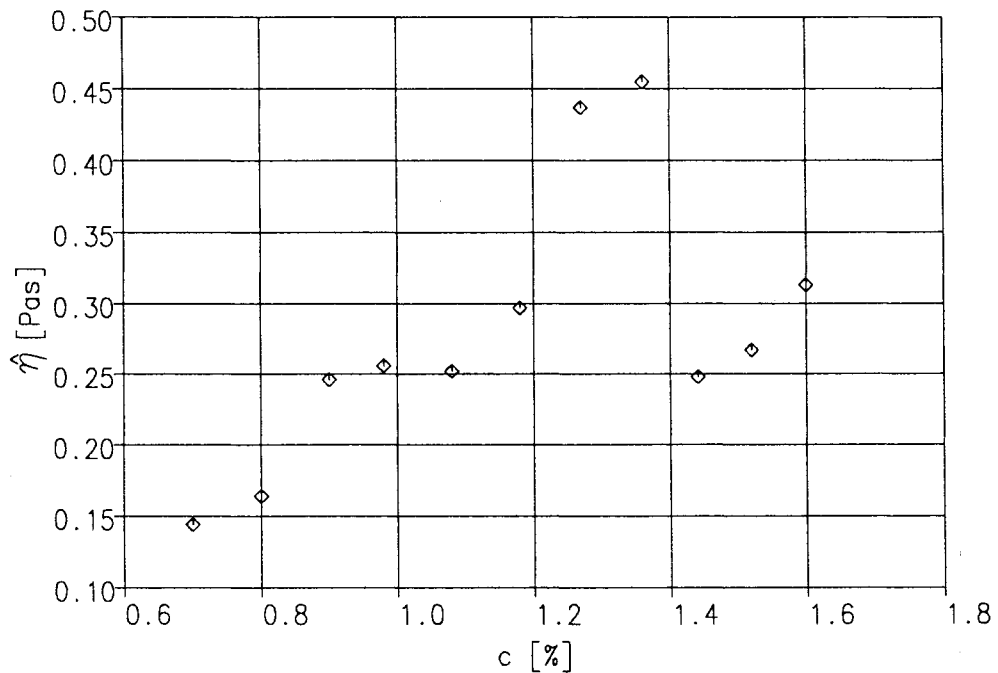


Bild 3.7: Differentielle Viskosität wäßriger Carbopol 941-Lösungen

Viskosität, welches allerdings durch reproduzierte Messungen bestätigt wurde. Einerseits fällt $\hat{\eta}$ nach anfänglichem Ansteigen an einem Punkt stark ab, um dann wieder leicht anzusteigen (Bild 3.7). Andererseits ist der gesamte Verlauf der differentiellen Viskosität "unruhiger" als bei der Fließspannung. Das läßt vermuten, daß die berechneten Werte für $\hat{\eta}$

eine höhere Unsicherheit aufweisen als die Werte für τ_f . Eine Fehlerabschätzung auf der Basis der Unsicherheit der in die Rechnung eingehenden Meßgrößen bestätigt diese Vermutung, die relativen Fehlerbalken liegen bei $\hat{\eta}$ bei bis zu 15% und für τ_f bei bis zu 5% vom Meßwert. Die Unsicherheit der berechneten Werte allein erklärt das ungewöhnliche Verhalten der differentiellen Viskosität nicht. So kann eine andere Ursache darin begründet sein, daß das Fließverhalten der Polymerlösungen bei hohen Konzentrationen vom rein Bingham'schen Stoffgesetz abweicht. Doch erscheinen die berechneten Werte sinnvoll, wenn man sich die Ergebnisse in Bild 3.8 betrachtet. Dort sind die mit den gemessenen Stoffparametern gebildeten Kennzahlen C (2.37) und Y (3.3) gegeneinander aufgetragen. Gleichzeitig zeigt die durchgezogene Linie den Verlauf der Beziehung (3.2).

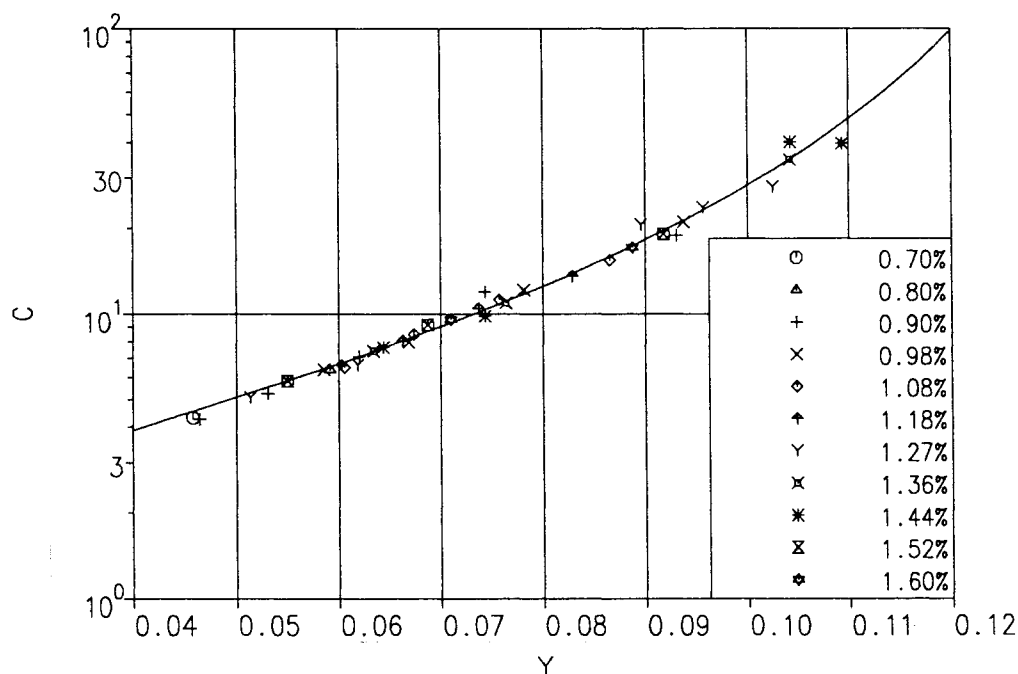


Bild 3.8: Ergebnisse gesamt

Man erkennt, daß die einzelnen Punkte recht gut auf der theoretischen Kurve liegen und dabei nur eine schwache Streuung aufweisen. Die Meßwerte sind also in sich konsistent. Natürlich ist dies kein scharfes Gütekriterium (schließlich wird der theoretische Verlauf in die Auswertung hineingesteckt). Doch unterstützt diese Überprüfung die Annahme, daß das Fließverhalten der hier betrachteten Fluide adäquat durch ein Bingham'sches Stoffmodell beschrieben werden kann und daß bei den Versuchen die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften überwogen haben.

Durch die experimentelle Bestätigung hat sich gezeigt, daß das beschriebene Kugel-Fall-Viskosimeter es ermöglicht, die Bingham'schen Stoffparameter $\hat{\eta}$ und τ_f eines viskoplastischen Fluides zu bestimmen. Der relativ einfache Aufbau gestattet eine schnelle und sichere Versuchsdurchführung. Gegenüber anderen Verfahren zeichnet es sich durch die simultane Bestimmung beider Stoffparameter aus. Für die richtige Auswertung wird eine schleichende Strömung sowie Bingham'sches Stoffverhalten des zu untersuchenden Fluides vorausgesetzt.

4 Instationäre Sedimentation eines kugelförmigen Partikels in viskoplastischen Fluiden

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die stationäre, schleichende Sedimentation eines kugelförmigen Partikels in einem Bingham-Fluid untersucht. Dabei hat sich herausgestellt, daß bei einem solchen Fluid die Fließspannung τ_f eine entscheidende Größe darstellt. Ein spezielles Ergebnis der Untersuchung ist ein Grenzwert für die mit der Fließspannung gebildete Fließzahl Y (3.2). Überschreitet diese Kennzahl den Zahlenwert Y_g , ist also

$$Y \geq 0.14334 ,$$

kann eine Kugel unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft nicht sedimentieren. Eine Kugel, die unter diesen Bedingungen in das Fluid eingebracht wird, steckt demnach fest und führt keine Bewegung aus. Es treten daher keine Deformationsgeschwindigkeiten im Fluid um die Kugel auf und gemäß dem Stoffgesetz Gl.(2.18) ist der Wert der Spannungsinvariante τ kleiner als die Fließspannung. Das Fluid friert sozusagen ein und verhält sich wie ein Festkörper, in dem sich eine starre Kugel befindet. Daß Spannungen in dem Fluid auftreten, wenn die Kugeldichte sich von der des Fluids unterscheidet, ist klar, schließlich muß das um den Auftrieb reduzierte Eigengewicht der Kugel getragen werden.

Die weiteren Überlegungen haben zum Ziel, eine unter diesen Bedingungen steckende Kugel zum Sedimentieren zu bewegen. Eine Möglichkeit wäre die Aufprägung einer zusätzlich treibenden Kraft, etwa der Zentrifugalkraft in einer Zentrifuge. Im Rahmen einer vereinfachten Modellbetrachtung (bei schneller Drehzahl der Zentrifuge) könnte der Vorgang im wesentlichen durch Ersetzen der Erdbeschleunigung g durch den Beschleunigungsterm $r\Omega^2$ in den maßgeblichen Gleichungen beschrieben werden. Die Zentrifugalkräfte verursachen zusätzliche Spannungen im Fluid, so daß schließlich die Fließspannung überschritten wird und eine Sedimentation in Richtung der Beschleunigung einsetzen könnte. Eine andere Idee basiert auf einem ähnlichen Prinzip. Hierbei denke man sich die notwendigen Zusatzspannungen durch eine von außen angeregte Eigenbewegung der Kugel induziert. Eine solche Erregung würde beispielsweise dadurch erreicht werden, wenn man den Behälter, in dem sich

das Fluid befindet, in harmonische Schwingungen versetzt. Die theoretische Untersuchung dieses Vorgangs ist Inhalt der folgenden Kapitel. Dazu erfolgt zunächst die Analyse der Schwingungen für Zustände unterhalb der Fließgrenze im nächsten Abschnitt.

4.1 Bewegung unterhalb der Fließgrenze

4.1.1 Schwingende Kugel in einem ruhenden Festkörper

Zum grundsätzlichen Studium des Verhaltens bei Schwingungen einer Kugel in einem Festkörper dient das folgende Modell. Das viskoplastische Fluid wird bei Zuständen unterhalb der Fließgrenze als elastischer, später auch als viskoelastischer Festkörper angenommen, der zudem homogen und inkompressibel (mit der konstanten Dichte ρ_f) sein soll. In diesem Modellfall ist die Gestalt des Körpers kugelförmig und hat einen endlichen Radius R_a . Im Zentrum sei eine starre, homogene Kugel mit der Dichte ρ_k und dem Radius R_0 eingebettet (Bild 4.1). Die Kugel soll um ihre Ruhelage translatorisch in Richtung der z -Achse mit kleiner Amplitude schwingen. Dieses Problem ist schon in [4.1] untersucht worden, allerdings wurde dort ein unendlich ausgedehnter Festkörper betrachtet.

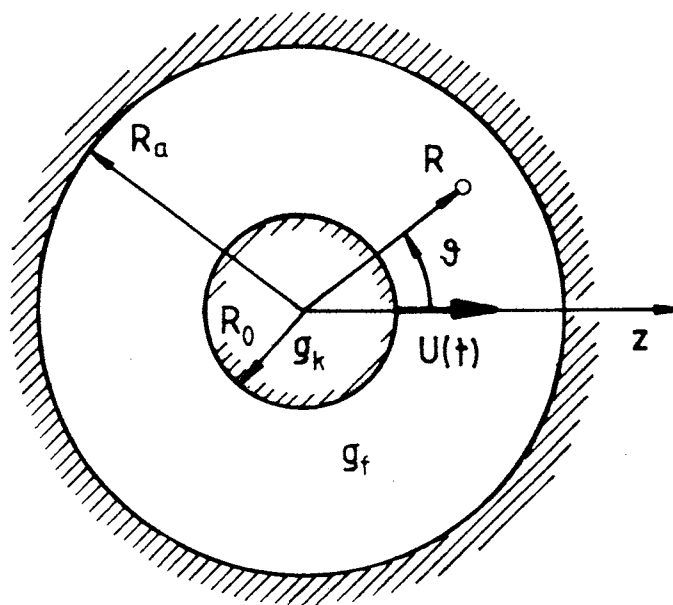


Bild 4.1: Schwingende Kugel in einem kugelförmigen ruhenden Festkörper

Zur Beschreibung der Bewegung ist es sinnvoll, statt dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} den Verschiebungsvektor \mathbf{u} einzuführen, da die Stoffgleichungen fester Medien i.allg. in Abhängigkeit von Verzerrungstensoren formuliert sind. Ein Kräftegleichgewicht an der Kugel führt bei Vernachlässigung von Volumenkräften auf die Bewegungsgleichung

$$\rho_f \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} = \operatorname{div} \mathbf{S} \quad (4.1)$$

(siehe z.B.[4.2]). Für einen elastischen Festkörper beschreibt das Gesetz nach Hooke den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen in linearer Näherung:

$$\mathbf{S} = 2 \mu \mathbf{G} + \lambda (\operatorname{sp} \mathbf{G}) \mathbf{E} . \quad (4.2)$$

In Gl.(4.2) gehen zwei Stoffkonstanten, die Laméschen Konstanten μ und λ , ein.

In diesem Zusammenhang werden in der Kontinuumsmechanik statt der Lameschen Konstanten häufig der Elastizitätsmodul E , die Querkontraktionszahl m oder die Kompressibilität κ verwandt. Die einzelnen Größen hängen jedoch in einfacher Form miteinander zusammen:

$$\mu = \frac{E}{2(1+m)} \quad \lambda = \frac{Em}{(1+m)(1-2m)} \quad \kappa = \frac{3}{3\lambda+2\mu}$$

Um stabiles Verhalten des Materials zu gewährleisten, ist es erforderlich, daß $E \geq 0$ und $-1 \leq m \leq 0.5$ ist. Der Grenzwert $m = 0.5$ gilt für einen inkompressiblen Festkörper, Festkörper mit $m < 0$ sind nicht bekannt.

Der geometrisch linearisierte Greensche Verzerrungstensor \mathbf{G} ist der symmetrische Anteil des Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T \right] . \quad (4.3)$$

Diese Linearisierung ist zulässig, wenn die Verschiebungsableitungen betragsmäßig klein gegen 1 bleiben und so Produkte dieser Größen vernachlässigt werden können. Bei vielen Anwendungen sind aber nicht nur die Verschiebungsableitungen, sondern auch die Verschiebungen selbst hinreichend klein. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung ist es zulässig, die materielle Zeitableitung auf der linken Seite von Gl.(4.1) durch die lokale Zeitableitung zu ersetzen, also zu schreiben

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} .$$

Setzt man dann die Gl.(4.1)–(4.3) ineinander ein, so resultiert ein System partieller Differentialgleichungen, in dem zweifache Zeitableitungen mit zweifachen Ortsableitungen in Beziehung gebracht werden:

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \text{div grad } \mathbf{u} . \quad (4.4)$$

Diesen Gleichungstyp nennt man gelegentlich auch Wellengleichungen. Da die Kugel in dem Festkörper harmonische Schwingungen ausführen soll, können für die weiteren Untersuchungen spezielle, eingeschwungene Lösungen der Gl.(4.4) in der Form

$$\mathbf{u}(R, \vartheta, t) = \mathbf{u}_0(R, \vartheta) e^{i\Omega t} \quad (4.5)$$

angesetzt werden. In dieser Schreibweise (R und ϑ kennzeichnen Kugelkoordinaten) ist \mathbf{u}_0 eine komplexe Schwingungsamplitude, und Ω die reelle Kreisfrequenz.

Bezieht man den Kugelradius R_0 auf eine repräsentative Schwingungsamplitude U_0 , so kann man daraus eine Kennzahl bilden,

$$St = \frac{R_0}{U_0} , \quad (4.6)$$

die eine Art Strouhalzahl darstellt. Diese in der Strömungsmechanik übliche Kennzahl beschreibt in der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit das Verhältnis von instationärem zu konvektivem Trägheitsterm und hat hier eine ähnliche Bedeutung. Hinreichend kleine Verschiebungen bedeuten nämlich letztendlich $St \gg 1$.

Durch die Separation der Zeitabhängigkeit entsteht aus der Bewegungsgleichung (4.4) unter Verwendung der schon früher gebrauchten Identität $\text{grad div } \mathbf{u}_0 \equiv \text{div grad } \mathbf{u}_0 + \text{rot rot } \mathbf{u}_0$ ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen für die Verschiebungsamplitude \mathbf{u}_0 :

$$\rho_f (i\Omega)^2 \mathbf{u}_0 = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u}_0 - \mu \text{rot rot } \mathbf{u}_0 . \quad (4.7)$$

Bei der numerischen Behandlung dieses Systems muß man berücksichtigen, daß im Falle eines inkompressiblen Festkörpers einerseits die Divergenzfreiheit erfüllt sein muß, also

$$\text{div } \mathbf{u}_0 = 0 . \quad (4.8)$$

Andererseits wächst dann jedoch die Lamésche Konstante λ über alle Grenzen, was mit der Bemerkung auf der vorherigen Seite leicht einzusehen ist. Der Ausdruck $\lambda \text{grad div } \mathbf{u}_0$ in Gl.(4.7) kann somit nicht gestrichen werden und wird in die Rechnung mit eingehen.

Das System (4.7) hat gewisse Ähnlichkeit mit der Schwingungsgleichung eines newtonschen, inkompressiblen Fluids bei kleiner Amplitude. Durch die Einführung einer Abkürzung, $p = -(2\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{u}_0$, wird diese Analogie sichtbar,

$$\rho_f (i\Omega)^2 \mathbf{u}_0 = -\operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_0. \quad (4.9)$$

Statt des Vektors \mathbf{u}_0 steht in der Bewegungsgleichung eines Fluids eine Geschwindigkeit \mathbf{v} , p ist der hydrostatische Druck und statt μ steht die dynamische Viskosität η . Allerdings tritt hier auf der linken Seite der Faktor $(i\Omega)^2$ auf, während beim Fluid nur $i\Omega$ steht (vgl. z.B. [4.3]).

Diese Analogie kann man sich zur Lösung des Systems (4.9) zunutze machen. Schlägt man den in der Fluidodynamik beschrittenen Weg ein [2.2], so wird zunächst durch Anwendung des Operators rot der Ausdruck p eliminiert,

$$\rho_f (i\Omega)^2 \operatorname{rot} \mathbf{u}_0 = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_0. \quad (4.10)$$

Auch hier sollen, wie schon in Kapitel 2, die Bedingungen $u_{0\varphi} = 0$ und $\partial/\partial\varphi = 0$ gelten, so daß sich eine "Stromfunktion" Ψ einführen läßt

$$\mathbf{u}_0 = \operatorname{rot} \left\{ \frac{\Psi}{R \sin\vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right\} \quad \begin{aligned} u_{0R} &= \frac{1}{R^2 \sin\vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \\ u_{0\vartheta} &= -\frac{1}{R \sin\vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \end{aligned}$$

Eine Separation der Winkelabhängigkeit in der Stromfunktion durch $\Psi = \sin^2\vartheta g(R)$ reduziert Gl.(4.10) auf eine Beziehung

$$\rho_f (i\Omega)^2 \mathcal{L} g(R) = \mu \mathcal{L} \mathcal{L} g(R) \quad (4.11)$$

für die Funktion $g(R)$, die dann nur noch vom Radius abhängt. Der Operator \mathcal{L} ist schon in Kapitel 2 gebraucht worden. Die Lösung von Gl.(4.11) läßt sich als Summe zweier Anteile $g(R) = g_1(R) + g_2(R)$ schreiben, die für sich Lösungen der gewöhnlichen DGLen

$$\mathcal{L} g_1 = 0 \quad (4.12a)$$

und

$$\mathcal{L} g_2 = \frac{\rho_f (i\Omega)^2}{\mu} g_2 \quad (4.12b)$$

darstellen. In diesem Zusammenhang ist es günstig, die komplexe, modifizierte Stokeszahl

$$Z^2 = \frac{\rho_f(i\Omega)^2 R_0^2}{\mu} \quad (4.13)$$

als neue dimensionslose Kennzahl einzuführen. Dann ergibt sich die Gesamtlösung zu

$$g = \underbrace{C_1 R^2 + \frac{C_2}{R}}_{g_1} + \underbrace{C_3 \left[1 + \frac{R_0}{Z R}\right] e^{(-Z R/R_0)} + C_4 \left[1 - \frac{R_0}{Z R}\right] e^{(Z R/R_0)}}_{g_2}, \quad (4.14)$$

mit vier an die Randbedingungen anzupassenden Konstanten $C_1 - C_4$ [4.4]. Daraus lassen sich sofort die Geschwindigkeitskomponenten gemäß dem Ansatz zu

$$u_{0R} = 2 \frac{g}{R^2} \cos \vartheta, \quad u_{0\vartheta} = -\frac{g'}{R} \sin \vartheta$$

mit $(\)' := \frac{d(\)}{dR}$ berechnen.

In der Elastodynamik (vgl. [4.2]) wird meist ein anderer Weg zur Behandlung des Systems (4.4) beschritten. Man beschafft sich zwei Klassen von Lösungen in der Art, daß man einerseits rotationsfreie (d.h. $\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0$), andererseits dilatationsfreie (d.h. $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$) Ansätze verwendet. Dann reduziert sich das System auf jeweils gewöhnliche Wellengleichungen,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{1,t}}{\partial t^2} = c_{1,t}^2 \text{div grad } \mathbf{u}_{1,t},$$

in die jeweils eine Wellengeschwindigkeit in transversaler Richtung $c_t^2 = \mu/\rho_f$ und in longitudinaler Richtung $c_l^2 = (\lambda+2\mu)/\rho_f$ eingehen. Die Lösungen dieser beiden Gleichungen zeigen, daß sich in einem Hookeschen Material longitudinale und transversale Wellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten, wobei in einem inkompressiblen Körper die Longitudinalwellengeschwindigkeit sogar über alle Grenzen wächst. Die Gesamtlösung ergibt sich wiederum aus der Überlagerung der beiden Einzellösungen.

Die Randbedingungen sind durch die Haftbedingung des Kontinuums an festen Wänden einerseits an der bewegten Kugeloberfläche $\mathbf{u}_0(R_0, \vartheta) = U_0 \mathbf{e}_z$, andererseits am äußeren unbewegten Rand $\mathbf{u}_0(R_a, \vartheta) = 0$ festzulegen, d.h. in Abhängigkeit der Funktion g muß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 g(R=R_0)/R_0^2 &= U_0 & g(R=R_a)/R_a^2 &= 0 \\ g'(R=R_0)/R_0 &= U_0 & g'(R=R_a)/R_a &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden. Allerdings stößt man bei der Berechnung der Konstanten auf ein Problem, wenn man den äußeren Rand immer weiter von der Kugel entfernt, also den Grenzfall $R_a \rightarrow \infty$

betrachtet. Dies wird anhand der Gl.(4.14) und insbesondere der Stokeszahl (4.13) deutlich. Bei einem elastischen Festkörper ist der Wert von Z rein imaginär. D.h., die Exponentialanteile von g (und auch von g') stellen trigonometrische Funktionen dar, die weder ab- noch aufklingen. Bei der Grenzbetrachtung $R_a \rightarrow \infty$ nehmen dann aber die mit C_2 , C_3 und C_4 multiplizierten Terme mit mindestens $1/R_a^2$ ab, so daß sich dadurch nicht alle Konstanten berechnen lassen. Im weiteren wird daher zunächst von einem endlichen Rand R_a ausgegangen.

Mit den so berechneten Konstanten ist die Bewegung des Kontinuums bekannt und es kann die Widerstandskraft der Kugel berechnet werden. Diese ergibt sich wie in Abschnitt 2.1 aus der Summe der Spannungen an der Kugeloberfläche (Gl. 2.14). Das Ergebnis der Integration ist in [2.3] angegeben und läßt sich in kompakter Form schreiben als:

$$F_{w,dyn} = -\frac{4}{3} \pi R_0 \mu U_0 K Z^2 e^{i\Omega t} \quad (4.15)$$

mit

$$K = 1 - \frac{3}{2Z^2} \frac{\gamma(Z, \delta) - \gamma(Z\delta, \delta^{-1})}{12Z + \zeta(Z, \delta) + \zeta(Z\delta, \delta^{-1})/\delta}$$

und

$$\gamma(Z, \delta) = (Z^2 + 3Z + 3)(Z^2\delta^2 - Z\delta + 3)e^{Z(\delta^{-1})}$$

$$\zeta(Z, \delta) = \{(Z^2\delta^2 - 3Z\delta + 3) - (Z^2 + 3Z + 3)/\delta\}e^{Z(\delta^{-1})}$$

Hierbei stellt das Radienverhältnis $\delta = R_a/R_0$ den Einfluß des Randes dar.

In die Gleichung (4.15) gehen neben der Amplitude U_0 , der Kreisfrequenz Ω sowie den geometrischen Größen der schwingenden Kugel und der äußeren Hülle die Stoffkonstanten des Festkörpers ein. Bis jetzt ist dieser Körper rein elastisch behandelt worden, doch ermöglicht das sogenannte Korrespondenz- (oder auch Äquivalenz-) Prinzip eine Verallgemeinerung der Ergebnisse auf den Fall eines viskoelastischen Festkörpers. Die Lösung dieses Randwertproblems für den elastischen Körper kann nämlich auf einen viskoelastischen Körper übertragen werden, wenn man den Gleitmodul μ durch den komplexen Gleitmodul

$$\mu^*(\Omega) = \mu'(\Omega) + i \mu''(\Omega) \quad (4.16)$$

ersetzt. Die elastischen Anteile in der Stoffkonstanten werden durch μ' , die viskosen durch μ'' repräsentiert.

4.1.2 Kugel in einem schwingenden Festkörper

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt eine schwingende Kugel in einem ruhenden Festkörper betrachtet wurde, soll nun der Festkörper zu harmonischen Schwingungen in z -Richtung angeregt werden (Bild 4.2). Dies entspricht modellhaft der am Anfang des Kapitels

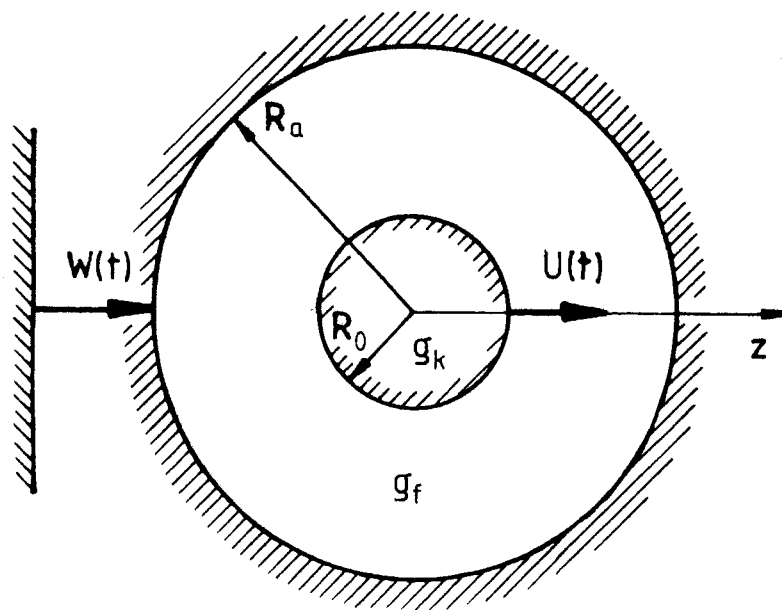


Bild 4.2: Kugel in schwingendem Festkörper

vorgeschlagenen Methode zur Erzeugung der für die Sedimentation erforderlichen Zusatzspannungen. Man denke sich hier die Bewegung des Festkörpers nach dem Zeitgesetz

$$W(t) = W_0 e_z e^{i\Omega t} \quad (4.17)$$

vorgegeben und frage nach der sich einstellenden Relativbewegung $U(t)$ der Kugel. Unter Voraussetzung der Linearität wird die Kugel mit der gleichen Kreisfrequenz Ω , nicht jedoch mit der gleichen Amplitude schwingen, also sich mit

$$U(t) = U_0 e_z e^{i\Omega t} \quad (4.18)$$

bewegen. Es interessiert vornehmlich der komplexe Frequenzgang U_0/W_0 der beiden

Schwingungen in Abhängigkeit von Ω . Diese Funktion erhält man durch die Bildung des Kräftegleichgewichts an der Kugel (Volumen V_k) im Inertialsystem:

$$\rho_k V_k \left[\frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right] + F_{w,dyn}(U(t)) - \rho_f V_k \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.19)$$

Der erste Term in dieser Bewegungsgleichung gibt das Produkt aus Masse und Gesamtbeschleunigung wieder. Die Widerstandskraft F_w ist hier nur mit der Relativverschiebung $U(t)$ zu bilden und entspricht dem in Abschnitt 4.1.1 hergeleiteten Ergebnis. Der letzte Term in Gl.(4.19) resultiert aus dem oszillierenden Druckfeld und kann als eine Art zeitabhängige Auftriebskraft gedeutet werden.

Durch Einsetzen der Bewegungen von Kugel Gl.(4.18) und Festkörper Gl.(4.17) sowie der Widerstandskraft Gl.(4.15) in die Bewegungsgleichung Gl.(4.19) erhält man nach kurzer Rechnung eine Beziehung für den komplexen Frequenzgang,

$$\frac{U_0}{W_0} = - \frac{\Gamma - 1}{\Gamma - K}, \quad (4.20)$$

welcher vom Dichteverhältnis

$$\Gamma = \frac{\rho_k}{\rho_f} \quad (4.21)$$

und der Abkürzung $K(Z, \delta)$ abhängt. $K(Z, \delta)$ ist in Gl.(4.15) eingeführt worden und ist selbst eine Funktion von der Stokeszahl Z und dem Radienverhältnis δ .

In der Schwingungslehre ist es üblich, den komplexen Frequenzgang zur Darstellung in einen Betragsgang $|U_0/W_0|$, das Amplitudenverhältnis, und einen Phasengang

$$\varphi = \arctan \left[\frac{\text{Im}\{U_0/W_0\}}{\text{Re}\{U_0/W_0\}} \right]$$

aufzuspalten, der Auskunft über die Phasenverschiebung der beiden Bewegungen gibt.

In den folgenden Bildern 4.3a – 4.3c ist der Betragsgang des Ergebnisses Gl.(4.20) in dimensionsloser Form dargestellt. Man erkennt dort die wesentlichen Abhängigkeiten vom

Randeinfluß δ , dem Dichteverhältnis Γ und einem aus dem Verhältnis von Imaginär- und Realteil gebildeten Viskoelastizitätsmaß

$$V = \frac{\mu''}{\mu'} \quad (4.22)$$

als Funktion eines reellen Frequenzparameters

$$Z_r = \frac{\rho_f \Omega^2 R \delta^2}{\mu'} \quad (4.23)$$

Auf allen drei Bildern ist das grundsätzliche Verhalten dieses Systems zu sehen. Verständlicherweise wird für kleine Frequenzen die relative Bewegung der Kugel immer kleiner, da sich die Trägheit der Kugel gegenüber den Reibungskräften immer weniger auswirkt. Andererseits erreicht das Verhältnis $|U_0/W_0|$ bei hohen Frequenzen einen Grenzwert, der nur noch von den trägen Eigenschaften von Festkörper und Kugel abhängt.

Die Abhängigkeit des Betragsganges vom Randeinfluß ist im Bild 4.3a dargestellt. Liegt der äußere Rand in der Nähe der Kugel (z.B. $\delta = 5.0$), erkennt man einen nichtmonotonen Verlauf des Betragsganges. Diese *Schwingungen* erklären sich, wenn man die Bewegungen der

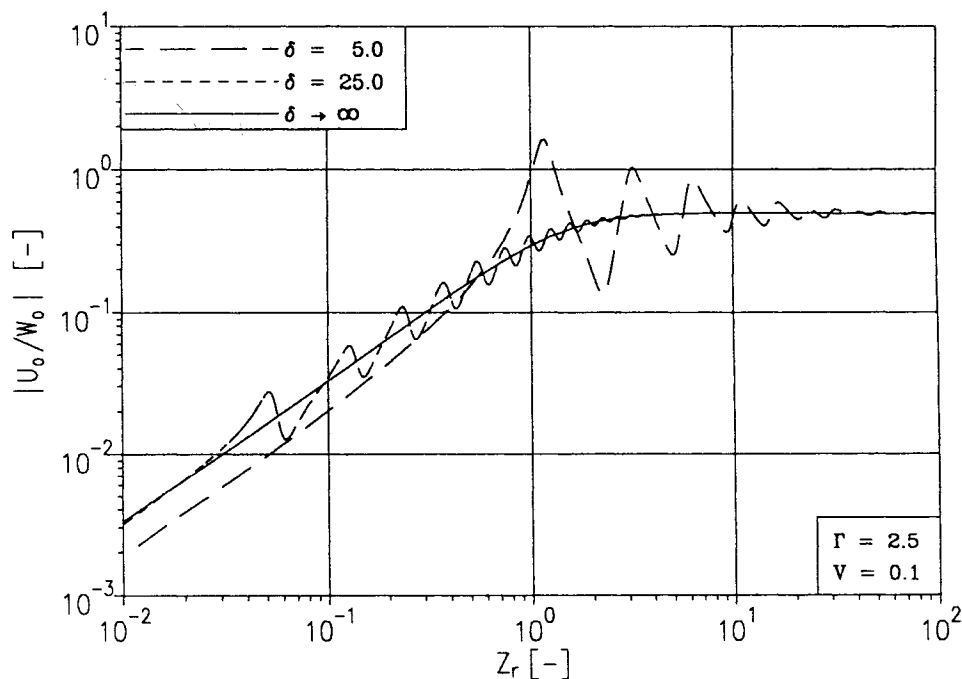


Bild 4.3a: Abhängigkeiten des Amplitudenverhältnisses vom Randeinfluß

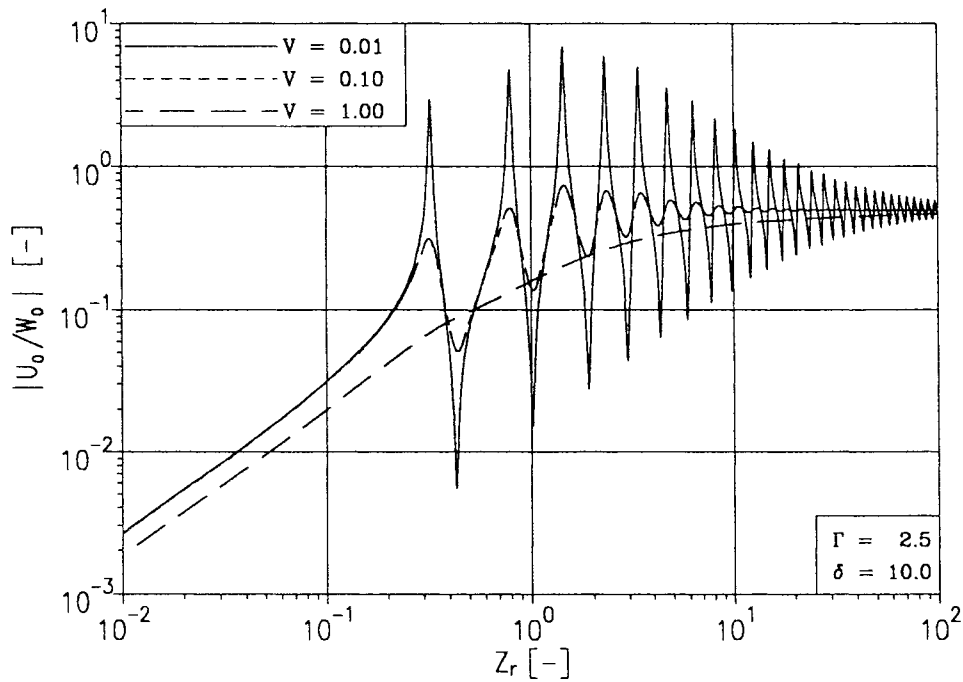


Bild 4.3b: Abhängigkeiten des Amplitudenverhältnisses von der Viskoelastizität

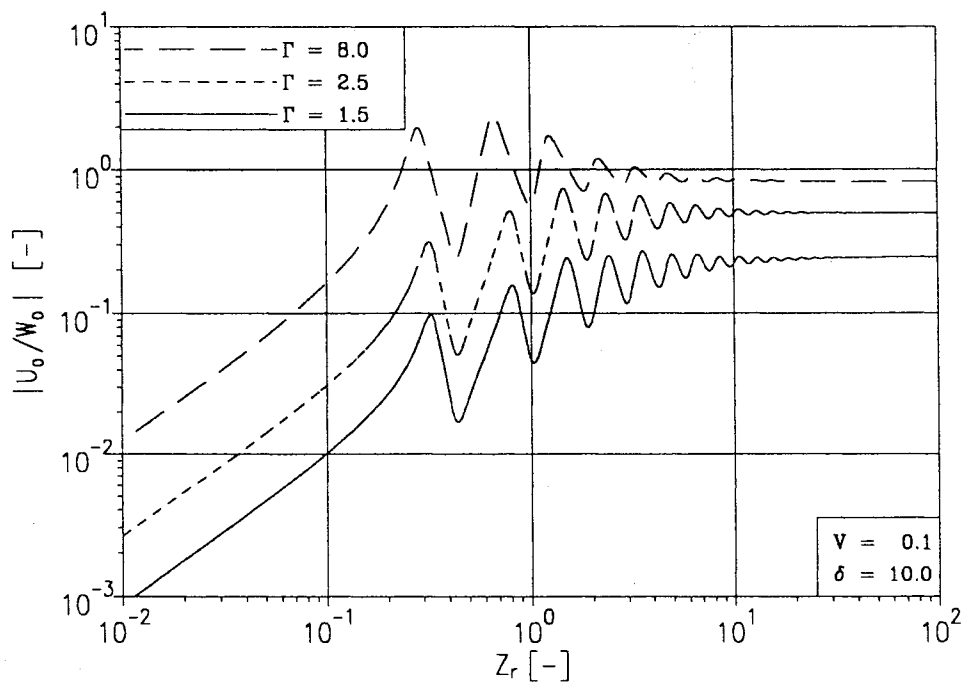


Bild 4.3c: Abhängigkeiten des Amplitudenverhältnisses vom Dichteverhältnis

Kugel als Störungen deutet, die sich wellenartig im Festkörper fortbewegen. Beim Auftreffen der Wellen auf eine Phasengrenze (äußerer Rand) werden diese reflektiert. Es können sich dann bei bestimmten Frequenzen sogenannte stehende Wellen ausbilden, die im Amplitudenverhältnis als *Schwingung* sichtbar werden. Entfernt man den Rand von der Kugel, so verkleinern sich die *Schwingungen* und verschwinden in Richtung niedriger Frequenzen.

Das Viskoelastizitätsmaß V hat einen Einfluß auf die Höhe der *Schwingungen* im Amplitudenverhältnis. Dies ist in Bild 4.3b zu sehen. Je höher der viskose Anteil in der Stoffkonstante des Festkörpers ist, desto mehr werden die *Schwingungsamplituden* gedämpft. Zu beachten ist, daß hier von einem konstanten V ausgegangen wird, welches nicht von der Frequenz abhängt.

Das Dichteverhältnis hat im wesentlichen einen Einfluß auf die Größenordnung des Amplitudenverhältnisses (Bild 4.3c). Die Kurven verschieben sich im Bereich hoher Frequenzen in vertikaler Richtung.

Die Grenzwerte für den Frequenzgang bei kleinen und großen Frequenzen können auch analytisch berechnet werden. Im Gegensatz zu den Schwierigkeiten bei der Berechnung der Konstanten $C_1 - C_4$ für den Grenzfall großer Außenradien R_a kann in Gl.(4.15) der Grenzübergang $R_a \rightarrow \infty$, d.h. $\delta \rightarrow \infty$, ohne Schwierigkeiten vollzogen werden. Die Widerstandskraft reduziert sich nämlich in diesem Fall auf einen Ausdruck in der Form

$$F_{w,dyn}(\delta \rightarrow \infty) = 6 \pi R_0 \mu^* U_0 \left(1 + Z + \frac{Z^2}{9}\right) e^{i\Omega t}. \quad (4.24)$$

Dieses Ergebnis ist äquivalent zu der in [4.1] gefundenen Gleichung, die für das Modell eines unendlich ausgedehnten Festkörpers hergeleitet wurde.

In dieser Darstellung (4.24) kann man die Struktur der Widerstandskraft besser erkennen als in der Beziehung (4.15), die sich durch die endliche Randbedingung etwas unübersichtlich darstellt. Setzt man die modifizierte Stokeszahl Z in die Gl.(4.24) ein, so sind drei Anteile zu sehen:

$$F_{w,dyn}(\delta \rightarrow \infty) = \left[6 \pi R_0 \mu^* U_0 + 6 \pi R_0^2 \sqrt{\mu^* \rho_f} U_0 i\Omega + \frac{2}{3} \pi R_0^3 \rho_f U_0 (i\Omega)^2 \right] e^{i\Omega t}$$

Im ersten Term erkennt man das "Stokessche Ergebnis" wieder, welches bei $|Z| \ll 1$ dominiert. Der dritte Anteil ist proportional der Beschleunigung $U_0(i\Omega)^2$ und bestimmt den Widerstand bei hohen Stokeszahlen. Man kann diesen Term deshalb auch als Beschleunigungswiderstand bezeichnen. Dabei stellt der Vorfaktor gerade die Hälfte der durch die Kugel verdrängten Fluidmasse dar. In dem Term in der Mitte sind die trägen Eigenschaften des Festkörpers mit den elastischen Eigenschaften gekoppelt. Diese kommen gerade bei mittleren Stokeszahlen zum Tragen.

Eingesetzt in das Kräftegleichgewicht (4.19) ergibt sich für den Frequenzgang eine Funktion, die nur noch von Z und Γ abhängt:

$$\frac{U_0}{W_0} = - \frac{2 Z^2 (\Gamma - 1)}{(2\Gamma + 1)Z^2 + 9Z + 9}. \quad (4.25)$$

In Bild 4.3a ist dieser Grenzfall als durchgezogene Kurve eingezeichnet. Aus dieser um die Randeffekte reduzierten Beziehung (Gl.(4.25)) kann in einfacher Weise das Grenzverhalten des Frequenzganges bei extremen Frequenzen abgelesen werden. Für niedrige Frequenzen ergibt sich eine Grenzfunktion, die sich proportional Z^2 verhält,

$$\frac{U_0}{W_0} (Z \rightarrow 0) = - \frac{2(\Gamma - 1)}{9} Z^2, \quad (4.26)$$

bei hohen Frequenzen bleibt ein frequenzunabhängiger Grenzwert übrig, der dann nur noch eine Funktion des Dichteverhältnisses ist,

$$\frac{U_0}{W_0} (Z \rightarrow \infty) = - \frac{2(\Gamma - 1)}{2\Gamma + 1}. \quad (4.27)$$

Diese beiden Grenzübergänge sind deutlich in den Bildern 4.3a–4.3c zu erkennen.

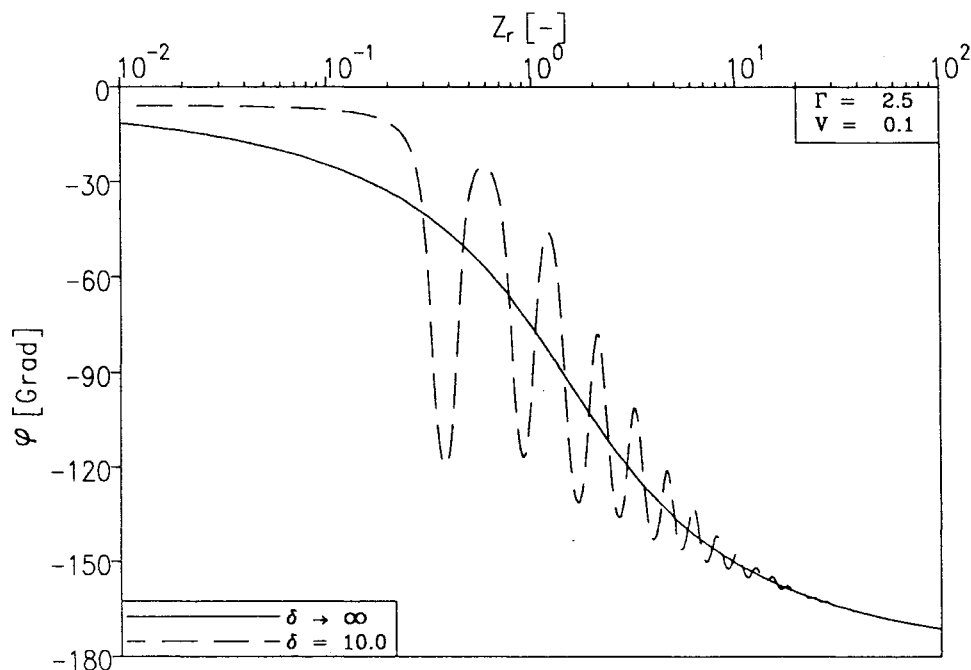


Bild 4.4: Phasenverschiebungen des Systems Kugel–Festkörper

Die Phasenverschiebung zwischen Festkörper- und Kugelbewegung ist im Bild 4.4 zu sehen. Man erkennt, daß die Relativbewegung, begründet durch die Trägheit, hinter der Erregungsbewegung zurückbleibt. Der Grenzwert der Phasenverschiebung für hohe Frequenzen beträgt gerade -180° , d.h. Festkörper und Kugel bewegen sich gegensinnig. Dies kann direkt aus der Gl.(4.27) abgelesen werden. Die rechte Seite ist rein reell und negativ (solange $\Gamma > 1$). Bei kleinen Frequenzen wird ebenfalls ein frequenzunabhängiger Grenzwert erreicht, der nur noch von dem Viskoelastizitätsmaß V abhängt:

$$\varphi(Z \rightarrow 0) = \arctan(-V).$$

Die Relativbewegung einer Kugel in einem rein elastischen Festkörper ($V = 0$) geht demnach bei kleinen Frequenzen genau in Phase, ein Festkörper mit überwiegendem viskosen Anteil ($V \rightarrow \infty$) ist um -90° verschoben. Die *Schwingungen* im Betragsgang, die aus dem Randeinfluß resultieren, machen sich natürlich auch in der Phasenverschiebung bemerkbar. (In Bild 4.4 am Beispiel: $\delta \rightarrow \infty$ bzw. $\delta = 10.0$).

Die hier veranschaulichten Ergebnisse ermöglichen somit eine Vorhersage der Relativbewegung einer Kugel in einem endlichen, kugelförmigen Festkörper mit viskoelastischen Stoffeigenschaften. Die Berechnungen sollen im weiteren dazu dienen, die Bewegung einer Kugel in einem viskoplastischen Fluid unterhalb der Fließgrenze modellhaft zu beschreiben.

Im übrigen sind die in diesem Kapitel dargestellten Gleichungen ohne weiteres auf die angeregten Schwingungen einer Kugel in einem viskoelastischen Fluid übertragbar. Durch die zu Anfang angesprochene Analogie zur Hydrodynamik ist die Struktur der Gleichungen für die Widerstandskraft und das Übertragungsverhalten gleich. Versteht man W_0 und U_0 als Geschwindigkeits- anstatt Verschiebungsamplituden, muß man lediglich in den Beziehungen (4.15) und (4.24) den komplexen Gleitmodul durch die komplexe Viskosität

$$\eta^* = \eta' - i \eta''$$

und die modifizierte Stokeszahl durch den Ausdruck

$$Y_2 = \frac{i\omega R^2 \rho_f}{\eta^*}$$

ersetzen (siehe auch [4.5]). Als Anwendung dieser Gleichungen im Fluid wird in [4.6] ein Magnet-Kugelviskosimeter vorgeschlagen, mit dem die komplexe Viskosität gemessen werden kann.

Übrigens unterscheidet sich die Bewegung einer schwingungserregten Kugel in zwei fiktiven, viskoelastischen Medien, einem Fluid und einem Festkörper, mit den gleichen Zahlenwerten der Stoffgrößen dann im wesentlichen in der Frequenzabhängigkeit. In Bild 4.5 ist dies anhand des Betragsganges $|U_0/W_0|$ und der Phasenverschiebung in einem unendlich ausgedehnten Medium zu sehen. Bei kleinen Frequenzen tritt an Stelle der $1/\Omega^2$ -Abhängigkeit (Festkörper — durchgezogene Kurve) beim Fluid (gestrichelte Kurve) eine $1/\Omega$ -Abhängigkeit, die frequenzunabhängigen Grenzwerte sind identisch.

Allerdings muß bei diesem Vergleich einschränkend gesagt werden, daß bei einem Festkörper die hier einfließende Bedingung $V = \text{konst.}$ i.allg. recht gut erfüllt ist. Dies ist bei einem Fluid in der Regel nicht gegeben. Vielmehr ist eine deutliche Frequenzabhängigkeit der Viskosität zu berücksichtigen. Beispielsweise ergeben sich bei einem Maxwell-Fluid folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{llll} \eta'(\Omega \rightarrow 0) = \text{konst.}, & \eta''(\Omega \rightarrow 0) \sim \Omega, & \rightarrow & V(\Omega \rightarrow 0) \sim \Omega \\ \eta'(\Omega \rightarrow \infty) \sim 1/\Omega^2, & \eta''(\Omega \rightarrow \infty) \sim 1/\Omega, & \rightarrow & V(\Omega \rightarrow \infty) \sim \Omega. \end{array}$$

Somit ändert sich auch das Viskoelastizitätsmaß V erheblich über den gesamten Frequenzbereich, so daß für ein reales Fluid der oben genannte Unterschied im Frequenzgang nicht deutlich wird.

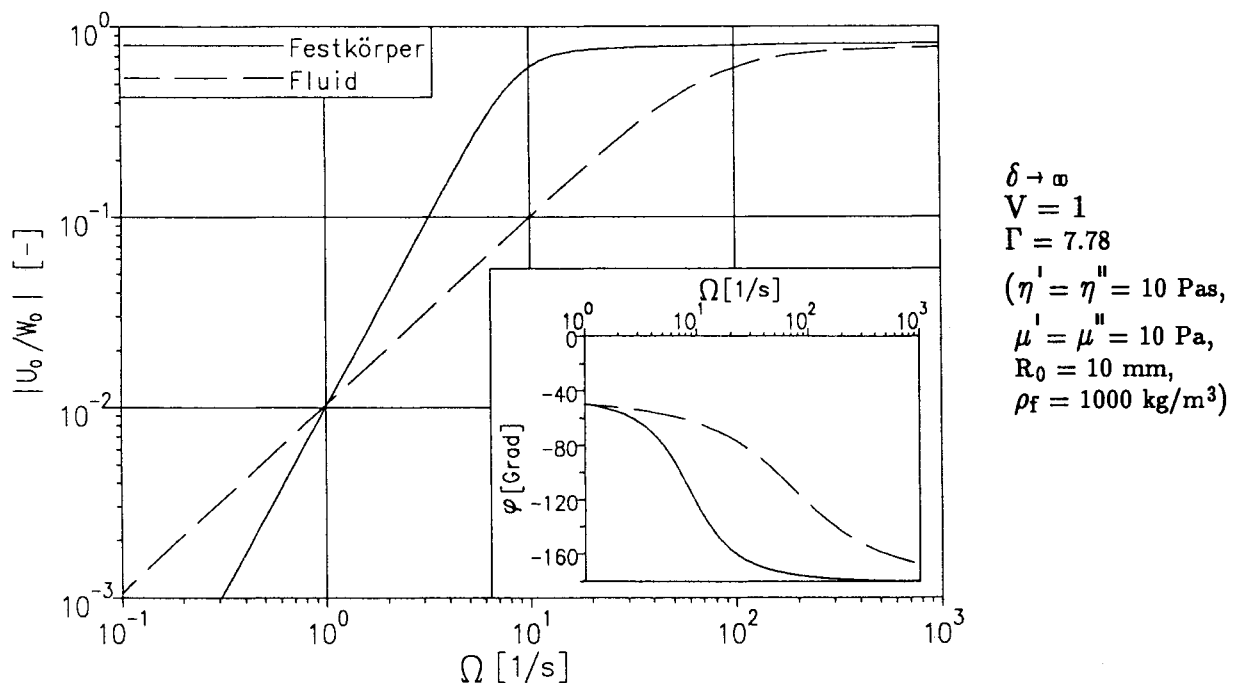


Bild 4.5: Vergleich zwischen viskoelastischem Festkörper und Fluid

4.2 Beginn der Sedimentation

In den vorangegangenen Abschnitten ist ein Modell für die fremderregte Bewegung einer Kugel in einem viskoplastischen Fluid unterhalb der Fließgrenze untersucht worden. Die Kugel schwingt dabei mit der Erregerfrequenz, aber mit einer anderen Amplitude phasenverschoben um eine Ruhelage. Bis jetzt ist der Einfluß der Schwerkraft in den obigen Rechnungen nicht mit berücksichtigt worden, um den Blick auf das Wesentliche zu erhalten.

Dies würde übertragen auf reale Verhältnisse horizontale Bewegungen von Kugel und Festkörper bedeuten. Doch ändern sich die Ergebnisse für den Frequenzgang nicht bei Bewegungen in vertikaler Richtung. Mit Berücksichtigung der Schwerkraft müßten im Kräftegleichgewicht (4.19) noch zwei zusätzliche Terme, das Gewicht der Kugel und die Auftriebskraft hinzukommen. Diese Kräfte sind, da sie auch im rein statischen Fall wirken, zeitunabhängig, d.h. für fest gewählte Geometrie- und Stoffwerte konstant.

Dann bewirken sie aber lediglich eine Verschiebung der Ruhelage um einen konstanten Wert. Mit anderen Worten, eine Kugel, die in einem viskoplastischen Fluid auf Grund der Schwerkraft nicht sedimentieren kann, sinkt beim Einbringen in das Fluid ein wenig ein. Der Betrag der Verschiebung läßt sich leicht berechnen, da im Zustand der Ruhe die Divergenz des Spannungstensors verschwinden muß:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = 0 .$$

Nach Einsetzen des Stoffgesetzes (4.2) und den schon in Kapitel 4.1.1 durchgeführten Umrechnungen entsteht die rechte Seite der Beziehung (4.7), die linke Seite ist Null. Unter der Voraussetzung eines inkompressiblen Festkörpers und der schon erwähnten Analogie zur Navier–Stokes–Gleichung, die hier dann sinngemäß angewendet werden kann, ergeben sich die schon in Kapitel 2 angegebenen Lösungen (2.13a) und (2.13b), allerdings muß die Geschwindigkeit \mathbf{v} als Verschiebung \mathbf{u} gelesen werden. Der im vorigen Kapitel berechnete Frequenzgang kann dann als eingeschwungene Bewegung um eine verschobene Ruhelage gedeutet werden.

Für die Sedimentation einer Kugel ist aber nicht nur die Bewegung unterhalb der Fließgrenze von Interesse. Durch die Schwingungen der Kugel werden in dem viskoplastischen Stoff zusätzliche Spannungen induziert, die bei bestimmten Schwingungsparametern die Fließspannung erreichen werden. Dann ist anzunehmen, daß die Kugel beginnt, wenigstens zeitweise zu sedimentieren. Es soll daher an dieser Stelle ein Grenzkriterium für dieses Einsetzen der Sinkbewegung entwickelt werden.

Dazu soll noch einmal an den Grenzwert $Y_g (= 0.14334)$ der Fließzahl erinnert werden. Ist der Wert der Fließzahl Y kleiner als Y_g , sedimentiert die Kugel in einem Bingham-Fluid, bei einem größeren Wert steckt sie fest. Definitionsgemäß ist die Fließzahl Y das Verhältnis zweier Kräfte. Die eine ist eine aus der Fließspannung und der Stirnfläche der Kugel gebildete Kraft, die andere die real an der Kugel wirkende Widerstandskraft. Im Fall der instationären Bewegung hat diese Kraft ein anderes Aussehen als unter stationären Verhältnissen. Mit der Hypothese, daß der Grenzwert Y_g unabhängig ist von der Art der angreifenden Kräfte (also eine Konstante darstellt), wird als Kriterium für das Einsetzen der Sedimentation

$$\frac{2\tau_f \pi R_0^2}{F_w^*} = Y_g \quad (4.28)$$

postuliert, d.h. erreicht eine modifizierte Fließzahl (linke Seite von Gl.(4.28)) den Grenzwert Y_g , beginnt die Kugel abzusinken. Unter den hier vorausgesetzten linearen Bedingungen setzt sich die real wirkende Widerstandskraft F_w^* additiv aus dem konstanten statischen Anteil $F_{w,st}$ und dem dynamischen Anteil $F_{w,dyn}$ zusammen:

$$F_w^* = F_{w,st} + F_{w,dyn}. \quad (4.29)$$

Der statische Beitrag ist wiederum die Summe der Spannungen an der Kugeloberfläche, projiziert auf die Richtung der Schwerkraft und läßt sich auf Grund des auch hier gültigen Kräftegleichgewichts Gl.(2.16) zu

$$F_{w,st} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 (\rho_k - \rho_f) g \quad (4.30)$$

berechnen. Da hier bis zum Erreichen des Grenzkriteriums das viskoplastische Fluid als ein Festkörper modelliert ist, beschreibt Gl.(4.15) den dynamischen Anteil der Widerstandskraft $F_{w,dyn}$. Wird innerhalb einer Schwingungsperiode (auch nur kurzzeitig) das Kriterium (4.28) erreicht, beginnt die schwingungsinduzierte Sedimentation. Fragt man nach diesem Beginn, ist der Maximalwert der dynamischen Widerstandskraft $|F_{w,dyn}|$ zu betrachten, der bei festen Stoffparametern proportional zur Kugelamplitude U_0 geht. Die Bewegung der Kugel wird durch die vorgegebene Anregung des äußeren Randes verursacht, so daß es sinnvoll ist,

die maximale Widerstandskraft in Abhängigkeit von der Amplitude W_0 anzugeben. Dazu setzt man die Übertragungsfunktion U_0/W_0 in Gl.(4.15) ein und schreibt dann (in viskoelastischer Übertragung $\mu \rightarrow \mu^*$):

$$|F_{w,dyn}| = \frac{4}{3} \pi R_0 W_0 \left| (\Gamma-1) \frac{\mu^* K Z^2}{\Gamma - K} \right|. \quad (4.31)$$

Setzt man schließlich die Kraftausdrücke (4.30) und (4.31) in das Grenzkriterium (4.28) ein, so erhält man nach einigen Umformungen einen Ausdruck in der Form

$$\left| \frac{W_0}{R_0} \right| = \frac{\frac{Y}{Y_g} - 1}{\left| G \frac{K Z^2}{\Gamma - K} \right|}, \quad (4.32)$$

in den die Fließzahl Y nach Gl.(3.3) und ein dimensionsloser Gleitmodul $G = \mu^*/(R_0 \rho_f g)$ eingeht.

Mit diesem Ergebnis wird eine Beziehung bereitgestellt, mit der es möglich ist, das Einsetzen der Sedimentation einer steckenden, schwingenden Kugel vorherzusagen. Sie gibt bei vorgegebenen Stoffgrößen von Fluid und Kugel ($\tau_f, \rho_f, \mu^*, \rho_k$) sowie dem Radius R_0 der Kugel die

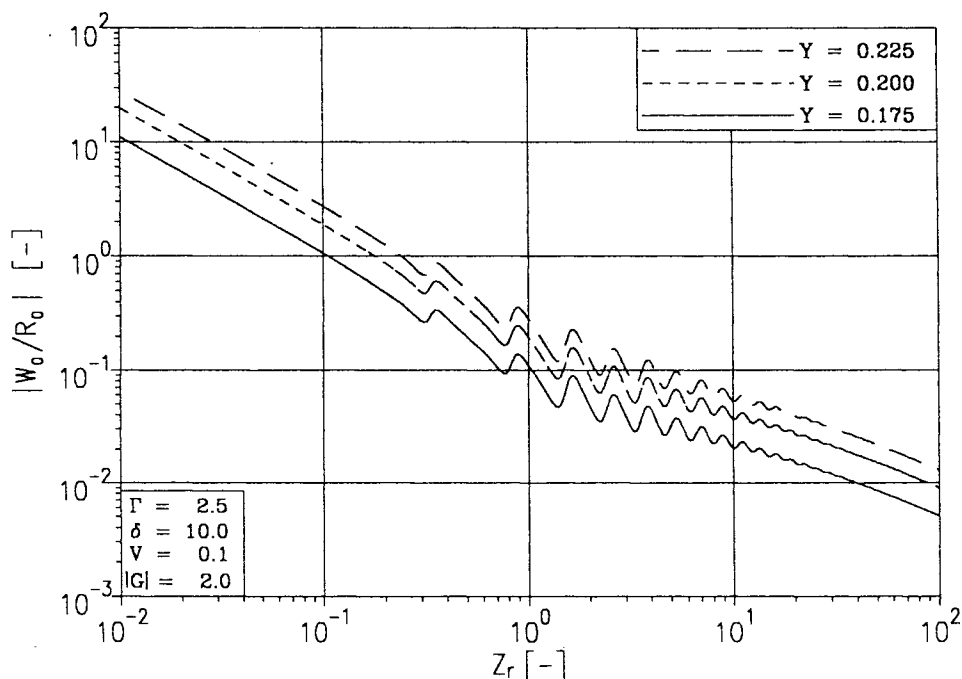


Bild 4.6: Grenzkurven zum Einsetzen der Sedimentation

Kombination zwischen den beiden Schwingungsparametern (Amplitude W_0 , Frequenz Ω) der Erregung an, die notwendig sind, um die Kugel zu sedimentieren. Gibt man also einen der beiden Parameter vor, so liegt der andere fest. In Bild 4.6 ist dieser Zusammenhang in Abhängigkeit des reellen Frequenzparameters Z_r verzeichnet. Bei sonst festen Stoff- und Geometriewerten ist hier der Einfluß von Y , also der dimensionslosen Fließspannung, zu sehen. Die Kurven sind als Grenzkurven zu verstehen, d.h. Schwingungsparameter unterhalb der Kurven führen zu keiner Sedimentation, oberhalb der Kurven sedimentiert die schwingende Kugel im zeitlichen Mittel. Je höher die Anregungsfrequenz gewählt wird, desto kleiner wird die notwendige Anregungsamplitude. Die *Schwingungen* in den Kurven resultieren wieder aus dem Randeinfluß, der sich wie bei der Übertragungsfunktion im mittleren Frequenzbereich bemerkbar macht. Die Extremaleigenschaften der Gl.(4.32) bezüglich der Kreisfrequenz werden am besten anhand des unendlich ausgedehnten viskoplastischen Fluids deutlich. Dann geht der Randeinflußparameter $\delta \rightarrow \infty$ und die Funktion kann mit Gl.(4.25) zu

$$\left| \frac{W_0}{R_0} \right| (\delta \rightarrow \infty) = \frac{\frac{Y}{Y_g} - 1}{\left| G \frac{Z^2 (Z^2 + 9Z + 9)}{(2\Gamma + 1)Z^2 + 9Z + 9} \right|} \quad (4.33)$$

geschrieben werden. Daraus sind sofort zwei Grenzfälle abzulesen, einerseits für kleine Frequenzen ($Z \rightarrow 0$),

$$\left| \frac{W_0}{R_0} \right| (Z \rightarrow 0) = \frac{\frac{Y}{Y_g} - 1}{\left| G Z^2 \right|}, \quad (4.34)$$

andererseits für sehr große Frequenzen ($Z \rightarrow \infty$),

$$\left| \frac{W_0}{R_0} \right| (Z \rightarrow \infty) = \frac{(2\Gamma + 1) \left[\frac{Y}{Y_g} - 1 \right]}{\left| G Z^2 \right|}. \quad (4.35)$$

Das bedeutet, daß sich die dimensionslose Anregungsamplitude im wesentlichen, bis auf den mittleren Frequenzbereich, proportional zu $1/|Z^2|$ verhält, was auch durch das Bild 4.7 verdeutlicht wird. Dort ist die Anregungsamplitude zusammen mit den beiden Grenzfällen zu sehen, allerdings als Funktion des reellen Frequenzparameters, so daß sich die Proportionalität in $1/Z_r$ widerspiegelt.

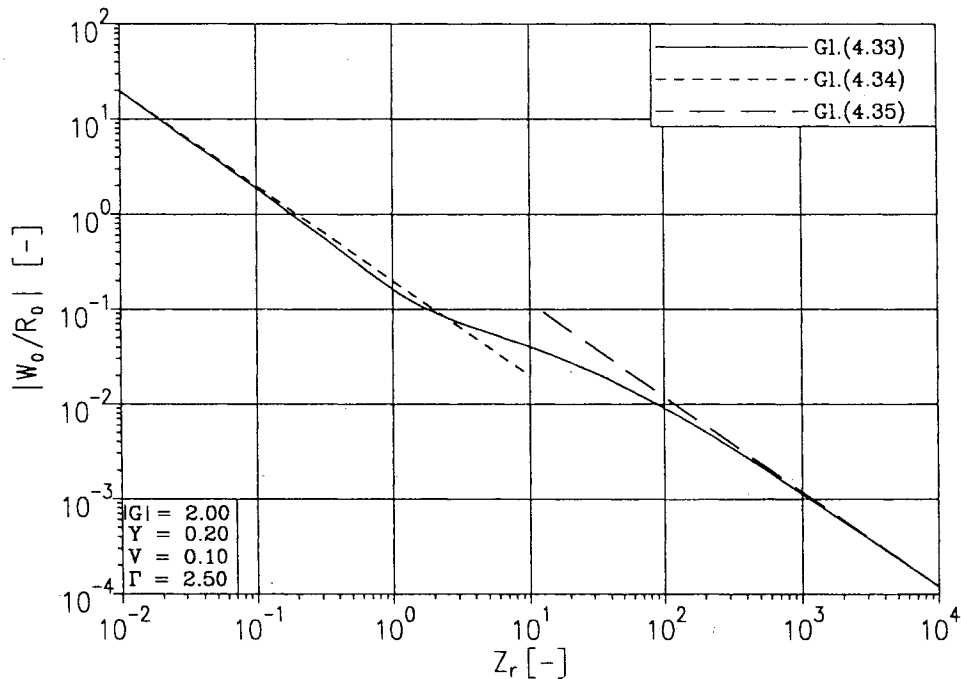


Bild 4.7: Grenzkurve zusammen mit den beiden Grenzfällen

Die hier bereitgestellten Ergebnisse beschreiben die fremderregte Bewegung einer Kugel in einem viskoplastischen Fluid unterhalb der Fließgrenze und geben die Schwingungsparameter an, bei denen erstmalig eine Sedimentation der Kugel auftritt. Da die Spannungen wie die Kugel selbst harmonisch schwingen, wird bei kleinen Schwingungsparametern oberhalb der in Bild 4.6 zu sehenden Grenzkurven, innerhalb einer Periode, nur kurzzeitig die Fließspannung erreicht bzw. überschritten. Für einen mit dem Behälter mitbewegten Beobachter müßte daher neben der harmonischen Schwingung der Kugel auch eine kurzzeitige Bewegung der Ruhelage in Schwerkrafttrichtung zu sehen sein.

In die Gl.(4.32) geht von den Stoffgrößen des viskoplastischen Fluids, die im Fließbereich gelten (bei einem Bingham-Fluid $\hat{\eta}$ und τ_f), nur die Fließspannung τ_f ein. Es werden keine weiteren Informationen, insbesondere über das Fließverhalten benötigt. Der Grenzwert Y_g für die Fließzahl Y , in der ebenfalls nur die Fließspannung eingeht, hat aber eine über ein Bingham'sches Fluid hinausgehende Bedeutung. Denn der Wert für Y_g ist durch die in Kapitel 2 dargestellte Grenzschichtbetrachtung bei hohen Bi-Zahlen motiviert. In diesem Grenzfall kleiner Sinkgeschwindigkeiten kann das Fließverhalten anderer Fluide mit

Fließgrenzen (z.B. Herschel–Bulkley, Casson) als das von Bingham–Fluiden approximiert werden, so daß sich auch für diese Fluide die Gl.(4.32) anwenden läßt.

Da das viskoplastische Fluid bis jetzt nur als Festkörper modelliert wurde, ist es natürlich nicht möglich, an Hand der bisherigen Betrachtungen Aussagen über die Bewegung der Kugel im Grenzbereich knapp oberhalb der Fließgrenze zu treffen. Doch ist gerade die für solche instationären Sedimentationsprozesse maßgebliche, zeitlich gemittelte Sinkgeschwindigkeit, die sicherlich von den Schwingungsparametern abhängt, von besonderem Interesse. Daher soll im nächsten Abschnitt auf der Basis eines mechanischen Ersatzmodells die Bewegung auch oberhalb der Fließgrenze simuliert werden.

5 Mechanisches Ersatzmodell

Die Berechnung des mechanischen Verhaltens eines Systems, insbesondere auch eines dreidimensionalen Kontinuums vereinfacht sich wesentlich, wenn es gelingt, das System durch mechanische Elemente mit konzentrierten Parametern zu modellieren. Sicherlich ist die Auswahl eines geeigneten Ersatzsystems mit Schwierigkeiten verbunden. So wird man bemüht sein, die Anzahl der mechanischen Elemente möglichst gering zu halten, es also durch wenige diskrete Systemparameter zu beschreiben. Gerade bei einem Kontinuum kann das jedoch bedeuten, daß für ein reales System mehrere Ersatzmodelle existieren, je nachdem welches Verhalten sie modellieren sollen. Diese Ersatzmodelle unterscheiden sich im wesentlichen in der Zusammensetzung der einzelnen mechanischen Elemente und in den Freiheitsgraden, d.h. in der Anzahl der Koordinaten, die notwendig sind, die Bewegung darzustellen.

Zur Modellierung von harmonischen Bewegungen sind verhältnismäßig wenige mechanische Elemente notwendig, die im Bild 5.1 dargestellt sind.

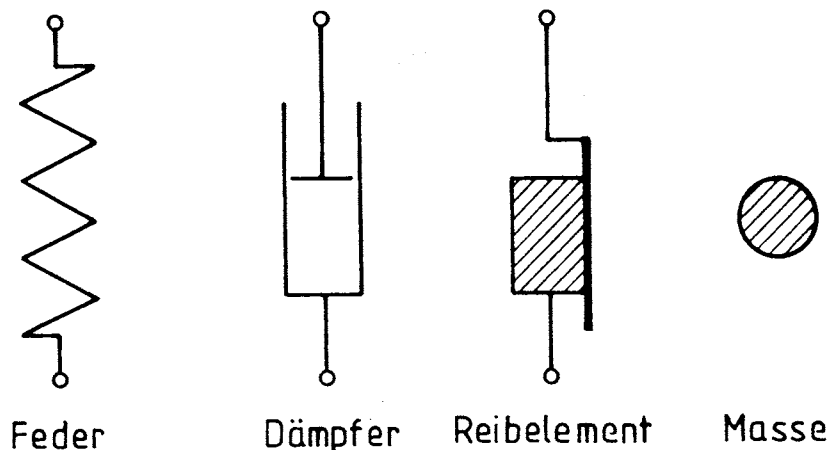


Bild 5.1: Elemente zur Modellierung von Schwingungssystemen

Die Massen eines betrachteten Systems stellt man sich auf einzelne Punkte konzentriert vor. Die Verbindungen zwischen diesen Massenpunkten werden durch masselose Federn, Dämpfer oder Reibungselemente erreicht [5.1]. Aufbauend auf diese Bauteile soll hier nun ein

mechanisches Ersatzmodell entwickelt werden, welches die harmonisch angeregte Bewegung einer starren Kugel in einem viskoplastischen Fluid möglichst realistisch wiedergeben kann [5.2]. Es sei hier angemerkt, daß sich durch ein solches Modell nicht das gesamte Verhalten beschreiben läßt. So sollen hier die in Kapitel 4 geschilderten Randeffekte keine Rolle spielen, es wird nur der Fall des unendlich ausgedehnten Fluids berücksichtigt.

5.1 Modellaufbau

Da die Kugel rein translatorische Bewegungen in dem Fluid durchführt, wird eine Koordinatenrichtung ausreichen, um diese Bewegungen zu beschreiben. Zudem erzeugt eine permanente äußere Erregung die Kugelschwingungen, so daß das Ersatzsystem sicherlich zum Typ der erzwungenen Schwinger gehören wird. Ansonsten muß das mechanische Ersatzmodell drei Anforderungen gerecht werden:

- 1) Es soll die Kugelschwingungen um eine Ruhelage unterhalb der Fließgrenze beschreiben können. Dazu sind die Ergebnisse der Untersuchungen in Kapitel 4.1.2 (linear viskoelastischer Festkörper) zu nutzen.
- 2) Das Einsetzen der Sinkbewegung der Kugel bei Erreichen der Fließgrenze muß modelliert werden, d.h. das Grenzkriterium aus Kapitel 4.2 ist einzubauen.
- 3) Schließlich soll das Absinken der Kugel in Richtung der Schwerkraft nach Überschreiten der Grenzwerte von Erregungsamplitude und –frequenz simuliert werden. Insbesondere im Grenzfall großer Schwingungsamplituden und niedriger Frequenzen (quasistationärer Zustand) soll das stationäre Absinken nach Beris et. al [2.17] sichtbar werden.

Bei der Modellierung des Ersatzsystems stellt sich als erstes die Frage, welche Massen in dem Originalsystem einen Einfluß auf die Schwingbewegungen haben. Ausgehend von der Bewegungsgleichung (4.19) ist zunächst die Masse der Kugel m zu berücksichtigen. Desweiteren eine Art Auftriebsmasse m_a , die im letzten Teil der Gl.(4.19) zu finden ist. Bei einer beschleunigten Bewegung in einem Kontinuum wird in der näheren Umgebung der

Kugel zusätzlich Masse mitbewegt, die sich als ein Beschleunigungswiderstand bemerkbar macht und mit in der Widerstandskraft F_w (siehe Gl.(4.24)) steckt. Daher ist im Ersatzmodell noch eine virtuelle Masse m' einzuführen. Die einfachste Modellierung eines linearviskoelastischen Festkörpers zur Befriedigung der ersten Anforderung ist der Voigt-Körper, bei dem eine Feder und ein Dämpfer parallel geschaltet sind [4.4].

Da die Kugel im realen System bei bestimmten Schwingungsparametern anfängt zu sedimentieren, muß im mechanischen Ersatzmodell zusätzlich ein Reibelement (mit trockener Reibung) vorhanden sein. Ein solches Element läßt eine Bewegung nur bei Überschreiten eines Grenzwertes zu. Schließlich kann zur Erfüllung der dritten Anforderung noch ein Dämpfer erforderlich sein.

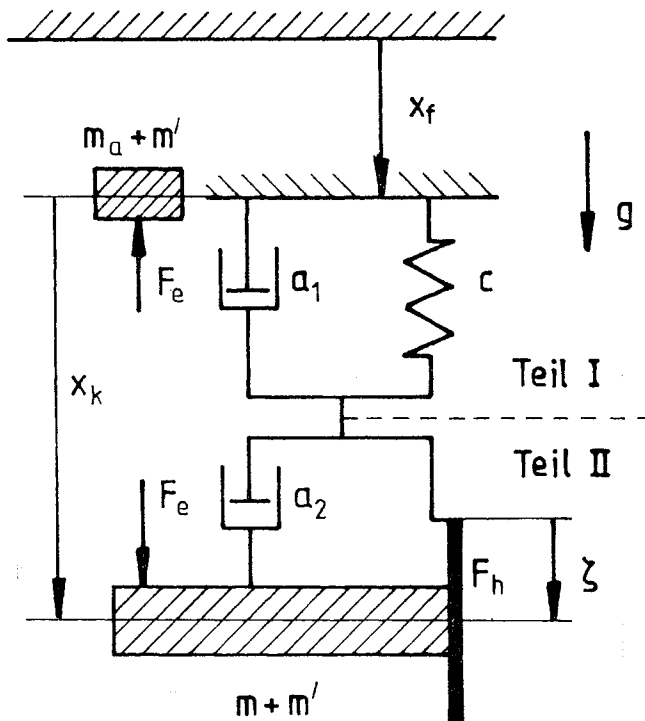


Bild 5.2: Mechanisches Ersatzmodell

Diese grundsätzlichen Überlegungen führen zu einem mechanischen Ersatzmodell für die Bewegung einer Kugel in einem viskoplastischen Fluid, wie es das Bild 5.2 darstellt. Eine Masse, die sich aus der Kugelmasse m und der virtuellen Masse m' zusammensetzt, hängt an einem Reibelement (Reibkonstante F_h) und einem parallel dazu geschalteten Dämpfer (Konstante a_2). Diese beiden Elemente sind mit einem Voigt-Körper (Federkonstante c , Dämpferkonstante a_1) in Reihe geschaltet. Der Voigt-Körper stützt sich an einem beweglichen Rahmen ab, der durch eine vorgegebene Bewegung $x_f(t)$ erregt wird.

Zusätzlich greift an der Masse $m+m'$ noch eine externe Kraft F_e an. Diese Fernwirkungskraft ist so gebaut, daß eine Masse m_a+m' immer gerade die Bewegung des Rahmens mitmacht, wobei die Wirkung von der Masse $m+m'$ ausgeht. Die Übertragungsweise der Kraft kann man sich beispielsweise in magnetischer oder elektrischer Form vorstellen.

Solange der Wert der Reibkonstante F_h an dem Reibelement nicht erreicht wird, haftet die Masse an dem Element, so daß eine starre Verbindung zwischen der Masse und dem Voigt-Körper besteht. Erst beim Überschreiten dieser Reibkonstanten kommt es zu einer Verlagerung der Ruhelage. Das Ersatzmodell ist eindimensional, alle Bewegungen finden in der Koordinatenrichtung des Schwerfeldes statt. Die Relativbewegung der Masse wird durch die Koordinate $x_k(t)$, die Verlagerung der Ruhelage durch die Verschiebungsordinate $\zeta(t)$ dargestellt. Da es sich hier um ein Schwingungssystem mit zwei Freiheitsgraden handelt, wird man zur mathematischen Beschreibung der Bewegung ein System von zwei Gleichungen benötigen. Desweiteren unterscheidet man zwei Fälle. Solange die Reibkonstante F_h nicht erreicht wird, tritt nur der erste Teil des Modells in Aktion. In diesem Fall soll ein linearer viskoelastischer Festkörper modelliert werden (vgl. 1. Forderung), so daß zur Beschreibung auch lineare Federn und Dämpferelemente genutzt werden können. Aus dem Newtonschen Axiom erhält man dann das System der Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (m+m')(\ddot{x}_k + \ddot{x}_f - g) &= F_e - a_1(\dot{x}_k - \dot{\zeta}) - c(x_k - \zeta) \\ \dot{\zeta} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei die Punkte auf den Variablen Ableitungen nach der Zeit bedeuten. Die Fernwirkungskraft wird entsprechend der angegebenen Forderung zu

$$F_e = (m_a + m')(\ddot{x}_f - g) \tag{5.2}$$

gebildet. Auf der linken Seite der ersten Gleichung von (5.1) ist die Masse mit der resultierenden Gesamtbeschleunigung zu sehen, während auf der rechten Seite die Schnittkräfte an der Masse stehen. Die zweite Beziehung in (5.1) beschreibt die starre Kopplung der Masse am Reibelement. In der Schwingungslehre ist es üblich, die Bewegungs-

gleichungen in einer nach der Relativbewegung x_k geordneten Form zu schreiben, so daß aus Gl.(5.1) das folgende System entsteht:

$$\begin{aligned} (m+m')\ddot{x}_k + a_1(\dot{x}_k - \dot{\zeta}) + c(x_k - \zeta) &= -(m-m_a)(\ddot{x}_f - g), \\ \dot{\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Wird der Wert der Reibkonstante F_h überschritten, kommt der zweite Teil des Ersatzmodells zusätzlich in Aktion. Die entstehende Bewegung wird dann durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (m+m')\ddot{x}_k + (a_2\sqrt{|\dot{\zeta}|} + F_h) \cdot \text{sgn}(\dot{\zeta}) &= -(m-m_a)(\ddot{x}_f - g), \\ (a_2\sqrt{|\dot{\zeta}|} + F_h) \cdot \text{sgn}(\dot{\zeta}) &= a_1(\dot{x}_k - \dot{\zeta}) + c(x_k - \zeta), \end{aligned} \quad (5.4)$$

beschrieben. Im zweiten Teil des Ersatzmodells ist ein nichtlinearer Dämpfer a_2 eingebaut, dessen Dämpfungskraft proportional zur Wurzel der Geschwindigkeit gehen soll. Diese spezielle Charakteristik des Dämpfers ist notwendig, um das Verhalten eines Bingham-Fluids in bestimmten Grenzfällen zu modellieren. Begründet wird diese Wahl ausführlich im nächsten Abschnitt.

Welches der beiden Gleichungssysteme (5.3) und (5.4) die momentane Bewegung beschreibt, wird hier durch die Reibkraft F_h bestimmt. In ihr muß also das im vorherigen Kapitel postulierte Grenzkriterium zum Einsetzen der Sinkbewegung eingehen. Maßgeblich war dort die an der Kugel angreifende Widerstandskraft F_w bei einem linear-viskoelastischen Festkörper. Diese Kraft ist allein mit der Relativbewegung der Kugel zu bilden und wird im Ersatzmodell von der linearen Feder c und dem Dämpfer a_1 erzeugt. Allerdings ist nach Gl.(4.24) noch ein Beschleunigungswiderstand mit zu berücksichtigen, der sich dann entsprechend zu der Bemerkung auf Seite 52 zu $m'\ddot{x}_k$ ergeben muß.

Überschreitet somit die Widerstandskraft F_w den Wert der Reibkraft F_h , wird von dem System (5.3) zu (5.4) geschaltet, bei Unterschreiten erfolgt die Rückschaltung auf das

System (5.3). Die Bewegung am Reibelement ist dann sozusagen eingefroren. Damit können folgende Schaltbedingungen formuliert werden:

<u>System</u>	<u>Bedingung</u>	
(5.3) → (5.4)	$m' \ddot{x}_k + a_1 \dot{x}_k + c(x_k - \zeta) = F_h h(\dot{\zeta}),$	(5.5a)
(5.4) → (5.3)	$\dot{\zeta} = 0.$	(5.5b)

$$\text{mit } h(\dot{\zeta}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \dot{\zeta} \geq 0 \\ -1 & \text{für } \dot{\zeta} < 0 \end{cases}$$

Die Ergebnisse von Kapitel 4 führen also zu einem mechanischen nichtlinearen Ersatzmodell, das aus einer Feder, einem Reibelement, einer externen Kraft und zwei Dämpfern aufgebaut ist. Es soll das grundsätzliche Verhalten einer zu Schwingungen angeregten Kugel in einem viskoplastischen Fluid möglichst realistisch wiedergeben. Dazu müssen in dem Ersatzmodell insgesamt vier Modellparameter (a_1 , c , a_2 und F_h) und die Massen (m , m' und m_a) in geeigneter Weise durch den Vergleich mit den Feldbeschreibungen bestimmt werden.

5. 2 Identifikation der Modellparameter

Die beteiligten Massen im Ersatzmodell sind entsprechend aus den geometrischen und stofflichen Größen des Feldmodells zu bestimmen:

Kugelmasse:	$m = 4/3 \pi \rho_k R^3,$
beschl. Fluidmasse:	$m' = \beta 4/3 \pi \rho_f R^3, \quad \text{mit } \beta = 0.5,$
Auftriebsmasse:	$m_a = 4/3 \pi \rho_f R^3.$

Der Faktor β gibt das (schon potentialtheoretisch begründbare) Ergebnis bei der beschleunigten Bewegung einer Kugel in einem Kontinuum wieder. Die virtuelle Masse besteht gerade aus der Hälfte der durch die Kugel verdrängten Kontinuumsmasse, wie man ja schon in Kapitel 4.1.2 gesehen hat. Betrachtet man zunächst die Kugelbewegungen unterhalb der Fließgrenze, wird in der Feldbeschreibung nur das Modell des viskoelastischen Festkörpers benötigt. Im mechanischen Ersatzmodell beschreibt das System (5.3), in dem

nur die Parameter a_1 und c auftauchen, diese Bewegung. Die Lösung der Bewegungsgleichung für eine harmonische Erregung (vgl. Abschnitt 4.2) in der Form

$$x_f = \hat{x}_f e^{i\Omega t}$$

läßt sich leicht durch den Ansatz

$$x_k = \hat{x}_k e^{i\Omega t} + x_{k0} \quad (5.6)$$

$$\text{mit } x_{k0} = (m - m_a) \cdot \frac{g}{c}$$

finden (siehe z.B. [5.3]). Dieser Ansatz berücksichtigt die Ruhelage der Kugel x_{k0} , die sich allein unter der Wirkung der Schwerkraft einstellt. Die Lösung kann dann in Form des komplexen Frequenzganges

$$\frac{\hat{x}_k}{\hat{x}_f} = \frac{2(\Gamma-1)}{2\Gamma+1} \cdot \frac{\Omega^2}{-\Omega^2 + i\Omega \frac{a_1}{m+m'} + \frac{c}{m+m'}} \quad (5.7)$$

geschrieben werden.

Wie zu erwarten, ist in Gl.(5.7) der Frequenzgang eines trägheitserregten Masseschwingers zu erkennen. Dies äußert sich im asymptotischen Verhalten des Betragsganges für $\Omega \rightarrow \infty$, der hier gegen einen konstanten Wert läuft. Im Gegensatz dazu geht bei krafterregten Schwingern, beispielsweise bei der Erregung durch Dämpfer oder Feder, der Betragsgang asymptotisch gegen Null.

Diese Schreibweise des Frequenzganges hat große Ähnlichkeit mit der in Gl.(4.25) angegebenen Funktion für den Fall des unbegrenzten Fluids. Die Vorfaktoren, in denen nur das Dichteverhältnis eingeht, stimmen überein. Formt man das Ergebnis des mechanischen Modells (Gl.(5.7)) zweckmäßigerweise etwas um

$$\frac{\hat{x}_k}{\hat{x}_f} = \frac{2(\Gamma-1)}{2\Gamma+1} \cdot \frac{\frac{m+m'}{c} \Omega^2}{-\frac{m+m'}{c} \Omega^2 + i\Omega \frac{a_1}{c} + 1},$$

kann es direkt mit dem Ergebnis der Feldtheorie (vgl. Gl.(4.25))

$$\frac{U_0}{W_0} = \frac{2(\Gamma-1)}{2\Gamma+1} \cdot \frac{-\frac{2\Gamma+1}{9} Z^2}{\frac{2\Gamma+1}{9} Z^2 + Z + 1}$$

verglichen werden. Damit lassen sich sofort die beiden Modellparameter a_1 und c bestimmen, damit die Frequenzgänge übereinstimmen:

$$\frac{m+m'}{c} \Omega^2 = -\frac{2\Gamma+1}{9} Z^2$$

$$i\Omega \frac{a_1}{c} = Z$$

Nach Einsetzen der komplexen Stokeszahl und der Massen erhält man folgende bemerkenswert einfache Beziehungen:

$$c = 6 \pi R_0 (\mu' + i\mu''), \quad (5.8)$$

$$a_1 = 6 \pi R_0^2 \sqrt{\mu' + i\mu''} \sqrt{\rho_f}. \quad (5.9)$$

In beide Modellparameter gehen also sowohl die Stoffeigenschaften des Fluids als auch die Geometrie der Kugel ein. Die Federkonstante enthält gegenüber dem rein elastischen Festkörper in der komplexen Verallgemeinerung zusätzlich über μ'' Dämpfungsanteile. Auch in der Dämpferkonstante sind sowohl elastische als auch dämpfende Anteile vorhanden, und zusätzlich spielt die Trägheit des Fluids eine Rolle.

Werden die Konstanten c und a_1 nach den Beziehungen (5.8) bzw. (5.9) berechnet, gibt das in Bild 5.2 dargestellte mechanische Ersatzmodell die harmonisch angeregte Bewegung einer Kugel in einem viskoelastischen Festkörper vollständig wieder.

Bei der Bestimmung der Systemparameter des zweiten Teils des Ersatzmodells geht die letzte, in Abschnitt 5.1 formulierte, Anforderung ein. Es soll für langsame Schwingungen, die oberhalb der Fließgrenze liegen, die stationäre Sinkgeschwindigkeit der Kugel zu erkennen sein. Dazu betrachtet man noch einmal das numerische Ergebnis von Beris et. al. [2.17], und zwar der Zusammenhang zwischen dem Widerstandskoeffizienten C und der Fließzahl Y . Für den gesamten Bereich der Fließzahl approximiert die in Gl.(2.45) angegebene Beziehung den Verlauf. Doch bringt man eine steckende Kugel durch harmonische Bewegungen zum sedimentieren, werden die sich einstellenden Sinkgeschwindigkeiten im allgemeinen sehr

klein sein. Dies äußert sich durch einen mit repräsentativen Größen gebildeten recht hohen Wert des Widerstandskoeffizienten. Im Y - C -Diagramm befindet man sich dann ziemlich nahe am Grenzwert Y_g (Bild 5.3). Für diesen Bereich ist die durch die Grenzschichtbetrachtung verbesserte Approximation des numerischen Ergebnisses in der Form

$$C = \frac{\alpha Y}{(Y_g - Y)^2} \quad (2.56)$$

mit $\alpha = 1.031/3$ angegeben.

Der in der Literatur [2.17] angegebene Zahlenwert $\alpha = 1.031$ in der Approximation (2.56) ist offensichtlich ein Druckfehler, wie man im Bild 5.3 deutlich sehen kann.

Sie gilt insbesondere für den Bereich $0.14334 \geq Y \geq 0.12$, in dem die relativen Abweichungen von den diskreten numerischen Ergebnissen aus [2.17] kleiner als 1% sind. Durch Einsetzen der Kennzahlen kann die Gl.(2.56) in einer etwas anderen Form geschrieben werden, die für die weiteren Betrachtungen günstiger ist:

$$\pm \frac{\pi}{Y_g} \sqrt{4 \cdot 1.031 \hat{\eta} \tau_f R_0^3 \sqrt{V_\infty}} = F - \frac{2\pi \tau_f R_0^2}{Y_g} \quad (5.10)$$

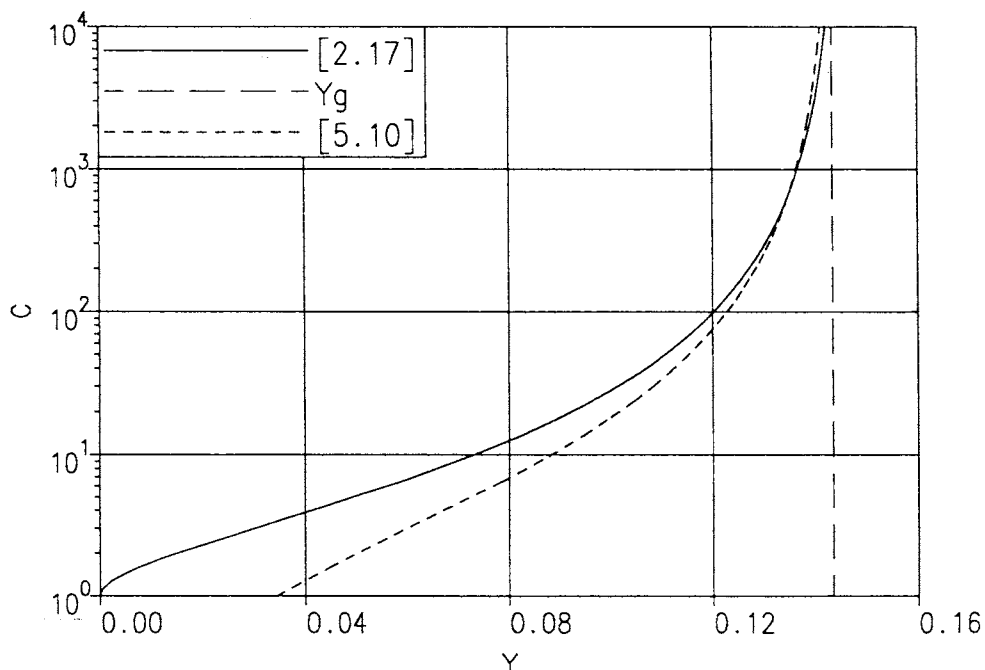


Bild 5.3: Approximation des Zusammenhangs $C = f(Y)$ für $Y \rightarrow Y_g$

Die Bestimmung der Parameter a_2 und F_h mit Hilfe dieser Gleichung kann dann erfolgen, wenn man die erste Beziehung des Systems (5.4) im Grenzfall langsamer Schwingungen, d.h. unter quasistationären Bedingungen studiert. Dann können dort die Beschleunigungen \ddot{x}_k und \ddot{x}_f vernachlässigt werden und es bleibt eine Beziehung in der gleichen Form

$$(a_2 \sqrt{|\dot{\zeta}|} + F_h) \cdot \text{sgn}(\dot{\zeta}) = (m - m_a)g \quad (5.11)$$

übrig. Hier liegt auch die Forderung nach einem nichtlinearen Dämpfer in dem Ersatzmodell begründet. Die Kraft F entspricht den angreifenden Massenkräften $(m - m_a)g$ und durch Koeffizientenvergleich mit Gl.(5.10) ergeben sich daher die letzten beiden Konstanten in dem Ersatzmodell zu:

$$a_2 = \frac{\pi}{Y_g} \sqrt{4 \cdot 1.031 \hat{\eta} \tau_f R_0^3}, \quad (5.12)$$

$$F_h = \frac{2\pi \tau_f R_0^2}{Y_g}. \quad (5.13)$$

Somit können sämtliche Parameter im Ersatzmodell durch Stoffgrößen von Kugel und Fluid sowie durch den Radius der Kugel bestimmt werden.

5.3 Gesamtmodell

Bei Bewegungen unterhalb der Fließgrenze, wenn nur der erste Teil des Schwingungssystems gebraucht wird, ist die Lösung für die Kugelbewegung schon im vorherigen Abschnitt dargestellt worden (vgl. Gl.(5.7)). Auch für das Einsetzen der Sedimentation kann hier sofort eine der in Kapitel 4.2 angegebenen Gl.(4.33) entsprechende Beziehung hergeleitet werden. Läßt man gedanklich die Bewegungen im Ersatzmodell immer größer werden, so wird bei einer bestimmten Konstellation der Schwingungsparameter die erste der beiden Schaltbedingungen (5.5) zum ersten Mal erreicht. Durch Einsetzen des Ansatzes für x_k Gl.(5.6) sowie Darstellung der Kugelamplitude \hat{x}_k durch den Frequenzgang (5.7) kann die

Schaltbedingung nach der Erregeramplitude \hat{x}_f umgeformt werden. Der Betrag dieser Amplitude ergibt sich dann zu:

$$|\hat{x}_f| = \left| \frac{2\Gamma+1}{2(\Gamma-1)} \{F_h - (m-m_a)g\} \cdot \frac{-\frac{m+m'}{c}\Omega^2 + i\frac{a_1}{c}\Omega + 1}{\frac{m+m'}{c}\Omega^2 (-m'\Omega^2 + ia_1\Omega + c)} \right| \quad (5.14)$$

Die Gl.(5.14) gibt an, mit welcher Amplitude \hat{x}_f das Ersatzsystem bei vorgegebener Frequenz Ω erregt werden muß, damit die Reibkraft überschritten wird und die Massen absinken. Es läßt sich zeigen, daß dieses Ergebnis bei entsprechender Wahl der Systemparameter c , a_1 und F_h (s.o.) mit der in Kapitel 4.2 angegebenen Gl.(4.33) für ein unendlich ausgedehntes Fluid identisch ist.

Zur Berechnung einer Bewegung, in der innerhalb einer Schwingungsperiode die Reibkonstante F_h erreicht wird, müssen die beiden zeitabhängigen DGLs-Systeme (5.3) und (5.4) zusammen mit den Schaltbedingungen (5.5) gekoppelt gelöst werden. Das nichtlineare System (5.4) ist dabei auf analytischem Wege nicht zu behandeln, so daß hier für die gesamte Berechnung ein numerisches Verfahren genutzt wird. Beide Systeme enthalten gewöhnliche DGLen 2. Ordnung mit den 2 Unbekannten, der Relativbewegung der Kugel x_k und der Verschiebung der Ruhelage ζ . Man führt nun die Relativgeschwindigkeit v der Kugel als eine dritte Unbekannte ein, die auch als \dot{x}_k identifiziert werden kann. Dadurch reduzieren sich die DGLen auf die Ordnung 1, allerdings nun mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

Zur Nutzung des numerischen Verfahrens ist ein Anfangswertproblem zu formulieren, in dem die beiden Systeme (5.3) und (5.4) stückweise zu berechnen sind. Solange die Bedingung (5.5b) erfüllt ist, also $m'\ddot{x}_k + a_1\dot{x}_k + c(x_k - \zeta) \leq F_h$ gilt, ergeben sich die Bewegungen aus der Lösung von

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{x}_k \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ \frac{2(\Gamma-1)}{2\Gamma+1} \{g + x_f \Omega^2 \cos(\Omega t)\} - \frac{a_1}{m+m'} v - \frac{c}{m+m'} (x_k - \zeta) \end{bmatrix}, \quad (5.15a)$$

sobald sich $m' \ddot{x}_k + a_1 \dot{x}_k + c(x_k - \zeta) > F_h$ ergibt, muß die Berechnung nach

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{x}_k \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v \\ \frac{2(\Gamma-1)}{2\Gamma+1} \{g + x_f \Omega^2 \cos(\Omega t)\} - \frac{a_1}{m+m'} (v-A) - \frac{c}{m+m'} (x_k - \zeta) \end{bmatrix} \quad (5.15b)$$

$$\text{mit der Abkürzung } A = \pm \left\{ \sqrt{\frac{a_2^2}{4 a_1^2} \pm v \pm \frac{c}{a_1} (x_k - \zeta) - \frac{F_h}{a_1} - \frac{a_2}{2 a_1}} \right\}^2$$

erfolgen. In der Abkürzung A ist für das Zeichen \pm im Falle $\dot{\zeta} > 0$ das Pluszeichen, bei $\dot{\zeta} < 0$ das Minuszeichen einzusetzen. Zur Berechnung kommt hier eine Methode zum Einsatz, welches das System schrittweise integriert. Der Lösungsalgorithmus basiert auf einem Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren [5.4] und benutzt innerhalb eines Zeitschrittes eine automatische Unterteilung des Integrationsgebietes. Die Berechnung erfordert Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ für die drei Unbekannten, die hier sinnvollerweise zu

$$\begin{aligned} x_k &= 0 && (\text{oder } x_{k0} = (m-m_a)g/c, \text{ Ruhelage der Kugel}) \\ v &= \dot{x}_k = 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

gewählt werden. Danach sind jeweils die Integrationsergebnisse die neuen Startwerte für den nächsten Zeitschritt.

Die beiden Konstanten c und a_1 sind entsprechend den Gleichungen (5.8) und (5.9) bei einem viskoelastischen Kontinuum komplexe Größen. Natürlich machen bei der numerischen Berechnung des Gesamtsystems nur reelle Größen einen Sinn. Bei den später benutzten Substanzen ist einerseits der viskose Anteil im Gleitmodul eine Größenordnung kleiner als der elastische Anteil, andererseits tritt während einer Schwingungsperiode nur kurzzeitig der zweite Teil des Schwingungssystems in Aktion. Daher ist es gerechtfertigt, bei der Berechnung von Gl.(5.15) den Betrag der jeweiligen Konstanten einzusetzen.

Das Ergebnis der Integration gibt den Ort x_k und die Verschiebung ζ in Abhängigkeit der Zeitschritte für fest gewählte Parameter (Modellparameter und auch Frequenz Ω) wieder. Zur Auflösung der Schwingungen ist je nach gewählter Frequenz eine unterschiedliche Anzahl von Zeitschritten notwendig. In Bild 5.4 ist exemplarisch für reine reelle Modellparameter der Verlauf von x_k und ζ in Abhängigkeit der Zeit t dargestellt. Die obere durchgezogene Kurve gibt die Relativbewegung der Masse x_k wieder, darunter ist die

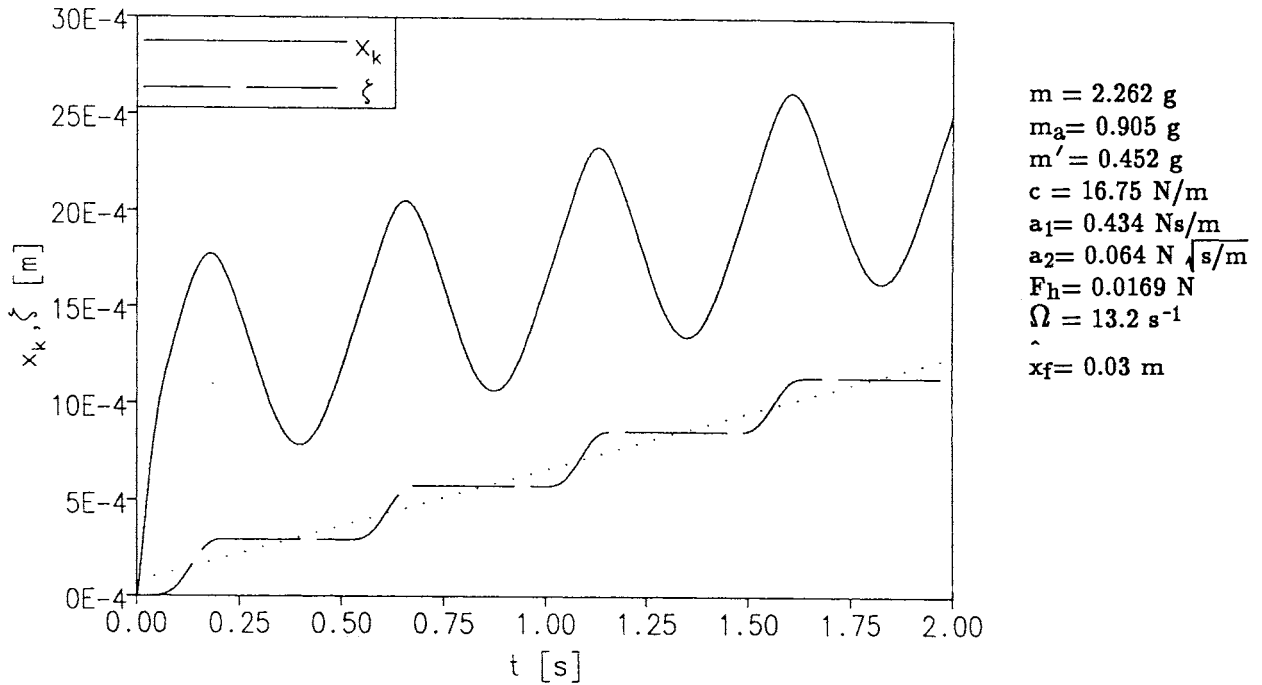


Bild 5.4: Ort–Zeit–Diagramm der Relativbewegung x_k bzw. Verschiebung ζ

Verschiebung ζ zu erkennen. Da hier die Anfangsbedingung $x_k = 0$ gewählt wurde, ist am Anfang ein Einschwingvorgang zu erkennen, der allerdings nach einer kurzen Zeit (weniger als eine halbe Schwingungsperiode) beendet ist. Es schließt sich ein Bereich an, der dadurch gekennzeichnet ist, daß nur der erste Teil des Ersatzmodells in Aktion ist. Die Verschiebungsgeschwindigkeit $\dot{\zeta}$ ist dann Null und $\zeta = \text{konst.}$. Nach Erreichen der Schaltbedingung (5.5a) setzt zusätzlich der zweite Teil mit ein. Es ändert sich der Verlauf beider Kurven und die Ruhelage verschiebt sich in Richtung der Schwerkraft, die in dem Bild 5.4 nach oben zeigt. Nach Erreichen des zweiten Kriteriums (5.5b) ist wieder nur der erste Systemteil aktiv und $\zeta = \text{konst.}$, allerdings auf einem höheren Niveau. Danach wiederholen sich die einzelnen Phasen periodisch.

In Bild 5.4 wird in dem System (5.15b) nur der Fall $\dot{\zeta} > 0$ erreicht, dadurch verschiebt sich die Ruhelage nur in Schwerkraftrichtung. Bei höheren Schwingungsparametern ist aber zeitweise auch der Fall $\dot{\zeta} < 0$ möglich. Das Bild 5.5 zeigt eine solche Situation. Die Masse bewegt sich dann stückweise in entgegengesetzter Richtung, wie man deutlich in der Ausschnittsvergrößerung sehen kann. Aus dem Ort–Zeit–Diagramm ist sofort die zeitlich

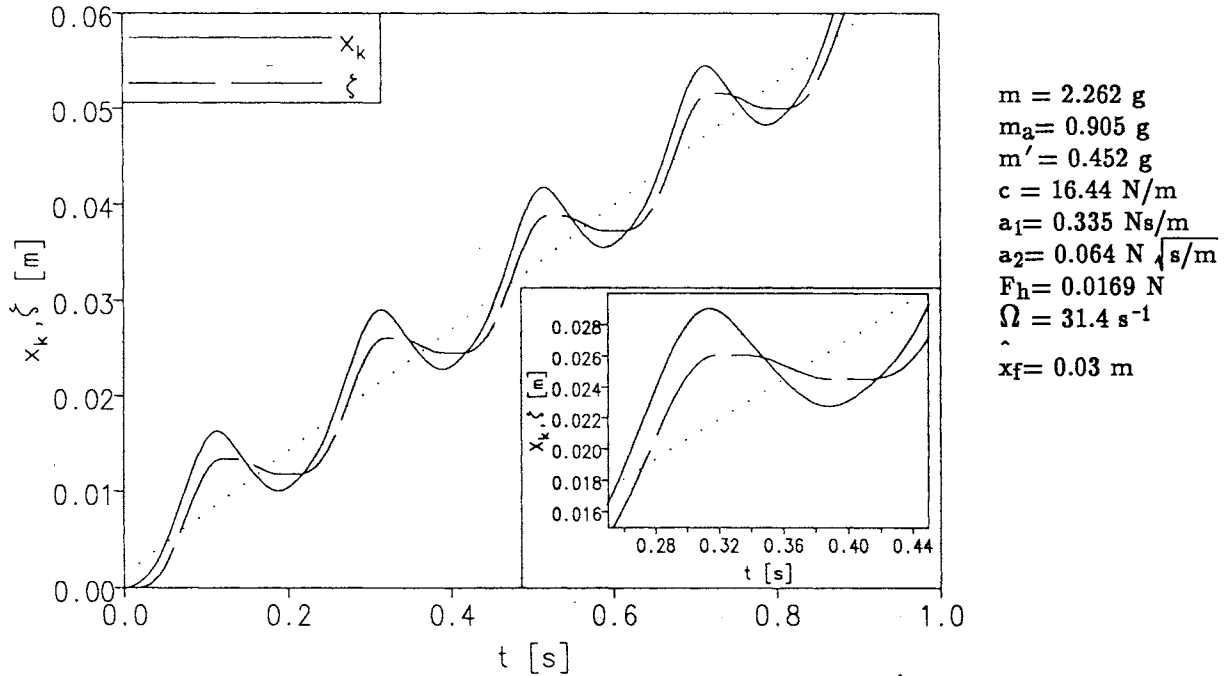


Bild 5.5: Ort—Zeit—Diagramm der Relativbewegung x_k bzw. Verschiebung ζ

gemittelte Sinkgeschwindigkeit v_s der Kugel zu entnehmen. Sie berechnet sich leicht durch die Beziehung

$$v_s = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}_k dt = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\zeta} dt, \quad (5.17)$$

wobei T die Zeit einer Schwingungsperiode nach dem Einschwingvorgang darstellt. In Bild 5.4 und 5.5 zeigen jeweils die gestrichelten Linien den zeitlich gemittelten Weg.

Die so zeitlich gemittelte Geschwindigkeit ist bei festen Systemparametern eine Funktion der gewählten Schwingungsgrößen. Die Abhängigkeit von der Erregerfrequenz bei festen Amplituden ist in Bild 5.6 zu sehen. Dazu sind für drei unterschiedliche Amplituden jeweils Rechnungen bei verschiedenen Frequenzen durchgeführt und die Ergebnisse durch Linien miteinander verbunden worden. Bei kleiner Frequenz findet noch keine Sedimentation statt (die Masse schwingt lediglich um die Anfangsruhelage), bis die Schaltbedingung erreicht wird. Dann erhöht sich die Sinkgeschwindigkeit stark mit steigender Frequenz bis zu einem gewissen Punkt. Danach steigt die Geschwindigkeit nur noch weniger stark. Dies erklärt sich

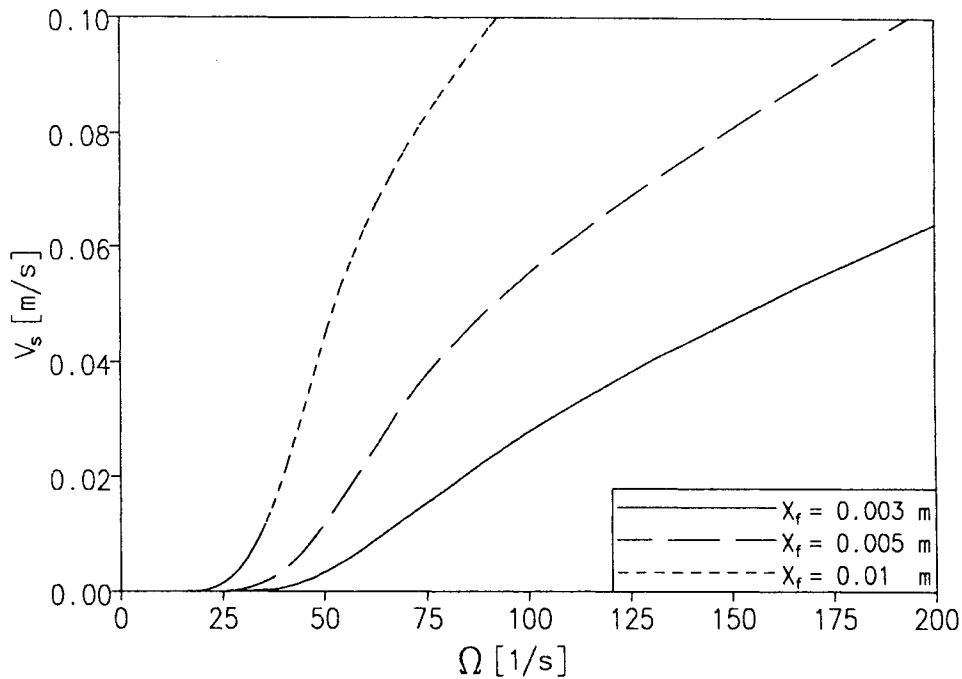


Bild 5.6 Sinkgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Erregerfrequenz

dadurch, daß zunächst die Schaltbedingung (5.5a) nur dann erreicht wird, wenn die Masse in Richtung der Schwerkraft schwingt (vgl. Bild 5.4). Ab einer gewissen Frequenz kommt der zweite Anteil des Schwingers auch teilweise in entgegengesetzter Richtung zum Einsatz (vgl. Bild 5.5). Dadurch bewegt sich die Masse in und entgegen der Schwerkraftrichtung, so daß dann die Zunahme der resultierenden Sinkgeschwindigkeit geringer ausfällt.

Bei Veränderung der Erregeramplitude zeigt sich ähnliches Verhalten. Der Beginn der Sedimentation verschiebt sich erwartungsgemäß zu kleineren Frequenzen, wenn die Amplitude erhöht wird. Die Sinkgeschwindigkeiten nehmen dann stark zu.

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Ersatzmodell sollte demnach in der Lage sein, die mittlere Absinkgeschwindigkeit einer Kugel in einem viskoplastischen Fluid vorherzusagen. Allerdings ist zu beachten, daß dieses Modell mit den hier bestimmten Parametern nur bedingt Gültigkeit besitzen kann. Die aus der Fließspannung und dem Kugelradius gebildeten Kennzahl Y muß in unmittelbarer Nähe des Grenzwertes Y_g liegen, d.h. im wesentlichen bei

kleinen Sinkgeschwindigkeiten. Außerdem geht hier die Modellvorstellung ein, daß sich das Fluid im Fließbereich adäquat durch das Bingham'sche Stoffmodell (lediglich zwei Stoffparameter τ_f und $\hat{\eta}$) beschreiben läßt. Schließlich wird davon ausgegangen, daß das Fluid unendlich weit ausgedehnt ist und keine Störungen durch Randeffekte auftreten.

Im weiteren sollen die hier und im Kapitel 4 dargelegten Ergebnisse durch Experimente verifiziert werden.

6 Experimentelle Verifikation

In den vorangegangenen Abschnitten ist die schwingungsinduzierte Sedimentation von kugelförmigen Partikeln in einem viskoplastischen Fluid theoretisch untersucht worden. An dieser Stelle sollen die dort erhaltenen Ergebnisse mit Experimenten verglichen werden. Ein kugelförmiges Gefäß – entsprechend den äußeren Randbedingungen in Kapitel 4.1.2 – ließ sich jedoch aus konstruktiven Gründen nicht realisieren. Es kommt daher ein ähnlicher Versuchsaufbau zur Anwendung, wie er schon für die stationäre Sedimentation von Kugeln

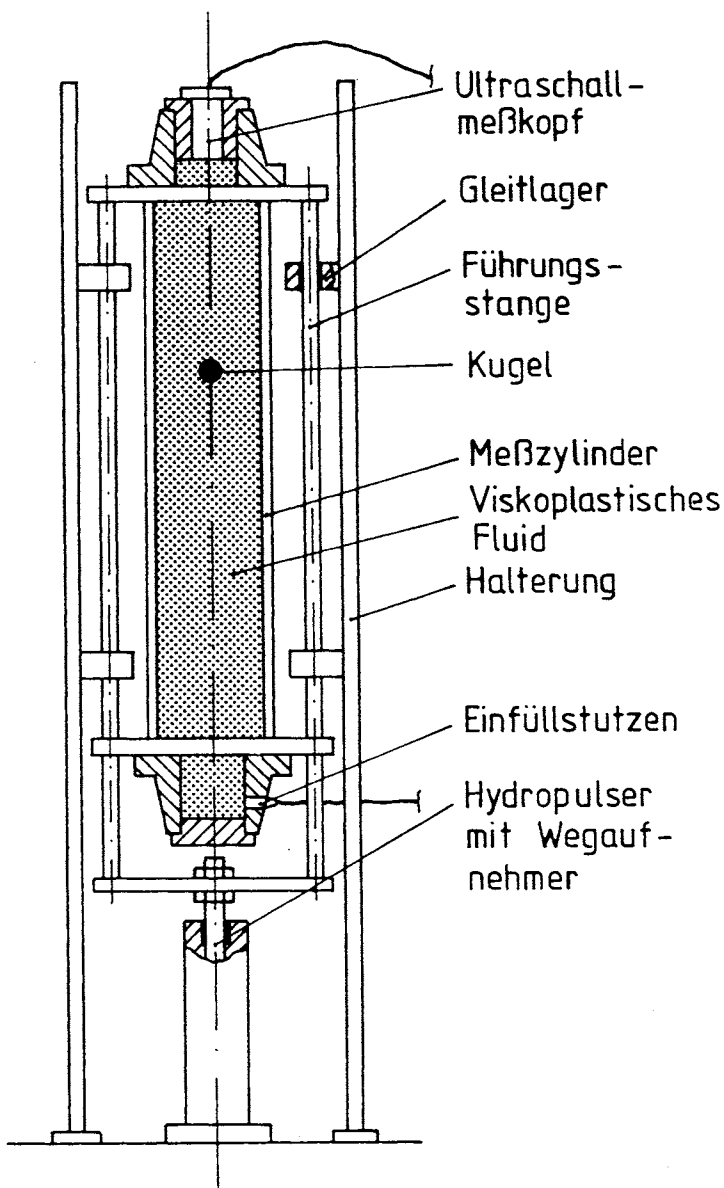


Bild 6.1: Versuchsaufbau zur instationären Sedimentation

benutzt wurde (vgl. Abschnitt 3.1).

Das Fluid ist hierbei durch ein zylindrisches Rohr mit den Innenabmessungen $D=0.14$ m und $L=1.5$ m begrenzt. Im Gegensatz zum stationären Aufbau ist der Zylinder jedoch beweglich an einer Halterung befestigt (Bild 6.1). Diese Konstruktion erlaubt eine translatorische Bewegung des Zylinders in Richtung der Schwerkraft. Die Bewegung wird durch einen am Boden installierten Hydropulsor aufgeprägt. Ein Wegaufnehmer registriert die Bewegung des Hydropulsors und damit des zylindrischen Behälters in Abhängigkeit der Zeit. Durch den oberen Flansch kann eine Kugel in das Fluid eingebracht werden. In den nachfolgend beschriebenen Versuchen sind Kugeldurchmesser und -dichten stets so gewählt, daß die Kugel durch

Einwirkung der Schwerkraft allein nicht sedimentieren kann. Nach dem gleichen Prinzip wie in Abschnitt 3.1 registriert ein Ultraschallmeßkopf den Ort der Kugel relativ zur Behälterbewegung in Abhängigkeit der Zeit. Damit können bei simultaner Aufnahme die Meßgrößen des Wegaufnehmers mit der Führungsbewegung $W(t)$ (Kapitel 4) bzw. $x_f(t)$ (Ersatzmodell) und die Werte der Ultraschallmessung mit der Relativbewegung $U(t)$ bzw. $x_k(t)$ identifiziert werden. Daraus lassen sich dann leicht die in den vorangegangenen Kapiteln berechneten Größen wie Amplitudenverhältnis, Einsetzen der Sinkbewegung und mittlere Sinkgeschwindigkeit bilden.

Bei einer oszillierenden Bewegung eines vollständig mit einer dichtebeständigen Flüssigkeit gefüllten Gefäßes entsteht ein pulsierendes Druckfeld (vgl. Kapitel 4.1.2). Daher muß der Behälter während der Versuche verschlossen sein.

Die Versuche mit dem hier geschilderten Aufbau konnten freundlicherweise im Laboratorium für Kraftfahrwesen der Universität der Bundeswehr Hamburg durchgeführt werden. Der Autor ist dem Leiter, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. I. Schmidt und den Mitarbeitern im Labor zu Dank verpflichtet.

6.1 Ermittlung der Stoffparameter

In den instationären Experimenten werden als viskoplastische Fluide zwei wäßrige Carbopol 940-Lösungen mit unterschiedlichen Massenanteilen des zugesetzten Carbopols verwendet. Dieser Anteil ist relativ zum Wasseranteil gering, so daß auch hier im Rahmen der Meßgenauigkeit die Dichte von Wasser für die Lösungsdichten anzunehmen ist.

Die weiteren Stoffparameter beider Flüssigkeiten werden mit zwei verschiedenen Methoden ermittelt. Zur Berechnung der Bingham'schen Stoffparameter kommt das in Abschnitt 3 beschriebene Verfahren zur Anwendung, d.h. bei ruhendem Fluid (keine Führungsbewegung, $W(t) = 0$) werden die stationären Sinkgeschwindigkeiten fallender Kugeln gemessen. Bild 6.2 zeigt die Ergebnisse beider Fluide in Form des Widerstandkoeffizienten über der Fließzahl. Die Werte der so ermittelten Stoffgrößen sind in der nachstehenden Tabelle 6.1 eingetragen.

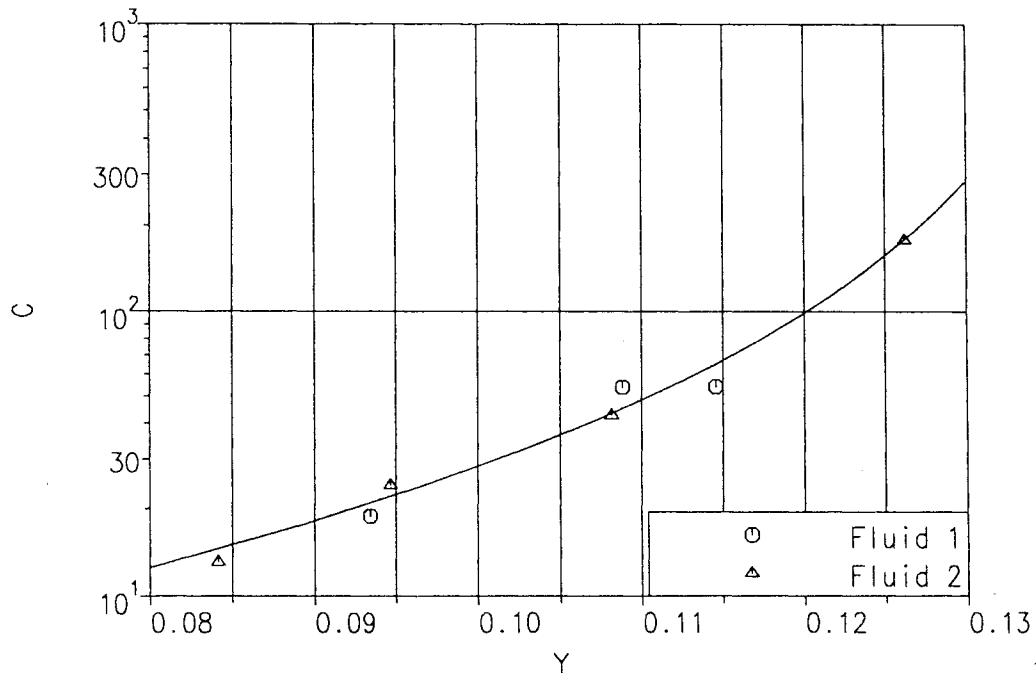


Bild 6.2: Ergebnisse der stationären Messungen

Die Ermittlung der komplexen Gleitmodule erfolgt durch dynamische Messungen mit einem handelsüblichen, schergeschwindigkeitsgesteuerten Rheometer der Fa. Rheometrics Europe GmbH, Frankfurt. Das viskoplastische Fluid befindet sich in einem engen Spalt zwischen zwei parallelen, koaxialen Kreisplatten (Radius r_0), wie es Bild 6.3 zeigt. Die untere

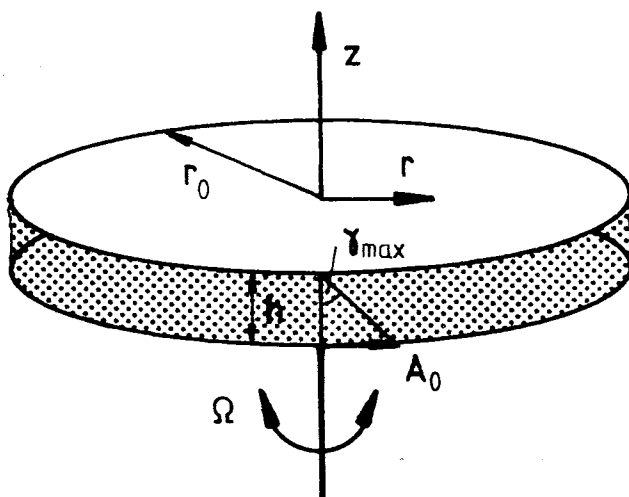


Bild 6.3: Meßgeometrie zur Ermittlung des komplexen Gleitmoduls

Platte schwingt harmonisch mit bekannter Amplitude A_0 und Frequenz Ω . Die obere, ebenfalls drehbar gelagerte Platte wird durch einen schnellen Regelkreis in Ruhe gehalten und das dazu notwendige Moment gemessen. Aus der Amplitude dieses Moments berechnet sich in einfacher Weise der komplexe Gleitmodul [6.1]. Da hier die viskoelastischen Stoffparameter im festen Zustand ermittelt werden sollen,

muß man sicherstellen, daß die Versuche im Rheometer unterhalb der Fließgrenze stattfinden. Die Größe der Schwingungsamplitude an der unteren Platte ist daher begrenzt (s.a. [6.2]). Bei bekannter Fließspannung des Fluids ist dieser Grenzwert schnell zu bestimmen. Der Maximalwert des Scherwinkels, mit dem das Fluid deformiert wird, stellt sich bei $r = r_0$ ein. Dieser Winkel γ_{\max} ergibt sich aus der Spalthöhe h und der Schwingungsamplitude A_0 :

$$\tan \gamma_{\max} = \frac{A_0}{h}. \quad (6.1)$$

In der in Bild 6.3 skizzierten Anordnung ist der Spannungstensor bei Verwendung von Zylinderkoordinaten r , φ und z lediglich an zwei Stellen besetzt. Diese Elemente berechnen sich unter der Bedingung von linear-viskoelastischem Stoffverhalten im festen Zustand zu:

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \gamma \operatorname{Re} \{ \mu^*(\Omega) e^{i\Omega t} \}. \quad (6.2)$$

Da nirgendwo innerhalb des Fluids die Spannungsinvariante τ , die hier identisch mit $\tau_{\varphi z}$ ist, größer werden darf als die Fließspannung τ_f , kann aus Gl.(6.2) und Gl.(6.1) sofort diejenige Amplitude berechnet werden, die nicht überschritten werden darf.

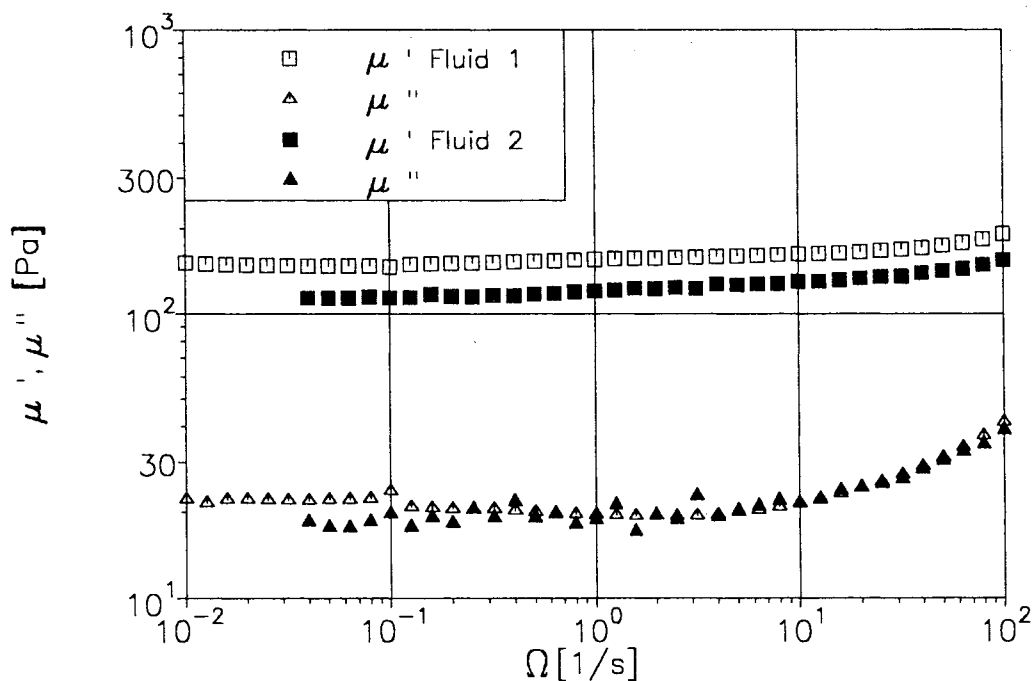


Bild 6.4: Gleitmodule der verwendeten Lösungen

Die Ergebnisse der Messungen im Rheometer für beide Fluide zeigt das Bild 6.4. Über der Frequenz sind jeweils der elastische (μ') und der viskose Anteil (μ'') des Gleitmoduls aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß die Anteile über weite Bereiche nahezu konstant, d.h. nicht von der Frequenz abhängig sind. Erst bei größeren Frequenzen sieht man ein Anwachsen insbesondere von μ'' . Für den späteren Vergleich zwischen Theorie und Experiment erscheint es daher vernünftig zu sein, den Real- und Imaginärteil des komplexen Gleitmoduls als konstant anzusehen. Diese Werte sind neben den anderen benötigten Stoffparametern der verwendeten Carbopol 940-Lösungen in Tabelle 6.1 verzeichnet.

Tabelle 6.1: Stoffparameter der verwendeten Lösungen

Fluid	ρ_f [kg/m ³]	$\hat{\eta}$ [Pa s]	τ_f [Pa]	μ' [Pa]	μ'' [Pa]
Fluid 1	1000.0	0.30	18.2	150.0	20.0
Fluid 2	1000.0	0.90	10.7	120.0	20.0

In den Experimenten werden Kugeln aus Glas (G_l) bzw. Nickel (N_i) in einem Durchmesserbereich von $20.0 \text{ mm} \geq d_{G_l} \geq 11.0 \text{ mm}$ bzw. $5.0 \text{ mm} \geq d_{N_i} \geq 3.0 \text{ mm}$ verwendet. Mit Kenntnis der Fließspannung ergibt sich der Grenzdurchmesser d_{grenz} nach Gl.(3.4), oberhalb welchem die Kugeln unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft zu sedimentieren beginnen. Diese Durchmesser und die Dichten der Kugeln sind in Tabelle 6.2 verzeichnet.

Tabelle 6.2: Daten zu den verwendeten Kugeln

Fluid	Material	ρ_k kg/m ³	d_{grenz} m
Fluid 1	Glas	2500.0	0.0259
	Nickel	8000.0	0.0055
Fluid 2	Glas	2500.0	0.0152

6.2 Instationäre Messungen

Der Versuchsablauf erfolgt bei allen Experimenten jeweils nach dem gleichen Schema:

1. Blasenfreies Einpumpen des Fluids durch den Einfüllstutzen im unteren Flansch und Verschließen des unteren Ventils.
2. Einsetzen der Kugel in das Fluid im oberen Drittel des Behälters.
3. Blasenfreie Montage des Ultraschallmeßkopfes.
4. Einstellen der Schwingungsparameter (Frequenz Ω und Amplitude W_0) am Hydropulser.
5. Aufnahme der Bewegungen des Behälters mittels eines Wegaufnehmers und der Relativbewegung der Kugel durch Ultraschallmeßtechnik.
6. Variation von Frequenz und Amplitude, bei jeweils fester Frequenz wird die Amplitude erhöht.

Die zeitlichen Abtastraten zur diskreten Ortsmessung (Abtastfrequenz) sind der jeweiligen Schwingungsfrequenz so angepaßt, daß einerseits die Bewegungen gut aufgelöst werden können, andererseits sich der Speicherbedarf in erträgliche Grenzen hält. Als Beispiel ist ein Ausschnitt des Experiments einer Glaskugel ($d_{\text{Gl}} = 15.0 \text{ mm}$) im Fluid 1 bei einer Erregerfrequenz $f = 4.5 \text{ Hz}$ ($\Omega = 28.3 \text{ 1/s}$) und einer Erregeramplitude $W_0 = 5.3 \text{ mm}$ in Bild 6.5 zu sehen. Über der Zeitachse sind der Weg von Behälter und Kugel dargestellt. Die quadratischen Symbole zeigen die Erregerbewegung, die ausgefüllten Dreieckssymbole geben die Bewegung der Kugel wieder. Man erkennt, daß die beiden Schwingungen mit der gleichen Frequenz (Voraussetzung für den späteren Vergleich mit der Theorie), aber mit unterschiedlichen Amplituden verlaufen. Die Phasenverschiebung zwischen beiden Bewegungen läßt sich hier erahnen. Da der mittlere Ort, um den sich die Kugel bewegt, konstant bleibt, handelt es sich hier um eine Bewegung unterhalb der Fließgrenze. In Bild 6.6 ist die Sedimentation einer Nickelkugel ($d_{\text{Ni}} = 5.0 \text{ mm}$) bei den Erregungsparametern $f = 2.5 \text{ Hz}$ ($\Omega = 15.7 \text{ 1/s}$) und $W_0 = 4.8 \text{ mm}$ zu sehen. Da in diesem Fall die Kugelbewegung (Dreiecke) sehr klein ausfällt, ist sie zur besseren Darstellung zehnfach überhöht gezeichnet. Auch hier schwingen

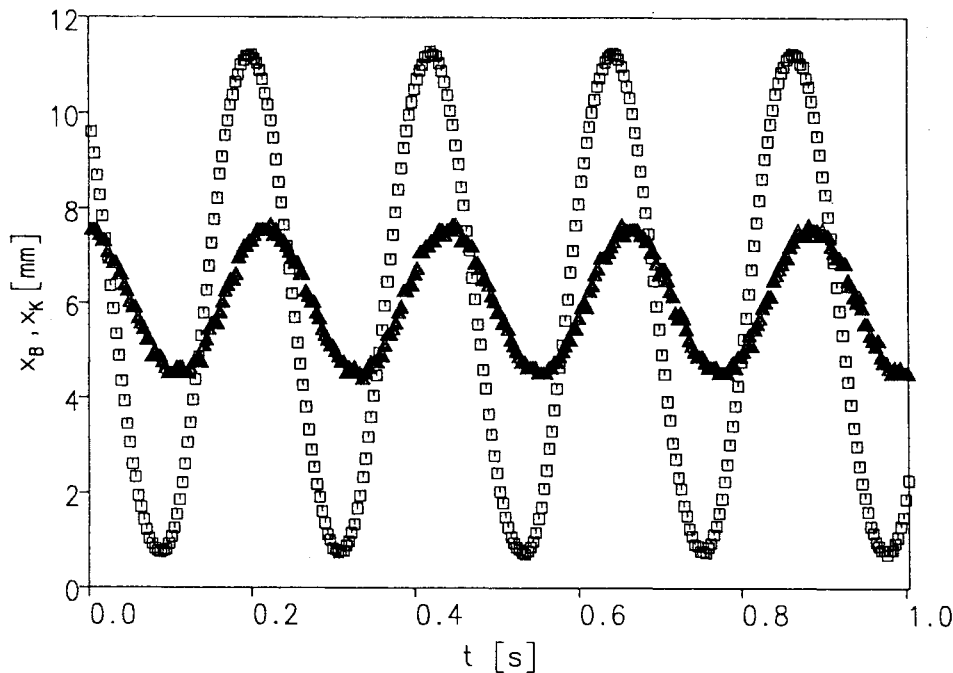


Bild 6.5: Weg von Behälter und Kugel in Abhängigkeit der Zeit

Behälter (Quadrate) und Kugel mit der gleichen Frequenz. Man sieht, daß der Kugelschwingung eine Bewegung in Richtung der Schwerkraft (im Bild nach oben) überlagert ist. In diesem Fall wird also die Fließgrenze des Fluids im Verlauf einer Schwingung zumindest teilweise überschritten.

Die überhöhte Darstellung der Kugelbewegung in Bild 6.6 verdeutlicht auch die Auflösungsmöglichkeit der hier verwendeten Meßtechnik. Die analogen Signale des Ultraschallmeßkopfes werden über einen A/D-Wandler in digitale Werte gewandelt. Die Auflösung des Wandler ist gerade die im Bild sichtbare Differenz im Weg zwischen zwei Stufen, die bei allen Versuchen $\Delta x = 1/8.6$ mm entspricht.

Diese für alle Experimente typischen Meßergebnisse müssen noch in geeigneter Weise ausgewertet werden, um sie mit den in der Theorie vorausgesagten Ergebnissen zu vergleichen. Das erfolgt hier durch Anpassung der gemessenen Werte für den Weg an eine Ausgleichsfunktion nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Im Rahmen der im Experiment realisierten Schwingungszustände und der Genauigkeit der Ultraschallmessung reicht jeweils eine Funktion in Abhängigkeit der Zeit t in der Form

$$x_{B,K}(t) = x_0 + v_s \cdot t + x_3 \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (6.3)$$

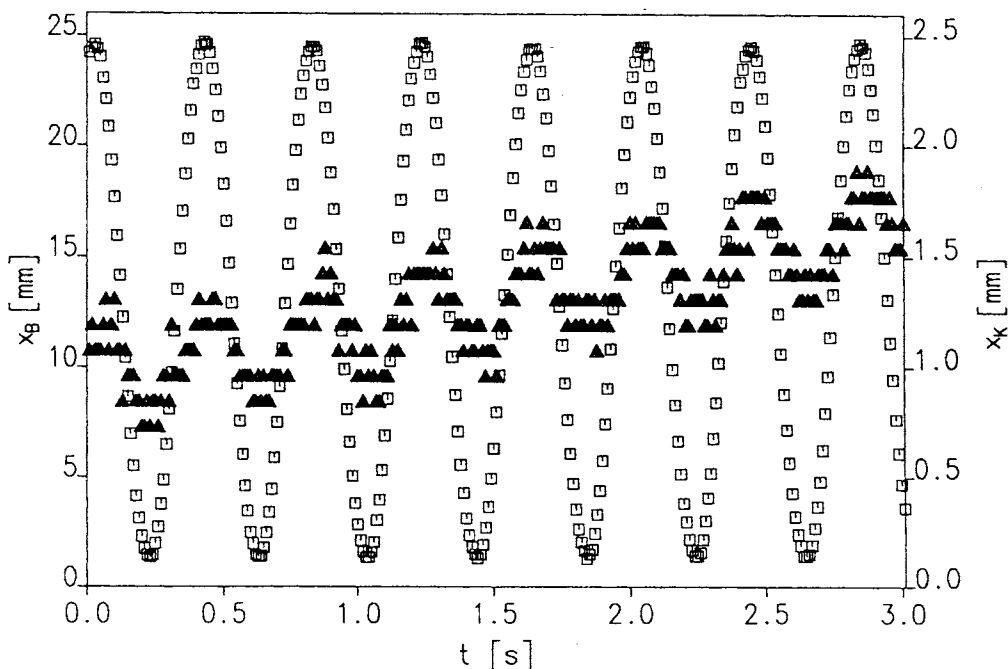


Bild 6.6: Weg von Behälter und Kugel in Abhängigkeit der Zeit

zur Beschreibung der Behälter- (x_B) bzw. Kugelbewegung (x_K) aus. Darin gibt x_0 die Lage bei Beginn der Messung an, v_s ist die mittlere Sinkgeschwindigkeit entsprechend der Gl.(5.17) in Kapitel 5, x_3 entspricht der jeweiligen Amplitude $|W_0|$ bzw. $|U_0|$ und φ_0 ist die Phase zum Meßbeginn. Diese vier Parameter stehen bei der Anpassung zur Disposition, wobei für die Behälterbewegung immer gilt: $v_s = 0$. Deshalb ist im folgenden mit v_s immer die Sinkbewegung der Kugel gemeint. In die Funktion geht zusätzlich noch die Schwingungsfrequenz Ω mit ein. Diese wird nicht als freier Parameter behandelt, sondern ist sowohl bei der Auswertung der Behälter- als auch bei der Kugelbewegung vorgegeben. Dadurch kann es zu fehlerhaften Ergebnissen kommen, wenn die tatsächlichen Frequenzen nicht mit denen der Einstellung übereinstimmen. Allerdings macht sich eine kleine Frequenzdifferenz stark in dem Ergebnis für die Anpassungsparameter (insbesondere der Amplitude) bemerkbar, so daß entsprechende Fehler sofort erkannt werden können.

Zur zusätzlichen Überprüfung wurden nachträglich Messungen exemplarisch einer Fast-Fourier-Analyse (FFT) unterworfen. Diese Methode findet häufig bei der Auswertung von

periodischen Meßgrößen Anwendung. Allgemein läßt sich nämlich jeder periodische Vorgang als Überlagerung von harmonischen Schwingungen auffassen und dann als (im Grenzfall unendliche) Fourier–Reihe darstellen [6.3]:

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\Omega_1 t + \delta_n) . \quad (6.4)$$

Hierbei sind Ω_1 die (durch die Periode festgelegte) Kreisfrequenz der Grundschwingung, y_n die Amplituden und δ_n die Phasen, die mit Vielfachen $n\Omega_1$ der Grundfrequenz oszillieren. Die schnelle Fourier–Transformation bestimmt nun die Amplituden A_n und die Phasen δ_n der Teilschwingungen. Das Bild 6.7 zeigt das Ergebnis einer solchen Analyse für eine schwingende Glaskugel ($d_{\text{Gl}} = 12.0 \text{ mm}$) in Fluid 2 bei der eingestellten Frequenz $f = 6 \text{ Hz}$ ($\Omega = 37.7 \text{ 1/s}$) und der Amplitude $|W_0| (= |\hat{x}_f|) = 1.9 \text{ mm}$. Es sind dort vier Abbildungen zu sehen. Der oberen Teil gibt die Meßwerte der Kugelbewegung (links) und der Führungsbewegung (rechts) in einem Ort–Zeit–Diagramm wieder. Zur besseren Darstellung sind die einzelnen Meßpunkte durch Geraden miteinander verbunden. Direkt darunter stehen jeweils die Ergebnisse der FFT–Analyse. Auf der Abszisse ist das Frequenzspektrum der Schwingungen aufgetragen, auf der Ordinate die Amplituden A_n . Sowohl die Führungs– als auch die Kugelbewegung weisen einen "Peak" genau bei der eingestellten Frequenz auf. Die Höhen dieser "Peaks" geben den Betrag der Amplituden wieder. Bei der Führungsbewegung sind keine Oberschwingungen zu erkennen, d.h., die Erregung ist rein sinusförmig. Da die Meßwerte der Kugelbewegung unregelmäßiger sind, wird verständlich, daß man dort Oberschwingungen in dem Ergebnis der FFT–Analyse sieht. Bis auf den Grenzbereich $f \rightarrow 0$ bleiben sie allerdings verschwindend klein, der Amplitudenpeak bei $f = 0$ resultiert aus der überlagerten Bewegung der Kugel in Richtung der Schwerkraft.

Bei allen so überprüften Meßreihen stimmen die eingestellten Frequenzen mit den tatsächlichen überein. Auch sind die Ergebnisse aus den FFT–Analysen für den Betrag der Amplituden mit den Berechnungen nach der Ausgleichsfunktion (6.3) im Rahmen der Meßgenauigkeit identisch.

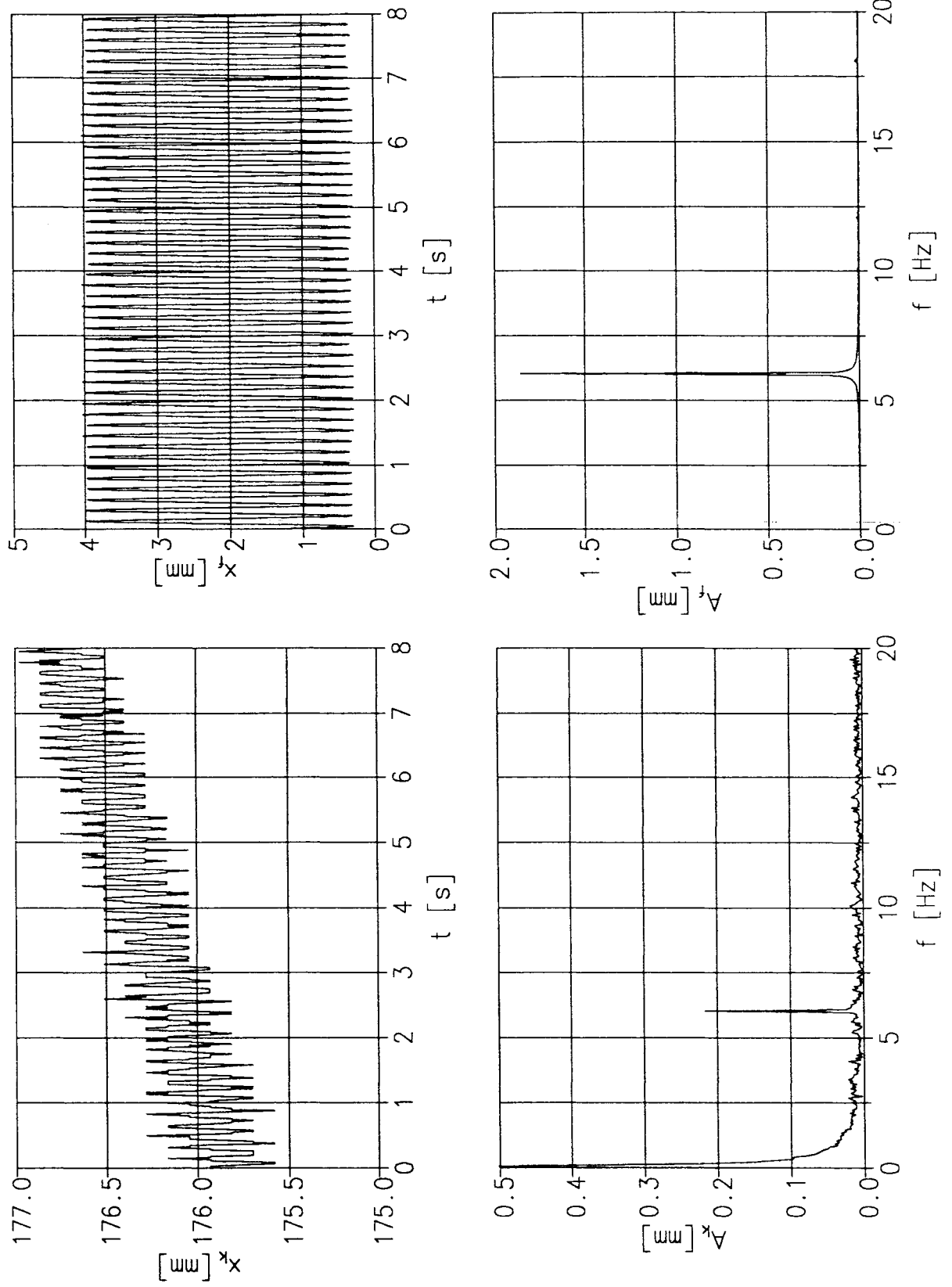


Bild 6.7: Ergebnis einer FFT-Analyse (Amplituden)

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse sind aus der Anpassung nach Gl.(6.3) berechnet. Für Experimente, die unterhalb der Fließgrenze stattfinden, schwingt die Kugel nur um eine Ruhelage, d.h. $v_s = 0$. Dann kann sofort das Amplitudenverhältnis $|U_0/W_0|$ sowie die Phasendifferenz $\varphi = \varphi_0(W_0) - \varphi_0(U_0)$ der beiden Schwingungen angegeben werden. Bei der instationären Sedimentation ist der reine Schwinganteil bei der Kugel nicht mehr sinusförmig (vgl. Bild 5.4), so daß durch die Ausgleichsfunktion ein gewisser Fehler bei der Amplituden- und Phasenberechnung entstehen kann. Interessiert man sich jedoch in diesem Fall nur für die zeitlich gemittelte Sinkgeschwindigkeit v_s , kommt dieser Fehler nicht zum Tragen.

6.3 Ergebnisse

Im folgenden werden die experimentellen Ergebnisse exemplarisch mit den Modellrechnungen verglichen. Bei Bewegungen unterhalb der Fließgrenze und für das Einsetzen der Sinkbewegung findet der Vergleich mit der Feldtheorie in Kapitel 4 statt, die mittleren Sinkgeschwindigkeiten werden den Ergebnissen des Kapitels 5 gegenübergestellt.

6.3.1 Kugelschwingungen unterhalb der Fließgrenze

In den Bildern ist entweder das Amplitudenverhältnis $|U_0/W_0|$ über der Kreisfrequenz Ω oder die Phasenverschiebung φ über Ω dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen die Ergebnisse der Theorie dar, die Messungen sind als Symbole gekennzeichnet. In die Rechnungen gehen als Parameter des Fluids und des Kugelmaterials jeweils die in den Tabellen 6.1 und 6.2 verzeichneten Stoffgrößen ein. Da im Versuchsaufbau statt eines kugelförmigen lediglich ein zylindrisches Gefäß realisiert wird, ist der Radius der Kugelhülle mit dem halben Durchmesser D des Zylinders zu identifizieren. Das in die Berechnung der theoretischen Kurven eingehende Radienverhältnis ergibt sich somit zu

$$\delta = \frac{D}{2 R_0}$$

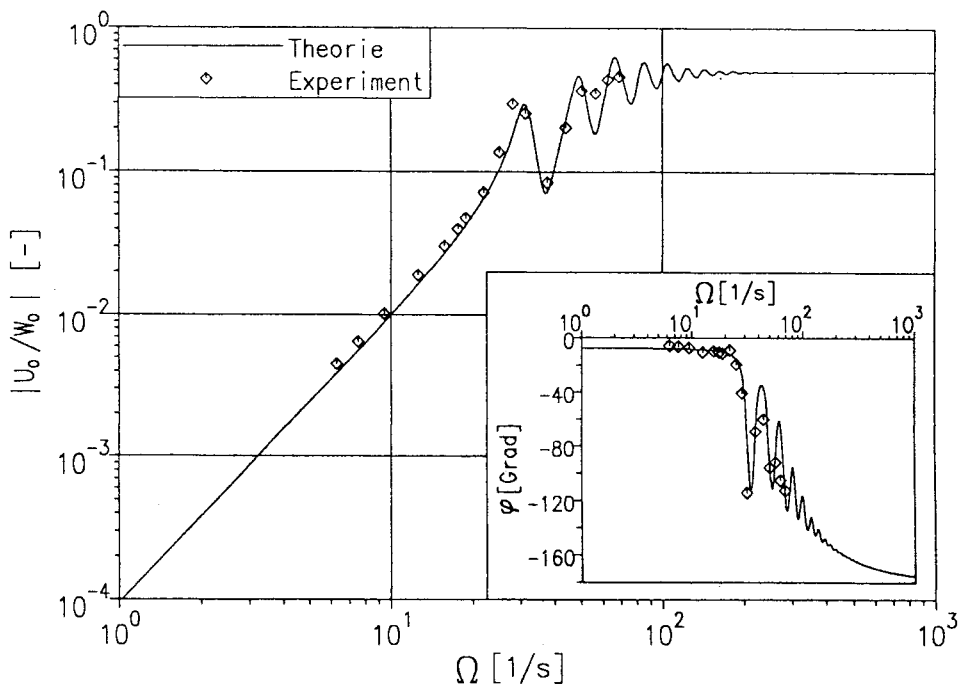


Bild 6.8: Bewegung einer Glaskugel ($d_{Gl} = 15$ mm) in Fluid 1

Das Bild 6.8 zeigt den Vergleich von Theorie und Experiment für eine Glaskugel mit dem Durchmesser $d_{Gl} = 15$ mm in dem Fluid 1. Man erkennt im großen Bild, daß die gemessenen Amplitudenverhältnisse mit der Erregungsfrequenz zunächst ansteigen, wie es die Prognose vorhersagt. Die Meßpunkte liegen bei niedrigen Frequenzen gut auf den theoretischen Kurven. Begründet durch den Randeinfluß (vgl. Bild 4.3a) ist bei den Rechnungen im mittleren Frequenzbereich der nichtmonotone Verlauf (*Schwingungen*) des Betragsganges bezüglich der Kreisfrequenz zu sehen. Die erste dieser *Schwingungen* wird von den Meßpunkten noch recht gut wiedergegeben. Im weiteren Verlauf der Kurve ergeben sich dann gewisse Abweichungen, die aber durch die oben erwähnte abgeänderte Randbedingung verständlich sind. Bei hohen Frequenzen steigt das Amplitudenverhältnis nicht mehr an, sondern nähert sich dem frequenzunabhängigen Grenzwert. Durch mechanische Restriktionen im Versuchsaufbau ist es nicht möglich, diesen Grenzwert in den Experimenten zu erreichen. Eine gedankliche Extrapolation der Meßpunkte scheint diesen Grenzwert, der unabhängig von der Randbedingung ist, zu bestätigen. In dem kleinen Bild ist die berechnete und gemessene Phasenverschiebung zwischen Anregung und Kugelbewegung zu sehen. Ausgehend von dem Grenzwert für kleine Frequenzen nimmt der Betrag der Phasenverschiebung bei den

Meßwerten und der Theorie deutlich zu. Auf Grund der Trägheit bleibt die Kugel gegenüber der Erregung zurück (vgl. Kapitel 4.1.2). Die durch den Randeinfluß begründeten *Schwingungen* sind auch in den Meßwerten wiederzuerkennen.

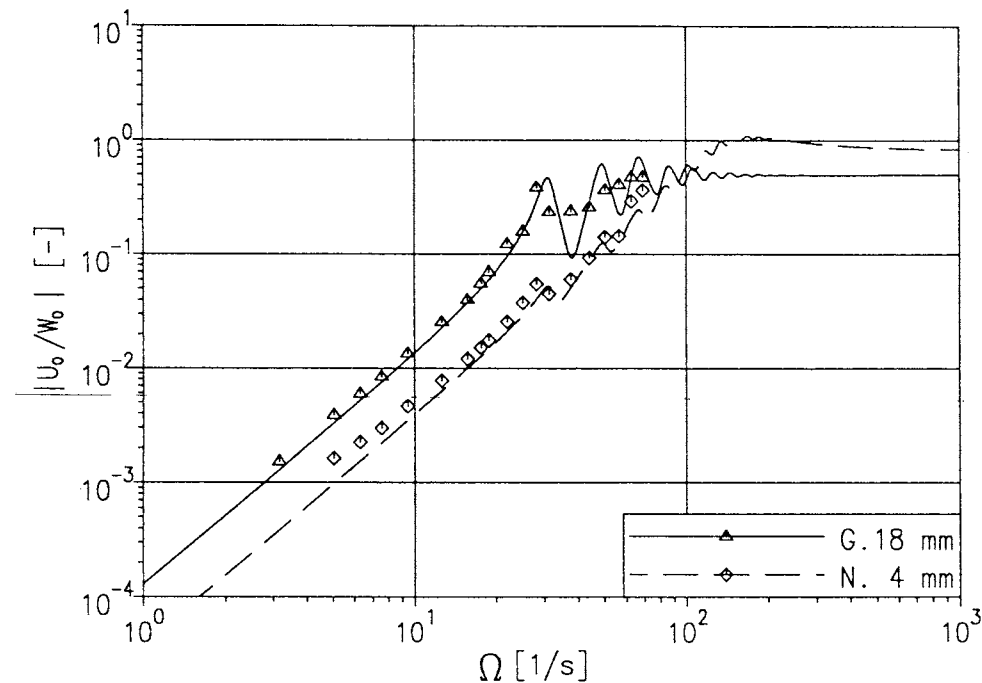


Bild 6.9: Amplitudenverhältnisse von Glas- und Nickelkugel in Fluid 1

Ein Vergleich zweier Experimente in dem Fluid 1 findet im Bild 6.9 statt. Dort sind die Betragsgänge für eine Glaskugel ($d_{Gl} = 18$ mm) und eine Nickelkugel ($d_{Ni} = 4$ mm) dargestellt. Einerseits liegen die Meßwerte jeweils gut auf den theoretischen Kurven, andererseits sind die vorhergesagten Unterschiede zwischen den beiden Kugeln deutlich zu erkennen. Die Amplitudenverhältnisse der Nickelkugel liegen bei niedrigen Frequenzen unterhalb der Glaskugel und übersteigen diese erst bei hohen Frequenzen. Da die Nickelkugel wesentlich kleiner ist als die Glaskugel, machen sich bei ihr die Randeinflüsse kaum bemerkbar. Auch in der Phasenverschiebung (Bild 6.10) wird der Unterschied zwischen den beiden Kugeln deutlich. Die trägen Eigenschaften der Nickelkugel machen sich gegenüber der Glaskugel erst bei höheren Frequenzen bemerkbar. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, da hier die Masse der Nickelkugel lediglich $1/30$ der Glaskugelmasse beträgt. Gewisse

Abweichungen der Phasenverschiebung bei der Nickelkugel im oberen Frequenzbereich sind auf Meßgenauigkeiten zurückzuführen.

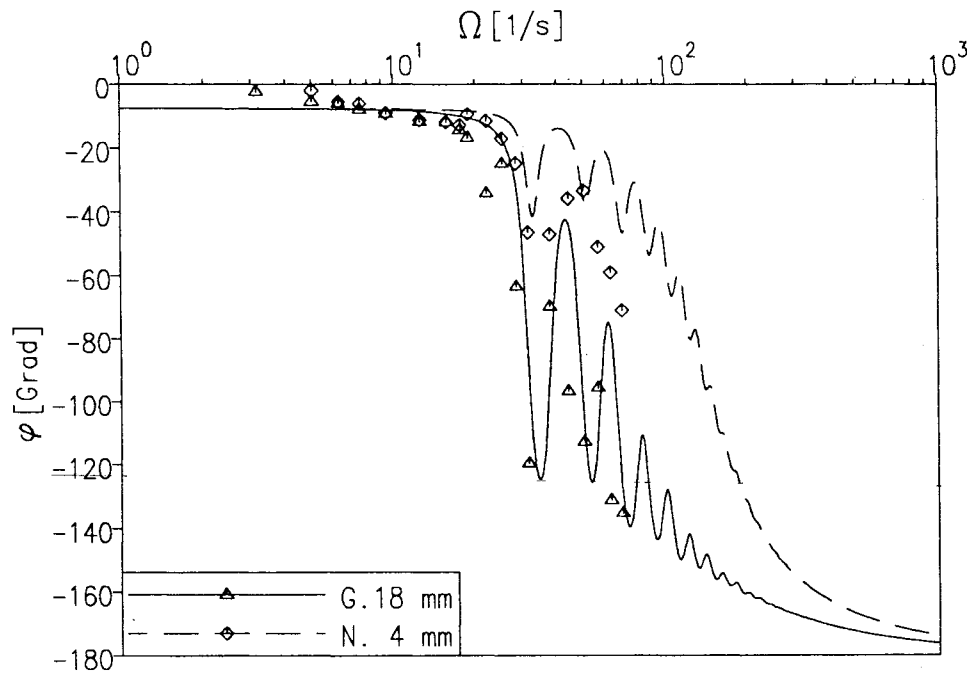


Bild 6.10: Phasenverschiebungen von Glas- und Nickelkugel in Fluid 1

Weitere Ergebnisse für Versuche unterhalb der Fließgrenze in Fluid 1 und 2 sind im folgenden Bild dargestellt. Sie bestätigen im wesentlichen die oben ausgeführten Darstellungen.

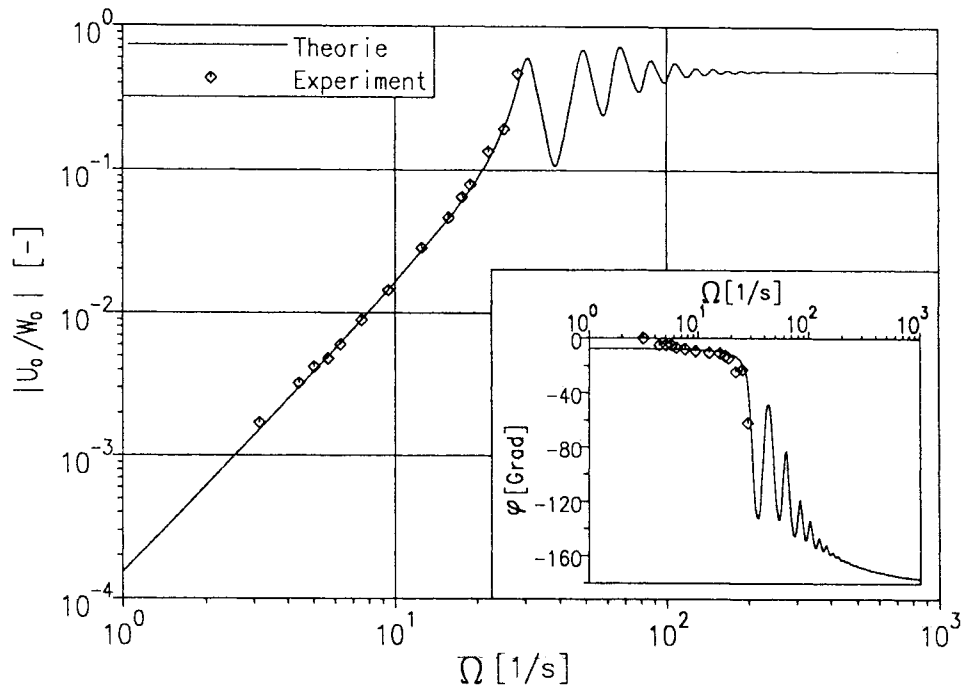


Bild 6.11: Bewegung einer Glaskugel ($d_{Gl} = 20 \text{ mm}$) in Fluid 1

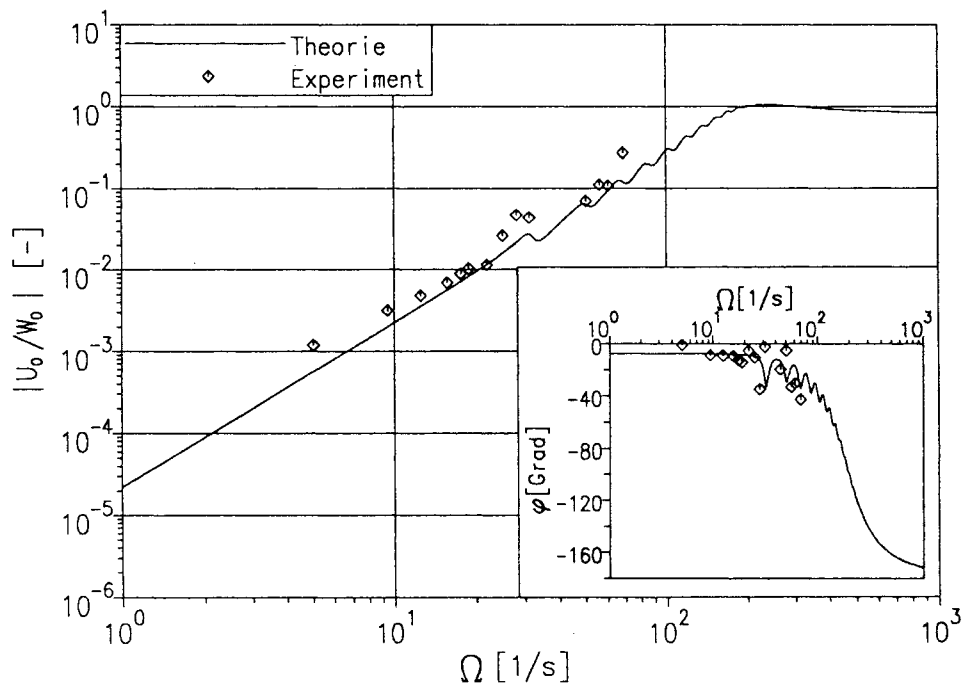


Bild 6.12: Bewegung einer Nickelkugel ($d_{Ni} = 3 \text{ mm}$) in Fluid 1

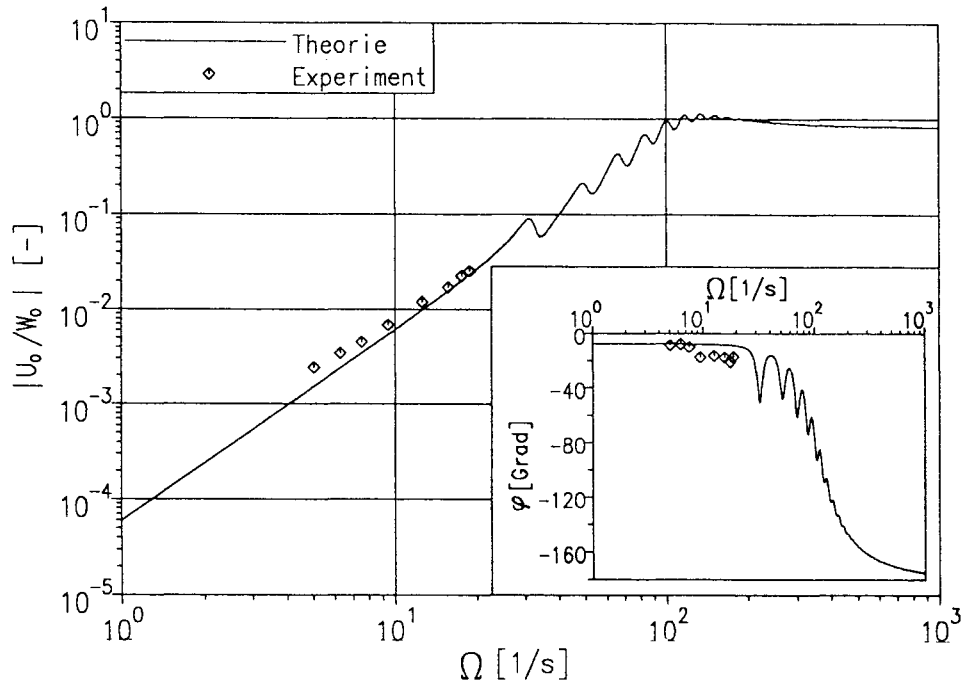


Bild 6.13: Bewegung einer Nickelkugel ($d_{Ni} = 5$ mm) in Fluid 1

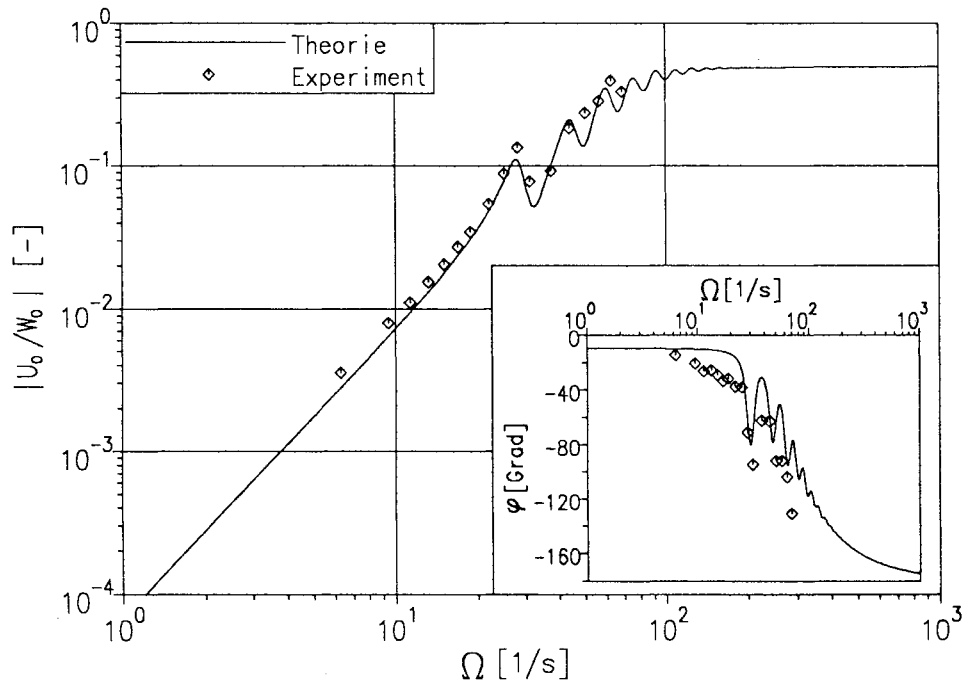


Bild 6.14: Bewegung einer Glaskugel ($d_{Gl} = 11$ mm) in Fluid 2

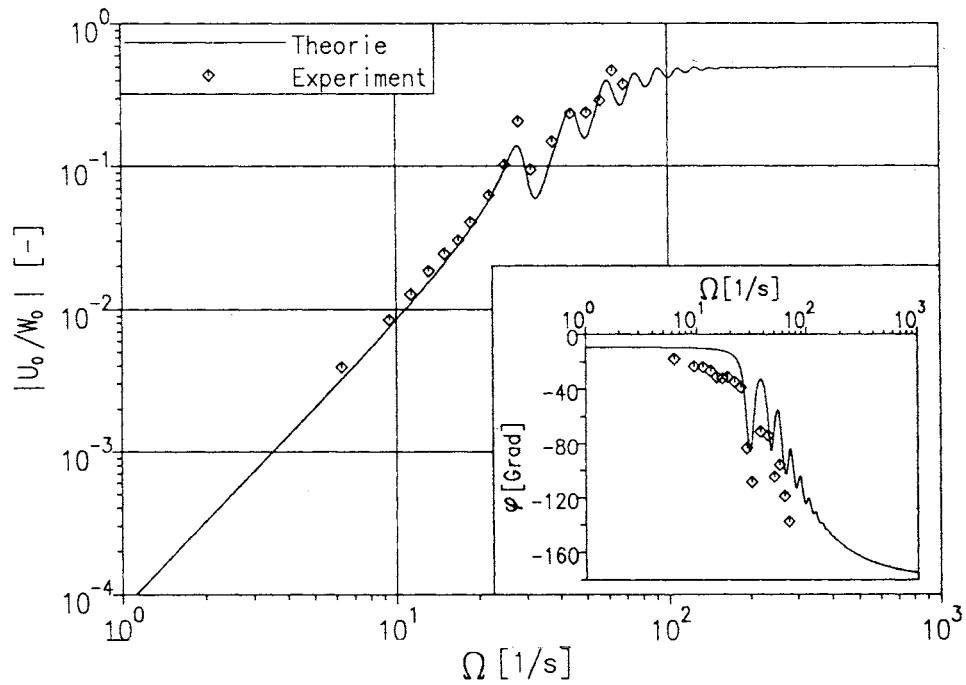


Bild 6.15: Bewegung einer Glaskugel ($d_{G1} = 12 \text{ mm}$) in Fluid 2

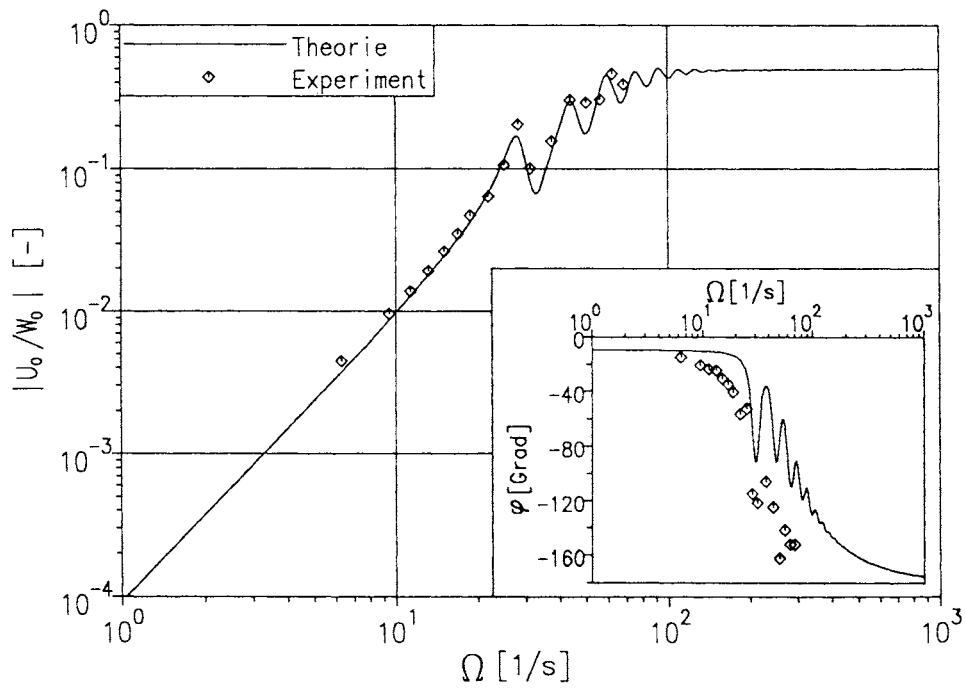


Bild 6.16: Bewegung einer Glaskugel ($d_{G1} = 13 \text{ mm}$) in Fluid 2

6.3.2 Beginn der Sedimentation einer schwingenden Kugel

Werden im Versuch die Erregungsamplituden bei einer festen Frequenz schrittweise erhöht, setzt bei bestimmten Schwingungsparametern die Sedimentation ein und die Kugeln beginnen im zeitlichen Mittel abzusinken. Diese Sedimentationsexperimente wurden im wesentlichen im Fluid 2 durchgeführt. Die Stoffparameter, vor allem die Fließspannung τ_f , sind bei diesem Fluid besser geeignet als bei Fluid 1.

Die Amplitude (wie auch die Frequenz) wird in den Versuchen diskret verändert, und es kann daher nicht erwartet werden, daß dabei die jeweilige kritische Parameterkombination genau getroffen wird. Deshalb sind die hier gezeigten Ergebnisse für die beginnende Sedimentation durch Interpolation der diskreten Meßwerte unmittelbar vor und nach Sedimentationsbeginn gewonnen. Im Rahmen der Meßgenauigkeit ist diese Darstellung hier zulässig.

In Bild 6.17 sind die Erregeramplituden von Experiment und Theorie für eine Kugel ($d_{Gl} = 12 \text{ mm}$) aus Glas in Abhängigkeit der Erregerfrequenz dargestellt. Die durchgezogene Kurve gibt eine Prognose für den Sedimentationsbeginn wieder, d.h. bei Parameterkombinationen, die unterhalb der Grenzkurve liegen, schwingt die Kugel lediglich um die Ruhelage. Die "Meßwerte", hier als Symbole gekennzeichnet, zeigen den vorhergesagten, im wesentlichen zu $1/\Omega^2$ proportionalen Verlauf. Je größer also die Erregerfrequenz gewählt

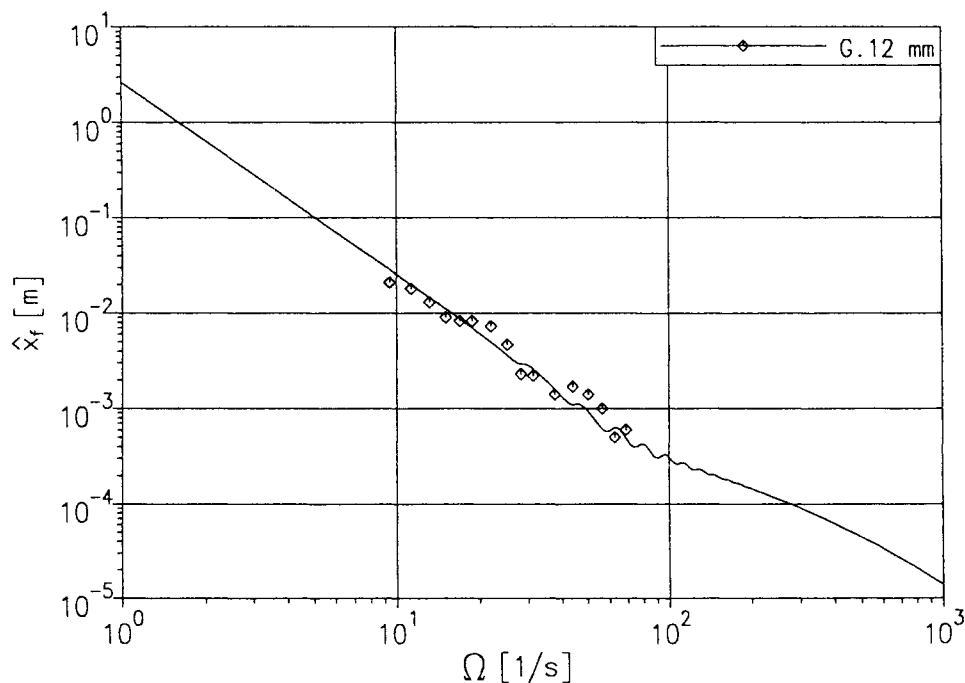


Bild 6.17: Sedimentationsbeginn einer Glaskugel ($d_{Gl} = 12 \text{ mm}$) in Fluid 2

wird, desto kleiner ist die benötigte Erregeramplitude. Der Randeinfluß macht sich wie erwartet in den Meßwerten nicht so stark bemerkbar, da der Durchmesser der hier verwendeten Kugeln deutlich kleiner ist als bei den Versuchen im vorherigen Abschnitt.

Bild 6.18 zeigt als Vergleich die theoretischen und experimentellen Ergebnisse zweier Glaskugeln ($d_{G1} = 11 \text{ mm}$ und $d_{G1} = 13 \text{ mm}$) im Fluid 2. Da die beiden Kugeln im Durchmesser ziemlich nah beieinander liegen, ist es nicht verwunderlich, daß sich die Grenzkurven in dieser Darstellung nicht stark voneinander unterscheiden. Die "Meßwerte" geben aber auch in diesem Fall die theoretische Prognose wieder, denn die Glaskugel mit dem größeren Durchmesser benötigt zur Sedimentation bei gleicher Frequenz eine geringere Erregeramplitude.

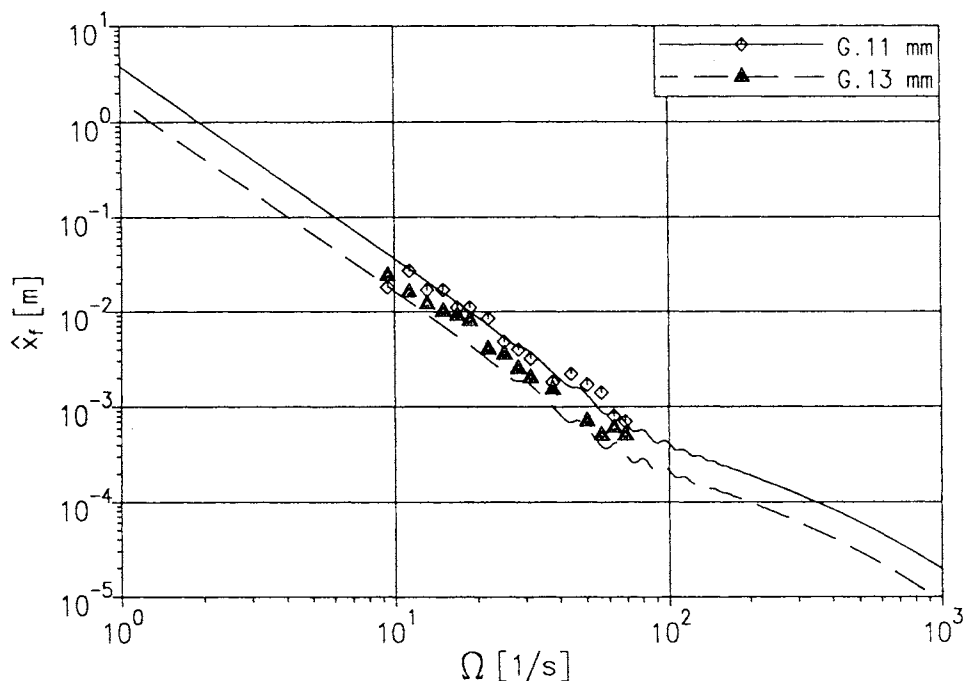


Bild 6.18: Sedimentationsbeginn zweier Glaskugeln ($d_{G1} = 11 \text{ mm}$, $d_{G1} = 13 \text{ mm}$) im Vergleich

Weitere Meßergebnisse für das Fluid 1 zeigt das Bild 6.19, wobei hier sowohl Glas- als auch Nickelkugeln eingesetzt werden.

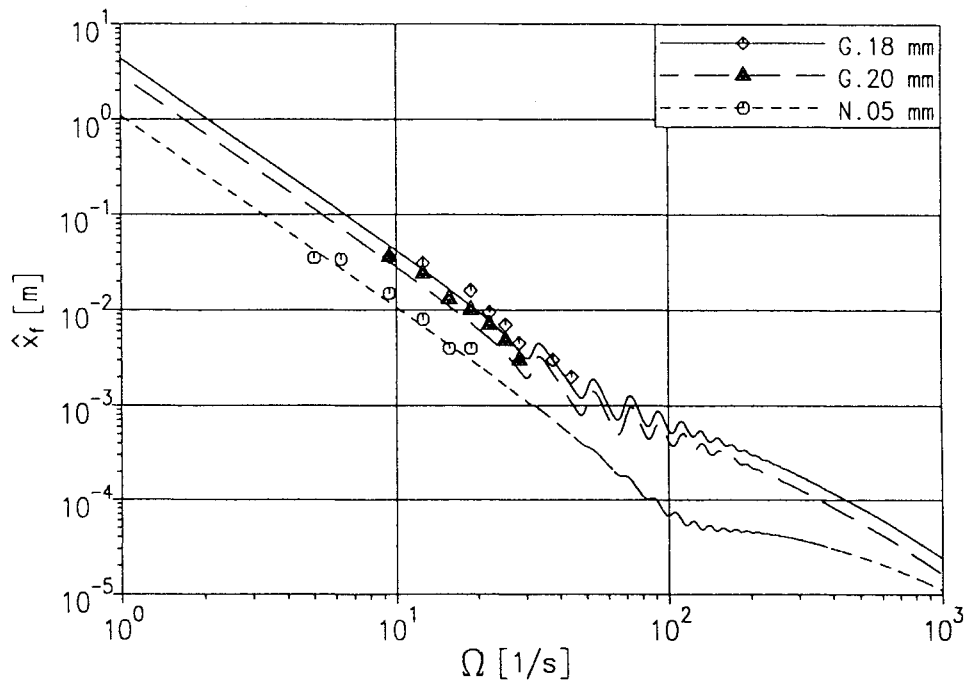


Bild 6.19: Sedimentationsbeginn verschiedener Kugeln in Fluid 1

Insgesamt bestätigen die gezeigten Vergleiche zwischen Theorie und Experiment das in Kapitel 4.2 aufgestellte Kriterium für den Beginn der instationären Sedimentation. Es ist demnach zulässig, sich den asymptotischen Grenzwert Y_g der stationären Sedimentation (Gl.(4.28)) auch im instationären Fall zunutze zu machen. Maßgeblich für das Einsetzen der instationären Sedimentation ist die auf die Kugel einwirkende Kraft, die sich aus der linearen Superposition des stationären und des instationären Kraftanteils des Widerstandes ergibt.

6.3.3 Instationäre Sedimentation einer schwingenden Kugel

Nach Überschreiten der Schwingungsparameter, die sich aus dem o.g. Grenzkriterium ergeben, sedimentiert die Kugel im zeitlichen Mittel. Aus den Experimenten erhält man bei einer festen Erregeramplitude und -frequenz durch Anpassung an die Ausgleichsfunktion Gl.(6.3) die gemittelte Sinkgeschwindigkeit v_s , mit der sich die Kugel in Richtung der Schwerkraft bewegt. Diese Geschwindigkeit wird hier mit den Berechnungen des in Kapitel 5 erstellten Modells verglichen.

Im folgenden werden Ergebnisse für drei Glaskugeln mit unterschiedlichen Durchmessern im Fluid 2 gezeigt. Die zum Vergleich notwendigen Parameter des Ersatzmodells, welche sich aus den in Kapitel 5.2 angegebenen Beziehungen ergeben, sind in Tabelle 6.3 verzeichnet. Bei den komplexen Größen c und a_1 steht der Realteil in einer Zeile mit den anderen verzeichneten Größen, direkt darunter jeweils der Imaginärteil.

Tabelle 6.3: Parameter des mechanischen Ersatzmodells

d_{G1} [mm]	m [g]	m_a [g]	m' [g]	c [N/m]	a_1 [Ns/m]	a_2 [N√s/m]	F_h [N]
11.0	1.742	0.697	0.348	15.55	0.221	0.056	0.0142
				2.074	0.015		
12.0	2.262	0.905	0.452	16.97	0.263	0.064	0.0169
				2.262	0.017		
13.0	2.876	1.150	0.575	18.38	0.309	0.072	0.0198
				2.450	0.021		

Die Versuchsführung bei den Experimenten entspricht der Vorgehensweise im vorherigen Kapitel. Bei fester Frequenz wird die Amplitude schrittweise variiert und die Sinkgeschwindigkeit gemessen. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen sind ebenfalls als einzelne diskrete Punkte zu verstehen. Es werden jedoch nicht nur die im Versuch eingestellten Parameter berechnet, sondern vom Beginn der Sedimentation an wie bei der Darstellung in Kapitel 5 weitere Zwischenwerte. Zur besseren Darstellung sind diese Werte in den Bildern als durchgezogene Kurve gezeichnet.

In dem Bild 6.20a–c sind Meßergebnisse einer Glaskugel mit $d_{G1} = 12$ mm in Fluid 2 den theoretischen Voraussagen gegenübergestellt. Auf der Abszisse ist die Erregeramplitude verzeichnet, die Ordinate zeigt die Sinkgeschwindigkeit. Die durchgezogenen Kurven geben die Berechnungsergebnisse für verschiedene Frequenzen wieder, die Meßdaten sind durch Symbole gekennzeichnet. Zunächst bestätigen die experimentellen Daten den vom Modell vorausgesagten Trend, daß die Sinkgeschwindigkeiten bei festen Frequenzen mit zunehmender Amplitude ansteigen. Je höher die Frequenz gewählt wird, desto "steiler" ist der Geschwindigkeitsanstieg. Die gemessenen Werte passen von der Größenordnung zu den theoretischen Kurven. Dabei liegen die Daten nicht immer genau auf der zugehörigen theoretischen Kurve, aber sie stimmen in der Steigung annähernd überein.

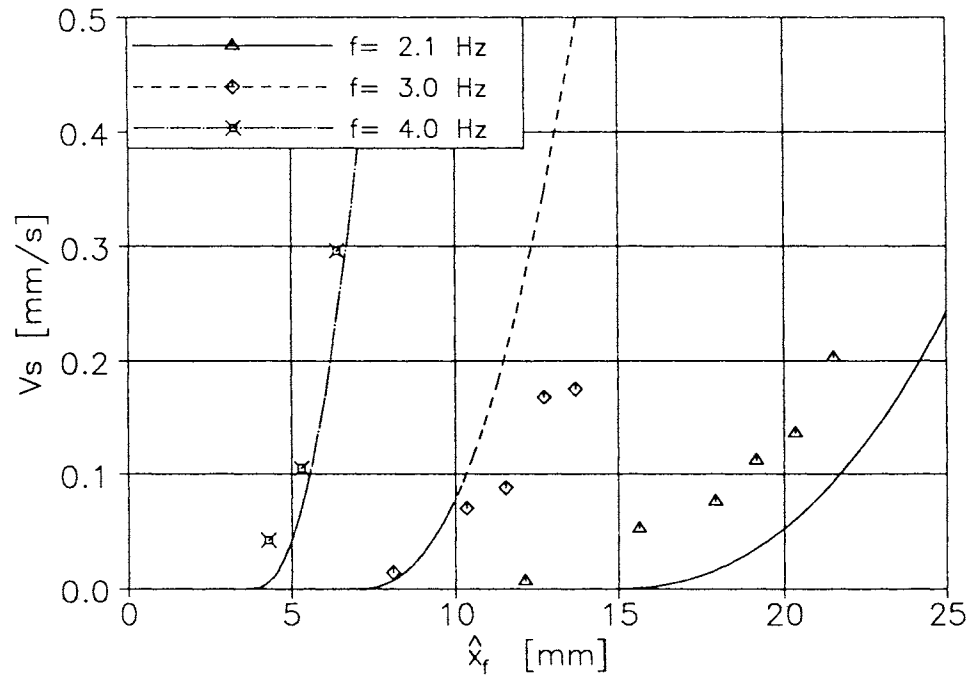


Bild 6.20a: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{Gl} = 12$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

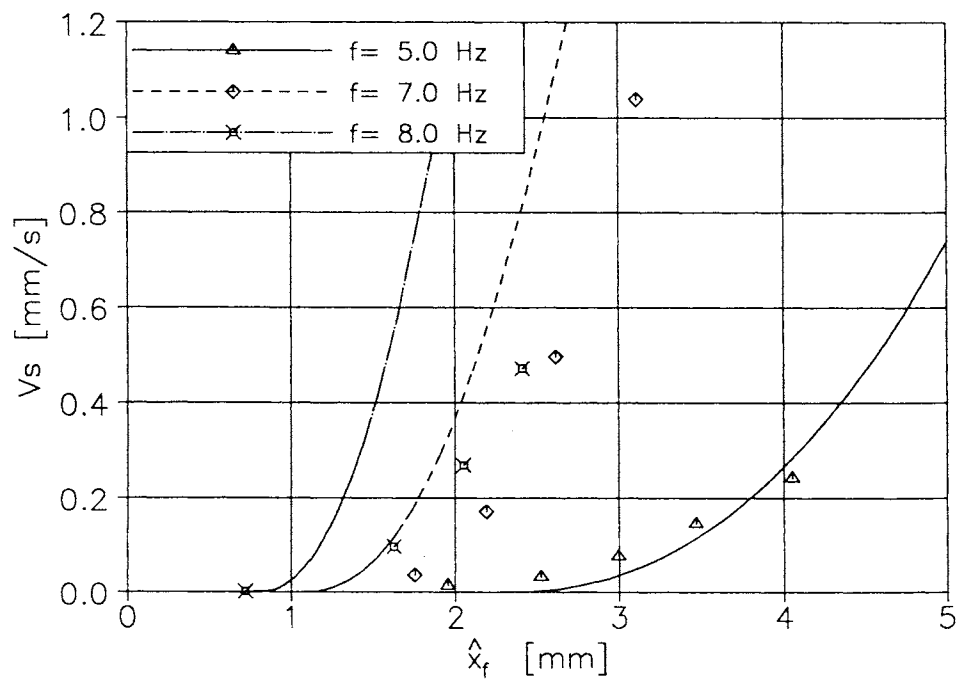


Bild 6.20b: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{Gl} = 12$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

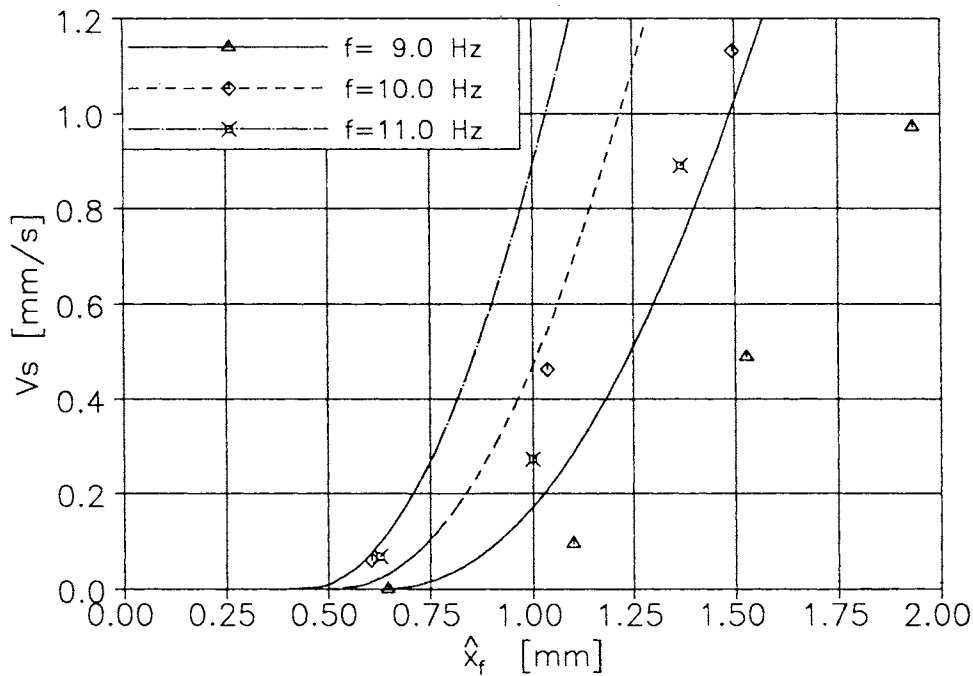


Bild 6.20c: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{G1} = 12$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

Weitere experimentelle Ergebnisse für Glaskugeln mit $d_{G1} = 11$ mm bzw. $d_{G1} = 13$ mm in Fluid 2 sind in den Bildern 6.21a–c und 6.22a–c dargestellt. Auch hier sind die gemessenen Werte in der Größenordnung der Vorhersage.

Allerdings macht sich bei der Glaskugel $d_{G1} = 13$ mm eine gewisse systematische Abweichung bemerkbar, die Sinkgeschwindigkeiten werden dort bei allen Frequenzen durch das Modell überschätzt. Dies ist bei den anderen beiden Glaskugeln ($d_{G1} = 11$ mm, $d_{G1} = 12$ mm) nicht der Fall, die prognostizierten Geschwindigkeiten liegen bei einigen Frequenzen über, bei anderen Frequenzen unter den gemessenen Werten. Diese systematische Abweichung in eine Richtung kann darin begründet sein, daß die Messungen mit dieser Kugel zu einem etwas späteren Zeitpunkt (1 Woche) als die anderen beiden durchgeführt wurden, wobei die Flüssigkeit im Behälter verblieben ist. In dieser Zeit können sich die Stoffeigenschaften leicht verändert haben.

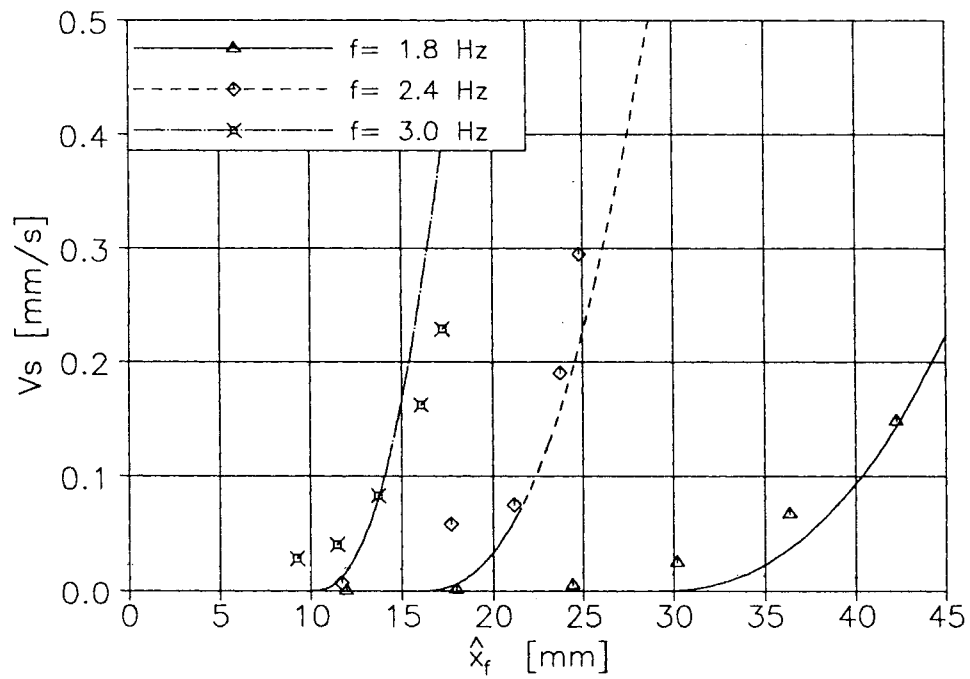


Bild 6.21a: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{Gl} = 11$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

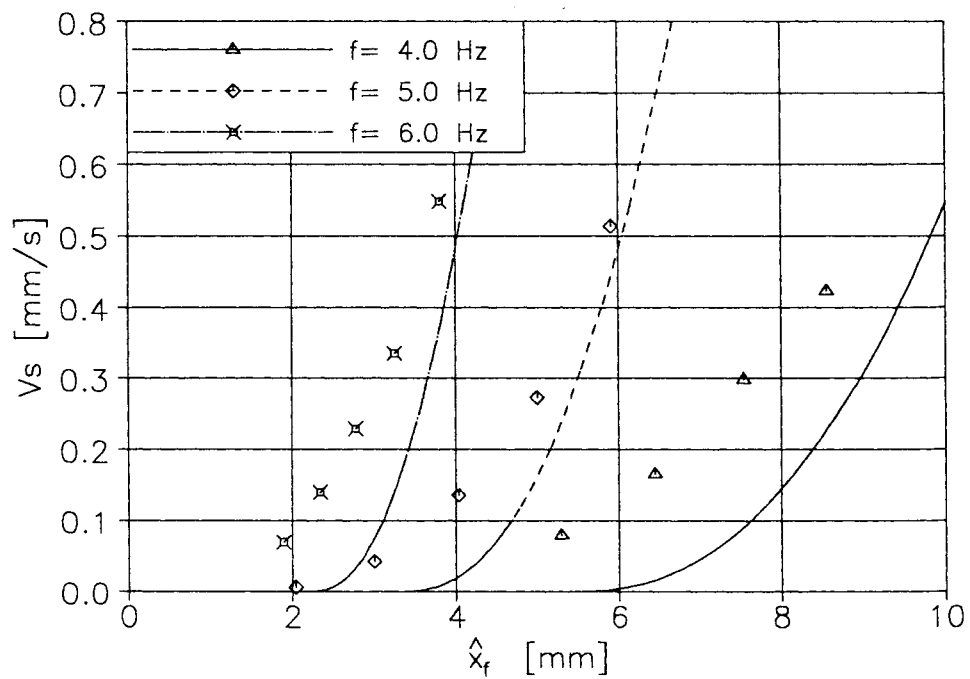


Bild 6.21b: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{Gl} = 11$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

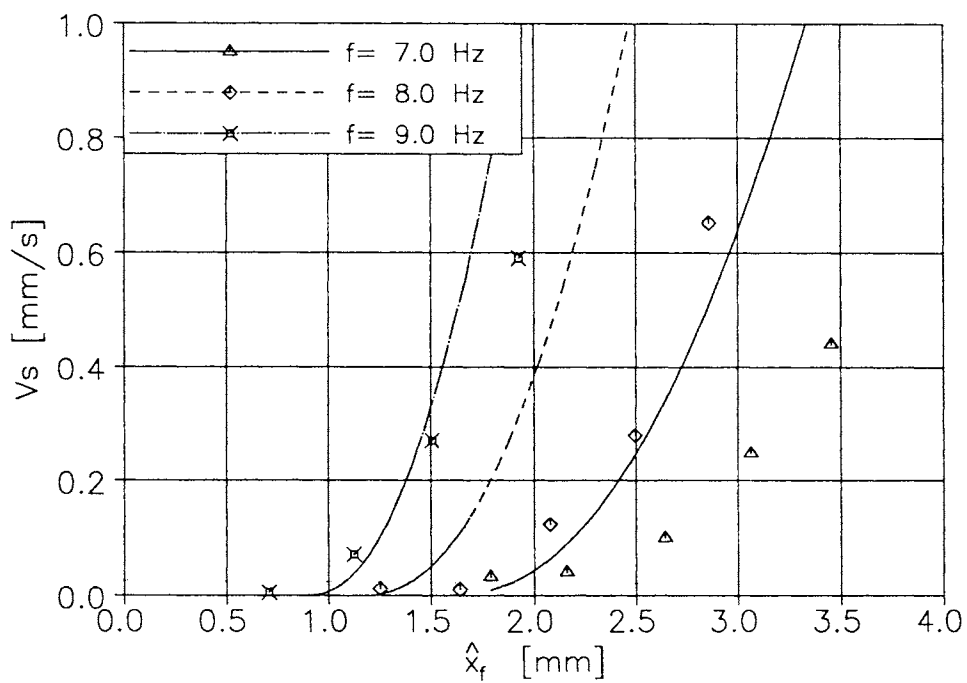


Bild 6.21c: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{G1} = 11$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

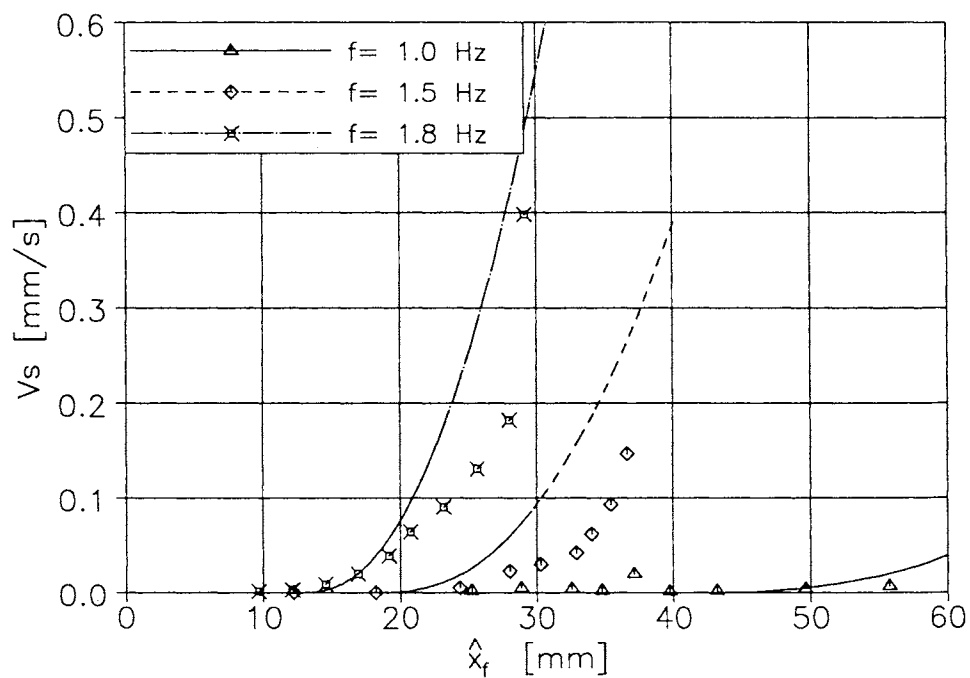


Bild 6.22a: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{G1} = 13$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

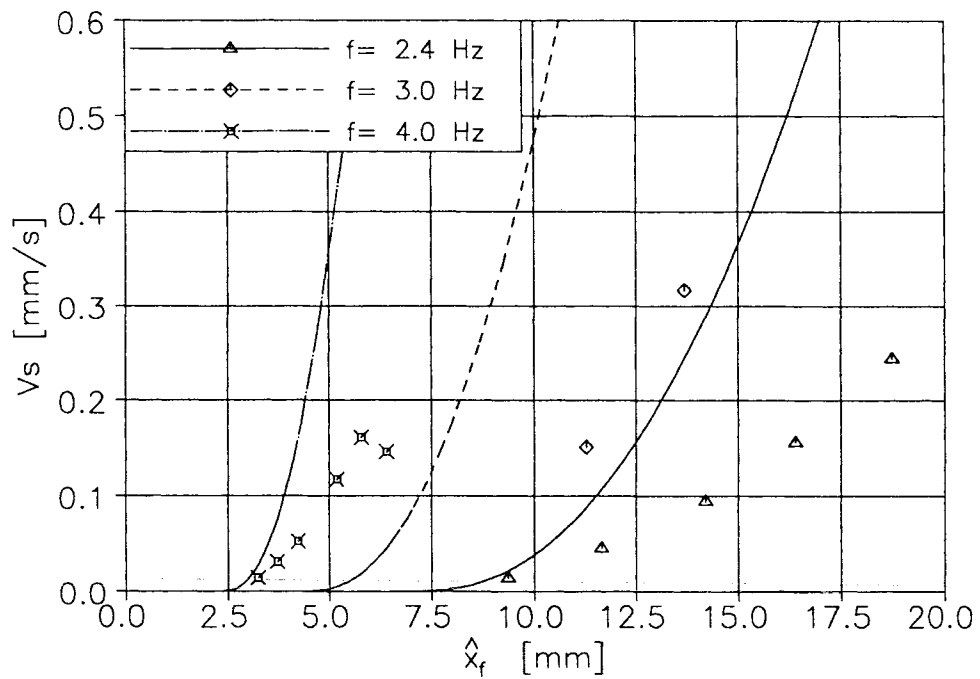


Bild 6.22b: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{G1} = 13$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

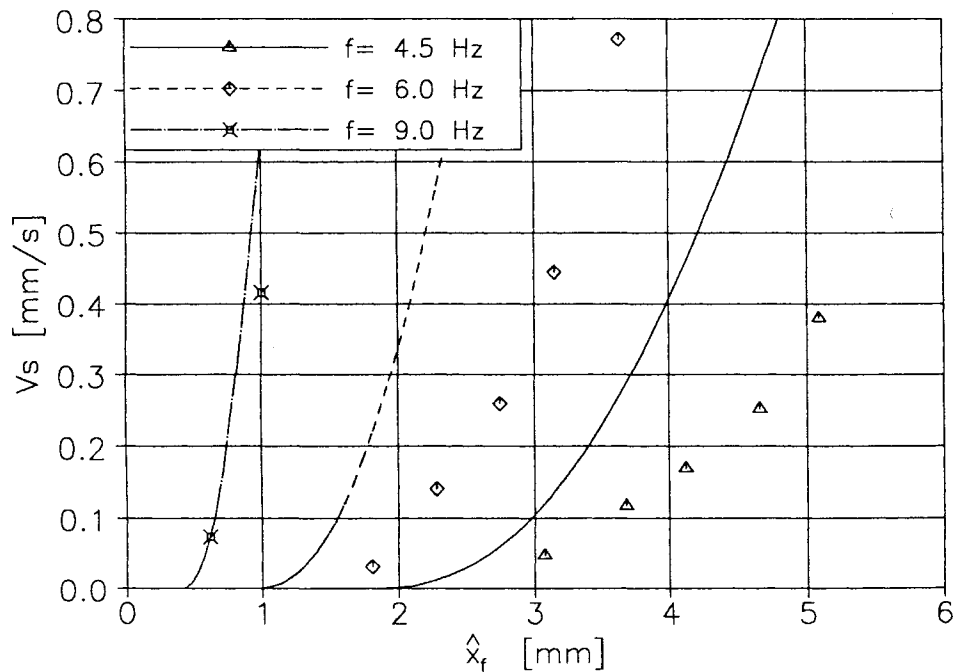


Bild 6.22c: Sinkgeschwindigkeiten einer Glaskugel ($d_{G1} = 13$ mm) in Fluid 1 in Abhängigkeit von Erregeramplitude und -frequenz

Man muß bei diesem Vergleich insgesamt berücksichtigen, daß das mechanische Ersatzmodell lediglich die Bewegung einer Kugel in einem unendlich ausgedehnten Fluid beschreiben kann. Die Randeffekte haben in dem hier verwandten Versuchsaufbau jedoch sicherlich ebenso eine Auswirkung auf die Sinkgeschwindigkeit, wie sie sich schon auf die Übertragungsfunktion bzw. auf die Grenzkurve der Sedimentation ausgewirkt haben. Je größer der Kugeldurchmesser ist, desto stärker machen sich die Einflüsse bemerkbar. Damit können auch die Unterschiede der Meßwerte im Sedimentationsbeginn zur Vorhersage auf Basis des mechanischen Modells erklärt werden.

Schließlich gehen bei der Berechnung der Sinkbewegung in das Ersatzmodell im wesentlichen die Bingham'schen Stoffparameter $\hat{\eta}$ und τ_f ein. Gerade die differentielle Viskosität, die in die Dämpferkonstante a_2 eingeht, ist mit einer relativ großen Unsicherheit belastet, so daß auch dadurch ein gewisser Fehler entstehen kann.

Alle berechneten und gemessenen Geschwindigkeiten sind recht klein und liegen in der Größenordnung von 10^{-3} m/s. Voraussetzung für die Anwendung des mechanischen Modells ist u.a., daß die Sedimentation bei recht hohen Werten der Widerstandszahl C stattfindet (vgl. Kapitel 5). Bildet man aus der gemittelten Sinkgeschwindigkeit und den Stoffparametern eine mittlere Widerstandszahl \bar{C} ,

$$\bar{C} = \frac{(\rho_k - \rho_f)g d^2}{18 \hat{\eta} v_s}, \quad (6.5)$$

und setzt dann die entsprechenden Größen ein, so erreichen alle Werte den Bereich $\bar{C} > 100$. Sie liegen damit im Gültigkeitsbereich der Modellbetrachtungen.

Durch den in den Bildern 6.20 – 6.22 dargestellten Vergleich wird deutlich, daß mit dem in Kapitel 5 entwickelten mechanischen Ersatzmodell die instationäre Sedimentation einer Kugel in einem Bingham-Fluid realistisch wiedergegeben werden kann. Durch die oben genannten Ursachen erklären sich die Unterschiede zwischen den experimentellen Ergebnissen und der Prognose. Auf jeden Fall können mit dem Ersatzmodell die Größenordnungen

der mittleren Sinkgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von Anregungsfrequenz und –amplitude vorhergesagt werden. In das mechanische Modell gehen nur wenige Parameter ein, die alle durch Standardversuche vor der eigentlichen instationären Sedimentation bestimmt werden können. Gerade im Hinblick auf die technische Anwendung ist dieser Punkt sehr wichtig, denn die Modellvorhersagen versetzen den Verfahreningenieur in die Lage, entsprechende Apparate auszulegen.

In der Praxis haben die Behälter, in denen die Sedimentation stattfindet, sicherlich nicht so kleine Abmessungen wie bei den hier gezeigten Versuchen. In einem solchen Fall werden die in Kapitel 4 gezeigten und im Experiment nachgewiesenen Störungen des Frequenzganges durch den äußeren Rand nicht auftreten. Dann kann gerade das mechanische Ersatzmodell angewendet werden, da es ja die Kugelbewegung in einem unendlich ausgedehnten Material beschreibt. Das mechanische Ersatzmodell erlaubt aber in diesem Fall nicht nur die Prognose der zeitlich gemittelten Sinkbewegung, sondern es gibt auch die zur Sedimentation notwendige Parameterkombination der Anregungsschwingung wieder, vgl. Gl.(5.14).

Die hier vorgestellten Ergebnisse behandeln nur die Bewegungen von Einzelkugeln. Bei Anwendungen in der Industrie hat man es jedoch meist mit Partikelschwärmen zu tun. Die Partikel treten also zum einen in größerer Anzahl auf, zum anderen sind sie nicht unbedingt kugelförmig. Die Bewegungen solcher Partikelschwärme sind komplex und entziehen sich i.allg. der genauen Berechnung. Im Fall der stationären Sedimentation werden daher, wie schon am Anfang dieser Arbeit erwähnt wurde, die Berechnungsergebnisse für Einzelkugeln mittels empirischer Koeffizienten auf Partikelschwärme übertragen. Eine solche Vorgehensweise läßt sich dann sicherlich auch bei der hier behandelten instationären Sedimentation anwenden. Allerdings müßten dazu, um konkrete Aussagen zu machen, umfangreiche Messungen durchgeführt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird die Sedimentation eines kugelförmigen Einzelpartikels in viskoplastischen Fluiden theoretisch und experimentell untersucht. Die theoretische Analyse erfolgt unter der Annahme eines Bingham'schen Stoffmodells, in welches nur zwei Stoffparameter eingehen. Ein solcher Stoff beginnt erst nach Erreichen der Fließspannung zu fließen und die differentielle Viskosität bleibt dann konstant. Die Ergebnisse zeigen, daß sich schon unter stationären Bedingungen die Sedimentation in einem solchen Fluid gegenüber einem newtonschen Fluid stark unterscheidet. Im wesentlichen sind zwei Dinge zu beobachten. Zum einen nimmt die stationäre Sinkgeschwindigkeit im Schwerfeld in Abhängigkeit der beiden Stoffparameter drastisch ab. Andererseits sedimentiert eine Kugel in dem Fluid unter Wirkung der Schwerkraft gar nicht, wenn eine Kennzahl einen gewissen Grenzwert überschreitet. In der Literatur ist dazu ein theoretischer Zusammenhang zwischen den Absinkgeschwindigkeiten und den Bingham'schen Stoffparametern bekannt. Dieser ist Basis für die Konstruktion eines einfachen Rheometers, welches nach dem Prinzip eines Kugelfallviskosimeters arbeitet. Durch experimentelle Bestimmungen der Bingham'schen Stoffparameter verschiedener viskoplastischer Fluide wird die Funktionsweise nachgewiesen.

Steckt eine Kugel unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft in einem Bingham'schen Stoff fest, so bleiben die Spannungen in dem Stoff auf Grund der statischen Belastung durch das Gewicht der Kugel unterhalb der Fließspannung. Unter diesen Umständen kann das viskoplastische Fluid im Rahmen eines Modells wie ein viskoelastischer Festkörper behandelt werden. Regt man die Kugel zu harmonischen Schwingungen an, kommen zu den statischen Spannungen noch dynamische Anteile hinzu. Sowohl die statischen als auch die dynamischen Spannungen lassen sich mit dem Modell berechnen und in integraler Form zu Widerstandskräften zusammenfassen. In der vorliegenden Arbeit wird die theoretische Prognose formuliert, daß die Sedimentation einer solchen schwingenden Kugel einsetzt, wenn die lineare Superposition von statischer und dynamischer Widerstandskraft einen Grenzwert überschreitet. Bei festen Stoffwerten von Fluid und Kugel ist dieser Grenzwert eine Funktion

der Erregerfrequenz und –amplitude. Die Gültigkeit der Prognose bestätigen experimentelle Ergebnisse für unterschiedliche Fluide und Kugeln. In einem schwingenden zylindrischen Behälter wird dazu jeweils die Bewegung einer unter Wirkung der Schwerkraft steckenden Kugel aufgenommen. Es zeigen sich gute Übereinstimmungen zwischen den Vorhersagen und den Meßwerten. Hierbei ist darauf hinzuweisen, daß die Stoffwerte, die in die Prognose eingehen, durch unabhängige Messungen ermittelt werden können.

Im Hinblick auf den Anwendungsfall in der Praxis wird in dieser Arbeit schließlich ein mechanisches Ersatzmodell zur Beschreibung der Kugelbewegung in einem Bingham–Fluid entwickelt. Es besteht aus wenigen Elementen (Massen, einer Feder, zwei Dämpfern und einem Reibelement), deren konzentrierte Parameter sich aus den realen Stoffwerten von Fluid und Kugel berechnen lassen. Unter Voraussetzung gewisser Grenzfälle (u.a. unendlich ausgedehntes Fluid) kann das Ersatzmodell nicht nur das Einsetzen der schwingungsinduzierten Sedimentation vorhersagen, sondern auch die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit der sinkenden Kugel prognostizieren. Es zeigt sich, daß die Sinkgeschwindigkeiten stark von der Erregerfrequenz und der Erregeramplitude abhängen. Gegenüberstellungen mit Experimenten zeigen auch hier gute Übereinstimmungen.

Das in dieser Arbeit zugrunde liegende Stoffmodell im Fließbereich eines viskoplastischen Fluids ist relativ einfach, da nur zwei konstante Stoffparameter eingehen. Zur Simulation der Sedimentation in realen Fluiden mit Fließgrenzen, deren Verhalten wesentlich von dem eines Bingham–Fluids abweichen, können für weitere Untersuchungen zu diesem Thema andere Stoffmodelle notwendig werden. Hier bieten sich dann beispielsweise das Modell von Herschel–Bulkley oder Casson an. Durch Anwendung des Extremalprinzips ließe sich bei diesen Stoffmodellen eine Näherung für die stationäre Sinkgeschwindigkeit angeben. Genauere Berechnungen wären jedoch auch hier nur über numerische Verfahren möglich.

8 Literaturverzeichnis

- [1.1] Barnes, H.A. The yield stress myth?
Walters, K. Rheol. Acta. 24 (1985), 323–326
- [1.2] Astarita, G. Letter to the editor: The engineering reality of the yield
stress. J. Rheol. 34(2) (1990), 275–277
- [1.3] Evans, I.D. Letter to the editor: On the nature of the yield stress.
J. Rheol. 36(7) (1992), 1313–1316
- [1.4] Schurz, J. Letter to the editor: A yield value in a true solution.
J. Rheol. 36(7) (1992), 1319–1321
- [1.5] Barnes, H.A. "The yield stress myth?" revisited. In Proc. XIth Int.
Congr. on Rheology (Edited by P. Moldenaers and
R. Keunings), Brussels, 1992
- [2.1] Zogg, M. Einführung in die Mechanische Verfahrenstechnik.
B. G. Teubner, Stuttgart, 1987
- [2.2] Landau, L.D. Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VI
Lifschitz, E.M. Hydrodynamik. Akademie Verlag, Berlin, 1991
- [2.3] Stokes, G.G. On the effect of the internal friction on the motion of
pendulum. Trans. Camb. Philos. Soc. 9 (1851) II, 8–106
- [2.4] Brauer, H. Impuls-, Stoff-, und Wärmetransport durch die Grenz-
fläche kugelförmiger Partikel. Chemie-Ing.-Techn. 45
(1973), 1099–1103
- [2.5] Böhme, G. Strömungsmechanik nicht-newtonscher Fluide.
B.G. Teubner, Stuttgart, 1981
- [2.6] Bingham, E.C. Fluidity and Plasticity.
McGraw Hill, New York, 1922
- [2.7] Dedegil, M.Y. Drag coefficient and settling velocity of particles in
non-newtonian suspensions. J. Fluids Eng. 109 (1987),
319–323
- [2.8] Böhme, G. Anwendung eines Extremalprinzips für reibungsbe-
haftete Strömungen. THD-Schriftenreihe Wissen.
Technik 28 (1986), 33–47
- [2.9] Hopke, S.W. Upper and lower bounds on the drag coefficient of a
Slattery, J.C. sphere in an Ellis model fluid. AIChE J. 16 (1970) 2,
224–229
- [2.10] Wassermann, M.L. Upper and lower bounds on the drag coefficient of a
Slattery, J.C. sphere in a power-model fluid. AIChE J. 10 (1964) 3,
383–388

- [2.11] Chhabra, R.P.
Uhlherr, P.H.T. Creeping motion of spheres through shear-thinning elastic fluids described by the Carreau viscosity equation. *Rheol. Acta* 19 (1980), 187–195
- [2.12] Chhabra, R.P. Creeping motion of spheres through Ellis model fluids. *Rheol. Acta* 20 (1981), 346–351
- [2.13] Cho, Y.I.
Hartnett, J.P. Drag coefficients of a slowly moving sphere in non-newtonian fluids. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 12 (1983), 243–247
- [2.14] Yoshioko, N.
et al. On creeping flow of a viscoplastic fluid past a sphere. *Kagaku Kogaku* 10 (1971), 1144–1152
- [2.15] Leonov, A.I. Extremum principles and exact two-side bounds of potential: functional and dissipation for slow motions of nonlinear viscoplastic media. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 28 (1988), 1–28
- [2.16] Stoer, J.
Bulirsch, R. Einführung in die Numerische Mathematik II. 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1978
- [2.17] Beris, A.N.
et al. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. *J. Fluid Mech.* 158 (1985), 219–244
- [2.18] Ansley, R.W.,
Smith, T.N. Motion of spherical particles in a Bingham plastic. *AIChE J.* 13 (1967), 1193–1196
- [2.19] Valentik, L.,
Withmore, R.L. The terminal velocity of spheres in Bingham plastics. *Brit. J. Appl. Phys.* 16 (1965), 1197–1203
- [3.1] Keentok M. The measurement of the yield stress of liquids. *Rheol. Acta* 21 (1982), 325–332
- [3.2] Nguyen, Q.D.
Boger, D.V. Yield stress measurement for concentrated suspensions. *J. Rheol.* 27 (1983) 4, 321–349
- [3.3] Nguyen, Q.D.
Boger, D.V. Direct yield stress measurement with the vane method. *J. Rheol.* 29 (1985) 3, 335–347
- [3.4] Yoshimura, A.S.
et al. A comparison of techniques for measuring yield stress. *J. Rheol.* 31 (1987) 8, 699–710
- [3.5] Gottlieb, M. Zero-shear-rate viscosity measurements for polymer solutions by falling ball viscometry. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 6 (1979), 97–109
- [3.6] Cho, Y.I. Non-newtonian viscosity measurements in the intermediate shear rate range with the falling-ball viscometer. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* 15 (1984), 61–74
- [3.7] Wünsch, O. Experimentelle Bestimmung Bingham'scher Stoffparameter. *Rheol. Acta* 29 (1990) 2, 163–169

- [3.8] Hartnett, J.P. Technical note: the yield stress – an engineering reality.
Hu, R.Y.Z. J. Rheol. 33 (1989), 671–679
- [3.9] Clift, R., Bubbles, drops and particles.
et al. Academic Press, New York, 1978
- [3.10] Dazhi, G. The drag on a sphere in a power–law fluid.
Tanner, R.I. J. Non–Newt. Fluid Mech. 17 (1985), 1–12
- [3.11] Mena, B. The influence of rheological properties on the slow flow
Manero, O. past spheres. J. Non–Newt. Fluid Mech.
26 (1987), 247–275
- [3.12] Atapattu, D.D. Wall effect for spheres falling at small reynolds number
et. al. in a viscoplastic medium. J. Non–Newt. Fluid
Mech. 38 (1990), 31–42
- [4.1] Hunter, S.C. The motion of a rigid sphere embedded in an adhering
elastic and viscoelastic medium. Proc. Eding. Math.
Soc. 16 (1968), 55–69
- [4.2] Becker, E. Kontinuumsmechanik.
Bürger, W. B. G. Teubner, Stuttgart, 1975
- [4.3] Landau, L.D. Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VII
Lifschitz, E.M. Elastizitätstheorie. Akademie Verlag, Berlin, 1991
- [4.4] Wünsch, O. Kugelschwingung in einem Fluid mit Fließgrenze.
Z. angew. Math. Mech. 72 (1992) 5, T349 – T352
- [4.5] Stenger, M. Ein Ausdruck für die Wechselwirkungskraft zwischen
viskoelastischer Flüssigkeit und einer nach harmo-
nischem Zeitgesetz bewegten Kugel. Z. angew. Math.
Mech. 69 (1989) 6, T664 – T666
- [4.6] Sellers, H.S. Boundary effects on the drag of an oscillating sphere:
et al. applications to the magnetic sphere rheometer. J. Non-
Newt. Fluid Mech. 26 (1987), 43–55
- [5.1] Waller, H. Schwingungslehre für Ingenieure.
Schmidt, R. B–I–Wissenschaft, Mannheim, 1989
- [5.2] Wünsch, O. Vibration of a sphere in a yield stress fluid. In Proc.
XIth Int. Congr. on Rheology (Edited by P. Moldenaers
and R. Keunings), Brussels, 1992
- [5.3] Magnus, K. Schwingungen.
B. G. Teubner, Stuttgart, 1986

- [5.4] Fehlberg, E. Klassische Runge–Kutta–Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiten–Kontrolle. *Computing* 4 (1969), 93–106
- [6.1] Bird, R.B. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid Mechanics. et al. Wiley Interscience, New York, 1987
- [6.2] Yoshimura, A.S. Response of an elastic Bingham fluid to oscillatory shear. *Rheol. Acta* 26 (1987), 428–436
- [6.3] Czichos, H. Hütte: Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. (Hrsg.) Springer Verlag, Berlin, 1989