



**Institut
für
Mechanik**

**U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T**

Thermoviskoelastizität und Thermoplastizität: Modellierung, Implementierung und Simulation

Dipl.- Ing. Christoph Bröcker

Institute of Mechanics
University of Kassel

Mitteilung des Instituts für Mechanik Nr.4/2007
Report of the Institute of Mechanics No.4/2007

Der Inhalt dieser Arbeit muss nicht das eingereichte oder publizierte Original sein, sondern kann Änderungen beinhalten.
The content of this work might contain changes and is therefore different to a possible submitted or otherwise published original.

Herausgeber/editor

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Kassel

Organisation und Verwaltung/organization and administration

Priv.-Doz. Dr.-Ing. Stefan Hartmann
Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr.7
34125 Kassel
Germany

© 2007

Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34125 Kassel
Germany

www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de

U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T

Fachbereich Maschinenbau
Institut für Mechanik
Fachgebiet Numerische Methoden der Mechanik

Diplomarbeit II

Thermoviskoelastizität und
Thermoplastizität:
Modellierung, Implementierung und
Simulation

von:
Christoph Bröcker
Matr. Nr.: 21206760

Betreuer:
Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

28. November 2006

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit eigenständig durchgeführt und verfasst zu haben. Es wurden keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und sämtliche Stellen, die anderen Werken im Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, mit Quellenangaben kenntlich gemacht.

Kassel, den 28.11.2006

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vi
Listings	vii
1 Einleitung	1
1.1 Reales Materialverhalten	1
1.2 Inhalt der Arbeit	2
2 Kontinuumsmechanische Gleichungen	4
2.1 Bilanzgleichungen	4
2.2 Innere Dissipation	6
2.2.1 Thermoelastizität	7
2.2.2 Thermoviskoelastizität	8
2.2.3 Thermoplastizität	9
2.3 Wärmeleitungsgleichung	10
2.3.1 Thermoelastizität	10
2.3.2 Thermoviskoelastizität	11
2.3.3 Thermoplastizität	12
3 Materialmodelle	15
3.1 Motivation von mechanischen Materialmodellen anhand rheologischer Modelle	15
3.1.1 Elastizität	17
3.1.2 Viskoelastizität (Maxwell-Element)	17
3.1.3 Viskoelastizität (Kelvin-Element)	18
3.1.4 Viskoelastizität (3P-Modell)	19
3.1.5 Idealplastizität	21
3.1.6 Plastizität mit isotroper Verfestigung	23
3.1.7 Plastizität mit kinematischer Verfestigung	26
3.1.8 Viskoplastizität mit kinematischer Verfestigung	30
3.2 Anmerkungen zur Plastizität	33
3.3 Anmerkungen zur Viskoplastizität	35
3.4 Zusammenfassung	36
3.5 Erweiterung zu thermomechanischen Materialmodellen	40
3.5.1 Thermoelastizität	40
3.5.2 Thermoviskoelastizität (Kelvin-Element)	41

3.5.3	Thermoviskoelastizität (3P-Modell)	42
3.5.4	Thermoplastizität	44
3.5.5	Energieumsetzung	48
3.5.6	Thermoviskoplastizität:	50
4	Numerische Lösungsverfahren	52
4.1	Implizites Eulerverfahren	52
4.2	Newton-Verfahren	52
4.3	Multilevel-Newton Verfahren	53
5	Allgemeine Herleitung der Elementformulierung	56
5.1	Schwache Form der Impulsbilanz	57
5.2	Schwache Form der Wärmeleitungsgleichung	58
5.3	Näherungsansatz für die Feldgrößen	59
5.4	Linearer Elementansatz	64
6	Thermoviskoelastisches Dehnstabelement (3P-Modell)	66
6.1	Zeitintegration der Evolutionsgleichung der viskosen Dehnung	66
6.2	Koordinatentransformation	71
6.3	Element in globalen Koordinaten	73
6.4	Stabkraft und Wärmestrom	77
6.5	Linearisierung mit Newton-Verfahren	81
7	Thermoplastisches Dehnstabelement	83
7.1	Element in globalen Koordinaten	85
7.2	Stabkraft und Wärmestrom im Element	87
7.3	Zeitintegration der Evolutionsgleichungen	89
7.4	Berechnung der Elementtangente	89
7.5	Zum Vergleich: plastische Spannungsleistung als Wärmequellterm	102
8	Implementierung in Feap	106
8.1	Thermoviskoelastisches Dehnstabelement	111
8.2	Thermoplastisches Dehnstabelement	120
9	Berechnungen	136
9.1	Aufbau der Eingabedateien	136
9.2	Thermoviskoelastisches Dehnstabelement	141
9.2.1	Berechnung 1: Relaxationsprozess	142
9.2.2	Berechnung 2: Kriechprozess	144
9.2.3	Berechnung 3: Zyklische Belastung	145
9.2.4	Berechnung 4: Zyklische Belastung adiabat	147
9.3	Thermoplastisches Dehnstabelement	150
9.3.1	Berechnung 1: mit isotroper Verfestigung nach HELM	150
9.3.2	Berechnung 2: mit kinematischer Verfestigung nach HELM	153
9.3.3	Berechnung 3: mit isotroper und kinematischer Verfestigung	154
9.3.4	Berechnung 4: Wärmequelle mit Taylor-Quinney-Koeffizient	156
9.3.5	Berechnung 5: Zyklische Belastung mit isotroper und kinematischer Verfestigung	158

9.3.6	Berechnung 6: Vergleich zu KAMLAH	160
9.3.7	Berechnung 7: Experiment von ADAMS und KREMPL	163
10	Zusammenfassung	167
	Literaturverzeichnis	169

Abbildungsverzeichnis

3.1	Feder mit σ - ε -Diagramm	15
3.2	Dämpfer mit σ - ε -Diagramm	16
3.3	Reibelement mit σ - ε -Diagramm	16
3.4	Maxwell-Element	17
3.5	σ - ε -Diagramm Maxwell-Element	18
3.6	Kelvin-Element	18
3.7	σ - ε -Diagramm Kelvin-Element	19
3.8	3P-Modell	19
3.9	σ - ε -Diagramm 3P-Modell	20
3.10	Rheologisches Modell der Idealplastizität	21
3.11	σ - ε -Diagramm der Idealplastizität, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$	22
3.12	Rheologisches Modell der Plastizität mit isotroper Verfestigung	23
3.13	Diagramm κ über der plastischen Bogenlänge s_p bei linearer isotroper Verfestigung	24
3.14	σ - ε -Diagramm bei Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon \rightarrow \infty$	24
3.15	Diagramm κ über der plastischen Bogenlänge s_p bei nichtlinearer isotroper Verfestigung mit Sättigung	25
3.16	σ - ε -Diagramm bei Plastizität mit nichtlinearer isotroper Verfestigung mit Sättigung, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon \rightarrow \infty$	25
3.17	Plastizität mit kin. Verfestigung	26
3.18	σ - ε - und ξ - ε -Diagramm für Plastizität mit linearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung), dehnungsgesteuerter Belastungspfad für $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$	28
3.19	ξ - ε_p -Diagramm für Plastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung)	29
3.20	σ - ε - und ξ - ε -Diagramm für Plastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung), dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$	29
3.21	Viskoplastizität	30
3.22	Viskoplastizität mit kinematischer Verfestigung	30
5.1	Dehnstabelement mit Formfunktionen	64
6.1	Dehnstab mit lokalen und globalen Verschiebungsfreiheitsgraden	71
6.2	Dehnstab mit lokalen und globalen Knoten- und Volumenkräften	72

9.1	FE-Modell der thermoviskoelastischen Berechnungen	141
9.2	Dehnung und viskose Dehnung	142
9.3	Relaxationskurve	143
9.4	Temperaturentwicklung	143
9.5	Kriechkurve	144
9.6	Temperaturentwicklung	145
9.7	Vorgegebene Verschiebung Knoten 4	145
9.8	Dehnung und resultierende viskose Dehnung	146
9.9	Spannungs-Dehnungs-Diagramm	146
9.10	Temperaturentwicklung	147
9.11	Vorgegebene Verschiebung Knoten 4	147
9.12	Dehnung und resultierende viskose Dehnung	148
9.13	Spannungsverlauf	149
9.14	Temperaturentwicklung	149
9.15	FE-Modell der thermoplastischen Berechnungen	150
9.16	Dehnungsgesteuerter Belastungspfad für Rechnung 1, 2, 3, 4	151
9.17	Spannungs-Dehnungs-Diagramm, isotr. Verfestigung	152
9.18	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit	152
9.19	Spannungs-Dehnungs-Diagramm, kin. Verfestigung	153
9.20	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit	153
9.21	Spannungs-Dehnungs-Diagramm, isotr. und kin. Verfestigung	154
9.22	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit	155
9.23	Temperaturentwicklung	155
9.24	Temperaturentwicklung bei $\bar{\gamma} = 1.0$	156
9.25	Temperaturentwicklung bei $\bar{\gamma} = 0.9$	157
9.26	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit bei $\bar{\gamma} = 0.9$	157
9.27	Dehnungsgesteuerter Belastungspfad	158
9.28	Temperaturentwicklung	159
9.29	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit	159
9.30	Dehnungsgesteuerter Belastungspfad	160
9.31	Spannungs-Dehnungs-Diagramm	161
9.32	Temperaturentwicklung in der Stabmitte nach KAMLAH	162
9.33	Temperaturentwicklung	162
9.34	Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit	163
9.35	Spannungs-Dehnungs-Diagramm für rostfreien Stahl AISI Typ 304 aus ADAMS und KREMPL [9]	165
9.36	Spannungs-Dehnungs-Diagramm für 100 Lastzyklen	165
9.37	Temperaturentwicklung nach ADAMS und KREMPL [9]	166
9.38	Temperaturentwicklung	166

Tabellenverzeichnis

7.1	Darstellung des Lösungsschritts von t^n zu t^{n+1}	101
8.1	Beschreibung der Variablen(-felder)	107
8.2	Beschreibung der verwendeten Variablen der COMMON-Blöcke . . .	108
8.3	isw-Funktionen	109
8.4	Beschreibung lokale Variablen elmt04	111
8.5	Beschreibung Elementroutine elmt04 Teil 1	111
8.6	Beschreibung Elementroutine elmt04 Teil 2	112
8.7	Beschreibung lokale Variablen elmt05	120
8.8	Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 1	121
8.9	Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 2	122
8.10	Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 3	123
9.1	Parameterbeschreibung Materialdefinition elmt04	137
9.2	Parameterbeschreibung Materialdefinition elmt05	138
9.3	Ausgabemöglichkeiten TPLOt-Kommando elmt04	140
9.4	Ausgabemöglichkeiten TPLOt-Kommando elmt05	140

Listings

8.1	Verwendete COMMON-Blöcke	107
8.2	Quellcode Elementroutine <code>elmt04</code>	113
8.3	Quellcode Elementroutine <code>elmt05</code>	124
9.1	Materialdefinition <code>elmt04</code>	137
9.2	Materialdefinition <code>elmt05</code>	138

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Reales Materialverhalten

Thermomechanische Kopplungseffekte spielen in vielen praktischen Anwendungen eine wichtige und zum Teil sogar die entscheidende Rolle. Als einfachste Auswirkung der Kopplungseffekte ist die thermische Dehnung bei Temperaturänderungen zu nennen. Diese wird beispielsweise bei der Herstellung von kraftschlüssigen Verbindungen durch Aufschrumpfen ausgenutzt. Oder für die Einbringung von Eigenspannungen bei Glaswaren durch eine geschickte Temperaturführung bei der Abkühlung von der Schmelze zum Festkörper, um die Widerstandsfähigkeit gegenüber kleinen Rissen zu erhöhen.

Bei Metallumformungsprozessen zeigt sich ein weiteres Zusammenwirken von mechanischem und thermischem Verhalten. Treten plastische Deformationen auf, so wird Wärme dissipiert. Das führt zum Anstieg der Temperatur des Werkstücks. Da viele Werkstoffparameter wie beispielsweise die Fließgrenze, der Elastizitätsmodul oder der thermische Ausdehnungskoeffizient selbst von der Temperatur abhängig sind, hat der Temperaturanstieg wiederum einen Einfluss auf das mechanische Verhalten des Werkstoffs. Insbesondere wird die Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze bei Warmumformungsprozessen ausgenutzt.

Alle Werkstoffe haben ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes temperaturabhängiges Verhalten. Und selbst bei rein elastischen Verformungen tritt thermomechanische Kopplung auf, diese bewirkt eine Abkühlung bei Expansion bzw. eine Erwärmung bei Kompression.

Für Kunststoffe ist ein viskoelastisches Werkstoffverhalten charakteristisch, dabei treten bei anhaltender Belastung Kriechen und bei anhaltender Dehnung Spannungsrelaxation auf. Auch diese Effekte sind mit einer Dissipation von Wärme verbunden.

Metalle zeigen ein höchst komplexes Werkstoffverhalten. Bei sehr kleinen Deformationen laufen diese rein elastisch, das heißt reversibel ab. Dabei tritt nur die zuvor erwähnte thermoelastische Kopplung auf. Überschreitet die Spannung im Werkstoff jedoch eine bestimmte Grenze, nämlich die Fließspannung, so entstehen plastische Verformungen. Die Fließgrenze selber ist auch stark prozessabhängig. Sie steigt bei zunehmender plastischer Deformation an, was als Verfestigung bezeichnet wird. Dabei ist zu beobachten, dass nach einer Belastung bis zur Spannung κ bei Belastungs-

umkehr plastische Deformationen bereits vor Erreichen der Spannung $-\kappa$ auftreten. Dies bezeichnet man als Bauschinger Effekt. Desweiteren tritt bei Metallen auch eine zyklische Verfestigung auf. Darunter versteht man, dass sich bei zyklischer Belastung mit konstanter Mitteldehnung nach einigen Lastzyklen mit wachsender Hysterese eine konstante Hysterese im Spannungs-Dehnungs-Diagramm einstellt. Wird die Mitteldehnung nun vergrößert, so wächst die Hysterese bis sich wieder eine statische Hysterese einstellt. Ein Materialmodell, das dieses Verhalten erfasst, wurde in KAMLAH [8] entwickelt. Außerdem zeigt sich auch bei Metallen eine Geschwindigkeitsabhängigkeit, und zwar bei den plastischen Deformationen. Entsprechende Materialmodelle der Viskoplastizität wurden beispielsweise von Lion [10] oder LÜHRS [6] behandelt. Die viskoplastischen Effekte treten besonders bei sehr hohen Temperaturen zum Vorschein.

Die Temperatur hat noch weitere Einflüsse auf das Werkstoffverhalten. Bereits angeführt wurde die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffparameter, besonders zeigt sich ein starkes Absinken der Fließspannung bei hohen Temperaturen. Zudem treten bei hohen Temperaturen auch Rekristallisationsvorgänge im Werkstoffgefüge auf, was eine Rückbildung der Verfestigung, also eine thermische Entfestigung, bewirkt.

Bereits erwähnt wurde auch, dass bei plastischen Deformationen Wärme dissipiert wird. Dabei wird plastische Arbeit in Wärme umgewandelt, jedoch nicht die gesamte geleistete plastische Arbeit, denn ein Teil der plastischen Arbeit wird im Werkstoff gespeichert.

Im Rahmen dieser Arbeit kann natürlich nur ein Teil dieser Eigenschaften und Phänomene Berücksichtigung finden.

1.2 Inhalt der Arbeit

In dieser Arbeit werden ausgehend von mechanischen Materialmodell thermomechanische Materialmodelle hergeleitet. Dabei wird die thermomechanische Konsistenz nachgewiesen, was bedeutet, dass die Materialmodelle den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in jedem Falle erfüllen. Das heißt die Entropieproduktion ist immer größer oder gleich null, egal wie der durchgeführte Prozess auch aussehen mag.

In Kapitel 2 werden ausgehend von den Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik für die Materialmodelle der Thermoelastizität, der Thermoviskoelastizität und der Thermoplastizität Forderungen hergeleitet, die, sofern sie erfüllt werden, die thermomechanische Konsistenz dieser Modelle garantieren. Anschließend werden die Wärmeleitungsgleichungen für die Modelle hergeleitet. Da, wie Kapitel 3 zeigt, aus den Gleichungen der Plastizität durch formale Schritte die Gleichungen der Viskoplastizität hervorgehen, gelten diese Forderungen an die Thermoplastizität auch für die Thermoviskoplastizität. Dies alles geschieht jedoch mit der Beschränkung auf kleine Deformationen.

Ab Kapitel 3 erfolgt die Behandlung ausschließlich für eindimensionale Materialmodelle. Hier werden anhand von rheologischen Modellen, bestehend aus den Grundelementen Feder, Dämpfer und Reibelement, die Materialmodelle für Viskoelastizität, Plastizität und Viskoplastizität hergeleitet. Anschließend werden diese Modelle zu thermomechanischen Modellen erweitert, wobei die thermomechanische

Konsistenz nachgewiesen wird. Außerdem erfolgen noch Aussagen zur Energiespeicherung im Material bei der Thermoplastizität.

Kapitel 4 stellt die in dieser Arbeit verwendeten numerischen Verfahren vor: das implizite Eulerverfahren zur Zeitintegration sowie das Newtonverfahren und das Multilevel-Newton Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme.

In Kapitel 5 wird eine lineare Dehnstabelementformulierung in allgemeiner Form hergeleitet, sodass man durch Einsetzen der Spannungsbeziehung des Materialmodells und des dissipationsabhängigen Anteils der Wärmeleitungsgleichung schnell die Elementformulierung erhalten kann.

Dies wird in Kapitel 6 für das thermoviskoelastische Materialmodell und in Kapitel 7 für das thermoplastische Materialmodell mit nichtlinearer kinematischer und isotroper Verfestigung durchgeführt.

Kapitel 8 dokumentiert die Implementierung der beiden Dehnstabelemente mit FORTRAN 77 in das FE-Programm FEAP.

In Kapitel 9 werden schließlich mehrere Berechnungen zur Verifikation der entwickelten Elemente sowie zur Darstellung deren Eigenschaften und Fähigkeiten durchgeführt.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Gleichungen

2.1 Bilanzgleichungen

Zunächst sollen kurz die mechanischen Bilanzgleichungen für kleine Verzerrungen vorgestellt werden, außerdem werden die freie Energie und das Wärmeleitungsmodell nach Fourier eingeführt (nach HAUPT [1]):

Massenbilanz

Die Massenbilanz soll nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden und lautet:

$$\dot{m} = 0 \tag{2.1}$$

Das bedeutet, dass die Masse m eines Körpers konstant ist.

Impulsbilanz

Die lokale Form der Impulsbilanz lautet:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.2}$$

Darin sind \mathbf{T} der Spannungstensor, ρ die Dichte, \mathbf{f} die spezifischen Volumenkräfte und $\ddot{\mathbf{u}}$ die Beschleunigung.

Drehimpulsbilanz

Die lokale Drehimpulsbilanz besagt, dass der Spannungstensor symmetrisch ist:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \tag{2.3}$$

Energiebilanz

Die lokale Energiebilanz ergibt sich aus dem **1. Hauptsatz der Thermodynamik** und lautet:

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r \tag{2.4}$$

Darin sind \dot{e} die zeitliche Änderung der inneren Energie, $\dot{\mathbf{E}}$ der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, \mathbf{q} der Wärmestromvektor und r die spezifische Wärmequelle. Dabei

stellt der erste Term der rechten Seite die Spannungsleistung dar.

Die Verzerrungen setzen sich dabei additiv aus einem elastischen und einem inelastischen Anteil zusammen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}_i \quad (2.5)$$

Entropiebilanz

Die lokale Entropiebilanz lautet:

$$\dot{s} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \frac{r}{\theta} + \Gamma \quad (2.6)$$

Dabei ist \dot{s} die zeitliche Änderung der Entropie, θ die absolute Temperatur und Γ die Entropieproduktion. Der erste Term der rechten Seite stellt den Entropiefluß aufgrund des Wärmestroms dar, der zweite Term ist die Entropiezufuhr durch die Wärmequelle.

Dazu besagt der **2. Hauptsatz der Thermodynamik**, dass die Entropieproduktion Γ niemals negativ sein kann:

$$\Gamma \geq 0 \quad (2.7)$$

Daraus folgt die **Clausius-Duhem-Ungleichung**:

$$\Gamma = \dot{s} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (2.8)$$

Freie Energie

Die freie Energie (Helmholtz Energie) ψ wird definiert als:

$$\psi = e - \theta s \quad (2.9)$$

Später wird für die thermomechanischen Materialmodelle ein Ansatz für die freie Energie der Form

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{E}_i, \dots) \quad (2.10)$$

gemacht.

Wärmeleitung nach Fourier

Das Wärmeleitungsmodell nach Fourier besagt, dass die Wärme stets entgegengesetzt zum Temperaturgradienten fließt

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -k \operatorname{grad} \theta \\ &= -k \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit k der Wärmeleitfähigkeit und dem Temperaturgradienten:

$$\mathbf{g} = \theta_{,i} = \operatorname{grad} \theta \quad (2.12)$$

2.2 Innere Dissipation

Die Herleitung der inneren Dissipation folgt HAUPT [1]. Dazu wird die Clausius-Duhem-Ungleichung (2.8) mit θ multipliziert:

$$\theta \Gamma = \theta \dot{s} + \frac{\theta}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - r \geq 0 \quad (2.13)$$

Dabei wird das Produkt

$$\delta = \theta \Gamma \quad (2.14)$$

als **innere Dissipation** bezeichnet. Damit folgt die Dissipationsungleichung:

$$\delta \geq 0 \quad (2.15)$$

Mit der Umformung

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) &= \frac{\theta}{\rho} \left(\frac{q_i}{\theta} \right)_{,i} \\ &= \frac{\theta}{\rho} \left(\frac{q_{i,i} \theta - q_i \theta_{,i}}{\theta^2} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

folgt:

$$\delta = \theta \dot{s} + \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \right) - r \quad (2.17)$$

Aus der Zeitableitung der freien Energie (2.9) folgt:

$$\theta \dot{s} = -\dot{\psi} + \dot{e} - \dot{\theta} s \quad (2.18)$$

Einsetzen in Gleichung (2.13) ergibt:

$$\delta = -\dot{\psi} + \dot{e} - \dot{\theta} s + \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \right) - r \quad (2.19)$$

Mit der inneren Energie (2.4) folgt:

$$\delta = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta} s - \frac{1}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (2.20)$$

Einsetzen des Wärmeleitungsmodells nach Fourier (2.11) führt zu:

$$\delta = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta} s + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.21)$$

Um bei der Materialmodellierung thermomechanisch konsistente Materialmodelle zu erhalten, müssen der Ansatz der freien Energie und die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen die Dissipationsungleichung (2.21) erfüllen.

2.2.1 Thermoelastizität

Im Falle der Thermoelastizität wird angenommen, dass die freie Energie Funktion der Dehnung, der Temperatur und des Temperaturgradienten sein kann:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}) \quad (2.22)$$

Damit folgt die Zeitableitung der freien Energie zu:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} \quad (2.23)$$

Einsetzen in die Dissipationsungleichung (2.21) ergibt:

$$\delta = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta} s + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \quad (2.24)$$

zusammengefasst:

$$\delta = \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \quad (2.25)$$

Um $\delta \geq 0$ für alle denkbar mögliche thermomechanische Prozesse zu erfüllen, müssen die Faktoren der Zeitableitungen $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\theta}$ und $\dot{\mathbf{g}}$ verschwinden. Damit folgt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -s \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} = 0 \quad (2.28)$$

das heißt, die Freie Energie hat eine Potentialeigenschaft für die Spannung und die Entropie und ist unabhängig vom Temperaturgradienten:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta) \quad (2.29)$$

Die verbleibende Restungleichung

$$\delta = \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.30)$$

ist immer erfüllt. Das bedeutet, das Materialmodell der Thermoelastizität ist für eine freie Energie nach Gl. (2.29) thermomechanisch konsistent.

2.2.2 Thermoviskoelastizität

Bei der Thermoviskoelastizität wird angenommen, die freie Energie ist Funktion der Dehnung, der Temperatur, des Temperaturgradienten sowie weiterer innerer Variablen q_1, \dots, q_n , welche Skalare oder Komponenten von Tensoren sein können:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.31)$$

Damit lautet die Zeitableitung der freien Energie

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.32)$$

wobei \dot{q}_k die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen sind. Einsetzen in die Dissipationsungleichung (2.21) ergibt:

$$\delta = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta} s + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \quad (2.33)$$

Zusammenfassen:

$$\delta = \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{\rho \theta} k \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \quad (2.34)$$

Um $\delta \geq 0$ in jedem Fall zu erfüllen, müssen die Faktoren von $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\theta}$ und $\dot{\mathbf{g}}$ verschwinden, woraus wieder die Potentialeigenschaft der freien Energie bezüglich Spannung und Entropie folgt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -s \quad (2.36)$$

Und mit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} = 0 \quad (2.37)$$

folgt die Unabhängigkeit der freien Energie vom Temperaturgradienten:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, q_1, \dots, q_n) \quad (2.38)$$

Es verbleibt die Restungleichung:

$$\delta = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{\rho \theta} k \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.39)$$

Der rechte Term ist immer größer/gleich null, somit verbleibt die Forderung an die mechanische Dissipation δ_M , dass diese größer/gleich null sein muss:

$$\delta_M = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \geq 0 \quad (2.40)$$

Die freie Energie und die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen sind also, um ein thermomechanisch konsistentes Materialmodell zu erhalten, so zu wählen, dass sie die Ungleichung für die mechanische Dissipation (2.40) erfüllen.

2.2.3 Thermoplastizität

Für die Thermoplastizität wird die freie Energie als Funktion der elastischen Dehnung, der inelastischen Dehnung, der Temperatur, des Temperaturgradienten sowie weiterer innerer Variablen q_1, \dots, q_n , welche Skalare oder Komponenten von Tensoren sein können, angesetzt:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}_{el}, \mathbf{E}_i, \theta, \mathbf{g}, q_1, \dots, q_n) \quad (2.41)$$

Damit folgt die Zeitableitung der freien Energie zu:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.42)$$

hierbei sind $\dot{\mathbf{E}}_i$ und \dot{q}_k die Evolutionsgleichungen von inelastischer Dehnung und den weiteren inneren Variablen. Einsetzen in die Dissipationsungleichung (2.21) führt zu:

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ & + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\theta} s + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nach Gl. (2.5) gilt für die Dehnung

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_{el} + \dot{\mathbf{E}}_i \quad (2.44)$$

dies führt zu:

$$\begin{aligned} \delta = & \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + s \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \\ & - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Daraus folgt die Potentialeigenschaft der freien Energie bezüglich Spannung und Entropie:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -s \quad (2.47)$$

sowie mit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} = 0 \quad (2.48)$$

die Unabhängigkeit der freien Energie vom Temperaturgradienten:

$$\psi = \psi(\mathbf{E}_{el}, \mathbf{E}_i, \theta, q_1, \dots, q_n) \quad (2.49)$$

Es verbleibt von Gleichung (2.45) die Ungleichung:

$$\delta = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{k}{\rho \theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.50)$$

Der rechte Term ist stets größer/gleich null, somit verbleibt die Forderung, dass die mechanische Dissipation δ_M größer/gleich null sein muss:

$$\delta_M = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \geq 0 \quad (2.51)$$

Das bedeutet, die Ansätze von freier Energie und den Evolutionsgleichungen der inneren Variablen müssen so gewählt werden, dass sie die Ungleichung für die mechanische Dissipation (2.51) erfüllen, um ein thermomechanisch konsistentes Materialmodell zu erhalten.

2.3 Wärmeleitungsgleichung

Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung folgt HAUPT [1]. Aus der lokalen Energiebilanz (2.4)

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad (2.52)$$

und der Zeitableitung der freien Energie (2.9)

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{\theta} s + \theta \dot{s} \quad (2.53)$$

sowie der Fourierschen Wärmeleitung (2.11)

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{g} \quad (2.54)$$

folgt:

$$\rho \dot{\psi} + \rho \dot{\theta} s + \rho \theta \dot{s} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} + k \operatorname{div} \mathbf{g} + \rho r \quad (2.55)$$

Durch Einsetzen der freien Energie der einzelnen Materialmodelle ergeben sich nun die Wärmeleitungsgleichungen dieser Modelle.

2.3.1 Thermoelastizität

Mit der Zeitableitung der freien Energie der Thermoelastizität (2.29)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (2.56)$$

eingesetzt in Gleichung (2.55) ergibt:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}}_{=\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}}_{=-s} + \rho \dot{\theta} s + \rho \theta \dot{s} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} + k \operatorname{div} \mathbf{g} + \rho r \quad (2.57)$$

Unter Verwendung der Potentialbeziehungen (2.26) und (2.27) folgt:

$$\theta \dot{s} = \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r \quad (2.58)$$

Die Zeitableitung der Entropie ergibt sich aus der Potentialbeziehung (2.27) mit (2.29) zu:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \cdot \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Damit folgt:

$$-\frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r \quad (2.60)$$

Mit der Definition der Wärmekapazität bei konstanter Deformation

$$c_d = -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \quad (2.61)$$

ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung der Thermoelastizität zu:

$$c_d \dot{\theta} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}}_{-w_e} + \underbrace{\frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r}_{w_Q} \quad (2.62)$$

Der Term der linken Seite beschreibt die Temperaturänderung aufgrund der Wärmezufuhr bzw. Wärmeabfuhr der Terme der rechten Seite. Der Term w_e ist der thermoelastische Kopplungsterm (auch piezocalorischer Kopplungsterm) und bewirkt eine Abkühlung bzw. Erwärmung infolge von Expansion bzw. Kompression. Durch w_Q wird Wärmeaustausch ermöglicht: der erste Term bewirkt Temperaturänderungen infolge von Wärmeleitungsvorgängen. Der zweite Term erzeugt Temperaturerhöhungen infolge von Wärmequellen, wie beispielsweise einer Strahlungsquelle.

2.3.2 Thermoviskoelastizität

Die Zeitableitung der freien Energie der Thermoviskoelastizität (2.38) lautet:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.63)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.55) ergibt:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}}_{=\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \theta}}_{=-s} \dot{\theta} + \rho \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \dot{\theta} s + \rho \theta \dot{s} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} + k \operatorname{div} \mathbf{g} + \rho r \quad (2.64)$$

bzw.

$$\theta \dot{s} = \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.65)$$

Mit der Potentialbeziehung (2.36) und mit (2.38) lautet die Ableitung der Entropie nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \cdot \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial q_k} \dot{q}_k \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial s}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Damit folgt unter Verwendung der in Gl. (2.61) definierten Wärmekapazität bei konstanter Deformation die Wärmeleitungsgleichung der Thermoviskoelastizität zu:

$$c_d \dot{\theta} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}}_{-w_e} + \underbrace{\frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g}}_{w_Q} + r - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial q_k} \dot{q}_k}_{w_D} \quad (2.67)$$

Im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung der Thermoelastizität (2.62) entsteht hier auf der rechten Seite aufgrund der mechanischen Dissipation der inneren Variablen ein weiterer Term w_D . Dieser leistet einen Beitrag zur Temperaturerhöhung, sobald sich die inneren Variablen entwickeln.

2.3.3 Thermoplastizität

Die Zeitableitung der freien Energie der Thermoplastizität (2.49)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.68)$$

und die Gleichung (2.55) sowie (2.5) ergeben:

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_{el}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el}}_{=\mathbf{T}} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \rho \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}}_{=-s} + \rho \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \dot{\theta} s + \rho \theta \dot{s} \\ = \mathbf{T} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_{el} + \dot{\mathbf{E}}_i) + k \operatorname{div} \mathbf{g} + \rho r \end{aligned} \quad (2.69)$$

Zusammengefasst:

$$\theta \dot{s} = \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.70)$$

Die Ableitung der Entropie nach der Zeit ergibt sich nach Gleichung (2.47) mit (2.49) zu

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\
&= - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}_{el}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial q_k} \dot{q}_k \right) \\
&= - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} - \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial s}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \tag{2.71}
\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} + \theta \frac{\partial s}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \theta} \dot{\theta} + \theta \sum_{k=1}^n \frac{\partial s}{\partial q_k} \dot{q}_k \\
&= \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Wärmekapazität bei konstanter Deformation (2.61) die Wärmeleitungsgleichung der Thermoplastizität:

$$\begin{aligned}
c_d \dot{\theta} &= \underbrace{\frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el}}_{-w_e} + \underbrace{\frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r}_{w_Q} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i}_{w_p} - \underbrace{\left(\frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)}_{w_s} \tag{2.73} \\
&\hspace{10em} \underbrace{\hspace{15em}}_{w_D}
\end{aligned}$$

Im Vergleich zur Thermoelastizität treten nun drei weitere Terme auf, welche aus der mechanischen Dissipation resultieren. w_p ist die plastische Spannungsleistung. Der Term w_s beschreibt die Energie, welche benötigt wird, um bei der plastischen Deformation das Materialgefüge zu verändern, woraus die Verfestigung resultiert.

Das wiederum bedeutet, dass nicht die gesamte plastische Spannungsleistung w_p in Wärme umgewandelt wird, sondern der Anteil w_s wird im Werkstoff gespeichert. Diesen Anteil bezeichnet man auch als cold work. Erste Untersuchungen dazu stammen von TAYLOR & QUINNEY. Somit trägt nur die Differenz w_D zur Erwärmung des Werkstoffs bei.

Aus diesem Grunde wird bisher beispielsweise bei kommerziellen FE-Programmen wie LS-DYNA und ABAQUS die Vereinfachung gemacht, dass die plastische Spannungsleistung w_p , multipliziert mit einem Faktor, dem Taylor-Quinney-Koeffizient $\bar{\gamma}$, in der Wärmeleitungsgleichung als Wärmequelle w_D angesetzt wird:

$$w_D = \bar{\gamma} w_p = \bar{\gamma} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \tag{2.74}$$

Typische Werte von $\bar{\gamma}$ liegen bei 0.9. Damit lautet die Wärmeleitungsgleichung:

$$c_d \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{el} + \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r + \bar{\gamma} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \quad (2.75)$$

Zusammenfassung:

Eine allgemeinere Form der Wärmeleitungsgleichung ist:

$$c_d \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r + D \quad (2.76)$$

Dabei beinhaltet D genau diejenigen Terme, welche aufgrund der mechanischen Dissipation entstehen. Für die einzelnen behandelten Materialmodelle hat D die folgende Form:

Thermoelastizität:

$$D = 0 \quad (2.77)$$

Thermoviskoelastizität:

$$D = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta_s)}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.78)$$

Thermoplastizität:

$$D = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial(\psi + \theta_s)}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta_s)}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.79)$$

Thermoplastizität bei kommerzieller FE-Software:

$$D = \bar{\gamma} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{1}{\rho} \theta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \quad (2.80)$$

Linearisierung der Wärmeleitungsgleichung:

Die Wärmeleitungsgleichung (2.76) ist aufgrund des ersten Terms der rechten Seite nichtlinear. Für kleine Temperaturänderungen $\theta - \theta_0 \ll \theta_0$ kann die Gleichung durch

$$\theta = \theta_0 \quad (2.81)$$

linearisiert werden:

$$c_d \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\rho} k \operatorname{div} \mathbf{g} + r + D \quad (2.82)$$

Entsprechend folgt für die Ausdrücke D der Wärmeleitungsgleichung der Thermoplastizität

$$D = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{\partial(\psi + \theta_s)}{\partial \mathbf{E}_i} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\psi + \theta_s)}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.83)$$

und der Thermoplastizität bei kommerzieller FE-Software:

$$D = \bar{\gamma} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i - \frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \quad (2.84)$$

Kapitel 3

Materialmodelle

Da in dieser Arbeit lediglich Berechnungen am Dehnstab erfolgen sollen, werden auch die Materialmodelle direkt in 1-dimensionaler Formulierung behandelt.

3.1 Motivation von mechanischen Materialmodellen anhand rheologischer Modelle

Im folgenden sollen die zu verwendeten Materialmodelle anhand ihrer rheologischen Modelle motiviert werden. Dazu werden zuerst kurz die Eigenschaften der Grundelemente Feder, Dämpfer und Reibelement erklärt.

Linear elastische Feder

Die Spannung in einer linear elastischen Feder ergibt sich nach dem Hookschen Gesetz zu:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3.1}$$

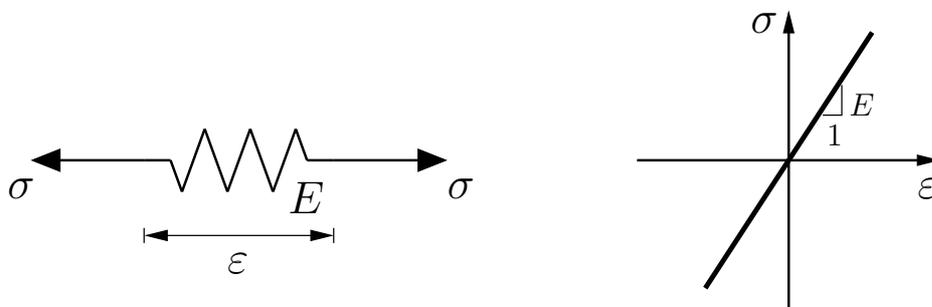


Abbildung 3.1: Feder mit σ - ε -Diagramm

Linear viskoser Dämpfer

Die Spannung eines linear viskosen Dämpfers beträgt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta \dot{\varepsilon} \\ &= \eta |\dot{\varepsilon}| \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

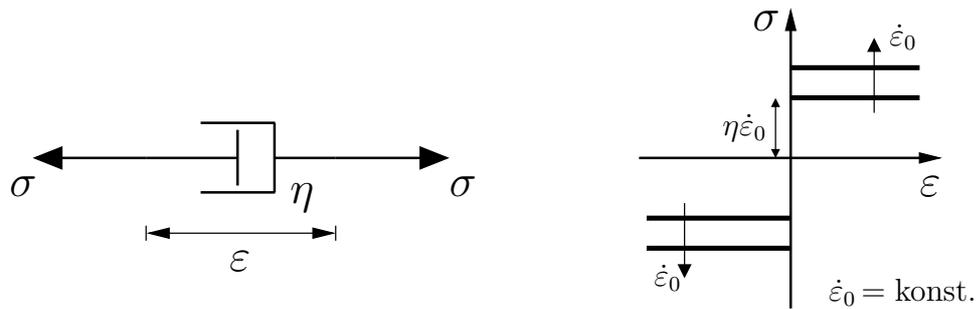


Abbildung 3.2: Dämpfer mit σ - ε -Diagramm

Reibelement (von Mises-Element)

Damit das Reibelement gedehnt werden kann, muss für die Spannung gelten

$$\sigma = \kappa \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \tag{3.3}$$

bzw.

$$|\sigma| = \kappa \tag{3.4}$$

wobei κ die Fließgrenze des Reibelements darstellt. Die dabei am Reibelement auftretenden Dehnungen sind plastische Dehnungen.

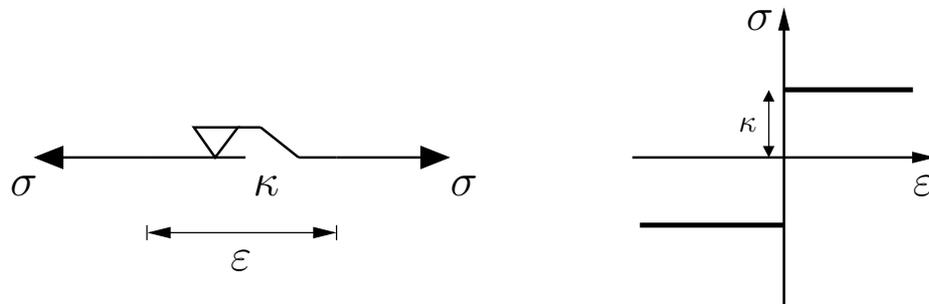


Abbildung 3.3: Reibelement mit σ - ε -Diagramm

Ist hingegen $|\sigma| < \kappa$, so verhält sich das Reibelement wie ein starrer Stab.

3.1.1 Elastizität

Das Elastizitätsmodell soll dem Hookschen Gesetz folgen, somit verhält es sich wie die zuvor beschriebene linear elastische Feder. Damit gilt für die Spannung:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.5)$$

3.1.2 Viskoelastizität (Maxwell-Element)

Das Maxwell-Element ergibt sich durch Reihenschaltung einer linear elastischen Feder mit einem linear viskosen Dämpfer und beschreibt das Verhalten eines Fluides.

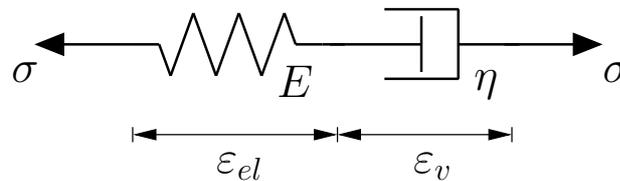


Abbildung 3.4: Maxwell-Element

Dabei ergibt sich die Dehnung zu:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_v \quad (3.6)$$

Für die Spannung gilt

$$\sigma = E\varepsilon_{el} = \eta\dot{\varepsilon}_v \quad (3.7)$$

und es folgt:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.8)$$

bzw.

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_v) \quad (3.9)$$

Mit

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.10)$$

ergibt sich nun die Differentialgleichung des Maxwell-Elements zu:

$$\dot{\sigma} - \frac{E}{\eta}\sigma = E\dot{\varepsilon} \quad (3.11)$$

Für eine vorgegebene in der Zeit lineare Dehnung $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t$ lautet die analytische Lösung der DGL:

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad (3.12)$$

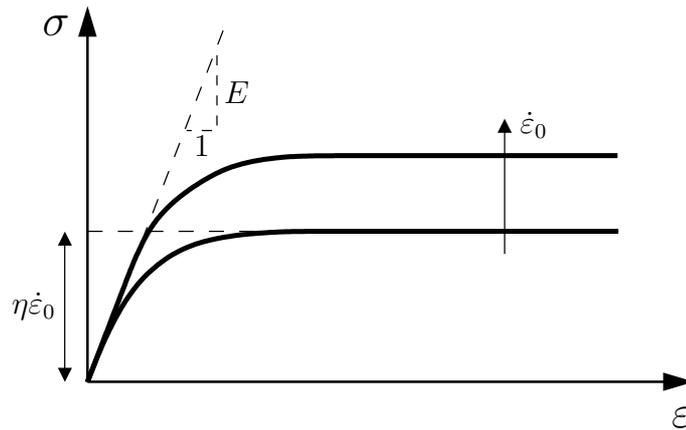


Abbildung 3.5: σ - ϵ -Diagramm Maxwell-Element

Die Spannung kann auch in Abhängigkeit einer internen Variablen, nämlich von der viskosen Dehnung ϵ_v , dargestellt werden:

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_v) \tag{3.13}$$

Dazu lautet die Evolutionsgleichung für ϵ_v

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{E}{\eta}(\epsilon - \epsilon_v) \tag{3.14}$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\epsilon_v(0) = 0 \tag{3.15}$$

Diese Gleichungen bilden zusammen ein Algebra-differentialgleichungssystem zur Berechnung der Spannung des Maxwell-Elements.

3.1.3 Viskoelastizität (Kelvin-Element)

Das Kelvin-Element erhält man durch Parallelschaltung einer linear elastischen Feder und eines linear viskosen Dämpfers.

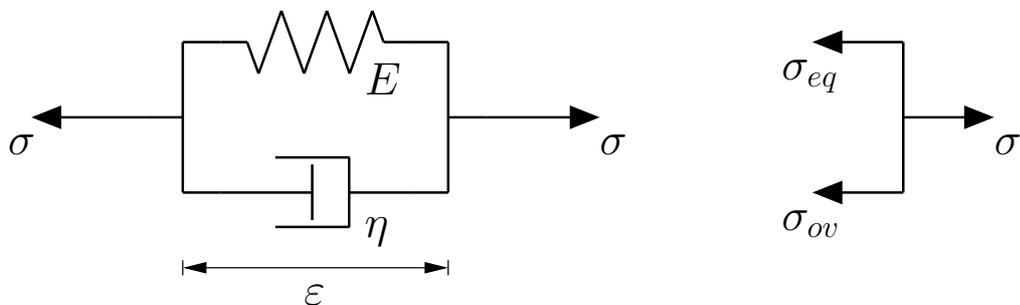


Abbildung 3.6: Kelvin-Element

Dabei ergibt sich die Spannung aus der Summe von Gleichspannung und Überspannung zu

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \\ &= E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}_v \end{aligned} \tag{3.16}$$

mit

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon} \tag{3.17}$$

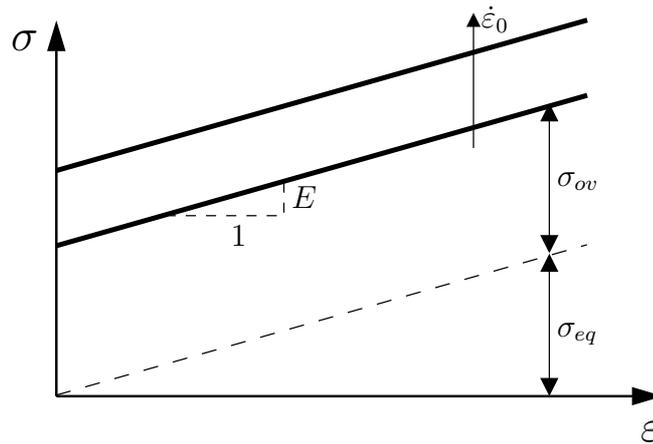


Abbildung 3.7: σ - ε -Diagramm Kelvin-Element

3.1.4 Viskoelastizität (3P-Modell)

Das 3-Parameter-Modell entsteht durch Parallelschaltung des Maxwell-Elements mit einer linear elastischen Feder.

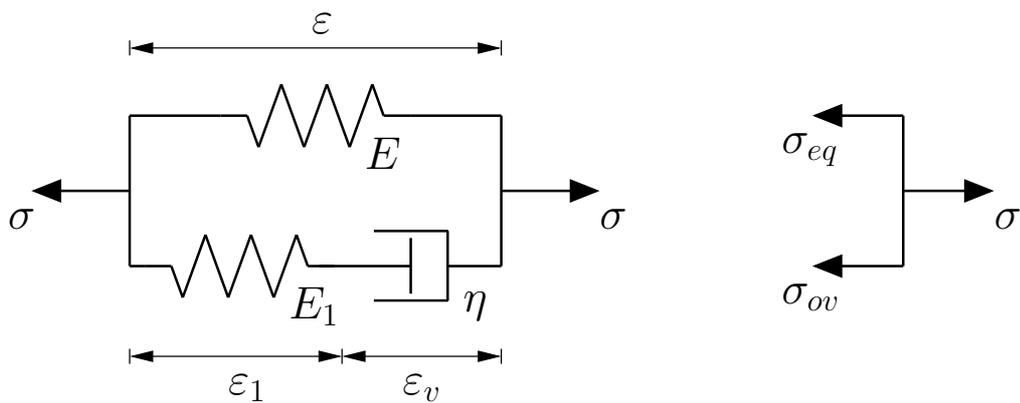


Abbildung 3.8: 3P-Modell

Die Dehnung ergibt sich zu:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_v \tag{3.18}$$

Für die Spannung gilt:

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \quad (3.19)$$

Mit der Gleichspannung

$$\sigma_{eq} = E\varepsilon \quad (3.20)$$

und der Überspannung

$$\sigma_{ov} = E_1\varepsilon_1 = \eta\dot{\varepsilon}_v \quad (3.21)$$

folgt

$$\sigma = E\varepsilon + E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.22)$$

bzw.

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + E_1(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_v) \quad (3.23)$$

Mit

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma_{ov}}{\eta} = \frac{\sigma - \sigma_{eq}}{\eta} = \frac{\sigma - E\varepsilon}{\eta} \quad (3.24)$$

ergibt sich die Differentialgleichung des 3-Parameter-Modells zu:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta}\sigma = (E + E_1)\dot{\varepsilon} + \frac{EE_1}{\eta}\varepsilon \quad (3.25)$$

Für eine vorgegebene in der Zeit lineare Dehnung $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 t$ lautet die analytische Lösung der DGL:

$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}_0 \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta}t}\right) \quad (3.26)$$

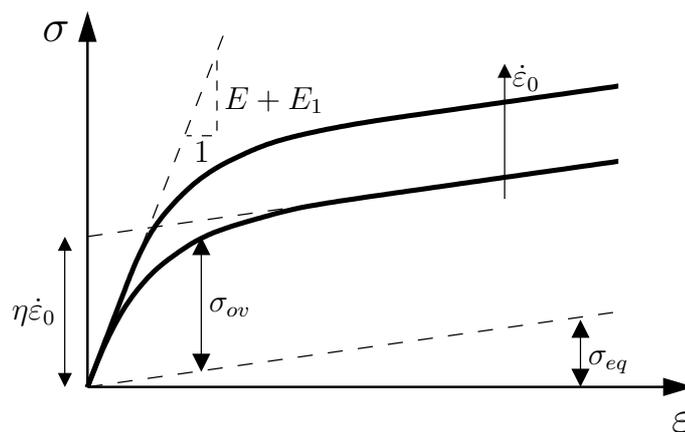


Abbildung 3.9: σ - ε -Diagramm 3P-Modell

Natürlich folgen aus der DGL des 3P-Modells und ihrer Lösung für $E \rightarrow 0$ bzw. $E_1 \rightarrow \infty$ die entsprechenden Gleichungen von Maxwell- und Kelvin-Element.

Auch beim 3P-Modell kann die Spannung wieder in Abhängigkeit der internen Variablen ε_v dargestellt werden:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}_v \quad (3.27)$$

Aus Gl. (3.21) ergibt sich die Evolutionsgleichung für ε_v zu

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma_{ov}}{\eta} = \frac{E_1}{\eta}(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.28)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\varepsilon_v(0) = 0 \quad (3.29)$$

Diese Gleichungen bilden das Algebra-differentialgleichungssystem zur Berechnung der Spannung des 3-Parameter-Modells.

3.1.5 Idealplastizität

Das rheologische Modell der Idealplastizität setzt sich aus einer linear elastischen Feder und dem Reibelement zusammen. Dabei ergibt sich die Dehnung zu:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_p \quad (3.30)$$

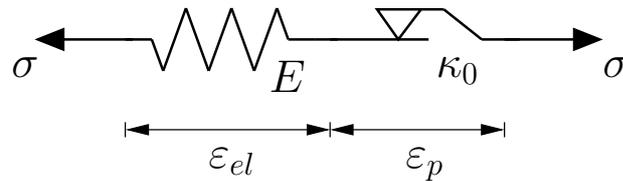


Abbildung 3.10: Rheologisches Modell der Idealplastizität

Die Spannung in der Feder ergibt sich zu:

$$\sigma_{el} = E\varepsilon_{el} \quad (3.31)$$

Wird das Reibelement gedehnt, so entwickeln sich dabei plastische Dehnungen. Die zugehörige Spannung im Reibelement lautet

$$\sigma_p = \kappa_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \quad (3.32)$$

und es gilt:

$$\sigma = \sigma_{el} = \sigma_p \quad (3.33)$$

Durch Betragsbildung von Gl. (3.33) mit (3.32) folgt:

$$|\sigma| = \kappa_0 \quad (3.34)$$

Daraus erhält man die **Fließfunktion** $f(\sigma)$ der Idealplastizität:

$$f(\sigma) := |\sigma| - \kappa_0 = 0 \quad (3.35)$$

Bei $f(\sigma) = 0$ entwickelt sich nur die plastische Dehnung im Reibelement, die elastische Dehnung hingegen bleibt nach Gl. (3.31) konstant, denn die Spannung wird durch das Reibelement nach (3.32) konstant gehalten.

Für $f(\sigma) < 0$ dagegen entwickelt sich nur der elastische Bereich gemäß Gl. (3.31) und das Reibelement verhält sich wie ein starrer Stab, sodass die plastische Dehnung konstant bleibt.

Für die plastische Dehnrate gilt:

$$\dot{\varepsilon}_p = |\dot{\varepsilon}_p| \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \quad (3.36)$$

Mit Gl. (3.32) bis (3.34) folgt daraus die **Fließregel** (Evolutionsgleichung für die plastische Dehnung) zu:

$$\dot{\varepsilon}_p = |\dot{\varepsilon}_p| \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (3.37)$$

Die zugehörige Anfangsbedingung lautet:

$$\varepsilon_p(0) = 0 \quad (3.38)$$

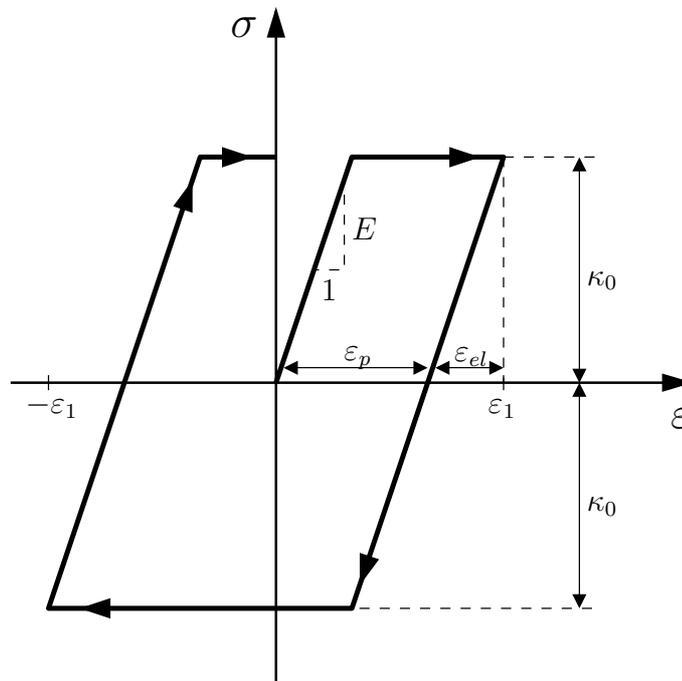


Abbildung 3.11: σ - ε -Diagramm der Idealplastizität, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$

3.1.6 Plastizität mit isotroper Verfestigung

Im Gegensatz zur Idealplastizität hat das Reibelement bei isotroper Verfestigung keine konstante Fließgrenze κ_0 . Stattdessen wird κ als interne Variable, mit einem Ansatz in Form einer monoton wachsenden Funktion, eingeführt und beschreibt somit die Verfestigung des Materialmodells.

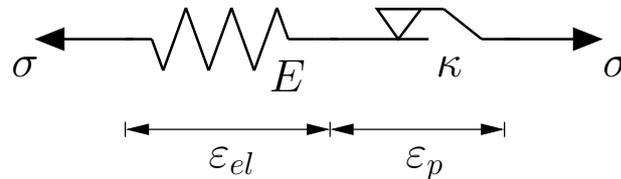


Abbildung 3.12: Rheologisches Modell der Plastizität mit isotroper Verfestigung

Lineare isotrope Verfestigung erreicht man durch eine Evolutionsgleichung für κ der Form

$$\dot{\kappa} = \beta \dot{s}_p \quad (3.39)$$

mit der Anfangsbedingung für κ :

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.40)$$

Dabei ist β ein positiver Materialparameter und \dot{s}_p die Zeitableitung der plastischen Bogenlänge s_p , einer monoton wachsenden Funktion definiert als:

$$s_p = \int_0^t |\dot{\epsilon}_p(\tau)| d\tau \quad (3.41)$$

Die plastische Bogenlänge wird gemäß ihrer Definition auch akkumulierte plastische Dehnung bezeichnet.

Mit der Definition des **plastischen Multiplikators** λ

$$\lambda := \dot{s}_p = |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.42)$$

lautet die lineare isotrope Verfestigung:

$$\dot{\kappa} = \lambda \beta \quad (3.43)$$

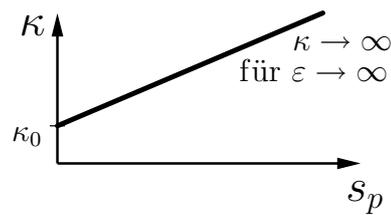


Abbildung 3.13: Diagramm κ über der plastischen Bogenlänge s_p bei linearer isotroper Verfestigung

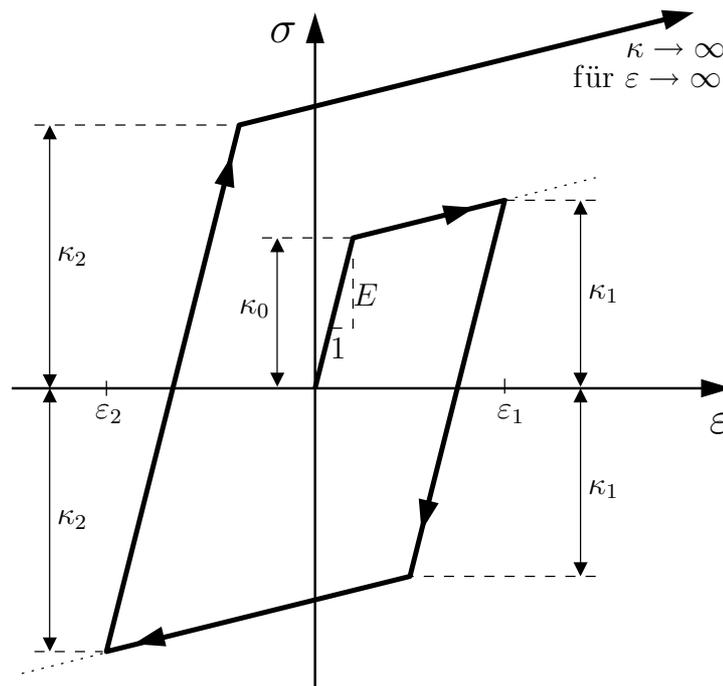


Abbildung 3.14: σ - ϵ -Diagramm bei Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\epsilon = 0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon \rightarrow \infty$

Nichtlineare isotrope Verfestigung (mit Sättigung) ermöglicht folgende Evolutionsgleichung für κ :

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= \beta(\kappa_\infty - \kappa)\dot{s}_p \\ &= \lambda\beta(\kappa_\infty - \kappa)\end{aligned}\quad (3.44)$$

mit

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.45)$$

hierbei ist κ_∞ die Sättigungsfließgrenze. κ entwickelt sich von κ_0 monoton wachsend bis zum Wert κ_∞ , für den dann $\dot{\kappa} = 0$ wird, somit ist eine Sättigung in κ erreicht.

Die zugehörige **Fließfunktion** der Plastizität mit isotroper Verfestigung erhält man in gleicher Weise wie bei der Idealplastizität. Sie lautet:

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - \kappa \quad (3.46)$$

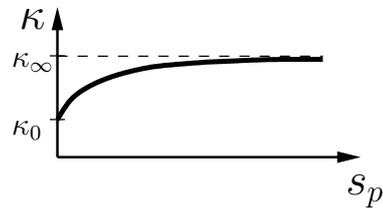


Abbildung 3.15: Diagramm κ über der plastischen Bogenlänge s_p bei nichtlinearer isotroper Verfestigung mit Sättigung

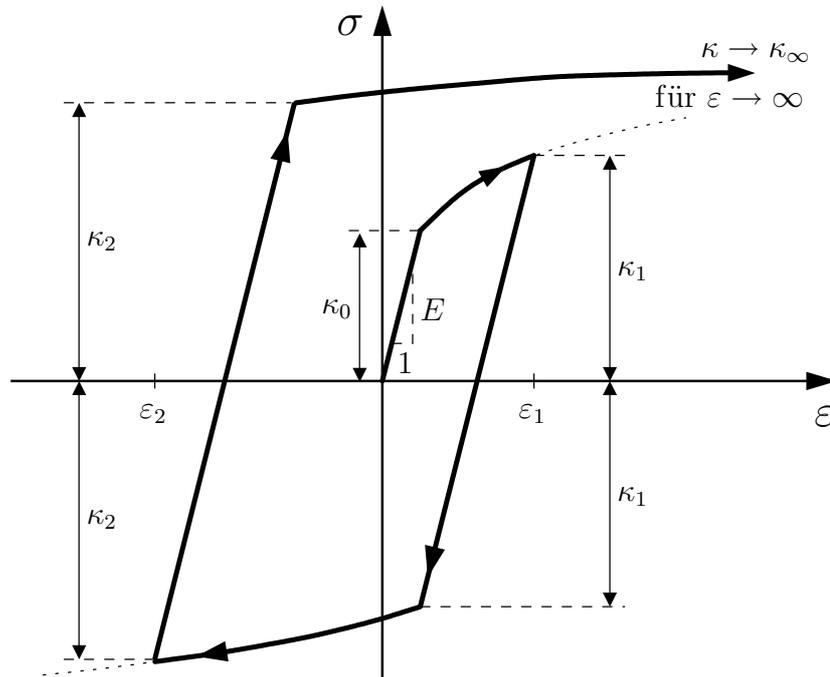


Abbildung 3.16: σ - ϵ -Diagramm bei Plastizität mit nichtlinearer isotroper Verfestigung mit Sättigung, dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\epsilon = 0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon \rightarrow \infty$

3.1.7 Plastizität mit kinematischer Verfestigung

Es ist zu beobachten, dass bei Belastungsumkehr nach plastischem Fließen das erneute plastische Fließen im Druckbereich nicht erst wie in Bild (3.14) oder (3.16) bei einer Spannung von κ_1 , sondern schon wesentlich früher auftritt. Dies wird als Bauschinger-Effekt bezeichnet und kann durch die kinematische Verfestigung im Materialmodell erfasst werden.

Plastizitätsmodelle mit **linearer kinematischer Verfestigung** erhält man aus den zuvor betrachteten Plastizitätsmodellen durch Parallelschaltung einer linearen Feder zu dem Reibelement.

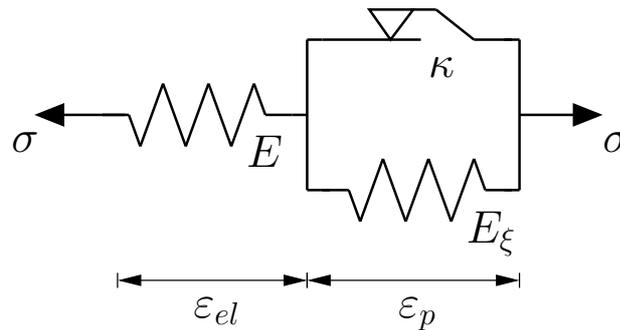


Abbildung 3.17: Plastizität mit kin. Verfestigung

Dabei ergibt sich die Dehnung zu:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_p \quad (3.47)$$

Entwickeln sich plastische Dehnungen, so muss für die Spannung gelten

$$\sigma = \sigma_{el} = \sigma_p \quad (3.48)$$

mit

$$\sigma_{el} = E\varepsilon_{el} \quad (3.49)$$

und

$$\sigma_p = \kappa \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) + E_\xi \varepsilon_p \quad (3.50)$$

Mit der Definition der kinematischen Verfestigung ξ als interne Variable

$$\xi := E_\xi \varepsilon_p \quad (3.51)$$

folgt:

$$\sigma = \kappa \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) + \xi \quad (3.52)$$

Nach Umformung und Betragsbildung

$$|\sigma - \xi| = \kappa \quad (3.53)$$

folgt die **Fließfunktion** $f(\sigma, \xi, \kappa)$ bei Plastizität mit kinematischer Verfestigung zu:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) := |\sigma - \xi| - \kappa = 0 \quad (3.54)$$

Aus Gl. (3.52) folgt

$$\text{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) = \frac{\sigma - \xi}{\kappa} \quad (3.55)$$

und mit Gl. (3.53) und Multiplikation mit $|\dot{\varepsilon}_p|$ ergibt sich die **Fließregel** zu

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p &= |\dot{\varepsilon}_p| \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \\ &= \lambda \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \end{aligned} \quad (3.56)$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\varepsilon_p(0) = 0 \quad (3.57)$$

Aus Gl. (3.51) folgt direkt durch Differentiation nach der Zeit die Evolutionsgleichung für die **lineare kinematische Verfestigung** ξ zu

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= E_\xi \dot{\varepsilon}_p \\ &= \lambda E_\xi \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \end{aligned} \quad (3.58)$$

mit der zugehörigen Anfangsbedingung:

$$\xi(0) = 0 \quad (3.59)$$

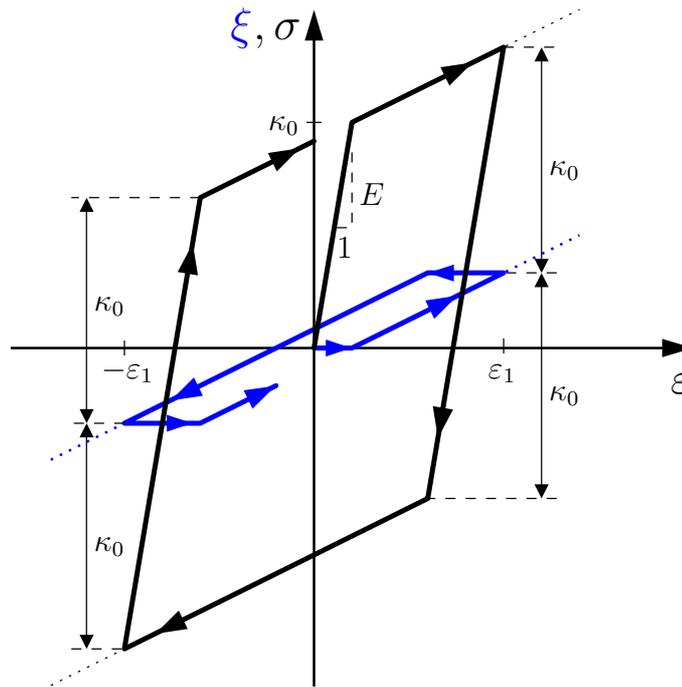


Abbildung 3.18: σ - ε - und ξ - ε -Diagramm für Plastizität mit linearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung), dehnungsgesteuerter Belastungspfad für $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$

Nichtlineare kinematische Verfestigung (mit Sättigung) ermöglicht eine Evolutionsgleichung für ξ nach dem Armstrong Frederick Ansatz, siehe HARTMANN [3],

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= a \dot{\varepsilon}_p - sb\xi \\
 &= a \dot{\varepsilon}_p - b|\dot{\varepsilon}_p|\xi \\
 &= \lambda \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

wobei a und b positive Materialparameter sind. Für $b = 0$ ergibt sich die lineare kinematische Verfestigung:

$$\dot{\xi} = a \dot{\varepsilon}_p \tag{3.61}$$

Ist Sättigung bei der kinematischen Verfestigung erreicht, so gilt:

$$\dot{\xi} = 0 \tag{3.62}$$

Mit Gl. (3.60) ergeben sich die beiden Maximalwerte ξ_{max} zu:

$$\xi_{max} = \frac{a}{b} \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \tag{3.63}$$

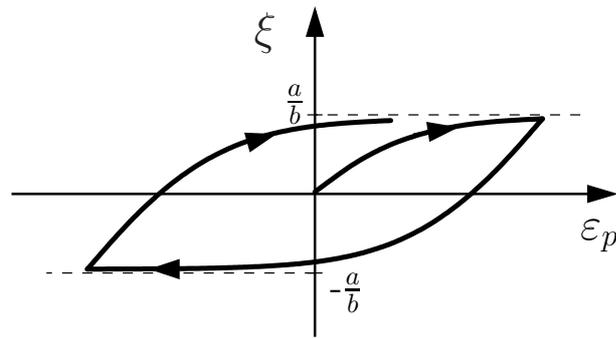


Abbildung 3.19: ξ - ε_p -Diagramm für Plastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung)

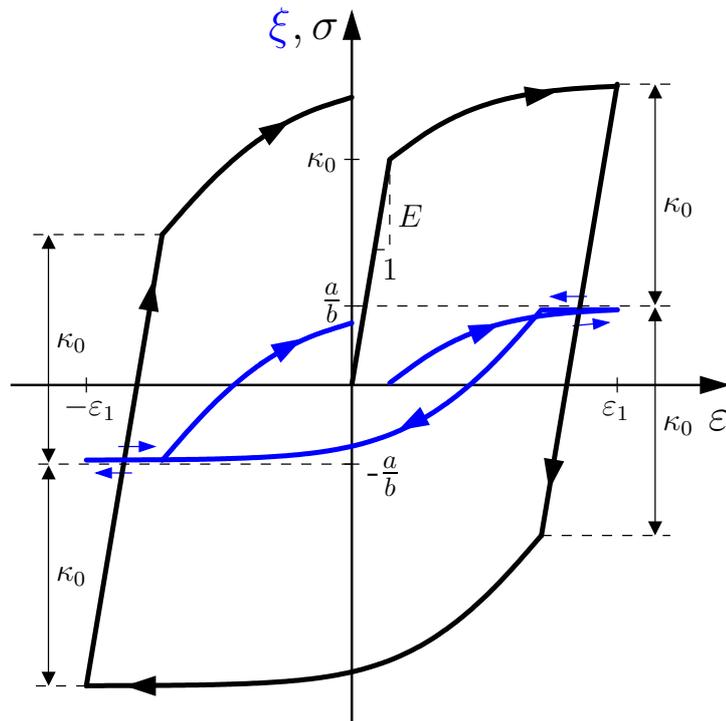


Abbildung 3.20: σ - ε - und ξ - ε -Diagramm für Plastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung (ohne isotrope Verfestigung), dehnungsgesteuerter Belastungspfad $\varepsilon = 0, \varepsilon_1, -\varepsilon_1, 0$

3.1.8 Viskoplastizität mit kinematischer Verfestigung

Durch die Parallelschaltung eines Dämpfers zu dem Reibelement erhält man aus den zuvor betrachteten Plastizitätsmodellen Viskoplastizitätsmodelle:

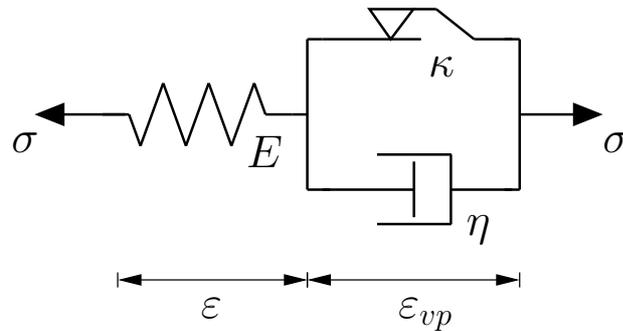


Abbildung 3.21: Viskoplastizität

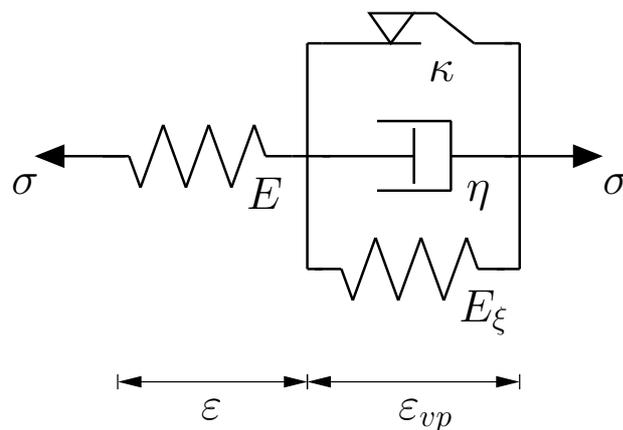


Abbildung 3.22: Viskoplastizität mit kinematischer Verfestigung

Bei dem Viskoplastizitätsmodell mit kinematischer Verfestigung aus Abbildung 3.22 ergibt sich die Dehnung zu:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vp} \quad (3.64)$$

Entwickeln sich viskoplastische Dehnungen, so muss für die Spannung gelten

$$\sigma = \sigma_{el} = \sigma_{vp} \quad (3.65)$$

mit

$$\sigma_{el} = E\varepsilon_{el} \quad (3.66)$$

und

$$\sigma_{vp} = \kappa \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_{vp}) + \eta \dot{\varepsilon}_{vp} + \xi \quad (3.67)$$

für

$$\xi = E_\xi \varepsilon_{vp} \quad (3.68)$$

Durch Umformung folgt:

$$\sigma - \xi = (\kappa + \eta |\dot{\varepsilon}_{vp}|) \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_{vp}) \quad (3.69)$$

Da κ und η positive Materialparameter sind folgt durch Betragsbildung und weitere Umformung:

$$|\dot{\varepsilon}_{vp}| = \frac{1}{\eta} (|\sigma - \xi| - \kappa) \quad (3.70)$$

Um diese Gleichung stets zu erfüllen, muss die rechte Seite stets größer/gleich null sein. Dies wird durch die Einführung der MacCauly Klammer

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

erreicht:

$$|\dot{\varepsilon}_{vp}| = \frac{1}{\eta} \langle |\sigma - \xi| - \kappa \rangle \quad (3.72)$$

Durch Betrachtung von Gleichung (3.69)

$$\sigma - \xi = \underbrace{(\kappa + \eta |\dot{\varepsilon}_{vp}|)}_{=|\sigma-\xi|} \underbrace{\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_{vp})}_{=\operatorname{sgn}(\sigma-\xi)} \quad (3.73)$$

folgt:

$$\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_{vp}) = \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) = \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \quad (3.74)$$

Nun ergibt sich die **Fließregel** der Viskoplastizität durch Multiplikation von Gleichung (3.74) mit (3.70) zu:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{vp} &= \frac{1}{\eta} \langle |\sigma - \xi| - \kappa \rangle \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \\ &= \frac{1}{\eta} \langle f \rangle \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun die **Fließfunktion** der Viskoplastizität identifizieren:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) := |\sigma - \xi| - \kappa \geq 0 \quad (3.76)$$

Diese Fließfunktion selbst ist identisch mit der der Plastizität (3.54), jedoch unterscheiden sich die Funktionswerte beider Fließfunktionen. Denn bei der Plastizität musste im plastischen Bereich die Fließfunktion mit $f = 0$ erfüllt werden, dagegen wird bei der Viskoplastizität nur die schwächere Forderung $f \geq 0$ erfüllt.

Die Anfangsbedingung zu Gl. (3.75) lautet:

$$\varepsilon_{vp}(0) = 0 \quad (3.77)$$

Aus Gl. (3.68) folgt wieder durch Differentiation nach der Zeit die Evolutionsgleichung für die **lineare kinematische Verfestigung** ξ zu

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= E_{\xi} \dot{\varepsilon}_{vp} \\ &= \frac{1}{\eta} \langle f \rangle E_{\xi} \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \\ &= \frac{1}{\eta} \langle |\sigma - \xi| - \kappa \rangle E_{\xi} \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \end{aligned} \quad (3.78)$$

mit der zugehörigen Anfangsbedingung:

$$\xi(0) = 0 \quad (3.79)$$

Nichtlineare kinematische Verfestigung (mit Sättigung) wird auch bei der Viskoplastizität mit dem Armstrong Frederick Ansatz erzielt, LÜHRS [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a \dot{\varepsilon}_{vp} - sb\xi \\ &= a \dot{\varepsilon}_{vp} - b|\dot{\varepsilon}_{vp}|\xi \\ &= \frac{1}{\eta} \langle f \rangle \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \\ &= \frac{1}{\eta} \langle |\sigma - \xi| - \kappa \rangle \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Auch hier wird eine viskoplastische Bogenlänge als

$$s_{vp} = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_{vp}(\tau)| d\tau \quad (3.81)$$

definiert und es folgt:

$$\dot{s}_{vp} = |\dot{\varepsilon}_{vp}| \quad (3.82)$$

Für $b = 0$ beinhaltet Gl. (3.80) die lineare kinematische Verfestigung:

$$\dot{\xi} = a \dot{\varepsilon}_{vp} \quad (3.83)$$

Lineare isotrope Verfestigung erreicht man analog zu Gl. (3.39) durch

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \beta \dot{s}_{vp} \\ &= \beta |\dot{\varepsilon}_{vp}| \\ &= \frac{1}{\eta} \langle |\sigma - \xi| - \kappa \rangle \beta \\ &= \frac{1}{\eta} \langle f \rangle \beta \end{aligned} \quad (3.84)$$

mit der Anfangsbedingung für κ :

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.85)$$

Nichtlineare isotrope Verfestigung (mit Sättigung) erfolgt wie mit Gl. (3.44), LÜHRS [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \beta(\kappa_\infty - \kappa)\dot{s}_{vp} \\ &= \beta(\kappa_\infty - \kappa)|\dot{\epsilon}_{vp}| \\ &= \frac{1}{\eta}\langle|\sigma - \xi| - \kappa\rangle\beta(\kappa_\infty - \kappa) \\ &= \frac{1}{\eta}\langle f \rangle\beta(\kappa_\infty - \kappa) \end{aligned} \quad (3.86)$$

mit

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.87)$$

3.2 Anmerkungen zur Plastizität

Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum stellen sich die Plastizitätsmodelle sehr anschaulich dar. Die Fließfunktion $f(\sigma, \xi, \kappa) = 0$ beschreibt hier eine Fließfläche. Solange sich die Spannung innerhalb dieser Fließfläche befindet, gilt $f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$ und es besteht Elastizität. Trifft die Spannung aber auf die Fließfläche, so gilt $f(\sigma, \xi, \kappa) = 0$ und man befindet sich im plastischen Bereich. Die Spannung kann die Fließfläche jedoch niemals überschreiten, stattdessen entwickeln sich gegebenenfalls die inneren Variablen entsprechend ihrer Evolutionsgleichungen. Das bedeutet in Bezug auf die Fließfläche, dass sich ihre Gestalt unter der Bedingung $f(\sigma, \xi, \kappa) = 0$ ändert. Dabei entspricht die Entwicklung der isotropen Verfestigung κ der Aufweitung des Fließflächenradius und somit kann auch die Spannung weiter ansteigen. Die Entwicklung der kinematischen Verfestigung ξ dagegen beschreibt im Hauptspannungsraum die Verschiebung des Mittelpunkts der Fließfläche. Somit kann auch hier die Spannung in Richtung der Verschiebung des Mittelpunkts der Fließfläche weiter anwachsen.

Die Kriterien zu Unterscheidung zwischen elastischem und plastischem Bereich sind wie folgt, HAUPT [1]:

Für $f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$ besteht Elastizität.

Im Falle $f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$ gibt es drei mögliche Zustände, nämlich plastische Belastung, neutrale Belastung und elastische Entlastung. Zur Unterscheidung wird eine zweite Bedingung eingeführt, die Belastungsfunktion B :

$$\begin{aligned} B &= \dot{f}(\sigma, \xi, \kappa)|_{\xi, \kappa = \text{const.}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Für $f = 0$ und $B < 0$ findet elastische Entlastung statt, für $f = 0$ und $B = 0$ neutrale Belastung und für $f = 0$ und $B > 0$ plastische Belastung, wobei sich die inneren Variablen entwickeln.

$f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$	\implies Elastizität innere Variablen entwickeln sich nicht
$f(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \ \& \ B < 0$	\implies elastische Entlastung innere Variablen entwickeln sich nicht
$f(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \ \& \ B = 0$	\implies neutrale Belastung innere Variablen entwickeln sich nicht
$f(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \ \& \ B > 0$	\implies plastische Belastung innere Variablen entwickeln sich

Der allgemeine Ansatz für die Evolutionsgleichung der plastischen Dehnung ist dabei, HAUPT [1]:

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.89)$$

Dieser führt natürlich auf die zuvor hergeleiteten Evolutionsgleichungen für die plastische Dehnung der einzelnen Modelle.

Mit Einbeziehung der zuvor getroffenen Unterscheidungskriterien zwischen elastischem und plastischem Bereich lässt sich die Evolutionsgleichung der plastischen Dehnung folgendermaßen angeben:

$$\dot{\epsilon}_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \text{für } f = 0 \text{ und } B > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.90)$$

Im plastischen Bereich muss die Fließfunktion $f(\sigma, \xi, \kappa) = 0$ identisch erfüllt werden. Dies wird durch die Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma, \xi, \kappa) &= 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \end{aligned} \quad (3.91)$$

sichergestellt. Da die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen linear im plastischen Multiplikator λ sind, lässt sich aus der Konsistenzbedingung der plastische Multiplikator λ als Funktion der Dehnung bestimmen.

Die Ableitungen der Fließfunktion und die Evolutionsgleichungen eingesetzt in die Konsistenzbedingung führt zu:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma, \xi, \kappa) &= \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) - \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \lambda \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) - \lambda \beta (\kappa_\infty - \kappa) \\ &= \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} E \left(\dot{\epsilon} - \lambda \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \right) - \lambda a + \lambda b \xi \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - \lambda \beta (\kappa_\infty - \kappa) \\ &= \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} E \dot{\epsilon} - \lambda \left(E + a - b\xi \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} + \beta (\kappa_\infty - \kappa) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Damit ergibt sich λ zu:

$$\lambda = \frac{\operatorname{sgn}(\sigma - \xi) E}{E + a - b \xi \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + \beta(\kappa_\infty - \kappa)} \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.93)$$

Durch Einsetzen von λ in die Evolutionsgleichungen können die inneren Variablen durch Integration berechnet werden.

3.3 Anmerkungen zur Viskoplastizität

Im Gegensatz zur Plastizität wird bei der Viskoplastizität im plastischen Bereich die Fließbedingung $f(\sigma, \xi, \kappa) = 0$ nicht mehr erfüllt: nun ist auch $f > 0$ zulässig.

Formal gesehen ergibt sich die Viskoplastizität aus der Plastizität, wenn für den plastischen Multiplikator λ ein Ansatz der Form, LÜHRS [6]:

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \quad (3.94)$$

eingesetzt wird. Dieser Ansatz geht auf Perzyna zurück. Mit diesem Ansatz für λ ergeben sich Evolutionsgleichungen, die sich ein wenig von den Evolutionsgleichungen aus der vorangegangenen Herleitung der Viskoplastizität unterscheiden. Das heißt aber nicht, dass die Herleitung fehlerhaft war; sondern der Ansatz (3.94) hat eine zusätzliche Eigenschaft, die aus der erfolgten Herleitung nicht hervorgehen konnte. So wird mit Hilfe des Exponenten m die bei Metallen beobachtete unterproportionale Geschwindigkeitsabhängigkeit modelliert. Der Faktor $\frac{1}{k_0}$ sorgt dazu für einen dimensionslosen Ausdruck in der Klammer. η ist ein Maß für die Viskosität, hat jedoch aufgrund des dimensionslosen Ausdrucks in der Klammer statt $[\frac{Ns}{mm^2}]$ die Einheit $[s]$.

Aus

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f \right\rangle^m \quad (3.95)$$

folgt:

Ist $f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$ so ist $\lambda = 0$, das heißt man befindet sich im elastischen Bereich.

Ist aber $f(\sigma, \xi, \kappa) \geq 0$ so gilt $\lambda = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{k_0} f \right)^m$, das heißt man befindet sich im viskoplastischen Bereich und die inneren Variablen entwickeln sich.

$f(\sigma, \xi, \kappa) < 0$	$\lambda = 0$	\implies Elastizität innere Variablen entwickeln sich nicht
$f(\sigma, \xi, \kappa) \geq 0$	$\lambda = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{k_0} f \right)^m$	\implies Viskoplastizität innere Variablen entwickeln sich

3.4 Zusammenfassung

Nun werden die wesentlichen Gleichungen der zuvor behandelten Materialmodelle kurz zusammengestellt:

Elastizität

Spannung:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.96)$$

Viskoelastizität Maxwell-Element

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_v \quad (3.97)$$

Spannung:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.98)$$

viskose Dehnung:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{E}{\eta}(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.99)$$

mit AB:

$$\varepsilon_v(0) = 0 \quad (3.100)$$

Viskoelastizität Kelvin-Element

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_v \quad (3.101)$$

Spannung:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.102)$$

viskose Dehnung:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon} \quad (3.103)$$

Viskoelastizität 3P-Modell

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_v \quad (3.104)$$

Spannung:

$$\sigma = E\varepsilon + E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.105)$$

viskose Dehnung:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma_{ov}}{\eta} = \frac{E_1}{\eta}(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.106)$$

mit AB:

$$\varepsilon_v(0) = 0 \quad (3.107)$$

Idealplastizität

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_p \quad (3.108)$$

Spannung:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} \quad (3.109)$$

Fließfunktion:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \kappa_0 \quad (3.110)$$

Fließregel:

$$\dot{\varepsilon}_p = |\dot{\varepsilon}_p| \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (3.111)$$

mit AB:

$$\varepsilon_p(0) = 0 \quad (3.112)$$

Plastizität mit nichtlinearer Verfestigung¹

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_p \quad (3.113)$$

Spannung:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon_{el} \\ &= E(\varepsilon - \varepsilon_p) \end{aligned} \quad (3.114)$$

Fließfunktion:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - \kappa \quad (3.115)$$

Belastungsfunktion:

$$B = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (3.116)$$

Konsistenzbedingung:

$$\dot{f}(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \quad (3.117)$$

¹Das Modell findet sich auch in HARTMANN [3].

Fließregel:

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} & \text{für } f = 0 \quad \text{und } B > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.118)$$

mit AB:

$$\varepsilon_p(0) = 0 \quad (3.119)$$

plastische Bogenlänge:

$$s_p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p(\tau)| d\tau \quad (3.120)$$

plastischer Multiplikator:

$$\begin{aligned} \lambda &= \dot{s}_p \\ &= |\dot{\varepsilon}_p| \end{aligned} \quad (3.121)$$

nichtlineare kinematische Verfestigung:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a \dot{\varepsilon}_p - \dot{s}_p b \xi \\ &= \lambda \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b \xi \right) \end{aligned} \quad (3.122)$$

mit AB:

$$\xi(0) = 0 \quad (3.123)$$

nichtlineare isotrope Verfestigung:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \beta(\kappa_\infty - \kappa) \dot{s}_p \\ &= \lambda \beta(\kappa_\infty - \kappa) \end{aligned} \quad (3.124)$$

mit AB:

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.125)$$

Viskoplastizität mit nichtlinearer Verfestigung²

Dehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vp} \quad (3.126)$$

Spannung:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon_{el} \\ &= E(\varepsilon - \varepsilon_{vp}) \end{aligned} \quad (3.127)$$

Fließfunktion:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - \kappa \quad (3.128)$$

²Dieses Materialmodell ist in dem Materialmodell von LÜHRS [6] enthalten.

Fließregel:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{vp} &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} (|\sigma - \xi| - \kappa) \right\rangle^m \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|}\end{aligned}\quad (3.129)$$

mit AB:

$$\varepsilon_{vp}(0) = 0 \quad (3.130)$$

viskoplastische Bogenlänge:

$$s_{vp} = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_{vp}(\tau)| d\tau \quad (3.131)$$

und

$$\begin{aligned}\dot{s}_{vp} &= |\dot{\varepsilon}_{vp}| \\ &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} (|\sigma - \xi| - \kappa) \right\rangle^m\end{aligned}\quad (3.132)$$

nichtlineare kinematische Verfestigung:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= a \dot{\varepsilon}_{vp} - b \dot{s}_{vp} \xi \\ &= \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} (|\sigma - \xi| - \kappa) \right\rangle^m \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b \xi \right)\end{aligned}\quad (3.133)$$

mit AB:

$$\xi(0) = 0 \quad (3.134)$$

nichtlineare isotrope Verfestigung:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= \beta \dot{s}_{vp} (\kappa_\infty - \kappa) \\ &= \beta \left\langle \frac{1}{k_0} (|\sigma - \xi| - \kappa) \right\rangle^m (\kappa_\infty - \kappa)\end{aligned}\quad (3.135)$$

mit AB:

$$\kappa(0) = \kappa_0 \quad (3.136)$$

3.5 Erweiterung zu thermomechanischen Materialmodellen

Die zuvor behandelten rein mechanischen Materialmodelle lassen sich leicht durch den Ansatz einer freien Energie ψ entsprechend den Bedingungen aus Kapitel 2.2 zu thermomechanischen Materialmodellen erweitern. Dabei müssen die gewählte freie Energie ψ zusammen mit den Evolutionsgleichungen der inneren Variablen die Ungleichungen der mechanischen Dissipation erfüllen, um ein thermomechanisch konsistentes Materialmodell zu erhalten.

Zunächst werden die Spannungen der zuvor hergeleiteten Materialmodelle um den temperaturabhängigen Term

$$\sigma_\theta = -E\alpha(\theta - \theta_0) \quad (3.137)$$

erweitert, um die Tatsache, dass die thermischen Dehnungen keine Spannungen verursachen, zu erfassen.

Natürlich könnten auch die Materialparameter wie E-Modul, thermischer Ausdehnungskoeffizient, Viskosität, ... sowie die inneren Variablen temperaturabhängige Funktionen sein. Dies zu behandeln ist allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.

3.5.1 Thermoelastizität

Für die Spannung der Thermoelastizität soll gelten:

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha(\theta - \theta_0) \quad (3.138)$$

Ein Ansatz für die freie Energie der linearen Thermoelastizität lässt sich beispielsweise in HAUPT [1] finden:

$$\psi(\varepsilon, \theta) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 - E \alpha (\theta - \theta_0) \varepsilon - \frac{1}{2\theta_0} \rho c_d (\theta - \theta_0)^2 \right) \quad (3.139)$$

Damit folgt die Spannung nach (2.26) zu:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \\ &= E\varepsilon - E\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Dies ist genau die Spannung, die in Gl. (3.138) gefordert wurde. Die Wärmekapazität soll konstant sein. Nach Gleichung (2.61) unter Verwendung der in Gl. (2.81) gemachten Linearisierung $\theta = \theta_0$ folgt

$$\begin{aligned} c_d &= -\theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ &= c_d \end{aligned} \quad (3.141)$$

die geforderte konstante Wärmekapazität. Die freie Energie nach Gl. (3.139) erfüllt alle hier gestellten Forderungen. Zudem wurde die thermomechanische Konsistenz bereits für $\psi = \psi(\varepsilon, \theta)$ bereits in Kapitel 2.2.1 nachgewiesen.

Die Entropie lautet nach (2.27):

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= \frac{1}{\rho}E\alpha\varepsilon + \frac{1}{\theta_0}c_d(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Schließlich ergibt sich nach Gl. (2.82) und mit (2.77)

$$\begin{aligned} c_d\dot{\theta} &= \frac{1}{\rho}\theta_0\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}k\theta_{,xx} + r \\ &= -\frac{1}{\rho}\theta_0E\alpha\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}k\theta_{,xx} + r \end{aligned} \quad (3.143)$$

die Wärmeleitungsgleichung der Thermoelastizität.

3.5.2 Thermoviskoelastizität (Kelvin-Element)

Für die Spannung des thermomechanischen Kelvin-Elements soll nach Gleichung (3.16) mit (3.137) gelten:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}_v - E\alpha(\theta - \theta_0) \quad (3.144)$$

Dabei ist:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon} \quad (3.145)$$

Unter Verwendung der Potentialbeziehung (2.35) und der Dissipationsungleichung (2.40) kann durch Integration und systematische Überlegungen ein Ansatz für die freie Energie für das Kelvin-Element gefunden werden:

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon_v, \theta) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2}E\varepsilon^2 + \eta(\varepsilon - \varepsilon_v)\dot{\varepsilon}_v - E\alpha(\theta - \theta_0)\varepsilon - \frac{1}{2\theta_0}\rho c_d(\theta - \theta_0)^2 \right) \quad (3.146)$$

Nun wird gezeigt, dass dieser Ansatz alle gestellten Forderungen erfüllt.

Für die Spannung ergibt sich nach Gl. (2.35) die zu anfangs geforderte Spannung:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \\ &= E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}_v - E\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.147)$$

Die Wärmekapazität soll wieder konstant sein. Nach Gleichung (2.61) folgt mit der Linearisierung $\theta = \theta_0$:

$$\begin{aligned} c_d &= -\theta_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} \\ &= c_d \end{aligned} \quad (3.148)$$

Bleibt zu zeigen, dass die mechanische Dissipation nach (2.40) nie negativ werden kann:

$$\begin{aligned}
 \delta_M &= -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_v}\dot{\varepsilon}_v \\
 &= \frac{1}{\rho}\eta\dot{\varepsilon}_v\dot{\varepsilon}_v \\
 &= \frac{1}{\rho}\eta\dot{\varepsilon}^2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Dies ist immer erfüllt, womit die thermomechanische Konsistenz nachgewiesen ist.

Die Entropie ergibt sich nach Gl. (2.36) zu:

$$\begin{aligned}
 s &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\
 &= \frac{1}{\rho}E\alpha\varepsilon + \frac{1}{\theta_0}c_d(\theta - \theta_0)
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

Und schließlich lautet die Wärmeleitungsgleichung nach (2.82)

$$\begin{aligned}
 c_d\dot{\theta} &= \frac{1}{\rho}\theta_0\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}k\theta_{,xx} + r + D \\
 &= -\frac{1}{\rho}\theta_0E\alpha\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}k\theta_{,xx} + r + D
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

mit dem Dissipationsanteil (2.78):

$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial\varepsilon_v}\dot{\varepsilon}_v \\
 &= \frac{1}{\rho}\eta\dot{\varepsilon}_v^2 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\rho}\eta\dot{\varepsilon}^2}_{\hat{=}\delta_M}
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

3.5.3 Thermoviskoelastizität (3P-Modell)

Die Spannung für das 3P-Modell nach Gleichung (3.22) mit (3.137) ist:

$$\sigma = E\varepsilon + E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) - E\alpha(\theta - \theta_0) \tag{3.153}$$

Dabei lautet die Evolutionsgleichung der viskosen Dehnung nach Gleichung (3.28):

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{E_1}{\eta}(\varepsilon - \varepsilon_v) \tag{3.154}$$

Ein Ansatz für die freie Energie kann wieder durch Integration der Potentialbeziehung (2.35) und der Dissipationsungleichung (2.40) gefunden werden:

$$\psi(\varepsilon, \theta, \varepsilon_v) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2}E\varepsilon^2 + \frac{1}{2}E_1(\varepsilon - \varepsilon_v)^2 - E\alpha(\theta - \theta_0)\varepsilon - \frac{1}{2\theta_0}\rho c_d(\theta - \theta_0)^2 \right) \tag{3.155}$$

Mit Gleichung (2.35) folgt die Spannung aus der freien Energie zu:

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \\ &= E\varepsilon + E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) - E\alpha(\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (3.156)$$

Dies entspricht der am Anfang gegebenen Spannung. Auch ergibt sich für $\theta = \theta_0$ aus Gleichung (2.61) eine konstante Wärmekapazität:

$$\begin{aligned}c_d &= -\theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ &= c_d\end{aligned}\quad (3.157)$$

Die mechanische Dissipation nach Gleichung (2.40) lautet

$$\begin{aligned}\delta_M &= -\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{1}{\rho} E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) \dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{1}{\rho} \eta \dot{\varepsilon}_v^2 \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_v)^2 \geq 0\end{aligned}\quad (3.158)$$

und ist stets größer/gleich null. Damit ist die thermomechanische Konsistenz bewiesen.

Nach Gleichung (2.36) lautet die Entropie:

$$\begin{aligned}s &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} E\alpha\varepsilon + \frac{1}{\theta_0} c_d (\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (3.159)$$

Und die Wärmeleitungsgleichung ergibt sich nach (2.82) zu

$$\begin{aligned}c_d \dot{\theta} &= \frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D \\ &= -\frac{1}{\rho} \theta_0 E\alpha \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D\end{aligned}\quad (3.160)$$

mit dem Dissipationsanteil nach (2.78):

$$\begin{aligned}D &= -\frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{1}{\rho} E_1(\varepsilon - \varepsilon_v) \dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{1}{\rho} \eta \dot{\varepsilon}_v^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_v)^2}_{\hat{=} \delta_M}\end{aligned}\quad (3.161)$$

3.5.4 Thermoplastizität

Hier sei ein Modell der Thermoplastizität mit nichtlinearer kinematischer und isotroper Verfestigung mit Sättigungsverhalten betrachtet. Die Spannung der Thermoplastizität ergibt sich nach (3.114) mit (3.137) zu:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} - E\alpha(\theta - \theta_0) \quad (3.162)$$

Aus später ersichtlichen Gründen werden zunächst die Fließbedingung (3.115) und die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung leicht modifiziert:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \quad (3.163)$$

Somit muss die Anfangsbedingung der isotropen Verfestigung lauten:

$$\kappa(0) = 0 \quad (3.164)$$

und die Evolutionsgleichung (3.124) selbst ändert sich zu:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \lambda\beta(\kappa_\infty - \kappa_0 - \kappa) \\ &= \lambda\beta(\widehat{\kappa} - \kappa) \end{aligned} \quad (3.165)$$

Motivation der freien Energie

In HELM [7] wird ein Ansatz für die freie Energie für isotrope und kinematische Verfestigung sehr anschaulich motiviert. Die freie Energie setzt sich, wie allgemein angenommen wird, additiv aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen. Den plastischen Anteil kann man wiederum in einen Teil für die isotrope Verfestigung und einen Teil für die kinematische Verfestigung aufspalten.

Zuerst erfolgt die Motivation für die isotrope Verfestigung. Da die Versetzungsbewegungen dissipationsbehaftet sind, wird eine innere Variable r mit rein dissipativer Eigenschaft eingeführt. Jedoch treten im Werkstoff aufgrund der Versetzungsbewegungen auch Energiespeicherungseffekte auf, diese lassen sich mit Hilfe der Differenz zwischen der akkumulierten plastischen Dehnung s_p und der inneren Variablen r erfassen. Damit wird der Anteil der isotropen Verfestigung der freien Energie mit

$$\psi_{p_i} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{2} \gamma (s_p - r)^2 \quad (3.166)$$

angesetzt.

HELM motiviert in seinem Modell noch einen weiteren Anteil der freien Energie, welcher nur von der akkumulierten plastischen Dehnung abhängig ist. Dieser soll hier jedoch keine Berücksichtigung finden.

In gleicher Weise wie bei der isotropen Verfestigung wird auch der Teil der kinematischen Verfestigung der freien Energie begründet. Auch bei kinematischer Verfestigung treten sowohl Dissipation als auch Energiespeicherung auf. Hier wird die innere Variable y mit der Dissipation assoziiert, die Differenz $\varepsilon_p - y$ wird zur Beschreibung der gespeicherten Energie genutzt. Damit erfolgt ein Ansatz der freien Energie aufgrund kinematischer Verfestigung als

$$\psi_{p_k} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{2} a (\varepsilon_p - y)^2 \quad (3.167)$$

Damit lautet der plastische Anteil der freien Energie:

$$\begin{aligned}
 \psi_p &= \psi_{p_i} + \psi_{p_k} \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} a (\varepsilon_p - y)^2 + \frac{1}{2} \gamma (s_p - r)^2 \right) \\
 &= \psi(\varepsilon_p, y, s_p, r)
 \end{aligned} \tag{3.168}$$

Der elastische Anteil der freien Energie wird wie bei der Thermoelastizität nach Gl. (3.139) angesetzt:

$$\psi_{el} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{el}^2 - E \alpha (\theta - \theta_0) \varepsilon_{el} - \frac{1}{2\theta_0} \rho c_d (\theta - \theta_0)^2 \right) \tag{3.169}$$

Somit folgt die freie Energie zu:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi_{el} + \psi_p \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{el}^2 - E \alpha (\theta - \theta_0) \varepsilon_{el} - \frac{1}{2\theta_0} \rho c_d (\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2} a (\varepsilon_p - y)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma (s_p - r)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.170}$$

Die mechanische Dissipation nach (2.51) lautet nun:

$$\delta_M = \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \psi}{\partial s_p} \dot{s}_p - \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} \geq 0 \tag{3.171}$$

Einsetzen der Ableitungen der freien Energie nach den inneren Variablen ergibt:

$$\begin{aligned}
 \delta_M &= \frac{1}{\rho} \left(\sigma \dot{\varepsilon}_p - \underbrace{a(\varepsilon_p - y)}_{\xi} \dot{\varepsilon}_p + \underbrace{a(\varepsilon_p - y)}_{\xi} \dot{y} - \underbrace{\gamma(s_p - r)}_{\kappa} \dot{s}_p + \underbrace{\gamma(s_p - r)}_{\kappa} \dot{r} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left((\sigma - \xi) \dot{\varepsilon}_p + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_p + \kappa \dot{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

Damit ergeben sich die beiden Potentialbeziehungen:

$$\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} = a(\varepsilon_p - y) \tag{3.173}$$

$$\kappa = \frac{\partial \psi}{\partial s_p} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = \gamma(s_p - r) \tag{3.174}$$

Einsetzen der Fließregel (3.118) führt zu:

$$\begin{aligned}
 \delta_M &= \frac{1}{\rho} \left((\sigma - \xi) \dot{s}_p \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_p + \kappa \dot{r} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(|\sigma - \xi| \dot{s}_p + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_p + \kappa \dot{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.175}$$

Mit der Fließfunktion (3.163) folgt:

$$\begin{aligned}
 \delta_M &= \frac{1}{\rho} \left((\kappa_0 + \kappa) \dot{s}_p + \xi \dot{y} - \kappa \dot{s}_p + \kappa \dot{r} \right) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left(\kappa_0 \dot{s}_p + \xi \dot{y} + \kappa \dot{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.176}$$

Für \dot{y} proportional ξ und \dot{r} proportional κ ergibt sich eine stets positive Entropieproduktion. Darum werden die Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen y und r wie folgt gewählt:

$$\dot{y} = \frac{b}{a} \dot{s}_p \xi \quad (3.177)$$

$$\dot{r} = \frac{\beta}{\gamma} \dot{s}_p \kappa \quad (3.178)$$

Damit folgt die mechanische Dissipation zu:

$$\begin{aligned} \delta_M &= \frac{1}{\rho} \left(\kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \dot{s}_p \\ &= \lambda \frac{1}{\rho} \left(\kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.179)$$

Also ist die positive Entropieproduktion nachgewiesen und damit die thermomechanische Konsistenz.

Aus Gleichung (3.173) folgt

$$\dot{\xi} = a(\dot{\varepsilon}_p - \dot{y}) \quad (3.180)$$

und mit Gl. (3.177) ergibt sich die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung nach dem Armstrong Frederick Ansatz:

$$\dot{\xi} = a\dot{\varepsilon}_p - b\dot{s}_p \xi \quad (3.181)$$

Aus Gleichung (3.174) folgt

$$\dot{\kappa} = \gamma(\dot{s}_p - \dot{r}) \quad (3.182)$$

und mit Gl. (3.178) folgt die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung:

$$\dot{\kappa} = \dot{s}_p \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (3.183)$$

Mit der Identität $\hat{\kappa} = \frac{\gamma}{\beta}$ entspricht dies der Evolutionsgleichung (3.165) vom Anfang dieses Kapitels.

Durch Auswertung der Potentialbeziehung (2.46) ergibt sich nun aus der freien Energie die zu Beginn des Kapitels angesetzte Spannung:

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{el}} \\ &= E \varepsilon_{el} - E \alpha (\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (3.184)$$

Für $\theta = \theta_0$ folgt aus Gleichung (2.61) eine konstante Wärmekapazität:

$$\begin{aligned}c_d &= -\theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ &= c_d\end{aligned}\quad (3.185)$$

Die Entropie lautet nach Gleichung (2.47):

$$\begin{aligned}s &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} E \alpha \varepsilon_{el} + \frac{1}{\theta_0} c_d (\theta - \theta_0)\end{aligned}\quad (3.186)$$

Aus Gleichung (2.82) folgt die Wärmeleitungsgleichung der Thermoplastizität zu:

$$\begin{aligned}c_d \dot{\theta} &= \frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D \\ &= -\frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D\end{aligned}\quad (3.187)$$

Der dissipationsabhängige Anteil ergibt sich nach Gl. (2.83) zu:

$$\begin{aligned}D &= -\frac{1}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\varepsilon}_p + \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial y} \dot{y} \\ &\quad - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial s_p} \dot{s}_p - \frac{\partial(\psi + \theta s)}{\partial r} \dot{r} \\ &= \frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon}_p + \underbrace{\frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \psi}{\partial s_p} \dot{s}_p - \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r}}_{\cong \delta_M} \\ &= \lambda \frac{1}{\rho} \left(\theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right)\end{aligned}\quad (3.188)$$

Der Vollständigkeit halber werden noch einmal die restlichen relevanten Materialgleichungen genannt:

Fließfunktion:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \quad (3.189)$$

Belastungsfunktion:

$$B = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (3.190)$$

Konsistenzbedingung:

$$\dot{f}(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \quad (3.191)$$

plastischer Multiplikator:

$$\lambda = \dot{s}_p = |\dot{\varepsilon}_p| \quad (3.192)$$

Evolutionsgleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} & \text{für } f = 0 \text{ und } B > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.193)$$

$$\dot{\xi} = \lambda \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \quad (3.194)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (3.195)$$

mit

$$\kappa(0) = 0 \quad (3.196)$$

3.5.5 Energieumsetzung

Zur Auswertung der Energieumsetzung wird das Verhältnis gespeicherte Energie e_s zur plastischen Arbeit a_p gebildet:

$$\varphi = \frac{e_s}{a_p} \quad (3.197)$$

Die plastische Arbeit ergibt sich als Integral der plastischen Spannungsleistung w_p über der Zeit:

$$a_p = \int_0^t w_p(\tau) d\tau \quad (3.198)$$

Damit folgt

$$\dot{a}_p = w_p \quad (3.199)$$

und mit der plastischen Spannungsleistung (2.73):

$$\dot{a}_p = \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_p \quad (3.200)$$

Die Integration wird nach dem Backward-Eulerverfahren (4.2) ausgeführt:

$$\begin{aligned}
 a_p^{n+1} &= a_p^n + \Delta t \dot{a}_p \\
 &= a_p^n + \Delta t \frac{1}{\rho} \sigma \dot{\varepsilon}_p \\
 &= a_p^n + \lambda \Delta t \frac{1}{\rho} \sigma \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|}
 \end{aligned} \tag{3.201}$$

Die gespeicherte Energie ergibt sich als das Integral der gespeicherten Spannungsleistung w_s über der Zeit:

$$e_s = \int_0^t w_s(\tau) d\tau \tag{3.202}$$

Hieraus folgt:

$$\dot{e}_s = w_s \tag{3.203}$$

Nach Gleichung (2.73) mit Gl. (3.168) lautet die gespeicherte Spannungsleistung:

$$w_s = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p + \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \psi}{\partial s_p} \dot{s}_p + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} \tag{3.204}$$

Dies ist genau die Zeitableitung des plastischen Anteils der freien Energie:

$$w_s = \dot{\psi}_p \tag{3.205}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 e_s &= \int_0^t \dot{\psi}_p d\tau \\
 &= \psi_p
 \end{aligned} \tag{3.206}$$

Mit Gleichung (3.168) unter Verwendung von Gl. (3.173) und (3.174) lautet die gespeicherte Energie:

$$e_s = \psi_p = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1}{a} \xi^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa^2 \right) \tag{3.207}$$

Daraus kann direkt eine Aussage über eine mögliche Energiefreisetzung der gespeicherten Energie gemacht werden: eine Energiefreisetzung bei Entlastung ist nur für die aufgrund kinematischer Verfestigung gespeicherte Energie möglich, da sich nur ξ bei Entlastung zurück entwickeln kann. Dagegen kann die aufgrund isotroper Verfestigung gespeicherte Energie nie wieder freigesetzt werden, denn κ ist eine monoton wachsende Funktion.

Das Verhältnis φ von gespeicherter Energie e_s zur plastischen Arbeit a_p lautet schließlich:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{e_s}{a_p} \\
 &= \frac{\psi_p}{\int_0^t w_p(\tau) d\tau}
 \end{aligned} \tag{3.208}$$

3.5.6 Thermoviskoplastizität:

Wie bereits bei den rein mechanischen Materialmodellen ergeben sich auch die Gleichungen der Thermoviskoplastizität aus denen der Thermoplastizität, wenn für λ der Ansatz

$$\lambda = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \quad (3.209)$$

eingesetzt wird. Ferner kann die Fließfunktion nun auch Werte größer null annehmen, dadurch verbleibt im Gegensatz zur Thermoplastizität bei der mechanischen Dissipation (3.176) der zusätzliche Term $\dot{s}_p f$ bzw. bei Gleichung (3.179) und im dissipationsabhängigen Anteil der Wärmeleitungsgleichung (3.188) der zusätzliche Term der Fließfunktion f . Da λ und f jedoch nur positive Werte annehmen können, gilt der Nachweis der thermomechanischen Konsistenz der Thermoplastizität entsprechend auch für die Thermoviskoplastizität.

Nun werden die relevanten Materialgleichungen zusammengestellt:

Freie Energie:

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon_{el}, \theta, \varepsilon_{vp}, y, s_{vp}, r) = & \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{el}^2 - E \alpha (\theta - \theta_0) \varepsilon_{el} - \frac{1}{2 \theta_0} \rho c_d (\theta - \theta_0)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} a (\varepsilon_{vp} - y)^2 + \frac{1}{2} \gamma (s_{vp} - r)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.210)$$

Spannung:

$$\sigma = E \varepsilon_{el} - E \alpha (\theta - \theta_0) \quad (3.211)$$

Entropie:

$$\begin{aligned} s &= - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} E \alpha \varepsilon_{el} + \frac{1}{\theta_0} c_d (\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.212)$$

Mechanische Dissipation:

$$\delta_M = \frac{1}{\rho \eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \left(f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \geq 0 \quad (3.213)$$

Wärmeleitungsgleichung:

$$c_d \dot{\theta} = - \frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} k \theta_{,xx} + r + D \quad (3.214)$$

mit:

$$D = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \frac{1}{\rho} \left(\theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + f + \kappa_0 + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (3.215)$$

Fließfunktion:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \quad (3.216)$$

Evolutionsgleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \quad (3.217)$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \quad (3.218)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{1}{k_0} f(\sigma, \xi, \kappa) \right\rangle^m \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (3.219)$$

mit

$$\kappa(0) = 0 \quad (3.220)$$

Kapitel 4

Numerische Lösungsverfahren

4.1 Implizites Eulerverfahren

Das implizite Eulerverfahren (Backward-Euler-Verfahren) ist ein Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Dabei wird die Zeitableitung (erster Ordnung) zum unbekanntem Zeitpunkt t_{n+1} durch eine Rückwärtsdifferenz approximiert

$$\dot{\mathbf{x}}(t_{n+1}) = \frac{\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_n)}{\Delta t} \quad (4.1)$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} \quad (4.2)$$

4.2 Newton-Verfahren

Beim Newton Verfahren (Newton Rhapsion Verfahren) werden die Residuen

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

an der Stelle \mathbf{x}_i in eine Taylorreihe entwickelt, welche nach dem linearen Term abgebrochen wird:

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} \right]_i \{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\} = 0 \quad (4.4)$$

Umgeschrieben:

$$\mathbf{K}_{t_i} \Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{R}_i \quad (4.5)$$

Darin sind \mathbf{K}_{t_i} die Tangentenmatrix und \mathbf{R}_i die Residuen, die beide in Abhängigkeit einer ersten bekannten Näherungslösung \mathbf{x}_i berechnet werden können. Nach Gl. (4.3) gilt für die Tangentenmatrix \mathbf{K}_t :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= -\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{x}} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Ableitungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung nach der Unbekannten \mathbf{x} lassen sich aus den Gleichungen des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens berechnen.

Somit kann das Gleichungssystem (4.5) nach $\Delta\mathbf{x}_i$ aufgelöst werden und mit

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i \quad (4.7)$$

kann die verbesserte Näherungslösung \mathbf{x}_{i+1} berechnet werden. Durch mehrfaches Iterieren bis zum Erreichen der festgelegten Konvergenznorm wird so die Lösung \mathbf{x} berechnet.

4.3 Multilevel-Newton Verfahren

Das Multilevel-Newton-Verfahren ist ein numerisches Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme der Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Diese treten auch bei FE-Berechnungen mit nichtlinearen Materialmodellen mit inneren Variablen auf. Aus den diskretisierten Feldgleichungen $\mathbf{g}_i(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$ aller Elemente i entsteht ein Gleichungssystem $\mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})$, mit $\mathbf{G}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_q}$. Dabei ist n_y die Anzahl aller Knotenfreiheitsgrade und n_q die Anzahl aller inneren Variablen. Ferner sind \mathbf{y} die Freiheitsgrade eines Elements i und $\bar{\mathbf{q}}$ alle inneren Variablen des Elements i , mit $i = 1, \dots, n_e$. n_e ist die Anzahl der Elemente.

Aus den Evolutionsgleichungen der inneren Variablen aller Gausspunkte folgt ein zweites Gleichungssystem $\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})$ mit $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_q}$. Das Gleichungssystem $\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})$ hat die Eigenschaft, dass es für die einzelnen Gausspunkte¹ entkoppelt ist, HARTMANN [4],

$$\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{l}_1(\mathbf{y}, \mathbf{q}_1) \\ \mathbf{l}_2(\mathbf{y}, \mathbf{q}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{n_G}(\mathbf{y}, \mathbf{q}_{n_G}) \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

dass heißt, die Gleichungssysteme \mathbf{l}_i der einzelnen Gausspunkte sind hier nur aus formalen Gründen in ein großes Gleichungssystem \mathbf{L} einsortiert. \mathbf{y} sind die Elementfreiheitsgrade des Elements zu dem der jeweilige Gausspunkt gehört. n_G ist die Anzahl aller Gausspunkte.

¹Das thermoplastische Dehnstabelemente aus Kapitel 7 ist ein lineares Element und wird analytisch integriert, somit ist dort das Gleichungssystem $\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})$ nicht für die Gausspunkte, sondern für die einzelnen Elemente entkoppelt.

Entsprechend sind auch die inneren Variablen \mathbf{q}_i in den Vektor \mathbf{Q} einsortiert:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n_G} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Gegeben ist also das Gleichungssystem bzw. die Funktionen:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Durch Anwendung des Satzes für implizite Funktionen auf Gleichung (4.11) folgt für eine genügend glatte Funktion \mathbf{L} in der Nähe der Lösung eine Funktion $\mathbf{Q}(\mathbf{Y})$, HARTMANN [2], [5]. Das führt zu:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}(\mathbf{Y})) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

Damit kann dieses Gleichungssystem gelöst werden

$$-\underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Y}} \right]}_{\mathbf{K}_t} \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})^m \quad (4.13)$$

mit

$$\mathbf{Y}^{m+1} = \Delta \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^m \quad (4.14)$$

Voraussetzung dafür ist jedoch das zuvor der Vektor \mathbf{Q} und die Matrix $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Y}}$ bestimmt werden.

Die Schritte des Multilevel-Newton Verfahrens im Einzelnen:

Schritt 1:

Der erste Schritt erfolgt auf lokaler Ebene, das heißt auf Elementebene. Unter der Voraussetzung, dass eine erste Näherungslösung \mathbf{y}^k gegeben ist², wird an jedem Gausspunkt³ das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{l}_j(\mathbf{y}^k, \mathbf{q}_j) = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_G \quad (4.15)$$

mit dem Newton-Verfahren (4.5) gelöst. Daraus ergibt sich der Vektor der inneren Variablen \mathbf{Q} .

²Beim ersten Iterationsschritt ist $\mathbf{y}^k = \mathbf{0}$, folglich entwickeln sich auch die inneren Variablen noch nicht.

³Das thermoplastische Dehnstabelemente aus Kapitel 7 ist ein lineares Element und wird analytisch integriert, also werden dort die Gleichungssysteme nicht für die Gausspunkte sondern für jedes Element gelöst.

Schritt 2:

Dieser Schritt findet ebenfalls auf lokaler Ebene, also auf Elementebene, statt. Nun wird auf jedes Gleichungssystem (4.11) die Kettenregel angewendet:

$$\frac{\partial \mathbf{l}_j}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{l}_j}{\partial \mathbf{q}_j} \frac{d\mathbf{q}_j}{d\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_G \quad (4.16)$$

Aus diesen linearen Gleichungssystemen mit mehreren rechten Seiten werden die Matrizen $\frac{d\mathbf{q}_j}{d\mathbf{y}}$ berechnet.

Schritt 3:

Die Lösung des Gleichungssystems (4.12)

$$\mathbf{K}_t^m \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}, \mathbf{Q})^m \quad (4.17)$$

mit

$$\mathbf{Y}^{m+1} = \Delta \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^m \quad (4.18)$$

erfolgt auf globaler Ebene. Zur Bestimmung der Tangentenmatrix \mathbf{K}_t werden jedoch weitere Berechnungen auf lokaler Ebene durchgeführt: es wird für jedes Element die Elementtangente erstellt:

$$\mathbf{k}_t = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}_p} \frac{d\mathbf{q}_p}{d\mathbf{y}} \right] \quad (4.19)$$

Dabei sind \mathbf{q}_p die inneren Variablen der Gausspunkte⁴ des Elements. Die Matrizen $\frac{d\mathbf{q}_p}{d\mathbf{y}}$ wurden in Schritt 2 bestimmt.

Die Tangentenmatrix \mathbf{K}_t wird dann aus den einzelnen Elementtangente Matrizen \mathbf{k}_t zusammengesetzt. Mit dem Vektor \mathbf{Q} aus Schritt 1 kann nun das Gleichungssystem (4.17) gelöst werden.

Schritt 4:

Wiederholung der Schritte 1-3, bis Konvergenz erreicht ist.

⁴Beim thermoplastischen Dehnstabelemente aus Kapitel 7 sind \mathbf{q}_p die inneren Variablen des Elements.

Kapitel 5

Allgemeine Herleitung der Elementformulierung

Nun werden aus der Impulsbilanz (2.2) für den statischen Fall in eindimensionaler Formulierung

$$\sigma_{,x} + \rho f = 0 \quad (5.1)$$

und der verallgemeinerten linearisierten Wärmeleitungsgleichung (2.82) in eindimensionaler Form

$$\rho c_d \dot{\theta} = \theta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \dot{\epsilon} + k \theta_{,xx} + \rho r + \rho D \quad (5.2)$$

die Elementformulierungen hergeleitet. Dazu wird die Methode von Galerkin zur Herleitung der schwachen Form auf Impulsbilanz und Wärmeleitungsgleichung angewendet. Anschließend wird ein Näherungsansatz für Verschiebung und Temperaturänderung sowie die zugehörigen Größen gemacht. Dazu folgt dann ein linearer Elementansatz zur Bereitstellung der Dehnstabelementformulierungen.

Diese Herleitung erfolgt zunächst in einer allgemeinen Form, sodass schließlich für die unterschiedlichen Materialmodelle nur die Spannungsbeziehungen und die Wärmequellterme aufgrund der mechanischen Dissipation D eingesetzt und integriert werden müssen, um die vollständigen Elementformulierungen zu erhalten.

Zunächst werden noch einige Änderungen gemacht:

Da bei allen hier verwendeten Materialmodellen der Ausdruck

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = -E\alpha \quad (5.3)$$

gleich ist, wird dies gleich in die Wärmeleitungsgleichung eingesetzt:

$$\rho c_d \dot{\theta} = -\theta_0 E \alpha \dot{\epsilon} + k \theta_{,xx} + \rho r + \rho D \quad (5.4)$$

Mit Einführung der Temperaturdifferenz Θ

$$\Theta = \theta - \theta_0 \quad (5.5)$$

und damit

$$\dot{\Theta} = \dot{\theta} \quad (5.6)$$

bzw.

$$\Theta_{,x} = \theta_{,x} \quad (5.7)$$

folgt für die Spannungsbeziehungen

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, q_i, \Theta) \quad (5.8)$$

und für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho c_d \dot{\Theta} = -\theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} + k \Theta_{,xx} + \rho r + \rho D \quad (5.9)$$

Die Impulsbilanz (5.1) und die Wärmeleitungsgleichung (5.9) bilden mit der Spannungsbeziehung (5.8) ein beidseitig gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die unbekanntenen Feldgrößen der Verschiebung u und der Temperaturdifferenz Θ :

$$\sigma(\varepsilon, q_i, \Theta)_{,x} + \rho f = 0$$

$$\rho c_d \dot{\Theta} + \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} - k \Theta_{,xx} - \rho r + \rho D = 0$$

Die Impulsbilanz beschreibt das Verschiebungsfeld u in Abhängigkeit der Temperaturdifferenz Θ . Die Energiebilanz beschreibt das Temperaturfeld Θ in Abhängigkeit der Verschiebung u . Somit stehen beide Feldgleichungen in gegenseitiger Abhängigkeit.

5.1 Schwache Form der Impulsbilanz

Zur Herleitung der schwachen Form der Impulsbilanz nach der Methode von Galerkin wird die Impulsbilanz mit einer Wichtungsfunktion (virtuelle Verschiebung) multipliziert und über das Volumen integriert. Die Wichtungsfunktion kann dabei beliebig sein und muss lediglich die Randbedingungen erfüllen. Damit folgt:

$$\int_V \delta u (\sigma_{,x} + \rho f) dV = 0 \quad (5.10)$$

Das Volumenintegral über V wird aufgespalten in das Flächenintegral über A und das Integral über die Stablänge L . Mit der Integration über A unter Annahme einer konstanten Querschnittsfläche folgt:

$$A \int_L \delta u \sigma_{,x} dx + A \int_L \delta u \rho A f dx = 0 \quad (5.11)$$

Durch partielle Integration des ersten Summanden folgt:

$$A [\delta u \sigma(x)]_{x=0}^{x=L} - A \int_L \delta \varepsilon \sigma dx + A \int_L \delta u \rho f dx = 0 \quad (5.12)$$

Mit den Randlasten $F(x)$ bei $x = L$ und $x = 0$

$$[A\sigma]_{x=0}^{x=L} = [F(x)]_{x=0,L} \quad (5.13)$$

folgt mit

$$A \int_L \delta\varepsilon \sigma dx - A \int_L \delta u \rho f dx - [\delta u F(x)]_{x=0,L} = 0 \quad (5.14)$$

die schwache Form der Impulsbilanz.

5.2 Schwache Form der Wärmeleitungsgleichung

Die Galerkin Methode angewendet auf die Wärmeleitungsgleichung (5.9) führt zu:

$$\int_V \delta\Theta \left(\rho c_d \dot{\Theta} + \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} - k \Theta_{,xx} - \rho r - \rho D \right) dV = 0 \quad (5.15)$$

Integration über A unter Annahme einer konstanten Querschnittsfläche führt zu:

$$\begin{aligned} A \int_L \delta\Theta \rho c_d \dot{\Theta} dx + A \int_L \delta\Theta \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} dx - A \int_L \delta\Theta k \Theta_{,xx} dx \\ - A \int_L \delta\Theta \rho r dx - A \int_L \delta\Theta \rho D dx = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Durch partielle Integration des dritten Summanden folgt:

$$\begin{aligned} A \int_L \delta\Theta \rho c_d \dot{\Theta} dx + A \int_L \delta\Theta \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} dx - A [\delta\Theta k \Theta_{,x}]_{x=0}^{x=L} \\ + A \int_L \delta\Theta_{,x} k \Theta_{,x} dx - A \int_L \delta\Theta \rho r dx - A \int_L \delta\Theta \rho D dx = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Einsetzen der Randwärmeströme $\dot{Q}(x)$ bei $x = L$ und $x = 0$

$$[kA \Theta_{,x}]_{x=0}^{x=L} = [\dot{Q}(x)]_{x=0,L} \quad (5.18)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} A \int_L \delta\Theta \rho c_d \dot{\Theta} dx + A \int_L \delta\Theta \theta_0 E \alpha \dot{\varepsilon} dx + A \int_L \delta\Theta_{,x} k \Theta_{,x} dx \\ - A \int_L \delta\Theta \rho r dx - A \int_L \delta\Theta \rho D dx - [\delta\Theta \dot{Q}(x)]_{x=0,L} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Diese Gleichung stellt die schwache Form der Wärmeleitungsgleichung dar.

5.3 Näherungsansatz für die Feldgrößen

Die schwache Form von Impulsbilanz bzw. Wärmeleitungsgleichung beschreibt das Verschiebungsfeld $u(x)$ bzw. das Temperaturfeld $\Theta(x)$ des Dehnstabs exakt. Nun wird der Dehnstab diskretisiert, also in endlich viele Elemente unterteilt. Für die Elemente wird ein Näherungsansatz in Einheitskoordinaten für die Feldgrößen und deren Ableitungen sowie die virtuellen Größen gemacht. Dieser Näherungsansatz erfüllt die schwache Form von Impulsbilanz bzw. Wärmeleitungsgleichung nicht-mehr exakt, sondern nur noch an diskreten Stellen: den Elementknoten. Dazwischen wird interpoliert.

So wird die Verschiebung mit

$$u(x) \approx u^h(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \mathbf{u}^k \quad (5.20)$$

angesetzt. Darin sind

$$\mathbf{N}(\zeta)^T = [N_1(\zeta) \quad \dots \quad N_j(\zeta)] \quad (5.21)$$

die Formfunktionen und

$$\mathbf{u}^k = [u_1^k \quad \dots \quad u_j^k]^T \quad (5.22)$$

die diskreten Knotenwerte, also die Knotenverschiebung, am Knoten j des Elements. Die Knotenverschiebung ist nicht vom Ort abhängig, lediglich die Formfunktionen sind Funktion des Ortes.

Für die virtuellen Größen wird ein entsprechender Ansatz gemacht. Also lautet die virtuelle Knotenverschiebung:

$$\begin{aligned} \delta u(x) \approx \delta u^h(\zeta) &= \mathbf{N}(\zeta)^T \delta \mathbf{u}^k \\ &= \delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{N}(\zeta) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Verzerrung ist die Ableitung der Verschiebung nach x , also:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) \approx \varepsilon^h(\zeta) &= \frac{\partial u^h(\zeta)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)^T}{\partial x} \mathbf{u}^k \\ &= \mathbf{B}(\zeta)^T \mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dementsprechend lautet die virtuelle Verzerrung:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon(x) \approx \delta \varepsilon^h(\zeta) &= \frac{\partial \delta u^h(\zeta)}{\partial x} \\ &= \delta \mathbf{u}^{kT} \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)}{\partial x} \\ &= \delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{B}(\zeta) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Verzerrungsgeschwindigkeit ergibt sich als Ableitung der Geschwindigkeit nach dem Ort x :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(x) \approx \dot{\varepsilon}^h(\zeta) &= \frac{\partial \dot{u}^h(\zeta)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)^T}{\partial x} \dot{\mathbf{u}}^k \\ &= \mathbf{B}(\zeta)^T \dot{\mathbf{u}}^k\end{aligned}\quad (5.26)$$

In Analogie dazu wird der Ansatz für die Temperaturänderung und die zugehörigen Größen gemacht:

$$\Theta(x) \approx \Theta^h(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \Theta^k \quad (5.27)$$

Virtuelle Temperaturänderung:

$$\begin{aligned}\delta\Theta(x) \approx \delta\Theta^h(\zeta) &= \mathbf{N}(\zeta)^T \delta\Theta^k \\ &= \delta\Theta^{kT} \mathbf{N}(\zeta)\end{aligned}\quad (5.28)$$

Temperaturgradient:

$$\begin{aligned}\Theta_{,x}(x) \approx \Theta_{,x}^h(\zeta) &= \frac{\partial \Theta^h(\zeta)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)^T}{\partial x} \Theta^k \\ &= \mathbf{B}(\zeta)^T \Theta^k\end{aligned}\quad (5.29)$$

Virtueller Temperaturgradient:

$$\begin{aligned}\delta\Theta_{,x}(x) \approx \delta\Theta_{,x}^h(\zeta) &= \frac{\partial \delta\Theta^h(\zeta)}{\partial x} \\ &= \delta\Theta^{kT} \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)}{\partial x} \\ &= \delta\Theta^{kT} \mathbf{B}(\zeta)\end{aligned}\quad (5.30)$$

Temperaturänderungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\Theta}(x) \approx \dot{\Theta}^h(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \dot{\Theta}^k \quad (5.31)$$

Mit denselben Formfunktionen wird auch die Einheitskoordinate ζ auf die physikalische Koordinate x abgebildet:

$$x = x(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \mathbf{x}^k \quad (5.32)$$

Dabei sind \mathbf{x}^k die physikalischen x-Koordinaten der Elementknoten.

Das Differential dx ergibt sich zu

$$dx = \frac{\partial x(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta = J d\zeta \quad (5.33)$$

mit

$$J = \frac{\partial x(\zeta)}{\partial \zeta} \quad (5.34)$$

Bei der Koordinatentransformation gilt für die Randbedingungen:

$$[F(x)]_{x=0,L} = [F(\zeta)]_{\zeta=-1,1} \quad (5.35)$$

bzw.

$$\left[\dot{Q}(x) \right]_{x=0,L} = \left[\dot{Q}(\zeta) \right]_{\zeta=-1,1} \quad (5.36)$$

Verschiebungsfeld

Einsetzen der Ansatzgleichungen aus (5.20) - (5.36) in die schwache Form der Verschiebungsfeldgleichung (5.14) und Transformation der physikalischen Koordinate x in die Einheitkoordinate ζ nach Gl. (5.33) mit (5.35) ergibt:

$$A \int_{-1}^1 \delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{B} \sigma \, d\zeta - A \int_{-1}^1 \delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{N} \rho f J \, d\zeta - \left[\delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{N} F(\zeta) \right]_{\zeta=-1,1} = 0 \quad (5.37)$$

Herausziehen der konstanten virtuellen Knotenverschiebung aus den Integralen führt zu:

$$\delta \mathbf{u}^{kT} \left\{ A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \sigma \, d\zeta - A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho f J \, d\zeta - [\mathbf{N} F(\zeta)]_{\zeta=-1,1} \right\} = 0 \quad (5.38)$$

Diese Gleichung muss für alle beliebigen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}^k$ gelten. Somit folgt

$$A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \sigma J \, d\zeta - A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho f J \, d\zeta - [\mathbf{N} F(\zeta)]_{\zeta=-1,1} = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

bzw. mit Einsetzen der ζ -Koordinaten in die Randlasten:

$$\underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \sigma J \, d\zeta}_{\mathbf{F}(\sigma)} - \underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho f J \, d\zeta}_{\mathbf{F}_f} - \underbrace{[\mathbf{N}(1) F(1) + \mathbf{N}(-1) F(-1)]}_{\mathbf{F}_a} = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

Dabei ist \mathbf{F}_a der Vektor der äußeren Lasten und \mathbf{F}_f der Vektor der inneren Lasten. $\mathbf{F}(\sigma)$ ist ein Vektor, der aus der Spannung resultiert. Über die Spannungsbeziehungen der einzelnen Materialmodelle beinhaltet dieser die Abhängigkeit von Knotenverschiebung und Temperaturänderung sowie von den inneren Variablen. Dies wird später für die einzelnen Materialmodelle genauer betrachtet.

Temperaturfeld

Einsetzen der Ansatzgleichungen aus (5.20) - (5.36) in die schwache Form der Temperaturfeldgleichung (5.19) und Transformation der physikalischen Koordinate x in die Einheitkoordinate ζ nach Gl. (5.33) mit (5.36) ergibt:

$$\begin{aligned}
& A \int_{-1}^1 \delta \Theta^{kT} \mathbf{N} \rho c_d \mathbf{N}^T \dot{\Theta}^k J d\zeta + A \int_{-1}^1 \delta \Theta^{kT} \mathbf{N} \theta_0 E \alpha \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{u}}^k J d\zeta \\
& \quad + A \int_{-1}^1 \delta \Theta^{kT} \mathbf{B} k \mathbf{B}^T \Theta^k J d\zeta - A \int_{-1}^1 \delta \Theta^{kT} \mathbf{N} \rho r J d\zeta \\
& \quad - A \int_{-1}^1 \delta \Theta^{kT} \mathbf{N} \rho D J d\zeta - \left[\delta \Theta^{kT} \mathbf{N} \dot{Q}(\zeta) \right]_{\zeta=-1,1} = 0
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Herausziehen der konstanten Knotenwerte aus den Integralen sowie Einsetzen der ζ -Koordinaten in die Randlasten führt zu:

$$\begin{aligned}
& \delta \Theta^{kT} \left\{ A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho c_d \mathbf{N}^T J d\zeta \dot{\Theta}^k + A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \theta_0 E \alpha \mathbf{B}^T J d\zeta \dot{\mathbf{u}}^k \right. \\
& \quad \left. + A \int_{-1}^1 \mathbf{B} k \mathbf{B}^T J d\zeta \Theta^k - A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho r J d\zeta \right. \\
& \quad \left. - A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho D J d\zeta - \left[\mathbf{N}(1) \dot{Q}(1) + \mathbf{N}(-1) \dot{Q}(-1) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Auch diese Gleichung muss für alle beliebigen virtuellen Temperaturänderungen $\delta \Theta^k$ gelten. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho c_d \mathbf{N}^T J d\zeta}_{\mathbf{D}_{\Theta\Theta}} \dot{\Theta}^k + \underbrace{\theta_0 A \int_{-1}^1 \mathbf{N} E \alpha \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}} \dot{\mathbf{u}}^k \\
& \quad + \underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{B} k \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{\Theta\Theta}} \Theta^k - \underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho r J d\zeta}_{\dot{\mathbf{Q}}_r} \\
& \quad - \underbrace{A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \rho D J d\zeta}_{\dot{\mathbf{Q}}(D)} - \underbrace{\left[\mathbf{N}(1) \dot{Q}(1) + \mathbf{N}(-1) \dot{Q}(-1) \right]}_{\dot{\mathbf{Q}}_a} = 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Hierbei ist $\mathbf{D}_{\Theta\Theta}$ die Wärmekapazitätsmatrix, $\theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}$ ist eine Kopplungsmatrix zwischen dem Temperaturfeld und dem Verschiebungsfeld. Diese Matrix bewirkt die thermoelastischen Kopplungseffekte, nämlich die Temperaturänderungen aufgrund elastischer Dehnungen (genauer aufgrund der Dehnungsgeschwindigkeit). $\mathbf{K}_{\Theta\Theta}$ ist die Wärmeleitmatrix. $\dot{\mathbf{Q}}_r$ ist der Vektor der inneren Wärmequellen, diese könnten beispielsweise Strahlungen wie Mikrowellen sein. $\dot{\mathbf{Q}}_a$ ist der Vektor der äußeren Wärmequellen. $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ ist ein Wärmequellvektor, der aufgrund der mechanischen Dissipation entsteht. Dieser enthält die Wärme, die aufgrund von Vorgängen im inneren des Materials, wie beispielsweise innerer Reibung oder plastischer Verformung, entsteht. Der Vektor $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ wird später für die einzelnen Materialmodelle noch genauer betrachtet.

Die Verschiebungsfeldgleichung (5.40) und die Temperaturfeldgleichung (5.43) lauten nun mit den eingeführten Abkürzungen (Index k wird von nun an weggelassen):

$$\mathbf{F}(\sigma) - \mathbf{F}_f - \mathbf{F}_a = \mathbf{0} \quad (5.44)$$

$$\theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} + \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta - \dot{\mathbf{Q}}_r - \dot{\mathbf{Q}}(D) - \dot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

mit

$$\mathbf{F}_f = \rho A f \int_{-1}^1 \mathbf{N} J d\zeta \quad (5.46)$$

$$\mathbf{F}_a = [\mathbf{N}(1) F(1) + \mathbf{N}(-1) F(-1)] \quad (5.47)$$

und

$$\mathbf{K}_{\Theta u} = EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{B}^T J d\zeta \quad (5.48)$$

$$\mathbf{D}_{\Theta\Theta} = \rho A c_d \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{N}^T J d\zeta \quad (5.49)$$

$$\mathbf{K}_{\Theta\Theta} = kA \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta \quad (5.50)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_r = \rho A r \int_{-1}^1 \mathbf{N} J d\zeta \quad (5.51)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_a = [\mathbf{N}(1) \dot{Q}(1) + \mathbf{N}(-1) \dot{Q}(-1)] \quad (5.52)$$

sowie

$$\mathbf{F}(\sigma) = A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \sigma J d\zeta \quad (5.53)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(D) = \rho A \int_{-1}^1 \mathbf{N} D J d\zeta \quad (5.54)$$

5.4 Linearer Elementansatz

Nun wird für die zuvor hergeleiteten Gleichungen ein linearer Elementansatz gemacht.

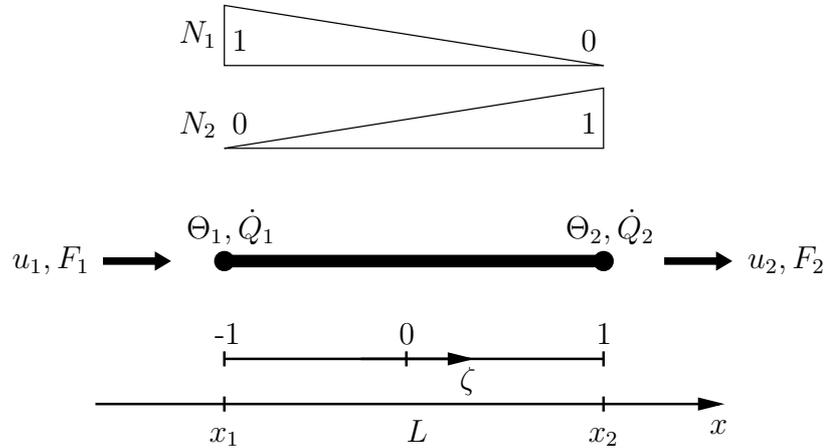


Abbildung 5.1: Dehnstabelement mit Formfunktionen

Die Formfunktionen für das 2-Knoten-Dehnstabelement lauten:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\zeta) = \begin{Bmatrix} N_1(\zeta) \\ N_2(\zeta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

Damit folgt die Knotenverschiebung $u(\zeta)$ zu

$$u(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \mathbf{u} = [N_1(\zeta) \quad N_2(\zeta)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

und die Knotentemperaturänderung $\Theta(\zeta)$ zu

$$\Theta(\zeta) = \mathbf{N}(\zeta)^T \Theta = [N_1(\zeta) \quad N_2(\zeta)] \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

und dementsprechend auch die virtuellen Größen.

Die Funktion $x(\zeta)$ ergibt sich nach Gl. (5.32) zu

$$x(\zeta) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{L}{2} \zeta \quad (5.58)$$

und das Differential dx folgt nach Gl. (5.33) zu

$$dx = J d\zeta \quad (5.59)$$

mit

$$J = \frac{L}{2} \quad (5.60)$$

Die Ableitungen der Formfunktionen nach der physikalischen x -Koordinate ergeben sich nach der Kettenregel und mit Gl. (5.34) zu:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dx} = \mathbf{N}_{,\zeta} J^{-1} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

Die Formfunktionen (5.55) und deren Ableitung (5.61) werden nun in die Elementmatrizen und Vektoren (5.46) - (5.54) eingesetzt. Anschließend kann die Integration analytisch erfolgen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_f &= \frac{\rho ALf}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{\rho ALf}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Theta u} &= \frac{EA\alpha}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 + \zeta & 1 - \zeta \\ -1 - \zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{EA\alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\Theta\Theta} &= \frac{\rho ALc_d}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 - 2\zeta + \zeta^2 & 1 - \zeta^2 \\ 1 - \zeta^2 & 1 - 2\zeta + \zeta^2 \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{\rho ALc_d}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Theta\Theta} &= \frac{kA}{2L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_r &= \frac{\rho ALr}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{\rho ALr}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_a = \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

Damit sind alle Matrizen bzw. Vektoren berechnet, die bei den Elementen trotz unterschiedlicher Materialmodelle gleich sind. So bleiben die beiden Vektoren, die Funktion der Spannung σ bzw. des von der mechanischen Dissipation abhängigen Ausdrucks D sind, für die jeweiligen Materialmodelle zu bestimmen:

$$\mathbf{F}(\sigma) = A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \sigma J d\zeta \quad (5.69)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(D) = \rho A \int_{-1}^1 \mathbf{N} D J d\zeta \quad (5.70)$$

Kapitel 6

Thermoviskoelastisches Dehnstabelement (3P-Modell)

Die Spannung des thermoviskoelastischen 3P-Modells (3.153) unter Verwendung der Ansätze (5.24) und (5.27) für Dehnung und Temperaturänderung führt zu:

$$\sigma = (E + E_1)\mathbf{B}^T \mathbf{u} - E_1 \varepsilon_v - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta \quad (6.1)$$

Der Dissipationsterm (3.161) der Wärmeleitungsgleichung lautet:

$$D = \frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_v)^2 \quad (6.2)$$

Die Evolutionsgleichungen der viskosen Dehnung (3.154) ist:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{E_1}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (6.3)$$

6.1 Zeitintegration der Evolutionsgleichung der viskosen Dehnung

Als Zeitintegrationsverfahren soll das implizite Eulerverfahren (4.2) verwendet werden. Damit folgt:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_v^n}{\Delta t} \quad (6.4)$$

Somit gilt:

$$\frac{\varepsilon_v - \varepsilon_v^n}{\Delta t} = \frac{E_1}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (6.5)$$

Diese Gleichung kann nach ε_v aufgelöst werden:

$$\varepsilon_v + \frac{E_1 \Delta t}{\eta} \varepsilon_v = \frac{E_1 \Delta t}{\eta} \varepsilon + \varepsilon_v^n \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_v &= \frac{\frac{E_1 \Delta t}{\eta} \varepsilon + \varepsilon_v^n}{1 + \frac{E_1 \Delta t}{\eta}} \\
&= \frac{\frac{E_1 \Delta t \varepsilon + \eta \varepsilon_v^n}{\eta}}{\frac{\eta + E_1 \Delta t}{\eta}} \\
&= \frac{E_1 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon + \frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Mit dem Ansatz (5.24) für die Dehnung ergibt sich:

$$\varepsilon_v = \frac{E_1 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \tag{6.8}$$

Die viskose Dehnung (6.8) eingesetzt in die Spannungsbeziehung (6.1) führt zu:

$$\begin{aligned}
\sigma &= (E + E_1) \mathbf{B}^T \mathbf{u} - E_1 \left(\frac{E_1 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \right) - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta \\
&= \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \frac{E_1 \eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Einsetzen der Spannung in $\mathbf{F}(\sigma)$ nach (5.69) ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\sigma) &= A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \left(\left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{u} \right. \\
&\quad \left. + \frac{E_1 \eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta \right) J d\zeta \\
&= A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{u} J d\zeta \\
&\quad + A \int_{-1}^1 \mathbf{B} \frac{E_1 \eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n J d\zeta - A \int_{-1}^1 \mathbf{B} E \alpha \mathbf{N}^T \Theta J d\zeta \\
&= A \underbrace{\left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{uu}} \mathbf{u} \\
&\quad - \underbrace{EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{u\Theta}} \Theta + A \underbrace{\frac{E_1 \eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta}_{\mathbf{F}_v^n}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Da ein linearer Elementansatz verwendet wurde, ist die Verschiebung im Element linear, folglich die Dehnung konstant. Damit ist auch die viskose Dehnung konstant im Element, deshalb konnte ε_v^n aus dem Integral gezogen werden. Es gilt

$$\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta + \mathbf{F}_v^n \tag{6.11}$$

mit den Abkürzungen:

$$\mathbf{K}_{uu} = A \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta \tag{6.12}$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta} = EA\alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta \quad (6.13)$$

$$\mathbf{F}_v^n = A \frac{E_1 \eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta \quad (6.14)$$

Dabei ist \mathbf{K}_{uu} die Steifigkeitsmatrix. Diese enthält neben dem rein elastischen Anteil durch E auch einen viskosen Anteil durch E_1 . $\mathbf{K}_{u\Theta}$ ist die Kopplungsmatrix zwischen Verschiebungsfeld und Temperaturfeld und bewirkt die thermischen Dehnungen. \mathbf{F}_v^n ist ein Vektor, der aus der viskosen Dehnung resultiert. Für $\eta = 0$ ergibt sich die Steifigkeitsmatrix der Elastizität und der Vektor \mathbf{F}_v^n fällt weg. Wie später ersichtlich ist, fällt für $\eta = 0$ auch bei der Wärmeleitungsgleichung der viskose Anteil weg, das heißt das Materialmodell enthält die Thermoelastizität.

Nun werden die Formfunktionen (5.55) und deren Ableitung (5.61) eingesetzt. Anschließend können die Matrizen bzw. der Vektor analytisch integriert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \frac{A}{2L} \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{A}{L} \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{u\Theta} &= \frac{EA\alpha}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 + \zeta & -1 - \zeta \\ 1 - \zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{EA\alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v^n &= \frac{\eta E_1 A}{2(\eta + E_1 \Delta t)} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Einsetzen der viskosen Dehnung (6.7) in Gl. (6.2) führt zu:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} \left(\varepsilon - \frac{E_1 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon - \frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} \left(\frac{\eta + E_1 \Delta t - E_1 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon - \frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{E_1^2}{\eta} \left(\frac{\eta}{\eta + E_1 \Delta t} (\varepsilon - \varepsilon_v^n) \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\eta E_1^2}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} (\varepsilon^2 - 2\varepsilon \varepsilon_v^n + \varepsilon_v^{n2}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Mit dem Ansatz der Dehnung (5.24) folgt:

$$D = \frac{1}{\rho} \frac{\eta E_1^2}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} (\mathbf{B}^T \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{u} - 2 \varepsilon_v^n \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \varepsilon_v^{n2}) \quad (6.19)$$

Einsetzen von D nach Gleichung (6.19) in $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ nach (5.70) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(D) &= \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \mathbf{N} (\mathbf{B}^T \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{u} - 2 \varepsilon_v^n \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \varepsilon_v^{n2}) J d\zeta \\ &= \underbrace{\frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{B}^T \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{u} J d\zeta}_{\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u})} \\ &\quad - 2 \underbrace{\frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{D\Theta u}} \mathbf{u} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^{n2} \int_{-1}^1 \mathbf{N} J d\zeta}_{\dot{\mathbf{Q}}_D^n} \end{aligned} \quad (6.20)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{Q}}(D) = \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) - \mathbf{K}_{D\Theta u} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{Q}}_D^n \quad (6.21)$$

mit den Abkürzungen:

$$\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) = \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{B}^T \mathbf{u} \mathbf{B}^T \mathbf{u} J d\zeta \quad (6.22)$$

$$\mathbf{K}_{D\Theta u} = 2 \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \mathbf{N} \mathbf{B}^T J d\zeta \quad (6.23)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_D^n = \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^{n2} \int_{-1}^1 \mathbf{N} J d\zeta \quad (6.24)$$

Diese drei Terme resultieren aus der mechanischen Dissipation und bewirken eine Erwärmung aufgrund der viskosen Dehnungen. Dabei ist $\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u})$ ein nichtlinearer Ausdruck in der Verschiebung \mathbf{u} . Für $\eta = 0$ verschwinden alle drei Terme.

Mit den Formfunktionen (5.55) und deren Ableitung (5.61) können auch diese Vektoren und die Matrix analytisch integriert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{D\Theta u} &= \frac{\eta E_1^2 A}{2(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^n \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 + \zeta & 1 - \zeta \\ -1 - \zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix} d\zeta \\ &= \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^n \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) &= \frac{\eta E_1^2 A}{4L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 + \zeta & 1 - \zeta \\ -1 - \zeta & 1 + \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 A}{4L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} (-1 + \zeta)u_1 + (1 - \zeta)u_2 \\ (-1 - \zeta)u_1 + (1 + \zeta)u_2 \end{Bmatrix} (-u_1 + u_2) d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 A}{4L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} (u_2 - u_1) + \zeta(u_1 - u_2) \\ (u_2 - u_1) + \zeta(u_2 - u_1) \end{Bmatrix} (u_2 - u_1) d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 A}{4L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} (u_2 - u_1)^2 d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 A}{4L(\eta + E_1 \Delta t)^2} (u_1 - u_2)^2 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 A}{2L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (u_1 - u_2)^2 \tag{6.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Q}}_D^n &= \frac{\eta E_1^2 AL}{4(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^{n2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \zeta \\ 1 + \zeta \end{Bmatrix} d\zeta \\
&= \frac{\eta E_1^2 AL}{2(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^{n2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Die umgeformten Ausdrücke $\mathbf{F}(\sigma)$ nach (6.11) und $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ nach (6.21) eingesetzt in die Gleichungen (5.44) und (5.45) ergibt:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} & \mathbf{D}_{\Theta \Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{K}_{u\Theta} \\ \mathbf{K}_{D\Theta u} & \mathbf{K}_{\Theta \Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} \\
- \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_v^n + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_a \\ \dot{\mathbf{Q}}_D^n + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_a \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{6.28}
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_v^n \tag{6.29}$$

und

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D^n \tag{6.30}$$

folgt

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} & \mathbf{D}_{\Theta \Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{K}_{u\Theta} \\ \mathbf{K}_{D\Theta u} & \mathbf{K}_{\Theta \Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} \tag{6.31}$$

bzw.

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta \tag{6.32}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_{\Theta \Theta} \dot{\Theta} + \mathbf{K}_{D\Theta u} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\Theta \Theta} \Theta - \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{u}) \tag{6.33}$$

6.2 Koordinatentransformation

Im allgemeinen werden Stabwerke berechnet, wobei die lokalen Stabachsen der einzelnen Elemente in unterschiedliche Richtungen verlaufen. Deshalb ist es notwendig die lokalen Elementachsen in ein globales Koordinatensystem xyz zu transformieren. Dabei werden die lokalen Verschiebungsfreiheitsgrade u_1 und u_2 in die globalen Verschiebungsfreiheitsgrade v_1 bis v_6 transformiert.

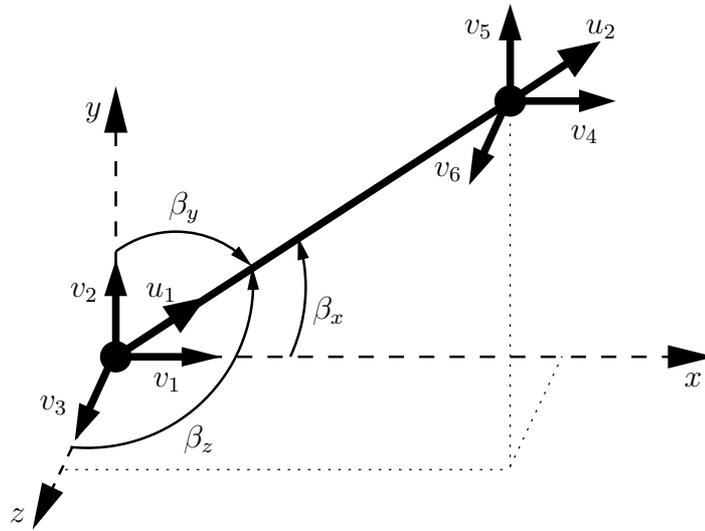


Abbildung 6.1: Dehnstab mit lokalen und globalen Verschiebungsfreiheitsgraden

Die Koordinatentransformation wird mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{a} ausgeführt

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \mathbf{v} \quad (6.34)$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

mit

$$c_x = \cos \beta_x = \frac{\Delta x}{L}, \quad c_y = \cos \beta_y = \frac{\Delta y}{L}, \quad c_z = \cos \beta_z = \frac{\Delta z}{L} \quad (6.36)$$

Die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}$ ergibt sich zu:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a} \dot{\mathbf{v}} \quad (6.37)$$

Entsprechend lässt sich mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{a} der globale Lastvektor $\bar{\mathbf{P}}$ aus dem lokalen Lastvektor $\bar{\mathbf{F}}$ (6.29) bestimmen:

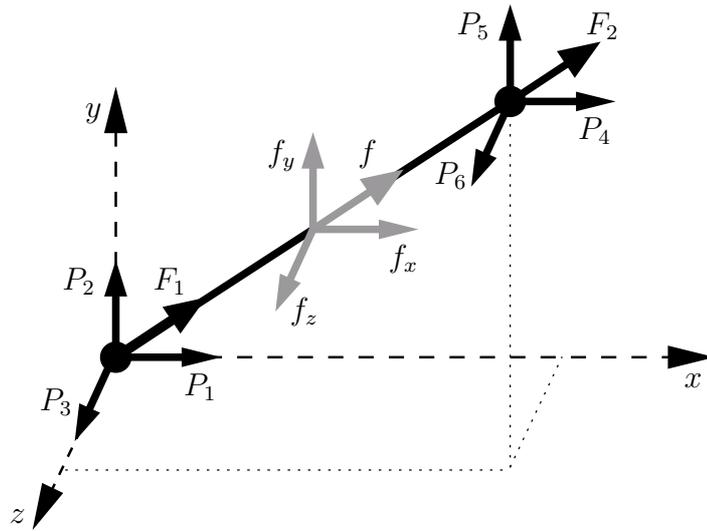


Abbildung 6.2: Dehnstab mit lokalen und globalen Knoten- und Volumenkräften

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (6.38)$$

$$= \mathbf{a}^T \mathbf{F}_a + \mathbf{a}^T \mathbf{F}_f + \mathbf{a}^T \mathbf{F}_v^n \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ c_y & 0 \\ c_z & 0 \\ 0 & c_x \\ 0 & c_y \\ 0 & c_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ c_y & 0 \\ c_z & 0 \\ 0 & c_x \\ 0 & c_y \\ 0 & c_z \end{bmatrix} \frac{\rho AL}{2} f \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ c_y & 0 \\ c_z & 0 \\ 0 & c_x \\ 0 & c_y \\ 0 & c_z \end{bmatrix} \frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} + \frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1 \Delta t} \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \varepsilon_v^n \\ &= \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_v^n \end{aligned} \quad (6.40)$$

Zum Herleiten der globalen Elementmatrizen wird Gl. (6.32) in Gl. (6.38) eingesetzt:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta \quad (6.41)$$

Mit Gl. (6.34) folgt:

$$\bar{\mathbf{P}} = \underbrace{\mathbf{a}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{a}}_{\mathbf{K}_{uu}^g} \mathbf{v} - \underbrace{\mathbf{a}^T \mathbf{K}_{u\Theta}}_{\mathbf{K}_{u\Theta}^g} \Theta \quad (6.42)$$

Gleichung (6.34) und (6.37) eingesetzt in Gl. (6.33) führt zu:

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \theta_0 \underbrace{\mathbf{K}_{\Theta u}}_{\mathbf{K}_{\Theta u}^g} \mathbf{a} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} + \underbrace{\mathbf{K}_{D\Theta u}}_{\mathbf{K}_{D\Theta u}^g} \mathbf{a} \mathbf{v} + \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta - \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) \quad (6.43)$$

Gleichung (6.34) bzw. (6.35) eingesetzt in Gl. (6.26) ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) &= \frac{\eta E_1^2 A}{2L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left((c_x v_1 + c_y v_2 + c_z v_3) \right. \\ &\quad \left. - (c_x v_4 + c_y v_5 + c_z v_6) \right)^2 \\ &= \frac{\eta E_1^2 A}{2L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6) \right)^2\end{aligned}\quad (6.44)$$

Damit lauten die Gleichungen in globalen Koordinaten:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{K}_{uu}^g \mathbf{v} - \mathbf{K}_{u\Theta}^g \Theta \quad (6.45)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} + \mathbf{K}_{D\Theta u}^g \mathbf{v} + \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta - \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) \quad (6.46)$$

mit

$$\mathbf{K}_{uu}^g = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{a} \quad (6.47)$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta}^g = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{u\Theta} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{K}_{\Theta u}^g = \mathbf{K}_{\Theta u} \mathbf{a} \quad (6.49)$$

$$\mathbf{K}_{D\Theta u}^g = \mathbf{K}_{D\Theta u} \mathbf{a} \quad (6.50)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) = \frac{\eta E_1^2 A}{2L(\eta + E_1 \Delta t)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6) \right)^2 \quad (6.51)$$

6.3 Element in globalen Koordinaten

Die Residugleichungen lauten:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g & \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^g & -\mathbf{K}_{u\Theta}^g \\ \mathbf{K}_{D\Theta u}^g & \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} + \underbrace{\frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1 \Delta t}}_{P_v^n} \varepsilon_v^n \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^g = \underbrace{\frac{A}{L} \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right)}_{K_1} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_{xy} & c_{xz} & -c_x^2 & -c_{xy} & -c_{xz} \\ c_{xy} & c_y^2 & c_{yz} & -c_{xy} & -c_y^2 & -c_{yz} \\ c_{xz} & c_{yz} & c_z^2 & -c_{xz} & -c_{yz} & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_{xy} & -c_{xz} & c_x^2 & c_{xy} & c_{xz} \\ -c_{xy} & -c_y^2 & -c_{yz} & c_{xy} & c_y^2 & c_{yz} \\ -c_{xz} & -c_{yz} & -c_z^2 & c_{xz} & c_{yz} & c_z^2 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Dabei ist:

$$c_{xy} = c_x c_y, \quad c_{xz} = c_x c_z, \quad c_{yz} = c_y c_z \quad (6.55)$$

Ferner sind:

$$\mathbf{K}_{u\Theta}^g = \underbrace{\frac{EA\alpha}{2}}_{K_2} \begin{bmatrix} -c_x & -c_x \\ -c_y & -c_y \\ -c_z & -c_z \\ c_x & c_x \\ c_y & c_y \\ c_z & c_z \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho ALr}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \underbrace{\frac{\eta E_1^2 AL}{2(\eta + E_1 \Delta t)^2}}_{\dot{Q}_D^n} \varepsilon_v^{n2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.57)$$

$$\mathbf{K}_{\Theta u}^g = \underbrace{\frac{EA\alpha}{2}}_{D_2/\theta_0} \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$\mathbf{D}_{\Theta\Theta} = \underbrace{\frac{\rho ALc_d}{6}}_{D_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$\mathbf{K}_{D\Theta u}^g = \underbrace{\frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2}}_{K_3} \varepsilon_v^n \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

$$\mathbf{K}_{\Theta\Theta} = \underbrace{\frac{kA}{L}}_{K_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

$$\dot{Q}_D^{NL}(\mathbf{a}_v) = \underbrace{\frac{\eta E_1^2 A}{2L(\eta + E_1 \Delta t)^2}}_{K_5} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6) \right)^2 \quad (6.62)$$

Komponentenform:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -c_x P_v^n \\ -c_y P_v^n \\ -c_z P_v^n \\ c_x P_v^n \\ c_y P_v^n \\ c_z P_v^n \\ \dot{Q}_D^n \\ \dot{Q}_D^n \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 & K_4 & -K_4 \\ -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$+ K_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6) \right)^2 \quad (6.63)$$

mit

$$P_v^n = \frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1 \Delta t} \varepsilon_v^n \quad (6.64)$$

$$\dot{Q}_D^n = \frac{\eta E_1^2 AL}{2(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^{n2} \quad (6.65)$$

$$D_1 = \theta_0 \frac{EA\alpha}{2} \quad (6.66)$$

$$D_2 = \frac{\rho ALc_d}{6} \quad (6.67)$$

$$K_1 = \frac{A}{L} \left(E + E_1 - \frac{E_1^2 \Delta t}{\eta + E_1 \Delta t} \right) \quad (6.68)$$

$$K_2 = \frac{EA\alpha}{2} \quad (6.69)$$

$$K_3 = \frac{\eta E_1^2 A}{(\eta + E_1 \Delta t)^2} \varepsilon_v^n \quad (6.70)$$

$$K_4 = \frac{kA}{L} \quad (6.71)$$

$$K_5 = \frac{\eta E_1^2 A}{2L (\eta + E_1 \Delta t)^2} \quad (6.72)$$

6.4 Stabkraft und Wärmestrom

Da über der Länge des Dehnstabelementes außer den konstanten Volumenkräften keine weiteren Kräfte angreifen, ist die Stabnormalkraft N und damit auch die resultierenden Stabkräfte S_{R1} und S_{R2} konstant im Element. Es gilt:

$$N = S_{R2} = -S_{R1} \quad (6.73)$$

$$= A\sigma \quad (6.74)$$

Mit der Spannungsbeziehung (3.153) und der viskosen Dehnung (6.7) ergibt sich die Normalkraft zu:

$$N = A((E + E_1)\varepsilon - E_1\varepsilon_v - E\alpha\Theta) \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} &= A\left(E + E_1 - \frac{E_1^2\Delta t}{\eta + E_1\Delta t}\right)\varepsilon - \frac{\eta E_1 A}{\eta + E_1\Delta t}\varepsilon_v^n - EA\alpha\Theta \\ &= LK_1\varepsilon - P_v^n - EA\varepsilon_{th} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Dabei lautet die Dehnung ε nach Gl. (5.24) mit (6.35) und (6.36)

$$\varepsilon = \frac{1}{L}(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) \quad (6.77)$$

$$= \frac{1}{L^2}(\Delta x(v_4 - v_1) + \Delta y(v_5 - v_2) + \Delta z(v_6 - v_3)) \quad (6.78)$$

und die thermische Dehnung:

$$\varepsilon_{th} = \alpha\Theta \quad (6.79)$$

Um eine konstante Stabkraft zu erhalten muss die thermische Dehnung konstant sein. Da aber die Temperaturdifferenz Θ linear im Element verteilt ist, muss aus Gl. (5.27) die mittlere Temperaturdifferenz Θ_m bestimmt und in die thermische Dehnung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{th} &= \alpha[\mathbf{N}^T\Theta]_{\zeta=0} \\ &= \alpha\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} \end{aligned} \quad (6.80)$$

Damit lautet die **Normalkraft**:

$$N = K_1(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) - K_2(\Theta_1 + \Theta_2) - P_v^n \quad (6.81)$$

Für den **Wärmestrom** \dot{Q}_E im Element soll gelten: \dot{Q}_E sei dann positiv, wenn \dot{Q}_E vom Knoten 1 zum Knoten 2 fließt. Damit folgt:

$$\dot{Q}_E = \dot{Q}_{R1} = -\dot{Q}_{R2} \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{kA}{L}(\Theta_1 - \Theta_2) \\ &= K_4(\Theta_1 - \Theta_2) \end{aligned} \quad (6.83)$$

Umformungen der Residuengleichung

Nun können an den Residuengleichungen (6.63) im Hinblick auf den numerischen Berechnungsaufwand einige Vereinfachungen gemacht werden.

Aus

$$\mathbf{K}_{uu}^g \mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

folgt mit Gl. (6.77):

$$\mathbf{K}_{uu}^g \mathbf{v} = K_1 L \varepsilon \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

Aus

$$\mathbf{K}_{u\Theta}^g \Theta = \frac{EA\alpha}{2} \begin{bmatrix} -c_x & -c_x \\ -c_y & -c_y \\ -c_z & -c_z \\ c_x & c_x \\ c_y & c_y \\ c_z & c_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}$$

folgt mit Gl. (6.79):

$$\mathbf{K}_{u\Theta}^g \Theta = EA \varepsilon_{th} \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (6.85)$$

Damit ergibt sich unter Verwendung von Gl. (6.76) der mechanische Teil der Resi-

duengleichung (6.63) zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{K}_{uu}^g \mathbf{v} + \mathbf{K}_{u\Theta}^g \Theta \\
 &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} + (P_v^n - K_1 L \varepsilon + EA \varepsilon_{th}) \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} + N \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ -c_x \\ -c_y \\ -c_z \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.86}$$

Mit Gl. (6.77) folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{D\Theta u}^g \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 \\ -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} \\
 &= K_3 L \varepsilon \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) &= K_5 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6))^2 \\
 &= K_5 L^2 \varepsilon^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.88}$$

Mit Gl. (6.83) folgt:

$$\mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta = \begin{bmatrix} K_4 & -K_4 \\ -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \dot{Q}_E \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{6.89}$$

Damit ergibt sich der thermische Teil der Residuengleichung (6.63) zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_2 &= \dot{\bar{Q}} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \mathbf{K}_{D\Theta u}^g \mathbf{v} - \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta + \dot{\mathbf{Q}}_D^{NL}(\mathbf{a}\mathbf{v}) \\
 &= \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho ALr}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \dot{Q}_E \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\dot{Q}_D^n - K_3 L \varepsilon + K_5 L^2 \varepsilon^2 \right)}_{\bar{K}_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

mit der Abkürzung:

$$\bar{K}_1 = \dot{Q}_D^n - K_3 L \varepsilon + K_5 L^2 \varepsilon^2 \quad (6.91)$$

Der letzte Term von Gl. (6.90) enthält alle Dissipationsanteile.

Somit lautet die vereinfachte Residuengleichung:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \bar{K}_1 - \dot{Q}_E \\ \bar{K}_1 + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (6.92)$$

Umsortierung für die Implementierung in FEAP

In FEAP ist die Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade nicht $[v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 \Theta_1 \Theta_2]^T$, sondern $[v_1 v_2 v_3 \Theta_1 v_4 v_5 v_6 \Theta_2]^T$. Daher müssen die Gleichungen für die Implementierung dementsprechend umsortiert werden:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dot{Q}_1 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ \bar{K}_1 - \dot{Q}_E \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \bar{K}_1 + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & 2D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (6.93)$$

6.5 Linearisierung mit Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren (4.5) angewendet auf die Residuengleichung (6.52) führt zu

$$\mathbf{k}_t \Delta \mathbf{y} = \mathbf{R} \quad (6.94)$$

mit

$$\Delta \mathbf{y} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \Theta \end{array} \right\} \quad (6.95)$$

Dabei ergibt sich die Tangentenmatrix \mathbf{k}_t zu:

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.96)$$

Für die Zeitintegration von Gl. (6.52) wird das implizite Eulerverfahren angewendet. Damit folgt nach Gl. (4.2)

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{1} \quad (6.97)$$

und die Tangentenmatrix \mathbf{k}_t ergibt sich zu:

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 & K_4 & -K_4 \\ -c_x K_3 & -c_y K_3 & -c_z K_3 & c_x K_3 & c_y K_3 & c_z K_3 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} - 2K_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_x & c_y & c_z & -c_x & -c_y & -c_z & 0 & 0 \\ c_x & c_y & c_z & -c_x & -c_y & -c_z & 0 & 0 \end{bmatrix} (c_x(v_1 - v_4) + c_y(v_2 - v_5) + c_z(v_3 - v_6)) + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

Die drei Matrizen können noch zusammengefasst werden. Somit lautet die Tangentenmatrix \mathbf{k}_t

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ -c_x \bar{K}_2 & -c_y \bar{K}_2 & -c_z \bar{K}_2 & c_x \bar{K}_2 & c_y \bar{K}_2 & c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_3 & \bar{K}_4 \\ -c_x \bar{K}_2 & -c_y \bar{K}_2 & -c_z \bar{K}_2 & c_x \bar{K}_2 & c_y \bar{K}_2 & c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_4 & \bar{K}_3 \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \bar{K}_2 &= K_3 + 2 K_5 (c_x (v_1 - v_4) + c_y (v_2 - v_5) + c_z (v_3 - v_6)) + \frac{1}{\Delta t} D_1 \\ &= \frac{1}{\Delta t} D_1 + K_3 - 2 K_5 L \varepsilon \end{aligned} \quad (6.100)$$

$$\bar{K}_3 = \frac{2}{\Delta t} D_2 + K_4 \quad (6.101)$$

$$\bar{K}_4 = \frac{1}{\Delta t} D_2 - K_4 \quad (6.102)$$

Umsortierung für die Implementierung in FEAP

Nun werden die Matrixelemente so umsortiert, dass sie der Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade $[v_1 \ v_2 \ v_3 \ \Theta_1 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ \Theta_2]^T$ entsprechen:

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & c_x K_2 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & c_y K_2 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & c_z K_2 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 \\ -c_x \bar{K}_2 & -c_y \bar{K}_2 & -c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_3 & c_x \bar{K}_2 & c_y \bar{K}_2 & c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_4 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 \\ -c_x \bar{K}_2 & -c_y \bar{K}_2 & -c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_4 & c_x \bar{K}_2 & c_y \bar{K}_2 & c_z \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

Kapitel 7

Thermoplastisches Dehnstabelement

Die Spannung der Thermoplastizität nach (3.184) mit den Ansätzen (5.24) und (5.27) für Dehnung und Temperaturänderung lautet:

$$\sigma = E \mathbf{B}^T \mathbf{u} - E \varepsilon_p - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta \quad (7.1)$$

Einsetzen der Spannung in $\mathbf{F}(\sigma)$ nach (5.69) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\sigma) &= A \int_{-1}^1 \mathbf{B} (E \mathbf{B}^T \mathbf{u} - E \varepsilon_p - E \alpha \mathbf{N}^T \Theta) J d\zeta \\ &= \underbrace{EA \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{uu}} \mathbf{u} \\ &\quad - \underbrace{EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta}_{\mathbf{K}_{u\Theta}} \Theta - \underbrace{E \varepsilon_p \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta}_{\mathbf{F}_p(\varepsilon_p)} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Aufgrund des linearen Elementansatzes ist die Dehnung im Element konstant. Damit sind auch die plastische Dehnung sowie die anderen inneren Variablen konstant im Element. Deshalb konnte ε_p aus dem Integral gezogen werden. Somit gilt:

$$\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta - \mathbf{F}_p(\varepsilon_p) \quad (7.3)$$

mit:

$$\mathbf{K}_{uu} = EA \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T J d\zeta \quad (7.4)$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta} = EA \alpha \int_{-1}^1 \mathbf{B} \mathbf{N}^T J d\zeta \quad (7.5)$$

$$\mathbf{F}_p(\varepsilon_p) = E \varepsilon_p \int_{-1}^1 \mathbf{B} J d\zeta \quad (7.6)$$

Dabei ist \mathbf{K}_{uu} die Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{K}_{u\Theta}$ die Kopplungsmatrix für thermische Dehnungen. Der Vektor $\mathbf{F}_p(\varepsilon_p)$ sorgt dafür, dass durch die plastischen Dehnungen kein Spannungsbeitrag entsteht.

Entsprechend dem viskoelastischen Dehnstabelement ergeben sich diese Terme zu:

$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{K}_{u\Theta} = \frac{EA\alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{F}_p(\varepsilon_p) = EA\varepsilon_p \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

Der Dissipationsterm (3.188) der Wärmeleitungsgleichung ist:

$$D = \lambda \frac{1}{\rho} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (7.10)$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} = \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) \quad (7.11)$$

folgt:

$$D = \lambda \frac{1}{\rho} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (7.12)$$

Einsetzen von D in $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ nach (5.70) ergibt:

$$\dot{\mathbf{Q}}(D) = A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \lambda \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) J d\zeta \quad (7.13)$$

Da die Spannung und die inneren Variablen beim linearen Element konstant sind, können all diese Größen aus dem Integral gezogen werden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(D) &= \lambda A \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \int_{-1}^1 \mathbf{N} J d\zeta \\ &= \lambda \frac{AL}{2} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Ausdrücke $\mathbf{F}(\sigma)$ nach (7.3) und $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ nach (7.14) eingesetzt in die Gleichungen (5.44) und (5.45) ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \mathbf{0} \\ &= \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_p(\varepsilon_p) - \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta \\ &= \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Theta} \Theta\end{aligned}\quad (7.15)$$

mit

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_p(\varepsilon_p) \quad (7.16)$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2 &= \mathbf{0} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(n, \xi, \kappa, \lambda) - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta \\ &= \dot{\mathbf{Q}} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta} - \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \Theta\end{aligned}\quad (7.17)$$

mit

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(n, \xi, \kappa, \lambda) \quad (7.18)$$

bzw. in Matrixform:

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_p(\varepsilon_p) \\ \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(n, \xi, \kappa, \lambda) \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u} & \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{K}_{u\Theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Theta \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.19)$$

7.1 Element in globalen Koordinaten

Die Koordinatentransformation erfolgt in völliger Analogie zu Kapitel 6.2 und führt zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \mathbf{0} \\ &= \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_p(\varepsilon_p) \\ \dot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{Q}}_r + \dot{\mathbf{Q}}_D(n, \xi, \kappa, \lambda) \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g & \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\Theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^g & -\mathbf{K}_{u\Theta}^g \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \Theta \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.20)$$

Komponentenform:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -c_x P_p(\varepsilon_p) \\ -c_y P_p(\varepsilon_p) \\ -c_z P_p(\varepsilon_p) \\ c_x P_p(\varepsilon_p) \\ c_y P_p(\varepsilon_p) \\ c_z P_p(\varepsilon_p) \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) \end{Bmatrix} \\
- & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \\
- & \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \\
& \tag{7.21}
\end{aligned}$$

mit

$$K_1 = \frac{EA}{L} \tag{7.22}$$

$$K_2 = \frac{EA \alpha}{2} \tag{7.23}$$

$$K_3 = \frac{kA}{L} \tag{7.24}$$

$$D_1 = \theta_0 \frac{EA \alpha}{2} \tag{7.25}$$

$$D_2 = \frac{\rho AL c_d}{6} \tag{7.26}$$

$$P_p(\varepsilon_p) = EA\varepsilon_p \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_D &= \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) \\ &= \lambda \frac{AL}{2} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha \mathbf{n} + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

7.2 Stabkraft und Wärmestrom im Element

Für die Stabnormalkraft N und die resultierenden Stabkräfte S_{R1} und S_{R2} gilt analog zum thermoviskosen Dehnstabelement:

$$N = S_{R2} = -S_{R1} \quad (7.29)$$

$$= A\sigma \quad (7.30)$$

Mit der Spannungsbeziehung (3.184) folgt:

$$\begin{aligned} N &= A(E(\varepsilon - \varepsilon_p) - E\alpha\Theta) \\ &= EA(\varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_{th}) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Mit der Dehnung nach Gleichung (6.77)

$$\varepsilon = \frac{1}{L}(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) \quad (7.32)$$

und der thermischen Dehnung nach (6.80)

$$\varepsilon_{th} = \alpha \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} \quad (7.33)$$

lautet die **Normalkraft**:

$$\begin{aligned} N &= \frac{EA}{L}(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) \\ &\quad - EA\varepsilon_p - \frac{EA\alpha}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \\ &= K_1(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) \\ &\quad - P_p(\varepsilon_p) - K_2(\Theta_1 + \Theta_2) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Entsprechend lautet die Spannung:

$$\sigma = \frac{E}{L}(c_x(v_4 - v_1) + c_y(v_5 - v_2) + c_z(v_6 - v_3)) - E\varepsilon_p - \frac{E\alpha}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \quad (7.35)$$

Für den **Wärmestrom** \dot{Q}_E im Element gilt nach (6.83):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_E &= \frac{kA}{L}(\Theta_1 - \Theta_2) \\ &= K_3(\Theta_1 - \Theta_2) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Umformung des GLS

An dem Gleichungssystem (7.21) können in Analogie zum thermoviskosen Dehnstabelement einige Vereinfachungen im Bezug auf den numerischen Berechnungsaufwand vorgenommen werden:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) - \dot{Q}_E \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 & D_2 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

Umsortierung für die Implementierung in FEAP

Vertauschen der Matrixelemente, sodass sie der Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade $[v_1 v_2 v_3 \Theta_1 v_4 v_5 v_6 \Theta_2]^T$ entsprechen:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dot{Q}_1 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dot{Q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_x N \\ c_y N \\ c_z N \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) - \dot{Q}_E \\ -c_x N \\ -c_y N \\ -c_z N \\ \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \xi, \kappa, \lambda) + \dot{Q}_E \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & 2D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x D_1 & -c_y D_1 & -c_z D_1 & D_2 & c_x D_1 & c_y D_1 & c_z D_1 & 2D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \\ \dot{v}_6 \\ \dot{\Theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

7.3 Zeitintegration der Evolutionsgleichungen

Die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} \quad (7.39)$$

$$\dot{\xi} = \lambda \left(a \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} - b\xi \right) \quad (7.40)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda\beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (7.41)$$

werden mit dem impliziten Eulerverfahren (4.2) integriert:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^n + \lambda\Delta t \mathbf{n} \quad (7.42)$$

$$\xi = \xi^n + \lambda\Delta t (a \mathbf{n} - b\xi) \quad (7.43)$$

$$\kappa = \kappa^n + \lambda\Delta t \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \quad (7.44)$$

Dabei bedeutet die Abkürzung:

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma - \xi}{|\sigma - \xi|} = \text{sgn}(\sigma - \xi) \quad (7.45)$$

7.4 Berechnung der Elementtangente

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem Multilevel-Newton Verfahren (4.12) – (4.19). Dabei werden in stetigem Wechsel auf globaler Ebene (Ebene der Gesamtstruktur) die Verschiebungen/Temperaturänderungen und auf lokaler Ebene (Elementebene) die inneren Variablen bestimmt, solange bis Konvergenz erzielt wird.

Prädiktor-Korrektor Verfahren

Bei der Bestimmung der inneren Variablen wird das Prädiktor-Korrektor Verfahren, siehe HARTMANN [2] verwendet. Dabei wird für jedes Element einzeln im sogenannten elastischen Prädiktor geprüft, ob man sich im elastischen oder im plastischen Bereich befindet. Im Falle des plastischen Bereichs werden im sogenannten plastischen Korrektor die inneren Variablen berechnet.

Elastischer Prädiktor:

Ausgehend vom Lösungsvektor der Verschiebung/Temperaturänderung \mathbf{y} des vorangegangenen Iterationsschritts sowie der plastischen Dehnung ε_p^n wird die Trail-Spannung berechnet:

$${}^T\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p^n) - E\alpha \Theta \quad (7.46)$$

Anschließend werden die Trail-Spannung und die inneren Variablen ξ^n, κ^n in die Fließfunktion (3.189) eingesetzt. Wenn nun gilt

$$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) = |{}^T\sigma - \xi^n| - (\kappa_0 + \kappa^n) \leq 0 \quad (7.47)$$

so befindet man sich im elastischen Bereich. Das bedeutet die inneren Variablen entwickeln sich nicht

$$\varepsilon_p^{n+1} = \varepsilon_p^n \quad (7.48)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n \quad (7.49)$$

$$\kappa^{n+1} = \kappa^n \quad (7.50)$$

und die aktuelle Spannung ist gleich der Trail-Spannung:

$$\sigma^{n+1} = {}^T\sigma \quad (7.51)$$

Da die inneren Variablen konstant bleiben, gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (7.52)$$

Somit ergibt sich die Elementtangente Matrix (4.19) zu:

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \quad (7.53)$$

Plastischer Korrektor:

Ist jedoch

$$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) = |{}^T\sigma - \xi^n| - (\kappa_0 + \kappa^n) > 0 \quad (7.54)$$

so müssen sich die inneren Variablen unter der Konsistenzbedingung (3.191)

$$\dot{f}(\sigma, \xi, \kappa) = 0 \quad (7.55)$$

entwickeln.

Im Rahmen der numerischen Berechnung kann der plastische Multiplikator λ jedoch nicht aus der Konsistenzbedingung bestimmt werden. Zwar wäre die Berechnung von λ selbst problemlos. Anschließend müsste λ aber in die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen eingesetzt werden. Diese werden numerisch integriert. Aufgrund der numerisch bedingten Ungenauigkeiten bei der Integration wäre für die so berechneten inneren Variablen die Fließbedingung $f = 0$ nicht exakt erfüllt.

Deshalb wird die Konsistenzbedingung nicht ausgewertet; stattdessen wird der plastische Multiplikator λ als zusätzliche Unbekannte zu den inneren Variablen aufgenommen. Dazu wird zur Bestimmung von λ die Fließbedingung $f = 0$ als zusätzliche Gleichung herangezogen:

$$f(\sigma, \xi, \kappa) = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) = 0 \quad (7.56)$$

Die Fließfunktion und die in der Zeit integrierten Evolutionsgleichungen (7.42) – (7.44) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem

$$l_1 = \varepsilon_p - \varepsilon_p^n - \lambda \Delta t \mathbf{n} = 0 \quad (7.57)$$

$$l_2 = \xi - \xi^n - \lambda \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) = 0 \quad (7.58)$$

$$l_3 = \kappa - \kappa^n - \lambda \Delta t \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) = 0 \quad (7.59)$$

$$l_4 = |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) = 0 \quad (7.60)$$

bzw.

$$\mathbf{l}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p - \varepsilon_p^n - \lambda \Delta t \mathbf{n} \\ \xi - \xi^n - \lambda \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ \kappa - \kappa^n - \lambda \Delta t \beta \left(\frac{\gamma}{\beta} - \kappa \right) \\ |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.61)$$

zur Bestimmung der drei unbekannt inneren Variablen sowie des plastischen Multiplikators:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \xi \\ \kappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (7.62)$$

Nun werden die Schritte 1, 2 und sowie die Bestimmung der Elementtangentialmatrix aus Schritt 3 des Multilevel-Newton Verfahrens aus Kapitel 4.3 ausgeführt.

Schritt 1

Das nichtlineare Gleichungssystem (4.15)

$$\mathbf{l}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (7.63)$$

wird mit dem Newton-Verfahren für gegebene \mathbf{y} gelöst

$$\underbrace{- \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^m}_{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{l}^m \quad (7.64)$$

mit

$$\mathbf{q}^{m+1} = \mathbf{q}^m + \Delta \mathbf{q} \quad (7.65)$$

Die Funktionalmatrix \mathbf{F} ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (7.61) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{l}_4}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{l}_4}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{l}_4}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{l}_4}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.66)$$

Es gilt

$$\frac{\partial |ax + b|}{\partial x} = a \operatorname{sgn}(ax + b) \quad (7.67)$$

und

$$\frac{\partial (\operatorname{sgn}(ax + b))}{\partial x} = 0 \quad (7.68)$$

Damit folgt die Funktionalmatrix \mathbf{F} zu:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \Delta t \mathbf{n} \\ 0 & -1 - \lambda \Delta t b & 0 & \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \Delta t \beta & \Delta t \beta (\frac{\gamma}{\beta} - \kappa) \\ E \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Somit lautet das zu lösende GLS mit Gleichung (7.61)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \Delta t \mathbf{n} \\ 0 & -1 - \lambda \Delta t b & 0 & \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \Delta t \beta & \Delta t \beta (\frac{\gamma}{\beta} - \kappa) \\ E \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \xi \\ \Delta \kappa \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p - \varepsilon_p^n - \lambda \Delta t \mathbf{n} \\ \xi - \xi^n - \lambda \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ \kappa - \kappa^n - \lambda \Delta t \beta (\frac{\gamma}{\beta} - \kappa) \\ |\sigma - \xi| - (\kappa_0 + \kappa) \end{Bmatrix} \quad (7.70)$$

mit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \xi \\ \kappa \\ \lambda \end{Bmatrix}^{m+1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p \\ \xi \\ \kappa \\ \lambda \end{Bmatrix}^m + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_p \\ \Delta \xi \\ \Delta \kappa \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (7.71)$$

Schritt 2

Nun muss das lineare Gleichungssystem mit 8 rechten Seiten (4.16) gelöst werden:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}}}_{\mathbf{F}} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} \quad (7.72)$$

bzw.

$$\mathbf{F} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} \quad (7.73)$$

Dabei ist \mathbf{F} die Funktionalmatrix aus Schritt 1. Die zu berechnende Matrix hat folgende Gestalt:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dy} = \begin{bmatrix} \frac{d\varepsilon_p}{dv_1} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_2} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_3} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_4} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_5} & \frac{d\varepsilon_p}{dv_6} & \frac{d\varepsilon_p}{d\Theta_1} & \frac{d\varepsilon_p}{d\Theta_2} \\ \frac{d\xi}{dv_1} & \frac{d\xi}{dv_2} & \frac{d\xi}{dv_3} & \frac{d\xi}{dv_4} & \frac{d\xi}{dv_5} & \frac{d\xi}{dv_6} & \frac{d\xi}{d\Theta_1} & \frac{d\xi}{d\Theta_2} \\ \frac{d\kappa}{dv_1} & \frac{d\kappa}{dv_2} & \frac{d\kappa}{dv_3} & \frac{d\kappa}{dv_4} & \frac{d\kappa}{dv_5} & \frac{d\kappa}{dv_6} & \frac{d\kappa}{d\Theta_1} & \frac{d\kappa}{d\Theta_2} \\ \frac{d\lambda}{dv_1} & \frac{d\lambda}{dv_2} & \frac{d\lambda}{dv_3} & \frac{d\lambda}{dv_4} & \frac{d\lambda}{dv_5} & \frac{d\lambda}{dv_6} & \frac{d\lambda}{d\Theta_1} & \frac{d\lambda}{d\Theta_2} \end{bmatrix} \quad (7.74)$$

Die Matrix der rechten Seite folgt mit Gl. (7.61) zu:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial l_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_2}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial l_3}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_3}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial l_4}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_4}{\partial \Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial l_4}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial l_4}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (7.75)$$

Mit Gleichung (7.60) und (7.35) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_4}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial l_4}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{n} \frac{E}{L} [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z] \end{aligned} \quad (7.76)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_4}{\partial \Theta} &= \frac{\partial l_4}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Theta} \\ &= \mathbf{n} (-1) \frac{E\alpha}{2} [1 \quad 1] \end{aligned} \quad (7.77)$$

Damit ergibt sich die Matrix der rechten Seite zu:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{E \mathbf{n}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z & -\frac{\alpha L}{2} & -\frac{\alpha L}{2} \end{bmatrix} \quad (7.78)$$

Das zu lösende lineare GLS lautet:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \Delta t \mathbf{n} \\ 0 & -1 - \lambda \Delta t b & 0 & \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \Delta t \beta & \Delta t \beta (\frac{\gamma}{\beta} - \kappa) \\ E \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} \right] = \frac{E \mathbf{n}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z & -\frac{\alpha L}{2} & -\frac{\alpha L}{2} \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

Da sich die 8 rechten Seiten des GLS jeweils nur um einen Faktor unterscheiden, kann das GLS für eine rechte Seite gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \Delta t \mathbf{n} \\ 0 & -1 - \lambda \Delta t b & 0 & \Delta t (a \mathbf{n} - b \xi) \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \Delta t \beta & \Delta t \beta (\frac{\gamma}{\beta} - \kappa) \\ E \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix} = \frac{E \mathbf{n}}{L} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.80)$$

Die anderen Lösungen ergeben sich dann durch Multiplikation mit den entsprechenden Faktoren:

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -c_x h_1 & -c_y h_1 & -c_z h_1 & c_x h_1 & c_y h_1 & c_z h_1 & -\frac{\alpha L}{2} h_1 & -\frac{\alpha L}{2} h_1 \\ -c_x h_2 & -c_y h_2 & -c_z h_2 & c_x h_2 & c_y h_2 & c_z h_2 & -\frac{\alpha L}{2} h_2 & -\frac{\alpha L}{2} h_2 \\ -c_x h_3 & -c_y h_3 & -c_z h_3 & c_x h_3 & c_y h_3 & c_z h_3 & -\frac{\alpha L}{2} h_3 & -\frac{\alpha L}{2} h_3 \\ -c_x h_4 & -c_y h_4 & -c_z h_4 & c_x h_4 & c_y h_4 & c_z h_4 & -\frac{\alpha L}{2} h_4 & -\frac{\alpha L}{2} h_4 \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

Schritt 3:

Im dritten Schritt wird die Elementtangente Matrix nach Gleichung (4.19)

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} \quad (7.82)$$

bestimmt. Mit Gleichung (7.19) folgt die Matrix:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

Diese enthält die Ableitungen von Verschiebungsfeld- und Wärmeleitungsgleichung nach den Knotenfreiheitsgraden.

Dabei ergibt sich die Ableitung der Verschiebungsfeldgleichung (7.15) nach den Verschiebungsfreiheitsgraden zu

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{K}_{uu}^g \quad (7.84)$$

und die Ableitung der Verschiebungsfeldgleichung nach den Temperaturfreiheitsgraden zu:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \Theta} = \mathbf{K}_{u\Theta}^g \quad (7.85)$$

Die Ableitung der Wärmeleitungsgleichung (7.17) nach den Verschiebungsfreiheitsgraden wird unter Verwendung von Gl. (7.35) wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (7.86)$$

Dabei wurde als Zeitintegrationsverfahren das implizite Eulerverfahren (4.2) verwendet. Aus Gleichung (7.14) ergibt sich

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D(n, \xi, \kappa, \lambda)}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.87)$$

Unter Verwendung von Gleichung (7.20) bzw. (7.21) folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} &= -\theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \frac{1}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{\Delta t} D_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\ &= -\bar{K}_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.88)$$

mit der Abkürzung¹:

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 \quad (7.89)$$

¹Um die gleiche Struktur wie in Kapitel 7.5 zu erhalten, wird rein formal K_4 eingeführt und zu null gesetzt.

$$K_4 = 0 \quad (7.90)$$

Die Ableitung der Wärmeleitungsgleichung (7.17) nach den Temperaturfreiheitsgraden ergibt sich unter Verwendung des impliziten Eulerverfahren (4.2) und von Gleichungen (7.20) bzw. (7.21) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \dot{\Theta}} \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Theta} \\ &= -\mathbf{K}_{\Theta\Theta} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \frac{1}{\Delta t} + \mathbf{0} \\ &= -\mathbf{K}_{\Theta\Theta} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \frac{1}{\Delta t} \\ &= -K_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} D_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \\ \bar{K}_3 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.91)$$

mit den Abkürzungen²:

$$\bar{K}_2 = K_3 + 2 \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \quad (7.92)$$

$$\bar{K}_3 = -K_3 + \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \quad (7.93)$$

$$K_5 = 0 \quad (7.94)$$

Damit lautet die Matrix mit den Ableitungen nach den Knotenfreiheitsgraden:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = - \begin{bmatrix} c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x K_2 & c_x K_2 \\ c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_y K_2 & c_y K_2 \\ c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_z K_2 & c_z K_2 \\ -c_x^2 K_1 & -c_{xy} K_1 & -c_{xz} K_1 & c_x^2 K_1 & c_{xy} K_1 & c_{xz} K_1 & -c_x K_2 & -c_x K_2 \\ -c_{xy} K_1 & -c_y^2 K_1 & -c_{yz} K_1 & c_{xy} K_1 & c_y^2 K_1 & c_{yz} K_1 & -c_y K_2 & -c_y K_2 \\ -c_{xz} K_1 & -c_{yz} K_1 & -c_z^2 K_1 & c_{xz} K_1 & c_{yz} K_1 & c_z^2 K_1 & -c_z K_2 & -c_z K_2 \\ -c_x \bar{K}_1 & -c_y \bar{K}_1 & -c_z \bar{K}_1 & c_x \bar{K}_1 & c_y \bar{K}_1 & c_z \bar{K}_1 & \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \\ -c_x \bar{K}_1 & -c_y \bar{K}_1 & -c_z \bar{K}_1 & c_x \bar{K}_1 & c_y \bar{K}_1 & c_z \bar{K}_1 & \bar{K}_3 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \quad (7.95)$$

²Um die gleiche Struktur wie in Kapitel 7.5 zu erhalten, wird rein formal K_5 eingeführt und zu null gesetzt.

Mit Gleichung (7.19) ergibt sich die Matrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_p(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \kappa} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.96)$$

Diese enthält die Ableitungen von Verschiebungsfeld- und Wärmeleitungsgleichung nach den inneren Variablen.

Die einzelnen Ableitungen ergeben sich mit Gleichung (7.9) und (7.14) zu:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_p(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p} = EA \begin{Bmatrix} -c_x \\ -c_y \\ -c_z \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (7.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} &= \lambda \frac{ALb}{2a} 2\xi \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \kappa} &= \lambda \frac{AL\beta}{2\gamma} 2\kappa \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} &= \frac{\dot{Q}_D}{\lambda} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.100)$$

mit den Abkürzungen:

$$\dot{Q}_{D2} = \lambda AL \frac{b}{a} \xi \quad (7.101)$$

$$\dot{Q}_{D3} = -\lambda AL \frac{\beta}{\gamma} \kappa \quad (7.102)$$

$$\dot{Q}_{D4} = \frac{AL}{2} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha n + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (7.103)$$

Damit lautet die Matrix mit den Ableitungen nach den inneren Variablen:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -c_x EA & 0 & 0 & 0 \\ -c_y EA & 0 & 0 & 0 \\ -c_z EA & 0 & 0 & 0 \\ c_x EA & 0 & 0 & 0 \\ c_y EA & 0 & 0 & 0 \\ c_z EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Q}_{D2} & \dot{Q}_{D3} & \dot{Q}_{D4} \\ 0 & \dot{Q}_{D2} & \dot{Q}_{D3} & \dot{Q}_{D4} \end{bmatrix} \quad (7.104)$$

Aus (7.104) und (7.81) folgt die Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} c_x^2 H_1 & c_{xy} H_1 & c_{xz} H_1 & -c_x^2 H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_{xz} H_1 & c_x H_2 & c_x H_2 \\ c_{xy} H_1 & c_y^2 H_1 & c_{yz} H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_y^2 H_1 & -c_{yz} H_1 & c_y H_2 & c_y H_2 \\ c_{xz} H_1 & c_{yz} H_1 & c_z^2 H_1 & -c_{xz} H_1 & -c_{yz} H_1 & -c_z^2 H_1 & c_z H_2 & c_z H_2 \\ -c_x^2 H_1 & -c_{xy} H_1 & -c_{xz} H_1 & c_x^2 H_1 & c_{xy} H_1 & c_{xz} H_1 & -c_x H_2 & -c_x H_2 \\ -c_{xy} H_1 & -c_y^2 H_1 & -c_{yz} H_1 & c_{xy} H_1 & c_y^2 H_1 & c_{yz} H_1 & -c_y H_2 & -c_y H_2 \\ -c_{xz} H_1 & -c_{yz} H_1 & -c_z^2 H_1 & c_{xz} H_1 & c_{yz} H_1 & c_z^2 H_1 & -c_z H_2 & -c_z H_2 \\ -c_x H_3 & -c_y H_3 & -c_z H_3 & c_x H_3 & c_y H_3 & c_z H_3 & H_4 & H_4 \\ -c_x H_3 & -c_y H_3 & -c_z H_3 & c_x H_3 & c_y H_3 & c_z H_3 & H_4 & H_4 \end{bmatrix} \quad (7.105)$$

mit den Abkürzungen³:

$$H_1 = EA h_1 \quad (7.106)$$

$$H_2 = \frac{EA \alpha}{2} L h_1 \quad (7.107)$$

$$H_3 = \dot{Q}_{D1} h_1 + \dot{Q}_{D2} h_2 + \dot{Q}_{D3} h_3 + \dot{Q}_{D4} h_4 \quad (7.108)$$

$$H_4 = -\frac{\alpha L}{2} H_3 \quad (7.109)$$

Dabei ist:

$$\dot{Q}_{D1} = 0 \quad (7.110)$$

³Um die gleiche Struktur wie in Kapitel 7.5 zu erhalten, wird bei H_3 rein formal der Term $\dot{Q}_{D1} h_1$ eingeführt und \dot{Q}_{D1} zu null gesetzt.

Nun kann aus Gleichung (7.95) und (7.105) die Elementtangente­matrix \mathbf{k}_t zusammengesetzt werden

$$\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}}$$

$$= \begin{bmatrix} c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 & c_x \hat{K}_2 \\ c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 & c_y \hat{K}_2 \\ c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 & c_z \hat{K}_2 \\ -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 & -c_x \hat{K}_2 \\ -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 & -c_y \hat{K}_2 \\ -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 & -c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 & \hat{K}_5 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 & \hat{K}_4 \end{bmatrix} \quad (7.111)$$

mit den Abkürzungen:

$$\hat{K}_1 = K_1 - H_1 \quad (7.112)$$

$$\hat{K}_2 = K_2 - H_2 \quad (7.113)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_3 &= \bar{K}_1 - H_3 \\ &= \frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 - H_3 \end{aligned} \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_4 &= \bar{K}_2 - H_4 \\ &= K_3 + 2 \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 - H_4 \end{aligned} \quad (7.115)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_5 &= \bar{K}_3 - H_4 \\ &= -K_3 + \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 - H_4 \end{aligned} \quad (7.116)$$

sowie

$$H_1 = EA h_1 \quad (7.117)$$

$$H_2 = \frac{EA \alpha}{2} L h_1 \quad (7.118)$$

$$H_3 = \dot{Q}_{D1} h_1 + \dot{Q}_{D2} h_2 + \dot{Q}_{D3} h_3 + \dot{Q}_{D4} h_4 \quad (7.119)$$

$$H_4 = -\frac{\alpha L}{2} H_3 \quad (7.120)$$

$$K_4 = 0 \quad (7.121)$$

$$K_5 = 0 \quad (7.122)$$

und

$$\dot{Q}_{D1} = 0 \quad (7.123)$$

$$\dot{Q}_{D2} = \lambda AL \frac{b}{a} \xi \quad (7.124)$$

$$\dot{Q}_{D3} = -\lambda AL \frac{\beta}{\gamma} \kappa \quad (7.125)$$

$$\dot{Q}_{D4} = \frac{AL}{2} \left(\kappa_0 + \theta_0 E \alpha n + \frac{b}{a} \xi^2 + \frac{\beta}{\gamma} \kappa^2 \right) \quad (7.126)$$

$$n = \operatorname{sgn}(\sigma - \xi) \quad (7.127)$$

Umsortierung für die Implementierung in FEAP

Vertauschen der Matrixelemente, sodass sie der Reihenfolge der Elementfreiheitsgrade $[v_1 v_2 v_3 \Theta_1 v_4 v_5 v_6 \Theta_2]^T$ entsprechen:

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 & -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & c_x \hat{K}_2 \\ c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & c_y \hat{K}_2 \\ c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 \\ -c_x^2 \hat{K}_1 & -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 & c_x^2 \hat{K}_1 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_{xz} \hat{K}_1 & -c_x \hat{K}_2 \\ -c_{xy} \hat{K}_1 & -c_y^2 \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 & c_{xy} \hat{K}_1 & c_y^2 \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & -c_y \hat{K}_2 \\ -c_{xz} \hat{K}_1 & -c_{yz} \hat{K}_1 & -c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 & c_{xz} \hat{K}_1 & c_{yz} \hat{K}_1 & c_z^2 \hat{K}_1 & -c_z \hat{K}_2 \\ -c_x \hat{K}_3 & -c_y \hat{K}_3 & -c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_5 & c_x \hat{K}_3 & c_y \hat{K}_3 & c_z \hat{K}_3 & \hat{K}_4 \end{bmatrix} \quad (7.128)$$

Gegeben ist die Lösung zur Zeit t^n : $\mathbf{Y}^n, \mathbf{Q}^n$ Übertrage: $\mathbf{Y}^m = \mathbf{Y}^n$ mit $m = 0$	
Globale Ebene: Gegeben: $\mathbf{Y}^m, \mathbf{Q}^n, t = t^{n+1}$	
Elementebene:	
Gegeben: $\mathbf{y}^m, \mathbf{q}^n = [\varepsilon_p^n \ \xi^n \ \kappa^n]^T$ Trail-Spannung: ${}^T\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p^n) - E\alpha \Theta$ Elastischer Prädiktor: $f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) = {}^T\sigma - \xi^n - (\kappa_0 + \kappa^n)$	
$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) < 0$ \implies Elastischer Bereich	$f({}^T\sigma, \xi^n, \kappa^n) > 0$ \implies Plastischer Bereich
Aktualisiere: $\mathbf{q} = \mathbf{q}^n$	Plastischer Korrektor: Löse: $l(\mathbf{y}^m, \mathbf{q}) = 0 \implies \mathbf{q}$ Löse: $-\frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dy} = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{y}} \implies \frac{d\mathbf{q}}{dy}$
Berechne: $\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}$	Berechne: $\mathbf{k}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dy}$
Globale Ebene: Löse: $\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}^m, \mathbf{Q})$ $\mathbf{Y}^{m+1} = \mathbf{Y}^m + \Delta \mathbf{Y}$ $m = m + 1$	
Wiederhole bis Konvergenz erzielt	

Tabelle 7.1: Darstellung des Lösungsschritts von t^n zu t^{n+1}

7.5 Zum Vergleich: plastische Spannungsleistung als Wärmequellterm

Zum Vergleich soll auch die Wärmeleitungsgleichung mit der Wärmequelle w_D in Form des Taylor-Quinney-Koeffizienten multipliziert mit der plastischen Spannungsleistung implementiert werden. Dies bedarf lediglich kleiner Änderungen.

Der Dissipationsterm (2.84) der Wärmeleitungsgleichung lautet nun:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\rho} \bar{\gamma} \sigma \dot{\epsilon}_p + \frac{1}{\rho} \theta_0 E \alpha \dot{\epsilon}_p \\ &= \lambda \frac{1}{\rho} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \end{aligned} \quad (7.129)$$

Einsetzen von D in $\dot{\mathbf{Q}}(D)$ nach (5.70) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(D) &= A \int_{-1}^1 \mathbf{N} \lambda \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) J d\zeta \\ &= \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_D \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}_D(\mathbf{n}, \kappa, \lambda) \end{aligned} \quad (7.130)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{Q}_D &= \dot{Q}_D(\mathbf{n}, \kappa, \lambda) \\ &= \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \end{aligned} \quad (7.131)$$

Nur in Schritt 3 des Multilevel-Newton-Verfahrens treten weitere Änderungen auf. Die Änderungen betreffen aber nur die Gleichungen, die den Vektor $\dot{\mathbf{Q}}_D$ beinhalten oder daraus hervorgehen. Mit

$$\frac{\partial \dot{Q}_D}{\partial \sigma} = \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} \bar{\gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.132)$$

ergibt sich Gleichung (7.86) unter Verwendung von (7.35) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} - \theta_0 \mathbf{K}_{\Theta u}^g \frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \sigma} \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta t} D_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\ &\quad + \lambda \frac{EA}{2} \mathbf{n} \bar{\gamma} \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\ &= -\left(\frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 \right) \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \\ &= -\bar{K}_1 \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.133)$$

mit den Abkürzungen:

$$\bar{K}_1 = \frac{1}{\Delta t} D_1 - K_4 \quad (7.134)$$

$$K_4 = \lambda \frac{EA}{2} n \bar{\gamma} \quad (7.135)$$

Entsprechend folgt aus Gleichung (7.91) mit (7.132) und (7.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \dot{\Theta}} \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Theta} \\ &= -\mathbf{K}_{\Theta\Theta} - \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \frac{1}{\Delta t} + \lambda \frac{AL}{2} n \bar{\gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (-1) \frac{E\alpha}{2} [1 \quad 1] \\ &= -K_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} D_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - K_5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \bar{K}_2 & \bar{K}_3 \\ \bar{K}_3 & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.136)$$

mit den Abkürzungen:

$$K_5 = \lambda \frac{EA\alpha L}{4} n \bar{\gamma} \quad (7.137)$$

$$\bar{K}_2 = K_3 + 2 \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \quad (7.138)$$

$$\bar{K}_3 = -K_3 + \frac{1}{\Delta t} D_2 + K_5 \quad (7.139)$$

In der Matrix (7.96) ändern sich die Koeffizienten:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_p(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \varepsilon_p} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \kappa} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (7.140)$$

Nur $\frac{\partial \mathbf{P}_p(\varepsilon_p)}{\partial \varepsilon_p}$ bleibt unverändert. Die anderen Koeffizienten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \varepsilon_p} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_p} \\ &= \lambda \frac{AL}{2} n \bar{\gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (-E) \\ &= \dot{Q}_{D1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.141)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}_D}{\partial \xi} &= 0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.142)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{Q}_D}{\partial \kappa} &= 0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.143)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{Q}_D}{\partial \lambda} &= \frac{\dot{Q}_D}{\lambda} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \dot{Q}_{D4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (7.144)$$

mit den Abkürzungen:

$$\dot{Q}_{D1} = -\lambda \frac{EAL}{2} \mathbf{n} \bar{\gamma} \quad (7.145)$$

$$\dot{Q}_{D2} = 0 \quad (7.146)$$

$$\dot{Q}_{D3} = 0 \quad (7.147)$$

$$\dot{Q}_{D4} = \frac{AL}{2} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \quad (7.148)$$

Zusammenfassung aller durchzuführenden Änderungen

$$\dot{Q}_D = \lambda \frac{AL}{2} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \quad (7.149)$$

$$K_4 = \lambda \frac{EA}{2} \mathbf{n} \bar{\gamma} \quad (7.150)$$

$$K_5 = \lambda \frac{EA\alpha L}{4} \mathbf{n} \bar{\gamma} \quad (7.151)$$

$$\dot{Q}_{D1} = -\lambda \frac{EAL}{2} \mathbf{n} \bar{\gamma} \quad (7.152)$$

$$\dot{Q}_{D2} = 0 \quad (7.153)$$

$$\dot{Q}_{D3} = 0 \quad (7.154)$$

$$\dot{Q}_{D4} = \frac{AL}{2} \mathbf{n} (\bar{\gamma} \sigma + \theta_0 E \alpha) \quad (7.155)$$

Energieumsetzung

In Gleichung (3.197) wurde das Verhältnis von gespeicherter Energie e_s zur plastischen Arbeit a_p definiert:

$$\varphi = \frac{e_s}{a_p} \quad (7.156)$$

mit

$$e_s = \int_0^t w_s(\tau) d\tau \quad (7.157)$$

Die im Material gespeicherte Leistung ergibt sich nach Gleichung (2.73) zu:

$$w_s = w_p - w_D \quad (7.158)$$

Dabei ist w_D nach Gleichung (2.74):

$$w_D = \bar{\gamma} w_p \quad (7.159)$$

Damit folgt

$$w_s = (1 - \bar{\gamma})w_p \quad (7.160)$$

und

$$e_s = (1 - \bar{\gamma}) \int_0^t w_p(\tau) d\tau \quad (7.161)$$

So lautet das Verhältnis φ von gespeicherter Energie e_s zur plastischen Arbeit a_p :

$$\varphi = 1 - \bar{\gamma} \quad (7.162)$$

Kapitel 8

Implementierung in Feap

In FEAP ist die Programmierung von Userelementen und anderen Benutzer Routinen bereits vorbereitet. Informationen dazu können im FEAP Programmer Manuel [11] gefunden werden. Nun erfolgt die Dokumentation der mit FORTRAN 77 implementierten Elementformulierungen.

In dem Ordner `user` der FEAP-Quelldateien sind unter anderem 50 leere Userelementroutinen `elmt01.f` bis `elmt50.f`, sogenannte dummy-Routinen, enthalten. Diese Routinen sind schon in das Programm eingebunden und können bereits über die Materialdefinition aufgerufen werden:

```
MATERial x  
  ELMT xx  
  ...
```

dabei ist `x` die Materialnummer und `xx` die Userelementnummer. Die Zeile `ELMT xx` ruft die Routine `elmtxx.f` auf. Beim Aufruf einer leeren Routine erfolgt eine Fehlermeldung. Ausgehend von diesen dummy-Routinen `elmtxx.f` werden die neuen Elemente programmiert. Anschließend muss FEAP mit Hilfe der `makefile` neu kompiliert und gebunden werden. Dann stehen die zugefügten Routinen zur Verfügung.

Routinenkopf

Der Kopf der Userelementroutinen hat folgende Struktur:

```
subroutine elmtxx(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
```

Darin werden die wichtigsten Variablen und Datenfelder übergeben:

Variable/Feld	Beschreibung
d(*)	enthält alle eingegebenen Materialparameter
ndf	(maximale) Anzahl der Knotenfreiheitsgrade
ndm	Dimension der Berechnung
nst	Größe der Elementmatrizen, $nst = ndf * nen$, nen... (maximale) Anzahl Knoten pro Element
ul(ndf,nen,j)	Lösungsdaten eines Elements j = 1: Verschiebung $u_{n+a}^{(k)}$ j = 2: Inkrement $u_{n+a}^{(k)} - u_n$ j = 3: Inkrement $u_{n+1}^{(k)} - u_{n+1}^{(k-1)}$ j = 4: Geschwindigkeit $v_{n+a}^{(k)}$ j = 5: Beschleunigung $a_{n+a}^{(k)}$ j = 6: Geschwindigkeit v_n mit $0 \leq a \leq 1$ je nach Integrationsverfahren
xl(ndm,nen)	Knotenkoordinaten des Elements
ix(nen)	globale Knotennummer
tl(nen)	Knotentemperatur
s(nst,nst)	Elementtangentialmatrix
p(ndf,nen)	Residuenvektor, auch als $p(nst)$ nutzbar
isw	Funktionsparameter zur Steuerung der Elementroutine

Tabelle 8.1: Beschreibung der Variablen(-felder)

COMMON-Blöcke

Durch die Einbindung der COMMON-Blöcke aus dem Ordner `include` werden weitere Variablen und Felder bereitgestellt. Folgend sind die verwendeten COMMON-Blöcke dargestellt und die davon genutzten Variablen kurz beschrieben:

```
character*4      o, head
common /bdata/  o, head(20)

integer         numnp, numel, nummat, nen, neq, ipr
common /cdata/  numnp, numel, nummat, nen, neq, ipr

real*8          dm
integer         n, ma, mct, iel, nel
common /eldata/ dm, n, ma, mct, iel, nel

real*8          tt
common /elplot/ tt(200)

real*8          bpr, ctan, psil
common /eltran/ bpr(3), ctan(3), psil
```

```

integer          ior,iow,ilg
common /iofile/ ior,iow,ilg

integer          istv, iste, istp
common /strnum/  istv, iste, istp

integer          nh1,nh2,nh3,nlm
common /hdata/  nh1,nh2,nh3,nlm

integer          nstep,niter,nform,naugm, titer,taugm,tform
common /counts/ nstep,niter,nform,naugm, titer,taugm,tform

integer          iaugm,iform,intvc,iautl, nstepa
common /counts/ iaugm,iform,intvc,iautl, nstepa

real*8          hr
integer          mr
common          hr(1),mr(1)

```

Listing 8.1: Verwendete COMMON-Blöcke

Der letzte dargestellte COMMON-Block gehört zur Datei comblk.h.

Variable/Feld	Beschreibung
head	enthält Berechnungstitel
nen	Anzahl der Knoten pro Element
n	Elementnummer
ma	Materialnummer
mct	Zählvariable für Ergebnisausgabe
iel	Userelementnummer
tt	STREss-Datenfeld für TPLOt Befehl
ctan(3)	Multiplikator für Tangentenmatrix; ctan(2) entspricht bei transienter Berechnung mit Zeitintegration nach dem impliziten Eulerverfahren dem Zeitschritt Δt
ior, iow	Variablen für Datenein- und Ausgabe
iste	Variable für Spannungsprojektion auf Knoten
nh1	Adresse ¹ der History-Variablen im Feld hr(*) zur Zeit t^n
nh2	Adresse der History-Variablen in hr(*) zur Zeit t^{n+1}
nh3	Adresse ¹ der zeitunabhängigen History-Variablen in hr(*)
niter	zählt die Iterationen eines Zeitschritts für die Berechnung der inneren Variablen
hr(*)	Feld zur Speicherung der History-Variablen

Tabelle 8.2: Beschreibung der verwendeten Variablen der COMMON-Blöcke

¹Enthält unter isw=1 nicht die Adresse der History-Variablen, sondern deren Anzahl.

Funktionsparameter **isw**

Nun wird der Funktionsparameter **isw** näher beschrieben. Die Elementroutine wird jeweils mit unterschiedlichen Werten für **isw** aufgerufen, um die einzelnen Berechnungsschritte der Elemente auszuführen:

isw-Wert	Hauptfunktion
1	Einlesen der Materialparameter in das Feld d(*)
2	Kontrolle auf fehlerhafte Elemente
3	Berechnung von Tangentenmatrix S und Residuen p
4	Ergebnisausgabe
6	nur Berechnung der Residuen p
8	Projektion von Spannung und Wärmestrom auf die Knoten für die graphische Ausgabe

Tabelle 8.3: **isw**-Funktionen

Weitere **isw**-Funktionen:

- bei **isw = 1**: Vorbereitung für graph. Ausgabe des Netzes:
durch den Routinenaufruf **pltln2(iel)** wird eine für die graphische Ausgabe des Elementnetzes benötigte Liste der Knoten erstellt.
- bei **isw = 1**: Anzahl der History-Variablen ändern.
- bei **isw = 6**: Berechnung der Werte für den Solution Befehl **TPLOT**:
Mit dem **TPLOT** Befehl können bei jedem Lösungsschritt Ergebniswerte wie Spannung, Dehnung usw. in eine ASCII-Datei herausgeschrieben werden. Diese Werte müssen bei **isw=6** berechnet werden und im **COMMON**-Block **elplot** im Feld **tt(*)** abgespeichert werden. Mit den Befehlen

```
BATCh
  TPLOT
END
STREss,e,1      ! Spannung
STREss,e,2      ! Dehnung
STREss,e,3      ! thermische Dehnung
...
```

werden die Daten für das Element **e** in die Datei ***.str** geschrieben. Eine genaue Beschreibung der möglichen Ausgabegrößen der Elemente erfolgt später.

- bei **isw = 14**: Startwerte für History-Variablen setzen.

Zugriff auf History-Variablen

Mit Hilfe der History-Variablen können Werte der inneren Variablen aus dem Zeitschritt n in den Zeitschritt $n + 1$ übergeben werden.

Alle History-Variablen sind in dem Feld `hr(*)` gespeichert. Beim Aufruf einer Elementroutine werden über den COMMON-Block `hdata.h` die Adressen im Feld `hr(*)` der History-Variablen des jeweiligen Elements übergeben: `nh1` enthält die Adresse der ersten History-Variable zur Zeit t^n , `nh2` enthält die Adresse der ersten History-Variable zur Zeit t^{n+1} und `nh3` enthält die Adresse der ersten zeitunabhängigen History-Variable.

Nur unter `isw = 1` enthalten `nh1` und `nh3` nicht die Adressen der History-Variablen, sondern deren Anzahl. Hier kann durch Setzen von `nh1 = x` und `nh3 = y` die Anzahl auf `x` und `y` geändert werden².

Lese- und Schreibzugriff auf die History-Variablen erfolgt durch: `... = hr(nh1+(x-1))` bzw. `hr(nh2+(x-1)) = ...`, wobei `x` die Anzahl der zeitabhängigen History-Variablen des Elements ist. Analog dazu erfolgt der Zugriff auf die zeitunabhängigen History-Variablen.

Das Umschreiben der History-Variablen von `hr(nh2+(x-1))` auf `hr(nh1+(x-1))` erfolgt erst zu Beginn des jeweils nächsten Zeitschritts, das heißt bei `isw = 4` bzw. `isw = 8` müssen ggf. zur Ergebnisausgabe die Werte aus `hr(nh2+(x-1))` benutzt werden.

Bei `isw = 14` können History-Variablen falls benötigt mit Startwerten belegt werden, ansonsten haben die History-Variablen am Anfang den Wert null.

² `nh2` wird automatisch auf den Wert von `nh1` gesetzt.

8.1 Thermoviskoelastisches Dehnstabelement

Das thermoviskoelastische Dehnstabelement wurde in FEAP als Userelement `elmt04` eingebunden. Es folgt die Beschreibung der lokal in der Elementroutine verwendeten Variablen und Felder:

Variable/Feld	Beschreibung
i, j, YY, hh1	Hilfsvariablen
tdof	Nummer des thermischen Freiheitsgrades
area	Querschnittsfläche
alpha	thermischer Ausdehnungskoeffizient
rho	Dichte
xk	Wärmeleitfähigkeit
c	spezifische Wärmekapazität
Temp0	Referenztemperatur
bf(4)	spezifische Volumenkräfte/Wärmequelle
E, E1, eta	Materialparameter des 3P-Modells
dt	Zeitschritt
xlen	Elementlänge
dx, du	Hilfsvariablen zur Dehnungsberechnung
xx(3)	Koordinaten des Elementmittelpunkts
ta	mittlere Temperaturänderung im Element
body(4)	resultierende Volumenkraft/Wärmequelle am Knoten
rcos(8)	Richtungscosinus
eps, sig, forc, flux	Dehnung, Spannung, Stabkraft, Wärmestrom
epsv, epsvn, epsth	viskose Dehnung zur Zeit t^{n+1} , t^n , therm. Dehnung
Pvn, QDn, D1, D2	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
K1 - K5, KK1 - KK4	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen

Tabelle 8.4: Beschreibung lokale Variablen `elmt04`

Nun folgt der Quellcode des thermoviskoelastischen Dehnstabelements. Vorgelagert ist die Beschreibung der Elementroutine. Dabei wird ggf. die entsprechende Gleichungsnummer aus der zuvor gemachten Herleitung angegeben.

Zeile	Beschreibung
2	Routinenkopf mit Variablenübergabe
23 - 31	Einbindung der COMMON-Blöcke
34, 35	Deklaration/Dimensionierung der Variablen aus Routinenkopf
37 - 42	Deklaration/Dimensionierung der lokalen Variablen

Tabelle 8.5: Beschreibung Elementroutine `elmt04` Teil 1

Zeile	Beschreibung
47-69	isw=1 Funktion:
51, 52	Ausgabe der Elementbezeichnung
54	Einlesen Materialparameter $d(*)$ und $tdof$ in Subroutine <code>inmate</code>
56-66	Überprüfung der Knotenfreiheitsgrade auf Fehler
69	Routinenaufruf <code>pltln2(iel)</code>
73-95	isw=2 Funktion:
77-81	Test auf Element ohne Knoten
82-95	Test auf Element ohne Länge
99-249	isw=3 und isw=6 Funktionen:
103-117	relevante Materialparameter aus $d(*)$ übernehmen
120-123	Einlesen des Zeitschritts aus <code>ctan(2)</code> , beim 1. Routinenaufruf ist <code>ctan(2)</code> noch mit 0 belegt, d.h. dt bekäme den Wert 1/0 zugewiesen, deshalb wird in diesem Fall dt auf 0 gesetzt
125-135	Berechnung von Dehnung nach Gl. (6.77) und Elementlänge
138	Einlesen der viskosen Dehnung zur Zeit t_n
140-154	Berechnung der Variablen für Tangentenmatrix und Residuen nach Gl. (6.64) - (6.72), (6.91), (6.100) - (6.102)
157	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element
159-163	Berechnung von thermischer Dehnung, Stabkraft (6.76), Spannung und Wärmestrom (6.83)
166	Berechnung der viskosen Dehnung zur Zeit t_{n+1} nach (6.7)
169	Abspeichern der viskosen Dehnung in <code>hr()</code>
171-179	Speichern von Spannung, Dehnung, thermischer Dehnung, Stabkraft, Wärmestrom und viskoser Dehnung im STRESS-Feld $tt(*)$ für TPLOT-Kommando
181-187	Erstellung des Richtungscosinusfeldes nach (6.36)
189-192	Berechnung Volumenkraft-/Wärmequellvektor, siehe (6.93)
194-213	Berechnung der Residuen nach (6.93)
216-249	isw=3 Funktion:
220-247	Erstellung der Tangentenmatrix nach Gl. (6.103)
253-319	isw=4 und isw=8 Funktionen:
257-262	relevante Materialparameter aus $d(*)$ übernehmen
265	Konstante für Wärmestrom
268	Einlesen der viskosen Dehnung zur Zeit t_{n+1}
270-281	Berechnung von Dehnung und Elementlänge
284	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element
286-290	Berechnung von therm. Dehnung, Spannung (6.1), Stabkraft und Wärmestrom
292-304	isw=4 Funktion:
	Ausgabe von Element-, Materialnummer, Koordinaten der Elementmitte, Stabkraft, Spannung, Dehnung, therm. Dehnung, viskoser Dehnung, Wärmestrom
305-317	isw=8 Funktion:
	Projektion von Spannung und Wärmestrom auf die Knoten
326-344	FORMAT-Anweisungen

Tabelle 8.6: Beschreibung Elementroutine `elmt04` Teil 2

```

1 c-----]
2   subroutine elmt04(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
3
4 c   Autor: Christoph Broecker, Matr.-Nr. 21206760
5 c           Universitaet Kassel 11/2006
6
7 c-----[---.---+---.---+---.-----]
8 c   3 dimensional thermoviskoelastic truss element routine (3p-modell)
9
10 c   Outputs: (isw = 4)
11
12 c       xx    - Coordinates at mid-length of truss bar
13 c       forc  - force on truss bar
14 c       sig   - stress on truss bar
15 c       eps   - Strain on truss bar
16 c       epsth - thermal strain
17 c       epsv  - viscous strain
18 c       flux  - Flux on truss bar
19 c-----[---.---+---.---+---.-----]
20
21   implicit none
22
23   include 'bdata.h'
24   include 'cdata.h'
25   include 'eldata.h'
26   include 'elplot.h'
27   include 'eltran.h'
28   include 'iofile.h'
29   include 'strnum.h'
30   include 'hdata.h'
31   include 'comblk.h'
32
33
34   integer ix(*),ndf,ndm,nst,isw
35   real*8 d(*),ul(ndf,nen,*),xl(ndm,nen),tl(*),p(ndf,*),S(nst,nst)
36
37   integer i, j, tdof
38   real*8 area, alpha, rho, xk, c, Temp0, bf(4), E, E1, eta, dt
39   real*8 xlen, dx, du, xx(3), ta, body(4)
40   real*8 rcos(8), YY
41   real*8 eps, sig, forc, flux, epsv, epsvn, epsth
42   real*8 hh1,Pvn,QDn,D1,D2,K1,K2,K3,K4,K5,KK1,KK2,KK3,KK4
43
44   save
45
46
47 c   INPUT MATERIAL PROPERTIES
48
49   if(isw.eq.1) then
50
51       write(iow,2000)
52       if(ior.lt.0) write(*,2000)
53 c   Input material parameters
54       call inmate(d,tdof,ndm*2,2)
55
56 c   check if ndm=3 and ndf=tdof=4

```

```

57     if(ndm.lt.3) then
58         write(iow,3003)
59         if(ior.lt.0) write(*,3003)
60     elseif(ndf.ne.4) then
61         write(iow,3004)
62         if(ior.lt.0) write(*,3004)
63     elseif(tdof.ne.4) then
64         write(iow,3005)
65         if(ior.lt.0) write(*,3005)
66     endif
67
68 c     Set plot sequence
69     call pltln2(iel)
70
71
72
73 c     CHECK FOR ZERO LENGTH ELEMENTS
74
75     elseif(isw.eq.2) then
76
77         if(ix(1).eq.0 .or. ix(2).eq.0) then
78             write(iow,4000) n,ix(1),ix(2)
79             if(ior.lt.0) then
80                 write(*,4000) n,ix(1),ix(2)
81             endif
82         else
83             xlen = 0.0d0
84             eps  = 0.0d0
85             do i = 1,3
86                 eps  = max(eps , abs(xl(i,1)), abs(xl(i,2)))
87                 xlen = max(xlen, abs(xl(i,2) - xl(i,1)))
88             end do
89             if(xlen.eq.1.0d-10*eps) then
90                 write(iow,4001) n
91                 if(ior.lt.0) then
92                     write(*,4001) n
93                 endif
94             endif
95         endif
96
97
98
99 c     COMPUTE ELEMENT STIFFNESS AND RESIDUAL ARRAYS
100
101     elseif(isw.eq.3 .or. isw.eq.6) then
102
103 c.....Materialparameter
104     area = d(32)
105     E    = d(1)
106     alpha = d(3)
107     rho  = d(4)
108     xk   = d(61)
109     c    = d(64)
110     Temp0 = d(9)
111     E1   = d(51)
112     eta  = d(52)

```

```

113 c      Volumenkraefte / Waermequelle
114      do i = 1,3
115          bf(i) = d(10+i)
116      end do
117      bf(4) = d(66)
118
119 c.....Einlesen des Zeitschritts
120      dt = 1/ctan(2)
121      if(ctan(2).eq.0.0d0) then
122          dt = 0.0d0
123      endif
124
125 c      Compute strain and length
126      xlen = 0.0d0
127      eps = 0.0d0
128      do i = 1,3
129          dx = xl(i,2) - xl(i,1)
130          du = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)
131          eps = eps + dx*du
132          xlen = xlen + dx**2
133      end do
134      eps = eps/xlen
135      xlen = sqrt(xlen)
136
137 c.....Einlesen der viskosen Dehnung zur Zeit t_n
138      epsvn = hr(nh1)
139
140 c.....Konstanten
141      hh1 = eta + E1*dt
142      K1 = area/xlen *(E + E1 - (E1*E1*dt)/hh1 )
143      K2 = E*area*alpha/2
144      K3 = eta*E1*E1*area/(hh1*hh1)*epsvn
145      K4 = xk*area/xlen
146      K5 = eta*E1*E1*area/(2*xlen*hh1*hh1)
147      D1 = Temp0*K2
148      D2 = rho*area*xlen*c/6
149      Pvn = eta*E1*area/hh1*epsvn
150      QDn = eta*E1*E1*area*xlen/(2*hh1*hh1)*epsvn*epsvn
151      KK1 = QDn + K5*xlen*xlen*eps*eps - K3*xlen*eps
152      KK2 = 1/dt*D1 + K3 - 2*K5*xlen*eps
153      KK3 = 2/dt*D2 + K4
154      KK4 = 1/dt*D2 - K4
155
156 c      Compute temperature change
157      ta = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
158
159 c      Compute strain_th, force, stress and flux for tplot
160      epsth = alpha*ta
161      forc = xlen*K1*eps - Pvn - E*area*epsth
162      sig = forc/area
163      flux = K4*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
164
165 c.....Berechnung der viskosen Dehnung
166      epsv = E1*dt/hh1*eps + eta/hh1*epsvn
167
168 c.....Abspeichern der viskosen Dehnung in hr()

```

```

169         hr(nh2) = epsv
170
171 c         Save stress, strain, strain_th, force, flux and viscous strain
172 c         for tplot
173         tt(1) = sig
174         tt(2) = eps
175         tt(3) = epsth
176         tt(4) = forc
177         tt(5) = flux
178         tt(6) = epsv
179 c         siehe programmer manual S.47
180
181 c.....Richtungscosinusfeld
182         DO i=1,3
183             rcos(i) = (xl(i,2) - xl(i,1)) / xlen
184             rcos(i+4) = -rcos(i)
185         END DO
186         rcos(4)=0.0d0
187         rcos(8)=0.0d0
188
189 c         Volumenkraefte/Waermequellvektor
190         do i = 1,4
191             body(i) = rho*area*xlen/2*bf(i)
192         end do
193
194 c.....Residuenvektor p(4,2)
195 c         Residuenterm aus Vektor mit Stabkraft N, KK1 und Waermestrom Q_E
196         do i = 1,3
197             p(i,1) = rcos(i) * forc
198             p(i,2) = -p(i,1)
199         end do
200         p(4,1) = KK1 - flux
201         p(4,2) = KK1 + flux
202 c         Residuenterm aus Volumenkraft/Waermequellenvektor
203         do i = 1,4
204             p(i,1) = p(i,1) + body(i)
205             p(i,2) = p(i,2) + body(i)
206         end do
207 c         Residuenanteile von Daempfungsmatrix * Geschwindigkeiten
208         DO i=1,3
209             p(4,1) = p(4,1) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
210             p(4,2) = p(4,2) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
211         END DO
212         p(4,1) = p(4,1) - 2*D2*ul(4,1,4) - D2*ul(4,2,4)
213         p(4,2) = p(4,2) - D2*ul(4,1,4) - 2*D2*ul(4,2,4)
214
215
216 c         Compute element stiffness
217
218         if(isw.eq.3) then
219
220 c.....Tangentenmatrix K_t
221 c         6x6 Tangentenmatrixterme mit K_1
222         DO i=1,8
223             YY=rcos(i)*K1
224             DO j=i,8

```

```

225         S(j,i)=rcos(j)*YY
226         S(i,j)=S(j,i)
227     END DO
228 END DO
229 c     6x2 Tangentenmatrixterme mit K_2
230     DO i=1,3
231         S(i,4) = K2*rcos(i)
232         S(i,8) = K2*rcos(i)
233         S(i+4,4)=-K2*rcos(i)
234         S(i+4,8)=-K2*rcos(i)
235     END DO
236 c     6x2 Tangentenmatrixterme von KK2
237     DO i=1,3
238         S(4,i) =-KK2*rcos(i)
239         S(8,i) =-KK2*rcos(i)
240         S(4,i+4)= KK2*rcos(i)
241         S(8,i+4)= KK2*rcos(i)
242     END DO
243 c     2x2 Tangentenmatrixterme mit KK3 und KK4
244     S(4,4)= KK3
245     S(4,8)= KK4
246     S(8,4)= KK4
247     S(8,8)= KK3
248
249     endif
250
251
252
253 c     OUTPUT STRESS AND STRAIN IN ELEMENT
254
255     elseif(isw.eq.4 .or. isw.eq.8) then
256
257 c.....Materialparameter
258     area = d(32)
259     E     = d(1)
260     alpha = d(3)
261     xk    = d(61)
262     E1    = d(51)
263
264 c     Konstante
265     K4    = xk*area/xlen
266
267 c.....Einlesen der viskosen Dehnung
268     epsv  = hr(nh2)
269
270 c     Compute strain and length
271     xlen  = 0.0d0
272     eps   = 0.0d0
273     do i = 1,3
274         dx    = x1(i,2) - x1(i,1)
275         du    = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)
276         eps   = eps + dx*du
277         xlen  = xlen + dx**2
278         xx(i) = (x1(i,2) + x1(i,1))*0.5d0
279     end do
280     eps    = epsv/xlen

```

```

281      xlen = sqrt(xlen)
282
283 c      Compute temperature change
284      ta    = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
285
286 c      Compute strain_th, stress, force and flux
287      epsth = alpha*ta
288      sig   = (E + E1)*eps - E1*epsv - E*epsth
289      forc  = sig*area
290      flux  = K4*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
291
292 c      Output element results
293
294      if(isw.eq.4) then
295          mct = mct - 1
296          if(mct.le.0) then
297              write(iow,2001) o,head
298              if(ior.lt.0) write(*,2001) o,head
299              mct = 50
300          endif
301          write(iow,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,epsv,flux
302          if(ior.lt.0) then
303              write(*,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,epsv,flux
304          endif
305      else
306
307 c.....Stress projections
308 c      (aus subroutine trcnnd uebernommen und angepasst)
309 c      plot,stre,1 -> Spannung ploten
310 c      plot,stre,2 -> Flux ploten
311      do i = 1,2
312          p(i,1) = p(i,1) + 1.d0
313          s(i,1) = s(i,1) + sig
314          s(i+2,1) = s(i+2,1) + flux
315      end do ! i
316      iste = 2
317 c      siehe programmer manual S.48
318
319      endif
320
321
322
323      endif
324
325
326 c      FORMATS
327
328 2000 format(///
329      & ' -----  USER  ELEMENT  0 4 : -----',//
330      & '           3D  Thermoviscoelastic           ',//
331      & '                   T r u s s  E l e m e n t           ',//
332      & ' -----',//)
333 2001 format(a1,20a4//9x,'3D Thermoviscoelastic Truss Element'//
334      & ' Elmt Matl  ', '1-coord  2-coord  3-coord',
335      & 9x,'Force',8x,'Stress',8x,'Strain',4x,'th. Strain',
336      & 3x,'vis. Strain',10x,'Flux')

```

```
337 2002 format (2i5,1p,3e11.3,1p,6e14.5)
338
339 3003 format (' *ERROR* 3D Element -> ndm must be EQUAL 3')
340 3004 format (' *ERROR* ndf must be EQUAL 3')
341 3005 format (' *ERROR* tdof must be EQUAL 3')
342
343 4000 format (' *ERROR* Element',i7,' has nodes',2i8)
344 4001 format (' *ERROR* Element',i7,' has zero length')
345
346 end
347 c-----
```

Listing 8.2: Quellcode Elementroutine elmt04

8.2 Thermoplastisches Dehnstabelement

Das thermoplastische Dehnstabelement wurde in FEAP als Userelement `elmt05` eingebunden. Es folgt die Beschreibung der lokal in der Elementroutine verwendeten Variablen und Felder:

Variable/Feld	Beschreibung
i, j, YY	Hilfsvariablen
tdof	Nummer des thermischen Freiheitsgrades
count	Iterationszähler für Newtonverfahren
marke, ipiv(4), dum(4)	Variablen für Gaußlöser
xlen, dx, du	Elementlänge, Hilfsvariablen zur Dehnungsberechnung
xx(3)	Koordinaten des Elementmittelpunkts
ta	mittlere Temperaturänderung im Element
body(4)	resultierende Volumenkraft/Wärmequelle am Knoten
dt	Zeitschritt
area, E	Querschnittsfläche, Elastizitätsmodul
alpha, rho	thermischer Ausdehnungskoeffizient, Dichte
xk, c	Wärmeleitzahl, spezifische Wärmekapazität
Temp0	Referenztemperatur
bf(4)	spezifische Volumenkräfte/Wärmequelle
kap0	Anfangsfließspannung
beta, gamma	Parameter isotr. Verfestigung
kina, kinb	Parameter kin. Verfestigung
Qflag	Kontrollparameter, bei <code>Qflag=1</code> wird plast. Spannungsleistung mal Taylor-Quinney-Koeff. als Wärmequelle verwendet
gamma2	Taylor-Quinney-Koeffizient
epn, xin, kapn, plbln	$\varepsilon_p^n, \xi^n, \kappa^n, s_p^n$
ep, xi, kap, lambda	$\varepsilon_p^{n+1}, \xi^{n+1}, \kappa^{n+1}$, plastischer Multiplikator λ
sigtr, ff, nn	Trailspannung, Fließfunktion f , $\text{sgn}(\sigma - \xi)$
ll(4), dldq(4,4), dq(4)	Variablen zur Berechnung der inneren Variablen
tol, norml	Variablen für Konvergenzprüfung
h(4)	Variablen für Matrix $d\mathbf{q}/d\mathbf{y}$
K1 - K5, KK1 - KK5	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
HH1,- HH4, QD	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
QD1,- QD4	Hilfsvariablen für Tangentenmatrix und Residuen
eps, epsth	Dehnung, therm. Dehnung
sig, forc, flux	Spannung, Stabkraft, Wärmestrom
rcos(8)	Richtungscosinus
es	im Material gespeicherte Energie
apn, ap	spezifische plastische Arbeit bei t^n, t^{n+1}
state	Variable für Start des elast. Prädiktors
noconv	Variable für Konvergenzprüfung

Tabelle 8.7: Beschreibung lokale Variablen `elmt05`

Nun folgt der Quellcode des thermoplastischen Dehnstabelements. Vorgelagert ist die Beschreibung der Elementroutine. Dabei wird ggf. die entsprechende Gleichungsnummer aus der zuvor gemachten Herleitung angegeben.

Zeile	Beschreibung
2	Routinenkopf mit Variablenübergabe
23 - 34	Einbindung der COMMON-Blöcke
37, 37	Deklaration/Dimensionierung der Variablen aus Routinenkopf
41 - 59	Deklaration/Dimensionierung der lokalen Variablen
67 - 106	isw=1 Funktion:
71, 72	Ausgabe der Elementbezeichnung
74	Einlesen Materialparameter $d(*)$ und tdof in Subroutine inmate
77	Anzahl der History-Variablen auf 5 erhöhen
79 - 90	Ausgabe der Plastizitätsmaterialparameter
92 - 102	Überprüfung der Knotenfreiheitsgrade auf Fehler
106	Routinenaufruf <code>pltn2(iel)</code>
109 - 131	isw=2 Funktion:
113 - 117	Test auf Element ohne Knoten
118 - 131	Test auf Element ohne Länge
135 - 528	isw=3 und isw=6 Funktionen:
140 - 164	relevante Materialparameter aus $d(*)$ übernehmen
166 - 170	Einlesen des Zeitschritts aus <code>ctan(2)</code> , beim 1. Routinenaufruf ist <code>ctan(2)</code> noch mit 0 belegt, d.h. <code>dt</code> bekäme den Wert 1/0 zugewiesen, deshalb wird in diesem Fall <code>dt</code> auf 0 gesetzt
172 - 179	Einlesen der inneren Variablen plast. Dehnung, kin. und isotr. Verfestigung sowie der plast. Bogenlänge und der spezifischen plast. Arbeit der Zeit t^n
182 - 192	Berechnung von Dehnung nach Gl. (7.32) und Elementlänge
194 - 196	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element und der thermischen Dehnung
200	Berechnung der Trailspannung nach (7.46)
203	Elast. Prädiktor: Berechnung der Fließfunktion (7.47)
206 - 211	beim 1. Routinenaufruf des Zeitschritts wird Verschiebung/ Temperaturänderung berechnet (entspricht <code>niter=0</code>), erst danach beginnt Iteration zur Berechnung der inneren Variablen

Tabelle 8.8: Beschreibung Elementroutine `elmt05` Teil 1

Zeile	Beschreibung
214-353	Plastischer Korrektor:
217-295	Berechnung der inneren Variablen durch Lösung von (7.70)
221-230	Startwerte setzen für Newtonverfahren
232-295	Newtonverfahren
238-242	Aufbau der rechten Seite von (7.70)
244-248	Norm der rechten Seite für Konvergenzprüfung
250-266	Aufbau der Koeffizientenmatrix von (7.70)
269	Lösung von (7.70) mit Gaussverfahren
271-275	Update der inneren Variablen nach (7.71)
277-290	Prüfung der Konvergenz, ggf. Ausgabe einer Warnung bei fehlender Konvergenz
293	Spannung mit aktualisierter plast. Dehnung
298-326	Lösung von Gl. (7.80)
300-317	Aufbau der Koeffizientenmatrix von (7.80)
319-323	Aufbau der rechten Seite von (7.80)
326	Lösung von (7.80) mit Gaussverfahren
330-336	Berechnung von QD1 - QD4 nach (7.152) - (7.155) für Herleitung mit Taylor-Quinney-Koeffizient
338-347	Berechnung von QD1 - QD4 nach (7.123) - (7.126)
349-353	Berechnung von HH1 - HH4 nach (7.119) - (7.122)
356-374	Elastischer Prädiktor:
360-363	Umschreiben der inneren Variablen nach (7.48) - (7.50)
366	Nullsetzen des plast. Multiplikators
368-372	Nullsetzen von HH1 - HH4 um (7.52) zu erreichen
376-380	Abspeichern der inneren Variablen, plast. Bogenlänge in $hr()$
382-384	Berechnung Stabkraft, Spannung
386-391	Konstanten nach (7.22) - (7.26)
394-397	Konstanten nach (7.150) und (7.151) für Herleitung mit Taylor-Quinney-Koeffizient
398-401	Konstanten nach (7.121) und (7.122)
403-408	Konstanten für Tangentenmatrix nach (7.112) - (7.116)
411	Wärmestrom nach (7.36)
412-415	QD nach (7.149) für Herleitung mit Taylor-Quinney-Koeff.
415-419	QD nach (7.28)
422-440	Berechnung der Energieumsetzung
425	spezifische plast. Arbeit nach (3.201)
428	Abspeichern der spezifischen plast. Arbeit in $hr()$
431-432	gespeicherte Energie für Herleitung mit Taylor-Quinney-Koeffizient nach (7.162)
433-435	gespeicherte Energie nach (3.207)
438	Verhältnis gespeicherte Energie zu plast. Arbeit (3.208)

Tabelle 8.9: Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 2

Zeile	Beschreibung
440 - 457	Speichern von Spannung, Dehnung, thermischer Dehnung, Stabkraft, Wärmestrom, plast. Dehnung, kin. und isotr. Verfestigungsvariable, plast. Bogenlänge, plast. Arbeit, gespeicherte Energie, Verhältnis gespeich. Energie zu plast. Arbeit im STREss-Feld $tt(*)$ für TPLOT-Kommando
460 - 466	Erstellung des Richtungscosinusfeldes nach (6.36)
468 - 471	Berechnung Volumenkraft-/Wärmequellvektor, siehe (7.38)
473 - 492	Berechnung der Residuen nach (7.38)
495 - 528	isw=3 Funktion:
499 - 526	Erstellung der Tangentenmatrix nach Gl. (7.128)
532 - 600	isw=4 und isw=8 Funktionen:
537 - 541	relevante Materialparameter aus $d(*)$ übernehmen
543 - 546	Einlesen der inneren Variablen zur Zeit t_{n+1}
548 - 559	Berechnung von Dehnung und Elementlänge
562	Konstante für Wärmestrom
565	Berechnung der mittleren Temperaturänderung im Element
567 - 571	Berechnung von therm. Dehnung, Spannung, Stabkraft und Wärmestrom
573 - 585	isw=4 Funktion:
	Ausgabe von Element-, Materialnummer, Koordinaten der Elementmitte, Stabkraft, Spannung, Dehnung, thermischer, plastischer Dehnung, kinematischer und isotroper Verfestigungsvariable, Wärmestrom
586 - 600	isw=8 Funktion:
	Projektion von Spannung und Wärmestrom auf die Knoten
607 - 656	FORMAT-Anweisungen

Tabelle 8.10: Beschreibung Elementroutine elmt05 Teil 3


```
57      real*8      es, apn, ap, verh
58
59      logical    state, noconv
60
61      data      tol /1.d-08/
62
63      save
64
65
66
67 c      INPUT MATERIAL PROPERTIES
68
69      if(isw.eq.1) then
70
71          write(iow,2000)
72          if(ior.lt.0) write(*,2000)
73 c      Input material parameters
74          call inmate(d,tdof,ndm*2,2)
75
76 c      Anzahl der History Variablen erhoehen
77          nh1 = nh1 + 1
78
79 c      Materialparameter ausgeben
80          if (d(235).eq.1) then
81              write(iow,2004) d(41), (d(230+i), i=1,6)
82              if(ior.lt.0) then
83                  write(*,2004) d(41), (d(230+i), i=1,6)
84              endif
85          else
86              write(iow,2003) d(41), (d(230+i), i=1,5)
87              if(ior.lt.0) then
88                  write(*,2003) d(41), (d(230+i), i=1,5)
89              endif
90          endif
91
92 c      check if ndm=3 and ndf=tdof=4
93          if(ndm.lt.3) then
94              write(iow,3003)
95              if(ior.lt.0) write(*,3003)
96          elseif(ndf.ne.4) then
97              write(iow,3004)
98              if(ior.lt.0) write(*,3004)
99          elseif(tdof.ne.4) then
100             write(iow,3005)
101             if(ior.lt.0) write(*,3005)
102         endif
103
104
105 c      Set plot sequence
106         call pltln2(iel)
107
108
109 c      CHECK FOR ZERO LENGTH ELEMENTS
110
111         elseif(isw.eq.2) then
112
```

```

113     if(ix(1).eq.0 .or. ix(2).eq.0) then
114         write(iow,4000) n,ix(1),ix(2)
115         if(ior.lt.0) then
116             write(*,4000) n,ix(1),ix(2)
117         endif
118     else
119         xlen = 0.0d0
120         eps  = 0.0d0
121         do i = 1,3
122             eps  = max(eps , abs(xl(i,1)), abs(xl(i,2)))
123             xlen = max(xlen, abs(xl(i,2) - xl(i,1)))
124         end do
125         if(xlen.eq.1.0d-10*eps) then
126             write(iow,4001) n
127             if(ior.lt.0) then
128                 write(*,4001) n
129             endif
130         endif
131     endif
132
133
134
135 c      COMPUTE ELEMENT STIFFNESS AND RESIDUAL ARRAYS
136
137     elseif(isw.eq.3 .or. isw.eq.6) then
138
139
140 c.....Materialparameter
141     area  = d(32)
142     E     = d(1)
143     alpha = d(3)
144     rho   = d(4)
145     xk    = d(61)
146     c     = d(64)
147     Temp0 = d(9)
148 c     isotrope Verfestigung
149     kap0  = d(41)
150     beta  = d(231)
151     gamma = d(232)
152 c     kinematische Verfestigung
153     kina  = d(233)
154     kinb  = d(234)
155 c     bei Qflag=1 Waermeleitungsgleichung mit Taylor-Quinney-Koeffizient
156     Qflag = d(235)
157 c     Taylor-Quinney-Koeffizient
158     gamma2 = d(236)
159
160 c     Volumenkraefte / Waermequelle
161     do i = 1,3
162         bf(i) = d(10+i)
163     end do
164     bf(4) = d(66)
165
166 c     Zeitschritt einlesen
167     dt    = 1/ctan(2)
168     if(ctan(2).eq.0.0d0) then

```

```

169         dt = 0.0d0
170     endif
171
172 c.....Einlesen der inneren Variablen zur Zeit t_n
173     epn  = hr(nh1)
174     xin  = hr(nh1+1)
175     kapn = hr(nh1+2)
176 c.....plastische Bogenlaenge
177     plbln = hr(nh1+3)
178 c.....spezifische plastische Arbeit
179     apn  = hr(nh1+4)
180
181
182 c      Compute strain and length
183     xlen = 0.0d0
184     eps = 0.0d0
185     do i = 1,3
186         dx  = xl(i,2) - xl(i,1)
187         du  = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)
188         eps = eps + dx*du
189         xlen = xlen + dx**2
190     end do
191     eps = eps/xlen
192     xlen = sqrt(xlen)
193
194 c      Compute temperature change and thermal strain
195     ta  = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
196     epsth = alpha*ta
197
198
199 c.....Trail stress
200     sigtr = E*(eps - epn - epsth)
201
202 c.....Elastischer Praediktor
203     ff = abs(sigtr - xin) - (kap0 + kapn)
204
205
206 c      Check state for iterations
207     if(niter.eq.0) then          ! First iteration in step
208         state = .false.
209     else                          ! Not first iteration in step
210         state = .true.
211     endif
212
213
214 c.....plastischer Bereich
215     if (ff.gt.0.0d0 .and. state) then
216
217 c.....Loesen des nichtlin. GLS
218 c      l(y,q)=0
219 c      mit Newton-Verfahren zur Berechnung der inneren Variablen
220
221 c      Startwerte
222     ep    = epn
223     xi    = xin
224     kap   = kapn

```

```

225         lambda = 0.0d0
226
227         sig = sigtr
228
229         noconv = .true.
230         count = 0
231
232         do while (noconv)
233
234             count = count + 1
235
236             nn = (sig - xi)/abs(sig - xi)
237
238 c         Aufbau der rechten Seite
239             ll(1) = ep - epn - lambda*dt*nn
240             ll(2) = xi - xin - lambda*dt*(kina*nn - kinb*xi)
241             ll(3) = kap - kapn - lambda*dt*beta*(gamma/beta - kap)
242             ll(4) = abs(sig - xi) - (kap0 + kap)
243
244 c         Norm der rechten Seite fuer Pruefung auf Konvergenz
245             norml = 0.d0
246             do i=1,4
247                 norml = norml + abs(ll(i))
248             enddo
249
250 c         Aufbau der Koeffizientenmatrix F = dl/dq
251 c         Nullsetzen der Matrix
252             do i=1,4
253                 do j=1,4
254                     dldq(i,j) = 0.0d0
255                 enddo
256             enddo
257 c         Berechnen der Koeffizienten
258             dldq(1,1) = -1.0d0
259             dldq(1,4) = dt*nn
260             dldq(2,2) = -1.0d0 - lambda*dt*kinb
261             dldq(2,4) = dt*(kina*nn - kinb*xi)
262             dldq(3,3) = -1.0d0 - lambda*dt*beta
263             dldq(3,4) = dt*beta*(gamma/beta - kap)
264             dldq(4,1) = E*nn
265             dldq(4,2) = nn
266             dldq(4,3) = 1.0d0
267
268 c         Gaussloeser
269             call fgauss(4,dldq,4,ll,dq,marke,dum,ipiv)
270
271 c         Update der inneren Variablen und von lambda
272             ep = ep + dq(1)
273             xi = xi + dq(2)
274             kap = kap + dq(3)
275             lambda = lambda + dq(4)
276
277 c         Pruefung der Konvergenz
278             if ((norml.le.tol)
279 &             .and. ( abs(dq(1)).le.tol*abs(ep) ) )
280 &             .and. ( abs(dq(2)).le.tol*abs(xi) ) )

```

```

281      &          .and. ( abs(dq(3)).le.tol*abs(kap    ) )
282      &          .and. ( abs(dq(4)).le.tol*abs(lambda) ) ) then
283          noconv = .false.
284          elseif (count.gt.25) then
285              if(ior.lt.0) then
286                  write(*,3000) lambda,dq(4)
287              endif
288              write(iow,3000) lambda,dq(4)
289              noconv = .false.
290          endif
291
292 c          Berechnung der neuen Spannung
293          sig = E*(eps - ep - epsth)
294
295          enddo ! while (noconv)
296
297
298 c.....Berechnen der Werte h1, h2, h3 und h4
299
300 c          Aufbau der Koeffizientenmatrix F = dl/dq
301          nn = (sig - xi)/abs(sig - xi)
302 c          Nullsetzen der Matrix
303          do i=1,4
304              do j=1,4
305                  dldq(i,j) = 0.0d0
306              enddo
307          enddo
308 c          Berechnen der Koeffizienten
309          dldq(1,1) = -1.0d0
310          dldq(1,4) = dt*nn
311          dldq(2,2) = -1.0d0 - lambda*dt*kinb
312          dldq(2,4) = dt*(kina*nn - kinb*xi)
313          dldq(3,3) = -1.0d0 - lambda*dt*beta
314          dldq(3,4) = dt*beta*(gamma/beta - kap)
315          dldq(4,1) = E*nn
316          dldq(4,2) = nn
317          dldq(4,3) = 1.0d0
318
319 c          Aufbau der rechten Seite
320          ll(1) = 0.0d0
321          ll(2) = 0.0d0
322          ll(3) = 0.0d0
323          ll(4) = E*nn/xlen
324
325 c          Loesen des lin. GLS
326          call fgauss(4,dldq,4,ll,h,marke,dum,ipiv)
327
328
329 c.....Berechnen der Werte QD1, QD2, QD3 und QD4
330          if (Qflag.eq.1.0d0) then
331
332 c          mit Taylor-Quinney-Koeffizient
333          QD1 = - lambda*E*area*xlen/2*gamma2*nn
334          QD2 = 0.0d0
335          QD3 = 0.0d0
336          QD4 = area*xlen/2*nn*( gamma2*sig + Temp0*E*alpha )

```

```

337
338     else
339
340         QD1 = 0.0d0
341         QD2 = lambda*area*xlen*kinb/kina*xi
342         QD3 = - lambda*area*xlen*beta/gamma*kap
343         QD4 = area*xlen/2*
344     &         ( kap0 + Temp0*E*alpha*nn + kinb/kina*xi*xi
345     &         + beta/gamma*kap*kap )
346
347     endif
348
349 c.....berechnen der Konstanten fuer dg/dq*dq/dy
350     HH1 = E*area*h(1)
351     HH2 = E*area*alpha/2*xlen*h(1)
352     HH3 = QD1*h(1) + QD2*h(2) + QD3*h(3) + QD4*h(4)
353     HH4 = -alpha*xlen/2*HH3
354
355
356     else
357
358 c.....elastischer Bereich
359
360 c.....Update der inneren Variablen q_(n+1) = q_n
361     ep = epn
362     xi = xin
363     kap = kapn
364
365 c.....plastischen Multiplikator auf null setzen
366     lambda = 0.0d0
367
368 c.....setzen der Konstanten aus dg/dq*dq*dy auf null
369     HH1 = 0.0d0
370     HH2 = 0.0d0
371     HH3 = 0.0d0
372     HH4 = 0.0d0
373
374     endif
375
376 c.....Abspeichern der inneren Variablen q_(n+1)
377     hr(nh2) = ep
378     hr(nh2+1) = xi
379     hr(nh2+2) = kap
380     hr(nh2+3) = plbln + lambda*dt
381
382 c     Compute force, stress
383     forc = E*area*(eps - ep - epsth)
384     sig = forc/area
385
386 c.....Konstanten berechnen
387     K1 = E*area/xlen
388     K2 = E*area*alpha/2
389     K3 = xk*area/xlen
390     D1 = Temp0*K2
391     D2 = rho*area*xlen*c/6
392

```

```

393
394     if (Qflag.eq.1.0d0) then
395 c         mit Taylor-Quinney-Koeffizient
396         K4 = lambda*E*area/2*gamma2*nn
397         K5 = lambda*E*area*alpha*xlen/4*gamma2*nn
398     else
399         K4 = 0.0d0
400         K5 = 0.0d0
401     endif
402
403 c.....Konstanten fuer Tangentenmatrix
404     KK1 = K1 - HH1
405     KK2 = K2 - HH2
406     KK3 = 1/dt*D1 - K4 - HH3
407     KK4 = K3 + 2/dt*D2 + K5 - HH4
408     KK5 = -K3 + 1/dt*D2 + K5 - HH4
409
410 c         Compute flux, QD(nn,xi,kap)
411     flux = K3*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
412     if (Qflag.eq.1.0d0) then
413 c         mit Taylor-Quinney-Koeffizient
414         QD = lambda*area*xlen/2*nn*( gamma2*sig + Temp0*E*alpha )
415     else
416         QD = lambda*area*xlen/2*
417 &         ( kap0 + Temp0*E*alpha*nn + kinb/kina*xi*xi
418 &         + beta/gamma*kap*kap )
419     endif
420
421
422 c.....Energieumsetzung
423
424 c         spezifische plastische Arbeit
425     ap = apn + 1.0d0/rho*sig*lambda*nn*dt
426
427 c         abspeichern der gesamten spezifischen plastischen Arbeit
428     hr(nh2+4) = ap
429
430 c         spezifische im Material gespeicherte Leistung
431     if (Qflag.eq.1.0d0) then
432         es = (1.0d0 - gamma2)*ap
433     else
434         es = 1.0d0/rho/2.0d0*(xi*xi/kina + kap*kap/gamma)
435     endif
436
437 c         Verhaeltnis gespeicherte Energie / plastische Arbeit
438     verh = es / ap
439
440 c         Save stress, strain, strain_th, force, flux for tplot
441     tt(1) = sig
442     tt(2) = eps
443     tt(3) = epsth
444     tt(4) = forc
445     tt(5) = flux
446 c         Save plastic strain, xi, kappa and accumulated plastic strain
447     tt(6) = ep
448     tt(7) = xi

```

```

449         tt(8) = kap
450         tt(9) = plbln + lambda*dt
451 c         speichere spezifische plastische Arbeit, spezifische im
452 c         Material gespeicherte Energie und Verhaeltnis gespeicherter
453 c         Energie / plastische Arbeit fuer tplot
454         tt(10) = ap
455         tt(11) = es
456         tt(12) = verh
457 c         siehe programmer manual S.47
458
459
460 c.....Richtungscosinusfeld
461         DO i=1,3
462             rcos(i) = (xl(i,2) - xl(i,1)) / xlen
463             rcos(i+4) = -rcos(i)
464         END DO
465         rcos(4)=0.0d0
466         rcos(8)=0.0d0
467
468 c         Volumenkraefte/Waermequellvektor
469         do i = 1,4
470             body(i) = rho*area*xlen/2*bf(i)
471         end do
472
473 c.....Residuenvektor p(4,2)
474 c         Residuenterm aus Vektor mit N, Q_D und Q_E
475         do i = 1,3
476             p(i,1) = rcos(i) * forc
477             p(i,2) = -p(i,1)
478         end do
479         p(4,1) = QD - flux
480         p(4,2) = QD + flux
481 c         Residuenterm aus Volumenkraft/Waermequellenvektor
482         do i = 1,4
483             p(i,1) = p(i,1) + body(i)
484             p(i,2) = p(i,2) + body(i)
485         end do
486 c         Residuenanteile von Daempfungsmatrix * Geschwindigkeiten
487         DO i=1,3
488             p(4,1) = p(4,1) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
489             p(4,2) = p(4,2) - rcos(i)*D1*( - ul(i,1,4) + ul(i,2,4) )
490         END DO
491         p(4,1) = p(4,1) - 2*D2*ul(4,1,4) - D2*ul(4,2,4)
492         p(4,2) = p(4,2) - D2*ul(4,1,4) - 2*D2*ul(4,2,4)
493
494
495 c         Compute element stiffness
496
497         if(isw.eq.3) then
498
499 c.....TangentenmatrixK_t
500 c         6x6 Tangentenmatrixterme mit KK1
501         DO i=1,8
502             YY=rcos(i)*KK1
503             DO j=i,8
504                 S(j,i)=rcos(j)*YY

```

```

505         S(i,j)=S(j,i)
506     END DO
507 END DO
508 c     6x2 Tangentematrixterme mit KK2
509     DO i=1,3
510         S(i,4) = KK2*rcos(i)
511         S(i,8) = KK2*rcos(i)
512         S(i+4,4)=-KK2*rcos(i)
513         S(i+4,8)=-KK2*rcos(i)
514     END DO
515 c     6x2 Tangentematrixterme von KK3
516     DO i=1,3
517         S(4,i) =-KK3*rcos(i)
518         S(8,i) =-KK3*rcos(i)
519         S(4,i+4)= KK3*rcos(i)
520         S(8,i+4)= KK3*rcos(i)
521     END DO
522 c     2x2 Tangentematrixterme mit KK4 und KK5
523     S(4,4)= KK4
524     S(4,8)= KK5
525     S(8,4)= KK5
526     S(8,8)= KK4
527
528     endif
529
530
531
532 c     OUTPUT STRESS AND STRAIN IN ELEMENT
533
534     elseif(isw.eq.4 .or. isw.eq.8) then
535
536
537 c.....Materialparameter
538     area = d(32)
539     E     = d(1)
540     alpha = d(3)
541     xk    = d(61)
542
543 c     Einlesen der inneren Variablen
544     ep    = hr(nh2)
545     xi    = hr(nh2+1)
546     kap   = hr(nh2+2)
547
548 c     Compute strain and length
549     xlen  = 0.0d0
550     eps   = 0.0d0
551     do i = 1,3
552         dx    = xl(i,2) - xl(i,1)
553         du    = ul(i,2,1) - ul(i,1,1)
554         eps   = eps + dx*du
555         xlen  = xlen + dx**2
556         xx(i) = (xl(i,2) + xl(i,1))*0.5d0
557     end do
558     eps    = eps/xlen
559     xlen   = sqrt(xlen)
560

```

```

561 c      Konstante
562      K3 = xk*area/xlen
563
564 c      Compute temperature change
565      ta = 0.5d0*(ul(4,1,1) + ul(4,2,1))
566
567 c      Compute strain_th, force, stress and flux
568      epsth = alpha*ta
569      forc = E*area*(eps - ep - epsth)
570      sig = forc/area
571      flux = K3*(ul(4,1,1) - ul(4,2,1))
572
573 c      Output element results
574
575      if(isw.eq.4) then
576          mct = mct - 1
577          if(mct.le.0) then
578              write(iow,2001) o,head
579              if(ior.lt.0) write(*,2001) o,head
580              mct = 20
581          endif
582          write(iow,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,ep,xi,kap,flux
583          if(ior.lt.0) then
584              write(*,2002) n,ma,xx,forc,sig,eps,epsth,ep,xi,kap,flux
585          endif
586      else
587
588 c.....Stress projections
589 c      (aus subroutine trcnnd uebernommen und angepasst)
590 c      plot,stre,1 -> Spannung ploten
591 c      plot,stre,2 -> Flux ploten
592      do i = 1,2
593          p(i,1) = p(i,1) + 1.d0
594          s(i,1) = s(i,1) + sig
595          s(i+2,1) = s(i+2,1) + flux
596      end do ! i
597      iste = 2
598 c      siehe programmer manual S.48
599
600      endif
601
602
603
604      endif
605
606
607 c      FORMATS
608
609 2000 format(///
610      & ' ----- USER ELEMENT 05 : -----',//
611      & '                3D Thermoplastic',//
612      & '                Truss Element',//
613      & ' -----',//)
614 2001 format(a1,20a4//9x,'3D Thermoviscoelastic Truss Element'//
615      & ' Elmt Matl ', '1-coord  2-coord  3-coord',
616      & 8x,'Force',7x,'Stress',7x,'Strain',3x,'th. Strain',

```

```

617      & 3x,'pl. Strain',11x,'xi',8x,'kappa',9x,'Flux')
618 2002  format(2i5,1p,3e11.3,1p,8e13.5)
619
620 2003  format(//
621      & ' -----',/
622      &      5x,'P l a s t i c i t y   P a r a m e t e r s'//
623      &      U S E R   E L E M E N T   0 5 ',////
624      &      8x,'Nonlinear isotropic hardening '/
625      &      10x,'Initial Yield stress ',1p,1e15.5,' (kappa_0)'//
626      &      10x,'1. Parameter          ',1p,1e15.5,' (beta)'//
627      &      10x,'2. Parameter          ',1p,1e15.5,' (gamma)'//
628      &      8x,'Nonlinear kinematic hardening '/
629      &      10x,'1. Parameter          ',1p,1e15.5,' (a)'//
630      &      10x,'2. Parameter          ',1p,1e15.5,' (b)'//
631      &      8x,'Dissipation flag       ',1p,1e17.5,' (Qflag)'//
632      & ' -----',//)
633 2004  format(//
634      & ' -----',/
635      &      5x,'P l a s t i c i t y   P a r a m e t e r s'//
636      &      U S E R   E L E M E N T   0 5 ',////
637      &      8x,'Nonlinear isotropic hardening '/
638      &      10x,'Initial Yield stress ',1p,1e15.5,' (kappa_0)'//
639      &      10x,'1. Parameter          ',1p,1e15.5,' (beta)'//
640      &      10x,'2. Parameter          ',1p,1e15.5,' (gamma)'//
641      &      8x,'Nonlinear kinematic hardening '/
642      &      10x,'1. Parameter          ',1p,1e15.5,' (a)'//
643      &      10x,'2. Parameter          ',1p,1e15.5,' (b)'//
644      &      8x,'Dissipation flag       ',1p,1e17.5,' (Qflag)'//
645      &      10x,'Taylor-Quinney-Coeff. ',1p,1e15.5,' (gamma2)'//
646      & ' -----',//)
647
648 3000  format(' *WARNING* No convergence in PLAS1D'/
649      &      '          lambda =',1p,1e12.4,' dlambda =',1p,1e12.4)
650
651 3003  format(' *ERROR* 3D Element -> ndm must be EQUAL 3')
652 3004  format(' *ERROR* ndf must be EQUAL 3')
653 3005  format(' *ERROR* tdof must be EQUAL 3')
654
655 4000  format(' *ERROR* Element',i7,' has nodes',2i8)
656 4001  format(' *ERROR* Element',i7,' has zero length')
657
658      end
659 c-----

```

Listing 8.3: Quellcode Elementroutine elmt05

Kapitel 9

Berechnungen

9.1 Aufbau der Eingabedateien

Die Erstellung einer Eingabedatei bei FEAP gliedert sich in zwei Teile: die Erstellung des FE-Modells mit den Randbedingungen, Lasten und Materialdefinition sowie die Steuerung des Berechnungsablaufs. In beiden Teilen stehen Kommandos gefolgt von den zugehörigen Parametern. Die Kommandos werden durch eine Leerzeile abgeschlossen. Kommentare können am Ende jeder Zeile nach einem ! eingefügt werden.

Modellerstellung

Die Modellerstellung startet mit dem Kommando **FEAP** und wird mit dem Kommando **END** abgeschlossen. Dazwischen erfolgt die Definition von Material, Knoten, Randbedingungen, Elementen und Lasten.

FEAP-Kommando:

```
FEAP      Name
  0 0 1 3 4 2
```

In der ersten Zeile steht der Berechnungsname. In der zweiten Zeile stehen sechs Kontrollparameter:

Wert	Parameter	Bedeutung
0	NUMNP	Anzahl der Knoten (optional)
0	NUMEL	Anzahl der Elemente (optional)
1	NUMMAT	Anzahl der Materialien
3	NDM	Dimension der Berechnung
4	NDF	(maximale) Anzahl Knotenfreiheitsgrade
2	NEN	(maximale) Anzahl Knoten pro Element

Das hier implementierten Elemente sind als 3-dimensionale Versionen programmiert, somit muss **NDM** den Wert 3 haben. Das Element hat **NDM** Verschiebungsfreiheitsgrade und den Temperaturfreiheitsgrad, somit muss **NDF** den Wert 4 haben. Die Elemente haben zwei Knoten, also ist **NEN** gleich 2.

Die Aufbringung von Belastungen durch Wärmeströme erfolgt mit den selben Kommandos wie die Aufbringung von Kräften: der Wärmestrom wird wie eine Kraft in vierter Koordinatenrichtung eingegeben, beispielsweise mit

```
FORCe
  n 0 0.0 0.0 0.0 100.0
```

wird am Knoten n ein Wärmestrom von 100 aufgebracht.

Auf die Beschreibung der Erstellung des FE-Netzes wird hier verzichtet, stattdessen sei auf das FEAP User Manuel [12] und das FEAP Example Manuel [13] verwiesen.

Materialdefinition

Die Materialdefinition für das thermoviskoelastische Dehnstabelement hat folgende Form:

```
1 MATERIAL 1
2   ELEM 4
3   CROSS SECTION 20           ! area
4   THERMAL ISOTROPIC 4.0e-5 300.0 ! alpha T_null
5   FOURIER ISOTROPIC 0.5 1.4e9 ! k c
6   DENSITY MASS 1.8e-9        ! rho
7   ELASTIC ISOTROPIC 926.78    ! E0
8   VISCOELASTIC term1 1132.74 382.3 ! E1 eta
9   BODY FORCES 1.0 1.0 1.0 ! f_x f_y f_z
10  BODY HEAT 1.0              ! r
```

Listing 9.1: Materialdefinition elmt04

Zeile	Parameter/Bedeutung
1	Materialnummer
2	ELMT 4 ruft Userelement <code>elmt04</code> , also das thermoviskoelastische Element auf
3	Querschnittsfläche A
4	thermischer Ausdehnungskoeffizient α und Referenztemperatur T_0 (in Kelvin!)
5	Wärmeleitfähigkeit k und spezifische Wärmekapazität c
6	Dichte ρ
7	Materialparameter E_0
8	Materialparameter E_1 und η
9	Volumenkräfte f_x, f_y, f_z
10	Wärmequelle r

Tabelle 9.1: Parameterbeschreibung Materialdefinition `elmt04`

Die Materialdefinition für das thermoplastische Dehnstabelement ist wie folgt:

```

1 MATERIAL 1
2   elmt 5
3     ELASTic ISOTropic    60759.5          ! E
4     CROSS SECTION       113.1             ! area
5     THERmal ISOTropic   2.15e-5 286.0       ! alpha T_null
6     FOURier ISOTropic   210.0   0.94e9       ! k c
7     DENSity MASS        2.9e-9           ! rho
8     BODY FORCES         1.0   1.0   1.0     ! f_x   f_y   f_z
9     BODY HEAT           1.0             ! r
10    PLASTic MISEs       60.0            ! kappa_0
11    UPARAmeter PLASTic  85.0   2625.0 2625.0 85.0  0
12 !                               beta,  gamma, a,   b,   Qflag, gammaquer

```

Listing 9.2: Materialdefinition elmt05

Zeile	Parameter/Bedeutung
1	Materialnummer
2	ELMT 5 ruft Userelement 5, also das thermoplastische Element auf
3	Elastizitätsmodul E
4	Querschnittsfläche A
5	thermischer Ausdehnungskoeffizient α und Referenztemperatur T_0 (in Kelvin!)
6	Wärmeleitzahl k und spezifische Wärmekapazität c
7	Dichte ρ
8	Anfangsfließspannung κ_0
9	Volumenkräfte f_x, f_y, f_z
10	Wärmequelle r
11	Parameter für isotrope Verfestigung: β, γ Parameter für kinematische Verfestigung: a, b Kontrollparameter Qflag: für Qflag=1 erfolgt Berechnung mit Taylor-Quinney-Koeffizient multipliziert mit plastischer Spannungsleistung als Wärmequelle (siehe Kapitel 7.5). Taylor-Quinney-Koeffizient $\bar{\gamma}$
12	Kommentarzeile

Tabelle 9.2: Parameterbeschreibung Materialdefinition elmt05

Steuerung der Berechnung

Die Steuerung des Berechnungsablaufs startet mit dem `BATCh`-Kommando und endet mit dem Kommando `END`. Das Kommando `STOP` beendet FEAP.

Die Kommandos

```

1  BATCh
2  DT,,0.01
3  TRANsient,BACKward
4  LOOP,,1000
5    TIME
6    LOOP iter 10
7      UTANgent,,1
8    NEXT iter
9    DISPlacement,ALL
10   STREss,ALL
11   REACTIon,ALL
12  NEXT
13  END
14  STOP

```

steuern eine transiente Berechnung.

Zeile	Bedeutung
1 - 13	Start und Ende des Macros zur Berechnungssteuerung
2	Festlegung des Zeitschritts auf $\Delta t = 0.01s$
3	Auswahl des Backward-Eulerverfahrens für die Zeitintegration, natürlich muss hier das Zeitintegrationsverfahren gewählt werden, das bei der Herleitung der Elementformulierung genutzt wurde
4 - 12	Schleife: wird 1000 mal durchlaufen
5	Erhöhung der Berechnungszeit um Δt
6 - 8	Schleife: Lösung des GLS, iterieren bis Konvergenznorm erreicht ist oder bis 10 Iterationen erreicht sind
7	Aufstellen der unsymmetrischen Tangentenmatrix und des Lastvektor, Lösen des Gleichungssystems
9	Ausgabe der Verschiebungen/Temperaturänderung aller Knoten in Ausgabedatei <code>O*</code>
10	Ausgabe der Stabkraft, Spannung, Dehnung, Wärmestrom aller Elemente in <code>O*</code>
11	Ausgabe der Reaktionkräfte/-wärmeströme aller Knoten in <code>O*</code>
14	FEAP wird beendet

Das Kommando `UTANgent,,1` in Zeile 7 ist eine verkürzte und effizientere Form der Kommandofolge:

```

UTANgent
FORM
SOLVe

```

TPLOt-Kommando

Vor dem Beginn der Steuerung des Berechnungsablaufs können noch einige andere Kommandos stehen, wie beispielsweise das TPLOt-Kommando. Das TPLOt-Kommando dient zur Ausgabe während der Berechnung im Feld `tt(*)` abgespeicherter Ergebnisgrößen¹ und hat folgende Form:

```
BATCh
  TPLOt
END
STREss,1,i
...
STREss,e,i
```

Dabei bedeutet `STREss,e,i`, dass bei jedem Zeitschritt vom Element mit der Nummer `e` die im Feld `tt(i)` gespeicherte Ergebnisgröße in die Datei `*.str` herausgeschrieben wird. Für die beiden implementierten Dehnstabelemente stehen folgende Ausgabemöglichkeiten zur Verfügung:

i =	Ausgabewert
1	Spannung
2	Dehnung
3	thermische Dehnung
4	Stabkraft
5	Wärmestrom
6	viskose Dehnung

Tabelle 9.3: Ausgabemöglichkeiten TPLOt-Kommando `elmt04`

i =	Ausgabewert
1	Spannung
2	Dehnung
3	thermische Dehnung
4	Stabkraft
5	Wärmestrom
6	plastische Dehnung
7	Verfestigungsvariable kin. Verfestigung
8	Verfestigungsvariable isotr. Verfestigung
9	plastische Bogenlänge
10	plastische Arbeit
11	gespeicherte Energie
12	Verhältnis gespeicherte Energie zu plastischer Arbeit

Tabelle 9.4: Ausgabemöglichkeiten TPLOt-Kommando `elmt05`

Aus diesen Ergebnisdaten können dann beispielsweise mit `gnuplot` Ergebnisdiagramme erstellt werden.

¹siehe thermoviskoelastische Elementroutine Zeile 171-178 bzw. thermoplastische Elementroutine Zeile 440-456

9.2 Thermoviskoelastisches Dehnstabelement

Die Abbildung zeigt das FE-Modell des Dehnstab der folgenden Berechnungen. Der Stab hat die Länge L und die Querschnittsfläche A . Die y - und z -Freiheitsgrade sowie der x -Freiheitsgrad am Knoten 1 sind gesperrt.

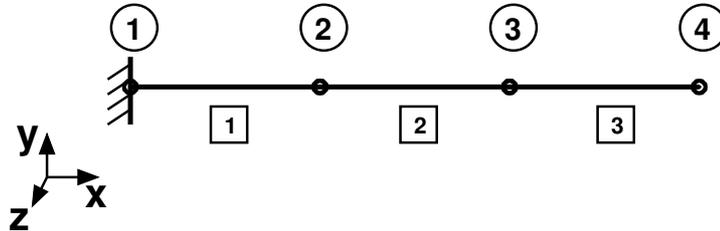


Abbildung 9.1: FE-Modell der thermoviskoelastischen Berechnungen

Materialdaten:

Die Materialparameter wurden für ein Epoxidharz identifiziert bzw. aus der Literatur entnommen:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= 926.78 \text{ N/mm}^2 \\
 E_1 &= 1132.74 \text{ N/mm}^2 \\
 \eta &= 382.3 \text{ Nh/mm}^2 = 1.376 * 10^9 \text{ Ns/mm}^2 \\
 \rho &= 1.8 * 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 c &= 1.4 * 10^9 \text{ mJ/tK} \\
 k &= 0.5 \text{ W/mK} \\
 \alpha &= 4.0 * 10^{-5} \text{ 1/K} \\
 T_0 &= 300.0 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Geometrie:

$$\begin{aligned}
 L &= 100 \text{ mm} \\
 A &= 20 \text{ mm}^2
 \end{aligned}$$

Material Definition für FEAP:

```

MATERial 1
  ELEM 4
    CROSS SECTION 20                ! area
    THERmal ISOTropic 4.0e-5 300.0  ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic 0.5 1.4e9    ! k c
    DENSity MASS 1.8e-9            ! rho
    ELASTic ISOTropic 926.78       ! E0
    VISCoelastic term1 1132.74 382.3 ! E1 eta
  
```

Anmerkung zu den Ergebnisdiagrammen:

In den Diagrammen sind in der Regel die Ergebnisgraphen aller Elemente E_i bzw. aller Knoten N_i angegeben. Häufig liegen diese jedoch genau übereinander, was dann bedeutet, dass diese Ergebnisgröße im Dehnstab konstant ist.

9.2.1 Berechnung 1: Relaxationsprozess

Am Stabende wird mit dem ersten Zeitschritt eine Verschiebung von 3 mm aufgebracht. Diese wird im Verlauf der Rechnung konstant gehalten, dabei relaxiert die Spannung im Stab.

Belastung:

Verschiebung am Knoten 4: $u_x = 3 \text{ mm}$

Weitere Angaben:

Thermische RB: keine (adiabat)

Zeitschritt: $\Delta t = 0.004 \text{ h}$

Berechnungsdauer: $t = 4 \text{ h}$

Ergebnisdiagramme:

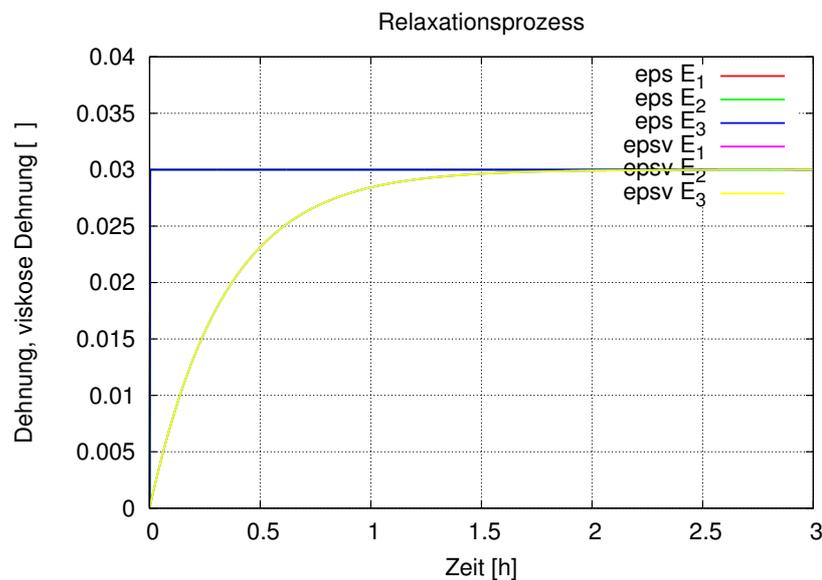


Abbildung 9.2: Dehnung und viskose Dehnung

Die Dehnung ergibt sich entsprechend der vorgegebenen Belastung durch die Knotenverschiebung. Die viskose Dehnung² entwickelt sich vom Anfangswert null bis sie den Wert der Dehnung erreicht. Das führt zur Absenkung der Überspannung des 3P-Modells³. Dementsprechend relaxiert die Spannung, bis sich ein konstanter Wert einstellt.

²Die viskose Dehnung ist die Dehnung im Dämpferelement, siehe Abb. 3.8.

³siehe Abb. 3.8 sowie zugehörige Formeln

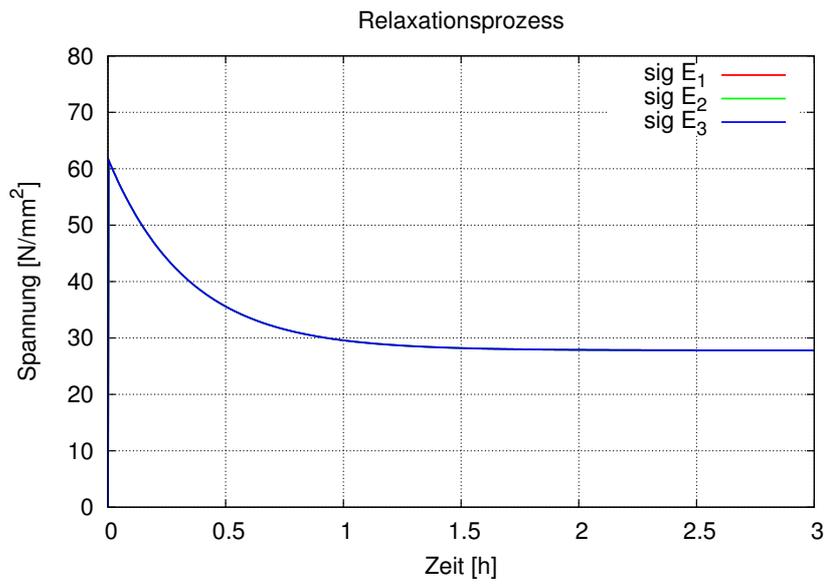


Abbildung 9.3: Relaxationskurve

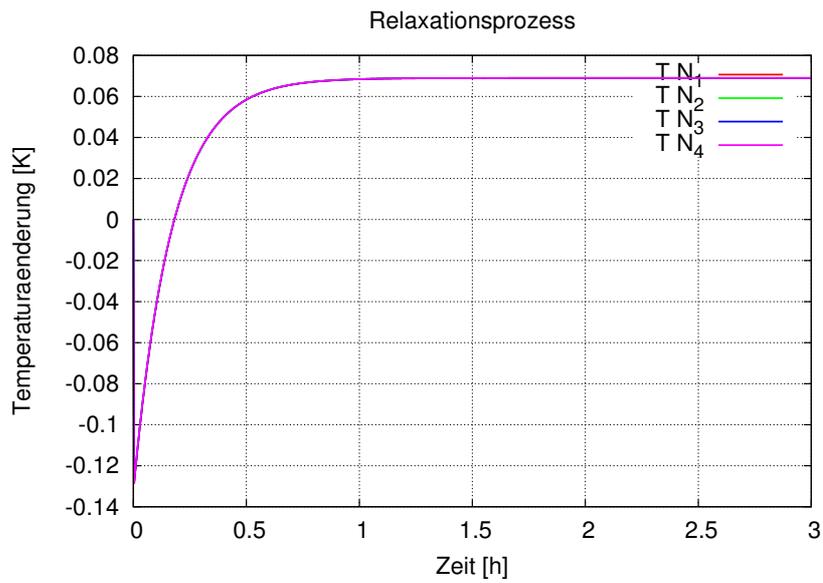


Abbildung 9.4: Temperaturentwicklung

Die Abkühlung zu Beginn begründet sich durch die thermoelastische Kopplung. Solange sich die viskose Dehnung entwickelt, wird Wärme dissipiert. Dies führt schließlich zu einer positiven Endtemperatur.

9.2.2 Berechnung 2: Kriechprozess

Am Stabende wird mit dem ersten Zeitschritt eine Kraft von 1000 N aufgebracht. Diese Kraft wird während der Rechnung konstant gehalten, was zum Kriechen des Stabes führt.

Belastung:

Kraft am Knoten 4: $F_x = 1000$ N

Weitere Angaben:

Thermische RB: keine (adiabat)

Zeitschritt: $\Delta t = 0.004$ h

Berechnungsdauer: $t = 4$ h

Ergebnisdiagramme:

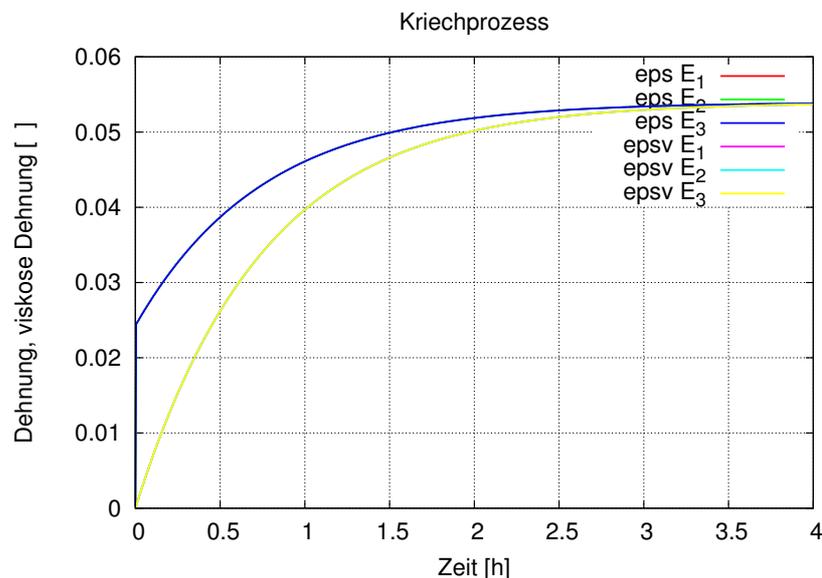


Abbildung 9.5: Kriechkurve

Durch die aufgebrachte Kraft beim ersten Zeitschritt erhält der Stab eine Anfangsdehnung. Nun beginnt sich wieder die viskose Dehnung zu entwickeln, folglich sinkt die Überspannung⁴ ab. Da die aufgrund der äußeren Last anliegende Spannung jedoch konstant bleibt, muss sich die Dehnung erhöhen, um das Absinken der Überspannung auszugleichen. Das bedeutet: der Stab kriecht.

Zu Beginn ist im Temperaturverlauf in Diagramm 9.6 wieder der thermoelastische Kopplungseffekt sichtbar. Durch die Entwicklung der viskosen Dehnung wird Wärme dissipiert, also steigt die Temperatur an. Allerdings findet gleichzeitig aufgrund der Kriechdehnung thermoelastische Abkühlung statt. Diese überwiegt im mittleren Teil der Berechnung, deshalb sinkt die Temperatur dort wieder etwas ab. Gegen Ende

⁴siehe Abb. 3.8 sowie zugehörige Formeln

konvergieren die viskose Dehnung und damit auch die Dehnung gegen ihren Endwert, dadurch stellt sich eine konstante Temperatur ein.

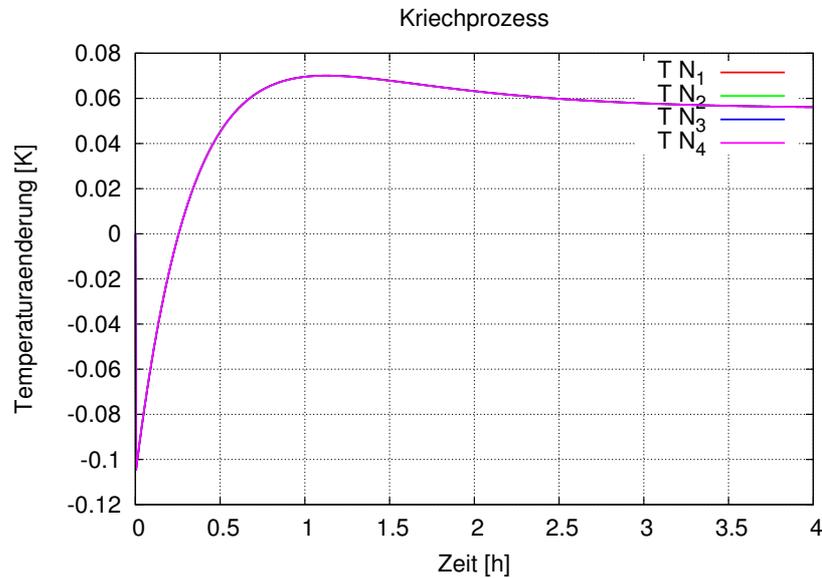


Abbildung 9.6: Temperaturentwicklung

9.2.3 Berechnung 3: Zyklische Belastung

Belastung:

Zyklische Verschiebung am Knoten 4 entsprechend der Abbildung:

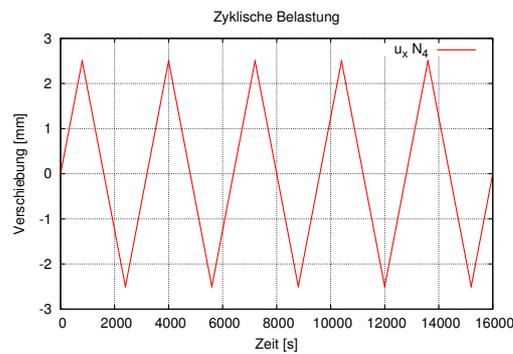


Abbildung 9.7: Vorgegebene Verschiebung Knoten 4

Weitere Angaben:

Thermische RB: isotherme RB (T_{DOF} am Knoten 1 und 4 gesperrt),
d.h. Wärme wird aus Stab geleitet

Zeitschritt: $\Delta t = 4 \text{ s}$

Berechnungsdauer: $t = 16000 \text{ s}$

Ergebnisdiagramme:

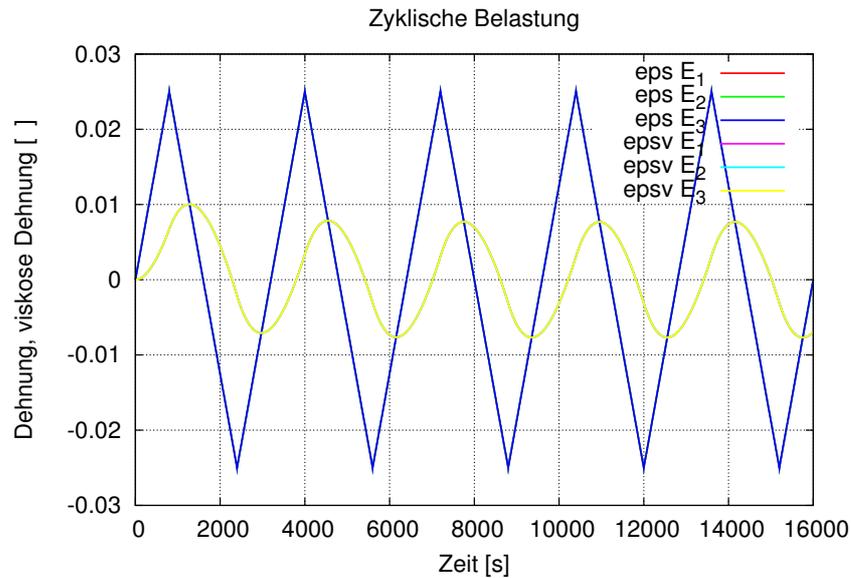


Abbildung 9.8: Dehnung und resultierende viskose Dehnung

Das Diagramm zeigt die vorgegebene Dehnung und die sich einstellende viskose Dehnung. Hier wird deutlich, dass sich zwischen Dehnung und viskoser Dehnung eine Phasenverschiebung einstellt.

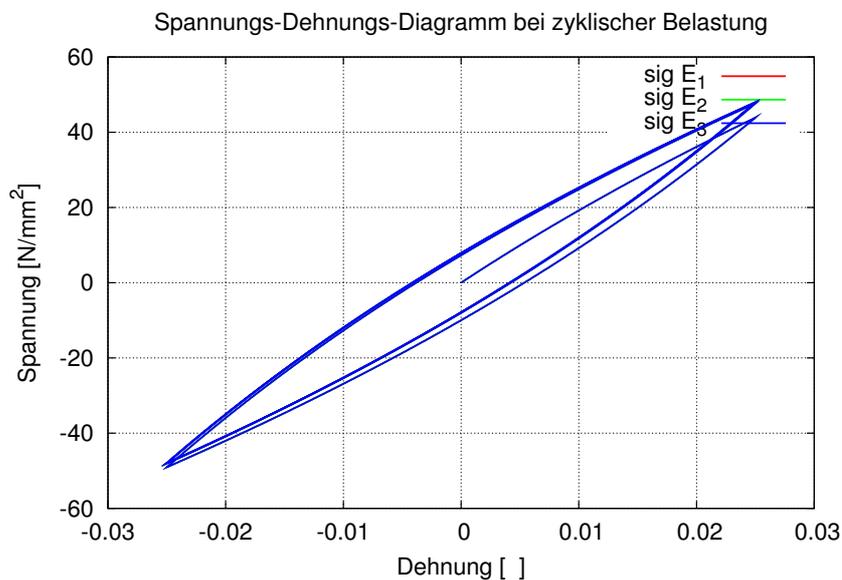


Abbildung 9.9: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Aufgrund der Überspannung bei der Viskoelastizität zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm 9.9 eine Hysterese. Auffällig ist, dass die maximale Spannung beim ersten Lastzyklus niedriger ist, als bei den folgenden. Der Grund dafür lässt sich im Diagramm 9.8 finden. Die Phasenverschiebung zwischen Dehnung und viskoser Dehnung entwickelt sich während dem ersten Lastzyklus. Deshalb ist beim ersten Maximalwert der Dehnung die viskose Dehnung größer als bei den folgenden Maxima. Somit ist die Überspannung beim ersten Lastzyklus etwas geringer.

Im Diagramm 9.10 ist wieder das Zusammenspiel von thermoelastischer Kopplung und Wärmeentwicklung aufgrund der Dissipation erkennbar. Je nachdem welchen Betrag die viskose Dehnung gerade hat, überwiegt das Eine oder das Andere. Hinzu kommt noch die Wärmeleitung aufgrund der isothermen Randbedingungen. Durch das Zusammenwirken von Wärmeleitung aus dem Stab und Wärmeproduktion im Stab stellt sich schließlich ein periodisches Verhalten ein.

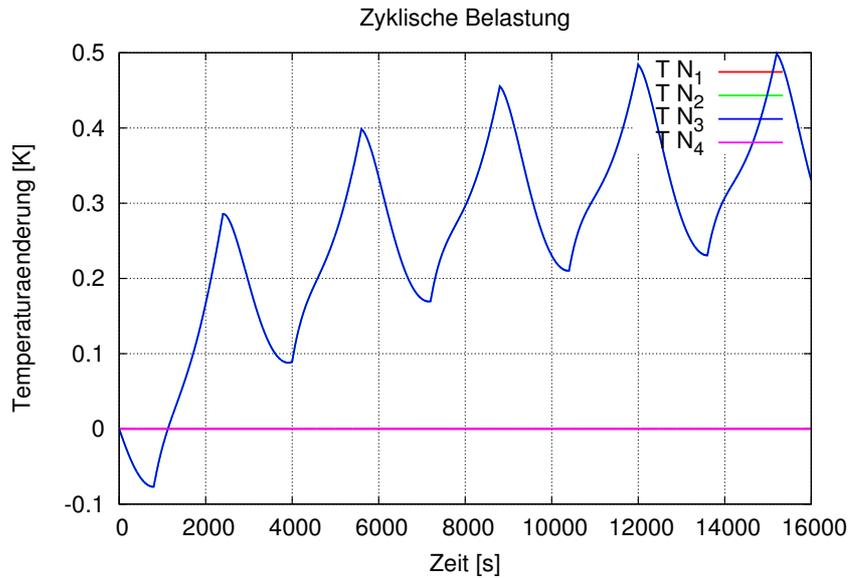


Abbildung 9.10: Temperaturentwicklung

9.2.4 Berechnung 4: Zyklische Belastung adiabat

Nun wird Rechnung 3 als adiabate Berechnung wiederholt. Zudem wird die Berechnungszeit verlängert, wobei die Verschiebung am Stabende konstant gehalten wird.

Belastung:

Anfangs zyklisch, am Ende konstant entsprechend der Abbildung:

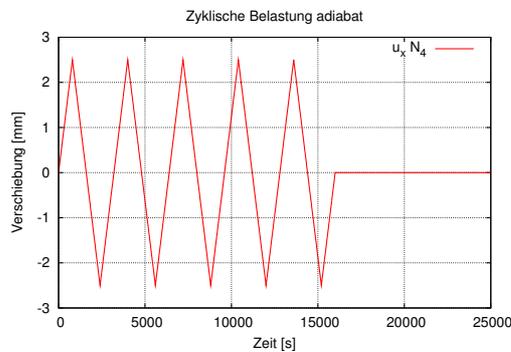


Abbildung 9.11: Vorgegebene Verschiebung Knoten 4

Weitere Angaben:

Thermische RB: keine (adiabat)
Zeitschritt: $\Delta t = 4$ s
Berechnungsdauer: $t = 25000$ s

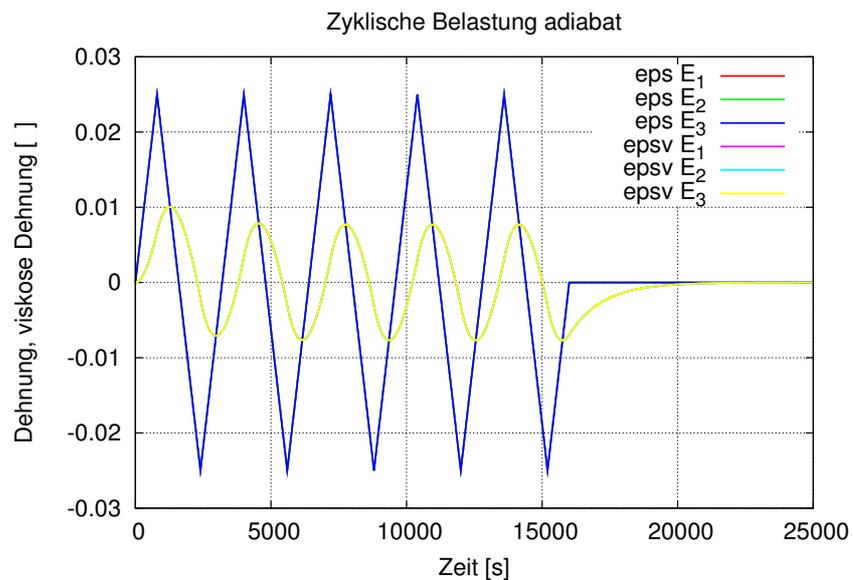
Ergebnisdiagramme:

Abbildung 9.12: Dehnung und resultierende viskose Dehnung

Während der Belastung zeigt sich im Diagramm 9.12 das gleiche Verhalten wie bei der vorherigen Berechnung. Nach den fünf Lastzyklen ist die Dehnung konstant, die viskose Dehnung ist jedoch aufgrund der Phasenverschiebung noch nicht bei null angelangt. Die viskose Dehnung scheint dann gegen null zu konvergieren. Das stimmt jedoch nicht ganz, wie sich bei der Temperaturlauswertung zeigen wird.

Auch der Spannungsverlauf 9.13 zeigt im ersten Teil das gleiche Verhalten wie bei der vorherigen Rechnung, im Endteil der Rechnung relaxiert die Spannung gegen null.

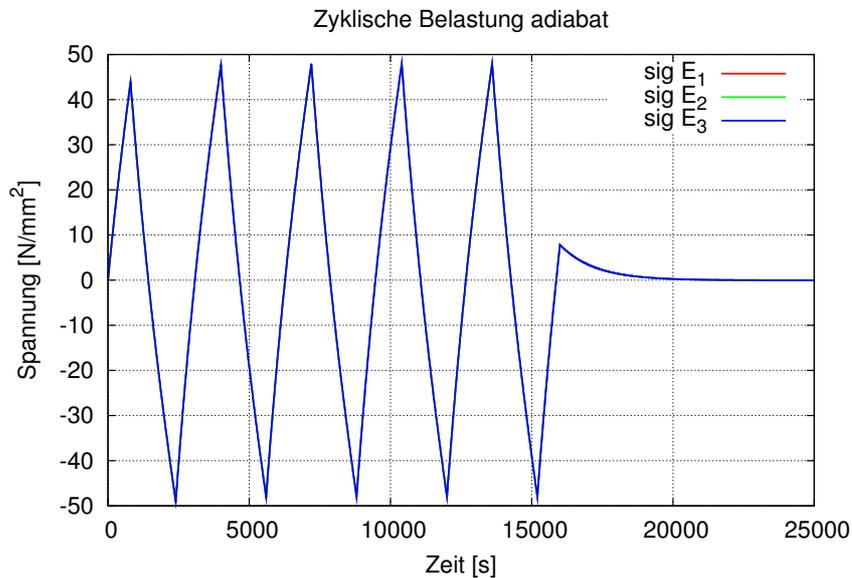


Abbildung 9.13: Spannungsverlauf

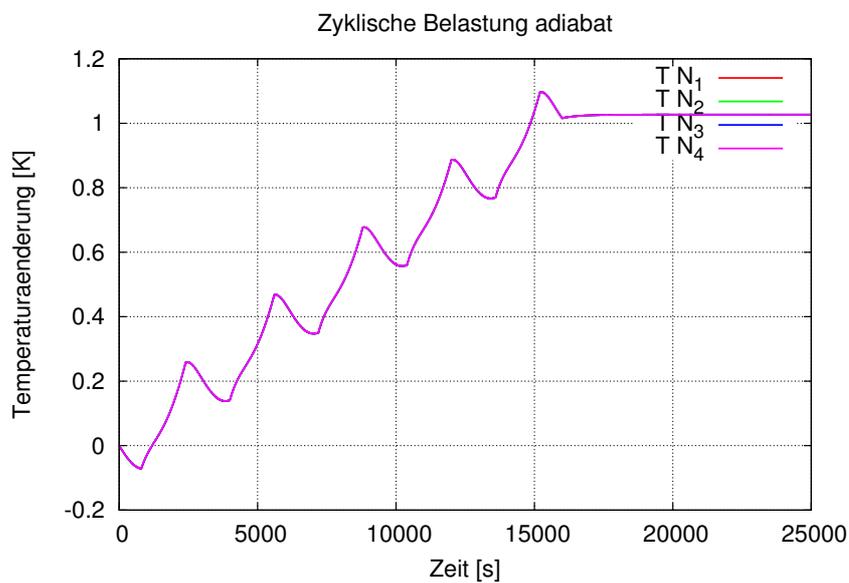


Abbildung 9.14: Temperaturentwicklung

Der Temperaturanstieg aufgrund der Belastung ist deutlich durch den thermoelastischen Kopplungseffekt gezeichnet. Während der Zurückbildung der viskosen Dehnung bei $t=16000$ s ist nochmal ein kleiner Temperaturanstieg erkennbar. Schließlich erreicht die Temperaturänderung einen stationären Wert. Das heißt aber, es besteht auch eine thermische Dehnung. Da die Dehnung jedoch gleich null ist, bedeutet dies, dass die viskose Dehnung nicht gegen null konvergieren kann, sondern gegen den Wert $-\varepsilon_{th}$.

9.3 Thermoplastisches Dehnstabelement

Die Abbildung zeigt das FE-Modell des Dehnstabs der folgenden Berechnungen. Der Stab hat die Länge L und die Querschnittsfläche A . Die y - und z -Freiheitsgrade sowie der x -Freiheitsgrad am Knoten 1 sind gesperrt.

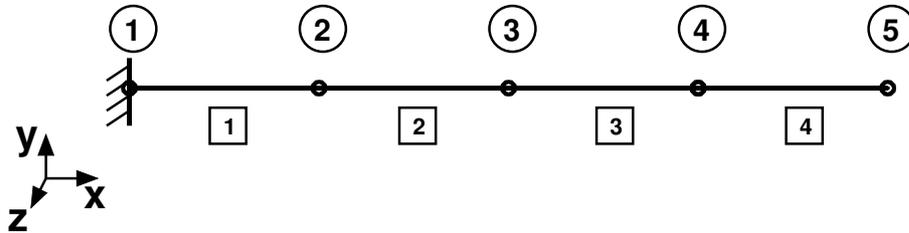


Abbildung 9.15: FE-Modell der thermoplastischen Berechnungen

9.3.1 Berechnung 1: mit isotroper Verfestigung nach HELM

In HELM [7] sind Berechnungen zur Thermoplastizität enthalten. Diese werden zur Verifikation des entwickelten Elements nachgerechnet.

Materialdaten:

Die folgenden Materialparameter für die Aluminiumlegierung AlMgSi1 gelten für die Berechnungen 1, 2, 3, 4 und 5, sofern keine anderen Angaben erfolgen. Die Materialdaten wurden aus HELM [7] übernommen. Nur der Parameter a der kinematischen Verfestigung musste mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ multipliziert werden, um den Unterschied zwischen 3-dimensionaler und 1-dimensionaler Formulierung auszugleichen.

$$\begin{array}{ll}
 E = 60\,759.5 \text{ N/mm}^2 & \rho = 2.9 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 \kappa_0 = 60.0 \text{ N/mm}^2 & c = 0.94 \cdot 10^9 \text{ mJ/tK} \\
 \gamma = 5250.0 \text{ N/mm}^2 & k = 210.0 \text{ W/mK} \\
 \beta = 85.0 & \alpha = 2.15 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} \\
 a = 5252.0 \text{ N/mm}^2 & T_0 = 286.0 \text{ K} \\
 b = 85.0 &
 \end{array}$$

Abweichend der gemachten Angaben werden bei dieser Berechnung, um nur isotrope Verfestigung zu erhalten, die Parameter der kinematischen Verfestigung wie folgt gesetzt:

$$a = 1.0 \text{ N/mm}^2 \qquad b = 1000.0$$

Geometrie:

$$L = 90 \text{ mm}$$

$$r = 6 \text{ mm}$$

$$A = 113.1 \text{ mm}^2$$

Auch die Geometriedaten gelten für die Berechnungen 1 bis 5.

Material Definition für FEAP:

```

MATERIAL 1
  elmt 5
    ELASTic ISOTropic    60759.5          ! E
    CROSS SECTION        113.1             ! area
    THERmal ISOTropic    2.15e-5 286.0       ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic    210.0 0.94e9      ! k c
    DENSity MASS         2.9e-9           ! rho
    PLASTic MISEs        60.0             ! kappa_0
    UPARAmeter PLASTic  1000 1 5250.0 85.0 0
!                          beta, gamma, a, b, Qflag, gamma2

```

Belastung:

Die Belastung bei den Rechnungen 1 bis 4 erfolgt dehnungsgesteuert durch Vorgabe der Verschiebung am Knoten 5. Dabei ergibt sich folgende Dehnung:

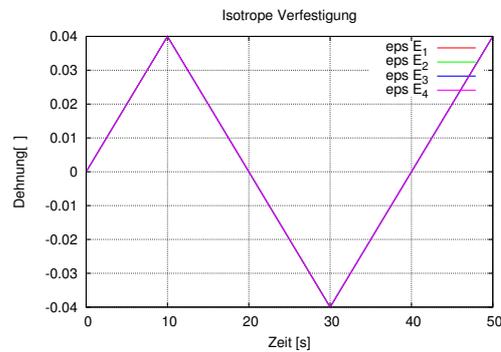


Abbildung 9.16: Dehnungsgesteuerter Belastungspfad für Rechnung 1, 2, 3, 4

Weitere Angaben:

Thermische RB: keine (adiabat)

Zeitschritt: $\Delta t = 0.05 \text{ s}$

Berechnungsdauer: $t = 50 \text{ s}$

Auch diese Angaben gelten für die Berechnungen 1 bis 4.

Ergebnisdiagramme:

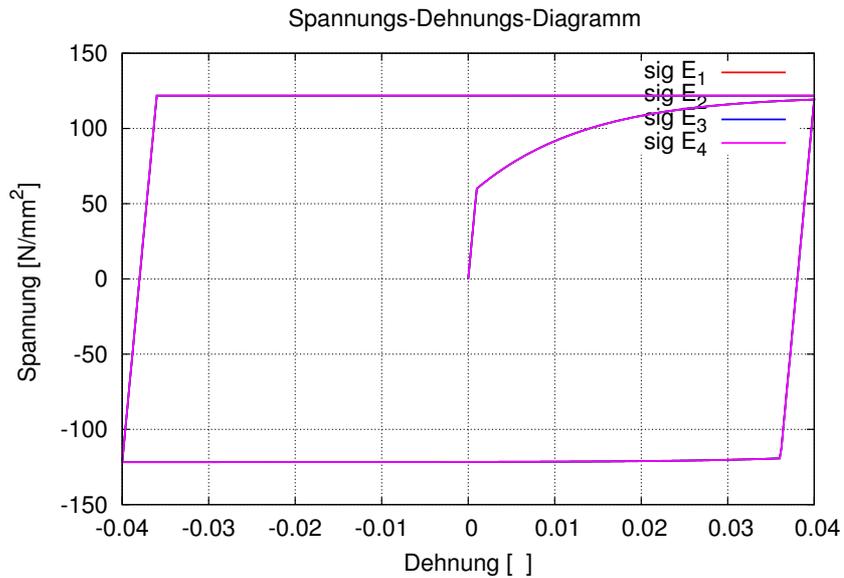


Abbildung 9.17: Spannungs-Dehnungs-Diagramm, isotr. Verfestigung

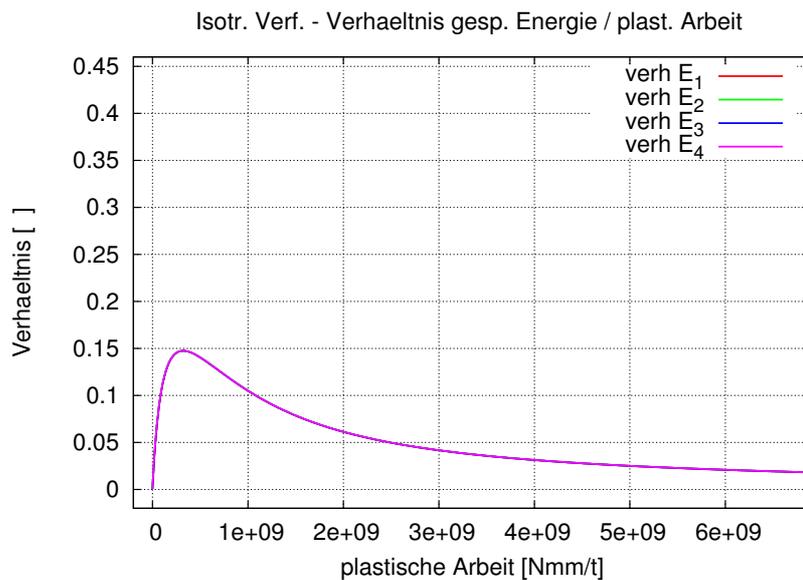


Abbildung 9.18: Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit

Die isotrope Verfestigung strebt sehr schnell gegen ihren Sättigungswert, sodass nach der ersten Belastung die Fließspannung nahezu konstant ist.

Das Verhältnis gespeicherte Energie zu plastischer Arbeit hat zu Beginn, wo sich die isotrope Verfestigung entwickelt, ihr Maximum, dann strebt es gegen null.

Dies sind die gleichen Ergebnisse wie in HELM.

9.3.2 Berechnung 2: mit kinematischer Verfestigung nach HELM

Um nur kinematische Verfestigung zu erhalten, werden die Parameter der isotropen Verfestigung wie folgt gesetzt:

$$\gamma = 1.0 \text{ N/mm}^2 \quad \beta = 1000.0$$

Ergebnisdiagramme:

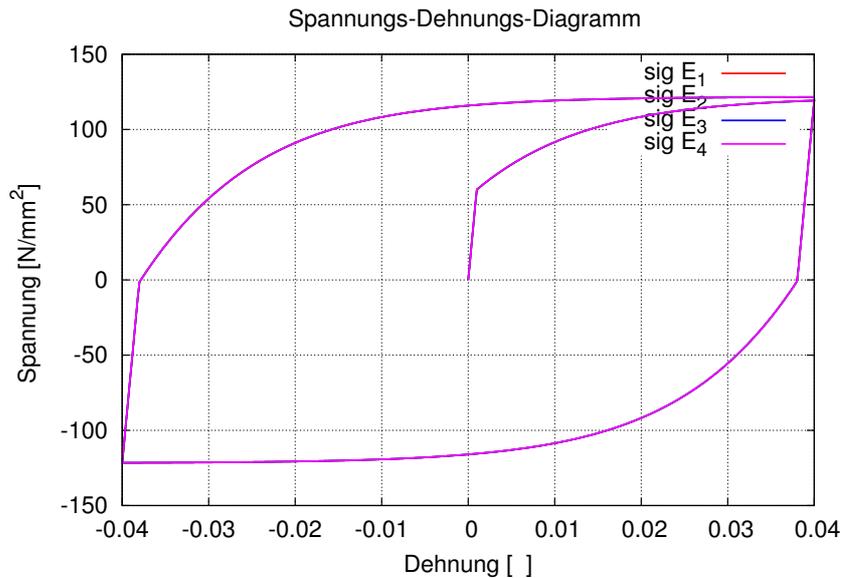


Abbildung 9.19: Spannungs-Dehnungs-Diagramm, kin. Verfestigung

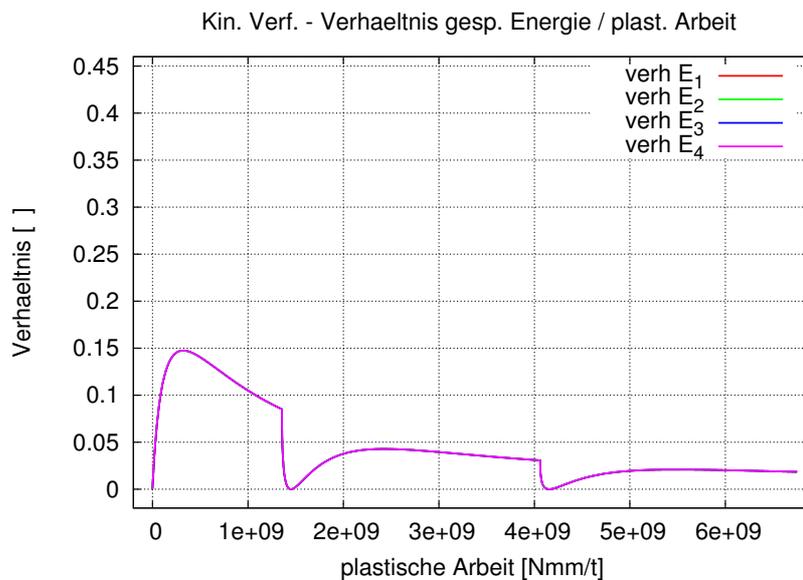


Abbildung 9.20: Verhaeltnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit

Auch hier wurden die gleichen Ergebnisse wie in HELM ermittelt.

Da sich die kinematische Verfestigung bei Belastungsumkehr zurück entwickeln kann, ist hier eine vollständige Energiefreisetzung möglich. Dabei ist folglich das Verhältnis gespeicherte Energie zu plastischer Arbeit gleich null. Dies tritt bei der Berechnung zweimal auf, siehe Abbildung 9.20.

9.3.3 Berechnung 3: mit isotroper und kinematischer Verfestigung

Nun erfolgt die Berechnung mit isotroper und kinematischer Verfestigung. Dazu werden folgende Verfestigungsparameter verwendet:

$$\gamma = 2625.0 \text{ N/mm}^2 \quad a = 2625.0 \text{ N/mm}^2$$

Ergebnisdiagramme:

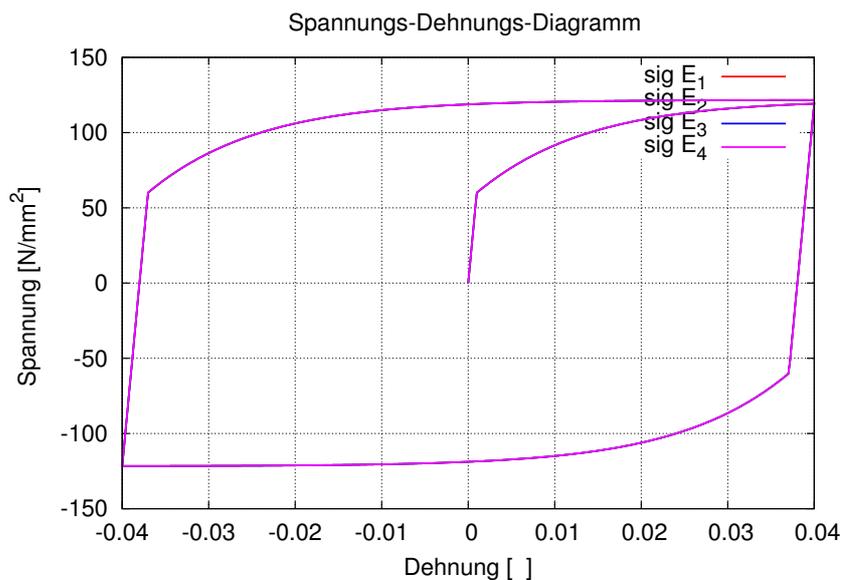


Abbildung 9.21: Spannungs-Dehnungs-Diagramm, isotr. und kin. Verfestigung

Die Ergebnisse stellen wie erwartet eine Kombination der Ergebnisse der beiden vorgegangenen Berechnungen dar, sowohl auf mechanischer als auch auf energetischer Seite.

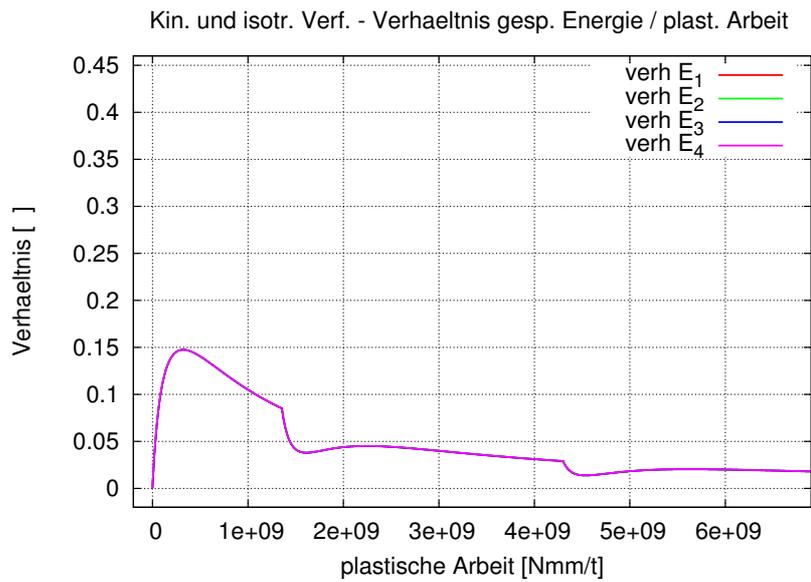


Abbildung 9.22: Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit

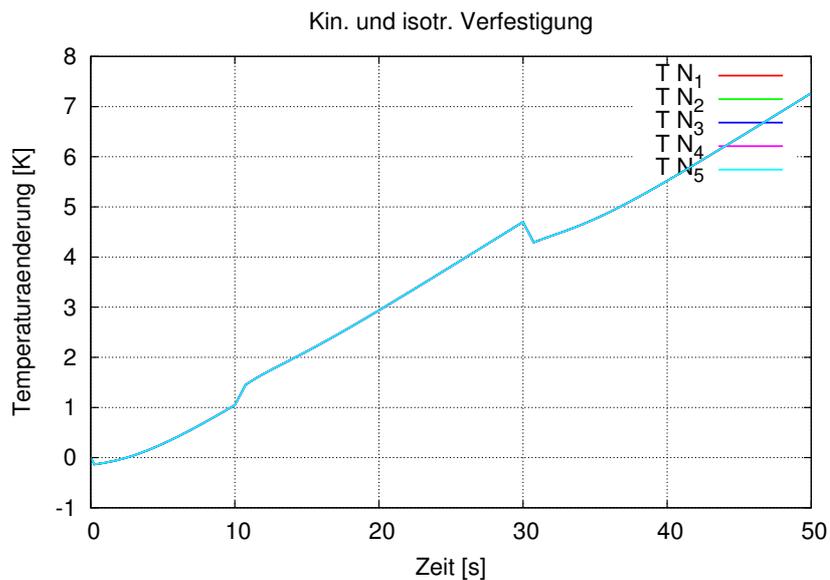


Abbildung 9.23: Temperaturentwicklung

Nun soll auch die Temperaturentwicklung ausgewertet werden. Der Temperaturanstieg von gut 7 K ist entsprechend der noch recht geringen plastischen Dehnung von 4% nicht sehr groß. Deutlich ist noch die Auswirkung der thermoelastischen Kopplung zu Beginn und vor allem bei der Lastumkehr ersichtlich.

9.3.4 Berechnung 4: Wärmequelle mit Taylor-Quinney-Koeffizient

Auch diese Berechnung wird mit isotroper und kinematischer Verfestigung ausgeführt. Es werden wieder die Verfestigungsparameter

$$\gamma = 2625.0 \text{ N/mm}^2 \quad a = 2625.0 \text{ N/mm}^2$$

verwendet. Allerdings wird nun nach der Modifikation des Elements gerechnet, bei der die Spannungsleistung multipliziert mit dem Taylor-Quinney-Koeffizienten $\bar{\gamma}$ als Wärmequelle in die Wärmeleitungsgleichung eingeht. Es wird mit den Werten $\bar{\gamma} = 1.0$ und $\bar{\gamma} = 0.9$ gerechnet.

Ergebnisdiagramme:

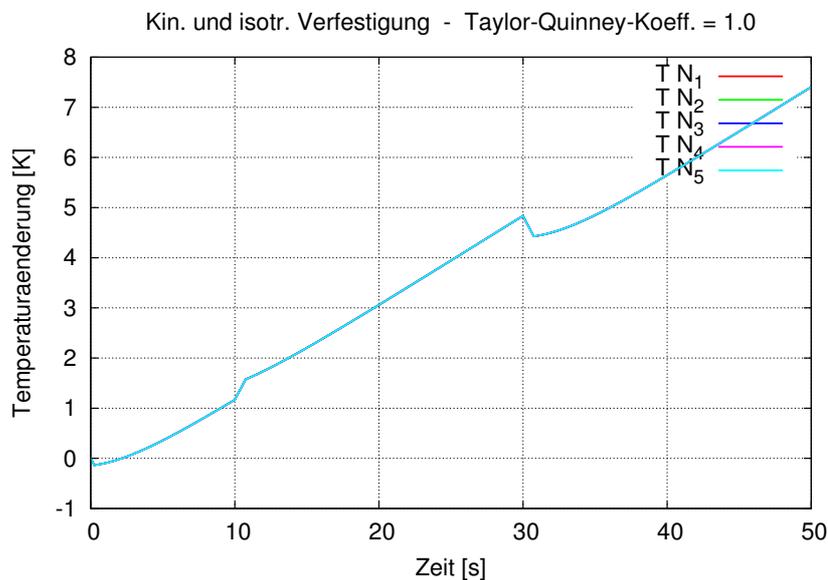


Abbildung 9.24: Temperaturentwicklung bei $\bar{\gamma} = 1.0$

Die Temperaturentwicklung für $\bar{\gamma} = 1.0$ scheint gleich zu sein wie bei der vorherigen Berechnung, nur bei genauer Betrachtung sind feine Unterschiede zu erkennen. Das bedeutet, wird viel plastische Arbeit verrichtet, so hat bei diesem Materialmodell die Energiespeicherung auf die resultierende Temperatur kaum eine Auswirkung.

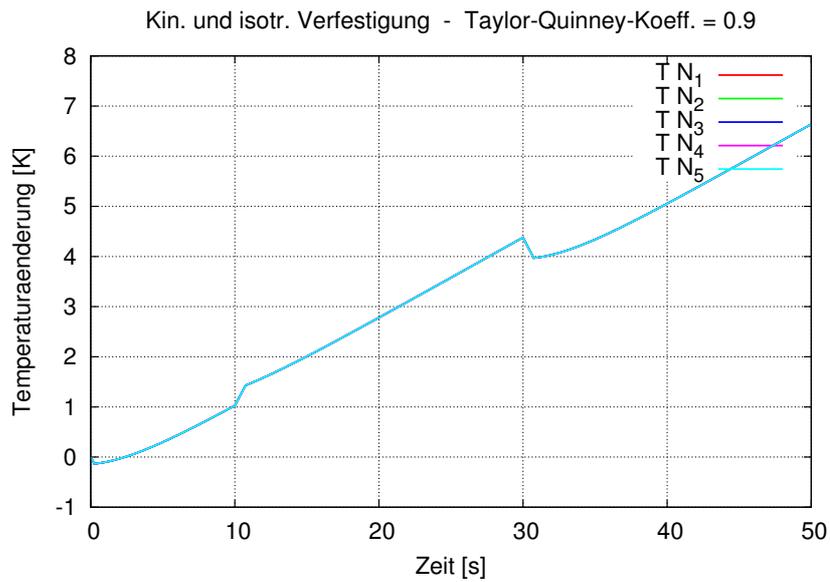


Abbildung 9.25: Temperaturentwicklung bei $\bar{\gamma} = 0.9$

Nun bei $\bar{\gamma} = 0.9$ ist die Temperaturänderung mit 6.5 K merklich niedriger.

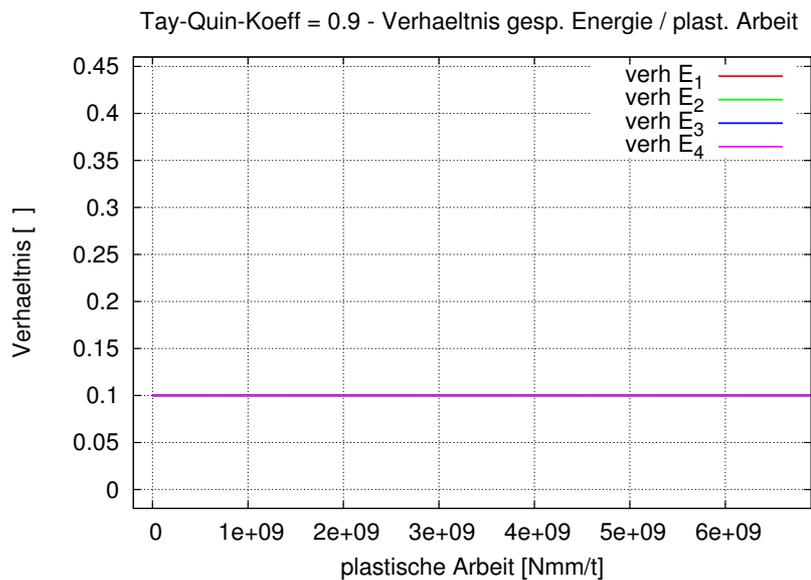


Abbildung 9.26: Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit bei $\bar{\gamma} = 0.9$

Der Vergleich zwischen diesem Diagramm und dem Diagramm 9.22 zeigt sehr deutlich den Unterschied zwischen den beiden Modellierungsvarianten. Während hier genau 10% der gesamten plastischen Arbeit irreversibel gespeichert werden, zeigt das Energiespeichungsverhältnis bei der thermomechanisch konsistenten Formulierung nach dem anfänglichen Maximum von 15% wesentlich niedrigere Werte.

9.3.5 Berechnung 5: Zyklische Belastung mit isotroper und kinematischer Verfestigung

Diese Berechnung mit dehnungsgesteuerter zyklischer Belastung entsprechend Abbildung 9.27 wird wieder mit den Parametern

$$\gamma = 2625.0 \text{ N/mm}^2 \quad a = 2625.0 \text{ N/mm}^2$$

für isotrope und kinematische Verfestigung durchgeführt. An den Stabenden werden isotherme Randbedingungen angenommen. Die Berechnungszeit beträgt dabei 20 s.

Belastung:

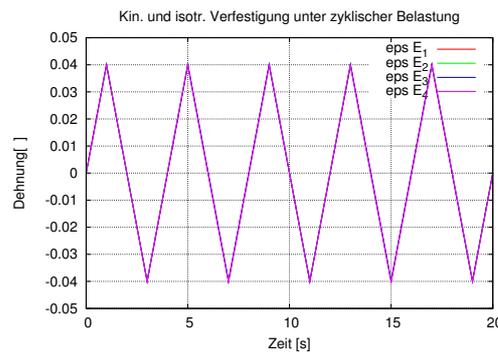


Abbildung 9.27: Dehnungsgesteuerter Belastungspfad

Weitere Angaben:

Thermische RB: isotherme RB (T_{DOF} am Knoten 1 und 4 gesperrt),
d.h. Wärme wird aus Stab geleitet

Zeitschritt: $\Delta t = 0.02 \text{ s}$

Berechnungsdauer: $t = 20 \text{ s}$

Ergebnisdiagramme:

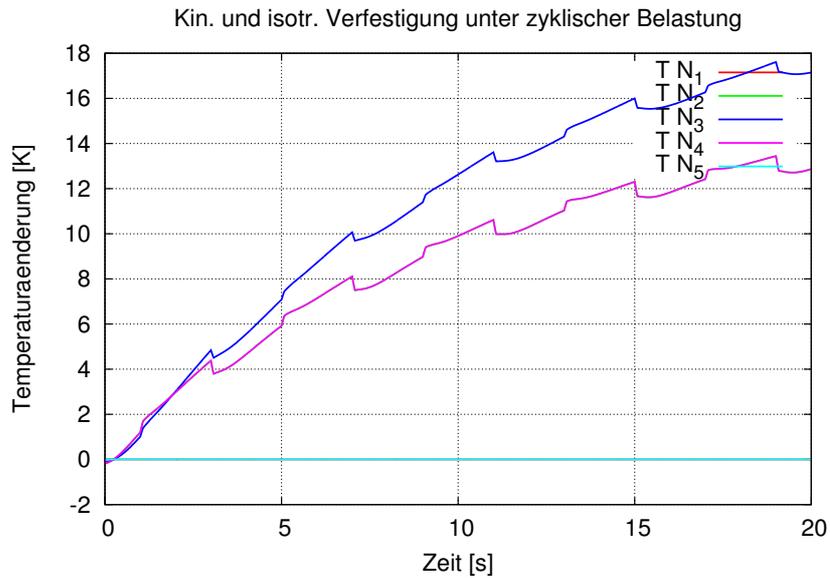


Abbildung 9.28: Temperaturentwicklung

Zu Beginn zeigt sich ein recht starker Temperaturanstieg, der im Laufe der Berechnung aufgrund der aus dem Stab geleiteten Wärme jedoch etwas abflacht. Dabei ist deutlich bei den Umkehrpunkten der Belastung der Einfluss der thermoelastischen Kopplung erkennbar.

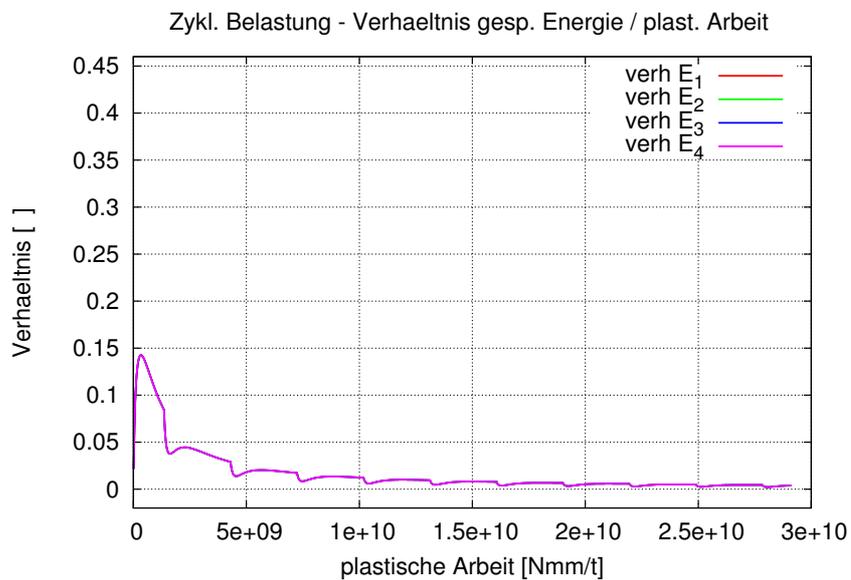


Abbildung 9.29: Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit

Das Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit strebt dabei gegen null.

9.3.6 Berechnung 6: Vergleich zu KAMLAH

Diese Berechnung orientiert sich an einer Berechnung von KAMLAH [8]. Dort wurde ein thermoplastischer Dehnstab mit kinematischer Verfestigung⁵ unter Zug- und Druckbelastung berechnet. Die Berechnung von KAMLAH erfolgte allerdings analytisch, dazu mussten dort einige Vereinfachungen gemacht werden.

Belastung:

Die Berechnung erfolgt dehnungsgesteuert entsprechend der Abbildung:

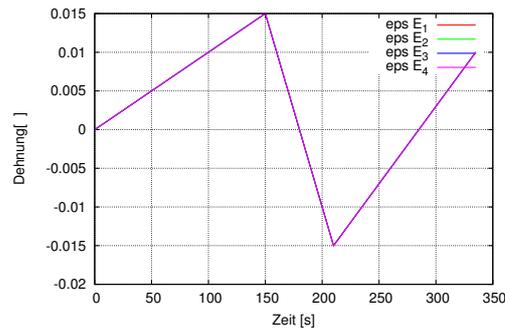


Abbildung 9.30: Dehnungsgesteuerter Belastungspfad

Materialdaten:

Die Materialdaten wurden von KAMLAH [8] für XCrNi8.9 Stahl gewählt. Auch hier musste der Materialparameter a der kinematischen Verfestigung mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ multipliziert werden.

$$\begin{array}{ll}
 E = 200\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \rho = 7.8 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 \kappa_0 = 200.0 \text{ N/mm}^2 & c = 0.48 \cdot 10^9 \text{ mJ/tK} \\
 \gamma = 1 \text{ N/mm}^2 & k = 20.0 \text{ W/mK} \\
 \beta = 1000 & \alpha = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} \\
 a = 75\,000.0 \text{ N/mm}^2 & T_0 = 293.0 \text{ K} \\
 b = 830.0 &
 \end{array}$$

Die Parameter γ und β der isotropen Verfestigung wurden so gesetzt, dass die isotrope Verfestigung gegen null geht.

Geometrie⁶:

$$\begin{array}{l}
 L = 100 \text{ mm} \\
 A = 20 \text{ mm}^2
 \end{array}$$

⁵Das Materialmodell von KAMLAH ist im Gegensatz zu dem hier verwendetem auch in der Lage, zyklische Verfestigung zu erfassen. Die hier zum Vergleich herangezogene Berechnung wurde jedoch auch ohne Berücksichtigung der zyklischen Verfestigung ausgeführt.

⁶Der Wert der Querschnittsfläche A war nicht vorgegeben, sondern wurde frei gewählt. Da die Gleichungen des Dehnstabs bis auf den Term der äußeren Lasten linear in A sind, hat die Wahl von A hier keinen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse.

Material Definition für FEAP:

```

MATERIAL 1
  elmt 5
    ELASTic ISOTropic  200000.0          ! E
    CROSS SECTION      20                 ! area
    THERmal ISOTropic  1.6e-5 293.0       ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic  20.0 0.48e9       ! k c
    DENSity MASS       7.8e-9            ! rho
    PLASTic MISEs      200.0              ! kappa_0
    UPARAmeter PLASic 1000 1 75000.0 830.0 0
!      beta,  gamma,  a,          b,      Qflag,  gamma2

```

Weitere Angaben:

Thermische RB: isotherme RB (T_{DOF} am Knoten 1 und 4 gesperrt),
d.h. Wärme wird aus Stab geleitet

Zeitschritt: $\Delta t = 0.335$ s

Berechnungsdauer: $t = 335$ s

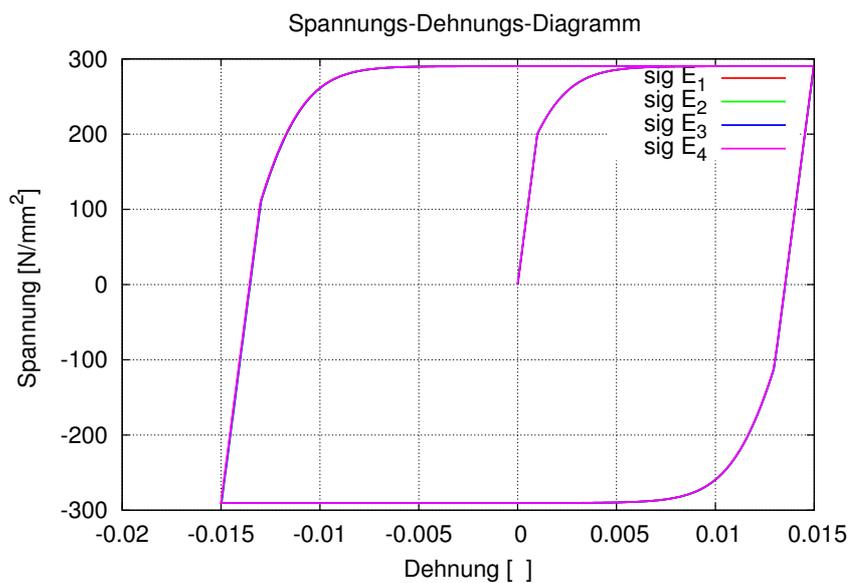
Ergebnisdiagramme:

Abbildung 9.31: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

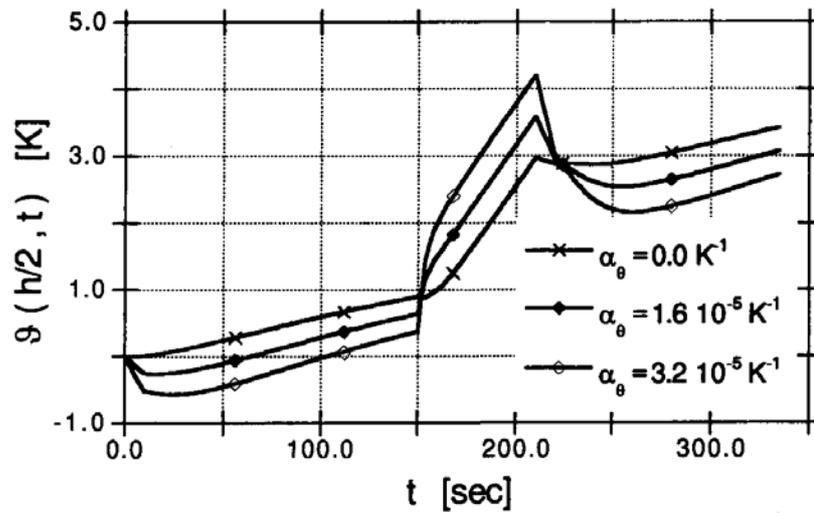


Abbildung 9.32: Temperaturentwicklung in der Stabmitte nach KAMLAH

KAMLAH gibt die Temperaturentwicklung in der Stabmitte für drei Berechnungen mit unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten an: $\alpha = 0.0$, $1.6 \cdot 10^{-5}$, $3.2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$.

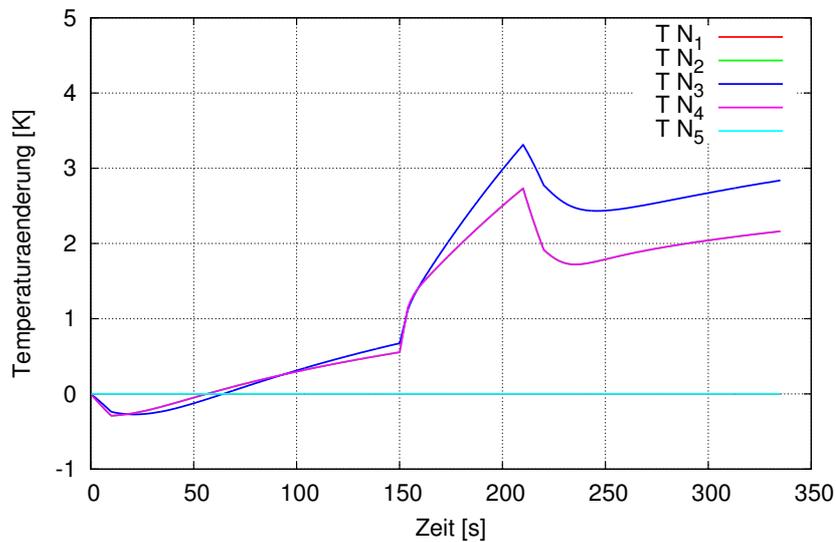


Abbildung 9.33: Temperaturentwicklung

Die obere Kurve vom Knoten 3 stellt die Temperaturentwicklung in der Stabmitte dar. Qualitativ stimmt dieser Verlauf sehr gut mit KAMLAH überein, jedoch sind die Temperaturwerte in der zweiten Hälfte der Berechnung ca. 10% kleiner als bei KAMLAH.

Eine mögliche Begründung für diesen Unterschied könnte in den von KAMLAH durchgeführten Vereinfachungen liegen, die gemacht wurden um eine analytische Lösung zu finden.

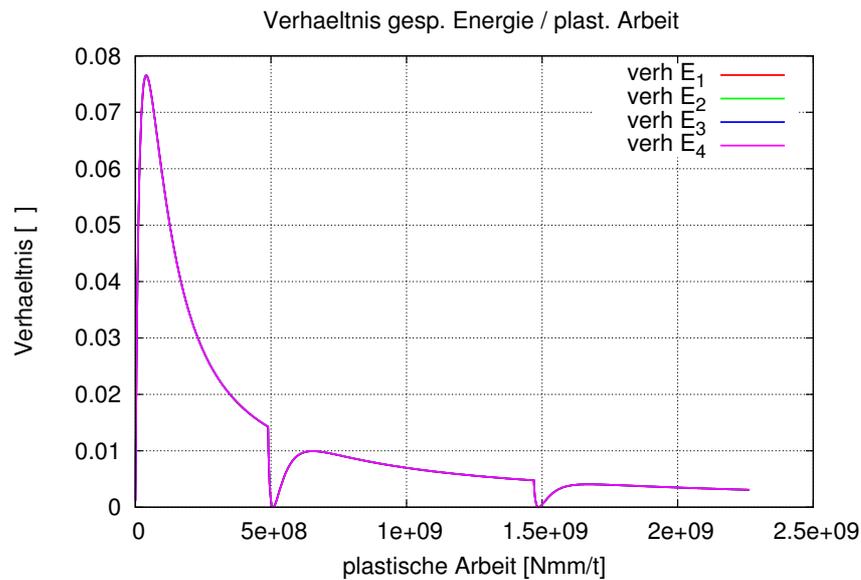


Abbildung 9.34: Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit

Das Verhältnis gespeicherte Energie zur plastischen Arbeit ist wesentlich niedriger als bei den vorhergehenden Berechnungen für die Aluminiumlegierung.

9.3.7 Berechnung 7: Experiment von ADAMS und KREMPL

In ADAMS und KREMPL [9] wurde ein zylindrischer Probenkörper des rostfreien Stahls AISI Typ 304 einaxial zyklisch belastet mit einer Frequenz von 1 Hz und einer Dehnungsamplitude von 0.5%. Dabei wurde die Temperaturentwicklung an sechs Punkten der Oberfläche gemessen. Nach 100 Lastzyklen betrug die Aufheizung an der Probenmitte 52 K. Dieser Versuch wird zur Verifikation des plastischen Dehnstabelements nachgerechnet.

Da die isotrope Verfestigung bereits nach wenigen Lastzyklen gegen ihren Sättigungswert konvergiert, wird bei der Berechnung nur die kinematische Verfestigung berücksichtigt.

Außerdem wird angenommen, dass sich die Temperatur an den Enden der Probe isotherm verhält.

Materialdaten:

Die mechanischen Materialparameter konnten aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm 9.35 für zyklische Belastung aus ADAMS und KREMPL [9] identifiziert werden. Die thermischen Materialparameter waren in dem Artikel angegeben.

$$\begin{aligned}
 E &= 210\,000.0 \text{ N/mm}^2 & \rho &= 7.951 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3 \\
 \kappa_0 &= 157.2 \text{ N/mm}^2 & c &= 0.477 \cdot 10^9 \text{ mJ/tK} \\
 \gamma &= 1 \text{ N/mm}^2 & k &= 14.9.0 \text{ W/mK} \\
 \beta &= 1000 & \alpha &= 1.66 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K} \\
 a &= 75\,000.0 \text{ N/mm}^2 & T_0 &= 293.0 \text{ K} \\
 b &= 843.0 & &
 \end{aligned}$$

Die Parameter γ und β der isotropen Verfestigung wurden so gesetzt, dass die isotrope Verfestigung gegen null geht.

Geometrie⁷:

$$\begin{aligned} L &= 50 \text{ mm} \\ r &= 12.7 \text{ mm} \\ A &= 126.7 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Material Definition für FEAP:

```
MATERIAL 1
  elmt 5
    ELASTic ISOTropic    210000.0          ! E
    CROSS SECTION        126.7             ! area
    THERmal ISOTropic    1.66e-5 293.0       ! alpha T_null
    FOURier ISOTropic    14.9   0.477e9      ! k c
    DENSity MASS         7.95e-9           ! rho
    PLASTic MISEs        157.0             ! kappa_0
    UPARAmeter PLASic    1000   1           75000.0 843.0 0
!                               beta,   gamma,  a,           b,           Qflag,  gamma2
```

Belastung:

Sinusförmige Dehnungsbelastung mit einer Amplitude von $\varepsilon_A = 0.005$ und einer Frequenz von 1 Hz:

$$\varepsilon(t) = 0.005 \sin(2\pi t)$$

Es werden 100 Belastungszyklen durchgeführt.

Weitere Angaben:

Thermische RB: isotherme RB (T_{DOF} am Knoten 1 und 4 gesperrt),
d.h. Wärme wird aus Stab geleitet
Zeitschritt: $\Delta t = 0.025$ s
Berechnungsdauer: $t = 100$ s

⁷Die Probe hat im Messbereich von 38.1 mm einen konstanten Querschnitt. Daran schließt sich eine Querschnittserweiterung an; das bedeutet, es treten dort weniger plastische Verformungen auf, jedoch kann mehr Wärme abgeleitet werden. Im Hinblick dessen und der Annahme isothermer Randbedingungen wird für die Berechnung eine Probenlänge von 50 mm gewählt.

Ergebnisdiagramme:

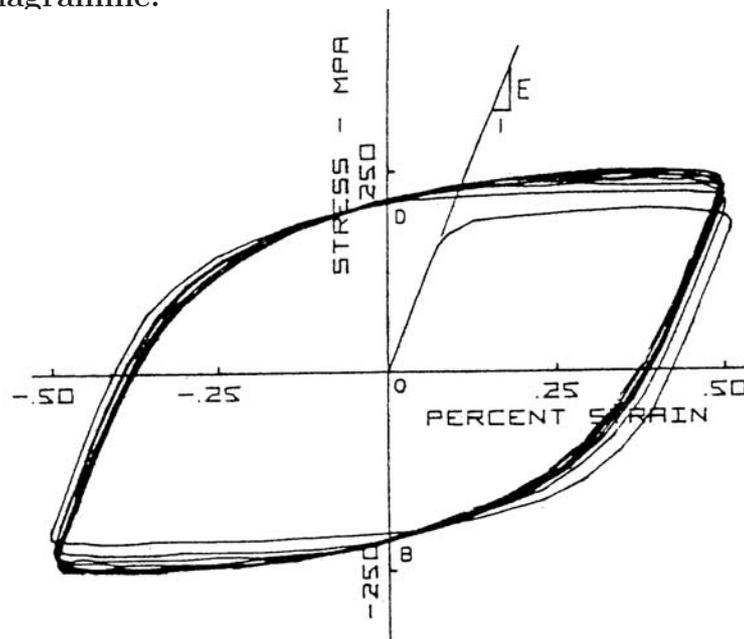


Abbildung 9.35: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für rostfreien Stahl AISI Typ 304 aus ADAMS und KREML [9]

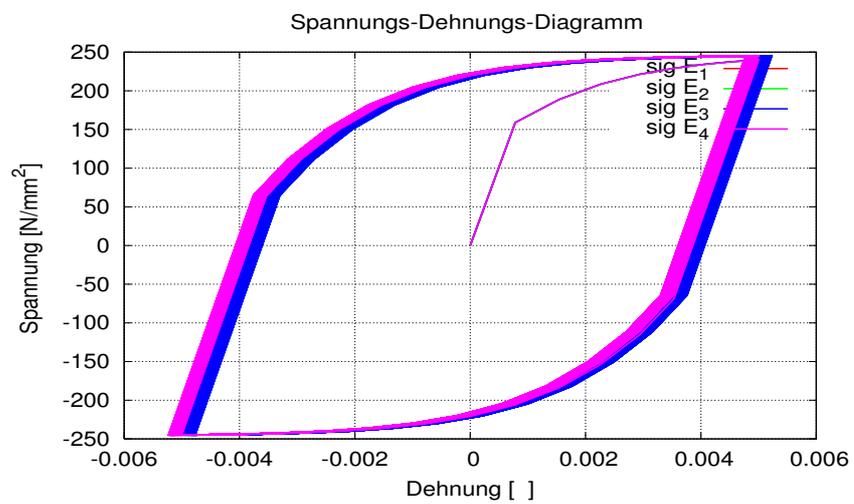


Abbildung 9.36: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für 100 Lastzyklen

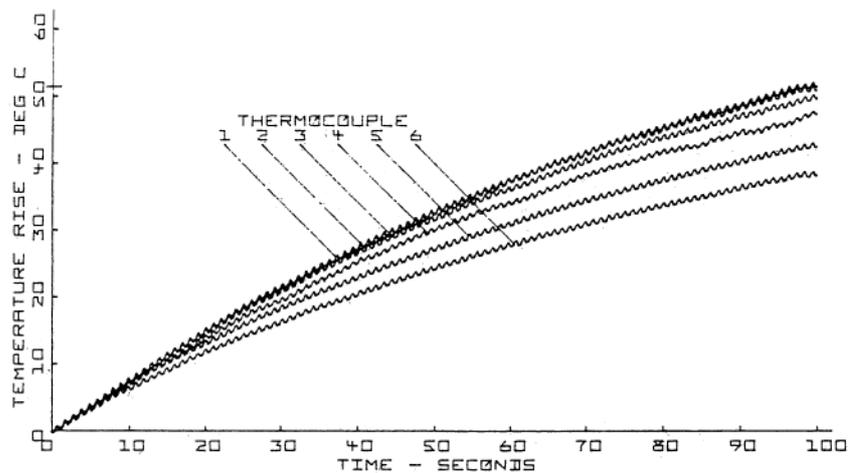


Abbildung 9.37: Temperaturentwicklung nach ADAMS und KREMPL [9]

Die Abbildung zeigt die Temperaturentwicklung an der Oberfläche des Stabes, wie sich von ADAMS und KREMPL experimentell aufgenommen. Die oberste Kurve entspricht der Temperatur an der Stabmitte. Hier tritt am Ende des Experiments ein Temperaturanstieg von 52 K auf.

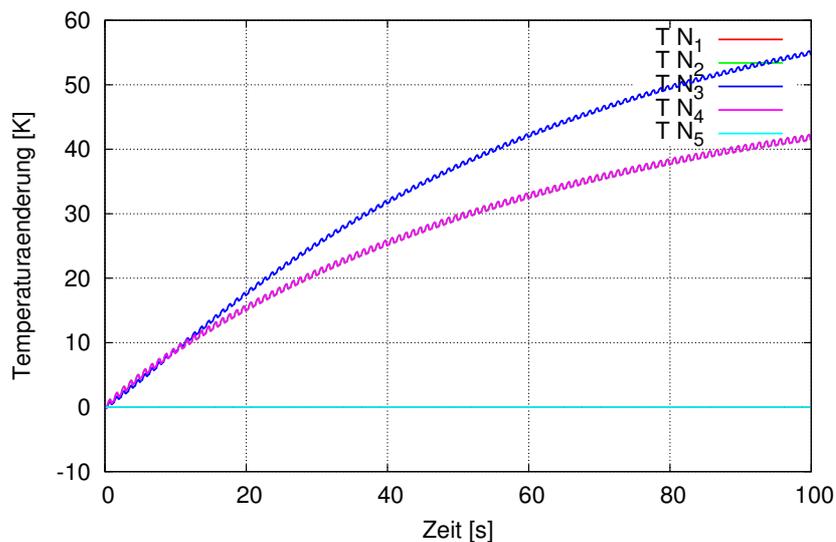


Abbildung 9.38: Temperaturentwicklung

Auch hier zeigt die obere Kurve die Temperaturentwicklung in der Stabmitte. Dabei zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen experimentellen Ergebnissen und der Berechnung. Der Endwert des Temperaturanstiegs liegt mit 55 K nun wenig über dem des Experiments.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung, der numerischen Umsetzung mittels der Methode der finiten Elemente und mit Simulation von thermoviskoelastischem und thermoplastischem Werkstoffverhalten. Dabei wird auch die Thermoviskoplastizität tangiert.

Zu Beginn werden Anforderungen an die Materialmodelle formuliert, um die thermomechanische Konsistenz zu erfüllen.

Ausgehend von rheologischen Modellen werden die Materialmodelle der Viskoelastizität, der Plastizität und der Viskoplastizität motiviert. Diese werden dann zu thermomechanischen Materialmodelle erweitert, wobei die thermomechanische Konsistenz erfüllt wird.

Anschließend wird eine lineare Dehnstabelementformulierung zuerst allgemein, und dann für die Thermoviskoelastizität und die Thermoplastizität hergeleitet. Diese Elemente werden mit FORTRAN 77 in das FE-Programm FEAP implementiert und dokumentiert.

Schließlich folgen für beide Elemente einige Verifikation- und Beispielrechnungen. Für das thermoviskoelastische Element werden mit den Materialdaten für Epoxidharz adiabatisch ein Kriech- und ein Relaxationsprozess berechnet. Dabei findet ein, wenn auch geringer, Temperaturanstieg aufgrund von Dissipationsvorgängen statt. Bei Berechnungen mit zyklischer Belastung zeigt sich die Geschwindigkeitsabhängigkeit durch die Ausbildung einer Hysterese im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Der auftretende Temperaturanstieg ist nun erheblich höher als bei den vorherigen Rechnungen. Deutlichen Einfluss hat bei all diesen Berechnungen der thermoelastische Kopplungseffekt.

Für das thermoplastische Dehnstabelement werden für eine Aluminiumlegierung Berechnungen nach HELM [7] zur Ermittlung der Energieumsetzung der plastischen Spannungsleistung in Wärme nachgerechnet. Dabei ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie bei HELM.

Eine Vergleichsrechnung zwischen thermomechanisch konsistenter Formulierung und einer Berechnung mit einem Taylor-Quinney-Koeffizienten von 1.0 zeigt, dass die vom Modell wiedergegebene Energiespeicherung aufgrund der mechanischen Dissipation bei einer großen verrichteten plastischen Arbeit nahezu keinen Einfluss mehr

auf die Temperaturänderung hat. Dagegen zeigt sich für einen häufig in der Praxis verwendeten Wert des Taylor-Quinney-Koeffizienten von 0.9 bei der Temperaturentwicklung ein deutlicher Unterschied.

Bei einer Berechnung mit zyklischer Belastung und isothermen Randbedingungen ergibt sich ein schon recht hoher Temperaturanstieg von 18 K. Deutlichen Einfluss hat auch hier noch der thermoelastische Kopplungseffekt. Das Verhältnis von gespeicherter Energie zur plastischen Arbeit strebt hier gegen null.

In einer Vergleichsrechnung zu KAMLAH [8] wird ein qualitativ gleiches Ergebnis gefunden, jedoch liegen die Temperaturwerte ca. 10% niedriger als bei KAMLAH.

Zum Abschluss wird noch ein Experiment von ADAMS und KREMPL [9] nachgerechnet. Die Materialparameter dafür wurden zum Teil aus einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm identifiziert. Dabei ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den experimentell ermittelten Ergebnissen von ADAMS und KREMPL und der Berechnung.

Literaturverzeichnis

- [1] Haupt, Peter: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, 2002.
- [2] Hartmann, Stefan: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität. Ein Finite-Elemente-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Dissertation (Bericht 1/1993) am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1993.
- [3] Hartmann, Stefan: *Runge-Kutta-Type Integration Schemes for Inelastic Constitutive Equations*. Universität Kassel, Mitteilungen des Instituts für Mechanik, Mitteilung 7/2001.
- [4] Hartmann, Stefan: *Finite-Elemente Berechnung inelastischer Kontinua. Interpretation als Algebro-Differentialgleichungssysteme*. Habilitation (Bericht 1/2003) am Institut für Mechanik der Universität Kassel, 2003.
- [5] Hartmann, Stefan: *A remark on the application of the Newton-Raphson method in non-linear finite element analysis*. Computational Mechanics 36 (2), 2005, 100-116.
- [6] Lührs, Georg: *Randwertaufgaben der Viskoplastizität. Modellierung, Simulation und Vergleich mit experimentellen Daten aus zyklischen Prozessen und Umformvorgängen*. Dissertation (Bericht 1/1997) am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1997.
- [7] Helm, Dirk: *Experimentelle Untersuchung und phänomenologische Modellierung thermomechanischer Kopplungseffekte in der Metallplastizität*. in: Hartmann, S.; Tsakmakis, C.: Aspekte der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, Bericht 1/1998 am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1998.
- [8] Kamlah, Marc: *Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik*. Universität Kassel, Institut für Mechanik, Bericht 3/1994.
- [9] Adams, S.L.; Krempl, E.: *Thermomechanical Response of 3.5 Ni-Mo-V Alloy Steel and Type 304 Stainless Steel Under Cyclic Uniaxial Inelastic Deformation*. Res Mecanica 10, 1984, p.295-316.
- [10] Lion, Alexander: *Materialeigenschaften der Viskoplastizität. Experimente, Modellierung, und Parameteridentifikation*. Dissertation (Bericht 1/1994) am Institut für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1994.

-
- [11] Taylor, Robert L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Programm, Version 7.5 Programmer Manuel*. University of California at Berkeley, March 2005.
- [12] Taylor, Robert L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Programm, Version 7.5 User Manuel*. University of California at Berkeley, Februar 2005.
- [13] Taylor, Robert L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Programm, Version 7.5 Example Manuel*. University of California at Berkeley, Februar 2005.

Danksagung

Diese Veröffentlichung basiert auf Forschungsarbeiten des Sonderforschungsbereichs SFB/TR TRR 30 „Prozessintegrierte Herstellung funktional gradierter Strukturen auf der Grundlage thermo-mechanisch gekoppelter Phänomene“, der von der deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert wird.