



**Institut  
für  
Mechanik**

Berichte des Instituts für Mechanik (Bericht 3/2008)

Carole Justine

Zum Materialverhalten von Mineralvlies  
Experimente, Modellbildung und Berechnung

# Berichte des Instituts für Mechanik

Bericht 3/2008

Carole Justine

## Zum Materialverhalten von Mineralvlies

Experimente, Modellbildung und Berechnung

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: PD Dr.-Ing. Stefan Hartmann

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt

Tag der Einreichung:

05. Dezember 2007

Tag der mündlichen Prüfung:

22. Februar 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2008

ISBN 978-3-89958-435-6

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel

[www.upress.uni-kassel.de](http://www.upress.uni-kassel.de)

Umschlaggestaltung: Heike Arend, Unidruckerei der Universität Kassel

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel

Printed in Germany

# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik des Fachbereiches Maschinenbau der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. P. Haupt für die wohlwollende Förderung und Unterstützung meiner Forschungstätigkeit. Die gründliche Durchsicht der Arbeit sowie die Hilfe bei der sprachlichen Korrektur in seiner Eigenschaft als Doktorvater und Korreferent möchte ich in diesem Zusammenhang besonders hervorheben.

Herrn Dr.-Ing. habil. S. Hartmann danke ich recht herzlich für das Interesse an meiner Arbeit, seine konstruktiven Anregungen zur Dissertationsschrift sowie die bereitwillige Übernahme des Hauptreferates und die damit verbundene Mühe. Den Herren Prof. Dr.-Ing. G. Knoll und Prof. Dr.-Ing. M. Link danke ich für ihr Mitwirken in der Prüfungskommission und ihr Interesse an meiner Arbeit.

Den Herren Dr.-Ing. L. Schreiber und Dipl.-Ing. G. Linek danke ich für die tatkräftige Unterstützung im Labor beim Aufbau der Prüfvorrichtung und bei der Durchführung der Experimente. Ferner möchte ich Herrn Dr.-Ing. L. Schreiber für die wertvollen Hinweise, zahlreichen anregenden Diskussionen und die Hilfe bei der sprachlichen Korrektur bedanken.

Allen Mitgliedern des Instituts danke ich herzlich für die gute Zusammenarbeit und ihre Unterstützung bei fachlichen und nichtfachlichen Problemen. Insbesondere bedanke ich mich bei meinen ehemaligen Kollegen Dr.-Ing. W. Bier, Dipl.-Ing. M. Conic, Dr.-Ing. D. Helm, Dr.-Ing. M. Fiolka, Dr.-Ing. S. Gerlach, Dr.-Ing. C. Kardelky, Dr.-Ing. T. Kersten, Dr.-Ing. habil. A. Lion sowie Dipl.-Ing. S. Lindemann.

Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich der Firma Volkswagen AG für das interessante Projekt und die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit.

Schließlich danke ich meine Eltern Anne-Marie und Hubert Justine, die mich aus weiter Ferne unterstützt haben und Antoine Volmert, der mich während der gesamten Arbeit aufmunternd begleitet hat. Meiner Tochter Maurane danke ich auch, daß sie viel Freude und Entspannung in mein Leben bringt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>3</b>
2.1	Die Matte im Katalysator: Einführende Beschreibung . . . . .	3
2.2	Versuchsbeschreibung . . . . .	5
2.3	Idealisierungen . . . . .	6
2.4	Experimenteller Aufbau . . . . .	7
2.5	Der Freiversuch . . . . .	8
2.5.1	Der Freiversuch ohne Haltezeit . . . . .	9
2.5.2	Der Freiversuch mit Haltezeiten . . . . .	11
2.6	Der Festversuch . . . . .	13
2.6.1	Die Auswirkung der Matteninhomogenität . . . . .	16
2.6.2	Untersuchung der transversalen Isotropie . . . . .	18
2.6.3	Untersuchung der Mattenisotropie . . . . .	21
2.7	Der Scherversuch . . . . .	25
2.7.1	Schwellversuche . . . . .	26
2.7.2	Wechselversuche . . . . .	29
2.8	Der Warmversuch . . . . .	32
2.9	Zusammenfassung . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>39</b>
3.1	Kinematik . . . . .	39
3.1.1	Materielle und räumliche Darstellung . . . . .	39
3.1.2	Deformationsgradient . . . . .	41
3.1.3	Zerlegungen des Deformationsgradienten . . . . .	45
3.1.4	Konzept der Dualen Variablen . . . . .	47
3.2	Bilanzgleichungen . . . . .	48
3.2.1	Bilanzrelationen der Mechanik . . . . .	49
3.2.2	Bilanzrelationen der Thermodynamik . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>53</b>
4.1	Einführung der phänomenologischen Vorgehensweise . . . . .	53
4.2	Physikalisch eindimensionales Modell . . . . .	54
4.2.1	Beschreibung eines linearen 1D-Modells: Das Zener-Modell . . . . .	55

4.2.2	Prinzipielle Entwicklung eines nichtlinearen 1D-Modells . . . . .	59
4.3	Physikalisch temperaturunabhängiges 3D-Modell . . . . .	61
4.3.1	Allgemeine Entwicklung . . . . .	61
4.3.2	Anwendung des dreidimensionalen temperaturunabhängigen Modells zur Darstellung der experimentellen Meßdaten . . . . .	70
4.3.3	Parameteridentifikation auf Basis des Festversuchs V6 . . . . .	81
4.4	Physikalisch temperaturabhängiges 3D-Modell bei isothermen Prozessen .	91
4.4.1	Allgemeine Entwicklung . . . . .	93
4.4.2	Parameteridentifikation auf Basis des Warmversuchs . . . . .	101
4.5	Zusammenfassung . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Numerik - Numerische Beispiele</b>	<b>109</b>
5.1	Finite Elemente Formulierung für ABAQUS . . . . .	109
5.2	Validierung am Scherversuch . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>

# Bezeichnungen

## Skalare Größen

- $\rho_0$  : Massendichte in der Referenzkonfiguration
- $\rho$  : Massendichte in der Momentankonfiguration
- $\Theta_0$  : Anfangstemperatur
- $\Theta$  : Momentane Temperatur
- $\lambda$  : Streckung in Axialrichtung
- $\lambda_q$  : Streckung in Querrichtung
- $\lambda_n$  : Streckung im Null-Spannungszustand nach der Erwärmungsphase
- $\varepsilon$  : Dehnung
- $\hat{\varepsilon}_e$  : Elastischer Anteil der Dehnung
- $\varepsilon_\eta$  : Inelastischer Anteil der Dehnung
- $\sigma$  : Spannung
- $\sigma_{eq}$  : Gleichgewichtsspannung
- $\sigma_{ov}$  : Überspannung
- $\Psi$  : Freie Energie
- $\Psi_{eq}$  : Gleichgewichtsanteil der Freien Energie
- $\Psi_{ov}$  : Nichtgleichgewichtsanteil der Freien Energie
- $q$  : Strukturvariable

## Vektoren

- $\vec{X}$  : Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
- $\vec{x}$  : Ortsvektor in der Momentankonfiguration
- $\vec{e}_i$  : Einheitsvektoren in der Momentankonfiguration
- $\vec{n}$  : Nach außen gerichteter Normalenvektor

## Tensoren

- $\mathbf{1}$  : Einheitstensor
- $\mathbf{F}$  : Deformationsgradient
- $\mathbf{F}_\theta$  : Temperaturabhängiger Anteil des Deformationsgradienten
- $\mathbf{F}_M$  : Mechanischer Anteil des Deformationsgradienten
- $\hat{\mathbf{F}}_e$  : Elastischer Anteil des Deformationsgradienten
- $\mathbf{F}_v$  : Inelastischer Anteil des Deformationsgradienten



$\mathbf{E}$	: Greenscher Verzerrungstensor
$\mathbf{B}$	: Linker Cauchy-Green Tensor
$\mathbf{B}_v$	: Inelastischer Anteil des Linken Cauchy-Green Tensors
$\mathbf{C}$	: Rechter Cauchy-Green Tensor
$\mathbf{C}_M$	: Mechanischer Anteil des Rechten Cauchy-Green Tensors
$\hat{\mathbf{C}}_e$	: Elastischer Anteil des Rechten Cauchy-Green Tensors
$\mathbf{C}_v$	: Inelastischer Anteil des Rechten Cauchy-Green Tensors
$\mathbf{L}$	: Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{D}$	: Symmetrischer Anteil von $\mathbf{L}$ (Verzerrungsgeschwindigkeitstensor)
$\hat{\mathbf{\Gamma}}$	: Greenscher Verzerrungstensor in der Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$	: Elastischer Anteil von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ in der Zwischenkonfiguration
$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v$	: Inelastischer Anteil von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ in der Zwischenkonfiguration
$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}$	: Materielle Zeitableitung von $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ in der Zwischenkonfiguration
$\mathbf{T}$	: Cauchysche Spannung in der Momentankonfiguration
$\tilde{\mathbf{T}}$	: Zweiter Piola-Kirchhoff-Tensor in der Referenzkonfiguration
$\tilde{\mathbf{T}}_{eq}$	: Elastischer Anteil des Zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors
$\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$	: Inelastischer Anteil des Zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors
$\hat{\mathbf{S}}_{ov}$	: Inelastischer Anteil der Spannung in der Zwischenkonfiguration
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	: Verzerrungssinkrement
$\Delta\check{\boldsymbol{\varepsilon}}$	: Gestörtes Verzerrungssinkrement
$\check{\mathbf{T}}$	: Gestörte Cauchysche Spannung
$\mathcal{D}$	: Tangentenoperator

## Materialparameter

$\varphi$	: Temperaturabhängigkeit von $\mathbf{F}_\theta$
$\mu_{eq}, f_{eq}, \nu_{eq}$	: Parameter des elastischen Anteils der Freien Energie
$\mu_{ov}, f_{ov}, \nu_{ov}$	: Parameter des inelastischen Anteils der Freien Energie
$\eta$	: Viskosität
$\alpha$	: Gewichtungsfaktor zwischen der Gestalt- und der Volumenviskosität
$\eta_0, k_0, k_1, \chi$	: Parameter in der Gleichung für die Viskosität $\eta$
$\tau_{max}, \tau_{min}$	: Maximale Relaxationszeit, minimale Relaxationszeit
$\tau_q, \zeta$	: Parameter in der Evolutionsgleichung für die Strukturvariable $q$

# 1 Einleitung

Die Kontinuumsmechanik<sup>1</sup> liefert Möglichkeiten zur Beschreibung des geometrischen und physikalischen Materialverhaltens unter mechanischen und thermischen Beanspruchungen. Oft wird diese Theorie heutzutage für ein technisches Ziel eingesetzt, um das Materialverhalten in konkreten Fällen zu beschreiben bzw. vorherzusagen.

In der Materialtheorie werden Materialien nach ihrem Verhalten in die unterschiedlichen Klassen der Elastizität, Viskoelastizität, Elastoplastizität oder Viskoplastizität eingeordnet. Die Klassifikation des Materials ist subjektiv und bezieht sich auf das Materialverhalten in den untersuchten Bereichen und unter entsprechenden Randbedingungen, da nur aus Versuchsmeßdaten die Einordnung möglich ist. Für jede Klassifikation gibt es aus der Literatur bekannte physikalisch sinnvolle Stoffgleichungen bzw. Stoffmodelle, die die zeitlichen Abläufe der phänomenologischen Größen wie z.B. Verformung und/oder Temperatur darstellen. Ein klassisches Beispiel ist der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung (Hookesches Gesetz, s. Seite 54) für elastisches Material.

Die vorliegende Arbeit illustriert einen Teil der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf ein konkretes technisches Beispiel. Im Auftrag der Firma Volkswagen AG, Baunatal sollte ein isolierendes Material im Fahrzeugauspuff - die Matte - experimentell untersucht, modelliert und simuliert werden. Da dieses Material während der Produktion den keramischen Körper gegen den Prozeßdruck im Katalysator stützen und während der Fahrt den keramischen Körper im Stahlgehäuse gegen Temperaturdehnung festhalten soll, wird diese Studie zwei unterschiedliche Lebensbereiche der Matte betreffen: Einerseits soll das Material bei Raumtemperatur für die Produktionsphase und andererseits bei unterschiedlichen Temperaturen für die Fahrtphase untersucht werden.

Ziel ist es, Stoffgleichungen - basierend auf experimentellen Beobachtungen - zu entwickeln, um das Materialverhalten für einfache Geometrien mit dem Finite-Elemente-Programm ABAQUS zu simulieren. Das entwickelte Modell soll später bei Volkswagen das Mattenverhalten während der Katalysatorproduktion bei Raumtemperatur und während der Fahrt bei unterschiedlichen Temperaturen im Katalysator wiedergeben.

---

<sup>1</sup>”Die allgemeinen Aussagen der Kontinuumsmechanik beschreiben die Naturgesetze und die Bewegung der materiellen Punkte eines Körpers”.

Die Struktur dieser Arbeit ist die folgende: Im Kapitel 2 werden zunächst die unterschiedlichen Versuche vorgestellt, mit denen das Materialverhalten beobachtet, klassifiziert und später mit Stoffgleichungen modelliert wird. Zu diesen Experimenten gehören der Freiversuch, der die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materialverhaltens zeigt, und der Festversuch, der eine eventuell vorhandene oder auszuschließende Anisotropie des Materials untersucht. Dazu gibt es noch den Scherversuch, der das Hystereseverhalten illustriert, und den Warmversuch, der das Materialverhalten bei unterschiedlichen Temperaturen beschreibt. Um diese Arbeit verständlich zu machen, werden einige kontinuumsmechanische Grundlagen, wie die Bilanzgleichungen der Mechanik sowie die der Thermodynamik im Kapitel 3 eingeführt.

Nach den im Kapitel 2 festgestellten Beobachtungen werden im Kapitel 4 ein linear und ein nichtlinear temperaturunabhängiges eindimensionales Modell für viskoelastisches Material dargestellt. Darauf folgt die Entwicklung eines nichtlinear temperaturunabhängigen dreidimensionalen Modells bei Raumtemperatur. Dieses Modell wird als nichtlinear temperaturabhängiges dreidimensionales Modell für isotherme Prozesse bei unterschiedlichen festen Temperaturen erweitert. Zum Kapitelschluß wird eine Parameteridentifikation aus den Versuchsmeßdaten der Matte INPE 570 für das temperaturunabhängige dreidimensionale Modell vorgenommen. Für das temperaturabhängige dreidimensionale Modell werden die Parameter aus den Warmversuchen der Matte INPE 570 identifiziert.

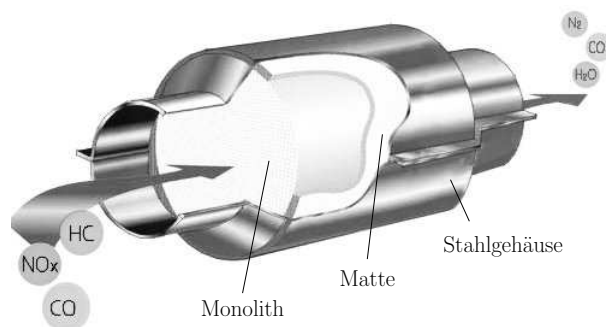
Zum Schluß wird das nichtlinear temperaturunabhängige Modell im Kapitel 5 überprüft. Dazu werden, nachdem die Theorie der Finite-Elemente-Methode kurz eingeführt wird, Scherversuche mit ABAQUS simuliert und die numerischen Ergebnisse mit den entsprechenden Meßdaten verglichen.

# 2 Experimentelle Untersuchungen

## 2.1 Die Matte im Katalysator: Einführende Beschreibung

Der Katalysator ist Teil der Abgasanlage von Fahrzeugen, meistens von LKW und PKW. Er befindet sich in der Abgasanlage zwischen den beiden Schalldämpfertöpfen. Er soll durch chemische Reaktionen die Abgasemissionen verbessern, bevor sie an die freie Luft geraten. Die meisten Katalysatoren bestehen aus einem Stahlgehäuse, einem keramischen Filter, dem sogenannten 'Monolithen', und einem zwischenliegenden Isolierstoff, der Matte. Der Monolith hat eine Unzahl von Durchgangskanälen, deren Wände mit katalytisch wirkendem Metall beschichtet sind. Die Abgasverbesserung erfolgt, während die Gase durch die Kanäle strömen. Weitergehende Informationen über Katalysatoren findet man im Buch von Hagelüken[16] oder in Stroom[50].

Das folgende Bild, das einem pdf-Werbeprospekt<sup>1</sup> der Fa. Corning entstammt, stellt den prinzipiellen Aufbau eines Autokatalysators dar.



**Abbildung 2.1:** Katalysator (Schema)

Der Isolierstoff bzw. die Matte, die in dieser Arbeit untersucht wird, spielt mehrere wichtigen Rollen im Katalysator. Zuerst muß die Matte die Toleranzen von Monolith und Gehäuse ausgleichen, damit der keramische Körper im Katalysatorgehäuse kein Spiel hat. Dieser Zustand muß auch im Betrieb erhalten bleiben, besonders weil die thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Metallgehäuse und Keramikmonolith unterschiedlich sind. Außer dieser Fixierung muß der Monolith auch vor mechanischen Einwirkungen geschützt werden. Der keramische Werkstoff ist spröde, und die Wandstärken zwischen den Durchgangskanälen sind im Zehntel-Millimeter-Bereich.

<sup>1</sup>Anatomy of a Catalytic Converter, Fall 2001-Number 19: Article 3, Corning Inc. 2002

Da die chemische Reaktion für die Verbesserung von Abgasemissionen bei hohen Temperaturen (von ca. 250°C bis ca. 750°C) optimal ist, ist man bemüht, die Katalysatortemperatur ständig möglichst hoch zu halten. D.h., die Matte muß ein guter thermischer Isolierstoff sein. Damit soll gewährleistet sein, daß z.B. bei einer kurzen Betriebsunterbrechung die Temperatur im Monolithen nicht zu sehr abfällt. Die Matte muß auch noch eine gute Abdichtung bilden, damit das Abgas nicht ungefiltert am beschichteten Monolithen vorbeiströmt.

Um diese verschiedenen Aufgaben zu erfüllen, wurden und werden immer noch neue Mineralvliese entwickelt. Die meisten Matten bestehen aus Glimmer, Keramikfasern und organischem Binder (z.B. Latex). Nach den Eigenschaften der Mineralfasern werden die Matten in Klassen eingeteilt. Die Länge, der Durchmesser sowie das Längen/Durchmesserverhältnis sind die Kennwerte für die Klassifikation (s. z.B. Zimmer[54] oder Kap. 9 in [48]). Da diese Parameter auch die Grenzwerte für das Lungenkrebs-Risiko sind, wurden in der Zwischenzeit einige Matten per Gesetz als gesundheitsschädigend bezeichnet und werden infolgedessen nicht mehr produziert.

Aus mechanischer Sicht erlebt die Matte während der Verarbeitung und der anschließenden Betriebszeiten viele Änderungszustände, d.h. Kompression, Reibungen, Vibrationen, Temperaturänderungen, etc.. Während der Produktion des Katalysators wird die Matte um den Monolithen gewickelt und anschließend beim Einpacken in das Blechgehäuse um ca. 60% komprimiert (bezogen auf ihren Lieferzustand). Nachdem das Gehäuse verschweißt ist, wird die Matte in diesem komprimierten Zustand festgehalten. Bei der Beanspruchung im Betrieb erwärmen die Abgase den Katalysator und damit auch die Matte. Dabei verbrennt schon beim allerersten Erhitzen von einer Temperatur über 250-400°C (dieser Grenzwert ist materialabhängig) der organische Binder, und der eingelagerte Glimmer gibt gebundenes Wasser ab. Nach ca. ein bis zwei Stunden (die Dauer der ersten Warmphase ist auch materialabhängig) oberhalb des Temperaturgrenzwertes ist der Binder restlos verbrannt, und es ist kein Wasser mehr in der Matte. Die Matte hat dann eine andere Zusammensetzung und zeigt daher ein anderes Verhalten (s. Kap. 2.1.1. oder Kap. 3.2. in [55]).

Zu Anfang des hier beschriebenen Forschungsprojektes wurden einige Matten von der Firma Volkswagen AG vorgeschlagen, um daran die Eigenschaften dieser Isolierstoffe durch Experimente zu untersuchen. Da während des Projektverlaufs die Mineralvliese bzw. der Mattenstoff weiter entwickelt und in Bezug auf Gesundheitsgefahren untersucht wurde, sind einige der damals vorgeschlagenen Matten inzwischen als gesundheitsschädigend angesehen worden und wurden daher nicht mehr weiter untersucht. Andererseits sind auch neue zu untersuchende Matten im Verlauf des Projektes geliefert worden. Insgesamt standen im Lauf der Zeit 19 unterschiedliche Materialien zur Verfügung. Doch zu keiner Zeit war die Menge der schon gelieferten aber noch nicht gesetzlich verbotenen oder aus anderen Gründen ausgemusterten Stoffe größer als zehn. Alle Versuche wurden für mehrere unterschiedliche Matten durchgeführt, aber da nicht alle Matten zum selben

Zeitpunkt zugelassen waren, gibt es keinen Versuch, der mit allen 19 Matten gefahren wurde. Dies war auch nicht nötig, da sich schnell herausstellte, daß jeder Versuch auch bei unterschiedlichen Materialien immer ein ähnliches Verhalten, nur in unterschiedlicher Ausprägung, hervorrief. Von daher wird für jeden Versuchstyp in dieser Arbeit nur das Verhalten einer einzigen Matte dargestellt und als repräsentativ angesehen.

## 2.2 Versuchsbeschreibung

Das zu entwickelnde Materialmodell soll das Verhalten von Mineralvliesen in einem Temperaturbereich von Raumtemperatur (Verarbeitungstemperatur) bis ca. 750°C (maximale Betriebstemperatur) beschreiben. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde zuerst eine Gruppe von Versuchen bei Raumtemperatur gefahren und später um weitere Versuche bei unterschiedlichen Temperaturen ergänzt.

Die klassischen einaxialen Versuche der Materialtheorie sind Zugversuch, Stauchversuch und Scherversuch. Wesentlich schwieriger sind Zwei- und Dreiachsversuche, obwohl diese aus kontinuumsmechanischer Sicht ideal wären. Sie scheitern in den meisten Fällen an der Konstruktion der Krafteinleitung. Die Versuche der Werkstofftechnik, z.B. zur Feststellung der Härte, vereinigen in ihrem Meßwert meistens mehrere mechanische Parameter, so daß die Ergebnisse nur schwer bestimmbareren Phänomenen zuzuordnen sind. Diese Versuche kommen für die quantitative Bestimmung von Materialeigenschaften nicht in Frage.

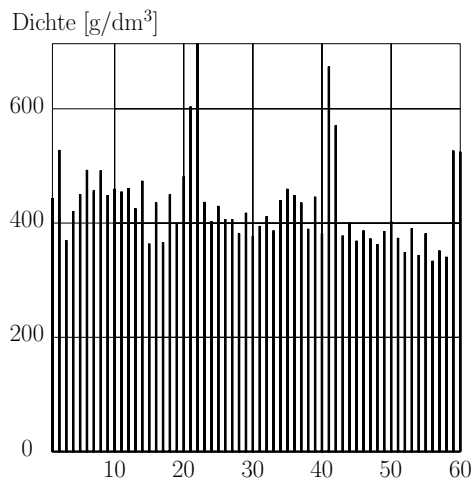
In Vorversuchen wurde getestet, welche der genannten Experimente sich für das zu untersuchende Material eignen. Dabei kam heraus, daß sich das Material schon bei kleinsten Zugbeanspruchungen auflöst. Damit fällt der Zugversuch aus. Grundsätzlich ist es möglich, eine flache Probe aus Mineralvlies zu scheren. Hier gibt es das Problem der Krafteinleitung: Die Scherkraft kann nur über Reibung in das Material eingeleitet werden. Eine verklebte Kontaktfläche würde bei diesen Materialien ein mehr oder weniger tiefes Eindringen des Klebers zwischen die Fasern mit sich bringen. D.h., nach dem Aushärten hätte man in den Randbereichen ein anderes Material. Verklebt man die Kontaktstellen nicht, so sind auch Entlastungen nach vorausgegangenen Druckbeanspruchungen problematisch: Man läuft Gefahr, daß der Stempel vom Material abhebt, wenn die Entlastung nicht langsam genug geschieht. Da das Material keine Zugbeanspruchung erlaubt, bleiben nur Versuche im Druckbereich und in begrenztem Maß im Scherbereich übrig. Im Stauchbereich ist noch die Variante mit festen Seitenwänden möglich.

Die bisherigen Überlegungen gelten allerdings nur für Raumtemperatur. Bei höheren Temperaturen kommt zum Problem der Krafteinleitung noch das Problem der Wärmeinleitung hinzu. Da die Wärmeinleitung nur über Kontakt erfolgen kann, bleibt für alle Warmversuche nur die einfache Stauchung übrig.

## 2.3 Idealisierungen

Um die mechanischen Eigenschaften eines Materials zu ermitteln, sollten homogene Materialproben in einer idealisierenden Umgebung betrachtet werden. Zu diesem Zweck müssen Versuche unter räumlich homogenen Spannungs- und Verzerrungszuständen und Temperaturfeldern gefahren werden. Zur näherungsweise Realisierung solcher idealer Zustände werden Proben mit bestimmter Geometrie unter festgelegten Belastungen bei zeitlich gesteuerten Temperaturverläufen untersucht. Die äußeren Bedingungen des Labors (Raumtemperatur, Luftfeuchtigkeit, etc.) werden als konstant angesehen. Da alle genannten Annahmen verantwortlich für die Qualität der Experimente sind, muß auch die Materialhomogenität überprüft werden.

Zu diesem Zweck wurden aus einer Matte 60 Proben ( $50 \times 50 \text{ mm}^2$ ) geschnitten. An diesen Proben sollte die Homogenität der Dichte überprüft werden. Mit der nicht nachprüfbaren Annahme<sup>2</sup>, daß die Proben z.B. für die Matte<sup>3</sup> INPE 570 immer 6.9 mm dick sind, wurde jede Probe gewogen und anschließend ihre Dichte berechnet. Abb. 2.2 stellt alle ermittelten Werte für die Matte INPE 570 dar. Für die anderen Matten sieht es ähnlich aus.



**Abbildung 2.2:** Berechneten Dichten

Der Mittelwert der berechneten Dichten liegt bei ca.  $431 \text{ g/dm}^3$  mit einer Abweichung von  $\pm 20\%$ , was erheblich mehr ist als die vom Hersteller angegebenen Abweichungen in der Dicke ( $0.7\%$ ). Der Vorversuch zeigte, daß das Material entweder sehr inhomogen ist, oder daß die Dicke der Platten um mehr als  $7\%$  schwankt. Diese Eigenschaft beeinflusst alle weiteren Versuche sehr stark und darf, für die spätere technische Anwendung nicht aus den Augen verloren werden. Um diese Eigenschaft auszugleichen müßte eine Vielzahl an Versuchen durchgeführt und statistische Methoden angewendet werden. Da es in

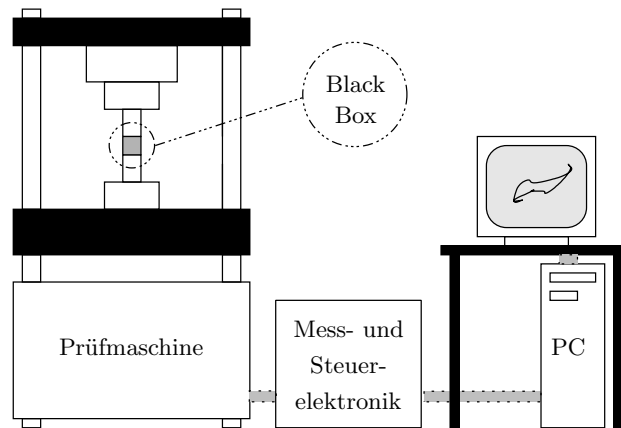
<sup>2</sup>Die Hersteller des Materials garantieren eine Dicke von  $6.9 \text{ mm} \pm 0.005$ . Die Oberfläche der Matte ist zu nachgiebig und optisch zu schlecht definiert, als daß man die Dicke mit mechanischen oder optischen Methoden genau messen könnte.

<sup>3</sup>Lieferbezeichnung der Herstellerfirma 3M, D-41453 Neuss

dieser Arbeit jedoch vorrangig um den Entwurf eines Materialmodells geht, das die Phänomenologie von Mineralvliesen qualitativ zutreffend beschreibt, ist die Exaktheit in der Bestimmung der Materialparameter weniger bedeutend. Um die Auswirkung der Schwankungen der Plattendicke zu verringern und eine mittlere Materialhomogenität anzunähern, bestanden deshalb die untersuchten Proben, wenn möglich, aus Stapeln von mehreren nicht benachbart ausgeschnittenen Materialstücken.

## 2.4 Experimenteller Aufbau

Zur Durchführung der einzelnen Experimente wurde eine elektromechanische Einachs-Prüfmaschine eingesetzt, mit der Zug- und Druckbelastungen in geregelter Kraft- und Weggrößensteuerung aufgebracht werden können. Außerdem können Materialproben im Kontakt mit Heizblöcken zeitlich gesteuerten Temperaturverläufen ausgesetzt werden. Der Versuchsaufbau wird in dem folgenden Schema skizziert.



**Abbildung 2.3:** Versuchsaufbau (Schema)

Um die materialtypischen Phänomene zu beobachten, wurden mehrere unterschiedliche Versuchstypen entwickelt<sup>4</sup>. Zu jedem Versuchstyp gehört eine eigene Probeneinspannung. In dem Schema ist sie als "Blackbox" eingezeichnet, auch als "Vorrichtung" bezeichnet und wird später zu jedem Versuch erklärt.

Die Steuerung bzw. die Steuersignal-Ausgabe und die Meßdatenaufzeichnung der Experimente werden mit dem Programm DASYLab<sup>5</sup> auf einem Computer durchgeführt, der über eine 16 bit A/D-D/A Wandlerkarte verfügt.

<sup>4</sup>Alle Versuche wurden in Zusammenarbeit mit den Herren Dr.-Ing. L. Schreiber und Dipl.-Ing. G. Linnek entwickelt sowie durchgeführt; deswegen möchte ich mich bei ihnen herzlich bedanken.

<sup>5</sup>Data Acquisition System Laboratory, Version 6.0, kommerzielles Meß- und Steuerungssoftware unter Windows



Zur Messung des Weges und der Kraft in Axialrichtung werden verschiedene Sensoren benutzt:

- Induktiver Wegaufnehmer  $\pm 5$  mm,
- Induktiver Relativwegaufnehmer  $\pm 10$  mm,
- Kraftmeßdose  $\pm 10$  kN, Genauigkeit  $10^{-3}$ .

Die Meßaufnehmer wurden folgendermaßen ausgewählt: Ausgangspunkt der Überlegung war eine Deformation von ca. 70%, die im industriellen Prozeß (Canning im Katalysatorbau, siehe [38], Kap. 4-3-1. in [55] oder Kap. 5-3.3. in [16]) üblich ist. Bei einer vorgegeben Materialstärke von 5 bis 15 mm war die erste Überlegung, daß das Quermaß der Probe ein Mehrfaches der Materialstärke sein sollte, d.h. 25 bis 50 mm (s. spätere Kapitel). Aus Vorversuchen ergaben sich Axialkräfte von ca. 8 kN bei der angestrebten Deformation von 70%. Dazu paßt die ausgewählte Kraftmeßdose. Bei der Genauigkeit von  $10^{-3}$  beträgt der Fehler der Meßdose bis zu 10 N. Das ist ein Nachteil, denn Kräfte in dieser Größenordnung sind durchaus in der Lage, die untersuchten Materialien sichtbar zu deformieren. D.h., die sonst, bei festeren Materialien, übliche Methode, den Nullpunkt der Deformation durch Kontakt (Inkaufnahme einer kleinen Kontaktkraft) herzustellen, ist hier nicht möglich, da sie nicht vernachlässigbare Deformationen produziert. Die Methode, mit der bei den verschiedenen Versuchstypen der Nullpunkt festgelegt wurde, wird im weiteren Text genauer beschrieben. Im Vergleich zu der Festigkeit der untersuchten Materialien kann die Prüfmaschine als starr angesehen werden. Die Prüfmaschine ist auf die Durchführung sehr langsamer Versuche ausgelegt, d.h. die maximale Vorschubgeschwindigkeit ist 1,6 mm/s. Das stellt keinen Nachteil dar, weil viskose Effekte nicht nur in unterschiedlich schnellen Belastungen deutlich werden, sondern auch in Haltezeiten.

## 2.5 Der Freiversuch

Das Wort 'Freiversuch' beschreibt den klassischen Stauchversuch. Der Name wurde gewählt, um eine einfache Unterscheidung zu dem später beschriebenen Stauchversuch mit festen Seitenwänden zu ermöglichen. Die Aufgabe dieses einaxialen Versuchs ist, die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materials bei Raumtemperatur zu überprüfen.

In diesem Fall besteht der Teil des Versuchsaufbaus (s. Abb. 2.4), der zuvor als Vorrichtung bezeichnet wurde, aus zwei gegenüberliegenden Stempeln. Die Oberflächen der Stempel sind poliert. Zwischen den beiden Stempeln wird die Probe in Richtung der Dicke belastet. Die Stempel und Probe haben beide entweder einen Durchmesser von 28 mm oder 30 mm. Der kleinere Durchmesser kam zur Anwendung, wenn größere Kräfte zu erwarten waren, als die Kraftmeßdose erlaubt.

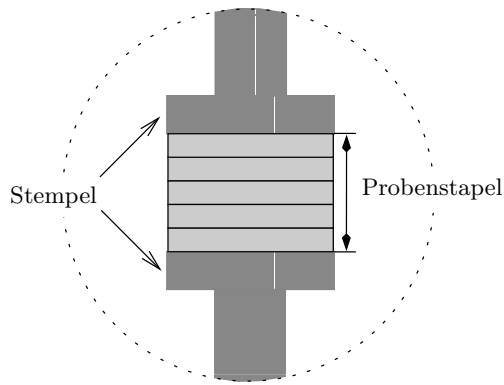


Abbildung 2.4: Freiversuchsvorrichtung

Um möglichst große Meßsignale zu erhalten und gleichzeitig eine Mittelung über mehrere Proben zu machen, wurde nicht nur eine einzelne Materialprobe komprimiert, sondern gleich ein ganzer Stapel. D.h., die 'Probe' war ein Stapel von 3 bis 6 Stück (je nach Mattendicke) mit einer Höhe von mindestens 24 mm. Der Belastungsprozeß wurde weggesteuert gefahren und die Meßdaten, d.h. die Zeit, der Weg und die Axialkraft, mit einer Frequenz von 20 Hz aufgenommen.

### 2.5.1 Der Freiversuch ohne Haltezeit

Zuerst wurde die Probe einem monotonen Belastungsprozeß mit vier unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten unterworfen. Der Prozeß endete jeweils bei einer Gesamtstauchung von 70%. Die Vorschubgeschwindigkeit  $v_0$  wird auf  $-1.6 \text{ mm/s}$  festgelegt. Von dieser Grundgeschwindigkeit unterscheiden sich die Prozeßgeschwindigkeiten um die Faktoren 0.1, 0.01, 0.001. Bei einem Vorschubweg von 24 mm, wie z.B. für die Matte INPE 570, bedeutet das Versuchszeiten von 15 s bis fast 4,5 h. Um ein Minimum an statistischer Aussage zu gewährleisten, wird der schnellste Versuch zweimal wiederholt, der zehnmal langsamere einmal, die zwei langsamsten Versuche werden jeweils nur einmal gefahren. Abb. 2.5 stellt die Versuchsverläufe dar.

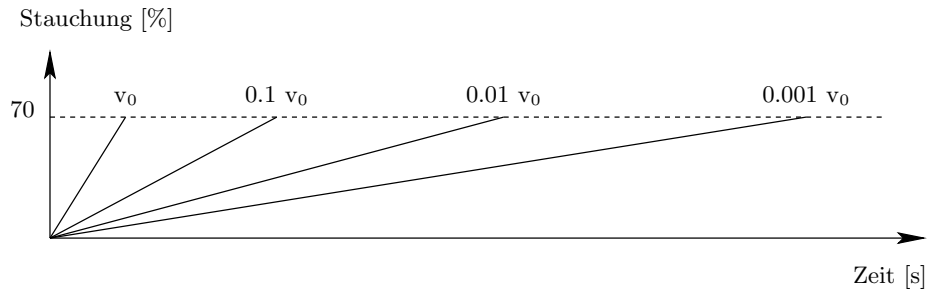
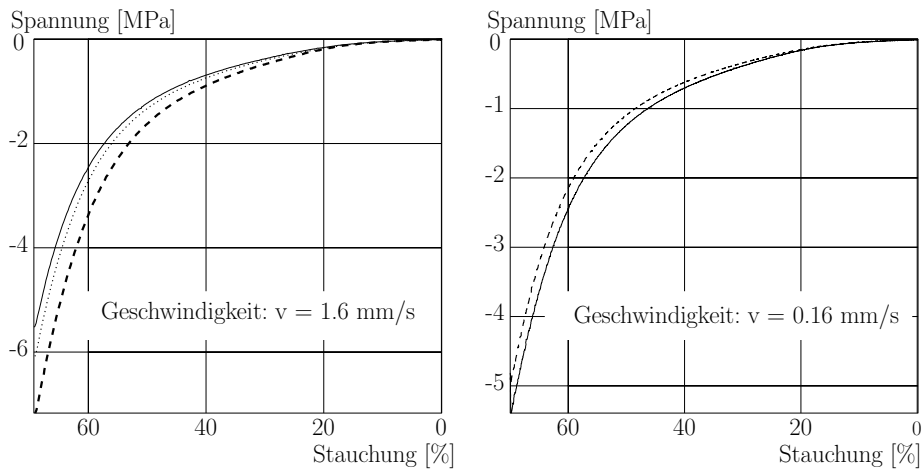


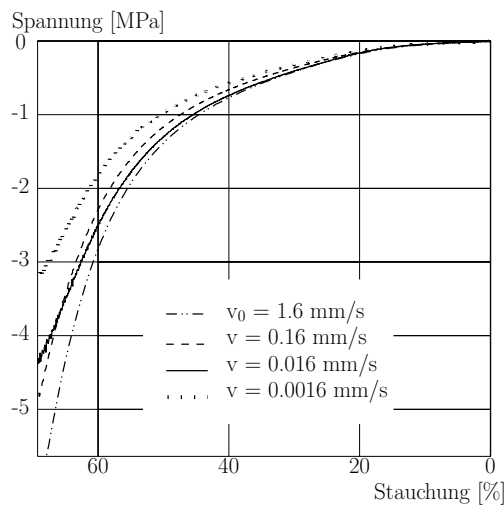
Abbildung 2.5: Prinzipielle Verläufe über der Zeit

Vergleicht man zunächst die Versuche, die mit derselben Geschwindigkeit gefahren wurden, so stellt man Unterschiede fest. In Abb. 2.6 (links) findet man die Darstellung für die schnellste Versuchsgeschwindigkeit ( $v_0 = -1.6 \text{ mm/s}$ , drei Kurven) und in Abb. 2.6 (rechts) die Darstellung für die zehnmal langsamere ( $v = 0.1 \cdot v_0 = -0.16 \text{ mm/s}$ , zwei Kurven).



**Abbildung 2.6:** Spannungsdehnungskurven der Matte INPE 570

Diese Darstellungen zeigen deutlich, daß Proben von denselben Matten bei gleicher Geschwindigkeit unterschiedliche Antworten geben. Diese Beobachtung entspricht dem vermuteten Einfluß der Inhomogenität der Matten. Um den Einfluß der Schwankungen in den Materialeigenschaften auszugleichen, wird für die mehrfach durchgeführten Versuche eine mittlere Kurve aus den Meßdaten errechnet. Die gemittelten Kurven werden gemeinsam mit den Kurven aus den langsameren Experimenten in Abb. 2.7 dargestellt.



**Abbildung 2.7:** Spannungsdehnungskurve mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten

Der zehnmal und der hundertmal langsamere Versuch liefern Spannungsdehnungskurven, die sich wenig unterscheiden. Die zwei anderen Kurven (aus dem schnellsten und langsamsten Versuch), wo sich die Geschwindigkeitsbelastungen um einen Faktor tausend unterscheiden, zeigen deutliche Unterschiede.

Die vorherigen Beobachtungen erlauben noch keine quantitativen Feststellungen zu Materialeigenschaften. Sie zeigen aber, daß das Materialverhalten geschwindigkeitabhängig ist. Um die Geschwindigkeitabhängigkeit eines Materials genauer zu illustrieren, gibt es die Möglichkeit, einen Belastungsprozeß mit Haltezeiten zu fahren. Der folgende Versuch wurde während der Belastungsphasen nur mit einer einzigen Belastungsgeschwindigkeit aber mit unterschiedlichen Haltezeiten durchgeführt.

## 2.5.2 Der Freiversuch mit Haltezeiten

In diesem Fall wurde der klassische Stauchversuch in einer gestuften Version gefahren, d.h. die Belastung wurde durch Haltezeiten unterbrochen. Abb. 2.8 stellt den Versuchverlauf dar.

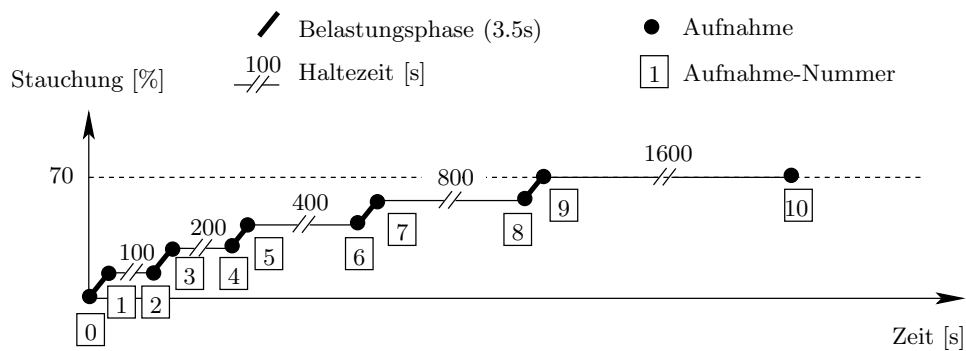
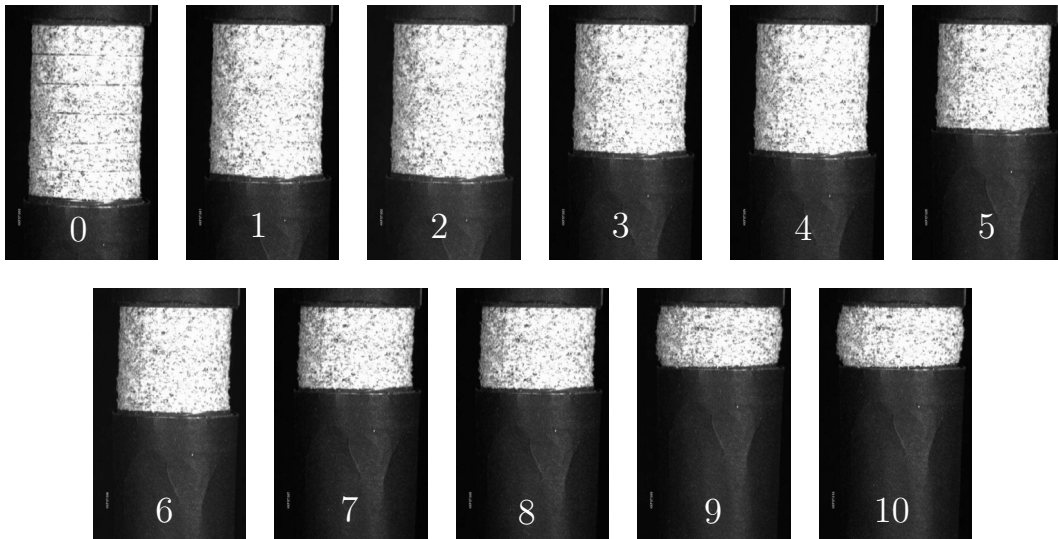


Abbildung 2.8: Prinzipielle Verläufe über der Zeit

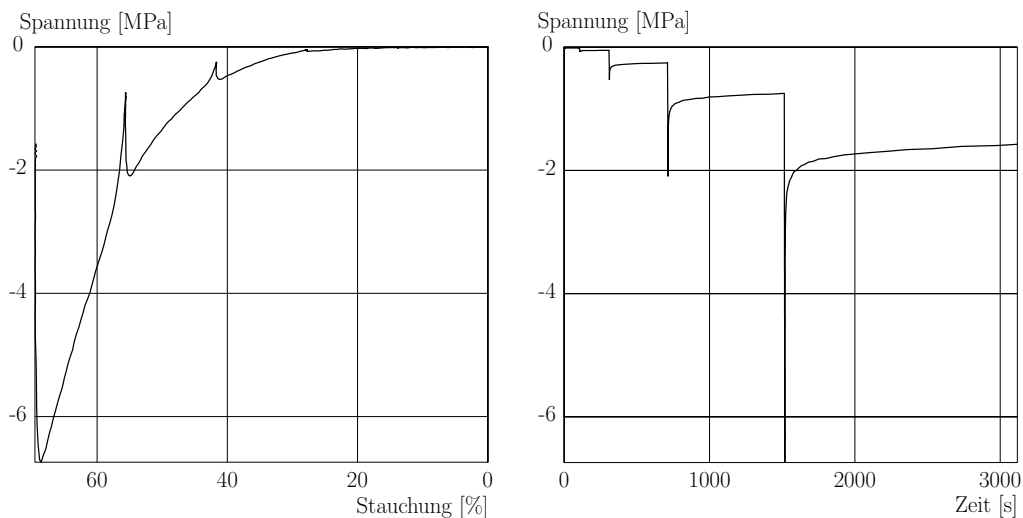
Der Verlauf besteht aus fünf Stufen, jede aus einer Belastungsphase von 3.5 s und einer variablen Haltezeit von 100 s bis 1600 s. Bei jedem Anfang einer weiteren Belastung bzw. Haltezeit, wie auch im Versuchsendzustand wurde die Probe mit einer CCD-Kamera aufgenommen. Die 'Probe' ist ein Stapel aus mehreren Platten. Die Zeitpunkte der Aufnahmen und ihre Reihenfolge sind in der obigen Skizze durch ihre Numerierung dargestellt. Die Nummern sind auch in den folgenden Bildern zur Identifikation aufgeführt. Als Beispiel wird die Matte NV<sup>6</sup> zusammen mit den aufgenommenen Meßwerten dargestellt und ihr Verhalten interpretiert. Die Probe für diese Matte besteht aus sechs Scheiben mit einer Gesamthöhe von 40.42 mm. Am Ende des Versuchs wurde eine Kompression von 70% erreicht. Die Fotos in Abb. 2.9 stellen die Entwicklung des Materials während der fünf Belastungsphasen und Haltezeiten dar.

<sup>6</sup>Lieferbezeichnung der Herstellerfirma Unifrax, D-40597 Düsseldorf



**Abbildung 2.9:** Versuchverlauf in Bilder der Matte NV

Erst in den Fotos zur fünften Haltezeit (s. Abb. 2.9, Nr. 9, 10) ist deutlich sichtbar, daß sich die Probe in Querrichtung deformiert und geringfügig ausbaucht. Mit bloßem Auge betrachtet trat die Ausbauchung während der fünften Belastungsphase auf (Nr. 9) und wuchs während der fünften Relaxation (Nr. 10).



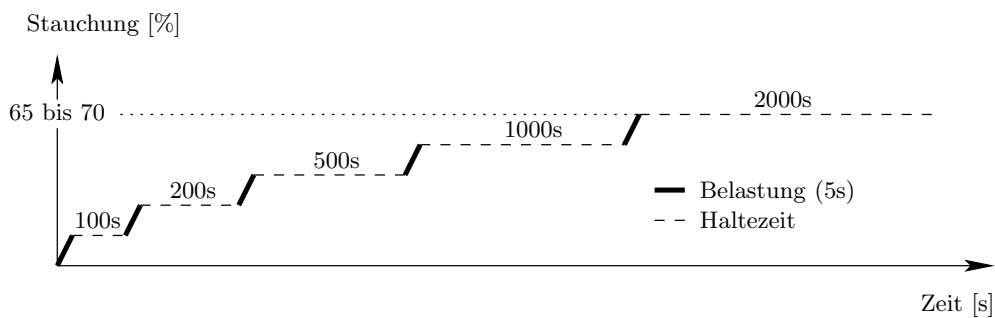
**Abbildung 2.10:** Spannungsdehnungskurve der Matte NV, Freiversuch mit Haltezeiten

Abb. 2.10 (links) stellt die Spannungsdehnungskurve der Matte NV dar. Wenn die Stauchung wächst, nimmt der Betrag der Spannung zu, und wenn die Stauchung konstant bleibt, nimmt der Betrag der Spannung ab. Dieses Verhalten ist typisch für ein viskoelastisches oder viskoplastisches Materialverhalten. Abb. 2.10 (rechts) stellt die Spannung der Matte NV über der Zeit dar. Die fünf Belastungsstufen des Versuchsverlaufs sind

auf dieser Darstellung deutlicher zu erkennen. Die Spannung am Anfang des Versuchs ist so gering, daß der Graph der ersten Stufe mit dem Rahmen der Darstellung zusammenfällt. Der Spannungsverlauf, der sich während einer Belastung und auch am Anfang der anschließenden Relaxation als vertikale Linie präsentiert, zeigt, daß das Material am Anfang einer Haltezeit sehr schnell und dann nach und nach viel langsamer relaxiert. Der Spannungsverlauf zeigt aber auch, daß die Haltezeiten der vierten und fünften Stufen nicht lang genug waren, da die Kurve am Ende dieser Haltezeiten noch nicht vollständig horizontal verläuft. Daher wurden die folgenden Versuche immer mit verlängerten Haltezeiten gefahren.

## 2.6 Der Festversuch

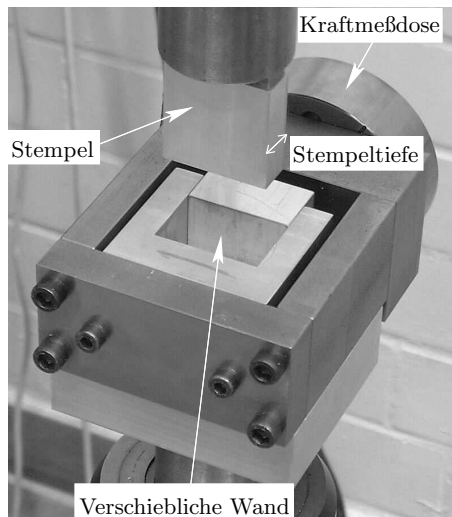
Das Wort "Festversuch" beschreibt eine Gruppe von Versuchen mit Querdehnungsbehinderungen (s. Abb. 2.12), die einem gleichartigen Verlauf der Belastung (Stauchung von 65 bis 70%) folgen. Die Versuche unterscheiden sich durch die Orientierung der Matte in der Prüfmaschine (s. Abb. 2.14). Das Ziel dieser Versuchskategorie ist die Überprüfung einer eventuellen Anisotropie der Matte. Dazu wird der in Abb. 2.11 dargestellte Prozeß gefahren.



**Abbildung 2.11:** Prinzipieller Versuchsverlauf über der Zeit

Der Belastungsprozeß besteht aus fünf Stufen, jede zuerst aus 5 Sekunden Belastung mit jeweils derselben Geschwindigkeit (0.72 mm/s oder 0.77 mm/s) und einer von Stufe zu Stufe unterschiedlichen Haltezeit. Insgesamt wird eine Stauchung von 65 bis 70% erreicht.

In diesem Fall besteht die Vorrichtung (s. Abb. 2.12) aus einem quaderförmigen Volumen, in dem die Probe in vertikaler Richtung durch einen passenden Stempel belastet wird und die Breite des Stempels festgelegt ist. Bei der Tiefenrichtung (s. Abb. 2.13) stehen mehrere Stufen zur Verfügung. Einige Matten sind sehr weich und andere härter. Da aber trotzdem die Spannungswerte in einem sinnvollen Bereich bleiben sollten, d.h. nicht zu groß (Gefährdung der Meßdose), aber auch nicht zu klein (ausreichender Störabstand), mußte eine zum Material passende Kompressionsoberfläche (Breite×Tiefe) gewählt werden.



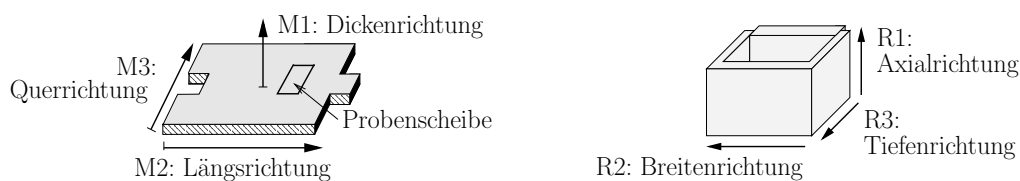
**Abbildung 2.12:** Festversuchs-Vorrichtung

Eine Nebenbedingung, die die Stufung der Stempeltiefe beeinflusste, kam von den verschiedenen Mattendicken: Die Stempeltiefe muß ein ganzzahliges Vielfaches der vorhandenen Mattendicken sein, weil es keine Möglichkeit gibt, die Matten quer zur Dicke zu schneiden. Wegen der unterschiedlichen Tiefen mußte eine der Seitenwände im Einrichtbetrieb verschieblich sein. Während des Versuchs stützt sich diese Wand auf einer Kraftmeßdose ab, deren Verformung so gering ist, daß die Wand als fest angesehen werden kann. Über die Kraftmeßdose wird die Querkraft gemessen, die sich aufbaut, wenn Querdeformationen verhindert werden. Der Maximalwert dieser Meßdose ist 2 kN.

Es war nur möglich, diese zusätzliche Meßinformation in einer Querrichtung zu konstruieren. Gleichzeitig eine zweite Querrichtung zu messen, hätte einen Aufwand erfordert, der nicht realisierbar gewesen wäre.

An den stützenden Seitenwänden tritt bei der Deformation des Probenstapels Reibung auf. Um den Effekt der Reibung klein zu halten, sind die stützenden Seitenwände glatt gehalten; sie wurden zusätzlich mit Teflonspray besprüht. Der Belastungsprozeß wurde weggesteuert gefahren und die Meßdaten, d.h. die Zeit, der Weg in Axial- und Querrichtung sowie die Axial- und Querkräfte, wurden mit einer Abtastrate von 20 Hz aufgenommen.

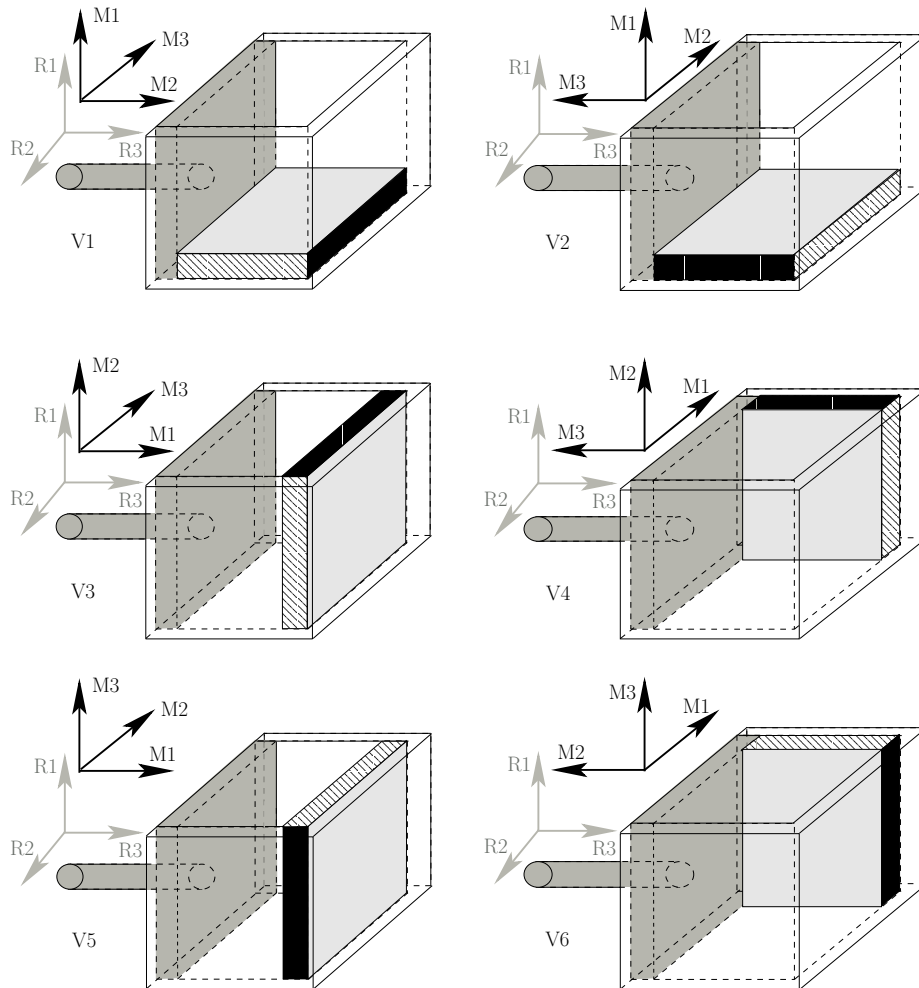
Weil die 6 Mattenproben für jeden Versuch immer unterschiedlich orientiert werden, erhält sowohl der quaderförmige Hohlraum, als auch die in ihm positionierte Matte ein eigenes Koordinatensystem.



**Abbildung 2.13:** Koordinatensysteme der Matte und des Hohlraums

Für den Hohlraum bezeichnen die Wörter 'Axialrichtung', 'Tiefenrichtung' und 'Breitenrichtung', die Vertikalrichtung bzw. die Wirkungsrichtung der ersten Meßdose (Axialspannung), die Wirkungsrichtung der zweiten Meßdose (Querspannung) und die Richtung senkrecht zu den festen Wände (s. Abb. 2.13 rechts). Für die Matte ist M1 die Dickenrichtung, M2 die Längsrichtung (Produktionsrichtung) und M3 die Querrichtung (s. Abb.2.13 links).

Für die sechs Versuche wird der Probenstapel wie folgt orientiert (s. Abb. 2.14).



**Abbildung 2.14:** Die sechs Orientierungstypen V1-V6 des Festversuchs

Die Versuche V1 und V2, genau so wie V3 und V4 bzw. V5 und V6, unterscheiden sich jeweils nur um eine 90°-Drehung um die Vertikalachse. Die drei Paare (V1 und V2, V3 und V4, V5 und V6) unterscheiden sich voneinander dadurch, daß jeweils eine andere Mattenrichtung in Vertikalrichtung zeigt.

Um die Versuche unter möglichst gleichen Bedingungen durchzuführen, sollten immer Probenstapel mit denselben Maßen in den Hohlraum eingepaßt werden. Weil die Matte sich nicht in der Plattenebene schneiden läßt, ist es unmöglich, das genaue Maß in Tiefenrichtung für die Versuche V3 und V5 und das genaue Maß in Breitenrichtung für die Versuche V4 und V6 einzuhalten. Deswegen wurden die Mattenproben am Anfang der Versuche V3 bis V6 immer vorkomprimiert. Mit der verschieblichen Seitenwand und den unterschiedlichen Stempelgrößen wurde die Vorkompression so klein wie möglich gehalten.



Als Beispiel werden die Versuche mit den Meßwerten der Matte INPE 570 ausgewählt. Die folgenden Kurvendarstellungen, auf denen die Ergebnisinterpretation basiert, zeigen die Spannungen über der Determinante des Deformationsgradienten<sup>7</sup>  $\det \mathbf{F}$ . Diese Größe hat den Vorteil, die Stauchung und die möglichen Vordeformationen unter einem einzigen Wert zu repräsentieren. So können Versuche mit und ohne Vordeformation sinnvoll zusammen dargestellt und verglichen werden. Für die Matte INPE 570 sollen die Probenmaße (die Maße der Stapel) folgende Werte haben: 27.6 mm für die Axialrichtung, 35 mm für die Breitenrichtung und 12.5 mm für die Tiefenrichtung. Wie vorher erklärt wurde, mußte der Probenstapel für die Experimente V3 bis V6 vorkomprimiert werden. Für die Versuche V3 und V5 hatte das Dickenrichtungsmaß des unverformten Stapels den Wert 13.9 mm, d.h. es war eine Vorkompression von ca. 10% von 13.9 mm auf 12.5 mm notwendig. Für die Versuche V4 und V6 hatte das Dickenrichtungsmaß der unverformten Probe den Wert 35.1 mm, d.h. eine Vorkompression um 0.3% auf 35 mm war erforderlich.

### 2.6.1 Die Auswirkung der Matteninhomogenität

Bevor die Meßwerte der Matte INPE 570 verglichen und interpretiert werden, soll zuerst der Effekt der Matteninhomogenität abgeschätzt werden. Dafür werden die Axialspannungen (in R1 Richtung, s. Abb. 2.14) unterschiedlicher Versuche zu jeweils derselben Mattenrichtung in derselben Abbildung dargestellt.

In Abb. 2.15 wird die Axialspannung der Versuche V1 und V2 dargestellt: Es handelt sich um die Spannung in Dickenrichtung M1 (siehe Abb. 2.13), aufgetragen über der Determinante  $\det \mathbf{F}$ . Da derselbe Prozeß mit denselben Randbedingungen (dieselbe Verfahrensgeschwindigkeit 0.72 mm/s, keine Vorkompression) für die beiden Fälle gefahren wurde, würde man zwei übereinanderliegende Kurven in der Darstellung erwarten. Die Spannungsmeßwerte der Versuche V1 und V2 bilden deutlich zwei unterschiedliche Kurven mit unterschiedlicher Steigung. Aus diesem Grund steht fest, daß die Proben der Versuche V1 und V2 nicht gleichartig sind, obwohl

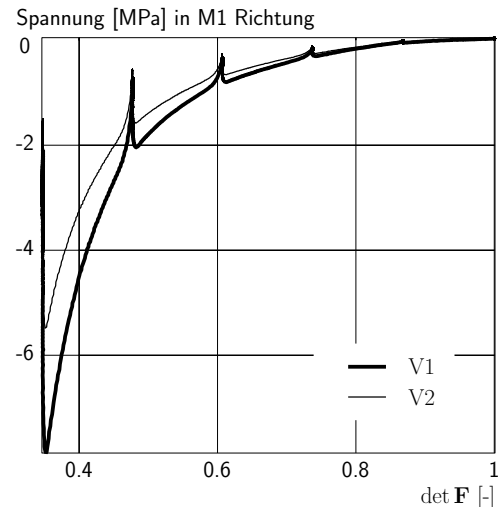


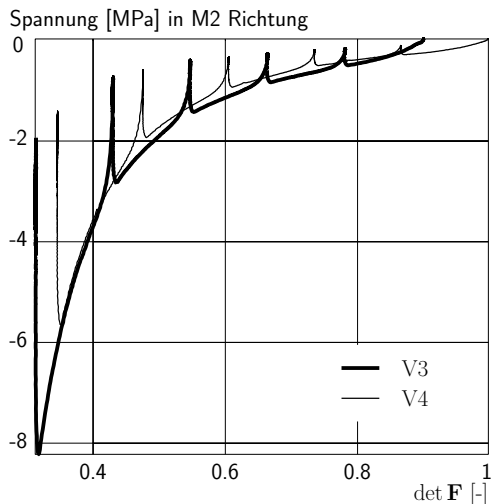
Abbildung 2.15: Axialspannungen der Versuche V1 und V2 über  $\det \mathbf{F}$

<sup>7</sup>Für einen Deformationsgradient der Form

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ist die Determinante  $\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ . Eine detaillierte Erklärung befindet sich im Kapitel 3.

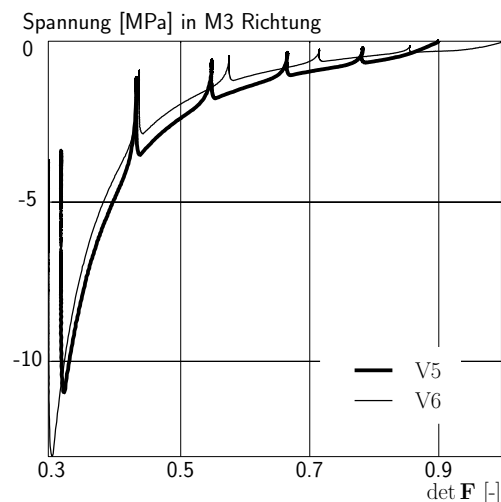
sie aus derselben Matte geschnitten wurden. Aus diesem Grund müssen die späteren Vergleiche zwischen einem der beiden Versuche und einem anderen, z.B. dem Versuch V4, vorsichtig interpretiert werden. In diesem Sinn werden die nächsten Folgerungen mit Vorbehalt gezogen.



**Abbildung 2.16:** Axialspannungen der Versuche V3 und V4 über  $\det \mathbf{F}$

In Abb. 2.16 ist die Axialspannung der Versuche V3 und V4 dargestellt: Es handelt sich um die Spannung in Längsrichtung M2 (siehe Abb. 2.13) über der Determinante  $\det \mathbf{F}$ . In diesem Fall wurde derselbe Prozeß für beide Versuche mit derselben Geschwindigkeit (0.72 mm/s), aber unterschiedlichen Vordeformationen gefahren (in Dickenrichtung M1 mußte die Probe des Versuchs V3 um 10%, bzw. die des Versuchs V4 um 0,3% vorkomprimiert werden). Die Darstellung zeigt zwei fast übereinanderliegende Meßkurven. Das läßt die Vermutung zu, daß die Proben der Versuche V3 und V4 gleichartig sind und daß der Vorprozeß keinen großen Einfluß auf das Materialverhalten hat.

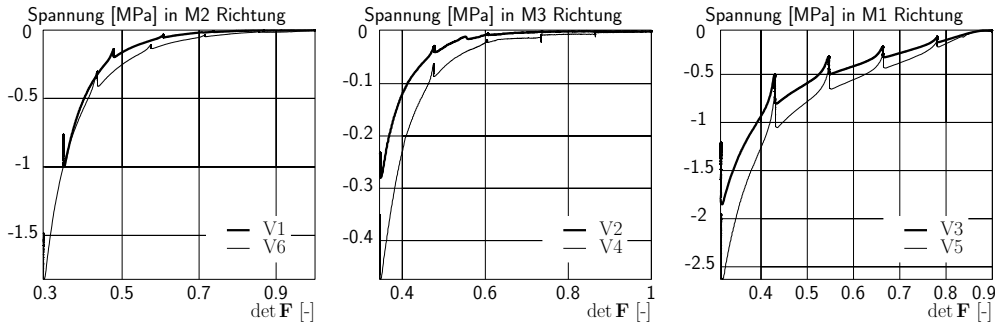
In Abb. 2.17 wird die Axialspannung der Versuche V5 und V6 dargestellt: Es handelt sich um die Spannung in Querrichtung M3 über der Determinante  $\det \mathbf{F}$ . Bei demselben Belastungsverlauf haben die Versuche V5 und V6 unterschiedliche Vordeformationen (in Dickenrichtung M1 wurde die Probe des Versuchs V5 um 10% bzw. die des Versuchs V6 um 0,3% vorkomprimiert). Außerdem wurde jeder Versuch mit einer unterschiedlichen Geschwindigkeit<sup>8</sup> gefahren (0.72 mm/s für den Versuch V5 bzw. 0.77 mm/s für V6). Im Abschnitt 2.5 wurde festgestellt, daß das Materialverhalten der Matten geschwindigkeitsabhängig ist. Wenn aus diesem Grund ein kleiner Unterschied zwischen den beiden Meßkurven da sein sollte, dann müßte der schnellere Versuch V6 größere Spannungsmeßwerte zeigen. Tatsächlich aber zeigt der Versuch V6 in Abb. 2.17 für einen gegebenen Wert von  $\det \mathbf{F}$  immer die kleinere Spannung. D.h. mit Geschwindigkeitseffekten kann der Verlauf der Kurven nicht erklärt werden. Zwei Möglichkeiten können die Spannungsdifferenz erklären. Entweder kann die unterschiedliche Vorkompression eine Rolle spielen oder die Proben sind zu ungleichartig. Weil der



**Abbildung 2.17:** Axialspannungen der Versuche V5 und V6 über  $\det \mathbf{F}$

Vorprozeß bei den bisherigen Versuchen V3 und V4 keinen großen Einfluß auf das Mat-  
tenverhalten hatte (s. Abb.2.16), spricht mehr für die Ungleichartigkeit der Proben. Aus  
diesem Grund werden die Versuche V5 und V6 nur mit besonderer Vorsicht mit anderen  
Versuchen verglichen.

Die Einflüsse der Ungleichartigkeit des Materials läßt sich auch durch die Darstellungen  
der Querspannung für die Versuche V1/V6 oder V2/V4 und V3/V5 feststellen.



**Abbildung 2.18:** Querspannungsmesskurven über der Determinante  $\det \mathbf{F}$

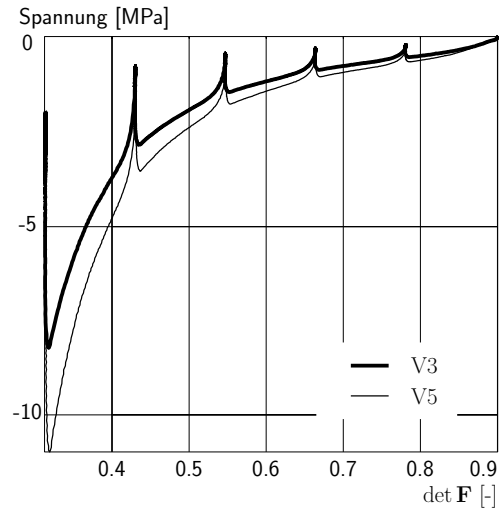
Die Paarungen wurden so gewählt, weil jeweils dieselbe Probenfläche (Längsrichtung,  
Querrichtung und Dickenrichtung) in Richtung der Querkraft zeigt (vgl. Abb. 2.14).  
Abb. 2.18 links stellt die Spannung der Längsrichtung M2 dar, gemessen von der Quer-  
kraftmeßdose und aufgetragen über  $\det \mathbf{F}$ . Das mittlere Bild in Abb. 2.18 zeigt die Span-  
nung in Querrichtung M3 und Abb. 2.18 rechts die Spannung in Dickenrichtung M1. Hier  
handelt es sich um eine andere Größenordnung im Vergleich zu den Meßwerten der Axial-  
kraftmeßdose. Qualitativ sind die Spannungsverläufe einleuchtend: Wie bei den Axial-  
spannungsmesswerten zeigen sich hier die schon beobachteten Phänomene, d.h. ein stark  
überlinearer Kurvenverlauf, Spannungsrelaxation während der Haltezeiten und Unter-  
schiede, die auf Materialungleichheit zurückzuführen sind. Wegen dieser Ähnlichkeiten  
beschränkt sich die weitere Diskussion auf die Meßwertauswertung der Axialspannungen.

## 2.6.2 Untersuchung der transversalen Isotropie

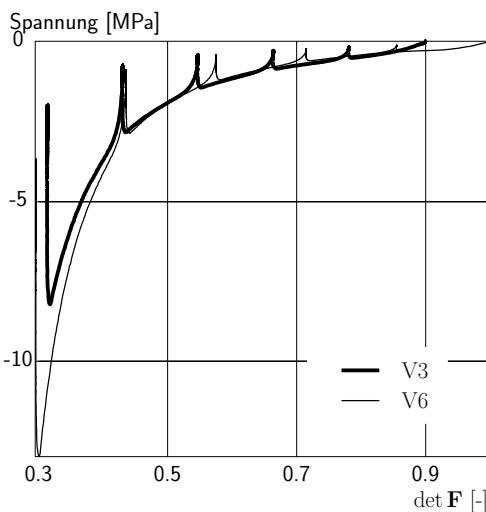
Um den Grad der Anisotropie zwischen Längs- und Querrichtungen (M2 und M3) der  
Matte abzuschätzen, werden dazu die Axialspannungen aus den Versuchen V3 und V5,  
aus V3 und V6, aus V4 und V5 sowie aus V4 und V6 verglichen.

<sup>8</sup>Für die Matte INPE 570 wurde zuerst der Festversuch V6 mit einer Geschwindigkeit von 0.77 mm/s  
durchgeführt. Da der zweite gefahrene Festversuch, der Versuch V5, die Grenze der Axialkraft-  
meßdose (10 kN) wegen der Vorkompression überschritten wurde, wurde diese Geschwindigkeit um  
0.72 mm/s reduziert.

Im Bild rechts (s. Abb. 2.19) werden die Axialspannungen der Versuche V3 (Längsrichtung M2) und V5 (Querrichtung M3) dargestellt. Diese Versuche wurden mit demselben Prozeß gefahren: Gleiche Vordeformation (um 10%) und gleiche Geschwindigkeit (0.72 mm/s). Die Darstellung zeigt deutlich zwei unterschiedlichen Kurven. Zwei Möglichkeiten können den Unterschied erklären: Entweder ist die Matte nicht transversal isotrop, oder sie ist transversal isotrop, aber die Ungleichartigkeit der Matte beeinflußt den Versuch V5. Diese letzte Vermutung läßt sich durch die folgende Diskussion erhärten. Abb. 2.17 stellt zwei nebeneinander liegende Spannungskurven für den Versuche V5 und V6 dar. Es wurde festgestellt, daß entweder die Vordeformation des Versuchs V5 oder die Ungleichartigkeit der Proben diesen Kurvenunterschied erklären könnte. Da die Versuche V3 und V5 mit derselben Vordeformation für die Matte INPE 570 (um 10%) gefahren, und der Versuch V3, nach Abb. 2.16, mit gleichartiger Probe durchgeführt wurden, läßt sich vermuten, wenn das Material zumindest transversal isotrop ist, daß der Versuch V5 mit ungleichartigem Material durchgeführt wurde.



**Abbildung 2.19:** Axialspannungen der Versuche V3 und V5 über  $\det \mathbf{F}$

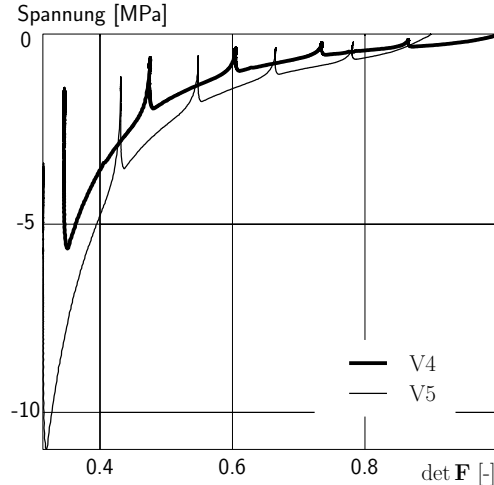


**Abbildung 2.20:** Axialspannungen der Versuche V3 und V6 über  $\det \mathbf{F}$

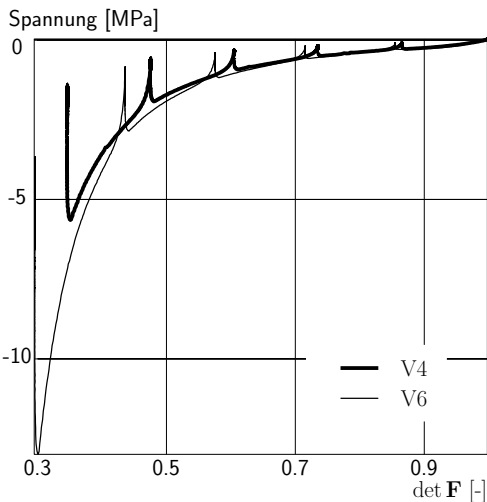
Abb. 2.20 stellt die Axialspannungen für die Versuche V3 (Längsrichtung M2) und V6 (Querrichtung M3) dar. Die Versuche V3 und V6 wurden mit unterschiedlichen Vordeformationen (10% für die Probe des Versuch V3 bzw. 0.3% für die des Versuch V6) und unterschiedlichen Geschwindigkeiten (0.72 mm/s für den Versuch V3 bzw. 0.77 mm/s für den Versuch V6) gefahren. Trotzdem gibt es zwei fast übereinanderliegende Kurven: Am Anfang der Kompression sind die beiden Kurven identisch und ab einer gewissen Determinante ergibt den Versuch V6 immer größere Spannungen. Da die beide Kurven fast aufeinander liegen, läßt diese Darstellung vermuten, daß das Material isotrop zwischen der Längs- und Querrichtung (M2 und M3) ist. Die gute Deckung bis  $\det \mathbf{F}$  von 0.45 bestärkt die Vermutung, daß die Vordeformationen nur einen geringen Einfluß auf die gemessene Spannung haben. Nach diesen beiden Aussagen und der Diskussion des vorherigen Abschnitts (s. Abb. 2.19) wird die Probe des Versuchs V5 als ungleichartig angenommen. In Abb. 2.16 wurde angenommen, daß die Versuche

V3 und V4 mit gleichartigen Materialproben durchgeführt wurden. Daraus folgt, da Abb. 2.20 zwei fast aufeinander liegenden Kurven für den Versuche V3 und V6 zeigt, daß Versuch V6 auch mit gleichartigen Materialproben gefahren wurde. Abb. 2.17 stellt zwei nebeneinander liegenden Spannungsdehnungskurven für den Versuche V5 und V6 dar. Da der Versuch V6 mit gleichartiger Probe gefahren wurde, kann man feststellen, daß der Versuch V5 mit ungleichartigem Material durchgeführt wurde.

Abb. 2.21 zeigt die Axialspannungen der Versuche V4 (Längsrichtung M2) und V5 (Querrichtung M3) über der Determinante  $\det \mathbf{F}$ . Die Versuche wurden für denselben Prozeß mit derselben Geschwindigkeit (0.72 mm/s) aber mit unterschiedlichen Vordeformationen (0.3% für die Probe des Versuchs V4 bzw. 10% für die des Versuchs V5) durchgeführt. Wie zu erwarten, da der Versuch V5 mit ungleichen Proben gefahren wurde, liefert diese Abbildung zwei nicht übereinander liegende Kurven.



**Abbildung 2.21:** Axialspannungen der Versuche V4 und V5 über  $\det \mathbf{F}$



**Abbildung 2.22:** Axialspannungen der Versuche V4 und V6 über  $\det \mathbf{F}$

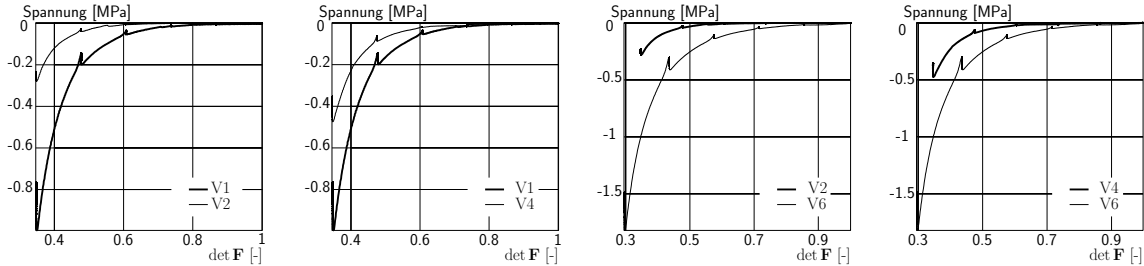
gen, daß die Versuche V4 und V6 mit gleichartigen Materialproben gefahren wurden und daß das Material isotrop zwischen der Längs- und Querrichtung (M2 und M3) ist.

Abb. 2.22 zeigt die Axialspannungen für den Versuch V4 (Längsrichtung M2) und den Versuch V6 (Querrichtung M3). Die Versuche wurden mit demselben Belastungsverlauf, mit derselben Vordeformation (0.3%), aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten gefahren (0.72 mm/s für den Versuch V4 bzw. 0.77 mm/s für den Versuch V6). Das Bild stellt zwei fast übereinander liegende Kurven dar. Der Spannungsunterschied wächst mit dem Kurvenverlauf und ist erkennbar ab einer Determinante  $\det \mathbf{F} < 0.5$ . Trotzdem ist diese Differenz relativ klein und von der Größenordnung her vernachlässigbar. Es bestätigt die vorherigen Vermutungen,

Die bisherige Untersuchungen legen den Schluß nahe, daß das Materialverhalten in Längs- und Querrichtung (M2 und M3) als gleich angesehen werden kann. Unterschied-

liche Vordeformationen haben geringen Einfluß auf die Meßwerte. Die Versuche V3, V4 und V6 wurden mit gleichartigem Material gefahren. Das Probenmaterial von Versuch V5 fällt aus der Reihe.

Die folgenden Bilder illustrieren die gleiche Eigenschaft. Diesmal wird die Information der Querkraftmessung ausgewertet. Die Bilder werden nur zur Kenntnis gegeben, aber nicht diskutiert.



**Abbildung 2.23:** Querspannungen über  $\det \mathbf{F}$  für die transversale Isotropie (M2 und M3)

Abb. 2.23 links zeigt die Querspannung der Versuche V1 (Längsrichtung M2) und V2 (Querrichtung M3). Das zweite Bild stellt die Querspannung für die Versuche V1 (Längsrichtung) und V4 (Querrichtung) dar. Das nächste präsentiert die Querspannung von Versuch V2 (Querrichtung) und V6 (Längsrichtung). Die letzte Darstellung zeigt die Querspannung der Versuche V4 (Querrichtung) und V6 (Längsrichtung).

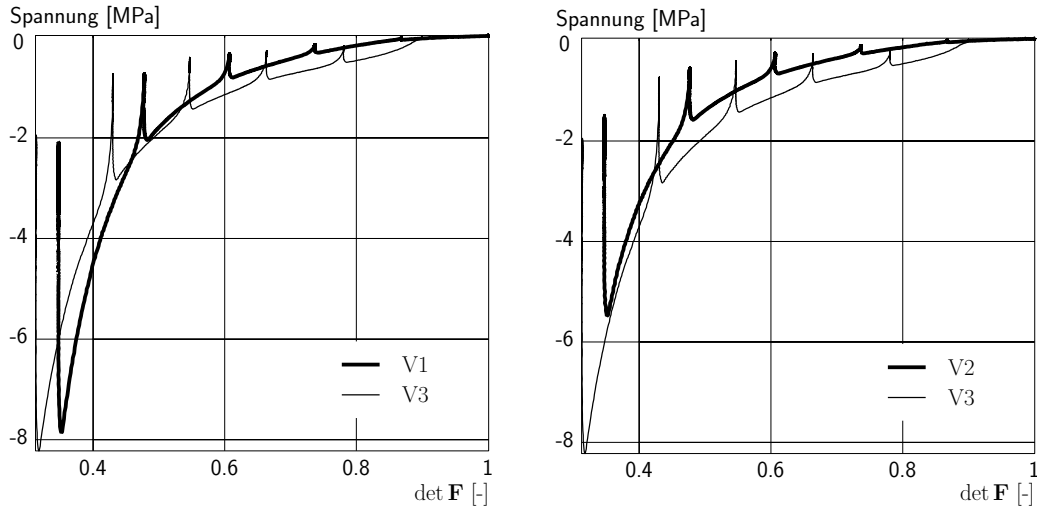
### 2.6.3 Untersuchung der Mattenisotropie

Um die vollständige Isotropie der Matte abzuschätzen, wird in diesem Abschnitt die Isotropie bezüglich der Längs- und der Dickenrichtung (M2 und M1) wie auch bezüglich der Quer- und der Dickenrichtung (M3 und M1) durch die folgenden Bilder überprüft. Wie im vorherigen Abschnitt wird die Isotropie nur auf der Basis der Axialspannung diskutiert. Deshalb werden hier die Versuche V1 oder V2 mit jeweils einem anderen Versuch verglichen, um die Isotropie der Matte festzustellen oder auszuschließen. Da bei Abb. 2.15 der Effekt der Materialinhomogenität nicht vernachlässigbar<sup>9</sup> ist, sollen die zukünftigen Vergleiche mit den Versuchen V1 oder V2 und anderen Versuchen vorsichtig zusammengestellt werden.

Die Bilder in Abb. 2.24 stellen den Versuch V3 im Vergleich mit dem Versuch V1 (links) bzw. mit dem Versuch V2 (rechts) dar. Die Bilder betreffen die Frage der Isotropie zwischen der Dickenrichtung M1 (Versuch V1 oder V2) und der Längsrichtung M2 (Versuch V3). Die drei Versuche wurden mit demselben Belastungsverlauf und mit derselben

<sup>9</sup>Bei der Darstellung der Axialspannung der Versuche V1 und V2 (s. Abb. 2.15) ist die Spannungsdifferenz für  $\det \mathbf{F} \geq 0.6$  vernachlässigbar. Ab  $\det \mathbf{F} < 0.6$  wächst die Spannungsdifferenz schnell mit der Stauchung und erreicht den Wert 1.22 MPa für  $\det \mathbf{F} = 0.4$  und den maximalen Wert 2.2 MPa für  $\det \mathbf{F} = 0.35$ .

Geschwindigkeit (0.72 mm/s) durchgeführt. Die Probe des Versuchs V3 wurde um 10% vorkomprimiert. Beiden Versuchen V1 und V2 gab es keine Vorkompression.



**Abbildung 2.24:** Axialspannungen V1/V3 (links) und V2/V3 (rechts)

Die Kurven in den beiden Bildern liegen nicht aufeinander. Trotzdem sind ihre Spannungsunterschiede entweder vernachlässigbar oder kleiner als die in Abb. 2.15 dargestellten Spannungsunterschiede für eine gegebene Determinante  $\det \mathbf{F}$  (s. Fußnote Seite 21). Bei der Darstellung links (V1/V3) ist die Spannungs­differenz kleiner als 0.3 MPa für  $\det \mathbf{F} > 0.43$ . Für  $\det \mathbf{F} \leq 0.4$  fängt die Spannungs­differenz bei 0.8 MPa an und wächst schnell, um die maximalen Spannungswerte 2 MPa für  $\det \mathbf{F} = 0.35$  zu erreichen. In Abb. 2.24 rechts (V2/V3) ist die Spannungs­differenz immer kleiner als 0.5 MPa.

Die Darstellungen in Abb. 2.25 zeigen den Versuch V4 im Vergleich mit den Versuchen V1 und V2 für die Matte INPE 570. Mit diesen Bildern wird ebenfalls die Isotropie zwischen der Dickenrichtung M1 (Versuch V1 und V2) und der Längsrichtung M2 (Versuch V4) überprüft. Die drei Versuche wurden mit demselben Belastungs­prozeß und mit derselben Geschwindigkeit (0.72mm/s) gefahren. Die Probe des Versuchs V4 wurde um 0.3% vorkomprimiert; die Versuche V1 und V2 wurden ohne Vordeformation gefahren. Bei der Darstellung Abb. 2.25 links liegt die maximale Spannungs­differenz bei ca. 1.9 MPa für eine Determinante  $\det \mathbf{F} = 0.35$ , d.h. am Ende des Prozesses. Für eine Determinante  $\det \mathbf{F} > 0.45$  bleibt diese Differenz unter 0.3 MPa. Für eine Determinante  $\det \mathbf{F} < 0.45$  ist der Spannungs­unterschied nicht mehr vernachlässigbar (ähnliche Größenordnung wie bei der Darstellung Abb. 2.15) und läßt sich mit der Wirkung der Materialungleichheit begründen, wenn das Material isotrop zwischen der Dicken- und Längsrichtung (M1 und M2) ist.

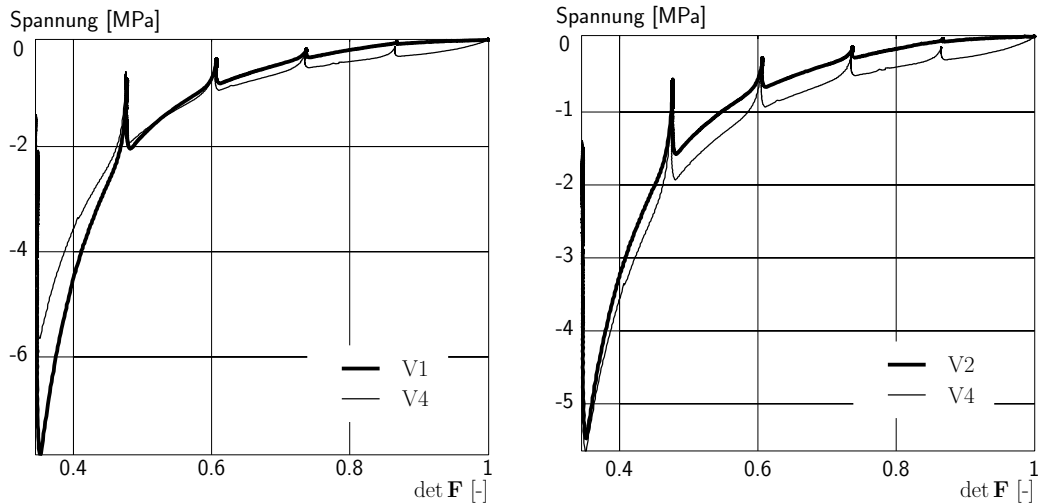


Abbildung 2.25: Axialspannungen V1/V4 (links) und V2/V4 (rechts)

Bei Abb. 2.25 sind die Spannungsdifferenzen in der Darstellung rechts kleiner. Der maximale Unterschied bei der Abb. 2.25 rechts, ca. 0.4 MPa, wurde für eine Determinante  $\det \mathbf{F} = 0.5$  erreicht. Da die Kurven fast aufeinander liegen, verstärkt sich die obige Vermutung, daß das Material als isotrop zwischen der Längs- und Dickenrichtung angesehen werden könnte. Da der Festversuch V4 mit gleichartigen Proben durchgeführt wurde (s. Abb. 2.16), bestätigt die Abb. 2.25, daß der Festversuch V2 mit gleichartigen Materialproben gefahren wurde. Nach Abb. 2.15 bedeutet es, daß die Wirkung der Mat-tenungleichheit bei dem Festversuch V1 auftritt.

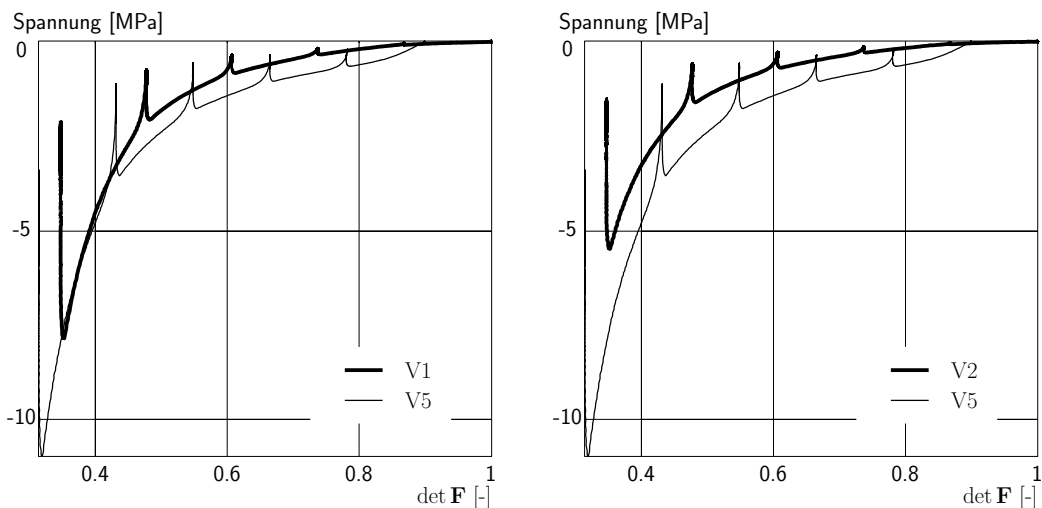


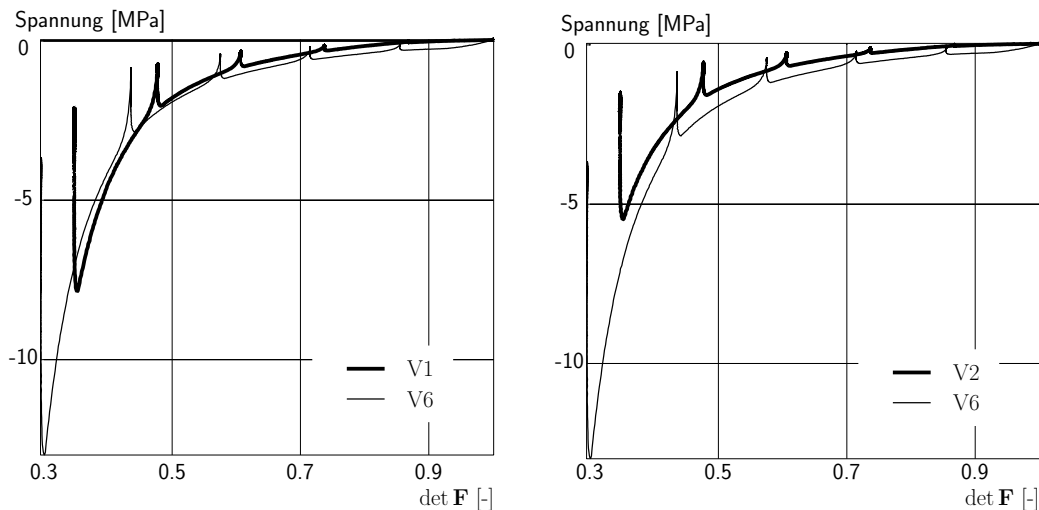
Abbildung 2.26: Axialspannungen V1/V5 (links) und V2/V5 (rechts)

Abb. 2.26 zeigt den Versuch V5 im Vergleich mit den Versuchen V1 und V2. Mit diesen Bildern wird die Isotropie zwischen der Dickenrichtung M1 (Versuch V1 und V2) und



der Querrichtung M3 (Versuch V5) überprüft. Die drei Versuche wurden mit demselben Belastungsprozeß und derselben Geschwindigkeit (0.72 mm/s) gefahren. Die Probe des Versuchs V5 wurde um 10% vorkomprimiert; die Versuche V1 und V2 wurden ohne Vordeformation gefahren. Die beiden Darstellungen zeigen schon gewisse Spannungsunterschiede, die nicht vernachlässigbar sind. Bei der Darstellung links könnten die Spannungsunterschiede vernachlässigbar angesehen werden; aber da die Wirkung der Mattenungleichheit bei dem Festversuch V5 nicht als vernachlässigbar ist (s. S. 19), wird hier für Abb. 2.26 keine Behauptung formuliert, bestätigt oder widerlegt.

Die Bilder in Abb. 2.27 stellen die Spannungskurve für die Versuche V1 und V6 (Darstellung links) und für die Versuche V2 und V6 (Darstellung rechts) dar. Mit diesen Abbildungen wird die Isotropie zwischen der Dickenrichtung M1 (Versuche V1 und V2) und der Querrichtung M3 (Versuch V6) überprüft. Alle Versuche wurden mit demselben Belastungsverlauf durchgeführt. Die Versuche V1 und V2 wurden etwas langsamer (mit einer Geschwindigkeit von 0.72mm/s) als der Versuch V6 (mit einer Geschwindigkeit von 0.77mm/s) gefahren. Zudem wurde nur die Probe des Versuchs V6 mit einer Kompression um 0.3% vordeformiert.

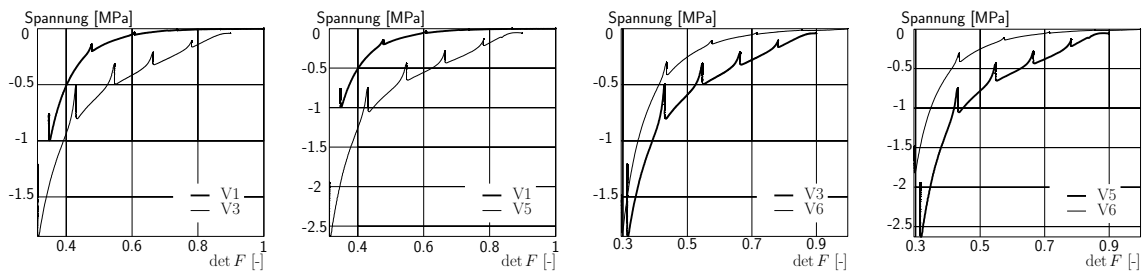


**Abbildung 2.27:** Axialspannungen V1/V6 (links) und V2/V6 (rechts)

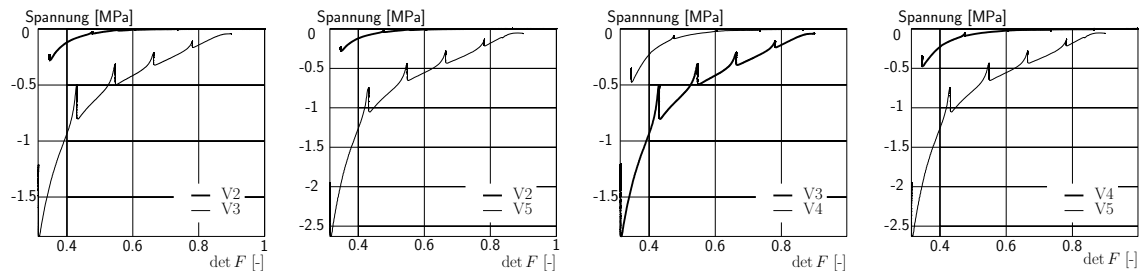
Seite 20 wurde festgestellt, daß die Versuche V3, V4 und V6 mit gleichartigen Materialproben gefahren wurden. Abb. 2.27 links (V1/V6) zeigt zwei fast aufeinander liegende Kurven. Da der Versuch V6 mit der schnelleren Geschwindigkeit gefahren wurden, sollte er, wenn eine Spannungsdifferenz da sein sollte, immer die größeren Meßwerten ergeben. Da das Gegenteil dargestellt wurde, läßt sich dies nur mit der Wirkung der Probenungleichheit bei dem Versuch V1 erklären, falls das Material zwischen der Dicken- und Querrichtung isotrop ist. Diese Beobachtung bestätigt die vorherige Vermutung, daß die Materialungleichheit bei dem Festversuch V1 eine Rolle spielt. Bei Abb. 2.27 rechts gibt es eine Spannungsdifferenz, die zwischen 0.005 und 0.85 MPa (maximale Spannungs-

meßwerte für  $\det \mathbf{F} = 0.35$ ) liegt. Dieser Spannungsunterschied ist vernachlässigbar: Im Vergleich z.B. mit den Spannungsunterschieden der Abb. 2.15 kann diese Differenz als vernachlässigbar angenommen werden.

Zur Kenntnisnahme vergleicht Abb. 2.28 die Querspannungskurven der Matte zwischen der Längsrichtung (Versuche V1 und V6) und der Dickenrichtung (Versuche V3 und V5). Abb. 2.29 zeigt die Querspannungskurven bezüglich der Querrichtung (Versuche V2 und V4) und der Dickenrichtung (Versuche V3 und V5).



**Abbildung 2.28:** Querspannungen bezüglich der Längs- und Dickenrichtung



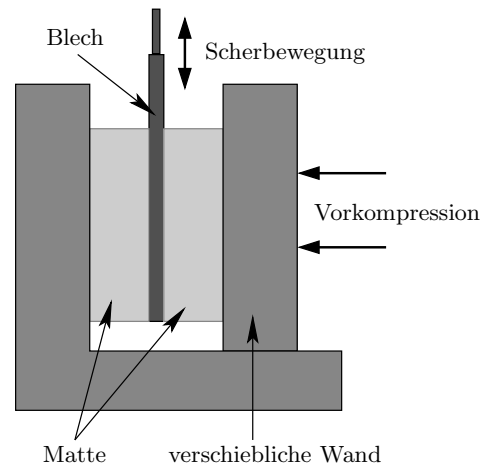
**Abbildung 2.29:** Querspannungen bezüglich der Quer- und Dickenrichtung

Angesichts der z. T. erheblichen Streuung der Meßdaten, die keinen klaren Nachweis eventueller Anisotropie ermöglichen, wird das Material im folgenden als isotrop angesehen. Für die zukünftige Entwicklung des Materialsmodells sollen nur die Meßwerte bzw. Darstellung der Festversuche V2, V3, V4 und V6 beachtet werden. Besonders die Festversuche V1 und V5 werden nicht weiter betrachtet, da die Wirkung der Mattenungleichheit bei diesen Festversuchen deutlich auftritt.

## 2.7 Der Scherversuch

Das Wort 'Scherversuch' beschreibt Versuchstypen, die sich in vier Kategorien unterteilen. Es wird zwischen 'schwellender' und 'wechselnder' Scherung unterschieden, im Folgenden 'Schwellversuch' und 'Wechselversuch' genannt, jeder entweder mit oder ohne Haltezeiten. Da in jeder Kategorie drei unterschiedliche Scherwege mit jeweils unterschiedlicher Vorkompression gefahren wurden, gibt es insgesamt zwölf Versuche. Diese Versuche wurden in der Vorrichtung des Festversuchs (s. S. 14 Abb. 2.12) gefahren, die nur auf eine andere Art benutzt wurde.

Abb. 2.30 skizziert die Versuchsanordnung. Für den Scherversuch wurde der originale Stempel durch ein Stahlblech ausgewechselt. Je eine Mattenprobe lag auf jeder Seite zwischen Blech und Wand. Das so entwickelte 'Sandwich' Matte-Blech-Matte stand vertikal im quaderförmigen Hohlraum und wurde mit der verschieblichen Seitenwand vorkomprimiert. Diese Vorkompression<sup>10</sup> sichert den Kontakt zwischen Wand, Probe und Blech während des Versuchsverlaufs. Da das Abrutschen für eine Probenscheibe nur am Blechstreifen geschehen sollte und nicht an der gegenüberliegenden Wand, wurde diese Wand mit Korund beschichtet. Die Scherung in der Probe entsteht durch eine Vertikalbewegung des Blechs. Aufgezeichnet wurden die Zeit, der Scherweg, die Scher- und Querkraft mit einer Abtastrate von 20 Hz.

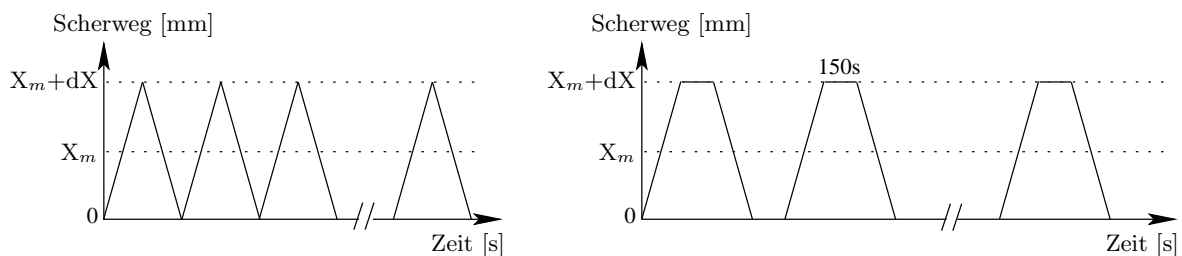


**Abbildung 2.30:** Prinzipskizze des Scherversuchs

Alle Darstellungen der Schwellversuche und Wechselversuche beziehen sich auf die Matte INPE 570. In diesen Versuchen hatten die Mattenproben stets eine Höhe von 41 mm, eine Breite von 34.7 mm und eine Dicke von 6.9 mm. Alle Scherungen wurden mit der momentanen Materialdicke berechnet.

### 2.7.1 Schwellversuche

Nachdem durch die verschiebliche Seitenwand die Vorkompression in Tiefenrichtung aufgebracht<sup>11</sup> wurde, wurden die folgenden Scherprozesse gefahren. In Abb. 2.31 sind die Scherprozesse ohne und mit Haltezeiten skizziert.



**Abbildung 2.31:** Prinzipielle Verläufe der Scherung über der Zeit

Der Zyklus ohne Haltezeit wurde 50-mal wiederholt, d.h. der Versuchsverlauf dauerte insgesamt 100 s, da jede Rampe innerhalb 1 s durchgeföhren wurde. Bei den Versuchen

<sup>10</sup>Die Vorkompression wurde in einer Größenordnung von ca. 33% gewählt, da dieser Wert etwa der Kompression beim Einbau des Katalysators entspricht.

<sup>11</sup>Der Vorprozess lief im Einzelnen so ab: Die Probenstücke wurden rechts und links des Blechstreifens eingepaßt. Dann wurde die bewegliche Wand solange verschoben, bis ein erster Kontakt zwischen Wand, Probe und Blech erreicht wurde. Durch weitere Verdrehung der Transportschraube, die die Wand bewegt, wurde die ausgewählte Vorkompression (29%, 36.2% oder 38%) aufgebracht.

mit Haltezeiten (Abb. 2.31 rechts) wurde jede Rampe ebenfalls innerhalb von 1 s gefahren. Nach jeder Rampe erfolgte eine Haltezeit von 150 s, was eine Periodendauer von 302 s bedeutet. Da jeder Zyklus 11-mal wiederholt wurde, dauerte ein Versuch dieser Kategorie insgesamt 3322 s.

Aus Vorversuchen ergab sich, daß der Versuchsdurchführung Grenzen gesetzt sind. Da der Blechstreifen ab einer gewissen Scherung herausrutscht, wurde als maximaler Wert die Scherung  $\gamma = 0.082$  ( $= \tan 0.0815$ ) festgelegt. Für den Schwellversuch wurden dann die Sollwerte für Mittelwert und Amplitude der Verschiebung aus der komprimierten Dicke  $d$

$$X_m = dX = \frac{1}{2}d \tan(0.0815) \quad (2.2)$$

berechnet. Diese Vorgabe konnte jedoch nicht konsequent durchgehalten werden, da eine weitere Grenze durch die Maximalkraft der eingesetzten Querkraftmeßdose (2 kN) gegeben war. Deshalb wurde bei 38% Vorkompression der Matte INPE 570 nicht 0.175 mm (wie errechnet<sup>12</sup> mit  $d=6.9$  mm), sondern 0.16 mm als Sollwert für Amplitude und Mittelwert genommen. Infolgendessen ergaben sich für beide Verläufe die Mittelwerte und Amplituden: 0.2 mm, 0.18 mm und 0.16 mm. Die tatsächlichen Amplituden waren kleiner als die Sollwerte (vgl. Tab. 2.1), weil die Meß- und Regelstrecke der Prüfmaschine an ihre Grenzen stieß. Der Meßaufnehmer, der den Ist-Weg mißt, hat eine Meßbasis von  $\pm 75$  mm und eine Genauigkeit von  $5 \cdot 10^{-3}$ . D.h., die gewünschten Amplituden liegen in der Größenordnung der Meßgenauigkeit. Die Tab. 2.1 enthält alle Prozeßdaten der Schwellversuche für die Matte INPE 570.

		Versuche ohne Haltezeit (50 Wiederholungen)		Versuche mit Haltezeit (150 s) (11 Wiederholungen)	
Vorkompression [%]	Mittelwert $X_m$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{soll}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{ist}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{soll}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{ist}}$ [mm]
29.0	0.20	0.20	0.14	0.20	0.20
36.2	0.18	0.18	0.13	0.18	0.18
38.0	0.16	0.16	0.12	0.16	0.14

**Tabelle 2.1:** Zusammenfassung aller Daten der Schwellversuche.

Abb. 2.32 zeigt die drei Schwellversuche ohne Haltezeit, Abb. 2.33 die drei Schwellversuche mit eingeschalteten Haltezeiten. Die dargestellten Experimente unterscheiden sich voneinander durch die Vorkompression (29%, 36.2% sowie 38% von links nach rechts) und die Amplituden  $dX$ . Da jede Flanke in 1 s gefahren wurde, ergab sich für jeden Versuch eine unterschiedliche Geschwindigkeit.

<sup>12</sup>Nach Gl.(2.2) gilt:  $X_m = dX = \frac{1}{2}[6.9 \times (1. - 0.38)] \times \tan(0.0815) \approx 0.175$  mm.

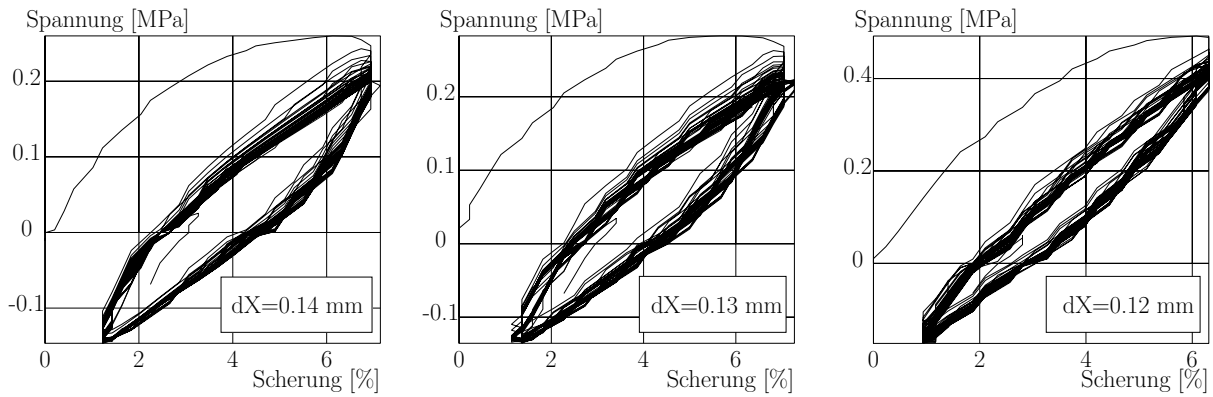


Abbildung 2.32: Schwellversuche ohne Haltezeit, Matte INPE 570

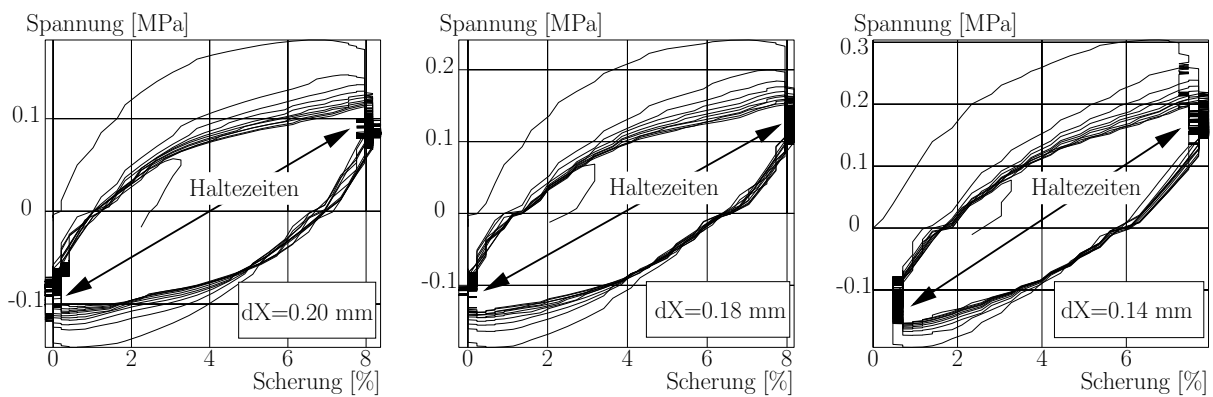


Abbildung 2.33: Schwellversuche mit Haltezeiten, Matte INPE 570

Die Kurvenverläufe sehen sich ähnlich: Nach ca. 5 bis 10 Zyklen folgen die Meßkurven jeweils einer Grenzkurve, die als stationäre Hysterese angesehen wird. Die Neigung der Grenzzyklen wird von links nach rechts immer steiler, obwohl die Amplituden in dieser Reihenfolge immer kleiner werden. Dieser Effekt läßt sich mit den von links nach rechts wachsenden Vordeformationen erklären, d.h. das Material wird mit wachsender Kompression fester. Bei den Schwellversuchen mit Haltezeiten sind die Haltezeiten deutlich erkennbar. Alle Kurven zeigen an den Stellen, wo bei konstanter Scherung der Absolutwert der Spannung abnimmt, zwei vertikale gerade Linien (mit den Pfeilen angezeigt).

Die Meßkurven der Kompressionsspannung über der Zeit werden für die Schwellversuche ohne Haltezeit in Abb. 2.34 dargestellt. Für die Schwellversuche mit Haltezeiten steht die Abb. 2.35. In beiden Abbildungsreihen ist zu erkennen, daß sich das Material in Kompressionsrichtung entspannt, d.h. die Normalspannung läßt nach. Wenn Haltezeiten hinzukommen, siehe Abb. 2.35, ist dieser Effekt etwas ausgeprägter.

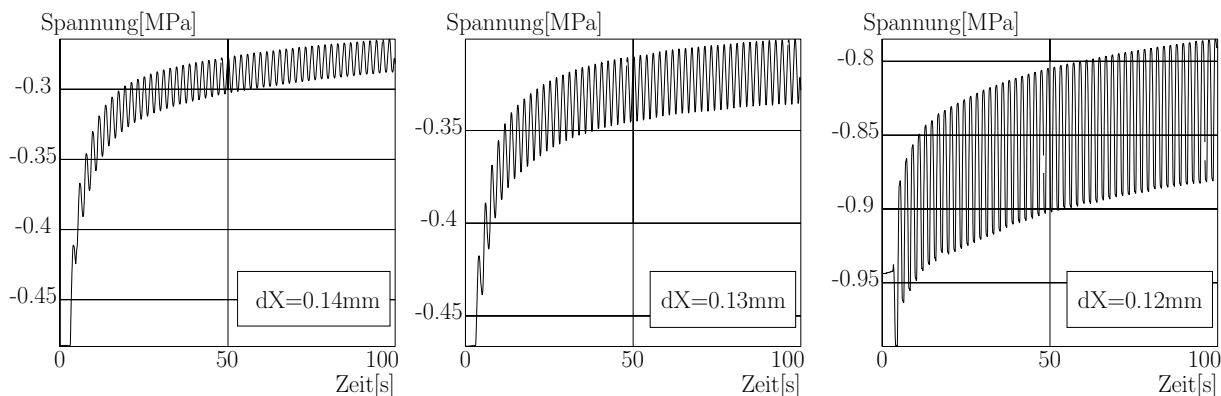


Abbildung 2.34: Kompressionsspannung, Schwellversuche ohne Haltezeit

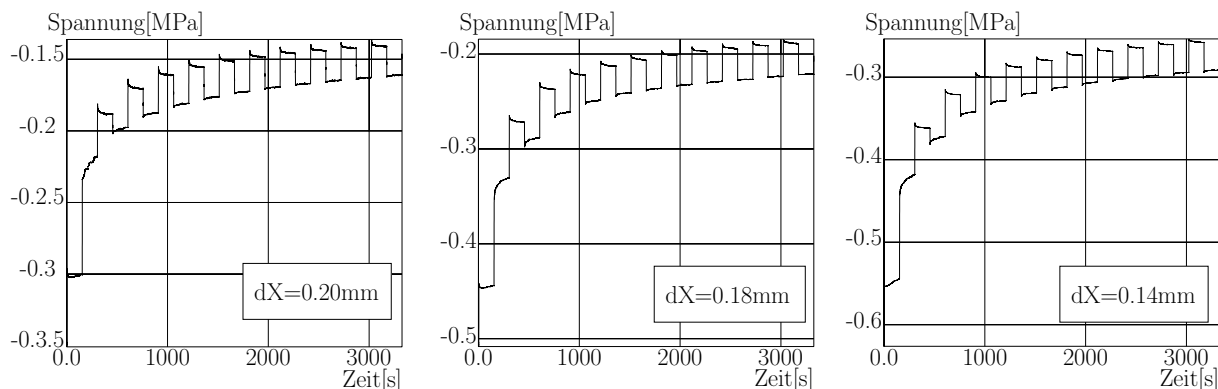


Abbildung 2.35: Kompressionsspannung, Schwellversuche mit Haltezeiten

## 2.7.2 Wechselversuche

Die Verläufe der Scher-Wechselversuche ( $X_m=0$ . mm) zeigt Abb. 2.36.

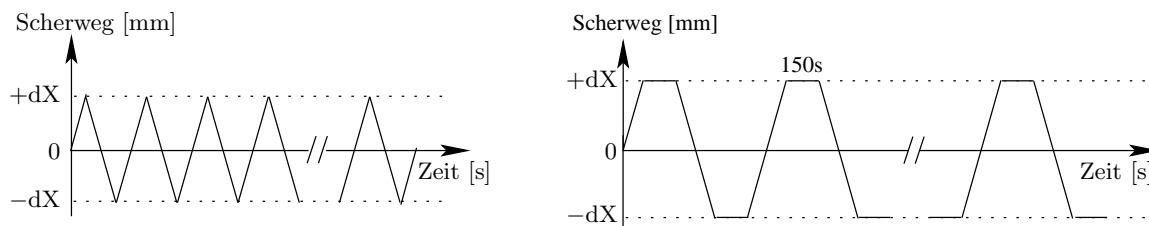


Abbildung 2.36: Prinzipielle Verläufe der Scherung über der Zeit

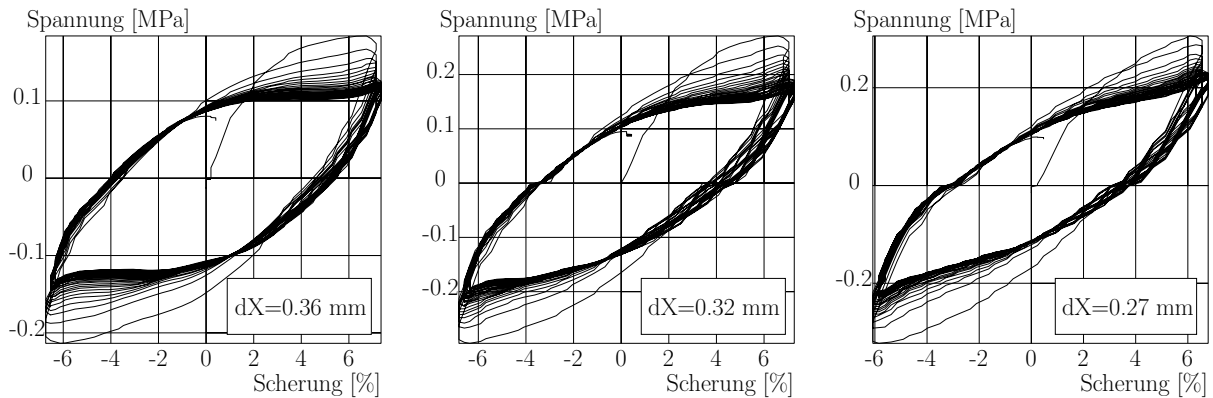
Bei dem Prozeß ohne Haltezeit (Abb. 2.36 links) wurde der Zyklus 30-mal wiederholt. Der Versuch dauerte insgesamt 120 s, da jede Rampe innerhalb von 2 s gefahren wurde, um dieselbe Schergeschwindigkeit zu erreichen wie im jeweiligen Schwellversuch. Bei den Versuchen mit Haltezeiten wurden die Rampen jeweils auch in 2 s gefahren. In diesem Fall wurde der Zyklus 11-mal wiederholt, jedesmal mit zwei Haltezeiten von 150 s unterbrochen. Insgesamt dauerte ein Versuch 3344 s.

Die Wechselversuche ohne Haltezeit bzw. mit Haltezeiten wurden jeweils für drei Vorkompressionen (29%, 36.2% sowie 38%) durchgeführt. Die Begrenzung auf eine maximale Scherung gilt hier genauso wie bei den Schwellversuchen. Sie wurde eingehalten, aber in beiden Richtungen. D.h., die Sollwerte für die Amplitude wurden auf  $dX^{\text{soll}}=0.4$  mm, 0.36 mm und 0.32 mm gesetzt. Aus denselben Gründen, wie schon beschrieben, stellten sich bei den Ist-Werten Abweichungen ein (s. Tab. 2.2).

Vorkompression [%]	Mittelwert $X_m$ [mm]	Versuche ohne Haltezeit (30 Wiederholungen)		Versuche mit Haltezeit (150 s) (11 Wiederholungen)	
		Amplitude $dX^{\text{soll}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{ist}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{soll}}$ [mm]	Amplitude $dX^{\text{ist}}$ [mm]
29.0	0.0	0.40	0.36	0.40	0.42
36.2	0.0	0.36	0.32	0.36	0.39
38.0	0.0	0.32	0.27	0.32	0.31

**Tabelle 2.2:** Zusammenfassung aller Daten der Wechselversuche.

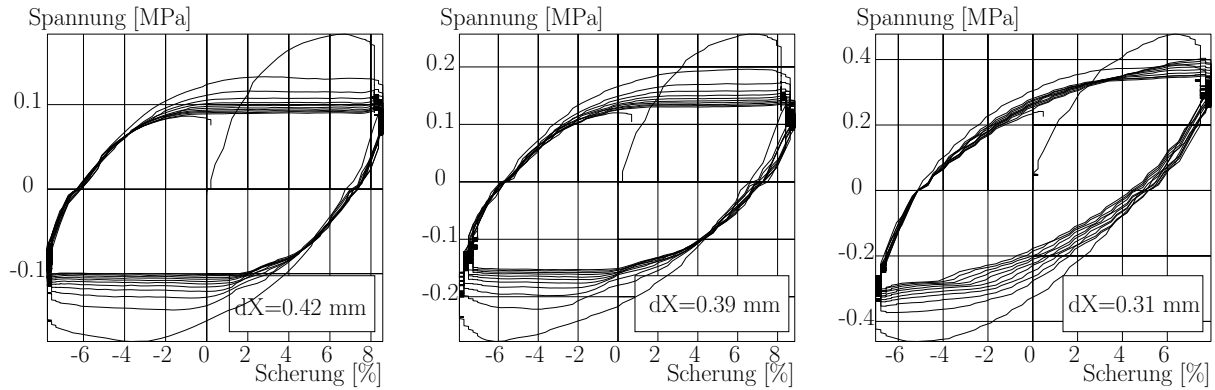
Abb. 2.37 zeigt die Wechselversuche ohne Haltezeit bzw. Abb. 2.38 mit Haltezeiten. Dargestellt ist jeweils die Scherspannung über der Scherung. In den beiden Versuchsreihen unterscheiden sich die einzelnen Versuche durch die jeweilige Vorkompression (29 %, 36.2 % sowie 38 %, von links nach rechts). Jeder Versuch wurde immer mit einer anderen Geschwindigkeit durchgeführt, da die unterschiedlichen Amplituden  $dX$  (s. Tab. 2.2) immer in 2 s gefahren wurde.



**Abbildung 2.37:** Wechselversuche ohne Haltezeit, Matte INPE 570

Die dargestellten Scherspannungskurven zeigen alle ein ähnliches Verhalten: Schon nach 5 bis 10 Zyklen tendieren die Meßkurven zu einer stabilen Hysterese. Genau wie bei den Schwellversuchen ist auch hier festzustellen, daß die Neigung der Grenzyklen mit

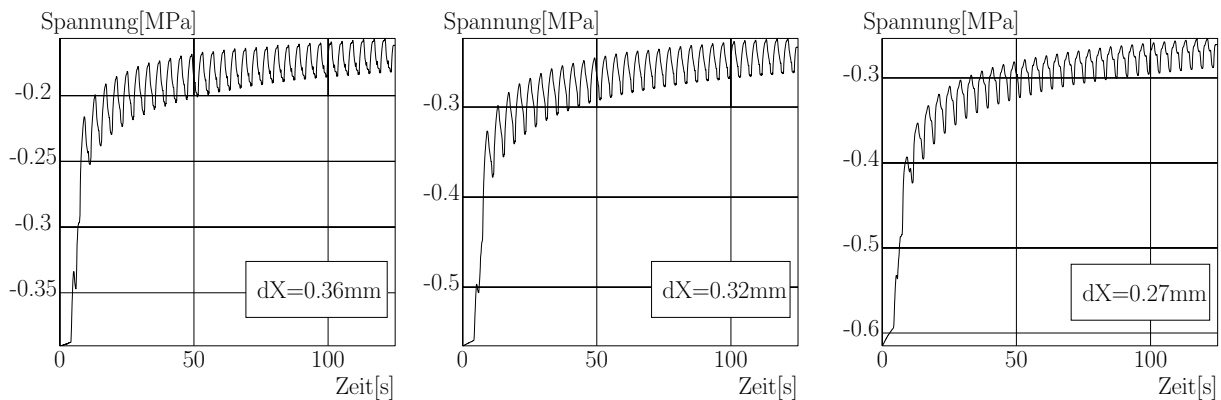
größerer Vorkompression steiler wird. Die Wechselversuche mit Haltezeiten zeigen einen Unterschied zu den entsprechenden Schwellversuchen. Da die Scherwege von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt größer waren, sind die Hysteresen breiter. So breit, daß bei Abb. 2.38 links und Abb. 2.38 Mitte eine waagrechte Tangente erreicht wird.



**Abbildung 2.38:** Wechselversuche mit Haltezeiten, Matte INPE 570

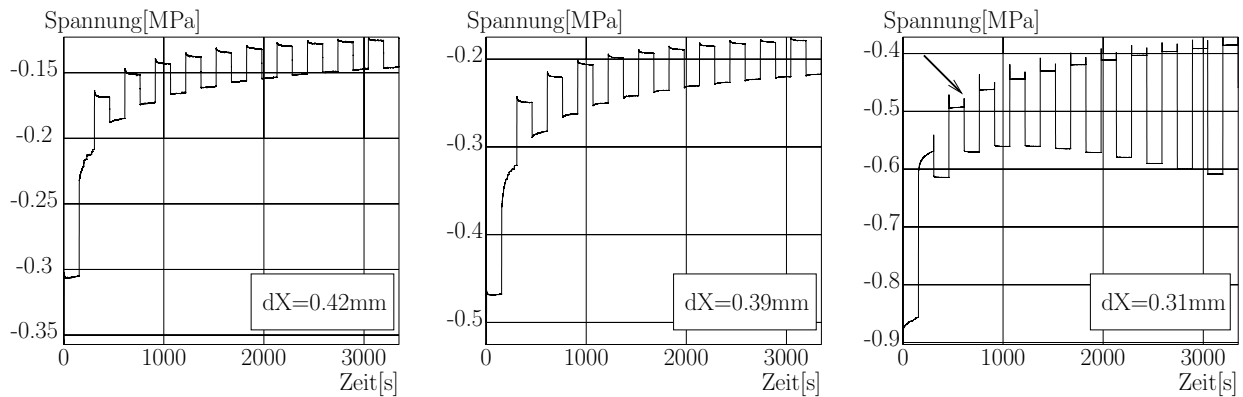
In Abb. 2.38 sind auch die Haltezeiten, in denen die Scherspannung an den Hysteresespitzen relaxiert, erkennbar. Außerdem haben die Hysteresekurven in den Belastungsphasen eine größere Krümmung als bei den entsprechenden Versuchen ohne Haltezeit.

Die Kompressionsspannungen werden in Abb. 2.39 für die Wechselversuche ohne Haltezeit bzw. in Abb. 2.40 für die Wechselversuche mit Haltezeiten über der Zeit dargestellt.



**Abbildung 2.39:** Kompressionsspannung, Wechselversuche ohne Haltezeit





**Abbildung 2.40:** Kompressionsspannung, Wechselversuche mit Haltezeiten

Die Darstellung des Kompressionsspannungsverlaufs zeigt wieder ähnliche Eigenschaften, wie sie schon bei den entsprechenden Schwellversuchen zu sehen waren. Dabei fällt das letzte Bild (s. Abb. 2.40 rechts) aus der Reihe. Auf dieser Darstellung bemerkt man 'peaks' (s. Pfeil), für welche es keine plausible Interpretation gibt.

## 2.8 Der Warmversuch

Das Wort "Warmversuch" beschreibt einen Versuchstyp, der aus einem gekoppelten thermisch-mechanischen Prozeß eines Freiversuchs besteht. Das Versuchsziel ist die Beschreibung des mechanischen Materialverhaltens bei unterschiedlichen Temperaturen (von Raumtemperatur bis  $+750^{\circ}\text{C}$ ) nach der Auflösung des organischen Materialsbinders<sup>13</sup> (s. z.B. Unifrax[53] und 3M[55]). Dazu wurde der folgende Prozeß (s. Abb. 2.41) 4-mal gefahren, jedesmal mit einer anderen Proben temperatur während der Phase "Mechanischer Prozeß". Die Versuche unterscheiden sich durch die folgenden Namen: "WVersuch 750", "WVersuch 350", "WVersuch 100" und "WVersuch RT". Sie wurden bei den entsprechenden Temperaturen  $750^{\circ}\text{C}$ ,  $350^{\circ}\text{C}$ ,  $100^{\circ}\text{C}$  und Raumtemperatur während des mechanischen Prozesses gefahren.

Der Prozeß läßt sich in vier Teile zerlegen. Jeder Versuch beginnt mit der Phase "Vorkompression", in der die Matte zuerst um ca. 22% in 5 Sekunden vorkomprimiert wurde. Eine Wartezeit von ca. 80 s folgte der Stauchung, um mögliche viskose Effekte des Materials verschwinden zu lassen (s. Abschnitt 2.5).

<sup>13</sup>Die Matte besteht zu einem Teil aus organischem Binder (z.B. Latex), einem Stoff, der sich mit höherer Temperatur (über  $250\text{-}400^{\circ}\text{C}$ ) in ein bis zwei Stunden auflöst (s. Anmerkungen auf S. 4).

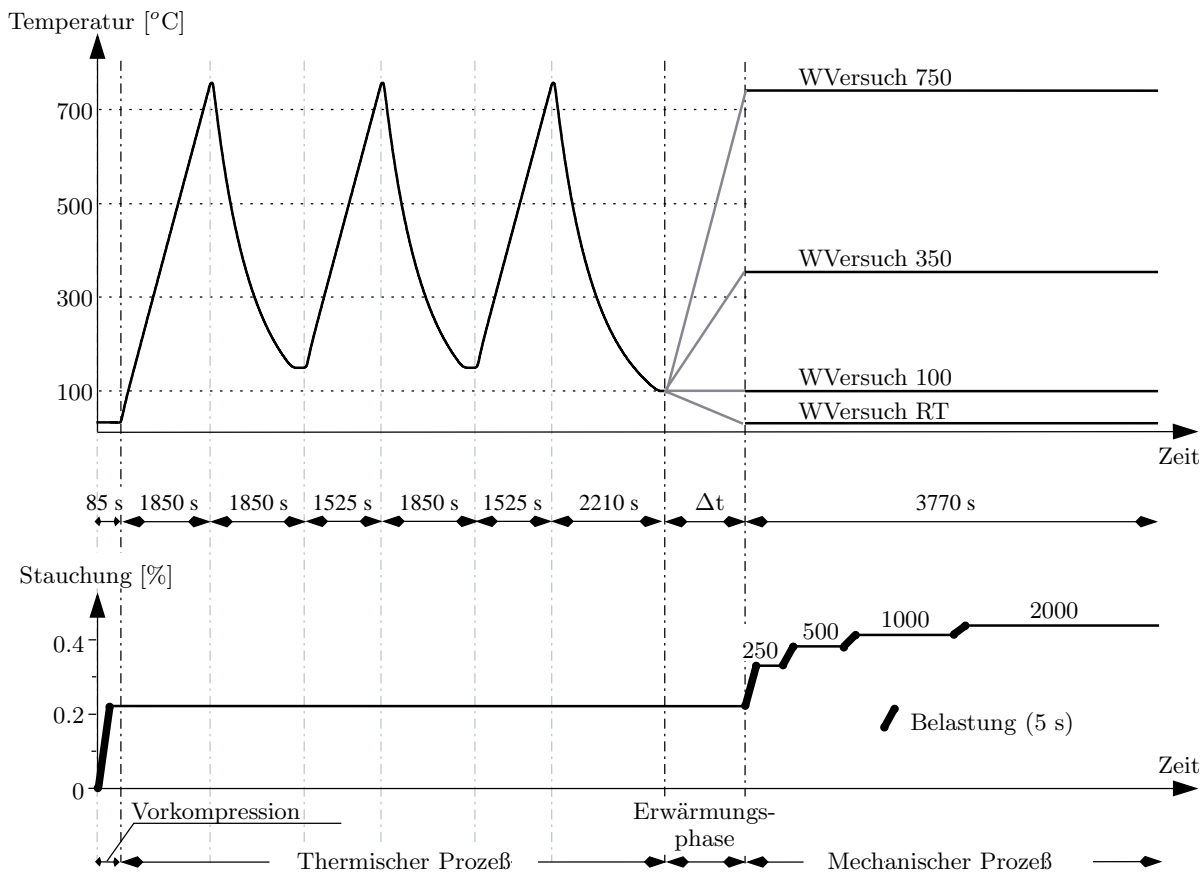


Abbildung 2.41: Prinzipieller Verlauf über der Zeit

Die zweite Phase wurde "Thermischer Prozeß" genannt. Die ca. 22% Stauchung der ersten Phase wurden während dieser ganzen Phase gehalten. Es handelt sich um einen thermischen Zyklus von Erwärmung<sup>14</sup> und Abkühlung, der dreimal wiederholt wurde. Zuerst wurde die Probe von Raumtemperatur bis 760°C erwärmt und dann von dieser Temperatur bis 150°C abgekühlt. Eine Wartezeit folgte der Abkühlung. Die Erwärmung von Raumtemperatur bis 760°C dauerte 1850 s und die Abkühlung (von 760°C bis 150°C) mit der Wartezeit insgesamt 1850 s. Der Zyklus von Erwärmung, Abkühlung und Wartezeit wurde noch zweimal wiederholt, aber jedesmal mit einer Erwärmungsanfangstemperatur von 150°C. Für den letzten Zyklus wurde die Probe bis 100°C abgekühlt und es gab keine Wartezeit. Die Erwärmung von 150°C bis 760°C dauerte 1525 s und die Abkühlung von 760°C bis 100°C 2210 s.

Der Versuch endet mit der Phase "Mechanischer Prozeß". Um diesen Prozeßanteil durchzuführen, sollte zuerst eine bestimmte Probentemperatur erreicht sein: Es handelt sich um die dritte Phase, die "Erwärmphase" genannt wird. Am Anfang dieses Prozeßanteils lag die Probentemperatur bei 100°C. Für den "W-Versuch 750" wurde die Probe bis 750 °C in  $\Delta t=1620$  s und für den "W-Versuch 350" die Probe bis 350 °C in  $\Delta t=620$  s

<sup>14</sup>Die Probe wurde mit einer Geschwindigkeit von 0.4°C pro Sekunde erwärmt.

erwärmt. Für den Versuch RT wurde eine ganze Nacht gewartet, um die Proben­temperatur wieder auf die Raumtemperatur abzukühlen und für den "WVersuch 100" gab es keine dritte Phase, da die Proben­temperatur schon erreicht war.

Der "Mechanische Prozeß" besteht aus vier Stufen, jede zuerst aus 5 Sekunden Belastung und einer von Stufe zu Stufe unterschiedlichen Haltezeit. Die Probe wurde schon bei der Phase "Vorkompression" um 22% komprimiert. Die erste Kompression im "Mechanischen Prozeß" sollte auf 33% der Probendicke führen, die zweite auf 38%, die dritte auf 41% und zum Schluß wurde auf 43 % der Dicke komprimiert. Weil die Belastung immer 5 s dauerte, wurde die Matte bei jeder Stufe mit einer unterschiedlichen Geschwindigkeit gedrückt. Die Relaxationszeiten wurden von Stufe zu Stufe länger (Stufe 1: 250 s, Stufe 2: 500 s, Stufe 3: 1000 s, Stufe 4: 2000 s). Insgesamt dauerte die Phase "Mechanischer Prozeß" 3770 s.

Da die Temperatur bei dem Warmversuch auch gesteuert werden sollte, bestand die spezielle Vorrichtung zu diesem Versuch teilweise auch aus thermischen Komponenten. Die Probe lag zwischen zwei Heizplatten, deren Heizelemente durch geregelte Leistungsverstärker versorgt wurden. Um die hohen Temperaturen auf kleinstem Raum zu konzentrieren, wurden zwei Isolationssäulen mit wassergekühltem Flansch eingebaut. Zwischen den Heizplatten und den Isolationssäulen liegt noch jeweils eine Isolationsplatte aus Dämmmaterial. Zur Verringerung der Kühlungszeit wurde die Umgebungsluft während der Abkühlphase mit einem Staubsauger abgesaugt.

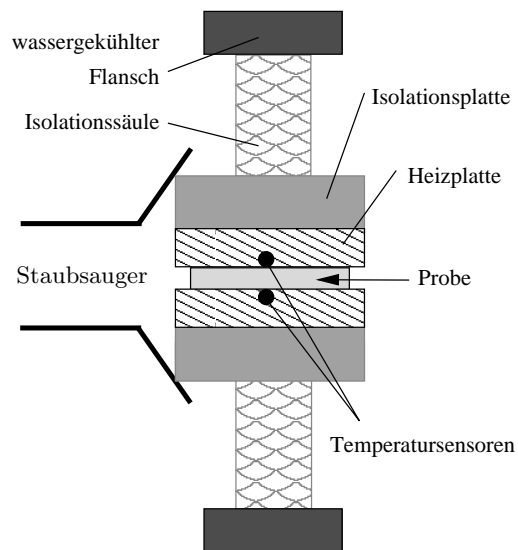


Abbildung 2.42: Warmversuchsvorrichtung

Der Warmversuch wurde nur mit einer einzigen Probenscheibe gefahren: Ein Stapel von Probenscheiben hätte den Vorteil gehabt, daß größere Wege gefahren werden könnten (s. Kapitel 2.5) und daß die Wirkung der Materialinhomogenität weniger stark gewesen wäre (s. Kapitel 2.6). Andererseits erlaubt eine einzige Probenscheibe die Annahme, daß eine Erwärmung der Probe mit räumlich homogener Temperatur gewährleistet ist.

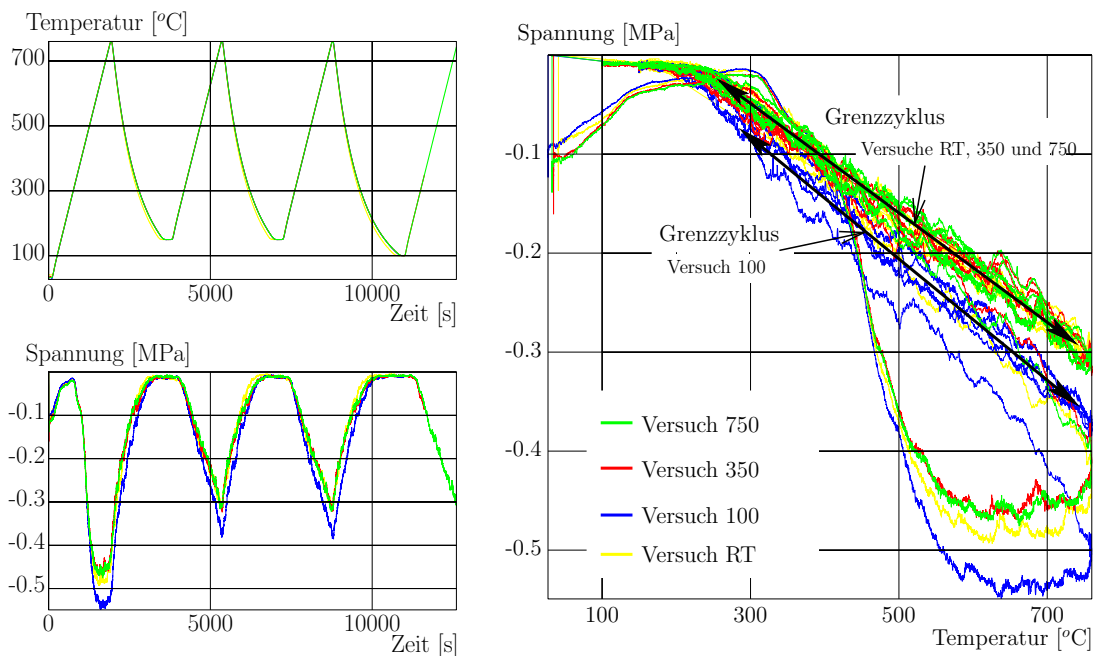
Die Zeit, der gesamte Weg<sup>15</sup> (gefahren + Maschinendehnung), die Axialkraft und die

<sup>15</sup>Weil die Temperatur durch den Versuch bis auf 760°C ging, dehnte sich der Versuchsaufbau trotz der Isolation aus. Um diesen nicht zu vernachlässigenden Effekt zu korrigieren, wurde jeder Versuch zuerst ohne Probe (Heizplatten im Kraftschluß) kraftgesteuert ( $\vec{F} = \vec{0}$ ) gefahren, und gleichzeitig wurde die Temperaturdehnung des Aufbaus anhand der Bewegung der Traverse gemessen. Die so gemessene Maschinendehnung mußte bei den weggesteuerten Versuchen zum gewünschten Sollweg hinzu addiert werden, um den notwendigen Traversenweg zu erhalten. Die Regelung der Versuchsmaschine betraf nur den Traversenweg. Der Sollweg war aber die Relativbewegung der Heizblöcke. Der Unterschied zwischen Sollweg und Traversenweg war die thermische Ausdehnung des Aufbaus. Da

Oberflächentemperatur der Matte wurden gemessen und mit einer Abtastrate von 20 Hz gespeichert.

Da alle untersuchten Matten ähnliches Materialverhalten gezeigt haben, werden die Meßkurven der Matte INPE 570 als Beispiel dargestellt. In diesem Fall hatte die Probe die folgenden Maße :  $50 \times 50 \text{ mm}^2$  mit einer Dicke von 6.9 mm. Daraus folgt, daß diese Probe zuerst mit einer Geschwindigkeit von 0.304 mm/s vorkomprimiert wurde, dann die erste Kompression des Mechanischen Prozesses mit einer Geschwindigkeit von 0.152 mm/s gefahren wurde, die zweite Kompression mit 0.07 mm/s, die dritte mit 0.041 mm/s und die letzte mit 0.028 mm/s.

Abb. 2.43 stellt die Meßergebnisse während des thermischen Prozesses dar. Die beiden Darstellungen links zeigen die Temperatur bzw. die Spannung über der Zeit. Die Spannung über der Temperatur wird auf dem Bild rechts repräsentiert. Die Legende in der rechten Darstellung gilt für die drei Bilder.



**Abbildung 2.43:** Meßergebnisse des Warmversuchs während des thermischen Prozesses

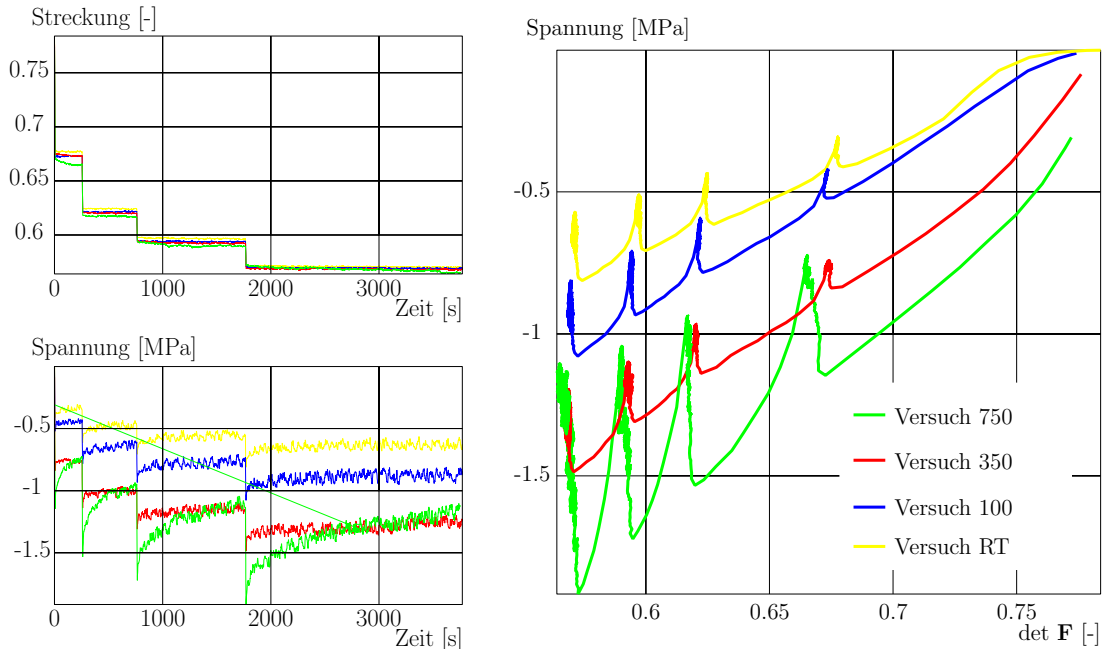
Obwohl in Abb. 2.43 links die jeweils für denselben Verlauf unter selber Randbedingungen gemessenen Ergebnisse aller 4 Warmversuche zusammen dargestellt wurden, sollten die beiden Diagrammen jeweils eine einzige Kurve bzw. 4 aufeinander liegende Meßkurven zeigen. Wie erwartet stellt das obere Bild eine einzige Kurve für die Temperaturverlauf dar. Das untere Bild zeigt die Spannungsantwort, die von Versuch zu Versuch

---

die Versuche nie unter denselben Konditionen (Raumtemperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftströmung,...) durchgeführt werden konnten, wurde der Fehler durch diese Korrektur zwar nicht beseitigt, jedoch deutlich verkleinert.

(hauptsächlich zwischen dem WVersuch 100 und den anderen) unterschiedlich ist. Mehrere Gründe können diese Unterschiede erklären: Da der Warmversuch nur mit einer einzigen Probenscheibe gefahren wurde, könnte die Wirkung der Materialinhomogenität im Gegensatz zu einem Stapel von Probenscheiben sehr stark sein. Unterschiedliche Vordeformationen zwischen Versuchen während der Phase Vorkompression könnten diese Abweichungen ebenfalls begründen. Der gefahrene Weg der Vorkompression wurde von der gemessenen Materialdicke der Probenscheibe gerechnet, die visuell gelesen wurde. Da das Material sehr weich ist, könnte ein Lesefehler von ca.  $\pm 10\%$  auftreten. Aus den Abbildungen links kommen die folgenden Feststellungen: Während die Temperatur steigt, nimmt der Absolutwert der Spannung zu. Im Gegensatz dazu, wenn die Temperatur abnimmt, nimmt der Absolutwert der Spannung ab. Obwohl immer dieselbe maximale Temperatur ( $760^\circ\text{C}$ ) bei den drei Zyklen erreicht wurde, erreicht der Absolutwert der Spannung bei dem ersten Zyklus (bis ca.  $0.55\text{ MPa}$ ) einen höheren Wert als bei den zwei anderen (bis ca.  $0.38\text{ MPa}$ ). Eine Beziehung zwischen der Temperatur und der Spannung, die sich nach zwei bis drei Zyklen (als Grenzyklus) einstellt, ist in Abb. 2.43 rechts zu erkennen (s. Pfeile). Der Unterschied zwischen dem ersten und den anderen Zyklen läßt sich mit der Verbrennung des organischen Binders und der Abgabe des gebundenen Wassers von dem Glimmer erklären.

Abb. 2.44 stellt die Meßergebnisse während der mechanischen Prozesse dar. Die beiden Darstellungen links zeigen die Dehnung bzw. die Spannung über der Zeit. Die Spannung über der Streckung wird auf dem Bild rechts repräsentiert. Die Legende dieser Darstellung rechts gilt für die drei Bilder.



**Abbildung 2.44:** Meßergebnisse des Warmversuchs während der mechanischen Prozesse

Bei der ersten Abb. 2.44 links sollte jeweils dieselbe Stauchung gefahren werden. Trotzdem zeigt das Bild leicht unterschiedliche Meßkurven. Da der mechanische Prozeß des thermischen Prozesses folgt (s. Abb. 2.41), können die Begründungen der Abweichung der zweiten Abb. 2.43 links für diese Unterschiede gelten. Zusätzlich könnte die Genauigkeit des Versuchsaufbaus (s. Fußnote 15, Seite 34) auch eine Begründung dieser Unterschiede sein. Für die Versuche "WVersuch RT", "WVersuch 100" und "WVersuch 350" stellt die zweite Abbildung links die Spannungsmeßkurven dar, die jeweils zu einem minimalen Spannungswert während der Haltezeiten tendieren. Für den Versuch "WVersuch 750" (grüne Meßkurve), nimmt der Absolutwert der Spannung während der Relaxationen weiter ab, aber die Spannungmeßkurve erreicht keinen Minimalwert. Dafür hätten alle Haltezeiten in diesem Versuch viel länger dauern müssen. Abb. 2.44 zeigt, daß die Abnahme des Absolutwertes der Spannung für den "WVersuch 750" doppelt so groß ist wie für die anderen Versuche.

## 2.9 Zusammenfassung

Die unterschiedlich gefahrenen Versuche illustrieren einige Materialeigenschaften, obwohl die Möglichkeiten, die Matte zu untersuchen, wegen ihrer herstellungsbedingten physikalischen Eigenschaften begrenzt sind.

Aus verschiedenen Gründen wurden nie alle gelieferten Matten bei allen Versuchen untersucht, und nur einige Ergebnisse sind in dieser Arbeit dokumentiert. Trotzdem ist eine Verallgemeinerung über das Materialverhalten möglich, da zu jedem Versuchstyp die untersuchten Matten immer ähnliche Ergebnisse gezeigt haben.

Obwohl die Materialungleichheit bei mehreren Versuchsverläufen auftritt und damit die Interpretation des Materialverhaltens erschwert, wurden folgende Materialeigenschaften festgestellt bzw. angenommen:

- Die Freiversuche beweisen die **Geschwindigkeitsabhängigkeit**. Diese Eigenschaft wurde sowohl während Stauchung als auch während der Haltezeit bei Raumtemperatur beobachtet.
- Die detaillierten Vergleiche zwischen den einzelnen Festversuchen liefern nicht den strengen Beweis, daß das Material als isotrop angesehen werden muß. Allerdings bewegen sich die Abhängigkeiten des Spannungs-Dehnungsverhaltens von der Beanspruchungsrichtung in mäßigen Größenordnungen, die ebenso gut durch eine Ungleichheit der Materialproben, die den Versuchen zugrunde lagen, erklärt werden können. Daher wird für die Entwicklung eines Materialmodells die **Isotropie** des Materialverhaltens angenommen.
- Die Scherversuche zeigen, daß das Material mit wachsender Kompression fester wird. Das Material zeigt für zyklische Scherung eine stationäre Hysterese.
- Die Warmversuche illustrieren die Veränderung des Materials während eines thermischen Prozesses in genügend hohen Temperaturbereichen und das veränderte Materialverhalten der Matte danach. Da die Veränderung irreversibel ist, wird der Übergang

nicht untersucht. Das Material zeigt nach dem thermischen Prozeß ein ähnliches Verhalten wie bei Raumtemperatur ohne Erwärmungsphase, d.h. die Spannung wächst bei Wachstum der Stauchung und nimmt während der Haltezeiten ab. Das beweist, daß die Matte nach Erwärmung **geschwindigkeitsabhängig** bleibt und erlaubt, daß das für Raumtemperatur entwickelte Modell zu einem temperaturabhängigen Materialmodell erweitert werden darf, dessen Gültigkeit allerdings auf isotherme Prozesse (zeitlich und räumlich konstante Temperatur) eingeschränkt ist.

Nach den unterschiedlichen Versuchen wird die Matte bei Raumtemperatur als ein isotropes viskoelastisches Material angenommen und modelliert. Bei unterschiedlichen Temperaturen zeigt sie ein ähnliches Verhalten, obwohl die irreversible Änderung des Matteninhalts während der Erwärmungsphase geschehen ist. Für die Modellierung der Matte bei unterschiedlichen Temperaturen wird das entwickelte Materialmodell entsprechend erweitert.

# 3 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik ist ein Fachgebiet, das das Verhalten von materiellen Körpern unter mechanischer und thermischer Beanspruchung mit mathematischen Modellen beschreibt. Die Kontinuumsmechanik interessiert sich für das makroskopische Materialverhalten, d.h. die Materie wird als kontinuierlich in Raum verteilt angesehen und ihre Molekülstruktur wird nicht berücksichtigt. Die bestehenden Gleichungen der Kontinuumsmechanik lassen sich auf Grund ihrer physikalischen Bedeutung in drei Kategorien einordnen:

- Die Kinematik,
- Die Bilanzgleichungen und
- Die Materialtheorie.

In diesem Kapitel werden nur Begriffe und Beziehungen der Kinematik bzw. der Bilanzgleichungen eingeführt, die notwendig sind, um diese Arbeit zu lesen. Die Materialtheorie wird im nächsten Kapitel vorgestellt und für die Modellierung des untersuchten Materials verwendet. Eine detaillierte Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen befindet sich z.B. in den Büchern von Chaboche[7], Coirier[9], Haupt[22] oder Krawietz[28].

## 3.1 Kinematik

### 3.1.1 Materielle und räumliche Darstellung

#### Referenz- und Momentankonfiguration

Die Beschreibung der Bewegung eines materiellen Körpers<sup>1</sup>  $\mathcal{B} = \{\mathcal{P}\}$  bezieht sich auf die Beschreibung seiner Elemente  $\mathcal{P}$ , die eineindeutig in einen dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  abgebildet werden. Jede solche injektive Abbildung  $\chi$  wird Konfiguration genannt und ein Zahlentripel  $(x_1, x_2, x_3)$  wird jedem Körperpunkt  $\mathcal{P}$  eineindeutig zugeordnet:

$$\begin{aligned}\chi : \mathcal{B} &\rightarrow \chi[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi(\mathcal{P}) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow \mathcal{P} = \chi^{-1}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Während physikalischer Prozesse befindet sich ein materieller Körper zu jedem Zeitpunkt  $t$  in einer Konfiguration. Der undeformierte Zustand des Körpers wird als Referenzzu-

---

<sup>1</sup>Ein materieller Körper  $\mathcal{B} = \{\mathcal{P}\}$  ist eine Gesamtheit von Elementen  $\mathcal{P}$ .



stand zum Zeitpunkt  $t=t_0$  angenommen und die entsprechende Konfiguration  $\chi_0$  heißt Referenzkonfiguration oder Bezugskonfiguration.  $(X_1, X_2, X_3)$  sind die materiellen Koordinaten des Körperpunktes  $\mathcal{P}$  in der Referenzkonfiguration,

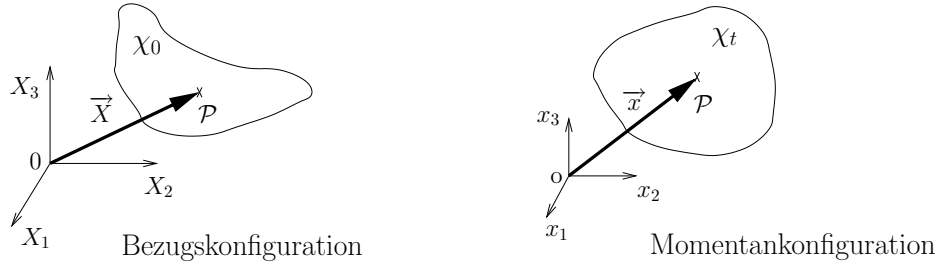
$$\begin{aligned} \chi_0 : \mathcal{B} &\rightarrow \chi_0[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi_0(\mathcal{P}) = (X_1, X_2, X_3) = \vec{X} \Leftrightarrow \mathcal{P} = \chi_0^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \chi_0^{-1}(\vec{X}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Wahl des Referenzzustandes ist frei, aber üblicherweise wird dafür der undeformierte Zustand angenommen.

Die anderen Konfigurationen, d.h. zum Zeitpunkt  $t > t_0$ , werden Momentankonfigurationen genannt. Für jede Momentankonfiguration  $\chi_t$  zum Zeitpunkt  $t$  wird jedes Körperelement  $\mathcal{P}$  den räumlichen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3, t)$  zugeordnet:

$$\begin{aligned} \chi_t : \mathcal{B} &\rightarrow \chi_t[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\mapsto \chi_t(\mathcal{P}) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \vec{x}(t) \Leftrightarrow \mathcal{P} = \chi_t^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \chi_t^{-1}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Abb. 3.1 stellt die Referenz- und Momentankonfiguration mit ihren entsprechenden Koordinatensystemen dar.



**Abbildung 3.1:** Bezugskonfiguration und Momentankonfiguration

Die Bewegung eines materiellen Körpers wird durch die Vektorfunktion  $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$  dargestellt. Damit ist

$$\vec{\Phi}(\vec{X}, t) = \chi_t(\chi_0^{-1}(\vec{X})). \quad (3.3)$$

### Lagrangesche und Eulersche Koordinaten

Ein physikalischer Vorgang, der auf einem Element  $\mathcal{P}$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  abläuft, wird entweder mit der Lagrangeschen Darstellung oder mit der Eulerschen Darstellung beschrieben. Als Beispiel wird die Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{f}(\mathcal{P}, t)$  eines Elementes  $\mathcal{P}$  zum Zeitpunkt  $t$  in den beiden Darstellungen formuliert. Zu der Lagrangeschen Darstellung gehören die Lagrangeschen Koordinaten, die auch materielle Koordinaten  $(X_1, X_2, X_3)$  genannt werden. Diese Darstellung wird in der Bezugskonfiguration  $\chi_0$  formuliert und ist von dem Referenzzustand des Elements  $\mathcal{P}$  abhängig. Dafür lautet die Darstellung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  mit  $\mathcal{P} = \chi_0^{-1}(\vec{X}) = \chi_0^{-1}(X_1, X_2, X_3)$ :

$$\vec{v} = \hat{f}(\vec{X}, t) = \vec{f}(\chi_0^{-1}(\vec{X}), t). \quad (3.4)$$

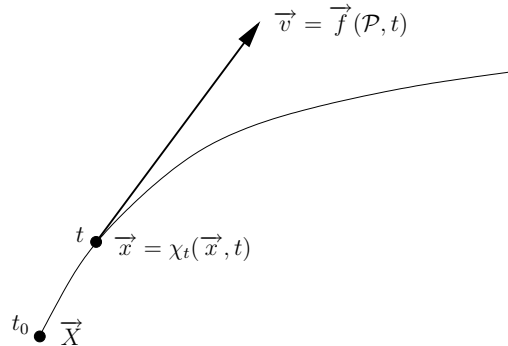
Zu der Eulerschen Darstellung gehören die Eulerschen Koordinaten, die auch räumliche Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3, t)$  heißen. Es handelt sich um eine Darstellung in der Momentankonfiguration  $\chi_t$ . Hier lautet die Darstellung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  mit  $\mathcal{P} = \chi_t^{-1}(\vec{x}) = \chi_t^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ :

$$\vec{v} = \dot{\vec{f}}(\vec{x}, t) = \vec{f}'(\chi_t^{-1}(\vec{x}), t). \quad (3.5)$$

Eine Beziehung zwischen den beiden Darstellungen ist durch die Gleichungen (3.4) und (3.5) zu formulieren:

$$\dot{\vec{f}}(\vec{x}, t) = \hat{\vec{f}}(\vec{\Phi}^{-1}(\vec{x}, t), t) \Leftrightarrow \hat{\vec{f}}(\vec{X}, t) = \dot{\vec{f}}(\vec{\Phi}(\vec{X}, t), t) \quad (3.6)$$

Abb. 3.2 stellt die Bewegung des Elements  $\mathcal{P}$  durch die Ortsvektoren  $\vec{X}$  (zur Zeit  $t_0$ ) und  $\vec{x}$  (zur Zeit  $t$ ) dar sowie seine Geschwindigkeit  $\vec{v}$  (zur Zeit  $t$ ).

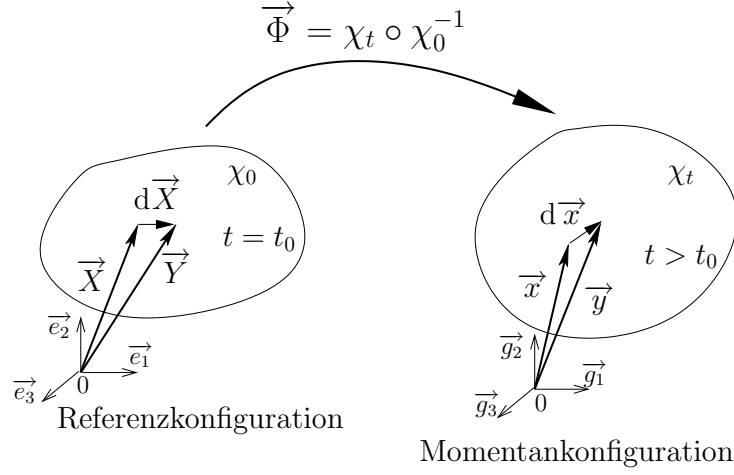


**Abbildung 3.2:** Bewegung und Geschwindigkeit eines Elements  $\mathcal{P}$

Anstelle der Geschwindigkeit können auch andere physikalische Größen mit den Koordinaten von Lagrange oder Euler formuliert werden. Die Lagrangesche Darstellung ist besser geeignet, um Experimente der Festkörpermechanik zu beschreiben. Sie bezieht sich auf den Referenzzustand des Materials, also auf die unverformte Probengeometrie. Im Gegensatz dazu geht die Eulersche Darstellung von dem Momentanzustand des Materials aus.

### 3.1.2 Deformationsgradient

Im Rahmen der Kontinuumsmechanik bezieht sich das Wort Deformation auf die Änderungen eines materiellen Körpers zwischen seiner Referenzkonfiguration und seiner Momentankonfiguration. Um die Deformation eines Körpers  $\mathcal{B}$  zu beschreiben, wird z.B. das Verhalten seiner materiellen Punkte  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  mit mathematischen Beziehungen von der Referenzkonfiguration zu der Momentankonfiguration formuliert. In Abb. 3.3 werden die Elemente  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  in der Bezugskonfiguration  $\chi_0$  durch die Ortsvektoren  $\vec{X}$  und  $\vec{Y}$  und in der Momentankonfiguration  $\chi_t$  durch die Ortsvektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  repräsentiert.



**Abbildung 3.3:** Elemente  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  in der Bezugs- und Momentankonfiguration

Nach (3.1) und (3.2) lassen sich die Elemente  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  wie folgt beschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \chi_0(\mathcal{M}) = \vec{X} \Leftrightarrow \mathcal{M} = \chi_0^{-1}(\vec{X}) \\ \chi_t(\mathcal{M}) = \vec{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_t(\chi_0^{-1}(\vec{X})) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) = \vec{x}, \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \chi_0(\mathcal{N}) = \vec{Y} \Leftrightarrow \mathcal{N} = \chi_0^{-1}(\vec{Y}) \\ \chi_t(\mathcal{N}) = \vec{y} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_t(\chi_0^{-1}(\vec{Y})) = \vec{\Phi}(\vec{Y}, t) = \vec{y}. \quad (3.8)$$

$\vec{\Phi} = \chi_t \circ \chi_0^{-1}$  bildet durch Ortsvektoren  $\vec{X}$  beschriebene Punkte der Referenzkonfiguration  $\chi_0$  auf Punkte mit den Ortsvektoren  $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$  der Momentankonfiguration  $\chi_t$  ab. Die Punkte  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  können mit den folgenden Gleichungen (3.9) und (3.10) in der Bezugs- und in der Momentankonfiguration miteinander verbunden werden:

$$\vec{Y} = \vec{X} + d\vec{X}, \quad (3.9)$$

$$\vec{y} = \vec{x} + d\vec{x}. \quad (3.10)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (3.9) und (3.10) kann die Differenz zwischen den Ortsvektoren den Elemente  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  in der Momentankonfiguration gebildet werden:

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{Y}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow d\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{\Phi}(\vec{X}, t). \quad (3.12)$$

$\vec{\Phi}(\vec{X}, t)$  ist aufgrund allgemeiner Annahmen stetig differenzierbar. Daher gibt es für  $d\vec{X}$  eine Taylor-Entwicklung mit der Eigenschaft  $\lim_{|d\vec{X}| \rightarrow 0} |\vec{h}(\vec{X}, d\vec{X})| = 0$ :

$$\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) + \{\text{Grad } \vec{\Phi}(\vec{X}, t)\} d\vec{X} + |d\vec{X}| \vec{h}(\vec{X}, t, d\vec{X}). \quad (3.13)$$

Der Operator Grad bezeichnet den materiellen Gradienten, d.h. die Differentiation nach dem Ortsvektor  $\vec{X}$  der Referenzkonfiguration.

In der Gleichung (3.12) wird der Term  $\vec{\Phi}(\vec{X} + d\vec{X}, t)$  durch seine Taylor-Entwicklung ersetzt. Daraus folgt:

$$d\vec{x} = \{\text{Grad } \vec{\Phi}(\vec{X}, t)\} d\vec{X} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}. \quad (3.15)$$

$\mathbf{F} = \text{Grad } \vec{\Phi}(\vec{X}, t)$  heißt Deformationsgradient und vermittelt die Transformation materieller Linienelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration. Die Definition des Deformationsgradienten lautet im Bezug auf kartesische Koordinaten:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Die Eineindeutigkeit der Abbildung  $\vec{\Phi}$  hat zur Folge, daß der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  invertierbar ist, d.h. es gilt

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \quad \text{und} \quad d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}. \quad (3.17)$$

$\det \mathbf{F}$  ist die Determinante des Deformationsgradienten und wird bei kartesischen Koordinaten folgendermaßen definiert,

$$\det \mathbf{F} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} F_{ip} F_{jq} F_{kr} \quad \text{für } i, j, k, p, q, r = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

wobei  $\epsilon_{ijk}$  der Permutationstensor<sup>2</sup> ist. Die Determinante  $\det \mathbf{F}$  beschreibt die Volumenänderung materieller Volumenelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration:

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{F} > 0. \quad (3.19)$$

Die Beziehung (3.19)<sub>2</sub> läßt sich auf der Basis der Gleichung (3.15) herleiten, wobei in der Bezugskonfiguration  $dV = (d\vec{X}_1 \times d\vec{X}_2) \cdot d\vec{X}_3$  das undeformierte Volumenelement und  $dv = (d\vec{x}_1 \times d\vec{x}_2) \cdot d\vec{x}_3$  sein Bild in der Momentankonfiguration ist.

---

<sup>2</sup>Der Permutationstensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation ist,} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Verzerrungstensoren

Um die Verzerrung eines materiellen Linienelements  $d\vec{x}$  von der Bezugsconfiguration in die Momentankonfiguration festzustellen, wird die Differenz zwischen den Quadraten materieller Linienelemente  $d\vec{x}$  und  $d\vec{X}$  berechnet:

$$\begin{aligned} d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X} &= 2 d\vec{X} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d\vec{X} \\ &= 2 d\vec{X} \cdot \mathbf{E} d\vec{X}. \end{aligned}$$

$\mathbf{E}$  heißt der Greensche Verzerrungstensor. Er operiert auf der Bezugsconfiguration und stellt Längenänderungen und relative Winkeländerungen von materiellen Linienelementen dar.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (3.20)$$

Hier ist  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  der Rechte Cauchy-Green Tensor, der ebenfalls auf der Referenzconfiguration operiert.

Im Rahmen dieser Arbeit spielt die Norm von  $\mathbf{E}$  eine wichtige Rolle bei der Modellentwicklung (s. Kap. 3). Die Norm  $|\mathbf{E}|$  hat die Eigenschaft, die Größe der Verzerrungen bzw. die Intensität des Verzerrungszustandes als Abweichung von der Starrkörperbewegung darzustellen:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}} = \sqrt{\text{Sp} \mathbf{E}^2}. \quad (3.21)$$

## Deformationsgeschwindigkeiten

Um die Geschwindigkeit einer Deformation in der Kontinuumsmechanik darzustellen, wird die materielle Zeitableitung eines Linienelements  $d\vec{x}$  berechnet. Zu diesem Zweck wird die Gleichung (3.15) materiell nach der Zeit abgeleitet und  $d\vec{X}$  durch seine Definition (3.17) ersetzt:

$$\begin{aligned} (d\vec{x})^\cdot &= (\mathbf{F} d\vec{X})^\cdot \\ &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \text{grad} \vec{v}(\vec{x}, t)$  heißt räumlicher Geschwindigkeitsgradient. Er läßt sich in zwei Anteile zerlegen,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{W}$ , die die Änderungsgeschwindigkeit der Länge und die Drehgeschwindigkeit der materiellen Linienelemente  $d\vec{x}$  beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)}_{\mathbf{W}} \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W}. \end{aligned}$$

$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$  heißt Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und ist der symmetrische Anteil von  $\mathbf{L}$ . Der schiefssymmetrische Anteil von  $\mathbf{L}$  ist  $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$  und wird Drehgeschwindigkeitstensor genannt.

### 3.1.3 Zerlegungen des Deformationsgradienten

Die Zerlegung des Deformationsgradienten wird oft erfolgreich verwendet, um dreidimensionale Materialmodelle unter physikalisch unterschiedlichen entkoppelten Einwirkungen zu formulieren. Die Gedanken dieses Konzepts wurden zuerst für die Elastoplastizität motiviert und basieren auf der Vorstellung einer Zwischenkonfiguration, die lokal spannungsfrei ist (s. Lee [31] oder Lee & Liu [32]). Grundsätzlich induziert jede multiplikative Zerlegung eine solche Zwischenkonfiguration. Dieses Konzept wurde erfolgreich für die Viskoelastizität bzw. auch für die Thermoelastizität übernommen.

#### Thermisch-mechanische Zerlegung

Um thermo-mechanische Materialmodelle entwickeln zu können, schlagen Lu & Pister [39] eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in einen rein mechanischen Anteil  $\mathbf{F}_M$  und einen rein thermischen Anteil  $\mathbf{F}_\theta$  vor:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta. \quad (3.23)$$

Aus der lokalen Massenbilanz (s. Gl. (3.44)) in materieller Darstellung  $\rho_0 = \rho \det \mathbf{F}$  ergibt sich mit der Zerlegung (3.23)  $\rho_0 = \rho \det \mathbf{F}_M \det \mathbf{F}_\theta$  und der Definition  $\rho_{0_\theta} = \rho \det \mathbf{F}_M$  die Beziehung

$$\rho_{0_\theta} = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{F}_\theta}. \quad (3.24)$$

Diese Gleichung beschreibt die durch Temperatureinfluß geänderte Dichte der Bezugskonfiguration.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, den thermischen Anteil  $\mathbf{F}_\theta$  zu definieren. Lion [37] schlägt z.B. dafür die folgende Konstitutivgleichung vor:

$$\mathbf{F}_\theta = \varphi(\theta - \theta_0)^{1/3} \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \rho_{0_\theta} = \frac{\rho_0}{\varphi(\theta - \theta_0)}, \quad \varphi(0) = 1. \quad (3.25)$$

Diese Funktion gilt nur für isotrope Stoffe wie z.B. Polymere, bei denen die Temperaturdehnungen rein volumetrisch sind. Die Funktion  $\varphi$  beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Massendichte und muß aus Experimenten ermittelt werden.

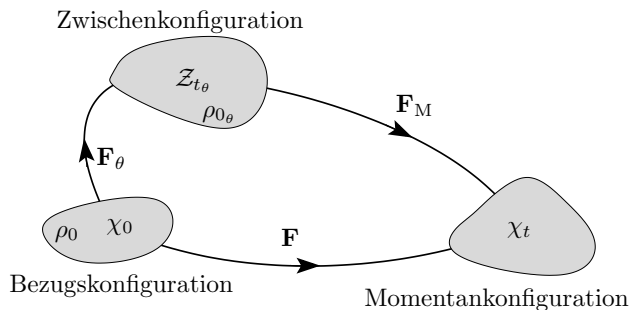
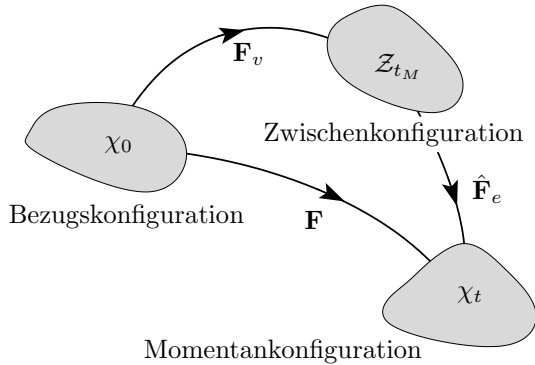


Abbildung 3.4: Thermisch-mechanische Zerlegung

Abb. 3.4 symbolisiert diese thermo-mechanische Darstellung, wobei  $\chi_0$  die Bezugskonfiguration,  $\chi_t$  die Momentankonfiguration und  $Z_{t_\theta}$  die Zwischenkonfiguration repräsentiert.  $\rho_0$  bezeichnet die Massendichte des Materials in der Referenzkonfiguration mit der Temperatur  $\theta_0$  und  $\rho_{0_\theta}$  ist die Massendichte in der Zwischenkonfiguration nach der Temperaturänderung  $(\theta - \theta_0)$ .

Die thermomechanische Zerlegung (3.23) wurde von Lu & Pister [39] ursprünglich nur für finite Thermoelastizität entwickelt. Sie läßt sich aber auch auf beliebiges thermo-viskoelastisches Werkstoffverhalten übertragen (s. z.B. Lion [37]).

### Elastisch-inelastische Zerlegung des Deformationsgradienten



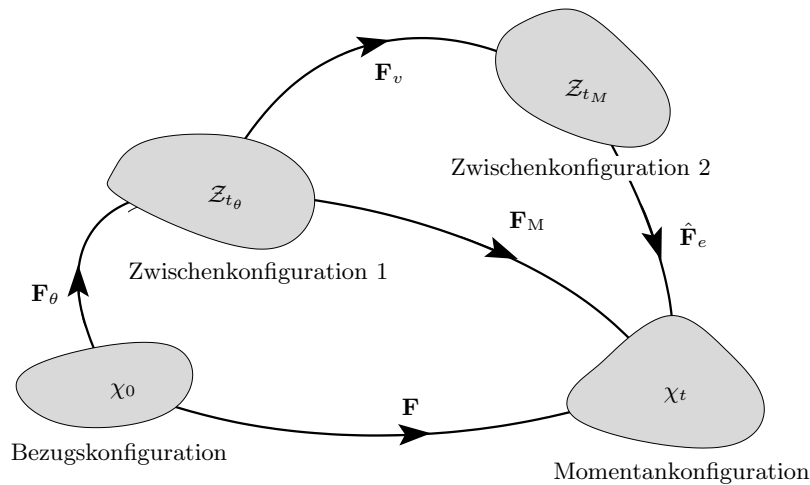
**Abbildung 3.5:** Elastisch-inelastische Zerlegung

Gleichartig formuliert z.B. Lion [37] ein viskoelastisches Stoffmodell mit einer Aufteilung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , die aus einem rein elastischen Anteil  $\hat{\mathbf{F}}_e$  und einem rein geschwindigkeitsabhängigen bzw. viskosen Anteil  $\mathbf{F}_v$  besteht:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v. \quad (3.26)$$

Abb. 3.5 symbolisiert diese Zerlegung, wobei  $\chi_0$  die Bezugskonfiguration,  $\chi_t$  die Momentankonfiguration und  $\mathcal{Z}_{t_M}$  die Zwischenkonfiguration repräsentiert.

### Thermisch-elastisch-inelastische Zerlegung



**Abbildung 3.6:** Thermisch-elastisch-inelastische Zerlegung

Nach einem Vorschlag von Lion [36] können temperaturabhängige viskoelastische Materialmodelle durch eine Kombination der beiden vorher erwähnten Zerlegungen (Thermisch-mechanische Zerlegung (3.23) und elastisch-inelastische Zerlegung (3.26)) dargestellt werden. Zu diesem Zweck soll der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  zuerst in einen thermischen Anteil  $\mathbf{F}_\theta$  und einen mechanischen Anteil  $\mathbf{F}_M$  zerlegt werden. Ferner erfolgt eine Zerlegung des mechanischen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_M$  in einen rein elastischen Anteil  $\hat{\mathbf{F}}_e$  und einen rein viskosen Anteil  $\mathbf{F}_v$ . Nach diesem Konzept lautet die kombinierte

Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v \mathbf{F}_\theta. \quad (3.27)$$

Die Darstellung in Abb. 3.6 illustriert diese Gedanken.  $\chi_0$  repräsentiert die Bezugskonfiguration,  $\chi_t$  die Momentankonfiguration.  $\mathcal{Z}_{t_\theta}$  ist die erste Zwischenkonfiguration, die sich aus der thermisch-mechanischen Zerlegung ergibt, und  $\mathcal{Z}_{t_M}$  die zweite Zwischenkonfiguration, die aus der elastisch-inelastischen Zerlegung folgt. Dieses Konzept wird später in dieser Arbeit bei der Materialmodellierung verwendet.

### 3.1.4 Konzept der Dualen Variablen

Im Rahmen finiter Deformationen gibt es mehrere Möglichkeiten, Verzerrungstensoren und Spannungstensoren zu verknüpfen, sowie deren Geschwindigkeiten zu definieren. Eine systematische Vorgehensweise ist durch das Konzept der Dualen Variablen gegeben. Die Motivation diese Konzepte basiert auf der Forderung, daß die Skalarprodukte der auf der Referenzkonfiguration operierenden Tensoren<sup>3</sup>

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{die Endwertarbeit}), \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{die Spannungsleistung}), \quad (3.29)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{die Ergänzungsleistung}), \quad (3.30)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{die inkrementelle Spannungsleistung}), \quad (3.31)$$

bei einem Wechsel der Konfiguration invariant bleiben sollen. Eine komplette Erklärung dieses Konzepts befindet sich im Buch von Haupt [22] bzw. in dem Artikel von Haupt & Tsakmakis [23].

Für ein Tensorfeld  $(\vec{X}, t) \mapsto \Psi(\vec{X}, t)$ , das einen lokalen Konfigurationswechsel beschreibt, bilden sich materielle Linienelemente der Referenzkonfiguration  $d\vec{X}$  auf Linienelemente in dieser neuen Konfiguration  $d\vec{\xi}$  ab:

$$d\vec{\xi} = \Psi d\vec{X}. \quad (3.32)$$

Entsprechend der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (3.22) gilt

$$(d\vec{\xi})^\cdot = \dot{\Psi} \Psi^{-1} d\vec{\xi} = \mathbf{\Lambda} d\vec{\xi}, \quad (3.33)$$

wobei  $\mathbf{\Lambda} = \dot{\Psi} \Psi^{-1}$  die Änderungsgeschwindigkeiten der materiellen Linienelemente in der neuen Konfiguration beschreibt.

---

<sup>3</sup> $\tilde{\mathbf{T}}$  heißt der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor und bildet die Spannung in der Referenzkonfiguration ab. Mit der Beziehung  $\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T$  wird der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor in der Momentankonfiguration definiert, wobei  $\mathbf{T}$  die Cauchy'sche Spannung ist.



Die Transformation des Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  wird in der neuen Konfiguration mit  $\mathbf{\Pi}$  bezeichnet. Entsprechend ergibt sich  $\mathbf{\Sigma}$  aus der Transformation des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$ . Die Transformation ihrer materiellen Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{E}}$  und  $\dot{\tilde{\mathbf{T}}}$  werden mit  $\overset{\Delta}{\mathbf{\Pi}}$  und  $\overset{\nabla}{\mathbf{\Sigma}}$  bezeichnet, wobei  $\overset{\Delta}{\mathbf{\Pi}}$  die kovariante Oldroydableitung und  $\overset{\nabla}{\mathbf{\Sigma}}$  die kontravariante Oldroydableitung ist. Diese Transformationen lauten:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Psi}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{\Psi}^{-1}, \quad (3.34)$$

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Psi}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{\Psi}^{-1} = \dot{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{\Lambda}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Psi} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{\Psi}^T, \quad (3.36)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Psi} \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \mathbf{\Psi}^T = \dot{\mathbf{\Sigma}} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda}^T. \quad (3.37)$$

Aus den Gleichungen (3.34), (3.35), (3.36) und (3.37) folgt, daß die geforderte Invarianz der physikalisch bedeutsamen Skalarprodukte identisch erfüllt ist:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{\Sigma} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Pi}}, \quad (3.39)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{E} = \overset{\nabla}{\mathbf{\Sigma}} \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (3.40)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \overset{\nabla}{\mathbf{\Sigma}} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Pi}}. \quad (3.41)$$

### Beispiel:

Für  $\mathbf{\Psi} = \mathbf{F}$  wird der Konfigurationswechsel von der Bezugskonfiguration in die Momentankonfiguration betrachtet. In diesem Fall wird die Transformation des Greenschen Verzerrungstensors durch den Almansischen Verzerrungstensor  $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$  definiert und die Transformation der materiellen Zeitableitung durch  $\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}$ . Die Transformation des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors liefert den gewichteten Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T$  und die Transformation seiner Spannungsgeschwindigkeit  $\overset{\nabla}{\mathbf{S}} = \mathbf{F} \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \mathbf{F}^T = \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L} \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{L}^T$ . Dazu gilt z.B. für die Spannungsleistung (3.39)  $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{A}}$ , bzw. mit  $\mathbf{D} = \overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}$ .

## 3.2 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen beschreiben allgemeine Naturgesetze, die universelle physikalische Aussagen für Kontinua sind. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik gelten diese Prinzipie für jeden beliebigen materiellen Körper (Festkörper, Flüssigkeit und Gas) und sie müssen zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Während Zustandsänderungen eines materiellen Körpers drücken die kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen die Änderungen seiner Masse, seines Impulses und seines Drehimpulses aus. Dazu kommen zwei weitere Relationen aus der Thermodynamik, die Energie- und die Entropiebilanz.

Die Bilanzgleichungen werden aus integralen Bilanzaussagen hergeleitet und können in vier unterschiedlichen gleichwertigen Darstellungen (globale oder lokale Formulierung in räumlicher oder materieller Darstellung) geschrieben werden.

### 3.2.1 Bilanzrelationen der Mechanik

#### Massenbilanz

Die Massenbilanz sagt aus, daß die Masse  $m$  eines materiellen Körpers bei mechanischen Prozessen erhalten bleibt. Nach der Definition von  $m$

$$m = \int_{v_0} \rho_0(\vec{X}, t) dv = \int_v \rho(\vec{x}, t) dv, \quad (3.42)$$

wobei  $\rho_0$  die Dichte der Bezugskonfiguration und  $\rho$  die der Momentankonfiguration ist, lautet die globale Massenbilanz in materieller bzw. räumlicher Form

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho_0(\vec{X}, t) dv = \frac{d}{dt} \int_v \rho(\vec{x}, t) dv = 0. \quad (3.43)$$

Aus den globalen Formen der Massenbilanz folgen die lokalen Formulierungen der Massenbilanz bei materieller bzw. räumlicher Darstellung

$$\dot{\rho}_0(\vec{X}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_0 = \rho_0(\vec{X}) = \rho \det \mathbf{F} \quad (3.44)$$

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (3.45)$$

#### Impulsbilanz

Die Impulsbilanz besagt, daß die zeitliche Änderung des Impulses  $\vec{I}$  gleich der Summe  $\vec{F}$  der auf diesen Körper  $\mathcal{B}$  einwirkenden Kräfte ist, d.h. die globale räumliche Gestalt der Impulsbilanz lautet

$$\frac{d}{dt} \vec{I}(\mathcal{B}, t) = \vec{F}(\mathcal{B}, t) \quad (3.46)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_a \mathbf{T} \vec{n} da + \int_v \vec{f} \rho dv, \quad (3.47)$$

wobei  $\mathbf{T}$  der Cauchysche Spannungstensor ist und  $\vec{f}$  die Volumenkraftdichte pro Masseneinheit. Das Volumenintegral  $\int_v \rho \vec{v} dv$  definiert den Impulsvektor und beschreibt den momentanen Bewegungszustand des Körpers durch das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ . Nachdem der Gaußsche Integralsatz<sup>4</sup> auf  $\int_a \mathbf{T} \vec{n} da$  angewendet wurde, folgt, bei hinreichenden Stetigkeitsanforderungen, aus (3.47) die lokale Form der Impulsbilanz in räumlicher Darstellung:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{f}. \quad (3.48)$$

---

<sup>4</sup>  $\int_v \operatorname{div} \mathbf{U} dv = \int_a \mathbf{U} \vec{n} da$

## Drehimpulsbilanz

Die Drehimpulsbilanz verlangt, daß die zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors  $\vec{D}(t)$  eines Körpers  $\mathcal{B}$  gleich der Summe der auf ihn einwirkenden äußeren Momente ist. Für einen beliebig wählbaren raumfesten Ortsvektor  $\vec{c}$  lautet die Drehimpulsbilanz in globaler Form:

$$\frac{d}{dt}\vec{D}_c(\mathcal{B}, t) = \vec{M}_c(\mathcal{B}, t) \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a (\vec{x} - \vec{c}) \times \vec{v} \rho dv = \int_a (\vec{x} - \vec{c}) \times \mathbf{T} \vec{n} da + \int_v (\vec{x} - \vec{c}) \times \vec{f} \rho dv. \quad (3.50)$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Oberflächenintegral und des Divergenzoperators<sup>5</sup> auf  $(\vec{x} - \vec{c}) \times \mathbf{T} \vec{n}$  lautet die Drehimpulsbilanz:

$$\int_v \{ (\vec{x} - \vec{c}) \times [\rho \dot{\vec{v}} - \text{div} \mathbf{T} - \rho \vec{f}] + T_{ik} \vec{e}_i \times \vec{e}_k \} dv = 0. \quad (3.51)$$

Da der Term  $(\rho \dot{\vec{v}} - \text{div} \mathbf{T} - \rho \vec{f})$  nach der Impulsbilanz (3.48) gleich Null ist, läßt sich die Drehimpulsbilanz auf

$$\int_v T_{ik} \vec{e}_i \times \vec{e}_k dv = 0 \quad (3.52)$$

reduzieren. Die Gleichung (3.52) ist die bekannte Symmetrieaussage für den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ :

$$T_{ik} \vec{e}_i \times \vec{e}_k = T_{ij} \epsilon_{jik} \vec{e}_k \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}. \quad (3.53)$$

## 3.2.2 Bilanzrelationen der Thermodynamik

### Energiebilanz - Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die Energiebilanz sagt aus, daß die Änderung der Kinetischen und Inneren Energie eines Körpers  $\mathcal{B}$  gleich der zugeführten Leistung bzw. Wärme ist:

$$\dot{K}(\mathcal{B}, t) + \dot{E}(\mathcal{B}, t) = L_a(\mathcal{B}, t) + Q(\mathcal{B}, t). \quad (3.54)$$

Nachdem die Kinetische Energie  $K$ , die Innere Energie  $E$ , die zugeführte Leistung  $L_a$  und die zugeführte Wärme  $Q$  des Körpers  $\mathcal{B}$  in der Gleichung (3.54) durch ihre Definitionen ersetzt wurden, lautet die Energiebilanz:

$$\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\int_v \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 dv}_K + \underbrace{\int_v \rho e dv}_E \right] = \underbrace{\int_a \mathbf{T} \vec{n} \cdot \vec{v} da + \int_v \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dv}_{L_a} - \underbrace{\int_a \vec{q} \cdot \vec{n} da + \int_v \rho r dv}_{Q}.$$

<sup>5</sup>  $\text{div}[(\vec{x} - \vec{c}) \times \mathbf{T}] = (\vec{x} - \vec{c}) \times \text{div} \mathbf{T} - T_{ik} \vec{e}_i \times \vec{e}_k$

Um diese Gleichung weiterentwickeln zu können, soll zuerst folgendes gezeigt werden: Wenn man die lokale Impulsbilanz (3.48) mit dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  multipliziert und den Term  $(\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \vec{v})$  umformt, so folgt:

$$\rho \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \vec{v}) - \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}. \quad (3.55)$$

Nach der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  (s. Seite 44) läßt sich  $(\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{v})$  durch  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{L})$  bzw. durch  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})$  ersetzen, da das Skalarprodukt aus einem symmetrischen und einem schiefsymmetrischen Tensor verschwindet  $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0)$ . Daraus folgt unter der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der Massenbilanz (3.43) die globale Form der Bilanz der mechanischen Leistung:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_v \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dv}_{\dot{K}} = \underbrace{\int_v \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \vec{v}) dv}_{L_a} + \underbrace{\int_v \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dv}_{L_i} - \underbrace{\int_v \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} dv}_{L_i}. \quad (3.56)$$

Diese Gleichung illustriert eine Abhängigkeit zwischen der materiellen Zeitableitung der Kinetischen Energie  $K$ , der zugeführten Leistung des Körpers  $L_a$  und der Spannungsleistung  $L_i$ . Aus der Kombination dieser Gleichung mit der Gleichung (3.54) ergibt sich die Energiebilanz in der globalen Form

$$\dot{E} = L_i + Q \quad (3.57)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_v \rho e dv = \int_v \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dv + \int_v \rho r dv - \int_v \operatorname{div} \vec{q} dv, \quad (3.58)$$

und ihre lokale Form in räumlicher Darstellung lautet

$$\dot{e} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} + r + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}. \quad (3.59)$$

### Entropiebilanz - Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die Entropiebilanz besagt, daß die zeitliche Änderung der Entropie  $S$  aus der von außen durch Wärme zugeführten Entropie  $H$  und der im Inneren durch irreversible Prozesse produzierten Entropieänderung  $\Gamma$  besteht. Mit der absoluten Temperatur  $\theta > 0$  gilt

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_v \rho s dv}_{\dot{S}} = \underbrace{\int_v \rho \frac{r}{\theta} dv - \int_a \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\theta} da}_{H} + \underbrace{\int_v \rho \gamma dv}_{\Gamma}. \quad (3.60)$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann die globale Form der Entropiebilanz auch lokal in räumlicher Darstellung formuliert werden:

$$\dot{s} = \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\theta} \right) + \gamma. \quad (3.61)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt aus, daß die Entropieproduktion  $\gamma$  für beliebige materielle Systeme bei beliebigen thermomechanischen Prozessen nicht negativ sein darf:

$$\gamma \geq 0. \quad (3.62)$$

Dieses sogenannte Dissipationsprinzip schreibt vor, daß alle natürlichen Prozesse irreversibel sind, d.h. nicht ohne weiteres umkehrbar. Nachdem  $(r - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q})$  aus der Bilanzgleichung (3.59) ersetzt und  $(\operatorname{div}(\frac{\vec{q}}{\theta}))$  durch die Produktregel umgeformt wurde, lautet das Dissipationsprinzip oder die sogenannte Clausius-Duhem-Ungleichung

$$\theta \dot{s} - \dot{e} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\rho} \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} \theta}{\theta} \geq 0, \quad (3.63)$$

wobei die spezifische Spannungsleistung  $\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$  auch mit  $\frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$  ausgedrückt werden kann (s. Gl.(3.39)), d.h.

$$\theta \dot{s} - \dot{e} + \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{\rho} \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} \theta}{\theta} \geq 0. \quad (3.64)$$

Bei der Formulierung eines thermodynamisch konsistenten Materialmodells wird das Prinzip der Irreversibilität durch die Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.63) beachtet. Die Ungleichung (3.63) wird durch Einführung der freien Helmholtz Energie  $\Psi$  modifiziert:

$$\Psi = e - \theta s \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\Psi} = \dot{e} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s}. \quad (3.65)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung lautet damit:

$$-\rho_0 \dot{\Psi} - \rho_0 \dot{\theta} s + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\rho_0}{\rho} \vec{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} \theta}{\theta} \geq 0. \quad (3.66)$$

Für isotherme Prozesse ( $\theta(\vec{x}, t) = \theta_0 = \text{konstant}$ ) nimmt die Clausius-Duhem-Ungleichung die folgende Gestalt an:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq 0. \quad (3.67)$$

# 4 Modellbildung

In diesem Kapitel wird das im Rahmen der Kontinuumsmechanik entwickelte Materialmodell vorgestellt, das aus experimentellen Beobachtungen (s. Kap. 1, insbesondere Seite 37) formuliert wurde. Für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Bereiche läßt sich die Matte als ein nichtlinear viskoelastisches und isotropes Material ansehen.

Um die Basis des zum Schluß entwickelten 3D-Modell zu beleuchten, werden zuerst die wesentlichen rheologischen Elemente der Materialtheorie eingeführt. Danach folgt die ausführliche Darstellung eines eindimensionalen temperaturunabhängigen viskoelastischen Standard-Modells, um das Konzept der Viskoelastizitätstheorie vorzustellen. Das daraus entwickelte temperaturunabhängige 3D-Modell wird anschließend dargestellt und eine Identifikation der Parameter im Rahmen eines der Festversuche vorgenommen. Die Entwicklung eines temperaturabhängigen 3D-Modells erfolgt durch Erweiterung des temperaturunabhängigen 3D-Modells um die Temperaturabhängigkeit einiger Materialparameter. Das erweiterte Modell gilt nur für isotherme Prozesse, d.h. für räumlich und zeitlich konstante Temperatur. Eine Parameteranpassung aus den Warmversuchsmeßdaten schließt das Kapitel ab.

## 4.1 Einführung der phänomenologischen Vorgehensweise

Nach der phänomenologischen Vorgehensweise läßt sich eine elementare Materialmodellbildung ausgehend von experimentellen Beobachtungen entwickeln. Eine untersuchte Materialprobe wird als ein System angesehen, an dessen Eingang (Input) ein zeitlicher Verlauf, z.B. einer Weggröße, angelegt wird, und das an seinem Ausgang (Output) den Verlauf z.B. einer Kraftgröße ausgibt (s. Abb. 4.1).



**Abbildung 4.1:** Schematische Darstellung der Ein- und Ausgabenverbindungen

Da diese Theorie die innere Struktur des Systems nicht erforscht, behandelt sie das System als eine "Black Box", die elementare mathematische Operatoren enthält. Diese Operatoren heißen rheologische Modelle und verbinden die Ein- und Ausgaben. Im folgende werden die beiden üblichen rheologischen Modelle für die Elastizität und die Viskosität dargestellt.

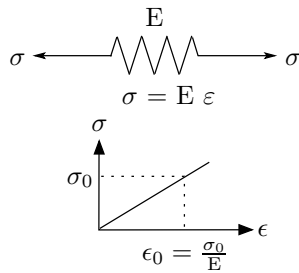


Abbildung 4.2: Hooke-Modell

In Abb. 4.2 wird eine Feder  $E$  abgebildet, die die perfekte lineare Elastizität repräsentiert;  $E$  ist die Federsteifigkeit und heißt Elastizitätsmodul. Dieses Element wird auch Hooke-Modell genannt. Die Spannung  $\sigma$  ist eine umkehrbar eindeutige Funktion der aktuellen Verzerrung  $\varepsilon$  und lautet  $\sigma(t) = E \varepsilon(t)$ . Das Hooke-Modell repräsentiert eine lineare Spannungsdehnungsbeziehung.

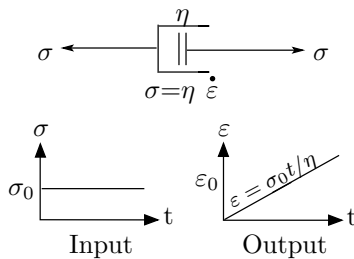


Abbildung 4.3: Newton-Modell

Ein Dämpfer wird benötigt, um die Viskosität eines Materials zu symbolisieren;  $\eta$  ist der Koeffizient der Viskosität und heißt Dämpfungskonstante. Dieses Element wird auch Newton-Modell genannt und ist in Abb. 4.3 dargestellt. Wenn die gesteuerte Größe z.B. die Spannung mit  $\sigma(t) = \sigma_0$  ist, wächst die Verzerrung  $\varepsilon$  linear über der Zeit und ihre Gleichung lautet  $\varepsilon(t) = (\sigma_0 t) / \eta$ . Umgekehrt, wenn die Dehnung die gesteuerte Größe ist, lautet die Spannung  $\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$ .

Die rheologischen Modelle der Viskoelastizität ergeben sich aus der Kombination der zwei rheologischen Elementtypen: des Hooke-Modells mit dem Newton-Modell. Abb. 4.4 stellt die einfachsten zusammengesetzten Modelle dar, d.h. links das Maxwell-Modell (Feder- und Dämpferelement in Reihenschaltung) und rechts das Kelvin-Modell (Feder- und Dämpferelement in Parallelschaltung).



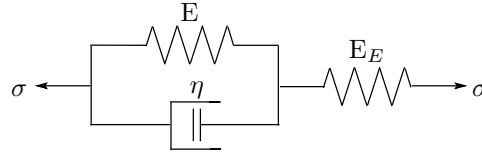
Abbildung 4.4: Maxwell- und Kelvin-Modell

Das Maxwell-Modell kann Relaxations- und Kriechverhalten beschreiben; das Kelvin-Modell ist nur für die Beschreibung von Kriechvorgängen geeignet. Eine komplette Darstellung dieser beiden Modelle befindet sich z.B. im Buch von Findley[13].

## 4.2 Physikalisch eindimensionales Modell

Obwohl rheologische Modelle die innere Struktur realer Materialien im Allgemeinen nicht erklären können, geben sie Anhaltspunkte zur Formulierung von Stoffgleichungen. Deswegen wird zunächst ein eindimensionales Materialmodell der Viskoelastizität dargestellt, da das Material während der Versuchsverläufe (s. Kap. 1) ein viskoelastisches Verhalten zeigte.

Im Rahmen der phänomenologischen Theorie wird normalerweise ein viskoelastisches Materialverhalten mit dem Zener-Modell (Parallelschaltung eines Maxwell-Modells und einer Feder, s. Abb. 4.6), bzw. mit dem Poynting-Thomson-Modell (Reihenschaltung eines Kelvin-Modells und einer Feder, s. Abb. 4.5) beschrieben.



**Abbildung 4.5:** Poynting-Thomson-Modell

In der Literatur wird viskoelastisches Materialverhalten oft mit dem Zener-Modell angenähert, da dieses Modell, auch “linear-viskoelastischer Standard-Festkörper” genannt, mehrere Vorteile hat: Das Modell besteht aus einer minimalen Anzahl von Elementen und läßt sich einfach mit mehreren Maxwell-Modellen weiterentwickeln, da alle Komponenten parallel geschaltet sind. Die Differentialgleichungen dieses Modells lassen sich so auflösen, daß sie entweder Kriechverhalten oder Relaxationsverhalten darstellen. Außerdem erlaubt das Zener-Modell die additive Zerlegung der gesamten Spannung  $\sigma$  in eine Gleichgewichtsspannung  $\sigma_{eq}$  und eine sogenannte Überspannung  $\sigma_{ov}$ . Zu dieser Zerlegung merkte Lion [35] an, daß die Überspannung ein geschwindigkeitsabhängiges Funktional ist, das für eine genügend lang andauernde Relaxationsphase ( $\dot{\epsilon} = 0$ ) gleich Null wird, d.h. daß die gesamte Spannung während einer Haltezeit gegen die Gleichgewichtsspannung konvergiert.

Da die Spannungsrelaxation ein beobachtetes Phänomen bei den durchgeführten Versuchen war (s. Zusammenfassung des Kap. 1), wird das Zener-Modell im Rahmen dieser Arbeit zugrundegelegt und verallgemeinert. Es werden im Folgenden nur dehnungsgesteuerte Prozesse untersucht, da alle Versuche verschiebungsgesteuert gefahren wurden. Die Darstellung der eindimensionalen Modellbildung schließt mit der Einführung eines nichtlinearen Materialmodells ab.

### 4.2.1 Beschreibung eines linearen 1D-Modells: Das Zener-Modell

Das folgende Schema Abb. 4.6 stellt das Zener-Modell dar. Es besteht aus der Feder  $E$  und einer Maxwell-Kette, die sich aus der Feder  $\hat{E}$  und dem Dämpfer  $\eta$  zusammensetzt.



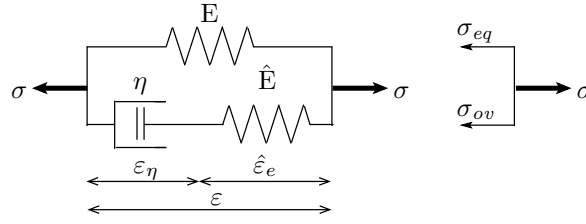


Abbildung 4.6: Zener-Modell

Alle Elemente hier sind linear. Die Feder  $E$  steht für die Elastizität des Materials und repräsentiert den Gleichgewichtsanteil der gesamten Spannung  $\sigma$ , auch Gleichgewichtsspannung  $\sigma_{eq}$  genannt. Die Maxwell-Kette bildet den geschwindigkeitsabhängigen Anteil oder Nichtgleichgewichtsanteil der Gesamtspannung und heißt Überspannung  $\sigma_{ov}$ . Dieser letzte Anteil verschwindet ( $\sigma_{ov} = 0$ ), wenn das Maxwell-Element komplett relaxiert ist (wenn für eine genügend lange Zeit  $\dot{\varepsilon} = 0$  war). Daraus folgt, daß dann die gesamte Spannung gleich der Gleichgewichtsspannung ist ( $\sigma = \sigma_{eq}$ ).

Dieses Materialmodell läßt sich durch Differentialgleichungen beschreiben, die aus einer Kombination der Kompatibilitäts- und der Gleichgewichtsbedingung mit den Gleichungen der rheologischen Elemente resultiert:

Kompatibilitätsbedingung:

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}_e + \varepsilon_\eta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\hat{\varepsilon}}_e + \dot{\varepsilon}_\eta, \quad (4.1)$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{eq} + \dot{\sigma}_{ov}, \quad (4.2)$$

Materialgleichungen der rheologischen Elemente:

$$\text{Feder:} \quad \sigma_{eq} = E \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma}_{eq} = E \dot{\varepsilon}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ov} = \hat{E} \hat{\varepsilon}_e \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\sigma}_{ov} = \hat{E} \dot{\hat{\varepsilon}}_e, \quad (4.4)$$

$$\text{Dämpfer:} \quad \sigma_{ov} = \eta \dot{\varepsilon}_\eta. \quad (4.5)$$

Die Gleichung (4.3) der Feder  $E$  liefert direkt die Gleichung der Gleichgewichtsspannung:

$$\sigma_{eq} = E \varepsilon.$$

Um die Gleichung der Überspannung allein von  $\varepsilon$  abhängig zu machen, soll zuerst die Differentialgleichung der Überspannung formuliert werden. Aus der Gleichung (4.5) folgt mit der Gleichung (4.1)  $\sigma_{ov} = \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\hat{\varepsilon}}_e) = \eta\dot{\varepsilon} - \eta\frac{\dot{\sigma}_{ov}}{\hat{E}}$ , wobei  $\dot{\hat{\varepsilon}}_e$  nach (4.4) durch  $\frac{\dot{\sigma}_{ov}}{\hat{E}}$  ersetzt wurde. Daraus folgt:

$$\dot{\sigma}_{ov} = \hat{E}\dot{\varepsilon} - \frac{\hat{E}}{\eta}\sigma_{ov}. \quad (4.6)$$

Das gesamte Zener-Modell wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben

$$\dot{\sigma} + \frac{\hat{E}}{\eta}\sigma = (E + \hat{E})\dot{\varepsilon} + \frac{\hat{E}E}{\eta}\varepsilon, \quad (4.7)$$

die nur von  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  und den Zeitableitungen abhängig ist. Um diese Differentialgleichung zu gewinnen, kann man zunächst die Gleichungen (4.6) und (4.3)<sub>2</sub> addieren (Anwendung der Gl. (4.2)<sub>2</sub>) und danach  $\sigma_{ov}$  nach (4.2)<sub>1</sub> und (4.3)<sub>1</sub> (d.h.  $\sigma_{ov} = \sigma - \sigma_{eq} = \sigma - E\varepsilon$ ) ersetzen.

Die allgemeine Lösung dieser linear inhomogenen Differentialgleichung für beliebig vorgegebene Dehnungsprozesse der Form

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \varepsilon(t) & \text{für } 0 < t \end{cases} \quad (4.8)$$

wird durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung ( $\dot{\sigma} + \frac{\hat{E}}{\eta}\sigma = 0$ ) ermöglicht und lautet

$$\sigma(t) = \int_0^t \left\{ E + \hat{E} e^{-\frac{\hat{E}}{\eta}(t-\bar{t})} \right\} \varepsilon'(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (4.9)$$

Vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt  $t$  ist die Spannungsantwort  $\sigma$  von der gesamten Dehnungsgeschichte abhängig. Der Quotient  $\eta/\hat{E}$  wird im Folgenden durch den Parameter  $\tau$  ersetzt,

$$\tau = \frac{\eta}{\hat{E}}. \quad (4.10)$$

$\tau$  hat die Dimension einer Zeit, heißt Relaxationszeit und ist ein Maß für die Dauer des Relaxationsvorgangs. Dieser Parameter  $\tau$  definiert die Subtangente der Relaxationskurve (s. Abb. 4.7).

Bevor die Spannungsantwort für einen gegebenen Dehnungsprozeß untersucht wird, soll zuerst überprüft werden, ob die Clausius-Duhem-Ungleichung (3.67) erfüllt ist, die das Prinzip der Irreversibilität gewährleistet. Für ein einaxiales Modell bei isothermem Prozeß lautet diese Ungleichung

$$\sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\Psi} \geq 0, \quad (4.11)$$

worin  $\sigma$  die gesamte Spannung des Zener-Modells ist,  $\dot{\varepsilon}$  die materielle Zeitableitung der Verzerrung,  $\Psi$  die Freie Energie und  $\dot{\Psi}$  ihre materielle Zeitableitung.  $\Psi$  entspricht der im System gespeicherten Energie. Die Freie Energie lautet (s. Huber & Tsakmakis[25])

$$\rho\Psi = \rho\Psi(\varepsilon, \hat{\varepsilon}_e) = \Psi_1(\varepsilon) + \Psi_2(\hat{\varepsilon}_e) \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2}E\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\hat{E}\hat{\varepsilon}_e^2, \quad (4.13)$$

wobei in diesem Fall  $\Psi_1(\varepsilon)$  zu der parallel geschalteten Einzelfeder und  $\Psi_2(\hat{\varepsilon}_e)$  zur Maxwell-Kette gehören. Für diese Freie Energie läßt sich zeigen, daß die Clausius-Duhem-Ungleichung erfüllt ist, wenn die Restungleichung (4.15) gilt. Mit Anwendung der Kompatibilitätsbedingung (4.1) und der Gleichgewichtsbedingung (4.2) sowie der Zeitableitung der Freien Energie (4.13) in (4.11) lautet die Clausius-Duhem-Ungleichung

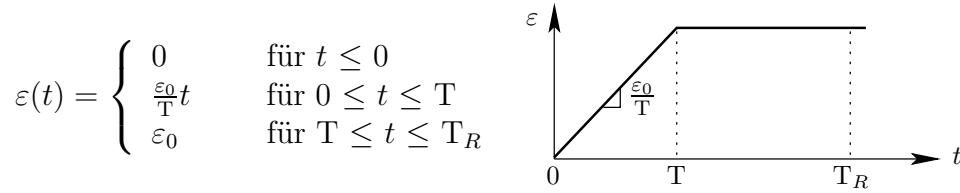
$$(\sigma_{eq} - E \varepsilon) \dot{\varepsilon} + (\sigma_{ov} - \hat{E} \hat{\varepsilon}_e) \dot{\hat{\varepsilon}}_e + \sigma_{ov} \dot{\varepsilon}_\eta \geq 0. \quad (4.14)$$

Die geklammerten Terme verschwinden aufgrund der Definition der Federn (s. (4.3) und (4.4)). Daraus folgt, daß die Clausius-Duhem-Ungleichung erfüllt ist, wenn

$$\sigma_{ov} \dot{\varepsilon}_\eta \geq 0 \quad (4.15)$$

gilt. Diese Ungleichung führt zu der Entwicklung einer Evolutionsgleichung, die die Viskosität des Materials beschreibt (s. Seite 60). Für das Zener-Modell gilt nach Gl. (4.5)  $\sigma_{ov} = \eta \dot{\varepsilon}_\eta$ , d.h. die Ungleichung (4.15) erfordert  $\eta \dot{\varepsilon}_\eta^2 > 0$ , bzw.  $\eta > 0$ .

Nachdem die Verträglichkeit des Zener-Modells mit der Clausius-Duhem-Ungleichung sichergestellt ist, soll die allgemeine Lösung (4.9) der Gleichung (4.7) für eine bestimmte Deformationsgeschichte untersucht werden.



Es handelt sich um einen Belastungsprozeß mit konstanter Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0/T$  für  $0 \leq t \leq T$ . Eine Relaxationsphase fängt ab  $t \geq T$  mit  $\varepsilon = \varepsilon_0$  an. Dieser Verlauf hat den Vorteil, Dehnung und Relaxation zu kombinieren, was jedem gefahrenen Versuch in dieser Arbeit entspricht (s. Kap. 2).

Aus Gl. (4.7) resultieren die folgenden Lösungen für die entsprechenden Bereiche (Anfangsbedingungen:  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $\sigma(0) = 0$ ):

$$0 \leq t \leq T \quad \sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{T} \hat{E} \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + E \frac{\varepsilon_0}{T} t \quad (4.16)$$

$$T \leq t \leq T_R \quad \sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{T} \hat{E} \tau \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) e^{-\frac{(t-T)}{\tau}} + E \varepsilon_0 \quad (4.17)$$

Für  $0 \leq t \leq T$  präsentiert die Lösung (4.16) der Differentialgleichung die folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{T} t$  lautet ihre Anfangssteigung:

$$\frac{\varepsilon_0}{T} (E + \hat{E}). \quad (4.18)$$

- Für  $\tau \ll t \leq T$  gilt asymptotisch:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{T} E t + \frac{\varepsilon_0}{T} \eta. \quad (4.19)$$

Für  $T \leq t \leq T_R$  hat die Lösung der Differentialgleichung (4.17) die folgende Eigenschaft:

- Wenn  $(T_R - T) \gg \tau$  ist, dann ist die Relaxation zu Ende gekommen und die Gleichung lautet in diesem Fall:

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 = \sigma_{eq}$$

In diesem Fall befindet sich das Zener-Modell im thermodynamischen Gleichgewicht, d.h. das Maxwell-Element ist vollständig relaxiert und das Potential der freien Energie  $\Psi$  besteht nur noch aus der Freien Energie des Gleichgewichts, d.h.  $\Psi = \Psi_{eq}$ .

Abb. 4.7 stellt das Verhalten des Zener-Modells für den vorgegebenen Dehnungsverlauf dar.

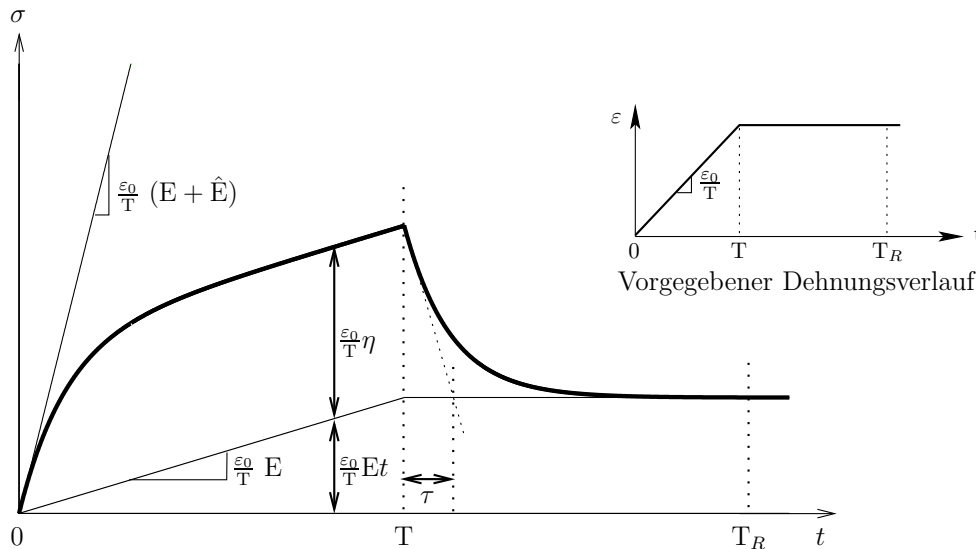


Abbildung 4.7: Verhalten des Zener-Modells

## 4.2.2 Prinzipielle Entwicklung eines nichtlinearen 1D-Modells

Ganz wenige reale Materialien lassen sich als linear-viskoelastisch klassifizieren. Drozdov [12] schreibt z.B., daß Polymere nur für ganz kleine Deformation als linear-viskoelastische Materialien angenommen werden können.

Die Experimente, die im Kap. 2 beschrieben wurden, zeigen deutlich, daß sich das untersuchte Material in den betrachteten Bereichen nichtlinear verhält. Deswegen wird

zunächst das Zener-Modell (s. Abb. 4.6) mit nichtlinear-rheologischen Elementen verändert: Die Einzelfeder und die Komponenten der Maxwell-Kette werden ab jetzt als nichtlinear angenommen. Wie im linearen Fall repräsentiert die parallel geschaltete Feder den geschwindigkeitsunabhängigen Anteil der gesamten Spannung, die Gleichgewichtsspannung  $\sigma_{eq}$ . Das Maxwell-Element dagegen stellt den geschwindigkeitsabhängigen Anteil der Gesamtspannung, die Überspannung  $\sigma_{ov}$ , dar. Alle Federn dürfen nichtlinear von den Dehnungsvariablen abhängen, und die Viskosität des Dämpfers kann von der mechanischen Prozeßgeschichte abhängig sein. Außerdem bleiben die Kompatibilitätsbedingung ( $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_e + \varepsilon_\eta$ ) und die Gleichgewichtsbedingung ( $\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov}$ ) des linear Zener-Modells für den nichtlinearen Fall gültig.

Da die Clausius-Duhem-Ungleichung (4.11) die thermodynamische Konsistenz eines Stoffmodells sichert, muß dieses Prinzip für das nichtlineare Modell auch gelten.  $\Psi$  ist die Freie Energie,  $\sigma$  die Gesamtspannung und  $\varepsilon$  die Gesamtverzerrung. Üblicherweise wird die freie Energie  $\Psi$  in einen Gleichgewichtsanteil  $\Psi_{eq}$  und einen Nichtgleichgewichtsanteil  $\Psi_{ov}$  zerlegt:

$$\Psi = \Psi_{eq}(\varepsilon) + \Psi_{ov}(\hat{\varepsilon}_e). \quad (4.20)$$

Diese Gleichung (4.20) ist eine Verallgemeinerung der Gleichung (4.13), wobei auch in diesem Fall  $\Psi_{eq}(\varepsilon)$  und  $\Psi_{ov}(\hat{\varepsilon}_e)$  die Formänderungsenergien der nichtlinearen Federn bezeichnen. Wie beim linearen Fall wird die gesamte Freie Energie  $\Psi$  im Gleichgewichtszustand des Materials gleich dem Gleichgewichtsanteil  $\Psi_{eq}$ , d.h. der Nichtgleichgewichtsanteil  $\Psi_{ov}$  verschwindet.

Nachdem die materielle Zeitableitung der Freien Energie  $\dot{\Psi}$  und die Zerlegungen der gesamten Spannung und der Verzerrung in die Clausius-Duhem-Ungleichung eingesetzt wurden, resultiert nach Zwischenrechnung

$$\left( \sigma_{eq} - \rho \frac{d\Psi_{eq}}{d\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \left( \sigma_{ov} - \rho \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\varepsilon}_e} \right) \dot{\hat{\varepsilon}}_e + \sigma_{ov} \dot{\varepsilon}_\eta \geq 0. \quad (4.21)$$

Die Clausius-Duhem-Ungleichung (4.21) wird für alle beliebige Verzerrungsprozesse gewährleistet, wenn für die Gleichgewichtsspannung und die Überspannung die Potentialbeziehungen

$$\text{Gleichgewichtsspannung:} \quad \sigma_{eq} = \rho \frac{d\Psi_{eq}}{d\varepsilon}, \quad (4.22)$$

$$\text{Überspannung:} \quad \sigma_{ov} = \rho \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\varepsilon}_e}, \quad (4.23)$$

$$\text{gelten und wenn zusätzlich die Restungleichung:} \quad \sigma_{ov} \dot{\varepsilon}_\eta \geq 0 \quad (4.24)$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung gibt Hinweise zur Formulierung der Fließregel. Die einfachste Möglichkeit ist

$$\sigma_{ov} = \eta \dot{\varepsilon}_\eta, \quad \eta \geq 0. \quad (4.25)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\eta$  repräsentiert die lineare oder nichtlineare Viskosität des Maxwell-Dämpfers.  $\eta$  muß positiv sein und kann von weiteren Größen abhängen, die den Deformationsprozeß kennzeichnen.

Mehrere Potentiale  $\Psi$  werden von Drozdov [12] vorgeschlagen, die viskoelastisches Materialverhalten gut voraussagen können.

## 4.3 Physikalisch temperaturunabhängiges 3D-Modell

### 4.3.1 Allgemeine Entwicklung

Aus der Motivation der eindimensionalen Theorie (s. Abschnitt 4.2) wird ein dreidimensionales nichtlineares Materialmodell auf der Basis rheologischer Modelle entwickelt, wie es z.B. auch von Krawietz [28] vorgeschlagen oder von Lion [37] verwendet wurde. Das Materialmodell geht auf die experimentellen Beobachtungen ein. Anhand einer Anpassung an die Meßdaten eines Versuchs wird zum Schluß des Abschnitts die Parameteridentifikation durchgeführt. Bei der Modellbildung wird das Prinzip der Irreversibilität für finite Deformationen stets im Auge behalten.

#### Dissipationsungleichung

Da die Clausius-Duhem-Ungleichung die thermodynamische Konsistenz eines Stoffmodells sichert, müssen die Bedingungen dieser Ungleichung während des kompletten Prozessverlaufs von dem Modell erfüllt werden. Das bedeutet, Gl. (3.67) muss für ein dreidimensionales Materialmodell bei isothermen Prozessen gelten. Eine additive Zerlegung der freien Energie

$$\Psi = \Psi_{eq}(\mathbf{C}) + \Psi_{ov}(\hat{\mathbf{C}}_e) \quad (4.26)$$

läßt sich durch die additive Zerlegung der Freien Energie beim eindimensionalen Fall (s. Gl. (4.12) und (4.20)) motivieren. Dieser Ansatz teilt die Freie Energie in einen Gleichgewichtsanteil  $\Psi_{eq}$  und einen Nichtgleichgewichtsanteil  $\Psi_{ov}$  auf.  $\Psi_{eq}$  ist vom Rechten Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$  abhängig und kann mit der parallelgeschalteten Feder des Zener-Modells (s. Abb. 4.6) identifiziert werden, d.h.  $\Psi_{eq}$  beschreibt den Gleichgewichtszustand des Materials (s. Seite 56). Andererseits ist  $\Psi_{ov}$  vom elastischen Rechten Cauchy-Green-Tensor  $\hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e$  abhängig und kann mit der Feder des Maxwell-Elements bei dem Zener-Modell verbunden werden. Das bedeutet,  $\Psi_{ov}$  soll gleich Null sein, wenn das Material seinen Gleichgewichtszustand erreicht hat, d.h. für  $\hat{\mathbf{C}}_e = \mathbf{1}$ .

Diese Vorgehensweise wurde oft bei der Viskoelastizität angewendet: Zum Beispiel verwendet Reese [45] die gleichen Zerlegungen (für die Freie Energie und den Deformationsgradienten), um ein viskoelastisches Materialmodell für finite Deformationen zu formulieren. Lion [37] und Sedlan [49] entwickeln viskoelastische Materialmodelle für finite Deformationen nach ähnlichem Vorgehen, d.h. die Freie Energie wurde bei ihnen auch additiv zerlegt.

## Zerlegung des Deformationsgradienten

Im Kap. 3 (s. Seite 46) wurden die Grundlagen über die Zerlegung eines Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil dargestellt. Nach der dort erwähnten Theorie (s. Gl. (3.27)) lautet die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v. \quad (4.27)$$

In diesem Fall gilt  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_M$ , da es keine thermisch-mechanische Zerlegung ( $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{1}$ ) gibt.

Da die Clausius-Duhem-Ungleichung (3.67) vom Greenschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  bzw. seiner materiellen Zeitableitung  $\dot{\mathbf{E}}$  abhängig ist, ist es notwendig,  $\mathbf{E}$  und  $\dot{\mathbf{E}}$  aus der Zerlegung des Deformationsgradienten (4.27) herzuleiten, um das spätere Stoffmodell konsistent entwickeln zu können.

## Verzerrungstensoren

Die Bildung des Greenschen Verzerrungstensors (3.20) aus dem multiplikativ zerlegten Deformationsgradienten (4.27) lautet

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_v^T \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}_v^T (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{F}_v^{-1}) \mathbf{F}_v. \quad (4.28)$$

Nach der Gleichung (4.28) ist keine additive Aufteilung des Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  in einen rein elastischen und einen rein inelastischen Anteil auf der Bezugskonfiguration möglich. Der auf die Zwischenkonfiguration transformierte Greensche Verzerrungstensor  $\hat{\mathbf{\Gamma}}$  ermöglicht eine solche Zerlegung:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}_v^{-1} \quad (4.29)$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{F}_v^{-1}). \quad (4.30)$$

$$= \underbrace{\hat{\mathbf{\Gamma}}_e}_{\hat{\mathbf{\Gamma}}_e} + \underbrace{\hat{\mathbf{\Gamma}}_v}_{\hat{\mathbf{\Gamma}}_v} \quad (4.31)$$

$\hat{\mathbf{\Gamma}}$  repräsentiert die gesamten Verzerrungen in der Zwischenkonfiguration.  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$  ist sein rein elastischer Anteil auf der Zwischenkonfiguration und läßt sich folgendermaßen definieren:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}}_e - \mathbf{1}). \quad (4.32)$$

$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v$  ist sein rein inelastischer Anteil auf der Zwischenkonfiguration und lautet, mit der Verwendung des linken Cauchy-Greenschen Tensors  $\mathbf{B}_v = \mathbf{F}_v \mathbf{F}_v^T$ ,

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}_v^{-1}). \quad (4.33)$$

Abb. 4.8 stellt den Greenschen Verzerrungstensor und seine Transformationen in der Zwischen- und der Momentankonfiguration dar.

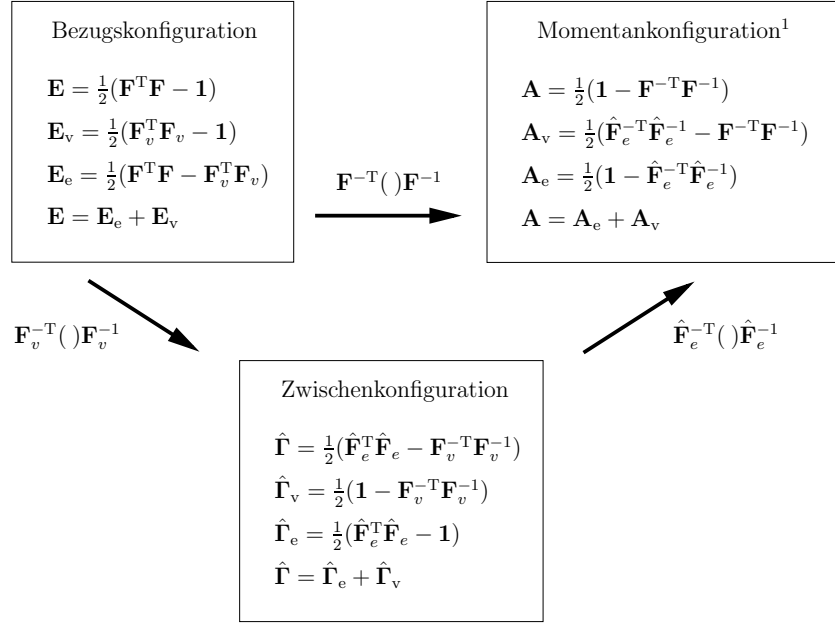


Abbildung 4.8: Transformation der Verzerrungstensoren

### Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren

Gemäß der Vortransformation des Greenschen Verzerrungstensors (4.29) führt die Transformation seiner materiellen Zeitableitung in die Zwischenkonfiguration auf eine objektive Zeitableitung in Form der kovarianten Oldroyd-Ableitung

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}} = \mathbf{F}_v^{-T} \overset{\Delta}{\mathbf{E}} \mathbf{F}_v^{-1} \quad (4.34)$$

$$= \mathbf{F}_v^{-T} \left( \mathbf{F}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{F}_v \right) \cdot \mathbf{F}_v^{-1} \quad (4.35)$$

$$= \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}} + \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}} + \hat{\mathbf{\Gamma}} \hat{\mathbf{L}}_v, \quad (4.36)$$

wobei  $\hat{\mathbf{L}}_v = \dot{\mathbf{F}}_v \mathbf{F}_v^{-1}$  die inelastische Deformationsgeschwindigkeit ist. Mit Anwendung von (4.31) läßt sie sich auch additiv zerlegen

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}} = \underbrace{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e + \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_v}_{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e} + \underbrace{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_v + \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_v + \hat{\mathbf{\Gamma}}_v \hat{\mathbf{L}}_v}_{\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_v}. \quad (4.37)$$

<sup>1</sup>A heißt Almansische Verzerrungstensor, lautet  $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1})$  und operiert auf der Momentankonfiguration;  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  ist der linke Cauchy-Green Tensor.



Mit  $\overset{\Delta}{\hat{\Gamma}}_v = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_v^T + \hat{\mathbf{L}}_v)$  kann die kovariante Oldroyd-Ableitung des inelastischen Verzerrungstensors vereinfacht werden. Abb. 4.9 stellt die Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren in den unterschiedlichen Konfigurationen dar.

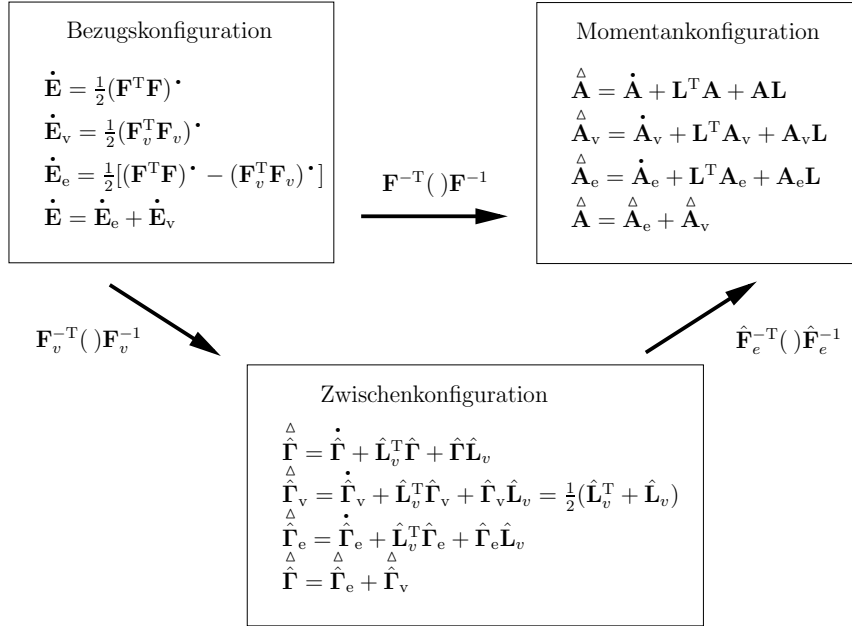


Abbildung 4.9: Bildung der Verzerrungsgeschwindigkeiten

## Spannungstensoren

Wie in der eindimensionalen Theorie impliziert die Verallgemeinerung der Gleichgewichtsbedingung (4.2) eine additive Zerlegung des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  in einen Gleichgewichtsanteil  $\tilde{\mathbf{T}}_{eq}$ , der Gleichgewichtsspannung heißt, und einen geschwindigkeitsabhängigen Anteil  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$ , der Überspannung genannt wird,

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_{eq} + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}. \quad (4.38)$$

Diese Spannungsaufteilung wird auch von der Zerlegung der Freien Energie (4.26) unterstützt: Mit dem Gleichgewichtsanteil der Freien Energie  $\Psi_{eq}$  soll der Gleichgewichtszustand des Materials beschrieben werden, genauer gesagt, der Gleichgewichtsanteil des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}_{eq}$  berechnet werden. Dieser Zustand wird nur nach einer genügend langen Relaxationsphase erreicht, was bedeutet, daß die Gesamtspannung gegen die Gleichgewichtsspannung konvergiert. Gleichzeitig verschwindet die Überspannung bzw. der Nichtgleichgewichtsanteil der Freien Energie  $\Psi_{ov}$  wird Null, d.h.  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov} = \mathbf{0}$  und  $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_{eq}$ .

Das Konzept der additiven Spannungszerlegung in einen Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteil sowie die Aufteilung der Freien Energie wird beispielsweise auch

von Reese [45] oder Lion [37] angewendet, um Materialmodelle der finiten Viskoelastizität entwickeln zu können.

Um später ein Materialmodell schlüssig entwickeln zu können, ist es notwendig, den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration zu bilden. Nach der Zerlegung des Deformationsgradienten (4.27) lautet die Transformation des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors auf die Zwischenkonfiguration:

$$\underbrace{\hat{\mathbf{S}}_{eq} + \hat{\mathbf{S}}_{ov}}_{\hat{\mathbf{S}}} = \underbrace{\mathbf{F}_v \tilde{\mathbf{T}}_{eq} \mathbf{F}_v^T}_{\hat{\mathbf{S}}_{eq}} + \underbrace{\mathbf{F}_v \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \mathbf{F}_v^T}_{\hat{\mathbf{S}}_{ov}}. \quad (4.39)$$

Abb. 4.10 stellt die Spannungstensoren in den unterschiedlichen Konfigurationen dar.

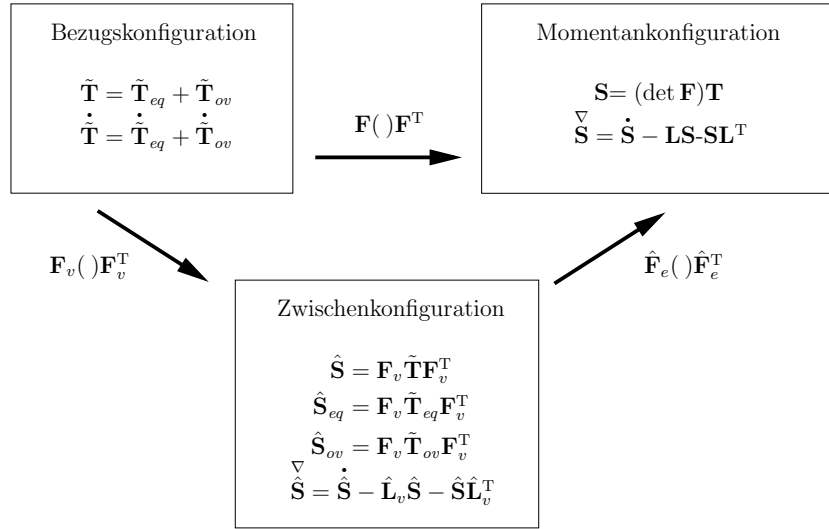


Abbildung 4.10: Transformation der Spannungstensoren

## Duale Variablen

Nach dem von Haupt und Tsakmakis entwickelten Konzept der Dualen Variablen<sup>2</sup> bleibt das in der Clausius-Duhem-Ungleichung erwähnte Skalarprodukt  $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$ , die Spannungsleistung, während eines Konfigurationswechsels invariant. Da die Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung bei der Modellentwicklung unabdingbar ist, soll dieses Skalarprodukt wie die anderen Glieder der Ungleichung in der Zwischenkonfiguration formuliert werden.

Diese Umformung wird hier durch  $\Psi = \mathbf{F}_v$  für den Konfigurationswechsel von der Bezugskonfiguration in die Zwischenkonfiguration definiert. Mit den Transformationen der Verzerrungs- und Spannungstensoren (s. Abb. 4.8, 4.9 und 4.10) lautet das Skalarpro-

<sup>2</sup>Diese Theorie wurde auf Seite 47 vorgestellt.

dukt  $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$  in der Zwischenkonfiguration:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\Delta}. \quad (4.40)$$

Es wurde in den Gleichungen (4.38) und (4.39) angenommen, daß es in der Bezugs- und Zwischenkonfiguration möglich ist, die Gesamtspannung in einen Gleichgewichtsanteil und einen geschwindigkeitsabhängigen Anteil zu zerlegen. Aus (4.40) folgen zwei entsprechende Anteile der Spannungsleistung:

$$\tilde{\mathbf{T}}_{eq} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}}_{eq} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\Delta} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}}_{ov} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\Delta}. \quad (4.41)$$

In der Gleichung (4.41)<sub>2</sub> wird  $\hat{\mathbf{\Gamma}}^{\Delta}$  durch seine Zerlegung ersetzt, wobei  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e^{\Delta}$  entsprechend seiner Definition eingesetzt wird. Mit Anwendung der Zeitableitung des elastischen Verzerrungstensors in der Zwischenkonfiguration,  $\dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e = \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e$ , folgt

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}}_{ov} \cdot \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_e^{\Delta} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \right) \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_{ov} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e + \hat{\mathbf{S}}_{ov} \cdot \left( \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_v + \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \right). \quad (4.43)$$

In der Gleichung (4.43) läßt sich der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung folgendermaßen weiterentwickeln

$$\hat{\mathbf{S}}_{ov} \cdot \left( \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_v + \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \right) = \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \hat{\mathbf{L}}_v^T + \hat{\mathbf{S}}_{ov} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_v + \hat{\mathbf{S}}_{ov} \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \right\} \quad (4.44)$$

$$= \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \underbrace{\left( \hat{\mathbf{L}}_v^T + \hat{\mathbf{L}}_v \right)}_{2\hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta}} + \hat{\mathbf{S}}_{ov} \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \right\} \quad (4.45)$$

$$= \left[ \left( \mathbf{1} + 2\hat{\mathbf{\Gamma}}_e \right) \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right] \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta} \quad (4.46)$$

$$= \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^{\Delta}. \quad (4.47)$$

Verwendet wurden dabei die Eigenschaften der Spur, angewendet auf ein dreifaches Tensorprodukt<sup>3</sup>, sowie die Annahme der Materialisotropie, aus der folgt, daß  $\hat{\mathbf{S}}_{ov} \hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}$  gilt.

---

<sup>3</sup> $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{BC}) = \text{Sp} \{ \mathbf{ABC} \} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{CA}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB})$

## Potentiale

Wie schon vorher erwähnt, wird das Prinzip der Irreversibilität durch die Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung beachtet. In der Formulierung der Clausius-Duhem-Ungleichung bei isothermen Prozessen (3.67) wird der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor durch seine Zerlegung (4.38) und  $\dot{\Psi}$  durch die Zeitableitung<sup>4</sup> der Freien Energie (4.26) ersetzt:

$$\left(\tilde{\mathbf{T}}_{eq} + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}\right) \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \frac{d\Psi_{eq}}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} - \rho_0 \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e \geq 0. \quad (4.48)$$

Mit Anwendung der Gleichungen (4.43) und (4.47) auf diese Ungleichung (4.48) gilt

$$\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{T}}_{eq} - \rho_0 \frac{d\Psi_{eq}}{d\mathbf{C}}\right) \cdot \dot{\mathbf{C}} + \left(\hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}\right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v + \left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}}_{ov} - \rho_0 \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\mathbf{C}}_e}\right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e \geq 0, \quad (4.49)$$

wobei  $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}$  die Ableitung des Greenschen Verzerrungstensors (vgl. 3.20) und  $\dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e = \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbf{C}}}_e$  die Ableitung des elastischen Anteils der gesamten Verzerrung auf der Zwischenkonfiguration (4.32) ist.

Aus der Nullsetzung der Klammern bei  $\dot{\mathbf{C}}$  und  $\dot{\hat{\mathbf{C}}}_e$  in der Ungleichung (4.49) folgen die Potentialbeziehungen (4.50) und (4.51) für die Gleichgewichts- und die Überspannung. Neben den beiden Potentialbeziehungen bleibt die Restungleichung (4.52) übrig, die als Bedingung für eine nicht-negative Dissipation erfüllt werden muß.

$$\bullet \quad \tilde{\mathbf{T}}_{eq} = 2\rho_0 \frac{d\Psi_{eq}(\mathbf{C})}{d\mathbf{C}}, \quad (4.50)$$

$$\bullet \quad \hat{\mathbf{S}}_{ov} = 2\rho_0 \frac{d\Psi_{ov}(\hat{\mathbf{C}}_e)}{d\hat{\mathbf{C}}_e}, \quad (4.51)$$

$$\bullet \quad \left(\hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}\right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v \geq 0. \quad (4.52)$$

Die Potentialbeziehungen (4.50) und (4.51) und die Erfüllung der Restungleichung (4.52) gewährleisten die thermodynamische Konsistenz des Modells für alle beliebigen isothermen Verzerrungsprozesse. Aus der Restungleichung wird nun eine thermodynamisch konsistente Evolutionsgleichung für den viskosen Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeits-tensors  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_v$  formuliert.

In der Literatur finden sich mehrere Möglichkeiten (s. z.B. Lion[37] oder Drozdov[12] oder Krawietz[28]) zur Formulierung thermodynamisch konsistenter Evolutionsgleichungen,

---

<sup>4</sup> $\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi_{eq}}{d\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e$

aber es gibt kein allgemeingültiges Verfahren, die Form der Fließregel zu finden, nur die Bedingung, daß die Fließgesetze eines Stoffmodells immer hinreichend thermodynamisch konsistent sein müssen, d.h., sie erfüllen die Restungleichung (4.52).

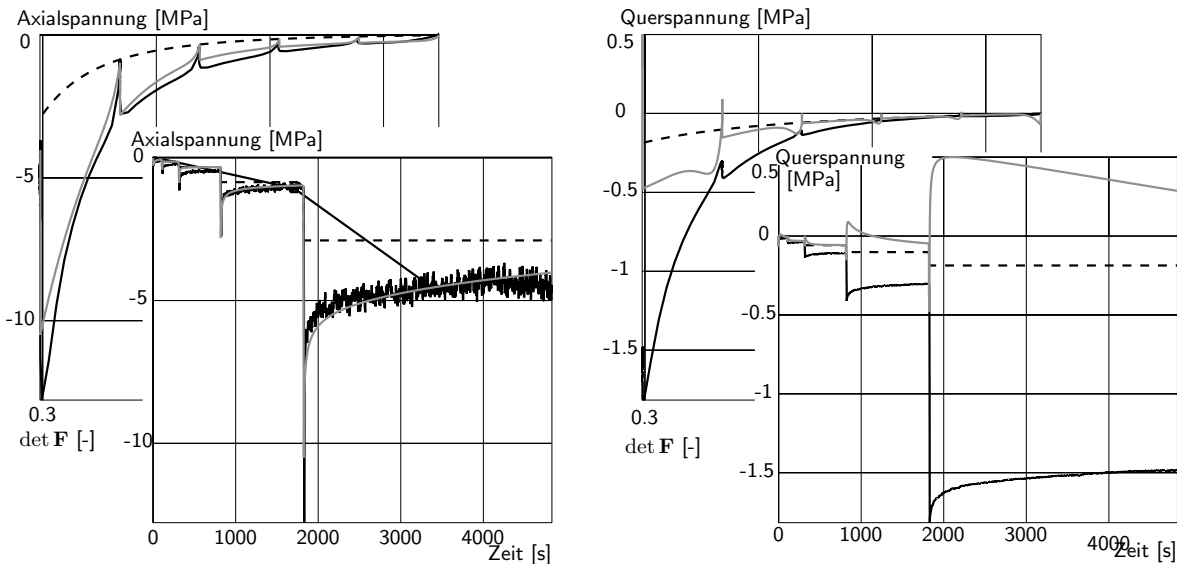
### Evolutionsgleichung

Eine naheliegende Methode, die linke Seite der Restungleichung (4.52) zu einer nicht-negativen Größe zu machen, ist die Annahme der Proportionalität zwischen  $\hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}$  und  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_v$ :

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v = \frac{1}{\eta^*} \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}, \quad \eta^* > 0. \quad (4.53)$$

$\eta^*$  kann beim Zener-Modell (s. Abb. (4.6)) als Viskosität des Maxwell-Elements interpretiert werden.  $\eta^*$  muß immer positiv sein und kann von weiteren Größen abhängen, die den Deformationsprozeß kennzeichnen.

Mit Anwendung der oben stehenden Evolutionsgleichung und den bisher entwickelten Materialgleichungen wurden Meßdaten des Festversuchs angepaßt. Obwohl mehrere unterschiedliche Ansätze für die Freie Energie ausprobiert wurden, lieferte eine gute Anpassung der Axialspannung immer unmögliche Spannungswerte für die Querrichtung. Umgekehrt, für sinnvolle Spannungswerte in der Querrichtung konnte keine zufriedenstellende Anpassung für die Axialspannung hergestellt werden. Die Abb. 4.11 stellt eine Anpassung der Festversuchs-Meßdaten mit der Freien Energie von Blatz & Ko (s. Gl. 4.61) dar.



**Abbildung 4.11:** Festversuch V6, Axial- und Querspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. die Zeit

Die Darstellung der Querspannung (graue Kurven im Bild 4.11 rechts) zeigt, daß der zeitliche Verlauf der Überspannung für kleine Werte nicht monoton ist: Die Gesamtspannung

unterscheidet (betragsmäßig) die Gleichgewichtsspannung und konvergiert "von unten" gegen die Gesamtspannung. (Das heißt, die Überspannung wechselt das Vorzeichen, ehe sie gegen Null konvergiert. Ein solcher Verlauf der Überspannung ist in der Festkörpermechanik physikalisch wenig sinnvoll. Um die Darstellung des Relaxationsverhaltens zu verbessern wurde dann die Evolutionsgleichung (4.53) durch Einführung einer linearen Tensorfunktion erweitert.

In (4.53) sind die Gestalts- und Volumenänderungen aneinander gekoppelt; diese Evolutionsgleichung läßt sich in einen Deviator<sup>5</sup> und einen Kugeltensor aufspalten

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta = \frac{1}{\eta^*} \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D + \frac{1}{\eta^*} \frac{1}{3} \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{1}, \quad (4.54)$$

um die Gestaltsänderungen von den Volumenänderungen zu trennen. Nach Altenbach [1] werden die spezifischen Eigenschaften der Materialien eher durch die der Gestaltsänderung zuzuordnenden Anteile ausgedrückt als durch die zur Volumenänderung gehörenden. In der oben angegebenen Form (4.54) ist der Einfluß von beiden fest aneinander gekoppelt. Um das Modell flexibler zu machen werden die Gestaltsänderungen und die Volumenänderungen mit zwei unterschiedlichen Parametern gewichtet. Damit lautet die Evolutionsgleichung:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta = \frac{1}{\eta} \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{3} \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{1}. \quad (4.55)$$

In dieser Formulierung der Evolutionsgleichung beschreibt  $\eta$  die Gestaltviskosität und  $\kappa$  die Volumenviskosität. Diese Evolutionsgleichung muß die Ungleichung (4.52) ebenfalls respektieren, d.h.

$$\begin{aligned} \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta &= \left[ \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D + \frac{1}{3} \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{1} \right] \times \left[ \frac{1}{\eta} \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{3} \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{1} \right] \\ &= \frac{1}{\eta} \left[ \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D \right]^2 + \frac{1}{3\kappa} \left[ \text{Sp} \left\{ \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Um diese Forderung für alle Parameter erfüllen, müssen  $\eta$  und  $\kappa$  positiv sein. Zur Vereinfachung wird hier angenommen, daß  $\kappa$  und  $\eta$  zueinander proportional sind

$$\kappa = \alpha \eta, \quad (4.56)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  immer positiv sein muß.

Nachdem  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta$  in die Bezugskonfiguration rücktransformiert wurde und  $\left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right)^D$  in (4.55) mit Hilfe der Definition des Deviators ersetzt wurde, lautet die Evolutionsgleichung

---

<sup>5</sup> $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{Sp} \{ \mathbf{A} \} \mathbf{1}$

chung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}_v &= \mathbf{F}_v^{-T} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_v \mathbf{F}_v^{-1} = \frac{1}{\eta} \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{1}, \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{C}}_v &= \frac{2}{\eta} \mathbf{C} \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov} \mathbf{F}_v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov} \right\} \mathbf{C}_v. \quad (4.57)\end{aligned}$$

Die Einführung einer linear-isotropen Tensorfunktion in die Evolutionsgleichung, d.h. eine Evolutionsgleichung der Form (4.55), wurde auch von Reese ([46], Gl. (59)) bei finiter Thermoviskoelastizität für Polymerstoffe vorgeschlagen.

### Zusammenfassung - Gewährleistung der Clausius-Duhem-Ungleichung

Alle Materialgleichungen des dreidimensionalen temperaturunabhängigen Materialmodells werden nun in der Referenzkonfiguration zusammengestellt:

$$\bullet \quad \tilde{\mathbf{T}}_{eq} = 2\rho_0 \frac{d\Psi_{eq}}{d\mathbf{C}} \quad (4.58)$$

$$\bullet \quad \tilde{\mathbf{T}}_{ov} = \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov} \mathbf{F}_v^{-T} = 2\rho_0 \mathbf{F}_v^{-1} \left( \frac{d\Psi_{ov}}{d\hat{\mathbf{C}}_e} \right) \mathbf{F}_v^{-T} \quad (4.59)$$

$$\bullet \quad \dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \mathbf{C}_v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \right\} \mathbf{C}_v \quad (4.60)$$

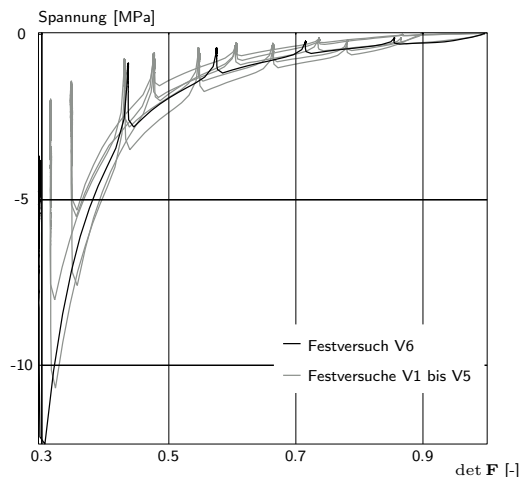
Die Wahl der Materialfunktionen der Freien Energie sowie der Viskositätsfunktionen findet in den folgenden Abschnitten (s. Seiten 71 und 74) auf der Basis von Versuchsdaten statt.

### 4.3.2 Anwendung des dreidimensionalen temperaturunabhängigen Modells zur Darstellung der experimentellen Meßdaten

Um das bisher entwickelte dreidimensionale Modell zu illustrieren, wird nun ein bei Raumtemperatur gefahrener Versuch mit diesem Materialmodell dargestellt. Von den drei Versuchstypen (Freiversuch (s. Seite 8), Festversuch (s. Seite 13) und Scherverversuch (s. Seite 25)) wird der Festversuch ausgewählt, da er der einzige ist, bei dem die Spannung in zwei unterschiedlichen Richtungen (Axial- und Querrichtung, s. Abb. 2.14) gleichzeitig gemessen wurde. Abb. 4.12 stellt die Meßdaten der Matte INPE 570 für die sechs unterschiedlichen<sup>6</sup> Festversuche dar.

---

<sup>6</sup>Die Festversuche unterscheiden sich durch die Orientierung des Materials in der Prüfmaschine. (s. Abb. 2.14)



**Abbildung 4.12:** Darstellung der sechs Festversuche über die Determinante  $\det \mathbf{F}$

Ausgewählt wurde der Festversuch V6, da dieser Versuch wie eine mittlere Kurve in dem Bereich liegt, der von allen Kurven für die Matte INPE 570 überstrichen wird (s. Abb. 4.12).<sup>7</sup> Außerdem wurde bei diesem Versuch die größte Stauchung (bis zu 70% Kompression) gefahren. Für den Festversuch V6 wurde die Materialprobe am Anfang des Versuchs um 0.3% vorkomprimiert (s. Seite 16); diese Vorkompression ist ziemlich klein, d.h. ihr Einfluß auf das Materialverhalten wird als vernachlässigbar angesichts der Inhomogenität<sup>8</sup> des Materials angenommen.

Die Potentialbeziehungen (4.58), (4.59) und die Fließregel (4.60), die das Prinzip der Irreversibilität gewährleisten, werden als Grundgleichungen verwendet. Deswegen wird zuerst der Gleichgewichtszustand des Materials mit (4.58) modelliert und die Parameter des entwickelten Materialmodells werden an die Meßdaten des Festversuchs V6 angepaßt. Im Folgenden wird die komplette Modellbildung mit (4.59) und (4.60) konkretisiert und die Parameteranpassung aus den Meßdaten des Festversuchs V6 vorgenommen.

### Die Gleichgewichtsspannung

Gemäß der Gleichung (4.58) ist das Potential  $\Psi_{eq}$  zu finden. Die Beispiele zur Formulierung der Freien Energie in der Literatur sind nahezu unbegrenzt. In dem Buch von Drozdov [12] sowie dem von Atkin & Fox [3] werden verschiedene Freie Energien vorgestellt. Es gibt keine Richtlinie, die festlegt, welche Freie Energie für welchen Materialtyp geeignet ist, oder welche Freie Energie die Darstellung bestimmter experimenteller Meßdaten am besten zuließe. Die einzige Möglichkeit bei der Modellentwicklung ist, die verschiedenen Formulierungen zu erproben, wie mit ihnen experimentelle Daten darge-

<sup>7</sup>Diese Beurteilung wurde nur per Augenschein festgestellt. Wie schon vorher erwähnt (s. z.B. Seite 16), gibt es wegen der Inhomogenität des Materials keine Möglichkeit, festzustellen, welcher der gefahrenen Versuche mit einer optimalen Materialprobe durchgeführt wurde.

<sup>8</sup>Im Abschnitt 'Idealisierungen' (s. Seite 6) wurde festgestellt, daß die Dichte eine Abweichung von  $\pm 20\%$  bei einer Abweichung der Dicke von  $\pm 0.7\%$  hat.



stellt werden können. Die ungeeigneten - nach dem Geschmack des Wissenschaftlers - werden aussortiert.

Zur Anpassung des Gleichgewichtszustandes beim Festversuch V6 wurden mehrere Freie Energien ausprobiert, wie z.B. die von Ogden<sup>9</sup> [3] und von Hartmann & Neff<sup>10</sup> [19] sowie das Potential (4.61) von Blatz & Ko [8].

Mit der Freien Energie nach Blatz & Ko wurden die Meßdaten der Axial- und Querrichtung des Festversuchs V6 am erfolgreichsten dargestellt. Blatz & Ko haben aus einer Kombination von theoretischen Herleitungen und experimentell beobachteten Phänomenen die folgende Freie Energie (4.61) entwickelt. Den Autoren zufolge kann diese Funktion für finite Deformationen das Verhalten vom Polyurethan-Schaumstoff bei spannungs- oder dehnungsgesteuerten Prozessen voraussagen. Diese Freie Energie lautet (s. [8], Gl.50):

$$\begin{aligned} \rho_R \psi(J_1, J_2, J_3) = & \frac{1}{2} \mu f \left\{ J_1 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1 - 2\nu}{\nu} J_3^{\frac{-2\nu}{1-2\nu}} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \mu (1 - f) \left\{ J_2 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1 - 2\nu}{\nu} J_3^{\frac{2\nu}{1-2\nu}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

wobei  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  aus einer Kombination der Invarianten<sup>11</sup>  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  des Rechten Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  bestehen.  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  definieren sich durch

$$J_1 = I_1, \quad J_2 = \frac{I_2}{I_3}, \quad J_3 = J = \sqrt{I_3}. \quad (4.62)$$

Außerdem sind  $f$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  in (4.61) Materialkonstanten, genauer gesagt ist  $\mu \geq 0$  der Schubmodul bei kleinen Deformationen. In [8] weisen Blatz & Ko nach, daß der Parameter  $\nu$  die Bedeutung der Querkontraktionszahl (Poisson's ratio) bei kleinen Deformationen hat, d.h.  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ . Der Parameter  $f$  gewichtet die beiden Terme in der Gleichung (4.61) gegeneinander.  $f$  erfaßt Größen zweiter Ordnung und soll sinnvollerweise im Intervall  $0 \leq f \leq 1$  liegen (s. Beatty [5]). Außerdem zeigen Blatz & Ko bei experimentellen Meßdaten für  $1 \leq \lambda \leq 2$ , daß das Spannungs-Dehnungsverhalten von '47% foamed polyurethane rubber' mit  $f = 0$  und  $\nu = \frac{1}{4}$  am besten wiedergegeben wird.

Zur Herleitung der Materialgleichung für die Gleichgewichtsspannung wird die Freie Energie (4.61) nach dem Rechten Cauchy-Green-Tensor abgeleitet. Da die Freie Energie nur von den Invarianten  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  abhängig ist, wird die Freie Energie zunächst nach

---

<sup>9</sup> $\Psi = \sum_n (\mu_n / \alpha_n) (b_1^{\alpha_n} + b_2^{\alpha_n} + b_3^{\alpha_n} - 3) + F(b_1 b_2 b_3)$ ,  $b_1, b_2, b_3$  sind die Hauptwerte von  $\mathbf{B}$

<sup>10</sup>Es wurde der Ansatz  $\Psi = \frac{1}{32}(J^2 - J^{-2})^2 + C_{01}(II_{\bar{\mathbf{C}}} - 3) + C_{10}(I_{\bar{\mathbf{C}}} - 3)$ , mit  $J = \det \mathbf{F}$  und  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$  untersucht, der sich aus den Freien Energienansätze von Rivlin & Saunders [47] sowie Hartmann & Neff [19] herleiten läßt.

<sup>11</sup> $I_1 = \text{Sp} \mathbf{C}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2}[(\text{Sp} \mathbf{C})^2 - \text{Sp} \mathbf{C}^2]$  und  $I_3 = \det \mathbf{C}$

den Invarianten abgeleitet:

$$\rho_R \frac{\partial \psi}{\partial J_1} = \frac{1}{2} \mu f, \quad (4.63)$$

$$\rho_R \frac{\partial \psi}{\partial J_2} = \frac{1}{2} \mu (1 - f), \quad (4.64)$$

$$\rho_R \frac{\partial \psi}{\partial J_3} = \mu \left\{ (1 - f) J_3^{\frac{4\nu-1}{1-2\nu}} - f J_3^{\frac{-1}{1-2\nu}} \right\}. \quad (4.65)$$

Die Ableitungen der Invarianten nach dem Cauchy-Green-Tensor<sup>12</sup>  $\mathbf{C}$  wiederum lauten:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1} \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{I_3} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C} - I_2 \mathbf{C}^{-1}) \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (4.68)$$

Nach der Kettenregel lautet die Ableitung der Freien Energie nach dem Rechten Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{eq} &= \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \mathbf{1} - J_3^{\frac{-2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &+ \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \frac{1}{I_3} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C} - I_2 \mathbf{C}^{-1}) + J_3^{\frac{2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Der Index  $_{eq}$  an den drei Materialparametern  $\mu_{eq}$ ,  $\nu_{eq}$  und  $f_{eq}$  ordnet diese drei Parameter dem Gleichgewichtszustand des Materials zu. Für den Vergleich mit den Meßdaten soll der Cauchysche Spannungstensor dienen, d.h. der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  muß in den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  transformiert werden. Diese Transformation wird durch die folgende Gleichung (4.70) definiert

$$\mathbf{T}_{eq} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}}_{eq} \mathbf{F}^T,$$

bzw. mit (4.69) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{eq} &= \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \frac{1}{J_3} \mathbf{B} - J_3^{\frac{-1}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{1} \right\} \\ &+ \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \frac{1}{J_3} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 - I_2 \mathbf{1}) + J_3^{\frac{4\nu_{eq}-1}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

## Die Überspannung

Gemäß der Gleichung (4.59) ist das Potential  $\Psi_{ov}$  zu definieren. Obwohl auch hier die Wahl der Freien Energie (s. Seite 71) uneingeschränkt möglich ist, wird - wie bei der

---

<sup>12</sup> $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$

Gleichgewichtsspannung - dasselbe Potential von Blatz & Ko [8], nur mit anderen Parameterwerten ausgewählt. So läßt sich das Materialmodell passend weiterentwickeln. In diesem Fall werden  $J_{1e}$ ,  $J_{2e}$  und  $J_{3e}$  als Invarianten des Tensors  $\hat{\mathbf{C}}_e$  berechnet, und  $\mu_{ov}$ ,  $f_{ov}$  und  $\nu_{ov}$  sind die Materialparameter der Überspannung:

$$\begin{aligned} \rho_R \psi_{ov}(J_{1e}, J_{2e}, J_{3e}) = & \frac{1}{2} \mu_{ov} f_{ov} \left\{ J_{1e} - 1 - \frac{1}{\nu_{ov}} + \frac{1 - 2\nu_{ov}}{\nu_{ov}} J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \mu_{ov} (1 - f_{ov}) \left\{ J_{2e} - 1 - \frac{1}{\nu_{ov}} + \frac{1 - 2\nu_{ov}}{\nu_{ov}} J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Die auf der Seite 72 erwähnten Eigenschaften der Materialparameter  $\mu$ ,  $\nu$  und  $f$  gelten auch für die Parameter  $\mu_{ov}$ ,  $\nu_{ov}$  und  $f_{ov}$ , d.h.  $0 \leq \mu_{ov}$ ,  $0 \leq \nu_{ov} < \frac{1}{2}$  und  $0 \leq f_{ov} \leq 1$ .

Aus der Potentialbeziehung (4.51) läßt sich die Überspannung in der Zwischenkonfiguration formulieren, indem der Rechte Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$  durch seinen elastischen Anteil  $\hat{\mathbf{C}}_e$  in (4.69) ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{ov} = & \mu_{ov} f_{ov} \left\{ \mathbf{1} - J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \right\} \\ & + \mu_{ov} (1 - f_{ov}) \left\{ \frac{1}{I_{3e}} (I_{1e} \mathbf{1} - \hat{\mathbf{C}}_e - I_{2e} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1}) + J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Um die experimentellen Meßdaten des Festversuchs V6 anpassen zu können, soll dieser Spannungstensor  $\hat{\mathbf{S}}_{ov}$  in den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}_{ov}$  transformiert werden. Nach Einsetzen von (4.72) in der Gleichung (4.59) lautet der Nichtgleichgewichtsanteil des Cauchyschen Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ov} = & \frac{\mu_{ov} f_{ov}}{\det \mathbf{F}} \left\{ \hat{\mathbf{B}}_e - J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \mathbf{1} \right\} \\ & + \frac{\mu_{ov} (1 - f_{ov})}{\det \mathbf{F}} \left\{ \frac{1}{I_{3e}} (I_{1e} \hat{\mathbf{B}}_e - \hat{\mathbf{B}}_e^2 - I_{2e} \mathbf{1}) + J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \mathbf{1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

wobei  $\hat{\mathbf{B}}_e = \hat{\mathbf{F}}_e \hat{\mathbf{F}}_e^T$  gilt. Bevor die Materialparameter  $\mu_{ov}$ ,  $\nu_{ov}$  und  $f_{ov}$  aus den Meßdaten des Festversuchs V6 identifiziert werden, soll noch die Evolutionsgleichung (4.60) vollständig formuliert werden, d.h. eine spezielle Funktion für  $\eta$  bzw.  $\kappa$  wird festgelegt. Hier ist die Evolutionsgleichung eine Differentialgleichung für den viskosen Anteil des Rechten Cauchy-Green-tensors  $\mathbf{C}_v$ , was bedeutet, diese Differentialgleichung beeinflusst das Wachstum des Tensors  $\mathbf{C}_v$  bzw.  $\hat{\mathbf{B}}_e$ , von dem der Nichtgleichgewichtsanteil des Cauchyschen Spannungstensors abhängt.

### Konkretisierung der Evolutionsgleichung

Gemäß der Gl. (4.60) können die Viskositäten  $\eta$  und  $\kappa$  speziell definiert werden, wobei  $\kappa = \alpha \eta$  mit dem Skalar  $0 < \alpha \leq 1$  angenommen wird. Wie schon vorher erwähnt, beschreiben  $\eta$  und  $\kappa$  die Gestalts- bzw. Volumenviskosität des Materials in dem hier vorliegenden nichtlinearen Fall. Sie können keine konstanten Skalargrößen sein, d.h.  $\eta$

und  $\kappa$  sind spezielle Funktionen, die von dem Prozeß abhängig sind, genauer gesagt, die sich aus der Verzerrung und der Dehnungsgeschwindigkeit formulieren lassen. Da  $\kappa$  nur mit dem Skalar  $\alpha$  proportional zu der Funktion  $\eta$  angenommen werden soll, wird hier nur eine spezielle Funktion für  $\eta$  entwickelt.

### Einführung des Carreau-Modells

Verschiedene Viskositäten für nichtlineare Materialmodelle - insbesondere für Fluide - werden aus dem Modell von Carreau abgeleitet. Mitsoulis[41] verwendet das Carreau-Modell für Scherströmungen eines Fluides in der Form

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\hat{\eta}}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})]^p}, \quad (4.74)$$

wobei  $\hat{\eta}$  die Viskosität bei sehr kleiner Schergeschwindigkeit ist.  $p$  ist ein Materialparameter, der in dieses Potenzgesetz als Exponent eingeht, und  $\lambda$  ein Parameter, der die Schergeschwindigkeit wichtet. Indem  $\dot{\gamma}$  durch  $|\mathbf{D}|$  ersetzt wird, läßt sich diese Funktion der Viskosität für dreidimensionale Deformationen eines Fluides oder Festkörpers verallgemeinern. Wenn zusätzlich  $p = 1$  festgesetzt wird, gilt die Viskositätsfunktion

$$\eta = \frac{\eta_0}{\chi|\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau}}, \quad (4.75)$$

wobei die Norm von  $\mathbf{D}$  den Einfluß der Verzerrungsgeschwindigkeit repräsentiert und  $\tau$  eine Relaxationzeit ist.  $\chi$  und  $\eta_0$  sind Skalarfaktoren;  $\eta_0\tau$  ist die Viskosität bei sehr kleiner Verzerrungsgeschwindigkeit ( $|\mathbf{D}| \approx 0$ ).

Die experimentellen Befunde weisen darauf hin, daß die Viskosität nicht nur von den Verzerrungsgeschwindigkeiten abhängen sollte, sondern auch von den Verzerrungen selbst. Um den Ansatz der Viskosität (4.75) auch abhängig von der Verzerrung zu formulieren, gibt es die Möglichkeit, die Gleichung (4.75) mit einer von der Norm des Greenschen Verzerrungstensors<sup>13</sup>  $|\mathbf{E}|$  abhängigen Funktion  $h_\eta(\mathbf{E})$  zu multiplizieren. Ausgewählt wird unter mehreren ausgetesteten Formulierungen die exponentielle Funktion  $h_\eta(\mathbf{E}) = 1 + k_0 \exp(k_1|\mathbf{E}|)$ , wobei  $k_0, k_1 > 0$  wichtende Faktoren sind. Damit folgt als Ansatz die Viskosität:

$$\eta = \eta_0 \frac{h_\eta(\mathbf{E})}{\chi|\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau}} = \eta_0 \frac{1 + k_0 e^{(k_1|\mathbf{E}|)}}{\chi|\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau}}. \quad (4.76)$$

---

<sup>13</sup>s. Seite 44

## Einführung der inneren Strukturvariable

Eine zusätzliche Erweiterung der Viskositätsfunktion, um thixotrope<sup>14</sup> Effekte besser zu beschreiben, ist die Einführung einer inneren Strukturvariable  $\lambda$ , die den Zustand der Mikrostruktur des Materials durch ein skalares Maß schildert. Nach Barnes [4] wird die innere Strukturvariable  $\lambda$  in der Literatur meistens auf folgende Weise formuliert:

$$\frac{d\lambda}{dt} = a (1 - \lambda)^b - c \dot{\gamma}^d \lambda, \quad (4.77)$$

wobei  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  Konstanten sind und  $\dot{\gamma}$  die Schergeschwindigkeit ist. Die Differentialgleichung (4.77) ist so entwickelt worden, daß die Variable  $\lambda$  immer zwischen den Werten 0 und 1 liegt.  $\lambda = 0$  repräsentiert die maximal mögliche Zerstörung der Materialmikrostruktur und  $\lambda = 1$  kennzeichnet den vollständigen Wiederaufbau, d.h. die völlige Erholung des Materials.

Dazu erwähnt Barnes, daß der Variablenwechsel  $\lambda = 1 - q$  in der Differentialgleichung (4.77) zu einem anderen Potential der inneren Strukturvariable führt, der grundsätzlich die gleichartigen Eigenschaften besitzt:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = a q^b - c \dot{\gamma}^d (q - 1). \quad (4.78)$$

Umgekehrt zu der Differentialgleichung (4.77) symbolisiert hier  $q = 0$  (Anfangswert) die völlige Erholung des Materials und  $q = 1$  die maximal mögliche Zerstörung der Materialmikrostruktur. Im Rahmen dieser Arbeit wird die zweite Form der Differentialgleichung (4.78) ausgewählt, da sie den Vorteil hat, die gewohnte Form von Anfangsbedingungen zu motivieren: D.h.  $q(t = t_0) = 0$  gilt als Anfangsbedingung und symbolisiert den völlig intakten Zustand der Mikrostruktur des Materials.

Wie für die Erweiterung des Carreau-Modells (s. Gleichungen (4.74) und (4.75)) wird  $\dot{\gamma}$  in (4.78) durch die Norm der Verzerrungsgeschwindigkeit  $|\mathbf{D}|$  ersetzt, um die Differentialgleichung auf dreidimensionale Festkörper zu verallgemeinern:

$$\dot{q} = \xi |\mathbf{D}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q. \quad (4.79)$$

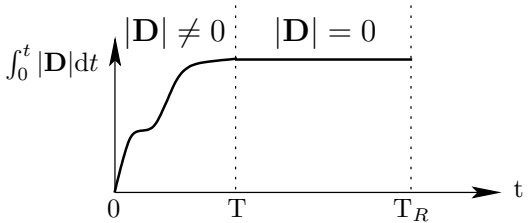
Außerdem wurden  $b = 1$  und  $d = 1$  festgelegt und  $a$  und  $c$  mit den Buchstaben  $\tau_q$  und  $\xi$  neu benannt.  $\xi$ ,  $\tau_q > 0$  sind Materialparameter. Die Strukturvariable  $q$  ist in geeigneter Weise in die Viskositätsfunktion  $\eta$  einzubauen.

---

<sup>14</sup>Definition nach Polymer Technology Dictionary [44]: "Thixotropy. A term used in rheology which means that the viscosity of a material decreases significantly with the time of shearing and then, increases significantly when the force inducing the flow is removed."

Definition nach Polymer Science Dictionary [43]: "Time-dependent fluid behaviour in which the apparent viscosity decreases with the time of shearing and in which the viscosity recovers to, or close to, its original value when shearing ceases."

Um zunächst das Verhalten der Strukturvariablen  $q$  zu untersuchen, wird die Differentialgleichung (4.79) für den folgenden Prozeß - ein aus einer Verzerrungsphase ( $|\mathbf{D}| \neq 0$ ) und einer Relaxationsphase ( $|\mathbf{D}| = 0$ ) bestehender Verlauf - gelöst:

$$|\mathbf{D}| : \begin{cases} |\mathbf{D}| = 0 & \text{für } t \leq 0 \\ |\mathbf{D}| \neq 0 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ |\mathbf{D}| = 0 & \text{für } T \leq t \leq T_R \end{cases}$$


Verhalten der Strukturvariable  $q$  während eines Prozesses ( $|\mathbf{D}| \neq 0$ )

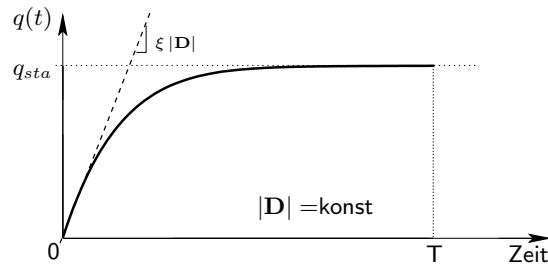
Die Differentialgleichung (4.79) kann folgendermaßen umformuliert<sup>15</sup> werden:

$$\dot{q} = \left( \xi |\mathbf{D}(t)| + \frac{1}{\tau_q} \right) (1 - q) - \frac{1}{\tau_q}. \quad (4.80)$$

Mit Trennung der Variablen kann die homogene Lösung und danach die partikuläre Lösung für den Fall  $|\mathbf{D}| \neq 0$  berechnet werden. Für die Anfangsbedingung  $q(t_0 = 0) = 0$  lautet die Lösung der Differentialgleichung (4.79):

$$q = \frac{\xi |\mathbf{D}|}{\xi |\mathbf{D}| + 1/\tau_q} \left( 1 - e^{\left\{ -\xi \int_0^t |\mathbf{D}| d\bar{t} - t/\tau_q \right\}} \right), \quad |\mathbf{D}| \neq 0. \quad (4.81)$$

Für  $0 \leq t \leq T$  und  $|\mathbf{D}| = \text{konst} \neq 0$  stellt Abb. 4.13 das Verhalten der Strukturvariable  $q$  dar.



**Abbildung 4.13:** Relaxationsverhalten der Strukturvariable  $q$

Aus der Zeitableitung der Strukturvariablen  $q$  für  $|\mathbf{D}| = \text{konst}$

$$\dot{q} = \xi |\mathbf{D}| e^{-\xi \int |\mathbf{D}| dt - t/\tau_q} \quad (4.82)$$

lassen sich die Eigenschaften des Kurvenverlaufs der Variable  $q$  (Anfangssteigung und stationäre Wert ab einem gewissen Zeitpunkt) bestimmen. Die Anfangssteigung der Kurve lautet für  $t = 0^+$ :

$$\dot{q} = \xi |\mathbf{D}|. \quad (4.83)$$

<sup>15</sup>Gl. (4.79)  $\Leftrightarrow \dot{q} = \xi |\mathbf{D}(t)| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q + \frac{1}{\tau_q} - \frac{1}{\tau_q}$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Anfangssteigung vom Prozeßverlauf abhängig ist und daß der Einfluß der Anfangssteigung zu Beginn der Entwicklung der Strukturvariablen nur durch den Materialparameter  $\xi$  bestimmt ist.

Abb. 4.13 zeigt auch, daß, falls  $|\mathbf{D}|$  konstant ist, die Strukturvariable  $q$  nach einem steigenden Verlauf einen 'Grenzwert'  $q_{stat}$  erreicht. Dieses Verhalten läßt sich dadurch erklären, daß ab einem gewissen Wert für  $t < T$

$$\dot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{stat} = \frac{\xi |\mathbf{D}|}{\xi |\mathbf{D}| + 1/\tau_q} \quad (4.84)$$

gilt. Dieser 'stationäre' Wert  $q_{stat}$  ist von  $|\mathbf{D}|$  abhängig und läßt sich durch die Materialparameter  $\xi$  und  $\tau_q$  beeinflussen.

Verhalten der Strukturvariablen  $q$  während eines Relaxationsprozesses ( $|\mathbf{D}| = 0$ )

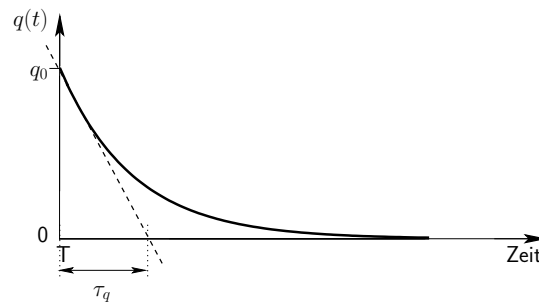
Für  $T \leq t \leq T_R$  hat die Differentialgleichung (4.79) der Strukturvariablen  $q$  die folgende Form

$$\dot{q} = -\frac{1}{\tau_q} q \quad |\mathbf{D}| = 0. \quad (4.85)$$

Mit Anwendung der Anfangsbedingung  $q(t = T) = q_0$  lautet die Lösung dieser Differentialgleichung

$$q = q_0 e^{-\left(\frac{t - T}{\tau_q}\right)}. \quad (4.86)$$

Für  $T \leq t \leq T_R$  und  $|\mathbf{D}| = 0$  stellt Abb. 4.14 den Kurvenverlauf der Strukturvariablen  $q$  dar.



**Abbildung 4.14:** Relaxationsverhalten der Strukturvariable  $q$

Aus der Zeitableitung der Funktion (4.86)

$$\dot{q} = -\frac{q_0}{\tau_q} e^{-(t - T)/\tau_q} \quad (4.87)$$

wird die Anfangssteigung der in Abb. 4.14 dargestellten Kurve berechnet und festgestellt, ab wann das Material vollständig erholt ist, d.h.  $q = 0$ .

Die Anfangssteigung der Funktion (4.86) lautet für  $t = T$

$$\dot{q} = -\frac{q_0}{\tau_q}. \quad (4.88)$$

Die Anfangssteigung ist vom Wert  $q_0 = q(T)$  der Strukturvariable  $q$  am Ende der Verzerrungsprozeß abhängig. Der einzige weitere Parameter, der Einfluß auf die Anfangssteigung  $\dot{q}(T)$  hat, ist die sogenannte Subtangente definiert durch  $\tau_q$ . Das Material ist komplett erholt, wenn  $q(t) = 0$  bzw.  $\dot{q}(t) = 0$  gilt. Aus der Gleichung (4.87) folgt, daß

$$e^{-\frac{t-T}{\tau_q}} \approx 0 \quad (4.89)$$

gilt, was sich auch so übersetzen läßt:

$$t \gg \tau_q + T, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.90)$$

Die bisherigen Aussagen über die Eigenschaften der Strukturvariablen  $q$  gelten allgemein. Um diese Eigenschaften zur Beschreibung des Thixotropieverhaltens anwenden zu können, muß die Strukturvariable  $q$  noch in geeigneter Weise in die Viskositätsfunktion  $\eta$  eingebaut werden.

Die experimentellen Beobachtungen geben Hinweise, wie die Viskositätsfunktionen  $\eta$  bzw.  $\kappa$  von der inneren Strukturvariablen  $q$  abhängig sein sollten. Jeder Festversuch (s. Abb. 2.15, 2.16 und 2.17) zeigt im Fall der Relaxation deutlich, daß je größer die Deformation ist, um so länger das Material relaxiert. Aus diesem Grund muß der Parameter  $\tau$  - die Relaxationzeit in der Viskositätsfunktion - eine von der inneren Strukturvariablen  $q$  abhängige Funktion sein<sup>16</sup>:

$$\tau = \hat{\tau}(q) = \tau_{\max}(1 - q) + \tau_{\min} q, \quad \tau_{\max} \geq \tau_{\min}. \quad (4.91)$$

Der Wert von  $\tau$  liegt, in Abhängigkeit von  $q$ , zwischen einem minimalen und einem maximalen Wert,  $\tau_{\min}$  (für  $q = 1$ ) bzw.  $\tau_{\max}$  (für  $q = 0$ ). Nimmt der Wert von  $q$  bei Belastung zu, werden  $\tau$  und damit auch  $\eta$  bzw.  $\kappa$  entsprechend kleiner. Erreicht  $q$  seinen stationären Wert  $q = q_{stat}$ , erlangt damit auch die Relaxationszeit  $\tau$  einen stationären Wert  $\tau_{stat}$

$$\tau_{stat} = \tau_{\max} (1 - q_{stat}) + \tau_{\min} q_{stat}. \quad (4.92)$$

Nimmt der Wert von  $q$  bei Relaxation ab, werden  $\tau$  und damit auch  $\eta$  entsprechend größer. Erreicht  $q$  den Wert 0, ist die Relaxation zu Ende und der Wert der Relaxationszeit  $\tau$  wird maximal, d.h.  $\tau = \tau_{\max}$ .

---

<sup>16</sup>Es ist denkbar, auch weitere Parameter von dieser Strukturvariablen abhängen zu lassen. Zur Beschreibung der hier beobachteten thixotropen Effekte reicht es aus, sich auf diesen Ansatz zu beschränken.



## Zusammenstellung des vollständigen 3D-Modells für isotherme Prozesse bei Raumtemperatur

Zur besseren Übersichtlichkeit werden nun alle Materialgleichungen in der Referenzkonfiguration zusammengestellt:

- Gesamtspannung s. Gl. (4.38)

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_{eq} + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}.$$

- Gleichgewichtsspannung s. Gl. (4.70)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{eq} = & \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \mathbf{1} - J_3^{\frac{-2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ & + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \frac{1}{I_3} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C} - I_2 \mathbf{C}^{-1}) + J_3^{\frac{2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

$J_3 = \sqrt{I_3}$  und  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  sind die Invarianten von  $\mathbf{C}$ .

- Überspannung s. Gl. (4.73)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} = & \mu_{ov} f_{ov} \left\{ \mathbf{C}_v^{-1} - J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ & + \mu_{ov} (1 - f_{ov}) \left\{ \frac{1}{I_{3e}} (I_{1e} \mathbf{C}_v^{-1} - \mathbf{C}_v^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_v^{-1} - I_{2e} \mathbf{C}^{-1}) + J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \mathbf{C}^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

$J_{3e} = \sqrt{I_{3e}}$  und  $I_{1e}$ ,  $I_{2e}$  und  $I_{3e}$  sind die Invarianten von  $\hat{\mathbf{C}}_e$ .

- Evolutionsgleichung s. Gl. (4.57)

$$\dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \mathbf{C}_v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \right\} \mathbf{C}_v.$$

- Viskositäten s. Gl. (4.76)

$$\eta = \eta_0 \frac{1+k_0 \exp(k_1 |\mathbf{E}|)}{\chi |\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau}}, \quad \kappa = \alpha \eta.$$

- Relaxationszeit s. Gl. (4.91)

$$\tau = \tau_{\max} (1 - q) + q \tau_{\min}, \quad \tau_{\max} \geq \tau_{\min}.$$

- Strukturvariable s. Gl. (4.79)

$$\dot{q} = \xi |\mathbf{D}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q, \quad q(0) = 0.$$

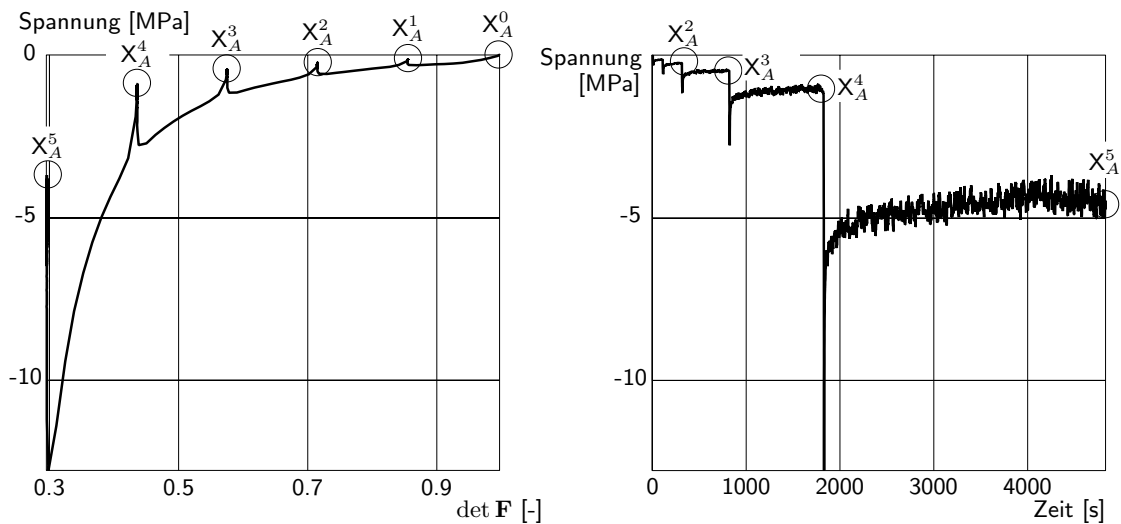
Für die Parameteridentifikation anhand des Festversuchs V6 werden die Evolutionsgleichungen der Inneren Variablen numerisch integriert. Die Gleichgewichtsspannung und die Überspannung sind hier als Cauchysche Spannungstensoren in der Momentankonfiguration angegeben. Tab. 4.1 stellt den Gültigkeitsbereich der eingeführten Parameter dar.

Materialparameter der	Parametereigenschaften
Gleichgewichtsspannung	$\mu_{eq} \geq 0$ $0 \leq f_{eq} \leq 1$ $0 \leq \nu_{eq} < \frac{1}{2}$
Überspannung	$\mu_{ov} \geq 0$ $0 \leq f_{ov} \leq 1$ $0 \leq \nu_{ov} < \frac{1}{2}$
Viskositäten	$k_0 \geq 0$ $k_1 \geq 0$ $\eta_0 > 0$ $\alpha > 0$ $\chi \geq 0$
Relaxationszeiten	$\tau_{max} \geq \tau_{min} > 0$
Strukturparameter	$\xi \geq 0$ $\tau_q \geq 0$

**Tabelle 4.1:** Materialparameter

### 4.3.3 Parameteridentifikation auf Basis des Festversuchs V6

In diesem Abschnitt werden die in Tab 4.1 aufgeführten Parameter des temperaturunabhängigen 3D-Modells an die Meßdaten des Festversuchs V6 angepaßt. Die Parameteridentifikation wird nicht mit einem Optimierungsverfahren durchgeführt, sondern nur nach Augenschein vorgenommen. Da die Genauigkeit aller Meßdaten für dieses Material, wie schon vorher erwähnt, in mancher Beziehung unbefriedigend ist, wird hier nur gezeigt, daß das Modell die Form der Verlaufskurve der Axialspannungen zum Festversuch V6 gut wiedergeben kann. Der Festversuch V6 wurde in Dickenrichtung M1 (s. Abb. 2.13 und 2.14) um 0.3% vorkomprimiert und mit einer Geschwindigkeit von 0.77 mm/s durchgeführt.



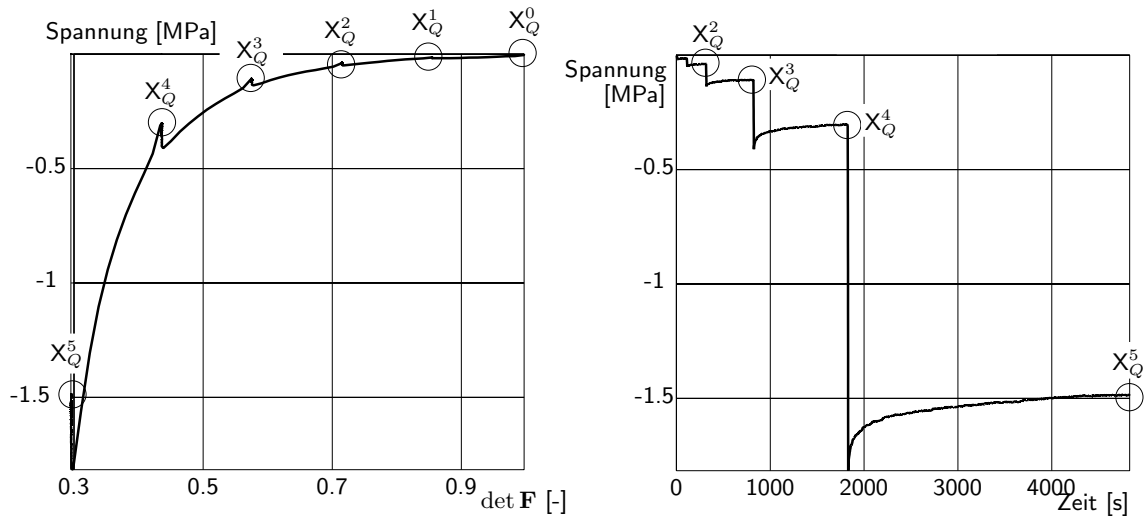
**Abbildung 4.15:** Festversuch V6, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. die Zeit

Abb. 4.15 und 4.16 stellen die Meßdaten des Festversuchs V6 dar. Die Axialspannung in Abb. 4.15 und die Querspannung aus Abb. 4.16 sind über der Determinante des Deformationsgradienten  $\det \mathbf{F}$  und über der Zeit aufgetragen. Für die Streckung  $\lambda$  in

Axialrichtung R1 und  $\lambda_q = 0.997$ , die feste Streckung in Querrichtung R3 (wegen der Vorkompression), gilt  $\det \mathbf{F} = 0.997\lambda$ , da der Deformationsgradient des Festversuchs V6 folgendermaßen aussieht

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_q \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

In diesem Abschnitt gilt die folgende Legende: Die schwarzen Kurven repräsentieren die Meßdaten, die gestrichelte schwarze Kurve die mit dem 3D-Modell berechnete Gleichgewichtsspannung. Die grauen oder die unterschiedlich grauen Kurven repräsentieren die berechneten Gesamtspannungen.



**Abbildung 4.16:** Festversuch V6, Querspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. die Zeit

Da der Festversuch V6 in der Axialrichtung R1 durchgeführt wurde, werden zuerst die Modellparameter anhand der Axialspannungen aus Abb. 4.15 identifiziert. Zusätzlich noch die Parameter mit den Meßdaten der Querspannung anzupassen, würde die Anpassung der Meßdaten in der Axialrichtung erheblich verschlechtern. Deswegen werden die Meßdaten der Querrichtung R3 zusammen mit der Gesamtspannung, die mit den Parameterwerten aus den Meßdaten der Axialrichtung identifiziert wurden, lediglich in Abb. 4.26 dargestellt. Damit wird überprüft, daß sich in Querrichtung zumindest physikalisch sinnvolle Resultate (Druckspannungen) ergeben, während in Axialrichtung alles plausibel aussieht.

Die Parameteridentifikation wird folgendermaßen durchgeführt: Nachdem die Parameterwerte des Gleichgewichtsanteils ( $\mu_{eq}$ ,  $\nu_{eq}$  und  $f_{eq}$ ) festgestellt sind, werden alle anderen Parameter zunächst mit einer möglichst einfachen Form des 3D-Modells untersucht, um danach die Meßdaten der Axialspannung erfolgreich anzupassen.

### Identifikation der Gleichgewichtsspannungsparameter ( $\mu_{eq}$ , $\nu_{eq}$ , $f_{eq}$ )

Die Spannungsbeziehung (4.70), ausgewertet für den Festversuch V6, liefert die beiden Spannungen

$$\sigma_A = \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_q} - (\lambda \lambda_q)^{\frac{-1}{1-2\nu_{eq}}} \right\} + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ (\lambda \lambda_q)^{\frac{4\nu_{eq}-1}{1-2\nu_{eq}}} - \frac{1}{\lambda^3 \lambda_q} \right\} \quad (4.94)$$

$$\sigma_Q = \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \frac{\lambda_q}{\lambda} - (\lambda \lambda_q)^{\frac{-1}{1-2\nu_{eq}}} \right\} + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ (\lambda \lambda_q)^{\frac{4\nu_{eq}-1}{1-2\nu_{eq}}} - \frac{1}{\lambda \lambda_q^3} \right\}, \quad (4.95)$$

wobei  $\sigma_A$  der Gleichgewichtsanteil der Axial-Gesamtspannung und  $\sigma_Q$  der Gleichgewichtsanteil der Quer-Gesamtspannung des Festversuchs V6 sind. Da die Gleichgewichtsspannungskurve die Enden, also die jeweils betragsmäßig minimalen Spannungswerte bei jeder Relaxationsphase verbinden soll, muß  $\sigma_A$  durch die Punkte  $X_A^0$ ,  $X_A^1$ ,  $X_A^2$ ,  $X_A^3$ ,  $X_A^4$  und  $X_A^5$  laufen und  $\sigma_Q$  durch die Punkte  $X_Q^0$ ,  $X_Q^1$ ,  $X_Q^2$ ,  $X_Q^3$ ,  $X_Q^4$  und  $X_Q^5$ . Dazu werden anhand der Gl. (4.94) die optimalen Parameterwerte für  $\mu_{eq}$ ,  $\nu_{eq}$ ,  $f_{eq}$  mit dem Programm **Gnuplot**<sup>17</sup> gesucht. Mit den so gefundenen Parametern werden die Gleichgewichtsspannungen in beiden Richtungen berechnet und in Abb. 4.17 dargestellt.

Nach mehreren Versuchen lieferte das Programm **Gnuplot**, für den Parameter  $f_{eq}$ , immer einen Wert in der Größenordnung  $10^{-5}$ . Wenn man  $f_{eq}$  gleich Null setzt und für die Parameter  $\mu_{eq}$  und  $\nu_{eq}$  die identifizierten Werte beibehält, liefert das Modell eine Anpassung gleicher Güte: Mit den Augen ist kein Unterschied zwischen den Kurven erkennbar. Da die Genauigkeit der Meßdaten (s. Inhomogenität des Materials, Seite 6) ohnehin nicht sehr hoch ist, wird für die weiteren Parameteridentifikationen  $f_{eq}$  gleich Null gesetzt.

Blatz & Ko [8] stellen fest (s. Seite 72), daß Polymere mit den Parameterwerten  $f = 0$  und  $\nu = \frac{1}{4}$  in der Freien Energie (4.61) am besten angepaßt werden. Da das untersuchte Material sich wie ein Polymer verhält, wird, zusätzlich zu  $f_{eq} = 0$ , der Parameter  $\nu_{eq}$  zunächst auf  $\frac{1}{4}$  gesetzt, um so verbesserte Parameterwerte für  $\mu_{eq}$  und  $\nu_{eq}$  bezüglich der Meßdaten des Festversuchs V6 zu identifizieren.

Dem Programm **Gnuplot** zufolge zeigt Abb. 4.17 links die beste gefundene Anpassung der sechs Punkte  $X_A$ , wobei  $f_{eq} = 0$  ist. Für diese Punktenverbindung mit der Gl. (4.94) liefert das Programm **Gnuplot** die Parameterwerte  $\nu_{eq} = 0.2512$  und  $\mu_{eq} = 7.739 \times 10^{-2}$ . Abb. 4.17 rechts stellt die Querspannung über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  für den Festversuch V6 dar sowie die entsprechende Anpassung mit den gerade erwähnten Parameterwerten.

---

<sup>17</sup>Gnuplot Linux Version 3.7, Computerprogramm zur grafischen Darstellung von Funktionen und Daten.

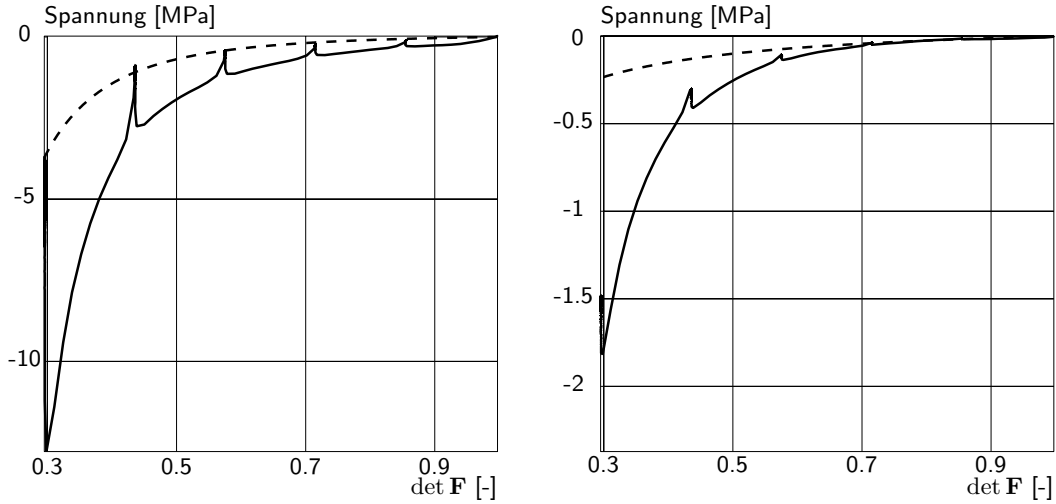


Abbildung 4.17: Festversuch V6, Axial- und Querspannung über  $\det \mathbf{F}$

Die von Gnuplot gelieferte Anpassung verbindet quasi die sechs Punkte  $X_A$ , obwohl der Punkt  $X_A^4$  nicht genau erreicht wird. Dieser Fehler ist aber vernachlässigbar im Vergleich mit allen ungenauen Versuchsparametern (Streuung, Materialinhomogenität, etc.); deswegen wird diese Anpassung als annehmbar akzeptiert. Für diese Parameterwerte ( $f_{eq} = 0$ ,  $\nu_{eq} = 0.2512$  und  $\mu_{eq} = 9.866 \times 10^{-2}$ ) ist die Anpassung der Querspannung (s. Abb. 4.17 rechts) nicht so erfolgreich, aber zumindest sind die Querspannungen nicht positiv, was physikalisch sinnlos wäre. Eine verbesserte Anpassung der Querspannung führt zu einer wesentlich schlechteren Anpassung der Axialspannung; deswegen werden die Parameterwerte

$$f_{eq} = 0 \quad \nu_{eq} = 0.2512 \quad \mu_{eq} = 7.739 \times 10^{-2} \text{ MPa} \quad (4.96)$$

behalten, wenn die restlichen Parameterwerte identifiziert werden. Innerhalb der vorgestellten Parameteridentifikation ( $f_{eq} = 0$  und  $\nu_{eq} = 0.2512$ ) wurden ziemlich genau die Werte ( $f = 0$  und  $\nu = \frac{1}{4}$ ) festgestellt, die Blatz & Ko für die Anpassung von Polymerstoffen empfehlen (s. Seite 72).

**Identifikation der anderen Parameter:**  $\mu_{ov}$ ,  $\nu_{ov}$ ,  $f_{ov}$ ,  $\alpha$ ,  $\eta_0$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $\chi$ ,  $\xi$ ,  $\tau_q$ ,  $\tau_{\min}$  und  $\tau_{\max}$

Um für die Freie Energie dieselbe Form wie in der Gleichgewichtsspannung zu verwenden, wird für die Überspannung der Parameterwert  $f_{ov} = 0$  gesetzt. Dazu wird zuerst  $\nu_{ov} = 0.25$  voreingestellt, um die Bedeutung der Parameter für das Modell zu verdeutlichen.

Die Evolutionsgleichung (4.57) ist nur numerisch lösbar. Daher können die Parameter des Modells nicht durch eine einfache Optimierung wie bei der Gleichgewichtsspannung identifiziert werden. Eine Möglichkeit, das Modell zu untersuchen, besteht darin, zuerst die Gleichungen des Modells auf die einfachste Form zu bringen, indem verschiedene Teile des Modells mit Hilfe der Parameter ausgeschaltet werden, und dann alle Ansätze

des Modells mit den entsprechenden Parametern nach und nach wieder einzuschalten.

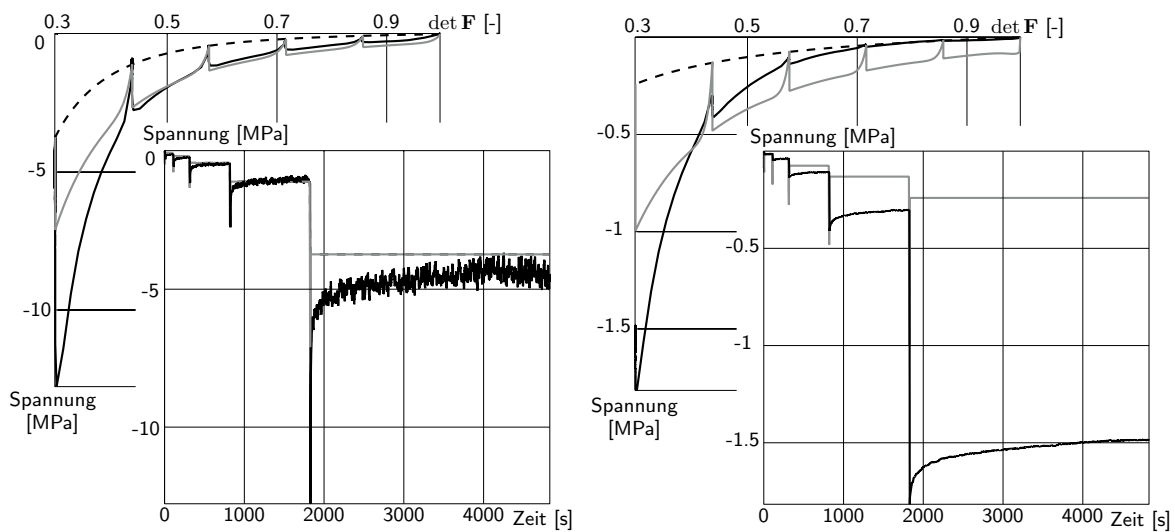
Deswegen werden zunächst alle Parameter der Viskosität entweder gleich Null oder Eins gesetzt:

- Für  $\xi = 0$  und  $1/\tau_q = 0$  bleibt immer  $q = 0$  bzw.  $\tau = \tau_{\max} = \tau_{\min} = 1$ .
- Für  $\chi = 0$  und  $k_0 = k_1 = 0$  gilt  $\eta = \eta_0$   $\tau = \eta_0 \tau_{\max}$ .

Das Modell hat mit dieser Parameterfestlegung eine einfachste Form und besitzt nur noch drei freie Parameter,  $\mu_{ov}$ ,  $\alpha$  und  $\eta_0$ . Für die zunächst gewählten Parameterwerte

$$\mu_{ov} = 8.5 \text{ MPa} \quad \eta = \eta_0 = 8.5 \text{ MPa.s} \quad \alpha = 1.85 \quad (4.97)$$

wird die Axialspannung über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  in Abb. 4.18 dargestellt.



**Abbildung 4.18:** Axial- und Querspannung, jeweils über  $\det \mathbf{F}$  und über der Zeit

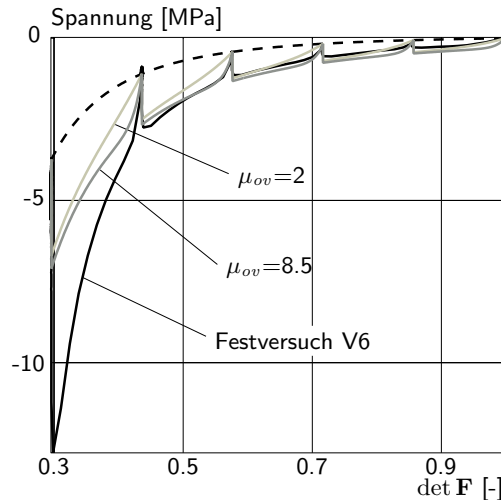
Wie vorher, wird in diesem Fall nur die Axialspannung untersucht und die Querspannung nur im Hinblick auf physikalisch sinnvolles Vorzeichen beobachtet. In einem nächsten Schritt werden die Parameter  $\mu_{ov}$ ,  $\nu_{ov}$  und  $\alpha$  verändert.

Für jeden variierten Parameter wird zunächst die Axialspannung entweder über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  oder der Zeit  $t$  dargestellt - je nachdem wie der Parametereinfluss besser zu sehen ist.

$\mu_{ov}$  Anfangssteigung

Am Anfang jeder Belastungsphase wird angenommen, daß das Material im komplett relaxierten Zustand vorliegt. D.h.  $\hat{\mathbf{S}}_{ov} = \mathbf{0}$  bzw.  $\dot{\mathbf{C}}_v = \mathbf{0}$ , damit können die Parameter  $\eta$  und  $\alpha$  keinen Einfluß auf die Steigung der Spannungskurve bei Beginn einer Wiederbelastung haben.

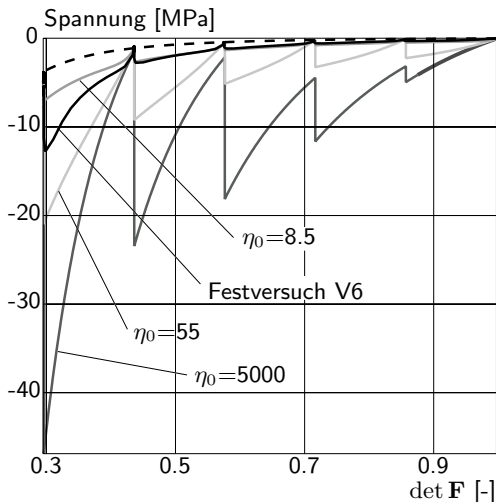
Das bedeutet für die Überspannung, daß nur der Parameter  $\mu_{ov}$  die Anfangssteigung der Spannungskurve beeinflussen kann.



**Abbildung 4.19:** Parametereinfluß der Anfangssteigung

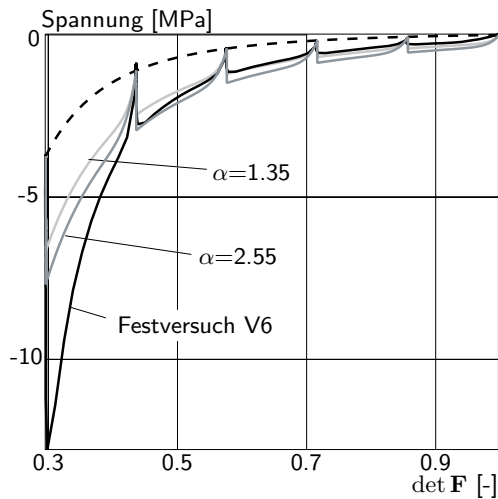
$\eta_0$  Viskositätsparameter

Der Parameter  $\eta_0$  beeinflusst linear die Viskosität des Materials. Mit diesem Parameter kann die Größenordnung der Spannungskurve beeinflusst werden. Für die eindimensionale lineare Viskoelastizität (s. Abb. 4.7) wurde der Einfluß der Viskosität auf den Kurvenverlauf illustriert: Die Überspannung resultiert nur aus dem Produkt der Viskosität mit der Dehnungsgeschwindigkeit. Das bedeutet, wenn  $\eta_0$  zu klein ist, entwickelt sich zu wenig Überspannung. Wenn  $\eta_0$  zu groß ist, kann  $\lambda_v$  größer als 1.0 werden, was für den hier vorliegenden Fall der Kompression falsch wäre:  $\lambda_v \in [0, 1]$ . Außerdem, wenn  $\eta_0$  zu groß ist, wird bei einigen Relaxationsphasen auch bei längsten Haltezeiten die Gleichgewichtsspannung nicht mehr erreicht (siehe hellgraue Kurve in Abb. 4.20,  $\eta_0 = 5000$ ). Außerdem, wenn  $\eta_0$  zu groß ist, wird bei einigen Relaxationsphasen auch bei längsten Haltezeiten die Gleichgewichtsspannung nicht mehr erreicht (siehe hellgraue Kurve in Abb. 4.20,  $\eta_0 = 5000$ ).



**Abbildung 4.20:** Parametereinfluß des Viskositätsparameters

$\alpha$  Gestalts-/ Volumenviskosität



**Abbildung 4.21:** Parametereinfluß der Gestalts-/ Volumenviskosität

Der Parameter  $\alpha$  ist eine Größe, die die Gewichtung zwischen der Gestaltsviskosität und der Volumenviskosität verteilt. Für  $\alpha > 1$  ist die Volumenviskosität ausgeprägter als die Gestaltsviskosität. Für  $\alpha < 1$  ist es umgekehrt, d.h. die Gestaltsviskosität ist einflußreicher als die Volumenviskosität. Im Kurvenverlauf schlägt sich dieser Effekt folgendermaßen nieder (s. Abb. 4.21): Wenn  $\alpha$  zunimmt, d.h. wenn die Volumenviskosität prägnanter wird, nimmt die Spannung am Ende jeder Belastungsphase zu. Umgekehrt, wenn  $\alpha$  abnimmt, d.h. wenn die Gestaltsviskosität wichtiger wird, nimmt die Spannung am Ende jeder Belastungsphase ab.

$\nu_{ov}$  Überspannungsquerdehnungszahl

In dem 3D-Modell findet sich der Parameter  $\nu_{ov}$  bei der Überspannung: Er hat zur Folge, daß nur die Anfangssteigung des Kurvenverlaufs und/oder die Größe der Überspannung beeinflussen kann. Die Meßdaten des Festversuchs V6 wurden mit unterschiedlichen Werten für den Parameter  $\nu_{ov}$  angepaßt: Die verschiedenen Anpassungen zeigen, daß der Parameter  $\nu_{ov}$  nur einen kleinen Einfluß auf die Anfangssteigung der Überspannung hat. Wenn man die verschiedenen Anpassungen darstellen würde, wäre aber kaum ein Unterschied zwischen den Kurven zu sehen; deswegen wird dieser Effekt hier nicht illustriert und  $\nu_{ov}$  wird für die endgültige Anpassung auf den Wert 0.25 festgelegt. Wichtig zu bemerken ist noch, daß die Werte für  $f_{eq} = 0$  und  $f_{ov} = 0$  bzw.  $\nu_{eq} = 0.2583$  und  $\nu_{ov} = 0.25$  quasi dieselben sind, d.h. es wird dieselbe Form der Freien Energie für die Gleichgewichtsspannung wie für die Überspannung angewendet.

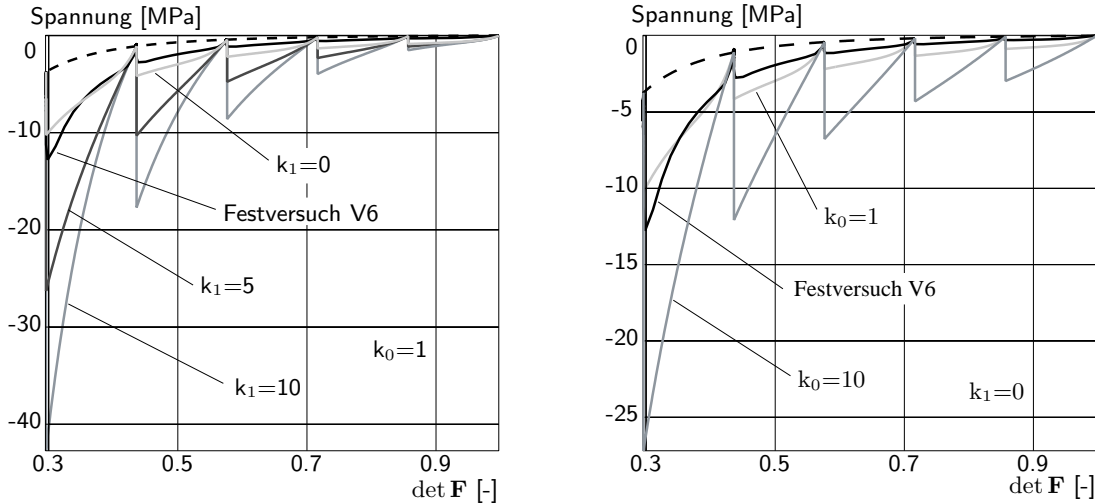
$$\beta_\eta(|\mathbf{D}|, q) = \chi |\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau} \quad \text{Nenner der Viskosität } \eta$$

Die lineare Funktion  $\beta_\eta(|\mathbf{D}|, q)$  bringt zwei unterschiedliche Glieder in Verbindung: Mit dem Parameter  $\chi$  wird die Geschwindigkeit der Deformation in die Viskosität eingeführt; das Glied  $1/\tau$  ist von dem Verhalten der Strukturvariablen  $q$  abhängig und beschreibt das Relaxationsverhalten des Materials. Diese beiden Glieder sind zueinander komplementär, insofern als das Glied  $\chi |\mathbf{D}|$  während der Relaxationsphasen gleich Null ist und das Glied  $1/\tau$  im Vergleich zu  $\chi |\mathbf{D}|$  während der Belastungsphasen vernachlässigbar ist. Die letzte Aussage gilt nur für  $\chi \gg (|\mathbf{D}| \tau)^{-1}$  was - nach umfangreichen Erfahrungen mit den Anpassungen - eigentlich immer der Fall ist.



$$\boxed{h_\eta(\mathbf{E}) = 1 + k_0 \exp(k_1 |\mathbf{E}|)} \quad \underline{\text{Exponentialfunktion von } |\mathbf{E}| \text{ (Zähler von } \eta)}$$

Ohne Deformation gilt  $|\mathbf{E}| = 0$ , sonst  $|\mathbf{E}| > 0$ . Das bedeutet, daß  $\exp(k_1 |\mathbf{E}|) \geq 1$  immer gilt. D.h., für die Parameter  $k_0 \geq 0$  und  $k_1 \geq 0$  nimmt die Funktion  $h_\eta(\mathbf{E})$  während eines Prozeßverlaufs mit zunehmender Belastung immer zu. Daraus folgt, daß die Viskositäten  $\eta$  und  $\kappa$  während des Versuchsverlaufs immer größer werden.



**Abbildung 4.22:** Einfluß der Exponentialfunktion  $h_\eta$

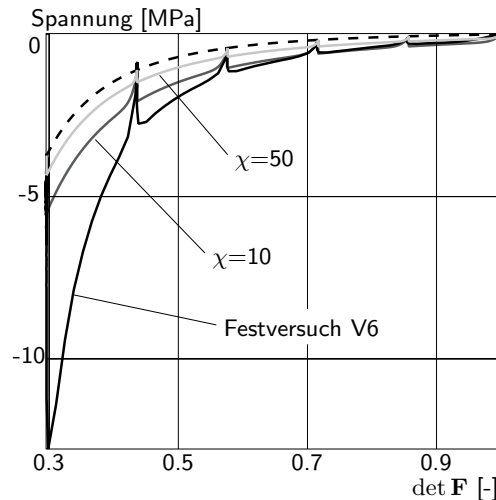
Für den Festversuch V6 wird die Materialprobe in Axialrichtung immer mehr komprimiert, d.h.  $|\mathbf{E}|$  wächst kontinuierlich während der Belastungsphasen und bleibt konstant während der Relaxationsphasen.  $k_0$  und  $k_1$  sind wichtige Faktoren; da der Parameter  $k_1$  in der Exponentialfunktion steht, ist sein Einfluß auf den Kurvenverlauf ausgeprägter als der des Parameters  $k_0$ . Wenn  $k_0$  oder  $k_1$  größer werden, wächst die Funktion  $h_\eta(\mathbf{E})$  und umgekehrt (s. Abb. 4.22). Das Wachstum der Viskositäten wird schneller, falls der Parameter  $k_1$  groß ist.

$$\boxed{\dot{q} = \xi |\mathbf{D}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q} \quad \underline{\text{Evolutionsgleichung der Strukturvariablen } q}$$

Das Verhalten der Strukturvariablen  $q$  wurde schon im Abschnitt 4.3.2 beschrieben. Zur Identifikation der Parameter  $\xi$  und  $\tau_q$  bei der Anpassung des Festversuchs V6 ist Folgendes zu bemerken: Der Wert von  $q$  läuft zwischen 0 und 1. Der Parameter  $\xi$  beeinflusst den Maximalwert von  $q$ : je größer  $\xi$  wird, um so schneller nähert sich  $q(t)$  dem stationären Grenzwert  $q_{stat}$ . Auf der Spannungsdehnungskurve ist kein Effekt zu beobachten, da  $\xi$  nur während der Belastungsphase ( $|\mathbf{D}| \neq 0$ ) Einfluß haben kann und der Kehrwert  $\tau$  bei der Funktion  $\beta_\eta(|\mathbf{D}|, q)$  zu diesem Zeitpunkt vernachlässigbar ist. Während der Relaxationsphase beeinflusst der Parameter  $\tau_q$  die Geschwindigkeit der Verminderung von  $q$ . Im Gegensatz zu  $\xi$  ist der Einfluß des Parameters  $\tau_q$  direkt in Abb. 4.14 sichtbar: je größer  $\tau_q$  ist, um so langsamer relaxiert die Kurve  $q(t)$ .

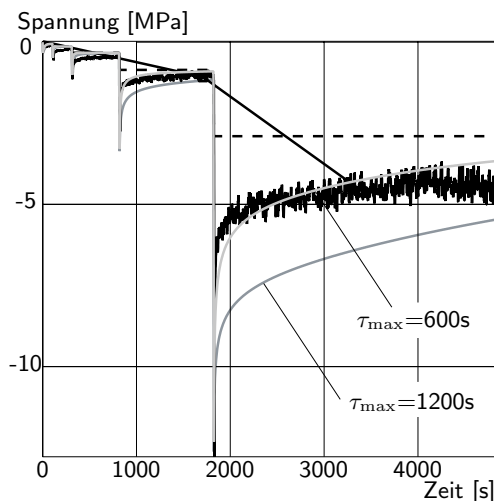
$\chi$  Wichtungsfaktor der Geschwindigkeit |D|

Alle Festversuche, also auch V6, wurden mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit gefahren, d.h.  $\chi|D|$  behält ungefähr denselben konstanten Wert während jeder Belastungsphase und ist gleich Null in allen Relaxationsphasen. Da  $\chi$  im Nenner des Parameters  $\eta$  steht, werden die Viskositäten  $\eta$  und  $\kappa$  während der Belastungsphasen immer kleiner, je größer der Parameter  $\chi$  wird (s. Abb. 4.23).



**Abbildung 4.23:** Parametereinfluß des Geschwindigkeitswichtungsfaktor

$\tau = \tau_{\max}(1 - q) + \tau_{\min}q$  Relaxationszeit



**Abbildung 4.24:** Parametereinfluß der Relaxationszeit

Die Relaxationszeit  $\tau$  ist von dem Verhalten der Strukturvariablen  $q$  abhängig. Die Werte  $\tau_{\max}$  und  $\tau_{\min}$  sind ihre Grenzwerte,  $0 \geq \tau_{\min} \geq \tau_{\max}$ . Der Parameter  $\tau_{\min}$  kann durch  $\tau_{\min} = 1s$  ersetzt werden: Diese Parameterfeststellung erleichtert die Parameteridentifikation und hat keinen Einfluß auf die Meßdatenanpassung, da mehrere unbestimmte freie Parameter zusammen multipliziert werden. Die Relaxationszeit  $\tau$  ist direkt nur von dem Kurvenverlauf von  $q(t)$  abhängig; Das bedeutet für  $\tau$ , da während der Relaxationsphase die Strukturvariable  $q$  von ihrem maximalen Wert  $q_{stat}$  bis zum 0 abnimmt, daß  $\tau$  von dem minimalen Wert  $\tau = \tau_{\max} - q_{stat}(\tau_{\max} - \tau_{\min})$  bis zum maximalen Wert  $\tau_{\max}$  zunimmt. Nach einer Festle-

gung der Parameterwerte  $\xi$  und  $\tau_q$  stellt die obige Abbildung den Einfluß von  $\tau_{\max}$  auf den Kurvenverlauf dar: Wenn der Wert von  $\tau_{\max}$  abnimmt, ist die Relaxation der Kurve schneller und umgekehrt.

**Parameteridentifikation**

Mit Anwendung der erworbenen Kenntnisse wurden die Parameterwerte aus Tab. 4.2 für die Anpassung des Festversuchs V6 identifiziert. Abb. 4.25 und 4.26 stellen die Meßdaten des Festversuchs V6 dar und die Aussagen des Modells mit den identifizierten Parame-

terwerten für die Axialspannung (s. Abb. 4.25) bzw. die Querspannung (s. Abb. 4.26) über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit.

$f_{eq} = 0[-]$	$f_{ov} = 0[-]$	$k_0 = 4 \times 10^{-4}[s^{-1}]$
$\nu_{eq} = 0.2512[-]$	$\nu_{ov} = 0.25[-]$	$k_1 = 23[s^{-1}]$
$\mu_{eq} = 0.07739[MPa]$	$\mu_{ov} = 8.5[MPa]$	$\xi = 17.5[-]$
$\alpha = 1.85[-]$	$\chi = 28.75[-]$	$\tau_{min} = 1[s]$
$\eta_0 = 5.5[MPa.s]$	$\tau_q = 571.4[s]$	$\tau_{max} = 600[s]$

Tabelle 4.2: Identifizierte Materialparameter für den Festversuch V6

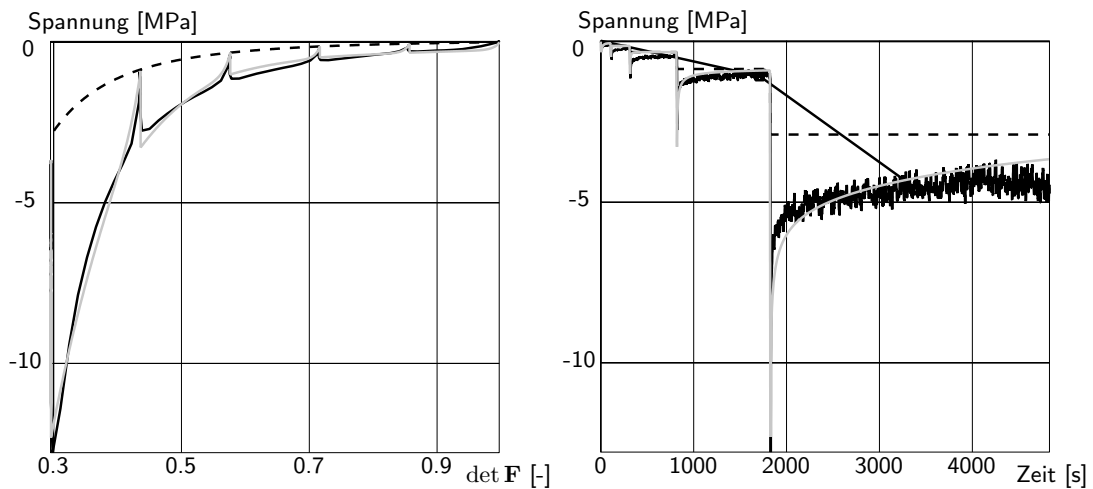


Abbildung 4.25: Festversuch V6, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

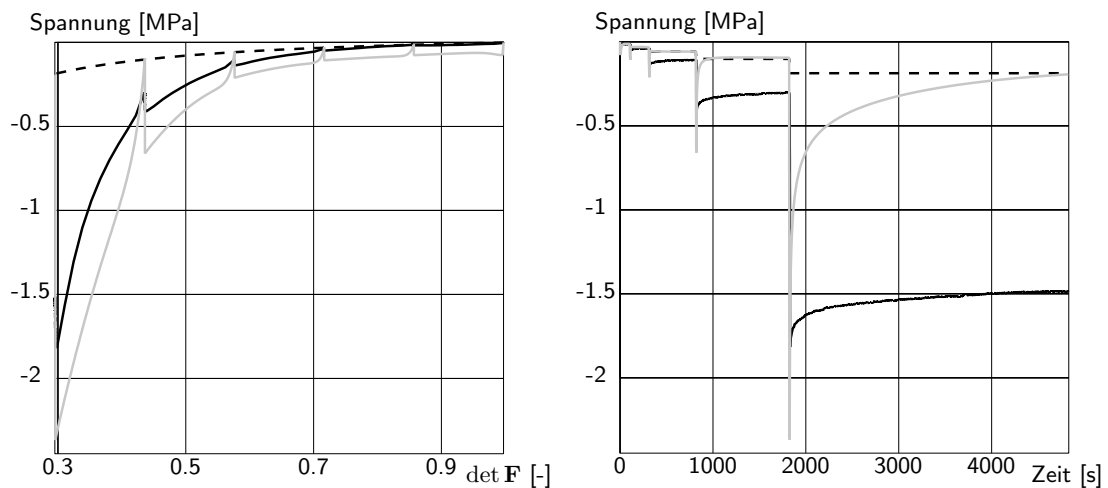


Abbildung 4.26: Festversuch V6, Querspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Die Anpassung der Axialspannung liefert bessere Ergebnisse als die der Querspannung. Unphysikalische Effekte konnten vermieden werden. Eine verbesserte Anpassung ist vielleicht möglich durch Anwendung eines Optimierungsverfahrens, wird aber in dieser Arbeit nicht weiter diskutiert.

## 4.4 Physikalisch temperaturabhängiges 3D-Modell bei isothermen Prozessen

In diesem Abschnitt wird das bisher vorgeschlagene 3D-Modell (s. Seite 80) erweitert, um bei unterschiedlichen Temperaturen das Materialverhalten zu beschreiben. In diesem Modell wird angenommen<sup>18</sup>, daß die Verteilung der Temperatur räumlich und zeitlich konstant ist, wobei die Temperaturwerte von Prozeß zu Prozeß verschieden sein können. Mit dem auf diese Weise als temperaturabhängig interpretierten 3D-Modell werden die Meßdaten des Warmversuchs für die Matte INPE 570 angepaßt, um die hier entwickelte Theorie mit Beispielen zu illustrieren.

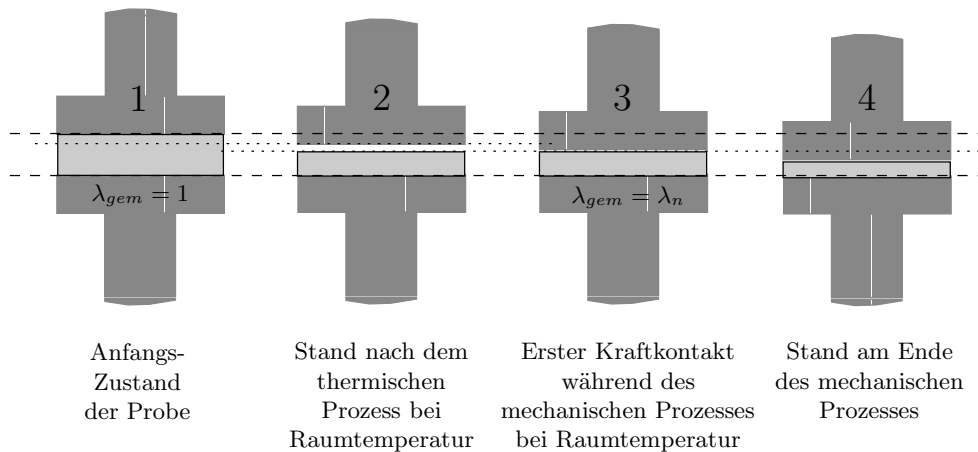
### Neu berechnete Streckung $\lambda$

Die Matten erreichen einen besonderen Zustand nach der ersten Erwärmungsphase (s. Abb. 2.41, thermischer Prozeß), die zumindest ca. eine Stunde über einen bestimmten materialabhängigen Temperatur-Grenzwert liegen muß (s. Seite 3 und Seite 32). In diesem Zeitraum ändert das Material seine Zusammensetzung, da der in der Matte beinhaltete Binder vollständig verbrannt wird und das Wasser verdampft. Der Temperaturgrenzwert für die komplette Wasserverdampfung und Binderverbrennung sowie die Dauer der "Änderungs- Erwärmungsphase" sind materialabhängig; für die Matte INPE 570, die später für die Parameteranpassung benötigt wird, fängt die Veränderung des Materials ab ca. 350 Grad an, und ist maximal bei ca 700 Grad. Die Verlustmenge von Klebstoff und Wasser ist von der Materialzusammensetzung abhängig und passiert nur einmal im Leben einer Matte während des ersten genügend heißen Warmzyklus: Diese Änderung ist irreversibel. Deswegen beschränkt sich diese Arbeit nur auf die Untersuchung des neuen Materialzustands nach der ersten genügend langen Warmzeit. In Bezug auf das Material bedeutet es neue bzw. geänderte Materialeigenschaften wie z.B. eine neue Dichte oder neue Viskosität. Deswegen wurde bei den dargestellten Warmversuchen (s. Seite 32) ein Verfahren mit drei Warmzyklen durchgeführt. Jeder besteht aus einer Erwärmung bis auf 750 Grad, einer Abkühlung auf 150 Grad und einer Wartezeit von 300 s. Insgesamt wird das Material über 350 Grad ca. eine Stunde lang erwärmt. Die doppelte Wiederholung dieses Zyklus stellt sicher, daß das Material seinen neuen Zustand erreicht hat, da normalerweise nur ein einziger Warmzyklus gereicht hätte. Nachdem der Warmzyklus dreimal wiederholt wurde (Ende des Vorprozesses), zeigen die Meßkurven daß das Material danach ein reversibles Verhalten bei Temperaturänderungen zeigt.

---

<sup>18</sup>Bei dem Warmversuch wurde immer eine einzige (dünne) Probe zwischen zwei Platten erwärmt (s. Abb. 2.42), d.h. die Verteilung der Temperatur kann als homogen in alle Probenrichtungen angesehen werden.

Bei dem Warmversuch, der auf die Matte INPE 570 angewendet wurde, ist deutlich zu sehen, daß die Dicke der Probe jedesmal nach dem thermischen Prozeß kleiner geworden ist (s. Materialeigenschaften Seite 4). Visuell bleiben die Längen in Längs- und Quer- richtung erhalten. Abb. 4.27 skizziert das entsprechenden Probenverhalten während des gesamten Warm- Versuchsverfahrens (s. Abb. 2.41). Die Skizze des Stempels 2 gilt nur für den WVersuch RT, da die Probendicke jedes anderen Warmversuchs wegen ihrer Temperaturexpansion schon im Kontakt mit dem oberen Stempel ist.



**Abbildung 4.27:** Probenverhalten während des gesamten Warmversuchs

Da das Material nach den drei Warmzyklen nie wieder seinen Initialzustand erreichen wird (s. Abb. 4.27, ab Stempel 2), wird das nach dem thermischen Prozeß modifizierte Material als ein neues Material angenommen. Dafür wird ein neuer Null-Zustand bzw. Anfangszustand bei dem ersten neuen Kontakt zwischen der Mattenprobe und dem Stempel bei Raumtemperatur definiert (s. Abb. 4.27, Stempel 4). Die abgelesene Streckung  $\lambda_n$ , die der Null-Spannung entspricht, wird als Zustand bei Raumtemperatur ohne Deformation und ohne Temperaturänderung festgelegt, d.h. dafür soll für den Null-Spannungszustand  $\lambda^* = 1$  und  $\theta = \theta_0$  bei Raumtemperatur gelten.

Um den neuen Null-Spannungszustand mit Hilfe der Meßdaten zu definieren, wird zuerst, gerade bevor die Spannung ungleich Null wird, die Deformation  $\lambda$  von der Darstellung des Warmversuchs "WVersuch RT" (s. z.B. Abb. 2.44) abgelesen und als  $\lambda_n$  festgelegt. Für die Matte INPE 570 gilt<sup>19</sup>  $\lambda_n = 0.7725$ . Damit werden die entsprechenden Meßdaten für die zukünftige Anpassung in allen Warmversuchen - "WVersuch RT", "WVersuch 100",

<sup>19</sup>Die Ungenauigkeit dieses gemessenen Meßwerts sollte ziemlich gering sein, da der Vorprozeß für einen "WVersuch RT" Matte INPE 570 zweimal wiederholt wurde und die Messungen jeweils denselben Wert lieferten.

”WVersuch 350” und ”WVersuch 750” - neu definiert<sup>20</sup>

$$\lambda^* = \frac{\lambda_{gem}}{\lambda_n}, \quad (4.98)$$

d.h. jedes gemessene  $\lambda_{gem}$  wird mit dem Kehrwert von  $\lambda_n$  multipliziert und die Resultierenden  $\lambda^*$  als gültige Streckung für die Anpassung der Meßdaten gesetzt. Abb. 4.28 stellt die Spannungsdehnungskurven mit dem transformierten  $\lambda^*$  aus Gl. (4.98) für die vier mit der Matte INPE 570 gefahrenen Warmversuche (”WVersuch RT”, ”WVersuch 100”, ”WVersuch 350” und ”WVersuch 750”) dar.

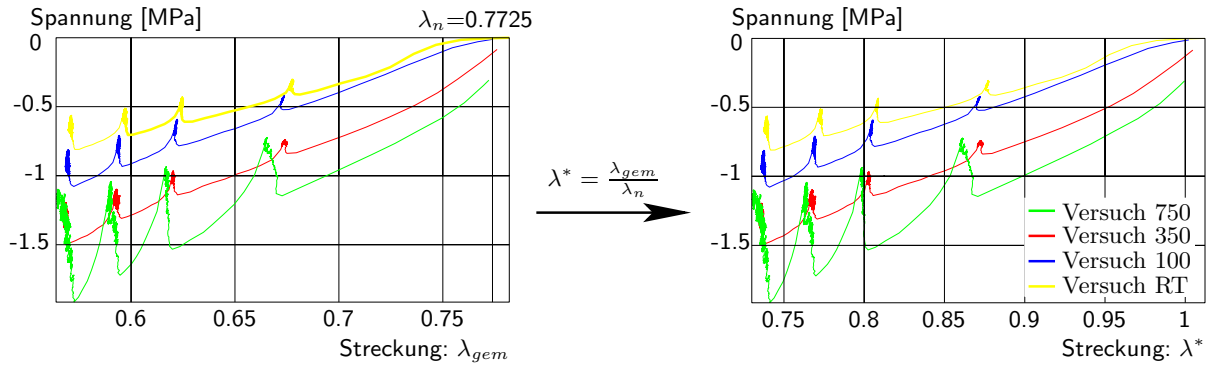


Abbildung 4.28: Spannungsdehnungskurve der Matte INPE 570 mit  $\lambda^* = \frac{\lambda_{gem}}{\lambda_n}$

#### 4.4.1 Allgemeine Entwicklung

In diesem Abschnitt wird das bisher entwickelte 3D-Modell für isotherme Prozesse erweitert. Bei dieser Modellerweiterung wird auch das Prinzip der Irreversibilität für finite Deformationen beachtet. Anhand einer Anpassung an die Meßdaten des Warmversuchs wird zum Schluß des Abschnitts die Parameteridentifikation vorgestellt.

Da das temperaturunabhängige 3D-Modell auf einer elastisch-inelastischen Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  basiert, wird eine Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in einen thermischen und einen mechanischen Anteil (s. Seite 47) in das bisher entwickelte 3D-Modell eingeführt, um die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter in dem nichtlinearen 3D-Modell zu berücksichtigen. Anschließend wird der mechanische Anteil, so weit wie möglich, in Anlehnung an das temperaturunabhängige 3D-Modell entwickelt.

Da die Clausius-Duhem-Ungleichung die thermodynamische Konsistenz eines Stoffmodells sichert, müssen die Bedingungen der Ungleichung (3.66) während des kompletten Prozessverlaufs von dem zukünftigen Modell erfüllt werden. Im Rahmen des Warmversuchs wird angenommen, daß alle Versuche bei unterschiedlichen konstanten Temperaturen mit isothermen Prozessen gefahren wurden. Unter dieser Annahme gilt dann Gl. (3.67) als Dissipationsungleichung.

<sup>20</sup>Mit einer solchen Änderung gilt immer  $\lambda^* > 0$  und  $\lambda^* = 1$  für  $\lambda_{gem} = \lambda_n$  (den spannungsfreien Zustand bei Raumtemperatur).

## Mechanische und thermische Spannungsleistung

Die in der Clausius-Duhem-Ungleichung verwendete Spannungsleistung  $\mathbf{w}_s = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$  kann mit Anwendung der von Lion [37] vorgeschlagenen Definition

$$\tilde{\mathbf{T}}_M = (\det \mathbf{F}_M) \mathbf{F}_M^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_M^{-T} \quad (4.99)$$

in einen thermischen und einen mechanischen Anteil zerlegt werden.  $\tilde{\mathbf{T}}_M$  ist der mechanische Anteil des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  und  $\mathbf{T}$  der gesamte Cauchy'sche Spannungstensor. Für isotherme Prozesse ist der thermische Anteil der Spannungsleistung gleich null, d.h. in dieser Arbeit ist nur der mechanische Anteil der Spannungsleistung gültig

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} = (\det \mathbf{F}_\theta) \tilde{\mathbf{T}}_M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M, \quad (4.100)$$

wobei  $\mathbf{E}_M = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_M - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_M^T \mathbf{F}_M - \mathbf{1})$  der mechanische Greensche Verzerrungstensor ist.

## Spannungstensoren

Ausgehend von (4.100) läßt sich der gesamte Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  durch den mechanischen Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}_M$  in der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.67) ersetzen:

$$-\rho_0 \dot{\Psi} + (\det \mathbf{F}_\theta) \tilde{\mathbf{T}}_M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M \geq 0. \quad (4.101)$$

Die Entwicklung des temperaturunabhängigen 3D-Modells hat schon gezeigt, daß die Zerlegung des Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  in einen elastischen und einen inelastischen Anteil erfolgreich ist. Da bei der Clausius-Duhem-Ungleichung (4.101) nur der mechanische Anteil  $\tilde{\mathbf{T}}_M$  des Spannungstensors eine Rolle spielt, ist es sinnvoll, um die Struktur des temperaturunabhängigen 3D-Modells nachzubilden, den mechanischen Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}_M$  in einen elastischen Anteil  $\tilde{\mathbf{T}}_{eq}$  und einen inelastischen Anteil  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$  zu zerlegen:

$$\tilde{\mathbf{T}}_M = \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M. \quad (4.102)$$

Die Cauchy'sche Spannung läßt sich entsprechend in einen elastischen Anteil  $\mathbf{T}_{eq}$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{T}_{ov}$  zerlegen,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \mathbf{T}_{ov}. \quad (4.103)$$

Mit der Annahme  $\tilde{\mathbf{T}}_M = (\det \mathbf{F}_M) \mathbf{F}_M^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_M^{-T}$  lassen sich  $\tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M$  und  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M$  folgendermaßen beschreiben,

$$\tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M = (\det \mathbf{F}_M) \mathbf{F}_M^{-1} \mathbf{T}_{eq} \mathbf{F}_M^{-T}, \quad (4.104)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M = (\det \mathbf{F}_M) \mathbf{F}_M^{-1} \mathbf{T}_{ov} \mathbf{F}_M^{-T}. \quad (4.105)$$

## Freie Energie

Parallel zu dem temperaturunabhängigen 3D-Modell unterstützt die Spannungszerlegung (4.102), daß die freie Energie aus zwei Anteilen besteht. Da  $\tilde{\mathbf{T}}_M$  der mechanische Spannungstensor ist, ist es sinnvoll, daß der Anteil der freien Energie  $\Psi_{eq}$  von  $\mathbf{C}_M = \mathbf{F}_M^T \mathbf{F}_M$  und der Anteil der freien Energie  $\Psi_{ov}$  von  $\hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e$  abhängt,

$$\Psi = \Psi_{eq}(\mathbf{C}_M, \theta) + \Psi_{ov}(\hat{\mathbf{C}}_e, \theta). \quad (4.106)$$

$\Psi_{eq}(\mathbf{C}_M, \theta)$  und  $\Psi_{ov}(\hat{\mathbf{C}}_e, \theta)$  sollen auch von der Temperatur  $\theta$  abhängig sein, da das Modell mehrere Meßkurven unterschiedlicher Temperatur bei isothermen Prozesse anpassen soll. Für isotherme Prozesse lautet die materielle Zeitableitung der Freien Energie (4.106)

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} \cdot \dot{\mathbf{C}}_M + \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e. \quad (4.107)$$

## Potentiale - Auswertung der Dissipationsungleichung

Die Dissipationsungleichung für isotherme Prozesse (4.101), die einige Beschränkungen für ein thermodynamisch konsistentes Modell gibt, läßt sich durch Ersetzen der Dichte mit  $\rho_0 = \rho_{0\theta} \det \mathbf{F}_\theta$  wie folgt umschreiben:

$$-\rho_{0\theta} \dot{\Psi} + \tilde{\mathbf{T}}_M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M \geq 0. \quad (4.108)$$

Mit Anwendung der Spannungszerlegung (4.102) und der materiellen Zeitableitung der Freien Energie (4.107) lautet die Dissipationsungleichung (4.108) für isotherme Prozesse:

$$\left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M - \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} \right) \cdot \dot{\mathbf{C}}_M + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M - \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e \geq 0. \quad (4.109)$$

Da der Term  $\left( \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M \right)$  in (4.109) nur von mechanischen Anteilen abhängig ist, gilt der Theorieansatz des temperaturunabhängigen 3D-Modells (4.43) hier auch, d.h.

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \cdot \dot{\mathbf{E}}_M = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e + \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \cdot \left( \hat{\mathbf{L}}_v^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_v + \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta \right). \quad (4.110)$$

Mit Anwendung dieses Ansatzes (4.110) lautet die Dissipationsungleichung (4.109) für isotherme Prozesse:

$$\left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M - \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} \right) \cdot \dot{\mathbf{C}}_M + \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M - \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e + \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_v^\Delta \geq 0. \quad (4.111)$$

Aus der Nullsetzung der Klammern bei  $\dot{\mathbf{C}}_M$  und  $\dot{\hat{\mathbf{C}}}_e$  in dieser Ungleichung folgen die Potentialbeziehungen entsprechend zu der Gleichgewichtsspannung (4.50) und der Über-



spannung (4.51) sowie der Restungleichung (4.52):

$$\bullet \quad \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M(\mathbf{C}_M, \theta) = 2 \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M}, \quad (4.112)$$

$$\bullet \quad \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M(\hat{\mathbf{C}}_e, \theta) = 2 \rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e}, \quad (4.113)$$

$$\bullet \quad \left( \hat{\mathbf{C}}_e \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \right) \cdot \hat{\mathbf{T}}_v \stackrel{\Delta}{\geq} 0. \quad (4.114)$$

Die Potentialbeziehungen (4.112) und (4.113) sowie die Erfüllung der Restungleichung (4.114) gewährleisten die thermodynamische Konsistenz des Modells für alle beliebigen isothermen Verzerrungsprozesse. Da das temperaturabhängige 3D-Modell nur für feste Temperaturen entwickelt wird, ist die Verwendung derselben Evolutionsgleichung (4.60) und denselben Freien Energien (4.61) und (4.71) des temperaturunabhängigen 3D-Modells mit temperaturabhängigen Parametern<sup>21</sup> eine einfach mögliche Weiterentwicklung

$$\bullet \quad \rho_0 \psi_{eq} = \frac{1}{2} \mu_{eq}(\theta) f_{eq} \left\{ J_{1m} - 1 - \frac{1}{\nu_{eq}} + \frac{1 - 2\nu_{eq}}{\nu_{eq}} J_{3m}^{\frac{-2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \right\} + \frac{1}{2} \mu_{eq}(1 - f_{eq}) \left\{ J_{2m} - 1 - \frac{1}{\nu_{eq}} + \frac{1 - 2\nu_{eq}}{\nu_{eq}} J_{3m}^{\frac{2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \right\} \quad (4.115)$$

$$\bullet \quad \rho_0 \psi_{ov} = \frac{1}{2} \mu_{ov}(\theta) f_{ov} \left\{ J_{1e} - 1 - \frac{1}{\nu_{ov}} + \frac{1 - 2\nu_{ov}}{\nu_{ov}} J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \right\} + \frac{1}{2} \mu_{ov}(1 - f_{ov}) \left\{ J_{2e} - 1 - \frac{1}{\nu_{ov}} + \frac{1 - 2\nu_{ov}}{\nu_{ov}} J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \right\} \quad (4.116)$$

$$\bullet \quad \dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} \mathbf{C}_M \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \mathbf{C}_v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{C}_M \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \right\} \mathbf{C}_v \quad (4.117)$$

Diese drei ausgewählten Gleichungen gewährleisten immer noch die thermodynamische Konsistenz des temperaturabhängigen 3D-Modells. In (4.115) sind  $J_{1m}$ ,  $J_{2m}$  und  $J_{3m}$  bzw.  $J_{1e}$ ,  $J_{2e}$  und  $J_{3e}$  die von Blatz & Ko verwendeten Invarianten von  $\mathbf{C}_M$  (s. Seite 72) bzw. von  $\hat{\mathbf{C}}_e$  in (4.116); die Parameter  $\mu_{eq}$  und  $\mu_{ov}$  sollen von der Temperatur  $\theta$  abhängen.  $\nu_{eq}$ ,  $f_{eq}$ ,  $\nu_{ov}$  und  $f_{ov}$  werden als Materialparameter aufgefaßt, die für verschiedene Temperaturen unterschiedliche Werte haben.

Für die Evolutionsgleichung (4.117) ist  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M$  der mechanische Anteil der Überspannung, der sich aus (4.113) und (4.116) mit Anwendung von (4.125) entwickelt läßt. Für die Parameter  $\eta$  bzw.  $\kappa$  werden ebenfalls die identischen Ansätze nur jetzt mit temperaturabhängigen Parametern ausgewählt. Die in den Gleichungen (4.76), (4.91) und (4.79) eingeführten Parameter  $k_1$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\chi$  und  $\eta_0$  werden jetzt temperaturabhängig definiert. Alle anderen werden als unabhängig von der Temperatur gewählt.

<sup>21</sup>Um das Modell nicht zu komplex zu machen, werden die temperaturabhängigen Parameter mit demselben Buchstaben wie vorher gekennzeichnet.

## Die Gleichgewichtsspannung

Nach der Potentialbeziehung (4.112) soll die Gleichgewichtsspannung die folgende Gleichung beachten

$$\tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M(\mathbf{C}_M, \theta) = 2\rho_{0\theta} \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M}, \quad (4.118)$$

wobei mit Gl. (3.24)

$$\tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M(\mathbf{C}_M, \theta) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_\theta} \left( 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} \right) \quad (4.119)$$

folgt. Die Gleichgewichtsspannung der Momentankonfiguration läßt sich mit Anwendung der Gleichungen (4.104) und (4.119) sowie mit der Definition der thermisch-mechanischen Deformationszerlegung (3.23) unter Berücksichtigung von Gl. (3.25), d.h. für den Deformationsgradienten gilt  $\mathbf{F} = \varphi^{1/3} \mathbf{F}_M$ , folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{eq} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}_M} \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M(\mathbf{C}_M, \theta) \mathbf{F}_M^T \\ &= \frac{\varphi^{-2/3}}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \left( 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} \right) \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Dabei ist der Term  $2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M}$  vergleichbar mit dem Inhalt von (4.58) für das temperaturunabhängige 3D-Modell. Da dieselbe Freie Energie für das temperaturunabhängige und das temperaturabhängige Modell verwendet wird, gilt nach Ersetzung von  $\mathbf{C}$  durch  $\mathbf{C}_M$  in (4.69)

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{C}_M} &= \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \mathbf{1} - J_{3m}^{\frac{-2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}_M^{-1} \right\} \\ &\quad + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \frac{1}{I_{3m}} (\mathbf{I}_{1m} \mathbf{1} - \mathbf{C}_M - \mathbf{I}_{2m} \mathbf{C}_M^{-1}) + J_{3m}^{\frac{2\nu_{eq}}{(1-2\nu_{eq})}} \mathbf{C}_M^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

wobei  $J_{1m}$ ,  $J_{2m}$  und  $J_{3m}$  aus einer Kombination<sup>22</sup> der Invarianten<sup>23</sup>  $\mathbf{I}_{1m}$ ,  $\mathbf{I}_{2m}$  und  $\mathbf{I}_{3m}$  von  $\mathbf{C}_M$  bestehen. Wie schon vorher erwähnt, läßt sich hier die Temperaturabhängigkeit durch den Materialparameter  $\mu_{eq}(\theta)$  erkennen.

Mit Anwendung des Ansatzes (4.121) in (4.120) zusammen mit der Definitionen<sup>24</sup> von  $\mathbf{C}_M$  und  $\mathbf{C}_M^{-1}$  lautet die gesamte Cauchysche Spannung:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{eq} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} \left\{ \mu_{eq} f_{eq} \left( \varphi^{\frac{-2}{3}} \mathbf{B} - J_{3m}^{\frac{-2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \mathbf{1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left( \frac{1}{I_{3m}} (\varphi^{\frac{-2}{3}} \mathbf{I}_{1m} \mathbf{B} - \varphi^{\frac{-4}{3}} \mathbf{B}^2 - \mathbf{I}_{2m} \mathbf{1}) + J_{3m}^{\frac{2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \mathbf{1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.122)$$

<sup>22</sup> $J_1 = \mathbf{I}_1$ ,  $J_2 = \mathbf{I}_2/\mathbf{I}_3$ ,  $J_3 = J = \sqrt{\mathbf{I}_3}$ .

<sup>23</sup> $\mathbf{I}_{1m} = \text{tr} \mathbf{C}_M$ ,  $\mathbf{I}_{2m} = \frac{1}{2}[(\text{Sp} \{ \mathbf{C}_M \})^2 - \text{Sp} \{ \mathbf{C}_M^2 \}]$  und  $\mathbf{I}_{3m} = \det \mathbf{C}_M$ .

<sup>24</sup>Nach Gl. (3.23) und Gl. (3.25) lauten  $\mathbf{C}_M = \varphi^{-2/3} \mathbf{C}$  und  $\mathbf{C}_M^{-1} = \varphi^{2/3} \mathbf{C}^{-1}$ .

Für die Parameteridentifikation von  $\mu_{eq}(\theta)$ ,  $\nu_{eq}$  und  $f_{eq}$  wird die Übersetzung dieser Gleichung in den eindimensionalen Fall verwendet. Nach dem thermischen Prozeß des Warmversuches wird angenommen, daß die Probe nur in Axialrichtung komprimiert wird, bzw. keine Deformation in der beiden anderen Richtungen statt findet. Für die Stauchung in Axialrichtung  $\lambda$  ergibt sich daher nur  $\sigma_{eq}$ , die der Gleichgewichtsanteil der Axialspannung in der Momentankonfiguration ist:

$$\sigma_{eq} = \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \varphi^{-2/3} \lambda - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\varphi} \right)^{\frac{-2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \right\} + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\varphi} \right)^{\frac{2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} - \frac{\varphi^{2/3}}{\lambda^3} \right\}. \quad (4.123)$$

## Die Überspannung

Gemäß der Potentialbeziehung (4.113) mit der Umrechnung der Dichte auf die Dichte der Referenzkonfiguration  $\rho_0$  gilt

$$\hat{\mathbf{S}}_{ov}^M(\hat{\mathbf{C}}_e, \theta) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_\theta} 2 \rho_0 \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e}. \quad (4.124)$$

Wie für das nichtlinear temperaturunabhängige 3D-Modell gilt (s. Abb. 4.10) hier auch für den mechanischen Anteil der Überspannung:

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M = \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \mathbf{F}_v^{-T}. \quad (4.125)$$

Nach Einsetzen von (4.124) in (4.125) und weiter in (4.105) lautet die Cauchysche Überspannung mit Anwendung der Definition der thermisch-mechanischen Deformationszerlegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ov} &= \frac{1}{\det \mathbf{F}_M} \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \mathbf{F}_M^T \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{F}_M} \mathbf{F}_M \mathbf{F}_v^{-1} \left( \frac{1}{\det \mathbf{F}_\theta} 2 \rho_0 \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \right) \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{F}_M^T \\ &= \frac{\varphi^{-2/3}}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{F}_v^{-1} \left( 2 \rho_0 \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \right) \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Wie bei der Gleichgewichtspannung ist der Term  $2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e}$  mit dem entsprechenden Anteil des temperaturunabhängigen 3D-Modells (4.72) vergleichbar, d.h.

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \frac{\partial \Psi_{ov}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} &= \mu_{ov} f_{ov} \left\{ \mathbf{1} - J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \right\} \\ &\quad + \mu_{ov} (1 - f_{ov}) \left\{ \frac{1}{I_{3e}} (I_{1e} \mathbf{1} - \hat{\mathbf{C}}_e - I_{2e} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1}) + J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{(1-2\nu_{ov})}} \hat{\mathbf{C}}_e^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (4.127)$$

wobei  $J_{1e}$ ,  $J_{2e}$  und  $J_{3e}$  aus einer Kombination der Invarianten  $I_{1e}$ ,  $I_{2e}$  und  $I_{3e}$  des elastischen Rechten Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}_e = \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e$  bestehen.

Für die zukünftige Parameteridentifikation von  $\mu_{ov}(\theta)$ ,  $\nu_{ov}$  und  $f_{ov}$  wird die allgemeine Form der Cauchyschen Spannung verwendet, d.h. für die Überspannung lautet der entsprechende Anteil nach Einsetzen von (4.127) in (4.126):

$$\mathbf{T}_{ov} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \left\{ \mu_{ov} f_{ov} \left( \hat{\mathbf{B}}_e - \mathbf{J}_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \mathbf{1} \right) + \mu_{ov} (1 - f_{ov}) \left( \frac{1}{\mathbf{I}_{3e}} (\mathbf{I}_{1e} \hat{\mathbf{B}}_e - \hat{\mathbf{B}}_e^2 - \mathbf{I}_{2e} \mathbf{1}) + \mathbf{J}_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \mathbf{1} \right) \right\}. \quad (4.128)$$

### Parametergrenzeigenschaften

Das temperaturabhängige 3D-Modell verwendet grundsätzlich dieselben Gleichungen bzw. Gleichungsformen wie das temperaturunabhängige 3D-Modell. Das heißt, die für das temperaturunabhängige 3D-Modell festgestellten Parametergrenzeigenschaften sind auch für die Parameter des temperaturabhängigen 3D-Modells gültig. Tab. 4.3 stellt alle Parametergrenzeigenschaften für das temperaturabhängige 3D-Modell dar.

Materialparameter der	Parametereigenschaften	
	temperaturunabhängig	temperaturabhängig
Temperaturabhängigkeit von $\mathbf{F}_\theta$		$\forall \theta \quad \varphi(\theta) > 0.$ $\varphi(0) = 1$
Gleichgewichtsspannung	$0 \leq f_{eq} \leq 1 \quad 0 \leq \nu_{eq} < \frac{1}{2}$	$\mu_{eq}(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta.$
Überspannung	$0 \leq f_{ov} \leq 1 \quad 0 \leq \nu_{ov} < \frac{1}{2}$	$\mu_{ov}(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta.$
Evolutionsgleichung	$\alpha > 0$	
Viskositäten	$k_0 \geq 0$	$k_1(\theta) \geq 0$ $\eta_0(\theta) > 0 \quad \chi(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta.$
Relaxationszeit	$\tau_{\min} > 0$	$\tau_{\max}(\theta) \geq \tau_{\min} > 0 \quad \forall \theta.$
Strukturvariablen	$\xi \quad \tau_q \geq 0$	

**Tabelle 4.3:** Temperaturabhängige Materialparameter des 3D-Modells für isotherme Prozesse

## Zusammenstellung des vollständigen temperaturabhängigen 3D-Modells für isotherme Prozesse

Zur besseren Übersicht werden nun alle Materialgleichungen zusammengestellt.:

- Neue berechnete Streckung  $\lambda$  s. Gl. (4.98)  

$$\lambda = \frac{\lambda_{gem}}{\lambda_n} \text{ mit z.B. } \lambda_n = 0.7725 \text{ für die Matte INPE 570.}$$
- Zerlegung der Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  s. Gl. (3.23)  

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta, \quad \text{mit } \mathbf{F}_\theta = \varphi^{\frac{1}{3}}(\theta - \theta_0)\mathbf{1}.$$

und mit  $\mathbf{F}_M = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v, \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v \mathbf{F}_\theta.$
- Gesamtspannung s. Gl. (4.102) bzw. (4.103)  

$$\tilde{\mathbf{T}}_M = \tilde{\mathbf{T}}_{eq}^M + \tilde{\mathbf{T}}_{ov}^M \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \mathbf{T}_{ov}.$$
- Gleichgewichtsspannung s. Gl. (4.122)  

$$\tilde{\mathbf{T}}_{eq} = \mu_{eq}(\theta) f_{eq} \left( \varphi^{\frac{-2}{3}} \mathbf{1} - J_{3m}^{\frac{-2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \mathbf{C}^{-1} \right) + \mu_{eq}(\theta) (1 - f_{eq}) \left( \frac{1}{I_{3m}} \left( \varphi^{\frac{-2}{3}} I_{1m} \mathbf{1} - \varphi^{\frac{-4}{3}} \mathbf{C} - I_{2m} \mathbf{C}^{-1} \right) + J_{3m}^{\frac{2\nu_{eq}}{1-2\nu_{eq}}} \mathbf{C}^{-1} \right).$$

$J_{3m} = \sqrt{I_{3m}}$  und  $I_{1m}, I_{2m}$  und  $I_{3m}$  sind die Invarianten von  $\mathbf{C}_M = \mathbf{F}_M^T \mathbf{F}_M.$
- Überspannung s. Gl. (4.128)  

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ov} = \mu_{ov}(\theta) f_{ov} \left( \varphi^{-2/3} \mathbf{C}_v^{-1} - J_{3e}^{\frac{-2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \mathbf{C}^{-1} \right) + \mu_{ov}(\theta) (1 - f_{ov}) \left( \frac{1}{I_{3e}} \left( I_{1e} \varphi^{-2/3} \mathbf{C}_v^{-1} - \varphi^{-4/3} \mathbf{C}_v^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}_v^{-1} - I_{2e} \mathbf{C}^{-1} \right) + J_{3e}^{\frac{2\nu_{ov}}{1-2\nu_{ov}}} \mathbf{C}^{-1} \right)$$

$J_{3e} = \sqrt{I_{3e}}$  und  $I_{1e}, I_{2e}$  und  $I_{3e}$  sind die Invarianten von  $\hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e.$
- Evolutionsgleichung s. Gl. (4.117)  

$$\dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} \mathbf{C}_M \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \mathbf{F}_v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{F}_v^{-T} \mathbf{C}_M \mathbf{F}_v^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{ov}^M \right\} \mathbf{C}_v.$$
- Viskositäten s. Gl. (4.76)  

$$\eta = \eta_0(\theta) \frac{1+k_0 \exp(k_1(\theta)|\mathbf{E}|)}{\chi(\theta)|\mathbf{D}|+\frac{1}{\tau}}, \quad \kappa = \alpha\eta.$$
- Relaxationszeit s. Gl. (4.91)  

$$\tau = \tau_{\max}(\theta)(1 - q) + q\tau_{\min}, \quad \tau_{\max}(\theta) \geq \tau_{\min}.$$
- Strukturvariable s. Gl. (4.79)  

$$\dot{q} = \xi |\mathbf{D}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q, \quad q(0) = 0.$$

Für die Parameteridentifikation anhand des Warmversuchs werden die Evolutionsgleichungen der Inneren Variablen wie für den temperaturunabhängigen Fall numerisch integriert. Die Gleichgewichtsspannung und die Überspannung sind hier als Cauchysche Spannungstensoren in der Momentankonfiguration angegeben, und für die Anpassung der Materialparameter an die experimentellen Daten basieren alle Gleichungen des Modells auf der neuen berechneten Streckung  $\lambda$ .

## 4.4.2 Parameteridentifikation auf Basis des Warmversuchs

In diesem Abschnitt werden die in Tab. 4.3 definierten Parameter des temperaturabhängigen 3D-Modells an die Meßdaten des Warmversuchs angepaßt. In diesem Abschnitt wird desweiteren von "Anpassung an die Meßdaten des Warmversuchs" geschrieben, obwohl diese Anpassung sich immer nur auf die Meßdaten des mechanischen Teilprozesses dieses Warmversuchs bezieht.

Bei dem temperaturabhängigen 3D-Modell gibt es einige temperaturabhängige Materialparameter und andere, die weiterhin als temperaturunabhängig angenommen werden sollen. Eine Methode, die Parameter dieses 3D-Modells an die Meßdaten des Warmversuchs anzupassen besteht darin, mit der Anpassung an die Meßdaten des bei Raumtemperatur gefahrenen mechanischen Prozesses (d.h. des WVersuchs RT) anzufangen. Dieser Versuch hat den Vorteil, daß der Funktionswert  $\varphi(\theta - \theta_0) = \varphi(0) = 1$  schon festgelegt ist. Hierbei wird  $\theta = \theta_0$  mit der Raumtemperatur  $\theta_0$  gleichgesetzt. Dieser Versuch beschreibt das Materialverhalten bei Raumtemperatur nach dem "thermischen Prozeß" und kann als Anfangsbedingung für die temperaturabhängigen Parameter angenommen werden. Für die temperaturunabhängigen Parameter bedeutet das dann, daß ihre Identifikation für die folgenden Parameteranpassungen des Warmversuchs 100, 350 und 750 ebenfalls gilt.

Wie bei der Parameteridentifikation des temperaturunabhängigen 3D-Modells (s. Seite 81) wird hier auch die Parameteridentifikation ohne Anwendung von Optimierungsverfahren durchgeführt, sondern nur nach Augenschein vorgenommen: Bei dem Warmversuch konnte die Genauigkeit der Meßdaten nicht überprüft werden, aber z.B. Abb. 2.44 oben links zeigt schon, daß die Wärme der Prüfmaschinenheizplatten Einfluß auf die Steuerung der Traverse hat. Außerdem wurde auch jeder Warmversuch nur mit einer einzigen Probenscheibe gefahren, d.h. die Meßdaten sind keine statistischen Meßwerte, sondern Meßdaten, die von der Genauigkeit der Probe (besonders der Probendicke) und von ihrer Homogenität abhängen (s. Seite 3). Deswegen wird hier nur gezeigt, daß das Modell die Form der Verlaufskurven des Warmversuchs bei festen unterschiedlichen Temperaturen gut wiedergeben kann.

Die Parameteridentifikation wird folgendermaßen durchgeführt: Zuerst werden alle Parameter an die Meßdaten des WVersuchs RT mit derselben Durchführung wie bei dem temperaturunabhängigen 3D-Modell für die Anpassung des Festversuchs V6 (s. ab Seite 81) angepaßt. Das bedeutet, nachdem die Parameterwerte des Gleichgewichtsanteils ( $\mu_{eq}$ ,  $\nu_{eq}$  und  $f_{eq}$ ) für  $\theta = \theta_0$  mit  $\varphi = 1$  festgelegt sind, werden alle anderen Parameter ( $\mu_{ov}$ ,  $\nu_{ov}$ ,  $f_{ov}$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\tau_q$ ,  $\tau_{max}$  und  $\tau_{min}$ ) mit der möglichst einfachen Form des temperaturabhängigen 3D-Modells untersucht, um danach die Meßdaten der Axialspannung erfolgreich zu berücksichtigen.

Nachdem alle Parameter für  $\theta = \theta_0$  festgelegt sind, werden für die drei anderen Fälle  $\theta = 100^\circ\text{C}$ ,  $350^\circ\text{C}$  und  $750^\circ\text{C}$  die temperaturabhängigen Parameter des Gleichgewichts-

anteils  $\mu_{eq}(\theta)$  sowie  $\varphi(\theta)$  an die entsprechenden Meßwerte mit den schon festgelegten Werte von  $\nu_{eq}$  und  $f_{eq}$  angepaßt. Danach werden alle anderen temperaturabhängigen Parameter ( $\mu_{ov}(\theta)$ ,  $k_1(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$ ,  $\eta(\theta)$  und  $\tau_{max}(\theta)$ ) in Kombination mit den schon bestimmenden temperaturunabhängigen Parametern ( $\nu_{ov}$ ,  $f_{ov}$ ,  $k_0$ ,  $\zeta$ ,  $\tau_q$  und  $\tau_{min}$ ) identifiziert, um die Meßdaten der Axialspannung bei den verschiedenen Temperaturen zu berücksichtigen.

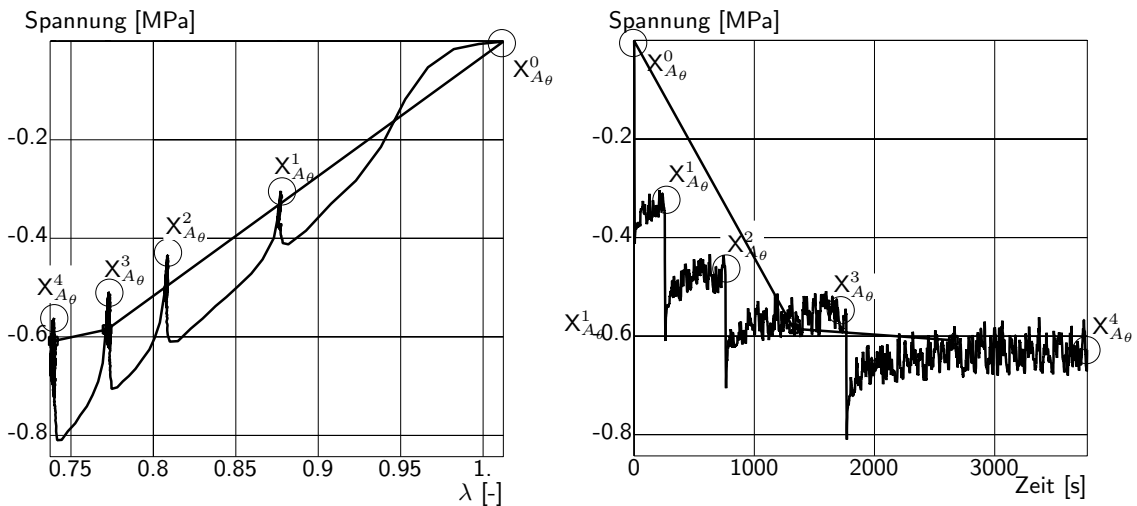
Bei den folgenden Abbildungen (Abb. 4.30 bis Abb. 4.33) werden die Meßdaten der Matte INPE 570 bzw. die entsprechende berechnete Spannung in Axialrichtung über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und über der Zeit dargestellt. Als Legende gilt folgendes: Die schwarze Kurve repräsentiert jeweils die Meßdaten der Matte INPE 570, die gestrichelte schwarze Kurve die mit dem 3D-Modell berechnete Gleichgewichtsspannung und die graue Kurve die mit dem 3D-Modell berechnete Gesamtspannung.

### Identifikation der Gleichgewichtsspannungsparameter ( $\mu_{eq}$ , $\nu_{eq}$ und $f_{eq}$ ) für $\theta=\theta_0$

Nach Gl. (4.123) ist die folgende Gleichung (4.129) der Gleichgewichtsanteil der Axialspannung in dem eindimensionalen Fall bei Raumtemperatur:

$$\sigma_{eq} = \mu_{eq} f_{eq} \left\{ \lambda - \lambda^{\frac{-1}{1-2\nu_{eq}}} \right\} + \mu_{eq} (1 - f_{eq}) \left\{ \lambda^{\frac{4\nu_{eq}-1}{1-2\nu_{eq}}} - \lambda^{-3} \right\}, \quad (4.129)$$

wobei für  $\theta=\theta_0$   $\varphi = 1$  gilt. Da die Gleichgewichtsspannungskurve die Enden, also die jeweils betragsmäßig minimalen Spannungswerte bei jeder Relaxationsphase verbinden soll, sollte  $\sigma_{eq}$  durch die Punkte  $X_{A\theta}^0$ ,  $X_{A\theta}^1$ ,  $X_{A\theta}^2$ ,  $X_{A\theta}^3$  und  $X_{A\theta}^4$  laufen (s. Abb. 4.29).



**Abbildung 4.29:** WVersuch RT für die Matte INPE 570, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Dazu werden anhand der Gl. (4.129) die besten Parameterwerte für  $\mu_{eq}$  und  $\nu_{eq}$  mit  $f_{eq}=0$  und  $\varphi=1$  bei  $\theta=\theta_0$  mit dem Programm Gnuplot gesucht. Die Festlegung von  $f_{eq}=0$

kommt aus folgenden Gründen: Nach Blatz & Ko [8] werden Meßkurven von Polymeren am besten für die Werte  $f = 0$  und  $\nu = 0.25$  angepaßt (s. Seite 72); die Anpassung des Festversuchs V6 hat bereits diese Annahme bestätigt. Die Axialspannungskurven des Warmversuchs und die des Festversuchs haben ähnlichen Verlauf; deswegen wurde zuerst die Identifikation von  $\mu_{eq}$  mit  $f_{eq} = 0$  und  $\nu_{eq} = 0.25$  für  $\varphi = 1$  durchgeführt. Da mit dieser Parameterfestlegung keine gute Anpassung möglich war, wurde entschieden, daß  $\nu_{eq}$  während der Parameteridentifikation auch angepaßt werden soll.

Das Programm **Gnuplot** liefert für die Anpassung des WVersuchs RT die folgenden Parameterwerte:

$$\text{für } \theta = \theta_0 \quad \varphi = 1. \quad f_{eq} = 0. \quad \nu_{eq} = 0.46 \quad \mu_{eq}(\theta_0) = 0.2383.$$

Abb. 4.30 stellt die mit den gefundenen Parametern berechnete Gleichgewichtsspannung (gestrichelte Kurve) und die Meßdaten des WVersuchs RT über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit dar. Abb. 4.30 links zeigt deutlich, daß die Anpassung im Bereich der ersten Belastungsstufe nicht besonders erfolgreich ist, da die berechnete Gleichgewichtsspannung am Anfang des mechanischen Prozesses die Meßdatenkurve durchkreuzt. Dieser Fehler läßt sich vielleicht durch die Berechnung der neuen Streckung  $\lambda = \frac{\lambda_{gem}}{\lambda_n}$  erklären, kann aber mit dem aktuellen temperaturabhängigen Modell nicht vermieden werden. Für  $\det \mathbf{F} \leq 0.95$  werden die experimentellen Daten der Gleichgewichtsspannung und Überspannung durch das Modell im wesentlichen zutreffend dargestellt.

### Identifikation der anderen Parameter für $\theta = \theta_0$

Um für die Freie Energie dieselbe Form wie in der Gleichgewichtsspannung zu verwenden, wird erneut für die Überspannung der Parameterwert  $f_{ov} = 0$  gesetzt. Die Evolutionsgleichung (4.117) ist nur numerisch lösbar. Daher können die Parameter des Modells nicht durch eine einfache Optimierung wie bei der Gleichgewichtsspannung identifiziert werden. Für das temperaturunabhängige 3D-Modell wurde der Einfluß aller Parameter auf den Kurvenverlauf untersucht (s. Seite 86 bis 89). Da hier das temperaturabhängige 3D-Modell nur auf isotherme Prozesse beschränkt ist, ist diese Parameterstudie auch für das temperaturabhängige Modell gültig. Damit wurden die Parameterwerte aus Tab. 4.4 und 4.5 für die Anpassung des WVersuchs RT für die Matte INPE 570 identifiziert.

Nach der Parameteridentifikation des WVersuchs RT sollen die Parameterwerte aus Tab. 4.4 für jede Anpassung des WVersuchs für die Matte INPE 570 gelten, da diese Parameter in dem temperaturabhängigen 3D-Modell als temperaturunabhängig angenommen werden.

$f_{eq} = 0$ [-]	$f_{ov} = 0$ [-]	$k_0 = 4 \times 10^{-4}$ [s <sup>-1</sup> ]
$\nu_{eq} = 0.46$ [-]	$\nu_{ov} = 0.2$ [-]	$\tau_{\min} = 1$ [s]
$\alpha = 1.85$ [-]	$\tau_q = 1818.2$ [s]	$\xi = 17.5$ [-]

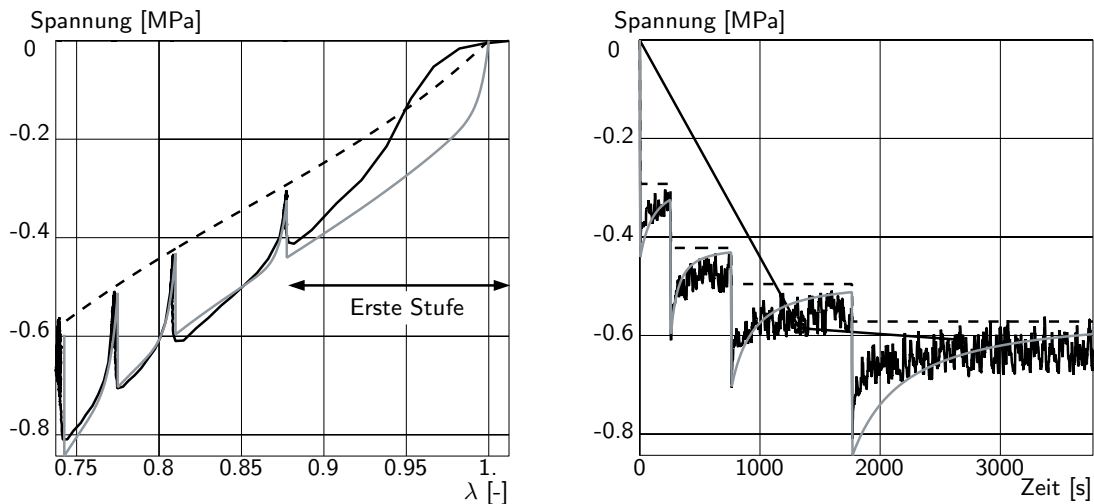
**Tabelle 4.4:** Identifizierte Parameter für alle Warmversuche



$\varphi(\theta - \theta_0) = 1$		
$\mu_{eq} = 0.2383$ [MPa]	$\eta_0 = 3.1$ [MPa.s]	$\chi = 31$ [-]
$\mu_{ov} = 10$ [MPa]	$k_1 = 33$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tau_{max} = 7000$ [s]

**Tabelle 4.5:** Identifizierte Parameter für den WVersuch bei  $\theta = \theta_0$

Abb. 4.30 stellt die Meßdaten des WVersuchs RT für die Axialrichtung und ihre Anpassung mit den identifizierten Parameterwerten in dem temperaturabhängigen 3D-Modell über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit dar.



**Abbildung 4.30:** WVersuch RT für die Matte INPE 570, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Außer der Übereinstimmung bei der sogenannten "ersten Stufe" werden die Meßdaten des WVersuchs RT mit dem temperaturabhängigen 3D-Modell gut wiedergegeben. Wie schon bei der Identifikation der Gleichgewichtsparameter erwähnt, läßt sich der bei der ersten Stufe aufgetretene Fehler durch die berechnete Streckung  $\lambda = \frac{\lambda_{gem}}{\lambda_n}$  erklären bzw. die Verschiebung des Anfangszustands der Probe.

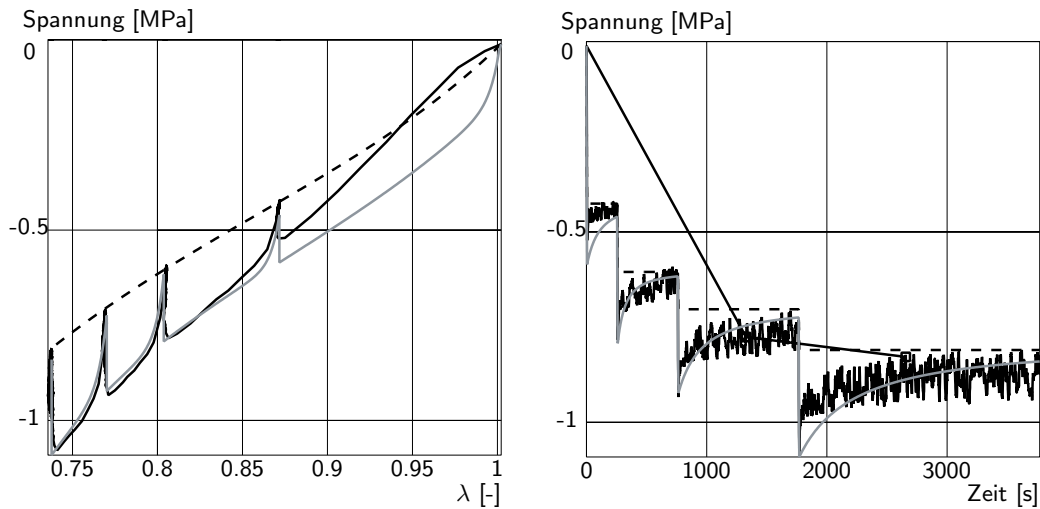
### Parameteridentifikation für $\theta = 100^\circ\text{C}$

In Kombination mit den schon festgelegten Werten für die temperaturunabhängigen Parameter werden hier die noch freien Parameter mit dem temperaturabhängigen 3D-Modell an die Meßdaten des WVersuchs 100 angepaßt. Zuerst werden die Werte für  $\varphi$  und  $\mu_{eq}$  bei  $\theta = 100^\circ\text{C}$  mit dem Programm **Gnuplot** identifiziert. Danach werden die Parameter  $\mu_{ov}$ ,  $\eta_0$ ,  $k_1$ ,  $\chi$  und  $\tau_{max}$  mit Hilfe einer Parameterstudie (analog zu Seite 86 bis 89) an die Meßdaten angepaßt. Nach dieser Methode liefert die Anpassung des WVersuchs 100 die Parameterwerte aus Tab. 4.6.

$\varphi(\theta - \theta_0) = 1.00572$		
$\mu_{eq} = 0.33035$ [MPa]	$\eta_0 = 3.4$ [MPa.s]	$\chi = 32$ [-]
$\mu_{ov} = 10$ [MPa]	$k_1 = 32$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tau_{max} = 7000$ [s]

**Tabelle 4.6:** Identifizierte Parameter für den WVersuch bei  $\theta = 100^\circ\text{C}$

Abb. 4.31 stellt die Meßdaten des WVersuchs 100 für die Axialrichtung und ihre Anpassung mit den identifizierten Parameterwerten in dem temperaturabhängigen 3D-Modell über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit dar.



**Abbildung 4.31:** WVersuch  $100^\circ\text{C}$  für die Matte INPE 570, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Außer am Beginn des Versuchs - wie für die Anpassung des WVersuchs RT - werden die Meßdaten des WVersuchs 100 mit dem temperaturabhängigen 3D-Modell gut wiedergegeben.

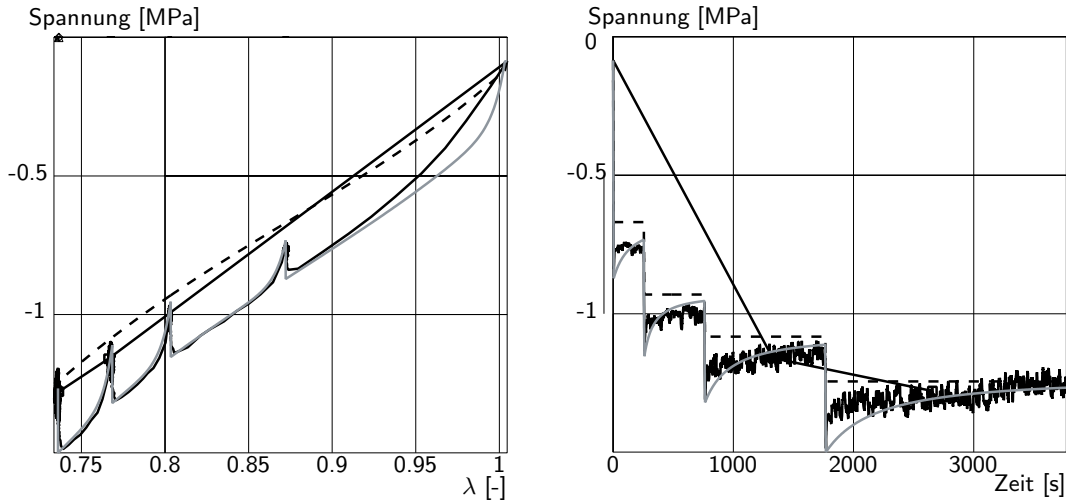
### Parameteridentifikation für $\theta = 350^\circ\text{C}$

Für die Parameteridentifikation für  $\theta = 350^\circ\text{C}$  wird derselbe Prozeß wie für  $\theta = 100^\circ\text{C}$  durchgeführt. Nach dieser Methode liefert die Anpassung des WVersuchs 350 die Parameterwerte aus Tab. 4.7.

$\varphi(\theta - \theta_0) = 1.028$		
$\mu_{eq} = 0.50161$ [MPa]	$\eta_0 = 4.5$ [MPa.s]	$\chi = 33.75$ [-]
$\mu_{ov} = 10$ [MPa]	$k_1 = 23$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tau_{max} = 7000$ [s]

**Tabelle 4.7:** Identifizierte Parameter für den WVersuch bei  $\theta = 350^\circ\text{C}$

Abb. 4.32 stellt die Meßdaten des WVersuchs 350 für die Axialrichtung und ihre Anpassung mit den identifizierten Parameterwerten in dem temperaturabhängigen 3D-Modell über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit dar.



**Abbildung 4.32:** WVersuch 350°C für die Matte INPE 570, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Hier werden die Meßdaten des WVersuchs 350 mit dem temperaturabhängigen 3D-Modell gut angepaßt. Obwohl es für den Anfang der ersten Stufe eine kleine Abweichung zwischen den Meßdaten und der Anpassung gibt, durchkreuzt die Gleichgewichtspannungskurve die Meßdaten nicht mehr im Gegensatz zu  $\theta = \theta_0$  oder  $\theta = 100^\circ\text{C}$ . Deswegen kann diese Parameteridentifikation als erfolgreich bezeichnet werden.

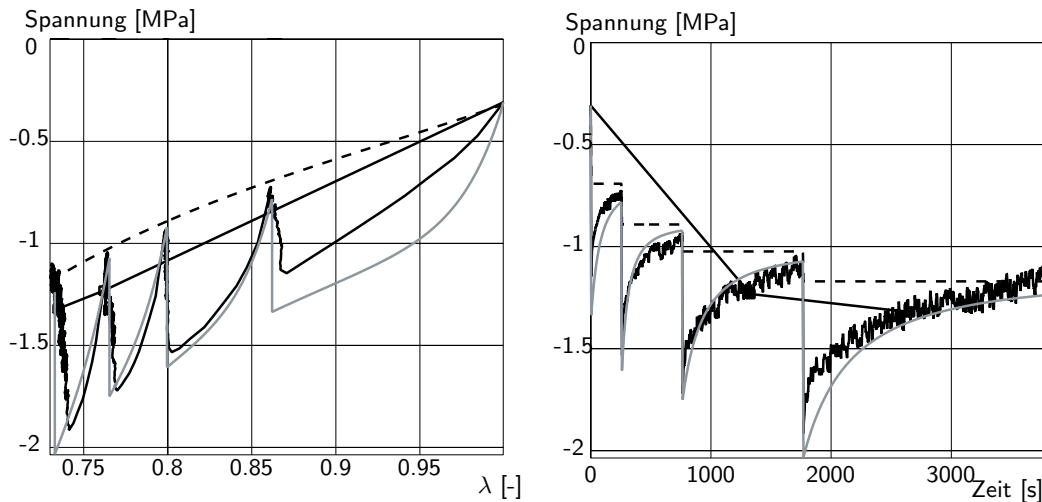
### Parameteridentifikation für $\theta = 750^\circ\text{C}$

Erneut wird dieselbe zuvor durchgeführte Prozeßführung gewählt, jedoch eine Temperatur von  $\theta = 750^\circ\text{C}$  vorgegeben. Die Parameteridentifikation liefert für den WVersuchs 750 die Parameterwerte aus Tab. 4.33.

$\varphi(\theta - \theta_0) = 1.10582$		
$\mu_{eq} = 0.46278$ [MPa]	$\eta_0 = 6.5$ [MPa.s]	$\chi = 16.75$ [-]
$\mu_{ov} = 10$ [MPa]	$k_1 = 32$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tau_{max} = 2750$ [s]

**Tabelle 4.8:** Identifizierte Parameter für den Warmversuch bei  $\theta = 750^\circ\text{C}$

Abb. 4.33 stellt die Meßdaten des WVersuchs 750 für die Axialrichtung und ihre Anpassung mit den identifizierten Parameterwerten in dem temperaturabhängigen 3D-Modell über der Determinante  $\det \mathbf{F}$  und der Zeit dar.



**Abbildung 4.33:** W-Versuch 750°C für die Matte INPE 570, Axialspannung über  $\det \mathbf{F}$  bzw. über der Zeit

Für  $\theta = 750^\circ\text{C}$  ist die Anpassung des Meßdaten mit dem temperaturabhängigen Modell weniger erfolgreich. Abb. 4.33 links zeigt, daß allgemein und besonders bei der ersten Stufe die Anpassung etwas weiter als ein den vorherrigen Anpassungen von den Meßdaten entfernt ist. Allerdings durchkreuzt die berechnete Gleichgewichtsspannungskurve die Meßdatenkurve nicht mehr. Dazu ist zu Bild 4.33 rechts anzumerken, daß die Relaxationszeiten für diesen Fall ( $\theta = 750^\circ\text{C}$ ) nie lang genug waren. Das bedeutet für  $\theta = 750^\circ\text{C}$ , daß das temperaturabhängige 3D-Modell mit den hier identifizierten Parameterwerten das Materialverhalten nur für begrenzte Relaxationszeiten darstellt.

### Zusammenfassung der Betrachtungen zum temperaturabhängigen 3D-Modell

Allgemein ist die Anpassung des W-Versuchs der Matte INPE 570 mit dem temperaturabhängigen 3D-Modell erfolgreich. Das 3D-Modell gibt den Verlauf der Meßdatenkurven gut wieder und sogar mit  $\mu_{ov}$  und  $\tau_{\max}$  als temperaturunabhängigen Parameter. Diese Anpassung hat trotzdem eine Schwäche, da für die erste Stufe die Gleichgewichtsspannungskurve die Meßdatenkurve schneidet. Diese Durchkreuzung nimmt mit der Temperaturzunahme ab und verschwindet ab  $350^\circ\text{C}$ .

## 4.5 Zusammenfassung

Nach den in Kap. 2 dargestellten Versuchen wurde für das Materialverhalten der Matte ein nichtlineares isotropes viskoelastisches Materialmodell angenommen, sowohl bei Raumtemperatur als auch bei unterschiedlichen festen Temperaturen. Basierend auf der Materialtheorie der Kontinuumsmechanik wurde in diesem Kapitel ein 3D-Materialmodell für Raumtemperatur entwickelt und dieses Modell für unterschiedliche feste Temperaturen erweitert. Als unerläßliche Bedingung bei der Modellentwicklung beachten beide Modelle die Clausius-Duhem-Ungleichung.

- **Das temperaturunabhängige Modell:** Das Modell basiert auf der Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v$ . Nach der Clausius-Duhem-Ungleichung sollen der elastische Spannungsanteil  $\mathbf{T}_{eq}$  und der inelastische Spannungsanteil  $\mathbf{T}_{ov}$  von einer Freien Energie abhängen. Dafür wurde die Freie Energie von Blatz & Ko ausgewählt. Um das Materialverhalten beschreiben zu können, mußte die Viskosität in der Evolutionsgleichung in eine Gestaltviskosität und eine Volumenviskosität aufgeteilt werden.
- **Das temperaturunabhängige Modell:** Dieses Modell ist eine Erweiterung des temperaturabhängigen 3D-Modells durch Einführung der Temperaturabhängigkeit einiger Materialparameter. Dafür wird als erste Erweiterung der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  in einen mechanischen Anteil und einen thermischen Anteil  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta$  zerlegt, bevor der mechanische Anteil  $\mathbf{F}_M$  in einen elastischen und inelastischen Anteil zerlegt wird,  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_v \mathbf{F}_\theta$ . Die weitere Modifikation besteht darin, daß einige Parameter temperaturabhängig geworden sind, d.h. im Gegenteil zu den temperaturunabhängigen Parametern können ihre Werte für jede andere Temperatur unterschiedlich sein.

Für diese beiden Modelle sollen noch ihre Vorhersagen überprüft werden. Dafür können z.B. Meßdaten mit simulierten Werten aus einer Finite-Elemente Analyse verglichen werden.

# 5 Numerik - Numerische Beispiele

Im vorangegangenen Kapitel wurde ein viskoelastisches 3D-Modell für isotropes Material zur Beschreibung des Mattenverhaltens bei Raumtemperatur hergeleitet. Mit diesem Modell erfolgte eine Erweiterung, die das Mattenverhalten bei unterschiedlich festen Temperaturen beschreibt. Ziel dieses Kapitels ist die Validierung dieses 3D-Modells. Hierzu soll gezeigt werden, daß das Materialmodell in der Lage ist, bei einer geeigneten Wahl der Materialparameter ein physikalisch plausibles Materialverhalten vorherzusagen. So werden in diesem Kapitel Testrechnungen mit Hilfe eines numerischen Verfahrens - die Finite Element Methode (FEM), mit dem kommerziellen FE-Programm ABAQUS Standard [24] - durchgeführt und mit entsprechenden Meßdaten verglichen.

## 5.1 Finite Elemente Formulierung für ABAQUS

Zunächst wird in diesem Kapitel kurz erläutert, wie das Finite Elemente Programm ABAQUS die Lösung eines Randwertproblems bestimmt. Für eine genaue Darstellung der Methodik, siehe z.B. die Arbeiten von Lämmer [29] und Jansohn [26].

### Variationsprinzipien - Schwache Form der Feldgleichungen

Die Methode der finiten Elemente basiert auf einer schwachen Form der Gleichgewichtsbedingungen (5.5), welche als Prinzip der virtuellen Verschiebungen bezeichnet wird. Ausgangspunkt bei der Formulierung der FE-Methode ist die lokale Form der Impulsbilanz (s. Gl. (3.48)) für statische Deformationen

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{f} = \vec{0}. \quad (5.1)$$

Der Rand des Körpers  $\partial V$  kann in einen Bereich  $\partial V^u$ , auf dem die Verschiebungen vorgegeben sind

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \partial V^u, \quad (5.2)$$

und in einen Bereich  $\partial V^s$ , auf dem die Spannungen

$$\mathbf{T}\vec{n} = \vec{t}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \partial V^s \quad (5.3)$$

vorgegeben sind, eingeteilt werden. Dabei beschreiben  $\vec{u}$  die Verschiebungen des Randpunktes  $\vec{x} \in \partial V^u$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\vec{n}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor und  $\vec{t}$

den Spannungsvektor des Randpunktes  $\vec{x} \in \partial V^s$ . Da auf dem gesamten Rand entweder die Verschiebungen oder die Spannungen vorgegeben sind, muß diese Randzerlegung die folgende Aussage beachten<sup>1</sup>:

$$\partial V = \partial V^u \cup \partial V^s \quad \text{und} \quad \partial V^u \cap \partial V^s = \emptyset.$$

Um das Anfangsrandwertproblem in schwache Formulierung zu überführen, wird die lokale Form der Impulsbilanz (5.1) mit einer virtuellen Verschiebung  $\delta\vec{u}(\vec{x})$  multipliziert und die resultierende Gleichung über das gesamte Volumen  $V$  integriert

$$\int_V \delta\vec{u} \cdot \text{div}\mathbf{T} \, dV - \int_V \rho \delta\vec{u} \cdot \vec{f} \, dV = 0. \quad (5.4)$$

Die Testfunktion  $\delta\vec{u}(\vec{x})$  ist stetig im Volumen  $V$  mit der Anforderung  $\delta\vec{u} = 0$  auf  $\partial V^u$ . Dazu wird die Produktregel auf den ersten Term von Gl. (5.4) sowie der Gaußsche Integralsatz angewendet. Dies führt auf

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta\vec{u} \, dV - \int_V \rho \delta\vec{u} \cdot \vec{f} \, dV - \int_{\partial V} \vec{t} \cdot \delta\vec{u} \, dA = 0. \quad (5.5)$$

Für isothermen Deformationsprozesse gilt die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung (5.5) als Ausgangsgleichung für eine Verschiebungsformulierung in dem Finite-Elemente Programm ABAQUS Standard. So wird Gl. (5.5) numerisch integriert und das resultierende nichtlineare Gleichungssystem, welches an den räumlichen Integrationspunkten von den inneren Variablen abhängt, führt auf ein gekoppeltes nichtlineares Algebro-Differentialgleichungssystem. Dessen Lösung mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens in Kombination mit dem Mehrebenen-Newton Verfahren führt auf die bekannte inkrementelle Laststeigerung mit der iterativen Lösung der auftretenden Gleichungen (s. Jansohn[26] & Lämmer[29]).

Hierzu müssen verschiedene Größen, die von den Materialgleichungen abhängen, über die Material-Schnittstelle UMAT als FORTRAN-Unterprogramm an ABAQUS übergeben werden. Dies ist zum einen die Spannungsantwort, die aus einer vorgegeben Deformation folgt, und zum anderen die sogenannte Tangentensteifigkeitsmatrix oder der Tangentenoperator.

## Bestimmung der Spannungsantwort

Beim Aufruf der Materialschnittstelle UMAT übergibt ABAQUS das Zeitinkrement  $\Delta t$ , die Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_t$  und  $\mathbf{F}_{t+1}$  sowie die Statusvariablen SDV (Solution Dependent Variables), die im Rahmen dieser Arbeit die inneren Variablen  $\mathbf{C}_v$  und die Strukturvariable  $q$  beinhalten (s. Seite 80). Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}_t$  und die inneren

---

<sup>1</sup>Korrekterweise müsste eine komponentenweise Darstellung der Vorgaben auf den Oberflächen formuliert werden, was hier nicht aufgegriffen wird.

Variablen  $\mathbf{C}_v$  und  $q$  beziehen sich dabei auf den zuletzt gefundenen Gleichgewichtszustand. Das Zeitinkrement  $\Delta t$  und das Deformationsinkrement  $\mathbf{F}_{t+1}$  beziehen sich auf den aktuellen Iterationsschritt. Mit den von ABAQUS gegebenen Größen müssen über die Unteroutine UMAT zunächst die inneren Variablen  $\mathbf{C}_v$  (s. Gl. (4.57)) und  $q$  (s. Gl. (4.79)) aus einem impliziten Euler-Schritt berechnet werden. Dies führt am betrachteten Gauss-Punkt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, welches iterativ mit dem Newton-Verfahren gelöst wird (s. Hartmann [17] und [18]). Für das in dieser Arbeit entwickelte Modell lautet dieses nichtlineare Gleichungssystem

$$\left[ \mathbf{1} - \Delta t \left( \frac{2}{\eta} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\eta} \right) \text{Sp} \left\{ \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}}_{ov} \right\} \mathbf{1} \right) \right] \mathbf{C}_v^{n+1} - \mathbf{C}_v^n = 0 \quad (5.6)$$

$$\left[ 1 + \Delta t \left( \xi |\mathbf{D}| + \frac{1}{\tau_q} \right) \right] q_{n+1} - q_n - \Delta t_n \xi |\mathbf{D}| = 0, \quad (5.7)$$

wobei  $q_n$  und  $\mathbf{C}_v^n$  die Werte von  $q$  und  $\mathbf{C}_v$  zum Zeitpunkt  $t_n$  bzw.  $q_{n+1}$  und  $\mathbf{C}_v^{n+1}$  die von  $q$  und  $\mathbf{C}_v$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  repräsentieren. In Gl. (5.6) und Gl. (5.7) sollen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  für  $t_{n+1}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{T}}_{ov}$  für  $t_{n+1}$  und  $\mathbf{C}_v^{n+1}$  berechnet werden. Danach müssen noch die Cauchy Spannungen (s. Gl. (4.38) bzw. (4.70) und (4.73)) berechnet sowie auch die aktuellen Werte der Lösungen der Evolutiongleichung für  $\mathbf{C}_v$  und die Werte der Strukturvariablen  $q$  an ABAQUS zurückgegeben werden.

## Bestimmung des Tangentenoperators

Wie in dem vorherigen Abschnitt bereits erläutert, benötigt ABAQUS für die globale Gleichgewichtssiteration auch den Tangentenoperator  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.8)$$

wobei  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  der vorgegebene Verzerrungsinkrement ist und  $\mathbf{T}$  die Cauchysche Spannung. Da die analytische Bestimmung der zum Tangentenoperator zugehörigen Matrixdarstellung sowohl sehr aufwendig und daher fehleranfällig ist, s. Jansohn [26], als auch das Programm ABAQUS die spezielle Ableitung (5.8) erfordert, wird die Ableitung nach einem Vorschlag von Willuweit [52] numerisch berechnet.

Die numerische Approximation der partiellen Ableitung  $\mathcal{D}$  läßt sich mit dem Differen-



zenquotienten<sup>2</sup> bilden:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{ij}}{\partial X_{mn}} \approx \frac{\check{\mathbf{G}}_{ij}(\check{\mathbf{X}}^{(mn)}) - \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{X})}{\chi}, \quad (5.9)$$

wobei  $\check{\mathbf{X}}^{(mn)}$  der Tensor ist, bei dem die Komponente  $m, n$  von  $\mathbf{X}$  gestört wird. Nach Willuweit [52] ist dieser Tensor folgendermaßen definiert:

$$\check{\mathbf{X}}^{(mn)} = \mathbf{X} + \chi(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{für } m \neq n, & \check{\mathbf{X}}^{(mn)} = \mathbf{X} + \chi(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) \\ \text{für } m = n, & \check{\mathbf{X}}^{(mm)} = \mathbf{X} + 2\chi(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_m) \end{cases}. \quad (5.10)$$

Diese Definition hat den Nachteil, daß alle Komponente von  $\mathbf{X}^{(mn)}$  nicht gleichartig gestört werden: Auf der Hauptdiagonale werden die Komponente von  $\mathbf{X}$  doppelt im Vergleich zu den anderen gestört. Um diesen Störungsunterschied zu vermindern, wird in dieser Arbeit der gestörte Tensor  $\check{\mathbf{X}}^{(mn)}$  folgenderweise definiert:

$$\begin{cases} \check{\mathbf{X}}^{(mn)} = \mathbf{X} + \chi(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) & \text{für } m \neq n \\ \check{\mathbf{X}}^{(mn)} = \mathbf{X} + \frac{\chi}{2}(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) & \text{für } m = n. \end{cases} \quad (5.11)$$

Damit werden so alle einzelnen Komponenten von  $\mathbf{X}^{(mn)}$  mit  $\chi$  gestört und aus diesem kann das zugehörige  $\mathbf{G}$  berechnet werden.

Die Anwendung von Gl. (5.12) auf  $\Delta\epsilon$  aus Gl. (5.9) lautet

$$\begin{cases} \text{für } m \neq n, & \Delta\check{\epsilon}^{(mn)} = \Delta\epsilon + \chi(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) \\ \text{für } m = n, & \Delta\check{\epsilon}^{(mn)} = \Delta\epsilon + \frac{\chi}{2}(\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) \end{cases} \quad (5.12)$$

bzw. die numerische Näherung von  $\mathcal{D}$  berechnet sich zu

$$\mathcal{D}_{ijmn} = \frac{\check{T}_{ij}(\Delta\check{\epsilon}^{(mn)}) - T_{ij}(\Delta\epsilon)}{\chi}. \quad (5.13)$$

Hierbei muß  $\chi$  sehr klein sein. Eine Abschätzung hierzu findet man in Press [42]. Ein üblicher Wert für  $\chi$  ist die Wurzel der Maschinengenauigkeit, also

$$\chi = \sqrt{\text{Maschinengenauigkeit}}. \quad (5.14)$$

---

<sup>2</sup>Gl. (5.9) erhält man analog zum Differenzenquotienten einer skalaren Funktion  $g$

$$\frac{dg}{dx} \approx \frac{g(x + \chi) - g(x)}{\chi}, \quad \text{mit } \chi \ll 1,$$

wobei die skalare Funktion  $g$  mit dem Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{G}(\mathbf{X})$  ersetzt wurde.

## 5.2 Validierung am Scherversuch

In diesem Abschnitt werden Testrechnungen durchgeführt, um das in dieser Arbeit entwickelte Materialmodell zu validieren. Da alle Parameter an die Meßdaten der Matte INPE 570 identifiziert wurden, werden die Simulationen mit den entsprechenden Meßdaten der Matte verglichen. Hierzu wird das dreidimensionale temperaturunabhängige Materialmodell herangezogen. Von den bei Raumtemperatur durchgeführten Versuchen wurde schon der Festversuch für die Parameteranpassung verwendet, d.h. das temperaturunabhängige Materialmodell kann nur noch mit den Scherversuchen bewertet werden.

### Prozessverlauf des Scherversuchs

Als Testrechnungen für das temperaturunabhängige Materialmodell wird der Verlauf von zwei unterschiedlichen Scherversuchen<sup>3</sup> - beide ohne Haltezeit - durchgeführt. Ausgewählt werden zum einen der Schwellversuch mit einem Mittelwert  $X_m=0.2$  mm und einer Amplitude  $dX=0.14$  mm (s. Seite 26) und zum anderen der Wechselversuch (s. Seite 29) mit einem Mittelwert  $X_m=0$  mm und einer Amplitude  $dX=0.36$  mm. Beide Versuche werden zuerst mit 29% in der Dickenrichtung vorkomprimiert und dann mit derselben Geschwindigkeit in einer den anderen Richtungen zyklisch geschert. Abb. 5.1 stellt beide Verläufe dar (links für den Schwellversuch und rechts für den Wechselversuch). Da am

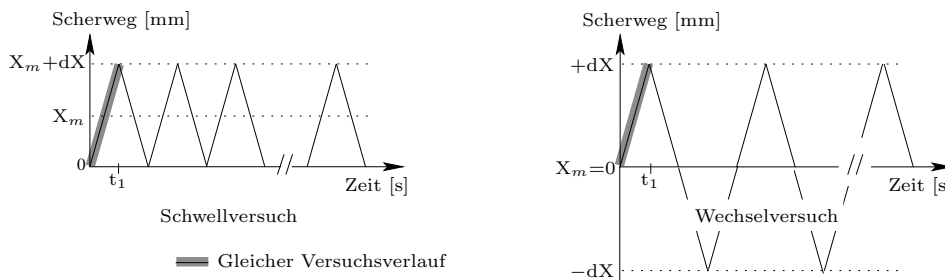


Abbildung 5.1: Prozessverlauf des Schwell- (links) und des Wechselversuchs (rechts)

Anfang des Wechselversuchs nur eine halbe Rampe gefahren wird, sollten beide Versuche genau denselben Verlauf während der ersten Sekunde haben. Dieser Zeitraum ist grau in Abb. 5.1 hinterlegt.

### Maßstab und Geometrie der Probe

Für die beiden mit der Matte INPE 570 gefahrenen Scherversuche hatte die Probe jeweils den folgenden Maßstab: Breite von 34.7 mm in Richtung 1 (s. Abb. 5.2 links), Dicke von 6.9 mm in Richtung 2 und Länge von 41 mm in Richtung 3. Der in Abb. 5.2 ange deutete Prozessverlauf erfolgt folgendermaßen: Die Probe wird mit 29%, d.h. um 2 mm,

<sup>3</sup>Die Beschreibung des Scherversuchs befindet sich auf Seite 25.

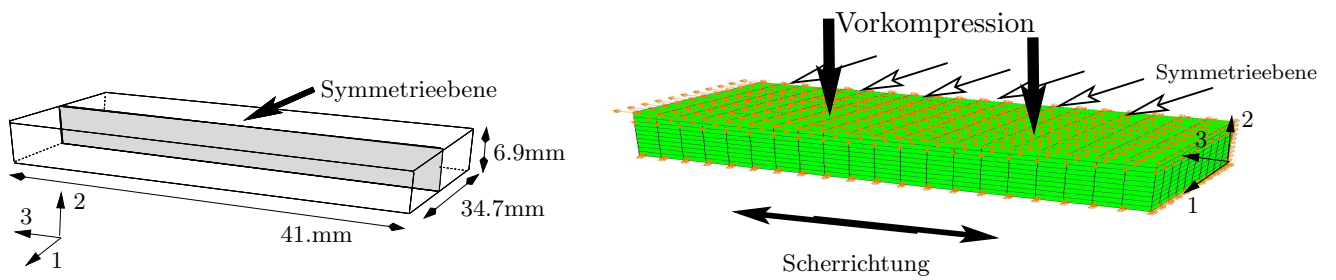


Abbildung 5.2: Simulierte Scherprobe unter Ausnutzung der Symmetrie

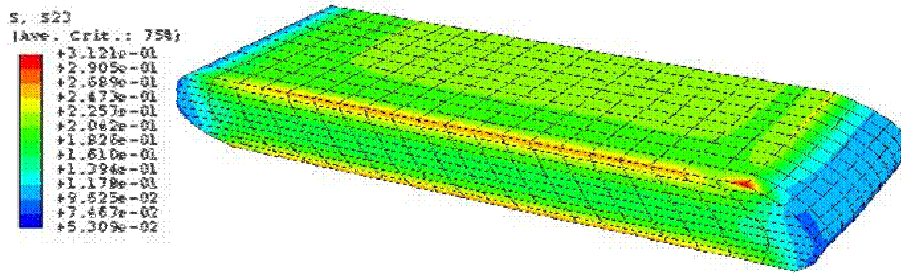
in Richtung 2 vorkomprimiert und anschließend um 0.34 mm, in Richtung 3 geschert. Für die numerische Simulation wird die Symmetrie des Belastungs- und Deformationsprozesses ausgenutzt. Daher ist die Probenlänge 41 mm, die Breite 17.35 mm sowie die Höhe 6.9 mm in der numerischen Simulation verwendet worden und diese Probe besteht aus 2000 achtknotigen finiten Elementen, die in ABAQUS unter C3D8 beschrieben sind. Die Länge in Richtung R3 wurde mit 20 Elementen aufgeteilt und die zwei anderen Richtungen jeweils mit 10 Elementen.

Die Rand- bzw. Belastungsbedingungen der FE-Struktur sind in Abb. 5.2 rechts angedeutet:

- Die Symmetrieebene 2-3 wird in Richtung 1 festgehalten,
- Die Außenflächen der 1-2 sowie 2-3 Ebenen sind in alle Richtungen frei,
- Die Freiheitsgrade der unteren Oberfläche werden in allen Richtungen gesperrt,
- Die obere Oberfläche wird zunächst um 2 mm, in Richtung 2 vorkomprimiert und dann zusätzlich um 0.34 mm, in Richtung 3 hin- und hergeschert.

## Ergebnisse

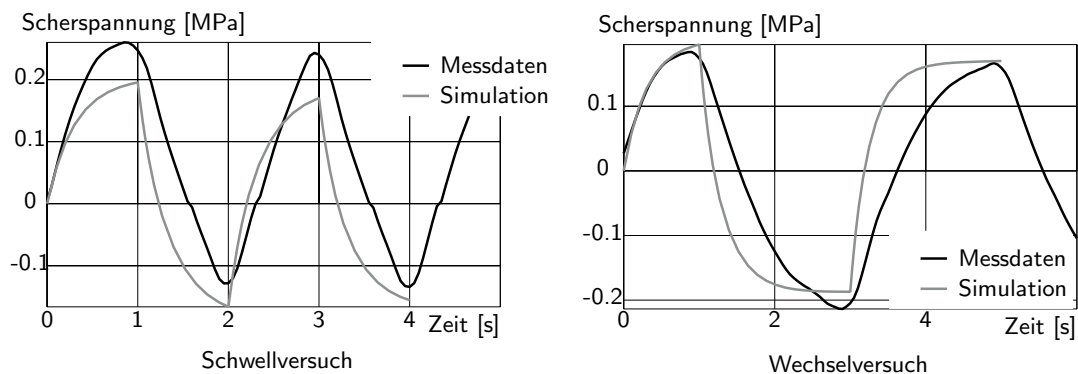
Für den Zeitpunkt  $t=1s$  stellt Abb. 5.3 die von ABAQUS berechneten Simulationsergebnisse der Cauchy'schen Spannungskomponente  $T_{23}$  dar.



**Abbildung 5.3:** Simulationsergebnisse des Spannungskomponents  $T_{23}$

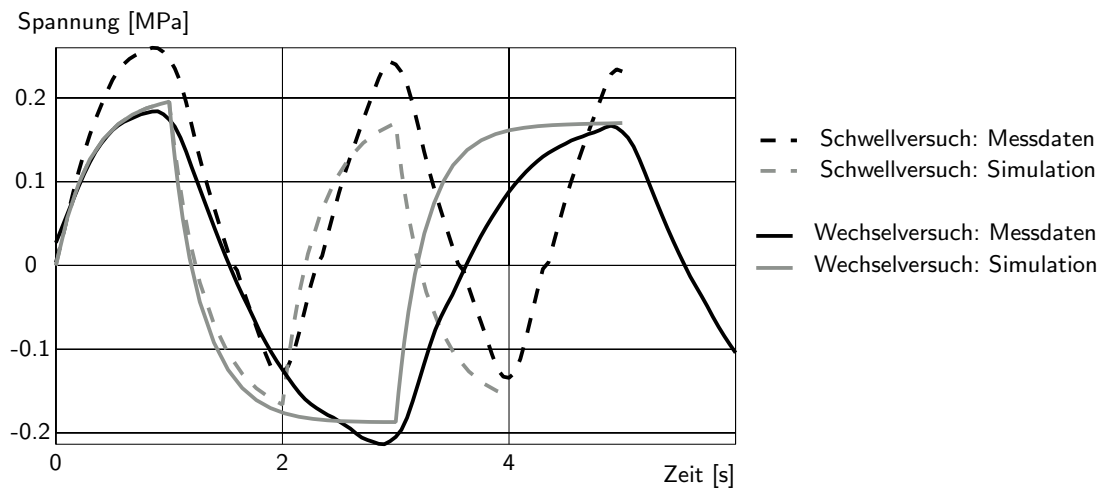
In Abb. 5.3 wurde die Deformation in Richtung 3 um einen Faktor 10 vergrößert, da die Scherdeformation sehr klein sind.

Abb. 5.4 stellt die Spannungsmeßdaten der Matte INPE 570 jeweils für den Schwell- (links) sowie den Wechselversuch (rechts) und die zugehörigen Simulationsergebnisse dar. Die simulierten Spannungsergebnisse wurden aus der durch die Probenfläche dividierte Summe aller Knotenkräften berechnet. In Abb. 5.5 sind beide Lastpfade überlagert wiedergegeben. Beide Simulationen wurden nur für ein bis zwei Zyklen berechnet, da ein Konvergenzproblem in der Implementation aufgetaucht war, was aufgrund der beschränkten Zeit nicht vertieft untersucht werden konnte. Die vorliegenden ersten Ergebnisse erscheinen für die vorliegenden Untersuchungen als ausreichend.



**Abbildung 5.4:** Simulations- und Meßergebnisse beim Schwell- und Wechselversuch

Zunächst ist in Abb. 5.4 bzw. Abb. 5.5 zu beobachten, daß die Meßergebnisse im Schwell- und Wechselversuch bereits in der ersten Rampe, d.h. dem Zeitbereich  $0 \leq t \leq t_1$ , stark voneinander abweichen. Dies ist auf die Streuung der Materialeigenschaften zurückzuführen. Eine gute Überstimmung der Simulationsergebnisse mit den Meßergebnissen kann beim Wechselversuch beobachtet werden (Abb. 5.4 rechts). Eine größere Abweichung liegt jedoch beim Schwellversuch vor, da bereits beim Belastungspfad größere Abweichungen von Simulation und Experiment zu erkennen sind.



**Abbildung 5.5:** Überlagerung der Simulations- und Meßergebnisse für beide Scherversuche

Zusammenfassend kann trotzdem konstatiert werden, daß das Materialmodell das zyklische Materialverhalten prinzipiell gut wiedergeben kann.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Matte, ein Isolierstoff im Katalysator, experimentell untersucht, modelliert und mit dem kommerziellen FEM Programm ABAQUS simuliert. In erster Linie wurden einige Versuche bei Raumtemperatur und bei unterschiedlichen festen Temperaturen durchgeführt, um die Materialeigenschaften zu bestimmen. Hierbei wurde motiviert, obwohl eine erhebliche Materialstreuung der Matte auftauchte, daß das Material als temperaturabhängig, viskoelastisch und isotrop angenommen werden kann.

Basierend auf dem experimentell beobachteten Materialverhalten wurde dann ein zunächst temperaturunabhängiges dreidimensionales Materialmodell entwickelt. Um das Modell im Rahmen der Kontinuumsmechanik zu entwickeln, sollte die Clausius-Duhem-Ungleichung erfüllt werden. Dazu führt die Einführung der elastisch-inelastischen Zerlegung des Deformationsgradienten sowie die der Spannung in Gleichgewichts- und Überspannung in der Clausius-Duhem-Ungleichung zu zwei Anteilen der Freien Energie, die den elastischen und den inelastischen Anteil der Materialantwort beschreiben. Insbesondere wurde in dieser Arbeit die Evolutionsgleichung in einen Deviator und einen Kugeltensor jeweils mit eigenen Viskositäten aufgespalten, um die Gestaltsänderungen von der Volumenänderungen getrennt zu modellieren. Beide Viskositäten unterscheiden sich um einen Skalarfaktor und sind von der Deformation und einer Relaxationsfunktion abhängig. Vor allem wurde für die beiden freien Energien die von Blatz & Ko vorgeschlagene Materialgleichung gewählt. Am Ende der Entwicklung des temperaturunabhängigen Materialmodells wurden Parameterwerte an die Meßdaten des Festversuchs V6 für die Matte INPE 570 angepaßt.

Aus dem temperaturunabhängigen Materialmodell wurde dann das temperaturabhängige dreidimensionale Modell bei festen Temperaturen für isotherme Prozesse entwickelt. Außergewöhnlich wurden in erster Linie, nachdem das Material die erste bzw. irreversible thermische Phase erlebt und deswegen einige Stoffe (Binder und Wasser werden aus dem Glimmer verbrannt) sowie Kontakt zu dem Stempel verloren hatte, ein neuer vernünftiger "Anfangs-"Zustand für das Material bei Raumtemperatur definiert: Bei dem nächsten ersten Kontakt zwischen Material und Stempel wird die Probe als undeformierte Probe d.h.  $\det \mathbf{F}^* = 1$  eingesetzt. Ab diesem neuen Materialzustand wurde dann das temperaturunabhängige Materialmodell angepaßt, um das temperaturabhängige dreidimensionale Modell zu bilden. Dafür wurde anstatt einer rein elastisch-inelastischen Zerlegung eine thermisch-elastisch-inelastische Zerlegung des Deformationsgradienten in das Modell eingeführt. Vor allem lag die Erweiterung darin, daß auch hier die von Blatz & Ko vorgeschlagene Freie Energie ausgewählt, jedoch temperaturabhängig modelliert wurde. Am Ende sind die Parameterwerte jeweils für unterschiedlichen festen Tempera-

turen an die entsprechenden Meßdaten für die Matte INPE 570 angepaßt worden. Ein besonderer Vorteil dieses Modells ist, daß das temperaturabhängige Materialmodell für "Raumtemperatur" genau dasselbe wie das temperaturunabhängige Modell ist, d.h. das temperaturunabhängige Materialmodell ist ein Spezialfall des temperaturabhängigen Modells.

Um das in dieser Arbeit entwickelte Materialmodell noch zu validieren, wurde zum Schluß eine FE-Simulation mit dem Programm ABAQUS durchgeführt und mit entsprechenden Meßdaten (der Matte INPE 570) verglichen. Nur das Materialmodell bei Raumtemperatur konnte bewertet werden, da schon alle Versuche außer dem Scherversuch für die Entwicklung des Materialmodells bzw. für die Parameteranpassungen verwendet wurden. Wegen der erheblichen Materialstreuung bei den Scherversuchen wurde nur beobachtet, daß das Materialmodell das zyklische Materialverhalten prinzipiell gut wiedergeben kann.

Allgemein war die Interpretation der Meßergebnisse und daher die entsprechenden Konsequenzen schwer zu beurteilen, da eine dominante Materialstreuung zu erkennen war. Eine mögliche Vertiefung der Mattenuntersuchung könnte zunächst eine Bestätigung aller Annahmen über die Materialeigenschaften geben. Dafür sollte jeder Versuch mehrere Male wiederholt werden, um die Materialstreuung auszugleichen. Außerdem wäre ein Vergleich zwischen bei unterschiedlich festen Temperaturen gemessenen Daten und einer entsprechenden Simulation mit dem temperaturabhängigen Materialmodell eine zweite Validierung des hier entwickelten Materialmodells. Eine zum Schluß vorgeschlagene Möglichkeit könnte noch darin bestehen, die Erweiterung der temperaturabhängigen Parameter wie z.B.  $\mu_{eq}$  oder  $\eta_0$ , als temperaturabhängige Funktionen darzustellen.

# Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, J., & ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [2] Ansys Inc.: *ANSYS Theory Manual, Release 5.6*. Canonsburg, 2000.
- [3] ATKIN, R. J., FOX, N.: *An introduction to the theory of Elasticity*, Longman, London and New York, 1980.
- [4] BARNES, H.: *Thixotropy - A Review*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 70, 1997, pp. 1-33.
- [5] BEATTY, M.: *Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples*, Appl. Mech. Rev. vol 40, 1987, pp. 1699-1734.
- [6] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A., MUSIOL, G. & MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 5 edition, 2001.
- [7] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.-L., FOREST, S.: *Mécanique non linéaire des matériaux*, Paris Hermès Science Publications, 2001.
- [8] BLATZ, P. and KO, W.: *Application of Finite Elastic Theory to the Deformation of Rubbery Materials*, Trans. Soc. Rheology 6, 1962, pp. 223-251.
- [9] COIRIER, J.: *Mécanique des milieux continus, Concepts de base*, Dunod, Paris, 1997.
- [10] CROOK, R.A.: *Damage and the nonlinear viscoelastic response of glassy polycarbonate and LaRC-TPI*, Polym. Eng. Sci. 33, 1993, pp. 56-62.
- [11] DAFALIAS, Y.F.: *Constitutive Model for Large Viscoelastic Deformations of Elastomeric Materials*, Mechanics Research Communication, Vol. 18, 1991, pp. 61-66.
- [12] DROZDOV, A.D.: *Finite Elasticity and Viscoelasticity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996.
- [13] FINDLEY, W. N., LAI, J. S. and ONARAN, K.: *Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic Materials: with an introduction to linear viscoelasticity*, Dover Publications, New York, 1989.



- [14] GIESEKUS, H.: *Phänomenologische Rheologie, Eine Einführung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [15] HÄUSLER, O.: *Anisotropes plastisches Fließen bei grossen Deformationen*, Dissertation, Forschungszentrum Karlsruhe, Karlsruhe 1999.
- [16] HAGELÜKEN, C.: *Autoabgaskatalysatoren*, Expert Verlag, 2001.
- [17] HARTMANN, S.: *A remark on the application of the (Newton-Raphson) method in non-linear finite element analysis*, Computational Mechanics 36, 2005, pp. 100-116.
- [18] HARTMANN, S.: *Finite-Elemente Berechnung inelastische Kontinua*, Habilitationsschrift, Institut für Mechanik, Universität Kassel, 2003.
- [19] HARTMANN, S., NEFF, P.: *Polyconvexity of generalised polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility*, International Journal of Solids and Structures 40, 2003, pp. 2767-2791.
- [20] HAUPT, P.: *Thermodynamics of solids in non-equilibrium Thermodynamics with applications to solids*, CISM, Cours and Lectures, Udine, 336, Springer, Wien, New York, 1993, pp. 65-136.
- [21] HAUPT, P.: *On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics*, Acta Mechanica 100, 1993, pp. 129-154.
- [22] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer, Berlin, 2nd edition, 2002.
- [23] HAUPT, P., TSAKMAKIS, C.: *On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics*, Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics 1, 1989, pp. 165-196.
- [24] HIBBIT, KARLSON, & SORENSEN INC.: *ABAQUS Theory Manual, Version 5.7*. Hibbit, Karlson, & Sorensen INC., 1997.
- [25] HUBER, N., TSAKMAKIS, C.: *Finite Deformation Viscoelasticity Laws*, Mechanics of Materials 32, 2000., pp. 1-18.
- [26] JANSON, W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung grosser Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*, Wissenschaftliche Berichte FZKA 6002, Forschungszentrum Karlsruhe, 1997.
- [27] KERSTEN, T.: *Materialverhalten von Metallen im Rahmen der anisotropen Viskoplastizität*, Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, 2004.
- [28] KRAWIETZ, A.: *Materialtheorie, Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*, Springer-Verlag, Berlin 1986.

- [29] LÄMMER, H.: *Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit Schädigung bei kleinen und großen Deformationen*, Wissenschaftliche Berichte FZKA 6053, Forschungszentrum Karlsruhe, 1998.
- [30] LAIARINANDRASANA, L., PIQUES, R., ROBISSON, A.: *Visco-Hyperelastic Model with internal State Variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation*, Int. Journal of Plasticity 19, 2003, pp. 977-1000.
- [31] LEE, E.: *Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains*, Journal of Applied Mechanics 36, 1969, pp. 59-67.
- [32] LEE, E., LIU, D.: *Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Application to Plane-Wave Analysis*, Journal of Applied Physics 38, 1967, pp. 19-27.
- [33] LEMAIRTE, J., CHABOCHE, J.-L.: *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris 1988.
- [34] LIN, R.C.: *On a linear viscoelastic Material law at finite strain for Polymers*, Mechanics Research Communications, Vol. 8, N°4, 2001, pp. 363-372.
- [35] LION, A.: *A Constitutive Model for Black Filled Rubber. Experimental investigations and mathematical representations*, Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics 8(3), 1996, pp. 153-169.
- [36] LION, A.: *On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, 1997, pp. 1805-1834.
- [37] LION, A.: *Thermomechanik von Elastomeren, Habilitationsschrift*, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, 2000.
- [38] LOCKER, R., SAWYER, C. and EISENSTOCK, G.: *Thin Film Pressure Sensor Technology Applied to Catalytic Converter Packaging*, SAE Technical Paper Series 2001-01-0223, 2001.
- [39] LU, S. and PISTER, K.: *Decomposition of deformation and representation of the free energy function for isotropic thermoelastic solids* International Journal of Solids and Structures, number 11, 1975, pp. 927-934.
- [40] MIEHE, C.: *Entropic thermoelasticity at finite strains. Aspects of the formulation and numerical implementation*, Comp. Methods Appl. Mech. Engng 120, 1995, pp. 243-269.
- [41] MITSOULIS, E., HATZIKIRIAKOS, S., CHRISTODOULOU, K., VLASSOPOULOS, D.: *Sensitivity analysis of the Bagley correction to shear and extensional rheology*, Rheol. Acta 37, 1998, pp. 438-448.
- [42] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. and FLANNERY, B.P.: *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd Edition, 1992.

- [43] Polymer Science Dictionary, M.S.M. Alger (Ed.), Elsevier Applied Science, London, 1990.
- [44] Polymer Technology Dictionary, T. Whelan (Ed.), Chapman & Hall, London, 1994.
- [45] REESE, S., GOVINDJEE, S.: *A Theory of finite Viscoelasticity and numerical aspects*, Int. J. Solids and Structures, Vol 35, 1998, pp. 3455-3482.
- [46] REESE, S.: *A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers*, Int. J. Plasticity, 19, 2003, pp. 909-940.
- [47] RIVLIN, R.S., SAUNDERS, D.W.: *Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber.*, Philosophical Transaction of the royal Society of London Series A 243, 1951, pp. 251-288.
- [48] Saffil Ltd, Handbuch: Health & Safety Information Manual, Chap 9, SAFFIL, United Kingdom, 2002.
- [49] SEDLAN, K.: *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*, Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, 2001.
- [50] STROOM, P., MERRY, P. and GULATI, S.: *Systems Approach to Packaging Design for Automotive Catalytic Converters*, SAE Technical Paper Series 900500, 1990.
- [51] TRAN, H.-N.: *Modellierung und Simulation kristallplastischer Werkstoffe mit Hilfe von Versetzungsdichten*, Dissertation, Universität Dortmund 2005.
- [52] TSAKMAKIS, C., WILLUWEIT, A.: *Use of the elastic Predictor-Plastic Corrector Method for Integrating Finite Deformation Plasticity Laws*, Deformation and Failure of Metallic Materials, 2003, pp. 1.-36.
- [53] Unifrax XPE AV2 Product, Presentation, Converter Product Development, UNIFRAX, 2001.
- [54] ZIMMER: *Künstliche Mineralfasern Teil II: Anwendungsbereiche, gesundheitliche Bewertung und Entsorgung*, Bayerisches Landesamt für Umweltschutz, München, 1998.
- [55] 3M Interam<sup>TM</sup>, Handbuch: Catalytic Converter Mat Products, Designer's Guide, 3M, 1997.

ISBN 978-3-89958-435-6