In: Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen, 30. Jahrgang, 1978, Heckners Verlag, Wolfenbüttel, S. 642-651

WERNER BLUM

Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe

0. Einleitung

Im folgenden wird das Thema *Einkommensteuern* (meist kurz: ESt) unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten diskutiert[1]). Damit sollen zum einen dem Mathematiklehrer, der *Anwendungsbeispiele für den Analysisunterricht* sucht, Anregungen gegeben werden; zum anderen sollen an Hand des Beispiels ESt einige wesentliche Aspekte der Problematik eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts *exemplarisch* verdeutlicht werden. Dazu werden zuerst in Abschnitt **1** die relevanten steuerlichen Begriffe im *Mathematisierungs*-Kontext eingeführt und in Abschnitt **2** die nötigen *Informationen* über die bundesdeutschen ESt gegeben. Es folgen in Abschnitt **3** einige *allgemeine Bemerkungen zur Anwendungsorientierung* des Mathematikunterrichts. In Abschnitt **4** werden dann auf diesem Hintergrund *Begründungen* für eine Behandlung des Themas ESt im Analysisunterricht genannt und Überlegungen zur *unterrichtlichen Verwendung* angestellt.

1. Einkommensteuern und Mathematisierung

Den Betrachtungen liegt stets ein unverheirateter Steuerzahler zugrunde[2]), der für sein zu versteuerndes (Brutto-)Jahreseinkommen *Einkommensteuern* bezahlen muß. Der Begriff „Einkommensteuer" ist hier und im folgenden stets umfassend gemeint und schließt den Begriff *„Lohnsteuer"* mit ein.

Steuer*technische* Probleme, welche die Ermittlung des zu versteuernden Einkommens betreffen, werden hier nicht erörtert. Wohl aber wollen wir als Ausgangspunkt für den folgenden Mathematisierungsprozeß überlegen, welche *Forderungen* an die ESt sinnvoll erscheinen. Beispiele für solche steuerpolitischen Forderungen sind:

A: Stets soll die zu zahlende ESt geringer sein als das Einkommen

oder schwächer:

A': Nie . . . . . . höher sein . . . . . .

B: Wenn das Einkommen wächst, so soll die zu zahlende ESt auch wachsen

oder schwächer:

B': . . . . . . nicht abnehmen

Andererseits soll auch gelten:

C: Wenn das Einkommen wächst, so soll das nach Abzug der ESt verbleibende (Netto-)Einkommen auch wachsen

oder schwächer:

C': . . . . . . nicht abnehmen

D: Wenn das Einkommen wächst, so soll der Prozentsatz der vom Einkommen zu zahlenden ESt auch wachsen

1) Zu diesem Thema liegen eigene Unterrichtserfahrungen aus mehreren Fachoberschul- und Gymnasial-Klassen vor. Insbesondere habe ich im Herbst 1976 zusammen mit Frau G. Kaiser und Herrn R. Stein (beide Kassel) ein mehrwöchiges Unterichtsprojekt an einem Kasseler Wirtschaftsgymnasium durchgeführt; viele der folgenden Überlegungen sind aus gemeinsamen Diskussionen im Zusammenhang mit diesem Projekt hervorgegangen.

2) Für Verheiratete ist das S p l i t t i n g zu beachten; siehe Fußnote 3.

oder schwächer:

D': . . . . . . nicht abnehmen

E: Wenn das Einkommen wächst, so soll der Steuersatz, der für jede hinzuverdiente Mark gezahlt werden muß, auch wachsen

oder schwächer:

E': . . . . . . nicht abnehmen

Weniger auf der Hand liegend ist:

F: Stets soll der Steuersatz, der für jede hinzuverdiente Mark gezahlt werden muß, höher sein als der insgesamt zu zahlende Steuersatz

oder schwächer:

F': Nie . . . . . . geringer sein . . . . . .

Wir wollen diese Forderungen nun *mathematisieren.* Dazu sei x das zu versteuernde *Jahreseinkommen,* gemessen in DM; s(x) sei die beim Einkommen x zu zahlende *Einkommensteuer*[3]), ebenfalls in DM gemessen. Wir *idealisieren* und setzen für das folgende $x \in \mathbb{R}_0^+$ voraus. Die Zuordnung

$$s : x \mapsto s(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}_0^+$$

heiße *Einkommensteuerfunktion.* Die Forderungen A bzw. A', B bzw. B' und C bzw. C' lauten nun in mathematischer Fassung[4]):

A : $s < \mathrm{id}$ auf $\mathbb{R}_0^+$

A': $s \leq \mathrm{id}$ auf $\mathbb{R}_0^+$

B : s streng monoton wachsend

B': s monoton wachsend

C : id-s streng monoton wachsend

C': id-s monoton wachsend

Zur mathematischen Fassung der weiteren steuerpolitischen Forderungen müssen wir neue Begriffe einführen. Zum Einkommen $x \in \mathbb{R}^+$ sei $d(x) := \frac{s(x)}{x}$ der *Durchschnittssteuersatz* (oder *globale Steuersatz);* der Prozentsatz der vom gesamten Einkommen zu zahlenden ESt ist demnach $100 \cdot d(x)$. Geometrisch gibt d(x) die Steigung der Sekante durch O und (x | s(x)) an. Die Funktion

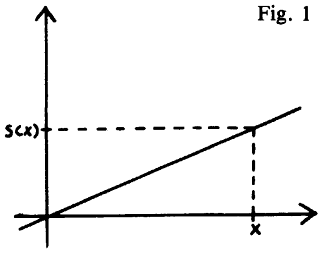


Fig. 1

$$d : x \mapsto d(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^+$$

heiße *Durchschnittssteuersatzfunktion.* Die Forderungen D bzw. D' besagen nun:

D : d streng monoton wachsend

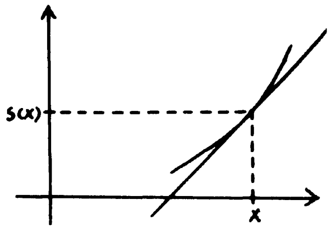
D': d monoton wachsend

3) Nach Splitting-Tarif haben Verheiratete $2 \cdot s(\frac{1}{2}(x_{♂} + x_{♀}))$ zu zahlen.

4) Im folgenden wird die Funktion $x \mapsto x$ mit id bezeichnet.

Der Steuersatz, der bei gegebenem Einkommen x für jede *hinzuverdiente* Mark gezahlt werden muß, ist $\frac{s(x+h) - s(x)}{h}$, wenn sich das Einkommen von x auf $x+h$ erhöht. Dies ist der Differenzenquotient, d. h. die *durchschnittliche Änderungsrate* für die Funktion s an der Stelle x zur Abszissendifferenz h. Da h gegenüber x i. a. sehr klein ist, *idealisieren* wir[5]) und betrachten statt der Differenzenquotienten den Differentialquotienten $s'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h}$, d. h. wir betrachten statt der durchschnittlichen Änderungsraten die *lokale Änderungsrate* von s an der Stelle x. Wir setzen dabei voraus, daß die ESt-Funktion s fast überall differenzierbar ist; in den (endlich vielen) Ausnahmestellen a sei s wenigstens rechtsseitig differenzierbar, und wir setzen dort $s'(a) := s'_r(a)$. Die Zahl $s'(x)$ heiße der zum Einkommen x gehörige *Spitzensteuersatz*[6])(oder *lokale Steuersatz)*. Geometrisch gibt $s'(x)$ die Steigung der Tangente (bzw. der rechtsseitigen Tangente) im Punkt $(x \mid s(x))$ an den Graphen der ESt-Funktion an.

Fig. 2



In der Ökonomie ist die „marginale" Sprechweise „$s'(x)$ *ist* der für jede hinzuverdiente Mark zu zahlende Steuersatz" üblich. Dies bedeutet also, daß man die lokale Änderungsrate als gute Approximation der — real allein auftretenden — durchschnittlichen Änderungsraten betrachtet, d. h. man benutzt $s'(x) \approx \frac{s(x+h) - s(x)}{h}$ oder

$$s(x+h) \approx s(x) + h \cdot s'(x) \text{ für kleine } |h|.$$

Dies ist der *lineare Approximationsaspekt* der Differentialrechnung, der in der ökonomischen Praxis oft intuitiv verwendet wird und der insbesondere zum Verständnis sowie zur näherungsweisen Berechnung der Steuermehrbelastung $s(x+h) - s(x)$ bei einem Mehrverdienst h äußerst nützlich ist.

Die Funktion

$$s' : x \mapsto s'(x) \; ; \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

heiße *Spitzensteuersatzfunktion*. Die Forderungen E bzw. E' und F bzw. F' besagen nun:

E : s' streng monoton wachsend
E': s' monoton wachsend
F : $s' > d$ auf $\mathbb{R}^+$
F': $s' \geq d$ auf $\mathbb{R}^+$

In den Differenzierbarkeitsintervallen von s bedeutet strenge Monotonie bzw. Monotonie von s' bekanntlich strenge Konvexität bzw. Konvexität von s. Ein hinreichendes Kriterium hierfür ist $s'' > 0$ bzw. $s'' \geq 0$. Die Zahl $s''(x)$ heiße die zum Einkommen x gehörige *Progression*.

Man kann nun untersuchen, wie die einzelnen Forderungen miteinander zusammenhängen. Z. B. gilt: $E \Rightarrow F$ oder: $B' \wedge D' \Leftrightarrow B' \wedge F'$ oder: $B \wedge C \Rightarrow$ s stetig.

Darauf aufbauend läßt sich eine Axiomatisierung vornehmen. Wir verzichten hier aus Platzgründen auf diese mathematisch reizvollen, didaktisch jedoch nicht primär relevanten Überlegungen.

---

5) Diese Idealisierung ist üblich und zweckmäßig; natürlich kann man Differenzenrechnung an Stelle von Differentialrechnung betreiben und auf infinitesimale Begriffsbildungen verzichten. Solche Idealisierungen, die auf Änderungsraten führen, liefern übrigens eine Fülle von Anwendungsbeispielen zur Differentialrechnung.

6) Oft auch Grenzsteuersatz genannt; manchmal bezeichnet dieser Begriff aber auch den Differenzenquotienten $s(a+1) - s(a)$.

Auch die Frage, wie aus den genannten Forderungen in Verbindung mit fiskalischen Überlegungen (insbesondere zur derzeitigen bzw. zu erwartenden Einkommensverteilung in der Bundesrepublik) „vernünftige" ESt-Funktionen aufgestellt werden können, kann hier nicht weiter verfolgt werden. Statt dessen betrachten wir sogleich das Resultat entsprechender (vernünftiger?) Überlegungen unserer Steuer-Politiker, nämlich die derzeitige bundesdeutsche ESt-Funktion.

2. Die Einkommensteuerfunktion der Bundesrepublik Deutschland

Derjenige Teil des bundesdeutschen *Einkommensteuergesetzes,* in welchem der derzeit gültige ESt-Tarif mitgeteilt wird, lautet[7]):

§ 32 a

Einkommensteuertarif

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemißt sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32 b, 34 und 34 b jeweils in DM

1. für zu versteuernde Einkommen bis 3 329 DM; 0;
2. für zu versteuernde Einkommen von 3 330 DM bis 16 019 DM: $0{,}22x-726$;
3. für zu versteuernde Einkommen von 16 020 DM bis 47 999 DM: $[(-49{,}2y+505{,}3)y+3077]y+2792$;
4. für zu versteuernde Einkommen von 48 000 DM bis 130 019 DM: $\{[(0{,}1z-6{,}07)z+109{,}95]z+4800\}z+16200$;
5. für zu versteuernde Einkommen von 130 020 DM an: $0{,}56x-12742$.

„x" ist das abgerundete zu versteuernde Einkommen. „y" ist ein Zehntausendstel des 16 000 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z" ist ein Zehntausendstel des 48 000 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

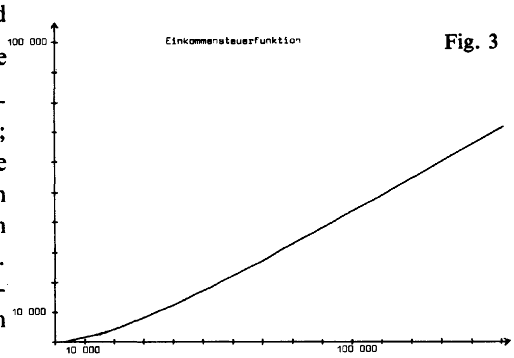


Fig. 3

Wenn wir von Abrundungen absehen und wie bisher $x \in \mathbb{R}_0^+$ voraussetzen, ist die bundesdeutsche ESt-Funktion s hiernach also eine stückweise ganzrationale Funktion; Fig. 3 zeigt ihren Graphen. s ist bis auf die Übergangsstellen zwischen den Tarif-Zonen differenzierbar. An diesen Übergangsstellen hat s „winzige" Sprünge vom Betrage < 1. Die Graphen der zugehörigen Durchschnitts- bzw. Spitzensteuersatz-Funktion ergeben sich hieraus wie in Fig. 4 und 5 dargestellt.

Erfüllt sind hier also die Forderungen A', E' und F' aus Abschnitt 1. „Beinahe" (d. h. bis auf kleine Umgebungen der Sprungstellen) sind erfüllt B', C' und D'. Innerhalb einzelner Zonen gelten auch die schärferen Forderungen A, B etc.

---

7) Der bis 1977 gültige Tarif ist z. B. in [8] zu finden. Bei dem von der Bundesregierung für 1979 vorgesehenen neuen Tarif sollen der „Grundfreibetrag" (von derzeit 3 300 DM auf voraussichtlich 3 690 DM) erhöht und der derzeitige „Tarifsprung" der Spitzensteuer (von 22 % auf beinahe 30,8 % beim Übergang von der „Proportionalzone" 2 zur „ersten Progressionszone" 3) beseitigt werden. Dadurch ändern sich sämtliche Koeffizienten in der ersten Progressionszone, während in den übrigen Zonen nur die absoluten Terme vermindert werden (um voraussichtlich 85 in der Proportionalzone und um voraussichtlich 902 in der „zweiten Progressionszone" 4 und in der „proportionalen Endzone"5). Deshalb ändern sich auch die Graphen in Fig. 3 — 5 entsprechend, insbesondere der dritte Teil des Spitzensteuergraphen.

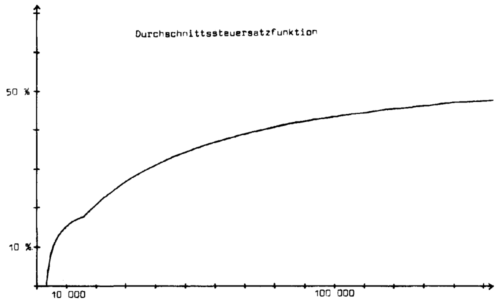


Fig. 4

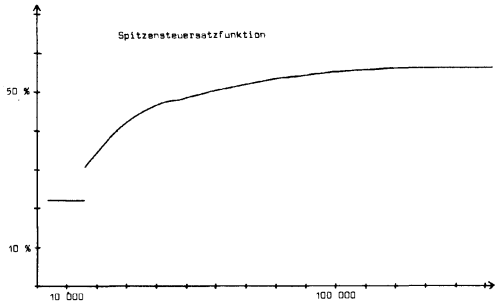


Fig. 5

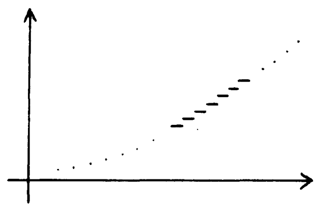
Laut Gesetz werden die Einkommensteuern für 30- bzw. 60-DM-Intervalle konstant berechnet:

(2) Das zu versteuernde Einkommen ist

1. auf den nächsten durch 30 ohne Rest teilbaren vollen DM-Betrag abzurunden, wenn es nicht mehr als 48 000 DM beträgt und nicht bereits durch 30 ohne Rest teilbar ist,
2. auf den nächsten durch 60 ohne Rest teilbaren vollen DM-Betrag abzurunden, wenn es mehr als 48 000 DM beträgt und nicht bereits durch 60 ohne Rest teilbar ist.

Die tatsächlich verwendete ESt-Funktion ist demzufolge eine Treppenfunktion (Fig. 6).

Fig. 6



Die Idealisierung zur in Fig. 3 dargestellten „stetigen" Steuerfunktion ist jedoch für weitere Untersuchungen zweckmäßig bzw. — wenn zur Untersuchung der ESt-Funktion Hilfsmittel aus der Differentialrechnung eingesetzt oder wenn Spitzensteuern berechnet werden sollen — notwendig und wird daher im folgenden stets zugrundegelegt.

Die Berechnung der ESt muß nach § 32 a (3) nach dem Horner-Schema erfolgen, wobei Rundungen vorgeschrieben sind:

(3) Die zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer erforderlichen Rechenschritte sind in der Reihenfolge auszuführen, die sich nach dem Horner-Schema ergibt. Dabei sind die sich aus den Multiplikationen ergebenden Zwischenergebnisse für jeden weiteren Rechenschritt mit drei Dezimalstellen anzusetzen; die nachfolgenden Dezimalstellen sind fortzulassen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen DM-Betrag abzurunden.

3. Bemerkungen zur Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts

Ich nenne hier drei wesentliche *Gründe* dafür, daß der Mathematikunterricht anwendungsorientiert gestaltet werden sollte:

1. Ein wichtiges allgemeines Ziel, welches der Mathematikunterricht verfolgen sollte und welches nur über Anwendungsbezüge erreicht werden kann, ist die *Vermittlung solcher mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die zur Beschreibung, zum Verständnis und zur Bewältigung von relevanten außermathematischen Problemen beitragen* (siehe [3, S. 644]). Der Mathematikunterricht hat somit auch die Aufgabe einer *Hilfeleistung* für Anwendungsprobleme. „Relevant" heiße ein solches Problem dann, wenn es aus der derzeitigen oder absehbar zukünftigen beruflichen oder alltäglichen Umwelt des Schülers stammt und für ihn „herausfordernden" Charakter besitzt.

2. Umgekehrt haben Anwendungsprobleme die *(lernpsychologische)* Aufgabe, mathematische Inhalte zu motivieren und zu veranschaulichen. Auch und gerade die aktive Auseinandersetzung mit geeigneten Anwendungsproblemen führt zu einem tieferen Verständnis und längeren Behalten der zugehörigen mathematischen Inhalte und fördert die Ausformung kognitiver Strategien und intellektueller Techniken ([10]).

3. Ohne Berücksichtigung außermathematischer Anwendungen würde den Schülern ein falsches Bild der Mathematik vermittelt, sowohl der derzeitigen Wissenschaft Mathematik, der Rolle, die diese Wissenschaft in der heutigen Welt spielt, als auch der Mathematik in ihrer geschichtlichen Entwicklung; Anwendungsorientierung führt also zu einem *ausgewogeneren Bild* der Mathematik als Gesamtphänomen.

Diese drei Gründe legitimieren sich wiederum an übergreifenderen Zielsetzungen des Schulunterrichts.

Deshalb müssen *Anwendungsprobleme integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts* sein, insbesondere in beruflichen Schulen, in denen das in 1. genannte Ziel das primäre Ziel eines im unfassenden Sinne „allgemeinbildenden" Mathematikunterrichts sein sollte (vgl.[4]). Dabei ist nicht nur ein Anwenden einer im Unterricht fertig entwickelten Mathematik auf außermathematische Probleme gemeint. Vielmehr soll an Hand von Beispielen das *Wechselverhältnis zwischen Mathematik und Realität* deutlich werden (vgl. dazu auch z. B. [7] oder [9]):

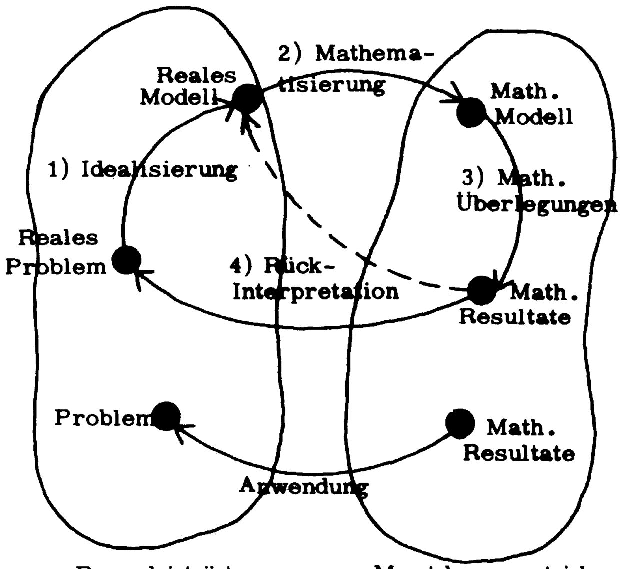


Fig. 7

Dieser *Prozeß* des wechselseitigen Übergangs zwischen den beiden Bereichen sollte im Unterricht *durchgeführt* und auch *reflektierend* thematisiert werden. Der Schüler sollte die Qualifikation erwerben, zwischen den Ebenen „Realität" und „Mathematik" in beiden Richtungen *übersetzen* zu können.

Zu den *Kriterien,* denen „gute" Anwendungsprobleme für den Mathematikunterricht genügen sollten, gehören insbesondere die folgenden (vgl. [3, S. 645]): Ein solches Problem sollte *real, relevant, vom außermathematischen Aufwand her faßlich* und *innermathematisch zugänglich* sein; zudem sollte es *mit den Lehrplänen für den Mathematikunterricht verträglich sein,* mehr noch, es sollte eine *„tragende Funktion"* im Mathematikunterricht übernehmen können. Anwendungsorientierung des Mathematikunterichts bedeutet nämlich nicht eine beliebige Aufeinanderfolge diverser Anwendungsbeispiele; vielmehr soll sich die Mathematik um einige *wenige,* im Sinne der genannten Begründungen *exemplarisch* ausgewählte *,,Leitprobleme''* herum konsistent aufbauen. ,,Real '' bedeutet dabei ,,nicht verfälschend'', wobei *Vereinfachungen* aus methodischen wie auch aus methodologischen Gründen selbstverständlich zugelassen und in der Regel sogar notwendig sind.

Das Thema ,,Einkommensteuern'' ist ein Anwendungsbeispiel, welches sowohl allen genannten Kriterien genügt als auch dazu beitragen kann, alle genannten Bergründungen für einen ,,beziehungshaltigen'' Mathematikunterricht ([5]) tatsächlich einzulösen; mehr dazu in Abschnitt **4**.

4. Didaktische Überlegungen zur Behandlung von Einkommensteuern im Mathematikunterricht

4.1. Begründungen für die Behandlung des Themas Einkommensteuern

Erstens genügt dieses Thema den eben aufgezählten Kriterien für Anwendungsbeispiele: Das Problem Einkommensteuern ist *real.* Es ist für sehr viele Schüler wohl *relevant,* da einerseits Lohn- und Einkommensteuern ein permanentes Thema der öffentlichen Diskussion sind[8]) und andererseits der Schüler sowohl derzeit in seinem familiären Kreis wie auch als zukünftiger Steuerzahler mit diesem Thema konfrontiert wird. Weiter ist das Thema *außermathematisch faßlich,* wie etwa der Gesetzestext aus Abschnitt **2** deutlich macht. Da die im Zusammenhang mit Einkommensteuern auftretenden mathematischen Inhalte zu den Themenkreisen Funktionen und Differentialrechnung gehören (mehr dazu nachher), ist das Thema in der Oberstufe auch *innermathematisch zugänglich* und *lehrplanverträglich.* Wie das folgende zeigt, könnte es sogar als *,,Leitproblem''* im Analysisunterricht dienen.

Zweitens kann eine Behandlung des Themas ESt im Analysisunterricht aufzeigen, inwiefern Inhalte aus der Analysis zum Beschreiben, Verstehen und Bewältigen von mit ESt zusammenhängenden Problemen beitragen können (dies entspricht Begründung 1 aus Abschnitt **3**). Der Analysisunterricht kann dem Schüler z. B. dazu verhelfen, die laufend in der politischen Diskussion benutzten Begriffe ,,Steuersatz'' und ,,Progression'' zu verstehen. Dies sollte nicht auf Fächer wie Wirtschaftskunde oder Gemeinschaftskunde abgeschoben werden, sondern gehört auch zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts. Um Mißverständnissen bei der Interpretation von Begründung 1 entgegenzutreten betone ich, daß es nicht darum geht, zukünftige Ökonomen oder Steuerberater auszubilden, auch nicht im Wirtschaftsgymnasium; vielmehr soll jedem Schüler die Gelegenheit gegeben werden, das Problem ESt besser zu durchschauen und sich eine fundierte eigene Meinung über die in der Öffentlichkeit diskutierten Fragen zu bilden.

Die zugehörigen mathematischen Inhalte — wie z. B. der Ableitungsbegriff — müssen und sollen dabei keineswegs bereits in einer abschließend gemeinten Fassung erarbeitet und benutzt werden. Genausowenig dürfen diese Inhalte nur rezeptemäßig für die Anwendung bereitgestellt werden. Ziel ist eine *verständige Handhabung* der Begriffe, Methoden und Sätze der Analysis im Anwendungszusammenhang (vgl. [2, S. 291]). Dazu sind nicht-verfälschende, ausbaufähige *Vereinfachungen* (im Sinne des Spiralprinzips) legitim und sogar notwendig, wenn ein solches Anwendungsbeispiel möglichst früh und mit allen Oberstufenschülern behandelt werden soll. Präzisierungen solcher vereinfachten Begriffe und Methoden können im Unterricht dann auf höherer Ebene erfolgen, in der Regel innermathematisch motiviert.

8) Einige Überschriften von Zeitungsartikeln aus 1976 bis 1978: ,,Steuerprogression packt zu'', ,,Sprengbombe Lohnsteuer'', ,,Marsch in den Lohnsteuerstaat'', ,,Tarifsprung in der Progression kappen'', ,,Absurder Sprung''.

Drittens liefert das Anwendungsbeispiel ESt gute Motivationen und hervorragende Veranschaulichungen für eine große Anzahl von Inhalten aus der Analysis (dies entspricht Begründung 2 aus Abschnitt 3), insbesondere:

- Tabellen, Graphen und Terme in wechselseitigem Zusammenhang
- Geraden (Steigungen, Gleichungen)
- Treppenfunktionen
- Stückweise ganzrationale Funktionen
- Funktionswertberechnung bei ganzrationalen Funktionen (Horner-Schema, Taschenrechner)
- Eigenschaften von Funktionen (Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Monotonie, Konvexität, Umkehrbarkeit)
- Geometrische Abbildungen von Funktionsgraphen
- Schnittpunkte ganzrationaler Funktionen
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei abschnittsweise definierten Funktionen
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Globale und lokale Änderungsraten von Funktionen
- Sekanten und Tangenten
- Differenzenquotientenfunktion bzgl. o, Ableitungsfunktion und Vergleich
- Tangente als lineare Approximierende
- Asymptotisches Verhalten von Funktionen
- Untersuchung ganzrationaler Funktionen (auf Steigungs- und Krümmungsverhalten)
- Bestimmung von Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften
- Interpolation
- Vergleich verschiedener Graphen

So kann beim Unterrichtsthema ,,Funktionen'' in Klasse 11 die ESt-Funktion als Beispiel einer stückweise ganzrationalen Funktion behandelt werden. Das Horner-Schema (in Verbindung mit dem Taschenrechner) zeigt hier seine außerordentliche Nützlichkeit; daß die Koeffizienten der Polynomterme ,,krumme'' Zahlen sind, ist eher ein didaktischer Vorteil, da in der Realität i. a. selten ,,glatte'' Zahlen auftreten. Die Eigenschaften: Definitionsbereich, Wertebereich, Monotonie, Konvexität und Umkehrbarkeit haben für die ESt-Funktion reale Bedeutung, d. h. am Beispiel der ESt-Funktion treten diese Begriffe im Sinne des Integrationsprinzips ([10, S. 60]) in natürlicher Weise auf und wird der Zweck von Funktionsuntersuchungen ganz deutlich. Der Spitzensteuersatz ist in der Differentialrechnung eine adäquate Veranschaulichung und Interpretation des Differentialquotienten. Der Unterschied zwischen Sekanten und Tangente und die Bedeutung der Tangente als lineare Approximierende werden sichtbar u. a. m.

Auch jetzt ist wieder zu sagen, daß die ESt-Funktion Motivationen und Veranschaulichungen nicht nur für jeweils abschließend präzisierte mathematische Begriffe und Methoden liefert, sondern gerade für solche Begriffe und Methoden, die in einem ersten Durchgang eines *Spiralcurriculums* in *vereinfachter* Form eingeführt und benutzt werden und die auch noch nicht in ein lückenloses deduktives Gerüst eingebettet sind; ein Beispiel ist wiederum der Ableitungsbegriff (vgl. [2]). Die Behandlung solcher Anwendungsprobleme wie unseres Beispiels ESt eignet sich also besonders gut für Analysis-Grundkurse in Fachoberschule und Gymnasium.

Viertens kann das Thema ESt als ein modellhaftes Exempel dafür dienen, wie sich die komplexen Beziehungszusammenhänge zwischen Realität (hier: politisch/wirtschaftliche Umwelt) und Mathematik darstellen können (dies entspricht Begründung 3 aus Abschnitt 3), Ich verzichte hierzu auf genauere Erläuterungen, da ich mich in Abschnitt **1** darauf beschränkt habe, nur einige Teile des in Fig. 7 dargestellten Kreislaufs zu thematisieren (nämlich den ,,qualitativen'' Teil des Mathematisierungs- bzw. Interpretationsprozesses). Jedenfalls soll das Thema ESt mit dazu beitragen, daß der Schlüler ein — in voller Breite betrachtet recht anspruchsvolles, aber — sehr wichtiges *Ziel* erreicht: Er soll an Hand von Beispielen erfahren, daß die Mathematik — hier: die Analysis — tatsächlich Verbindungen zur Realität hat und welcher Art diese Verbindungen sind; genauer: wie eine Situation — eventuell in unterschiedlicher Weise — mathematisiert werden kann, wie ein mathematisches Modell in — eventuell verschiedenen — Anwendungssituationen interpretiert werden kann, wie mathematische Hilfsmittel zur Lösung eines realen Problems entwickelt und verwendet werden, wie sich aus außermathematischen Fragestellungen reizvolle innermathematische Probleme ergeben und so fort. Dies stellt sicherlich keine geringeren Anforderungen an die am Unterricht Beteiligten als ,,beziehungsloser'' Mathematikunterricht (auch modernster Prägung), im Gegenteil! Es besteht trotzdem begründete Hoffnung, daß solche Erlebnisse im Mathematikunterricht die Einstellung der Schüler zu diesem Fach positiv beeinflussen können.

4.2. Überlegungen zur unterrichtlichen Verwendung des Themas Einkommensteuern

Entsprechend den verschiedenen Intentionen sind verschiedene Arten der Behandlung des Themas ESt im Mathematikunterricht möglich[9]). Das Spektrum reicht von einem ,,lokalen'' Einsatz der ESt-Funktion als Veranschaulichungsbeispiel für (stückweise) ganzrationale Funktionen oder zur Interpretation der Ableitung bis hin zu einem mehrwöchigen Unterrichtsprojekt. Ich gebe hier eine mögliche *Lernsequenz* innerhalb eines Analysis-Grundkurses in FOS 12 bzw. in Gymnasium 11/II oder 12/I an, die ,,global'' angelegt ist und alle Intentionen berücksichtigt. Aus dieser Lernsequenz sind Teile ausgliederbar für eine ,,lokale'' Behandlung.

- Diskussion über ESt: Begriffe, steuerpolitische Forderungen, Einkommensstatistik
- Mathematische Fassung (qualitativ und quantitativ) der steuerlichen Begriffe und Forderungen
- ESt-Gesetz und politische Kommentare
- ESt-Berechnungen, ESt-Tabellen, reale und idealisierte ESt-Funktion
- Untersuchung und Zeichnung des Graphen der (idealisierten) ESt-Funktion (mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung)
- Interpretation von ESt-Funktion und deren Ableitung
- Untersuchung von Durchschnittssteuersatz- und Spitzensteuersatzfunktion
- Vergleich mit steuerpolitischen Forderungen (der Schüler bzw. der Politiker)
- Beispiele konkreter ESt-Berechnungen (inklusive steuertechnischer Probleme)
- Interpretation aller bisherigen mathematischen Resultate und Bewußtmachen der Beziehungszusammenhänge

Als möglicher mathematischer Ausbau bietet sich für interessierte Leistungskurse an Gymnasien an:

- Untersuchung mathematischer Zusammenhänge zwischen verschiedenen steuerpolitischen Forderungen

sowie eventuell

- Axiomatisierung.

5. Schlußbemerkung

Durch Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts, durch Herstellung von Beziehungen der Mathematik zur Umwelt soll sowohl dem Schüler eine Hilfe bei der Umwelterschließung als auch der Mathematik ein höherer weil umfassenderer Stellenwert gegeben werden. Ein beziehungshaltiger Mathematikunterricht schließt ,,nicht banale und nicht zu viele, dafür aber in verschiedenen Bereichen sorgfältig ausgewählte [Anwendungs-]Beispiele'' ([6, S. 12]) integral mit ein. Das Thema Einkommensteuern kann für den Analysisunterricht in Fachoberschule und Gymnasium ein solches Beispiel sein.

9) Vgl. auch Kap. 7 in [1], welches als einziges Schulbuch das Thema ESt aufgreift und recht ausführlich behandelt.

Literatur

[1] A t h e n , H. / G r i e s e l , H. (Hrsg): Mathematik heute, Grundkurs Analysis 1. Hannover 1978

[2] B l u m , W.: Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberstufe. Die berufsbildende Schule **27** (1975), H. 5, S. 290 — 301.

[3] B l u m , W.: Exponentialfunktionen in einem anwendungsbezogenen Analysis-Unterricht der beruflichen Oberstufe. Die Deutsche Berufs- und Fachschule *72* (1976), H. 9, S. 643 — 656.

[4] B l u m , W.: Berufliches Schulwesen. In: Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht (Hrsg.: D. Volk), München 1978.

[5] F r e u d e n t h a l , H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. Stuttgart 1973.

[6] K r y g o v s k a , A. Z.: Processus de la Mathématisation dans l'Enseignement. Educational Studies in Mathematics *1* (1968), H. 1/2, S. 9 — 16.

[7] P o l l a k , H.: The Interaction between Mathematics and other School Subjects. In: Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education, Karlsruhe 1976 (Hrsg.: H. Athen/H. Kunle), Karlsruhe 1977, S. 255 — 262.

[8] S c h i c k , K.: Mathematische Probleme aus der Steuergesetzgebung. Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, Hannover 1977, S. 222 — 225.

[9] S t e i n e r , H. G.: Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts. In: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II (Hrsg.: W. Dörfler/R. Fischer), Klagenfurt 1976, S. 211 — 245.

[10] W i t t m a n n , E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig ^{4}1976.