

MÖGLICHKEITEN UND GRENZEN DES COMPUTEREINSATZES  
IM ANWENDUNGSORIENTIERTEN ANALYSISUNTERRICHT

Werner Blum (Universität - Gesamthochschule Kassel)

In Teil 1 nenne ich einige Anwendungsbeispiele bzw. anwendungsbezogene Unterrichtseinheiten zum Analysisunterricht, die exemplarisch einige Möglichkeiten zum Einsatz von Computern aufzeigen sollen. In Teil 2 erörtere ich potentielle Probleme, Grenzen und Gefahren beim Computereinsatz im Analysisunterricht.

Grundlage der folgenden Überlegungen ist die von A. Kirsch und mir in den siebziger Jahren entwickelte Konzeption des Analysisunterrichts. Hier ist kein Platz zur Darstellung dieser Konzeption; ich verweise auf Blum/Kirsch (1979) und Blum/Törner (1983). Was Anwendungen betrifft, beziehe ich mich auf Blum (1985).

1. Einige Beispiele

Die folgenden Beispiele sind 1987 und 1988 von verschiedenen Lehrern<sup>1</sup> konkret im Analysisunterricht durchgeführt worden, z.T. mehrfach. Bzgl. weiterer Beispiele siehe etwa Bussmann/Heymann (1985) sowie einzelne Quellen in der Bibliographie Kaiser et al. (1982/89).

Nicht alle Möglichkeiten der Computernutzung, die ich nenne, sind im Unterricht tatsächlich immer realisiert worden. Dies auch deshalb, weil zum Computereinsatz i.a. der Computerraum der jeweiligen Schule genutzt werden mußte. Dies zeigt eine prinzipielle organisatorische Schwierigkeit, denn vermutlich (und hoffentlich) wird in Zukunft nicht jedes Klassenzimmer mit einem Schülersatz von Computern ausgestattet werden. Deshalb meine ich, daß der Mikrocomputer unterrichtspraktisch nie die Rolle spielen kann, die didaktische Analysen ihm theoretisch zuweisen. Bekanntlich gibt es aber bereits Taschenrechner, die alles Wesentliche können, von Graphik bis zu symbolischem Rechnen, und die in wenigen Jahren in Klassensätzen verfügbar sein können. Erst diese Taschencomputer können m.E.

---

<sup>1</sup> Ich danke insbesondere Herrn St.Rat Reinhard Köhler, Kassel, der u.a. die Unterrichtseinheiten zu Beispielserie 5 durchgeführt hat.

die didaktischen Potenzen von Computern für die Schule erschließen.

Beispiel 1: Kettenkarussell. Problem: Bestimmung des Auslenkwinkels bei einem Kettenkarussell (siehe Schlöglmann/Walter 1983).

Hierbei ergibt sich eine Gleichung vierten Grades für den Sinus des gesuchten Winkels, die numerisch gelöst werden kann. Dies kann mittels Newtonverfahren geschehen, wobei zur Berechnung ein Computer eingesetzt werden kann.

Ich meine allerdings, daß zur Lösung solch konkreter Probleme die einfachsten numerischen Verfahren (hier also ein systematisches Einschachtelungsverfahren) völlig ausreichen. Weiter ist es mir dabei "nur" wichtig, daß Schüler die zugehörigen Algorithmen durchschauen und auch selbst aufstellen können, wohingegen spezielle Programmier-, d.h. Codierungs-Fertigkeiten für den Mathematikunterricht nur eine untergeordnete Rolle spielen. Zur Abarbeitung solch einfacher Algorithmen genügen weitgehend einfache Taschenrechner. Auf jeden Fall sollten dabei Fragen und Ideen der Näherungsrechnung behandelt werden (vgl. z.B. Blankenagel 1985).

Beispiel 2: Pappschachtel. Problem: Bestimmung der Abmessungen einer Schachtel mit maximalem Volumen, die durch Hochbiegen von Eckenquadraten aus einem Rechteck entsteht.

Zur Untersuchung der Zielfunktion (ganzrational dritten Grades), welche die Rechtecksseitenlängen als Parameter enthält, kann ein Computer mit Software für symbolisches Rechnen verwendet werden (vgl. dazu Müller 1987). Bei einer derartigen unterrichtlichen Behandlung dieses Beispiels liegt der Schwerpunkt - wie auch schon bei Beispiel 1 - auf den Phasen des "Übersetzens" zwischen Realität und Mathematik, d.h. auf dem Mathematisieren der Ausgangssituation und auf dem Interpretieren und Validieren der im mathematischen Modell (hier mit Rechnerhilfe) erhaltenen Resultate.

Beispiel 3: Einkommensteuern. Problem: Konstruieren "vernünftiger" Einkommensteuerfunktionen (die jedem Einkommen die zu zahlende Steuer zuordnen) und Untersuchen solcher Funktionen wie auch der aktuellen bundesdeutschen Einkommensteuerfunktion

(siehe Henn 1988, Blum 1989).

Hier können vielfältig Computer eingesetzt werden, insbesondere zum Zeichnen von Einkommensteuerfunktionen. Dabei ist es besonders hilfreich, wenn systematisch Parameter im Funktionsterm verändert und die zugehörigen Auswirkungen studiert werden, um eine möglichst gute Anpassung an vorgegebene Bedingungen zu erreichen. Selbstverständlich können auch zahlreiche Berechnungen durchgeführt werden.

Beispiel 4: Autobahnkreuze. Problem: Führung der Trassen für Rechts- und Linksabbieger beim Kreuzen zweier Autobahnen (vgl. Böer/Volk 1982, Otto 1985).

Wiederum bieten sich mehrere Möglichkeiten zum Rechnereinsatz, insbesondere zur Anpassung von (ganzrationalen oder trigonometrischen) Funktionen an gegebene Daten, zur Untersuchung von Funktionen oder auch zur numerischen Integration bei der Bestimmung von Trassenlängen.

Beispielserie 5: Wachstumsprozesse. Problem: Beschreibung von verschiedenen Wachstums- oder Abnahmeprozessen (u.a. Waschbärenpopulation, Radioaktivität, Absorption, Gerichte, Aids) und Folgerungen (vgl. dazu auch Engel 1971 oder Stein 1987).

Hier spielen insbesondere die Differentialgleichungen des exponentiellen Wachstums  $f' = k \cdot f$  und des logistischen Wachstums  $f' = k \cdot f \cdot (b - f)$  eine wesentliche Rolle. Computer können u.a. zum Zeichnen von Richtungsfeldern, zur Simulation von Prozessen oder zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt werden. Letzteres kann etwa mittels Eulerverfahren geschehen, wobei der Schwerpunkt wieder auf dem Algorithmus liegt, oder es kann eine Numerik-Toolbox eingesetzt werden. Dabei ist es nicht sinnvoll, in eine solche "Black Box" hineinschauen zu wollen. "Verstehen" solcher Software kann heißen, ihre Wirkungsweise im Prinzip zu durchschauen und die Ergebnisse vernünftig interpretieren zu können (vgl. dazu auch Winkelmann 1988).

In allen genannten Beispielen sind Computer Werkzeuge, welche verschiedenen Zwecken dienen sollen. Sie sollen u.a. zur Entlastung und Effektivierung des Unterrichts beitragen und mit-helfen, relevante Inhalte, darunter auch komplexere außerma-

thematische Probleme, schulzugänglich zu machen. Weiter sollen sie zur Förderung von Zielen dienen, so insbesondere der Fähigkeit, zwischen Realität und Mathematik übersetzen zu können (s.o.).

Hier ist nicht der Ort, mögliche curriculare Veränderungen des Analysisunterrichts durch Computer zu diskutieren. Insgesamt werden wohl anwendungsnahe Ziele und Inhalte (hier insbesondere numerische Verfahren und Differentialgleichungen) wichtiger werden und wird mehr Zeit für Anwendungen zur Verfügung stehen.

Die bisherigen Ausführungen zum Computereinsatz im anwendungsbezogenen Analysisunterricht klingen recht positiv und vielversprechend. Sie müssen nun mit einigen anderen Aspekten konfrontiert werden, die in der (inzwischen reichlich vorhandenen) Literatur zum Computereinsatz oft nicht erwähnt werden, die aber ebenfalls wichtig sind und die einerseits sorgfältiger empirischer Forschungen bedürfen, andererseits aber auch unmittelbare methodische und curriculare Konsequenzen für den Analysisunterricht, speziell für die Behandlung von Anwendungen haben müssen.

## 2. Probleme, Grenzen und Gefahren

Zunächst sei daran erinnert, daß es prinzipielle Grenzen von Rechnern gibt. Wenn z.B. ein ökologischer Prozeß simuliert wird, so rührt die Aussagekraft der Resultate im Prinzip nur vom Modell her und nicht vom Rechner, der eben nur Rechenarbeit abnimmt. Allgemeiner können Rechner in Anwendungssituationen nicht darüber entscheiden, welche mathematischen Modelle - abhängig von gewissen Interessen oder Sichtweisen - adäquat und brauchbar sind und wie im Modell erhaltene mathematische Resultate zu interpretieren und zu bewerten sind. Selbstverständlich sind solche Grenzen fließend, und es ist auch für die Schule hochinteressant, diese Entwicklung zu verfolgen.

Wichtig scheint mir zu sein, daß, wenn Computer in der Schule benutzt werden, solche Grenzen für Schüler bewußt gemacht werden. Dies ermöglicht auch eine Distanzierung von dem und damit eine Reflexion über den Computer. Dies kann vom Lehrer methodisch fruchtbar gemacht werden. Hierzu gehören auch Reflexionen über Sinn und Bedeutung von Computern als mächtige, grundsätzlich aber eher nebensächliche Hilfsmittel beim Lehren, beim Lernen und beim Betreiben von Mathematik. Insgesamt geht es mir also auch um einen Beitrag des Analysisunterrichts zur Ent-

wicklung eines Metawissens bei Schülern, d.h. eines Wissens über Rechner und einer vernünftigen Einstellung von Schülern hierzu.

Als Nächstes will ich Grenzen der Nutzung von Computern diskutieren, die von potentiellen Gefahren herrühren, die bei deren Verwendung auftreten können. Die meisten dieser Gefahren scheinen derzeit noch nicht akut zu sein, was sich aber rasch ändern könnte.

Zunächst liegt eine Gefahr darin, daß "Computer-Mathematik" (d.h. diskrete und numerische Mathematik) überbewertet wird. Dabei sind die zentralen "kontinuierlichen" Begriffe, Methoden und Resultate (z.B. der Ableitungsbegriff oder der Hauptsatz) weiterhin unersetzlich wichtig (vgl. dazu auch Richenhagen 1983 oder Winkelmann 1984a), insbesondere auch zum Beschreiben und Bewältigen von Anwendungssituationen. So ist etwa der Ableitungsbegriff weiterhin eine unentbehrliche, höchst adäquate und wirkungsvolle Modellierung von Änderungsraten in realen Situationen. Insofern könnten Lernende sich in einem neukonzipierten "diskretisierten" Analysisunterricht die wesentlichen anwendungsbezogenen Grundideen wie Ableitung als lokale Änderungsrate nicht mehr aneignen. M.E. sollte sich folgendes ändern: Einerseits sollte der Analysisunterricht durch diskrete, numerische und algorithmische Themen und Ideen angereichert werden, und andererseits sollte Schülern die "wahre Bedeutung" der kontinuierlichen Analysis explizit deutlich gemacht werden. Rechner zwingen dazu, sich diese Bedeutung bewußt zu machen. Rechner stellen auch die Bedeutung der innermathematischen Kalküle in Frage und erzwingen eine diesbezügliche Neubesinnung. M.E. sind auch die Kalküle weiterhin unersetzlich (z.B. als Übungsmaterial oder für Arbeiten), sie können und sie sollten jedoch deutlich reduziert werden, u.a. zugunsten von Anwendungen. Eine Überbewertung von "rechnernahe" Mathematik birgt auch die Gefahr einer Vergrößerung der (ohnehin schon bestehenden) Stofffülle in sich, d.h. (statt einer Entlastung, wie vorhin postuliert) einer Anreicherung des Curriculums mit numerischen Verfahren, Differentialgleichungen, Differenzgleichungen usw., ohne anderswo zu reduzieren. Die Frage sollte aber nicht

lauten "Hier sind die Computer; welche dazu passenden Inhalte kann ich behandeln?", sondern "Hier sind die laut Zielen zu behandelnden Inhalte; wie können Computer dabei helfen?". Eine größere Stofffülle kann auch dadurch zustandekommen, daß Computer - wie alle methodischen Hilfsmittel - in ihren Möglichkeiten überschätzt werden. Ein Beispiel ist die Vehemenz, mit der manchmal ein umfangreiches Stoffgebiet Differentialgleichungen für die Schule propagiert wird. Dabei bringen Rechner ja "nur" bei der innermathematischen Lösungsphase Entlastungen. Dagegen bleiben die begrifflichen, die Mathematisierungs- und die Interpretations-Probleme bei Differentialgleichungen weiterhin nicht einfach für Lernende, insbesondere bei der ersten Begegnung mit diesem Stoff. Deshalb wird dieses Thema in der Schule m.E. auch im Computerzeitalter begrenzt bleiben müssen und jedenfalls nicht den Umfang einnehmen, der z.B. bei Winkelmann (1984b) angesprochen wird.

Weiter besteht die Gefahr, daß durch einen extensiven Gebrauch von Computern stark instrumentell ausgerichtete Denkweisen gefördert bzw. erst erzeugt werden. So könnte etwa durch die Verwendung fertiger Software beim Modellieren (z.B. bei wirtschaftlichen Problemen) der Schwerpunkt auf einem routinemäßigen Abarbeiten der angebotenen Möglichkeiten liegen, unter Vernachlässigung wesentlicher Aktivitäten wie Vergleich und Abwägung verschiedener Modelle oder inhaltliche Interpretationen von Modell-Resultaten.

Am Ende von Teil 1 habe ich Perspektiven genannt, nach denen reale Anwendungen in der Schule durch Computer aufgewertet werden. Es gibt aber auch die entgegengesetzte Möglichkeit: Daß nämlich reale, "handfeste" Anwendungsbeispiele (wie etwa ein Schwingungsvorgang) durch Computer-Simulationen ersetzt werden, daß Computergraphiken statt realer Objekte betrachtet werden, d.h. daß das von Hentig befürchtete "allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit" speziell auch den Analysisunterricht betrifft; allgemeiner: daß konkrete Schüler-Aktivitäten durch Computer-Aktivitäten ersetzt werden.

Entsprechendes gilt auch auf der geistigen Ebene. Es besteht nämlich die Gefahr, daß Lernende versuchen, intellektuellen Anstrengungen durch "Spielen" und blindes Manipulieren mit dem

Werkzeug Rechner aus dem Weg zu gehen. Allgemeiner könnten wesentliche geistige Tätigkeiten durch "Knöpfchendrücken" oder durch Konzentrieren auf vordergründige technische Probleme ersetzt werden. Dagegen ist zu sagen, daß methodische Hilfsmittel allgemein ja dazu da sind, individuelle Erkenntnisprozesse von Lernenden zu erleichtern, nicht aber, solche Prozesse zu behindern oder gar überflüssig zu machen; das wäre auch prinzipiell zum Scheitern verurteilt. Hilfsmittel sollen sich in ihrer methodischen Funktion mit der Zeit gewissermaßen selbst überflüssig machen. Insofern sollten Schüler mit der eigenen geistigen Verarbeitung eines gegebenen Problems bereits beginnen, bevor Computer eingesetzt werden, und sie sollten nach deren Gebrauch die beobachteten Phänomene analysieren, einordnen und theoretisch durchdringen. Computer sollen hierbei nur punktuell eingesetzt werden, sie sollen entlasten, eine größere Vertrautheit mit dem Gegenstand und eine breitere Erfahrungsbasis schaffen und eine Konzentration auf das Wesentliche ermöglichen. Mehr können sie realiter methodisch ohnehin nicht leisten.

Eine andere, dem eben Gesagten gewissermaßen entgegengesetzte Gefahr wird dann real, wenn Computer konsequent zur Entlastung von Routine-Tätigkeiten und von "niedrigen" Fertigkeiten genutzt werden. Denn dann verschiebt sich der Schwerpunkt des (Analysis-)Unterrichts grob gesprochen vom kalkülmäßigen Rechnen zum angewandten Problemlösen, zum Begriffsbilden etc., kurz: Der Unterricht wird (noch) anspruchsvoller für alle Beteiligten, vielleicht für viele Schüler zu anspruchsvoll. Sicher kann hier methodisch manches aufgefangen werden, aber die Tendenz scheint mir in der Tat unausweichlich.

Es gibt sicher keine Patentrezepte dafür, wie all diesen Gefahren begegnet werden kann. Allgemein scheint mir der folgende triviale Ratschlag ganz wichtig zu sein: Die Gefahren müssen Lehrenden und Lernenden ganz deutlich bewußt sein. D.h., Fragen wie die möglicher Reduzierungen von Eigen-Aktivitäten oder möglicher Veränderungen von Denk- und Verhaltensweisen durch Computer sollen nicht nur vom Lehrer überlegt, sondern auch mit Schülern thematisiert werden. Auch dies trägt zur Entwicklung von Meta-Wissen bei, was mir, wie schon gesagt,

sehr wichtig ist. Und unterrichtliche Konsequenzen (u.a. auch: ein Verzicht auf einen Computereinsatz an manchen Stellen) werden sich dann fast von alleine ergeben.

Zu den bisher genannten kommen weitere Probleme bei der Verwendung von Computern im Analysisunterricht hinzu, die zumindest zur Zeit empfindliche Hindernisse bei der Rechnernutzung darstellen. So gibt es im deutschsprachigen Raum noch nicht genügend gute Software (vgl. die hilfreiche Dokumentation Landesinstitut 1988). Noch wichtiger ist, daß es bisher nur ganz wenige Curriculum-Materialien und Schüler-Aufgaben gibt, die entsprechend den neuartigen Zielen und Inhalten konzipiert sind und im alltäglichen Analysisunterricht eingesetzt werden können. Und natürlich müssen in der Lehrerschaft noch genügend breite Kenntnisse, Fähigkeiten, Einstellungen und Erfahrungen zu Computern bzw. zu einem durch Computer veränderten Analysisunterricht aufgebaut werden. Hierfür ist gezielte Lehrerfortbildung unabdingbar, und zwar nicht bloß in Form der verbreiteten "Programmierkurse", sondern vor allem auch bzgl. didaktischer und pädagogischer Fragen.

#### Literatur

- Blankenagel, J.:  
Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik. BI, Mannheim 1985.
- Blum, W.:  
Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 31 (1985) 2, 195-232.
- Blum, W.:  
Analysis in der Fachoberschule - Überlegungen zur Konzeption, zu Anwendungsbezügen und zum Rechnereinsatz. In: Mathematik in der beruflichen Bildung (Hrsg.: Bardy, P.), Leuchtturm, Alsbach 1989.
- Blum, W. / Kirsch, A.:  
Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 25 (1979) 3, 6-24.
- Blum, W. / Törner, G.:  
Didaktik der Analysis. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1983.

- Böer, H. / Volk, D.:  
Trassierung von Autobahnkreuzen - autogerecht oder ...  
Gegenwind, Göttingen 1982.
- Bussmann, H. / Heymann, H.-W.:  
Differentialrechnung - Anwendungs- und computerorientier-  
te Aufgaben mit Lösungen. Westermann, Braunschweig 1985.
- Engel, A.:  
Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer  
Modelle. In: Der Mathematikunterricht 17 (1971) 3, 5-56.
- Henn, H.-W.:  
Einkommensbesteuerung aus mathematischer Sicht. In: Zen-  
tralblatt für Didaktik der Mathematik 20 (1988) 4,  
148-163.
- Kaiser, G. / Blum, W. / Schober, M.:  
Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorien-  
tierten Mathematikunterricht. Fachinformationszentrum,  
Karlsruhe 1982 (Nachtrag 1989).
- Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.): Neue Me-  
dien im Unterricht, Mathematik 1987/88. Verlagskontor,  
Soest 1988.
- Müller, E.:  
Computer-Algebra am Beispiel von MuSimp/MuMath im Mathe-  
matikunterricht der Sekundarstufe II - Analysen und didak-  
tische Überlegungen. Wissenschaftliche Hausarbeit, Gesamt-  
hochschule Kassel 1987.
- Otto, A.:  
Analysis mit dem Computer. Teubner, Stuttgart 1985.
- Richenhagen, G.:  
Numerisch vs. analytisch - Überlegungen zum epistemologi-  
schen Ort der Schulanalysis. In: mathematica didactica 6  
(1983) 1, 45-56.
- Stein, G.:  
Ökologische Modelle im Mathematikunterricht. Preprint TH  
Darmstadt 1987.
- Winkelmann, B.:  
The Impact of the Computer on the Teaching of Analysis.  
In: International Journal for Mathematical Education in  
Science and Technology 15 (1984a) 6, 675-689.
- Winkelmann, B.:  
Veränderungen von Zielsetzungen des Analysisunterrichts  
im Computerzeitalter. In: Informatik als Herausforderung  
an Schule und Ausbildung (Hrsg.: Arlt, W. / Haefner, K.)  
Springer, Berlin 1984b.
- Winkelmann, B.:  
Softwareeinsatz im Analysisunterricht. In: Computer in  
der Schule 2 (Hrsg.: Graf, K.-D.), Teubner, Stuttgart  
1988.