In: Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel, Hrsg.: Blum u.a., 1991, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover, S. 71-84

Werner Blum, Kassel

Der (Taschen-)Computer als Werkzeug im Analysisunterricht – Möglichkeiten und Probleme –

1. Einleitung

Computer dringen seit vielen Jahren in immer mehr Lebensbereiche ein, auch in das Bildungssystem. Hiervon bleibt auch und insbesondere der Mathematikunterricht nicht unberührt. Die Zahl der Veröffentlichungen zum Thema „Computer im Mathematikunterricht" wächst beständig (man vergleiche den von Fey 1989 gegebenen beeindruckenden internationalen Überblick).

Hierbei wird fast ausschließlich an *Personal-Computer* (PC) gedacht. Deren Einsatz ist aber mit beträchtlichen *organisatorischen Schwierigkeiten* verbunden, da i. a. nur in speziellen Computerräumen genügend PCs zur Verfügung stehen. Eine Veränderung dieser Situation ist nicht zu erwarten, und es ist wohl auch gar nicht wünschbar, daß in Zukunft jedes Klassenzimmer zum Computerkabinett wird.

Deshalb werden PCs sicherlich nie eine solch wichtige Rolle spielen können, wie ihnen in didaktischen Analysen zugewiesen wird. Hierauf hat – m. W. als erster – *Heinz Griesel* in mehreren Diskussionen in den letzten Jahren deutlich hingewiesen. Er hat weiter betont, daß er sich sehr wohl substantielle Veränderungen des Mathematikunterrichts durch Computer vorstellen kann, aber weniger durch PCs als vielmehr durch hoch leistungsfähige *Taschencomputer* (TC), d. h. durch programmierbare und grafikfähige Taschenrechner (TR), die auch symbolisch-algebraisch rechnen können. Solche TCs werden in wenigen Jahren so billig sein, daß sie in Klassensätzen verfügbar sein und viele Schüler sie privat besitzen werden.

Im folgenden will ich *analysieren,* welche *Auswirkungen* Computer auf den *Analysisunterricht* haben können. Unter *„Computer"* verstehe ich dabei *sowohl PCs als auch* – und dies sei betont – *TCs* (und damit auch gewöhnliche *TRs*). Ich stelle mir nämlich für den Unterricht ein *Nebeneinander* von ständig verfügbaren TCs und von gelegentlich, vor allem auch zu Demonstrationszwecken verwendeten PCs vor. Ich halte also die Verwendung von TCs, insbesondere sogar von speziell für die Schule konzipierten TCs, grundsätzlich für sehr sinnvoll und teile nicht die Ansicht, daß – vor allem auch im Hinblick auf die Anwendungspraxis – in der Schule ausschließlich PCs mit mächtiger, hochprofessioneller Software verwendet werden sollten. Diese Frage entschärft sich hier insofern, als die folgenden Analysen ohnehin fast immer für *jegliche* Computer mit entsprechender Software gelten, seien es TCs oder PCs. Wenn nötig, differenziere ich an Ort und Stelle.

Grundlage meiner Analysen ist eine *Konzeption des Analysisunterrichts,* die bei Blum/Törner (1983) „Konzeption mit methodischen Vereinfachungen" genannt wird (Griesel 1976; Blum/Kirsch 1979); hieran wird in Abschnitt 2 nochmals ganz kurz erinnert. Mein Standpunkt ist dabei konsequent, daß ich Computer als *Werkzeug* bei der Realisierung dieser Analysis-Konzeption ansehe; weitergehende Aspekte (vor allem: Computer als Unterrichtsgegenstand) kommen nur als notwendige Ausweitung dieses Standpunkts ins Spiel (etwa: Reflexion über Nutzen und Grenzen von Werkzeugen). Welche Anforderungen solch ein Werkzeug u. a. erfüllen sollte, wird ebenfalls in Abschnitt 2 exemplarisch skizziert.

In Abschnitt 3 stelle ich dann einige *Möglichkeiten zur methodischen Nutzung* von Computern im Analysisunterricht zusammen, und in Abschnitt 4 erörtere ich durch Computer hervorgerufene bzw. wünschbare *curriculare Veränderungen* des Analysisunterrichts. In Abschnitt 5 gehe ich auf *Probleme, Grenzen und Gefahren* des Computereinsatzes im Analysisunterricht ein. Schließlich versuche ich in Abschnitt 6, zusammenfassend – trotz vieler notwendig offen gebliebener Fragen – einige vorsichtige und vorläufige *Anregungen* für die Unterrichtspraxis zu geben. Dabei wird sich zeigen, daß die Anregungen auch eine *Alternative zu extremen Positionen* darstellen, wie ich sie an anderer Stelle (Blum 1986) charakterisiert habe (radikale Umgestaltung des Unterrichts bzw. Ignorieren von Computern).

Fast alle der folgenden Ausführungen sind so oder ähnlich in der inzwischen umfangreichen Literatur zum Computereinsatz im Mathematikunterricht zu finden. Neuartig sind wohl – neben einigen „lokalen" Akzentsetzungen – die Betonung von TCs sowie die zusammenfassende Darstellung von methodischen Möglichkeiten, von curricularen Implikationen und von Problemen des Computereinsatzes unter Bezug auf eine bestimmte Konzeption des Analysisunterrichts.

2. Zur Grund-Konzeption

2.1. In der genannten Analysis-Konzeption sollen Schüler
- tragfähige realitätsbezogene *Grundideen* (wie z. B. Ableitung als lokale Änderungsrate) und geometrische *Grundvorstellungen* (wie z. B. Integral als Flächeninhalt) zu den wesentlichen Begriffen, Methoden und Resultaten der Analysis aktiv aufbauen und damit
- diese Inhalte bei innermathematischen Aufgaben und bei Anwendungsproblemen *begründet und verständig handhaben* können (wofür neben Grundideen und Grundvorstellungen auch gewisse formale Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen ausgebildet werden müssen).

Dies soll auch durch Beachten von gewissen *methodischen Gesichtspunkten* wie Wahl geeigneter Darstellungsebenen oder Ausgliedern plausibler Tatsachen erreicht werden; bzgl. Details siehe Blum/Törner (1983).

Diese Konzeption ist ohne Bezug auf spezielle Hilfsmittel formuliert worden. In den folgenden Abschnitten wird untersucht, welche Rolle Computer (TCs/PCs) beim Aufbau von Grundideen und Grundvorstellungen, beim verständigen Umgehen mit Inhalten der Analysis oder beim Zugänglichmachen dieser Inhalte spielen können. Dabei wird sich zeigen, daß diese Werkzeuge nicht nur methodisch zum Einsatz kommen, sondern unvermeidbar auch die Ziele und Inhalte beeinflussen und damit die Konzeption selbst teilweise verändern, allerdings weitgehend „systemimmanent".

2.2. Wie gesagt denke ich beim Computereinsatz sowohl an PCs wie auch und vor allem an ständig verfügbare TCs. Wie sollte nun ein TC beschaffen sein, der in dieser Analysis-Konzeption als Hilfsmittel eingesetzt wird? Die Konzipierung eines geeigneten *„Schul-Taschencomputers"* ist eine höchst anspruchsvolle Forschungs- und Entwicklungsaufgabe, die ich hier natürlich nicht einmal ansatzweise leisten kann (ganz abgesehen vom Problem der praktischen Realisierung). Ich will nur einige Gedanken hierzu vom Blickwinkel der Analysis aus andeuten.

Zunächst eine *„Abschätzung nach oben"*. Obwohl die erhältlichen Systeme (Computer + Software) zunehmend interaktiver und ergonomischer, also benutzerfreundlicher konzipiert werden, erfordern sie offenbar vom Schüler desto mehr Aufwand und Spezialwissen für die Einarbeitung und Gewöhnung und werden somit desto mehr notwendigerweise selbst zum Inhalt des Unterrichts, je mächtiger und umfassender sie sind. Dies zeigen jedenfalls umfangreiche Unterrichtserfahrungen mit DERIVE in Kassel (R. Köhler, dem ich übrigens für zahlreiche Anregungen danke), über die an anderer Stelle berichtet werden wird. Ein solcher Aufwand ist aber – auch im Hinblick auf Computer-Verwendungen, denen der Schüler in Beruf oder Studium später vielleicht begegnen wird – didaktisch nicht zu rechtfertigen, Aufwand und Ertrag stehen hier in einem Mißverhältnis (Schupp 1989). Insofern ist zu fordern, daß ein Schul-TC in vieler Hinsicht bescheidenere formale Ansprüche erfüllen sollte als die derzeit verfügbare professionelle Software. Ein Beispiel nur, das die Richtung andeuten soll: Es ist i. a. nicht nötig oder sogar unerwünscht, wenn beim Lösen von Gleichungen zweiten oder dritten Grades (etwa im Rahmen einer Funktionsuntersuchung) der Computer aufwendige Terme mit der imaginären Einheit i ausgibt statt bloß der reellen Lösung bzw. anstatt zu melden „keine Lösung" (in $\mathbb{R}$). Und so wie die Prozenttaste beim TR entbehrlich ist, braucht auch die Software eines TC nicht alle möglichen Spezialfälle für Grafik und Symbolik abzudecken, sondern nur die für den Unterricht wesentlichen, z. B. (was bei DERIVE nun gerade fehlt) zum Aufstellen von Wertetabellen.

Die eben genannte Forderung entspricht der, die A. Kirsch im Zusammenhang mit dem TR-Einsatz erhoben hat (in diesem Band sowie 1985), nämlich für das Erreichen angestrebter Ziele *angemessene Hilfsmittel* einzusetzen und die didaktischen Potenzen auch einfacher Hilfsmittel auszuloten. Aber selbstverständlich ist auch eine *„Abschätzung nach unten"* für die Möglichkeiten eines Schul-TC im Rahmen des Analysisunterrichts nötig. Er sollte – neben seiner Funktion als gewöhnlicher TR – programmierbar sein, und zwar in einer schulüblichen Sprache (wobei, siehe Abschnitt 3, für unsere Zwecke einfache BASIC-Programme genügen). Er sollte über ein reichhaltiges grafisches Repertoire verfügen (natürlich mit sehr hoher Auflösung). U. a. sollte eine – auch wiederholte, möglichst sogar kontinuierliche – Ausschnittvergrößerung einfach realisierbar sein (Idee des „Funktionenmikroskops" zur Ausbildung einer angemessenen Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff; siehe Kirsch 1979), oder es sollte möglich sein, die Auswirkungen von einfachen Änderungen des Terms auf den Graphen und umgekehrt unmittelbar zu studieren. Allgemeiner sollte eine simultane grafische, arithmetische und algebraische Repräsentation mathematischer Gegenstände auf dem Screen möglich sein. Weiter sollten die algebraischen Kalküle der Schulanalysis (Termumformungen, Lösen von Gleichungen, Differenzieren, Integrieren) implementiert sein. Die Eingabe mathematischer Objekte sollte flexibel möglich sein (vgl. zum Funktionsbegriff die von Winkelmann 1988 b analysierten Möglichkeiten), wobei – ebenso wie bei deren Darstellung – die schulüblichen Notationen verwendet werden sollten. Auch die interne Repräsentation mathematischer Objekte, z. B. beim Funktionsbegriff (vgl. wiederum Winkelmann 1988 b), sollte den dabei jeweils angestrebten stoffdidaktischen Intentionen entsprechen. (Weil dies bei der derzeit erhältlichen PC-Software nur bedingt der Fall ist, treten beim unterrichtlichen Einsatz von Computern alleine hierdurch verursachte spezifische Probleme auf, die es auch erforderlich machen, das System selbst zum Unterrichtsthema zu machen; auf dieses wichtige Thema kann ich im folgenden nicht eingehen.)

Viele weitere sinnvolle didaktische Anforderungen, allgemein wie auch speziell auf die Analysis bezogen, sind im Software-Kriterienkatalog des Soester Landesinstituts (1988) zu finden.

Im folgenden kann man sich unter „Computer" i. a. einen so konzipierten TC vorstellen (in dessen Gebrauch Schüler nach und nach, beginnend in der Sekundarstufe I, eingeführt werden), aber auch – heute noch realistischer – einen Verbund aus TR und PC. Alle in Abschnitt 3 genannten Einsatzmöglichkeiten enthalten implizit ebenfalls Anforderungen an einen im Analysisunterricht verwendeten Computer.

3. Möglichkeiten zur methodischen Nutzung von Computern

3.1. Im Rahmen der genannten Analysis-Konzeption können Computer zum ersten als *Hilfsmittel für numerisches Rechnen* bei „sowieso" behandelten bzw. bei wünschbaren Themen (vgl. dazu

Abschnitt 4) dienen. Hierdurch kann der Unterricht entlastet und effektiviert und können komplexere, insbesondere auch außermathematische Probleme mit realistischeren Daten schulzugänglich gemacht werden. *Beispiele* hierzu kann man in der Literatur (z. B. schon bei Engel 1977 oder etwa bei Neill/Shuard 1982, Otto 1985, Lehmann 1988 sowie in diversen Schulbüchern) zahlreich finden, u. a.

- Funktionswertberechnungen, insbesondere auch bei Polynomen mittels Hornerschema
- Näherungsweise Nullstellenberechnungen
- Numerische Bestimmung von Extrema (ohne Differentialrechnung)
- Numerische Grenzwertbestimmungen bei Folgen und Funktionen, speziell für Ableitungen (z. B. bei $\exp'0$)
- Numerische Integration vor bzw. statt analytischer Integration (z. B. bei $\int \frac{dt}{t}$)
- Numerische Lösung einfacher (nicht im analytischen Sinne!) Differentialgleichungen (z. B. von $f' = k f(b - f)$) bzw. Differentialgleichungssysteme (z. B. von Räuber-Beute-Systemen) vor bzw. statt deren analytischer Lösung.

All dies kann gegebenenfalls auch innerhalb von Anwendungskontexten erfolgen, so z. B. die numerische Lösung einer Gleichung vierten Grades bei der Behandlung des Anwendungsbeispiels Kettenkarussell (zu diesem und weiteren Beispielen für den Einsatz von Computern im anwendungsorientierten Analysisunterricht siehe Blum 1989).

Die wesentliche Rolle von Computern besteht in sämtlichen Beispielen „nur" darin, daß sie im Unterricht anfallende Rechenarbeit abnehmen. Sie leisten prinzipiell nicht mehr als frühere Rechen-Hilfsmittel, arbeiten natürlich aber viel schneller, was auch eine qualitative Verbesserung darstellt. So können Schüler etwa Grenzprozesse (anders als früher) numerisch „erleben" (was natürlich präzise Begriffsbildungen und Beweise nicht ersetzen kann). In fast allen Fällen reichen bei konkreten Problemen die *einfachsten* numerischen Verfahren völlig aus, also z. B. das Bisektions- oder das Eulerverfahren. Selbstverständlich müssen bei allen genannten Beispielen auch Gesichtspunkte der *Näherungsrechnung* (Überschläge, Fehlerabschätzungen, sinnvolle Genauigkeitsangaben, Abbruchkriterien) beachtet werden. Dies bedeutet nicht, daß sämtliche Begriffe und Methoden der numerischen Mathematik in die Analysis-Kurse aufzunehmen sind; vielmehr geht es um die Erzeugung einer vernünftigen Haltung der Schüler, um die exemplarische Weckung bzw. Weiterentwicklung von *Problembewußtsein für numerische Fragen* (hierzu vergleiche man Blankenagel 1988 sowie die umfangreiche Literatur aus der ehemaligen DDR, u. a. Fanghänel/Flade/Pruzina 1990).

Bei sämtlichen genannten Beispielen sind *PCs* prinzipiell *entbehrlich,* es *genügen* TCs, sogar nur in ihrer Rolle als *TRs*. Bei einigen Beispielen (etwa: Studieren von Stabilisierungs-Phänomenen bei Folgen wie $(1 + \frac{1}{n})^n$) erscheint eine *Stufung* sinnvoll und natürlich: Zuerst Verwendung des TC nur als einfacher TR, dann Programmierung und schließlich Grafikeinsatz. Wesentlich im Sinne der angestrebten Ziele ist „nur", daß Schüler die jeweiligen *Algorithmen* durchschauen und auch selbst aufstellen können. Dies braucht eigentlich bloß bis zu einer Form geschehen, in der die Algorithmen als noch umgangssprachliche, aber schon „rechnernahe" *Ablaufdiagramme* formuliert sind, die dann mittels TR abgearbeitet werden. Natürlich sollen Schüler auch erfahren, ob die von ihnen aufgestellten Algorithmen auch tatsächlich richtig funktionieren. Für solche *Kontroll*-Zwecke genügt es m. E. durchaus, wenn entsprechende Programme einfach aus dem Schulbuch entnommen oder von einzelnen Schülern in häuslicher Arbeit erstellt und dann in die Klasse eingebracht, analysiert und diskutiert werden. Diese Programme sind ja auch nur wenige Zeilen lang, und mit Griesel (1985) meine ich, daß im Analysisunterricht mehr als diese *„Zwölf-Zeilen-Programme"* gar nicht vorzukommen braucht.

Insofern spielen spezielle Programmier-, d. h. *Codierungs*-Fertigkeiten von Schülern hier nur eine *untergeordnete* Rolle. Damit relativiert sich auch stark die vieldiskutierte Frage nach „der" geeigneten Programmiersprache. Selbstverständlich sind Codierungsfertigkeiten nicht überflüssig, da auch die Umsetzung in Programme motivierend und verständnisfördernd sein kann. Solche Fertigkeiten können Schüler aber in einfacher Weise „nebenher" erwerben, wenn sie nicht schon sowieso aus dem Informatikunterricht vorhanden sind.

3.2. Zum zweiten können Computer als *Hilfsmittel für symbolisches Rechnen* dienen. Wiederum kann dies zur Effektivierung des Analysisunterrichts und zur Anreicherung mit komplexeren Problemen beitragen; zwei einfache *Beispiele* aus der Fülle der in der (noch vorwiegend angelsächsischen) Literatur (u. a.: Small/Hosack 1986) genannten:
- Formale Ableitungsbestimmungen, auch bei Funktionen mit Parametern
- Formale Integralbestimmungen, insbesondere solche, bei denen analytische Integrationsregeln wie Substitution oder Partialbruchzerlegung nötig wären.

Computer dienen hierbei als eine Art umfassende Formelsammlung, aus der sowohl Allgemeines als auch Spezielles abgerufen werden kann. Auch dies kann wieder innerhalb von Anwendungskontexten geschehen.

3.3. Zum dritten können Computer als *Zeichen-Hilfsmittel* dienen, wodurch ebenfalls eine Effektivierung bewirkt werden kann. Auch hierzu enthält die Literatur zahlreiche *Beispiele* (siehe etwa Tall 1987, Lehmann 1988 oder Landesinstitut 1990), u. a.
- Zeichnen von Funktionsgraphen, Tangenten, Flächen, Richtungsfeldern etc.; dabei auch Verändern von Parametern und Beobachten, was passiert (z. B. Veranschaulichung und Variation der Steigungen $\exp_b'0$ für verschiedene Basen b bei der Ableitung der Exponentialfunktionen)
- Anpassung von Funktionsgraphen an gegebene Daten
- Veranschaulichung numerischer Algorithmen.

Dabei sind für komplexere Grafiken sicherlich PC-Screens günstiger bzw. sogar TC-Screens ungeeignet. Deshalb erscheint beim Einsatz von Computern als Zeichen-Hilfsmittel ein *Verbund von TC und PC* sinnvoll. Computer können hierbei auch prinzipiell mehr leisten als herkömmliche Visualisierungs-Hilfsmittel wie Tafelbilder oder Folien, indem auch dynamisch-operative Momente betont werden können. D. h. hier werden nicht bloß herkömmliche Werkzeuge durch effektivere, aber im Prinzip gleichartige simuliert, sondern neuartige Werkzeuge verfügbar.

3.4. Über diese Rolle als Rechen- bzw. Zeichenknecht hinaus können Computer in dieser Analysis-Konzeption – und das ist noch wichtiger als das Bisherige – als *methodische Hilfsmittel* neuer Art (neben den bewährten) eingesetzt werden, welche zur Förderung gerade anspruchsvollerer Ziele beitragen (Kirsch 1985: „Neue Wege zu alten Zielen") und die Aneignung mathematischer Inhalte für Schüler erleichtern sollen. Insbesondere sollen sie die Bildung von Begriffen und den Aufbau von adäquaten Grundideen und Grundvorstellungen fördern und auch ein besseres Behalten der Inhalte unterstützen. Hierzu soll vor allem auch die Darstellung von Inhalten auf verschiedenen Ebenen (ggfs. simultan) beitragen. Fast alle bisher genannten *Beispiele* zum Computereinsatz lassen sich in dieser Weise benutzen oder ausbauen, etwa:
- Vertrautwerden mit *Funktionen und deren Eigenschaften* durch zielgerichtetes und systematisches Verändern von Parametern im Term der behandelten Funktionen (rationale, $\sqrt{\ }$, exp oder sin) und Studieren der Auswirkungen auf den Graphen
- Numerische Vorbereitung bzw. Veranschaulichung des *Konvergenz-*, des *Ableitungs-* bzw. des *Integralbegriffs* oder auch der entsprechenden *Summenregeln*

- Vermittlung einer geometrischen Grundvorstellung vom *Ableitungsbegriff* durch Visualisierung des Glättungs- bzw. Nichtglättungsprozesses bei verschiedenen Funktionen bei Vergrößerung mittels eines „Funktionenmikroskops"
- Aufbau einer Grundidee vom *Integralbegriff* durch geometrische und numerische Veranschaulichung von Produktsummen und des zugehörigen Grenzprozesses
- Entdecken von *Ableitungsregeln* (z. B. der Kettenregel; vgl. Müller 1987) durch gezieltes Experimentieren mit zusammengesetzten Funktionen
- Auf „Übersetzungsqualifikationen" abzielende Behandlung von *Extremwertaufgaben* durch Konzentration auf das Finden des Ansatzes und später auf das Interpretieren der mathematischen Lösung und Benutzung eines Computers für die Untersuchung der Zielfunktion
- Förderung einer adäquaten *Einstellung zu Problemen* bzw. zur Mathematik überhaupt durch Bewußtmachen des Stellenwertes von numerischen im Vergleich zu analytischen Rechnungen in der Integralrechnung.

Weiter bieten Computer vielfältige Möglichkeiten für *Simulationen*, z. B. bei exponentiellen Prozessen oder bei ökologischen Systemen, wodurch Schüler sowohl die betreffenden Realsituationen besser verstehen als auch allgemeine Einsichten in Modellbildungsprozesse gewinnen können.

Gerade die letztgenannten Beispiele sollten deutlich machen, daß hierbei nicht nur nachträgliche numerische, grafische oder symbolische *Veranschaulichungen* möglich sind, sondern auch ein *Gewinnen von Erkenntnissen* aus gegebenen Darstellungen (dies hat vor allem Biehler 1985 betont). All dies kann insbesondere auch durch ein stärker aktiv *experimentierendes* und selbständig *entdeckendes* Lernen mit Computerhilfe gefördert werden. So kann etwa ein „numerisches Experimentieren" (Pruzina 1989) den Grenzwertbegriff vorbereiten, oder es kann die Idee des Funktionenmikroskops die Bildung des Differenzierbarkeitsbegriffs initiieren. Überhaupt eröffnen sich durch Visualisierungen wie auch durch symbolische Manipulationen z. T. ganz neue Möglichkeiten, *Phänomene* zu beobachten und zu analysieren. Auch solche „Computer-Phänomene" können aufschlußreich, herausfordernd, aufregend für Lernende sein und fruchtbare Denkprozesse initiieren, insbesondere bei *interaktivem* Gebrauch des Werkzeugs.

Ein anderer Aspekt: Ich werde in Abschnitt 5 auf *Grenzen* von Computern zu sprechen kommen, z. B. beim Konvergenzbegriff. Solche Grenzen liefern aber auch neuartige unterrichtliche Möglichkeiten, die didaktisch und pädagogisch fruchtbar gemacht werden können. Denn hierdurch können Lernende zu weiteren theoretischen Überlegungen, zu Begriffsbildungen und zu Sinndeutungen herausgefordert werden. Z. B. habe ich selbst vor einiger Zeit im Unterricht erlebt, wie das näherungsweise Berechnen von Ableitungswerten bei 2^x mittels TR bei einigen Schülern einen theoretischen Konvergenzbegriff geradezu provoziert hat. Allgemeiner bieten *Reflexionen* über Möglichkeiten und Grenzen von Computern und ein explizites *Inbeziehungsetzen* dessen, was Computer und was Menschen „konnten", derzeit „können" oder in Zukunft vielleicht „können" werden, auch die Chance, Lernende zum Nachdenken über wesentliche mathematische bzw. philosophische Fragen herauszufordern.

Ein paar kurze abschließende Bemerkungen zum Problem der Verwendung von Computern als „Black Box" mit eingebauter Software. Wenn ein numerischer Algorithmus (einschließlich der jeweils zugehörigen mathematischen Begriffe) prinzipiell klar ist, so kann der Computer m. E. diesbezüglich auch als Black Box verwendet werden (die dann auch auf anderen als den im Unterricht behandelten Verfahren basieren darf und dies i. a. auch tun wird). Bei Grafik, beim symbolischen Rechnen und bei Simulationen würde ich den Computer auf jeden Fall im Black-Box-Sinne einsetzen, d. h. ohne wissen zu wollen, wie das Ganze im Innern funktioniert. Trotzdem sollte der Lernende die Black Box *„verstehen"*. Dies sollte hier aber etwas anderes bedeuten

(„äußere" bzw. „analoge Aufklärung" im Sinne von Winkelmann 1988 a), nämlich durchschauen ihrer Wirkungsweise, fähig sein, die Ausgaben vernünftig zu interpretieren.

Soweit zu Möglichkeiten, den Analysisunterricht – sowohl einen solchen entsprechend der genannten Konzeption als auch einen „herkömmlicher" Art – durch Computer fachmethodisch zu verbessern (und wohl auch, was ich hier nur gestreift habe, allgemeinmethodisch – Stichworte sind etwa offener oder binnendifferenzierter Unterricht; viele diesbezügliche Überlegungen sind im einleitenden Report des Tagungsbands Churchhouse et al. 1986 zu finden, und Lehmann 1988, Bd. I, gibt zahlreiche unterrichtspraktische Hinweise). Aber darin erschöpft sich deren Bedeutung natürlich noch nicht. Denn das Vorhandensein leistungsfähiger Mittel hat stets auch Rückwirkungen auf Ziele und Inhalte.

4. Durch Computer bewirkte curriculare Veränderungen

4.1. Zuerst zu den *Zielen:* Durch die umfassende Verfügbarkeit von Computern werden einerseits „niedrigere" *Fertigkeiten* wie kalkülmäßiges numerisches, algebraisches oder analytisches Rechnen oder wie Zeichnen von Graphen in ihrer Bedeutung zweifellos *abgewertet.* Andererseits werden wünschbare *Haltungen* und *Aktivitäten* beim Problemlösen wie systematisches Probieren, Erkunden, Testen oder Experimentieren noch *wichtiger* als bisher (ohne daß rationales Begründen, Argumentieren und Beweisen hintanzustellen wären). Dasselbe gilt für *Fähigkeiten* wie „Denken in Abläufen". Noch wichtiger werden auch die Fähigkeiten, ein Problem vernünftig zu formulieren bzw. erhaltene Ergebnisse (arithmetischer, algebraischer oder grafischer Art) im Ausgangsproblem zu interpretieren; ein Beispiel ist etwa das Aufstellen eines Modells zur Simulation einer Epidemieausbreitung und die anschließende Interpretation der – mittels Computer erhaltenen – Modell-Ergebnisse. Insgesamt findet demnach eine partielle Verschiebung bei der Wertigkeit von im Unterricht angestrebten Qualifikationen statt, ohne daß sich allerdings die grundlegenden Lehrziele (vgl. Abschnitt 2) ändern würden.

4.2. Weiter hat die Verfügbarkeit von Computern auch Konsequenzen für die *Inhalte.* Zuerst: Was wird *wichtiger?* Dadurch, daß praxis- und (entsprechend den genannten Zielen) auch schulrelevante *diskrete Begriffe* und *numerische Verfahren* nun für die Schule besser zugänglich werden, erhöht sich die curriculare Bedeutung dieser Begriffe und Verfahren, der zugrundeliegenden *Ideen* sowie der damit erschließbaren Themen, insbesondere:
- Der numerische Aspekt bei den grundlegenden Begriffen und Methoden der Analysis (die überzeugenden Ausführungen von Richenhagen 1983, daß und weshalb dieser Aspekt in der Schulanalysis zu kurz kommt, gelten auch heute noch); vor allem: numerische Algorithmen für Funktionsuntersuchungen und für Integration
- Das Thema Folgen, insbesondere bzgl. des rekursiven Aspekts
- Einfache Differentialgleichungen einschließlich numerischer Lösungsverfahren.

In diesem Zusammenhang werden auch allgemeinere Aspekte der *numerischen Mathematik* wichtiger, die exemplarisch angesprochen werden können, so z. B. Fragen nach der Genauigkeit von Algorithmen (z. B. der Approximationsgüte des Trapezverfahrens; siehe dazu die Vorschläge von Kirsch 1988).

Der schulische Stellenwert von diskreten Begriffen und von numerischen Algorithmen sollte allerdings – im Gegensatz zu manchen Protagonisten der diskreten Mathematik, insbesondere in den USA – relativiert werden (vgl. Richenhagen 1983, Winkelmann 1984 a sowie Churchhouse et

al. 1986). Denn die zentralen *„kontinuierlichen“* Begriffe, Methoden und Resultate (z. B. der Ableitungsbegriff oder der Hauptsatz) sind weiterhin *unersetzlich* wichtig, vor allem
- zum Beschreiben und Bewältigen von Anwendungssituationen; so ist etwa der Ableitungsbegriff weiterhin eine unentbehrliche, höchst adäquate und wirkungsvolle Modellierung von Änderungsraten in realen Situationen (Abkühlungsgeschwindigkeit, Grenzsteuersatz, Dichte usw.);
- zur theoretischen Absicherung von Näherungsverfahren;
- als Exempel für wesentliche kulturhistorische Errungenschaften.

Zudem sind „infinitesimale“ Begriffe und Sätze technisch einfacher und übersichtlicher als diskrete. Die Unersetzlichkeit der zentralen kontinuierlichen Begriffe und Resultate liegt demnach nicht an unreflektierten Gewohnheiten, sondern in der Natur dieser Gegenstände selbst. Durch Computer wird uns sozusagen ihre „wahre Bedeutung“ bewußt, ebenso die enge Verbindung zwischen kontinuierlichen und diskreten Inhalten.

Weiter muß auch zum Thema *Differentialgleichungen* eine relativierende Bemerkung gemacht werden. Computer bringen ja „nur“ bei der innermathematischen Lösungsphase Entlastungen. Dagegen bleiben die begrifflichen, die Mathematisierungs- und die Interpretations-Probleme bei Differentialgleichungen weiterhin nicht einfach für Lernende, insbesondere bei der ersten Begegnung mit diesem Stoff. Deshalb wird dieses Thema in der Schule m. E. auch im Computerzeitalter begrenzt bleiben und jedenfalls nicht den Umfang einnehmen, der in der didaktischen Diskussion der letzten Jahre mehrfach (z. B., mit ansonsten unterstützenswerten Argumenten, von Winkelmann 1984 b) vorgeschlagen worden ist.

Ein weiterer Aspekt, dessen curriculare Bedeutung sich erhöht, sind *Anwendungsbezüge,* denn alle vorhin als wichtiger werdend identifizierten Ziele und Inhalte sind besonders „anwendungsnah“ Natürlich können solche curricularen Veränderungen nur dann greifen, wenn überhaupt Anwendungen behandelt werden. Dies ist wohl in der Schulpraxis oft nicht genügend der Fall. Ich meine aber, daß durch die in Abschnitt 3 angedeuteten Möglichkeiten der Entlastung durch Computereinsatz sowie durch die gleich zu beschreibenden inhaltlichen Reduktionen in Zukunft mehr Zeit für Anwendungen bleiben wird.

Was wird *weniger wichtig?* Durch die Verfügbarkeit von Computern verlieren insbesondere die schulklassischen *Routine-Kalküle* für die im Analysisunterricht anzustrebenden Ziele deutlich an Bedeutung. Dies gilt für formales Differenzieren und Integrieren inklusive zugehöriger Regeln und Verfahren (vor allem partielle Integration und Substitution) sowie für die sogenannten „innermathematischen Anwendungen“, d. h. für die analytische Untersuchung gegebener Funktionen auf Extrema oder Wendepunkte, für die Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Daten oder für Flächenberechnungen. Diese Kalküle nehmen ja (leider) den größten Teil des üblichen Analysisunterrichts ein, und die meisten der gängigen Prüfungsaufgaben enthalten i. w. nur solche Kalküle (wobei das „Anspruchsniveau“ durch die technische Kompliziertheit der involvierten Terme definiert wird). Diese Orientierung des Analysisunterrichts sorgt dafür, daß ein *falsches Bild* von Mathematik entsteht und daß die Mehrzahl der Schüler (auch in Grundkursen!) oft *systematisch unterfordert* wird – was für alle Beteiligten durchaus nicht unangenehm ist.

Selbstverständlich erfüllen Routine-Kalküle wichtige Aufgaben in der Schulpraxis: Erstens liefern sie Übungsmaterial, um anderswo benötigte Sicherheit und Fertigkeit zu schulen; zweitens können sie Schülern kalkulierbare Erfolgserlebnisse vermitteln, insbesondere in Klassenarbeiten oder in der Abiturprüfung; drittens kommen insbesondere sogenannte schwächere Schüler manchmal wohl auch erst durch den Kalkül zum eigentlichen inhaltlichen Verstehen; viertens haben Kalküle eine „entlastende Funktion“ (Bender 1989) für Schüler; und fünftens kann man vielleicht (nach einem Gedanken von Oberschelp 1988) erst dann die Kraft von Computern angemessen einschätzen, wenn man die Mühsal des selbst ausgeführten Kalküls verspürt hat. Deswegen sind die *Kalküle* – wie z. B. auch so banale Dinge wie ein Auswendigwissen wichtiger Ableitungen – auch weiterhin *unersetzlich* und können keineswegs – wie mitunter schon vorgeschlagen wird – einfach aus der Schule verbannt werden. Computer zwingen nun aber zu einer Neubesinnung auf die eigentlichen Ziele und auf den Stellenwert der Kalküle. Und was die eben genannten Argumente „Erfolg" und „Entlastung" anbetrifft, so wird die Fachdidaktik zu den Kalkülen hoffentlich bald für sich genommen bedeutsamere Alternativen entwickeln. Eine sinnvolle und naheliegende *Konsequenz* (u. a. schon von Fey et al. 1984 so vorgeschlagen; vgl. auch die überzeugenden Ausführungen von Riemer 1987) erscheint mir eine Reduzierung der Ansprüche an die kalkülbezogenen Fertigkeiten der Schüler und eine Beschränkung der analytisch gelösten Routineaufgaben auf wenige einfache Typen sowie ansonsten die konsequente Verwendung von Computern. Die von Heid (1988) berichteten Ergebnisse einer entsprechenden empirischen Untersuchung ermutigen zu solchen Maßnahmen.

Die bisherige Zusammenstellung möglicher methodischer und curricularer Veränderungen des Analysisunterrichts durch Computer klingt recht positiv und vielversprechend. Dies muß nun aber gegen einige andere Aspekte abgewogen werden, die in der Literatur zum Computereinsatz meist nicht genannt werden, die aber ebenso wichtig sind.

5. Probleme, Grenzen und Gefahren der Verwendung von Computern

5.1. Zunächst sei daran erinnert, daß es prinzipielle *Grenzen* von Computern (jeglicher Art) gibt. So können numerische Rechner bekanntlich nicht über Konvergenz bzw. Divergenz entscheiden, oder z. B. darüber, ob die Zahl 0.693 . . ., die als Ableitungswert $\exp_2'0$ resultiert, wirklich gleich $\ln 2$ ist (ganz abgesehen von Rundungsproblemen etc.). Und in Anwendungssituationen können Computer nicht darüber befinden, welche mathematischen Modelle – abhängig von gewissen Interessen oder Sichtweisen – adäquat und brauchbar sind und wie im Modell erhaltene mathematische Resultate zu interpretieren und zu bewerten sind.

Wichtig scheint mir zu sein, daß solche Grenzen *für Schüler bewußt* gemacht werden. Dies ermöglicht auch eine Distanzierung von dem und damit eine Reflexion über den Computer. Dies kann, wie schon in Abschnitt 3 erwähnt, vom Lehrer methodisch fruchtbar gemacht werden. Hierzu gehören auch Reflexionen über die *Bedeutung* von Computern als mächtige, grundsätzlich aber eher nebensächliche Hilfsmittel beim Lehren, beim Lernen und beim Betreiben von Mathematik. Überhaupt sollte auch im Analysisunterricht – idealiter im Verbund mit anderen Fächern – über den *Sinn* einer Nutzung solcher Hilfsmittel gesprochen werden. Insgesamt geht es dabei um einen Beitrag des Analysisunterrichts zur Entwicklung eines *Metawissens* bei Schülern, d. h. eines Wissens *über* Computer, und eine vernünftige *Einstellung* von Schülern hierzu. Dies ist für die angestrebten Ziele viel wichtiger als der Erwerb von Fertigkeiten im Umgehen mit Computern.

5.2. Als nächstes will ich Grenzen der Nutzung von Computern diskutieren, die von potentiellen *Gefahren* bei deren Verwendung herrühren. Viele dieser Gefahren scheinen derzeit noch nicht akut zu sein, was sich aber rasch ändern könnte; einige Beispiele:

Zunächst liegt eine Gefahr darin, daß *„Computer-Mathematik"* (d. h. diskrete und numerische Mathematik) *überbewertet* wird. In einem neukonzipierten „diskretisierten" Analysisunterricht könnten Lernende sich dann nicht mehr die wesentlichen Grundideen und Grundvorstellungen aneignen. Nach den Argumenten aus 4.2. sollte die Frage „kontinuierliche vs. diskrete Mathematik" jedoch gar nicht gestellt werden; dies ist eine neuere unter den zahlreichen *falschen Dichoto-*

mien im Zusammenhang mit dem Lehren und Lernen von Mathematik. Vielmehr kann der Analysisunterricht durch diskrete, numerische und algorithmische Themen und Ideen angereichert werden und kann den Schülern der Stellenwert der kontinuierlichen Analysis, den man heute – wie in 4.2. ausgeführt – aufgrund des Vorhandenseins von Computern deutlicher sieht, durch Behandlung geeigneter Beispiele (vgl. die Vorschläge von Winkelmann 1984a) sowie durch explizites Thematisieren (und natürlich, wie gesagt, auch durch gewisse Reduktionen) bewußt gemacht werden.

Eine Überbewertung von „computernaher" Mathematik birgt auch die Gefahr einer Vergrößerung der (ohnehin schon bestehenden) *Stoffülle* in sich, d.h. (statt einer Entlastung, wie vorhin postuliert) einer Anreicherung des Curriculums mit numerischen Verfahren, Differentialgleichungen, Differenzengleichungen usw., ohne anderswo zu reduzieren. Dieser Effekt der Stoffvermehrung läßt sich ja bei sämtlichen schulischen Reformen beobachten. Die Frage sollte aber nicht lauten „Hier sind die Computer; welche dazu passenden Inhalte kann ich behandeln?", sondern „Hier sind die laut Zielen zu behandelnden Inhalte; wie können Computer dabei helfen?".

Eine größere Stoffülle kann auch dadurch zustandekommen, daß Computer – wie bei allen methodischen Hilfsmitteln naheliegend – in ihren Möglichkeiten *überschätzt* werden; ein Beispiel ist das schon erwähnte Thema Differentialgleichungen. Diese Überschätzung könnte auch zu einem *extensiven Gebrauch* von Computern im Unterricht führen und damit eine neue, noch unerforschte, womöglich mit vielerlei unerwünschten Nebenwirkungen behaftete Qualität des Lehrens und Lernens erzeugen.

Ich habe vorhin Möglichkeiten von außermathematischen Anwendungen gesehen. Es gibt aber auch die entgegengesetzte Möglichkeit: Daß nämlich reale, „handfeste" Anwendungsbeispiele durch Simulationen ersetzt werden, daß Computergrafiken statt realer Objekte betrachtet werden, d.h. daß das von Hentig befüchtete „allmähliche *Verschwinden der Wirklichkeit*" speziell auch den Analysisunterricht betrifft. In dieselbe Richtung weist die Befürchtung, daß das eigene Zeichnen von Graphen durch Schüler und damit die notwendige eigentätige Erschließung von Funktionen abgelöst wird durch das bloße Erzeugen und Betrachten von Graphen auf dem Display; damit würden auch lehrreiche Fehler beim Selber-Zeichnen wegfallen. Allgemeiner bewirkt die Verwendung von Computern eine *Reduktion motorischer Erfahrungen,* die womöglich bei der Begriffsentwicklung unersetzlich sind (vgl. die überzeugenden Ausführungen von Köhler 1986). Hierzu ist – wie zu vielem anderen, das ich hier anspreche, auch – noch viel Forschungsarbeit zu leisten. M.E. sollten auch weiterhin *konkrete Schüler-Aktivitäten* i.a. *vor* bzw. *statt Computer-Aktivitäten* durchgeführt werden, z.B. das Zeichnen der Graphen der Grundfunktionen.

Entsprechende Gefahren bestehen auch auf der geistigen Ebene (über diesbezügliche Beobachtungen berichten auch Flade/Pruzina 1989). So versuchen manche Lernende, *intellektuelle Anstrengungen,* z.B. „harte" Begriffsbildungen, durch „Spielen" und blindes Manipulieren mit dem Werkzeug Computer zu *vermeiden.* Ein kleines Beispiel dazu, das ich selbst vor einiger Zeit in einer Klasse 12 beobachtet habe, ist das „wilde Drauflosberechnen" von Näherungswerten für die Ableitung von $\exp_2$ an verschiedenen Stellen und das Nicht-Erkennen der einfachen Rückführbarkeit auf die Stelle 0. Hierher gehören auch die Tendenz, das Werkzeug undifferenziert auch dann einzusetzen, wenn es anders (etwa im Kopf) schneller geht, sowie das bekannte Phänomen der Computergläubigkeit, wovon etwa das unkritische Übernehmen von Resultaten ein Teilaspekt ist. Allgemeiner könnten wesentliche *geistige Tätigkeiten* durch „Knöpfchendrücken" oder durch Konzentrieren auf vordergründige programmtechnische Probleme *ersetzt* werden. Dagegen ist zu sagen, daß methodische Hilfsmittel allgemein ja dazu da sind, individuelle Erkenntnisprozesse von Lernenden zu erleichtern, nicht aber, solche Prozesse überflüssig zu machen. So sollen Schüler z.B.

den Vergrößerungsprozeß beim Funktionenmikroskop *selbst* durchdenken und geistig verarbeiten. Sie sollen damit jeweils beginnen, *bevor* Hilfsmittel eingesetzt werden, und sie sollen *nach* deren Gebrauch ihre Beobachtungen analysieren, einordnen und theoretisch durchdringen.

Die neuen Möglichkeiten, die Computer bieten, können auch neue, noch unerforschte Probleme bei *Begriffsbildungen* erzeugen. So deuten unsere Erfahrungen mit DERIVE (siehe 2.2.) z. B. darauf hin, daß die Möglichkeit der Grenzwertberechnung per Knopfdruck die Ausbildung einer unausgewogen „statischen" Auffassung vom Grenzwertbegriff begünstigen kann.

Eine letzte, dem vorhin Gesagten gewissermaßen entgegengesetzte Gefahr will ich nennen, die dann real wird, wenn Computer konsequent so genutzt werden, wie ich dies in den vorigen Abschnitten als Möglichkeiten skizziert habe. Denn dann verschiebt sich der Schwerpunkt des (Analysis-)Unterrichts grob gesprochen vom kalkülmäßigen Rechnen zum Problemlösen, zum Begriffsbilden etc., kurz: der Unterricht wird faktisch (noch) *anspruchsvoller* für alle Beteiligten, vielleicht für viele *zu* anspruchsvoll. Sicher kann hier methodisch manches aufgefangen werden, aber diese Tendenz scheint mir bei einem vernünftigen Computereinsatz in der Tat unausweichlich.

Es gibt sicher keine Patentrezepte dafür, wie all diesen Gefahren begegnet werden kann; einiges habe ich schon an Ort und Stelle gesagt. Wesentlich ist sicherlich, daß jeglicher Computereinsatz durchgängig in eine stimmige Konzeption des Analysisunterrichts eingebettet ist. Und allgemein scheint mir der folgende triviale Ratschlag ganz wichtig zu sein: Die potentiellen Gefahren müssen Lehrenden *und* Lernenden ganz deutlich *bewußt* sein. D. h. Probleme wie eine mögliche Reduzierung von Eigen-Aktivitäten durch Computer sollten nicht nur vom Lehrer überlegt, sondern auch mit Schülern thematisiert werden. Auch dies trägt zur Entwicklung von *Meta-Wissen* bei.

5.3. Zu den bisher genannten kommen *weitere Probleme* bei der Verwendung von Computern im Analysisunterricht hinzu, die zumindest zur Zeit empfindliche Hindernisse bei deren Nutzung darstellen. Ein wesentliches Problem ist natürlich, daß die derzeit verfügbare Software (vgl. die ausführlichen Analysen von Biehler/Rach/Winkelmann in Landesinstitut 1988) noch nicht didaktisch befriedigend konzipiert ist, z. B. bzgl. des repräsentierten Funktionsbegriffs. Weiter gibt es bisher nur ganz wenige Curriculum-*Materialien* und Schüler-*Aufgaben,* die entsprechend den neuartigen Zielen und Inhalten konzipiert sind und im alltäglichen Analysisunterricht eingesetzt werden können (erste Ansätze finden sich in neueren Schulbüchern wie Kroll 1985/86 oder Griesel/Postel 1988/90). Hier sollte rasch eine gezielte Entwicklungarbeit beginnen, die auch und insbesondere Prüfungsaufgaben (die den Unterricht bekanntlich entscheidend normieren) miteinschließt. Wichtig ist auch, daß in der Lehrerschaft genügend breite Kenntnisse, Fähigkeiten, Einstellungen und Erfahrungen zu Computern bzw. zu einem hierdurch veränderten Analysisunterricht aufgebaut werden. Hierfür ist gezielte *Lehrerfortbildung* unabdingbar, und zwar nicht in Form der früher verbreiteten „Programmierkurse", sondern vor allem bzgl. didaktischer und pädagogischer Fragen.

6. Zusammenfassende Anregungen

Was folgt aus all diesen Überlegungen? Es steht wohl außer Frage, daß Computer mehr und mehr in die Schule kommen, und daß sich der Analysisunterricht hierdurch *verändern* sollte und dies auch – was normale TRs betrifft – teilweise schon getan hat bzw. – was PCs oder TCs betrifft – noch tun wird. Dazu, wie solche Veränderungen aussehen sollten bzw. werden, welche Auswirkungen dies auf das Begriffsverständnis oder die Einstellungen von Schülern hat, und zu vielem anderen mehr ist noch viel *konzeptionelle und empirische Forschungsarbeit* zu leisten. Ich will trotzdem als kurze Zusammenfassung aller bisherigen Überlegungen einige allgemein gehaltene

Anregungen geben. Sie werden – im Gegensatz zu manch anderen Positionen in der didaktischen Diskussion – sehr *unspektakulär* klingen, und genau so sind sie auch gemeint, ganz im Sinne von H. Griesel, der es mehrfach als die zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik bezeichnet hat, *praktikable Kurse* für das Lernen von Mathematik zu entwickeln.

Zum ersten legen die in Abschnitt 3 genannten Beispiele für eine sinnvolle *methodische Nutzung* von Computern im Analysisunterricht die Erwartung nahe, daß Schülern nicht einfach zusätzliche Hilfsmittel zugemutet werden, die sie womöglich eher belasten als unterstützen, sondern daß Computer den Analysisunterricht *bereichern* und von ihnen tatsächlich *positive Auswirkungen* auf das Lernen und Lehren von Mathematik ausgehen können, die bisher gar nicht oder zumindest nicht mit vergleichbarem Aufwand erreichbar waren (nur so lassen sich neue Werkzeuge ja legitimieren). Daher sollten Computer an einigen geeigneten Stellen konsequent genutzt werden.

Des weiteren halte ich einige *curriculare Umschichtungen* im Analysisunterricht aufgrund der Bedeutung von Computern für legitim, notwendig und auch – ohne Ausweitung der Stundenzahl! – praktikabel. Dies betrifft (wie in Abschnitt 4 genauer ausgeführt)
a) eine noch stärkere Gewichtung „höherer" Ziele und Problemlösestrategien,
b) einige inhaltliche Zusätze (insbesondere: „lokaler" Einbezug numerischer Verfahren und Ideen sowie Anreicherung aller Stoffe durch zusätzliche reale Anwendungen inklusive Differentialgleichungen) und
c) deutliche Reduktionen bei formalen Kalkülen.
Ein konkretes *Beispiel* dazu: Anwendungsaufgaben von der Art „optimale Maße einer Milchtüte" oder „maximaler Verkehrsdurchsatz" gehören herkömmlich zum Thema Extremwertaufgaben und werden mit dem analytischen Kalkül der Differentialrechnung angegangen. Nun können solche Aufgaben beim Thema Funktionen in 11/1 (oder sogar in Sek. I) behandelt und mittels Computer numerisch und grafisch gelöst werden. Hierzu liegen ermutigende Unterrichtserfahrungen vor (R. Köhler/E. Müller).

Schließlich bringt ein Einsatz von Computern (wie in Abschnitt 5 aufgezeigt) auch gewisse *Probleme* und *Gefahren* mit sich, die ebenfalls *methodische und curriculare Konsequenzen* für die Praxis des Analysisunterrichts haben müssen. Insbesondere bieten sich hier auch neuartige Chancen zur Entwicklung von allgemeinbildungsrelevantem Meta-Wissen.

Eine letzte Bemerkung, die ebenso selbstverständlich wie essentiell ist: Sicherlich darf man nicht auf eine Verbesserung des Lehrens und Lernens von Analysis hoffen, wenn bloß zu Beginn von Klasse 11 ein Satz TCs ausgeteilt wird und diese dann mehr oder weniger zufällig im herkömmlichen Curriculum eingesetzt werden. Meiner Überzeugung nach – dies im Gegensatz zu manchen gesellschaftskritischen Positionen der 70er Jahre, die „das System" als wichtigste Unterrichtsdeterminante angesehen haben, wie auch zu neueren didaktischen Richtungen, welche stark die Bedeutung übergreifender Interaktionsmuster betonen – hat die individuelle *Lehrperson* den am meisten prägenden Einfluß auf den Unterricht. Deshalb bedarf auch der Einsatz von Computern, speziell von TCs, einer stimmigen didaktischen Konzeption und vor allem eines pädagogisch sensiblen, didaktisch kompetenten und fachlich souveränen Lehrers.

Literatur

Bender, P.: Die didaktischen und pädagogischen Erwartungen an den Computer klein halten! In: Kleincomputer und Mathematikunterricht (Hrsg.: W. Walsch). Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Wissenschaftliche Beiträge 1989/23, S. 124–135.

Biehler, R.: Graphische Darstellungen. In: mathematica didactica *8* (1985) 1/2, S. 57–81.

Blankenagel, J.: Zur Diskussion um die Berücksichtigung numerischer Fragestellungen im Rahmen der Schulmathematik. In: Mathematische Semesterberichte *35* (1988) 2, S. 227–262.

Blum, W.: Rechner im Analysisunterricht – Ignorierbares Spielzeug oder Anlaß für radikale Veränderungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986, Franzbecker: Bad Salzdetfurth 1986, S. 58–62.

Blum, W.: Möglichkeiten und Grenzen des Computereinsatzes im anwendungsorientierten Analysisunterricht. In: Kleincomputer und Mathematikunterricht (Hrsg.: W. Walsch). Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Wissenschaftliche Beiträge 1989/23, S. 106–114.

Blum, W./Kirsch, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht *25* (1979) 3, S. 6–24.

Blum, W./Törner, G.: Didaktik der Analysis. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1983.

Churchhouse, R. et al. (Hrsg.): The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. Cambridge University Press 1986.

Engel, A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Klett: Stuttgart 1977.

Fanghänsel, G./Flade, L./Pruzina, M.: Zum Arbeiten mit sinnvoller Genauigkeit im Mathematikunterricht. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 1990.

Fey, J.: Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems. In: Educational Studies in Mathematics *20* (1989) 3, S. 237–272.

Fey, J. (Hrsg.): Computing and Mathematics. NCTM: Maryland 1984.

Flade, L./Pruzina, M.: Zum Einsatz von Kleincomputern in der Schule. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Halle-Wittenberg *38* (1989) 3, S. 113–122.

Griesel, H.: Grundkurs Analysis – Die Beschreibung des Ablaufs einer Curriculumentwicklung. In: Der Mathematikunterricht *22* (1976) 5, S. 25–46.

Griesel, H.: Numerische Verfahren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. In: Berichte aus dem Seminar für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld 1985, S. 84–94.

Griesel, H./Postel, H. (Hrsg.): Mathematik heute, Einführung in die Analysis 1/Einführung in die Analysis 2 Grundkurs. Schroedel: Hannover 1988/1990.

Heid, K.: Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. In: Journal for Research in Mathematics Education *19* (1988) 1, S. 3–25.

Kirsch, A.: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht *25* (1979) 3, S. 25–41.

Kirsch, A.: Einige Implikationen der Verbreitung von Taschenrechnern für den Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik *6* (1985) 4, S. 303–318.

Kirsch, A.: Anschauliche Begründung einiger Verfahren der numerischen Mathematik aus der Geometrie der Parabel. In: Mathematische Semesterberichte *35* (1988) 2, S. 197–226.

Köhler, H.: Geometrie und Rechner. In: Mathematik lehren 17/1986, S. 4–9 u. S. 20.

Kroll, W.: Grund- und Leistungskurs Analysis, Band 1: Differentialrechnung 1/Band 2 (mit J. Vaupel): Integralrechnung und Differentialrechnung 2. Dümmler: Bonn 1985/1986.

Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.): Neue Medien im Unterricht – Mathematik 1987/88. Soester Verlagskontor 1988.

Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.): Funktionenplotter im Mathematikunterricht. Soester Verlagskontor 1990.

Lehmann, E.: Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz, Band 1/2. Dümmler: Bonn 1988.

Müller, E.: Computer-Algebra am Beispiel von MuSimp/MuMath im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II – Analysen und didaktische Überlegungen. Wissenschaftliche Hausarbeit, Gesamthochschule Kassel Universität 1987.

Neill, H./Shuard, H.: Teaching Calculus. Blackie: Glasgow 1982.

Oberschelp, W.: Rechenverfahren und Formelalgorithmen als Unterrichtsgegenstände. In: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Occasional Paper 116/1988, S. 25–39.

Otto, A.: Analysis mit dem Computer. Teubner: Stuttgart 1985.

Pruzina, M.: Numerisches Experimentieren und Begriffserarbeitung – dargestellt an Beispielen aus der Abiturstufe. In: Mathematik in der Schule *27* (1989) 6, S. 419–429.

Richenhagen, G.: Numerisch vs. analytisch – Überlegungen zum epistemologischen Ort der Schulanalysis. In: mathematica didactica *6* (1983) 1, S. 45–65.

Riemer, W.: Mathematik, Informatik, Neue Technologien – eine Standortbestimmung im Spannungsfeld zwischen Inhalt, Ziel und Praxis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, Franzbecker: Bad Salzdetfurth 1987, S. 51–59.

Small, D./Hosack, J.: Computer Algebra Systems, Tools für Reforming Calculus Instruction. In: Toward a Lean and Lively Calculus (Hrsg.: R. Douglas). The Mathematical Association of America 1986, S. 143–155.

Schupp, H.: Software für den Computereinsatz im Mathematikunterricht. In: Kleincomputer und Mathematikunterricht (Hrsg.: W. Walsch). Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Wissenschaftliche Beiträge 1989/23, S. 141–149.

Tall, D.: Graphical Packages for Mathematics Teaching and Learning. In: Informatics and the Teaching of Mathematics (Hrsg.: D. Johnson/F. Lovis). North-Holland: Amsterdam 1987, S. 39–47.

Winkelmann, B.: The Impact of the Computer on the Teaching of Analysis. In: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology *15* (1984a) 6, S. 675–689.

Winkelmann, B.: Veränderungen und Zielsetzungen des Analysisunterrichts im Computerzeitalter. In: Informatik als Herausforderung an Schule und Ausbildung (Hrsg.: W. Arlt/K. Haefner). Springer: Berlin 1984b, S. 217–221.

Winkelmann, B.: Softwareeinsatz im Analysisunterricht. In: Computer in der Schule 2 (Hrsg.: K.-D. Graf). Teubner: Stuttgart 1988a, S. 201–221.

Winkelmann, B.: Funktionskonzepte in der Interaktion zwischen Benutzer/Lernendem und Rechner in mathematischer Unterrichts- und Anwendersoftware. In: Zentralblatt für Didaktik und Mathematik *20* (1988) 5, S. 222–228.