In: MU. Der Mathematikunterricht. Über mathematische Wettbewerbe. Über Prinzipien beim Problemlösen. Internationale Mathematik-Olympiade, Hrsg.: Engel, Jahrgang 25, Heft 1, 1979, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, S. 6-24

# Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen

von Werner Blum und Arnold Kirsch

## Inhalt

1. Zu den Zielen
2. Zu den Inhalten
3. Zum „Grundverständnis" und zur „Grundvorstellung" bei der Differentialrechnung
3.1 „Änderungsraten"
3.2 „Lineare Approximation"
4. Zum „Grundverständnis" und zur „Grundvorstellung" bei der Integralrechnung
4.1 „Integral als Flächeninhalt"
4.2 „Stammfunktionsintegral"
5. Methodische Gesichtspunkte
Literatur
Anmerkungen

## 1. Zu den Zielen

Zahlreiche Untersuchungen (z. B. von *Nägerl* u. a. [37]) zeigen, daß die meisten der dem Schüler im Analysisunterricht vermittelten Begriffe und Fakten spätestens nach dem Abitur rasch wieder vergessen werden. Daher ist es wesentlich, daß der Grundkurs-Schüler *adäquate Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen und Methoden der Analysis aktiv aufbaut* und die „fundamentalen Ideen bei den reellen Funktionen" (*Fischer* [12] in Anlehnung an *Bruner*) erfaßt. Diese Grundvorstellungen sollen sich beim Schüler einprägen. Sie sollen ihn – d. h. den späteren Nicht-Mathematiker, aber eventuell Anwender – in die Lage versetzen, *mit den einfachsten Begriffen, Methoden und Sätzen der Analysis bei inner- und außermathematischen Problemen umzugehen.* Dieses Handhaben der Analysis, insbesondere auch in anderen Schulfächern oder im späteren Studium bzw. Beruf, soll nicht nur rezeptmäßig bei vorgegebenen Beispielen bekannter Art, sondern *verständig* erfolgen, auch in „nichtgehabten" Situationen. Hierzu gehört vor allem die Fähigkeit, bei einfachen *Anwendungssituationen* die Begriffe und Sätze der Analysis *interpretieren* bzw. Aspekte der Situation *mathematisieren*, allgemeiner zwischen Realität und Mathematik (hier Analysis) *übersetzen* zu können (vgl. auch *Fischer/Malle* [14]). Die in Grundkursen getriebene Analysis soll *beziehungshaltig* (*Freudenthal*

[15]) und *ergebnisorientiert* (*Seyfferth* [42]) sein; sie soll dem Schüler nicht erscheinen als „eine Art Grammatik . . . , die zwar auf hohem Niveau abgehandelt wird, deren Zwecke man aber nicht erkennen kann" ([42, S. 209]), sondern als eine Disziplin, die er auf verschiedenen Niveaus verstehen und handhaben kann. Erfahrungen zeigen, daß ein Analysisunterricht mit solchen Intentionen auch bei Grundkurs-Schülern Interessen wecken kann.

Weiter soll der Schüler – wie generell im Mathematikunterricht auch hier – die Fähigkeit zum *Argumentieren* üben und ausbilden. Dabei denken wir nicht in erster Linie an formale Beweise, sondern an ein inhaltliches Argumentieren, das durchaus korrekt und „intellektuell ehrlich" sein soll. Beispielsweise kann das Monotoniekriterium durch eine – bewußt als solche gekennzeichnete – Plausibilitätsüberlegung am Graphen gewonnen werden, oder es kann aus der Achsensymmetrie der Ausgangsfunktion geometrisch auf die Punktsymmetrie der Ableitungsfunktion geschlossen werden (weitere Beispiele in Abschnitt 5).

## 2. Zu den Inhalten

In einem *„Vorkurs"* zur Analysis (in der gymnasialen Oberstufe im 1. Halbjahr von Klasse 11) werden u. a. die Voraussetzungen für die Differential- und Integralrechnung geschaffen, indem der Schüler mit dem *Funktionsbegriff* vertraut wird und mit den wichtigsten *Funktionen* (einfachste ganz- und gebrochen-rationale, $\sqrt{\ }$, $|\ |$, $[\ ]$, exp. log, sin, cos) sicher umzugehen lernt (vgl. [23] und [3a]). Hierzu tragen insbesondere elementare Funktionsuntersuchungen und das Studium einfacher geometrischer Abbildungen von Funktionsgraphen bei (siehe [30]). Eine Beschränkung auf rationale oder gar nur ganzrationale Funktionen im „Vorkurs" oder in den Grundkursen wäre mit den Zielen aus Abschnitt 1 nicht verträglich, weil zum einen die elementaren nicht-algebraischen Funktionen sehr anwendungsträchtig sind und zum anderen erst deren Behandlung zu einem unverkürzten Verständnis des Ableitungsbegriffs führt.

Im Zusammenhang mit der Behandlung von Funktionen wird das *Rechnen in* $\mathbb{R}$ wiederholt, insbesondere das Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen. (Letztere spielen hier allerdings bei weitem nicht eine solch dominierende Rolle wie etwa bei *Karcher* [20, 21] oder *Schmähling/Thode* [40].) Diese – für die weiteren Kurse unabdingbare – *immanente Wiederholung* von Stoffen der Sekundarstufe I soll zur Kompensation von Defiziten beitragen. Dabei wird der Körper $\mathbb{R}$ mit allen benötigten Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt. Die *Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ wird naiv benutzt und erst in Leistungskursen der Klasse 12, also nach einem ersten Durchgang der Analysis thematisiert[1].

Bei der Behandlung *affin-linearer Funktionen*[2] können auch Anfänge der Analytischen Geometrie angesprochen werden, insbesondere Steigung, Gleichungen und Schnittpunkte von *Geraden*.

Eine Behandlung von *Folgen* im „Vorkurs" ist im Hinblick auf die Differential- und Integralrechnung nicht zwingend erforderlich. Einfache Folgen – insbesondere die *geometrischen* Folgen und *rekursiv definierte* Folgen, wie sie etwa bei der iterativen Berechnung von Quadratwurzeln auftreten – haben jedoch bereits für sich genommen große Bedeutung, auch vom Anwendungsgesichtspunkt her. Daher erscheint ein völliger Verzicht auf ihre Behandlung kaum verantwortbar. Dabei denken wir noch nicht an eine Formalisierung des Grenzwertbegriffs oder an eine Thematisierung von Grenzwertsätzen, sondern an exemplarische inhaltliche Betrachtungen, die auch eine erste Begegnung mit Konvergenzphänomenen beinhalten; hierbei wird häufig der Taschenrechner benutzt. Ein solch konkretes Umgehen mit Folgen im „Vorkurs" ist zwar keine notwendige Grundlage, wohl aber eine sehr nützliche Vorübung für die Analysis.

Die im „Vorkurs" zur Verfügung stehende Zeit (i. a. nur ein 3-stündiger Halbjahreskurs) zwingt in der Regel zum Verzicht auf Folgen oder auf einen Teil der elementaren Funktionen. In diesem Fall sollte das nicht behandelte Thema an geeigneter Stelle innerhalb der späteren Kurse aufgegriffen werden.

Die *zentralen Begriffe der Grundkurse* (in der gymnasialen Oberstufe in Klasse 11 und i. allg. auch im 1. Halbjahr von Klasse 12) sind der *Ableitungs-* und der *Integralbegriff*. Dagegen spielt die *Stetigkeit* nur die Rolle eines Hilfsbegriffs, der in der Integralrechnung die Klasse der zu betrachtenden „vernünftigen" Funktionen abgrenzt (vgl. *Fischer* [12]). Er wird erst dann kurz thematisiert, wenn er zum ersten Male in natürlicher Weise ins Blickfeld gerät, etwa beim Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Eine Formalisierung des Stetigkeitsbegriffs und eine Behandlung der Theorie stetiger Funktionen kann den Leistungskursen vorbehalten bleiben. Über eine solche Unterordnung des Stetigkeitsbegriffs scheint in der neueren Diskussion zum Analysisunterricht weitgehend Konsens zu bestehen. Sie entspricht im übrigen auch der historischen Entwicklung.

Auch beim *Grenzwertbegriff* verzichten wir auf eine vorgängige systematische Behandlung, um im ersten Grundkurs rasch zu den zentralen Begriffen und Sätzen und damit auch zu Anwendungen vorstoßen zu können. Dies bedeutet jedoch *keineswegs die Eliminierung von Grenzwerten überhaupt* (wie dies etwa *Kroll* [35], *Arzt/Mütz* [2] oder *Pickert* [38] und im ersten Anlauf auch *Koch* [33, 34], *Knabe* [32] und *Wunderling* [45] vorschlagen). Vielmehr werden Grenzwerte in der Differentialrechnung von Anfang an als wesentliches Hilfsmittel benutzt, ja sogar als eine „fundamentale Idee" betont. Wir wenden uns nur gegen eine Formalisierung des Grenzwertbegriffs schon vor Beginn der Differentialrechnung. Statt dessen wird der Grenzwertbegriff zuerst in noch vorläufigen Fassungen verwendet und erst später formalisiert (siehe hierzu den Aufsatz zum vereinfachten Grenzwertbegriff in diesem Heft). Daß man sogar ohne eine solche Formalisierung saubere und substantielle Mathematik treiben kann, zeigen angelsächsische Calculus-Bücher wie etwa *Artin* [1] oder *Lang* [36]. Auch für Anwendungen ist eine Formalisierung entbehrlich. Trotzdem sollte unseres Erachtens in der gymnasialen Oberstufe auch in

Grundkursen ein präzisierter Grenzwertbegriff erarbeitet werden. Insbesondere sollte der Schüler anhand dieses auch kulturhistorisch wichtigen Begriffs exemplarisch einen „*Exaktifizierungsprozeß*" bewußt durchlaufen; das Motiv hierfür ist jedoch ausschließlich *theoretisches Interesse* (*Fischer* [13, S. 221/222]).

Im Hinblick auf die in Abschnitt 1 formulierten Ziele beinhalten die Grundkurse mathematisch damit den *Ableitungsbegriff* (lokal und global), die *Ableitung der wichtigsten Funktionen,* die wesentlichen *Ableitungsregeln, Funktionsuntersuchungen, Bestimmung von Funktionen* aus gegebenen Daten, *Extremwertaufgaben,* die *Umkehrung* der Differentialrechnung (*Stammfunktionen*), den *Integralbegriff,* die wesentlichen *Integrationsregeln*, den *Hauptsatz* der Differential- und Integralrechnung, einen Ausblick auf den *Stetigkeitsbegriff* sowie eine *Formalisierung des Grenzwertbegriffs* bei Funktionen. (Kognitive Lernziele zu diesen Inhalten sind in [6] zu finden.) Dabei ist in einem ersten Durchgang der Differentialrechnung ein Aussparen der gebrochen-rationalen Funktionen (bis auf $x \mapsto \frac{1}{x^n}$) und eine Beschränkung auf einfache Ableitungsregeln (für $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x + a)$ und $f(a \cdot x)$) möglich und im Hinblick auf die Ziele auch sinnvoll (hierzu: [23]).

Dieser erste Durchgang umfaßt die allerwichtigsten Inhalte der Differential- und Integralrechnung und nimmt im Gymnasium ungefähr anderthalb 3-stündige Grundkurse in Anspruch („*Basiskurs*"; dies ist auch mit dem „Grundkurs" in [6] bzw. [7] gemeint). Er macht in der Fachoberschule zusammen mit dem (dort etwa 5-stündigen) „Vorkurs" den gesamten Analysisunterricht aus.

Da es *kein* Ziel für Grundkurse ist, ein vollständiges deduktives Gerüst der reellen Analysis aufzubauen, werden von den *zentralen Sätzen* nur diejenigen behandelt, die innerhalb des eben entwickelten inhaltlichen Rahmens benötigt werden; diese Sätze sind das Monotonie-Kriterium, das Extrema-Kriterium, das Konstanten-Kriterium (aus $f' = 0$ im Intervall folgt $f$ konstant) und gegebenenfalls – bei Explizitmachen der beim Beweis des Hauptsatzes verwendeten Hilfsmittel – der Extremwertsatz für stetige Funktionen oder der Mittelwertsatz der Integralrechnung. (Auch wenn letzterer nicht auftritt, können natürlich Mittelwerte von Funktionen als Anwendung des Integralbegriffs behandelt werden.) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kommt in den Grundkursen nicht vor. Seine innermathematisch zentrale Stellung wird erst in den Leistungskursen deutlich.

# 3. Zum »Grundverständnis« und zur »Grundvorstellung« bei der Differentialrechnung

### 3.1 „Änderungsraten“:

Bei fast allen realen Problemen, bei denen Größen funktional voneinander abhängen, interessieren nicht nur die Werte der Größen selbst, sondern auch *Änderungen* dieser Werte. Genauer interessieren *mittlere Änderungsraten* $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $(x \neq a)$ der zugrundeliegenden reellen Funktion f. Für sämtliche mittleren Änderungsraten in einer kleinen Umgebung von a ist die *lokale Änderungsrate* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (sofern sie existiert) eine mehr oder weniger brauchbare Näherung. Daher liefert das Problem der *Bestimmung von lokalen Änderungsraten* in einem anwendungsorientierten Analysis-Curriculum wohl den natürlichsten Zugang zur Differentialrechnung. (Denselben Standpunkt vertreten u. a. *Fischer* [12], *Baumann* [4] und *Bussmann/Wenzelburger* [9a].) Hieraus resultiert als *Grundverständnis* der Differentialrechnung: Die *Ableitung* $f'(a)$ einer Funktion f an einer Stelle a ist eine *Zahl*, die aus einem *Grenzprozeß* hervorgeht und die *lokale Änderungsrate* der Funktion an der betreffenden Stelle angibt (für Beispiele siehe [26, S. 98]). Die adäquate Definition von „f ist an der Stelle a differenzierbar“ lautet dann

$$„\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert“.}$$

Mittlere bzw. lokale Änderungsraten können am Pfeildiagramm als mittlere bzw. lokale *„Verzerrungskoeffizienten“* gedeutet werden (vgl. *Fischer* [12, S. 188]). Am Graphen lassen sich mittlere bzw. lokale Änderungsraten sowie der zugehörige Grenzprozeß als Steigungen von *Sekanten* bzw. *Tangente* sowie als „Übergang“ der Sekanten in die Tangente gut *veranschaulichen*. So kommt das geometrische *Tangentenproblem*, das traditionell als Einstieg gewählt wird, in natürlicher Weise ins Spiel. Dies alles gilt auch dann, wenn – zur Isolierung von Schwierigkeiten – als Einstiegsproblem die innermathematische Frage nach der Graphensteigung gewählt wird.

Der in Anwendungssituationen ursprünglich interessierende *Approximationsaspekt* betrifft die Approximation der – beim realen Problem allein beobachtbaren – mittleren Änderungsraten durch die lokale Änderungsrate. Nachdem deren Wichtigkeit erkannt ist, liegt das Augenmerk auf der Bestimmung dieser lokalen Änderungsrate, was (umgekehrt wie eben) mittels Approximation durch mittlere Änderungsraten geschieht. Veranschaulichen wir dies geometrisch, so interessiert also die Approximation der Tangentensteigung durch Sekantensteigungen in einer kleinen Umgebung. Der hier stattfindende Grenzprozeß läßt sich als „sukzessive Stabilisierung der Gestalt“ zugehöriger Sekanten-Steigungsdreiecke (bei abnehmender Größe) deuten. Bei zentrischer Streckung der Sekanten-Steigungsdreiecke auf konstante Breite 1 kann der Grenzprozeß als „Stabilisierung der Höhe“ dieser gestreckten Dreiecke auf einer neuen vertikalen Achse (siehe Abb. 1) verfolgt werden (vgl. [16]).

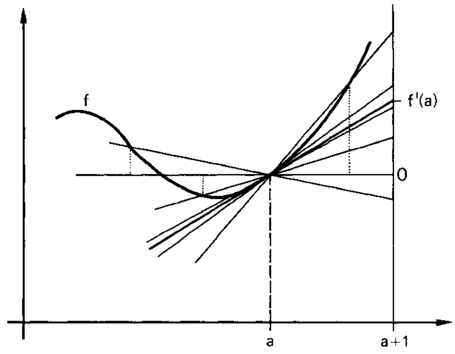


Abb. 1

Wichtig ist, daß das eben beschriebene Grundverständnis der Differentialrechnung von einer – auf den kartesischen Graphen bezogenen – *Grundvorstellung* von Ableitung und Tangente unterstützt wird. Zu Anfang der Differentialrechnung dominiert wohl beim Schüler in der Regel die (im Geometrieunterricht unausgesprochen vermittelte) Vorstellung von der *Tangente als Stützgerade.* Diese Vorstellung ist bei konvexen Funktionen mit eindeutig bestimmter Stützgerade noch tragfähig (vgl. [24]); sie versagt jedoch bei Beispielen wie etwa $|x|$ oder $x^3$ in 0 und muß dann revidiert werden zugunsten der Vorstellung von der Tangente als einer Geraden, die sich lokal dem Graphen „optimal anpaßt". Eine angemessene (lokale) Grundvorstellung wird vermittelt über die Idee der „lokalen Glättung" des Graphen bei fortwährender Vergrößerung durch ein „Funktionenmikroskop", wobei die Tangente das Resultat dieses Prozesses ist (genaueres im zweiten Aufsatz dieses Heftes), sowie über die Vorstellung von der *Tangente als „Schmieggerade".*

Der Aspekt der *linearen Approximation,* d. h. der lokalen Approximation des Graphen durch eine Gerade, ist bei uns also von großer Bedeutung zum Aufbau einer adäquaten Tangentenvorstellung. Die zugrundeliegende Linearisierungsidee bedeutet, daß (siehe Abb. 2)

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) \cdot f'(a) \quad \text{für kleine } |x-a|.$$

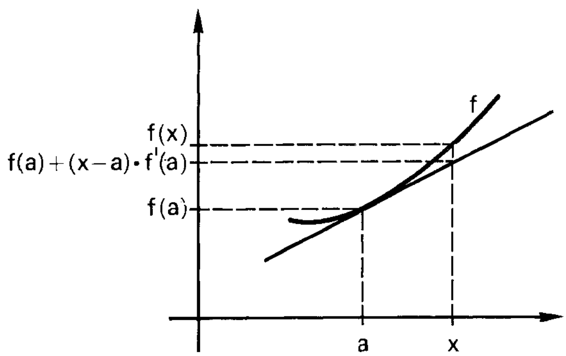


Abb. 2

Diese Idee liefert wichtige *Näherungsformeln* wie etwa

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}; \qquad \sin x \approx \sin a + (x-a)\cos a;$$

$$e^x \approx 1 + x; \qquad \ell n(1+x) \approx x;$$

also z. B. $\ell n(0{,}99) \approx -0{,}01$. Dies ist ein Beispiel für einen Einsatz der Differentialrechnung als Werkzeug, wie wir ihn als „verständige Handhabung" intendieren (siehe Abschnitt 1). Auch wenn eine Präzisierung des „ $\approx$ " nicht auf theoretischem Niveau vorgenommen wird, kann die numerische Brauchbarkeit solcher Näherungsformeln im konkreten Fall kritisch diskutiert werden (Taschenrechner!).

Eine mögliche Präzisierung obiger Näherungsgleichung ist eine Darstellung der Form

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot q(x),$$

wobei $q$ eine in einer Umgebung von $a$ erklärte und in $a$ stetige Funktion ist; dann ist $f'(a) = q(a)$. Dieser verbreitete Ansatz liegt auch der Differenzierbarkeitsdefinition bei *Pickert* [38] zugrunde. Er stellt die nennerfreie Fassung des *Griesel*schen Ansatzes [17] dar ($q$ ist die stetig ergänzte Differenzenquotientenfunktion). Wir verwenden diese Darstellung als ein nützliches *Beweishilfsmittel*, z. B. bei der Kettenregel (vgl. [17], [38] oder [3 b, c]).

Trotz dieser didaktischen Bedeutung des linearen Approximationsaspektes plädieren wir für ein Grundverständnis, das durch einen Einstieg über *Grenzwerte von Änderungsraten* gelegt wird. Außer der eingangs gegebenen Begründung über Anwendungen sprechen hierfür auch die guten Veranschaulichungsmöglichkeiten, die natürlichen Vereinfachungsmöglichkeiten (vgl. den dritten Aufsatz in diesem Heft), die – im Vergleich zu allen anderen Differenzierbarkeitsdefinitionen – einfache Behandlungsmöglichkeit konkreter Beispiele sowie die mathematisch und lernpsychologisch („dynamisches Prinzip") fundamentale Bedeutung von Grenzwerten.

### 3.2 „Lineare Approximation":

Im Gegensatz zum eben beschriebenen Vorgehen wird in neuerer Zeit häufig das Problem der „lokalen Ersetzung" der gegebenen Funktion durch eine affin-lineare Funktion an den Anfang der Differentialrechnung gestellt. Dies führt auf ein anderes *Grundverständnis*: Die Ableitung $f'(a)$ einer Funktion $f$ an einer Stelle $a$ ist der Steigungsfaktor derjenigen affin-linearen Funktion $\ell$, welche $f$ in der Umgebung von $a$ unter allen affin-linearen Funktionen am besten approximiert. Die hierzu passende Differenzierbarkeitsdefinition lautet (vgl. auch *Danckwerts* [11] sowie *Hattig/Herfort* [18]):

„Es existieren ein $m \in \mathbb{R}$ und eine in einer Umgebung von $a$ erklärte, in $a$ stetige Funktion $r$ mit $r(a) = 0$ und

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot m + (x-a)\, r(x)\text{"}$$

Man beachte, daß hierin *drei* Existenzquantoren auftreten (entsprechend den Wörtern „ein", „eine", „einer") und daß die eindeutige Bestimmtheit des Ableitungswertes m noch eigens nachgewiesen werden muß[3].

Als Begründungen für einen Zugang über lineare Approximation werden u. a. genannt:

a) Lineare Approximation als „fundamentale Idee" der Analysis, auch für Anwendungen;
b) durch Approximationsgedanken Einheitlichkeit im Aufbau der Analysis;
c) Vereinfachungsmöglichkeiten bei Beweisen;
d) Verallgemeinerungsfähigkeit;
e) Möglichkeit der Vermeidung von Grenzwerten.

Hierzu bemerken wir:

a) Die Linearisierungsidee ist auch für uns fundamental, nicht aber zwingend als Einstieg.
b) Diese „globale interne" Motivation ist erst im Nachhinein durchschauber, „als Grundlage des Analysisunterrichts aber ungeeignet" (*Fischer* [12, S. 188]).
c) Diese Möglichkeiten sind auch bei anderem Einstieg nutzbar; generell ist eine Wahl von Definitionen im Hinblick auf erst später einsehbare Beweisvereinfachungen didaktisch fragwürdig (hierzu etwa [27, S. 89]).
d) Dies kommt erst beim weiteren Ausbau der Differentialrechnung an der Hochschule zum Tragen.
e) Wir haben mehrfach betont, für wie wichtig wir Grenzwerte halten.

Mehrere Vorschläge laufen darauf hinaus, einen *„eingeschränkten"* (besser: verschärften) *Differenzierbarkeitsbegriff* zu verwenden und in obiger Definition speziell $r(x) = (x - a) \cdot t(x)$ zu wählen, wobei t eine in einer Umgebung von a beschränkte Funktion ist. Dies führt zur Darstellung

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot m + (x - a)^2 \cdot t(x)$$

(*Kroll* [35], ähnlich auch *Schröder* [41]), bzw. als Ungleichung geschrieben

$$|f(x) - f(a) - (x - a) \cdot m| \leqslant K \cdot (x - a)^2$$

mit $K > 0$ (*Karcher* [20, 21], der mit globalen Konstanten arbeitet, und *Arzt/Mütz* [2]). Als Begründungen für eine solche „Einschränkung" werden u. a. weitere Vereinfachungsmöglichkeiten bei Beweisen sowie Zeitersparnis genannt. Außer den bereits eben genannten Einwänden muß hier auf die erhebliche rechentechnische Erschwerung der Behandlung konkreter Beispiele und auf die doch recht aufwendige Definition hingewiesen werden. Weiter muß man fragen, inwieweit es gerechtfertigt ist, nur für die Schule gedachte Sonder-Begriffe einzuführen (vgl. *Griesel* [17, S. 27]).

# 4. Zum »Grundverständnis« und zur »Grundvorstellung« bei der Integralrechnung

## 4.1 „Integral als Flächeninhalt":

Bei zahlreichen realen Problemen treten *Summen* von (Größen-)*Produkten* auf, bei denen der erste Faktor sich ändern darf, während der (konstante) zweite Faktor sehr klein sein muß. Man interessiert sich für das so entstehende „verallgemeinerte Produkt", welches etwas genauer als Resultat eines Grenzprozesses $n \to \infty$ ($n$ die Anzahl der Produkte) bei konstantem $n \cdot \Delta x$ ($\Delta x$ der zweite Faktor) beschrieben werden kann.

**Beispiele**:

(a) Summe von Produkten „Kraft mal (kleine) Weglänge" – liefert die *Arbeit;*
(b) Summe von Produkten „Höhe mal Streifenbreite" – liefert den *Flächeninhalt;*
(c) Summe von Produkten „Querschnitt(sflächeninhalt) mal Scheibchendicke" – liefert das *Volumen;*
(d) Summe von Produkten „Änderungsrate mal Schrittlänge" – liefert den *Gesamtzuwachs* einer Funktion, d. h. den *Gesamteffekt* ihrer Änderungen.

Im ursprünglichen Verständnis dürfte hierbei das Beispiel (a) den Charakter einer *Definition* haben; die Beispiele (b) und (c) haben eher den Charakter einer *Berechnung* und (d) den einer *Rekonstruktion.*

Hieraus resultiert als *Grundverständnis* der Integralrechnung: Das *(bestimmte) Integral* $\int_a^b f$ einer Funktion $f$ in einem Intervall $[a; b]$ ist eine *Zahl,* die aus einem *Grenzprozeß* hervorgeht und ein *„verallgemeinertes Produkt"* (s. o.) angibt.

Eng mit diesem Grundverständnis verbunden, aber auf den kartesischen Graphen von $f$, und damit im wesentlichen auf Beispiel (b) bezogen, ist die *Grundvorstellung* vom Integral als *Grenzwert einer Summe von Rechtecksflächen*(inhalten), die dem Graphen von $f$ in bekannter Weise zugeordnet ist (Abb. 3).

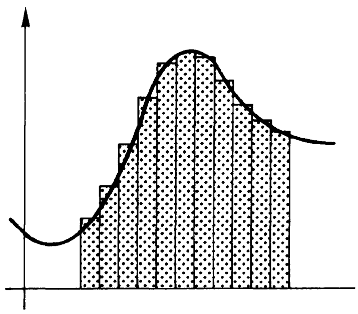

Abb. 3

Es ist nun beim Integralbegriff – anders als in der Differentialrechnung – verhältnismäßig schwierig, das skizzierte Grundverständnis bzw. die Grundvorstellung mathematisch zu präzisieren. Insbesondere erfordert die begriffliche Fassung des angedeuteten Grenzübergangs weit höhere Anstrengungen als nur den Existenznachweis für einen Folgen- oder auch Funktionsgrenzwert. Wir gehen auf die bekannten Definitionen und Existenzbeweise – etwa für das Riemannsche Integral – nicht ein.

Andererseits liegt ein glücklicher Umstand darin, daß der *Flächeninhalt* des „krummlinigen Trapezes unter f" (im Falle $f \geq 0$) eine tragfähige *Grundveranschaulichung* für den Integralbegriff liefert, durch die eine autonome Definition weitgehend erübrigt wird. Das naive Vorwissen über den Flächeninhalt, der gleichsam als präexistentes Maß für die Flächen-Erfüllung einer Punktmenge verstanden werden kann (hierzu: [29]) ist weniger problematisch als das Vorwissen über den Tangentenbegriff, der ja eine analoge Rolle bei der Veranschaulichung des Ableitungsbegriffs spielt.

Beobachtungen bei Schülern, Studenten und auch Lehrern zeigen, daß auch nach formalen Begriffsdefinitionen das Wesentliche am Integralbegriff in der *Berechnung von Flächeninhalten,* im Sinne unseres Beispiels (b), gesehen wird. So erscheint es für einen ersten Zugang zum Integralbegriff gerechtfertigt, diese verbreitete Auffassung ausdrücklich zu legitimieren und mit *Artin* [1] das Integral $\int_a^b f$ einer Funktion f – wobei wir zunächst an einfache, dem Schüler vertraute Funktionen denken – als *algebraische Summe von (für sich genommenen positiven) Flächeninhalten* zu definieren, wie in Abb. 4 angedeutet.

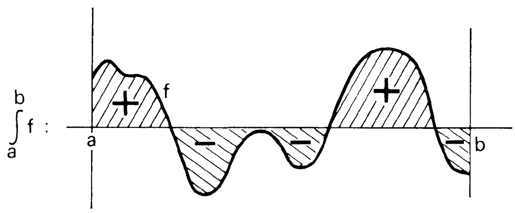


Abb. 4

Mittels Flächeninhalts-Argumenten sind nun wichtige Eigenschaften des Integrals, wie

(I) $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f,$ falls $a \leq b \leq c$,

(II) $(b-a)m \leq \int_a^b f \leq (b-a)M,$ falls $m \leq f(x) \leq M$ für $a \leq x \leq b$,

leicht beweisbar. Die in ihrer Bedeutung besonders von *Lang* [36] hervorgehobenen Eigenschaften (I) und (II) bilden die Grundlage für den Beweis des (ersten Teils des) Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$(x \mapsto \int_a^x f)' = f, \quad \text{falls } f \text{ stetig},$$

und weiter für den Beweis von Formeln wie

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{f_i}(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}(x_i - x_{i-1})$$

(mit üblicher Bedeutung von $x_i, \underline{f_i}, \overline{f_i}$), die insbesondere zur numerischen Berechnung von Integralen „empirischer“ Funktionen unentbehrlich sind und auch die klassische Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$ motivieren.

Andererseits sollten die Schüler – gerade im Hinblick auf Anwendungen – schon frühzeitig lernen, *Flächeninhalte bei Funktionsgraphen als Größenprodukte* im verallgemeinerten Sinn zu *interpretieren,* um falsche Fixierungen zu vermeiden. Z. B. wird schon in der Mittelstufe das Produkt „Kraft mal Weg“ bei konstanter Kraft, d. h. die Arbeit, durch eine Rechtecksfläche veranschaulicht. Es liegt dann nahe, bei nicht-konstanter Kraft die Arbeit als den betreffenden Flächeninhalt am Graphen der Weg-Kraft-Funktion zu definieren; vgl. den Hinweis zu Beispiel (a).

Zu einer in diesem Sinne lehrreichen Interpretationsübung führt die Frage nach der Durchschnittstemperatur bei gegebener Zeit-Temperatur-Funktion f. Beispiele wie das skizzierte (Abb. 5) zeigen, daß nicht etwa $\frac{T_{max} - T_{min}}{2}$, sondern vielmehr das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f$, dividiert durch die Zeitspanne $t_2 - t_1$, die angemessene Antwort liefert. Eine von Schülern vorgeschlagene, gleichwertige Form dieser Antwort lautet: „Man muß eine horizontale Gerade so hindurchlegen, daß die Flächensummen oberhalb und unterhalb dieser Geraden gleich groß sind“. Solche *Mittelwert-Fragen* könnten geradezu als Einstiegssituation für die Integralrechnung fruchtbar gemacht werden (hierzu: [39]).

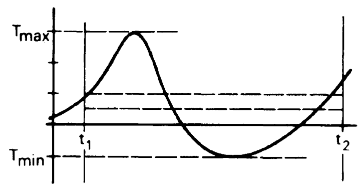


Abb. 5

Wir plädieren jedoch aus entsprechenden Gründen, wie sie am Ende von 3.1 genannt wurden, für einen Einstieg über Flächeninhalte und Grenzwerte von Produktsummen.

### 4.2 „Stammfunktionsintegral“:

Unser Grundverständnis des Integralbegriffs schließt einen Spezialfall ein, der schon in Beispiel (d) angeklungen ist: Die Vorstellung des *Rekonstruierens* einer Funktion aus ihren gegebenen Änderungsraten[4], mit anderen Worten: des Rückgängigmachens der Differentiation. Bei gegebener Funktion f (definiert in einem Intervall) wird nach einer „Stammfunktion“, d. h. nach einer Funktion F mit $F' = f$ gefragt.

Als natürliche *Veranschaulichung,* die allerdings nur selten genutzt wird, bietet sich hierfür das (durch f gegebene) *Richtungsfeld* an, in dem jede Stammfunktion als Pfad erscheint, siehe Abb. 6. Diese Figur erhellt insbesondere die bekannte Tatsache, daß zwei Stammfunktionen derselben Funktion f sich nur um eine Konstante unterscheiden, so daß die Differenz $F(b) - F(a)$ nur von f sowie von a und b, aber nicht von der gewählten Stammfunktion F abhängt.

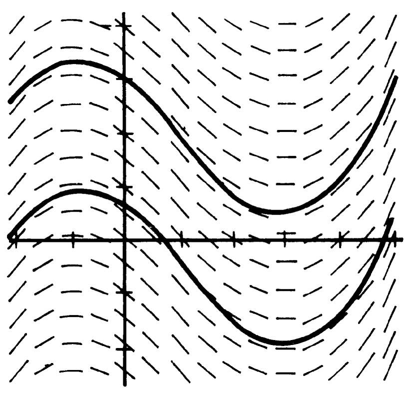

Abb. 6

Dies gibt Anlaß zur Definition des (bestimmten) Integrals als *„Stammfunktionsintegral“*, als mögliche Alternative zur oben gegebenen Definition über Flächeninhalte: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f (definiert in einem Intervall) ist. Seine Bedeutung ist offenbar der *Gesamtzuwachs* einer (unbekannten) Funktion F mit gegebener Ableitung $F' = f$, mit anderen Worten: der *Gesamteffekt* der gegebenen Änderungsrate(nfunktion) f. Auch dies ist ein für Anwendungen wichtiger Aspekt, der häufig nicht genügend betont wird.

**Beispiel**: Rekonstruktion des zwischen den Zeiten $t_1$ und $t_2$ zurückgelegten Weges bei gegebener Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v. Man erhält hier den Weg s als $\int_{t_1}^{t_2} v$. Der Physiker schreibt allerdings „$ds = vdt$, also $s = \int_{t_1}^{t_2} vdt$“ und verbindet damit die Vorstellung des Aufsummierens.

Auch allgemein besteht ein enger *Zusammenhang zwischen den Vorstellungen „Aufsummieren“ und „Rekonstruieren“*. Er wurde bereits in Beispiel (d) angesprochen und sei hier nochmals (ganz unscharf) wie folgt notiert:

$$F(b) - F(a) = \sum_a^b \Delta F \approx \sum_a^b F'(x)\,\Delta x \approx \int_a^b F'.$$

Die Definition des Integrals als Stammfunktionsintegral entspricht genau dem zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bei der in 4.1 beschriebenen Integraldefinition. Die *Existenz einer Stammfunktion* zu beliebig gegebener stetiger Funktion f erscheint allerdings am Richtungsfeld nicht so plausibel wie die Existenz des mittels Flächeninhalten (Abb. 4) eingeführten Integrals.

Um bei der Einführung des Integrals mittels Stammfunktionen diese Existenzfrage auf anschaulichem Niveau zu entscheiden, kann man zu f die gemäß Abb. 7 definierte *„Flächeninhaltsfunktion“* $F_a$ betrachten und mit Flächeninhalts-Argumenten beweisen, daß $F_a' = f$ ist (falls f stetig und in einem Intervall definiert ist).

$F_a(x)$:

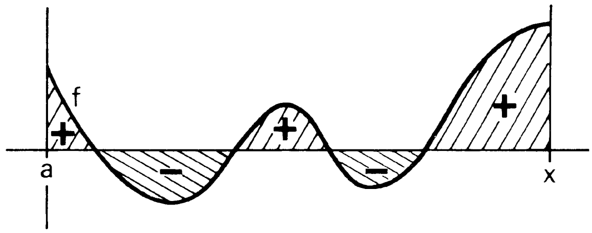


Abb. 7

Somit erweist sich $F_a$ als Stammfunktion von f. Dies ist nichts anderes als der erste Teil des Hauptsatzes. Er erlaubt, das Stammfunktionsintegral nachträglich auch als Flächeninhalt (mutatis mutandis) zu deuten. Wir halten es jedoch für *abwegig,* den Flächeninhalt (des zu a, b, f mit $a < b$ und $f \geq 0$ gehörigen krummlinigen Trapezes) über eine Stammfunktionsdifferenz zu *definieren.*

# 5. Methodische Gesichtspunkte

Zur Erreichung der Ziele aus Abschnitt 1 ist es keineswegs erforderlich, daß der Schüler sämtliche Begriffe, Methoden und Resultate sofort in einer abschließend gemeinten Fassung und an der genauen Stelle innerhalb eines deduktiven Gerüsts der Analysis kennenlernt. (Entsprechende Skrupel hat nur der Lehrer oder der Schulbuchautor.) Vielmehr ist es legitim und notwendig, auf verschiedenen *Stufen der Strenge* vorzugehen und an geeigneten Stellen auf Niveaus zu arbeiten, die unterhalb des heute an Universitäten üblichen Standards liegen. In einem ersten Durchgang dürfen und sollen also *Vereinfachungen* vorgenommen werden, wenn diese *keine Verfälschungen* sind und auf höherer Ebene ausgebaut werden können (im Sinne des *Spiralprinzips*). Dies bedeutet insbesondere, daß an ein Vorverständnis des Schülers angeknüpft wird und einerseits einige Begriffe in einer noch nicht abschließend präzisierten Form eingeführt und benutzt, andererseits bewußt Lücken im mathematischen Aufbau gelassen werden dürfen. Hierbei kommt der *Anschauung* eine große Bedeutung zu (vgl. *Kemper* [22]). Auch Hilfsmittel wie *Taschenrechner* können zur Vermittlung numerischer Vorerfahrungen mit Vorteil eingesetzt werden.

Diese Stufung der Strenge ist nicht nur *lernpsychologisch,* sondern auch *wissenschaftstheoretisch* begründbar. Die Gegenstände der Analysis haben sich bekanntlich in der Regel in einem langen Prozeß mit vielen Stufen (und auch vielen Umwegen) entwickelt. Durchlaufen verschiedener Niveaus, „Exaktifizieren" gehört somit zu den „fundamentalen Ideen" der Analysis (*Fischer* [12]). Solche Exaktifizierungsprozesse sollten im Unterricht sowohl durchgeführt als auch reflektierend thematisiert werden (*Fischer* [13]). Damit ist nicht ein unterrichtlicher Nachvollzug aller

Irrtümer der historischen Entwicklung gemeint. Der Lernende soll aber exemplarisch die Möglichkeit haben, selbst an der Genese von Begriffen, Methoden und Resultaten der Analysis teilzuhaben. Eine so verstandene *genetische Methode* (*Klein* [31], *Toeplitz* [43], *Freudenthal* [15]; vgl. *Wittmann* [44, S. 106 ff]) ist konstitutiv für unsere Konzeption.

Die *wesentlichen Vereinfachungen* für Grundkurse in Differential- und Integralrechnung sind hierbei die folgenden:

a) Wir *verzichten* auf die „Durststrecke" ([33, S. 13], [38, S. 65]) über Mengen, Logik, Aufbau des Zahlensystems, Relationen, Konvergenz und Stetigkeit; auch Folgen müssen nicht vorher behandelt worden sein (vgl. aber Abschnitt 2). Der erste Grundkurs zur Analysis beginnt (wie z. B. auch bei *Kroll* [35], *Griesel* [17], *Jahner* [19], *Arzt/Mütz* [2] und neuerdings auch *Pickert* [38]) sogleich mit dem Einstieg in die Differentialrechnung. Hierbei spielen – wie in Abschnitt 3 ausgeführt – bald Tangentensteigungen eine Rolle. Bei diesem ersten Anlauf interessieren nun *nicht die Existenz und nicht die Definition, sondern die Berechnung* dieser Tangentensteigungen (im Gegensatz etwa zu *Karcher* [20], der das Existenzproblem, und zu *Kroll* [35], der das Definitionsproblem in den Vordergrund stellt). Erst an etwas späterer Stelle des Kurses, bei Behandlung von Beispielen wie $|x|$ oder $x^3$ in 0, wird die Existenz von Tangenten problematisiert und der Begriff der Tangentensteigung definiert.

b) Wie schon in Abschnitt 2 gesagt, wird in der Differentialrechnung ein noch *nicht formal präzisierter Konvergenzbegriff* als Werkzeug eingesetzt. Die *Regeln* für das Rechnen mit Grenzwerten werden *bewußt ohne Begründung* verwendet, wobei stillschweigend auf Erfahrungen der Schüler mit der Stetigkeit der elementaren Rechenoperationen zurückgegriffen wird; diese „Güte"-Erfahrungen sind zumindest beim Funktionenmaterial des Grundkurses tragfähig, worauf vor allem *Pickert* [38] hinweist. Dadurch sind unsere Ableitungsbestimmungen auch bei weitem einfacher als die algebraischen Umformungen bei (z. B.) *Karcher* [20], *Kroll* [35] oder *Schmähling/Thode* [40].
Der Grenzwertbegriff kann im Verlaufe der oder im Anschluß an die Differential- und Integralrechnung formalisiert werden. Dies ist wohl das einzige noch grundkursgeeignete Beispiel für ein Durchlaufen und „Bewußtmachen von Exaktifizierungsstufen" und eine „Darstellung einer Begriffsveränderung" im Sinne von *Fischer* [13, S. 214].

c) Wie ebenfalls schon in Abschnitt 2 betont, wird der *Stetigkeitsbegriff* frühestens dann thematisiert, wenn er erstmals im Zusammenhang mit Themen des Grundkurses eine Rolle spielt. Er kann in noch *unpräzisierter* Form verwendet werden und braucht nur im Leistungskurs formalisiert zu werden.

d) Es werden nur solche Sätze festgehalten, die bei Themen des Grundkurses als Hilfsmittel benötigt werden. Diejenigen *zentralen Sätze,* die anschaulich evident sind, deren Beweis jedoch die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ erfordert, werden mittels

*Plausibilitätsüberlegungen* begründet und bewußt der *Anschauung* entnommen. Gegebenenfalls können *lokale Deduktionen* (z. B. Monotonie-Kriterium ⇒ Extrema-Kriterium) vorgenommen werden.
Diese Lücken können (müssen aber nicht unbedingt) im Leistungskurs geschlossen werden, etwa durch lokales Ordnen um den Mittelwertsatz herum (vgl. *Coers* [10]; vgl. auch [5]).

e) Die *Ableitungsregeln* für $f(x) + a$, $a \cdot f(x)$, $f(x + a)$, $f(a \cdot x)$ und $f^{-1}(x)$ können *elementargeometrisch*, die Summenregel kann *plausibel* begründet werden (vgl. [24], [33] sowie die DMV-Denkschrift von 1976).

f) Bei der Ableitung der *Exponentialfunktionen* wird die Existenz einer Tangente in $(0|1)$ bewußt der *Anschauung* entnommen (genaueres: siehe [8, insb. S. 278]). Die Ableitungsbestimmung der *Sinusfunktion* benutzt *plausible geometrische Schlüsse* (genaueres: siehe den vierten Aufsatz in diesem Heft).

g) Bei der *Einführung des Integralbegriffs* wird auf eine *Definition von Flächeninhalten* für Punktmengen im $\mathbb{R}^2$ *verzichtet*. Die grundlegenden *Eigenschaften* des Flächeninhaltsbegriffs – Additivität, Definitheit (also Monotonie), Bewegungsinvarianz – werden *ohne Begründung*, notfalls sogar ohne ausdrückliche Formulierung verwendet. So kann das (bestimmte) Integral $\int_a^b f$ einfach als *algebraische Summe von Flächeninhalten*, wie in Abschnitt 4 beschrieben (Abb. 4), definiert werden. Von Anwendungsbeispielen her (Mittelwert der Temperatur; Zu- und Abfluß von Wasser mit gegebener Strömungsstärke, vgl. *Koch* [33, S. 22]) läßt sich leicht motivieren, daß die Inhalte von Teilflächen unterhalb der ersten Achse subtrahiert werden. Einige unmittelbare Folgerungen aus dieser Definition, bei Bezugnahme auf elementargeometrische Grundkenntnisse, sind in Abb. 8 dargestellt; sie lassen den bedeutenden Vereinfachungseffekt erkennen.

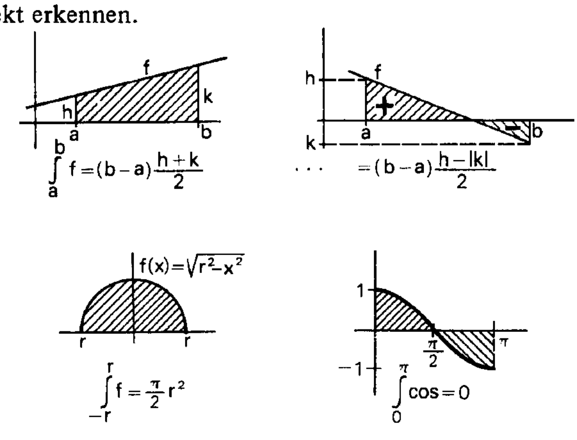


Abb. 8

Das Hauptproblem der Integralrechnung ist also *nicht* die *Definition*, sondern die *Berechnung* der Integralwerte. Grenzwerte von Ober- und Untersummen sollen dabei durchaus auftreten (z. B. bei $\int_0^1 x^2\,dx$), aber eindeutig als Berechnungsmethode. Da

die Existenz nicht fragwürdig ist, genügen hierfür spezielle Folgen bzw. Intervallschachtelungen, und es kann auf die Begriffe Infimum und Supremum verzichtet werden.
Bei Bedarf kann (und soll natürlich) die Existenzfrage aufgegriffen und eine autonome, d. h. von Flächeninhaltsannahmen unabhängige Integraldefinition (etwa nach Riemann), als Präzisierung der ursprünglichen Definition, gegeben werden.

h) Beim *Übergang vom bestimmten Integral zum Integral mit „variabler oberer Grenze"* treten bekanntlich Schwierigkeiten der Motivation und der Schreibweise auf. Eine mögliche Vereinfachung besteht darin, daß man *von vornherein die Flächeninhaltsfunktionen* (evtl. jetzt als „Integralfunktionen" bezeichnet) $F_a$ zu gegebener Funktion f betrachtet ([26]). Fragt man – gleichsam zur Anwendung der Differentialrechnung – für den Fall einfacher, etwa stückweise linearer Funktionen f nach der Ableitung von $F_a$, so führt dies rasch zur Vermutung und zum Beweis des ersten Teils des Hauptsatzes: $F_a$ ist eine Stammfunktion von f (falls f stetig und in einem Intervall definiert). Für $F_a(b)$ schreibt man auch $\int_a^b f$.

Statt über Flächeninhalte kann das (bestimmte) Integral $\int_a^b f$ auch sogleich als *„Stammfunktionsintegral"* $G(b) - G(a)$, mit beliebiger Stammfunktion G, eingeführt werden. Die inhaltliche Bedeutung dieser Begriffsbildung wird durch das Stichwort „Gesamtzuwachs" beschrieben, siehe Abschnitt 4. Der Zusammenhang mit Flächeninhalten wird in diesem Falle hergestellt, indem man nachträglich oder (wie in [3c]) vor Definition des Stammfunktionsintegrals nachweist, daß Flächeninhalte unter Funktionsgraphen als Stammfunktionsdifferenzen berechnet werden können („Hauptsatz über Flächeninhaltsfunktionen").

Während die *Vereinfachungen* a) und b) schon im Verlaufe der Grundkurse *aufgehoben* werden, ist dies für die Vereinfachungen c), d) und e) erst in Leistungskursen und für f) und g) womöglich noch später, d. h. erst im Hochschulstudium der Fall. Wir halten es jedoch für legitim, daß der Grundkurs-Schüler sein Mathematik-Programm von vier Grundkursen auch ohne diese Präzisierungen absolviert.

Ungeachtet all dieser Vereinfachungen kann und soll natürlich im Unterricht durchaus *mathematisch argumentiert* werden, wenn auch manchmal auf der Basis von (noch) vorläufigen Begriffen oder von noch nicht formal bewiesenen Sätzen. Die *Lücken* sollten in der Regel *für Lehrer und Schüler bewußt* gelassen werden; d. h. der Schüler sollte wissen, wann vereinfacht wird und wann nicht, und er sollte unterscheiden können zwischen Plausibilitätsbetrachtungen und Beweisen. Das Wesentliche ist, daß die gewählten Vereinfachungen einer gegebenenfalls gewünschten Präzisierung nicht im Wege stehen. Wenn dies gewährleistet ist, darf der Lehrer Vereinfachungen auch *stillschweigend* vornehmen (z. B. bei g) und den jeweiligen Sachverhalt erst bei Rückfragen von Schülern explizit problematisieren. Hierzu muß der Lehrer natürlich jederzeit bereit und in der Lage sein.

Unsere Konzeption ist nun wohl hinreichend deutlich geworden. Wir grenzen uns ab

– *einerseits* gegen eine unkritische Orientierung an der derzeit hochschulüblichen Analysis, insbesondere gegen ein überzogenes Streben nach formaler fachsystematischer Exaktheit und inhaltlicher Vollständigkeit schon im ersten Anlauf (wie es sich in vielen Schulbüchern und Lehrplänen der 70er Jahre gezeigt hat),

– *andererseits* gegen eine gedanklich unsaubere, vielleicht gar rezeptmäßig betriebene Analysis sowie gegen einen resignierenden Verzicht auf mathematisches Argumentieren angesichts eines nicht erreichbaren Hochschul-Niveaus.

Es wäre ein grobes Mißverständnis, unsere Vorschläge als Versuche zur Aufweichung von gymnasialen Standards, als Plädoyer für ein im vagen Sinne „anschauliches" Arbeiten oder für bloße Rezeptvermittlung aufzufassen. Das Ziel einer verständigen, „intellektuell anständigen" Handhabung der Analysis stellt *genügend hohe, aber auch legitimierbare Ansprüche* an den Grundkurs-Schüler. Entscheidend für die Realisierung eines so verstandenen Analysisunterrichts ist, daß der Lehrer dieses Ziel bejaht. Dazu muß er mit dem Stoff souveräner umgehen und auf Schülervorschläge stärker eingehen können als in einem Unterricht, der sich auf einheitlich hoher formaler Ebene abspielt oder der sich auf das kalkülmäßige Lösen von Aufgaben beschränkt.

## Literatur


[1] *Artin, E.*: A Freshman Honors Course in Calculus and Analytic Geometrie. Taught at Princeton University. Charlottesville, Virginia: 1957.

[2] *Arzt, K./Mütz, K.*: Ein grenzwertfreier Zugang zur Analysis. MU **22** (1976), H. 5, S. 47–63.

[3a/b/c] *Athen, H./Griesel, H.* (Hrsg.): Mathematik heute, Vorkurs Analysis/Grundkurs Analysis 1/ Grundkurs Analysis 2. Hannover: 1977/1978/1979.

[4] *Baumann, R.*: Analysis I unter besonderer Berücksichtigung des Bedarfs an mathematischen Hilfsmitteln in anderen Schulfächern. In: Handreichungen für Lernziele, Kurse und Projekte im Sekundarbereich II, 4. Folge, C (Hrsg.: Der Niedersächsische Kultusminister). Hannover: 1977, S. 88–116.

[5] *Blum, W.*: Bemerkungen zum Analysisunterricht am Beispiel des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. DdM **2** (1974), H. 4, S. 305–313.

[6] *Blum, W.*: Ein Grundkurs in Analysis. DdM **3** (1975), H. 3, S. 163–184.

[7] *Blum, W.*: Exponentialfunktionen in einem anwendungsbezogenen Analysis-Unterricht der beruflichen Oberstufe. Die Deutsche Berufs- und Fachschule **72** (1976), H. 9, S. 643–656.

[8] *Blum, W./Kirsch, A.*: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. DdM **5** (1977), H. 4, S. 274–288.

[9a/b] *Bussmann, H./Wenzelburger, E.*: Anschauliche Differentialrechnung/Anschauliche Integralrechnung. München: 1977.

[10] *Coers, H.*: Lokales Ordnen um den sogenannten Schrankensatz der Differentialrechnung. MU **15** (1969), H. 4, S. 83–93.

[11] *Danckwerts, R.*: Ein Vorschlag zur Behandlung des Differentiationsbegriffs in Leistungskursen. DdM **6** (1978), H. 3, S. 206–211.

[12] *Fischer, R.*: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. ZDM **8** (1976), H. 4, S. 185–192.

[13] *Fischer, R.*: Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht. DdM **6** (1978), H. 3, S. 212–226.

[14] *Fischer, R./Malle, G.*: Fachdidaktik Mathematik, Lehrbrief für das Fernstudium „Pädagogik für Lehrer an höheren Schulen". Klagenfurt: 1978.

[15] *Freudenthal, H.*: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1/2. Stuttgart: 1973.

[16] *Friedman, N.A.*: A Picture for the Derivative. The American Mathematical Monthly **84** (1977), H. 6, S. 470/471.

[17] *Griesel, H.*: Grundkurs Analysis – die Beschreibung des Ablaufs einer Curriculumentwicklung. MU **22** (1976), H. 5, S. 25–46.

[18] *Hattig, H./Herfort, P.*: Zugänge zur Differentialrechnung (DIFF-Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sek. II, Analysis MA 1). Tübingen: 1978.

[19] *Jahner, H.*: Modell für einen Minimalkurs „Analysis". Neue Unterrichtspraxis **9** (1976), H. 5, S. 276–288.

[20] *Karcher, H.*: Analysis auf der Schule. DdM **1** (1973), H. 1, S. 46–69.

[21] *Karcher, H.*: Erläuterungen zur Analysis. DdM **4** (1976), H. 3, S. 169–187.

[22] *Kemper, H.*: Kritische Bemerkungen zu einigen Kursen der Kollegstufe. DdM **2** (1974), H. 2, S. 159–162.

[23] *Kirsch, A.*: Vorschläge zur Orientierung und Beschränkung der Funktionenlehre an der Schule. MNU **12** (1959), H. 1, S. 16–19.

[24] *Kirsch, A.*: Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung. MU **5** (1960), H. 2, S. 5–21.

[25] *Kirsch, A.*: Zur Behandlung der reellen Zahlen im Oberstufenunterricht. In: Der Mathematikunterricht im Gymnasium (Hrsg.: H. Schröder). Hannover: 1966, S. 215–243.

[26] *Kirsch, A.*: Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. DdM **4** (1976), H. 2, S. 87–105.

[27] *Kirsch, A.*: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. DdM **5** (1977), H. 2, S. 87–101.

[28] *Kirsch, A.*: Reelle Zahlen. In: H. Athen/H. Griesel (Hrsg.): Mathematik heute, Lehrerheft 9. Schuljahr. Hannover: 1978.

[29] *Kirsch, A.*: Natürliche und formale Auffassung des Flächeninhalts. PM **21** (1979), H. 3, S. 65–69.

[30] *Kirsch, A.*: Geometrische Abbildungen von Funktionsgraphen und zugehörige Änderungen der Funktionsterme. In: *H. Athen/H. Griesel* (Hrsg.): Mathematik heute, Lehrerheft Vorkurs Analysis. Hannover: 1979.

[31] *Klein, F.*: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, Bd. 1. Berlin–Göttingen–Heidelberg: 1924.

[32] *Knabe, H.*: Weiterführung der Differentialrechnung. MU **15** (1969), H. 4, S. 62–82.

[33] *Koch, A.*: Eine propädeutische Behandlung der Analysis. MU **14** (1968), H. 5, S. 12–37.

[34] *Koch, A.*: Präzisierung des Integralbegriffs und Grundzüge der Konstruktion der reellen Zahlen. MU **15** (1969), H. 4, S. 5–43.

[35] *Kroll, W.*: Ein Vorschlag zur Behandlung der Analysis in der zukünftigen Kollegstufe, Teil I/II/III. MU **27** (1974), H. 6, S. 350–360/H. 7, S. 420–426/**28** (1975), H. 1, S. 14–17.

[36] *Lang, S.*: A first Course in Calculus. Reading Mass.: $^{3}$1973.

[37] *Nägerl, H.* u.a.: Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. DdM **1** (1973), H. 2, S. 143–157.

[38] *Pickert, G.*: Analysis in der Kollegstufe. MU **22** (1976), H. 5, S. 64–81.

[39] *Sacharin, A.*: Über den Mittelwert zum Integral. MPhSB **26** (1979), H. 1, S. 69–83.

[40] *Schmähling, R./Thode, T.*: Ein Vorschlag zur Behandlung des Tangentenproblems im Analysisunterricht. DdM **5** (1977), H. 3, S. 195–211.

[41] *Schröder, H.*: Gedanken zur Analysis als Unterrichtsgegenstand. PM **20** (1978), H. 3, S. 65–74.

[42] *Seyfferth, S.*: Prozeßlinien und -netze im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. In: Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe II (Hrsg.: *Dörfler, W./ Fischer, R.*). Klagenfurt: 1976, S. 201–210.

[43] *Toeplitz, O.*: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht Dtsch. Math. Ver. **36** (1927), S. 90–100.

[44] *Wittmann, E.*: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: $^{4}$1976.

[45] *Wunderling, A.*: Präzisierung von Grenzwert und Ableitung. MU **14** (1968), H. 5, S. 38–66.

# Anmerkungen

1 Wie wir uns eine verantwortbare Behandlung der reellen Zahlen vorstellen, ist in [28] aufgezeigt. Der dort für die 9. Klasse gemachte Vorschlag, auf der Grundlage einer phänomenologischen Analyse der Zahlengeraden, läßt sich ohne weiteres für die Ansprüche des Oberstufenunterrichts ausbauen (hierzu auch [25]).

2 Wir nennen Funktionen der Form $x \mapsto mx + b$ „*affin-linear*“ oder auch „*geradlinig*“, im Gegensatz zu „linearen“ Funktionen $x \mapsto mx$.

3 Bis auf einen Existenzquantor („existiert“) sind diese Schwierigkeiten in der alten Definition „versteckt“ und damit ausgegliedert (hierzu: [27], S. 95); sie brauchen erst bei einer späteren Analyse und Präzisierung explizit gemacht zu werden.

4 Bei *Bussmann/Wenzelburger* [9b] wird der Integralbegriff ausschließlich in diesem Sinn gesehen.

Prof. Dr. W. Blum
Carlsdorfer Str. 16
3500 Kassel
dienstl.: Gesamthochschule Kassel
Fachbereich 17 (Mathematik)

Prof. Dr. A. Kirsch
Asternweg 12
3500 Kassel
dienstl.: Gesamthochschule Kassel
Fachbereich 17 (Mathematik)