In: Praxis der Mathematik. Zeitschrift für die Unterrichtspraxis der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II, Hrsg.: Pohlmann (u.a.), 25. Jahrgang, 1983, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, S. 198-202

„Glatte" Zahlen für eine Schulbuchaufgabe – eine diophantische Gleichung und deren elementare Lösung

Von *Werner Blum* in Kassel

1. Problemstellung

Eine Aufgabe aus einem Schulbuch ([1a, S. 86]) lautet:

„Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Seitenlängen 50 cm und 30 cm soll man einen Kasten ohne Deckel herstellen, indem man an jeder Ecke ein Quadrat ausschneidet und die entstehenden Seitenflächen nach oben biegt. Der Kasten soll möglichst großes Volumen haben."

Der *Lösungsansatz* (s. Fig. 1) mit $a := 50$ und $b := 30$ (in cm) führt zum von x abhängigen Volumen

$$V = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx.$$

Die Nullstellen der Ableitung $V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$ sind

$$x_{1/2} = \tfrac{1}{6}(a+b) \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{a^2 - ab + b^2} = \tfrac{40}{3} \pm \tfrac{5}{3}\sqrt{19}.$$

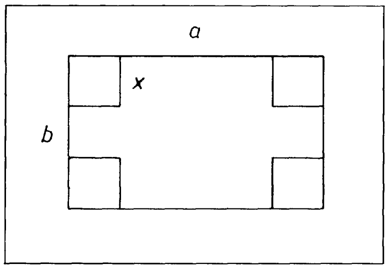

Fig. 1

Das sind „unschöne" Zahlen zum Weiterrechnen.

Hätte das Resultat *mit „glatten" Zahlen „aufgehen"* sollen, hätten die Seitenlängen a und b statt 50 und 30 derart lauten müssen, daß $a^2 - ab + b^2$ eine natürliche Quadratzahl wird. Den trivialen Fall $a = b$ schließt man dabei sinnvollerweise aus, setzt also $a \neq b$, o.B.d.A. $a > b$ voraus (Mit $c = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ ist die Lösung dann $x = \frac{1}{6}(a+b-c)$).

Damit hat sich folgendes *Problem* ergeben (vgl. auch [5]):

Gesucht sind die Lösungen der diophantischen Gleichung

(1) $\boxed{a^2 - ab + b^2 = c^2 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{N},\ a > b.}$

2. Anmerkung zur Problemstellung

Es ist heutzutage, da *Taschenrechner* immer weitere Verbreitung finden, *keine unterrichtsrelevante Frage* mehr, ob quadratische Gleichungen „aufgehen". Es besteht sogar die *Gefahr*, daß durch die stete Wahl *„glatter"* Zahlen den Schülern falsche Vorstellungen von realen Verhältnissen vermittelt werden. Die obige Frage ist also „nur" von *theoretischem Interesse*.

Doch auch solche theoretisch motivierten Fragestellungen sind legitim und gewinnbringend, sowohl für Lehrer und Studenten als auch für Schüler. Denn es ist geradezu ein Wesenszug der Mathematik, daß sich ursprünglich kontextgebundene Fragen *verselbständigen*, zu interessanten Lösungsmethoden und Resultaten führen sowie Querverbindungen zwischen verschiedenen Teilgebieten aufzeigen können; hierbei sind *zahlentheoretische Probleme* oft besonders fruchtbar (vgl. [3, S. 3/4] oder [4, S. 290/291]). In diesem Sinne illustriert das geschilderte Problem exemplarisch das *Spannungsverhältnis* zwischen „praktischer" Aufgabenstellung und verselbständigter „theoretischer" Fragestellung.

Wir werden das gestellte Problem in Abschnitt **3** algebraisch und in Abschnitt **4** geometrisch auf elementare Weise lösen. Dabei wird deutlich werden, daß die Überlegungen auch für interessierte Schüler zugänglich sind. In Abschnitt **5** skizzieren wir, wie das Problem eleganter, dafür aber nicht mehr elementar (nämlich mit Mitteln der algebraischen Zahlentheorie) gelöst werden kann.

3. Elementare Lösung des Problems

Ist $(a; b; c)$ eine Lösung unserer Gleichung (1), so gilt wegen $a>b$

$$c^2 = a^2 - ab + b^2 > a^2 - a^2 + b^2 = b^2, \quad \text{also} \quad c>b \quad \text{und}$$
$$c^2 = a^2 - ab + b^2 < a^2 - b^2 + b^2 = a^2, \quad \text{also} \quad c<a.$$

Für $s := c-b$ gilt daher $0<s<c$.

Aus $c^2 = a^2 - ab + b^2$ berechnet man mit $b=c-s$ sofort

$$c = \frac{a^2+as+s^2}{a+2s} \quad \text{und hieraus} \quad b = \frac{a^2-s^2}{a+2s}.$$

Umgekehrt liefern, wie man durch einfache Rechnung bestätigt,

$$(2) \qquad a=r, \quad b=\frac{r^2-s^2}{r+2s}, \quad c=\frac{r^2+rs+s^2}{r+2s}$$

eine Lösung von (1), sofern nur $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt. Hierfür muß notwendig $r, s \in \mathbb{N}$ und $r>s$ gelten.

Man überlegt leicht:

Bemerkung 1.

(1) Ist $(a; b; c)$ eine Lösung von (1), so auch $(ta; tb; tc)$ für jedes $t \in \mathbb{N}$.

(2) Ist $(a; b; c)$ eine Lösung von (1) und ist d ein gemeinsamer Teiler von a, b, c, so ist auch $\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}; \frac{c}{d}\right)$ eine Lösung.

Daher (Multiplikation in (2) mit $r+2s$) erhält man *alle Lösungen* von (1) in der Form

$$\boxed{a=r^2+2rs, \quad b=r^2-s^2, \quad c=r^2+rs+s^2 \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{N},\ r>s}$$

sowie, falls d ein gemeinsamer Teiler von a, b, c ist, durch $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$.

Es ist klar, daß wegen Bemerkung 1 nur „*primitive*" Lösungen von Interesse sind, d.h. Lösungen mit $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$. Diese Bedingung ist, wie man leicht einsieht, zu $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ äquivalent.

Man überlegt sofort:

Bemerkung 2.

Ist k ein gemeinsamer Teiler von r, s, so ist k^2 ein gemeinsamer Teiler von a, b.

Daher muß nur der Fall $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ betrachtet werden.

In der folgenden Tabelle sind einige Lösungen festgehalten. Bis auf die mit „↑" gekennzeichneten Fälle sind sie primitiv. In den „↑"-Fällen muß man a, b und c noch durch 3 teilen, um primitive Lösungen zu erhalten.

r	2	3		4		5				6		7						8	…
s	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	5	1	2	3	4	5	6	1	…
a	8	15	21	24	40	35	45	55	65	48	96	63	77	91	105	119	133	80	…
b	3	8	5	15	7	24	21	16	9	35	11	48	45	40	33	24	13	63	…
c	7	13	19	21	37	31	39	49	61	43	91	57	67	79	93	109	127	73	…
				↑			↑					↑			↑				

Die an der Tabelle beobachteten Sachverhalte lassen sich einfach beweisen.

Lemma 1. Gilt $\mathrm{ggT}(r,s)=1$ und ist $r-s$ nicht durch 3 teilbar, so gilt $\mathrm{ggT}(a,b)=1$.

Beweis: Angenommen, die Primzahl p teile a und b.
Wegen $a=r(r+2s)$ gilt dann $p \mid r$ oder $p \mid r+2s$.
Wegen $b=(r+s)(r-s)$ gilt dann $p \mid r+s$ oder $p \mid r-s$.

Fall 1: $p \mid r$ und $p \mid r+s$; dann auch $p \mid (r+s)-r=s$ Widerspruch!

Fall 2: $p \mid r$ und $p \mid r-s$; dann auch $p \mid r-(r-s)=s$ Widerspruch!

Fall 3: $p \mid r+2s$ und $p \mid r+s$; dann auch $p \mid (r+2s)-(r+s)=s$ und damit auch $p \mid (r+s)-s=r$ Widerspruch!

Fall 4: $p \mid r+2s$ und $p \mid r-s$; dann auch $p \mid (r+2s)-(r-s)=3s$; wegen $p \neq 3$ (Voraussetzung!) folgt $p \mid s$ und damit wieder $p \mid r$ Widerspruch!

Lemma 2. Gilt $\mathrm{ggT}(r,s)=1$ und ist $r-s$ durch 3 teilbar, so sind a und b durch 3 teilbar, und es gilt $\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)=1$.

Beweis: Wegen

$$a=r(r-s)+3rs \quad \text{und} \quad b=(r+s)(r-s)$$

gilt $3 \mid a$ und $3 \mid b$.

Angenommen, die Primzahl p teile $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$. Wie eben folgt dann

$$\left(p \mid r \quad \text{oder} \quad p \;\middle|\; \frac{r-s}{3}+s\right) \quad \text{und} \quad \left(p \mid r+s \quad \text{oder} \quad p \;\middle|\; \frac{r-s}{3}\right).$$

Die Fälle 1, 2, 3 führen wie eben, Fall 4 nun sogar ebenso direkt zum Widerspruch.

Damit haben wir sämtliche primitiven Lösungen von (1) erkannt (vgl. nochmals obige Tabelle). Insgesamt ist also bewiesen:

Satz. Alle Lösungen von (1) sind gegeben durch

(I) $a=r^2+2rs,\quad b=r^2-s^2,\quad c=r^2+rs+s^2$
mit $r,s\in\mathbb{N},\quad r>s,\quad \mathrm{ggT}(r,s)=1,\quad 3\nmid r-s$ und

(II) $a=\frac{1}{3}(r^2+2rs),\quad b=\frac{1}{3}(r^2-s^2),\quad c=\frac{1}{3}(r^2+rs+s^2)$
mit $r,s\in\mathbb{N},\quad r>s,\quad \mathrm{ggT}(r,s)=1,\quad 3\mid r-s$

(in beiden Fällen ist $\mathrm{ggT}(a,b,c)=1$) sowie alle Vielfachen $(ta;tb;tc)$ mit $t\in\mathbb{N}$.

Ein genaueres Studium der Tabelle zeigt noch den folgenden Sachverhalt:

Nebenbemerkung. Zu jeder primitiven Lösung $(a;b;c)$ nach (I) gibt es eine primitive Lösung $(a';b';c')$ nach (II) mit $a'=a$ und $c'=c$; dabei ist $r'>r$. Die Umkehrung ist ebenfalls richtig.

Dies rechnet man mit

$$r' := r + 2s \quad \text{und} \quad s' := r - s \quad \text{bzw. umgekehrt}$$

$$r := \frac{r' - s'}{3} + s' \quad \text{und} \quad s := \frac{r' - s'}{3}$$

einfach nach.

4. Geometrische Deutung

Es ist unmittelbar klar, daß die natürlichzahligen (bzw. die ganzzahligen) Lösungen von $a^2 - ab + b^2 = c^2$ genau den positiv rationalzahligen (bzw. den rationalzahligen) Lösungen von $a^2 - ab + b^2 = 1$ entsprechen.

Die Gleichung $a^2 - ab + b^2 = 1$ definiert nun bekanntlich eine (winkelhalbierendensymmetrische) Ellipse E in der $a-b$-Ebene (Fig. 2).

Es interessieren also die „rationalen Punkte" auf dieser Ellipse.

Wir betrachten die Geradenschar g_m: $b = ma + 1$ durch den Punkt $(0|1)$. Die Ellipsenpunkte mit $a \neq 0$ sind dann genau die zweiten Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ellipse. Es ist klar, daß der zweite Schnittpunkt von g_m mit E höchstens für $m \in \mathbb{Q}$ rational sein kann. Umgekehrt rechnet man leicht nach, daß für rationales $m = -\frac{s}{r}$ $(s \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{N})$ der rationale Schnittpunkt $(a|b)$ mit

$$a = \frac{r^2 + 2rs}{r^2 + rs + s^2}, \qquad b = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + rs + s^2}$$

resultiert. Es gilt $a > b > 0$ genau für $-1 < m < 0$; dies ist gleichbedeutend mit $r > s > 0$.

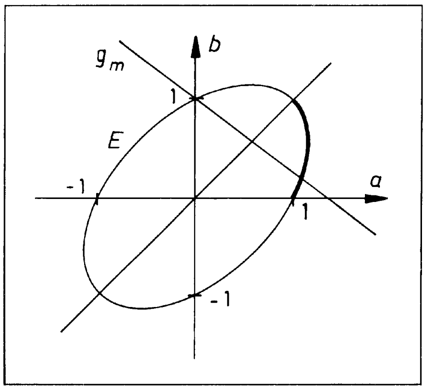

Fig. 2

Damit haben wir die Lösungen von (1) in derselben Form wie in Abschnitt **3** erhalten.

5. Skizze einer nicht-elementaren Lösung des Problems

Wir betrachten die quadratische Form

$$Q(x, y) := x^2 - xy + y^2.$$

Ihre Diskriminante ist -3. Daher stellt sich unser Problem als eine Fage im imaginär-quadratischen Zahlkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ dar.

Bekanntlich (siehe z.B. [2]) besteht die Menge $\mathcal{O}$ der ganzen Elemente von K genau aus den

$$u + v\rho \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \rho := \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}).$$

Die Norm eines solchen Elements ist

$$\mathcal{N}(u + v\rho) = u^2 + uv + v^2.$$

Genau dann ist $\mathcal{N}(-b + a\rho) = a^2 - ab + b^2$ (mit $a, b \in \mathbb{N}$) eine Quadratzahl, wenn $-b + a\rho$ ein Quadrat in $\mathcal{O}$ ist. Man berechnet

$$(s + r\rho)^2 = (s^2 - r^2) + (r^2 + 2rs)\rho.$$

Mit $-b+a\rho=(s+r\rho)^2$ ergibt sich

$$a=r^2+2rs \quad \text{und} \quad b=r^2-s^2,$$

wobei für unseren Fall $a,b\in\mathbb{N}$, $a>b$ gelten muß $r,s\in\mathbb{N}$ und $r>s$. Für $c:=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ gilt dann

$$c=\mathcal{N}(s+r\rho)=r^2+rs+s^2.$$

Damit haben wir die Lösungen der diophantischen Gleichung (1) in derselben Form wie in Abschnitt **3** erhalten. Wiederum ist klar, daß für die allein interessierenden primitiven Lösungen nur der Fall $\mathrm{ggT}(r,s)=1$ zu betrachten ist. Aus dem Zerlegungsverhalten der rationalen Primzahlen in K (vgl. z.B. [2]) kann man nun folgern, daß für $r\not\equiv s \pmod 3$ gilt $\mathrm{ggT}(a,b)=1$ (Lemma 1) und daß für $r\equiv s \pmod 3$ gilt $\sqrt{-3}=-1+2\rho \mid s+r\rho$ und weiter $-b+a\rho=3\cdot(-b'+a'\rho)$ mit $\mathrm{ggT}(a',b')=1$ (Lemma 2). Damit hat sich erneut der Satz aus Abschnitt **3** ergeben.

Man kann zeigen (siehe [2, S. 208]), daß die Zahlen $Q(a,b)=a^2-ab+b^2$ mit $\mathrm{ggT}(a,b)=1$ nur solche Primteiler p haben, deren *Kronecker*-Symbol $\left(\frac{-3}{p}\right)$ gleich 0 oder 1 ist. Die Fälle $p=2$ und $p=3$ scheiden aus, und es bleibt allein der Fall $p\equiv 1 \pmod 3$. Damit ist abschließend noch eine weitere Beobachtung an der Tabelle bestätigt:

Nebenbemerkung. Ist $(a;b;c)$ eine primitive Lösung von (1) und ist p ein Primteiler von c, so gilt $p\equiv 1 \pmod 3$.

6. Rückblick auf die Ausgangsfrage

Alle Lösungen der Gleichung (1) liefern glatte Zahlen für die in Abschnitt **1** referierte Schulbuchaufgabe. Daß offenbar auch der Autor dieser Aufgabe nach Lösungen von (1) gesucht hat, zeigt die Bemerkung im Lösungsheft ([1b, S. 119]):

„*Achtung:* Ab 2. Auflage Änderung der Zahlenwerte: ‚... Seitenlängen **40** cm und **25** cm ...'."

Dies sind die Zahlen $5\cdot a$ und $5\cdot b$ zur Lösung $(a;b;c)=(8;5;7)$, die von $r=4$ und $s=1$ herrührt (Fall II).

Literatur

[1a/b] *Athen, H./Griesel, H.* (Hrsg.): Mathematik heute, Grundkurs Analysis 1, Hannover 1980/Lösungen und didaktisch-methodischer Kommentar, Hannover 1981.

[2] *Cohn, H.:* A Second Course in Number Theory. Wiley & Sons, New York/London 1962.

[3] *Henn, W.:* Eine Einführung in die elementare Zahlentheorie in einem Leistungskurs der Klasse 13. In: Pädagogik heute (Hrsg.: Phil.-Verb. BW), Heft 5, Karlsruhe 1976 (Päd. Arbeit für das zweite Staatsexamen).

[4] *Neubrand, M.:* Ein Kurs über diophantische Gleichungen für Lehrerausbildung und Sekundarstufe II. **DdM 7** (1979) 290–305.

[5] **PM 22** (1980) 154–156 (P 737).

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Werner Blum, Wegmannstr. 1, 3500 Kassel

Vorurteil: Einschlägige Aussagen A reduzieren sich durch das Vorurteil V auf $A\wedge V$. So kommt man dem Widerspruch sehr nahe!

Phantasie: Phantasten dehnen alle Aussagen um den Phantasiefaktor P auf $P\vee A$ aus. So wird schließlich alles möglich.

K.-H. H.