In: Journal für Mathematik-Didaktik. Zeitschrift der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Hrsg.: Blum (u.a.), Jahrgang 6, Heft 1, 1985, Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn, S. 71-76

W. Blum

Einige Bemerkungen zur Bedeutung von „stoffdidaktischen" Aspekten am Beispiel der Analyse eines Unterrichtsausschnitts in der Arbeit von J. Voigt (JMD 4/84)

Summary: By example of an excerpt of a lesson analysed by J. Voigt we want to point to the importance of didactic aspects related to topics ("stoffdidaktische" Aspekte) in analysing, planning and performing mathematics education.

Anhand eines von J. Voigt analysierten Ausschnitts aus dem Mathematikunterricht einer 5. Klasse möchte ich exemplarisch auf etwas hinweisen, was eigentlich selbstverständlich ist, gelegentlich aber (nicht bei Voigt) in Frage gestellt wird: Die Bedeutung "stoffdidaktischer" Aspekte bei der Analyse wie auch bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht. Ausgangspunkt hierfür war - unabhängig von meiner Wertschätzung der prägnanten und konsequenten Interaktions- und Kommunikationsanalysen - ein zweifaches Unbehagen beim Lesen der Voigtschen Arbeit: Zum einen schien mir bei einer zentralen Unterrichtssituation durch das bewußte Ausblenden stoffbezogener Aspekte ein die Situation offenbar ganz wesentlich prägendes Moment nicht erfaßt zu sein; zum andern sah ich in der starken Betonung der "Alltagslogik des Mathematikunterrichts" die Gefahr der Unterschätzung fachmethodischer Handlungsspielräume von Lehrern. Beides zusammen resultierte in dem Bedürfnis nach einer (auch) "stoffbezogenen" Betrachtung dieses Unterrichtsausschnitts. Bei dieser nun folgenden Betrachtung beschränke ich mich also ebenfalls bewußt auf einen, nämlich den stoffdidaktischen Aspekt. Damit will ich keineswegs die Bedeutung anderer Aspekte in Frage stellen; im Gegenteil: Ich wende mich gegen falsche Dichotomien wie etwa "Stoffbezug vs. Lernerbezug", wie sie in jüngster Zeit verschiedentlich in der fachdidaktischen Diskussion zu hören waren, und plädiere für eine ganzheitliche, möglichst vielfältige Aspekte einbeziehende und miteinander verknüpfende Sichtweise. Dabei kommt es mir nicht so sehr auf das spezielle Beispiel an; dieses dient eher als Ausgangspunkt für meine allgemeinen Anmerkungen.

Thema des von Voigt analysierten Unterrichts ist ein (vom Lehrer vorgegebenes) Spiel, bei dem man bei einem Einsatz von 10 Pf. eine von 8 Spielpuppen (5 rote, 2 grüne, 1 gelbe) aus einer Urne ziehen muß und 20 Pf. gewinnt (d.h. ausbezahlt bekommt), wenn man die gelbe oder eine grüne Puppe zieht. Ich will nicht diskutieren, ob dieses stochastische Thema überhaupt für eine 5. Klasse geeignet ist und ob die recht komplexe Spielsituation (inklusive der gewählten Zahlen) methodisch günstig ist, obwohl dies auch stoffdidaktische Gesichtspunkte sind. (Insbesondere das zweite kann man bezweifeln, und dies hat natürlich ebenfalls weitreichende Folgen für den Unterrichtsverlauf.) Vielmehr betrachte ich nur den Unterrichtsausschnitt, der im

Voigtschen Transkript die Zeilen 86 bis (etwa) 130 umfaßt, mit 114 als "Kern". Um diesen Ausschnitt besser verstehen zu können, führe ich im folgenden eine kurze stoffdidaktische Sachanalyse hierzu durch. Unter "Stoff" bzw. "Sache" verstehe ich dabei a priori einen Komplex, bestehend aus der gegebenen Spielsituation, aus Begriffen und Verfahren in dazu passenden stochastischen Modellen sowie aus Beziehungen zwischen diesen Bereichen. Diese Sachanalyse orientiert sich nicht bloß an der "Sache", sondern u.a. auch an allgemeinen Zielen des Stochastikunterrichts (wie der Ausformung "stochastischen Denkens", u.a. um mit Situationen wie der gegebenen verständig umgehen zu können) oder an bekannten Theorien und Erfahrungen über die Entwicklung von (stochastischen) Begriffen bei Lernenden. Sie ist natürlich nicht als unmittelbar umsetzbare Unterrichtsvorlage gedacht. Sie ist auch nicht als hinreichende Beschreibung dessen gedacht, was sich dann vermöge unterrichtlicher Kommunikations- und Denkprozesse beim einzelnen Schüler als "Inhalt" ausformt.

Das Wesentliche der folgenden Sachanalyse ist ein Herausarbeiten unterschiedlicher Bedeutungen von "Gewinn(en)". Dabei muß man unterscheiden:

A) Gewinnen als Ereignis / Gewinn als Größe (Geldwert), und zwar als Auszahlung oder als Rein-Gewinn;
B) Gewinnen bzw. Gewinn bei einem Spiel / Gewinnen bzw. gesamter oder mittlerer Gewinn bei mehreren Spielen;
C) Gewinn(en) bei wirklicher Durchführung des Spiels / Gewinn(en) im mathematischen Modell;
D) Gewinn(en) des Spielers / Gewinn(en) der Bank.

Jede Alternative kann mit jeder kombiniert werden; genauer kann man aus der Sicht des Spielers überlegen:

1 Bei jeder einzelnen Durchführung des Spiels interessiert vor allem das Ereignis G: "Grüne oder gelbe Puppe gezogen". G bedeutet "Spieler gewinnt" oder anders "Spieler gewinnt etwas" (hier wird "gewinnen" also auch transitiv gebraucht), d.h. "Spieler bekommt etwas ausbezahlt", nämlich 20 Pf.
Im (offenbar adäquaten) Laplace-Modell beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(G)=\frac{3}{8}$ ("3 von 8"). Diese (a priori) als relativer Anteil berechenbare Zahl kann auch als ungefähre relative Häufigkeit bei "vielen" Ziehungen gedeutet werden.
Das Ereignis $\overline{G}$: "Rote Puppe gezogen" bedeutet "Spieler verliert", d.h. "Spieler bekommt nichts ausbezahlt". Es ist $P(\overline{G}) = \frac{5}{8}$ ("5 von 8"). Das Chancen-Verhältnis von G zu $\overline{G}$ beträgt 3 : 5.

(2) Wenn man bei einer einzelnen Durchführung des Spiels gewinnt, so beträgt der "Gewinn" oder besser und mißverständnisfrei die Auszahlung 20 Pf. Hierzu gehört im mathematischen Modell eine Zufallsgröße ξ: "Auszahlung (in Pf.)" mit

$$P(\xi = 20) = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad P(\xi = 0) = \frac{5}{8}.$$

Der effektive "(Rein-)Gewinn" ist "Auszahlung minus Einsatz". Er beträgt also 10 Pf., wenn man gewinnt, und -10 Pf., wenn man verliert; im letzten Fall spricht man von "Verlust". Die zugehörige Zufallsgröße ist demnach $\eta = \xi - 10$.

(3) Wenn man das Spiel mehrmals durchführt, interessieren die Gesamt-Auszahlung bzw. der Gesamt-(Rein-)Gewinn des Spielers, d.h. die Summe aller Einzel-Auszahlungen bzw. -Gewinne. Weiter berechnet man sinnvoll auch die mittlere Auszahlung bzw. den mittleren Gewinn pro Spiel.
Dem entsprechen im Modell die (mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteten "theoretischen Mittelwerte", d.h. die) Erwartungswerte

$$E\xi = \frac{3}{8}\cdot 20 \ (+ \frac{5}{8}\cdot 0) = 7\frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad E\eta = E\xi - 10 = -2\frac{1}{2}.$$

(4) Gesamt-Auszahlung bzw. -Gewinn bei mehreren Spielen entscheiden auch darüber, ob der Spieler insgesamt gewonnen hat (hier wird "gewinnen" also nur intransitiv gebraucht). Man schaut nämlich, ob er insgesamt mehr ausbezahlt bebekommen hat als er eingezahlt hat, d.h. ob sein Gesamt-Gewinn positiv ist (oder nicht).
Im Modell entscheidet über dieses Gewinnen des Spielers und damit über die "Fairness" des Spiels der Erwartungswert: Ein fairer Einsatz wäre gleich $E\xi$. Wegen $E\xi < 10$ bzw. $E\eta < 0$ ist das Spiel also unfair.
Dies kann man aufgrund der gegebenen Zahlen auch einfacher sehen: Die Auszahlung 20 hat (wegen $3 < 5$) eine geringere Chance als $\frac{1}{2}$. Die (auf lange Sicht im Mittel) zu erwartende Auszahlung ist daher kleiner als $\frac{1}{2}\cdot 20$. Dies ist gerade der Einsatz. Also ist das Spiel unfair.

Soweit die Sachanalyse. Eine <u>Analyse des Unterrichtsgesprächs</u> unter diesen <u>stoffdidaktischen</u> Gesichtspunkten zeigt: Zu Anfang geht es um Anteil-Verhältnisse (i.a. im Modell), wobei diverse Probleme von Schülern erkennbar werden, zum einen eher äußerliche, die Gesamtzahl der Spielpuppen betreffend (z.B. 95), zum anderen stärker stoffinhaltliche, das Verständnis von "Chance" betreffend (z.B. 99/100). Die Schüler verwenden dabei das Wort "gewinnen" ausschließlich im Sinne von (1), d.h. transitiv und auf ein einzelnes Spiel bezogen (94-96 und 111/113). (Dies wird auch durch den Tafelanschrieb mitbedingt, wo "Gewinn" in der Bedeutung von Auszahlung entsprechend (2) steht.) Auch der Lehrer benutzt "gewinnen" so (106/108). Er will aber offenbar rasch auf die Frage nach der "Fairness" des Spiels kommen und <u>wechselt</u>, obwohl er scheinbar an das Vorherige anknüpft, unvermittelt die Betrachtungsweise, indem er die zentrale Frage 114 stellt, wobei er "gewinnen" nun im (tieferliegenden) Sinne von 4 gebraucht, d.h. intransitiv und auf viele Spiele bezogen. Dabei bleibt er, ohne dies verbal (etwa durch einen Zusatz "wahrscheinlich") deutlich zu machen, in der Modellebene. Abgesehen von der Fragwürdigkeit dieser Lehrerhandlung unter allgemeinmethodischen Aspekten ist dieser Übergang auch fachmethodisch problematisch, da die begonnenen Überlegungen der Schüler über Anteile etc. in völlig "ungenetischer" Weise unterbrochen werden und neue Gesprächsfäden über Erwartungen bzgl. "Gewinnens" geknüpft werden müssen. Dies gelingt nur schwer, denn obwohl der Lehrer nun "gewinnen" stets entsprechend 4 benutzt, bleiben die meisten Schüler bei 1, und zwar nun auch auf der Realitätsebene (124 und 174).

J. Voigt analysiert den Unterricht im Hinblick auf Kommunikations- und Interaktionsprozesse. Genauer: Er will aufzeigen, wie sich didaktische Maximen (hier: "Anknüpfen an Alltagsvorstellungen der Schüler") an der "Alltagslogik des Mathematikunterrichts" brechen (an den "Routinen", "Gesprächs- und Handlungsmustern", "Riten" und "Zugzwängen" sowie auch an "institutionellen Zwängen"). Auch Voigt betont die zentrale Rolle der Lehrerfrage 114 für den Unterrichtsablauf; er deutet sie aber nicht als - wie eben herausgearbeitet - Erweiterung und inhaltlichen Standpunktwechsel, sondern als "Einengung (Hervorhebung W.B.) von einer offenen Frage zu einer bestimmten Antwort" (S. 271).

Ich will keinen Gegensatz zwischen den Voigtschen und meinen Analysen konstruieren. Es gibt nicht "die" richtige Deutung einer Unterrichtssituation. Vielmehr müssen verschiedene Deutungen zusammenfließen, um eine möglichst umfassende Sichtweise zu erreichen. Ich halte es daher für legitim, sich - vor allem aus forschungsmethodologischen Gründen - auf eine Analyse von Interaktionsprozessen zu beschränken; und ich halte die Voigtschen Untersuchungen für wertvoll und notwendig, denn Wissen über solche Prozesse ist bislang bei angehenden und bei praktizierenden Lehrern nicht ausreichend vorhanden, was auch daran liegt, daß es in der Fachdidaktik zu wenig solche Untersuchungen gibt. Ich will aber zwei Anmerkungen zu den Voigtschen Analysen machen.

Erstens ist die betrachtete Unterrichtsszene m.E. ganz wesentlich stoffinhaltlich geprägt, und dies läßt sich nur durch eine stoffdidaktisch ausgerichtete Analyse (etwa wie vorhin durchgeführt) herausarbeiten. Deshalb ist eine solche Sachanalyse notwendig (natürlich nicht hinreichend) für eine treffende Ausdeutung dieser Unterrichtssequenz, insbesondere für ein besseres inhaltliches Verstehen von Schüler- und Lehreräußerungen bzw. -handlungen, sowie für entsprechende Bewertungen, vor allem im Hinblick auf Ziele und methodische Prinzipien.

Zweitens kann durch Ausblenden stoffbezogener Aspekte (ungewollt) der Eindruck entstehen, als ob der (Mathematik-)Unterricht vorwiegend von allgemeinen Mustern und Zwängen determiniert wäre, die nur schwer beeinflußbar sind. Natürlich kann ein Lehrer nicht individuell für alle Erfolge oder Fehlschläge seines unterrichtlichen Handelns verantwortlich gemacht werden, so als ob diese Resultate in monokausaler Weise von seinen methodischen Maßnahmen erzeugt würden. Ich halte jedoch die methodischen, insbesondere auch die fachmethodischen Spielräume von Lehrern für recht groß. Speziell in unserem Beispiel hätte der Lehrer den Unterricht sicher auch so führen können, daß er die Äußerungen der Schüler ernster nimmt, deshalb aufgreift und weiterführt. Z.B. hätte er versuchen können, an Vorstellungen der Schüler von "Wahrscheinlichkeit", "Chance" oder "Gewinn(en)" anzuknüpfen und Schwierigkeiten klärend mit ihnen zu besprechen (unter Erarbeitung der Anteils- und der Häufigkeits-Deutungen für die interessierenden Inhalte, inklusive verschiedener Bedeutungen von "Gewinn(en)"). Insbesondere hätte er auf die Frage 114 verzichten und begründet hoffen können, daß sie sich an späterer Stelle "von selbst" ergibt. (Damit ist noch nicht viel über den tatsächlich hiermit erreichbaren "Unterrichtserfolg" gesagt, da auch - s.o. - grundsätzliche Fragen über die Sinnhaftigkeit des Unterrichtsthemas an sich gestellt werden müssen.) Für eine solche Unterrichts-Führung wie auch (vorher) für die Planung, insbesondere für die methodische Gestaltung des Unterrichts, für die Entwicklung adäquater Lern-Hilfen sowie für die Formulierung stoffbezogener Lernziele ist eine Sachanalyse wie vorhin durchgeführt notwendig, nicht etwa um hiermit "idealen Unterricht" konzipieren oder halten zu wollen, sondern um die fachmethodischen Spielräume des Lehrers zu verbreitern, um seine Sensibilität für fachmethodische Alternativen weiterzuentwickeln.

Die Voigtschen Interaktionsanalysen können ohne Zweifel wesentlich dazu beitragen, "daß der Lehrer nicht an dem Widerspruch zwischen seinen Ansprüchen und dem, was wiederholt in der Klasse geschieht, scheitert, sondern die Strukturen und Bedingungen seiner Praxis besser verstehen lernt und ein differenzierteres Verhaltensrepertoire sensibel und reflektiert entfaltet" (S. 281). Hierzu können und müssen natürlich aber auch "traditionelle stoffdaktische" Überlegungen ihren Beitrag leisten. Meine Hoffnung ist, daß die von Voigt und anderen betonten Gesichtspunkte nicht als eine Alternative zu anderen, insbesondere zu stoffdidaktischen Aspekten angesehen werden, sondern als eine fruchtbare, gegenseitig wechselwirkende Ergänzung, mit dem Ziel einer möglichst ganzheitlichen Sichtweise von Mathematikunterricht und ebenso von Mathematikdidaktik.

Prof.Dr. Werner Blum
Gesamthochschule Kassel
Fachbereich Mathematik
Heinrich-Plett-Str. 40
D-3500 Kassel