

Thorsten Kunow

# **Modellfehler und Greensche Funktionen in der Statik**

Universität Kassel  
Fachgebiet Baustatik  
Dissertation 2008

Diese Arbeit wurde vom Fachbereich Bauingenieurwesen der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann  
Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch  
Prof. Dr.-Ing. Stefan M. Holzer

Tag der mündlichen Prüfung: 9. November 2009

## **Kurzfassung**

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Fehlern, die bei der Berechnung von Tragstrukturen auftreten können, dem Diskretisierungs- und dem Modellfehler. Ein zentrales Werkzeug für die Betrachtung des lokalen Fehlers in einer FE-Berechnung sind die Greenschen Funktionen, die auch in anderen Bereichen der Statik, wie man zeigen kann, eine tragende Rolle spielen.

Um den richtigen Einsatz der Greenschen Funktion mit der FE-Technik sicherzustellen, werden deren Eigenschaften und die konsistente Generierung aufgezeigt. Mit dem vorgestellten Verfahren, der Lagrange-Methode, wird es möglich auch für nicht-lineare Probleme eine Greensche Funktion zu ermitteln.

Eine logische Konsequenz aus diesen Betrachtungen ist die Verbesserung der Einflussfunktion durch Verwendung von Grundlösungen. Die Greensche Funktion wird dabei in die Grundlösung und einen regulären Anteil, welcher mittels FE-Technik bestimmt wird, aufgespalten. Mit dieser Methode, hier angewandt auf die Kirchhoff-Platte, erhält man deutlich genauere Ergebnisse als mit der FE-Methode bei einem vergleichbaren Rechenaufwand, wie die numerischen Untersuchungen zeigen.

Die Lagrange-Methode bietet einen generellen Zugang zur zweiten Fehlerart, dem Modellfehler, und kann für lineare und nichtlineare Probleme angewandt werden. Auch hierbei übernimmt die Greensche Funktion wieder eine tragende Rolle, um die Auswirkungen von Parameteränderungen auf ausgewählte Zielgrößen betrachten zu können.

## **Abstract**

The present thesis deals with the errors which can appear in the numerical analysis of mechanical structures, that is the approximation and modeling error. A main tool for the consideration of the local error in an FE calculation are the Green's functions which play an important role also in other areas of the statics, as can be shown.

To guarantee the correct application of the Green's function within the FE framework, their characteristics and the consistent generation are detailed. With the introduced technique, the Lagrange method, it becomes possible to determine influence functions also for nonlinear problems.

A direct consequence of these considerations is the improvement of the influence function by using fundamental solutions. The Green's function is split in a fundamental solution and a regular part, which is calculated by the FEM. With this method, here applied to the Kirchhoff-plate, one clearly receives more exact results

than with the FEM with a comparable costs, as the numerical investigations point out.

The Lagrange method offers also a general access to the second kind of error, the modeling error, and can be applied to linear and nonlinear problems. In this case the Green's function too plays a major role and is the optimal tool to focus on the effects of design parameter changes.

# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand in den Jahren 2004 bis 2008 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Baustatik des Fachbereichs Bauingenieurwesen der Universität Kassel unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann.

Herrn Prof. Hartmann verdanke ich den Gedanken, der zu dieser Arbeit geführt hat. Mit großem Interesse und stets neuen Ideen hat Herr Hartmann meine Arbeit verfolgt und vorangetrieben. Im Vordergrund standen dabei immer die praktische Anwendung und Nutzen der Forschung.

Prof. Dr.-Ing. Thomas Grätsch und Prof. Dr.-Ing. Stefan M. Holzer danke ich für das stetige Interesse an meiner Arbeit, die konstruktive Kritik, die motivierenden Denkanstöße für meine Arbeit und für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Weiter möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Link und Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Kempfert für das Mitwirken in der Promotionskommission und den damit verbundenen Mühen bedanken.

Meinem Kollegen Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Peter Jahn möchte ich besonders für das sorgfältige Durchlesen des Manuskripts und die sich daraus ergebenden Hinweise und Diskussionen bedanken.

Meinen Freunden möchte danken, die auf unterschiedlichste Weise ihren Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben. Meiner Mutter und Heike und Horst danke ich für die Unterstützung, Förderung und Motivation während meiner Schul-, Ausbildungs-, Studien- und Doktorandenzeit.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Frau Wiebke, die es mir jederzeit ermöglicht hat, die Zeit für meine Arbeit zu investieren, die dafür nötig war. Meine beiden Kinder Lina und Linus haben auch ihren Teil zum Gelingen der Arbeit als ständig positives Erlebnis beigetragen.

Kassel, im Oktober 2008

Thorsten Kunow



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Ziele der Arbeit . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Gliederung der Arbeit . . . . .   | 6         |
| <b>2</b> | <b>Mechanische Grundlagen</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1      | Nichtlineare Statik . . . . .   | 9         |
| 2.1.1    | Greensche Identität und schwache Form . . . . .                             | 10        |
| 2.1.2    | Linearisierung . . . . .  | 11        |
| 2.2      | Lineare Statik . . . . .  | 12        |
| 2.2.1    | Die schwache Form des Gleichgewichts . . . . .                              | 15        |
| 2.3      | Einflussfunktionen . . . . .  | 16        |
| 2.3.1    | Funktionale . . . . .   | 17        |
| 2.3.2    | Greensche Funktionen . . . . .  | 19        |
| 2.3.3    | Lokal & global . . . . .  | 26        |
| 2.3.4    | Lagrange Multiplikator . . . . .  | 27        |
| 2.3.5    | Grundlösungen . . . . .   | 28        |
| <b>3</b> | <b>Finite Elemente Methode</b>  | <b>31</b> |
| 3.1      | Die grundlegende Technik . . . . .  | 31        |
| 3.2      | Greensche Funktionen . . . . .  | 32        |
| 3.2.1    | Der Projektionssatz . . . . .   | 34        |
| 3.2.2    | Dirac Energie . . . . .   | 37        |
| 3.2.3    | Lagrange Multiplikator und genäherte Greensche Funktion . . . . .           | 37        |
| 3.2.4    | Die äquivalenten Knotenkräfte . . . . .                                     | 40        |
| 3.2.5    | Einflussfunktionen in schwacher Form . . . . .                              | 42        |
| 3.2.6    | Berechnung von Punktwerten . . . . .  | 46        |
| 3.2.7    | Die inverse Steifigkeitsmatrix . . . . .                                    | 48        |
| 3.2.8    | Wenn Spannungen unendlich werden . . . . .                                  | 51        |
| 3.3      | Anmerkungen zur Greenschen Funktion . . . . .                               | 55        |
| 3.3.1    | Unterschiedliche Darstellungen für die Berechnung einer Zielgröße . . . . . | 55        |
| 3.3.2    | Rechenkosten . . . . .  | 60        |
| 3.4      | Abschätzung des Approximationsfehlers . . . . .                             | 61        |
| 3.4.1    | Primaler und dualer Fehler . . . . .  | 61        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.4.2    | Fehlerschätzer . . . . .   | 63        |
| 3.4.3    | Eine Analyse des zielorientierten Fehlerschätzers . . . . .        | 65        |
| 3.4.4    | Zielorientierte Fehlerschätzer für nichtlineare Probleme . . . . . | 68        |
| 3.4.5    | Beispiele für eine h-Adaption . . . . .                            | 72        |
| <b>4</b> | <b>Finite Elemente Technik mit Grundlösungen</b>                   | <b>75</b> |
| 4.1      | Die GFD-Methode . . . . .  | 75        |
| 4.1.1    | Das Modellproblem – Kirchhoff-Platte . . . . .                     | 76        |
| 4.1.2    | Greensche Funktionen für die Platte . . . . .                      | 77        |
| 4.1.3    | Verbesserte Genauigkeit bei Zielgrößen . . . . .                   | 78        |
| 4.2      | Numerische Beispiele für die GFD-Methode . . . . .                 | 79        |
| 4.2.1    | Rechteckplatte . . . . .   | 79        |
| 4.2.2    | L-Platte mit gemischten Randbedingungen . . . . .                  | 80        |
| 4.2.3    | Punktlasten . . . . .  | 81        |
| 4.2.4    | Teilflächenlasten . . . . .  | 82        |
| 4.2.5    | Beispiel aus der Baupraxis . . . . .                               | 83        |
| 4.2.6    | Bemessung im Stützenanschnitt . . . . .                            | 84        |
| 4.2.7    | Punktgestützte Platten . . . . .                                   | 86        |
| <b>5</b> | <b>Modellfehlerbestimmung</b>                                      | <b>89</b> |
| 5.1      | Ein erster Zugang . . . . .  | 89        |
| 5.1.1    | Ein Beispiel . . . . .   | 91        |
| 5.2      | Schwache Formulierungen und der $d$ -Term . . . . .                | 92        |
| 5.2.1    | Berechnung des Modellfehlers für lineare Probleme . . . . .        | 92        |
| 5.2.2    | Der Fehler in der Zielgröße . . . . .                              | 94        |
| 5.2.3    | Die Näherung $z_c \approx z$ . . . . .                             | 98        |
| 5.2.4    | Linearisierung . . . . .   | 99        |
| 5.2.5    | Asymmetrie . . . . .   | 101       |
| 5.2.6    | Zusatzterme in der inneren Energie . . . . .                       | 103       |
| 5.3      | Stabtragwerke . . . . .  | 104       |
| 5.4      | Tragwerksmodelle . . . . .   | 107       |
| 5.4.1    | Geschichtete Materialien . . . . .                                 | 107       |
| 5.4.2    | Faserbeton . . . . .   | 110       |
| 5.5      | Sensitivitätsanalyse . . . . .                                     | 110       |
| 5.6      | Modellfehlerbestimmung für nichtlineare Probleme . . . . .         | 114       |
| 5.7      | Verbesserung der Prognose . . . . .                                | 115       |
| 5.7.1    | Anwendung bei der Scheibe . . . . .                                | 117       |
| 5.8      | Bestimmung von $u_c$ am Grundsystem . . . . .                      | 119       |
| 5.8.1    | Randintegral . . . . .   | 119       |
| 5.8.2    | Bestimmung von $u_c$ an den Stellen $x_1$ und $x_2$ . . . . .      | 120       |
| 5.8.3    | Scheibe . . . . .  | 120       |
| 5.8.4    | Finite Elemente . . . . .  | 121       |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.9      | Kombination von Modellfehler und Diskretisierungsfehler . . . . .               | 123        |
| <b>6</b> | <b>Numerische Ergebnisse</b>  | <b>125</b> |
| 6.1      | Modellfehlerberechnung am Balken . . . . .                                      | 125        |
| 6.1.1    | Zweifeldträger – Verfahrensvergleich . . . . .                                  | 125        |
| 6.1.2    | Beidseitig eingespannter Balken mit der exakten Methode . .                     | 128        |
| 6.2      | Modellfehlerberechnung und Sensitivitätsanalyse einer Krag­scheibe .            | 129        |
| 6.2.1    | Veränderungen des $E$ -Moduls über die gesamte Scheibe . . . .                  | 130        |
| 6.2.2    | Vertikaler Schnitt durch die Scheibe . . . . .                                  | 136        |
| 6.3      | Untersuchung an einer L-Scheibe . . . . .                                       | 136        |
| 6.4      | Nichtlineare Modelle . . . . .  | 139        |
| 6.4.1    | Stab . . . . .  | 139        |
| 6.4.2    | Scheibe . . . . .   | 141        |
| 6.5      | Vergleich lineare und nichtlineare Berechnung . . . . .                         | 141        |
| 6.6      | Sensitivitätsanalyse . . . . .  | 143        |
| 6.6.1    | Integrale und semi-integrale Brückenbauweise . . . . .                          | 143        |
| 6.6.2    | Untersuchungsergebnisse einer Brücke in semi-integraler Bau-<br>weise . . . . . | 144        |
| <b>7</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>151</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>155</b> |



# 1 Einleitung

Die Planung von Tragwerken beginnt mit Skizzen, aus denen Modelle entstehen, die bei der Dimensionierung verwendet werden. Dabei werden an unterschiedlichen Stellen unvermeidbare Fehler begangen, da das Modell von der Realität abweicht. Anhand des in Abb. 1.1 dargestellten Prozesses sollen diese Fehler aufgezeigt werden.

Als Endprodukt im Bauwesen steht immer das reale Tragwerk, welches bemessen werden soll, im Mittelpunkt. Um dieses physikalisch erfassen zu können, muss das Bauwerk, in Abb. 1.1 ist exemplarische eine Brücke dargestellt, idealisiert werden, da eine Abbildung der Realität als Modell derzeit aus verschiedenen Gründen nicht möglich und auch nicht sinnvoll ist. Natürlich werden bereits bei der Modellierung des komplexen Modells Fehler, sogenannte Modellfehler, begangen, zumal das tatsächliche Bauwerk<sup>1</sup> erst nach der Gesamtplanung entsteht und in der Regel von dieser abweicht. Man geht also von einem fiktiven Modell aus; die Realität sieht anders aus.

Der nächste Schritt ist die Vereinfachung des noch sehr komplexen Modelles. Man erhält das Rechenmodell. Dieses stellt dann letztlich die Grundlage für die statischen Berechnungen dar. Durch die Umwandlung der physikalischen Struktur in ein mathematisches Modell kommen weitere Modellfehlerquellen hinzu.

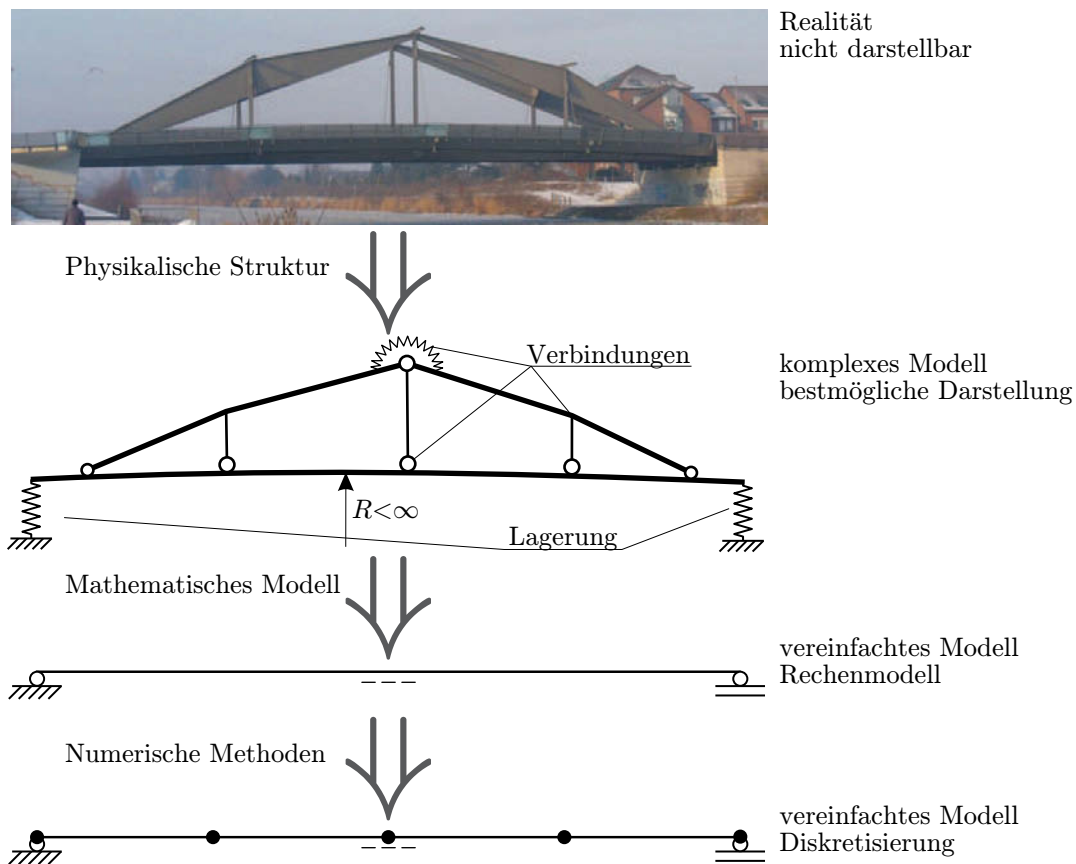
Zuletzt wird das entstandene Rechenmodell in ein Programm eingegeben und diskretisiert. Erst an dieser Stelle tritt der numerische Fehler, der Diskretisierungsfehler, auf. Somit gibt es bei der Tragwerksplanung zwei Fehler, die gleichwertig nebeneinander auftreten und Unsicherheiten bei der Dimensionierung von Bauwerken darstellen.

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Forschung intensiv mit der Berechnung des numerischen Fehlers, dessen Abschätzung und der Anpassung des FE-Netzes über adaptive Methoden (h- oder p-Adaption) auseinander gesetzt. Durch Fehlerestimatoren, meist basierend auf der Energienorm, sind Netzanpassungen möglich, die den Diskretisierungsfehler stark reduzieren.

Anfänglich wurden globale Fehlerschätzer verwendet, um z.B. eine adaptive Netzverfeinerung (h-Adaption) durchzuführen. Ziel dabei ist es, den Gesamtfehler gleich-

---

<sup>1</sup>Zumindest ist dies im Bauwesen der Fall.



**Abb. 1.1:** Abstrakte Darstellung der Entwicklung eines Rechenmodells für ein reales Tragwerk.

mäßig auf alle Elemente zu verteilen. Mit diesem Verfahren erhält man FE-Netze, die generell gute Ergebnisse liefern. Eine Aussage über die Güte einer lokalen Größe ist dabei allerdings nicht möglich. Erst mit der Einführung der zielorientierten Fehlerschätzung wird es möglich, qualitative Aussagen über eine gewählte Zielgröße zu treffen. Dabei wird die Greensche Funktion verwendet, durch deren Einsatz die Betrachtung lokaler Zielgrößen möglich wird. Es wird nicht mehr nur der Fehler des eigentlichen Problems betrachtet, sondern zusätzlich der Fehler in der Greenschen Funktion. Globale Fehlerschätzer können demnach nicht die Aufgabe eines lokalen Fehlerschätzers, der qualitative Aussagen über eine lokale Zielgröße zulässt, erfüllen.

In [21] wurde mit dem Projektionssatz gezeigt, dass jedes mit einem FE-Programm berechnete Ergebnis durch die Überlagerung der genäherten Greenschen Funktion mit der Belastungsfunktion exakt berechnet und damit nachvollzogen werden kann. Mit dem Wissen aus der zielorientierten Fehlerschätzung und der Erkenntnis, dass die genäherte Einflussfunktion *jedes* FE-Ergebnis liefert, kommt man zu

---

dem Schluss, dass der Fehler der FE-Methode dann besonders gering ist, wenn die Greensche Funktion gut abgebildet werden kann. So hat die aus der klassischen Statik bekannte Einflussfunktion auch bei den modernen Berechnungsverfahren eine zentrale Bedeutung. Sollen lokale Größen betrachtet werden, so kommen Einflussfunktionen zur Anwendung. Aber auch die FE-Ergebnisse selbst hängen direkt von der genäherten Einflussfunktion ab. Das alles gilt für lineare Probleme.

Für nichtlineare Probleme konnte ein allgemeiner Zugang geschaffen werden, mit dem zielorientierte Fehlerestimatoren berechnet werden können. Die Greensche Funktion im eigentlichen Sinne existiert nur für lineare Probleme. Für nichtlineare Aufgaben kann eine Greensche Funktion im Linearisierungspunkt erzeugt werden, welche genau die Eigenschaften hat, die für die Auswertung einer lokalen Zielgröße notwendig sind.

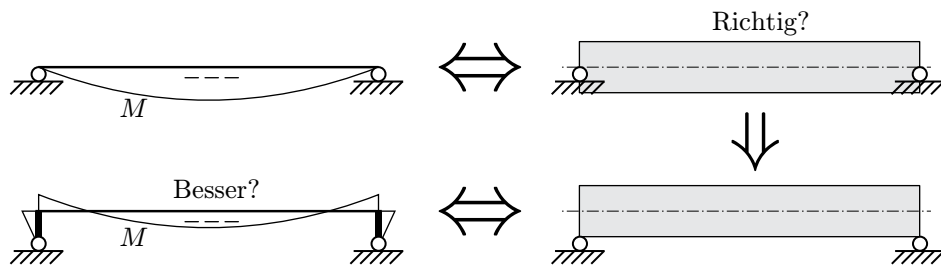
In den letzten Jahren ist die Betrachtung des Modellfehlers zunehmend in den Fokus der Forschungsarbeit gerückt. Dabei wurde z.B. der Fehler untersucht, der entsteht, wenn ein inhomogenes oder poröses Material als homogen angenommen wird. Der Modellfehler zeigt die Bereiche an, die einen besonders hohen Fehler aufweisen. Man muss sich vom gewählten, groben Modell wegbewegen und korrigierende Veränderungen, d.h. Verfeinerungen, vornehmen. Dazu sind Daten vom realen Tragwerk nötig, ohne die ein verbessertes Modell nicht möglich ist. Der Modellfehlerschätzer liefert die Information, wie groß der Bereich  $\Omega_m$  sein muss. Ziel dabei ist, den Modellfehler durch die Anpassung des Modells in einem definierten Bereich  $\Omega_m$ , z.B. durch die exakte Formulierung der Materialeigenschaften, zu minimieren. Mit diesem Ansatz erhält man einen direkten Zugang zur Multiskalen Methode, d.h. der Bereich, der als komplexes Modell dargestellt werden soll, wird aus dem Modell ausgegliedert, berechnet und anschließend mit den Daten wieder in das gröbere Modell eingegliedert. Auch hierbei spielen die Greenschen Funktionen wieder eine Schlüsselrolle, wenn eine lokale Zielgröße betrachtet werden soll. Die Methode der lokalen Modellfehlerbestimmung konnte, in Anlehnung an die für die Berechnung des Diskretisierungsfehlers verwendete Technik, auf nichtlineare Probleme erweitert werden.

Die Betrachtung aller Modellfehler in Summe, die an einem Tragwerksmodell auftreten können, ist genauso komplex, wie die Berechnung des realen Tragwerks. Allerdings ist es möglich und sinnvoll, den Fokus auf ausgewählte Parameter zu lenken und deren Auswirkungen abzuschätzen. Dabei kommen als Fehlerquellen die folgenden Punkte in Frage:

- Geometrie (Längen, Winkel und Bauteildicken)
- Materialparameter (Schwankungsbreiten, Ungewissheiten)
- Materialgesetz (Materielle Nichtlinearität)

- Dimension der Modellbildung (1-, 2- oder 3 dimensional)
- geometrisch (nicht-)lineare Formulierung
- Lagerung und Federkenngrößen (auch von Bauteilverbindungen)

Die vorliegende Arbeit betrachtet die Auswirkungen von Modellparameteränderungen bei linearen und geometrisch nichtlinearen Problemen sowie den Vergleich zwischen linearer und nichtlinearer Formulierung.



**Abb. 1.2:** Das einfache Modell des Einfeldträgers. Welches Modell hat den kleinsten Modellfehler?

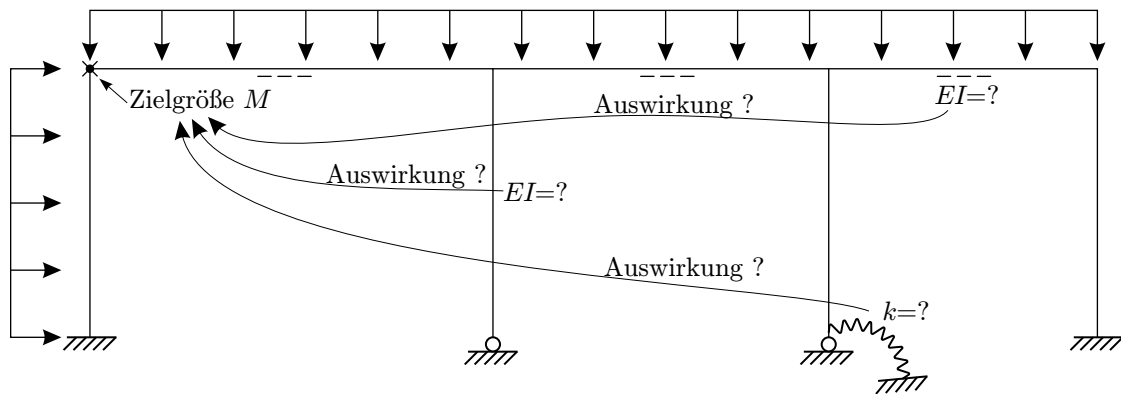
Jeder konstruktive Ingenieur steht vor der Aufgabe, ein reales Bauwerk als Tragwerksmodell abzubilden. Eine ganze Bandbreite von Annahmen, wie z.B. Material, Geometrie, Lasten und Tragverhalten<sup>2</sup>, sind zu treffen. Jede dieser Entscheidungen beeinflusst das Berechnungsergebnis. Dem Planer fehlt die Möglichkeit, das entstandene Modell in seiner Güte zu beurteilen. Die Regelwerke und die Erfahrung begleiten den Ingenieur bei der Modellbildung und gleichen so mögliche Fehler aus. Bestes Beispiel ist der Einfeldträger im Massivbau, welcher als Balkenmodell abgebildet wird, siehe Abb. 1.2. Die gezeichnete Strich-Punkt-Linie entspricht dabei der Schwerachse des Trägers. Dabei liegt der Träger aber an den Auflagern mit der unteren Kante auf, d.h. die Systemlinie ist um den Wert der halben Querschnittshöhe (bei einem Rechteckquerschnitt) angehoben, was zu einem anderen Momentenverlauf führt, wie in [56] detailliert erläutert wird.

Ein weiteres, häufig auftretendes Problem sind Einzellasten auf Tragwerken. Eine Punktlast (Kraft oder Moment), kann, je nach verwendetem Modell<sup>3</sup> dazu führen, dass Singularitäten entstehen und so die Schnittgrößen sehr große Werte annehmen.

---

<sup>2</sup>Damit ist die Wahl der Differentialgleichung gemeint: Stab, Balken, Scheibe, Platte, Schale oder Membran.

<sup>3</sup>Beim Balken und Stab führt eine Einzellast zu keinen Problemen, bei Flächentragwerken, wie z.B. Scheibe, Platte oder Schale, führt das an der Stelle der Einzellast zu beliebig großen Schnittgrößen.



**Abb. 1.3:** Wie sind die Auswirkungen von Parameteränderungen auf die eingezeichnete Zielgröße?

Der Modellfehler im weitesten Sinne bietet noch andere Möglichkeiten, die den Tragwerksplaner bei seiner Arbeit unterstützen können. So ist es z.B. möglich, Abhängigkeiten von Parameterveränderungen auf eine Zielgröße in einem Tragwerk festzustellen. Dies ist in Abb. 1.3 schematisch dargestellt. Wenn sich die Steifigkeit einer Feder oder eines Bauteils ändert, wie ändert sich dann die Zielgröße? Dabei können ganze Tragwerksteile aber auch nur kleine Bereiche betrachtet werden. Die Berechnung der Auswirkungen eines gerissenen Querschnitts auf die Verformungen, wie es z.B. in [74] beschrieben ist, ist mit der Modellfehlerbestimmung ebenfalls sehr einfach möglich. In diesem Kontext ist eine Sensitivitätsanalyse des Tragwerks, d.h. wie sensibel das Tragwerk auf Parameterveränderungen reagiert, möglich, um bei der Planung, aber auch bei der Bauausführung, kritische Abschnitte zu ermitteln. Ziel bei all diesen Betrachtungen ist, die Lösung des eigentlichen und des dualen Problems, also die Greensche Funktion, am vereinfachten System zu ermitteln und damit Rückschlüsse auf die Auswirkungen einer Parameteränderung zu ziehen, ohne ein verändertes System berechnen zu müssen.

## 1.1 Ziele der Arbeit

Die Ziele der Arbeit ergeben sich aus den oben beschriebenen Bereichen der Statik und stellen eine Weiterentwicklung der bekannten Techniken dar. Im Einzelnen werden die folgenden Themen in dieser Arbeit betrachtet.

Die Greensche Funktion ist der Schlüssel für die Betrachtung von zielorientierten Größen bei der Berechnung des numerischen Fehlers und des Modellfehlers. Daher soll ausführlich die Erzeugung der Greenschen Funktion mit der Methode der finiten

Elemente hergeleitet werden.

Es ist bekannt, dass eine möglichst genaue Darstellung der Greenschen Funktion bei der Betrachtung von Punktgrößen besonders wichtig ist. Daher wird ein Verfahren vorgestellt, welches unter Verwendung von Fundamentallösungen, die Genauigkeit von Punktgrößen deutlich verbessert. Die Intention dabei ist, die Greensche Funktion so exakt wie möglich abzubilden.

Neben dem Diskretisierungsfehler, ist der Modellfehler gleichberechtigt zu betrachten. Es soll ein möglichst einfacher Zugang zu diesem Thema hergestellt werden, um z.B. das Modell präzise verändern zu können oder um die Auswirkungen einer Parameterveränderung auf die Zielgröße quantifizieren zu können.

Die Modellfehlerbestimmung soll auf geometrisch nichtlineare Probleme ausgeweitet werden. Dabei kommt eine verallgemeinerte Greensche Funktion zur Anwendung, die ähnliche Eigenschaften wie die Funktion für lineare Probleme aufweist. So wird es möglich, auch für ein nichtlineares Problem eine zielorientierte Fehlerbestimmung durchzuführen.

All diese einzelnen Punkte ergeben in sich einen geschlossenen Themenkomplex und sind gerade im Hinblick auf Modell- und Diskretisierungsfehler nicht losgelöst voneinander zu betrachten.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

Kapitel 2 stellt die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen vor. Dazu gehört ein Einblick in die verwendeten Differentialgleichungen. Insbesondere wird auf die Greenschen Identitäten und die schwache Form des Gleichgewichts eingegangen. Die fundamentalen Arbeitsprinzipie der Statik werden formuliert und die Eigenschaften der Greenschen Funktionen erläutert.

Kapitel 3 befasst sich mit der FE-Technik, mit den Eigenschaften der Greenschen Funktionen und deren Berechnung mit der Methode der finiten Elemente. Weiter werden einige Besonderheiten der genäherten Greenschen Funktion betrachtet, wie z.B. das Verhalten bei Singularitäten oder der Berechnung von Kraftgrößen über ein Arbeitsintegral. Weiter wird auf unterschiedliche Möglichkeiten zur Abschätzung des Approximationsfehlers (global und lokal) eingegangen. In Anlehnung an die DWR-Methode (engl.: *dual weighted residual*), einer zielorientierten Fehlerschätzung, wird ein genereller Zugang auch für nichtlineare Probleme aufgezeigt. Damit steht eine verallgemeinerte Greensche Funktion zur Verfügung. Diese Technik wird später für die Berechnung des Modellfehlers für nichtlineare Probleme benötigt.



Das Kapitel 4 stellt die GFD-Methode (engl.: *Green's function decomposition*) am Beispiel der Kirchhoff-Platte vor. Bei dieser Methode wird die Idee umgesetzt, die genäherte Greensche Funktion durch Aufspalten in die Grundlösungen und einen regulären Anteil für die Berechnung von Punktgrößen zu verbessern. Anhand von numerischen Beispielen werden die Möglichkeiten der GFD-Methode dargestellt.

Im Kapitel 5 wird zunächst ein einfacher Zugang zur Modellfehlerbestimmung aufgezeigt. Anschließend wird eine Berechnungsmethode für die zielorientierte Modellfehlerbestimmung bei Parameteränderungen für lineare Modellfehler und nichtlineare Probleme vorgestellt. Anhand einer einfachen Betrachtung, wird eine Verbesserung sowohl für ein- als auch für zweidimensionale Tragwerke in der Modellfehlerbestimmung herbeigeführt. Auch wird die Überführung des Gebiets- in ein Randintegral zur Verbesserung der Ergebnisse untersucht.

Die numerischen Beispiele in Kapitel 6 dienen dazu, die im vorigen Kapitel hergeleiteten Berechnungsmethoden genauer zu analysieren und deren Möglichkeiten aufzuzeigen. Dabei werden sowohl Stab und Balken als auch die Scheibe mit einer linearen und einer geometrisch nichtlinearen Formulierung betrachtet. Abschließend werden die Ergebnisse einer in semi-integraler Bauweise erstellten Brücke unter Berücksichtigung der Variationsbreite der Bodenkenngrößen auf die Bemessungsschnittgrößen zusammenfassend dargestellt.

Die Arbeit schließt mit Kapitel 7, welches eine Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte enthält und einen Ausblick auf die zukünftige Forschungsarbeit liefert.



## 2 Mechanische Grundlagen

Für die Behandlung der Themen dieser Arbeit werden in diesem Kapitel die notwendigen theoretischen Grundlagen aus der Mechanik zusammengefasst dargestellt.

### 2.1 Nichtlineare Statik

Der Zustand eines elastischen Kontinuums wird durch das Triple  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$  aus Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} = [u_i]$ , dem Green-Lagrangischen Verzerrungstensor  $\mathbf{E} = [\varepsilon_{ij}]$  und dem zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor  $\mathbf{S} = [\sigma_{ij}]$  beschrieben. Es wird von einem hyperelastischen Material ausgegangen, dessen Eigenschaften über Differentiation einer Formänderungsenergiefunktion  $W(\mathbf{E})$  bestimmt werden. Seien  $\mathbf{p}$  die auf den Körper wirkenden Volumenkräfte, dann genügt  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$  in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  des unverformten Körpers dem System, siehe [26],

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E} = 0 \quad \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{E} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{W}'(\mathbf{E}) - \mathbf{S} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} = 0, \quad (2.1b)$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) = \mathbf{p}. \quad (2.1c)$$

Dazu kommen Verschiebungsrandbedingungen  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  auf einem Teil  $\Gamma_D$  des Randes und Spannungsrandbedingungen  $\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}}$  auf dem komplementären Teil  $\Gamma_N$ , wobei

$$\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) := (\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \mathbf{n} \quad (2.2)$$

der Spannungsvektor in einem Randpunkt mit nach außen gerichteter Normalen  $\mathbf{n}$  ist.

Das System (2.1) kann als die Anwendung eines (dreizeiligen) Operators  $\mathbf{A}(\cdot)$  auf den elastischen Zustand  $\mathcal{S}$  angesehen werden. Das Randwertproblem für  $\mathcal{S}$  kann damit in der Form

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{p}\}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ auf } \Gamma_N \quad (2.3)$$

geschrieben werden.

### 2.1.1 Greensche Identität und schwache Form

Im Folgenden wird die erste Greensche Identität für den Operator  $\mathbf{A}(\cdot)$  hergeleitet. Sie bildet die Grundlage für die Behandlung des Randwertproblems (2.3) mit finiten Elementen.

Ist der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  symmetrisch, dann erhält man nach partieller Integration und unter Anwendung des Divergenztheorems, siehe [26],

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega \\ = - \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, ds + \int_{\Omega} \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei

$$\mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) := \frac{1}{2} (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{u}}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{u}}^T \nabla \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

die Gateaux-Ableitung der Matrix  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  ist:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{E}(\mathbf{u} + \epsilon \hat{\mathbf{u}})] \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}). \quad (2.6)$$

Zusammenfassend kann die erste Greensche Identität des Operators  $\mathbf{A}(\mathbf{S})$ , d.h. des Systems (2.1), formuliert werden:

$$G(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{S}), \hat{\mathbf{S}} \rangle + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, ds - a(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = 0. \quad (2.7)$$

Dabei steht  $\langle \mathbf{A}(\mathbf{S}), \hat{\mathbf{S}} \rangle$  für den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\mathbf{S}), \hat{\mathbf{S}} \rangle := \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{S}} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{W}'(\mathbf{E}) - \mathbf{S}) \cdot \hat{\mathbf{E}} \, d\Omega + \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (2.8)$$

also das Skalarprodukt aus dem System (2.1) und dem virtuellen Zustand  $\hat{\mathbf{S}}$  und

$$\begin{aligned} a(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \int_{\Omega} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{S}} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{W}'(\mathbf{E}) - \mathbf{S}) \cdot \hat{\mathbf{E}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

bezeichnet die virtuelle innere Energie (oder Wechselwirkungsenergie). Diese Identität (2.7) ist grundlegend für die Variationsprinzipie der nichtlinearen Mechanik

und kann in ähnlicher Weise für alle gängigen Differentialgleichungen der Statik formuliert werden, siehe z.B. [26].

Im Falle einer reinen Verschiebungsformulierung, also  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}, \mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\}$  und  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_D$ , reduziert sich Gl. (2.7) auf

$$G(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, ds}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega}_{\delta A_i} = 0, \quad (2.10)$$

wobei  $\mathbf{S} = \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u}))$ . Gl. (2.10) kann in dieser Form als die schwache Formulierung des Randwertproblems der nichtlinearen Elastizitätstheorie interpretiert werden. Die Gleichung kann nur in wenigen Ausnahmefällen analytisch gelöst werden und muss im Allgemeinen mit einer Näherungslösung berechnet werden. Mit dem üblichen FE-Verschiebungsansatz führt dies auf die nichtlineare (Vektor-)Gleichung

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{f} \quad (2.11)$$

für die Knotenwerte  $\mathbf{u}_h = \{u_i\}$  der FE-Lösung.

### 2.1.2 Linearisierung

Um mit der schwachen Form, Gl. (2.10), rechnen zu können, ist eine Linearisierung notwendig. Es seien  $\Delta \mathbf{p}$  und  $\Delta \bar{\mathbf{t}}$  Lastinkremente und  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$  das Verschiebungsfeld, welches zu  $\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$  und  $\bar{\mathbf{t}} + \Delta \bar{\mathbf{t}}$  gehöre. Dann gilt

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\bar{\mathbf{t}} + \Delta \bar{\mathbf{t}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \, ds \\ &- a(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei

$$a(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) := \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})) \, d\Omega. \quad (2.13)$$

Die Gateaux-Ableitung der Verzerrungsenergie

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) := \int_{\Omega} \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \, d\Omega \quad (2.14)$$

bezüglich des Verschiebungsinkrements  $\Delta \mathbf{u}$  ist

$$\begin{aligned} a_T(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) &:= \left. \frac{d}{d\epsilon} [a(\mathbf{u} + \epsilon \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})] \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \{ \nabla(\Delta \mathbf{u}) \mathbf{W}'(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{E}_u(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_u(\Delta \mathbf{u})] \} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei der Tensor

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{S} \quad (2.16)$$

die zweite Ableitung von  $W$  ist, die im Punkt  $\mathbf{u}$  zu bilden ist. Der Ausdruck  $a_T(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})$  ist linear im zweiten und dritten Argument,  $\Delta \mathbf{u}$  und  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Mit der Näherung

$$a(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \approx a(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{u}}) + a_T(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}), \quad (2.17)$$

wird aus Gl. (2.10)

$$\delta A_a - a(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{u}}) - a_T(\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) = 0. \quad (2.18)$$

Übertragen auf die in Gl. (2.11) genannte FE-Formulierung bedeutet dies dann

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h) \Delta \mathbf{u}_h = \mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u}_h), \quad (2.19)$$

wobei  $\Delta \mathbf{u}_h$  der Vektor der Knotenverschiebungen des Feldes  $\Delta \mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{K}_T$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$(\mathbf{K}_T)_{ij} = a_T(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) \quad (2.20)$$

ist.

## 2.2 Lineare Statik

Einflussfunktionen beruhen auf den Arbeitssätzen der Statik und Mechanik und diese wiederum beruhen auf der ersten und zweiten Greenschen Identität der zu Grunde liegenden Differentialgleichung. Im vorigen Kapitel wurde bereits die erste Greensche Identität für das System der nichtlinearen Elastizitätstheorie hergeleitet. Im Folgenden soll noch einmal ausführlicher auf die Argumentation bei der Herleitung dieser Identitäten eingegangen werden. Es wird das einfachst mögliche Beispiel, der Zugdruckstab, gewählt.

Die Differentialgleichung des Stabes lautet

$$-EAu'' = p. \quad (2.21)$$

Multiplikation mit einer Testfunktion  $\hat{u}$  liefert

$$- \int_0^l EAu'' \hat{u} dx = \int_0^l p \hat{u} dx \quad (2.22)$$

und anschließende partielle Integration führt auf die *erste Greensche Identität* für den Stab

$$G(u, \hat{u}) := \underbrace{- \int_0^l EAu'' \hat{u} dx + [N\hat{u}]_0^l}_{\delta A_a} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\hat{N}}{EA} dx}_{\delta A_i} = \delta A_a - \delta A_i = 0. \quad (2.23)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Funktionen  $u$  und  $\hat{u}$  genügend glatt sind

$$u \in C^2[0, l] \quad \text{und} \quad \hat{u} \in C^1[0, l]. \quad (2.24)$$

Die erste Greensche Identität entspricht der Gleichheit von virtueller äußerer Arbeit  $\delta A_a$  und virtueller innerer Arbeit  $\delta A_i$ . Sie stellt somit das Prinzip der virtuellen Verrückungen dar. Vertauscht man die Plätze von  $u$  und  $\hat{u}$ , so erhält man das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$G(\hat{u}, u) := \underbrace{- \int_0^l EA\hat{u}'' u dx + [\hat{N}u]_0^l}_{\delta A_a^*} - \underbrace{\int_0^l \frac{N\hat{N}}{EA} dx}_{\delta A_i^*} = \delta A_a^* - \delta A_i^* = 0. \quad (2.25)$$

Subtrahiert man beide Identitäten voneinander, so erhält man die *zweite Greensche Identität*, auch bekannt als der *Satz von Betti*,

$$B(u, \hat{u}) = G(u, \hat{u}) - G(\hat{u}, u) = A_{1,2} - A_{2,1} = 0, \quad (2.26)$$

wobei nun an beide Funktionen die Forderung  $u, \hat{u} \in C^2[0, l]$  gestellt wird. Ausführlich lautet der Satz von Betti für den Stab

$$B(u, \hat{u}) := \underbrace{- \int_0^l EAu'' \hat{u} dx + [N\hat{u}]_0^l}_{A_{1,2}} - \underbrace{[u\hat{N}]_0^l - \int_0^l u(-EA\hat{u}'') dx}_{A_{2,1}} = 0. \quad (2.27)$$

Sinngemäß lassen sich diese Schritte für alle anderen Differentialgleichungen der Statik und Mechanik wiederholen.

Im Falle der linearen Elastizitätstheorie lautet das Differentialgleichungssystem

$$- \mathbf{L} \mathbf{u} := - \left[ \mu \mathbf{\Delta} + \frac{\mu}{1 - 2\nu} \nabla \operatorname{div} \right] \mathbf{u} = \mathbf{p}, \quad (2.28)$$

mit  $\mathbf{L}$  als linearer Differentialoperator. Die Wiederholung der obigen Schritte liefert als zugehörige erste Greensche Identität

$$G(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) := \int_{\Omega} (-\mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}} ds - \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (2.29)$$

mit  $\mathbf{S}$  als dem Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})], \quad (2.30)$$

dem Elastizitätstensor

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (2.31)$$

und dem Operator

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.32)$$

der die zu dem Feld  $\mathbf{u}$  gehörigen linearen Dehnungen angibt. Der Vektor  $\mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{t}$  ist der Spannungsvektor auf dem Rand, der von der Randnormalen  $\mathbf{n}$  abhängt.

Das Integral

$$a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) := \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (2.33)$$

ist die virtuelle innere Energie oder auch Wechselwirkungsenergie genannt. Der Ausdruck  $a(\cdot, \cdot)$  wird als Bilinearform bezeichnet, siehe z.B. [13], [32] oder [42], und wird als symmetrisch bezeichnet, wenn

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (2.34)$$

gilt und als positiv definit, wenn

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0. \quad (2.35)$$

Die zugehörige zweite Greensche Identität (Satz von Betti) lautet im Fall der linearen Elastizitätstheorie

$$B(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) := \int_{\Omega} (-\mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} ds - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} ds + \int_{\Omega} \mathbf{L}^* \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0, \quad (2.36)$$

wobei mit  $\mathbf{L}^*$  der zu  $\mathbf{L}$  adjungierte Operator<sup>1</sup> bezeichnet wird.

Die Grundstruktur dieser Greenschen Identitäten wird noch besser sichtbar, wenn Symbole benutzt werden. Es sei  $L$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  und  $\partial_i u, i = 0, \dots, 2m - 1$  die zugehörigen Randwerte. Die damit verbundene erste Greensche Identität lautet in allgemeiner Form

$$G(u, \hat{u}) = (L u, \hat{u}) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \int_{\Gamma} \partial_{2m-1-i} u \partial_i \hat{u} ds - a(u, \hat{u}) = 0, \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup>In der Statik handelt es sich in der Regel um selbstadjungierte Operatoren, so dass  $L = L^*$ .



woraus durch einfaches Vertauschen und Subtrahieren die zweite Greensche Identität entsteht

$$B(u, \hat{u}) = (L u, \hat{u}) + \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i \int_{\Gamma} \partial_{2m-1-i} u \partial_i \hat{u} ds - (u, L \hat{u}) = 0. \quad (2.38)$$

Weiteres dazu ist [27] bzw. [28] zu entnehmen. Die in den Identitäten auftretenden Randwerte  $\partial_i u$  nennt man die *Cauchy Daten* oder auch die *kanonischen Daten* eines Differentialoperators  $L$ , weil sie festlegen, wie die zu dem Gebietsintegral  $(L u, \hat{u})$  komplementären Randarbeiten aussehen.

Die Identitäten lassen sich auch für nicht selbstadjungierte Differentialgleichungen aufstellen und natürlich auch für nichtlineare Differentialgleichungen, siehe z.B. [26].

### 2.2.1 Die schwache Form des Gleichgewichts

Eine wichtige Anwendung der ersten Greenschen Identität ist bei der Einführung des Begriffes der schwachen Lösung.

Es sei das Randwertproblem

$$-EA u'' = p \quad 0 < x < l \quad u(0) = 0, \quad N(l) = 0 \quad (2.39)$$

gestellt. Dabei wird angenommen, dass die Lösung hinreichend glatt ist und es sei  $v$  eine virtuelle Verrückung aus der Teilmenge

$$V = \{v \in H^1[0, l] \mid v(0) = 0\}, \quad (2.40)$$

wobei mit  $H^m$  ein Sobolev-Raum der Ordnung  $m$  bezeichnet wird, siehe [14], [19] und [42].

Dann folgt aus der ersten Greenschen Identität<sup>2</sup>

$$G(u, v) = \int_0^l p v dx - a(u, v) = 0 \quad \text{mit} \quad a(u, v) := \int_0^l EA u' v' dx, \quad (2.41)$$

dass die Lösung  $u$  auch eine Lösung des folgenden Variationsproblems ist:

*Finde eine Lösung  $u \in V$  so, dass*

$$a(u, v) = \int_0^l p v dx =: (p, v) \quad (2.42)$$

<sup>2</sup>Streng genommen folgt die schwache Form nicht aus der ersten Greenschen Identität, da die Gleichungen im starken Sinne differenzierbar sein müssen,  $u \in C^2$  und  $v \in C^1$ . Bei der schwachen Form wird die Lösung im Hilbertraum  $H^1$  gesucht, d.h. die Funktionen müssen nur noch im schwachen Sinne differenzierbar sein, siehe dazu z.B. [21].

für alle  $v \in V$  erfüllt ist.

Die Lösung  $u$  dieses Variationsproblems nennt man die *schwache Lösung* des obigen Randwertproblems. Die Theorie der schwachen Lösungen spielt eine zentrale Rolle bei der mathematischen Analyse der finiten Elemente. Auf diese Theorie soll hier nicht näher eingegangen werden, es sei vielmehr auf die Standardwerke, wie z.B. [8], [19] oder [32] verwiesen.

Insbesondere soll vereinbart werden, dass unter dem Lösungsraum  $S$  die Menge aller (hinreichend regulären) Funktionen zu verstehen ist, die die geometrischen Lagerbedingungen des Randwertproblems erfüllen und unter  $V$  die Menge aller (hinreichend regulären) Funktionen, die die geometrischen Lagerbedingungen in ihrer *homogenen* Form erfüllen.

Sind die geometrischen Lagerbedingungen homogen, dann ist  $V = S$ . Wenn nicht, dann entsteht  $S$  aus  $V$  durch Addition einer Funktion  $u_\delta$

$$S = u_\delta \oplus V, \quad (2.43)$$

wobei  $u_\delta$  die inhomogenen geometrischen Lagerbedingungen erfüllt.

## 2.3 Einflussfunktionen

Die drei Begriffe *Einflussfunktion*, *Funktional* und *Greensche Funktion* sind zentral für diese Arbeit. Im Bauwesen ist der Begriff der Einflussfunktion recht eng gefasst. Im abstrakten Sinne ist aber alles, was die *Eingabe* mit der *Ausgabe* verknüpft eine Einflussfunktion. Und wenn man die Lösung eines Randwertproblems auswertet, um z.B. die Durchbiegung des Trägers in einem Punkt, das maximale Feldmoment, das Stützmoment etc., zu berechnen, dann wendet man, auch wieder abstrakt gedacht, ein Funktional auf die Lösung an. So ist z.B. die Verschiebung  $u_j$  an der Stelle  $\xi$  einer Scheibe ein Funktional

$$J(\mathbf{u}) = u_j(\xi). \quad (2.44)$$

Das Funktional  $J$  angewandt auf die Funktion  $\mathbf{u}$  liefert den Wert von  $u_j$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \xi$ . Das wird vielleicht noch besser verständlich und leitet damit zu den Greenschen Funktionen über, wenn man an ein FE-Programm denkt. Wenn der Programmierer den Wert  $u_j(\xi)$  wissen will, dann ruft er die Routine auf, die  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  bereitstellt und diese Routine wertet  $u_j(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \xi$  aus. Formal gesehen kann man die Auswertung von  $\mathbf{u}$  als die Anwendung des Dirac Deltas  $\delta_0^j(\mathbf{y} - \xi)$  ansehen

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \delta_0^j(\mathbf{y} - \xi) d\Omega_{\mathbf{y}} = u(\xi), \quad (2.45)$$

das aufgrund seiner bekannten Eigenschaften

$$\delta_0^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \delta_0^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = u(\mathbf{x}) \quad (2.46)$$

ein Punktfunktional symbolisieren kann. Auf den ersten Blick mag das sehr abstrakt erscheinen. Die Bedeutung dieses Zugangs wird aber sofort klar, wenn man sich daran erinnert, dass nach dem Satz von Betti das obige Integral gleich der Überlagerung der Greenschen Funktion für  $u_j(\boldsymbol{\xi})$  mit der Belastung  $\mathbf{p}$  auf der Scheibe ist

$$J(\mathbf{u}) = u_j(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \delta_0^j(\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (2.47)$$

Dies stellt den Zusammenhang zwischen Funktional und Greenscher Funktion her. Im Folgenden sollen diese Aspekte deutlicher beleuchtet werden.

### 2.3.1 Funktionale

Ein Funktional  $J(\mathbf{u})$  ist formal eine Abbildung aus  $V$  in die Menge der reellen Zahlen

$$J : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad \mathbf{u} \mapsto J(\mathbf{u}). \quad (2.48)$$

Die Untermenge der linearen und stetigen Funktionale  $J$  bildet den sogenannten Dualraum  $V^*$ , siehe z.B. [14] oder [42], mit der Eigenschaft

$$J(a\mathbf{u} + b\hat{\mathbf{u}}) = a \cdot J(\mathbf{u}) + b \cdot J(\hat{\mathbf{u}}) \quad J(\mathbf{u}) \leq c \|\mathbf{u}\|_V. \quad (2.49)$$

Die Norm eines linearen Funktionals

$$\|J\|_{V^*} = \sup_{\|\mathbf{u}\|_V=1} |J(\mathbf{u})| = \sup_{\mathbf{u} \neq 0} J\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_V}\right) \quad (2.50)$$

ist das Supremum des Funktionals auf der Einheitskugel in  $V$ , also der Menge aller  $\mathbf{u}$  mit  $\|\mathbf{u}\|_V = 1$ , siehe [14], [32] und [42].

Ist die Belastung  $p$  auf einem Balken beschränkt,  $p \in L_2[0, l]$ , dann ist z.B. das Arbeitsintegral

$$J(w) = \int_0^l p w dx \quad (2.51)$$

ein stetiges Funktional auf  $V$  und seine Norm ist identisch mit der Energienorm der zu  $p$  gehörigen Biegelinie, siehe z.B. [30],

$$\|p\|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} J\left(\frac{w}{\|w\|_V}\right) = \|w\|_E = a(w, w)^{1/2} = \left[ \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \right]^{1/2}. \quad (2.52)$$

Jeder Punktwert, also jede Verschiebung  $u(\mathbf{x})$ , jede Spannung  $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$  oder Auflagerkraft  $A$  und ebenso auch jeder integrale Wert, z.B. die Spannungen längs eines Schnittes, ist ein Funktional  $J(\mathbf{u})$ . So auch die folgenden Ausdrücke

$$J(\mathbf{u}) = u_j(\mathbf{x}) \quad J(\mathbf{u}) = \sigma_{xx}(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \quad J(\mathbf{u}) = \int_0^l \sigma_{xy}(\mathbf{u}) ds. \quad (2.53)$$

Hierbei bedeutet eine Notation wie

$$J(\mathbf{u}) = \sigma_{xx}(\mathbf{u})(\mathbf{x}), \quad (2.54)$$

dass der Wert des Funktionals die Spannung  $\sigma_{xx}$  des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  ist.

Die meisten Funktionale in der Mechanik der Kontinua sind allerdings unbeschränkt, das heißt nicht stetig. Dies bedeutet, dass es keine globale Konstante  $c$  gibt, so dass für alle  $\mathbf{u} \in V$  die Abschätzung

$$J(\mathbf{u}) \leq c \|\mathbf{u}\|_V \quad (2.55)$$

zutrifft, oder, weil die Energienorm und die Sobolev-Norm des  $H^m(\Omega)$  äquivalent sind, siehe z.B. [14], bedeutet dies, dass die Funktionale nicht durch die innere Energie der Verschiebungsfelder nach oben beschränkt sind. Es gibt keine Konstante  $c$  so, dass

$$J(\mathbf{u}) \leq c \cdot a(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}. \quad (2.56)$$

So ist zum Beispiel die Spannung in einem Punkt,  $\sigma_{xx}(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ , ein zwar lineares, aber unbeschränktes Funktional. Wenn es anders wäre, dann müssten zwei Verschiebungsfelder mit nahezu identischer innerer Energie,  $a(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^{1/2} = \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_E \ll 1$ , auch nahezu die gleichen maximalen Spannungen in  $\Omega$  besitzen

$$\max |\sigma_{xx}(\mathbf{u}) - \sigma_{xx}(\hat{\mathbf{u}})| \leq c \cdot a(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^{1/2} \ll 1, \quad (2.57)$$

weil die Norm in  $C^1$  das maximum der 0-ten bzw. 1-ten Ableitung sind.

Wenn die Felder in der Energie dicht beieinander liegen, dann kann man nur folgern, dass ihre Maxima in etwa gleich groß sein müssen. Die Maxima können aber an verschiedenen Stellen liegen.

Damit fallen die meisten Funktionale aus der normalen Lösungstheorie heraus, die sich um die schwachen Lösungen entwickelt hat. Die klassische Hilbertraumtheorie beschränkt sich auf rechte Seiten, die als lineare und stetige Funktionale interpretiert werden können und damit auf Lösungen mit endlicher Energie.

Es sei daran erinnert, dass die rechte Seite in der klassischen Formulierung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.58)$$

das Arbeitsintegral  $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$  ein beschränktes Funktional auf  $V$  ist und damit hat auch die schwache Lösung  $\mathbf{u}$  endliche Energie.

In der Formulierung für die Greenschen Funktionen  $\mathbf{G}$  des Funktionals  $J(\mathbf{u})$

$$a(\mathbf{G}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.59)$$

steht jedoch rechts das Funktional selbst. Weil dieses auf  $V$  unbeschränkt<sup>3</sup> ist, ist auch die Energie der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}$  unbeschränkt. Theoretisch handelt es sich bei der Approximation der Greenschen Funktionen mit finiten Elementen daher um lauter schlecht gestellte Probleme.

### 2.3.2 Greensche Funktionen

Unter der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}_i$  versteht man im klassischen Sinne eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in C(\Omega - \{\mathbf{x}\})$
- (2)  $-\mathbf{L}_y \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta_i^j(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  auf  $\Omega$
- (3)  $\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  erfüllt die Randbedingungen auf  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$ .

Eine Greensche Funktion, welche nur die ersten beiden Eigenschaften aufweist, wird als Grundlösung  $\mathbf{g}_i$  bezeichnet. Die Grundlösungen sind für eine ganze Reihe von Differentialgleichungen bekannt, siehe z.B. [27].

Ist ein Funktional  $J(\mathbf{u})$  auf  $V$  linear und stetig, dann gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz (dessen Gültigkeit auf  $V$  hier vorausgesetzt wird), siehe z.B. [13] oder [42], ein Element  $\mathbf{G}_0 \in V$  so, dass

$$J(\mathbf{u}) = a(\mathbf{G}_0, \mathbf{u}) \quad (2.60)$$

oder nach partieller Integration

$$J(\mathbf{u}) = a(\mathbf{G}_0, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_y. \quad (2.61)$$

Man nennt das Riesz Element die *verallgemeinerte Greensche Funktion* des Funktionals  $J(\mathbf{u})$ , welche oft in der Literatur mit  $\mathbf{z}$  bezeichnet wird.

Der Begriff der verallgemeinerten Greenschen Funktion schließt den Begriff der klassischen Greenschen Funktionen oder Einflussfunktionen mit ein, weil die Variationsformulierung für die klassischen Einflussfunktionen mit Gl. (2.60) übereinstimmt.

<sup>3</sup>Auf Seite 24 wird näher auf diesen Sachverhalt eingegangen.

Der Begriff des Riesz Elements geht jedoch darüber hinaus, insofern, dass *jedem* Funktional gemäß Gl. (2.60) eine Greensche Funktion zugeordnet werden kann. Daher die Bezeichnung verallgemeinerte Greensche Funktion.

Aus der Linearität des Skalarproduktes folgt, dass Greensche Funktionen auf lineare Probleme beschränkt sind, denn das Skalarprodukt impliziert das Superpositionsprinzip. Es sind aber nun zwei Ideen, die es möglich machen den Begriff der Greenschen Funktion in einer natürlich verallgemeinerten Version auch auf nichtlineare Probleme anzuwenden:

- Der Begriff des Funktionals  $J(\mathbf{u})$  ist nicht auf lineare Probleme beschränkt.
- Die Greensche Funktion ist im linearen Fall identisch mit dem Lagrange Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$ , was in Kapitel 2.3.4 gezeigt wird,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}) - (a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - (\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})), \quad (2.62)$$

denn

$$\mathcal{L}_{,\mathbf{u}} = J(\mathbf{v}) - a(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G} \quad (2.63)$$

$$\mathcal{L}_{,\boldsymbol{\lambda}} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.64)$$

Aus der Gleichung  $\mathcal{L}_{,\mathbf{u}} = 0$  ergibt sich der Lagrange Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$ . Dieser ist, wie man an der Struktur der Gleichung ablesen kann, gleich der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}$  des Funktionals  $J(\mathbf{u})$ .

Im nichtlinearen Fall, siehe Abschnitt 3.2.3, entspricht der Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$  der Greenschen Funktion im Linearisierungspunkt. Mittels Lagrange Multiplikatoren ist es möglich, den Begriff der Greenschen Funktion auch auf nichtlineare Probleme zu erweitern. Wie sich zeigt, ist es sinnvoll den Fehler in Funktionalen über den Fehler in der Greenschen Funktion im Linearisierungspunkt abzuschätzen, wie auch die Sensitivität eines nichtlinearen Tragwerks anhand dieser Greenschen Funktion zu beurteilen.

### Klassischer Zugang

Formal ist die Greensche Funktion die Lösung der adjungierten Gleichung, wie ein Beispiel aus der Matrizenalgebra erläutern möge: Es sei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$ -Matrix. Weil die Transponierte einer Zahl die Zahl selbst ist,  $\pi = \pi^T$ , gilt mit Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  die Identität

$$B(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) := \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.65)$$

Ist nun  $\mathbf{x}$  die Lösung der Gleichung  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  und  $\mathbf{A}^T \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$  die Lösung der adjungierten Gleichung, mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_i$  auf der rechten Seite, dann gilt

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{g}_i) = \mathbf{g}_i^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{e}_i = 0 \quad (2.66)$$

oder

$$x_i = \mathbf{g}_i^T \mathbf{y}. \quad (2.67)$$

Greensche Funktion und Skalarprodukt hängen also ganz eng zusammen. Existiert ein Skalarprodukt, dann führt dies in natürlicher Weise zum Begriff des adjungierten Operators  $-\mathbf{L}^*$

$$(-\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, -\mathbf{L}^*\mathbf{v}) \quad (2.68)$$

und damit zur Darstellung der Lösung der Gleichung  $-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}$  mittels der Lösung der adjungierten Gleichung  $-\mathbf{L}^*\mathbf{G}_0 = \boldsymbol{\delta}_0^j$

$$u_j(\mathbf{x}) = (\mathbf{G}_0, \mathbf{p}). \quad (2.69)$$

Das Dirac Delta beschreibt im schwachen Sinn eine Punktkraft und ist genauso, wie die Zielgröße für vektorwertige Funktionen, an eine Richtung gebunden. Im Folgenden wird auf die richtungsabhängige Schreibweise verzichtet; in besonderen Fällen wird die Richtung explizit und eindeutig angegeben.

Die Funktion  $\boldsymbol{\delta}_0$  hat in allen Punkten  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  den Wert Null und ihre Arbeit auf dem Wege einer virtuellen Verrückung  $\mathbf{v}$  ist gleich  $1 \times v(\mathbf{x})$ , wie in Gl. (2.47) bereits definiert wurde. Es sei  $\mathbf{u}$  die Lösung des Randwertproblems

$$-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \boldsymbol{\partial}_i \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (2.70)$$

oder einer anderen Kombination von *homogenen* Randwerten  $\boldsymbol{\partial}_i \mathbf{u}$ . Setzt man  $\mathbf{G}_0$  in Gl. (2.70) mit der zugehörigen rechten Seite ein, so erhält man als Lösung die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_0$ . Wird mit beiden Lösungen in die erste Greensche Identität formuliert, so erhält man nach entsprechendem Grenzübergang, siehe [28],

$$G(\mathbf{G}_0, \mathbf{u}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\mathbf{G}_0, \mathbf{u})_{\Omega_\epsilon} \quad (2.71)$$

die *schwache* Integraldarstellung

$$u(\mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_0, \mathbf{u}) \quad (2.72)$$

bzw. in analoger Weise aus der zweiten Greenschen Identität (wieder nach entsprechendem Grenzübergang) die *starke* Integraldarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = (\mathbf{G}_0, \mathbf{p}). \quad (2.73)$$

Die schwache Integraldarstellung ist in der Mechanik mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte bzw. bei Vertauschen der Funktionen, mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen verknüpft und die starke Integraldarstellung mit dem Satz von Betti.

Es sei an dieser Stelle betont, dass die schwache Integraldarstellung auf die Berechnung von Weggrößen beschränkt ist. Darauf wird in Abschnitt 3.2.5 näher eingegangen.

Streng genommen existiert jeweils eine ganze Kette von  $m$  schwachen Einflussfunktionen mit der Formulierung

$$\partial_i u(\mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_i, \mathbf{u}) \quad i = 0, \dots, m - 1 \quad (2.74)$$

und  $2m$  starken Einflussfunktionen mit der Formulierung

$$\partial_i u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad i = 0, \dots, 2m - 1 \quad (2.75)$$

für die kanonischen Werte  $\partial_i \mathbf{u}$ . Die Greenschen Funktionen in diesen Darstellungen sind die Lösungen der Gleichungen

$$-\mathbf{L}_{\mathbf{y}} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta_i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{Ableitung nach } \mathbf{y}. \quad (2.76)$$

Wenn man hier einmal die Balkendifferentialgleichung als Beispiel nimmt, so haben die Dirac Deltas die Eigenschaften

$$\delta_i(y - x) = 0 \quad y \neq x \quad \int_0^l \delta_i(y - x) v(y) dy = \begin{cases} v(x) \\ v'(x) \\ M_v(x) = -EIv''(x) \\ V_v(x) = -EIv'''(x) \end{cases} \quad (2.77)$$

Die Herleitung der Einflussfunktionen mittels der Dirac Deltas aus den Integralidentitäten ist formal gesehen einfach, wie man es am Beispiel der Lösung des Randwertproblems vom Zugdruckstab mit den Randbedingungen  $u(0) = u(l) = 0$  zeigen kann. Geht man mit  $u$  und der Greenschen Funktion  $G_0$ , die Lösung der Gleichung

$$-EA \frac{d^2}{dy^2} G_0(y, x) = \delta_0(y - x) \quad G_0(0, x) = G_0(l, x) = 0 \quad (2.78)$$

ist, in die zweite Greensche Identität

$$B(G_0, u) = \underbrace{\int_0^l \delta_0(y - x) u(y) dy}_{A_{2,1}} - \underbrace{\int_0^l G_0(y, x) p(y) dy}_{A_{1,2}} = 0 \quad (2.79)$$



(die Randarbeiten sind alle null), dann erhält man aufgrund der Definition des Dirac Deltas

$$\int_0^l \delta_0(y-x) u(y) dy = u(x) \quad (2.80)$$

sofort das Ergebnis

$$A_{2,1} = u(x) = \int_0^l G_0(y,x) p(y) dy = A_{1,2} . \quad (2.81)$$

Wenn man auf demselben Wege die Einflussfunktion für  $N(x) = EA u'(x)$  ableitet, also die Greensche Funktion  $G_1(y,x)$  verwendet

$$-EA \frac{d^2}{dy^2} G_1(y,x) = \delta_1(y-x) \quad G_1(0,x) = G_1(l,x) = 0, \quad (2.82)$$

so lautet das Ergebnis

$$A_{1,2} = N(x) - \int_0^l G_1(y,x) p(y) dy = 0 = A_{2,1} . \quad (2.83)$$

**Regel:** Bei der Formulierung des Satzes von Betti für Einflussfunktionen von Weggrößen gilt  $A_{1,2} = A_{2,1}$  und für Einflussfunktionen von Kraftgrößen gilt  $A_{1,2} = 0$ .

Der Dirac Kalkül ist ein sehr elegantes Werkzeug, aber man muss klar sehen, dass es nur eine Symbolschreibweise in dem Sinne ist, dass sie im *Nachgang* das zusammenfasst, was zuvor durch mathematische Analyse erarbeitet worden ist.

Die eigentliche Herleitung der Einflussfunktionen beruht auf dem Studium der Grenzwerte der Integralidentitäten, denn weil die Greenschen Funktionen nicht genügend glatt sind, können die Identitäten zunächst nur auf dem gelochten Gebiet, siehe [28],

$$\Omega_\epsilon = \Omega - U_\epsilon(\mathbf{x}) \quad (2.84)$$

formuliert werden und somit wird der Aufpunkt  $\mathbf{x}$  ausgespart.  $U_\epsilon(\mathbf{x})$  ist eine kleine  $\epsilon$ -Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}$ . Da die zweite Greensche Identität auf dem gelochten Gebiet  $\Omega_\epsilon$  für alle  $\epsilon > 0$  null ist,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{G}_i)_{\Omega_\epsilon} = 0 \quad (2.85)$$

muss sie es auch in der Grenze,  $\epsilon \rightarrow 0$ , sein

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B(\mathbf{u}, \mathbf{G}_i)_{\Omega_\epsilon} = 0 . \quad (2.86)$$

Auf dieser Logik beruht die Herleitung der Einflussfunktionen.

Es zeigt sich, dass die Punktwerte  $\partial_i u(\mathbf{x})$ , d.h. die Terme, die nachher auf der linken Seite der Einflussfunktionen stehen, die Grenzwerte eines Randintegrals über den inneren Rand  $\Gamma_{N_\epsilon}$  des gelochten Gebiets sind

$$\partial_i u(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{N_\epsilon}} \partial_k \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \partial_i \mathbf{u}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} =: (\boldsymbol{\delta}_i(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \mathbf{u}) \quad (2.87)$$

mit  $k + i = 2m - 1$ .

Der zu  $\partial_i \mathbf{u}(\mathbf{x})$  konjugierte Randwert der Greenschen Funktion,  $\partial_k \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $k + i = 2m - 1$ , verhält sich folglich in der Grenze wie  $1/(2\pi r)$ , im zweidimensionalen Fall, und kann somit den schrumpfenden Umfang  $U = 2\pi r$  des Lochrandes ausgleichen, d.h. die zu den Greenschen Funktionen gehörenden Lasten sind integrale Einsen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{N_\epsilon}} \partial_k \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ds_{\mathbf{y}} = '1'. \quad (2.88)$$

Ihre charakteristische Singularität ist an das Maß der  $\epsilon$ -Kugel im  $\mathbb{R}^n$  gebunden.

Die Greensche Funktion für  $\partial_i u(\mathbf{x})$  hat die folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist eine homogene Lösung,  $\mathbf{L}_y \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ , in allen Punkten  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ .
2. Der Randwert  $\partial_k \mathbf{G}_i$  über den Rand des gelochten Gebietes strebt gegen das Dirac Delta  $\boldsymbol{\delta}_i$ .

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung gibt es zwei Greensche Funktionen, welchen sich die folgenden Belastungen zuordnen lassen

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Einzelkraft} \quad \mathbf{G}_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Versatz} \quad (2.89)$$

und bei Differentialgleichungen vierter Ordnung (z.B. Kirchhoff-Platte) vier Belastungen,

$$G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Einzelkraft} \quad G_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Einzelmoment} \quad (2.90)$$







$$G_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Verdrehung} \quad G_3(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Versatz}. \quad (2.91)$$

Wobei bei zweidimensionalen Problemen, wie bereits erwähnt, immer die Richtung der Zielgröße anzugeben ist.

### Unendliche Energie

Es sei wieder  $2m$  die Ordnung der Differentialgleichung mit dem Operator  $L$ . Dann wird der Sobolev-Raum  $H^m(\Omega)$  als der Energieraum bezeichnet, denn auf  $V \subset$

**Tabelle 2.1:** Zulässige (✓) und nicht zulässige (×) Singularitäten

|   | $n = 1$                          | $n = 2$                      | $n = 3$ |
|---|----------------------------------|------------------------------|---------|
| Singularität<br>$m = 1$   | Seil, Stab,<br>Timoshenko Balken | Scheibe,<br>Reissner-Mindlin | 3-D     |
| $i = 0$ :  | ✓                                | ×                            | ×       |
| $i = 1$ :  | ×                                | ×                            | ×       |
| Singularität<br>$m = 2$   | Euler-Bernoulli Balken           | Kirchhoff-Platte             |         |
| $i = 0$ :  | ✓                                | ✓                            |         |
| $i = 1$ :  | ✓                                | ×                            |         |
| $i = 2$ :  | ×                                | ×                            |         |
| $i = 3$ :  | ×                                | ×                            |         |

$H^m(\Omega)$  sind die Energienorm und die Sobolev-Norm äquivalent, siehe [14]. Es gibt folglich von  $u$  unabhängige Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so, dass

$$c_1 \|u\|_m \leq a(u, u)^{1/2} \leq c_2 \|u\|_m. \quad (2.92)$$

Grundlegend für die Charakterisierung der Punktfunktionale ist der folgende Satz, siehe z.B. [26] oder [30]:

**Satz 2.3.1 (Sobolevscher Einbettungssatz)** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^n$  mit einem glatten Rand. Wenn  $2m > n$  ist, dann gilt die Inklusion*

$$H^{i+m}(\Omega) \subset C^i(\bar{\Omega}) \quad (2.93)$$

und dann existieren Konstanten  $c_i < \infty$  so, dass für alle  $u \in H^{i+m}(\Omega)$  die Abschätzung gilt

$$\|u\|_{C^i(\bar{\Omega})} \leq c_i \|u\|_{H^{i+m}(\Omega)}. \quad (2.94)$$

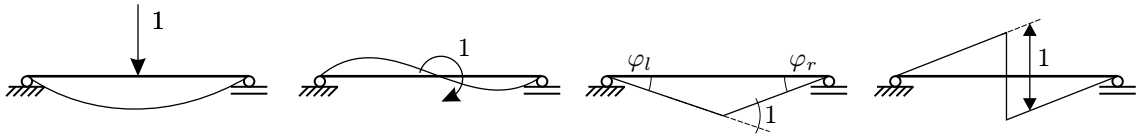
Die Norm einer Funktion  $u$

$$\|u\|_{C^i(\bar{\Omega})} := \max_{0 \leq |j| \leq i} \left| \frac{\partial^{|j|} u(x)}{\partial x^j} \right| \quad (2.95)$$

ist das Maximum des Betrages von  $u$  und seinen Ableitungen bis zur Ordnung  $i$  in  $\bar{\Omega}$ .

Dieses Theorem impliziert, dass die Verzerrungsenergie aus einer Punktlast beschränkt ist und die konjugierte Größe (der Effekt, den die Punktlast im Aufpunkt produziert) endlich und stetig ist, wenn die drei Indizes der Ungleichung

$$m - i > \frac{n}{2} \quad (2.96)$$



**Abb. 2.1:** Die vier Singularitäten eines Balkens, beim Knick gilt  $\tan \varphi_l + \tan \varphi_r = 1$ .

genügen. Die Ordnung der Energie beträgt

- $m = 1$  Timoshenko Balken, Reissner-Mindlin Platte, Elastizitätstheorie
- $m = 2$  Euler-Bernoulli Balken, Kirchhoff-Platte

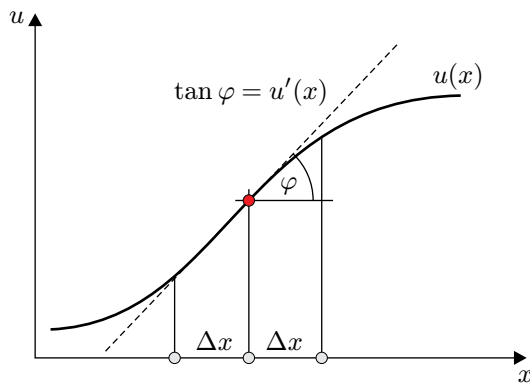
und die Singularitäten in einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ( $2m = 2$ ) haben die Indizes

$$i = 0 \rightarrow \text{Kraft} \quad \text{und} \quad i = 1 \rightarrow \text{Versetzung}$$

und in einer Differentialgleichung vierter Ordnung ( $2m = 4$ )

$$\begin{aligned} i = 0 &\rightarrow \text{Kraft}, & i = 1 &\rightarrow \text{Moment}, \\ i = 2 &\rightarrow \text{Knick} \quad \text{und} & i = 3 &\rightarrow \text{Versetzung}. \end{aligned}$$

Der Index  $n = 1, 2, 3$  in Ungleichung (2.96) entspricht der Raumdimension. Tab. 2.1 fasst die Ungleichung (2.96) zusammen, siehe auch Abb. 2.1.



**Abb. 2.2:** In der Analysis ist die Steigung  $u'(x)$  eine *lokale* Größe. In der Statik ist sie aber eine *globale* Größe, die von weit entfernt liegenden Lasten beeinflusst wird.

### 2.3.3 Lokal & global

Die Steigung einer Funktion

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (2.97)$$

als die Grenzlage der Tangente, siehe Abb. 2.2, ist eine *lokale* Eigenschaft. Wenn die Funktion aber die Lösung eines Randwertproblems wie in Gl. (2.39) ist, dann ist die Steigung  $u'$  in jedem Punkt  $x$  *global* bestimmt, wie aus der Einflussfunktion für  $u'$  an der Stelle  $x$  folgt

$$u'(x) = \int_0^l G_1(y, x) p(y) dy. \quad (2.98)$$

Darin liegt die Bedeutung der Tatsache, dass die Verformungsfigur eines Tragwerks einer Differentialgleichung genügt: Eine scheinbar rein lokale Eigenschaft ist global bestimmt.

### 2.3.4 Lagrange Multiplikator

Die Methode der Lagrange Multiplikatoren ist, wie in Kapitel 3.4.4 gezeigt wird, grundlegend für die Abschätzung der Fehler mittels Dualitätstechniken.

Traditionell werden Lagrange Multiplikatoren bei der Lösung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen eingesetzt, wenn etwa eine Funktion  $f(x, y)$  unter Einhaltung einer Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  einen Extremwert annehmen soll. Bildet man mit den beiden Funktionen  $f$  und  $g$  und dem Lagrange Multiplikator  $\lambda$  die Funktion

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad (2.99)$$

so kann man zeigen, dass diese Funktion in einem Punkt  $\{x, y, \lambda\}$  stationär wird

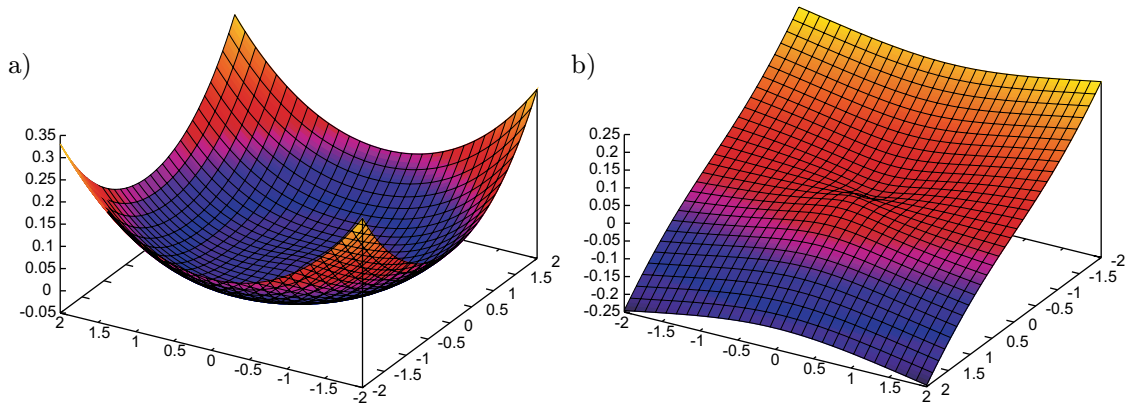
$$d\mathcal{L} = \mathcal{L}_{,x} dx + \mathcal{L}_{,y} dy + \mathcal{L}_{,\lambda} d\lambda = 0 \quad (2.100)$$

und dass die Komponenten  $x, y$  den Punkt markieren, in dem  $f(x, y)$  zum Minimum wird.

Die Technik der Lagrange Multiplikatoren ist aber nicht auf Optimierungsprobleme beschränkt: Die Funktion  $f(x, y)$  muss keinen Extremwert annehmen. Wesentlich ist nur, dass an das Argument  $\{x, y\}$  von  $f$  Nebenbedingungen gestellt werden.

In diesem Sinne werden in dieser Arbeit die Lagrange Multiplikatoren eingesetzt. Die Funktion  $f$  ist bei den weiteren Betrachtungen das Funktional  $J(\cdot)$ , d.h. z.B. die Spannung oder die Verschiebung in einem Punkt. Das eigentliche Problem wird dann als Nebenbedingung formuliert.

Das Lagrange Verfahren wird für die Abschätzung des Diskretisierungsfehler in Kapitel 3.4.4 für nichtlineare Probleme und für die Berechnung des Modellfehlers in Kapitel 5.6 benötigt.



**Abb. 2.3:** a) Die Grundlösung der Platte für die Durchbiegung (Einzellast als Belastung) und b) die Grundlösung der Platte für die Verdrehung (Einzelmoment als Belastung).

### 2.3.5 Grundlösungen

Jede Greensche Funktion  $\mathbf{G}_i$  kann man aufspalten in eine Grundlösung  $\mathbf{g}_i$  und einen (relativ) regulären, homogenen Anteil  $\mathbf{u}_R$ :

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_R(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (2.101)$$

Die Grundlösung ist die Greensche Funktion des Vollraums (engl.: *free space Green's function*) und sie ist, wie z.B. die Grundlösung des Laplace Operators

$$g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad (2.102)$$

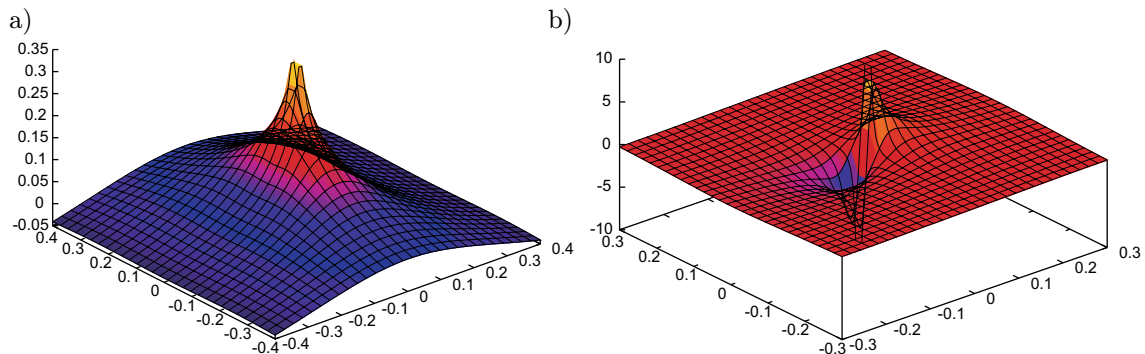
translationsinvariant. Das Integral

$$\int_{\Omega} \mathbf{g}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (2.103)$$

gleichet einem *Faltungintegral*. Die Grundlösungen sind Lösungen der Differentialgleichung

$$-\mathbf{L} \mathbf{g}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta_i(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (2.104)$$

sie genügen aber nicht den Randbedingungen des aktuellen Problems. Geht man mit einer Grundlösung statt einer Greenschen Funktion in die Identitäten, dann erhält man zwar auch wieder Darstellungen für  $\partial_i u$ , aber diese sind gegenüber den klassischen Einflussfunktionen um zusätzliche Randintegrale (Randarbeiten) erweitert, zu deren Berechnung erst die unbekanntenen Randwerte bestimmt werden müssen. Die Methode der Randlemente wendet diese Technik an, siehe z.B. [27] und [28].



**Abb. 2.4:** a) Die Grundlösung der Platte für das Moment (Knick als Belastung) und b) die Grundlösung der Platte für die Querkraft (Versatz als Belastung).

Im Unterschied zu den Greenschen Funktionen, die man in der Regel nicht geschlossen angeben kann, sind die Grundlösungen für die Standardprobleme der Mechanik bekannt. Darin liegt der Reiz der Aufspaltung in Gl. (2.101), denn das Problem, die Greensche Funktion zu bestimmen, kann damit auf das Problem zurück geführt werden, den regulären Anteil  $\mathbf{u}_R$  zu bestimmen. Dieser Anteil sollte sich leichter approximieren lassen als die Kerne  $\mathbf{g}_i$  selbst. Daher ist zu erwarten, dass diese Aufspaltung ein Gewinn an Genauigkeit darstellt. In Kapitel 4.1 wird diese Technik auf die Platte angewendet.

In Abb. 2.3 und 2.4 sind die vier Grundlösungen der Platte dargestellt. Man erkennt, dass sich die Singularität bei den Grundlösungen für das Moment und die Querkraft, siehe Abb. 2.4, auf ein relativ kleines Gebiet beschränkt und dann sehr schnell abklingt. Die Konzentration auf den Aufpunkt  $\mathbf{x}$  ist umso stärker, je höher die Ableitung ist, die der Kern liefert. Das klassische Dirac Delta  $\delta_0$  (Punktkraft) klingt am langsamsten ab, während das Dirac Delta  $\delta_3$ , das die Querkraft  $v_n$  (3. Ableitung) liefert, ein Dipol darstellt; Ausschläge  $\pm\infty$ , deren Fernwirkung aufgrund der gegensätzlichen Bewegungen relativ gering ist.





# 3 Finite Elemente Methode

## 3.1 Die grundlegende Technik

Die Methode der finiten Elemente beschränkt sich darauf, die schwache Form des Gleichgewichts

$$\mathbf{u} \in V : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.1)$$

auf einem endlich dimensionalen Teilraum  $V_h \subset V$  zu formulieren. Die diskrete Variationsformulierung lautet:

Finde eine Funktion  $\mathbf{u}_h \in V_h \subset V$  so, dass die Gleichung

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) \quad (3.2)$$

für alle  $\mathbf{v}_h \in V_h \subset V$  erfüllt ist.

Bilden  $n$  Einheitsverformungen  $\varphi_i$ , die Basis des  $V_h$ , so lautet der FE-Ansatz

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

mit den  $n$  Knotenwerten  $u_i$ . Die Variationsaufgabe (3.2) ist daher mit den  $n$  Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = (\mathbf{p}, \varphi_j) \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

äquivalent, und so folgt, dass der Vektor  $\mathbf{u}$  der Knotendaten  $u_i$ ,  $\mathbf{u} = \{u_i\}$ , dem Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.5)$$

mit der Notation

$$\mathbf{K} = \{k_{ij}\} = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \{f_i\} = \{(\mathbf{p}, \varphi_j)\} \quad (3.6)$$

genügen muss.

## 3.2 Greensche Funktionen

Die Greenschen Funktionen haben in der mathematischen FE-Literatur eine große Bedeutung, da mit der genäherten Greenschen Funktion jeder Wert der FE-Berechnung ermittelt werden kann. Bei der Fehleranalyse von Punktgrößen spielt die Greensche Funktion ebenso eine zentrale Rolle, worauf in Abschnitt 3.4 näher eingegangen wird.

RANNACHER, siehe z.B. [7] oder [8], hat mittels Dualitätsargumenten, ausgehend von der Gleichung

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

was der Ingenieur als

$$u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} [\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.8)$$

interpretieren kann, den Fehler in der Greenschen Funktion zur Abschätzung des Fehlers in der FE-Lösung benutzt. CIRAK, siehe [17], hat dieses Verfahren der zielorientierten Verbesserung (engl.: *goal oriented recovery*) auf baustatische Probleme angewandt. Charakteristisch für den mathematischen Ursprung der Idee ist, dass in dieser Arbeit, aber auch in den Arbeiten von ODEN, siehe [1] oder [2], die Punktlasten verschmiert wurden, weil sonst die Hilbertraumtheorie der schwachen Lösungen, auf der ein großer Teil der Argumentation beruht, nicht mehr anwendbar ist. RAMM hat dann entdeckt, dass TOTTENHAM die Grundgleichung schon 1970 veröffentlicht hat [65], wobei Tottenham nicht an die Umsetzung der Gleichung im Sinne einer zielorientierten Verfeinerung gedacht hat.

Tottenham hatte herausgefunden, dass die FE-Lösung das Skalarprodukt der genäherten Greenschen Funktion  $\mathbf{G}_0^h$  und der rechten Seite  $\mathbf{p}$  ist

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.9)$$

Tottenham verfuhr dabei in zwei Schritten. Wegen der ersten Greenschen Identität, es werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogene Randwerte vorausgesetzt, gilt

$$G(\mathbf{u}_h, \mathbf{G}_0^h) = (-\mathbf{L} \mathbf{u}_h, \mathbf{G}_0^h) - a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h) = (\mathbf{p}_h, \mathbf{G}_0^h) - a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h) = 0. \quad (3.10)$$

Dabei ist wegen  $(\mathbf{p}_h, \mathbf{G}_0^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0^h)$  die Gleichung identisch mit

$$u_h(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}_h) = a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h) = (\mathbf{G}_0^h, \mathbf{p}). \quad (3.11)$$

Tottenham interpretierte dann  $\mathbf{u}_h$  als die FE-Lösung des Lastfalls  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{G}_0^h \in V_h$  als eine virtuelle Verrückung

$$a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.12)$$

Dann sah er  $\mathbf{G}_0^h$  als die FE-Lösung des Lastfalles  $\boldsymbol{\delta}_0$  an und  $\mathbf{u}_h$  übernahm die Rolle der virtuellen Verrückung

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h), \quad (3.13)$$

was die linke Seite erklärte. Die Symmetrie der Wechselwirkungsenergie  $a(\mathbf{G}_0^h, \mathbf{u}_h)$  machte diese duale Betrachtungsweise möglich.

Weil es für das tiefere Verständnis der Methode der finiten Elemente nützlich ist, soll der Beweis auch noch in einer anderen Form geführt werden. Tottenham's Formel ergibt sich nämlich auch aus einer Erweiterung des Satzes von Betti auf FE-Lösungen.

In seiner knappsten Form lautet der Satz von Betti, siehe Kapitel 2 oder auch [40]

$$A_{1,2} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{u}_1) = A_{2,1}, \quad (3.14)$$

wenn  $\mathbf{u}_1$  die Lösung des Lastfalls  $\mathbf{p}_1$  ist und  $\mathbf{u}_2$  die Lösung des Lastfalls  $\mathbf{p}_2$ . Man kann zeigen, dass dieser Sachverhalt richtig bleibt, wenn man  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  durch die FE-Lösungen ersetzt, siehe [30],

$$A_{1,2} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{u}_2^h) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{u}_1^h) = A_{2,1}. \quad (3.15)$$

Die Arbeiten  $A_{i,j}$  in den Gln. (3.14) und (3.15) sind natürlich nicht gleich. Die  $A_{i,j}$  stehen hier und im Folgenden symbolisch für den Satz von Betti. Angewandt auf

$$A_{1,2} = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0) = A_{2,1} \quad (3.16)$$

folgt

$$A_{1,2} = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0^h) = A_{2,1}, \quad (3.17)$$

und das ist Tottenham's Formel

$$(\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}_h) = u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0^h). \quad (3.18)$$

Gleichung (3.9), die zunächst nur als ein mathematisches Werkzeug zur besseren Abschätzung des Fehlers von FE-Lösungen diene, repräsentiert einen wesentlichen Aspekt der Methode der finiten Elemente: *Bei linearen Problemen ersetzt die FEM*

die exakten Greenschen Funktionen durch deren Projektionen auf den Ansatzraum  $V_h$ . Insofern formuliert Tottenham's Gleichung ein ganzes Programm: Die FEM tauscht nur die Greenschen Funktionen aus. Die Gleichungen selbst aber, also die Einflussfunktionen und die Logik, die der Ingenieur mit dem Begriff der Einflussfunktion verbindet, bleiben erhalten.

Dies ist umso bemerkenswerter, da das Variationsproblem der Gleichung

$$- \mathbf{L} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (3.19)$$

ein schlecht gestelltes Problem (engl.: *ill-posed problem*) ist, denn die (meisten) Einflussfunktionen haben eine unendlich große Energie. Die ganze Lösungstheorie, die sich um die Variationsprobleme und die finiten Elemente entwickelt hat, ist auf Probleme mit endlicher Energie beschränkt, aber (fast) alle Punktwerte auf dem Bildschirm und im Ausdruck sind das Skalarprodukt der Belastung  $\mathbf{p}$  mit Kernen  $\mathbf{G}_i$ , die *nicht* im Energieraum  $H^m(\Omega)$  liegen.

Um die Lösungstheorie auch auf die Greenschen Funktionen  $\mathbf{G}_i$  anwenden zu können, ersetzt man in Gedanken die Punktlasten durch verschmierte Größen, weil dann die Greenschen Funktionen wieder endliche Energien haben und damit auch Abschätzungen wie

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E, \quad (3.20)$$

die auf der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Energienorm beruhen

$$\|\mathbf{G}_0\|_E^2 := a(\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_0) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.21)$$

wieder einen Sinn machen. So soll auch in dieser Arbeit verfahren werden. Wann immer Abschätzungen dieser Art benutzt werden und die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_i$  eigentlich nicht in  $H^m(\Omega)$  liegt, dann soll  $\mathbf{G}_i$  als die Greensche Funktion für den Mittelwert (engl.: *average value*), etwa der Verschiebung,

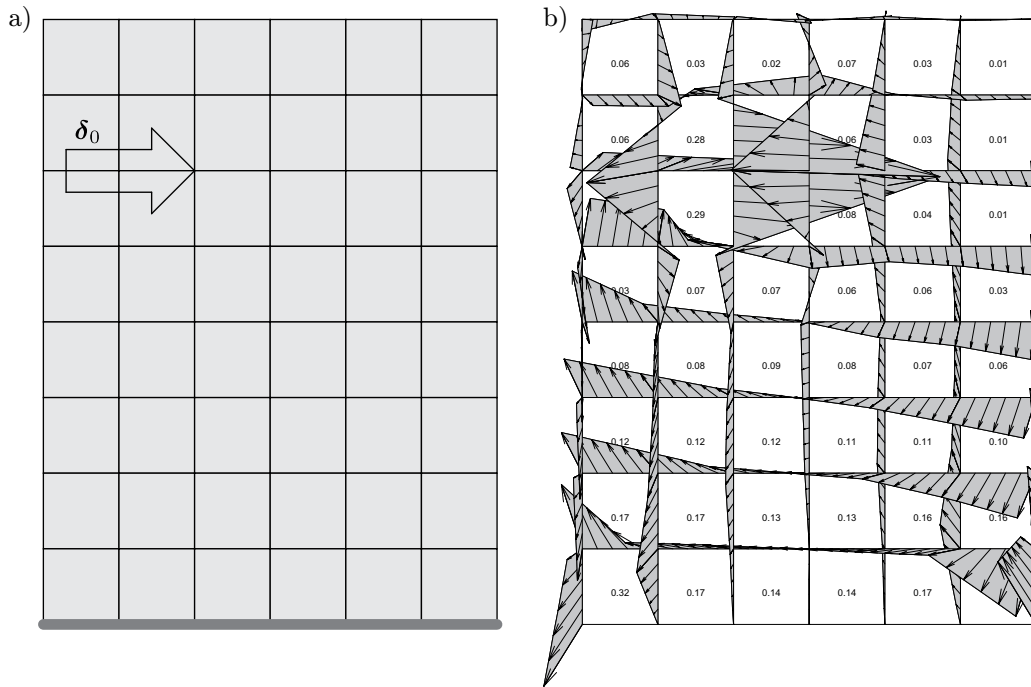
$$\mathbf{u}^a = \frac{1}{\Omega_\epsilon} \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.22)$$

über eine kleine Umgebung  $\Omega_\epsilon$  des Aufpunktes  $\mathbf{x}$  gedeutet werden.

### 3.2.1 Der Projektionssatz

Alle Daten, die der Ingenieur sich auf dem Bildschirm anzeigen lässt, sind das Ergebnis von Funktionalen

$$J(\mathbf{u}) = u(\mathbf{x}) \quad J(\mathbf{u}) = \sigma_{xx}(\mathbf{x}) \quad \text{etc.} \quad (3.23)$$



**Abb. 3.1:** Modelldaten der Scheibe:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $t = 0,2$ ,  $b \times h = 6 \times 8$ .  
a) Dirac Delta  $\delta_0$  und b) Dirac Delta  $\delta_0^h$  als FE-Lastfall.

Das FE-Programm ersetzt jedoch die exakten Funktionale, wie z.B. für die Verschiebung,

$$J(\mathbf{u}) = u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.24)$$

durch Funktionale auf dem Ansatzraum  $V_h$ :

$$J(\mathbf{u}_h) = u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.25)$$

Im abstrakten Sinn ist ein Netz eine Abbildung der Funktionale  $J(\cdot)$  auf Funktionale  $J_h(\cdot)$  oder, was damit gleichbedeutend ist, eine Abbildung der Greenschen Funktionen  $\mathbf{G}_i$  auf Näherungen  $\mathbf{G}_i^h$ .

Nach dem in [21] genannten Projektionssatz, kann man sogar die FE-Lösung so definieren. Es gilt der folgende Satz:

*Die FE-Lösung  $u_h$  genügt allen Greenschen Identitäten in bezug auf die projizierten Greenschen Funktionen,*

$$G(\mathbf{u}_h/\mathbf{p}, \mathbf{G}_i^h) = 0 \quad \text{und} \quad B(\mathbf{u}_h/\mathbf{p}, \mathbf{G}_i^h/\delta_i). \quad (3.26)$$

Eine spezielle Interpretation ist  $J(u_h) = J_h(u)$  und dies ist gerade der Inhalt von Tottenham's Gleichung

$$J(\mathbf{u}_h) = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}_h) = u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h \cdot \mathbf{p} d\Omega_{\mathbf{y}} = J_h(\mathbf{u}), \quad (3.27)$$

die natürlich auf alle Funktionale anwendbar ist.

Und so wie es eine Abbildung der exakten Greenschen Funktionen  $\mathbf{G}_i$  auf die genäherten Funktionen  $\mathbf{G}_i^h$  gibt, so gibt es auch zu jedem Dirac Delta  $\boldsymbol{\delta}_i$  ein Dirac Delta  $\boldsymbol{\delta}_i^h$  in dem Dualraum von  $V_h$  mit der Eigenschaft

$$(\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{v}_h) = (\boldsymbol{\delta}_i^h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (3.28)$$

was bedeutet, dass sie arbeitsäquivalent bezüglich der Testfunktionen  $\mathbf{v}_h$  sind. Die genäherten Dirac Deltas  $\boldsymbol{\delta}_i^h$  sind keine Einzelkräfte, sondern es sind Elementkräfte  $-\mathbf{L}\mathbf{G}_i^h$  und Linienkräfte (auf den Elementkanten), die die Wirkung von Einzelkräften, Punktversetzungen, etc. simulieren und zwar so, dass auf  $V_h$  kein Unterschied besteht zwischen dem echten Dirac Delta und dem genäherten Dirac Delta. Das ist die Bedeutung von Gl. (3.28).

In Abb. 3.1 sind beispielhaft das echte Dirac Delta und das genäherte Delta auf dem Netz dargestellt. Beide sind auf  $V_h$  arbeitsäquivalent. Ob man die Arbeit der echten, horizontal gerichteten Punktlast  $P = 1$  auf dem Weg  $v_h(\mathbf{x})$  (der horizontalen Verschiebung) berechnet oder die Arbeit der Volumenlasten und Linienlasten  $\boldsymbol{\delta}_0^h$  (das sind die Lasten in dem rechten Bild) auf all den anteiligen Wegen von  $\mathbf{v}_h$

$$v_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_0^h(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.29)$$

ist dasselbe.

Weil der FE-Lastfall  $\mathbf{p}_h = -\mathbf{L}\mathbf{u}_h$  dem Originallastfall  $\mathbf{p}$  äquivalent ist

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (3.30)$$

folgt, dass man die FE-Lösung auf sechs verschiedene Arten und Weisen schreiben kann

$$u_h(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_h, \mathbf{G}_0) = (\mathbf{p}_h, \mathbf{G}_0^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0^h) = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}_h) = (\boldsymbol{\delta}_0^h, \mathbf{u}_h) = (\boldsymbol{\delta}_0^h, \mathbf{u}). \quad (3.31)$$

Ob man z.B. den FE-Lastfall  $\mathbf{p}_h$  mit der exakten Greenschen Funktion  $\mathbf{G}_0$  überlagert

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.32)$$

oder mit der genäherten Greenschen Funktion  $\mathbf{G}_0^h$

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_h(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}, \quad (3.33)$$

macht keinen Unterschied.

### 3.2.2 Dirac Energie

Dieser Begriff wurde in [30] eingeführt, um darauf aufmerksam zu machen, dass alle Werte, wie z.B. die Spannung in einem Punkt,

$$1 \cdot \sigma_{xx}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.34)$$

eigentlich Energien sind. So gehört zu jeder Kraftgröße die duale Weggröße und damit eine ganz bestimmte Vorgehensweise. Es wird dem Tragwerk eine Bewegung erlaubt, die vorher nicht möglich war. Die Arbeit, die die Kraft auf dem Wege der zugehörigen Einheitsstreuung leistet, ist dann gleich  $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$ . Das, was von der Einheitsbewegung im Fußpunkt einer Kraft ankommt, ist umgekehrt gleich dem Einfluss, den die Kraft auf  $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$  hat. Das ist die Aussage von Gl. (3.34).

Die Fehler bei der FE-Analyse eines Tragwerks rühren daher, dass die Methode nicht in der Lage ist, die Bewegungen, die durch die Streizung ausgelöst werden, richtig darzustellen.

### 3.2.3 Lagrange Multiplikator und genäherte Greensche Funktion

Es sei  $J(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in V$ , ein lineares Funktional, z.B.

$$J(\mathbf{u}) = u(\mathbf{x}), \quad (3.35)$$

wobei der Skalar  $u(\mathbf{x})$  für eine Komponente des Feldes  $\mathbf{u}$  stehen möge und  $\mathbf{G}_0$  sei die zugehörige Greensche Funktion

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.36)$$

Nun wird das Funktional auf dem FE-Ansatzraum  $V_h \subset V$

$$J(\mathbf{u}_h) = J(u_i \varphi_i) = J(\mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}) = u_h(\mathbf{x}) \quad (3.37)$$

unter der Nebenbedingung, dass der Vektor  $\mathbf{u}$  dem Gleichungssystem ( $n \times n$ )

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.38)$$

genüge, betrachtet.

Mit einem zweiten Vektor  $\boldsymbol{\lambda}$  wird der Ausdruck

$$\mathcal{L} = J(\mathbf{u}_h) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (3.39)$$

gebildet. Dann gibt es einen Punkt  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$ , in dem das Funktional  $\mathcal{L}$  stationär ist:

$$d\mathcal{L} = \mathcal{L}_{,u_i} du_i - \mathcal{L}_{,\lambda_i} d\lambda_i = 0. \quad (3.40)$$

Dieser Punkt  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$  ist bestimmt durch die beiden Gleichungssysteme

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{j} \quad \text{mit } j_i = J(\varphi_i). \quad (3.41)$$

**Beweis:** Die Spalten  $\mathbf{s}_i$  der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  genügen den Gleichungen

$$\mathbf{K} \mathbf{e}_i = \mathbf{s}_i \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}_i \quad (3.42)$$

und damit folgt

$$\mathcal{L}_{,u_i} = J_{,u_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{s}_i = J_{,u_i} - \mathbf{j}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}_i = J_{,u_i} - \mathbf{j}^T \mathbf{e}_i = J_{,u_i} - J(\varphi_i) = 0, \quad (3.43)$$

denn

$$J_{,u_i} := J(\mathbf{u}_h)_{,u_i} = J(\varphi_i). \quad (3.44)$$

*Bemerkung:* Die Gleichung  $\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{j}$  ist die Bestimmungsgleichung für die Knotenwerte  $\lambda_i(\mathbf{x})$  der genäherten Greenschen Funktion

$$\mathbf{G}_j^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{y}) \quad (3.45)$$

des Funktionals  $J(\mathbf{u}_h)$

$$J(\mathbf{u}_h) = \mathbf{u}^T \mathbf{j} = \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{j} = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.46)$$

d.h. der Lagrange Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$  ist identisch mit dem Vektor der Knotenwerte der genäherten Greenschen Funktion.

### Nichtlineare Funktionale

Nun sei das Funktional  $J(\mathbf{u})$  nichtlinear. Es bezeichne

$$J'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} [J(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v})] \right|_{\epsilon=0} \quad (3.47)$$

die Gateaux-Ableitung des Funktionals  $J(\mathbf{u})$ . Für zwei beliebige Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}_h$  gilt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung,

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = \int_0^1 J'(\mathbf{u}_h + s \mathbf{e}; \mathbf{e}) ds \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \quad (3.48)$$

und insbesondere, wenn  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,

$$-J(\mathbf{u}_h) = \int_0^1 J'(\mathbf{u}_h - s \mathbf{u}_h; -\mathbf{u}_h) ds = - \int_0^1 J'(\mathbf{u}_h - s \mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h) ds. \quad (3.49)$$

Der Punkt, in dem das Lagrange Funktional

$$\mathcal{L} = J(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (3.50)$$



stationär wird, ist bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{j}_u, \quad (3.51)$$

mit

$$j_{ui} = J'(\mathbf{u}_h; \varphi_i). \quad (3.52)$$

D.h. die Gateaux-Ableitung des Funktionals  $J(\cdot)$  im Punkt  $\mathbf{u}_h$  liefert die rechte Seite der Bestimmungsgleichung von  $\boldsymbol{\lambda}$ , also der genäherten Greenschen Funktion  $\mathbf{z}_h$  bzw.  $\mathbf{G}_h$  und es gilt

$$J(\mathbf{u}_h) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{j}_u^T \mathbf{u}. \quad (3.53)$$

### Nichtlineare Probleme

Die FE-Analyse nichtlinearer Probleme der 2-D und 3-D Elastizitätstheorie führt auf die  $n$  skalaren Gleichungen

$$a(\mathbf{u}_h, \varphi_i) = (\mathbf{p}, \varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.54)$$

für den  $n$ -gliedrigen FE-Ansatz

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_i u_i \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (3.55)$$

Daraus folgt, dass der Vektor  $\mathbf{u} = \{u_i\}$  der Knotenwerte der nichtlinearen Gleichung

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (3.56)$$

genügen muss.

Es sei wieder  $J(\mathbf{u}_h)$  ein (zunächst) lineares Funktional auf dem Ansatzraum  $V_h$ , das im Punkt  $\mathbf{u}_h$  auszuwerten ist,

$$J(\mathbf{u}_h) = \mathbf{u}^T \mathbf{j} \quad \text{mit} \quad \mathbf{j} = \{j_i\} = \{J(\varphi_i)\}, \quad (3.57)$$

wobei der zu  $\mathbf{u}_h$  gehörige Knotenvektor  $\mathbf{u}$  der Bedingung  $\mathbf{k}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0}$  genügen muss. Das Lagrange Funktional lautet damit

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{u}^T \mathbf{j} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{k}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}). \quad (3.58)$$

Mit der gleichen Argumentation wie zuvor ergibt sich dann, dass der stationäre Punkt  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$  durch die Gleichungen

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{j} \quad (3.59)$$

bestimmt ist, wobei  $\mathbf{K}_T$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix im Punkt  $\mathbf{u}_h$  ist.

Es sei nun

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i u_{I_i} \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_I^T \Phi(\mathbf{x}) \quad (3.60)$$

das Feld in  $V_h$ , welches das wahre Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  in den Knoten interpoliere und  $\mathbf{e} = \mathbf{u}_I - \mathbf{u}$  die Differenz der Knotenvektoren der beiden Felder  $\bar{\mathbf{u}}$  und  $\mathbf{u}_h$ .

Die Lösung der Gleichung  $\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$  ist eine Nullstelle der Funktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}. \quad (3.61)$$

Folgt man der Logik des Newton Verfahrens

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{F}'(\mathbf{u}_i) (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) + \dots \quad (3.62)$$

und setzt

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_I, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{e} = \mathbf{u}_I - \mathbf{u}, \quad (3.63)$$

dann erhält man

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \mathbf{e} = \mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u}). \quad (3.64)$$

Mit Gl. (3.59) folgt

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u})) = \mathbf{j}^T (\mathbf{K}_T^{-1})^T \mathbf{K}_T \mathbf{e} = \mathbf{j}^T \mathbf{e} = J(\mathbf{e}), \quad (3.65)$$

woraus folgt, dass man mittels des Vektors  $\boldsymbol{\lambda}$  und des Residuums  $\mathbf{k}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}$  im Linearisierungspunkt den Fehler  $J(\mathbf{e})$  darstellen kann.

Ist das Funktional  $J(\mathbf{u})$  nichtlinear, dann ist in den Bestimmungsgleichungen für den Lagrange Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$  der Term  $J(\mathbf{u})$  durch die Gateaux-Ableitung zu ersetzen, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, und es ist natürlich

$$J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \neq J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h). \quad (3.66)$$

### 3.2.4 Die äquivalenten Knotenkräfte

Die Umwandlung eines Randwertproblems in ein Variationsproblem macht aus der rechten Seite der Differentialgleichung ein Funktional

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) =: J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.67)$$

Gemäß der klassischen Hilbertraumtheorie gilt: Ist die rechte Seite  $J(\mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$  ein lineares, stetiges Funktional auf  $V \subset H^m(\Omega)$  und die Wechselwirkungsenergie  $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  auf  $V$  koerziv, dann existiert eine schwache Lösung  $\mathbf{u} \in V \subset H^m(\Omega)$ .

Es sei nun  $J(\mathbf{v})$  ein beliebiges stetiges und lineares Funktional und die Funktion  $\mathbf{z}$  die Lösung des Variationsproblems

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.68)$$

Nach Verwendung der folgenden Greenschen Identität

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = (-\mathbf{L} \mathbf{v}, \mathbf{z}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = 0 \quad (3.69)$$

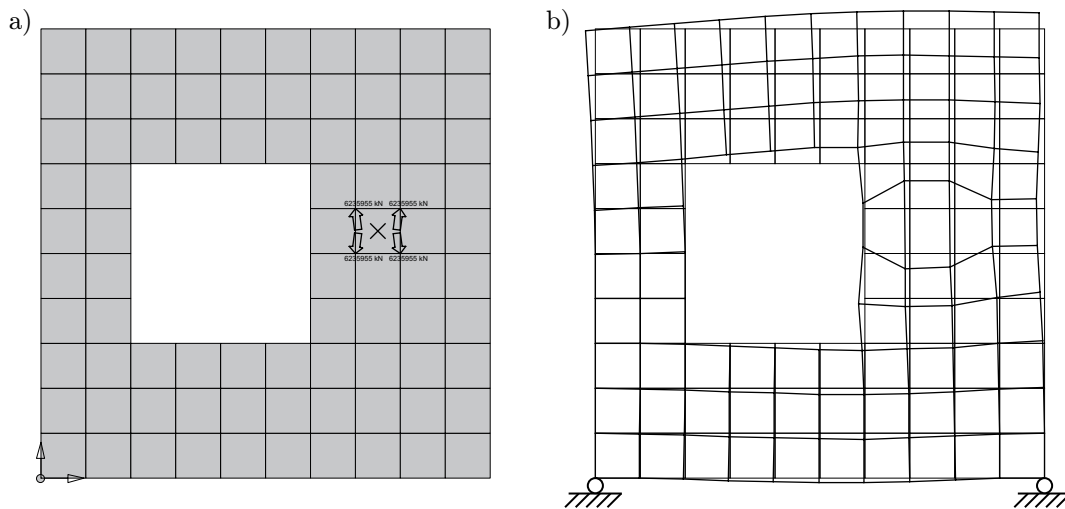
folgt, es werden homogene Randwerte vorausgesetzt,

$$(-\mathbf{L} \mathbf{v}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}). \quad (3.70)$$

D.h. man kann das Funktional  $J(\mathbf{v})$  an der Stelle  $\mathbf{v}$  aus dem Skalarprodukt von  $\mathbf{z}$  und der zu  $\mathbf{v}$  gehörigen rechten Seite  $-\mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{p}$  (der Belastung) berechnen

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{z} \cdot (-\mathbf{L} \mathbf{v}) d\Omega. \quad (3.71)$$

Weil diese Technik nicht auf die klassischen Punktfunktionale  $J(\mathbf{v}) = (\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{v})$  beschränkt ist, sondern jedem linearen Funktional eine solche Funktion  $\mathbf{z}$  zugeordnet werden kann, nennt man das Riesz Element eine verallgemeinerte Greensche Funktion, siehe Kapitel 2.3.2.



**Abb. 3.2:** Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  an einem Scheibenproblem, Modelldaten:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $t = 0,2$ ,  $b \times h = 5 \times 5$ . a) Knotenkräfte  $f_i$  und b) Einflussfunktion  $G_1^h$ .

Es sei zunächst  $J(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{u}) = u(\mathbf{x})$  das klassische Punktfunktional. Die Lösung der Variationsgleichung

$$a(\mathbf{G}_0, \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\delta}_0, \mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in V \quad (3.72)$$

mit finiten Elementen führt auf das Gleichungssystem

$$a(\mathbf{G}_0^h, \varphi_i) = (\boldsymbol{\delta}_0, \varphi_i) = \varphi_i(\mathbf{x}) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.73)$$

Die äquivalenten Knotenkräfte  $f_i$  sind also gerade die Werte der Testfunktionen  $\varphi_i$  in dem Aufpunkt  $\mathbf{x}$ , d.h.  $f_i = J(\varphi_i)$ , siehe Abb. 3.2. In Abb. 3.3 sind die Knotenkräfte für eine integrale Zielgröße dargestellt. Die Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte kann als Regel formuliert werden.

**Äquivalente Knotenkräfte für Greensche Funktionen** Die äquivalenten Knotenkräfte zur Bestimmung der verallgemeinerten Greenschen Funktion  $\mathbf{z}_h$  eines Funktionals  $J(\mathbf{v}_h)$  mit  $\mathbf{v}_h \in V_h$  lauten  $f_i = J(\varphi_i)$ .

Ist das Funktional linear,

$$J(\mathbf{u}_h) = J(u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \dots + u_n\varphi_n) = \sum_i^n u_i J(\varphi_i) = \sum_i^n u_i j_i = \mathbf{u}^T \mathbf{j}, \quad (3.74)$$

dann ist  $J(\cdot)$  auf  $V_h$  durch die  $n$  Werte  $j_i = J(\varphi_i)$ , also den Vektor  $\mathbf{j}$  bestimmt.

Die FE-Formulierung für die Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  lautet somit in allgemeiner Form

$$a(\mathbf{z}_h, \varphi_i) = J(\varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.75)$$

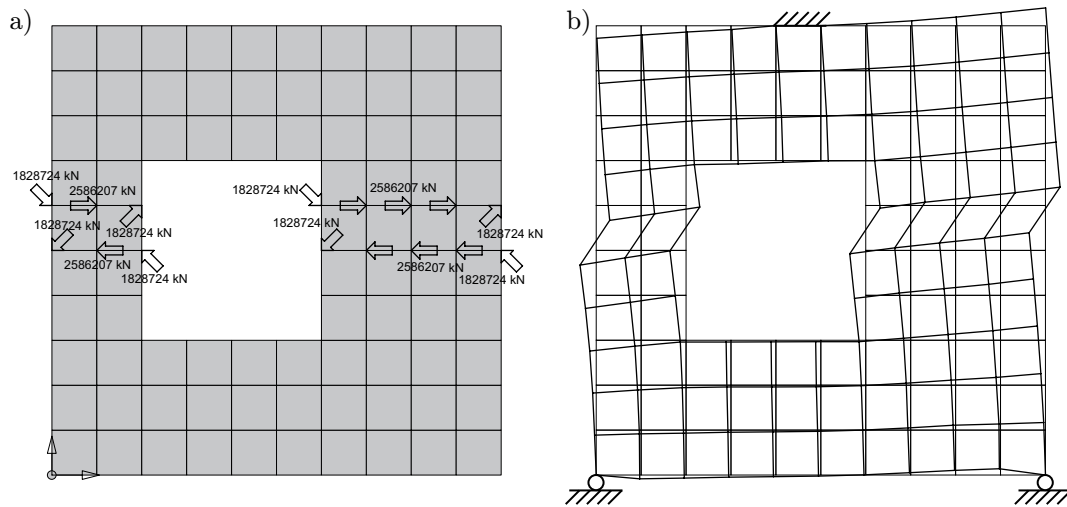
In [45] und [53] wird die Berechnung der benötigten äquivalenten Knotenkräfte für die Berechnung von FE-Einflussfunktionen für die Scheibe und für die Platte detailliert erklärt. In [47] wird auf eine geometrisch nichtlineare Scheibenformulierung eingegangen.

### 3.2.5 Einflussfunktionen in schwacher Form

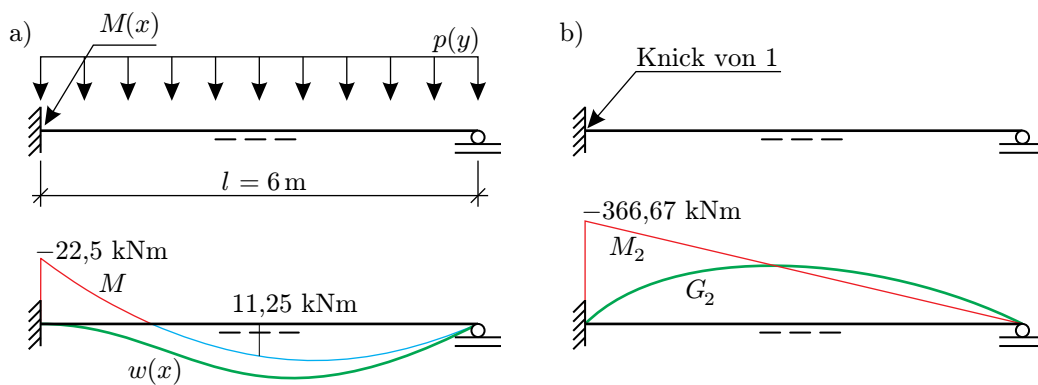
Weggrößen kann man auf zwei Arten durch Einflussfunktionen darstellen

$$u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy = a(G_0, u). \quad (3.76)$$

Die erste Formel wird als eine *starke* Einflussfunktion und die zweite Formel als eine *schwache* Einflussfunktion für die Verschiebung  $u$  bezeichnet. Die erste Formel basiert auf der zweiten Greenschen Identität und die zweite Formel basiert auf der



**Abb. 3.3:** Einflussfunktion für die Schnittkraft  $N_{yx}$  an einem Scheibenproblem, Modelldaten siehe Abb. 3.2. a) Knotenkräfte  $f_i$  und b) Einflussfunktion.



**Abb. 3.4:** Modelldaten: Querschnitt HEA 100, Material Stahl S235. a) System mit Belastung  $p = 5\text{ kN/m}$ , daraus resultierenden Momentenverlauf und der Biegelinie. b) System zur Erzeugung der Greenschen Funktion für das Moment an der Einspannstelle und zugehörigem Momentenverlauf.

ersten Greenschen Identität. Mit der ersten Formel kann man jede Weg- und Kraftgröße berechnen (unter Benutzung geeigneter  $G_i$ ), mit der zweiten Formel jedoch nur Weggrößen.

Mit dem Unterschied zwischen diesen beiden Formeln soll sich in diesem Abschnitt anhand der Balkenstatik beschäftigt werden. Es wird die Balkenstatik als Modellproblem gewählt, weil beim Kraftgrößenverfahren der Unterschied zwischen diesen beiden Formeln besonders deutlich wird.

Zunächst soll die Behauptung an einem kleinen Beispiel verifiziert werden. Gesucht ist eine Kraftgröße, das Moment, an der Einspannstelle bei dem Träger in Abb. 3.4. Die Einflussfunktion für das Biegemoment ist die Biegelinie des Balkens, wenn man dem Balken an der Einspannstelle einen Knick von eins erteilt. Das zugehörige Moment hat einen dreiecksförmigen Verlauf, siehe Abb. 3.4 b. Die Überlagerung des Momentenverlaufs  $M_2$  aus der Greenschen Funktion mit dem Momentenverlauf  $M$  aus der Belastung  $p$ , also die Berechnung der Wechselwirkungsenergie zwischen den Biegelinien  $w$  und  $G_2$ , ergibt null

$$a(w, G_2) = \int_0^l \frac{M M_2}{EI} dy = 0 \quad (3.77)$$

und nicht das Moment  $M$  an der Einspannstelle. Wenn man sich an die Orthogonalitätsbedingung

$$0 = \int_0^l \frac{M M_i}{EI} dx = a(w, w_i) \quad M_i = \text{Moment aus } X_i = 1 \quad (3.78)$$

beim Kraftgrößenverfahren erinnert, dann wird auch verständlich warum: Die Überlagerung von  $M_2$  (= Moment aus  $X_1 = 1$ ) mit  $M$  entspricht der Kontrolle  $w'(0) = 0$ . Das heißt, wählt man als statisch bestimmtes Hauptsystem den Träger mit einem Gelenk an der Einspannstelle, dann entspricht das Moment  $M_2$  bis auf einen Faktor dem Moment  $X_1 = 1$ . Daher muss logischerweise  $M_2$  orthogonal zu  $M$  sein.

Die schwachen Einflussfunktionen

$$\partial_i w = a(G_i, w) \quad (3.79)$$

liefern folglich stets null, wenn  $G_i$  die Einflussfunktion für eine Kraftgröße  $\partial_i w$  ist.

Diesen Übergang von der starken Einflussfunktion zur schwachen Einflussfunktion kann man direkt beobachten. Das Moment an der Stelle  $x$  eines Balkens wird mittels Greenscher Funktion über das Integral

$$M(x) = \int_0^l p(y) G_2(y, x) dy \quad (3.80)$$

bestimmt. Da die Greensche Funktion nur abschnittsweise stetig ist, muss das Integral in zwei Teilbereiche aufgeteilt werden. Dabei wird der Bereich der Unstetigkeit zunächst in einem Bereich von  $\pm\epsilon$  ausgespart und zweimal partiell integriert:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^{x-\epsilon} p(y) G_2(y, x) dy + \int_{x+\epsilon}^l p(y) G_2(y, x) dy \\ &= [EIw''' G_2 - EIw'' G_2']_0^{x-\epsilon} + \int_0^{x-\epsilon} EIw'' G_2'' dy + \\ &\quad + [EIw''' G_2 - EIw'' G_2']_{x+\epsilon}^l + \int_{x+\epsilon}^l EIw'' G_2'' dy. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Die zwei Integralausdrücke können zu einem zusammengefasst werden. Durch Einsetzen der Schnittgrößen  $M = -EIw''$  bzw.  $V = M'$  erhält man

$$M(x) = [M G_2' - V G_2]_0^{x-\epsilon} + [M G_2' - V G_2]_{x+\epsilon}^l + \int_0^l \frac{M M_2}{EI} dy. \quad (3.82)$$

Wird nun eine Grenzwertbetrachtung für  $\epsilon \rightarrow 0$  durchgeführt<sup>1</sup>

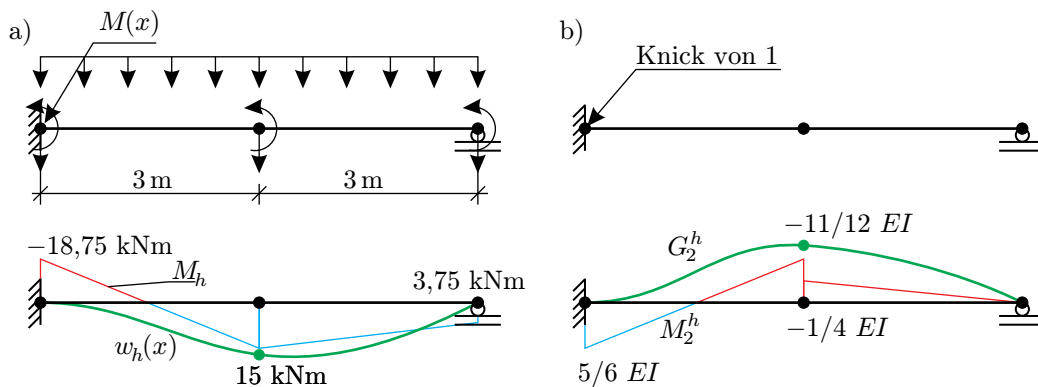
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-V(x-\epsilon) G_2(x-\epsilon) + V(x+\epsilon) G_2(x+\epsilon)] = 0 \quad (3.83)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [M(x-\epsilon) G_2'(x-\epsilon) - M(x+\epsilon) G_2'(x+\epsilon)] = M(x), \quad (3.84)$$

so ist das Ergebnis

$$M(x) = M(x) + \underbrace{\int_0^l \frac{M M_2}{EI} dy}_{=0}, \quad (3.85)$$

was bedeutet, dass die Überlagerung der Momentenflächen null ergeben muss und es bleibt das triviale Ergebnis, dass das Moment an der Stelle  $x$  gerade das Moment an der Stelle  $x$  ist.



**Abb. 3.5:** a) System mit Belastung und der Unterteilung in zwei Elemente. Der daraus resultierende Momentenverlauf und die Biegelinie sind unten dargestellt. b) System zur Erzeugung der Greenschen Funktion für das Moment an der Einspannstelle und zugehörigem Momentenverlauf.

Bemerkenswert jedoch ist, dass die finite Elemente Methode den Unterschied zwischen der schwachen und der starken Form der Einflussfunktion nicht kennt. Wenn die genäherte Einflussfunktion aus den Gleichungen

$$G_2^h \in V_h : \quad a(G_2^h, \varphi_i) = J(\varphi_i) \quad \varphi_i \in V_h \quad (3.86)$$

<sup>1</sup>Die Daten an den Rändern 0 und  $l$  werden zu null, da immer einer der beiden dualen Größen null ist und können daher bei der Betrachtung weggelassen werden.

bestimmt wird, dann ist die FE-Lösung  $G_2^h$  in der Lage, aus beiden Formen das gewünschte Resultat zu extrahieren

$$J(w_h) = \int_0^l G_2^h(y, x) p(y) dy = a(G_2^h, w_h), \quad (3.87)$$

weil auf  $V_h$  die beiden Formeln übereinstimmen

$$J(w_h) = \int_0^l G_2^h(y, x) p(y) dy = \mathbf{u}_G^T \mathbf{f} = \mathbf{u}_G^T \mathbf{K} \mathbf{u} = a(G_2^h, w_h). \quad (3.88)$$

Das Beispiel aus Abb. 3.5, bei dem der Balken in zwei Elemente unterteilt wurde, soll dies erläutern. Die Wechselwirkungsenergie zwischen  $M_h$  und  $M_2^h$  ergibt

$$M_h(x) = a(M_2^h, M_h) = \int_0^3 \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} dy + \int_0^3 \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} dy = -18,75, \quad (3.89)$$

was, wie Abb. 3.5 a zeigt, genau der richtige Wert ist. Wird die Knotenlast für den Drehfreiheitsgrad resultierend aus der Streckenlast von  $-3,75 \text{ kNm}$  hinzu addiert, so ergibt das das exakte Auflagermoment von  $-22,5 \text{ kNm}$ .

### 3.2.6 Berechnung von Punktwerten

Es sei  $u(x)$  die Lösung des Problems

$$-EA u''(x) = p(x) \quad 0 < x < l \quad u(0) = N(l) = 0. \quad (3.90)$$

Zu berechnen ist die Greensche Funktion für die Längsverschiebung an der Stelle  $x$  in einem Stab. Man bestimmt die Lösung der Gleichung

$$-EA \frac{d^2}{dy^2} G_0(y, x) = \delta_0(y - x). \quad (3.91)$$

Der FE-Ansatz

$$G_0^h(y, x) = \sum_i^n u_i(x) \varphi_i(y) \quad (3.92)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_G = \mathbf{f}_G \quad (3.93)$$

mit dem im Kapitel 3.2.4 vorgestellten Verfahren zur Bestimmung der Knotenlasten  $f_i^G$ . Der Vektor

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G(x) = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}^T \quad (3.94)$$



ist der Vektor der Knotenwerte  $u_i$  der Greenschen Funktion. Der Produktansatz in Gl. (3.92) ist typisch für die Darstellung von Greenschen Funktionen mit finiten Elementen: Die Knotenwerte  $u_i$  sind abhängig von der Lage des Aufpunktes  $x$ .

Es sei  $u_h(x)$  die FE-Lösung von Gl. (3.90), welche auf zwei Arten durch Integrale dargestellt werden kann:

$$u_h(x) = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy = \int_0^l u_h(y) \delta_0(y - x) dy. \quad (3.95)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy = \int_0^l \sum_i \varphi_i(y) u_i^G(x) p(y) dy = \sum_i u_i^G(x) f_i \\ &= \mathbf{u}_G^T \mathbf{f} = \mathbf{u}_G^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}_G^T \mathbf{K}^T \mathbf{u} = \mathbf{f}_G^T \mathbf{u} = \sum_i f_i^G(x) u_i \\ &= \sum_i \varphi_i(x) u_i = \int_0^l \sum_i u_i \varphi_i(y) \delta(y - x) dy = \int_0^l u_h(y) \delta_0(y - x) dy. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Die Längsverschiebung  $u_h(x)$  ist das Skalarprodukt zwischen den Knotenverschiebungen der Greenschen Funktion und den äquivalenten Knotenkräften des Lastfalles  $p$  oder, umgekehrt, zwischen den Knotenwerten der FE-Lösung und den äquivalenten Knotenkräften  $f_i^G$  der Greenschen Funktion

$$u_h(x) = \begin{cases} \sum_i \varphi_i(x) u_i = \int_0^l u_h(y) \delta_0(y - x) dy = \mathbf{f}_G^T \mathbf{u} \\ \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy = \mathbf{u}_G^T \mathbf{f}. \end{cases} \quad (3.97)$$

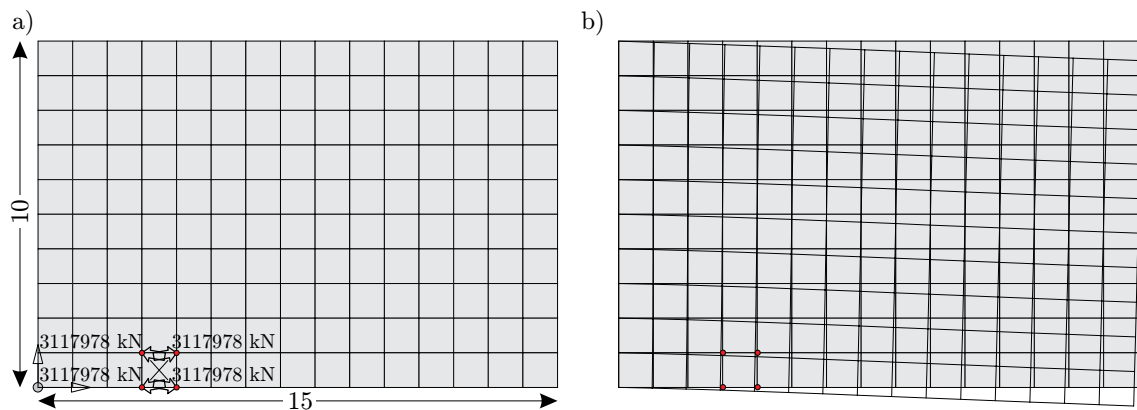
Die äquivalenten Knotenkräfte  $f_i^G$  der Greenschen Funktion sind folglich die Verschiebungen der Ansatzfunktionen im Punkte  $x$

$$\sum_i f_i^G(x) u_i = \sum_i (\delta_0(y - x), \varphi_i) = \varphi_i(x) u_i \quad \Rightarrow \quad f_i^G(x) = \varphi_i(x). \quad (3.98)$$

Geht es um Kräfte (Normalkräfte  $N$  oder um Spannungen  $\sigma$  bei der Scheibe)

$$N_h(x) = \begin{cases} \sum_i N(\varphi_i(x)) u_i = \mathbf{f}_G^T \mathbf{u} \\ \int_0^l G_1^h(y, x) p(y) dy = \mathbf{u}_G^T \mathbf{f}, \end{cases} \quad (3.99)$$

so sind es die Schnittkräfte der Ansatzfunktionen im Aufpunkt  $x$ .



**Abb. 3.6:** Modelldaten der Scheibe:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $t = 0,2$ . a) Lastfall für die Einflussfunktion und b) Darstellung der Verformung der Scheibe unter einer Linienlast am oberen Rand.

In der FEM kann die Auswertung der Einflussfunktion auf die Summation über die Knoten zurückgeführt werden. Ob man die Einflussfunktionen auswertet oder die Ansatzfunktionen direkt differenziert, macht natürlich keinen Unterschied, wie das nachstehende Beispiel erläutern soll.

In Abb. 3.6 ist eine auf der linken Seite fest eingespannte Kragsscheibe zu sehen, wobei in Abb. 3.6 a die Knotenlasten zur Erzeugung der Einflussfunktion und in b die Verformungsfigur aus der Linienlast dargestellt sind. Gesucht ist die Spannung  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $3,5/0,5$  m. Über die direkte FE-Berechnung erhält man einen Wert von  $\sigma_{xx} = -177,93$ . Wird der Wert über die Knotenlasten für die Einflussfunktion multipliziert mit den Knotenverschiebungen aus der Linienlast berechnet, so ergibt sich ein Wert für  $\sigma_{xx}$  von  $\sigma_{xx} = -177,93$ . Man erhält auf unterschiedlichen Wegen das exakt gleiche Ergebnis.

### 3.2.7 Die inverse Steifigkeitsmatrix

Die Knotenwerte  $u_{G_i}$  der genäherten Greenschen Funktion

$$G_0^h(y, x_k) = \sum_i u_{G_i}(x_k) \varphi_i(y) \quad (3.100)$$

für die Verschiebung  $u(x)$  im Knoten  $x_k$  sind die Lösung der Gleichung

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_G = \mathbf{e}_k \quad \text{Einheitsvektor } \mathbf{e}_k, \quad (3.101)$$

d.h.  $\mathbf{u}_G$  ist identisch mit der Spalte  $\mathbf{c}_k$  (engl.: *column*) der inversen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k. \quad (3.102)$$

Anders gesagt: Die Spalten von  $\mathbf{K}^{-1}$  sind Knotenverformungen und zwar die Knotenverformungen, die zu den  $n$  genäherten Greenschen Funktionen  $G_0^h(y, x_k)$  der  $n$  Knoten  $x_k$  gehören

$$G_0^h(y, x_k) = \sum_i c_{ki} \varphi_i(y) = \mathbf{c}_k^T \boldsymbol{\phi}(y). \quad (3.103)$$

Damit wird klar, warum die Inverse einer schwach besetzten Steifigkeitsmatrizen voll besetzt ist: Selbst wenn man nur *einen* Knoten  $x_k$  mit einer Kraft  $P = 1$  belastet, führt das schon zu Verformungen im *ganzen* Tragwerk.

Und so, wie die Verformungsfigur eines Tragwerks die Einhüllende der unendlich vielen Einflussfunktionen ist, die jede für sich einen infinitesimalen Teil  $p \, dy$  der Last repräsentieren

$$u(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) \, dy, \quad (3.104)$$

so ist auch die FE-Lösung  $u_h(x) = \mathbf{u}^T \boldsymbol{\phi}(x)$  die Summe von  $n$  mit  $f_i$  gewichteten genäherten Greenschen Funktionen

$$u_h(x) = f_1 G_0(y_1, x) + f_2 G_0(y_2, x) + \dots + f_n G_0(y_n, x), \quad (3.105)$$

denn der Vektor der Knotenwerte lautet

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} (f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + \dots + f_n \mathbf{e}_n). \quad (3.106)$$

Was für die FE-Lösung  $u_h$  gilt, gilt sinngemäß auch für die Ableitungen bzw. Schnittkräfte. Die Einflussfunktion für die Normalkraft  $N_h(x) = EA u_h'$  in einem Stab aus linearen Elementen hat z.B. die Knotenwerte

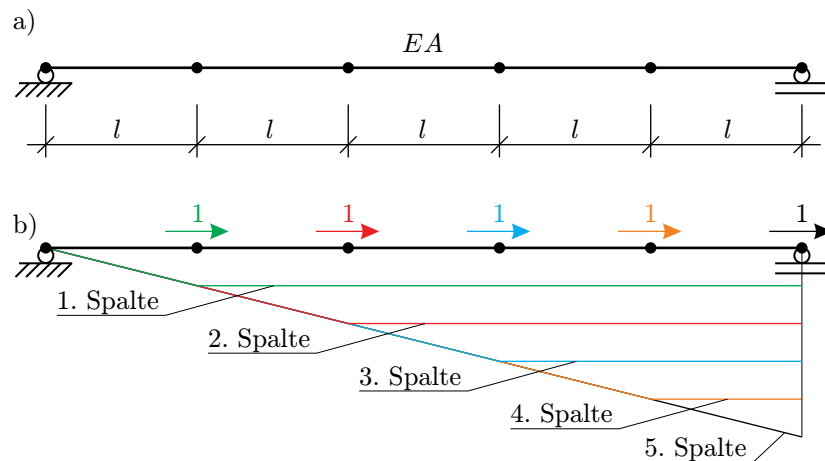
$$\mathbf{u}_G(x) = \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{EA}{l} \mathbf{e}_k - \frac{EA}{l} \mathbf{e}_{k-1} \right) = \frac{EA}{l} (\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{k-1}) \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad (3.107)$$

und ist somit der Differenzenquotient der Spalten  $\mathbf{c}_k$  und  $\mathbf{c}_{k-1}$  der Inversen  $\mathbf{K}^{-1}$ .

**Beispiele** In Abb. 3.7a ist ein Zugdruckstab aus fünf gleich langen linearen Elementen dargestellt. Der Stab ist links festgehalten.

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$



**Abb. 3.7:** a) Stabsystem mit Lagerungsbedingungen unterteilt in fünf Elemente. b) Die Einflussfunktionen der Verschiebung für die fünf freien Knotenwerte.

ist eine Tridiagonalmatrix. Aber die inverse Steifigkeitsmatrix

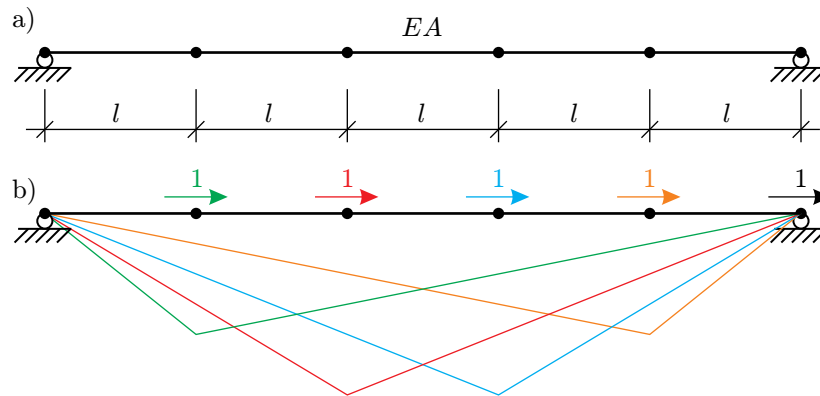
$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{l}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

ist dagegen voll besetzt. Die Spalten  $\mathbf{c}_k$  der Inversen sind in Abb. 3.7 b dargestellt; es sind die Knotenwerte  $\mathbf{u}_{G_i}$  der Einflussfunktionen für die Verschiebung im Knoten  $x_k$ . Man erkennt, wie aufgrund des freien rechten Endes die Knotenwerte zunächst linear ansteigen und dann jenseits des Knotens  $x_k$  auf konstantem Niveau weiterlaufen.

Hält man auch den rechten Knoten fest, siehe Abb. 3.8 a, so reduziert sich die Steifigkeitsmatrix auf die Größe  $(4 \times 4)$ . Ansonsten ändert sich nur der letzte Eintrag auf der Hauptdiagonalen. Aus der 1 wird eine 2. Aber die Inverse sieht jetzt ganz anders aus

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}^{-1} = \frac{l}{5EA} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad (3.110)$$

denn die Greenschen Funktionen fallen von ihren Spitzenwerten in den Knoten  $x_k$  zu den festen Lagern hin auf null ab, siehe Abb. 3.8 b.



**Abb. 3.8:** a) Stabsystem mit Lagerungsbedingungen unterteilt in fünf Elemente. b) Die Einflussfunktionen der Verschiebung für die vier freien Knotenwerte.

### 3.2.8 Wenn Spannungen unendlich werden

Singularitäten sind bei Flächentragwerken kaum zu vermeiden. Wenn die Spannungen in einer Scheibe unendlich werden, dann sollte sich das an unendlich großen Ausschlägen der Einflussfunktionen ablesen lassen. Weil dieser Punkt in der Literatur über Greensche Funktionen nicht behandelt wird, wird im Folgenden darauf eingegangen.

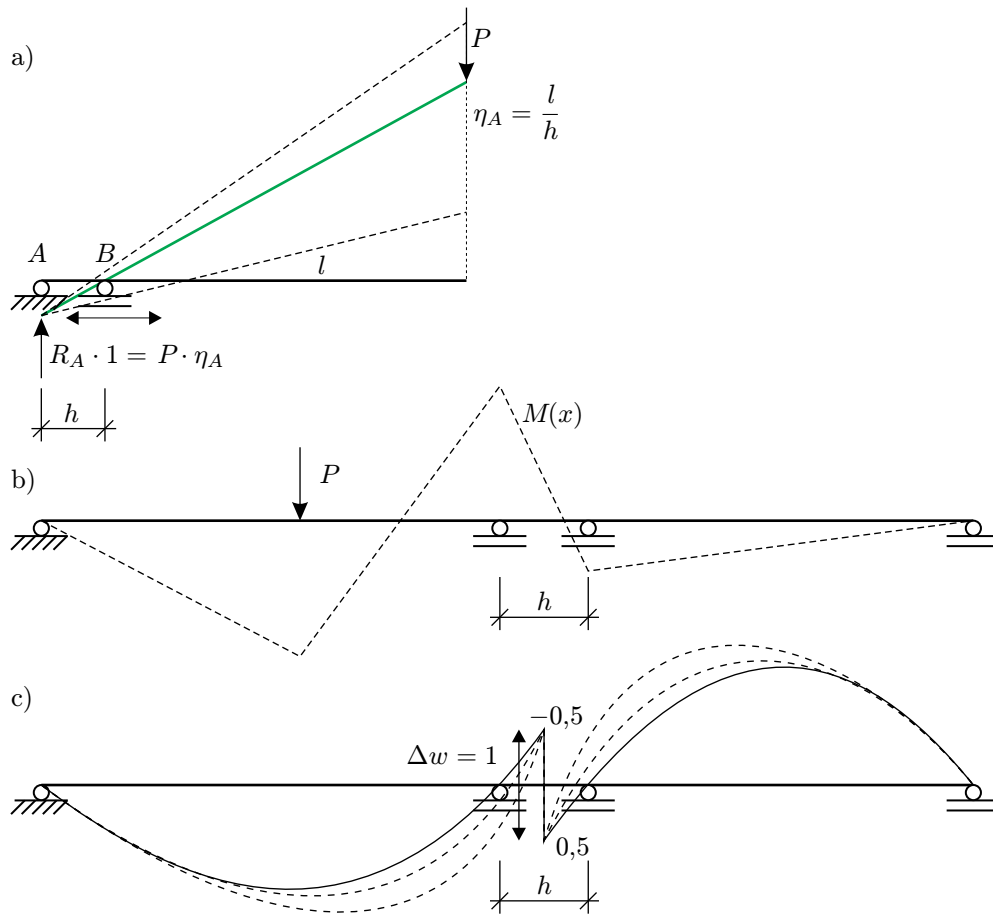
Solche singulären Punkte sind typischerweise die Eckpunkte. Angenommen eine vertikale Einzelkraft  $\mathbf{P}$ , die in einem Punkt  $\mathbf{y}_P$  in einiger Entfernung von der Ecke  $\mathbf{x}$  angreift, verursacht unendlich große Spannungen in der Ecke, dann müsste aber die Einflussfunktion

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_1^{xx}(\mathbf{y}_P, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} \quad (3.111)$$

für die Spannung im *Fußpunkt*  $\mathbf{y}_P$  der Kraft, d.h. in einiger Entfernung von der Ecke, den Wert unendlich haben. Anders gesagt: Eine Einheitsversetzung der Scheibe im Eckpunkt  $\mathbf{x}$  müsste in der Scheibe unendlich große vertikale Verschiebungen in *jedem* Punkt verursachen, wenn angenommen wird, dass die Lage des Angriffspunktes  $\mathbf{y}_P$  für das Phänomen unerheblich ist. Nur so kann  $\sigma_{xx}$  unendlich werden.

Dies scheint dem gewohnten Bild zu widersprechen: Einflussfunktionen haben wohl Singularitäten im Aufpunkt  $\mathbf{x}$ , aber außerhalb des Punktes selbst sind sie beschränkte und relativ reguläre Funktionen.

Es gibt aber Gegenbeispiele. Das einfachste Beispiel ist der Hebel des Archimedes, siehe Abb. 3.9 a. Wenn der Abstand  $h$  zwischen den beiden Lagern gegen null geht, oder wenn die Länge  $l$  des Hebels gegen unendlich geht, was dasselbe ist, dann geht



**Abb. 3.9:** Wie Einflussfunktionen mit unendlich großen Ausschlägen entstehen: a) Der Hebel des Archimedes, b) Biegemoment  $M(x)$  und c) Einflussfunktion für die Querkraft.

die Lagerkraft  $A$  gegen unendlich, so dass man theoretisch die gesamte Erde durch einen Fingerdruck ( $P$ ) anheben kann

$$A = \frac{1}{h} l P . \quad (3.112)$$

In der obigen Gleichung ist  $l/h$  gerade die Greensche Funktion für eine Last  $P$  an der Stelle  $l$ .

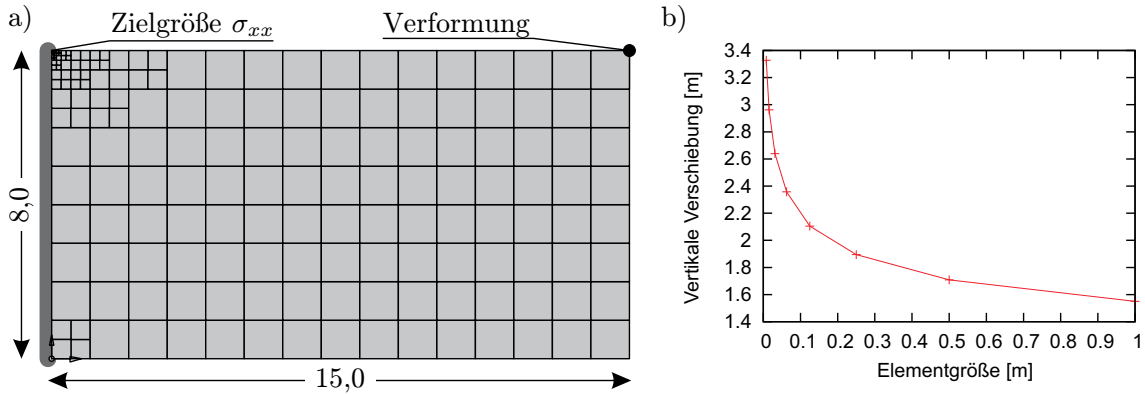
Eine ähnliche Situation ergibt sich bei dem Durchlaufträger in Abb. 3.9b, der eine Einzelkraft  $P$  im ersten Feld trägt. Wenn der Abstand  $h$  zwischen den beiden Innenlagern gegen null geht, dann nimmt die Neigung des Biegemomentes  $M$  zwischen den beiden Lagern immer mehr zu, d.h. die Querkraft

$$V(x) = -EI M'(x) \quad (3.113)$$

geht für  $h \rightarrow 0$  gegen unendlich. Die Frage ist, ob man diese Tendenz an der Einflussfunktion für

$$V(x) = G_3(y_P, x) P \quad (3.114)$$

ablesen kann und ob  $G_3$  im Fußpunkt  $y_P$  von  $P$  unendlich groß wird.



**Abb. 3.10:** a) Modelldaten der untersuchten Klagscheibe:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $t = 0,2$ . Für die linke obere Ecke wird die Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  berechnet. b) Darstellung der Ergebnisse: vertikale Verformung der Klagscheibe im markierten Punkt  $\bullet$  bei immer kleiner werdender Elementgröße in der Ecke.

Die Einflussfunktion  $G_3$  ist die Antwort des Trägers auf eine Einheitsversetzung im Aufpunkt  $x$ , dem Punkt zwischen den beiden Lagern in Abb. 3.9. Wegen der Symmetrie des Problems spaltet sich die Versetzung  $[[w]] = 1$  in zwei gleiche Teile  $w = \pm 0,5$  auf, und so kommt es zu gleichsinnigen Drehungen der beiden Endtangenten um den Winkel

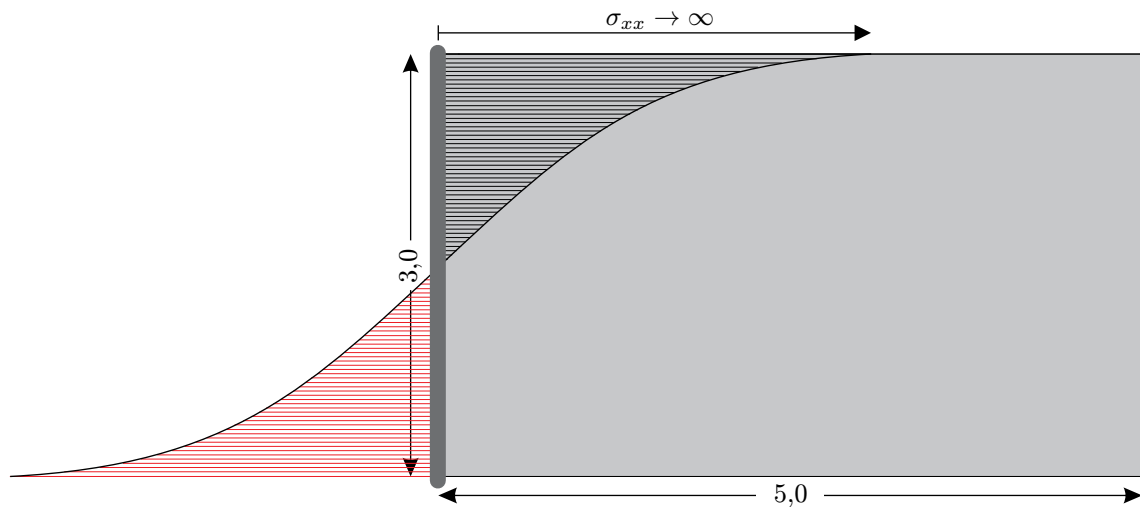
$$\tan \varphi = \frac{0,5}{0,5 h} = \frac{1}{h}. \quad (3.115)$$

Daraus wird aber in der Grenze,  $h \rightarrow 0$ , eine Drehung von  $90^\circ$ , und diese Drehung führt zur Auslenkung  $G(y_P, x) = \infty$  im Fußpunkt  $y_P$  von  $P$ .

Während Singularitäten in der Stabstatik eher die Ausnahme sind, sind sie bei Flächentragwerken schon fast die Regel. Die Scheibe in Abb. 3.10 a soll als Beispiel dienen. Wirken vertikale Lasten auf die Scheibe, so stellt sich ein Biegezustand in der Scheibe ein. Die horizontalen Spannungen  $\sigma_{xx}$  am oberen und unteren Rand der Einspannung werden singularär, wie in Abb. 3.11 zu erkennen ist.

Solch unendlich großen Spannungen müssten einem unendlich großen Ausschlag der Greenschen Funktion im Fußpunkt  $y_P$  von  $P$  entsprechen

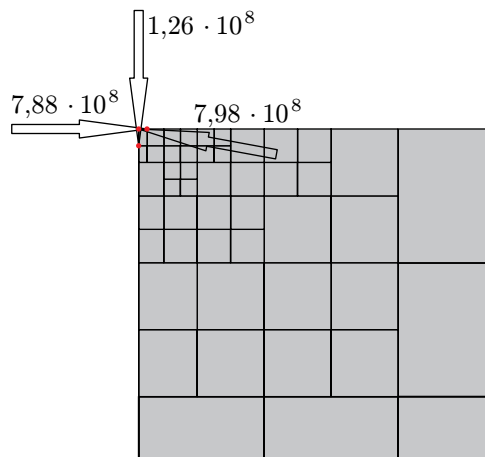
$$\sigma_{xx} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_1^{xx}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \mathbf{G}_1^{xx}(\mathbf{y}_P, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} = \infty \cdot \mathbf{P}, \quad (3.116)$$



**Abb. 3.11:** Die Spannung  $\sigma_{xx}$  geht gegen  $+\infty$  am oberen Rand der Scheibe an der Einspannstelle.

wenn die Last in einen beliebigen Punkt konzentriert gedacht wird.

Das heißt eine horizontale Einheitsversetzung  $[[u]] = 1$  der oberen linken Ecke  $\mathbf{x}_e$  der Scheibe führt zu *unendlich großen* vertikalen Verschiebungen der *ganzen* Scheibe; der ganzen Scheibe, weil die Lage des Angriffspunktes  $\mathbf{y}_P$  der Einzelkraft  $\mathbf{P}$  für den Ausgang des Experiments unerheblich ist.



**Abb. 3.12:** Knotenlasten für die Erzeugung der Einflussfunktion.

Die Einflussfunktion  $\mathbf{G}_1^{xx}$  für die Spannung  $\sigma_{xx}$  ist das Verschiebungsfeld, welches durch eine horizontale Einheitsversetzung des Eckknotens  $\mathbf{x}_e$  ausgelöst wird, also die Lösung der Differentialgleichung

$$-\mathbf{L} \mathbf{G}_1^{xx} = \delta_1^{xx}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_e). \quad (3.117)$$



Das Dirac Delta angewandt auf eine Testfunktion  $\mathbf{v}$  ergibt die Spannung  $\sigma_{xx}(\mathbf{v})(\mathbf{x}_e)$  des Feldes in der Ecke  $\mathbf{x}_e$

$$(\delta_1^{xx}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_e), \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \delta_1^{xx}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_e) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \sigma_{xx}(\mathbf{v})(\mathbf{x}_e). \quad (3.118)$$

Die äquivalenten Eckkräfte sind die Spannungen der Ansatzfunktionen  $\varphi_i$  in der Ecke  $\mathbf{x}_e$

$$f_i = \sigma_{xx}(\varphi_i)(\mathbf{x}_e). \quad (3.119)$$

Da nur die Ansatzfunktionen des Eckelements von null verschiedene Spannungen im Eckknoten haben, tragen nur die vier Ecken des Elements äquivalente Eckkräfte  $f_i$  (von denen einige null sind), während alle anderen Knoten lastfrei sind, siehe Abb. 3.12.

In Abb. 3.10 b sind die vertikalen Verschiebungen der rechten oberen Scheibenecke für verschiedene Elementgrößen  $h$  angetragen. Es ist deutlich erkennbar, dass die Verschiebungen mit  $h \rightarrow 0$  gegen unendlich tendieren und damit kündigt sich an, dass die Spreizung der linken oberen Ecke zu einer Absenkung  $-\infty$  der oberen rechten Ecke der Scheibe führt. Und das Ergebnis gilt dann für alle Punkte der Scheibe.

### 3.3 Anmerkungen zur Greenschen Funktion

Bei der Lösung statischer Probleme werden häufig, ohne dass es explizit ausgesprochen wird, Greensche Funktionen verwendet. Die Betrachtung der darstellbaren Einflussfunktion allein, kann Aufschluss über die Güte eines Verfahrens geben.

In diesem Abschnitt werden zwei Punkte, die Darstellung der Greenschen Funktion und die daraus resultierenden Rechenkosten, betrachtet.

#### 3.3.1 Unterschiedliche Darstellungen für die Berechnung einer Zielgröße

Zunächst einmal sollen unterschiedliche Formen zur Berechnung der gewählten Zielgröße unter Verwendung einer Greenschen Funktion vorgestellt werden. Das Ergebnis ist immer dasselbe, aber die Berechnungen unterscheiden sich in ihrem Aufwand.

Erinnert man sich an die Abschnitte 3.2.5 und 3.2.6, so gibt es drei Formeln, um die Spannung  $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$  in einem Punkt zu berechnen:

$$\sigma_{yy}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_L} \mathbf{G}_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad \text{kurz} \quad (3.120)$$

$$\sigma_{yy}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_1, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{G}_1) \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad \text{lang} \quad (3.121)$$

$$\sigma_{yy}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \delta_1(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad \text{kurz.} \quad (3.122)$$

Die Funktion  $\mathbf{G}_1$  ist das Verschiebungsfeld, welches durch eine Spreizung im Punkt  $\mathbf{x}$  erzeugt wird. Das Dirac Delta  $\delta_1$  stellt diese Spreizung als Lastterm dar.

Das erste Integral, Gl. (3.120), erstreckt sich nur über den belasteten Teil  $\Omega_L$  der Scheibe. Das zweite Integral, Gl. (3.121), muss durch Integration über ganz  $\Omega$  ausgewertet werden. Das Integral in Gl. (3.122) ist die kürzeste Variante: Es ist einfach die Auswertung der differenzierten Funktion  $\mathbf{u}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ .

Gl. (3.121) darf in dieser Liste nicht fehlen, sie hat aber keinen praktischen Nutzwert, denn man kann, wie in Abschnitt 3.2.5 gezeigt wurde, Spannungen nicht im naiven Sinne mit der Wechselwirkungsenergie berechnen. Das ginge nur, wenn man den Grenzprozess

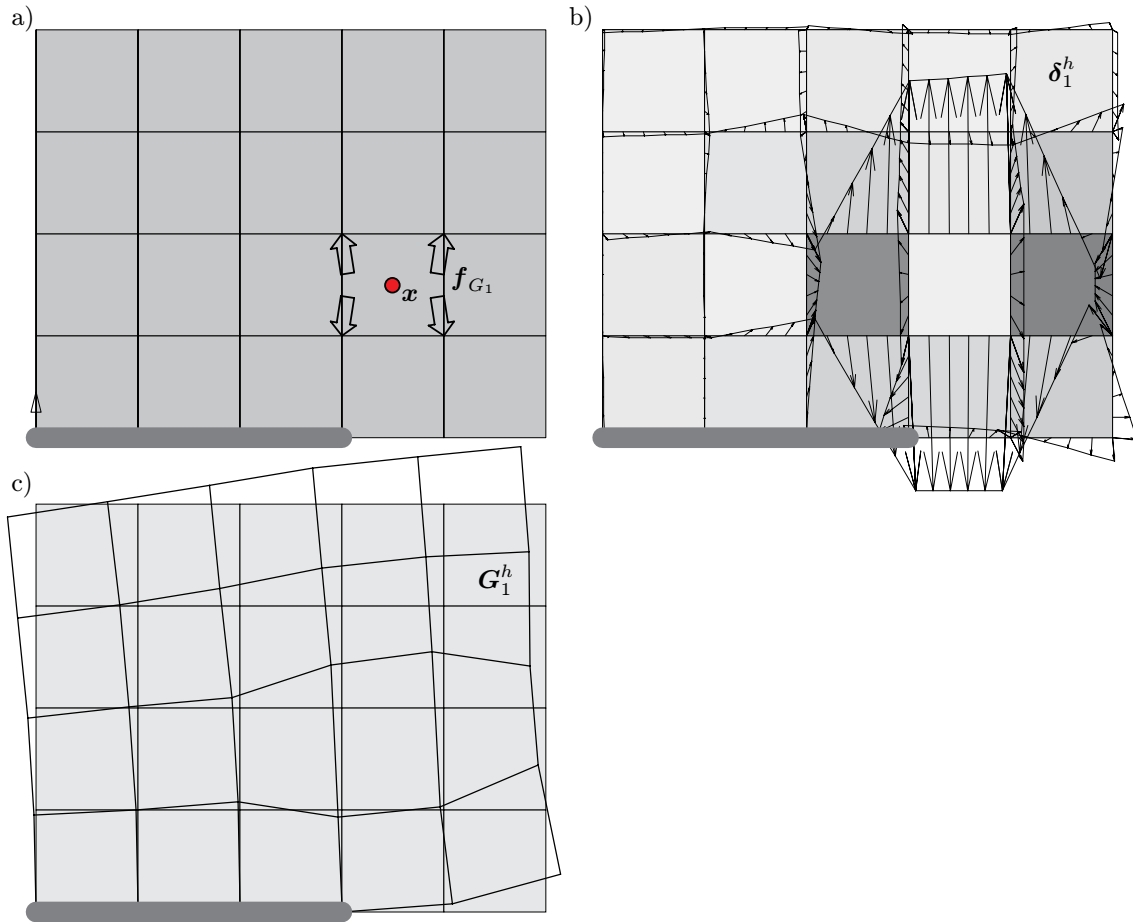
$$\sigma_{yy}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a(\mathbf{G}_1, \mathbf{u})_{\Omega_{\epsilon}} = \sigma_{yy}(\mathbf{x}) + 0 \quad (3.123)$$

rechentechisch begleitete. Dann würde aus  $a(\mathbf{G}_1, \mathbf{u})$  in der Grenze der Einzelterm  $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$  herauspringen und der Rest wäre null. Der Rest, die Null, ist sozusagen die eingehaltene Orthogonalitätsbedingung, die hier die Bedeutung von

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{N_{\epsilon}}} \sigma_{yy}(\mathbf{x} + \epsilon \rho) ds_{\mathbf{y}} = 0 \quad \rho = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad (3.124)$$

hat und somit die Stetigkeit der Spannung  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\mathbf{x}$  garantiert.

Die zweite Gleichung wurde trotzdem zitiert, weil ihre Anwendung bei den finiten Elementen durchaus einen Sinn macht, siehe Kapitel 3.2.5.



**Abb. 3.13:** Berechnung der Einflussfunktion für  $\sigma_{yy}$ : a) Äquivalente Knotenkräfte, b) FE-Lastfall  $\delta_1^h$  und c) FE-Lösung  $\mathbf{G}_1^h$ .

Die Gln. (3.120)–(3.122) lauten bei einer FE-Berechnung:

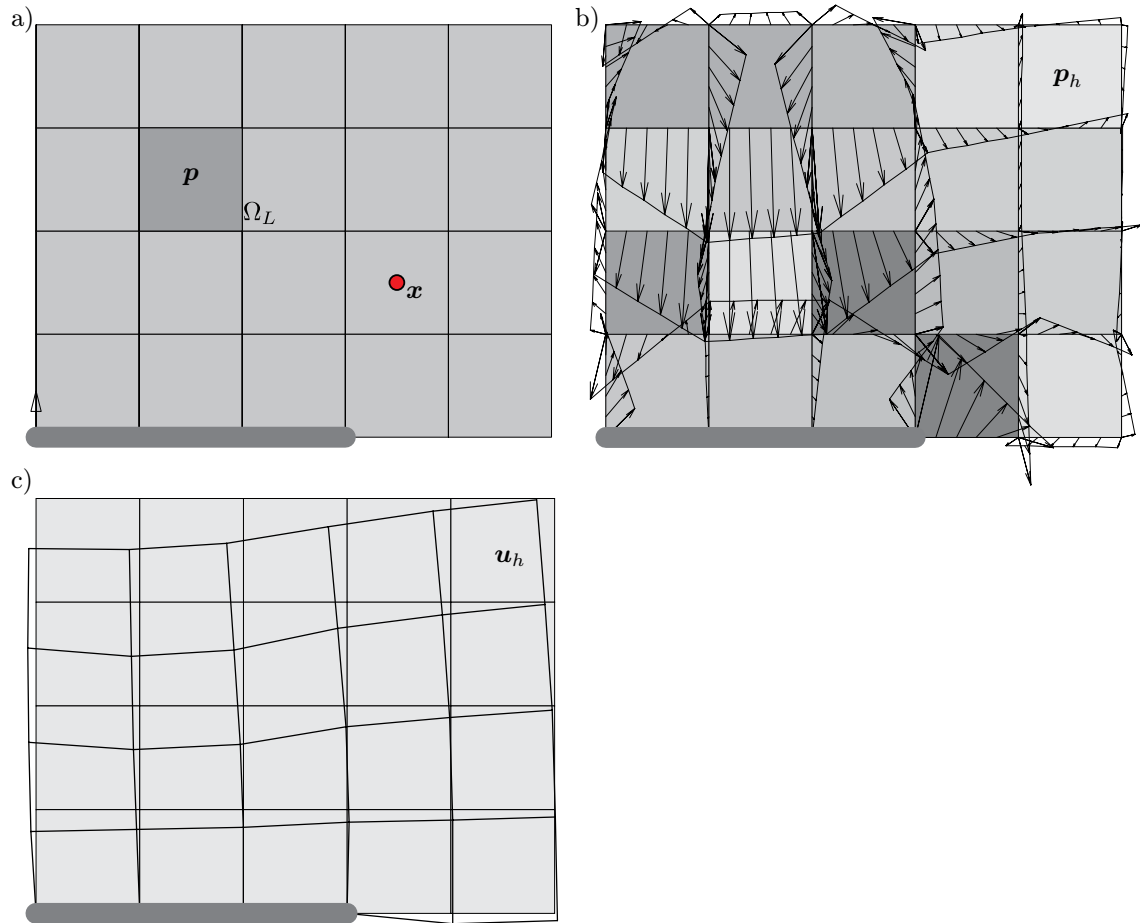
$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^h(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_L} \mathbf{G}_1^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_1^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_h(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} \\
 &= \int_{\Omega_L^+} \mathbf{G}_1^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}_h(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} = \mathbf{u}_G^T \mathbf{f} \quad (3.125)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy}^h(\mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_1^h, \mathbf{u}) = a(\mathbf{G}_1^h, \mathbf{u}_h) = \mathbf{u}_G^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^h(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \delta_1^h(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} \\
 &= \int_{\Omega_x^+} \delta_1^h(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_G^T \mathbf{u}. \quad (3.127)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\mathbf{G}_1^h$  die FE-Näherung für die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_1$ , siehe Abb. 3.13 c, und  $\delta_1^h$  sind die Kräfte im FE-Modell, siehe Abb. 3.13 b, die  $\delta_1$  annähern. Das Gebiet  $\Omega_L^+$  ist der Lastbereich  $\Omega_L$  plus einem daran angrenzenden schmalen Bereich, in dem die Ansatzfunktionen ausklingen, die ihren Träger in  $\Omega_L$  haben.

Im selben Sinn ist  $\Omega_x^+$  der patch von Elementen, deren Ansatzfunktionen den Aufpunkt  $\mathbf{x}$  *sehen*, d.h.  $\mathbf{x}$  gehört zu dem Träger der Ansatzfunktionen.

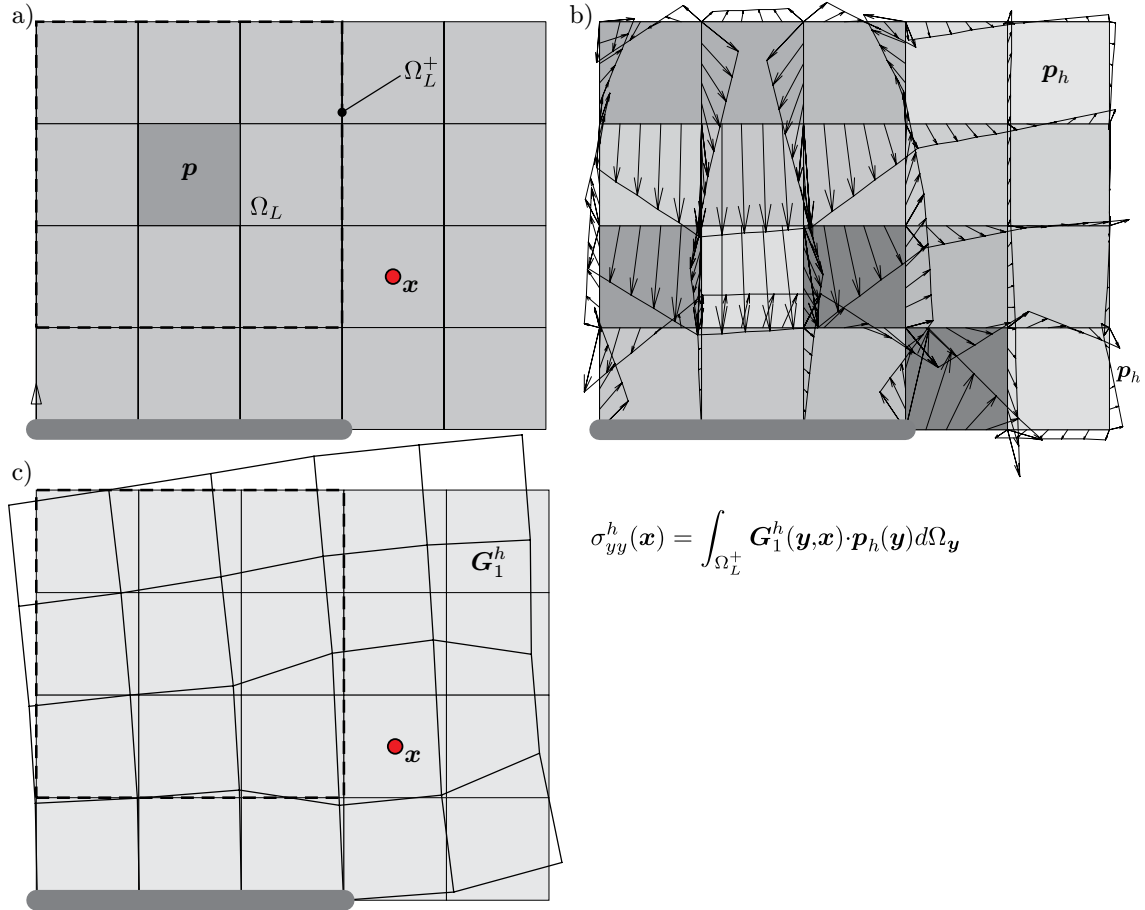


**Abb. 3.14:** Scheibe mit a) Teilflächenlast, b) FE-Lastfall  $\mathbf{p}_h$  und c) FE-Lösung.

Man beachte, dass die Kräfte  $\mathbf{p}_h$  auf der *ganzen* Scheibe wirken, siehe Abb. 3.14 b, dass bei der Überlagerung mit  $\mathbf{G}_1^h$ , Gl. (3.125), aber gleichwohl nur über den Bereich  $\Omega_L^+$  integriert wird, weil außerhalb dieses Bereiches die Ansatzfunktionen  $\varphi_i$  orthogonal zu den Kräften  $\mathbf{p}_h$  sind

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \varphi_i \, d\Omega = 0, \quad (3.128)$$

und damit natürlich auch zur genäherten Einflussfunktion  $\mathbf{G}_1^h$ , siehe Abb. 3.15. Diese Orthogonalität liegt in dem Projektionsansatz der finiten Elemente begründet.



**Abb. 3.15:** Die Auswertung geschieht nur durch Integration über  $\Omega_L^+$ , also die unmittelbare Umgebung von  $\Omega_L$ , dem Ort von  $\mathbf{p}$ , obwohl  $\mathbf{G}_1^h$  und  $\mathbf{p}_h$  auch außerhalb von  $\Omega_L$  präsent sind.

Die Koordinaten eines Vektors,  $x_i = \mathbf{v}^T \mathbf{e}_i$ , sind das Skalarprodukt zwischen  $\mathbf{v}$  und den Einheitsvektoren der Achsen oder, anders ausgedrückt, die Projektionen des Vektors auf die Achsen. In der FEM sind die äquivalenten Knotenkräfte

$$f_i = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega \quad (3.129)$$

die Koordinaten und die FEM wählt den Ersatzlastfall  $\mathbf{p}_h = -\mathbf{L} \mathbf{u}_h$  so, dass er dieselben Koordinaten hat

$$f_i = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_i d\Omega = f_i^h. \quad (3.130)$$

Für diese Metrik, die auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen basiert, ist all das nicht existent, was orthogonal zu den Ansatzfunktionen  $\varphi_i$  ist.

Dieses  $f_i = f_i^h$  sieht man am eindrucksvollsten am Beispiel der Greenschen Funktionen, bei denen  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\delta}_i$  auf einen Punkt, den Aufpunkt  $\mathbf{x}$ , beschränkt ist. Das FE-Dirac Delta  $\boldsymbol{\delta}_1^h$  hingegen ist eine Ansammlung von Elementkräften und Linienkräften, die sich über *ganz*  $\Omega$  erstreckt, siehe Abb. 3.13 b.

Weil aber  $f_i$  nur dann ungleich null ist, wenn der Träger der Ansatzfunktion  $\varphi_i$  den Aufpunkt  $\mathbf{x}$  enthält,

$$f_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_1(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \varphi_i(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \begin{cases} \sigma_{yy}(\varphi_i)(\mathbf{x}), & \varphi_i(\mathbf{y}) \cap \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset \\ 0, & \varphi_i(\mathbf{y}) \cap \{\mathbf{x}\} = \emptyset \end{cases} \quad (3.131)$$

sind es auch die  $f_i^h$ , wie sich aus der Galerkin-Orthogonalität

$$a(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_1^h, \varphi_i) = (\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_1^h, \varphi_i) = f_i - f_i^h = 0 \quad (3.132)$$

ergibt. Im Sinne der FE-Metrik sind die abliegenden Anteile von  $\boldsymbol{\delta}_1^h$  folglich nicht präsent.

### 3.3.2 Rechenkosten

Als zweites soll noch auf einen praktischen Aspekt der Greenschen Funktionen eingegangen werden.

Die FE-Lösung kann, wie bereits erwähnt, auf zwei Weisen dargestellt werden

$$u_h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}. \end{cases} \quad (3.133)$$

Beide Gleichungen kann man natürlich ineinander überführen

$$\mathbf{f}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{f}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{u}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}. \quad (3.134)$$

Wenn nur wenige Auswertungen vorzunehmen sind, etwa nur zwei Funktionale auszuwerten sind, aber gleichzeitig sehr viele Lastfälle, dann ist die zweite Formel

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{f} \quad (3.135)$$

günstiger, weil dann die Steifigkeitsmatrix nur zweimal invertiert werden muss, nämlich um die beiden Vektoren  $\mathbf{u}_G$  zu bestimmen. Während bei vielen Auswertungen aber nur wenigen Lastfällen wahrscheinlich die erste Formel

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_G^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3.136)$$

günstiger sein wird.

Auf jeden Fall zeigen die beiden Formulierungen, dass man geschickterweise eine Abwägung vor einer Berechnung trifft und dass es durchaus sinnvoll sein kann, direkt mit Greenschen Funktionen zu rechnen.

Nicht unerwähnt bleiben soll bei dieser Gelegenheit, dass in der Computeranimation bei der Darstellung von elastischen 3-D Körpern Greensche Funktionen eine große Rolle spielen, weil nur so in Echtzeit realistische Verformungsabläufe darstellbar sind, siehe [31]. Die Greenschen Funktionen sind bekanntlich die Spalten der inversen Steifigkeitsmatrix. Indem man direkt mit den Greenschen Funktionen arbeitet, umgeht man das aufwändige Matrizenprodukt  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ .

## 3.4 Abschätzung des Approximationsfehlers

Anhand der Eigenschaften des Lösungsgebietes  $\Omega$  und der Last  $\mathbf{p}$  kann man Aussagen über die Regularität der Lösung  $\mathbf{u}$  eines Randwertproblems machen, z.B. in welchem Sobolev-Raum  $H^{m+p}$  die Lösung liegt. Die Art und Güte der Ansatzfunktionen andererseits entscheidet über die Qualität der Interpolation auf dem Netz. Kombiniert man diese beiden Informationen, so kann man *a priori* Aussagen über das Konvergenzverhalten einer FE-Lösung treffen, ohne überhaupt gerechnet zu haben.

*A posteriori* Fehlerschätzer greifen auf die aktuellen Ergebnisse einer Berechnung zurück, um den Fehler in einer geeigneten Norm, z.B. der Energienorm, abzuschätzen. So wird es möglich, FE-Netze optimal an die geforderte Genauigkeit anzupassen.

Die *a posteriori* Fehlerschätzer werden weiter in explizite und implizite unterteilt. Die impliziten Fehlerschätzer benötigen noch einen weiteren Zwischenschritt, wo hingegen die expliziten Estimatoren direkt aus der berechneten FE-Lösung ermittelt werden.

### 3.4.1 Primaler und dualer Fehler

Es wird das Modellproblem der linearen Elastizitätstheorie, siehe Gl. (2.28) in Kapitel 2.2, mit zugehörigen Randbedingungen auf den Rändern  $\Gamma_N$  und  $\Gamma_D$  betrachtet. Die Ränder  $\Gamma_N$  (Kraftrandbedingungen) und  $\Gamma_D$  (Wegrandbedingungen) ergeben zusammen die Berandung  $\Gamma$  des betrachteten Gebietes  $\Omega$ ; die Wegrandbedingungen seien homogen. Die Lösung  $\mathbf{u}$  liege in  $\mathbf{H}^1 = H^1 \times H^1$  (2-D Problem) und

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) | \mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_D\} \quad (3.137)$$

sei die Menge der zulässigen Testfunktionen. Die schwache Form des Gleichgewichts lautet bekanntlich

Finde eine Lösung  $\mathbf{u} \in V$  so, dass

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.138)$$

Konstruiert man nun eine Teilmenge  $V_h \subset V$  des Lösungsraumes und sucht eine Näherung der Variationslösung auf  $V_h$ , so führt das Variationsproblem auf die Bestimmungsgleichung

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (3.139)$$

für die FE-Lösung  $\mathbf{u}_h \in V_h$ .

In demselben Sinne sei  $J(\mathbf{u})$  ein lineares Funktional auf  $V$  mit zugehöriger Greenscher Funktion  $\mathbf{z}$ , die man auf  $V_h$  durch eine Funktion  $\mathbf{z}_h$  approximiert

$$a(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h) = J(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.140)$$

Als den primalen und den dualen Fehler

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \quad \text{und} \quad \mathbf{e}^* = \mathbf{z} - \mathbf{z}_h \quad (3.141)$$

bezeichnet man den Fehler in der Lösung  $\mathbf{u}$  bzw. in der Greenschen Funktion  $\mathbf{z}$ .

Aus der schwachen Form folgt für den Fehler

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in V \quad (3.142)$$

bzw.

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = J(\mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{z}_h). \quad (3.143)$$

Das erste Funktional, Gl. (3.142),

$$\rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{v}) \quad (3.144)$$

heißt das *primale Residuum* und das zweite Funktional, Gl. (3.143),

$$\rho^*(\mathbf{z}_h)(\cdot) = J(\cdot) - a(\mathbf{z}_h, \cdot) = J(\cdot) - J_h(\cdot) \quad (3.145)$$

das *duale Residuum*. Beide Funktionale nehmen Argumente  $(\cdot)$  aus  $V$ .

Das primale Residuum nach Gl. (3.144) ist die Arbeit der Fehlerkräfte  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$  auf dem Argument  $\mathbf{v}$  (den Wegen  $\mathbf{v}$ ).

Das duale Residuum

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{z}_h)(\mathbf{v}) &= J(\mathbf{v}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{z}_h) = \\ &= (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{z}) - (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{z}_h) = (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{e}^*) \end{aligned} \quad (3.146)$$



ist die Arbeit, die die Kräfte  $-\mathbf{L}\mathbf{v}$  des Arguments  $\mathbf{v}$  auf dem Fehler  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$  in der Greenschen Funktion leisten. Die Näherung  $\mathbf{z}_h$  misst an  $-\mathbf{L}\mathbf{v}$  etwas anderes als das wahre  $\mathbf{z}$

$$\rho^*(\mathbf{z}_h)(\mathbf{v}) = (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{z}) - (-\mathbf{L}\mathbf{v}, \mathbf{z}_h). \quad (3.147)$$

Für Funktionen  $\mathbf{v}_h \in V_h$  ist das primale Residuum null:

$$\rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = 0. \quad (3.148)$$

Das ist die Galerkin-Orthogonalität.

Insbesondere nimmt das primale Residuum an der Stelle  $\mathbf{z}$  den Wert  $J(\mathbf{e})$  an

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z}) = J(\mathbf{e}). \quad (3.149)$$

Man kann von  $\mathbf{z}$  noch beliebige Funktionen  $\boldsymbol{\psi}_h \in V_h$  abziehen, ohne am Wert etwas zu ändern,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) = J(\mathbf{e}), \quad (3.150)$$

denn

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \boldsymbol{\psi}_h) &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}) = J(\mathbf{e}). \end{aligned}$$

Ebenso nimmt das duale Residuum an der Stelle  $\mathbf{u}$  den Wert  $J(\mathbf{e})$  an, denn

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{z}_h)(\mathbf{u}) &= (\mathbf{p}, \mathbf{e}^*) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) - (\mathbf{p}, \mathbf{z}_h) \\ &= J(\mathbf{u}) - J_h(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = J(\mathbf{e}). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Das gilt auch noch für jedes  $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}_h$  mit  $\boldsymbol{\varphi}_h \in V_h$

$$a(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{z}) - a(\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{z}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \quad (3.152)$$

Zusammenfassend lässt sich sagen:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z}) = J(\mathbf{e}) = \rho^*(\mathbf{z}_h)(\mathbf{u}) = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_h, \mathbf{p}). \quad (3.153)$$

Oder in Worten: Fehler in  $\mathbf{p} \times \mathbf{z} =$  Fehler in  $\mathbf{z} \times \mathbf{p}$ . Diese Symmetrie gilt nur im linearen Fall.

### 3.4.2 Fehlerschätzer

Die Differentialgleichung für den Fehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  lautet in der schwachen Form

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.154)$$

was, wenn man für die virtuelle innere Energie der FE-Lösung die virtuelle äußere Arbeit setzt

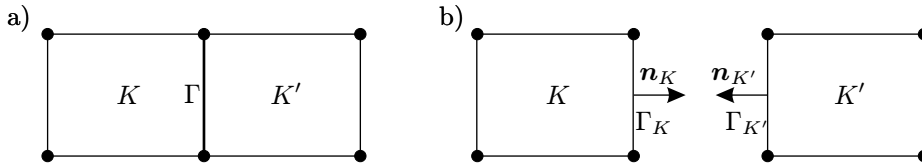
$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}_h, \mathbf{v}), \quad (3.155)$$

gleichbedeutend ist mit

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{v}). \quad (3.156)$$

Die Differenz der rechten Seiten,  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ , steht hier symbolisch für das Residuum im Gebiet (in den Elementen),  $-\mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \mathbf{p} - \mathbf{p}_h = \mathbf{r}$ , bzw. die Sprungterme auf den Elementgrenzen, siehe Abb. 3.16

$$\mathbf{j} := \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_h), & \text{auf } \Gamma_K \setminus \partial\Omega, \\ (\mathbf{t} - \mathbf{t}_h), & \text{auf } \Gamma_K \cap \Gamma_N, \\ \mathbf{0}, & \text{auf } \Gamma_K \cap \Gamma_D. \end{cases} \quad (3.157)$$



**Abb. 3.16:** a) Zwei Elemente  $K$  und  $K'$  mit einer gemeinsamen Kante  $\Gamma$ . b) Die Normalenvektoren an einer gemeinsamen Kante  $\Gamma$  zweier Elemente mit den Elementkanten  $\Gamma_K$  bzw.  $\Gamma_{K'}$ .

Gl. (3.154) ist daher äquivalent mit der Summe über alle Elementbeiträge (Elemente  $K$  des Netzes  $P$ ) zu der virtuellen äußeren Arbeit

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in P} \left\{ \int_{\Omega_K} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_K} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \, ds \right\}. \quad (3.158)$$

Nach einigen Zwischenschritten (Verwendung der Galerkin-Orthogonalität und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung) erhält man so eine Abschätzung für den Fehler  $\mathbf{e}$  in der Energienorm:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq C \left\{ \sum_{K \in P} h_K^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2}^2 + \sum_{\gamma \in \partial P} h_K \|\mathbf{j}\|_{L_2}^2 \right\}. \quad (3.159)$$

Alle Ausdrücke in dieser Gleichung, mit Ausnahme der Konstanten  $C$ , sind aus der FE-Berechnung bestimmbar. Die Konstante  $C$  hängt von der Güte der Interpolation

auf  $V_h$  ab. In der Literatur gibt es unterschiedliche Ansätze, um  $C$  abzuschätzen, siehe z.B. [5] oder [33].

Das duale Residuum im Punkt  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\rho^*(\mathbf{z}_h)(\mathbf{u}) &= (\mathbf{p}, \mathbf{e}^*) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) - (\mathbf{p}, \mathbf{z}_h) \\ &= J(\mathbf{u}) - J_h(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = J(\mathbf{e})\end{aligned}\quad (3.160)$$

ist gleich der Differenz  $J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h)$ , d.h. dem Unterschied in der Zielgröße zwischen der exakten Lösung und der FE-Lösung. Es ist der Fehler, welcher den Ingenieur vor allem interessiert.

Wechselt man wieder zur klassischen Darstellung mit  $\mathbf{z} = \mathbf{G}$ , so beruht der Fehler im Funktional auf dem Fehler in der Greenschen Funktion

$$J(\mathbf{e}) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} [\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.161)$$

Wegen der Galerkin-Orthogonalität kann diese Gleichung um  $\mathbf{p}_h$  erweitert werden und lautet

$$J(\mathbf{e}) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h). \quad (3.162)$$

Der Fehler kann mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung direkt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}|J(\mathbf{e})| &= |u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x})| = |a(\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)| \\ &\leq \|\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h\|_E \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E.\end{aligned}\quad (3.163)$$

Die obere Schranke für  $|J(\mathbf{e})|$  ist folglich das Produkt aus dem Fehler in der Greenschen Funktion und dem Fehler aus der FE-Lösung, beide Fehler gemessen in der Energienorm.

Seien  $\eta_p^e$  und  $\eta_G^e$  Fehlerschätzer im Element  $\Omega_e$  für den primalen bzw. den dualen Fehler, dann kommt man so zur Abschätzung

$$|J(\mathbf{e})| = |u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x})| \leq \sum_e \eta_G^e \cdot \eta_p^e, \quad (3.164)$$

auf der die zielorientierten adaptiven Verfahren beruhen.

### 3.4.3 Eine Analyse des zielorientierten Fehlerschätzers

Anscheinend beruht der Fehler

$$J(\mathbf{e}) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_p} [\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.165)$$

doch nur auf dem dualen Fehler  $\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h$ , der Differenz zwischen  $\mathbf{G}_0$  und  $\mathbf{G}_0^h$  im Bereich der Last. Warum erscheint dann in der obigen Abschätzung in Gl. (3.163) auch der primale Fehler  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ ?

Die Bemerkung, dass der Fehler nur von  $\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h$  abhängt, stimmt natürlich nicht ganz, denn eine einfache Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ( $L_2$ -Skalarprodukt)

$$|J(\mathbf{e})| \leq \|\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h\|_0 \cdot \|\mathbf{p}\|_0 \quad (3.166)$$

macht deutlich, dass der Fehler auch von der Norm der Belastung abhängt. Die  $L_2$ -Norm der Belastung aber ist an die Energienorm der Lösung  $\mathbf{u}$  gekoppelt und wegen der Galerkin-Orthogonalität kann man in der obigen Gleichungen  $\mathbf{p}$  durch  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$  ersetzen. So kommt es alternativ zu dem  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E$  in der Abschätzung in Gl. (3.163). Dies soll im Folgenden im Detail gezeigt werden.

Zunächst kann man Gl. (3.165) wegen der Galerkin-Orthogonalität um  $\mathbf{p}_h$  erweitern,

$$J(\mathbf{e}) = \int_{\Omega} [\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot [\mathbf{p}(\mathbf{y}) - \mathbf{p}_h(\mathbf{y})] d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.167)$$

Dann sei angenommen, dass die Last  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ , was gleichbedeutend mit  $-\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{u}_h$  ist, auf  $V$  ein lineares und stetiges Funktional darstellt. Für jedes  $\mathbf{v} \in V$  ist das Integral

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_h) \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (3.168)$$

stetig und beschränkt,

$$|(\mathbf{p} - \mathbf{p}_h, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_* \|\mathbf{v}\|_E \quad (3.169)$$

wobei  $\|\cdot\|_E$  die Energienorm auf  $V$  ist und  $\|\cdot\|_*$  die Norm auf dem Dualraum  $V^*$  (der Menge aller linearen und stetigen Funktionale auf  $V$ ) ist. Da  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  die Lösung des Randwertproblems zur rechten Seite  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$  ist, d.h. es gilt  $-\mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ , ist die Energienorm von  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  gleich der Norm von  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ , siehe z.B. [30],

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_* = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E. \quad (3.170)$$

Setzt man jetzt noch  $\mathbf{v} = \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h$ , so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |J(\mathbf{e})| &= \left| \int_{\Omega} [\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot [\mathbf{p}(\mathbf{y}) - \mathbf{p}_h(\mathbf{y})] d\Omega_{\mathbf{y}} \right| \\ &\leq \|\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0^h\|_E \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E, \end{aligned} \quad (3.171)$$

was genau dasselbe Ergebnis wie in Gl. (3.163) ist. Der primale Fehler kommt über die Last  $\mathbf{p}$  in die Abschätzung hinein.

### Der primale Fehler

Bei der globalen adaptiven Verfeinerung ist der primale Fehler das einzige Maß, das die Verfeinerung steuert

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \sum_e \eta_p^e. \quad (3.172)$$

Man kann zeigen, dass durch die klassische adaptive Verfeinerung der mittlere Fehler

$$\bar{J}(\mathbf{e}) = \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) d\Omega, \quad (3.173)$$

zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}_h$  im Bereich der Last kleiner gemacht wird.

Um die Darstellung zu vereinfachen, wird eine skalarwertige Lösung  $u$  betrachtet. Der Mittelwert von  $u$  im Bereich  $\Omega_p$  der Last ist das Funktional

$$\bar{J}(u) = \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{\Omega_p} u d\Omega. \quad (3.174)$$

Die Greensche Funktion für  $\bar{J}(u)$  ist die Lösung  $\bar{u}$ , wenn  $\Omega_p$  mit der Kraft  $\bar{p} = 1/|\Omega_p|$  belastet wird. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass die Belastung  $p$ , die mit dem FE-Programm analysiert wird, eine Gleichlast ist. Dann implizieren die beiden Gleichungen

$$-L u = p \quad \text{und} \quad -L \bar{u} = \frac{1}{|\Omega_p|}, \quad (3.175)$$

dass  $u$  bis auf ein Vielfaches mit  $\bar{u}$  identisch ist

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega_p|} \frac{1}{p} u. \quad (3.176)$$

Es wirke nun die Last  $\tilde{p}$  auf das Tragwerk und  $\tilde{v}$  sei die zugehörige Lösung,  $-L \tilde{v} = \tilde{p}$ , dann ist der Mittelwert von  $\tilde{v}$  im Gebiet  $\Omega_p$

$$\tilde{v}_{\text{Mittel}} = \int_{\Omega_p} \bar{u}(\mathbf{x}) \tilde{p}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega_p|} \frac{1}{p} \int_{\Omega_p} u(\mathbf{x}) \tilde{p}(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.177)$$

1. *Bemerkung:* Dieses Argument kann man natürlich auch auf Linienlasten  $l$  und Punktlasten  $P$  anwenden. Die Lösungen

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_L} G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) l(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{und} \quad u(\mathbf{x}) = G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) P \quad (3.178)$$

sind, bis auf den Faktor  $|l|^{-1}|\Gamma_L|^{-1}$  bzw.  $|P|^{-1}$ , die Einflussfunktion für den Mittelwert der Lösungen in dem Bereich, in dem die Last angreift. Im Falle einer Punktlast schrumpft  $\Omega_p$  auf einen Punkt zusammen

$$\lim_{|\Omega_p| \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{\Omega_p} 1 d\Omega = 1 \quad (3.179)$$

und der Mittelwert ist die Verschiebung im Punkt.

2. *Bemerkung:* Mit der Verringerung von  $\eta_p$  wird nicht nur der mittlere Fehler von  $u_h$  reduziert, sondern natürlich auch der mittlere Fehler der Greenschen Funktion des Funktionals  $J(\cdot)$ , denn auch  $G_0$  ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$(G_0 - G_0^h)_{\text{Mittel}} = \frac{1}{|\Omega_p|} \int_{\Omega} (G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})) d\Omega_{\mathbf{y}}. \quad (3.180)$$

Somit wird automatisch der Fehler

$$J(e) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_p} [G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x})] p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (3.181)$$

reduziert.

Dies sieht man auch wie folgt: Es sei  $\mathbf{y}_a \in \Omega_p$  der Punkt, an dem die Funktion  $G_0 - G_0^h$  ihren Mittelwert annimmt. Eine Taylor-Entwicklung um diesen Punkt ergibt

$$F(\mathbf{y}) := G_0 - G_0^h = F(\mathbf{y}_a) + \nabla F(\mathbf{y}_a) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_a) + \dots \quad (3.182)$$

und damit

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_p} [F(\mathbf{y}_a) + \nabla F(\mathbf{y}_a) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_a) + \dots] p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \\ &= F(\mathbf{y}_a) \int_{\Omega_p} p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} + \nabla F(\mathbf{y}_a) \int_{\Omega_p} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_a) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} + \dots \end{aligned} \quad (3.183)$$

was impliziert, dass der größte Beitrag zu dem Fehler, wenn der Gradient  $\nabla F$  nicht zu groß ist, von dem Term  $F(\mathbf{y}_a)$  kommt, dem führenden Term in dem Fehler  $G_0 - G_0^h$  auf  $\Omega_p$ . Indem  $\|u - u_h\|$  kleiner gemacht wird, wird automatisch auch  $|F(\mathbf{y}_a)|$  kleiner.

### 3.4.4 Zielorientierte Fehlerschätzer für nichtlineare Probleme

Der Begriff des Funktionals und der schwachen Lösung führt, wie bereits erwähnt, zum Begriff der verallgemeinerten Greenschen Funktion  $\mathbf{z}$  mit der Bestimmungsgleichung

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.184)$$

Die Aufgabe,  $J(\mathbf{u})$  unter der Nebenbedingung  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$  auszuwerten, bedeutet andererseits im Kalkül der Lagrange Multiplikatoren einen stationären Punkt des Funktionals

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}) - (a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - (\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (3.185)$$

zu finden. Es zeigt sich, dass  $\boldsymbol{\lambda}$  identisch ist mit der verallgemeinerten Greenschen Funktion  $\boldsymbol{z}$ , siehe Kapitel 2.3.4.

Um den Fehler  $J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}_h)$  abzuschätzen, wird  $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}\}$  und  $\boldsymbol{x}_h = \{\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h\}$  gesetzt. Man bemerkt, dass

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{x}_h) = J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u}_h). \quad (3.186)$$

Indem man nun die linke Seite in eine Taylorreihe entwickelt, kann man den Fehler auf der rechten Seite abschätzen. Das ist die zentrale Idee. Wie das möglich ist, soll im Folgenden in Anlehnung an [8] gezeigt werden.

Es sei  $a(\cdot; \cdot)$  eine Semilinearform, d.h. sie ist im ersten Argument nichtlinear und im zweiten linear. Gesucht ist die Lösung  $\boldsymbol{u}$  des nichtlinearen Variationsproblems

$$A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) := a(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \quad (3.187)$$

Die zugehörige Galerkin-Approximation auf dem Unterraum  $V_h$  lautet dann

$$A(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h) := a(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h \subset V. \quad (3.188)$$

Das Ziel ist,  $J(\boldsymbol{u})$  unter Beachtung der Gl. (3.187) zu bestimmen. Dazu wird die duale Variable  $\boldsymbol{z}$  als Lagrange Multiplikator eingeführt und das Lagrange Funktional  $\mathcal{L}$  gebildet

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) := J(\boldsymbol{u}) - A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{z}). \quad (3.189)$$

Die Gateaux-Ableitungen der Funktionale nach  $\boldsymbol{u}$  lauten

$$J'_u(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} [J(\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\varphi})] \right|_{\epsilon=0} \quad (3.190)$$

und

$$A'_u(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{z}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} [A(\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{z})] \right|_{\epsilon=0}, \quad (3.191)$$

während die Ableitung nach  $\boldsymbol{z}$

$$A'_z(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) := \left. \frac{d}{d\eta} [A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{z} + \eta \boldsymbol{v})] \right|_{\eta=0} = A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}), \quad (3.192)$$

wegen der Linearität im zweiten Argument von  $A(\cdot; \cdot)$  identisch mit  $A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})$  ist, wie im linearen Fall.

Damit lauten die Variationsgleichungen für das primale bzw. duale Problem

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}) := \left\{ \begin{array}{l} J'_u(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}) - A'_u(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{z}) \\ -A(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}, \forall \boldsymbol{v}. \quad (3.193)$$

Auf gleiche Weise lässt sich das Lagrange Funktional  $\mathcal{L}$  für die Galerkin-Approximation  $\{\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h\} \in V_h \times V_h$  aufstellen, das dann auf die beiden Variationsgleichungen

$$\mathcal{L}'(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{v}_h) := \left\{ \begin{array}{l} J'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_h) - A'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{z}_h) \\ -A(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h, \forall \mathbf{v}_h \quad (3.194)$$

führt.

Die Gleichungen  $-A(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0$  und  $-A(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = 0$  liefern die Lösungen  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{u}_h$ . Sie sind identisch mit den Variationsformulierungen in den Gln. (3.187) bzw. (3.188). Die Gleichung  $J'_{\mathbf{u}}(\cdot; \cdot) - A'_{\mathbf{u}}(\cdot; \cdot, \cdot) = 0$  ist das Variationsproblem für die duale Lösung.

Die Berechnung des Fehlers in der Zielgröße macht von der Fehlerdarstellung

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) &= \mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{z}) - \mathcal{L}(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h) =: \mathcal{L}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_h) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}'(\mathbf{x}_h)(\mathbf{x} - \mathbf{y}_h) + \mathfrak{R}_h^{(3)} \end{aligned} \quad (3.195)$$

Gebrauch, siehe [8]. Sie setzt

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) := \mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{z}) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}_h) := \mathcal{L}(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h), \quad \mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{z}\} \quad \mathbf{x}_h = \{\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h\} \quad (3.196)$$

und entwickelt dann die Differenz in eine Taylorreihe mit einem Restglied  $\mathfrak{R}_h^{(3)}$ , das kubisch im primalen  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  und im dualen Fehler  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$  ist.

Das  $\mathcal{L}'(\mathbf{x}_h)(\mathbf{x} - \mathbf{y}_h)$  ist das Gateaux Differential von  $\mathcal{L}$  an der Stelle  $\mathbf{x}_h$  in Richtung von  $\mathbf{x} - \mathbf{y}_h$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\mathbf{x}_h)(\mathbf{x} - \mathbf{y}_h) &= \mathcal{L}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathcal{L}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) \\ &= J'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - A'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) - A(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) \\ &= \rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \end{aligned} \quad (3.197)$$

Das ist gerade die Summe aus dem dualen Residuum und dem primalen Residuum, die aber im nichtlinearen Fall nicht mehr gleich groß sind. Die Abweichung

$$\rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \Delta\rho \quad (3.198)$$

ist wegen, ( $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{e}^* = \mathbf{z} - \mathbf{z}_h$ ),

$$\Delta\rho = \int_0^1 \{A''(\mathbf{u}_h + s\mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{z}_h + s\mathbf{e}^*) - J''(\mathbf{u}_h + s\mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e})\} ds \quad (3.199)$$

von zweiter Ordnung klein, siehe [8]. Dadurch ist die Näherung

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = \rho(\mathbf{u}_h)(\mathbf{z} - \mathbf{u}_h) + \mathfrak{R}_h^{(2)} \quad (3.200)$$

oder ausgeschrieben

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = a(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{u}_h) - (\mathbf{p}, \mathbf{z} - \mathbf{u}_h) + \mathfrak{R}_h^{(2)} \quad (3.201)$$

mit einem in  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{e}^*$  quadratischen Fehlerterm  $\mathfrak{R}_h^{(2)}$  gerechtfertigt.



### Nichtlineare Funktionale

In der obigen Formulierung kann das Funktional  $J(\cdot)$  auch nichtlinear sein. Im Folgenden soll ein Beispiel dafür zitiert werden.

In der diskreten Form lautet die Variationsgleichung

$$A'_u(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_h, \mathbf{z}_h) = J'_u(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in V_h. \quad (3.202)$$

Dabei entspricht  $A'()$  der in Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Tangentenform  $a_T()$ . Schreibt man Gl. (3.202) für alle Ansatz- und Testfunktionen  $\boldsymbol{\varphi}_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  an, so entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h) \mathbf{z} = \mathbf{j}_u \quad (3.203)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{j}_u$ , dessen Komponenten

$$J'(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.204)$$

die Gateaux-Ableitungen von  $J(\mathbf{u}_h)$  in Richtung von  $\boldsymbol{\varphi}_i$  sind.

Ein solches nichtlineares Funktional ist zum Beispiel im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie die Spannung in einem Punkt  $\mathbf{x}$

$$J(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}). \quad (3.205)$$

Die Gateaux-Ableitung dieses Funktionals lautet

$$J'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := \left. \frac{d}{d\epsilon} [J(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v})] \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} [\sigma_{ij}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v})] \right|_{\epsilon=0} \quad (3.206)$$

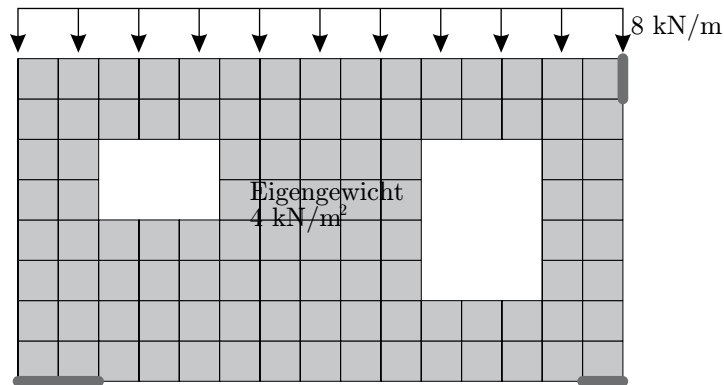
oder mit  $\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]$ ,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{S}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v})] \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{C} \left. \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{E}(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v})] \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_u(\mathbf{v})] =: \hat{\mathbf{S}} \quad (3.207)$$

wobei  $\mathbf{E}_u(\mathbf{v})$  die Gateaux-Ableitung des *Green-Lagrange*'schen Verzerrungstensors ist. Daher sind die äquivalenten Knotenkräfte

$$j_k = J'(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\varphi}_k) = \hat{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}_k)(\mathbf{x}) \quad (3.208)$$

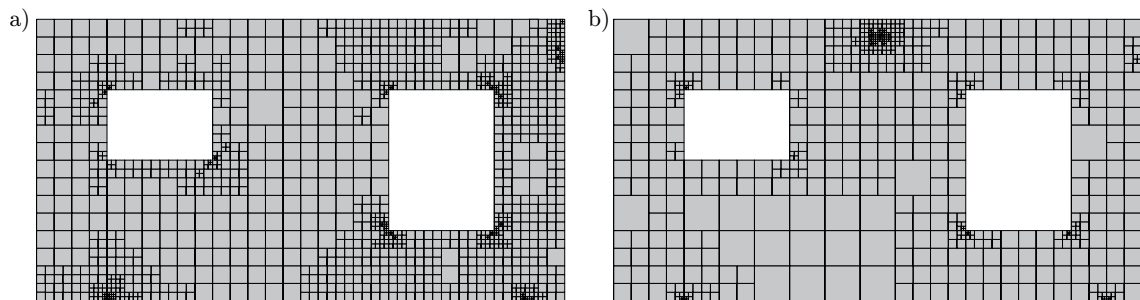
die Komponenten  $\hat{\sigma}_{ij}$  des tangentialen Spannungstensors  $\mathbf{C}[\mathbf{E}_{u_h}(\boldsymbol{\varphi}_k)]$ , was den Spannungen im aktuellen Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{u}_h$ , die aus dem Feld  $\boldsymbol{\varphi}_k$  resultieren, entspricht.



**Abb. 3.17:** Ausgangsnetz der Scheibe für die adaptive Netzverfeinerung.  $t = 0,20 \text{ m}$ ,  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ , Abmessungen  $15 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ .

### 3.4.5 Beispiele für eine h-Adaption

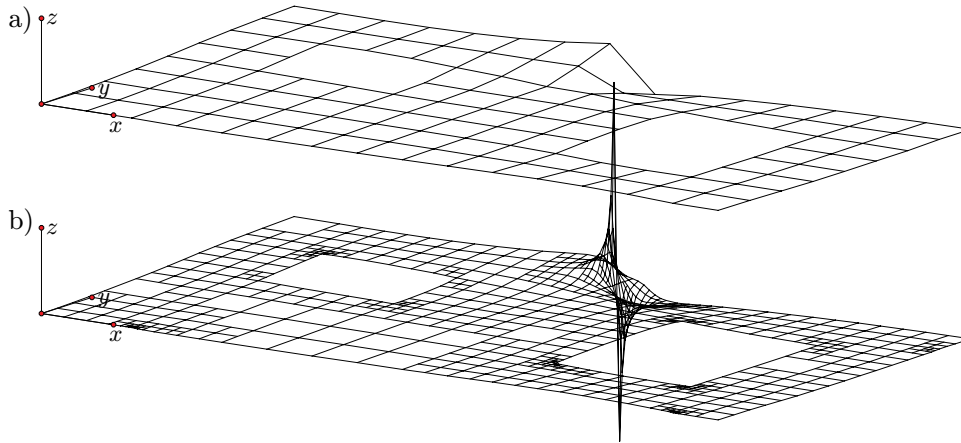
Um die Unterschiede zwischen globalen und zielorientierten Fehlerschätzern für die adaptive Netzverfeinerung deutlich zu machen, dient das in Abb. 3.17 dargestellte Scheibentragwerk. Es wurde ein System gewählt, bei dem an unterschiedlichen Stellen Singularitäten auftreten; an den Ecken der Öffnungen und an den Sprüngen in den Lagerungsbedingungen. Belastet ist die Scheibe mit einer Gleichstreckenlast am oberen Rand und mit Eigengewicht. Die Randbedingungen sind Abb. 3.17 zu entnehmen.



**Abb. 3.18:** Dargestellt sind die Ergebnisse einer adaptiven Netzverfeinerung unter Verwendung verschiedener Fehlerschätzer. a) Globaler Fehlerschätzer nach Babuška-Rheinbold-Miller und b) ein zielorientierter Fehlerschätzer nach Johnson-Hansbo.

Die Literatur, z.B. [5], [33], [37] oder [38], liefert eine ganze Reihe unterschiedlicher Fehlerestimatoren zur adaptiven Netzverfeinerung. Um auf einfache Weise die Unterschiede zwischen globalen und lokalen Fehlerschätzern aufzuzeigen, wurden zwei verschiedene Estimatoren für die Netzanpassung verwendet. Als Einstellungen wurden vier Adaptionstufen vorgegeben und es sollten die ersten 30% der Elemente verfeinert werden.

In Abb. 3.18 a ist das Ergebnis für den globalen Fehlerestimator dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass an den singulären Punkten das Netz stark verfeinert wurde, da an diesen Stellen der Beitrag zum globalen Fehler am größten ist.



**Abb. 3.19:** a) Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  am Punkt  $(7,5/7,5)$  auf dem Ausgangsnetz, b) gleiche Einflussfunktion wie unter a, allerdings auf dem mit einem zielorientierten Fehlerschätzer verfeinerten Netz.

In Abb. 3.18 b ist zum Vergleich ein mit einem zielorientierten Fehlerschätzer generiertes Netz dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Fokus der Netzverdichtung im Bereich der Zielgröße liegt. Zwar wird im Bereich der singulären Punkte ebenfalls das Netz verfeinert, aber bei weitem nicht in dem Maße, wie es bei einem globalen Fehlerestimator der Fall ist.

Mit Abb. 3.19 wird deutlich gemacht, worin der Vorteil der zielorientierten Adaptionsmethoden liegt. Mit beiden Netzen wurde versucht, die Einflussfunktion für die Spannung  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $x = 7,5\text{m}$ ,  $y = 7,5\text{m}$  zu berechnen. Um beide Einflussfunktionen vergleichen zu können, wurde die gleiche Skalierung gewählt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Greensche Funktion vom adaptiv verfeinerten Netz, gerade im Bereich der Singularität, deutlich besser approximiert werden kann als vom Ausgangsnetz. Dieses Netz ist ein *Spezialist* für die Zielgröße, während die mit einem globalen Fehlerschätzer erzeugten Netze als *Generalisten* bezeichnet werden. Beim Vergleich der beiden Einflussfunktionen in Abb. 3.19 zeigt sich, dass die Singularität nur in einem eng begrenzten Gebiet auftritt und schnell wieder abklingt.



## 4 Finite Elemente Technik mit Grundlösungen

Bei der klassischen adaptiven Verfeinerung ist es das Ziel, das Netz lokal so anzupassen, dass jedes Element den gleichen Beitrag zum Gesamtfehler liefert. Geht es darum, gezielt einen einzelnen Wert möglichst gut anzunähern, dann muss das Netz so aufbereitet werden, dass die Greensche Funktion des zugehörigen Funktionals möglichst exakt dargestellt werden kann. Das ist eine logische Konsequenz der zielorientierten FE-Methoden.

In diesem Zusammenhang liegt es nahe, die Aufspaltung der Greenschen Funktionen  $G_i$  in Grundlösungen  $g_i$  und reguläre Anteile  $w_R$

$$G_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = g_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + w_R(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (4.1)$$

auch auf der numerischen Seite vorzunehmen. Dies führt auf das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren.

### 4.1 Die GFD-Methode

Wegen der direkten Abhängigkeit der FE-Ergebnisse von den Greenschen Funktionen liegt es nahe, eine möglichst einfache und effiziente Methode zu suchen, um die in der FE-Technik verwendete Greensche Funktion zu verbessern. Der Problembereich der Einflussfunktion ist eigentlich nicht das ganze Gebiet  $\Omega$ , sondern der Nahbereich des Aufpunktes. An dieser Stelle ist eine Singularität vorhanden, welche mit den normalen Ansätzen der FEM nur schlecht dargestellt werden kann.

Bei dem in [22] und [24] mit GFD-Methode (engl.: *Green's Function Decomposition*) bezeichneten Verfahren für die Scheibe, wird die Greensche Funktion in einen unbekanntem regulären Anteil  $w_R$  und eine bekannte Grundlösung  $g$  aufgespalten. Dies hat den Vorteil, dass mit den polynomialen Ansätzen der FEM nur der relativ reguläre Anteil der Greenschen Funktion approximiert werden muss. Im Folgenden wird diese Technik für die Platte hergeleitet.

### 4.1.1 Das Modellproblem – Kirchhoff-Platte

Das Modellproblem ist eine Kirchhoff-Platte  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  mit hinreichend regulärem Rand (Ecken sind erlaubt)  $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_H + \Gamma_N$ . Die Biegefläche ist die Lösung  $w(\boldsymbol{x}) = w(x, y)$  der elliptischen Bipotentialgleichung

$$K(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) = K\Delta\Delta w = p \quad \text{mit} \quad K = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4.2)$$

wobei die Flächenlast  $p$  aus  $L_2(\Omega)$  sei. Der Rand  $\Gamma$  wird dabei in  $\Gamma_D = \textit{eingespannt}$  (Dirichlet-Rand),  $\Gamma_H = \textit{gelenkig}$  (Navier-Rand) und  $\Gamma_N = \textit{frei}$  (Neumann-Rand),  $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_H + \Gamma_N$ , mit den Randbedingungen

$$w = w_{,n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad w = m_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H \quad \text{und} \quad m_n = v_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N \quad (4.3)$$

aufgeteilt.

Der Biegemomententensor hat die Komponenten

$$m_{xx} = -K(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (4.4a)$$

$$m_{yy} = -K(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (4.4b)$$

$$m_{xy} = -(1 - \nu)Kw_{,xy} \quad (4.4c)$$

und die Querkräfte berechnen sich gemäß den Formeln

$$q_x = -K(w_{,xxx} + w_{,yyx}) \quad (4.5a)$$

$$q_y = -K(w_{,yyy} + w_{,xxy}). \quad (4.5b)$$

Die eigentliche Lagerkraft der Platte ist der Kirchhoff-Schub,

$$v_x = q_x + \frac{d m_{xy}}{d y} \quad \text{bzw.} \quad v_y = q_y + \frac{d m_{xy}}{d x}, \quad (4.6)$$

d.h. die Querkraft plus dem Gradienten des Torsionsmomentes  $m_{xy}$ .

Die natürliche Wahl für die schwache Formulierung des obigen Randwertproblems ist der  $H^2(\Omega)$ . Die geometrischen Randbedingungen legen dann den eigentlichen Lösungsraum fest

$$V = \{w \in H^2(\Omega) \mid w \text{ erfüllt die geometrischen Randbedingungen}\}, \quad (4.7)$$

auf dem das zum Randwertproblem äquivalente Variationsproblem gestellt wird:

Finde eine Funktion  $w \in V$  so, dass

$$a(w, v) = (p, v) \quad \forall v \in V \quad (4.8)$$

erfüllt ist.

Die Verzerrungsenergie

$$a(w, v) := \int_{\Omega} [w_{,xx} (v_{,xx} + \nu v_{,yy}) + 2(1 - \nu) w_{,xy} v_{,xy} + w_{,yy} (v_{,yy} + \nu v_{,xx})] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{M}(w) \cdot \mathbf{K}(v) d\Omega \quad (4.9)$$

ist eine Bilinearform auf  $V \times V$ . Der Ausdruck  $(p, v)$  ist eine Linearform. Er stellt die virtuelle äußere Arbeit dar

$$(p, v) := \int_{\Omega} p v d\Omega + \int_{\Gamma} [v_n(w) v - m_n(w) v_{,n}] ds + \sum_i F_i v(\mathbf{x}_i). \quad (4.10)$$

Die  $F_i$  sind die bekannten Eckkräfte, die aus dem Kirchhoff-Schub resultieren

$$F_i := F(w)(\mathbf{x}_i) = m_{xy}(\mathbf{x}_i^+) - m_{xy}(\mathbf{x}_i^-). \quad (4.11)$$

Die Methode der finiten Elemente konstruiert mit konformen Ansatzfunktionen  $\varphi_i \in H^2(\Omega)$  eine Teilmenge  $V_h \subset V$  des Lösungsraums und findet auf diesem Ansatzraum die Näherung  $w_h \in V_h$  als Lösung des Variationsproblems

$$a(w_h, v_h) = (p, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Greensche Funktionen für die Platte

Die Grundlösung  $g_0$  für die Durchbiegung  $w$

$$g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi K} r^2 \ln r \quad \text{mit} \quad r = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2} \quad (4.13)$$

bildet den Kern der Greenschen Funktion

$$G_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + w_R(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Aus ihr lassen sich durch Differentiation die weiteren Grundlösungen  $g_i$  bestimmen

$$g_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{y}}^i g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (4.15)$$

wobei hier die Operatoren  $\partial_{\mathbf{y}}^i$  für die Randoperatoren in der zweiten Greenschen Identität stehen

$$\partial^0 w = w \quad \partial^1 w = \frac{\partial w}{\partial n} \quad \partial^2 w = m_n(w) \quad \partial^3 w = v_n(w). \quad (4.16)$$

Die Greenschen Funktionen sind die Lösungen der Differentialgleichungen

$$K \Delta \Delta G_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta_i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{auf} \quad \Omega \quad (4.17)$$

und die Dirac Deltas sind gerade die Kerne in den, den Randwerten zugeordneten, Funktionalen

$$(\delta_i(\mathbf{y} - \mathbf{x}), w) = \partial^i w(\mathbf{x}). \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Verbesserte Genauigkeit bei Zielgrößen

Die Greenschen Funktionen  $G_i$  müssen die Randbedingungen des primalen Problems erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} G_i &= w_R + g_i = 0 \\ G_{i,n} &= w_{R,n} + g_{i,n} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma_D \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} G_i &= w_R + g_i = 0 \\ m_n(G_i) &= m_n(w_R) + m_n(g_i) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma_H \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} m_n(G_i) &= m_n(w_R) + m_n(g_i) = 0 \\ v_n(G_i) &= v_n(w_R) + v_n(g_i) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma_N, \quad (4.21)$$

woraus folgt, dass es die Aufgabe des regulären Anteils  $w_R$  ist, für die Einhaltung der Randwerte zu sorgen,

$$w_R(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \mathbf{y} \in \Gamma_D \quad (\text{etc.}). \quad (4.22)$$

Je nach Lagerart werden daher an  $w_R$  Randbedingungen in Form von inhomogenen Dirichlet-Daten bzw. Neumann-Daten gestellt. Die inhomogenen Dirichlet-Daten, wie Gl. (4.22), gehen in die Definition des Lösungsraums  $S$  ein, während die inhomogenen Neumann-Daten im Funktional  $(p, v)$  auf der rechten Seite auftauchen.

Der Lösungsraum für  $w_R$

$$S = \bar{w} \oplus V \quad (4.23)$$

besteht aus einer Funktion  $\bar{w}$ , die die inhomogenen Dirichlet-Daten erfüllt plus allen Funktionen in  $V$  (= Menge aller  $w$  mit homogenen Dirichlet-Daten).

Entsprechend hat die diskrete Lösung des regulären Problems die Gestalt<sup>1</sup>

$$w_R^h(\mathbf{y}) = \bar{w}_h(\mathbf{y}) + \sum_j w_j \varphi_j(\mathbf{y}), \quad (4.24)$$

wobei  $\bar{w}_h$  eine Näherung für  $\bar{w}$  ist. Typischerweise wird  $\bar{w}_h$  aus Ansatzfunktionen  $\varphi_i$  gebildet, die ihre Knoten auf dem Dirichlet-Rand haben

$$\bar{w}_h(\mathbf{y}) = \sum_i \bar{w}_i \varphi_i(\mathbf{y}), \quad (4.25)$$

d.h.  $\bar{w}_h$  interpoliert  $\bar{w}$  auf dem Dirichlet-Rand. Der FE-Lösungsraum ist dann

$$S_h = \bar{w}_h \oplus V_h. \quad (4.26)$$

---

<sup>1</sup>An Stelle von  $w_R(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  wird vereinfachend  $w_R(\mathbf{y})$  geschrieben.



Die schwache Form

$$w_R^h \in S_h : \quad a(w_R^h, v_h) = (p, v_h) \quad v_h \in V_h \quad (4.27)$$

lautet somit im Detail z.B. für eine allseits gelenkig gelagerte Platte ( $\Gamma_H = \Gamma$ )

$$a\left(\sum_j w_j \varphi_j, v_h\right) = -a(\bar{w}_h, v_h) - \int_{\Gamma_H} m_n(g_0) \frac{\partial v_h}{\partial n} ds. \quad (4.28)$$

Damit lässt sich die Greensche Funktion konstruieren

$$\tilde{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = w_R^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (4.29)$$

mit der sich dann der Punktwert  $\tilde{w}(\mathbf{x}) \approx w(\mathbf{x})$

$$\tilde{w}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \tilde{G}_0^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} g_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} w_R^h(\mathbf{y}, \mathbf{x}) p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} \quad (4.30)$$

berechnen lässt. Die Vorgehensweise für andere Zielgrößen ist analog.

## 4.2 Numerische Beispiele für die GFD-Methode

Die Implementierung der Technik in ein bestehendes FE-Programm ist sehr einfach, da lediglich das Programm um die Grundlösungen erweitert werden muss.

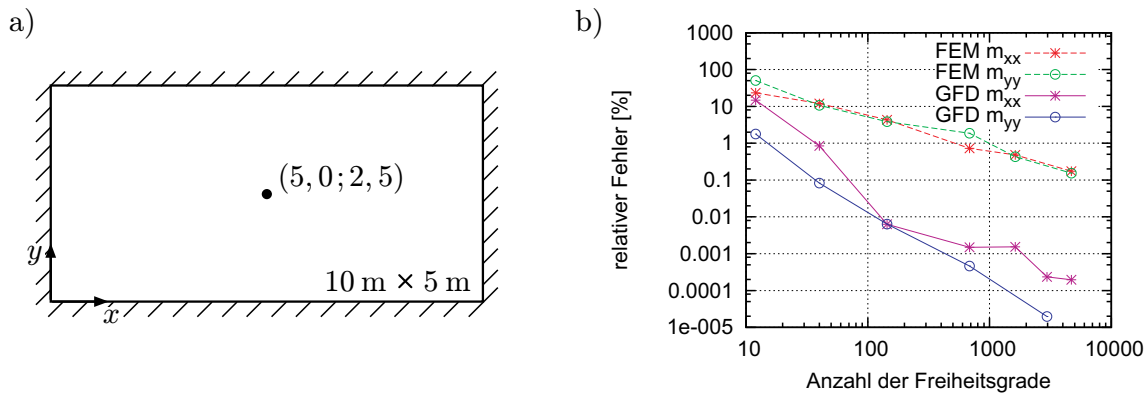
Die Vorteile der GFD-Methode sollen zunächst an einigen einfachen Modellproblemen verdeutlicht werden.

Es werden Ergebnisse, die auf konformen, bikubischen Plattenelementen beruhen, mit der GFD-Methode verglichen. Die uniformen FE-Netze sind bei beiden Methoden jeweils gleich. Die *quasi* exakte Lösung ist eine Randelementlösung auf einem sehr feinen Netz.

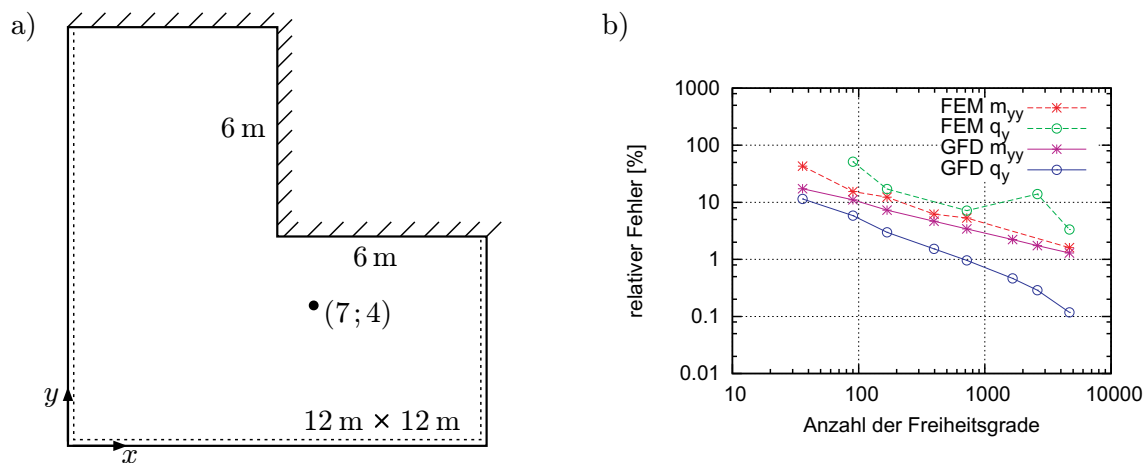
### 4.2.1 Rechteckplatte

Das erste Beispiel, siehe Abb. 4.1 a, ist eine allseits eingespannte Rechteckplatte unter Gleichflächenlast. Verglichen werden die beiden Momente  $m_{xx}$  und  $m_{yy}$  im Punkt  $(5, 0; 2, 5)$ .

Die mit der GFD-Methode berechneten Werte weisen bereits bei weniger als 100 Freiheitsgraden einen Fehler von weniger als 0,1% auf, während die FE-Lösung selbst bei 6000 Freiheitsgraden nicht unter diese Fehlergrenze kommt. Die Konvergenzrate der GFD-Methode ist sichtlich besser als bei der FE-Methode.



**Abb. 4.1:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden, mit denen der Standard FE-Methode für die Momente  $m_{xx}$  und  $m_{yy}$ . a) Verwendetes System,  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,16$ ,  $t = 0,2$  und belastet mit einer Gleichflächenlast, b) Darstellung der relativen Fehler für die betrachteten Momente.



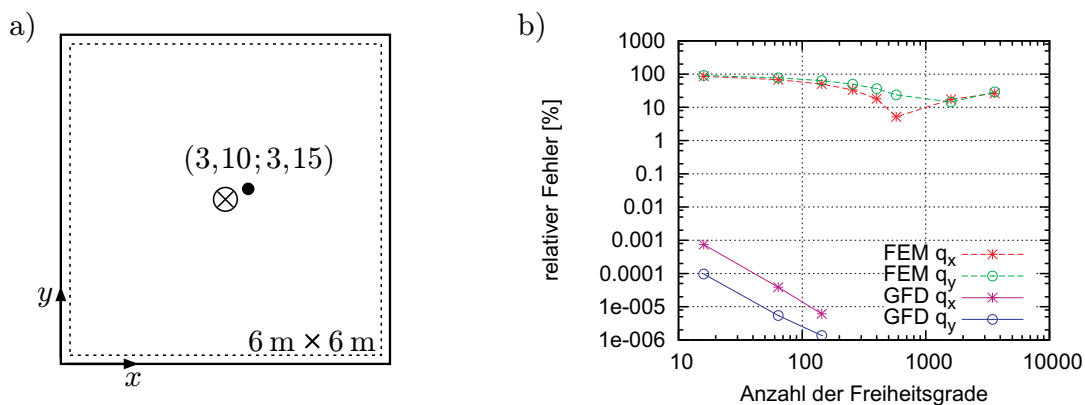
**Abb. 4.2:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden, mit denen der Standard FE-Methode für das Moment  $m_{yy}$  und die Querkraft  $q_y$  im markierten Punkt. a) Verwendetes System, Systemdaten siehe Abb. 4.1, gemischten Randbedingungen und belastet mit einer Gleichflächenlast, b) Darstellung der relativen Fehler für das betrachtete Moment und die Querkraft.

#### 4.2.2 L-Platte mit gemischten Randbedingungen

Das zweite betrachtete System ist eine L-Platte mit wechselnden Randbedingungen, siehe Abb. 4.2 a. Das System ist wieder mit einer Gleichflächenlast belastet und im markierten Punkt  $\bullet$  werden das Moment  $m_{yy}$  und die Querkraft  $q_y$  berechnet. Das

Besondere an diesem Beispiel sind zum einen die gemischten Randbedingungen, zum anderen aber auch die Auswirkungen der Singularität der einspringenden Ecke auf die Zielgröße (Stichwort: pollution error).

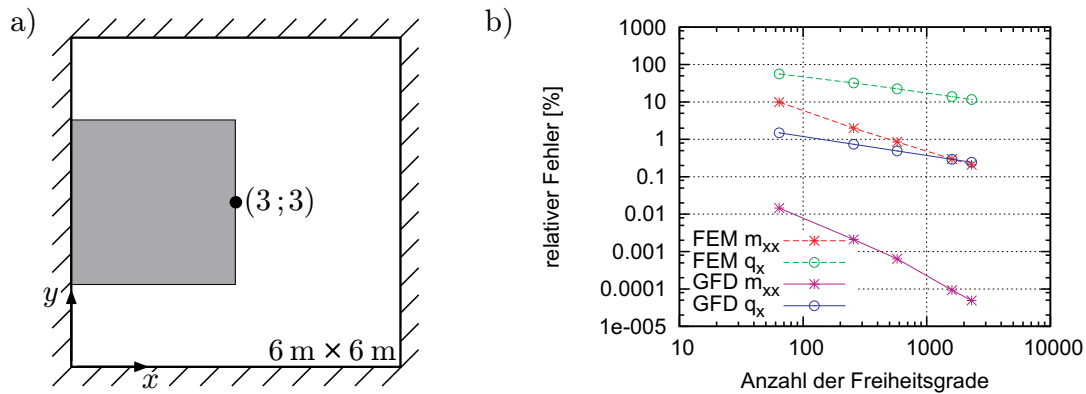
Der Unterschied in dem Moment ist relativ gering, siehe Abb. 4.2 b, mit kleinen Vorteilen für die GFD-Methode, die auch insgesamt einen ausgeglichenen Verlauf aufweist. Bei diesem Beispiel liefert die klassische FE-Technik nur unwesentlich schlechtere Ergebnisse für die Momente als die GFD-Methode. Allerdings hat die FE-Technik deutlich Schwierigkeiten mit der Greenschen Funktion für die Querkraft  $q_y$ . Die Werte sind etwa eine Zehnerpotenz schlechter als in der GFD-Methode. Hinzu kommt noch, dass der Fehler nicht zwangsläufig bei einer Erhöhung der Freiheitsgrade kleiner wird.



**Abb. 4.3:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden, mit denen der Standard FE-Methode für die Querkräfte  $q_x$  und  $q_y$  im markierten Punkt. a) Verwendetes System, Systemdaten siehe Abb. 4.1, gelenkige Lagerung und belastet mit einer Einzellast (mit  $\otimes$  markiert) in der Nähe des betrachteten Punktes, b) Darstellung der relativen Fehler für die betrachteten Querkräfte.

### 4.2.3 Punktlasten

Beim dritten Beispiel geht es um die Berechnung einer Zielgröße in direkter Nähe einer Einzellast, siehe Abb. 4.3 a. Bei mehr als 200 Freiheitsgraden hat die GFD-Methode quasi die exakte Lösung erreicht, da der Fehler unter 0,0001% liegt. Die FE-Lösung startet mit einem relativ großen Fehler (ca. 100%), aber selbst bei einem sehr feinen Netz bleibt es bei einem Fehler von über 10%. Das Beispiel ist natürlich unfair gegenüber der klassischen FE-Technik, weil hier zwei singuläre Anteile zusammen kommen, aus der Belastung und aus der Auswertung. Es zeigt aber die Vorteile der GFD-Methode ganz deutlich.



**Abb. 4.4:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden, mit denen der Standard FE-Methode für das Moment  $m_{xx}$  und die Querkraft  $q_y$  im markierten Punkt. a) Verwendetes System, Systemdaten siehe Abb. 4.1, fest eingespannter Rand und mit einer Teilflächenlast belastet (markiert mit einem grauen Kasten), b) Darstellung der relativen Fehler für das betrachtete Moment und die Querkraft.

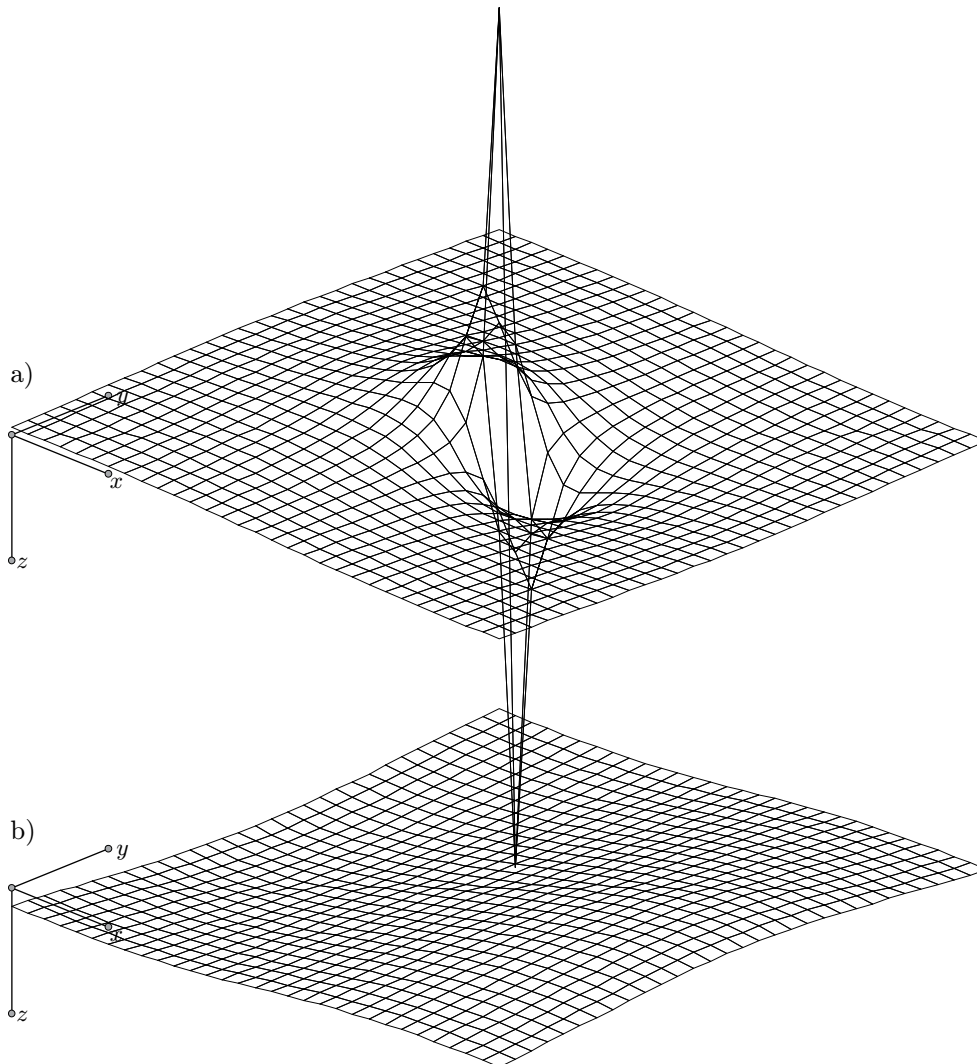
#### 4.2.4 Teilflächenlasten

Das nächste Beispiel ist eine allseits eingespannte Quadratplatte mit einer Teilflächenlast, siehe Abb. 4.4 a. Der Aufpunkt liegt auf dem Rand der Gleichflächenlast. Die Zielgrößen sind das Moment  $m_{xx}$  und die Querkraft  $q_x$ .

Auch hier wird der Vorteil der GFD-Methode wieder deutlich; die Fehlerkurven liegen bei der Querkraft zwei bzw. beim Moment drei Zehnerpotenzen unterhalb des Fehlers der FE-Lösung.

Auffallend ist, dass die Steigungen der Fehlerkurven beider Methoden quasi gleich sind. Das lässt darauf schließen, dass der Fehler hauptsächlich vom regulären Anteil, welcher mittels FE-Technik berechnet wird, herrührt. Bei den vorher gezeigten Beispielen ist dies nicht zu beobachten.

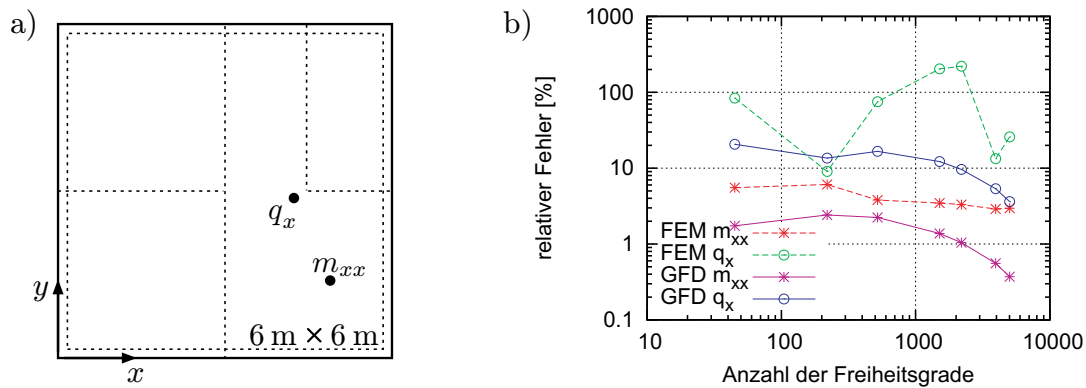
In Abb. 4.5 sind die analytisch bekannte Grundlösung und die FE-Lösung des regulären Problems für die Greensche Funktion der Querkraft dargestellt. Beide Biegeflächen zusammenaddiert, ergeben die gesuchte Einflussfläche für die Querkraft.



**Abb. 4.5:** Für das in Abb. 4.4 berechnete System sind a) die Grundlösung mit der Singularität und b) der glatte, mit der FE-Technik bestimmte, reguläre Anteil dargestellt.

### 4.2.5 Beispiel aus der Baupraxis

Die Platte in Abb. 4.6 a ist allseits gelenkig gelagert und liegt im Innern noch zusätzlich auf Wänden (Linienlagerung) auf. Als Zielgrößen wurden Werte, die für die Bemessung der Platte relevant sein können, gewählt: Die Querkraft in der Nähe einer Wanddecke und das Moment im Feld. Der relative Fehler der berechneten Werte ist in Abb. 4.6 b in einem Diagramm dargestellt.



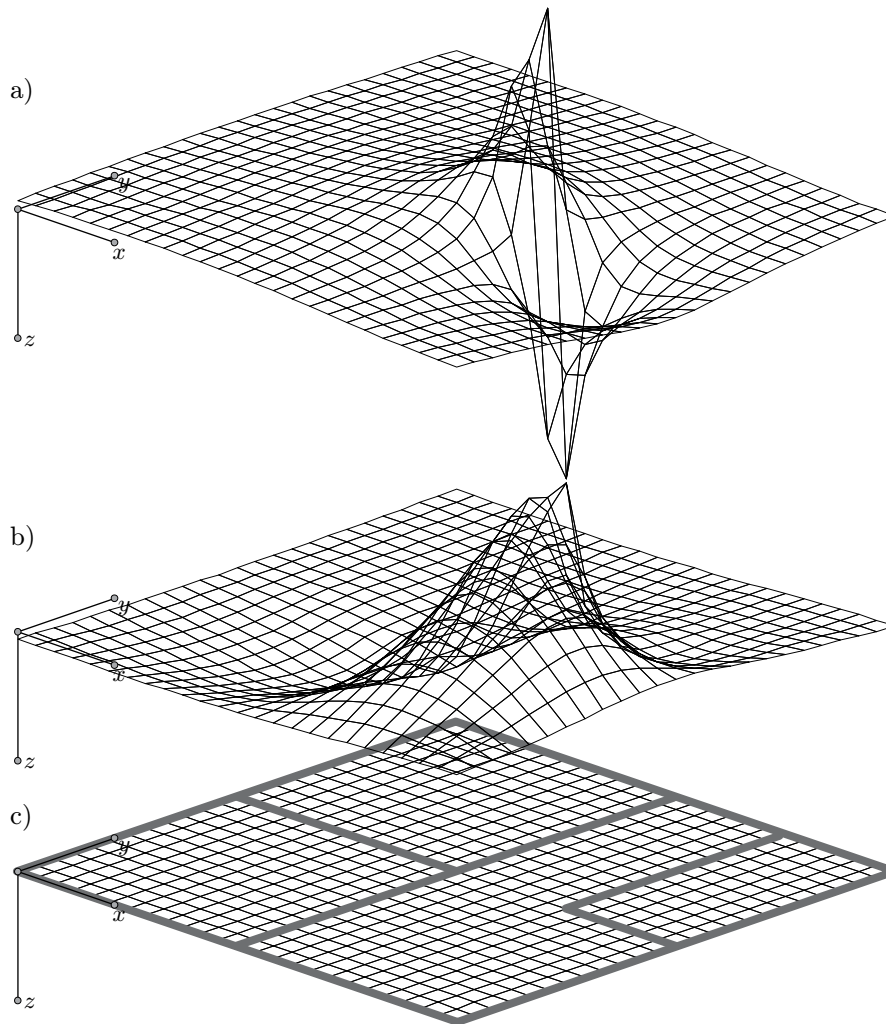
**Abb. 4.6:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden mit denen der Standard FE-Methode für das Moment  $m_{xx}$  und die Querkraft  $q_x$  in den markierten Punkten für ein quasi reales System. a) Verwendetes System, Systemdaten siehe Abb. 4.1, gelenkiger Randlagerung und Linienunterstützungen und mit einer Gleichflächenlast belastet, b) Darstellung der relativen Fehler für das betrachtete Moment und die Querkraft.

Die Momentenwerte streben mit zunehmender Netzverfeinerung sowohl bei der FEM als auch bei der GFD-Methode gleichmäßig gegen den exakten Wert, wobei die Ergebnisse der GFD-Methode qualitativ besser sind. Allerdings ist die Fehlerkurve nicht mehr eine Gerade, sondern entspricht im doppeltlogarithmischen Maßstab einer Kurve, deren negative Steigung bei der GFD-Methode mit Zunahme der Freiheitsgrade deutlich zunimmt.

Die Querkraft konvergiert in beiden Verfahren deutlich schlechter. Während der Verlauf des Fehlers der GFD-Methode stabil ist, treten bei der FE-Methode starke Schwankungen auf: Eine Erhöhung der Freiheitsgrade führt nicht zwingend zu genaueren Ergebnissen. Um die relativ schwache Konvergenzrate der GFD-Methode zu erklären, sind in Abb. 4.7 die Fundamentallösung und die Lösung des regulären Anteils für die Querkraft dargestellt. Dabei ist gut zu erkennen, dass der reguläre Anteil, aufgrund des Systems und der Lage des Aufpunktes, nicht mehr so glatt ist. Die Singularität kann zwar dank der Grundlösung gut dargestellt werden, der reguläre Anteil verschlechtert aber die Approximation der Greenschen Funktion.

#### 4.2.6 Bemessung im Stützenanschnitt

Mit der Frage, wie genau die Stützenanschnittsmomente sind, wird sich häufig im Zusammenhang mit den finiten Elementen befasst. Da die Momente in der Nähe von Stützen sehr stark ansteigen, befürchten die Praktiker, dass die FE-Ergebnisse

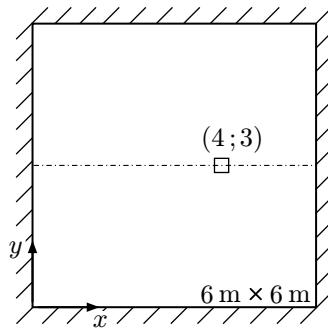


**Abb. 4.7:** Für das in Abb. 4.6 berechnete System sind a) die Grundlösung mit der Singularität und b) der glatte, mit der FE-Technik bestimmte, reguläre Anteil und c) das System mit den Lagerungen dargestellt.

auf der unsicheren Seite liegen. Daher kommt immer wieder die Diskussion auf, wie man Stützen in FE-Programmen modelliert und welches Modell besser geeignet ist oder wie die Verfeinerung des Netzes aussehen soll.

Man kann zeigen, dass die Stützenkräfte relativ genau sind, weil die Einflussfunktionen für die Stützenkräfte identisch sind mit den Einflussfunktionen für die Durchbiegungen. Man entfernt in Gedanken die Stütze und bringt dort eine Kraft  $F$  so auf, dass sich die Platte dort um eine Längeneinheit absenkt.

Weil diese Biegefläche auch auf groben Netzen sehr leicht zu approximieren ist, sind



**Abb. 4.8:** Platte mit einer Stütze 30/30 cm (markiert mit  $\square$ ), Systemdaten wie in Abb. 4.1.

die Stützenkräfte  $P_i$  in einer FE-Berechnung relativ genau. Dies legt den folgenden Ansatz für die Berechnung der Biegefläche nahe

$$\tilde{w}(\mathbf{x}) = w_R^h + \sum_{i=1}^n P_i g_0^{(i)}, \quad (4.31)$$

mit  $n =$  Anzahl der Stützen.

Methodisch würde das Verfahren so verlaufen, dass man im ersten Durchgang die Stützenkräfte  $P_i$  bestimmt und dann in einer Nachlaufrechnung

$$a(w_R^h, v_h) = \sum_{i=1}^n \left( -P_i \left\{ \int_{\Gamma_H} m_n(g_0^{(i)}) \frac{\partial v_h}{\partial n} ds - g_0^{(i)} v_h \right\} \right) + (p, v_h) \quad (4.32)$$

die reguläre Lösung  $w_R^h$  und daraus die Stützenanschnittsmomente, etwa  $m_{xx}$  mit der Gleichung

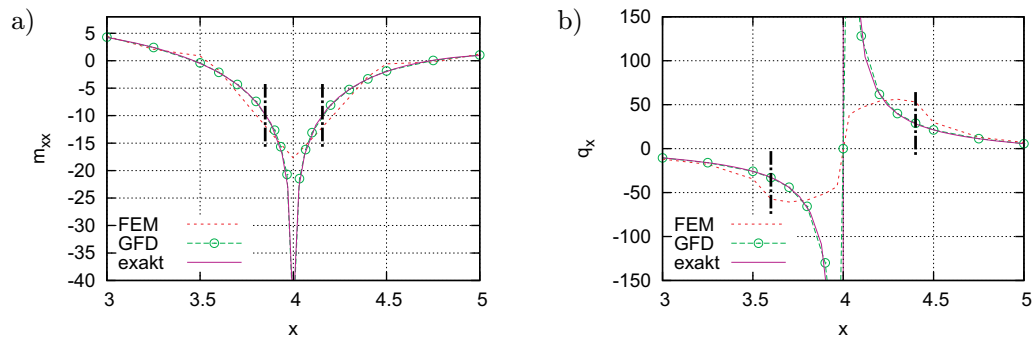
$$m_{xx}^h = -K \left( \frac{\partial^2 w_R^h}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_R^h}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^n P_i \left( \frac{\partial^2 g_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 g_0}{\partial y^2} \right) \right) \quad (4.33)$$

berechnet würden. Auf gleiche Weise wäre mit der Querkraft bzw. mit dem Kirchhoff-Schub zu verfahren. Dass diese Methode bessere Ergebnisse liefert als die normale FE-Technik, wird am Beispiel der punktgestützten Platte im folgenden Abschnitt gezeigt.

## 4.2.7 Punktgestützte Platten

Das letzte Beispiel ist eine punktgestützte Platte unter Gleichlast, siehe Abb. 4.8. Die hierfür verwendete Technik wurde im Kapitel 4.2.6 kurz erläutert. Der Momenten- und Querkraftverlauf im horizontal verlaufenden Schnitt sind in Abb. 4.9 a und b dargestellt. Die vertikalen Striche in den Diagrammen markieren die Orte, die gewöhnlich zur Bemessung der Platte im Bereich der Stütze herangezogen werden.

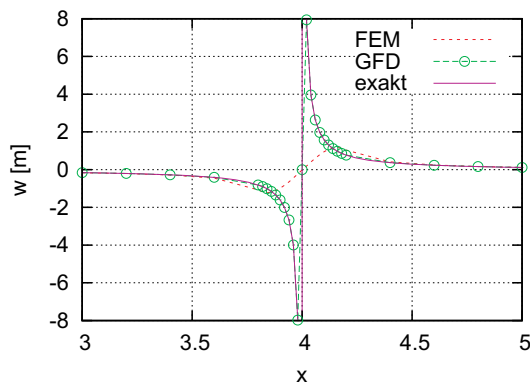




**Abb. 4.9:** Vergleich der Ergebnisse, die mit der GFD-Methode bestimmt wurden mit denen der Standard FE-Methode für das Moment  $m_{xx}$  und die Querkraft  $q_x$  in einem Schnitt durch die Platte, siehe Abb. 4.9. Markiert sind die für die Bemessung relevanten Stellen. a) Momentenverlauf und b) Querkraftverlauf.

Grundsätzlich ist festzuhalten, dass der Querkraft- bzw. Momentenverlauf der GFD-Methode an den berechneten Stellen deckungsgleich mit dem exakten Verlauf ist. Hingegen ist bei der FE-Technik zu erkennen, dass mit den *Bordmitteln* der Elementformulierung<sup>2</sup> nicht mehr als der dargestellte Verlauf möglich ist. Gleiches gilt für den berechneten Querkraftverlauf. Und somit können sich an den bemessungsrelevanten Stellen Differenzen in den Schnittkräften ergeben, die nicht zu vernachlässigen sind. Im gezeigten Beispiel verhält es sich so, dass man mit den Werten der FE-Methode bei der Bemessung auf der sicheren Seite ist.

Abschließend sind in Abb. 4.10 die Einflussfunktionen für die Querkraft für die Stütze dargestellt. Dabei zeigt sich, dass bei der GFD-Methode kein Unterschied zur exakten Einflussfunktion festzustellen ist; beide Funktionen sind deckungsgleich. Die Abweichungen der FE-Einflussfunktion treten hauptsächlich im Bereich der Stütze (Abstand bis ca. 20 cm) auf. Außerhalb dieser Zone sind die Ergebnisse sehr gut.



**Abb. 4.10:** Vergleich der exakten Einflussfunktion mit der, die mit der FE-Methode erzeugt wird und mit der mit Hilfe der GFD-Methode bestimmten Einflussfunktion.

<sup>2</sup>ein bikubischer Ansatz



# 5 Modellfehlerbestimmung

Werden für die Berechnung eines Bauteils Näherungsverfahren wie z.B. die finite Elemente Methode verwendet, so ist die Lösung des Problems nicht exakt. Erst für einen sehr hohen Diskretisierungsgrad nähert sich die FE-Lösung der exakten Lösung an. Das haben die vorherigen Untersuchungen gezeigt. Gesteuert werden kann dieser Prozess durch eine adaptive Netzgestaltung, sowohl global als auch zielorientiert.

Unberücksichtigt bleibt dabei der Fehler, der im vorher formulierten Modell steckt: Annahmen über die Geometrie, Vereinfachungen im Materialgesetz oder unkorrekte Randbedingungen. Dieser Fehler kann neben dem Diskretisierungsfehler eine entscheidende Größe sein und müsste daher eigentlich bei jeder FE-Berechnung mit berücksichtigt werden.

In diesem Kapitel sollen verschiedene Möglichkeiten entwickelt und untersucht werden, einen Modellfehler bzw. die Veränderungen, die durch eine ungenaue Modellbildung hervorgerufen werden, zahlenmäßig zu ermitteln. Dadurch kann dem Ingenieur eine Entscheidungshilfe an die Hand gegeben werden, die Abweichungen in einer Bemessungsgröße bei Parameterschwankungen berechnet oder z.B. einen Indikator für eine detailliertere Modellbildung zu Verfügung stellt.

Bei allen folgenden Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass es keinen Unterschied macht, ob man den Modellfehler mit der analytischen Lösung der Differentialgleichung oder mittels der FE-Lösung berechnet. In Kapitel 5.9 wird aufgezeigt, dass man den Modellfehler und den Diskretisierungsfehler getrennt voneinander betrachten kann.

## 5.1 Ein erster Zugang

Es wird von der Gleichgewichtsbedingung in der schwachen Form ausgegangen

$$a_c(u_c, v) = (p, v) \quad \forall v \in V. \quad (5.1)$$

Die schwache Lösung dieses exakten Modells, das durch die Bilinearform  $a_c(u_c, v)$  charakterisiert wird, sei die Funktion  $u_c$ .

Es sei nun angenommen, dass die Lösung dieser Aufgabe mit vertretbarem Aufwand nicht zu erreichen ist und stattdessen ein vereinfachtes Modell zum Einsatz kommt, das durch eine vereinfachte Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  beschrieben wird

$$a(u, v) = (p, v) \quad \forall v \in V. \quad (5.2)$$

Gesucht ist eine Bestimmungsgleichung für den Fehler  $e_m = u_c - u$  zwischen diesen beiden Lösungen.

Am Beispiel eines Zugdruckstabes soll die Vorgehensweise verdeutlicht werden. Die Dehnsteifigkeit des exakten Modells hänge von den beiden veränderlichen Parametern  $E(x)A(x)$  ab, während in dem vereinfachten Modell der E-Modul als konstant angenommen wird,  $E_0A(x)$ . Die Differentialgleichungen für die beiden Systeme lauten:

$$-(EA u'_c)' = p \quad \text{bzw.} \quad (5.3)$$

$$-(E_0A u')' = p. \quad (5.4)$$

Der Modellfehler ist der Unterschied zwischen der exakten Lösung  $u_c$  und der Lösung  $u$  des vereinfachten Problems

$$e_m = u_c - u. \quad (5.5)$$

Entscheidend für alles Folgende ist, dass die rechten Seiten beider Differentialgleichungen identisch sind:

$$-(EA u'_c)' + (E_0A u')' = p - p = 0. \quad (5.6)$$

Erweitert man Gl. (5.6) um die Identität  $(EA u')' - (EA u')' = 0$

$$-(EA u'_c)' + (EA u')' - (EA u')' + (E_0A u')' = 0 \quad (5.7)$$

und fasst die ersten beiden Terme zusammen, so folgt

$$-(EA e'_m)' = (EA u')' - (E_0A u')'. \quad (5.8)$$

Es ist zweckmäßig, die rechte Seite dieser Gleichung weiter zusammenzufassen. Man erhält so eine Differentialgleichung für den Modellfehler.

$$\begin{aligned} -(EA e'_m)' &= (EA u')' - (E_0A u')' = (EA(I - (EA)^{-1}E_0A) u')' \\ &=: (EA \mathcal{I}_m u')' \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das Symbol

$$\mathcal{I}_m = I - (EA)^{-1}E_0A \quad (5.10)$$

kann man als Rückrechenoperator  $\mathcal{I}_m$  bezeichnen. Stellt man die Gleichung nach  $I$  um und setzt in Gl. (5.8) ein, so führt das auf

$$\begin{aligned} -(EA e'_m)' &= (EA u')' - (E_0 A u')' = (EA I u')' - (E_0 A u')' \\ &= (EA \{\mathcal{I}_m + (EA)^{-1} E_0 A\} u')' - (E_0 A u')' \\ &= (EA \mathcal{I}_m u')' + (EA (EA)^{-1} E_0 A u')' - (E_0 A u')' \\ &= (EA \mathcal{I}_m u')' + (E_0 A u')' - (E_0 A u')' \end{aligned}$$

oder, siehe z.B. [51] oder [52],

$$-(EA e'_m)' = (EA \mathcal{I}_m u')'. \quad (5.11)$$

Die Koeffizienten  $EA$  in dieser Differentialgleichung stammen von dem inhomogenen Material. Die rechte Seite der Differentialgleichung ist abhängig von der Lösung  $u$ . Geht man davon aus, dass das inhomogene Materialgesetz ohne all zu großen Aufwand beschrieben werden kann, so ist dieses Problem mit vertretbarem Aufwand zu lösen. Die schwache Form für die Bestimmung des Modellfehlers lautet somit

$$a_c(e_m, v) = \mathcal{R}(u, v) \quad \forall v \in V \quad (5.12)$$

mit

$$a_c(e_m, v) := \int_0^l EA e'_m v' dx \quad (5.13)$$

und

$$\mathcal{R}(u, v) := \int_0^l EA \mathcal{I}_m u' v' dx. \quad (5.14)$$

An dieser Stelle würde dann die FE-Technik ansetzen.

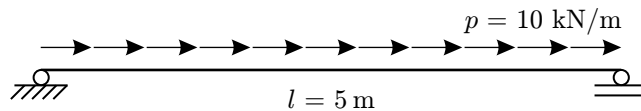


Abb. 5.1: System mit Belastung.

### 5.1.1 Ein Beispiel

Ein kleines Beispiel möge die Analyse des Modellfehlers veranschaulichen. Ausgangspunkt ist das in Abb. 5.1 dargestellte System, welches mit zwei unterschiedlichen  $E$ -Moduli ( $E_0$  und  $E_1$ ) modelliert werden soll. Der sich daraus ergebende Unterschied in den Verschiebungen  $u$  soll über Gl. (5.9) bestimmt werden.

Das ursprüngliche System hat eine Dehnsteifigkeit von  $E_0A = 100.000 \text{ kN/m}$ , das veränderte System einen Wert von  $E_1A = 80.000 \text{ kN/m}$ . Für das Ausgangssystem erhält man die Lösung

$$u(x) = -\frac{1}{E_0A}(5x^2 - 50x). \quad (5.15)$$

Damit folgt für den Rückrechenoperator  $\mathcal{I}_m$

$$\mathcal{I}_m = 1 - (E_1A)^{-1} \cdot E_0A = -\frac{1}{4}. \quad (5.16)$$

Somit ergibt sich für die rechte Seite der Differentialgleichung

$$E_1A \mathcal{I}_m u'' = E_1A \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{10}{E_0A}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{80.000}{100.000} = 2 \quad (5.17)$$

und folglich lautet die Bestimmungsgleichung für den Modellfehler

$$-E_1A e_m'' = 2. \quad (5.18)$$

Sie hat die Lösung

$$-E_1A e_m(x) = x^2 - 10x \quad \Rightarrow \quad e_m(x) = \frac{1}{E_1A} (10x - x^2). \quad (5.19)$$

Im Punkt  $x = l$  beträgt die Differenz in der Verschiebung  $0,3125 \text{ mm}$ . Diese Differenz wird durch Nachrechnung an beiden Systemen bestätigt

$$e_m = u_c - u = 1,5625 - 1,25 \text{ mm} = 0,3125 \text{ mm}. \quad (5.20)$$

## 5.2 Schwache Formulierungen und der $d$ -Term

Es soll eine einfache Möglichkeit entwickelt und untersucht werden, mit der es möglich ist, den Modellfehler zu ermitteln bzw. die Auswirkungen der Modellveränderungen abzuschätzen. Diese Methode wird sowohl an einfachen Beispielen, welche analytisch gelöst werden können, als auch an Problemen der Scheibe, welche mittels FEM gelöst werden, erläutert, wobei die Technik immer die Gleiche bleibt.

### 5.2.1 Berechnung des Modellfehlers für lineare Probleme

Den Ausgangspunkt bilden die beiden Gleichungen

$$-(E_0A u')' = p \quad (5.21)$$

und

$$-(EA u_c')' = p, \quad (5.22)$$

also das vereinfachte Modell mit der Lösung  $u$  und das genauere Modell mit der Lösung  $u_c$ .

Zum vereinfachten Modell gehört die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_0^l E_0 A u' v' dx \quad (5.23)$$

und die Formulierung

$$a(u, v) = (p, v) \quad \forall v \in V, \quad (5.24)$$

während zum verfeinerten Modell die Bilinearform

$$\begin{aligned} a_c(u, v) &= \int_0^l EA u' v' dx = \int_0^l (E_0 A + \Delta EA) u' v' dx \\ &= \int_0^l E_0 A u' v' dx + \int_0^l \Delta EA u' v' dx \\ &= a(u, v) + d(u, v) \end{aligned} \quad (5.25)$$

gehört, die die Summe aus  $a(u, v)$  und der zusätzlichen, symmetrischen Bilinearform

$$d(u, v) = \int_0^l \Delta E A u' v' dx \quad (5.26)$$

ist. Das exakte Problem führt auf die Variationsgleichung

$$a(u_c, v) + d(u_c, v) = (p, v) \quad \forall v \in V \quad (5.27)$$

mit dem Zusatzterm  $d(u_c, v)$ , der die Teile eines Modells repräsentiert, welche nur mit hohem Aufwand zu modellieren und zu berechnen sind.

Subtrahiert man die Gln. (5.27) und (5.24) voneinander, so liefert dies

$$a(u_c - u, v) + d(u_c, v) = 0 \quad (5.28)$$

oder mit  $e_m = u_c - u$

$$a(e_m, v) = -d(u_c, v). \quad (5.29)$$

Da diese Gleichung Ähnlichkeit mit der aus der Methode der finiten Elemente bekannten Galerkin-Orthogonalität hat, wird sie in [12] als eine gestörte Galerkin-Orthogonalität bezeichnet. Gl. (5.28) ist die Bestimmungsgleichung für den Modellfehler. Sie ist äquivalent zur im vorigen Abschnitt formulierten Differentialgleichung für den Fehler  $e_m = u_c - u$ .

### 5.2.2 Der Fehler in der Zielgröße

Nach diesen einleitenden Betrachtungen soll wieder zur linearen Elastizitätstheorie gewechselt werden. Den Ingenieur interessieren die Abweichungen in den Verschiebungen oder Spannungen in ganz bestimmten Punkten (Bereichen). Mathematisch ist das der Fehler in den Funktionalen

$$u_c(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) = J(\mathbf{e}_m) \quad \text{oder} \quad \sigma_{xx}^c(\mathbf{x}) - \sigma_{xx}(\mathbf{x}) = J(\mathbf{e}_m). \quad (5.30)$$

Wesentlich für das Folgende ist wieder, dass sich die Belastung  $\mathbf{p}$  des Systems nicht ändert. Dies impliziert, dass ein Test mit einer virtuellen Verrückung  $\mathbf{v}$  vorher wie nachher *dieselbe* virtuelle äußere Arbeit  $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$  liefert und daher auch die virtuellen inneren Arbeiten gleich sein müssen

$$\delta A_i(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \delta A_a(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (5.31)$$

$$\delta A_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \delta A_a(\mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad (5.32)$$

was bedeutet

$$\delta A_i(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) - \delta A_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad (5.33)$$

oder

$$a(\mathbf{e}_m, \mathbf{v}) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_m = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}. \quad (5.34)$$

Es sei  $\mathbf{z}_c$  die Greensche Funktion des Funktionals  $J(\cdot)$  im verfeinerten Modell, also die Lösung des Variationsproblems

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}_c) + d(\mathbf{v}, \mathbf{z}_c) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.35)$$

Setzt man  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_m = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}$ , so erhält man den Modellfehler im Funktional  $J(\cdot)$ , d.h. den Fehler in einer bestimmten Zielgröße an einer definierten Stelle,

$$J(\mathbf{e}_m) = a(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}_c) + d(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}_c) \quad (5.36)$$

oder mit  $a(\mathbf{e}_m, \mathbf{z}_c) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c)$

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c) + d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c) - d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c). \quad (5.37)$$

Das ist die zentrale Gleichung für den Modellfehler.

Dasselbe Resultat erhält man auch, wie man zeigen kann, mit dem Paar  $\{\mathbf{u}_c, \mathbf{z}\}$

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}). \quad (5.38)$$

Beide Kombinationen sind also möglich

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c). \quad (5.39)$$

Zusammenfassend lässt sich sagen: Die Elemente einer rechnerischen Modellanalyse sind



- $\mathbf{u}$  = Lösung des vereinfachten Modells
- $\mathbf{u}_c$  = Lösung des verfeinerten Modells
- $\mathbf{z}$  = Greensche Funktion am vereinfachten Modell
- $\mathbf{z}_c$  = Greensche Funktion am verfeinerten Modell
- Die Bilinearform  $d(\cdot, \cdot)$ . Sie erstreckt sich *nur* über den Bereich des Tragwerks, in dem sich die beiden Modelle unterscheiden.

Die praktische Bedeutung der Formel  $J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c)$  liegt darin, dass man mit ihr voraussagen kann, welche Auswirkungen z.B. Änderungen in den Materialkonstanten auf interessierende Werte haben werden.

Genauso kann man die Formel dazu benutzen, Modelle gezielt zu vereinfachen. Die Sensitivität steckt dabei in der Greenschen Funktion  $\mathbf{z}_c$ . Sie wichtet anhand des Verlaufs von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}_c$  den Einfluss, den die Änderungen der Materialkonstanten bzw. die Änderungen am Modell auf  $J(\mathbf{u})$  haben.

Formal ist die Bilinearform  $d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c)$  ein  $L_2$ -Skalarprodukt. Das bedeutet:

1. Sie lässt sich durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung abschätzen

$$|d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c)| \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \cdot d(\mathbf{z}_c, \mathbf{z}_c) \quad (5.40)$$

2.  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}_c$  können im energetischen Sinne orthogonal zueinander sein

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = 0 \quad \mathbf{u} \neq 0, \quad \mathbf{z}_c \neq 0. \quad (5.41)$$

Spielt man die verschiedenen Varianten,  $\mathbf{u}$  groß/klein,  $\mathbf{z}_c$  groß/klein, durch, so sieht man, dass Änderungen in den Steifigkeiten nur dann spürbare Konsequenzen haben, wenn beide Anteile,  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}_c$ , im Integrationsbereich der Bilinearform  $d(\cdot, \cdot)$  groß sind und sie parallel gerichtet sind. Was bei Vektoren der Winkel  $\varphi$  zwischen den Vektoren ist

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \cos \varphi |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|, \quad (5.42)$$

ist bei Flächentragwerken der Winkel  $\varphi$  zwischen den Hauptspannungen von  $\mathbf{u}$  und Hauptdehnungen von  $\mathbf{z}_c$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) &= \frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{z}_c) d\Omega \\ &= \frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_c} [\sigma_I \cdot (\varepsilon_I \cdot \cos^2 \varphi + \varepsilon_{II} \cdot \sin^2 \varphi) \\ &\quad + \sigma_{II} \cdot (\varepsilon_I \cdot \sin^2 \varphi + \varepsilon_{II} \cdot \cos^2 \varphi)] d\Omega. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Der maximale Effekt stellt sich dann ein, wenn die Richtungen von  $\mathbf{z}_c$  und  $\mathbf{u}$  zusammenfallen,

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = -\frac{\Delta E}{E} \int_{\Omega_c} [\sigma_I \cdot \varepsilon_I + \sigma_{II} \cdot \varepsilon_{II}] d\Omega. \quad (5.44)$$

Diese *Richtungsabhängigkeit* der Wechselwirkungsenergie  $d(\cdot, \cdot)$  wird auch gut in der FE-Notation sichtbar, wo die innere Energie sich als quadratische Form der Knotenvektoren darstellt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_e} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}^e \mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{u}. \quad (5.45)$$

Wenn sich der Elastizitätsmodul  $E$  eines Elements ändert,  $E \rightarrow E + \Delta E$ , dann hängt der Effekt von dem Winkel  $\varphi$  zwischen dem Vektor  $\mathbf{f}_{z_c} = \Delta \mathbf{K} \mathbf{z}_c$  und dem Vektor  $\mathbf{u}$  ab

$$-d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = -\mathbf{z}_c^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{f}_{z_c}^T \mathbf{u} = -|\mathbf{f}_{z_c}| \cdot |\mathbf{u}| \cos \varphi. \quad (5.46)$$

Natürlich ist der Winkel  $\varphi$  formal ein anderer Winkel als zuvor, wenn er gleichwohl indirekt von den Richtungen der Hauptspannungen und Hauptdehnungen der beiden Felder  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}_c$  abhängt.

Die Elemente des Vektors  $\mathbf{f}_{z_c}$  sind die Arbeiten, die die Spannungen der Green-schen Funktion  $\mathbf{z}_c$  auf den Wegen der virtuellen Verrückungen  $\varphi_i^e$  des Elements leisten. Und wenn  $\mathbf{f}_{z_c}$  in dieselbe Richtung zeigt, wie die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  des Elements *vor der Änderung*, dann ist der Effekt der Änderung maximal.

### Beispiel

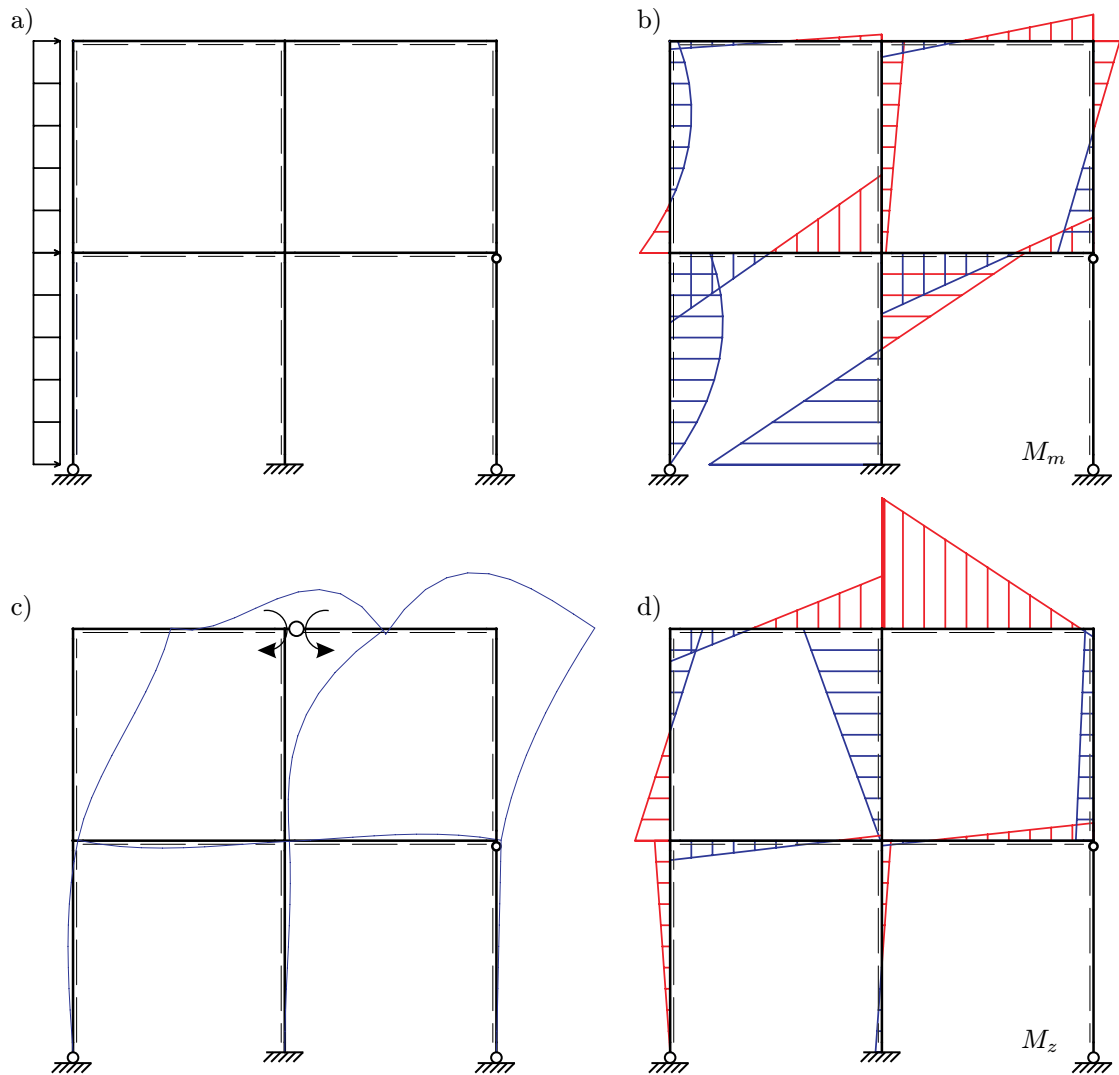
Um die Handhabung der Grundgleichung

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) \quad (5.47)$$

verständlich zu machen, wird ein Beispiel aus der Balkenstatik betrachtet.

In dem Stockwerkrahmen in Abb. 5.2 fällt die Steifigkeit  $EI$  in dem oberen linken Riegel um 30% ab. Es soll der Einfluss bestimmt werden, den diese Änderung auf das Moment im oberen Riegel rechts von der Stütze hat. Es geht bei dieser Fragestellung um das Funktional

$$J(w) = M(x) = \sum_i \int_0^{l_i} G_2(y, x) p(y) dy \quad (5.48)$$



**Abb. 5.2:** Windbelastung auf Rahmen und Einflussfunktion für Stützenanschnittsmoment, a) Windlast, b) Momentenverlauf  $M(x)$ , c) Einflussfunktion für das Moment und d) Moment aus der Einflussfunktion.

für das Stützenanschnittsmoment  $M$  rechts von der Stütze. Es ist  $G_2(y, x) = z$  die zugehörige Einflussfunktion, siehe Abb. 5.2 c).

Die Biegeenergie in dem Rahmen ist, es sei  $EA = GA = \infty$ , gleich

$$a(u, v) = \sum_i \int_0^{l_i} EI u_i'' v_i'' dx, \quad (5.49)$$

so dass das Resultat lautet

$$J(e_m) = -d(u, z_c) = -\Delta EI \int_0^l u'' z_c'' dy = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^l \frac{M M_z^c}{\Delta EI + EI} dy. \quad (5.50)$$

Es sind folglich der *Momentenverlauf* aus der Greenschen Funktion  $z_c$  und der Momentenverlauf  $M$  aus der Belastung im Riegel, siehe Abb. 5.2 b und d, die darüber entscheiden, welche Konsequenzen der Steifigkeitsabfall hat.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde immer die Funktion  $z_c$  vom veränderten bzw. quasi-exakten Modell verwendet. Im folgenden Kapitel wird diese Funktion durch eine Näherung ersetzt, denn das Problem ist, dass die Funktion  $z_c$  nur in Ausnahmefällen bekannt ist und ansonsten nur mit nicht vertretbarem Aufwand bestimmt werden könnte.

### 5.2.3 Die Näherung $z_c \approx z$

Der Momentenverlauf  $M_z^c$  in Abb. 5.2 d ist eigentlich der Momentenverlauf  $M_z$ , d.h. das Moment aus der Einflussfunktion  $z$  am ursprünglichen System. Für das Modellproblem der linearen Elastizitätstheorie bedeutet das

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (5.51)$$

während das  $z_c$  in der Formel (5.47) die Einflussfunktion am geschwächten bzw. veränderten System ist

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}_c) + d(\mathbf{v}, \mathbf{z}_c) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.52)$$

Erweitert man die Gleichung

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) \quad (5.53)$$

um die Identität  $d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = 0$ , so ergibt sich

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c - \mathbf{z}). \quad (5.54)$$

Wenn man annimmt, dass im Bereich, über den in der  $d$ -Form integriert wird, der Unterschied  $z_c - z \approx 0$  vernachlässigbar ist, dann folgt

$$J(\mathbf{e}_m) \approx -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad (5.55)$$

als Näherung für die Abweichung  $J(\mathbf{e}_m)$  in dem Funktional. Dieses Vorgehen wird durch Betrachtungen in [12] unterstützt.

In Form von Gl. (5.55) ist die Abschätzung brauchbar, denn es werden lediglich die Lösungen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}$  am ursprünglichen Modell benötigt.

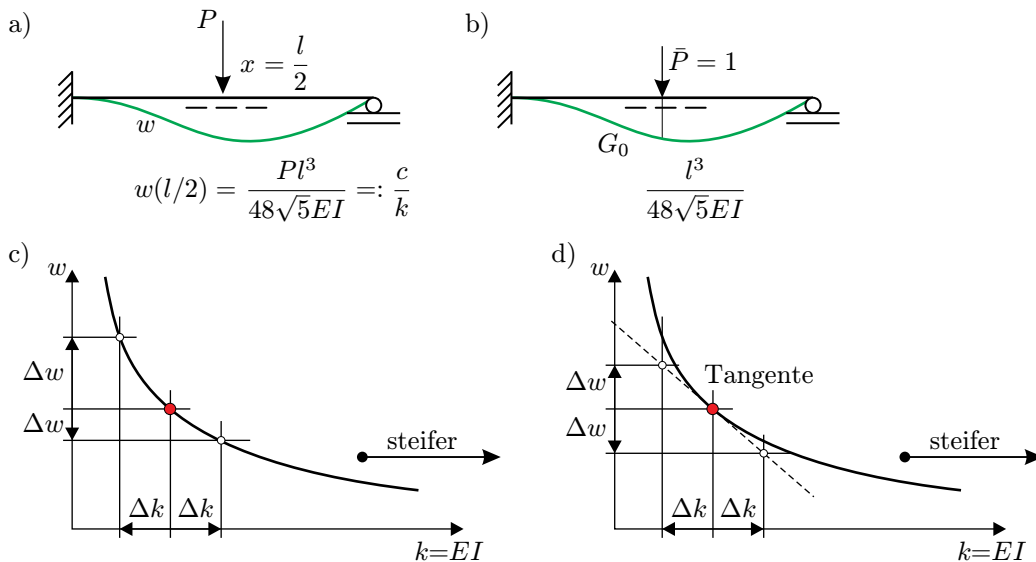
Die vereinfachte Formel soll am System in Abb. 5.1 überprüft werden. Der  $d$ -Term für den Stab mit einem veränderten  $E$ -Modul lautet

$$J(e_m) \approx -d(u, z) = -\Delta EA \int_0^l u' z' dy = -\Delta EA \int_0^l \frac{N N_z}{EA^2} dy \quad (5.56)$$

und liefert näherungsweise für die Änderung der Stabverschiebung am rechten Ende des Stabs

$$u_c(l) - u(l) \approx \frac{20.000}{100.000^2} \int_0^5 \text{[Diagramm]} dx = 0,25 \text{ mm}, \quad (5.57)$$

während die tatsächliche Änderung in der Verschiebung  $J(e_m) = 0,3125 \text{ mm}$  beträgt.



**Abb. 5.3:** Durchbiegung eines Trägers: a) System und Belastung, b) Greensche Funktion  $G_0$ , c) Durchbiegung  $w$  und d) Linearisierung.

### 5.2.4 Linearisierung

Indem man die Greensche Funktion  $z_c$  durch die Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  annähert, linearisiert man praktisch  $J(\mathbf{u})$  im Punkt  $\mathbf{u}$ , wie am Beispiel des Trägers in Abb. 5.3 erläutert werden soll.

Zum Studium des Zusammenhangs zwischen Belastung  $P$  und Durchbiegung  $u(=w)$ , kann der Träger auf eine Feder reduziert werden. Die Steifigkeit  $k$  der Feder ändert sich auf den Wert  $k + \Delta k$ . Die schwache Form des Gleichgewichts lautet mit  $a(u, v) = v k u$  und  $d(u, v) = v \Delta k u$

$$a(u, v) = u k v = (P, v) \quad (5.58)$$

$$a(u_c, v) + d(u_c, v) = u_c k v + u_c \Delta k v = (P, v). \quad (5.59)$$

Es sei  $J(u) = u$  die Auslenkung der Feder, dann gilt

$$J(u) = u = a(u, z) = z k u = \frac{1}{k} k u = u, \quad (5.60)$$

mit  $z = 1/k$  als Greensche Funktion. Ändert sich die Federsteifigkeit,  $k \rightarrow k + \Delta k$ , so gilt, wenn  $u_c$  die zu  $(k + \Delta k)$  gehörige Verschiebung bezeichnet

$$J(e_m) = J(u_c) - J(u) = -d(u, z_c) = -z_c \Delta k u = -\frac{1}{k + \Delta k} \Delta k u. \quad (5.61)$$

Dasselbe Ergebnis erhält man aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen. Weil sich die Last  $P$  nicht ändert, gilt

$$k u = P = (k + \Delta k) u_c \quad (5.62)$$

und daraus folgt, nach einigen Zwischenschritten, wieder Gl. (5.61).

Entwickelt man das Federgesetz

$$u = u(k) = \frac{P}{k} \quad (5.63)$$

in eine Taylorreihe

$$u(k + \Delta k) = \frac{P}{k} - \frac{P}{k^2} \Delta k + \dots = u - \frac{u}{k} \Delta k + \dots, \quad (5.64)$$

so erkennt man, dass die Näherung

$$u_c - u = u(k + \Delta k) - u(k) \approx -d(u, z) = -z \Delta k u = -\frac{u}{k} \Delta k \quad (5.65)$$

gerade den ersten beiden Termen der Taylorreihe entspricht und folglich die Form  $d(u, z)$  eine Linearisierung darstellt. Ähnliche Diagramme wie in Abb. 5.3 werden später im Kapitel 6 für die Scheibe gezeigt.

### 5.2.5 Asymmetrie

Linearisierung bedeutet aber eben auch, dass Änderungen  $\pm \Delta k$  rechnerisch zu symmetrischen Änderungen  $|J(e_m)|$  führen, was aufgrund des  $1/k$ -Effektes nicht der Federcharakteristik entspricht, siehe Abb. 5.3 c. Eine Feder reagiert unsymmetrisch auf Änderungen in der Federsteifigkeit. Anders gesagt: Verringert man die Steifigkeit,  $\Delta k < 0$ , dann hat dies andere Auswirkungen auf die Verschiebung als wenn man die Steifigkeit um dasselbe Maß,  $\Delta k > 0$ , erhöht. Eine Reduzierung der Steifigkeit hat größere Auswirkungen auf die Federauslenkung  $u$  als eine Versteifung<sup>1</sup>.

Es gibt ein zweites Phänomen, das mit dem  $1/k$  zusammenhängt. Wegen des Federgesetzes

$$k u = f \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{k} f \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{k^2} f, \quad (5.66)$$

ist die Ableitung von  $u(k)$  invers proportional zu  $k^2$  und so sind die zu  $\Delta k$  gehörenden Verschiebungsinkremente  $\Delta u$

$$\Delta u = u' \Delta k = -\frac{1}{k^2} \Delta k f \quad (5.67)$$

um so größer, je schwächer die Feder ist.

Was für die Feder gilt, gilt natürlich für ganze Tragwerke ebenso. Die Ausgleichsbewegungen, die ein Tragwerk vollführt, wenn sich die Steifigkeiten ändern, sind invers proportional zu den ursprünglichen Steifigkeiten. So reagieren weich aufgehängte Tragwerke sehr empfindlich gegenüber Steifigkeitsänderungen, woraus folgt, dass den Einflusskoeffizienten bei solchen Tragwerken mit einiger Skepsis zu begegnen ist.

Dass die Statik hinter der Näherung von Gl. (5.65) eigentlich nicht falsch ist, sondern die Änderungen im Kräftespiel gut wiedergibt, belegen die folgenden Gleichungen.

Eine Taylor-Entwicklung der Greenschen Funktion

$$\frac{1}{k + \Delta k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \Delta k + \dots \quad (5.68)$$

liefert für  $u_c$  das Ergebnis

$$u_c \approx \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \frac{\Delta k}{k} \right] f = u - \frac{1}{k} \underbrace{\Delta k \times u}_{\text{Kraft}}. \quad (5.69)$$

Die Steifigkeitsänderung  $k \rightarrow k + \Delta k$  bewirkt, dass das ursprüngliche  $u$  die Kraft  $(k + \Delta k) u = f + \Delta k u$  in der Feder produziert. Um diese überschüssige Kraft zu eliminieren, muss eine entgegengesetzte Bewegung  $\Delta u_c = \Delta k \cdot u_c / k$  (näherungsweise) dem  $u$  überlagert werden.

<sup>1</sup>Dasselbe gilt beim Autofahren: Wer eine Hälfte der Strecke mit 80 km/h fährt und die andere Hälfte mit 120 km/h, kommt später an, als der Kollege, der konstant 100 km/h fährt.

## Die vollständige Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned}
 \delta_{ik} = & \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iy}M_{ky}}{EI_y} dx}_{\text{Biegemomente um die } y\text{-Achse}} + \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iz}M_{kz}}{EI_z} dx}_{\text{Biegemomente um die } z\text{-Achse}} + \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iT}M_{kT}}{GI_T} dx}_{\text{Torsionsmomente um die } x\text{-Achse}} + \\
 & + \underbrace{\int_0^l \kappa_{Qz} \frac{V_{iz}V_{kz}}{GA} dx}_{\text{Querkräfte in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l \kappa_{Qy} \frac{V_{iy}V_{ky}}{GA} dx}_{\text{Querkräfte in } y\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l \frac{N_{ix}N_{kx}}{EA} dx}_{\text{Normalkräfte}} + \\
 & + \underbrace{\int_0^l N_i \alpha_T T dx}_{\text{Gleichmäßige Temperatur}} + \underbrace{\int_0^l M_{iy} \alpha_T \frac{\Delta T_z}{h} dx}_{\text{Ungleichmäßige Temperatur in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l M_{iz} \alpha_T \frac{\Delta T_y}{b} dx}_{\text{Ungleichmäßige Temperatur in } y\text{-Richtung}} + \\
 & + \underbrace{\sum_n \frac{N_{in}N_{kn}}{c_{Nn}}}_{\text{Normalkraftfedern}} + \underbrace{\sum_m \frac{M_{im}M_{km}}{c_{Mm}}}_{\text{Biegemomentenfedern}} \\
 & - \underbrace{\sum_l C_{il}c_{kl}}_{\text{Eingeprägte Lagerverschiebungen}} - \underbrace{\sum_l C_{il}c_{kl}}_{\text{Eingeprägte Widerlagerverdrehungen}}
 \end{aligned}$$

### Erläuterungen

|            |                             |                |   |
|------------|-----------------------------|----------------|---|
| $i, k$     | = Spannungszustände $i, k$  | $\Delta T_z$   | = $T_u - T_o$ (Temperaturdifferenz)         |
| $E$        | = Elastizitätsmodul         | $h$            | = Balkenhöhe                                |
| $G$        | = Schubmodul                | $\Delta T_y$   | = $T_v - T_h$ (Temperaturdifferenz)         |
| $I_y$      | = Trägheitsm. um $y$ -Achse | $b$            | = Balkenbreite                              |
| $I_z$      | = Trägheitsm. um $z$ -Achse | $c_N$          | = Translationsfedersteifigkeit [in kN/m]    |
| $I_T$      | = Torsionsträgheitsmoment   | $c_M$          | = Rotationsfedersteifigkeit [in kNm]        |
| $A$        | = Querschnittsfläche        | $C_{il}$       | = Lagerkraft in Richtung $c_{kl}$           |
| $\kappa_Q$ | = Schubflächenbeiwert       | $c_{kl}$       | = Lagerverschiebung [in m]                  |
| $\alpha_T$ | = Temperaturdehnungskoeff.  | $M_{iw}$       | = Einspannmoment in Richtung $\varphi_{kw}$ |
| $T$        | = Gleichm. Erwärmung [in K] | $\varphi_{kw}$ | = Lagerverdrehung                           |

Abb. 5.4: Mohrsche Arbeitsgleichung.

Bei Steifigkeitsmatrizen hat die Taylor-Entwicklung die folgende Form, siehe z.B. [18],

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \Delta\mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} + \dots, \quad (5.70)$$

woran die Analogie zwischen Gl. (5.69) und

$$\mathbf{u}_c = (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})^{-1} \mathbf{f} \approx \mathbf{u} - \mathbf{K}^{-1} \Delta\mathbf{K} \mathbf{u} \quad (5.71)$$

ablesbar ist.



### 5.2.6 Zusatzterme in der inneren Energie

Wie man an der Mohrschen Arbeitsgleichung ablesen kann, siehe Abb. 5.4, beschränkt sich die Wechselwirkungsenergie in realen Stabtragwerken nicht einfach nur auf das Integral

$$a(w, \hat{w}) = \int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} dx, \quad (5.72)$$

sondern zu jedem der elastischen Konstanten  $EI$ ,  $EA$ ,  $GA$ ,  $GI_T$ ,  $k$ ,  $k_\varphi$  etc. gehört ein eigener Beitrag

$$\int_0^l \frac{N \hat{N}}{EA} dx \quad \int_0^l \frac{V \hat{V}}{GA} dx \quad \text{etc.}, \quad (5.73)$$

der wiederum Anlass zu einem eigenen  $d$ -Term gibt, wenn sich die elastischen Eigenschaften ändern. Fast alle diese Beiträge sind aber von derselben Bauart wie Gl. (5.72). Unterschiede machen nur Federterme und Erweiterungen der inneren Energie, wie sie bei elastisch gebetteten Trägern auftreten.

Liegt ein Träger auf elastischen Lagern  $x_i$  mit den Federsteifigkeiten  $k_i$ , dann lautet die Wechselwirkungsenergie

$$a(w, \hat{w}) + \sum_i k_i w(x_i) \hat{w}(x_i). \quad (5.74)$$

Ändert sich die Federsteifigkeit in einer Feder<sup>2</sup>  $x_i = x$ ,  $k \rightarrow k + \Delta k$ , dann lautet der  $d$ -Term

$$d(w, \hat{w}) = \Delta k w(x) \hat{w}(x). \quad (5.75)$$

Die Änderung in einem Funktional wird näherungsweise über

$$J(e_m) = -\Delta k z_c(x) w(x) \approx -\Delta k z(x) w(x) = -\frac{\Delta k}{k} f_z(x) w(x) \quad (5.76)$$

bestimmt. Hierbei ist  $z$  die Stauchung der Feder im Lastfall  $\delta_i$  und  $w$  ist die Stauchung der Feder unter der Last  $p$ , beide Werte *vor* der Änderung der Steifigkeit. Die Schreibweise

$$J(e_m) = -\frac{\Delta k}{k} f_z(x) w(x) \quad (5.77)$$

soll daran erinnern, dass  $J(e_m)$  eine Energie ist. Es ist die Arbeit, die die Federkraft  $f_z$  aus dem Lastfall  $\delta_i$  auf dem Federweg  $w$  leistet und das ganze mit dem Verhältnis der Steifigkeiten multipliziert.

Mit Lastfall  $\delta_i$  ist die Singularität gemeint, die man aufbringen muss, um die Green'sche Funktion  $G_i$  zu erzeugen. An statisch unbestimmten Systemen entstehen aus

<sup>2</sup>Der Index  $i$  wird im Folgenden weggelassen.

einer Einzelkraft  $\bar{P} = 1 (\delta_0)$ , einem Moment  $\bar{M} = 1 (\delta_1)$ , etc. Kräfte  $f_z$  in den Lagerfedern.

Die Behandlung von elastisch gebetteten Balken

$$EI w^{IV} + c w = p \quad (5.78)$$

erfolgt analog. Die Wechselwirkungsenergie enthält ein zusätzliches Integral

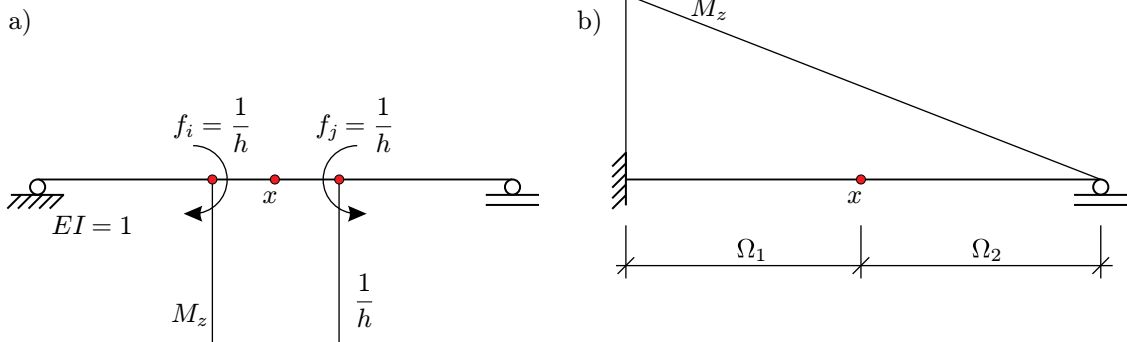
$$a(w, \hat{w}) = \int_0^l EI w'' \hat{w}'' dx + \int_0^l c w \hat{w} dx. \quad (5.79)$$

So führt eine Änderung  $c \rightarrow c + \Delta c$  der Bettungsziffer auf die Formel

$$J(e_m) \approx -d(z, w) = - \int_0^l \Delta c z w dy = - \int_0^l \frac{\Delta c}{c^2} f f_z dy \quad (5.80)$$

für den Modellfehler im Funktional  $J(w)$ , wobei  $f = c w$  bzw.  $f_z = c z$  die Bodenreaktionen sind.

Diese Darstellung wurde in [59] angewandt, um den Einfluss der Pfahlgründung bei Schwankungen im Steifemodul  $E_s$  des Baugrundes auf bemessungsrelevante Schnittgrößen zu ermitteln. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dazu befindet sich in Kapitel 6.6.



**Abb. 5.5:** Biegemoment  $M_z^h$  der FE-Einflussfunktion für  $M(x)$ : a) statisch bestimmter Träger und b) statisch unbestimmter Träger.

### 5.3 Stabtragwerke

Bei einem Stabtragwerk ist der Ausdruck

$$J(e_m) = -d(w_c, z) = -\Delta EI \int_0^l w_c'' z'' dy = -\Delta EI \int_0^l \frac{M_c}{EI_c} \frac{M_z}{EI} dy \quad (5.81)$$

bis auf die diversen Faktoren  $\Delta EI$ ,  $EI_c$ ,  $EI$  identisch mit dem Mohrschen Arbeitsintegral. Nun kann man aber mit dem Mohrschen Arbeitsintegral z.B. nicht das Moment  $J(w) = M(x)$  in einem Punkt berechnen, wie in Abschnitt 3.2.5 gezeigt werden konnte. Wieso man aber dennoch mit der obigen Formel (5.81) die *Änderung*  $J(e_m) = M_c(x) - M(x)$  berechnen kann, soll kurz aufgezeigt werden.

Es gilt, siehe Abb. 5.5 a,

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(w_h, z_h) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} \frac{1}{h} M_h(y) dy = M(x), \quad (5.82)$$

aber der zur Grenzlage gehörige Ausdruck

$$\int_0^l \frac{M_z M}{EI} dy = \int_0^l \frac{0 \cdot M}{EI} dy = 0 \quad (5.83)$$

ist null. Im mathematisch schwachen Sinne konvergiert die Folge der Rechtecke gegen das Dirac Delta, siehe Gl. (5.82), aber am Schluss hat man keine Funktion übrig, mit der man rechnen kann.

Am statisch unbestimmten Träger in Abb. 5.5 b kann man das rechnerisch nachvollziehen. Der Momentenverlauf  $M_z = M_0 + X_1 M_1 = 0 + X_1 M_1$  ist dreiecksförmig. Die statisch Überzählige  $X_1$  ist das Einspannmoment und  $M_z$  ist ein Vielfaches ( $X_1$ ) von  $M_1$ . Die Gleichung

$$a(z, w) = \int_0^l \frac{M_z M}{EI} dy = \int_0^l \frac{X_1 M_1 M}{EI} dy = 0 \quad (5.84)$$

ist gerade die Orthogonalität zwischen  $M$  und  $M_1$ , d.h. die Eigenschaft  $w'(0) = 0$ .

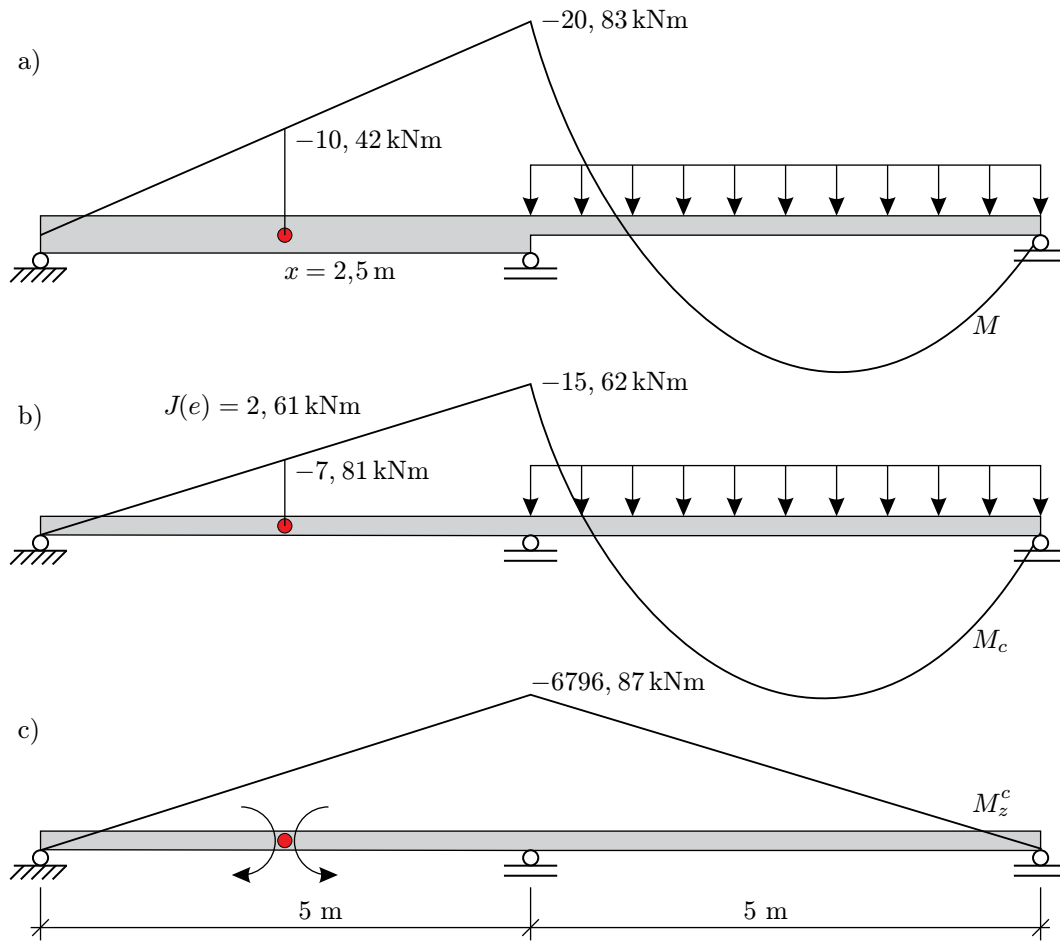
An diesem Träger kann man gut zeigen, dass der  $d$ -Term nicht null wird. Der Träger  $[0, l]$  wird in zwei Intervalle  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  unterteilt und nur in  $\Omega_1$  ändert sich die Steifigkeit. Es sei  $w_c$  die Biegelinie, die sich nach der Steifigkeitsänderung einstellt und  $z$  sei die Einflussfunktion für das Moment  $M(x)$  an einer Stelle  $x$  des Trägers mit konstanter, durchgehender Biegesteifigkeit  $EI$ .

Formuliert man die erste Greensche Identität am ursprünglichen Träger mit dem Paar  $\{w_c, z\}$  und spart eine  $\epsilon$ -Umgebung des Aufpunktes  $x$  aus, dann folgt nach dem üblichen Grenzübergang das Ergebnis

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(w_c, z)_{\Omega_\epsilon} = a(w_c, z) = 0. \quad (5.85)$$

Somit kann man schreiben

$$\begin{aligned} 0 = a(w_c, z) &= a(w_c, z)_{\Omega_1} + a(w_c, z)_{\Omega_2} = \frac{\Delta EI}{EI} a(w_c, z)_{\Omega_1} + \frac{\Delta EI}{EI} a(w_c, z)_{\Omega_2} \\ &= d(w_c, z)_{\Omega_1} + \frac{\Delta EI}{EI} a(w_c, z)_{\Omega_2} \end{aligned} \quad (5.86)$$



**Abb. 5.6:** Durchlaufträger, a) Momente bei ungleichen Steifigkeiten, b) Momente bei gleichen Steifigkeiten, c) Momentenverlauf der Greenschen Funktion.

und damit

$$d(w_c, z) = -\frac{\Delta EI}{EI} a(w_c, z)_{\Omega_2}, \quad (5.87)$$

was in der Regel nur null ist, wenn das Intervall  $\Omega_2$  auf einen Punkt schrumpft, aber dann wäre  $\Omega_1 = [0, l]$  gleich dem ganzen Träger. Und dann ist in der Tat die Formel  $J(e_m) = -d(w_c, z) = 0$  nicht anwendbar.

**Regel** In der Balkenstatik ist die Formel

$$J(e_m) = -d(w_c, z) = -d(w, z_c) \quad (5.88)$$

auch auf Kraftgrößen anwendbar, solange sich das Arbeitsintegral  $d(w_c, z)$  nur über einen Teil des Tragwerks erstreckt.

**Beispiel**

Ein Beispiel soll dies erläutern. Das Flächenträgheitsmoment  $I$  im ersten Feld des Trägers in Abb. 5.6 a ist ursprünglich doppelt so groß wie im zweiten Feld, d.h.  $EI_1 = 2 \cdot EI_2 = 90.626 \text{ kNm}^2$ , fällt dann aber auf denselben Wert wie im zweiten Feld,  $EI_1 = EI_2$ . Das Moment im Punkt  $x = 2,5 \text{ m}$  vorher und nachher beträgt

$$M(x) = -10,42 \text{ kNm} \quad M_c(x) = -7,81 \text{ kNm}, \quad (5.89)$$

was  $J(e_m) = 2,61 \text{ kNm}$  entspricht.

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Auswertung des  $d$ -Terms, wobei über das erste Feld integriert wird

$$\begin{aligned} J(e_m) &= -d(w, z_c) = -\Delta EI \int_0^5 \frac{M}{EI} \frac{M_z^c}{EI_c} dy = -\frac{\Delta EI}{EI \cdot EI_c} \int_0^5 M M_z^c dy \\ &= -\frac{\Delta EI}{EI \cdot EI_c} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6.796,87 \cdot 20,83 \cdot 5 = 2,61 \text{ kNm}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\frac{\Delta EI}{EI \cdot EI_c} = \frac{-EI_2}{2 \cdot EI_2 \cdot EI_2} = -\frac{1}{90.626}. \quad (5.91)$$

*Bemerkung:* Bei anderen Tragwerken stellt sich das Problem so nicht, da man in der Regel immer nur auf die FE-Lösung zurückgreifen kann und für die FEM gibt es keinen Unterschied zwischen schwachen und starken Einflussfunktionen für Kraftgrößen; dann funktioniert  $d(z_c, u)$  immer.

**5.4 Tragwerksmodelle**

Die Formel

$$J(e_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) \quad (5.92)$$

beschränkt sich nicht nur auf die Berechnung von Modellfehlern, grob gegenüber fein, sondern im Grunde kann man sie auch benutzen, um unterschiedliche Tragwerksmodelle miteinander zu vergleichen.

**5.4.1 Geschichtete Materialien**

Über den  $d$ -Ansatz sollte es auch möglich sein, den Versteifungseffekt von Bewehrungsstahl, sonstigen Zulagen oder von Schichten mit unterschiedlichen Steifigkeiten abzuschätzen.

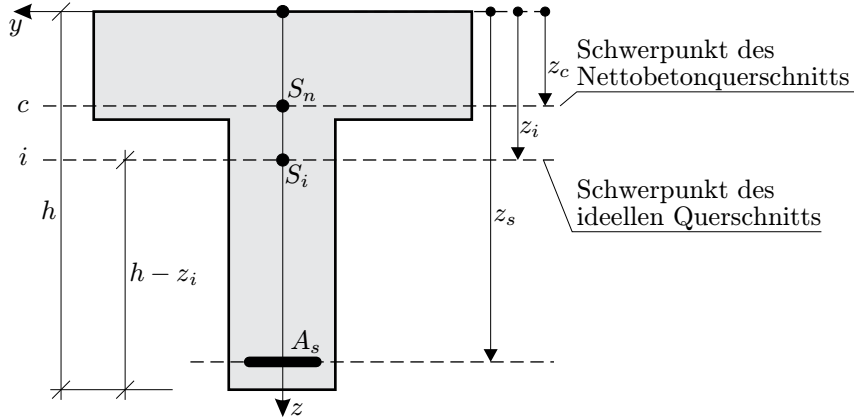


Abb. 5.7: Bezeichnungen eines Betonquerschnitts.

Es wird hierzu ein Einfeldträger mit der Spannweite  $l = 10$  m, mit einer Gleichlast  $p = 1$  kN/m und einem  $E$ -Modul von  $E_c = 2,67 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> betrachtet. Der Querschnitt sei rechteckförmig,  $b = 10$  cm,  $h = 20$  cm,  $I_c = 6.667$  cm<sup>4</sup>. Die Querschnittsbezeichnungen können Abb. 5.7 entnommen werden. Am unteren Rand liegt Stahl mit einem Querschnitt  $A_s = 10$  cm<sup>2</sup>. Das Verhältnis von  $E$ -Modul Stahl zu  $E$ -Modul Beton betrage

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_c} = 7,5.$$

Der ideelle Querschnitt und sein Schwerpunkt ergeben sich wie folgt, siehe z.B. [74],

$$A_i = A_c + (\alpha_s - 1) \cdot A_s = 265 \text{ cm}^2, \quad z_i = \frac{A_c \cdot z_c + (\alpha_s - 1) \cdot A_s \cdot z_s}{A_i} = 12,3 \text{ cm}.$$

Damit erhält man als ideales Trägheitsmoment

$$I_i = I_c + A_c \cdot (z_i - z_c)^2 + (\alpha_s - 1) \cdot A_s \cdot (z_s - z_i)^2 = 11.094 \text{ cm}^4 \approx 1,66 \cdot I_c.$$

Das Mohrsche Arbeitsintegral liefert für die  $EI$ -fache Durchbiegung in Balkenmitte den Wert

$$EI_c \cdot w\left(\frac{l}{2}\right) = \int_0^l M_z \cdot M \, dx = \frac{5}{12} \cdot \frac{10^2}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot 10 = 130,2. \quad (5.93)$$

Für den Balken ohne Bewehrung beträgt die Biegesteifigkeit

$$EI_c = 2,67 \cdot 10^3 \text{ kNcm}^2 \cdot 6.667 \text{ cm}^4 = 17.800 \cdot 10^3 \text{ kNcm}^2 \quad (5.94)$$

und für den Balken mit Bewehrung beträgt sie  $EI_i \approx 1,66 \cdot EI_c$ , so dass sich rechnerisch durch den Stahl die Durchbiegung in etwa halbiert

$$w_i\left(\frac{l}{2}\right) - w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{130,2}{EI_c} \left(\frac{1}{1,66} - 1,0\right) = -0,4 \cdot w\left(\frac{l}{2}\right). \quad (5.95)$$

Nun soll zur selben Abschätzung die  $d$ -Form benutzt werden. Bei konstanten Dehnungen und Spannungen über die Breite des Querschnitts, wie sie beim Balken vorliegen, vereinfacht sich das Integral über das Volumen  $\Omega$  des Stahls

$$-d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = -\frac{\Delta E}{E_c} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{z}) d\Omega \quad (5.96)$$

zu einem Linienintegral ( $A_s =$  Querschnitt des Stahls)

$$-d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \approx -\frac{\Delta E}{E_c} \cdot A_s \int_0^l \sigma_{xx}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{xx}(\mathbf{z}) dx, \quad (5.97)$$

mit  $\Delta E = E_s - E_c = 6,5 E_c$ . Für die Spannungen und Dehnungen in dem Balken gilt

$$\sigma(z) = \frac{M}{I} z \quad \text{und} \quad \varepsilon(z) = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EI} z$$

und somit, wenn ein festes  $z$  betrachtet wird,

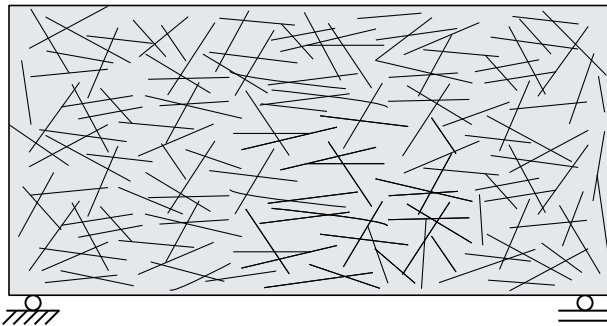
$$-d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \approx -\frac{\Delta E}{E_c} \cdot A_s \int_0^l \frac{M M_z}{EI^2} z^2 dx. \quad (5.98)$$

Der untere Rand, dort liegt der Stahl, hat den Abstand  $z = 7,7$  cm vom ideellen Schwerpunkt. Damit folgt

$$-d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \approx -6,5 \cdot 10 \cdot w\left(\frac{l}{2}\right) \cdot \frac{z^2}{I} = -6,5 \cdot 10 \cdot w\left(\frac{l}{2}\right) \cdot \frac{7,7^2}{6.666} = -0,58 \cdot w\left(\frac{l}{2}\right). \quad (5.99)$$

Die Abweichung gegenüber dem Wert aus der Balkenstatik beträgt etwa 45%.

Die hier dargestellte Vorgehensweise ist eine einfache Betrachtung des Problems und soll auf die Möglichkeiten aufmerksam machen, die die Modellfehlerbestimmung bietet.



**Abb. 5.8:** Scheibe mit Faserbeton. Die Fasern haben eine beliebige Orientierung.

## 5.4.2 Faserbeton

Der Grundgedanke des vorigen Abschnitts lässt sich z.B. auch auf Faserbeton übertragen, d.h. einen Beton, der eine Beimischung von Stahlfasern enthält, siehe Abb. 5.8.

Der Einfachheit halber wird wieder ein Balken unter Gleichlast betrachtet.  $J(w) = w(l/2)$  sei die Durchbiegung in der Mitte des Balkens. Wie oben hat die  $d$ -Form die Gestalt

$$-d(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = -\frac{\Delta E}{E_c} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{z}) \cdot \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (5.100)$$

wobei  $\Omega$  das Volumen ist, das von den Stahlfasern eingenommen wird.

Es wird der Zugbereich des Balkens betrachtet,  $0 < z < h/2$ . Weil die Einzelkraft  $\boldsymbol{\delta}_0$  und die Gleichlast  $\mathbf{p}$  ähnliche Tragbilder erzeugen, darf angenommen werden, dass die Hauptspannungen aus  $\boldsymbol{\delta}_0$  und die Hauptdehnungen von  $\mathbf{u}$  gleich gerichtet sind. Wechselt man wieder zum Balkenmodell, so geht Gl. (5.100) in den Ausdruck

$$\begin{aligned} -d(\mathbf{z}, \mathbf{u}) &\approx -\frac{\Delta E}{E_c} \cdot A_s \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_z M}{EI} \cdot \frac{z^2}{I} dx \\ &= -\alpha \cdot \frac{\Delta E}{E_c} \cdot A_s \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_z M}{EI} dx \cdot \frac{h^2}{16 \cdot I} \end{aligned} \quad (5.101)$$

über, wobei jetzt  $A_s$  der Stahlquerschnitt einer Faser ist und über die Längen  $[0, l_i]$  aller  $n$  Fasern zu integrieren ist.

Theoretisch ändert sich der Abstand  $z$  von der Schwerachse auf dem Integrationsweg  $[0, l_i]$ . Das kann man, wie hier vorgeschlagen, umgehen, indem man für  $z$  einen konstanten Wert setzt, nämlich die mittlere Höhe des Zugbereichs,  $z = h/4$ , und nur die Fasern zählt, deren Neigung  $\varphi$  gegenüber der unteren Kante in dem Intervall  $-30^\circ < \varphi < +30^\circ$  liegt, was für den Faktor  $\alpha$  den Wert  $\alpha = 60^\circ/360^\circ = 0,167$  ergäbe.

## 5.5 Sensitivitätsanalyse

In der Sensitivitätsanalyse kennt man eine sogenannte *adjoint method*, siehe z.B. [34] und [63]. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass sich ein direkter Zusammenhang zwischen der  $d$ -Form in der *vereinfachten Form*

$$J(\mathbf{e}_m) \approx -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad (5.102)$$



und der adjoint method herstellen lässt.

Es sei  $\mathbf{u}$  ( $n$ -Komponenten) der Verschiebungsvektor und  $\mathbf{p}$  ( $m$ -Komponenten) sei der Vektor der *Design-Variablen* oder Modellparameter. Gegeben ist ein Funktional  $J(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ , welches von  $\mathbf{u}$  und (möglicherweise) direkt von  $\mathbf{p}$  abhängt. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  muss einem Gleichungssystem  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$  genügen. Die Situation kann man deuten als die Bestimmung eines Funktionals  $J$  unter Einhaltung gewisser Nebenbedingungen:

$$\text{Funktional } J(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad \text{Nebenbedingung } \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.103)$$

Gesucht ist das totale Differential von  $J(\cdot, \cdot)$  bezüglich einer Änderung  $d\mathbf{p}$  der Modellparameter

$$dJ = \frac{dJ}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \frac{dJ}{dp_1} dp_1 + \dots + \frac{dJ}{dp_n} dp_n. \quad (5.104)$$

Der Gradient von  $J$  (hier als Zeilenvektor)

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} = \{J_{,p_1}, J_{,p_2}, \dots, J_{,p_n}\} \quad (5.105)$$

hat die Komponenten

$$J_{,p_i} = \frac{\partial J}{\partial p_i} + \frac{\partial J}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial p_i}. \quad (5.106)$$

Weil die Nebenbedingung  $\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$  für alle Parameter  $\mathbf{p}$  gilt, ist die Nebenbedingung invariant gegenüber den  $p_i$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) = \mathbf{K}_{,p_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{,p_i} - \mathbf{f}_{,p_i} = \mathbf{0} \quad (n) \quad (5.107)$$

und somit

$$\mathbf{u}_{,p_i} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_{,p_i} - \mathbf{K}_{,p_i} \mathbf{u}) =: \mathbf{K}^{-1} \mathbf{d}_i \quad (n). \quad (5.108)$$

Es sei  $\mathbf{D}_{(n \times m)}$  die Matrix mit den  $m$  Spalten

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_{,p_i} - \mathbf{K}_{,p_i} \mathbf{u} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.109)$$

Der Vektor

$$\mathbf{d}_i \times dp_i = (\mathbf{f}_{,p_i} - \mathbf{K}_{,p_i} \mathbf{u}) \times dp_i \quad (5.110)$$

beschreibt die Änderungen in der Energie aufgrund der Änderungen in der Struktur  $\mathbf{K}_{,p_i}$  und der Last  $\mathbf{f}_{,p_i}$ , die durch  $dp_i$  hervorgerufen werden. Durch die Änderung leistet  $\mathbf{u}$  eine zusätzliche Arbeit  $\mathbf{d}_i \times dp_i$ , die durch die Ausgleichsbewegung

$$\mathbf{u}_{,p_i} \times dp_i = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_{,p_i} - \mathbf{K}_{,p_i} \mathbf{u}) \times dp_i \quad (5.111)$$

kompensiert werden muss. Die Wechselwirkungsenergie zwischen der Ausgleichsbewegung  $\mathbf{u}_{p_i}$  und der Greenschen Funktion  $\mathbf{z}$  (oder  $\boldsymbol{\lambda}$ ) ergibt dann die Änderung in dem Funktional  $J$ .

$$\mathbf{U}_{\mathbf{p}} := \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} \quad (n \times m) \quad (5.112)$$

sei die Matrix mit den Spalten  $\mathbf{u}_{p_i}$ . Ferner sei

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = \left\{ \frac{\partial J}{\partial p_1}, \frac{\partial J}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial p_n} \right\} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial J}{\partial u_1}, \frac{\partial J}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial u_n} \right\}, \quad (5.113)$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{p}} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{U}_{\mathbf{p}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}. \\ (1 \times m) &= (1 \times m) + (1 \times n)(n \times n)(n \times m) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Es sei nun der (Spalten-) Vektor  $\boldsymbol{\lambda}$  die Lösung des Gleichungssystems

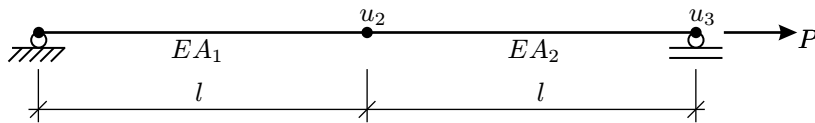
$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}^T = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{(-1)T} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{(-1)} \quad (5.115)$$

dann folgt

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}. \quad (5.116)$$

### Anwendung

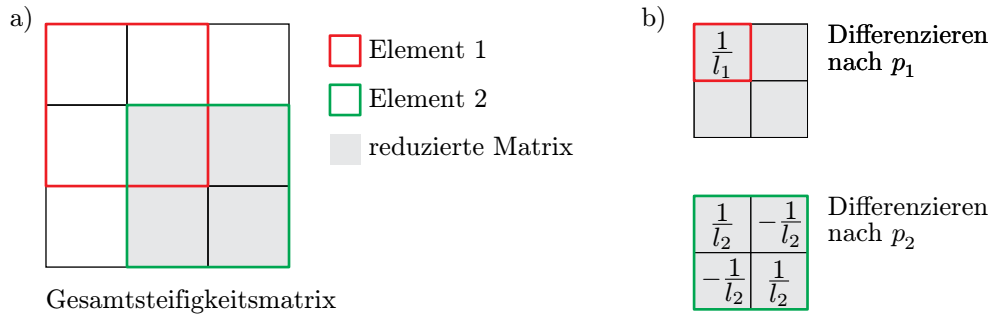
An einem einfachen Beispiel wird gezeigt, dass  $\boldsymbol{\lambda}$  gerade die Greensche Funktion für die betrachtete Zielfunktion bzw. Zielgröße ist. Als direkte Folge davon, kann darauf geschlossen werden, dass die Ableitung des Funktionals  $J$  nach  $\mathbf{u}$ , die zur Einflussfunktion gehörende Belastung liefert.



**Abb. 5.9:** Ein in zwei Elemente unterteilter Zugstab. Die Verformungen  $u_2$  und  $u_3$  sind zu berechnen und hängen von den Dehnsteifigkeiten  $EA_i$  der Stäbe ab.

Es wird das in Abb. 5.9 dargestellte, in zwei Elemente unterteilte, System betrachtet und die vorgestellte Methode darauf angewandt. Als Zielfunktion soll die Verschiebung am Knoten 3 und als Parameter die Dehnsteifigkeiten der zwei Elemente

gewählt werden,  $J(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = u_3$ . Die Ableitung von  $J$  nach  $\mathbf{u}$  ist gerade der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_3$ . Das entspricht dem Lastfall, der nötig ist, um die Einflussfunktion für die Verschiebung am Knoten 3 zu erzeugen. Somit lässt sich  $\boldsymbol{\lambda}$ , im Folgenden mit  $\mathbf{z}$  für die Greensche Funktion bezeichnet, über das lineare Gleichungssystem (5.115) bestimmen.



**Abb. 5.10:** a) Darstellung vom Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix und der für das Gleichungssystem benötigten reduzierten Steifigkeitsmatrix, b) Ableitungen der reduzierten Matrix nach den Parametern  $p_1$  und  $p_2$ .

Für die anderen zur Bestimmung des Gradienten erforderlichen Terme gilt:

$$J_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}^T, \quad \mathbf{f}_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_{p_i} = \frac{1}{EA_i} \mathbf{K}^{(i)}. \quad (5.117)$$

In Abb. 5.10 a ist der Aufbau der Steifigkeitsmatrix und in Abb. 5.10 b sind die Ableitungen der reduzierten Steifigkeitsmatrix dargestellt. Hierüber wird deutlich, dass die Ableitungen der Steifigkeitsmatrix nach den Parametern  $p_i$  immer nur das betreffende Element anspricht und somit für die Sensitivität der Zielgröße lediglich das Element  $i$  betrachtet werden muss. An Stelle des Gradienten von  $J$  soll nun das totale Differential

$$dJ = \frac{dJ}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} \quad (5.118)$$

bestimmt werden. So erhält man mit  $\mathcal{F}$  eine Verknüpfung zwischen der Änderung von  $u_3$  bei einer Änderung der Dehnsteifigkeit im Element  $i$ :  $\Delta u_3 = \mathcal{F} \cdot \Delta EA_i$ . Es gilt

$$dJ = \Delta u_3 = -\frac{\Delta EA_i}{EA_i} \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{u} = -d(z, u). \quad (5.119)$$

Dies entspricht der in diesem Kapitel für die Modellfehlerbestimmung verwendeten  $d(\cdot, \cdot)$ -Form. Hier wurden die Betrachtungen von einem anderen Blickwinkel aus vorgenommen, führen aber, zumindest für unsere Problemstellungen, zu einem identischen Ergebnis.

Wird konkret die Verschiebung  $u_3$  des Systems mit einer Belastung von  $P = 100$  kN, der Elementlänge  $l = 5$  m, einer Dehnsteifigkeit von  $EA = 50.000$  kN und eine Veränderung im Element 2 von  $\Delta EA_2 = 5.000$  kN betrachtet, so erhält man mit

$$\mathbf{z} = [0,0001; 0,0002]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = [0,01; 0,02]^T \quad (5.120)$$

für die Verschiebungsänderung näherungsweise

$$\begin{aligned} \Delta u_3 &\approx -\Delta EA_2 \cdot [0,0001; 0,0002] \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{bmatrix} \\ &= -\Delta EA_2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = -0,01 \text{ m.} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Auch hier erhält man eine lineare Funktion für die Berechnung der Änderung in der Verschiebung bei einer Variation der Dehnsteifigkeit im zweiten Element.

## 5.6 Modellfehlerbestimmung für nichtlineare Probleme

In nichtlinearen Problemen

$$\mathbf{u} \in V \quad A(\mathbf{u})(\varphi) := a(\mathbf{u}; \varphi) - (\mathbf{p}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (5.122)$$

$$\mathbf{u}_c \in V \quad A_c(\mathbf{u}_c)(\varphi) := a(\mathbf{u}_c; \varphi) + d(\mathbf{u}_c; \varphi) - (\mathbf{p}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (5.123)$$

sind die Funktionale  $a(\cdot; \cdot)$  und  $d(\cdot; \cdot)$  semilinear.

Es werden die Lagrange Funktionale

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) := \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = J(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u})(\mathbf{z}) \quad \mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{z}\} \quad (5.124)$$

$$\mathcal{L}_c(\mathbf{x}_c) := \mathcal{L}_c(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c) = J(\mathbf{u}_c) - A_c(\mathbf{u}_c)(\mathbf{z}_c) \quad \mathbf{x}_c = \{\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c\} \quad (5.125)$$

eingeführt und man sucht nach stationären Punkten  $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{z}\}$  und  $\mathbf{x}_c = \{\mathbf{u}_c, \mathbf{z}_c\}$

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}) = \left\{ \begin{array}{l} J'_u(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{u}}) - A'_u(\mathbf{u})(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{u}}) \\ -A(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{z}}) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{z}}\} \quad (5.126)$$

und

$$\mathcal{L}'_c(\mathbf{x}_c)(\hat{\mathbf{x}}) = \left\{ \begin{array}{l} J'_u(\mathbf{u}_c)(\hat{\mathbf{u}}) - A'_{cu}(\mathbf{u}_c)(\mathbf{z}_c, \hat{\mathbf{u}}) \\ -A_c(\mathbf{u}_c)(\hat{\mathbf{z}}) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{z}}\}, \quad (5.127)$$

wobei der Strich die Gateaux-Ableitung andeutet

$$J'_u(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{u}}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} [J(\mathbf{u} + \epsilon \hat{\mathbf{u}})] \right|_{\epsilon=0} \quad (5.128)$$

$$A'_u(\mathbf{u})(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{u}}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} [A(\mathbf{u} + \epsilon \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{z})] \right|_{\epsilon=0}. \quad (5.129)$$

Offensichtlich gilt

$$J(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}) \quad (5.130)$$

$$J(\mathbf{u}_c) = \mathcal{L}_c(\mathbf{x}_c) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_c) - d(\mathbf{u}_c; \mathbf{z}_c). \quad (5.131)$$

Wechselt man in allen Gleichungen zu  $\mathcal{L}_c$ , so ist eine Taylor Entwicklung

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) &= \mathcal{L}_c(\mathbf{x}_c) - \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_c(\mathbf{x}_c) - \mathcal{L}_c(\mathbf{x}) - d(\mathbf{u}; \mathbf{z}) \\ &= \int_0^1 \mathcal{L}'_c(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e})(\mathbf{e}) d\lambda - d(\mathbf{u}; \mathbf{z}) \quad \mathbf{e} = \mathbf{x}_c - \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.132)$$

möglich. Mit der Trapezregel

$$\int_0^1 \mathcal{L}'_c(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e})(\mathbf{e}) d\lambda = \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}'_c(\mathbf{x}_c)(\mathbf{e}) + \mathcal{L}'_c(\mathbf{x})(\mathbf{e}) + \mathfrak{R} \} \quad (5.133)$$

erhält man

$$\mathcal{L}'_c(\mathbf{x}_c)(\mathbf{e}) + \mathcal{L}'_c(\mathbf{x})(\mathbf{e}) = -d(\mathbf{u}; \mathbf{e}_z) - d'(\mathbf{u}; \mathbf{e}_u, \mathbf{z}), \quad (5.134)$$

wobei ( $\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}_z = \mathbf{z}_c - \mathbf{z}$ ) und wo  $\mathfrak{R}$  das folgende Restglied ist

$$\mathfrak{R} = \int_0^1 \mathcal{L}'''_c(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{e}) \cdot \lambda(1 - \lambda) d\lambda, \quad (5.135)$$

so dass schließlich die Abschätzung

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) = -d(\mathbf{u}; \mathbf{z}) - \frac{1}{2} \{ d(\mathbf{u}; \mathbf{e}_z) + d'(\mathbf{u}; \mathbf{e}_u, \mathbf{z}) - \mathfrak{R} \} \approx -d(\mathbf{u}; \mathbf{z}) \quad (5.136)$$

folgt. Weitere Details sind [12] zu entnehmen.

Der entscheidende Punkt ist wieder, dass auch hier die Änderung lokal fassbar ist, d.h. es muss nur über das Element  $\Omega_e$  integriert werden, dessen Steifigkeiten sich ändern.

## 5.7 Verbesserung der Prognose

Das in den vorigen Kapiteln ausführlich vorgestellte Verfahren liefert die Richtungsableitung der Änderung infolge der Parameterveränderung. Daher sind lediglich Prognosen möglich, die sich in der Form einer Geradengleichung darstellen lassen. Die Änderung in der Zielgröße ist im Allgemeinen aber nichtlinear, so dass lediglich bei einer kleinen Parametervariation davon auszugehen ist, dass die Veränderung in der Zielgröße mit guter Genauigkeit vorhergesagt werden kann.

Das Bestreben ist es, die Aussagekraft der Näherungsformel

$$J(\mathbf{e}_m) \approx -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad (5.137)$$

zu erhöhen.

Zunächst zeigt es sich, dass es möglich ist, dem  $d$ -Term verschiedene Fassungen zu geben, die sich ihrer Genauigkeit nach unterscheiden.

Es soll mit dem Balken begonnen werden. Eine direkte Übernahme der Formel

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) \approx -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad (5.138)$$

liefert im Fall des Balkens das Ergebnis

$$J(w_c) - J(w) \approx -d(w, z) = -\frac{\Delta EI}{EI} \int_0^l \frac{M M_z}{EI} dy. \quad (5.139)$$

Geht man nun noch einmal eine Stufe zurück, zur exakten Gleichung

$$J(w_c) - J(w) = -\Delta EI \int_0^l w'' z_c'' dy \quad (5.140)$$

und setzt  $M = -EI w''$  und  $M_z^c = -(EI + \Delta EI) z_c''$ , so ergibt sich

$$J(w_c) - J(w) = -\frac{\Delta EI}{EI + \Delta EI} \int_0^l \frac{M M_z^c}{EI} dy. \quad (5.141)$$

Macht man nun die Substitution  $M_z^c = M_z$ , so erhält man

$$J(w_c) - J(w) \approx J(e_m)^{(1)} := -\frac{\Delta EI}{EI + \Delta EI} \int_0^l \frac{M M_z}{EI} dy. \quad (5.142)$$

Man vergleiche dies mit Gl. (5.139). Diese Formel liefert bessere Ergebnisse als Gl. (5.139), da die Parameteränderung einen nichtlinearen Verlauf zur Folge hat; die numerischen Untersuchungen in Kapitel 6 bestätigen dies.

Dies ist schnell erklärt: Wenn sich das  $EI$  in einem Intervall  $[x_1, x_2]$  ändert,  $EI \rightarrow EI + \Delta EI$ , dann kann sich das Moment ändern,  $M \rightarrow M + \Delta M$ , oder die Krümmung,  $w'' \rightarrow w'' + \Delta w''$  (oder beides). In einem statisch bestimmten Träger ändert sich die Krümmung, nicht das Moment. In einem statisch unbestimmten Träger ändert sich normalerweise beides. Wenn man aber an das Kraftgrößenverfahren denkt und die Aufspaltung in Lastspannungszustand am statisch bestimmten Hauptsystem und die Einheitsspannungszustände, dann weiß man, dass auch bei statisch unbestimmten Systemen die Änderungen primär in den Krümmungen liegen.

Die beiden Gleichungen (5.139) und (5.142) basieren gerade auf dieser unterschiedlichen Betrachtungsweise: Hinter Gl. (5.139) steckt, wie man zeigen kann, implizit die Annahme, dass die Krümmungen gleich sind,  $w_c'' = w''$ , während die genauere Formel (5.142) auf der Annahme  $M_c = M$  basiert.

Die Abweichung zwischen  $M_c$  und  $M$  kann im Übrigen maximal linear sein. Das folgt aus der Tatsache, dass die Belastung  $p$  sich *nicht* ändert und die zweite Ableitung von  $-M$  die Belastung ist:

$$-M_c'' = -M'' + \Delta M'' = p = -M'' \quad \Rightarrow \quad \Delta M'' = 0. \quad (5.143)$$

Die obige Verbesserung lässt sich natürlich auch auf den Stab

$$J(u_c) - J(u) \approx J(e_m)^{(1)} := -\frac{\Delta EA}{EA + \Delta EA} \int_0^l \frac{N N_z}{EA} dy \quad (5.144)$$

und die Feder übertragen

$$J(e_m)^{(1)} := -\Delta k w z = -\frac{\Delta k}{k + \Delta k} \frac{f f_z}{k}. \quad (5.145)$$

Numerische Betrachtungen haben gezeigt, siehe z.B. [59], dass die Wahl von  $EI + 0,5 \cdot \Delta EI$  eine ebenso gute Näherung wie die vorgestellte Variante ist. Der berechnete Fehler wird dann mit  $J(\cdot)^{(0,5)}$  bezeichnet. Gleiches gilt natürlich auch für den Stab bzw. die Feder. Dabei besitzen diese beiden Varianten der Modellfehlerbestimmung Schrankeneigenschaften. Bei allen Rechnungen war es so, dass der tatsächliche Modellfehler  $J(\cdot)$  von den beiden Approximationen  $J(\cdot)^{(1)}$  und  $J(\cdot)^{(0,5)}$  eingeschlossen wurde. Bei einer Schwächung, d.h.  $\Delta EI < 0$ , gilt

$$|J(\cdot)^{(0,5)}| \leq |J(\cdot)| \leq |J(\cdot)^{(1)}| \quad (5.146)$$

und bei einer Versteifung, d.h.  $\Delta EI > 0$ , gilt

$$|J(\cdot)^{(1)}| \leq |J(\cdot)| \leq |J(\cdot)^{(0,5)}|. \quad (5.147)$$

### 5.7.1 Anwendung bei der Scheibe

Diese Verbesserungen lassen sich direkt auf die lineare Elastizitätstheorie übertragen. Dabei sollen zunächst Veränderungen des  $E$ -Moduls in einem Element als Auslöser für den Modellfehler berücksichtigt werden, weshalb die Berechnung des  $d$ -Terms als ein Gebietsintegral über das betroffene Element  $\Omega_e$  auszuführen ist. Es erfolgt der Wechsel zur Methode der finiten Elemente, da eine analytische Lösung im Allgemeinen nicht zur Verfügung steht.

Für den Modellfehler in der Zielgröße (Verschiebung oder Spannung) mit dem Materialtensor  $\mathbf{C}_c = \mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}$  gilt

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_h^c - \mathbf{u}_h) &\approx -d(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) = - \int_{\Omega_e} \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) \cdot \Delta\mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{z}_h)] d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_e} \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)] \cdot \Delta\mathbf{S}(\mathbf{z}_h) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.148)$$

Dies entspricht der einfachen Näherung am Balken.

Eine Verbesserung erhält man wie folgt: Es wird zunächst von der exakten Gleichung für den Modellfehler ausgegangen, d.h.

$$\begin{aligned} -d(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h^c) &= - \int_{\Omega_e} \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) \cdot \Delta\mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{z}_h^c)] d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_e} \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)] \cdot \Delta\mathbf{C}[\underbrace{\mathbf{C}_c^{-1}[\mathbf{C}_c[\mathbf{E}(\mathbf{z}_h^c)]]}_{\mathbf{S}_c}] d\Omega. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Für die exakten Spannungen  $\mathbf{S}_c$  der Greenschen Funktion wird angenommen, dass

$$\mathbf{S}_c(\mathbf{z}_h^c) \approx \mathbf{S}(\mathbf{z}_h) = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{z}_h)] := \mathbf{S}^z. \quad (5.150)$$

Die Betrachtung der Elastizitätsmatrix  $\Delta\mathbf{C}\mathbf{C}_c^{-1}$  mit

$$\Delta\mathbf{C} = \frac{\Delta E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_c = \frac{E + \Delta E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.151)$$

führt auf die Matrix

$$\Delta\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_c^{-1} = \frac{\Delta E}{E + \Delta E} \cdot \mathbf{I}. \quad (5.152)$$

Damit lässt sich eine verbesserte Modellfehlerbestimmung analog zum Stab oder Balken beschreiben:

$$J(\mathbf{u}_h^c - \mathbf{u}_h) \approx J(\mathbf{u}_h^c - \mathbf{u}_h)^{(1)} := - \int_{\Omega_e} \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)] \cdot \frac{\Delta E}{E + \Delta E} \mathbf{S}^z d\Omega_e. \quad (5.153)$$

Mit dieser Darstellung wird die Analogie zur Schreibweise vom Balken deutlich,

$$\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{S}(\mathbf{u}_h)] \doteq \frac{M}{EI} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta E}{E + \Delta E} \mathbf{S}^z \doteq \Delta EI \frac{M^z}{EI + \Delta EI}. \quad (5.154)$$



## 5.8 Bestimmung von $u_c$ am Grundsystem

Die Prognosefähigkeit wäre optimal, wenn man die exakte Formel

$$J(\mathbf{e}_m) = -d(\mathbf{u}, \mathbf{z}_c) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z}) \quad (5.155)$$

benutzen könnte. Das setzt voraus, dass man die Lösung  $\mathbf{u}_c$  am modifizierten System kennt. Zumindest in der Stabstatik ist es möglich, die Lösung  $\mathbf{u}_c$  oder genauer, die Werte von  $\mathbf{u}_c$ , die man für die Aufstellung von  $d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z})$  braucht, am Grundsystem zu berechnen.

Genau genommen sind es zwei Ideen, die es möglich machen mit der exakten Formel zu arbeiten, ohne die Lösung  $\mathbf{u}_c$  zu kennen:

1. Umwandlung von  $d(\mathbf{u}_c, \mathbf{z})$  in ein Randintegral.
2. Bestimmung der unbekannt Randwerte  $\mathbf{u}_c$  aus einem linearen Gleichungssystem bzw. einer Integralgleichung.

### 5.8.1 Randintegral

Der Einfachheit halber wird ein Stab betrachtet. Dadurch wird aus den Randintegralen (z.B. für den Fall einer Scheibe) eine Punktauswertung.

In einem Abschnitt  $[x_1, x_2]$  des Stabes, ändert sich die Steifigkeit von  $EA$  auf  $EA + \Delta EA$ . Es sei

$$\alpha = \frac{\Delta EA}{EA} \quad (5.156)$$

die relative Änderung der Steifigkeit und  $z$  die zur gesuchten Zielgröße gehörige Greensche Funktion. Die  $d$ -Form lautet bekannterweise

$$d(z, u_c) = \int_{x_1}^{x_2} \Delta EA z' u_c' dy = \int_{x_1}^{x_2} \alpha EA z' u_c' dy = \int_{x_1}^{x_2} \alpha N_z u_c' dy. \quad (5.157)$$

Formuliert man nun den Satz von Betti an zwei nichtgleichen Systemen, also an einem System mit  $EA = \text{const.}$  und dem System mit einer Veränderung im Abschnitt  $[x_1, x_2]$ , so erhält man für den Modellfehler  $J(\mathbf{e}_m)$  die Punktauswertung

$$J(\mathbf{e}_m) = -[\alpha N_z u_c]_{x_1}^{x_2} \quad (5.158)$$

an Stelle der Integralauswertung. Das Gebietsintegral konnte so auf einfache Weise in einen Randausdruck übertragen werden. Allerdings ist  $u_c$  aus dem veränderten System. Ziel ist es nun,  $u_c$  über ein lineares Gleichungssystem zu bestimmen.

### 5.8.2 Bestimmung von $u_c$ an den Stellen $x_1$ und $x_2$

Es werden nun die Gleichungen für den Modellfehler an den Stellen  $x_1$  und  $x_2$  für die unbekanntenen Größen  $u_c(x_1)$  und  $u_c(x_2)$  mit der gleichen Technik aufgestellt. Dabei handelt es sich immer um Greensche Funktionen für Weggrößen, in diesem Fall um  $G_0$ . Man erhält so zwei Gleichungen

$$u_c(x_1) - u(x_1) = -[\alpha N_{G_0[x_1]} u_c]_{x_1}^{x_2} \quad (5.159)$$

$$u_c(x_2) - u(x_2) = -[\alpha N_{G_0[x_2]} u_c]_{x_1}^{x_2} \quad (5.160)$$

bzw. nach Umstellen

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha N_{G_0[x_1]}(x_1) & \alpha N_{G_0[x_1]}(x_2) \\ -\alpha N_{G_0[x_2]}(x_1) & 1 + \alpha N_{G_0[x_2]}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(x_1) \\ u_c(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

für die Bestimmung von  $u_c(x_1)$  und  $u_c(x_2)$ . So lässt sich folglich der Modellfehler  $J(e_m)$  exakt ermitteln. Die Übertragung der Methode auf den Balken wurde anhand eines numerischen Beispiels in Abschnitt 6.1.2 vorgenommen.

Im eindimensionalen Fall handelt es sich nicht um Integralgleichungen, sondern um ein lineares Gleichungssystem für die Randwerte. Integralgleichungen sind es erst in höherer Dimension. Aber sinngemäß sind es eben Kopplungen der Randterme.

### 5.8.3 Scheibe

Die gleiche Technik lässt sich natürlich auch bei Flächentragwerken, z.B. bei Scheiben, anwenden, um den  $d$ -Term

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{G}_i) \quad (5.162)$$

in ein Randintegral umzuwandeln. Es sei  $\Omega_c$  das Gebiet, in dem der Elastizitätstensor eine Veränderung gegenüber dem Grundmodell aufweist, und  $\Gamma_c$  sei der Rand von  $\Omega_c$ .

Wird die gleiche Logik wie im vorigen Kapitel angewandt (Formulierung der zweiten Greenschen Identität für ungleiche Systeme), so führt das auf die Randintegraldarstellung des Modellfehlers für die Scheibe:

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) = - \int_{\Gamma_c} \Delta \mathbf{t}(\mathbf{G}_i) \cdot \mathbf{u}_c ds. \quad (5.163)$$

Dabei ist  $\Delta \mathbf{t}(\cdot)$  der modifizierte Spannungsvektor, welcher durch Multiplikation des Spannungstensors  $\mathbf{t}$  mit  $\Delta E/E$  ermittelt wird. Diese Vorgehensweise ist analog zum

betrachteten Stab. Für die Auswertung werden allerdings die Randwerte  $\mathbf{u}_c$  der modifizierten Lösung benötigt.

Um diese Werte zu erhalten, kann man mit der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}_0$  eine Integralgleichung für  $\mathbf{u}_c$  formulieren. Zu dieser Integralgleichung kommt man, wenn man in Gl. (5.163) für  $\mathbf{G}_i$  die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_0$  setzt und den Aufpunkt  $\mathbf{x}$  auf den Rand legt

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_c} \Delta \mathbf{t}(\mathbf{G}_0[\mathbf{x}]) \cdot \mathbf{u}_c ds = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c. \quad (5.164)$$

Diese Integralgleichung ist allerdings nur mit einigem Aufwand lösbar. Daher wird im Folgenden eine andere Technik vorgeschlagen, wie man die Werte  $\mathbf{u}_c$  näherungsweise bestimmen kann.

Bemerkenswert an der obigen Gl. (5.164) ist aber, dass sie eine *Kopplung* zwischen den alten ( $\mathbf{u}$ ) und den neuen Randwerten ( $\mathbf{u}_c$ ) von  $\Omega_c$  darstellt. Das heißt, wenn das Tragwerk aufgrund von Steifigkeitsänderungen in einem Bereich  $\Omega_c$  in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, dann muss es Rücksicht nehmen auf den Zustand *ante*. Es muss folglich seine Geschichte kennen, es muss wissen, aus welcher Gleichgewichtslage  $\mathbf{u}$  heraus es in die neue Lage  $\mathbf{u}_c$  wechselt.

### 5.8.4 Finite Elemente

In der FEM ist die Wechselwirkungsenergie eine quadratische Form in den Knotenwerten der Funktionen  $\mathbf{u}_h$  und  $\hat{\mathbf{u}}_h$

$$a(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T. \quad (5.165)$$

Dies gilt auch für

$$d(\mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}}_h) = \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (5.166)$$

wobei die symmetrische Matrix  $\Delta \mathbf{K}$  zusammen mit der Ausgangsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K} \quad (5.167)$$

die Steifigkeitsmatrix des modifizierten Systems darstellt. Die Änderung in einer Zielgröße ergibt sich somit zu

$$J(\mathbf{e}_m^h) := J(\mathbf{u}_c^h) - J(\mathbf{u}^h) = -d(\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_z) = -\mathbf{u}_z^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c = -\Delta \mathbf{f}_z^T \mathbf{u}_c. \quad (5.168)$$

Das Problem sind die unbekanntenen Knotenwerte  $\mathbf{u}_c$ .

Um sie zu ermitteln, werden für  $J(\cdot)$  nacheinander die  $n$  Knotenfunktionale

$$J_i(\mathbf{u}) := u(\mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.169)$$

gewählt und man erhält so

$$\mathbf{u}_c - \mathbf{u} = -\mathbf{U}_z^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c, \quad (5.170)$$

wobei  $\mathbf{u}_c, \mathbf{u}$  die Knotenverschiebungen und die  $n$  Spalten  $\mathbf{u}_z$  der Matrix  $\mathbf{U}_z$  die Knotenwerte der  $n$  Greenschen Funktionen in den Knoten des (ganzen) Netzes sind.

Die Spalten der Inversen  $\mathbf{K}^{-1}$  sind gerade diese Knotenwerte und daher ist  $\mathbf{U}_z$  identisch mit  $\mathbf{K}^{-1}$ , was bereits ausführlich in Abschnitt 3.2.7 behandelt wurde. So folgt

$$\mathbf{u}_c - \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c, \quad (5.171)$$

oder

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u}_c = \mathbf{u} \quad (5.172)$$

und mit der Näherung, siehe z.B. [18]

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} + \dots \quad (5.173)$$

ergibt sich

$$\mathbf{u}_c \approx (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u} \quad (5.174)$$

für die Knotenwerte  $\mathbf{u}_c$ . Im Falle einer einzelnen Feder  $k$  wäre dies gerade die Formel  $u_c = u - \Delta k/k \cdot u$ .

Wenn die Matrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{D} + \mathbf{S} \quad (5.175)$$

in die Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  und eine Matrix  $\mathbf{S}$  mit den Nebendiagonalelementen von  $\mathbf{K}$  aufgeteilt wird, dann kann die Inverse von  $\mathbf{K}$  wie folgt approximiert werden

$$(\mathbf{D} + \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1} + \dots \quad (5.176)$$

Dies in Gl. (5.174) eingesetzt, ergibt die Näherung

$$\mathbf{u}_c \approx \{ \mathbf{I} - (\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1}) \Delta \mathbf{K} \} \mathbf{u}. \quad (5.177)$$

Untersuchungen mit dieser Formel wurden in Kapitel 6.1.2 durchgeführt. Es zeigt sich dabei allerdings, dass sich der erhoffte Gewinn an Genauigkeit nicht einstellt, oder zumindest nicht bei den gewählten Beispielen. Die Abschätzungen  $J(\cdot)^{(1)}$  oder  $J(\cdot)^{(0,5)}$  liefern im Vergleich deutlich bessere Ergebnisse.

### Alternative Herleitung

Die Gleichung

$$\mathbf{u}_c = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K})^{-1} \mathbf{u} \quad (5.178)$$

kann man auch noch auf einem anderen Wege herleiten.

Weil sich die elastischen Eigenschaften des Tragwerks ändern, aber die Belastung  $\mathbf{p}$  nicht, bedeutet dies, wegen des Prinzips der virtuellen Verrückungen, dass sich die virtuelle innere Energie = virtuelle äußere Arbeit nicht ändert

$$\delta A_i^c = \delta A_a^c = \delta A_a = \delta A_i. \quad (5.179)$$

Der Test mit einer virtuellen Verrückung  $\varphi_i$  liefert vor und nach der Änderung dasselbe Ergebnis

$$\begin{aligned} \text{vorher } \mathbf{f}_i = (\mathbf{p}, \varphi_i) &= a(\mathbf{u}_h, \varphi_i) \\ &= a(\mathbf{u}_c^h, \varphi_i) + d(\mathbf{u}_c^h, \varphi_i) = (\mathbf{p}, \varphi_i) = \mathbf{f}_i \quad \text{nachher,} \end{aligned} \quad (5.180)$$

so dass in den beiden FE-Gleichungen die rechte Seite dieselbe ist

$$(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u}_c = \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (5.181)$$

Umgestellt ergibt sich

$$\mathbf{K} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}) = -\Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c. \quad (5.182)$$

Diese Gleichung von links mit dem Knotenvektor  $\mathbf{u}_z$  einer Greenschen Funktion multipliziert, ist gerade die Differenz des zugehörigen Funktionals

$$J(\mathbf{u}_c^h - \mathbf{u}^h) = \mathbf{u}_z^T \mathbf{K} (\mathbf{u}_c - \mathbf{u}) = -\mathbf{u}_z^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}_c. \quad (5.183)$$

Wählt man als Funktionale nacheinander die Knotenwerte  $J(\mathbf{u}) = u(\mathbf{x}_i)$  und erinnert sich, dass  $\mathbf{u}_z[\mathbf{x}_i]$  gerade die Spalte  $i$  von  $\mathbf{K}^{-1}$  ist, dann folgt genau Gl. (5.178).

## 5.9 Kombination von Modellfehler und Diskretisierungsfehler

Es soll an dieser Stelle aufgezeigt werden, dass man mit guter Näherung den numerischen Fehler und den Modellfehler unabhängig voneinander berechnen kann.

Bei einer numerischen Berechnung sind der Diskretisierungsfehler und der Modellfehler eigentlich nicht zu trennen. Mathematisch ist die Kombination der beiden Fehler die Frage nach dem Fehler

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}_h). \quad (5.184)$$

Es wird der Abstand zwischen der FE-Lösung  $\mathbf{u}_h$  des vereinfachten Modells und der exakten Lösung  $\mathbf{u}_c$  des physikalisch zwar korrekt gestellten, aber zu komplexen und damit unlösbaren Modells, berechnet.

Mit denselben Techniken wie zuvor, siehe Kapitel 5.2 und 5.6, erhält man die folgende Darstellung für den Fehler, siehe auch [12],

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}_h) &= -d(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h) \\ &+ \frac{1}{2} \{ \rho(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_c - \mathbf{z}_h) + \rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_h) \} \\ &- \frac{1}{2} \{ d(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_z) + d'(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}_u, \mathbf{z}_h) \} + \frac{1}{2} \mathfrak{R}^{(3)} \end{aligned} \quad (5.185)$$

wobei  $\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{e}_z = \mathbf{z}_c - \mathbf{z}_h$ .

In [12] wird vorgeschlagen die exakten Lösungen  $\mathbf{u}_c$  und  $\mathbf{z}_c$  durch ein upgrade der FE-Lösungen zu ersetzen. Konkret werden in [12] die stückweise bilinearen FE-Lösungen  $\mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{z}_h$  durch stückweise biquadratische Ansätze interpoliert,  $\mathbf{u}_h^{(2)}$  und  $\mathbf{z}_h^{(2)}$ . Es wird

$$\mathbf{z}_c - \mathbf{z}_h \approx \mathbf{z}_h^{(2)} - \mathbf{z}_h \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_h \approx \mathbf{u}_h^{(2)} - \mathbf{u}_h \quad (5.186)$$

gesetzt. Wegen der Galerkin-Orthogonalität gilt

$$\rho(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h^{(2)} - \mathbf{z}_h) = \rho(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h^{(2)}) \quad (5.187)$$

$$\rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \mathbf{u}_h^{(2)} - \mathbf{u}_h) = \rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \mathbf{u}_h^{(2)}) . \quad (5.188)$$

Vernachlässigt man noch die Terme höherer Ordnung, so führt das auf die Darstellung

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}_h) \approx \eta_h + \eta_m \quad (5.189)$$

für den Fehler mit den Fehlerschätzern

$$\eta_h = \frac{1}{2} \{ \rho(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h^{(2)}) + \rho^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \mathbf{u}_h^{(2)}) \} \quad (5.190)$$

$$\eta_m = -d(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h) . \quad (5.191)$$

Somit lässt sich der Modellfehler und der Approximationsfehler getrennt voneinander bestimmen.

# 6 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden numerische Ergebnisse zur Berechnung des Modellfehlers vorgestellt, die die Anwendung der in den vorherigen Kapiteln theoretisch erarbeiteten Verfahren verdeutlichen sollen.

## 6.1 Modellfehlerberechnung am Balken

Betrachtet wird ein Biegebalken, der in einem Teilbereich eine Schwächung erfährt, was einer Abminderung der Steifigkeit entspricht. Ausgang der Betrachtung sind das Originalproblem und das modifizierte Problem in der schwachen Form

$$\int_0^l EI w'' v'' dx = \int_0^l p v dx \quad \text{und}$$
$$\int_0^l EI w_c'' v'' dx + \int_0^l \Delta EI w_c'' v'' dx = \int_0^l p v dx .$$

Der Modellfehler in einem Funktional  $J(\cdot)$  lässt sich mit der modifizierten Green-schen Funktion  $z_c$  wie folgt darstellen

$$J(e_m) = - \int_0^l \Delta EI w'' z_c'' dy = -d(w, z_c) . \quad (6.1)$$

Die Näherungsformel verwendet dagegen die duale Lösung  $z$  am Originalsystem

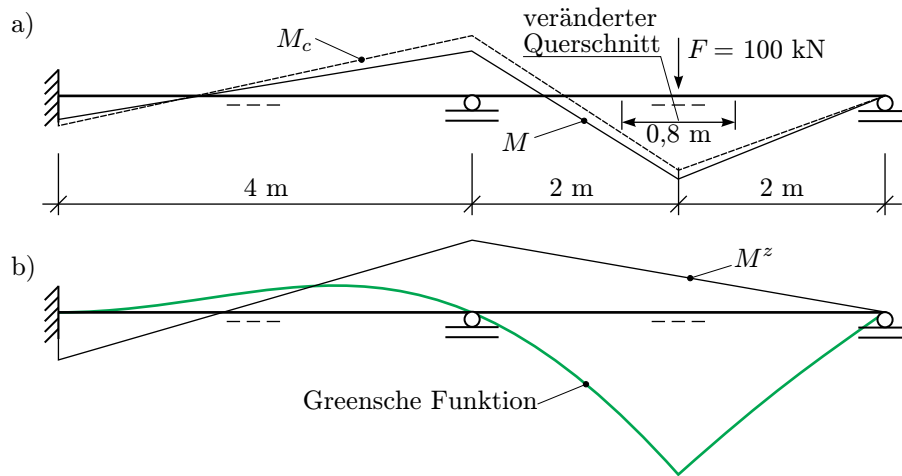
$$J(e_m) \approx - \int_0^l \Delta EI w'' z'' dy = -d(w, z) , \quad (6.2)$$

um die Änderung in der Zielgröße abzuschätzen.

### 6.1.1 Zweifeldträger – Verfahrensvergleich

Gegenstand sind die drei Varianten für die Näherungsformel

$$J(e_m) \approx -d(w, z) = - \int_0^l \Delta EI w'' z'' dy . \quad (6.3)$$



**Abb. 6.1:** Querschnittsschwächung an einem Biegebalken. a) Als durchgehende Querschnittsfläche wird  $b/h = 40/90 \text{ cm}^2$  angenommen. Im gekennzeichneten Bereich wird die Trägerhöhe variiert. Material C 30/37. b) Greensche Funktion und der dazu gehörende Momentenverlauf.

Die erste Variante ist die naive Variante, wenn man einfach die zweiten Ableitungen durch die Momente ersetzt

$$J(e_m) \approx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI} \frac{M M^z}{EI} dy. \quad (6.4)$$

Wie in Kapitel 5.7 erläutert, sollte man eine bessere Abschätzungen mit der Formel

$$J(e_m) \approx J(e_m)^{(1)} := - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI + \Delta EI} \frac{M M^z}{EI} dy \quad (6.5)$$

erhalten. Das exakte Ergebnis sollte sich mit der Formel

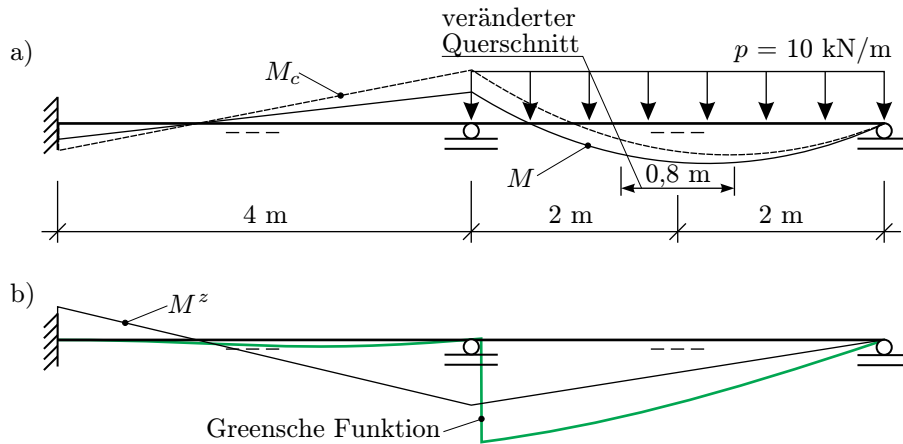
$$J(e_m) \approx J(e_m)^{(0,5)} := - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta EI}{EI + 0,5 \cdot \Delta EI} \frac{M M^z}{EI} dy \quad (6.6)$$

weiter eingrenzen lassen.

Diese drei Formeln sollen auf das in Abb. 6.1 dargestellte System angewandt werden. Dabei soll die Änderung des Moments unter der Einzellast  $F = 100 \text{ kN}$  bestimmt werden, wenn sich im markierten Bereich die Querschnittshöhe ändert.

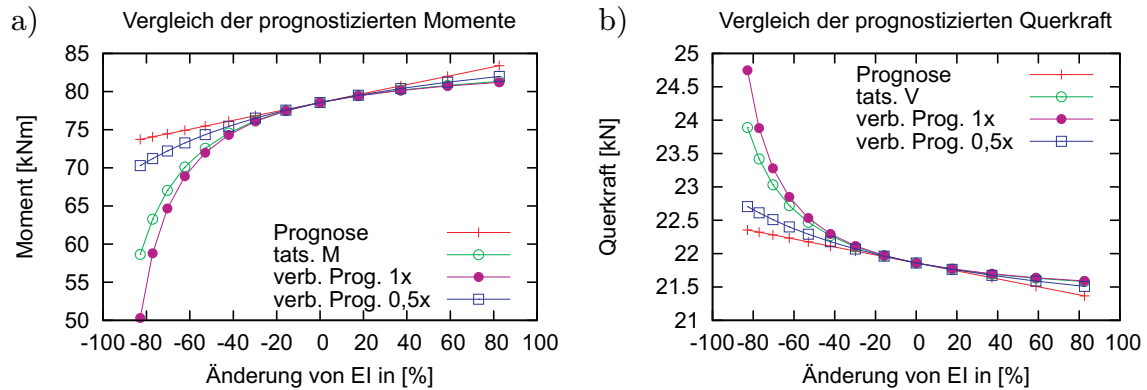
Dazu muss neben dem Momentenverlauf  $M$  unter der Einzellast der Momentenverlauf  $M^z$  der Greenschen Funktion am vereinfachten System ( $EI = 777.600 \text{ kNm}^2$ ) bestimmt werden, siehe Abb. 6.1 a und b. Im Vergleich dazu ist der Momentenverlauf  $M_c$  bei veränderlicher Querschnittshöhe ebenfalls dargestellt.





**Abb. 6.2:** Querschnittsschwächung an einem Biegebalken mit den Abmessungen  $b/h = 40/90 \text{ cm}^2$  und aus Beton C 30/37. Im markierten Bereich variiert die Trägerhöhe. b) Greensche Funktion für die Querkraft 10 cm rechts vom mittleren Auflager und der dazu gehörende Querkraftverlauf.

Die zweite Untersuchung gilt der Querkraft direkt neben dem mittleren Auflager unter einer Gleichstreckenlast im zweiten Feld, siehe Abb. 6.2. Auch hier sind wieder die Momentenverläufe aus der Belastung und der Einflussfunktion dargestellt.



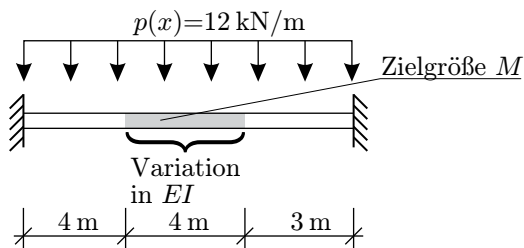
**Abb. 6.3:** Vergleich der unterschiedlichen Methoden a) das veränderte Moment am System 1 vorher zu sagen und b) die veränderte Querkraft am System 2 zu ermitteln.

Die Änderung des Moments ist in Abb. 6.3 a bzw. der Querkraft in Abb. 6.3 b dargestellt. Zum Vergleich sind die tatsächlichen Änderungen in den Schnittgrößen eingezeichnet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die grundständige, die naive Variante einer linearen Prognose entspricht, während die verbesserten Verfahren einen nicht-

linearen Verlauf für die Momente bzw. Querkraft anzeigen. Beim grundständigen Verfahren wird die Tangente im Ausgangspunkt des homogenen Systems bestimmt.

Klar ist, dass eine Erhöhung der Biegesteifigkeit, d.h.  $\Delta EI$  ist positiv, kleinere Änderungen in den Schnittgrößen zur Folge hat als eine Querschnittsschwächung und somit die Prognose bei einem Zugewinn an  $\Delta EI$  grundsätzlich genauer ist als bei einer Abnahme.

Die Prognose mittels  $J(e_m)^{(1)} + J(w)$  ist näher an der Wirklichkeit als die Prognose mittels  $J(e_m)^{(0,5)} + J(w)$ . Aber das ist, zumindest bei den untersuchten Flächentragwerken, nicht immer so, wie später noch gezeigt wird. Festzuhalten ist aber, dass die beiden Modellfehler  $J(e_m)^{(1)}$  und  $J(e_m)^{(0,5)}$  eine obere und untere Schranke, wie im Kapitel 5.7 erwähnt, für den Modellfehler liefern.



**Abb. 6.4:** Berechnung des Einflusses der Querschnittswertänderung im markierten Bereich auf die Zielgröße  $M$  an der Stelle 5,2 m.

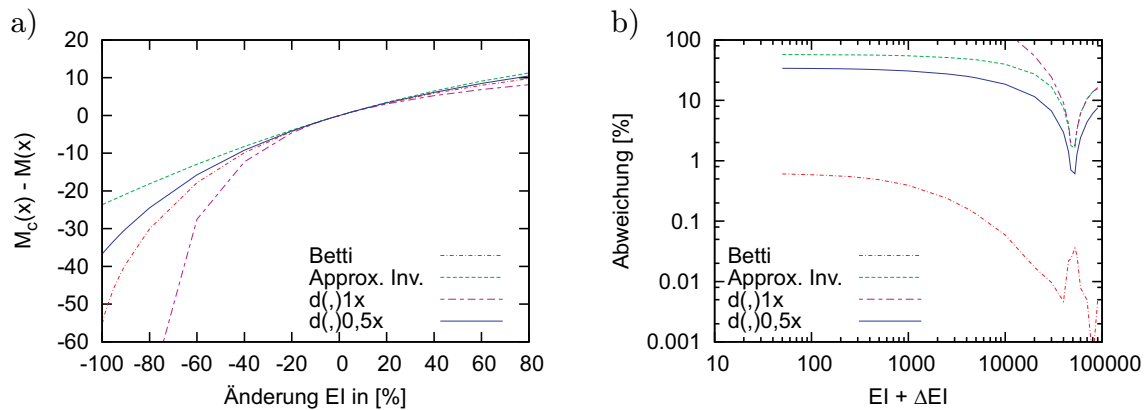
### 6.1.2 Beidseitig eingespannter Balken mit der exakten Methode

Im Kapitel 5.8 wurden weitere Verfahren zur (exakten) Modellfehlerbestimmung vorgestellt, welche nun anhand von kleinen Beispielen erläutert werden. Als Beispiel soll hier der beidseitig eingespannte Balken etwas eingehender untersucht werden.

Zusätzlich soll die in Kapitel 5.8.4 vorgestellte Methode der Approximation der inversen Matrix getestet und deren Prognosegenauigkeit untersucht werden.

Der Balken in Abb. 6.4 ist beidseitig fest eingespannt und hat eine Biegesteifigkeit von  $EI = 50.000 \text{ kNm}^2$ . Die Zielgröße ist das Moment im Punkt  $x = 5,2 \text{ m}$ . Dabei wird mit  $M_c$  das Moment im veränderten Modell, d.h. mit einem nicht mehr konstanten  $EI$ , bezeichnet.

In Abb. 6.5 a sind die Ergebnisse der Studie im Diagramm zu sehen. In Abb. 6.5 b sind die Abweichungen von der tatsächlichen Momentenänderung im doppeltlogarithmischen Maßstab dargestellt. Als Vergleichswert wurde hier nicht der absolute Momentenwert  $M_c$  gewählt, sondern die Änderung  $M_c - M$ .



**Abb. 6.5:** a) Ergebnisse der Veränderungsrechnung für das Moment. Verglichen werden vier beschriebene Verfahren: Formulierung über den Satz von Betti, Approximation der Inversen Matrix und die Verbesserungen für den  $d$ -Term. b) Darstellung der Fehler in der Rechnung bezogen auf die Biegesteifigkeit im mittleren Bereich.

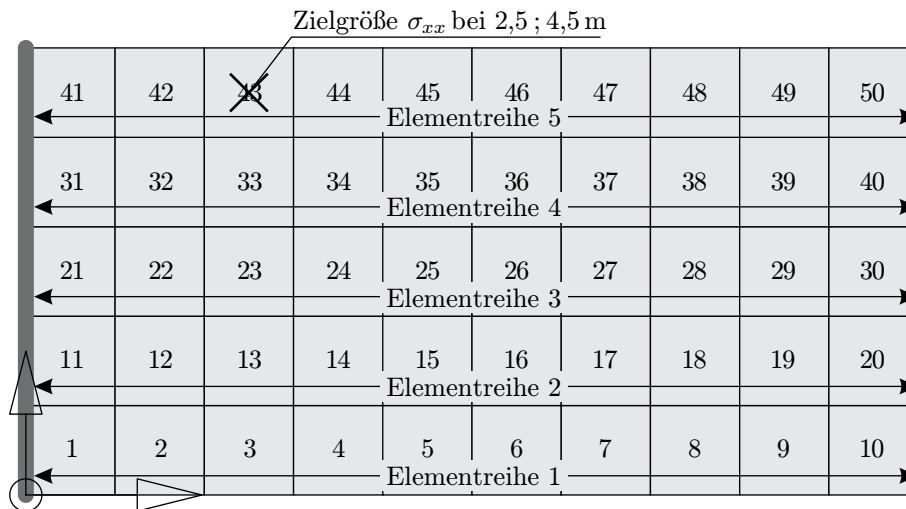
Auf die gleichzeitige Darstellung der tatsächlichen Momentenänderung wurde verzichtet, da diese mit der Formulierung über den Satz von Betti, siehe Kapitel 5.8, deckungsgleich ist.

Die Approximation der inversen Matrix liefert eine etwas bessere Prognose als es mit dem einfachen  $d$ -Term möglich ist. Die verbesserten Verfahren  $d(,)1x$  und  $d(,)0,5x$  stellen wieder obere und untere Schranken für die tatsächlichen Änderungen des Moments dar. Grundsätzlich sind auch hier diese Formulierungen anderen Techniken vorzuziehen, da sie einfach zu berechnen sind und Schrankeneigenschaften aufweisen.

Aus den in Abb. 6.5 b dargestellten Fehlerkurven ist herauszulesen, dass die Näherungsverfahren in der Nähe von  $EI$ , in diesem Fall  $EI = 50.000$  kNm<sup>2</sup>, bei nicht zu großer Abänderung der Steifigkeit, sehr gute Vorhersagen liefern.

## 6.2 Modellfehlerberechnung und Sensitivitätsanalyse einer Krag­scheibe

An dem in Abb. 6.6 dargestellten System sollen einige einfache Modellfehlerberechnungen an einem Scheibentragwerk durchgeführt werden. Alle Elemente der Scheibe haben zunächst den gleichen  $E$ -Modul von  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>. Die Zielgröße ist bei den folgenden Untersuchungen immer die Spannung  $\sigma_{xx}$ . Unterschieden werden zwei Fälle:



**Abb. 6.6:** Kragsscheibe für die Modellfehlerberechnung. Systemdaten:  $E$ -Modul =  $3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, Dicke  $t = 0,2$  m, Querdehnzahl  $\nu = 0,16$ , Gleichflächenlast  $p_y = 10$  kN/m<sup>2</sup>. Die Scheibe hat die Abmessungen  $10\text{ m} \times 5\text{ m}$ . Als Zielgröße dient die Spannung  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $x = 2,5$  m und  $y = 4,5$  m.

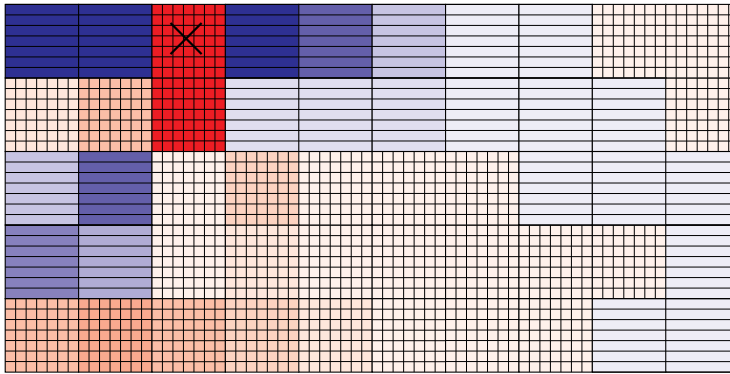
1. Der Ort der Zielgröße ist fest gewählt und der  $E$ -Modul wird in den Elementen der Scheibe verändert.
2. In einem Element wird der  $E$ -Modul abgeändert, (z.B.  $E_c = 2,4 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>), und der Ort der Zielgröße ändert sich, z.B. wandert der Ort längs eines Schnittes durch die Scheibe.

Im ersten Fall kann die Auswirkung einer Steifigkeitsänderung in einzelnen Elementen auf eine bestimmte Zielgröße untersucht werden. Damit eignet sich die Methode zur direkten Modellfehlerbestimmung als Kriterium für eine Modellanpassung und zur Analyse kritischer Bereiche in einem Tragwerk.

Bei der zweiten Variante wird das Ausmaß der Steifigkeitsänderung eines einzelnen Elementes bezogen auf einen Schnitt ermittelt. So können z.B. Stellen bestimmt werden, an denen die Änderung in der Zielgröße (resultierend aus dem einen veränderten Element) besonders groß ist.

### 6.2.1 Veränderungen des $E$ -Moduls über die gesamte Scheibe

Als Zielgröße wird bei diesem Beispiel die Spannung  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $\mathbf{x} = (2,5\text{ m}; 4,5\text{ m})$  gewählt. Der  $E$ -Modul wird abwechselnd in jedem Element von  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> auf  $E + \Delta E = 2,4 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> herabgesetzt, mit  $\Delta E = -6 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup>.



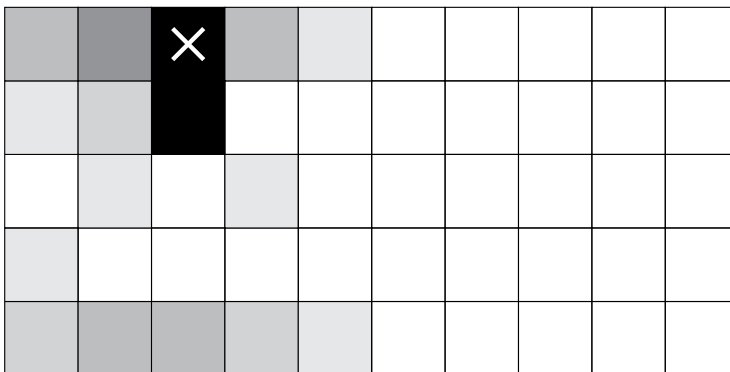
**Abb. 6.7:** Durch die Einfärbung der einzelnen Elemente wird die Größe der Spannungsänderung in der Zielgröße (mit  $\times$  markiert) dargestellt.  $\boxplus$ /Rot: positive Spannungsänderung,  $\boxminus$ /Blau: negative Spannungsänderung.

Das entspricht einer Veränderung im  $E$ -Modul von 20%. Die Berechnung des Modellfehlers erfolgt durch Auswertung der  $d$ -Form (Gebietsintegral) in dem betreffenden Element. Der Faktor vor dem Integral ist bei der einfachen Methode  $\Delta E$ , so dass sich eine lineare Veränderung für die Zielgröße ergibt. Eine Verbesserung wurde in Anlehnung an Abschnitt 5.7 vorgenommen, indem die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  mit den Faktoren

$$f_1 = \frac{E \Delta E}{E + \Delta E} \quad \text{und} \quad f_{0,5} = \frac{E \Delta E}{E + 0,5 \cdot \Delta E} \quad (6.7)$$

multipliziert wird. Damit wird ein nichtlinearer Verlauf bei einer Variation von  $\Delta E$  erreicht. Die Ergebnisse werden später diskutiert.

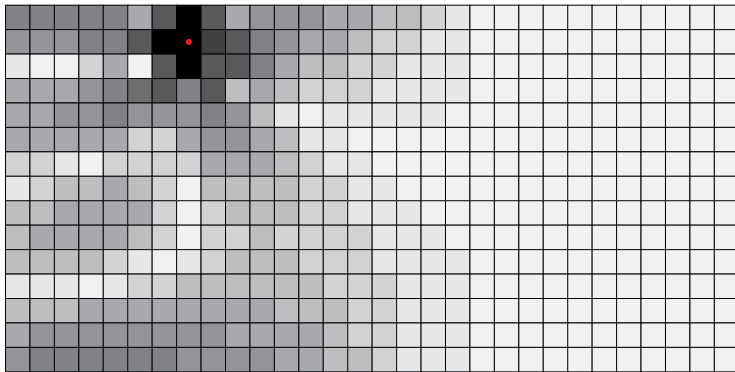
Um die Auswirkungen auf die Spannungen darstellen zu können, wurden die Elemente rot (für eine positive Spannungsänderung) und blau (für eine negative Spannungsänderung) eingefärbt. Somit ist jedem Element ein Modellfehler in Bezug auf die Zielgröße zuzuordnen. Das Ergebnis ist in Abb. 6.7 zu sehen. Es ist natürlich klar, dass die Änderung des  $E$ -Moduls in dem markierten Element einen besonders großen Einfluss auf die Spannungen hat. Aber auch außerhalb dieses Elementes kann die Zielgröße durch Variation des  $E$ -Moduls deutlich verändert werden.



**Abb. 6.8:** Darstellung der Auswirkungen einer  $E$ -Modulveränderung auf die Zielgröße (mit  $\times$  markiert). Dabei wird der Bereich deutlich, der einen großen Einfluss auf die Zielgröße hat.

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit des Modellfehlers für jedes Element ist die

betragsmäßige Berücksichtigung des Fehlers, wie es auch beim numerischen Fehler zur adaptiven Netzgestaltung üblich ist. Das Ergebnis einer solchen Darstellung ist in Abb. 6.8 zu sehen. Je dunkler ein Element eingefärbt ist, desto größer ist der Einfluss auf die Zielgröße. Damit stellt diese Vorgehensweise einen Indikator zur Verfügung, der es erlaubt, das Modell durch eine detailliertere, und damit mehr dem realen Tragwerk entsprechende, Modellanpassung zu verbessern.



**Abb. 6.9:** Darstellung der Auswirkungen einer  $E$ -Modulveränderung auf die Zielgröße auf einem feineren Netz.

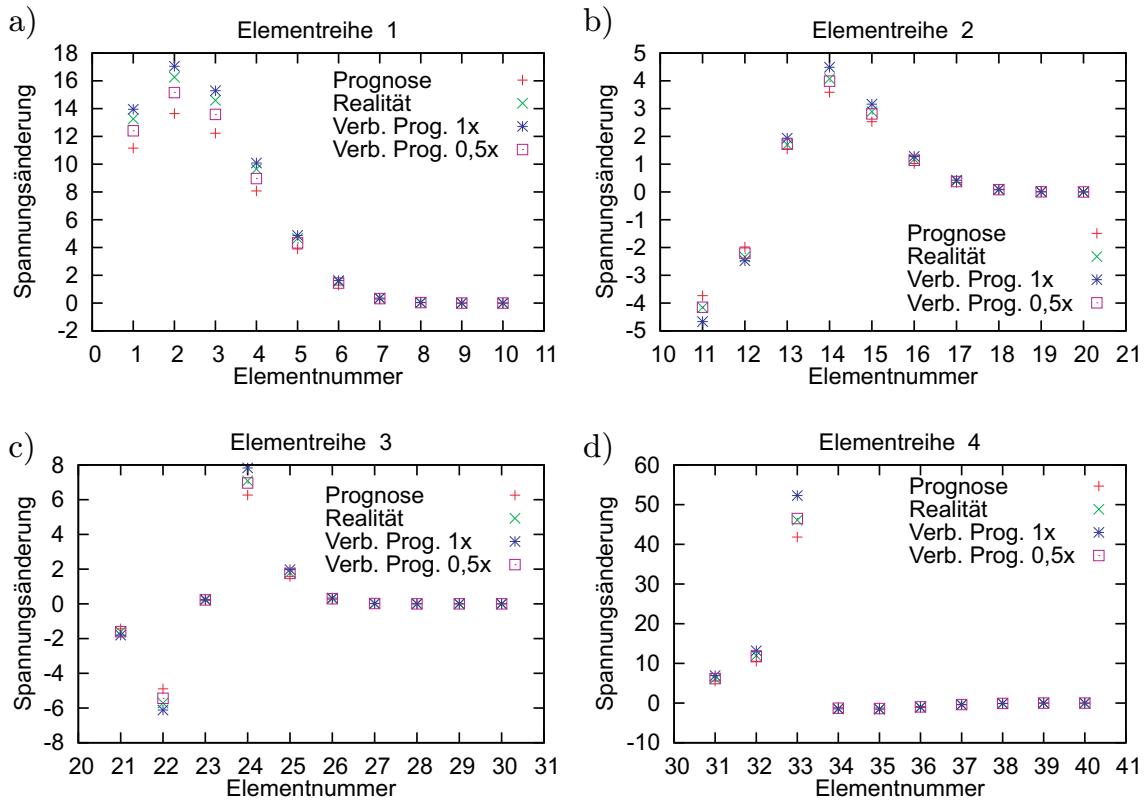
In Abb. 6.9 ist die gleiche Scheibe mit einem feineren Netz dargestellt. Hierbei werden deutlich kontinuierlichere Verläufe sichtbar und dies ermöglicht so eine differenziertere Abbildung des Modellfehlers.

Abb. 6.10 zeigt die Prognosen der Spannungsänderung bei einem um 20% reduzierten  $E$ -Modul für die ersten vier Elementreihen (siehe Abb. 6.6) für die unterschiedlichen Verfahren. Ebenfalls eingezeichnet ist die tatsächliche Spannungsänderung in der Zielgröße, welche als Referenzgröße für die Berechnung des relativen Fehlers verwendet wurde.

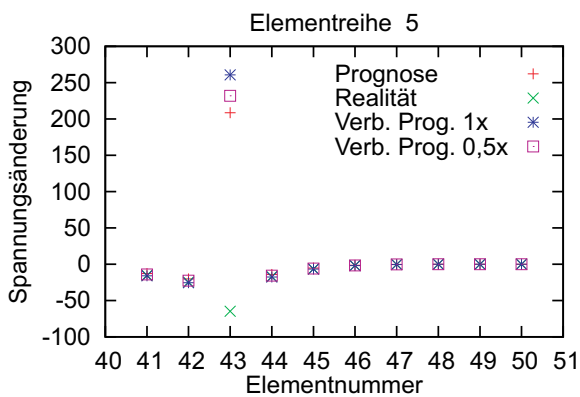
Gut zu erkennen ist, dass alle Verfahren die tatsächliche Spannungsänderung gut approximieren, dass aber bei großen Spannungsänderungen in der Zielgröße, wie z.B. in den Elementen 1 bis 4, merkliche Unterschiede in den Verfahren auftreten. Festzuhalten ist, dass jedes dieser Verfahren gut als ein Indikator für den Modellfehler geeignet ist.

In Abb. 6.11 sind die Prognosen für die Elementreihe 5 dargestellt. Die Spannungsänderungen in der Zielgröße können für jedes Element mit Vorzeichen und Wert gut vorhergesagt werden; einzige Ausnahme stellt das Element 43, in dem die Zielgröße selbst liegt, dar.

In Abb. 6.12 sind die relativen Fehler für die prognostizierte Spannung dargestellt. Damit ist es möglich, die angewendeten Verfahren miteinander zu vergleichen. Mit *Fehler 1* wird das vereinfachte Verfahren bezeichnet, mit *Fehler 2* und *Fehler 3* die zwei veränderten Verfahren, siehe hierzu die Erläuterungen zur Abb. 6.12.

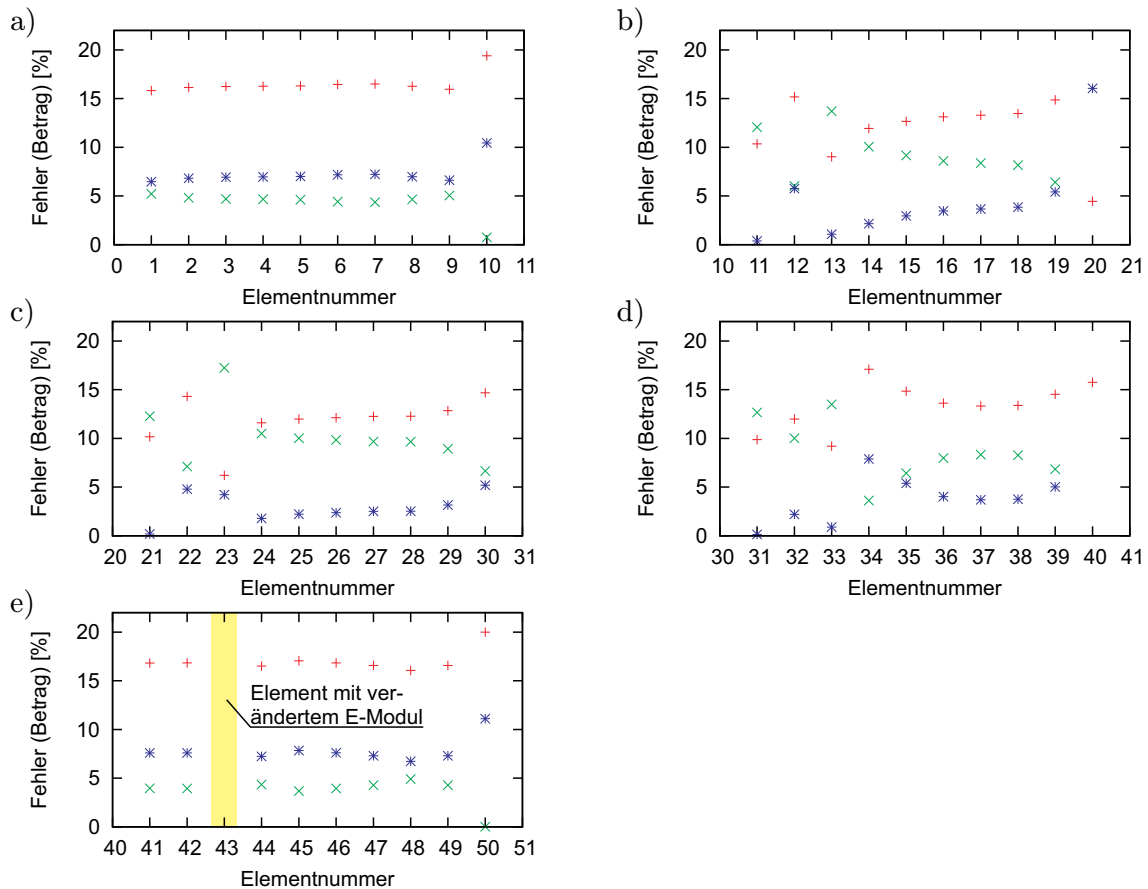


**Abb. 6.10:** Darstellung der Spannungsänderung der unterschiedlichen Verfahren im Vergleich zur tatsächlichen Spannungsänderung für a) Elementreihe 1 b) Elementreihe 2 c) Elementreihe 3 und d) Elementreihe 4.



**Abb. 6.11:** Vergleich der Spannungsänderung für die Elementreihe 5. In dieser Reihe liegt auch der Ort der Zielgröße (Element 43).

Grundsätzlich liefert das vereinfachte Verfahren, abgesehen von wenigen Ausnahmen, einen Fehler zwischen 10 und 20%. Die beiden veränderten Verfahren weisen einen zum Teil deutlich niedrigeren Fehler auf und sind damit dem vereinfachten Verfahren vorzuziehen, zumal der Berechnungsaufwand identisch ist.

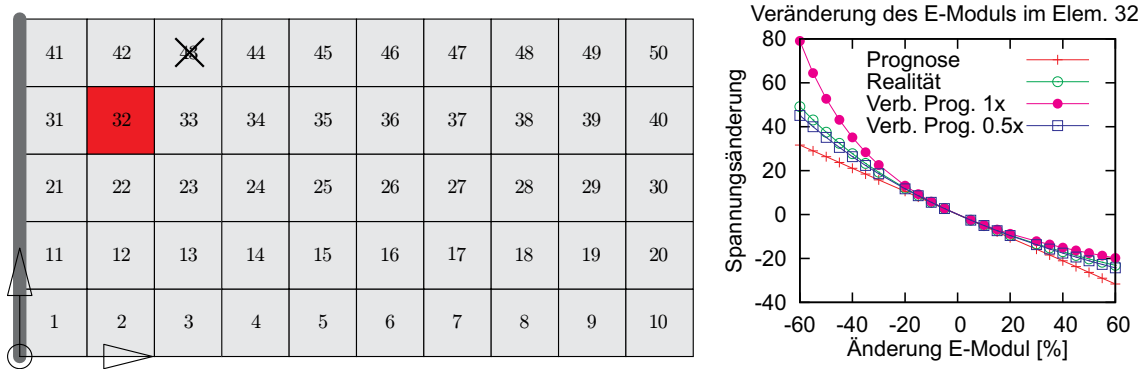


**Abb. 6.12:** Fehler 1, dargestellt mit + bezieht sich auf Prognose und Realität, Fehler 2, dargestellt mit  $\times$  bezieht sich auf die Variante  $(E \Delta E)/(E + \Delta E)$  und Fehler 3, dargestellt mit  $*$  bezieht sich auf die Variante  $(E \Delta E)/(E + 0,5 \cdot \Delta E)$ . a) bis e) Elementreihen 1 bis 5 der Kragsscheibe.

Nach der Auswertung der Fehlerdiagramme kann nicht gesagt werden, dass eines der verbesserten Verfahren zu genaueren Ergebnissen führt. Festzustellen ist, dass das Verfahren mit  $(E + 0,5 \cdot \Delta E)$  zu Fehlern deutlich unter 5% führt. Dennoch sind nach dieser Betrachtung beide verbesserten Verfahren als gleichwertig anzusehen, da keines grundsätzlich bessere Ergebnisse liefert. An dieser Stelle noch einmal der Hinweis: Auch bei der Scheibe besitzen beide Verfahren Schrankeneigenschaften, wie den gezeigten Diagrammen zu entnehmen ist.

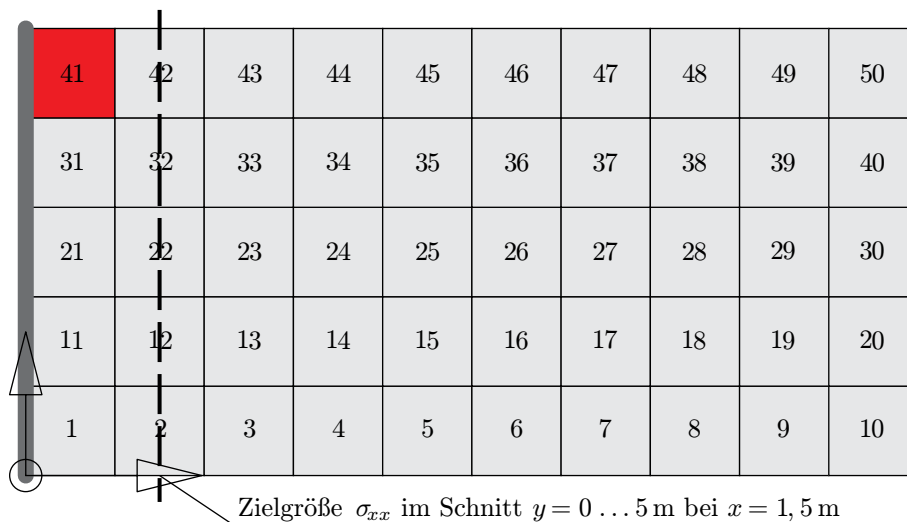
Um das Verhalten der prognostizierten Spannungsänderung der verschiedenen Verfahren auch bei größeren Veränderungen im  $E$ -Modul zu untersuchen, wurde das Element 32 gewählt und der  $E$ -Modul um  $\pm 60\%$  variiert. System und Ergebnisse sind in Abb. 6.13 dargestellt. Das vereinfachte Verfahren kann lediglich einen linea-





**Abb. 6.13:** Links das System, rechts das Diagramm, welches die Auswirkungen der Veränderung im  $E$ -Modul im Element 32 zeigt.

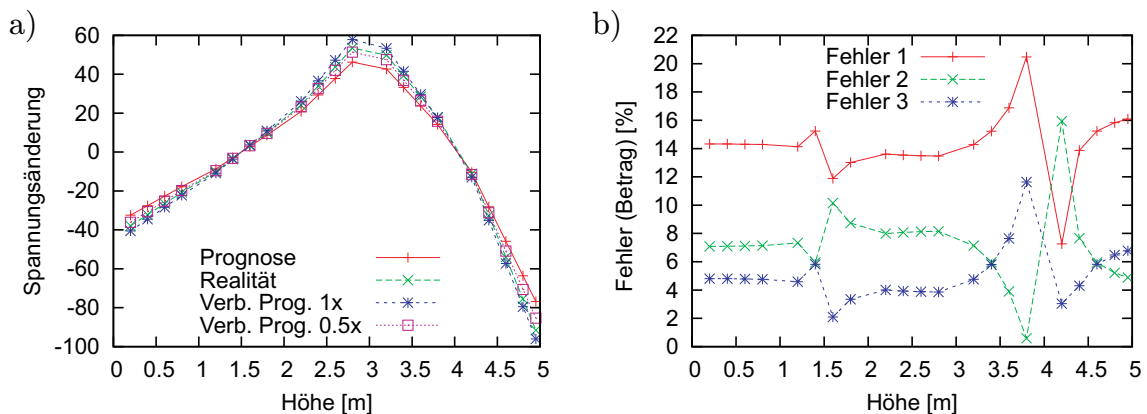
ren Verlauf der Spannungsänderung darstellen, da mit diesem Verfahren die Steigung in dem Ausgangspunkt bestimmt wird. Sind die Änderungen im  $E$ -Modul nicht zu groß, so liefert dieses Verfahren verlässliche Prognosen. Bei größeren Abweichungen im  $E$ -Modul kommt aber immer stärker die nichtlineare Spannungsänderung zum Tragen und dann bieten sich die verbesserten Verfahren an, wobei bei dieser Konstellation das Verfahren mit  $(E + 0,5 \cdot \Delta E)$  deutlich näher am exakten Verlauf ist, als das Verfahren mit  $(E + \Delta E)$ . Wenn man den Fehler in Abb. 6.12 d betrachtet, so ist dieses Verhalten zu erwarten.



**Abb. 6.14:** Im Element 41 wird der  $E$ -Modul auf  $2,4 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup> reduziert. Die Auswirkungen auf die Zielgröße  $\sigma_{xx}$  im vertikalen Schnitt bei  $x = 1,5$  m sollen untersucht werden.

### 6.2.2 Vertikaler Schnitt durch die Scheibe

Im Folgenden sollen die Änderungen an derselben Kragsscheibe in einem vertikalen Schnitt untersucht werden, siehe Abb. 6.14. Zunächst wird das Element mit verändertem  $E$ -Modul, Element 41, fest gewählt, die Zielgröße  $\sigma_{xx}$  auf der Breite  $x = 1,5$  m wandert in vertikaler Richtung durch die Scheibe und wird jeweils in 0,2 m-Schritten von den Elementkanten durch die Elementreihe hindurch abgefragt.

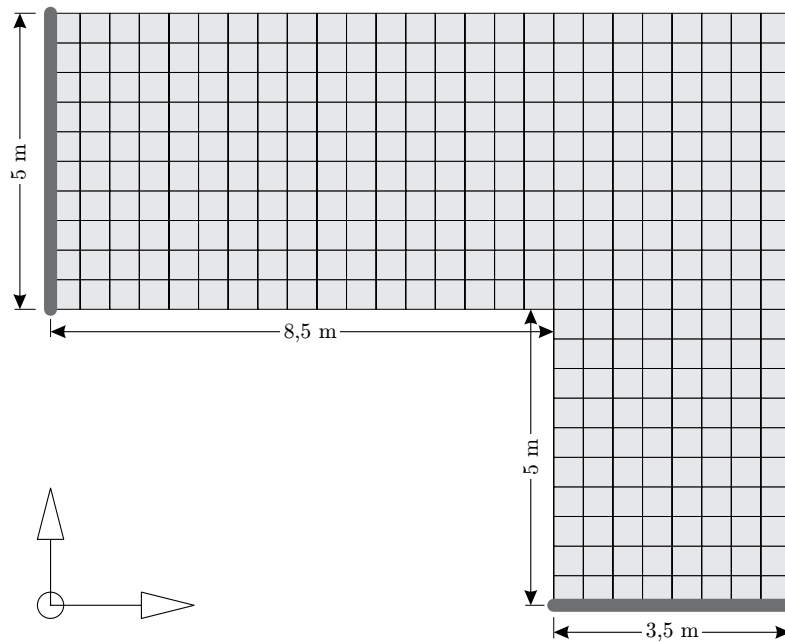


**Abb. 6.15:** a) Spannungsänderungen der verschiedenen Methoden im Vergleich zur tatsächlichen Spannungsänderung, b) Darstellung des Fehlerbetrages.

Das Ergebnis der prognostizierten Spannungsänderungen über den Schnitt ist in Abb. 6.15 a dargestellt. Auch hier ist wieder zu erkennen, dass alle Verfahren den exakten Spannungsverlauf gut abbilden. Allerdings sind die Abweichungen des vereinfachten Verfahrens vom exakten Verlauf am größten, was durch die Darstellung des relativen Fehlers, siehe Abb. 6.15 b, bestätigt wird. Beide verbesserten Verfahren (*Fehler 2* und *Fehler 3*) sind als gleichwertig zu beurteilen, da keine signifikanten Unterschiede festzustellen sind. Betrachtet man Abb. 6.15 etwas genauer, so kann man erkennen, dass die Berechnungsmethoden *Verb. Prog. 1x* und *Verb. Prog. 0.5x* den exakten Spannungsänderungsverlauf eingrenzen und somit auch hier eine obere und untere Beschränkung liefern.

## 6.3 Untersuchung an einer L-Scheibe

Anhand einer L-Scheibe, siehe Abb. 6.16, soll die Funktion des Modellfehlerindicators an einem feineren Netz betrachtet werden. Hier ist zu erwarten, dass sich



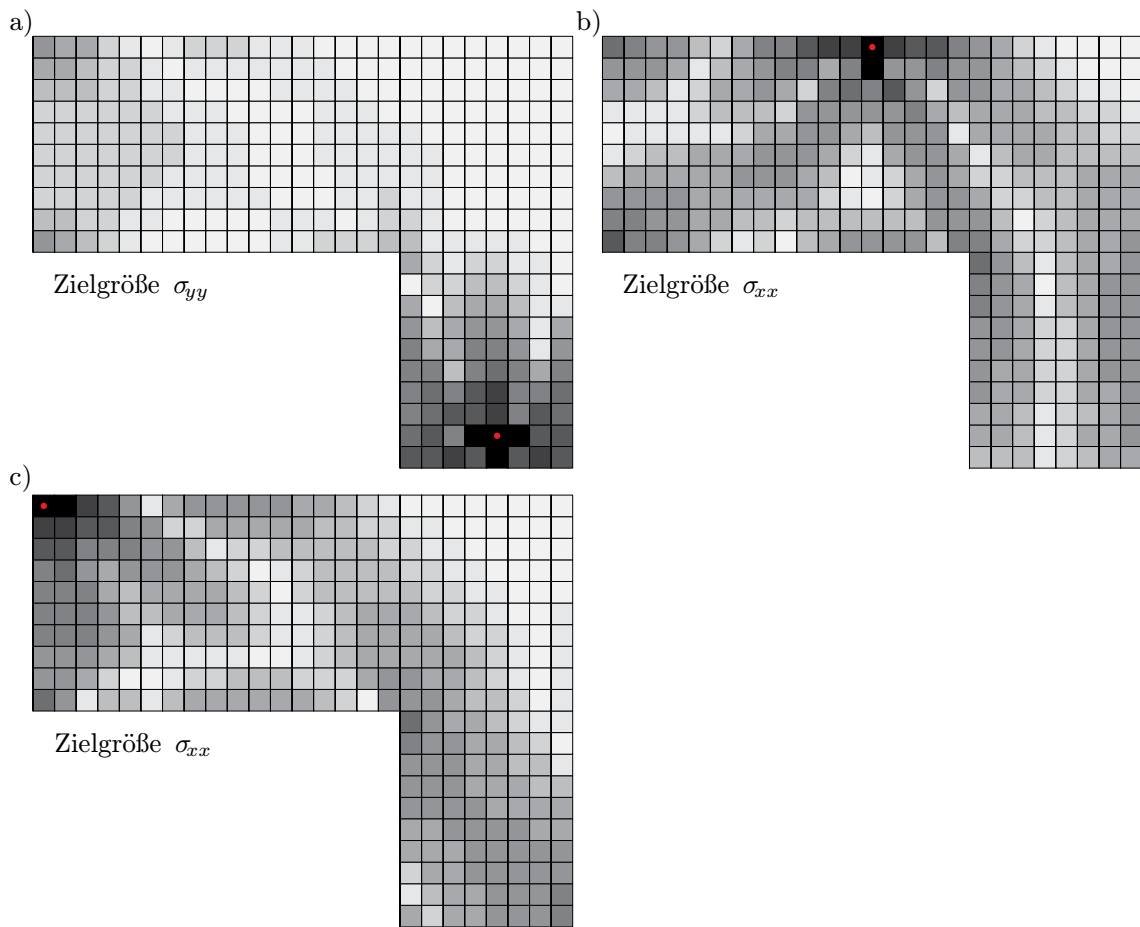
**Abb. 6.16:** System der L-Scheibe mit Randbedingungen unter Lastfall Eigengewicht.

deutlich Bereiche abzeichnen, in denen der Modellfehler vernachlässigbar ist bzw. andere, wo die Veränderung im  $E$ -Modul einen markanten Einfluss auf die Zielgröße hat.

In Abb. 6.17 sind die Ergebnisse der Berechnungen für unterschiedliche Zielgrößen dargestellt. Grundsätzlich ist mit einem feinen Netz eine differenziertere Betrachtung des Modellfehlers bzw. der Bestimmung des Einflusses auf die Zielgröße möglich.

Abb. 6.17 a zeigt den Indikator für die Spannung  $\sigma_{yy}$  am unteren Rand der L-Scheibe. Der größte Einfluss auf die Zielgröße ist natürlich in dessen Nähe. Mit dem Modellfehlerindikator ist es nun möglich, den Bereich genau zu quantifizieren. Das ist der entscheidende Unterschied zu den Erfahrungen und dem Fachwissen eines Ingenieurs. In dieser Darstellung wird deutlich, dass der linke Rand der L-Scheibe ebenfalls noch einen Einfluss auf die Zielgröße ausübt, der nicht zu vernachlässigen ist. Anders gesagt kann an dieser Darstellung abgelesen werden, bis zu welchem Bereich die rechte obere Ecke keinen Einfluss auf die Zielgröße hat. Auch hier sagt die Erfahrung des Ingenieurs wieder, dass ein Bereich der Ecke für die Zielgröße unwesentlich ist, aber den Bereich genau anzugeben, ist nicht möglich.

Das zweite Indikatorbild, siehe Abb. 6.17 b, zeigt die Auswirkungen der Veränderung im  $E$ -Modul der einzelnen Elemente auf die Spannungen  $\sigma_{xx}$  am oberen Rand der



**Abb. 6.17:** Darstellung der Modellfehlerindikatoren für die Zielgrößen a)  $\sigma_{yy}$  in der Nähe des unteren Randes, b)  $\sigma_{xx}$  am oberen Rand und c)  $\sigma_{xx}$  in der linken oberen Ecke des Systems.

Scheibe. Hierbei ist, im Vergleich zur ersten Zielgröße, der Fehler deutlich gleichmäßiger über die gesamte Scheibe verteilt. Nahezu alle Bereiche der Scheibe haben einen Einfluss auf die Zielgröße.

Das Fehlerbild für die dritte betrachtete Größe ist in Abb. 6.17 c zu sehen. Auch hier zeichnet sich ein differenziertes Bild ab. So ist besonders der Bereich an der linken Einspannung der Scheibe für die Änderung in  $\sigma_{xx}$  verantwortlich. Der Bereich um die rechte obere Ecke hat, wie bei der ersten Zielgröße, kaum einen Einfluss auf die Zielgröße.

## 6.4 Nichtlineare Modelle

In Abschnitt 5.6 konnte in allgemeiner Form die Berechnung des Modellfehlers für nichtlineare Probleme hergeleitet werden. Der zentrale Punkt ist dabei die Ermittlung der verallgemeinerten Greenschen Funktion, deren Knotenwerte (Vektor  $\mathbf{z}$ ) mittels des Gleichungssystems

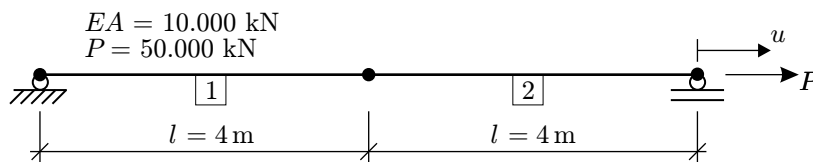
$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h) \mathbf{z} = \mathbf{j}_u \quad (6.8)$$

bestimmt werden. Hierbei ist  $\mathbf{K}_T$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix im Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{u}_h$  und die Komponenten des Vektors  $\mathbf{j}_u$  sind die Gateaux-Ableitung des Funktionals  $J(\mathbf{u})$  im Linearisierungspunkt  $\mathbf{u}_h$  in Richtung der  $\varphi_i$ .

Die Anwendung der Modellfehlerbestimmung auf geometrisch nichtlineare Probleme wird zunächst am Stab und anschließend an der Scheibe gezeigt.

### 6.4.1 Stab

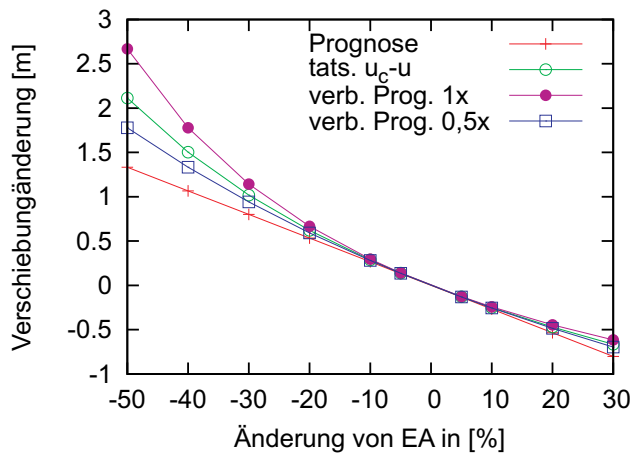
Die Ermittlung der verallgemeinerten Greenschen Funktion wurde im Kapitel 3.4.4 vorgestellt und die Berechnung des Modellfehlers für nichtlineare Probleme konnte in Abschnitt 5.6 hergeleitet werden. Anhand eines einfachen Beispiels sollen diese Methoden verdeutlicht werden. Betrachtet wird ein nichtlinearer Zugdruckstab, dessen horizontale Verschiebung mit linearen Ansatzfunktionen angenähert wird.



**Abb. 6.18:** Berechnung der Auswirkungen einer  $E$ -Modul Änderung in einem Element bei einer geometrisch nichtlinearen Formulierung.

Es werden die Auswirkungen auf die Verformung an der rechten Seite des Stabes bei einer Änderung im  $E$ -Modul im zweiten Element untersucht. Das System mit der Last und den Systemdaten ist in Abb. 6.18 dargestellt.

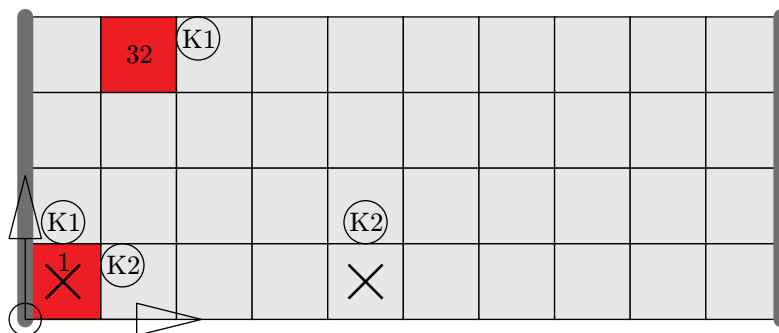
Der Berechnungsablauf sei an dieser Stelle noch einmal kurz skizziert. Am Grundsystem (gleiches  $E$  in allen Stabelementen) wird die Lösung  $u_h$  des Lastfalls  $P$  ermittelt. Anschließend wird mittels der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  im Punkt



**Abb. 6.19:** Modellfehlerberechnung an einem nichtlinearen System.

$u_h$  die verallgemeinerte Greensche Funktion  $z_h$  für die Verschiebung am rechten Ende bestimmt, also für das Funktional  $J(u) = u(l)$ . Dann kann mit der  $d$ -Form die Änderung in der Verschiebung prognostiziert werden.

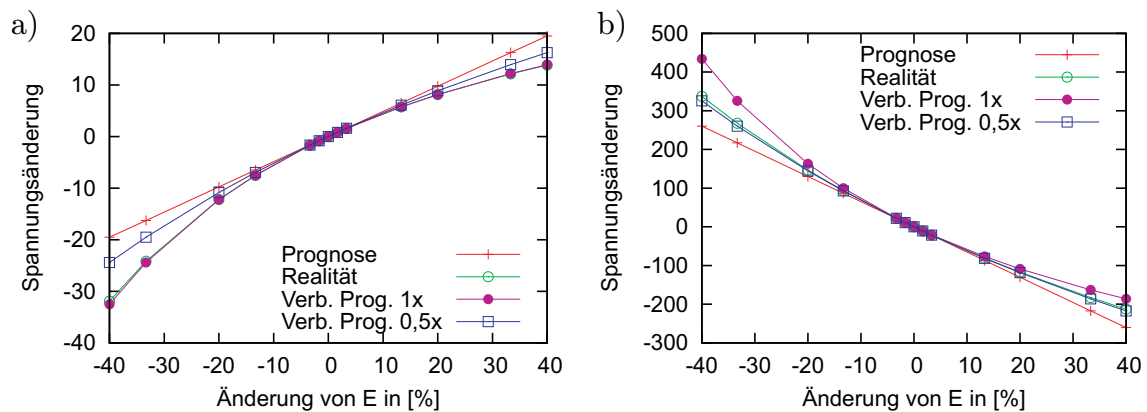
Das Ergebnis ist in Abb. 6.19 zu sehen. Die Berechnung liefert das von der linearen Differentialgleichung gewohnte Bild. Der von der Näherung prognostizierte Fehler, hier mit **Prognose** bezeichnet, folgt einer Geraden, deren Steigung mit der Ableitung im Nullpunkt der wahren Kurve der Veränderungen folgt. Und auch die Eigenschaften der verbesserten Modellfehlerberechnung mit  $J^{(0,5)}$  und  $J^{(1)}$  bleiben erhalten. Sie bilden eine obere und untere Schranke der tatsächlichen Veränderung in der Zielgröße.



**Abb. 6.20:** Scheibe, an der eine nichtlineare Modellfehlerberechnung durchgeführt wurde. Abmessungen  $5\text{ m} \times 2\text{ m}$ , Gleichstreckenlast am oberen Rand mit  $p = 1.000\text{ kN/m}$ . Zwei untersuchte Konfigurationen: K1 und K2, Zielgröße  $\sigma_{xx}$ .

### 6.4.2 Scheibe

Für einen Stab konnte anschaulich gezeigt werden, dass die Modellfehlerbestimmung für einen geometrisch nichtlinear formulierten Stab gleiche Ergebnisbilder wie bei einer linearen Formulierung liefert. Anhand der in Abb. 6.20 dargestellten Scheibe soll die Modellfehlerbestimmung für ein geometrisch nichtlineares Scheibenelement untersucht werden. Die betrachteten Konfigurationen, K1 mit der Zielgröße  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $(0, 25; 0, 25)$  und einer Veränderung des  $E$ -Moduls in Element 32 bzw. K2 mit der Zielgröße  $\sigma_{xx}$  an der Stelle  $(2, 25; 0, 25)$  und einer Veränderung des  $E$ -Moduls in Element 1, sind dort abgebildet.



**Abb. 6.21:** a) Zielgröße  $\sigma_{xx}$  bei  $0, 25/0, 25$  Änderung vom  $E$ -Modul im Element 32, b) Zielgröße  $\sigma_{xx}$  bei  $2, 25/0, 25$ , Änderung vom  $E$ -Modul im Element 1.

In Abb. 6.21 sind die Ergebnisse der Berechnung zu sehen. Dabei zeigt sich auch hier das bekannte Bild des mit den unterschiedlichen Methoden berechneten Modellfehlers. Interessant ist bei diesen Beispielen, dass die Konfiguration K1 mit der verbesserten Prognose  $J^{(1)}$  nahezu die tatsächliche Änderung liefert, während bei der Konfiguration K2  $J^{(0,5)}$  deutlich näher an der tatsächlichen Änderung ist. Auch hier bilden beide Methoden wieder eine obere bzw. untere Schranke des Modellfehlers.

## 6.5 Vergleich lineare und nichtlineare Berechnung

Die Berechnung des Modellfehlers bei nichtlinearen Problemen konnte hergeleitet werden und zeigt bei der Untersuchung von Veränderungen im  $E$ -Modul gute Ergebnisse. Ziel in diesem Abschnitt ist es, den Fehler zu bestimmen, der bei Vernachlässigen der geometrisch nichtlinearen Anteile bei einer Berechnung entsteht.

Die schwache Form des nichtlinearen Problems,

$$a_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{E}_u(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Omega = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{S}(\mathbf{u}) := \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] \quad (6.9)$$

und des linearen Problems

$$a_l(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Omega = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (6.10)$$

unterscheiden sich nur in dem Term

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{E}_u(\mathbf{v}) - \mathbf{E}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (6.11)$$

was dem bekannten Muster

$$a_l(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) + d(\mathbf{u}_c, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (\text{nichtlinear}) \quad (6.12)$$

$$a_l(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \quad (\text{linear}) \quad (6.13)$$

entspricht. Daher sollte es möglich sein, die nichtlinearen Effekte anhand der Gleichung

$$J(\mathbf{u}_c) - J(\mathbf{u}) = -d(\mathbf{z}, \mathbf{u}_c) = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_c^T \nabla \mathbf{z} + \nabla \mathbf{z}^T \nabla \mathbf{u}_c) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}_c) \, d\Omega \quad (6.14)$$

zu bestimmen. Hier ist  $\mathbf{z}$  die Greensche Funktion des linearen Modells und  $\mathbf{u}_c$  die nichtlineare Lösung.

Bei der FE-Berechnung wird man natürlich wieder  $\mathbf{u}_c$  durch  $\mathbf{u}$  ersetzen und so zur Näherung

$$J(\mathbf{u}_c^h) - J(\mathbf{u}_h) \approx -d(\mathbf{z}_h, \mathbf{u}_h) = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_h^T \nabla \mathbf{z}_h + \nabla \mathbf{z}_h^T \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) \, d\Omega \quad (6.15)$$

kommen.

Am Beispiel des im vorigen Kapitel behandelten nichtlinearen Zugdruckstabes soll die Gültigkeit dieser Vorgehensweise verifiziert werden. Der Stab ist in zwei gleich lange Elemente der Länge  $l = 4 \text{ m}$  unterteilt und die Dehnsteifigkeit beträgt  $EA = 100.000 \text{ kN}$ . In Abb. 6.22 ist das Ergebnis der Prognose im Vergleich zur tatsächlichen Änderung dargestellt. Dabei ist gut zu erkennen, dass die Schätzung, ähnlich wie bei den vorher betrachteten Problemen, eine gute Näherung darstellt. Erst wenn der nichtlineare Anteil in der Rechnung dominiert, entsteht ein größerer Fehler.



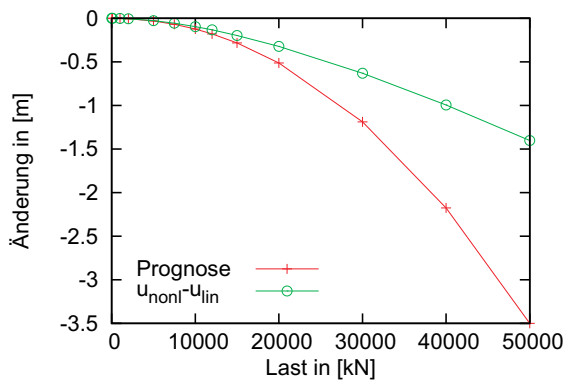


Abb. 6.22: Vergleich zwischen einer linearen und nichtlinearen Berechnung.

## 6.6 Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse (= Empfindlichkeitsanalyse) im klassischen Sinne stellt ein Verfahren zur Verfügung, mit dem das Tragverhalten komplexer Systeme und Strukturen bei Veränderung von Systemparametern, wie z.B.  $E$ -Modul oder Querschnittswerten, untersucht werden kann, um optimale Werte für die Systemvariablen zu finden. So kann z.B. eine Grenzbetrachtung für einzelne Parameter erfolgen.

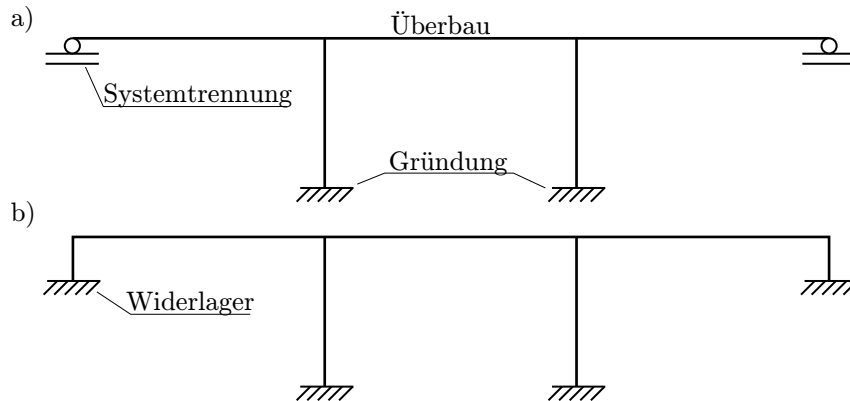
In der Sensitivitätsanalyse wird der Einfluss von Systemparametern (einzeln oder gemeinsam) auf bestimmte Zielgrößen, wie z.B. Kraft- oder Weggrößen, untersucht. Das kann mathematisch durch das Analysieren von Modellgleichungen erfolgen oder durch die Verwendung von variierten einzelnen Systemparametern (Iterationsverfahren).

Anhand einer in semi-integraler Bauweise erstellten Autobahnbrücke soll die Sensitivitätsanalyse unter Verwendung des  $d$ -Terms vorgestellt werden. Dabei wird untersucht, ob ein deutlicher Einfluss der Bodensteifigkeit auf bemessungsrelevante Schnittgrößen an der Brücke festzustellen ist, d.h. es wird die Frage beantwortet, wie sensibel das Tragwerk auf Veränderungen im Baugrund reagiert. In [59] wurden solche Untersuchungen mittels der Modellfehlerbestimmung durchgeführt. Als eine einführende Arbeit in das Thema der Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen sei [15] erwähnt.

### 6.6.1 Integrale und semi-integrale Brückenbauweise

Die integrale bzw. semi-integrale Bauweise kann wie folgt definiert werden. Sind die Brückenpfeiler und Widerlager monolithisch mit dem Brückenüberbau verbunden, so spricht man von einer integralen Brückenbauweise. Die zyklischen Temperatureinwirkungen auf die Brücke haben Schnittgrößen zur Folge und somit Verformungen,

welche Auswirkungen auf die Widerlager und Gründungen haben. Das Bauwerk steht in Interaktion mit dem Baugrund.



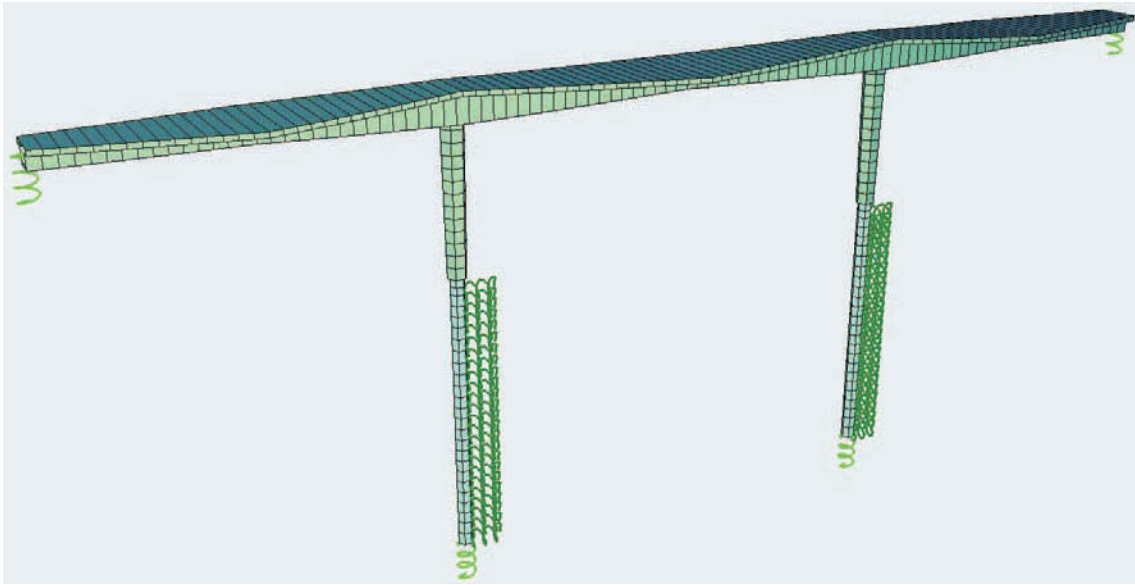
**Abb. 6.23:** a) Semi-integrale Brückenbauweise, die Brücke ist vom Widerlager entkoppelt und b) integrale Bauweise, die Brücke als monolithisches Bauwerk.

Bei der semi-integralen Bauweise besteht nicht mehr die gesamte Brücke aus einem monolithischen Stück. Es werden hier Systemtrennungen eingefügt, wie z.B. die Trennung des Systems *Überbau–Pfeiler–Gründung* von den Widerlagern. Beispiele für die (semi-)integrale Bauweise werden in [55] und [57] gegeben. In Abb. 6.23 sind beispielhaft zwei Brücken dargestellt.

Die integrale Brückenbauweise stellt eine besondere Herausforderung dar, da das Bauwerk mit dem Untergrund bzw. mit der Gründung in Interaktion tritt und so die Ermittlung der maßgebenden Lastfälle relativ schwierig und aufwendig ist. Eine deutliche Erleichterung wäre es, wenn die Auswirkungen der verschiedenen Variationsparameter, hier die Steifigkeit des Bodens, auf die Bemessungsgrößen ohne großen Aufwand abgeschätzt werden kann.

### 6.6.2 Untersuchungsergebnisse einer Brücke in semi-integraler Bauweise

In Abb. 6.24 ist die auf Pfählen gegründete Brücke in semi-integraler Bauweise dargestellt. Das Bauwerk erstreckt sich über eine Länge von ca. 100 m, dessen erstes und drittes Feld eine Länge von ca. 30 m hat. Die mitwirkende Plattenbreite wurde bei der Modellierung der Plattenbalkenquerschnitte berücksichtigt, siehe Abb. 6.24. Die Pfähle für die Gründung haben einen Durchmesser von 1,20 m und eine Länge von 23,30 m, wobei vier Bodenschichten mit unterschiedlichen Steifemoduli zu



**Abb. 6.24:** Modell einer Brücke erstellt mit Balkenelementen.

berücksichtigen sind. Die Pfähle nehmen als elastisch gebettete Träger horizontale Kräfte auf, die z.B. als Bremslasten aus dem Überbau auf den Unterbau wirken, sie behindern aber eben auch aufgrund ihrer Bettung die Verformungen des Überbaus in allen anderen Lastfällen.

Das Ziel der Untersuchung in [59] war, festzustellen, welchen Einfluss die Variation der Bettungsziffern in den Bodenschichten auf die Schnittgrößen im Überbau hat.

Die zur Differentialgleichung des elastisch gebetteten Trägers

$$EI w^{IV} + k w = p \quad (6.16)$$

gehörige Wechselwirkungsenergie lautet

$$a(w, \hat{w}) = \int_0^l \left[ \frac{M \hat{M}}{EI} + k w \hat{w} \right] dx \quad (6.17)$$

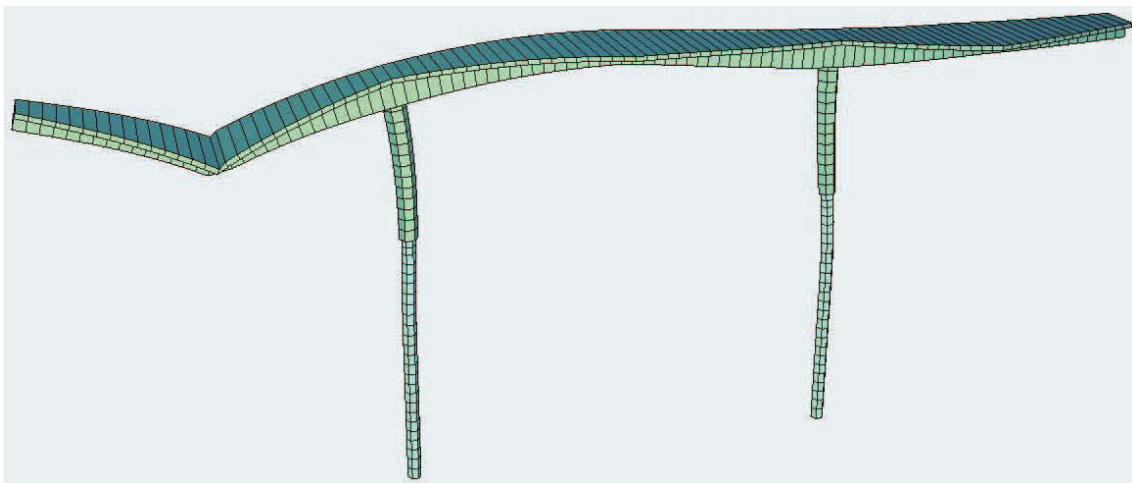
und somit lautet der  $d$ -Term bei einer Änderung der Bettungsziffer,  $k \rightarrow k + \Delta k$ , in einer Schicht  $[y_a, y_b]$

$$d(w, G_i) = \int_{y_a}^{y_b} \Delta k w(y) G_i(y, x) dy. \quad (6.18)$$

Hierbei ist  $w$  die seitliche Auslenkung des Pfahls aus den Überbaulasten und  $G_i$  die seitliche Auslenkung des Pfahls als Reaktion auf die Zwängung, die durch die

Einflussfunktion in das Tragwerk hineingetragen wird. Die Einflussfunktion für die Querkraft an einer Stelle  $x$  im Überbau entsteht bekanntlich durch eine vertikale Versetzung des Längsträgers im Punkt  $x$ . Diese Versetzung führt dann zu seitlichen Bewegungen  $G_3$  in den Punkten  $y$  der Pfähle. Der Einfluss einer Steifigkeitsänderung  $k \rightarrow k + \Delta k$  in der Bodenschicht auf die Querkraft an der Stelle  $x$  im Überbau ist dann groß, wenn alle drei Faktoren in Gl. (6.18) groß sind, insbesondere, wenn die Überlagerung von  $w$  mit  $G_i$  einen nennenswerten Beitrag liefert.

Insbesondere dürfen die beiden Funktionen nicht orthogonal zueinander sein, weil sonst ihr Integral null ist und selbst größte Änderungen in der Bettungsziffer keine Auswirkungen haben würden.



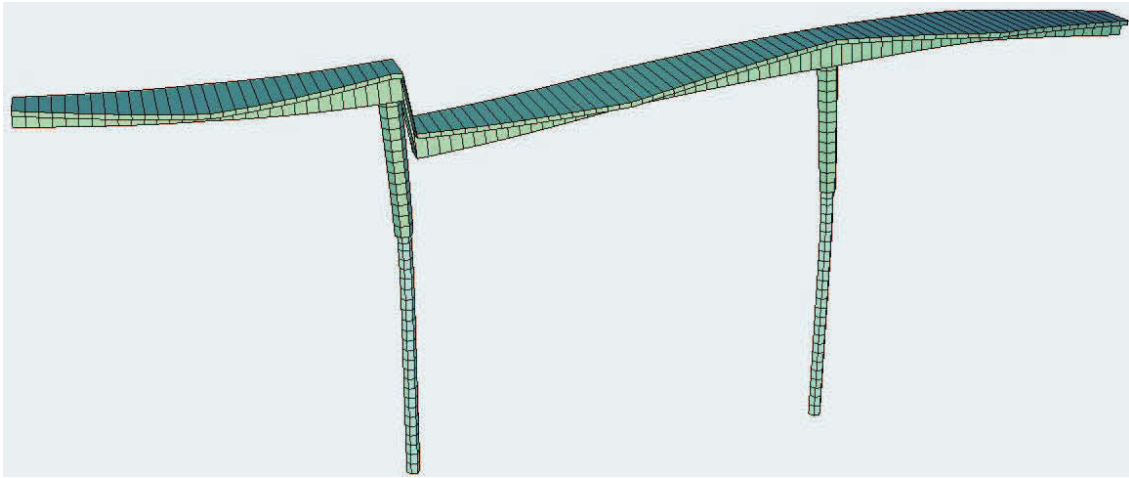
**Abb. 6.25:** Erzeugte Einflussfunktion für das Moment im ersten Feld.

Um eine repräsentative Auswahl an bemessungsrelevanten Schnittgrößen betrachten zu können, wurden insgesamt neun Einflusslinien erzeugt; zwei davon sind in Abb. 6.25 und 6.26 dargestellt. Die Auswertung der Änderung in den Zielgrößen erfolgt über die obige Gleichung (6.18). Dabei ist das Integral für jede Schicht auszuwerten und aufzusummieren.

Neben der einfachen Näherung über  $-d(w, G_i)$  wurde die verbesserte Approximation der Veränderung durch

$$J(e_m)^{(0,5)} = - \sum_j \frac{k_j}{k_j + 0,5 \cdot \Delta k_j} \int_0^l \Delta k_j w G_i dy \quad (6.19)$$

bestimmt. Für die Auswertung der Integralausdrücke werden nach Gl. (6.19) die Verformungsfiguren der Ausgangskonfiguration  $w$  vom gewählten Lastfall und der



**Abb. 6.26:** Erzeugte Einflussfunktion für die Querkraft rechts vom ersten Brückenpfeiler.

Greenschen Funktion  $G_i$  benötigt. Detailliert sind diese Funktionen in Abb. 6.27 für den Lastfall Gleichstreckenlast auf den äußeren Feldern und für die Einflussfunktion für die Querkraft in der Nähe des linken Widerlagers dargestellt. Dabei wird die Funktion als stückweise linear angenommen, d.h. mit Hilfe der Trapezregel integriert. Die Trapezlänge beträgt bei diesen Betrachtungen etwa 1 m. In Tab. 6.1 ist dieser Rechengang mit Ergebnissen dargestellt.

Über die Näherungsformel erhält man so für die Änderung in der Querkraft einen Wert von  $\Delta V = -4,25 \text{ kN}$ . Wendet man eine rudimentärere Berechnung des Integrals an<sup>1</sup>, so führt das mit  $\Delta V = -4,7 \text{ kN}$  auf ein ähnliches Ergebnis bei deutlich geringerem Aufwand. Die mit dem Programm *Sofistik* berechnete tatsächliche Änderung beträgt  $\Delta V = -4 \text{ kN}$ .

Wendet man die verbesserte Approximation  $J(e_m)^{(0,5)}$  an, so ist zunächst für jede Schicht der Faktor vor dem  $d$ -Term zu bestimmen:

$$f_j = \frac{k_j}{k_j + 0,5 \cdot \Delta k_j} \quad \text{mit } j = \text{Schicht } j. \quad (6.20)$$

Man erhält so mit  $J(e_m)^{(0,5)}$  für die Querkraftänderung einen Wert von  $\Delta V = -3,7 \text{ kN}$ , welcher ebenfalls einen guten Prognosewert darstellt. So wurden verschiedene Zielgrößen und Szenarien der Bodenkenngrößen untersucht. Detaillierte Auflistungen und Ergebnisse sind [59] zu entnehmen.

<sup>1</sup>Es werden lediglich die ersten beiden Bodenschichten berücksichtigt. Für die erste Schicht wird vereinfachend eine Trapez- und für die zweite Schicht eine Dreiecksfläche angenommen.

**Tabelle 6.1:** Auswertung des Integral über eine stückweise lineare Integration.

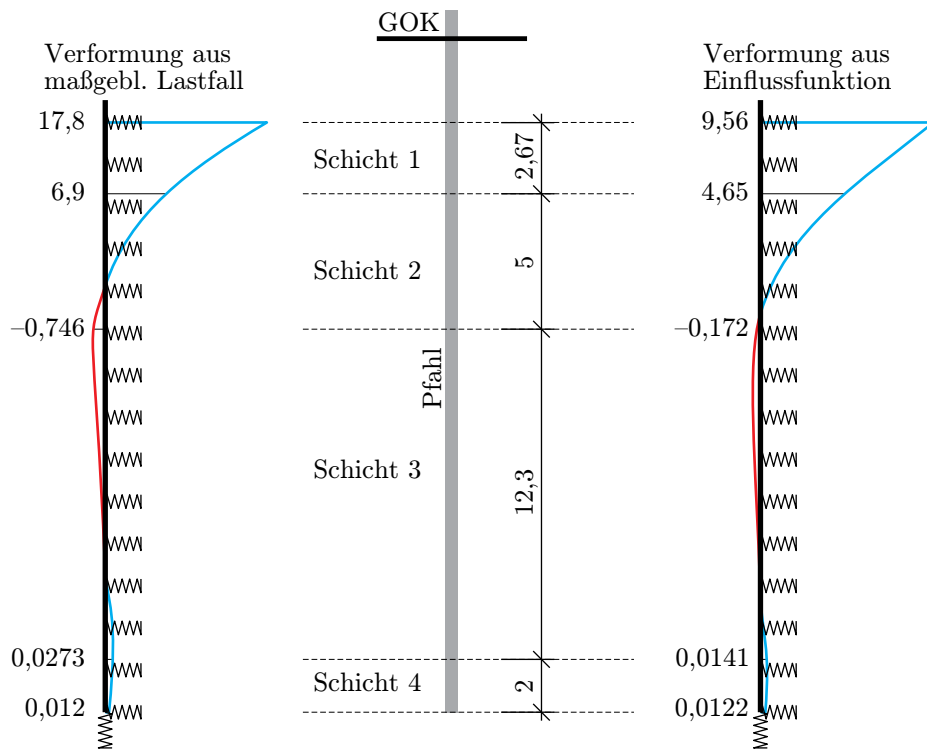
| Kote<br>[m]   | Schicht<br>[-] | $\Delta k$<br>[MN/m <sup>3</sup> ] | $\Delta L$<br>[m] | $a_l$<br>[mm] | $a_r$<br>[mm] | $b_l$<br>[mm] | $b_r$<br>[mm] | $\Delta d$<br>[N] | $d$<br>[kN] |
|---------------|----------------|------------------------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|-------------|
| 15,13         |                | 15                                 | 0,89              | 17,8          | 13,8          | 9,56          | 8             | -1856,82          |             |
| 16,02         | 1              | 15                                 | 0,89              | 13,8          | 10,1          | 8             | 6,3           | -1146,37          |             |
| 16,91         |                | 15                                 | 0,89              | 10,1          | 6,9           | 6,3           | 4,65          | -626,44           | -3,63       |
| 17,8          |                | 20                                 | 1                 | 6,9           | 3,98          | 4,65          | 3,01          | -424,69           |             |
| 18,8          |                | 20                                 | 1                 | 3,98          | 1,85          | 3,01          | 1,72          | -142,46           |             |
| 19,8          | 2              | 20                                 | 1                 | 1,85          | 0,45          | 1,72          | 0,79          | -31,05            |             |
| 20,8          |                | 20                                 | 1                 | 0,45          | -0,36         | 0,79          | 0,18          | -1,27             |             |
| 21,8          |                | 20                                 | 1                 | -0,36         | -0,75         | 0,18          | -0,17         | -0,19             | -0,60       |
| 22,8          |                | 20                                 | 0,95              | -0,75         | -0,84         | -0,17         | -0,33         | -3,80             |             |
| 23,75         |                | 20                                 | 0,95              | -0,84         | -0,79         | -0,33         | -0,37         | -5,43             |             |
| 24,69         |                | 20                                 | 0,95              | -0,79         | -0,66         | -0,37         | -0,35         | -4,95             |             |
| 25,64         |                | 20                                 | 0,95              | -0,66         | -0,50         | -0,35         | -0,29         | -3,51             |             |
| 26,58         |                | 20                                 | 0,95              | -0,50         | -0,34         | -0,29         | -0,22         | -2,05             |             |
| 27,53         |                | 20                                 | 0,95              | -0,34         | -0,22         | -0,22         | -0,15         | -1,00             |             |
| 28,48         | 3              | 20                                 | 0,95              | -0,22         | -0,12         | -0,15         | -0,10         | -0,40             |             |
| 29,42         |                | 20                                 | 0,95              | -0,12         | -0,05         | -0,10         | -0,05         | -0,12             |             |
| 30,37         |                | 20                                 | 0,95              | -0,05         | 0             | -0,05         | -0,02         | -0,02             |             |
| 31,31         |                | 20                                 | 0,95              | 0             | 0,02          | -0,02         | -0,00         | 0,00              |             |
| 32,26         |                | 20                                 | 0,95              | 0,02          | 0,03          | -0,00         | 0,01          | 0,00              |             |
| 33,21         |                | 20                                 | 0,95              | 0,03          | 0,03          | 0,01          | 0,01          | -0,01             |             |
| 34,15         |                | 20                                 | 0,95              | 0,03          | 0,03          | 0,01          | 0,01          | -0,01             | -0,02       |
| 35,10         | 4              | 50                                 | 1                 | 0,03          | 0,02          | 0,01          | 0,01          | -0,02             |             |
| 36,10         |                | 50                                 | 1                 | 0,02          | 0,01          | 0,01          | 0,01          | -0,01             | 0,00        |
| <b>Summe:</b> |                |                                    |                   |               |               |               |               |                   | -4,25       |

Das Verfahren der Modellfehlerbestimmung, hier im Sinne einer Sensitivitätsanalyse angewandt, ist, wie man sieht, gut für eine Abschätzung der Veränderung in der Zielgröße geeignet, wobei die mit Gl. (6.19) berechneten Werte<sup>2</sup> grundsätzlich genauer sind als die mit dem Term  $J(e_m)$  erhaltenen Ergebnisse<sup>3</sup>.

Zu der Frage, ob die Variationen in den Bodenschichten einen signifikanten Einfluss auf die Schnittgrößen haben, lässt sich feststellen, dass bei diesen Betrachtungen die maximale Änderung in einer Schnittgröße bei unter 2% liegt, in den meisten

<sup>2</sup>Der relative Fehler liegt hier um 10%.

<sup>3</sup>Hier liegt der relative Fehler bei ca. 20%.



**Abb. 6.27:** Darstellung der Verformungsfigur des Pfahls unter einem maßgeblichen Lastfall und aufgrund der Einflussfunktion.

Fällen deutlich unter 1%. Damit ist gezeigt, dass bei den betrachteten Lastfällen die Ungenauigkeit in der Ermittlung der Bodenkenndaten keine Auswirkungen auf die bemessungsrelevanten Schnittgrößen hat.

Zusätzlich zu den bisherigen Betrachtungen wurde die Steifigkeit des Trägers im mittleren Feld variiert, um Änderungen in den Zielgrößen zu untersuchen. Dabei ist zu beobachten, dass in mehreren Fällen die tatsächliche Änderung der Zielgröße sowohl bei einer starken Schwächung als auch bei einer großen Versteifung des Trägers zu gleichen Auswirkungen, z.B. einer Abnahme der Schnittkraft, in der Zielgröße führt. In diesen Sonderfällen führt das Näherungsverfahren zur Modellfehlerbestimmung zu Aussagen, die nicht verwendet werden können. Dabei ist allerdings zu beachten, dass ein gesamtes, sehr großes Bauteil in der Steifigkeit variiert wurde und die Zielgröße z.T. im veränderten Träger lag.

Bei den Betrachtungen stellte sich aber heraus, dass bei einer Veränderung der Steifigkeit bis  $\pm 30\%$ , das Verfahren gut geeignet ist, um die Änderung in der Zielgröße vorherzusagen. Eine Teilung des Trägers in mehrere Abschnitte wird zu besseren, detaillierteren Ergebnissen führen.





# 7 Zusammenfassung und Ausblick

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Erweiterung der Fehlerberechnung in der Methode der finiten Elemente in Form der Modellfehlerbestimmung aufgezeigt. Die Estimatoren des Approximationsfehlers sind seit einigen Jahren gut erforscht und bieten gute Möglichkeiten, eine adaptive Netzanpassung (h- oder p-Adaption) durchzuführen. So können für eine gegebene Problemstellung optimale Netze erzeugt werden. Da aber neben dem numerischen Fehler dem Modellfehler eine ebenso große Bedeutung beizumessen ist, wurden in dieser Arbeit die Methoden zur Modellfehlerberechnung auf baustatische Belange übertragen und untersucht.

Der Greenschen Funktion kommt bei der Modellfehlerbestimmung und der zielorientierten Fehlerschätzung eine zentrale Bedeutung zu. Diese wurde ausführlich mit ihren Eigenschaften und den Berechnungsmöglichkeiten im Allgemeinen und im speziellen mit der FE-Technik erläutert. Mit Hilfe einer Lagrange Formulierung wurde eine Technik aufgezeigt, die es auch bei nichtlinearen Problemen ermöglicht, eine zielorientierte Fehlerschätzung durchzuführen. Hierfür wurde eine verallgemeinerte Greensche Funktion eingeführt. Es wurde gezeigt, wie die Generierung einer Einflussfunktion mit einem FE-Programm durchgeführt werden kann. Mit diesem Wissen kann man auch die Berechnung einer Einflussfunktion mit einem kommerziellen FE-Programm, ohne dass die Elementformulierung bekannt ist, vornehmen; es sind lediglich die Knotenkräfte zu bestimmen.

Die zielorientierten Fehlerestimatoren steuern die Netzadaption neben dem Fehler in der eigentlichen Lösung  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  zusätzlich über den Fehler in der dualen Lösung,  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$ , was eben dazu führt, dass dem Fehler in der Zielgröße bei der Netzanpassung besondere Bedeutung beigemessen wird. Für diese Technik wurde unter Betrachtung des Projektionssatzes gezeigt, dass die Einflussfunktion auf einem FE-Netz möglichst gut dargestellt werden muss, um ein exaktes Ergebnis zu erhalten.

Es wurde ein Verfahren, die GFD-Methode, vorgestellt, mit dem es möglich ist, Punktgrößen bei der Platte möglichst genau zu bestimmen. Unter Verwendung der bekannten Grundlösung der Platte, in der die von der FE-Methode nicht darstellbare

Singularität enthalten ist, und Berechnung des regulären Anteils, d.h. Anpassung der Randdaten der Fundamentallösung an das gegebene Problem, wurde eine deutlich verbesserte Einflussfunktion gefunden, die mit der Belastungsfunktion überlagert, die gewählte Zielgröße liefert. Das Verfahren hat sich als besonders stabil erwiesen und liefert gerade für Einzellasten in der Nähe der Zielgröße hervorragende Ergebnisse.

Die Modellfehlerberechnung wurde von verschiedenen Seiten betrachtet. Das Hauptaugenmerk lag dabei auf der Berechnung des Modellfehlers bei einer Veränderung im  $E$ -Modul sowohl für lineare als auch für nichtlineare Probleme. Das Grundlegende dabei ist, dass der Modellfehler über Berechnungen am vereinfachten Modell bestimmt wird und damit Prognosen über die Veränderungen der Zielgröße an einem veränderten Modell möglich werden. Der Näherungscharakter der verwendeten Technik konnte aufgezeigt werden, wobei einfache Verbesserungsmaßnahmen zu einer deutlichen Verbesserung der Prognose führten. Mit diesem Verfahren konnten der Modellfehlerabschätzung Schranken zugewiesen werden, was gerade in Hinblick auf die Bemessung von Bauteilen von großer Bedeutung sein kann.

Außerdem wurde die Modellfehlerbestimmung auf nichtlineare Probleme übertragen, wobei die Eigenschaften, die für lineare Probleme gelten, erhalten blieben.

Über die Formulierung mit dem Satz von Betti gelang es, das Gebietsintegral, welches für die Modellfehlerberechnung bei Flächentragwerken bestimmt werden muss, in ein Randintegral zu überführen. Für Stabtragwerke kann dieses Verfahren als exakt bezeichnet werden. Für Flächentragwerke ist die Berechnung aber zu aufwendig, wenn das zweite Gleichungssystem tatsächlich gelöst wird, oder die Ergebnisse stellen, wenn die inverse Matrix approximiert wird, keine Verbesserung dar.

Neben der Modellfehlerbestimmung spielt die Sensitivitätsanalyse eines Tragwerks für den Tragwerksplaner eine entscheidende Rolle und gibt ihm ein Werkzeug an die Hand, mit welchem er sichere Abschätzungen über die bemessungsrelevanten Schnittgrößen treffen kann.

## Ausblick

Es sind mehrere Entwicklungen, die das Interesse an Greenschen Funktionen wieder geweckt haben. Zum einen ist es die Methode der zielorientierten Verfeinerung, zum andern ist es das zunehmende Interesse bei den Tragwerksplanern an Fragen der Zuverlässigkeit von FE-Berechnungen. Die glückliche Fügung dabei ist, dass es kein abstraktes *tool* ist, auf dem die Analyse beruht, sondern eben Einflussfunktionen und der Tragwerksplaner daher die theoretischen Ergebnisse gut umsetzen und nachvollziehen kann. Die *neue* Statik ist eigentlich die *alte* Statik.

---

In Zukunft sollte es darum gehen, die hier vorgetragenen Zusammenhänge in die Programme einfließen zu lassen. Insbesondere sollten die FE-Programme in der Lage sein, Einflussfunktionen für beliebige Schnittgrößen, in Einzelpunkten und in ganzen Schnitten, zu berechnen. Denn anhand des Verlaufs der Einflussfunktionen kann sich der Tragwerksplaner einen ersten Einblick von der zu erwartenden Genauigkeit, den Abhängigkeiten und den Sensitivitäten verschaffen. Die meisten FE-Programme, die in den Ingenieurbüros eingesetzt werden, bieten diese Optionen nicht an; wie generell in der Praxis sehr wenig mit Einflussfunktionen gearbeitet wird.

Denkbar wäre auch, dass man mit Hilfe von Einflussfunktionen rechenstechnisch zu einer Beurteilung der Standsicherheit bzw. der Tragreserven von Gebäuden kommt, indem man die Einflussfunktionen für die Schnittkräfte an den höchstbeanspruchten Stellen plottet und über Parameterstudien zu quantitativen Aussagen bezüglich des Ausfalls von Bauteilen kommt.

Auch die Validierung von FE-Berechnungen kann nur über das Studium der Einflussfunktionen geschehen. Bei der Entwicklung der finiten Elemente hat man sich viele Jahre vorwiegend mit dem Problem der Verifizierung der FE-Ergebnisse beschäftigt, aber die Frage, wie gut das FE-Modell eigentlich das reale Tragverhalten widerspiegelt, wurde nicht gestellt. Will man aber die Güte eines Tragwerkmodells beurteilen, so kommt man nicht umhin, sich mit den Sensitivitäten, mit den Modellparametern und den Änderungen derselben zu beschäftigen. Und diese Fragestellungen zielen alle auf das Studium der Einflussfunktionen ab.

Natürlich ist mit dieser Arbeit erst ein kleiner Bereich der Modellfehlerbestimmung erschlossen. Die numerischen Untersuchungen sind nicht abgeschlossen. So ist z.B. eine Ausweitung der Modellfehlerberechnung auf andere Fehlerquellen wie z.B. materielle Nichtlinearität, geometrische Ungenauigkeiten und Fehler in den Lagerungen ein weiteres großes Thema. Auch die Zuverlässigkeit der Abschätzung mittels des linearisierten  $d$ -Terms sollte, wenn möglich, noch verbessert werden.

Der Erfolg der hier vorgeschlagenen Techniken wird wesentlich davon abhängen, wie sie in der Praxis umgesetzt werden und angenommen werden. Wir glauben, dass die *rechnerische Beurteilung* der Standsicherheit eines Tragwerks, welche alle notwendigen Nachweise einschließt, nur über den hier aufgezeigten Weg möglich ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] AINSWORTH, Mark ; ODEN, J. T.: A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142 (1997), S. 1–88
- [2] AINSWORTH, Mark ; ODEN, J. T.: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. New York : John Wiley & Sons, 2000 (Pure and Applied Mathematics)
- [3] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis*. 5. Auflage. Berlin : Springer, 2006
- [4] ALTENBACH, Johannes ; ALTENBACH, Holm: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : Teubner, 1994
- [5] BABUŠKA, Ivo ; MILLER, A.: A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 61 (1987), Nr. 1, S. 1–40
- [6] BABUŠKA, Ivo ; STROUBOULIS, Theofanis: *The Finite Element Method and its Reliability*. Oxford : Oxford university press, 2001 (Numerical mathematics and scientific computation)
- [7] BANGERTH, Wolfgang ; RANNACHER, Rolf: Finite Element Approximation of the Acoustic Wave Equation: Error Control and Mesh Adaption. In: *Journal of Numerical Mathematics* 7 (1999), Nr. 4, S. 263–282
- [8] BANGERTH, Wolfgang ; RANNACHER, Rolf: *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Basel : Birkhäuser, 2003
- [9] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag, 2002
- [10] BECKER, Roland ; RANNACHER, Rolf: An Optimal Control Approach to a Posteriori Error Estimation in Finite Element Methods. In: *Acta Numerica* 10 (2001), Nr. 00, S. 1–102
- [11] BECKER, Wilfried ; GROSS, Dietmar: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin : Springer, 2002

- [12] BRAACK, Malte ; ERN, Alexandre: A Posteriori Control of Modeling Errors and Discretization Errors. In: *Multiscale Modeling and Simulation* 1 (2003), Nr. 2, S. 221–238
- [13] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. 3. Auflage. Berlin : Springer, 2003
- [14] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2. Auflage. New York : Springer, 2002 (Texts in Applied Mathematics)
- [15] CARL, Oliver: *Sensitivitätsanalyse mit Einflussfunktionen*. Kassel, Universität Kassel, Diplom 2, 2004
- [16] CIARLET, Philippe G. (Hrsg.) ; LIONS, Jacques-Louis (Hrsg.): *Handbook of numerical analysis*. Bd. 2. Vol.: *Finite Element Methods (Part 1)*. Amsterdam : North-Holland, 1991
- [17] CIRAK, Fehmi: *Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Diss., 1998
- [18] DEIF, Assem: *Sensitivity Analysis in Linear Systems*. Berlin : Springer, 1986
- [19] DOBROWOLSKI, Manfred: *Angewandte Funktionalanalysis*. Berlin : Springer, 2006
- [20] FRANKE, Wolfram ; KUNOW, Thorsten: *Kleines Einmaleins der Baustatik*. Kassel : Kassel University Press, 2007
- [21] GRÄTSCH, Thomas: *L<sub>2</sub>-Statik*. Kassel, Universität Kassel, Diss., 2002
- [22] GRÄTSCH, Thomas ; HARTMANN, Friedel: Finite element recovery techniques for local quantities of linear problems using fundamental solutions. In: *Computational Mechanics* 33 (2003), Nr. 1, S. 15–21
- [23] GRÄTSCH, Thomas ; HARTMANN, Friedel: Duality and Finite Elements. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004), Nr. 9-10, S. 1005–1020
- [24] GRÄTSCH, Thomas ; HARTMANN, Friedel: Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions. In: *Computational Mechanics* 37 (2006), Nr. 5, S. 394–407
- [25] GREVE, Ralf: *Kontinuumsmechanik*. Berlin : Springer, 2003
- [26] HARTMANN, Friedel: *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*. Berlin : Springer, 1985
- [27] HARTMANN, Friedel: *Methode der Randelemente*. Berlin : Springer, 1987
- [28] HARTMANN, Friedel: *Introduction to Boundary Elements*. Berlin : Springer, 1989
- [29] HARTMANN, Friedel ; KATZ, Casimir: *Statik mit finiten Elementen*. Berlin : Springer, 2002

- 
- [30] HARTMANN, Friedel ; KATZ, Casimir: *Structural Analysis with Finite Elements*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2007
- [31] JAMES, Doug L. ; PAI, Dinesh K.: Multiresolution Green's Function Methods for Interactive Simulation of Large-Scale Elastostatic Objects. In: *ACM Transactions on Graphics* 22 (2003), Nr. 1, S. 47–82
- [32] JOHNSON, Claes: *Numerical Solution of Partial Differential Equation by the Finite Element Method*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995
- [33] JOHNSON, Claes ; HANSBO, Peter: Adaptive finite element methods in computational mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 101 (1992), S. 143–181
- [34] JOHNSON, Steven G.: *Notes on Adjoint Methods for 18.336*. 2007. – Mathematical Notes im Internet
- [35] KALIK, Karl ; KOLBE, Werner ; WENDLAND, Wolfgang L. ; STEINBACH, Olaf ; MEHLHORN, Gerhard (Hrsg.): *Der Ingenieurbau: Grundwissen*. Bd. Mathematik, Technische Mechanik: *Mathematik*. Berlin : Ernst & Sohn, 1999
- [36] KASIM, A. M. A. ; TOPPING, B. H. V.: Static Reanalysis: A Review. In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 113 (1987), S. 10291045
- [37] KELLY, D. W. ; GAGO, J. P. De S. R. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; BABUSKA, I.: A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - error analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), Nr. 11, S. 1593–1619
- [38] KELLY, D. W. ; GAGO, J. P. De S. R. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; BABUSKA, I.: A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II - adaptive mesh refinement. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), Nr. 11, S. 1621–1656
- [39] KIZIO, Stephan: *Adaptive Finite-Elemente-Algorithmen in der Strukturdynamik*. Karlsruhe, Universität Karlsruhe, Diss., 2008
- [40] KRÄTZIG, Wilfried B. ; HARTE, Reinhardt ; MESKOURIS, Konstantin ; WITTEK, Udo: *Tragwerke 1*. 4. Auflage. Berlin : Springer, 1999
- [41] KUNOW, Thorsten: *Verbesserte Berechnung von lokalen Zielgrößen mit der Methode der finiten Elemente unter Verwendung von Grundlösungen*. Kassel, Universität Kassel, Projekt 3, 2003
- [42] LARSSON, Stig ; THOMÉE, Vidar: *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden*. Berlin : Springer, 2005
- [43] LINK, Michael: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. 3. Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 2002

- [44] MANG, Herbert ; HOFSTETTER, Günter: *Festigkeitslehre*. Wien : Springer, 2000
- [45] MATERNA, Daniel: *Finite Elemente und Einflussfunktionen*. Kassel, Universität Kassel, Diplom 1, 2002
- [46] MATERNA, Daniel: *Herleitung eines bilinearen Elements zur Untersuchung von geometrisch nichtlinearen Scheibenproblemen*. Kassel, Universität Kassel, Projekt 3, 2003
- [47] MATERNA, Daniel: *Goal-oriented recovery bei nichtlinearen Scheibenproblemen*. Kassel, Universität Kassel, Diplom 2, 2004
- [48] ODEN, J. T. ; PRUDHOMME, Serge: Goal-Oriented Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method. In: *Computer and Mathematics with Applications* 41 (2001), S. 735–756
- [49] ODEN, J. T. ; PRUDHOMME, Serge: Estimation of Modeling Error in Computational Mechanics. In: *Journal of Computational Physics* 182 (2002), S. 496–515
- [50] ODEN, J. T. ; PRUDHOMME, Serge ; HAMMERAND, Daniel C. ; KUCZMA, Mięczyław S.: Modeling Error and Adaptivity in Nonlinear Continuum Mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2001), Nr. 190, S. 6663–6684
- [51] ODEN, J. T. ; VEMAGANTI, Kumar: Adaptive Modeling of Composite Structures: Modeling Error Estimation. In: *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* (2000), Nr. 1, S. 1–16
- [52] ODEN, J. T. ; ZOHDİ, Tarek I.: Analysis and Adaptive Modeling of Highly Heterogeneous Elastic Structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148 (1997), S. 367–391
- [53] PANKE, Thorsten: *Berechnung von Einflussfunktionen mit der Methode der finiten Elemente*. Kassel, Universität Kassel, Diplom 1, 2002
- [54] PARISCH, Horst: *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : Teubner Verlag, 2003
- [55] PELKE, Eberhard ; GRAUBER, Carl-Alexander ; ILIĆ, Goran: Neue Lahnbrücke im Zuge der Teilortsumgehung Weilburg. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 101 (2006), Nr. 7, S. 522–527
- [56] ROMBACH, Günter: *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*. 2. Auflage. Berlin : Ernst & Sohn, 2007
- [57] SCHIEFER, Stefan ; FUCHS, Michael ; BRANDT, Bernd ; MAGGAUER, Herhard ; EGERER, Andreas: Besonderheiten beim Entwurf semi-integraler Spannbetonbrücken. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 101 (2006), Nr. 10, S. 790–802



- 
- [58] SCHWARZ, Hans R.: *Methode der finiten Elemente*. 3. Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 1991
- [59] SOPOTH, Marek ; SOPOTH, Georg: *Sensitivitätsanalyse an einem Brückenbauwerk in semi-integraler Bauweise*. Kassel, Universität Kassel, Diplom 1, 2008
- [60] STEIN, Erwin ; BARTHOLD, Franz-Joseph ; MEHLHORN, Gerhard (Hrsg.): *Der Ingenieurbau: Grundwissen*. Bd. Werkstoffe, Elastizitätstheorie: *Elastizitätstheorie*. Berlin : Ernst & Sohn, 1996
- [61] STEIN, Erwin ; RÜTER, Marcus ; OHNIMUS, Stephan: Adaptive finite element analysis and modelling of solids and structures. Findings, problems and trends. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (2004), S. 103–138
- [62] STEIN, Erwin ; RÜTER, Marcus ; OHNIMUS, Stephan: Error-controlled adaptive goal-oriented modeling and finite element approximations in elasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007), Nr. 37-40, S. 3598–3613
- [63] STRANG, Gilbert: *Computational Science and Engineering*. Wellesley, USA : Wellesley-Cambridge Press, 2007
- [64] SZABÓ, Barna A. ; BABUŠKA, Ivo: *Finite Element Analysis*. New York : John Wiley & Sons, 1991
- [65] TOTTENHAM, H. ; TOTTENHAM, H. (Hrsg.) ; BREBBIA, C. (Hrsg.): *Basic Principles*. Southampton : Southampton University Press, 1970 (Finite Element Techniques in Structural Mechanics)
- [66] VEMAGANTI, Kumar: Modeling Error Estimation and Goal-Oriented Adaptive Modeling of Perforated Materials. In: *TICAM Report* (2000), Nr. 00-25
- [67] VEMAGANTI, Kumar S.: *Goal-Oriented Adaptive Modeling of Heterogeneous Elastic Solids*. Austin, Texas, University of Texas at Austin, Diss., 2000
- [68] VEMAGANTI, Kumar S. ; ODEN, J. T.: Estimation of Local Modeling Error and Goal-Oriented Adaptive Modeling of Heterogeneous Materials, Part II. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 6089–6124
- [69] VERFÜHRT, Rüdiger: *A Review of a Posteriori Error Estimation an Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Chichester and Stuttgart : John Wiley & Sons und B. G. Teubner, 1996
- [70] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 6. Auflage. Berlin : Springer, 2007
- [71] WRIGGERS, Peter: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin : Springer, 2001

- [72] ZIENKIEWICZ, Olgierd C. ; TAYLOR, Robert L.: *The Finite Element Method*. Bd. 1. 5. Auflage. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2002
- [73] ZIENKIEWICZ, Olgierd C. ; TAYLOR, Robert L.: *The Finite Element Method*. Bd. 2. 5. Auflage. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2002
- [74] ZILCH, Konrad ; ZEHETMAIER, Gerhard: *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Berlin : Springer, 2006

## Erklärung

Hiermit versichere ich, Thorsten Kunow, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, im Oktober 2008

A handwritten signature in blue ink that reads "Thorsten Kunow". The signature is written in a cursive style with a large initial 'T' and a long horizontal stroke.

Thorsten Kunow