

# Nichtüberlappende Gebietszerlegungsmethoden für lineare und quasilineare (monotone und nichtmonotone) Probleme

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
am Fachbereich Mathematik  
der Universität Kassel

vorgelegt von  
**Dipl.-Math. Stephan Schreiber**  
geboren in Hildburghausen

Institut für Analysis und Angewandte Mathematik  
Universität Kassel  
Juli 2009

**Tag der mündlichen Prüfung**  
06. Juli 2009

**Erstgutachter**  
Prof. Dr. Reinhard Hochmuth  
Universität Kassel

**Zweitgutachter**  
Prof. Dr. Ralf Kornhuber  
Freie Universität Berlin

Stephan Schreiber  
Fachbereich Mathematik  
Institut für Analysis und Angewandte Mathematik  
Universität Kassel  
Heinrich-Plett-Straße 40  
34132 Kassel

[schreiber@mathematik.uni-kassel.de](mailto:schreiber@mathematik.uni-kassel.de)

# Vorwort

Diese Arbeit entstand in der Zeit von Dezember 2005 bis Mai 2009 an der Universität Kassel. An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Reinhard Hochmuth für die hervorragende Betreuung und Förderung sowie die interessanten Gespräche und die Freiheit bei der Wahl des Themas bedanken.

Herrn Prof. Dr. Ralf Kornhuber danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Weiterhin gilt mein Dank Dr. Martin Steigemann und Thomas Geffers für ihre stete Diskussionsbereitschaft. Bei Liesa Denecke und Nikolina Miteff-Denecke bedanke ich mich für die Korrekturen des Manuskripts.

Besonders danke ich auch meinen Eltern und meiner Freundin Liesa für die Unterstützung in den vergangenen Jahren.

Kassel, im Juli 2009

Stephan Schreiber



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Die nichtüberlappende Schwarzsche Methode für lineare Probleme</b>	<b>8</b>
2.1 Das lineare Modellproblem . . . . .	8
2.2 Das lineare Transmissionsproblem . . . . .	16
2.3 Die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode . . . . .	23
2.4 Eine Verallgemeinerung der SCHWARZschen Methode . . . . .	26
2.4.1 Definition der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (VSAM) . . . . .	26
2.4.2 Eigenschaften des Fehlers der VSAM . . . . .	30
2.4.3 Zur Konvergenz der VSAM . . . . .	38
2.5 Zusammenfassung . . . . .	46
<b>3 Quasilineare Probleme und VSAM</b>	<b>48</b>
3.1 Das quasilineare Modellproblem . . . . .	48
3.2 Das quasilineare Transmissionsproblem . . . . .	52
3.3 Die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode für quasilineare Probleme . . . . .	58
3.3.1 Definition der VSAM im quasilinearen Fall . . . . .	58
3.3.2 Eigenschaften des Fehlers der VSAM im quasilinearen Fall . . . . .	61
3.3.3 Zur Konvergenz der VSAM im quasilinearen Fall . . . . .	69
3.4 Zusammenfassung . . . . .	73
<b>4 Nichtmonotone quasilineare Probleme mit springenden Nichtlinearitäten und Gebietszerlegungsmethoden</b>	<b>75</b>
4.1 Das Modellproblem . . . . .	76
4.1.1 Das nichtmonotone quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten . . . . .	76
4.1.2 Das nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten . . . . .	77
4.2 Die KIRCHHOFF-Transformation . . . . .	80
4.3 Das transformierte Transmissionsproblem . . . . .	88
4.4 Probleme bei der Anwendbarkeit der VSAM . . . . .	89
4.5 Ein optimierungsbasierter Lösungsansatz . . . . .	90
4.5.1 Die Hilfsprobleme . . . . .	91
4.5.2 Das restringierte Minimierungsproblem . . . . .	92
4.5.3 Das freie Minimierungsproblem . . . . .	98
4.6 Zur Sinnhaftigkeit der Optimalitätsbedingungen . . . . .	100
4.6.1 Ein Exkurs über punktweise Produkte . . . . .	101
4.6.2 Ein Exkurs über Kompositionsooperatoren . . . . .	106
4.6.3 Zur Differenzierbarkeit des Zielfunktional . . . . .	107
4.7 Zur Eindeutigkeit der Lösung des Optimierungsproblems . . . . .	112
4.7.1 Eine Umformulierung des Problems und der Operator $\Lambda$ . . . . .	113
4.7.2 Eine vereinfachte Problemklasse . . . . .	114
4.7.3 Die Abbildungseigenschaften von $\Lambda$ . . . . .	119
4.7.4 Zur Invertierbarkeit von $\Lambda$ . . . . .	120
4.8 Einige Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems . . . . .	125
4.8.1 Zur Berechnung der Ableitung . . . . .	126
4.8.2 Abstiegsverfahren . . . . .	127

4.8.3	NEWTON-Verfahren	132
4.9	Ausblick auf weitere Lösungsansätze und Lösungsverfahren	135
4.9.1	Ein verallgemeinerter optimierungsbasierter Ansatz	135
4.9.2	Weitere Lösungsansätze	135
4.9.3	Weitere Lösungsverfahren für die Minimierungsprobleme	135
4.10	Zusammenfassung	136
<b>A</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>138</b>
A.1	Dualräume, Bilinearformen und der Satz von LAX-MILGRAM	138
A.1.1	Dualräume	138
A.1.2	Bilinearformen	140
A.2	Funktionsräume auf LIPSCHITZ-Gebieten	141
A.2.1	LIPSCHITZ-Gebiete	141
A.2.2	LEBESGUE-Räume	142
A.2.3	SOBOLEV-Räume	143
A.2.4	TRIEBEL-LIZORKIN- und BESOV-Räume	145
A.2.5	Einbettungssätze	147
A.2.6	Spur- und Fortsetzungsoperatoren	148
A.2.7	GREENSche Formel und Divergenzsatz	151
A.3	Monotone Operatoren	151
A.4	NEMYTSKIJ-Operatoren	153
A.4.1	NEMYTSKIJ-Operatoren in LEBESGUE-Räumen	153
A.4.2	NEMYTSKIJ-Operatoren in den SOBOLEV-Räumen $W_p^1(\Omega)$	154
A.4.3	Kompositionsoperatoren in Räumen höherer Glattheit	155
A.5	Punktweise Produkte	156
A.6	Variationen und Ableitungen von Funktionalen	156
<b>B</b>	<b>Transmissionsprobleme und Steklov-Poincaré-Operatoren</b>	<b>159</b>
B.1	Transmissionsprobleme	159
B.2	Zur Regularität der Lösung des gemischten Randwertproblems	159
B.3	STEKLOV-POINCARÉ-Operatoren	161
<b>C</b>	<b>Einige Resultate der Optimierung in Banach-Räumen</b>	<b>163</b>
C.1	Das implizite Funktionentheorem	163
C.2	Folgenunterhalbstetige Funktionale	163
C.3	Ein Existenzresultat für semilineare Probleme	164
C.4	Ein Existenzresultat für nichtlineare Probleme	165
C.5	Reduzierte Probleme und Bestimmung der Ableitungen	166
	<b>Modellprobleme, Verfahren und Voraussetzungen aus Kapitel 2</b>	<b>169</b>
	<b>Modellprobleme, Verfahren und Voraussetzungen aus Kapitel 3</b>	<b>173</b>
	<b>Modellprobleme und Voraussetzungen aus Kapitel 4</b>	<b>177</b>
	<b>Index</b>	<b>180</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>182</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>187</b>

# 1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind nichtüberlappende Gebietszerlegungsmethoden. Diese werden einerseits hinsichtlich der zu lösenden Problemklassen verallgemeinert und andererseits in bisher nicht untersuchten Kontexten betrachtet. Dabei stehen funktionalanalytische Untersuchungen zur Wohldefiniertheit, eindeutigen Lösbarkeit und Konvergenz im Vordergrund.

Gebietszerlegungsmethoden sind Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Dazu wird das (beschränkte) Gebiet  $\Omega$ , auf dem die Differentialgleichung gegeben ist, in Teilgebiete  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , zerlegt. Diese Teilgebiete können sich überlappen, also gemeinsame Schnittmengen aufweisen, oder nicht überlappen, also paarweise disjunkt sein. Entsprechend der Zerlegung sprechen wir von überlappenden bzw. nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethoden. Die Idee einer Gebietszerlegungsmethode besteht nun darin, das komplexe Ausgangsproblem äquivalent in gekoppelte kleinere Teilprobleme auf den Teilgebieten umzuformulieren. Die gegenseitige Kopplung erfolgt dabei über die Daten der unbekannt Lösung auf den gemeinsamen Rändern der Teilgebiete. In den meisten Fällen wird diese Kopplung durch einen iterativen Prozess ersetzt, bei dem das Erfülltsein der Kopplungsbedingungen nur zwischen Lösungen der Teilprobleme unterschiedlicher Iterationsschritte gefordert wird. Dies hat den Vorteil, dass die auf den Teilgebieten formulierten Teilprobleme in jedem Iterationsschritt unabhängig voneinander und parallel nebeneinander gelöst werden können.

Die wohl erste Gebietszerlegungsmethode findet sich in der 1870 von H.A. SCHWARZ veröffentlichten Arbeit [Sch70]. SCHWARZ benutzte den nach ihm benannten Algorithmus, um die Existenz von harmonischen Funktionen mit vorgeschriebenen Randwerten auf Gebieten mit nichtglatten Rändern zu zeigen. Später wurde die SCHWARZsche Methode immer wieder aufgeriffen, unter anderem in Arbeiten von SOBOLEV, [Sob36], BABUŠKA, [Bab57], BROWDER, [Bro58] und P.L. LIONS, [Lio88, Lio89]. Wir verweisen auf [Lio88] für weitere Anmerkungen und Referenzen.

Seit zu Beginn der 1980er Jahre immer leistungsfähigere Parallelrechner entwickelt wurden, wuchs auch das Interesse an Gebietszerlegungsmethoden. Diesen wohnt, per Konstruktion, eine Parallelität inne, weshalb sie sehr gut auf parallelen Rechnerarchitekturen implementiert werden können. Ein weiterer Vorteil von Gebietszerlegungsmethoden besteht darin, dass für die Teilprobleme verschiedene Lösungsverfahren verwendet werden können. Mehr noch, auf den (nichtüberlappenden) Teilgebieten dürfen auch unterschiedliche Typen von Differentialgleichungen auftreten. Darüber hinaus können auf den jeweiligen Teilgebieten, unabhängig voneinander, die numerischen Lösungsverfahren den Gegebenheiten der physikalischen Lösung angepasst werden.

Die Gesamtheit der Gebietszerlegungsmethoden kann nach unterschiedlichen Gesichtspunkten in Klassen eingeteilt werden. Wir halten uns nachfolgend an die Einteilung in [Mat08]. Einerseits gibt es die klassischen (überlappenden) SCHWARZschen Methoden. Diese basieren auf einer Zerlegung des Gebietes in überlappende Teilgebiete. In dieser Klasse unterscheiden wir noch einmal *multiplikative* und *additive* SCHWARZsche Methoden, je nachdem, wie der iterative Prozess durchgeführt wird. Da wir uns in dieser Arbeit nicht mit überlappenden Gebietszerlegungsmethoden befassen, gehen wir nicht genauer auf sie ein und verweisen statt dessen auf die Standardliteratur [TW05, QV99, Mat08, SBG96, Lio88, Xu92].

Daneben gibt es *Substrukturierungsmethoden* (engl. substructuring methods, SCHUR complement methods), welche mit einer nichtüberlappenden Zerlegung des Gebietes arbeiten. Dabei wird das Ausgangsproblem auf die Teilgebiete reduziert und die Kopplung der Teilprobleme erfolgt über Transmissionsbedingungen. Für eine elliptische Gleichung zweiter Ordnung erfordern diese Bedingungen beispielsweise die Stetigkeit der Lösungen und der Flüsse auf dem gemeinsamen Rand der Teilprobleme, d.h. sowohl DIRICHLET- als auch NEUMANN-Daten müssen übereinstimmen. Das entstehende Transmissionsproblem kann mit Hilfe des STEKLOV-POINCARÉ-Operators als eine Gleichung auf dem gemeinsamen Rand ausgedrückt werden. Je nachdem, wie diese Gleichung bzw. das Transmissionsproblem iterativ gelöst wird, unterscheiden wir weitere Untergruppen. Es sei auch hier auf die Standardliteratur [TW05, QV99, Mat08, SBG96, Lio90, XZ98] verwiesen.

In einer weiteren Klasse finden wir Methoden, die spezielle Optimierungsansätze verwenden. Wir bezeichnen diese Methoden als *kontrollierte kleinste Quadrate Methoden* (engl. least squares-control methods). Diese Methoden können sowohl für überlappende als auch für nichtüberlappende Zerlegungen formuliert werden. Das Ausgangsproblem wird in ein restringiertes Minimierungsproblem überführt. Dabei misst das Zielfunktional die Differenz der Lösungen der Teilprobleme auf den Überlappungen der Gebiete bzw. auf dem gemeinsamen Rand, während die Nebenbedingungen auf den Teilgebieten das Erfülltsein des Originalproblems mit passenden Randwerten erfordern. Da die Randwerte auf den gemeinsamen Rändern der Teilprobleme unbekannt sind, werden sie als Kontrollen (im Sinne der optimalen Kontrolltheorie) betrachtet, welche die lokalen Lösungen parametrisieren. Diese Kontrollen, d.h. die Randdaten, müssen so bestimmt werden, dass das Zielfunktional minimal wird. Wir verweisen auf [Mat08, GH00] und die dortigen Referenzen.

Zudem gibt es noch weitere, auf Optimierungsansätzen basierende, Gebietszerlegungsmethoden, welche allerdings nur anwendbar sind, wenn der zu Grunde liegenden Gleichung ein Optimierungsprinzip zugeordnet werden kann. Beispielsweise minimiert die Lösung einer linearen elliptischen selbstadjungierten koerziven Gleichung zweiter Ordnung ein gewisses Energiefunktional.

Gebiete mit komplexer Geometrie können leichter in nichtüberlappende Teilbereiche zerlegt werden. Weiterhin entfällt bei nichtüberlappenden Methoden der Mehraufwand, der bei den überlappenden Gebietszerlegungsmethoden dadurch entsteht, dass auf den Schnittmengen der Teilgebiete zwei Probleme gelöst werden müssen.

Wir behandeln in den zwei folgenden Kapiteln eine Substrukturierungsmethode, welche ROBIN-artige Transmissionsbedingungen verwendet. Diese Methode wurde, aufbauend auf der Arbeit [Lio90], von Q. DENG, [Den97], eingeführt. Wegen des Bezugs zu [Lio90] und weil wir als Verfahrensparameter allgemeine  $L^\infty$ -Funktionen zulassen, werden wir diese ROBIN-Substrukturierungsmethode als *verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* bezeichnen. Wir betrachten diese Methode für lineare elliptische Probleme zweiter Ordnung der Form

$$-\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + (b, \nabla u) + cu = f,$$

wobei sowohl diffusionsdominante als auch konvektions- und reaktionsdominante Probleme zugelassen sind. Die Anwendbarkeit der nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode auf diese Problemklassen wurde bereits in vielen Arbeiten untersucht, beginnend mit [Lio90]. Zusammenfassend bleibt festzustellen, dass die Methode, für geeignete Verfahrensparameter, geometrische Konvergenzraten aufweist, wobei die Konvergenz im  $H^1$  gemeint ist. In den Arbeiten, die dem Verfasser bekannt sind, wurden diese Konvergenzresultate dabei immer unter mindestens einer der folgenden Voraussetzungen erzielt:

- Das Gebiet  $\Omega$  wurde streifenweise in (zwei oder mehr) Teilgebiete zerlegt, siehe Abbildung 2.1.
- Von der Lösung  $u$  des Problems wurde zusätzliche Regularität gefordert, typischerweise  $u \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ , oder die Sinnhaftigkeit der NEUMANN-Daten auf den Teilrändern im  $L^2$ .
- An die Gebiete und Teilgebiete wurden zusätzliche Glattheitsvoraussetzungen gestellt, z.B. dass jeder Teilrand die Spur einer glatten Mannigfaltigkeit auf  $\Omega$  ist, welche den Rand von  $\Omega$  orthogonal schneidet.
- Die Verfahrensparameter wurden als konstant (bezüglich des Ortes) angenommen, wobei diese auf den gemeinsamen Rändern zusätzlich übereinstimmen mussten.
- Die obige Gleichung wurde stark vereinfacht, indem beispielsweise auf den konvektiven Term verzichtet wurde.

Wir werden im Abschnitt 2.4.3 die  $H^1$ -Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode ohne eine dieser Voraussetzungen zeigen. Insbesondere sind allgemeine Zerlegungen des Gesamtgebietes in LIPSCHITZ-Teilgebiete, welche auch Kreuzungspunkte und vollständig im Inneren liegende Teilgebiete enthalten dürfen, zugelassen und die Lösung des Problems muss keine über  $H^1$  hinausgehende Regularität besitzen.

Weiterhin werden wir die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode in Kapitel 3 auf die monotonen koerziven quasilinearen elliptischen Probleme

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(\cdot, Du) = f,$$



wobei  $Du = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1}$  mit  $D^0 u = u$  gilt, anwenden. Gebietszerlegungsmethoden für nichtlineare Probleme finden sich in der Literatur im Vergleich zum linearen Fall eher selten. Dies mag damit zusammenhängen, dass die kontinuierlichen nichtlinearen Probleme durch geeignete Verfahren approximativ durch lineare Probleme gelöst werden können, bei deren Lösung dann wieder die obigen Gebietszerlegungsmethoden Anwendung finden. In Bezug auf monotone Probleme verweisen wir zum Beispiel auf [Lio88, CD94, DH97, TX99, THX02] und [Lui00, Lui02, Lui01]. Allen diesen Arbeiten ist gemein, dass sie auf überlappenden Zerlegungen des Teilgebietes aufbauen. In Verbindung mit nichtüberlappenden Methoden sei, in Verbindung mit der NAVIER-STOKES-Gleichung, zum Beispiel auf [GL00] und [XCL05] verwiesen. Dem Verfasser sind keine Arbeiten bekannt, die sich auf kontinuierlicher Ebene mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethoden für quasilineare Probleme der obigen Form befassen.

Wir werden die  $H^1$ -Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für diese Problemklasse nachweisen. Dabei sind wieder allgemeine Zerlegungen des Gesamtgebietes in LIPSCHITZ-Teilgebiete zugelassen und die Lösung des Problems muss keine über  $H^1$  hinausgehenden Regularitätseigenschaften besitzen.

Die im vierten Kapitel verwendete Methode basiert auf den oben erwähnten kontrollierte kleinste Quadrate Methoden. Wir betrachten die nichtmonotonen koerziven quasilinearen Probleme

$$- \operatorname{div}(k(v)\nabla v) = f,$$

wobei die nichtlinearen Funktionen  $k$  auf den Teilgebieten unterschiedlich sein dürfen. Hierbei beschränken wir uns auf eine Zerlegung des Gebietes in zwei Teilgebiete. Dieses Problem wurde mit nichtlinearen Substrukturierungsmethoden vom DIRICHLET-NEUMANN- bzw. ROBIN-Typ in [BKS07, Ber07] untersucht. Dabei konnte die Konvergenz der angegebenen Algorithmen im Eindimensionalen ohne zusätzliche Glattheitsvoraussetzungen an  $k$  bewiesen werden. Wir führen, aufbauend auf [GPK99], eine regularisierte kontrollierte kleinste Quadrate Methode für dieses Problem ein und beweisen die Konvergenz des Gradientenverfahrens gegen eine optimale Lösung des zu Grunde liegenden Minimierungsproblems. Dazu benötigen wir zusätzliche Glattheitsvoraussetzungen für  $k$  und im dreidimensionalen Fall müssen wir zusätzlich geringe Forderungen an die Gebiete und die Regularität der Lösung stellen. Unter weiteren Glattheitsforderungen an  $k$  und zusätzlichen, von der Dimension abhängigen, Regularitätsvoraussetzungen an die Lösung können wir zudem die quadratische Konvergenz des NEWTON-Verfahrens gegen die optimale Lösung des regularisierten Optimierungsproblems sichern, sofern das quasilineare Ausgangsproblem eine Lösung spezieller Gestalt hat.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Nachdem wir in Kapitel 2 die geometrischen Voraussetzungen an die Gebiete spezifiziert haben, führen wir das zu Grunde liegende lineare Modellproblem ein. Dabei werden Voraussetzungen formuliert, die eine Einteilung des Modellproblems in verschiedene Klassen erlauben. Anschließend untersuchen wir das Modellproblem auf eindeutige Lösbarkeit. Im nächsten Schritt ordnen wir dem linearen Modellproblem ein äquivalentes lineares Transmissionsproblem zu. Dieses Transmissionsproblem wird schwach formuliert, was speziell für komplexere Zerlegungen nicht trivial ist. Danach beschreiben wir eine verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode, indem wir Ansätze aus den Arbeiten [Lio90, Den97] und [AKLO98] kombinieren. Aufbauend auf den schwachen Formulierungen des Transmissionsproblems wird auch diese Methode variationell formuliert. In diesem Zusammenhang wird die Wohldefiniertheit des Verfahrens gezeigt. Weiterhin wird die Konvergenz der Methode für elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil und für singulär gestörte Probleme, die auch indefinit sein können, nachgewiesen. Wir benötigen dabei auch für komplexe Gebietszerlegungen in LIPSCHITZ-Teilgebiete keine spezifischen Regularitätsforderungen an die Lösung, die über die  $H^1$ -Regularität hinausgehen. Zudem ist die Methode, bei geeigneter Wahl der Verfahrensparameter, sowohl für diffusionsdominante als auch für konvektions- und reaktionsdominante Probleme anwendbar. Darüber hinaus kann während des Verfahrens auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung auf den Teilrändern verzichtet werden.

In Kapitel 3 wird die Anwendbarkeit der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Gebietszerlegungsmethode auf Randwertprobleme mit monotonen koerziven quasilinearen elliptischen Differentialoperatoren untersucht. Zunächst wird das zu Grunde liegende Modellproblem formuliert und die Voraussetzungen an den Differentialoperator und an die Geometrie der Gebiete werden spezifiziert. Dann untersuchen wir die Lösbarkeit des quasilinearen Modellproblems, wobei die Eindeutigkeit der Lösungen durch eine gleichmäßige Monotoniebedingung gesichert wird.

Im nächsten Schritt ordnen wir dem quasilinearen Modellproblem ein äquivalentes quasilineares Transmissionsproblem zu. Dieses Transmissionsproblem wird schwach formuliert, was speziell für komplexere Zerlegungen nicht trivial ist. Anschließend beschreiben wir die verallgemeinerte nicht-überlappende SCHWARZsche Methode im Kontext quasilinearer Probleme und formulieren diese, aufbauend auf den schwachen Formulierungen des Transmissionsproblems, variationell. In diesem Zusammenhang wird die Wohldefiniertheit des Verfahrens gezeigt. Außerdem wird die Konvergenz der Methode unter einer gleichmäßigen Monotoniebedingung für koerzive quasilineare elliptische Probleme nachgewiesen. Wie schon im linearen Fall, benötigen wir dabei auch für komplexe Gebietszerlegungen in LIPSCHITZ-Teilgebiete keine spezifischen Regularitätsforderungen an die Lösung, d.h. die  $H^1$ -Regularität reicht aus. Während des Verfahrens kann wieder auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung auf den Teilrändern verzichtet werden. Da die verwendete Methode formal identisch mit der aus Kapitel 2 ist, können die methodenbasierten und einige der technischen Voraussetzungen wörtlich übernommen werden. Darüber hinaus sind auch manche der Sätze und deren Beweise sinngemäß übertragbar. Wir werden aus Gründen der Übersichtlichkeit und der Abgeschlossenheit der einzelnen Kapitel alle übertragbaren Voraussetzungen und Sätze erneut angeben.

Das nichtmonotone quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten wird in Kapitel 4 behandelt. Dazu wird, nachdem das Modellproblem eingeführt wurde, ein Transmissionsproblem mit quasilinearen Teilproblemen formuliert. Anschließend wird dieses, wie in [BKS07], mittels einer problemklassenangepassten KIRCHHOFF-Transformation in ein springendes Transmissionsproblem mit linearen Teilproblemen überführt. Der nichtlineare Charakter des Ausgangsproblems findet sich dabei ausschließlich in den Transmissionsbedingungen des springenden Transmissionsproblems wieder. Wir beschränken uns auf eine Zerlegung des LIPSCHITZ-Gebietes in zwei LIPSCHITZ-Teilgebiete, die jeweils einen echten Außenrand und einen echten gemeinsamen Rand  $\Gamma$  haben sollen. Als nächstes formulieren wir, aufbauend auf den Ideen in [GPK99], ein restringiertes Optimierungsproblem, dessen eindeutige global optimale Lösung auch dem springenden Transmissionsproblem genügt, womit nach Rücktransformation auch die Lösung des Ausgangsproblems zur Verfügung steht. Das Zielfunktional misst dabei den Abstand der (transformierten) DIRICHLET-Daten der Teilprobleme des springenden Transmissionsproblems auf  $\Gamma$ . Weiterhin werden regularisierte parameterabhängige Varianten des restringierten Minimierungsproblems eingeführt, die sich im linearen Fall als nützlich erwiesen haben. Das ursprüngliche Minimierungsproblem ist dabei für verschwindenden Parameter als Spezialfall enthalten. Dann wird die (nicht notwendig eindeutige) Lösbarkeit der regularisierten Probleme gezeigt und die, für kleiner werdenden Parameter, schwache Konvergenz in  $H^1$  dieser Lösungen gegen die eindeutige Lösung des restringierten Optimierungsproblems. Darauf folgend werden die regularisierten restringierten Probleme äquivalent in parameterabhängige freie Optimierungsprobleme überführt. Zudem wird mittels der eindeutigen Lösbarkeit des freien Optimierungsproblems für verschwindenden Parameter, der notwendigen Optimalitätsbedingung für lokale Extrema und des impliziten Funktionentheorems ein Satz bewiesen, der auch die eindeutige Lösbarkeit der freien Optimierungsprobleme für hinreichend kleine Parameter sichert. Um diesen Satz anwenden zu können, wird anschließend die FRÉCHET-Differenzierbarkeit der Zielfunktionale der parameterabhängigen freien Optimierungsprobleme und die stetige Invertierbarkeit der zweiten Ableitung des nicht regularisierten Zielfunktionals an einer gewissen Stelle gezeigt. Dazu sind zusätzliche Glattheitsvoraussetzungen an die Nichtlinearitäten des Ausgangsproblems notwendig und im dreidimensionalen Fall muss die Freiheit bei der Wahl der LIPSCHITZ-Teilgebiete geringfügig eingeschränkt werden. Weiterhin ist es notwendig, neben zusätzlichen Regularitätsforderungen an die Lösung des Ausgangsproblems, auch eine restriktive Voraussetzung zu stellen. Diese erfordert, dass sich die Spuren der Lösungen des Ausgangsproblems bezüglich einer geeigneten Norm nicht zu sehr von fest vorgegebenen Funktionen, in die die Nichtlinearitäten eingehen, unterscheiden. Zudem werden Lösungsverfahren für die freien Minimierungsprobleme angegeben, wobei die Konvergenz des Gradientenverfahrens unter relativ geringen Voraussetzungen gesichert werden kann. Auch die quadratische Konvergenz des NEWTON-Verfahrens kann unter den (starken) Voraussetzungen gesichert werden, die für die eindeutige Lösbarkeit der freien Minimierungsprobleme für kleine Parameter notwendig sind.

Wir betrachten in dieser Arbeit nur kontinuierliche Probleme. Auf Fragestellungen, wie die nach der rechnergestützten Lösung der Teilprobleme durch geeignete Verfahren, wie z.B. Finite-Elemente-Verfahren, und die in diesem Zusammenhang auftretenden Probleme, wird nicht eingegangen. Wir verweisen auf die Standardliteratur, wie z.B. [QV94, Hac96, Cia78, Bra07].

Die innerhalb der jeweiligen Kapitel eingeführten Modellprobleme, Voraussetzungen und Verfahren

sind zur besseren Übersichtlichkeit ab Seite 169 noch einmal aufgelistet.

In der Arbeit wird gelegentlich die Bezeichnung  $a \lesssim b$  als Abkürzung für  $a \leq Cb$  verwendet, wobei  $C$  eine generische Konstante darstellt, welche unabhängig von eventuell auftretenden anderen Konstanten und Iterationsindizes ist.  $a \gtrsim b$  ist äquivalent zu  $b \lesssim a$ .

Die weiteren Bezeichnungen entsprechen mathematischem Standard. Bei Unklarheiten in Bezug auf die Benennung von auftretenden Räumen, Normen, Gebieten, Operatoren und Ähnlichem kann der Anhang ab Seite 138 zu Rate gezogen werden.

## 2 Die nichtüberlappende Schwarzsche Methode für lineare Probleme

Wir werden in diesem Kapitel eine spezielle nichtüberlappende SCHWARZsche Gebietszerlegungsmethode, welche in der Literatur auch unter dem Namen ROBIN-Substrukturierungsmethode zu finden ist, zur Lösung von elliptischen Randwertproblemen untersuchen. Zunächst werden wir das zu Grunde liegende Modellproblem formulieren, d.h. die Voraussetzungen an den Differentialoperator und an die Geometrie der Gebiete spezifizieren. Dabei werden Voraussetzungen formuliert, die eine Einteilung des Modellproblems in verschiedene Klassen erlauben. Im nächsten Schritt ordnen wir dem linearen Modellproblem ein äquivalentes lineares Transmissionsproblem zu. Dieses Transmissionsproblem wird schwach formuliert, was speziell für komplexere Zerlegungen nicht trivial ist. Wir benötigen dabei keine spezifischen Regularitätsforderungen, die über die  $H^1$ -Regularität hinausgehen. Anschließend beschreiben wir eine verallgemeinerte SCHWARZsche Methode, indem wir Ansätze aus den Arbeiten [Lio90, Den97] und [AKLO98] kombinieren. Aufbauend auf den schwachen Formulierungen des Transmissionsproblems wird auch diese Methode variationell formuliert. In diesem Zusammenhang wird die Wohldefiniertheit des Verfahrens ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen auch für komplexe Gebietszerlegungen gezeigt. Weiterhin wird die Konvergenz der Methode für elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil und für singular gestörte Probleme, die auch indefinit sein können, nachgewiesen. Auch dabei sind komplexe Zerlegungen des Gebietes zugelassen und eine zusätzliche Regularität der Lösung des Modellproblems wird nicht benötigt, da die Parameter des Verfahrens passend gewählt werden können.

Wir weisen darauf hin, dass die Probleme, Verfahren und Voraussetzungen, die in diesem Kapitel eingeführt werden, zur besseren Übersicht auf den Seiten 169ff. noch einmal aufgelistet werden.

### 2.1 Das lineare Modellproblem

In diesem Abschnitt wird das zu Grunde liegende lineare Modellproblem eingeführt. Dazu werden wir, nach Festlegung der geometrischen Eigenschaften des Gebietes, zunächst eine differentielle und danach eine variationelle Formulierung des Modellproblems angeben. Weiterhin werden verschiedene Voraussetzungen an den Differentialoperator formuliert, die in den nachfolgenden Abschnitten Verwendung finden. Zudem werden wir uns der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des linearen Modellproblems widmen.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet, d.h. der Rand  $\partial\Omega$  kann lokal als Graph einer LIPSCHITZ-Funktion dargestellt werden. Für die genaue Definition und die Eigenschaften von LIPSCHITZ-Gebieten sei auf Abschnitt A.2.1 im Anhang verwiesen. Das Gebiet  $\Omega$  lasse eine Zerlegung in  $m$  disjunkte LIPSCHITZ-Teilgebiete  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  zu. Als gemeinsamen Rand zweier benachbarter Gebiete  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , definieren wir  $\Gamma_{ij} := (\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}) \setminus \partial(\overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_j})$ , also das (bezüglich  $\partial\Omega_i$  bzw.  $\partial\Omega_j$ ) relative Innere des Schnittes der Ränder der Teilgebiete. Offensichtlich gilt  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ . Mit  $\Gamma_i := \text{int}(\partial\Omega \cap \overline{\Omega_i})$  bezeichnen wir den Außenrand des Teilgebietes  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , wenn dieses einen solchen besitzt. Die pathologischen Fälle, in denen der gemeinsame Rand bzw. der Außenrand das HAUSDORFF-Maß Null haben (z.B. wenn dieser nur aus einem Punkt besteht) wollen wir nachfolgend nicht betrachten. In diesem Sinne bezeichnen wir als *echten* Teilrand bzw. Außenrand die Teilränder, die ein nicht verschwindendes  $(N-1)$ -dimensionales HAUSDORFF-Maß besitzen. Zusammengefasst gilt also

$$\overline{\Omega} = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m \cup \Sigma \cup \partial\Omega \quad \text{mit} \quad \Sigma := \bigcup_{1 \leq i \neq j \leq m} \overline{\Gamma_{ij}} = \bigcup_{i=1}^m \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \overline{\Gamma_{ij}} \right).$$

*Bemerkung 1.* Beispielhaft wollen wir einige spezielle Zerlegungen auszeichnen, auf die wir später wiederholt Bezug nehmen werden. Dabei nimmt die Allgemeinheit der Zerlegung von (i) nach (iii) zu.

- (i) Wir zerlegen das Gebiet  $\Omega$  streifenweise in Teilgebiete. Siehe Abbildung 2.1 b). Diese Zerlegung ist in vielerlei Hinsicht vergleichbar mit dem einfachsten Fall, der Zerlegung in zwei Teilgebiete mit Außenrand, welcher in Abbildung 2.1 a) dargestellt ist.
- (ii) Wir zerlegen das Gebiet  $\Omega$  in Teilgebiete, die jeweils einen echten Außenrand besitzen. Siehe Abbildung 2.1 a), b) und 2.2 b). Letztere Zerlegung besitzt einen *Kreuzungspunkt*, d.h. einen Punkt, der zu den Rändern von drei oder mehr Teilgebieten gehört.
- (iii) Wir zerlegen das Gebiet  $\Omega$  in Teilgebiete. Außer der LIPSCHITZ-Eigenschaft der Teilgebiete werden keine weiteren Forderungen gestellt. Siehe Abbildung 2.2 a) und c).

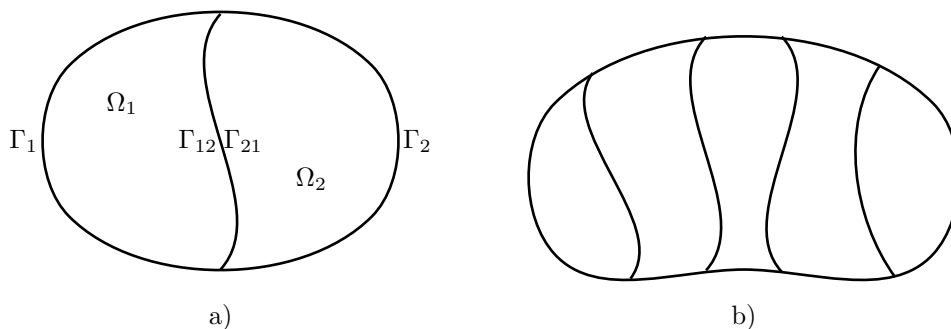


Abbildung 2.1: Gebietszerlegungen in Streifen

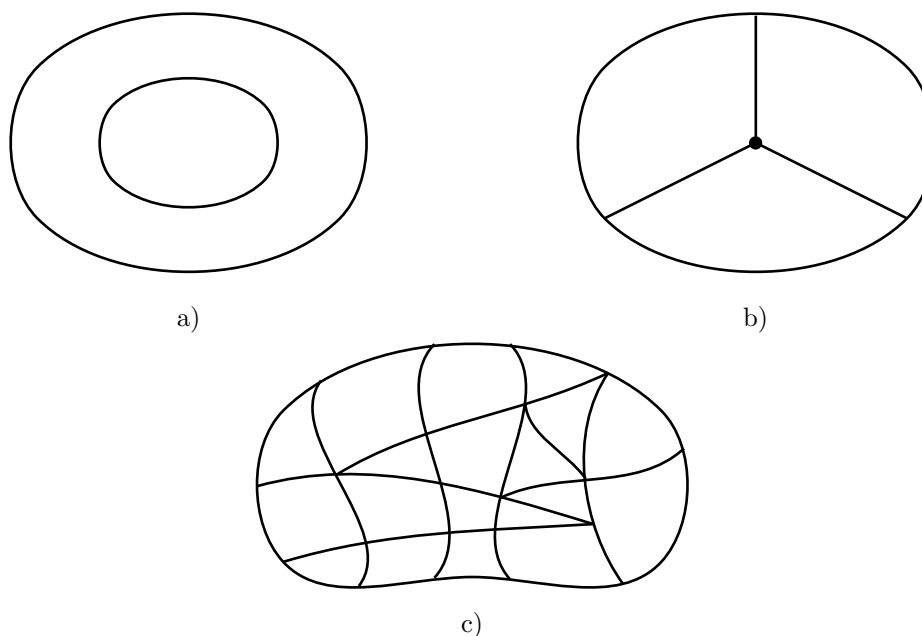


Abbildung 2.2: Gebietszerlegungen: a) mit Teilgebiet ohne Außenrand, b) mit Kreuzungspunkten, c) mit Teilgebieten ohne Außenrand und mit Kreuzungspunkten

Für  $i = 1, \dots, m$  bezeichnen wir mit

$$\mathcal{N}(i) := \{j \in \{1, \dots, m\} \mid \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \text{ hat nichtverschwindendes HAUSDORFF-Ma\ss}\} \quad (2.1)$$

die Indexmenge aller zu  $\Omega_i$  benachbarten Gebiete mit echtem gemeinsamen Teilrand.

Auf den Teilgebieten seien die linearen Differentialoperatoren

$$P_i(D) = -\operatorname{div}(A_i(x) \cdot \nabla) + (b_i(x), \nabla) + c_i(x) \text{ auf } \Omega_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

mit  $A_i \in (L^\infty(\Omega_i))^{N \times N}$ ,  $b_i \in (L^\infty(\Omega_i))^N$  sowie  $c_i \in L^\infty(\Omega_i)$  gegeben. Dabei bezeichnet  $\cdot$  das Matrix-Vektor Produkt und  $(\cdot, \cdot)$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^N$ .

Unter dem *linearen Modellproblem* wollen wir

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

verstehen, wobei  $f \in L^2(\Omega)$  gegeben ist und der Operator mittels (2.2) auf den Teilgebieten erklärt ist, also  $P(D)u = P_i(D)u|_{\Omega_i}$  auf  $\Omega_i$  gilt. Natürlich gilt für die Einschränkungen von  $f$  auf die Teilgebiete

$$f_i := f|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

*Bemerkung 2.* Unstetigkeiten in den Koeffizienten des Differentialoperators  $P(D)$  sind auch auf den Randstücken  $\Gamma_{ij}$  erlaubt.

Das Modellproblem in der obigen Form ist nur für die  $u$  sinnvoll, für die  $P(D)u \in L^2(\Omega)$  ist, was insbesondere im Hinblick auf die relativ schwachen Voraussetzungen an die Koeffizientenmatrizen  $A_i$  sehr einschränkend ist. Aus diesem Grund erweitern wir den Lösungsbegriff, indem wir, wie üblich, zu einer schwachen Formulierung des Modellproblems übergehen.

Unter der *schwachen Formulierung* bzw. *Variationsformulierung* von (2.3) wollen wir das folgende Problem verstehen:

Finde ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.5)$$

wobei die (i. Allg. nichtsymmetrische) Bilinearform auf  $H_0^1(\Omega)$  durch

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (A \cdot \nabla u, \nabla v) + (b, \nabla u) v + cuv \, dx \quad (2.6)$$

gegeben ist. Wir definieren  $A \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}$ ,  $b \in (L^\infty(\Omega))^N$  und  $c \in L^\infty(\Omega)$  durch  $A|_{\Omega_i} := A_i$ ,  $b|_{\Omega_i} := b_i$  sowie  $c|_{\Omega_i} := c_i$ , jeweils auf  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Eine Lösung von (2.5) bezeichnen wir als *schwache Lösung* des linearen Modellproblems. Wir machen uns durch Multiplikation von (2.3)<sub>1</sub> mit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , Integration über  $\Omega$  und anschließender partieller Integration klar, dass durch (2.5) der Lösungsbegriff tatsächlich verallgemeinert wird.

Für  $i = 1, \dots, m$  definieren wir zudem den Raum

$$V_i := \{u \in H^1(\Omega_i) \mid \gamma_{\Gamma_i}(u) = 0\} \quad (2.7)$$

und stattdessen mit dem Skalarprodukt und der Norm von  $H^1(\Omega_i)$  aus. Dabei bezeichnet  $\gamma_{\Gamma_i}$  den Spuroperator aus Abschnitt A.2.6. Als abgeschlossener Unterraum von  $H^1(\Omega_i)$  ist  $V_i$  ein HILBERT-Raum, der auf den inneren Teilgebieten, also denen die keinen echten Außenrand besitzen, sogar mit  $H^1(\Omega_i)$  übereinstimmt. Auf  $V_i$  führen wir die (i. Allg. nichtsymmetrische) Bilinearform

$$a_i(v_i, w_i) := \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla v_i, \nabla w_i) + (b_i, \nabla v_i) w_i + c_i v_i w_i \, dx \quad (2.8)$$

ein.

*Bemerkung 3.* Die Bilinearform (2.8) ist wegen

$$\begin{aligned} |a_i(v_i, w_i)| &\leq \|A_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|w_i\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\quad + \|c_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \|v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|w_i\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\leq \left( \|A_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} + N \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|c_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \right) \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} \end{aligned}$$

stetig. Dabei wurde benutzt, dass für  $u_i \in H^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die Abschätzungen

$$\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}, \quad \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)} \quad \text{und} \quad \|D^\alpha u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)}, \quad |\alpha| = 1,$$

gelten. Auch sei an die Konvention bezüglich der Norm vektorwertiger Funktionen aus Abschnitt A.2 im Anhang erinnert.

Weiterhin definieren wir den Produktraum

$$\hat{H}^1 := \hat{H}^1(\Omega) := \prod_{i=1}^m V_i \quad (2.9)$$

und führen in ihm nachfolgend definiertes Skalarprodukt und die durch dieses induzierte Norm ein. Für  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m}, v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  mit  $u_i := u|_{\Omega_i}, v_i := v|_{\Omega_i}, i = 1, \dots, m$ , sei

$$(u, v)_{\hat{H}^1} = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)_{H^1(\Omega_i)} \quad \text{und} \quad \|u\|_{\hat{H}^1}^2 := (u, u)_{\hat{H}^1} = \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2.$$

Wir sehen sofort, dass  $(\hat{H}^1, (\cdot, \cdot)_{\hat{H}^1})$  ein HILBERT-Raum ist. Außerdem gilt offensichtlich  $H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$ . Für  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m}, v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  erklären wir noch die (i. Allg. nichtsymmetrische) Bilinearform

$$\tilde{a}(u, v) := \sum_{i=1}^m a_i(u_i, v_i), \quad (2.10)$$

welche wegen Bemerkung 3 stetig ist.

*Bemerkung 4.* Wegen  $H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  und den Definitionen (2.9) und (2.10) sehen wir sofort, dass für  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  gilt:

- (i)  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{\hat{H}^1}$ ,
- (ii)  $a(u, v) = \tilde{a}(u, v)$ .

Letzteres liefert wegen der Stetigkeit von (2.10) insbesondere auch die Stetigkeit von (2.6).

Wann ein  $u \in \hat{H}^1$  im Unterraum  $H_0^1(\Omega)$  liegt, zeigt folgendes

**Lemma 2.1.1.** *Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  und zusätzlich  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ , wobei  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i$  den Spuoperator auf dem Teilrand aus Abschnitt A.2.6 bezeichnet und  $\mathcal{N}(i)$  in (2.1) erklärt ist. Dann gilt  $u \in H_0^1(\Omega)$ .*

*Beweis.* Den Beweis erhalten wir durch wiederholtes Anwenden von Lemma A.2.13. □

Wir unterscheiden in dieser Arbeit im Wesentlichen zwei Problemtypen: Elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil einerseits und singular gestörte und indefinite elliptische Probleme andererseits. Die Konvergenzbeweise der später betrachteten Gebietszerlegungsmethode erfordern, je nach Problemklasse, unterschiedliche Voraussetzungen. Nachfolgend werden wir eine Reihe von Voraussetzungen aufführen, unter denen sich das Ausgangsproblem (2.3) in die verschiedenen Klassen einordnen lässt. Wir erinnern daran, dass alle in diesem Kapitel benutzten Voraussetzungen auf den Seiten 171f. zusammengefasst sind.

Weiter weisen wir an dieser Stelle darauf hin, dass für die Konvergenz der später betrachteten Gebietszerlegungsmethode im Fall von elliptischen Problemen mit dominantem Hauptteil nur die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 benötigt werden, die für diese Klasse die schwächsten hier betrachteten sind. Erst bei der Untersuchung von singular gestörten und indefiniten Problemen finden die restlichen Voraussetzungen Verwendung, da hierbei auf die Voraussetzung 2.2 verzichtet werden soll. Wir werden allerdings in Bemerkung 6(ii) sehen, dass gewisse Kombinationen der Voraussetzungen 2.3 bis 2.7 die Voraussetzung 2.2 implizieren und somit auch an deren Stelle verwendet werden können.

Für  $i = 1, \dots, m$  erfülle  $P_i(D)$ :

**Voraussetzung 2.1.**  $A_i$  sei elliptisch, d.h. es existiert ein  $\alpha_i > 0$ , sodass

$$(A_i \cdot \xi, \xi) \geq \alpha_i |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ f.ü. auf } \Omega_i.$$

**Voraussetzung 2.2.** Es existiert ein  $\nu_i > 0$ , sodass

$$a_i(w, w) \geq \nu_i \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla w, \nabla w) dx \quad \forall w \in V_i.$$

In den nächsten Voraussetzungen bezeichne  $\widehat{\Gamma}_i$  den inneren Teilrand des Gebietes  $\Omega_i$ , d.h.  $\widehat{\Gamma}_i := \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ , und  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*$  ist der Spuroperator aus Satz A.2.10.

**Voraussetzung 2.3.** Es gelten die Regularitätsforderungen  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  und  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$ . Weiterhin gelte für fast alle  $x \in \Omega_i$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i(x)) + c_i(x) \geq \eta_i, \text{ wobei } \eta_i > \begin{cases} -\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}} & \text{falls } \Omega_i \text{ echten Außenrand besitzt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\alpha_i$  die Elliptizitätskonstante aus Voraussetzung 2.1 und  $C_{\Omega_i}$  die Konstante der POINCARÉ-Ungleichung auf  $\Omega_i$ . Siehe auch Abschnitt A.2.1, Satz A.2.2. Die Regularitätsforderung an die Divergenz von  $b_i$  zusammen mit  $b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  impliziert natürlich insbesondere  $b_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$ .

**Voraussetzung 2.4.** Es gelte Voraussetzung 2.3 mit  $\eta_i \geq 0$ , falls  $\Omega_i$  keinen echten Außenrand besitzt.

**Voraussetzung 2.5.** Es gelte  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$ , d.h. insbesondere  $b_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$ , und mit  $\widehat{\Gamma}_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$

$$\left\langle \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i, \mu^+ \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i))' \times H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i)} \geq 0 \quad \forall \mu^+ \in \left\{ \mu \in H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i) \mid \mu(\cdot) \geq 0 \text{ f.ü. auf } \widehat{\Gamma}_i \right\}.$$

Falls die Spur von  $b_i$  auf  $\widehat{\Gamma}_i$  als Funktion aufgefasst werden kann, z.B. wenn  $b_i$  hinreichend regulär ist, wie in Voraussetzung 2.3, folgt diese Bedingung aus der Forderung

$$b_i(x) \cdot n_i(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \widehat{\Gamma}_i.$$

Dabei bezeichnet  $n_i(\cdot)$  den äußeren Normaleneinheitsvektor bezüglich  $\Omega_i$ , siehe Abschnitt A.2.1.

**Voraussetzung 2.6.** Es gelte die Regularitätsforderung  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  und fast überall auf  $\Omega_i$

$$\operatorname{div}(b_i) = 0 \text{ und} \tag{2.11}$$

$$\exists \tilde{c}_i > 0 \text{ mit } c_i(x) \geq \tilde{c}_i \text{ für fast alle } x \in \Omega_i. \tag{2.12}$$

Falls  $\Omega_i$  einen echten Außenrand besitzt, ist  $\tilde{c}_i > -\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}}$  zulässig, wobei die Konstanten wie in Voraussetzung 2.3 bezeichnet sind. Insbesondere impliziert (2.10) natürlich  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$ .

**Voraussetzung 2.7.** Es gelte Voraussetzung 2.6 mit  $c_i(\cdot) \geq 0$  f.ü. auf  $\Omega_i$ , anstatt (2.11).

Wir halten einige direkte Folgerungen aus den Voraussetzungen in der nachfolgenden Bemerkung fest, auf die wir später häufig verweisen werden.

*Bemerkung 5.* (i) Die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 implizieren

$$a_i(u_i, u_i) \geq \alpha \nu \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \geq 0, \forall u_i \in V_i, \tag{2.13}$$

mit  $\alpha = \min_{i=1, \dots, m} \{\alpha_i\}$  und  $\nu = \min_{i=1, \dots, m} \{\nu_i\}$ , also insbesondere die positive Semidefinitheit der Bilinearform (2.8). Für die Definition der positiven Definitheit bzw. Semidefinitheit für nichtsymmetrische Bilinearformen sei auf Definition A.1.1 in Abschnitt A.1 verwiesen. Da wir überdies  $a_i(\cdot, \cdot)$  in einen symmetrischen und einen nichtsymmetrischen Anteil zerlegen können, gilt die verallgemeinerte CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, siehe Satz A.1.4, also für alle  $u_i, v_i \in V_i$

$$|a_i(u_i, v_i)| |a_i(v_i, u_i)| \leq a_i(u_i, u_i) a_i(v_i, v_i)$$

bzw. in dem speziellen Fall, in dem  $a_i(\cdot, \cdot)$  symmetrisch ist, die klassische CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$|a_i(u_i, v_i)|^2 \leq a_i(u_i, u_i) a_i(v_i, v_i).$$

Falls  $\Omega_i$  einen echten Außenrand besitzt, ist die Bilinearform (2.8) wegen (2.13) und der POINCARÉ-Ungleichung, vgl. Satz A.2.2, sogar positiv definit.



(ii) Weiter gilt für  $u \in H_0^1(\Omega)$  unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 mit Bemerkung 4(ii) und (2.13)

$$a(u, u) = \tilde{a}(u, u) = \sum_{i=1}^m a_i(u|_{\Omega_i}, u|_{\Omega_i}) \geq \alpha\nu \sum_{i=1}^m \|\nabla u|_{\Omega_i}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \alpha\nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

was unter Benutzung der POINCARÉ-Ungleichung, Satz A.2.2,

$$a(u, u) \geq \frac{\alpha\nu}{C_\Omega^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

impliziert, also zusammen mit der Stetigkeit aus Bemerkung 4 die  $H_0^1(\Omega)$ -Elliptizität der Gesamtbilinearform (2.6). Durch analoge Überlegungen machen wir uns klar, dass die Bilinearformen (2.8), welche nach Bemerkung 3 stetig sind, auf Teilgebieten mit echtem Außenrand für alle  $u_i \in V_i$  die Ungleichung

$$a_i(u_i, u_i) \geq \frac{\alpha_i\nu_i}{C_{\Omega_i}^2} \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$$

erfüllen, d.h.  $V_i$ -elliptisch sind. Auf den inneren Teilgebieten sind die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 jedoch schwächer als die  $V_i$ -Elliptizität von (2.8). Für beliebiges  $u_i \in V_i$  gilt offenbar

$$\begin{aligned} a_i(u_i, u_i) &\geq \alpha_i\nu_i \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = (\alpha_i\nu_i - \alpha_i\nu_i) \|u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \alpha_i\nu_i \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &= \alpha_i\nu_i \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 - \alpha_i\nu_i \|u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2, \end{aligned}$$

was auf den inneren Teilgebieten die  $H^1(\Omega_i)$ -Koerzivität von  $a_i(\cdot, \cdot)$  bezüglich der GELFAND-Dreier  $H^1(\Omega_i) \subset L^2(\Omega_i) \subset (H^1(\Omega_i))'$  liefert.

Wir benutzen die folgende umfangreiche Bemerkung, um den Zusammenhang, der zwischen den obigen Voraussetzungen besteht, zu verdeutlichen. Auch werden alternative Voraussetzungen angegeben, unter denen die  $H^1(\Omega_i)$ -Elliptizität der Bilinearform  $a_i$  gesichert werden kann.

*Bemerkung 6.* (i) Für  $v \in V_i$  mit  $v^2 \in V_i$  gilt die Identität  $\frac{1}{2} \nabla(v^2) = \nabla v \cdot v$ . Bezeichnen wir mit  $N$  die Dimension, so ist für  $N \geq 2$  mit  $s > \frac{2+N}{4}$  beispielsweise  $v \in H^s(\Omega_i) \cap V_i$  hinreichend für  $v^2 \in V_i \subset H^1(\Omega_i)$ , siehe [RS96, Theorem 5.3.2.1]. Damit ist die Menge  $V_i^2 := \{v \in V_i \mid v^2 \in V_i\}$  dicht in  $V_i$ . Mit der obigen Identität errechnen wir unter der Annahme  $\text{div}(b_i) \in L^\infty(\Omega_i)$ , d.h. insbesondere  $b_i \in H(\text{div}, \Omega_i)$ , mittels des Divergenzsatzes A.2.11

$$\int_{\Omega_i} (b_i, \nabla v) \cdot v \, dx = \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} (b_i, \nabla(v^2)) \, dx = \int_{\Omega_i} -\frac{1}{2} \text{div}(b_i)v^2 \, dx + \frac{1}{2} \left\langle \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i), \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}(v^2) \right\rangle, \quad (2.14)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\widehat{\Gamma}_i) \times H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i)$  bezeichnet und  $\widehat{\Gamma}_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$  ist. Im Fall von inneren Gebieten  $\Omega_i$ , d.h.  $\widehat{\Gamma}_i = \partial\Omega_i$ , gilt  $H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i) = H^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i)$  und die Dualitäten ändern sich entsprechend. Wir verschärfen die Voraussetzungen an  $b_i$  indem wir  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i) \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  fordern.

Wegen der GELFAND-Dreier  $H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i) \subset L^2(\widehat{\Gamma}_i) \subset H_{00}^{-1/2}(\Omega_i)$  können wir dann in (2.14) vom Dualitätsprodukt zum Skalarprodukt in  $L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  übergehen und erhalten für  $v \in V_i^2$

$$\int_{\Omega_i} (b_i, \nabla v) \cdot v \, dx = \int_{\Omega_i} -\frac{1}{2} \text{div}(b_i)v^2 \, dx + \frac{1}{2} \left( \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i), \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}(v^2) \right)_{L^2(\widehat{\Gamma}_i)}. \quad (2.15)$$

Diese Identität kann auf alle  $v \in V_i$  ausgeweitet werden: Wie wir später in Lemma 4.6.4 auf Seite 104 zeigen werden, gilt mit  $v \in V_i$ , zumindest für  $N \leq 3$ , dass  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}(v^2) \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  ist. Die Terme in (2.15) sind also für alle  $v \in V_i$  sinnvoll und die Gleichheit folgt aus (2.14), da  $V_i^2$  dicht in  $V_i$  liegt. Das liefert für  $\text{div}(b_i) \in L^\infty(\Omega_i)$ ,  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i) \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  und beliebiges  $v \in V_i$  die Identität

$$a_i(v, v) = \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla v, \nabla v) + \left( c_i - \frac{1}{2} \text{div}(b_i) \right) v^2 \, dx + \frac{1}{2} \left( \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i), \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^i(v^2) \right)_{L^2(\widehat{\Gamma}_i)}. \quad (2.16)$$

Diese Identität gilt auch für beliebige endliche Dimension  $N > 3$ , wie wir uns mit angepassten Dichtheitsargumenten überlegen.

(ii) Die Voraussetzung 2.5 in Verbindung mit Voraussetzung 2.4 bzw. 2.7 liefert für alle  $v \in V_i$

$$\int_{\Omega_i} \left( c_i - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i) \right) v^2 dx \geq 0 \quad \text{und} \quad \left( \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i), \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^i(v^2) \right)_{L^2(\widehat{\Gamma}_i)} \geq 0,$$

woraus unter Beachtung von (2.16) die Voraussetzung 2.2 folgt. Die Voraussetzungen 2.3 bzw. 2.6 implizieren die Voraussetzungen 2.4 bzw. 2.7, so dass auch damit in Verbindung mit Voraussetzung 2.5 keine größere Allgemeinheit erzielt werden kann. Das Gegenteil ist der Fall, da die Voraussetzungen 2.3 bzw. 2.6 in Verbindung mit Voraussetzung 2.5 und 2.1 die  $H^1(\Omega_i)$ -Elliptizität von (2.8) liefern. Wir fassen die Beziehungen aus Gründen der Übersichtlichkeit nochmals zusammen:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{V 2.3} \\ \text{V 2.5} \end{array} \right\} &\implies \text{V 2.2} \\ \left. \begin{array}{l} \text{V 2.6} \\ \text{V 2.7} \end{array} \right\} &\implies \text{V 2.2} \\ \left. \begin{array}{l} \text{V 2.1} \\ \text{V 2.5} \\ \text{V 2.3} \end{array} \right\} &\implies V_i\text{-Elliptizität von } a_i \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{V 2.1} \\ \text{V 2.5} \\ \text{V 2.6} \end{array} \right. \end{aligned}$$

(iii) Wir beachten ferner, dass Voraussetzung 2.5, wenn  $b_i$  hinreichend regulär ist, wegen  $n_i(x) = -n_j(x)$  für benachbarte Gebiete  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$  einem Springen der konvektionsrelevanten Koeffizienten  $b_i$  bzw.  $b_j$  auf dem gemeinsamen Rand entspricht. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll, weshalb, wenn möglich, von Voraussetzung 2.5 abzusehen ist.

(iv) Unter die Voraussetzungen 2.4 bzw. 2.7 (ohne Voraussetzung 2.5) fallen auch allgemeinere elliptische Operatoren, die die Voraussetzung 2.2 nicht erfüllen. Die Verwendung der Divergenz in der Formulierung erfordert allerdings eine höhere Glattheit der Koeffizientenvektoren  $b_i$  auf den Teilgebieten  $\Omega_i$ , was die Allgemeinheit wieder einschränkt. Im Abschnitt 2.4.3, Seite 42ff., werden wir sehen, dass unter zusätzlichen Forderungen an die Koeffizienten die Behandlung von konvektionsdominanten bzw. reaktionsdominanten Problemen unter den Voraussetzungen 2.1, 2.4 bzw. 2.1, 2.7 (ohne Voraussetzung 2.5) möglich ist.

(v) Wir können die Voraussetzung 2.5 in Verbindung mit den Voraussetzungen 2.1 und 2.3 auch durch eine geeignete Kleinheitsbedingung an  $b_i$  ersetzen, sofern dieses hinreichend regulär ist, d.h.  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \in L^\infty(\widehat{\Gamma}_i)$  gilt. Dann liefert die Bedingung

$$\left\| \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \right\|_{L^\infty(\widehat{\Gamma}_i)} \leq \varepsilon_0 < \frac{2 \min(\alpha_i, \eta_i)}{C_{\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}}^2}, \quad (2.17)$$

wobei  $C_{\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}}$  die Konstante des Spursatzes A.2.8 bezeichnet, nämlich für alle  $v \in V_i$  unter Beachtung von Lemma 4.6.4 auf Seite 104

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int_{\widehat{\Gamma}_i} -\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*(b_i) \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^i(v^2) d\sigma \right| &\leq \frac{1}{2} \left\| \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \right\|_{L^\infty(\widehat{\Gamma}_i)} C_{\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}}^2 \|v\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \\ &< \min(\alpha_i, \eta_i) \|v\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \\ &\leq \alpha_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \eta_i \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2. \end{aligned}$$

Damit folgt dann aus (2.16) sofort  $a_i(v, v) \gtrsim \|v\|_{H^1(\Omega_i)}^2$ , also die  $H^1(\Omega_i)$ -Elliptizität der Bilinearform. Eine Verwendung der schwächeren Voraussetzung 2.4 statt 2.3 würde wegen  $\eta_i \geq 0$  unter Umständen  $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} = 0$  implizieren.

(vi) Alternativ können wir neben Voraussetzung 2.1 statt Voraussetzung 2.2 auch

$$\operatorname{ess\,inf}_{\Omega_i} c_i - \frac{1}{4\alpha_i} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \geq 0 \quad (2.18)$$

fordern, um eine analoge Abschätzung zu (2.13) zu erhalten. Dann haben wir unter Berücksichtigung von

$$\varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \geq a \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0,$$

und  $a \geq -|a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , für beliebiges  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
a_i(v, v) &\geq \alpha_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 - \left| \int_{\Omega_i} (-b_i, \nabla v) v \, dx \right| + \int_{\Omega_i} c_i v^2 \, dx \\
&\geq \alpha_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 - \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \|v\|_{L^2(\Omega_i)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)} + \int_{\Omega_i} c_i v^2 \, dx \\
&\geq \alpha_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 - \left( \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) + \int_{\Omega_i} c_i v^2 \, dx \\
&= (\alpha_i - \varepsilon) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \int_{\Omega_i} \left( c_i - \frac{1}{4\varepsilon} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \right) v^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Wählen wir  $\varepsilon < \alpha_i$  hinreichend nah an  $\alpha_i$  und verwenden (2.18), so erhalten wir die  $H^1(\Omega_i)$ -Elliptizität der Bilinearform.

Zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.3) formulieren wir den folgenden

**Satz 2.1.2.** *Unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 besitzt das lineare Modellproblem (2.3) genau eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Es gilt überdies die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{mit } C = \frac{C_\Omega}{\alpha_V}.$$

*Beweis.* (2.6) ist nach Bemerkung 5(ii)  $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch. Damit liefert der Satz A.1.5 unter Beachtung von  $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$  die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung 7.* Auch andere Kombinationen von Voraussetzungen, als die im letzten Satz angegebenen, können die  $H_0^1(\Omega)$ -Elliptizität der Bilinearform (2.6) implizieren. Es sei auf Bemerkung 6 verwiesen. In diesen Fällen überträgt sich natürlich die Aussage des letzten Satzes.

In den Fällen, in denen die Voraussetzungen die  $H_0^1(\Omega)$ -Elliptizität der Bilinearform (2.6) nicht sichern, der Satz 2.1.2 folglich nicht angewendet werden kann, haben wir mit der Elliptizitätsvoraussetzung 2.1 zumindest noch den folgenden

**Satz 2.1.3.** *Unter der Voraussetzung 2.1 gilt eine der folgenden Alternativen:*

- (i) *Das lineare Modellproblem (2.3) besitzt genau eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Weiterhin existiert eine Konstante  $C > 0$ , sodass die Abschätzung  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$  gilt.*
- (ii) *Die Kerne  $\ker P(D)$  und  $\ker P'(D)$  sind  $k$ -dimensional für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dabei bezeichnet  $P'(D)$  den zu  $P(D)$  adjungierten Operator. Weiterhin besitzt das lineare Modellproblem (2.3) genau dann eine Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ , wenn  $(f, v)_{L^2(\Omega)} = 0$  für alle  $v \in \ker P'(D) \subset H_0^1(\Omega)$  gilt. Mit  $e \in \ker P(D)$  ist dann natürlich auch  $u + e \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (2.3).*

*Beweis.* Elliptische Probleme führen auf  $H_0^1(\Omega)$ -koerzive Formen, siehe z.B. [Hac96, Satz 7.2.11]. Mit dem GELFAND-Dreier  $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  gilt also für ein  $C_E > 0$  und ein  $C_K \in \mathbb{R}$

$$a(v, v) \geq C_E \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + C_K \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Für das beschränkte Gebiet  $\Omega$  ist die Einbettung  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  zudem kompakt, sodass die Behauptungen aus der FREDHOLMSchen Alternative, siehe z.B. [Hac96, Satz 6.4.12/6.5.15], folgen.  $\square$

Weiter wollen wir auf die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des linearen Modellproblems nicht eingehen, da dies nicht der zentrale Gegenstand dieser Arbeit ist. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir deshalb immer davon ausgehen, dass das lineare Modellproblem (2.3) eine eindeutige Lösung besitzt.

## 2.2 Das lineare Transmissionsproblem

In diesem Abschnitt werden wir ein, zu dem auf dem Gesamtgebiet erklärten linearen Modellproblem äquivalentes, Transmissionsproblem auf den Teilgebieten formulieren. Dieses Vorgehen spiegelt den Grundgedanken von nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethoden wider, welcher ja gerade in der Zerlegung des Ausgangsgebietes in mehrere kleine Teilgebiete und Betrachtung von weniger komplexen Teilproblemen auf diesen Teilgebieten besteht. Das Transmissionsproblem wird später zur Beschreibung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode benutzt. Wir wollen keine zusätzlichen Regularitätsforderungen an die schwache Lösung  $u$  des linearen Modellproblems (2.3) stellen, d.h. die Lösung soll lediglich ein Element aus  $H_0^1(\Omega)$  sein. In diesem Fall benötigen wir einige funktionalanalytische Hilfsmittel, um das Transmissionsproblem akkurat zu formulieren. Das wird speziell im Fall einer Zerlegung des Gesamtgebietes in mehr als zwei Teilgebiete deutlich, die nicht zu einer Streifenzerlegung korrespondiert. Wir verweisen auf Abbildung 2.2 auf Seite 9 für einige dieser komplizierteren Zerlegungen. Weiterhin werden wir zwei äquivalente schwache Formulierungen des Transmissionsproblems herleiten.

Als *lineares Transmissionsproblem* bezeichnen wir

$$\begin{cases} P_i(D)u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_i = u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \\ \partial_{P_i} u_i = -\partial_{P_j} u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.19)$$

wobei die Bezeichnungen wie im letzten Abschnitt gewählt sind,  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  gilt und die Konormalenableitung für vorerst hinreichend reguläre  $w_i \in V_i$  als

$$\partial_{P_i} w_i := (A_i \cdot \nabla w_i, n_i) \quad (2.20)$$

mit bezüglich  $\Omega_i$  äußerer Einheitsnormale  $n_i$  zu verstehen ist. Für  $i = 1, \dots, m$  ist  $\mathcal{N}(i)$  in (2.1) erklärt. Die Bedingungen (2.19)<sub>3,4</sub> bezeichnen wir als *Transmissionsbedingungen*. Natürlich ist das Transmissionsproblem in der klassischen differentiellen Formulierung nur für hinreichend reguläre  $u_i$  sinnvoll erklärt. Deshalb betrachten wir allgemeiner das *schwach formulierte lineare Transmissionsproblem*:

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j(u_j) & \text{in } H^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_j} u_j, \mu \rangle & \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (2.21)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung für  $w_i \in V_i$  als lineares stetiges Funktional auf  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  via

$$\langle \partial_{P_i} w_i, \mu \rangle_{(H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})} := a_i(w_i, \mathcal{R}^{ij} \mu) - (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu)_{L^2(\Omega_i)} \quad (2.22)$$

in Verallgemeinerung zu (2.20) definiert ist. Wir benutzen die Bezeichnung  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  für den Dualraum von  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Der Fortsetzungsoperator

$$\mathcal{R}^{ij} = \mathcal{R}^i \circ \tilde{\cdot} : H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \rightarrow V_i$$

ist linear und stetig, da die Fortsetzungsoperatoren  $\tilde{\cdot} : H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  und  $\mathcal{R}^i : H^{1/2}(\partial\Omega_i) \rightarrow V_i$  linear und stetig sind. Dabei bezeichnet  $\tilde{\cdot}$  den Operator der Nullfortsetzung auf den Gesamttrand und  $\mathcal{R}^i$  eine beliebige lineare stetige Fortsetzung in  $V_i$ . Siehe dazu auch Abschnitt A.2.6 im Anhang. Die Bedingungen (2.21)<sub>2,3</sub> betrachten wir als schwache Form der obigen Transmissionsbedingungen. Die erste Transmissionsbedingung können wir als Zulässigkeitsbedingung interpretieren, denn sie sichert mit Lemma 2.1.1 auf Seite 11, dass  $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  tatsächlich im Unterraum  $H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  liegt. Die zweite Transmissionsbedingung wiederum können wir als eine Art Gleichgewichtsbedingung deuten, denn wie wir noch sehen werden, erfüllt  $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  das Gesamtproblem (2.3) nur dann, wenn die Flüsse auf den jeweiligen Schnittstellen der Teilgebiete übereinstimmen.

*Bemerkung 8.* (i) (2.21)<sub>1</sub> ist tatsächlich nur für alle  $v_i \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i$  zu erfüllen.

(ii) Es ist nicht unmittelbar einzusehen, warum in (2.21)<sub>3</sub> die Konormalenableitung als Funktional auf dem Raum  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  aufgefasst wird, anstatt als Funktional auf dem Spurraum  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(V_i)$  oder auf dem Raum  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Wir erinnern daran, dass

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(V_i) \subset H^{1/2}(\Gamma_{ij})$$

und damit

$$H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \supset \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(V_i) \right)' \supset \left( H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \right)'$$

gilt. Im Allgemeinen sind die Teilmengenbeziehungen echt, d.h. Gleichheit gilt nur in Spezialfällen. Beispielsweise haben wir für die Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 die Gleichheit  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(V_i)$ . Für den gemeinsamen Rand in Abbildung 2.2 a) gilt sogar  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(V_i) = H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . In den Zerlegungen aus den Abbildungen 2.2 b) und c) sind alle Teilmengenbeziehungen echt. Die Beschränktheit der Konormalenableitung als Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  ist mit der Definition (2.22) leicht einzusehen. Dagegen ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Konormalenableitung, z.B. durch Fortsetzung, als stetiges lineares Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \supset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  aufzufassen. Der Fortsetzungssatz von HAHN-BANACH für Funktionale kann hier *nicht* angewendet werden, da die Normen in  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , außer in Spezialfällen, nicht äquivalent sind. Im Beweis von Satz 2.2.2, der Auskunft über die Äquivalenz von (2.21) und (2.5) gibt, werden wir sehen, dass es wirklich ausreicht, Funktionale auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  zu betrachten. Die schwache Form (2.21)<sub>3</sub> der zweiten Transmissionsbedingung muss also tatsächlich nur im Dualraum von  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  gelten.

(iii) Im Zusammenhang mit (ii) weisen wir darauf hin, dass es durch geeignete Konstruktion des Fortsetzungsoperators  $\mathcal{R}^{ij}$  sehr wohl möglich ist, dem rechten Ausdruck in (2.22) einen Sinn als Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  zu geben. Dazu müssen wir in der Definition von  $\mathcal{R}^{ij}$  nur die Nullfortsetzung auf den Gesamtrand durch einen passenden anderen linearen beschränkten Fortsetzungsoperator auf den Gesamtrand ersetzen. Durch ein solches Vorgehen lässt sich die Konormalenableitung aber *nicht* adäquat verallgemeinern, da dann die Rechnung im zweiten Teil der nachfolgenden Bemerkung nicht mehr durchgeführt werden kann. Genauer ist die erste Gleichung in der dortigen Rechnung nicht mehr gültig, wenn eine andere Fortsetzung als die Nullfortsetzung verwendet wird.

*Bemerkung 9.* (i) Mit (2.22) rechnen wir sofort nach, dass für  $w_i \in V_i$  die Konormalenableitung als Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  linear und stetig ist, d.h.  $\partial_{P_i} w_i \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  gilt.

(ii) Für klassische Lösungen  $w_i \in V_i$  von (2.19), es gilt also insbesondere  $A_i \cdot \nabla w_i \in H(\text{div}, \Omega_i)$ , liefert der Divergenzsatz A.2.11 in Verbindung mit Satz A.2.10 für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ij}} (A_i \cdot \nabla w_i, n_i) \mu \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega_i} (A_i \cdot \nabla w_i, n_i) \tilde{\mu} \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega_i} \text{div}(A_i \cdot \nabla w_i) \mathcal{R}^i \tilde{\mu} \, dx + \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla w_i, \nabla \mathcal{R}^i \tilde{\mu}) \, dx \\ &= - (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu)_{L^2(\Omega_i)} + a_i(w_i, \mathcal{R}^{ij} \mu). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\mu}$  wieder die Nullfortsetzung von  $\mu$  auf  $\partial\Omega_i$  und beim Übergang vom vorletzten zum letzten Term wurden die restlichen Teile des Differentialoperators  $P_i(D)$  produktiv zu Null ergänzt. Somit ist es sinnvoll, (2.22) als Verallgemeinerung von (2.20) zu interpretieren.

Wir definieren eine spezielle Teilmenge von  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , nämlich

$$V_i^{00} := \left\{ v \in V_i \mid \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \right\}. \quad (2.23)$$

Für beliebige  $\mu_{ij} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gilt natürlich  $\tilde{\mu}_{ij} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  und  $\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \tilde{\mu}_{ij} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$ . Weiter liegen dann  $\mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}$  und  $\mathcal{R}^i \left( \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \tilde{\mu}_{ij} \right) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}$  in  $V_i^{00}$ .

*Bemerkung 10.* Die Räume  $V_i$  und  $V_i^{00}$  können übereinstimmen. Dies ist beispielsweise für die Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 und die Zerlegung aus Abbildung 2.2 a) der Fall. Im Allgemeinen ist  $V_i^{00}$  aber eine echte Teilmenge von  $V_i$ .

Eine Lösung von (2.21) wollen wir als *schwache Lösung* des linearen Transmissionsproblems (2.19) bezeichnen. Dass dies den Lösungsbegriff verallgemeinert, sehen wir wieder durch Multiplikation von (2.19)<sub>1</sub> mit  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$  bzw. mit  $v_i = \mathcal{R}^{ij}\mu \in V_i^{00}$ ,  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , Integration über  $\Omega_i$ , anschließender partieller Integration sowie Beachtung von Bemerkung 9(ii).

Als Vorbereitung auf den nächsten Satz beweisen wir das

**Lemma 2.2.1.** *Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  beliebig. Für jedes  $v \in V_i$  existiert eine Folge  $(v^k)_k \subset V_i^{00}$  und ein  $v^0 \in H_0^1(\Omega_i)$ , sodass  $v^0 + v^k \rightharpoonup v$  in  $H^1(\Omega_i)$  für  $k \rightarrow \infty$  und damit*

$$\langle \lambda, v \rangle = \langle \lambda, v^0 \rangle + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda, v^k \rangle \quad \forall \lambda \in (V_i)' = \mathcal{L}(V_i, \mathbb{R}),$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $(V_i)' \times V_i$  darstellt.

*Beweis.* Sei  $v \in V_i$  beliebig. Dann gilt  $\eta := \gamma_{\partial\Omega_i}^i(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  und  $\eta_{ij} := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ . Da  $\mathcal{D}(\Gamma_{ij})$  sowohl in  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  als auch in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  dicht ist, liegt auch  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  dicht in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Siehe auch Abschnitt A.2.6 im Anhang. Somit existiert eine Folge  $(\mu_{ij}^k)_k \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit

$$\|\mu_{ij}^k - \eta_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wir definieren die Folge  $(\mu_i^k)_k \subset H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  durch

$$\mu_i^k := \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \widetilde{\mu_{ij}^k}, \quad (2.24)$$

wobei  $\widetilde{\mu_{ij}^k} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  die Nullfortsetzung von  $\mu_{ij}^k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  auf  $\partial\Omega_i$  bezeichnet. Wegen

$$\|\mu_i^k - \eta\|_{L^2(\partial\Omega_i)} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\mu_{ij}^k - \eta_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\mu_{ij}^k - \eta_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gilt natürlich  $\mu_i^k \rightarrow \eta$  in  $L^2(\partial\Omega_i)$  für  $k \rightarrow \infty$ , woraus wegen des GELFAND-Dreiers  $H^{1/2}(\partial\Omega_i) \subset L^2(\partial\Omega_i) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega_i)$  sofort die schwache Konvergenz

$$\mu_i^k \rightharpoonup \eta \text{ in } H^{1/2}(\partial\Omega_i) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

folgt. Wir definieren nun die Folge  $(v^k)_k$  durch  $v^k := \mathcal{R}^i \mu_i^k = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k \in V_i^{00} \subset V_i$ . Da  $\mathcal{R}^i \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega_i), H^1(\Omega_i))$ , folgt die schwache Konvergenz

$$v^k = \mathcal{R}^i \mu_i^k \rightharpoonup \mathcal{R}^i \eta \text{ in } H^1(\Omega_i) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Mit  $\widehat{v} := \mathcal{R}^i \eta \in V_i$ , also speziell  $\gamma_{\partial\Omega_i} \widehat{v} = \gamma_{\partial\Omega_i} v$ , erhalten wir die Zerlegung

$$v = v^0 + \widehat{v} = v^0 + \text{w-lim}_{k \rightarrow \infty} v^k, \quad (2.25)$$

wobei  $v^0 \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i$  ist. Das ist gerade die Konvergenz von  $\langle \lambda, v^0 + v^k \rangle$  gegen  $\langle \lambda, v \rangle$  bezüglich des  $(H^1(\Omega_i))' \times H^1(\Omega_i)$  Dualitätsproduktes. Da im Allgemeinen  $V_i \subsetneq H^1(\Omega_i)$  ist, gilt  $(H^1(\Omega_i))' \subsetneq (V_i)'$ . Sei nun  $\lambda \in (V_i)' \setminus (H^1(\Omega_i))'$ . Der Fortsetzungssatz von HAHN-BANACH für Funktionale liefert die Existenz einer normgleichen Fortsetzung  $\xi \in (H^1(\Omega_i))'$  von  $\lambda$  mit

$$\langle \xi, w \rangle_{(H^1(\Omega_i))' \times H^1(\Omega_i)} = \langle \lambda, w \rangle_{(V_i)' \times V_i} \quad \forall w \in V_i,$$

woraus wir mit  $H_0^1(\Omega_i) \subset V_i^{00} \subset V_i$  unmittelbar

$$\begin{aligned} \langle \lambda, v \rangle_{(V_i)' \times V_i} &= \langle \xi, v \rangle_{(H^1(\Omega_i))' \times H^1(\Omega_i)} \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \langle \xi, v^0 \rangle_{(H^1(\Omega_i))' \times H^1(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \xi, v^k \rangle_{(H^1(\Omega_i))' \times H^1(\Omega_i)} \\ &= \langle \lambda, v^0 \rangle_{(V_i)' \times V_i} + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda, v^k \rangle_{(V_i)' \times V_i} \end{aligned}$$

erhalten. □

*Bemerkung 11.* Es ist nicht klar, ob die Folge  $\mu_i^k$  aus (2.24) in  $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  gegen  $\eta = \gamma_{\partial\Omega_i}v \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  konvergiert. Wäre dies der Fall, so könnten wir im obigen Beweis die schwachen Konvergenzen durch die entsprechenden Normkonvergenzen ersetzen, was dann unmittelbar die Dichtheit von  $V_i^{00}$  in  $V_i$  liefern würde.

Gegen die Konvergenz der Folge  $\mu_i^k$  in  $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  gegen  $\eta$  spricht, dass die Folgen der einzelnen Summanden  $\widetilde{\mu_{ij}^k}$  aus (2.24) keine CAUCHY-Folgen im HILBERT-Raum  $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  sind. Denn wäre  $(\widetilde{\mu_{ij}^k})_k$  eine CAUCHY-Folge in  $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$ , so wäre wegen

$$\left\| \widetilde{\mu_{ij}^k} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)} \gtrsim \left\| \mu_{ij}^k \right\|_{H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

auch  $(\mu_{ij}^k)_k$  eine CAUCHY-Folge im vollständigen Raum  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Dies würde dann  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{ij}^k = \eta_{ij} \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  implizieren, was im Allgemeinen nicht richtig ist ( $\eta_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \setminus H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  ist möglich).

Dass eine schwache Lösung  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} = (u_1, \dots, u_m) \in \hat{H}^1$ , siehe (2.9), des linearen Transmissionsproblems auch eine schwache Lösung des Gesamtproblems ist und umgekehrt, zeigt der

**Satz 2.2.2.** *Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (2.19). Dann ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  und löst (2.3) im schwachen Sinn. Umgekehrt gilt auch: Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (2.3), so ist  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  auch schwache Lösung von (2.19).*

*Beweis.* Sei also  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  eine Lösung von (2.21). Dann gilt, wegen (2.21)<sub>2</sub> und Lemma 2.1.1 auf Seite 11,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Sei nun  $w \in H_0^1(\Omega)$  beliebig. Dann ist natürlich  $w_i := w|_{\Omega_i} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und Lemma 2.2.1 liefert die Existenz eines  $w_i^0 \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i^{00}$  und einer Folge  $(w_i^k)_k \subset V_i^{00}$  mit  $w_i^0 + w_i^k \rightharpoonup w_i$  in  $H^1(\Omega_i)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wir beachten, dass die Konstruktion der schwach konvergenten Folgen im letzten Lemma immer so erfolgen kann, dass  $\mu_{ij}^k := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i^k = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j w_j^k =: \mu_{ji}^k \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , für alle  $k$  gilt. Dies ist möglich, da  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j w_j$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist. Wir setzen die approximierende Folge  $(\mu_{ij}^k)_k$  für  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i$  also einmal mittels  $\mathcal{R}^{ij}$  und einmal mittels  $\mathcal{R}^{ji}$  fort. Zusammengefasst haben wir für  $i = 1, \dots, m$  die Darstellung

$$w_i^k = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k \text{ mit } \mu_{ij}^k = \mu_{ji}^k \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i).$$

Da nach Bemerkung 3 auf Seite 10 die Bilinearform  $a_i$  auf  $H^1(\Omega_i) \supset V_i$  stetig ist, ist  $a_i(u_i, \cdot)$  für festes  $u_i \in V_i$  natürlich ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Selbiges gilt auch für  $(f_i, \cdot)_{L^2(\Omega_i)}$ . Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von Lemma 2.2.1

$$\begin{aligned} a(u, w) &= \sum_{i=1}^m a_i(u_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( a_i(u_i, w_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_i(u_i, w_i^k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( a_i(u_i, w_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) \right) \\ &\stackrel{(2.21)_1}{=} \sum_{i=1}^m (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) \\ &\stackrel{(2.21)_3}{=} \sum_{i=1}^m (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k)_{L^2(\Omega_i)} \\ &= \sum_{i=1}^m \left( (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} (f_i, w_i^k)_{L^2(\Omega_i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (f_i, w_i)_{L^2(\Omega_i)} = (f, w)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei wir (2.21)<sub>3</sub> wegen  $\mu_{ij}^k = \mu_{ji}^k$  in der Form

$$a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) + a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ji}^k) = (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k)_{L^2(\Omega_i)} + (f_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ji}^k)_{L^2(\Omega_j)}, \quad i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i),$$

verwendet haben. Insgesamt erhalten wir also (2.5).

Sei nun  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine Lösung von (2.5). Dann ist  $u_i = u|_{\Omega_i} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und natürlich gilt (2.21)<sub>2</sub>. Zu beliebigem  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , setzen wir dann  $v_j := 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$  und erhalten  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega)$ . Für dieses  $v$  liefert (2.5)

$$a_i(u_i, v_i) = a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)},$$

d.h. (2.21)<sub>1</sub>. Zu beliebigem  $\mu_{ij} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  setzen wir  $v_i := \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}$ ,  $v_j := \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij}$  und  $v_k := 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$ . Dann ist  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega)$  und für dieses  $v$  liefert (2.5)

$$a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}) + a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij}) = a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + (f_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_j)},$$

d.h. (2.21)<sub>3</sub>. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir sofort eine Aussage zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des linearen Transmissionsproblems (2.19) machen.

**Korollar 2.2.3.** *Das lineare Transmissionsproblem (2.19) besitzt genau dann eine eindeutige schwache Lösung, wenn das lineare Modellproblem (2.3) eine eindeutige schwache Lösung besitzt.*

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem letzten Satz. □

*Bemerkung 12.* Die Sätze 2.1.2 und 2.1.3 geben Auskunft darüber, wann das lineare Modellproblem (2.3) eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Hinreichend hierfür sind beispielsweise die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 oder die in Bemerkung 7 auf Seite 15 angegebenen Alternativen.

Im Hinblick auf die nachfolgenden Abschnitte ist es sinnvoll die Transmissionsbedingungen umzuformulieren. Dazu seien Funktionen  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij}) \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Für  $v_i \in V_i$  ist  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , und wegen

$$\left\| \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \|\lambda_{ij}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

ist das Produkt  $\lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  im  $L^2(\Gamma_{ij})$ . Auf Grund der GELFAND-Dreier

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \quad \text{und} \quad H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$$

mit den Bezeichnungen

$$H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) := \left( H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \right)' \quad \text{und} \quad H^{-1/2}(\Gamma_{ij}) := \left( H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \right)' = \left( H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \right)'$$

für die Dualräume, können wir den Ausdruck  $\lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  auch als lineares Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bzw.  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  interpretieren. Wenn wir die Einbettungsoperatoren mit  $\mathcal{I}^{00} \in \mathcal{L}\left(L^2(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})\right)$  und  $\mathcal{I} \in \mathcal{L}\left(L^2(\Gamma_{ij}), H^{-1/2}(\Gamma_{ij})\right)$  bezeichnen, dann liefern beispielsweise die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right\rangle \right| &= \left| \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \right| \leq \left\| \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\leq \left\| \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})} \end{aligned}$$

für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und analog

$$\left| \left\langle \mathcal{I} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right\rangle \right| \leq \left\| \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \quad (2.26)$$



für alle  $\mu \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  sofort die Stetigkeit der Funktionale. Natürlich gilt für alle  $\mu \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset H^{1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right\rangle = \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \left\langle \mathcal{I} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i), \mu \right\rangle, \quad (2.27)$$

wobei links die Dualität in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und rechts die Dualität in  $H^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  gemeint ist. Somit ist  $\mathcal{I} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  eine Fortsetzung von  $\mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ , welche wegen der dichten Einbettung der Räume überdies eindeutig ist.

Für  $v_i \in V_i$  ist mit Bemerkung 9(i) neben  $\mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  auch die nach (2.22) definierte Konormalenableitung  $\partial_{P_i} v_i$  ein lineares stetiges Funktional auf  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Wir können die schwachen Transmissionsbedingungen (2.21)<sub>2</sub> und (2.21)<sub>3</sub> also verknüpfen und erhalten auf  $\Gamma_{ij}$  die beiden Gleichungen in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{cases} \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) &= -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \\ \partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ji}}^j(u_j) &= -\partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ji}}^i(u_i) \end{cases}. \quad (2.28)$$

Wir erhalten tatsächlich zwei Gleichungen pro Randstück  $\Gamma_{ij}$ , weil wir die Rollen von  $i$  und  $j$  vertauschen können. Die beiden über  $\Gamma_{ij}$  gekoppelten Teilprobleme auf benachbarten  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$  liefern jeweils eine der Gleichungen in (2.28).

Mit den Ausführungen in Bemerkung 8(ii) ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Konormalenableitung (2.22) zu einem stetigen Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  fortzusetzen. Deswegen können wir kein Analogon zu (2.28) in  $H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  formulieren.

Damit die Gleichungen in (2.28) wirklich äquivalent zu den schwachen Transmissionsbedingungen (2.21)<sub>2,3</sub> sind, müssen wir die Allgemeinheit bei der Wahl der  $\lambda_{ij}$  etwas einschränken.

**Voraussetzung 2.8.** Für  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x)| > 0$$

und weiter

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)| > 0,$$

d.h. sowohl  $\lambda_{ij}$  als auch die Summe  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  seien fast überall von der Null weg beschränkt.

Wir formulieren die beiden folgenden Probleme:

Finde  $u_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) &= (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \left\langle \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu \right\rangle &= \left\langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \mu \right\rangle & \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (2.29)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22) erklärt ist.

Finde  $u_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle & \forall v_i \in V_i^{00}, \end{cases} \quad (2.30)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wieder das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22) erklärt ist. Die Räume  $V_i^{00}$  sind in (2.23) definiert.

*Bemerkung 13.* In (2.30) reicht es tatsächlich aus, mit  $v_i \in V_i^{00} \subset V_i$  zu testen. Überdies ist es gar nicht möglich, mit  $v_i \in V_i \setminus V_i^{00}$  zu testen, da das Dualitätsprodukt auf der rechten Seite dann nicht erklärt wäre. Wegen  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  müssten wir  $-\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  als Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  auffassen, was nicht möglich ist, da die Konormalenableitung nicht als ein entsprechendes Funktional interpretierbar ist.

Dass die Probleme (2.29) und (2.30) nur alternative Formulierungen des linearen Transmissionsproblems (2.21) sind, zeigt das

**Lemma 2.2.4.** *Unter der Voraussetzung 2.8 sind die Probleme (2.21), (2.29) und (2.30) äquivalent, d.h. eine Lösung eines der drei Probleme erfüllt auch die beiden anderen Probleme.*

*Beweis.* I) (2.21)  $\iff$  (2.29) : Wir zeigen, dass die Transmissionsbedingung (2.28) äquivalent zu den schwachen Transmissionsbedingungen (2.21)<sub>2,3</sub> ist, woraus die Äquivalenz von (2.29) und (2.21) folgt.

Zunächst überlegen wir uns, dass unter Voraussetzung 2.8 für  $i = 1, \dots, m$  die Transmissionsbedingung (2.21)<sub>2</sub> äquivalent zu

$$\lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } L^2(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \quad (2.31)$$

ist. Die Hinrichtung ist klar. Es gelte umgekehrt (2.31), d.h. insbesondere

$$0 = \left\| \lambda_{ij} (\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \geq \operatorname{ess\,inf}_{\Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}| \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

Mit Voraussetzung 2.8 folgt sofort  $\left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} = 0$ , also  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  in  $L^2(\Gamma_{ij})$ . Dies ist (2.21)<sub>2</sub>, da die Spuren selbst natürlich in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  liegen. Wegen der Injektivität der Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  gilt, dass (2.31) wiederum äquivalent zu

$$\mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \quad (2.32)$$

ist. Durch Addition von (2.21)<sub>3</sub> mit (2.32) erhalten wir (2.28)<sub>1</sub>. Vertauschen von  $i$  und  $j$  liefert (2.28)<sub>2</sub>.

Gelte nun umgekehrt (2.28). Subtraktion von (2.28)<sub>1</sub> und (2.28)<sub>2</sub> liefert

$$\mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i),$$

woraus wegen der Injektivität von  $\mathcal{I}^{00}$  und Voraussetzung 2.8 analog zu oben  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , folgt, d.h. (2.21)<sub>2</sub>. Somit haben wir wieder (2.32) zur Verfügung und dann liefert Addition von (2.28)<sub>1</sub> und (2.28)<sub>2</sub> für  $j \in \mathcal{N}(i)$

$$2 (\partial_{P_i} u_i + \partial_{P_j} u_j) = \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \stackrel{(2.32)}{=} 0,$$

woraus (2.21)<sub>3</sub> folgt.

II) (2.29)  $\iff$  (2.30) : Es gelte zuerst (2.29). Sei  $v_i \in V_i^{00}$  beliebig und  $\mu_{ij} := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$ . Wir können  $v_i$  dann in der Form  $v_i = v_i^0 + v_i^1$  mit  $v_i^1 := \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij} \in V_i^{00}$  und  $v_i^0 := v_i - v_i^1 \in H_0^1(\Omega_i)$  schreiben. Mit diesem  $v_i$  gilt

$$\begin{aligned} a_i(u_i, v_i) &+ \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle \\ &\stackrel{(2.29)_1}{=} (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}) + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \right) \\ &\stackrel{(2.22)}{=} (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \left\langle \partial_{P_i} u_i, \mu_{ij} \right\rangle + (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \right) \\ &= (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \left( f_i, \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij} \right)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \\ &\stackrel{(2.29)_2}{=} (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei die eckigen Klammern immer die Dualität in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnen. Dies ist (2.30), da  $v_i \in V_i^{00}$  beliebig war.

Umgekehrt gelte nun (2.30). Einsetzen von  $v_i \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i^{00}$  in (2.30) liefert sofort (2.29)<sub>1</sub>. Zu beliebigem  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , wobei die folgende Argumentation für jedes  $j \in \mathcal{N}(i)$  durchgeführt werden kann, definieren wir  $v_{ij} := \mathcal{R}^{ij}\mu \in V_i^{00}$ . Mit diesem  $v_{ij}$  liefert (2.30) nach Umstellen und unter Beachtung von  $\gamma_{\Gamma_{il}}^i(v_{ij}) = 0$  für  $l \neq j$

$$a_i(u_i, v_{ij}) - (f_i, v_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_{ij}) \right\rangle = \left\langle \partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_{ij}) \right\rangle.$$

Mit (2.22) und unter Beachtung von  $v_{ij} = \mathcal{R}^{ij}\mu$  erhalten wir daraus (2.29)<sub>2</sub>, weil  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , beliebig war.  $\square$

## 2.3 Die nichtüberlappende Schwarzsche Methode

In diesem Abschnitt werden wir den Grundgedanken und einige Eigenschaften einer verbreiteten nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethode darstellen. Diese Methode werden wir später in einer verallgemeinerten Form benutzen, um das lineare Transmissionsproblem und damit auch das lineare Modellproblem zu lösen. Insbesondere führen wir eine variationelle Formulierung im Fall mehrerer Teilgebiete ein, die ohne zusätzliche Regularitätsforderungen an die Lösung des Gesamtproblems auskommt.

Die *nichtüberlappende Schwarzsche Methode* zur iterativen Lösung des Modellproblems (2.3), auch als *iterative ROBIN-Substrukturierungsmethode* bezeichnet, lautet in Anlehnung an [Lio90]: Seien beliebige Startwerte  $u_i^0 \in V_i, i = 1, \dots, m$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^{n+1} = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = -\partial_{P_j} u_j^n + \lambda_{ij} u_j^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.33)$$

wobei die Konormalenableitung unter hinreichenden Regularitätsvoraussetzungen durch (2.20) erklärt ist. In [Lio90] wurden als Verfahrensparameter nur  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} > 0$  für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , zugelassen. Wir heben diese Einschränkung auf und fordern vorerst nur Voraussetzung 2.8 auf Seite 21, um die Äquivalenz zwischen Modellproblem und Transmissionsproblem zu sichern. Das Zulassen von allgemeineren Verfahrensparametern stellt natürlich schon eine Verallgemeinerung der Methode dar. Wenn wir von der klassischen SCHWARZschen Methode nach [Lio90] reden, werden wir die Verfahrensparameter immer als konstant annehmen.

*Bemerkung 14.* Statt der Bedingung (2.33)<sub>3</sub> können wir verallgemeinernd auf  $\Gamma_{ij}$  auch, wie beispielsweise in [Ott99] vorgeschlagen, die Bedingung

$$\partial_{P_i} u_i^{n+1} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = \theta (-\partial_{P_j} u_j^n + \lambda_{ij} u_j^n) + (1 - \theta) (\partial_{P_i} u_i^n + \lambda_{ij} u_i^n)$$

für ein  $\theta \in (0, 1]$  fordern. Für  $\theta = 1$  ergibt sich wieder (2.33)<sub>3</sub>. Wir werden diesen Ansatz jedoch nicht weiter betrachten.

Natürlich ist die obige differentielle Formulierung wieder nur unter stärkeren Regularitätsforderungen sinnvoll, weshalb wir in Analogie zu den vorhergehenden Abschnitten zum schwach formulierten Problem übergehen. Es lautet:

Finde  $u_i^{n+1} \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^{n+1}, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \left\langle \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^{n+1}), \mu \right\rangle = \left\langle -\partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \mu \right\rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), \\ & j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (2.34)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erneut das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22) erklärt ist.

Eine alternative Formulierung ist:

Finde  $u_i^{n+1} \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(u_i^{n+1}, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^{n+1}), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle -\partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}, \end{array} \right. \quad (2.35)$$

wobei das Dualitätsprodukt und die Konormalenableitung wie in (2.34) erklärt sind.

Analog zum zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.2.4 auf Seite 22 beweisen wir, dass (2.34) und (2.35) äquivalent sind. Zur Wohldefiniertheit der beiden Probleme machen wir an dieser Stelle keine Aussage. Wir kommen im nächsten Abschnitt in einem allgemeineren Kontext darauf zurück und verweisen auf die Lemmata 2.4.1 und 2.4.2 auf den Seiten 29 und 30.

*Bemerkung 15.* Für die spezielle Zerlegung aus Bemerkung 1(i) und für  $\lambda_{ij} = \text{const}$  reduziert sich die Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  auf den RIESZ-Isomorphismus  $J \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$ .

*Bemerkung 16.* In [Lio90] wurden sehr einschränkende Voraussetzungen an den Operator und an die zu Grunde liegenden Gebiete gemacht ( $P(D) = -\Delta + b(x) \cdot \nabla + c(x)$ ,  $b, c$  glatt,  $\Gamma_{ij}$  seien glatte Mannigfaltigkeiten, welche den glatten Rand  $\partial\Omega$  orthogonal schneiden). Weiter wurden die Startwerte der Iteration regulärer gewählt, nämlich  $u_i^0 \in H^2(\Omega_i) \cap V_i, i = 1, \dots, m$ . Auch wurden als Verfahrensparameter nur Konstanten  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  zugelassen. Unter diesen starken Annahmen sind dann auch die sukzessiven Lösungen von (2.33) regulärer, sodass die Konormalenableitungen (in diesem Fall dann NEUMANN-Ableitungen) einen Sinn im  $L^2(\Gamma_{ij})$  haben. In diesem Fall muss nicht auf die schwache Formulierung (2.22) der Konormalenableitung ausgewichen werden. Siehe hierzu auch Bemerkung 9(ii). Unser Modellproblem ist unter allgemeineren Voraussetzungen formuliert.

Der Zusammenhang zwischen der nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode und dem linearen Transmissionsproblem ist sofort offensichtlich, wenn (2.29) und (2.34) verglichen werden. Da die Teilprobleme des Transmissionsproblems im Allgemeinen nicht gleichzeitig nebeneinander gelöst werden können, weil sie gegenseitig voneinander abhängen, wurden sie durch einen iterativen Prozess entkoppelt. Dieser gestattet es die neuen iterierten Lösungen der Teilprobleme mit Hilfe der Lösungen des vorhergehenden Iterationsschrittes der benachbarten Teilprobleme zu bestimmen. Der Name ROBIN-Substrukturierungsmethode beruht darauf, dass in (2.33)<sub>3</sub> Randbedingungen vom ROBIN-Typ (Randbedingungen 3. Art) benutzt werden. Im Gegensatz hierzu verwenden die weit verbreiteten DIRICHLET-NEUMANN- und NEUMANN-NEUMANN-Substrukturierungsmethoden nur DIRICHLET- und NEUMANN-Randbedingungen (Randbedingungen 1. und 2. Art). Eine genaue Beschreibung der hier erwähnten Gebietszerlegungsmethoden findet sich beispielsweise in [QV99].

*Bemerkung 17.* Wir erkennen, dass die obige SCHWARZsche Methode parallelisiert ist, da die rechte Seite in (2.33)<sub>3</sub> nur von den benachbarten Iterierten im vorhergehenden Iterationsschritt abhängt. Es ist auch möglich, abhängig von der Geometrie der Zerlegung des Gebietes, eine block-sequentielle Variante von (2.33) zu formulieren. Dazu führen wir eine schwarz-weiß Färbung der Teilgebiete durch (wenn die Zerlegung dies gestattet), definieren die Indexmengen  $I_S := \{1 \leq i \leq m \mid \Omega_i \text{ ist schwarz}\}$  und  $I_W := \{1 \leq i \leq m \mid \Omega_i \text{ ist weiß}\}$  und lösen die Probleme

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_i(D)u_i^{n+1} = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = -\partial_{P_j} u_j^n + \lambda_{ij} u_j^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \subset I_W \end{array} \right. \quad i \in I_S, \quad (2.36)$$

und anschließend

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_i(D)u_i^{n+1} = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = -\partial_{P_j} u_j^{n+1} + \lambda_{ij} u_j^{n+1} & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \subset I_S \end{array} \right. \quad i \in I_W. \quad (2.37)$$

Es ist klar, dass im Gegensatz zur parallelen Variante (2.33), wo alle Teilprobleme gleichzeitig gelöst werden können, die weiß kolorierten Aufgaben (2.37) erst in Angriff genommen werden können, wenn die schwarz gefärbten Probleme (2.36) gelöst sind. Der Vorteil der sequentiellen Variante wird im Fall von zwei Teilgebieten sofort klar, da dann die Folge der Lösungen, welche durch (2.36) und (2.37) generiert werden, eine Teilfolge der Folge der Lösungen von (2.33) ist, somit also

schneller konvergiert. Da eine schwarz-weiß Färbung der Teilgebiete nicht für beliebige Zerlegungen des Gesamtgebietes möglich ist, kann diese sequentielle Variante nicht immer verwendet werden. Im Fall komplexerer Zerlegungen, in denen eine schwarz-weiß Färbung nicht möglich ist, kann, analog zum obigen Vorgehen, durch Verwendung mehrerer Farben immer noch eine sequentielle Variante erzeugt werden.

Nun stellt sich die Frage, ob die durch (2.33) erzeugte Lösungsfolge überhaupt konvergiert. Die schwache Konvergenz der Iterierten der klassischen SCHWARZschen Methode  $u_i^n$  gegen  $u_i := u|_{\Omega_i} \in V_i$  in  $H^1(\Omega_i)$ , wobei  $u \in H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung des linearen Modellproblems (2.3) bezeichnet, wurde in [Lio90] stellvertretend für selbstadjungierte Operatoren am Spezialfall  $P_i(D) := -\Delta$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit Hilfe geeigneter Energieabschätzungen bewiesen. Weiterhin wurde dort gezeigt, dass auch für  $P(D) := -\Delta + b(x) \cdot \nabla + c(x)$ , also im nicht selbstadjungierten Fall, unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 die Iterierten der SCHWARZschen Methode  $u_i^n$  zumindest in  $L^2(\Omega_i)$  gegen  $u_i \in V_i$  konvergieren. Weiter wurde dort die Beschränktheit der Folgen  $(u_i^n)_n$  in  $H^{1/2}(\Omega_i)$  gezeigt, woraus noch schwache Konvergenz in  $H^{1/2}(\Omega_i)$ , zumindest für eine Teilfolge, geschlossen werden kann.

*Bemerkung 18.* Leider sind die Beweise in [Lio90] an entscheidenden Stellen nur für sehr stark vereinfachte Probleme geführt worden ( $m = 2$ , beide Teilgebiete besitzen Außenrand,  $\Gamma_{12}$  ist Teil einer Hyperebene und  $\partial\Omega$  ist flach in einer Umgebung von  $\overline{\Gamma_{12}} \cap \partial\Omega$  und  $\partial\Omega$  und  $\overline{\Gamma_{12}}$  schneiden sich orthogonal). Siehe auch die Bemerkung 16. Die Übertragung der Beweise auf unseren Fall ist leider nicht ohne Weiteres möglich. Dazu ist beispielsweise die Regularitätsaussage

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $\Omega$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet des  $\mathbb{R}^N$  ist und  $u$  schwache Lösung des DIRICHLET-Problems

$$\begin{cases} P(D)u = f \in L^2(\Omega) & \text{in } \Omega \\ u = g \in H^{1/2}(\partial\Omega) & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

nötig. Natürlich gilt  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ . Aber damit folgt unseres Wissens noch nicht die obige Abschätzung, zumindest nicht für LIPSCHITZ-Gebiete. Weiterhin ist für LIPSCHITZ-Gebiete die Konormalenableitung (2.22) auf einem Teilrand  $\Gamma$  nicht mehr als Funktion aus  $L^2(\Gamma)$  interpretierbar.

Für den Spezialfall, in dem *alle* Teilgebiete  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , einen echten Außenrand haben können wir ohne Schwierigkeiten unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 mit den in [Lio90] angeführten Techniken die starke Konvergenz der SCHWARZschen Methode (2.33) in  $H^1(\Omega_i)$  zeigen. Der Schlüssel dazu ist die Anwendbarkeit der POINCARÉ-Ungleichung und die Äquivalenz des Gesamtproblems (2.3) und des zugehörigen Transmissionsproblems (2.19). Für diesen Spezialfall lässt sich auch der elegantere Beweis für die Konvergenz der SCHWARZschen Methode in  $H^1(\Omega_i)$ , welcher in [QV99, §4.5] für den Spezialfall von zwei Teilgebieten mit Nullrand und dem LAPLACE-Operator durchgeführt wurde, übertragen. Auch wurde für die Streifenzerlegungen aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 die  $H^1(\Omega_i)$ -Konvergenz der SCHWARZschen Methode mit der verallgemeinerten Transmissionsbedingung aus Bemerkung 14 für konvektionsdominante Probleme, d.h.  $P_i(D) := -\varepsilon\Delta + b \cdot \nabla + c$ ,  $\varepsilon$  klein, bereits in [Ott99] gezeigt.

Insgesamt können wir auf jedem Teilgebiet  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , die starke Konvergenz in  $H^1(\Omega_i)$  der Lösungsfolge der SCHWARZschen Methode (2.33) gegen die Lösung des linearen Transmissionsproblems (2.19) und damit wegen Satz 2.2.2 gegen die Lösung des linearen Modellproblems (2.3) unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 sowie entweder unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$  oder zusätzlichen Regularitätsbedingungen zeigen. Dabei sei bemerkt, dass die benötigten Voraussetzungen an die Verfahrensparameter schwächer sind als die aus [Lio90],  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} > 0$ . Darüber hinaus ist das Konvergenzresultat stärker als das in [Lio90]. Der Beweis soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden, da wir im nächsten Abschnitt eine verallgemeinerte SCHWARZsche Methode einführen und deren starke Konvergenz zeigen werden. Dabei werden insbesondere die allgemeinen Zerlegungen aus Bemerkung 1(iii) auf Seite 9 zugelassen, d.h. wir beschränken uns nicht auf Streifenzerlegungen. In dieser verallgemeinerten Methode finden wir die klassische SCHWARZsche Methode als Spezialfall wieder. Wir verweisen auf Lemma 2.4.2 auf Seite 30.

Ein Vorteil, der sich aus der oben erwähnten Parallelität der nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode ergibt, ist, dass auch im Fall von mehreren Teilgebieten keine Probleme mit Kreuzungspunkten auftreten. Ein *Kreuzungspunkt* ist ein Punkt, in dem sich die Ränder von drei oder mehr benachbarten Teilgebieten schneiden. Siehe z.B. Abbildung 2.2 a) auf Seite 9. Bei sequentiellen bzw. block-sequentiellen Verfahren treten bei Zerlegungen mit Kreuzungspunkten Probleme auf, da bei der Berechnung der  $(n + 1)$ -ten Iterierten eines Teilproblems die  $(n + 1)$ -ten Daten aller anderen, den Kreuzungspunkt gemeinsam habenden Teilprobleme, benötigt werden. Diese wiederum hängen gegenseitig voneinander und von der  $(n + 1)$ -ten Iterierten des Ausgangsteilproblems ab.

Als Nachteil der klassischen nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode ist anzuführen, dass sie bei unpassender Wahl des Parameters sehr langsam konvergiert. Deshalb werden in der Praxis häufig überlappende SCHWARZsche Methoden verwendet, da diese eine geometrische Konvergenzrate besitzen. Ansätze, wie durch geeignete Wahl der Parameter die Konvergenz der nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode beschleunigt werden kann, finden sich unter anderem in [QV99, Chapter 6], [Lui01] und [Den03]. Ein weiterer Nachteil, zumindest vom numerischen Standpunkt aus, ist, dass in jedem Iterationsschritt die Konormalenableitung zu bestimmen ist. Einen Ausweg hierfür bietet der Ansatz in [Den97], in dem auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung durch Einführen einer geeigneten Aufdatierungsstrategie verzichtet werden kann. Dieser Ansatz wird sich auch aus analytischer Sicht als vorteilhaft erweisen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Wir wollen noch darauf hinweisen, dass die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode auch über einen optimierungsbasierten Ansatz hergeleitet werden kann. Siehe hierzu [GLT90].

## 2.4 Eine Verallgemeinerung der Schwarzschen Methode

Dieser Abschnitt gliedert sich in drei Teile. Im ersten Unterabschnitt werden wir, aufbauend auf den Verfahren in [Lio90] und [Den97], eine verallgemeinerte SCHWARZsche Methode definieren und deren Vorteile aufzeigen. Dabei wird eine schwache Formulierung angegeben, die auch für komplexe Zerlegungen ohne zusätzliche Regularitätsforderungen an die Lösung des Gesamtproblems auskommt. Zudem wird eine alternative schwache Formulierung hergeleitet, die in den nachfolgenden Beweisen Verwendung findet. Weiterhin wird die Wohldefiniertheit des Algorithmus gezeigt. Darüber hinaus weisen wir nach, dass die klassische nichtüberlappende SCHWARZsche Methode aus dem Abschnitt 2.3 als Spezialfall in der verallgemeinerten Methode enthalten ist. Im zweiten Unterabschnitt untersuchen wir einige Eigenschaften des Fehlers der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode. Dabei werden notwendige Voraussetzungen präzisiert und Hilfsresultate bewiesen. Im dritten und letzten Unterabschnitt führen wir die Konvergenzbeweise aus. Dabei unterscheiden wir zwischen elliptischen Problemen mit dominantem Hauptteil, singular gestörten und indefiniten elliptischen Problemen.

### 2.4.1 Definition der verallgemeinerten Schwarzschen Methode (VSAM)

Wir werden nun die SCHWARZsche Methode (2.33) unter Beibehaltung ihrer positiven Eigenschaften verallgemeinern. Dazu erweitern wir den Ansatz aus [Den97].

Die *verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* in Anlehnung an [Den97] lautet: Seien beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^n = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^n = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^n + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.38)$$

wobei die Konormalenableitung unter hinreichenden Regularitätsvoraussetzungen wieder durch (2.20) erklärt ist. Anschließend datieren wir die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen wie folgt auf

$$g_{ij}^{n+1} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})u_j^n - g_{ji}^n \text{ auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i). \quad (2.39)$$

In [Den97] wurden als Verfahrensparameter nur  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} > 0$  für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , zugelassen. Weiterhin besitzt der in [Den97] betrachtete Differentialoperator keinen konvektiven

Term. Diese Einschränkungen heben wir auf, lassen allgemeine elliptische Operatoren nach (2.2) zu und fordern für die Parameter der Methode vorerst nur Voraussetzung 2.8 auf Seite 21, um die Äquivalenz zwischen Modellproblem und Transmissionsproblem zu sichern. Wir lassen also unterschiedliche, von der Null weg beschränkte, vom Ort abhängige Verfahrensparameter aus  $L^\infty(\Gamma_{ij})$  zu. Diese Verallgemeinerung liegt auf der Hand und wurde in Verbindung mit der SCHWARZschen Methode bereits verschiedentlich durchgeführt, beispielsweise in Verbindung mit konvektionsdominanten Problemen. Siehe hierzu z.B. [AKLO98, Ott99, OL99].

Die differentielle Formulierung (2.38) ist wieder nur unter stärkeren Regularitätsforderungen sinnvoll, weshalb wir in Analogie zu den vorhergehenden Abschnitten zum schwach formulierten Problem übergehen. Es lautet:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \mu \rangle = \langle g_{ij}^n, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (2.40)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22) erklärt ist.

Eine äquivalente Formulierung ist folgende:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle & \forall v_i \in V_i^{00}, \end{cases} \quad (2.41)$$

wobei das Dualitätsprodukt wie in (2.40) erklärt ist. Zur Definition der Räume  $V_i^{00}$  sei an (2.23) erinnert.

Die Äquivalenz von (2.40) und (2.41) erhalten wir, wenn wir analog zum zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.2.4 auf Seite 22 vorgehen.

Als abgeschwächte Form der Aufdatierungsformel (2.39) bezeichnen wir das Erfülltsein der dortigen Gleichung im Dualraum, also

$$g_{ij}^{n+1} = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i). \quad (2.42)$$

Wir weisen darauf hin, dass die schwachen Formulierungen (2.40) und (2.41) für beliebige Zerlegungen des Gebietes  $\Omega$ , sofern die Teilgebiete einer LIPSCHITZ-Bedingung genügen, gültig sind. Insbesondere sind auch Zerlegungen in mehrere Teilgebiete, von denen nicht alle einen Außenrand haben müssen, zugelassen. Siehe beispielsweise Abbildung 2.2(iii) auf Seite 9. Zudem benötigen wir die Glattheit der Teilränder  $\Gamma_{ij}$  nicht.

*Bemerkung 19.* (i) Da für  $i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ ,  $(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) \in L^2(\Gamma_{ij})$  ist, können wir durch die Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  der Gleichung (2.39) auch im  $L^2(\Gamma_{ij})$  einen Sinn geben, d.h. wir können in (2.42) auf die Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  verzichten und die Gleichung im  $L^2(\Gamma_{ij})$  auffassen. Damit haben wir für diese Wahl der Startwerte  $(g_{ij}^n)_n \subset L^2(\Gamma_{ij}), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ . Insbesondere können wir in diesem Fall wegen des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  die Dualitätsprodukte in (2.41) durch die Skalarprodukte in  $L^2(\Gamma_{ij})$  ersetzen. Zudem ist (2.41) dann auch für  $v_i \in V_i \setminus V_i^{00}$  sinnvoll erklärt und wir können das folgende, zu (2.41) äquivalente, Problem formulieren:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} & \forall v_i \in V_i. \end{cases} \quad (2.43)$$

Da  $V_i^{00} \subset V_i$ , folgt für  $g_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  aus (2.43) sofort (2.41). Umgekehrt sind sowohl die rechte als auch die linke Seite von (2.43) bezüglich  $v_i \in V_i$  lineare stetige Funktionale. Damit folgt (2.43) aus (2.41) und Lemma 2.2.1 auf Seite 18.

(ii) Für  $\lambda_{ij} = \text{const}$  fassen wir  $\mathcal{I}^{00}$  als lineare stetige Einbettung von  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  auf. Falls zusätzlich noch die spezielle Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 zu Grunde liegt, reduziert sich die Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  sogar auf den RIESZ-Isomorphismus  $J \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})\right)$ . Für die Streifenzerlegung gilt mit Bemerkung 10 auf Seite 17 zudem  $V_i^{00} = V_i$ .

Die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode ist wieder parallelisiert. Es ist auch möglich eine sequentielle Variante anzugeben. Dies geschieht analog zu dem Vorgehen in Bemerkung 17 auf Seite 24.

Die Aufdatierungsformel der ROBIN-Daten (2.42) erhalten wir unmittelbar aus den Transmissionsbedingungen (2.28), wenn wir (2.28)<sub>1</sub> gleich  $g_{ij}$  und (2.28)<sub>2</sub> gleich  $g_{ji}$  setzen, die beiden Gleichungen addieren, anschließend nach  $g_{ij}$  auflösen und den iterativen Prozess einführen.

Im Gegensatz zur klassischen SCHWARZschen Methode (2.33), welche auf den Schnittstellen  $\Gamma_{ij}$  sowohl die DIRICHLET-Daten als auch die Konormalenableitung der Lösung der benachbarten Teilprobleme des vorigen Schrittes benötigt, kommt die modifizierte Methode (2.38) ohne die Konormalenableitung des vorhergehenden Iterationsschrittes aus. Diese Änderung hat mehrere Vorteile. Zum einen lässt diese Änderung eine alternative Beweisidee bei der Konvergenz zu, mit der wir die Probleme bei der Übertragung des Beweises aus [Lio90], siehe die Bemerkungen 16 und 18, umgehen können. Zum anderen hat die ableitungsfreie Variante auch numerische Vorteile. Wir ersparen uns in jedem Iterationsschritt die explizite Bestimmung und Auswertung der Konormalenableitung. Weiterhin sind die Teilprobleme auf dem gleichen Teilgebiet in verschiedenen Iterationsschritten vom selben Typ, d.h. es handelt sich um die gleiche Art von Randwertproblemen. Die Differentialgleichungen haben in den Iterationsschritten nur unterschiedliche rechte Seiten. Nach Diskretisierung von (2.41) heißt das insbesondere, dass die Systemmatrix nur einmal aufgebaut werden muss.

*Bemerkung 20.* (i) Wählen wir in (2.38)-(2.39) die Verfahrensparameter wie in [Den97], also speziell  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} > 0$ , so erhalten wir als Aufdatierungsformel in schwacher Form

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}\mathcal{I}^{00}\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i),$$

wobei  $\mathcal{I}^{00} \in \mathcal{L}\left(H^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})\right)$  nun als Einbettung von  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  interpretiert werden kann.

(ii) In [Den97] bzw. [Den03] wurde die stärkere Regularität

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{3/2}(\Omega) \text{ und } \partial_{P_i} u \in L^2(\Gamma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq m, \quad (2.44)$$

für die Lösung  $u$  des Gesamtproblems (2.3) gefordert, um die Konvergenz und Wohldefiniertheit des dortigen Verfahrens (mit  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} > 0$ ) zu sichern. Obiges Verfahren ist auch ohne diese zusätzliche Regularitätsforderung wohldefiniert, wie Lemma 2.4.1 zeigt. Wir können die Konvergenz des Verfahrens unter geeigneten Voraussetzungen an die Verfahrensparameter sichern, welche weit weniger einschränkend sind als die in [Den97]. Haben wir statt dessen mehr Regularität der Lösung zur Verfügung, so können wir die für den Konvergenzbeweis nötigen Voraussetzungen an die Verfahrensparameter noch weiter abschwächen. Auch wurden in [Den97] starke geometrische Voraussetzungen an die Teilgebiete gestellt, da beispielsweise vorausgesetzt wurde, dass die Teilränder glatt sind und den Außenrand orthogonal schneiden. Diese geometrischen Voraussetzungen werden nachfolgend nicht benötigt.

Zur Wohldefiniertheit des Algorithmus (2.38) - (2.39) haben wir bislang noch keine Aussage gemacht. Zu prüfen ist also, ob (2.40) bzw. (2.41) in jedem Iterationsschritt eindeutig lösbar ist. Um dies zu sichern, benötigen wir für die Verfahrensparameter die

**Voraussetzung 2.9.** Für  $i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\text{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(x) = \underline{\lambda}_{ij} > 0.$$

Die Durchführbarkeit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode wird durch folgendes Lemma gesichert.



**Lemma 2.4.1.** *Es gelten die Voraussetzungen 2.1, 2.2 und 2.9. Die Probleme (2.40) bzw. (2.41) sind für jedes  $n \in \mathbb{N}$  korrekt gestellt, falls für die Startwerte der Iteration  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gilt. Liegt speziell die Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 vor, so ist keine zusätzliche Regularität der Startwerte erforderlich, d.h. beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , sind zulässig.*

*Beweis.* A) Die Zerlegung von  $\Omega$  unterliegt keinen Einschränkungen, abgesehen von der LIPSCHITZ-Eigenschaft der Teilgebiete: Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  beliebig. Weiter sollen die Startwerte Regularitätsforderung  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , erfüllen. Mit Bemerkung 19(i) gilt dann  $(g_{ij}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , und die Probleme (2.40) und (2.41) sind äquivalent zu (2.43), das ist

$$\widehat{a}_i(u_i^n, v_i) = \widehat{b}_i^n(v_i) \quad \forall v_i \in V_i, \quad (2.45)$$

wobei wir abkürzend

$$\widehat{a}_i(u_i^n, v_i) := a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

und

$$\widehat{b}_i^n(v_i) := (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

gesetzt haben. Mit den Voraussetzungen des Lemmas erhalten wir mit  $m := \min_{j \in \mathcal{N}(i)} \underline{\lambda}_{ij}$  und der FRIEDRICHS-Ungleichung Satz A.2.1 für alle  $v_i \in V_i$

$$\widehat{a}_i(v_i, v_i) \geq \alpha_i \nu_i \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \geq C \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2,$$

d.h. die  $V_i$ -Elliptizität der stetigen Bilinearform  $\widehat{a}_i$ . Nun ist  $\widehat{b}_i^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  ein stetiges lineares Funktional auf  $V_i$ , wie wir unter Benutzung der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung und der Beschränktheit des Spuoperators leicht sehen. Somit liefert der Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Existenz einer eindeutigen Lösung  $u_i^n \in V_i$  von (2.45).

B) Es liegt eine Streifenzerlegung von  $\Omega$  vor: Sei wieder  $i \in \{1, \dots, m\}$  beliebig. Mit Bemerkung 10 auf Seite 17 gilt im Fall der Streifenzerlegung  $V_i = V_i^{00}$ . Ersetzen wir in (2.41) das Dualitätsprodukt auf der linken Seite durch das Skalarprodukt, was auf Grund des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  möglich ist, so können wir (2.41) mit  $\widehat{a}_i$  wie in A) und

$$\widehat{b}_i^n(v_i) := (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

in der Form (2.45) schreiben. Wie wir in A) gesehen haben, ist  $\widehat{a}_i$   $V_i$ -elliptisch. Wegen  $(g_{ij}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , und

$$\left| \widehat{b}_i^n(v_i) \right| \leq \left( \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i \right\| \right) \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}$$

ist  $\widehat{b}_i^n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Also liefert der Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wieder die Existenz einer eindeutigen Lösung  $u_i^n \in V_i$  von (2.45).  $\square$

*Bemerkung 21.* Die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZSchen Methode bleibt natürlich auch für die zu Voraussetzung 2.2 alternativen Kombinationen von Voraussetzungen aus der Bemerkung 6(ii) auf Seite 13 erhalten. Zudem kann, unter gewissen Voraussetzungen an die konvektionsrelevanten Koeffizienten  $b_i$ , die Wohldefiniertheit auch gänzlich ohne Voraussetzung 2.2 oder ihre Alternativen gesichert werden, wie später in Lemma 2.4.9 auf Seite 43 gezeigt wird.

Wie wir schon im letzten Abschnitt erwähnt haben, finden wir die SCHWARZSche Methode (2.33) in der verallgemeinerten SCHWARZSchen Methode wieder. Die Verallgemeinerung besteht hier aus dem Zulassen von allgemeineren Verfahrensparametern und allgemeineren Startwerten. Das Ersetzen

der ROBIN-Daten (2.33)<sub>3</sub> durch (2.38)<sub>3</sub> und (2.39) ist keine wirkliche Verallgemeinerung. In diesem Sinne ist die Methode aus [Den97] nicht allgemeiner als das Verfahren aus [Lio90], wenn wir von den Startwerten absehen. Lassen wir in (2.33) allgemeinere Verfahrensparameter zu, so gilt das folgende

**Lemma 2.4.2.** *Stellen wir an die Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , der SCHWARZschen Methode (2.33) und der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (2.38)-(2.39) die gleichen Voraussetzungen, so sind beide Verfahren äquivalent, d.h. beide Verfahren liefern dieselbe Folge von Lösungen, wenn die Startwerte übereinstimmen, also für alle  $i = 1, \dots, m$*

$$g_{ij}^0 = -\partial_{P_j} u_j^0 + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^0) \quad \text{in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

gilt.

*Beweis.* Die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode liefert mit (2.40)<sub>2</sub> und (2.42) für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^{n+1}), \mu \right\rangle &= \left\langle g_{ij}^{n+1}, \mu \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n, \mu \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \mu \right\rangle - \left\langle \partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \mu \right\rangle \\ &= \left\langle -\partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \mu \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22) erklärt ist. Das ist aber gerade (2.34)<sub>2</sub>. Somit sind die Verfahren äquivalent.  $\square$

Mit diesem Lemma folgt die Konvergenz und Wohldefiniertheit der SCHWARZschen Methode (2.33) direkt aus der Konvergenz und Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (2.38).

## 2.4.2 Eigenschaften des Fehlers der VSAM

Der Konvergenzbeweis der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode wird auf einer geeigneten Energieabschätzung des Fehlers beruhen, den wir nun einführen. Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  die schwache Lösung des linearen Gesamtproblems (2.3) und damit auch die schwache Lösung des linearen Transmissionsproblems (2.19) und  $u^n = (u_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  sei die schwache Lösung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (2.38) im  $n$ -ten Iterationsschritt. Wir führen für den Fehler der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode im  $n$ -ten Iterationsschritt die folgenden Bezeichnungen ein:

$$e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = u^n - u \in \hat{H}^1. \quad (2.46)$$

*Bemerkung 22.* Im Allgemeinen gilt  $u^n \notin H^1(\Omega)$ . Insbesondere ist dann  $e^n \notin H^1(\Omega)$ . Deshalb ist es später nicht sinnvoll von einer Konvergenz im  $H^1(\Omega)$  zu sprechen. Im Folgenden wird die Konvergenz von (2.38)-(2.39) im  $\hat{H}^1$ , siehe (2.9), gezeigt, also die  $H^1(\Omega_i)$ -Konvergenz bezüglich jedem Teilgebiet  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Siehe auch Bemerkung 4 auf Seite 11.

Unter Benutzung der Linearität des zu Grunde liegenden Differentialoperators sehen wir, dass der Fehler dem folgenden Problem genügt.

$$\begin{cases} P_i(D)e_i^n = 0 & \text{in } \Omega_i \\ e_i^n = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} e_i^n + \lambda_{ij} e_i^n = \widetilde{g}_{ij}^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, \quad j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.47)$$

mit Konormalenableitung nach (2.20), falls hinreichende Regularität vorausgesetzt wird. Dabei gilt

$$\widetilde{g}_{ij}^n := g_{ij}^n - (\partial_{P_i} u_i + \lambda_{ij} u_i), \quad (2.48)$$

wobei  $u_i \in V_i$  Lösung des linearen Transmissionsproblems (2.19) bzw. auf  $\Omega_i$  eingeschränkte Lösung des linearen Modellproblems (2.3) ist. Die Aufdatierungsformel für die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen lautet dann

$$\widetilde{g_{ij}^{n+1}} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})e_j^n - \widetilde{g_{ji}^n} \text{ auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i). \quad (2.49)$$

In Analogie zu den vorhergehenden Abschnitten gehen wir zum schwach formulierten Problem über.

Finde  $e_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(e_i^n, v_i) = 0 & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} e_i^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \mu \rangle = \langle \widetilde{g_{ij}^n}, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (2.50)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (2.22), mit  $f_i = 0$ , erklärt ist.

Äquivalent dazu ist die folgende Formulierung:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\left\{ a_i(e_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \widetilde{g_{ij}^n}, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}, \right. \quad (2.51)$$

wobei das Dualitätsprodukt wie oben erklärt ist.  $V_i^{00}$  ist in (2.23) definiert.

Die Äquivalenz von (2.50) und (2.51) erhalten wir analog zum zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.2.4 auf Seite 22. Alternativ können wir die Äquivalenz der beiden schwachen Formulierungen auch direkt aus Lemma 2.2.4 und der Äquivalenz von (2.40) und (2.41) folgern.

Als abgeschwächte Form der Aufdatierungsformel (2.49) bezeichnen wir das Erfülltsein der dortigen Gleichung im Dualraum, d.h.

$$\widetilde{g_{ij}^{n+1}} = \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n) - \widetilde{g_{ji}^n} \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i). \quad (2.52)$$

Ebenso interpretieren wir (2.48) im Dualraum  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ , also

$$\widetilde{g_{ij}^n} := g_{ij}^n - \left( \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) \right). \quad (2.53)$$

*Bemerkung 23.* Im Allgemeinen können wir für  $\widetilde{g_{ij}^n}$  keine zu Bemerkung 19(i) analoge Feststellung machen, d.h. wir können nicht allein durch die spezielle Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  sichern, dass  $\widetilde{g_{ij}^n} \in L^2(\Gamma_{ij})$  gilt. In (2.53) sehen wir, dass auch die Konormalenableitung  $\partial_{P_i} u_i$  der Lösung des Modellproblems bzw. des Transmissionsproblems in  $\widetilde{g_{ij}^n}$  mit eingeht. Diese ist im Allgemeinen aber nur als Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  erklärt, also in  $L^2(\Gamma_{ij})$  nicht immer sinnvoll. Um  $(\widetilde{g_{ij}^n})_n \subset L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , sichern zu können benötigen wir deshalb neben  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  auch noch die auf Seite 33 stehende Voraussetzung 2.11.

Um die Notation zu vereinfachen bezeichnen wir nachfolgend  $\widetilde{g_{ij}^n}$  wieder mit  $g_{ij}^n$  und erinnern uns, dass im Zusammenhang mit dem Fehler  $e_i^n$  immer (2.48) bzw. (2.53) gemeint ist.

Unter Benutzung dieser Konvention erhalten wir direkt aus (2.51)

$$a_i(e_i^n, v_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}. \quad (2.54)$$

Wir verallgemeinern (2.54) auf beliebige  $v_i \in V_i$  und erhalten das, für  $V_i^{00} \subsetneq V_i$  nicht ganz triviale,

**Lemma 2.4.3.** *Sei  $e_i^n \in V_i$  schwache Lösung von (2.47) und  $v_i \in V_i$  beliebig. Wir definieren  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\mu_{ij} := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ . Dann existieren Folgen  $(\mu_{ij}^k)_k \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit*

$$\|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

und zwar so, dass

$$a_i(e_i^n, v_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gilt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$a_i(e_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij})_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\mu_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

*Beweis.* Da nach Bemerkung 3 auf Seite 10 die Bilinearform  $a_i$  auf  $H^1(\Omega_i) \supset V_i$  stetig ist, ist  $a_i(e_i, \cdot)$  für festes  $e_i \in V_i$  natürlich ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Mit Lemma 2.2.1 auf Seite 18 können wir  $v_i$  in der Form  $v_i = v_i^0 + w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} v_i^k$ , mit  $v_i^0 \in H_0^1(\Omega_i)$  und  $v_i^k = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k \in V_i^{00}$ ,  $\mu_{ij}^k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit der oben angegebenen Konvergenzeigenschaft, schreiben. Siehe auch den Beweis zu Satz 2.2.2 auf Seite 19. Lemma 2.2.1 liefert zudem unter Beachtung von (2.50)<sub>1</sub>, (2.54) und  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^k) = \mu_{ij}^k$

$$\begin{aligned} a_i(e_i^n, v_i) &= a_i(e_i^n, v_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_i(e_i^n, v_i^k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

also die erste Behauptung. Umstellen liefert (mit abkürzender Schreibweise für das Dualitätsprodukt)

$$a_i(e_i^n, v_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle,$$

woraus unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\lambda_{ij} \eta_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  sowie Lemma A.1.2

$$a_i(e_i^n, v_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k)_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\mu_{ij}^k\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

folgt, was zusammen mit

$$\|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

nach Grenzübergang die Abschätzung liefert.  $\square$

Im Allgemeinen liegt  $e_i^n \in V_i$  nicht in  $V_i^{00}$ . Mit dem letzten Lemma folgern wir deshalb

**Korollar 2.4.4.** Sei  $e_i^n \in V_i$  schwache Lösung von (2.47). Wir definieren  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ . Dann existieren Folgen  $(\mu_{ij}^{k,n})_k \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit

$$\|\mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

und zwar so, dass

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^{k,n} \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gilt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$a_i(e_i^n, e_i^n) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus dem letzten Lemma.  $\square$

*Bemerkung 24.* Für  $e_i^n \in V_i^{00}$  vereinfacht sich die Aussage von Korollar 2.4.4. Dann gilt mit (2.54) sofort

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}.$$

Insbesondere ist dies für die Streifenzerlegungen aus Bemerkung 1(i) der Fall. Es sei auch auf Bemerkung 10 auf Seite 17 verwiesen.

Wie wir bereits in Bemerkung 20(ii) auf Seite 28 angedeutet haben, werden wir die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode unter verschiedenen Voraussetzungen beweisen. Die Hilfsresultate in diesem Kapitel werden unter schwachen Voraussetzungen bewiesen, um sie in so vielen Fällen wie möglich anwenden zu können. Diese schwachen Voraussetzungen werden an den Stellen eingeführt, an denen sie benötigt werden.

Wenn wir keine zusätzlichen Regularitätsforderungen an die Lösung des Modellproblems (2.3) bzw. des Transmissionsproblems (2.19) stellen, dann müssen wir die Freiheit in der Wahl der Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$  einschränken, indem wir diese mit zusätzlicher Regularität versehen. Wir benötigen die technische

**Voraussetzung 2.10.** Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  ein Multiplikator für  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , d.h. es gilt

$$(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}).$$

Wenn wir auf Voraussetzung 2.10 verzichten wollen, dann müssen wir etwas mehr Regularität von der Lösung des Modellproblems bzw. wegen Satz 2.2.2 auf Seite 19 von der Lösung des Transmissionsproblems fordern. Wir benötigen dann die technische

**Voraussetzung 2.11.** Für die Lösung  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  des linearen Modellproblems (2.3) bzw. des Transmissionsproblems (2.19) gelte  $\partial_{P_i} u_i \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , d.h. sämtliche Konormalenableitungen auf den Schnittstellen der Teilgebiete sind als quadratintegrierbare Funktionen interpretierbar.

*Bemerkung 25.* Unter Voraussetzung 2.11 können wir durch die Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (2.38) sicherstellen, dass die sich für die Fehlerprobleme (2.47) ergebende Folge  $(\tilde{g}_{ij}^n)_n$ , die wir nach obiger Konvention wieder mit  $(g_{ij}^n)_n$  bezeichnen, in  $L^2(\Gamma_{ij})$  liegt. Wir verweisen auf Bemerkung 23 auf Seite 31. Weiterhin können wir unter dieser Voraussetzung mit obigen Startwerten aus  $L^2(\Gamma_{ij})$  die Aussage des Korollars 2.4.4 verschärfen. Wir gehen dann unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $g_{ij}^n - \lambda_{ij} \eta_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  vom Dualitätsprodukt zum Skalarprodukt über und erhalten nach Grenzübergang für  $i = 1, \dots, m$

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (g_{ij}^n - \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (2.55)$$

Dabei wurde

$$\left\| \mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \left\| \mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

benutzt.

Um die Notation zu verkürzen führen wir mit  $g = (g_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}$ ,  $g_{ij} \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , die folgende Bezeichnung ein:

$$\|g\|^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left\langle \mathcal{I}^{00} \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}, J^{-1} g_{ij} \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}. \quad (2.56)$$

$J \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$  bezeichnet dabei den RIESZ-Isomorphismus. Unter Voraussetzung 2.8 auf Seite 21 ist der Ausdruck sinnvoll erklärt, da der Nenner  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  dann nicht Null ist. Um darüber hinaus die Nichtnegativität von (2.56) für beliebige  $g_{ij} \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , zu sichern, müssen wir erneut zusätzliche Forderungen an die Verfahrensparameter der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode stellen, nämlich die technische

**Voraussetzung 2.12.** Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)) = \underline{m}_{ij} > 0.$$

Insbesondere ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  fast überall positiv.

*Bemerkung 26.* (i) Die Voraussetzung 2.12 wird durch die stärkere Voraussetzung 2.9 auf Seite 28, welche für die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil nötig war, impliziert. Im Zusammenhang mit indefiniten Problemen können wir durch geeignete Wahl der Verfahrensparameter die Wohldefiniertheit der Methode auch ohne die Voraussetzung 2.9 sichern. Um die Konvergenzbeweise auch für gewisse indefinite Probleme führen zu können, ist es deshalb sinnvoll, die nachfolgenden Hilfssätze unter der schwächeren Voraussetzung 2.12 zu beweisen.

(ii) Sowohl in [Lio90] als auch in [Den97] wurde die wesentlich stärkere Voraussetzung  $\lambda_{ij} = \operatorname{const} > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , verwendet.

Wegen der Abschätzung

$$\begin{aligned} \lVert\lVert g \rVert\rVert^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left\langle \mathcal{I}^{00} \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}, J^{-1} g_{ij} \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}, J^{-1} g_{ij} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\geq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \frac{1}{\overline{m}_{ij}} \|J^{-1} g_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \frac{1}{\overline{m}_{ij}} \|g_{ij}\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

mit  $\overline{m}_{ij} := \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$ , sichert Voraussetzung 2.12 tatsächlich die Positivität von (2.56).  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet wieder das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde der GELFAND-Dreier  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  benutzt. Die letzte Gleichheit gilt wegen Lemma A.1.2.

*Bemerkung 27.* (i) Wenn  $g$  mehr Regularität besitzt, d.h.  $g_{ij} \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist, dann wollen wir unter (2.56)

$$\lVert\lVert g \rVert\rVert^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} g_{ij}, g_{ij} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \quad (2.57)$$

verstehen.

(ii) Möglicherweise kann statt (2.56) allgemeiner

$$\lVert\lVert g \rVert\rVert^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} g_{ij}, J^{-1} g_{ij} \right\rangle_{(H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

definiert werden. Dazu muss nach der Sinnhaftigkeit des „Produktes“  $\frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} g_{ij}$ , also  $L^\infty(\Gamma_{ij}) \cdot H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ , gefragt werden. Ausdrücke dieser Form können beispielsweise mit dem Konzept des Paraproduktes erklärt werden. Unter Umständen könnte in diesem Zusammenhang sogar auf Voraussetzung 2.10 verzichtet werden. Um Komplikationen in Verbindung mit verallgemeinerten Produkten zu umgehen, wird die letzte Definition nicht verwendet.

Wesentlich für den Konvergenzbeweis ist das folgende

**Lemma 2.4.5.** Sei  $e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  eine schwache Lösung des homogenen Problems (2.47). Weiter seien die Voraussetzungen 2.8 und 2.12 erfüllt. Zusätzlich gelte eine der Voraussetzungen 2.10 oder 2.11. Dann gilt mit

$$g^l = (g_{ij}^l)_{1 \leq i \neq j \leq m}, \quad l \in \{n, n+1\},$$

$$\tilde{a}(e^n, e^n) = \frac{1}{2} \left( \left\| g^n \right\|^2 - \left\| g^{n+1} \right\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n) \right)^2 d\sigma \right), \quad (2.58)$$

wobei  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  die Bilinearform (2.10) bezeichnet.

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnung  $\eta_{ji}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n)$ . Ohne eine der zusätzlichen Voraussetzungen berechnen wir mit dem GELFAND-Dreier  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \left\| g^{n+1} \right\|^2 &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}^{n+1}, J^{-1} g_{ij}^{n+1} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ (2.52), (2.56) \quad \left\| g^n \right\|^2 &+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &- \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} 2 \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (g_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

also

$$\left\| g^n \right\|^2 - \left\| g^{n+1} \right\|^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (2.59)$$

A) Es gelte Voraussetzung 2.10. Wir betrachten zwei Fälle.

A.I) Sei  $e_i^n \in V_i^{00}$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Insbesondere gilt dann  $\eta_{ji}^n \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Die Voraussetzung 2.10 liefert nun

$$J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) = J^{-1} (J(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n.$$

Zusammen mit (2.59) haben wir dann unter Beachtung des obigen GELFAND-Dreiers

$$\begin{aligned} \left\| g^n \right\|^2 - \left\| g^{n+1} \right\|^2 &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \langle (g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \eta_{ji}^n) + (g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n), \eta_{ji}^n \rangle \\ (2.54) \quad &= \sum_{j=1}^m \left( a_j(e_j^n, e_j^n) + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle \right). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Identität

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle = a_j(e_j^n, e_j^n) - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle,$$

liefert uns das

$$\tilde{a}(e^n, e^n) = \sum_{j=1}^m a_j(e_j^n, e_j^n) = \frac{1}{2} \left( \left\| g^n \right\|^2 - \left\| g^{n+1} \right\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \langle \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle \right),$$

also im speziellen Fall  $e_j^n \in V_j^{00}$  die Behauptung, weil wir das Dualitätsprodukt auf Grund der Regularität durch das Skalarprodukt im  $L^2(\Gamma_{ij})$  ersetzen können.

A.II) Sei nun  $e_i^n \in V_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Die Abbildung

$$h : v_j \mapsto \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(v_j)), J^{-1} (2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

ist wegen

$$|h(v_j)| \leq \|J^{-1}(2g_{j_i}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{j_i}^n)\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \cdot \underline{m}_{ij} \cdot \|J^{-1} \circ \mathcal{I}^{00}\| \cdot \overline{m}_{ij} \cdot \|\gamma_{\Gamma_{ij}}^j\| \cdot \|v_j\|_{H^1(\Omega_j)}$$

ein lineares stetiges Funktional auf  $V_j$ . Für  $e_j^n \in V_j$  existiert eine Darstellung

$$e_j^n = e_j^{0,n} + \text{w-lim}_{k \rightarrow \infty} e_j^{k,n}, \quad e_j^{0,n} \in H_0^1(\Omega_j), \quad e_j^{k,n} = \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \mathcal{R}^{ji} \mu_{j_i}^{k,n} \in V_j^{00}, \quad \mu_{j_i}^{k,n} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$$

mit

$$\|\mu_{j_i}^{k,n} - \eta_{j_i}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Siehe auch den Beweis zu Lemma 2.4.3. Wir erinnern daran, dass die Folgen  $(e_j^{k,n})_k$  so gewählt werden können, dass  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^{k,n}) = \mu_{j_i}^{k,n} = \mu_{i_j}^{k,n} = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^{k,n})$  gilt. Für die genaue Konstruktion sei auf den Beweis zu Satz 2.2.2 auf Seite 19 verwiesen. Jetzt liefert Lemma 2.2.1 auf Seite 18 und  $h(w_j) = 0$  für alle  $w_j \in H_0^1(\Omega_j)$

$$h(e_j^n) = h(e_j^{0,n}) + \lim_{k \rightarrow \infty} h(e_j^{k,n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(e_j^{k,n}).$$

Unter Voraussetzung 2.10 erhalten wir analog zu A.I)

$$h(e_j^{k,n}) = \left( \mu_{j_i}^{k,n}, J^{-1}(2g_{j_i}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{j_i}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \left\langle 2g_{j_i}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{j_i}^n, \mu_{j_i}^{k,n} \right\rangle.$$

Gehen wir weiter wie in Teil A.I) vor, so erhalten wir unter Beachtung von Korollar 2.4.4 und der Identität

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle g_{j_i}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{j_i}^n, \mu_{j_i}^{k,n} \right\rangle = a_j(e_j^n, e_j^n) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{j_i}^n, \mu_{j_i}^{k,n} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

und anschließendem Grenzübergang

$$\tilde{a}(e^n, e^n) = \sum_{j=1}^m a_j(e_j^n, e_j^n) = \frac{1}{2} \left( \| \|g^n\|^2 - \| \|g^{n+1}\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} ((\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \right),$$

also die Behauptung des Lemmas.

B) Es gelte nun Voraussetzung 2.11. Unter dieser zusätzlichen Regularitätsforderung haben wir (2.57). Damit vereinfacht sich (2.59) und wir berechnen

$$\begin{aligned} \| \|g^n\|^2 - \| \|g^{n+1}\|^2 &\stackrel{(2.59)}{=} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (2g_{j_i}^n - (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{j_i}^n - \lambda_{ji}\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{j_i}^n - \lambda_{ij}\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\stackrel{(2.55)}{=} \sum_{j=1}^m a_j(e_j^n, e_j^n) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{j_i}^n - \lambda_{ij}\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

was mit der Identität

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (g_{j_i}^n - \lambda_{ij}\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} = a_j(e_j^n, e_j^n) - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} ((\lambda_{ij} - \lambda_{ji})\eta_{j_i}^n, \eta_{j_i}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

die Aussage des Lemmas liefert.  $\square$

Wir führen eine weitere technische Voraussetzung ein, um mit Hilfe von Lemma 2.4.5 das nächste Lemma beweisen zu können.



**Voraussetzung 2.13.** Für  $j = 1, \dots, m$  gelte

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(v_j^2) \, d\sigma \leq C a_j(v_j, v_j) - N_j(v_j) \quad \forall v_j \in \ker P_j(D) \subset V_j.$$

Dabei sei  $N_j(v_j) \geq 0$  für alle  $v_j \in \ker P_j(D) \subset V_j$  und  $0 < C \leq 2$ .

In einigen Fällen wird später an die Stelle von  $N_j(v)$  eine geeignete Norm treten. Die Voraussetzung ist tatsächlich erfüllbar. Dies sehen wir beispielsweise für die spezielle Wahl  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  und  $N_j \equiv 0$  und positiv semidefinites  $a_j(\cdot, \cdot)$ . Die positive Semidefinitheit der Bilinearform folgt insbesondere aus den Voraussetzungen 2.1 und 2.2. Wie wir in Abschnitt 2.4.3 sehen werden, ist für konvektionsdominante Probleme unter gewissen Einschränkungen und einer speziellen Wahl der Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$  die Voraussetzung 2.13 auch für indefinite Bilinearformen erfüllt.

*Bemerkung 28.* Mit den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 auf Seite 11 haben wir insbesondere

$$a_j(v_j, v_j) \geq \alpha_i \nu_i \|\nabla v_j\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \quad \forall v_j \in V_j \supset \ker P_j(D).$$

Zusammen mit der FRIEDRICHS-Ungleichung Satz A.2.1 und der Beschränktheit der Spurooperatoren  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^j$ , siehe Satz A.2.8, berechnen wir dann die für Voraussetzung 2.13 hinreichende Bedingung: Es existiert ein  $0 < C \leq 2$  und  $N_j(v_j) \geq 0$ , sodass

$$N_j(v_j) \leq \left( \left( C_\gamma^2 + \frac{1}{C_F^2} \right) \cdot d \cdot C - m \cdot C_\gamma^2 \right) \|v_j\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \quad \forall v_j \in \ker P_j(D)$$

gilt. Dabei bezeichnet  $C_F = C_F \left( \Omega_j, \bigcup_{i \in \mathcal{N}(j)} \Gamma_{ij} \right)$  die Konstante der FRIEDRICHS-Ungleichung und  $\alpha_i, \nu_i$  die Konstanten aus den Voraussetzungen 2.1 und 2.2, die Beschränktheit der Spurooperatoren geht in  $C_\gamma := \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^j \right\|^2$  ein und die Verfahrensparameter werden mittels  $m := \max_{i \in \mathcal{N}(j)} \|\lambda_{ij} - \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$  abgeschätzt. Für den Fall  $N_j \equiv 0$  ist die obige Ungleichung erfüllt, falls ein  $0 < C \leq 2$  existiert, sodass

$$\left( 1 + \frac{1}{C_\gamma^2 C_F^2} \right) \cdot d \cdot C \geq m$$

gilt.

Mit der letzten Voraussetzung formulieren wir

**Lemma 2.4.6.** Sei  $e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  eine schwache Lösung des homogenen Problems (2.47). Weiter seien die Voraussetzungen 2.8, 2.12 und 2.13 erfüllt. Zusätzlich gelte eine der Voraussetzungen 2.10 oder 2.11. Dann gilt

$$(2 - C) \tilde{a}(e^n, e^n) + \sum_{j=1}^m N_j(e_j^n) \leq \|g^n\|^2 - \|g^{n+1}\|^2, \quad (2.60)$$

wobei  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  wieder die Bilinearform (2.10) bezeichnet.

*Beweis.* Die Behauptung folgt offensichtlich aus Lemma 2.4.5 und Voraussetzung 2.13.  $\square$

Um im Beweis des nächsten Lemmas eine Summationstechnik anwenden zu können, benötigen wir die Nichtnegativität von  $\tilde{a}(e^n, e^n)$ . Wir formulieren dies ebenfalls als technische

**Voraussetzung 2.14.** Für alle  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m \ker P_i(D) \subset \hat{H}^1$  gelte

$$0 \leq \tilde{a}(v, v) = \sum_{i=1}^m a_i(v_i, v_i).$$

*Bemerkung 29.* Die Nichtnegativität wird nur von  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  gefordert. Die einzelnen Summanden  $a_i(\cdot, \cdot)$  dürfen sehr wohl negativ sein, was bei indefiniten Problemen auch auftreten kann. Die Voraussetzung ist natürlich erfüllbar. Sie ist *schwächer* als die positive Semidefinitheit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ , denn die Nichtnegativität wird nur auf dem Teilraum  $\prod_{i=1}^m \ker P_i(D)$  gefordert. Somit impliziert die positive Semidefinitheit der Bilinearform  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  die Voraussetzung 2.14. Die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 auf Seite 11 implizieren ebenfalls die obige Voraussetzung. In diesem Zusammenhang sei an Bemerkung 5 auf Seite 12 erinnert.

Mit Voraussetzung 2.14 beweisen wir das

**Lemma 2.4.7.** *Sei  $(e^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((e_i^n)_{1 \leq i \leq m})_{n \in \mathbb{N}}$  durch Algorithmus (2.47)-(2.49) erzeugt, also die Folge des Fehlers der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode. Weiter seien die Voraussetzungen 2.8, 2.12, 2.13 und 2.14 erfüllt. Zusätzlich gelte eine der Voraussetzungen 2.10 oder 2.11. Dann gilt*

$$\tilde{a}(e^n, e^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad N_i(e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.61)$$

*falls für die Konstante aus Voraussetzung 2.13  $C < 2$  gilt. Ist für alle  $i = 1, \dots, m$*

$$a_i(v_i, v_i) \geq 0 \quad \forall v_i \in \ker P_i(D),$$

*so gilt überdies*

$$a_i(e_i^n, e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

*Gilt für die Konstante aus Voraussetzung 2.13 der Grenzfall  $C = 2$ , so bleibt die Aussage*

$$N_i(e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

*auch ohne Voraussetzung 2.14 gültig.*

*Beweis.* Lemma 2.4.6 und Summation über  $n \in \mathbb{N}$  liefert

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( (2 - C) \tilde{a}(e^n, e^n) + \sum_{i=1}^m N_i(e_i^n) \right) \leq \|g^0\|^2,$$

woraus unter Beachtung von Voraussetzung 2.13, also insbesondere  $N_i(e_i^n) \geq 0$  und  $C < 2$ , und der Voraussetzung 2.14 die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt mit (2.10) direkt aus der ersten. Die letzte Behauptung erhalten wir ebenfalls aus obiger Reihe, wenn wir beachten, dass für  $C = 2$  der erste Summand verschwindet.  $\square$

*Bemerkung 30.* Um (2.61) zu sichern, kann im Fall  $C < 2$  auf Voraussetzung 2.14 *nicht* verzichtet werden. Zwar würde die schwächere Voraussetzung

$$(2 - C) \tilde{a}(v, v) + \sum_{i=1}^m N_i(v_i) \geq 0 \quad \forall v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m \ker P_i(D) \subset \hat{H}^1$$

liefern, dass die Reihenglieder im letzten Beweis eine Nullfolge bilden, aber das reicht nicht aus, um beide Aussagen in (2.61) zu sichern.

### 2.4.3 Zur Konvergenz der VSAM

In diesem Abschnitt werden wir die starke  $\hat{H}^1$ -Konvergenz der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode (2.38)-(2.39) gegen eine Lösung des linearen Modellproblems bzw. des linearen Transmissionsproblems für verschiedene Klassen von Differentialoperatoren zeigen. Dabei sind alle in Abschnitt 2.1 definierten Zerlegungen des Gesamtgebietes  $\Omega$  zugelassen, also insbesondere auch Zerlegungen in mehr als zwei Teilgebiete, von denen nicht alle einen echten Außenrand zu haben brauchen, und Zerlegungen mit Kreuzungspunkten.

Um die Notation abzukürzen, führen wir noch folgende Bezeichnungen aus [Den97] ein:

$$G_1 = \left\{ \bigcup_{1 \leq k \leq m} \Omega_k \mid \mu(\partial\Omega_k \cap \Gamma) > 0 \right\}, \quad (2.62)$$

$$G_{r+1} = \left\{ \bigcup_{1 \leq k \leq m} \Omega_k \mid \mu(\partial\Omega_k \cap \overline{G_r}) > 0, \Omega_k \cap G_l = \emptyset \quad \forall l \leq r \right\}. \quad (2.63)$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  das  $(N - 1)$ -dimensionale HAUSDORFF-Maß. In  $G_1$  liegen also die Teilgebiete, die einen echten Außenrand haben. In  $G_{r+1}$  hingegen liegen die Teilgebiete, die einen echten gemeinsamen Rand mit  $G_r$  haben und nicht schon Teilmengen von  $G_l$ ,  $l \leq r$ , sind.

## Elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil

Unter elliptischen Operatoren mit dominantem Hauptteil verstehen wir (im Allgemeinen nicht symmetrische) Operatoren der Gestalt (2.2), also

$$P_i(D) = -\operatorname{div}(A_i(x) \cdot \nabla) + (b_i(x), \nabla) + c_i(x) \text{ auf } \Omega_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

welche die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 erfüllen. Die Dominanz des Hauptteils wird dabei speziell durch Voraussetzung 2.2 gesichert, denn diese liefert die Abschätzbarkeit der zugehörigen Bilinearform durch den Teil, der dem Hauptteil entspricht. Mit Bemerkung 5(i) auf Seite 12 ist sofort klar, dass diese Voraussetzungen die positive Semidefinitheit der Bilinearformen  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und damit auch die positive Semidefinitheit der Bilinearform  $\tilde{a}$  nach (2.10) implizieren. Wir erinnern daran, dass das Erfülltsein der obigen Voraussetzungen auch durch geeignete Kombination anderer Voraussetzungen gesichert werden kann, siehe Bemerkung 6(ii) auf Seite 13.

Wir formulieren nun den Konvergenzsatz für die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode für Probleme mit dominantem Hauptteil.

**Satz 2.4.8.** *Es gelten die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 (bzw. alternativ die Voraussetzungen 2.1, 2.4, 2.5 oder die Voraussetzungen 2.1, 2.5, 2.7) und zusätzlich eine der Voraussetzungen 2.10 oder 2.11. Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (2.3) bzw. analog eine schwache Lösung von (2.19) und sei  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_i^n)_{1 \leq i \leq m})_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{H}^1$  eine durch Algorithmus (2.38)-(2.39) produzierte schwache Lösungsfolge, wobei die Startwerte  $g_{ij}^0$  beliebig aus  $L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gewählt sind. Die Parameter der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode sollen die Voraussetzungen 2.9 und 2.13 erfüllen. Dann gilt*

$$\|u^n - u\|_{\hat{H}^1} = \left( \sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

*Beweis.* A) Es gelte Voraussetzung 2.10.

Der Fehler  $e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$ , siehe (2.46), genügt (2.47)-(2.49). (2.85) entspricht dann

$$\|e^n\|_{\hat{H}^1} = \left( \sum_{i=1}^m \|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 bzw. die im Satz aufgeführten Alternativen, siehe Bemerkung 6(ii) auf Seite 13, implizieren Voraussetzung 2.14. Wir haben mit Bemerkung 5(i) auf Seite 12 sogar mehr, nämlich

$$a_i(e_i^n, e_i^n) \gtrsim \int_{\Omega_i} |\nabla e_i^n|^2 dx = \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \geq 0. \quad (2.66)$$

Voraussetzung 2.9 impliziert natürlich Voraussetzung 2.12. Nun können wir das Lemma 2.4.7 auf Seite 38 anwenden und erhalten (mit nach Voraussetzung 2.13 sinnvollem  $N_i(\cdot)$ )

$$a_i(e_i^n, e_i^n) \longrightarrow 0 \text{ und } N_i(e_i^n) \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (2.67)$$

und mit (2.66) ebenso

$$\|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

für  $i = 1, \dots, m$ . Abkürzend definieren wir wieder  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Die Abschätzung aus Lemma 2.4.4 auf Seite 32 liefert zusammen mit den Voraussetzungen 2.9 und 2.14

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{il}} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

Setzen wir  $\|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})} := \max_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$ , so erhalten wir damit

$$\frac{\lambda_{il}}{\lambda_{il}} \|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})}^2 \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \right) \|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})},$$

was grob abgeschätzt und unter Berücksichtigung von  $\|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})} \geq \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$  für  $j \in \mathcal{N}(i)$

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \frac{1}{\min_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})}$$

liefert. (2.66) und (2.60) sorgen dafür, dass die nichtnegative Folge  $(\|g^n\|)_n$  monoton fällt und somit durch  $\|g^0\|$  nach oben beschränkt ist. Mit (2.56) und den Abschätzungen auf Seite 34 erhalten wir, wenn wir weiter abschätzen,

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ j \in \mathcal{N}(l)}} \|g_{lj}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{lj})} \leq m\sqrt{\kappa} \|g^0\| =: \widehat{C}$$

mit  $\kappa := \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$ . Das ergibt zusammen mit der vorletzten Ungleichung

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \frac{\widehat{C}}{\min_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}} \lesssim 1. \quad (2.69)$$

Als Nullfolge, siehe (2.68), ist  $(\|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)})_n$  natürlich beschränkt, woraus mit (2.69) und der FRIEDRICHS-Ungleichung, Satz A.2.1,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_F \left( \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 + \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \lesssim 1 \quad (2.70)$$

für  $i = 1, \dots, m$  folgt.

Für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\Omega_i \subset G_1$  gilt  $\gamma_{\Gamma_i}^i(e_i^n) = 0$  auf dem Außenrand  $\Gamma_i$  mit  $\mu(\Gamma_i) > 0$ , was zusammen mit (2.68) und der POINCARÉ-Ungleichung, Satz A.2.2,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_P \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_1 \quad (2.71)$$

liefert. Wir erhalten mit dem Spursatz, siehe Satz A.2.8 oder [Gri85, Theorem 1.5.1.3], und der stetigen Einbettung  $H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \hookrightarrow L^2(\Gamma_{ij})$  für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_1$

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \|\eta_{ij}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \lesssim \|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_1, j \in \mathcal{N}(i). \quad (2.72)$$

Seien nun zwei benachbarte Teilgebiete  $\Omega_i \subset G_2$  und  $\Omega_j \subset G_1$  gegeben. Wir werden zeigen, dass dann ein Teilrand  $\widehat{\Gamma}_{ij} \subset \Gamma_{ij}$ ,  $\mu(\widehat{\Gamma}_{ij}) > 0$ , mit

$$\|\eta_{ij}^n|_{\widehat{\Gamma}_{ij}}\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.73)$$

existiert. Sei also  $\widehat{\Gamma}_{ij} \subset \Gamma_{ij}$  mit positivem HAUSDORFF-Maß. Weiter gelte  $\text{dist}(\partial\Gamma_{ij}, \partial\widehat{\Gamma}_{ij}) > 0$ . Wir wählen eine Abschneidefunktion  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Gamma_{ij})$  mit  $0 \leq \widehat{\varphi} \leq 1$  und  $\widehat{\varphi}|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} = 1$ . Nun definieren wir  $\mathcal{D}_{ij}(\Omega_i) := \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_i) \mid \psi|_{\Gamma_{ij}} = \widehat{\varphi}, \psi|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_{ij}} = 0\}$ , was, wie man leicht nachrechnet, für  $1 \leq p < \infty$  dicht in  $L^p(\Omega_i)$  liegt. Jetzt setzen wir für  $\psi_i \in \mathcal{D}_{ij}(\Omega_i)$   $v_i^n := e_i^n \cdot \psi_i$ . Nach Definition gilt  $v_i^n \in V_i^{00}$ ,  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^n) = \eta_{ij}^n \widehat{\varphi} =: \widehat{\eta}_{ij}^n \in H_0^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\gamma_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_{ij}}^i(v_i^n) = 0$ . Mit (2.51) erhalten wir für diese  $v_i^n$  unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_0^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\lambda_{ij} \eta_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$

$$a_i(e_i^n, v_i^n) + \left( \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \left\langle g_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \right\rangle. \quad (2.74)$$

Durch Verwenden der Identität

$$a_i(e_i^n, v_i^n) = a_i(e_i^n, e_i^n) + a_i(e_i^n, (\psi_i - 1)e_i^n) \quad (2.75)$$

und mit den Bezeichnungen

$$\alpha_1^n(\psi_i) = \left| \int_{\Omega_i} (A_i \nabla e_i^n, \nabla(\psi_i - 1)) e_i^n dx \right|, \quad \alpha_2^n(\psi_i) = \left| \int_{\Omega_i} (A_i \nabla e_i^n, \nabla e_i^n)(\psi_i - 1) dx \right|,$$

$$\alpha_3^n(\psi_i) = \left| \int_{\Omega_i} b_i \nabla e_i^n e_i^n (\psi_i - 1) dx \right|, \quad \alpha_4^n = \left| \langle g_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \rangle \right|,$$

$$\beta^n(\psi_i) = \left| \int_{\Omega_i} c_i (e_i^n)^2 (\psi_i - 1) dx \right|$$

erhalten wir daraus unter Beachtung von (2.66) und

$$\underline{\lambda}_{ij} \left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \leq \int_{\Gamma_{ij}} \underbrace{\lambda_{ij}}_{\geq \underline{\lambda}_{ij}} (\eta_{ij}^n)^2 \underbrace{\widehat{\varphi}}_{\widehat{\varphi}|_{\widehat{\Gamma}_{ij}}=1} d\sigma = \left( \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

die Abschätzung

$$\underline{\lambda}_{ij} \left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \leq \alpha_1^n(\psi_i) + \alpha_2^n(\psi_i) + \alpha_3^n(\psi_i) + \alpha_4^n + \beta^n(\psi_i). \quad (2.76)$$

Wegen (2.68), (2.70) und der Beschränktheit von  $|\psi_i|$  und  $|\nabla \psi_i|$  streben die ersten drei Summanden in (2.76) für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Mit (2.52), dem obigen GELFAND-Dreier und  $(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^{n-1} \in L^2(\Gamma_{ij})$  sowie Lemma A.1.2 haben wir

$$\begin{aligned} \alpha_4^n &= \left| \left( (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^{n-1}, \widehat{\eta}_{ij}^n \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} - \langle g_{ji}^{n-1}, \widehat{\eta}_{ij}^n \rangle \right| \\ &\leq \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\widehat{\eta}_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} + \|g_{ji}^{n-1}\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\widehat{\eta}_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen

$$\|\widehat{\eta}_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 = \int_{\Gamma_{ij}} (\eta_{ij}^n)^2 \underbrace{\widehat{\varphi}^2}_{\leq 1} d\sigma \leq \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \stackrel{(2.69)}{\lesssim} 1 \quad (2.77)$$

und (2.72) mit  $\Omega_j \subset G_1$

$$\|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\widehat{\eta}_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.78)$$

Weiter liefert (2.50)<sub>2</sub> unter Beachtung des obigen GELFAND-Dreiers und  $\lambda_{ji} \eta_{ji}^{n-1} \in L^2(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} |\langle g_{ji}^{n-1}, \mu \rangle| &\leq |\langle \partial_{P_j} e_j^{n-1}, \mu \rangle| + \left| (\lambda_{ji} \eta_{ji}^{n-1}, \mu)_{L^2(\Gamma_{ij})} \right| \\ (2.22) \quad &\leq |a_j(e_j^{n-1}, \mathcal{R}^{ji} \mu) - 0| + \|\lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\lesssim \|e_j^{n-1}\|_{H^1(\Omega_j)} \|\mathcal{R}^{ji} \mu\|_{H^1(\Omega_j)} + \|\lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

wobei die Beschränktheit der Bilinearform, siehe Bemerkung 3 auf Seite 10, benutzt wurde. Zusammen mit der Beschränktheit des Fortsetzungsoperators  $\mathcal{R}^{ji} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), V_j)$  und (2.71) sowie (2.72) erhalten wir

$$\|g_{ji}^{n-1}\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \lesssim \|e_j^{n-1}\|_{H^1(\Omega_j)} + \|\lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^{n-1}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Unter nochmaliger Beachtung von (2.77) gilt insgesamt

$$\alpha_4^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zusammenfassend gibt es also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n > n_0$  gilt

$$\alpha_1^n(\psi_i) + \alpha_2^n(\psi_i) + \alpha_3^n(\psi_i) + \alpha_4^n < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.79)$$

Weiterhin ist wegen (2.70)  $\|(e_i^n)^2\|_{W^{1,1}(\Omega_i)} \lesssim 1$  und der SOBOLEVSche Einbettungssatz A.2.3 liefert  $\|(e_i^n)^2\|_{L^q(\Omega_i)} \lesssim 1$  für  $1 \leq q < N/(N-1)$ . Darüber hinaus liegt  $\mathcal{D}_{ij}(\Omega_i)$  dicht in  $L^p(\Omega_i)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , sodass für jedes  $\tilde{\varepsilon} > 0$  ein  $\psi_i \in \mathcal{D}_{ij}(\Omega_i)$  existiert mit

$$\|\psi_i - 1\|_{L^p(\Omega_i)} < \tilde{\varepsilon}.$$

Somit existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\psi_i \in \mathcal{D}_{ij}(\Omega_i)$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\beta^n(\psi_i) \leq \|c_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} |(e_i^n)^2(\psi_i - 1)| \, dx \lesssim \|(e_i^n)^2\|_{L^{1+\delta}(\Omega_i)} \|\psi_i - 1\|_{L^{\frac{1+\delta}{\delta}}(\Omega_i)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.80)$$

wobei die HÖLDERSche Ungleichung benutzt wurde und  $\delta > 0$  hinreichend klein zu wählen ist. (2.79) und (2.80) zusammen mit (2.76) liefern nun (2.73).

Aus der Definition von  $G_r$ , siehe (2.63), geht hervor, dass für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_2$  ein  $j$  mit  $\Omega_j \subset G_1$  existiert, so dass  $\mu(\Gamma_{ij}) > 0$  und speziell auch  $\mu(\widehat{\Gamma}_{ij}) > 0$  ist. Daraus folgt mit (2.68) und (2.73) sowie der FRIEDRICHS-Ungleichung Satz A.2.1, dass für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_2$  gilt

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \lesssim \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_1} \left\| \eta_{ij}^n |_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.81)$$

In gleicher Weise können wir für  $r \geq 3$  zeigen, dass für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_r$  gilt

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \lesssim \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_{r-1}} \left\| \eta_{ij}^n |_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.82)$$

Da die Anzahl der  $G_r$  endlich ist ( $\leq m$ ), haben wir (2.65) gezeigt.

B) Unter der alternativen Voraussetzung 2.11 überträgt sich der Beweis wörtlich. Die einzige Stelle, an der eine der beiden Voraussetzungen benutzt wird, ist bei Verwendung von Lemma 2.4.7. Natürlich können wir mit Voraussetzung 2.11 an den entsprechenden Stellen von der Dualität im  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  zum  $L^2(\Gamma_{ij})$ -Skalarprodukt übergehen und die Abschätzungen evtl. verschärfen. Dies ist aber nicht nötig, da wir  $g_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  natürlich auch als Element aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  auffassen können, womit die Abschätzungen aus Teil A gültig bleiben.  $\square$

*Bemerkung 31.* (i) Im Fall einer Streifenzerlegung des Gebietes nach Bemerkung 1(i) auf Seite 9 können wir in Verbindung mit Voraussetzung 2.10 die Startwerte der Iteration sogar beliebig aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  wählen. Der Beweis bleibt ohne Änderungen gültig.

(ii) Eine Durchführung des Beweises unter Voraussetzung 2.4 bzw. 2.7 ist ohne Voraussetzung 2.5 nicht möglich, da dann die Positivität bzw. die Abschätzbarkeit der zugehörigen Bilinearform gegenüber dem Gradienten, siehe (2.66), nicht mehr gesichert werden kann. Die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode lässt sich für gewisse Probleme auch ohne die Voraussetzung 2.5 sicherstellen, wie der nachfolgende Abschnitt zeigt.

### Singulär gestörte und indefinite elliptische Probleme

Wir wollen in diesem Abschnitt Probleme untersuchen, die die Voraussetzung 2.2 nicht erfüllen, d.h. die nicht durch den Hauptteil des Differentialoperators dominiert werden. Vertreter hierfür sind elliptische Probleme mit singulärer Störung im Diffusionsterm, wie beispielsweise advektions- bzw. konvektionsdominante ( $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \gg \|A_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}$ ) oder reaktionsdominante ( $\|c_i\|_{L^\infty(\Omega_i)} \gg \max\{\|A_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}, \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}\}$ ) Probleme, aber auch elliptische Probleme, die auf indefinite Formen führen.

Die Schwierigkeit liegt darin, die Voraussetzung 2.2 durch andere Voraussetzungen zu ersetzen, unter denen die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode gesichert werden kann. In diesem Zusammenhang ist das Ersetzen der Voraussetzung 2.2 durch die Voraussetzungen 2.4 bzw. 2.7, jeweils in Verbindung mit Voraussetzung 2.5, nicht sinnvoll, denn diese Kombinationen implizieren nach Bemerkung 6(ii) auf Seite 13 wieder die Voraussetzung 2.2. Zusätzlich sei daran erinnert, dass die Voraussetzung 2.5 das Springen der konvektionsrelevanten Koeffizienten  $b_i$  auf den Rändern benachbarter Teilgebiete erfordert, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Aus diesen Gründen wäre es vorteilhaft, ohne die Voraussetzung 2.5 auszukommen. Wie wir in Bemerkung 6(v) auf Seite 13 festgestellt haben, kann Voraussetzung 2.5 durch eine geeignete Kleinheitsbedingung an  $b_i$  ersetzt werden. Dies widerspricht allerdings der Natur konvektionsdominanter Probleme.

Glücklicherweise gibt es einen Weg, die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für singulär gestörte Probleme zu zeigen, ohne Voraussetzung 2.5 zu benutzen. Dieser beruht auf einer speziellen Wahl der Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$ . Allerdings kommen wir in diesem Fall nicht ohne zusätzliche Forderungen an die Koeffizienten  $b_i$  aus. Wir benötigen die

**Voraussetzung 2.15.** Für die konvektionsrelevanten Koeffizienten  $b_i = b|_{\Omega_i} \in (L^\infty(\Omega_i))^N$ ,  $i = 1, \dots, m$ , des Differentialoperators (2.2) gilt  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  und zusätzlich

$$\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b_i) = -\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b_j) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) = -\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b) \in L^\infty(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

mit dem Spuroperator aus Satz A.2.10. Die hinreichend regulären Spuren springen also *nicht* zwischen den Teilgebieten bzw.  $b \in (L^\infty(\Omega))^N$  ist stetig auf den Rändern der Teilgebiete.

Die zusätzliche Regularität der Spuren des Vektorfeldes  $b$  auf den Rändern der Teilgebiete  $\Gamma_{ij}$  ist notwendig, da diese in die Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$ , welche als wesentlich beschränkte Funktionen vorausgesetzt wurden, eingehen werden.

*Bemerkung 32.* Für Gebiete mit hinreichend glatten Teilrändern, wie z.B. Polygone im  $\mathbb{R}^2$ , folgt  $(\gamma_{\Gamma_{ij}}^* b_i, \mathbf{n}_i) \in L^\infty(\Gamma_{ij})$  aus  $b_i \in (W_\infty^1(\Omega_i))^N$ . Siehe z.B. [Ott99, Theorem A.7].

Wir können auf Voraussetzung 2.5 ganz verzichten, wenn wir die Parameter der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , wie in [AKLO98] wählen, nämlich

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^- := -\frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) - Z_{ij} \right) = \lambda_{ji}^+ := \frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b) + Z_{ji} \right), \quad (2.83)$$

$$\lambda_{ji} = \lambda_{ji}^- := -\frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b) - Z_{ji} \right) = \lambda_{ij}^+ := \frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) + Z_{ij} \right), \quad (2.84)$$

wobei  $Z_{ij}, Z_{ji} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$  strikt positive Funktionen sind. Für hinreichend reguläre  $b$  gilt dabei mit  $n_{ij}$  bzw.  $n_{ji}$  als äußerer Normale bezüglich  $\Omega_i$  bzw.  $\Omega_j$  auf  $\Gamma_{ij}$

$$\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) = (b, n_{ij})|_{\Gamma_{ij}} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b) = (b, n_{ji})|_{\Gamma_{ij}}.$$

Diese Wahl der Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$  bzw.  $\lambda_{ji}$  kompensiert in gewissem Sinne den Einfluss der in der Variationsformulierung nach partieller Integration auftretenden Randterme bezüglich  $b_i$ .

*Bemerkung 33.* (i) (2.83) und (2.84) implizieren wegen Voraussetzung 2.15  $Z_{ij} = Z_{ji}$ . Weiter gilt  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = \frac{1}{2}(Z_{ij} + Z_{ji}) = Z_{ij}$ , was wegen der strikten Positivität von  $Z_{ij} = Z_{ji}$  die Voraussetzung 2.12 impliziert. Wir können überdies immer Voraussetzung 2.9 erfüllen, wenn wir nur fast überall  $Z_{ij} > \left| \frac{1}{2} \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) \right|$  wählen.

(ii) Anregungen für die Wahl von  $Z_{ij}$  finden sich in [LMO00], [AKLO98], [OL99] und [Ott99]. Beispiele sind

$$Z_{ij} = \frac{1}{2} \left| \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) \right|, \quad Z_{ij} = \frac{1}{2} \left| \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) \right| + \sqrt{\varepsilon \eta}, \quad Z_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) \right|^2 + 4\varepsilon c_i}$$

und

$$Z_{ij} = \frac{1}{2} \left| \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) \right| + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon(c_i + \eta)},$$

wobei  $\varepsilon \approx \|A_i\|_{L^\infty(\Omega_i)}$  entspricht und  $\eta \geq 0$  einen freien Parameter bezeichnet.

Die Voraussetzung 2.2 bzw. ihre Alternativen waren in Lemma 2.4.1 auf Seite 29 nötig, um die Wohldefiniertheit der SCHWARZschen Methode zu sichern. Bevor wir einen Konvergenzsatz für singular gestörte Probleme formulieren können, benötigen wir daher das folgende Analogon zu dem eben erwähnten Lemma, das die Wohldefiniertheit der Methode ohne Voraussetzung 2.2 sichert.

**Lemma 2.4.9.** *Es gelten die Voraussetzungen 2.1, 2.4, 2.9 und 2.15 (bzw. alternativ die Voraussetzungen 2.1, 2.7, 2.9 und 2.15). Weiter seien die Verfahrensparameter wie in (2.83) und (2.84) gewählt. Die Probleme (2.40) bzw. (2.41) sind für jedes  $n \in \mathbb{N}$  korrekt gestellt, falls für die Startwerte der Iteration  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gilt. Liegt speziell die Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 vor, so ist keine zusätzliche Regularität der Startwerte erforderlich, d.h. beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , sind zulässig.*

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass die im Beweis von Lemma 2.4.1 auf Seite 29 eingeführte Bilinearform  $\hat{a}_i$ , also

$$\hat{a}_i(u_i^n, v_i) := a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})},$$

auch unter obigen Voraussetzungen  $V_i$ -elliptisch ist. Die restlichen Beweisschritte sind dann übertragbar. Mit den obigen Voraussetzungen und Bemerkung 6(i) auf Seite 13 haben wir (2.16), d.h. für alle  $v_i \in V_i$  gilt

$$a_i(v_i, v_i) = \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla v_i, \nabla v_i) + \left( c_i - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i) \right) v_i^2 dx + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^*(b_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^2) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

Damit gilt unter Beachtung der speziellen Wahl der Verfahrensparameter und mit  $m := \min_{j \in \mathcal{N}(i)} (\operatorname{ess\,inf} Z_{ij}) > 0$  für die Bilinearform  $\hat{a}_i$

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(v_i, v_i) &\geq \alpha_i \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \int_{\Omega_i} \left( c_i - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i) \right) v_i^2 dx \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^*(b_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^*(b_i) + 2Z_{ij}, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^2) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\geq C_i \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2, \end{aligned}$$

wobei  $C_i > 0$  ist. Die Konstante  $C_i$  hängt davon ab, ob  $\Omega_i$  einen Außenrand besitzt oder nicht und welche der Voraussetzungen 2.4 oder 2.7 verwendet wurde. Weiter wurde benutzt, dass hier  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^2) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)^2$  gilt. Zusammen mit der FRIEDRICHS-Ungleichung Satz A.2.1 liefert dies die  $V_i$ -Elliptizität der Bilinearform  $\hat{a}_i$ .  $\square$

Mit der obigen speziellen Wahl der Parameter  $\lambda_{ij}$  können wir sogar auf die Voraussetzung 2.14 verzichten. Damit ist insbesondere eine Behandlung von indefiniten Problemen möglich. Für singular gestörte und indefinite Probleme gilt der

**Satz 2.4.10.** *Es gelten die Voraussetzungen 2.1, 2.3 und 2.15 (bzw. alternativ die Voraussetzungen 2.1, 2.6 und 2.15) und zusätzlich eine der Voraussetzungen 2.10 oder 2.11. Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (2.3) bzw. analog eine schwache Lösung von (2.19) und sei  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_i^n)_{1 \leq i \leq m})_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{H}^1$  eine durch Algorithmus (2.38)-(2.39) produzierte schwache Lösungsfolge, wobei die Startwerte  $g_{ij}^0$  beliebig aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  bzw. in Verbindung mit Voraussetzung 2.11 beliebig aus  $L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gewählt sind. Die Parameter der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode seien zudem speziell nach (2.83) und (2.84) gewählt. Dann gilt*

$$\|u^n - u\|_{\hat{H}^1} = \left( \sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.85)$$

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 2.4.8 auf Seite 39 reicht es (2.65) zu zeigen. Nach Bemerkung 33 auf Seite 43 gilt mit obiger Wahl der Verfahrensparameter auch Voraussetzung 2.12. Mit der Voraussetzung 2.3 bzw. alternativ 2.6 haben wir für alle  $w_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\|w_i\|_{\Omega_i}^2 := \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla w_i, \nabla w_i) + \left( c_i - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i) \right) w_i^2 dx \geq \hat{C} \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \quad (2.86)$$

mit  $\hat{C} > 0$  wie in folgender Tabelle (Konstanten wie in den Voraussetzungen).

	$\hat{C}$
Voraussetzung 2.3, $\Omega_i$ inneres Teilgebiet	$\min(\alpha_i, \eta_i)$
Voraussetzung 2.3, $\Omega_i$ Teilgebiet mit Außenrand	$\min\left(\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}}, \eta_i + \frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}}\right)$
Voraussetzung 2.6	$\min(\alpha_i, \tilde{c}_i)$

$\|\cdot\|_{\Omega_i}$  ist sogar eine Norm auf  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Für alle  $v_i \in \ker P_i(D) \subset V_i$  gilt unter Beachtung von Bemerkung 6(i) auf Seite 13

$$a_i(v_i, v_i) = \|v_i\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^*(b_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^2) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (2.87)$$



Auf Grund der speziellen Wahl der Parameter  $\lambda_{ij}$  und  $\lambda_{ji}$  nach (2.83) und (2.84) haben wir zudem mit Bemerkung 33 auf Seite 43

$$\lambda_{ji} + \lambda_{ij} = Z_{ij} > 0, \quad \lambda_{ji}^2 - \lambda_{ij}^2 = \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) Z_{ij} \quad \text{und} \quad \lambda_{ji} - \lambda_{ij} = \frac{\lambda_{ji}^2 - \lambda_{ij}^2}{\lambda_{ji} + \lambda_{ij}} = \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b).$$

Zusammen mit (2.87) erhalten wir

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ji} - \lambda_{ij}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^2) d\sigma = 2a_i(v_i, v_i) - 2 \|v_i\|_{\Omega_i}^2 \quad (2.88)$$

für alle  $v_i \in \ker P_i(D)$ . Die Voraussetzung 2.13 ist also mit  $C = 2$  und  $N_i(v_i) = 2 \|v_i\|_{\Omega_i}^2$  erfüllt. Nun können wir Lemma 2.4.7 auf Seite 38 anwenden und erhalten für den Fehler  $e_i^n \in \ker P_i(D)$

$$N_i(e_i^n) = 2 \|e_i^n\|_{\Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

was wegen (2.86)

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.89)$$

impliziert. Da diese Überlegungen für alle  $i = 1, \dots, m$  gelten, haben wir auch (2.65) und somit die Aussage des Satzes.  $\square$

*Bemerkung 34.* Die Beziehung (2.86) ist unter den abgeschwächten Voraussetzungen 2.4 bzw. 2.7 als Alternative zu den Voraussetzungen 2.3 bzw. 2.6 nicht mehr zu sichern. Der letzte Beweis ist unter den abgeschwächten Voraussetzungen also nicht durchführbar, da  $\|\cdot\|_{\Omega_i}$  dann, zumindest auf den inneren Teilgebieten, nicht nach unten durch die  $H^1(\Omega_i)$ -Norm abgeschätzt werden kann.

Die Voraussetzungen 2.3 und 2.6 lassen sich abschwächen, wenn wir die Allgemeinheit bei der Wahl der Parameter der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode unwesentlich einschränken und uns auf fast positiv semidefinite Bilinearformen beschränken. Es gilt nämlich auch der

**Satz 2.4.11.** *Die Aussage des Satzes 2.4.10 bleibt erhalten, wenn die Voraussetzung 2.3 durch 2.4 (bzw. alternativ die Voraussetzung 2.6 durch 2.7) und die (implizit durch die Wahl der Verfahrensparameter geltende) Voraussetzung 2.12 durch die (unwesentlich stärkere) Voraussetzung 2.9 ersetzt wird und zusätzlich*

$$a_i(v_i, v_i) \geq 0 \quad \forall v_i \in \ker P_i(D) \subset V_i \quad (2.90)$$

für alle  $i = 1, \dots, m$  gilt.

*Beweis.* Im Unterschied zum Beweis von Satz 2.4.10 gilt  $\|\cdot\|_{\Omega_i} \gtrsim \|\cdot\|_{H^1(\Omega_i)}$  unter den abgeschwächten Voraussetzungen 2.4 und 2.7 nicht mehr, wobei  $\|\cdot\|_{\Omega_i}$  wie in (2.86) definiert ist. Wir haben aber mit den Voraussetzungen 2.1 und 2.4 (bzw. den Voraussetzungen 2.1 und 2.7) sehr wohl für alle  $w_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\|w_i\|_{\Omega_i}^2 \geq \widehat{C} \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2$$

mit  $\widehat{C} > 0$  nach folgender Tabelle (Konstanten wie in den Voraussetzungen).

	$\widehat{C}$
Voraussetzung 2.4, $\Omega_i$ inneres Teilgebiet	$\alpha_i$
Voraussetzung 2.4, $\Omega_i$ Teilgebiet mit Außenrand	$\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}}$
Voraussetzung 2.7	$\alpha_i$

Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 2.4.10 liefert dann für den Fehler  $e_i^n \in \ker P_i(D)$

$$2 \|e_i^n\|_{\Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

woraus mit obiger Abschätzung

$$\|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt. Jetzt verfahren wir wie im Beweis von Satz 2.4.8 nach Gleichung (2.68), wozu wir Voraussetzung 2.9 benötigen. Die äußere Ungleichung in (2.66), und nur diese benötigen wir, wird durch (2.90) gesichert.  $\square$

*Bemerkung 35.* Die Verwendung der Voraussetzung 2.9 ist nicht wirklich einschränkend. Für geeignet gewählte  $Z_{ij}$  lässt sich diese immer erfüllen. Siehe Bemerkung 33 auf Seite 43.

*Bemerkung 36.* Der Satz 2.4.11 deckt wegen der schwächeren Voraussetzungen 2.4 bzw. 2.7, die auch auf den Inneren Teilgebieten ausreichen, Fälle ab, die in [AKLO98, Theorem 4.1] nicht behandelt wurden. Zudem kann auf die  $L^2(\Gamma_{ij})$ -Regularitätsforderung an die Konormalenableitung der Lösung verzichtet werden.

## 2.5 Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde ein lineares Modellproblem erklärt. Dabei wurden die Voraussetzungen 2.1 bis 2.7 eingeführt. Diese Voraussetzungen erlaubten eine Einteilung des Modellproblems in verschiedene Klassen. Unter den Voraussetzungen 2.1 und 2.2 sprachen wir von elliptischen Problemen mit dominantem Hauptteil. Die Hauptteildominanz wurde dabei durch die Voraussetzung 2.2 gesichert. Für singular gestörte Probleme, wie beispielsweise konvektions- oder reaktionsdominante Probleme erwies sich die Hauptteildominanz als zu einschränkend. Aus diesem Grunde war es teilweise nötig auf Voraussetzung 2.2 zu verzichten. An ihre Stelle traten dann die Voraussetzungen 2.3 und 2.6 bzw. ihre abgeschwächten Varianten Voraussetzungen 2.4 und 2.7. Um den Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen zu verdeutlichen, führten wir Voraussetzung 2.5 ein. Weiterhin wurden zu Beginn des ersten Abschnittes die geometrischen Voraussetzungen an die Gebiete festgelegt. Dabei wurde lediglich gefordert, dass das Gesamtgebiet  $\Omega$  und die Teilgebiete  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , LIPSCHITZ-Gebiete sind. Insbesondere durfte die Zerlegung Kreuzungspunkte und komplett im Inneren liegende Teilgebiete aufweisen. Zudem wurde eine schwache Formulierung des Modellproblems angegeben und die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen unter passenden Voraussetzungen bewiesen. Diese Standardresultate beruhten dabei auf der Elliptizität bzw. Koerzivität der zum Modellproblem gehörigen Bilinearformen.

Im zweiten Abschnitt wurde ein, zu dem linearen Modellproblem auf dem Gesamtgebiet äquivalentes, Transmissionsproblem auf den Teilgebieten hergeleitet. Dabei war es wichtig, die Elemente der Transmissionsbedingung, die den Fluss charakterisieren, als Funktionale über den passenden Räumen zu interpretieren. Besonders für komplexe Zerlegungen, die Kreuzungspunkte und im Inneren liegende Teilgebiete aufweisen, erwies sich dies als kritisch. Mit dieser Interpretation der Flussbedingung als Funktional war es möglich, das Transmissionsproblem ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen zu formulieren und die Äquivalenz der schwachen Formulierungen mit dem linearen Modellproblem nachzuweisen. Als Folgerung ergab sich, dass das lineare Transmissionsproblem genau dann (eindeutige) Lösungen besitzt, wenn das lineare Modellproblem (eindeutige) Lösungen besitzt. Darüber hinaus wurden im zweiten Abschnitt noch zwei weitere äquivalente schwache Formulierungen des Transmissionsproblems angegeben. Auch hierbei war es wichtig, speziell für komplexe Zerlegungen, die auftretenden Funktionale über den passenden Räumen zu wählen.

Anschließend wurde im dritten Abschnitt dieses Kapitels die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode aus [Lio90] rekapituliert und einige ihrer Vor- und Nachteile erläutert. Diese Methode wurde weiterhin, in Anlehnung an die Überlegungen des zweiten Abschnitts, in eine variationelle Form überführt, die ebenfalls ohne zusätzliche Regularitätsforderungen auskommt und auch für komplexe Zerlegungen des Gebietes sinnvoll ist. Dabei war es wieder wesentlich, die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingung als Funktionale über den richtigen Räumen zu interpretieren.

Im vierten Abschnitt wurde die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode aus Abschnitt 2.3 verallgemeinert. Dies geschah in Anlehnung an [Den97]. Dabei wurden die ROBIN-Daten der Nachbargebiete des vorhergehenden Iterationsschrittes, welche zur Lösung der Teilprobleme im aktuellen Iterationsschritt bei der SCHWARZschen Methode notwendig sind, durch gewisse Funktionale ersetzt. Diese Funktionale wurden zwischen den Iterationsschritten geeignet aufdatiert. Der Vorteil bestand darin, dass auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung verzichtet werden konnte. Weiterhin wurden für die Verfahrensparameter, welche in der klassischen SCHWARZschen Methode Konstanten sind, allgemeine  $L^\infty$ -Funktionen auf den Teilrändern zugelassen. Diese allgemeineren Parameter wurden in früheren Arbeiten, z.B. sei im Zusammenhang mit konvektionsdominanten Problemen [AKLO98] genannt, bereits verwendet. Auch für die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode wurde eine adäquate variationelle Formulierung angegeben, die für komplexe Zerlegungen gültig ist und mit der klassischen  $H^1(\Omega_i)$ -Regularität der Lösungen auf den Teilgebieten auskommt. Zudem wurde, unter Benutzung einiger technischer Voraussetzungen, die starke Konvergenz der

verallgemeinerten SCHWARZschen Methode in  $H^1$  gezeigt. Dieses Konvergenzresultat konnte für elliptische Probleme mit dominantem Hauptteil und für singular gestörte und indefinite elliptische Probleme erhalten werden.

Ein Vorteil der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode ist, dass mit ihr verschiedene elliptische Problemklassen behandelt werden können. Hierzu zählen Probleme mit dominantem Hauptteil und singular gestörte und indefinite Probleme, wie konvektions- und reaktionsdominante Probleme. Um die verschiedenen Typen zu behandeln, sind nur die Verfahrensparameter entsprechend anzupassen. Durch Einschränkungen bei der Wahl der Verfahrensparameter erhalten wir die  $H^1$ -Konvergenz der Methode ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Glattheit der Lösungen. Ist die Lösung des linearen Modellproblems im Gegenzug hinreichend regulär, d.h. ein Element aus  $H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ , dann kann auf einen Teil der Einschränkungen der Verfahrensparameter zur Sicherung der Konvergenz verzichtet werden. Zudem ist die Methode für beliebige Zerlegungen des Gesamtgebietes anwendbar, solange alle Teilgebiete LIPSCHITZ sind. Insbesondere sind Zerlegungen mit Kreuzungspunkten und Zerlegungen mit Teilgebieten, die keinen Außenrand besitzen, zugelassen. Weiterhin bleiben alle Vorteile der klassischen SCHWARZschen Methode erhalten. Darüber hinaus kann auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung verzichtet werden.

Aussagen zu Konvergenzgeschwindigkeit und Fehlerabschätzungen wurden nicht gemacht. Es ist allerdings bekannt, dass die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode bei geeigneter Wahl der Verfahrensparameter geometrische Konvergenzordnung aufweist. Fehlerabschätzungen lassen sich wie in der Arbeit von [Ott99] herleiten.

### 3 Quasilineare Probleme und VSAM

In diesem Kapitel wird die Anwendbarkeit der speziellen nichtüberlappenden SCHWARZschen Gebietszerlegungsmethode aus Kapitel 2 auf Randwertprobleme mit monotonen koerziven quasilinearen elliptischen Differentialoperatoren untersucht. Zunächst werden wir das zu Grunde liegende Modellproblem formulieren und die Voraussetzungen an den Differentialoperator und an die Geometrie der Gebiete spezifizieren. Dann untersuchen wir die Lösbarkeit des quasilinearen Modellproblems, wobei die Eindeutigkeit der Lösungen durch eine gleichmäßige Monotoniebedingung gesichert werden wird. Im nächsten Schritt ordnen wir dem quasilinearen Modellproblem ein äquivalentes quasilineares Transmissionsproblem zu. Dieses Transmissionsproblem wird schwach formuliert, was speziell für komplexere Zerlegungen nicht trivial ist. Wir benötigen dabei keine spezifischen Regularitätsforderungen, die über die  $H^1$ -Regularität hinausgehen. Anschließend beschreiben wir die verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode aus dem letzten Kapitel im Kontext quasilinearere Probleme. Aufbauend auf den schwachen Formulierungen des Transmissionsproblems wird auch diese Methode variationell formuliert. In diesem Zusammenhang wird die Wohldefiniertheit des Verfahrens ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen auch für komplexe Gebietszerlegungen gezeigt. Außerdem wird die Konvergenz der Methode unter einer gleichmäßigen Monotoniebedingung für koerzive quasilineare elliptische Probleme nachgewiesen. Auch dabei sind komplexe Zerlegungen des Gebietes zugelassen und eine zusätzliche Regularität der Lösung des Modellproblems wird nicht benötigt, da die Parameter des Verfahrens passend gewählt werden können.

Da die verwendete Methode formal identisch mit der aus dem letzten Kapitel ist, können die methodenbasierten und einige der technischen Voraussetzungen wörtlich übernommen werden. Darüber hinaus sind auch manche der Sätze und deren Beweise sinngemäß übertragbar. Wir werden aus Gründen der Übersichtlichkeit alle übertragbaren Voraussetzungen und Sätze erneut angeben. Zudem sei darauf hingewiesen, dass die Probleme, Verfahren und Voraussetzungen, die in diesem Kapitel eingeführt werden, zur besseren Übersicht auf den Seiten 173ff. noch einmal aufgelistet werden.

#### 3.1 Das quasilineare Modellproblem

In diesem Abschnitt wird das zu Grunde liegende quasilineare Modellproblem erklärt. Dazu werden wir, nach Festlegung der geometrischen Eigenschaften des Gebietes, zunächst eine differentielle und danach eine variationelle Formulierung des Modellproblems angeben. Weiterhin werden verschiedene Voraussetzungen an den Differentialoperator formuliert, die in den nachfolgenden Abschnitten Verwendung finden. Zudem werden wir uns der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des quasilinearen Modellproblems widmen.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet, das wie in Abschnitt 2.1 eine Zerlegung in  $m$  nichtüberlappende LIPSCHITZ-Teilgebiete  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , zulasse. Wir übernehmen die Bezeichnungen, die Gebiete betreffend, ebenfalls aus Abschnitt 2.1.

Wir folgen der Darstellung aus [Zei90, S. 570ff] und betrachten auf  $\Omega$  den quasilinearen Differentialoperator

$$(P(D)u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, Du(x)). \tag{3.1}$$

Dabei ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  ein Multiindex mit  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ . Für einen Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = 1$  soll die Funktion  $\pi(\alpha)$  die Position der Eins im Tupel  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  liefern.  $Du$  bezeichnet das Tupel aller partieller Ableitungen inkl.  $u$ , d.h.

$$Du = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq 1}, \tag{3.2}$$

wobei die Konvention  $D^0 u = u$  gelten soll.  $A_\alpha(x, D)$  seien reelle Funktionen der Veränderlichen  $x \in \Omega$  und  $D \in \mathbb{R}^M$  mit  $D = (D^\alpha)_{|\alpha| \leq 1}$ , also  $M = N + 1$ .

Unter dem *quasilinearen Modellproblem* auf  $\Omega$  verstehen wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

wobei  $f \in L^2(\Omega)$  gegeben ist. Wir formulieren zunächst verschiedene Bedingungen für den Differentialoperator.

**Voraussetzung 3.1** (CARATHÉODORY-Bedingung). Die Funktionen  $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  haben für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq 1$  die folgenden beiden Eigenschaften:

- (i)  $x \mapsto A_\alpha(x, D)$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $D \in \mathbb{R}^M$ ,
- (ii)  $D \mapsto A_\alpha(x, D)$  ist für fast alle  $x \in \Omega$  stetig auf  $\mathbb{R}^M$ .

Diese Voraussetzung ist beispielsweise für stetige Funktionen  $A_\alpha$  erfüllt. Im Zusammenhang mit den weiter unten benutzten, auf die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \Omega$  eingeschränkten Funktionen  $A_\alpha^i = A_\alpha|_{\Omega_i}$ , genügt es, wenn Voraussetzung 3.1(ii) für  $A_\alpha^i$  gilt.

**Voraussetzung 3.2** (Wachstumsbedingung). Für  $x \in \Omega$  und alle  $D \in \mathbb{R}^M$  und  $|\alpha| \leq 1$  existiert ein  $C > 0$  und ein nichtnegatives  $g \in L^2(\Omega)$  mit

$$|A_\alpha(x, D)| \leq C \left( g(x) + \sum_{|\beta| \leq 1} |D^\beta| \right).$$

**Voraussetzung 3.3** (Monotoniebedingung). Für  $x \in \Omega$  und alle  $D, D' \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (A_\alpha(x, D) - A_\alpha(x, D')) (D^\alpha - D'^\alpha) \geq 0.$$

**Voraussetzung 3.4** (Koerzivitätsbedingung). Für  $x \in \Omega$  und alle  $D \in \mathbb{R}^M$  existiert ein  $c > 0$  und  $h \in L^1(\Omega)$  mit

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, D) D^\alpha \geq c \sum_{|\beta|=1} |D^\beta|^2 - h(x).$$

**Voraussetzung 3.5** (gleichmäßige Monotonie). Für  $x \in \Omega$  und alle  $D, D' \in \mathbb{R}^M$  existiert ein  $d > 0$  mit

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (A_\alpha(x, D) - A_\alpha(x, D')) (D^\alpha - D'^\alpha) \geq d \sum_{|\beta|=1} |D^\beta - D'^\beta|^2.$$

**Voraussetzung 3.6** (Degeneriertheit). Alle Funktionen  $A_\alpha$  hängen nur von  $u$  ab, nicht von den partiellen Ableitungen von  $u$ .

Ein Differentialoperator  $P(D)$ , siehe (3.1), der die Voraussetzungen 3.1 bis 3.4 erfüllt, heißt *monotoner koerziver quasilinearer elliptischer Differentialoperator*.

*Bemerkung 37.* Aus Voraussetzung 3.5 folgt natürlich Voraussetzung 3.3. Gilt darüber hinaus  $A_\alpha(\cdot, 0) \equiv 0$ , so impliziert die Voraussetzung 3.5 auch die Voraussetzung 3.4 mit  $h \equiv 0$ .

Wie schon im letzten Kapitel wollen wir den Lösungsbegriff von (3.3) verallgemeinern. Dazu definieren wir für  $u, v \in H^1(\Omega)$  die im zweiten Argument lineare Form

$$a(u, v) := \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, Du(x)) D^\alpha v(x) dx. \quad (3.4)$$

Weiterhin definieren wir für alle  $x \in \Omega$  den NEMYTSKIJ-Operator

$$(F_\alpha u)(x) = A_\alpha(x, Du(x)). \quad (3.5)$$

Für  $u \in H^1(\Omega)$  gilt offensichtlich  $D^\beta u \in L^2(\Omega)$  für  $|\beta| \leq 1$ . Mit den Voraussetzungen 3.1 und 3.2 folgt dann zusammen mit Lemma A.4.2, dass  $F_\alpha : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  stetig und beschränkt ist mit

$$\|F_\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \left( \|g\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\beta| \leq 1} \|D^\beta u\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

*Bemerkung 38.* (i) Unter den Voraussetzungen 3.1 und 3.2 ist die Form (3.4) beschränkt, d.h. es gilt für alle  $u, v \in H^1(\Omega)$  mit  $\widehat{C} > 0$

$$|a(u, v)| \leq \widehat{C} \left( \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Die Aussage folgt direkt aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, der Abschätzung

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} \|F_\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|F_\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \max_{|\beta| \leq 1} \|D^\beta v\|_{L^2(\Omega)}$$

sowie Beachtung von  $\max_{|\beta| \leq 1} \|D^\beta v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$  und der Beschränktheit des NEMYTSKIJ-Operators (3.5).

(ii) Ähnliche Überlegungen wie in (i) liefern mit den dortigen Voraussetzungen 3.1 und 3.2 für beliebige  $u, v, w \in H^1(\Omega)$  auch

$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \|F_\alpha u - F_\alpha v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)},$$

wobei  $F_\alpha : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  den stetigen NEMYTSKIJ-Operator (3.5) bezeichnet. Das liefert insbesondere die Stetigkeit der Form (3.4) in der ersten Komponente.

(iii) Unter der Voraussetzung 3.3 gilt für die Form (3.4)

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

was sich mit Voraussetzung 3.5 zu

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq d \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

verschärft. Die Voraussetzung 3.4 hingegen liefert

$$a(u, u) \geq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} h \, dx \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Unter der *schwachen Formulierung* von (3.3) wollen wir das folgende Problem verstehen.

Finde ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

Eine Lösung von (3.6) bezeichnen wir als *schwache Lösung* von (3.3). Wir machen uns durch Multiplikation von (3.3)<sub>1</sub> mit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , Integration über  $\Omega$  und anschließender partieller Integration klar, dass dies den Lösungsbegriff tatsächlich verallgemeinert.

Aussagen zur Lösbarkeit von (3.6) macht folgendes

**Lemma 3.1.1.** *Es gelten die Voraussetzungen 3.1, 3.2, 3.3 und 3.4. Dann existiert genau ein Operator  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  mit*

$$\langle Au, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} = a(u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

*Das verallgemeinerte Problem (3.6) ist äquivalent zur Operatorgleichung*

$$Au = (f, \cdot)_{L^2(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (3.7)$$

*Der Operator  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  ist monoton, koerziv, stetig und beschränkt. Damit sind die Aussagen des Hauptsatzes für monotone Operatoren, Satz A.3.1, auf (3.7) und somit auf (3.6) übertragbar. Insbesondere besitzt (3.6) für jedes  $f \in L^2(\Omega)$  eine Lösung.*

*Beweis.* Dieses Lemma mit Beweis findet man in [Zei90, Proposition 26.12]. □

Für die Eindeutigkeit der Lösung zitieren wir Korollar 26.13 aus [Zei90].

**Korollar 3.1.2.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 3.1.1 gelte Voraussetzung 3.5. Dann ist der Operator  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  gleichmäßig monoton. In diesem Fall ist die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (3.6) eindeutig.*

Dass Terme niedriger Ordnung auf stark stetige Operatoren führen, liefert Korollar 26.14 aus [Zei90], welches wir nachfolgend zitieren.

**Korollar 3.1.3.** *Es gelten die Voraussetzungen 3.1, 3.2 und 3.6. Dann existiert genau ein Operator  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  mit*

$$\langle Au, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} = a(u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

*Der Operator  $A$  ist stark stetig.*

*Bemerkung 39.* Sei  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  der Operator aus Lemma 3.1.1 bzw. Korollar 3.1.2. Die Beschränktheit und Stetigkeit des Operators  $A$  folgt sofort aus Bemerkung 38(i-ii). Die Bemerkung 38(iii) liefert dann zusammen mit der POINCARÉ-Ungleichung, siehe Satz A.2.2, unter Voraussetzung 3.5

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq dC_\Omega^2 \|u - v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

bzw. unter Voraussetzung 3.4

$$\langle Au, u \rangle = a(u, u) \geq cC_\Omega^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_\Omega h \, dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

wobei  $C_\Omega$  die Konstante der POINCARÉ-Ungleichung und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  bezeichnet. Ersteres ist die starke Monotonie des Operators  $A$ , woraus natürlich die gleichmäßige Monotonie folgt. Letzteres impliziert

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow \infty,$$

d.h. die Koerzivität des Operators  $A$ . Wesentlich für diese Abschätzungen und damit für die starke Monotonie und Koerzivität des Operators ist die Gültigkeit der POINCARÉ-Ungleichung.

Um die Definitionen zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden Beispiele.

*Beispiel 1.* Für den quasilinearen Differentialoperator in Divergenzform

$$P(D)u = -\operatorname{div}(k(u)\nabla u),$$

mit  $k \in L^\infty(\Omega)$  und  $\operatorname{ess\,inf}_\Omega k > 0$ , den wir im nachfolgenden Kapitel betrachten werden, gilt mit der Bezeichnung (3.2) beispielsweise

$$A_\alpha(Du) = k(u)D^\alpha u \quad \text{für} \quad |\alpha| = 1 \quad \text{und} \quad A_0 = 0.$$

Dieser Operator erfüllt die Voraussetzungen 3.1(i), 3.2 und 3.4. Die Voraussetzungen 3.3 und damit 3.5 sind nicht erfüllt. Falls der Differentialoperator zusätzlich springende Nichtlinearitäten besitzt,  $k \in L^\infty(\Omega)$  also Sprünge hat, ist auch Voraussetzung 3.1(ii) nicht erfüllt. Folglich lassen sich die obigen Sätze nicht anwenden.

*Beispiel 2.* Auch den linearen Differentialoperator (2.2) aus dem letzten Kapitel mit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}$ ,  $b = (b^1, \dots, b^N) \in (L^\infty(\Omega))^N$  und  $c \in L^\infty(\Omega)$  können wir mittels

$$A_\alpha(x, Du(x)) = \sum_{|\beta|=1} a_{\pi(\alpha), \pi(\beta)}(x) D^\beta u(x), \quad |\alpha| = 1,$$

und

$$A_0(x, Du(x)) = \sum_{|\beta|=1} b^{\pi(\beta)}(x) D^\beta u(x) + c(x)u(x)$$

in (3.1) wiederfinden. Dabei bezeichnet  $\pi(\gamma)$ , wie zu Beginn des Abschnittes eingeführt, die Komponente des Multiindex  $\gamma$  mit dem Eintrag 1. Dieser lineare Differentialoperator erfüllt offenbar die Voraussetzungen 3.1 und 3.2. Falls die zugehörige Bilinearform (2.6) positiv semidefinit ist, so ist auch Voraussetzung 3.3 erfüllt. Die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 implizieren zudem die Voraussetzungen 3.4 und 3.5. Die Voraussetzung 3.6 ist nur für  $A = 0$  und  $b = 0$  erfüllt.

## 3.2 Das quasilineare Transmissionsproblem

In diesem Abschnitt werden wir ein, zu dem auf dem Gesamtgebiet erklärten quasilinearen Modellproblem äquivalentes, Transmissionsproblem auf den Teilgebieten formulieren. Wie bereits im letzten Kapitel klargemacht, spiegelt dieses Vorgehen den Grundgedanken von nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethoden wider, welcher ja gerade in der Zerlegung des Ausgangsgebietes in mehrere kleine Teilgebiete und Betrachtung von weniger komplexen Teilproblemen auf diesen Teilgebieten besteht. Das Transmissionsproblem wird später zur Beschreibung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode benutzt. Wir wollen keine zusätzlichen Regularitätsforderungen an die schwache Lösung  $u$  des quasilinearen Modellproblems (3.3) stellen, d.h. die Lösung soll lediglich ein Element aus  $H_0^1(\Omega)$  sein. In diesem Fall benötigen wir einige funktionalanalytische Hilfsmittel, um das Transmissionsproblem zu formulieren. Das wird speziell im Fall einer Zerlegung des Gesamtgebietes in mehr als zwei Teilgebiete deutlich, die nicht zu einer Streifenzerlegung korrespondiert. Wir verweisen auf Abbildung 2.2 auf Seite 9 für einige dieser komplizierteren Zerlegungen. Weiterhin werden wir zwei äquivalente schwache Formulierungen des quasilinearen Transmissionsproblems herleiten.

Als *quasilineares Transmissionsproblem* bezeichnen wir

$$\begin{cases} P_i(D)u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_i = u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \\ \partial_{P_i} u_i = -\partial_{P_j} u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

wobei die Bezeichnungen in Bezug auf die Gebiete wie in Abschnitt 2.1 gewählt sind. Weiter ist  $f_i := f|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i)$  und die quasilinearen Differentialoperatoren  $P_i(D)$  sind ebenfalls als Restriktionen des Operators  $P(D)$  auf die Teilgebiete anzusehen, d.h. für  $u_i \in V_i := \{v \in H^1(\Omega_i) \mid \gamma_{\Gamma_i}(v) = 0\}$ , siehe auch (2.7) auf Seite 10, gilt

$$(P_i(D)u_i)(x) := \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^i(x, Du_i(x)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.9)$$

Dabei wurde die Bezeichnung  $A_\alpha^i := A_\alpha|_{\Omega_i}$  verwendet und (3.2) gilt entsprechend. Die Konormalableitung ist für hinreichend reguläre  $w_i \in V_i$  als

$$(\partial_{P_i} w_i)(x) := \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha^i(x, Dw_i(x)) \cdot n_i^{\pi(\alpha)}(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.10)$$

mit bezüglich  $\Omega_i$  äußerer Einheitsnormale  $n_i = (n_i^1, \dots, n_i^N)$  zu verstehen. Die Indexmenge der zu  $\Omega_i$  benachbarten Teilgebiete  $\mathcal{N}(i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ist in (2.1) auf Seite 9 erklärt. Die Bedingungen (3.8)<sub>3,4</sub> bezeichnen wir in Analogie zum linearen Fall als *Transmissionsbedingungen*.

Ist eine der obigen Voraussetzungen 3.1 bis 3.6 für  $A_\alpha$  erfüllt, dann gilt die entsprechende Voraussetzung natürlich auch für die eingeschränkten Funktionen  $A_\alpha^i$ . Zu erwähnen bleibt noch, dass die Voraussetzung 3.1 (ii) nur für die eingeschränkten Funktionen  $A_\alpha^i$  zu gelten braucht. In diesem Sinn sind also Sprünge zwischen verschiedenen  $A_\alpha^i$  erlaubt.

Wir ordnen den Differentialoperatoren  $P_i(D)$  auf den Teilgebieten entsprechende Formen zu, indem wir für  $u_i, v_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$a_i(u_i, v_i) := \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha^i(x, Du_i(x)) D^\alpha v_i(x) dx \quad (3.11)$$

definieren.

Wie im letzten Abschnitt folgt unter den Voraussetzungen 3.1 und 3.2, dass der für alle  $x \in \Omega_i$  durch

$$(F_\alpha^i u_i)(x) := A_\alpha^i(x, Du_i(x)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.12)$$

definierte NEMYTSKIJ-Operator  $F_\alpha^i : H^1(\Omega_i) \rightarrow L^2(\Omega_i)$  stetig und beschränkt ist mit

$$\|F_\alpha^i u_i\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \left( \|g|_{\Omega_i}\|_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{|\beta| \leq 1} \|D^\beta u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \right) \quad \forall u_i \in H^1(\Omega_i).$$

Die Eigenschaften der Formen auf den Teilgebieten fassen wir in folgendem Lemma zusammen.



**Lemma 3.2.1.** *Es gelten die Voraussetzungen 3.1 und 3.2. Für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert dann genau ein beschränkter stetiger Operator  $A_i : V_i \rightarrow (V_i)'$  mit*

$$\langle A_i u_i, v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, v_i) \quad \forall u_i, v_i \in V_i.$$

*Folglich ist die Form  $a_i$  beschränkt und stetig in beiden Argumenten. Gilt zusätzlich Voraussetzung 3.3, so ist  $A_i$  monoton, d.h.*

$$\langle A_i u_i - A_i v_i, u_i - v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, u_i - v_i) - a_i(v_i, u_i - v_i) \geq 0 \quad \forall u_i, v_i \in V_i.$$

*Mit Voraussetzung 3.4 gilt*

$$\langle A_i u_i, u_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, u_i) \geq c \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 - \int_{\Omega_i} h|_{\Omega_i} dx \quad \forall u_i \in V_i.$$

*Die Voraussetzung 3.5 sichert für alle  $u_i, v_i \in V_i$*

$$\langle A_i u_i - A_i v_i, u_i - v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, u_i - v_i) - a_i(v_i, u_i - v_i) \geq d \|\nabla(u_i - v_i)\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

*Beweis.* Mit Voraussetzung 3.1 und 3.2 beweisen wir analog zu Bemerkung 38(i) auf Seite 50

$$|a_i(u_i, v_i)| \leq \widehat{C} \left( \|g|_{\Omega_i}\|_{L^2(\Omega_i)} + \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)} \right) \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \quad \forall u_i, v_i \in V_i.$$

Damit und wegen der Linearität im zweiten Argument haben wir, für festes  $u_i \in V_i$ ,  $a_i(u_i, \cdot) \in (V_i)'$ . Für den Operator  $A_i : V_i \rightarrow (V_i)'$ ,  $u_i \mapsto A_i u_i := a_i(u_i, \cdot)$  folgt aus der letzten Abschätzung

$$\|A_i u_i\|_{(V_i)'} \leq \widehat{C} \left( \|g|_{\Omega_i}\|_{L^2(\Omega_i)} + \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)} \right),$$

also die Beschränktheit. Vollkommen analog zu Bemerkung 38(ii) erhalten wir für beliebige  $u_i, v_i, w_i \in V_i \subset H^1(\Omega_i)$

$$|a_i(u_i, w_i) - a_i(v_i, w_i)| \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \|F_\alpha^i u_i - F_\alpha^i v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)},$$

wobei  $F_\alpha^i : H^1(\Omega_i) \rightarrow L^2(\Omega_i)$  den stetigen NEMYTSKIJ-Operator (3.12) bezeichnet. Das liefert

$$\|A_i u_i - A_i v_i\|_{(V_i)'} \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \|F_\alpha^i u_i - F_\alpha^i v_i\|_{L^2(\Omega_i)},$$

woraus mit der Stetigkeit des NEMYTSKIJ-Operators die Stetigkeit von  $A_i$  folgt. Insbesondere haben wir damit auch die Stetigkeit der Form (3.11) in der ersten Komponente. Die restlichen Aussagen des Lemmas erhalten wir mit analoger Argumentation wie in Bemerkung 38(iii).  $\square$

Über die Formen auf den Teilgebieten können wir im HILBERT-Raum  $\widehat{H}^1 := \prod_{i=1}^m V_i$ , siehe auch (2.9) auf Seite 11, die im zweiten Argument lineare Form

$$\widetilde{a}(u, v) := \sum_{i=1}^m a_i(u_i, v_i) \tag{3.13}$$

definieren, welche wegen Lemma 3.2.1 unter den Voraussetzungen 3.1 und 3.2 beschränkt und stetig ist. Auch die anderen Aussagen des Lemmas übertragen sich. Die Bemerkung 4 auf Seite 11 gilt entsprechend. Insbesondere haben wir also  $\widetilde{a}(u, v) = a(u, v)$  für alle  $u, v \in H_0^1(\Omega) \subset \widehat{H}^1$ .

Das Transmissionsproblem (3.8) ist in der klassischen differentiellen Formulierung nur für hinreichend reguläre  $u_i$  sinnvoll erklärt. Deshalb betrachten wir wieder als Verallgemeinerung das *schwach formulierte quasilineare Transmissionsproblem*:

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j(u_j) & \text{in } H^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_j} u_j, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \tag{3.14}$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung für  $w_i \in V_i$  als lineares stetiges Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  via

$$\langle \partial_{P_i} w_i, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})} := a_i(w_i, \mathcal{R}^{ij} \mu) - (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu)_{L^2(\Omega_i)} \quad (3.15)$$

in Verallgemeinerung zu (3.10) definiert ist. Dabei ist  $\mathcal{R}^{ij} := \mathcal{R}^i \circ \tilde{\cdot} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), V_i)$  der Fortsetzungsoperator aus dem letzten Kapitel, wobei  $\tilde{\cdot} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H^{1/2}(\partial\Omega_i))$  die Nullfortsetzung auf den Gesamtrand  $\partial\Omega_i$  und  $\mathcal{R}^i \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega_i), V_i)$  einen beliebigen linearen stetigen Fortsetzungsoperator in  $V_i$ , siehe Abschnitt A.2.6 im Anhang, bezeichnet. Die Bedingungen (3.14)<sub>2,3</sub> betrachten wir als schwache Form der obigen Transmissionsbedingungen. Die erste Transmissionsbedingung können wir als Zulässigkeitsbedingung interpretieren, denn sie sichert mit Lemma 2.1.1 auf Seite 11, dass  $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  tatsächlich im Unterraum  $H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  liegt. Die zweite Transmissionsbedingung wiederum können wir als eine Art Gleichgewichtsbedingung deuten, denn wie wir noch sehen werden, erfüllt  $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  das Gesamtproblem (3.3) nur dann, wenn die Flüsse auf den jeweiligen Schnittstellen der Teilgebiete übereinstimmen.

*Bemerkung 40.* Die Bemerkung 8 auf Seite 17 gilt entsprechend, d.h. (3.14)<sub>1</sub> ist nur für alle  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$  zu erfüllen und die Konormalenableitungen in (3.14)<sub>3</sub> sind unabhängig von der Zerlegung als Funktionale auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  zu interpretieren.

*Bemerkung 41.* (i) Mit (3.15) und Lemma 3.2.1, sowie der Beschränktheit des Fortsetzungsoperators rechnen wir sofort nach, dass für festes  $w_i \in V_i$  die Konormalenableitung als Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  linear und stetig ist, d.h.  $\partial_{P_i} w_i \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  gilt.

(ii) Für klassische Lösungen  $w_i \in V_i$  von (3.8) gilt unter Beachtung der Abbildungseigenschaften des NEMYTSKIJ-Operators (3.12) und  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  insbesondere  $(A_\alpha^i(\cdot, Dw_i))_{|\alpha|=1} \in H(\text{div}, \Omega_i)$ , woraus wir mit Hilfe des Divergenzsatzes A.2.11 für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{|\alpha|=1} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i (A_\alpha^i(\cdot, Dw_i)) n_i^{\pi(\alpha)} \mu \, d\sigma &= \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha^i(\cdot, Dw_i) D^\alpha \mathcal{R}^{ij} \mu \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha^i(\cdot, Dw_i) \mathcal{R}^{ij} \mu \, dx \\ (3.8), (3.11) &\quad a_i(w_i, \mathcal{R}^{ij} \mu) - (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu)_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

erhalten. Damit kann (3.15) als Verallgemeinerung der Konormalenableitung (3.10) angesehen werden.

Eine Lösung von (3.14) bezeichnen wir als *schwache Lösung* des quasilinearen Transmissionsproblems (3.8). Dies verallgemeinert den Lösungsbegriff, wie wir wieder durch Multiplikation von (3.8)<sub>1</sub> mit  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$  bzw. mit  $v_i = \mathcal{R}^{ij} \mu \in V_i^{00}$ ,  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , Integration über  $\Omega_i$ , anschließender partieller Integration und Beachtung von Bemerkung 41(ii) sehen.

Wir erinnern an die Definition und die Eigenschaften der Teilmenge  $V_i^{00}$  von  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , siehe (2.23) auf Seite 17.

Dass die schwachen Formulierungen des quasilinearen Transmissionsproblems und des quasilinearen Modellproblems äquivalent sind, zeigt der folgende

**Satz 3.2.2.** *Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$ , siehe (2.9), eine schwache Lösung von (3.8). Dann ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  und löst (3.3) im schwachen Sinn. Umgekehrt gilt auch: Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (3.3), so ist  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  auch schwache Lösung von (3.8).*

*Beweis.* Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  eine Lösung von (3.14). Dann gilt, wegen (3.14)<sub>2</sub> und Lemma 2.1.1 auf Seite 11,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Sei nun  $w \in H_0^1(\Omega)$  beliebig. Dann ist natürlich  $w_i := w|_{\Omega_i} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und Lemma 2.2.1 liefert die Existenz eines  $w_i^0 \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i^{00}$  und einer Folge  $(w_i^k)_k \subset V_i^{00}$  mit  $w_i^0 + w_i^k \rightharpoonup w_i$  in  $H^1(\Omega_i)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wir beachten, dass die Konstruktion der schwach konvergenten Folgen im Lemma 2.2.1 immer so erfolgen kann, dass  $\mu_{ij}^k := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i^k = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j w_j^k =: \mu_{ji}^k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , für alle  $k$  gilt. Dies ist möglich, da  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j w_j$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ ,

ist. Wir setzen die approximierende Folge  $(\mu_{ij}^k)_k$  für  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i w_i$  also einmal mittels  $\mathcal{R}^{ij}$  und einmal mittels  $\mathcal{R}^{ji}$  fort. Zusammengefasst haben wir also für  $i = 1, \dots, m$  die Darstellung

$$w_i^k = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k \text{ mit } \mu_{ij}^k = \mu_{ji}^k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i).$$

Da nach Lemma 3.2.1 die im zweiten Argument lineare Form  $a_i$  auf  $V_i$  stetig ist, ist  $a_i(u_i, \cdot)$  für festes  $u_i \in V_i$  natürlich ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Selbiges gilt auch für  $(f_i, \cdot)_{L^2(\Omega_i)}$ . Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von Lemma 2.2.1 auf Seite 18

$$\begin{aligned} a(u, w) &= \sum_{i=1}^m a_i(u_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( a_i(u_i, w_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_i(u_i, w_i^k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( a_i(u_i, w_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) \right) \\ (3.14)_1 &= \sum_{i=1}^m (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) \\ (3.14)_3 &= \sum_{i=1}^m (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k)_{L^2(\Omega_i)} \\ &= \sum_{i=1}^m \left( (f_i, w_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \lim_{k \rightarrow \infty} (f_i, w_i^k)_{L^2(\Omega_i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (f_i, w_i)_{L^2(\Omega_i)} = (f, w)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei wir (3.14)<sub>3</sub> wegen  $\mu_{ij}^k = \mu_{ji}^k$  in der Form

$$a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k) + a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ji}^k) = (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k)_{L^2(\Omega_i)} + (f_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ji}^k)_{L^2(\Omega_j)}, i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i),$$

verwendet haben. Insgesamt erhalten wir damit (3.6).

Sei nun  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine Lösung von (3.6). Dann ist  $u_i = u|_{\Omega_i} \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und natürlich gilt (3.14)<sub>2</sub>. Zu beliebigem  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , setzen wir dann  $v_j := 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$  und erhalten  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega)$ . Für dieses  $v$  liefert (3.6)

$$a_i(u_i, v_i) = a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)},$$

d.h. (3.14)<sub>1</sub>. Zu beliebigem  $\mu_{ij} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  setzen wir  $v_i := \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}$ ,  $v_j := \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij}$  und  $v_k := 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$ . Dann ist  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega)$  und für dieses  $v$  liefert (3.6)

$$a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}) + a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij}) = a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + (f_j, \mathcal{R}^{ji} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_j)},$$

d.h. (3.14)<sub>3</sub>. □

Als direkte Folgerung erhalten wir eine Aussage zur Lösbarkeit des quasilinearen Transmissionsproblems.

**Korollar 3.2.3.** *Das quasilineare Transmissionsproblem (3.8) besitzt genau dann eine schwache Lösung, wenn das quasilineare Modellproblem (3.3) eine schwache Lösung besitzt. Ist eines der Probleme eindeutig lösbar, so auch das andere.*

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus dem letzten Satz. □

*Bemerkung 42.* Unter Benutzung von Korollar 3.1.2 ist damit unter den Voraussetzungen 3.1 bis 3.5 das quasilineare Transmissionsproblem (3.8) eindeutig schwach lösbar.

Wir werden die Transmissionsbedingungen umformulieren. Dazu seien Funktionen  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij}) \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Wie in Abschnitt 2.2 ab Seite 20 machen wir uns klar, dass für  $v_i \in V_i$  das Produkt  $\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  im  $L^2(\Gamma_{ij})$  liegt. Wegen der GELFAND-Dreier

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \text{ und } H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H^{-1/2}(\Gamma_{ij}),$$

wobei die Bezeichnungen der Dualräume wie in Abschnitt 2.2 gewählt sind, können wir den Ausdruck  $\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  auch als lineares stetiges Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bzw.  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  interpretieren. Mit  $\mathcal{I}^{00} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$  und  $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_{ij}), H^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$  bezeichnen wir wieder die Einbettungsoperatoren. Wegen (2.27) auf Seite 21 ist  $\mathcal{I}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  die eindeutige Fortsetzung von  $\mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ .

Für festes  $v_i \in V_i$  ist mit Bemerkung 41(i) auf Seite 54 neben  $\mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$  auch die nach (3.15) definierte Konormalenableitung  $\partial_{P_i}v_i$  ein lineares stetiges Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Wir können die schwachen Transmissionsbedingungen (3.14)<sub>2</sub> und (3.14)<sub>3</sub> also miteinander verknüpfen und erhalten in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_{P_i}u_i + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) &= -\partial_{P_j}u_j + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \\ \partial_{P_j}u_j + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ji}\gamma_{\Gamma_{ji}}^j(u_j) &= -\partial_{P_i}u_i + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ji}\gamma_{\Gamma_{ji}}^i(u_i) \end{cases} \quad (3.16)$$

Wir erhalten für jeden Teilrand  $\Gamma_{ij}$  tatsächlich zwei Gleichungen, da die beiden über  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$  gekoppelten Teilprobleme auf benachbarten  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$  jeweils eine der Gleichungen liefern.

Mit den Ausführungen in Bemerkung 8(ii) auf Seite 17 ist es im Allgemeinen nicht möglich die Konormalenableitung (3.15) zu einem stetigen Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  fortzusetzen. Deswegen können wir kein Analogon zu (3.16) in  $H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  formulieren.

Um die Äquivalenz der Gleichungen in (3.16) und der schwachen Transmissionsbedingungen (3.14)<sub>2,3</sub> sicherzustellen, benötigen wir die

**Voraussetzung 3.7.** Für  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x)| > 0$$

und weiter

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)| > 0.$$

Wir schränken also die Allgemeinheit bei der Wahl der  $\lambda_{ij}$  etwas ein, indem wir fordern, dass sowohl  $\lambda_{ij}$  als auch  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  betragsmäßig von der Null weg beschränkt sind. Diese Voraussetzung ist identisch mit Voraussetzung 2.8 und wurde nur zur besseren Übersichtlichkeit erneut wiedergegeben.

Nun formulieren wir die beiden folgenden Probleme:

Finde  $u_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) &= (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i}u_i + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu \rangle &= \langle -\partial_{P_j}u_j + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (3.17)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (3.15) erklärt ist.

Finde  $u_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle -\partial_{P_j}u_j + \mathcal{I}^{00}\lambda_{ij}\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle & \forall v_i \in V_i^{00}, \end{cases} \quad (3.18)$$

wobei das Dualitätsprodukt und die Konormalenableitung wie beim letzten Problem erklärt sind. Die Räume  $V_i^{00}$  sind in (2.23) auf Seite 17 definiert.

*Bemerkung 43.* In (3.18) reicht es tatsächlich aus, mit  $v_i \in V_i^{00} \subset V_i$  zu testen. Überdies ist es gar nicht möglich, mit  $v_i \in V_i \setminus V_i^{00}$  zu testen, da das Dualitätsprodukt auf der rechten Seite dann nicht erklärt wäre. Wegen  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  müssten wir  $-\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  als Funktional auf  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  auffassen, was nicht möglich ist, da die Konormalenableitung nicht als ein entsprechendes Funktional interpretierbar ist.

Die beiden letzten Probleme sind nur alternative Formulierungen des quasilinearen Transmissionsproblems (3.14), wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 3.2.4.** *Unter der Voraussetzung 3.7 sind die Probleme (3.14), (3.17) und (3.18) äquivalent, d.h. eine Lösung eines der drei Probleme erfüllt auch die beiden anderen Probleme.*

*Beweis.* I) (3.14)  $\iff$  (3.17) : Wir zeigen, dass die Transmissionsbedingung (3.16) äquivalent zu den schwachen Transmissionsbedingungen (3.14)<sub>2,3</sub> ist, woraus schon die Äquivalenz von (3.17) und (3.14) folgt.

Zunächst überlegen wir uns, dass mit Voraussetzung 3.7 für  $i = 1, \dots, m$  die Transmissionsbedingung (3.14)<sub>2</sub> äquivalent zu

$$\lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } L^2(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i), \quad (3.19)$$

ist. Die Hinrichtung ist klar. Es gelte umgekehrt (3.19), d.h. insbesondere

$$0 = \left\| \lambda_{ij} (\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \geq \operatorname{ess\,inf}_{\Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}| \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

Mit Voraussetzung 3.7 folgt sofort  $\left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} = 0$ , also  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  in  $L^2(\Gamma_{ij})$ . Dies ist (3.14)<sub>2</sub>, da die Spuren selbst natürlich in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  liegen. Wegen der Injektivität der Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  gilt, dass (3.19) wiederum äquivalent zu

$$\mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i), \quad (3.20)$$

ist. Durch Addition von (3.14)<sub>3</sub> mit (3.20) erhalten wir (3.16)<sub>1</sub>. Vertauschen von  $i$  und  $j$  liefert (3.16)<sub>2</sub>.

Gelte nun umgekehrt (3.16). Subtraktion von (3.16)<sub>1</sub> und (3.16)<sub>2</sub> liefert

$$\mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

woraus wegen der Injektivität von  $\mathcal{I}^{00}$  und Voraussetzung 3.7 analog zu oben  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j)$  in  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , folgt, d.h. (3.14)<sub>2</sub>. Somit haben wir wieder (3.20) zur Verfügung und dann liefert Addition von (3.16)<sub>1</sub> und (3.16)<sub>2</sub> für  $j \in \mathcal{N}(i)$

$$2 (\partial_{P_i} u_i + \partial_{P_j} u_j) = \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) \stackrel{(3.20)}{=} 0,$$

woraus (3.14)<sub>3</sub> folgt.

II) (3.17)  $\iff$  (3.18) : Es gelte zuerst (3.17). Sei  $v_i \in V_i^{00}$  beliebig und  $\mu_{ij} := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i)$ . Wir können  $v_i$  dann in der Form  $v_i = v_i^0 + v_i^1$  mit  $v_i^1 := \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij} \in V_i^{00}$  und  $v_i^0 := v_i - v_i^1 \in H_0^1(\Omega_i)$  schreiben. Mit diesem  $v_i$  gilt

$$\begin{aligned} a_i(u_i, v_i) &+ \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle \\ &\stackrel{(3.17)_1}{=} (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( a_i(u_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}) + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \right) \\ &\stackrel{(3.15)}{=} (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \left\langle \partial_{P_i} u_i, \mu_{ij} \right\rangle + (f_i, \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \right) \\ &= (f_i, v_i^0)_{L^2(\Omega_i)} + \left( f_i, \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij} \right)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu_{ij} \right\rangle \\ &\stackrel{(3.17)_2}{=} (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle \partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei die eckigen Klammern immer die Dualität in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnen. Dies ist (3.18), da  $v_i \in V_i^{00}$  beliebig war.

Umgekehrt gelte nun (3.18). Einsetzen von  $v_i \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i^{00}$  in (3.18) liefert sofort (3.17)<sub>1</sub>. Zu beliebigem  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , wobei die folgende Argumentation für jedes  $j \in \mathcal{N}(i)$  durchgeführt werden kann, definieren wir  $v_{ij} := \mathcal{R}^{ij}\mu \in V_i^{00}$ . Mit diesem  $v_{ij}$  liefert (3.18) nach Umstellen und unter Beachtung von  $\gamma_{\Gamma_{il}}^i(v_{ij}) = 0$  für  $l \neq j$

$$a_i(u_i, v_{ij}) - (f_i, v_{ij})_{L^2(\Omega_i)} + \left\langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_{ij}) \right\rangle = \left\langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_{ij}) \right\rangle.$$

Mit (3.15) und unter Beachtung von  $v_{ij} = \mathcal{R}^{ij}\mu$  erhalten wir daraus (3.17)<sub>2</sub>, weil  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , beliebig war.  $\square$

### 3.3 Die verallgemeinerte Schwarzsche Methode für quasilineare Probleme

Dieser Abschnitt gliedert sich in drei Teile. Im ersten Unterabschnitt werden wir die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode für lineare Probleme aus Abschnitt 2.4 auf quasilineare Randwertaufgaben übertragen. Dabei wird eine schwache Formulierung angegeben, die auch für komplexe Zerlegungen ohne Regularitätsforderungen an die Lösung des Gesamtproblems auskommt. Zudem wird eine alternative schwache Formulierung hergeleitet, die in den nachfolgenden Beweisen Verwendung findet. Weiterhin wird die Wohldefiniertheit des Algorithmus gezeigt. Im zweiten Unterabschnitt untersuchen wir einige Eigenschaften des Fehlers der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode. Dabei werden nötige Voraussetzungen präzisiert und Hilfsresultate bewiesen. Im dritten und letzten Unterabschnitt beweisen wir die Konvergenz des Verfahrens für gleichmäßig monotone quasilineare elliptische Probleme. Darüber hinaus diskutieren wir die Schwierigkeiten, die durch Verzicht auf die gleichmäßige Monotonie entstehen.

#### 3.3.1 Definition der VSAM im quasilinearen Fall

Die *verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* für quasilineare Probleme liest sich formal wie die für lineare Probleme aus Abschnitt 2.4.1.

Seien beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^n = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^n = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^n + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.21)$$

wobei die Konormalenableitung unter hinreichenden Regularitätsvoraussetzungen wieder durch (3.10) erklärt ist. Anschließend datieren wir die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen wie folgt auf

$$g_{ij}^{n+1} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})u_j^n - g_{ji}^n \text{ auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i). \quad (3.22)$$

Für die Verfahrensparameter  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , fordern wir vorerst nur Voraussetzung 3.7, um die Äquivalenz zwischen Modellproblem und Transmissionsproblem zu sichern. Wir lassen also alle von Null weg und wesentlich beschränkten Funktionen zu.

Da die differentielle Formulierung (3.21) wieder nur unter stärkeren Regularitätsforderungen sinnvoll ist, gehen wir in Analogie zu den vorhergehenden Abschnitten zum schwach formulierten Problem über. Es lautet:

Finde  $u_i^n \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \left\langle \partial_{P_i} u_i^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \mu \right\rangle = \langle g_{ij}^n, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (3.23)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (3.15) erklärt ist.

Eine äquivalente Formulierung ist folgende:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}, \end{cases} \quad (3.24)$$

wobei das Dualitätsprodukt und die Konormalenableitung wie in (3.23) erklärt sind. Die Definition der Räume  $V_i^{00}$  finden wir in (2.23) auf Seite 17.

Die Äquivalenz von (3.23) und (3.24) erhalten wir, wenn wir analog zum zweiten Teil des Beweises von Lemma 3.2.4 auf Seite 57 vorgehen.

Die Aufdatierungsformel (3.22) wollen wir in der schwachen Form im Dualraum interpretieren, also

$$g_{ij}^{n+1} = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i). \quad (3.25)$$

*Bemerkung 44.* (i) Da für  $i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ ,  $(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) \in L^2(\Gamma_{ij})$  ist, können wir durch die Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  der Gleichung (3.22) auch im  $L^2(\Gamma_{ij})$  einen Sinn geben, d.h. wir können in (3.25) auf die Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  verzichten und die Gleichung im  $L^2(\Gamma_{ij})$  auffassen. Damit haben wir für diese Wahl der Startwerte  $(g_{ij}^n)_n \subset L^2(\Gamma_{ij}), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ . Insbesondere können wir in diesem Fall wegen des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  die Dualitätsprodukte in (3.24) durch die Skalarprodukte in  $L^2(\Gamma_{ij})$  ersetzen. Zudem ist (3.24) dann auch für  $v_i \in V_i \setminus V_i^{00}$  sinnvoll erklärt und wir können das folgende, zu (3.24) äquivalente, Problem formulieren:

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \quad \forall v_i \in V_i. \end{cases} \quad (3.26)$$

Da  $V_i^{00} \subset V_i$ , folgt für  $g_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  aus (3.26) sofort (3.24). Umgekehrt sind sowohl die rechte als auch die linke Seite von (3.26) bezüglich  $v_i \in V_i$  lineare stetige Funktionale. Damit folgt (3.26) aus (3.24) und Lemma 2.2.1 auf Seite 18.

(ii) Für  $\lambda_{ij} = \text{const}$  fassen wir  $\mathcal{I}^{00}$  als lineare stetige Einbettung von  $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  auf. Falls zusätzlich noch die spezielle Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 zu Grunde liegt, reduziert sich die Einbettung  $\mathcal{I}^{00}$  sogar auf den RIESZ-Isomorphismus  $J \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$ . Für die Streifenzerlegung gilt nach Bemerkung 10 auf Seite 17 zudem  $V_i^{00} = V_i$ .

Die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode ist auch im quasilinearen Fall parallelisiert. In Analogie zu Bemerkung 17 auf Seite 24 kann ebenso eine sequentielle Variante angegeben werden.

Die Aufdatierungsformel der ROBIN-Daten (3.25) erhalten wir unmittelbar aus den Transmissionsbedingungen (3.16), wenn wir (3.16)<sub>1</sub> gleich  $g_{ij}$  und (3.16)<sub>2</sub> gleich  $g_{ji}$  setzen, die beiden Gleichungen addieren, anschließend nach  $g_{ij}$  auflösen und den iterativen Prozess einführen.

Im Gegensatz zur klassischen SCHWARZschen Methode (2.33), welche auf den Schnittstellen  $\Gamma_{ij}$  sowohl die DIRICHLET-Daten als auch die Konormalenableitung der Lösung der benachbarten Teilprobleme des vorigen Schrittes benötigt, kommt die modifizierte Methode (3.21) ohne die Konormalenableitung des vorhergehenden Iterationsschrittes aus. Diese ableitungsfreie Variante hat insbesondere numerische Vorteile, da wir uns in jedem Iterationsschritt die explizite Bestimmung und Auswertung der Konormalenableitung ersparen.

Um die Wohldefiniertheit des Algorithmus (3.21) - (3.22), d.h. die Existenz (und Eindeutigkeit) der Lösung von (3.23) bzw. (3.24) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zu sichern, benötigen wir für die Verfahrensparameter die strikte Positivität, d.h.

**Voraussetzung 3.8.** Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(x) = \underline{\lambda}_{ij} > 0.$$

Diese Voraussetzung ist identisch mit der Voraussetzung 2.9 und wurde nur zur besseren Übersichtlichkeit erneut wiedergegeben. Nun gilt

**Lemma 3.3.1.** *Es gelten die Voraussetzungen 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 und 3.8. Dann besitzen die Probleme (3.23) bzw. (3.24) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung, falls für die Startwerte der Iteration  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gilt. Liegt speziell die Streifenzerlegung aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 vor, so ist keine zusätzliche Regularität der Startwerte erforderlich, d.h. beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , sind zulässig. Gilt überdies Voraussetzung 3.5, so sind die Lösungen eindeutig.*

*Beweis.* Sei  $i \in \{1, \dots, m\}$  beliebig. Das Problem (3.24) schreiben wir in der Form

$$\widehat{a}_i(u_i^n, v_i) = \widehat{b}_i^n(v_i) \quad \forall v_i \in V_i, \quad (3.27)$$

wobei wir unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n) \in L^2(\Gamma_{ij})$  abkürzend

$$\widehat{a}_i(u_i^n, v_i) := a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

und im Fall, dass die Startwerte und damit nach Bemerkung 44(i) auf Seite 59 für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , die gesamten Folgen  $(g_{ij}^n)_n$  aus  $L^2(\Gamma_{ij})$  sind,

$$\widehat{b}_i^n(v_i) := (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

bzw. im Fall der Streifenzerlegung und Startwerten aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\widehat{b}_i^n(v_i) := (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gesetzt haben. Wie im Beweis von Lemma 2.4.1 auf Seite 29 sehen wir, dass  $\widehat{b}_i^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  in beiden Fällen ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$  ist. Weiter werden wir zeigen, dass (3.27) äquivalent zur Operatorgleichung

$$\widehat{A}_i u_i^n = \widehat{b}_i^n \quad (3.28)$$

mit monotonem, koerzivem, stetigem und beschränktem Operator  $\widehat{A}_i$  ist. Mit Voraussetzung 3.5 ist der Operator zudem gleichmäßig monoton. Dann liefert der Hauptsatz A.3.1 über monotone Operatoren die Aussagen des Lemmas.

Das Lemma 3.2.1 auf Seite 53 liefert die Existenz eines stetigen beschränkten Operators  $A_i : V_i \rightarrow (V_i)'$  mit

$$\langle A_i u_i, v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, v_i) \quad \forall u_i, v_i \in V_i.$$

Der zweite Summand von  $\widehat{a}_i(u_i, v_i)$  ist linear und stetig in  $u_i$  und  $v_i$ , da

$$\left| \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \right| \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\lambda_{ij}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\gamma_{\Gamma_{ij}}^i\|^2 \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)} \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}$$

gilt, wie wir leicht mit Hilfe der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung und der Beschränktheit des Spurooperators  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i \in \mathcal{L}(V_i, H^{1/2}(\Gamma_{ij}))$  sehen. Für festes  $u_i \in V_i$  stellt er insbesondere ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$  dar. Dann existiert genau ein linearer stetiger Operator  $B_i \in \mathcal{L}(V_i, (V_i)')$ , sodass

$$\langle B_i u_i, v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left( \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \quad \forall u_i, v_i \in V_i$$



gilt. Mit  $m := \min_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}$ , siehe auch Voraussetzung 3.8, haben wir für alle  $u_i \in V_i$  zudem die Abschätzung

$$\langle B_i u_i, u_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} \geq m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2.$$

Nun gilt für den stetigen beschränkten Operator  $\widehat{A}_i := A_i + B_i : V_i \rightarrow (V_i)'$  natürlich

$$\left\langle \widehat{A}_i u_i, v_i \right\rangle_{(V_i)' \times V_i} = \widehat{a}_i(u_i, v_i) \quad \forall u_i, v_i \in V_i.$$

Weiter berechnen wir, wobei wir abkürzend bei dem Dualitätsprodukt die Räume weglassen,

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{A}_i u_i - \widehat{A}_i v_i, u_i - v_i \right\rangle &= \langle A_i u_i - A_i v_i, u_i - v_i \rangle + \langle B_i(u_i - v_i), u_i - v_i \rangle \\ &\geq \langle A_i u_i - A_i v_i, u_i - v_i \rangle + m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i - v_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \quad \forall u_i, v_i \in V_i, \end{aligned}$$

woraus mit Lemma 3.2.1 auf Seite 53 unter der Voraussetzung 3.3 die Monotonie von  $\widehat{A}_i$  und unter der Voraussetzung 3.5 und der FRIEDRICHS-Ungleichung Satz A.2.1

$$\left\langle \widehat{A}_i u_i - \widehat{A}_i v_i, u_i - v_i \right\rangle \geq \frac{\min(d, m)}{C_F^2} \|u_i - v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \quad \forall u_i, v_i \in V_i,$$

also insbesondere die gleichmäßige Monotonie von  $\widehat{A}_i$  folgt. Dabei bezeichnet  $d$  die Konstante aus Voraussetzung 3.5 und  $C_F$  die Konstante der FRIEDRICHS-Ungleichung. Weiter haben wir in Verbindung mit Lemma 3.2.1 unter Voraussetzung 3.4 und der FRIEDRICHS-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{A}_i u_i, u_i \right\rangle &\geq \langle A_i u_i, u_i \rangle + m \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \\ &\geq \frac{\min(c, m)}{C_F^2} \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 - \int_{\Omega_i} h|_{\Omega_i} dx \quad \forall u_i \in V_i, \end{aligned}$$

also die Koerzivität von  $\widehat{A}_i$ . Dabei sind  $m$  und  $C_F$  wie oben zu verstehen und  $c$  ist die Konstante aus Voraussetzung 3.4. Nun liefert der Hauptsatz A.3.1 über monotone Operatoren die gewünschten Aussagen zur Lösbarkeit der Operatorgleichung (3.28), woraus dann wegen der Äquivalenz zu (3.27) die Behauptungen des Lemmas folgen.  $\square$

*Bemerkung 45.* Das letzte Resultat bleibt gültig, wenn die Voraussetzung 3.1(ii) auf Seite 49 nur für die eingeschränkten Funktionen  $A_\alpha^i$  erfüllt ist. Die Stetigkeit wird also nur für  $A_\alpha^i(x, \cdot)$ ,  $x \in \Omega_i$ , nicht aber für  $A_\alpha(x, \cdot)$ ,  $x \in \Omega$  gefordert. Damit sind insbesondere Sprünge von  $A_\alpha(x, \cdot)$  zwischen den Teilgebieten erlaubt.

### 3.3.2 Eigenschaften des Fehlers der VSAM im quasilinearen Fall

Der Konvergenzbeweis der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode wird, wie schon im linearen Fall, auf einer geeigneten Abschätzung des Fehlers beruhen. Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \widehat{H}^1$  die schwache Lösung des quasilinearen Gesamtproblems (3.3) und damit auch die schwache Lösung des linearen Transmissionsproblems (3.8) und  $u^n = (u_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \widehat{H}^1$  sei die schwache Lösung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (3.21) im  $n$ -ten Iterationsschritt. Wir führen für den *Fehler* der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode im  $n$ -ten Iterationsschritt wieder die Bezeichnungen (2.46) ein, das ist

$$e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = u^n - u \in \widehat{H}^1.$$

*Bemerkung 46.* Im Allgemeinen gilt  $u^n \notin H^1(\Omega)$ . Insbesondere ist dann  $e^n \notin H^1(\Omega)$ . Deshalb ist es nicht sinnvoll von einer Konvergenz im  $H^1(\Omega)$  zu sprechen. Im Folgenden wird die  $\widehat{H}^1$ -Konvergenz, siehe (2.9) auf Seite 11, von (3.21)-(3.22) gezeigt, also die  $H^1(\Omega_i)$ -Konvergenz bezüglich jedem Teilgebiet  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Die zu Grunde liegenden Differentialoperatoren  $P_i(D)$  sind nichtlinear, sodass der Fehler  $e^n$  nun nicht einem (2.47) entsprechendem Problem genügt. Wenn wir allerdings die Differenz der schwachen Formulierungen (3.23) und (3.17) bzw. (3.24) und (3.18) bilden, so sehen wir, dass der Fehler den folgenden beiden Problemen genügt.

Mit  $e_i^n = u_i^n - u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i^n - \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \mu \rangle = \langle \widetilde{g}_{ij}^n, \mu \rangle \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{array} \right. \quad (3.29)$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet und die Konormalenableitung nach (3.15) mit  $f_i = 0$  erklärt ist. Weiter wurde abkürzend

$$\widetilde{g}_{ij}^n := g_{ij}^n - \left( \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) \right) \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \quad (3.30)$$

definiert. Wir erinnern daran, dass  $u_i$  die schwache Lösung des quasilinearen Transmissionsproblems (3.8) bezeichnet.

Mit  $e_i^n = u_i^n - u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \widetilde{g}_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

wobei das Dualitätsprodukt wie in (3.29) und  $\widetilde{g}_{ij}^n$  wie in (3.30) erklärt ist. Die Definition der Räume  $V_i^{00}$  finden wir in (2.23) auf Seite 17.

Die beiden Formulierungen sind natürlich äquivalent, da (3.23) und (3.24) sowie (3.17) und (3.18) äquivalent sind.

Wir rechnen leicht nach, dass für die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen die folgende Aufdatierungsformel gilt

$$\widetilde{g}_{ij}^{n+1} = \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n) - \widetilde{g}_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i). \quad (3.32)$$

*Bemerkung 47.* Die Bemerkung 23 auf Seite 31 gilt entsprechend, d.h. allein durch die regulärrere Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  können wir nicht sichern, dass  $\widetilde{g}_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  gilt. Dies ist offensichtlich, da in (3.30) auch die Konormalenableitung  $\partial_{P_i} u_i$  der Lösung des quasilinearen Modellproblems bzw. des quasilinearen Transmissionsproblems eingeht, diese im Allgemeinen aber nur als Funktional auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  erklärt ist. Um  $(\widetilde{g}_{ij}^n)_n \subset L^2(\Gamma_{ij}), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ , sichern zu können benötigen wir neben  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$  auch noch die auf Seite 64 stehende Voraussetzung 3.10.

Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir nachfolgend  $\widetilde{g}_{ij}^n$  wieder mit  $g_{ij}^n$  und erinnern uns, dass im Zusammenhang mit dem Fehler  $e_i^n$  immer (3.30) gemeint ist.

Unter Benutzung dieser Konvention erhalten wir direkt aus (3.31)

$$a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}. \quad (3.33)$$

Wir verallgemeinern (3.33) auf beliebige  $v_i \in V_i$  und erhalten das, für  $V_i^{00} \subsetneq V_i$  nicht ganz triviale,

**Lemma 3.3.2.**  $e_i^n = u_i^n - u_i \in V_i$  erfülle (3.31) und  $v_i \in V_i$  sei beliebig. Wir definieren  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n - u_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\mu_{ij} := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i)$ . Dann existieren Folgen  $(\mu_{ij}^k)_k \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit

$$\|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

und zwar so, dass

$$a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gilt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k)_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\mu_{ij}^k\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

*Beweis.* Da nach Lemma 3.2.1 auf Seite 53 die Bilinearform  $a_i$  auf  $V_i$  stetig und im zweiten Argument sogar linear ist, ist  $a_i(u_i^n, \cdot) - a_i(u_i, \cdot)$  für feste  $u_i^n, u_i \in V_i$  natürlich ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Mit Lemma 2.2.1 auf Seite 18 können wir  $v_i$  in der Form  $v_i = v_i^0 + w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} v_i^k$ , mit  $v_i^0 \in H_0^1(\Omega_i)$  und  $v_i^k = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ij} \mu_{ij}^k \in V_i^{00}$ ,  $\mu_{ij}^k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit der oben angegebenen Konvergenzeigenschaft, schreiben. Siehe auch den Beweis zu Satz 2.2.2 auf Seite 19. Lemma 2.2.1 liefert zudem unter Beachtung von (3.29)<sub>1</sub>, (3.33) und  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i^k) = \mu_{ij}^k$

$$\begin{aligned} a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) &= a_i(u_i^n, v_i^0) - a_i(u_i, v_i^0) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_i(u_i^n, v_i^k) - a_i(u_i, v_i^k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

also die erste Behauptung. Umstellen liefert (mit abkürzender Schreibweise für das Dualitätsprodukt)

$$a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \mu_{ij}^k \rangle,$$

woraus unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $\lambda_{ij} \eta_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  sowie Lemma A.1.2

$$a_i(u_i^n, v_i) - a_i(u_i, v_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^k)_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\mu_{ij}^k\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

folgt, was zusammen mit

$$\|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \|\mu_{ij}^k - \mu_{ij}\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

nach Grenzübergang die Abschätzung liefert.  $\square$

Im Allgemeinen liegt  $e_i^n \in V_i$  nicht in  $V_i^{00}$ . Mit dem letzten Lemma folgern wir

**Korollar 3.3.3.**  $e_i^n = u_i^n - u_i \in V_i$  erfülle (3.31). Wir definieren  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ . Dann existieren Folgen  $(\mu_{ij}^{k,n})_k \subset H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  mit

$$\|\mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

und zwar so, dass

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \mu_{ij}^{k,n} \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}$$

gilt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus dem letzten Lemma.  $\square$

*Bemerkung 48.* Für  $e_i^n \in V_i^{00}$  vereinfacht sich die Aussage von Korollar 3.3.3. Dann gilt mit (3.33) sofort

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}.$$

Insbesondere ist dies für die Streifenzerlegungen aus Bemerkung 1(i) auf Seite 9 der Fall. Es sei auch auf Bemerkung 10 auf Seite 17 verwiesen.

Wir werden die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode unter verschiedenen Voraussetzungen an die Verfahrensparameter beweisen. Wenn wir keine zusätzlichen Regularitätsforderungen an die Lösung des Modellproblems (3.3) bzw. des Transmissionsproblems (3.8) stellen wollen, dann müssen wir die Freiheit in der Wahl der Verfahrensparameter  $\lambda_{ij}$  einschränken, indem wir diese mit zusätzlicher Regularität versehen. Wir benötigen die technische

**Voraussetzung 3.9.** Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  ein Multiplikator für  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , d.h. es gilt

$$(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}).$$

Diese Voraussetzung ist identisch zu Voraussetzung 2.10 und wird hier nur aus Gründen der Übersichtlichkeit erneut aufgeführt. Um auf diese Voraussetzung verzichten zu können, müssen wir etwas mehr Regularität von der Lösung des Modellproblems bzw. wegen Satz 3.2.2 auf Seite 54 von der Lösung des Transmissionsproblems fordern. Wir benötigen dann, in Analogie zu Voraussetzung 2.11, die ebenfalls technische

**Voraussetzung 3.10.** Für die Lösung  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  des quasilinearen Modellproblems (3.3) bzw. des quasilinearen Transmissionsproblems (3.8) gelte  $\partial_{P_i} u_i \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , d.h. sämtliche Konormalenableitungen auf den Schnittstellen der Teilgebiete sind als quadratintegrierbare Funktionen interpretierbar.

*Bemerkung 49.* Die Bemerkung 25 auf Seite 33 gilt entsprechend: Unter der Voraussetzung 3.10 können wir durch die Wahl der Startwerte  $g_{ij}^0 \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode (3.21) sicherstellen, dass die sich für (3.29) bzw. (3.31) ergebende Folge  $(\bar{g}_{ij}^n)_n$ , die wir nach obiger Konvention wieder mit  $(g_{ij}^n)_n$  bezeichnen, in  $L^2(\Gamma_{ij})$  liegt. Wir verweisen auf Bemerkung 47 auf Seite 62. Weiterhin können wir unter dieser Voraussetzung mit obigen Startwerten die Aussage des Korollars 3.3.3 verschärfen. Wir gehen dann unter Beachtung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  und  $g_{ij}^n - \lambda_{ij} \eta_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  vom Dualitätsprodukt zum Skalarprodukt über und erhalten nach Grenzübergang für  $i = 1, \dots, m$

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (g_{ij}^n - \lambda_{ij} \eta_{ij}^n, \eta_{ij}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (3.34)$$

Dabei wurde

$$\left\| \mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \left\| \mu_{ij}^{k,n} - \eta_{ij}^n \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

benutzt.

Abkürzend führen wir wieder die Schreibweise (2.56) ein, also mit  $g = (g_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}$ ,  $g_{ij} \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ ,

$$\| \| g \| \|^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left\langle \mathcal{I}^{00} \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}, J^{-1} g_{ij} \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})}. \quad (3.35)$$

Dabei bezeichnet  $J \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}))$  den RIESZ-Isomorphismus. Unter Voraussetzung 3.7 ist der Ausdruck sinnvoll erklärt, da der Nenner  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  nicht Null ist. Um darüber hinaus die Nichtnegativität von (3.35) für beliebige  $g_{ij} \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , zu sichern benötigen wir die technische Voraussetzung 2.12, die hier nochmals wiedergegeben wird.

**Voraussetzung 3.11.** Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)) = \underline{m}_{ij} > 0.$$

*Bemerkung 50.* Die Voraussetzung 3.11 wird durch die stärkere Voraussetzung 3.8 auf Seite 60, welche für die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode nötig war, impliziert. Die nachfolgenden Hilfssätze werden unter der schwächeren Voraussetzung 3.11 bewiesen.

Wie auf Seite 34 berechnen wir unter Voraussetzung 3.11 mit  $\overline{m_{ij}} := \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$

$$\|g\|^2 \geq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \frac{1}{\overline{m_{ij}}} \|g_{ij}\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})}^2 \geq 0.$$

*Bemerkung 51.* Die Bemerkung 27 auf Seite 34 gilt entsprechend. Insbesondere haben wir für reguläres  $g_{ij} \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , die Darstellung (2.57), also

$$\|g\|^2 := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} g_{ij}, g_{ij} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (3.36)$$

Wir formulieren das, dem Lemma 2.4.5 auf Seite 34 im quasilinearen Fall entsprechende,

**Lemma 3.3.4.** *Sei  $u^n \in \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (3.21) und  $u \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Dann erfüllt  $e^n = u^n - u = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  (3.29) und (3.31). Weiter seien die Voraussetzungen 3.7 und 3.11 erfüllt. Zusätzlich gelte eine der Voraussetzungen 3.9 oder 3.10. Dann gilt mit*

$$g^l = (g_{ij}^l)_{1 \leq i \neq j \leq m}, \quad l \in \{n, n+1\},$$

$$\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n) = \frac{1}{2} \left( \|g^n\|^2 - \|g^{n+1}\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \left( \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n) \right)^2 d\sigma \right), \quad (3.37)$$

wobei  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  die Form (3.13) bezeichnet.

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnung  $\eta_{ji}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^n)$ . Ohne eine der zusätzlichen Voraussetzungen berechnen wir mit dem GELFAND-Dreier  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \|g^{n+1}\|^2 &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} g_{ij}^{n+1}, J^{-1} g_{ij}^{n+1} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\stackrel{(3.32), (3.35)}{=} \|g^n\|^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} 2 \cdot \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (g_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}, \end{aligned}$$

also

$$\|g^n\|^2 - \|g^{n+1}\|^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n), J^{-1} (2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}. \quad (3.38)$$

A) Es gelte Voraussetzung 3.9. Wir betrachten zwei Fälle.

A.I) Sei  $e_i^n \in V_i^{00}$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Insbesondere gilt dann  $\eta_{ji}^n \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Die Voraussetzung 3.9 liefert nun

$$J^{-1} (\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) = J^{-1} (J(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n.$$

Zusammen mit (3.38) haben wir dann unter Beachtung des obigen GELFAND-Dreiers

$$\begin{aligned} \|\|g^n\|\|^2 - \|\|g^{n+1}\|\|^2 &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \langle (g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ji} \eta_{ji}^n) + (g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n), \eta_{ji}^n \rangle \\ (3.33) \quad &= \sum_{j=1}^m \left( a_j(u_j^n, e_j^n) - a_j(u_j, e_j^n) + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle \right). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Identität

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle = a_j(u_j^n, e_j^n) - a_j(u_j, e_j^n) - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \langle \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle,$$

liefert uns das

$$\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n) = \frac{1}{2} \left( \|\|g^n\|\|^2 - \|\|g^{n+1}\|\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} \langle \mathcal{I}^{00} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n \rangle \right),$$

also im speziellen Fall  $e_j^n \in V_j^{00}$  die Behauptung, weil wir das Dualitätsprodukt auf Grund der Regularität durch das Skalarprodukt im  $L^2(\Gamma_{ij})$  ersetzen können.

A.II) Sei nun  $e_i^n \in V_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Die Abbildung

$$h : v_j \mapsto \left( \frac{1}{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}} J^{-1}(\mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(v_j)), J^{-1}(2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

ist wegen

$$|h(v_j)| \leq \|J^{-1}(2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n)\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \cdot \underline{m}_{ij} \cdot \|J^{-1} \circ \mathcal{I}^{00}\| \cdot \overline{m}_{ij} \cdot \|\gamma_{\Gamma_{ij}}^j\| \cdot \|v_j\|_{H^1(\Omega_j)}$$

ein lineares stetiges Funktional auf  $V_j$ . Für  $e_j^n \in V_j$  existiert eine Darstellung

$$e_j^n = e_j^{0,n} + \text{w-lim}_{k \rightarrow \infty} e_j^{k,n}, \quad e_j^{0,n} \in H_0^1(\Omega_j), \quad e_j^{k,n} = \sum_{i \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{R}^{ji} \mu_{ji}^{k,n} \in V_j^{00}, \quad \mu_{ji}^{k,n} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$$

mit

$$\|\mu_{ji}^{k,n} - \eta_{ji}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Siehe auch den Beweis zu Lemma 3.3.2. Wir erinnern daran, dass die Folgen  $(e_j^{k,n})_k$  so gewählt werden können, dass  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(e_j^{k,n}) = \mu_{ji}^{k,n} = \mu_{ij}^{k,n} = \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^{k,n})$  gilt. Für die genaue Konstruktion sei auf den Beweis zu Satz 2.2.2 auf Seite 19 verwiesen. Jetzt liefert Lemma 2.2.1 auf Seite 18 und  $h(w_j) = 0$  für alle  $w_j \in H_0^1(\Omega_j)$

$$h(e_j^n) = h(e_j^{0,n}) + \lim_{k \rightarrow \infty} h(e_j^{k,n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(e_j^{k,n}).$$

Unter Voraussetzung 3.9 erhalten wir analog zu A.I)

$$h(e_j^{k,n}) = \left( \mu_{ji}^{k,n}, J^{-1}(2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n) \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \left\langle 2g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \mu_{ji}^{k,n} \right\rangle.$$

Gehen wir weiter wie in Teil A.I) vor, so erhalten wir unter Beachtung von Korollar 3.3.3 und der Identität

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\langle g_{ji}^n - \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \eta_{ji}^n, \mu_{ji}^{k,n} \right\rangle = a_j(u_j^n, e_j^n) - a_j(u_j, e_j^n) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left( (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \mu_{ji}^{k,n} \right)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

und anschließendem Grenzübergang

$$\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n) = \frac{1}{2} \left( \|\|g^n\|\|^2 - \|\|g^{n+1}\|\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} ((\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \right),$$

also die Behauptung des Lemmas.

B) Gelte nun Voraussetzung 3.10. Unter dieser zusätzlichen Regularitätsforderungen haben wir (3.36). Damit vereinfacht sich (3.38) und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\|g^n\|^2 - \|g^{n+1}\|^2 &\stackrel{(3.38)}{=} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (2g_{ji}^n - (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{ji}^n - \lambda_{ji}\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij}\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&\stackrel{(3.34)}{=} \sum_{j=1}^m (a_j(u_j^n, e_j^n) - a_j(u_j, e_j^n)) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \in \mathcal{N}(j)}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij}\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})},
\end{aligned}$$

was mit der Identität

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} (g_{ji}^n - \lambda_{ij}\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})} = a_j(u_j^n, e_j^n) - a_j(u_j, e_j^n) - \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} ((\lambda_{ij} - \lambda_{ji})\eta_{ji}^n, \eta_{ji}^n)_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

die Aussage des Lemmas liefert.  $\square$

Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Für  $i = 1, \dots, m$  definieren wir die Mengen

$$K_i := \{w_i \in V_i \mid a_i(w_i, u_i) - a_i(u_i, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i)\} \subset V_i, \quad (3.39)$$

wobei  $a_i$  die Form (3.11) bezeichnet.

Mit der folgenden technischen Voraussetzung, welche die Übertragung von Voraussetzung 2.13 auf den quasilinearen Fall darstellt, können wir mit Hilfe von Lemma 3.3.4 den nächsten Hilfssatz beweisen.

**Voraussetzung 3.12.** Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Für  $j = 1, \dots, m$  gelte

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j (v_j - u_j)^2 d\sigma \leq C (a_j(v_j, v_j - u_j) - a_j(u_j, v_j - u_j)) - N_j(v_j - u_j) \quad \forall v_j \in K_j.$$

Dabei sei  $N_j(v_j) \geq 0$  für alle  $v_j \in K_j \subset V_j$  und  $0 < C \leq 2$ .

Diese Voraussetzung kann nicht ohne Weiteres nachgeprüft werden, da dazu bereits die Lösung  $u$  des quasilinearen Modellproblems (3.3) bekannt sein muss. Wir benötigen diese Lösung sogar schon, um die Mengen  $K_i$  zu bestimmen. Die Voraussetzung ist aber tatsächlich erfüllbar. Für die spezielle Wahl  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  ist obige Voraussetzung für  $N_j \equiv 0$  und monotonen  $a_j(\cdot, \cdot)$  erfüllt. Die Monotonie der Form folgt beispielsweise sofort aus den Voraussetzungen 3.1 bis 3.3, wie Lemma 3.2.1 auf Seite 53 zeigt.

*Bemerkung 52.* Falls neben den Voraussetzungen 3.1 und 3.2 auch Voraussetzung 3.5 gilt, haben wir nach Lemma 3.2.1 auf Seite 53 insbesondere

$$a_j(v_j, v_j - u_j) - a_j(u_j, v_j - u_j) \geq d \|\nabla(v_j - u_j)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \quad \forall v_j \in V_j \supset K_j.$$

Zusammen mit der FRIEDRICHS-Ungleichung, Satz A.2.1, und der Beschränktheit der Spurooperatoren  $\gamma_{\Gamma_{ij}}^j$ , siehe Satz A.2.8, berechnen wir dann die für Voraussetzung 3.12 hinreichende Bedingung: Es existiert ein  $0 < C \leq 2$  und  $N_j(\cdot) \geq 0$ , sodass

$$N_j(v_j - u_j) \leq \left( \left( C_\gamma^2 + \frac{1}{C_F^2} \right) \cdot d \cdot C - m \cdot C_\gamma^2 \right) \|v_j - u_j\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \quad \forall v_j \in K_j$$

gilt. Dabei bezeichnet  $C_F = C_F(\Omega_j, \bigcup_{i \in \mathcal{N}(j)} \Gamma_{ij})$  die Konstante der FRIEDRICHS-Ungleichung und  $d$  die Konstante aus Voraussetzung 3.5, die Beschränktheit der Spurooperatoren geht

in  $C_\gamma := \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \left\| \gamma_{\Gamma_{ij}}^j \right\|^2$  ein und die Verfahrensparameter werden mittels  $m := \max_{i \in \mathcal{N}(j)} \|\lambda_{ij} - \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$  abgeschätzt. Für den Fall  $N_j \equiv 0$  ist die obige Ungleichung erfüllt, falls ein  $0 < C \leq 2$  existiert, sodass

$$\left(1 + \frac{1}{C_\gamma^2 C_F^2}\right) \cdot d \cdot C \geq m$$

gilt.

Mit der letzten Voraussetzung formulieren wir nun

**Lemma 3.3.5.** *Sei  $u^n \in \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (3.21) und  $u \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Dann erfüllt  $e^n = u^n - u = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  (3.29) und (3.31). Weiter seien die Voraussetzungen 3.7, 3.11 und 3.12, sowie zusätzlich eine der Voraussetzungen 3.9 oder 3.10 erfüllt. Dann gilt*

$$(2 - C) (\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n)) + \sum_{j=1}^m N_j(e_j^n) \leq \|g^n\|^2 - \|g^{n+1}\|^2, \quad (3.40)$$

wobei  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  wieder die Bilinearform (3.13) bezeichnet.

*Beweis.* Die Behauptung folgt offensichtlich aus Lemma 3.3.4 und Voraussetzung 3.12.  $\square$

Um im nächsten Beweis ein Summationsargument anwenden zu können, benötigen wir die technische

**Voraussetzung 3.13.** Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Für alle  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m K_i \subset \hat{H}^1$ , siehe (3.39), gelte

$$0 \leq \tilde{a}(v, v - u) - \tilde{a}(u, v - u) = \sum_{i=1}^m (a_i(v_i, v_i - u_i) - a_i(u_i, v_i - u_i)).$$

*Bemerkung 53.* Die Nichtnegativität wird nur für die Differenz  $\tilde{a}(v, v - u) - \tilde{a}(u, v - u)$  gefordert. Die einzelnen Summanden  $a_i(v_i, v_i - u_i) - a_i(u_i, v_i - u_i)$  dürfen sehr wohl negativ sein. Die Voraussetzung ist natürlich erfüllbar. Sie folgt beispielsweise direkt aus der Monotonievoraussetzung 3.3, wie wir mit Lemma 3.2.1 auf Seite 53 sehen.

Mit diesen Vorbereitungen formulieren wir nun das, für den Konvergenzbeweis im nächsten Abschnitt wichtige,

**Lemma 3.3.6.** *Die Lösungsfolge  $(u^n)_n \subset \hat{H}^1$  sei durch (3.21)-(3.22) erzeugt und  $u \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  sei eine schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Dann erfüllt  $e^n = u^n - u = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (3.29) und (3.31). Weiter seien die Voraussetzungen 3.7, 3.11, 3.12 und 3.13 sowie zusätzlich eine der Voraussetzungen 3.9 oder 3.10 erfüllt. Dann gilt*

$$(\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad N_i(e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.41)$$

falls für die Konstante aus Voraussetzung 3.12  $C < 2$  gilt. Ist für alle  $i = 1, \dots, m$

$$a_i(v_i, v_i - u_i) - a_i(u_i, v_i - u_i) \geq 0 \quad \forall v_i \in K_i,$$

mit  $K_i$  nach (3.39), so gilt überdies

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Gilt für die Konstante aus Voraussetzung 3.12 der Grenzfall  $C = 2$ , so bleibt die Aussage

$$N_i(e_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

auch ohne Voraussetzung 3.13 gültig.



*Beweis.* Lemma 3.3.5 und Summation über  $n \in \mathbb{N}$  liefert

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( (2 - C) (\tilde{a}(u^n, e^n) - \tilde{a}(u, e^n)) + \sum_{i=1}^m N_i(e_i^n) \right) \leq \|g^0\|^2,$$

woraus unter Beachtung von Voraussetzung 3.12, also insbesondere  $N_i(e_i^n) \geq 0$  und  $C < 2$ , und der Voraussetzung 3.13 die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung folgt mit (3.13) direkt aus der ersten. Die letzte Behauptung erhalten wir ebenfalls aus obiger Reihe, wenn wir beachten, dass für  $C = 2$  der erste Summand verschwindet.  $\square$

*Bemerkung 54.* Die Bemerkung 30 auf Seite 38 gilt entsprechend, d.h. um (3.41) zu sichern, kann im Fall  $C < 2$  auf Voraussetzung 3.13 nicht verzichtet werden.

### 3.3.3 Zur Konvergenz der VSAM im quasilinearen Fall

In diesem Abschnitt werden wir, analog zum linearen Fall, die starke  $\hat{H}^1$ -Konvergenz der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode (3.21)-(3.22) gegen eine Lösung des quasilinearen Modellproblems bzw. des quasilinearen Transmissionsproblems zeigen. Dabei sind alle in Abschnitt 2.1 definierten Zerlegungen des Gesamtgebietes  $\Omega$  zugelassen, also insbesondere auch Zerlegungen in mehr als zwei Teilgebiete, von denen nicht alle einen echten Außenrand zu haben brauchen, und Zerlegungen mit Kreuzungspunkten.

Um die Notation abzukürzen, verwenden wir die Bezeichnungen (2.62) und (2.63) aus Abschnitt 2.4.3, d.h.

$$G_1 = \left\{ \bigcup_{1 \leq k \leq m} \Omega_k \mid \mu(\partial\Omega_k \cap \Gamma) > 0 \right\}$$

und

$$G_{r+1} = \left\{ \bigcup_{1 \leq k \leq m} \Omega_k \mid \mu(\partial\Omega_k \cap \overline{G_r}) > 0, \Omega_k \cap G_l = \emptyset \forall l \leq r \right\}.$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  das  $(N - 1)$ -dimensionale HAUSDORFF-Maß. In  $G_1$  liegen also die Teilgebiete, die einen echten Außenrand haben. In  $G_{r+1}$  hingegen liegen die Teilgebiete, die einen echten gemeinsamen Rand mit  $G_r$  haben und nicht schon Teilmengen von  $G_l$ ,  $l \leq r$ , sind.

#### Gleichmäßig monotone quasilineare Probleme

Wir beweisen die Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für gleichmäßig monotone quasilineare Probleme, d.h. der Differentialoperator (3.1) erfülle insbesondere die Voraussetzung 3.5. Dann lautet der Konvergenzsatz wie folgt.

**Satz 3.3.7.** *Die Voraussetzungen 3.1, 3.2, 3.4 und 3.5 seien erfüllt. Weiter sei  $u \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  eine schwache Lösung von (3.3) bzw. analog (3.8) und die Lösungsfolge  $(u^n)_n \subset \hat{H}^1$  sei durch (3.21)-(3.22) erzeugt, wobei die Startwerte  $g_{ij}^0$  beliebig aus  $L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gewählt sind. Dann erfüllt  $e^n = u^n - u = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (3.29) und (3.31). Zudem seien die Voraussetzungen 3.8, 3.12 und 3.13 sowie zusätzlich eine der Voraussetzungen 3.9 oder 3.10 erfüllt. Dann gilt*

$$\|u^n - u\|_{\hat{H}^1} = \left( \sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.42)$$

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.3) bzw. (3.8) wird mit Lemma 3.1.1 auf Seite 50 und Korollar 3.1.2 bzw. Korollar 3.2.3 durch die Voraussetzungen 3.1, 3.2, 3.4 und 3.5 sichergestellt. Dabei sei daran erinnert, dass die gleichmäßige Monotonie natürlich die Monotonie impliziert, siehe Bemerkung 37 auf Seite 49. Gilt zusätzlich Voraussetzung 3.8, so ist mit Lemma 3.3.1 auf Seite 60 auch der Algorithmus (3.21)-(3.22) wohldefiniert.

A) Es gelte Voraussetzung 3.9.

Der Fehler  $e^n = u^n - u = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \hat{H}^1$  genügt (3.29) und (3.31). (3.42) entspricht natürlich

$$\|e^n\|_{\hat{H}^1} = \left( \sum_{i=1}^m \|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.43)$$

Die Voraussetzung 3.3 impliziert Voraussetzung 3.13. Wir haben sogar mehr, denn Voraussetzung 3.5 liefert mit Lemma 3.2.1 auf Seite 53

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) \geq d \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \geq 0. \quad (3.44)$$

Die Voraussetzung 3.8 impliziert insbesondere die Voraussetzungen 3.7 und 3.11. Nun können wir Lemma 3.3.6 auf Seite 68 anwenden und erhalten (mit nach Voraussetzung 3.12 sinnvollem  $N_i(\cdot)$ )

$$a_i(u_i^n, e_i^n) - a_i(u_i, e_i^n) \longrightarrow 0 \text{ und } N_i(e_i^n) \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (3.45)$$

und mit (3.44) ebenso

$$\|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)} \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (3.46)$$

für  $i = 1, \dots, m$ . Abkürzend definieren wir wieder  $\eta_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(e_i^n) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$ . Die Abschätzung aus Korollar 3.3.3 auf Seite 63 liefert zusammen mit den Voraussetzungen 3.8 und 3.13

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 \leq \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}.$$

Setzen wir  $\|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})} := \max_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$ , so erhalten wir damit

$$\lambda_{il} \|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})}^2 \leq \left( \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \right) \|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})},$$

was grob abgeschätzt und unter Berücksichtigung von  $\|\eta_{il}^n\|_{L^2(\Gamma_{il})} \geq \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}$  für  $j \in \mathcal{N}(i)$

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \frac{1}{\min_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})}$$

liefert. (3.44) und (3.40) sorgen dafür, dass die nichtnegative Folge  $(\|g^n\|)_n$  monoton fällt und somit durch  $\|g^0\|$  nach oben beschränkt ist. Mit (3.35) und den Abschätzungen auf Seite 34 erhalten wir, wenn wir weiter abschätzen,

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|g_{ij}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \leq \sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ j \in \mathcal{N}(l)}} \|g_{lj}^n\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma_{lj})} \leq m\sqrt{\kappa} \|g^0\| =: \hat{C}$$

mit  $\kappa := \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in \mathcal{N}(i)}} \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})}$ . Das ergibt zusammen mit der vorletzten Ungleichung

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \frac{\hat{C}}{\min_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}} \lesssim 1. \quad (3.47)$$

Als Nullfolge, siehe (3.46), ist  $(\|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)})_n$  natürlich beschränkt, woraus mit (3.47) und der FRIEDRICHS-Ungleichung, Satz A.2.1,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_F \left( \|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})}^2 + \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2} \lesssim 1 \quad (3.48)$$

für  $i = 1, \dots, m$  folgt, wobei  $C_F$  die Konstante aus der FRIEDRICHS-Ungleichung bezeichnet.

Für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\Omega_i \subset G_1$  gilt  $\gamma_{\Gamma_i}^i(e_i^n) = 0$  auf dem Außenrand  $\Gamma_i$  mit  $\mu(\Gamma_i) > 0$ , was zusammen mit (3.46) und der POINCARÉ-Ungleichung, Satz A.2.2,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_P \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_1 \quad (3.49)$$

liefert. Wir erhalten daraus mit dem Spursatz, siehe Satz A.2.8 oder [Gri85, Theorem 1.5.1.3], und der stetigen Einbettung  $H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \hookrightarrow L^2(\Gamma_{ij})$  insbesondere

$$\|\eta_{ij}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \|\eta_{ij}^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \lesssim \|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_1, j \in \mathcal{N}(i). \quad (3.50)$$

Sei nun ein beliebiges Teilgebiet  $\Omega_i \subset G_2$  und ein dazu benachbartes Teilgebiet  $\Omega_j \subset G_1$  gegeben. Nach Definition (2.63) ist klar, dass ein solches Nachbarschaftsverhältnis existiert. Insbesondere hat der gemeinsame Rand positives HAUSDORFF-Maß. Wir betrachten nun  $\widehat{\Gamma}_{ij} \subset \Gamma_{ij}$  mit positivem HAUSDORFF-Maß und zudem  $\text{dist}(\partial\Gamma_{ij}, \partial\widehat{\Gamma}_{ij}) > 0$ . Weiterhin wählen wir die Abschneidefunktionen  $\widehat{\varphi} \in C_0^\infty(\Gamma_{ij})$  mit  $0 \leq \widehat{\varphi} \leq 1$  und  $\widehat{\varphi}|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} = 1$  sowie  $\psi \in C^\infty(\Omega_i)$  mit  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi|_{\Gamma_{ij}} = \widehat{\varphi}$  und  $\psi|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma_{ij}} = 0$ . Dann gilt mit der Bezeichnung  $\widehat{e}_i^n := e_i^n \cdot \psi$  und unter Beachtung von  $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega_i)} \lesssim 1$ ,  $\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\Omega_i)} \lesssim 1$  und (3.48)

$$\begin{aligned} \|\widehat{e}_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 &= \|e_i^n \psi\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\nabla(e_i^n \psi)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &\leq \|\psi\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \|e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\nabla\psi\|_{L^\infty(\Omega_i)}^2 \|e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &\lesssim 1 \end{aligned}$$

und zwar für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter haben wir offenbar  $\widehat{\eta}_{ij}^n := \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(\widehat{e}_i^n) = \eta_{ij}^n \widehat{\varphi} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ ,  $\widehat{\eta}_{ij}^n|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} = \eta_{ij}^n|_{\widehat{\Gamma}_{ij}}$  und damit

$$\|\widehat{\eta}_{ij}^n\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})} \lesssim \|\widehat{\eta}_{ij}^n \widehat{\varphi}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)} \lesssim \|\widehat{e}_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \lesssim 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.51)$$

wobei  $\sim$  die Nullfortsetzung auf  $\partial\Omega_i$  bezeichnet. Die FRIEDRICHS-Ungleichung, Satz A.2.1, liefert zudem

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_F \left( \|\eta_{ij}^n|_{\widehat{\Gamma}_{ij}}\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 + \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.52)$$

Weiter haben wir mit zweimaliger Beachtung von (3.32)

$$g_{ji}^{n+1} = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ji} + \lambda_{ij})\eta_{ij}^n - g_{ij}^2 = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ji} + \lambda_{ij})\eta_{ij}^n - \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{ji}^{n-1} + g_{ji}^{n-1},$$

was unter Berücksichtigung des GELFAND-Dreiers  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \subset L^2(\Gamma_{ij}) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  zu

$$((\lambda_{ji} + \lambda_{ij})\eta_{ij}^n, \mu)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \langle g_{ji}^{n+1}, \mu \rangle - \langle g_{ji}^{n-1}, \mu \rangle + ((\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\eta_{ji}^{n-1}, \mu)_{L^2(\Gamma_{ij})} \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \quad (3.53)$$

korrespondiert, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Dualität in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  bezeichnet. Außerdem gilt mit (3.29)<sub>2</sub> und obigem GELFAND-Dreier für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} |\langle g_{ji}^n, \mu \rangle| &\leq |\langle \partial_{P_j} u_j^n - \partial_{P_j} u_j, \mu \rangle| + |(\lambda_{ji}\eta_{ji}^n, \mu)_{L^2(\Gamma_{ij})}| \\ (3.15) \quad &\leq |a_j(u_j^n, \mathcal{R}^{ji}\mu) - a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji}\mu)| + \|\lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \|\eta_{ji}^n\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\mu\|_{L^2(\Gamma_{ij})}. \end{aligned}$$

Da  $\Omega_j \subset G_1$  ist, haben wir mit (3.49) natürlich

$$\|u_j^n - u_j\|_{H^1(\Omega_j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

woraus mit der Stetigkeit der Form  $a_i$  im ersten Argument, siehe Lemma 3.2.1 auf Seite 53, für beliebiges  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  sofort

$$|a_j(u_j^n, \mathcal{R}^{ji}\mu) - a_j(u_j, \mathcal{R}^{ji}\mu)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt. Zusammen mit (3.50) liefert die obige Abschätzung

$$\|g_{ji}^n\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.54)$$

Setzen wir in (3.53)  $\mu = \widehat{\eta}_{ij}^n \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , so erhalten wir zusammen mit Voraussetzung 3.8

$$\begin{aligned}
m \left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 &\leq m \int_{\Gamma_{ij}} (\eta_{ij}^n)^2 \underbrace{\widehat{\varphi}}_{\widehat{\varphi}|_{\widehat{\Gamma}_{ij}}=1} d\sigma \\
&= m \left( \eta_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&\leq \left( (\lambda_{ji} + \lambda_{ij}) \eta_{ij}^n, \widehat{\eta}_{ij}^n \right)_{L^2(\Gamma_{ij})} \\
&\leq \left( \|g_{ji}^{n+1}\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} + \|g_{ji}^{n-1}\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})} \right) \left\| \widehat{\eta}_{ij}^n \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})} \\
&\quad + \|\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\|_{L^\infty(\Gamma_{ij})} \left\| \eta_{ji}^{n-1} \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \left\| \widehat{\eta}_{ij}^n \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})},
\end{aligned}$$

wobei  $m := \operatorname{ess\,inf}_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ji} + \lambda_{ij})$  ist. Daraus folgt mit (3.50), (3.51) und (3.54)

$$\left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

was unter Beachtung von (3.46) und (3.52) und da  $\Omega_i \subset G_2$  beliebig war,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_2$$

liefert. Wir erhalten daraus mit dem Spursatz, siehe Satz A.2.8 oder [Gri85, Theorem 1.5.1.3], und der stetigen Einbettung  $H^{1/2}(\Gamma_{ij}) \hookrightarrow L^2(\Gamma_{ij})$  insbesondere für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_2$  wieder

$$\left\| \eta_{ij}^n \right\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \leq \left\| \eta_{ij}^n \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_{ij})} \lesssim \|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{für alle } i \text{ mit } \Omega_i \subset G_2, j \in \mathcal{N}(i).$$

Zudem ist klar, dass wir die Abschätzung (3.52) verschärfen können. Es gilt nämlich für beliebiges  $\Omega_i \subset G_2$  sogar, wenn wir alle gemeinsamen Teiltränder zu Gebieten  $\Omega_j \subset G_1$  in der FRIEDRICHS-Ungleichung berücksichtigen,

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \lesssim \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_1} \left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

In gleicher Weise können wir für  $r \geq 3$  zeigen, dass für alle  $i$  mit  $\Omega_i \subset G_r$  gilt

$$\|e_i^n\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \lesssim \|\nabla e_i^n\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_{r-1}} \left\| \eta_{ij}^n \Big|_{\widehat{\Gamma}_{ij}} \right\|_{L^2(\widehat{\Gamma}_{ij})}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.55)$$

Da die Anzahl der  $G_r$  endlich ist ( $\leq m$ ), haben wir (3.43) gezeigt.

B) Unter der alternativen Voraussetzung 3.10 überträgt sich der Beweis wörtlich. Die einzige Stelle, an der eine der beiden Voraussetzungen benutzt wird, ist bei Verwendung von Lemma 3.3.6. Natürlich können wir mit Voraussetzung 3.10 an den entsprechenden Stellen von der Dualität im  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$  zum  $L^2(\Gamma_{ij})$ -Skalarprodukt übergehen und die Abschätzungen evtl. verschärfen. Dies ist aber nicht nötig, da wir  $g_{ij}^n \in L^2(\Gamma_{ij})$  natürlich auch als Element aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  auffassen können, womit die Abschätzungen aus Teil A gültig bleiben.  $\square$

*Bemerkung 55.* Im Fall einer Streifenzerlegung des Gebietes nach Bemerkung 1(i) auf Seite 9 können wir in Verbindung mit Voraussetzung 3.9 die Startwerte der Iteration sogar beliebig aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$  wählen. Der Beweis bleibt ohne Änderungen gültig, wobei in diesem Fall natürlich  $\overline{\Omega} = \overline{G_1}$ ,  $G_r = \emptyset$ ,  $r > 1$ , gilt, sodass wir auf einen Großteil desselben verzichten können.

### Eine Anmerkung zu nicht gleichmäßig monotonen quasilinearen Problemen

Durch geeignete Wahl der Verfahrensparameter konnte im linearen Fall auf die Abschätzbarkeit der Bilinearform durch die  $L^2(\Omega_i)$ -Norm des Gradienten, welche durch die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 impliziert wurde, verzichtet werden. Deswegen konnten, neben hauptteildominanten Problemen, auch singulär gestörte und spezielle indefinite Probleme behandelt werden. Im quasilinearen Fall

kann auf die gleichmäßige Monotonie, welche hier das Pendant zu obiger Hauptteildominanz ist und durch Voraussetzung 3.5 gesichert wird, nicht ohne Weiteres verzichtet werden.

Ohne die gleichmäßige Monotonie kann teilweise die Wohldefiniertheit der Methode gesichert werden, da Lemma 3.3.1 auf Seite 60 immer noch die Existenz von Lösungen liefert. Die Eindeutigkeit der Lösungen fällt allerdings nicht mehr mit ab. Auch für das quasilineare Modellproblem haben wir in diesem Fall nur noch Lemma 3.1.1 auf Seite 50, also die Existenz einer Lösung, die Eindeutigkeit kann wegen der Nichtanwendbarkeit von Korollar 3.1.2 nicht mehr gesichert werden. Selbiges gilt wegen Satz 3.2.2 auf Seite 54 auch für das quasilineare Transmissionsproblem.

Ein weiteres Problem besteht zudem darin, dass der Beweis des letzten Satzes ohne Voraussetzung 3.5 nicht übertragbar ist. Speziell haben wir (3.46) nicht mehr zur Verfügung. Im linearen Fall war eine äquivalente Formulierung der zu Grunde liegenden Bilinearform, in der ein Teil gegen die  $L^2(\Omega_i)$ -Norm des Gradienten abgeschätzt werden konnte, der Schlüssel. Dieser abschätzbare Teil nahm in Lemma 2.4.7 auf Seite 38 den Platz von  $N_j$  ein und sicherte (2.68), das Pendant zu (3.46). Die Nichtnegativität des restlichen Teils der Bilinearform wurde durch die spezielle Wahl der Verfahrensparameter erzwungen. Im quasilinearen Fall kann auf diese Weise leider nicht vorgegangen werden.

## 3.4 Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde ein quasilineares Modellproblem erklärt. Dabei wurden die Differentialoperatoren und die geometrischen Voraussetzungen an die Gebiete festgelegt, wobei lediglich gefordert wurde, dass das Gesamtgebiet  $\Omega$  und die Teilgebiete  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , LIPSCHITZ-Gebiete sind. Insbesondere durfte die Zerlegung Kreuzungspunkte und komplett im Inneren liegende Teilgebiete aufweisen. Zudem wurde eine schwache Formulierung des Modellproblems angegeben und die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen unter passenden Voraussetzungen gezeigt. Diese Standardresultate beruhten dabei auf der Koerzivität und der Monotonie des Operators, wobei letztere für die Eindeutigkeit gleichmäßig sein musste.

Im zweiten Abschnitt wurde ein, zu dem quasilinearen Modellproblem auf dem Gesamtgebiet äquivalentes, quasilineares Transmissionsproblem auf den Teilgebieten hergeleitet. Dabei war es wichtig, die Elemente der Transmissionsbedingung, die den Fluss charakterisieren, als Funktionale über den passenden Räumen zu interpretieren. Besonders für komplexe Zerlegungen, die Kreuzungspunkte und im Inneren liegende Teilgebiete aufweisen, erwies sich dies als kritisch. Mit dieser Interpretation der Flussbedingung als Funktional war es möglich, das Transmissionsproblem ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen zu formulieren und die Äquivalenz für die schwachen Formulierungen desselben und des quasilinearen Modellproblems nachzuweisen. Als Folgerung ergab sich, dass das quasilineare Transmissionsproblem genau dann (eindeutige) Lösungen besitzt, wenn das quasilineare Modellproblem (eindeutige) Lösungen besitzt. Darüber hinaus wurden im zweiten Abschnitt noch zwei weitere äquivalente schwache Formulierungen des Transmissionsproblems angegeben. Auch hierbei war es wichtig, speziell für komplexe Zerlegungen, die auftretenden Funktionale über den passenden Räumen zu wählen.

Im dritten Abschnitt wurde die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode aus Kapitel 2 auf quasilineare Probleme übertragen. Dabei wurden die ROBIN-Daten der Nachbargebiete des vorhergehenden Iterationsschrittes wieder als Funktionale über passenden Räumen interpretiert und zwischen den Iterationsschritten geeignet aufdatiert. Der Vorteil bestand darin, dass auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung verzichtet werden konnte. Weiterhin wurden für die Verfahrensparameter allgemeine  $L^\infty$ -Funktionen auf den Teilrändern zugelassen. Für die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode wurde darüber hinaus eine adäquate variationelle Formulierung angegeben, die für komplexe Zerlegungen gültig ist und mit der klassischen  $H^1(\Omega_i)$ -Regularität der Lösungen auf den Teilgebieten auskommt. Auch wurde, unter Benutzung einiger technischer Voraussetzungen, die starke Konvergenz der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode in  $H^1$  gezeigt. Dieses Konvergenzresultat konnte für gleichmäßig monotone koerzive elliptische Probleme erhalten werden. Ein Ersetzen der gleichmäßigen Monotoniebedingung durch eine gewöhnliche Monotoniebedingung lieferte noch die Existenz von Lösungen der während des Verfahrens auftretenden Teilprobleme, aber die Konvergenz konnte unter dieser abgeschwächten Voraussetzung nicht mehr bewiesen werden.

Ein Vorteil der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode ist, dass mit ihr verschiedene Problemklassen behandelt werden können. Hierzu zählen neben den im letzten Kapitel behandelten linearen elliptischen Problemen auch nichtlineare Probleme, wie die hier untersuchten quasilinearen. Es ist also möglich, mit ein und derselben Methode, aus linearen und nichtlinearen Teilaufgaben bestehende, gekoppelte Probleme zu lösen. Weiterhin dürfen die Operatoren zwischen den Teilgebieten springende Nichtlinearitäten aufweisen. Durch Einschränkungen bei der Wahl der Verfahrensparameter erhalten wir die  $H^1$ -Konvergenz der Methode ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Glattheit der Lösungen. Ist die Lösung des linearen bzw. quasilinearen Modellproblems im Gegenzug hinreichend regulär, d.h. ist ihre Konormalenableitung auf den inneren Teilrändern als Funktion aus  $L^2$  interpretierbar, dann kann auf einen Teil der Einschränkungen der Verfahrensparameter zur Sicherung der Konvergenz verzichtet werden. Zudem ist die Methode für beliebige Zerlegungen des Gesamtgebietes anwendbar, solange alle Teilgebiete LIPSCHITZ sind. Insbesondere sind Zerlegungen mit Kreuzungspunkten und Zerlegungen mit Teilgebieten, die keinen Außenrand besitzen, zugelassen. Darüber hinaus kann auf die explizite Bestimmung der Konormalenableitung verzichtet werden.

Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit und Fehlerabschätzungen wurden nicht gemacht. Es ist nicht bekannt, ob die nichtüberlappende SCHWARZsche Methode im nichtlinearen Fall geometrische Konvergenzordnung aufweist, wie dies für lineare Probleme, zumindest bei sorgfältiger Wahl der Parameter, der Fall ist.

## 4 Nichtmonotone quasilineare Probleme mit springenden Nichtlinearitäten und Gebietszerlegungsmethoden

Nachfolgend soll eine ausgewählte Klasse nichtlinearer Probleme mit nichtüberlappenden Gebietszerlegungsmethoden behandelt werden, auf die die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode aus Kapitel 3 nicht angewendet werden kann. Dazu wird, ausgehend von einem nichtmonotonen quasilinearen Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten auf einem beschränkten LIPSCHITZ-Gebiet, ein Transmissionsproblem mit quasilinearen Teilproblemen formuliert. Anschließend wird dieses, wie in [BKS07], mittels einer problemklassenangepassten KIRCHHOFF-Transformation in ein springendes Transmissionsproblem mit linearen Teilproblemen überführt. Der nichtlineare Charakter des Ausgangsproblems findet sich dabei ausschließlich in den Transmissionsbedingungen des springenden Transmissionsproblems wieder. Um die Analysis zu vereinfachen, beschränken wir uns auf eine Zerlegung des LIPSCHITZ-Gebietes in zwei LIPSCHITZ-Teilgebiete, die jeweils einen echten Außenrand und einen echten gemeinsamen Rand  $\Gamma$  haben sollen. Anschließend formulieren wir ein restringiertes Optimierungsproblem, dessen eindeutige global optimale Lösung auch dem springenden Transmissionsproblem genügt, womit nach Rücktransformation auch die Lösung des Ausgangsproblems zur Verfügung steht. Dabei misst das Zielfunktional den Abstand der (transformierten) DIRICHLET-Daten der Teilprobleme des springenden Transmissionsproblems auf  $\Gamma$ . Weiterhin werden regularisierte parameterabhängige Varianten des restringierten Minimierungsproblems eingeführt, die sich im linearen Fall als nützlich erwiesen haben. Das ursprüngliche Minimierungsproblem ist dabei für verschwindenden Parameter als Spezialfall enthalten. Dann wird die (nicht notwendig eindeutige) Lösbarkeit der regularisierten Probleme gezeigt und die, für kleiner werdenden Parameter, schwache Konvergenz in  $H^1$  dieser Lösungen gegen die eindeutige Lösung des restringierten Optimierungsproblems. Darauf folgend werden die regularisierten restringierten Probleme äquivalent in parameterabhängige freie Optimierungsprobleme überführt. Zudem wird mittels der eindeutigen Lösbarkeit des freien Optimierungsproblems für verschwindenden Parameter, der notwendigen Optimalitätsbedingung für lokale Extrema und des impliziten Funktionentheorems ein Satz bewiesen, der auch die eindeutige Lösbarkeit der freien Optimierungsprobleme für hinreichend kleine Parameter sichert. Um die Voraussetzungen dieses Satzes zu sichern, werden anschließend weitere Untersuchungen angestellt. Dabei wird die FRÉCHET-Differenzierbarkeit der Zielfunktionale der freien Optimierungsprobleme unter zusätzlichen Glattheitsvoraussetzungen an die Nichtlinearitäten des Ausgangsproblems gesichert, wobei im Dreidimensionalen eine Einschränkung auf faltige LIPSCHITZ-Gebiete notwendig ist. Weiterhin wird die stetige Invertierbarkeit eines linearen beschränkten Operators  $\Lambda$ , der in Verbindung mit der zweiten Ableitung des Zielfunktionals an einer gewissen Stelle steht, gezeigt, womit insgesamt alle Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind. Für die stetige Invertierbarkeit von  $\Lambda$  sind wiederum zusätzliche Voraussetzungen nötig. Darunter fällt, neben zusätzlichen Regularitätsforderungen an die Lösung des Ausgangsproblems, auch die restriktive Voraussetzung, dass sich die Spuren der Lösungen des Ausgangsproblems bezüglich einer geeigneten Norm nicht zu sehr von fest vorgegebenen Funktionen, in die die Nichtlinearitäten eingehen, unterscheiden. Weiterhin werden Lösungsverfahren für die freien Minimierungsprobleme angegeben, wobei die Konvergenz des Gradientenverfahrens unter relativ geringen Voraussetzungen gesichert werden kann. Zudem kann die (lokal schnelle) Konvergenz des NEWTON-Verfahrens unter den gleichen (starken) Voraussetzungen gesichert werden, die für die eindeutige Lösbarkeit der freien Minimierungsprobleme für kleine Parameter notwendig sind.

Weiter sei darauf hingewiesen, dass die Probleme und Voraussetzungen, die in diesem Kapitel eingeführt werden, zur besseren Übersicht auf den Seiten 177ff. noch einmal aufgelistet werden.

## 4.1 Das Modellproblem

In diesem Abschnitt wird das zu Grunde liegende quasilineare Modellproblem eingeführt. Im ersten Unterabschnitt, nach Festlegung der geometrischen Eigenschaften des Gebietes, werden wir zunächst eine differentielle und danach eine variationelle Formulierung des quasilinearen Modellproblems mit springenden Nichtlinearitäten angeben. Weiterhin werden die Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten des Differentialoperators formuliert. Im zweiten Unterabschnitt wird dem Modellproblem ein quasilineares Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten zugeordnet und schwach formuliert. Zudem beweisen wir die Äquivalenz der schwachen Formulierungen des Transmissionsproblems und des Gesamtproblems aus dem ersten Teilabschnitt. Die eindeutige Lösbarkeit des Modellproblems wird vorausgesetzt.

### 4.1.1 Das nichtmonotone quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet, d.h. dass sein Rand  $\partial\Omega$  lokal der Graph einer LIPSCHITZ-Funktion ist. Für die Eigenschaften von LIPSCHITZ-Gebieten, siehe Anhang A.2.1.  $\Omega$  lasse eine Zerlegung in zwei nichtüberlappende LIPSCHITZ-Teilgebiete  $\Omega_1, \Omega_2$  mit dem gemeinsamen Rand  $\Gamma = \text{int}(\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2})$  und den Außenrändern  $\Gamma_i = \partial\Omega \cap \overline{\Omega_i}$  zu. Beide Teilgebiete sollen einen echten Außenrand besitzen. Ein mögliche Zerlegung ist in Abbildung 2.1 a) veranschaulicht. Der pathologische Fall, dass die beiden Teilgebiete keinen echten gemeinsamen Rand haben, das HAUSDORFF-Maß von  $\Gamma$  also Null ist, soll im Nachfolgenden ausgeschlossen werden, da hierfür die später betrachtete Gebietszerlegungsmethode nicht sinnvoll ist.

Weiter seien  $f \in L^2(\Omega)$  und  $k_1, k_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit  $k_i \geq \alpha > 0$  für  $i = 1, 2$  gegeben. Als *nichtmonotones quasilineares Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten* auf dem Gesamtgebiet  $\Omega$  bezeichnen wir das quasilineare Problem in Divergenzform

$$\begin{cases} P(D)p = f & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

mit

$$P(D)p(x) := \begin{cases} P_1(D) p|_{\Omega_1}(x), & x \in \Omega_1 \\ P_2(D) p|_{\Omega_2}(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

wobei

$$P_i(D)v(x) := -\text{div}(k_i(v(x))\nabla v(x)), \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

die quasilinearen Differentialoperatoren auf den Teilgebieten bezeichnen.

Als schwache Lösung von (4.1) bezeichnen wir die Lösung des Variationsproblems: Finde  $p \in H_0^1(\Omega)$ , sodass

$$b(p, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.3)$$

mit der Form

$$b(p, v) := (k(p)\nabla p, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad (4.4)$$

und

$$k(p) := \begin{cases} k_1(p), & x \in \Omega_1 \\ k_2(p), & x \in \Omega_2 \end{cases},$$

gilt.

*Bemerkung 56.* (i) Eine klassische differentielle Interpretation von (4.1) für  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2$ , ist im Allgemeinen nicht möglich, da  $\text{div}(k_i(v)\nabla v)$  auch für hinreichend schönes  $v$  mit obigen  $k_i$  nicht immer Sinn macht. Um (4.1) sinnvoll interpretieren zu können, muss  $P(D)p \in L^2(\Omega)$  sein, was für  $p \in H_0^1(\Omega)$  mit der Forderung  $k(p)\nabla p \in H(\text{div}, \Omega)$  korrespondiert.

(ii) Das Variationsproblem (4.3) ist im Gegensatz zu (4.1) für  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2$  und für  $p \in H_0^1(\Omega)$  sinnvoll, da die Form  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  erklärt und wegen

$$\begin{aligned} |b(p, v)| &\leq \int_{\Omega} |k(p)| |(\nabla p, \nabla v)| \, dx \\ &\leq \max \left\{ \|k_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|k_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \max \left\{ \|k_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|k_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \|p\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall p, v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$



beschränkt ist. Dabei bezeichnet  $(\cdot, \cdot)$  wieder das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^N$ . Für festes  $p \in H_0^1(\Omega)$  ist  $b(p, \cdot)$  insbesondere ein lineares stetiges Funktional auf  $H_0^1(\Omega)$ . Damit existiert genau ein Operator  $B : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  mit

$$\langle Bp, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} = b(p, v) \quad \forall p, v \in H_0^1(\Omega),$$

welcher wegen der letzten Abschätzung natürlich beschränkt ist. Zudem gilt offenbar

$$b(p, p) \geq \alpha \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \gtrsim \|p\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega),$$

was die Koerzivität von  $B$  liefert. Der Operator  $B$  ist allerdings nicht monoton und auch nicht stetig.

(iii) Durch entsprechende Wahl des Repräsentanten von  $k_i$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  kann immer punktweise  $\|k_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq |k_i(\cdot)|$  erreicht werden (indem man  $k_i$  auf einer Nullmenge entsprechend abändert). Somit ist die punktweise Beschränktheit der  $k_i$  keine Zusatzforderung. Für das später betrachtete transformierte Problem ist die punktweise Beschränktheit von  $k_i$  ohnehin nicht mehr nötig.

Es ist naheliegend eine Lösung  $p \in H_0^1(\Omega)$  des Variationsproblems (4.3) als verallgemeinerte Lösung von (4.1) aufzufassen, da eine Lösung  $p \in H_0^1(\Omega)$  von (4.1), welche ja zusätzlich  $k(p)\nabla p \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  erfüllt, für beliebige  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k(p)\nabla p) v \, dx = \int_{\Omega} k(p) (\nabla p, \nabla v) \, dx$$

liefert und somit der Variationsformulierung genügt. Hierbei wurde der Divergenzatz A.2.11 und die Eigenschaft  $\gamma_{\partial\Omega}(v) = 0$  benutzt. Siehe auch Abschnitt A.2.7 im Anhang für die Definition von  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  und Abschnitt A.2.6 für die Definition des Spuoperators.

Auf die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von (schwachen) Lösungen des Modellproblems (4.1) wird im nächsten Teilabschnitt eingegangen.

#### 4.1.2 Das nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten

Dem obigen Modellproblem ordnen wir das folgende *nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten* zu.

$$\begin{cases} P_i(D)p_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ p_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ p_1 = p_2 & \text{auf } \Gamma \\ \partial_{P_1} p_1 = -\partial_{P_2} p_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (4.5)$$

mit  $f_i := f|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i)$  und

$$P_i(D)p_i = -\operatorname{div}(k_i(p_i)\nabla p_i) \quad (4.6)$$

sowie, hinreichende Regularität vorausgesetzt,

$$\partial_{P_i} p_i = (k_i(p_i)\nabla p_i, n_i), \quad (4.7)$$

wobei  $n_i$  die bezüglich  $\Omega_i$  nach außen gerichtete Einheitsnormale auf  $\Gamma$  ist.

*Bemerkung 57.* In Analogie zu Bemerkung 56(i) sei auf die Schwierigkeiten bei der klassischen Interpretation von (4.5) für  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2$ , hingewiesen. Um (4.5)<sub>1</sub> sinnvoll interpretieren zu können, muss wieder  $k_i(p_i)\nabla p_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$  gelten. Unter dieser Voraussetzung sind auch die Konormalenableitungen in (4.5)<sub>4</sub> im Sinn des Satzes A.2.9 erklärbar.

Um den Lösungsbegriff für Problem (4.5) zu verallgemeinern, erinnern wir an die problemangepassten Funktionenräume (2.7) auf Seite 10, d.h.

$$V_i := \{v_i \in H^1(\Omega_i) \mid \gamma_{\Gamma_i}(v_i) = 0\} \quad i = 1, 2, \quad (4.8)$$

wobei  $\gamma_{\Gamma_i}(\cdot)$  die Einschränkung der Spur auf  $\Gamma_i$  bezeichnet. Siehe auch Abschnitt A.2.6 im Anhang. Es gilt offensichtlich  $\gamma_{\Gamma}^i(v_i) \in H_0^{1/2}(\Gamma)$  für  $v_i \in V_i$ . Für  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$  mit  $\gamma_{\Gamma}^1(v_1) = \gamma_{\Gamma}^2(v_2)$  gilt zudem mit Lemma 2.1.1 auf Seite 11  $v := (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)$ .

*Bemerkung 58.* Falls die Teilgebiete  $\Omega_i$  einen echten Außenrand haben, d.h. dass das HAUSDORFF-Maß von  $\Gamma_i$  nicht Null ist, so gilt  $V_i \subsetneq H^1(\Omega_i)$ . In diesem Fall gilt für  $v_i \in V_i$  die POINCARÉ-FRIEDRICHS-Ungleichung, Satz A.2.2, und damit  $\|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \lesssim \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)}$ .

Des Weiteren definieren wir für  $u_i, v_i \in V_i$  die im ersten Argument nichtlineare Form

$$b_i(u_i, v_i) := (k_i(u_i) \nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad i = 1, 2, \quad (4.9)$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_i)}$  das  $L^2$ -Skalarprodukt bezeichnet.

*Bemerkung 59.* Die Form  $b_i(\cdot, \cdot)$  ist auf  $V_i \times V_i$  erklärt und wegen

$$\begin{aligned} |b_i(p_i, v_i)| &\leq \int_{\Omega_i} |k_i(p_i)| |(\nabla p_i, \nabla v_i)| \, dx \\ &\leq \|k_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\nabla p_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\lesssim \|k_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|p_i\|_{H^1(\Omega)} \|v_i\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall p_i, v_i \in V_i \end{aligned}$$

beschränkt. Wie in Bemerkung 56(ii) haben wir überdies

$$b_i(p_i, p_i) \geq \alpha \|\nabla p_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \gtrsim \|p_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall p_i \in V_i$$

und können der Form einen beschränkten und koerziven Operator  $B_i : V_i \rightarrow (V_i)'$ ,  $p_i \mapsto B_i(p_i) := b_i(p_i, \cdot)$  zuordnen, der allerdings nicht monoton und nicht stetig ist.

Unter der schwachen oder variationellen Formulierung des obigen Transmissionsproblems (4.5) wollen wir folgende Aufgabe verstehen:

Finde  $p_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , sodass

$$\begin{cases} b_i(p_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_\Gamma^1(p_1) = \gamma_\Gamma^2(p_2) \quad \text{in } H_0^{1/2}(\Gamma) \\ \langle \partial_{P_1} p_1, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_2} p_2, \mu \rangle \quad \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.10)$$

gilt, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma) \times H_0^{1/2}(\Gamma)$  bezeichnet. Zur Definition der Spu-ropoperatoren  $\gamma_\Gamma^i(\cdot)$  sei auf Abschnitt A.2.6 verwiesen. Die Konormalenableitungen sind in Verallgemeinerung zu (4.7) durch

$$\langle \partial_{P_i} p_i, \mu \rangle := b_i(p_i, \mathcal{R}^i \mu) - (f_i, \mathcal{R}^i \mu)_{L^2(\Omega_i)} \quad \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma) \quad (4.11)$$

definiert.  $\mathcal{R}^i : \mathcal{L}(H_0^{1/2}(\Gamma), V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , bezeichnet den linearen stetigen Fortsetzungsoperator, der sich durch Nullfortsetzung auf  $\partial\Omega_i$  und anschließender beliebiger stetiger Fortsetzung in  $V_i$  ergibt. Wir machen uns klar, dass für festes  $p_i \in V_i$  und  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  die Abbildung  $\partial_{P_i} p_i$  ein lineares stetiges Funktional auf  $H_0^{1/2}(\Gamma)$  darstellt.

*Bemerkung 60.* Zur Existenz eines linearen stetigen Fortsetzungsoperators  $\mathcal{R}^i : H_0^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V_i$  überlegen wir uns, dass für  $\mu \in H_0^{1/2}(\Gamma)$  nach Definition die Nullfortsetzung  $\tilde{\mu}$  auf  $\partial\Omega_i$  existiert und  $\tilde{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  gilt. Nun existieren für LIPSCHITZ-Gebiete bekanntermaßen lineare stetige Fortsetzungsoperatoren von  $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  nach  $H^1(\Omega_i)$ , z.B. die harmonische Fortsetzung. Sei  $\tilde{w}_i \in H^1(\Omega_i)$  eine Fortsetzung von  $\tilde{\mu}$ . Dann gilt offensichtlich  $\gamma_{\Gamma_i}(\tilde{w}_i) = \gamma_{\partial\Omega_i}(\tilde{w}_i)|_{\Gamma_i} = \tilde{\mu}|_{\Gamma_i} = 0$  und somit ist  $\tilde{w}_i \in V_i$ . Die Definition  $\mathcal{R}^i \mu := \tilde{w}_i$  zeigt die Existenz des obigen Fortsetzungsoperators, wobei die Linearität und Stetigkeit aus der Linearität und Stetigkeit der beiden beteiligten Fortsetzungen folgt. Siehe wieder Abschnitt A.2.6. Falls das Teilgebiet  $\Omega_i$  keinen echten Außenrand hat, also speziell  $\Gamma = \partial\Omega_i$  gilt, dann ist  $H_0^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\partial\Omega)$  und die Existenz der Fortsetzungsoperatoren ist klar. Dieser Fall wird hier aber nicht weiter betrachtet.

Eine Lösung von (4.10) wollen wir *schwache Lösung* von (4.5) nennen. Dass dies den Lösungsbegriff verallgemeinert, zeigt folgende Überlegung. Wir betrachten eine Lösung  $(p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$  von (4.5),

welche ja zusätzlich  $k_i(p_i)\nabla p_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$  erfüllt. Dann können wir (4.5)<sub>4</sub> einen Sinn in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  geben. Vermittels des Divergenzsatzes A.2.11 gilt für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{\Gamma}^{*i}(k_i(p_i)\nabla p_i), \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &= b_i(p_i, \mathcal{R}^i \mu) + (\operatorname{div}(k_i(p_i)\nabla p_i), \mathcal{R}^i \mu)_{L^2(\Omega_i)} \\ &= b_i(p_i, \mathcal{R}^i \mu) - (f_i, \mathcal{R}^i \mu)_{L^2(\Omega_i)}, \end{aligned}$$

womit wir (4.10)<sub>3</sub> aus (4.5)<sub>4</sub> und (4.7) sowie (4.11) erhalten. Mittels partieller Integration liefert (4.5)<sub>1</sub> für  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\int_{\Omega_i} f_i v_i dx = - \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k_i(p_i)\nabla p_i) v_i dx = \int_{\Omega_i} k_i(p_i) (\nabla p_i, \nabla v_i) dx,$$

also (4.10)<sub>1</sub>, wobei  $\gamma_{\partial\Omega_i}(v) = 0$  benutzt wurde. (4.10)<sub>2</sub> folgt direkt aus (4.5)<sub>3</sub>, punktweise f.ü. interpretiert, und der Tatsache, dass  $\gamma_{\Gamma}^i(p_i) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  für  $p_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , gilt. Somit ist  $(p_1, p_2)$  also auch Lösung von (4.10). Die variationelle Formulierung macht darüber hinaus aber für alle  $p_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , Sinn, also auch solche, die die obige Zusatzforderung nicht erfüllen.

*Bemerkung 61.* Die Voraussetzungen an  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , werden zur rigorosen analytischen Rechtfertigung der später verwendeten Lösungsmethode verschärft. Die eben gemachten Ausführungen zeigen aber, dass das Modellproblem (4.5) auch für obige  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R})$  sinnvoll ist.

Nun stellt sich die Frage, wann das Modellproblem (4.1) bzw. das Transmissionsproblem (4.5) (schwach) lösbar ist und ob oder wie diese Lösungen zusammenhängen. Der klassische Satz von LAX-MILGRAM kann hier nicht angewendet werden, um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu sichern, da die Formen  $b(\cdot, \cdot)$  bzw.  $b_i(\cdot, \cdot)$  jeweils in der ersten Komponente nichtlinear sind. Auch die in Kapitel 3 für monotone koerzive quasilineare elliptische Probleme entwickelte Theorie zur Sicherung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kann nicht übertragen werden, weil die hier zu Grunde liegenden Probleme nicht monoton sind und zudem auch die CARATHEODORY-Bedingung nicht erfüllen. Wie haben dies bereits in Beispiel 1 auf Seite 51 erwähnt. Die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit von (4.1) soll an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden. Stattdessen formulieren wir die

**Voraussetzung 4.1.** Das Modellproblem (4.1) besitze eine eindeutige (schwache) Lösung  $\bar{p} \in H_0^1(\Omega)$ .

Inwieweit die beiden Probleme (4.1) und (4.5) zusammenhängen, zeigen die beiden folgenden Lemmata.

**Lemma 4.1.1.** *Sei  $\bar{p} \in H_0^1(\Omega)$  eine (schwache) Lösung von (4.1). Dann ist  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in V_1 \times V_2$  mit  $\bar{p}_i := \bar{p}|_{\Omega_i}$  eine (schwache) Lösung von (4.5). Gilt zusätzlich Voraussetzung 4.1, so ist diese Lösung eindeutig.*

*Beweis.* Natürlich gilt  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in V_1 \times V_2$  für  $\bar{p} \in H_0^1(\Omega)$  und wir haben

$$\gamma_{\Gamma}^1(\bar{p}_1) = \gamma_{\Gamma}(\bar{p}) = \gamma_{\Gamma}^2(\bar{p}_2) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma),$$

womit (4.10)<sub>2</sub> gilt.

Weiter setzen wir  $v := (v_1, 0) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$  für ein beliebiges  $v_1 \in H_0^1(\Omega_1)$ . Da  $\gamma_{\Gamma}^1(v_1) = \gamma_{\Gamma}^2(0) = 0$  ist, gilt  $v \in H_0^1(\Omega)$ . (4.3) liefert für dieses  $v$

$$b_1(\bar{p}_1, v_1) = b_1(\bar{p}_1, v_1) + b_2(\bar{p}_2, 0) = b(\bar{p}, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (f_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)}.$$

Gehen wir für beliebiges  $v_2 \in H_0^1(\Omega_2)$  analog mit  $v := (0, v_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$  vor, so erhalten wir

$$b_2(\bar{p}_2, v_2) = (f_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)}.$$

Zusammen liefert das (4.10)<sub>1</sub>.

Setzen wir  $w_i := \mathcal{R}^i \mu \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , für beliebiges  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , wobei  $\mathcal{R}^i$  den beliebigen Fortsetzungsoperator aus Bemerkung 60 bezeichnet, so gilt  $w := (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega)$  wegen  $\gamma_{\Gamma}^1(w_1) = \mu = \gamma_{\Gamma}^2(w_2)$  und Lemma 2.1.1 auf Seite 11. Für dieses  $w$  liefert (4.3)

$$b_1(\bar{p}_1, \mathcal{R}^1 \mu) + b_2(\bar{p}_2, \mathcal{R}^2 \mu) = b(\bar{p}, w) = (f, w)_{L^2(\Omega)} = (f_1, \mathcal{R}^1 \mu)_{L^2(\Omega_1)} + (f_2, \mathcal{R}^2 \mu)_{L^2(\Omega_2)},$$

was (4.10)<sub>3</sub> entspricht.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen  $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \in V_1 \times V_2$  sei eine weitere (schwache) Lösung von (4.5). Dann ist  $\hat{p} := (\hat{p}_1, \hat{p}_2) \in H_0^1(\Omega)$  eine (schwache) Lösung von (4.1), wie das nachfolgende Lemma 4.1.2 zeigt. Da die (schwache) Lösung von (4.1) nach Voraussetzung 4.1 eindeutig ist, muss  $\bar{p} = \hat{p}$  gelten, woraus sich im Widerspruch zur Annahme  $\bar{p}_i = \hat{p}_i$ ,  $i = 1, 2$ , ergibt.  $\square$

**Lemma 4.1.2.** *Sei  $(p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$  eine (schwache) Lösung von (4.5). Dann ist  $p := (p_1, p_2) \in H_0^1(\Omega)$  eine (schwache) Lösung von (4.1).*

*Beweis.* Dass  $p \in H_0^1(\Omega)$  ist, sichert (4.10)<sub>2</sub> in Verbindung mit Lemma 2.1.1 auf Seite 11. Für beliebiges  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt  $v_i := v|_{\Omega_i} \in V_i$ . Wir definieren  $\nu := \gamma_\Gamma(v) = \gamma_\Gamma^i(v_i) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ,  $w_i := \mathcal{R}^i \nu \in V_i$ ,  $z_i := v_i - w_i \in H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gilt mit (4.10)<sub>1</sub> und (4.10)<sub>3</sub> und der Linearität im zweiten Argument von  $b_i$

$$\begin{aligned} b(p, v) &= \sum_{i=1}^2 b_i(p_i, v_i) = \sum_{i=1}^2 b_i(p_i, w_i + z_i) = \sum_{i=1}^2 (b_i(p_i, w_i) + b_i(p_i, z_i)) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( (f_i, w_i)_{L^2(\Omega_i)} + (f_i, z_i)_{L^2(\Omega_i)} \right) = \sum_{i=1}^2 (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} \\ &= (f, v)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

also (4.3).  $\square$

Die beiden letzten Lemmata liefern offenbar folgendes

**Korollar 4.1.3.** *Das Modellproblem (4.1) und das Transmissionsproblem (4.5) sind im variationalen Sinn äquivalent.*

*Bemerkung 62.* Die Voraussetzung 4.1 sichert aufgrund der Äquivalenz der beiden Probleme ebenfalls die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Transmissionsproblems (4.5). Man könnte statt Voraussetzung 4.1 auch die eindeutige Lösbarkeit des Transmissionsproblems (4.5) voraussetzen.

## 4.2 Die Kirchhoff-Transformation

Wir führen in diesem Abschnitt die KIRCHHOFF-Transformation sowohl als reelle Funktion als auch als Abbildung zwischen Funktionenräumen ein. Darüber hinaus werden einige ihrer Eigenschaften zusammengetragen. Dabei halten wir uns an [Ber07, Section 1.5.4], d.h. wir übernehmen sinngemäß die dortigen Resultate. Auch die Beweise werden zur besseren Nachvollziehbarkeit sinngemäß wiedergegeben. In kompakter Form finden sich die Resultate auch in [Ber08].

Die quasilinearen Teilprobleme in (4.5) haben die vortreffliche Eigenschaft, dass durch Anwendung einer geeigneten KIRCHHOFF-Transformation die Nichtlinearitäten im Inneren von  $\Omega_i$  eliminiert werden können. Dazu betrachten wir für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  die KIRCHHOFF-Transformation

$$\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^p k(t) dt. \quad (4.12)$$

Die Eigenschaften dieser Abbildung notieren wir in folgendem Lemma, welches sinngemäß aus [Ber07, Lemma 1.5.7] entnommen wurde.

**Lemma 4.2.1.** *Die KIRCHHOFF-Transformation  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert in (4.12), ist für (fast überall nichtnegatives)  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  (monoton steigend und) LIPSCHITZ-stetig mit LIPSCHITZ-Konstante  $\|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  und fast überall auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit  $\kappa' = k$ .*

*Gilt zusätzlich  $k(p) \geq \alpha > 0$  für fast alle  $p \in \mathbb{R}$ , so besitzt die dann streng monoton steigende KIRCHHOFF-Transformation eine streng monoton steigende und fast überall differenzierbare LIPSCHITZ-stetige Inverse  $\kappa^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit LIPSCHITZ-Konstante  $\|\frac{1}{k}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \alpha^{-1}$  und  $(\kappa^{-1})' = \frac{1}{k} \circ \kappa^{-1}$  fast überall auf  $\mathbb{R}$ .*

*Beweis.* LIPSCHITZ-Stetigkeit: Seien  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt mit  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$|\kappa(p_1) - \kappa(p_2)| = \left| \int_{p_1}^{p_2} k(t) dt \right| \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |p_2 - p_1|.$$

Monotonie: Es gelte nun zusätzlich  $k(t) \geq 0$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ . Mit  $p_1 \leq p_2$  haben wir dann

$$\kappa(p_2) = \int_0^{p_2} k(t) dt = \int_0^{p_1} k(t) dt + \int_{p_1}^{p_2} k(t) dt \geq \kappa(p_1).$$

Differenzierbarkeit: Der Satz von RADEMACHER (siehe z.B. [Wal95], S. 341ff) liefert, dass die LIPSCHITZ-stetige Funktion  $\kappa$  fast überall eine Ableitung im klassischen Sinn besitzt, was zusammen mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung dann  $\frac{d}{dp} \kappa(p) = k(p)$  für fast alle  $p \in \mathbb{R}$  liefert.

Zur Inversen: Die Positivitätsforderung an  $k$  fast überall auf  $\mathbb{R}$  liefert die strenge Monotonie der LIPSCHITZ-stetigen Funktion  $\kappa$ . Der Satz über die Umkehrfunktion (siehe z.B. [Wal01]) liefert die Existenz der streng monoton steigenden und stetigen Inversen  $\kappa^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Satz von LEBESGUE über die Differenzierbarkeit monotoner Funktionen (siehe z.B. [Wal95], Satz 9.26) liefert dann, dass  $\kappa^{-1}$  fast überall differenzierbar ist, was zusammen mit dem Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion (siehe z.B. [Heu98])

$$(\kappa^{-1})'(u) = \frac{1}{\kappa'(\kappa^{-1}(u))} = \frac{1}{k(\kappa^{-1}(u))} \quad (4.13)$$

für alle  $u \in \mathbb{R}$  liefert, für die die Ableitung  $\kappa'(\kappa^{-1}(u))$  existiert und nicht Null ist. Das sind aber fast alle  $u \in \mathbb{R}$ , da nach obigen Voraussetzungen  $\kappa'$  nur auf einer Nullmenge  $M$  nicht existiert oder Null ist ( $\kappa$  ist streng monoton), LEBESGUE-Nullmengen invariant unter absolutstetigen (also erst recht unter LIPSCHITZ-stetigen) Abbildungen sind, womit auch  $\kappa(M)$  (die Menge für die  $\kappa' \circ \kappa^{-1}$  nicht definiert ist) eine Nullmenge ist. Weiterhin gilt fast überall  $\kappa' = k$ , womit die zweite Gleichung in (4.13) und wegen

$$\|(\kappa^{-1})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\| \frac{1}{\kappa'} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\alpha}$$

die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\kappa^{-1}$  mit LIPSCHITZ-Konstante  $\left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  folgt.  $\square$

*Bemerkung 63.* (i) Vermittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann wegen

$$\kappa(p) = \int_0^p \kappa'(t) dt + \kappa(0) \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

umgekehrt jede streng monoton steigende LIPSCHITZ-stetige Funktion  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit LIPSCHITZ-Konstante  $\|\kappa'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  als KIRCHHOFF-Transformation mit Kern  $\kappa' \in L^\infty(\mathbb{R})$  aufgefasst werden.

(ii) Die KIRCHHOFF-Transformation  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann eine lineare Abbildung, wenn  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konstant ist.

*Bemerkung 64.* Zur späteren Verwendung berechnen wir die höheren Ableitungen von  $\kappa$  bzw.  $\kappa^{-1}$  unter der zusätzlichen Glattheitsvoraussetzung  $k \in W_\infty^{l-1}(\mathbb{R})$ , wobei  $l \in \mathbb{N}$  die Ordnung der höchsten Ableitung bezeichnet. Wir erhalten

$$\kappa^{(s)} = k^{(s-1)} \in W_\infty^{l-s}(\mathbb{R}), \quad s = 1, \dots, l,$$

sowie

$$\begin{aligned} (\kappa^{-1})' &= \frac{1}{k(\kappa^{-1})} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (\kappa^{-1})'' = -\frac{k'(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^3} \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ (\kappa^{-1})''' &= 3\frac{(k'(\kappa^{-1}))^2}{(k(\kappa^{-1}))^5} - \frac{k''(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^4} \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ (\kappa^{-1})^{(4)} &= -15\frac{(k'(\kappa^{-1}))^3}{(k(\kappa^{-1}))^7} + 10\frac{k'(\kappa^{-1})k''(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^6} - \frac{k'''(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^5} \in L^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\kappa^{-1})^{(5)} &= 105 \frac{(k'(\kappa^{-1}))^4}{(k(\kappa^{-1}))^9} - 105 \frac{(k'(\kappa^{-1}))^2 k''(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^8} \\
&\quad + \frac{10(k''(\kappa^{-1}))^2 + 15k'(\kappa^{-1})k'''(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^7} - \frac{k^{(4)}(\kappa^{-1})}{(k(\kappa^{-1}))^6} \in L^\infty(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen, welche entsprechend berechnet werden können, werden im Folgenden nicht benötigt, weshalb auf die formelle Angabe verzichtet wird. Für die Ableitungen der Rücktransformation folgern wir für  $1 \leq l \leq 5$  sofort

$$(\kappa^{-1})^{(s)} \in W_\infty^{l-s}(\mathbb{R}), \quad s = 1, \dots, l.$$

Dabei sei angemerkt, dass  $s = 0$  nicht zulässig ist, da  $\kappa^{-1} \notin L^\infty(\mathbb{R})$ .

Die obigen Ableitungen der Rücktransformation  $\kappa^{-1}$  liegen tatsächlich in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , wie die folgenden Überlegungen verdeutlichen. Zunächst beachten wir, dass  $\kappa$  für  $k \geq \alpha > 0$  nach Lemma 4.2.1 streng monoton und LIPSCHITZ-stetig ist, also insbesondere LEBESGUE-Nullmengen in LEBESGUE-Nullmengen abbildet. Für  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$  gilt dann  $h \circ \kappa^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\|h \circ \kappa^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Dazu definieren wir die LEBESGUE-Nullmenge  $M := \{x \in \mathbb{R} \mid |h(x)| > \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$ . Mit dem vorletzten Satz ist dann auch  $N := \kappa(M)$  eine Nullmenge und für  $x \in \mathbb{R} \setminus N$  gilt  $|h(\kappa^{-1}(x))| \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ , woraus die Behauptungen über  $h \circ \kappa^{-1}$  folgen. Weiterhin ist mit  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $k \geq \alpha > 0$ , auch  $\frac{1}{k} \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\|\frac{1}{k}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\alpha}$ . Zuletzt ist  $L^\infty(\mathbb{R})$  natürlich eine BANACH-Algebra bezüglich der punktweisen Multiplikation, was die Überlegungen abschließt.

Speziell liefert die Benutzung von  $p = \kappa^{-1}(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(\kappa^{-1})'(u) &= \frac{1}{k(p)}, \quad (\kappa^{-1})''(u) = -\frac{k'(p)}{(k(p))^3}, \quad (\kappa^{-1})'''(u) = 3\frac{(k'(p))^2}{(k(p))^5} - \frac{k''(p)}{(k(p))^4} \\
(\kappa^{-1})^{(4)}(u) &= -15\frac{(k'(p))^3}{(k(p))^7} + 10\frac{k'(p)k''(p)}{(k(p))^6} - \frac{k'''(p)}{(k(p))^5}.
\end{aligned}$$

Die KIRCHHOFF-Transformation (4.12) ist für reelle Zahlen erklärt. Wenden wir die KIRCHHOFF-Transformation punktweise fast überall auf eine in  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  LEBESGUE-messbare reellwertige Funktion  $p$  an, so erhalten wir wieder eine LEBESGUE-messbare Funktion  $\kappa(p)$ , da die stetige Funktion  $\kappa$  insbesondere eine CARATHEODORY-Funktion ist, siehe Definition A.4.1. Die nichtlineare Abbildung

$$T_\kappa : p \mapsto \kappa(p) \tag{4.14}$$

definiert somit einen Kompositionsoperator  $T_\kappa$ . Definitionen und Sätze im Zusammenhang mit Kompositions-, oder allgemeiner, NEMYTSKIJ-Operatoren befinden sich im Abschnitt A.4 im Anhang. Den Kompositionsoperator  $T_\kappa$  werden wir im Folgenden mit  $\kappa$  bezeichnen und unter der KIRCHHOFF-Transformation einerseits die Funktion (4.12) und andererseits den Operator (4.14) verstehen. Die KIRCHHOFF-Transformierte der Funktion  $p$  bezeichnen wir nachfolgend immer mit  $u$ , also

$$u(x) := T_\kappa(p)(x) = \kappa(p(x)) = \int_0^{p(x)} k(t) dt \quad \text{f.ü. in } \Omega. \tag{4.15}$$

Nun stellt sich die Frage, welche Abbildungseigenschaften die KIRCHHOFF-Transformation, aufgefasst als Operator zwischen geeigneten Funktionenräumen, hat. Dazu geben wir zuerst sinngemäß [Ber07, Lemma 1.5.10] wieder:

**Lemma 4.2.2.** *Für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  ist der durch (4.12) und (4.14) definierte Kompositionsoperator*

$$T_\kappa : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

*LIPSCHITZ-stetig und beschränkt. Die LIPSCHITZ-Konstante  $L(T_\kappa)$  genügt der Abschätzung  $L(T_\kappa) \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ .*

*Falls zusätzlich  $k \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$  gilt, so besitzt  $T_\kappa$  eine LIPSCHITZ-stetige beschränkte Inverse, welche durch den Kompositionsoperator*

$$T_\kappa^{-1} = T_{\kappa^{-1}} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

gegeben ist. Die LIPSCHITZ-Konstante  $L(T_\kappa^{-1})$  genügt  $L(T_\kappa^{-1}) \leq \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \alpha^{-1}$ . Insbesondere ist  $T_\kappa$  in diesem Fall bijektiv.

*Beweis.* Da  $\kappa(0) = 0$  ist, haben wir

$$|\kappa(t)| \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |t| \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

woraus mit dem Lemma A.4.2 folgt, dass  $T_\kappa$  von  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  abbildet und beschränkt und stetig ist. Die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $T_\kappa$  folgt aus der LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\kappa$ , siehe Lemma 4.2.1, wegen

$$\begin{aligned} \|T_\kappa(p_1) - T_\kappa(p_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega_i} |\kappa(p_1(x)) - \kappa(p_2(x))|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_i} \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 |p_1(x) - p_2(x)|^2 dx = \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|p_1 - p_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

woraus zusätzlich auch die Abschätzung für die LIPSCHITZ-Konstante resultiert.

Die Existenz der Inversen ist klar und ihre Eigenschaften folgen mit analogen Überlegungen aus dem zweiten Teil von Lemma 4.2.1.  $\square$

Die neben  $L^p(\Omega)$  einzigen Räume, in denen die Frage nach den Abbildungseigenschaften von NE-MYTSKIJ-Operatoren befriedigend geklärt ist, sind die SOBOLEV-Räume  $W_p^1(\Omega)$ . Bevor wir Abbildungseigenschaften von  $T_\kappa$  in dem für uns relevanten Fall  $p = 2$  formulieren, stellen wir noch ein weiteres Hilfsmittel zur Verfügung. Für LIPSCHITZ-stetiges  $\kappa$  und  $p \in H^1(\Omega)$  gilt mit  $u := T_\kappa(p)$  nach Satz A.4.4 fast überall in  $\Omega$  die Kettenregel

$$\nabla u = \nabla T_\kappa(p) = \nabla(\kappa \circ p) = \kappa'(p) \nabla p = k(p) \nabla p. \quad (4.16)$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen Lemma 4.2.1. Nun ist  $\kappa'(p(x)) \nabla p(x)$  immer wohldefiniert, vorausgesetzt wir interpretieren  $\kappa'(p(x)) \nabla p(x)$  an den Stellen, an denen  $\nabla p(x) = 0$  ist, als Null, unabhängig davon, ob  $\kappa'(p(x))$  überhaupt definiert ist. Dass (4.16) fast überall in  $\Omega$  Gültigkeit besitzt, folgt aus dem Satz von RADEMACHER, der liefert, dass die Menge der Punkte, an denen  $\kappa'$  nicht existiert, eine Nullmenge bezüglich des eindimensionalen LEBESGUE-Maßes ist, und aus einem Resultat von SERRIN und VARBERG in [SV69], welches besagt, dass  $\nabla p(x) = 0$  für fast alle  $x$  gilt (bezüglich des  $N$ -dimensionalen LEBESGUE-Maßes), für welche  $\kappa'(p(x))$  nicht definiert ist.

Wir übernehmen erneut sinngemäß ein Resultat aus [Ber07, Proposition 1.5.12, Proposition 1.5.14], welches die Abbildungseigenschaften der KIRCHHOFF-Transformation spezifiziert.

**Lemma 4.2.3.** Für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  ist der durch (4.12) und (4.14) definierte Kompositionsoperator

$$T_\kappa : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

stetig und beschränkt, wobei für alle  $p \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\|T_\kappa(p)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|p\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Falls zusätzlich  $k \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$  gilt, so besitzt  $T_\kappa$  eine stetige beschränkte Inverse, welche durch den Kompositionsoperator

$$T_\kappa^{-1} = T_{\kappa^{-1}} : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

gegeben ist und für alle  $u \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\|T_\kappa^{-1}(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.18)$$

*Beweis.* Lemma 4.2.1 sichert, dass  $\kappa' = k \in L^\infty(\mathbb{R})$  gilt. Der Satz A.4.3 im Anhang und die dort anschließende Bemerkung liefern dann, dass  $T_\kappa$  von  $H^1(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  abbildet und stetig ist. Zur

Beschränktheit überlegen wir uns einerseits, dass für  $p \in H^1(\Omega)$  die Kettenregel (4.16) fast überall in  $\Omega$  gilt, was mit  $u := T_\kappa(p) \in H^1(\Omega)$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega_i} |k(p(x))|^2 |\nabla p|^2 dx \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2$$

liefert und andererseits, dass wegen Lemma 4.2.2 und  $T_\kappa(0) = 0$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|p\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt, womit insgesamt (4.17) folgt.

Wegen  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  liefert Lemma 4.2.2, dass die Inverse für alle  $u \in H^1(\Omega)$  existiert und in  $L^2(\Omega)$  liegt. Nach Lemma 4.2.1 gilt  $(\kappa^{-1})' = \frac{1}{k} \circ \kappa^{-1}$  fast überall auf  $\mathbb{R}$ . Mit der Voraussetzung, dass  $k$  fast überall von Null weg beschränkt ist und weil LEBESGUE-Nullmengen invariant unter der LIPSCHITZ-stetigen Abbildung  $\kappa^{-1}$  sind, gilt zudem

$$\left\| \frac{1}{k} \circ \kappa^{-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

also  $\frac{1}{k} \circ \kappa^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Dass  $T_\kappa^{-1}$  nun tatsächlich von  $H^1(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  abbildet und stetig ist, liefern dann wieder Satz A.4.3 und die dort anschließende Bemerkung. Die Beschränktheit erhalten wir unter Beachtung von Lemma 4.2.2 und  $\kappa^{-1}(0) = 0$  analog zur Beschränktheit von  $T_\kappa$ .  $\square$

*Bemerkung 65.* Im Gegensatz zum Operator  $T_\kappa$  im  $L^2(\Omega)$  ist die Abbildung  $T_\kappa : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  im Allgemeinen *nicht* LIPSCHITZ-stetig. Des Weiteren sei bemerkt, dass der Operator  $T_\kappa$  in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $H^1(\Omega)$  linear ist, wenn die Abbildung  $\kappa$  linear ist, was nach Bemerkung 63(ii) genau dann der Fall ist, wenn  $k$  konstant ist.

*Bemerkung 66.* Lemma 4.2.3 liefert offensichtlich, dass sich die Normen von  $p \in H^1(\Omega)$  und  $u := T_\kappa(p)$  vermittels

$$\frac{1}{\|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

gegeneinander abschätzen lassen.

*Bemerkung 67.* Der Satz A.4.4 liefert noch mehr. Der Kompositionsoperator  $T_G$  mit LEBESGUE-messbarer Funktion  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bildet genau dann von  $H^1(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  ab, wenn die Abbildung stetig ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn  $G$  LIPSCHITZ-stetig ( $N > 1$ ) bzw. lokal LIPSCHITZ-stetig ( $N = 1$ ) ist. Für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  ist die KIRCHHOFF-Transformation  $\kappa$  nach Lemma 4.2.1 LIPSCHITZ-stetig und somit gelten die Aussagen von Satz A.4.4 natürlich auch für die, als Kompositionsoperator aufgefasste, KIRCHHOFF-Transformation  $T_\kappa$ .

Die Aussagen der letzten beiden Lemmata über die Abbildungseigenschaften der KIRCHHOFF-Transformation können auch für Funktionenräume über geeigneten Teilrändern, welche wir wegen des Zusammenhangs mit dem Spuroperator als Spurräume bezeichnen, formuliert werden. Wir übernehmen dazu aus [Ber07, Lemma 1.5.11] das

**Lemma 4.2.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  ist der durch (4.12) und (4.14) definierte Kompositionsoperator*

$$T_\kappa : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

*LIPSCHITZ-stetig und beschränkt. Die LIPSCHITZ-Konstante  $L(T_\kappa)$  genügt der Abschätzung  $L(T_\kappa) \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ .*

*Falls zusätzlich  $k \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$  gilt, so besitzt  $T_\kappa$  eine LIPSCHITZ-stetige beschränkte Inverse, welche durch den Kompositionsoperator*

$$T_\kappa^{-1} = T_{\kappa^{-1}} : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

*gegeben ist. Die LIPSCHITZ-Konstante  $L(T_\kappa^{-1})$  genügt  $L(T_\kappa^{-1}) \leq \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \alpha^{-1}$ .*



*Beweis.* Der Beweis ergibt sich mit Lemma 4.2.1 und da die LEBESGUE-Messbarkeit von Kompositionen von LEBESGUE-messbaren Funktionen durch Auswahl BOREL-messbarer Repräsentanten gezeigt werden kann. Die LIPSCHITZ-Stetigkeit folgt analog zu Lemma 4.2.2.  $\square$

Bevor wir einen ähnlichen Satz für reguläre Spurräume formulieren, überlegen wir uns, wann der Spuoperator und der durch die KIRCHHOFF-Transformation induzierte NEMYTSKIJ-Operator kommutieren. Hierzu geben wir sinngemäß [Ber07, Proposition 1.5.16] wieder:

**Lemma 4.2.5.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Falls  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine LEBESGUE-messbare Funktion ist und der durch (4.14) definierte Kompositionsoperator  $T_G^\Omega = T_G H^1(\Omega)$  in sich abbildet (bzw. eine der äquivalenten Eigenschaften aus Satz A.4.4 erfüllt ist), dann gilt für alle  $v \in H^1(\Omega)$*

$$T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v)) = \gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)), \quad (4.19)$$

wobei  $T_G^\Gamma$  den durch (4.14) definierten Kompositionsoperator auf  $L^2(\Gamma)$  bezeichnet.

Gilt zusätzlich  $G(0) = 0$ , so bildet der Kompositionsoperator  $T_G^\Omega$  den Unterraum

$$V_\Gamma := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_\Gamma(v) = 0\} \subset H^1(\Omega) \quad (4.20)$$

ebenfalls in sich ab.

*Beweis.* Wir zeigen  $\|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) - T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ . Sei  $v \in H^1(\Omega)$  beliebig und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$  eine Folge, welche in  $H^1(\Omega)$  gegen  $v$  konvergiert. Es ist  $T_G^\Omega(v_n)|_\Gamma = T_G^\Gamma(v_n|_\Gamma)$ , da für  $x_0 \in \Gamma$  wegen der Stetigkeit von  $G$ , siehe Satz A.4.4(iii),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(v_n(x)) = G(\lim_{x \rightarrow x_0} v_n(x)) = G(v_n(x_0))$$

gilt. Insbesondere ist  $T_G^\Omega(v_n)$  wieder stetig, womit die Schreibweise  $T_G^\Omega(v_n)|_\Gamma$  in natürlicher Weise erklärt ist. Einführen der produktiven Null und Verwendung der Dreiecksungleichung führt zu

$$\|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) - T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) - T_G^\Omega(v_n)|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} + \|T_G^\Gamma(v_n|_\Gamma) - T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Nun gilt mit dem Spursatz A.2.8 und der Stetigkeit von  $T_G^\Omega$ , siehe Satz A.4.4(ii), wiederum

$$\begin{aligned} \|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) - T_G^\Omega(v_n)|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} &= \|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v) - T_G^\Omega(v_n))\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_\Gamma\| \|T_G^\Omega(v) - T_G^\Omega(v_n)\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Im Fall  $N > 1$  liefert Satz A.4.4(iii), dass  $G$  LIPSCHITZ-stetig ist. Wir bezeichnen die LIPSCHITZ-Konstante von  $G$  mit  $L(G)$ . Dann ist wegen

$$\|T_G^\Gamma(\mu) - T_G^\Gamma(\eta)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \int_\Gamma |G(\mu) - G(\eta)|^2 d\sigma \leq L(G)^2 \|\mu - \eta\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

der Operator  $T_G^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  LIPSCHITZ-stetig mit LIPSCHITZ-Konstante  $L(T_G^\Gamma) := L(G)$  und zusammen mit dem Spursatz A.2.8 gilt

$$\begin{aligned} \|T_G^\Gamma(v_n|_\Gamma) - T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))\|_{L^2(\Gamma)} &\leq L(T_G^\Gamma) \|v_n|_\Gamma - \gamma_\Gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq L(T_G^\Gamma) \|\gamma_\Gamma\| \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir nach Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  somit  $\|\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) - T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ , was die erste Behauptung des Lemmas liefert.

Sei nun  $v \in V_\Gamma \subset H^1(\Omega)$ . Dann gilt nach Definition  $\gamma_\Gamma(v) = 0$  und der erste Teil des Lemmas zusammen mit  $G(0) = 0$  liefert  $\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) = T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v)) = T_G^\Gamma(0) = 0$ , also  $T_G^\Omega(v) \in V_\Gamma$ .  $\square$

*Bemerkung 68.* Für  $N = 1$  ist die Aussage (4.19) wegen der stetigen (kompakten) Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  offensichtlich.

*Bemerkung 69.* (i) Da der Spuroperator  $\gamma_\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  bzw.  $\gamma_\Gamma : V_\Gamma \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  surjektiv ist, siehe Abschnitt A.2.6 im Anhang, und natürlich  $H_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$  gilt, folgen unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas die Abbildungseigenschaften des Kompositionsoperators  $T_G^\Gamma$  auf den Teilrandfunktionenräumen aus (4.19), nämlich

$$T_G^\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{bzw.} \quad T_G^\Gamma : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma).$$

(ii) Die zweite Abbildungseigenschaft in (i) kann auch anders gezeigt werden: Um zu sehen, dass  $T_G^\Gamma$  auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  agiert, betrachten wir ein beliebiges  $\eta \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  und bezeichnen mit  $\tilde{\eta} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  die Nullfortsetzung von  $\eta$  auf  $\partial\Omega$ . Da  $G(0) = 0$  und  $T_G^{\partial\Omega}$  auf  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  agiert, haben wir  $T_G^{\partial\Omega}(\tilde{\eta}) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  und  $T_G^{\partial\Omega}(\tilde{\eta})$  ist Nullfortsetzung von  $T_G^\Gamma(\eta) \in H^{1/2}(\Gamma)$ , also folglich nach Definition  $T_G^\Gamma(\eta) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ .

*Bemerkung 70.* Die durch (4.12) für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  definierte KIRCHHOFF-Transformation  $\kappa$  ist natürlich LEBESGUE-messbar und der zugehörige Kompositionsoperator  $T_\kappa$  bildet nach Lemma 4.2.3  $H^1(\Omega)$  in sich ab und es gilt  $\kappa(0) = 0$ . Damit gelten die Aussagen des letzten Lemmas und der Bemerkung 69 speziell auch für die KIRCHHOFF-Transformation.

Die Aussage über die Abbildungseigenschaften der Kompositionsoperatoren in Verbindung mit den Funktionenräumen über Teilrändern aus Bemerkung 69 kann weiter verschärft werden. Dies zeigt das folgende Lemma, welches wieder aus [Ber07, Proposition 1.5.17] übernommen wurde.

**Lemma 4.2.6.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Falls  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine LEBESGUE-messbare Funktion ist und der durch (4.14) definierte Kompositionsoperator  $T_G^\Omega = T_G$   $H^1(\Omega)$  in sich abbildet, dann ist der (wiederum durch (4.14) definierte) Kompositionsoperator*

$$T_G^\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

*stetig. Wenn zusätzlich  $G(0) = 0$  gilt, dann ist auch der Kompositionsoperator*

$$T_G^\Gamma : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

*stetig. Falls darüber hinaus der Kompositionsoperator  $T_G^\Omega$  in  $H^1(\Omega)$  beschränkt ist, so sind die obigen (Rand-) Kompositionsoperatoren  $T_G^\Gamma$  ebenfalls beschränkt.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{R}_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$  der lineare stetige Fortsetzungsoperator aus Satz A.2.8. Unter Benützung von Lemma 4.2.5 haben wir

$$T_G^\Gamma = T_G^\Gamma \circ \gamma_\Gamma \circ \mathcal{R}_\Gamma = \gamma_\Gamma \circ T_G^\Omega \circ \mathcal{R}_\Gamma, \quad (4.21)$$

wobei der Operator auf der rechten Seite unter Beachtung von Satz A.2.8 und Bemerkung 67 auf Seite 84 als Nacheinanderausführung von stetigen Operatoren wieder stetig ist und offensichtlich auf  $H^{1/2}(\Gamma)$  agiert. Die Linearität und Stetigkeit (also Beschränktheit) des Spur- bzw. Fortsetzungsoperators und die vorausgesetzte Beschränktheit des nichtlinearen Operators  $T_G^\Omega$  liefert die Beschränktheit von  $T_G^\Gamma$  in  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Ebenso existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator  $\mathcal{R}_\Gamma : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \subset H^1(\Omega)$ , wobei  $V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  entsprechend (4.20) erklärt ist, und der auf  $V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  eingeschränkte Spuroperator  $\gamma_\Gamma : V_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$  ist linear und stetig, siehe dazu Abschnitt A.2.6 im Anhang. Lemma 4.2.5 liefert wieder (4.21), wobei der Operator auf der rechten Seite unter den eben gemachten Anmerkungen und unter Berücksichtigung von Bemerkung 67 als Nacheinanderausführung von stetigen Operatoren wieder stetig ist und nach Bemerkung 69 auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  agiert. Um die Beschränktheit von  $T_G^\Gamma$  auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  zu sehen, betrachten wir ein beliebiges  $\eta \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  und bezeichnen mit  $\tilde{\eta} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  die Nullfortsetzung von  $\eta$  auf  $\partial\Omega$ . Da  $G(0) = 0$  und  $T_G^{\partial\Omega}$  auf  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  agiert, haben wir  $T_G^{\partial\Omega}(\tilde{\eta}) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  und  $T_G^{\partial\Omega}(\tilde{\eta})$  ist die Nullfortsetzung von  $T_G^\Gamma(\eta) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . Mit der Beobachtung, dass für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  mit Nullfortsetzung  $\tilde{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  die Normen  $\|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$  und  $\|\tilde{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  äquivalent sind, erhalten wir mit dem ersten Teil des Lemmas, angewendet auf  $\Gamma = \partial\Omega$

$$\|T_G^\Gamma(\eta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|T_G^{\partial\Omega}(\tilde{\eta})\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|T_G^{\partial\Omega}\| \|\tilde{\eta}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \lesssim \|T_G^{\partial\Omega}\| \|\eta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)},$$

also die Beschränktheit von  $T_G^\Gamma$  in  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . □

Als direkte Folgerung aus dem letzten Lemma erhalten wir die Abbildungseigenschaften der KIRCHHOFF-Transformation auf den Spurräumen. Wir formulieren dies als

**Lemma 4.2.7.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  sowie  $\Lambda_\Gamma \in \{H^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\}$ . Für  $k \in L^\infty(\mathbb{R})$  ist der durch (4.12) und (4.14) definierte Kompositionoperator*

$$T_\kappa^\Gamma : \Lambda_\Gamma \rightarrow \Lambda_\Gamma$$

*stetig und beschränkt.*

*Falls zusätzlich  $k \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$  gilt, so besitzt  $T_\kappa^\Gamma$  eine stetige beschränkte Inverse, welche durch den Kompositionoperator*

$$(T_\kappa^\Gamma)^{-1} = T_{\kappa^{-1}}^\Gamma = \gamma_\Gamma \circ (T_\kappa^\Omega)^{-1} \circ \mathcal{R}_\Gamma : \Lambda_\Gamma \rightarrow \Lambda_\Gamma$$

*gegeben ist.*

*Beweis.* Die Bemerkungen 67 bzw. 70 liefern, dass der durch (4.12) und (4.14) definierte Kompositionoperator  $T_\kappa^\Gamma$  der KIRCHHOFF-Transformation die Voraussetzung von Lemma 4.2.6 erfüllt, mit dem sich die Abbildungseigenschaften, die Stetigkeit und die Beschränktheit von  $T_\kappa^\Gamma$  ergeben. Die Beschränktheitskonstanten können genauer bestimmt werden. Wir errechnen unter Benutzung von (4.21), (4.17) und den entsprechenden Spur- und Fortsetzungssätzen aus Abschnitt A.2.6 für alle  $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \|T_\kappa^\Gamma(\mu)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \|(\gamma_\Gamma \circ T_\kappa^\Omega \circ \mathcal{R}_\Gamma)(\mu)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{1/2}(\Gamma))} \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{R}_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))} \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

bzw. mit Teil zwei von Lemma 4.2.5 für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \|T_\kappa^\Gamma(\mu)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &= \|(\gamma_\Gamma \circ T_\kappa^\Omega \circ \mathcal{R}_\Gamma)(\mu)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_\Gamma\|_{\mathcal{L}(V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}, H_{00}^{1/2}(\Gamma))} \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{R}_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), V_{\partial\Omega \setminus \Gamma})} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei  $V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  entsprechend (4.20) definiert ist.

Unter obiger Positivitätsforderung liefert Lemma 4.2.4 die Existenz einer Inversen  $(T_\kappa^\Gamma)^{-1} = T_{\kappa^{-1}}^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  und in Lemma 4.2.3 wird ersichtlich, dass  $T_{\kappa^{-1}}^\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  in sich abbildet und beschränkt ist. Somit können wir die Lemmata 4.2.5 und 4.2.6 auf die Inverse  $T_{\kappa^{-1}}^\Gamma$  anwenden und erhalten die Stetigkeit und Beschränktheit der Inversen in den oben angegebenen Räumen. Genauer errechnen wir mittels (4.18) für alle  $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$  die Abschätzung

$$\left\| (T_\kappa^\Gamma)^{-1}(\mu) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\gamma_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{1/2}(\Gamma))} \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{R}_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))} \|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

bzw. mit Teil zwei von Lemma 4.2.5, angewendet auf  $T_{\kappa^{-1}}^\Gamma$ , für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$

$$\left\| (T_\kappa^\Gamma)^{-1}(\mu) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\gamma_\Gamma\|_{\mathcal{L}(V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}, H_{00}^{1/2}(\Gamma))} \left\| \frac{1}{k} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{R}_\Gamma\|_{\mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), V_{\partial\Omega \setminus \Gamma})} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)},$$

wobei  $V_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  entsprechend (4.20) definiert ist.  $\square$

An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass im Folgenden sowohl für die KIRCHHOFF-Transformation ( $T_\kappa^\Gamma$  bzw.  $T_\kappa^\Omega$ ), aufgefasst als Operator zwischen geeigneten Funktionenräumen, als auch für die KIRCHHOFF-Transformation, aufgefasst als Funktion auf den reellen Zahlen, jeweils einfach  $\kappa$  geschrieben wird.

### 4.3 Das transformierte Transmissionsproblem

In diesem Abschnitt überführen wir das quasilineare Transmissionsproblem (4.5) in ein springendes Transmissionsproblem. Insbesondere zeigen wir, dass die schwachen Formulierungen des quasilinearen Transmissionsproblems und des springenden Transmissionsproblems äquivalent sind. Zudem wird die eindeutige Lösbarkeit des transformierten Problems gefolgert.

Unterziehen wir das quasilineare Transmissionsproblem (4.5) in jedem Teilgebiet jeweils einer KIRCHHOFF-Transformation (4.15) mit Kern  $k_i, i = 1, 2$ , und bezeichnen die Transformierte mit  $u_i := \kappa_i(p_i), i = 1, 2$ , so erhalten wir unter Verwendung der verallgemeinerten Kettenregel (4.16) das *springende Transmissionsproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \kappa_1^{-1}(u_1) = \kappa_2^{-1}(u_2) & \text{auf } \Gamma \\ \partial_{n_1} u_1 = -\partial_{n_2} u_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.22)$$

mit der Normalenableitung  $\partial_{n_i} u_i = \nabla u_i \cdot n_i$ , wobei  $n_i$  die bezüglich  $\Omega_i$  nach außen gerichtete Einheitsnormale auf  $\Gamma$  bezeichnet. Natürlich gilt  $n_1(x) = -n_2(x)$  für  $x \in \Gamma$ .

Die Teilprobleme auf  $\Omega_i, i = 1, 2$ , sind linear und haben zudem eine sehr einfache Gestalt. Der nichtlineare Charakter von (4.5) geht durch diese Transformationen natürlich nicht verloren, vielmehr verschiebt er sich in  $(4.22)_3$ , d.h. in die DIRICHLET-Daten auf  $\Gamma$ .

*Bemerkung 71.* Die Spuren von  $u_1$  und  $u_2$  auf  $\Gamma$  stimmen wegen der springenden Nichtlinearitäten  $k_i$  im Allgemeinen nicht mehr überein. Damit ist  $L^2(\Omega) \ni u = (u_1, u_2) \notin H^1(\Omega)$  und die Standardargumentation zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Transmissionsproblems (4.22) mit Hilfe der Lösung des zu (4.22) gehörenden Gesamtproblems kann nicht angewendet werden, da dieses Gesamtproblem in  $H^1(\Omega)$  eben keine Lösung besitzt. Siehe auch Abschnitt B.1 im Anhang für einen Überblick über lineare Transmissionsprobleme.

Anstatt (4.5) können wir auch die schwache Formulierung des quasilinearen Transmissionsproblems (4.10) in den Teilgebieten jeweils der KIRCHHOFF-Transformation (4.15), also  $u_i := \kappa_i(p_i), i = 1, 2$ , unterziehen und erhalten unter Beachtung der Kettenregel (4.16) das Variationsproblem:

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$ , sodass

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_\Gamma^1(\kappa_1^{-1}(u_1)) = \gamma_\Gamma^2(\kappa_2^{-1}(u_2)) & \text{in } H_0^{1/2}(\Gamma) \\ \langle \partial_{n_1} u_1, \mu \rangle = -\langle \partial_{n_2} u_2, \mu \rangle & \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.23)$$

gilt, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_0^{-1/2}(\Gamma) \times H_0^{1/2}(\Gamma)$  bezeichnet und die Normalenableitungen  $\partial_{n_i} u_i \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  als

$$\langle \partial_{n_i} u_i, \mu \rangle = a_i(u_i, \mathcal{R}^i \mu) - (f_i, \mathcal{R}^i \mu)_{L^2(\Omega_i)}, \quad i = 1, 2, \quad (4.24)$$

definiert sind.  $\mathcal{R}^i$  bezeichnet wieder den linearen stetigen Fortsetzungsoperator aus Bemerkung 60 auf Seite 78. Die KIRCHHOFF-Transformation überführt die in der ersten Komponente nichtlineare Form  $b_i$  (4.9) in die Bilinearform

$$a_i(u_i, v_i) = (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad i = 1, 2, \quad (4.25)$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_i)}$  wieder das  $L^2$ -Skalarprodukt bezeichnet und  $u_i, v_i \in V_i$  ist.

Weiterhin sind die nach (4.8) definierten Mengen  $V_i, i = 1, 2$ , wegen Lemma 4.2.5 auf Seite 85 und Bemerkung 70 auf Seite 86 invariant unter der KIRCHHOFF-Transformation, d.h. es gilt  $\kappa_i(p_i) \in V_i$  für alle  $p_i \in V_i$ .

*Bemerkung 72.* Die Bilinearformen (4.25) sind beschränkt und  $V_i$ -elliptisch, d.h. es existieren Konstanten  $C_{B_i} > 0$  und  $C_{E_i} > 0$  mit

$$a_i(v_i, w_i) \leq C_{B_i} \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} \quad \forall v_i, w_i \in V_i, \quad i = 1, 2,$$

und

$$a_i(v_i, v_i) \geq C_{E_i} \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \quad \forall v_i \in V_i, \quad i = 1, 2.$$

Diese Behauptungen ergeben sich unter Beachtung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung und der POINCARÉ-Ungleichung Satz A.2.2.

*Bemerkung 73.* Die Normalenableitungen (4.24) sind wegen der Linearität und Beschränktheit der Bilinearform  $a_i(\cdot, \cdot)$ , des  $L^2(\Omega_i)$ -Skalarproduktes und des Fortsetzungsoperators  $\mathcal{R}^i$  selbst wieder linear und stetig, also tatsächlich Elemente aus  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ .

Unter *schwachen Lösungen* von (4.22) sollen Lösungen von (4.23) verstanden werden. Dass diese Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs sinnvoll ist, machen wir uns mit analogen Überlegungen wie in Abschnitt 4.1.2, speziell Seite 78, klar.

Um die Äquivalenz des quasilinearen Transmissionsproblems (4.5) und des transformierten Transmissionsproblems (4.22) zu sichern, benötigen wir die bereits am Anfang des Kapitels an die Nichtlinearitäten gestellte Voraussetzung, die die Injektivität der KIRCHHOFF-Transformationen sichert. Wir formulieren nochmals explizit die

**Voraussetzung 4.2.** Die Nichtlinearitäten  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , die als Kerne der KIRCHHOFF-Transformation (4.15) auf  $\Omega_i$  fungieren, erfüllen  $k_i \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$ .

Damit erhalten wir das

**Lemma 4.3.1.** *Die Variationsprobleme (4.10) und (4.23) sind unter der Voraussetzung 4.2 in folgendem Sinn äquivalent:  $(p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$  ist Lösung von (4.10) genau dann, wenn  $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$  mit  $u_i = \kappa_i(p_i)$ ,  $i = 1, 2$ , Lösung von (4.23) ist.*

*Beweis.* Die Behauptung des Lemmas ist unter Beachtung der Herleitung von (4.23) und der Injektivität der KIRCHHOFF-Transformation offensichtlich.  $\square$

Ist zusätzlich Voraussetzung 4.1 erfüllt, dann liefert dieses Lemma und Korollar 4.1.3 das

**Korollar 4.3.2.** *Die Voraussetzungen 4.1 und 4.2 seien erfüllt. Dann besitzt das transformierte Transmissionsproblem (4.22) eine eindeutige schwache Lösung.*

*Bemerkung 74.* Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (4.22) kann ohne Voraussetzung 4.1 nicht gesichert werden. Zwar besitzen die Teilprobleme in (4.23) für festes  $u_j$  mit  $j \neq i$  nach dem Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM eindeutige Lösungen  $u_i \in V_i$ , aber das sichert noch nicht die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Transmissionsproblems.

*Bemerkung 75.* Unter Beachtung von Lemma 4.2.5 auf Seite 85 mit  $\kappa^{-1}$  statt  $\kappa$  ist sofort klar, dass in (4.23)<sub>2</sub> der Spuroperator und die KIRCHHOFF-Transformation kommutieren, d.h. das (4.23)<sub>2</sub> auch durch

$$\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1)) = \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2))$$

ersetzt werden kann, wobei die inversen KIRCHHOFF-Transformationen nach Lemma 4.2.7 auf Seite 87 nun natürlich auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  agieren.

Der Vorteil des durch KIRCHHOFF-Transformation entstandenen springenden Transmissionsproblems (4.22) liegt in der Linearität und einfachen Struktur der Teilprobleme auf  $\Omega_i$ . Der nichtlineare Anteil findet sich nur noch in den DIRICHLET-Daten auf dem Teilrand  $\Gamma$  wieder. Beispielsweise kann die Hauptarbeit bei der numerischen Lösung des quasilinearen Transmissionsproblems (4.5) mittels Gebietszerlegungsmethoden, welche in der iterativen Lösung der nichtlinearen Teilprobleme auf  $\Omega_i$  besteht, reduziert werden, da die durch Transformation erhaltenen linearen Teilprobleme mit effizienten numerischen Standardverfahren behandelt werden können.

## 4.4 Probleme bei der Anwendbarkeit der VSAM

In diesem Abschnitt werden wir einen Bezug zu Kapitel 3 herstellen und darlegen, welche Probleme bei der Anwendung der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode auf das nichtmonotone quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten entstehen.

Wie wir am Anfang des Kapitels schon festgestellt haben, können wir die in Kapitel 3 entwickelte verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode für quasilineare Probleme nicht auf das quasilineare Modellproblem (4.1) bzw. das quasilineare Transmissionsproblem (4.5) anwenden. Der Grund hierfür waren weniger die springenden Nichtlinearitäten als vielmehr die fehlende gleichmäßige Monotonie des Problems.

Ähnlich verhält es sich mit dem transformierten Transmissionsproblem. Die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode für lineare Probleme aus Abschnitt 2.4 kann so angepasst werden, dass formal auch das springende Transmissionsproblem (4.22) damit behandelt werden kann. Auch die Wohldefiniertheit des entstehenden Algorithmus kann sichergestellt werden. Nur der Konvergenzbeweis aus dem linearen Fall lässt sich nicht übernehmen. Dazu wäre mit der Bilinearform  $a_i$  nach (4.25) die Abschätzung

$$a_i(\kappa_i^{-1}(u_i) - \kappa_i^{-1}(v_i), u_i - v_i) \gtrsim \|\nabla(u_i - v_i)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \quad \forall u_i, v_i \in V_i$$

notwendig, was in dem hier betrachteten Fall einer Streifenzerlegung in zwei Teilgebiete, einer gleichmäßigen Monotoniebedingung entspricht. Diese Bedingung ist aber im Allgemeinen nicht erfüllt.

Auf den Teilgebieten gleichmäßig monotone Probleme, die springende Nichtlinearitäten besitzen, können jedoch mit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode aus Kapitel 3 behandelt werden. Der Algorithmus (3.21)-(3.22) ist auch in diesen Fällen wohldefiniert und die Konvergenzresultate übertragen sich, da hierzu nur die gleichmäßige Monotonie benötigt wird. Allerdings muss in diesem Fall die Existenz und ggf. Eindeutigkeit einer Lösung des Gesamtproblems (3.3) und damit auch des quasilinearen Transmissionsproblems (3.8) vorausgesetzt oder auf anderem Wege gesichert werden, da die entsprechenden Sätze aus dem oben genannten Kapitel nicht verwendet werden können. Die Voraussetzung 3.1(ii) ist nämlich für den Operator auf dem Gesamtgebiet wegen der springenden Nichtlinearitäten nicht mehr erfüllt. Wir wollen noch anmerken, dass das nichtmonotone Problem (4.1) auch auf den Teilgebieten die Voraussetzung 3.1(ii) nicht erfüllt, da von den Nichtlinearitäten nur  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R})$  gefordert wird. Mit der geringfügigen Regularitätsforderung  $k_i \in W_\infty^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}_B^0(\mathbb{R})$  ist dann für die eingeschränkten Operatoren Voraussetzung 3.1(ii) auf den Teilgebieten erfüllt. Natürlich fehlt immer noch die gleichmäßige Monotonie, sodass der eben beschriebene Weg bei Problem (4.5) selbst dann nicht eingeschlagen werden kann.

Auch können die oben betrachteten nichtmonotonen Probleme (4.1) bzw. (4.5) mit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode behandelt werden, wenn die Nichtlinearitäten *nicht* springen. Wir haben dann insbesondere für die Nichtlinearitäten in (4.2)  $k_1 = k_2 = k$ . Die KIRCHHOFF-Transformation des Gesamtproblems liefert dann ein homogenes DIRICHLET-Problem für den LAPLACE-Operator, welches mit der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode für lineare Probleme aus Abschnitt 2.4 gelöst werden kann. Die rücktransformierte Lösung genügt natürlich dem Ausgangsproblem.

Im Allgemeinen können die nichtmonotonen Probleme mit springenden Nichtlinearitäten (4.1) bzw. (4.5) also nicht mit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode behandelt werden.

## 4.5 Ein optimierungsbasierter Lösungsansatz

Da sich die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode nicht in zufriedenstellender Weise auf nichtmonotone quasilineare Probleme mit springenden Nichtlinearitäten anwenden lässt, wird in diesem Abschnitt ein optimierungsbasierter Ansatz zur Lösung des springenden Transmissionsproblems (4.22) vorgestellt, in dem Ideen aus [GPK99] bzw. [GHL00] aufgegriffen werden. Zunächst werden im ersten Teilabschnitt Hilfsprobleme eingeführt, die zur Konstruktion des Optimierungsproblems benötigt werden. Nachdem diese Hilfsprobleme in zwei äquivalenten Varianten schwach formuliert sind, wird ihre eindeutige (schwache) Lösbarkeit gezeigt. Im zweiten Unterabschnitt formulieren wir unter Benutzung der Hilfsprobleme ein restringiertes Minimierungsproblem und zeigen, dass dieses eine eindeutige optimale Lösung besitzt, welche auch das springende Transmissionsproblem erfüllt. Weiterhin führen wir regularisierte Varianten des Minimierungsproblems ein und zeigen, dass diese regularisierten restringierten Minimierungsprobleme (nicht notwendig eindeutige) Lösungen besitzen. Zudem wird der Zusammenhang zwischen den Lösungen der regularisierten Probleme und der Lösung des ursprünglichen restringierten Optimierungsproblems hergestellt. Im dritten Teilabschnitt werden die regularisierten restringierten Minimierungsprobleme äquivalent in freie Minimierungsprobleme umgeformt. Darüber hinaus wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie diese freien

Minimierungsprobleme genutzt werden können, um die eindeutige Lösbarkeit der regularisierten Optimierungsprobleme zu sichern.

### 4.5.1 Die Hilfsprobleme

Wir formulieren in den im Abschnitt 4.1.1 eingeführten LIPSCHITZ-Teilgebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zunächst Hilfsprobleme, welche anschließend zur Konstruktion des Optimierungsproblems benötigt werden.

Für  $g \in \left(H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)' = H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  und  $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) = L^2(\Omega)$  betrachten wir die *Hilfsprobleme*

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{n_i} u_i = (-1)^{i+1} g & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (4.26)$$

wobei die Bezeichnungen wie beim springenden Transmissionsproblem (4.22) gewählt sind. Die Hilfsprobleme sind also gemischte Randwertprobleme für den LAPLACE-Operator mit homogenen DIRICHLET-Daten. Wir bemerken die Ähnlichkeit der Hilfsprobleme zu den Teilproblemen des springenden Transmissionsproblems. Der Unterschied besteht im Fehlen der Transmissionsbedingung (4.22)<sub>3</sub> und in der Änderung der rechten Seite der Transmissionsbedingung (4.22)<sub>4</sub>. Die beiden Hilfsprobleme sind über das Funktional  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  gekoppelt. Im Folgenden werden wir die Bezeichnung *Kontrollfunktional* für  $g$  verwenden.

Unter einer *schwachen Lösung* von (4.26) wollen wir eine Lösung der folgenden Aufgabe verstehen: Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$ , sodass

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{n_i} u_i, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = (-1)^{i+1} \langle g, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.27)$$

gilt, wobei  $a_i$  die beschränkte Bilinearform (4.25) bezeichnet und die Normalenableitungen in (4.24) erklärt sind. Dass diese Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs sinnvoll ist, machen wir uns mit analogen Überlegungen wie denen in Abschnitt 4.1.2, speziell Seite 78, klar.

Wir betrachten noch eine weitere schwache Formulierung:

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$ , sodass

$$a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + (-1)^{i+1} \langle g, \gamma_{\Gamma}^i(v_i) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall v_i \in V_i \quad (4.28)$$

gilt, wobei  $a_i$  wieder die beschränkte Bilinearform (4.25) bezeichnet.

**Lemma 4.5.1.** *Die Probleme (4.27) und (4.28) sind äquivalent, d.h. eine Lösung eines der beiden Probleme genügt auch dem anderen.*

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Für beliebiges  $w_i \in V_i$  existiert wegen  $w_i = (w_i - \mathcal{R}^i \gamma_{\Gamma}^i(w_i)) + \mathcal{R}^i \gamma_{\Gamma}^i(w_i)$  eine Darstellung der Form  $w_i = v_i + \mathcal{R}^i \mu$  mit  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$  und  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . Setzen wir  $v_i$  und  $\mu$  in (4.27) ein und addieren die beiden Gleichungen, so erhalten wir unter Beachtung der Linearität der Bilinearform  $a_i$  und des Dualitätsproduktes die Gleichung (4.28). Da  $w \in V_i$  beliebig war, ist die Hinrichtung gezeigt.

$\Leftarrow$ : Setzen wir in (4.28)  $v_i \in H_0^1(\Omega_i) \subset V_i$  ein, so erhalten wir (4.27)<sub>1</sub>. Für beliebiges  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  ist  $\mathcal{R}^i \mu \in V_i$ . Einsetzen von  $\mathcal{R}^i \mu$  in (4.28) liefert unter Beachtung der Definition von  $\partial_{n_i} u_i$  die Gleichung (4.27)<sub>2</sub>. Da  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  beliebig war, ist die Rückrichtung gezeigt.  $\square$

**Lemma 4.5.2.** *Die Hilfsprobleme (4.26) besitzen eindeutige (schwache) Lösungen  $\bar{u}_i \in V_i, i = 1, 2$ , und es gelten die Abschätzungen*

$$\|\bar{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \lesssim \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)}, \quad i = 1, 2.$$

*Insbesondere existiert genau ein Operator  $A_i \in \mathcal{L}(V_i, (V_i)')$  mit  $A_i^{-1} \in \mathcal{L}((V_i)', V_i)$ , sodass*

$$\langle A_i u_i, v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} = a_i(u_i, v_i) \quad \forall u_i, v_i \in V_i$$

gilt und (4.28) äquivalent zur Operatorgleichung

$$A_i u_i = F_i(g),$$

ist. Dabei ist die affin lineare und beschränkte Abbildung  $F_i : H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow (V_i)'$  durch

$$\langle F_i(g), v_i \rangle_{(V_i)' \times V_i} := (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + (-1)^{i+1} \langle g, \gamma_\Gamma^i(v_i) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall v_i \in V_i$$

gegeben und es gilt

$$\|F_i(g)\|_{(V_i)'} \leq \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|\gamma_\Gamma^i\| \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

*Beweis.* Mit obiger Bemerkung genügt es, die eindeutige Lösbarkeit und die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten der Variationsaufgabe (4.28) zu zeigen. Mit Bemerkung 72 auf Seite 88 ist klar, dass die beschränkte Bilinearform  $a_i(\cdot, \cdot)$   $V_i$ -elliptisch ist. Weiterhin ist die rechte Seite von (4.28) wegen

$$\begin{aligned} \left| (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + (-1)^{i+1} \langle g, \gamma_\Gamma^i(v_i) \rangle \right| &\leq \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|v_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma^i(v_i)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \left( \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + C_i \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)} \right) \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \end{aligned}$$

ein stetiges Funktional auf  $V_i$ , wobei die HÖLDERSche Ungleichung benutzt wurde,  $C_i > 0$  die Beschränktheitskonstante des Spuoperators  $\gamma_\Gamma^i : V_i \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  ist, siehe Abschnitt A.2.6 im Anhang, und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  bezeichnet. Der Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung  $\bar{u}_i \in V_i$  und die Abschätzung

$$\|\bar{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \frac{1}{C_{E_i}} \left( \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + C_i \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)} \right), \quad i = 1, 2,$$

wobei  $C_{E_i} > 0$  die Elliptizitätskonstante aus Bemerkung 72 auf Seite 88 ist.

Wegen der Linearität und Beschränktheit der Bilinearform gilt für festes  $u_i \in V_i$   $a_i(u_i, \cdot) \in (V_i)'$ . Wir definieren  $A_i u_i := a_i(u_i, \cdot)$ . Die Linearität und Beschränktheit folgt dann direkt aus den Eigenschaften der Bilinearform. Auch die Eindeutigkeit ist klar. Die Existenz einer stetigen Inversen folgt wieder mit LAX-MILGRAM.  $F_i(g)$  ist für jedes  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  ein lineares stetiges Funktional auf  $V_i$ . Da das Dualitätsprodukt stetig ist, ist auch  $F_i : H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow (V_i)'$  stetig, wobei sich die Beschränktheitskonstanten aus obiger Abschätzung ergeben. Insgesamt ist  $u_i = A_i^{-1} F_i(g)$  Lösung der Operatorgleichung.  $\square$

Bemerkungen zur Regularität der Lösungen der Hilfsprobleme befinden sich im Abschnitt B.2 im Anhang.

## 4.5.2 Das restringierte Minimierungsproblem

Bevor wir ein Optimierungsproblem formulieren, stellen wir die Frage, inwieweit die Lösung des springenden Transmissionsproblems (4.22) aus den Lösungen der Hilfsprobleme (4.26) rekonstruiert werden kann. Dazu folgendes

**Lemma 4.5.3.** *Sei  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in V_1 \times V_2$  die eindeutige (schwache) Lösung des springenden Transmissionsproblems (4.22). Mit der Wahl  $g := \partial_{n_1} \bar{u}_1 = -\partial_{n_2} \bar{u}_2 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ , wobei die Normalenableitungen nach (4.24) erklärt sind, gilt für die eindeutigen (schwachen) Lösungen  $\hat{u}_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , der Hilfsprobleme (4.26)  $\bar{u}_i = \hat{u}_i$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Beweis.* Für die spezielle Wahl des Kontrollfunktionals  $g$  sind die Hilfsprobleme Bestandteil des springenden Transmissionsproblems, wie ein direkter Vergleich der Variationsformulierungen (4.27) und (4.23) zeigt. Die eindeutige Lösbarkeit der Hilfsprobleme liefert dann die Behauptung.  $\square$



Mit dieser Beobachtung wird folgendes deutlich. Wenn wir ein  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  finden, sodass die Spuren der rücktransformierten Lösungen der Hilfsprobleme (4.26) auf  $\Gamma$  übereinstimmen, dann haben wir auch das springende Transmissionsproblem (4.22) und damit natürlich das nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem (4.5) mit springenden Nichtlinearitäten und das zugehörige Gesamtproblem (4.1) gelöst.

Wir folgen den Darstellungen in [GPK99], wo diese Idee für ein lineares Problem ausgeführt wurde.

Die Überführung der obigen Beobachtung in ein Optimierungsproblem oder besser optimales Kontrollproblem liegt auf der Hand. Wir minimieren den Abstand der rücktransformierten Spuren der Lösungen der Hilfsprobleme auf  $\Gamma$  bezüglich einer passenden Norm. In diesem Zusammenhang sei an Bemerkung 75 auf Seite 89 erinnert, also daran, dass der Kompositionsoperator der KIRCHHOFF-Transformation und der Spuoperator auf  $\Gamma$  kommutieren. Als Zielfunktional definieren wir

$$\mathcal{J}(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2} \left\| \kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2)) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (4.29)$$

und minimieren es über der zulässigen Menge

$$\mathcal{F}_{ad} := \{(u_1, u_2, g) \in V_1 \times V_2 \times (V_\Gamma)^\prime \mid (u_1, u_2, g) \text{ genügt (4.27)}\}, \quad (4.30)$$

wobei  $(V_\Gamma)^\prime$  ein geeigneter Raum sein soll. Da die Normalenableitungen des springenden Transmissionsproblems (4.10) immer als Funktionale auf  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  erklärt sind, ist es zunächst sicher sinnvoll  $V_\Gamma = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  zu wählen. Später werden wir diese Wahl einschränken müssen, um speziell bei höherdimensionalen Problemen ( $N \geq 3$ ) noch Beweise führen zu können. Da  $V_1 \times V_2 \times (V_\Gamma)^\prime$  natürlich abgeschlossen und konvex ist, folgt mit der Linearität und Stetigkeit von (4.27) auch die Konvexität und Abgeschlossenheit von  $\mathcal{F}_{ad}$ . Im Weiteren bezeichnen wir  $u_1, u_2$  als *Zustandsvariable* und  $g$  als *Kontrollvariable*.

*Bemerkung 76.* Die Wahl der Räume  $V_\Gamma$  hängt mit der Regularität der Lösung des springenden Transmissionsproblems (4.22) bzw. des quasilinearen Modellproblems (4.1) zusammen. Ist die Lösung hinreichend regulär, sodass die Normalenableitung bzw. Konormalenableitung auf  $\Gamma$  beispielsweise als Funktion auf  $L^2(\Gamma)$  aufgefasst werden kann, dann ist es natürlich ausreichend,  $(V_\Gamma)^\prime = L^2(\Gamma)$  und damit  $V_\Gamma = L^2(\Gamma)$  zu wählen. Sind die Lösungen hingegen nicht regulär genug, sodass zum Beispiel die Normalenableitung nur als Funktional auf  $H^\varepsilon(\Gamma)$  mit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  Sinn macht, dann können wir zwar das Optimierungsproblem mit  $V_\Gamma = L^2(\Gamma)$  lösen, aber die Lösung stimmt dann nicht notwendigerweise mit der Lösung des springenden Transmissionsproblems überein, da  $L^2(\Gamma) \subsetneq H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  ist. Aufgrund der Dichtheit von  $L^2(\Gamma)$  in  $H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  können wir der Lösung in diesem Beispiel womöglich beliebig nahe kommen, aber darauf wird hier nicht eingegangen.

Wir wollen den Abstand bezüglich der relativ schwachen  $L^2(\Gamma)$ -Norm minimieren. Da  $\kappa_i^{-1}(\gamma_\Gamma^i(u_i)) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , könnten wir den Abstand natürlich auch bezüglich der stärkeren  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ -Norm (oder einer anderen stärkeren Norm) betrachten. Dies ist, zumindest vom analytischen Standpunkt aus, nicht nötig, wie wir im nächsten Lemma sehen werden. Weiter würde die Verwendung einer stärkeren Norm die später folgenden Beweise noch technischer machen. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf die  $L^2(\Gamma)$ -Norm.

Zunächst formulieren wir das *restringierte Minimierungsproblem* exakt. Es lautet:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(u_1, u_2, g) \stackrel{!}{=} \min \\ (u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad} \end{cases} \quad (4.31)$$

Wir wollen noch klären, was wir unter einer *optimalen Lösung* verstehen wollen.

**Definition 4.5.1.**  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$  heißt *lokal optimale Lösung* des Minimierungsproblems (4.31), falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$\mathcal{J}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) \leq \mathcal{J}(u_1, u_2, g)$$

für alle  $(u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad}$  mit

$$\|u_1 - \bar{u}_1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|u_2 - \bar{u}_2\|_{H^1(\Omega_2)} + \|g - \bar{g}\|_{(V_\Gamma)^\prime} \leq \varepsilon.$$

Von einer *global optimalen Lösung* sprechen wir, wenn die vorletzte Ungleichung uneingeschränkt für alle  $(u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad}$  gilt.

Eine Lösung ist also lokal optimal, wenn in der zulässigen Menge lokal kein Punkt mit einem kleineren Zielfunktionalwert liegt. Weil  $\mathcal{J} \geq 0$  ist, ist insbesondere jeder Punkt  $(u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad}$  mit  $\mathcal{J}(u_1, u_2, g) = 0$  eine lokal optimale Lösung, welche dann sogar global optimal ist. Verkürzend schreiben wir nachfolgend gelegentlich optimal an Stelle von global optimal.

Falls das Zielfunktional streng konvex ist, ist die optimale Lösung überdies eindeutig. Wir benötigen diese Voraussetzung nicht, da wir die eindeutige Lösbarkeit anders sichern können, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 4.5.4.** *Unter den Voraussetzungen 4.1 und 4.2 besitzt das Minimierungsproblem (4.31) eine eindeutige global optimale Lösung  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$ , sofern  $V_\Gamma$  passend gewählt ist (z.B. kann immer  $V_\Gamma = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  gewählt werden). Umgekehrt erfüllen die Lösungskomponenten  $\bar{u}_i$ ,  $i = 1, 2$ , der globalen Lösung des Minimierungsproblems das springende Transmissionsproblem (4.22).*

*Beweis.* Zur Existenz: Nach Voraussetzung 4.1 hat das Gesamtproblem (4.1) eine eindeutige schwache Lösung  $\bar{p} \in H_0^1(\Omega)$ . Mit Korollar 4.1.3 auf Seite 80 ist dann  $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in V_1 \times V_2$  eine eindeutige schwache Lösung von (4.5). Nach Lemma 4.3.1 auf Seite 89 erfüllen die KIRCHHOFF-Transformierten  $\bar{u}_i := \kappa_i(\bar{p}_i)$  das springende Transmissionsproblem (4.22) im schwachen Sinn. Ist  $\bar{g} := \partial_{n_1} \bar{u}_1 = -\partial_{n_2} \bar{u}_2 \in (V_\Gamma)'$ , so erfüllt  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g})$  das Minimierungsproblem (4.31) und es gilt  $\mathcal{J}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) = 0$ .

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, es gibt eine weitere von obiger Lösung verschiedene globale Lösung  $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$ . Dann gilt

$$0 = \mathcal{J}(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{g}) = \frac{1}{2} \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(\widehat{u}_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(\widehat{u}_2))\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

und folglich im  $L^2(\Gamma)$

$$\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(\widehat{u}_1)) = \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(\widehat{u}_2)).$$

Da beide Seiten zudem Elemente aus  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  sind, gilt die Gleichheit auch dort. Das ist unter Berücksichtigung von Bemerkung 75 auf Seite 89 aber gerade (4.23)<sub>2</sub>. Da  $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$  ist, gilt (4.27), also insbesondere auch (4.23)<sub>1</sub> und mit  $\partial_{n_1} \widehat{u}_1 = \widehat{g} = -\partial_{n_2} \widehat{u}_2$  auch (4.23)<sub>3</sub>. Somit löst  $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$  das springende Transmissionsproblem (4.22), dessen Lösung mit Lemma 4.3.1 auf Seite 89 unter den obigen Voraussetzungen eindeutig ist. Damit haben wir  $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{g}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g})$ , im Widerspruch zur Annahme.

Dass die globale Lösung des Minimierungsproblems dem springenden Transmissionsproblem genügt, sehen wir analog zum eben geführten Eindeutigkeitsbeweis. Wegen der obigen Voraussetzungen gilt für eine globale Lösung immer  $\mathcal{J} = 0$ .  $\square$

Damit erhalten wir sofort das

**Korollar 4.5.5.** *Es gelten die Voraussetzungen 4.1 und 4.2. Die eindeutige global optimale Lösung des Minimierungsproblems (4.31) erfüllt nach Rücktransformation auch das nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten (4.5) und das Gesamtproblem (4.1).*

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus dem letzten Lemma unter Beachtung von Lemma 4.3.1 auf Seite 89 und Korollar 4.1.3 auf Seite 80.  $\square$

Im Hinblick auf Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme kann es sinnvoll sein, das Zielfunktional zu regularisieren. Wir betrachten deshalb statt (4.29) mit  $\delta \geq 0$  allgemeiner das Funktional

$$\mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2} \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2))\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2 \quad (4.32)$$

und wollen es wieder über der zulässigen Menge  $\mathcal{F}_{ad}$  nach (4.30) minimieren.

*Bemerkung 77.* (i) Im linearen Fall sorgt der zweite Summand in (4.32) dafür, dass die den zweiten Ableitungen von  $\mathcal{J}_\delta$  in einer gewissen Umgebung der Lösung zugeordneten Bilinearformen für  $\delta > 0$   $(V_\Gamma)'$ -elliptisch sind, d.h. sich nach unten durch den Term  $\delta \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2$  abschätzen lassen. Dies ist

unter anderem aus numerischer Sicht wünschenswert. Möglicherweise kann diese Überlegung auch im nichtlinearen Fall Vorteile bringen.

(ii) Der Regularisierungsterm sichert weiterhin für  $\delta > 0$  die Existenz von global optimalen Lösungen des Minimierungsproblems (4.33) ohne explizit die Beschränktheit des Teils der zulässigen Menge  $\mathcal{F}_{ad}$ , dem die Kontrollvariable  $g$  entstammt, fordern zu müssen. Siehe hierzu auch Bemerkung 78 auf Seite 96.

Es ist nicht unmittelbar ersichtlich, warum eine regularisierte Variante des Zielfunktionals betrachtet wird. Allerdings stimmt für  $\delta = 0$  (4.32) offensichtlich mit (4.29) überein, sodass das ursprüngliche Zielfunktional als Spezialfall enthalten ist. Hingegen ist für  $\delta > 0$  noch nicht einmal klar, ob das Minimierungsproblem

$$\begin{cases} \mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, g) \stackrel{!}{=} \min \\ (u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad} \end{cases} \quad (4.33)$$

überhaupt eine optimale Lösung besitzt, wobei diese in Analogie zu Definition 4.5.1 erklärt ist. Dass dem so ist, zeigt folgendes

**Lemma 4.5.6.** *Für jedes  $\delta > 0$  existiert eine (nicht notwendig eindeutige) global optimale Lösung  $(\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta) \in \mathcal{F}_{ad}$  von (4.33).*

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Satz C.3.1 des Anhangs. Dazu müssen wir die Voraussetzung C.1 nachprüfen. Zunächst passen wir die Notation an. Wir haben die Entsprechungen

$$J_\delta \rightsquigarrow \mathcal{J}_\delta, Y \rightsquigarrow V_1 \times V_2, U \rightsquigarrow (V_\Gamma)', Z \rightsquigarrow (V_1)' \times (V_2)', Y_{ad} \rightsquigarrow V_1 \times V_2, U_{ad} \rightsquigarrow (V_\Gamma)'.$$

$U$  und  $Y$  sind als HILBERT-Räume natürlich reflexiv und  $Z$  ist als HILBERT-Raum offensichtlich ein BANACH-Raum.  $U_{ad} = U$  und  $Y_{ad} = Y$  sind natürlich konvex und abgeschlossen und es existiert ein zulässiger Punkt. Die Zustandsgleichung  $Ay + Bu = h$  entspricht dem System von Operatorgleichungen

$$A_i u_i = F_i(g), \quad i = 1, 2,$$

wobei  $A_i$  und  $F_i(g)$  wie in Lemma 4.5.2 zu verstehen sind. Insbesondere besitzt  $A_i \in \mathcal{L}(V_i, (V_i)')$  nach diesem Lemma eine beschränkte Inverse  $A_i^{-1}$ .  $F_i(g)$ ,  $i = 1, 2$ , lässt sich als

$$F_i(g) = B_i g + h_i \quad \text{mit } h_i := (f_i, \cdot)_{L^2(\Omega_i)} \quad \text{und } B_i g = (-1)^{i+1} \langle g, \gamma_\Gamma^i(\cdot) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$$

schreiben. Nun ist  $h_i \in (V_i)'$  und wegen der Linearität und Beschränktheit des Dualitätsproduktes und des Spuoperators haben wir  $B_i \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', (V_i)')$ . Die Zustandsgleichung lautet mit diesen Bezeichnungen also

$$\begin{pmatrix} A_1 u_1 \\ A_2 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_1 g \\ -B_2 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Ausführungen sind die Voraussetzungen C.1 1. bis 3. offensichtlich erfüllt.

Bleibt noch die schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Zielfunktionals  $\mathcal{J}_\delta$  zu prüfen. Wir zerlegen  $\mathcal{J}_\delta$  wie folgt,

$$\mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, g) = \mathcal{J}(u_1, u_2, g) + \mathcal{J}_\delta^*(u_1, u_2, g) \quad \text{mit} \quad \mathcal{J}_\delta^*(u_1, u_2, g) := \frac{\delta}{2} \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2$$

und dem Funktional  $\mathcal{J}$  aus (4.29). Mit Lemma C.2.1 reicht es, die schwache Folgenunterhalbstetigkeit der beiden Summanden zu zeigen. Im zweiten Summanden tauchen  $u_1$  und  $u_2$  gar nicht auf, so dass wir nur für das dritte Argument  $g$  argumentieren müssen. Da die Norm konvex ist und  $x^2$  für  $x \geq 0$  monoton wachsend und konvex ist, ist auch  $\mathcal{J}_\delta^*$  konvex. Die Stetigkeit von  $\mathcal{J}_\delta^*$  ist sofort klar. Nach Satz C.2.2(i) ist  $\mathcal{J}_\delta^*$  damit insbesondere unterhalbstetig. Weiterhin ist  $(V_\Gamma)'$  natürlich abgeschlossen und konvex, sodass Satz C.2.2(iii) die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von  $\mathcal{J}_\delta^*$  auf ganz  $(V_\Gamma)'$  liefert. Betrachten wir nun den ersten Summanden  $\mathcal{J}$ , in dem das dritte Argument  $g$  nicht auftaucht, sodass wir nur die ersten beiden Argumente untersuchen müssen. Sei  $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$  also beliebig und  $(u_i^k)_k \subset V_i$  mit  $u_i^k \rightharpoonup u_i$  in  $H^1(\Omega_i)$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Wegen  $\gamma_\Gamma^i \in \mathcal{L}(V_i, H^{1/2}(\Gamma))$  haben wir dann  $\gamma_\Gamma^i(u_i^k) \rightharpoonup \gamma_\Gamma^i(u_i)$  in  $H^{1/2}(\Gamma)$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Nun ist die

Einbettung  $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$  für den LIPSCHITZ-Teilrand  $\Gamma$  aber kompakt, siehe Abschnitt A.2.1 oder [Wlo82, Satz 7.10], sodass dann  $\gamma_\Gamma^i(u_i^k) \rightarrow \gamma_\Gamma^i(u_i)$  in  $L^2(\Gamma)$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ , gilt. Mit Lemma 4.2.4 ist der Kompositionsoperator  $\kappa_i^{-1} : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$  LIPSCHITZ-stetig, woraus unter Beachtung der Stetigkeit der Norm für beliebiges  $g \in (V_\Gamma)'$

$$\mathcal{J}(u_1^k, u_2^k, g) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_1, u_2, g),$$

also die schwache Folgenstetigkeit und damit selbstredend die schwache Folgenunterhalbstetigkeit von  $\mathcal{J}$  folgt.

Somit ist die Voraussetzung C.1 erfüllt und der Satz C.3.1 liefert das gewünschte Resultat.  $\square$

Die Eindeutigkeit der optimalen Lösung von (4.33) wird in Satz 4.5.9 auf Seite 99 unter stärkeren Voraussetzungen gesichert. Es wird sich später herausstellen, dass die Energie, die auf den Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verwendet wird, gerechtfertigt ist. Dabei fallen nämlich auch Resultate ab, die in Abschnitt 4.8 wiederverwendet werden können und somit die dortigen Beweise verkürzen.

*Bemerkung 78.* Für  $\delta = 0$  können wir den letzten Beweis nur dann übertragen, wenn wir explizit die Beschränktheit der Teilmenge von  $(V_\Gamma)'$ , der die zulässigen  $g$  entstammen, fordern. Diese Teilmenge korrespondiert zu  $U_{ad}$  aus Voraussetzung C.1 und muss im Fall  $\delta = 0$  beschränkt sein, um Satz C.3.1 anwenden zu können. Allerdings ist eine Übertragung des obigen Beweises für  $\delta = 0$  nicht nötig, da Lemma 4.5.4 bereits die Existenz und sogar Eindeutigkeit der (global) optimalen Lösung sichert.

*Bemerkung 79.* (i) Statt der gemischten Randwertprobleme (4.26) könnten wir als Hilfsprobleme auch die DIRICHLET-Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_i = \kappa_i(\chi) & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

mit  $\chi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  betrachten und anschließend den Abstand der NEUMANN-Daten minimieren, also das Zielfunktional

$$\mathcal{J}(u_1, u_2, \chi) = \frac{1}{2} \|\partial_{n_1} u_1 + \partial_{n_2} u_2\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)}^2$$

bzw. eine regularisierte Variante davon betrachten. Das Zielfunktional ist nun konvex. Allerdings sind die Nebenbedingungen nicht mehr affin linear, da der Lösungsoperator zu obigem Randwertproblem bezüglich  $\chi$  nichtlinear ist. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Minimierungsproblems ist wieder offensichtlich, wenn wir  $\chi := \kappa_i^{-1}(\bar{u}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , wählen, wobei  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in V_1 \times V_2$  die eindeutige schwache Lösung des transformierten Transmissionsproblems (4.22) bezeichnet. Auch die regularisierten Optimierungsprobleme, bei denen das Zielfunktional  $\mathcal{J}$  durch

$$\mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, \chi) = \mathcal{J}(u_1, u_2, \chi) + \frac{\delta}{2} \|\chi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2$$

ersetzt wird, sind für  $\delta > 0$  lösbar, was unter Benutzung von Satz C.4.1 gezeigt werden kann. Dabei müssen unter Umständen zusätzliche Forderungen gestellt werden, um die Voraussetzung C.2 4. sichern zu können.

(ii) Wir können das Optimierungsproblem auch auf das (noch nicht transformierte) nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten (4.5) beziehen. Als Hilfsprobleme betrachten wir dann beispielsweise die nichtlinearen Probleme

$$\begin{cases} P_i(D)p_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ p_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_1} p_1 = (-1)^{i+1} g & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

mit  $g \in (V_\Gamma)'$  und den Bezeichnungen wie in (4.5). Minimiert wird dabei das konvexe Zielfunktional

$$\mathcal{J}(p_1, p_2, g) = \frac{1}{2} \|\gamma_\Gamma^1(p_1) - \gamma_\Gamma^2(p_2)\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

bzw. die regularisierte Variante

$$\mathcal{J}_\delta(p_1, p_2, g) = \mathcal{J}(p_1, p_2, g) + \frac{\delta}{2} \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2.$$

Auch hierbei handelt es sich nicht um eine konvexe Optimierungsaufgabe, da zwar das Zielfunktional konvex ist, nicht aber die zulässige Menge. In diese gehen die nichtlinearen Hilfsprobleme ein. Weiter scheint es auf den ersten Blick problematisch zu sein, dass die Hilfsprobleme nichtmonoton sind. Die eindeutige Lösbarkeit der Hilfsprobleme können wir aber durch Anwenden der KIRCHHOFF-Transformation und Betrachtung der entstehenden gemischten Randwertprobleme für den LAPLACE-Operator sichern. Die Existenz einer Lösung des regularisierten Optimierungsproblems kann wieder mit Satz C.4.1 gesichert werden. Auch hier ist es unter Umständen nötig, zusätzliche Forderungen zu stellen, um die Voraussetzung C.2 4. sichern zu können. In Analogie zu (i) können wir alternativ auch im Falle nicht transformierter Probleme die Minimierung bezüglich des Abstandes der Konormalenableitungen durchführen.

Wir haben nun zwar gezeigt, dass die regularisierten Minimierungsprobleme (4.33) für beliebige  $\delta > 0$  global optimale Lösungen besitzen, aber noch ist unklar, was diese Lösungen mit der eindeutigen global optimalen Lösung des ursprünglichen Minimierungsproblems (4.31) zu tun haben. Antwort darauf gibt der

**Satz 4.5.7.** *Es gelten die Voraussetzungen 4.1 und 4.2 und  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$  bezeichne die nach Lemma 4.5.4 eindeutige global optimale Lösung von (4.31). Für  $\delta > 0$  bezeichne  $(\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta) \in \mathcal{F}_{ad}$  eine global optimale Lösung von (4.33), welche nach Lemma 4.5.6 existiert. Dann gilt:*

$$\|\bar{u}_i^\delta - \bar{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0, \quad i = 1, 2.$$

*Beweis.* Sei  $((\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta))_\delta$  eine Folge von global optimalen Lösungen für  $\delta \rightarrow 0$ . Dann gilt nach Definition der global optimalen Lösung für alle  $\delta > 0$

$$\mathcal{J}_\delta(\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta) \leq \mathcal{J}_\delta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}),$$

woraus unter Beachtung von  $\mathcal{J}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) = 0$

$$\frac{1}{2} \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(\bar{u}_1^\delta)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(\bar{u}_2^\delta))\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\delta}{2} \|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'}^2 \leq \frac{\delta}{2} \|\bar{g}\|_{(V_\Gamma)'}^2$$

folgt. Damit gilt für alle  $\delta > 0$  die Beziehung  $\|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'} \leq \|\bar{g}\|_{(V_\Gamma)'}$ , also ist  $\|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'}$  gleichmäßig beschränkt. Zudem liefert dann die vorletzte Ungleichung

$$\|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(\bar{u}_1^\delta)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(\bar{u}_2^\delta))\|_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (4.34)$$

Mit Lemma 4.5.2 haben wir

$$\|\bar{u}_i^\delta\|_{H^1(\Omega_i)} \lesssim \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|\bar{g}^\delta\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)}, \quad i = 1, 2,$$

woraus mit der stetigen Einbettung  $(V_\Gamma)' \subset H_0^{-1/2}(\Gamma)$ , also insbesondere  $\|\bar{g}^\delta\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'}$ , die gleichmäßige Beschränktheit von  $\|\bar{u}_i^\delta\|_{H^1(\Omega_i)}$  folgt. Insgesamt ist somit die Folge  $((\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta))_\delta$  im HILBERT-Raum  $V_1 \times V_2 \times (V_\Gamma)'$  beschränkt und es existiert nach Lemma C.3.2 eine Teilfolge, welche für  $\delta \rightarrow 0$  schwach gegen  $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g}) \in V_1 \times V_2 \times (V_\Gamma)'$  konvergiert. (4.34) liefert mit dieser Teilfolge

$$0 = \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(\widetilde{u}_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(\widetilde{u}_2))\|_{L^2(\Gamma)} = \mathcal{J}(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g}). \quad (4.35)$$

Um zu zeigen, dass  $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$  ist, beachten wir zunächst, dass für hinreichend großes  $r > 0$

$$((\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta))_\delta \subset \mathcal{F}_{ad} \cap \left( \overline{B_{V_1, r}(0)} \times \overline{B_{V_2, r}(0)} \times \overline{B_{(V_\Gamma)', r}} \right) =: C$$

gilt, wobei  $\overline{B_{X, r}(0)}$  die abgeschlossene Kugel mit Radius  $r$  in  $X \in \{V_1, V_2, (V_\Gamma)'\}$  bezeichnet. Da  $\mathcal{F}_{ad}$  abgeschlossen und konvex ist, ist  $C$  folglich abgeschlossen, konvex und beschränkt, also nach Lemma C.3.2 schwach folgenkompakt. Damit liegt der schwache Limes  $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g})$  in  $\mathcal{F}_{ad}$ . Unter Beachtung von (4.35) sehen wir nun, dass  $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g}) \in \mathcal{F}_{ad}$  optimale Lösung von (4.31) ist. Diese ist aber eindeutig, sodass  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{g}) = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{g})$  gelten muss. Insbesondere konvergiert  $\bar{g}^\delta$  aus der schwach konvergenten Teilfolge schwach gegen  $\bar{g}$ . Weiterhin ist die Norm im HILBERT-Raum

$(V_\Gamma)'$  natürlich schwach folgenunterhalbstetig, d.h. für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta_0$ , sodass für alle Teilfolglieder mit  $\delta < \delta_0$  gilt

$$\|\bar{g}\|_{(V_\Gamma)'} \leq \|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'} + \varepsilon.$$

Zusammen mit  $\|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'} \leq \|\bar{g}\|_{(V_\Gamma)'}$  liefert das nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|\bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\bar{g}\|_{(V_\Gamma)'},$$

woraus mit der gleichmäßigen Konvexität des HILBERT-Raumes  $(V_\Gamma)'$

$$\|\bar{g}^\delta - \bar{g}\|_{(V_\Gamma)'} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

folgt. Zudem erfüllen  $(\bar{u}_i^\delta - \bar{u}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , die Hilfsprobleme (4.26) mit  $f_i = 0$ , weswegen sich mit Lemma 4.5.2 die Abschätzung

$$\|\bar{u}_i^\delta - \bar{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \lesssim \|\bar{g}^\delta - \bar{g}\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\bar{g}^\delta - \bar{g}\|_{(V_\Gamma)'}$$

ergibt, welche zusammen mit der vorletzten Beziehung die Aussage des Satzes liefert.  $\square$

*Bemerkung 80.* Im linearen Fall, d.h. wenn die Nichtlinearitäten  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , konstant sind, ist zudem eine Aussage zur Konvergenzgeschwindigkeit möglich, siehe [GPK99, Theorem 3.2].

*Bemerkung 81.* Wie bereits erwähnt, kann mit Satz 4.5.9 auf Seite 99 unter Zusatzvoraussetzungen für hinreichend kleine  $\delta > 0$  sogar die Eindeutigkeit der optimalen Lösung  $(\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta)$  von (4.33) gesichert werden. Dies ist für den letzten Satz aber nicht notwendig, da er für beliebige Folgen  $((\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta))_\delta$  von optimalen Lösungen gilt.

### 4.5.3 Das freie Minimierungsproblem

Wie wir bereits in Lemma 4.5.2 auf Seite 91 festgestellt haben, sind die Hilfsprobleme (4.26) eindeutig schwach lösbar und die Lösung hängt für festes  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  stetig von  $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  ab. Wir bezeichnen den Lösungsoperator wieder mit  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , genauer gilt

$$u_i(\cdot) : H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow V_i, \quad u_i(g) := A_i^{-1}(F_i(g)), \quad i = 1, 2, \quad (4.36)$$

wobei  $A_i^{-1} \in \mathcal{L}((V_i)', V_i)$  und das affin lineare beschränkte  $F_i : H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow (V_i)'$  in Lemma 4.5.2 auf Seite 91 gegeben sind. Insbesondere haben wir für jedes  $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$  die Abschätzung

$$\|u_i(g)\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \|A_i^{-1}\| \|F_i(g)\|_{(V_i)'} \leq \|A_i^{-1}\| \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|A_i^{-1}\| \|\gamma_\Gamma^i\| \|g\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)}, \quad i = 1, 2,$$

wobei  $\gamma_\Gamma^i \in \mathcal{L}(V_i, H_0^{1/2}(\Gamma))$  den Spuroperator aus Abschnitt A.2.6 im Anhang bezeichnet.

Die Lösungen der Hilfsprobleme (4.26) sind für festes  $f_i \in L^2(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , eindeutig durch  $g$  bestimmt und die Abhängigkeit ist stetig. Wir können diese Beziehung benutzen und zum (in den Argumenten) *reduzierten Funktional* übergehen, indem wir für  $\delta \geq 0$

$$\mathcal{M}_\delta(g) := \mathcal{J}_\delta(u_1(g), u_2(g), g) \quad (4.37)$$

setzen, wobei  $u_i(\cdot)$  in (4.36) erklärt ist. Da  $u_i(g) \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , nach Definition dem schwach formulierten Hilfsproblem (4.27) genügt, gilt offenbar  $(u_1(g), u_2(g), g) \in \mathcal{F}_{ad}$  für alle  $g \in (V_\Gamma)'$ . Somit unterliegt  $g$  keiner Beschränkung, die zulässige Menge für  $g$  ist also der ganze Raum  $(V_\Gamma)'$ . Insgesamt erhalten wir für  $\delta \geq 0$  das *reduzierte Problem*

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\delta(g) \stackrel{!}{=} \min \\ g \in (V_\Gamma)' \end{cases} \quad (4.38)$$

Das reduzierte Problem ist ein *freies Minimierungsproblem*. Was wir unter einer Lösung dieses Problems verstehen wollen, besagt die

**Definition 4.5.2.**  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  heißt *lokaler Minimierer* von (4.38), wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$\mathcal{M}_\delta(\bar{g}^\delta) \leq \mathcal{M}_\delta(g) \quad \text{für alle } g \in (V_\Gamma)' \text{ mit } \|g - \bar{g}^\delta\|_{(V_\Gamma)'} \leq \varepsilon.$$

$\mathcal{M}_\delta(\bar{g}^\delta)$  heißt dann lokales Minimum. Gilt die vorletzte Ungleichung uneingeschränkt für alle  $g \in (V_\Gamma)'$ , so heißt  $\bar{g}^\delta$  *globaler Minimierer* und  $\mathcal{M}_\delta(\bar{g}^\delta)$  globales Minimum.

Dass das freie Optimierungsproblem eine Lösung besitzt, ist mit der obigen Herleitung und den Aussagen des letzten Abschnittes offensichtlich und wir formulieren das

**Lemma 4.5.8.** *Die Minimierungsprobleme (4.33) und (4.38) sind für  $\delta \geq 0$  äquivalent, d.h. ist  $(\bar{u}_1^\delta, \bar{u}_2^\delta, \bar{g}^\delta) \in \mathcal{F}_{ad}$  eine global optimale Lösung von (4.33), so minimiert  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  (4.38) und ist umgekehrt  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  ein globaler Minimierer von (4.38), so ist  $(u_1(\bar{g}^\delta), u_2(\bar{g}^\delta), \bar{g}^\delta) \in \mathcal{F}_{ad}$  global optimal für (4.33).*

*Insbesondere existiert für  $\delta \geq 0$  ein globaler Minimierer  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  von (4.38). Im Fall  $\delta = 0$  ist dieser unter den Voraussetzungen 4.1 und 4.2 überdies eindeutig.*

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus den Lemmata 4.5.4 und 4.5.6 und der Herleitung des freien Minimierungsproblems.  $\square$

*Bemerkung 82.* Für streng konvexes  $\mathcal{M}_\delta$  ist der Minimierer überdies eindeutig. Im Allgemeinen ist das Zielfunktional  $\mathcal{M}_\delta$  aber nicht einmal konvex. Konvexität haben wir beispielsweise für die „Nichtlinearitäten“  $k_i(\cdot) \equiv c_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2$ .

Für hinreichend kleine  $\delta$  können wir die Eindeutigkeit der Minimierer von (4.38) durch folgende Überlegung sichern. Wir verwenden dazu die notwendige Bedingung für freie Extrema, siehe z.B. [Zei95, Theorem 2.2.2A, S.45], d.h. besitzt  $\mathcal{M}_\delta$  in  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  ein freies, lokales Minimum, dann gilt die *verallgemeinerte EULERSche Gleichung*

$$\mathcal{M}'_\delta(g) = 0, \tag{4.39}$$

falls  $\mathcal{M}'_\delta(g)$  als GÂTEAUX- oder FRÉCHET-Ableitung existiert. Dabei bezieht sich die Ableitung auf  $g$  und  $\delta$  wird vorerst als Parameter angesehen. Formal haben wir die folgenden Abbildungseigenschaften:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\delta & : (V_\Gamma)' \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{M}'_\delta & : (V_\Gamma)' \rightarrow \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}) = ((V_\Gamma)')' \cong V_\Gamma, \\ \mathcal{M}''_\delta & : (V_\Gamma)' \rightarrow \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Die angegebenen Beziehungen sind formaler Natur, denn an dieser Stelle ist noch gar nicht klar, ob die obigen Ableitungen als GÂTEAUX- bzw. FRÉCHET-Ableitungen überhaupt existieren. Wir setzen

$$M(\delta, g) := \mathcal{M}'_\delta(g) \tag{4.40}$$

und damit gilt, wieder formal,

$$\begin{aligned} M & : \mathbb{R} \times (V_\Gamma)' \rightarrow \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}) = ((V_\Gamma)')' \cong V_\Gamma, \\ M_g & : \mathbb{R} \times (V_\Gamma)' \rightarrow \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen formulieren wir

**Satz 4.5.9.** *Es gelten die Voraussetzungen 4.1 und 4.2 und  $M$  aus (4.40) sei stetig FRÉCHET-differenzierbar. Insbesondere müssen dafür  $\mathcal{M}'_\delta$  und  $\mathcal{M}''_\delta$  als stetige FRÉCHET-Ableitungen existieren. Weiter sei  $\bar{g}^0 \in (V_\Gamma)'$  die nach Lemma 4.5.8 existierende eindeutige global optimale Lösung des freien Minimierungsproblems (4.38) für  $\delta = 0$ . Zudem sei  $\mathcal{M}''_0(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}))$  stetig invertierbar. Dann ist das freie Minimierungsproblem (4.38) für hinreichend kleine  $\delta > 0$  eindeutig lösbar. Bezeichne  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  diese eindeutige Lösung, so ist überdies  $\mathcal{M}''_\delta(\bar{g}^\delta) \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}))$  stetig invertierbar.*

*Beweis.* Wir werden das implizite Funktionentheorem C.1.1 auf (4.40) im Punkt  $(0, \bar{g}^0)$  anwenden. Mit den Voraussetzungen ist  $M : \mathbb{R} \times (V_\Gamma)' \rightarrow \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R})$  stetig FRÉCHET-differenzierbar. Weiter ist  $M(0, \bar{g}^0) = \mathcal{M}'_0(\bar{g}^0) = 0$ , da  $\mathcal{M}_0$  in  $\bar{g}^0$  ein freies Minimum besitzt. Auch besitzt  $M_g(0, \bar{g}^0) = \mathcal{M}''_0(\bar{g}^0)$  nach Voraussetzung eine beschränkte Inverse. Nun liefert der Satz C.1.1 über die implizite Funktion, dass für jedes hinreichend kleine  $\delta > 0$  genau ein  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  existiert, mit  $0 = M(\delta, \bar{g}^\delta) = \mathcal{M}'_\delta(\bar{g}^\delta)$ , d.h. die EULERSche Gleichung ist nur für genau ein  $\bar{g}^\delta$  erfüllt. Die nach Lemma 4.5.8 existierenden freien globalen Minima, welche insbesondere lokale Minima sind, müssen natürlich auch der EULERSchen Gleichung genügen. Da diese aber für hinreichend kleines  $\delta$  nur für genau ein  $\bar{g}^\delta$  erfüllt ist, muss die Lösung von (4.38) eindeutig sein. Die Behauptung über die stetige Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}''_\delta(\bar{g}^\delta)$  folgt direkt aus dem Satz C.1.1 über die implizite Funktion.  $\square$

Wir wollen den letzten Satz benutzen, um die Eindeutigkeit der Minimierer von (4.38), zumindest für kleine  $\delta > 0$ , zu zeigen. Es müssen also die Voraussetzungen des Satzes 4.5.9 überprüft werden. Dazu untersuchen wir im nächsten Abschnitt, wann das Zielfunktional F-differenzierbar ist. Im übernächsten Abschnitt gehen wir der Frage nach der stetigen Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}''_0(\bar{g}^0)$  nach.

Weiter weisen wir erneut darauf hin, dass die Ergebnisse der folgenden beiden Abschnitte auch für die Konvergenzuntersuchungen der Lösungsverfahren aus Abschnitt 4.8 verwendet werden.

## 4.6 Zur Sinnhaftigkeit der Optimalitätsbedingungen

Optimalitätsbedingungen des freien Optimierungsproblems (4.38) werden mit Hilfe von Variationen oder, wenn möglich, mit Ableitungen des Zielfunktional (4.37) erklärt. Wir verweisen zum Beispiel auf die verallgemeinerte EULERSche Gleichung (4.39). Auch haben wir bereits im Satz 4.5.9 Ableitungen höherer Ordnung benutzt. Ebenso werden wir diese bei den späteren Lösungsverfahren der Optimierungsprobleme verwenden. Zunächst ist allerdings noch nicht einmal klar, ob die Ableitung bzw. höhere Ableitungen von  $\mathcal{M}_\delta$  überhaupt sinnvoll erklärt sind. Dieser Frage werden wir uns in diesem Abschnitt widmen. Dazu schildern wir nachfolgend zuerst die auftretenden Probleme und untersuchen diese anschließend. Im ersten Teilabschnitt gehen wir dazu genauer auf punktweise Produkte ein. Der zweite Unterabschnitt befasst sich erneut mit den Kompositionsooperatoren, die schon in Abschnitt 4.2 eingeführt wurden. Im dritten und letzten Teilabschnitt werden schließlich Aussagen zur Differenzierbarkeit des Zielfunktional gemacht.

Um zu sehen, welche Probleme auftauchen, berechnen wir rein formal die erste Variation von  $\mathcal{M}_\delta$  im Punkt  $g \in (V_\Gamma)'$  in Richtung  $h \in (V_\Gamma)'$ :

$$\begin{aligned} \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g; h) &:= \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g)(h) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{M}_\delta(g + th) \right|_{t=0} \\ &= \delta \cdot (g, h)_{(V_\Gamma)'} + (\Upsilon_0(g), \Upsilon_1(g, h))_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_{(V_\Gamma)'}$  das Skalarprodukt in  $(V_\Gamma)'$  bezeichnet und mit dem RIESZ-Isomorphismus  $J \in \mathcal{L}(V_\Gamma, (V_\Gamma)')$  durch  $(g, h)_{(V_\Gamma)'} := (J^{-1}g, J^{-1}h)_{V_\Gamma}$  für alle  $g, h \in (V_\Gamma)'$  erklärt ist. Weiter haben wir

$$\Upsilon_0 : (V_\Gamma)' \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad g \mapsto \kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(g)))$$

und

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &: (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \rightarrow L^2(\Gamma), \\ (g, h) &\mapsto (\kappa_1^{-1})'(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) \cdot \gamma_\Gamma^1(\tilde{u}_1(h)) - (\kappa_2^{-1})'(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))) \cdot \gamma_\Gamma^2(\tilde{u}_2(h)), \end{aligned}$$

wobei  $\kappa_i^{-1}$  die inverse KIRCHHOFF-Transformation,  $(\kappa_i^{-1})'$  deren Ableitung,  $u_i(\cdot)$  den Lösungsoperator (4.36) des Hilfsproblems (4.26) und  $\tilde{u}_i(\cdot)$  den Lösungsoperator des homogenen Hilfsproblems, d.h. (4.26) mit  $f_i = 0$ , bezeichnet. Der Zielraum von  $\Upsilon_1$  wurde dabei so gewählt, dass die in der ersten Variation auftretenden  $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukte sinnvoll sind. Diese Abbildungseigenschaft muss erst noch durch geeignete Voraussetzungen sichergestellt werden.

Wir prüfen mit den Ergebnissen der letzten Abschnitte leicht nach, dass  $\Upsilon_0$  die angegebenen Abbildungseigenschaften besitzt und ein nichtlinearer, beschränkter und stetiger Operator ist. Problematisch hingegen ist die obige (formale) Definition von  $\Upsilon_1$ . Dabei treten die folgenden Schwierigkeiten



auf:

1. Wie können wir die auftretenden Produkte sinnvoll erklären?
  2. Sind die Ableitungen der inversen KIRCHHOFF-Transformationen als Kompositionsoperatoren interpretierbar?
  3. Ist das obige Skalarprodukt sinnvoll, d.h. liegt das Ergebnis der Operationen im  $L^2(\Gamma)$ ?
- Mit der Klärung dieser Fragen werden wir uns in den drei folgenden Unterabschnitten beschäftigen.

#### 4.6.1 Ein Exkurs über punktweise Produkte

Seit Mitte der 50er Jahre ist bekannt, dass eine vernünftige Multiplikation von beliebigen Distributionen in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  unmöglich ist, siehe [Sch54], d.h. es ist nicht zu erwarten, dass für beliebige  $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$  auch  $f \cdot g \in \mathcal{D}'(\Omega)$  gilt. Um dieses Problem zu umgehen, gehen wir wie in [RS96, Chapter 4] vor und betrachten das nachfolgende Einbettungsproblem. Dazu seien Funktionenräume  $A_{p_i, q_i}^{s_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$  und  $A_{p, q}^s$  gegeben. Wir suchen Bedingungen an  $\{s_1, \dots, s_m, s, p_1, \dots, p_m, p, q_1, \dots, q_m, q\}$ , sodass die stetige Einbettung

$$\{f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m \mid f_i \in A_{p_i, q_i}^{s_i}, i = 1, \dots, m\} \hookrightarrow A_{p, q}^s$$

gilt.  $A_{p, q}^s = A_{p, q}^s(\mathbb{R}^N)$  steht hierbei als Platzhalter für die entsprechenden BESOV-Räume  $B_{p, q}^s$  oder TRIEBEL-LIZORKIN-Räume  $F_{p, q}^s$  und für die Parameter gilt

$$s \in \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \leq \infty \quad (p < \infty \text{ für } A = F). \quad (4.41)$$

Das in [RS96, Chapter 4] verwendete Produkt (für Distributionen) stimmt dabei für Funktionen mit dem gewöhnlichen punktweisen Produkt überein. Da wir uns in diesem Zusammenhang auf Funktionen beschränken, verzichten wir auf die Definition des Produktes für Distributionen und verweisen auf die angegebene Literatur. Die verwendeten Sätze, die auch allgemeinere Fälle abdecken, zitieren wir im Abschnitt A.5.

Um die Resultate des Abschnitts A.5 aus dem Anhang, speziell Satz A.5.1, auf Funktionenräume  $A_{p, q}^s(\Omega)$  über Gebieten  $\Omega$  übertragen zu können, benötigen wir folgendes

**Lemma 4.6.1.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein LIPSCHITZ-Gebiet,  $m \geq 2$  und für die Parameter der Funktionenräume sollen die Einschränkungen (4.41) gelten. Dann gilt*

$$A_{p_1, q_1}^{s_1}(\Omega) \cdot \dots \cdot A_{p_m, q_m}^{s_m}(\Omega) \hookrightarrow A_{p, q}^s(\Omega),$$

falls die entsprechende Beziehung zwischen den Funktionenräumen auf  $\mathbb{R}^N$  gilt, also

$$A_{p_1, q_1}^{s_1} \cdot \dots \cdot A_{p_m, q_m}^{s_m} \hookrightarrow A_{p, q}^s.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus [RS96, Proposition 4.2.2.], da dort die Aussage für beliebige offene Teilmengen  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^N$  gezeigt wurde.  $\square$

*Bemerkung 83.* Für LIPSCHITZ-Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  existiert nach [Ryc99] ein linearer beschränkter totaler Fortsetzungsoperator

$$\mathcal{E} : A_{p, q}^s(\Omega) \rightarrow A_{p, q}^s(\mathbb{R}^N),$$

wobei für die Parameter (4.41) gilt. Damit können wir wichtige Eigenschaften der Funktionenräume über  $\mathbb{R}^N$  auf die entsprechenden Funktionenräume über LIPSCHITZ-Gebieten übertragen, was sich nachfolgend als nützlich erweisen wird.

Wir betrachten hier hauptsächlich den Spezialfall  $s \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $p = q = 2$ , also SOBOLEV-Räume reeller Ordnung, auch SOBOLEV-SLOBODECKIJ-Räume genannt. Allerdings werden wir in einigen Beweisen auch allgemeinere Parameter benutzen, weshalb wir die komplette Skala von BESOV- bzw. TRIEBEL-LIZORKIN-Räumen eingeführt haben. Zudem sind die verwendeten Resultate aus [RS96] in diesen Räumen formuliert.

Für Produkte mit mehreren Faktoren haben wir für die von uns betrachteten SOBOLEV-Räume das

**Lemma 4.6.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein LIPSCHITZ-Gebiet und gelte  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k$  und

$$\left( \sum_{i=1}^{j+1} s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2} > 0 \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

(i) Falls zudem  $s_k < \frac{N}{2}$  ist, dann gilt

$$H^{s_1}(\Omega) \cdot H^{s_2}(\Omega) \cdot \dots \cdot H^{s_k}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega) \quad \text{mit } s = \left( \sum_{i=1}^k s_i \right) - (k-1) \frac{N}{2}.$$

(ii) Falls  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_j < \frac{N}{2}$  und  $\frac{N}{2} < s_{j+1} \leq \dots \leq s_k$  ist, dann gilt

$$H^{s_1}(\Omega) \cdot H^{s_2}(\Omega) \cdot \dots \cdot H^{s_k}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$$

mit

$$s = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2} & \text{falls } j > 1 \\ s_1 & \text{falls } j \leq 1 \end{cases}.$$

*Beweis.* Zu (i): Sukzessives Anwenden von Satz A.5.1(iii) und das Lemma 4.6.1 liefern die Behauptung. Wir beachten dabei, dass wegen  $p = q = p_i = q_i = 2$  und mit  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_j \leq s_{j+1} \leq \dots \leq s_k$

$$\left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2} \leq s_j \leq s_{j+1}$$

gilt, womit die beiden Hauptvoraussetzungen des Satzes A.5.1 erfüllt sind.

Zu (ii): Wir betrachten die Behauptung zunächst im  $\mathbb{R}^N$ . Für die ersten  $j$  Faktoren verwenden wir sukzessive Satz A.5.1(iii), wie bei (i). Das liefert

$$H^{s_1}(\mathbb{R}^N) \cdot H^{s_2}(\mathbb{R}^N) \cdot \dots \cdot H^{s_j}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{\widehat{s}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{mit } \widehat{s} = \left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2}. \quad (4.42)$$

Auf die Faktoren  $j+1, \dots, k$  wenden wir sukzessive Satz A.5.1(i) an und erhalten

$$H^{s_{j+1}}(\mathbb{R}^N) \cdot \dots \cdot H^{s_k}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{s_{j+1}}(\mathbb{R}^N). \quad (4.43)$$

Aus (4.42) und (4.43) folgt wegen

$$\left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2} \leq s_j < \frac{N}{2} < s_{j+1}$$

unter erneuter Benutzung von Satz A.5.1(i) und mit Lemma 4.6.1 die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung 84.* Der Satz liefert insbesondere  $s \leq s_1$ , d.h. das Produkt kann nicht regulärer sein als der am wenigsten reguläre Faktor.

Wir wollen ein entsprechendes Lemma auch für Funktionenräume über Teilrändern von LIPSCHITZ-Gebieten, also speziellen LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten, formulieren. Dazu definieren wir den Raum

$$H^s(\Omega; \Gamma) := \{v \in H^s(\Omega) \mid \gamma_\Gamma(v) = 0\}, \quad (4.44)$$

wobei der Spuroperator in Abschnitt A.2.6 im Anhang erklärt ist und beweisen zunächst

**Lemma 4.6.3.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Weiter gelte  $\frac{1}{2} < s_1 \leq s_2$  und  $s_1 + s_2 > \frac{N+1}{2}$ . Für  $u \in H^{s_1}(\Omega)$  und  $v \in H^{s_2}(\Omega)$  gilt mit

$$s := \begin{cases} s_1 + s_2 - \frac{N}{2} & \text{falls } s_2 < \frac{N}{2} \\ s_1 & \text{falls } \frac{N}{2} < s_2 \end{cases} \quad (4.45)$$

und

$$t := \begin{cases} s - \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{2} < s < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{3}{2} < s \end{cases}$$

dann

$$\gamma_\Gamma(u \cdot v) = \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in H^t(\Gamma).$$

Falls überdies  $s_1 < \frac{3}{2}$  und  $u \in H^{s_1}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ , entsprechend (4.44) definiert, gilt, dann folgt zudem

$$\gamma_\Gamma(u \cdot v) = \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in H_0^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

*Beweis.* I) Mit Lemma 4.6.2 folgt  $u \cdot v \in H^s(\Omega)$ , mit  $s$  wie in (4.45). Die Voraussetzung  $s_1 + s_2 > \frac{N+1}{2}$  sichert  $s > \frac{1}{2}$ . Der Spursatz A.2.8 liefert dann  $\gamma_\Gamma(u \cdot v) \in H^t(\Gamma)$ , wobei  $t = s - \frac{1}{2}$  für  $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$  und  $t = 1$  für  $s > \frac{3}{2}$  gilt. Wegen  $H^t(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \hookrightarrow L^1(\Gamma)$  können wir  $\gamma_\Gamma(u \cdot v)$  insbesondere natürlich als Element aus  $L^1(\Gamma)$  auffassen.

II) Da  $\frac{1}{2} < s_1 \leq s_2$  liefert der Spursatz A.2.8 und die stetige Einbettung  $H^\tau(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ ,  $\tau > 0$ , zudem  $\gamma_\Gamma(u), \gamma_\Gamma(v) \in L^2(\Gamma)$ . Daraus folgt mit der HÖLDERSchen Ungleichung sofort  $\gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in L^1(\Gamma)$ .

III) Wir zeigen jetzt noch  $\|\gamma_\Gamma(u \cdot v) - \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)} = 0$ , woraus mit I) auch  $\gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in H^t(\Gamma)$  folgt. Dazu seien  $(u_n)_n, (v_n)_n \subset C^\infty(\overline{\Omega})$  Folgen, sodass  $u_n \rightarrow u$  in  $H^{s_1}(\Omega)$  und  $v_n \rightarrow v$  in  $H^{s_2}(\Omega)$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Solche Folgen existieren, da  $C^\infty(\overline{\Omega})$  für LIPSCHITZ-Gebiete natürlich dicht in  $H^r(\Omega)$ ,  $r > 0$ , liegt. Die Spuren der Elemente aus  $C^\infty(\overline{\Omega})$  auf  $\partial\Omega$  sind in natürlicher Weise erklärt. Weiter ist das punktweise Produkt von stetigen Funktionen natürlich erklärt und somit gilt  $\gamma_\Gamma(u_n \cdot v_n) = \gamma_\Gamma(u_n) \cdot \gamma_\Gamma(v_n)$ . Das liefert zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$\|\gamma_\Gamma(u \cdot v) - \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)} \leq A_n + B_n \quad (4.46)$$

mit

$$A_n := \|\gamma_\Gamma(u \cdot v) - \gamma_\Gamma(u_n \cdot v_n)\|_{L^1(\Gamma)}$$

und

$$B_n := \|\gamma_\Gamma(u_n) \cdot \gamma_\Gamma(v_n) - \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v)\|_{L^1(\Gamma)}.$$

Mit Hilfe der Linearität und Stetigkeit des Spurooperators sowie durch Einführen der produktiven Null  $u \cdot v_n - u_n \cdot v_n$  erhalten wir

$$\begin{aligned} A_n &= \|\gamma_\Gamma(u \cdot v - u_n \cdot v_n)\|_{L^1(\Gamma)} \\ &\lesssim \|u \cdot v - u_n \cdot v_n\|_{H^s(\Omega)} \\ &\leq \|u \cdot (v - v_n)\|_{H^s(\Omega)} + \|v_n \cdot (u - u_n)\|_{H^s(\Omega)} \\ &\lesssim \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} \|v - v_n\|_{H^{s_2}(\Omega)} + \|v_n\|_{H^{s_2}(\Omega)} \|u - u_n\|_{H^{s_1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die aus der stetigen Einbettung  $A_{p_1, q_1}^{s_1}(\Omega) \cdot A_{p_2, q_2}^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow A_{p, q}^s(\Omega)$  für alle  $f_i \in A_{p_i, q_i}^{s_i}(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , folgende Abschätzung

$$\|f_1 \cdot f_2\|_{A_{p, q}^s(\Omega)} \lesssim \|f_1\|_{A_{p_1, q_1}^{s_1}(\Omega)} \|f_2\|_{A_{p_2, q_2}^{s_2}(\Omega)}$$

benutzt wurde. Dabei steht  $A_{p, q}^s(\Omega)$  als Platzhalter für entsprechende TRIEBEL-LIZORKIN- oder BESOV-Räume, siehe Abschnitt A.2.4, in denen natürlich auch die oben verwendeten SOBOLEV-Räume enthalten sind. Wegen  $\|u - u_n\|_{H^{s_1}(\Omega)} \rightarrow 0$  und  $\|v - v_n\|_{H^{s_2}(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , insbesondere impliziert dies natürlich  $\|v_n\|_{H^{s_2}(\Omega)} \lesssim 1$ , unabhängig von  $n$ , haben wir somit  $A_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weiter erhalten wir mit der produktiven Null  $\gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v_n) - \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v)$  und Verwendung der HÖLDER-Ungleichung

$$\begin{aligned} B_n &\leq \|\gamma_\Gamma(u_n - u) \cdot \gamma_\Gamma(v_n)\|_{L^1(\Gamma)} + \|\gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v_n - v)\|_{L^1(\Gamma)} \\ &\leq \|\gamma_\Gamma(u_n - u)\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(v_n)\|_{L^2(\Gamma)} + \|\gamma_\Gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_\Gamma(v_n - v)\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Mit dem Spursatz liefert der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  dann  $B_n \rightarrow 0$ .

(IV) Sei jetzt  $s_1 < \frac{3}{2}$  und  $u \in H^{s_1}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ . Dann gilt insbesondere  $\gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(u) = 0$  und damit unter Verwendung von (I-III)  $\gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(u \cdot v) = \gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(u) \cdot \gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(v) = 0$ , woraus  $u \cdot v \in H^s(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ , mit  $s$  wie in (4.45), folgt. Der Spursatz A.2.8 liefert damit  $\gamma_\Gamma(u \cdot v) \in H_0^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , woraus unter Beachtung von (I-III) die Behauptung folgt.  $\square$

*Bemerkung 85.* (i) Der Fall  $s_2 = \frac{N}{2}$  wird im letzten Lemma nicht direkt abgedeckt. Wir können dann allerdings die stetige Einbettung  $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_2-\tau}(\Omega)$ ,  $\tau > 0$  hinreichend klein, verwenden, um wegen  $s_2 - \tau < \frac{N}{2}$  zumindest noch den ersten Fall in (4.45) zur Verfügung zu haben.

(ii) Im Beweis vom letzten Lemma kann im Fall  $s = \frac{3}{2}$  zudem der Spursatz A.2.8 nicht angewendet werden, da dieser für LIPSCHITZ-Gebiete für  $s = \frac{3}{2}$  nicht gilt. Auch hier kann wieder ein passender Einbettungssatz zu Hilfe genommen werden, um die Elemente aus  $H^{3/2}(\Omega)$  als Elemente aus  $H^{3/2-\tau}(\Omega)$ ,  $\tau > 0$ , aufzufassen und so wenigstens noch in etwas weniger regulären Räumen argumentieren zu können.

(iii) Eine direkte Beziehung zwischen (i) und (ii) im Fall  $N = 3$ , wie die Zahl  $\frac{3}{2}$  vermuten lassen könnte, besteht nicht. Bei (i) rührt die Restriktion auf Werte kleiner als  $\frac{3}{2} = \frac{N}{p}$  von den Einschränkungen bei der punktweisen Multiplikation aus Satz A.5.1 her, bei (ii) ergibt sich die Einschränkung auf Werte kleiner als  $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{p}$  aus den Restriktionen, die der Spursatz für LIPSCHITZ-Gebiete erfordert. Für  $N = 3$  und  $p = 2$  gilt nur zufällig  $\frac{N}{p} = 1 + \frac{1}{p}$ .

(iv) Statt im zweiten Teil des letzten Lemmas  $s_1 < \frac{3}{2}$  zu fordern, reicht auch  $s < \frac{3}{2}$  aus, um für  $u \in H^{s_1}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  noch  $\gamma_\Gamma(u \cdot v) \in H_0^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  zu erhalten.

(v) Wir erinnern daran, dass  $H_0^s(\Gamma) = H^s(\Gamma)$  für  $s \leq \frac{1}{2}$  ist. Für  $s > \frac{1}{2}$  gilt  $H_0^s(\Gamma) = \{\mu \in H^s(\Gamma) \mid \gamma_{\partial\Gamma}(\mu) = 0\}$ .

Für die von uns vorwiegend betrachteten zwei- und dreidimensionalen Probleme können wir das Lemma 4.6.3 um den Spezialfall  $s_1 = s_2 = 1$  erweitern. Für  $N = 3$  wird dieser wegen  $s_1 + s_2 = \frac{N+1}{2}$  nicht durch das letzte Lemma abgedeckt.

**Lemma 4.6.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  oder  $N = 3$ , ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Für  $u, v \in H^1(\Omega)$  gilt dann*

$$\gamma_\Gamma(u \cdot v) = \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in L^2(\Gamma).$$

*Im Fall  $N = 2$  liegt das Produkt sogar in  $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ .*

*Beweis.* Betrachten wir zunächst den Fall  $N = 2$ , welcher mit der nachfolgenden Überlegung vollständig durch Lemma 4.6.3 abgedeckt wird. Sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Mit  $\tau := \frac{\varepsilon}{2}$  gilt natürlich die stetige Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\tau}(\Omega)$ , woraus speziell  $u, v \in H^{1-\tau}(\Omega)$  folgt. Das Lemma 4.6.3 liefert dann

$$\gamma_\Gamma(u \cdot v) = \gamma_\Gamma(u) \cdot \gamma_\Gamma(v) \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma).$$

Im Fall  $N = 3$  müssen wir anders vorgehen. Es ist  $H^1(\Omega) = F_{2,2}^1(\Omega) = B_{2,2}^1(\Omega)$ . Mit der auf TRIEBEL-LIZORKIN- bzw. BESOV-Räume verallgemeinerten HÖLDERSchen Ungleichung, Satz A.5.2, und Beachtung von Lemma 4.6.1, welches die Übertragbarkeit der Ergebnisse vom  $\mathbb{R}^N$  auf LIPSCHITZ-Gebiete sichert, erhalten wir  $u \cdot v \in F_{\frac{3}{2},q}^1(\Omega) = B_{\frac{3}{2},q}^1(\Omega)$ ,  $2 \leq q \leq \infty$ . Der Spursatz A.2.8 liefert dann  $\gamma_\Gamma(u \cdot v) \in B_{\frac{3}{2},q}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Weiter haben wir mit Satz A.2.7(ii) die stetige Einbettung  $B_{\frac{3}{2},q}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{p_1}(\mathbb{R}^2)$  für  $p_1 = 2$  und  $q \leq p_1 = 2$ . Mit  $q = 2$  ist sowohl  $q \leq p_1 = 2$  als auch die obige Restriktion  $2 \leq q \leq \infty$  erfüllt. Die letzte Einbettung lässt sich vom  $\mathbb{R}^2$  auf zweidimensionale LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten, also speziell auch auf  $\Gamma$ , übertragen. Sei dazu  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  eine Zerlegung der Eins auf  $\Gamma$ , bestehend aus auf den gegebenen Atlas angepassten LIPSCHITZ-Funktionen. Nach Definition der Funktionenräume auf LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten gilt mit  $f \in B_{\frac{3}{2},q}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  auch  $(\psi_j f) \circ \Phi_j^{-1} \in B_{\frac{3}{2},q}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ ,  $j \in J$ , wobei die LIPSCHITZ-Abbildung  $\Phi_j$  durch den Atlas festgelegt ist. Mit der obigen Einbettung haben wir dann  $(\psi_j f) \circ \Phi_j^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^2)$  und damit natürlich  $f \in L^2(\Gamma)$ . Insgesamt liefert das  $\gamma_\Gamma(u \cdot v) \in L^2(\Gamma)$ . Weiterhin können wir wörtlich Schritt II) und III) aus dem Beweis von Lemma 4.6.3 übertragen, womit die Behauptung des Lemmas auch für  $N = 3$  folgt.  $\square$

*Bemerkung 86.* Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  oder  $N = 3$ , ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Dann existieren für  $\mu, \nu \in H^{1/2}(\Gamma)$  mit dem Spursatz A.2.8 Funktionen  $u, v \in H^1(\Omega)$  mit  $\gamma_\Gamma(u) = \mu$  und  $\gamma_\Gamma(v) = \nu$ . Somit liefert das letzte Lemma insbesondere  $\mu \cdot \nu \in L^2(\Gamma)$ .

Wir erweitern das Lemma 4.6.3 noch auf mehr als zwei Faktoren und erhalten

**Lemma 4.6.5.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Weiter gelte  $\frac{1}{2} < s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k$  und*

$$\sum_{i=1}^{j+1} s_i > \frac{jN+1}{2} \quad \forall j = 1, \dots, k-1. \quad (4.47)$$

Für  $v_i \in H^{s_i}(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , gilt mit

$$s := \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^k s_i \right) - (k-1) \frac{N}{2} & \text{falls } s_1 \leq \dots \leq s_k < \frac{N}{2} \\ \left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - (j-1) \frac{N}{2} & \text{falls } s_1 \leq \dots \leq s_j < \frac{N}{2} < s_{j+1} \leq \dots \leq s_k, 1 \leq j \leq k-1 \\ s_1 & \text{falls } \frac{N}{2} < s_1 \leq \dots \leq s_k \end{cases} \quad (4.48)$$

und

$$t := \begin{cases} s - \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{2} < s < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{3}{2} < s \end{cases}$$

dann

$$\gamma_\Gamma \left( \prod_{i=1}^k v_i \right) = \prod_{i=1}^k \gamma_\Gamma(v_i) \in H^t(\Gamma).$$

Falls überdies ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $s_j < \frac{3}{2}$  und  $v_j \in H^{s_j}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  existiert, dann folgt zudem

$$\gamma_\Gamma \left( \prod_{i=1}^k v_i \right) = \prod_{i=1}^k \gamma_\Gamma(v_i) \in H_0^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Dabei ist  $H^{s_j}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  entsprechend (4.44) erklärt.

*Beweis.* Der Beweis ergibt sich durch  $(k-1)$ -faches Anwenden des Lemmas 4.6.3. Um zu zeigen, dass

$$\gamma_\Gamma \left( \prod_{i=1}^l v_i \right) = \gamma_\Gamma \left( \prod_{i=1}^{l-1} v_i \right) \cdot \gamma_\Gamma(v_l), \quad 2 \leq l \leq k,$$

gilt, müssen wir für jedes  $l$  die Voraussetzungen von Lemma 4.6.3 überprüfen. Mit  $\tilde{s}_l$  bezeichnen wir die Regularität des Produktes  $\prod_{i=1}^{l-1} v_i$ , siehe Lemma 4.6.2. Mit Bemerkung 84 auf Seite 102 kann das Produkt höchstens so regulär sein, wie der am wenigsten reguläre Faktor. Also gilt  $\tilde{s}_l \leq s_1 \leq s_l$ . Wir überlegen uns weiter, dass überdies die Abschätzung

$$\tilde{s}_l \geq \left( \sum_{i=1}^{l-1} s_i \right) - (l-2) \frac{N}{2}$$

gilt. Mit (4.47) liefert das

$$\tilde{s}_l \geq \left( \sum_{i=1}^{l-1} s_i \right) - (l-2) \frac{N}{2} > \frac{(l-2)N+1 - (l-2)N}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wegen der vorletzten Ungleichung und unter erneuter Beachtung von (4.47) erhalten wir

$$\tilde{s}_l + s_l \geq \left( \sum_{i=1}^{l-1} s_i \right) + s_l - (l-2) \frac{N}{2} = \left( \sum_{i=1}^l s_i \right) - (l-2) \frac{N}{2} > \frac{(l-1)N+1 - (l-2)N}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

Insgesamt sind die Voraussetzungen des Lemmas 4.6.3 für alle  $2 \leq l \leq k$  erfüllt. Die Aussage zur Regularität folgt aus der Regularität von  $\prod_{i=1}^k v_i$  und dem Spursatz A.2.8.

Die Zusatzbehauptung für den Fall  $s_j < \frac{3}{2}$  mit  $v_j \in H^{s_j}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , folgt mit den selben Argumenten wie in Teil (IV) des Beweises von Lemma 4.6.3.  $\square$

*Bemerkung 87.* Aufgrund der Abbildungseigenschaften des Spuoperators  $\gamma_\Gamma$  auf Rändern von LIPSCHITZ-Gebieten gilt im letzten Lemma  $t \leq 1$ , d.h. egal wie regulär die einzelnen Faktoren sind, das Produkt kann maximal in  $H^1(\Gamma)$  liegen.

Aus Lemma 4.6.5 ergibt sich unmittelbar das

**Korollar 4.6.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Weiter gelte  $0 < s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k < 1$  und

$$\sum_{i=1}^{j+1} s_i > \frac{j(N-1)}{2} \quad \forall j = 1, \dots, k-1. \quad (4.49)$$

Mit  $\nu_i \in H^{s_i}(\Gamma)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , gilt für

$$s := \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^k s_i \right) - \frac{k(N-1)-N}{2} & \text{falls } s_1 \leq \dots \leq s_k < \frac{N-1}{2} \\ \left( \sum_{i=1}^j s_i \right) - \frac{j(N-1)-N}{2} & \text{falls } s_1 \leq \dots \leq s_j < \frac{N-1}{2} < s_{j+1} \leq \dots \leq s_k, 1 \leq j \leq k-1 \\ s_1 + \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{N-1}{2} < s_1 \leq \dots \leq s_k \end{cases} \quad (4.50)$$

dann  $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$  und

$$\prod_{i=1}^k \nu_i \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Falls überdies ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\nu_j \in H_0^{s_j}(\Gamma)$  existiert, dann folgt zudem

$$\prod_{i=1}^k \nu_i \in H_0^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

*Beweis.* Unter der Voraussetzung  $0 < s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k < 1$  existieren mit Satz A.2.8 lineare beschränkte Fortsetzungsoperatoren  $\mathcal{R}_i \in \mathcal{L}\left(H^{s_i}(\Gamma), H^{s_i+\frac{1}{2}}(\Omega)\right)$  mit  $\gamma_\Gamma \circ \mathcal{R}_i = I$  in  $H^{s_i}(\Gamma)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dann können wir das letzte Lemma mit  $v_i = \mathcal{R}_i \nu_i \in H^{s_i+\frac{1}{2}}(\Omega)$  anwenden und erhalten

$$\prod_{i=1}^k \nu_i = \gamma_\Gamma \left( \prod_{i=1}^k \mathcal{R}_i \nu_i \right) \in H^t(\Gamma)$$

mit  $t = s - \frac{1}{2}$ , da wir unter Beachtung von  $0 < s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k < 1$  leicht nachrechnen, dass  $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$  gilt.

Sei nun überdies  $\nu_j \in H_0^{s_j}(\Gamma)$  für ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Dann liefert der Spursatz A.2.8, dass für die Fortsetzung  $\mathcal{R}_j \nu_j \in H^{s_j+\frac{1}{2}}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  gilt. Jetzt folgt die Zusatzbehauptung wieder aus dem letzten Lemma.  $\square$

*Bemerkung 88.* Das Korollar kann auf den Fall  $s_k \leq 1$  erweitert werden, wenn gesichert werden kann, dass für alle  $\nu_i \in H^1(\Gamma)$ , wobei  $i \in \{j \mid s_j = 1\} \subset \{1, \dots, k\}$ , ein  $v_i \in H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  mit  $\gamma_\Gamma(v_i) = \nu_i$  existiert. Diese Forderung ist notwendig, da der Spuroperator  $\gamma_\Gamma$  in diesem Fall nicht surjektiv ist.

Wir werden die Ergebnisse dieses Teilabschnittes später benutzen, um die Abbildungseigenschaften der Operatoren  $\Upsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , welche beim Differenzieren des Zielfunktionals entstehen, zu untersuchen. In diesem Zusammenhang sei auf den dritten Unterabschnitt dieses Abschnitts und auf Abschnitt 4.7 verwiesen.

## 4.6.2 Ein Exkurs über Kompositionsoperatoren

Wir betrachten an dieser Stelle erneut Kompositionsoperatoren und verweisen für Definitionen und grundlegende Eigenschaften auf den Abschnitt A.4 des Anhangs.

Im Abschnitt 4.2 haben wir bereits gesehen, dass wir die KIRCHHOFF-Transformation als Kompositionsoperator in geeigneten Funktionenräumen, siehe Definition A.4.3, auffassen können. Bereits bei der Berechnung der ersten Variation wurde aber deutlich, dass wir allein damit nicht auskommen, da auch die dort auftretenden Ableitungen der KIRCHHOFF-Transformation in geeigneter Weise als Kompositionsoperatoren interpretiert werden müssen.

Zunächst stellen wir fest, dass der Kompositionsoperator unter zusätzlichen Voraussetzungen auch in Räumen höherer Glattheit agiert.

**Lemma 4.6.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $G \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  mit  $s > \frac{3}{2}$ . Dann gilt für  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$

$$T_G(H^{1+\varepsilon}(\Omega)) \subset H^{1+\varepsilon}(\Omega).$$

*Beweis.* Für  $\varepsilon = 0$  wird die Aussage im  $\mathbb{R}^N$  bereits durch Satz A.4.3 (falls  $G(0) = 0$  ist) und für LIPSCHITZ-Gebiete  $\Omega$  durch Satz A.4.4 gesichert. Weiter sehen wir mit Lemma A.4.6(i) und Satz A.4.5, dass die Aussage im  $\mathbb{R}^N$  gültig ist, falls  $G(0) = 0$  gilt. Bemerkung 104 auf Seite 154 liefert, dass die Aussage für glatt berandete Gebiete gilt und für beschränkte Gebiete zudem die Forderung  $G(0) = 0$  nicht benötigt wird. Wir übertragen die Aussage auf LIPSCHITZ-Gebiete. Für LIPSCHITZ-Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  existiert ein linearer beschränkter totaler Fortsetzungsoperator  $\mathcal{E}$ . Siehe [Ste70, Chapter 6] oder [Ryc99], wo dieses Resultat auf beliebige Skalen von BESOV- und TRIEBEL-LIZORKIN-Räume übertragen wurde. Es sei auch auf Bemerkung 83 auf Seite 101 verwiesen. Dann gilt, falls  $G(0) = 0$  ist,

$$\|G(f)\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)} \leq \|G(\mathcal{E}f)\|_{H^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|G'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{E}f\|_{H^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 C_2 \|G'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega)},$$

wobei  $C_1 > 0$  die Konstante aus Satz A.4.5 und  $C_2 > 0$  die Beschränktheitskonstante des Fortsetzungsoperators  $\mathcal{E}$  bezeichnet.  $G'$  ist mit Lemma A.4.6(i) wesentlich beschränkt. Im Fall  $G(0) \neq 0$  benötigen wir wieder die Beschränktheit des Gebietes. Wir setzen dann nicht auf  $\mathbb{R}^N$ , sondern auf ein glatt berandetes beschränktes Gebiet  $\tilde{\Omega} \supset \Omega$  fort und erhalten mit den Ausführungen nach Satz A.4.5 eine analoge Ungleichungskette.  $\square$

*Bemerkung 89.* Für  $G$  mit beschränktem Träger ist  $G \in W_p^{s+\tau}(\mathbb{R})$ ,  $\tau > 0$ ,  $p \geq 2$ , hinreichend für  $G \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$ , wie der Beweis von Lemma 4.6.13 auf Seite 110 unter Beachtung der stetigen Einbettung  $W_p^{s+\tau}(\text{supp } G) \hookrightarrow W_{p_0}^{s+\tau}(\text{supp } G)$ ,  $p_0 \leq p$ , liefert. Die Beschränktheit des Trägers ist wesentlich, da für unbeschränkte Gebiete  $M$  im Allgemeinen  $W_p^{s+\tau}(M) \not\subset W_{p_0}^{s+\tau}(M)$ ,  $p_0 \leq p$ , gilt.

Aufgrund der Nichtlinearität von  $T_G$  können wir die Aussage des letzten Satzes nicht einfach durch Wahl von geeigneten Koordinatensystemen und Partition der Eins auf  $(N-1)$ -dimensionale LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten übertragen. Dass wir uns auf andere Art behelfen können, zeigt das

**Lemma 4.6.8.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  und  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Falls  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine LEBESGUE-messbare Funktion ist und der Kompositionsoperator  $T_G^\Omega = T_G$  sowohl  $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$  als auch  $H^1(\Omega)$  in sich abbildet, dann gilt für alle  $v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$

$$T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v)) = \gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)), \quad (4.51)$$

wobei  $T_G^\Gamma$  den Kompositionsoperator in  $L^2(\Gamma)$  bezeichnet. Mit der Surjektivität des Spurooperators folgt daraus, dass  $T_G^\Gamma$  auch  $H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma)$  in sich abbildet.

*Beweis.* Das Lemma 4.2.5 auf Seite 85 liefert  $\gamma_\Gamma(T_G^\Omega(v)) = T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v))$ . Nun liegt die rechte Seite von (4.51) wegen des Spursatzes und weil  $T_G^\Omega H^{1+\varepsilon}(\Omega)$  in sich abbildet, in  $H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ . Damit gilt auch  $T_G^\Gamma(\gamma_\Gamma(v)) \in H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma)$  und die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Auch die Ergebnisse dieses Abschnittes werden im folgenden Unterabschnitt und in Abschnitt 4.7 zur Sicherung der Abbildungseigenschaften der beim Differenzieren des Zielfunktional auftretenden Operatoren  $\Upsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , benötigt.

### 4.6.3 Zur Differenzierbarkeit des Zielfunktional

Mit den Hilfsmitteln der letzten beiden Teilabschnitte werden wir nun untersuchen, wann höhere Ableitungen von  $\mathcal{M}_\delta$  sinnvoll erklärt sind.

Die erste Variation bzw. das erste G-Differential von  $\mathcal{M}_\delta$  im Punkt  $g \in (V_\Gamma)'$  in Richtung  $h \in (V_\Gamma)'$ , welche wir bereits berechnet haben, sei nochmals wiedergegeben:

$$\begin{aligned} \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g; h) &:= \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g)(h) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{M}_\delta(g + th) \right|_{t=0} \\ &= \delta \cdot (g, h)_{(V_\Gamma)'} + (\Upsilon_0(g), \Upsilon_1(g, h))_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Für das zweite G-Differential errechnen wir formal

$$\begin{aligned}\delta_V^2 \mathcal{M}_\delta(g; h, k) &= \left. \frac{d}{dt} \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g + tk; h) \right|_{t=0} \\ &= \delta \cdot (k, h)_{(V_\Gamma)'} + (\Upsilon_1(g, k), \Upsilon_1(g, h))_{L^2(\Gamma)} + (\Upsilon_0(g), \Upsilon_2(g, h, k))_{L^2(\Gamma)}\end{aligned}\quad (4.53)$$

und das dritte G-Differential lautet formal

$$\begin{aligned}\delta_V^3 \mathcal{M}_\delta(g; h, k, l) &= \left. \frac{d}{dt} \delta_V^2 \mathcal{M}_\delta(g + tl; h, k) \right|_{t=0} \\ &= (\Upsilon_1(g, h), \Upsilon_2(g, k, l))_{L^2(\Gamma)} + (\Upsilon_1(g, k), \Upsilon_2(g, h, l))_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + (\Upsilon_1(g, l), \Upsilon_2(g, h, k))_{L^2(\Gamma)} + (\Upsilon_0(g), \Upsilon_3(g, h, k, l))_{L^2(\Gamma)}.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Dabei bezeichnet  $(\cdot, \cdot)_{(V_\Gamma)'}$  das Skalarprodukt in  $(V_\Gamma)'$ , welches mit dem RIESZ-Isomorphismus  $J \in \mathcal{L}(V_\Gamma, (V_\Gamma)')$  durch  $(g, h)_{(V_\Gamma)'} := (J^{-1}g, J^{-1}h)_{V_\Gamma}$  für alle  $g, h \in (V_\Gamma)'$  erklärt ist. Weiter haben wir

$$\Upsilon_0 : (V_\Gamma)' \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad g \mapsto \kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))),$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &: (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \rightarrow L^2(\Gamma), \\ (g, h) &\mapsto (\kappa_1^{-1})'(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) \cdot S_1^{-1}h + (\kappa_2^{-1})'(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))) \cdot S_2^{-1}h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_2 &: (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \rightarrow L^2(\Gamma), \\ (g, h, k) &\mapsto (\kappa_1^{-1})''(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) \cdot S_1^{-1}k \cdot S_1^{-1}h - (\kappa_2^{-1})''(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))) \cdot S_2^{-1}k \cdot S_2^{-1}h\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Upsilon_3 &: (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \times (V_\Gamma)' \rightarrow L^2(\Gamma), \\ (g, h, k, l) &\mapsto \sum_{i=1}^2 (\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}l \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h,\end{aligned}$$

wobei  $\kappa_i^{-1}$  die inverse KIRCHHOFF-Transformation,  $(\kappa_i^{-1})'$ ,  $(\kappa_i^{-1})''$  und  $(\kappa_i^{-1})'''$  deren erste, zweite und dritte Ableitung,  $u_i(\cdot)$  den Lösungsoperator (4.36) des Hilfsproblems (4.26) und  $S_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , den inversen (partiellen) STEKLOV-POINCARÉ-Operator, siehe Abschnitt B.3, bezeichnet. Die Zielräume der Operatoren  $\Upsilon_1$ ,  $\Upsilon_2$  und  $\Upsilon_3$  wurden so gewählt, dass die inneren Produkte in den obigen G-Differentials wohldefiniert sind. Wir müssen nachfolgend noch die Voraussetzungen erarbeiten, unter denen diese Abbildungseigenschaften gesichert werden können. Weiterhin stellen wir fest, dass  $\delta$  im dritten G-Differential nicht mehr auftaucht. G-Differentiale vierter Ordnung und höher ergeben sich formal in gleicher Weise. Wir geben diese nicht an, da sie später nicht benötigt werden.

*Bemerkung 90.* Sei  $\tilde{u}_i(g)$  der Lösungsoperator des homogenen Hilfsproblems, d.h. (4.26) mit  $f_i = 0$  und  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ . Dann besteht zwischen dem inversen (partiellen) STEKLOV-POINCARÉ-Operator  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  und  $\gamma_\Gamma^i(\tilde{u}_i(\cdot))$  die Beziehung

$$\gamma_\Gamma^i(\tilde{u}_i(h)) = (-1)^{i+1} S_i^{-1}h \quad \forall h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)', \quad i = 1, 2.$$

Damit auch die Ableitungen der KIRCHHOFF-Transformation als Kompositionsoperatoren aufgefasst werden können, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.3.** Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.4.** Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^2(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.5.** Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^3(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.6.** Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^4(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

*Bemerkung 91.* Bereits die Voraussetzung 4.3 impliziert die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ . Siehe z.B. [AF03, Lemma 4.28].



Wir formulieren direkte Folgerungen aus den Voraussetzungen als

**Lemma 4.6.9.** *Aus  $k_i \in W_\infty^m(\mathbb{R})$ ,  $k_i \geq \alpha > 0$ ,  $1 \leq m \leq 4$ , folgt  $(\kappa_i^{-1})^{(l)} \in W_\infty^{m+1-l}(\mathbb{R})$ ,  $l = 1, \dots, m+1$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Bemerkung 64 auf Seite 81f.  $\square$

Wir beschränken uns ab jetzt auf höchstens dreidimensionale Probleme, d.h.  $N \leq 3$ . Es ist aber möglich, einige der nachfolgenden Aussagen unter zusätzlichen Voraussetzungen auch für höherdimensionale Probleme zu beweisen. Zur Wohldefiniertheit des ersten G-Differentials (4.52) beweisen wir das

**Lemma 4.6.10.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 3$ , erfüllen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 und es gelte Voraussetzung 4.3. Dann ist das (formal berechnete) erste G-Differential (4.52) für alle  $g, h \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma), H_0^{1/2}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , sinnvoll.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Behauptung bereits im schwächsten Fall  $(V_\Gamma)' = H_0^{-1/2}(\Gamma)$  gilt, womit auch die reguläreren Fälle folgen. Im Folgenden sei immer  $i = 1, 2$ . Mit Voraussetzung 4.3 und Lemma 4.6.9 gilt  $(\kappa_i^{-1})' \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ , also ist  $(\kappa_i^{-1})'$  insbesondere LIPSCHITZ-stetig, siehe z.B. [AF03, Lemma 4.28]. Damit haben wir wegen Satz A.4.4, dass der Kompositionsoperator  $(\kappa_i^{-1})' = T_{(\kappa_i^{-1})}'$  stetig ist und  $H^1(\Omega_i)$  in sich abbildet. Lemma 4.6.8 ( $\varepsilon = 0$ ) liefert nun, dass  $(\kappa_i^{-1})' : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  stetig ist. Da mit dem Spursatz A.2.8 und Lemma 4.5.2 auf Seite 91  $\gamma_\Gamma^i(u_i(g)) \in H_0^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$  für  $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  gilt, ist  $(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Für beliebiges  $h \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  gilt nach Satz B.3.1 zudem  $S_i^{-1}h \in H_0^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ . Für  $N = 2$  bzw.  $N = 3$  gilt mit Lemma 4.6.4 auf Seite 104 und der dort anschließenden Bemerkung

$$(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}h \in L^2(\Gamma), \quad (4.55)$$

womit  $\Upsilon_1$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Damit ist (4.52) sinnvoll. Der Fall  $N = 1$  ist trivial.  $\square$

Bei der Untersuchung der Wohldefiniertheit des zweiten und dritten G-Differentials unterscheiden wir die Fälle  $N \leq 2$  und  $N = 3$ . Für  $N \leq 2$  haben wir das

**Lemma 4.6.11.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 2$ , erfüllen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1. Unter Voraussetzung 4.4 ist das (formal berechnete) zweite G-Differential (4.53) und unter Voraussetzung 4.5 ist das (formal berechnete) dritte G-Differential (4.54) für alle  $g, h, k, l \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma), H_0^{1/2}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , sinnvoll.*

*Beweis.* Der Fall  $N = 1$  ist wieder trivial. Sei also  $N = 2$ . Wie im letzten Lemma zeigen wir die Behauptung für den schwächsten Fall  $(V_\Gamma)' = H_0^{-1/2}(\Gamma)$ , womit auch die reguläreren Fälle folgen. Nachfolgend sei wieder  $i = 1, 2$ . Mit Voraussetzung 4.4 bzw. 4.5 und Lemma 4.6.9 gilt  $(\kappa_i^{-1})'' \in W_\infty^1(\mathbb{R})$  bzw.  $(\kappa_i^{-1})''' \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ . Mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis von Lemma 4.6.10 erhalten wir  $(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1/2}(\Gamma)$  bzw.  $(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Nach Satz B.3.1 gilt für beliebiges  $f \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  wieder  $S_i^{-1}f \in H_0^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ . Um Korollar 4.6.6 auf Seite 106 anwenden zu können, benutzen wir die stetige Einbettung  $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{1/2-\tau}(\Gamma)$ ,  $0 < \tau < \frac{1}{2}$ . Damit liefert Korollar 4.6.6 für hinreichend kleines  $\tau > 0$

$$(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{1/2-3\tau}(\Gamma)$$

bzw.

$$(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}l \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{1/2-4\tau}(\Gamma).$$

Für  $\tau < \frac{1}{6}$  bzw.  $\tau < \frac{1}{8}$  liegen obige Produkte in  $L^2(\Gamma)$ , womit  $\Upsilon_2$  bzw.  $\Upsilon_3$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Natürlich bildet unter den obigen Voraussetzungen auch  $\Upsilon_1$  nach  $L^2(\Gamma)$  ab. Insgesamt sind (4.53) und (4.54) also sinnvoll.  $\square$

Um die Wohldefiniertheit des zweiten und dritten G-Differentials (4.53) bzw. (4.54) im dreidimensionalen Fall zu zeigen, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Teilgebiete.

**Voraussetzung 4.7.** Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , seien faltige LIPSCHITZ-Gebiete, siehe Definition B.2.3.

Grob gesprochen bedeutet die letzte Voraussetzung, dass  $\Gamma$  und  $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$  durch eine eindimensionale LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeit getrennt sind und der Winkel zwischen  $\Gamma$  und  $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$  kleiner als  $\pi$  ist. Diese Voraussetzung benötigen wir, um Aussagen über die Regularität der Lösung des gemischten Randwertproblems machen zu können, siehe Abschnitt B.2. Für dreidimensionale Probleme haben wir dann das

**Lemma 4.6.12.** Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllen Voraussetzung 4.7.

- (i) Unter Voraussetzung 4.4 ist das (formal berechnete) zweite  $G$ -Differential (4.53) für alle  $g, h, k \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , sinnvoll.
- (ii) Unter Voraussetzung 4.5 ist das (formal berechnete) dritte  $G$ -Differential (4.54) für alle  $g, h, k, l \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ , sinnvoll.

*Beweis.* Zu (i): Wir zeigen die Behauptung für  $(V_\Gamma)' = H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , womit auch der regulärere Fall  $(V_\Gamma)' = L^2(\Gamma)$  folgt. Voraussetzung 4.4 und Lemma 4.6.9 liefern wegen  $H^{-\varepsilon}(\Gamma) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  analog zum Beweis von Lemma 4.6.10, dass  $(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt. Mit Voraussetzung 4.7 können wir Satz B.3.2 anwenden und erhalten  $S_i^{-1}f \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  für beliebiges  $f \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ . Nun liefert Korollar 4.6.6 auf Seite 106

$$(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

womit  $\Upsilon_2$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Da die Voraussetzung 4.4 die Voraussetzung 4.3 impliziert, bildet mit Lemma 4.6.10 auch  $\Upsilon_1$  nach  $L^2(\Gamma)$  ab. Insgesamt ist (4.53) sinnvoll.

Zu (ii): Wir zeigen die Behauptung für  $(V_\Gamma)' = H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ , womit auch der regulärere Fall  $(V_\Gamma)' = L^2(\Gamma)$  folgt. Voraussetzung 4.5 und Lemma 4.6.9 liefern wegen  $H^{-\varepsilon}(\Gamma) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  analog zum Beweis von Lemma 4.6.10, dass  $(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1/2}(\Gamma)$  gilt. Mit Voraussetzung 4.7 können wir Satz B.3.2 anwenden und erhalten wie oben  $S_i^{-1}f \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  für beliebiges  $f \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ . Korollar 4.6.6 liefert

$$(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}l \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{\frac{1}{2}-3\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

womit  $\Upsilon_3$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Die Voraussetzung 4.5 impliziert die Voraussetzungen 4.4 und 4.3, womit unter Beachtung von (i) auch  $\Upsilon_1$  und  $\Upsilon_2$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbilden. Insgesamt ist (4.54) sinnvoll.  $\square$

Wir formulieren noch Glattheitsbedingungen an die Ableitungen der inversen KIRCHHOFF-Transformation. Mit deren Hilfe können wir das letzte Lemma auf reguläre Räume  $V_\Gamma$  erweitern.

**Voraussetzung 4.8.** Es gelte  $(\kappa_i^{-1})'' \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  mit  $s > \frac{3}{2}$ .

**Voraussetzung 4.9.** Es gelte  $(\kappa_i^{-1})''' \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  mit  $s > \frac{3}{2}$ .

Welche leichter verifizierbaren Bedingungen hinreichend für diese Voraussetzungen sind, besagt

**Lemma 4.6.13.** Falls  $0 < \rho_i < \infty$  mit  $k_i \equiv \text{const}$  auf  $\mathbb{R} \setminus B_{\rho_i}(0)$ ,  $i = 1, 2$ , existieren, dann impliziert die Voraussetzung 4.5 (bzw. 4.6) die Voraussetzung 4.8 (bzw. 4.9).

*Beweis.* Nachfolgend sei  $i = 1, 2$ . Zunächst liefert die Monotonie und LIPSCHITZ-Stetigkeit der KIRCHHOFF-Transformation  $\kappa_i$ , dass  $I_i := \kappa_i(B_{\rho_i}(0))$  ein beschränktes Intervall ist. Auf  $\mathbb{R} \setminus I_i$  ist  $k_i(\kappa_i^{-1}(\cdot))$  konstant und somit gilt dort  $k_i^{(l)}(\kappa_i^{-1}(\cdot)) \equiv 0$ ,  $l \geq 1$ . Da in den Zählern der in Bemerkung 64 auf Seite 81 berechneten Ableitungen  $(\kappa_i^{-1})^{(l)}$ ,  $2 \leq l \leq 5$ , nur Ableitungen von  $k_i$  vorkommen und die Nenner wegen  $k_i \geq \alpha > 0$  natürlich nicht Null sind, haben wir auch  $(\kappa_i^{-1})^{(l)} \equiv 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus I_i$  für  $2 \leq l \leq 5$ . Der Träger von  $(\kappa_i^{-1})^{(l)}$ ,  $2 \leq l \leq 5$ , ist also im beschränkten Intervall  $I_i$  enthalten. Aus diesem Grund können wir von  $\mathbb{R}$  zum beschränkten Intervall  $I_i$  übergehen, sodass wir entsprechende Einbettungssätze zur Verfügung haben. Weiterhin liefert die Voraussetzung 4.5 (bzw. 4.6) mit Lemma 4.6.9  $(\kappa_i^{-1})'' \in W_\infty^2(\mathbb{R})$  (bzw.  $(\kappa_i^{-1})''' \in W_\infty^2(\mathbb{R})$ ).

Wir müssen noch zeigen, dass für  $h_i$  mit  $\text{supp } h_i \subset I_i$  aus  $h_i \in W_\infty^{\lfloor s \rfloor + 1}(\mathbb{R})$ , auch  $h_i \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  und  $\|h_i\|_{B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})} \lesssim \|h_i\|_{W_\infty^{\lfloor s \rfloor + 1}(\mathbb{R})}$  folgt. Unter Beachtung des beschränkten Trägers folgt dies direkt aus der stetigen Einbettung  $W_\infty^{\lfloor s \rfloor + 1}(I_i) \hookrightarrow B_{2,\infty}^s(I_i)$ . Offenbar haben wir die stetige Einbettung  $W_\infty^{\lfloor s \rfloor + 1}(I_i) \hookrightarrow W_\infty^{s+\tau}(I_i)$ ,  $\tau < \tau_0 := \min(\lfloor s \rfloor + 1 - s, \frac{1}{2})$ . Sei also ein  $0 < \tau < \tau_0$  gegeben und o.B.d.A. sei  $s + \tau$  nicht ganzzahlig. Dann haben wir für alle  $1 \leq p < \infty$  die stetige Einbettung  $W_\infty^{s+\tau}(I_i) \hookrightarrow W_p^{s+\tau}(I_i) = F_{p,p}^{s+\tau}(I_i)$ . Wir wählen speziell  $p = p_0 := \frac{2}{2\tau+1}$ , womit insbesondere  $1 < p_0 < 2$  gilt. Der Satz A.2.6(i) und die dort anschließende Bemerkung liefern dann die stetige Einbettung  $F_{p_0,p_0}^{s+\tau}(I_i) \hookrightarrow B_{2,\infty}^s(I_i)$ .  $\square$

*Bemerkung 92.* Die Forderung  $k_i \equiv \text{const}$  auf  $\mathbb{R} \setminus B_{\rho_i}(0)$ ,  $i = 1, 2$ , ist nicht allzu stark, da  $\rho_i$  hinreichend groß gewählt werden kann. So können wir  $k_i$  außerhalb des physikalisch sinnvollen Bereichs, von dem wir annehmen können, dass er endlich ist, immer als konstant festlegen, ohne das Ausgangsproblem zu verändern. Wir beachten, dass die Konstante wegen der Forderung  $k_i \geq \alpha > 0$  immer größer oder gleich  $\alpha$  sein muss.

Die Voraussetzungen 4.8 und 4.9 lassen sich also beispielsweise durch hinreichende Glattheitsvoraussetzungen an die Nichtlinearitäten  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , sichern. Damit können wir die Aussage von Lemma 4.6.12 auf einen größeren  $\varepsilon$ -Bereich ausdehnen.

**Lemma 4.6.14.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllen Voraussetzung 4.7.*

- (i) *Unter den Voraussetzungen 4.4 und 4.8 ist das (formal berechnete) zweite G-Differential (4.53) für alle  $g, h, k \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ , sinnvoll.*
- (ii) *Unter Voraussetzungen 4.5 und 4.9 ist das (formal berechnete) dritte G-Differential (4.54) für alle  $g, h, k, l \in (V_\Gamma)'$ ,  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , sinnvoll.*

*Beweis.* Zu (i): Wir zeigen die Behauptung für  $(V_\Gamma)' = H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ , womit auch der regulärere Fall  $(V_\Gamma)' = L^2(\Gamma)$  folgt. Voraussetzung 4.4 und Lemma 4.6.9 liefern analog zum Beweis von Lemma 4.6.10, dass der Kompositionsoperator  $(\kappa_i^{-1})''$  den Raum  $H^1(\Omega_i)$  in sich abbildet. Die Voraussetzung 4.8 liefert mit Lemma 4.6.7, dass  $(\kappa_i^{-1})''$  auch  $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i)$  in sich abbildet, woraus mit Lemma 4.6.8 dann  $(\kappa_i^{-1})'' : H^{1-\varepsilon}(\Gamma) \rightarrow H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  folgt. Die Regularitätsresultate über das gemischte Randwertproblem für den LAPLACE-Operator aus Satz B.2.1 sichern mit Voraussetzung 4.7 zudem, dass  $u_i(g) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i)$  für  $g \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  gilt. Unter Beachtung des Spursatzes A.2.8 haben wir also  $(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ . Weiter können wir mit Voraussetzung 4.7 den Satz B.3.2 anwenden und erhalten  $S_i^{-1}f \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  für beliebiges  $f \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ . Nun liefert Korollar 4.6.6 auf Seite 106

$$(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{1-3\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

womit  $\Upsilon_2$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Wie im Beweis von Lemma 4.6.12(i) sehen wir, dass unter den obigen Voraussetzungen auch  $\Upsilon_1$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Insgesamt ist (4.53) sinnvoll.

Zu (ii): Wir zeigen die Behauptung für  $(V_\Gamma)' = H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , womit auch der regulärere Fall  $(V_\Gamma)' = L^2(\Gamma)$  folgt. Die Voraussetzungen 4.5 und 4.9 sowie Lemma 4.6.9 liefern analog zum Vorgehen in (i), dass  $(\kappa_i^{-1})''' : H^{1-\varepsilon}(\Gamma) \rightarrow H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  gilt. Die Regularitätsresultate aus Satz B.2.1 sichern mit Voraussetzung 4.7 wieder, dass  $u_i(g) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i)$  für  $g \in H_{00}^{-\varepsilon}(\Gamma)$  gilt, was zusammen mit dem Spursatz A.2.8 dann  $(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  liefert. Wegen Voraussetzung 4.7 können wir Satz B.3.2 anwenden und erhalten  $S_i^{-1}f \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  für beliebiges  $f \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ . Korollar 4.6.6 liefert

$$(\kappa_i^{-1})'''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}l \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h \in H^{1-4\varepsilon}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

womit  $\Upsilon_3$  nach  $L^2(\Gamma)$  abbildet. Mit Teil (i) bilden auch  $\Upsilon_1$  und  $\Upsilon_2$  nach  $L^2(\Gamma)$  ab. Insgesamt ist (4.54) sinnvoll.  $\square$

Bislang haben wir nur gezeigt, dass die G-Differentiale (4.52) bis (4.54) unter gewissen Voraussetzungen sinnvoll erklärt sind. Es gilt aber mehr, denn mit den obigen Voraussetzungen ist  $\mathcal{M}_\delta$  sogar dreimal F-differenzierbar. Wir halten dies im Hauptresultat dieses Abschnitts fest.

**Korollar 4.6.15.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 3$ , erfüllen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1.*

- (i) Unter Voraussetzung 4.3 ist  $\mathcal{M}_\delta$  stetig F-differenzierbar auf  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$ .
- (ii) Es sei  $N \leq 2$ . Unter Voraussetzung 4.4 ist  $\mathcal{M}_\delta$  zweimal und unter Voraussetzung 4.5 dreimal stetig F-differenzierbar auf  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$ .
- (iii) Es sei  $N = 3$  und die Teilgebiete erfüllen die Voraussetzung 4.7. Unter Voraussetzung 4.4 ist  $\mathcal{M}_\delta$  zweimal stetig F-differenzierbar auf  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ . Gilt zusätzlich Voraussetzung 4.8, so bleibt die Aussage für  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ , erhalten. Unter Voraussetzung 4.5 ist  $\mathcal{M}_\delta$  sogar dreimal stetig F-differenzierbar auf  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ . Gilt überdies Voraussetzung 4.9, so bleibt die dreimalige F-Differenzierbarkeit für  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , erhalten.

*Beweis.* Zu (i): Mit Lemma 4.6.10 existiert für beliebiges aber festes  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  für alle  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  die erste Variation  $\delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g; h)$ . Wegen der Linearität und Stetigkeit des inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operators  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  ist  $\Upsilon_1$  im zweiten Argument linear und stetig, woraus mit der Linearität und Stetigkeit der Skalarprodukte im  $L^2(\Gamma)$  und  $(V_\Gamma)'$  sofort folgt, dass die Abbildung  $h \mapsto \delta_V^1 \mathcal{M}_\delta(g; h)$  ein lineares, stetiges Funktional ist. Damit existiert nach Satz A.6.1  $\mathcal{M}'_\delta(g)$  als G-Ableitung. Die Kompositionsoperatoren  $\kappa_i^{-1}$  und  $(\kappa_i^{-1})'$  sind unter den obigen Voraussetzungen stetig, wie der Beweis zu Lemma 4.6.10 und Satz A.4.4 zeigt. Da auch der Spuoperator und der Lösungsoperator (4.36) stetig sind, haben wir die Stetigkeit von  $\Upsilon_0$  und  $\Upsilon_1$  in  $g$ . Skalarprodukte sind natürlich in beiden Komponenten stetig, sodass insgesamt die Stetigkeit der G-Ableitung  $\mathcal{M}'_\delta$  in  $g$  folgt. Nach Satz A.6.1 liefert das aber die F-Differenzierbarkeit in  $g$ . Die Stetigkeit der F-Ableitung  $\mathcal{M}'_\delta$  in  $g$  folgt mit den selben Überlegungen wie oben. Da  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  beliebig war, ist (i) gezeigt.

Zu (ii): Wir gehen analog zu (i) vor. Mit den zusätzlichen Voraussetzungen erhalten wir die Stetigkeit der Operatoren  $\Upsilon_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , bezüglich des ersten Arguments und die Linearität und Stetigkeit in den restlichen Argumenten. Satz A.6.1 liefert dann die F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  bzw.  $\mathcal{M}''_\delta$  für beliebiges  $g \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ . Die Stetigkeit der Ableitungen folgt wie oben.

Zu (iii): Wir können analog zu den letzten beiden Teilen vorgehen. Der inverse partielle STEKLOV-POINCARÉ-Operator  $S_i^{-1}$  agiert nun allerdings beschränkt und linear zwischen reguläreren Räumen. Die Stetigkeit der beteiligten Kompositionsoperatoren wird wieder durch Satz A.4.4 gesichert. Die Stetigkeit und die Abbildungseigenschaften des Lösungsoperators (4.36) folgen mit der Voraussetzung 4.7 aus Satz B.2.1.  $\square$

## 4.7 Zur Eindeutigkeit der Lösung des Optimierungsproblems

Wir knüpfen an das Ende von Abschnitt 4.5 an: Mit den Voraussetzungen 4.1 und 4.2 lieferte Satz 4.5.8 auf Seite 99 bereits, dass das freie Minimierungsproblem (4.38) für  $\delta = 0$  eindeutig lösbar ist. Für hinreichend kleine  $\delta > 0$  können wir die eindeutige Lösbarkeit von (4.38) mit Satz 4.5.9 auf Seite 99 sicherstellen. Im Hinblick auf dessen Voraussetzungen wurde bereits im letzten Abschnitt untersucht, wann das Zielfunktional  $\mathcal{M}_\delta$  F-differenzierbar ist. Genauer gab das Korollar 4.6.15 auf Seite 111 darüber Auskunft, wann  $\mathcal{M}'_\delta$  und  $\mathcal{M}''_\delta$  als stetige FRÉCHET-Ableitungen existieren. Mit (4.53) ist sofort klar, dass dann auch  $M$  aus (4.40) auf Seite 99 stetig FRÉCHET-differenzierbar ist. Wir werden nun in diesem Abschnitt untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Nichtlinearitäten  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , und die Gebiete die stetige Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}''_\delta$  an der Lösungsstelle  $\bar{g}^0$  für  $\delta = 0$ , d.h. die verbleibende Voraussetzung von Satz 4.5.9, gesichert werden kann.

Im ersten Teilabschnitt formulieren wir das Problem um. Wir reduzieren die stetige Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}''_\delta(\bar{g}^0)$  auf die des linearen stetigen Operators  $\Lambda$ , der besser zu handhaben ist. Im zweiten Unterabschnitt führen wir eine Klasse vereinfachter Operatoren ein und erarbeiten Voraussetzungen, wann diese vereinfachten Operatoren stetig invertierbar sind. Der dritte Teilabschnitt dient dazu, die Abbildungseigenschaften von  $\Lambda$  so anzupassen, dass sie denen der vereinfachten Operatoren entsprechen. Im vierten Unterabschnitt wird mit dem Störlemma für lineare Operatoren die stetige Invertierbarkeit von  $\Lambda$  gesichert, wenn dieser in der Nähe eines vereinfachten Operators liegt. Darüber hinaus werden hinreichende Bedingungen angegeben, wann das der Fall ist.

Wir betrachten auch hier wieder nur Probleme der Dimension  $N \leq 3$ . Im Zweidimensionalen können wir uns bei den nachfolgenden Untersuchungen auf den schwächsten Fall  $V_\Gamma = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  beschränken, da  $\mathcal{M}_\delta''$  auch dann als stetige FRÉCHET-Ableitung existiert, siehe Korollar 4.6.15. Das hat den Vorteil, dass wir keine zusätzlichen Regularitätsbetrachtungen durchführen müssen. Im Fall  $N = 3$  können wir so nicht vorgehen und müssen  $V_\Gamma = H^\varepsilon(\Gamma)$  mit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  bzw.  $\frac{1}{3}$  betrachten, da nur dann  $\mathcal{M}_\delta''$  für  $\delta > 0$  sinnvoll erklärt ist. Damit werden auch Regularitätsfragen eine Rolle spielen.

#### 4.7.1 Eine Umformulierung des Problems und der Operator $\Lambda$

Zunächst betrachteten wir  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}))$  etwas genauer. Da  $\bar{g}^0$  das freie Minimierungsproblem (4.38) für  $\delta = 0$  erfüllt, ist nach Lemma 4.5.8 auf Seite 99  $(u_1(\bar{g}^0), u_2(\bar{g}^0), \bar{g}^0) \in \mathcal{F}_{ad}$  die eindeutige Lösung des restringierten Minimierungsproblems (4.33) für  $\delta = 0$ , also speziell die Lösung von (4.31), vorausgesetzt die Voraussetzungen 4.1 und 4.2 gelten. Das Lemma 4.5.4 auf Seite 94 liefert dann, dass  $u_i(\bar{g}^0)$ ,  $i = 1, 2$ , auch dem springenden Transmissionsproblem (4.22) genügt. Insbesondere haben wir dann mit Bemerkung 75 auf Seite 89

$$\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(\bar{g}^0))) = \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(\bar{g}^0))),$$

woraus mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt

$$\Upsilon_0(\bar{g}^0) = 0$$

folgt. Damit vereinfacht sich (4.53) und wir erhalten für  $\delta = 0$

$$\delta_V^2 \mathcal{M}_0(\bar{g}^0; h, k) = \mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)(h)(k) = (\Upsilon_1(\bar{g}^0, k), \Upsilon_1(\bar{g}^0, h))_{L^2(\Gamma)}.$$

Da  $\Upsilon_2$  in diesem Ausdruck nicht mehr auftaucht, ist dieser bereits unter Voraussetzung 4.3 sinnvoll und zwar als F-Differential.

Da  $\bar{g}^0$  fest ist, führen wir abkürzend den linearen und stetigen Operator

$$\Lambda : H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad l \mapsto \Upsilon_1(\bar{g}^0, l) \quad (4.56)$$

ein. Die Linearität und Beschränktheit sowie die Abbildungseigenschaften erhalten wir mit dem inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operator  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ , siehe Abschnitt B.3, unter Voraussetzung 4.3 wie im Beweis von Lemma 4.6.10 auf Seite 109. Zusammenfassend haben wir

$$\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)(h)(k) = (\Lambda k, \Lambda h)_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.57)$$

Mit dem Satz von der stetigen Inversen ist  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}))$  genau dann stetig invertierbar, wenn  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)$  bijektiv ist. Somit bleibt die Bijektivität von  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)$  zu zeigen. Wir werden dies auf die Bijektivität des Operators  $\Lambda$ , aufgefasst als Operator zwischen geeigneten Räumen, zurückführen. Das ist möglich, wie der folgende Satz und die anschließende Überlegung zeigen.

**Satz 4.7.1.**  *$X, U, V$  seien HILBERT-Räume und es gelte  $V \subset U \subset X \cong (X)' \subset (U)' \subset (V)'$ . Weiter seien  $V \subset X \subset (V)'$  und  $U \subset X \subset (U)'$  GELFAND-Dreier und  $T \in \mathcal{L}((U)', V)$  sei bijektiv. Dann gilt:*

$$\forall l \in U \quad \exists! h' \in (U)' : (Th', Tk')_X = \langle k', l \rangle_{(U)' \times U} \quad \forall k' \in (U)'$$

*Beweis.* Da  $(U)'$  und  $V$  als HILBERT-Räume vollständig sind, liefert der Satz von der offenen Abbildung, dass  $T$  ein Isomorphismus ist. Weiter ist  $U$  als HILBERT-Raum reflexiv, also  $U \cong ((U)')'$ . Folglich ist der adjungierte Operator  $T' \in \mathcal{L}((V)', U)$  auch ein Isomorphismus. Mit  $J_V \in \mathcal{L}(V, (V)')$  bezeichnen wir den RIESZ-Isomorphismus. Sei  $l \in U$  beliebig. Die Abbildung  $T^{-1} \circ J_V^{-1} \circ T'^{-1} : U \rightarrow (U)'$  ist ebenfalls bijektiv. Wir setzen  $h' := (T^{-1} \circ J_V^{-1} \circ T'^{-1})(l)$ . Dann

gilt unter Beachtung der obigen GELFAND-Dreier für alle  $k' \in (U)'$

$$\begin{aligned}
(Th', Tk')_X &= (TT^{-1}J_V^{-1}T'^{-1}l, Tk')_X \\
&= (J_V^{-1}T'^{-1}l, Tk')_X \\
&= \langle J_V J_V^{-1}T'^{-1}l, Tk' \rangle_{(V)' \times V} \\
&= \langle T'^{-1}l, Tk' \rangle_{(V)' \times V} \\
&= \langle T'T'^{-1}l, k' \rangle_{((U)')' \times (U)'} \\
&= \langle k', l \rangle_{(U)' \times U}.
\end{aligned}$$

□

Dass dieser Satz bei unserem Problem anwendbar ist, zeigt folgende Überlegung.  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}))$  ist genau dann bijektiv, wenn

$$\forall l \in \mathcal{L}((V_\Gamma)', \mathbb{R}) = ((V_\Gamma)')' \cong V_\Gamma \quad \exists! h' \in (V_\Gamma)' \text{ mit } \mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)(h') = l$$

gilt. Da  $l$  als Funktional auf  $(V_\Gamma)'$  aufgefasst werden kann, ist die rechte Gleichung äquivalent zu

$$\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0)(h')(k') = \langle l, k' \rangle_{((V_\Gamma)')' \times (V_\Gamma)'} = \langle k', l \rangle_{(V_\Gamma)' \times V_\Gamma} \quad \forall k' \in (V_\Gamma)'$$

(4.57) mit  $T = \Lambda$  liefert den Zusammenhang zum letzten Satz.

Wenden wir uns nun der Frage nach der Bijektivität des Operators  $\Lambda$  zu. Diese Frage können wir leider nicht allgemein beantworten. Unter zusätzlichen Bedingungen an die Nichtlinearitäten bzw. an die inversen KIRCHHOFF-Transformationen können wir einige Aussagen machen. Dazu gehen wir wie folgt vor: Zunächst betrachten wir eine Klasse vereinfachter, linearer und beschränkter Operatoren, welche zwischen gewissen Räumen agieren. Weiter zeigen wir, dass diese vereinfachten Operatoren bijektiv sind. Danach suchen wir Voraussetzungen, die sichern, dass  $\Lambda$  die gleichen Abbildungseigenschaften wie diese vereinfachten Operatoren hat. Wenn nun in genügend kleiner Nachbarschaft von  $\Lambda$  ein vereinfachter Operator aus der obigen Klasse zu finden ist, dann können wir das Störlemma für lineare Operatoren anwenden, um die Bijektivität von  $\Lambda$  zu sichern.

## 4.7.2 Eine vereinfachte Problemklasse

Um eine Idee zur Auswahl der vereinfachten Operatoren zu bekommen, betrachten wir (4.56), also

$$\begin{aligned}
\Lambda h = \Upsilon_1(\bar{g}^0, h) &= (\kappa_1^{-1})'(\gamma_\Gamma^1(u_1(\bar{g}^0))) \cdot S_1^{-1}h + (\kappa_2^{-1})'(\gamma_\Gamma^2(u_2(\bar{g}^0))) \cdot S_2^{-1}h \\
&= \frac{1}{k_1(\gamma_\Gamma^1(\bar{p}_1))} \cdot S_1^{-1}h + \frac{1}{k_2(\gamma_\Gamma^2(\bar{p}_2))} \cdot S_2^{-1}h,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Bemerkung 64 auf Seite 81 und Lemma 4.2.5 auf Seite 85 benutzt wurden und  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = p \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  die eindeutige Lösung aus Voraussetzung 4.1 bezeichnet. Wir erinnern daran, dass  $u_i(\bar{g}^0)$ ,  $i = 1, 2$ , dem springenden Transmissionsproblem genügt. Mit Lemma 4.3.1 auf Seite 89 gilt dann  $\kappa_i(\bar{p}_i) = u_i(\bar{g}^0)$ ,  $i = 1, 2$ . Die ersten Faktoren der beiden Produkte sind somit durch die Lösung des Modellproblems festgelegt. Wir vereinfachen jetzt den Operator, indem wir diese beiden Faktoren als konstant annehmen. Seien  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  und mindestens ein  $r_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Als vereinfachten Operator betrachten wir

$$\Lambda_0 : h \mapsto r_1 \cdot S_1^{-1}h + r_2 \cdot S_2^{-1}h. \quad (4.58)$$

Die Abbildungseigenschaften des Operators  $\Lambda_0$  werden offensichtlich durch die Abbildungseigenschaften der inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operatoren  $S_i^{-1}$  bestimmt. Diese bilden im schwächsten Fall mit Satz B.3.1  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  bijektiv in  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  ab. Für den vereinfachten Operator gilt das

**Lemma 4.7.2.** *Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1. Dann ist der Operator  $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  bijektiv.*

*Beweis.* Zur Injektivität: Für  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  gelte  $0 = \Lambda_0 h = r_1 S_1^{-1} h + r_2 S_2^{-1} h$ . Wir bezeichnen für  $i = 1, 2$  mit  $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(h) \in V_i$  die Lösung des homogenen Hilfsproblems, d.h. die Lösung von (4.26) mit  $f_i = 0$ . Mit Bemerkung 90 auf Seite 108 folgt dann  $r_1 \gamma_\Gamma^1(\tilde{u}_1) = r_2 \gamma_\Gamma^2(\tilde{u}_2)$ , wobei  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  in (4.58) erklärt sind. Die beiden Hilfsprobleme ( $i = 1, 2$ ) sind also sowohl in den DIRICHLET-Daten als auch in den NEUMANN-Daten gekoppelt und erfüllen das Sprungtransmissionsproblem

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_i = 0 & \text{in } \Omega_i \\ \tilde{u}_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ r_1 \gamma_\Gamma^1(\tilde{u}_1) = r_2 \gamma_\Gamma^2(\tilde{u}_2) & \text{auf } \Gamma \\ \partial_{n_1} \tilde{u}_1 = -\partial_{n_2} \tilde{u}_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.59)$$

im schwachen Sinn.

Es gelte jetzt  $r_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Um den Sprung in den DIRICHLET-Daten aufzuheben führen wir  $w_i := r_i \tilde{u}_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , ein, welche dann das Problem

$$\begin{cases} -\frac{1}{r_i} \Delta w_i = 0 & \text{in } \Omega_i \\ w_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \gamma_\Gamma^1(w_1) = \gamma_\Gamma^2(w_2) & \text{auf } \Gamma \\ \frac{1}{r_1} \partial_{n_1} w_1 = -\frac{1}{r_2} \partial_{n_2} w_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.60)$$

im schwachen Sinn erfüllen. Es ist klar, dass (4.60) in  $W := \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mid \gamma_\Gamma^1(v_1) = \gamma_\Gamma^2(v_2)\}$  eine eindeutige Lösung besitzt. Siehe hierzu z.B. [Wlo82, Beispiel 21.8], welches auch für LIPSCHITZ-Gebiete  $\Omega_i$  richtig bleibt. Da aber  $(w_1, w_2) = (0, 0) \in W$  offenbar eine Lösung von (4.60) ist, folgt mit der eindeutigen Lösbarkeit sofort  $\tilde{u}_i = \frac{1}{r_i} w_i = 0$  und damit im schwachen Sinn  $h = \partial_{n_i} \tilde{u}_i = 0$ .

Es fehlt noch der Fall, in dem ein  $r_i$  Null ist. Sei also o.B.d.A.  $r_2 = 0$ . Dann folgt die Injektivität von  $\Lambda_0$  sofort aus der von  $S_1^{-1}$ , also aus Satz B.3.1.

Zur Surjektivität: Nachfolgend sei immer  $i = 1, 2$ . Ein  $r_i$  sei Null, o.B.d.A.  $r_2 = 0$ . Dann folgt die Surjektivität aus der von  $S_1^{-1}$ , also Satz B.3.1. Seien jetzt beide  $r_i > 0$  und  $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  beliebig. Weiter bezeichne  $g_i := \mathcal{R}_i g \in V_i$  die Fortsetzung von  $g$  in  $V_i$ , welche sich durch Nullfortsetzung von  $g$  auf den Gesamtrand  $\partial\Omega_i$  und anschließender harmonischer Fortsetzung auf  $\Omega_i$  ergibt. Wegen  $\gamma_\Gamma^1(g_1) = \gamma_\Gamma^2(g_2)$  und Lemma 2.1.1 auf Seite 11 gilt  $\tilde{g} = (g_1, g_2) \in H_0^1(\Omega)$ . Wir definieren das Funktional  $f \in H^{-1}(\Omega)$  durch

$$\langle f, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} := -\frac{1}{2r_1} a_1(g_1, v_1) + \frac{1}{2r_2} a_2(g_2, v_2) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.61)$$

wobei  $v_i := v|_{\Omega_i} \in V_i$  gilt und  $a_i(\cdot, \cdot)$  die Bilinearform (4.25) auf Seite 88 bezeichnet. Jetzt definieren wir für  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  die Bilinearform

$$a(u, v) := \frac{1}{r_1} a_1(u_1, v_1) + \frac{1}{r_2} a_2(u_2, v_2),$$

wobei  $u_i := u|_{\Omega_i}$  und  $v_i := v|_{\Omega_i}$  gilt. Wir rechnen leicht nach, dass  $a(\cdot, \cdot)$  beschränkt und  $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch ist. Der Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM liefert dann, dass das Variationsproblem, finde  $w \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.62)$$

eindeutig lösbar ist und die Lösung  $w \in H_0^1(\Omega)$  die Abschätzung  $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$  erfüllt. Wir setzen weiter

$$\tilde{u}_1 := \frac{1}{r_1} \left( w|_{\Omega_1} + \frac{1}{2} \tilde{g}|_{\Omega_1} \right) \in V_1 \quad \text{und} \quad \tilde{u}_2 := \frac{1}{r_2} \left( w|_{\Omega_2} - \frac{1}{2} \tilde{g}|_{\Omega_2} \right) \in V_2.$$

Nun berechnen wir unter Beachtung von (4.61) und (4.62)

$$a_1(\tilde{u}_1, v_1) + a_2(\tilde{u}_2, v_2) = a(w, v) - \langle f, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega). \quad (4.63)$$

Mit der speziellen Wahl  $v = (v_1, 0) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega)$  liefert (4.63)

$$0 = a_1(\tilde{u}_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_1 \, dx = - \int_{\Omega_1} \tilde{u}_1 \Delta v_1 \, dx \quad \forall v_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1),$$

woraus mit dem WEYLSchen Lemma, siehe z.B. [Jos02, Corollary 1.2.1],  $-\Delta\widetilde{u}_1 = 0$  in  $\Omega_1$  (distributionell) folgt. Insbesondere ist  $\widetilde{u}_1$  harmonisch in  $\Omega_1$ . Verwenden von  $v = (0, v_2) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega)$  liefert auf analoge Weise, dass auch  $\widetilde{u}_2$  harmonisch in  $\Omega_2$  ist. Insbesondere ist damit  $\nabla\widetilde{u}_i \in H(\text{div}, \Omega_i)$  und der Divergenzatz A.2.11 liefert unter Beachtung von Satz A.2.10 für alle  $v_i \in V_i$

$$a_i(\widetilde{u}_i, v_i) = \langle \partial_{n_i}\widetilde{u}_i, \gamma_{\partial\Omega_i}^i(v_i) \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega_i))' \times H^{1/2}(\partial\Omega_i)} =: \langle h_i, \gamma_\Gamma^i(v_i) \rangle_{(H_0^{1/2}(\Gamma))' \times H_0^{1/2}(\Gamma)},$$

wobei letzte Definition sinnvoll ist, da  $\gamma_\Gamma^i(v_i) \in H_0^{1/2}(\Gamma)$  für  $v_i \in V_i$  gilt. Mit der letzten Zeile erfüllt  $\widetilde{u}_i \in V_i$  also das homogene gemischte Randwertproblem mit homogenen DIRICHLET-Daten und NEUMANN-Daten  $h_i \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$  im schwachen Sinn. Weiter bestätigen wir durch einfache Rechnung

$$r_1\gamma_\Gamma^1(\widetilde{u}_1) - r_2\gamma_\Gamma^2(\widetilde{u}_2) = \gamma_\Gamma(\widetilde{g}) = g \in H_0^{1/2}(\Gamma)$$

und für alle  $\mu \in H_0^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_{n_1}\widetilde{u}_1|_\Gamma + \partial_{n_2}\widetilde{u}_2|_\Gamma, \mu \rangle_{(H_0^{1/2}(\Gamma))' \times H_0^{1/2}(\Gamma)} &= \langle h_1 + h_2, \mu \rangle_{(H_0^{1/2}(\Gamma))' \times H_0^{1/2}(\Gamma)} \\ &= a_1(\widetilde{u}_1, \mathcal{R}_1\mu) + a_2(\widetilde{u}_2, \mathcal{R}_2\mu) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{R}_i\mu$  die bereits weiter oben beschriebene Fortsetzung von  $\mu \in H_0^{1/2}(\Gamma)$  in  $V_i$  ist und damit  $(\mathcal{R}_1\mu, \mathcal{R}_2\mu) \in H_0^1(\Omega)$  gilt, weshalb die letzte Gleichheit aus (4.63) folgt. Setzen wir nun  $h := h_1 = -h_2 \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ , so gilt  $\Lambda_0 h = g$ , also die Surjektivität, da  $g \in H_0^{1/2}(\Gamma)$  beliebig war.  $\square$

Wie wir bereits am Anfang des Abschnittes bemerkt haben, kommen wir mit  $V_\Gamma = H_0^{1/2}(\Gamma)$  nur im zweidimensionalen Fall aus. Deshalb müssen wir zumindest für  $N = 3$  das letzte Lemma verschärfen. Das ist möglich, wenn wir zusätzlich eine geometrische Forderung an das Gebiet stellen. Um diese formulieren zu können, führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein. Den Kegel mit Spitze in 0, Höhe  $\rho > 0$ , Öffnungswinkel  $\theta \in (0, \pi)$  und in Richtung  $y \in \mathcal{S}^{N-1}$  zeigender Achse bezeichnen wir mit  $K_\rho(\theta, y)$ , also

$$K_\rho(\theta, y) := \{z \in \mathbb{R}^N \mid |z| \leq \rho, (z, y)_{\mathbb{R}^N} \geq |z| \cos \theta\}.$$

Für  $x_0 \in \Omega$  und  $\rho \in (0, 1]$  ist die Menge der zulässigen äußeren Vektoren

$$\mathcal{O}_\rho(x_0) := \{z \in \mathbb{R}^N \mid |z| \leq \rho, (B_{3\rho}(x_0) \setminus \Omega) + tz \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \forall t \in [0, 1]\},$$

wobei  $B_{3\rho}(x_0)$  die offene Kugel mit Radius  $3\rho$  um  $x_0$  bezeichnet. Die geometrische Bedingung an das Gebiet entnehmen wir [Sav98, Theorem 5].

**Voraussetzung 4.10.** Für jedes  $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial\Gamma$  existieren zwei Kegel  $K^i := K_{\rho_i}(\theta_i, y_i)$ ,  $\rho_i, \theta_i > 0$ , sodass gilt

$$K^i \subset \mathcal{O}_{\rho_i}(x_0) \cap \mathcal{O}_{\rho_i}^i(x_0), \quad i = 1, 2,$$

wobei  $\mathcal{O}_{\rho_i}(x_0)$  und  $\mathcal{O}_{\rho_i}^i(x_0)$  die Mengen von zulässigen Richtungen bezüglich  $\Omega$  und  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , sind.

*Bemerkung 93.* Wenn das Gesamtgebiet  $\Omega$  (nicht die Teilgebiete) lokal  $\mathcal{C}^1$  oder in der Nähe von  $\partial\Omega \cap \partial\Gamma$  konvex ist, dann ist Voraussetzung 4.10 erfüllt. Siehe hierzu [Sav98, Remark 5.1].

**Lemma 4.7.3.** Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 und zusätzlich gelte Voraussetzung 4.10. Dann ist der Operator  $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma))$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  bijektiv. Die Aussage bleibt im Fall  $r_1 = r_2$  auch ohne die Voraussetzungen 4.10 gültig. Falls ein  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , Null ist, dann benötigen wir im Fall  $N \geq 3$  zudem Voraussetzung 4.7.

*Beweis.* Die Injektivität folgt direkt aus Lemma 4.7.2.

Auch zum Nachweis der Surjektivität gehen wir ähnlich wie in Lemma 4.7.2 vor. Falls ein  $r_i$  Null ist, folgt die Surjektivität aus der des inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operators, siehe Satz B.3.2. Hierzu benötigen wir die zusätzlichen Voraussetzungen an das Gebiet.



Seien nun beide  $r_i > 0$ . Für beliebiges  $g \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  existiert mit dem Spursatz A.2.8 eine Fortsetzung  $g_i := \mathcal{R}_i g \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i; \partial\Omega_i \setminus \bar{\Gamma})$ , wobei der Raum entsprechend (4.44) definiert ist. Wegen  $\gamma_\Gamma^1(g_1) = \gamma_\Gamma^2(g_2)$  und Lemma 2.1.1 auf Seite 11 gilt zudem  $\tilde{g} := (g_1, g_2) \in H_0^1(\Omega)$ . Nun definieren wir analog zum Beweis von Lemma 4.7.2 das Funktional  $\hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$  durch

$$\langle \hat{f}, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} := -\frac{1}{2r_1} a_1(g_1, v_1) + \frac{1}{2r_2} a_2(g_2, v_2) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.64)$$

wobei  $v_i := v|_{\Omega_i} \in V_i$  gilt und  $a_i(\cdot, \cdot)$  die Bilinearform (4.25) auf Seite 88 bezeichnet und setzen dieses mit dem Fortsetzungssatz von HAHN-BANACH zu einem Funktional  $f \in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  fort ( $H_0^1(\Omega) \subset H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ ). Wir definieren weiter für  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  die Bilinearform

$$a(u, v) := \frac{1}{r_1} a_1(u_1, v_1) + \frac{1}{r_2} a_2(u_2, v_2),$$

wobei  $u_i := u|_{\Omega_i}$  und  $v_i := v|_{\Omega_i}$  gilt und betrachten das Variationsproblem: Finde  $w \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle_{(H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))' \times H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)} = \langle \hat{f}, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.65)$$

Differentiell formuliert lautet (4.65)

$$\begin{cases} -r(x)\Delta w = f & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$r(x) := \begin{cases} \frac{1}{r_1} & \text{für } x \in \Omega_1 \\ \frac{1}{r_2} & \text{für } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

Im Fall  $r_1 = r_2$  reduziert sich das Problem im Wesentlichen auf das inhomogene DIRICHLET-Problem mit homogenen DIRICHLET-Daten. Dann liefert [JK95, Theorem 0.5.b] die Existenz einer eindeutigen Lösung von (4.65), welche zudem der Abschätzung  $\|w\|_{H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)}$  genügt, also im  $H_0^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  liegt.

Wenden wir uns jetzt dem Fall  $r_1 \neq r_2$  zu. Zunächst überlegen wir uns, dass obiges  $f \in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  die Darstellung

$$\langle f, v \rangle_{(H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))' \times H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)} = (f_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (f_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)} \quad \forall v \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)$$

mit  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  und  $v_i := v|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i)$  besitzt. Weiter unten wird diese Darstellung benötigt, um [Sav98, Theorem 5] anwenden zu können. Wir setzen die Funktionale

$$\hat{f}_1 := -\frac{1}{2r_1} a_1(g_1, \cdot) \in (V_1)' \quad \text{und} \quad \hat{f}_2 := \frac{1}{2r_2} a_2(g_2, \cdot) \in (V_2)'$$

mit HAHN-BANACH zu Funktionalen  $f_i \in (L^2(\Omega_i))' \simeq L^2(\Omega_i)$  fort und definieren damit das Funktional  $\bar{f} \in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  durch

$$\langle \bar{f}, v \rangle_{(H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))' \times H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)} := (f_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (f_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)} \quad \forall v \in H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega),$$

wobei  $v_i := v|_{\Omega_i} \in H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega_i; \partial\Omega_i \setminus \bar{\Gamma}) \subset L^2(\Omega_i)$  gilt. Die Linearität und Beschränktheit rechnen wir leicht nach. Für beliebiges  $v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  gilt dann

$$\begin{aligned} \langle \bar{f} - f, v \rangle_{(H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega))' \times H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)} &= (f_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (f_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)} - \langle \hat{f}, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \hat{f}_1, v_1 \rangle_{(V_1)' \times V_1} + \langle \hat{f}_2, v_2 \rangle_{(V_2)' \times V_2} - \langle \hat{f}, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} \\ &\stackrel{(4.64)}{=} 0, \end{aligned}$$

woraus mit der Dichtheit von  $H_0^1(\Omega)$  in  $H_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)$  schließlich  $f = \bar{f}$  folgt.

Weiter ist klar, dass das Variationsproblem (4.65) eine eindeutige Lösung  $w \in H_0^1(\Omega)$  besitzt. Das folgt bereits mit den Ausführungen im Beweis von Lemma 4.7.2. Nun ist (4.65) ein Spezialfall des quasilinearen Modellproblems (4.1), wie wir durch die spezielle Wahl  $k_i := \frac{1}{r_i}$  sehen. Somit erfüllt  $w = (w_1, w_2) \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  wegen Korollar 4.1.3 auf Seite 80, wobei die Verallgemeinerung auf rechte Seiten  $f \in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega) \supset L^2(\Omega)$ , welche die obigen Darstellung besitzen, möglich ist, auch das quasilineare Transmissionsproblem (4.5). Also gilt

$$\begin{cases} -\frac{1}{r_i}\Delta w_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ w = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \gamma_\Gamma^1(w_1) = \gamma_\Gamma^2(w_2) & \text{auf } \Gamma \\ \frac{1}{r_1}\partial_{n_1}w_1 = -\frac{1}{r_2}\partial_{n_2}w_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

wobei die obigen Überlegungen  $f_i \in L^2(\Omega_i)$  sichern. Nun liefert [Sav98, Theorem 5], unter Beachtung von Voraussetzung 4.10, dass die Lösung dieses Transmissionsproblems regulärer ist, nämlich in  $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  liegt. Insgesamt haben wir also  $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega) = H_0^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ .

Die restliche Argumentation verläuft ähnlich zum Beweis von Lemma 4.7.2, wobei wir nun allerdings zusätzlich die besseren Regularitätseigenschaften verwenden. Wir setzen wieder

$$\tilde{u}_1 := \frac{1}{r_1} \left( w|_{\Omega_1} + \frac{1}{2} \tilde{g}|_{\Omega_1} \right) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_1; \partial\Omega_1 \setminus \bar{\Gamma}) \subset V_1$$

und

$$\tilde{u}_2 := \frac{1}{r_2} \left( w|_{\Omega_2} - \frac{1}{2} \tilde{g}|_{\Omega_2} \right) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_2; \partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}) \subset V_2.$$

Damit gilt

$$a_1(\tilde{u}_1, v_1) + a_2(\tilde{u}_2, v_2) = a(w, v) - \langle f, v \rangle_{(H_0^1(\Omega))' \times H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \quad (4.66)$$

und die spezielle Wahl  $v = (v_1, 0) \in C_0^\infty(\Omega_1) \times C_0^\infty(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega)$  bzw.  $v = (0, v_2) \in C_0^\infty(\Omega_1) \times C_0^\infty(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega)$  liefert mit dem WEYLSchen Lemma erneut, dass  $\tilde{u}_i$  harmonisch in  $\Omega_i$  ist. Der Divergenzansatz A.2.11 liefert unter Beachtung von Satz A.2.10 für alle  $v_i \in V_i$

$$a_i(\tilde{u}_i, v_i) = \langle \partial_{n_i} \tilde{u}_i, \gamma_{\partial\Omega_i}^i(v_i) \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega_i))' \times H^{1/2}(\partial\Omega_i)}.$$

Wegen der zusätzlichen Regularität  $\tilde{u}_i \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i)$  gilt zudem  $\partial_{n_i} \tilde{u}_i \in H^{-\varepsilon}(\partial\Omega_i)$ , siehe z.B. [Cos88, Lemma 3.7] unter Beachtung von  $\gamma_{\partial\Omega_i}^i(\tilde{u}_i) \in H^{1-\varepsilon}(\partial\Omega_i)$  und  $\Delta \tilde{u}_i = 0$  in  $\Omega_i$ . Wir definieren  $h_i \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  durch

$$\langle h_i, \mu \rangle_{(H^\varepsilon(\Gamma))' \times H^\varepsilon(\Gamma)} := \langle \partial_{n_i} \tilde{u}_i, \tilde{\mu} \rangle_{(H^\varepsilon(\partial\Omega_i))' \times H^\varepsilon(\partial\Omega_i)} \quad \forall \mu \in H^\varepsilon(\Gamma),$$

wobei  $\tilde{\mu} \in H^\varepsilon(\partial\Omega_i)$  die Nullfortsetzung von  $\mu$  auf  $\partial\Omega_i$  bezeichnet. Wir erinnern daran, dass  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  gilt. Somit erfüllt  $\tilde{u}_i \in V_i$  also das homogene gemischte Randwertproblem mit homogenen DIRICHLET-Daten und NEUMANN-Daten  $h_i \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  im schwachen Sinn. Wie im Beweis von Lemma 4.7.2 berechnen wir

$$r_1 \gamma_\Gamma^1(\tilde{u}_1) - r_2 \gamma_\Gamma^2(\tilde{u}_2) = \gamma_\Gamma(\tilde{g}) = g \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)$$

und für alle  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \langle h_1 + h_2, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &= \langle \partial_{n_1} \tilde{u}_1, \tilde{\mu} \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega_1))' \times H^{1/2}(\partial\Omega_1)} \\ &\quad + \langle \partial_{n_2} \tilde{u}_2, \tilde{\mu} \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega_2))' \times H^{1/2}(\partial\Omega_2)} \\ &= a_1(\tilde{u}_1, \mathcal{R}_1 \mu) + a_2(\tilde{u}_2, \mathcal{R}_2 \mu) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{R}_i \mu$  die harmonische Fortsetzung von  $\tilde{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega_i)$  in  $V_i$  ist und  $\tilde{\mu}$  die Nullfortsetzung von  $\mu$  auf  $\partial\Omega_i$  bezeichnet. Damit gilt  $(\mathcal{R}_1 \mu, \mathcal{R}_2 \mu) \in H_0^1(\Omega)$ , weshalb die letzte Gleichheit aus (4.66) folgt. Weil  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  in  $H^\varepsilon(\Gamma)$  dicht liegt, haben wir somit  $h_1 = -h_2$ . Setzen wir nun  $h := h_1 = -h_2 \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ , so gilt  $\Lambda_0 h = g$ , also die Surjektivität, da  $g \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  beliebig war.  $\square$

### 4.7.3 Die Abbildungseigenschaften von $\Lambda$

Um das Störlemma für lineare Operatoren anwenden zu können, müssen wir im nächsten Schritt sicherstellen, dass  $\Lambda$  die gleichen Abbildungseigenschaften wie  $\Lambda_0$  hat. Hierbei kommen wir ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht weiter. Wir benötigen mehr Regularität für die Lösung des Modellproblems und die Nichtlinearitäten.

Für zweidimensionale Probleme kommen wir mit einer kleinen Verschärfung der Voraussetzungen aus, denn für die Lösung des Modellproblems  $(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = p \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  gilt wegen des Spursatzes schon  $\gamma_\Gamma^i(\overline{p_i}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Wir benötigen allerdings

**Voraussetzung 4.11.** Die eindeutige Lösung  $(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = p \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  des Modellproblems (4.1) aus Voraussetzung 4.1 erfülle die zusätzliche Regularitätsforderung  $\overline{p_i} \in H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , wobei  $\tau > 0$  beliebig klein gewählt werden kann. Weiterhin gelte  $\frac{1}{k_i} \in C^s(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , mit  $s > \frac{3}{2} + \tau$ .

*Bemerkung 94.* (i) Für nicht ganzzahliges  $s$  verstehen wir unter  $C^s(\mathbb{R})$  die HÖLDER-stetigen Funktionen aus  $C^{\lfloor s \rfloor, s - \lfloor s \rfloor}(\mathbb{R})$ .

(ii) Hinreichend für  $\frac{1}{k_i} \in C^s(\mathbb{R})$ ,  $\frac{3}{2} + \tau < s \leq 2$ , ist  $\frac{1}{k_i} \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ . Letzteres folgt sofort aus Voraussetzung 4.5, wie folgende Überlegung zeigt. Mit  $k_i \in W_\infty^3(\mathbb{R})$  und  $k_i \geq \alpha > 0$  ist wegen

$$\frac{1}{k_i} \in L^\infty(\mathbb{R}), \left(\frac{1}{k_i}\right)' = -\frac{k_i'}{k_i^2} \in L^\infty(\mathbb{R}), \left(\frac{1}{k_i}\right)'' = \frac{2(k_i')^2}{k_i^3} - \frac{k_i''}{k_i^2} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

und

$$\left(\frac{1}{k_i}\right)''' = -6\frac{(k_i')^3}{k_i^4} + 6\frac{2k_i'k_i''}{k_i^3} - \frac{k_i'''}{k_i^2} \in L^\infty(\mathbb{R})$$

auch  $\frac{1}{k_i} \in W_\infty^3(\mathbb{R})$ . Dies impliziert analog zu Bemerkung 91 auf Seite 108 die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\left(\frac{1}{k_i}\right)^{(l)}$  für  $0 \leq l \leq 2$ , womit natürlich  $\frac{1}{k_i} \in C^2(\mathbb{R})$  folgt.

(iii) Wegen  $\|k_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq k_i \geq \alpha > 0$  ist  $\frac{1}{k_i} \notin B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$ ,  $s > \frac{3}{2}$ . Schon aus diesem Grund ist eine Erweiterung von Lemma 4.6.7 auf Seite 107 auf den Fall  $\varepsilon > \frac{1}{2}$  und ein Analogon zu Lemma 4.6.13 auf Seite 110 nicht zielführend. Für eine Erweiterung auf lokale Räume, wie  $B_{2,\infty}^{s,loc}(\mathbb{R})$ , sei auf (iv) verwiesen.

(iv) Falls die Vermutung aus der Bemerkung nach Satz A.4.8 richtig sein sollte, dann genügt es in obiger Voraussetzung  $\frac{1}{k_i} \in H^{s,loc}(\mathbb{R})$ , mit  $s$  wie oben, zu fordern. Für  $s \leq 2$  würde dies beispielsweise bereits aus  $\frac{1}{k_i} \in W_\infty^2(\mathbb{R})$  folgen, wofür schon Voraussetzung 4.4 hinreichend ist.

Die Forderung an  $\frac{1}{k_i}$  aus obiger Voraussetzung sichert, dass  $\frac{1}{k_i(\overline{p_i})}$  in  $H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i)$  liegt und somit ein Multiplikator von  $H^{\frac{N}{2}-\varepsilon}(\Omega_i)$  ist. Wir überlegen uns unten, dass der Kompositionsoperator  $T_{\frac{1}{k_i}}$  und der Spuroperator  $\gamma_\Gamma^i$  kommutieren und haben damit das

**Lemma 4.7.4.** Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \{2, 3\}$ ,  $i = 1, 2$ , genügen den Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1. Weiter sei die Voraussetzung 4.11 erfüllt.

(i) Im Fall  $N = 2$  gilt  $\Lambda \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$

(ii) Im Fall  $N = 3$  sei zusätzlich die Voraussetzung 4.7 erfüllt. Für  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  gilt dann  $\Lambda \in \mathcal{L}(H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma))$ , wobei im Fall  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  die entsprechenden Räume durch  $H_{00}^{\pm 1/2}(\Gamma)$  zu ersetzen sind und dann auf Voraussetzung 4.7 verzichtet werden kann.

*Beweis.* Nachfolgend gelte wieder  $i = 1, 2$ .

Zu (ii): Wir betrachten zunächst den Fall  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{1}{k_i(\gamma_\Gamma^i(\overline{p_i}))} \cdot S_i^{-1}h \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma) \quad (4.67)$$

für  $h \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  gilt. Wir bezeichnen für  $h \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  mit  $\tilde{u}_i(h) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ , siehe (4.44), wieder die Lösung des homogenen Hilfsproblems, d.h. (4.26) mit  $f_i = 0$ . Um die

angegebene Regularität zu erzielen, benötigen wir in dem hier betrachteten dreidimensionalen Fall die Voraussetzung 4.7, siehe Satz B.2.1. Offenbar gilt  $\gamma_\Gamma^i(\tilde{u}_i(h)) = (-1)^{i+1}S_i^{-1}h$  für alle  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$ , siehe Bemerkung 90 auf Seite 108. Da  $\mathbb{R}$  konvex ist, haben wir die Einbettung  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R})$ , siehe z.B. [AF03, Theorem 1.34], womit aus Voraussetzung 4.11 insbesondere die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\frac{1}{k_i}$  folgt. Dann bildet  $T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i} = T_{\frac{1}{k_i}}$  nach Satz A.4.4  $H^1(\Omega_i)$  in sich ab und Anwendung von Lemma 4.2.5 auf Seite 85 liefert

$$\frac{1}{k_i(\gamma_\Gamma^i(\bar{p}_i))} = T_{\frac{1}{k_i}}^\Gamma(\gamma_\Gamma^i(\bar{p}_i)) = \gamma_\Gamma^i\left(T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i)\right) \text{ in } L^2(\Gamma), \quad (4.68)$$

woraus die Gleichheit in  $H^{1/2}(\Gamma)$  folgt, da die rechte Seite mindestens in diesem Raum liegt. Der Satz A.4.7, wobei die Übertragung auf LIPSCHITZ-Gebiete analog zum Beweis von Lemma 4.6.7 auf Seite 107 erfolgt und die Voraussetzung  $G(0) = 0$  überflüssig wird, liefert  $T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i) \in H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i)$ . Mit Lemma 4.6.3 auf Seite 102 folgt

$$(-1)^{i+1}\gamma_\Gamma^i\left(T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i) \cdot \tilde{u}_i(h)\right) = \gamma_\Gamma^i\left(T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i)\right) \cdot S_i^{-1}h \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma), \quad (4.69)$$

da  $\tilde{u}_i(h) \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega_i; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  gilt. Weiter haben wir mit (4.68) unter Benutzung der HÖLDER-Ungleichung im  $L^1(\Gamma)$  die Identität

$$T_{\frac{1}{k_i}}^\Gamma(\gamma_\Gamma^i(\bar{p}_i)) \cdot S_i^{-1}h = \gamma_\Gamma^i\left(T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i)\right) \cdot S_i^{-1}h,$$

woraus wegen (4.69) und  $H^{1-\varepsilon}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$  die Gleichheit auch im  $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  folgt, was (4.67) liefert.

Sei nun  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Wir benötigen in diesem Fall die zusätzliche Voraussetzung 4.7 an das Gebiet nicht, da auch ohne diese  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$  gilt. Die eben gemachten Argumentationen liefern für  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  auch  $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_0^{1/2}(\Gamma)\right)$ . Die Verschärfung zu  $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$  folgt mit dem auf Seite 122 stehenden Lemma 4.7.7(i), wenn wir  $\Phi = T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i) \in H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i)$  beachten.

Zu (i): Der Beweis läuft analog zum Fall  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  aus (ii), nur dass hier Lemma 4.7.7(iii) mit  $\varphi = \gamma_\Gamma^i\left(T_{\frac{1}{k_i}}^{\Omega_i}(\bar{p}_i)\right) \in H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)$  verwendet wird.  $\square$

*Bemerkung 95.* (i) Die Voraussetzung 4.11 sichert somit, dass  $\frac{1}{k_i(\gamma_\Gamma^i(\bar{p}_i))}$ ,  $i = 1, 2$ , Multiplikator von  $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  ist. Diese Multiplikatoreigenschaft ist notwendig, um sicherzustellen, dass  $\Lambda$  und  $\Lambda_0$  die gleichen Abbildungseigenschaften haben.

(ii) Zudem verlangt Voraussetzung 4.11 zusätzliche Regularität von der Lösung des nichtlinearen Modellproblems (4.1). In diesem Fall können wir uns möglicherweise auf regulärere Räume  $(V_\Gamma)'$  als  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  beschränken, weil die Konormalenableitungen des springenden Transmissionsproblems unter Umständen regulärer als  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  sind. Dieses fällt insbesondere im Fall  $N = 3$  auf. Die Voraussetzung 4.11 verlangt dann  $\bar{p}_i \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_i)$ ,  $\tau > 0$ ,  $i = 1, 2$ , wobei  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$  die Lösung des quasilinearen Modellproblems (4.1) bzw. die Lösung des quasilinearen Transmissionsproblems (4.5) ist. Wenn nun zusätzlich die KIRCHHOFF-Transformationen  $\kappa_i$  hinreichend HÖLDER-stetig sind, dann folgt mit den gleichen Argumenten wie im letzten Beweis  $\bar{u}_i = \kappa_i(\bar{p}_i) \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_i)$ . Weiter ist  $\bar{u}_i$  die Lösung des springenden Transmissionsproblems. Insbesondere löst  $\bar{u}_i \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_i)$  in  $\Omega_i$  damit das DIRICHLET-Problem für den LAPLACE-Operator mit Randdaten  $\gamma_{\partial\Omega_i}^i(\bar{u}_i) \in H^1(\partial\Omega_i)$ . Mit [Cos88, Lemma 3.7] folgt dann für die NEUMANN-Daten  $\partial_{n_i}\bar{u}_i \in L^2(\partial\Omega_i)$ . Damit liegt auch die Lösung des freien Minimierungsproblems (4.38) in  $L^2(\Gamma)$  und die Wahl  $(V_\Gamma)' = L^2(\Gamma)$  ist möglich.

#### 4.7.4 Zur Invertierbarkeit von $\Lambda$

Mit den Ergebnissen der letzten Teilabschnitte haben wir alle Hilfsmittel beisammen und formulieren den Satz zur Bijektivität bzw. stetigen Invertierbarkeit des Operators  $\Lambda$ .

**Satz 4.7.5.** Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 3$ , genügen den Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1. Weiter sei die Voraussetzung 4.11 erfüllt. Im Fall  $N = 3$  seien zusätzlich noch die Voraussetzungen 4.7 und 4.10 erfüllt. Falls dann  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $r_1 + r_2 > 0$  existieren, sodass

$$\|\Lambda_0 - \Lambda\| < \|\Lambda_0^{-1}\|^{-1} \quad (4.70)$$

gilt, dann ist  $\Lambda$  bijektiv und besitzt somit eine stetige Inverse, wobei  $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$  im Fall  $N = 2$  und  $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)\right)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , für  $N = 3$  gilt. Im Fall  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  sind dabei die entsprechenden Räume durch  $H_{00}^{\pm 1/2}(\Gamma)$  zu ersetzen und auf Voraussetzung 4.7 kann verzichtet werden.

*Beweis.* Mit den Lemmata 4.7.2 und 4.7.3 sind die linearen, stetigen Operatoren  $\Lambda_0$  unter den obigen Voraussetzungen bijektiv, also mit dem Satz von der stetigen Inversen stetig invertierbar. Lemma 4.7.4 liefert mit den obigen Voraussetzungen weiterhin, dass  $\Lambda$  linear und stetig ist und die gleichen Abbildungseigenschaften wie  $\Lambda_0$  hat. Mit (4.70) liefert dann das Störlemma für lineare Operatoren, siehe z.B. [HS91, Lemma 23.2], die Behauptung.  $\square$

Damit erhalten wir sofort

**Korollar 4.7.6.** Es gelten die Voraussetzungen 4.1, 4.2 und 4.4, sowie die Voraussetzungen von Satz 4.7.5. Weiter sollen  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $r_1 + r_2 > 0$  existieren, sodass (4.70) gilt. In (4.70) ist dabei im Fall  $N = 2$  die Operatornorm in  $\mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$  und für  $N = 3$  die Operatornorm in  $\mathcal{L}\left(H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)\right)$ , für passendes  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , gemeint (im Fall  $N = 3$  kann mit der zusätzlichen Voraussetzung 4.8 sogar  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  gewählt werden). Dann ist das freie Minimierungsproblem (4.38) für hinreichend kleine  $\delta > 0$  eindeutig lösbar.

*Beweis.* Der Satz 4.7.5 liefert die Bijektivität des Operators  $\Lambda$  in den entsprechenden Räumen. Mit dem Satz 4.7.1 auf Seite 113 folgt dann die Bijektivität von  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}\left((V_\Gamma)', \mathcal{L}\left((V_\Gamma)', \mathbb{R}\right)\right)$ . Dabei ist  $V_\Gamma = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  im Fall  $N = 2$  und  $V_\Gamma \in \{H_{00}^{1/2}(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma), L^2(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  im Fall  $N = 3$ . Nun gelte Voraussetzung 4.4. Das Korollar 4.6.15(ii) auf Seite 111 liefert im Fall  $N = 2$  die zweimalige stetige F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}_\delta$  auf  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ . Im Dreidimensionalen liefern Voraussetzung 4.7, welche als Voraussetzung des letzten Satzes auch hier zur Verfügung steht, und Korollar 4.6.15(iii) die zweimalige stetige F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}_\delta$  auf  $H^{-1/4+\tau}(\Gamma)$ ,  $\tau > 0$  beliebig klein, wobei diese Aussage auf  $H^{-1/3+\tau}(\Gamma)$  erweitert werden kann, wenn zusätzliche Voraussetzung 4.8 gilt. Mit dem Satz über die stetige Inverse erhalten wir dann die stetige Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}_0''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}\left((V_\Gamma)', \mathcal{L}\left((V_\Gamma)', \mathbb{R}\right)\right)$ , was zusammen mit Satz 4.5.9 auf Seite 99 die Behauptung liefert.  $\square$

*Bemerkung 96.* (i) Im Fall  $N = 3$  muss  $(V_\Gamma)'$  tatsächlich auf Elemente aus  $\{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  (bzw.  $\frac{1}{3}$  mit der Voraussetzung 4.8), eingeschränkt werden. Nur für diese  $(V_\Gamma)'$  ist die zweite F-Ableitung  $\mathcal{M}_\delta''(g)$  sinnvoll erklärt.

(ii) Über die zweite F-Ableitung an der Lösungsstelle  $\bar{g}^0$  des Minimierungsproblems (4.38) mit  $\delta = 0$  wissen wir mehr. Da  $\Upsilon_0(\bar{g}^0) = 0$  ist, haben wir in diesem Fall  $\mathcal{M}_\delta''(\bar{g}^0) \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), \mathbb{R}\right)\right)$ , also insbesondere auch im Fall  $N = 3$  die Sinnhaftigkeit in  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$ .

Die zentrale Abschätzung (4.70) ist im Allgemeinen nicht leicht nachzuprüfen. Deshalb werden wir nun noch hinreichende Bedingungen für sie herleiten. Dazu untersuchen wir als Vorbereitung folgendes Problem. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  ein echter Teilrand. Für festes  $\varphi \in H^t(\Gamma)$  fragen wir nach den Abbildungseigenschaften des Operators

$$N_\varphi : H^{s_1}(\Gamma) \rightarrow H^{s_2}(\Gamma), \quad \mu \mapsto \varphi \cdot \mu,$$

wobei  $0 < s_1 < \min(t, 1)$  gelten soll. Da wir auf LIPSCHITZ-Gebieten arbeiten, uns der Spursatz A.2.8 und damit die Existenz einer stetigen Fortsetzung von  $H^t(\Gamma)$  nach  $H^{t+\frac{1}{2}}(\Omega)$  also nur für  $t < 1$  zur Verfügung steht, soll im Fall  $t \geq 1$  immer die Existenz eines  $\Phi \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)$ ,  $\tau > 0$  beliebig klein, mit  $\gamma_\Gamma(\Phi) = \varphi$  vorausgesetzt werden. Es gilt das

**Lemma 4.7.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \{2, 3\}$ , beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  echter Teilrand.

- (i) Es sei  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $t \geq 1$ , und es existiere ein  $\Phi \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)$ ,  $\tau > 0$  beliebig klein, mit  $\gamma_\Gamma(\Phi) = \varphi$ . Dann gilt  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^s(\Gamma))$  bzw.  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H_0^s(\Gamma), H_0^s(\Gamma))$  für  $0 < s < 1$  und es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|N_\varphi\| \leq C \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)}$ . Für  $s = \frac{1}{2}$  gilt zudem  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  und die Abschätzung für die Operatornorm  $\|N_\varphi\|$  bleibt, mit möglicherweise anderer Konstante  $C > 0$ , erhalten.
- (ii) Es sei  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $t < \frac{N-1}{2} \leq 1$ . Dann gilt  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^{t+s-\frac{N-1}{2}}(\Gamma))$  für  $0 < \frac{N-1}{2} - t < s \leq t$  und es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|N_\varphi\| \leq C \|\varphi\|_{H^t(\Gamma)}$ .
- (iii) Es sei  $N = 2$  und  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$ . Dann gilt  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^s(\Gamma))$  bzw.  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H_0^s(\Gamma), H_0^s(\Gamma))$  für  $0 < s \leq t$  und es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|N_\varphi\| \leq C \|\varphi\|_{H^t(\Gamma)}$ . Für  $s = \frac{1}{2}$  gilt zudem  $N_\varphi \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  und die Abschätzung für die Operatornorm  $\|N_\varphi\|$  bleibt, mit möglicherweise anderer Konstante  $C > 0$ , erhalten.

*Beweis.* Für  $\mu \in H^s(\Gamma)$ ,  $0 < s < 1$ , existiert mit dem Spursatz A.2.8 eine Fortsetzung  $\mathcal{R}\mu \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$  mit  $\|\mathcal{R}\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \lesssim \|\mu\|_{H^s(\Gamma)}$ . Selbiges gilt natürlich auch für  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $0 < t < 1$ .

Zu (i): Wir wenden für  $\mu \in H^s(\Gamma)$ ,  $0 < s < 1$ , Lemma 4.6.3 auf Seite 102 auf  $\Phi \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)$  und  $\mathcal{R}\mu \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$  an, was wegen  $\frac{3}{2} + \tau + s + \frac{1}{2} = 2 + \tau + s > \frac{N+1}{2}$  möglich ist, und erhalten  $\varphi \cdot \mu = \gamma_\Gamma(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu) \in H^s(\Gamma)$ . Zudem gilt für alle  $\mu \in H^s(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \|\varphi \cdot \mu\|_{H^s(\Gamma)} &= \|\gamma_\Gamma(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu)\|_{H^s(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\Phi \cdot \mathcal{R}\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)} \|\mathcal{R}\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)} \|\mu\|_{H^s(\Gamma)}, \end{aligned}$$

woraus die Abschätzung für die Operatornorm folgt.

Für  $\mu \in H_0^s(\Gamma)$  gilt mit dem Spursatz A.2.8 für die Fortsetzung  $\mathcal{R}\mu \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ , wobei der Raum entsprechend (4.44) erklärt ist. Wie eben haben wir mit Lemma 4.6.3 dann  $\varphi \cdot \mu \in H_0^s(\Gamma)$  und die letzte Abschätzung folgt analog.

Nun zur Verschärfung für  $s = \frac{1}{2}$ . Für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  existiert eine Fortsetzung  $\mathcal{R}\mu \in H^1(\Omega)$  mit  $\gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(\mathcal{R}\mu) = 0$ . Eine solche Fortsetzung ist zum Beispiel die Nacheinanderausführung von Nullfortsetzung auf  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  und anschließender harmonischer Fortsetzung in  $H^1(\Omega)$ . Da  $\Phi \in H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)$  und  $\frac{3}{2} + \tau > \frac{N}{2}$  sowie  $\mathcal{R}\mu \in H^1(\Omega)$  gilt, ist  $\Phi \cdot \mathcal{R}\mu \in H^1(\Omega)$ . Weiterhin haben wir mit Lemma 4.6.3

$$\gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu) = \gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(\Phi) \cdot \gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(\mathcal{R}\mu) = 0,$$

weshalb  $\varphi \cdot \mu = \gamma_\Gamma(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu) \in H^{1/2}(\Gamma)$  die Nullfortsetzung  $\gamma_{\partial\Omega}(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  auf  $\partial\Omega$  besitzt, also  $\varphi \cdot \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  gilt. Die Abschätzung für die Operatornorm erhalten wir mit beliebigem  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  aus

$$\begin{aligned} \|\varphi \cdot \mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} &\lesssim \|\gamma_{\partial\Omega}(\Phi \cdot \mathcal{R}\mu)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi \cdot \mathcal{R}\mu\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)} \|\mathcal{R}\mu\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)} \|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\lesssim \|\Phi\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega)} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei die Äquivalenz der Normen  $\|\xi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$  und  $\|\nu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  benutzt wurde und  $\nu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  die Nullfortsetzung von  $\xi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  bezeichnet.

Zu (ii): Wir wenden für  $\mu \in H^s(\Gamma)$ ,  $0 < \frac{N-1}{2} - t < s \leq t$ , Korollar 4.6.6 auf Seite 106 auf  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $t < \frac{N-1}{2}$ , und  $\mu \in H^s(\Gamma)$  an, was wegen  $0 < s \leq t < 1$  und  $s + t > \frac{N-1}{2}$  möglich ist, und erhalten  $\varphi \cdot \mu = \gamma_\Gamma(\mathcal{R}\varphi \cdot \mathcal{R}\mu) \in H^{s+t-\frac{N-1}{2}}(\Gamma)$ . Analog zu (i) erhalten wir zudem für alle  $\mu \in H^s(\Gamma)$

$$\|\varphi \cdot \mu\|_{H^{s+t-\frac{N-1}{2}}(\Gamma)} \lesssim \|\mathcal{R}\varphi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}(\Omega)} \|\mathcal{R}\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \lesssim \|\varphi\|_{H^t(\Gamma)} \|\mu\|_{H^s(\Gamma)},$$

woraus die Abschätzung für die Operatornorm folgt.

Zu (iii): Wir wenden für  $\mu \in H^s(\Gamma)$ ,  $0 < s \leq t$ , Korollar 4.6.6 auf  $\varphi \in H^t(\Gamma)$ ,  $t > \frac{1}{2} = \frac{N-1}{2}$ , und  $\mu \in H^s(\Gamma)$  an, was wegen  $0 < s \leq t < 1$  und  $s + t > \frac{1}{2}$  möglich ist, und erhalten  $\varphi \cdot \mu = \gamma_\Gamma(\mathcal{R}\varphi \cdot \mathcal{R}\mu) \in H^s(\Gamma)$ . Analog zu (ii) erhalten wir wieder für alle  $\mu \in H^s(\Gamma)$

$$\|\varphi \cdot \mu\|_{H^s(\Gamma)} \lesssim \|\mathcal{R}\varphi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}(\Omega)} \|\mathcal{R}\mu\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \lesssim \|\varphi\|_{H^t(\Gamma)} \|\mu\|_{H^s(\Gamma)},$$

woraus erneut die Abschätzung für die Operatornorm folgt.

Für  $\mu \in H_0^s(\Gamma)$  liefert Korollar 4.6.6 auf Seite 106 dann  $\varphi \cdot \mu \in H_0^s(\Gamma)$  und eine, der letzten entsprechende, Abschätzung folgt analog.

Die Verschärfung für  $s = \frac{1}{2}$  folgt mit analogen Überlegungen wie denen im entsprechenden Teil von (i), wobei wir  $\Phi$  durch  $\mathcal{R}\varphi$  ersetzen und bei der Abschätzung zusätzlich  $\|\mathcal{R}\varphi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}(\Omega)} \lesssim \|\varphi\|_{H^t(\Gamma)}$  verwenden.  $\square$

Wir wollen jetzt untersuchen, was für die Bedingung (4.70) hinreichend ist. Dazu definieren wir mit der eindeutigen Lösung  $(\overline{p}_1, \overline{p}_2) = p \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  aus Voraussetzung 4.1 unter Beachtung der Voraussetzung 4.11 abkürzend

$$\overline{\varphi}_i := \frac{1}{k_i(\gamma_\Gamma^i(\overline{p}_i))} \in H^t(\Gamma), \quad t := \min\left(\frac{N-1}{2} + \tau, 1\right), \quad i = 1, 2, \quad (4.71)$$

wobei sich die Beschränkung von  $t$  aus dem Spursatz A.2.8 ergibt und berechnen mit (4.56) und (4.58)

$$\Lambda_0 - \Lambda = (r_1 - \overline{\varphi}_1) \cdot S_1^{-1} + (r_2 - \overline{\varphi}_2) \cdot S_2^{-1}.$$

Dabei wurden die Bemerkung 64 auf Seite 81 und Lemma 4.2.5 auf Seite 85 benutzt. Wir bemerken, dass zu  $\overline{\varphi}_i$  ein

$$\overline{\Phi}_i \in H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i) \text{ mit } \gamma_\Gamma^i(\overline{\Phi}_i) = \overline{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.72)$$

existiert, wie aus dem Beweis zu Lemma 4.7.4, speziell (4.68) und den anschließenden Ausführungen, ersichtlich wird. Nun gilt das

**Lemma 4.7.8.** *Hinreichend für die Bedingung (4.70) ist die Existenz von  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $r_1 + r_2 > 0$ , sodass im Fall  $N = 3$*

$$C_1 \left( \|r_1 I - \overline{\Phi}_1\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_1)} \|S_1^{-1}\| + \|r_2 I - \overline{\Phi}_2\|_{H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_2)} \|S_2^{-1}\| \right) \leq \|\Lambda_0^{-1}\|^{-1}$$

und im Fall  $N = 2$

$$C_2 \left( \|r_1 I - \overline{\varphi}_1\|_{H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)} \|S_1^{-1}\| + \|r_2 I - \overline{\varphi}_2\|_{H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)} \|S_2^{-1}\| \right) \leq \|\Lambda_0^{-1}\|^{-1}$$

gilt. Dabei ist  $\overline{\varphi}_i$  in (4.71) und  $\overline{\Phi}_i$  in (4.72) erklärt. Weiter ist  $C_1$  die Konstante aus Lemma 4.7.7(i) und  $C_2$  ist die Konstante aus Lemma 4.7.7(iii). Mit  $I$  wurden die Identitäten in  $H^{\frac{3}{2}+\tau}(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , und  $H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)$  bezeichnet.

*Beweis.* Für  $r_i I$  schreiben wir vereinfachend  $r_i$ . Wir haben

$$\begin{aligned} \|\Lambda_0 - \Lambda\| &= \|(r_1 - \overline{\varphi}_1) \cdot S_1^{-1} + (r_2 - \overline{\varphi}_2) \cdot S_2^{-1}\| \\ &= \|N_{(r_1 - \overline{\varphi}_1)} \circ S_1^{-1} + N_{(r_2 - \overline{\varphi}_2)} \circ S_2^{-1}\| \\ &\leq \|N_{(r_1 - \overline{\varphi}_1)}\| \|S_1^{-1}\| + \|N_{(r_2 - \overline{\varphi}_2)}\| \|S_2^{-1}\|. \end{aligned}$$

Verwendung von Lemma 4.7.7 (i) im Fall  $N = 3$  bzw. Lemma 4.7.7 (iii) im Fall  $N = 2$ ,  $\tau > 0$  hinreichend klein, liefert dann für  $i = 1, 2$

$$\|N_{(r_i - \overline{\varphi_i})}\| \leq C_1 \|r_i - \overline{\Phi_i}\|_{H^{\frac{3}{2} + \tau}(\Omega_i)} \quad \text{bzw.} \quad \|N_{(r_i - \overline{\varphi_i})}\| \leq C_2 \|r_i - \overline{\varphi_i}\|_{H^{\frac{1}{2} + \tau}(\Gamma)},$$

woraus mit den Bedingungen des Lemmas

$$\|\Lambda_0 - \Lambda\| \leq \|\Lambda_0^{-1}\|^{-1},$$

also (4.70) folgt. □

*Bemerkung 97.* (i) Wir weisen darauf hin, dass  $r_1$  und  $r_2$  auch in  $\|\Lambda_0^{-1}\|^{-1}$  eingehen.

(ii) Die Bedingungen des letzten Lemmas sind hinreichend, nicht notwendig.

(iii) Wenn für  $i = 1, 2$  die Funktionen  $\overline{\varphi_i} \in H^{\frac{1}{2} + \tau}(\Gamma)$  bzw.  $\overline{\Phi_i} \in H^{\frac{3}{2} + \tau}(\Omega_i)$  hinreichend nahe an den konstanten Funktionen  $r_i I$  liegen, wobei sich der Abstandsbegriff auf die Normen in  $H^{\frac{1}{2} + \tau}(\Gamma)$  bzw.  $H^{\frac{3}{2} + \tau}(\Omega_i)$  bezieht, dann sind die Bedingungen des letzten Lemmas erfüllbar.

Im Zweidimensionalen fällt auf, dass wir mit Informationen auf dem Teilrand  $\Gamma$  auskommen (wir benötigen nur  $\overline{\varphi_i}$ ), sofern  $\tau > 0$  aus Voraussetzung 4.11 kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist. Wir können dann mit Hilfe des Spursatzes eine beschränkte Fortsetzung in  $\Omega_i$  konstruieren und so die Multiplikation auf LIPSCHITZ-Teilrändern auf eine Multiplikation in LIPSCHITZ-Gebieten  $\Omega_i$  zurückführen. Im dreidimensionalen Fall ist dies auf Grund der Nichtexistenz einer beschränkten Fortsetzung in hinreichend reguläre Funktionenräume über den LIPSCHITZ-Gebieten  $\Omega_i$  nicht mehr möglich. Wir benötigen dann zusätzlich diese hinreichend reguläre Fortsetzung (nämlich  $\overline{\Phi_i}$ ), also Informationen auf den Teilgebieten  $\Omega_i$ .

Die eben erwähnten Eigenschaften lassen im Fall  $N = 2$  nachfolgende Überlegung zu, die auf eine weitere hinreichende Bedingung für (4.70) führt: Dazu definieren wir den Operator

$$\Xi := S_1^{-1} + N_{\overline{\varphi}} \circ S_2^{-1} \quad \text{mit} \quad \overline{\varphi} := \frac{\overline{\varphi_2}}{\overline{\varphi_1}} = \frac{k_1(\gamma_\Gamma^1(\overline{p_1}))}{k_2(\gamma_\Gamma^2(\overline{p_2}))}, \quad (4.73)$$

wobei  $\overline{\varphi_i}$  in (4.71) erklärt ist, und zeigen, dass dieser genau dann bijektiv ist, wenn  $\Lambda$  bijektiv ist. Zunächst müssen wir aber die Abbildungseigenschaften von  $\Xi$  untersuchen. Mit Voraussetzung 4.11, d.h. insbesondere  $\frac{1}{k_i} \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ ,  $s \geq \frac{3}{2} + \tau$ , und  $\|k_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq k_i \geq \alpha > 0$ , folgt  $k_i \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , und damit ähnlich zum Vorgehen im Beweis von Lemma 4.7.4  $\frac{1}{\overline{\varphi_1}} \in H^{\frac{1}{2} + \tau}(\Gamma)$ . Für hinreichend kleines  $\tau$ , d.h.  $0 < \tau < \frac{1}{2}$  liefert Lemma 4.7.7(iii) dann  $\overline{\varphi} = \frac{1}{\overline{\varphi_1}} \cdot \overline{\varphi_2} \in H^{\frac{1}{2} + \tau}(\Gamma)$  und speziell auch  $N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ . Durch erneutes Anwenden von Lemma 4.7.7(iii) erhalten wir somit  $N_{\overline{\varphi}} \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^s(\Gamma))$  für  $0 < s \leq \frac{1}{2} + \tau$  und zudem  $N_{\overline{\varphi}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ . Unter Berücksichtigung dieser Überlegung formulieren wir

**Lemma 4.7.9.** *Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ , genügen den Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 und es sei Voraussetzung 4.11 erfüllt. Dann gilt  $\Lambda, \Xi \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ . Weiter ist  $\Lambda$  genau dann bijektiv, wenn  $\Xi$  bijektiv ist.*

*Beweis.* I) Die Abbildungseigenschaften von  $\Lambda$  folgen aus Lemma 4.7.4(i). Unter Berücksichtigung der Überlegungen vor dem Lemma sehen wir, dass dann  $\Xi \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  gilt, denn nach Satz B.3.1 ist  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ ,  $i = 1, 2$ , und  $N_{\overline{\varphi}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ .

II) Mit Voraussetzung 4.11 gilt  $N_{\overline{\varphi_1}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  und die Überlegungen vor dem Lemma sichern auch  $N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$ . Wir rechnen leicht nach, dass zudem

$$N_{\overline{\varphi_1}} \circ N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} = N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} \circ N_{\overline{\varphi_1}} = I$$

gilt, also  $N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} = N_{\overline{\varphi_1}}^{-1}$  ist. Da  $N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma))$  ist, liefert der Satz von der inversen Abbildung die Bijektivität von  $N_{\overline{\varphi_1}}$ . Damit sind die Operatorgleichungen

$$\Lambda h = g \quad \text{und} \quad \Xi h = N_{\frac{1}{\overline{\varphi_1}}} g$$



mit  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  und  $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  äquivalent. Mit der Bijektivität von  $N_{\frac{1}{\varphi_1}}$  folgt aus der Bijektivität von  $\Lambda$  die von  $\Xi$  und umgekehrt.  $\square$

Aussagen zur stetigen Invertierbarkeit des Operators  $\Xi$ , siehe (4.73), macht

**Lemma 4.7.10.** *Die Gebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ , genügen den Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 und es sei Voraussetzung 4.11 erfüllt. Dann ist  $\Xi \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$  stetig invertierbar, wenn*

$$\|N_{\overline{\varphi}} \circ S_2^{-1}\| < \|S_1\|^{-1} \quad (4.74)$$

gilt, wobei  $\overline{\varphi}$  in (4.73) erklärt ist und  $S_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , die inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operatoren bezeichnen. Zudem ist die Abschätzung

$$\|\Xi^{-1}\| \leq \frac{\|S_1^{-1}\|}{1 - \|S_1 \circ N_{\overline{\varphi}} \circ S_2^{-1}\|}.$$

erfüllt.

*Beweis.* Wir erinnern daran, dass  $S_i^{-1} \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\right)$ ,  $i = 1, 2$ , stetig invertierbar ist. Die Behauptungen folgen dann direkt aus dem Lemma von BANACH in der Form [KA78, Satz 4(2.V), S. 140], siehe auch [HS91, Lemma 23.2].  $\square$

Eine hinreichende Bedingung für (4.74) liefert

**Lemma 4.7.11.** *Hinreichend für Bedingung (4.74) ist*

$$C \|\overline{\varphi}\|_{H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)} < (\|S_1\| \|S_2^{-1}\|)^{-1},$$

wobei  $C > 0$  die Konstante aus Lemma 4.7.7(iii) bezeichnet.

*Beweis.* Wir berechnen mit Lemma 4.7.7(iii)

$$\|N_{\overline{\varphi}} \circ S_2^{-1}\| \leq \|N_{\overline{\varphi}}\| \|S_2^{-1}\| \leq C \|\overline{\varphi}\|_{H^{\frac{1}{2}+\tau}(\Gamma)} \|S_2^{-1}\| < \|S_1\|^{-1},$$

womit die Behauptung folgt.  $\square$

## 4.8 Einige Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems

In diesem Abschnitt werden wir Lösungsverfahren für das freie Minimierungsproblem angeben. Zunächst wird erneut der Zusammenhang zwischen der Lösung des freien Minimierungsproblems und der des quasilinearen Modellproblems mit springenden Nichtlinearitäten verdeutlicht. Anschließend rekapitulieren wir das freie Minimierungsproblem und geben eine notwendige Optimalitätsbedingung an, auf der die Verfahren aufbauen werden. Für das nicht regularisierte freie Minimierungsproblem wird zudem eine alternative Bedingung angegeben. Danach weisen wir im ersten Teilabschnitt auf Möglichkeiten zur effizienten Berechnung der Ableitung hin, was im Zusammenhang mit den hier verwendeten Lösungsmethoden, die mit Ableitungen des Zielfunktionalen arbeiten, sinnvoll ist. Im zweiten Unterabschnitt wird eine Klasse von Abstiegsverfahren eingeführt. Speziell werden wir auf das freie Minimierungsproblem das Verfahren des steilsten Abstiegs, welches auch als Gradientenverfahren bezeichnet wird, anwenden und seine Konvergenz unter geeigneten Voraussetzungen nachweisen. Im dritten Teilabschnitt untersuchen wir, wann wir das lokal schnell konvergente NEWTON-Verfahren zur Lösung unseres Problems benutzen können. Hierbei werden wir die Resultate des Abschnittes 4.7 verwenden.

Wir wenden uns nun, nachdem wir in den letzten Abschnitten die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des freien Minimierungsproblems (4.38), speziell im Fall  $\delta > 0$ , erörtert haben, Verfahren zu deren Bestimmung zu. Diese Lösungsverfahren für das freie Minimierungsproblem (4.38) sollen die am Anfang des Kapitels erwähnten, auf einem Optimierungsansatz basierenden,

Gebietszerlegungsmethoden sein. Wir erinnern daran, dass das ursprüngliche Ziel die Lösung des quasilinearen Modellproblems mit springenden Nichtlinearitäten (4.1) ist. Diese Lösung können wir aus der eindeutigen global optimalen Lösung  $\bar{g}$  des freien Minimierungsproblems (4.38) für  $\delta = 0$  erhalten, indem wir  $u_i(\bar{g})$ , wobei  $u_i(\cdot)$  den Lösungsoperator (4.36) der Hilfsprobleme bezeichnet, einer inversen KIRCHHOFF-Transformation unterziehen. Aus diesem Grund ist es ausreichend, die Lösung des freien Minimierungsproblems für  $\delta = 0$  zu bestimmen. Die Betrachtungen der vorangegangenen Abschnitte zeigen, dass wir dabei auf verschiedene Weisen vorgehen können. Einerseits ist es möglich, die Lösung des freien Minimierungsproblems direkt für  $\delta = 0$  mit geeigneten Verfahren zu bestimmen. Andererseits können wir auch für  $\delta > 0$  die regularisierten Optimierungsprobleme lösen, was vom numerischen Standpunkt aus möglicherweise sinnvoller ist. Es wurde nämlich bereits gezeigt, dass die Lösungen dieser regularisierten Probleme für  $\delta \rightarrow 0$  gegen die Lösung des KIRCHHOFF-transformierten quasilinearen Modellproblems konvergieren. Geben wir also einen Fehler vor, dann existiert ein Parameter  $\delta$ , sodass die Lösung des gestörten Problems bis auf den Fehler der Lösung des Ausgangsproblems entspricht, wir dieses somit faktisch gelöst haben. Es sei daran erinnert, dass der Fehler dabei nur in der  $H^{1-\tau}$ -Norm,  $\tau > 0$  beliebig klein, gemessen werden kann, siehe Satz 4.5.7 auf Seite 97.

Notwendig für die Optimalität der Lösung des freien Minimierungsproblems (4.38), also

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\delta(g) \stackrel{!}{=} \min \\ g \in (V_\Gamma)' \end{cases}, \quad (4.75)$$

ist das Erfülltsein der verallgemeinerten EULER-Gleichung (4.39), also

$$\mathcal{M}'_\delta(g) = 0. \quad (4.76)$$

Wir erinnern daran, dass das Zielfunktional durch (4.37), das ist

$$\mathcal{M}_\delta(g) = \frac{1}{2} \left\| \kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2,$$

gegeben ist und  $V_\Gamma \in \{L^2(\Gamma), H^\varepsilon(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , gilt.

Für  $\delta = 0$  haben wir zudem noch mehr. Dann ist der Wert des Zielfunktional  $\mathcal{M}_0$  an der optimalen Lösung  $\bar{g}$  nämlich Null, da insbesondere das quasilineare Transmissionsproblem (4.5) erfüllt ist und die rücktransformierten Spuren  $\kappa_i^{-1}(\gamma_\Gamma^i(u_i(\bar{g})))$  somit übereinstimmen. Wir können neben (4.76) also auch direkt die Gleichung

$$\mathcal{M}_0(g) = 0 \quad (4.77)$$

lösen.

Diese Überlegungen werden wir nachfolgend verwenden, um iterative Lösungsverfahren für (4.38) zu konstruieren. Dabei betrachten wir sowohl lokal, als auch global konvergente Verfahren. Als Vertreter der Letzteren wählen wir die Abstiegsverfahren und die Ersteren sollen nachfolgend durch das NEWTON-Verfahren repräsentiert werden.

### 4.8.1 Zur Berechnung der Ableitung

Die gängigsten Lösungsverfahren von Optimierungsproblemen verwenden Ableitungen oder zumindest Richtungsableitungen des Zielfunktional. Aus diesem Grund ist die effiziente Berechnung, zumindest der ersten beiden Ableitungen, wichtig. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze, welche in Abschnitt C.5 für ein nichtlineares optimales Kontrollproblem dargestellt sind. Wir können die Resultate des Abschnittes C.5 auf das freie Minimierungsproblem (4.75) übertragen, wenn wir die nachfolgenden Entsprechungen beachten:

$$Y \rightsquigarrow V_1 \times V_2, \quad U \rightsquigarrow H_{00}^{-1/2}(\Gamma), \quad Z \rightsquigarrow (V_1)' \times (V_2)'$$

und

$$J \rightsquigarrow \mathcal{J}_\delta, \quad M \rightsquigarrow \mathcal{M}_\delta, \quad y \rightsquigarrow (u_1, u_2), \quad u \rightsquigarrow g, \quad e(y, u) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A_1 u_1 - F_1(g) \\ A_2 u_2 - F_2(g) \end{pmatrix},$$

wobei  $A_i$  und  $F_i$  in Lemma 4.5.2 auf Seite 91 erklärt sind.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die ersten beiden Ableitungen und die Richtungsableitungen des Zielfunktional  $\mathcal{M}_\delta$  des freien Minimierungsproblems (4.75) mit den Ansätzen aus Abschnitt C.5 berechnet werden können. Zudem erhalten wir Darstellungen für die Ableitungen, die mit relativ wenig Aufwand bestimmt werden können. Insbesondere das Operator-Vektor-Produkt  $\mathcal{M}_\delta''(g)(h)$ , welches speziell beim später betrachteten klassischen NEWTON-Verfahren auftritt, kann auf effiziente Art und Weise berechnet werden.

## 4.8.2 Abstiegsverfahren

In diesem Teilabschnitt wollen wir Abstiegsverfahren verwenden, um das freie Minimierungsproblem (4.38) bzw. (4.75) zu lösen. Der Vorteil von Abstiegsverfahren ist die globale Konvergenz, der Nachteil ist die langsame Konvergenzgeschwindigkeit. Als Spezialfall betrachten wir das Verfahren des steilsten Abstiegs, welches auch als Gradientenverfahren bezeichnet wird und zeigen die Konvergenz dieses Verfahrens für das freie Minimierungsproblem (4.75).

Zunächst erklären wir *Abstiegsverfahren* im Rahmen der freien Optimierung und zitieren wichtige Sätze. Wir halten uns an [HPUU09, Chapter 2.2.1] und betrachten das freie Minimierungsproblem

$$\begin{cases} f(v) \stackrel{!}{=} \min \\ v \in V \end{cases}, \quad (4.78)$$

wobei  $V$  einen reellen BANACH-Raum bezeichnet und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig F-differenzierbar sei. Die Optimalitätsbedingung für ein lokales Minimum  $\bar{v} \in V$  ist bekanntlich

$$f'(\bar{v}) = 0.$$

Die Idee eines Abstiegsverfahrens besteht darin, im  $k$ -ten Iterationsschritt zur Iterierten  $v^k \in V$  eine *Abstiegsrichtung*  $d^k \in V$  zu finden, sodass  $\phi_k(t) := f(v^k + td^k)$  für  $t = 0$  fällt, also

$$\phi_k'(0) = \frac{d}{dt} f(v^k + td^k)|_{t=0} = \langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V} < 0$$

gilt. Eine qualitative Voraussetzung für eine Abstiegsrichtung ist die „Winkelbedingung“

$$\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V} \leq -\eta \|f'(v^k)\|_{(V)'} \|d^k\|_V, \quad (4.79)$$

wobei  $\eta \in (0, 1)$  fest gewählt ist. Weiterhin benötigen wir für ein Abstiegsverfahren eine *Schrittweite*  $\sigma_k > 0$ , sodass

$$\phi_k(\sigma_k) < \phi_k(0)$$

gilt. Eine Regel zur Bestimmung einer Schrittweite heißt *Schrittweitenregel*. Die neue Iterierte ist dann durch  $v^{k+1} := v^k + \sigma_k d^k$  gegeben. Insgesamt erhalten wir den

**Algorithmus 4.8.1** (allgemeines Abstiegsverfahren).

0. Wähle einen Initialwert  $v^0 \in V$ .  
Für  $k = 0, 1, 2, \dots$ :
1. Falls  $f'(v^k) = 0$ , STOPP.
2. Wähle eine Abstiegsrichtung  $d^k \in V$ :  $\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V} < 0$ .
3. Wähle eine Schrittweite  $\sigma_k > 0$ , sodass  $f(v^k + \sigma_k d^k) < f(v^k)$ .
4. Setze  $v^{k+1} := v^k + \sigma_k d^k$ .

Um die globale Konvergenz des Algorithmus 4.8.1 zu sichern, benötigen wir zusätzliche Voraussetzungen an die Abstiegsrichtung und die Schrittweite. Beide müssen *zulässig* sei.

**Voraussetzung 4.12** (zulässige Abstiegsrichtungen).

$$\frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies \|f'(v^k)\|_{(V)'} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Voraussetzung 4.13** (zulässige Schrittweiten). Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $f(v^k + \sigma_k d^k) < f(v^k)$  und zusätzlich:

$$f(v^k + \sigma_k d^k) - f(v^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \implies \quad \frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Mit diesen beiden Voraussetzungen haben wir den

**Satz 4.8.1.** *Sei  $f$  stetig  $F$ -differenzierbar und  $(v^k)_k$ ,  $(d^k)_k$  und  $(\sigma_k)_k$  nach Algorithmus 4.8.1 erzeugt. Weiter sollen die Voraussetzungen 4.12 und 4.13 gelten und die Folge  $(f(v^k))_k$  nach unten beschränkt sein. Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(v^k) = 0.$$

*Insbesondere ist jeder Häufungspunkt von  $(v^k)_k$  stationärer Punkt von  $f$ .*

Der Beweis findet sich in [HPUU09, Theorem 2.2].

Die beiden folgenden Fragen sind noch unbeantwortet. Wie können wir praktisch überprüfen, ob eine Abstiegsrichtung zulässig ist? Wie können wir zulässige Schrittweiten bestimmen? Die erste Frage beantwortet

**Lemma 4.8.2.** *Wenn die Abstiegsrichtungen  $(d^k)_k$  die Bedingung (4.79) erfüllen, dann sind sie zulässig.*

Siehe [HPUU09, Lemma 2.1] für den Beweis.

Bezüglich der zweiten Frage betrachten wir die *ARMIJO-Regel* zur Schrittweitenbestimmung: Zu gegebener Abstiegsrichtung  $d^k$  von  $f$  in  $v^k$  wählen wir als Schrittweite das Maximum  $\sigma_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ , für welches

$$f(v^k + \sigma_k d^k) - f(v^k) \leq \gamma \sigma_k \langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}$$

gilt. Dabei ist  $\gamma \in (0, 1)$  eine Konstante. Dieses maximale  $\sigma_k$  heißt *ARMIJO-Schrittweite*. Das nächste Lemma zeigt, wann die *ARMIJO-Schrittweite* existiert.

**Lemma 4.8.3.** *Sei  $f'$  gleichmäßig stetig auf  $N_0^\rho := \{v + d \mid f(v) \leq f(v^0), \|d\|_V \leq \rho\}$  für ein  $\rho > 0$ . Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $v_k \in V$  mit  $f(v^k) \leq f(v^0)$  und alle  $d^k \in V$ , welche der Bedingung*

$$\frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \leq -\varepsilon$$

*genügen, gilt*

$$f(v^k + \sigma d^k) - f(v^k) \leq \gamma \sigma \langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V} \quad \forall \sigma \in \left[0, \frac{\delta}{\|d^k\|_V}\right].$$

*Insbesondere folgt aus der letzten Zeile die Existenz der *ARMIJO-Schrittweite*.*

Den Beweis finden wir wieder in [HPUU09, Lemma 2.2].

Das nächste Lemma, welches wir in [HPUU09, Lemma 2.3] finden, gibt Auskunft darüber, wann die *ARMIJO-Schrittweite* zulässig ist.

**Lemma 4.8.4.** *Sei  $f'$  gleichmäßig stetig auf  $N_0^\rho := \{v + d \mid f(v) \leq f(v^0), \|d\|_V \leq \rho\}$  für ein  $\rho > 0$ . Wir betrachten Algorithmus 4.8.1, wobei die Folge  $(\sigma_k)_k$  durch die *ARMIJO-Regel* erzeugt ist und die Abstiegsrichtungen  $d^k$  nicht zu kurz gewählt sind, d.h.*

$$\|d^k\|_V \geq \psi \left( -\frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \right)$$

*gilt, wobei  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine monoton steigende Funktion mit  $\psi(t) > 0$  für alle  $t > 0$  ist. Dann sind die *ARMIJO-Schrittweiten*  $\sigma_k$  zulässig.*

Bevor wir Algorithmus 4.8.1 auf das freie Minimierungsproblem (4.75) anwenden, wollen wir noch eine ausgezeichnete Abstiegsrichtung angeben, nämlich die Richtung des steilsten Abstiegs. Die Richtung des steilsten Abstiegs von  $f$  in  $v \in V$  ist im BANACH-Raum  $V$  durch  $d := td_s$ ,  $t > 0$ , wobei  $d_s$  die Lösung von

$$\min_{\|d\|_V=1} \langle f'(v), d \rangle_{(V)' \times V}$$

darstellt, definiert. Im Fall eines BANACH-Raumes ist die Bestimmung einer Abstiegsrichtung nicht trivial. Die negative Ableitung von  $f$  kann *nicht* verwendet werden, da  $(V)' \ni f'(v^k) \notin V$  gilt. Für HILBERT-Räume  $V$  können wir mittels des RIESZ-Isomorphismus  $(V)'$  und  $V$  identifizieren und haben  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(V)' \times V} = (\cdot, \cdot)_V$ . Somit gilt  $f'(v^k) = \nabla f(v^k) \in V$  und  $-\nabla f(v^k)$  ist die Richtung des steilsten Abstiegs, wie nachfolgende Überlegung zeigt. Mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung berechnen wir

$$\min_{\|d\|_V=1} \langle f'(v^k), d \rangle_{(V)' \times V} = \min_{\|d\|_V=1} (\nabla f(v^k), d)_V \geq -\|\nabla f(v^k)\|_V = \left( \nabla f(v^k), -\frac{\nabla f(v^k)}{\|\nabla f(v^k)\|_V} \right)_V,$$

woraus die Behauptung folgt. Wir können die Folge der Abstiegsrichtungen  $(d^k)_k$  also mittels

$$d^k := -\frac{\nabla f(v^k)}{\|\nabla f(v^k)\|_V} \quad (4.80)$$

definieren. Zudem machen wir uns leicht klar, dass die Richtung des steilsten Abstiegs eine zulässige Abstiegsrichtung ist. Weiter ist auch offensichtlich, dass (4.80) die Bedingung des letzten Lemmas mit  $\psi(t) = t$  erfüllt. Wir erhalten somit

**Korollar 4.8.5.** *Sei  $V$  ein HILBERT-Raum,  $f$  stetig F-differenzierbar und  $f'$  gleichmäßig stetig auf  $N_0^\rho := \{v + d \mid f(v) \leq f(v^0), \|d\|_V \leq \rho\}$  für ein  $\rho > 0$ . Weiter seien die Folgen  $(\sigma_k)_k$  durch die ARMIJO-Regel und  $(d^k)_k$  durch (4.80) erzeugt und die Folge  $(f(v^k))_k$ , welche sich mit Algorithmus 4.8.1 ergibt, sei nach unten beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(v^k) = 0.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus den obigen Resultaten.  $\square$

Wir werden nun Korollar 4.8.5 verwenden, um die Anwendbarkeit des Gradientenverfahrens mit ARMIJO-Schrittweitenregel auf das freie Minimierungsproblem (4.75) zu untersuchen. Dazu sind die Voraussetzungen des Korollars zu prüfen. Natürlich sind die Räume  $(V_\Gamma)'$  als Dualräume von HILBERT-Räumen selbst wieder HILBERT-Räume, sodass die Wahl der Abstiegsrichtung als negativer Gradient möglich ist. Unter der auf Seite 108 stehenden Voraussetzung 4.3 ist  $\mathcal{M}_\delta$  mit Korollar 4.6.15(i), siehe Seite 111, stetig F-differenzierbar auf ganz  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \supset (V_\Gamma)'$ . Weiter gilt natürlich  $\mathcal{M}_\delta(\cdot) \geq 0$ , sodass die Folge der Funktionswerte der durch das Gradientenverfahren erzeugten Lösungsfolge nach unten beschränkt ist. Bleibt noch die gleichmäßige Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  auf  $N_0^\rho$ , siehe letztes Korollar, zu prüfen. Die Menge  $N_0^\rho = \{g + d \mid \mathcal{M}_\delta(g) \leq \mathcal{M}_\delta(g^0), \|d\|_{(V_\Gamma)'} \leq \rho\}$  ist beschränkt, da  $\mathcal{M}_\delta(g) \geq 0$  und  $\mathcal{M}_\delta(g) \rightarrow \infty$  für  $\|g\|_{(V_\Gamma)'} \rightarrow \infty$  gilt. Hinreichend für die gleichmäßige Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  auf  $N_0^\rho$  ist also dieselbe auf einer hinreichend großen abgeschlossenen Kugel  $\overline{B_r(0)} \subset (V_\Gamma)'$ ,  $r > 0$ . Nun ist  $\overline{B_r(0)}$  wegen der unendlichen Dimension nicht kompakt, sodass die gleichmäßige Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  *nicht* unmittelbar aus der Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  auf  $\overline{B_r(0)}$  folgt. Die gleichmäßige Stetigkeit von Hand nachzurechnen stellt sich ebenfalls als nichttrivial heraus. Jedoch folgt aus der LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  die gleichmäßige Stetigkeit und für die Erstere ist die F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  in Verbindung mit der Beschränktheit der Ableitung hinreichend. Diese Überlegung führt zu folgendem

**Lemma 4.8.6.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 3$ , sollen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 erfüllen. Weiter gelte Voraussetzung 4.4.*

- (i) *Für  $N \leq 2$  ist  $\mathcal{M}'_\delta$  gleichmäßig stetig auf  $\overline{B_r(0)} \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $0 < r < \infty$ .*
- (ii) *Es sei  $N = 3$  und die Teilgebiete erfüllen zusätzlich die Voraussetzung 4.7. Dann ist  $\mathcal{M}'_\delta$  gleichmäßig stetig auf  $\overline{B_r(0)} \subset (V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ,  $0 < r < \infty$ .*
- (iii) *Die Voraussetzungen von (ii) seien erfüllt und zusätzlich gelte Voraussetzung 4.8. Dann bleibt die Aussage von (ii) auch für  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  erhalten.*

*Beweis.* Unter den Voraussetzungen ist  $\mathcal{M}_\delta$  nach Korollar 4.6.15(ii-iii) auf Seite 111 zweimal stetig F-differenzierbar für die angegebenen  $\varepsilon$ -Bereiche. Aus der Beschränktheit der zweiten Ableitung auf  $\overline{B_r(0)}$ ,  $0 < r < \infty$ , folgen mit den Überlegungen direkt vor dem Lemma 4.8.6 die Behauptungen. Bleibt noch die Beschränktheit von  $\mathcal{M}_\delta''$  auf  $\overline{B_r(0)}$ ,  $0 < r < \infty$ , zu prüfen.

Zu (i-ii): Für beliebiges  $g \in \overline{B_r(0)} \subset (V_\Gamma)'$ ,  $0 < r < \infty$ , gilt für  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|\kappa_i^{-1}(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C_1^i \|\gamma_\Gamma^i(u_i(g))\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_2^i \|u_i(g)\|_{H^1(\Omega_i)} \\ &\leq C_3^i + C_4^i \|g\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C_3^i + C_5^i \|g\|_{(V_\Gamma)'} \\ &\leq C_3^i + C_5^i r, \end{aligned}$$

wobei Lemma 4.2.4 auf Seite 84, der Spursatz A.2.8, Lemma 4.5.2 auf Seite 91 und die stetige Einbettung  $(V_\Gamma)' \hookrightarrow H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  benutzt wurden und die Konstanten nicht von  $g$  abhängen. Damit haben wir mit  $C_3 := C_3^1 + C_3^2$  und  $C_5 := C_5^1 + C_5^2$  sofort

$$\|\Upsilon_0(g)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(g)))\|_{L^2(\Gamma)} + \|\kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(g)))\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_3 + C_5 r =: \widehat{C}_0(r),$$

also die gleichmäßige Beschränktheit von  $\|\Upsilon_0(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$  auf  $\overline{B_r(0)}$ ,  $0 < r < \infty$ . Unter Benutzung von

$$\|(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_6^i \|(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|S_i^{-1}h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$$

im Fall  $N = 2$ , bzw.

$$\|(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_6^i \|(\kappa_i^{-1})'(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|S_i^{-1}h\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)}$$

im Fall  $N = 3$ , errechnen wir mit Satz B.3.1 bzw. B.3.2 und analogen Argumenten wie eben für alle  $g \in \overline{B_r(0)}$

$$\|\Upsilon_1(g, h)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \widehat{C}_1(r) \|h\|_{(V_\Gamma)'},$$

wobei  $\widehat{C}_1(r)$  eine Konstante bezeichnet, die nicht von  $g$  oder  $h$  abhängt und im Zweidimensionalen  $(V_\Gamma)' = H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  gewählt ist. Auf die gleiche Weise sehen wir unter Benutzung von

$$\begin{aligned} \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C_7^i \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad \|S_i^{-1}k\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \|S_i^{-1}h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

im zweidimensionalen Fall und

$$\begin{aligned} \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C_7^i \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad \|S_i^{-1}k\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \|S_i^{-1}h\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \end{aligned}$$

im Dreidimensionalen auch, dass

$$\|\Upsilon_2(g, h, k)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \widehat{C}_2(r) \|h\|_{(V_\Gamma)'} \|k\|_{(V_\Gamma)'} \quad (4.81)$$

mit Konstante  $\widehat{C}_2(r)$  gilt. Insgesamt liefert das mit (4.53) für alle  $g \in \overline{B_r(0)} \subset (V_\Gamma)'$  und alle  $h, k \in (V_\Gamma)'$

$$|\mathcal{M}_\delta''(g)(h, k)| \leq \left( \delta + \widehat{C}_1(r)^2 + \widehat{C}_0(r)\widehat{C}_2(r) \right) \|h\|_{(V_\Gamma)'} \|k\|_{(V_\Gamma)'},$$

woraus die gleichmäßige Beschränktheit von  $\mathcal{M}_\delta''$  auf  $\overline{B_r(0)}$  folgt. Im Zweidimensionalen lassen sich die obigen Überlegungen für  $(V_\Gamma)' = H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  durchführen, im Dreidimensionalen noch für den im Lemma angegebenen  $\varepsilon$ -Bereich (andernfalls liegen die auftretenden punktwisen Produkte nicht im  $L^2(\Gamma)$  und die oben zu benutzenden Abschätzungen für die Produkte stehen nicht zur Verfügung).

Zu (iii): Die zweimal stetige F-Differenzierbarkeit folgt wieder aus Korollar 4.6.15(iii) auf Seite 111. Die obigen Abschätzungen für  $\Upsilon_0$  und  $\Upsilon_1$  bleiben für alle  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  gültig, wie bereits mit

dem Beweis von Lemma 4.6.10 auf Seite 109 ersichtlich wird. Mit analogen Überlegungen wie im Beweis von Lemma 4.6.14(i) auf Seite 111 liefert die zusätzliche Voraussetzung 4.8 und Korollar 4.6.6, siehe Seite 106, in Verbindung mit dem auf LIPSCHITZ-Gebiete bzw. Teilränder derselben übertragenen Satz A.4.5, dass die Abschätzung

$$\|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \leq C_8^i + C_9^i \|g\|_{(V_\Gamma)'} \leq C_8^i + C_9^i r,$$

gilt, woraus für  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  wegen

$$\begin{aligned} \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g))) \cdot S_i^{-1}k \cdot S_i^{-1}h\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C_7^i \|(\kappa_i^{-1})''(\gamma_\Gamma^i(u_i(g)))\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \\ &\quad \|S_i^{-1}k\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \|S_i^{-1}h\|_{H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \end{aligned}$$

auch die Abschätzung (4.81) für  $\Upsilon_2$  folgt. Die restliche Argumentation können wir wörtlich aus dem Beweis zu (i-ii) übertragen.  $\square$

*Bemerkung 98.* Für die Existenz der F-Ableitung von  $\mathcal{M}_\delta$  ist nach Korollar 4.6.15(i) nur die Voraussetzung 4.3 nötig. Alle zusätzlichen Voraussetzungen im letzten Lemma werden nur benötigt, um die hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  sicherzustellen. Diese hinreichende Bedingung ist jedoch nicht notwendig, sodass  $\mathcal{M}'_\delta$  möglicherweise auch ohne diese Zusatzvoraussetzungen gleichmäßig stetig ist. Speziell im dreidimensionalen Fall wäre dies vorteilhaft, da dann der  $\varepsilon$ -Bereich für  $(V_\Gamma)'$  erweitert werden könnte.

Die Behauptungen des letzten Lemmas können möglicherweise auch unter schwächeren Voraussetzungen gezeigt werden. Dabei ist es wegen des nachfolgenden Lemmas sogar ausreichend, die gleichmäßige Stetigkeit nur auf einer dichten Teilmenge nachzuweisen.

**Lemma 4.8.7.** *Es seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  und  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  BANACH-Räume und die stetige und dichte Einbettung  $X \hookrightarrow Y$  gelte. Weiter sei  $F : Y \rightarrow Z$  stetig und für  $0 < R < \infty$  sei  $F : \overline{B_R(0)} \cap (X, \|\cdot\|_Y) \rightarrow Z$  gleichmäßig stetig. Dann ist auch  $F : \overline{B_r(0)} \cap Y \rightarrow Z$ ,  $0 < r < R$ , gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $F : \overline{B_R(0)} \cap (X, \|\cdot\|_Y) \rightarrow Z$  existiert dann ein  $\delta_g > 0$  mit  $\|F(x_0) - F(y_0)\|_Z < \epsilon$  für alle  $x_0, y_0 \in \overline{B_R(0)} \cap (X, \|\cdot\|_Y)$  mit  $\|x_0 - y_0\|_Y < \delta_g$ . Wir setzen  $\bar{\delta} := \frac{\delta_g}{3}$  und wählen beliebige  $x, y \in \overline{B_r(0)} \cap Y$  mit  $\|x - y\|_Y < \bar{\delta}$ . Da  $F : Y \rightarrow Z$  stetig ist, existieren  $x_0, y_0 \in Y$  mit  $\|F(x) - F(x_0)\|_Z < \epsilon$  bzw.  $\|F(y) - F(y_0)\|_Z < \epsilon$  und  $\|x - x_0\|_Y < \bar{\delta}$  bzw.  $\|y - y_0\|_Y < \bar{\delta}$ . Offenbar gilt

$$\|x_0 - y_0\|_Y \leq \|x_0 - x\|_Y + \|y_0 - y\|_Y + \|x - y\|_Y < 3\bar{\delta} = \delta_g$$

und folglich  $\|F(x_0) - F(y_0)\|_Z < \epsilon$ . Insgesamt haben wir

$$\|F(x) - F(y)\|_Z \leq \|F(x) - F(x_0)\|_Z + \|F(y) - F(y_0)\|_Z + \|F(x_0) - F(y_0)\|_Z < 3\epsilon,$$

also die gleichmäßige Stetigkeit, da  $x, y \in \overline{B_r(0)} \cap Y$  beliebig waren.  $\square$

Mit dem vorletzten Lemma können wir nun das Gradientenverfahren auf das freie Minimierungsproblem (4.75) anwenden und erhalten

**Korollar 4.8.8.** *Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, 2$ ,  $N \leq 3$ , sollen die Bedingungen aus Abschnitt 4.1.1 erfüllen. Weiter gelte Voraussetzung 4.4. Für  $N \leq 2$  sei  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_{00}^{-1/2}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Im Fall  $N = 3$  gelte zusätzlich die Voraussetzung 4.7 und  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , wobei in Verbindung mit Voraussetzung 4.8 der  $\varepsilon$ -Bereich auf  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  ausgedehnt werden kann.*

*Dann konvergiert das Gradientenverfahren für das freie Minimierungsproblem (4.75), wobei die Schrittweiten mit der ARMIJO-Regel zu erzeugen sind, gegen einen stationären Punkt  $g^* \in (V_\Gamma)'$  von (4.76).*

*Sei  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  eine optimale Lösung von (4.75), die kein Häufungspunkt der Lösungsmenge von (4.76) ist. Wenn der Startwert  $g_0 \in (V_\Gamma)'$  hinreichend nah an  $\bar{g}^\delta$  liegt, dann gilt  $g^* = \bar{g}^\delta$ .*

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt direkt aus Korollar 4.8.5 und den Überlegungen vor Lemma 4.8.6, sowie Lemma 4.8.6 selbst. Die zweite Behauptung folgt, da  $\bar{g}^\delta$  lokal die einzige Lösung von (4.76) ist.  $\square$

*Bemerkung 99.* (i) Unter den (starken) Voraussetzungen des Korollars 4.8.11 auf Seite 134 im nächsten Abschnitt können wir sichern, dass  $\bar{g}^\delta$  aus dem letzten Korollar lokal die einzige Lösung von (4.76) ist. Dann ist  $\bar{g}^\delta$  natürlich auch kein Häufungspunkt der Lösungsmenge von (4.76).

(ii) Das Gradientenverfahren ist bereits auf das freie Minimierungsproblem (4.75) anwendbar, wenn wir, neben den Voraussetzungen an die Gebiete aus Abschnitt 4.1.1, nur Voraussetzung 4.3 fordern. Alle zusätzlichen Voraussetzungen des obigen Korollars dienen nur dazu, die Konvergenz des Gradientenverfahrens gegen einen stationären Punkt der verallgemeinerten EULER-Gleichung (4.76) zu sichern.

(iii) Es ist natürlich auch möglich andere Abstiegsverfahren als das Gradientenverfahren auf das freie Minimierungsproblem (4.75) anzuwenden. Wenn dabei die Voraussetzungen 4.12 und 4.13 erfüllt sind, dann folgt die Konvergenz der Abstiegsverfahren unter Voraussetzung 4.3, welche wegen Korollar 4.6.15(i), siehe Seite 111, die F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}_\delta$  sichert, aus dem Satz 4.8.1.

Wir wollen noch feststellen, dass die global konvergenten Abstiegsverfahren im Allgemeinen sehr ineffizient sind, d.h. sehr langsam konvergieren. Aus diesem Grund werden sie in praktischen Anwendungen mit lokal schnell konvergenten Verfahren, wie beispielsweise dem NEWTON-Verfahren, gekoppelt. Dazu werden mit dem lokal schnell konvergenten Verfahren einige Testschritte berechnet. Falls die Testschritte zulässig sind, werden sie durchgeführt. Andernfalls verwenden wir das global langsam konvergente Verfahren, z.B. ein Abstiegsverfahren, um der Lösung näher zu kommen, um nach einigen Schritten wieder das lokal schnell konvergente Verfahren zu testen.

### 4.8.3 Newton-Verfahren

Der Nachteil der im letzten Abschnitt betrachteten Abstiegsverfahren war die geringe Konvergenzgeschwindigkeit. Hier wollen wir deshalb untersuchen, inwieweit sich das NEWTON-Verfahren, das unter gewissen Voraussetzungen hohe Konvergenzgeschwindigkeiten aufweist, zur Lösung des freien Minimierungsproblems (4.38) bzw. (4.75) verwenden lässt. Der Nachteil des NEWTON-Verfahrens ist, dass wir Konvergenz nur lokal sichern können, d.h. dass der Startwert des Verfahrens hinreichend nah an der Lösung liegen muss.

Zunächst wiederholen wir die Grundgedanken des verallgemeinerten NEWTON-Verfahrens, siehe z.B. [KWS<sup>+</sup>73] oder [Deu04] für eine umfassende Behandlung, und zitieren wichtige Sätze. Wir halten uns nachfolgend an [HPUU09, Chapter 2.4] und betrachten die Operatorgleichung

$$G(x) = 0, \tag{4.82}$$

wobei  $G : X \rightarrow Y$  einen nichtlinearen Operator bezeichnet und  $X$  und  $Y$  BANACH-Räume sind. Wir formulieren den

**Algorithmus 4.8.2** (verallgemeinertes NEWTON-Verfahren).

0. Wähle einen Initialwert  $x^0 \in X$ , welcher hinreichend nahe an der Lösung  $\bar{x}$  von (4.82) liegt.  
Für  $k = 0, 1, 2, \dots$ :
1. Falls  $G(x^k) = 0$ , STOPP.
2. Wähle einen invertierbaren Operator  $A_k \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
3. Bestimme  $d^k \in X$  durch Lösen von  $A_k d^k = -G(x^k)$ .
4. Setze  $x^{k+1} := x^k + d^k$ .

Wir betrachten die durch den Algorithmus erzeugte Folge  $(x^k)_k$  in einer Umgebung der Lösung  $\bar{x} \in X$  von (4.82), d.h.  $G(\bar{x}) = 0$ . Für den Abstand  $e^k := x^k - \bar{x}$  zur Lösung gilt

$$A_k e^{k+1} = A_k(x^{k+1} - \bar{x}) = A_k(x^k + d^k - \bar{x}) = A_k e^k - G(x^k) = G(\bar{x}) + A_k e^k - G(x^k).$$

Folglich erhalten wir, dass



- $(x^k)_k$  genau dann q-linear mit Rate  $\gamma \in (0, 1)$  gegen  $\bar{x}$  konvergiert, wenn

$$\|A_k^{-1} (G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_X \leq \gamma \|e^k\|_X \quad (4.83)$$

für alle  $k$  mit  $\|e^k\|_X$  hinreichend klein gilt. Die Abschätzung ist gleichmäßig in  $k$  gemeint, d.h. es existiert ein  $\delta_\gamma > 0$ , sodass (4.83) für alle  $k$  mit  $\|e^k\|_X < \delta_\gamma$  gilt.

- $(x^k)_k$  genau dann q-superlinear gegen  $\bar{x}$  konvergiert, wenn

$$\|A_k^{-1} (G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_X = o(\|e^k\|_X) \quad \text{für} \quad \|e^k\|_X \rightarrow 0 \quad (4.84)$$

gilt. Dabei ist  $o(\|e^k\|_X)$  gleichmäßig in  $k$  zu verstehen, d.h. für alle  $\eta \in (0, 1)$  existiert ein  $\delta_\eta > 0$ , sodass

$$\|A_k^{-1} (G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_X \leq \eta \|e^k\|_X$$

für alle  $k$  mit  $\|e^k\|_X < \delta_\eta$  gilt.

- $(x^k)_k$  genau dann mit q-Ordnung  $1 + \alpha > 1$  gegen  $\bar{x}$  konvergiert, wenn

$$\|A_k^{-1} (G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_X = O(\|e^k\|_X^{1+\alpha}) \quad \text{für} \quad \|e^k\|_X \rightarrow 0 \quad (4.85)$$

gilt, wobei die Abschätzung, wie im letzten Punkt, wieder gleichmäßig in  $k$  zu verstehen ist.

Die Kleinheitsbedingung für

$$\|A_k^{-1} (G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_X$$

wird häufig zweigeteilt und zwar in die *Regularitätsbedingung*

$$\|A_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq C \quad \forall k \geq 0 \quad (4.86)$$

und die *Approximationsbedingung*

$$\|(G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_Y = o(\|e^k\|_X) \quad \text{für} \quad \|e^k\|_X \rightarrow 0 \quad (4.87)$$

bzw.

$$\|(G(\bar{x} + e^k) - G(\bar{x}) - A_k e^k)\|_Y = O(\|e^k\|_X^{1+\alpha}) \quad \text{für} \quad \|e^k\|_X \rightarrow 0. \quad (4.88)$$

In Bezug auf die lokale Konvergenz des verallgemeinerten NEWTON-Verfahrens und deren Ordnung gilt der folgende Satz, dessen Beweis wir z.B. in [HPUU09, Theorem 2.9] finden.

**Satz 4.8.9.** *Sei  $\bar{x} \in X$  Lösung der Operatorgleichung (4.82) und sei  $(x^k)_k$  eine durch das verallgemeinerte NEWTON-Verfahren, siehe Algorithmus 4.8.2, erzeugte Folge. Dann gilt:*

- (i) *Falls  $x^0$  hinreichend nah an  $\bar{x}$  liegt und (4.83) gilt, dann konvergiert  $(x^k)_k$  q-linear mit Rate  $\gamma$  gegen  $\bar{x}$ .*
- (ii) *Falls  $x^0$  hinreichend nah an  $\bar{x}$  liegt und (4.84) (bzw. (4.86) und (4.87)) gilt, dann konvergiert  $(x^k)_k$  q-superlinear gegen  $\bar{x}$ .*
- (iii) *Falls  $x^0$  hinreichend nah an  $\bar{x}$  liegt und (4.85) (bzw. (4.86) und (4.88)) gilt, dann konvergiert  $(x^k)_k$  q-superlinear mit Ordnung  $1 + \alpha$  gegen  $\bar{x}$ .*

Betrachten wir nun den Spezialfall des klassischen NEWTON-Verfahrens. Dazu nehmen wir an, dass  $G$  stetig F-differenzierbar ist und wählen  $A_k := G'(x^k)$ . Die obige Regularitätsbedingung lautet dann

$$\|(G'(x^k))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq C \quad \forall k \geq 0.$$

Mit dem Lemma von BANACH ist dies gleichbedeutend mit der Stetigkeit von  $G'$  im Lösungspunkt  $\bar{x}$  und der stetigen Invertierbarkeit von  $G'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Letzteres ist mit dem Satz von der stetigen Inversen äquivalent zur Bijektivität von  $G'(\bar{x}) \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Wir rechnen leicht nach, dass die F-Differenzierbarkeit von  $G$  in  $\bar{x}$  in Verbindung mit der Stetigkeit von  $G'$  die Approximationsbedingung (4.87) impliziert. Falls  $G'$  zudem HÖLDER-stetig mit Ordnung  $\alpha$  ist, dann ist sogar (4.88) erfüllt. Wie in [HPUU09, Corollary 2.1] erhalten wir das

**Korollar 4.8.10.** *Sei  $G : X \rightarrow Y$  ein stetig F-differenzierbar Operator zwischen den BANACH-Räumen  $X, Y$  und sei  $G'(\bar{x})$  stetig invertierbar am Lösungspunkt  $\bar{x}$  von (4.82). Dann konvergiert das klassische NEWTON-Verfahren, d.h. Algorithmus 4.8.2 mit  $A_k := G'(x^k)$  für alle  $k$ , lokal  $q$ -superlinear. Wenn  $G'$  in der Nähe von  $\bar{x}$  zusätzlich HÖLDER-stetig mit Ordnung  $\alpha$  ist, dann ist die Konvergenzordnung  $1 + \alpha$ .*

Wir wollen dieses Korollar verwenden, um die Konvergenz des klassischen NEWTON-Verfahrens für die verallgemeinerte EULER-Gleichung (4.76), zumindest für hinreichend kleine  $\delta > 0$ , zu zeigen. Dazu können wir die Ergebnisse des letzten Abschnittes über die eindeutige Lösbarkeit des gestörten Optimierungsproblems verwenden. Dort wurden Bedingungen hergeleitet, unter denen  $\mathcal{M}_0''(\bar{g})$  stetig invertierbar ist. Mit dem Satz 4.5.9 auf Seite 99 folgt damit für hinreichend kleine  $\delta > 0$  aber auch die stetige Invertierbarkeit von  $\mathcal{M}_\delta''(\bar{g}^\delta)$ .

**Korollar 4.8.11.** *Es seien die Voraussetzungen von Korollar 4.7.6 auf Seite 121 erfüllt. Dann konvergiert das klassische NEWTON-Verfahren, d.h. Algorithmus 4.8.2 mit  $A_k := \mathcal{M}_\delta''(x^k)$  für alle  $k$ , lokal  $q$ -superlinear gegen eine Lösung  $\bar{g}^\delta \in (V_\Gamma)'$  von (4.76), sofern  $\delta \geq 0$  hinreichend klein und  $V_\Gamma$  wie folgt gewählt ist. Im Zweidimensionalen ist der allgemeinste Fall  $(V_\Gamma)' = H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  erlaubt. Im dreidimensionalen Fall gilt die Einschränkung  $(V_\Gamma)' \in \{L^2(\Gamma), H^{-\varepsilon}(\Gamma)\}$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , wobei der  $\varepsilon$ -Bereich unter Voraussetzung 4.8 auf  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$  erweitert werden kann. Gilt zusätzlich die Voraussetzung 4.5, so ist die Konvergenz quadratisch, wobei im Zweidimensionalen wieder  $(V_\Gamma)' = H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  gilt und im dreidimensionalen Fall der  $\varepsilon$ -Bereich auf  $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$  bzw. in Verbindung mit Voraussetzung 4.9 nur auf  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$  einzuschränken ist.*

*Beweis.* Die Behauptungen folgen aus Korollar 4.8.10, Korollar 4.7.6 auf Seite 121, siehe auch dessen Beweis, und den Überlegungen unmittelbar vor dem Korollar. Zur quadratischen Konvergenz beachten wir, dass unter den zusätzlichen Voraussetzungen mit Korollar 4.6.15 auf Seite 111 die dreimalige F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}_\delta$  folgt und die Beschränktheit von  $\mathcal{M}_\delta'''$  auf einer Kugel mit analogen Argumenten, wie im Beweis von Lemma 4.8.6 nachgewiesen werden kann, was zusammen hinreichend für die LIPSCHITZ-Stetigkeit (bzw. HÖLDER-Stetigkeit mit Ordnung  $\alpha = 1$ ) von  $\mathcal{M}_\delta''$  auf der besagten Kugel ist.  $\square$

Wir weisen darauf hin, dass die im letzten Korollar gemachten Voraussetzungen, insbesondere die durch Korollar 4.7.6 auf Seite 121 implizit eingebundenen, sehr stark sind. Speziell sei dabei an (4.70) erinnert. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Lemmata 4.7.8 bis 4.7.11, Seite 123ff., verwiesen, die hinreichende Bedingungen für (4.70) liefern.

Statt des klassischen NEWTON-Verfahrens können auch andere verallgemeinerte NEWTON-Verfahren verwendet werden, z.B. das vereinfachte NEWTON-Verfahren ( $A_k = \mathcal{M}'_0(x^k)$ ) oder das NEWTON-ähnliche Verfahren ( $A_k \approx \mathcal{M}'_0(x^k)$ ). Für eine Einführung in diese Verfahren siehe [KWS+73], [KA78] oder [Deu04]. Möglicherweise lässt sich die Konvergenz dieser modifizierten Verfahren unter schwächeren Voraussetzungen als denen für das klassische NEWTON-Verfahren zeigen. Selbst auf Gleichungen mit nichtglatten Operatoren kann das NEWTON-Verfahren verallgemeinert werden. Wir sprechen dann von halbglatten NEWTON-Verfahren, siehe z.B. [HPUU09, Chapter 2.5] für eine Einführung. Wir erinnern daran, dass die F-Differenzierbarkeit von  $\mathcal{M}'_\delta$  nur durch zusätzliche Voraussetzungen an die Glattheit der Nichtlinearitäten gesichert werden konnte, ganz zu schweigen von der im Dreidimensionalen nötigen Einschränkung des  $\varepsilon$ -Bereichs. Durch Verwenden von halbglatten NEWTON-Verfahren könnte möglicherweise auf einige dieser Zusatzvoraussetzungen verzichtet werden. Eine genauere Untersuchung wird hier nicht durchgeführt.

Im Zusammenhang mit verallgemeinerten NEWTON-Verfahren wollen wir noch einige Anmerkungen zu dem speziellen Fall  $\delta = 0$  machen. Statt das klassische NEWTON-Verfahren auf die verallgemeinerte Eulergleichung (4.76) anzuwenden, könnten wir es auch direkt benutzen, um die Nullstellenaufgabe (4.77) zu lösen. Sicherlich können wir das klassische NEWTON-Verfahren auf (4.77) anwenden, aber die Konvergenz lässt sich nicht mit klassischen Methoden sicherstellen, da an der Lösungsstelle  $\bar{g} \in (V_\Gamma)'$  neben (4.77) auch (4.76) gilt, also eine doppelte Nullstelle vorliegt. Somit ist  $\mathcal{M}'_0(\bar{g})$  nicht invertierbar, die Regularitätsbedingung (4.86) ist also verletzt. Als Alternativen bleiben die oben genannten modifizierten Verfahren. Hierauf wird aber nicht weiter eingegangen.

## 4.9 Ausblick auf weitere Lösungsansätze und Lösungsverfahren

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf andere Lösungsansätze und Verfahren zur Lösung der quasilinearen Modellprobleme (4.1) ein.

### 4.9.1 Ein verallgemeinerter optimierungsbasierter Ansatz

Wir wollen den Ansatz aus [DG00] für lineare Probleme auf das quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten übertragen. Dazu betrachten wir ein leicht abgeändertes restringiertes Minimierungsproblem, indem wir das nicht regularisierte Zielfunktional (4.29) durch das Funktional

$$\mathcal{J}(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2} \left\| \kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1(g))) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2(g))) \right\|_X^2 \quad (4.89)$$

ersetzen. Die Notation ist dabei wie in Abschnitt 4.5.2 gewählt.  $X$  bezeichnet hierbei einen geeigneten HILBERT-Raum. Der Unterschied zu (4.29) besteht darin, dass der Abstand der rücktransformierten Spuren in der Norm des Raumes  $X$  gemessen wird. Die Wahl  $X = L^2(\Gamma)$  liefert wieder (4.29). Da die Spuren aber mindestens im  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  liegen, ist auch die Wahl  $X = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  sinnvoll. Für entsprechend regulärere Probleme ist auch die Wahl  $X = H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  möglich.

Wir können analog zu Abschnitt 4.5.2 und den dort nachfolgenden Abschnitten vorgehen und ein (4.38) entsprechendes freies Minimierungsproblem herleiten. Wenn die Norm in  $X$  stärker als die Norm in  $L^2(\Gamma)$  ist, dann ist zu erwarten, dass für die Sinnhaftigkeit der F-Ableitungen von  $\mathcal{M}_\delta$  weitere Einschränkungen an den  $\varepsilon$ -Bereich zu machen sind, siehe Abschnitt 4.6.3. Umgekehrt würde die Wahl eines Raumes  $X$  mit einer sehr schwachen Norm die Problemklasse aber möglicherweise weniger einschränken. Dabei wäre allerdings zu prüfen, ob die Norm noch stark genug ist, um das Ausgangsproblem zu lösen. Genauer soll auf diese Idee hier nicht eingegangen werden.

### 4.9.2 Weitere Lösungsansätze

Weiterhin können zur Lösung des quasilinearen Transmissionsproblems mit springenden Nichtlinearitäten (4.5) oder des transformierten Transmissionsproblems (4.22) formal auch Gebietszerlegungsmethoden, welche nicht auf Optimierungsansätzen beruhen, benutzt werden. Zufriedenstellende Konvergenzresultate, zumindest vom analytischen Standpunkt aus, sind dem Autor für diese Methoden nicht bekannt. In diesem Zusammenhang sei an die in Abschnitt 4.4 dargestellten Probleme bei der Anwendung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode aus den Kapiteln 2 und 3 auf das quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten erinnert. In [BKS07] bzw. [Ber07, Chapter 3.3] wurde beispielsweise eine DIRICHLET-NEUMANN-Methode zur Lösung des transformierten Transmissionsproblems verwendet, wobei analytische Konvergenzresultate allerdings nur im eindimensionalen Fall erzielt werden konnten. Um die Konvergenz der DIRICHLET-NEUMANN-Methode für höherdimensionale Probleme zu sichern, ist in den zitierten Arbeiten zusätzlich eine Monotoniebedingung nötig, welche für das hier betrachtete Modellproblem im Allgemeinen nicht verfügbar ist.

### 4.9.3 Weitere Lösungsverfahren für die Minimierungsprobleme

Schon um die Konvergenz des Abstiegsverfahrens zur Lösung des freien Minimierungsproblems (4.38) sicherstellen zu können, waren speziell im dreidimensionalen Fall einschränkende Voraussetzungen nötig. Diese Voraussetzungen wurden hauptsächlich benötigt, um die Ableitungen des Funktionals  $\mathcal{M}_\delta$  in den Griff zu bekommen. In diesem Zusammenhang wäre es sinnvoll, ableitungsfreie Verfahren zur Lösung des Minimierungsproblems (4.38) zu untersuchen.

Statt uns auf das freie Minimierungsproblem (4.38) einzuschränken, wie in den letzten Abschnitten geschehen, können wir auch Verfahren zur Lösung des restringierten Minimierungsproblems (4.33) betrachten. In diesem Zusammenhang seien beispielsweise die projizierte Gradientenmethode, siehe z.B. [HPUU09, Chapter 2.2.2], oder die LAGRANGE-NEWTON-Methode der sequentiellen quadratischen Programmierung, siehe z.B. [HPUU09, Chapter 2.6.1], erwähnt. Ersteres stellt dabei ein global konvergentes und letzteres ein lokal konvergentes Verfahren dar. In Verbindung mit

der projizierten Gradientenmethode erinnern wir daran, dass die zulässige Menge  $\mathcal{F}_{ad}$  nach (4.30) konvex ist.

## 4.10 Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde ein nichtmonotones quasilineares Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten eingeführt. Dabei wurden die Differentialoperatoren und die geometrischen Voraussetzungen an die Gebiete festgelegt, wobei lediglich gefordert wurde, dass das LIPSCHITZ-Gesamtgebiet  $\Omega$  eine Zerlegung in zwei LIPSCHITZ-Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit jeweils echtem Außenrand und gemeinsamen Rand  $\Gamma$  zulasse. Zudem wurde eine schwache Formulierung des Modellproblems angegeben. Die eindeutige schwache Lösbarkeit des Modellproblems wurde als Voraussetzung formuliert. Weiterhin wurde ein nichtmonotones quasilineares Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten auf den Teilgebieten hergeleitet. Auch dieses Transmissionsproblem wurde variationell formuliert. Die eindeutige schwache Lösbarkeit des Transmissionsproblems ergab sich als direkte Folgerung der eindeutigen schwachen Lösbarkeit des Modellproblems und der Äquivalenz der schwachen Formulierungen der beiden Probleme, die ebenfalls gezeigt wurde.

Im zweiten Abschnitt, der eine sinngemäße Rekapitulation der Ergebnisse aus [Ber07, Section 1.5.4] darstellt, wurde die KIRCHHOFF-Transformation, sowohl als reelle Funktion als auch als Abbildung zwischen Funktionenräumen eingeführt. Dabei wurde die KIRCHHOFF-Transformation als Kompositionoperator zwischen geeigneten Funktionenräumen über LIPSCHITZ-Gebieten  $\Omega$  und über Teilrändern  $\Gamma$  von Gebieten aufgefasst. Es stellte sich heraus, dass diese, unter strikten Positivitätsforderungen an den Kern der Transformation, LIPSCHITZ-stetig und beschränkt im  $L^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Gamma)$  agiert und eine LIPSCHITZ-stetige beschränkte Inverse besitzt. Zudem konnte gezeigt werden, dass die KIRCHHOFF-Transformation den SOBOLEV-Raum  $H^1(\Omega)$  stetig und beschränkt in sich abbildet und unter der obigen strikten Positivitätsforderung eine ebenfalls stetige beschränkte Inverse hat. Für  $H^1(\Omega)$ -Funktionen wurde außerdem gezeigt, dass der Spuroperator auf Teilrändern und der Kompositionoperator der KIRCHHOFF-Transformation kommutieren. Mit dieser Eigenschaft konnte dann nachgewiesen werden, dass unter der Transformation ebenso die Spurräume  $H^{1/2}(\Gamma)$  und  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  stetig und beschränkt in sich abgebildet werden und eine stetige beschränkte Inverse existiert, falls die Kerne strikt positiv sind.

Im dritten Abschnitt wurde die KIRCHHOFF-Transformation benutzt, um das nichtmonotone quasilineare Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten in ein springendes Transmissionsproblem zu überführen. Dieses ist auf den Teilgebieten  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  linear und weist zudem eine sehr einfache Gestalt auf. Die Nichtlinearität des Ausgangsproblems ging durch die Transformation nicht verloren, denn sie findet sich in den Transmissionsbedingungen des springenden Transmissionsproblems wieder. Des Weiteren wurde das springende Transmissionsproblem schwach formuliert und seine Äquivalenz zum nichtmonotonen quasilinearen Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten nachgewiesen. Damit ergab sich die eindeutige Lösbarkeit des springenden Transmissionsproblems aus der des nichtmonotonen Transmissionsproblems.

Der vierte Abschnitt dieses Kapitels diente dazu, die Probleme aufzuzeigen, die sich bei der Anwendung der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZsche Methode für quasilineare Probleme aus Kapitel 3 auf das nichtmonotone quasilineare Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten ergeben. Dabei stellte sich heraus, dass das Zusammentreffen von Nichtmonotonie und Sprüngen in den Nichtlinearitäten die erfolgreiche Anwendung der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode verhindern. Auch das springende Transmissionsproblem lies sich nicht mit einer modifizierten verallgemeinerten SCHWARZschen Methode für lineare Probleme behandeln.

Da die verallgemeinerte SCHWARZsche Methode nicht auf nichtmonotone quasilineare Probleme mit springenden Nichtlinearitäten angewendet werden konnte, wurde im fünften Abschnitt ein optimierungsbasierter Ansatz zur Lösung des Problems gewählt. Dabei wurden die Ideen für lineare Probleme aus [GPK99] verallgemeinert. Zunächst wurden Hilfsprobleme, die partiell mit den Teilproblemen des springenden Transmissionsproblems übereinstimmen, formuliert und deren eindeutige Lösbarkeit gezeigt. Anschließend wurde ein restringiertes Minimierungsproblem eingeführt, in dessen Nebenbedingungen die Hilfsprobleme eingehen. Das Zielfunktional des Minimierungsproblems misst dabei den Abstand der DIRICHLET-Daten des Transmissionsproblems. Dann wurde gezeigt, dass die eindeutige global optimale Lösung des Minimierungsproblems, deren Existenz bewiesen wurde, auch dem springenden Transmissionsproblem genügt und umgekehrt. Im nächsten

Schritt wurde das Zielfunktional mit einem parameterabhängigen Regularisierungsterm versehen, der sich für lineare Probleme als nützlich erwiesen hat. Wenn dabei der Parameter verschwindet, dann stimmt das regularisierte Funktional wieder mit dem Ausgangsfunktional überein. Für die so entstandenen regularisierten Minimierungsprobleme konnte gezeigt werden, dass diese (nicht notwendig eindeutige) lokal optimale Lösungen besitzen, welche für kleiner werdende Parameter schwach in  $H^1$  gegen die Lösung des ursprünglichen restringierten Optimierungsproblems konvergieren. Weiterhin konnte das parameterabhängige regularisierte restringierte Minimierungsproblem äquivalent in ein parameterabhängiges freies Minimierungsproblem umgeformt werden. Die notwendige Optimalitätsbedingung für lokale Extrema wurde anschließend benutzt, um mit Hilfe des impliziten Funktionentheorems einen Satz zu formulieren, der die Eindeutigkeit der Lösung der freien Minimierungsprobleme, zumindest für kleine Parameter, sichert. Die Voraussetzungen dieses Satzes wurden in den folgenden beiden Abschnitten nachvollzogen.

Im sechsten Abschnitt wurde dazu untersucht, wann das Zielfunktional  $\mathcal{M}_\delta$  des parameterabhängigen freien Optimierungsproblems FRÉCHET-differenzierbar ist. Dazu war es zunächst notwendig, einige Resultate in Verbindung mit punktweisen Produkten, speziell auch in Funktionenräumen über Teilräumen, zu erlangen. Weiterhin mussten Kompositionsoperatoren in Räumen höherer Glattheit untersucht werden. Mit diesen Vorbereitungen konnte, unter verschiedenen Voraussetzungen, insbesondere an die Glattheit der Nichtlinearitäten, anschließend die Wohldefiniertheit der Ableitungen und schließlich auch die F-Differenzierbarkeit gezeigt werden.

Neben der F-Differenzierbarkeit des Zielfunktionals  $\mathcal{M}_\delta$  war die zweite Voraussetzung des Satzes aus dem fünften Abschnitt, der die Eindeutigkeit der Lösungen der regularisierten Minimierungsprobleme sicherte, die stetige Invertierbarkeit des Operators  $\mathcal{M}_0''(\bar{y})$ , wobei  $\bar{y}$  die eindeutige Lösung des nicht regularisierten freien Minimierungsproblems bezeichnet. Wann diese Voraussetzung erfüllt werden kann, wurde im siebten Abschnitt dieses Kapitels untersucht. Die stetige Invertierbarkeit dieses Operators wurde zunächst auf die eines besser zu handhabenden linearen stetigen Operators  $\Lambda$  reduziert. Anschließend wurde eine Klasse vereinfachter Operatoren  $\Lambda_0$  eingeführt, von denen die stetige Invertierbarkeit gezeigt werden konnte. Danach wurde gesichert, dass der Operator  $\Lambda$  die gleichen Abbildungseigenschaften wie die vereinfachten Operatoren hat. Im letzten Schritt konnte das Störlemma für lineare Operatoren verwendet werden, um die stetige Invertierbarkeit von  $\Lambda$  zu zeigen, sofern dieser in der Nähe eines vereinfachten Operators liegt. Um diese Resultate erzielen zu können, mussten mehrere Voraussetzungen gemacht werden. Als sehr einschränkend erwies sich die Voraussetzung, die sichert, dass  $\Lambda$  in der Nachbarschaft eines vereinfachten Operators liegt. Diese besagt nämlich, dass die Spuren der Lösung des Ausgangsproblems nicht zu weit von einer Klasse fest vorgegebener Funktionen, in die die Nichtlinearitäten mit eingehen, entfernt sind. Weiterhin waren auch zusätzliche, von der Dimension abhängige, Regularitätsforderungen an die Lösung des Modellproblems notwendig. Speziell im Dreidimensionalen machte sich dies bemerkbar, da die Lösungen der Teilprobleme dann in  $H^{3/2+\tau}(\Omega_i)$ ,  $\tau > 0$ ,  $i = 1, 2$ , liegen mussten.

Im achten Abschnitt wurden Lösungsverfahren für das freie Optimierungsproblem angegeben. Zunächst wurde darauf hingewiesen, dass die Ableitungen, welche von den Lösungsverfahren benutzt werden, effizient berechnet werden können. Anschließend wurden Abstiegsverfahren und deren Eigenschaften rekapituliert. Dann wurde gezeigt, dass das Verfahren des steilsten Abstiegs zur Lösung des freien Optimierungsproblems angewendet werden kann, wobei die Konvergenz unter relativ geringen Voraussetzungen gesichert wurde. Um lokal höhere Konvergenzgeschwindigkeit zu erzielen, wurde die Anwendbarkeit des NEWTON-Verfahrens untersucht. Unter den im letzten Abschnitt erwähnten (starken) Voraussetzungen, die die eindeutige Lösbarkeit des Optimierungsproblems sichern, konnte die Konvergenz des NEWTON-Verfahrens gezeigt werden. Unter weiteren Glattheitsvoraussetzungen an die Nichtlinearitäten ist die Konvergenz zudem quadratisch.

Im neunten Abschnitt wurde ein Ausblick auf weitere Lösungsansätze und Lösungsverfahren gegeben.

# A Grundlagen

## A.1 Dualräume, Bilinearformen und der Satz von Lax-Milgram

### A.1.1 Dualräume

Wir halten uns an die Darstellungen in [Hac96, Section 6.3].  $X$  sei ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Als *Dualraum*  $(X)'$  bezeichnen wir den Raum der beschränkten, linearen Abbildungen von  $X$  in  $\mathbb{R}$ :

$$(X)' := \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

$(X)'$  ist ein BANACH-Raum mit der *Dualnorm*

$$\|x'\|_{(X)'} := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|x'(x)|}{\|x\|_X}. \quad (\text{A.1})$$

Die Elemente von  $(X)'$  heißen *lineare Funktionale* auf  $X$ . Statt  $x'(x)$  schreiben wir auch  $\langle x', x \rangle_{(X)' \times X}$  und bezeichnen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(X)' \times X}$  als *Dualform* oder *Dualitätsprodukt* auf  $(X)' \times X$ . Für einen BANACH-Raum  $X$ , der dicht und stetig in den BANACH-Raum  $Y$  eingebettet ist, ist  $(Y)'$  stetig in  $(X)'$  eingebettet.

Mit den normierten Räumen  $X, Y$  und  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  erhalten wir durch

$$\langle y', Tx \rangle_{(Y)' \times Y} = \langle x', x \rangle_{(X)' \times X} \quad \forall x \in X$$

für jedes  $y' \in (Y)'$  ein eindeutiges  $x' \in (X)'$ . Die lineare Abbildung  $y' \mapsto x'$  definiert den *Dualoperator* bzw. *adjungierten Operator*  $T' : (Y)' \rightarrow (X)'$  mit  $T'y' = x'$ . Es gilt  $T' \in \mathcal{L}((Y)', (X)')$  und

$$\|T'\|_{\mathcal{L}((Y)', (X)')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Für HILBERT-Räume  $X$  haben wir den

**Satz A.1.1** (Darstellungssatz von RIESZ).  *$X$  sei HILBERT-Raum und  $f$  ein Element von  $(X)'$ . Dann existiert genau ein  $y_f \in X$ , sodass*

$$f(x) = (x, y_f)_X \quad \forall x \in X \text{ und } \|f\|_{(X)'} = \|y_f\|_X.$$

Im Folgenden sei  $X$  weiterhin ein HILBERT-Raum. Dann existiert eine eindeutige Zuordnung  $J_X \in \mathcal{L}(X, (X)')$  mit  $J_X y = f_y, J_X^{-1} f = y_f$ , die die Norm erhält:  $\|J_X\|_{\mathcal{L}(X, (X)')} = \|J_X^{-1}\|_{\mathcal{L}((X)', X)} = 1$ .  $J_X$  heißt *RIESZ-Isomorphismus*.  $(X)'$  ist ebenfalls ein HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt  $(x', y')_{(X)'} = (J_X^{-1} x', J_X^{-1} y')_X$  und die Dualnorm  $\|x'\|_{(X)'}$  aus (A.1) stimmt mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm überein.  $X$  wird mit  $((X)')'$  mittels  $x(x') := x'(x)$  identifiziert. Damit gilt  $J_{(X)'} = J_X^{-1}, J_X = J_X', T'' = T$  für  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , wenn  $Y = ((Y)')'$  ebenfalls ein HILBERT-Raum ist. Des Weiteren können wir  $X$  und  $(X)'$  identifizieren:  $X = (X)'$ ,  $J_X = I$ , wobei  $I$  die Identität bezeichnet.

Seien  $X, Y$  HILBERT-Räume und  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Die durch  $T^* := J_X^{-1} T' J_Y \in \mathcal{L}(Y, X)$  definierte Abbildung heißt der zu  $T$  *adjungierte Operator* oder besser *HILBERT-Raum adjungierte Operator* und es gilt  $(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X$  für alle  $x \in X, y \in Y$  und  $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y, X)}$ .  $T \in \mathcal{L}(X, X)$  heißt *selbstadjungiert*, wenn  $T = T^*$  gilt.

Seien  $V \subset U$  HILBERT-Räume mit stetiger dichter Einbettung. Dann ist  $(U)'$  stetig und dicht in  $(V)'$  eingebettet. Damit erhalten wir den sogenannten GELFAND-Dreier

$$V \subset U \subset (V)'.$$

In einem GELFAND-Dreier sind auch  $V$  und  $U$  stetig und dicht in  $(V)'$  eingebettet.

Das Skalarprodukt  $(y, x)_U$  kann wegen  $U = (U)'$  auch in der Form  $y(x) = \langle y, x \rangle_{(U)' \times U}$  geschrieben werden. Ist  $x \in V$ , so gilt auch  $y(x) = \langle y, x \rangle_{(V)' \times V}$ . Also gilt  $(y, x)_U = \langle y, x \rangle_{(V)' \times V}$  für alle  $x \in V$ ,  $y \in U \subset (V)'$ . Mit der dichten und stetigen Einbettung  $U \subset (V)'$  sehen wir, dass die Dualform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(V)' \times V}$  als stetige Fortsetzung des Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)_U$  auf  $(V)' \times V$  angesehen werden kann.

Im Zusammenhang mit SOBOLEV-Räume wählen wir stets  $U := L^2(\Omega)$ , sodass die Einbettungen für  $s \geq 0$  wie folgt lauten:

$$H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H_0^s(\Omega))' \quad \text{und} \quad H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^s(\Omega))'.$$

Wir beweisen noch ein

**Lemma A.1.2.** *Sei  $V \subset U \subset (V)'$  ein GELFAND-Dreier und bezeichne  $J \in \mathcal{L}(V, (V)')$  den RIESZ-Isomorphismus. Für beliebiges  $\lambda \in (V)'$  gilt für alle  $v \in V$  die Abschätzung*

$$\langle \lambda, v \rangle_{(V)' \times V} \leq \|\lambda\|_{(V)'} \|v\|_U.$$

Weiter gilt auch  $\|J^{-1}\lambda\|_U = \|\lambda\|_{(V)'}$ .

*Beweis.* Natürlich ist die Abschätzung  $|\langle \lambda, v \rangle_{(V)' \times V}| \leq \|\lambda\|_{(V)'} \|v\|_V$  trivial. Die Beschränktheit bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_U$  mit gleichbleibender Beschränktheitskonstante erhalten wir unter Beachtung von  $x \leq |x|$  mit

$$\langle \lambda, v \rangle_{(V)' \times V} = \langle J J^{-1} \lambda, v \rangle_{(V)' \times V} = (J^{-1} \lambda, v)_U \leq |(J^{-1} \lambda, v)_U| \leq \|J^{-1} \lambda\|_U \|v\|_U \leq \|\lambda\|_{(V)'} \|v\|_U,$$

wobei für die letzte Ungleichung

$$\|J^{-1} \lambda\|_U \leq \|J^{-1} \lambda\|_V \leq \|J^{-1}\| \|\lambda\|_{(V)'}$$

und  $\|J^{-1}\| = 1$  benutzt wurde. Die zweite Behauptung folgt unter Benutzung der eben bewiesenen Aussage aus

$$\|\lambda\|_{(V)'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle \lambda, v \rangle_{(V)' \times V}| \leq \sup_{\|v\|_U \leq \|v\|_V \leq 1} \|J^{-1} \lambda\|_U \|v\|_U \leq \|J^{-1} \lambda\|_U \leq \|\lambda\|_{(V)'}. \quad \square$$

Wir übernehmen aus [HS91, Korollar 6.7] den wichtigen

**Satz A.1.3** (Fortsetzungssatz von HAHN-BANACH). *Sei  $X$  ein normierter Raum und  $U$  ein Untervektorraum. Zu jedem stetigen linearen Funktional  $u' : U \rightarrow \mathbb{R}$  existiert dann ein stetiges lineares Funktional  $x' : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$x'|_U = u', \quad \|x'\|_{(X)'} = \|u'\|_{(U)'}$$

*Jedes stetige Funktional kann also normgleich fortgesetzt werden.*

Sei  $X$  ein normierter Raum. Die Folge  $(x_n)_n$  ist *schwach konvergent* gegen  $x^*$ , wenn für alle  $x' \in X'$  gilt  $\langle x', x_n \rangle_{(X)' \times X} \rightarrow \langle x', x^* \rangle_{(X)' \times X}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir schreiben dann  $x_n \rightharpoonup x^*$ . Ist die Folge  $(x_n)_n$  schwach konvergent, so ist die Folge  $(\|x_n\|_X)_n$  beschränkt. Zudem ist der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge eindeutig. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf Lemma C.3.2 auf Seite 165.

## A.1.2 Bilinearformen

$(V, \|\cdot\|_V)$  sei ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die Abbildung  $b(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Bilinearform*, falls sie in jeder Komponente linear ist.  $b(\cdot, \cdot)$  heißt *stetig* (oder *beschränkt*), falls ein  $C_S > 0$  existiert, sodass

$$|b(x, y)| \leq C_S \|x\|_V \|y\|_V \quad \forall x, y \in V.$$

Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, falls  $b(x, y) = b(y, x)$  für alle  $x, y \in V$  gilt. Von Definitheit bzw. Semidefinitheit spricht man normalerweise nur in Verbindung mit symmetrischen Bilinearformen. Wir übertragen diese Begriffe in analoger Weise auf beliebige Bilinearformen.

**Definition A.1.1.** Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  heißt *positiv semidefinit* bzw. *positiv definit*, falls  $b(x, x) \geq 0$  bzw.  $b(x, x) > 0$  für alle  $x \in X, x \neq 0$  gilt.

Eine positiv definite symmetrische Form heißt Skalarprodukt. Die bekannte Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ für symmetrische positiv semidefinite Bilinearformen kann man verallgemeinern.

**Satz A.1.4** (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung). *Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $b(\cdot, \cdot)$  eine (nicht notwendig symmetrische) positiv semidefinite Bilinearform auf  $V$ . Dann gilt für alle  $x, y \in V$ , falls  $b(\cdot, \cdot)$  sich in der Form*

$$b(x, y) = b_s(x, y) + b_n(x, y) \tag{A.2}$$

mit symmetrischem Anteil  $b_s(\cdot, \cdot) \neq 0$  und nicht symmetrischem Anteil  $b_n(\cdot, \cdot)$  schreiben lässt

$$|b(x, y)| \cdot |b(y, x)| = |b(x, y) b(y, x)| \leq b(x, x) b(y, y). \tag{A.3}$$

Für eine symmetrische Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  folgt damit sofort

$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x) b(y, y).$$

*Beweis.* Aus dem Standardbeweis der klassischen CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung im symmetrischen Fall (siehe z.B. [HS91, Satz 20.3]) folgt unter Ausschluss der Symmetrievoraussetzung sofort

$$b(x, y) b(y, x) \leq b(x, x) b(y, y). \tag{A.4}$$

Für den Fall, dass  $\text{sgn}(b(x, y)) = \text{sgn}(b(y, x))$  ist, folgt (A.3) sofort mit (A.4). Der Fall, dass  $\text{sgn}(b(x, y)) = 0$  oder  $\text{sgn}(b(y, x)) = 0$  ist, ist trivial. Bleibt der Fall, dass  $0 \neq \text{sgn}(b(x, y)) \neq \text{sgn}(b(y, x)) \neq 0$ . Sei o.B.d.A.  $b(y, x) < 0 < b(x, y)$ . Mit (A.2), d.h.

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b_s(x, y) + b_n(x, y) \\ b(y, x) &= b_s(y, x) + b_n(y, x) \end{aligned}$$

und  $b_s(x, y) = b_s(y, x)$  gilt dann

$$b_n(y, x) < -b_s(x, y) < b_n(x, y). \tag{A.5}$$

Addition von (A.5) einerseits mit  $b_n(y, x)$  und andererseits mit  $b_n(x, y)$  liefert nach Zusammensetzen der Teilergebnisse

$$-(b_n(x, y) - b_n(y, x)) < b(y, x) < 0 < b(x, y) < b_n(x, y) - b_n(y, x). \tag{A.6}$$

Aus (A.6) folgt sofort

$$\begin{aligned} 0 < |b(y, x)| &< b_n(x, y) - b_n(y, x) \\ 0 < |b(x, y)| &< b_n(x, y) - b_n(y, x), \end{aligned}$$

was nach Subtraktion den Widerspruch  $0 < 0$  liefert. Somit kann der Fall  $0 \neq \text{sgn}(b(x, y)) \neq \text{sgn}(b(y, x)) \neq 0$  nicht auftreten und es gilt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Nachfolgend sei  $V$  ein HILBERT-Raum.



**Definition A.1.2.** Eine Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  heißt *V-elliptisch*, falls sie auf  $V \times V$  stetig ist und eine Zahl  $C_E > 0$  existiert, so dass

$$b(x, x) \geq C_E \|x\|_V^2 \quad \forall x \in V.$$

Sei  $V \subset U \subset (V)'$  ein GELFAND-Dreier. Eine Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  heißt *V-koerziv*, wenn sie stetig ist und wenn Zahlen  $C_E > 0$  und  $C_K \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$b(x, x) \geq C_E \|x\|_V^2 - C_K \|x\|_U^2 \quad \forall x \in V.$$

**Satz A.1.5** (LAX-MILGRAM). *Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei V-elliptisch. Dann hat das Problem:*

$$\text{Finde } u \in V \text{ mit } b(u, v) = f(v) \text{ für alle } v \in V,$$

mit  $f \in (V)'$  genau eine Lösung  $u$  welche der Abschätzung  $\|u\|_V \leq \frac{1}{C_E} \|f\|_{(V)'}$  genügt. Dabei bezeichnet  $C_E$  die Elliptizitätskonstante aus obiger Definition.

Der Beweis findet sich beispielsweise in [Hac96, Satz 6.5.9] oder [Wlo82, Satz 17.9 bzw. Satz 17.10].

## A.2 Funktionenräume auf Lipschitz-Gebieten

In diesem Abschnitt werden wie die in der Arbeit verwendeten Definitionen und Sätze in Zusammenhang mit Funktionenräumen auf LIPSCHITZ-Gebieten zusammengetragen. Die Resultate zu SOBOLEV-Räume auf LIPSCHITZ-Gebieten finden sich beispielsweise in den Büchern [AF03], [Gri85], [Neč67] und [Wlo82]. Für TRIEBEL-LIZORKIN- und BESOV-Räume auf LIPSCHITZ-Gebieten verweisen wir auf die Artikel [Tri02], [MM04] und [MM07].

### A.2.1 Lipschitz-Gebiete

Zunächst spezifizieren wir einige Regularitätseigenschaften von Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , die in der vorliegenden Arbeit benutzt wurden. Siehe hierzu auch [AF03, Section 4.5-4.11]. Wir vereinbaren die folgende Notation:

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

**Definition A.2.1** (Segmentbedingung).  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  genügt der *Segmentbedingung*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U_x$  und einen Vektor  $v_x \neq 0$  gibt, sodass aus  $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$  auch  $z + tv_x \in \Omega$  für  $0 < t < 1$  folgt.

Da der Rand von  $\Omega$  notwendigerweise abgeschlossen ist, können wir seine offene Überdeckung durch die Umgebungen  $U_x$  der letzten Definition durch eine lokal endliche Teilüberdeckung  $\{U_1, U_2, \dots\}$  mit entsprechenden Vektoren  $v_1, v_2, \dots$  ersetzen und zwar so, dass aus  $z \in \overline{\Omega} \cap U_j$ , für ein  $j$ , auch  $z + tv_j \in \Omega$  für  $0 < t < 1$  folgt.

**Definition A.2.2** (Kegelbedingung).  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  genügt der *Kegelbedingung*, wenn ein endlicher Kegel  $C$  existiert, sodass jeder Punkt  $x \in \Omega$  die Spitze eines endlichen Kegels  $C_x \subset \Omega$  ist, welcher kongruent zu  $C$  ist.  $C_x$  erhalten wir dabei aus  $C$  allein durch Rotationen und Verschiebungen.

**Definition A.2.3** (lokale LIPSCHITZ-Bedingung).  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  genügt der *lokalen LIPSCHITZ-Bedingung*, wenn positive Zahlen  $\delta$  und  $M$ , eine lokal endliche offene Überdeckung  $\{U_j\}_j$  von  $\partial\Omega$  und für jedes  $j$  eine reellwertige Funktion  $f_j$  von  $N - 1$  Variablen existieren, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

- (i) Es existiert ein endliches  $k$ , sodass jeder Schnitt von  $k + 1$  Mengen  $U_j$  leer ist.
- (ii) Für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \Omega_\delta$  mit  $|x - y| < \delta$  existiert ein  $j$ , sodass

$$x, y \in V_j := \{x \in U_j \mid \text{dist}(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

- (iii) Jede Funktion  $f_j$  genügt einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante  $M$ , d.h. für  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N-1}$  gilt

$$|f_j(\xi) - f_j(\eta)| \leq M |\xi - \eta|.$$

- (iv) Für ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem  $(\zeta_{j,1}, \dots, \zeta_{j,N})$  in  $U_j$  wird  $\Omega \cap U_j$  durch die Ungleichung

$$\zeta_{j,N} < f_j(\zeta_{j,1}, \dots, \zeta_{j,N-1})$$

beschrieben.

Ist  $\Omega$  beschränkt, dann reduziert sich die letzte Definition auf die einfache Bedingung, dass  $\Omega$  lokal einen LIPSCHITZ-Rand besitzt, d.h. zu jedem Punkt  $x \in \partial\Omega$  existiert eine Umgebung  $U_x$ , deren Schnitt mit  $\partial\Omega$  der Graph einer LIPSCHITZ-stetigen Funktion ist. Von LIPSCHITZ-Gebieten sprechen wir, wenn das Gebiet der lokalen LIPSCHITZ-Bedingung genügt. Beispielsweise hat jede beschränkte offene konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  einen LIPSCHITZ-Rand, siehe [Gri85, Corollary 1.2.2.3].

**Definition A.2.4** ( $C^{k,\chi}$ -Regularitätsbedingung).  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  genügt der  $C^{k,\chi}$ -Regularitätsbedingung, wenn für jedes  $x \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U_x$ , welche  $(k, \chi)$ -diffeomorph zur Einheitskugel  $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$  ist, gefunden werden kann und für die  $(k, \chi)$ -diffeomorphen Transformationen  $\Phi_x : U_x \rightarrow B$  die folgenden Eigenschaften gelten:

- (i)  $U_x \cap \partial\Omega$  wird unter  $\Phi_x$  eineindeutig auf  $\{x \in B \mid x_N = 0\}$  abgebildet, d.h.

$$\Phi_x(U_x \cap \partial\Omega) = \{x \in B \mid x_N = 0\}.$$

- (ii)

$$\Phi_x(U_x \cap \Omega) = \{x \in B \mid x_N > 0\}.$$

- (iii)

$$\Phi_x(U_x \cap (\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})) = \{x \in B \mid x_N < 0\}.$$

Die lokale LIPSCHITZ-Bedingung entspricht der  $C^{0,1}$ -Regularitätsbedingung.

**Definition A.2.5** (gleichmäßige  $C^m$ -Regularitätsbedingung).  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  genügt der *gleichmäßigen  $C^m$ -Regularitätsbedingung*, wenn  $\Omega$  die  $C^{m,0}$ -Regularitätsbedingung erfüllt.

Aus der gleichmäßigen  $C^m$ -Regularitätsbedingung mit  $m \geq 2$  folgt die lokale LIPSCHITZ-Bedingung, welche wiederum die Kegelbedingung und Segmentbedingung impliziert.

Weiter können wir für LIPSCHITZ-Gebiete fast überall auf dem Rand den äußeren Normaleneinheitsvektor erklären, siehe z.B. [Gri85, S. 37] oder [Wlo82, Kapitel I.2.4].

## A.2.2 Lebesgue-Räume

Die LEBESGUE-Räume  $L^p(\mathbb{R}^N)$  bzw.  $L^p(\Omega)$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  beliebiges Gebiet, und die in ihnen erklärten Skalarprodukte und Normen, sowie die Grundlegenden Eigenschaften derselben, werden als bekannt vorausgesetzt. Wir erinnern daran, dass  $L^p(\Omega)$  für  $p > 0$  ein quasi-BANACH-Raum und für  $1 \leq p \leq \infty$  ein BANACH-Raum ist, in dem  $\mathcal{C}_0(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$  dicht liegt. Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $L^p(\Omega)$  darüber hinaus separabel und für  $1 < p < \infty$  zudem gleichmäßig konvex und reflexiv.

Mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ist  $L^q(\Omega)$  isometrisch isomorph zu dem Dualraum  $(L^p(\Omega))'$  von  $L^p(\Omega)$ . Dabei setzen wir  $q = \infty$  für  $p = 1$ .

Weiterhin führen wir die folgende Konvention für vektorwertige und matrixwertige Funktionen ein. Dazu sei  $u = (u_1, \dots, u_N) \in [L^p(\Omega)]^N$  eine vektorwertige Funktion. Unter  $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , verstehen wir eine der äquivalenten Normen (siehe z.B. [AF03, Theorem 1.23])

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{[L^p(\Omega)]^N} := \left( \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L^p(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty$$

bzw.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{[L^p(\Omega)]^N} := \max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

Entsprechend gehen wir bei matrixwertigen Funktionen  $U \in [L^p(\Omega)]^{N \times N}$  vor, wobei wir  $U$  als Vektor der Länge  $N^2$  auffassen können. Speziell erhalten für den Gradienten der Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla u \in [L^2(\Omega)]^N$  mit  $p = q = 2$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 dx = \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

### A.2.3 Sobolev-Räume

Wir folgen den Darstellungen in [AF03, Chapter 3]. Nachfolgend sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beliebiges Gebiet. Zunächst betrachten wir SOBOLEV-Räume  $W_p^m(\Omega)$  ganzzahliger Ordnung  $m \in \mathbb{N}_0$ , welche Unterräume der entsprechenden LEBESGUE-Räume  $L^p(\Omega)$  sind. Dazu definieren wir das Funktional  $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  durch

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} := \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

bzw.

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

für alle  $u$ , für die die rechte Seite sinnvoll ist. Natürlich stellen die eben erklärten Funktionale Normen auf jedem Vektorraum von Funktionen dar, für die die rechte Seite endlich ist, sofern wir Funktionen identifizieren, die fast überall in  $\Omega$  gleich sind. In Verbindung mit den eben definierten Normen bezeichnen wir die Vektorräume

$$W_p^m(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

und

$$W_{p,0}^m(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}},$$

als SOBOLEV-Räume, wobei  $D^\alpha u$  die schwache (oder distributionelle) partielle Ableitung von  $u$  bezüglich des Multiindex  $\alpha$  bezeichnet und  $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}}$  den Abschluss von  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  in  $W_p^m(\Omega)$  darstellt. Es gilt  $W_p^0(\Omega) = L^p(\Omega)$  und für  $1 \leq p < \infty$  auch  $W_{p,0}^0(\Omega) = L^p(\Omega)$ , da  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  dann dicht in  $L^p(\Omega)$  liegt. Für jedes  $m$  gilt die Kette von Einbettungen  $W_{p,0}^m(\Omega) \hookrightarrow W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ . Weiterhin ist  $W_p^m(\Omega)$  für  $1 \leq p \leq \infty$  ein BANACH-Raum, welcher für  $1 \leq p < \infty$  separabel und darüber hinaus für  $1 < p < \infty$  gleichmäßig konvex und reflexiv ist. Insbesondere ist  $W_2^m(\Omega)$ , welchen wir nachfolgend abkürzend mit  $H^m(\Omega)$  bezeichnen, ein separabler HILBERT-Raum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u \bar{v} dx$  das Skalarprodukt im  $L^2(\Omega)$  ist. Mit der obigen Konvention zu vektorwertigen Funktionen gilt also beispielsweise für  $m = 1$  und  $p = 2$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Für  $1 \leq p < \infty$  ist es auch möglich die SOBOLEV-Räume  $H_p^m(\Omega)$  als Vervollständigung von  $\{u \in \mathcal{C}^m(\Omega) \mid \|u\|_{W_p^m(\Omega)} < \infty\}$  bezüglich der  $W_p^m(\Omega)$ -Norm zu definieren, denn dann gilt  $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$ . Insbesondere ist  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  dicht in  $W_p^m(\Omega)$ . Wenn  $\Omega$  zusätzlich der Segment-Bedingung genügt, dann ist zudem die Menge  $\{\varphi|_{\Omega} \mid \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)\}$  dicht in  $W_p^m(\Omega)$ , womit für  $k \geq m$  auch  $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$  dicht in  $W_p^m(\Omega)$  ist. Als Folgerung erhalten wir sofort  $W_{p,0}^m(\mathbb{R}^N) = W_p^m(\mathbb{R}^N)$ .

Wir bezeichnen mit  $W_q^{-m}(\Omega)$  den Dualraum von  $W_{p,0}^m(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , wobei der konjugierte Exponent  $q$  durch  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  mit den Konventionen  $\frac{1}{0} := \infty$  und  $\frac{1}{\infty} := 0$  gegeben ist. Für  $1 < p < \infty$  lässt sich der Dualraum von  $W_{p,0}^m(\Omega)$  auch als Vervollständigung von  $L^q(\Omega)$  bezüglich der Norm

$$\|v\|_{W_q^{-m}(\Omega)} = \sup_{u \in W_{p,0}^m(\Omega), \|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq 1} |\langle u, v \rangle|$$

mit  $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} uv \, dx$  interpretieren. Bezeichnen wir diese Vervollständigung mit  $H_q^{-m}(\Omega)$ , so gilt zusammenfassend  $H_q^{-m}(\Omega) \equiv (W_{p,0}^m(\Omega))' \equiv W_q^{-m}(\Omega)$ . Der Dualraum von  $W_p^m(\Omega)$  erhält keine gesonderte Bezeichnung. Für  $1 < p < \infty$  lässt sich auch  $(W_p^m(\Omega))'$  als Vervollständigung von  $L^q(\Omega)$  bezüglich der Norm

$$\|v\|_{W_q^{-m}(\Omega)}^* = \sup_{u \in W_p^m(\Omega), \|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq 1} |\langle u, v \rangle|$$

charakterisieren.

Die SOBOLEV-Räume  $W_p^s(\Omega)$  können auch für reelle bzw. gebrochene Ordnungen  $s \in \mathbb{R}_0^+$  definiert werden. Eine Möglichkeit dafür sind Interpolationsmoden, mit denen zwischen zwei Räumen, z.B.  $L^p(\Omega)$  und  $W_p^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , Skalen von Zwischenräumen erzeugt werden können. Hierzu soll  $\Omega$  als LIPSCHITZ-Gebiet vorausgesetzt werden, da für diese geeignete Fortsetzungsoperatoren existieren. Siehe hierzu z.B. [AF03, Section 7.32, 7.57]. Im Fall  $p = 2$  ist auch eine Herangehensweise mittels FOURIER-Transformation möglich. Eine intrinsische Charakterisierung der SOBOLEV-Räume  $W_p^s(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , ist mit der zu den Interpolationsnormen äquivalenten SOBOLEV-SLOBODECKIJ-Norm

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left( \|u\|_{W_p^k(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

möglich, wobei  $k := \lfloor s \rfloor$  und  $\sigma := s - k$  gilt. Siehe z.B. [Gri85, Chapter 1.3.2]. Für  $s > 0$  bezeichnen wir den Abschluss von  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  in  $W_p^s(\Omega)$  mit  $W_{p,0}^s(\Omega)$ . Die Eigenschaften der SOBOLEV-Räume mit ganzzahliger Ordnung übertragen sich entsprechend auf die SOBOLEV-Räume mit reeller Ordnung. Auch die Dualräume von  $W_{p,0}^s(\Omega)$  werden entsprechend mit  $W_q^{-s}(\Omega)$  bezeichnet.

Speziell für den von uns häufig verwendeten SOBOLEV-Raum  $H^1(\Omega)$  geben wir noch zwei wichtige Ungleichungen an. Wir erinnern an die obigen Konventionen für vektorwertige Funktionen.

**Satz A.2.1** (FRIEDRICHS-Ungleichung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Dann existiert eine Konstante  $C = C(\Omega, \Gamma) > 0$ , sodass für  $u \in H^1(\Omega)$  gilt:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|\gamma_\Gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Den Beweis findet man beispielsweise in [Neč67, Théorème 1.9] oder [TW05, Lemma A.14]. Speziell erhalten wir für die  $u \in H^1(\Omega)$ , die auf  $\Gamma$  verschwinden, die auf Teilränder verallgemeinerte POINCARÉ-Ungleichung bzw. POINCARÉ-FRIEDRICHS-Ungleichung.

**Satz A.2.2** (POINCARÉ-Ungleichung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Dann existiert eine Konstante  $C = C(\Omega, \Gamma) > 0$ , sodass für  $u \in V_\Gamma := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_\Gamma(v) = 0\}$  gilt:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Überdies folgt daraus auf  $V_\Gamma$  die Äquivalenz der Normen, also

$$C^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

*Bemerkung 100.* Die klassische POINCARÉ-Ungleichung kann allgemeiner gefasst werden: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes offenes Gebiet. Dann existiert eine Konstante  $C(\Omega) > 0$ , welche nur vom Durchmesser des Gebietes abhängt, sodass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle  $u \in W_{p,0}^1(\Omega)$  gilt.

Jetzt wenden wir uns SOBOLEV-Räumen auf Mannigfaltigkeiten zu, beschränken uns dabei aber auf kompakte Mannigfaltigkeiten, die Ränder bzw. Teilränder von offenen beschränkten Gebieten des  $\mathbb{R}^N$  sind, also  $(N-1)$ -dimensionale Hyperflächen im  $\mathbb{R}^N$ . Wir halten uns an die Notation in

[Wlo82, Abschnitt I.4.2] und betrachten die kompakte  $\mathcal{C}^{k,\chi}$ -Mannigfaltigkeit  $M$ . Im Fall  $k = 0$  setzen wir dabei  $\chi = 1$  und sprechen von LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten. Weiter sei  $\{U_j, \Phi_j\}_j$  ein zulässiger  $\mathcal{C}^{k,\chi}$ -Atlas von  $M$  und  $\{\Psi_j\}_j$  eine untergeordnete Partition der Eins. Da  $M$  kompakt ist, können wir den Indexbereich  $J$  für  $j$  als endlich annehmen. Nach Voraussetzung sind  $\Phi_i \circ \Phi_j$  ( $k, \chi$ )-Diffeomorphismen und durch eine eventuelle Verkleinerung der  $U_i$  können wir immer erreichen, dass sie  $\tilde{\mathcal{C}}^{k,\chi}$ -Diffeomorphismen, siehe [Wlo82, Definition I.4.3], sind.

**Definition A.2.6.** Sei  $M$  eine kompakte  $\mathcal{C}^{k,\chi}$ -Mannigfaltigkeit und  $\{\Psi_j\}_j$  die obige untergeordnete Partition der Eins, angepasst auf den gegebenen Atlas  $\{U_j, \Phi_j\}_j$ , weiter sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $s < k + \chi$ . Falls  $k + \chi$  ganzzahlig ist, ist auch  $s = k + \chi$  zugelassen. Dann ist  $W_p^s(M)$  die Menge der  $f \in L^1(M)$  mit

$$(\Psi_j f) \circ \Phi_j^{-1} \in W_{p,0}^s(B), \quad j \in J$$

und

$$\|f\|_{W_p^s(M)} = \left( \sum_{j \in J} \|(\Psi_j f) \circ \Phi_j^{-1}\|_{W_{p,0}^s(B)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$W_{p,0}^s(B)$  kann durch  $W_p^s(\mathbb{R}^{N-1})$  ersetzt werden, da der Träger von  $(\Psi_j f) \circ \Phi_j^{-1}$  kompakt ist und in  $B$  liegt.

Die auf diese Weise definierten Räume sind unabhängig von dem gewählten Atlas und der untergeordneten Partition der Eins.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes Gebiet, welches der  $\mathcal{C}^{k,\chi}$ -Regularitätsbedingung genügt, und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Dann können wir, da  $\Gamma$  dann eine kompakte  $\mathcal{C}^{k,\chi}$ -Mannigfaltigkeit ist, den Raum  $W_p^s(\Gamma)$ ,  $s < k + \chi$  (bzw.  $s \leq k + \chi$ , wenn  $k + \chi$  ganzzahlig), wie oben definieren. Wir können in diesen Fall die zu obigen Normen äquivalente intrinsischen Norm

$$\|f\|_{W_p^s(\Gamma)} = \left( \|f\|_{\|f\|_{W_p^{1,s}(\Gamma)}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x - y|^{N-1+\lambda p}} d\sigma(x) d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

angeben, wobei  $\lambda = s - [s]$  gilt, siehe z.B. [Wlo82, Abschnitt I.4.2]. Insbesondere wird ersichtlich, dass SOBOLEV-Räume über (Teil-)Rändern von LIPSCHITZ-Gebieten nur bis maximal zur Ordnung  $s = 1$  erklärt werden können.

## A.2.4 Triebel-Lizorkin- und Besov-Räume

Wir halten uns an die Darstellungen in [Tri02]. Sei  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  der SCHWARTZ-Raum aller komplexwertigen, schnell fallenden, unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^N$ . Mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  sei der topologische Dualraum, der Raum der temperierten Distributionen bezeichnet. Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  wird die FOURIER-Transformierte von  $\varphi$  durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) := (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{A.7})$$

definiert. Mit  $\mathcal{F}^{-1}\varphi$  sei die inverse FOURIER-Transformation bezeichnet, die durch die rechte Seite von (A.7) gegeben ist, wenn wir  $-i$  durch  $i$  ersetzen. Sowohl  $\mathcal{F}$  als auch  $\mathcal{F}^{-1}$  können, wie üblich, auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  fortgesetzt werden. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  mit

$$\varphi(x) = 1 \text{ falls } |x| \leq 1, \quad \varphi(x) = 0 \text{ falls } |x| \geq \frac{3}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Wir setzen  $\varphi_0 := \varphi$ ,  $\varphi_1(x) := \varphi(\frac{x}{2}) - \varphi(x)$  und

$$\varphi_k(x) := \varphi_1(2^{-k+1}x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir eine dyadische Zerlegung der Eins im  $\mathbb{R}^N$ , weil

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N$$

gilt. Für jedes  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  ist  $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \widehat{f})$  mit dem Satz von PALEY-WIENER-SCHWARTZ eine ganze analytische Funktion auf  $\mathbb{R}^N$ . Insbesondere ist  $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \widehat{f})(x)$  punktweise sinnvoll.

**Definition A.2.7.** (i) Sei  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ . Dann ist der BESOV-Raum  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  die Menge aller  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ , sodass

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)} := \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left\| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{f}) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(mit den üblichen Änderungen für  $q = \infty$ ).

(ii) Sei  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ . Dann ist der TRIEBEL-LIZORKIN-Raum  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  die Menge aller  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ , sodass

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)} := \left\| \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \left| \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{f})(\cdot) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

(mit den üblichen Änderungen für  $q = \infty$ ).

Insbesondere sind sowohl  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  als auch  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  quasi-BANACH-Räume, welche, im Sinne äquivalenter quasi-Normen, von der Wahl der  $\varphi$  aus (A.8) unabhängig sind. Gilt  $p \geq 1$  und  $q \geq 1$ , dann sind  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  und  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  BANACH-Räume. Für die Funktionenräume auf  $\mathbb{R}^N$  schreiben wir abkürzend auch  $A_{p,q}^s$  statt  $A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$ .

Wir erklären nun, was wir unter den obigen Funktionenräumen auf Gebieten verstehen. Dazu sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$ . Mit  $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$  wird die Menge aller komplexen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen in  $\mathbb{R}^N$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$  bezeichnet. Der Dualraum von  $\mathcal{D}(\Omega)$  wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet.  $\mathcal{D}'(\Omega)$  ist der Raum der Distributionen auf  $\Omega$ . Sei  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ . Mit  $g|_\Omega$  bezeichnen wir die Einschränkung von  $g$  auf  $\Omega$ , d.h.

$$g|_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega) : (g|_\Omega)(\varphi) = g(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definition A.2.8.** Sei  $\Omega$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^N$  und sei  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ .  $A_{p,q}^s$  stehe entweder für  $B_{p,q}^s$  oder für  $F_{p,q}^s$  (wobei im Fall  $F$   $p < \infty$  gelte).

(i)  $A_{p,q}^s(\Omega)$  ist die Menge aller  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , sodass ein  $g \in A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  mit  $g|_\Omega = f$  existiert und außerdem

$$\|f\|_{A_{p,q}^s(\Omega)} = \inf \|g|_\Omega\|_{A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)},$$

gilt, wobei das Infimum über alle  $g \in A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  genommen wird, deren Einschränkung  $g|_\Omega$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  mit  $f$  übereinstimmt.

(ii)  $A_{p,q,0}^s(\Omega)$  ist die Vervollständigung von  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $A_{p,q}^s(\Omega)$ .

(iii)  $\widetilde{A_{p,q}^s}(\Omega)$  ist die Menge aller  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  für die es ein

$$g \in A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N) \text{ mit } g|_\Omega = f \text{ und } \text{supp } g \subset \overline{\Omega} \tag{A.9}$$

gibt und für das außerdem

$$\|f\|_{\widetilde{A_{p,q}^s}(\Omega)} = \inf \|g\|_{A_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)}$$

gilt, wobei das Infimum über alle  $g$ , die (A.9) erfüllen, gebildet wird.

Alle oben erwähnten Räume sind quasi-BANACH-Räume und für  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  BANACH-Räume.

TRIEBEL-LIZORKIN- und BESOV-Räume auf Mannigfaltigkeiten werden entsprechend den im letzten Abschnitt definierten SOBOLEV-Räumen auf Mannigfaltigkeiten erklärt. Alternativ siehe auch [Tri02, Section 6.3].

## A.2.5 Einbettungssätze

### Einbettungssätze für Sobolev-Räume

Wir geben zuerst den Einbettungssatz von SOBOLEV an. Der Beweis findet sich beispielsweise in [AF03], [Wlo82] oder [Gri85].

**Satz A.2.3** (SOBOLEVscher Einbettungssatz). *Es gelten die folgenden Einbettungen:*

$$W_p^s(\mathbb{R}^N) \subseteq W_q^t(\mathbb{R}^N)$$

für  $t \leq s$  und  $q \geq p$ , sodass  $s - \frac{N}{p} = t - \frac{N}{q}$ , wobei negative Werte für  $t$  zugelassen sind und  $W_q^0(\mathbb{R}^N)$  gleich  $L^q(\mathbb{R}^N)$  ist.

$$W_p^s(\mathbb{R}^N) \subset C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

für  $k < s - \frac{N}{p} < k + 1$ , wobei  $\alpha = s - k - \frac{N}{p}$  gilt und  $k$  eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Für den Grenzfall, dass  $s - \frac{N}{p}$  eine ganze Zahl ist, erhalten wir

$$W_p^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

für alle  $q \geq p$  und

$$W_p^{k+\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \subset C^{k-1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

für alle  $\alpha \in [0, 1)$ , wobei  $k \geq 1$  eine ganze Zahl ist.

Als eine direkte Folgerung erhalten wir die folgenden Einbettungen:

$$W_p^s(\bar{\Omega}) \subset W_q^t(\bar{\Omega}) \tag{A.10}$$

für  $t \leq s$ ,  $q \geq p$  sodass  $s - \frac{N}{p} = t - \frac{N}{q}$ .

$$W_p^s(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$$

für  $k < s - \frac{N}{p} < k + 1$ ,  $\alpha = s - k - \frac{N}{p}$ ,  $k$  nichtnegative ganze Zahl. Diese Einbettungen gelten ohne jegliche Bedingungen an  $\Omega$ . Sei nun  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet. Dann können wir (A.10) um die  $q$ -Werte  $1 \leq q < p$  erweitern. Außerdem gelten dann die gleichen Einbettungen für  $W_p^s(\Omega)$ . Darüber hinaus ist zudem die Einbettung  $W_p^s(\Omega) \subset W_p^t(\Omega)$ ,  $s > t \geq 0$ , kompakt.

Mit gewissen Einschränkungen lassen sich ähnliche Einbettungen auch für Funktionenräume über LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten angeben, siehe z.B. [Wlo82, Kapitel 7].

Für die stetige Einbettung  $A \subset B$  benutzen wir auch die Notation  $A \hookrightarrow B$ .

### Einbettungssätze für Triebel-Lizorkin- und Besov-Räume

Für TRIEBEL-LIZORKIN- und BESOV-Räume gelten die folgenden elementaren Einbettungen, siehe [RS96, Prop 2.2.1, S. 29].

**Satz A.2.4.** *Sei  $\varepsilon > 0$  und  $q_0 < q_1$ . Dann gilt*

$$F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s, \quad F_{p,\infty}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow F_{p,q}^s, \quad B_{p,q_0}^s \hookrightarrow B_{p,q_1}^s \quad \text{und} \quad B_{p,\infty}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow B_{p,q}^s.$$

Zudem haben wir die folgenden Einbettungen mit konstanter Glätte, siehe [RS96, Prop 2.2.2, S. 30].

**Satz A.2.5.** *(i) Es gilt  $B_{p,u}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,v}^s$  genau dann, wenn  $0 < u \leq \min(p, q)$  und  $\max(p, q) \leq v \leq \infty$ .*

*(ii) Es gilt  $B_{1,u}^0 \hookrightarrow L^1 \hookrightarrow B_{1,v}^0$  genau dann, wenn  $0 < u \leq 1$  und  $v = \infty$ .*

*(iii) Es gilt  $F_{1,u}^0 \hookrightarrow L^1$  genau dann, wenn  $0 < u \leq 2$ . Außerdem gilt  $L^1 \not\subset F_{1,\infty}^0$ .*

(iv) Es gilt  $B_{\infty,u}^0 \hookrightarrow L^\infty \hookrightarrow B_{\infty,v}^0$  genau dann, wenn  $0 < u \leq 1$  und  $v = \infty$ .

Wir bezeichnen  $s - \frac{N}{p}$  als differentielle Dimension. Es gelten die folgenden Einbettungen mit konstanter differentieller Dimension, siehe [RS96, Prop 2.2.3, S. 31].

**Satz A.2.6.** (i) Sei  $0 < p_0 < p < p_1$  und  $s_0 - \frac{N}{p_0} = s - \frac{N}{p} = s_1 - \frac{N}{p_1}$ . Dann gilt

$$B_{p_0,u}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p_1,v}^{s_1}$$

genau dann, wenn  $0 < u \leq p \leq v \leq \infty$ .

(ii) Sei  $p < p_1$  und  $s - \frac{N}{p} = s_1 - \frac{N}{p_1}$ . Dann gilt  $F_{p,\infty}^s \hookrightarrow F_{p_1,q}^{s_1}$ .

(iii) Sei  $0 < p < 1$ , dann gilt  $B_{p,q}^{n(\frac{1}{p}-1)} \hookrightarrow L^1$  genau dann, wenn  $0 < q \leq 1$ .

Auf Grund der Monotonie der Räume  $F_{p,q}^s$  kann in (ii)  $F_{p,\infty}^s$  durch  $F_{p,r}^s$  mit beliebigem  $r$  ersetzt werden. Mit (ii) und Satz A.2.4 gilt  $F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q}^s$ , wenn  $s_0 - \frac{N}{p_0} \geq s - \frac{N}{p}$  und  $p_0 \leq p$ . Das gleiche gilt auch für die BESOV-Räume  $B_{p_0,q_0}^{s_0}$  mit Ausnahme von  $s = s_0 - \frac{N}{p_0} + \frac{N}{p}$ .

Darüber hinaus haben wir die folgenden Einbettungen in LEBESGUE-Räume, siehe [RS96, Corollary 2, S. 36].

**Satz A.2.7.** Sei  $p < p_1 < \infty$  und  $p_1 \geq 1$ .

(i) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a)  $F_{p,q}^s \hookrightarrow L^{p_1}$ ,

(b)  $s \geq N \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \right)$ .

(ii) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a)  $B_{p,q}^s \hookrightarrow L^{p_1}$ ,

(b) entweder  $s > N \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \right)$  oder  $s = N \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \right)$  und  $q \leq p_1$ .

*Bemerkung 101.* Als direkte Konsequenz der Definition der Funktionenräume über Gebieten durch Restriktion können alle obigen Einbettungssätze auf Funktionenräume über Gebieten übertragen werden, siehe [Tri02, Section 2.3] oder [RS96, Section 2.4.4]. Sind die Gebiete zusätzlich beschränkt, dann haben wir zusätzliche Monotonie bezüglich  $p$ , d.h. für  $p_0 < p_1$  gilt

$$F_{p_1,q}^s(\Omega) \hookrightarrow F_{p_0,q}^s(\Omega) \quad \text{und} \quad B_{p_1,q}^s(\Omega) \hookrightarrow B_{p_0,q}^s(\Omega).$$

Insbesondere gelten diese Aussagen natürlich für LIPSCHITZ-Gebiete.

## A.2.6 Spur- und Fortsetzungsoperatoren

Wir rekapitulieren in diesem Abschnitt elementare Resultate in Verbindung mit Spur- und Fortsetzungsoperatoren auf LIPSCHITZ-Gebieten. Wir erinnern daran, dass wir Funktionenräume über LIPSCHITZ-Mannigfaltigkeiten bereits in den vorangegangenen Abschnitten eingeführt haben.

Im Folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  echte Teilmenge des Randes. Wir definieren den Spuoperator für glatte Funktionen als Einschränkung derselben auf den Rand des Gebietes:

$$\gamma_{\partial\Omega} : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}. \quad (\text{A.11})$$

Dieser Operator kann in geeignete Funktionenräume stetig fortgesetzt werden. Dies besagt der



**Satz A.2.8** (Spursatz). Sei  $\Omega$  ein LIPSCHITZ-Gebiet im  $\mathbb{R}^N$  und  $1 \leq p, q < \infty$  sowie  $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$ . Dann kann der in (A.11) definierte Operator stetig zu einem linearen, beschränkten Operator

$$\gamma_{\partial\Omega} : B_{p,q}^s(\Omega) \rightarrow B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega), \quad \text{für } 0 < q \leq \infty$$

fortgesetzt werden. Außerdem gilt für die obigen Parameter, dass der Spuroperator surjektiv ist und eine beschränkte Rechtsinverse besitzt:

$$\mathcal{R}_{\partial\Omega} : B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \rightarrow B_{p,q}^s(\Omega).$$

Gleiche Aussagen gelten auch für  $\gamma_{\partial\Omega} : F_{p,q}^s(\Omega) \rightarrow B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ , mit  $s, p$  wie oben und passendem  $q$ .

Zudem kann die Aussage auf zulässige Teilränder  $\Gamma \subset \partial\Omega$  übertragen werden. Den entsprechenden Spuroperator bezeichnen wir dann mit  $\gamma_{\Gamma}$  und den entsprechenden Fortsetzungsoperator mit  $\mathcal{R}_{\Gamma}$ .

Der Beweis für den Satz in dieser allgemeinen Form findet sich beispielsweise in [MM04].

Wir erinnern daran, dass für  $p = q$  und damit  $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$  der Spursatz für SOBOLEV-Räume in obigem Satz als Spezialfall enthalten ist. Für einen eigenständigen Beweis im Fall  $p = q = 2$  sei auf [Din96] verwiesen. Zudem merken wir an, dass  $H_0^s(\Omega)$  für  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  der Kern des Spurooperators auf  $\partial\Omega$  ist. Für  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  gilt auch für LIPSCHITZ-Gebiete  $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$ , siehe z.B. [McL00, Theorem 3.40].

*Bemerkung 102.* Bei der Übertragung der Aussage von (i) auf zulässige Teilränder  $\Gamma$  benötigen wir die Existenz eines beschränkten linearen Fortsetzungsoperators  $E : B_{p,q}^s(\Gamma) \rightarrow B_{p,q}^s(\partial\Omega)$ . Diese wurde in [MM07, Proposition 4.1] für  $1 \leq p, q \leq \infty$  und  $0 < |s| < 1$  gezeigt.

Wir wollen noch eine spezielle Fortsetzung auszeichnen. Sei  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  gegeben und  $u \in H^1(\Omega)$  die eindeutige Lösung von

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \Gamma.$$

Dann bezeichnen wir  $u$  als *harmonische Fortsetzung* von  $g$ .

Die Konsequenzen des Spursatzes sollen in einen speziellen Fall explizit angegeben werden.  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  bezeichne wieder ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  sei echte Teilmenge des Randes. Wir definieren die Räume

$$H^1(\Omega; \Gamma) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_{\Gamma}(v) = 0\}.$$

und

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) := \left\{ \mu \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \tilde{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \right\},$$

wobei  $\tilde{\cdot}$  die Nullfortsetzung auf den Gesamtrand bezeichnet. Letzterer stimmt mit dem Interpolationsraum  $[H_0^1(\Gamma), L^2(\Gamma)]_{1/2}$  überein. Statten wir  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  mit der Norm  $\|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \|\mu\|_{[H_0^1(\Gamma), L^2(\Gamma)]_{1/2}}$  aus, dann existieren Konstanten  $c, C$ , sodass für  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  gilt

$$c \|\tilde{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|\tilde{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Weiterhin ist  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  ein HILBERT-Raum bzgl. des Skalarproduktes  $(\mu, \nu)_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := (\tilde{\mu}, \tilde{\nu})_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  und mit der letzten Abschätzung ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm äquivalent zur Interpolationsnorm. Weiter ist  $\gamma_{\Gamma} : H^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  linear, beschränkt und surjektiv. Die Komposition von Nullfortsetzung auf den Gesamtrand und harmonischer Fortsetzung in  $\Omega$  definiert einen linearen stetigen Fortsetzungsoperator von  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  nach  $H^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$ .

Weiter sind für  $\mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , welche fast überall auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  verschwinden, die Normen  $\|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  und  $\|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$  äquivalent. Auch ist die Einbettung  $H_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$  stetig:

$$\|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\tilde{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{\phi \in \mathcal{D}(\partial\Omega) \mid \text{supp } \phi \subseteq \Gamma\}.$$

Mit  $s \in \mathbb{R}$  ist dann  $H_{00}^s(\Gamma)$  der Abschluss von  $\mathcal{D}(\Gamma)$  in  $H^s(\partial\Omega)$  und  $H_0^s(\Gamma)$  ist der Abschluss von  $\mathcal{D}(\Gamma)$  in  $H^s(\Gamma)$ . Zudem übertragen sich wegen der Invarianz der SOBOLEV-Räume unter LIPSCHITZ-Transformationen für  $|s| \leq 1$  die Eigenschaften von SOBOLEV-Räumen über LIPSCHITZ-Gebieten im  $\mathbb{R}^{N-1}$  auf SOBOLEV-Räume über  $\Gamma$ . Insbesondere gilt  $H_0^s(\Gamma) = H^s(\Gamma)$  für  $s \leq \frac{1}{2}$ . Wir bemerken, dass  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  ein nicht abgeschlossener Unterraum von  $H^{1/2}(\Gamma) = H_0^{1/2}(\Gamma)$  ist. Mit den obigen Definitionen ist zudem  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dicht in  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Im Zusammenhang mit vektorwertigen Funktionen  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  benutzen wir häufig den BANACH-Raum

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} v \in L^2(\Omega) \right\}$$

mit der Graphennorm

$$\|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 := \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Falls  $\Omega$  ein LIPSCHITZ-Gebiet ist kann man zeigen, dass  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  der Abschluss von  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  bzgl. der obigen Graphennorm ist. In  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  gilt der folgende Spursatz (siehe z.B. [QV94, Theorem 1.3.2], [TW05, Lemma A.19]).

**Satz A.2.9** (Spursatz für vektorwertige Funktionen). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet. Dann existiert ein eindeutiger linearer stetiger Spuroperator*

$$\gamma_{\partial\Omega}^* : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

so dass  $\gamma_{\partial\Omega}^* v = (v, n)|_{\partial\Omega}$  für jedes  $v \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap [\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})]^N$  gilt. Dabei bezeichnet  $n$  die bzgl.  $\Omega$  nach außen gerichtete Einheitsnormale auf  $\partial\Omega$  und  $(\cdot, \cdot)$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^N$ .

Weiterhin existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator

$$\mathcal{R}_\Omega^* : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H(\operatorname{div}, \Omega),$$

so dass  $\gamma_{\partial\Omega}^* \mathcal{R}_\Omega^* \phi = \phi$  für alle  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  gilt.

Dieser Spursatz lässt sich auf echte Teiltränder verallgemeinern.

**Satz A.2.10.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma \subset \partial\Omega$  habe nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß. Dann existiert ein eindeutiger linearer stetiger Spuroperator*

$$\gamma_\Gamma^* : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H_{00}^{-1/2}(\Gamma),$$

so dass  $\gamma_\Gamma^* v = (v, n)|_\Gamma$  für jedes  $v \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap [\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})]^N$  gilt. Dabei bezeichnet  $n$  die bzgl.  $\Omega$  nach außen gerichtete Einheitsnormale auf  $\Gamma$  und  $(\cdot, \cdot)$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^N$ .

*Beweis.* Wir definieren für  $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  und beliebiges  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  das Bild des Spuroperators als

$$\langle \gamma_\Gamma^* v, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \langle \gamma_{\partial\Omega}^* v, \tilde{\mu} \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))' \times H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

wobei  $\tilde{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  die Nullfortsetzung von  $\mu$  auf  $\partial\Omega$  bezeichnet. Der so definierte Spuroperator ist offensichtlich linear und eindeutig und die Stetigkeit folgt wegen der Beschränktheit des Dualitätsproduktes und der Normäquivalenz von  $\|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}$  und  $\|\tilde{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  aus

$$\left| \langle \gamma_\Gamma^* v, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \right| \leq C \|\gamma_{\partial\Omega}^* v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)},$$

d.h. wegen Satz A.2.9

$$\|\gamma_\Gamma^* v\|_{H_{00}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|\gamma_{\partial\Omega}^* v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|\gamma_{\partial\Omega}^*\| \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

□

## A.2.7 Greensche Formel und Divergenzatz

**Satz A.2.11** (Divergenzatz). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet. Für  $w \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  und  $v \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} w) v \, dx = - \int_{\Omega} (w, \nabla v) \, dx + \langle \gamma_{\partial\Omega}^*(w), \gamma_{\partial\Omega}(v) \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))' \times H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

**Satz A.2.12** (GREENSche Formel). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes offenes LIPSCHITZ-Gebiet. Dann gilt für  $u \in W_p^1(\Omega)$  und  $v \in W_q^1(\Omega)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_{\Omega} D_i u v \, dx = - \int_{\Omega} u D_i v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_{\partial\Omega}(u) \gamma_{\partial\Omega}(v) n_i \, d\sigma, \quad i = 1, \dots, N.$$

Dabei bezeichnet  $n_i$  die  $i$ -te Komponente der äußeren Normale  $n = (n_1, \dots, n_N)$  auf  $\partial\Omega$ .

*Beweis.* Der Beweis findet sich beispielsweise in [Neč67, Théorème 1.1., §1, Chap. 3].  $\square$

Im Zusammenhang mit den Gebietszerlegungsmethoden benötigen wir folgendes

**Lemma A.2.13.** Seien  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$  beschränkte offene LIPSCHITZ-Gebiete mit

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2,$$

wobei  $\Gamma = \operatorname{int}(\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2})$  den gemeinsamen Rand der Teilgebiete bezeichnet, der ein nichtverschwindendes HAUSDORFF-Maß haben soll. Weiter seien  $u_1 \in W_p^1(\Omega_1)$  und  $u_2 \in W_p^1(\Omega_2)$ ,  $1 < p < \infty$ , und es gelte  $\gamma_{\Gamma}^1 u_1 = \gamma_{\Gamma}^2 u_2$ . Dann gilt  $u = (u_1, u_2) \in W_p^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Natürlich gilt  $u \in L^p(\Omega)$ . Wir definieren  $v^j \in L^p(\Omega)$  durch  $v^j|_{\Omega_i} := D_j u_i \in L^p(\Omega_i)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Zu zeigen bleibt, dass für  $j = 1, \dots, N$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$   $v^j = D_j u$  gilt. Dazu berechnen wir für beliebiges  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  unter Benutzung von Satz A.2.12

$$\begin{aligned} \langle v^j, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v^j \varphi \, dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} v^j|_{\Omega_i} \varphi|_{\Omega_i} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} D_j u_i \varphi|_{\Omega_i} \, dx \\ &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} u_i D_j \varphi|_{\Omega_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_{\partial\Omega_i}^i(u_i) \gamma_{\partial\Omega_i}^i(\varphi) n_j^i \, d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} u D_j \varphi \, dx + \int_{\Gamma} (\gamma_{\Gamma}^1(u_1) - \gamma_{\Gamma}^2(u_2)) \gamma_{\Gamma}(\varphi) n_j^1 \, d\sigma \\ &= - \langle u, D_j \varphi \rangle, \end{aligned}$$

wobei die Dualität in  $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  gemeint ist und  $\gamma_{\Gamma}^1 u_1 = \gamma_{\Gamma}^2 u_2$ , sowie  $n_j^1 = -n_j^2$  verwendet wurde.  $\square$

## A.3 Monotone Operatoren

Zunächst führen wir einige Definitionen ein. Wir halten uns dabei an [Zei90, Chapter 25.3].

**Definition A.3.1.** Seien  $X$  und  $Y$  reelle BANACH-Räume und  $A : X \rightarrow (X)'$  ein Operator.

(i)  $A$  heißt genau dann *monoton*, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X$$

gilt.

(ii)  $A$  heißt genau dann *streng monoton*, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v$$

gilt.

(iii)  $A$  heißt genau dann *stark monoton*, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X$$

gilt.

(iv)  $A$  heißt genau dann *gleichmäßig monoton*, wenn

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq a(\|u - v\|) \|u - v\| \quad \forall u, v \in X$$

gilt, wobei die stetige Funktion  $a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  streng monoton steigend mit  $a(0) = 0$  und  $a(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$  ist. Mit  $a(t) := c|t|^{p-1}$ ,  $p > 1$  und  $c > 0$ , erhalten wir beispielsweise

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c \|u - v\|^p \quad \forall u, v \in X.$$

(v)  $A$  heißt genau dann *koerziv*, wenn

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = +\infty$$

gilt.

(vi)  $A$  heißt genau dann *schwach koerziv*, wenn

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \|Au\| = \infty$$

gilt.

(vii)  $A : X \rightarrow Y$  heißt genau dann *stabil*, wenn

$$\|Au - Av\| \geq a(\|u - v\|) \quad \forall u, v \in X$$

gilt, wobei die Funktion  $a$  wie in (iv) gewählt ist.

(viii)  $A : X \rightarrow X$ ,  $X$  HILBERT-Raum, heißt genau dann *stark stabil*, wenn

$$(Au - Av, u - v) \geq c \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X$$

gilt. Mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung impliziert das  $\|Au - Av\| \geq c \|u - v\|$  für alle  $u, v \in X$ .

Diese Begriffe hängen wie folgt zusammen. Aus der starken Monotonie folgt die gleichmäßige, welche wiederum die strenge Monotonie impliziert. Letztere ist zudem hinreichend für die Monotonie. Weiterhin folgt aus der gleichmäßigen Monotonie die Koerzivität und Stabilität.

Weiter führen wir einige Stetigkeitsbegriffe ein.

**Definition A.3.2.** Sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $A : X \rightarrow (X)'$  ein Operator.

- (i)  $A$  heißt genau dann *demistetig*, wenn aus  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$  die schwache Konvergenz  $Au_n \rightharpoonup Au$  folgt.
- (ii)  $A$  heißt genau dann *hemistetig*, wenn für alle  $u, v, w \in X$  die Abbildung  $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$  auf  $[0, 1]$  stetig ist.
- (iii)  $A$  heißt genau dann *stark stetig*, wenn aus  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$  auch  $Au_n \rightarrow Au$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt.

Mit den eingeführten Begriffen können wir den Hauptsatz für monotone Operatoren formulieren, siehe z.B. [Zei90, Chapter 26.2]. Dieser macht Aussagen über die Lösbarkeit der Operatorgleichung

$$Au = b, \quad u \in X. \tag{A.12}$$

**Satz A.3.1** (Hauptsatz für monotone Operatoren, BROWDER, MINTY (1963)). Sei  $A : X \rightarrow (X)'$  ein monotoner, koerziver und hemistetiger Operator auf dem reellen, reflexiven BANACH-Raum  $X$ . Dann gilt:

- (i) Lösungsmenge. Für jedes  $b \in (X)'$  hat die Gleichung (A.12) eine Lösung. Die Lösungsmenge von (A.12) ist beschränkt, konvex und abgeschlossen.
- (ii) Eindeutigkeit. Wenn der Operator  $A$  streng monoton ist, dann ist (A.12) eindeutig lösbar in  $X$ .
- (iii) Inverser Operator. Wenn  $A$  streng monoton ist, dann existiert der inverse Operator  $A^{-1} : (X)' \rightarrow X$ . Dieser ist streng monoton, demistetig und beschränkt. Ist  $A$  gleichmäßig monoton, dann ist  $A^{-1}$  stetig. Ist  $A$  stark monoton, dann ist  $A^{-1}$  LIPSCHITZ-stetig.

Der Beweis findet sich beispielsweise in [Zei90, Theorem 26.A]. Ist  $X$  zudem separabel, dann lassen sich entsprechende Aussagen auch für die GALERKIN-Gleichungen zu (A.12) zeigen. Weiter bemerken wir, dass jeder gleichmäßig monotone und stetige Operator streng monoton, koerziv und hemistetig ist.

## A.4 Nemytskij-Operatoren

Um NEMYTSKIJ-Operatoren, welche auch als *Superpositionsoperatoren* bezeichnet werden, definieren zu können, benötigen wir zuerst den Begriff der CARATHEODORY-Funktion.

**Definition A.4.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein Gebiet und  $G(x, \xi)$  eine für fast alle  $x \in \Omega$  und für alle  $\xi \in \mathbb{R}^M$  definierte Funktion.  $G$  heißt CARATHEODORY-Funktion, falls gilt

- (i)  $x \mapsto G(x, \xi)$  ist für alle  $\xi \in \mathbb{R}^M$  messbar auf  $\Omega$ ,
- (ii)  $\xi \mapsto G(x, \xi)$  ist für fast alle  $x \in \Omega$  stetig auf  $\mathbb{R}^M$ .

CARATHEODORY-Funktionen haben eine schöne Eigenschaft, siehe [AZ90, Section 1.4].

**Lemma A.4.1.** Sei  $G$  eine CARATHEODORY-Funktion und seien  $f_1, \dots, f_M$  reellwertige und messbare Funktionen auf  $\Omega$ . Dann ist die zusammengesetzte Funktion  $G(x, f_1(x), \dots, f_M(x))$  wieder eine messbare Funktion auf  $\Omega$ .

Wir kommen nun zur Definition des NEMYTSKIJ-Operators.

**Definition A.4.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein Gebiet und  $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  eine CARATHEODORY-Funktion. Dann heißt

$$T_G(f_1, \dots, f_M)(x) := G(x, f_1(x), \dots, f_M(x)), \quad x \in \Omega,$$

NEMYTSKIJ-Operator.

### A.4.1 Nemytskij-Operatoren in Lebesgue-Räumen

In den LEBESGUE-Räumen sind NEMYTSKIJ-Operatoren hinreichend gut untersucht. Wir zitieren aus [Zei90, Proposition 26.6] bzw. [RS96, Proposition 5.2.2.2./3.] folgendes

**Lemma A.4.2.**  $G$  sei eine CARATHEODORY-Funktion die für alle  $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$  der Wachstumsbedingung

$$|G(x, \xi)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^M |\xi_i|^{p_i/q}$$

genügt, wobei  $c > 0$  eine feste Zahl,  $g \in L^q(\Omega)$  eine nichtnegative Funktion und  $1 \leq q, p_i < \infty$ ,  $i = 1, \dots, M$ , ist. Dann ist der NEMYTSKIJ-Operator

$$T_G : \prod_{i=1}^M L^{p_i}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

stetig und beschränkt mit

$$\|T_G(f)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left( \|g\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^M \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/q} \right)$$

für alle  $f \in \prod_{i=1}^M L^{p_i}(\Omega)$ .

*Bemerkung 103.* Der Fall  $L^\infty(\Omega)$  findet sich in [RS96, Section 5.2.2].

## A.4.2 Nemytskij-Operatoren in den Sobolev-Räumen $W_p^1(\Omega)$

Wir betrachten ab jetzt nur den autonomen Fall, d.h.

$$G : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f_1, \dots, f_M) \mapsto G(f_1, \dots, f_M),$$

die Funktion  $G$  hängt also nicht mehr vom Ort ab. Für den zugehörigen NEMYTSKIJ-Operator lassen sich einige Eigenschaften charakterisieren. Wir wollen darauf verzichten und wenden uns stattdessen den für uns wichtigeren Kompositionsoperatoren zu. Für Details verweisen wir auf [RS96, Section 5.2.3]

Falls  $G$  nur ein Argument besitzt sprechen wir von Kompositionsoperatoren.

**Definition A.4.3.** Für stetiges  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und LEBESGUE-messbares  $f$  bezeichnen wir den Operator

$$T_G : f \mapsto G(f)$$

als *Kompositionsoperator*.

Für Kompositionsoperatoren haben wir folgendes Lemma, siehe [MM79] bzw. [RS96, Theorem 5.2.3].

**Satz A.4.3.** Sei  $G(0) = 0$ .

- (i) Sei  $1 \leq p < N$  oder  $p = N$  und  $N \geq 2$ . Dann bildet der Kompositionsoperator  $T_G$  genau dann  $W_p^1(\mathbb{R}^N)$  in sich ab, wenn gilt  $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$ .
- (ii) Sei  $p > N$  oder  $N = 1$  und  $p \geq 1$ . Dann bildet der Kompositionsoperator  $T_G$  genau dann  $W_p^1(\mathbb{R}^N)$  in sich ab, wenn gilt  $G' \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ .
- (iii) In jedem Fall, in dem  $T_G$  in sich abbildet, ist die Abbildung stetig.

*Bemerkung 104.* Die Bedingung  $G(0) = 0$  benötigen wir nur im Fall von Funktionenräumen über  $\mathbb{R}^N$ , und zwar um die Beschränktheit der Norm des Bildes zu sichern (z.B.  $T_G(0)$ ). Für Funktionenräume über beschränkten Gebieten  $\Omega$  ist diese Bedingung überflüssig. Siehe [RS96, Remark 5.2.3.3].

Mit dieser Bemerkung formulieren wir obigen Satz für beschränkte  $\Omega$  und für den für uns relevanten Fall  $p = 2$  erneut und fügen ein Resultat über die Ableitung hinzu.

**Satz A.4.4.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine beschränkte offene Menge und  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine LEBESGUE-messbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Für den Kompositionsoperator  $T_G : f \mapsto G \circ f$  gilt

$$T_G : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega).$$

- (ii) Die Abbildung  $T_G : f \mapsto G \circ f$  ist stetig.
- (iii)  $G$  ist LIPSCHITZ-stetig für  $N > 1$  bzw. lokal LIPSCHITZ-stetig für  $N = 1$ .

Ist eine der Aussagen erfüllt gilt fast überall auf  $\Omega$  die Kettenregel

$$\nabla(G \circ f) = G'(f)\nabla f.$$

*Beweis.* Den Beweis zur Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) findet man in [MM79]. Die Gültigkeit der Kettenregel wurde in einem unveröffentlichten Artikel von SERRIN gezeigt. Siehe hierzu auch die Ausführungen in [LM07], S. 219f.  $\square$

*Bemerkung 105.* In [LM07] wurden darüber hinaus notwendige und hinreichende Bedingungen entwickelt, die die Gültigkeit der Kettenregel auch für vektorwertige SOBOLEV-Funktionen sichern.

### A.4.3 Kompositionsoperatoren in Räumen höherer Glattheit

Um Kompositionsoperatoren  $T_G$  in Räumen höherer Glattheit, z.B. den SOBOLEV-Räumen  $W_p^s(\Omega)$ ,  $1 < s$ , agieren zu lassen, reicht die (lokale) LIPSCHITZ-Stetigkeit der beteiligten Funktion  $G$  nicht mehr aus. Wir zitieren aus [Sic96, Theorem 2, S. 165] folgenden

**Satz A.4.5.** *Sei  $1 < p < \infty$  und  $1 \leq s < 1 + \frac{1}{p}$ . Weiter gelte*

$$G(0) = 0, \quad G' \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad A_G := \sup_{h>0} h^{-1/p} \left\| \sup_{|\rho|<h} |\Delta_\rho^1 G'(\cdot)| \right\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty.$$

*Dann existiert eine Konstante  $c$ , sodass*

$$\|G(f)\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)} \leq c \left( \|G'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + A_G \right) \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)}$$

*für alle  $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  gilt.*

Dabei bezeichnet  $\Delta_\rho^1$  ein Glattheitsmodul und  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)$  einen BESOV-Raum auf  $\mathbb{R}^N$ . Wir können die Aussage wieder auf beschränkte LIPSCHITZ-Gebiete übertragen. In Analogie zur Bemerkung 104 wird dabei die Forderung  $G(0) = 0$  überflüssig.

Unter welchen hinreichenden Bedingungen die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt sind, zeigt das ebenfalls aus [Sic96] übernommene

**Lemma A.4.6.** *Sei  $1 < p < \infty$  und  $s > 1 + \frac{1}{p}$ .*

- (i) *Falls  $G \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$  ist, dann gilt  $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$  und  $A_G < \infty$ .*
- (ii) *Falls  $G$  eine Funktion mit  $G(0) = 0$ ,  $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$  und*

$$\sup_{t \neq 0} |t| |G''(t)| < \infty$$

*ist, dann sind die Voraussetzungen von Satz A.4.5 erfüllt.*

- (iii) *Falls  $G$  eine Funktion mit  $G(0) = 0$  und  $G''$  ein beschränktes Maß ist, dann sind die Voraussetzungen von Satz A.4.5 erfüllt.*

In Räumen beschränkter Funktionen, d.h.  $A_{p,q}^s$  mit  $s > \frac{N}{p}$  (es gilt  $A_{p,q}^s \hookrightarrow L^\infty$ ) oder  $A_{p,q}^s \cap L^\infty$  wollen wir weitere Resultate formulieren. Zunächst zitieren wir [Sic96, Theorem 1, S. 167].

**Satz A.4.7.** *Es gelte  $1 \leq s < \mu$ . Weiter sei  $G \in C^\mu(\mathbb{R})$  mit  $G(0) = 0$ . Dann existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass*

$$\|G(f)\|_{A_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{A_{p,q}^s} \left( 1 + \|f\|_{L^\infty}^{\mu-1} \right)$$

*für alle  $f \in A_{p,q}^s$ ,  $A = F$  oder  $A = B$ , gilt.*

Für nicht ganzzahliges  $\mu$  verstehen wir unter  $C^\mu(\mathbb{R})$  die HÖLDER-Stetigkeit  $C^{m,\lambda}(\mathbb{R})$ ,  $m = \lfloor \mu \rfloor$ ,  $\lambda = \mu - m$ .

Speziell für (nicht gebrochene) SOBOLEV-Räume zitieren wir [Sic96, Theorem 3, S. 169] bzw. [RS96, Theorem 5.2.4.1].

**Satz A.4.8.** *Es sei  $W_p^m \hookrightarrow L^\infty$ ,  $m = 2, 3, \dots$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  *$T_G(W_p^m) \subset W_p^m$ .*
- (ii) *Es existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass*

$$\|G(f)\|_{W_p^m} \leq c \|G\|_{W_p^m(f(\mathbb{R}^N))} \left( \|f\|_{W_p^m} + \|f\|_{W_p^m}^m \right)$$

*für alle  $f \in W_p^m$  gilt.*

- (iii)  *$G(0) = 0$  und  $G \in W_p^{m,loc}(\mathbb{R})$ .*

*Bemerkung 106.* (i) Wir beachten, dass die  $W_p^m$ -Norm von  $G$  nur auf der beschränkten Menge  $f(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}$  gebildet wird (es gilt  $f \in L^\infty$ ).

(ii) In [Sic96] wird als Verallgemeinerung des letzten Satzes die folgende Vermutung geäußert: Es sei  $s > \max(\frac{N}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ . Dann gilt  $T_G(A_{p,q}^s) \subset A_{p,q}^s$  genau dann, wenn  $G(0) = 0$  und  $G \in A_{p,q}^{s,loc}(\mathbb{R})$ .

Die letzten beiden Sätze lassen sich wieder auf beschränkte LIPSCHITZ-Gebiete übertragen. In Analogie zur Bemerkung 104 wird dabei die Forderung  $G(0) = 0$  überflüssig.

## A.5 Punktweise Produkte

Wir betrachten die Multiplikation als nachfolgendes Einbettungsproblem. Dazu seien Funktionenräume  $A_{p_i, q_i}^{s_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$  und  $A_{p, q}^s$  gegeben. Wir suchen Bedingungen an  $\{s_1, \dots, s_m, s, p_1, \dots, p_m, p, q_1, \dots, q_m, q\}$ , sodass die stetige Einbettung

$$\{f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m \mid f_i \in A_{p_i, q_i}^{s_i}, i = 1, \dots, m\} \hookrightarrow A_{p, q}^s$$

gilt.  $A_{p, q}^s = A_{p, q}^s(\mathbb{R}^N)$  steht hierbei als Platzhalter für die entsprechenden BESOV-Räume  $B_{p, q}^s$  oder TRIEBEL-LIZORKIN-Räume  $F_{p, q}^s$  und für die Parameter gilt

$$s \in \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \leq \infty \quad (p < \infty \text{ für } A = F).$$

Wir zitieren aus [RS96, Theorem 4.6.1.1] den

**Satz A.5.1.** *Sei  $s_1 \leq s_2$  und  $s_1 + s_2 > N \max(0, \frac{2}{p} - 1)$ .*

(i) *Sei  $s_2 > \frac{N}{p}$  und  $q \geq \max(q_1, q_2)$ . Falls  $s_2 > s_1$ , gilt*

$$F_{p, q_1}^{s_1} \cdot F_{p, q_2}^{s_2} \hookrightarrow F_{p, q_1}^{s_1},$$

und für  $s_2 = s_1$

$$F_{p, q_1}^{s_1} \cdot F_{p, q_2}^{s_1} \hookrightarrow F_{p, q}^{s_1}.$$

(ii) *Sei  $s_1 = s_2 = \frac{N}{p}$  und  $q \geq \max(q_1, q_2)$ . Falls  $0 < p \leq 1$ , gilt*

$$F_{p, q_1}^{\frac{N}{p}} \cdot F_{p, q_2}^{\frac{N}{p}} \hookrightarrow F_{p, q}^{\frac{N}{p}}.$$

Für  $1 < p < \infty$  erhalten wir

$$F_{p, q_1}^{\frac{N}{p}} \cdot F_{p, q_2}^{\frac{N}{p}} \not\subset B_{p, \infty}^{\frac{N}{p}}.$$

(iii) *Sei  $s_2 < \frac{N}{p}$ . Dann*

$$F_{p, q_1}^{s_1} \cdot F_{p, q_2}^{s_2} \hookrightarrow F_{p, q}^{s_1 + s_2 - \frac{N}{p}}.$$

Wir notieren noch eine verallgemeinerte HÖLDERSche Ungleichung für TRIEBEL-LIZORKIN- und BESOV-Räume, siehe [RS96, Theorem 4.8.2.1, S. 238].

**Satz A.5.2.** *Sei  $s > 0$ ,  $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{N}(\frac{N}{p_1} - s) > 0$ ,  $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{N}(\frac{N}{p_2} - s) > 0$  und  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} = \frac{1}{N}(\frac{N}{p} - s) < 1$ .*

(i) *Es gilt*

$$F_{p_1, q_1}^s \cdot F_{p_2, q_2}^s \subset F_{p, q}^s$$

*genau dann, wenn  $\max(q_1, q_2) \leq q \leq \infty$ .*

(ii) *Es gilt*

$$B_{p_1, q_1}^s \cdot B_{p_2, q_2}^s \subset B_{p, q}^s$$

*genau dann, wenn  $0 < q_1 \leq r_1$ ,  $0 < q_2 \leq r_2$  und  $\max(q_1, q_2) \leq q \leq \infty$ .*

## A.6 Variationen und Ableitungen von Funktionalen

Wir folgen den Darstellungen in [Zei85, Chapter 40.1]. Zur Untersuchung des reellen Funktionals

$$F : D(F) \subset X \rightarrow \mathbb{R},$$

auf einem reellen lokalkonvexen Raum  $X$  betrachten wir die reelle Funktion  $\varphi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_h(t) := F(u_0 + th), \quad t \in \mathbb{R}, u_0, h \in X.$$

**Definition A.6.1** (*n-te Variation, G-Differenzierbarkeit, F-Differenzierbarkeit*). Es sei  $F : D(F) \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in \text{int } D(F)$  und  $X$  ein reeller lokalkonvexer Raum.



(i) Die  $n$ -te Variation von  $F$  im Punkt  $u_0 \in X$  in Richtung  $h \in X$  ist gleich

$$\delta_V^n F(u_0; h) := \varphi_h^{(n)}(0) \equiv \left. \frac{d^n}{dt^n} F(u_0 + th) \right|_{t=0},$$

falls diese Ableitung existiert. Für  $\delta_V^1$  schreiben wir auch  $\delta_V$ .

(ii)  $F$  ist in  $u_0$  genau dann GÂTEAUX-differenzierbar (kurz:  $G$ -differenzierbar), wenn ein lineares, stetiges Funktional  $a \in (X)'$  existiert, das wir mit  $F'(u_0) := a$  bezeichnen, sodass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} = \langle F'(u_0), h \rangle \quad \forall h \in X$$

gilt.  $F'(u_0)$  heißt  $G$ -Ableitung von  $F$  in  $u_0$ . Höhere Ableitungen werden sukzessiv erklärt.  $\delta F(u_0; h) := \langle F'(u_0), h \rangle$  heißt  $G$ -Differential von  $F$  in  $u_0$  in Richtung  $h$ . Wir schreiben dafür auch kurz  $F'(u_0)h$ .

Wir setzen  $\delta^0 F := F$  und erklären das  $n$ -te  $G$ -Differential in  $u_0$  induktiv durch

$$\delta^n F(u_0; h_1, \dots, h_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\delta^{n-1} F(u_0 + th_n; h_1, \dots, h_{n-1}) - \delta^{n-1} F(u_0; h_1, \dots, h_{n-1})).$$

Dabei soll der Grenzwert für alle  $h_1, \dots, h_n \in X$  existieren.

(iii) Sei  $X$  ein normierter Raum.  $F$  ist in  $u_0$  genau dann FRÉCHET-differenzierbar (kurz:  $F$ -differenzierbar), wenn ein lineares, stetiges Funktional  $b \in (X)'$  existiert, das wir wiederum mit  $F'(u_0) := b$  bezeichnen, sodass

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = \langle F'(u_0), h \rangle + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0,$$

für alle  $h$  in einer gewissen Nullumgebung gilt.  $F'(u_0)$  heißt  $F$ -Ableitung von  $F$  in  $u_0$ . Höhere Ableitungen werden sukzessiv erklärt.  $dF(u_0; h) := \langle F'(u_0), h \rangle$  heißt  $F$ -Differential von  $F$  in  $u_0$  in Richtung  $h$ . Wir schreiben dafür auch kurz  $F'(u_0)h$ .

Wir setzen  $d^0 F := F$  und erklären das  $n$ -te  $F$ -Differential  $d^n F(u_0; h_1, \dots, h_n)$  in  $u_0$  induktiv. Existiert  $d^{n-1} F(u_0; h_1, \dots, h_{n-1})$  für alle  $u$  in einer gewissen Umgebung um  $u_0$ , dann soll  $d^n F(u_0; h_1, \dots, h_n)$  genau dann existieren, wenn es einen  $n$ -linearen, beschränkten Operator

$$M : \prod_{i=1}^n X \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$d^{n-1} F(u_0 + h_n; h_1, \dots, h_{n-1}) - d^{n-1} F(u_0; h_1, \dots, h_{n-1}) = M(h_1, \dots, h_n) + o(\|h_n\|), \quad h_n \rightarrow 0.$$

Wir definieren  $d^n F(u_0; h_1, \dots, h_n) := M(h_1, \dots, h_n)$ .

Die obigen Ableitungen und Differentiale können nicht nur für Funktionale, sondern entsprechend auch für allgemeinere Operatoren erklärt werden, siehe [Zei86, Chapter 4].

Einen Zusammenhang zwischen den eben definierten Begriffen stellt der folgende Satz her, welcher eine Sammlung von Resultaten aus [Zei86, Chapter 4], übertragen auf Funktionale, ist.

**Satz A.6.1.** *Es sei  $X$  ein BANACH-Raum,  $F : D(F) \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  ein reelles Funktional und  $u_0 \in \text{int } D(F)$ .*

(i) *Die  $G$ -Ableitung  $F'(u_0)$  existiert genau dann, wenn für alle  $h \in X$  die erste Variation  $\delta_V^1 F(u_0; h)$  existiert und die Abbildung  $h \mapsto \delta_V^1 F(u_0; h)$  ein lineares, stetiges Funktional auf  $X$  ist. Dann gilt außerdem*

$$\delta_V^1 F(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle \quad \forall h \in X.$$

*Hierbei kann  $X$  ein lokalkonvexer Raum sein.*

(ii) *Für  $n \geq 1$  stimmt die  $n$ -te Variation  $\delta_V^n F(u_0; h)$  mit dem  $n$ -ten  $G$ -Differential  $d^n F(u_0; h, \dots, h)$  überein.*

(iii) *Jede  $F$ -Ableitung  $F'(u_0)$  ist auch  $G$ -Ableitung.*

- (iv) Ist die G-Ableitung  $F'$  in  $u_0$  stetig, dann ist  $F'(u_0)$   $F$ -Ableitung. Aus Letzterem folgt zudem, dass  $F$  in  $u_0$  stetig ist.
- (v) Die  $n$ -te  $F$ -Ableitung  $F^{(n)}(u_0)$  existiert genau dann, wenn das  $n$ -te  $F$ -Differential  $d^n F(u_0; h_1, \dots, h_n)$  in  $u_0$  in Richtung  $h_1, \dots, h_n$  für alle  $h_1, \dots, h_n \in X$  existiert. Dann existiert auch die  $n$ -te Variation von  $F$  in  $u_0$  für alle  $h \in X$  und es gilt

$$\delta_V^n F(u_0; h) = d^n F(u_0; h, \dots, h) = F^{(n)}(u_0)h \dots h =: F^{(n)}(u_0)h^n.$$

- (vi) Ist  $F$  hinreichend oft  $F$ -differenzierbar, dann gilt die TAYLORSche Formel.

# B Transmissionsprobleme und Steklov-Poincaré-Operatoren

In diesem Abschnitt zitieren wir ein in der Arbeit verwendetes Regularitätsresultat für lineare Transmissionsprobleme und beschreiben, aufbauend auf Regularitätsresultaten für das gemischte Randwertproblem, die Abbildungseigenschaften des partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operators. Dazu müssen wir einige geometrische Voraussetzungen an die zugrunde liegenden Gebiete stellen.

## B.1 Transmissionsprobleme

Wir betrachten das lineare Transmissionsproblem (2.19) auf zwei LIPSCHITZ-Teilgebieten für den LAPLACE-Operator, also

$$\begin{cases} -r_1 \Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_1 = u_2 & \text{auf } \Gamma \\ r_1 \partial_{n_1} u_1 = -r_2 \partial_{n_2} u_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (\text{B.1})$$

mit  $r_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $\partial_{n_i} u_i$ ,  $i = 1, 2$ , als Normalenableitung von  $u_i$ , wobei  $n_i$  die bzgl.  $\Omega_i$  äußere Normale bezeichnet und  $\Gamma = \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ . Die restlichen Bezeichnungen sind wie in Abschnitt 2.1 zu verstehen. Weiter gelte o.B.d.A.  $r_2 > r_1$ . Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für schwache Lösungen  $u_i \in V_i \subset H^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , dieses Problems finden wir beispielsweise in [Wlo82, Beispiel III.21.8], wobei die dortigen Resultate wörtlich auf LIPSCHITZ-Gebiete übertragen werden können. Wir argumentieren dazu über die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des entsprechenden Gesamtproblems (2.3) auf  $\Omega$ .

Regularitätsresultate, speziell solche globaler Art, sind für das obige Problem (auf LIPSCHITZ-Gebieten) ungleich schwerer zu erhalten. Wir verweisen dazu auf den Artikel [Sav98, Section 5] und zitieren den

**Satz B.1.1.** *Seien  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Gamma$  wie oben bzw. in Abschnitt 2.1. Insbesondere ist  $\Gamma$  ein Teilrand eines LIPSCHITZ-Gebietes. Weiter sei  $u = (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)$  eine Lösung von (B.1) mit  $f_i \in L^2(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gilt  $u \in B_{2,\infty}^{3/2}(\Omega')$  für jede offene Menge  $\Omega' \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega'} \cap (\overline{\Gamma} \cap \partial\Omega) = \emptyset$  und weiter folgt für beliebiges  $s \in (0, \frac{1}{2})$  aus  $f \in H^{-1+s}(\Omega)$  auch  $u \in H^{1+s}(\Omega')$ . Zudem gelten diese Resultate global, d.h. wir können  $\Omega'$  durch ganz  $\Omega$  ersetzen, falls für jedes  $x_0 \in \overline{\Gamma} \cap \partial\Omega$  ein Kegel  $K := K_\rho(\theta, n)$ ,  $\rho, \theta > 0$  existiert, sodass*

$$K \subset \mathcal{O}_\rho(x_0) \cap \mathcal{O}_\rho^1(x_0)$$

*gilt, wobei  $\mathcal{O}_\rho(x_0)$  und  $\mathcal{O}_\rho^1(x_0)$  die Mengen von zulässigen Richtungen bezüglich  $\Omega$  und  $\Omega_1$  sind, siehe auch Voraussetzung 4.10 auf Seite 116.*

## B.2 Zur Regularität der Lösung des gemischten Randwertproblems

In diesem Abschnitt wollen wir Aussagen zur Regularität der Lösung des gemischten Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } D \\ \partial_n u = h & \text{auf } N \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

machen. Dabei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  zunächst ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  sich in die zwei Teileränder  $D$  und  $N$  zerlegen lässt und  $f, g$  und  $h$  entstammen noch zu spezifizierenden Funktionenräumen.

Wir betrachten zunächst den Fall  $N \geq 3$ , wobei  $N$  die Dimension des zu Grunde liegenden Problems ist. Um in diesem Fall Aussagen zur Regularität des gemischten Randwertproblems machen zu können, benötigen wir einige geometrische Voraussetzungen an das Gebiet, vergleiche dazu auch [Bro94]. Wir folgen den Darstellungen in [MM07].

Für jeden Punkt  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  sei  $x' := (x_1, \dots, x_{N-1})$  und  $x'' := (x_2, \dots, x_{N-1})$ . Damit gilt insbesondere  $x' = (x_1, x'')$  und  $x = (x', x_N)$ .

**Definition B.2.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet. Eine offene Menge  $\Gamma \subset \partial\Omega$  heißt *zulässiger Teilerand*, falls zum einen für jedes  $x_0 \in \partial\Gamma$  ein (neues) orthogonales Koordinatensystem existiert, das aus dem Original durch eine orientierungserhaltende Isometrie hervorgegangen ist, sodass  $x_0$  der Ursprung des neuen System ist und die folgende Bedingung gilt. Es existiert ein Würfel  $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_N \subset \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  mit Mittelpunkt Null und zwei LIPSCHITZ-Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi : Q' &:= Q_1 \times \dots \times Q_{N-1} \rightarrow Q_N, & \varphi(0) &= 0 \\ \psi : Q'' &:= Q_2 \times \dots \times Q_{N-1} \rightarrow Q_1, & \psi(0) &= 0, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \Gamma \cap Q &= \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in Q' \text{ und } \psi(x'') < x_1\}, \\ (\partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}) \cap Q &= \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in Q' \text{ und } \psi(x'') > x_1\} \end{aligned}$$

sowie

$$\partial\Gamma \cap Q = \{(\psi(x''), x'', \varphi(\psi(x''), x'')) \mid x'' \in Q''\}.$$

Somit ist  $\partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}$  ein zulässiger Teilerand genau dann, wenn  $\Gamma$  ein zulässiger Teilerand ist.

**Definition B.2.2.** Sei  $\Omega$  ein LIPSCHITZ-Gebiet in  $\mathbb{R}^N$ .  $D, N \subset \Omega$  seien zwei nichtleere, disjunkte zulässige Teileränder mit  $\bar{D} \cap \bar{N} = \partial D = \partial N$  und  $\bar{D} \cup \bar{N} = \partial\Omega$ .  $\Omega$  heißt *spezielles faltiges LIPSCHITZ-Gebiet*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Es existiert eine LIPSCHITZ-Funktion  $\phi : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$  sodass  $\Omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > \phi(x')\}$ .
- (ii) Es existiert eine LIPSCHITZ-Funktion  $\psi : \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}$  sodass  $N = \{(x_1, x'', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \psi(x'')\} \cap \partial\Omega$  und  $D = \{(x_1, x'', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 < \psi(x'')\} \cap \partial\Omega$ .
- (iii) Es existieren  $\delta_D, \delta_N \geq 0$  mit  $\delta_D + \delta_N > 0$  sodass

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \geq \delta_N \text{ fast überall auf } \{(x_1, x'', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \psi(x'')\}$$

und

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \leq -\delta_D \text{ fast überall auf } \{(x_1, x'', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 < \psi(x'')\}.$$

Ist in der letzten Definition nur Bedingung (i) erfüllt, dann sprechen wir von einem *speziellen LIPSCHITZ-Gebiet*.

**Definition B.2.3.** Sei  $\Omega$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet in  $\mathbb{R}^N$  mit zusammenhängendem Rand. Des Weiteren seien  $D, N \subset \partial\Omega$  zwei nichtleere, disjunkte zulässige Teileränder, derart, dass  $\bar{D} \cap \bar{N} = \partial D = \partial N$  und  $\bar{D} \cup \bar{N} = \partial\Omega$ .  $\Omega$  heißt *faltiges LIPSCHITZ-Gebiet*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Es existieren  $P_i \in \partial\Omega$ ,  $i = 1, \dots, M$  und  $r > 0$  sodass  $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^M B_r(P_i)$ .
- (ii) Für jedes  $i = 1, \dots, M$  existiert ein Koordinatensystem  $\{x_1, \dots, x_N\}$  in  $\mathbb{R}^N$  mit Ursprung  $P_i$  und eine LIPSCHITZ-Funktion  $\phi_i : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass die Menge  $\Omega_i := \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N >$

$\phi(x')$  mit Zerlegung des Randes  $\partial\Omega_i = N_i \cup D_i$  ein spezielles faltiges LIPSCHITZ-Gebiet (s. Definition B.2.2) ist und

$$\begin{aligned}\Omega \cup B_{2r}(P_i) &= \Omega_i \cup B_{2r}(P_i) \\ D \cup B_{2r}(P_i) &= D_i \cup B_{2r}(P_i) \\ N \cup B_{2r}(P_i) &= N_i \cup B_{2r}(P_i)\end{aligned}$$

gilt.

Weiter sei  $\mathcal{H}_\varepsilon$  für  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  als das Innere des Sechsecks mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad (\varepsilon, 0), \quad (1, \frac{1}{2} - \varepsilon), \quad (1, 1), \quad (1 - \varepsilon, 1), \quad (0, \frac{1}{2} + \varepsilon),$$

definiert. Zudem ist

$$B_{p,q}^s(\Omega; \Gamma) := \{u \in B_{p,q}^s(\Omega) \mid \gamma_\Gamma(u) = 0\}.$$

Mit diesen Vorbereitungen formulieren wir nun den folgenden Satz für gemischte Randwertprobleme, siehe [MM07].

**Satz B.2.1.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , ein beschränktes faltiges LIPSCHITZ-Gebiet, dessen Rand sich wie in Definition B.2.3 in die zulässigen Teilränder  $D$  und  $N$  zerlegen lässt. Dann existiert ein  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega)$ , sodass das gemischte Randwertproblem (B.2) eine eindeutige Lösung  $u \in B_{p,p}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)$  besitzt, welche stetig von den Daten  $f = F|_\Omega$  mit  $F \in \left(B_{q,q}^{2-s-\frac{1}{p}}(\Omega; D)\right)'$ ,  $g \in B_{p,p}^s(D)$  und  $h \in B_{p,p}^{s-1}(N)$  abhängt, falls  $(s, \frac{1}{p}) \in \mathcal{H}_\varepsilon$  ist und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt.*

Wir beachten, dass mit  $p = 2$  die SOBOLEV-Räume  $H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega) = B_{2,2}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$  als Spezialfall im letzten Satz enthalten sind und die Aussage für  $0 < s < 1$  gilt. Insbesondere wirkt sich  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega)$  dann nicht mehr auf den Bereich von  $s$  aus.

Im Fall  $N = 2$  gelten ähnliche Aussagen, siehe [Mit05, Dau88]. Für Polygone kann die Aussage des letzten Satzes im Fall  $p = 2$  für homogene Probleme mit dem LAPLACE-Operator sogar auf den Wert  $s = 1$  ausgedehnt werden, sofern der Winkel zwischen den Teilrändern mit DIRICHLET-Daten und denen mit NEUMANN-Daten kleiner als  $\pi$  ist. Siehe hierzu [CS85]. Im zweidimensionalen Fall kommen wir in dieser Arbeit mit der Standardregularität aus, d.h. der Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM liefert für  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $h \in H^{-1/2}(N)$  die Existenz einer eindeutigen Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  von (B.2).

### B.3 Steklov-Poincaré-Operatoren

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet mit Rand  $\partial\Omega$ . Als STEKLOV-POINCARÉ-Operator oder DIRICHLET-nach-NEUMANN-Abbildung bezeichnen wir den Operator, der die DIRICHLET-Daten eines homogenen Randwertproblems auf  $\partial\Omega$  auf die entsprechenden NEUMANN-Daten abbildet. Für lineare elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung, deren Koeffizienten geeignete Bedingungen erfüllen, kann man zeigen, dass der STEKLOV-POINCARÉ-Operator von  $H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  linear und beschränkt nach  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$  abbildet. Siehe beispielsweise [McL00, Theorem 4.25] oder [Cos88, Lemma 3.7]. Wir interessieren uns hauptsächlich für inverse partielle STEKLOV-POINCARÉ-Operatoren und betrachten dazu speziell das gemischte homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \partial_n u &= h & \text{auf } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Für beliebiges  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  existiert mit dem Satz A.1.5 von LAX-MILGRAM eine eindeutige Lösung  $u \in H^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma) = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_{\partial\Omega \setminus \Gamma}(v) = 0\}$ . Für diese Lösung gilt mit dem Spursatz  $\gamma_\Gamma(u) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . Als *inversen partiellen STEKLOV-POINCARÉ-Operator* bezeichnen wir die Abbildung

$$S^{-1} : H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad h \mapsto \gamma_\Gamma(u),$$

wobei  $u$  die eindeutige Lösung von (B.3) ist. Es gilt der

**Satz B.3.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma$  echter Teilrand. Dann ist

$$S^{-1} \in \mathcal{L} \left( H_{00}^{-1/2}(\Gamma), H_{00}^{1/2}(\Gamma) \right)$$

bijektiv.

*Beweis.* Die Abbildungseigenschaften sowie die Linearität und Beschränktheit sind mit den Ausführungen vor dem Satz klar. Weil harmonische Funktionen vollständig durch ihre Randwerte bestimmt sind liefert  $S^{-1}(h) = 0$  sofort  $u = 0$  und damit  $h = 0$ , woraus die Injektivität folgt. Für die Surjektivität betrachten wir zu beliebigem  $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  die Nullfortsetzung  $\tilde{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  auf den Gesamtrand. Anschließend setzen wir  $\tilde{g}$  harmonisch zu  $\bar{u} \in H^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  fort, womit  $\bar{u}$  insbesondere (B.3) erfüllt. Wir bezeichnen die Normalenableitung von  $\bar{u}$  auf  $\partial\Omega$  als  $\partial_n^{\partial\Omega} \bar{u}$  und definieren  $h \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  durch

$$\langle h, v \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \langle \partial_n^{\partial\Omega} \bar{u}, \tilde{v} \rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))' \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma).$$

Dann gilt  $S^{-1}(h) = g$ . □

Für  $N \geq 3$  und faltige LIPSCHITZ-Gebiete können wir den letzten Satz mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes ausweiten.

**Satz B.3.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , ein beschränktes faltiges LIPSCHITZ-Gebiet und  $\Gamma$  ein zulässiger Teilrand. Dann ist

$$S^{-1} \in \mathcal{L} \left( H^{-\varepsilon}(\Gamma), H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma) \right), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

bijektiv.

*Beweis.* Die Linearität und Beschränktheit folgen mit Satz B.2.1, wobei zu beachten ist, dass die Bezeichnung  $\varepsilon$  doppelt verwendet wurde. Wegen  $H^{-\varepsilon}(\Gamma) \subset H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$  folgt die Injektivität aus Satz B.3.1. Für die Surjektivität betrachten wir zu beliebigem  $g \in H_0^{1-\varepsilon}(\Gamma)$  die Nullfortsetzung  $\tilde{g} \in H^{1-\varepsilon}(\partial\Omega)$  auf den Gesamtrand. Anschließend setzen wir  $\tilde{g}$  harmonisch zu  $\bar{u} \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega; \partial\Omega \setminus \Gamma)$  fort, womit  $\bar{u}$  insbesondere (B.3) erfüllt. Mit der Normalenableitung  $\partial_n^{\partial\Omega} \bar{u} \in H^\varepsilon(\partial\Omega)$  von  $\bar{u}$  auf  $\partial\Omega$ , wobei an die am Anfang des Abschnittes gemachten Bemerkungen zu den Abbildungseigenschaften des STEKLOV-POINCARÉ-Operators erinnert sei, definieren wir  $h \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$  durch

$$\langle h, v \rangle_{(H^\varepsilon(\Gamma))' \times H^\varepsilon(\Gamma)} := \langle \partial_n^{\partial\Omega} \bar{u}, \tilde{v} \rangle_{(H^\varepsilon(\partial\Omega))' \times H^\varepsilon(\partial\Omega)} \quad \forall v \in H^\varepsilon(\Gamma) = H_0^\varepsilon(\Gamma).$$

Dann gilt  $S^{-1}(h) = g$ . □

# C Einige Resultate der Optimierung in Banach-Räumen

In diesem Abschnitt sammeln wir einige Resultate bezüglich der Optimierung in BANACH-Räumen. Hierunter fallen insbesondere auch die von uns betrachteten optimalen Kontrollprobleme mit Nebenbedingungen, die durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden.

## C.1 Das implizite Funktionentheorem

**Satz C.1.1** (implizites Funktionentheorem). *Seien  $X, Y, Z$  BANACH-Räume und sei  $F : G \rightarrow Z$  eine stetig FRÉCHET-differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge  $G \subset X \times Y$  nach  $Z$ . Sei weiter  $(\bar{x}, \bar{y}) \in G$  mit  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  und habe  $F_y(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{L}(Y, Z)$  eine beschränkte Inverse. Dann existiert eine offene Umgebung  $U_X(\bar{x}) \times U_Y(\bar{y}) \subset G$  von  $(\bar{x}, \bar{y})$  und eine eindeutige stetige Funktion  $w : U_X(\bar{x}) \rightarrow Y$ , sodass*

- (i)  $w(\bar{x}) = \bar{y}$ ,
- (ii) Für alle  $x \in U_X(\bar{x})$  existiert genau ein  $y \in U_Y(\bar{y})$  mit  $F(x, y) = 0$ , nämlich  $y = w(x)$ .

Weiterhin ist die Abbildung  $w : U_X(\bar{x}) \rightarrow Y$  stetig FRÉCHET-differenzierbar mit Ableitung

$$w'(x) = F_y(x, w(x))^{-1} F_x(x, w(x)).$$

Der Beweis findet sich z.B. in [Zei86, Theorem 4.B.] oder [Zei95, Theorem 4.8.4.E, S. 250].

## C.2 Folgenunterhalbstetige Funktionale

Wir benötigen zuerst einige Begrifflichkeiten.

**Definition C.2.1.** Sei  $X$  ein Banachraum und  $F : M \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional.

- (i)  $F$  heißt *unterhalbstetig* in  $u \in M$  genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(u, \varepsilon) > 0 : F(u) < F(v) + \varepsilon \quad \forall v \in M \text{ mit } \|v - u\|_X < \delta.$$

- (ii)  $F$  heißt *schwach folgenunterhalbstetig* in  $u \in M$  genau dann, wenn gilt:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ für } n \rightarrow \infty, (u_n)_n \subset M \implies F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n).$$

- (iii)  $F$  heißt *folgenunterhalbstetig* in  $u \in M$  genau dann, wenn gilt:

$$u_n \rightarrow u \text{ für } n \rightarrow \infty, (u_n)_n \subset M \implies F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n).$$

- (iv)  $F$  heißt *schwach folgenstetig* in  $u \in M$  genau dann, wenn gilt:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ für } n \rightarrow \infty, (u_n)_n \subset M \implies F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n).$$

Wir formulieren das einfache

**Lemma C.2.1.** *Sei  $X$  ein BANACH-Raum und seien  $F_1, F_2 : M \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  schwach folgenunterhalbstetig in  $u \in M$ . Dann ist auch  $F_1 + F_2$  schwach folgenunterhalbstetig in  $u \in M$ .*

*Beweis.* Es sei  $(u_n)_n \subset M$  eine beliebige Folge mit  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann haben wir

$$F_1(u) + F_2(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_1(u_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} F_2(u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (F_1(u_n) + F_2(u_n)).$$

□

Der folgende Satz findet sich beispielsweise in [Zei85, Chapter 38].

**Satz C.2.2** (unterhalbstetige Funktionale auf BANACH-Räumen). *X sei ein BANACH-Raum und  $F : M \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional. Dann gilt:*

- (i)  $F$  stetig  $\implies F, -F$  unterhalbstetig.
- (ii)  $F$  unterhalbstetig  $\iff F$  folgenunterhalbstetig für alle  $u \in M$ .
- (iii) Ist  $F$  konvex,  $M$  abgeschlossen und konvex, dann gilt:  
 $F$  unterhalbstetig  $\iff F$  schwach folgenunterhalbstetig für alle  $u \in M$ .

### C.3 Ein Existenzresultat für semilineare Probleme

Wir halten uns an die Notation in [HPUU09] und betrachten das folgende semilineare *optimale Kontrollproblem*

$$\min_{(y,u) \in Y \times U} J_\delta(y, u) \quad \text{bezüglich} \quad Ay + Bu = h, \quad y \in Y_{ad}, \quad u \in U_{ad}, \quad (\text{C.1})$$

wobei

$$J_\delta(y, u) = J(y, u) + \frac{\delta}{2} \|u\|_U^2$$

gilt. Die Optimierungsvariable  $w := (y, u)$  wurde in zwei Teile gesplittet.  $y$  bezeichnet die *Zustände* und  $u$  stellt die *Kontrollvariable* dar. Die Abbildung  $J : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und nichtnegativ und weiter gelte  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  und  $h \in Z$ , wobei  $Z$  ein BANACH-Raum ist und  $U, Y$  reflexive BANACH-Räume bezeichnen.  $J_\delta$  bezeichnet man als *Zielfunktional* und  $Ay + Bu = h$  als *Zustandsgleichung*. Das Zielfunktional kann nichtlinear sein, die Zustandsgleichung ist aber offensichtlich affin linear, weshalb hier von semilinearen Problemen gesprochen wird. Die Nützlichkeit des Regularisierungsterms  $\frac{\delta}{2} \|u\|_U^2$  im Zielfunktional wird im nächsten Satz deutlich. Zunächst wollen wir definieren, was wir unter einer Lösung verstehen wollen.

**Definition C.3.1** (optimale Lösung von (C.1)). Ein Zustands-Kontroll-Paar  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y_{ad} \times U_{ad}$  heißt (*global*) *optimal* für (C.1), falls

$$J_\delta(\bar{y}, \bar{u}) \leq J_\delta(y, u)$$

für alle  $(y, u) \in Y_{ad} \times U_{ad}$  mit  $Ay + Bu = h$  gilt.

Wir sammeln einige Voraussetzungen, unter denen die optimale Lösbarkeit des obigen Modellproblems beweisbar ist.

**Voraussetzung C.1.** Es gelte:

1.  $\delta \geq 0$ ,  $U_{ad} \subset U$  ist konvex, abgeschlossen und im Fall  $\delta = 0$  beschränkt.
2.  $Y_{ad} \subset Y$  ist konvex und abgeschlossen, sodass (C.1) einen zulässigen Punkt besitzt.
3.  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$  besitzt eine beschränkte Inverse.
4. Das Zielfunktional  $J_\delta$  ist schwach folgenunterhalbstetig.

Ein Existenzresultat für die Lösbarkeit von (C.1) enthält der

**Satz C.3.1.** *Unter Voraussetzung C.1 hat das Problem (C.1) eine (global) optimale Lösung  $(\bar{y}, \bar{u})$ .*



*Beweis.* Der Beweis ist im Wesentlichen eine Mischung aus den Beweisen zu [HPUU09, Theorem 1.43] und [HPUU09, Theorem 1.45] und wird nachfolgend ausgeführt.

Wir bezeichnen die zulässige Menge mit

$$\mathcal{F}_{ad} := \{(y, u) \in Y \times U \mid (y, u) \in Y_{ad} \times U_{ad}, Ay + Bu = h\}.$$

Da  $J_\delta \geq 0$  und die zulässige Menge  $\mathcal{F}_{ad}$  nicht leer ist, existiert das Infimum

$$J_\delta^* := \inf_{(y,u) \in \mathcal{F}_{ad}} J_\delta(y, u)$$

und wir finden eine minimierende Folge  $(y_k, u_k)_k \subset \mathcal{F}_{ad}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_\delta(y_k, u_k) = J_\delta^*.$$

Die Folge  $(u_k)_k$  ist beschränkt, da im Fall  $\delta = 0$   $U_{ad}$  nach Voraussetzung beschränkt ist und im Fall  $\delta > 0$  mit der geforderten Nichtnegativität von  $J$  offenbar

$$\frac{\delta}{2} \|u_k\|_U^2 \leq J_\delta(y_k, u_k)$$

gilt, was die Beschränktheit liefert. Da wir  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  und nach Voraussetzung  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$  haben, liefert dies auch die Beschränktheit der Zustandsfolge  $(y_k)_k$ , da dann  $y_k = A^{-1}(h - Bu_k)$  gilt. Weiter ist  $Y \times U$  reflexiv, sodass nachfolgendes Lemma die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge  $(y_{k_i}, u_{k_i})_i \subset (y_k, u_k)_k$  und eines Punktes  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$  mit  $(y_{k_i}, u_{k_i})_i \rightharpoonup (\bar{y}, \bar{u})$  für  $i \rightarrow \infty$  liefert. Um zu zeigen, dass  $(\bar{y}, \bar{u}) \in \mathcal{F}_{ad}$  gilt, beachten wir, dass für hinreichend großes  $r > 0$

$$(y_k, u_k)_k \subset \mathcal{F}_{ad} \cap \left( \overline{B_{Y,r}(0)} \times \overline{B_{U,r}(0)} \right) =: M$$

gilt, wobei  $\overline{B_{Y,r}(0)}$ ,  $\overline{B_{U,r}(0)}$  die abgeschlossenen Kugeln mit Radius  $r$  in  $Y$  bzw.  $U$  bezeichnen. Da nach Voraussetzung  $Y_{ad} \times U_{ad}$  abgeschlossen und konvex ist, gilt selbiges auch für  $\mathcal{F}_{ad}$ . Folglich ist die Menge  $M$  beschränkt, abgeschlossen und konvex, woraus, erneut mit nachfolgendem Lemma, die schwache Folgenkompaktheit von  $M$  folgt. Zusammengefasst existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(y_{k_i}, u_{k_i})_i \subset (y_k, u_k)_k$  und ein Punkt  $(\bar{y}, \bar{u}) \in \mathcal{F}_{ad}$  mit  $\mathcal{F}_{ad} \ni (y_{k_i}, u_{k_i})_i \rightharpoonup (\bar{y}, \bar{u})$  für  $i \rightarrow \infty$ . Die vorausgesetzte schwache Folgenunterhalbstetigkeit von  $J_\delta$  liefert nun, dass  $(\bar{y}, \bar{u})$  das Minimierungsproblem (C.1) löst.  $\square$

Wir merken an, dass die strenge Konvexität des Zielfunktional die eindeutige Lösbarkeit liefern würde.

**Lemma C.3.2** (schwache Folgenkompaktheit). *Sei  $X$  ein reflexiver BANACH-Raum. Dann gilt:*

- (i) *Jede beschränkte Folge  $(x_k) \subset X$  enthält eine schwach konvergente Teilfolge, d.h. es gibt eine Teilfolge  $(x_{k_i})_i \subset (x_k)_k$  und ein  $x \in X$  mit  $x_{k_i} \rightharpoonup x$ .*
- (ii) *Jede beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge  $M \subset X$  ist schwach folgenkompakt, d.h. jede Folge  $(x_k)_k \subset M$  enthält eine schwach konvergente Teilfolge  $(x_{k_i})_i \subset (x_k)_k$  mit  $x_{k_i} \rightharpoonup x$ , wobei  $x \in M$ .*

*Beweis.* Siehe [HPUU09, Theorem 1.17] oder [Zei95, Proposition 2.8.6, Corollary 2.8.7, S. 64] oder [Yos80, Theorem V.2.1].  $\square$

## C.4 Ein Existenzresultat für nichtlineare Probleme

Wir halten uns wieder an die Notation in [HPUU09] und verallgemeinern das Resultat des letzten Abschnittes auf eine größere Problemklasse. Wir fordern nun nicht mehr die affine Linearität der Zustandsgleichung und betrachten das folgende nichtlineare *optimale Kontrollproblem*

$$\min_{(y,u) \in Y \times U} J(y, u) \quad \text{bezüglich} \quad e(y, u) = 0, \quad y \in Y_{ad}, \quad u \in U_{ad}. \quad (\text{C.2})$$

Die Optimierungsvariable  $w := (y, u)$  wurde in zwei Teile gesplittet.  $y$  bezeichnet die *Zustände* und  $u$  stellt die *Kontrollvariable* dar. Die Abbildungen

$$J : Y \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad e : Y \times U \rightarrow Z$$

seien stetig, wobei  $Z$  ein BANACH-Raum ist und  $U, Y$  reflexive BANACH-Räume bezeichnen.  $J$  bezeichnet man als *Zielfunktional* und  $e$  als *Zustandsgleichung*.

**Definition C.4.1** (optimale Lösung von (C.2)). Ein Zustands-Kontroll-Paar  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y_{ad} \times U_{ad}$  heißt (*global*) *optimal* für (C.2), falls

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq J(y, u)$$

für alle  $(y, u) \in Y_{ad} \times U_{ad}$  mit  $e(y, u) = 0$  gilt.

Wir sammeln einige Voraussetzungen, unter denen die optimale Lösbarkeit des obigen Modellproblems beweisbar ist.

**Voraussetzung C.2.** Es gelte:

1.  $U_{ad} \subset U$  ist konvex, beschränkt und abgeschlossen.
2.  $Y_{ad} \subset Y$  ist konvex und abgeschlossen, sodass (C.2) einen zulässigen Punkt besitzt.
3. Die Zustandsgleichung  $e(y, u) = 0$  besitzt einen beschränkten Lösungsoperator  $U_{ad} \ni u \mapsto y(u) \in Y$ .
4. Die Abbildung  $Y \times U \ni (y, u) \mapsto e(y, u) \in Z$  ist stetig bezüglich schwacher Konvergenz.
5. Das Zielfunktional  $J$  ist schwach folgenunterhalbstetig.

Ein Existenzresultat für die Lösbarkeit von (C.2) enthält der

**Satz C.4.1.** *Unter Voraussetzung C.2 hat das Problem (C.2) eine (global) optimale Lösung  $(\bar{y}, \bar{u})$ .*

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [HPUU09, Theorem 1.45]. □

## C.5 Reduzierte Probleme und Bestimmung der Ableitungen

Wir folgen den Darstellungen in [HPUU09, Chapter 1.6] und betrachten erneut das nichtlineare optimale Kontrollproblem (C.2). Zusätzlich nehmen wir an, dass  $J$  und  $e$  stetig F-differenzierbar sind und dass die Zustandsgleichung  $e(y, u) = 0$  für jedes  $u \in U$  eine eindeutige Lösung  $y(u) \in Y$  besitzt, wir folglich einen Lösungsoperator  $U \ni u \mapsto y(u) \in Y$  haben. Weiter nehmen wir an, dass  $e_y(y(u), u) \in \mathcal{L}(Y, Z)$  stetig invertierbar ist. Dann sichert der Satz C.1.1 über die implizite Funktion, dass  $y(u)$  stetig differenzierbar ist und differenzieren der Gleichung  $e(y(u), u) = 0$  bezüglich  $u$  liefert

$$e_y(y(u), u)y'(u) + e_u(y(u), u) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Setzen wir  $y(u)$  in (C.2) ein, so erhalten wir das *reduzierte Kontrollproblem*

$$\min_{u \in U} M(u) := J(y(u), u) \quad \text{bezüglich} \quad u \in \hat{U}_{ad} := \{u \in U_{ad} \mid y(u) \in Y_{ad}\}. \quad (\text{C.4})$$

Um die Ableitung des reduzierten Zielfunktionals  $M$  zu bestimmen, gibt es im Wesentlichen zwei Ansätze, einerseits den Ansatz über die Sensitivitäten, das sind Richtungsableitungen, und andererseits den Ansatz über die Adjungierten.

Der Ansatz über die Sensitivitäten läuft folgendermaßen ab. Für  $u \in U$  und eine Richtung  $s \in U$  liefert die Kettenregel für die Sensitivität von  $M$

$$dM(u; s) = \langle M'(u), s \rangle_{(U)' \times U} = \langle J_y(y(u), u), y'(u)s \rangle_{(Y)' \times Y} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{(U)' \times U}.$$

In diesem Ausdruck tritt die Richtungsableitung  $dy(u; s) = y'(u)s$  auf. Differenzieren von  $e(y(u), u) = 0$  in Richtung  $s$  liefert andererseits

$$e_y(y(u), u)y'(u)s + e_u(y(u), u)s = 0.$$

Folglich ist die Sensitivität  $\delta_s y = dy(u; s)$  als Lösung der linearisierten Zustandsgleichung

$$e_y(y(u), u)\delta_s y = -e_u(y(u), u)s \quad (\text{C.5})$$

gegeben. Um die Richtungsableitung  $dM(u; s) = \langle M'(u), s \rangle_{(U)' \times U}$  zu bestimmen, sind also die beiden folgenden Schritte nötig. Zuerst bestimmen wir die Sensitivität  $\delta_s y = dy(u; s)$  durch Lösen von (C.5). Anschließend berechnen wir  $dM(u; s) = \langle M'(u), s \rangle_{(U)' \times U}$  via

$$dM(u; s) = \langle J_y(y(u), u), \delta_s y \rangle_{(Y)' \times Y} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{(U)' \times U}.$$

Falls neben der Richtungsableitung die ganze Ableitung  $M'(u)$  bestimmt werden muss, ist obiges Vorgehen nicht mehr effizient. In diesem Fall müssen die Richtungsableitungen  $dM(u; v)$  für alle Elemente  $v$  einer Basis von  $U$  berechnet werden, wobei jede dieser Berechnungen eine Lösung der linearisierten Zustandsgleichung (C.5) mit  $s = v$  erfordert. Somit steigt der Aufwand linear mit der Dimension von  $U$ .

Die Repräsentation der Ableitung von  $M$  ist mit dem Ansatz über die Adjungierten viel effizienter möglich. Mit

$$\begin{aligned} \langle M'(u), s \rangle_{(U)' \times U} &= \langle J_y(y(u), u), y'(u)s \rangle_{(Y)' \times Y} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{(U)' \times U} \\ &= \langle y'(u)^* J_y(y(u), u), s \rangle_{(U)' \times U} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{(U)' \times U}, \end{aligned}$$

wobei  $y'(u)^* \in \mathcal{L}((Y)', (U)')$  den adjungierten Operator zu  $y'(u) \in \mathcal{L}(U, Y)$  bezeichnet, haben wir sofort

$$M'(u) = y'(u)^* J_y(y(u), u) + J_u(y(u), u).$$

Somit wird statt des Operators  $y'(u) \in \mathcal{L}(U, Y)$  nur der Vektor  $y'(u)^* J_y(y(u), u) \in (U)'$  benötigt. Wegen (C.3) gilt

$$y'(u)^* J_y(y(u), u) = -e_u(y(u), u)^* e_y(y(u), u)^{-1*} J_y(y(u), u),$$

woraus

$$y'(u)^* J_y(y(u), u) = e_u(y(u), u)^* p(u)$$

folgt. Dabei ist der *adjungierte Zustand*  $p = p(u) \in (Z)'$  als Lösung der *adjungierten Gleichung*

$$e_y(y(u), u)^* p = -J_y(y(u), u) \quad (\text{C.6})$$

gegeben. Insgesamt kann die Ableitung  $M'(u)$  durch die beiden folgenden Schritte berechnet werden. Zuerst bestimmen wir den adjungierten Zustand  $p \in (Z)'$  durch Lösen der adjungierten Gleichung (C.6). Anschließend berechnen wir  $M'(u)$  via

$$M'(u) = e_u(y(u), u)^* p + J_u(y(u), u). \quad (\text{C.7})$$

Die Repräsentation der Ableitung von  $M$  über die Adjungierten kann auch auf andere Weise hergeleitet werden. Dazu betrachten wir wieder das nichtlineare optimale Kontrollproblem (C.2) und definieren das LAGRANGE-Funktional

$$L : Y \times U \times (Z)' \rightarrow \mathbb{R}, \quad (y, u, p) \mapsto L(y, u, p) = J(y, u) + \langle p, e(y, u) \rangle_{(Z)' \times Z}.$$

Einsetzen von  $y = y(u)$ , womit  $e(y(u), u) = 0$  gilt, liefert für beliebiges  $p \in (Z)'$

$$M(u) = J(y(u), u) = J(y(u), u) + \langle p, e(y(u), u) \rangle_{(Z)' \times Z} = L(y(u), u, p).$$

Differenzieren wir dies, erhalten wir

$$\langle M'(u), s \rangle_{(U)' \times U} = \langle L_y(y(u), u, p), y'(u)s \rangle_{(Y)' \times Y} + \langle L_u(y(u), u, p), s \rangle_{(U)' \times U}. \quad (\text{C.8})$$

Nun wählen wir  $p = p(u)$  so, dass

$$L_y(y(u), u, p) = 0 \quad (\text{C.9})$$

gilt. Letzteres ist gerade die adjungierte Gleichung (C.6), denn wegen

$$\begin{aligned} \langle L_y(y, u, p), d \rangle_{(Y)' \times Y} &= \langle J_y(y, u), d \rangle_{(Y)' \times Y} + \langle p, e_y(y, u)d \rangle_{(Z)' \times Z} \\ &= \langle J_y(y, u) + e_y(y, u)^* p, d \rangle_{(Y)' \times Y} \end{aligned}$$

gilt natürlich auch

$$L_y(y(u), u, p) = J_y(y(u), u) + e_y(y(u), u)^* p.$$

Insgesamt erhalten wir mit (C.8), wenn  $p = p(u)$  so gewählt ist, dass (C.9) gilt,

$$M'(u) = L_u(y(u), u, p(u)) = J_u(y(u), u) + e_u(y(u), u)^* p(u),$$

welches gerade (C.7) entspricht.

Den LAGRANGE-Funktional basierten Ansatz können wir auch benutzen, um die zweite Ableitung von  $M$  zu bestimmen. Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $M$  zweimal stetig F-differenzierbar ist. Wie bereits im letzten Absatz erwähnt, gilt für alle  $p \in (Z)'$  die Identität

$$M(u) = J(y(u), u) = L(y(u), u, p).$$

Differenzieren wir dies zunächst in Richtung  $s_1 \in U$ , dann in Richtung  $s_2 \in U$  und wählen weiterhin  $p = p(u)$  so, dass (C.9) gilt, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} M''(u) &= y'(u)^* L_{yy}(y(u), u, p(u))y'(u) + y'(u)^* L_{yu}(y(u), u, p(u)) \\ &\quad + L_{uy}(y(u), u, p(u))y'(u) + L_{uu}(y(u), u, p(u)) \\ &= T(u)^* L_{ww}(y(u), u, p(u))T(u) \end{aligned}$$

mit

$$T(u) = \begin{pmatrix} y'(u) \\ I_U \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, Y \times U), \quad L_{ww} = \begin{pmatrix} L_{yy} & L_{yu} \\ L_{uy} & L_{uu} \end{pmatrix},$$

wobei  $I_U \in \mathcal{L}(U, U)$  die Identität in  $U$  bezeichnet und  $w = (y, u)$  ist. Wir erinnern daran, dass  $y'(u) = -e_y(y(u), u)^{-1}e_u(y(u), u)$  gilt. Statt den gesamten Operator  $M''(u)$  zu bestimmen, verwenden wir die obige Repräsentation von  $M''(u)$  gewöhnlich dafür, das Operator-Vektor-Produkt  $M''(u)s$  zu berechnen. Dazu berechnen wir zunächst die Sensitivität

$$\delta_s y = y'(u)s = -e_y(y(u), u)^{-1}e_u(y(u), u)s,$$

was eine Lösung der linearisierten Zustandsgleichung erfordert. Anschließend berechnen wir

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{yy}(y(u), u, p(u))\delta_s y + L_{yu}(y(u), u, p(u))s \\ L_{uy}(y(u), u, p(u))\delta_s y + L_{uu}(y(u), u, p(u))s \end{pmatrix}$$

und damit

$$h_3 = y'(u)^* h_1 = -e_u(y(u), u)^* e_y(y(u), u)^{-1*} h_1,$$

wobei Letzteres eine Lösung der adjungierten Gleichung erfordert. Am Schluss setzen wir  $M''(u)s = h_2 + h_3$ .

Die eben durchgeführten Prozeduren können wir beispielsweise dazu benutzen, um die während des NEWTON-Verfahrens auftretende Gleichung

$$M''(u^k)s^k = -M'(u^k)$$

effizient zu lösen.

# Modellprobleme, Verfahren und Voraussetzungen aus Kapitel 2

*Lineares Modellproblem* (siehe Seite 10):

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad (2.3)$$

mit  $P(D)u = P_i(D)u|_{\Omega_i}$  auf  $\Omega_i$  und

$$P_i(D) = -\operatorname{div}(A_i(x) \cdot \nabla) + (b_i(x), \nabla) + c_i(x) \text{ auf } \Omega_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

*Schwache Form des linearen Modellproblems* (siehe Seite 10):

Finde  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.5)$$

mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (A \cdot \nabla u, \nabla v) + (b, \nabla u) v + cuv \, dx \quad (2.6)$$

*Lineares Transmissionsproblem* (siehe Seite 16):

$$\begin{cases} P_i(D)u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_i = u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, \quad j \in \mathcal{N}(i) \\ \partial_{P_i} u_i = -\partial_{P_j} u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, \quad j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

*Schwache Form des linearen Transmissionsproblems* (siehe Seite 16):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ji}}^j(u_j) & \text{in } H^{1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_j} u_j, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (2.21)$$

mit

$$a_i(v_i, w_i) := \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla v_i, \nabla w_i) + (b_i, \nabla v_i) w_i + c_i v_i w_i \, dx, \quad (2.8)$$

Weitere schwache Formen des linearen Transmissionsproblems (siehe Seite 21):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu \rangle = \langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (2.29)$$

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle & \forall v_i \in V_i^{00} \end{cases} \quad (2.30)$$

## Verfahren aus Kapitel 2

*Nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* (siehe Seite 23): Seien beliebige Startwerte  $u_i^0 \in V_i, i = 1, \dots, m$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme:

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^{n+1} = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{n+1} = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = -\partial_{P_j} u_j^n + \lambda_{ij} u_j^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.33)$$

*Schwache Formulierungen der nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode* (siehe Seite 23): Finde  $u_i^{n+1} \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^{n+1}, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i^{n+1} + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^{n+1}), \mu \rangle = \langle -\partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), \\ & j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (2.34)$$

Finde  $u_i^{n+1} \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^{n+1}, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^{n+1}), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle -\partial_{P_j} u_j^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle & \forall v_i \in V_i^{00} \end{cases} \quad (2.35)$$

*Verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* (siehe Seite 26): Seien beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme:

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^n = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^n = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^n + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.38)$$

Anschließend datieren wir die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen wie folgt auf:

$$g_{ij}^{n+1} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})u_j^n - g_{ji}^n \text{ auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \quad (2.39)$$

*Schwache Formulierungen der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode* (siehe Seite 27):

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \mu \rangle = \langle g_{ij}^n, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (2.40)$$

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle & \forall v_i \in V_i^{00} \end{cases} \quad (2.41)$$

$$g_{ij}^{n+1} = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \quad (2.42)$$

## Voraussetzungen aus Kapitel 2

Die Voraussetzungen an die Gebiete befinden sich am Anfang des Abschnitts 2.1 auf Seite 8.

### Voraussetzungen an das Problem

Für  $i = 1, \dots, m$  erfülle  $P_i(D)$ :

**Voraussetzung 2.1.** (siehe Seite 11)  $A_i$  sei elliptisch, d.h. es existiert ein  $\alpha_i > 0$ , sodass

$$(A_i \cdot \xi, \xi) \geq \alpha_i |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ f.ü. auf } \Omega_i.$$

**Voraussetzung 2.2.** (siehe Seite 11) Es existiert ein  $\nu_i > 0$ , sodass

$$a_i(w, w) \geq \nu_i \int_{\Omega_i} (A_i \cdot \nabla w, \nabla w) dx \quad \forall w \in V_i.$$

In den nächsten Voraussetzungen bezeichne  $\widehat{\Gamma}_i$  den inneren Teilrand des Gebietes  $\Omega_i$ , d.h.  $\widehat{\Gamma}_i := \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ , und  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^*$  ist der Spuoperator aus Satz A.2.10.

**Voraussetzung 2.3.** (siehe Seite 12) Es gelten die Regularitätsforderungen  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  und  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$ . Weiterhin gelte für fast alle  $x \in \Omega_i$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{div}(b_i(x)) + c_i(x) \geq \eta_i, \text{ wobei } \eta_i > \begin{cases} -\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}} & \text{falls } \Omega_i \text{ echten Außenrand besitzt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\alpha_i$  die Elliptizitätskonstante aus Voraussetzung 2.1 und  $C_{\Omega_i}$  die Konstante der POINCARÉ-Ungleichung auf  $\Omega_i$ . Siehe auch Abschnitt A.2.1, Satz A.2.2. Die Regularitätsforderung an die Divergenz von  $b_i$  zusammen mit  $b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  impliziert natürlich insbesondere  $b_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$ .

**Voraussetzung 2.4.** (siehe Seite 12) Es gelte Voraussetzung 2.3 mit  $\eta_i \geq 0$ , falls  $\Omega_i$  keinen echten Außenrand besitzt.

**Voraussetzung 2.5.** (siehe Seite 12) Es gelte  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$ , d.h. insbesondere  $b_i \in H(\operatorname{div}, \Omega_i)$ , und mit  $\widehat{\Gamma}_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$

$$\left\langle \gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i, \mu^+ \right\rangle_{(H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i))' \times H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i)} \geq 0 \quad \forall \mu^+ \in \left\{ \mu \in H_{00}^{1/2}(\widehat{\Gamma}_i) \mid \mu(\cdot) \geq 0 \text{ f.ü. auf } \widehat{\Gamma}_i \right\}.$$

Falls die Spur von  $b_i$  auf  $\widehat{\Gamma}_i$  als Funktion aufgefasst werden kann, z.B. wenn  $b_i$  hinreichend regulär ist, wie in Voraussetzung 2.3, folgt diese Bedingung aus der Forderung

$$b_i(x) \cdot n_i(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \widehat{\Gamma}_i.$$

Dabei bezeichnet  $n_i(\cdot)$  den äußeren Normaleneinheitsvektor bezüglich  $\Omega_i$ . Siehe Abschnitt A.2.1.

**Voraussetzung 2.6.** (siehe Seite 12) Es gelte die Regularitätsforderung  $\gamma_{\widehat{\Gamma}_i}^* b_i \in L^2(\widehat{\Gamma}_i)$  und fast überall auf  $\Omega_i$

$$\operatorname{div}(b_i) = 0 \text{ und} \tag{2.10}$$

$$\exists \tilde{c}_i > 0 \text{ mit } c_i(x) \geq \tilde{c}_i \text{ für fast alle } x \in \Omega_i. \tag{2.11}$$

Falls  $\Omega_i$  einen echten Außenrand besitzt ist  $\tilde{c}_i > -\frac{\alpha_i}{C_{\Omega_i}}$  zulässig, wobei die Konstanten wie in Voraussetzung 2.3 bezeichnet sind. Insbesondere impliziert (2.10) natürlich  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$ .

**Voraussetzung 2.7.** (siehe Seite 12) Es gelte Voraussetzung 2.6 mit  $c_i(\cdot) \geq 0$  f.ü. auf  $\Omega_i$ , anstatt (2.11).

## Voraussetzungen an die Methode

Die nachfolgenden Voraussetzungen sichern die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode.

**Voraussetzung 2.8.** (siehe Seite 21) Für  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x)| > 0$$

und weiter

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)| > 0,$$

d.h. sowohl  $\lambda_{ij}$  als auch die Summe  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  seien fast überall von der Null weg beschränkt.

**Voraussetzung 2.9.** (siehe Seite 28) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(x) = \underline{\lambda}_{ij} > 0.$$

**Voraussetzung 2.15.** (siehe Seite 43) Für die konvektionsrelevanten Koeffizienten  $b_i = b|_{\Omega_i} \in (L^\infty(\Omega_i))^N$ ,  $i = 1, \dots, m$ , des Differentialoperators (2.2) gilt  $\operatorname{div} b_i \in L^\infty(\Omega_i)$  und zusätzlich

$$\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b_i) = -\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b_j) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^{*i}(b) = -\gamma_{\Gamma_{ij}}^{*j}(b) \in L^\infty(\Gamma_{ij}), \quad j \in \mathcal{N}(i),$$

mit dem Spuroperator aus Satz A.2.10. Die hinreichend regulären Spuren springen also *nicht* zwischen den Teilgebieten bzw.  $b \in (L^\infty(\Omega))^N$  ist stetig auf den Rändern der Teilgebiete.

## Voraussetzungen technischer Natur

Die nachfolgenden Voraussetzungen werden aus beweistechnischen Gründen benötigt.

**Voraussetzung 2.10.** (siehe Seite 33) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  ein Multiplikator für  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , d.h. es gilt

$$(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}).$$

**Voraussetzung 2.11.** (siehe Seite 33) Für die Lösung  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  des linearen Modellproblems (2.3) bzw. des Transmissionsproblems (2.19) gelte  $\partial_{P_i} u_i \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , d.h. sämtliche Konormalenableitungen auf den Schnittstellen der Teilgebiete sind als quadratintegrierbare Funktionen interpretierbar.

**Voraussetzung 2.12.** (siehe Seite 34) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)) = \underline{m}_{ij} > 0.$$

Insbesondere ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  fast überall positiv.

**Voraussetzung 2.13.** (siehe Seite 37) Für  $j = 1, \dots, m$  gelte

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(v_j^2) \, d\sigma \leq C a_j(v_j, v_j) - N_j(v_j) \quad \forall v_j \in \ker P_j(D) \subset V_j.$$

Dabei sei  $N_j(v_j) \geq 0$  für alle  $v_j \in \ker P_j(D) \subset V_j$  und  $0 < C \leq 2$ .

**Voraussetzung 2.14.** (siehe Seite 37) Für alle  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m \ker P_i(D) \subset \hat{H}^1$  gelte

$$0 \leq \tilde{a}(v, v) = \sum_{i=1}^m a_i(v_i, v_i).$$



# Modellprobleme, Verfahren und Voraussetzungen aus Kapitel 3

## Probleme aus Kapitel 3

Quasilineares Modellproblem (siehe Seite 49):

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

mit

$$(P(D)u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, Du(x)) \quad (3.1)$$

Schwache Formulierung des quasilinearen Modellproblems (siehe Seite 50):

Finde ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.6)$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, Du(x)) D^\alpha v(x) dx \quad (3.4)$$

Quasilineares Transmissionsproblem (siehe Seite 52):

$$\begin{cases} P_i(D)u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ u_i = u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \\ \partial_{P_i} u_i = -\partial_{P_j} u_j & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

mit

$$(P_i(D)u_i)(x) := \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha^i(x, Du_i(x)), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

Schwach formuliertes quasilineares Transmissionsproblem (siehe Seite 53):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i) = \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j) & \text{in } H^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_j} u_j, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (3.14)$$

mit

$$a_i(u_i, v_i) := \int_{\Omega_i} \sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha^i(x, Du_i(x)) D^\alpha v_i(x) dx \quad (3.11)$$

Weitere schwache Formulierungen des quasilineares Transmissionsproblem (siehe Seite 56):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \mu \rangle = \langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad (3.17)$$

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle -\partial_{P_j} u_j + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00} \end{cases} \quad (3.18)$$

### Verfahren aus Kapitel 3

*Verallgemeinerte nichtüberlappende SCHWARZsche Methode* (siehe Seite 58): Seien beliebige  $g_{ij}^0 \in H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), i = 1, \dots, m, j \in \mathcal{N}(i)$ , gegeben. Für  $n \geq 0$  lösen wir sukzessive die Probleme:

$$\begin{cases} P_i(D)u_i^n = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i^n = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{P_i} u_i^n + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.21)$$

Anschließend datieren wir die ROBIN-Daten der Transmissionsbedingungen wie folgt auf:

$$g_{ij}^{n+1} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ji})u_j^n - g_{ji}^n \text{ auf } \Gamma_{ij}, j \in \mathcal{N}(i) \quad (3.22)$$

*Schwache Formulierungen der verallgemeinerten nichtüberlappenden SCHWARZschen Methode* (siehe Seite 58):

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{P_i} u_i^n + \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \mu \rangle = \langle g_{ij}^n, \mu \rangle \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \quad (3.23)$$

Finde  $u_i^n \in V_i, i = 1, \dots, m$ , mit

$$\begin{cases} a_i(u_i^n, v_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle \mathcal{I}^{00} \lambda_{ij} \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(u_i^n), \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \\ = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \langle g_{ij}^n, \gamma_{\Gamma_{ij}}^i(v_i) \rangle \quad \forall v_i \in V_i^{00}, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$g_{ij}^{n+1} = \mathcal{I}^{00}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\gamma_{\Gamma_{ij}}^j(u_j^n) - g_{ji}^n \text{ in } H_{00}^{-1/2}(\Gamma_{ij}), j \in \mathcal{N}(i). \quad (3.25)$$

## Voraussetzungen aus Kapitel 3

Die Voraussetzungen an die Gebiete befinden sich am Anfang des Abschnitts 2.1 auf Seite 8.

### Voraussetzungen an das Problem

**Voraussetzung 3.1** (Carathéodory Bedingung). (siehe Seite 49) Die Funktionen  $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  haben für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq 1$  die folgenden beiden Eigenschaften:

- (i)  $x \mapsto A_\alpha(x, D)$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $D \in \mathbb{R}^M$ ,
- (ii)  $D \mapsto A_\alpha(x, D)$  ist für fast alle  $x \in \Omega$  stetig auf  $\mathbb{R}^M$ .

Im Zusammenhang mit den auf die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \Omega$  eingeschränkten Funktionen  $A_\alpha^i = A_\alpha|_{\Omega_i}$ , genügt es, wenn Voraussetzung 3.1(ii) für  $A_\alpha^i$  gilt.

**Voraussetzung 3.2** (Wachstumsbedingung). (siehe Seite 49) Für  $x \in \Omega$  und alle  $D \in \mathbb{R}^M$  und  $|\alpha| \leq 1$  existiert ein  $C > 0$  und ein nichtnegatives  $g \in L^2(\Omega)$  mit

$$|A_\alpha(x, D)| \leq C \left( g(x) + \sum_{|\beta| \leq 1} |D^\beta| \right).$$

**Voraussetzung 3.3** (Monotoniebedingung). (siehe Seite 49) Für  $x \in \Omega$  und alle  $D, D' \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (A_\alpha(x, D) - A_\alpha(x, D')) (D^\alpha - D'^\alpha) \geq 0.$$

**Voraussetzung 3.4** (Koerzitivitätsbedingung). (siehe Seite 49) Für  $x \in \Omega$  und alle  $D \in \mathbb{R}^M$  existiert ein  $c > 0$  und  $h \in L^1(\Omega)$  mit

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} A_\alpha(x, D) D^\alpha \geq c \sum_{|\beta|=1} |D^\beta|^2 - h(x).$$

**Voraussetzung 3.5** (gleichmäßige Monotonie). (siehe Seite 49) Für  $x \in \Omega$  und alle  $D, D' \in \mathbb{R}^M$  existiert ein  $d > 0$  mit

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} (A_\alpha(x, D) - A_\alpha(x, D')) (D^\alpha - D'^\alpha) \geq d \sum_{|\beta|=1} |D^\beta - D'^\beta|^2.$$

**Voraussetzung 3.6** (Degeneriertheit). (siehe Seite 49) Alle Funktionen  $A_\alpha$  hängen nur von  $u$  ab, nicht von den partiellen Ableitungen von  $u$ .

### Voraussetzungen an die Methode

Die nachfolgenden Voraussetzungen sichern die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten SCHWARZschen Methode.

**Voraussetzung 3.7.** (siehe Seite 56) Für  $\lambda_{ij} \in L^\infty(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x)| > 0$$

und weiter

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} |\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)| > 0.$$

**Voraussetzung 3.8.** (siehe Seite 60) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(x) = \underline{\lambda}_{ij} > 0.$$

## Voraussetzungen technischer Natur

Die nachfolgenden Voraussetzungen werden aus beweistechnischen Gründen benötigt.

**Voraussetzung 3.9.** (siehe Seite 64) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ist  $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$  ein Multiplikator für  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij})$ , d.h. es gilt

$$(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}) \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{ij}).$$

**Voraussetzung 3.10.** (siehe Seite 64) Für die Lösung  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  des quasilinearen Modellproblems (3.3) bzw. des quasilinearen Transmissionsproblems (3.8) gelte  $\partial_{P_i} u_i \in L^2(\Gamma_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , d.h. sämtliche Konormalenableitungen auf den Schnittstellen der Teilgebiete sind als quadratintegrierbare Funktionen interpretierbar.

**Voraussetzung 3.11.** (siehe Seite 64) Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j \in \mathcal{N}(i)$ , gelte

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(x) + \lambda_{ji}(x)) = \underline{m_{ij}} > 0.$$

**Voraussetzung 3.12.** (siehe Seite 67) Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Für  $j = 1, \dots, m$  gelte

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(j)} \int_{\Gamma_{ij}} (\lambda_{ij} - \lambda_{ji}) \gamma_{\Gamma_{ij}}^j (v_j - u_j)^2 \, d\sigma \leq C (a_j(v_j, v_j - u_j) - a_j(u_j, v_j - u_j)) - N_j(v_j - u_j) \quad \forall v_j \in K_j.$$

Dabei sei  $N_j(v_j) \geq 0$  für alle  $v_j \in K_j \subset V_j$  und  $0 < C \leq 2$ .

**Voraussetzung 3.13.** (siehe Seite 68) Sei  $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in H_0^1(\Omega) \subset \hat{H}^1$  schwache Lösung von (3.3) bzw. (3.8). Für alle  $v = (v_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m K_i \subset \hat{H}^1$ , siehe (3.39), gelte

$$0 \leq \tilde{a}(v, v - u) - \tilde{a}(u, v - u) = \sum_{i=1}^m (a_i(v_i, v_i - u_i) - a_i(u_i, v_i - u_i)).$$

# Modellprobleme und Voraussetzungen aus Kapitel 4

## Probleme aus Kapitel 4

*Nichtmonotones quasilineares Modellproblem mit springenden Nichtlinearitäten* (siehe Seite 76):

$$\begin{cases} P(D)p = f & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

mit

$$P(D)p(x) := \begin{cases} P_1(D) p|_{\Omega_1}(x), & x \in \Omega_1 \\ P_2(D) p|_{\Omega_2}(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

wobei

$$P_i(D)v(x) := -\operatorname{div}(k_i(v(x))\nabla v(x)), \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

die quasilinearen Differentialoperatoren auf den Teilgebieten bezeichnen

*Schwache Form des nichtmonotonen quasilinearen Modellproblems mit springenden Nichtlinearitäten* (siehe Seite 76):

Finde  $p \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$b(p, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.3)$$

mit der Form

$$b(p, v) := (k(p)\nabla p, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad (4.4)$$

und

$$k(p) := \begin{cases} k_1(p), & x \in \Omega_1 \\ k_2(p), & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

*Nichtmonotones quasilineares Transmissionsproblem mit springenden Nichtlinearitäten* (siehe Seite 77):

$$\begin{cases} P_i(D)p_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ p_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ p_1 = p_2 & \text{auf } \Gamma \\ \partial_{P_1}p_1 = -\partial_{P_2}p_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.5)$$

mit

$$P_i(D)p_i = -\operatorname{div}(k_i(p_i)\nabla p_i) \quad (4.6)$$

*Schwache Form des nichtmonotonen quasilinearen Transmissionsproblems mit springenden Nichtlinearitäten* (siehe Seite 78):

Finde  $p_i \in V_i, i = 1, 2$  mit

$$\begin{cases} b_i(p_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_\Gamma^1(p_1) = \gamma_\Gamma^2(p_2) & \text{in } H_0^{1/2}(\Gamma) \\ \langle \partial_{P_1}p_1, \mu \rangle = -\langle \partial_{P_2}p_2, \mu \rangle & \forall \mu \in H_0^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.10)$$

mit

$$b_i(u_i, v_i) := (k_i(u_i)\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

*Springendes Transmissionsproblem* (siehe Seite 88):

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \kappa_1^{-1}(u_1) = \kappa_2^{-1}(u_2) & \text{auf } \Gamma \\ \partial_{\Delta_1} u_1 = -\partial_{\Delta_2} u_2 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.22)$$

*Schwache Form des springenden Transmissionsproblems* (siehe Seite 88):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$  mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \gamma_\Gamma^1(\kappa_1^{-1}(u_1)) = \gamma_\Gamma^2(\kappa_2^{-1}(u_2)) & \text{in } H_{00}^{1/2}(\Gamma) \\ \langle \partial_{\Delta_1} u_1, \mu \rangle = -\langle \partial_{\Delta_2} u_2, \mu \rangle & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.23)$$

mit

$$a_i(u_i, v_i) = (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega_i)} \quad i = 1, 2 \quad (4.25)$$

*Hilfsprobleme* (siehe Seite 91):

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{auf } \Gamma_i \\ \partial_{\Delta_i} u_i = (-1)^{i+1} g & \text{auf } \Gamma \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.26)$$

*Schwache Formen der Hilfsprobleme* (siehe Seite 91):

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$  mit

$$\begin{cases} a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} & \forall v_i \in H_0^1(\Omega_i) \\ \langle \partial_{\Delta_i} u_i, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = (-1)^{i+1} \langle g, \mu \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} & \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \end{cases} \quad (4.27)$$

Finde  $u_i \in V_i, i = 1, 2$  mit

$$a_i(u_i, v_i) = (f_i, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + (-1)^{i+1} \langle g, \gamma_\Gamma^i(v_i) \rangle_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall v_i \in V_i \quad (4.28)$$

*Restringiertes Minimierungsproblem* (siehe Seite 93):

$$\begin{cases} \mathcal{J}(u_1, u_2, g) \stackrel{!}{=} \min \\ (u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad} \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\mathcal{J}(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2} \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2))\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (4.29)$$

$$\mathcal{F}_{ad} := \{(u_1, u_2, g) \in V_1 \times V_2 \times (V_\Gamma)' \mid (u_1, u_2, g) \text{ genügt (4.27)}\} \quad (4.30)$$

*Regularisiertes restringiertes Minimierungsproblem* für  $\delta \geq 0$  (siehe Seite 95):

$$\begin{cases} \mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, g) \stackrel{!}{=} \min \\ (u_1, u_2, g) \in \mathcal{F}_{ad} \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{J}_\delta(u_1, u_2, g) = \frac{1}{2} \|\kappa_1^{-1}(\gamma_\Gamma^1(u_1)) - \kappa_2^{-1}(\gamma_\Gamma^2(u_2))\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{(V_\Gamma)'}^2 \quad (4.32)$$

*Freies Minimierungsproblem* bzw. *reduziertes Minimierungsproblem* für  $\delta \geq 0$  (siehe Seite 98):

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\delta(g) \stackrel{!}{=} \min \\ g \in (V_\Gamma)' \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\mathcal{M}_\delta(g) := \mathcal{J}_\delta(u_1(g), u_2(g), g) \quad (4.37)$$

mit

$$u_i(\cdot) : H_{00}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow V_i, \quad u_i(g) := A_i^{-1}(F_i(g)), \quad i = 1, 2 \quad (4.36)$$

## Voraussetzungen aus Kapitel 4

Die Voraussetzungen an die Gebiete befinden sich am Anfang des Abschnitts 4.1.1 auf Seite 76.

### Voraussetzungen an das Problem

**Voraussetzung 4.1.** (siehe Seite 79) Das Modellproblem (4.1) besitze eine eindeutige (schwache) Lösung  $\bar{p} \in H_0^1(\Omega)$ .

**Voraussetzung 4.2.** (siehe Seite 89) Die Nichtlinearitäten  $k_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , die als Kerne der KIRCHHOFF-Transformation (4.15) auf  $\Omega_i$  fungieren, erfüllen  $k_i \geq \alpha > 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}$ .

### Voraussetzungen technischer Natur

**Voraussetzung 4.3.** (siehe Seite 108) Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.4.** (siehe Seite 108) Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^2(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.5.** (siehe Seite 108) Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^3(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.6.** (siehe Seite 108) Es gelte Voraussetzung 4.2 und zusätzlich  $k_i \in W_\infty^4(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ .

**Voraussetzung 4.7.** (siehe Seite 110) Die Teilgebiete  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , seien faltige LIPSCHITZ-Gebiete, siehe Definition B.2.3.

**Voraussetzung 4.8.** (siehe Seite 110) Es gelte  $(\kappa_i^{-1})'' \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  mit  $s > \frac{3}{2}$ .

**Voraussetzung 4.9.** (siehe Seite 110) Es gelte  $(\kappa_i^{-1})''' \in B_{2,\infty}^s(\mathbb{R})$  mit  $s > \frac{3}{2}$ .

**Voraussetzung 4.10.** (siehe Seite 116) Für jedes  $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial\Gamma$  existieren zwei Kegel  $K^i := K_{\rho_i}(\theta_i, y_i)$ ,  $\rho_i, \theta_i > 0$ , sodass gilt

$$K^i \subset \mathcal{O}_{\rho_i}(x_0) \cap \mathcal{O}_{\rho_i}^i(x_0), \quad i = 1, 2,$$

wobei  $\mathcal{O}_{\rho_i}(x_0)$  und  $\mathcal{O}_{\rho_i}^i(x_0)$  die Mengen von zulässigen Richtungen bezüglich  $\Omega$  und  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , sind.

**Voraussetzung 4.11.** (siehe Seite 119) Die eindeutige Lösung  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = p \in H_0^1(\Omega) \subset V_1 \times V_2$  des Modellproblems (4.1) aus Voraussetzung 4.1 erfülle die zusätzliche Regularitätsforderung  $\bar{p}_i \in H^{\frac{N}{2}+\tau}(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , wobei  $\tau > 0$  beliebig klein gewählt werden kann. Weiterhin gelte  $\frac{1}{k_i} \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , mit  $s > \frac{3}{2} + \tau$ .

### Voraussetzungen an die Lösungsverfahren

**Voraussetzung 4.12** (zulässige Suchrichtungen). (siehe Seite 127)

$$\frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad \|f'(v^k)\|_{(V)'} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Voraussetzung 4.13** (zulässige Schrittweiten). (siehe Seite 128) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $f(v^k + \sigma_k d^k) < f(v^k)$  und zusätzlich:

$$f(v^k + \sigma_k d^k) - f(v^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad \frac{\langle f'(v^k), d^k \rangle_{(V)' \times V}}{\|d^k\|_V} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

# Index

- Abstiegsrichtung, 127
  - zulässige, 127
- Abstiegsverfahren, 127
- adjungierte Gleichung, 167
- ARMIJO-Regel, 128
- BESOV-Raum, 145
- Bilinearform, 140
  - beschränkte, 140
  - definite, 140
  - elliptische, 141
  - indefinite, 140
  - koerzive, 141
  - semidefinite, 140
  - stetige, 140
  - symmetrische, 140
- $C^m$ -Regularitätsbedingung
  - gleichmäßige, 142
- CARATHEODORY-Funktion, 153
- CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, 140
- $C^{k,\lambda}$ -Regularitätsbedingung, 142
- Dualraum, 138
- Einbettungssätze, 147
- EULERSche Gleichung, 99
- F-Differential, 157
- faltige LIPSCHITZ-Gebiete, 160
- Fehler
  - der VSAM, 30, 61
- Folgenstetigkeit
  - schwache, 163
- Folgenunterhalbstetigkeit, 163
  - schwache, 163
- Fortsetzung
  - harmonische, 149
- FRÉCHET-Ableitung, 157
- FRIEDRICHS-Ungleichung, 144
- Funktionenraum, 141
- G-Differential, 157
- GÂTEAUX-Ableitung, 157
- GELFAND-Dreier, 139
- GREENSche Formeln, 151
- Hilfsprobleme, 91
- Kegelbedingung, 141
- Kettenregel, 83, 154
- KIRCHHOFF-Transformation, 80
  - für Funktionen, 82
  - punktweise, 80
- Kompositionsoperator, 154
- Kontrollfunktional, 91
- Kontrollproblem
  - optimales nichtlineares, 165
  - optimales semilineares, 164
  - reduziertes, 166
- Kontrollvariable, 93
- Konvergenz
  - schwache, 139
- Kreuzungspunkt, 9
- Kreuzungspunkt, 26
- LIPSCHITZ-Bedingung
  - lokale, 141
- LIPSCHITZ-Gebiete, 141, 142
  - faltige, 160
  - spezielle, 160
- Minimierer, 99
- Minimierungsproblem
  - freies, 98
  - reduziertes, 98
  - restringiert, 93
- Modellproblem
  - linear, 10
  - nichtmonoton und quasilinear mit springender Nichtlinearität, 76
  - quasilinear, 49
- NEMYTSKIJ-Operatoren, 153
- NEWTON-Verfahren, 132
- Operator
  - NEMYTSKIJ-, 153
  - demistetiger, 152
  - Fortsetzungs-, 148
  - gleichmäßig monotoner, 152
  - hemistetiger, 152
  - koerziver, 152
  - Kompositions-, 154
  - monotoner, 151
  - schwach koerziver, 152
  - Spur-, 148
  - stabiler, 152
  - stark monotoner, 152
  - stark stabiler, 152
  - stark stetiger, 152
  - streng monotoner, 152
  - Superpositions-, 153
- optimale Lösung, 93



POINCARÉ-Ungleichung, 144  
 Punktweise Produkte, 156  
  
 RIESZ-Isomorphismus, 138  
 ROBIN-Substrukturierungsmethode, 23  
  
 Satz  
     von GREEN, 151  
     von LAX-MILGRAM, 141  
     Divergenz-, 151  
     von HAHN-BANACH, 139  
 Schrittweite, 127  
     ARMIJO-, 128  
     zulässige, 128  
 Schrittweitenregel, 127  
 schwache Konvergenz, 139  
 SCHWARZsche Methode  
     nichtüberlappend, 23  
     verallgemeinert nichtüberlappend, 26, 58  
 Segmentbedingung, 141  
 SOBOLEV-Raum, 143  
 Spursatz, 149  
 STEKLOV-POINCARÉ-Operator, 161  
     inverser partieller, 161  
 Superpositionsoperator, 153  
  
 Transmissionsbedingungen, 16, 52  
 Transmissionsproblem, 159  
     lineares, 16  
     nichtmonoton quasilinear springend, 77  
     quasilinear, 52  
     springendes, 88  
 TRIEBEL-LIZORKIN-Raum, 145  
  
 Unterhalbstetigkeit, 163  
  
 Variation  
     *n*-te, 157  
  
 Zielfunktional, 164, 166  
 zulässiger Teilrand, 160  
 Zustand  
     adjungierter, 167  
 Zustandsgleichung, 164, 166  
 Zustandsvariable, 93

# Literaturverzeichnis

- [AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces. 2nd ed.* Pure and Applied Mathematics 140. Academic Press, New York, 2003.
- [AKLO98] A. Auge, A. Kapurkin, G. Lube, and F. C. Otto. A note on domain decomposition of singularly perturbed elliptic problems. In *In P.E. Bjorstadt et al. (ed) Ninth Intern. Conf. on Domain Decomposition Methods*, pages 163–170, 1998.
- [AZ90] Jürgen Appell and Petr P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators*, volume 95 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Bab57] Ivo Babuška. Über Schwarzsche Algorithmen in partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Z. Angew. Math. Mech.*, 37:243–245, 1957.
- [Ber07] Heiko Berninger. *Domain Decomposition Methods for Elliptic Problems with Jumping Nonlinearities and Application to the Richards Equation*. PhD thesis, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, Berlin, 2007.
- [Ber08] Heiko Berninger. Non-overlapping domain decomposition for the richards equation via superposition operators. Proceedings of the 18th International Conference on Domain Decomposition Methods, submitted, 2008.
- [BKS07] Heiko Berninger, Ralf Kornhuber, and Oliver Sander. On nonlinear Dirichlet-Neumann algorithms for jumping nonlinearities. In *Domain decomposition methods in science and engineering XVI*, volume 55 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 489–496. Springer, Berlin, 2007.
- [Bra07] Dietrich Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2007. Theory, fast solvers, and applications in elasticity theory, Translated from the German by Larry L. Schumaker.
- [Bro58] Felix E. Browder. On some approximation methods for solutions of the Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary order. *J. Math. Mech.*, 7:69–80, 1958.
- [Bro94] Russell Brown. The mixed problem for Laplace’s equation in a class of Lipschitz domains. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(7-8):1217–1233, 1994.
- [CD94] Xiao-Chuan Cai and Maksymilian Dryja. Domain decomposition methods for monotone nonlinear elliptic problems. In *Domain decomposition methods in scientific and engineering computing (University Park, PA, 1993)*, volume 180 of *Contemp. Math.*, pages 21–27. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Cia78] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [Cos88] Martin Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.
- [CS85] Martin Costabel and Ernst Stephan. Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation. In *Mathematical models and methods in mechanics*, volume 15 of *Banach Center Publ.*, pages 175–251. PWN, Warsaw, 1985.
- [Dau88] Monique Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume 1341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Smoothness and asymptotics of solutions.

- [Den97] Qingping Deng. An analysis for a nonoverlapping domain decomposition iterative procedure. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(5):1517–1525, 1997.
- [Den03] Qingping Deng. An optimal parallel nonoverlapping domain decomposition iterative procedure. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(3):964–982 (electronic), 2003.
- [Deu04] Peter Deuffhard. *Newton methods for nonlinear problems*, volume 35 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Affine invariance and adaptive algorithms.
- [DG00] Qiang Du and Max D. Gunzburger. A gradient method approach to optimization-based multidisciplinary simulations and nonoverlapping domain decomposition algorithms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(5):1513–1541 (electronic), 2000.
- [DH97] M. Dryja and W. Hackbusch. On the nonlinear domain decomposition method. *BIT*, 37(2):296–311, 1997.
- [Din96] Zhonghai Ding. A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(2):591–600, 1996.
- [GHL00] Max D. Gunzburger, Matthias Heinkenschloss, and Hyesuk Kwon Lee. Solution of elliptic partial differential equations by an optimization-based domain decomposition method. *Appl. Math. Comput.*, 113(2-3):111–139, 2000.
- [GL00] Max D. Gunzburger and Hyesuk Kwon Lee. An optimization-based domain decomposition method for the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(5):1455–1480 (electronic), 2000.
- [GLT90] R. Glowinski and P. Le Tallec. Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989)*, pages 224–231. SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [GPK99] M. D. Gunzburger, J. S. Peterson, and H. Kwon. An optimization based domain decomposition method for partial differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 37(10):77–93, 1999.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [Hac96] Wolfgang Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, second edition, 1996.
- [Heu98] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1, 12. Auflage*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [HPUU09] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. *Optimization with PDE Constraints*, volume 23 of *Mathematical Modelling: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2009.
- [HS91] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*, volume 296 of *B.I.-Hochschultaschenbücher [B.I. University Paperbacks]*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991. Reprint of the 1971 original.
- [JK95] David Jerison and Carlos E. Kenig. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 130(1):161–219, 1995.
- [Jos02] Jürgen Jost. *Partial differential equations*, volume 214 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. Translated and revised from the 1998 German original by the author.
- [KA78] L. W. Kantorowitsch and G. P. Akilow. *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1978. Übersetzt aus dem Russischen von Heinz Langer und Rolf Kühne, In deutscher Sprache herausgegeben von P. Heinz Müller.

- [KWS<sup>+</sup>73] M.A. Krasnoselski, G.M. Wainikko, P.P. Sabreiko, J.B. Rutizki, and W.J. Stezenko. *Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen. Deutsche Übersetzung: Jurgis Szlaza. In deutscher Sprache herausgegeben von Reinhard Kluge.* Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abt. Mathematische Monographien. Band 33. Berlin: Akademie-Verlag. XII, 423 S. m. 10 Abb., 1973.
- [Lio88] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. I. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987)*, pages 1–42. SIAM, Philadelphia, PA, 1988.
- [Lio89] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. II. Stochastic interpretation and order properties. In *Domain decomposition methods (Los Angeles, CA, 1988)*, pages 47–70. SIAM, Philadelphia, PA, 1989.
- [Lio90] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989)*, pages 202–223. SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [LM07] Giovanni Leoni and Massimiliano Morini. Necessary and sufficient conditions for the chain rule in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^d)$  and  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^d)$ . *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 9(2):219–252, 2007.
- [LMO00] G. Lube, L. Müller, and F. C. Otto. A non-overlapping domain decomposition method for the advection-diffusion problem. *Computing*, 64(1):49–68, 2000.
- [Lui01] S. H. Lui. On accelerated convergence of nonoverlapping Schwarz methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 130(1-2):309–321, 2001.
- [Lui02] S. H. Lui. On linear monotone iteration and Schwarz methods for nonlinear elliptic PDEs. *Numer. Math.*, 93(1):109–129, 2002.
- [Lui00] S. H. Lui. On Schwarz alternating methods for nonlinear elliptic PDEs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(4):1506–1523 (electronic), 1999/00.
- [Mat08] Tarek P. A. Mathew. *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*, volume 61 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [McL00] William McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Mit05] Irina Mitrea. Mixed boundary value problems on curvilinear polygons. preprint, 2005.
- [MM79] Moshe Marcus and Victor J. Mizel. Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous. *J. Funct. Anal.*, 33(2):217–229, 1979.
- [MM04] Svitlana Mayboroda and Marius Mitrea. Sharp estimates for Green potentials on non-smooth domains. *Math. Res. Lett.*, 11(4):481–492, 2004.
- [MM07] Irina Mitrea and Marius Mitrea. The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(9):4143–4182 (electronic), 2007.
- [Neč67] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [OL99] F.-C. Otto and G. Lube. A posteriori estimates for a non-overlapping domain decomposition method. *Computing*, 62(1):27–43, 1999.
- [Ott99] F.-C. Otto. *A non-overlapping domain decomposition method for elliptic equations*. Cuvillier-Verlag, Göttingen, 1999.
- [QV94] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

- [QV99] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [RS96] Thomas Runst and Winfried Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations*, volume 3 of *de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.
- [Ryc99] Vyacheslav S. Rychkov. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(1):237–257, 1999.
- [Sav98] Giuseppe Savaré. Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 152(1):176–201, 1998.
- [SBG96] Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, and William D. Gropp. *Domain decomposition*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations.
- [Sch70] H. A. Schwarz. Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, 1870.
- [Sch54] Laurent Schwartz. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239:847–848, 1954.
- [Sic96] Winfried Sickel. Composition operators acting on Sobolev spaces of fractional order—a survey on sufficient and necessary conditions. In *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Paseky nad Jizerou, 1995)*, pages 159–182. Prometheus, Prague, 1996.
- [Sob36] S.L. Sobolev. L'Algorithme de Schwarz dans la Théorie de l'Elasticité. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, 1936(4):243–246, 1936.
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [SV69] James Serrin and Dale E. Varberg. A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral. *Amer. Math. Monthly*, 76:514–520, 1969.
- [THX02] X.-C. Tai, B. Heimsund, and J. Xu. Rate of convergence for parallel subspace correction methods for nonlinear variational inequalities. In *Domain decomposition methods in science and engineering (Lyon, 2000)*, Theory Eng. Appl. Comput. Methods, pages 127–138. Internat. Center Numer. Methods Eng. (CIMNE), Barcelona, 2002.
- [Tri02] Hans Triebel. Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):475–524, 2002.
- [TW05] Andrea Toselli and Olof Widlund. *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, volume 34 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [TX99] Xue-Cheng Tai and Jinchao Xu. Subspace correction methods for convex optimization problems. In *Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods (London, 1998)*, pages 130–139 (electronic). DDM.org, Augsburg, 1999.
- [Wal95] Wolfgang Walter. *Analysis 2. 4. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiv, 397 S., 1995.
- [Wal01] Wolfgang Walter. *Analysis 1. 6. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiv, 398 S., 2001.
- [Wlo82] Joseph Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.

- [XCL05] Xuejun Xu, C. O. Chow, and S. H. Lui. On nonoverlapping domain decomposition methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6):1251–1269, 2005.
- [Xu92] Jinchao Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Rev.*, 34(4):581–613, 1992.
- [XZ98] Jinchao Xu and Jun Zou. Some nonoverlapping domain decomposition methods. *SIAM Rev.*, 40(4):857–914 (electronic), 1998.
- [Yos80] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1980.
- [Zei85] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. III*. Springer-Verlag, New York, 1985. Variational methods and optimization, Translated from the German by Leo F. Boron.
- [Zei86] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. I*. Springer-Verlag, New York, 1986. Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack.
- [Zei90] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*. Springer-Verlag, New York, 1990. Nonlinear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.
- [Zei95] Eberhard Zeidler. *Applied functional analysis*, volume 109 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995. Main principles and their applications.

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Kein Teil dieser Arbeit ist in einem anderen Promotions- oder Habilitationsverfahren verwendet worden.

Kassel, im Juli 2009

Stephan Schreiber