

# Berichte des Instituts für Mechanik

Bericht 1/2010



Benjamin Kurnatowski

Zweiskalensimulation von mikroheterogenen Strukturen  
aus spröden Faserverbundwerkstoffen

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Maschinenbau der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Anton Matzenmiller

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann

Tag der Einreichung:

30. Januar 2009

Tag der mündlichen Prüfung:

23. November 2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2009

ISBN 978-3-89958-462-2

© 2010, kassel university press GmbH, Kassel

[www.upress.uni-kassel.de](http://www.upress.uni-kassel.de)

Umschlaggestaltung: Heike Arend, Unidruckerei der Universität Kassel

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel

Printed in Germany

## Vorwort

Die vorliegende Dissertationsschrift beinhaltet die zusammenhängende Darstellung der Ergebnisse meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen der DFG-finanzierten Forschungsvorhaben zu den Themen *Mikromechanisch basierte FEM-Berechnung von spröden Faserverbundstrukturen* und *Zweiskalensimulation von Schädigungsprozessen in Faserverbundstrukturen auf Basis mikromechanischer Konstitutivmodelle für die FE-Analyse*. Die Arbeit entstand am Institut für Mechanik an der Universität Kassel in der Zeit von März 2004 bis Dezember 2008. Für die Finanzierung der genannten Forschungsvorhaben danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Anton Matzenmiller für die mir gebotene Gelegenheit zu wissenschaftlicher Arbeit und Weiterqualifikation, die betreuende Begleitung bis zur Promotion und die Anfertigung des Hauptberichts. Herrn Professor Dr.-Ing. Friedel Hartmann danke ich für die Übernahme des Korreferats. Frau Professorin Dr. Rita Jeltsch-Fricker bin ich zu Dank für die sorgfältige Durchsicht des umfangreichen Manuskripts und die Bereitschaft zur Mitwirkung in der Prüfungskommission verpflichtet. Das rege Interesse von Professor Dr.-Ing. Ralf G. Cuntze am Fortgang des Forschungsvorhabens über die gesamte Projektlaufzeit hat in konstruktiver Form zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Den zahlreichen Mitgliedern, die im Laufe der Jahre das wechselnde Gesicht des Instituts für Mechanik geprägt haben, gebührt mein Dank für die angenehme, unterstützende und mitunter freundschaftliche Atmosphäre dies- und jenseits des Arbeitsplatzes.

Meiner Frau Farina danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen der Arbeit und den freien Rücken in der Schlussphase des Promotionsverfahrens. Unserer Tochter Lina Madita bin ich für die Gewährung schlafreicher Nächte und relativierender Ablenkungen im Verlauf ihrer ersten Lebensmonate dankbar.

Kassel, im Dezember 2009

Benjamin Kurnatowski

meiner Familie und meinen Eltern

## Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation behandelt die Zweiskalensimulation von mikroheterogenen Faserverbundwerkstoffstrukturen. Die Berechnung von Bauteilen aus inhomogenen Werkstoffen wird als Mehrskalenaufgabe betrachtet. Im Gegensatz zum Stand der Technik, der im Allgemeinen von der Betrachtungsweise des Werkstoffs als homogenes Kontinuum ausgeht, berücksichtigt der in dieser Arbeit verfolgte, methodische Ansatz den inhomogenen Materialaufbau aus verschiedenen Werkstoffphasen. Die Auslegung von Faserverbundbauteilen hinsichtlich des Ausfalls durch Versagen ist ein Modellierungs- und Simulationsproblem auf mehreren Skalen, da die Veränderungen im Werkstoff infolge mechanischer Belastung in Prozesszonen mit einer Größenordnung von Mikro- und Nanometern stattfinden. Als Folge der Ausbreitung der inelastischen Materialvorgänge auf der Mikroebene des heterogenen Verbundwerkstoffs kann auf der Makroebene das globale Strukturversagen großer Bauteilgruppen eingeleitet werden.

Das Konzept des repräsentativen Volumenelements (RVE) bildet die Grundlage der mikromechanischen Modellierung. Unter einem RVE wird das Teilvolumen auf der Mikroskala des Werkstoffs verstanden, das als statistisch repräsentativ für den Gesamtwerkstoff angesehen werden kann. Für das Gebiet des RVEs wird eine Anfangs-Randwertaufgabe formuliert. Im Rahmen dieser Arbeit werden homogene sowie periodische Verschiebungsrandbedingungen behandelt. In der Zweiskalensimulation ergeben sich die benötigten Randwerte in Abhängigkeit des makroskopischen Verzerungsfelds.

Die Näherungslösungen für die Randwertaufgabe am RVE werden mittels der numerisch effizient formulierten Methode der Zellen und ihrer Weiterentwicklung, der hochauflösenden Methode der Zellen, erzielt. Aus der im Allgemeinen prozessabhängigen Spannungsantwort der Werkstoffphasen im RVE errechnen sich die effektiven Spannungen als Volumenmittelwerte der mikroskopischen Spannungsfelder. Die konstitutive Beziehung zwischen den Makroverzerrungen und Makrospannungen beschreibt das effektive mechanische Verhalten des homogenisierten Werkstoffs.

Die mathematische Abbildung der Werkstoffphasen im RVE erfolgt durch Modelle der linearen und physikalisch nichtlinearen Elastizitätstheorie sowie der linearen Viskoelastizitätstheorie. Der Einfluss des nachgiebigen Verbunds der Phasen auf das effektive Materialverhalten wird durch die Einbeziehung von Konstitutivmodellen der Bruchmechanik ermöglicht. Die Beschreibung der Schädigung in der Matrixphase gelingt durch deterministisch eingeführte Mikrobruchflächen im Zellenmodell der Mikrostruktur. Die Schädigung auf Mikroebene wird durch den gewählten Ansatz in Bruchflächen lokalisiert, wodurch die Randwertaufgabe auf der Mikroebene im mathematischen Sinne gut gestellt bleibt.

## Summary

The thesis at hand deals with simultaneous two-scale analyses of micro-heterogeneous fibre reinforced composite structures. The mechanical design calculation of components made of inhomogeneous media is esteemed as a multi-scale task. In contrast to state of the art approaches, which usually apply the idea of a homogeneous continuum, a methodology is pursued herein that explicitly takes the composition of different phase materials into account. The subject-matter of the thesis is given by the demand for a computationally efficient approach, which will allow to describe the constitutive behaviour of composites in elastic and inelastic regimes as well as to determine initial and final failure modes in laminate structures with increased physical accurateness than state of the art techniques. The design of fibre-reinforced structures against failure represents a problem of simulation and modelling on different length-scales, for the stiffness and strength reducing processes, located on a level which is to be characterized in terms of micro- or even nanometers, are caused by loadings on the structural or lamina level. The propagation of inelastic, irreversible processes on the micro-scale might causally prelude the global loss of structural integrity and load bearing capacity on the macro-scale.

In this work, micromechanical material modelling is predicated upon the concept of the so-called Representative Volume Element (RVE). This means an adequately chosen sample of the heterogeneous material representing the microstructure as a whole. The RVE defines the subregion on which a micro-scale initial boundary value problem can be formulated. The appropriate Dirichlet boundary conditions are imposed in terms of either periodic or homogeneous conditions on surface displacements. In connection with two-scale simulations, the boundary values are derived from the macroscopical strain tensor at the integration points of the large-scale finite element discretization. The approximate solution of the boundary value problem imposed on the RVE domain is obtained by the numerically efficient Generalized Method of Cells or its more sophisticated descendant named High-Fidelity Generalized Method of Cells. The volume averages of the process dependent stress-fields inside the RVE are taken as the effective large-scale stresses. The constitutive mapping of the rate of the macro-strain tensor onto the rate of the macro-stress tensor states the effective, mechanical behaviour of the computationally homogenized composite.

The mathematical representation of the several phases within the RVE is supplied by the theories of linear and physically nonlinear elasticity as well as by linear viscoelasticity. The influence of the fibre-matrix-bond on the effective material properties is described by constitutive interface models based on elastic and viscoelastic assumptions. The damage of the bonding is described by formulations borrowed from fracture mechanics. The damage of the matrix phase is implemented by introducing microcracks along subcell boundaries of the discrete micromechanical model. Hence, damage is occurring localized at micro fracture surfaces such that the micro-scale boundary value problem remains mathematically well posed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Ziele der Arbeit . . . . .	1
1.2	Stand der Forschung . . . . .	3
1.3	Gliederung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Materialmodelle der Kontinuumsmechanik</b>	<b>7</b>
2.1	Lineare Elastizität . . . . .	8
2.2	Physikalisch nichtlineares Kontinuumsmodell . . . . .	11
2.3	Lineare Viskoelastizität . . . . .	13
2.3.1	Eindimensionale rheologische Modelle der Viskoelastizität . . .	15
2.3.2	Dreidimensionales Modell der isotropen Viskoelastizität . . . .	21
<b>3</b>	<b>Mechanik und konstitutive Modellierung von Grenzschichten</b>	<b>29</b>
3.1	Grenzschicht und Grenzfläche . . . . .	30
3.2	Elastisches Verbundmodell . . . . .	32
3.3	Viskoelastisches Verbundmodell . . . . .	33
3.4	Ratenunabhängige Verbundmodelle mit Schädigung . . . . .	36
3.4.1	Verbundschädigungsmodell mit anfänglicher Nachgiebigkeit . .	36
3.4.2	Verbundschädigungsmodell ohne anfängliche Nachgiebigkeit .	40
3.4.3	Gemischt modaler Ansatz der Bruchmechanik . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Mechanik mikroheterogener Materialien</b>	<b>51</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	51
4.2	Grundlagen . . . . .	52
4.2.1	Das repräsentative Volumenelement . . . . .	52
4.2.2	Konzentrationstensoren nach Hill und effektive elastische Ma- terialeigenschaften . . . . .	57
4.3	Analytische Näherungslösungen . . . . .	58
4.3.1	Schranken der elastischen Eigenschaften nach Voigt und Reuss	59
4.3.2	Variationsprinzip nach Hashin & Shtrikman . . . . .	61
4.4	Numerische Homogenisierungsmethoden . . . . .	61
4.4.1	Randbedingungen . . . . .	62
4.4.2	Die verallgemeinerte Methode der Zellen . . . . .	64
4.4.3	Die hochauflösende Methode der Zellen . . . . .	82
4.4.4	Homogenisierung mittels der FEM und Vergleich mit Ergeb- nissen der GMC und HFGMC . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Elastische Verbundwerkstoffstrukturen</b>	<b>107</b>

5.1	Einbettung der Zellenmethode in die Technik der finiten Elemente . .	107
5.1.1	Anmerkungen zur Implementierung mikromechanischer Modelle in den FE-Code FEAP . . . . .	108
5.1.2	Berücksichtigung der Faserausrichtung . . . . .	109
5.2	Finite Elemente Berechnung von linear elastischen Faserverbundstrukturen . . . . .	111
5.2.1	Zweischichtige Laminatzugprobe . . . . .	111
5.2.2	Einaxiale Zugversuche an Laminaten aus UD-Schichten . . . .	114
<b>6</b>	<b>Viskoelastische Verbundwerkstoffstrukturen</b>	<b>117</b>
6.1	Homogenisierung viskoelastischer Werkstoffe mittels der Zellenmethode	117
6.1.1	Herleitung des Verzerrungskonzentrationstensors . . . . .	127
6.2	Zweiskalensimulationen viskoelastischer Verbundwerkstoffstrukturen .	128
6.3	Finite Elemente Berechnung von linear viskoelastischen Faserverbundstrukturen . . . . .	130
6.3.1	Viskoelastisches Verifikationsbeispiel 1: Dickwandiges Rohr unter Innendruck . . . . .	130
6.3.2	Viskoelastisches Verifikationsbeispiel 2: Gelochte Zugprobe . .	135
6.3.3	Viskoelastisches Validierungsbeispiel 1: Einaxialer Relaxationstest . . . . .	139
6.3.4	Viskoelastisches Validierungsbeispiel 2: Dünnwandiges Rohr unter axialem Zug . . . . .	142
<b>7</b>	<b>Nichtlinear elastische Verbundwerkstoffe mit Schädigung</b>	<b>145</b>
7.1	Einbeziehung der Verbundmodelle in die verallgemeinerte Methode der Zellen . . . . .	145
7.2	Zur inkrementellen, iterativen Lösung des nichtlinearen Zellenmodells	149
7.2.1	Newton-Raphson-Verfahren . . . . .	150
7.2.2	Kurvenverfolgungsalgorithmus . . . . .	153
7.2.3	Inkrementelle, iterative Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für das RVE . . . . .	154
7.3	Bestimmung des makroskopischen Spannungstensors . . . . .	160
7.4	Bestimmung des effektiven Tangentenoperators . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Parameteridentifikation für das nichtlinear elastische Composite mit Schädigung</b>	<b>165</b>
8.1	Vorbemerkung zur Prozesssteuerung . . . . .	165
8.2	Parameteridentifikation für das Epoxidharz . . . . .	167
8.3	Parameteridentifikation für die UD-Schicht aus E-Glass/MY750 . . .	172
8.3.1	Parameteridentifikation und Validierung des nichtlinear elastischen Modells für den Verbund . . . . .	172
8.3.2	Parameterbestimmung für das Verbundmodell mit Schädigung	174
8.4	Kombinierte Beanspruchung des mit Glasfasern bewehrten Epoxidharzes MY750 . . . . .	177
<b>9</b>	<b>Berechnung mikroheterogener Verbundstrukturen mit der Zellenmethode</b>	<b>179</b>

---

9.1	Finite Elemente Analyse von Faserverbundstrukturen mit endlichen Festigkeiten . . . . .	179
9.2	Zweiskalige Berechnung des dünnwandigen Rohrs . . . . .	180
9.3	Kreuzverbundlaminat unter einachsiger Belastung . . . . .	182
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Matrizen und Hypervektoren der GMC und HFGMC</b>	<b>189</b>
A.1	Matrizen der Zellenmethode für elastische Verbundwerkstoffe . . . . .	189
A.2	Hochauflösende Methode der Zellen . . . . .	190
A.3	Matrizen der Zellenmethode für viskoelastische Verbundwerkstoffe . .	191
A.3.1	Zusammenfassung der Zellspannung in Hypervektoren . . . . .	191
A.3.2	Matrizen des gekoppelten Gleichungssystems für die Normalspannungsin- krementen . . . . .	192
A.4	Matrizen der Zellenmethode für Verbundwerkstoffe mit Schädigung .	195
A.4.1	Hypervektor der Unterzellspannungen . . . . .	195
A.4.2	Hypervektor der Verschiebungsdiskontinuitäten . . . . .	195
A.4.3	Inzidenzmatrizen . . . . .	197
A.4.4	Strukturnachgiebigkeitsmatrix . . . . .	200
A.4.5	Hypermatrix der Grenzflächenmodelle . . . . .	202
A.4.6	Konsistente Materialtangente . . . . .	203
<b>B</b>	<b>Verzeichnis wesentlicher Symbole und Abkürzungen</b>	<b>205</b>
	<b>Schrifttum</b>	<b>211</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

In der Ingenieurpraxis kommen zunehmend Werkstoffe zum Einsatz, die für den jeweiligen Anwendungszweck zugeschnittene Eigenschaftsprofile aufweisen. Durch die geeignete Kombination verschiedener Grundwerkstoffe mit unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften in zweckorientierter geometrischer Anordnung lassen sich Verbundwerkstoffe mit gewünschten Materialeigenschaften entwerfen. Eine besondere Bedeutung besitzen Faserverbundwerkstoffe, die meist in Form von Laminaten zum Einsatz kommen. Ein Laminat entsteht durch den kraftschlüssigen Verbund mehrerer dünner Einzelschichten. Die Einzelschicht wird ihrerseits durch die Einlagerung von Fasern mit hoher Festigkeit und Steifigkeit wie z. B. aus Glas, Aramid oder Carbon in ein meist weniger festes und weniger steifes Matrixmaterial wie Epoxidharze gebildet. Durch die Ausrichtung des Faserverlaufs in den Einzelschichten lassen sich die effektiven Steifigkeiten und Festigkeiten des Verbundwerkstoffs den mechanischen Beanspruchungen in einem Bauteil bedarfsgerecht anpassen.

So groß die Vorteile des Einsatzes von Verbundwerkstoffen in der Konstruktion von Ingenieurstrukturen sind, so bedeutsam ist die Herausforderung, die diese Werkstoffe für die numerische Strukturanalyse im Vergleich zu homogenen Materialien darstellen. Das kennzeichnende Merkmal der Verbundwerkstoffe ist ihr heterogener Aufbau auf mehreren Größenskalen. Oberhalb der molekularen Nanoebene ist die Mikroebene der einzelnen Laminatschicht angesiedelt. Die mikroheterogene Einzelschicht ist durch die mechanischen Eigenschaften des verwendeten Matrixmaterials, die Art und Form sowie die Ausrichtung der Verstärkungseinlagen und die Charakteristik und Güte des Verbunds zwischen Faser und Füller geprägt. Auf der Mesoebene werden die einzelnen, homogen angesehenen Schichten zum Laminatwerkstoff kombiniert. Unter der Makroebene im Sinne der vorliegenden Arbeit wird die Ebene der Ingenieurstrukturen verstanden.

Übliche Ansätze zur Beschreibung des konstitutiven Verhaltens von Laminaten basieren auf den effektiven Eigenschaften der Einzelschichten und deren Verbundcharakteristik, siehe z. B. Herakovich (1998). Die effektiven Materialkennwerte der Schichten sind entweder im Experiment zu bestimmen oder werden aus klassischen analytischen Homogenisierungsansätzen abgeleitet, wie den Schranken nach Voigt (1889) und Reuss (1929), Hashin and Shtrikman (1963), der Lösung nach Eshelby

(1957), der Mori-Tanaka-Theorie und anderen.

Zur Beurteilung und Untersuchung des inelastischen Materialverhaltens unter Berücksichtigung von Schädigungsprozessen sind die oben erwähnten analytischen Homogenisierungsmethoden aufgrund ihrer Einfachheit ungeeignet. Sie liefern nicht hinreichend detaillierte Informationen über die mikroskopischen Spannungs- und Dehnungszustände. Die komplexen Vorgänge bei der Ausbildung der verschiedenen Versagensmechanismen auf der Mikroebene wie Faser-Matrix-Verbundschädigung, Faserbruch und Matrixschädigung können nicht abgebildet werden. Die fehlende Unterscheidbarkeit der einzelnen Konstituenten stellt eine wesentliche Schwierigkeit dar, wenn Schädigungsvorgänge realitätsnah abzubilden sind.

Neben aufwendigen experimentellen und phänomenologischen Ansätzen gewinnt daher die numerische Analyse der mikroheterogenen Feinstruktur im Rahmen einer gekoppelten Mehrskalensimulation zunehmend an Bedeutung. Grundlage der mikromechanisch basierten Konstitutivmodelle ist das repräsentative Volumenelement (RVE) des heterogenen Materials, siehe Hashin (1983) und Nemat-Nasser and Hori (1993). Das RVE zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, dass in ihm alle wesentlichen Inhomogenitäten des Werkstoffes auf der Mikroebene angemessen berücksichtigt werden.

In jüngerer Zeit sind Ansätze entwickelt worden, siehe z. B. Fish and Wagiman (1993), Gosz et al. (1992) oder Geers et al. (2001), die die konstitutiven Eigenschaften für die Strukturanalyse aus FE-Modellen des repräsentativen Volumenelements der Feinstruktur gewinnen. Diese Ansätze geben je nach Diskretisierungsaufwand detailliert Aufschluss über die Spannungs- und Verformungszustände auf der Mikrostrukturebene. Die mit diesen Analysen verbundenen hohen Anforderungen im Hinblick auf Rechenzeit und Speicherbedarf dürften aber auf absehbare Zeit einer kommerziellen Umsetzung in Form einer zur FE-Makrostrukturanalyse simultan ablaufenden, FE-basierten Homogenisierung an jeder Stützstelle der numerischen Integration entgegenstehen.

Die vorliegende Arbeit greift zur Homogenisierung auf die mikromechanische Methode der Zellen (*Generalized Method of Cells: GMC*) und ihre Weiterentwicklung zur hochauflösenden Methode der Zellen (*High Fidelity Generalized Method of Cells: HFGMC*) zurück. Im Kontext der GMC und HFGMC wird das RVE durch die Einführung von Unterzellen diskretisiert, die als Träger linearer bzw. nichtlinearer Verschiebungsansätze zur Approximation des mikroskopischen Verformungsfelds dienen. Aufbauend auf der Forderung nach Verschiebungskontinuität und Kräftegleichgewicht zwischen den Unterzellen wird die Lösung für die Freiheitsgrade der Verschiebungsansätze gewonnen.

Der Ansatz der vorliegenden Arbeit stellt einen Kompromiss dar, zwischen der hochauflösenden aber numerisch aufwendigen finite Elemente Simulation der Mikrostruktur einerseits und den einfachen, klassischen Betrachtungsweisen andererseits. Die lokalen Mikrofelder der Spannungen und Verzerrungen auf der Ebene von Matrix und Fasern werden soweit aufgelöst, wie es für eine hinreichende Beantwortung der

Frage nach den mittleren konstitutiven Eigenschaften an einem materiellen Punkt der makroskopischen Ebene erforderlich erscheint. Die mikromechanischen Modelle werden als Materialroutinen in die FE-Analyse integriert. Sie liefern die effektiven, prozessabhängigen Steifigkeiten und Spannungen an jeder Stützstelle der numerischen Integration simultan zur FE-Berechnung der Bauteilstrukturen.

## 1.2 Stand der Forschung

Die Auslegung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen zielt darauf ab, größere Betriebslasten zu ermöglichen, Eigengewicht bei mobilen Systemen einzusparen, höhere Traglasten zu gestatten, längere Laufzeiten bei ermüdungsgefährdeten Komponenten zu erzielen oder zuverlässigere Lebensdauer- und Sicherheitsabschätzungen zu gewinnen. Diesen Zwecken dienen kontinuumsmechanische Berechnungsmodelle, deren Gleichungen mittels der finiten Elementmethode (FEM) näherungsweise gelöst werden. Die Grundlage der Materialmodellierung für die Strukturanalyse ist bislang die Mechanik des homogenen Kontinuums. Selbst wenn der eingesetzte Werkstoff heterogen ist, wie z. B. ein Faserverbundmaterial, so wird mit einem homogenisierten Ersatzkontinuum gerechnet, dessen Materialparameter durch Mittelung der Werkstoffeigenschaften aus einem mikromechanischen Modell gewonnen werden - siehe z. B. Christensen (1979), Aboudi (1991).

Für die nichtlineare Strukturanalyse von faserbewehrten Verbundbauteilen genügt es zwar, die effektive Materialantwort zwischen den Makrodehnungen und Makrospannungen zu kennen, jedoch hängt diese vom Prozessverlauf ab und ändert sich bei inelastischem Verhalten der Werkstoffphasen mit dem Beanspruchungszustand. Stand der Technik zur Beschreibung des Konstitutivverhaltens von Verbundwerkstoffen ist die bestmögliche Anpassung der Materialparameter geeigneter kontinuumsmechanischer Materialtheorien an die Versuchsdaten aus Materialproben des heterogenen Verbundwerkstoffs. Das im Versuch festgestellte Materialverhalten der Verbundprobe ist jedoch häufig völlig anders als das der einzelnen Konstituenten. Aufgrund der anisotropen Eigenschaften von langfaserig verstärkten Verbundwerkstoffen sind einerseits viele Versuchsreihen für jeden Faservolumengehalt zur experimentellen Bestimmung des mechanischen Verhaltens in den einzelnen Beanspruchungszuständen notwendig und andererseits komplizierte Modelle der phänomenologischen Kontinuumsmechanik als Folge davon erforderlich, um alle auftretenden Richtungseigenschaften mit der Kontinuumstheorie für den homogenen Ersatzwerkstoff zu erfassen. Abhilfe können mikromechanische Konstitutivmodelle schaffen, die das effektive Materialverhalten für die FE-Methode zur Strukturberechnung liefern.

Die Wahl des mikromechanischen Modells unterliegt dem Kompromiss zwischen einem einfachen Homogenisierungsverfahren, das die effektive Materialantwort des Verbunds aus dem linearen oder nichtlinearen Verhalten von Fasern, Matrix und Grenzschicht bereitstellt und der vollständigen Auflösung der Spannungs-, Dehnungs- und Schädigungsverteilungen auf mikromechanischer Ebene. Für die unidirektional bewehrte Matrix werden beispielsweise das *Composite Cylinder Assemblage* Modell, die Mori-Tanaka-Theorie oder das verallgemeinerte selbstkonsistente Verfahren als

Vertreter von analytischen Homogenisierungsverfahren eingesetzt, um die benötigten makroskopischen Spannungs-Dehnungsbeziehungen darzustellen – siehe Hashin (1990), Hashin (1991), Benveniste et al. (1989). Aufgrund ihrer Einfachheit liefern diese Theorien jedoch zu gering genaue mikroskopische Spannungs- und Dehnungsinformationen.

Auf der anderen Seite liefern FEM-Auswertungen der repräsentativen Elementarzelle bei ausreichender Netzdichte detaillierte Spannungs- und Dehnungsverteilungen auf der Mikroebene von Fasern, Matrix, Grenzschicht und Verbund, allerdings auf Kosten der Rechenzeiten – siehe Wu et al. (1989), Gosz et al. (1992) oder Fish and Wagiman (1993). Eine simultane Multiskalenmodellierung auf Basis der FEM wurde von Geers et al. (2003) unternommen. In letztgenannter Arbeit wird eine Kinematik höherer Ordnung auf Basis des Lagrange Gradienten des Deformationsgradienten verwendet. Der Ansatz führt auf ein Kontinuum höherer Ordnung, das mit Materialsteifigkeitstensoren sechster Stufe verknüpft ist. Der Vorteil dieses Ansatzes ist die Vermeidung pathologisch netzabhängiger Verzerrungslokalisierungen, welche durch den Verlust der Elliptizität der partiellen Differentialgleichungen bei Materialmodellen mit Entfestigung verursacht werden. Eine Zweiskalensimulation mittels der FEM von Schädigungsprozessen in Verbundwerkstoffproben bestehend aus langfaserig verstärkten Keramikmatrixlaminaten wurde in Luo et al. (2005) unternommen.

Die verallgemeinerte Methode der Zellen nach Paley and Aboudi (1992), Aboudi (1993), Aboudi and Arnold (2000) oder Pindera et al. (1990) ist von Bednarczyk and Arnold (2000a) und Bednarczyk and Arnold (2000b) in den NASA eigenen *Micromechanics Analysis Code* (MAC) implementiert worden. Zur Homogenisierung langfaserig verstärkter Werkstoffe unter Beachtung der Verbundschädigung wird ein ratenabhängiges Grenzflächenmodell verwendet; im Englischen als *Evolving Compliant Interface-Modell* (ECI) bezeichnet. Ebenfalls auf Basis des ECI-Modells wird der Faserbruch simuliert. Die Implementierung der GMC in den NASA Code greift auf eine von Pindera and Bednarczyk (1999a) weiterentwickelte Fassung der GMC zurück. Im Unterschied zur Originalfassung benutzt die modifizierte Fassung die Spannungen und nicht die Verzerrungen im Volumenelement als primäre Variablen. Die Weiterentwicklung der GMC, welche ohne Genauigkeitseinbußen erfolgt, wird durch die fehlende Kopplung von Schub- und Normaldehnungszuständen im Zellenmodell ermöglicht: Makroschubdeformationen erzeugen keine Normalverzerrungen im RVE der Mikroebene, Normalverzerrungen auf der Makroebene erzeugen keine Schubdeformationen in der Mikrostruktur. Die fehlende Kopplung der Schub- und Normaldehnungszustände in Verbindung mit den Spannungskontinuitätsbedingungen der Zellenmethode führt zu a priori bekannten Unterzellgruppen im Volumenelement mit gleichen Spannungskomponenten. Letztere benutzen Pindera and Bednarczyk (1999a) als primäre Variablen. Hierdurch wird die Zahl der Freiheitsgrade reduziert und die numerische Effizienz der GMC wesentlich erhöht.

Von Pahr and Arnold (2002) werden die Ergebnisse der GMC basierten Homogenisierung von kurzfaserverstärkten Verbundwerkstoffen mit der finiten Elementlösung verglichen. Den theoretischen Zusammenhang der GMC mit der FE-Methode untersuchen Teply and Reddy (1990). Eine umfassende Übersicht über die Anwendungs-



möglichkeiten und die Leistungsfähigkeit der GMC wird in Aboudi (2004) gegeben.

In Aboudi et al. (2002) wird das Auflösungsvermögen der GMC hinsichtlich der Mikrofelder der Spannungen und Verzerrungen im repräsentativen Volumenelement verbessert. Die erweiterte Entwicklungsstufe der Zellenmethode wird im Englischen als *High-Fidelity Generalized Method of Cells* (HFGMC) bezeichnet. Der Ansatz basiert auf dem Konzept der asymptotischen Homogenisierung, vgl. Bensoussan et al. (1978). Bei dieser Homogenisierungstechnik wird das Verschiebungsfeld bezüglich des Längenverhältnisses der Makro- zur Mikroskala asymptotisch entwickelt. In Verallgemeinerung der GMC werden im HFGMC-Ansatz Polynome höherer Ordnung für die Entwicklung der Mikrofelder berücksichtigt, wodurch eine Kopplung von Schub- und Normaldehnungszuständen bewirkt wird.

In Bednarczyk et al. (2004) wird die HFGMC zur Modellierung von Metallmatrixverbundwerkstoffe unter Beachtung der Faser-Matrix-Verbundschädigung verwendet. Arnold et al. (2004) haben eine im Hinblick auf die numerische Effizienz verbesserte Fassung der HFGMC unter Berücksichtigung nachgiebiger Grenzflächen in den NASA *Micromechanics Analysis Code* (MAC) implementiert. Aboudi and Gilat (2005) benutzen die HFGMC zur mikromechanischen Analyse von hohlraumbehafteten Werkstoffen (z. B. Metallschäume) mit Gitterstruktur.

Eine zur HFGMC alternative Variante der Zellenmethode, welche ebenfalls eine Kopplung der Normal- und Schubfelder besitzt, liefern Williams (2005a) und Williams (2005b). Die Methode wird als *Elasticity-based Cell Model* (ECM) bezeichnet. Die Approximation des Mikroverformungszustands für elastische und inelastische Materialien baut auf Legendre-Polynome nullter bis fünfter Ordnung auf. Der Ansatz nach Williams lässt sich auf die originale GMC-Formulierung reduzieren, wenn alle nichtlinearen Verschiebungsterme unterdrückt werden.

## 1.3 Gliederung

Im Kapitel 2 werden die konstitutiven Modelle dargestellt, die in den späteren mikromechanischen Analysen dazu dienen, das Materialverhalten von Fasern und Matrix zu beschreiben. Die Modelle werden für die Umsetzung in Rechneralgorithmen hinsichtlich der numerischen Zeitintegration bei ratenabhängigen und der Linearisierung bei nichtlinearen Ansätzen für das Newtonverfahren aufbereitet.

Die konstitutiven Ansätze zur Beschreibung des Verbunds von Fasern und Matrix, sowie der Entstehung von diskreten Rissen in der Matrixphase und des Faserzugbruchs werden im Kapitel 3 behandelt. Es erfolgt die Linearisierung der inelastischen Ansätze und die numerische Zeitintegration des ratenabhängigen Verbundmodells. Kapitel 4 diskutiert einleitend die wesentlichen Grundlagen und Grundbegriffe der Mechanik mikroheterogener Materialien. Es folgt die ausführliche Darstellung der mikromechanischen Ansätze zur Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen mittels der Methode der Zellen und der hochauflösenden Methode der Zellen. Der Vergleich der Ergebnisse der Zellenmethode mit den Resultaten der mikromechanischen

Analyse der repräsentativen Zelle mittels der FEM dient zur Verifikation der Zellenmethode bei der Anwendung auf elastische Verbundwerkstoffe.

Im Kapitel 5 dienen die Methode der Zellen und die hochauflösende Methode der Zellen als Konstitutivmodelle für die FE-Analyse von Faserverbundstrukturen. Die Homogenisierung viskoelastischer Faserverbundwerkstoffe ist Gegenstand des Kapitels 6. Der Verbund von Faser und Matrix wird dabei wahlweise als starr oder als viskoelastisch angenommen.

Das Kapitel 7 behandelt die Verwendung der Zellenmethode im Zusammenhang mit einem nichtlinear elastischen Kontinuumsmodell für die Matrixphase sowie der Einbindung bruchmechanischer Modelle zur konstitutiven Beschreibung des Verbunds von Faser und Füller sowie dem Bruch der Matrix.

Im Kapitel 8 werden die Werkstoffparameter für das in Kapitel 7 vorgestellte Zellenmodell anhand experimenteller Daten identifiziert und diskutiert. Die Zweiskalensimulationen in Kapitel 9 demonstrieren die Anwendbarkeit der vorgestellten Modellierung bei Verbundwerkstoffen mit Schädigung.

Die Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick liefert Kapitel 10. Die Darstellung eines Teils der notwendigen Definitionen sowie einfacher Matrixoperationen werden im Anhang gebracht, um den Hauptteil der Dissertation zu entlasten.

# Kapitel 2

## Materialmodelle der Kontinuumsmechanik

Die Bilanzgleichungen der Thermomechanik für Masse, Kräfte, Momente, Energie und Entropie sind allgemeingültige Naturgesetze, denn sie gelten für jede Materie und jeden materiellen Körper gleichermaßen. Im Unterschied dazu stehen die Materialgleichungen, welche unverzichtbar notwendig sind, um die konstitutiven Beziehungen zwischen den Kraft- und Weggrößen in der Mechanik herzustellen. Hierbei handelt es sich nicht um allgemeingültige Gesetze, sondern um konsistente, mathematische Modelle, die das beobachtbare, phänomenologische Materialverhalten qualitativ und quantitativ so zutreffend wie nötig beschreiben sollen. Die Modellvorstellungen der Kontinuumsmechanik gehen in der Regel von einer homogenen Verteilung der Materialeigenschaften aus und vernachlässigen die auf hinreichend kleiner Längenskala vielfältig gestörte Homogenität und Unstetigkeit der Materie. Die konstitutiven Gleichungen unterscheiden sich für jeden Werkstoff zumindest im Hinblick auf die Werte der enthaltenen Parameter. Für ein und dasselbe Material können je nach Beanspruchungsregime oder Fragestellung verschiedene Modellansätze sinnvoll sein. Die Wahl des Modells hängt davon ab, welche Detailgenauigkeit von der Lösung der Anfangs-Randwertprobleme erwartet wird. Die existierenden, klassischen Materialmodelle für Festkörper lassen sich den folgenden vier Kategorien zuordnen, Haupt (2002):

- Elastizitätstheorie: Beschreibung ratenunabhängigen Verhaltens ohne Hysterese
- Plastizitätstheorie: Beschreibung ratenunabhängigen Verhaltens mit Hysterese
- Viskoelastizitätstheorie: Beschreibung ratenabhängigen Verhaltens ohne Gleichgewichtshysterese
- Viskoplastizitätstheorie: Beschreibung ratenabhängigen Verhaltens mit Gleichgewichtshysterese

Durch die Kombination der drei Grundelemente *elastische Feder*, *viskoser Dämpfer* und *Coulomb'sches Reibelement* können die vier Kategorien des beobachtbaren Werkstoffverhaltens veranschaulicht werden. In Abbildung 2.1 sind einfachste Modelle für die vier Theorien dargestellt. Kompliziertere Kombinationen mit z. B. mehreren Dämpfern sind möglich. Zwei alternative Ansätze zur Beschreibung des

viskoelastischen Materialverhaltens werden in Kapitel 2.3 behandelt. Für die mikro-mechanische Materialmodellierung werden in dieser Arbeit die linear und nichtlinear elastische sowie die linear viskoelastische Theorie bei kleinen Verzerrungen herangezogen. Die Beschränkung auf Modelle für kleine Dehnungen ist im Rahmen dieser Arbeit kein Nachteil, da Werkstoffe behandelt werden, die aufgrund ihrer geringen Bruchdehnungen keine großen Verzerrungen erleiden können.

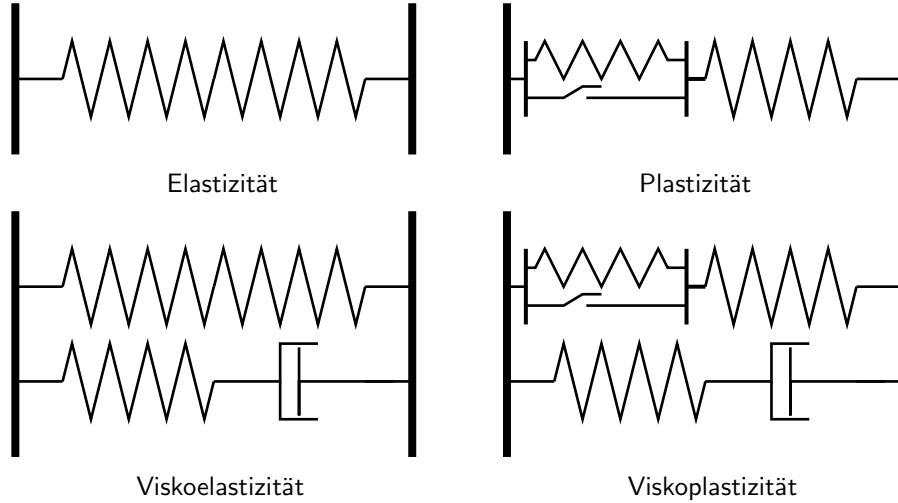


Abbildung 2.1: Grundmodelle für die vier Kategorien materiellen Verhaltens

## 2.1 Lineare Elastizität

Für den ideal elastischen Festkörper nach Hooke nimmt die konstitutive Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen die einfache Form einer linearen Abbildung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  auf den Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  an:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.1)$$

Die zu (2.1) äquivalente inverse Abbildung lautet

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.2)$$

Die vierstufigen Materialtensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S}$  enthalten im allgemeinen Fall  $3^4 = 81$  unabhängige Koordinaten. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Spannungs- und Verzerrungstensoren

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{und} \quad \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \quad (2.3)$$

unterliegen die konstitutiven Tensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S}$  ebenfalls Symmetriebedingungen:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jilck} \\ S_{ijkl} &= S_{ijlk} = S_{jilk} = S_{jilck} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Durch die Anforderung (2.4) reduziert sich die Zahl der unabhängigen Größen von 81 auf 36. Von den jeweils 9 Gleichungen der linearen Abbildungen (2.1) und (2.2) verbleiben aufgrund der Symmetriebedingungen (2.3) sechs unabhängige Gleichungen. Diese schreiben sich in Vektor-Matrix-Notation (VOIGT Notation) als:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Die unabhängigen Koordinaten des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  werden als Spaltenvektoren  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6$  und  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^6$  dargestellt, wobei die Schubverzerrungen in Form der Ingenieurgleitungen  $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$  mit  $i \neq j$  vorliegen.  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  symbolisieren die Koeffizientenmatrizen der vierstufigen Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{S}$ . Aus der geforderten Potentialeigenschaft der elastischen Formänderungsenergie folgt die Symmetrie der Matrix  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  und ihrer Inversen  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ , was mit der Verminderung der Zahl unabhängiger Konstanten auf 21 einhergeht. Eine weitere Reduktion der unabhängigen elastischen Parameter ist gegeben, wenn der Werkstoff Symmetrieebenen bezüglich seiner elastischen Eigenschaften aufweist. Wichtige Fälle stellen die orthotropen, transversalisotropen und isotropen Werkstoffe dar. Bei orthotropen Werkstoffen existieren drei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen. Ein Beispiel hierfür sind unidirektional langfaserverstärkte Materialien mit quadratischer Faseranordnung wie in Abb. 2.2 a) dargestellt. Die Steifigkeitsmatrix eines orthotropen Werkstoffs besitzt in hauptachsenbezogener Darstellung folgende Form:

$$\mathbf{C}_{\text{Ortho}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Die Zahl der unabhängigen Größen liegt bei 9. Die orthotrope Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_{\text{Ortho}}$  besitzt die gleiche Struktur wie  $\mathbf{C}_{\text{Ortho}}$ . Ein transversalisotroper Werkstoff zeichnet sich durch die Existenz einer ausgezeichneten Richtung der Materialeigenschaften aus. In einer Ebene senkrecht dazu sind die Eigenschaften richtungsunabhängig; bei einer Drehung des Bezugskordinatensystems um die ausgezeichnete

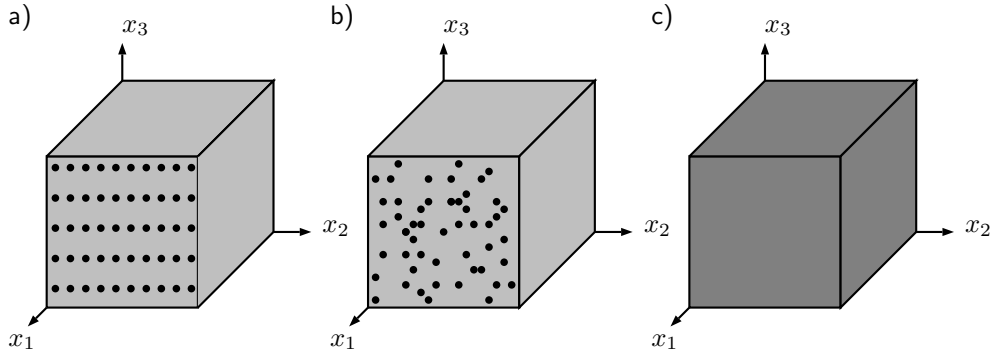


Abbildung 2.2: a) orthotroper Faserverbundwerkstoff, b) näherungsweise transversalisotroper Verbundwerkstoff, c) isotroper Werkstoff

Richtung ändern sich die Elemente der Steifigkeitsmatrix nicht. Ein transversalisotroper Werkstoff ist durch fünf unabhängige elastische Parameter eindeutig definiert. Mit  $x_1$  als der ausgezeichneten Richtung besitzt die Matrixdarstellung des transversalisotropen Steifigkeitstensors die Gestalt:

$$\mathbf{C}_{\text{TI}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ein Beispiel für einen näherungsweise transversalisotropen Werkstoff sind unidirektional verstärkte Materialien mit unregelmäßig verteilten Langfasereinschlüssen, siehe Abb. 2.2 b). Die ausgezeichnete Richtung wird als axiale Richtung, die Ebene senkrecht dazu als transversale Ebene bezeichnet. Die Ingenieurkonstanten hängen mit den Elementen von  $\mathbf{C}_{\text{TI}}$  wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \text{axialer E-Modul: } E_a &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \\ \text{transversaler E-Modul: } E_t &= [C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2C_{12}^2] \frac{C_{22} - C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \\ \text{axiale Querdehnzahl: } \nu_a &= \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \\ \text{transversale Querdehnzahl: } \nu_t &= \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \\ \text{axialer Schubmodul: } G_a &= C_{55} \\ \text{transversaler Schubmodul: } G_t &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ein isotroper Werkstoff besitzt keine ausgezeichnete Richtung, jede beliebige Schnittebene ist zugleich eine Symmetrieebene. Für jedes willkürlich im Raum orientierte kartesische Koordinatensystem sind die Elemente der isotropen Elastizitätsmatrix

gleich und von zwei Parametern, den Lamé'schen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , abhängig:

$$\mathbf{C}_{\text{iso}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Die Zusammenhänge zwischen den elastischen Parametern Querdehnzahl  $\nu$ , Elastizitätsmodul  $E$ , Schubmodul  $G$ , Kompressionsmodul  $K$  und den Lamé'schen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  lauten:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, & K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, & G &= \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ K &= \frac{EG}{9G - 3E}, & E &= \frac{9GK}{3K + G}, & \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.2 Physikalisch nichtlineares Kontinuumsmodell

Ein wesentlicher Aspekt der vorliegenden Arbeit ist die Homogenisierung von Faserverbundmaterialien, bei denen Epoxidharze als Füller zum Einsatz kommen. Diese Epoxidharze zeichnen sich in Experimenten durch eine vornehmlich unter Schubdeformationen ausgeprägt nichtlineare Spannungsantwort aus, siehe z. B. Hinton et al. (2004). Eine Möglichkeit, die nichtlineare Materialantwort mathematisch abzubilden, bieten Potenzansätze für die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. In Hahn and Tsai (1973) wird die Herleitung nichtlinear elastischer Materialgleichungen aus einem elastischen Potential gezeigt. Der folgende eindimensionale Ansatz ist in Ramberg and Osgood (1943) zu finden:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (2.12)$$

Hierin stellt  $E$  den Elastizitätsmodul des Werkstoffs dar. Der Spannungsparameter  $\sigma_0$  und der Exponent  $n$  definieren das nichtlineare Verhalten und sind aus Experimenten zu bestimmen. Der eindimensionale Ansatz (2.12) kann zur Beschreibung plastischer Beanspruchungsvorgänge genutzt werden, wenn keine Entlastungs- oder Wiederbelastungsvorgänge betrachtet werden sollen, denn der Entlastungspfad folgt dem Belastungspfad, d.h. es gibt keine verbleibenden Dehnungen nach Rücknahme einer Lastbeanspruchung.

Die isotrope, dreidimensionale Erweiterung des Ramberg-Osgood Ansatzes ist durch die folgende Gleichung gegeben, siehe z. B. Aboudi (1991):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \varpi \frac{3}{2E} s_{ij} \quad (2.13)$$

Der dimensionslose Faktor  $\varpi$  ist definiert als:

$$\varpi := \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{(n-1)} \quad (2.14)$$

Die Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  berechnet sich aus den deviatorischen Spannungen  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$  zu:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \quad (2.15)$$

Für die numerische Lösung der nichtlinearen Materialgleichungen wird in dieser Arbeit das Newtonverfahren verwendet, im Zuge dessen die Linearisierung der konstitutiven Gleichungen erforderlich ist. Zu diesem Zweck werden zunächst die Dehnungen nach Gl. (2.13) als Summe der linear elastischen Dehnungen  $\epsilon^{el}$  und des nichtlinearen Anteils  $\epsilon^{nl}$  geschrieben:

$$\epsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}}_{\epsilon_{ij}^{el}} + \underbrace{\varpi \left( \frac{3}{2E}\sigma_{ij} - \frac{1}{2E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right)}_{\epsilon_{ij}^{nl}} \quad (2.16)$$

Die Differentiation der Verzerrungen nach den Spannungen liefert den konsistenten Tangentenoperator  $\tilde{\mathbf{S}}$  mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ijnm} := \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \sigma_{nm}} &= \left( \frac{1+\nu}{E} + \varpi \frac{3}{2E} \right) \delta_{in}\delta_{jm} - \left( \frac{\nu}{E} + \varpi \frac{1}{2E} \right) \delta_{nm}\delta_{ij} \\ &+ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{nm}} \left( \frac{3}{2E}\sigma_{ij} - \frac{1}{2E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Differentiation von  $\varpi$  nach den Spannungen  $\sigma_{ij}$  führt auf:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{nm}} = \frac{3(n-1)}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(n-3)}}{\sigma_0^{(n-1)}} s_{rs} \left( \delta_{nr}\delta_{ms} - \frac{1}{3}\delta_{rs}\delta_{mn} \right) \quad (2.18)$$

Die konstitutiven Gleichungen (2.16) können in symbolischer Schreibweise dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{S}^{el} + \varpi(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{S}^{nl}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.19)$$

Die Art der additiven Zusammensetzung der Gesamtdehnungen aus den linear elastischen und nichtlinearen Anteilen nach Gl. (2.16) ermöglicht es, den Materialtensor  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})$  aus der Summe des isotropen, linear elastischen Nachgiebigkeitstensors  $\mathbf{S}^{el}$  und des  $\varpi$ -fachen nichtlinearen Nachgiebigkeitstensors  $\mathbf{S}^{nl}$  zu bilden. Die Linearisierung von (2.19) führt auf den konsistenten Tangentenoperator  $\tilde{\mathbf{S}}$  in symbolischer Notation:

$$\tilde{\mathbf{S}} := \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}^{el} + \varpi(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{S}^{nl} + (\mathbf{S}^{nl} : \boldsymbol{\sigma}) \otimes \frac{\partial \varpi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.20)$$

Für die numerische Umsetzung des Materialmodells werden die Komponenten des konstitutiven Tensors  $\mathbf{S}$  in Gl. (2.19) als Elemente der konstitutiven Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  geschrieben:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^{el}} + \varpi \frac{1}{2E} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\varpi \mathbf{S}^{nl}} \quad (2.21)$$



Die konstitutive Gleichung (2.19) nimmt mit  $\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{13} \ \epsilon_{12}\}$  und Gl. (2.21) folgende Form an:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} \quad (2.22)$$

Den Tangentenoperator  $\tilde{\mathbf{S}}$  erhält man in Matrixform als:

$$\tilde{\mathbf{S}} := \mathbf{S}^{el} + \varpi(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{S}^{nl} + (\mathbf{S}^{nl}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\varpi}_{\partial}^T \quad (2.23)$$

mit

$$\boldsymbol{\varpi}_{\partial} := \left\{ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{11}} \ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{22}} \ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{33}} \ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{23}} \ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{13}} \ \frac{\partial \varpi}{\partial \sigma_{12}} \right\}^T \quad (2.24)$$

Die Komponenten von  $\boldsymbol{\varpi}_{\partial} \in \mathbb{R}^6$  liefert die Gl. (2.18) unter Beachtung der Symmetrie des Spannungsdeviators  $s_{kl} = s_{lk}$ :

$$\boldsymbol{\varpi}_{\partial} = \frac{(n-1)}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(n-3)}}{\sigma_0^{(n-1)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{23} \\ s_{13} \\ s_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

## 2.3 Lineare Viskoelastizität

Viskoelastische Materialien vereinen elastische und viskose Eigenschaften. Vor allem langkettige Polymerwerkstoffe wie verschiedene harte und weiche Kunststoffe, Kunststoffschmelzen oder natürliche und künstliche Gummimaterialien zeigen viskoelastisches Verhalten. Das Antwortverhalten dieser Werkstoffe zeichnet sich durch einen zeitabhängigen und einen zeitunabhängigen Anteil aus. Die viskoelastischen Materialphänomene erklären sich durch Umordnungen der Mikrostruktur. Dazu sind nach Winemann and Rajagopal (2000) zu zählen: die Streckung und Entflechtung der

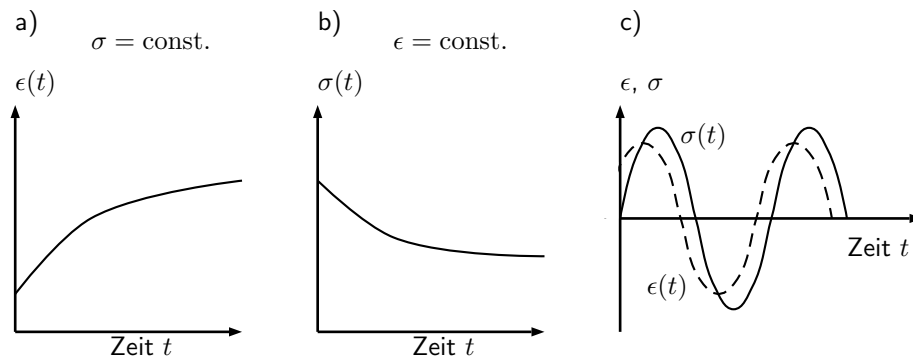


Abbildung 2.3: a) Kriechen unter konstanter Spannung. b) Relaxation unter konstanter Dehnung. c) harmonische Belastung

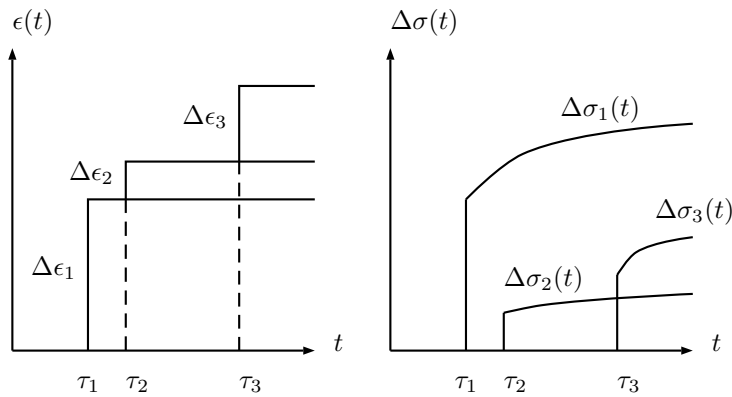


Abbildung 2.4: Inkremente der Spannungsantwort auf gestufte Verzerrungsbeanspruchung

Makromolekülnetzwerke, die lokalen Streckungen einzelner Makromoleküle und die Neuausrichtung von Bindungen auf atomarer Ebene. Für die angeführten Vorgänge ist Zeit erforderlich, die für ein wahrnehmbar verzögertes Eintreten der vollständigen Wirkung als Antwort auf die Ursache sorgt. Die viskoelastischen Antworteigenschaften werden in Kriech- und Relaxationsversuchen oder unter harmonischer Anregung bestimmt. Unter einer sprunghaft aufgebracht und im Weiteren konstant gehaltenen Last ist zunächst eine spontane Deformation zu beobachten, die in einem zeitlich verzögerten Prozess wächst, der als Kriechen bezeichnet wird, siehe Abb. 2.3 a). Bei einer zeitlich konstant eingepprägten Deformation nehmen die Spannung mit der Zeit ab. Dieser Vorgang wird Relaxation genannt und ist qualitativ in Abbildung 2.3 b) dargestellt. Bei der harmonischen Dehnungsanregung eines viskoelastischen Werkstoffes folgt die Spannungsantwort phasenverschoben, wie Abbildung 2.3 c) zeigt.

Die Theorie der linearen Viskoelastizität geht von der heuristischen Annahme des Boltzmannschen Superpositionsprinzips aus. Dieses besagt, dass der gegenwärtige Spannungs- oder Verzerrungszustand die Folge aller Veränderungen der Spannungen oder Verzerrungen in der Vergangenheit ist. Der aktuelle Zustand hängt also von allen vorausgegangenen Zuständen ab. Die gegenwärtigen Wirkungen der einzelnen Ursachen in der Vergangenheit überlagern sich additiv und unabhängig voneinander. Diese Aussage wird in Abb. 2.4 illustriert; die Gesamtspannung  $\sigma(t)$  zur Zeit  $t$  ergibt sich aus der Summe der Spannungsinkremente  $\Delta\sigma_i(t)$ , welche die Spannungsantworten auf die Verzerrungsincremente  $\Delta\epsilon_i$  sind. Die Reihenfolge der Last-

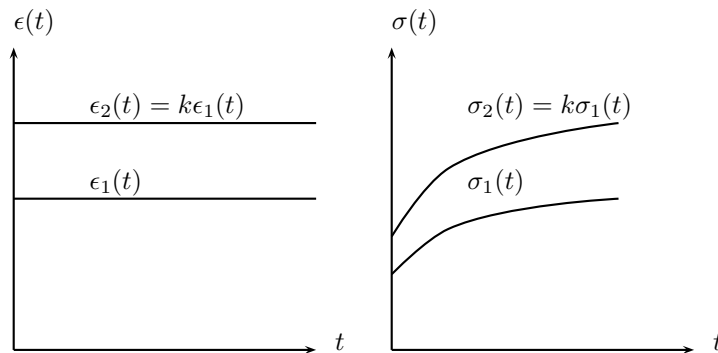


Abbildung 2.5: Proportionalität von Spannungen und Dehnungen

aufbringung spielt im Rahmen der linearen Theorie keine Rolle. Die inkrementellen Spannungsantworten sind unabhängig voneinander. Unter der Annahme der Gültigkeit des Superpositionsprinzips führt ein Verzerrungsvorgang  $\epsilon_2(t) = k\epsilon_1(t)$  zur Spannungsantwort  $\sigma_2(t) = k\sigma_1(t)$ , wobei  $k$  einen konstanten Faktor darstellt, siehe Abb. 2.5. Die Spannungsantwort verändert sich proportional zum vorgegebenen Dehnungsprozess. Analoges gilt bei Vorgabe eines Spannungsprozesses.

### 2.3.1 Eindimensionale rheologische Modelle der Viskoelastizität

Das konstitutive Verhalten linear viskoelastischer Werkstoffe kann durch geeignete Kombinationen von Feder- und Dämpferelementen modelliert werden. Die zeitunabhängige Komponente der Materialantwort wird im eindimensionalen Fall durch elastische Federn beschrieben, für die die Hookesche Elastizitätsbeziehung gilt:

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.26)$$

Die zeitabhängige Komponente wird durch Dämpfer abgebildet, die die reine Viskosität eines Newtonschen Fluids beschreiben, bei der die Spannungen nur von der Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}$  und der Viskositätszahl  $\eta$  abhängen:

$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}(t) \quad (2.27)$$

Durch die Parallelschaltung einer Feder mit einem Dämpfer entsteht als Grundelement das sogenannte KELVIN-Modell. Die Reihenschaltung einer einzelnen Feder mit einem Dämpfer wird als MAXWELL-Modell bezeichnet, siehe Abb. 2.6. Im Folgenden werden die Elemente KELVIN-Körper, MAXWELL-Körper und elastische Feder benutzt, um rheologische Modelle zu konstruieren, mit deren Hilfe das Kriech- und Relaxationsverhalten viskoelastischer Werkstoffe beschrieben werden kann.

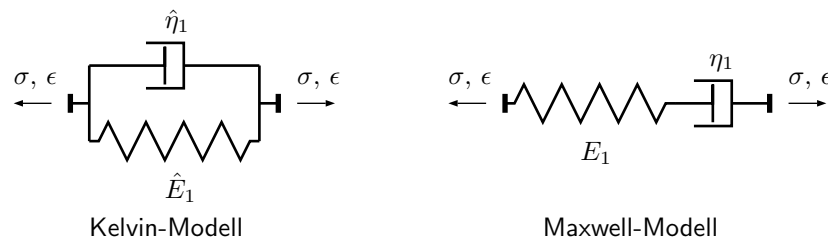


Abbildung 2.6: Grundlegende rheologische Modelle

#### Modellierung des Kriechverhaltens

**KELVIN-Körper.** Im KELVIN-Modell addieren sich die Teilspannungen  $\sigma_F$  und  $\sigma_D$  der Feder und des Dämpfers zur resultierenden Spannung  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_D = \hat{E}_1 \epsilon_F + \hat{\eta}_1 \dot{\epsilon}_D \quad (2.28)$$

Die Dehnungen  $\epsilon_F$  und  $\epsilon_D$  sind gleich und entsprechen der Gesamtdehnung des Körpers:

$$\epsilon = \epsilon_F = \epsilon_D \quad (2.29)$$

Die Differentialgleichung (2.28) des KELVIN-Modells lautet unter Beachtung der Gl. (2.29):

$$\epsilon(t) + \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{E}_1} \dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{\hat{E}_1} \sigma(t) \quad (2.30)$$

Gibt man den Spannungsverlauf  $\sigma(t)$  in Form der Heaviside-Sprungfunktion  $H$  vor:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad \text{mit } H(t) := \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.31)$$

so erhält man mit der Anfangsbedingung  $\epsilon(0) = 0$  als Lösung der Dgl. (2.30):

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\hat{E}_1} \left( 1 - e^{-\frac{\hat{E}_1}{\hat{\eta}_1} t} \right) \sigma_0 \quad (2.32)$$

Nach der Definition der Kriechzeit  $\hat{\tau}_1$

$$\hat{\tau}_1 := \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{E}_1} \quad (2.33)$$

folgt die Kriechfunktion  $J(t)$  des KELVIN-Körpers unmittelbar aus Gl. (2.32) zu:

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\hat{E}_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\hat{\tau}_1}} \right) \quad (2.34)$$

Der KELVIN-Körper eignet sich nicht für die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens realer Festkörper, denn zum einen ist die Anfangsnachgiebigkeit  $J(0)$  identisch Null und zum anderen hängen die Dehnungen nicht von der Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}$  ab, wie die rechte Seite der Dgl. (2.30) erkennen lässt. Allerdings dient der KELVIN-Körper für die Dynamik als bevorzugtes Modell für die Beschreibung gedämpfter Schwingungen. Für die Modellierung des Kriechverhaltens von Festkörpern wird daher das KELVIN-Modell um eine zweite Feder erweitert. Der dabei gebildete sogenannte Standardkörper vom KELVIN-Typ besteht aus der Reihenschaltung eines KELVIN-Körpers mit einer Feder, siehe Abbildung 2.7.

**Linearer Standardkörper vom KELVIN-Typ.** Die Gesamtdehnung  $\epsilon$  des Standardkörpers vom KELVIN-Typ setzt sich aus der elastischen Dehnung  $\epsilon_e$  der Feder mit der Steifigkeit  $\hat{E}_0$  und der inelastischen Dehnung  $\epsilon_i$  im KELVIN-Element mit der Steifigkeit  $\hat{E}_1$  und der Viskosität  $\hat{\eta}_1$  zusammen:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_i \quad (2.35)$$

Für die elastische Spannung gilt:

$$\sigma_e = \hat{E}_0 \epsilon_e \quad (2.36)$$

Die Spannungen im KELVIN-Element addieren sich zu:

$$\sigma_i = \hat{E}_1 \epsilon_i + \hat{\eta}_1 \dot{\epsilon}_i \quad (2.37)$$

Da die Kontinuitätsbedingung  $\sigma = \sigma_e = \sigma_i$  erfüllt werden muss, gilt ferner:

$$\sigma = \hat{E}_0 \epsilon_e = \hat{E}_1 \epsilon_i + \hat{\eta}_1 \dot{\epsilon}_i \quad (2.38)$$

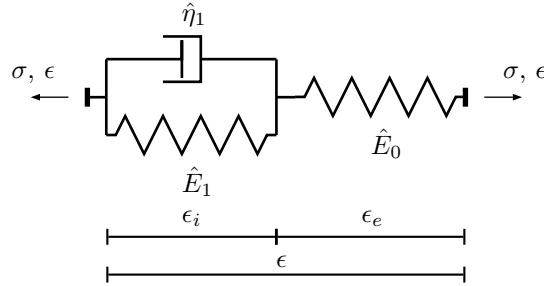


Abbildung 2.7: Linearer Standardkörper vom KELVIN-Typ

Aus den Gln. (2.35) und (2.36) folgt mit  $\sigma = \sigma_e$ :

$$\epsilon_i = \epsilon - \frac{\sigma}{\hat{E}_0} \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\hat{E}_0} \quad (2.39)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (2.39) in die Gl. (2.38) ergibt sich die Differentialgleichung für den linearen Standardkörper vom KELVIN-Typ:

$$\epsilon + \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{E}_1} \dot{\epsilon} = \frac{\hat{E}_0 + \hat{E}_1}{\hat{E}_0 \hat{E}_1} \sigma + \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{E}_0 \hat{E}_1} \dot{\sigma} \quad (2.40)$$

Die homogene Lösung der Dgl. (2.40) lautet mit der Integrationskonstanten  $C$ :

$$\epsilon(t)_h = C e^{-\frac{\hat{E}_1}{\hat{\eta}_1} t} \quad (2.41)$$

Für die Berechnung der Kriechfunktion  $J(t)$  wird als Belastungsfunktion  $\sigma(t)$  zur Zeit  $t = 0$  sprunghaft eine konstante Spannung  $\sigma_0$  aufgebracht.

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad \text{mit} \quad H(t) := \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Als partikuläre Lösung der Dgl. (2.40) erhält man mit Gl. (2.42) für  $t > 0$ :

$$\epsilon(t)_p = \frac{\hat{E}_0 + \hat{E}_1}{\hat{E}_0 \hat{E}_1} \sigma_0 \quad (2.43)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition der Gln. (2.41) und (2.43) zu:

$$\epsilon(t) = C e^{-\frac{\hat{E}_1}{\hat{\eta}_1} t} + \frac{\hat{E}_0 + \hat{E}_1}{\hat{E}_0 \hat{E}_1} \sigma_0 \quad (2.44)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $\epsilon(0) = \sigma_0 / \hat{E}_0$  kann die Integrationskonstante  $C$  bestimmt werden und es folgt:

$$\epsilon(t) = \left[ \frac{1}{\hat{E}_0} + \frac{1}{\hat{E}_1} \left( 1 - e^{-\frac{\hat{E}_1}{\hat{\eta}_1} t} \right) \right] \sigma_0 \quad (2.45)$$

Folglich lautet die Kriechfunktion:

$$J(t) = \frac{1}{\hat{E}_0} + \frac{1}{\hat{E}_1} \left( 1 - e^{-\frac{\hat{E}_1}{\hat{\eta}_1} t} \right) \quad (2.46)$$

Die Betrachtung der Gl. (2.46) zeigt, dass die Kriechfunktion  $J(t)$  des linearen Standardkörpers vom KELVIN-Typ die Summe der elastischen Nachgiebigkeit der Feder  $1/\hat{E}_0$  und der Kriechfunktion des KELVIN-Modells nach Gl. (2.34) ist.

**Verallgemeinerter Standardkörper vom KELVIN-Typ.** Das Modell des linearen Standardkörpers ist geeignet, das viskoelastische Kriechverhalten von Festkörpern qualitativ wiederzugeben. Die Zahl der 3 freien Parameter ist jedoch gering, wenn es darum geht, die Modellvorhersagen quantitativ mit der Antwort realer Werkstoffe in Einklang zu bringen. Abhilfe schaffen hier verallgemeinerte Modelle wie in Abbildung 2.8 dargestellt, die über eine wählbare Anzahl freier Parameter verfügen. Beim verallgemeinerten Modell vom KELVIN-Typ handelt es sich um die

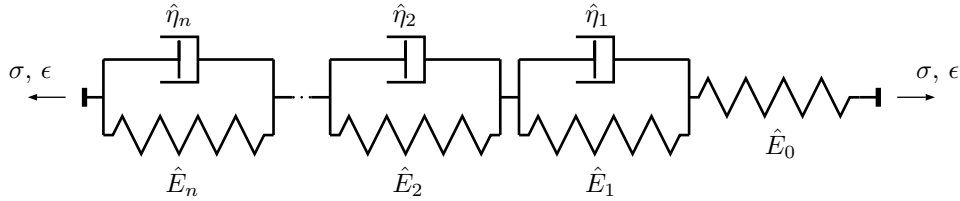


Abbildung 2.8: Verallgemeinertes KELVIN-Modell

Reihenschaltung des linearen Standardkörpers mit  $n - 1$  weiteren KELVIN-Modellen. Demzufolge ergibt sich die Dehnung  $\epsilon$  des  $(2n + 1)$ -parametrischen Gesamtmodells aus der elastischen Federdehnung  $\epsilon_e$  und der Summe der inelastischen Dehnungen  $\epsilon_i$  in den  $n$  KELVIN-Elementen.

$$\epsilon(t) = \epsilon_e + \sum_{k=1}^n \epsilon_k \quad (2.47)$$

Da in der linearen Viskoelastizitätstheorie das Boltzmannsche Superpositionsprinzip gilt, folgt die Kriechfunktion des verallgemeinerten Modells durch Überlagerung der Kriechfunktion des linearen Standardkörpers nach Gl. (2.46) und der Lösungen  $J_k(t)$  gemäß Gl.(2.34) mit  $k = 2, \dots, n$  für die zusätzlichen  $(n - 1)$  KELVIN-Elemente:

$$J(t) = \frac{1}{\hat{E}_0} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\hat{E}_k} \left(1 - e^{-\frac{t}{\hat{\tau}_k}}\right) \quad (2.48)$$

Die Kriechzeiten berechnen sich zu:

$$\hat{\tau}_k = \frac{\hat{\eta}_k}{\hat{E}_k} \quad (2.49)$$

Die Nachgiebigkeiten  $1/\hat{E}_k$  lassen sich durch die Retardationsstärken  $J_k$  ersetzen:

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^n J_k \left(1 - e^{-\frac{t}{\hat{\tau}_k}}\right) \quad (2.50)$$

Das diskrete Kriechspektrum

$$L(\tau) : \{J_k, \hat{\tau}_k; k = 1, 2, n\} \quad (2.51)$$

legt die rheologischen Eigenschaften des verallgemeinerten KELVIN-Modells fest. Die Gleichgewichtsnachgiebigkeit  $J_\infty$  im Grenzübergang  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$  lautet:

$$J_\infty = J_0 + \sum_{k=1}^n J_k \quad (2.52)$$

### Modellierung des Relaxationsverhaltens

**MAXWELL-Körper.** Im MAXWELL-Modell nach Abbildung 2.6 addieren sich die Teildehnungen  $\epsilon_F$  und  $\epsilon_D$  zur resultierenden Gesamtdehnung  $\epsilon$ .

$$\epsilon = \epsilon_F + \epsilon_D \quad (2.53)$$

Die Spannungen  $\sigma_F$  und  $\sigma_D$  sind aus Kontinuitätsgründen gleich:

$$\sigma = \sigma_F = \sigma_D \quad \Rightarrow \quad \sigma = E_1 \epsilon_F = \eta_1 \dot{\epsilon}_D \quad (2.54)$$

Durch Kombination der Gl. (2.53) mit Gl. (2.54) folgt die Differentialgleichung des MAXWELL-Körpers:

$$\sigma(t) + \frac{\eta_1}{E_1} \dot{\sigma}(t) = \eta_1 \dot{\epsilon}(t) \quad (2.55)$$

Gibt man den Dehnungsverlauf  $\epsilon(t)$  in Abhängigkeit der Heaviside-Sprungfunktion  $H$  vor

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t) \quad \text{mit } H(t) := \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.56)$$

so findet man als Lösung der Differentialgleichung (2.55) mit der Anfangsbedingung  $\sigma(0) = E_1 \epsilon_0$ :

$$\sigma(t) = \left( E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta_1} t} \right) \epsilon_0 \quad (2.57)$$

Mit Einführung der Relaxationszeit

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \quad (2.58)$$

ergibt sich die Relaxationsfunktion  $G_1(t)$  des MAXWELL-Körpers aus Gl. (2.57) zu:

$$G_1(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (2.59)$$

**Linearer Standardkörper vom MAXWELL-Typ.** Der lineare Standardkörper vom MAXWELL-Typ besteht aus der Parallelschaltung einer Feder mit einem MAXWELL-Körper, siehe Abbildung 2.9. Erst die Kombination des MAXWELL-Körpers mit der Feder ermöglicht die konstitutive Beschreibung eines viskoelastischen Feststoffs, da die Steifigkeit des MAXWELL-Körpers im Grenzübergang  $\lim t \rightarrow \infty$  gegen Null geht, wie an Gl. (2.59) abzulesen ist. Die Gesamtdehnung  $\epsilon$  des MAXWELL-Elements ergibt sich aus der Summe der inelastischen Dehnungen im Dämpfer und der elastischen Dehnung in der Feder mit der Steifigkeit  $E_1$ :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_i \quad (2.60)$$

Die Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.61)$$

resultiert aus der Spannung  $\sigma_1$  in der Feder mit der Steifigkeit  $E_0$ , die die Gesamtdehnung  $\epsilon$  erfährt, sowie der inelastischen Spannung  $\sigma_2$  im MAXWELL-Körper:

$$\sigma_1 = E_0 \epsilon \quad (2.62)$$

$$\sigma_2 = E_1 \epsilon_e = \eta_1 \dot{\epsilon}_i = \eta_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_e) = \eta_1 \left( \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}_2}{E_1} \right) = \eta_1 \left( \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma} - E_0 \dot{\epsilon}}{E_1} \right) \quad (2.63)$$

Die rechte Seite der Gl. (2.63) folgt mit Hilfe der Beziehungen (2.60) und (2.61). Die Summe der Gln. (2.62) und (2.63) liefert die Differentialgleichung des Standardkörpers vom MAXWELL-Typ:

$$\sigma + \frac{\eta_1}{E_1} \dot{\sigma} = \eta_1 \left( 1 + \frac{E_0}{E_1} \right) \dot{\epsilon} + E_0 \epsilon \quad (2.64)$$

Im Grenzfall  $E_0 \rightarrow 0$  geht die Differentialgleichung (2.64) über in die Dgl. (2.55) des MAXWELL-Körpers. Für  $E_1 \rightarrow \infty$  erhält man die Dgl. (2.30) des KELVIN-Körpers. Bei einer sprungartigen Dehnungsbeanspruchung

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t) \quad \text{mit } H(t) := \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.65)$$

verhält sich der Dämpfer im MAXWELL-Körper quasistarr und die Anfangsspannung  $\sigma(0)$  setzt sich zusammen aus:

$$\sigma(0) = (E_0 + E_1) \epsilon_0 \quad (2.66)$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. (2.64) lautet

$$\sigma(t) = \left( E_0 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \epsilon_0 \quad (2.67)$$

mit der Relaxationszeit

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1}. \quad (2.68)$$

Die Relaxationsfunktion  $G(t)$  des linearen Standardkörpers vom MAXWELL-Typ folgt aus Gl. (2.67) zu:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = E_0 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (2.69)$$

Das Ergebnis nach Gl. (2.69) entspricht der Summe aus der Federsteifigkeit und der Relaxationsfunktion  $G_1(t)$  des MAXWELL-Elements in Gl. (2.59).

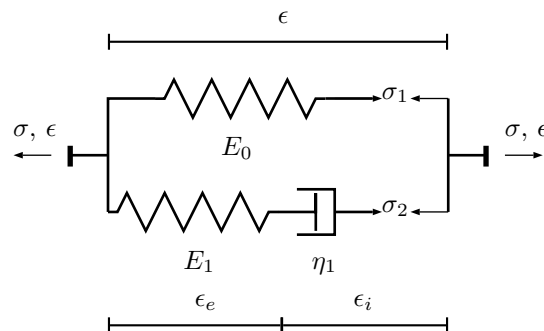


Abbildung 2.9: Linearer Standardkörper vom MAXWELL-Typ



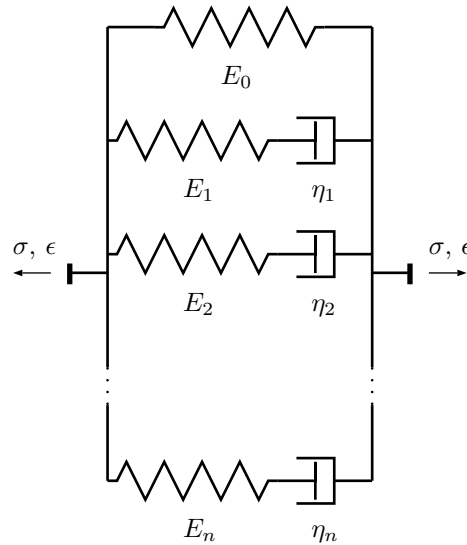


Abbildung 2.10: Verallgemeinerter Standardkörper vom MAXWELL-Typ

**Verallgemeinerter Standardkörper vom MAXWELL-Typ.** Der lineare Standardkörper vom MAXWELL-Typ kann in ähnlicher Weise wie der Standardkörper vom KELVIN-Typ verallgemeinert werden, um eine größere Zahl freier Parameter für die Identifikation der Modellvorhersagen mit den experimentellen Daten zur Verfügung zu haben. Der verallgemeinerte Standardkörper vom MAXWELL-Typ entsteht, wie in Abbildung 2.10 dargestellt, durch die Parallelschaltung von  $n$ -MAXWELL-Elementen mit einer elastischen Feder. Der Vergleich der Lösungen in den Gln. (2.59) und (2.69) zeigt, dass die Steifigkeit des MAXWELL-Elements zur Steifigkeit der Feder addiert werden muss, um die Relaxationsfunktion des Standardkörpers zu erhalten. Die Relaxationsfunktion  $G(t)$  des verallgemeinerten Standardkörpers vom MAXWELL-Typ erhält man aufgrund der Gültigkeit des Superpositionsprinzips, wenn die Federsteifigkeit  $E_0$  mit den Relaxationsfunktionen  $G_k(t)$  aller  $n$ -MAXWELL-Elemente überlagert wird:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = E_0 + \sum_{k=1}^n E_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Dreidimensionales Modell der isotropen Viskoelastizität

Im Rahmen der Theorie der linearen Viskoelastizität kann die konstitutive Beziehung zwischen den Spannungen und den Dehnungen in Form einer Differentialgleichung geschrieben werden, wie im vorangegangenen Abschnitt 2.3.1 für den eindimensionalen Fall gezeigt worden ist.

Eine gleichwertige Darstellung ist die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens durch Faltungsintegrale. Dann lautet die viskoelastische Verzerrungsantwort  $\epsilon(t)$

zur gegenwärtigen Zeit  $t$ :

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \mathbf{S}(t-\tau) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.71)$$

Analog berechnet sich die viskoelastische Spannungsantwort  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  zur Zeit  $t$ :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \mathbf{C}(t-\tau) : \frac{d\boldsymbol{\epsilon}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.72)$$

In Gl. (2.71) stellt der aktuelle Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  ein lineares Funktional der Spannungsgeschichte  $\boldsymbol{\sigma}(\tau)|_{\tau < t}$  in der Vergangenheit  $\tau \leq t$  und des zeitabhängigen Nachgiebigkeitstensors  $\mathbf{S}(t)$  dar. In der Darstellung (2.72) erscheint die Spannungsantwort  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  als Funktional der Verzerrungsgeschichte  $\boldsymbol{\epsilon}(\tau)|_{\tau < t}$  und des viskoelastischen Steifigkeitstensors  $\mathbf{C}(t)$ . Die konstitutiven Gleichungen (2.71) und (2.72) sind äquivalent.

Die vorliegende Arbeit geht im Weiteren von der Annahme isotroper Viskoelastizität aus. Mit Hilfe der volumetrischen und deviatorische Spannungstensoren

$$\mathbf{s}_V = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_D = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}_V \quad (2.73)$$

sowie der Zeitableitung  $(\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot)$  lautet die Gl. (2.71) für einen isotropen viskoelastischen Festkörper:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t J(t-\tau) \mathbf{s}'_D d\tau + \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t k(t-\tau) \text{tr} \boldsymbol{\sigma}' d\tau \right\} \mathbf{1}. \quad (2.74)$$

Die zeitabhängigen Materialfunktionen  $J(\cdot)$  und  $k(\cdot)$  sind die Schub- und Kompressionskriechfunktionen des Materials. Sie geben die Gestalt- und Volumenänderungsantwort des Materials auf einen Einheitsspannungssprung an. Analog kann die viskoelastische Spannungsantwort  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  zur Zeit  $t$  mit Hilfe der deviatorischen und volumetrischen Verzerrungstensoren

$$\mathbf{e}_V = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_D = \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}_V \quad (2.75)$$

berechnet werden:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t 2\mu(t-\tau) \mathbf{e}'_D d\tau + \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t K(t-\tau) \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}' d\tau \right\} \mathbf{1} \quad (2.76)$$

Die Schub- und Kompressionsrelaxationsfunktionen  $\mu(\cdot)$  und  $K(\cdot)$  beschreiben die Spannungsantworten auf Einheitsverzerrungssprünge. Im Weiteren wird nur noch die konstitutive Gleichung (2.74) verfolgt, da die Darstellung der Verzerrungen als Funktional der Spannungsgeschichte die Basis der numerisch effizienten Umsetzung der mikromechanischen Methode der Zellen bildet. Die Verwendung der Gleichung (2.76) für die ursprüngliche Formulierung der Zellenmethode ist u.a. zu finden in Gerlach (2003).

Wenn man von einer ratenunabhängigen, rein elastischen Volumenänderung ausgeht, dann ergibt sich der volumetrische Anteil  $\mathbf{e}_V$  des Dehnungstensors mit  $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3K} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$  und dem Kompressionsmodul  $K$  zu:

$$\mathbf{e}_V = \frac{1}{9K} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (2.77)$$

Aus Gl. (2.74) wird somit:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \frac{1}{9K} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \mathbf{s}'_D d\tau. \quad (2.78)$$

Der volumetrische Anteil  $\mathbf{e}_V$  des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  hängt nur noch vom Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  und dem Kompressionsmodul  $K$  ab. Der deviatorische Verzerrungsanteil in Gl. (2.78) lautet:

$$\mathbf{e}_D(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \mathbf{s}'_D d\tau. \quad (2.79)$$

Als Kernfunktion  $J(\cdot)$  kann die für das verallgemeinerte KELVIN-Modell hergeleitete DIRICHLET-PRONY-Reihe in Gl. (2.50) angesetzt werden.

$$J(t) = J_\infty - \sum_{k=1}^n J_k e^{-\frac{t}{\hat{\tau}_k}} \quad ; \quad J_\infty := J_0 + \sum_{k=1}^n J_k \quad (2.80)$$

Das  $(2n+1)$ -Parametermodell (2.80) wird durch das diskrete Kriechspektrum  $L(\tau) : \{J_k, \hat{\tau}_k, k = 1, \dots, n\}$  definiert. Der Parameter  $J_\infty = 1/(2\mu_\infty)$  lässt sich durch den Langzeitschubmodul  $G_\infty = \mu_\infty$  im Gleichgewichtszustand bestimmen. Es wird davon ausgegangen, dass die Spannungsgeschichte in der Zeit  $\tau < 0$  identisch Null verlaufen ist. Dann gilt:

$$\mathbf{e}_D(t) = \int_0^t \left\{ J_\infty - \sum_{k=1}^n J_k e^{-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_k}} \right\} \mathbf{s}'_D d\tau. \quad (2.81)$$

Mit dem Ansatz der Kernfunktion in Gl. (2.80) und den Beteiligungsfaktoren

$$\hat{\nu}_k := J_k / J_\infty \quad (2.82)$$

wird aus Gl. (2.81)

$$\mathbf{e}_D(t) = J_\infty \int_0^t \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{t-\tau}{\hat{\tau}_k}} \right\} \mathbf{s}'_D d\tau. \quad (2.83)$$

Die näherungsweise Lösung der Integralgleichung (2.83) gelingt durch Anwendung des numerischen Zeitintegrationsalgorithmus' nach Taylor et al. (1970). Wendet man

das rekursive Integrationsschema zur Zeit  $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$  auf die Faltung der Rate des Spannungsdeviators  $\mathbf{s}'_{\text{D}}$  mit der Kernfunktion  $J(t)$  an, so ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{e}_{\text{D}} = J_{\infty} & \left[ \int_0^{t_n} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{t_n + \Delta t - \tau}{\hat{\tau}_k}} \right\} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau \right. \\ & \left. + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{t_n + \Delta t - \tau}{\hat{\tau}_k}} \right\} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau \right] \quad (2.84) \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Integral  $\int_0^{t_n + \Delta t} (\cdot)$  erscheint als Summe zweier Integrale, die den Verzerrungsdeviator  ${}^n\mathbf{e}_{\text{D}} = \int_0^{t_n} (\cdot)$  zum vorhergehenden Zeitpunkt  $t = t_n$  und einen inkrementellen Zuwachs  $\Delta {}^{n+1}\mathbf{e}_{\text{D}} = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} (\cdot)$  beschreiben. Durch einfache algebraische Umformungen erhält man aus Gl. (2.84) schließlich:

$${}^{n+1}\mathbf{e}_{\text{D}} = J_{\infty} \left[ {}^{n+1}\mathbf{s}_{\text{D}} - \sum_{k=1}^n e^{-\frac{t_n + \Delta t}{\hat{\tau}_k}} \hat{\nu}_k \int_0^{t_n} e^{\frac{\tau}{\hat{\tau}_k}} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau - \sum_{k=1}^n e^{-\frac{t_n + \Delta t}{\hat{\tau}_k}} \hat{\nu}_k \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} e^{\frac{\tau}{\hat{\tau}_k}} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau \right] \quad (2.85)$$

Unter Zuhilfenahme der Definitionen

$${}^n\mathbf{d}_k := e^{-\frac{t_n}{\hat{\tau}_k}} \int_0^{t_n} e^{\frac{\tau}{\hat{\tau}_k}} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau \quad (2.86)$$

$$\Delta {}^{n+1}\mathbf{d}_k := e^{-\frac{t_n + \Delta t}{\hat{\tau}_k}} \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} e^{\frac{\tau}{\hat{\tau}_k}} \mathbf{s}'_{\text{D}} d\tau \quad (2.87)$$

und der Anfangsbedingung

$${}^0\mathbf{d}_k = {}^0\mathbf{s}_{\text{D}} \quad (2.88)$$

wird aus Gl. (2.85) der Ausdruck:

$${}^{n+1}\mathbf{e}_{\text{D}} = J_{\infty} \left[ {}^{n+1}\mathbf{s}_{\text{D}} - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k \left( e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} {}^n\mathbf{d}_k + \Delta {}^{n+1}\mathbf{d}_k \right) \right] \quad (2.89)$$

Wenn man die Zeitableitung des Spannungsdeviators näherungsweise durch den finite Differenzenquotienten

$$\mathbf{s}'_{\text{D}} \approx \frac{1}{\Delta t} ({}^{n+1}\mathbf{s}_{\text{D}} - {}^n\mathbf{s}_{\text{D}}), \quad (2.90)$$

ersetzt, dann kann das Integral in Gl. (2.87) analytisch berechnet werden und man erhält:

$$\Delta {}^{n+1}\mathbf{d}_k = \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right] ({}^{n+1}\mathbf{s}_{\text{D}} - {}^n\mathbf{s}_{\text{D}}) \quad (2.91)$$

Damit kann der aktuelle Spannungsgeschichtstensor  ${}^{n+1}\mathbf{d}_k$  zur Zeit  ${}^{n+1}t$  aus dem Wert  ${}^n\mathbf{d}_k$  zum vorhergehenden Zeitpunkt  ${}^nt$  und dem Inkrement in Gl. (2.91) gewonnen werden. Für den aktuellen Verzerrungstensor erhält man dann:

$${}^{n+1}\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{9K} \text{tr} ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + J_\infty \left[ {}^{n+1}\mathbf{s}_D - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k {}^{n+1}\mathbf{d}_k \right] \quad (2.92)$$

Die Gl. (2.92) kann auch in Abhängigkeit des Spannungsinkrements  $\Delta^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$  und des Verzerrungsgeschichtstensors  ${}^n\mathbf{y}$  geschrieben werden:

$${}^{n+1}\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\mathbf{S}}_{ve} : \Delta^{n+1}\boldsymbol{\sigma} + {}^n\mathbf{y} \quad (2.93)$$

Der instantane, viskoelastische Nachgiebigkeitstensor  $\tilde{\mathbf{S}}_{ve}$  ist mit dem vierstufigen Tensor  $\mathbf{II} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  definiert als:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{ve} = \frac{1}{9K^{(\beta\gamma)}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu_\infty} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right) \right] \left[ \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \quad (2.94)$$

Der Verzerrungsgeschichtstensor  ${}^n\mathbf{y}$  berechnet sich aus:

$${}^n\mathbf{y} = \frac{1}{9K} \text{tr} ({}^n\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + J_\infty \left[ {}^n\mathbf{s}_D - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} {}^n\mathbf{d}_k \right] \quad (2.95)$$

**Matrix-Vektor-Notation.** Für die numerische Umsetzung des viskoelastischen Materialmodells ist die Vektor-Matrix-Schreibweise vorteilhaft. Die Koordinaten des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  können als Spaltenvektoren geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

Der Deviator  $\mathbf{s}_D$  und der volumetrische Anteil  $\mathbf{s}_V$  des Spannungstensors erscheinen in Vektornotation als:

$$\mathbf{s}_D = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{kk}/3 \\ \sigma_{22} - \sigma_{kk}/3 \\ \sigma_{33} - \sigma_{kk}/3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{s}_V = \frac{\sigma_{kk}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

Der viskoelastische Materialtensor  $\tilde{\mathbf{S}}_{ve} = S_{ijkl}^{ve} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  in Gl. (2.93) lässt sich als  $6 \times 6$  Matrix darstellen:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{ve} = \frac{1}{9K} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{J_{ve}}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

## Verzerrungsalgorithmus

1. Initialisierung der Geschichtsvariablen:

$${}^0\mathbf{d}_k = {}^0\mathbf{s}_D$$

2. Bestimmung des Spannungskrements  $\Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) = \Delta^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$  zur Zeit  ${}^{n+1}t = {}^n t + \Delta t$

3. Berechnung der Tangentenmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_{ve}$ :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{ve} = \frac{1}{9K} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{J_{ve}}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mit

$$J_{ve} = \frac{1}{2\mu_\infty} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right) \right]$$

4. Berechnung des Vektors der Verzerrungsgeschichte

$${}^n\mathbf{y} = \frac{1}{3K} {}^n\mathbf{s}_V + \frac{1}{2\mu_\infty} \left[ {}^n\mathbf{s}_D - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} {}^n\mathbf{d}_k \right]$$

5. Berechnung der aktuellen Verzerrungen

$${}^{n+1}\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\mathbf{S}}_{ve} \Delta^{n+1}\boldsymbol{\sigma} + {}^n\mathbf{y}$$

6. Auswertung der Rekursionsgleichung

$$\Delta^{n+1}\mathbf{d}_k = \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right] ({}^{n+1}\mathbf{s}_D - {}^n\mathbf{s}_D)$$

$${}^{n+1}\mathbf{d}_k = e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} {}^n\mathbf{d}_k + \Delta^{n+1}\mathbf{d}_k$$

7. Speicherung für den folgenden Zeitschritt

$${}^{n+1}\mathbf{d}_k, {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$$

8. Nächster Zeitschritt  $t = {}^{n+1}t + \Delta t$

Falls  $t < t_{\text{Prozess}}$ , gehe zu 2.

Falls  $t = t_{\text{Prozess}}$ , Ende des Verzerrungsalgorithmus'

Abbildung 2.11: Verzerrungsalgorithmus: Berechnung der Verzerrungsantwort eines linear-viskoelastischen Materials auf einen gegebenen Spannungsprozess

Der Ausdruck  $\tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}$  in Gl. (2.98) stellt eine Matrix mit zeitlich konstanten Einträgen dar, solange die Länge des diskreten Zeitschritts nicht geändert wird. Der vom Zeitinkrement abhängige, isotrope Schubnachgiebigkeitsfaktor  $J_{\text{ve}}$  berechnet sich zu:

$$J_{\text{ve}} = \frac{1}{2\mu_{\infty}} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right) \right]. \quad (2.99)$$

Die Vektorform  ${}^n \mathbf{y}$  des Verzerrungsgeschichtstensors  ${}^n \mathbf{y}$  in Gl. (2.95) lautet:

$${}^n \mathbf{y} = \frac{1}{3K} {}^n \mathbf{s}_V + \frac{1}{2\mu_{\infty}} \left[ {}^n \mathbf{s}_D - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} {}^n \mathbf{d}_k \right] \quad (2.100)$$

Die Gleichungen (2.88) und (2.91) erscheinen in Vektornotation als:

$${}^0 \mathbf{d}_k = {}^0 \mathbf{s}_D \quad (2.101)$$

$$\Delta {}^{n+1} \mathbf{d}_k = \frac{\hat{\tau}_k}{\Delta t} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k}} \right] ({}^{n+1} \mathbf{s}_D - {}^n \mathbf{s}_D) \quad (2.102)$$

In Abb. 2.11 ist der Algorithmus zur Berechnung der viskoelastischen Verzerrungsantwort auf einen gegebenen Spannungsprozess in Form eines Ablaufschemas zusammengefasst.





# Kapitel 3

## Mechanik und konstitutive Modellierung von Grenzschichten

Bei der Entwicklung und dem Einsatz von Faserverbundwerkstoffen hat sich gezeigt, dass der Übergangsbereich zwischen Matrixmaterial und Verstärkungseinlage entscheidenden Einfluss auf das Eigenschaftsprofil des Verbundmaterials ausüben kann. Ausgelöst durch chemische oder physikalische Veränderungen besitzt die Interphase abweichende mechanische Eigenschaften, die sich erheblich von denen des Matrixmaterials oder der Faser unterscheiden können. Je nach Werkstoffkombination und Faserflächenbehandlung ist eine Zu- oder Abnahme der Steifigkeiten und Festigkeiten zu beobachten. Die physikalischen oder chemischen Reaktionen, die z. B. durch den Einsatz von Haftverbesserern oder Mitteln zur Optimierung der Verarbeitbarkeit entstehen, führen zu gradierten Materialeigenschaften in der Grenzschicht, siehe Drzal (1986). Die Interphase stellt folglich keine klar abgegrenzte Zone dar, vielmehr findet ein allmählicher Übergang vom reinen Faserwerkstoff zum reinen Matrixmaterial statt. Eine mögliche Verteilung der Materialeigenschaften wie E-Modul oder Schubmodul ist in Darstellung 3.1 nach Wacker (1996) wiedergegeben. Ein Verbundwerkstoff stellt somit in Wahrheit keinen zweiphasigen Werkstoff dar, sondern die mehr oder weniger ausgedehnte Übergangszone vom einen zum anderen Werkstoff muss als dritte Komponente angesehen werden, welche die effektiven Materialeigenschaften wesentlich beeinflussen kann. Die Berücksichtigung der Interphase bei der rechnerischen Ermittlung effektiver Materialeigenschaften gelingt durch zwei

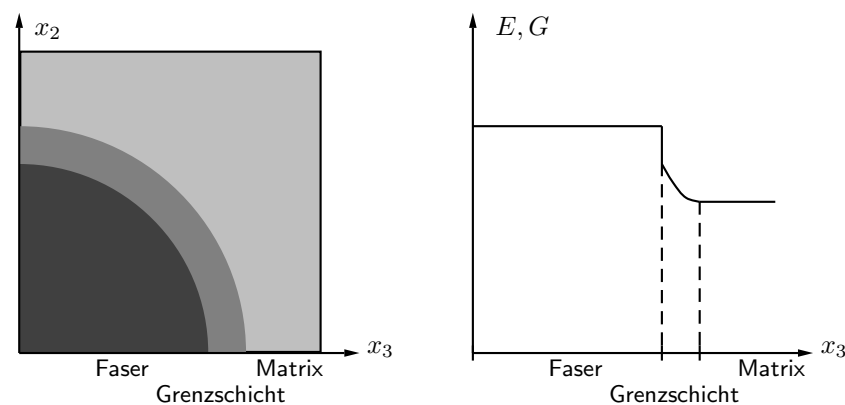


Abbildung 3.1: Elastische Eigenschaften von Faser, Grenzschicht und Matrix

unterschiedliche Modellierungsvarianten. Der erste Ansatz berücksichtigt die Grenzschicht als dritte, räumlich ausgedehnte Phase, für die gradierte oder vereinfacht konstante konstitutive Eigenschaften angenommen werden. Die Grenzschicht wird als dreidimensionales Kontinuum aufgefasst. Der zweite Ansatz approximiert die reale Grenzschicht aufgrund ihrer relativen Dünne als zweidimensionale Grenzfläche zwischen den verbundenen Phasen Faser und Matrix, für die Übergangsbedingungen formuliert werden. Aus Gründen der numerischen Effizienz wird in dieser Arbeit nur der zweite Ansatz näher verfolgt.

### 3.1 Grenzschicht und Grenzfläche

In den Abbildungen 3.2 a) und b) sind Ausschnitte aus der Übergangszone zwischen zwei unterschiedlichen Werkstoffen schematisch dargestellt. In der unter a) dargestellten Vorstellung befindet sich eine räumlich klar definierte Grenzschicht der konstanten Dicke  $\Delta_I$  zwischen den Phasen 1 und 2. Die Abbildung 3.2 b) zeigt die Modellvorstellung einer Grenzfläche, entlang der die Phasen im unbelasteten Zustand miteinander verhaftet sind. Die kinematischen Größen für die Grenzschicht und die Grenzfläche werden in einem lokalen, kartesischen Koordinatensystem  $\{\mathbf{e}_i\}$  mit  $i = n, t, b$  dargestellt. Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_n$  steht senkrecht auf der Grenzfläche, bzw. zeigt in Richtung der geringsten Dicke der Grenzschicht. Die tangentialen und binormalen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_t$  und  $\mathbf{e}_b$  spannen die Tangentenebene an die Grenzfläche auf.

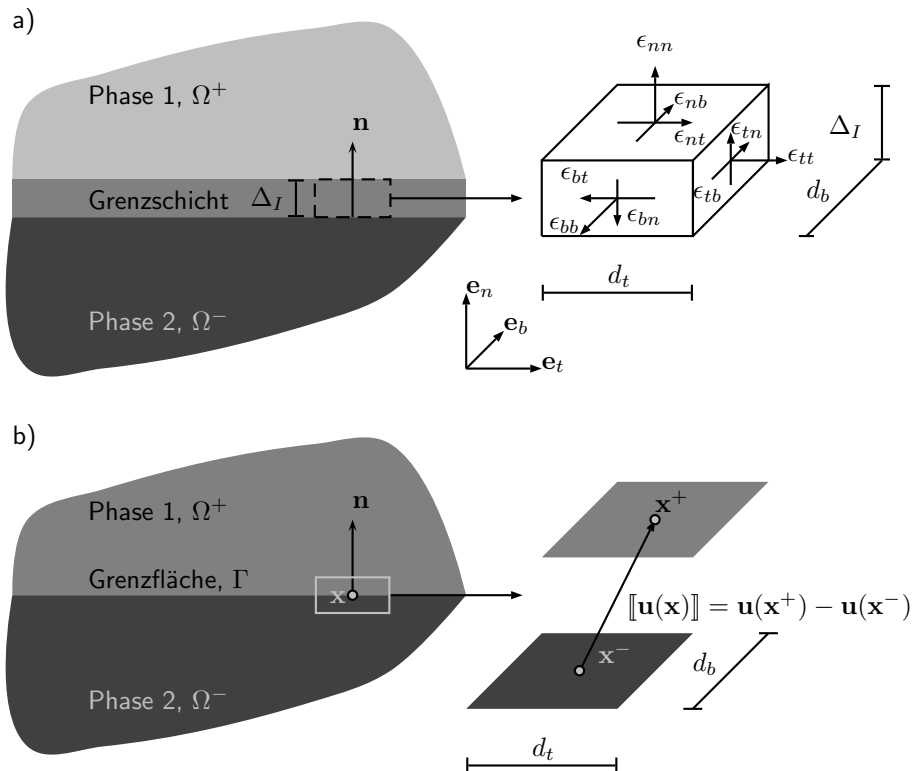


Abbildung 3.2: Gegenüberstellung von Grenzschicht und Grenzfläche

Der Deformationszustand der Grenzschicht wird durch den infinitesimalen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  ausgedrückt. Aufgrund der geringen Dicke  $\Delta_I$  der Grenzschicht im Vergleich zum Gebiet des umgebenden Materials kann näherungsweise von einem in Dickenrichtung  $\mathbf{e}_n$  konstanten Verzerrungsfeld ausgegangen werden. In einem Volumenelement der Grenzschicht mit den infinitesimal kleinen Abmessungen  $d_t$  und  $d_b$  und der endlichen Höhe  $\Delta_I$  soll der ebene Verzerrungszustand herrschen:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} & \epsilon_{nt} & \epsilon_{nb} \\ \epsilon_{tn} & 0 & 0 \\ \epsilon_{bn} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad i, j = n, t, b \quad (3.1)$$

Es treten also per Annahme weder Normaldehnungen noch Schubdeformationen in der Ebene der Grenzschicht auf. Der Spannungstensor im ebenen Verzerrungszustand lautet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{nn} & \sigma_{nt} & \sigma_{nb} \\ \sigma_{tn} & \sigma_{tt} & 0 \\ \sigma_{bn} & 0 & \sigma_{bb} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad i, j = n, t, b \quad (3.2)$$

Die Auffassung der realen Grenzschicht als adhäsive Kontaktfläche legt zwischen Matrix ( $\Omega^+$ ) und Faser ( $\Omega^-$ ) eine singuläre Fläche  $\Gamma = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ , in der das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  unstetig sein kann:

$$\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \lambda \delta \mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} - \lambda \delta \mathbf{x})], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.3)$$

Mit den Grenzwerten  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^+) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{x} + \lambda \delta \mathbf{x})$  und  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^-) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{x} - \lambda \delta \mathbf{x})$  gilt wegen der Stetigkeit des Verschiebungsfelds innerhalb der Phasen:

$$\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rrbracket = \mathbf{u}(\mathbf{x}^+) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^-) \quad (3.4)$$

Die beiden Punkte  $\mathbf{x}^- \in \partial\Omega^-$  und  $\mathbf{x}^+ \in \partial\Omega^+$  sind in der Ausgangskonfiguration bei perfektem Verbund mit dem Punkt  $\mathbf{x} \in \Gamma$  identisch.

Unter der oben gemachten Annahme eines in Dickenrichtung konstanten, ebenen Dehnungszustands in der Grenzschicht kann ein Zusammenhang der Weggrößen beider Betrachtungsweisen hergestellt werden:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \Delta_I \{ \epsilon_{nn} \mathbf{e}_n + 2\epsilon_{nt} \mathbf{e}_t + 2\epsilon_{nb} \mathbf{e}_b \} = \Delta_I \{ \epsilon_{nn} \mathbf{e}_n + \gamma_{nt} \mathbf{e}_t + \gamma_{nb} \mathbf{e}_b \} \quad (3.5)$$

Im Gegensatz zum Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  wird vom Spannungsfeld  $\boldsymbol{\sigma}$  gefordert, dass es über die Grenzfläche hinweg stetig ist. Der Spannungszustand in der Grenzfläche wird durch die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^+$  und  $\mathbf{t}^-$  in den Punkten  $\mathbf{x}^+$  und  $\mathbf{x}^-$  beschrieben. Sie ergeben sich mit den Normalenvektoren  $\mathbf{n}^+$  und  $\mathbf{n}^-$  aus den Spannungstensoren in den Phasen zu:

$$\mathbf{t}^+ = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}^+) \mathbf{n}^+, \quad \mathbf{t}^- = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}^-) \mathbf{n}^- \quad (3.6)$$

Die Kontinuität der Spannungen über die Phasengrenze hinweg erfordert die Einhaltung der Bedingung:

$$\mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^- = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Die Adhäsion zwischen Faser und Matrix wird durch konstitutive Gleichungen beschrieben. In allgemein gehaltener Formulierung wird der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  in der

Grenzfläche durch ein Funktional des Verschiebungssprungs  $[[\mathbf{u}]]$ , der Vergangenheit  $\tau$  und interner Variabler  $\mathbf{q}$  ausgedrückt.

$$\mathbf{t}(t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t}([[\mathbf{u}]], \mathbf{q}, \tau) \quad (3.8)$$

Alternativ kann der Verschiebungssprungvektor als Funktional des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$ , der Vergangenheit  $\tau$  und interner Variabler  $\mathbf{p}$  geschrieben werden.

$$[[\mathbf{u}(t)]] = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \tau) \quad (3.9)$$

Die konkrete Gestalt der Funktionale  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  wird in den folgenden Abschnitten für verschiedene Konstitutivmodelle angegeben. Die Ansätze dienen der Berücksichtigung des nachgiebigen Verbunds und der Entstehung von Rissen innerhalb einer Werkstoffphase im Rahmen der mikromechanischen Materialmodellierung.

## 3.2 Elastisches Verbundmodell

Abgesehen von der Annahme eines perfekten Phasenverbunds ohne Relativverformung stellt die linear elastische Spannungs-Separationsbeziehung die einfachste Beschreibung der Haftung zwischen Faser und Matrix dar. Der Verschiebungssprungvektor  $[[\mathbf{u}]]$  wird proportional zum wirkenden Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  angenommen:

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t}([[\mathbf{u}]], \mathbf{q}, \tau) := \mathbf{E}_{\text{el}} [[\mathbf{u}]] \quad (3.10)$$

Unter der Voraussetzung eines nicht-gradierten Grenzschichtmaterials der Dicke  $\Delta_I$  mit dem Elastizitätsmodul  $E_I$  und dem Schubmodul  $G_I$  nimmt die Beziehung (3.10) in Vektor-Matrix-Notation bezogen auf das lokale, kartesische  $n, t, b$ -Koordinatensystem folgende Form an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta_I} \begin{bmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & G_I & 0 \\ 0 & 0 & G_I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [[u_n]] \\ [[u_t]] \\ [[u_b]] \end{pmatrix} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{E}_{\text{el}} [[\mathbf{u}]] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die inverse Beziehung (3.9) erhält man:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \tau) := \mathbf{S}_{\text{el}} \mathbf{t} \quad (3.12)$$

Mit den elastischen Nachgiebigkeiten  $S_{I\perp} = 1/E_I$  und  $S_{I\parallel} = 1/G_I$  ergibt sich im lokalen  $n, t, b$ -Koordinatensystem der Grenzfläche die Vektor-Matrix-Notation der Gl. (3.12) zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [[u_n]] \\ [[u_t]] \\ [[u_b]] \end{pmatrix} &= \Delta_I \begin{bmatrix} S_{I\perp} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \end{pmatrix} \\ [[\mathbf{u}]] &= \mathbf{S}_{\text{el}} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3 Viskoelastisches Verbundmodell

Zur Beschreibung des ratenabhängigen Verbundverhaltens wird der Verschiebungssprungvektor  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  als lineares Funktional der Spannungsgeschichte und der Zeit geschrieben. Der aktuelle Verschiebungssprungvektor zur Zeit  $t$  ergibt sich durch die Auswertung des Faltungsintegrals über die Grenzflächenkriechfunktion  $\mathbf{S}_{ve}(t - \tau)$  und die Rate des Grenzflächenspannungsvektors  $\mathbf{t}(\tau)$ :

$$\llbracket \mathbf{u}(t) \rrbracket = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \tau) := \int_{-\infty}^t \mathbf{S}_{ve}(t - \tau) \frac{d\mathbf{t}}{d\tau} d\tau \quad (3.14)$$

Die tensorwertige Kriechfunktion  $\mathbf{S}_{ve}(t)$  lässt sich, ähnlich wie im Falle des dreidimensionalen Materialmodells gemäß Gl. (2.81), durch eine endliche DIRICHLET-PRONY-Reihe darstellen. Unter der Annahme, dass nur die tangentialen Komponenten des Sprungvektors  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  explizit zeitabhängig sind, ergeben sich die Komponenten von  $\mathbf{S}_{ve}(t)$  zu

$$S_{nn} = S_{I\perp} \quad \text{und} \quad S_{tt} = S_{bb} = S_{\infty} - \sum_{k=1}^N S_k e^{-t/\xi_k}. \quad (3.15)$$

Hierin bedeuten  $\xi_k$  die Kriechzeiten,  $S_k$  die Spektrumsstärken und  $S_{I\perp}$  ist die elastische Nachgiebigkeit in Normalenrichtung. Für die übrigen Koeffizienten des symmetrischen Tensors  $\mathbf{S}_{ve}(t)$  gilt  $S_{nt} = S_{nb} = S_{tb} = 0$ . Durch Einsetzen der Funktionen (3.15) in die Gl. (3.14) folgt:

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}(t) \rrbracket = S_{I\perp} t_n \mathbf{e}_n + \int_{-\infty}^t \left[ S_{\infty} - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t-\tau}{\xi_k}} \right] \frac{dt_t}{d\tau} d\tau \mathbf{e}_t \\ + \int_{-\infty}^t \left[ S_{\infty} - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t-\tau}{\xi_k}} \right] \frac{dt_b}{d\tau} d\tau \mathbf{e}_b \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Integralgleichung (3.16) wird durch den Integrationsalgorithmus' nach Taylor et al. (1970) gelöst. Für die Schubdeformationsanteile  $\llbracket u_t \rrbracket$  und  $\llbracket u_b \rrbracket$  des Verschiebungssprungvektors erhält man zur Zeit  $t$  zunächst:

$$\llbracket u_i(t) \rrbracket = S_{\infty}^{n+1} t_i - \int_{-\infty}^t \left[ \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t-\tau}{\xi_k}} \right] \frac{dt_i}{d\tau} d\tau, \quad i = t, b \quad (3.17)$$

Die Inkrementierung der Zeitachse  $t$  liefert zum aktuellen Zeitpunkt  $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$  die additive Zerlegung des Verschiebungssprungs aus Gl. (3.17) in einen Geschichts- und einen Zuwachsanteil:

$$\begin{aligned} \llbracket^{n+1} u_i \rrbracket = S_{\infty}^{n+1} t_i - \int_0^{t_n} \left[ \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t_n + \Delta t - \tau}{\xi_k}} \right] \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \\ - \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \left[ \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t_n + \Delta t - \tau}{\xi_k}} \right] \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

Beim Übergang von Gl. (3.17) auf Gl. (3.18) wird für die Änderung der unteren Integrationsgrenze vorausgesetzt, dass die Spannungsgeschichte  $\mathbf{t}(\tau)$  für  $\tau < 0$  identisch Null verläuft. Die konstanten Faktoren in Gl. (3.18) können vor die Integrale gezogen werden.

$$\begin{aligned} \llbracket^{n+1}u_i\rrbracket &= S_\infty {}^{n+1}t_i - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t_n+\Delta t}{\xi_k}} \int_0^{t_n} e^{\frac{\tau}{\xi_k}} \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \\ &\quad - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t_n+\Delta t}{\xi_k}} \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} e^{\frac{\tau}{\xi_k}} \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wenn in Gl. (3.19) die Abkürzung

$${}^n q_i^k := e^{-\frac{t_n}{\xi_k}} \int_0^{t_n} e^{\frac{\tau}{\xi_k}} \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \quad (3.20)$$

eingeführt wird und man die Zeitableitung der Schubspannungskomponente  $t_i$  im zweiten Integral derselben Gleichung durch den Differenzenquotienten

$$\frac{dt_i}{d\tau} \approx \frac{{}^{n+1}t_i - {}^n t_i}{\Delta t} \quad (3.21)$$

annähert, so führt dies auf:

$$\llbracket^{n+1}u_i\rrbracket = S_\infty {}^{n+1}t_i - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n q_i^k - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{t_n+\Delta t}{\xi_k}} \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} e^{\frac{\tau}{\xi_k}} \frac{{}^{n+1}t_i - {}^n t_i}{\Delta t} d\tau \quad (3.22)$$

Vermöge der Ersetzung (3.21) kann das Integral in Gl. (3.22) analytisch berechnet werden. Es ergibt sich eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Komponenten  $\llbracket^{n+1}u_i\rrbracket$  des aktuellen Verschiebungssprungvektors:

$$\begin{aligned} \llbracket^{n+1}u_i\rrbracket &= S_\infty {}^{n+1}t_i - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n q_i^k \\ &\quad - \sum_{k=1}^N S_k \frac{\xi_k}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}}\right) ({}^{n+1}t_i - {}^n t_i) \quad i = t, b \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Gleichung (3.16) kann mit  $\Delta^{n+1}t_i = {}^{n+1}t_i - {}^n t_i$  unter Beachtung des Ergebnisses (3.23) als Vektor-Matrix-Gleichung geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} \llbracket^{n+1}u_n\rrbracket \\ \llbracket^{n+1}u_t\rrbracket \\ \llbracket^{n+1}u_b\rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{I\perp} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^{n+1}t_n \\ \Delta^{n+1}t_t \\ \Delta^{n+1}t_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^n v_n \\ {}^n v_t \\ {}^n v_b \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

oder kurz

$$\llbracket^{n+1}\mathbf{u}\rrbracket = \tilde{\mathbf{S}}_{ve} \Delta^{n+1} \mathbf{t} + {}^n \mathbf{v}. \quad (3.25)$$

## Diskontinuitätsalgorithmus

1. Initialisierung der Geschichtsvariablen:

$${}^0 \mathbf{q}_k = {}^0 \mathbf{t}$$

2. Bestimmung des Spannungszinkrements  $\Delta^{n+1} \mathbf{t}$  zur Zeit  ${}^{n+1}t = {}^n t + \Delta t$

3. Berechnung der Tangentenmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_{ve}$ :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{ve} = \begin{bmatrix} S_{I\perp} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel} \end{bmatrix}$$

mit

$$S_{I\parallel} = S_{\infty} - \sum_{k=1}^N S_k \frac{\xi_k}{\Delta t} (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}}) \quad \text{und} \quad S_{I\perp} = \frac{\Delta I}{E_I}$$

4. Berechnung des Geschichtsvektors der Verschiebungssprünge

$${}^n \mathbf{v} = S_{I\perp} \begin{Bmatrix} {}^n t_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + S_{\infty} \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^n t_t \\ {}^n t_b \end{Bmatrix} - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n \mathbf{q}_k$$

5. Berechnung des aktuellen Sprungvektors

$$[[{}^{n+1} \mathbf{u}]] = \tilde{\mathbf{S}}_{ve} \Delta^{n+1} \mathbf{t} + {}^n \mathbf{v}$$

6. Auswertung der Rekursionsgleichung

$$\Delta^{n+1} \mathbf{q}_k = \frac{\xi_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta^{n+1} \mathbf{t}$$

$${}^{n+1} \mathbf{q}_k = e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n \mathbf{q}_k + \Delta^{n+1} \mathbf{q}_k$$

7. Speicherung für den folgenden Zeitschritt

$${}^{n+1} \mathbf{q}_k, {}^{n+1} \mathbf{t}$$

8. Nächster Zeitschritt  $t = {}^{n+1}t + \Delta t$

Falls  $t < t_{\text{Prozess}}$ , gehe zu 2.

Falls  $t = t_{\text{Prozess}}$ , Ende des Diskontinuitätsalgorithmus'

Abbildung 3.3: Diskontinuitätsalgorithmus: Berechnung der Verschiebungssprungantwort einer linear-viskoelastischen Grenzfläche auf einen gegebenen Spannungsprozess

Die Diagonalmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_{ve} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  enthält die elastischen und viskoelastischen Nachgiebigkeiten

$$S_{I\perp} = \frac{\Delta_I}{E_I} \quad \text{und} \quad S_{I\parallel} = S_\infty - \sum_{k=1}^N S_k \frac{\xi_k}{\Delta t} (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}}) \quad (3.26)$$

der Grenzfläche. Der Geschichtsvektor  ${}^n \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  der Verschiebungssprünge in Gl. (3.25) ist gegeben durch:

$${}^n \mathbf{v} = S_{I\perp} \begin{Bmatrix} {}^n t_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + S_\infty \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^n t_t \\ {}^n t_b \end{Bmatrix} - \sum_{k=1}^N S_k e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n \mathbf{q}_k \quad (3.27)$$

Die Geschichtsvariablen  $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^3$  werden wie folgt initialisiert:

$$\mathbf{q}_k = {}^0 \mathbf{t} \quad (3.28)$$

Die Aktualisierung der Geschichtsvariablen erfolgt durch:

$${}^{n+1} \mathbf{q}_k = e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}} {}^n \mathbf{q}_k + \Delta {}^{n+1} \mathbf{q}_k \quad (3.29)$$

mit dem Inkrement

$$\Delta {}^{n+1} \mathbf{q}_k = \frac{\xi_k}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k}}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta {}^{n+1} \mathbf{t} \quad (3.30)$$

In Abb. 3.3 ist der Algorithmus zur Berechnung des viskoelastischen Sprungvektors als Antwort auf einen gegebenen Spannungsprozess als Ablaufschema dargestellt.

## 3.4 Ratenunabhängige Verbundmodelle mit Schädigung

Zur Beschreibung der irreversiblen Schädigungsentwicklung (Faserablösungen und Matrixrisse) im RVE der mikromechanischen Modellbildung werden in dieser Arbeit ratenunabhängige Modelle aus der Bruchmechanik verwendet. Die Ansätze haben gemeinsam, dass nach dem Erreichen der Festigkeit eine Entfestigung, also eine Abnahme der Spannung bei Zunahme der Separation, stattfindet. Die Grenzflächenmodelle unterscheiden sich im Hinblick auf das Verhalten bei geringer Beanspruchung und hinsichtlich des qualitativen und quantitativen Verlaufs der Entfestigung.

### 3.4.1 Verbundschädigungsmodell mit anfänglicher Nachgiebigkeit

Das Konstitutivmodell nach Chaboche et al. (1997) beschreibt die Beziehung zwischen Spannungs- und Separationsvektor durch ein nichtlineares Funktional der Deformationsgeschichte, wobei schon bei geringer Beanspruchung eine Nachgiebigkeit



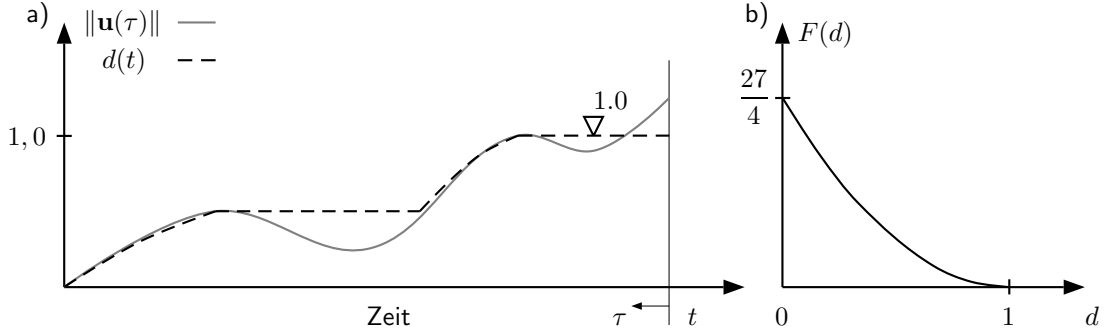


Abbildung 3.4: a) Evolution der Schädigungsvariablen  $d$  in der Vergangenheit  $\tau \leq t$  in Abhängigkeit der Geschichtsfunktion  $\|\mathbf{u}(\tau)\|$  b) Grenzflächensteifigkeitsfunktion  $F(d)$

der Grenzfläche vorhanden ist. Die Steifigkeit in Normalenrichtung wird bei einer Druckbeanspruchung der Phasentrennfläche so hoch angesetzt, dass es nicht zu einem Durchdringen der Phasen kommt. Die Komponenten des Verschiebungssprungvektors  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  werden durch Bezug auf die charakteristischen Längen  $u_{I\perp}$  und  $u_{I\parallel}$  in dimensionslose Größen umgewandelt. Die Parameter  $u_{I\perp}$  und  $u_{I\parallel}$  beschreiben unter reiner Beanspruchung normal zur Faseroberfläche beziehungsweise unter reiner Schubbeanspruchung der Grenzfläche diejenige Diskontinuität, bei der der Verbund vollständig zerstört ist. Auf Basis der normierten Diskontinuitäten wird eine Geschichtsfunktional in Form der gewichteten Norm  $\|\mathbf{u}(\tau)\|$  des Verschiebungssprungs  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  für  $\tau \in [-\infty, t]$  definiert:

$$\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\tau \leq t} = \sqrt{\left(\frac{\max\{0, \llbracket u_n(\tau) \rrbracket\}}{u_{I\perp}}\right)^2 + \left(\frac{\llbracket u_t(\tau) \rrbracket}{u_{I\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{\llbracket u_b(\tau) \rrbracket}{u_{I\parallel}}\right)^2} \quad (3.31)$$

Der Ausdruck  $\max\{0, \llbracket u_n(\tau) \rrbracket\}$  bewirkt, dass nur eine positive Separation in Normalenrichtung  $\llbracket u_n \rrbracket > 0$  (Zugbeanspruchung) einen Beitrag zur Norm leistet, d.h.:

$$\max\{0, \llbracket u_n \rrbracket\} = \begin{cases} \llbracket u_n \rrbracket, & \llbracket u_n \rrbracket > 0 \\ 0, & \llbracket u_n \rrbracket \leq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Durch diese Einschränkung wird verhindert, dass eine Kompression der Grenzfläche die Schädigung des Verbunds vorantreibt. Aufgrund der Prozessabhängigkeit wird die Schädigungsvariable  $d \in [0, 1]$  mit  $\dot{d} \geq 0$  als Geschichtsfunktional der Norm (3.31) des Separationsvektors  $\llbracket \mathbf{u}(\tau) \rrbracket$  definiert:

$$d(t) = \mathcal{F}(\llbracket \mathbf{u}(\tau) \rrbracket)_{\tau \geq -\infty}^{\tau=t} := \min\{\max_{\tau \leq t} \|\mathbf{u}(\tau)\|, 1\} \quad (3.33)$$

Per Definition ist die Schädigungsvariable  $d$  gleich dem maximal aufgetretenen Betrag des normierten Diskontinuitätsvektors in der Belastungsgeschichte  $\tau \leq t$ , siehe Abb. 3.4. Der Wert  $d = 0$  steht für die ungeschädigte Ausgangskonfiguration. Wenn  $d$  den Wert 1 erreicht, ist der vollständige Bruch des Verbunds zwischen den Phasen eingetreten. Die Festigkeit des Verbunds unter reiner Beanspruchung senkrecht zur Grenzfläche wird mit  $R_{I\perp}$  bezeichnet, vgl. Abb. 3.5. Analog wird unter reiner Schubbeanspruchung die Schubfestigkeit  $R_{I\parallel}$  eingeführt. Der aktuelle Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ist allgemein durch das Funktional  $\mathcal{F}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, d)$  gegeben, das wie folgt spezifiziert wird:

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, d) = \mathbf{E}_C(d) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (3.34)$$

Mit Hilfe der Steifigkeitsrelation  $\alpha_{\perp\parallel} = \frac{u_{I\perp}}{R_{I\perp}} \frac{R_{I\parallel}}{u_{I\parallel}}$  lautet die Vektor-Matrix-Notation der Gl. (3.34) (für Zug in Normalenrichtung) bezogen auf die Grenzflächenkoordinaten  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = n, t, b$ :

$$\begin{pmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = F_C(d) \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \llbracket u_n \rrbracket \\ \llbracket u_t \rrbracket \\ \llbracket u_b \rrbracket \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Die Größe  $F_C(d)$  in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{E}_C(d) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  des Chaboche Modells, welche explizit von der Schädigungsvariablen  $d$  abhängt, ist als

$$F_C(d) = \frac{27}{4} (1 - d)^2 \quad (3.36)$$

definiert. Der Faktor  $27/4$  in Gl. (3.36) bewirkt, dass die normierte Spannungs-Separations-Beziehung im Fall der reinen Beanspruchung normal zur Grenzfläche sowohl den Maximalwert 1 aufweist, als auch eine horizontale Tangente (lokales Minimum) für die normierte Separation  $u_n/u_{I\perp} = 1$  besitzt, vgl. Ab. (3.5). Die Größe  $F_C(d)$  kann als Sekantensteifigkeit des Grenzflächenmodells interpretiert werden. Im Falle der Erstbelastung hängt die Steifigkeit  $F_C(d)$  explizit vom aktuellen Diskontinuitätsvektor  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  ab, denn  $d(t)$  entspricht  $\|\mathbf{u}(t)\|$  gemäß Gl. (3.33), vgl. Abb. 3.4 a. Unter Entlastungsbedingungen ist  $d$  eine Konstante ( $\dot{d} = 0$ ) und die Steifigkeit  $F_C(d)$  definiert die Sekante, entlang welcher entlastet wird. Eine Wiederbelastung folgt zunächst ebenfalls dieser Sekante, bis die Separation  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  soweit angewachsen ist, dass  $d$  sich wieder gemäß Gl. (3.33) entwickelt, d.h. es gilt  $\dot{d} > 0$ .

Im Fall einer Grenzflächenkompression ist die physikalisch unrealistische Durchdringung der Phasen zu vermeiden. Für die numerische Umsetzung schlagen Chaboche et al. (1997) vor, für den Steifigkeitsmodul  $K_p$  des Grenzflächenmaterials einen vernünftig hohen Zahlenwert anzusetzen, der die rechnerische Durchdringung praktisch verhindert ohne numerische Schwierigkeiten zu verursachen. Für die Normalkomponente des Spannungsvektors  $t_n$  nach Gl. (3.35) ist demnach eine Fallunterscheidung

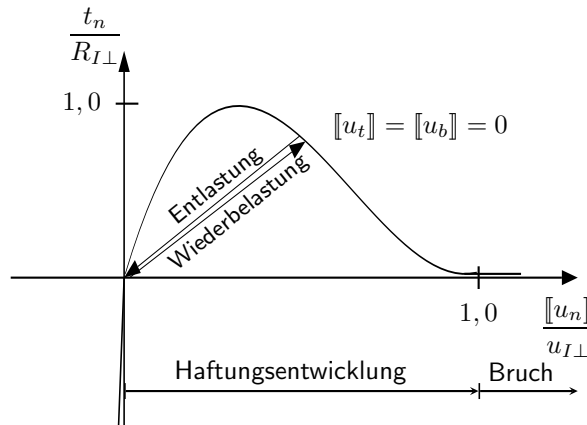


Abbildung 3.5: Spannungs-Separations-Modell nach Chaboche

zu treffen:

$$t_n = \begin{cases} K_p \llbracket u_n \rrbracket & \forall d \text{ falls } t_n < 0 \\ F_C(d) \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \llbracket u_n \rrbracket & \forall d \text{ falls } t_n \geq 0 \end{cases}. \quad (3.37)$$

**Linearisierung für die iterative Lösung.** Das nichtlineare Grenzflächenmodell wird bei seiner späteren Verwendung in der mikromechanischen Modellierung auf ein nichtlineares Gleichungssystem führen. Zu dessen Lösung mittels des Newton-Raphson-Verfahrens wird die Linearisierung der Spannungs-Separationsbeziehung (3.34) benötigt. Aus der Anwendung des Nablaoperators

$$\nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} := \frac{\partial}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \mathbf{e}_n + \frac{\partial}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \mathbf{e}_t + \frac{\partial}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \mathbf{e}_b \quad (3.38)$$

auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  in Gl. (3.34) folgt der Gradient von  $\mathbf{t}$ :

$$\text{grad } \mathbf{t} = \mathbf{t} \otimes \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = (\mathbf{E}_C \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \otimes \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \quad (3.39)$$

Die Komponentenmatrix  $\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  des Spannungsgradienten erhält man aus Gl. (3.35) mit  $\nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} := \left\{ \frac{\partial}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \quad \frac{\partial}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \quad \frac{\partial}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \right\}$  im Fall einer gekoppelten Zug- und Schubbeanspruchung zu:

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_C(d) + \tilde{\mathbf{E}}_C = \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket + F_C(d) & \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket & \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket \\ \alpha_{\parallel\perp} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket & \alpha_{\parallel\perp} \left( \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket + F_C(d) \right) & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket + F_C(d) \right) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Im Fall einer gekoppelten Druck- und Schubbeanspruchung ergibt sich:

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_C(d) + \tilde{\mathbf{E}}_C = \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \begin{bmatrix} \frac{u_{I\perp}}{R_{I\perp}} K_p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket + F_C(d) \right) & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_C(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket + F_C(d) \right) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Die Grenzflächenfunktion  $F_C(d)$  hängt implizit von den Verschiebungssprüngen ab und wird gemäß der Kettenregel nach den Komponenten des Diskontinuitätsvektors

$\llbracket \mathbf{u}(t) \rrbracket$  zur aktuellen Zeit  $t$  differenziert:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_C}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \right|_t &= \frac{\partial F_C}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \Big|_t, & \left. \frac{\partial F_C}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \right|_t &= \frac{\partial F_C}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \Big|_t, \\ \left. \frac{\partial F_C}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \right|_t &= \frac{\partial F_C}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \Big|_t. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die beiden ersten partiellen Ableitungen auf der rechten Seite von Gl. (3.42) lauten:

$$\left. \frac{\partial F_C}{\partial d} \right|_t = -\frac{27}{2}(1-d) \quad (3.43)$$

$$\left. \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \right|_t = \frac{\partial d(t)}{\partial \|\mathbf{u}(t)\|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } d(t) = \|\mathbf{u}(t)\| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.44)$$

Wegen Gl. (3.33) degradiert die Steifigkeitsfunktion  $F_C(d)$  mit den aktuellen Verschiebungssprüngen im Fall einer Erstbelastung – vgl. Abb. 3.4 b). Anderenfalls besitzt  $F_C(d)$  einen konstanten Wert, denn wegen Gln. (3.42) und (3.44) gilt  $\partial F_C / \partial \llbracket u_i \rrbracket = 0$ . Während eines Entlastungsprozesses oder einer Wiederbelastung besitzen die Matrizen (3.40) bzw. (3.41) demzufolge nur konstante und von Null verschiedenen Einträge entlang der Hauptdiagonalen. Somit erfolgen Entlastungs- und Wiederbelastungsprozesse entlang der Sekante vom Koordinatenursprung zu demjenigen Punkt der Spannungs-Verschiebungs-Kurve, der zu der bislang maximal aufgetretenen Verschiebungsdiskontinuität in der Belastungsgeschichte gehört, s. Abb. 3.5. Die partiellen Ableitungen der Norm des Sprungvektors  $\|\mathbf{u}\|$  in Abhängigkeit der Komponenten von  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  sind durch die nachstehenden Ausdrücke gegeben:

$$\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} = \frac{\max\{0, \llbracket u_n \rrbracket\}}{u_{I\perp}^2 \|\mathbf{u}(t)\|}, \quad \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} = \frac{\llbracket u_t \rrbracket}{u_{I\parallel}^2 \|\mathbf{u}(t)\|}, \quad \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} = \frac{\llbracket u_b \rrbracket}{u_{I\parallel}^2 \|\mathbf{u}(t)\|}. \quad (3.45)$$

### 3.4.2 Verbundschädigungsmodell ohne anfängliche Nachgiebigkeit

Lissenden (1996) führt wie Chaboche et al. (1997) die Duktilitätsparameter  $u_{I\perp}$  in Normalenrichtung und  $u_{I\parallel}$  in den tangentialen Richtungen des Interface' ein, um das Geschichtsfunktional  $\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\tau \leq t}$  in Abhängigkeit der normierten Komponenten des Verschiebungsdiskontinuitätsvektors für  $-\infty \leq \tau \leq t$  zu formulieren:

$$\|\mathbf{u}(\tau)\|_{\tau \leq t} := \sqrt{\left( \frac{\max\{0, \llbracket u_n \rrbracket(\tau)\}}{u_{I\perp}} \right)^2 + \left( \frac{\llbracket u_t \rrbracket(\tau)}{u_{I\parallel}} \right)^2 + \left( \frac{\llbracket u_b \rrbracket(\tau)}{u_{I\parallel}} \right)^2} \quad (3.46)$$

Die Verbundfestigkeit für reine Zugbeanspruchung senkrecht zur Grenzfläche beträgt  $R_{I\perp}$ . Die Schubfestigkeit wird mit  $R_{I\parallel}$  bezeichnet. Als Kriterium zur Beurteilung einer kombinierten Beanspruchung der Grenzfläche wird die dimensionslose Vergleichsspannung  $t_v$  eingeführt

$$t_v := \min \{ \max \|\mathbf{t}(\tau)\|, 1 \}, \quad (3.47)$$

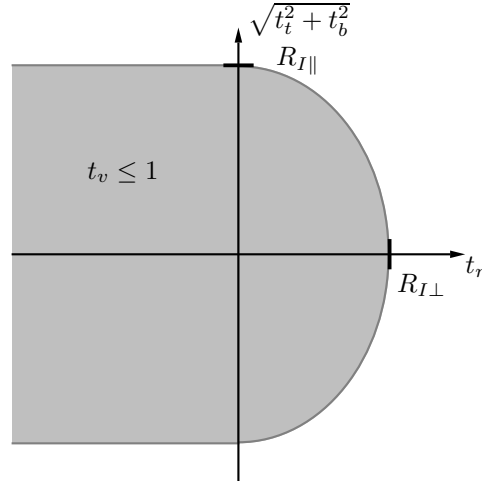


Abbildung 3.6: Graphische Darstellung des Spannungskriteriums (3.47)

die durch das Maximum der Spannungsnorm  $\|\mathbf{t}(\tau)\|_{\tau \leq t}$  gegeben ist.

$$\|\mathbf{t}(\tau)\|_{\tau \leq t} := \sqrt{\left(\frac{\max\{0, t_n(\tau)\}}{R_{I\perp}}\right)^2 + \left(\frac{t_t(\tau)}{R_{I\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{t_b(\tau)}{R_{I\parallel}}\right)^2} \quad (3.48)$$

Die Norm in Gl. (3.48) misst den Betrag des mit den Festigkeiten  $R_{I\perp}$  und  $R_{I\parallel}$  normierten Spannungsvektors in der Vergangenheit  $\tau$  bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt  $t$ . Erreicht  $\max\|\mathbf{t}(\tau)\|_{\tau \leq t}$  zu einer Zeit  $t^* \leq t$  den Wert 1, so wird  $t_v = 1$  für alle  $\tau > t^*$  konstant gehalten. Falls die kombinierte Beanspruchung einen Wert  $t_v < 1.0$  liefert, so ist der Verbund ungeschädigt und das Verschiebungsfeld in der Grenzfläche stetig, d.h. für den Sprungvektor gilt  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{0}$ . Erreicht die Vergleichsspannung den Wert  $t_v = 1.0$ , so setzt die Entfestigung des Verbunds irreversibel in Abhängigkeit des Verschiebungssprungvektors  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  ein. Die Abbildung 3.6 veranschaulicht das Spannungskriterium. Solange der Spannungsvektor  $\mathbf{t}(\tau)|_{\tau \leq t}$  zu keiner Zeit  $\tau$  die Grenze des grau eingefärbten Bereichs berührt, ist der Verbund perfekt. Spannungszustände außerhalb der gefärbten Fläche können nicht eingenommen werden, da sie jenseits der Festigkeit des Verbunds lägen. Eine endliche Druckfestigkeit der Grenzschicht ist nicht gegeben. Der aktuelle Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  berechnet sich aus:

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, d) := \mathbf{E}_L(d) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (3.49)$$

Unter Verwendung der Steifigkeitsrelation  $\alpha_{\perp\parallel} = \frac{u_{I\perp}}{R_{I\perp}} \frac{R_{I\parallel}}{u_{I\parallel}}$  lautet die Vektor-Matrixnotation der Gl. (3.49) für den Fall  $\llbracket u_n \rrbracket > 0$ :

$$\begin{pmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = F_L(d) \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \llbracket u_n \rrbracket \\ \llbracket u_t \rrbracket \\ \llbracket u_b \rrbracket \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Der Steifigkeitsausdruck  $F_L(d)$  in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{E}_L(d) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  des Lissenden Ansatzes wird durch das Polynom

$$F_L(d) = \frac{1 - 3d^2 + 2d^3}{d} \quad (3.51)$$

in der Schädigungsvariablen  $d \in (0, 1]$  beschrieben, welche auf Basis von Gl. (3.46) definiert ist:

$$d(t) = \mathcal{F}(\llbracket \mathbf{u}(\tau) \rrbracket)_{\tau \geq -\infty}^{\tau=t} := \min \left\{ \max_{\tau \leq t} \|\mathbf{u}(\tau)\|, 1 \right\} \quad (3.52)$$

Für den Fall einer auftretenden Grenzflächenkompression kann die Phasendurchdringung behindert werden, indem die konstitutive Annahme für die Normalspannung  $t_n$  in Gl. (3.50) durch den Ausdruck  $t_n = K_p \llbracket u_n \rrbracket$  ersetzt wird. Der Steifigkeitsmodul  $K_p$  der Grenzfläche ist mit einem sinnvoll hohen Zahlenwert anzusetzen. In sinngemäßer Weise wird in der numerischen Umsetzung des Grenzflächenmodells für Spannungszustände  $\mathbf{t}$  des ungeschädigten Bereichs ( $t_v < 1.0$  und  $d = 0$ ) als konstitutive Annahme vorgegeben:

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_p & 0 \\ 0 & 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_n \rrbracket \\ \llbracket u_t \rrbracket \\ \llbracket u_b \rrbracket \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Somit bleibt die Kontinuität des Verschiebungsfelds (d.h.  $\|\mathbf{u}\| = 0$ ) numerisch näherungsweise gewährleistet.

**Linearisierung für die iterative Lösung.** Durch Anwendung des Nablaoperators nach Gl. (3.38) auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  der Gl. (3.49) folgt unter Beachtung der Gleichung (3.50) die Matrixnotation des Gradienten  $\mathbf{t} \otimes \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket}$ :

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_L(d) + \tilde{\mathbf{E}}_L = \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \times \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket + F_L(d) \right) & \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket & \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket \\ \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket + F_L(d) \right) & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket + F_L(d) \right) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Im Fall einer Druckbeanspruchung gilt:

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_L(d) + \tilde{\mathbf{E}}_L = \frac{R_{I\perp}}{u_{I\perp}} \begin{bmatrix} \frac{u_{I\perp}}{R_{I\perp}} K_p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket + F_L(d) \right) & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ 0 & \alpha_{\perp\parallel} \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \alpha_{\perp\parallel} \left( \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket + F_L(d) \right) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

In der numerischen Umsetzung gilt im Fall des ungeschädigten Verbunds

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_p & 0 \\ 0 & 0 & K_p \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Die partiellen Ableitungen

$$\left. \frac{\partial F_L(d)}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \right|_t = \frac{\partial F_L}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \left. \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \right|_t, \quad i = n, t, b \quad (3.57)$$

in den Gln. (3.54) und (3.55) ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_L}{\partial d} \right|_t &= \frac{4d^3 - 3d^2 - 1}{d^2} \\ \left. \frac{\partial d}{\partial \|\mathbf{u}\|} \right|_t &= \frac{\partial d(t)}{\partial \|\mathbf{u}(t)\|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } d(t) = \|\mathbf{u}(t)\| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \left. \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \right|_t &= \frac{\max\{0, \llbracket u_n \rrbracket\}}{u_{I\perp}^2 \|\mathbf{u}(t)\|} \\ \left. \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \right|_t &= \frac{\llbracket u_t \rrbracket}{u_{I\parallel}^2 \|\mathbf{u}(t)\|} \\ \left. \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \right|_t &= \frac{\llbracket u_b \rrbracket}{u_{I\parallel}^2 \|\mathbf{u}(t)\|} \end{aligned} \quad (3.58)$$

### 3.4.3 Gemischt modaler Ansatz der Bruchmechanik

Für die Beschreibung der spröden Rissentstehung in Beton oder zur Formulierung der Delamination von Laminatschichten wird das bruchmechanische Modell nach Camanho and Davila (2002) mit Erfolg angewendet, siehe Fiolka (2007). Prinzipiell ist der Ansatz ebenfalls geeignet, die Entfestigung des Faser-Matrix-Verbunds zu beschreiben, sowie die Entstehung von Rissen in der Matrixphase entlang vordefinierter Bruchflächen. Bei der Entstehung von Rissen wird im Allgemeinen zwischen drei Modi unterschieden, die in Abbildung 3.7 zur Veranschaulichung dargestellt sind. Der Modus I beschreibt die Rissentstehung und Rissöffnung infolge einer Normalspannung. Die Risse in den Modi II und III werden durch Schubspannungen hervorgerufen. In der Modellvorstellung bildet der Werkstoff vor Rissbeginn entlang der späteren Rissufer ein Kontinuum. Die Feststellung des Schädigungsbeginns erfolgt im mathematischen Modell durch die Auswertung des gemischt modalen Spannungskriteriums:

$$t_v = \sqrt{\left(\frac{\langle t_n \rangle}{R_{I\perp}}\right)^2 + \left(\frac{t_t}{R_{I\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{t_b}{R_{I\parallel}}\right)^2} \stackrel{\leq}{\geq} 1 \quad (3.59)$$

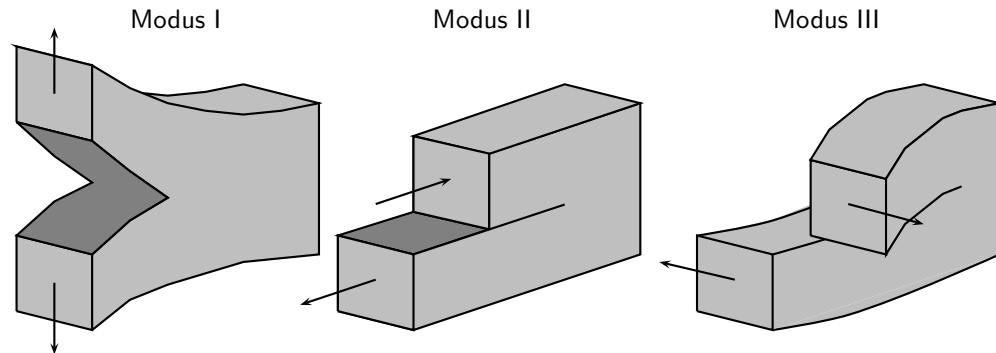


Abbildung 3.7: Zug- und Schubbruchmodi

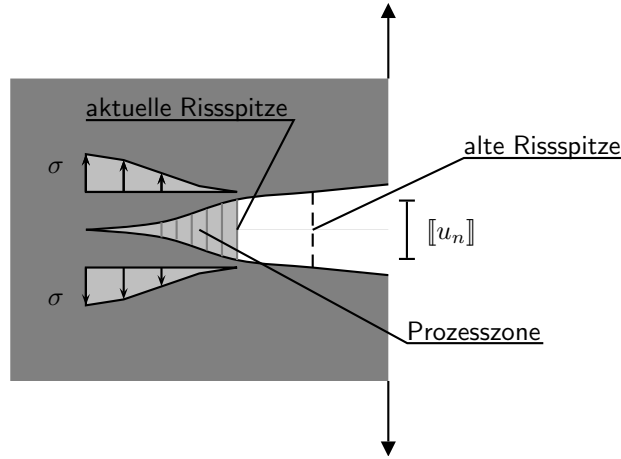


Abbildung 3.8: Rissfortschritt unter Modus I Bedingungen

Erreicht  $t_v$  erstmalig den Wert 1, so ist die Bedingung für den Beginn der Entfestigung erfüllt. Die Festigkeiten in den Modi I und II/III werden mit  $R_{I\perp}$  und  $R_{I\parallel}$  bezeichnet. Die Anwendung der MACCAULEY Klammer  $\langle \cdot \rangle$  auf die Normalspannungskomponente  $t_n$  in Gl. (3.59) bewirkt, dass nur Zugspannungen einen Beitrag zum Spannungskriterium liefern:

$$\langle t_n \rangle = \begin{cases} t_n & \text{falls } t_n > 0 \\ 0 & \text{falls } t_n \leq 0 \end{cases} .$$

Der konstitutive Ansatz zur Beschreibung der Prozessfläche lautet mit der „penalty“-Steifigkeit  $K_p$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \\ t_b \end{Bmatrix} &= K_p \begin{bmatrix} (1 - H(\llbracket u_n \rrbracket))d & 0 & 0 \\ 0 & (1 - d) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - d) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket u_n \rrbracket \\ \llbracket u_t \rrbracket \\ \llbracket u_b \rrbracket \end{Bmatrix} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{E}_{\text{GMB}}(d) \mathbf{\llbracket u \rrbracket} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Funktion  $H(\llbracket u_n \rrbracket)$  liefert die Fallunterscheidung zwischen den Zuständen Rissöffnung oder Druckkontakt senkrecht zu den Rissufern. Somit kann verhindert werden, dass es zu einer unrealistischen Durchdringungen der Bruchufer bei der Rissschließung kommt.

$$H(\llbracket u_n \rrbracket) = \frac{\langle \llbracket u_n \rrbracket \rangle}{\llbracket u_n \rrbracket} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket u_n \rrbracket > 0 \\ 0 & \text{falls } \llbracket u_n \rrbracket \leq 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Der sinnvoll hoch zu wählende Steifigkeitsparameter  $K_p$  verhindert in der numerischen Modellbildung das Öffnen der Risse bevor das Spannungskriterium  $t_v = 1$  erfüllt wird. Solange für die gemischt modale Vergleichsspannung nach Gl. (3.59)  $t_v < 1$  gilt, liegt kein Riss vor und die Schädigungsvariable  $d \in [0, 1]$  besitzt den Wert  $d = 0$ . Die Spannungsseparationsbeziehungen sind in Abbildung 3.9 graphisch für den reinen Modus I und den reinen Modus II dargestellt. Die Parameter  $q_n$  und  $q_s$  beschreiben das Verhältnis der Separationen bei vollständiger Schädigung zu denen bei Entfestigungsbeginn. Die Separationen bei Entfestigungsbeginn im Modus



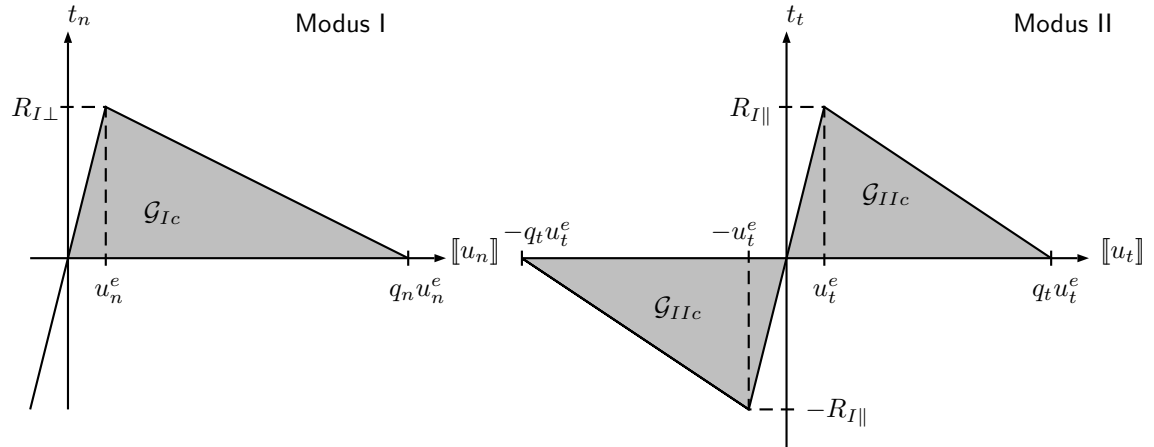


Abbildung 3.9: Bilineares Entfestigungsmodell

I beziehungsweise bei reiner Schubbeanspruchung lauten:

$$u_n^e = \frac{R_{I\perp}}{K_p} \quad (3.62)$$

$$u_s^e = u_t^e = u_b^e = \frac{R_{I\parallel}}{K_p} \quad (3.63)$$

Im Entfestigungsbereich bestimmt sich die Schädigungsvariable nach Camanho and Davila (2002) bei gemischt modaler Beanspruchung der Bruchfläche zu:

$$d = \frac{q_m (u_m^{max} - u_m^e)}{(q_m - 1) u_m^{max}} \quad (3.64)$$

In Gl. (3.64) bezeichnet  $u_m^{max} = \max \{u_m(\tau) | \tau \leq t\}$  das in der Belastungsgeschichte  $\tau < t$  aufgetretene Maximum der gemischt modalen Separation  $u_m$ , die definiert ist als:

$$u_m := \sqrt{\langle [[u_n]] \rangle^2 + [[u_t]]^2 + [[u_b]]^2} = \sqrt{\langle [[u_n]] \rangle^2 + [[u_s]]^2} \quad (3.65)$$

Hierin stellt  $[[u_s]] = \sqrt{[[u_t]]^2 + [[u_b]]^2}$  die resultierende Schubkomponente dar. Die Größe  $u_m^e$  beschreibt die gemischt modale Separation bei Beginn der Entfestigung. Der Parameter  $q_m$  in Gl. (3.64) setzt die gemischt modale Separation bei vollständiger Schädigung ins Verhältnis zur gemischt modale Separation  $u_m^e$  bei Entfestigungsbeginn. Die Abbildung 3.10 zeigt das gemischt modale Bruchmodell in graphischer Darstellung. Für die Bestimmung von  $q_m$  und  $u_m^e$  wird (im Fall  $[[u_n]] > 0$ ) das gemischt modale Verformungsverhältnis  $\beta$  nach Gl. (3.66) eingeführt.

$$\beta := \frac{[[u_s]]}{[[u_n]]} \quad (3.66)$$

Die Zug- und die resultierende Schubkomponente des Spannungsvektors bestimmen sich im Bereich  $t_m < 1$  aus  $t_n = K_p [[u_n]]$  und  $t_s = K_p [[u_s]]$  mit  $t_s^2 = t_t^2 + t_b^2$ . Durch das Einsetzen dieser Ausdrücke für die Spannungen in das Spanningskriterium (3.59) folgt unter Beachtung der Gln. (3.62) und (3.63):

$$\sqrt{\left(\frac{[[u_n]]}{u_n^e}\right)^2 + \left(\frac{[[u_s]]}{u_s^e}\right)^2} = 1 \quad (3.67)$$

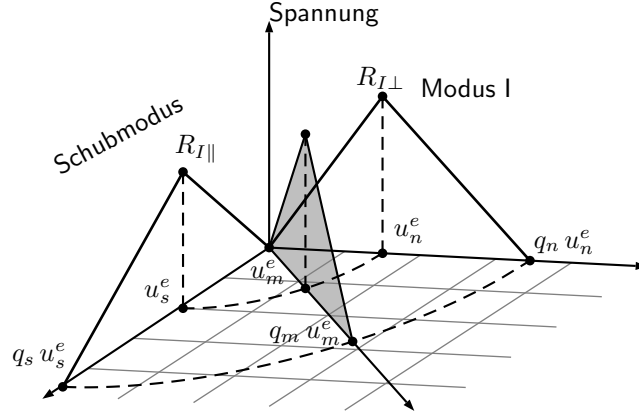


Abbildung 3.10: Gemischt modales Bruchmodell

Die Gl. (3.67) stellt das Ergebnis der äquivalenten Reformulierung des Spannungskriteriums (3.59) in ein Verformungskriterium für den Entfestigungsbeginn dar. Die Gl. (3.66) erlaubt, die Schubdeformation  $\llbracket u_s \rrbracket = \beta \llbracket u_n \rrbracket$  als Funktion der Zugdeformation zu schreiben. Beachtet man dies in den Gln. (3.65) und (3.67), so können selbige jeweils nach  $\llbracket u_n \rrbracket$  aufgelöst werden. Durch Gleichsetzen und anschließende Auflösung der entstehenden Gleichung nach  $u_m$  folgt die gemischt modale Separation bei Entfestigungsbeginn:

$$u_m^e = u_n^e u_s^e \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{(u_s^e)^2 + (\beta u_n^e)^2}} \Leftrightarrow \llbracket u_n \rrbracket > 0 \quad (3.68)$$

Für den Fall  $\llbracket u_n \rrbracket \leq 0$  ist in Gl. (3.64)  $u_m^e = u_s^e$  zu setzen, im reinen Modus I ( $\llbracket u_s \rrbracket = 0$ ) gilt  $u_m^e = u_n^e$ . Zur Bestimmung von  $q_m$  wird der Potenzansatz

$$\left(\frac{\mathcal{G}_I}{\mathcal{G}_{Ic}}\right)^\eta + \left(\frac{\mathcal{G}_s}{\mathcal{G}_{sc}}\right)^\eta = 1 \quad (3.69)$$

nach Whitcomb (1986) ausgewertet. Die Bruchenergien  $\mathcal{G}_{Ic}$  und  $\mathcal{G}_{sc}$  ergeben sich durch Integration der Bruchflächenspannungen  $t_n$  und  $t_s = \sqrt{t_t^2 + t_b^2}$  entlang des jeweiligen Separationswegs bis zum vollständigen Bruch:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Ic} &= \int_0^{q_n u_n^e} t_n d\llbracket u_n \rrbracket = \frac{1}{2} R_{I\perp} q_n u_n^e \\ \mathcal{G}_{sc} &= \int_0^{q_s u_s^e} t_s d\llbracket u_s \rrbracket = \frac{1}{2} R_{I\parallel} q_s u_s^e \end{aligned} \quad (3.70)$$

Die Bruchenergie des gemischt modalen Zustands lautet:

$$\mathcal{G}_{mc} = \frac{1}{2} q_m u_m^e{}^2 K_p \quad (3.71)$$

Die Energiefreisetzungsraten aus der Schub- bzw. Zugbeanspruchung  $\mathcal{G}_s$  und  $\mathcal{G}_I$  ergeben sich zu:

$$\mathcal{G}_s = \int_0^{\llbracket u_s \rrbracket} t_s du_s \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_I = \int_0^{\llbracket u_n \rrbracket} t_n du_n \quad (3.72)$$

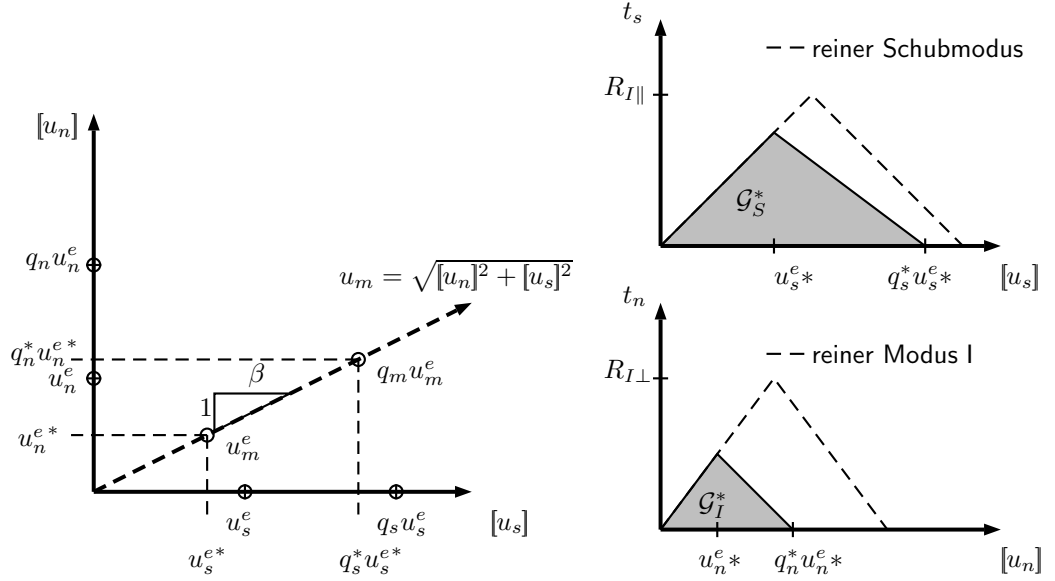


Abbildung 3.11: Gemischt modale Beanspruchung. Links: Pfad  $u_m$  im Raum des Verschiebungssprungvektors. Rechts: Spannungs-Separations-Beziehungen für Schub- bzw. Zugkomponente des Spannungsvektors

Wird die Bruchbedingung (3.69) von den Energien  $\mathcal{G}_s^*$  und  $\mathcal{G}_I^*$  erfüllt, so liefern die Integrale in Gl. (3.72) mit den zugehörigen oberen Integrationsgrenzen  $[[u_s^*]] = q_s^* u_s^{e*}$  und  $[[u_n^*]] = q_n^* u_n^{e*}$  unter Beachtung der bilinearen Spannungs-Separations-Beziehung, vgl. Abb. 3.11, folgende Energien:

$$\mathcal{G}_s^* = \int_0^{[[u_s^*]]} t_s du_s = \frac{1}{2} K_p q_s^* u_s^{e*2} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_I^* = \int_0^{[[u_n^*]]} t_n du_n = \frac{1}{2} K_p q_n^* u_n^{e*2} \quad (3.73)$$

Nach Gl. (3.66) kann hierin  $u_s^{e*} = \beta u_n^{e*}$  und  $q_s^* u_s^{e*} = \beta q_n^* u_n^{e*}$  gesetzt werden, s. a. Abb. 3.11 links. Durch die Zusammenführung der Energieausdrücke in Gl. (3.73) und der Bruchbedingung (3.69) erhält man dann:

$$\left( \frac{1}{2} K_p q_n^* u_n^{e*2} \right)^\eta \left[ \left( \frac{1}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^\eta + \left( \frac{\beta^2}{\mathcal{G}_{sc}} \right)^\eta \right] = 1 \quad (3.74)$$

Wegen der Gln. (3.65) und (3.66) kann man  $q_m u_m^e = q_n^* u_n^{e*} \sqrt{1 + \beta^2}$  und  $u_m^e = u_n^{e*} \sqrt{1 + \beta^2}$  schreiben, so dass der Ausdruck  $q_n^* u_n^{e*2}$  in Gl. (3.74) durch  $q_m u_m^e / (1 + \beta^2)$  ersetzt werden kann. Die Umstellung der Gleichung (3.74) nach  $q_m$  führt auf die gesuchte Größe:

$$q_m = \frac{2(1 + \beta^2)}{K_p u_m^e} \left[ \left( \frac{1}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^\eta + \left( \frac{\beta^2}{\mathcal{G}_{sc}} \right)^\eta \right]^{-\frac{1}{\eta}} \quad (3.75)$$

**Linearisierung für die iterative Lösung.** Die Linearisierung der Gleichung (3.60) führt für  $[[u_n]] > 0$  auf den Gradienten des Grenzflächenspannungsvektors in

Matrixnotation:

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_{\text{GMB}}(d) + \tilde{\mathbf{E}}_{\text{GMB}} =$$

$$K_p \begin{bmatrix} \left[ 1 - \left( d + \frac{\partial d}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket \right) \right] & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_n \rrbracket \\ -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket & \left[ 1 - \left( d + \frac{\partial d}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \right) \right] & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_n \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \left[ 1 - \left( d + \frac{\partial d}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket \right) \right] \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Im Fall  $\llbracket u_n \rrbracket \leq 0$  ergibt sich:

$$\mathbf{t} \nabla_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \mathbf{E}_{\text{GMB}}(d) + \tilde{\mathbf{E}}_{\text{GMB}} =$$

$$K_p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left[ 1 - \left( d + \frac{\partial d}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \right) \right] & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_t \rrbracket \\ 0 & -\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_t \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket & \left[ 1 - \left( d + \frac{\partial d}{\partial \llbracket u_b \rrbracket} \llbracket u_b \rrbracket \right) \right] \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Für die in den Gln. (3.76) und (3.77) enthaltenen partiellen Ableitungen muss zwischen den Fällen  $\llbracket u_n \rrbracket > 0$  und  $\llbracket u_n \rrbracket \leq 0$  unterschieden werden. Die Ableitungen der Schädigungsvariablen  $d$  nach den Diskontinuitäten  $\llbracket u_i \rrbracket$  in (3.76) berechnen sich mit Gl. (3.64) zu:

$$\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \frac{q_m}{q_m - 1} \left( \frac{u_m^e}{(u_m^{\max})^2} \frac{\partial u_m^{\max}}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} - \frac{1}{u_m^{\max}} \frac{\partial u_m^e}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \right) - \frac{1}{(q_m - 1)^2} \left( 1 - \frac{u_m^e}{u_m^{\max}} \right) \frac{\partial q_m}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \quad (3.78)$$

Im Fall  $\llbracket u_n \rrbracket > 0$  ergibt die Differentiation der gemischt modalen Länge  $u_m^e$  nach Gl. (3.68), bei der die Entfestigung einsetzt:

$$\frac{\partial u_m^e}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \frac{\beta u_n^e u_s^e [(u_n^e)^2 - (u_s^e)^2]}{\sqrt{\frac{1 + \beta^2}{(u_s^e)^2 + (\beta u_n^e)^2}}} \frac{\partial \beta}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \quad (3.79)$$

mit

$$\frac{\partial \beta}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \begin{cases} -\frac{\llbracket u_s \rrbracket}{\llbracket u_i \rrbracket^2} & i = n \\ \frac{\llbracket u_i \rrbracket}{\llbracket u_s \rrbracket \llbracket u_n \rrbracket} & i = t, b \end{cases} \quad (3.80)$$

Die Ableitung der maximalen gemischt modalen Separation  $u_m^{\max} = \max \{u_m(\tau)\}_{\tau \leq t}$  nach den aktuellen Komponenten des Separationsvektors  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  liefert mit Gl. (3.65):

$$\frac{\partial u_m^{\max}}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \begin{cases} \llbracket u_i \rrbracket & \text{falls } u_m^{\max} = u_m(t) \\ u_m^{\max} & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.81)$$

Die Differentiation des Parameters  $q_m$  in Gl. (3.75) nach  $\llbracket u_i \rrbracket$  ergibt:

$$\frac{\partial q_m}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \frac{\partial q_m}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \quad (3.82)$$

mit

$$\frac{\partial q_m}{\partial \beta} = \frac{4\beta}{K_p (u_m^e)^2} \left( \left( \frac{1}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^\eta + \left( \frac{\beta^2}{\mathcal{G}_{sc}} \right)^\eta \right)^{-\frac{1}{\eta}} \left[ 1 - \frac{1 + \beta^{-2}}{1 + \beta^{-2\eta} \left( \frac{\mathcal{G}_{sc}}{\mathcal{G}_{Ic}} \right)^\eta} + \frac{(u_n^e)^2 - (u_s^e)^2}{(u_m^e)^2} \right]. \quad (3.83)$$

Im Fall  $\llbracket u_n \rrbracket \leq 0$ , d.h. wenn eine reine Schubbeanspruchung oder eine Schubbeanspruchung in Kombination mit Druck normal zur Grenzfläche vorliegt, erhält man aus Gl. (3.75):

$$d = \frac{q_s (u_s^{max} - u_s^e)}{(q_s - 1) u_s^{max}} \quad (3.84)$$

mit

$$q_s = \frac{2\mathcal{G}_{sc}}{R_{II} \llbracket u_s^e \rrbracket} \quad (3.85)$$

nach Gl. (3.70)<sub>2</sub> und  $u_s^{max}(t) = \max_{\tau \leq t} \left\{ \sqrt{\llbracket u_t(\tau) \rrbracket^2 + \llbracket u_b(\tau) \rrbracket^2} \right\}$ . Die Änderung der Schädigungsvariablen  $d$  mit den Schubdiskontinuitäten  $\llbracket u_i \rrbracket$  ist gegeben durch:

$$\frac{\partial d}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = - \frac{q_s u_s^e}{(q_s - 1) (u_s^{max})^2} \frac{\partial u_s^{max}}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} \quad i = t, b \quad (3.86)$$

Die Ableitung der maximalen Schubdiskontinuität  $u_s^{max}$  nach den aktuellen Schubdiskontinuitäten  $\llbracket u_i \rrbracket$  ergibt:

$$\frac{\partial u_s^{max}}{\partial \llbracket u_i \rrbracket} = \begin{cases} \frac{\llbracket u_i \rrbracket}{u_s^{max}} & \text{falls } u_s^{max} = u_m(t) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.87)$$

Die Ausdrücke (3.86) und (3.87) sind in die Gleichung (3.77) des Spannungsgradienten für den Fall  $\llbracket u_n \rrbracket \leq 0$  einzusetzen.



# Kapitel 4

## Mechanik mikroheterogener Materialien

### 4.1 Allgemeines

Jedes reale Material besitzt eine nicht-stetige Struktur. Selbst Werkstoffe, die makroskopisch homogen erscheinen, sind nicht frei von Heterogenitäten. Als ungewollte Inhomogenitäten oder materielle Imperfektionen treten beispielsweise Mikrorisse, Hohlräume oder Fehlstellen auf, die bereits bei der Fertigung entstehen können. Die Mikrostruktur geschäumter Materialien ist durch einen hohen Porenanteil und dünne Zellwände geprägt. Die Gruppe der metallischen Werkstoffe besitzt bei mikroskopischer Betrachtung eine körnige Struktur mit Korngrenzen und Fremdeinschlüssen. Bei weiterer Vergrößerung werden die Kristallgitter sichtbar, die ihrerseits Fremd-atome enthalten können.

Eine gängige Annahme der Modellbildung mit Hilfe der klassischen Kontinuumsmechanik basiert auf der Idealisierung der Materie als eine dichte Punktmenge, die eine ortsunabhängige Verteilung der charakteristischen Eigenschaften besitzen soll. Folglich haben alle materiellen Punkte unter gleichen Bedingungen die gleichen physikalischen Eigenschaften. Spätestens auf der molekularen oder atomaren Ebene gilt die Annahme einer stetigen Verteilung der Materie nicht mehr. Um dennoch die Methoden der Kontinuumsmechanik mit Erfolg anwenden zu können, sind geeignete Ansätze notwendig, die die heterogene Mikrostruktur durch ein fiktives, homogenes Medium ersetzen. Das Ersatzkontinuum soll makroskopisch die gleichen mechanischen Eigenschaften wie der reale Werkstoff aufweisen. Die Mehrzahl der Materialien wird phänomenologisch beschrieben, d.h. ihr im Versuch zu beobachtendes, makroskopisches Verhalten wird durch ein geeignetes System mathematischer Modellgleichungen abgebildet. Der reale Aufbau auf den unterhalb der Makroebene angesiedelten Größenskalen wird dabei nicht betrachtet. Irreversible geschichtsabhängige Prozesse werden unter Zuhilfenahme innerer Variabler beschrieben.

Eine besondere Gruppe heterogener Materialien bilden gezielt entworfene Kompositwerkstoffe. Hierbei werden unterschiedliche Phasen im Verbund angeordnet, um spezielle und dem Anwendungszweck angepasste Eigenschaften zu erhalten. Die Heterogenität des Aufbaus ist bei diesen Werkstoffen offenkundig. Für die rechnerische

rische Analyse von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen wird dennoch in der Regel von einem homogenen Kontinuum ausgegangen. Hierzu müssen die makroskopischen mechanischen Eigenschaften der Kompositwerkstoffe ermittelt werden. Dies kann mit zum Teil erheblichem experimentellen Aufwand im Versuch geschehen. Für inelastische Prozesse, bei denen irreversibel Schädigungsmechanismen wie Verbundentfestigung, Rissentstehung- und Entwicklung oder auch Abhängigkeiten von der Beanspruchungsgeschichte eine Rolle spielen, wird der Untersuchungsaufwand umfangreich. Hinzu kommt, dass die Tests an den Probekörpern für jede veränderte Materialkombination und räumliche Strukturierung erneut durchgeführt werden müssen. Parameterstudien beim Entwurf von geeigneten, den Beanspruchungen angepassten Werkstoffkombinationen, werden somit kostenintensiv.

Eine Alternative zur experimentellen Bestimmung der makroskopischen mechanischen Eigenschaften stellen die mathematischen Homogenisierungsmethoden dar. Das Ziel dieser Ansätze ist es, das mechanische Verhalten des Materials im Mittel durch die rechnerische Modellierung zutreffend zu beschreiben. Dabei finden sowohl die mikrostrukturelle Anordnung als auch die Werkstoffeigenschaften der einzelnen Konstituenten explizit Beachtung. Homogenisierungsverfahren für Beanspruchungsregime im elastischen Bereich sind vielfältig entwickelt worden. Die einfachsten Ansätze in Form unterer und oberer Grenzwerte für die elastischen Eigenschaften gehen auf Voigt (1889) und Reuss (1929) zurück. Die Anwendung des Variationsprinzips nach Hashin and Shtrikman (1963) führt ebenfalls auf Schranken für die Elastizitätsparameter inhomogener Medien, die jedoch eine engere Eingrenzung liefern als die Ansätze nach Voigt und Reuss. Für inelastische Prozesse werden hauptsächlich numerische Methoden erfolgreich eingesetzt. Tan et al. (2005) benutzen die Mori-Tanaka-Methode zur Untersuchung des nichtlinearen Verbundverhaltens von Kompositwerkstoffen.

## 4.2 Grundlagen

### 4.2.1 Das repräsentative Volumenelement

Die zentrale Rolle bei der Homogenisierung von heterogenen Werkstoffen spielt das Konzept des repräsentativen Volumenelements (RVE), denn das RVE schlägt die notwendige Brücke über die Grenze zwischen der Mikroebene des heterogenen Werkstoffgefüges und der Makroebene der Ingenieurstrukturen. Der Begriff des Repräsentativen Volumenelements geht auf Hashin (1983) und Nemat-Nasser and Hori (1993) zurück. Unter der Annahme eines linearelastischen Werkstoffverhaltens und nicht-gradierter Materialeigenschaften steht das RVE stellvertretend für die Mikrostruktur an jedem beliebigen materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  mit dem makroskopischen Ortsvektor  $\mathbf{x}_{makro}$ , vgl. Abb. 4.1.

Damit die Unabhängigkeit des RVEs vom Ort  $\mathbf{x}_{makro}$  gewährleistet ist, muss das Volumenelement hinreichend groß gewählt werden, so dass alle wesentlichen Inhomogenitäten der Mikrostruktur erfasst werden können. Daraus lässt sich ableiten, dass das RVE mit zunehmender Regellosigkeit des Mikrostrukturaufbaus einen wachsenden Ausschnitt des Gefüges umfassen muss. Die charakteristische Länge  $d$  (Durchmesser oder Kantenlänge) des Volumenelements muss entsprechend größer sein, als die charakteristische Länge der Mikrostruktur  $l$ , welche durch die Größe und die Abstände



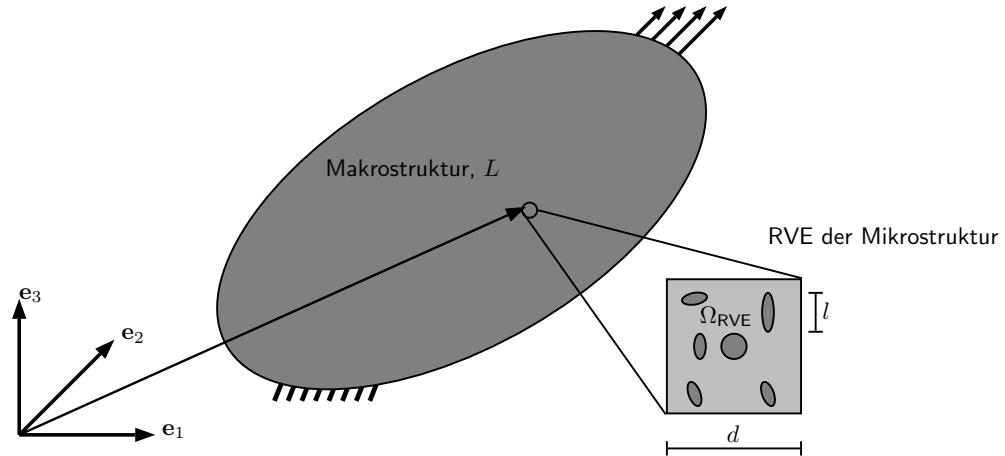


Abbildung 4.1: Charakteristische Längen auf unterschiedlichen Skalen

der Defekte oder Störungen des homogenen Aufbaus gegeben ist. Gleichzeitig unterliegt das RVE der Bedingung, dass seine Abmessungen einen hinreichenden Abstand zur makroskopischen Längenskala  $L$  einhalten müssen. Andernfalls wäre die näherungsweise Auffassung des RVEs als ausdehnungsloser Punkt der Makrostruktur unzulässig und hinfällig. Die maßgebliche Länge  $L$  der Makrostruktur leitet sich aus deren geometrischer Gestalt, der räumlichen Veränderung der Belastung und den Gradienten der makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsfelder ab. Die Größenwahl des RVEs unterliegt somit einer beidseitigen Beschränkung:

$$l \ll d \ll L \quad (4.1)$$

Durch die limitierende Bedingung (4.1) kann es im Einzelfall unmöglich sein, ein RVE sinnvoll zu definieren. Diese Situation liegt zum Beispiel dann vor, wenn die makroskopischen Strukturabmessungen klein gegenüber den Inhomogenitäten werden. Mitunter erzwingt die Unordnung der Mikrostruktur zur Sicherstellung der statistischen Repräsentativität ein so ausgedehntes RVE, dass die Auffassung des RVEs als Punkt der Makrostruktur nicht mehr vertretbar ist. Als allgemein anerkanntes Kriterium für die Repräsentativität des Volumenelementes gilt die Makrohomogenitätsbedingung nach Hill (1963), welche verlangt, dass der Volumenmittelwert der mikroskopische Formänderungsarbeit  $\langle U \rangle$  im RVE gleich der makroskopischen Formänderungsarbeit ist:

$$2\langle U \rangle = \frac{1}{|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, dV \stackrel{!}{=} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{RVE}} \quad (4.2)$$

Der makroskopische Spannungstensor  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und der makroskopische Verzerrungstensor  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  sind als Volumenmittelwerte der jeweiligen Mikrofelder innerhalb des RVEs definiert:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \, dV \quad , \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, dV \quad (4.3)$$

Die Gleichungen (4.3) gelten unter der Voraussetzung eines stetigen Mikroverschiebungsfelds und abwesender Volumenkräfte. Für den Fall eines heterogenen Körpers

mit perfektem Verbund der Phasen existieren in Abwesenheit von Volumenkräften zwei wichtige Arten von homogenen Randbedingungen, die dazu führen, dass die Makrohomogenitätsbedingung erfüllt wird. Mit der konstanten Verzerrung  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{RVE}}$  lautet die lineare Verschiebungsbedingung auf dem Rand  $\partial\Omega_{\text{RVE}}$  des RVEs:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_{\text{RVE}}} = \boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\text{RVE}} \quad (4.4)$$

Die uniforme Spannungsrandbedingung lässt sich mit dem konstanten Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}^0$  schreiben als:

$$\mathbf{t}|_{\partial\Omega_{\text{RVE}}} = \boldsymbol{\sigma}^{0\text{T}} \mathbf{n} \quad (4.5)$$

Die beiden Randbedingungen (4.4) und (4.5) führen zu makroskopischen Feldgrößen  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  und  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , die den Tensoren  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  und  $\boldsymbol{\sigma}^0$  entsprechen, d.h. es gilt:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \boldsymbol{\epsilon}^0 \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\sigma}^0. \quad (4.6)$$

Die Gln. (4.6) stellen die Kernaussagen der *average strain* und *average stress* Theoreme dar.

### Das „*average strain*“ Theorem

Wird das Volumen  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , bestehend aus den Phasen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  auf dem äußeren Rand  $\partial\Omega$  den reinen Verschiebungsrandbedingungen  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}$  unterworfen, so entspricht der Volumenmittelwert  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  dem vorgegebenen, konstanten Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}^0$ , siehe Wriggers and Zohdi (2005). Der Beweis dieser Aussage startet mit der Definitionsgleichung (4.7) der Makrospannungen:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\text{T}} \right) \, d\Omega \quad (4.7)$$

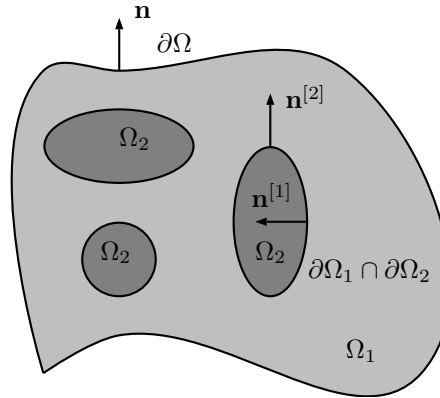
Durch Aufspaltung in Integrale über die Teilvolumina  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  folgt:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2|\Omega|} \left[ \int_{\Omega_1} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\text{T}} \right) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\text{T}} \right) \, d\Omega \right] \quad (4.8)$$

Die Umwandlung der Volumenintegrale in Oberflächenintegrale liefert<sup>1</sup> mit den jeweils nach aussen weisenden Normalenvektoren  $\mathbf{n}^{[1]}$  und  $\mathbf{n}^{[2]}$  der Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2|\Omega|} \left[ \int_{\partial\Omega_1} \left( \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}^{[1]} + \mathbf{n}^{[1]} \otimes \mathbf{u} \right) \, dA + \int_{\partial\Omega_2} \left( \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}^{[2]} + \mathbf{n}^{[2]} \otimes \mathbf{u} \right) \, dA \right] \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>siehe Malvern (1969), S. 197 f.f.

Abbildung 4.2: Zweiphasiges Volumenelement  $\Omega$ 

Das Verschiebungsfeld auf dem äußeren Rand  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_2$  ist durch die Randbedingung  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}$  gegeben.

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2|\Omega|} \left[ \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}^{[1]} + \mathbf{n}^{[1]} \otimes (\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x})) \, dA + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} (\mathbf{u}|_{\partial\Omega_1} \otimes \mathbf{n}^{[1]} + \mathbf{n}^{[1]} \otimes \mathbf{u}|_{\partial\Omega_1} + \mathbf{u}|_{\partial\Omega_2} \otimes \mathbf{n}^{[2]} + \mathbf{n}^{[2]} \otimes \mathbf{u}|_{\partial\Omega_2}) \, dA \right] \quad (4.10)$$

Mit  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^{[1]} = -\mathbf{n}^{[2]}$  auf  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  und der Diskontinuität  $[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}|_{\partial\Omega_1} - \mathbf{u}|_{\partial\Omega_2}$  entlang der inneren Grenzflächen der Phasen erhält man:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2|\Omega|} \left[ \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x})) \, dA + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes ([[ \mathbf{u} ]]) \, dA \right] \quad (4.11)$$

Die Rückwandlung des ersten Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral ergibt:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2|\Omega|} \left[ \int_{\Omega} (\nabla (\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}) + (\nabla (\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}))^T) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes ([[ \mathbf{u} ]]) \, dA \right] \quad (4.12)$$

Wegen  $\nabla (\boldsymbol{\epsilon}^0 \mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^0$  folgt nach Auswertung des ersten Integrals

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \boldsymbol{\epsilon}^0 + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes ([[ \mathbf{u} ]]) \, dA \quad (4.13)$$

Die Aussage der Gleichung (4.13) ist, dass der Volumenmittelwert des Verzerrungsfelds identisch mit dem Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  aus der Verschiebungsrandbedingung ist, solange keine Verschiebungsdiskontinuitäten entlang der Phasengrenzen auftreten. Anderenfalls sind die Sprünge gemäß Gl. (4.13) zu berücksichtigen - siehe Kapitel 7.

### Das „average stress“ Theorem

Das „average stress“ Theorem besagt, dass der Mittelwert des Spannungsfelds im Inneren des Volumenelements dem Tensor  $\boldsymbol{\sigma}^0$  aus der Randbedingung

$$\mathbf{t}|_{\partial\Omega_{\text{RVE}}} = \boldsymbol{\sigma}^{0\text{T}} \mathbf{n} \quad (4.14)$$

entspricht. Ausgehend von der Definitionsgleichung der Makrospannung

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.15)$$

erhält man mit dem Vektor  $\mathbf{f}$  der Volumenlasten wegen

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \otimes \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{x} = -\mathbf{f} \otimes \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \quad (4.16)$$

aus Gl. (4.15) zunächst

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) + \mathbf{f} \otimes \mathbf{x}] d\Omega \quad (4.17)$$

Durch die Umwandlung des ersten Summanden in ein Randintegral ergibt sich aus Gl. (4.17)

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dA + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{f} \otimes \mathbf{x} d\Omega \quad (4.18)$$

In der Abwesenheit von Volumenlasten verschwindet der Volumenlastvektor  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  und es verbleibt

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4.19)$$

Da die Spannungen  $\mathbf{t}|_{\partial\Omega_{\text{RVE}}} = \boldsymbol{\sigma}^{0\text{T}} \mathbf{n}$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  durch den konstanten Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}^0$  beschrieben werden, gilt:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \boldsymbol{\sigma}^0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dA \quad (4.20)$$

und es folgt der Nachweis der Behauptung nach Rückwandlung in ein Volumenintegral:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \boldsymbol{\sigma}^0 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{x} d\Omega = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (4.21)$$

### 4.2.2 Konzentrationstensoren nach Hill und effektive elastische Materialeigenschaften

Das Ziel der Homogenisierung elastischer Mehrphasenverbunde ist die Bestimmung der effektiven konstitutiven Tensoren  $\mathbf{C}^*$  und  $\mathbf{S}^*$ , die die Verknüpfung zwischen den Makrospannungen und Makroverzerrungen herstellen:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.22)$$

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \mathbf{S}^* : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (4.23)$$

Die mittleren Dehnungen und Spannungen eines  $N$ -phasigen, elastischen Mediums ergeben sich durch die Volumenintegration der Mikrofelder der Spannungen und Verzerrungen in den konstituierenden Phasen  $i$  mit den Teilvolumina  $V^{(i)}$ :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \rangle = \frac{1}{|V^{(i)}|} \int_{V^{(i)}} \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}) dV^{(i)} \quad (4.24)$$

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle = \frac{1}{|V^{(i)}|} \int_{V^{(i)}} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(\mathbf{x}) dV^{(i)} \quad (4.25)$$

Durch die mit den Phasenvolumenanteilen  $v^{(i)} = V^{(i)}/V_{RVE}$  gewichteten Summen

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle \quad (4.26)$$

können die makroskopischen Spannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und Verzerrungen  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  ermittelt werden. Die konstitutiven Tensoren  $\mathbf{C}^{(i)}$  der Phasenmaterialien verknüpfen die mittleren Phasenverzerrungen mit den mittleren Phasenspannungen:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(i)} = \mathbf{C}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle^{(i)} \quad (4.27)$$

Durch Einsetzen der Gl. (4.27) in die erste Gl. (4.26) ergibt sich:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{C}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle^{(i)} \quad (4.28)$$

Der mittlere Phasenverzerrungstensor  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle^{(i)}$  kann mit Hilfe des vierstufigen Phasenverzerrungskonzentrationstensors  $\mathbf{A}^{(i)}$  nach Hill (1963) als Funktion der Makroverzerrung  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  formuliert werden:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.29)$$

Die mittleren Phasenkonzentrationstensoren  $\mathbf{A}^{(i)}$  müssen die Identitätsbedingung

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^N v^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} \quad (4.30)$$

erfüllen, damit die Gleichung (4.26)<sub>2</sub> ihre Gültigkeit behält. Der Tensor  $\mathbb{I}$  ist der vierstufige Einheitstensor mit den Komponenten  $\mathbb{I}_{iklm} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})$ . Die

Kombination der Gleichungen (4.29) mit (4.28) führt auf die konstitutive Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungs- und Verzerrungstensoren:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{C}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.31)$$

Der effektive konstitutive Tensor  $\mathbf{C}^*$  ergibt sich folglich zu:

$$\mathbf{C}^* = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{C}^{(i)} : \mathbf{A}^{(i)} \quad (4.32)$$

In Analogie zu Gl. (4.29) können die mittleren Phasenspannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \rangle$  durch den Spannungskonzentrationstensor  $\mathbf{B}^{(i)}$  in Abhängigkeit des makroskopischen Spannungstensors  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  geschrieben werden:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \rangle = \mathbf{B}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (4.33)$$

Der effektive elastische Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{S}^*$  berechnet sich durch die volumenanteilig gewichtete Summe der Anwendung der Spannungskonzentrationstensoren  $\mathbf{B}^{(i)}$  auf die Phasennachgiebigkeitstensoren  $\mathbf{S}^{(i)}$ :

$$\mathbf{S}^* = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} : \mathbf{B}^{(i)} \quad (4.34)$$

Die Ergebnisse (4.32) und (4.34) zeigen, dass der Weg der Homogenisierung mit dem Ziel der Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften über die Ermittlung der phasengemittelten Konzentrationstensoren  $\mathbf{A}^{(i)}$  oder  $\mathbf{B}^{(i)}$  führt.

### 4.3 Analytische Näherungslösungen

Zur analytischen Homogenisierung heterogener Materialien existieren im Schrifttum eine Reihe von Ansätzen. Die Methoden gelten unter bestimmten Voraussetzungen und vereinfachenden Annahmen meist nur für elastische Werkstoffe. An dieser Stelle sei ohne Anspruch auf Vollständigkeit auf die wichtigsten und bekanntesten Verfahren hingewiesen. Für detaillierte Darstellungen der Ansätze wird auf Christensen (1979), Aboudi (1991), Nemat-Nasser and Hori (1993) oder Bogdanovich and Pastore (1996) verwiesen.

Der Eshelby-Ansatz beschreibt die effektiven Eigenschaften eines unendlich ausgedehnten, elastischen, homogenen Mediums mit einem Einschluss in Form eines Ellipsoids, siehe Nemat-Nasser and Hori (1993). Die Eshelby Lösung basiert auf der Auswertung Greenscher Funktionen  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , die den Einfluss einer Störung  $\mathbf{b}$  im Punkt  $\mathbf{y}$  auf den Wert einer Größe  $\mathbf{a}$  am Punkt  $\mathbf{x}$  beschreiben. Die Lösung für das Feld  $\mathbf{a}$  erhält man durch die Bestimmung des Integrals über das unberandete Gebiet  $\Omega$ :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{b}(\mathbf{y}) d\Omega \quad (4.35)$$

Der Ansatz nach Eshelby nutzt das Konzept der äquivalenten Eigendehnung. Hierbei wird der inhomogene Körper gedanklich zunächst durch ein homogenes Material ersetzt. An den Stellen der nun fehlenden Einschlüsse wird ein Eigendehnungszustand angenommen, der dazu führt, dass im homogenen Werkstoff der gleiche Dehnungs- und Spannungszustand herrscht, wie im eigenspannungsfreien heterogenen Material unter sonst gleichen Randbedingungen.

Die dünne Verteilung (dilute distribution) gilt für heterogene Medien mit einem geringen Anteil von Einschlüssen, denn sie geht davon aus, dass die eingeschlossenen Partikel so weit voneinander entfernt sind, dass es zu keiner Wechselwirkung kommt. Ist diese Grundannahme zulässig, so darf ein einziger Einschluss betrachtet werden, der in ein unendlich ausgedehntes, homogenes Medium eingebettet ist. Für den Fall eines ellipsenförmigen Partikels kann die Lösung der dünnen Verteilung mit Hilfe des Eshelby-Ansatzes analytisch gefunden werden.

Weitere wichtige Lösungen sind die Schranken nach Voigt (1889) und Reuss (1929) sowie Hashin and Shtrikman (1963), denn sie liefern obere und untere Grenzwerte der effektiven elastischen Eigenschaften, welche in den folgenden Abschnitten angegeben werden. Sie sollen später dazu dienen, die auf numerischem Weg gewonnenen, homogen elastischen Eigenschaften zu bewerten.

### 4.3.1 Schranken der elastischen Eigenschaften nach Voigt und Reuss

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Kenntnis der phasengemittelten Konzentrationstensoren nach Hill die effektiven Materialtensoren unmittelbar verfügbar macht. Die einfachsten Annahmen zur Gestalt der Konzentrationstensoren gehen auf Voigt (1889) und Reuss (1929) zurück.

Voigt geht von der Annahme aus, dass im RVE ein homogener Verzerrungszustand herrscht, der identisch mit dem makroskopischen Verzerrungen ist. Dann werden die Verzerrungskonzentrationstensoren zu Einheitstensoren  $\mathbb{I}$

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle = \mathbf{A}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \mathbb{I} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.36)$$

und es gilt:

$$\mathbf{C}_V^* = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{C}^{(i)} : \mathbb{I} = \sum_{i=1}^N c^{(i)} \mathbf{C}^{(i)} \quad (4.37)$$

Der effektive Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}^*$  wird so zum Volumenmittelwert der Steifigkeiten  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{C}_V^* = \frac{1}{|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \mathbf{C}(\mathbf{x}) dV \quad (4.38)$$

Reuss geht im Gegensatz zu Voigt von der Annahme aus, dass im RVE ein homogener Spannungszustand herrscht, der identisch mit dem makroskopischen Spannungen ist.

Dann sind die Spannungskonzentrationstensoren  $\mathbf{B}^{(i)}$  Einheitstensoren  $\mathbf{I}$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \rangle = \mathbf{B}^{(i)} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{I} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (4.39)$$

und es gilt:

$$\mathbf{S}_R^* = \sum_{i=1}^N v^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} : \mathbf{I} = \sum_{i=1}^N c^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \quad (4.40)$$

Der effektive Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{S}^*$  ist identisch mit dem Volumenmittelwert der Nachgiebigkeiten  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{S}_R^* = \frac{1}{|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \mathbf{S}(\mathbf{x}) dV \quad (4.41)$$

Die Tensoren  $\mathbf{C}_V^*$  und  $\mathbf{S}_R^*$  liefern die oberen und unteren Schranken der effektiven elastischen Eigenschaften, was wie folgt gezeigt werden kann. Laut der Makrohomo- genitätsbedingung nach Hill in Gl. (4.2) beträgt die elastische Formänderungsenergie:

$$\psi^* = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) dV \quad (4.42)$$

Die Voigtsche Annahme eines konstanten Verzerrungsfelds  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^0$  liefert die makroskopische Formänderungsarbeit:

$$\psi_V^* = \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^0 : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}^0 dV = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) dV : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.43)$$

Aus der Gegenüberstellung der Gln. (4.43) und (4.38) folgt:

$$\psi_V^* = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle : \mathbf{C}_V^* : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (4.44)$$

Da zur exakten Lösung  $\boldsymbol{\epsilon}$  des Verzerrungsfelds das Minimum der Formänderungsenergie gehört, gilt:

$$\psi_V^* \geq \psi^* \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C}_V^* \geq \mathbf{C}^* \quad (4.45)$$

Somit stellen die Steifigkeiten  $\mathbf{C}_V^*$  nach Voigt obere Grenzwerte dar. Analog kann gezeigt werden, dass der Ansatz nach Reuss die unteren Schranken für die elastischen Eigenschaften definiert. Die Komplementärenergie

$$\tilde{\psi}^* = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \mathbf{S}^* : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (4.46)$$

berechnet sich unter der Annahmen eines konstanten Spannungsfelds  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0$  nach Reuss zu:

$$\tilde{\psi}_R^* = \frac{1}{2} \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}^0 dV = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{S}(\mathbf{x}) dV : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (4.47)$$



Der Vergleich der Ausdrücke (4.47) und (4.41) zeigt unmittelbar:

$$\tilde{\psi}_R^* = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \mathbf{S}_R^* : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (4.48)$$

Da zur exakten Lösung  $\boldsymbol{\sigma}$  des Spannungsfelds das Minimum der Komplementärenergie gehört, gilt:

$$\tilde{\psi}_R^* \geq \tilde{\psi}^* \quad \longrightarrow \quad \mathbf{S}_R^* \geq \mathbf{S}^* \quad (4.49)$$

Somit stellen die Nachgiebigkeiten  $\mathbf{S}_R^*$  nach Reuss Maximalwerte dar, was wegen  $\mathbf{C}_R^* = \mathbf{S}_R^{*-1}$  gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass der Tensor  $\mathbf{C}_R^*$  die unteren Schranken für die elastischen Parameter festlegt.

### 4.3.2 Variationsprinzip nach Hashin & Shtrikman

Die Grenzen der homogenisierten elastischen Eigenschaften eines mehrphasigen Materials nach Voigt und Reuss, die im vorigen Abschnitt eingeführt worden sind, lassen sich durch die Anwendung des Variationsprinzips nach Hashin & Shtrikman enger ziehen. Details hierzu können Christensen (1979) entnommen werden. Als Ergebnis findet man die nachfolgend angegebenen Grenzwerte für die Ingenieurkonstanten eines zweiphasigen, elastisch transversalisotropen Werkstoffs:

$$\begin{aligned} G_2 + \frac{v_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{v_2(k_2 + 2G_2)}{2G_2(k_2 + G_2)}} &\leq G_t^* \leq G_1 + \frac{v_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{v_1(k_1 + 2G_1)}{2G_1(k_1 + G_1)}} \\ G_2 + \frac{v_1}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{v_2}{2G_2}} &\leq G_a^* \leq G_1 + \frac{v_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{v_1}{2G_1}} \\ \frac{v_1 v_2 (\nu_1 - \nu_2) \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}{\frac{v_1}{k_2} + \frac{v_2}{k_1} + \frac{1}{G_2}} &\leq \nu_a^* - v_1 \nu_1 - v_2 \nu_2 \leq \frac{v_1 v_2 (\nu_1 - \nu_2) \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}{\frac{v_1}{k_2} + \frac{v_2}{k_1} + \frac{1}{G_1}} \\ \frac{4v_1 v_2 (\nu_1 - \nu_2)^2}{\frac{v_1}{k_2} + \frac{v_2}{k_1} + \frac{1}{G_2}} &\leq E_a^* - v_1 E_1 - v_2 E_2 \leq \frac{4v_1 v_2 (\nu_1 - \nu_2)^2}{\frac{v_1}{k_2} + \frac{v_2}{k_1} + \frac{1}{G_1}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die Gln. (4.50) gelten für die Schubmoduln  $G_1 > G_2$  und Kompressionsmoduln  $K_1 > K_2$ . Die Variable  $k = K + G/3$  stellt den Kompressionsmodul eines isotropen Materials im ebenen Spannungszustand dar. Die Volumenanteile der Phasen sind mit  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet.

## 4.4 Numerische Homogenisierungsmethoden

Die numerische Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen wird im Rahmen dieser Arbeit vornehmlich mit der verallgemeinerten Methode der Zellen (GMC: Generalized Method of Cells) und der hochauflösenden Methode der Zellen (HFGMC: High Fidelity Generalized Method of Cells) nach Aboudi (1991), Pindera and Bednarczyk (1999b) und Aboudi et al. (2002) durchgeführt. Für die Verifikation der Ergebnisse von GMC und HFGMC werden Vergleichsrechnungen zur Homogenisierung elastischer Verbundwerkstoffe mittels der Methode der finiten Elemente Methode angestellt.

### 4.4.1 Randbedingungen

Eine besondere Bedeutung kommt der Wahl der Randbedingungen zu. Homogene Randbedingungen führen in der Regel zu einer Überschätzung der effektiven elastischen Steifigkeiten, denn sie stellen eine stärkere Restriktion des Verschiebungsfelds im RVE dar als periodische Randbedingungen. In Abb. 4.3 ist ein Ausschnitt aus einem doppelt-periodisch faserverstärkten Werkstoff dargestellt. Wird dieser einem makroskopisch konstanten (homogenen) Schubfeld  $\epsilon_{ij}^M$  unterworfen, so stellt sich mikroskopisch das Verschiebungsfeld

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \epsilon_{ij}^M x_j + \tilde{u}_i(\mathbf{y}) \quad (4.51)$$

ein, das sich aus dem homogenen Anteil  $\epsilon_{ij}^M x_j$  in den Makrokoordinaten  $\mathbf{x}$  und den Fluktuationen  $\tilde{u}_i(\mathbf{y})$  in den Mikrokoordinaten  $\mathbf{y}$  des RVEs zusammensetzt.

Die Periodenlänge der Fluktuationen ist durch die Abmessungen  $\mathbf{d} = (2d_2, 2d_3)$  der Einheitszelle bestimmt, d.h.:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{y}) = \tilde{u}_i(\mathbf{y} + \mathbf{d}) \quad (4.52)$$

Der Unterschied zwischen homogenen und periodischen Randbedingungen besteht darin, dass die Fluktuationen auf dem Rand der Einheitszelle zugelassen werden oder nicht. Die homogenen Randbedingungen

$$u_i|_{\partial\Omega} = \epsilon_{ij}^M x_j|_{x_j \in \partial\Omega} \quad (4.53)$$

und

$$\tilde{u}_i(y_2, d_3) = \tilde{u}_i(y_2, -d_3) = \tilde{u}_i(d_2, y_3) = \tilde{u}_i(-d_2, y_3) = 0 \quad (4.54)$$

zwingen der verformten Einheitszelle die Kontur eines Rhomboids auf. Die periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(y_2, d_3) - \tilde{u}_i(y_2, -d_3) &= 0 \\ \tilde{u}_i(d_2, y_3) - \tilde{u}_i(-d_2, y_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

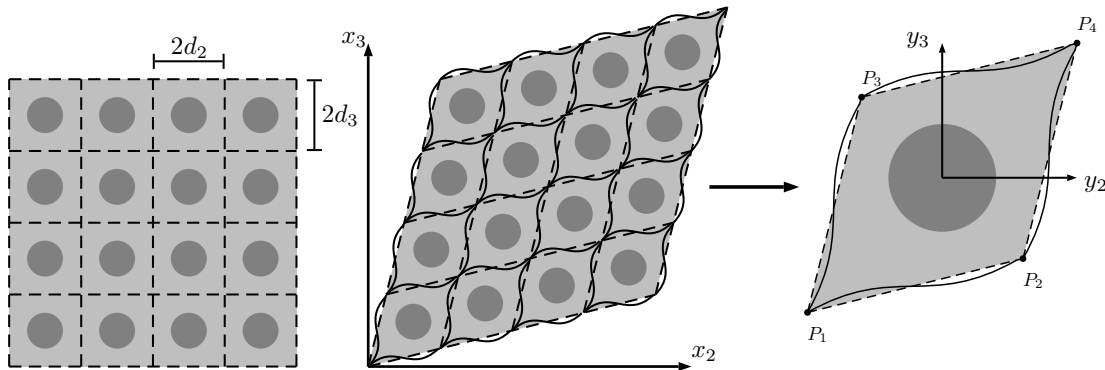


Abbildung 4.3: Homogene und periodische Randbedingungen. Links: doppelt-periodisch faserverstärkter Werkstoff. Mitte: makroskopische Schubdeformation  $\epsilon_{23}^M = \epsilon_{32}^M$ . Rechts: Einheitszelle mit homogenen (gestrichelten) und periodischen (durchgezogenen) Verschiebungsrandbedingungen

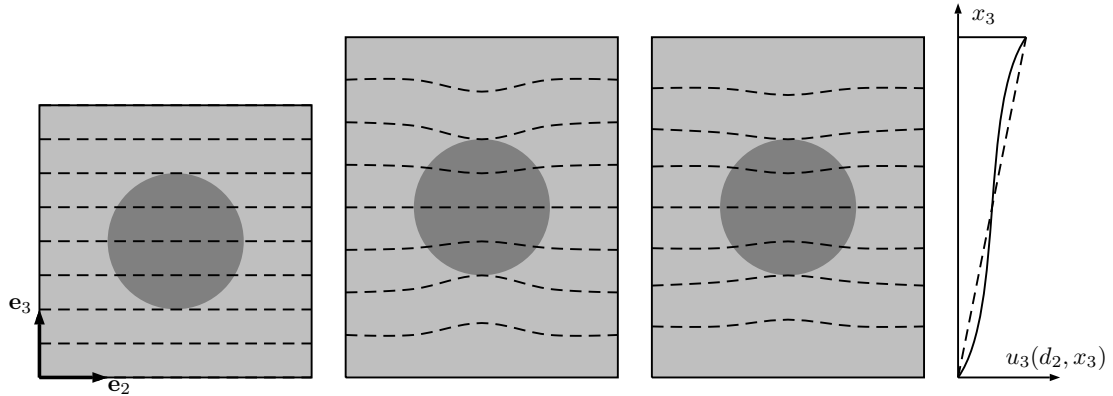


Abbildung 4.4: Links: Einheitszelle mit materiellen Linien. Mitte: Deformierte Einheitszelle bei homogenen RB. Rechts: Deformierte Einheitszelle bei periodischen RB

fordern, dass die Verschiebungsfuktuationen auf gegenüberliegenden Randpunkten gleich sind, was die Kompatibilität des Verschiebungsfelds sicherstellt: zwischen benachbarten Einheitszellen entstehen keine Klaffungen oder Durchdringungen. Die Verschiebungen  $u_i$  der Eckpunkte  $P_1$  bis  $P_4$  werden wie folgt vorgeschrieben

$$u_i^{P_n} = \epsilon_{ij}^M x_j^{P_n}, \quad (4.56)$$

um mittlere Verzerrungen des RVEs zu erhalten, die den Makrodeformationen entsprechen. Der Betrag der Fluktuationen auf den Rändern ist nicht vorgeschrieben, sondern stellt sich in Abhängigkeit der Steifigkeitsverhältnisse innerhalb der Zelle und des Deformationsprozesses so ein, dass die Formänderungsenergie minimal wird. Je größer die Steifigkeit des Einschlusses und sein Volumenanteil sind, desto größer sind i.d.R. die Fluktuationen  $\tilde{\mathbf{u}}$ , d.h. die lokalen Störungen des mittleren Verschiebungsfelds  $\epsilon^M \mathbf{x}$  innerhalb der Einheitszelle und damit auch auf dem Rand. Die homogenen Randbedingungen zwingen den Rand zu einem linearen Verformungsverlauf, was nur durch die Wirkung zusätzlicher Randspannungen  $\Delta \mathbf{t}$  möglich ist, die bei periodischen RB nicht auftreten. Diese Randspannungen leisten eine zusätzliche äußere Arbeit, weswegen die im RVE gespeicherte, elastische Formänderungsenergie bei homogenen RB gegenüber periodischen RB ebnefalls erhöht ist. Da die effektiven Steifigkeiten von der gespeicherten Verzerrungsenergie abhängen, werden die effektiven Steifigkeiten bei homogenen RB zu hoch berechnet.

Die periodischen RB spielen vor allem bei Schubdeformationen eine Rolle, denn hier können die Verschiebungen  $\tilde{\mathbf{u}}$  auf dem Rand wesentlich werden, wie Abb. 4.3 erkennen lässt. Aus Symmetriegründen stellen sich dagegen kaum Fluktuationen  $\tilde{\mathbf{u}}$  auf dem Rand der Zelle ein, wenn z. B. die makroskopische Normaldehnung  $\langle \epsilon_{33} \rangle \neq 0$  vorgegeben wird. Die Abb. 4.4 verdeutlicht dies an einem symmetrischen RVE. Entlang des oberen und unteren Rands müssen die Verschiebungen  $\tilde{u}_3$  zur gleichzeitigen Wahrung der Symmetrie und der Kompatibilität verschwinden. Ebenso tritt weder am rechten noch am linken Rand eine Fluktuation  $\tilde{u}_2$  auf. Allerdings sind Fluktuationen  $\tilde{u}_3$  parallel zu den vertikalen Rändern möglich. Die Zelle in Abb. 4.4 ist im unverformten Zustand mit äquidistanten Linien überzogen. Bei homogenen Randbedingungen bleiben die Schnittpunkte der Linien mit dem linken und rechten Rand während der Verformung äquidistant in  $e_3$ -Richtung, denn es wird die auf den seitlichen Rändern linear verlaufende Randverschiebung  $u_3 = \langle \epsilon_{33} \rangle x_3$  vorgeschrieben.

Im Fall periodischer Randbedingungen ist dies nicht mehr der Fall. Ergänzend zum linear verlaufenden Anteil ( $\epsilon_{33} x_3$ ) der Randverschiebung aus den homogenen Randbedingungen (gestrichelter Verlauf in Abb. 4.4 rechts) tritt der fluktuierende Anteil  $\tilde{u}_3(x_3)$  (Differenz zwischen durchgezogener und gestrichelter Linie) auf. Die Auswirkung der Wahl der Randbedingung auf die effektiven Eigenschaften ist bei reinen Zug- und Druckdeformationen meist vernachlässigbar gering.

#### 4.4.2 Die verallgemeinerte Methode der Zellen

Die ursprüngliche Idee zur Formulierung der Methode der Zellen (*Generalized Method of Cells, GMC*) geht auf Aboudi (1991) zurück. Die Grundannahme der Methode besteht in der Vereinfachung, dass unendlich lange Fasern doppelt-periodisch in ein homogenes Matrixmaterial eingebettet vorliegen. Unter dieser Voraussetzung besteht das repräsentative Volumenelement aus einer einzigen Faser und der sie umgebenden Matrix. Das diskrete Modell des RVEs der Originalformulierung der Zellenmethode besteht aus vier rechtwinkligen Unterzellen, von denen eine die Faser darstellt.

In späteren Arbeiten wird die Methode dahingehend verallgemeinert, dass eine beliebige Anzahl von Unterzellen gewählt werden kann. Durch die geeignete Wahl der Unterzellgeometrie sind so verfeinerte Approximationen des runden Faserquerschnitts möglich. Die dreidimensionale Diskretisierung des repräsentativen Volumenelements erlaubt die Beschreibung von Werkstoffen mit Kurzfasern oder Partikeln als Verstärkungseinlagen.

Die erste Fassung der verallgemeinerten Methode der Zellen nach Paley and Aboudi (1992) besitzt das Potential einer numerisch wesentlich effizienteren Darstellung. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die konstitutiven Modelle für die Phasenwerkstoffe in einer Form vorliegen, die die Verzerrungen als Funktional der Spannungen darstellen. Der ursprünglich verschiebungsbasierte Ansatz wandelt sich durch die Reformulierung in eine spannungsbasierte Formulierung. Der Effizienzgewinn liegt darin begründet, dass die Kontinuität der mittleren Spannungen über die Unterzellgrenzen hinweg verlangt wird. Da die Spannungen innerhalb einer Unterzelle ortsunveränderlich sind, können die Unterzellspannungen in bestimmten Zellclustern des diskreten Modells a priori gleichgesetzt werden. Dadurch wird es im Ergebnis möglich, den Spannungszustand innerhalb der Einheitszelle allein durch die Randspannungen auf der Oberfläche auszudrücken, was die Zahl der Unbekannten wesentlich reduziert.

#### Diskretisierung des RVEs

Das repräsentative Volumenelement der Zellenmethode ist ein Quader mit den Kantenlängen  $d/h/l$ . Die Einheitsvektoren des mikroskaligen, kartesischen Koordinatensystems  $\bar{\mathbf{e}}_i$  weisen parallel zu den Kanten des RVEs, siehe Abb. 4.5.

Das Gebiet  $\Omega_{\text{RVE}}$  des RVEs wird in  $N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma$  quaderförmige Elemente  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)} \subset \Omega_{\text{RVE}}$ , die sogenannten Unterzellen, unterteilt. Der Kopfzeiger  $(\alpha\beta\gamma)$  stellt die durch-

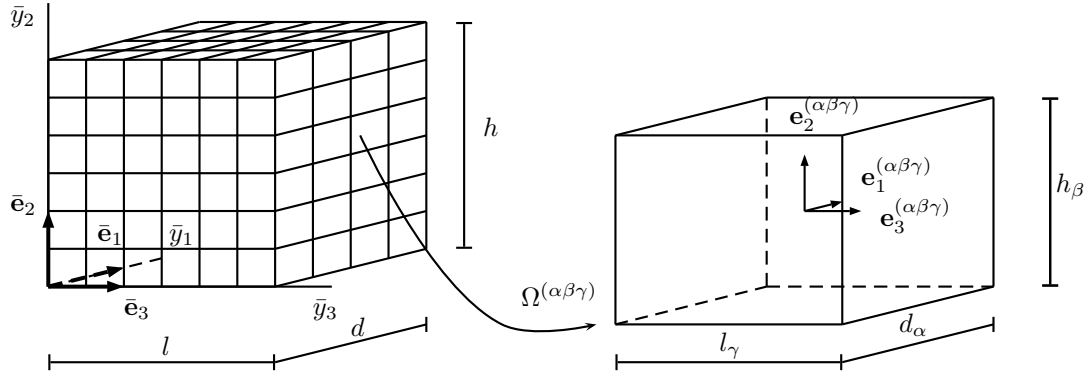


Abbildung 4.5: Räumliche Diskretisierung des RVEs durch Unterzellen. Links: RVE. Rechts: Unterzelle  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$

laufende Numerierung der Zellen in den drei Raumrichtungen dar:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \dots, N_\alpha := \overline{1, N_\alpha} \quad , \quad N_\alpha = \text{Anzahl in } \bar{e}_1 \\ \beta &= 1, 2, \dots, N_\beta := \overline{1, N_\beta} \quad , \quad N_\beta = \text{Anzahl in } \bar{e}_2 \\ \gamma &= 1, 2, \dots, N_\gamma := \overline{1, N_\gamma} \quad , \quad N_\gamma = \text{Anzahl in } \bar{e}_3 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Für das mikroskopische Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  innerhalb des RVEs wird unterzellenweise ein trilinearer Verschiebungsansatz gewählt. Zu diesem Zweck werden kartesische Elementkoordinatensysteme  $\mathbf{y}^{(\alpha\beta\gamma)} = y_i^{(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{e}_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  in den geometrischen Schwerpunkten jeder Unterzelle vereinbart, deren Einheitsvektoren in Richtung und Orientierung mit den Vektoren  $\bar{\mathbf{e}}_i$  übereinstimmen. Das angenäherte Verschiebungsfeld in Abhängigkeit der Elementkoordinaten lautet:

$$u_i^{(\alpha\beta\gamma)} = w_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} y_1^{(\alpha\beta\gamma)} + \Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} y_2^{(\alpha\beta\gamma)} + \Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)} y_3^{(\alpha\beta\gamma)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.58)$$

Die Variablen  $w_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  beschreiben die drei Translationen des geometrischen Schwerpunkts der Unterzelle  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$ ; die Mikrovariablen  $\Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ ,  $\Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  und  $\Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  definieren die lineare Veränderlichkeit des Verschiebungsfelds  $u_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  innerhalb der Zelle. Die infinitesimalen Verzerrungen

$$\epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial y_i} \right) \quad (4.59)$$

im Inneren einer Unterzelle folgen unmittelbar aus dem Verschiebungsfeld (4.58) zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} &= \Phi_1^{(\alpha\beta\gamma)} \quad , \quad \epsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{2} (\Psi_1^{(\alpha\beta\gamma)} + \Phi_2^{(\alpha\beta\gamma)}) \\ \epsilon_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} &= \Psi_2^{(\alpha\beta\gamma)} \quad , \quad \epsilon_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{2} (\Xi_2^{(\alpha\beta\gamma)} + \Psi_3^{(\alpha\beta\gamma)}) \\ \epsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} &= \Xi_3^{(\alpha\beta\gamma)} \quad , \quad \epsilon_{31}^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{2} (\Phi_3^{(\alpha\beta\gamma)} + \Xi_1^{(\alpha\beta\gamma)}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aufgrund des trilinearen Verschiebungsansatzes sind die Verzerrungen nach Gl. (4.60) im Gebiet der Unterzelle räumlich konstant und daher mit dem Volumennittelwert

$$\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{|V_{\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}}|} \int_{V_{\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}}} \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \, dV \quad (4.61)$$

identisch:

$$\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}. \quad (4.62)$$

### Mittelung der Verformungen über die Unterzellränder

Durch die Integration der diskreten Verschiebungsfelder  $u_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  über die Randflächen  $(\pm i)\partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  der Unterzellen  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  erhält man die mittleren Verschiebungen  $(\pm i)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  auf den sechs Unterzelloberflächen:

$$(\pm 1)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{h_\beta l_\gamma} \int_{-h_\beta/2}^{+h_\beta/2} \int_{-l_\gamma/2}^{+l_\gamma/2} u_i^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{y}) \, dy_3 \, dy_2 \Big|_{y_1=\pm d_\alpha/2} \quad (4.63)$$

$$(\pm 2)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{d_\alpha l_\gamma} \int_{-d_\alpha/2}^{+d_\alpha/2} \int_{-l_\gamma/2}^{+l_\gamma/2} u_i^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{y}) \, dy_3 \, dy_1 \Big|_{y_2=\pm h_\beta/2} \quad (4.64)$$

$$(\pm 3)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{d_\alpha h_\beta} \int_{-d_\alpha/2}^{+d_\alpha/2} \int_{-h_\beta/2}^{+h_\beta/2} u_i^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{y}) \, dy_2 \, dy_1 \Big|_{y_3=\pm l_\gamma/2} \quad (4.65)$$

Der vordere Kopfzeiger  $(\pm i)$  identifiziert den äußeren Normalenvektor  $(\pm i)\mathbf{n}^{(\alpha\beta\gamma)} = \pm \mathbf{e}_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  der jeweiligen Randfläche  $(\pm i)\partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$ . Die gemäß den Gln. (4.63) bis (4.65) gemittelten Oberflächenverschiebungen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} (\pm 1)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha\beta\gamma)} \pm \phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{d_\alpha}{2} \\ (\pm 2)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha\beta\gamma)} \pm \Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{h_\beta}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \\ (\pm 3)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha\beta\gamma)} \pm \Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{l_\gamma}{2} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Im Weiteren sollen Diskontinuitäten des Verschiebungsfelds innerhalb des diskretisierten RVEs nicht von vornherein ausgeschlossen werden, da diese später zur Modellierung von Unstetigkeiten entlang der Phasengrenzen oder der Entstehung von Rissen im Werkstoff herangezogen werden. Es wird so möglich sein, die Nachgiebigkeit und auch die bei hinreichend hoher Beanspruchung auftretende Schädigung des Verbunds von Matrix und Fasereinlagen zu beschreiben. Die mittleren Verschiebungsdiskontinuitäten zwischen benachbarten Zellen ergeben sich aus den Differenzen der gemittelten Oberflächenverschiebungen nach Gl. (4.66)<sub>1-3</sub>:

$$\begin{aligned} \llbracket (1)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket &:= (-1)\langle u_i^{((\alpha+1)\beta\gamma)} \rangle - (+1)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \llbracket (2)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket &:= (-2)\langle u_i^{(\alpha(\beta+1)\gamma)} \rangle - (+2)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \llbracket (3)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket &:= (-3)\langle u_i^{(\alpha\beta(\gamma+1))} \rangle - (+3)\langle u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.67)$$

Für die Berechnung der unbekanntenen Mikrofildvariablen in Abhängigkeit der makroskopischen Verzerrungen wird das diskrete RVE den homogenen Verschiebungsrandbedingungen

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_{\text{RVE}}} = \boldsymbol{\epsilon}^M \bar{\mathbf{y}} \quad (4.68)$$

in Abhängigkeit des RVE Koordinatensystems  $\bar{\mathbf{y}}$  (s. Abb. 4.5) unterworfen. Dem *average strain*-Theorem zu Folge stellt der in den Randbedingungen (4.68) enthaltene Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  den Makroverzerrungszustand dar. Ausgeschrieben lauten die Randbedingungen (4.68) in den RVE-Koordinaten als Funktion der Makrodehnungen:

$$\begin{aligned} u_i|_{\bar{y}_1=0} &= \epsilon_{i2}^M \bar{y}_2 + \epsilon_{i3}^M \bar{y}_3 \\ u_i|_{\bar{y}_1=d} &= \epsilon_{i1}^M d + \epsilon_{i2}^M \bar{y}_2 + \epsilon_{i3}^M \bar{y}_3 \\ u_i|_{\bar{y}_2=0} &= \epsilon_{i1}^M \bar{y}_1 + \epsilon_{i3}^M \bar{y}_3 \\ u_i|_{\bar{y}_2=h} &= \epsilon_{i1}^M \bar{y}_1 + \epsilon_{i2}^M h + \epsilon_{i3}^M \bar{y}_3 \\ u_i|_{\bar{y}_3=0} &= \epsilon_{i1}^M \bar{y}_1 + \epsilon_{i2}^M \bar{y}_2 \\ u_i|_{\bar{y}_3=l} &= \epsilon_{i1}^M \bar{y}_1 + \epsilon_{i2}^M \bar{y}_2 + \epsilon_{i3}^M l \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.69)$$

### Herleitung der Verschiebungsgleichungen unter Beachtung der Randbedingungen

Die notwendigen kinematischen Gleichungen zur Berechnung der unbekanntenen Mikrofelder des Zellenmodells können aus den mittleren Oberflächenverschiebungen nach Gl. (4.66) und den Übergangsbedingungen (4.67) in Verbindung mit den Randbedingungen (4.69) hergeleitet werden. Zu diesem Zweck werden zunächst die Beziehungen (4.66) in die Gleichungen (4.67) eingesetzt und diese umgestellt. Dies führt auf die folgende Darstellung der Verschiebungen  $w_i$  in den geometrischen Schwerpunkten der Unterzellen:

$$w_i^{((\alpha+1)\beta\gamma)} = w_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{d_\alpha}{2} + \llbracket (1)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Phi_i^{((\alpha+1)\beta\gamma)} \frac{d_{\alpha+1}}{2} \quad (4.70)$$

$$w_i^{(\alpha(\beta+1)\gamma)} = w_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{h_\beta}{2} + \llbracket (2)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Psi_i^{(\alpha(\beta+1)\gamma)} \frac{h_{\beta+1}}{2} \quad (4.71)$$

$$w_i^{(\alpha\beta(\gamma+1))} = w_i^{(\alpha\beta\gamma)} + \Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)} \frac{l_\gamma}{2} + \llbracket (3)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Xi_i^{(\alpha\beta(\gamma+1))} \frac{l_{\gamma+1}}{2} \quad (4.72)$$

Die Gleichungen (4.70) bis (4.72) beschreiben den Verlauf des Verschiebungsfelds vom Schwerpunkt der Einheitszelle bis zu jenem des Nachbarn in Richtung der drei Koordinatenachsen  $\bar{y}_i$ . Die Unbekannten  $w_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  in den Zellen  $\Omega^{((\alpha+1)\beta\gamma)}$ ,  $\Omega^{(\alpha(\beta+1)\gamma)}$  und  $\Omega^{(\alpha\beta(\gamma+1))}$  berechnen sich laut Gl. (4.70) bis (4.72) rekursiv aus den Mikrovariablen der jeweils vorhergehenden Zelle  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  zuzüglich eines Zuwachses, der durch die Mikrovariablen der aktuellen Zelle festgelegt ist. Die rekursive Berechnungsweise kann genutzt werden, um die Verschiebungen  $w_i$  in den Randzellen  $\Omega^{(N_\alpha\beta\gamma)}$ ,  $\Omega^{(\alpha N_\beta\gamma)}$  und  $\Omega^{(\alpha\beta N_\gamma)}$  des diskretisierten RVEs in Abhängigkeit der  $w_i$  in den Randzellen  $\Omega^{(1\beta\gamma)}$ ,  $\Omega^{(\alpha 1\gamma)}$  und  $\Omega^{(\alpha\beta 1)}$  auszudrücken. Für die Entwicklung der Verschiebungsfelder entlang derjenigen Zellen, die in  $\bar{y}_1$ -Richtung aneinander angrenzen, siehe Abbildung 4.6, gilt:

$$w_i^{(N_\alpha\beta\gamma)} = w_i^{(1\beta\gamma)} + \Phi_i^{(1\beta\gamma)} \frac{d_1}{2} + \sum_{\alpha=2}^{N_\alpha-1} \Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} d_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \llbracket (1)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Phi_i^{(N_\alpha\beta\gamma)} \frac{d_{N_\alpha}}{2} \quad (4.73)$$

Für die in  $\bar{y}_2$ -Richtung benachbarten Zellen folgt:

$$w_i^{(\alpha N_\beta\gamma)} = w_i^{(\alpha 1\gamma)} + \Psi_i^{(\alpha 1\gamma)} \frac{h_1}{2} + \sum_{\beta=2}^{N_\beta-1} \Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} h_\beta + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket (2)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Psi_i^{(\alpha N_\beta\gamma)} \frac{h_{N_\beta}}{2} \quad (4.74)$$

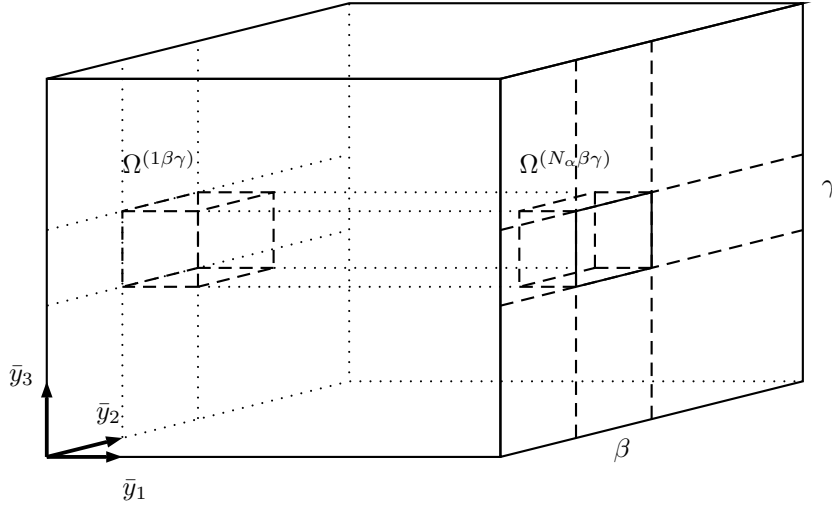


Abbildung 4.6: Randzellen  $\Omega^{(1\beta\gamma)}$  und  $\Omega^{(N_\alpha\beta\gamma)}$  mit gleichen Indizes  $\beta$  und  $\gamma$

und schließlich für eine Reihe von Nachbarzellen in  $\bar{y}_3$ -Richtung:

$$w_i^{(\alpha\beta N_\gamma)} = w_i^{(\alpha\beta 1)} + \Xi_i^{(\alpha\beta 1)} \frac{l_1}{2} + \sum_{\gamma=2}^{N_\gamma-1} \Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)} l_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \llbracket^{(3)} u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket + \Xi_i^{(\alpha\beta N_\gamma)} \frac{l_{N_\gamma}}{2} \quad (4.75)$$

Die mittleren Verschiebungen gemäß den Gln. (4.66) auf den äußeren Randflächen der äußeren Unterzellen müssen den homogenen Verschiebungsrandbedingungen (4.69) genügen:

$$\begin{aligned} (+1) \langle u_i^{(N_\alpha\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(N_\alpha\beta\gamma)} + \Phi_i^{(N_\alpha\beta\gamma)} \frac{d_{N_\alpha}}{2} = u_i|_{\bar{y}_1=d} \\ (-1) \langle u_i^{(1\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(1\beta\gamma)} - \Phi_i^{(1\beta\gamma)} \frac{d_1}{2} = u_i|_{\bar{y}_1=0} \\ (+2) \langle u_i^{(\alpha N_\beta\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha N_\beta\gamma)} + \Psi_i^{(\alpha N_\beta\gamma)} \frac{h_{N_\beta}}{2} = u_i|_{\bar{y}_2=h} \\ (-2) \langle u_i^{(\alpha 1\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha 1\gamma)} - \Psi_i^{(\alpha 1\gamma)} \frac{h_1}{2} = u_i|_{\bar{y}_2=0} \\ (+3) \langle u_i^{(\alpha\beta N_\gamma)} \rangle &= w_i^{(\alpha\beta N_\gamma)} + \Xi_i^{(\alpha\beta N_\gamma)} \frac{l_{N_\gamma}}{2} = u_i|_{\bar{y}_3=l} \\ (-3) \langle u_i^{(\alpha\beta 1)} \rangle &= w_i^{(\alpha\beta 1)} - \Xi_i^{(\alpha\beta 1)} \frac{l_1}{2} = u_i|_{\bar{y}_3=0} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Die Randbedingungen (4.76)<sub>1,2</sub> lassen sich nach dem jeweiligen  $w_i$  auflösen und anschließend in die Gleichungen (4.73) einsetzen. Dies führt nach einfacher Umordnung der Terme und Einbeziehung der Gln. (4.69)<sub>1,2</sub> auf das folgende Ergebnis:

$$u_i|_{\bar{y}_1=d} - u_i|_{\bar{y}_1=0} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)} d_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \llbracket^{(1)} u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = d \epsilon_{i1}^M \quad (4.77)$$

Die Kombination der Gleichungen (4.69)<sub>3,4</sub>, (4.76)<sub>3,4</sub> und (4.74) ergibt:

$$u_i|_{\bar{y}_2=h} - u_i|_{\bar{y}_2=0} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)} h_\beta + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket^{(2)} u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = h \epsilon_{i2}^M \quad (4.78)$$



Durch Beachtung der Gleichungen (4.69)<sub>5,6</sub> und (4.76)<sub>5,6</sub> wird zuletzt aus Gl. (4.75):

$$u_i|_{\bar{y}_3=l} - u_i|_{\bar{y}_3=0} = \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)} l_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \llbracket^{(3)} u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = l \epsilon_{i3}^M \quad (4.79)$$

Die insgesamt  $3(N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta)$  Gleichungen (4.77) bis (4.79) beschreiben die kinematischen Beziehungen zwischen den Randverschiebungen des RVEs, welche durch die makroskopischen Verzerrungen  $\epsilon^M$  gegeben sind, und den Variablen  $\Phi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$ ,  $\Psi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  und  $\Xi_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  sowie den Diskontinuitäten  $\llbracket^{(\pm i)} u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  des diskreten Mikroverschiebungsfelds innerhalb des Volumenelements. Die Unbekannten  $w_i^{(\alpha\beta\gamma)}$  sind durch die Einbeziehung der Randbedingungen eliminiert worden. Die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten kann reduziert werden, wenn die Beziehungen in Gl. (4.60) zwischen den Unterzellverzerrungen  $\epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  und den Mikrovariablen berücksichtigt werden.

Für  $i = 1$  folgt aus Gl. (4.77) mit Gln. (4.60) und (4.62) ein System aus  $N_\beta \times N_\gamma$  linearen Gleichungen, die den kinematischen Zusammenhang zwischen der makroskopischen Verzerrung  $\epsilon_{11}^M$  und den Verzerrungen  $\langle \epsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  in den Unterzellen sowie den Verschiebungsdiskontinuitäten  $\llbracket^{(1)} u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  herstellen:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \langle \epsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle d_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \llbracket^{(1)} u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = d \epsilon_{11}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.80)$$

Aus der Gl. (4.78) wird unter Beachtung der Gln. (4.60) und (4.62) für den Fall  $i = 2$  ein System von  $N_\alpha \times N_\gamma$  Gleichungen:

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \langle \epsilon_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle h_\beta + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket^{(2)} u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = h \epsilon_{22}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.81)$$

Die Gl. (4.79) mit  $i = 3$  führt unter Beachtung der Gln. (4.60) und (4.62) auf  $N_\alpha \times N_\beta$  Beziehungen zwischen den Makroverzerrungen  $\epsilon_{33}^M$  und den Mikrofeldvariablen  $\langle \epsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  und  $\llbracket^{(3)} u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$ :

$$\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \langle \epsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle l_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \llbracket^{(3)} u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = l \epsilon_{33}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (4.82)$$

Die Umformung der kinematischen Gleichungen für die Schubdeformationen des RVEs erfordert mehrere Schritte. Zunächst wird in Gl. (4.77)  $i = 2$  und in Gl. (4.78)  $i = 1$  gesetzt, so dass sich folgende Gleichungssysteme ergeben:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \Phi_2^{(\alpha\beta\gamma)} d_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \llbracket^{(1)} u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = d \epsilon_{21}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.83)$$

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \Psi_1^{(\alpha\beta\gamma)} h_\beta + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket^{(2)} u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = h \epsilon_{12}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.84)$$

Für ein beliebiges aber festgehaltenes  $\gamma$  verbleiben  $N_\beta$  Gleichungen (4.83) mit  $\beta = \overline{1, N_\beta}$ , die beidseitig mit dem jeweiligen  $h_\beta$  multipliziert und anschließend über den

Zellindex  $\beta$  summiert werden können. Für wieder losgelassenes  $\gamma$  erhält man sodann:

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \Phi_2^{(\alpha\beta\gamma)} d_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \llbracket (1)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = dh\epsilon_{21}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.85)$$

In entsprechender Weise sind die Gln. (4.84) für beliebiges  $\gamma$  beidseitig mit  $d_\alpha$  zu multiplizieren und nachfolgend über den Zellindex  $\alpha$  zu summieren. Als Ergebnis gewinnt man:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \Psi_1^{(\alpha\beta\gamma)} h_\beta + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket (2)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = dh\epsilon_{12}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.86)$$

Aufgrund der Symmetrie des Verzerrungstensors  $\epsilon_{12}^M = \epsilon_{21}^M$  ergibt die Addition der Gleichungen (4.85) und (4.86) mit gleichem Index  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} h_\beta d_\alpha (\Phi_2^{(\alpha\beta\gamma)} + \Psi_1^{(\alpha\beta\gamma)}) + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\beta \llbracket (1)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} d_\alpha \llbracket (2)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = 2dh\epsilon_{12}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.87) \end{aligned}$$

Der Zusammenhang (4.60) zwischen den Unterzellverzerrungen und den Mikrovariablen ermöglicht es, die Gln. (4.87) weiter zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} h_\beta d_\alpha \langle \epsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \frac{h_\beta}{2} \llbracket (1)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{d_\alpha}{2} \llbracket (2)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = dh\epsilon_{12}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.88) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem (4.88) beschreibt die kinematische Verknüpfung der Makrodeformation  $\epsilon_{12}^M$  mit den Unterzellverzerrungen  $\langle \epsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  sowie den Diskontinuitäten  $\llbracket (2)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  und  $\llbracket (1)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  des Mikroverformungsfelds.

Für die beiden weiteren Schubdeformationszustände  $\epsilon_{13}^M$  und  $\epsilon_{23}^M$  können zu Gl. (4.88) analoge Beziehungen hergeleitet werden. Aus Gl. (4.77) mit  $i = 3$  und Gl. (4.79) mit  $i = 1$  kann abgeleitet werden, dass gelten muss:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} l_\gamma d_\alpha \langle \epsilon_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \frac{l_\gamma}{2} \llbracket (1)u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{d_\alpha}{2} \llbracket (3)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = dl\epsilon_{13}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (4.89) \end{aligned}$$

Die Kombination der Gln. (4.78) für  $i = 3$  mit den Gln. (4.79) für  $i = 2$  ergibt unter Berücksichtigung der Gln. (4.60) und (4.62):

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma \langle \epsilon_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{h_\beta}{2} \llbracket^{(3)} u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{l_\gamma}{2} \llbracket^{(2)} u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket = h l \epsilon_{23}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha} \quad (4.90) \end{aligned}$$

### Kontinuität der Mikrospannungsfelder

Die  $N_\alpha(N_\beta + 1) + N_\alpha(N_\gamma + 1) + N_\gamma(N_\beta + 1)$  kinematischen Gleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) liefern allein noch keine eindeutige Lösung für die  $6N_\alpha N_\beta N_\gamma$  unbekanntes Mikroverzerrungen  $\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  und  $3(N_\alpha - 1)(N_\beta - 1)(N_\gamma - 1)$  zu bestimmenden Diskontinuitäten  $\llbracket^{(i)} u_j^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$ . Als zusätzliche Bedingung wird von Aboudi (1991) die Kontinuität der mittleren Unterzellspannungen

$$\langle \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{|V_{\Omega(\alpha\beta\gamma)}|} \int_{V_{\Omega(\alpha\beta\gamma)}} \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} dV \quad (4.91)$$

zwischen benachbarten Zellen gefordert:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1j}^{(\alpha+1)\beta\gamma} \rangle &= \langle \sigma_{1j}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle & \alpha &= \overline{1, N_\alpha - 1}, \beta = \overline{1, N_\beta}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \\ \langle \sigma_{2j}^{(\alpha(\beta+1)\gamma)} \rangle &= \langle \sigma_{2j}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle & \alpha &= \overline{1, N_\alpha}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta - 1}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \\ \langle \sigma_{3j}^{(\alpha\beta(\gamma+1))} \rangle &= \langle \sigma_{3j}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle & \alpha &= \overline{1, N_\alpha}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma - 1} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Die Verschiebungsgleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) liefern mit den Spannungskontinuitätsbedingungen (4.92) ein vollständiges Gleichungssystem zur eindeutigen Bestimmung der Unterzellverzerrungen, solange keine Diskontinuitäten  $\llbracket^{(i)} u_j^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \neq 0$  auftreten. Die Forderungen nach der Kontinuität der mittleren Zellspannungen ermöglicht eine numerisch wesentlich effizientere Fassung der GMC als die in Aboudi (1991) gegebene. Die effiziente Reformulierung beruht darauf, die Einhaltung der Spannungskontinuitätsbedingungen analytisch in die Verschiebungsgleichungen einzuarbeiten, und so die Zahl der Gleichungen, die numerisch zu lösen sind, erheblich zu reduzieren. Zu diesem Zweck definieren Pindera and Bednarczyk (1999b) ausgehend von den Kontinuitätsgleichungen (4.92) die Spannungsvariablen  $T_{ij}^{(\cdot)}$ , die als Randspannungen auf den RVE-Oberflächen interpretiert werden können. Die Gln. (4.92)<sub>1</sub> mit  $j = 1$  liefern die Definition

$$T_{11}^{(\beta\gamma)} := \langle \sigma_{11}^{(1\beta\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{11}^{(2\beta\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{11}^{(N_\alpha\beta\gamma)} \rangle \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.93)$$

der Spannungsterme  $T_{11}^{(\beta\gamma)}$ , die stellvertretend für die Spannungen  $\langle \sigma_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  in den Unterzellen mit gleichem  $\beta$  und  $\gamma$  aber unterschiedlichem  $\alpha$  stehen. Aus den Gln. (4.92)<sub>2</sub> mit  $j = 2$  folgen die Spannungsterme  $T_{22}^{(\alpha\gamma)}$ .

$$T_{22}^{(\alpha\gamma)} := \langle \sigma_{22}^{(\alpha 1\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{22}^{(\alpha 2\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{22}^{(\alpha N_\beta\gamma)} \rangle \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.94)$$

Die Kontinuitätsbedingungen (4.92)<sub>3</sub> ermöglichen für  $j = 3$  die Definition der Spannungen  $T_{33}^{(\alpha\beta)}$ .

$$T_{33}^{(\alpha\beta)} := \langle \sigma_{33}^{(\alpha\beta 1)} \rangle = \langle \sigma_{33}^{(\alpha\beta 2)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{33}^{(\alpha\beta N_\gamma)} \rangle \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \beta = \overline{1, N_\beta}. \quad (4.95)$$

Die Gln. (4.92)<sub>2</sub> für  $i = 3$  und (4.92)<sub>3</sub> für  $i = 2$  führen mit der Symmetrie des Spannungstensors  $\langle \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{ji}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  auf:

$$T_{23}^{(\alpha)} := \begin{cases} \langle \sigma_{23}^{(\alpha 1\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{23}^{(\alpha 2\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{23}^{(\alpha N_\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{32}^{(\alpha\beta 1)} \rangle = \langle \sigma_{32}^{(\alpha\beta 2)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{32}^{(\alpha\beta N_\gamma)} \rangle \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha} \quad (4.96)$$

Auf Basis der Gln. (4.92)<sub>1</sub> für  $i = 3$  und (4.92)<sub>3</sub> für  $i = 1$  lassen sich die Spannungen  $T_{13}^{(\beta)}$  vereinbaren:

$$T_{13}^{(\beta)} := \begin{cases} \langle \sigma_{13}^{(1\beta\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{13}^{(2\beta\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{13}^{(N_\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{31}^{(\alpha\beta 1)} \rangle = \langle \sigma_{31}^{(\alpha\beta 2)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{31}^{(\alpha\beta N_\gamma)} \rangle \end{cases} \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (4.97)$$

Die Spannungen  $T_{12}^{(\gamma)}$  ergeben sich mit Gl. (4.92)<sub>1</sub> für  $i = 2$  und Gl. (4.92)<sub>2</sub> für  $i = 1$ :

$$T_{12}^{(\gamma)} := \begin{cases} \langle \sigma_{12}^{(1\beta\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{12}^{(2\beta\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{12}^{(N_\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{21}^{(\alpha 1\gamma)} \rangle = \langle \sigma_{21}^{(\alpha 2\gamma)} \rangle = \dots = \langle \sigma_{21}^{(\alpha N_\beta\gamma)} \rangle \end{cases} \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.98)$$

Der weitere Gang der Rechnung ist stark abhängig von den konstitutiven Annahmen, die den Zusammenhang zwischen den Unterzellspannungen und den Unterzellverzerrungen herstellen. Das prinzipielle Vorgehen besteht darin, die Verzerrungen  $\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  und die Diskontinuitäten  $\llbracket (i)u_j^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  anhand der Konstitutivmodelle durch spannungsbasierte Ausdrücke zu ersetzen. Der Effizienzgewinn liegt darin begründet, dass nicht die Unterzellspannungen  $\langle \sigma_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  in die konstitutiven Gleichungen eingehen, sondern die Spannungsterme  $T_{ij}^{(\cdot)}$ , deren Anzahl wesentlich geringer ist. Im folgenden Abschnitt wird die effiziente Reformulierung und Lösung des mikromechanischen Zellenmodells für elastische Werkstoffe behandelt. Die Darstellung bei viskoelastischen Werkstoffen, bei nichtlinear elastischem Verhalten sowie irreversiblen Schädigungsprozessen ist den Kapiteln 6 und 7 vorbehalten.

## Lösung des mikromechanischen Modells für linear elastisches Materialverhalten

Unter der Voraussetzung linear elastischen Werkstoffverhaltens in den Unterzellen  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  sind die Unterzellverzerrungen mit den Unterzellspannungen durch den linear elastischen Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)}$  – siehe Kapitel 2.1 – verknüpft:

$$\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = S_{ijkl}^{(\alpha\beta\gamma)} \langle \sigma_{kl}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \quad (4.99)$$

Da die Materialtensoren  $\mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)}$  als bekannt vorausgesetzt werden, können die insgesamt im GMC-Modell auftretenden  $6(N_\alpha \times N_\beta \times N_\gamma)$  unbekanntem Verzerrungen  $\langle \epsilon^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  durch die  $N_\alpha(N_\beta+1) + N_\beta(N_\gamma+1) + N_\gamma(N_\alpha+1)$  unbekanntem Spannungen  $T_{ij}^{(\cdot)}$  ausgedrückt werden. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Unbekannten um fast

eine Dimension ( $\sim N^2$  statt  $\sim N^3$ , für  $N$  Zellen je Raumrichtung). Die konstitutiven Gleichungen (4.99) lauten in Vektor-Matrix-Schreibweise unter Berücksichtigung der Definitionen (4.93) bis (4.98):

$$\begin{Bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{32}^{(\alpha\beta\gamma)} & S_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^{(\alpha\beta\gamma)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ T_{22}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{33}^{(\alpha\beta)} \\ T_{23}^{(\alpha)} \\ T_{13}^{(\beta)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

Über das elastische Spannungs-Separationsmodell nach Gl. (3.12) in Kapitel 3.2 sind die Verschiebungssprünge  $[[^{(i)}u_j^{(\alpha\beta\gamma)}]]$  mit den Grenzflächenspannungsvektoren

$$\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^T \mathbf{n} \quad (4.101)$$

verknüpft. Für die Grenzflächen mit den Normalen  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{e}}_2$  und  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{e}}_3$  erhält man:

$$\begin{Bmatrix} [[^{(1)}u_1^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(1)}u_2^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(1)}u_3^{(\alpha\beta\gamma)}]] \end{Bmatrix} = \Delta_I \begin{bmatrix} S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \\ T_{13}^{(\beta)} \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

$$\begin{Bmatrix} [[^{(2)}u_2^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(2)}u_3^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(2)}u_1^{(\alpha\beta\gamma)}]] \end{Bmatrix} = \Delta_I \begin{bmatrix} S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{22}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{23}^{(\alpha)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad (4.103)$$

$$\begin{Bmatrix} [[^{(3)}u_3^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(3)}u_1^{(\alpha\beta\gamma)}]] \\ [[^{(3)}u_2^{(\alpha\beta\gamma)}]] \end{Bmatrix} = \Delta_I \begin{bmatrix} S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{33}^{(\alpha\beta)} \\ T_{13}^{(\beta)} \\ T_{23}^{(\alpha)} \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

Das Einsetzen der Gln. (4.100) und (4.102) bis (4.104) in die Verschiebungsbeziehungen (4.80) bis (4.82) führt auf deren spannungsbasierte Reformulierung:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \left[ d_\alpha S_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} + (1 - \delta_{\alpha N_\alpha}) \Delta_I S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)} \right] T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ & + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} d_\alpha \left[ S_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{22}^{(\alpha\gamma)} + S_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{33}^{(\alpha\beta)} \right] = d \epsilon_{11}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta S_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} + (1 - \delta_{\beta N_\beta}) \Delta_I S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)} \right] T_{22}^{(\alpha\gamma)} + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \left[ S_{21}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{11}^{(\beta\gamma)} + S_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{33}^{(\alpha\beta)} \right] = h \epsilon_{22}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.106)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma (S_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} + (1 - \delta_{\gamma N_\gamma}) \Delta_I S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)}) \right] T_{33}^{(\alpha\beta)} + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \left[ S_{31}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{11}^{(\beta\gamma)} + S_{32}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{22}^{(\alpha\gamma)} \right] = l \epsilon_{33}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (4.107)$$

Das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  in den Gleichungen (4.105) bis (4.107) berücksichtigt die Tatsache, dass die Summierung über die Grenzflächenterme nicht über den gesamten Bereich der Summationsindizes auszuführen ist, siehe z.B. Gl. (4.80). Die  $N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta$  Gleichungen (4.105) bis (4.107) bilden ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \\ \mathbf{S}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{11} \\ \hat{\mathbf{T}}_{22} \\ \hat{\mathbf{T}}_{33} \\ \hat{\mathbf{T}}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{33} \\ \mathbf{K}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^M \\ \epsilon_{22}^M \\ \epsilon_{33}^M \\ \boldsymbol{\epsilon}_N^M \end{Bmatrix}, \quad (4.108)$$

dass die makroskopischen Normalverzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}_N^M \in \mathbb{R}^3$  in Beziehung zu den mikroskopischen Normalspannung  $\hat{\mathbf{T}}_N \in \mathbb{R}^{N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta}$  setzt. Die Einträge der Submatrizen in Gl. (4.108) sind im Anhang dieser Arbeit gegeben. Die Lösung des linearen Gleichungssystems nach den  $N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta$  unbekanntem Spannungen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{11}^T &=: \left\{ T_{11}^{(11)} \dots T_{11}^{(\beta\gamma)} \dots T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{22}^T &=: \left\{ T_{22}^{(11)} \dots T_{22}^{(\alpha\gamma)} \dots T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{33}^T &=: \left\{ T_{33}^{(11)} \dots T_{33}^{(\alpha\beta)} \dots T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)} \right\} \end{aligned} \quad (4.109)$$

lautet

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{11} \\ \hat{\mathbf{T}}_{22} \\ \hat{\mathbf{T}}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{11} & \hat{\mathbf{C}}_{12} & \hat{\mathbf{C}}_{13} \\ \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22} & \hat{\mathbf{C}}_{23} \\ \hat{\mathbf{C}}_{31} & \hat{\mathbf{C}}_{32} & \hat{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^M \\ \epsilon_{22}^M \\ \epsilon_{33}^M \end{Bmatrix} \quad (4.110)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{11} & \hat{\mathbf{C}}_{12} & \hat{\mathbf{C}}_{13} \\ \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22} & \hat{\mathbf{C}}_{23} \\ \hat{\mathbf{C}}_{31} & \hat{\mathbf{C}}_{32} & \hat{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} \\ \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Die Elemente  $\hat{\mathbf{C}}_{ij}$  der Hypermatrix in Gl. (4.111) sind Spaltenvektoren, deren Längen mit der jeweiligen Anzahl der Komponenten  $T_{ij}^{(\cdot)}$  der Spannungsvektoren nach Gl. (4.109) übereinstimmen.

Die Berechnung der Normalspannungen  $T_{ij}^{(\cdot)}$  mit  $i = j$  in den Unterzellen der GMC macht die Lösung des linearen Gleichungssystems (4.108) notwendig. Dieses besitzt mit  $N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta$  unbekanntem Spannungen einen wesentlich geringeren Umfang als das Gleichungssystem der Originalfassung mit  $6N_\alpha N_\beta N_\gamma$  zu berechnenden Unterzelldehnungen zuzüglich der Verschiebungsdiskontinuitäten. Besonders effizient berechnen sich in der reformulierten Fassung die Schubspannungen  $T_{ij}^{(\cdot)}$  mit  $i \neq j$ , denn die Bestimmungsgleichungen können auf analytischem Wege gefunden werden. Durch Einsetzen der konstitutiven Beziehungen (4.100) für die Zellen sowie den Gln. (4.102) bis (4.104) für die Grenzflächen in die Schubdeformationsgleichungen (4.88), (4.89) und (4.90) ergeben sich deren spannungsbasierte Formulierungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma S_{44}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{23}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{h_\beta}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{23}^{(\alpha)} \\ + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{l_\gamma}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{23}^{(\alpha)} = lh\epsilon_{23}^M \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha} \quad (4.112) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} l_\gamma d_\alpha S_{55}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{13}^{(\beta)} + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \frac{l_\gamma}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{13}^{(\beta)} \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{d_\alpha}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{13}^{(\beta)} = dl\epsilon_{13}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (4.113) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} h_\beta d_\alpha S_{66}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{12}^{(\gamma)} + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha-1} \frac{h_\beta}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{12}^{(\gamma)} \\ + \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{d_\alpha}{2} \Delta_I S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} T_{12}^{(\gamma)} = dh\epsilon_{12}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (4.114) \end{aligned}$$

Offensichtlich sind die Gleichungen (4.112) bis (4.114) vollständig voneinander entkoppelt und können direkt nach den unbekanntem Spannungen aufgelöst werden:

$$T_{23}^{(\alpha)} = \frac{lh\epsilon_{23}^M}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma S_{44}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (h_\beta(1 - \delta_{\gamma N_\gamma}) + l_\gamma(1 - \delta_{\beta N_\beta})) \right]} \quad (4.115)$$

$$T_{13}^{(\beta)} = \frac{dl\epsilon_{13}^M}{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \left[ l_\gamma d_\alpha S_{55}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (l_\gamma(1 - \delta_{\alpha N_\alpha}) + d_\alpha(1 - \delta_{\gamma N_\gamma})) \right]} \quad (4.116)$$

$$T_{12}^{(\gamma)} = \frac{dh\epsilon_{12}^M}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \left[ h_\beta d_\alpha S_{66}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (h_\beta(1 - \delta_{\alpha N_\alpha}) + d_\alpha(1 - \delta_{\beta N_\beta})) \right]} \quad (4.117)$$

Für den Fall, dass in einer Grenzfläche zwischen benachbarten Unterzellen keine Diskontinuitäten zugelassen werden sollen, sind in den Gln. (4.105) bis (4.107) und (4.115) bis (4.117) die entsprechenden Nachgiebigkeiten  $S_{I\perp}^{(\alpha\beta\gamma)}$  und  $S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)}$  zu Null zu setzen.

### Ermittlung des makroskopischen Spannungstensors

Die Bestimmung des makroskopischen Spannungstensors erfolgt nach Gl. (4.3)<sub>2</sub> durch die Mittelung der Mikrospannungsfelder über das Gebiet des RVEs. Die Spannungen im diskreten GMC-Modell des RVEs sind durch die Spannungsgrößen  $T_{ij}^{(\cdot)}$  in den Gln. (4.110) und (4.115) bis (4.117) vollständig beschrieben. Somit ergeben sich die Makrospannungen aus folgenden Mittelungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} T_{11}^{(\beta\gamma)} \quad , \quad \langle \sigma_{23} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{d} T_{23}^{(\alpha)} \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} T_{22}^{(\alpha\gamma)} \quad , \quad \langle \sigma_{13} \rangle = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{h} T_{13}^{(\beta)} \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} T_{33}^{(\alpha\beta)} \quad , \quad \langle \sigma_{12} \rangle = \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{l} T_{12}^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (4.118)$$

### Ermittlung des effektiven Materialtensors

Die Differentiation der Makrospannungen nach den Makroverzerrungen liefert die Komponenten des effektiven Materialtensors  $\mathbf{C}^*$ :

$$C_{ijkl}^* = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial \epsilon_{kl}^M} \quad (4.119)$$

Da im GMC-Modell sowohl die makroskopischen Normalspannungen von den makroskopischen Schubverzerrungen entkoppelt sind, als auch die Schubspannungen und -deformationen untereinander unabhängig sind, besitzt das makroskopische Konstitutivmodell für elastische Werkstoffkomponenten in Matrix-Vektor-Schreibweise folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \\ \langle \sigma_{13} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & C_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^* & C_{32}^* & C_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^M \\ \epsilon_{22}^M \\ \epsilon_{33}^M \\ \epsilon_{23}^M \\ \epsilon_{13}^M \\ \epsilon_{12}^M \\ \boldsymbol{\epsilon}^M \end{pmatrix} \quad (4.120)$$



Wegen der vertauschbaren Reihenfolge von Summation und Differentiation ergeben sich die Elemente der effektiven Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}^*$  für die Abbildung der Normaldehnungen auf die Normalspannungen aus den Gleichungen (4.110), (4.118) und (4.119) zu:

$$C_{11}^* = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \frac{\partial T_{11}^{(\beta\gamma)}}{\partial \epsilon_{11}^M} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \hat{C}_{11}^{(\beta\gamma)} \quad (4.121)$$

$$C_{12}^* = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \frac{\partial T_{11}^{(\beta\gamma)}}{\partial \epsilon_{22}^M} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \hat{C}_{12}^{(\beta\gamma)} \quad (4.122)$$

$$C_{13}^* = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \frac{\partial T_{11}^{(\beta\gamma)}}{\partial \epsilon_{33}^M} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \hat{C}_{13}^{(\beta\gamma)} \quad (4.123)$$

$$C_{21}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \frac{\partial T_{22}^{(\alpha\gamma)}}{\partial \epsilon_{11}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \hat{C}_{21}^{(\alpha\gamma)} \quad (4.124)$$

$$C_{22}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \frac{\partial T_{22}^{(\alpha\gamma)}}{\partial \epsilon_{22}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \hat{C}_{22}^{(\alpha\gamma)} \quad (4.125)$$

$$C_{23}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \frac{\partial T_{22}^{(\alpha\gamma)}}{\partial \epsilon_{33}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \hat{C}_{23}^{(\alpha\gamma)} \quad (4.126)$$

$$C_{31}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \frac{\partial T_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial \epsilon_{11}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \hat{C}_{31}^{(\alpha\beta)} \quad (4.127)$$

$$C_{32}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \frac{\partial T_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial \epsilon_{22}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \hat{C}_{32}^{(\alpha\beta)} \quad (4.128)$$

$$C_{33}^* = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \frac{\partial T_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial \epsilon_{33}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} \hat{C}_{33}^{(\alpha\beta)} \quad (4.129)$$

Die effektiven Schubsteifigkeiten können auf rein analytische Weise aus den Gleichungen (4.115) bis (4.117) für die Schubspannungen in Kombination mit (4.118) und (4.119) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} C_{44}^* &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{d} \frac{\partial T_{23}^{(\alpha)}}{\partial \epsilon_{23}^M} \\ &= \frac{hl}{d} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma S_{44}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (h_\beta (1 - \delta_{\gamma N_\gamma}) + l_\gamma (1 - \delta_{\beta N_\beta})) \right]} \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned}
C_{55}^* &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{h} \frac{\partial T_{13}^{(\beta)}}{\partial \epsilon_{13}^M} \\
&= \frac{dl}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \left[ l_\gamma d_\alpha S_{55}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (l_\gamma(1 - \delta_{\alpha N_\alpha}) + d_\alpha(1 - \delta_{\gamma N_\gamma})) \right]} \quad (4.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{66}^* &= \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{l} \frac{\partial T_{12}^{(\gamma)}}{\partial \epsilon_{12}^M} \\
&= \frac{dh}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \left[ h_\beta d_\alpha S_{66}^{(\alpha\beta\gamma)} + \frac{S_{I\parallel}^{(\alpha\beta\gamma)} \Delta_I}{2} (h_\beta(1 - \delta_{\alpha N_\alpha}) + d_\alpha(1 - \delta_{\beta N_\beta})) \right]} \quad (4.132)
\end{aligned}$$

### Anwendungsbeispiel der Methode der Zellen auf elastische Verbundwerkstoffe

Das Homogenisierungsverfahren der effizient reformulierten GMC wird nachfolgend auf ein unidirektional glasfaserverstärktes Epoxidharz angewendet. Der Verbund von Faser und Matrix soll sich starr verhalten. Die elastischen Materialparameter für die Komponenten sind in Tab. 4.1 angegeben. Abb. 4.8 zeigt die untersuchten diskreten RVE-Modelle. Die Netze besitzen eine unterschiedliche Anzahl der Zellen in der transversalen Ebene ( $x_2, x_3$ ). In Faserrichtung  $x_1$  kann aufgrund der unidirektionalen Verstärkung auf eine Auflösung der Geometrie mit mehreren Zellen verzichtet werden, d.h. es gilt  $N_\alpha = 1$ . Bei den regelmäßig vernetzten Modellen *QR* besitzen alle Zellen die gleichen Abmessungen  $h_\beta = l_\gamma$  für beliebige  $\beta$  und  $\gamma$ . Die RVEs *QA* verfügen über eine an die runde Fasergeometrie angepasste abgestufte Unterzellgeometrie. Die Homogenisierung auf Basis der *QA* und *QR* Modelle führt auf orthotrope Materialeigenschaften, denn diese Modelle gehen von einer quadratischen Anordnung der Fasern im Werkstoff aus, vgl. Abb. 4.7. Das Modell *HR5230* unterstellt eine hexagonale Anordnung der Faser. Die Homogenisierung anhand des Modells *HR5230* führt näherungsweise auf transversalisotrope Eigenschaften, wie sie bei einer unregelmäßigen Verteilung der Fasern zu erwarten sind. Der Faservolumengehalt  $V_f$  wird zwischen Null und dem maximal möglichen Gehalt variiert. Für die Modelle vom Typ *QR* und *QA* beträgt das Maximum  $V_f^{\max} = \pi/4 \approx 0.78$ ,

Material	E-Modul	Schubmodul
	E [MPa]	G [MPa]
Glasfaser	68940	28725
Epoxidharz	3420	1276

Tabelle 4.1: Elastische Werkstoffdaten für Glasfasern und Epoxidharzmatrix nach Aboudi (1991)

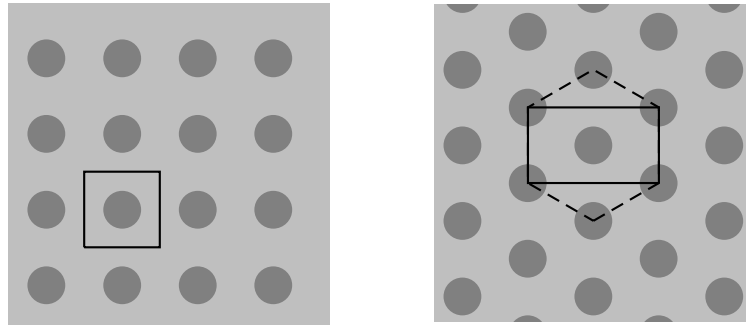


Abbildung 4.7: Links: quadratische Faseranordnung, rechts: hexagonale Faseranordnung

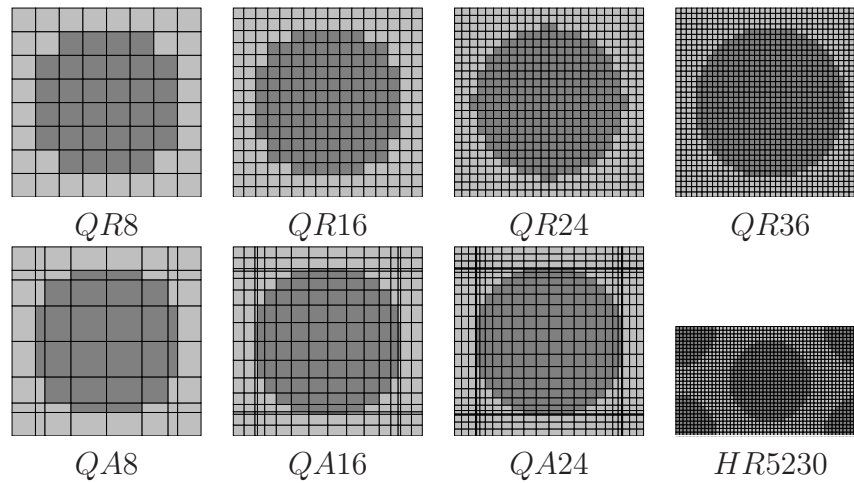


Abbildung 4.8: Diskretisierung der Einheit zelle für  $V_f = 0.5$ : Quadratische Faseranordnung und regelmäßige Zellgrößen ( $QR$ ), quadratische Faseranordnung und angepasste Zellgrößen ( $QA$ ), hexagonale Faseranordnung und regelmäßige Zellgrößen ( $HR$ )

bei dem die exakt runde Fasern den Rand des RVEs gerade berührt. Der Fasergehalt von 78% entspricht der dichtesten Packung bei quadratischer Anordnung der Fasern. Die hexagonale Packung erlaubt einen höheren maximalen Fasergehalt von  $V_f^{\max} = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0.91$ . Die Annahme der quadratischen Faseranordnung führt auf einen Materialtensor  $\mathbb{C}^*$  nach Gl. (4.225) mit orthotropen Symmetrieeigenschaften. Durch die Drehung des orthotropen Materialtensors um den Winkel  $0 < \phi < \pi$  mit der Faserrichtung  $x_1$  als Drehachse ergeben sich mit der Transformationsmatrix

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

näherungsweise die Koordinaten des transversal isotropen Materialtensors als Mittelwerte aus:

$$C_{ijkl}^{*\text{Tl}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T_{ip} T_{jq} T_{kr} T_{ls} C_{pqrs}^{*\text{Ortho}} d\phi \quad (4.134)$$

Die transversalisotropen Ingenieurkonstanten können dann aus den Gln. (2.9) und den transversalisotropen Steifigkeiten

$$\begin{aligned}
C_{11}^{*Tl} &= C_{11}^{*Ortho} \\
C_{12}^{*Tl} &= C_{12}^{*Ortho} \\
C_{22}^{*Tl} &= 0.75 C_{22}^{*Ortho} + 0.25 C_{23}^{*Ortho} + 0.5 C_{44}^{*Ortho} \\
C_{23}^{*Tl} &= 0.25 C_{22}^{*Ortho} + 0.75 C_{23}^{*Ortho} - 0.5 C_{44}^{*Ortho} \\
C_{44}^{*Tl} &= 0.5 (C_{22}^{*Tl} - C_{23}^{*Tl}) \\
C_{55}^{*Tl} &= C_{55}^{*Ortho}
\end{aligned} \tag{4.135}$$

berechnet werden. Die anhand der diskreten Modelle nach Tab. 4.8 ermittelten Ingenieurkonstanten des transversalisotropen Glasfaserverbundwerkstoffs sind in den Abbildungen 4.9 (a) bis (f) als Funktionen des Faservolumengehalts  $V_f$  aufgetragen. Der axiale Elastizitätsmodul  $E_a^*$  wird von allen Modellierungen identisch in linearer Abhängigkeit vom Fasergehalt vorhergesagt. Die berechneten Werte decken sich in Abb. 4.9 (a) mit der oberen ( $HS^+$ ) und unteren ( $HS^-$ ) Schranke nach Hashin-Shtrikman. Die Verläufe des transversalen Elastizitätsmoduls  $E_t^*$  der RVEs  $QR$  und  $QA$  sind weitgehend deckungsgleich. Zu einer Abweichung voneinander kommt es erst in der unmittelbaren Nähe zum maximalen Fasergehalt  $V_f = 0.78$ . Die vorhergesagten Werte liegen sehr dicht an der unteren Grenze  $HS^-$ . Das RVE  $HR5230$  weist eine etwas geringere effektive Steifigkeit  $E_t^*$  als die übrigen diskreten Modelle aus. Für den axialen Schubmodul  $G_a^*$  lassen sich vergleichbare Aussagen treffen wie für den E-Modul  $E_t^*$  mit dem Unterschied, dass das Modell mit hexagonaler Faseranordnung einen deutlicher zu erkennenden, kleineren Wert liefert als die anderen Modelle. Der Modul  $G_a^*$  des RVEs  $HR5230$  fällt in einem weiten Bereich des Fasergehalts unter die Schranke  $HS^-$ .

Der transversale Schubmodul  $G_t^* = 0.5 (C_{22}^{*Tl} - C_{23}^{*Tl})$  der Modelle  $QA$  und  $QR$  deckt sich mit der unteren Schranke nach Hashin-Shtrikman. Der Modul  $G_t^*$  des Modells  $HR5230$  ist hingegen für alle Faservolumenanteile identisch mit der unteren Schranke nach Reuss. Diese exakte Übereinstimmung ist eine Eigenschaft des Zellenmodells, die man an Gl. (4.130) ablesen kann. Unter der Annahme eines starren Verbunds der Faser mit der Matrix und  $N_\alpha = 1$  wird aus Gl. (4.130):

$$C_{44}^* = \frac{1}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} S_{44}^{(\beta\gamma)}} \tag{4.136}$$

was offensichtlich nichts anderes ist als die Reuss-Approximation:

$$G_t^{*Reuss} = \frac{1}{\frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m}} = C_{44}^* \tag{4.137}$$

Der Grund hierfür ist die Forderung nach der Spannungscontinuität für  $\langle \sigma_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle$  zwischen benachbarten Zellen, was zu einem vollständig homogenen Spannungsfeld  $\sigma_{23}$  im RVE führt, denn es gilt  $T_{23}^{(\alpha)} = \langle \sigma_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  für alle  $\beta$  und  $\gamma$ . Für  $\alpha = 1$  existiert im Modell somit nur eine einzige transversale Schubspannungsvariable  $T_{23}$ . Bei unidirektional verstärkten Werkstoffen bleibt diese Tatsache auch für  $N_\alpha \neq 1$  unverändert, denn in allen Ebenen  $\alpha$  liegt die gleiche Geometrie vor, woraus  $T_{23}^{(1)} = T_{23}^{(2)} = \dots = T_{23}^{(N_\alpha)}$  folgt. Die Homogenität des Schubspannungsfelds ist keine Konsequenz der effizienten Reformulierung.

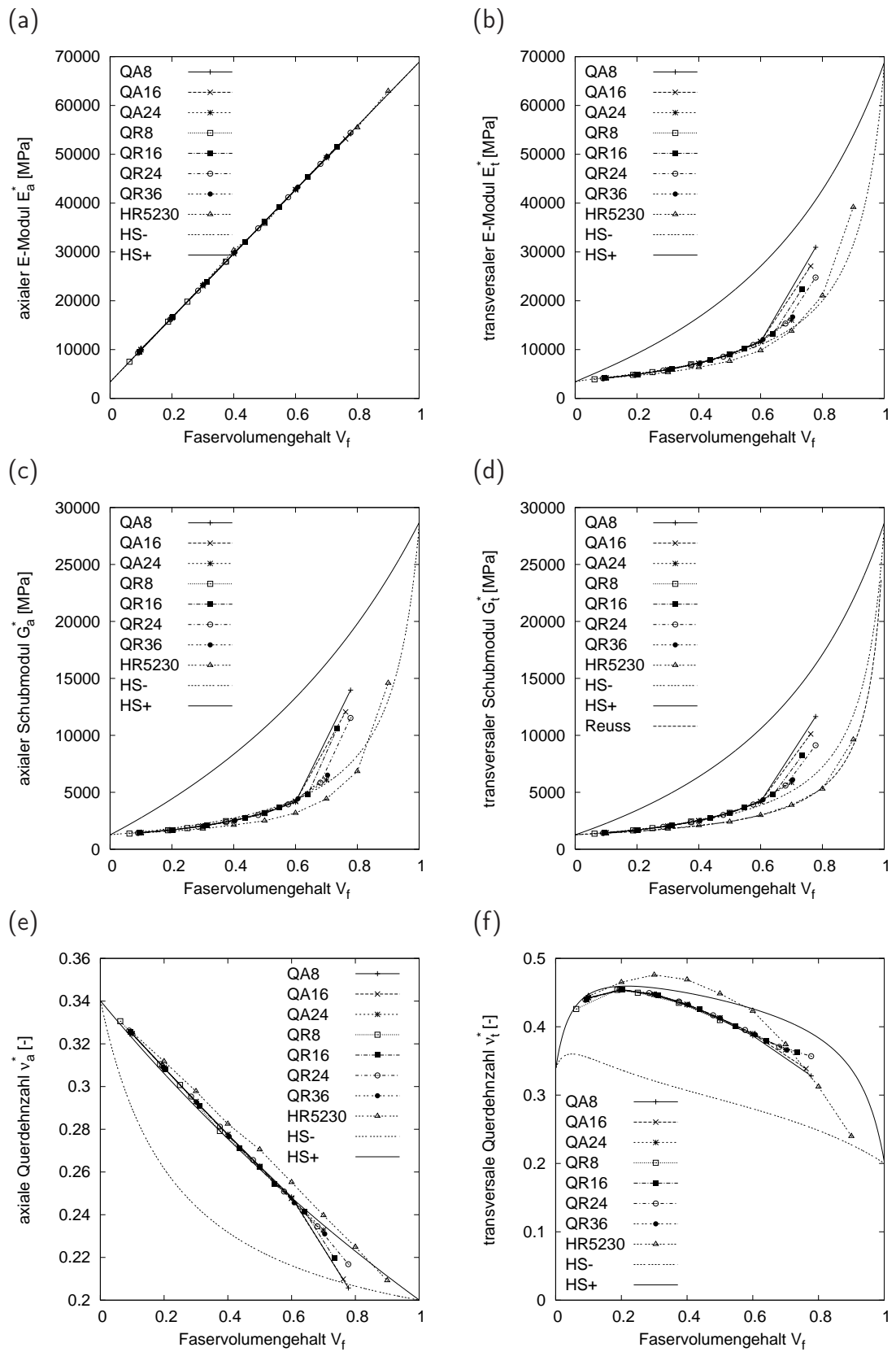


Abbildung 4.9: Vergleich der elastischen Kennwerte der diskreten GMC-Modelle nach Tabelle 4.8 mit den oberen und unteren Schranken der transversalisotropen Elastizitätsparameter nach Hashin-Shtrikman

Die Spannungscontinuität wird schon in der Originalfassung eingefordert. Die effiziente Formulierung besteht in der analytischen Umformung der Gleichungen unter Ausnutzung der Spannungscontinuitätsbedingungen, wodurch sich die Zahl der Gleichungen verringert: ein Teil des Lösungswegs wird vorab analytisch beschriftet. Es geht in der effizienten Formulierung keine Information verloren, die in der Originalfassung vorhanden gewesen wäre. Die Begründung dafür, dass die transversalen Schubmodule  $G_t^*$  für die Modelle  $QA$  und  $QR$  über der Schranke  $HS^+$  liegen und somit vom  $G_t^*$  des RVE-Typs  $HR5230$  abweichen, ist, dass diese aus den Steifigkeiten  $C_{22}^*$  und  $C_{23}^*$  berechnet werden, vgl. Gl. (2.9) und Gerlach (2003). Die Werte  $G_t^* = \frac{1}{2} (C_{22}^{*\text{T1}} - C_{23}^{*\text{T1}})$  sind daher nicht allein abhängig vom konstant vorhergesagten Schubspannungsfeld  $\sigma_{23}$ . Die Konsequenz aus dem homogenen, transversalen Schubspannungsfeld ist, dass bei der Wahl eines diskreten RVEs (z. B.  $HR5230$ ), welches ohne Mittelung nach Gl. (4.134) auf transversalisotrope Materialeigenschaften führt, die Gleichheit  $G_t^* = C_{44}^{*\text{T1}} = \frac{1}{2} (C_{22}^{*\text{T1}} - C_{23}^{*\text{T1}})$  verletzt wird.

Die axiale Querdehnzahl  $\nu_a^*$  nach Abb. 4.9 (e) ergibt sich für die RVEs  $QR$  und  $QA$  im weiten Bereich in Höhe der oberen Schranke  $HS^+$ . Erst in der Nähe des maximal möglichen Fasergehalts kommt es für die Modelle mit wenigen Unterzellen zu einer Abweichung von bis zu 10%. Für die Querdehnzahl  $\nu_t^*$  ergibt sich eine größere Abweichung von der oberen Grenze  $HS^+$  als für  $\nu_a^*$ . Im Verlauf von  $\nu_t^*$  für das RVE  $HR5230$  spiegelt sich der diskutierte, zu geringe Schubmodul  $G_t^*$  dieses RVEs wider. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Feinheit der Diskretisierung keine wesentlichen Auswirkungen auf die Güte der GMC-Voraussagen über die effektiven Materialeigenschaften hat. Die effektiven Parameter sollten anhand der Netze  $QA$  oder  $QR$  mit anschließender Umrechnung in transversalisotrope Parameter bestimmt werden, um die nachteiligen Auswirkungen des homogenen transversalen Schubspannungsfelds zu umgehen. Der im nächsten Abschnitt dargestellte HFGMC-Ansatz besitzt ein höheres Auflösungsvermögen der Spannungsfelder.

### 4.4.3 Die hochauflösende Methode der Zellen

Die hochauflösende Methode der Zellen (*High Fidelity Generalized Method of Cells, HFGMC*) nach Aboudi et al. (2001), Aboudi (2004) oder Aboudi et al. (2002) ist zu den asymptotischen Homogenisierungsverfahren zu zählen, die u. a. auf Arbeiten von Bakhalov (1974), Bakhalov and Panasenko (1989), Bensoussan et al. (1978) und Sanchez-Palenzia (1980) zurück gehen.

Die HFGMC geht von der Annahme aus, dass die mikroheterogene Struktur des Werkstoffs durch die doppelt-periodische Anordnung von Verstärkungseinlagen im Verbund mit der homogenen Matrixphase bestimmt ist. Dann kann eine Einheitszelle nach Abb. 4.10 als repräsentatives Volumenelement angesehen werden. Für die Beschreibung der Makrostruktur wird das kartesische Koordinatensystem  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  vereinbart, wobei die Koordinatenachsen parallel zu den Kanten der Einheitszelle angenommen werden. Die Achsen  $\bar{x}_2$  und  $\bar{x}_3$  liegen in einer Ebene mit der rechtwinkligen Einheitszelle, die Achse  $\bar{x}_1$  steht senkrecht dazu. Der Aufbau der Mikrostruktur soll in  $\bar{x}_1$ -Richtung unveränderlich sein, d.h. eine Periodenlänge von Null aufweisen. Die Abmessung der Einheitszelle in dieser Richtung wird zu 1 gesetzt. Mit Hilfe des Skalierungsfaktors

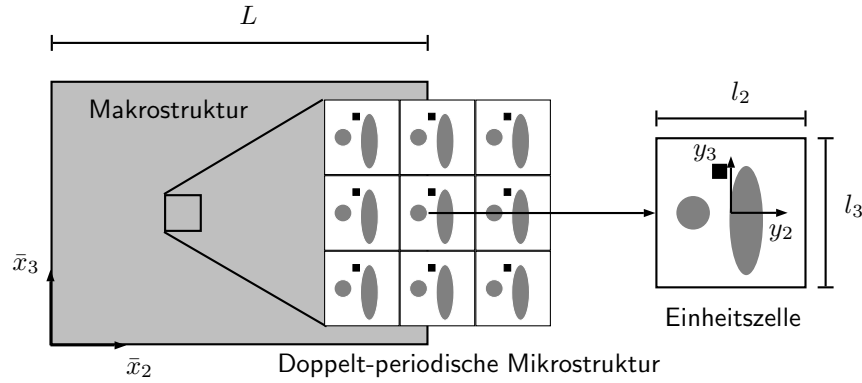


Abbildung 4.10: Doppelt-periodischer Aufbau der Mikrostruktur und Einheitszelle

$$\lambda = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (4.138)$$

lassen sich die *schnellen* Koordinaten

$$y_i = \frac{1}{\lambda} \bar{x}_i \quad (4.139)$$

und die *langsamen* Koordinaten

$$x_i = \bar{x}_i \quad (4.140)$$

definieren. Die Attribute *schnell* und *langsam* sind als begriffliche Anlehnung an Bezeichnungen zu verstehen, die bei physikalisch gekoppelten Vorgängen auf unterschiedlichen Zeitskalen Verwendung finden. Der Skalierungsparameter  $\lambda$  charakterisiert das Größenverhältnis von Mikrostruktur zu Makrostruktur. Einer Verschiebung der Größe 1 in den schnellen Koordinaten  $\mathbf{y}$  entspricht eine Verschiebung  $\ll 1$  in den langsamen Koordinaten  $\mathbf{x}$ . Das langsame Koordinatensystem dient zur Beschreibung der Makrostruktur, während das schnelle Koordinatensystem die Basis für die Mikrostrukturanalyse innerhalb der Einheitszelle bildet. Somit lassen sich bei der Analyse von Randwertaufgaben, die sich über mehrere Größenskalen erstrecken, die schnellen und die langsamen Lösungskomponenten voneinander trennen, was im Schrifttum auch mit dem Begriff *Separation der Skalen* umschrieben wird, siehe z.B. Gelli and Royer-Carfagni (2004).

Im Kontext der asymptotischen Homogenisierungsmethoden wird das Verschiebungsfeld  $u_i^*(\bar{\mathbf{x}})$  am Ort  $\bar{\mathbf{x}}$  der Makroebene in Form einer Reihenentwicklung in den schnellen und langsamen Koordinaten beschrieben:

$$u_i^*(\bar{\mathbf{x}}) = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_{0i}(\mathbf{x}) + \lambda u_{1i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 u_{2i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (4.141)$$

Der Summand nullter Ordnung  $u_{0i}$  stellt den sogenannten homogenen Anteil des Verschiebungsfelds dar, welcher sich nur mit den langsamen Koordinaten  $\mathbf{x}$  ändert. Die Terme  $u_{ni}$  mit  $n > 0$  beschreiben die mikroskaligen Fluktuationen des Verschiebungsfelds, welche durch die Inhomogenität der Steifigkeitsverteilung bedingt sind. Die unterstellte Periodizität der Mikrostruktur stellt an die Ausdrücke  $u_{ni}$  der Ordnung  $n$  in Gl. (4.141) die Periodizitätsanforderung:

$$u_{ni}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_{ni}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{d}) \quad (4.142)$$

Die Bedingung (4.142) unterwirft die fluktuierenden Verschiebungsfelder periodischen Randbedingungen entlang der Begrenzung der Einheitszellen. Dies bedeutet einen wesentlichen Unterschied zur GMC, bei der homogene Verschiebungsrandbedingungen gestellt werden. Die Größe  $\mathbf{d}$  enthält die Abmessungen der Einheitszelle, die der Periodenlänge der Mikrostruktur entsprechen. Die Differentiation des Verschiebungsfelds  $u_i^*(\bar{\mathbf{x}})$  führt unter Beachtung der Kettenregel auf:

$$\frac{\partial u_i^*(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial \bar{x}_j} \quad (4.143)$$

Aufgrund der Vereinbarungen nach Gl. (4.139) und Gl. (4.140) vereinfacht sich Gl. (4.143) zu:

$$\frac{\partial u_i^*(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} \quad (4.144)$$

Folglich gilt für die Differentiation einer makroskopischen Feldgröße nach dem Ort  $\bar{\mathbf{x}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (4.145)$$

Die infinitesimalen Verzerrungen  $\epsilon_{ij}^*(\bar{\mathbf{x}})$  bestimmt sich wegen Gl. (4.144) gemäß der Vorschrift:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^*(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j^*(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right) := \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.146)$$

Durch Einsetzen des Reihenansatzes (4.141) in die Gl. (4.146) erhält man mit den Abkürzungen  $\bar{u}_i := u_{0i}(\mathbf{x})$  und  $u'_i := u_{1i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} \right) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (4.147)$$

Die Gl. (4.147) geht nach Einführung der mittleren und fluktuierenden Verzerrungen

$$\bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{und} \quad \epsilon'_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial y_i} \right) \quad (4.148)$$

in die folgende Darstellung des Verzerrungsfelds über:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) + \epsilon'_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (4.149)$$

Die Mittelung des Verzerrungsfelds (4.149) über das Volumen der Einheitszelle erfolgt bei Vernachlässigung der Terme  $\mathcal{O}(\lambda)$  gemäß:

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{|V_{\Omega_{\text{RVE}}}|} \int_{V_{\Omega_{\text{RVE}}}} (\bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) + \epsilon'_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \, dV_{\mathbf{y}} = \bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.150)$$



Die Ausführung der Integration in den schnellen Koordinaten der Einheitszelle liefert  $\langle \epsilon_{ij} \rangle = \bar{\epsilon}_{ij}$ , denn der Anteil  $\bar{\epsilon}_{ij}$  ist unabhängig von  $y_i$  und die Volumenintegration des Anteils  $\epsilon'_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  liefert keinen Beitrag, was durch die Anwendung des Gaußschen Intergalsatzes auf das Volumenintegral über der fluktuierenden Anteil  $\epsilon'_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  des Verzerrungsfelds und die Beachtung der Periodizitätsbedingung (4.142) für  $u'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  gezeigt werden kann. Der mittlere Verzerrungstensor  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  entspricht dem Anteil  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  des Verzerrungsfelds  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Die HFGMC wird nachfolgend für ein stetiges Verschiebungsfeld ohne Diskontinuitäten im Inneren des RVEs formuliert, so dass der Mittelwert  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  identisch mit dem Makroverzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  ist.

### Diskretisierung der Einheitszelle

Für die Diskretisierung der ebenen Einheitszelle wird analog zur Vorgehensweise der GMC eine Unterteilung in  $N_\beta \times N_\gamma$  rechteckige Unterzellen  $\Omega^{(\beta\gamma)}$  vorgenommen, deren Abmessungen  $1 \setminus h_\beta \setminus l_\gamma$  betragen. Im geometrischen Schwerpunkt jeder Unterzelle wird ein schnelles, kartesisches Koordinatensystem  $y_i^{(\beta\gamma)}$  vereinbart, das achsenparallel zum langsamen Koordinatensystem  $x_i$  ausgerichtet und gleich orientiert ist. Wegen der in  $x_1$ -Richtung unveränderlichen Mikrostruktur wird  $y_1^{(\beta\gamma)} = x_1$  gesetzt, wodurch die Verschiebungsfuktuationen zu Funktionen in  $y_2^{(\beta\gamma)}$  und  $y_3^{(\beta\gamma)}$  werden. Der asymptotische Verschiebungsansatz lautet unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  für die Zelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ :

$$u_i^{(\beta\gamma)} = \bar{u}_i(\mathbf{x}) + \lambda u_i^{(\beta\gamma)}(y_2^{(\beta\gamma)}, y_3^{(\beta\gamma)}, \mathbf{x}) \quad (4.151)$$

Die Fluktuationen  $u'_i$  des Verschiebungsfelds sind abhängig von den Inhomogenitäten in der Einheitszelle und verschwinden folglich für ein homogenes Material identisch Null. Als Ansatz für die Komponenten der Verschiebungsfuktuationen  $u'_i$  wird innerhalb jeder Unterzelle die Summe von Legendre-Polynomen nullten bis zweiten Grades gewählt:

$$u_i^{(\beta\gamma)} = W_{i(00)}^{(\beta\gamma)} + y_2^{(\beta\gamma)} W_{i(10)}^{(\beta\gamma)} + y_3^{(\beta\gamma)} W_{i(01)}^{(\beta\gamma)} + \frac{1}{2} \left( 3y_2^{(\beta\gamma)^2} - \frac{h_\beta^2}{4} \right) W_{i(20)}^{(\beta\gamma)} + \frac{1}{2} \left( 3y_3^{(\beta\gamma)^2} - \frac{l_\gamma^2}{4} \right) W_{i(02)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.152)$$

Die Faktoren  $W_{i(nm)}^{(\beta\gamma)}$  sind die unbekanntenen Mikrovariablen des Verschiebungsansatzes in  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ . Diese hängen vom Ort  $\mathbf{x}$  ab, an dem sich das RVE befindet. Die Differentiation der Verschiebungsgleichungen (4.151) liefert zusammen mit den Gln. (4.147), (4.148), (4.150), (4.152) und  $\langle \epsilon_{ij} \rangle = \epsilon_{ij}^M$  das Verzerrungsfeld  $\epsilon_{ij}^{(\beta\gamma)}$  im Gebiet der Unterzelle:

$$\epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{11}^M \quad (4.153)$$

$$\epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{22}^M + W_{2(10)}^{(\beta\gamma)} + 3y_2^{(\beta\gamma)} W_{2(20)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.154)$$

$$\epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{33}^M + W_{3(01)}^{(\beta\gamma)} + 3y_3^{(\beta\gamma)} W_{3(02)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.155)$$

$$\epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{12}^M + \frac{1}{2} \left[ W_{1(10)}^{(\beta\gamma)} + 3y_2^{(\beta\gamma)} W_{1(20)}^{(\beta\gamma)} \right] \quad (4.156)$$

$$\epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{13}^M + \frac{1}{2} \left[ W_{1(01)}^{(\beta\gamma)} + 3y_3^{(\beta\gamma)} W_{1(02)}^{(\beta\gamma)} \right] \quad (4.157)$$

$$\epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} = \epsilon_{23}^M + \frac{1}{2} \left[ W_{2(01)}^{(\beta\gamma)} + 3y_3^{(\beta\gamma)} W_{2(02)}^{(\beta\gamma)} + W_{3(10)}^{(\beta\gamma)} + 3y_2^{(\beta\gamma)} W_{3(20)}^{(\beta\gamma)} \right] \quad (4.158)$$

Das Spannungsfeld  $\sigma_{ij}^{(\beta\gamma)}$  innerhalb einer Unterzelle ergibt sich unter der Annahme der linearen Elastizitätstheorie durch Anwendung des konstitutiven Tensors  $C_{ijkl}^{(\beta\gamma)}$  auf das Verzerrungsfeld  $\epsilon_{kl}^{(\beta\gamma)}$ , dessen Komponenten durch die Gleichungen (4.153) bis (4.158) gegeben sind:

$$\sigma_{ij}^{(\beta\gamma)} = C_{ijkl}^{(\beta\gamma)} \epsilon_{kl}^{(\beta\gamma)} \quad (4.159)$$

Der Materialtensor  $C_{ijkl}^{(\beta\gamma)}$  soll innerhalb einer Unterzelle ortsunabhängig sein. Der Spannungszustand in den Unterzellen ist laut den Gln. (4.153) bis (4.159) abhängig von den unbekanntem Mikrovariablen  $W_{i(nm)}^{(\beta\gamma)}$  und dem aufgetragenen makroskopischen Verzerrungszustand  $\epsilon_{ij}^M$ .

Zur Berechnung der Mikrovariablen werden die Spannungsfelder und Verschiebungsfeldfluktuationen über die Randflächen der Unterzelle gemittelt. Als Zwischenergebnis gewinnt man die konstitutive Beziehung zwischen den gemittelten Randspannungen und dem gemittelten, fluktuierenden Anteil der Randverschiebungen einer jeden Unterzelle sowie den Makroverzerrungen. Die dabei gewonnenen Elementsteifigkeitsmatrizen werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix der Einheitszelle addiert. Die primären Variablen der Strukturgleichungen sind die fluktuierenden Anteile der Randverschiebungen der Unterzellen. Nach deren Bestimmung können die Mikrovariablen aller Unterzellen berechnet werden aus denen sich die Mikrofelder der Spannungen und Verzerrungen ergeben.

### Elementsteifigkeitsmatrizen

Für die Formulierung der konstitutiven Gleichungen auf Unterzellebene werden zunächst die mittleren Spannungsvektoren  $\bar{\mathbf{t}}^{k\pm}$  ( $k = 2, 3$ ) auf den Oberflächen  $\partial\Omega^{k\pm(\beta\gamma)}$  mit den Flächennormalen  $\mathbf{n}^{k\pm(\beta\gamma)}$  berechnet. Die Randspannungsvektoren  $\mathbf{t}^{k\pm(\beta\gamma)}$  folgen mit der Cauchyschen Formel aus den Unterzellenspannungen  $\boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)}$  zu:

$$\bar{t}_i^{k\pm(\beta\gamma)} = \sigma_{ji}^{(\beta\gamma)} n_j^{k\pm(\beta\gamma)} \quad (4.160)$$

Die Normalenvektoren  $\mathbf{n}^{k\pm(\beta\gamma)}$  entsprechen den positiven und negativen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_k^{(\beta\gamma)}$  des Elementkoordinatensystems, vgl. Abb. 4.11. Die Mittelungen der Randspannungen über die Unterzelloberflächen reduziert sich in der ebenen Theorie auf die Integration in  $\mathbf{e}_3$ -Richtung für

$$\bar{t}_i^{2\pm(\beta\gamma)} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{-l_\gamma/2}^{+l_\gamma/2} \sigma_{ji}^{(\beta\gamma)}(\pm h_\beta/2, y_3^{(\beta\gamma)}) n_j^{\pm 2} dy_3^{(\beta\gamma)} \quad (4.161)$$

und in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung für

$$\bar{t}_i^{3\pm(\beta\gamma)} = \frac{1}{h_\beta} \int_{-h_\beta/2}^{+h_\beta/2} \sigma_{ji}^{(\beta\gamma)}(y_2^{(\beta\gamma)}, \pm l_\gamma/2) n_j^{\pm 3} dy_2^{(\beta\gamma)} \quad (4.162)$$

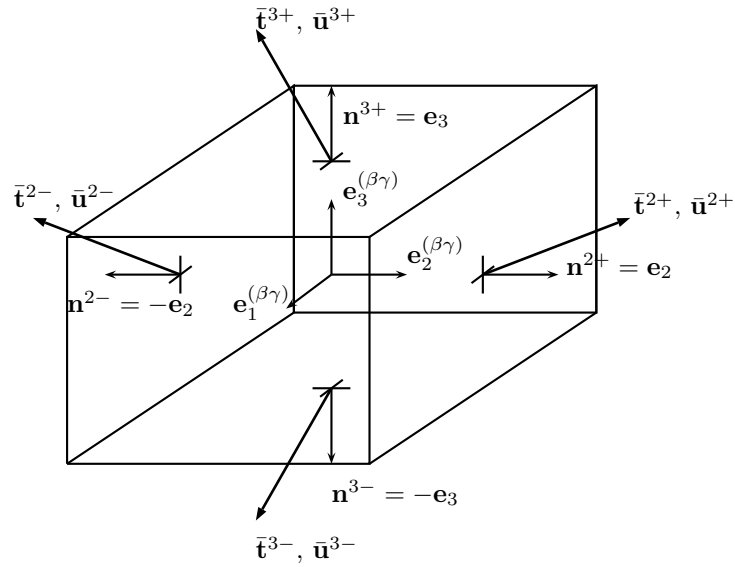


Abbildung 4.11: Mittlere Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  und Spannungen  $\bar{\mathbf{t}}$  auf den Oberflächen  $\partial\Omega^{2+}$ ,  $\partial\Omega^{2-}$ ,  $\partial\Omega^{3+}$  und  $\partial\Omega^{3-}$  der Unterzelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$

Die Mittelungen führen mit den Gln. (4.153) bis (4.159) auf die folgenden Gleichungen für die Normalspannungskomponenten:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{t}_2^{2+} \\ \bar{t}_2^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} &= C_{22}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3h_\beta}{2} \\ -1 & \frac{3h_\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{2(10)} \\ W_{2(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + C_{23}^{(\beta\gamma)} \begin{Bmatrix} W_{3(01)} \\ -W_{3(01)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 C_{i2}^{(\beta\gamma)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{ii}^M \\ -\epsilon_{ii}^M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.163)$$

und

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{t}_3^{3+} \\ \bar{t}_3^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} &= C_{33}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3l_\gamma}{2} \\ -1 & \frac{3l_\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{3(01)} \\ W_{3(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + C_{23}^{(\beta\gamma)} \begin{Bmatrix} W_{2(10)} \\ -W_{2(10)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 C_{i3}^{(\beta\gamma)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{ii}^M \\ -\epsilon_{ii}^M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.164)$$

Die Schubspannungskomponenten in der transversalen Ebene ( $y_2, y_3$ ) ergeben sich zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_2^+ \\ \bar{t}_2^- \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3l_\gamma}{2} \\ -1 & \frac{3l_\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{2(01)} \\ W_{2(02)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} W_{3(10)} \\ -W_{3(10)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + 2C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{23}^M \\ -\epsilon_{23}^M \end{pmatrix} \quad (4.165)$$

und

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_3^+ \\ \bar{t}_3^- \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3h_\beta}{2} \\ -1 & \frac{3h_\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{3(10)} \\ W_{3(20)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} W_{2(01)} \\ -W_{2(01)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + 2C_{44}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{23}^M \\ -\epsilon_{23}^M \end{pmatrix} \quad (4.166)$$

Die mittleren Schubspannungen in Längsrichtung ( $x_1$ -Richtung) lauten:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_1^+ \\ \bar{t}_1^- \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = C_{66}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3h_\beta}{2} \\ -1 & \frac{3h_\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{1(10)} \\ W_{1(20)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + 2C_{66}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{12}^M \\ -\epsilon_{12}^M \end{pmatrix} \quad (4.167)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_1^+ \\ \bar{t}_1^- \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = C_{55}^{(\beta\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3l_\gamma}{2} \\ -1 & \frac{3l_\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{1(01)} \\ W_{1(02)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + 2C_{55}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{13}^M \\ -\epsilon_{13}^M \end{pmatrix} \quad (4.168)$$

In Analogie zur Bestimmung der mittleren Spannungen in den Gleichungen (4.161) und (4.162) werden die Fluktuationen  $u_i^{(\beta\gamma)}$  des Verschiebungsfelds über die Seitenflächen der Unterelemente gemittelt. Die Notation geht aus Abb. 4.11 hervor.

$$\bar{u}_i^{2\pm(\beta\gamma)} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{-l_\gamma/2}^{+l_\gamma/2} u_i^{(\beta\gamma)}(\pm h_\beta/2, y_3^{(\beta\gamma)}) dy_3^{(\beta\gamma)} \quad (4.169)$$

$$\bar{u}_i^{3\pm(\beta\gamma)} = \frac{1}{h_\beta} \int_{-h_\beta/2}^{+h_\beta/2} u_i^{(\beta\gamma)}(y_2^{(\beta\gamma)}, \pm l_\gamma/2) dy_2^{(\beta\gamma)} \quad (4.170)$$

Nach Ausführung der Integrationen in den Gln. (4.169) und (4.170) erhält man die in den Gleichungen (4.171) bis (4.176) angegebenen Mittelwerte der fluktuierenden Verschiebungen.

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1^+ \\ \bar{u}_1^- \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \\ -\frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{1(10)} \\ W_{1(20)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{pmatrix} W_{1(00)} \\ W_{1(00)} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.171)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{3+} \\ \bar{u}_1^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \\ -\frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{1(01)} \\ W_{1(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{Bmatrix} W_{1(00)} \\ W_{1(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.172)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2^{2+} \\ \bar{u}_2^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \\ -\frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{2(10)} \\ W_{2(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{Bmatrix} W_{2(00)} \\ W_{2(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.173)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_3^{2+} \\ \bar{u}_3^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \\ -\frac{h_\beta}{2} & \frac{h_\beta^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{3(10)} \\ W_{3(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{Bmatrix} W_{3(00)} \\ W_{3(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.174)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2^{3+} \\ \bar{u}_2^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \\ -\frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{2(01)} \\ W_{2(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{Bmatrix} W_{2(00)} \\ W_{2(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.175)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_3^{3+} \\ \bar{u}_3^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \\ -\frac{l_\gamma}{2} & \frac{l_\gamma^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{3(01)} \\ W_{3(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} + \begin{Bmatrix} W_{3(00)} \\ W_{3(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.176)$$

Um die Gleichungen (4.171) bis (4.176) der gemittelten Fluktuationen mit den Gleichungen (4.163) bis (4.168) für die mittleren Randspannungen kombinieren zu können, werden die Verschiebungsgleichungen (4.171) bis (4.176) nach den Mikrovariablen  $W_{i(nm)}$  mit  $n \neq m$  aufgelöst:

$$\begin{Bmatrix} W_{1(10)} \\ W_{1(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_\beta} & -\frac{1}{h_\beta} \\ \frac{2}{h_\beta^2} & \frac{2}{h_\beta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{2+} \\ \bar{u}_1^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{h_\beta^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{1(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.177)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{1(01)} \\ W_{1(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_\gamma} & -\frac{1}{l_\gamma} \\ \frac{2}{l_\gamma^2} & \frac{2}{l_\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{3+} \\ \bar{u}_1^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{l_\gamma^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{1(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.178)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{2(10)} \\ W_{2(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_\beta} & -\frac{1}{h_\beta} \\ \frac{2}{h_\beta^2} & \frac{2}{h_\beta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2^{2+} \\ \bar{u}_2^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{h_\beta^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{2(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.179)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{3(10)} \\ W_{3(20)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_\beta} & -\frac{1}{h_\beta} \\ \frac{2}{h_\beta^2} & \frac{2}{h_\beta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_3^{2+} \\ \bar{u}_3^{2-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{h_\beta^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{3(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.180)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{2(01)} \\ W_{2(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_\gamma} & -\frac{1}{l_\gamma} \\ \frac{2}{l_\gamma^2} & \frac{2}{l_\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2^{3+} \\ \bar{u}_2^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{l_\gamma^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{2(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.181)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{3(01)} \\ W_{3(02)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_\gamma} & -\frac{1}{l_\gamma} \\ \frac{2}{l_\gamma^2} & \frac{2}{l_\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_3^{3+} \\ \bar{u}_3^{3-} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} - \frac{4}{l_\gamma^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ W_{3(00)} \end{Bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.182)$$

Für die Berechnung der Variablen  $W_{i(00)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  werden drei weitere Gleichungen benötigt. Diese lassen sich aus den lokalen Gleichgewichtsbedingungen in Abwesenheit von Volumenlasten gewinnen:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.183)$$

Die Gleichungen (4.183) lauten im Volumenmittel über die Unterzelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ :

$$\frac{1}{h_\beta l_\gamma} \int_{-\frac{l_\gamma}{2}}^{+\frac{l_\gamma}{2}} \int_{-\frac{h_\beta}{2}}^{+\frac{h_\beta}{2}} \sigma_{ij,j}^{(\beta\gamma)} dy_2^{(\beta\gamma)} dy_3^{(\beta\gamma)} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.184)$$

Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  in Gl. (4.184) erhält man durch Einsetzen der Mikrovariablen  $W_{i(nm)}$  aus den Gln. (4.177) bis (4.182) in die Bestimmungsgleichungen (4.153) bis (4.158) für die Verzerrungen und die anschließende Anwendung der Elastizitätsgleichungen zur Ermittlung des Spannungstensors nach Gl. (4.159). Nach der Ausführung der Volumenintegration erhält man auf dem Wege algebraischer Umformungen die gesuchten Mikrovariablen:

$$W_{1(00)}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{66}^{(\beta\gamma)}}{2\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_1^{2+} + \bar{u}_1^{2-})^{(\beta\gamma)} + \frac{h_\beta^2 C_{55}^{(\beta\gamma)}}{2l_\gamma^2 \bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_1^{3+} + \bar{u}_1^{3-})^{(\beta\gamma)} \quad (4.185)$$

$$W_{2(00)}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)}}{2\bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_2^{2+} + \bar{u}_2^{2-})^{(\beta\gamma)} + \frac{h_\beta^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{2l_\gamma^2 \bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_2^{3+} + \bar{u}_2^{3-})^{(\beta\gamma)} \quad (4.186)$$

$$W_{3(00)}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)}}{2\bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_3^{3+} + \bar{u}_3^{3-})^{(\beta\gamma)} + \frac{l_\gamma^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{2h_\beta^2 \bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} (\bar{u}_3^{2+} + \bar{u}_3^{2-})^{(\beta\gamma)} \quad (4.187)$$

Die auftretenden Abkürzungen  $\bar{C}_{ij}^{(\beta\gamma)}$  stehen für:

$$\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)} = C_{66}^{(\beta\gamma)} + \frac{h_\beta^2}{l_\gamma^2} C_{55}^{(\beta\gamma)} \quad (4.188)$$

$$\bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)} = C_{22}^{(\beta\gamma)} + \frac{h_\beta^2}{l_\gamma^2} C_{44}^{(\beta\gamma)} \quad (4.189)$$

$$\bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)} = C_{33}^{(\beta\gamma)} + \frac{l_\gamma^2}{h_\beta^2} C_{44}^{(\beta\gamma)} \quad (4.190)$$

Um abschließend den gesuchten konstitutiven Zusammenhang zwischen den gemittelten Randwerten der Verschiebungsfuktuationen  $\bar{u}_i^{(\beta\gamma)}$  und den Randspannungen  $\bar{t}_i^{(\beta\gamma)}$  herzustellen, werden die Beziehungen (4.185) bis (4.187) zunächst in die Gleichungen (4.177) bis (4.182) eingesetzt. Diese sind dann nur noch von den mittleren Fluktuationen abhängig und können mit den Gleichungen (4.163) bis (4.168) kombiniert werden. Als Ergebnis gewinnt man zwei entkoppelte Matrixgleichungen. Für die mittleren Unterzellrandspannungen in der transversalen Ebene ( $y_2^{(\beta\gamma)}, y_3^{(\beta\gamma)}$ ) erhält man folgende konstitutive Beziehung zwischen den Komponenten der gemittelten Oberflächenspannungsvektoren  $\bar{t}_i^{k\pm}$ , den mittleren Verschiebungsfuktuationen auf dem Rand  $\bar{u}_i^{k\pm}$  und den Makroverzerrungen  $\epsilon_{ij}^M$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{t}_2^{2+} \\ \bar{t}_2^{2-} \\ \bar{t}_3^{3+} \\ \bar{t}_3^{3-} \\ \bar{t}_2^{3+} \\ \bar{t}_2^{3-} \\ \bar{t}_3^{3+} \\ \bar{t}_3^{3-} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & 0 & 0 \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & 0 & 0 \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & 0 & 0 & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & 0 & 0 & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \bar{u}_2^{\prime 2+} \\ \bar{u}_2^{\prime 2-} \\ \bar{u}_3^{\prime 3+} \\ \bar{u}_3^{\prime 3-} \\ \bar{u}_2^{\prime 3+} \\ \bar{u}_2^{\prime 3-} \\ \bar{u}_3^{\prime 3+} \\ \bar{u}_3^{\prime 3-} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} \\ &+ \begin{bmatrix} C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ -C_{12} & -C_{22} & -C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} \\ 0 & 0 & 0 & -2C_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} \\ 0 & 0 & 0 & -2C_{44} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ -C_{13} & -C_{23} & -C_{33} & 0 \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^M \\ \epsilon_{22}^M \\ \epsilon_{33}^M \\ \epsilon_{23}^M \end{pmatrix} \quad (4.191) \end{aligned}$$

Die Einträge  $K_{ij}$  der Zellsteifigkeitsmatrix sind im Anhang A.2 in den Gleichungen (A.2.2) bis (A.2.17) gegeben. Für die Schubspannungen in axialer Richtung erhält

man auf Unterzelebene die konstitutive Gleichung (4.192).

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_1^{2+} \\ \bar{t}_1^{2-} \\ \bar{t}_1^{3+} \\ \bar{t}_1^{3-} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \bar{u}_1'^{2+} \\ \bar{u}_1'^{2-} \\ \bar{u}_1'^{3+} \\ \bar{u}_1'^{3-} \end{pmatrix}^{(\beta\gamma)} + 2 \begin{bmatrix} C_{66} & 0 \\ -C_{66} & 0 \\ 0 & C_{55} \\ 0 & -C_{55} \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \begin{pmatrix} \epsilon_{12}^M \\ \epsilon_{13}^M \end{pmatrix} \quad (4.192)$$

Die Elemente  $L_{ij}$  der Steifigkeitsmatrix sind im Anhang A.2 unter Berücksichtigung von  $\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)}$  nach Gl. (4.188) gegeben.

### Steifigkeitsmatrizen der Einheitszelle

Für die Berechnung der unbekannte Verschiebungsfuktuationen  $\bar{u}_i'$  werden zwei entkoppelte lineare Gleichungssysteme gebildet, die durch die Kombination der Elementgleichungssysteme (4.191) bzw. (4.192) entstehen. Um zu den Mikrostrukturgleichungssystemen zu gelangen, werden zunächst die nachfolgend beschriebenen Kontinuitätsbedingungen an die Verschiebungsgrößen benachbarter Unterzellen gestellt:

$$\bar{u}_i'^{2+(\beta-1,\gamma)} = \bar{u}_i'^{2-(\beta,\gamma)} =: \bar{u}_i'^{2(\beta,\gamma)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.193)$$

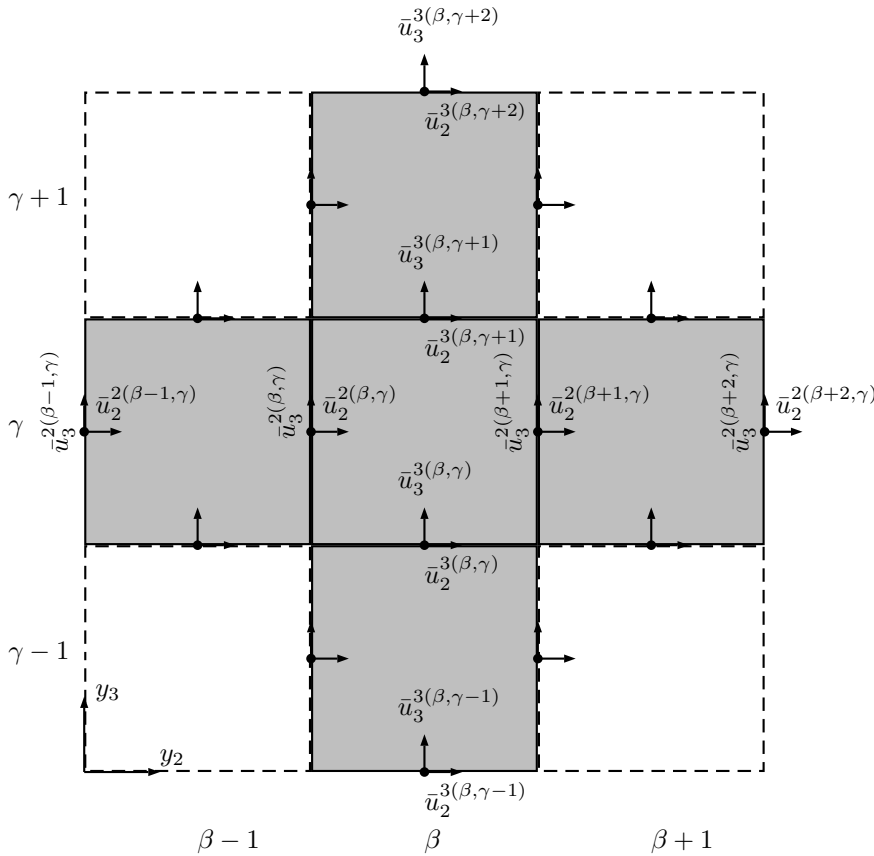


Abbildung 4.12: Freiheitsgrade  $\bar{u}_i^{k(\cdot)}$  in der  $(y_2, y_3)$  Ebene der diskretisierten Einheitszelle in der Spalte  $\beta$  und der Zeile  $\gamma$



$$\bar{u}_i'^{3+(\beta,\gamma-1)} = \bar{u}_i'^{3-(\beta,\gamma)} =: \bar{u}_i'^{3(\beta,\gamma)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.194)$$

Die aus der Identifikation der Verschiebungen benachbarter Zellen hervor gehenden Weggrößen  $\bar{u}_i'^{k(\beta,\gamma)}$  mit  $k = 2, 3$  nach Gln. (4.193) und (4.194) können als Strukturfreiheitsgrade der diskretisierten Einheitszelle aufgefasst werden. Die Kontinuitätsgleichungen in der  $(y_2, y_3)$  Ebene werden durch die Abb. 4.12 veranschaulicht. Die periodischen Randbedingung nach Gl. (4.142) verlangen, dass die Verschiebungsfuktuationen  $u_i'$  am linken und am rechten Rand der Einheitszelle für beliebiges  $y_3$  identisch sind. Für die Randzellen  $\Omega^{(1,\gamma)}$  und  $\Omega^{(N_\beta,\gamma)}$  mit  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$  bedeutet dies, dass folgende Bedingungen einzuhalten sind:

$$\bar{u}_i'^{2(N_\beta,\gamma)} := \bar{u}_i'^{2+(\beta,N_\beta,\gamma)} = \bar{u}_i'^{2-(1,\gamma)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.195)$$

In  $y_3$  Richtung gilt, dass die Fluktuationen am unteren und oberen Rand für beliebiges  $y_2$  gleich sein müssen. Für die Zellen  $\Omega^{(\beta,1)}$  und  $\Omega^{(\beta,N_\gamma)}$  mit  $\beta = 1, \dots, N_\beta$  gilt entsprechend:

$$\bar{u}_i'^{3(\beta,N_\gamma)} := \bar{u}_i'^{3+(\beta,N_\gamma)} = \bar{u}_i'^{3-(\beta,1)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.196)$$

An die gemittelten Oberflächenspannungen  $\bar{t}_i'^{\pm}$  benachbarter Unterzellen werden ebenfalls Kontinuitätsbedingungen gestellt. Sie lauten in den Schnittebenen senkrecht zu  $y_2$  für alle  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$ :

$$\bar{t}_i'^{2+(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i'^{2-(\beta+1,\gamma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.197)$$

In den Schnittebenen senkrecht zu  $y_3$  gilt für alle  $\beta = 1, \dots, N_\beta$ :

$$\bar{t}_i'^{3+(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i'^{3-(\beta,\gamma+1)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.198)$$

Bei den Spannungen auf den äußeren Rändern der Einheitszelle handelt es sich wie bei den Randverschiebungen um periodische Randwerte. Für das diskrete HFGMC-Modell bedeutet dies, dass zusätzlich zu den Kontinuitätsbedingungen (4.197) und (4.198) im Inneren der Einheitszelle folgende Spannungsbedingungen von den Randzellen zu erfüllen sind:

$$\bar{t}_i'^{2-(1,\gamma)} + \bar{t}_i'^{2+(N_\beta,\gamma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.199)$$

$$\bar{t}_i'^{3-(\beta,1)} + \bar{t}_i'^{3+(\beta,N_\gamma)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.200)$$

Nach der Einführung der Kontinuitätsbedingungen entlang der inneren Unterzellgrenzen und den periodischen Randbedingung auf den äußeren Rändern der Einheitszelle verbleiben  $4N_\beta N_\gamma$  unbekannte Weggrößen in der transversalen Ebene, die zu folgenden Hypervektoren zusammengefasst werden:

$$\bar{\mathbf{u}}_2'^2 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_2'^{2(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_2'^{2(N_\gamma)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_2'^{2(\gamma)} = \left\{ \bar{u}_2'^{2(1,\gamma)}, \dots, \bar{u}_2'^{2(N_\beta,\gamma)} \right\} \quad (4.201)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_3'^2 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_3'^{2(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_3'^{2(N_\gamma)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_3'^{2(\gamma)} = \left\{ \bar{u}_3'^{2(1,\gamma)}, \dots, \bar{u}_3'^{2(N_\beta,\gamma)} \right\} \quad (4.202)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2'^3 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_2'^{3(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_2'^{3(N_\beta)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_2'^{3(\beta)} = \left\{ \bar{u}_2'^{3(\beta,1)}, \dots, \bar{u}_2'^{3(\beta,N_\gamma)} \right\} \quad (4.203)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_3'^3 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_3'^{3(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_3'^{3(N_\beta)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_3'^{3(\beta)} = \left\{ \bar{u}_3'^{3(\beta,1)}, \dots, \bar{u}_3'^{3(\beta,N_\gamma)} \right\} \quad (4.204)$$

Das lineare Mikrostrukturgleichungssystem zur Bestimmung der transversalen Weggrößen in Gl. (4.201) bis (4.204) ergibt sich aus den Elementgleichungen (4.191) zu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_2'^{2T} \\ \bar{\mathbf{u}}_3'^{2T} \\ \bar{\mathbf{u}}_2'^{3T} \\ \bar{\mathbf{u}}_3'^{3T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{C}_{11} & \Delta \mathbf{C}_{12} & \Delta \mathbf{C}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \mathbf{C}_{34} \\ \Delta \mathbf{C}_{41} & \Delta \mathbf{C}_{42} & \Delta \mathbf{C}_{43} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^M \\ \epsilon_{22}^M \\ \epsilon_{33}^M \\ \epsilon_{23}^M \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

$$\hat{\mathbf{K}} \quad \hat{\mathbf{u}}_T = \quad \Delta \hat{\mathbf{C}} \quad \boldsymbol{\epsilon}_T^M$$

Mit Hilfe der *Location*-Matrizen

$$\mathbf{M}_T^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \beta + (\gamma - 1 - \delta_\beta)N_\beta + 1 \\ \beta + (\gamma - 1)N_\beta \\ N_\beta N_\gamma + \beta + (\gamma - 1 - \delta_\beta)N_\beta + 1 \\ N_\beta N_\gamma + \beta + (\gamma - 1)N_\beta \\ 2N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1 - \delta_\gamma)N_\gamma + 1 \\ 2N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1)N_\gamma \\ 3N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1 - \delta_\gamma)N_\gamma + 1 \\ 3N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1)N_\gamma \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.206)$$

der Zellen  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ , sowie

$$\delta_\beta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \beta = N_\beta \\ 0, & \text{falls } \beta < N_\beta \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta_\gamma = \begin{cases} 1, & \text{falls } \gamma = N_\gamma \\ 0, & \text{falls } \gamma < N_\gamma \end{cases} \quad (4.207)$$

können die acht Elementfreiheitsgrade in Gl. (4.191) den Strukturfreiheitsgraden  $\bar{\mathbf{u}}_T'$  zugeordnet werden. Unter Beachtung und Zuhilfenahme von Gl. (4.207) werden die Freiheitsgrade auf den Rändern schon beim Zusammenbau des LGS (4.205) derart gekoppelt, dass die periodischen Verschiebungsrandbedingungen (4.195) und (4.196) automatisch eingehalten werden. Die Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}} = [\hat{K}_{m_i m_j}] \in \mathbb{R}^{4N_\beta N_\gamma \times 4N_\beta N_\gamma}$  entsteht durch direktes Addieren der Elementsteifigkeiten  $K_{ij}^{(\beta\gamma)}$  nach Gl. (A.2.2) bis (A.2.17):

$$\hat{K}_{m_i m_j} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} K_{ij}^{(\beta\gamma)} \quad i, j = 1, \dots, 8 \quad (4.208)$$

Die Elemente der Spaltenvektoren  $\Delta \mathbf{C}_{ij} \in \mathbb{R}^{4N_\beta N_\gamma}$  auf der rechten Seite von Gl. (4.205) folgen aus der Addition der Steifigkeiten  $C_{ij}^{(\beta\gamma)}$  auf den rechten Seiten der Gln. (4.191) in analoger Weise zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{K}}$  nach Gl. (4.208).

Im Gegensatz zu den Elementgleichungen treten in den Strukturgleichungen keine Randspannungen auf. Dies ist die Konsequenz der Kontinuitäts- und Periodizitätsbedingen (4.197), (4.198), (4.199) und (4.200), die beim Addieren der Elementgleichungen (4.191) zu den Strukturgleichungen (4.205) für die Aufhebung der Spannungsterme sorgen.

Die Schubdeformationen der Mikrostruktur in axialer Richtung werden ebenfalls zu Hypervektoren zusammengefasst:

$$\bar{\mathbf{u}}_1'^2 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_1'^{2(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_1'^{2(N_\gamma)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_1'^{2(\gamma)} = \left\{ \bar{u}_1'^{2(1,\gamma)}, \dots, \bar{u}_1'^{2(N_\beta,\gamma)} \right\} \quad (4.209)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1'^3 = \left\{ \bar{\mathbf{u}}_1'^{3(1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_1'^{3(N_\beta)} \right\} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{u}}_1'^{3(\beta)} = \left\{ \bar{u}_1'^{3(\beta,1)}, \dots, \bar{u}_1'^{3(\beta,N_\gamma)} \right\} \quad (4.210)$$

Durch Addition der Steifigkeiten aus den Elementgleichungen (4.192) erhält man das lineare Gleichungssystem (4.211) für die  $2N_\beta N_\gamma$  Unbekannten  $\bar{\mathbf{u}}_1'^2$  und  $\bar{\mathbf{u}}_1'^3$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1'^{2T} \\ \bar{\mathbf{u}}_1'^{3T} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \mathbf{c}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{12}^M \\ \epsilon_{13}^M \end{Bmatrix} \\ \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{u}}_A &= \Delta \mathbf{c} \mathbf{\epsilon}_A^M \end{aligned} \quad (4.211)$$

Die Zuordnung der vier Unterzellefreiheitsgrade (s. Gl. (4.192)) zu den  $2N_\beta N_\gamma$  Mikrostrukturfreiheitsgraden (4.209) und (4.210) geschieht über die *Location*-Matrizen:

$$\mathbf{M}_A^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \beta + (\gamma - 1 - \delta_\beta)N_\beta + 1 \\ \beta + (\gamma - 1)N_\beta \\ N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1 - \delta_\gamma)N_\gamma + 1 \\ N_\beta N_\gamma + \gamma + (\beta - 1)N_\gamma \end{bmatrix}^{(\beta\gamma)} \quad (4.212)$$

mit

$$\delta_\beta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \beta = N_\beta \\ 0, & \text{falls } \beta < N_\beta \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta_\gamma = \begin{cases} 1, & \text{falls } \gamma = N_\gamma \\ 0, & \text{falls } \gamma < N_\gamma \end{cases} \quad (4.213)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{L}} = [\hat{L}_{m_i m_j}] \in \mathbb{R}^{2N_\beta N_\gamma \times 2N_\beta N_\gamma}$  folgt durch Addition der Elementsteifigkeiten  $L_{ij}^{(\beta\gamma)}$  nach Gl. (A.2.18) bis (A.2.23):

$$\hat{L}_{m_i m_j} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} L_{ij}^{(\beta\gamma)} \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (4.214)$$

Die Elemente der Spaltenvektoren  $\Delta \mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{R}^{2N_\beta N_\gamma}$  auf der rechten Seite von Gl. (4.211) ergeben sich durch die Addition der Steifigkeiten  $C_{66}^{(\beta\gamma)}$  und  $C_{55}^{(\beta\gamma)}$  in den Gln. (4.192) in analoger Weise zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{L}}$  nach Gl. (4.214).

Die linearen Gleichungssysteme (4.205) und (4.211) besitzen singuläre Matrizen  $\hat{\mathbf{K}}$  und  $\hat{\mathbf{L}}$ , denn es sind noch Starrkörperbewegungen in ihnen enthalten. Um die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungssysteme herzustellen, müssen geeignete Randwerte der Verschiebungsfluktuationen zu Null gesetzt werden. Nach Aboudi et al. (2002) werden alle Randverschiebungen einer Eckzelle, sowie alle Verschiebungen jeweils eines Randes zweier weiter Eckzellen gesperrt, siehe Abb. 4.13. Aufgrund der erzwungenen Periodizität sind dann auch die gestrichelt eingezeichneten Lagerungen vorhanden. Es ist zu betonen, dass nur der fluktuierende Anteil der Verformungen der Einheitszelle durch die Zwangsbedingungen behindert wird, und nicht der Anteil  $u_{0i}(\mathbf{x})$  des Verschiebungsfelds nach Gl. (4.141). Im Modell wird die Lagerung durch die Streichung der zu den gesperrten Freiheitsgraden gehörigen Zeilen und Spalten der Matrizen  $\hat{\mathbf{K}}$  und  $\hat{\mathbf{L}}$  realisiert. Die Zahl der Unbekannten in den Gleichungssystemen (4.205) und (4.211) sinkt auf  $(4N_\beta N_\gamma - 8)$  bzw.  $(2N_\beta N_\gamma - 4)$ .

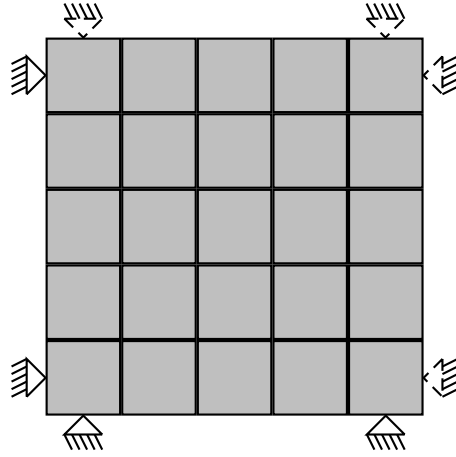


Abbildung 4.13: Lagerung der Einheitszelle zur Vermeidung von Starrkörperbewegungen

### Effektiver Materialtensor

Zur Berechnung des effektiven Materialtensors werden zunächst die mittleren Verzerrungskonzentrationstensoren  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  für eine Unterzelle aus dem mikroskopischen Verzerrungsfeld bestimmt. Mit Hilfe der Verzerrungskonzentrationstensoren  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  lassen sich die makroskopischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  auf die mittleren Unterzellverzerrungen  $\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(\beta\gamma)} \rangle$  abbilden. Die Volumenmittelung der Verzerrungen über die Unterzelle

$$\langle \epsilon_{ij}^{(\beta\gamma)} \rangle = \frac{1}{h_\beta l_\gamma} \int_{-l_\gamma/2}^{+l_\gamma/2} \int_{-h_\beta/2}^{+h_\beta/2} \int_0^1 \epsilon_{ij}^{(\beta\gamma)} dx_1 dy_2^{(\beta\gamma)} dy_3^{(\beta\gamma)} \quad (4.215)$$

liefert für die Komponenten  $\epsilon_{ij}^{(\beta\gamma)}$  nach Gl. (4.153) bis (4.158):

$$\langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{11}^M \quad (4.216)$$

$$\langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{22}^M + W_{2(10)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.217)$$

$$\langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{33}^M + W_{3(01)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.218)$$

$$\langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{23}^M + \frac{1}{2} \left[ W_{2(01)}^{(\beta\gamma)} + W_{3(10)}^{(\beta\gamma)} \right] \quad (4.219)$$

$$\langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{13}^M + \frac{1}{2} W_{1(01)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.220)$$

$$\langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{12}^M + \frac{1}{2} W_{1(10)}^{(\beta\gamma)} \quad (4.221)$$

Die Mikrovariablen  $W_{i(nm)}^{(\beta\gamma)}$  berechnen sich aus den Lösungen der Gleichungssysteme (4.205) und (4.211) durch Einsetzen derselben in die Gleichungen (4.177) bis (4.182) und (4.185) bis (4.187). Die mikromechanischen Gleichungen sind für sechs Lastfälle zu lösen, die dadurch gegeben sind, dass je eine Makroverzerrungskomponente zu 1 gesetzt wird, während die übrigen fünf Verzerrungswerte Null sind. Aus jedem Lastfall ergibt sich je eine Spalte der Matrixdarstellung der Verzerrungskonzentrations-

tensoren. Die Matrixdarstellung des Verzerrungskonzentrationstensors  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  lautet:

$$\mathbf{A}^{(\beta\gamma)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{13}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{bmatrix} \\ \text{LF}_{\epsilon_{11}^M=1} & \text{LF}_{\epsilon_{22}^M=1} & \text{LF}_{\epsilon_{33}^M=1} & \text{LF}_{\epsilon_{23}^M=1} & \text{LF}_{\epsilon_{13}^M=1} & \text{LF}_{\epsilon_{12}^M=1} \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

Die Mittelwerte der Unterzellspannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle$  ergeben sich mit Hilfe der Verzerrungskonzentrationsmatrizen  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  aus den Makroverzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  und der elastischen Materialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}^{(\beta\gamma)}$  der Unterzelle zu:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle = \mathbf{C}^{(\beta\gamma)} \langle \boldsymbol{\epsilon}^{(\beta\gamma)} \rangle = \mathbf{C}^{(\beta\gamma)} \mathbf{A}^{(\beta\gamma)} \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (4.223)$$

Die gewichtete Summe der mittleren Unterzellspannungen führt auf die mittleren Spannungen in der Einheitszelle, die den makroskopischen Spannungszustand darstellen:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{HL} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta l_\gamma \mathbf{C}^{(\beta\gamma)} \mathbf{A}^{(\beta\gamma)} \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (4.224)$$

Die Längen  $H$  und  $L$  ergeben sich aus  $H = \sum_\beta h_\beta$  und  $L = \sum_\gamma l_\gamma$ . Mit der effektiven Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{C}^* := \frac{1}{HL} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta l_\gamma \mathbf{C}^{(\beta\gamma)} \mathbf{A}^{(\beta\gamma)} \quad (4.225)$$

ist die konstitutive Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungen und Verzerrungen gefunden:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (4.226)$$

### Anwendungsbeispiel der hochauflösenden Methode der Zellen auf elastische Verbundwerkstoffe

Nachfolgend wird der gleiche Glasfaserverbundwerkstoff, der zuvor schon mit der GMC analysiert worden ist, mit Hilfe der HFGMC homogenisiert. Das Ziel ist, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden mikromechanischen Ansätze zu erkennen. Es werden die Materialdaten nach Tab. 4.1 auf Seite 78 sowie die diskreten RVE-Modelle in Abb. 4.8 verwendet. Die Ermittlung der transversalisotropen Ingenieurkonstanten für die Modelle  $QR$  und  $QA$  erfolgt wie im Anwendungsbeispiel der GMC.

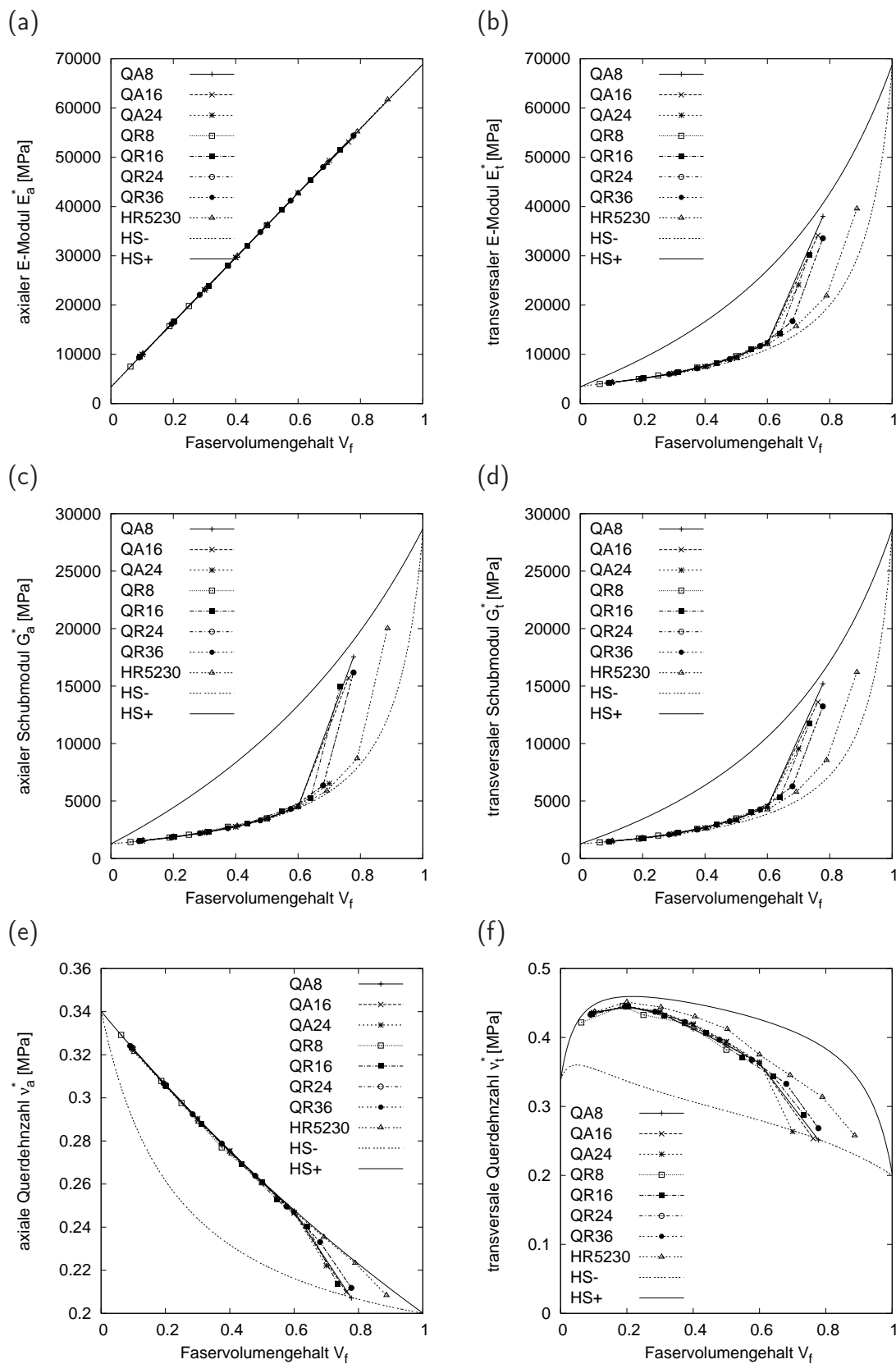


Abbildung 4.14: Vergleich der elastischen Kennwerte der diskreten HFGMC-Modelle nach Abb. 4.8 mit den oberen und unteren Schranken der transversalisotropen Elastizitätsparameter nach Hashin-Shtrikman

Die Diagramme in Abb. 4.14 (a) bis (f) zeigen die Ergebnisse der HFGMC-Analyse des glasfaserverstärkten Epoxidharzes, die mit den Kurvenverläufen in Abb. 4.9 (a) bis (f) auf Seite 81 zu vergleichen sind. Die GMC und die HFGMC liefern für den axialen Elastizitätsmodul  $E_a^*$  identische Werte. Beim transversalen Elastizitätsparameter  $E_t^*$  zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Modelle  $QA$ ,  $QR$  und  $HR5230$  in der HFGMC-Berechnung, während die GMC für den Modul  $E_t^*$  des RVEs  $HR5230$  in Abb. 4.9 (b) kleinere Werte voraussagt, die für Faservolumenanteile  $V_f < 0.70$  unterhalb der Hashin-Shtrikman Grenze  $HS^-$  bleiben.

Für den axialen und transversalen Schubmodul  $G_a^*$  und  $G_t^*$  liefern alle RVE-Modelle der HFGMC fast identische Werte, die etwas dichter an der unteren Schranke  $HS^-$  liegen als in der GMC-Berechnung für die Modelle  $QR$  und  $QA$ . Im Gegensatz zur GMC führt das hexagonale Modell  $HR5230$  bei der HFGMC-Analyse zu Werten für  $G_t^*$  und  $G_a^*$ , die oberhalb der Grenze  $HS^-$  angesiedelt sind. Die aus den orthotropen Modellen  $QA$  und  $QR$  berechneten transversalisotropen Schubsteifigkeiten  $G_t^*$  stimmen für die GMC und HFGMC gut überein. Die axialen Querdehnzahlen  $\nu_a^*$  der HFGMC-Modelle entsprechen für einen weiten Bereich des Fasergehalts der oberen Schranke  $HS^+$  und liegen dichter beieinander als in der GMC-Berechnung. Im Gegensatz zur GMC fallen die transversalen Querdehnzahlen  $\nu_t^*$  der HFGMC für alle RVE-Diskretisierungen zwischen die Grenzen nach Hashin-Shtrikman. Im Abschnitt 4.4.1 ist bereits diskutiert worden, dass die effektiven Steifigkeiten von der Wahl der Randbedingungen beeinflusst werden. Periodische Randbedingungen führen bei ansonsten gleicher Modellierung zu geringeren Steifigkeiten als homogene Verschiebungsrandbedingungen, da letztere eine stärkere Restriktion des Deformationsfelds darstellen. Die Einschränkung der Deformationsfreiheit wird bei der GMC noch zusätzlich verschärft, da der Verschiebungsansatz nur linear ist, während das mikroskopische Verformungsfeld von der HFGMC mit überlagerten Legendre Polynomen nullten bis zweiten Grades approximiert wird.

Der Vergleich der Vorhersagen der HFGMC (periodische RB) mit denen der GMC (homogene RB) bestätigt im Prinzip die Existenz versteifender Effekte im GMC-Ansatz. Das Ausmaß ist jedoch nicht stark ausgeprägt, da die Spannungskontinuitätsbedingungen der GMC relativ homogene Spannungsfelder erzwingen. Die Annahme eines vollständig homogenen Spannungszustands liefert nach Reuss die unteren Grenzwerte der elastischen Parameter. Die den versteifenden Effekten entgegenwirkende geringe Veränderlichkeit der Spannungen im GMC-Modell zeigt sich deutlich beim effektiven Schubmodul  $G_t^*$  des Modells  $HR5230$ . Hier wird der Schubmodul nicht aus den Steifigkeiten  $C_{22}^*$  und  $C_{23}^*$  des transversalisotropen effektiven Materialtensors berechnet, sondern folgt direkt durch Differentiation des Schubspannungsfelds nach den Schubdeformationen. Wegen der vollständigen Homogenität des transversalen Schubspannungsfelds wird die Schubsteifigkeit nicht überschätzt, sondern fällt mit der Reuss-Schranke zusammen und ist damit wesentlich geringer als die Steifigkeit, die anhand der HFGMC ermittelt wird.

#### 4.4.4 Homogenisierung mittels der FEM und Vergleich mit Ergebnissen der GMC und HFGMC

Die Methode der finiten Elemente kann ebenso wie die Methode der Zellen für die Homogenisierung von Verbundwerkstoffen angewendet werden. Die Basis hierfür

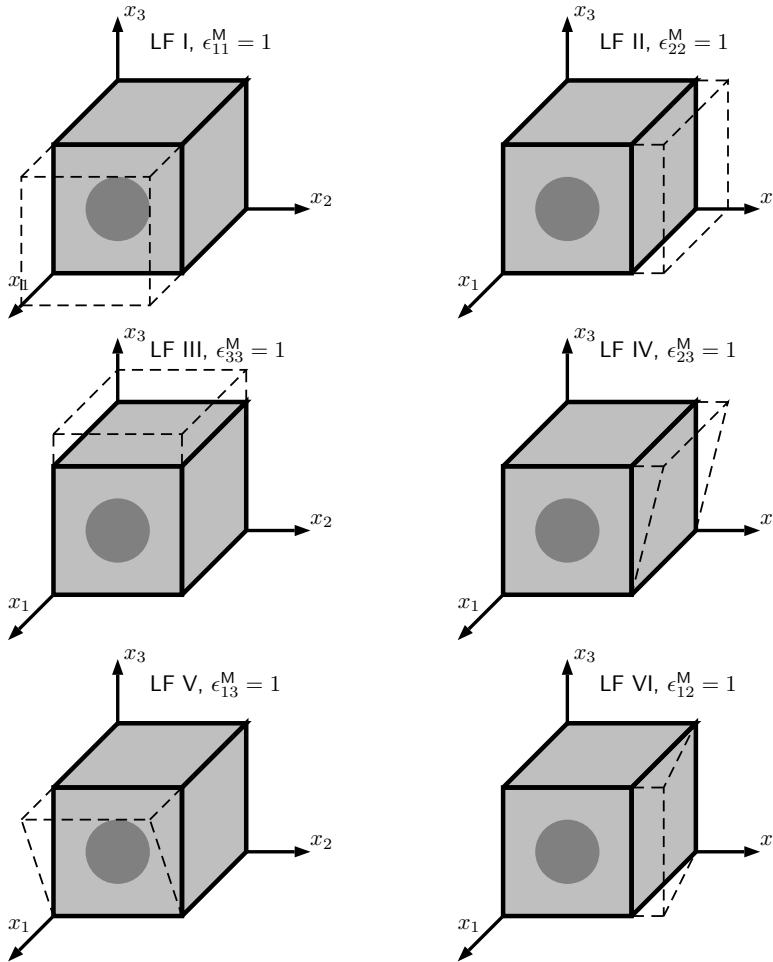


Abbildung 4.15: Homogene Randbedingungen am RVE

stellt wie schon bei der GMC und der HFGMC das repräsentative Volumenelement dar, welches im Allgemeinen durch finite Volumenelemente oder im Sonderfall unidirektional langfaserverstärkter Verbundwerkstoffe durch Scheibenelemente im ebenen Verzerrungszustand diskretisiert wird. In diesem Abschnitt sollen die Berechnungen der GMC und der HFGMC mit der FE-Lösung als Referenzlösung verglichen werden. Die effektiven Steifigkeiten ergeben sich bei der Homogenisierung mittels der FEM aus der Formänderungsenergie des diskreten RVE-Modells. Ein Werkstoff mit quadratischer Anordnung der Fasern besitzt 6 unabhängige Kennwerte:

$$C_{11}, C_{22} = C_{33}, C_{12} = C_{13}, C_{23}, C_{44}, C_{55} = C_{66} \quad (4.227)$$

Für die Bestimmung aller Komponenten  $C_{ij}$  in Gl. (4.227) sind als Beanspruchungen die sechs Verschiebungslastfälle nach Abb. 4.15 vorzugeben. Bei homogenen Randbedingungen werden die Verschiebungen aller Knoten auf dem Rand so vorgeschrieben, dass die gezeigten Verformungsbilder entstehen. Zur Erzeugung periodischer Verschiebungsrandbedingungen werden nur die Beträge der Verschiebungen für die Eckknoten des diskretisierten RVEs vorgegeben. An die übrigen Randknoten wird die abgeschwächte Forderung nach der Periodizität des Verschiebungsfelds gestellt, vgl. Kapitel 4.4.1. Für den Vergleich der FEM mit der GMC und HFGMC wird der transversale Schnitt durch das RVE mit finiten Scheibenelementen (Plane42



in ANSYS) diskretisiert. Aus Gründen der Einfachheit wird von einer rechtwinkligen Fasergeometrie ausgegangen, denn das Ziel der hier angestellten Rechnung ist nicht die möglichst genaue Vorhersage der realen effektiven Eigenschaften, sondern die Beurteilung der Güte der GMC und HFGMC Analysen im Vergleich zur FEM-Berechnung unter gleichen Bedingungen. Das Element Plane42 wird als reines isoparametrisches Element sowie als Element mit zusätzlichen, inkompatiblen Verschiebungsansätzen (EDS: *extra displacement shape functions*, Wilson et al. (1973)) im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) verwendet. Der Faservolumengehalt beträgt in allen Simulationen  $V_f = 0.5$ . Die FE-Lösung für die Spannungs- und Verzerrungsfelder liefert die Näherung  $\langle U^h \rangle$  für die mittlere elastische Formänderungsenergie im RVE:

$$\langle U^h \rangle = \frac{1}{2|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (4.228)$$

Das homogene Ersatzmaterial, in welchem der makroskopische Spannungstensor  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und der makroskopische Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}^M = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  wirken, besitzt die Formänderungsenergiegedichte  $U^*$ , die sich über die noch unbekanntenen effektiven Steifigkeiten  $C_{ijkl}^*$  berechnet:

$$U^* = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \epsilon_{ij}^M = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \epsilon_{kl}^M \epsilon_{ij}^M \quad (4.229)$$

Im Sinne der Makrohomogenitätsbedingung nach Hill lassen sich die Energiedichten  $U^*$  und  $\langle U^h \rangle$  gleichsetzen:

$$\frac{1}{2} C_{ijkl}^* \epsilon_{kl}^M \epsilon_{ij}^M = \frac{1}{2|V_{\text{RVE}}|} \int_{V_{\text{RVE}}} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (4.230)$$

Von den sechs unbekanntenen Komponenten in Gl. (4.227) können die Steifigkeiten  $C_{22} = C_{33}$  sowie  $C_{44}$  wie folgt am zweidimensionalen RVE-Modell berechnet werden:

$$\frac{1}{2} C_{22}^* \epsilon_{22}^{M^2} |_{LFII} = \langle U^h \rangle |_{LFII} \quad (4.231)$$

$$2C_{44}^* \epsilon_{23}^{M^2} |_{LFIV} = \langle U^h \rangle |_{LFIV} \quad (4.232)$$

Die elastischen Materialparameter der transversalisotropen Kohlefasern betragen  $G_t = 10.3$  GPa,  $G_a = 6.9$  GPa,  $E_t = 72.4$  GPa,  $E_a = 220.7$  GPa sowie  $\nu_t = 0.25$ . Das isotrope Epoxidharz ist charakterisiert durch  $E = 3.2$  GPa und  $G = 1.2$  GPa. Die Materialdaten sind Altenbach (1996) entnommen und stammen ursprünglich aus Willway and White (1989). Untersucht werden Diskretisierungen wie in Abb. 4.16 dargestellt, d.h. das RVE wird mit einem regelmäßigen Netz rechtwinkliger Elemente überzogen. In allen Modellen (FEM, GMC und HFGMC) wird ein quadratischer Faserquerschnitt angenommen. Die HFGMC und GMC approximieren zusätzlich die runde Fasergeometrie anhand der RVE-Typen  $QR$  nach Abb. 4.8 auf Seite 79. Die Ergebnisse der Simulationsrechnungen am RVE sind in den Diagrammen der Abbildungen 4.17 und 4.18 graphisch über der Elementanzahl aufgetragen. Der Vergleich der Berechnungsergebnisse in Abb. 4.17 zeigt, dass die FEM-Analyse bei homogenen Randbedingungen unabhängig davon, ob EDS verwendet werden oder nicht, die

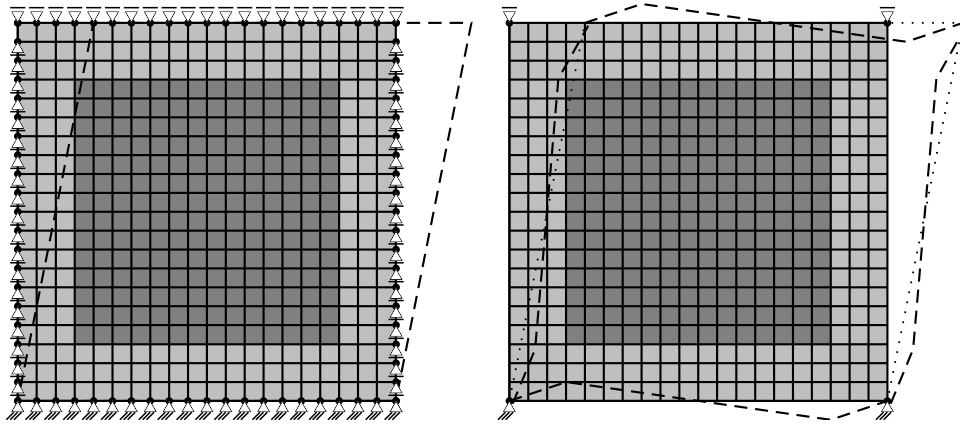


Abbildung 4.16: FE-Modell des RVEs im Lastfall IV,  $\epsilon_{23}^M \neq 0$ . Links: homogene Randbedingungen. Rechts: periodische Randbedingungen

höchsten Werte für die Steifigkeit  $C_{22}^*$  liefert und die Lösung für beide Elementformulierungen (mit und ohne EDS) zum selben Grenzwert konvergiert. Der FEM-Ansatz mit periodischen Randbedingungen führt auf eine etwas geringere Steifigkeit. Die HFGMC sagt für hinreichend feine, auskonvergierte Vernetzungen eine Steifigkeit  $C_{22}^*$  vorher, die zwischen den Ergebnissen der FEM bei homogenen und bei periodischen R.B. liegt. Die GMC liefert im Vergleich dazu die geringste transversale Steifigkeit  $C_{22}^*$ . Die Approximation des realen, runden Faserquerschnitts anhand der QR Modelle gemäß Abb. 4.8 auf S. 79 bewirkt sowohl in der GMC- als auch in der

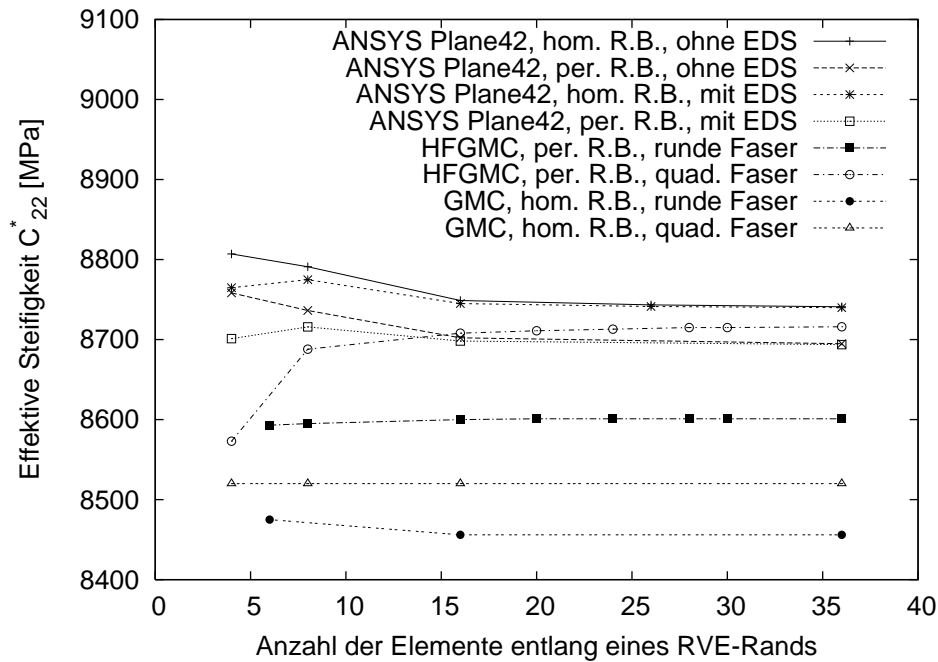


Abbildung 4.17: Vergleich der Vorhersagen für die transversale Steifigkeit  $C_{22}^*$  für verschiedene Berechnungsmethoden in Abhängigkeit der Diskretisierung

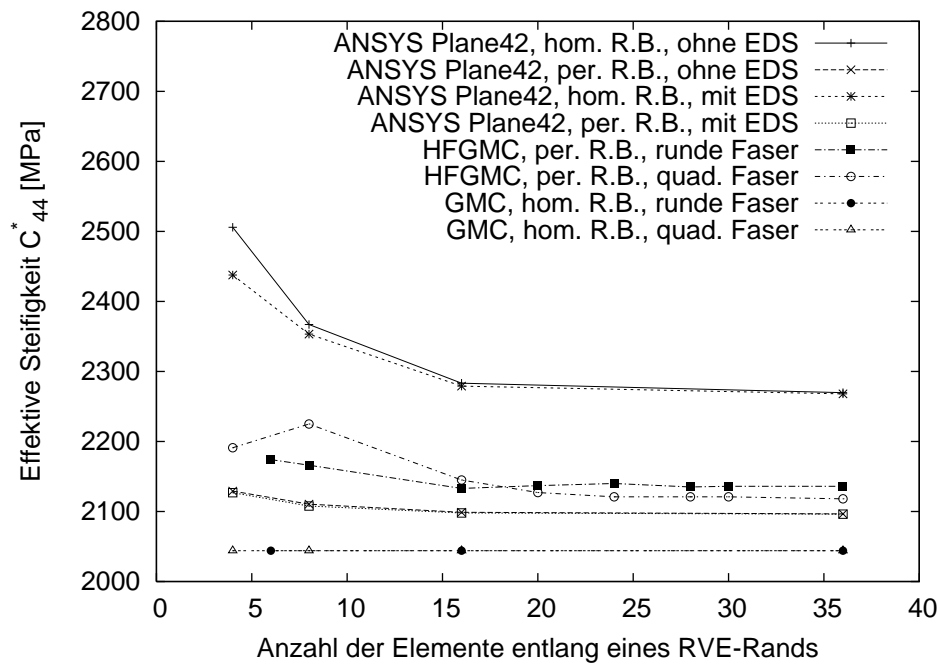


Abbildung 4.18: Vergleich der Vorhersagen für die transversale Schubsteifigkeit  $C_{44}^*$  für verschiedene Berechnungsmethoden in Abhängigkeit der Diskretisierung

Steifigkeit	HFGMC	FEM, periodische RB		GMC	FEM, homogene RB	
		mit EDS	ohne EDS		mit EDS	ohne EDS
$C_{22}^*$ [MPa]	8716.0	8693.6	8694.8	8520.0	8739.8	8741.0
$C_{22}^*$ [%]	100.3	100.0	≈100.0	98.0	100.5	100.5
$C_{44}^*$ [MPa]	2118.0	2096.2	2096.5	2044.0	2268.0	2269.8
$C_{44}^*$ [%]	101.0	100.0	≈100.0	97.5	108.2	108.2

Tabelle 4.2: Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse (auskonvergierte Netze:  $36 \times 36$  Elemente für alle Modelle mit quadratischem Faserquerschnitt)

HFGMC-Analyse eine kleinere effektive Steifigkeit gegenüber der Annahme einer quadratischen Faser. Dieser Unterschied ist bei der HFGMC deutlicher ausgeprägt als bei der GMC. In Abb. 4.18 sind die Ergebnisse für die transversale Schubsteifigkeit  $C_{44}^*$  des Verbundwerkstoffs dargestellt. In deutlich ausgeprägterer Weise als im Lastfall des transversalen Zugs ergibt die FEM-Simulation bei homogenen Schubrandbedingungen die größte effektive Steifigkeit. Die zweithöchste Steifigkeit  $C_{44}^*$  erhält man mit dem HFGMC-Modell gefolgt vom Ergebnis der FEM-Analyse mit periodischen Randbedingungen. Der Einfluss der Gestalt des Faserquerschnitts auf die effektive Steifigkeit ist für das HFGMC-Modell von untergeordneter Größe. Die GMC liefert die geringste Schubsteifigkeit im Vergleich der Modelle. Die Resultate für die quadratische und die runde Fasergeometrie sind identisch.

In Tab. 4.2 sind die absoluten effektiven Steifigkeiten  $C_{22}^*$  und  $C_{44}^*$  für die unterschiedlichen Modellansätze bei quadratischem Faserquerschnitt nochmals angege-

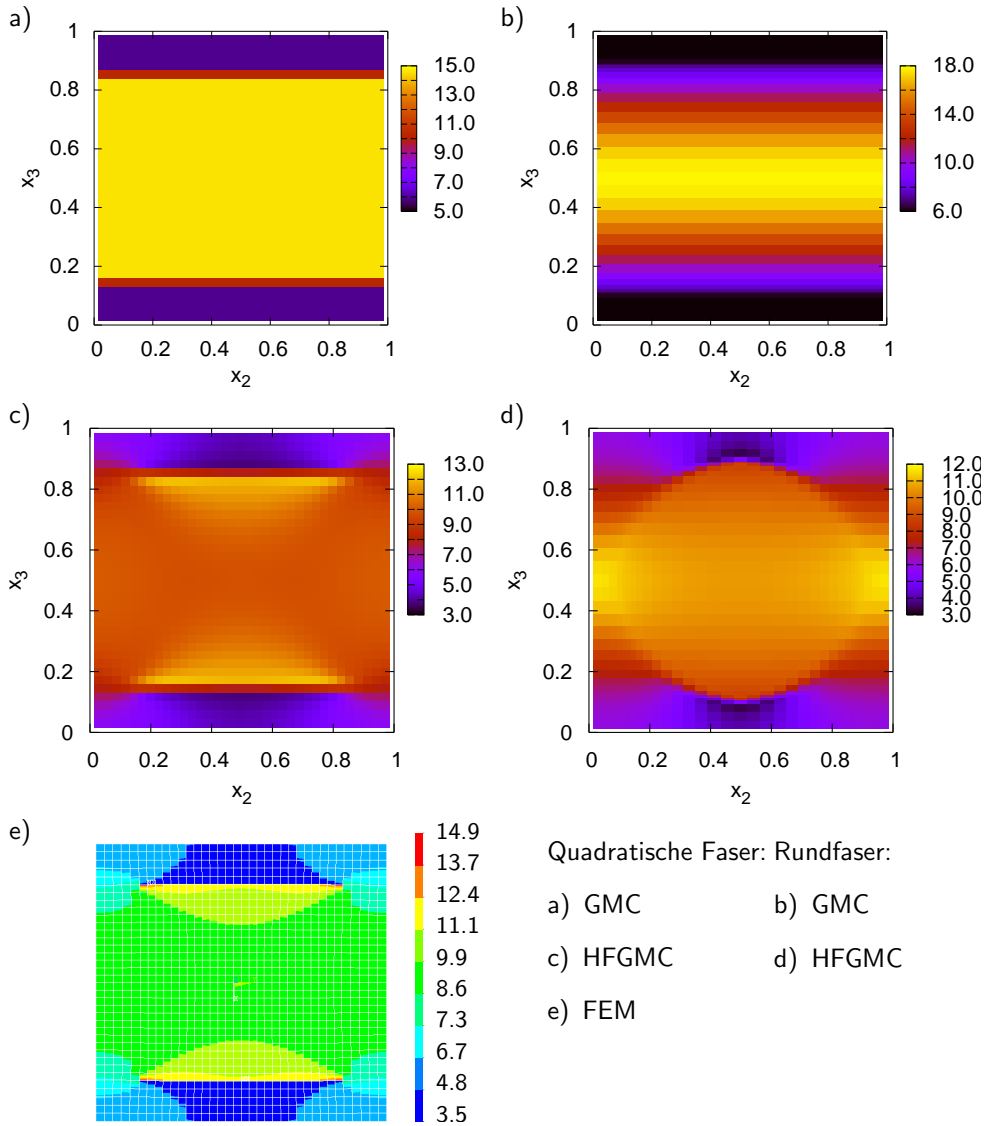


Abbildung 4.19: Spannungsfelder  $\sigma_{22}$  im Lastfall  $\epsilon_{22}^M = 1$  für runde und quadratische Faser

ben. Zusätzlich sind prozentuale Steifigkeiten aufgeführt, wobei die FEM-Lösung für periodische Randbedingungen und mit EDS als Referenzlösung (=100%) dient. Die Prozentangaben lassen erkennen, dass sich die HFGMC-Lösung in sehr guter Übereinstimmung mit der FEM-Lösung befindet. Die Steifigkeiten des GMC-Modells unterschreiten diejenigen des FEM-Ansatzes mit periodischen Randbedingungen. Die Erklärung dafür, dass die GMC trotz homogener Randbedingungen geringere Steifigkeiten als die Modelle mit periodischen Randbedingungen liefert ist im geringeren Auflösungsvermögen der Spannungsfelder zu suchen. Im GMC-Modell des RVEs sind die Spannungsfelder bereichsweise homogen, was zu geringeren Steifigkeiten und im Falle der Schubsteifigkeit sogar auf die Reuss-Approximation führt, s. Gl. (4.136). Die räumlich konstanten Spannungsverteilungen der GMC in großen Bereichen des RVEs über mehrere Unterzellen hinweg bewirken eine Überkompensation des Versteifungseffekts der homogenen Randbedingungen.

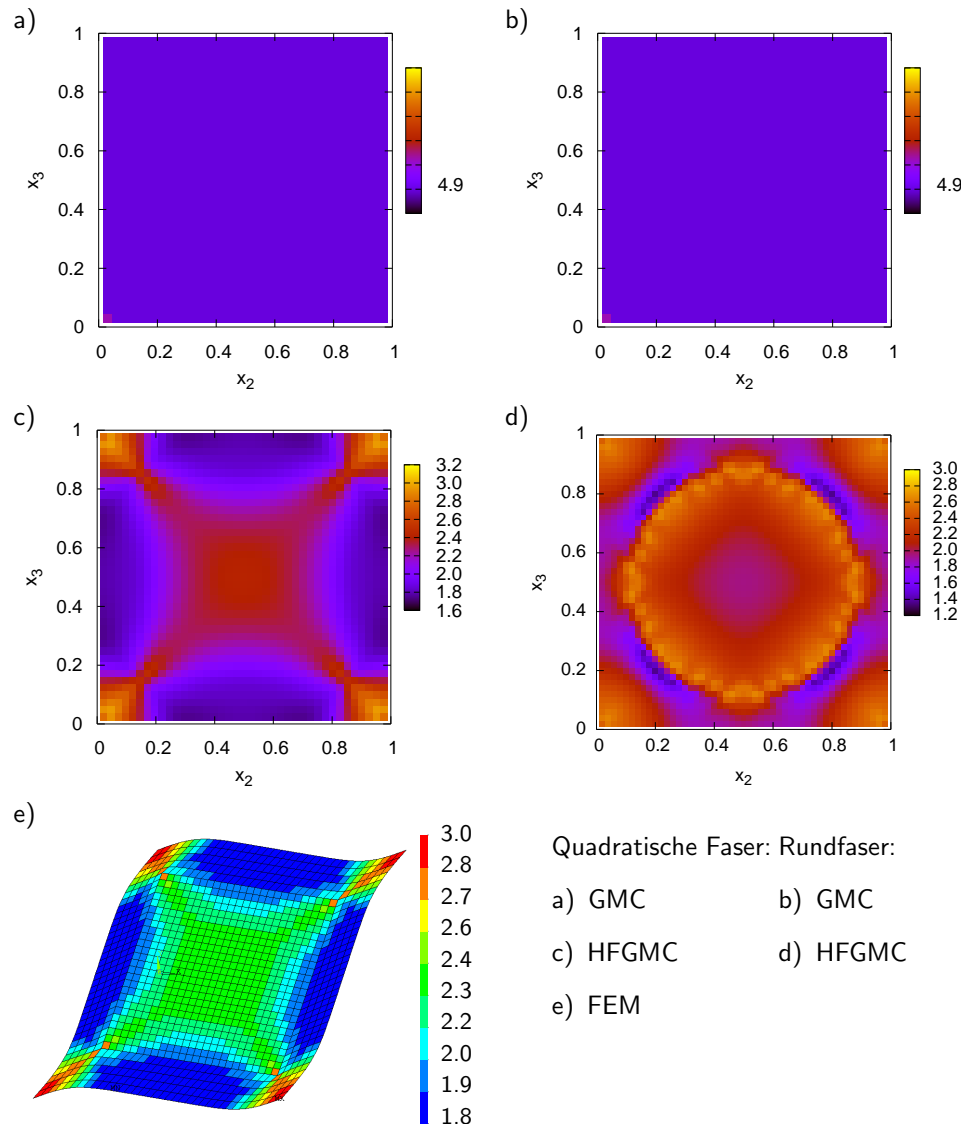


Abbildung 4.20: Spannungsfelder  $\sigma_{23}$  im Lastfall  $\epsilon_{23}^M = 1$  für runde und quadratische Faser

In Abbildung 4.19 sind die Spannungsfelder  $\sigma_{22}$  dargestellt, die sich im Lastfall  $\epsilon_{22}^M = 1$  für Netze mit  $36 \times 36$  Elementen ergeben. Den Spannungsverteilungen auf der linken Seite liegt eine quadratische Fasergeometrie zugrunde während in den Verteilungen auf der rechten Seite eine runde Faser approximiert wird. Für das RVE mit quadratischer Faser sind im HFGMC- und FEM-Modell (mit periodischen RB) deutliche Spannungskonzentrationen am oberen und unteren Rand der Faser zu erkennen, die durch die scharfen Ecken der Fasern induziert sind. Die Spannungsfelder der FEM und der HFGMC stimmen qualitativ sehr gut überein. Das GMC-Modell löst die Konzentrationen nicht auf, vielmehr herrscht im gesamten Bereich der Faser der gleiche Spannungszustand.

Die Spannungsverteilungen bei einer runden Faser im RVE weisen qualitativ deutliche Unterschiede gegenüber der Verteilung bei einer quadratischen Faser auf. Das Spannungsmaximum liegt nicht am Rand der Faser, sondern in Fasermitte vor. Im

Gegensatz zur HFGMC ist es mit der GMC nicht möglich, die Veränderlichkeit der Spannungen  $\sigma_{22}$  in  $x_2$ -Richtung aufzulösen; der Randspannungszustand setzt sich in  $x_2$  unveränderlich durch das RVE fort.

In Abbildung 4.20 sind die Spannungsfelder  $\sigma_{23}$  für den Lastfall  $\epsilon_{23}^M = 1$  graphisch dargestellt. Unabhängig von der Faserform liefert die GMC ein vollständig homogenes Spannungsfeld. Die HFGMC löst die Spannungsfelder dagegen gut auf. Die mit der HFGMC erzielbare Spannungsverteilung im RVE mit quadratischer Faser stimmt mit der Verteilung laut FEM-Lösung weitgehend überein. Die numerisch höchste Effizienz, ausgedrückt in der Zahl der Unbekannten, besitzt die GMC. Für die feinste Vernetzung mit  $36 \times 36 \times 1$  Elementen beläuft sich die Zahl auf 1441. Das zu lösende, lineare Gleichungssystem besitzt sogar nur 1368 Unbekannte, da die Gleichungen für die Schublastfälle linear unabhängig sind und mit geringem numerischen Aufwand analytisch lösbar sind – siehe Gln. (4.130) bis (4.132) auf S. 77. Die Konsequenz ist die schlechte Auflösung der Spannungsfelder, die erzielbaren homogenisierten Steifigkeiten sind dennoch zufriedenstellend genau. Die HFGMC erfordert die Lösung zweier linearer Gleichungssysteme. Bei ebenfalls  $36 \times 36 \times 1$  Elementen beläuft sich die Zahlen der Unbekannten auf 5176 bzw. 2588. Die FEM erfordert zur Bestimmung aller Komponenten des effektiven Steifigkeitstensors die Verwendung von Volumenelementen. Für die Ermittlung der hier betrachteten Steifigkeiten reicht das vierknotige Scheibenelement aus. Unter periodischen Randbedingungen und einer Vernetzung durch  $36 \times 36 \times 1$  vierknotigen Scheibenelementen ergeben sich 2590 Unbekannte. Die Zahl der Freiheitsgrade der FEM ist folglich geringer als bei der HFGMC. Es ist anzumerken, dass der Verschiebungsansatz der FEM lediglich bilinear ist, während die Ansatzfunktionen der HFGMC quadratische Polynome sind.

# Kapitel 5

## Elastische Verbundwerkstoffstrukturen

### 5.1 Einbettung der Zellenmethode in die Technik der finiten Elemente

Fragestellungen der Kontinuumsmechanik lassen sich mathematisch als Anfangs-Randwertproblem formulieren. Die gesuchte Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$  muss im allgemeinen ein partielles Differentialgleichungssystem (mit dem Differentialoperator  $\mathbf{D}$ ) auf dem Definitionsgebiet  $\Omega$

$$\mathbf{D}[\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)] = \mathbf{p}(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (5.1)$$

unter Beachtung gewisser Anfangs- und Randbedingungen zur Zeit  $t_0$  bzw. auf dem Rand  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  erfüllen. Für die Verschiebungen und Spannungen auf dem Rand mit der Normalen  $\mathbf{n}$  gilt für die Verschiebungsmethode in der Elastizitätstheorie:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\Gamma_1} = \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\Gamma_2} = \bar{\mathbf{t}}(t) \quad (5.2)$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{dt} = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (5.3)$$

Die exakte Lösung des Problems erfüllt auch die mit den Variationen  $\mathbf{w}$  gebildete schwache Form:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \quad (5.4)$$

Im Falle einer strukturmechanischen Aufgabe lautet die schwache Form der lokalen Gleichgewichtsaussage mit dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem Volumenlastvektor  $\mathbf{p}$ :

$$\int_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \mathbf{w} \, d\Omega \quad (5.5)$$

Mit  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$  und der Ersetzung  $\mathbf{w} = \delta\mathbf{u}$  erhält man nach partieller Integration und Annahme eines linear elastischen Kontinuums die Integralgleichung

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} \, ds \quad (5.6)$$

oder allein in den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ausgedrückt

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T : \mathbf{C} : \mathbf{L} \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, ds, \quad (5.7)$$

worin  $\mathbf{t}$  der Oberflächenlastvektor und  $\mathbf{L}$  der kinematische Operator sind. Die finiten Elemente mit den Knotenwerten  $\mathbf{u}^k$  ersetzen das gesuchte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  näherungsweise durch einen Reihenansatz mit  $\mathbf{N}$  als Matrix der Formfunktionen.

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{u}^k \quad \text{und} \quad \mathbf{L} \mathbf{u}^h =: \mathbf{B} \mathbf{u}^k \quad (5.8)$$

Dieser Ansatz führt auf das folgende Gleichungssystem für die diskretisierten Verschiebungen:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega) \mathbf{u}^k = \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N} \mathbf{t} \, ds \quad (5.9)$$

Zur numerischen Integration der Gleichungen (5.9) werden die Steifigkeiten  $\mathbf{C}$  des Kontinuums in jedem Stützpunkt benötigt, welche von den simultan zur FE-Analyse ablaufenden Homogenisierungsalgorithmen der GMC und HFGMC geliefert werden. An die Stelle des Steifigkeit  $\mathbf{C}$  tritt die effektive Steifigkeit  $\mathbf{C}^*$  des Verbundmaterials.

### 5.1.1 Anmerkungen zur Implementierung mikromechanischer Modelle in den FE-Code FEAP

Die Implementierung der mikromechanischen Zellenmodelle als *User-Materialroutine* wird in das FE-Paket FEAP in der Version 8.1 vorgenommen worden – siehe hierzu auch Taylor and Zienkiewicz (1989). Die Einbindung von *User-Materialmodellen* in die FE-Codierung von FEAP geschieht über die Routinen `umat1` und `umat1`. Während `umat1` zum Einlesen der Modellparameter gedacht ist und nur einmalig zum Beginn der FE-Analyse aufgerufen wird, dient `umat1` dem Aufruf der Materialsubroutinen, in denen der konstitutive Tensor und die Spannungen an den Integrationsstellen berechnet werden. Somit wird `umat1` für jede Stützstelle und bei transienten Berechnungen in jedem Zeit- bzw. Iterationsschritt aufgerufen. Die Implementierung der elastischen Modelle und später auch des viskoelastischen GMC-Modells ist auf zwei Arten möglich. Die erste Variante, welche für die Homogenisierung von Werkstoffen mit prozessabhängiger Schädigungsentwicklung die allein mögliche ist, führt den Homogenisierungsalgorithmus für jeden Stützpunkt der numerischen Integration und jeden Zeitschritt wiederholt durch. Hier wird das GMC-Modell durch `umat1` aufgerufen. Alternativ kann die Homogenisierung bei linear elastischem und viskoelastischem Werkstoffverhalten (bei konstanter Zeitschrittgröße) schon beim Aufruf von `umat1` geleistet werden. Die effektiven Steifigkeiten werden dann nur einmalig und nicht mehr separat für jeden Integrationspunkt und jeden Zeitschritt ermittelt. Der effektive Materialtensor ist im Arbeitsspeicher vorzuhalten. Es kann dann von `umat1` auf die gespeicherten Materialdaten zugegriffen werden. Im einzelnen Integrationspunkt sind lediglich die aktuellen Spannungen zu ermitteln. Auf diesem Wege lässt sich eine erhebliche Rechenzeiterparnis erzielen, da der betriebene numerische Aufwand zur Homogenisierung bei dieser Variante der Implementierung unabhängig von der Zahl der FE-Freiheitsgrade ist.



### 5.1.2 Berücksichtigung der Faserausrichtung

Um die Verlaufsrichtung der Fasern im Bauteil abweichend von der globalen  $x_1$ -Richtung wählen zu können, ist die Transformation der makroskopischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^M$ , der Spannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}^*$  notwendig. Die Transformation zwischen zwei kartesischen Koordinatensystemen  $\{\mathbf{e}_i\}$  und  $\{\bar{\mathbf{e}}_j\}$  wird durch die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  vermittelt:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Die Komponenten  $t_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \cos(\alpha_{ij})$  entsprechen den Richtungscosinus' der eingeschlossenen Winkel  $\alpha_{ij}$  zwischen den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  und  $\bar{\mathbf{e}}_j$ . Mit den Koeffizienten  $t_{ij}$  transformieren sich ein Tensor  $\bar{\mathbf{a}}$  zweiter Stufe gemäß  $a_{ij} = t_{ik}t_{jl}\bar{a}_{kl}$ . Für einen Tensor  $\bar{\mathbf{B}}$  vierter Stufe gilt  $B_{ijkl} = t_{ir}t_{js}t_{kn}t_{lm}\bar{B}_{rsnm}$ . Folglich ergeben sich unter Berücksichtigung der Symmetrie  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  sechs Transformationsgleichungen des Spannungstensors in Vektornotation:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \end{matrix} \right\}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11}t_{11} & t_{12}t_{12} & t_{13}t_{13} & 2t_{12}t_{13} & 2t_{11}t_{13} & 2t_{11}t_{12} \\ t_{21}t_{21} & t_{22}t_{22} & t_{23}t_{23} & 2t_{22}t_{23} & 2t_{21}t_{23} & 2t_{21}t_{22} \\ t_{31}t_{31} & t_{32}t_{32} & t_{33}t_{33} & 2t_{32}t_{33} & 2t_{31}t_{33} & 2t_{31}t_{32} \\ t_{21}t_{31} & t_{22}t_{32} & t_{23}t_{33} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} & t_{21}t_{33} + t_{23}t_{31} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} \\ t_{11}t_{31} & t_{12}t_{32} & t_{13}t_{33} & t_{12}t_{33} + t_{13}t_{32} & t_{11}t_{33} + t_{13}t_{31} & t_{11}t_{32} + t_{12}t_{31} \\ t_{11}t_{21} & t_{12}t_{22} & t_{13}t_{23} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} & t_{11}t_{23} + t_{13}t_{21} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{T}^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{matrix} \right\} \quad (5.11)$$

Die Transformation des Verzerrungstensors in Voigt-Notation lautet mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^\epsilon$ :

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} & 2\epsilon_{23} & 2\epsilon_{13} & 2\epsilon_{12} \end{matrix} \right\}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11}t_{11} & t_{12}t_{12} & t_{13}t_{13} & t_{12}t_{13} & t_{11}t_{13} & t_{11}t_{12} \\ t_{21}t_{21} & t_{22}t_{22} & t_{23}t_{23} & t_{22}t_{23} & t_{21}t_{23} & t_{21}t_{22} \\ t_{31}t_{31} & t_{32}t_{32} & t_{33}t_{33} & t_{32}t_{33} & t_{31}t_{33} & t_{31}t_{32} \\ 2t_{21}t_{31} & 2t_{22}t_{32} & 2t_{23}t_{33} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} & t_{21}t_{33} + t_{23}t_{31} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} \\ 2t_{11}t_{31} & 2t_{12}t_{32} & 2t_{13}t_{33} & t_{12}t_{33} + t_{13}t_{32} & t_{11}t_{33} + t_{13}t_{31} & t_{11}t_{32} + t_{12}t_{31} \\ 2t_{11}t_{21} & 2t_{12}t_{22} & 2t_{13}t_{23} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} & t_{11}t_{23} + t_{13}t_{21} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{T}^\epsilon} \left\{ \begin{matrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ 2\bar{\epsilon}_{23} \\ 2\bar{\epsilon}_{13} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{matrix} \right\} \quad (5.12)$$

Stellen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\epsilon}$  den Spannungs- und den Verzerrungszustand in den Hauptachsen des Werkstoffs dar, so ergeben sich die konstitutiven Gleichungen im kartesischen Koordinatensystem  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$  der Makrostruktur mit Hilfe der Gln. (5.11) und (5.12):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}^* \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{T}^\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^* \mathbf{T}^\epsilon \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{T}^{\sigma^{-1}} \mathbf{C}^* \mathbf{T}^\epsilon \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{C}}$  in den Koordinaten der Makrostruktur lautet folglich:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^{\sigma-1} \mathbf{C}^* \mathbf{T}^\epsilon \quad (5.14)$$

Die Drehmatrix  $\mathbf{T}$  für eine Rotation des kartesischen Basissystems im dreidimensionalen Raum kann auf verschiedene Weisen durch drei Drehwinkel dargestellt werden. Die Eulerwinkel beschreiben jeweils eine Rotation um eine bestimmte Achse, welche die Transformation zwischen zwei kartesischen Koordinatensystemen festlegt. Die direkte Vorgabe der Richtungs\*cosinus', also der Komponenten  $t_{ij}$  in Gl. (5.10), ist ebenfalls möglich.

### x-Konvention

In der x-Konvention (siehe z.B. Meywerk (2007)) erfolgt zunächst eine Drehung  $\Psi$  um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse des Ausgangssystems. Es folgt eine Rotation  $\theta$  um die neue  $\mathbf{e}_1$ -Achse und schließlich um  $\Phi$  um die aus den beiden vorangegangenen Drehungen entstehende  $\mathbf{e}_3$ -Richtung. Die Drehmatrix  $\mathbf{T}$  lautet:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\cos \Psi \cos \Phi - \sin \Psi \cos \theta \sin \Phi) & (-\cos \Psi \sin \Phi - \sin \Psi \cos \theta \cos \Phi) & (\sin \Psi \sin \theta) \\ (\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \cos \theta \sin \Phi) & (\cos \Psi \cos \theta \cos \Phi - \sin \Psi \sin \Phi) & (-\cos \Psi \sin \theta) \\ (\sin \theta \sin \Phi) & (\sin \theta \cos \Phi) & (\cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

### y-Konvention

In der y-Konvention erfolgt zunächst eine Drehung  $\Psi$  um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse des Ausgangssystems. Es folgt eine Rotation  $\theta$  um die neue  $\mathbf{e}_2$ -Achse und schließlich um  $\Phi$  um die aus den beiden vorangegangenen Drehungen entstehende  $\mathbf{e}_3$ -Richtung. Die Drehmatrix  $\mathbf{T}$  lautet:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (-\sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \cos \theta \cos \Phi) & (-\sin \Psi \cos \Phi - \cos \Psi \cos \theta \sin \Phi) & (\cos \Psi \sin \theta) \\ (\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \cos \theta \cos \Phi) & (\cos \Psi \cos \theta \cos \Phi - \sin \Psi \sin \Phi) & (\sin \Psi \sin \theta) \\ (-\sin \theta \cos \Phi) & (\sin \theta \sin \Phi) & (\cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Die Bestimmung der Transformationsmatrix in Abhängigkeit der Eulerwinkel besitzt kritische Punkte, in denen die Abbildung nicht eindeutig umkehrbar ist. Dies tritt bei der x- oder y-Konvention auf, falls der Winkel der zweiten Drehung Null ist, denn in diesem Fall stimmt die Drehachse der ersten Drehung mit der Drehachse der dritten Drehung überein. Folglich ergibt sich die Gesamtdrehung  $\alpha = \Psi + \Phi$  als Summe aus zwei Drehungen um die gleiche Achse, die durch unendliche viele Kombinationen der zwei Drehwinkel  $\Psi$  und  $\Phi$  darstellbar ist.

## 5.2 Finite Elemente Berechnung von linear elastischen Faserverbundstrukturen

Im Folgenden werden die Ergebnisse durchgeführter FE-Analysen strukturmechanischer Aufgaben vorgestellt und diskutiert, die der Verifikation und Validierung der HFGMC- und GMC-Implementierung in den FE-Code FEAP dienen.

### 5.2.1 Zweischichtige Laminatzugprobe

Im Rahmen eines von Soden and Hinton (1998) initiierten Wettbewerbs („*World-Wide Failure Exercise*“) zur Prognose des Versagens von Faserverbundkunststoffen werden in Soden et al. (1998) für verschiedene Materialkombinationen experimentell gewonnene Werkstoffkennwerte sowohl für ein Verbundmaterial aus unidirektional verstärktem Glasfaser/Epoxidharz als auch für die einzelnen Konstituenten angegeben. Diese Daten werden der folgenden Vergleichsrechnung zu Grunde gelegt. Da die Werkstoffkennwerte sowohl für die einzelnen Phasen als auch für den Verbundwerkstoff vorliegen, ist neben der Verifizierung der GMC und HFGMC-Implementierung in das FE-Programm auch die Validierung der Zellenmodelle möglich. Zur Verifikation wird die Elastizitätsmatrix für das Ersatzkontinuum zunächst vor der FE-Berechnung der strukturmechanischen Aufgabe mit Hilfe der GMC und der HFGMC bestimmt und sodann als Werkstoffmatrix dem FE-Programm übergeben. Vergleichend werden in einem zweiten Rechenlauf die Materialparameter der beiden Phasen und der Faservolumengehalt vorgegeben; der Homogenisierungsalgorithmus ist dann simultan zur FE-Analyse und für jede Stützstelle der numerischen Integration zu durchlaufen. Bei der Validierung wird die Elastizitätsmatrix des Ersatzkontinuums aus den experimentellen Daten, die am Verbundwerkstoff gewonnen wurden, bestimmt. Diese Größe liegt dann der Materialformulierung im FE-Modell zu Grunde.

Als strukturmechanisches Beispiel dient die Zugprobe nach Abbildung 5.1. Sie besteht aus einem zweischichtigen Winkelverbundlaminat  $[+45^\circ / -45^\circ]$ , dessen Einzelschichten aus dem unidirektional glasfaserverstärkten Epoxidharz gebildet werden. Die Materialkennwerte sind in Tab. 5.1 angegeben. Der Faservolumengehalt liegt bei  $V_f = 0.62$ . Die anhand der GMC und HFGMC berechneten Ingenieurkonstanten für einen orthotropen Werkstoff mit  $E_{22} = E_{33}$  und  $G_{12} = G_{13}$  sind in Tab. 5.2 aufgeführt. Die diskreten Modelle der GMC und HFGMC-Analysen bestehen aus der jeweils  $20 \times 20$  Elemente umfassenden Vernetzung des RVEs mit einer einzelnen runden

Material	$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]	$\nu_{23}$ [-]
E-Glass	80.0	80.0	33.3	33.3	0.2	0.2
Epoxidharz	3.35	3.35	1.24	1.24	0.35	0.35
Komposit	53.48	17.70	5.83	–	0.278	0.4

Tabelle 5.1: Elastische Eigenschaften der Komponenten E-Glass  $21 \times K43$  Gevetex, LY556/HT907/DY063 epoxy und homogene Materialparameter aus Experimenten

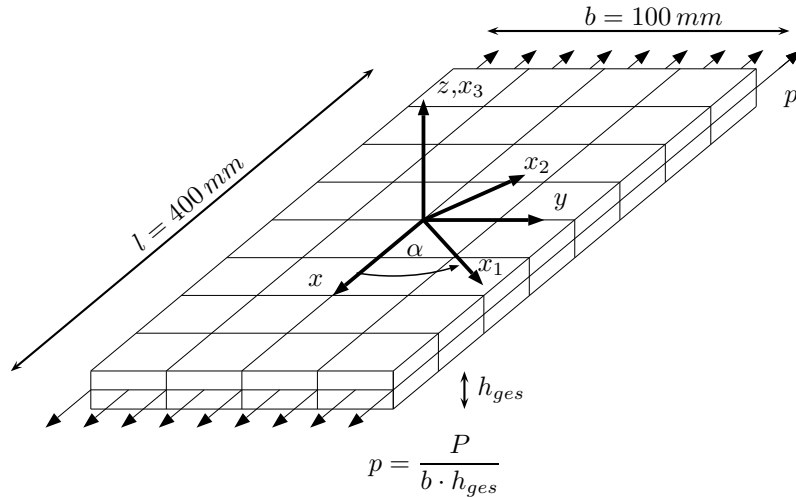


Abbildung 5.1: Zweisechichtige Laminatzugprobe

Faser. Die aus den Phasensteifigkeiten berechneten Verbundsteifigkeiten weichen für  $V_f = 0.62$  von den im Experiment gemessenen Eigenschaften in unterschiedlich starkem Maße ab. Hierbei ist anzumerken, dass die Materialdaten der Glasfasern nach Tab. 5.1 invers identifiziert wurden; sie stammen aus der Anwendung von nicht näher konkretisierten Mischungsregeln auf die experimentell bestimmten Steifigkeiten der Einzelschicht. Daher sind die Fasereigenschaften vom angewendeten mikromechanischen Modell abhängig und reproduzieren nur in Verbindung mit diesem die richtigen homogenen Eigenschaften. Statt die Fasereigenschaften (zur Verbesserung der Vorhersagen) mittels des HFGMC- oder GMC-Modells invers zu identifizieren, wird der Faservolumengehalt, dessen experimentelle Bestimmung ebenfalls mit Ungenauigkeiten verbunden ist, geringfügig erhöht. Mit einem angenommenen Gehalt von  $V_f = 0.65$  liefert die GMC bessere und die HFGMC sehr gut übereinstimmende homogene Kennwerte. Im FE-Modell des zweisechichtigen Winkelverbundlaminats  $[+45^\circ / -45^\circ]$  wird jede Laminatschicht in Dickenrichtung durch ein 8-knotiges, isoparametrisches Volumenelement abgebildet; Länge und Breite der Platte werden durch 12 bzw. 6 Elemente in einer Richtung diskretisiert. Der Winkel  $\alpha$  definiert die Richtung der ersten Hauptachsenrichtung (Faserrichtung  $x_1$ ) einer Schicht bezogen auf die  $x$ -Richtung des FE-Modells. Die Zugkraft  $P_x = 10$  kN wird als konstant

Materialmodell	$E_{11}$ [GPa]	$E_{22}$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]	$\nu_{23}$ [-]
GMC (0.62)	50.89	15.21	4.30	3.08	0.25	0.26
GMC (0.65)	53.19	16.68	4.71	3.31	0.25	0.25
HFGMC (0.62)	51.33	16.11	4.82	3.42	0.26	0.25
HFGMC (0.65)	53.65	17.89	5.35	3.72	0.25	0.24

Tabelle 5.2: Orthotrope elastische Materialparameter aus GMC- bzw. HFGMC-Berechnungen

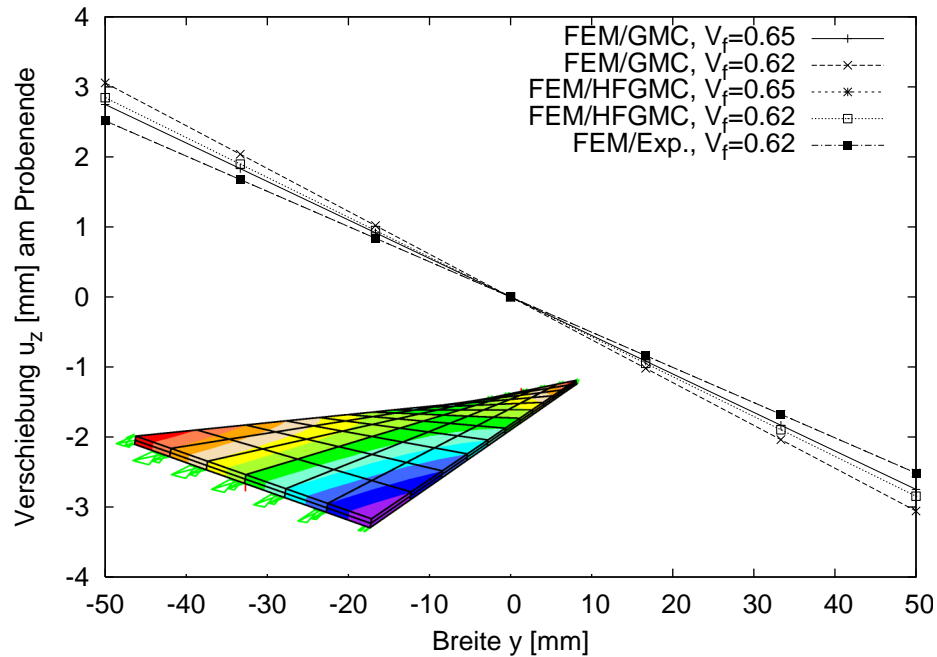


Abbildung 5.2: Überhöhte Darstellung der Deformationsfigur und Verlauf der Querverschiebungen  $u_z$  [mm] am Ende der Laminatplatte

verteilte Oberflächenlast  $p_x$  an beiden Probenenden in entgegengesetzter Orientierung eingeleitet. An den beiden Enden ( $x = \pm 200 \text{ mm}$ ) der Zugprobe sind jeweils die Knoten mit den weiteren Koordinaten  $y = z = 0$  in vertikaler  $z$ -Richtung unverschieblich gelagert. Die Knotenpunkte mit  $x = y = 0$  und  $z = \pm 1.6 \text{ mm}$  sind in  $y$ -Richtung gehalten. Die Starrkörperverschiebung in  $x$  und die Rotation der Probe um  $z$  wird durch die Lagerung der Knoten mit den Koordinaten  $x = 0$ ,  $y = \pm 50$  und  $z = 0$  in  $x$ -Richtung verhindert. Aufgrund der Anordnung der Laminatschichten über die Dicke der Zugprobe kommt es unter reiner Zugbelastung zur Verwindung der ebenen Platte. Die rechnerischen Torsionsverformungen der Enden der Zugprobe für sowohl experimentell als auch für die auf Basis der GMC und HFGMC homogenisierten Werkstoffkennwerte sind in Abbildung 5.2 graphisch und tabellarisch dargestellt. Die Ergebnisse der Berechnung für den vorab numerisch homogenisierten Verbundwerkstoff stimmen mit denen bei simultaner Homogenisierung in jedem Integrationspunkt überein, wodurch die Implementierung der elastischen Zellenmodelle als Materialroutine verifiziert ist. Für die Validierung sind die Ergebnisse basierend auf den numerisch homogenisierten und den experimentell bestimmten, homogenen Materialparametern zu vergleichen. Für den in Soden et al. (1998) angegebenen Faservolumengehalt  $V_f = 0.62$  zeigt sich eine Abweichung der Vorhersagen unter Verwendung der numerisch und experimentell bestimmten Materialparameter. Die

auf die Referenzlösung für experimentell bestimmte homogene Eigenschaften bezogenen Verschiebungen rel.  $u_z$  weisen für die GMC einen Fehler von rund 20% aus. Das HFGMC-Modell liefert mit einer Abweichung von 13% ein besser übereinstimmendes Ergebnis. Die Verwendung des HFGMC-Modells mit einem Faservolumengehalt von  $V_f = 0.65$  führt auf Verformungen, die mit jenen aus der Berechnung mit den experimentell ermittelten Verbundwerkstoffdaten übereinstimmen.

### 5.2.2 Einaxiale Zugversuche an Laminaten aus UD-Schichten

In Karandikar and Chou (1993) werden mehrere, mit Silikon-Carbid-Langfasern verstärkte Keramikmatrixlaminaten in einaxialen Zugversuchen bis zum Bruch belastet. Ziel der Tests ist es unter anderem, die Änderungen der Materialsteifigkeiten, welche durch die Entstehung von Mikrorissen in der Matrixphase der Einzelschichten verursacht werden, experimentell zu erfassen. Die dabei gewonnenen Daten des linear elastischen Teilbereichs der Spannungs-Dehnungs-Kurven können zur Verifikation und Validierung der elastischen GMC/FEM und HFGMC/FEM Modelle herangezogen werden. Entsprechende Zugversuche bilden Luo et al. (2005) numerisch in einer Zweiskalen-FE-Simulation nach, bei der die Homogenisierung des Werkstoffs von der FEM geleistet wird. Der E-Modul der Fasern liegt bei  $E_f = 193.2$  GPa, die Querdehnzahl beträgt  $\nu_f = 0.310$ . Die elastischen Matrixeigenschaften sind durch  $E_m = 98$  GPa und  $\nu_m = 0.255$  charakterisiert. Der Faservolumengehalt aller Einzelschichten liegt bei  $V_f = 0.35$ . Die FE-Modellierung der Zugproben mit  $50 \times 5 \times n = 250 \times n$  achtknotigen Volumenelementen ist in Bild 5.3 gegeben.

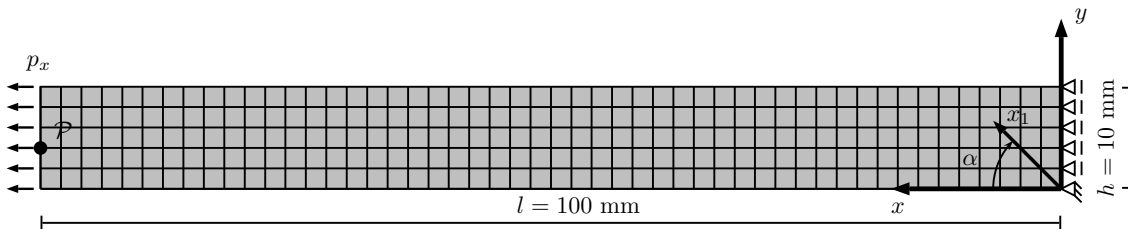


Abbildung 5.3: FE-Modell der Zugprobe

Die  $n$  Einzelschichten mit einer Dicke von  $t = 0.2$  mm, werden jeweils mit einem Element in Dickenrichtung modelliert. Für die UD-Probe  $[0_8]$  verlaufen alle Fasern in Richtung der Zugbeanspruchung. Das Kreuzverbundlaminat  $[0_3/90_3/0_3]$  besteht aus neun Einzelschichten.

Die Ergebnisse der FE-Analyse sind in Bild 5.4 dargestellt. Die mittlere Normalspannung  $\sigma_{xx}$  in Lastrichtung entspricht der auf die Anfangsquerschnittsfläche der Probe bezogenen, gemessenen Zugkraft des weggesteuerten Experiments. Die linear elastische FE-Simulation wird ebenfalls weggesteuert durchgeführt. Die Längsverzerrung  $\epsilon_{xx}$  in der experimentellen Untersuchung wurde mit Dehnmessstreifen auf der Oberfläche der Zugproben ermittelt. Als Dehnung der FE-Analyse wird der Quotient aus der Verschiebung  $u_x$  des Knotenpunktes  $\mathcal{P}$  und der Probenlänge  $l = 100$  mm angenommen. Der Homogenisierung des Werkstoffs liegt ein diskretes RVE mit  $20 \times 20$  Unterzellen zur Approximation einer runden Faser zugrunde. Die GMC- und HFGMC-Algorithmen werden vom FE-Programm als Materialroutine aufgeru-

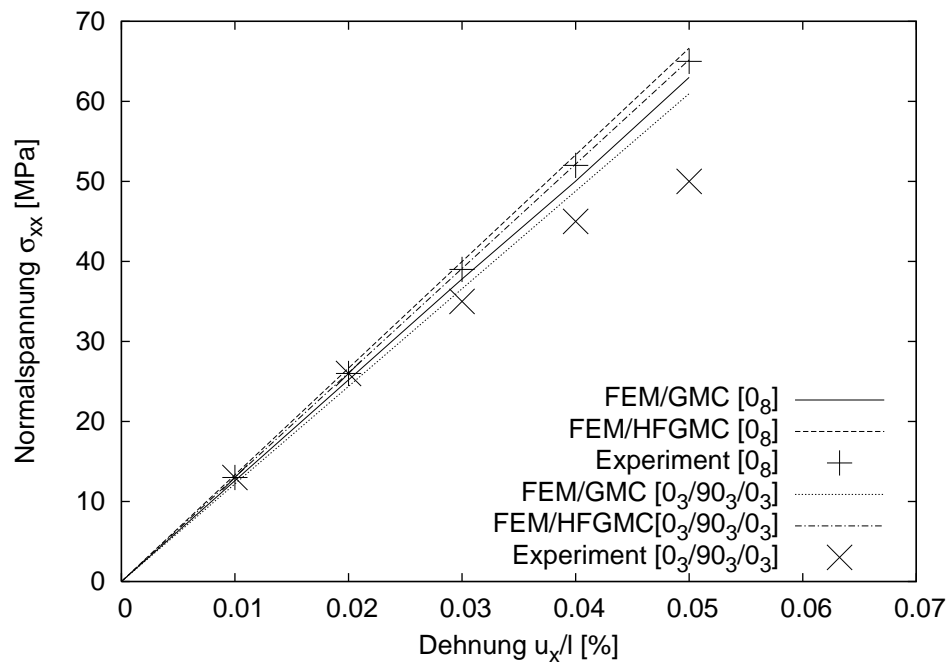


Abbildung 5.4: Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kurven des elastischen GMC/FEM Models (RVE-Typ 1) mit experimentellen Daten

fen, wobei die Berechnung der effektiven Steifigkeiten nicht an jedem Integrationspunkt durchgeführt wird, sondern sie erfolgt nach dem Einlesen der Modelldaten. Der graphische Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten in Abb. 5.4 zeigt eine zufriedenstellende Übereinstimmung der Modellvoraussagen mit den experimentellen Daten im elastischen Bereich. Als Ursache für die ab ca.  $\epsilon_{xx} > 0,02\%$  einsetzende Abweichung der Messwerte für das Kreuzverbundlaminat  $[0_3/90_3/0_3]$  von der anfänglich linearen Spannungs-Dehnungs-Relation haben Karandikar and Chou (1993) die Bildung erster Matrixrisse in den  $90^\circ$  Schichten festgestellt.





# Kapitel 6

## Viskoelastische Verbundwerkstoffstrukturen

Der Gegenstand des vorliegenden Kapitels ist die Homogenisierung unidirektional langfaserverstärkter Verbundwerkstoffe mit viskoelastischem Matrixmaterial. Zunächst werden die viskoelastischen Materialgleichungen der Kapitel 2.3.2 und 3.3 in die Gleichungen der effizient reformulierten GMC eingearbeitet. Anschließend wird die GMC als Konstitutivmodell in die FEM integriert. Einfache strukturmechanische Aufgaben können dann auf Basis der GMC gelöst werden, um das Materialmodell zu verifizieren und zu validieren.

### 6.1 Homogenisierung viskoelastischer Werkstoffe mittels der Zellenmethode

Den Ausgangspunkt der Homogenisierung viskoelastischer Verbundwerkstoffe anhand der mikromechanischen Methode der Zellen bilden die kinematischen Gleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.89), die im Kapitel 4.4.2 hergeleitet worden sind. Da im Weiteren nur unidirektional langfaserverstärkte Werkstoffe betrachtet werden, kann die dreidimensionale Diskretisierung des RVEs in Faserrichtung auf  $N_\alpha = 1$  Unterzelle mit  $d = d_1 = 1$  beschränkt werden. Wenn keine Änderung der Steifigkeits- oder Materialverteilung in einer Achsenrichtung des Zellenmodells auftritt, so hat die Anzahl der Unterzellen in dieser Richtung keinen Einfluss auf die erzielbaren Ergebnisse. Aus der kinematischen Gleichung (4.80) wird mit  $N_\alpha = 1$ :

$$\langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle = \epsilon_{11}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.1)$$

Die Unterzellverzerrungen  $\langle \epsilon_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle$  sind für alle verbliebenen  $N_\beta \times N_\gamma$  Zellen gleich und entsprechen im Wert den makroskopischen Dehnungen  $\epsilon_{11}^M$ . Die kinematischen Gleichungen (4.81) und (4.82) gehen über in:

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \langle \epsilon_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle h_\beta + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \llbracket (2)u_2^{(\beta\gamma)} \rrbracket = h\epsilon_{22}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.2)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \langle \epsilon_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle l_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \llbracket (3)u_3^{(\beta\gamma)} \rrbracket = l\epsilon_{33}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (6.3)$$

Die Schubdeformationsgleichungen (4.88) bis (4.90) vereinfachen sich zu:

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{1}{2} \llbracket (2)u_1^{(\beta\gamma)} \rrbracket = h\epsilon_{12}^M \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.4)$$

$$\sum_{\gamma=1}^{N_\beta} l_\gamma \langle \epsilon_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{1}{2} \llbracket (3)u_1^{(\beta\gamma)} \rrbracket = l\epsilon_{13}^M \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (6.5)$$

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma \langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma-1} \frac{h_\beta}{2} \llbracket (3)u_2^{(\beta\gamma)} \rrbracket + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \sum_{\beta=1}^{N_\beta-1} \frac{l_\gamma}{2} \llbracket (2)u_3^{(\beta\gamma)} \rrbracket = hl\epsilon_{23}^M \quad (6.6)$$

Wie im Fall der elastischen Werkstoffe werden die Verzerrungen und Diskontinuitäten in den kinematischen Gleichungen durch Ausdrücke in den Spannungen ersetzt. Zu diesem Zweck werden die konstitutiven Gleichungen für die Zellen  $\Omega^{(\beta\gamma)}$  sowie die Grenzflächen herangezogen, die in den Kapiteln 2.3.2 und 3.3 hergeleitet wurden. Mit den in den Gln. (4.93) bis (4.98) definierten Zellspannungen

$$\mathbf{T}^{(\beta\gamma)} := \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ T_{22}^{(\gamma)} \\ T_{33}^{(\beta)} \\ T_{23} \\ T_{31}^{(\beta)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{11}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{22}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{33}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{31}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

ergibt sich die konstitutive Gl. (2.93) für die Phasenwerkstoffe in der zeitlich diskretisierten Form:

$$\langle n^{+1}\boldsymbol{\epsilon}^{(\beta\gamma)} \rangle = \tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)} \Delta \langle n^{+1}\mathbf{T}^{(\beta\gamma)} \rangle + n_{\mathbf{y}}^{(\beta\gamma)} \quad (6.8)$$

Die viskoelastische Nachgiebigkeitsmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)}$  wird nach Gl. (2.98) und (2.99) für alle Zellen aufgestellt. Der Deviator  $\langle \mathbf{s}_{\text{D}}^{(\beta\gamma)} \rangle$  und der volumetrische Anteil  $\langle \mathbf{s}_{\text{V}}^{(\beta\gamma)} \rangle$  des mittleren Spannungstensors  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle$  der Zelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$  können anhand der Definition (6.7) in vektorieller Schreibweise angegeben werden:

$$\langle \mathbf{s}_{\text{D}}^{(\beta\gamma)} \rangle \rightarrow \mathbf{T}_{\text{D}}^{(\beta\gamma)} = \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} - T_{kk}^{(\beta\gamma)}/3 \\ T_{22}^{(\gamma)} - T_{kk}^{(\gamma)}/3 \\ T_{33}^{(\beta)} - T_{kk}^{(\beta)}/3 \\ T_{23} \\ T_{31}^{(\beta)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad \langle \mathbf{s}_{\text{V}}^{(\beta\gamma)} \rangle \rightarrow \mathbf{T}_{\text{V}}^{(\beta\gamma)} = \frac{T_{kk}^{(\beta\gamma)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

mit  $T_{kk}^{(\beta\gamma)} = T_{11}^{(\beta\gamma)} + T_{22}^{(\gamma)} + T_{33}^{(\beta)}$ . Der Geschichtsvektor der Unterzellverzerrungen nach Gl. (2.100) berechnet sich unter Berücksichtigung von Gl.(6.9) zu:

$$n_{\mathbf{y}}^{(\beta\gamma)} = \frac{1}{3K^{(\beta\gamma)}} n_{\mathbf{T}_{\text{V}}}^{(\beta\gamma)} + \frac{1}{2\mu_{\infty}^{(\beta\gamma)}} \left[ n_{\mathbf{T}_{\text{D}}}^{(\beta\gamma)} - \sum_{k=1}^n \hat{\nu}_k^{(\beta\gamma)} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^{(\beta\gamma)}}} n_{\mathbf{d}_k}^{(\beta\gamma)} \right] \quad (6.10)$$

Die Gleichungen (2.88) und (2.91) erscheinen in Vektornotation für alle Zellen als:

$${}^0 \mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)} = {}^0 \mathbf{T}_D^{(\beta\gamma)} \quad (6.11)$$

$$\Delta^{n+1} \mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)} = \frac{\hat{\tau}_k^{(\beta\gamma)}}{\Delta t} \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k^{(\beta\gamma)}}} \right] ({}^{n+1} \mathbf{T}_D^{(\beta\gamma)} - {}^n \mathbf{T}_D^{(\beta\gamma)}) \quad (6.12)$$

$${}^{n+1} \mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)} = e^{-\frac{\Delta t}{\hat{\tau}_k^{(\beta\gamma)}}} {}^n \mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)} + \Delta^{n+1} \mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)} \quad (6.13)$$

Die Komponenten der Spannungs- und Verschiebungsvektoren für die Grenzflächen mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{x}_2$  sind gegeben durch:

$${}^{n+1(2)} \mathbf{u}^{(\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket {}^{n+1(2)} u_2^{(\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket {}^{n+1(2)} u_3^{(\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket {}^{n+1(2)} u_1^{(\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \Delta^{n+1(2)} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta^{n+1} T_{22}^{(\beta\gamma)} \\ \Delta^{n+1} T_{23}^{(\beta\gamma)} \\ \Delta^{n+1} T_{12}^{(\beta\gamma)} \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

Für  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{x}_3$  gilt:

$${}^{n+1(3)} \mathbf{u}^{(\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket {}^{n+1(3)} u_3^{(\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket {}^{n+1(3)} u_2^{(\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket {}^{n+1(3)} u_1^{(\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \Delta^{n+1(3)} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta\gamma)} \\ \Delta^{n+1} T_{23}^{(\beta\gamma)} \\ \Delta^{n+1} T_{13}^{(\beta\gamma)} \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

Die inkrementelle konstitutive Gleichung (3.24) kann mit  $\Delta^{n+1} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)} = {}^{n+1} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)} - {}^n \mathbf{t}^{(\beta\gamma)}$  unter Beachtung von (6.14) und (6.15) geschrieben werden als:

$${}^{n+1} \mathbf{u}^{(\beta\gamma)} = \tilde{\mathbf{S}}_{Ive}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)} + {}^n \mathbf{v}^{(\beta\gamma)}. \quad (6.16)$$

Die Diagonalmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_{Ive}^{(\beta\gamma)}$  enthält die elastischen und viskoelastischen Nachgiebigkeiten

$$S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} = S_{\infty}^{(\beta\gamma)} - \sum_{k=1}^N S_k^{(\beta\gamma)} \frac{\xi_k^{(\beta\gamma)}}{\Delta t} (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k^{(\beta\gamma)}}}) \quad \text{und} \quad S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} = \frac{\Delta_I}{E_I^{(\beta\gamma)}} \quad (6.17)$$

der Grenzfläche.  $\Delta_I$  bezeichnet die physikalische Dicke der Grenzschicht. Der Geschichtsvektor  ${}^n \mathbf{v}^{(\beta\gamma)}$  der Verschiebungssprünge in Gl. (3.27) ist gegeben durch:

$${}^n \mathbf{v}^{(\beta\gamma)} = S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} \left\{ \begin{array}{l} {}^n t_n^{(\beta\gamma)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + S_{\infty}^{(\beta\gamma)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ {}^n t_t^{(\beta\gamma)} \\ {}^n t_b^{(\beta\gamma)} \end{array} \right\} - \sum_{k=1}^N S_k^{(\beta\gamma)} e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k^{(\beta\gamma)}}} {}^n \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} \quad (6.18)$$

Die vektoriellen Geschichtsvariablen  $\mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)}$  werden mit den Schubspannungskomponenten des Vektors  $\mathbf{t}(0)^{(\beta\gamma)}$  initialisiert

$${}^0 \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} = \left\{ 0 \quad {}^0 t_t^{(\beta\gamma)} \quad {}^0 t_b^{(\beta\gamma)} \right\}^T \quad (6.19)$$

Die Aktualisierung der Geschichtsvariablen erfolgt durch:

$${}^{n+1} \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} = e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k^{(\beta\gamma)}}} {}^n \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} + \Delta^{n+1} \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} \quad (6.20)$$

mit dem Inkrement

$$\Delta^{n+1} \mathbf{q}_k^{(\beta\gamma)} = \frac{\xi_k^{(\beta\gamma)}}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\xi_k^{(\beta\gamma)}}} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta^{n+1} \mathbf{t}^{(\beta\gamma)}. \quad (6.21)$$

### Lösung der mikromechanischen Gleichungen für die Normalspannungen

Zunächst wird die Gl. (6.8) für  $\langle^{n+1}\epsilon_{11}^{(\beta\gamma)}\rangle$  in die kinematischen Gleichungen (6.1) für die Verschiebungen in Faserrichtung  $x_1$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\epsilon_{11}^M = \langle^{n+1}\epsilon_{11}^{(\beta\gamma)}\rangle &= \tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)} + \tilde{S}_{12}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)} \\ &+ \tilde{S}_{13}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta)} + \langle^n y_1^{(\beta\gamma)}\rangle \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die  $N_\beta \times N_\gamma$  Gln. (6.22) ermöglichen die Berechnung der Normalspannungsinkremente  $\Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)}$  einer jeden Unterzelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ :

$$\Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)} = \frac{{}^{n+1}\epsilon_{11}^M - \langle^n y_1^{(\beta\gamma)}\rangle}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} - \frac{\tilde{S}_{12}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{13}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta)} \quad (6.23)$$

Die Inkremente  $\Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)}$  der Normalspannung in Faserrichtung hängen von den totalen Makrodehnungen  ${}^{n+1}\epsilon_{11}^M$  zur Zeit  ${}^{n+1}t$ , den Verzerrungsgeschichtsvariablen  $\langle^n y_1^{(\beta\gamma)}\rangle$  für die 11-Komponenten zum vorhergehenden Zeitschritt  ${}^n t$  und den Normalspannungsinkrementen  $\Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)}$  und  $\Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta)}$  in der transversalen  $x_2, x_3$ -Ebene ab. Die Gln. (6.23) werden in Matrixschreibweise für alle Unterzellen zusammengefasst:

$$\Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{11} = {}^{n+1}\epsilon_{11}^M \mathbf{K}_{11} - \mathbf{S}_{12} \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{22} - \mathbf{S}_{13} \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{33} - {}^n \boldsymbol{\chi}_{11} \quad (6.24)$$

Die bei der Aufstellung der Gln. (6.24) verwendeten Matrizen sind im Anhang dieser Arbeit zu finden.

Die Verschiebungsgleichungen (6.2) für die  $x_2$ -Richtung können derart umformuliert werden, dass keine kinematischen Mikrovariablen explizit in Erscheinung treten. Für die Neufassung der Gleichungen (6.2) müssen die Verzerrungen  $\langle^{n+1}\epsilon_{22}^{(\beta\gamma)}\rangle$  mit Hilfe der Gleichungen (6.8) und die Verschiebungsdiskontinuitäten  ${}^{(2)}\llbracket^{n+1}u_2\rrbracket^{(\beta\gamma)}$  auf Basis der Gln. (6.14) und (6.16) eliminiert werden. Das Ergebnis der Umformung von (6.2) sind die folgenden  $N_\gamma$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \left[ \tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)} + \tilde{S}_{22}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)} + \tilde{S}_{23}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta)} + \langle^n y_2^{(\beta\gamma)}\rangle \right] \\ + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ {}^{(2)}S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)} + {}^{n(2)}v_n^{(\beta\gamma)} \right] = h {}^{n+1}\epsilon_{22}^M, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Die Verknüpfung der Normalspannungskremente  $\Delta^{n+1}T_{11}^{(\beta\gamma)}$  in den Gln. (6.23) mit Gl. (6.25) führt auf:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \left[ \tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)} \left( \frac{{}^{n+1}\epsilon_{11}^M - \langle {}^n y_1^{(\beta\gamma)} \rangle}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} - \frac{\tilde{S}_{12}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{13}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \Delta^{n+1}T_{33}^{(\beta)} \right) \right. \\ \left. + \tilde{S}_{22}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)} + \tilde{S}_{23}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{33}^{(\beta)} + \langle {}^n y_2^{(\beta\gamma)} \rangle \right] \\ + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left( {}^{(2)}S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)} + {}^{n(2)}v_n^{(\beta\gamma)} \right) = h {}^{n+1}\epsilon_{22}^M, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.26) \end{aligned}$$

Durch die Zusammenfassung der Koeffizienten aller inkrementellen Normalspannungskomponenten  $\Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)}$  in den Gln. (6.26) und aller  $\Delta^{n+1}T_{33}^{(\beta)}$  auf der linken Seite des Gleichungssystems ergibt nach der Division durch die Gesamthöhe  $h$  die nachstehende Vereinfachung der Gl. (6.26):

$$\begin{aligned} \overline{S}_{22}^{(\gamma)} \Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)} + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \overline{S}_{23}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{33}^{(\beta)} = {}^{n+1}\epsilon_{22}^M - \frac{{}^n \chi_{22}^{(\gamma)}}{\chi_{22}^{(\gamma)}} \\ + \overline{S}_{21}^{(\gamma)} {}^{n+1}\epsilon_{11}^M + \frac{{}^n \chi_{21}^{(\gamma)}}{\chi_{21}^{(\gamma)}}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.27) \end{aligned}$$

Die überstrichenen Vorfaktoren in Gl. (6.27) sind definiert als:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{22}^{(\gamma)} &:= \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \left( \tilde{S}_{22}^{(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)} \tilde{S}_{12}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) + {}^{(2)}S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} \right] \\ \overline{S}_{23}^{(\beta\gamma)} &:= \frac{h_\beta}{h} \left( \tilde{S}_{23}^{(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)} \tilde{S}_{13}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad ; \quad \overline{S}_{21}^{(\gamma)} := -\frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \frac{\tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \quad (6.28) \\ \frac{{}^n \chi_{22}^{(\gamma)}}{\chi_{22}^{(\gamma)}} &:= \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \langle {}^n y_2^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(2)}v_n^{(\beta\gamma)} \right] \quad ; \quad \frac{{}^n \chi_{21}^{(\gamma)}}{\chi_{21}^{(\gamma)}} := \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \frac{\tilde{S}_{21}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \langle {}^n y_1^{(\beta\gamma)} \rangle \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen führen zur Formulierung der kinematischen Gln. (6.3) in  $x_3$ -Richtung mit  $\beta = \overline{1, N_\beta}$ :

$$\begin{aligned} \overline{S}_{33}^{(\beta)} \Delta^{n+1}T_{33}^{(\beta)} + \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \overline{S}_{32}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{22}^{(\gamma)} = {}^{n+1}\epsilon_{33}^M - \frac{{}^n \chi_{33}^{(\beta)}}{\chi_{33}^{(\beta)}} \\ + \overline{S}_{31}^{(\beta)} {}^{n+1}\epsilon_{11}^M + \frac{{}^n \chi_{31}^{(\beta)}}{\chi_{31}^{(\beta)}}, \quad (6.29) \end{aligned}$$

Die Hilfst Terme lauten:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_{33}^{(\beta)} &:= \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \left( \tilde{S}_{33}^{(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{31}^{(\beta\gamma)} \tilde{S}_{13}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) + {}^{(3)}S_{I\perp}^{(\beta\gamma)} \right] \\ \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(\beta\gamma)} &:= \frac{l_\gamma}{l} \left( \tilde{S}_{32}^{(\beta\gamma)} - \frac{\tilde{S}_{31}^{(\beta\gamma)} \tilde{S}_{12}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad ; \quad \bar{\mathbf{S}}_{31}^{(\beta)} := -\frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \frac{\tilde{S}_{31}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \\ \bar{\chi}_{33}^{(\beta)} &:= \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \langle {}^n y_3^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(3)}v_n^{(\beta\gamma)} \right] \quad ; \quad \bar{\chi}_{31}^{(\beta)} := \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \frac{\tilde{S}_{31}^{(\beta\gamma)}}{\tilde{S}_{11}^{(\beta\gamma)}} \langle {}^n y_1^{(\beta\gamma)} \rangle\end{aligned}\quad (6.30)$$

Die  $(N_\beta + N_\gamma)$  Gleichungen (6.27) und (6.29) werden in Matrixform zusammen gefasst:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{22} \\ \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{n+1}\epsilon_{11}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{22}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{33}^M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^n \boldsymbol{\chi}_{22}^\epsilon \\ {}^n \boldsymbol{\chi}_{33}^\epsilon \end{Bmatrix}\quad (6.31)$$

Die Matrizen, die für die Aufstellung der Gl. (6.31) verwendet werden, sind im Anhang A.3.2 gegeben. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (6.31) nach den Spannungskrementen  $\Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{22}$  und  $\Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{33}$  wird mit Gl. (6.24) kombiniert, so dass man als Ergebnis erhält:

$$\begin{Bmatrix} \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{11} \\ \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{22} \\ \Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{11} & \hat{\mathbf{C}}_{12} & \hat{\mathbf{C}}_{13} \\ \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22} & \hat{\mathbf{C}}_{23} \\ \hat{\mathbf{C}}_{31} & \hat{\mathbf{C}}_{32} & \hat{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{n+1}\epsilon_{11}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{22}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{33}^M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T11} \\ {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T22} \\ {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T33} \end{Bmatrix}\quad (6.32)$$

Die Spannungskremente in Gl. (6.32) gewinnt man nach einigen elementaren Matrixoperationen, die im Anhang A.3.2 dargestellt sind. Die Spaltenvektoren  $\hat{\mathbf{C}}_{ij} = \{\hat{C}_{ij}^{(\cdot)}\}$  enthalten die mittleren Steifigkeiten  $\hat{C}_{ij}^{(\cdot)}$  der Unterzellsparnen  $\gamma$  und Reihen  $\beta$  des diskreten RVEs.

## Lösung der mikromechanischen Gleichungen für Schub

Da die drei Schubverzerrungsfelder sowohl untereinander als auch von den Normaldehnungen entkoppelt sind, können die Schubspannungskomponenten des makroskopischen Verzerrungstensors analytisch aus den kinematischen Gleichungen für Schub unter Beachtung der konstitutiven Gleichungen für die Zellen und die Grenzflächen hergeleitet werden. Die Kombination der konstitutiven Gleichungen (6.8) für die axialen Schubverzerrungen  $\langle \epsilon_{12}^{(\beta\gamma)} \rangle$  und Gl. (6.16) für die Diskontinuitäten  ${}^{(2)}\llbracket u_1 \rrbracket^{(\beta\gamma)}$  mit den kinematischen Gleichungen (6.4) führt auf:

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta (\tilde{S}_{66}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{12}^{(\gamma)} + \langle {}^n y_6^{(\beta\gamma)} \rangle) \\ + \sum_{\beta=1}^{N_\beta} ({}^{(2)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} T_{12}^{(\gamma)} + {}^{n(2)}v_b^{(\beta\gamma)}) = h {}^{n+1}\epsilon_{21}^M, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma}\end{aligned}\quad (6.33)$$

Das Ergebnis (6.33) kann unmittelbar nach dem Inkrement der axialen Schubspannung  $\Delta^{n+1}T_{12}^{(\gamma)}$  umgestellt werden:

$$\Delta^{n+1}T_{12}^{(\gamma)} = \frac{h^{n+1}\epsilon_{21}^M - \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \langle {}^n y_6^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(2)}v_b^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \tilde{S}_{66}^{(\beta\gamma)} + {}^{(2)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.34)$$

Mit Hilfe der unabhängigen mittleren Schubsteifigkeiten

$$\hat{C}_{66}^{(\gamma)} := \frac{h}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \tilde{S}_{66}^{(\beta\gamma)} + {}^{(2)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.35)$$

der Unterzellen in Spalte  $\gamma$  und der zugehörigen Geschichtsterme:

$${}^n\hat{\chi}_{T_{12}}^{(\gamma)} := \frac{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \langle {}^n y_6^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(2)}v_b^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \left[ h_\beta \tilde{S}_{66}^{(\beta\gamma)} + {}^{(2)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.36)$$

können die Gln. (6.35) in Kurzform geschrieben werden:

$$\Delta^{n+1}T_{12}^{(\gamma)} = \hat{C}_{66}^{(\gamma)} {}^{n+1}\epsilon_{21}^M - {}^n\hat{\chi}_{T_{12}}^{(\gamma)}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (6.37)$$

Das Resultat (6.37) lautet in Matrixschreibweise:

$$\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{12} = \hat{\mathbf{C}}_{66} {}^{n+1}\epsilon_{21}^M - {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{12}} \quad (6.38)$$

Die Spaltenvektoren  $\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{12}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_{66}$  und  ${}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{12}}$  enthalten als Elemente die Spannungskremente  $\Delta^{n+1}T_{12}^{(\gamma)}$ , die Steifigkeiten  $\hat{C}_{66}^{(\gamma)}$  und die Geschichtsvariablen  ${}^n\hat{\chi}_{T_{12}}^{(\gamma)}$  der Unterzellen. Die Einträge sind jeweils nach dem Index  $\gamma$  geordnet.

Analog zu Gl. (6.34) ergeben sich die Spannungskremente  $\Delta^{n+1}T_{31}^{(\beta)}$  durch die Verknüpfung der kinematischen Gleichung (6.5) mit den konstitutiven Gln. (6.8) und (6.16):

$$\Delta^{n+1}T_{13}^{(\beta)} = \frac{l^{n+1}\epsilon_{13}^M - \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \langle {}^n y_5^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(3)}v_t^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \tilde{S}_{55}^{(\beta\gamma)} + {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta}. \quad (6.39)$$

Mit Hilfe der mittleren Schubsteifigkeit  $\hat{C}_{55}^{(\beta)}$  der Spalten  $\beta$

$$\hat{C}_{55}^{(\beta)} := \frac{l}{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \tilde{S}_{55}^{(\beta\gamma)} + {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (6.40)$$

und den Variablen  ${}^n\hat{\chi}_{T_{13}}^{(\beta)}$  der Spannungsgeschichte:

$${}^n\hat{\chi}_{T_{13}}^{(\beta)} := \frac{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \langle {}^n y_5^{(\beta\gamma)} \rangle + {}^{n(3)}v_t^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ l_\gamma \tilde{S}_{55}^{(\beta\gamma)} + {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (6.41)$$

können die Gl. (6.39) geschrieben werden als:

$$\Delta^{n+1}T_{13}^{(\beta)} = \hat{C}_{55}^{(\beta)} {}^{n+1}\epsilon_{13}^M - {}^n\hat{\chi}_{T_{13}}^{(\beta)}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta} \quad (6.42)$$

Die Matrixnotation von (6.42) lautet:

$$\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{13} = \hat{\mathbf{C}}_{55} {}^{n+1}\epsilon_{31}^M - {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{13}} \quad (6.43)$$

Zuletzt sind die transversalen Schubspannungskremente  $\Delta^{n+1}T_{23}$  zu berechnen. Das Einsetzen der konstitutiven Gln. (6.8) für  $\langle \epsilon_{23}^{(\beta\gamma)} \rangle$  sowie der Gln. (6.16) für die Verschiebungssprünge in der Faser-Matrix-Grenzfläche in die kinematische Beziehung (6.6) ergibt genau eine Gleichung für das Inkrement  $\Delta^{n+1}T_{23}$ :

$$\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left( h_\beta l_\gamma \left[ \tilde{S}_{44}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{23} + {}^n y_4^{(\beta\gamma)} \right] + l_\gamma \left[ {}^{(2)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{23} - {}^{n(2)}v_t^{(\beta\gamma)} \right] + h_\beta \left[ {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1}T_{23} - {}^{n(3)}v_b^{(\beta\gamma)} \right] \right) = hl {}^{n+1}\epsilon_{23}^M \quad (6.44)$$

Die analytische Lösung von Gl. (6.44) nach  $\Delta^{n+1}T_{23}$  ist gegeben durch:

$$\Delta^{n+1}T_{23} = \frac{hl {}^{n+1}\epsilon_{23}^M - \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma {}^n y_4^{(\beta\gamma)} - l_\gamma {}^{n(2)}v_t^{(\beta\gamma)} - h_\beta {}^{n(3)}v_b^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma \tilde{S}_{44}^{(\beta\gamma)} + (l_\gamma + h_\beta) {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]} \quad (6.45)$$

Mit dem mittleren Steifigkeitsausdruck

$$\hat{C}_{44} := \frac{hl}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma \tilde{S}_{44}^{(\beta\gamma)} + l_\gamma {}^{(2)}\tilde{R}_{tt}^{(\beta\gamma)} + h_\beta {}^{(3)}\tilde{R}_{bb}^{(\beta\gamma)} \right]} \quad (6.46)$$

und der Geschichtsvariablen der transversalen Schubspannung

$${}^n\hat{\chi}_{T_{23}} := \frac{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma {}^n y_4^{(\beta\gamma)} - l_\gamma {}^{n(2)}v_t^{(\beta\gamma)} - h_\beta {}^{n(3)}v_b^{(\beta\gamma)} \right]}{\sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \left[ h_\beta l_\gamma \tilde{S}_{44}^{(\beta\gamma)} + (l_\gamma + h_\beta) {}^{(3)}S_{I\parallel}^{(\beta\gamma)} \right]} \quad (6.47)$$

vereinfacht sich die Gl. (6.45) zu:

$$\Delta^{n+1}T_{23} = \hat{C}_{44} {}^{n+1}\epsilon_{23}^M - {}^n\hat{\chi}_{T_{23}} \quad (6.48)$$

In der Absicht sämtliche inkrementellen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen in einheitlicher Darstellung anzugeben, wird die einzelne Gl. (6.48) in Matrixschreibweise angegeben:

$$\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{23} = \hat{\mathbf{C}}_{44} {}^{n+1}\epsilon_{23}^M - {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{23}} \quad (6.49)$$

Die Zusammenstellung der Ergebnisse (6.38), (6.43) und (6.49) ergibt:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{23} \\ \Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{13} \\ \Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{12} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{C}}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}}_{55} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}}_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^{n+1}\epsilon_{23}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{13}^M \\ {}^{n+1}\epsilon_{12}^M \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{23}} \\ {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{13}} \\ {}^n\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{12}} \end{array} \right\} \quad (6.50)$$



### Makroskopische Spannungen

Die Normalspannungskomponenten  $\Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_N$  des inkrementellen Spannungstensors in Vektorschreibweise  $\Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle$  erhält man durch die Mittelung der Inkremente  $\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{ij}$  der unabhängigen Mikrospannungen in den Unterzellen nach Gl. (6.32):

$$\Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_N = \begin{Bmatrix} \Delta\langle^{n+1}\sigma_{11}\rangle \\ \Delta\langle^{n+1}\sigma_{22}\rangle \\ \Delta\langle^{n+1}\sigma_{33}\rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma \Delta^{n+1} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \Delta^{n+1} T_{22}^{(\gamma)} \\ \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \Delta^{n+1} T_{33}^{(\beta)} \end{Bmatrix} \quad (6.51)$$

Die ersten drei Komponenten des gemittelten Spannungsgeschichtstensors in Vektornotation  $\langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma\rangle$  werden aus den entsprechenden Elementen der Vektoren  ${}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{ij}}$  nach Gl. (6.32) für die Unterzellen berechnet:

$$\langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma\rangle_N = \begin{Bmatrix} \langle^n \hat{\chi}_{11}^\sigma\rangle \\ \langle^n \hat{\chi}_{22}^\sigma\rangle \\ \langle^n \hat{\chi}_{33}^\sigma\rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} h_\beta l_\gamma {}^n \hat{\chi}_{T_{11}}^{(\beta\gamma)} \\ \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma {}^n \hat{\chi}_{T_{22}}^{(\gamma)} \\ \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta {}^n \hat{\chi}_{T_{33}}^{(\beta)} \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

Die totalen Normalspannungen im aktuellen Zeitschritt  ${}^{n+1}t$  belaufen sich auf:

$$\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_N = \langle^n \boldsymbol{\sigma}\rangle_N + \Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_N \quad (6.53)$$

wobei  $\langle^n \boldsymbol{\sigma}\rangle_N$  die Spannungen zum vorhergehenden Zeitpunkt  ${}^n t$  darstellt. Das Inkrement  $\Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_N$  ist durch Gl. (6.51) gegeben. Die makroskopischen Schubspannungen berechnen sich aus der gewichteten Summe der Komponenten des Spaltenvektors  $\Delta^{n+1}\hat{\mathbf{T}}_{ij} = \{\Delta^{n+1}\hat{T}_{ij}^{(\cdot)}\}$  in Gl.(6.50):

$$\Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_S = \begin{Bmatrix} \Delta\langle^{n+1}\sigma_{23}\rangle \\ \Delta\langle^{n+1}\sigma_{13}\rangle \\ \Delta\langle^{n+1}\sigma_{12}\rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta^{n+1} T_{23} \\ \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} h_\beta \Delta^{n+1} T_{13}^{(\beta)} \\ \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} l_\gamma \Delta^{n+1} T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

Die totalen Schubspannungen zum gegenwärtigen Zeitpunkt  ${}^{n+1}t$  lauten:

$$\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_S = \langle^n \boldsymbol{\sigma}\rangle_S + \Delta\langle^{n+1}\boldsymbol{\sigma}\rangle_S \quad (6.55)$$

mit den Spannungen  $\langle {}^n \boldsymbol{\sigma} \rangle_S$  zum vorhergehenden Zeitpunkt  ${}^n t$  und den entsprechenden Zuwächsen  $\Delta \langle {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle_S$ . Die entsprechende Mittelung der Geschichtsvariablen  ${}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{ij}}$  in Gl. (6.50) liefert die makroskopischen Geschichtsvariablen für die Schubspannungen:

$$\langle {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{\sigma} \rangle_S = \begin{Bmatrix} \langle {}^n \hat{\chi}_{23}^{\sigma} \rangle \\ \langle {}^n \hat{\chi}_{13}^{\sigma} \rangle \\ \langle {}^n \hat{\chi}_{12}^{\sigma} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^n \hat{\chi}_{T_{23}} \\ \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} h_{\beta} {}^n \hat{\chi}_{T_{13}}^{(\beta)} \\ \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} l_{\gamma} {}^n \hat{\chi}_{T_{12}}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

### Homogenisierter instantaner Steifigkeitstensor und inkrementelle Formulierung der konstitutiven Gleichung

In ähnlicher Weise wie die Berechnung der Makrospannungen  $\Delta \langle {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und der Makrogeschichtsvariablen  $\langle {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{\sigma} \rangle$  in den Gl. (6.51), (6.52), (6.54) und (6.56), kann der homogenisierte instantane Steifigkeitstensor des Verbundwerkstoffs in Matrixform  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  berechnet werden. Die Struktur der konstitutiven Matrix entspricht je nach RVE derjenigen des transversalisotropen oder orthotropen Materials in Hauptachsendarstellung. Die Submatrix  $\tilde{\mathbf{C}}_N^* \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , die die aktuellen Normaldehnungen auf die Normalspannungsinkremente abbildet, berechnet sich aus Gl. (6.32) durch Mittelung der Elemente der Spaltenvektoren  $\hat{\mathbf{C}}_{ij} = \{\hat{C}_{ij}^{(\cdot)}\}$  mit  $i, j \leq 3$ :

$$\tilde{\mathbf{C}}_N^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \hat{C}_{11}^{(\beta\gamma)} & \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \hat{C}_{12}^{(\beta\gamma)} & \frac{1}{hl} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} h_{\beta} l_{\gamma} \hat{C}_{13}^{(\beta\gamma)} \\ \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} l_{\gamma} \hat{C}_{21}^{(\gamma)} & \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} l_{\gamma} \hat{C}_{22}^{(\gamma)} & \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} l_{\gamma} \hat{C}_{23}^{(\gamma)} \\ \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} h_{\beta} \hat{C}_{31}^{(\beta)} & \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} h_{\beta} \hat{C}_{32}^{(\beta)} & \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} h_{\beta} \hat{C}_{33}^{(\beta)} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Die drei effektiven Schubsteifigkeiten  $\tilde{\mathbf{C}}_{44}^*$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{55}^*$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_{66}^*$  bilden die Hauptdiagonale der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}_S^* \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ :

$$\tilde{\mathbf{C}}_S^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{66}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} \sum_{\beta=1}^{N_{\beta}} h_{\beta} \hat{C}_{55}^{(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} \sum_{\gamma=1}^{N_{\gamma}} l_{\gamma} \hat{C}_{66}^{(\gamma)} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Man erhält die Steifigkeiten durch Mittelung der entsprechenden Vektorelemente  $\hat{\mathbf{C}}_{ij} = \{\hat{C}_{ij}^{(\cdot)}\}$  mit  $i = j \geq 4$  in den Gln. (6.35), (6.40) und (6.46) über die Spalten  $\gamma$  und Zeilen  $\beta$  des RVE-Modells. Auf Basis der Matrizen, die in den Gln. (6.58)

und (6.57) gegeben sind, ergibt sich die Vektornotation der makroskopischen Spannungsinkremente wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle_N \\ \Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_N^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_S^* \end{bmatrix} \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle - \begin{Bmatrix} \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle_N \\ \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle_S \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

Ohne Unterscheidung zwischen Normal- und Schubkomponenten lautet die Gl. (6.59):

$$\Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle = \tilde{\mathbf{C}}^* \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle - \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle \quad (6.60)$$

Somit berechnen sich die totalen Spannungen  $\langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle^n \boldsymbol{\sigma} \rangle + \Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle$  des homogenisierten Kontinuums unter Berücksichtigung der Inkremente in Gl. (6.60) zu

$$\langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle^n \boldsymbol{\sigma} \rangle + \tilde{\mathbf{C}}^* \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle - \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle \quad (6.61)$$

Die totalen Spannungen hängen an dieser Stelle noch formal von den totalen Dehnungen, der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  der unabhängigen Moduln, den Spannungen des vorangegangenen Zeitpunkts und den Variablen der Spannungsgeschichte ab. Durch die Aufspaltung der Makrospannungen  $\langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \langle^n \boldsymbol{\epsilon} \rangle + \Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  kann die Gl. (6.61) in eine inkrementelle Darstellung überführt werden:

$$\Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \rangle = \tilde{\mathbf{C}}^* \Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon} \rangle - \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle \quad (6.62)$$

wobei die Komponenten des neu entstehenden, mittleren Spannungsgeschichtstensors in Vektordarstellung  $\langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle$  wie folgt definiert sind:

$$\langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle := \langle^n \boldsymbol{\sigma} \rangle + \tilde{\mathbf{C}}^* \langle^n \boldsymbol{\epsilon} \rangle - \langle^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_\sigma \rangle \quad (6.63)$$

### 6.1.1 Herleitung des Verzerrungskonzentrationstensors

In der Theorie zur Homogenisierung linearelastischer Verbundwerkstoffe wird der gemittelte Verzerrungstensor  $\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle$  der Phase ( $i$ ) innerhalb des RVEs durch den Verzerrungskonzentrationstensor  $\mathbf{A}$  nach Hill (1963) beschrieben:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle = \mathbf{A}^{(i)} : \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (6.64)$$

Die Gl. (6.64) stellt eine lineare Abbildung der Makrodehnungen auf die mittlere Phasenverzerrungen dar. Im Fall des zeitabhängigen Materialverhaltens sind die Phasendehnungen  $\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \rangle$  ein Tensorfunktional der Makroverzerrungsgeschichte:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(t) \rangle = \mathcal{A} [\boldsymbol{\epsilon}^M, \tau]_{\tau > -\infty}^{\tau=t} \quad (6.65)$$

Das Funktional  $\mathcal{A}$  für viskoelastische Werkstoffe wird aus dem Lösungsvektor  $\Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}$  des mikromechanischen Modells gemäß (6.32) und (6.50) bestimmt.

$$\Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \left\{ \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{11}^T \quad \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{22}^T \quad \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{33}^T \quad \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{23}^T \quad \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{13}^T \quad \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{12}^T \right\} \quad (6.66)$$

Zu diesem Zweck werden die Inzidenzmatrizen  $\mathbf{B}^{(\beta\gamma)} \in \mathbb{R}^{6 \times (N_\beta N_\gamma + 2(N_\beta + N_\gamma) + 1)}$ , deren Elemente im Anhang A.3.1 angegeben sind, eingeführt. Sie dienen dazu, die Komponenten der mittleren Spannungsvektoren  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle$  einer Unterzelle aus dem Hypervektor aller Mikrospannungen  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  zu bilden. Die Matrizen  $\mathbf{B}^{(\beta\gamma)}$  dürfen nicht

mit den Spannungskonzentrationstensoren  $\mathcal{B}$  verwechselt werden, die die Makrospannungen auf die mittleren Phasenspannungen abbilden. Die Inkremente der Unterzellspannungen lauten:

$$\Delta \langle^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle := \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (6.67)$$

Die symbolische Zusammenfassung der konstitutiven Gleichungen (6.32) und (6.50) für die Inkremente der Unterzellspannungen  $\Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}}$  ergibt:

$$\Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{C}}^{n+1} \boldsymbol{\epsilon}^M - {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_T \quad (6.68)$$

Die Spannungszuwächse nach Gl. (6.67) lassen sich mit der konstitutiven Gleichung (6.8) für alle Unterzellen  $\Omega^{(\beta\gamma)}$  sowie der Gl. (6.68) kombinieren, so dass die totalen Unterzellverzerrungen zum aktuellen Zeitpunkt in Abhängigkeit der aktuellen Makrodehnungen geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon}^{(\beta\gamma)} \rangle &= \tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)} \left[ \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} \Delta^{n+1} \hat{\boldsymbol{\tau}} \right] + \langle {}^n \mathbf{y}^{(\beta\gamma)} \rangle \\ &= \tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)} \left[ \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} (\hat{\mathbf{C}}^{n+1} \boldsymbol{\epsilon}^M - {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_T) \right] + \langle {}^n \mathbf{y}^{(\beta\gamma)} \rangle \end{aligned} \quad (6.69)$$

Alsdann stellen die Unterzellverzerrungen ein lineares Funktional der Makroverzerrungen dar:

$$\langle^{n+1} \boldsymbol{\epsilon}^{(\beta\gamma)} \rangle = \mathbf{A} \left[ \boldsymbol{\epsilon}^M, \tau \right]_{\tau > -\infty}^{\tau=t} := \mathbf{A}^{(\beta\gamma)} {}^{n+1} \boldsymbol{\epsilon}^M - \mathbf{a}_h^{(\beta\gamma)} \quad (6.70)$$

Die aktuelle Konzentrationsmatrix ist gegeben durch:

$$\mathbf{A}^{(\beta\gamma)} := \tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)} \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} \hat{\mathbf{C}} \quad (6.71)$$

Die Geschichtsvariable lautet:

$$\mathbf{a}_h^{(\beta\gamma)} := \tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}^{(\beta\gamma)} \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_T - \langle {}^n \mathbf{y}^{(\beta\gamma)} \rangle \quad (6.72)$$

Die  $6 \times 6$  Matrizen  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  sind durch die RVE-Geometrie, sowie die Materialeigenschaften in den Unterzellen bestimmt. Für die Diskretisierung der Zeitachse mit dem konstanten Inkrement  $\Delta t$  sind die Elemente der Matrizen  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  ebenfalls konstante Größen. Für linear-elastische Phasenwerkstoffe und einen starren Verbund ist die Matrix  $\mathbf{A}^{(\beta\gamma)}$  identisch mit der Matrixrepräsentation des Konzentrationstensors  $\mathbf{A}^{(i)}$  bei elastischen Konstituenten. Solange der Zeitschritt  $\Delta t$  konstant bleibt, wird die Zeitabhängigkeit der Unterzelldehnungen allein durch den Geschichtsvektor  $\mathbf{a}_h^{(\beta\gamma)}$  bestimmt.

## 6.2 Zweiskalensimulationen viskoelastischer Verbundwerkstoffstrukturen

Der finite Elemente Code FEAP wird für die nachfolgenden makroskopischen Analysen eingesetzt. Das GMC-Modell wird für das 8-knotige Volumenelement SOLId8, das auf linearen Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  beruht, implementiert. An jedem Stützpunkt

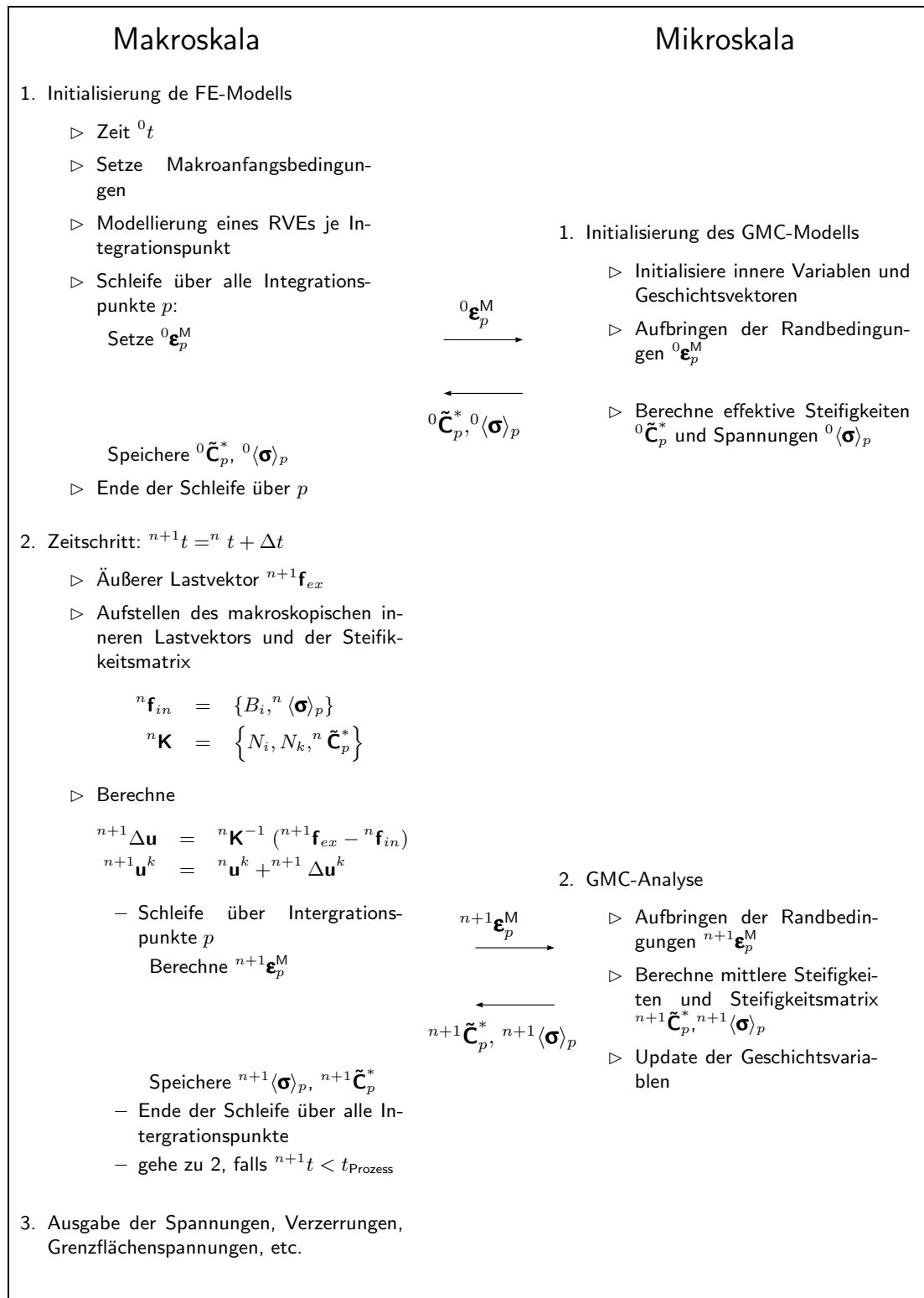


Abbildung 6.1: Ablaufschema der quasi-statischen Zweiskalensimulation von Strukturen aus Faserverbundmaterialien

der numerischen Integration der FE-Vernetzung wird ein diskretes RVE-Modell vereinbart. Der makroskopische infinitesimale Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^M$  am Integrationspunkt  $p$  definiert die Randbedingungen der GMC-Berechnungen für diesen Punkt  $p$ . Die volumengemittelten Spannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  und die effektive Steifigkeitsmatrix  $\check{\mathbf{C}}_p^*$  werden an das FE-Programm zurück gegeben und gehen in den Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{f}_{in}$  und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  der Makrostruktur ein. Das Ablaufschema der mikromechanisch basierten Zweiskalensimulation ist in Abb. 6.1 skizziert.

Falls das Zeitinkrement  $\Delta t$  während des Rechenlaufs nicht verändert wird, kann die wiederholte Berechnung der Matrix  $\mathbf{K}$  und ihrer Inversen entfallen. Dies liegt daran, dass die Steifigkeitsmatrizen der Phasen und der Grenzflächen für ein festes Zeitinkrement unveränderlich sind, siehe Gl. (2.98) und (3.24). Daher können die Verschiebungsinkremente  $\Delta \mathbf{u}^k$  mit der Anfangssteifigkeitsmatrix  ${}^0\mathbf{K} = {}^n\mathbf{K}|_{\Delta t \text{ fest}}$  ermittelt werden. Die GMC dient dann in den weiteren Lastschritten nur noch zur wiederholten Bestimmung und Aktualisierung der geschichtsabhängigen makroskopischen Spannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_p$ , welche für alle Integrationsstellen  $p$  und zu jedem Zeitschritt  $n$  für die Aufstellung des Vektors der inneren Kräfte  $\mathbf{f}_{in}$  benötigt werden. Zu diesem Zweck müssen die zeitabhängigen Zustandsvariablen  $\mathbf{d}_k^{(\beta\gamma)}$  und  $\mathbf{q}_k^{(i)(\beta\gamma)}$  für alle Unterzellen und Grenzflächen für den nächsten Zeitschritt sowie die Komponenten des Hypervektors  $\hat{\mathbf{T}}$  gespeichert werden. Die kinematischen Variablen wie  $\langle \varepsilon_{ij}^{(\beta\gamma)} \rangle$  und  ${}^{(i)}\llbracket u_i \rrbracket^{(\beta\gamma)}$  treten nicht ausdrücklich in der spannungsbasierten Formulierung der GMC auf und müssen daher auch nicht im Speicher abgelegt werden.

## 6.3 Finite Elemente Berechnung von linear viskoelastischen Faserverbundstrukturen

Gegenstand des vorliegenden Abschnitts ist die Verifikation und Validierung des mikromechanischen GMC-Ansatzes als konstitutives Modell für viskoelastische Faserverbundwerkstoffe. Unter Verifikation wird im Rahmen dieser Arbeit die Prüfung der Implementierung verstanden: d.h. es wird untersucht, ob die Gleichung des Modells in der numerischen Umsetzung richtig gelöst werden. (*Are the equations solved right?*). Die Validierung vergleicht die erzielten Vorhersagen mit experimentellen Daten: d.h. es wird der Frage nachgegangen, ob die Modelle geeignet sind, das reale Werkstoffverhalten abzubilden. (*Are the right equations solved?*).

### 6.3.1 Viskoelastisches Verifikationsbeispiel 1: Dickwandiges Rohr unter Innendruck

Das dickwandige Rohr unter Innendruck dient als erstes Beispiel zur Verifikation der Implementierung der Zellenmethode als Konstitutivmodell für die FE-Berechnung. Die exakte analytische Lösung der Aufgabe im ebenen Verzerrungszustand ist Lekhnitskii (1981) entnommen. Die Verteilung der Spannungen in axialer, tangentialer und radialer Richtung des Rohrs ist zeitlich invariant, obwohl das Materialverhalten zeitabhängig ist, denn die AIRY-Spannungsfunktion der Ebenen Aufgabe hängt nicht von den Materialparametern ab – siehe Findley et al. (1981). Das finite Element Modell des radialsymmetrischen Feldproblems besteht aus einem  $\alpha = 5^\circ$  messenden Segments des Zylinders, welches in Abb. 6.2 dargestellt ist. Die Materialparameter

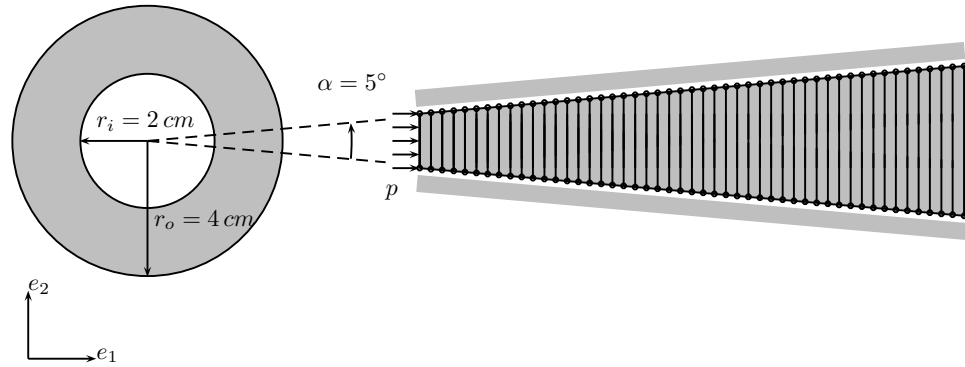


Abbildung 6.2: Dickwandiges Rohr unter Innendruck  $p = 1$  MPa, FE-Modell eines  $5^\circ$  Segments

für die Glasfaserverstärkung und das Harzsystem sind in Tabelle 6.1 gegeben. Der innere und der äußere Radius des Rohrs betragen  $r_i = 2$  cm und  $r_a = 4$  cm. Die radiale Richtung wird mit vierzig achtknotigen, isoparametrischen Volumenelementen aufgelöst. In Umfangs- und Längsrichtung besteht die Modellbildung aus je einem finiten Element. Diese Elementanzahl ist ausreichend, da das Rohr unter Innendruck mathematisch ein eindimensionales Problem darstellt, dessen Lösung nach der Verschiebungsmethode den Radius  $r = [r_i, r_a]$  als einzige Ortsvariable enthält. Der Innendruck (Überdruck) wird zu  $p = 1$  MPa gesetzt. Als Verschiebungsrandbedingung werden die Freiheitsgrade der Knoten in den beiden freigeschnittenen Flächen des Rohrsegments senkrecht zu der jeweiligen Schnittfläche gesperrt. Verschiebungen in Richtung der Rohrlängsachse sind ebenfalls nicht möglich. Die radialsymmetrische Aufweitung des Bauteils wird nicht behindert. Die Verschiebungsrestriktionen im FE-Modell führen auf einen ebenen Verzerrungszustand in allen Integrationspunkten.

Das Kriechverhalten des Zylinders wird anhand zweier unterschiedlicher, viskoelastischer Konstitutivmodelle untersucht. Zunächst wird das linear viskoelastische Materialmodell in FEAP verwendet. In diesem Ansatz ist der Relaxationsmodul des homogenen Materials wie folgt definiert:

$$G(t) = 2G_\infty + 2 \sum_{i=1}^N G_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (6.73)$$

Der Kompressionsmodul  $K$  ist ratenunabhängig. Im Anschluss an die Berechnung mit dem homogenen Materialmodell wird die GMC als Konstitutivmodell verwendet. Die Unterzellen sind unnachgiebig miteinander verbunden und mit dem gleichen viskoelastischen Werkstoff belegt, der in der homogenen Analyse angesetzt

Parameter	$E$ [GPa]	$K$ [GPa]	$G_\infty$ [GPa]	$G_1$ [GPa]	$\tau_1$ [h]	$J_\infty$ [1/GPa]	$J_1$ [1/GPa]	$\hat{\tau}_1$ [h]
Glasfaser	68.94	38.30	28.725	-	-	$1.74 \cdot 10^{-2}$	-	-
Epoxidharz	3.412	3.56	0.893	0.383	10	$1.679 \cdot 10^{-1}$	$5.597 \cdot 10^{-1}$	14.286

Tabelle 6.1: Elastische und viskoelastische Materialparameter

wird. Die numerischen Ergebnisse für Spannungen und Verformungen beider Ansätze werden miteinander verglichen. Hierdurch soll abgesichert werden, dass die Implementierung des viskoelastischen GMC-Algorithmus in das FE-Programm frei von Fehlern ist. Vergleiche des homogenen Modellansatzes mit verschiedenen feinen RVE-Diskretisierungen sollen Aufschluss über den zu erwartenden Rechenzeitzuwachs liefern. Die Kriechfunktion des GMC-Modells lautet:

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^N J_k (1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}}) \quad (6.74)$$

Offensichtlich sind die beiden Ansätze (6.73) und (6.74) nicht unmittelbar zu vergleichen, denn die Beschreibung des Kriechens beruht bei homogenen Werkstoffen auf der Relaxationsfunktion  $G(t)$ , wohingegen das mikromechanische Modell auf der Kriechfunktion  $J(t)$  aufbaut. Um die Verifikation des GMC-Ansatzes dennoch leisten zu können, müssen die beteiligten Kriech- und Relaxationsspektren ineinander umgerechnet werden: sie haben bestimmte Kriterien zu erfüllen, um zu gleichen Ergebnissen zu kommen, siehe z.B. Gross (1968). Für die Laplace Transformierten<sup>1</sup>  $\bar{J}(s)$  und  $\bar{G}(s)$  der Kriech- und Relaxationsfunktionen  $J(t)$  und  $G(t)$  gilt mit der komplexen Laplace Variablen  $s$  für  $N = 1$  in den Gln. (6.73) und (6.74):

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{J}(s)} \longrightarrow 2 \frac{G_\infty (\frac{1}{\tau_1} + s) + G_1 s}{s (\frac{1}{\tau_1} + s)} = \frac{s (\frac{1}{\tau_1} + s)}{s^2 [(J_0 + J_1) (\frac{1}{\tau_1} + s) - J_1 s]} \quad (6.75)$$

Anhand der Gl. (6.75) kann das diskrete Kriechspektrum aus dem gegebenen Relaxationsspektrum berechnet werden, denn durch algebraische Umformung erhält man beidseits des Gleichheitszeichens je ein Polynom 3 Grades in  $s$ , was durch den Vergleich der Koeffizienten auf folgende Beziehungen führt:

$$J_0 = \frac{1}{2(G_\infty + G_1)} \quad , \quad J_1 = \frac{1}{2G_\infty(1 + \frac{G_\infty}{G_1})} \quad , \quad \hat{\tau}_1 = (1 + \frac{G_1}{G_\infty})\tau_1 \quad (6.76)$$

Darüber hinaus gilt  $J_\infty = J_0 + J_1$ , vgl. Gl. (6.74). Die Werte, die für die Parameter des rheologischen Modells gewählt werden, sind in Tabelle 6.1 angegeben. Die Entwicklung der Verschiebungen  $u(r, t)$  in radialer Richtung am inneren ( $r = r_i$ ) und äußeren ( $r = r_a$ ) Rand des dickwandigen Rohrs sind im Diagramm in Abb. 6.3 über der logarithmischen Zeitachse aufgetragen. Offensichtlich ergibt das GMC-Modell mit dem regelmäßigen Netz aus vier gleich großen Unterzellen das gleiche Ergebnis wie das homogene, viskoelastische Materialmodell in FEAP. Die Diagramme in Abb. 6.4 zeigen die räumliche Verteilung der auf den Druck  $p$  bezogenen Radialspannung  $|\sigma_r/p|$  und der Umfangsspannung  $|\sigma_\theta/p|$  zu den Zeiten  $t = 0$  h und  $t = 200$  h. Wegen der statischen Bestimmtheit des Rohrs ändern sich die Spannungen des linear viskoelastischen Modells nicht mit der Zeit. Die Vorhersagen des homogenen und des GMC Materialmodells sind identisch und entsprechen praktisch der analytischen Lösung für einen elastisch isotropen Werkstoff.

Die analytischen Lösung für die Spannungen ist durch die Formel (6.77) gegeben,

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$



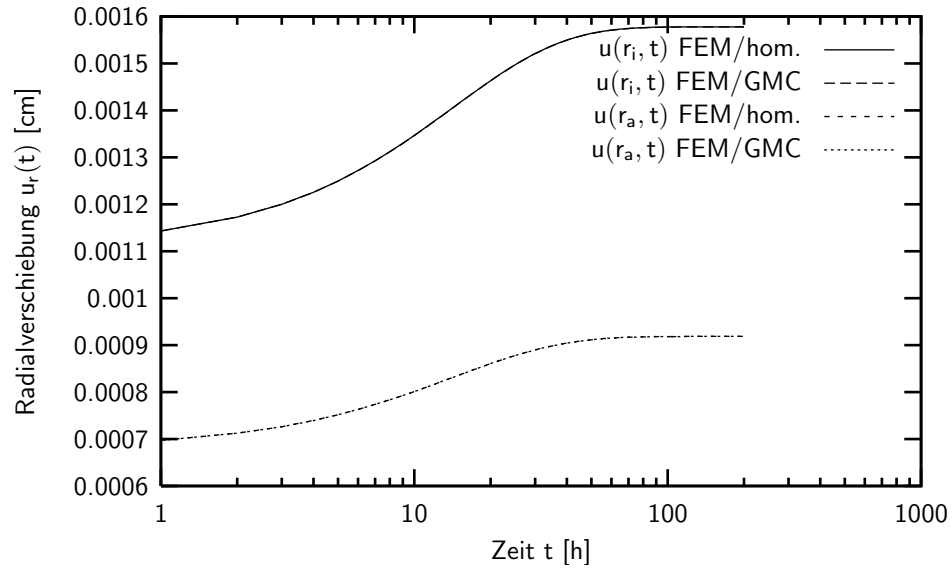


Abbildung 6.3: Verifikation der Verschiebungen in radialer Richtung. FEM/GMC versus FEM/homogen

die in Lekhnitskii (1981) zu finden ist.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \frac{c^{k+1}}{1 - c^{2k}} (\rho^{k-1} - \rho^{-(k+1)}) \\ \frac{k c^{k+1}}{1 - c^{2k}} (\rho^{k-1} + \rho^{-(k+1)}) \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

Die in der analytischen Lösung benutzten Abkürzungen sind definiert als:

$$\rho = \frac{r}{r_a} \quad c = \frac{r_i}{r_a} \quad k = +\sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}} \quad (6.78)$$

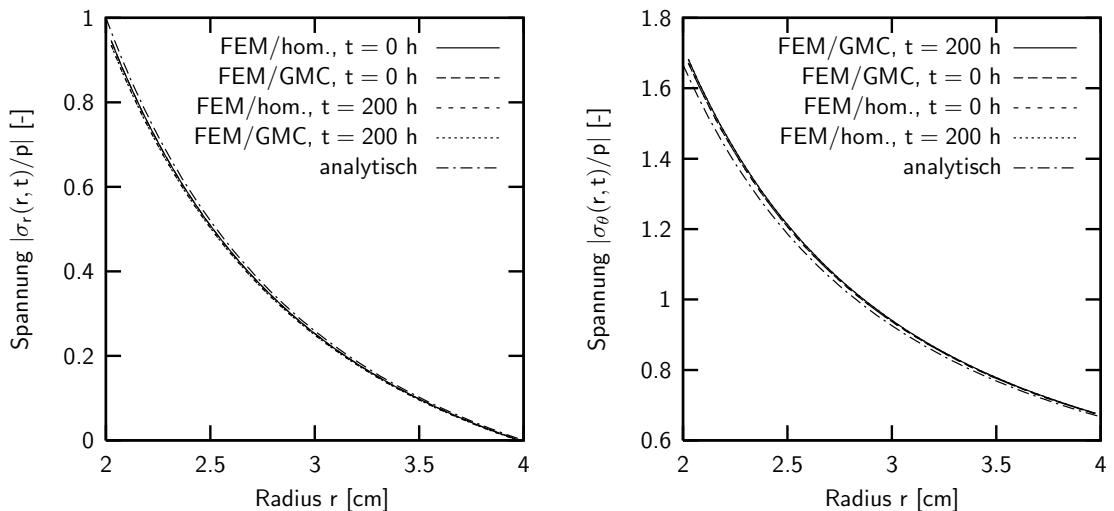


Abbildung 6.4: Verifikation der Radial- und Umfangsspannung. FEM/GMC versus FEM/homogen und analytische Lösung (isotroper Werkstoff)

Die Werte  $\beta_{ij}$  des Parameters  $k$  hängen von den Komponenten  $S_{ij}$  des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{S}$  ab:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad (6.79)$$

Die Nachgiebigkeiten  $S_{ij}$  berechnen sich aus den Ingenieurkonstanten zu:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}} \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}} \quad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} \quad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_{33}} \quad (6.80)$$

Nach erfolgreicher Verifikation des GMC-Modells für einen homogenen Werkstoff sind heterogene Faserverbundmaterialien zu betrachten. Der Verbund der Glasfasern mit dem Epoxidharz soll in der ersten Untersuchung starr sein. Die elastischen und rheologischen Eigenschaften sind in der Tabelle in Abb. 6.2 zusammengestellt. Der Volumengehalt der Fasern wird mit  $V_f = 0.3$  angesetzt. Die Fasern verlaufen in Umfangsrichtung des Rohrs, was im FE-Modell näherungsweise durch die Ausrichtung parallel zu  $\mathbf{e}_2$  umgesetzt wird. Um die Implementierung des numerischen Zeitintegrationsalgorithmus' zu verifizieren, werden die Spannungen in Radial- und in Umfangsrichtung mit der analytischen Lösung nach Gl. (6.77) für ein nichtisotropes Material verglichen. Der Homogenisierungsalgorithmus führt auf folgenden konstitutiven Tensor in Matrixschreibweise:

$$\tilde{\mathbf{C}}^* = \begin{bmatrix} 8036 & 3387 & 3477 & 0 & 0 & 0 \\ 3387 & 25050 & 3387 & 0 & 0 & 0 \\ 3477 & 3387 & 8036 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1764 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Die Komponenten der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  sind in Bezug auf das globale Koordinatensystem des FEM-Modells gegeben – vgl. Abb. 6.2. Der Faktor  $k$  der analytischen Lösung in Gl. (6.77) berechnet sich auf Basis der homogenisierten Materialparameter zu

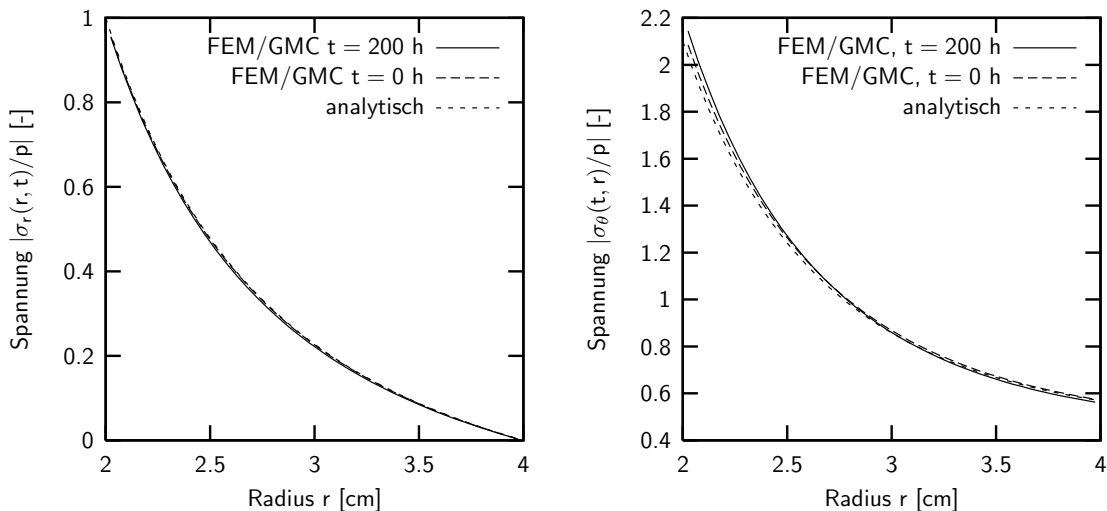


Abbildung 6.5: Verifikation der Spannungen in radialer und in Umfangsrichtung. FEM/GMC vs. analytische Lösung (orthotroper Werkstoff)

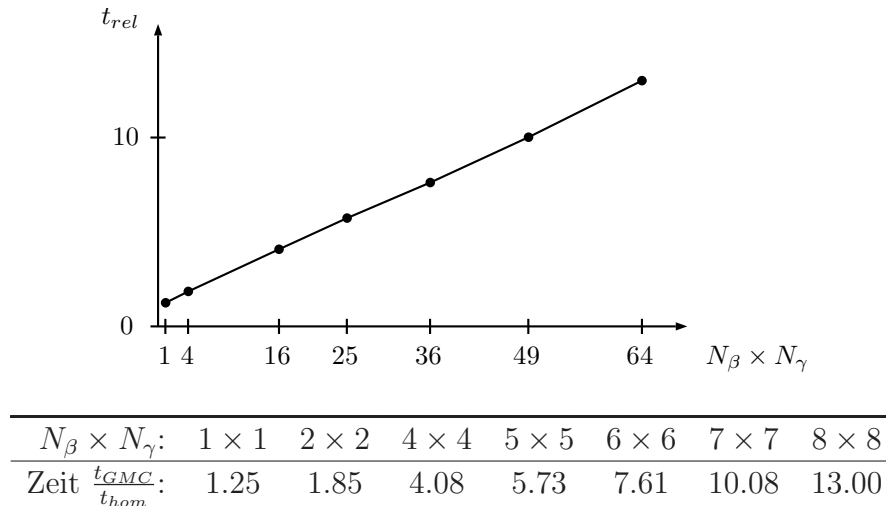


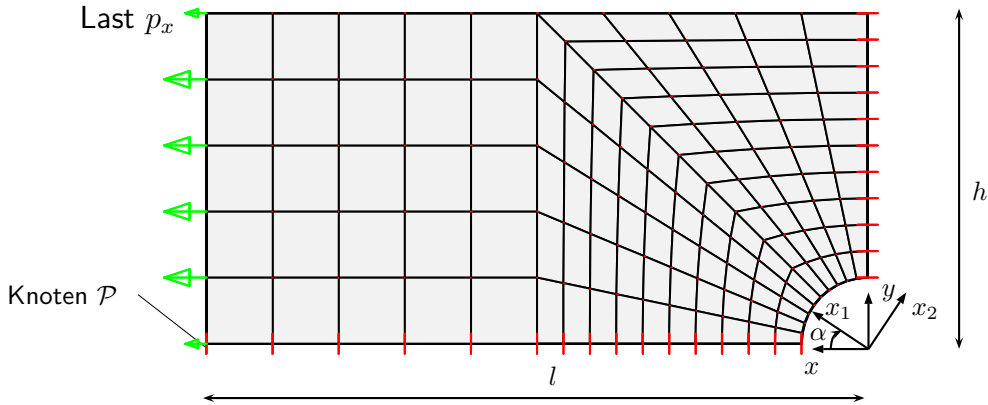
Abbildung 6.6: Entwicklung der Rechenzeit bei wachsender Zellenzahl

$k = 1.7656$ . Die Diagramme in Abb. 6.5 zeigen die Verteilung der normierten Normalspannungen  $|\sigma_r/p|$  und  $|\sigma_\theta/p|$  entlang des Radialschnitts durch die Wandung des Rohrs. Die Spannungsfelder aus der gekoppelten FEM/GMC-Rechnung zeigen eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen. Lediglich in der Nähe des inneren Rands, wo der Druck  $p$  aufgebracht wird, kommt es zu einer geringfügigen Abweichung der Ergebnisse für  $|\sigma_\theta/p|$ .

Zur Beurteilung der Rechenzeiten werden diskrete RVEs mit unterschiedlich feiner Vernetzung betrachtet. Die Zunahme der relativen Rechenzeiten des FEM/GMC-Ansatzes (in Bezug auf die Rechenzeit des homogenen Materialmodells) kann in Abb. 6.6 abgelesen werden. Die Steigerung der Rechenzeit als Funktion der Unterzellanzahl ist für die effiziente GMC-Implementierung ungefähr linear. In der Berechnung, die der Ermittlung der Rechenzeiten zugrunde liegt, ist zu jedem Zeitschritt in jedem Integrationspunkt des FE-Netzes homogenisiert worden. Wie einleitend erwähnt worden ist, ist dieses Vorgehen für einen konstanten Zeitschritt nicht erforderlich. Der angegebene Zuwachs der Rechenzeit mit der Zellenzahl entspricht daher einem oberen Grenzwert, der bei einmaliger Homogenisierung im ersten Zeitschritt deutlich geringer ausfiele. Die Zahl der Unbekannten hängt in der effizienten Formulierung der GMC linear von der Anzahl der Zellen ab. Darüberhinaus ist nur für die Normalspannungen ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem zu lösen. Die Zahl der unbekannt Variablen in der Originalformulierung der Zellenmethode wächst in zweiter Potenz mit der Unterzellanzahl.

### 6.3.2 Viskoelastisches Verifikationsbeispiel 2: Gelochte Zugprobe

In Abb. 6.7 ist die Vernetzung eines Viertels einer gelochten Scheibe mit finiten Volumenelementen dargestellt. Die Fasern verlaufen unter einem Winkel  $\alpha$  bezogen auf die längere Seite der Scheibe. Die Dickenrichtung der Scheibe ist mit einem Element diskretisiert. Die unidirektional faserbewehrte Probe wird sprunghaft mit einer einachsigen Zugbeanspruchung  $p_x = 1$  MPa zur Zeit  $t = 0$  beansprucht. Die

Abbildung 6.7: Gelochte Zugprobe unter einachsiger Lastbeanspruchung  $p_x$ 

Last wird über die Zeit von 100 Stunden hinweg konstant gehalten. An alle Knoten auf den Symmetrieachsen mit  $x = const. = 0$  und  $y = const. = 0$  werden die Freiheitsgrade senkrecht zu den Schnittkanten gesperrt. Für die Zugprobe wird näherungsweise der ebene Spannungszustand angenommen. Die Grenzflächenparameter werden vereinfacht in Abhängigkeit der Eigenschaften der Matrixphase sowie des Faserdurchmessers  $d_f$  und dem Verhältnis  $r_{fi}$  der Grenzschichtdicke zum Faserdurchmesser angenommen:

$$S_{I\perp} = \frac{r_{fi} d_f}{E_m} \quad , \quad S_{\infty} = \frac{r_{fi} d_f}{G_{\infty}} \quad , \quad S_1 = \frac{r_{fi} d_f}{G_{\infty}} \frac{J_1}{J_{\infty}} \quad (6.82)$$

Das Verhältnis von Scheibenhöhe zur Scheibenlänge beträgt  $h/l = 1/2$ . Der Radius des kreisförmigen Lochs ist  $r = 1/5 h$ . Für die Zweiskalenberechnung werden die Materialparameter nach Tab. 6.2 verwendet. Die Fasern verhalten sich linearelastisch, die Matrix viskoelastisch. Das Verbundverhalten der Phasen hängt in tangentialer Richtung (unter Schub) von der Zeit ab. Senkrecht zur Faser wird von einem Verbund mit elastischer Nachgiebigkeit ausgegangen. Der Fasergehalt liegt bei  $V_f = 0.30$ . Die numerische Berechnung wird für die Faserwinkel  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$  durchgeführt, wobei drei unterschiedliche Diskretisierungen des RVEs, die in Abb. 6.8 zu sehen sind, herangezogen werden. Die Verschiebung des Knotenpunkts  $\mathcal{P}$ , siehe Abb. 6.7, ist im linken Diagramm der Abbildung 6.9 für den Faserwinkel  $\alpha = 0^\circ$  dargestellt. Das Kriechen der Zugprobe ist kaum ausgeprägt, denn die steifen elastischen Fasern verlaufen in Richtung der Zugbeanspruchung. Das rechte Diagramm in Abb.

Parameter	$E$ [GPa]	$K$ [GPa]	$G_{\infty}$ [GPa]	$G_1$ [GPa]	$\tau_1$ [h]	$J_{\infty}$ [1/GPa]	$J_1$ [1/GPa]	$\hat{\tau}_1$ [h]
Glasfaser	68.94	38.30	28.725	-	-	$1.74 \cdot 10^{-2}$	-	-
Epoxidharz	3.412	3.56	0.893	0.383	10	$1.679 \cdot 10^{-1}$	$5.597 \cdot 10^{-1}$	14.286

Parameter	$\xi_1$ [h]	$S_{I\perp}$ [ $\mu\text{m}/\text{GPa}$ ]	$S_{\infty}$ [ $\mu\text{m}/\text{GPa}$ ]	$S_1$ [ $\mu\text{m}/\text{GPa}$ ]	$r_{fi}$ [-]	$d_f$ [ $\mu\text{m}$ ]
Grenzfläche	14.286	$4.88 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-1}$	$6.22 \cdot 10^{-1}$	1/30	5

Tabelle 6.2: Parameter für Fasern, Matrix und Grenzfläche

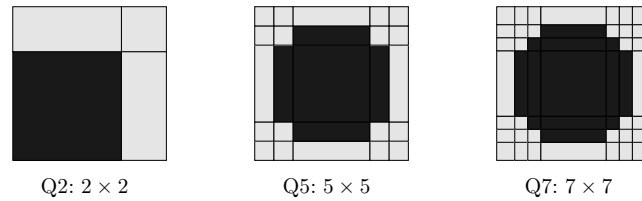


Abbildung 6.8: RVEs für eine quadratische Packung der Fasern

6.9 zeigt die Normalspannungsverteilung entlang des Schnitts  $x = const = 0$ . Es ist offenkundig, dass die Spannungen kaum von der Feinheit der RVE-Diskretisierung abhängen. Die räumliche Verteilung der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  entlang des Schnitts ändert sich mit der Zeit so gut wie nicht. Das Spannungsfeld  $\sigma_{xx}$  zeigt eine geringe Erhöhung der Spannungsintensitätsfaktors, d.h. des Verhältnisses der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  am Rand des Lochs zur äußeren Randbelastung  $p_x$ . Die Ergebnisse für die Kriechverschiebung  $u_x$  des Punkts  $\mathcal{P}$  und der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  entlang des vertikalen Schnitts  $x = 0$  sind in Abb. 6.10 graphisch aufgetragen. Die anfängliche Verschiebung für den Faserwinkel  $\alpha = 90^\circ$  ist ungefähr dreimal größer als die Verschiebung für den Faserwinkel  $\alpha = 0^\circ$ . Dies stimmt qualitativ mit der Erwartung überein, denn die steifen und elastischen Fasern verlaufen für  $\alpha = 90^\circ$  senkrecht zur Beanspruchungsrichtung, so dass die viskoelastische Matrix und der nachgiebige Verbund die effektive Steifigkeit dominieren. Die Deformation, die für das grobe Mikromodell Q2 mit nur 4 Unterzellen berechnet wird, führt auf ein weniger steifes effektives Material als die Modelle Q5 und Q7 mit 25 und 49 Zellen. Dieser Effekt tritt nicht so offensichtlich auf, wenn die Fasern in Lastrichtung ausgerichtet sind. Die im Diagramm auf der rechten Seite der Abb. 6.10 gezeigten Spannungsverläufe konzentrieren sich weniger im Bereich der Lochung. Die zeitliche Änderung des Spannungsintensitätsfaktors am Rand des Lochs ist klein aber feststellbar. Die Spannungen hängen nicht signifikant von der Zahl der Unterzellen ab, die zur Dis-

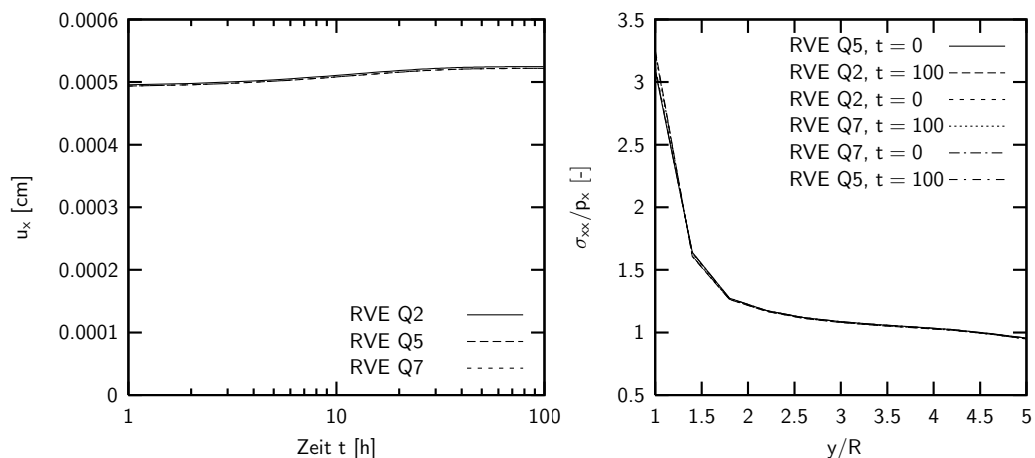


Abbildung 6.9: Spannungs- und Verschiebungsverläufe für  $\alpha = 0^\circ$ . Links: Verschiebung  $u_x$  des Punkts  $\mathcal{P}$ . Rechts: Knotenpunktprojektion der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  entlang des Schnitts  $x = const = 0$

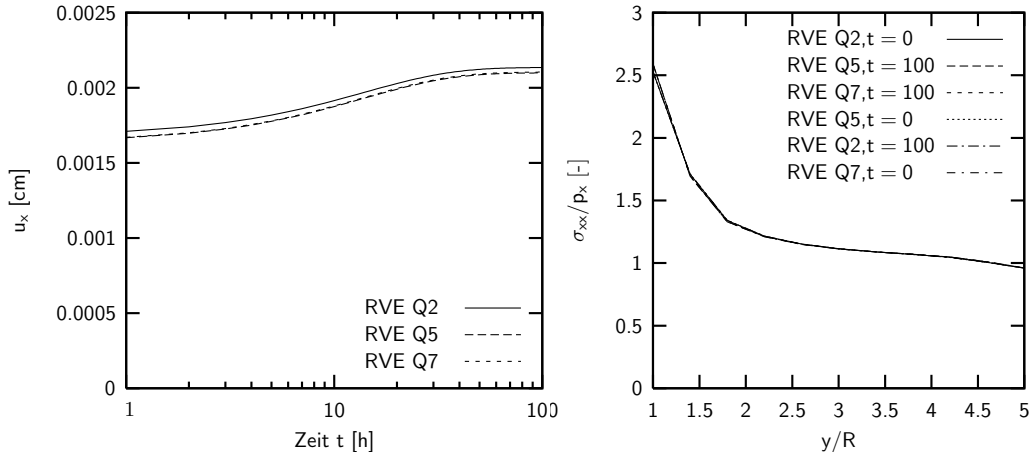


Abbildung 6.10: Spannungs- und Verschiebungsverläufe für  $\alpha = 90^\circ$ . Links: Verschiebung  $u_x$  des Punkts  $\mathcal{P}$ . Rechts: Knotenpunktprojektion der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  entlang des Schnitts  $x = const = 0$

kretisierung der Mikrostruktur verwendet werden. Die Abb. 6.11 und 6.12 zeigen die Verteilung der Normalspannung  $\sigma_{xx}$  zu Beginn und Ende des Kriechversuchs. Es ist eine gewisse Reduktion der Spannung in größerer Entfernung zur Lochung zu erkennen. Der Bereich der Scheibe, in dem die Normalspannung  $\sigma_{xx}$  der aufgetragenen Randspannung  $p_x = 1$  MPa entspricht, vergrößert sich.

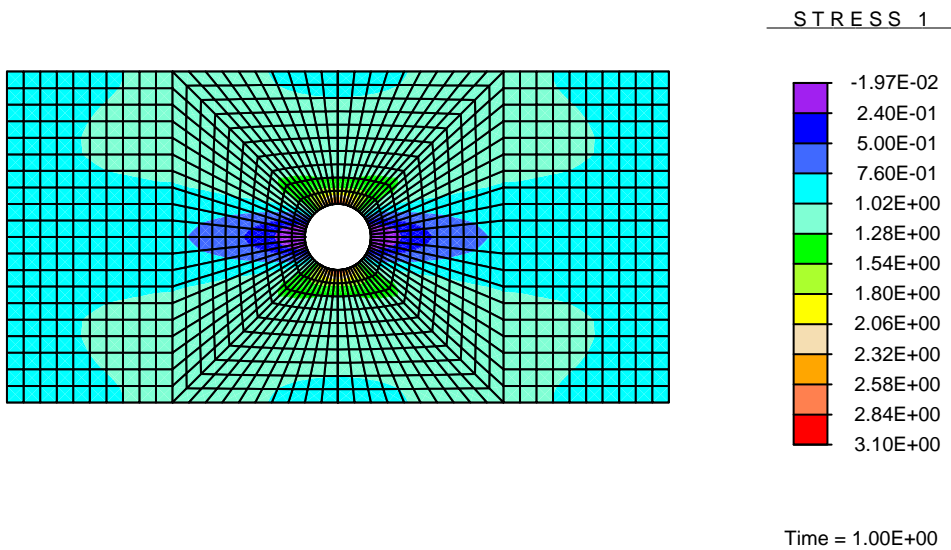


Abbildung 6.11: Normalspannungsverteilung  $\sigma_{xx}$  zur Zeit  $t = 0$  h für den Faserwinkel  $\alpha = 0^\circ$

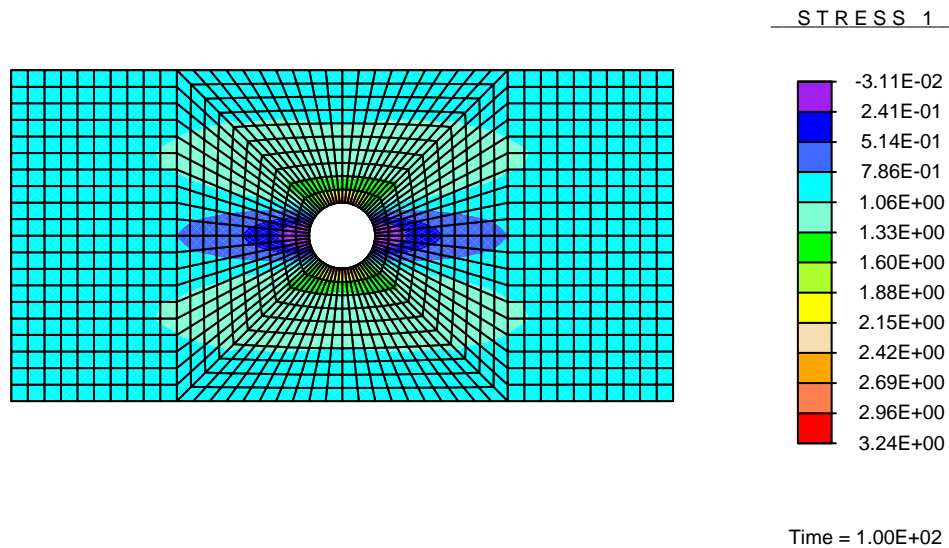


Abbildung 6.12: Normalspannungsverteilung  $\sigma_{xx}$  zur Zeit  $t = 100$  h für den Faserwinkel  $\alpha = 0^\circ$

### 6.3.3 Viskoelastisches Validierungsbeispiel 1: Einaxialer Relaxationstest

Masuko and Kawai (2004) untersuchen das zeitabhängige Verhalten von symmetrischen Winkelverbunden sowie von unidirektionalen Laminaten aus einem karbonfaserverstärkten Epoxidharz (T800H/3631) bei höheren Temperaturen ( $T = 100^\circ\text{C}$ ). Die Experimentaldaten stammen aus uniaxial weggesteuerten Relaxationsversuchen. Die elastischen Anfangseigenschaften der einzelnen UD-Schicht sind ebenfalls in (Masuko and Kawai 2004) gegeben. Sie sind in Tab. 6.3 aufgeführt und den GMC-Vorhersagen gegenübergestellt. Die vier RVE-Modelle der GMC-Rechnungen zeigt Abb. 6.3.3. Die ersten drei Diskretisierungen der Mikrostruktur gehen von einer quadratischen Packung der Fasern aus und nutzen die Symmetrie des RVEs aus. Die gewonnen Steifigkeiten sind die Parameter eines orthotropen Materials und werden durch die Mittelung nach Gl. (4.134) in transversalisotrope Parameter umgerechnet. Das vierte RVE unterstellt eine hexagonale Anordnung der Fasern und zielt unmittel-

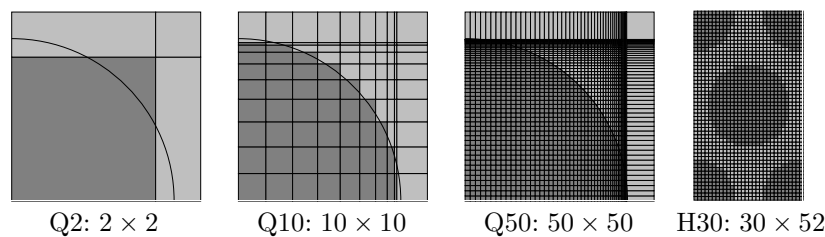


Abbildung 6.13: Diskretisierte RVEs für quadratische und hexagonale Faseranordnung

Material	$V_f$ [-]	$E_a$ [GPa]	$G_a$ [GPa]	$E_t$ [GPa]	$G_t$ [GPa]	$\nu_a$ [-]
Epoxid-Matrix	-	3.2	1.16	3.2	1.16	0.35
Kohlefaser	-	288	24	16	6.7	0.35
UD-Exp.	$\approx 0.52$	151.0	3.5	7.3	-	-
GMC Q2	0.52	151.30	2.98	8.05	2.90	0.36
GMC Q10	0.52	151.30	3.01	7.98	2.86	0.36
GMC Q50	0.52	151.30	3.02	7.99	2.87	0.36
GMC HR5230	0.51	149.31	2.36	6.53	2.22	0.36

Tabelle 6.3: Vergleich experimentell bestimmter, elastisch transversalisotroper Ingenieurkonstanten mit Vorhersagen der GMC

bar auf die transversalisotropen Parameter ab. Die elastischen Anfangssteifigkeiten zeigen nur eine geringe Abhängigkeit von der Netzverfeinerung. Im Unterschied zu den Berechnungen in den Kapiteln 4.4.2 und 4.4.3 wird die Symmetrie des RVEs ausgenutzt. Es genügt dann, nur ein Viertel der repräsentativen Elementarzelle zu betrachten. Die gesamte Zelle muss abgebildet werden, wenn periodische Randbedingungen aufgebracht werden. Um nicht verschiedene RVEs für den Vergleich von GMC und HFGMC zu verwenden, wurde im Kapitel 4.4.2 auf die Nutzung der Symmetrie verzichtet. Das RVE *HR5230* führt zu etwas geringeren elastischen Steifigkeiten als die RVEs für die quadratische Faseranordnung. Dies liegt hauptsächlich daran, dass der Faservolumengehalt von  $V_f = 0.52$  geringfügig unterschritten wird ( $V_f = 0.51$ ).

Die Modellierung des hexagonalen RVEs geschieht numerisch derart, dass das gesamte Volumen zunächst mit einem regelmäßigen Netz quadratischer Zellen überzogen wird. Nachfolgend werden fünf Kreisflächen mit dem Radius der Fasern definiert,

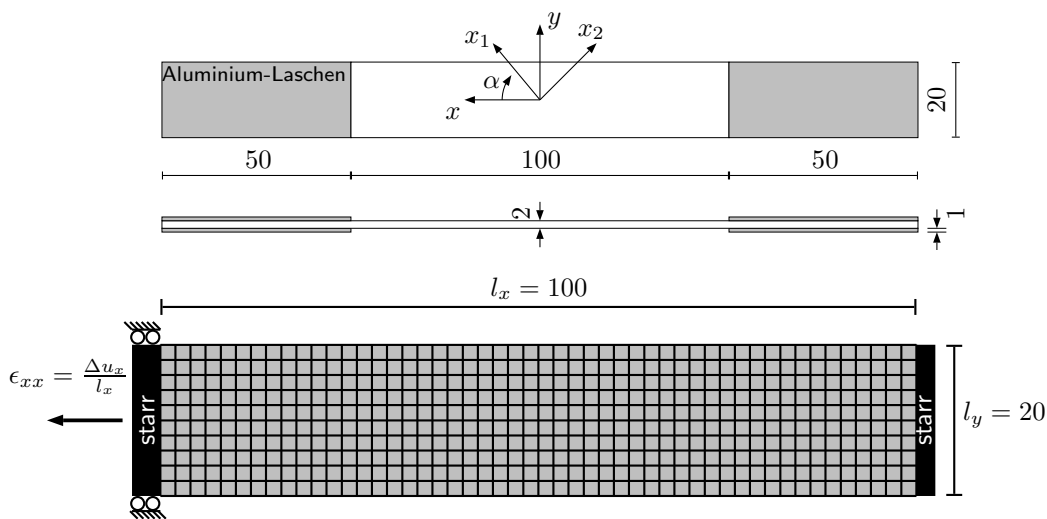


Abbildung 6.14: Probekörpergeometrie (in mm) und finite Elemente Vernetzung der freien Probenlänge zwischen den beidseitigen Einspannungen



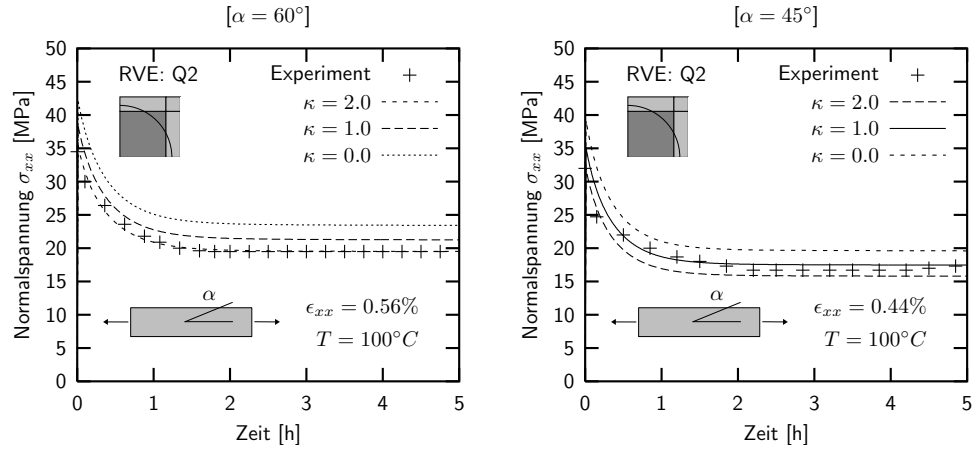


Abbildung 6.15: Experimentelle und berechnete Spannungsrelaxationskurven  $\sigma_{xx}(t)$  für das Karbonfaser/Epoxidharz. Ergebnisse für die Winkel  $\alpha = 60^\circ$  und  $\alpha = 45^\circ$  unter zeitlich konstanter Dehnung  $\epsilon_{xx}$

deren Mittelpunkte in den vier Eckpunkten und dem Zentrum des RVEs liegen. Allen Unterzellen, deren Mittelpunkte in diese Kreisflächen fallen, werden dann die Materialeigenschaften des Faserwerkstoffs zugewiesen. Aufgrund der diskreten Vernetzung sind bei diesem Vorgehen nicht alle Faservolumenanteile exakt einstellbar, sondern sie sind in ebenfalls diskreten Schritten variabel.

Die Konformität der Vorhersagen in Tab. 6.3 erlaubt es im Sinne einer ausgewogenen Balance zwischen numerischer Effizienz und Modellierungsfehlern, das RVE Q2 für die nachfolgenden Zweiskalensimulationen zu verwenden. Die Probekörper mit den Abmessungen  $l/w/t = 200/20/2$  mm sind an beiden Enden mit aufgeklebten Aluminiumlaschen versehen und eingespannt. Die freie Länge zwischen den Einspannungen beträgt 100 mm. Der Winkel zwischen den Fasern und der Richtung der aufgetragenen Last wird mit  $\alpha$  bezeichnet. Für die mikromechanisch gestützte FE-Analyse wird die freie Länge der unidirektional bewehrten Proben mit  $50 \times 10 \times 1$  achtknotigen isoparametrischen Volumenelementen diskretisiert. Die für eine Zugprobe hohe Zahl von Elementen wird gewählt, da sich für Faserwinkel  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  eine Biegedeformation der Probe einstellt. Die Knotenverschiebungen an den Endknoten des FE-Modells werden so vorgeschrieben, dass die mittlere Längsdehnung  $\epsilon_{xx} = \Delta u_x / l_x$  vorliegt. Die zugehörige mittlere Längsspannung  $\sigma_{xx} = P/A$  wird aus der Resultierenden  $P$  der Knotenkräfte an den eingespannten Enden der Probe und dem anfänglichen Probenquerschnitt  $A$  berechnet.

Die Kriechfunktion des Epoxidharzes wird mit den Anfangswerten  $J(0) = 1/2G_0$  [ $\text{GPa}^{-1}$ ] und  $G_0 = 1.16$  [ $\text{GPa}$ ] angenommen als

$$J(t) = 1.079 \cdot 10^{-3} (1 - 0.025 e^{-\frac{t}{0.1h}} - 0.55 e^{-\frac{t}{0.75h}} - 0.025 e^{-\frac{t}{10.0h}}) [\text{MPa}^{-1}] \quad (6.83)$$

Das Kriechspektrum  $L(\tau)$  ist so gewählt, dass die experimentellen Relaxationskurven qualitativ reproduziert werden können. Als Grenzflächenkriechfunktion  $S_{I\parallel}(t)$  wird die  $\kappa$ -fache und mit der Grenzschichtdicke  $t^{(i)} \approx \varnothing_{\text{Faser}}/30 = 0.2 \mu\text{m}$  multiplizierte Kriechfunktion der Matrixphase angenommen:

$$S_{I\parallel}(t) = t^{(i)} \kappa J(t) \quad , \quad S_{I\perp} = t^{(i)} \frac{\kappa}{E_m} \quad (6.84)$$

Die tangentielle Steifigkeit  $S_{I\parallel}$  des Verbunds tendiert gegen Unendlich, wenn  $\kappa$  gegen Null geht. Die Steifigkeit der Grenzfläche in Normalenrichtung  $S_{I\perp}$  wird proportional zum Elastizitätsmodul  $E_m = E_a = E_t = 3.2$  GPa der isotropen Matrix gewählt. Den Vergleich der numerischen Ergebnisse der Zweiskalensimulation mit den experimentell bestimmten Kurvenverläufen zeigt Abb. 6.15. Die Länge des Zeitschritts beträgt  $\Delta t = 0.01h$ . Die Versuchsdauer von 5 Stunden wird in 500 Zeitschritte unterteilt, deren Berechnung jeweils eine Zeit von ca. 5 Sekunden benötigt. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass die Annahme eines perfekten Verbunds zu einer Überschätzung der makroskopischen Steifigkeiten und daher zu hohen Spannungen in Lastrichtung führt. Unter Ansatz eines nachgiebigen Verbunds mit  $\kappa = 1, \dots, 2$  ist es möglich, die Modellvorhersagen gut an die Relaxationsdaten anzupassen.

### 6.3.4 Viskoelastisches Validierungsbeispiel 2: Dünnwandiges Rohr unter axialem Zug

In Robinson et al. (2003) werden dünnwandige Rohrproben aus einem Verbundmaterial der axialen Zugbeanspruchung  $p = 28$  MPa bei Raumtemperatur ausgesetzt. Die einschichtigen Testkörper bestehen aus einem glasfaserverstärkten Epoxidharz mit einem hohen Fasergehalt von  $V_f = 0.6$ . Die inneren und äußeren Radien des Rohrs betragen  $r_i = 16.5$  mm und  $r_a = 18.5$  mm bei einer Rohrlänge von  $l = 100$  mm. Der Winkel der Faserwicklung gegenüber der Zylinderachse  $x_3$  wird zu  $\Theta = 45^\circ$  gewählt. Die Enden des Probekörpers sind in die lastgesteuert gefahrene Testmaschine eingespannt. Für die numerische Simulation wird die Nachgiebigkeit des Verbunds von Fasern und Matrix – wie im vorangegangenen Beispiel – als  $\kappa$ -faches der Nachgie-

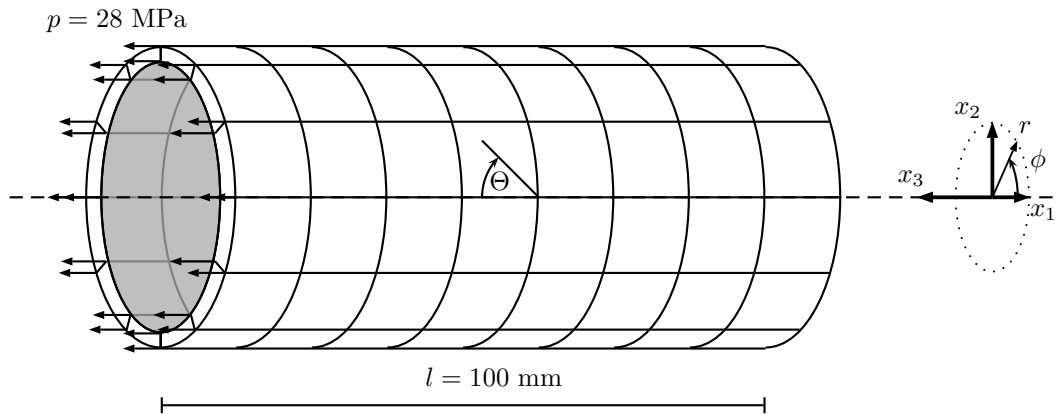


Abbildung 6.16: FE-Modell des dünnwandigen Rohrs

Material	$K$ [MPa]	$G_\infty$ [MPa]	$\hat{\tau}_1$ [h]	$\hat{\tau}_2$ [h]	$\hat{\tau}_3$ [h]	$\hat{\nu}_1$ [-]	$\hat{\nu}_2$ [-]	$\hat{\nu}_3$ [-]
Epoxidharz	3471	976	0.1	1.0	10.0	0.005	0.010	0.005
Glasfaser	47625	32786	-	-	-	-	-	-

Tabelle 6.4: Materialdaten für elastische Glasfasern und viskoelastisches Epoxidharz

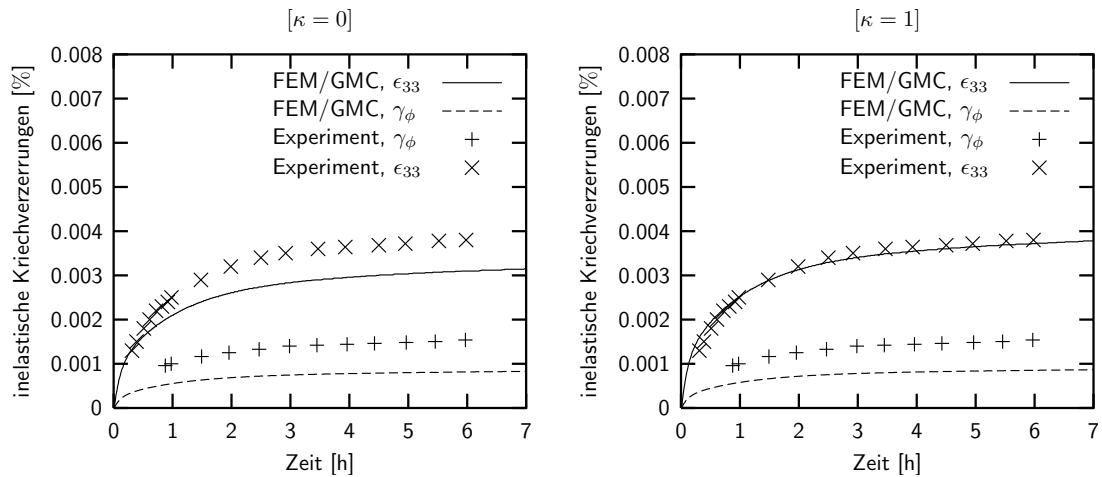


Abbildung 6.17: Kriechanteil der Dehnungen vs. Zeit. Links: starrer Verbund,  $\kappa = 0$ . Rechts: Verbund mit matrixäquivalenten Eigenschaften,  $\kappa = 1$

bigkeiten der Matrixphase unter Berücksichtigung der physikalischen Grenzschichtdicke  $t^{(i)} \approx 0.2 \mu m$  beschrieben. Das Makromodell des Rohrs besteht aus  $36 \times 11 \times 1$  isoparametrischen, achtknotigen Volumenelementen – siehe Abb. 6.16. Am rechten Ende sind alle Knotenfreiheitsgrade in Rohrlängs- und in Umfangsrichtung gesperrt. Am linken Ende wirkt die Last  $P$  als gleichmäßig verteilte Beanspruchung  $p = 28$  MPa. Die Verschiebungen in radialer Richtung sind verhindert. Die experimentellen Ergebnisse der Kriechversuche sind in Form des inelastischen Anteils der Kriechnormaldehnung  $\epsilon_{33}$  in Richtung der Rohrlängsachse und des inelastischen Anteils der Torsionsverzerrung  $\gamma_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial x_3}$  (d.h.  $\epsilon_{iel}(t) = \epsilon_{total}(t) - \epsilon_{elast}$ ) als Funktionen der Zeit gegeben. Die Diagramme in Abb. 6.17 und 6.18 zeigen die Kriechantwort für starren Verbund ( $\kappa = 0$ ), Matrix äquivalente Grenzflächeneigenschaften ( $\kappa = 1$ ) und Verbund mit erhöhter Nachgiebigkeit ( $\kappa = 2$ ). Erwartungsgemäß verstärkt sich das Kriechen in Richtung der Rohrachse, wenn die Grenzflächennachgiebigkeit er-

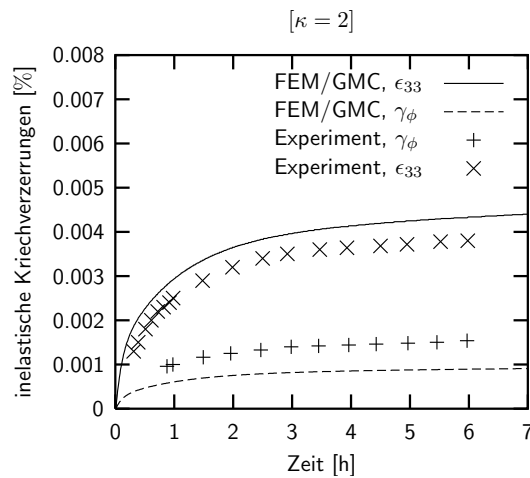


Abbildung 6.18: Kriechdehnungen vs. Zeit für Verbund mit erhöhter Nachgiebigkeit mit  $\kappa = 2$

hört wird. Die Zunahme der Torsionsverformung, die sich aufgrund des Faserwinkels von  $45^\circ$  einstellt, zeigt kaum eine erkennbare Beeinflussbarkeit durch die Grenzflächenparameter. Die Kriechdehnungen in Längsrichtung des Rohrs wird mit Matrixäquivalenten Grenzflächeneigenschaften am besten wiedergegeben. Bei starrem Verbund ist der inelastische Anteil der Längsdehnung  $\epsilon_{33}$  zu gering, bei  $\kappa = 2$  fällt der Kriechanteil der Verformung zu stark aus.

# Kapitel 7

## Nichtlinear elastische Verbundwerkstoffe mit Schädigung

Gegenstand des folgenden Kapitels ist die prozessabhängige Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen, bei denen sich der Füller nichtlinear elastisch verhält. Die Grenzflächen der Phasen erleiden im Verlauf der Beanspruchung eine Schädigung, die die Steifigkeit des Verbunds bis zum vollständigen Verlust der Adhäsion von Fasern und Matrix degradieren lässt. Die Fasern verhalten sich linear elastisch. Die Schädigung der Matrix und der Faser wird mit Hilfe der Bruchmechanik beschrieben. Als Orte der Rissentstehung werden die Randflächen benachbarter Unterzellen verwendet. Der konstitutive Zusammenhang zwischen den Spannungsvektoren auf den Bruchflächen (vor dem vollständigen Bruch) und den Diskontinuitäten des Verschiebungsfelds wird durch die ratenunabhängigen Schädigungsmodelle aus Kapitel 3.4 beschrieben.

### 7.1 Einbeziehung der Verbundmodelle in die verallgemeinerte Methode der Zellen

Die Homogenisierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung basiert auf den in Kapitel 4.4.2 hergeleiteten Grundgleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) der effizient reformulierten Methode der Zellen. Die genannten Verschiebungsgleichungen sind in Vektor-Matrix-Schreibweise zu überführen, im Zuge dessen die Verzerrungsgrößen der Unterzellen durch Einbeziehung der konstitutiven Gleichungen der Phasenwerkstoffe durch Spannungsterme ersetzt werden sollen. Diese Ersetzung führt auf die effizient formulierte Fassung der GMC. Die Definitionen der vektoriellen und matriziellen Größen, die zu diesem Zweck nachfolgend Verwendung finden, sind im Anhang A.4 dieser Arbeit ab Seite 195 angegeben.

In den Verschiebungsgleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) ab S. 69 sind neben den unbekanntenen Verzerrungen  $\langle \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  in den Unterzellen  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  noch alle

$$N_u = 3[(N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + N_\alpha(N_\beta - 1)N_\gamma + N_\alpha N_\beta(N_\gamma - 1)] \quad (7.1)$$

Koordinaten  $[[^{(i)}u_j^{(\alpha\beta\gamma)}]]$  der potentiell vorhandenen (d.h. vom Nullvektor verschiede-

nen) Diskontinuitätsvektoren  ${}^{(i)}\mathbf{u}^{(\beta\gamma)}$  enthalten, die zum Hypervektor

$$\mathbf{u} = \left\{ {}^{(i)}u_j^{(\alpha\beta\gamma)} \right\} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \quad \beta = \overline{1, N_\beta}, \quad \gamma = \overline{1, N_\gamma} \quad (7.2)$$

zusammengefasst werden, (s. Anhang A.4.2). Die Gleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) gehen folglich vom allgemeinen Fall aus, in dem Diskontinuitäten des mikroskopischen Verschiebungsfelds an allen Unterzellrändern innerhalb des RVEs auftreten können. Nicht alle Unterzellränder  ${}^{(i)}\partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  des RVE-Modells stellen jedoch Phasengrenzflächen dar oder dienen der Definition von Matrixbruchflächen. Die Zahl der Flächen, die im Laufe des Belastungsvorgangs eine Schädigung erfahren können, für die also  ${}^{(1)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)} \neq \mathbf{0}$  gelten kann, beträgt:

$$N_I = N_{I1} + N_{I2} + N_{I3}, \quad 3N_I \leq N_u \quad (7.3)$$

Die Größen  $N_{I1}$ ,  $N_{I2}$  und  $N_{I3}$  beschreiben die Anzahl der nachgiebigen Unterzellgrenzen mit den Flächennormalen in  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung. Die Zahl  $N_I$  hängt von der Anordnung möglicher Bruchflächen durch den Anwender der Zellenmethode ab und kann nicht allgemeingültig aus der Anzahl der Unterzellen abgeleitet werden. Die von Null verschiedenen Komponenten des Hypervektors  $\mathbf{u}$  mit  $N_u$  Elementen werden durch die Inzidenzmatrix  $\mathbf{D}^u$  auf die Untermenge  $\hat{\mathbf{u}}$  mit  $3N_I$  Elementen reduziert:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D}^u \mathbf{u} \quad (7.4)$$

Die Bildung der Matrix  $\mathbf{D}^u$  ist im Anhang A.4.3 dargestellt. In den Gleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) sind die Mikroverzerrungen in den Unterzellen anhand des jeweiligen Konstitutivmodells durch Ausdrücke in den Unterzellspannungen zu ersetzen, wobei die eingeforderte Kontinuität der Spannungsfelder über die Unterzellgrenzen hinweg ausgenutzt wird. Als Folge der Spannungskontinuitätsbedingungen ist der mittlere Spannungszustand  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  einer Unterzelle unter Beachtung der Gln. (4.93) bis (4.98) durch die Spannungen  $\mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}$  darstellbar:

$$\mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)} := \left\{ \begin{array}{c} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ T_{22}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{33}^{(\alpha\beta)} \\ T_{23}^{(\alpha)} \\ T_{13}^{(\beta)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \langle \sigma_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle \sigma_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \end{array} \right\} \quad (7.5)$$

Das nichtlinear elastische Verhalten der Matrix wird durch das konstitutive Modell in Kapitel 2.2 abgebildet. Die konstitutive Gleichung (2.19) nimmt mit

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^T = \left\{ \langle \epsilon_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \langle \epsilon_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \langle \epsilon_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \langle \epsilon_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \langle \epsilon_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \langle \epsilon_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \right\} \quad (7.6)$$

und Gl. (7.5) folgende Form an:

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \left( \mathbf{S}^{el(\alpha\beta\gamma)} + \varpi^{(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{S}^{nl(\alpha\beta\gamma)} \right) \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)} \quad (7.7)$$

Die Variable  $\varpi^{(\alpha\beta\gamma)}$  berechnet sich laut Gl. (2.14) zu:

$$\varpi^{(\alpha\beta\gamma)} = \left( \frac{\sigma_{eq}^{(\alpha\beta\gamma)}}{\sigma_0^{(\alpha\beta\gamma)}} \right)^{(n-1)} \quad (7.8)$$

Die Vergleichsspannung

$$\sigma_{eq}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \langle s_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 + \langle s_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 + \langle s_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 + 2\langle s_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 + 2\langle s_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 + 2\langle s_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle^2 \right)} \quad (7.9)$$

ergibt sich aus den Komponenten des deviatorischen Spannungstensors  $\langle \mathbf{s}_D^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle$  der Unterzelle:

$$\langle \mathbf{s}_D^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \begin{Bmatrix} \langle s_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{31}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} - T_{kk}^{(\alpha\beta\gamma)}/3 \\ T_{22}^{(\alpha\gamma)} - T_{kk}^{(\alpha\beta\gamma)}/3 \\ T_{33}^{(\alpha\beta)} - T_{kk}^{(\alpha\beta\gamma)}/3 \\ T_{23}^{(\alpha)} \\ T_{31}^{(\beta)} \\ T_{12}^{(\gamma)} \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

mit  $T_{kk}^{(\alpha\beta\gamma)} = T_{11}^{(\beta\gamma)} + T_{22}^{(\alpha\gamma)} + T_{33}^{(\alpha\beta)}$ . Den Tangentenoperator  $\tilde{\mathbf{S}}$  erhält man in Matrixform gemäß Gl. (2.23) als:

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle}{\partial \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}} = \mathbf{S}^{el(\alpha\beta\gamma)} + \varpi^{(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{S}^{nl(\alpha\beta\gamma)} + (\mathbf{S}^{nl(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}) \boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)\text{T}} \quad (7.11)$$

mit

$$\boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)} := \left\{ \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{11}^{(\beta\gamma)}}, \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{22}^{(\alpha\gamma)}}, \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{33}^{(\alpha\beta)}}, \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{23}^{(\alpha)}}, \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{13}^{(\beta)}}, \frac{\partial \varpi^{(\alpha\beta\gamma)}}{\partial T_{12}^{(\gamma)}} \right\}^{\text{T}} \quad (7.12)$$

Die Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)} \in \mathbb{R}^6$  liefert die Gl. (2.18):

$$\boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{(n-1) \sigma_{eq}^{(\alpha\beta\gamma)(n-3)}}{2 \sigma_0^{(\alpha\beta\gamma)(n-1)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle s_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \\ \langle s_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

Die konstitutive Annahme linearelastischen Verhaltens der Fasern lautet mit den Spannungen  $\mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}$ :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle = \mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)} \langle \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \quad (7.14)$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten der konstitutiven Gln. (7.7) und (7.14) in die Verschiebungsgleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) erhält man unter Beachtung der Gl. (7.4) das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}) \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (7.15)$$

Der Hypervektor  $\hat{\mathbf{T}}$  umfasst alle Unterzellspannungen  $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ . Die Matrix  $\mathbf{S}$  enthält die von den Spannungen  $\hat{\mathbf{T}}$  abhängigen Nachgiebigkeiten der Phasenwerkstoffe sowie die Unterzellabmessungen. Die sechs makroskopischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  werden über die Matrix  $\mathbf{K}$ , die von den Kantenlängen des RVEs abhängt, in die Matrixform der Verschiebungsgleichungen (4.80) bis (4.82) und (4.88) bis (4.90) einbezogen. Die Matrix  $\mathbf{D}$  enthält als Einträge die Abmessungen der Unterzellen und ordnet die Verschiebungsdiskontinuitäten  $\hat{\mathbf{u}}$  den einzelnen Verschiebungsgleichungen zu.

Die Vektoren  ${}^{(i)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)}$  der Verschiebungsdiskontinuitäten werden durch die konstitutiven Beziehungen (3.35), (3.50) oder (3.60) der ratenunabhängigen Grenzflächenmodelle mit Schädigung auf die Spannungsvektoren  ${}^{(i)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)}$  abgebildet:

$${}^{(i)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} = \mathbf{E}_I({}^{(i)}d^{(\alpha\beta\gamma)}) {}^{(i)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)} \quad (7.16)$$

Zur Wahrung der Spannungskontinuität haben die Spannungsvektoren nach Gl. (7.16) die Bedingung zu erfüllen, dass gilt:

$${}^{(i)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle \mathbf{n} \quad (7.17)$$

Berücksichtigt man die Gl. (7.5), so bestimmen sich die Grenzflächenspannungen nach Gl. (7.17) aus den Zellspannungen  $\mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}$  zu:

$${}^{(1)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} := \begin{Bmatrix} T_{11}^{(\beta\gamma)} \\ T_{12}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{13}^{(\alpha\beta)} \end{Bmatrix}, \quad {}^{(2)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} := \begin{Bmatrix} T_{22}^{(\beta\gamma)} \\ T_{23}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{12}^{(\alpha\beta)} \end{Bmatrix}, \quad {}^{(3)}\mathbf{t}^{(\alpha\beta\gamma)} := \begin{Bmatrix} T_{33}^{(\beta\gamma)} \\ T_{13}^{(\alpha\gamma)} \\ T_{23}^{(\alpha\beta)} \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

Die zu den Diskontinuitäten  $\hat{\mathbf{u}}$  in Gl. (7.4) konjugierten Spannungen im Hypervektor  $\hat{\mathbf{t}} = \{ {}^{(i)}t_j^{(\alpha\beta\gamma)} \}$  werden durch die Zuordnungsmatrix  $\mathbf{D}$  unter Beachtung von Gl. (7.5) aus dem Hypervektor  $\hat{\mathbf{T}} = \{ T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} \}$  aller Unterzellspannungen extrahiert, denn die Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  fallen gerade mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  zusammen:

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}} \quad (7.19)$$

Die matrizielle Zusammenfassung der konstitutiven Gleichungen (7.16) für alle  $N_I$  Grenzflächen lautet mit Gl. (7.19) in impliziter Form:

$$\hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (7.20)$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{d}}$  stellt die Zusammenfassung der  $N_I$  Schädigungsvariablen  ${}^{(i)}d^{(\alpha\beta\gamma)}$  dar. In der Hypermatrix  $\hat{\mathbf{E}}$  mit Diagonalstruktur werden die konstitutiven Matrizen  $\mathbf{E}_L(d)$ ,  $\mathbf{E}_C(d)$  oder  $\mathbf{E}_{\text{GMB}}(d)$  der Grenzflächenmodelle zusammengeführt. Die nichtlinearen Verschiebungsgleichungen (7.15) und die Spannungsbedingungen (7.20) bilden zusammen das nichtlineare Gleichungssystem des Zellenmodells:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}) \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}^M \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.21)$$



das für einen gegebenen makroskopischen Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  iterativ zu lösen ist.

## 7.2 Zur inkrementellen, iterativen Lösung des nichtlinearen Zellenmodells

Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (7.21) in Abhängigkeit der makroskopischen Verzerrungen wird das Newton-Verfahren in Kombination mit einem Kurvenverfolgungsalgorithmus eingesetzt, siehe Ramm (1980). Die Anwendung des Newton-Verfahrens ohne Kurvenverfolgungsalgorithmus führt nicht für alle Kombinationen von Modellparametern zu einem robusten Lösungsverfahren. Da das GMC-Modell eine weggesteuerte Berechnung von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen darstellt, bereitet eine Entfestigung, d.h. eine Abnahme der Makrospannung bei wachsenden Makroverzerrungen keine Schwierigkeiten bei der Anwendung des Newton-Verfahrens. Jedem Verzerrungszustand ist (bei Kenntnis des aktuellen Schädigungszustands) eindeutig ein Spannungszustand zugeordnet.

Es zeigt sich jedoch, dass für bestimmte Parameterkombinationen ein instabiler Verlauf der Schädigungsentwicklung in Form eines so genannten „*snap back*“ Verhaltens auftritt, siehe Abb. 7.1. Hier geht die Eindeutigkeit der Lösung verloren. Zu einer Verzerrung  $\boldsymbol{\epsilon}^M$  gehören bis zu drei verschiedene Spannungszustände  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ . Die

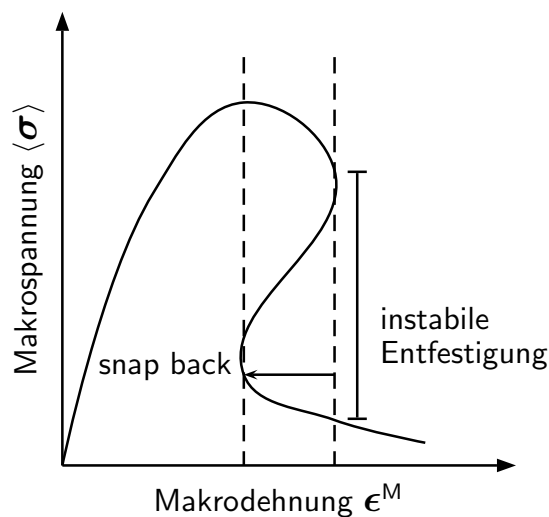


Abbildung 7.1: Instabile Entfestigung

Berechnung des Lösungspfades in diesem Bereich gelingt nur durch die Umschaltung auf einen Kurvenverfolgungsalgorithmus, bei dem das Makrodehnungsincrement mit einem Skalierungsfaktor  $\lambda$  versehen wird. Nach der Überwindung des instabilen Entfestigungsbereichs kann wieder auf das Newton-Verfahren zurückgewechselt werden.

### 7.2.1 Newton-Raphson-Verfahren

Die exakte Lösung des Gleichungssystems (7.21) erfüllt offensichtlich zu allen Zeiten die Forderung nach dem Verschwinden des Residuums  $\mathbf{R}$ , das durch

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}) \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon}^M \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.22)$$

definiert ist. Für die iterative Lösung der mikromechanischen Gleichungen zu einem Verzerrungsprozess  $\boldsymbol{\epsilon}^M(t)$  wird die Zeitachse  $t$  in Inkremente  $\Delta t$  so unterteilt, dass der Gesamtprozess durch die Lösungen für eine Abfolge makroskopischer Verformungszustände

$${}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M = {}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M + \lambda^{(n+1)} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (7.23)$$

zu den diskreten Zeitpunkten

$${}^{(n+1)}t = {}^{(n)}t + \Delta t \quad (7.24)$$

beschrieben wird. Der Faktor  $\lambda$  beträgt im Fall des Newton-Raphson-Verfahrens  $\lambda = \text{const} = 1$ . Für den Kurvenverfolgungsalgorithmus wird  $\lambda$  als zusätzliche Unbekannte behandelt, zu deren Bestimmung das nichtlineare Gleichungssystem (7.21) um eine Gleichung in Form einer Nebenbedingung erweitert wird. Für den makroskopischen Verzerrungszustand  ${}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  zur Zeit  ${}^{(n)}t$  sollen der Schädigungszustand  ${}^{(n)}\mathbf{q}$ , das mikroskopische Spannungsfeld  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{T}}$  sowie die Verschiebungssprünge  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{u}}$  bekannt sein. Die Größen  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{T}}$  und  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{u}}$  werden zum Vektor  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{x}}$  zusammengefasst:

$${}^{(n)}\hat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} {}^{(n)}\hat{\mathbf{T}} \\ {}^{(n)}\hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

Die Schädigungsvariablen  $d$  der einzelnen Grenzflächen werden in der Spaltenmatrix  ${}^{(n)}\hat{\mathbf{d}}$  abgelegt. Gesucht ist der mikroskopische Zustand  $\{{}^{(n+1)}\hat{\mathbf{x}}, {}^{(n+1)}\hat{\mathbf{d}}\}$  für den vorgegebenen makroskopischen Verzerrungszustand  ${}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  zum Folgezeitpunkt  ${}^{(n+1)}t$ . Die iterative Lösung baut auf der Linearisierung  $\mathbf{R}_L$  des Residuumvektors  $\mathbf{R}$  um den Punkt  $\{\hat{\mathbf{x}}^i, \hat{\mathbf{d}}^i\}$  auf:

$$\mathbf{R}_L(\hat{\mathbf{x}}^i, \hat{\mathbf{d}}^i) = \mathbf{R}^i + D\mathbf{R}^i [\Delta \hat{\mathbf{x}}] \quad (7.26)$$

Der Startpunkt  $\{\hat{\mathbf{x}}^0, \hat{\mathbf{d}}^0\}$  der Iteration ( $i = 0$ ) ist gleich der Lösung  $\{{}^{(n)}\hat{\mathbf{x}}, {}^{(n)}\hat{\mathbf{d}}\}$  des vorangegangenen Zeitschritts. Der Residuumvektor im Iterationsschritt  $i$  lautet:

$$\mathbf{R}^i = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) \hat{\mathbf{T}}^i + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}^i - \mathbf{K} {}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}}^i - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (7.27)$$

Die Bildung des Gâteaux-Differentials  $D\mathbf{R}^i[\Delta \hat{\mathbf{x}}]$  des Residuums führt auf:

$$D\mathbf{R}^i[\Delta \hat{\mathbf{x}}] = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{x}}^i + \eta \Delta \hat{\mathbf{x}}) \right|_{\eta=0} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) + \tilde{\mathbf{S}}^i & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -(\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) + \tilde{\mathbf{E}}^i) \end{bmatrix}}_{:= \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{T}} \\ \Delta \hat{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}}_{:= \Delta \hat{\mathbf{x}}} \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (7.28)$$

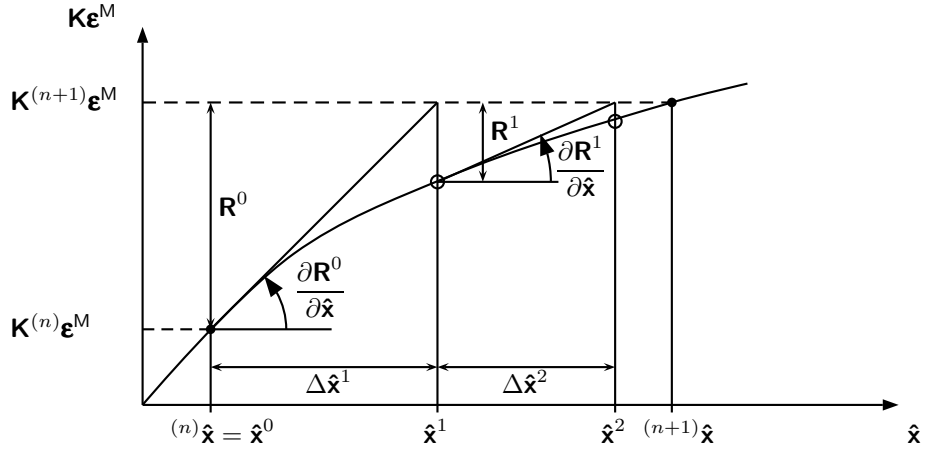


Abbildung 7.2: Veranschaulichung des Newton-Raphson-Verfahrens

Die Elemente der Matrizen  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{E}}$  berechnen sich zu:

$$\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{S}_{nm}] := \left[ \frac{\partial S_{nr}}{\partial \hat{T}_m} \hat{T}_r \right] \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{E}} = [\tilde{E}_{ki}] := \left[ \frac{\partial \hat{E}_{kl}}{\partial \hat{d}_j} \frac{\partial \hat{d}_j}{\partial \hat{u}_i} \hat{u}_l \right] \quad (7.29)$$

Die Bildung der Matrizen  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}})$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  ist im Anhang dargestellt. Die Submatrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{D}$  in der Fréchet-Ableitung  $\partial \mathbf{R}^i / \partial \mathbf{x}$  sind konstant. Die Spaltenmatrix  $\hat{\mathbf{d}}^i$  der inneren Schädigungsvariablen  $d$  der Grenzflächenmodelle, welche aus dem Iterationsalgorithmus heraus bestimmt werden muss, ist eine von der Geschichte der Diskontinuitäten  $\hat{\mathbf{u}}$  abhängige Größe. Im Hinblick auf eine wegunabhängige Iteration ist zu beachten, dass der iterative Schädigungszustand  $d^i$  einer jeden Grenzfläche, nicht im Vergleich mit dem Wert  $d^{i-1}$  des vorangegangenen iterativen Zustands berechnet wird, sondern mit dem Wert  ${}^{(n)}d$  des letzten konvergenten Zustands, siehe Matzenmiller (1988):

$$d^i = \mathcal{F}_{iter}(d(\tau))_{\tau=0}^{t_n} = \begin{cases} {}^{(n)}d & \text{für } d^i < {}^{(n)}d \\ d^i & \text{für } d^i \geq {}^{(n)}d \\ 1.0 & \text{für } d^i \geq 1.0 \end{cases} \quad (7.30)$$

Somit wird erreicht, dass die Schädigungsvariablen  ${}^{(n+1)}d$  zum Ende der Iteration nicht vom Verlauf des Iterationsweges über die Zwischenzustände  $\hat{\mathbf{u}}^i$  abhängen.

Durch das Aufsuchen der Nullstelle der linearisierten Form (7.26) des Residuums erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Verformungsinkrements  $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1} = -\mathbf{R}^i \quad \longrightarrow \quad \Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1} \mathbf{R}^i \quad (7.31)$$

Mit dem Zuwachs  $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1}$  nach Gl. (7.31) wird die Zustandsvariable  $\hat{\mathbf{x}}^i$  iterativ verbessert.

$$\hat{\mathbf{x}}^{i+1} = \hat{\mathbf{x}}^i + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (7.32)$$

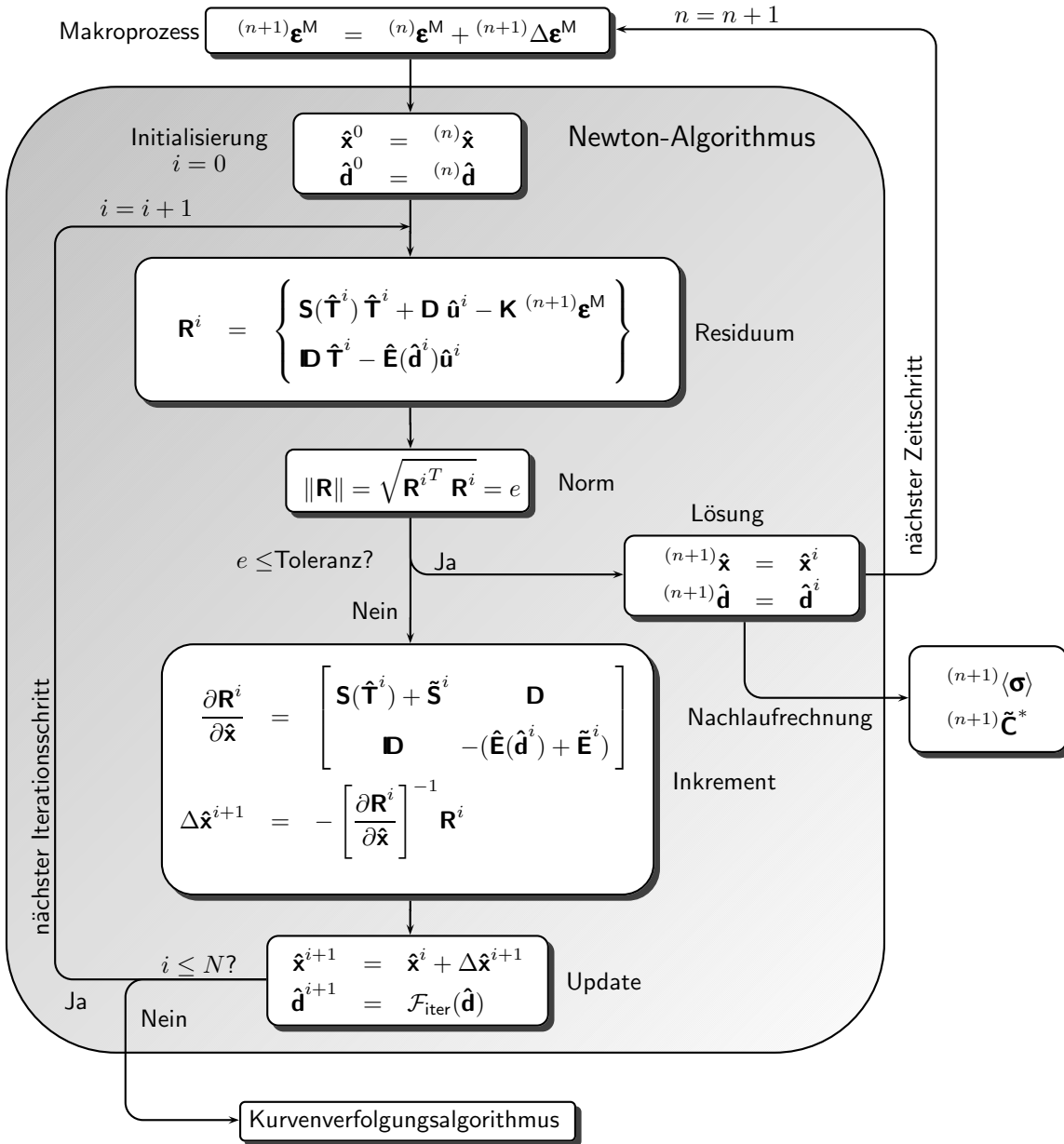


Abbildung 7.3: Berechnung eines makroskopischen Deformationsprozesses  $\boldsymbol{\epsilon}^M(t)$ . Anwendung des Newton-Verfahrens

Liegt die euklidische Norm  $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{R}}$  des Residuumvektors  $\mathbf{R}^{i+1}$  der neu berechneten Konfiguration  $\hat{\mathbf{x}}^{i+1}$  unterhalb einer vorgegebenen Toleranzschwelle  $\varepsilon$ , so ist mit  $\hat{\mathbf{x}}^{i+1}$  die gesuchte Lösung  $(n+1)\hat{\mathbf{x}}_s$  gefunden. Der vollständige Ablaufplan der Newton-Iteration ist in Abb. 7.3 gegeben. Gelingt mit dem „lastgesteuerten“ Newton-Verfahren die Lösung des Gleichungssystems innerhalb einer gewählten Anzahl von  $N$  Iterationen nicht, so wird auf die im Folgenden dargelegte Anwendung eines Kurvenverfolgungsalgorithmus’ automatisch umgeschaltet.

## 7.2.2 Kurvenverfolgungsalgorithmus

Der Unterschied des Kurvenverfolgungsalgorithmus' zum „lastgesteuerten“ Newton-Verfahren besteht darin, dass die rechte Seite des zu lösenden nichtlinearen Gleichungssystems (7.21), d.h. im vorliegenden Fall der makroskopische Deformationsprozess  $\boldsymbol{\epsilon}^M(t)$ , innerhalb des Iterationsalgorithmus' variabel gemacht wird. Auf diese Weise ist es möglich, auch solche Abschnitte des Lösungspfades zu konstruieren, die durch einen „*snap back*“ charakterisiert sind, vgl. Abb. 7.1. Der erste Schritt besteht darin, die zeitliche Entwicklung des makroskopischen Verzerrungszustands  $\boldsymbol{\epsilon}^M(t)$  als lineare Funktion der Variablen  $\lambda$  um den Zustand  ${}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  zur Zeit  $t = {}^{(n)}t$  mit dem Inkrement mit  ${}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^M = {}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M - {}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  auszudrücken:

$$\boldsymbol{\epsilon}^M(\lambda) = {}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M + \lambda {}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^M \quad (7.33)$$

Zum Makrozustand  ${}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  des Zeitpunkts  $t = {}^{(n+1)}t$  gelangt man offensichtlich mit  $\lambda = 1$ . Die Lösung  ${}^{(n)}\hat{\boldsymbol{x}}$  für den Makrozustand  ${}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M$  ist bekannt. Gesucht wird die Lösung  ${}^{(n+1)}\hat{\boldsymbol{x}}$  für den Makrozustand  ${}^{(n+1)}\boldsymbol{\epsilon}^M$ .

Für die rechte Seite des Gleichungssystems (7.21) in Abhängigkeit des Skalierungsfaktors  $\lambda$  wird im Folgenden unter Beachtung von Gl. (7.33) die Abkürzung

$$\boldsymbol{\Lambda}(\lambda) := \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\lambda) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K} [{}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M + \lambda {}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^M] \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

verwendet und für den darin enthaltenen inkrementellen Anteil die Größe

$$\Delta\boldsymbol{\Lambda} := \begin{Bmatrix} \mathbf{K} {}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\epsilon}^M \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$

eingeführt. Der Ausdruck  $\boldsymbol{\Lambda}(\lambda)$  nach Gl. (7.34) kann mit Gl. (7.35) auch wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\lambda) = \boldsymbol{\Lambda}|_{\lambda=0} + \lambda \Delta\boldsymbol{\Lambda} = {}^{(n)}\boldsymbol{\Lambda} + \lambda \Delta\boldsymbol{\Lambda} \quad (7.36)$$

Der Kurvenverfolgungsalgorithmus durchläuft den Lösungsweg im Raum  $\{\boldsymbol{\Lambda}(\lambda), \hat{\boldsymbol{x}}\}$ . Startpunkt ist der letzte bekannte Punkt  $\{{}^{(n)}\boldsymbol{\Lambda}, {}^{(n)}\hat{\boldsymbol{x}}\}$  zur Zeit  ${}^{(n)}t$  mit dem Startwert  $\lambda = 0$ . Gesucht ist der Punkt  $\{{}^{(n+1)}\boldsymbol{\Lambda}, {}^{(n+1)}\hat{\boldsymbol{x}}\}$  mit dem Wert  $\lambda = 1$  für den Folgezeitpunkt  ${}^{(n+1)}t$ . Mit dem Verfolgungsalgorithmus wird punktweise der Lösungsweg innerhalb des aktuellen Zeitschritts konstruiert, wobei ein vorangestellter, oberer Index  $k$  den Lösungspunkt  $\{{}^k\boldsymbol{\Lambda}, {}^k\hat{\boldsymbol{x}}\} = \{\boldsymbol{\Lambda}({}^k\lambda), {}^k\hat{\boldsymbol{x}}\}$  bezeichnet. Zu beachten ist, dass mit  $k$  nur echte Lösungspunkte gekennzeichnet werden, welche nicht die gesuchte Lösung des Zeitpunkts  ${}^{(n+1)}t$  sind, sondern vielmehr Zwischenzustände mit  $0 < {}^k\lambda \leq 1$  auf dem Weg vom bekannten Lösungspunkt  $\{{}^{(n)}\boldsymbol{\Lambda}, {}^{(n)}\hat{\boldsymbol{x}}\}$  zum gesuchten Lösungspunkt  $\{{}^{(n+1)}\boldsymbol{\Lambda}, {}^{(n+1)}\hat{\boldsymbol{x}}\}$  markieren, siehe Abb. 7.4. Die Lösungen  $\{{}^k\boldsymbol{\Lambda}, {}^k\hat{\boldsymbol{x}}\}$  dienen also lediglich der punktweisen Verfolgung des instabilen Lösungspfades im aktuellen Zeitschritt  ${}^{(n)}t \rightarrow {}^{(n+1)}t$ .

Zum  $i$ -ten Zwischenschritt der Iteration auf dem Weg vom Punkt  $\{{}^k\boldsymbol{\Lambda}, {}^k\hat{\boldsymbol{x}}\}$  nach  $\{{}^{k+1}\boldsymbol{\Lambda}, {}^{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}\}$  gehört der Punkt  $\{\boldsymbol{\Lambda}^i, \hat{\boldsymbol{x}}^i\}$ , welcher in der Regel nicht auf dem Lösungsweg liegt.

Die zusätzliche Variable  $\lambda$  macht die Einführung einer weiteren Gleichung erforderlich. Sie wird in Form der Nebenbedingung

$$g(\hat{\mathbf{x}}, \lambda) = 0 \quad (7.37)$$

gegeben, welche zu den Gleichungen des mikromechanischen Modells hinzukommt. Der Residuuumvektor  $\tilde{\mathbf{R}}$  des um Gl. (7.37) erweiterten Gleichungssystems (7.21) lautet unter Beachtung von Gl. (7.33) im Punkt  $\{\Lambda^i, \hat{\mathbf{x}}^i\}$ :

$$\tilde{\mathbf{R}}^i = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) \hat{\mathbf{T}}^i + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}^i - \mathbf{K} [{}^{(n)}\boldsymbol{\varepsilon}^M + \lambda^i {}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^M] \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}}^i - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) \hat{\mathbf{u}}^i \\ g(\hat{\mathbf{x}}^i, \lambda^i) \end{array} \right\} \quad (7.38)$$

### 7.2.3 Inkrementelle, iterative Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für das RVE

Mit der Einführung des Gâteaux-Differentials des erweiterten Residuums  $\tilde{\mathbf{R}}^i$ :

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{R}}^i[\Delta\hat{\mathbf{x}}, \Delta\lambda] &= \left. \frac{d}{d\eta} \tilde{\mathbf{R}}^i(\hat{\mathbf{x}}^i + \eta\Delta\hat{\mathbf{x}}, \lambda^i + \eta\Delta\lambda) \right|_{\eta=0} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) + \tilde{\mathbf{S}}^i & \mathbf{D} & -\mathbf{K} {}^{(n+1)}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^M \\ \mathbf{D} & -(\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) + \tilde{\mathbf{E}}^i) & \mathbf{0} \\ \left(\frac{\partial g^i}{\partial \hat{\mathbf{T}}}\right)^T & \left(\frac{\partial g^i}{\partial \hat{\mathbf{u}}}\right)^T & \frac{\partial g^i}{\partial \lambda} \end{bmatrix}}_{:= \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{T}} \\ \Delta\hat{\mathbf{u}} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}}_{:= \Delta\tilde{\mathbf{x}}} \quad (7.39) \end{aligned}$$

erhält man die linearisierte Darstellung des Residuums  $\tilde{\mathbf{R}}_L$  um den Zustand  $i$ :

$$\tilde{\mathbf{R}}_L = \tilde{\mathbf{R}}^i + \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \Delta\tilde{\mathbf{x}} \quad (7.40)$$

Die Suche nach der Nullstelle der Linearisierung  $\tilde{\mathbf{R}}_L = \mathbf{0}$  liefert das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \Delta\tilde{\mathbf{x}}^{i+1} = -\tilde{\mathbf{R}}^i, \quad (7.41)$$

aus dem sich die Inkremente  $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^{i+1}$  berechnen lassen. Mit den Zuwächsen  $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^{i+1}$  ergibt sich formal der verbesserte Iterationsvektor zu:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}^i + \Delta\tilde{\mathbf{x}}^{i+1} \quad (7.42)$$

Das erweiterte System (7.41) kann auf ein System der ursprünglichen Größe reduziert werden. Dazu wird das erweiterte System (7.41) partitioniert. Zunächst folgt aus den

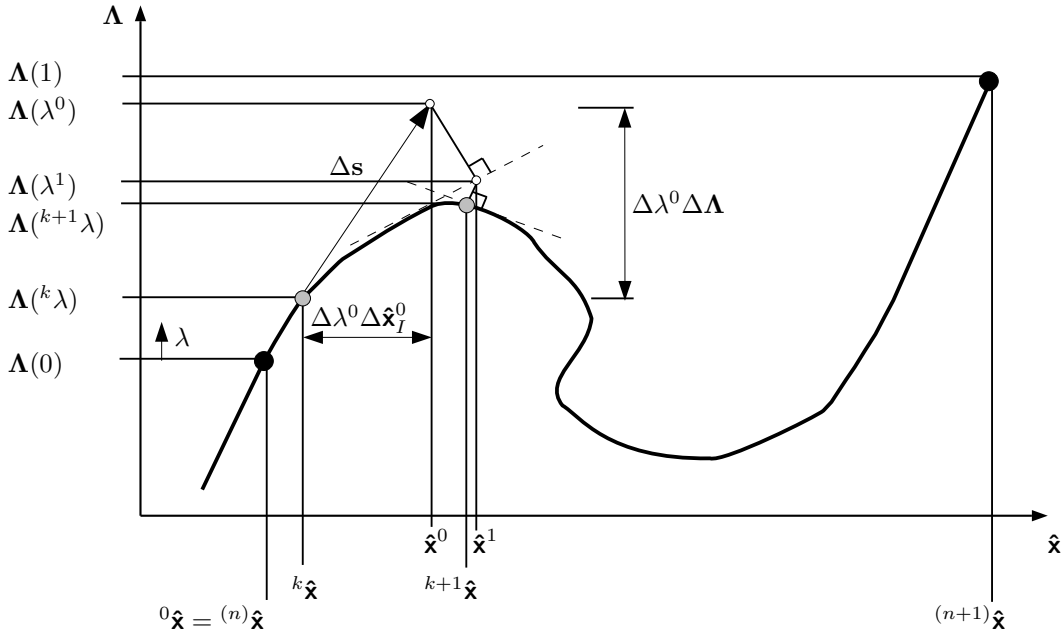


Abbildung 7.4: Punktweise Konstruktion der Lösungskurve innerhalb des Zeitschritts  $t^n \rightarrow t^{n+1}$ . Iteration auf aktuellen Normalenebenen

beiden oberen Gleichungsböcken des Systems:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) + \tilde{\mathbf{S}}^i & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -(\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) + \tilde{\mathbf{E}}^i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{T}}^{i+1} \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}^{i+1} \end{Bmatrix} - \Delta \lambda^{i+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(n+1)} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^M \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ = - \begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) \hat{\mathbf{T}}^i + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}^i - \mathbf{K} [{}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M + \lambda^i {}^{(n+1)}\Delta \boldsymbol{\epsilon}^M] \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}}^i - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) \hat{\mathbf{u}}^i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Durch das Umstellen nach den unbekanntem Verformungsinkrementen erhält man:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{T}}^{i+1} \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}^{i+1} \end{Bmatrix}}_{\Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1}} &= \Delta \lambda^{i+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) + \tilde{\mathbf{S}}^i & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -(\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) + \tilde{\mathbf{E}}^i) \end{bmatrix}^{-1}}_{\left[ \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{K}^{(n+1)} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^M \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}}_{\Delta \boldsymbol{\Lambda}} \\ &- \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}^i + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -(\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) + \tilde{\mathbf{E}}^i) \end{bmatrix}^{-1}}_{\left[ \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}^i) \hat{\mathbf{T}}^i + \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}^i - \mathbf{K} [{}^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^M + \lambda^i {}^{(n+1)}\Delta \boldsymbol{\epsilon}^M] \\ \mathbf{D} \hat{\mathbf{T}}^i - \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}^i) \hat{\mathbf{u}}^i \end{Bmatrix}}_{:= \mathbf{R}_\lambda^i} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Hier tritt zweimalig die Inverse der Fréchet-Ableitung  $\partial \mathbf{R}^i / \partial \hat{\mathbf{x}}$  des Newton-Verfahrens auf. Das Residuum  $\mathbf{R}_\lambda^i$  entspricht für  $\lambda = 1$  dem Residuumvektor  $\mathbf{R}^i$  des Newton-

Verfahrens. Für die Bestimmung der abhängigen Schädigungsvariablen  $\hat{\mathbf{d}}^i$  gilt sinngemäß Gl. (7.30) mit:

$$d^i = \mathcal{F}_{iter}(d(\tau))_{\tau=0}^{t_k} = \begin{cases} {}^k d & \text{für } d^i < {}^k d \\ d^i & \text{für } d^i \geq {}^k d \\ 1.0 & \text{für } d^i \geq 1.0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Mit Hilfe der Teilinkremente

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} := \left[ \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1} \Delta \Lambda \quad (7.46)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{II}^{i+1} := - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}^i}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1} \mathbf{R}_\lambda^i$$

kann die Gl. (7.44) kompakt geschrieben werden:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1} = \Delta \lambda^{i+1} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{II}^{i+1} \quad (7.47)$$

Der inkrementelle Faktor  $\Delta \lambda$  ist an dieser Stelle noch unbekannt. Er wird aus der linearisierten Form der Zusatzgleichung  $g(\hat{\mathbf{x}}^i, \lambda^i) = 0$  gewonnen. Nach Vereinbarung der Definitionen

$$\mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{x}}} := \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{T}}} \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad g_{,\lambda} := \frac{\partial g}{\partial \lambda} \quad (7.48)$$

erhält man aus der letzten Gleichung des Systems (7.41) mit Gl. (7.39) und Gl. (7.38):

$$\mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}}^T \Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1} + \Delta \lambda^{i+1} g_{,\lambda} = -g^i \quad (7.49)$$

Für das unbekannte Verschiebungsinkrement  $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{i+1}$  wird die rechte Seite von Gl. (7.47) eingesetzt und es resultiert:

$$\mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}}^T (\Delta \lambda^{i+1} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{II}^{i+1}) + \Delta \lambda^{i+1} g_{,\lambda} = -g^i \quad (7.50)$$

Das Inkrement des Skalierungsfaktors folgt nun unmittelbar durch Auflösen von Gl. (7.50) zu:

$$\Delta \lambda^{i+1} = - \frac{g^i + \mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}}^T \Delta \hat{\mathbf{x}}_{II}^{i+1}}{g_{,\lambda} + \mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}}^T \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1}} \quad (7.51)$$

Der aktualisierte Skalierungsfaktor lautet dann:

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i + \Delta \lambda^{i+1} \quad (7.52)$$

Der Kurvenverfolgungsalgorithmus benötigt im Unterschied zum Newton-Raphson-Verfahren einen Prädiktorschritt, an den sich eine Korrekturiteration anschließt. Im



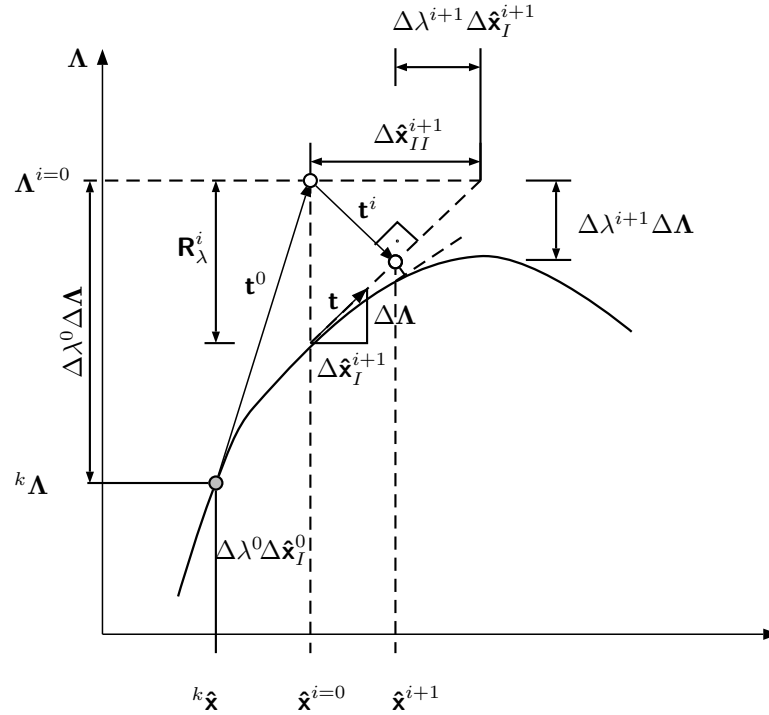


Abbildung 7.5: Iteration auf aktuellen Normalenebenen. Letzte Iterierte  $\{\Lambda^i, \hat{\mathbf{x}}^i\}$ . Bestimmung des Punktes  $\{\Lambda^{i+1}, \hat{\mathbf{x}}^{i+1}\}$

Prädiktorschritt wird zunächst das Inkrement  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^0$  gemäß Gl. (7.46)<sub>1</sub> berechnet. Es liefert einen Tangentenvektor

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^0 \\ \Delta \Lambda \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

an den Pfad im letzten Konvergenzpunkt  $\{^k \Lambda, ^k \hat{\mathbf{x}}\}$ . Der Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  wird mit dem Faktor  $\Delta \lambda^0$  so skaliert, dass sich ein Vektor  $\mathbf{t}^0$  – vgl. Abb. 7.4 – errechnen lässt, mit der Eigenschaft, dass dessen als „Bogenlängeninkrement“ bezeichneter Betrag  $|\mathbf{t}^0|$  ein vorzugebendes Maß  $|\Delta \mathbf{s}|$  annimmt:

$$|\Delta \mathbf{s}| \stackrel{!}{=} |\mathbf{t}^0| = \Delta \lambda^0 \sqrt{(\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{0T} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^0 + \Delta \Lambda^T \Delta \Lambda)} \quad (7.54)$$

Der Skalierungsfaktor des Prädiktorschritts bestimmt sich aus Gl. (7.54) zu

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{|\Delta \mathbf{s}|}{\sqrt{\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{0T} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^0 + \Delta \Lambda^T \Delta \Lambda}}. \quad (7.55)$$

Für die Nebenbedingung  $g(\hat{\mathbf{x}}, \lambda) = 0$  sind im Schrifttum – siehe z.B. Wagner (1991) oder Schweizerhof (1989) – eine Vielzahl linearer und nichtlinearer Ansätze gegeben. Verschiedene lineare Nebenbedingungen können zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems herangezogen werden, wie die 'Iteration auf konstanten Normalenebenen' oder die 'Iteration auf angepassten Normalenebenen'. Da sich zeigt, dass die Gradienten der Lösungskurven je nach Wahl der Grenzflächenparameter sehr groß

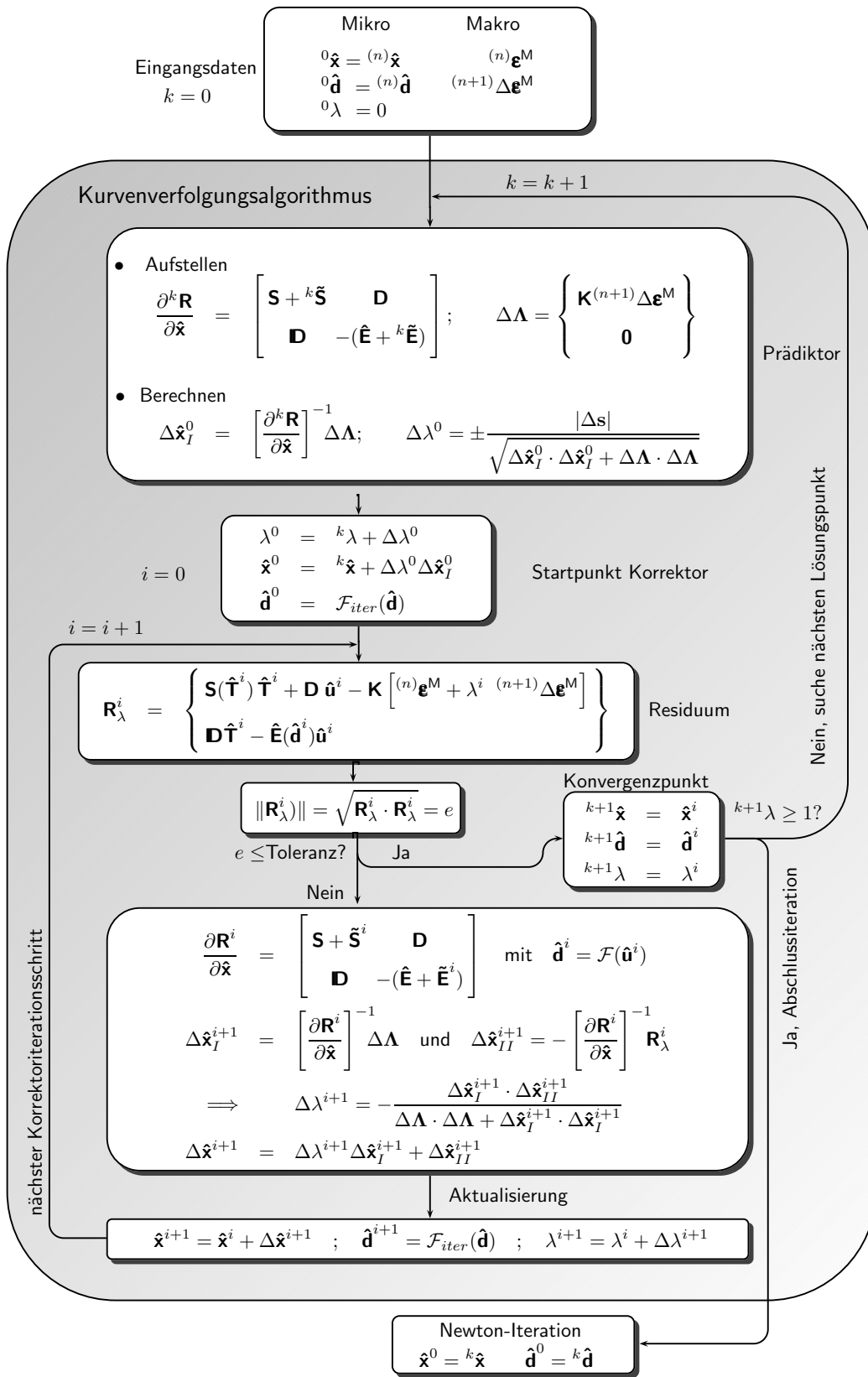


Abbildung 7.6: Ablaufschema Kurvenverfolgungsalgorithmus

werden können, muss mit den oben genannten Ansätzen für die Nebenbedingung  $g$  das Bogenlängeninkrement sehr klein gewählt werden, was durch eine automatisierte Reduktion des Inkrements bei verfehlter Konvergenz nach einer gewissen Anzahl an Korrekteriterationsschritten bewirkt wird. Dieses Vorgehen macht das Lösungsverfahren jedoch vergleichsweise langsam und führt nicht immer zum Erfolg. Ein besonders günstiges, robustes Konvergenzverhalten des Verfolgungsalgorithmus' wird durch eine Zwangsbedingung erwirkt, welche dazu führt, dass man sich möglichst orthogonal auf die Lösungskurve zubewegt. Eine solche Nebenbedingung liefert die orthogonale Trajektorienmethode nach Fried (1984), s.a. Wagner (1991). Hier ist der Normalenvektor der Iterationsebene durch den aktuellen Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  an die Lösungskurve gegeben, vgl. Abb. 7.5. Die Iterationsebene wird entsprechend als aktuelle Normalenebene oder Tangentenebene bezeichnet. Die Richtung des Tangentenvektors  $\mathbf{t}$  ist durch

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} \\ \Delta \Lambda \end{Bmatrix}$$

definiert. Alle Punkte des  $\{\Lambda, \hat{\mathbf{x}}\}$ -Raumes sind relativ zum aktuellen Zwischenzustand  $\{\Lambda^i, \hat{\mathbf{x}}^i\}$  durch einen Vektor  $\mathbf{t}^i$  gegeben:

$$\mathbf{t}^i = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^i \\ \Lambda - \Lambda^i \end{Bmatrix} \quad (7.56)$$

Ausgehend vom Punkt  $\{\Lambda^i, \hat{\mathbf{x}}^i\}$  verläuft der Weg der Zwischenzustände näherungsweise orthogonal auf die Lösungskurve zu, wenn als Nebenbedingung  $g$  die Orthogonalität der beiden oben definierten Vektoren gewählt wird:

$$g(\hat{\mathbf{x}}, \Lambda(\lambda)) = \mathbf{t}^{iT} \mathbf{t} = (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^i)^T (\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1}) + (\Lambda - \Lambda^i)^T \Delta \Lambda = 0 \quad (7.57)$$

Die Ableitungen von  $g$  gemäß Gl. (7.48) liefern:

$$\mathbf{g}_{,\hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial g}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} \quad (7.58)$$

$$g_{,\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{\partial g}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = \Delta \Lambda^T \Delta \Lambda$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass eine lineare Nebenbedingung  $g = 0$  in jedem Iterationsschritt exakt erfüllt wird, folgt das gesuchte Inkrement  $\Delta \lambda^{i+1}$  gemäß Gl. (7.51) zu:

$$\Delta \lambda^{i+1} = - \frac{\Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}}_{II}^{i+1}}{\Delta \Lambda \cdot \Delta \Lambda + \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1} \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}}_I^{i+1}} \quad (7.59)$$

Bei der Beendigung des Verfolgungsalgorithmus' ergibt sich folgende Schwierigkeit: Um die eigentlich gesuchte Lösung für den Zustand  $^{(n+1)}\langle \epsilon \rangle$  zu berechnen, müsste man den Lösungspunkt  $\{^k \Lambda, ^k \mathbf{x}_s\}$  mit einem  $^k \lambda = 1$  finden. Da  $\lambda$  aber eine Variable ist, deren Wert im Zuge der Iteration bestimmt wird, wird dieser Punkt fast nie exakt getroffen. Vielmehr wird man den gesuchten Lösungspunkt durch zwei Lösungen

${}^k\lambda < 1$  und  ${}^{k+1}\lambda > 1$  eingrenzen. Die Lösung für den Faktor  $\lambda = 1$  könnte dann durch Interpolation gewonnen werden:

$${}^{(n+1)}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\lambda)|_{\lambda=1} = {}^k\hat{\mathbf{x}} + \frac{\lambda - {}^k\lambda}{{}^{k+1}\lambda - {}^k\lambda} ({}^{k+1}\hat{\mathbf{x}} - {}^k\hat{\mathbf{x}}) \quad (7.60)$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Zurückschaltung auf das Newton-Verfahren, nachdem  ${}^{k+1}\lambda$  den Wert 1 überschritten hat. Der Startpunkt für die Newtoniteration nach Abb. 7.3 ist dann der Vektor  $\hat{\mathbf{x}}^0 = {}^k\hat{\mathbf{x}}$  mit dem Schädigungszustand  $\hat{\mathbf{d}}^0 = {}^k\hat{\mathbf{d}}$ . Da mit diesem Lösungspunkt erfahrungsgemäß der kritische Bereich der Lösungskurve bereits überwunden ist, und man sich mit ihm in der Umgebung der gesuchten Lösung  ${}^{(n+1)}\hat{\mathbf{x}}$  befindet, führt die abschließende Newtoniteration zum Ziel. Das Ablaufschema des Kurvenverfolgungsalgorithmus' ist in Abb. (7.6) gegeben.

### 7.3 Bestimmung des makroskopischen Spannungstensors

Im Anschluss an die vom Iterationsweg unabhängige Berechnung der Lösungsvektoren  $\hat{\mathbf{T}}|_{t_n}$  und  $\hat{\mathbf{u}}|_{t_n}$  des nichtlinearen Gleichungssystems (7.21) zu einem Zeitpunkt  $t_n$  kann der makroskopische Spannungstensor als Mittelwert der Spannungstensoren in den Unterzellen  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  berechnet werden:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle|_{t_n} = \frac{1}{dhl} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} d_\alpha h_\beta l_\gamma \langle \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha\beta\gamma)} \rangle|_{t_n} \quad (7.61)$$

Die Komponenten des Makrospannungstensors im kartesischen Koordinatensystem des GMC-Modells ergeben sich unter Beachtung der Gl. (7.5) aus den Unterzellspannungen  $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} T_{11}^{(\beta\gamma)} & \langle \sigma_{23} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{d} T_{23}^{(\alpha)} \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} T_{22}^{(\alpha\gamma)} & \langle \sigma_{13} \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{h} T_{13}^{(\beta)} \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} T_{33}^{(\alpha\beta)} & \langle \sigma_{12} \rangle &= \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{l} T_{12}^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (7.62)$$

### 7.4 Bestimmung des effektiven Tangentenoperators

Für die Verwendung der Zellenmethode als Konstitutivmodell für die nichtlineare FE-Analyse ist die konsistente Steifigkeitstangente  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  des homogenisierten Ersatzwerkstoffs zu bestimmen. Der Tensor  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  verknüpft die Rate der makroskopischen Verzerrungen mit der Rate des makroskopischen Spannungstensors:

$$\frac{d\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{dt} = \tilde{\mathbf{C}}^* : \frac{d\boldsymbol{\epsilon}^M}{dt} \quad (7.63)$$

Im GMC-Modell ist die momentane Rate der Makrospannungen  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  zum Zeitpunkt  $t_n$  durch

$$\left. \frac{d\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{dt} \right|_{t_n} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^M}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} \right|_{t_n} \left. \frac{d\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle}{dt} \right|_{t_n} \quad (7.64)$$

gegeben. Die konsistente tangentielle Steifigkeitsmatrix zum Zeitpunkt  $t_n$  ist definiert als<sup>1</sup>:

$$\tilde{\mathbf{C}}^* \Big|_{t_n} := \left. \frac{\partial \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} \right|_{t_n} = [\tilde{C}_{ij}^*] = \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon_j^M} \right], \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (7.65)$$

Im Folgenden soll aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Zeitindex  $t_n$  verzichtet werden. Um  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  explizit angeben zu können, müssen die Makrospannungen nach den Makroverzerrungen differenziert werden. Da sich die Makrospannungen gemäß den Gln. (7.62) aus den Unterzellspannungen  $\hat{\mathbf{T}}$  bestimmen, gewinnt man die effektiven tangentialen Steifigkeiten durch Ableitung der Zellspannungen nach den Makroverzerrungen und anschließende Mittelung des Ergebnisses über alle Unterzellen. Durch Differentiation des oberen Teils des Gleichungssystems (7.21) nach den Makroverzerrungen erhält man in Indeschreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_n^M} [S_{ij} \hat{T}_j + D_{il} \hat{u}_l] = \frac{\partial}{\partial \epsilon_n^M} [K_{im} \epsilon_m^M] \quad (7.66)$$

Die Laufbereiche der Indizes in Gl. (7.66) sind:

$$\begin{aligned} i, j, k &= 1, \dots, N_\alpha(N_\beta + 1) + N_\beta(N_\gamma + 1) + N_\gamma(N_\alpha + 1) \\ n, m &= 1, \dots, 6 \\ l &= 1, \dots, 3N_I \end{aligned} \quad (7.67)$$

Die Ausführung der Differentiation der Gln. (7.66) ergibt:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \hat{T}_k} \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial \epsilon_n^M} \hat{T}_j + S_{ij} \frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \epsilon_n^M} + D_{il} \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial \epsilon_n^M} = K_{in} \quad (7.68)$$

$$\Leftrightarrow \left[ S_{ik} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \hat{T}_k} \hat{T}_j \right] \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial \epsilon_n^M} + D_{il} \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial \epsilon_n^M} = K_{in} \quad (7.69)$$

oder in symbolischer Notation:

$$\left[ \mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}) + \tilde{\mathbf{S}} \right] \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} + \mathbf{D} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} = \mathbf{K} \quad (7.70)$$

Der untere Teil des Gleichungssystems (7.21) lautet in Indeschreibweise:

$$ID_{pj} \hat{T}_j - \hat{E}_{pq} \hat{u}_q = 0 \quad (7.71)$$

mit

$$\begin{aligned} j &= 1, \dots, N_\alpha(N_\beta + 1) + N_\beta(N_\gamma + 1) + N_\gamma(N_\alpha + 1) \\ p, q &= 1, \dots, 3N_I \end{aligned} \quad (7.72)$$

<sup>1</sup> $\{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}\}$ ,  $\{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4 \ \epsilon_5 \ \epsilon_6\} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{13} \ \epsilon_{12}\}$

Die Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_n^M} \left[ ID_{pj} \hat{T}_j - \hat{E}_{pq} \hat{u}_q \right] = 0 \quad (7.73)$$

führt auf:

$$ID_{pj} \frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \epsilon_n^M} - \frac{\partial \hat{E}_{pq}}{\partial \hat{d}_r} \frac{\partial \hat{d}_r}{\partial \hat{u}_s} \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \epsilon_n^M} \hat{u}_q - \hat{E}_{pq} \frac{\partial \hat{u}_q}{\partial \epsilon_n^M} = 0 \quad (7.74)$$

$$\Leftrightarrow ID_{pj} \frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \epsilon_n^M} - \left[ \hat{E}_{ps} + \frac{\partial \hat{E}_{pq}}{\partial \hat{d}_r} \frac{\partial \hat{d}_r}{\partial \hat{u}_s} \right] \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \epsilon_n^M} = 0 \quad (7.75)$$

Die Gln. (7.75) lauten nach der Überführung in die symbolische Schreibweise:

$$\mathbf{D} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} - \left[ \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) + \tilde{\mathbf{E}} \right] \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} = \mathbf{0} \quad (7.76)$$

Das Ergebnis

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} = \left[ \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) + \tilde{\mathbf{E}} \right]^{-1} \mathbf{D} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} \quad (7.77)$$

der Auflösung von Gl. (7.76) wird in das Gleichungssystem (7.70) eingesetzt, aus welchem sodann die gesuchten Ableitungen der Mikrospannungen nach den Makrodehnungen berechnet werden können:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^M} = \left[ \mathbf{s}(\hat{\mathbf{T}}) + \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{D} \left[ \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) + \tilde{\mathbf{E}} \right]^{-1} \mathbf{D} \right]^{-1} \mathbf{K} \quad (7.78)$$

Das Ergebnis (7.78) stellt eine  $[N_\alpha(N_\beta + 1) + N_\beta(N_\gamma + 1) + N_\gamma(N_\alpha + 1)] \times 6$  Matrix dar, die die Ableitung der Spannungen  $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  nach den makroskopischen Verzerrungen  $\epsilon_{kl}^M$  enthält. Die Anordnung der Matrixelemente  $\partial T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)} / \partial \epsilon_{kl}^M$  ist im Anhang A.4.6 gegeben. Unter Beachtung der Gleichungen (7.62) zur Berechnung der Mikrospannungen folgen die Elemente der effektiven Tangentensteifigkeitsmatrix  $\tilde{\mathbf{C}}^*$ :

$$\tilde{\mathbf{C}}^* = \left[ \tilde{C}_{ij}^* \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{11}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{22}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{33}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{23}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{13}^M} & \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{12}^M} \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

durch die gewichtete Summierung der entsprechenden Zeilen der Matrix in Gl. (7.78):

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{11} \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} T_{11}^{(\beta\gamma)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{h_\beta l_\gamma}{hl} \frac{\partial T_{11}^{(\beta\gamma)}}{\partial \epsilon_{ij}^M} \\
\langle \sigma_{22} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} T_{22}^{(\alpha\gamma)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{d_\alpha l_\gamma}{dl} \frac{\partial T_{22}^{(\alpha\gamma)}}{\partial \epsilon_{ij}^M} \\
\langle \sigma_{33} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{dh} T_{33}^{(\alpha\beta)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{33} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{d_\alpha h_\beta}{h} \frac{\partial T_{33}^{(\alpha\beta)}}{\partial \epsilon_{ij}^M} \\
\langle \sigma_{23} \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{d} T_{23}^{(\alpha)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{23} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} \frac{d_\alpha}{d} \frac{\partial T_{23}^{(\alpha)}}{\partial \epsilon_{ij}^M} \\
\langle \sigma_{13} \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{h} T_{13}^{(\beta)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{13} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} \frac{h_\beta}{h} \frac{\partial T_{13}^{(\beta)}}{\partial \epsilon_{ij}^M} \\
\langle \sigma_{12} \rangle &= \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{l} T_{12}^{(\gamma)} \longrightarrow \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial \epsilon_{ij}^M} = \sum_{\gamma=1}^{N_\gamma} \frac{l_\gamma}{l} \frac{\partial T_{12}^{(\gamma)}}{\partial \epsilon_{ij}^M}
\end{aligned} \tag{7.80}$$





# Kapitel 8

## Parameteridentifikation für das nichtlinear elastische Composite mit Schädigung

Die Identifikation der Modellparameter für faserverstärkte Matrixmaterialien geschieht in mehreren Stufen. Als Basis für die Identifikation der Parameter des reinen Harzmaterials dient das Zellenmodell aus  $2 \times 2 \times 2$  gleich großen Elementen und den äußereren Abmessungen  $d = h = l = 1\mu\text{m}$ . Die konstitutive Beschreibung aller acht Zellen genügt dem nichtlinear elastischen Ansatz aus Kapitel 2.2. Das Zellenmodell wird makroskopischen Zug- und Druckprozessen unterworfen. Die Parameter des Kontinuumsmodells werden kalibriert, so dass die berechneten effektiven Spannungsantworten mit den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des unverstärkten Epoxidharzes, die im Rahmen der *World-Wide Failure Exercise* erhoben worden sind, siehe Hinton et al. (2004), in möglichst guter Übereinstimmung stehen. Als Erweiterung der Modellbildung für das reine Harz werden Brüche entlang der Unterelementränder im Inneren des RVEs zugelassen. Zur konstitutiven Beschreibung der Bruchflächen dienen die Ansätze aus Kapitel 3.4. Die zu identifizierenden Parameter der Grenzflächenmodelle legen die Vorhersagen über die Festigkeiten und die Duktilität des Entfestigungsvorgangs für das Harz fest. Im letzten Schritt wird das Epoxidharz durch unidirektional angeordnete, unendlich lange Glasfasern bewehrt. Der Verbund der Phasen Harz und Glasfaser wird ebenfalls durch die Konstitutivansätze des Kapitels 3.4 beschrieben, deren Parameter anhand von experimentellen Daten aus der *World-Wide Failure Exercise* festgelegt werden. In Ergänzung zum einfachen 8-Zellenmodell wird die Geometrieapproximation durch ein  $2 \times 12 \times 12$  Zellen umfassendes Modell des RVEs verfeinert.

### 8.1 Vorbemerkung zur Prozesssteuerung

Die Parameter der Konstitutivmodelle sind anhand von Spannungsantworten im ebenen Spannungszustand (ESZ) zu identifizieren, da die experimentelle Bestimmung der Spannungsdehnungskurven ebenfalls im ESZ erfolgt. Um das Zellenmodell unter Zug in den ebenen Spannungszustand zu versetzen, ist zu bedenken, dass das GMC-Modell die Makroverzerrungen  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(t) \rangle$  als Eingangsgröße besitzt, die Prozessberechnungen also weggesteuert erfolgen. Als Zug- und Schubbeanspruchungen werden

zunächst folgende Makrodehnungsprozesse gewählt:

$${}^{(n+1)}\epsilon_{22}^M = {}^{(n)}\epsilon_{22}^M + (1 - \alpha)\Delta {}^{(n+1)}\epsilon_{22}^M \quad (8.1)$$

$${}^{(n+1)}\epsilon_{12}^M = {}^{(n)}\epsilon_{12}^M + \alpha \Delta {}^{(n+1)}\epsilon_{12}^M \quad (8.2)$$

Der Prozess  $\epsilon_{22}^M$  schreibt die Normaldehnung senkrecht zur Faserrichtung vor, (transversaler Zugprozess). Durch die Vorgabe von  $\epsilon_{12}^M(t)$  entsteht eine Schubbeanspruchung in Richtung der Fasern, (axialer Schubprozess). Über den Parameter  $\alpha$  kann die kombinierte Zug-/Scherbeanspruchung Verzerrungsprozesse bestimmt werden, d.h.  $\alpha = 0$  ergibt einen reinen Normalspannungszustand,  $\alpha = 1$  bedeutet einen reinen Schubbeanspruchungsprozess. Für  $0 < \alpha < 1$  erzielt man eine kombinierte Beanspruchung. Neben den Verzerrungsgrößen nach Gl. (8.1) sind auch die vier übrigen Verzerrungskomponenten vorzugeben. Diese können nicht unabhängig von den Prozessen (8.1) gewählt werden, wenn alle Spannungen  $\langle \sigma_{22} \rangle$  und  $\langle \sigma_{12} \rangle$  ausgenommen – identisch Null bleiben sollen, sondern müssen unter Einbeziehung der aktuellen Steifigkeit  $\tilde{\mathbf{C}}^*$  nach Gl. (7.79) berechnet werden. Die Erzwingung des ESZ kann näherungsweise auf Basis der Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsinkrementen erfolgen:

$$\Delta \langle \sigma_{ij} \rangle |_{t_n + \Delta t} \simeq \tilde{C}_{ijkl}^* |_{t=t_n} \Delta \epsilon_{kl}^M |_{t_n + \Delta t} \quad (8.3)$$

Für vorgegebenes  $\Delta \epsilon_{22}^M$  und  $\Delta \epsilon_{12}^M$  und unter Einhaltung der Bedingungen

$$\Delta \langle \sigma_{11} \rangle = \Delta \langle \sigma_{33} \rangle = \Delta \langle \sigma_{23} \rangle = \Delta \langle \sigma_{13} \rangle = 0 \quad (8.4)$$

berechnen sich die übrigen vorzugebenden Verzerrungskomponenten durch Kombination der Gl. (8.3) und  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^M \simeq \tilde{\mathbf{S}}^* \Delta \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  mit  $\tilde{\mathbf{S}}^* = \tilde{\mathbf{C}}^{*-1}$  aus:

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} - 1 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - 1 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^M \\ \Delta \epsilon_{33}^M \\ \Delta \epsilon_{23}^M \\ \Delta \epsilon_{13}^M \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha \Delta \epsilon_{12}^M \\ \alpha \Delta \epsilon_{12}^M \\ \alpha \Delta \epsilon_{12}^M \\ \alpha \Delta \epsilon_{12}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{16} \\ A_{26} \\ A_{36} \\ A_{46} \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \Delta \epsilon_{22}^M \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.5)$$

mit

$$[A_{ij}] := \begin{bmatrix} \tilde{S}_{12}^* & \tilde{S}_{16}^* \\ \tilde{S}_{32}^* & \tilde{S}_{36}^* \\ \tilde{S}_{42}^* & \tilde{S}_{46}^* \\ \tilde{S}_{52}^* & \tilde{S}_{56}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21}^* & \tilde{C}_{22}^* & \tilde{C}_{23}^* & \tilde{C}_{24}^* & \tilde{C}_{25}^* & \tilde{C}_{26}^* \\ \tilde{C}_{61}^* & \tilde{C}_{62}^* & \tilde{C}_{63}^* & \tilde{C}_{64}^* & \tilde{C}_{65}^* & \tilde{C}_{66}^* \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

## 8.2 Parameteridentifikation für das Epoxidharz

In Tab. 8.1 sind ausgewählte Werkstoffkennwerte nach Hinton et al. (2004) für das Epoxidharz MY750 aufgeführt. Die experimentell bestimmten Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das Harz unter einaxialem Zug und unter Schub sind ebenfalls an genannter Stelle zu finden. Die Parameter des physikalisch nichtlinearen Kontinuummodells nach Kapitel 2.2 zur mathematischen Beschreibung des Harzes werden am Zellenmodell mit acht gleich großen Unterzellen identifiziert. Die äußeren Abmessungen des RVEs betragen  $d=h=l=1$ . Die händisch identifizierten Modellparameter sind in Tab. 8.2 aufgeführt. Die Werte für den Elastizitätsmodul  $E_m$  und den Schubmodul  $G_m$  werden in Übereinstimmung mit den Angaben angesetzt, die im Rahmen der *World-Wide Failure Exercise* ermittelt wurden. Die Wahl der Vergleichsspannung  $\sigma_0 = 107.5$  MPa und des Exponenten  $n = 9$  führt zu rechnerischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, die in Abb. 8.1 im Vergleich mit den experimentellen Datenpunkten graphisch aufgetragen sind. Die Parameter, die das nichtlineare Antwortverhalten des GMC-Modells für den unverstärkten Harzwerkstoff steuern, sind für die Simulation der Schubantwort optimiert, denn die Nichtlinearität unter Schub ist deutlich ausgeprägter als unter Zug. Die berechneten Spannungsverläufe nach Abb. 8.1 stimmen im Schubfall praktisch exakt mit allen Messdaten überein, im Zugfall kommt es gegen Ende des Belastungsprozesses zu einer geringfügigen Abweichung der berechneten Kurve von den Experimentaldaten.

Die durch Einkreisung hervorgehobenen Datenpunkte in Abb. 8.1 markieren das Schub- bzw. Zugversagen des reinen Harzwerkstoffs im Versuch. Das nichtlinear elastische Konstitutivmodell allein erlaubt es nicht, die Festigkeiten des Werkstoffs und das Entfestigungsverhalten abzubilden, weshalb die Spannungs-Dehnungs-Verläufe des GMC-Modells über die jeweiligen Versagenspunkte des Werkstoffes hinaus anwachsen. Mit dem Ziel, das GMC-Modell um die Möglichkeit zu erweitern, das Werkstoffversagen unter Zug- und Schubbeanspruchung darzustellen, werden die Randflächen der Unterzellen im Inneren des RVEs als Entstehungsorte für potentielle Bruchflächen angesehen. Jeweils vier dieser Bruchflächen bilden eine der drei ortho-

Matrixmaterial MY750	
E-Modul $E_m$ [GPa]	3.35
Schubmodul $G_m$ [GPa]	1.24
Querdehnzahl $\nu_m$ [-]	0.35
Zugfestigkeit $R_m^t$ [MPa]	80
Druckfestigkeit $R_m^c$ [MPa]	120
Schubfestigkeit $R_m^s$ [MPa]	54
Zugbruchdehnung $\epsilon_m^t$ [%]	2.7
Druckbruchdehnung $\epsilon_m^c$ [%]	5
Schubbruchgleitung $\gamma_m^s$ [%]	6

Tabelle 8.1: Experimentell bestimmte Materialparameter aus Hinton, Soden and Kaddour (2004)

Parameter für MY750	
E-Modul $E_m$ [GPa]	3.35
Schubmodul $G_m$ [GPa]	1.24
Exponent $n$ [-]	9
Vergleichsspannung $\sigma_0$ [MPa]	107.5

Tabelle 8.2: Identifizierte Materialparameter des Ramberg-Osgood Ansatzes für das Epoxidharz MY750

gonal aufeinander stehenden, randparallelen Schnittebenen durch das RVE. Die konstitutive Beschreibung des Bruchgeschehens in Form von Spannungs-Separations-Beziehungen auf den Unterzellrandflächen erfolgt anhand der Grenzflächenmodelle in Kapitel 3.4. Die Identifikation der Festigkeitsparameter  $R_{I\perp}$  und  $R_{I\parallel}$ , die in allen Grenzflächenmodellen auftreten, erweist sich als einfach, denn sie können in Höhe der Werkstofffestigkeiten  $R_m^t$  und  $R_m^s$  gemäß Tab. 8.1 angenommen werden:

$$R_{I\perp} = 80 \text{ MPa} \quad \text{und} \quad R_{I\parallel} = 54 \text{ MPa} \quad (8.7)$$

Die fehlende experimentelle Datenbasis für das Werkstoffverhalten im Entfestigungsbereich erlaubt keine Identifikation der Parameter, die die Duktilität der bruchmechanischen Modelle steuert. Zwar sind Werte für die Bruchenergien von Epoxidharzen in der Literatur zu finden, die makroskopische, effektive Duktilität der Entfestigung hängt jedoch entscheidend von der Größe des RVEs ab. Die Abb. 8.2 verdeutlicht, dass die berechneten makroskopischen Spannungs-Dehnungs-Verläufe bei der Verwendung von Grenzflächenmodellen zur Beschreibung des Materialversagens von der absoluten Größe des RVEs abhängig sind. Bei sonst gleichen Parametern ergibt sich für das größere RVE ( $d=h=l=2a$ ) ein makroskopisch spröderes Entfestigungsverhalten als für das kleinere RVE ( $d=h=l=2b$ ), denn der Beitrag der Diskontinuität

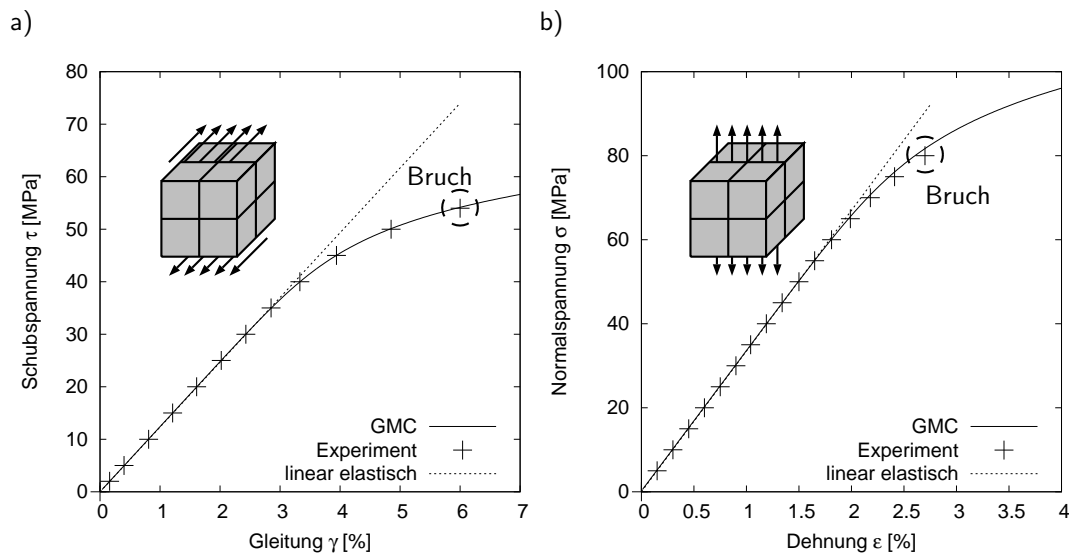


Abbildung 8.1: Experimentell und rechnerisch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das reine Harzmaterial MY750

$\llbracket u_n \rrbracket / 2a$  zur Makrodehnung  $\epsilon^M$  ist bei gleicher mittlerer Spannung  $\langle \sigma \rangle$  (und somit gleichem  $\llbracket u_n \rrbracket$ ) geringer als der Beitrag  $\llbracket u_n \rrbracket / 2b$ . Um die effektiven makroskopischen Spannungsantworten unabhängig von der Größe der RVEs zu halten, werden drei Skalierungsfaktoren  $\eta_i$  zur Modifikation der Parameter der Bruchmodelle eingeführt:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{I\perp,\parallel} &= \eta_d u_{I\perp,\parallel} & \bar{\mathcal{G}}_{Ic,IIc} &= \eta_d \mathcal{G}_{Ic,IIc} & \forall \partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)} \text{ mit } \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \\ \bar{u}_{I\perp,\parallel} &= \eta_h u_{I\perp,\parallel} & \bar{\mathcal{G}}_{Ic,IIc} &= \eta_h \mathcal{G}_{Ic,IIc} & \forall \partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)} \text{ mit } \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \\ \bar{u}_{I\perp,\parallel} &= \eta_l u_{I\perp,\parallel} & \bar{\mathcal{G}}_{Ic,IIc} &= \eta_l \mathcal{G}_{Ic,IIc} & \forall \partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)} \text{ mit } \mathbf{n} = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Werden die Duktilitätsparameter der Grenzflächenmodelle für ein Referenz-RVE  $\Omega_{ref}$  mit den Abmessungen  $d_{ref}$ ,  $h_{ref}$  und  $l_{ref}$  festgelegt, so ergeben sich für das RVE  $\bar{\Omega}$  mit den Abmessungen  $d$ ,  $h$  und  $l$  folgende Maßstabsfaktoren zur Anpassung

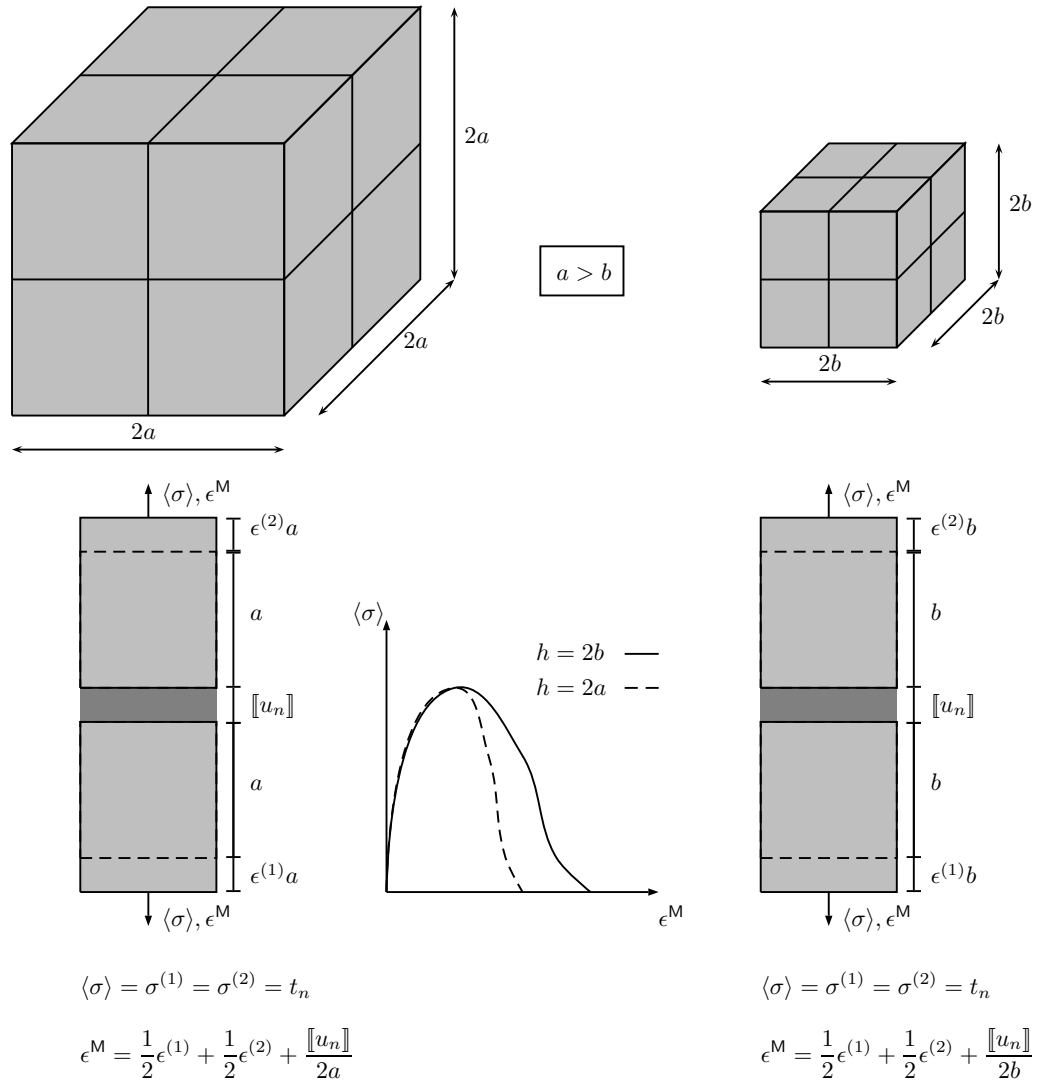


Abbildung 8.2: Einfluss der absoluten Größe des RVEs auf die effektive Spannungs-Dehnungs-Beziehung

der Modellparameter für die Grenzfläche an das RVE:

$$\eta_d = \frac{d}{d_{ref}}, \quad \eta_h = \frac{h}{h_{ref}}, \quad \eta_l = \frac{l}{l_{ref}} \quad (8.9)$$

Die Skalierung der Grenzflächenparameter nach Gl. (8.8) führt für die RVEs  $\Omega_{ref}$  und  $\bar{\Omega}$  zu identischen, makroskopischen Spannungs-Dehnungs-Verläufen.

Zum Zweck der besseren Vergleichbarkeit der drei konstitutiven Ansätze zur Beschreibung der Bruchflächen, weisen alle Modelle die gleichen Energiefreisetzungs-raten in den Modi I und II auf. Das gemischt modale Bruchmodell besitzt die Freisetzungsraten als unmittelbare Eingangsparameter. Die Längenparameter für die kritische Rissöffnung  $u_{I\perp}$  und  $u_{I\parallel}$  in den Modellen nach Chaboche (Kapitel 3.4.1) und Lissenden (Kapitel 3.4.2) können so gewählt werden, dass sie zu den gleichen Bruchenergien

$$\mathcal{G}_{Ic} = \int_0^{u_{I\perp}} t_n d[[u_n]] = \begin{cases} \frac{1}{2} R_{I\perp} u_{I\perp} & \rightarrow u_{I\perp} = \frac{2\mathcal{G}_{Ic}}{R_{I\perp}} & \text{(Lissenden)} \\ \frac{9}{16} R_{I\perp} u_{I\perp} & \rightarrow u_{I\perp} = \frac{16\mathcal{G}_{Ic}}{9R_{I\perp}} & \text{(Chaboche)} \end{cases} \quad (8.10)$$

und

$$\mathcal{G}_{IIc} = \int_0^{u_{I\parallel}} t_t d[[u_t]] = \begin{cases} \frac{1}{2} R_{I\parallel} u_{I\parallel} & \rightarrow u_{I\parallel} = \frac{2\mathcal{G}_{IIc}}{R_{I\parallel}} & \text{(Lissenden)} \\ \frac{9}{16} R_{I\parallel} u_{I\parallel} & \rightarrow u_{I\parallel} = \frac{16\mathcal{G}_{IIc}}{9R_{I\parallel}} & \text{(Chaboche)} \end{cases} \quad (8.11)$$

führen, wie sie das gemischt modale Bruchmodell aufweist. Die gewählten bzw. berechneten Parameter der Grenzflächenmodelle sind in Tab. 8.3 aufgeführt. Die Bruchenergien sind so angesetzt worden, dass die Längen der Entfestigungsbereiche in den makroskopischen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen, vgl. Abb. 8.3, etwa den ein- bis zweifachen Längen der elastischen Bereiche entsprechen. Typische, aus Experimenten stammende Werte für die Bruchenergien des reinen Epoxidharzes sind

Parameter	Gemischt modales Bruchmodell (GMBM)	Modell nach Lissenden (ML)	Modell nach Chaboche (MC)
$R_{I\perp}$ [MPa]	80	80	80
$R_{I\parallel}$ [MPa]	54	54	54
$u_{I\perp}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.040	0.035
$u_{I\parallel}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.090	0.079
$\mathcal{G}_{Ic}$ [ $\text{J}/\text{m}^2$ ]	1.60	-	-
$\mathcal{G}_{IIc}$ [ $\text{J}/\text{m}^2$ ]	2.43	-	-
$K_p$ [GPa]	500	500	500

Tabelle 8.3: Eingangsparameter der Grenzflächenmodelle mit endlicher Festigkeit nach Kapitel 3.4

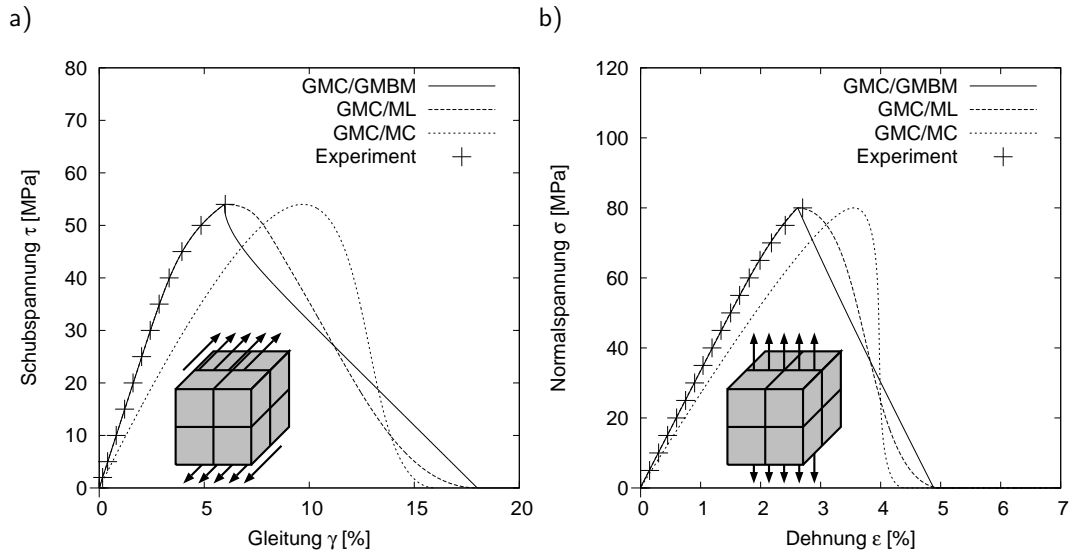


Abbildung 8.3: Experimentell und rechnerisch unter Berücksichtigung von Bruchflächen ermittelte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das reine Harzmaterial MY750

$\mathcal{G}_{Ic} = 240 \text{ J/m}^2$  und  $\mathcal{G}_{IIc} = 1500 \text{ J/m}^2$ . Aufgrund des in Abb. 8.2 und Gl. (8.8) diskutierten Maßstabeffekts, führen diese Werte am RVE mit der Kantenlänge 1 zu sehr langgestreckten Entfestigungskurven, wenn die makroskopischen Spannungen über den makroskopischen Dehnungen aufgetragen werden. Die näherungsweise Erzeugung eines ebenen Spannungszustands im RVE bei weggesteuerter Zugbeanspruchung macht nach Gl. (8.6) die Berechnung der Inversen der tangentialen Steifigkeitsmatrix erforderlich. Diese Berechnung geht fehl, wenn der Beanspruchungsprozess den Entfestigungsbereich erreicht, denn hier ist die effektive Tangentensteifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit. Die Berechnungen der Normalspannungantwort werden daher so durchgeführt, dass im verfestigenden Bereich wie zuvor näherungsweise ein ebener Spannungszustand erzeugt wird. Nachdem die Zugfestigkeit des Werkstoffs erreicht ist, werden die makroskopischen Querdehnungen mit ihrem aktuellen Wert festgehalten und nur die führende Normaldehnungskomponente  $\epsilon_{22}^M$  des Beanspruchungsprozesses wird weiter erhöht. Die Diagramme in Abb. 8.3 zeigen die erzielten Spannungsantworten des 8-Zellenmodells auf monoton wachsende Schub- und Zugdehnungsprozesse. Zur Beschreibung der Bruchflächen dienen die

Matrix	GMC/GMBM	GMC/ML	GMC/MC
Zugfestigkeit $R_m^t$ [MPa]	80	80	80
Schubfestigkeit $R_m^s$ [MPa]	54	54	54
Zugbruchdehnung $\epsilon_m^t$ [%]	2.6	2.6	3.6
Schubbruchgleitung $\gamma_m^s$ [%]	6.0	6.0	9.6

Tabelle 8.4: Berechnete/identifizierte effektive Werkstoffkennwerte für das Harz MY750

Spannungs-Separations-Modelle nach Chaboche (MC), Lissenden (ML) sowie das gemischt modale Bruchmodell (GMBM). Den drei Formulierungen ist gemeinsam, dass sie die gleiche Schub- sowie Zugfestigkeit des Harzes vorhersagen, welche mit den experimentell ermittelten Festigkeiten übereinstimmen. Unterschiede ergeben sich bei den Verzerrungsgrößen: Während das Modell nach Lissenden und der gemischt modale Ansatz die Dehnung bei Erreichen der Festigkeit richtig wiedergeben, werden bei Verwendung des Modells nach Chaboche die Zug- und Schubfestigkeiten erst unter deutlich größeren Deformationen erreicht. Dies ist durch die von Belastungsbeginn an vorhandene endliche Nachgiebigkeit des Chaboche Ansatzes begründet. Bei gleichen anliegenden Makrodehnungen sind folglich die Makrospannungen geringer. Die anhand der GMC-Simulation berechneten Festigkeiten sowie die zugehörigen Makrodehnungen sind in Tab. 8.4 angegeben.

## 8.3 Parameteridentifikation für die UD-Schicht aus E-Glass/MY750

### 8.3.1 Parameteridentifikation und Validierung des nichtlinear elastischen Modells für den Verbund

Als Beispiel für einen Verbundwerkstoff wird das glasfaserbewehrte Epoxidharz MY750 untersucht. Die elastischen Ingenieurkonstanten E-Modul und Schubmodul für den Faserwerkstoff sind in Hinton et al. (2004) mit  $E_f = 74$  GPa und  $G_f = 30.8$  GPa angegeben. Der Faservolumengehalt liegt bei  $V_f = 0.60$ . Den nachfolgenden

Material	MY750		E-Glass
	Parametersatz I	Parametersatz II	
E-Modul $E$ [GPa]	3.35	4.9	74
Schubmodul $G$ [GPa]	1.24	1.9	30.8
Exponent $n$ [-]	9	9	-
Vergleichsspannung $\sigma_0$ [MPa]	107.5	117.5	-

Tabelle 8.5: Eingangsparameter für das Zellenmodell

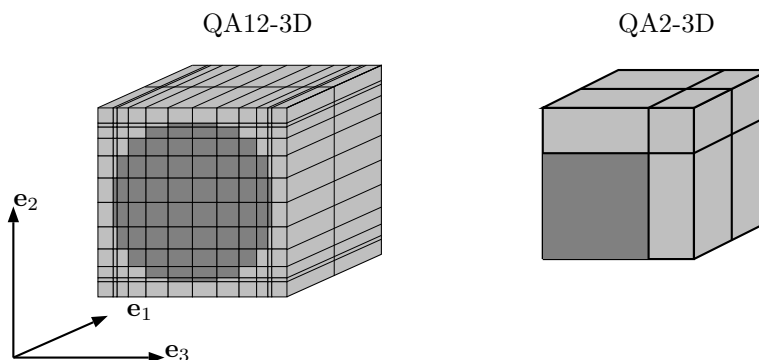


Abbildung 8.4: RVE-Netzwerke QA12-3D ( $d=h=l=2$ ) und QA2-3D ( $d=h=l=1$ )



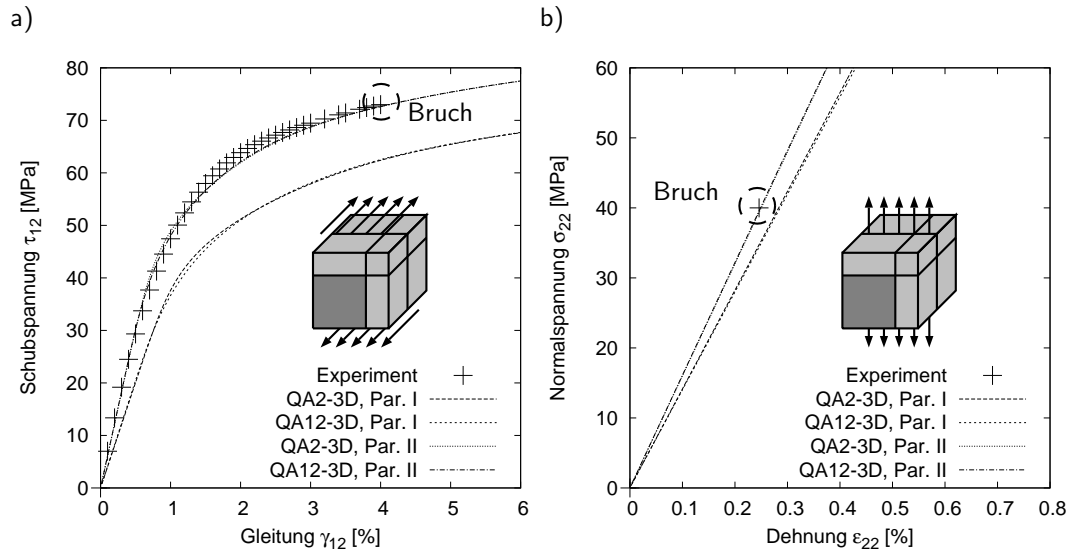


Abbildung 8.5: Glasfaserepoxydharz E-Glass/MY750. GMC-Simulation ohne Schädigung vs. Experiment

GMC-Berechnungen liegen die Elastizitätsparameter nach Tab. 8.5 als Eingangsdaten für die Konstitutivmodelle der Phasenwerkstoffe zugrunde. Für das Epoxydharz werden zwei verschiedene Parametersätze I und II verwendet. Der Parametersatz I umfasst die im vorigen Abschnitt (Tab. 8.2) identifizierten Kennwerte für das nichtlineare Kontinuumsmodell. Der Parametersatz II enthält modifizierte Kennwerte, welche der verbesserten Vorhersage der Spannungsantworten auf die betrachteten monoton wachsenden axialen Schub- und transversalen Zugprozesse  $\gamma_{12}^M$  und  $\epsilon_{22}^M$  dienen. Die Berechnungen erfolgen für den RVE-Typ QA2-3D, der aus  $2 \times 2 \times 2$  Unterzellen besteht und der verfeinerten Vernetzung QA12-3D mit  $2 \times 12 \times 12$  Elementen, siehe Abb. 8.4. In den Simulationen wird, wie zuvor schon beim reinen Harzwerkstoff, zunächst keine Schädigung der Matrix oder des Verbunds berücksichtigt, um den Einfluss der Elastizitätsparameter für das Faser- und Matrix-Kontinuum isoliert zu untersuchen. Die Diagramme in Abb. 8.5 zeigen zweierlei: Die mit dem Parametersatz I erzielten Spannungsantworten des Zellenmodells unter Schub- und Zugdehnungsbeanspruchungen (im ESZ) ergeben etwas (15%) zu geringe effektive Steifigkeiten und Spannungen, vgl. Tab. 8.6. Die berechneten Spannungsverläufe ändern sich nicht wesentlich, wenn die Netzfeinheit von 8 (QA2-3D) auf 288 (QA12-3D) Elemente erhöht wird. Die Verbesserung der Fasergeometrieabbildung verbessert die Vorher-

Parameter	GMC/QA2-3D		Experiment
	Param. I	Param. II	
Faservolumengehalt $V_f$ [%]	0.6	0.6	0.6
transversaler E-Modul $E_2^*$ [GPa]	14.6	16.7	16.2
axialer Schubmodul $G_{12}^*$ [GPa]	4.0 <sup>†</sup>	6.1 <sup>†</sup>	5.83 <sup>†</sup>

<sup>†</sup> Anfangsmodul

Tabelle 8.6: Effektive Steifigkeiten des Verbundwerkstoffs E-Glass/MY750

sagegüte nicht. Diese Feststellung steht im Einklang mit den in Kapitel 5.2.1 diskutierten Ergebnissen. Zwar stimmen die mit dem unmodifizierten Parametersatz I ermittelte Schubspannungsentwicklung nach Abb. 8.5 a) in qualitativer Hinsicht gut mit Versuchsergebnissen überein, in quantitativer Hinsicht jedoch fallen die Schubspannungen  $\tau_{12}$  bei der Gleitung  $\gamma_{12} = 4\%$  um rund 12% zu gering aus. Mit den modifizierten Werten des Parametersatzes II lassen sich sehr gute Reproduktionen der Spannungs-Dehnungsverläufe erwirken.

Für die Differenz zwischen Experiment und Rechnung mit dem Parametersatz I kommen die Ursachen aus zwei Quellen in Frage. Zum Ersten führt das Auflösungsvermögen der GMC hinsichtlich der mikroskopischen Spannungsfelder im RVE tendenziell zur Unterschätzung der effektiven Steifigkeiten. Zum Zweiten entstammen die in Hinton et al. (2004) angegebenen Materialdaten für die Fasern nicht einer direkten Bestimmung aus Versuchen, sondern sie werden invers unter Ansatz nicht spezifizierter, mikromechanischer Modellvorstellungen anhand der effektiven Eigenschaften des Verbundwerkstoffs identifiziert. Folglich sind mit den in dieser Weise ermittelten Daten auch nur unter Verwendung des gleichen mikromechanischen Modells die zutreffenden effektiven Steifigkeiten vorhersagbar. Eine weitere Unsicherheit besteht in der Ermittlung des Faservolumengehalts. Die Steifigkeiten und Festigkeiten der Matrixphase im Übergang zur Faser stehen zudem unter dem starken Einfluss der Faserflächenbehandlung durch Haftverbesserer, siehe Wacker (1996).

### 8.3.2 Parameterbestimmung für das Verbundmodell mit Schädigung

Zur Simulation des Versagens des Verbundmaterials unter transversalem Zug sowie axialem Schub sind die Modellansätze für den Faser-Matrix-Verbund (FMV) sowie die Matrixbruchflächen (MBF) in die diskreten RVE-Modelle zu integrieren. Für das RVE QA2-3d bedeutet dies, dass alle Unterzellrandflächen innerhalb des RVEs mit Ausnahme der Kontaktfläche zwischen den beiden Faserzellen entfestigen können. Die gewählten Parameter der drei ratenunabhängigen Grenzflächenmodelle mit Schädigung für die Matrixbruchflächen sowie den Faser-Matrix-Verbund sind in Tab. 8.7 zusammengestellt. Die darin aufgeführten Werte für die Festigkeiten des Harzes sind gegenüber jenen in Tab. 8.3 neu identifiziert worden - siehe Tab. 8.7 unten -, um das Versagen des Verbundwerkstoffs an die experimentellen Ergebnisse der *World-Wide Failure Exercise* besser anzupassen. Die Energiefreisetzungsraten und die charakteristischen Längen  $u_{I\perp}$  und  $u_{I\parallel}$  sind aufeinander abgestimmt und so festgelegt worden, dass plausible Entfestigungsverläufe für den Verbundwerkstoff erzielt werden. Durch die Implementierung der drei konstitutiven Ansätze (GMBM, ML, MC, s. Tab. 8.7) für die beiden betrachteten Arten von Schädigung (Matrixbruch und Verbundschädigung) sind  $3^2$  potentielle Kombinationsmöglichkeiten für die Versagensmodellierung des Faser-Matrix-Verbunds und des Bruchs zwischen Matrix-Matrix-Unterzellen denkbar. Die unternommenen Rechnungen beschränken sich auf die Kombination des jeweils gleichen Modellansatzes (bei unterschiedlicher Parameterwahl, s. Tab. 8.7) für die Spannungs-Separations-Beziehung der Matrixbruchflächen sowie des Faser-Matrix-Verbunds. Auf weitere Kombinationen, wie z.B. die Verwendung des Modells nach Chaboche für den Faserverbund und des gemischt modalen Ansatzes für den Matrixbruch, wird nicht eingegangen.

RVE QA2-3D Faser/Matrix	Gemischt-modales Bruchmodell (GMBM)	Modell nach Lissenden (ML)	Modell nach Chaboche (MC)
$R_{I\perp}$ [MPa]	48	48	48
$R_{I\parallel}$ [MPa]	77	77	77
$u_{I\perp}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.004	0.006
$u_{I\parallel}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.12	0.107
$\mathcal{G}_{Ic}$ [J/m <sup>2</sup> ]	0.096	-	-
$\mathcal{G}_{IIc}$ [J/m <sup>2</sup> ]	4.62	-	-
$K_p$ [GPa]	500	500	500

RVE QA2-3D Matrix/Matrix	Gemischt-modales Bruchmodell (GMBM)	Modell nach Lissenden (ML)	Modell nach Chaboche (MC)
$R_{I\perp}$ [MPa]	15	15	15
$R_{I\parallel}$ [MPa]	60	60	60
$u_{I\perp}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.004	0.006
$u_{I\parallel}$ [ $\mu\text{m}$ ]	-	0.12	0.107
$\mathcal{G}_{Ic}$ [J/m <sup>2</sup> ]	0.03	-	-
$\mathcal{G}_{IIc}$ [J/m <sup>2</sup> ]	3.60	-	-
$K_p$ [GPa]	500	500	500

Tabelle 8.7: Eingangparameter der Grenzflächenmodelle für das RVE QA2-3D

Die anhand des RVEs QA2-3D berechneten Spannungs-Dehnungsverläufe sind in den Diagrammen in Abb. 8.6 a) und b) dargestellt. Es ist abzulesen, dass für die gewählten Grenzflächenparameter mit allen drei Ansätzen eine sehr gute Abbildung der effektiven Zug- und Schubfestigkeiten  $R_{\perp}^* = 40$  MPa und  $R_{\perp\parallel}^* = 73$  MPa des Composite-Werkstoffs möglich ist. Den Vergleich der Zahlenwerte für die Festigkei-

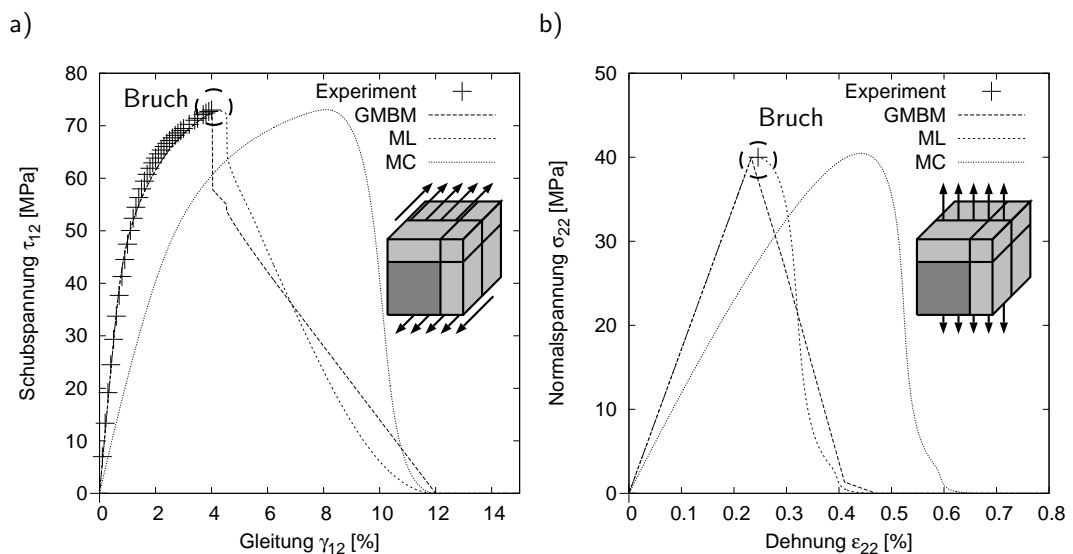


Abbildung 8.6: Effektive Spannungsantworten des RVEs QA2-3D mit Verbundfestigung und Matrixschädigung

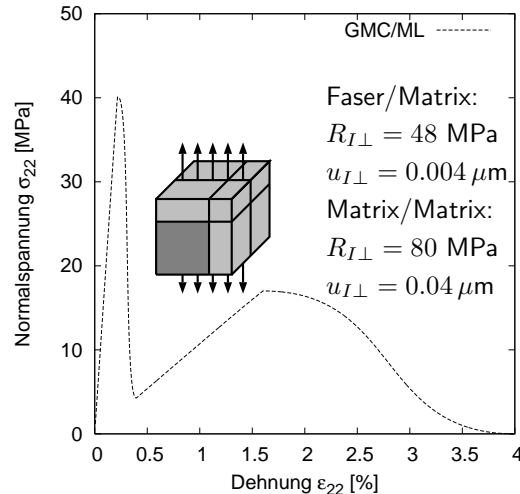


Abbildung 8.7: Beispielhafte Darstellung der Spannungs-Dehnungskennlinie (ML) für den Verbundwerkstoff mit Matrixschädigungsparametern nach Tab. 8.3

ten und Bruchdeformationen ermöglicht Tab. 8.8. Die aus Experimenten abgeleitete Zugbruchverzerrung  $\epsilon_{\perp}^t = 0.24\%$  und die Schubbruchgleitung  $\gamma_{\perp\parallel} = 4\%$  werden nur bei der Verwendung des gemischt modalen Bruchmodells (GMBM) und des Modells nach Lissenden (ML) zufriedenstellend wiedergegeben, da diese keine Anfangsnachgiebigkeit besitzen. Der Einsatz des Modells nach Chaboche führt für beide Beanspruchungsprozesse auf wesentlich größere Deformationen beim Erreichen der Festigkeiten.

Die angesetzten Festigkeiten für das Matrixmaterial als Komponente im Verbundwerkstoff nach Tab. 8.7 weichen von den Werten in Tab. 8.3, die für das reine Harzmaterial gilt, ab. Berechnet man die Spannungsantworten mit den hohen Festigkeiten nach Tab. 8.3, so erhält man keine monotone Abnahme der Makrospannungen nach Ausschöpfung der makroskopischen Festigkeit, sondern es kommt nach vollständiger Entfestigung des Faser-Matrix-Verbunds zu einer unrealistisch erscheinenden, erneuten makroskopischen Verfestigung bis die Spannungen im RVE die Festigkeit des Harzes erreichen, siehe Abb. 8.7. Die Festigkeit des bewehrten Harzes gegenüber dem homogenen Harzwerkstoff herabzusetzen erscheint überdies gerechtfertigt, da die Schädigung des Verbunds im realen Verbundwerkstoff die Rissentstehung im Harz aufgrund von Spannungsspitzen an den Risspitzen begünstigen dürfte.

Die Form der Entfestigungsentwicklung ist aufgrund der Unkenntnis des tatsächlichen Entfestigungsverlaufs eine Annahme, die durch die angesetzten Duktilitätsparameter festgelegt ist. Auf die Darstellung der erzielbaren Ergebnisse für das verfeinerte Modell QA12-3D mit Schädigung wird an dieser Stelle verzichtet. Wie aus den Diagrammen in Abb. 8.5 zu ersehen ist, unterscheiden sich die berechneten Spannungs-Dehnungsverläufe im Verfestigungsbereich ohne Berücksichtigung einer möglichen Schädigung für unterschiedlich feine Diskretisierungen nicht. Die Zahlenwerte für die am RVE QA2-3D identifizierten Verbundfestigkeiten nach Tab. 8.7 ergeben am RVE QA12-3D, siehe Abb. 8.4, geringere makroskopische Festigkeiten. Der Grund hierfür ist, dass die Verbundspannungen im Scheitel der Faser die Festigkeit des Verbunds schon bei kleineren Makrodehnungen erreichen als im RVE QA2-3D. Hierdurch kommt es zu einem verfrühten Abfall der effektiven Steifigkeiten und

Parameter	GMC/QA2-3D			Experiment
	GMBM	ML	MC	
transversale Zugfestigkeit $R_{\perp}^{t*}$ [MPa]	39.91	39.97	40.47	40
axiale Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}^*$ [MPa]	72.64	72.83	73.08	73
transversale Zugbruchdehnung $\epsilon_{\perp}^{t*}$ [%]	0.233	0.241	0.442	0.246
axiale Schubbruchgleitung $\gamma_{\perp\parallel}^*$ [%]	4.02	4.26	8.10	4

Tabelle 8.8: Vergleich berechneter effektiver Festigkeiten und Bruchdehnungen des Verbundwerkstoffs E-Glass/MY750 mit Versuchsdaten

folglich zu einem zu geringen Anwachsen der Spannungen vor der makroskopischen Entfestigung. Demnach wären bei erhöhter Netzfeinheit die Festigkeitsparameter des Verbunds ebenfalls zu vergrößern, um die gleichen makroskopischen Festigkeiten zu erzielen. Unterschiede in den Ergebnissen der Modelle QA2-3D und QA12-3D ergäben sich dann aber nur noch für den berechneten Verlauf der Entfestigung, der jedoch aufgrund fehlender experimentellen Daten nicht validiert werden kann. Der mit der verfeinerten Vernetzung einhergehende numerische Zusatzaufwand scheint daher nicht gerechtfertigt, zumal der Effizienz des Zellenmodells als Konstitutivmodell für die FE-Analyse besondere Bedeutung zukommt.

## 8.4 Kombinierte Beanspruchung des mit Glasfasern bewehrten Epoxidharzes MY750

Im Teil A der *World-Wide Failure Exercise* werden experimentelle Daten bezüglich der Festigkeiten und Steifigkeiten für verschiedene Matrix- und Faserwerkstoffe sowie für die daraus hergestellten Verbundwerkstoffe zur Verfügung gestellt. Diese bereitgestellten Daten liegen der Parameteridentifikation im vorigen Abschnitt zugrunde. Im Teil B der *World-Wide Failure Exercise* werden unter anderem Versuchsergebnisse zu kombinierten Beanspruchungszuständen in Rohrproben geliefert. Die mit Hilfe des Zellenmodells vorhergesagten Festigkeiten für kombinierte Beanspruchungen des Werkstoffs E-Glass/MY750 durch transversalen Zug und axialen Schub können mit den Ergebnissen aus den Experimenten verglichen werden. Die GMC-Berechnungen erfolgen am Zellenmodell QA2-3D im ESZ, welches kombinierten Dehnungsprozessen nach Gl. (8.1) mit variierten Werten für  $\alpha$  unterworfen wird. Die Gegenüberstellung der berechneten Bruchkurven im Spannungsraum  $\tau_{12}, \sigma_{22}$  für die Spannungs-Separations-Ansätze nach Lissenden (ML), Chaboche (MC) sowie dem gemischt modalen Bruchmodell (GMBM) mit experimentellen Ergebnissen gibt Abb. 8.8. Die als geschwärzte Quadrate eingezeichneten Festigkeiten für unidirektional verstärkte Probekörper des Werkstoffs E-Glass/MY750 ( $V_f = 0.60$ ) entsprechen den Angaben aus dem Teil A der *World-Wide Failure Exercise* und stammen aus Krauss and Schelling (1969). Die durch weiße Quadrate dargestellten Datenpunkte geben die Festigkeiten des Kompositwerkstoffs E-Glass/LY556 ( $V_f = 0.62$ ) unter kombinierten, biaxialen Spannungszuständen nach Hütter et al. (1974) wieder. Beide Datensätze werden von Hinton et al. (2004) gemeinsam in einem Diagramm dar-

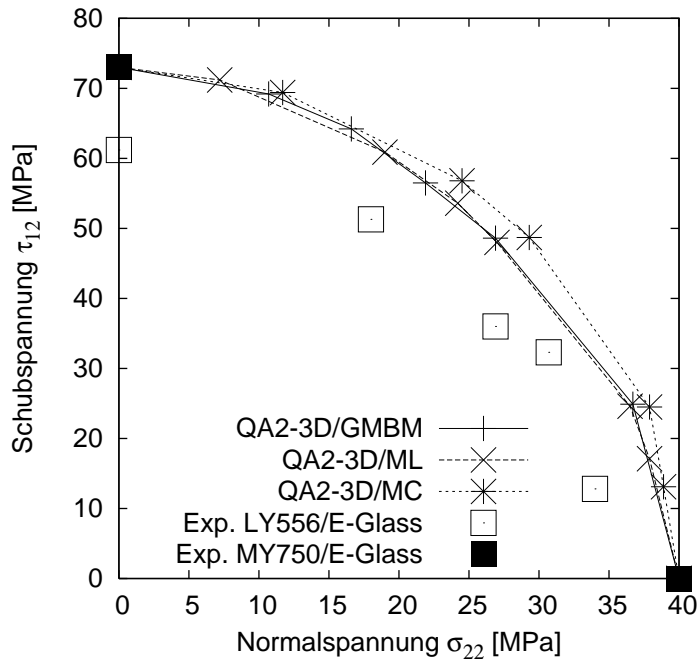


Abbildung 8.8: Berechnete Bruchkurven im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

gestellt, um die experimentelle Bruchkurve des Verbundwerkstoffs E-Glass/LY556 unter kombinierter Beanspruchung zu beschreiben. Die berechneten Festigkeiten für einaxialen Zug und reinen Schub entsprechen den Werten nach Krauss and Schelling (1969). Für die Grenzflächenmodelle sind die Parameter nach Tab. 8.7 verwendet worden, die so festgelegt sind, dass die Festigkeiten des Composites unter axialem Zug und reinem Schub nach Krauss and Schelling (1969) erzielt werden. Die Parameter für den Faser- und Matrixwerkstoff (Parametersatz II) sind Tab. 8.5 zu entnehmen. Für die kombinierten Beanspruchungen ergibt die Berechnung eine Überschätzung der Festigkeiten nach Hütter et al. (1974). Die Verwendung des Spannungs-Separations-Ansatzes nach Lissenden liefert sehr ähnliche Ergebnisse wie das gemischt modale Bruchmodell. Die auf Basis des Chaboche-Ansatzes ermittelte Bruchkurve weist die höchsten Festigkeiten im Vergleich der Rechenmodelle unter kombinierter Beanspruchung aus.

# Kapitel 9

## Berechnung mikroheterogener Verbundstrukturen mit der Zellenmethode

### 9.1 Finite Elemente Analyse von Faserverbundstrukturen mit endlichen Festigkeiten

Die Entfestigung eines Materials ist durch die Abnahme der Spannung bei gleichzeitiger Zunahme der Dehnungen gekennzeichnet. Bei mehrdimensionalen Spannungszuständen geht die Entfestigung mit dem Verlust der positiven Definitheit der inkrementellen Steifigkeitsmatrix einher. Aus der Sicht der Mathematik bedeutet ein Abfallen der Spannungen bei zunehmender Dehnung im Zusammenhang mit ratenunabhängigen Materialmodellen, dass sich der Typ der partiellen Differentialgleichungen, die das strukturmechanische System beschreiben, ändert. In statischen Betrachtungen werden mit einsetzender Entfestigung aus elliptischen Differentialgleichungen hyperbolische, in dynamischen Berechnungen werden aus hyperbolischen Differentialgleichungen ultra-hyperbolische, Garabedian (1999). Die Folge ist, dass die strukturmechanische Aufgabe im Entfestigungsfall schlecht gestellt ist, denn die Rand- und Anfangsbedingungen des einen Differentialgleichungstyps sind nicht für den anderen geeignet. Bei ratenunabhängigen Modellen mit Entfestigung kann es zu keiner Ausbreitung oder Ausweitung der Schädigung (d.h. der entfestigenden Zone) innerhalb des ausgedehnten Definitionsbereichs der Problemstellung kommen. Wird ein solches Materialmodell ohne weitere Maßnahmen als Konstitutivannahme der FE-Analyse zugrunde gelegt, so bricht die iterative Berechnung bei einsetzender Entfestigung entweder wegen Konvergenzproblemen ab, oder läuft in pathologisch netzabhängiger Weise in nicht beliebig genau reproduzierbare Näherungslösungen im Sinne der Methode der finiten Elemente weiter. Die Berechnung führt dann zu Resultaten, die davon abhängen, ob die Schädigung in Abhängigkeit numerischer Ungenauigkeiten im iterativen Lösungsalgorithmus in einem, mehreren oder allen Elementen auftritt.

Um die Lösung bis in den Entfestigungsbereich hinein zu verfolgen, existieren verschiedene Ansätze. Eine Möglichkeit besteht darin, den Schädigungsprozess in einer Fläche zu lokalisieren, in der das Verschiebungsfeld Unstetigkeiten aufweisen kann



und darf. Diesem Ansatz folgt die Implementierung der Matrixschädigung in die Methode der Zellen. Die Randwertaufgabe des GMC-Modells bleibt damit gut gestellt. Dennoch ist die Anwendung der Zellenmethode als Konstitutivmodell für die FE-Analyse ohne die Ergreifung weitere Maßnahmen aus den geschilderten Gründen nur solange möglich, wie das effektive Materialverhalten als verfestigend charakterisiert werden kann.

Alternativ zur geschwindigkeitsunabhängigen Lokalisierung der Schädigung in Bruchflächen können Materialmodelle ratenabhängig gemacht werden, siehe Valanis (1985) oder Needleman (1988). Dabei ist es nicht wesentlich, ob die Ratenabhängigkeit physikalisch begründet ist oder aus rein numerischen Gründen künstlich eingeführt wird. Ein weiterer Ansatz zur Umgehung des schädlichen Verlusts der Elliptizität besteht darin, die Spannungen an einem Punkt nicht allein von den Dehnungen, sondern auch vom Gradienten des Verzerrungstensors abhängig zu machen, siehe z.B. Aifantis (1987), Kouznetsova et al. (2002) oder Geers et al. (2003).

Dem gegenwärtigen Implementierungsstand der GMC in den FE-Code FEAP fehlen die angesprochenen notwendigen Maßnahmen, um Strukturen bis in den postkritischen Versagensbereich hinein zu analysieren. Die nachfolgend dargestellten Simulationen enden aus diesem Grund an der Stelle, wo am ersten Integrationspunkt des jeweiligen FE-Netzes eine Entfestigung einsetzt. Die Strukturen können also nur bis zum Erreichen der Werkstofffestigkeiten an der ungünstigst belasteten Stelle berechnet werden.

## 9.2 Zweiskalige Berechnung des dünnwandigen Rohrs

Als Strukturbeispiel dient das dünnwandige Rohr aus einschichtigem Verbundwerkstoff nach Abb. 9.1. Die inneren und äußeren Durchmesser des Rohrs betragen  $r_i = 16.5$  mm und  $r_a = 18.5$  mm bei einer Rohrlänge von  $l = 100$  mm. Der Winkel der Faserwicklung gegenüber der Zylinderachse  $x_3$  wird mit  $\Theta$  bezeichnet. Als Verbundwerkstoff kommt das glasfaserverstärkte Epoxidharz E-Glass/MY750 mit einem Faservolumengehalt von  $V_f = 0.60$  zum Einsatz. Die Tab. 9.1 enthält die Materi-

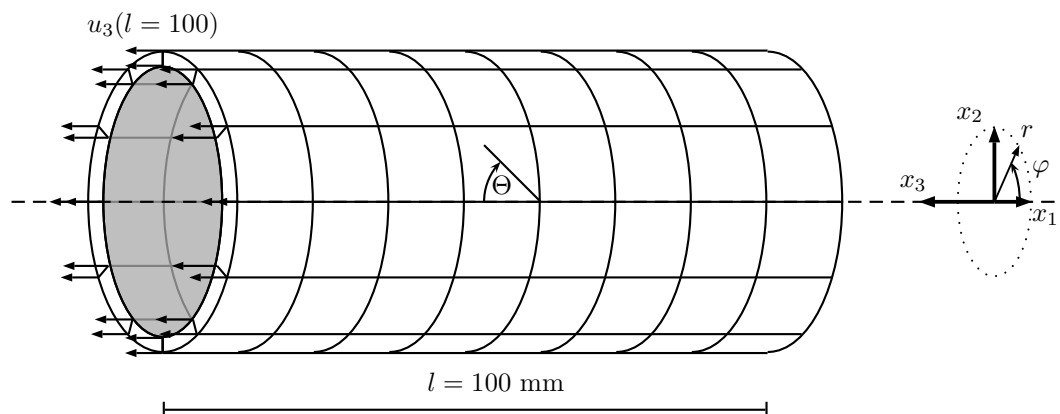


Abbildung 9.1: FE-Modell des dünnwandigen Rohrs



Phasenwerkstoff	$E$ [GPa]	$G$ [GPa]	$\sigma_0$ [MPa]	$n$ [-]
E-Glass $V_f = 0.6\%$	74	30.8	-	-
Epoxidharz MY750	4.9	1.9	117.5	9
Grenzfläche	$R_{I\perp}$ [MPa]	$R_{I\parallel}$ [MPa]	$u_{I\perp}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$u_{I\parallel}$ [ $\mu\text{m}$ ]
Faser-Matrix-Verbund (ML)	48	77	0.004	0.12
Matrixbruchflächen (ML)	15	60	0.004	0.12

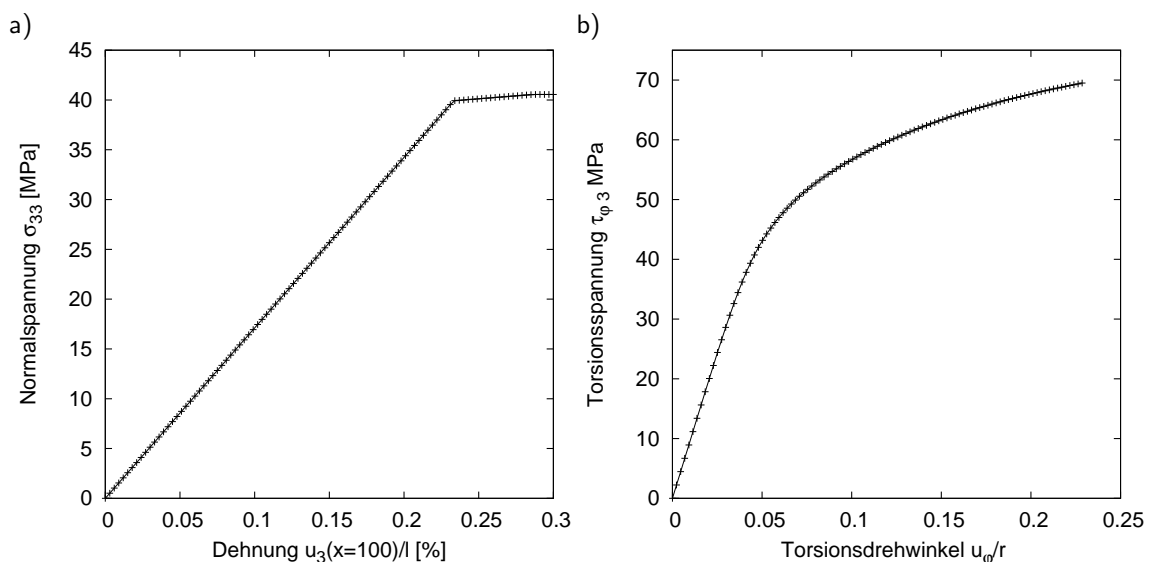
Tabelle 9.1: Materialparameter des Zellenmodells QA2-3D

alparameter für die Phasenwerkstoffe sowie das Grenzflächenmodell nach Lissenden (ML) für den Faser-Matrix-Verbund und den Matrixbruch. Die Zahlenwerte entstammen der Parameteridentifikation des vorigen Abschnitts. Das FE-Netz besteht aus 36 Elementen in Umfangsrichtung, einem Element über die Rohrdicke und 10 Elementen in Rohrlängsachse. Am Rohrende bei  $x_3 = 0$  sind die Freiheitsgrade  $u_3$  und  $u_\varphi$  gesperrt, so dass weder die Verschiebung in Richtung der Rohrlängsachse noch die Torsion des Rohrs möglich sind. Die betrachteten Lastfälle sind in Tab. 9.2 zusammengestellt.

Lastfall	Faserwinkel $\Theta$	Vorgabe
LF 1	$90^\circ$	$u_3(x_3 = l) = 0.3 \text{ mm}$
LF 2	$90^\circ$	$u_\varphi(x_3 = l) = 4 \text{ mm}$

Tabelle 9.2: Lastfälle

Im Lastfall 1 verlaufen die Fasern in Umfangsrichtung. Das freie Ende des Rohrs wird in 100 Lastschritten weggesteuert um 0.3 mm in Achsrichtung  $x_3$  verschoben. Der

Abbildung 9.2: a) Zugspannungsantwort  $\sigma_{33}$  im LF 1. b) Schubspannungsantwort  $\tau_{\varphi 3}$  im LF 2

Werkstoff unterliegt im LF 1 einer Zugbeanspruchung  $\sigma_{33}$  senkrecht zu den Fasern. In Abb. 9.2 a) ist die Normalspannung  $\sigma_{33}$  in Rohrlängsrichtung über der aufgetragenen Rohrendverschiebung  $u_3(l)/l$  aufgetragen. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung verhält sich bis zum Werkstoffversagen bei der Maximalspannung  $\sigma_{33}^{max} = 40.5$  MPa näherungsweise linear. Der Vergleich der Abb. 9.2 mit Abb. 8.6 b) und Tab. 8.8 verifiziert die Implementierung der GMC in den FE-Code, denn sowohl die Zugfestigkeit senkrecht zur Faser als auch die Bruchdehnung wird übereinstimmend vorhergesagt. Das Normalspannungs-Dehnungs-Diagramm für den Bereich nach Erreichen der Festigkeit weicht in der FE-Simulation von den Verläufen in Abb. 8.6 (rechts) ab: Statt einer Entfestigung zeigt sich eine nahezu konstant bleibende Spannung. Die Gründe für das zu erwartende abweichende Verhalten (pathologische Netzabhängigkeit der Lösung, unvorhersagbare Lokalisierung der Schädigung in wenigen Elementen) sind einleitend erläutert worden.

Im Lastfall 2 verlaufen die Fasern ebenfalls in Umfangsrichtung des Rohrs. Als Beanspruchung wird eine Torsionsverdrehung  $u_\varphi$  am freien Rohrende weggesteuert aufgebracht. Die Simulation umfasst 100 Zeitschritte. Am Ende des letzten Lastschritts liegt ein Torsionsdrehwinkel von 0.25 rad vor. Die aufgebrachte Enddeformation bewirkt einen homogenen Torsionsspannungszustand im Rohr, der für den Werkstoff aufgrund des Faserverlaufs eine axiale Schubbeanspruchung bedeutet. Die Entwicklung der Torsionsschubspannung ist in Abb. 9.2 b) als Funktion der Torsionsverdrehung am Ende des Rohrs aufgetragen. Der nichtlineare Verlauf der Spannungsantwort erreicht die Festigkeit des Werkstoffs in Höhe von rund 70 MPa bei einer Verdrehung von  $u_\varphi/r_m = 0.228$ , welche einer Schubgleitung von 4% entspricht. Damit reproduziert die Berechnung am Rohr die Schubspannungs-Gleitungs-Beziehung nach Abb. 8.6 a).

### 9.3 Kreuzverbundlaminat unter einachsiger Belastung

Im Rahmen der *World-Wide Failure Exercise* sind Zugversuche an Kreuzverbundlaminaten [0/90/90/0] durchgeführt worden, siehe Soden et al. (2002). Als Werkstoff dient das glasfaserverstärkte Epoxydharz E-Glass/MY750 mit  $V_f = 0.62$ . Die Probekörper besitzen eine Länge von 200 mm, eine Breite von 25 mm und eine Gesamtdicke von  $4 \times 0.475 = 1.9$  mm. Die Faserrichtung in den äußeren Lagen stimmt mit der Wirkungsrichtung der Beanspruchung überein.

Für die Zweiskalensimulation der Zugversuche wird das FE-Modell nach Abb. 9.3 mit drei Elementen verwendet. Die Probe ist derart gelagert, dass die Querdehnungen nicht behindert sind. Als Materialmodell fungiert das Zellenmodell QA2-3D mit 8 Elementen. Die Berechnung wird weggesteuert durchgeführt.

In Abb. 9.4 ist der experimentelle Verlauf der mittleren Zugspannung  $\sigma_x$  im Laminat sowohl über der positiven Längsdehnung  $\epsilon_x$  als auch über der negativen Querdehnung  $\epsilon_y$  in Rot aufgetragen. Bei einer mittleren Zugspannung von  $\sigma_x = 116$  MPa stellen sich im Experiment erste Risse in den eingebetteten 90° Schichten ein, mit deren Entstehung die Abnahme der Laminatsteifigkeit einhergeht. Folglich verlaufen die Spannungs-Dehnungslinien bei weiterer Laststeigerung geringfügig flacher. Bei einer Längsspannung  $\sigma_x$  von ca. 325 MPa entstehen Längsrisse (parallel zur

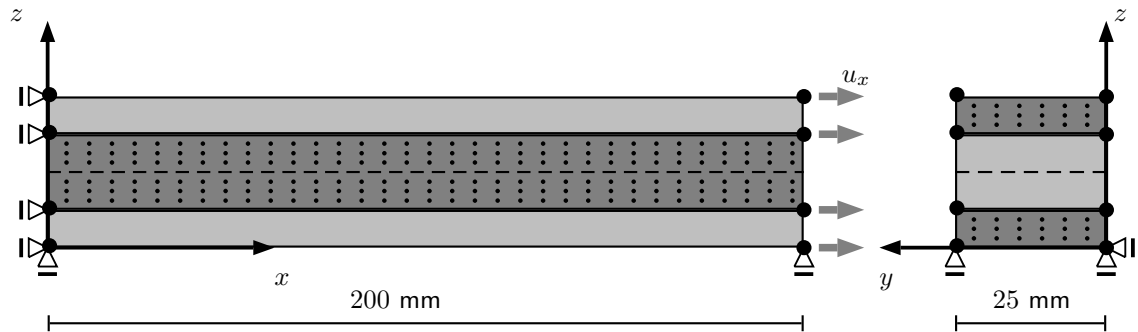


Abbildung 9.3: FE-Modell des Kreuzverbundlaminats

Kraftrichtung) in den äußeren  $0^\circ$  Schichten. Diese Risse werden durch Zugspannungen  $\sigma_y$  verursacht, die ihrerseits Folge der Querdehnungsbehinderung der Deckschichten durch die eingebetteten Schichten sind. Unter der mittleren Spannung  $\sigma_x \approx 600$  MPa kommt es zum Zugversagen der  $0^\circ$ -Schichten.

Die grünen Kurven in Abb. 9.4 stellen das Ergebnis der Zweiskalensimulation dar, wenn für das Zellenmodell die Materialparameter der UD-Schicht aus der Identifikation in Kapitel 8.3, siehe Tab. 8.5 (Parametersatz II) und Tab. 8.7 angesetzt werden. Die rechnerische Entfestigung der eingebetteten Schicht führt zu einer verfrühten Abnahme der Laminatsteifigkeit ab ca. 80 MPa. Es ist bekannt, dass sich das Verhalten eingebetteter Schichten im Allgemeinen von dem der isolierten Einzelschicht unterscheidet, siehe z.B. Cuntze (2006). Im Experiment erweist sich, dass eine eingebettete Schicht in der Lage ist, höhere Lasten aufzunehmen als eine isolierte Einzelschicht. Demzufolge geschieht es nicht unerwartet, dass die Parameter, die an Versuchsdaten der Einzelschicht identifiziert wurden, zur Unterschätzung der

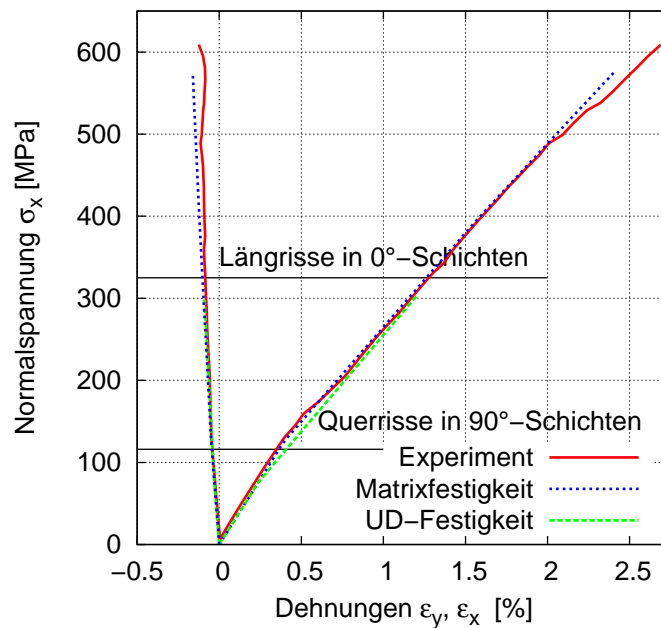


Abbildung 9.4: Spannungs-Dehnungskennlinien des Winkelverbundlaminats unter einachsiger Zugbeanspruchung in x-Richtung

in situ Festigkeit der Schicht als Bestandteil eines Laminats führt.

Rechnerische Längsrisse (dargestellt durch entfestigendes Verhalten) treten in den Deckschichten ebenfalls verfrüht ab ca.  $\sigma_x = 300$  MPa auf und gehen mit dem Konvergenzverlust der FE-Simulation einher. Ungeachtet der beschriebenen Abweichungen kann das konstitutive Verhalten des Kreuzverbundlaminats im Zugversuch in zufriedenstellender Näherung vorhergesagt werden.

Setzt man für die Zug- und Schubfestigkeiten sowohl der Matrixphase als auch des Fasermatrixverbunds die Festigkeitswerte des reinen Harzwerkstoffes an, vgl. Tab. 8.1, so ergeben sich die in Blau eingezeichneten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Kreuzverbund. Der Einfluss der Querrissbildung (Entfestigung) in den eingebetteten Schichten auf das Laminatverhalten wird besser getroffen als unter Ansatz der UD-Schicht-Parameter. Insgesamt zeigt die Rechnung eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Das finale Laminatzugversagen im Experiment wird in der Rechnung nicht abgebildet, da die hierzu notwendige Modellerweiterung Teil zukünftiger Arbeiten ist.

# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

Das vornehmliche Ziel der vorliegenden Arbeit ist die simultane Bereitstellung des homogenisierten Materialtensors mikroheterogener Faserverbundwerkstoffe für die FE-Simulation von Ingenieurstrukturen. Die Homogenisierung verschiebt die rein phänomenologische Betrachtungsweise von Werkstoffen auf eine niedrigere Größenskala. Das makroskopische Konstitutivverhalten, wie es in der FE-Berechnung berücksichtigt wird, ergibt sich aus der Lösung von Anfangsrandwertaufgaben, die auf dem Gebiet des mikroskopischen RVEs definiert sind. Zur konstitutiven Beschreibung der Phasenwerkstoffe werden linear elastische, nichtlinear elastische sowie linear viskoelastische Ansätze verwendet. Während der Füller ausschließlich isotrop beschrieben wird, können die Verstärkungsfasern transversalisotrope Materialeigenschaften aufweisen.

Die kontinuumsmechanischen Modelle werden für die Implementierung in die Zellenmethode aufbereitet. Zur Lösung der Faltungsintegrale des viskoelastischen Materialmodells kommt ein Zeitintegrationsalgorithmus zum Einsatz. Die Linearisierung des physikalisch nichtlinearen Konstitutivmodells wird für die iterative Lösung des nichtlinearen mikromechanischen Gleichungssystem bereitgestellt.

Die als Interphase bezeichnete Übergangszone vom Faser- zum reinen Matrixwerkstoff, deren Materialeigenschaften von denen der Faser und der Matrix abweichen, wird vereinfachend durch Grenzflächen idealisiert. Die mathematische Formulierung des Verbundverhaltens geschieht durch elastische oder viskoelastische Grenzflächenmodelle. Die Zeitintegration der Faltungsintegralform des viskoelastischen Konstitutivansatzes wird dargelegt.

Die irreversible Entfestigung des Verbunds zwischen Faser und Matrix sowie die Schädigung der Matrixphase geschieht lokalisiert in Grenz- und Bruchflächen. Entlang dieser Flächen treten Unstetigkeiten des Mikroverschiebungsfelds auf. Die konstitutive Beschreibung der Schädigung basiert auf drei verschiedenen Spannungs-Separationsbeziehungen der Bruchmechanik. Das Modell nach Chaboche besitzt den Vorteil der stetigen Differenzierbarkeit der Grenzflächenspannungen nach den Verschiebungsdiskontinuitäten (den Übergang vom Zug- in den Druckbereich ausgenommen), was allerdings durch den Nachteil einer endlichen Steifigkeit schon zu Beginn der Beanspruchung erkauft wird. Das Modell nach Lissenden und das gemischt-modale Bruchmodell erlauben es dagegen, einen quasistarren Ausgangszustand ab-

zubilden, was diese Modelle für die Beschreibung der Matrixbruchflächen prädestiniert.

Nach kurzer Darstellung der mikromechanischen Grundlagen werden die Gleichungen der verallgemeinerten Methode der Zellen (GMC) sowie der hochauflösenden Methode der Zellen (HFGMC) ausführlich hergeleitet. Bei elastischem Werkstoffverhalten zeigt der Vergleich der Homogenisierungsergebnisse der GMC, HFGMC und FEM eine gute Übereinstimmung hinsichtlich der vorhergesagten elastischen Ingenieurkonstanten. Die deutlich verbesserte Auflösung der Mikrospannungsfelder durch die HFGMC gegenüber der GMC spiegelt sich nicht in wesentlich anderen Werten für die gemittelten elastischen Steifigkeiten wider. Die rechnerisch bestimmten effektiven Ingenieurkonstanten stehen darüberhinaus in guter Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten. Die simultane Anwendung der GMC und der HFGMC in der FE-Berechnung einfacher elastischer Strukturen verifiziert deren Implementierung in den FE-Code und validiert die mikromechanischen Modelle.

Die Implementierung der Zellenmethode für viskoelastische Matrixwerkstoffe wird in effizient formulierter Fassung vorgenommen. Dabei ist es möglich, den Phasenverbund als starr oder ebenfalls als viskoelastisch zu beschreiben. Die FE-Berechnung auf Basis der simultanen Homogenisierung viskoelastischer Werkstoffe verifiziert die Einbindung des mikromechanischen Modells in die Zweiskalensimulation. Eine zufriedenstellende Validierung der Zellenmethode ist bei kleinen Verzerrungen möglich. Die Vorhersagegüte der Spannungsantworten viskoelastischer Epoxidharze bei größeren Dehnungen könnte in zukünftigen Arbeiten durch die Verwendung nichtlinear viskoelastischer Konstitutivansätze verbessert werden. Die Betrachtung der anfallenden Rechenzeiterhöhung durch den Einsatz der Zellenmethode zeigt, dass der Zuwachs als eher gering anzusehen ist, so dass simultane Zweiskalensimulationen von größeren Bauteilen durchaus realistisch sind.

Das Kapitel 7 ist der Entfestigung des Faser-Matrix-Verbunds sowie der bruchmechanischen Formulierung der Matrixschädigung gewidmet. Der physikalisch nichtlineare, dreidimensional verallgemeinerte, elastische Ansatz vom Ramberg-Osgood Typ wird als Konstitutivmodell für die Harzphase im Zellenmodell verwendet. Es zeigt sich, dass die makroskopisch resultierende Entfestigung je nach Wahl der Parameter instabil werden kann, was die iterative Lösung der Modellgleichung mittels des last- oder verschiebungsgesteuerten Newton-Verfahrens unmöglich macht. Statt dessen muss im Falle instabiler Prozesse auf numerisch aufwendigere Kurvenverfolgungsalgorithmen zurück gegriffen werden, wodurch die Bestimmung der Lösung gelingt.

Die Identifikation der Parameter für das Zellenmodell mit Schädigung beinhaltet Kapitel 8. Besondere Schwierigkeiten entstehen bei der FE-Berechnung von Strukturen mit entfestigendem Werkstoffverhalten, was in Kapitel 9 aufgezeigt wird. Der Verlust der Elliptizität der partiellen Differentialgleichungen des statischen Systems verbietet die Verfolgung bis in den Nachbruchbereich ohne die Ergreifung besonderer Maßnahmen. Die Einbindung von Lösungsansätzen in die Zweiskalensimulation wird ein zentraler Punkt für zukünftige Arbeiten sein. Der am einfachsten umzu-

setzende Ansatz dürfte darin bestehen, die in die Zellenmethode implementierten Grenzflächenmodelle zur Beschreibung der Schädigungsvorgänge ratenabhängig zu formulieren. Die Eingriffe würden sich so auf die Ebene der Materialmodellierung beschränken. Aufwändige Änderungen im FE-Code, wie die Einführung von makroskopischen Bruchflächen oder die Formulierung der Spannungstensors in Abhängigkeit des Gradienten des Makroverzerrungstensors könnten so umgangen werden.





# Anhang A

## Matrizen und Hypervektoren der GMC und HFGMC

### A.1 Matrizen der Zellenmethode für elastische Verbundwerkstoffe

Die rechte Seite des Gleichungssystems (4.108) auf Seite 74 wird mit Hilfe folgender Matrizen gebildet:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N_\beta N_\gamma \times 3} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix}_{N_\alpha N_\gamma \times 3} \quad \mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}_{N_\alpha N_\beta \times 3} \quad (\text{A.1.1})$$

Die Einträge  $d, h$  und  $l$  stellen die Kantenlängen des RVEs dar. Die Gesamtnachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  in Gl. (4.108) des elastischen GMC-Modells erhält man die direkte Addition der Zellnachgiebigkeiten:

```
Do  $\alpha = 1, N_\alpha$ 
  Do  $\beta = 1, N_\beta$ 
    Do  $\gamma = 1, N_\gamma$ 
       $n_1 = \beta + N_\beta(\gamma - 1)$ 
       $n_2 = N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \gamma)$ 
       $n_3 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \beta)$ 
       $S_{n_1 n_1} = S_{n_1 n_1} + d_\alpha S_{11}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_1 n_2} = S_{n_1 n_2} + d_\alpha S_{12}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_1 n_3} = S_{n_1 n_3} + d_\alpha S_{13}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_2 n_1} = S_{n_2 n_1} + h_\beta S_{21}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_2 n_2} = S_{n_2 n_2} + h_\beta S_{22}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_2 n_3} = S_{n_2 n_3} + h_\beta S_{23}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_3 n_1} = S_{n_3 n_1} + l_\gamma S_{31}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_3 n_2} = S_{n_3 n_2} + l_\gamma S_{32}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
       $S_{n_3 n_3} = S_{n_3 n_3} + l_\gamma S_{33}^{(\alpha\beta\gamma)}$ 
    End Do
  End Do
End Do
```

## A.2 Hochauflösende Methode der Zellen

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nach Gl. (4.191) lauten:

$$K_{11}^{(\beta\gamma)} = K_{22}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 4 - 3 \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.2})$$

$$K_{12}^{(\beta\gamma)} = K_{21}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 2 - 3 \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.3})$$

$$K_{15}^{(\beta\gamma)} = K_{16}^{(\beta\gamma)} = K_{25}^{(\beta\gamma)} = K_{26}^{(\beta\gamma)} = -3 \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)} C_{44}^{(\beta\gamma)} h_\beta}{\bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)} l_\gamma^2} \quad (\text{A.2.4})$$

$$K_{17}^{(\beta\gamma)} = -K_{18}^{(\beta\gamma)} = -K_{27}^{(\beta\gamma)} = K_{28}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{23}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \quad (\text{A.2.5})$$

$$K_{33}^{(\beta\gamma)} = K_{44}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 4 - 3 \frac{l_\gamma^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta^2 \bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.6})$$

$$K_{34}^{(\beta\gamma)} = K_{43}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 2 - 3 \frac{l_\gamma^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta^2 \bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.7})$$

$$K_{35}^{(\beta\gamma)} = -K_{36}^{(\beta\gamma)} = -K_{45}^{(\beta\gamma)} = K_{46}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \quad (\text{A.2.8})$$

$$K_{37}^{(\beta\gamma)} = K_{38}^{(\beta\gamma)} = K_{47}^{(\beta\gamma)} = K_{48}^{(\beta\gamma)} = -3 \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)} C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta \bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} \quad (\text{A.2.9})$$

$$K_{51}^{(\beta\gamma)} = K_{52}^{(\beta\gamma)} = K_{61}^{(\beta\gamma)} = K_{62}^{(\beta\gamma)} = -3 \frac{C_{22}^{(\beta\gamma)} C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma \bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} \quad (\text{A.2.10})$$

$$K_{53}^{(\beta\gamma)} = -K_{54}^{(\beta\gamma)} = -K_{63}^{(\beta\gamma)} = K_{64}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \quad (\text{A.2.11})$$

$$K_{55}^{(\beta\gamma)} = K_{66}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 4 - 3 \frac{h_\beta^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma^2 \bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.12})$$

$$K_{56}^{(\beta\gamma)} = K_{65}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 2 - 3 \frac{h_\beta^2 C_{44}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma^2 \bar{C}_{22}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.13})$$

$$K_{71}^{(\beta\gamma)} = -K_{72}^{(\beta\gamma)} = -K_{81}^{(\beta\gamma)} = K_{82}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{23}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \quad (\text{A.2.14})$$

$$K_{73}^{(\beta\gamma)} = K_{74}^{(\beta\gamma)} = K_{83}^{(\beta\gamma)} = K_{84}^{(\beta\gamma)} = -3 \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)} C_{44}^{(\beta\gamma)} l_\gamma}{\bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)} h_\beta^2} \quad (\text{A.2.15})$$

$$K_{77}^{(\beta\gamma)} = K_{88}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 4 - 3 \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.16})$$

$$K_{78}^{(\beta\gamma)} = K_{87}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 2 - 3 \frac{C_{33}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{33}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.17})$$

die Elemente der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{L}$  nach Gl. (4.192) ergeben sich zu:

$$L_{11}^{(\beta\gamma)} = L_{22}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{66}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 4 - 3 \frac{C_{66}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.18})$$

$$L_{12}^{(\beta\gamma)} = L_{21}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{66}^{(\beta\gamma)}}{h_\beta} \left( 2 - 3 \frac{C_{66}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)}} \right) \quad (\text{A.2.19})$$

$$L_{13}^{(\beta\gamma)} = L_{14}^{(\beta\gamma)} = L_{23}^{(\beta\gamma)} = L_{24}^{(\beta\gamma)} = -\frac{3C_{55}^{(\beta\gamma)} C_{66}^{(\beta\gamma)} h_\beta}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)} l_\gamma^2} \quad (\text{A.2.20})$$

$$L_{31}^{(\beta\gamma)} = L_{32}^{(\beta\gamma)} = L_{41}^{(\beta\gamma)} = L_{42}^{(\beta\gamma)} = -\frac{3C_{55}^{(\beta\gamma)} C_{66}^{(\beta\gamma)}}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)} l_\gamma} \quad (\text{A.2.21})$$

$$L_{33}^{(\beta\gamma)} = L_{44}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{55}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 4 - 3 \frac{C_{55}^{(\beta\gamma)} h_\beta^2}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)} l_\gamma^2} \right) \quad (\text{A.2.22})$$

$$L_{34}^{(\beta\gamma)} = L_{43}^{(\beta\gamma)} = \frac{C_{55}^{(\beta\gamma)}}{l_\gamma} \left( 2 - 3 \frac{C_{55}^{(\beta\gamma)} h_\beta^2}{\bar{C}_{11}^{(\beta\gamma)} l_\gamma^2} \right) \quad (\text{A.2.23})$$

## A.3 Matrizen der Zellenmethode für viskoelastische Verbundwerkstoffe

### A.3.1 Zusammenfassung der Zellspannung in Hypervektoren

Die Spannungen  $T_{ij}^{(\cdot)}$  aller Unterzellen werden in folgenden Spaltenmatrizen abgelegt:

$$\hat{\mathbf{T}}_{11} := \left\{ \begin{array}{c} T_{11}^{(11)} \\ T_{11}^{(21)} \\ \vdots \\ T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)} \end{array} \right\}_{(N_\beta N_\gamma)}, \quad \hat{\mathbf{T}}_{22} := \left\{ \begin{array}{c} T_{22}^{(1)} \\ T_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{22}^{(N_\gamma)} \end{array} \right\}_{N_\gamma}, \quad \hat{\mathbf{T}}_{33} := \left\{ \begin{array}{c} T_{33}^{(1)} \\ T_{33}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{33}^{(N_\beta)} \end{array} \right\}_{N_\beta} \quad (\text{A.3.24})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{23} := \{T_{23}\}, \quad \hat{\mathbf{T}}_{13} := \begin{Bmatrix} T_{13}^{(1)} \\ T_{13}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{13}^{(N_\beta)} \end{Bmatrix}_{N_\beta}, \quad \hat{\mathbf{T}}_{12} := \begin{Bmatrix} T_{12}^{(1)} \\ T_{12}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{12}^{(N_\beta)} \end{Bmatrix}_{N_\gamma} \quad (\text{A.3.25})$$

Der Hypervektor  $\hat{\mathbf{T}}$  vereinigt die Vektoren in Gl. (A.3.24) und (A.3.25):

$$\hat{\mathbf{T}} := \left\{ \hat{\mathbf{T}}_{11}^T \quad \hat{\mathbf{T}}_{22}^T \quad \hat{\mathbf{T}}_{33}^T \quad \hat{\mathbf{T}}_{23}^T \quad \hat{\mathbf{T}}_{13}^T \quad \hat{\mathbf{T}}_{12}^T \right\}^T \quad (\text{A.3.26})$$

Um die Komponenten des Zellspannungstensors in Matrixnotation  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle$  (Gl. (6.7) aus dem Hypervektor  $\hat{\mathbf{T}}$  zu extrahieren, wird die  $6 \times (N_\beta N_\gamma + 2(N_\beta + N_\gamma) + 1)$  Inzidenzmatrix  $\mathbf{B}^{(\beta\gamma)}$  für jede Unterzelle  $\Omega^{(\beta\gamma)}$  mit Hilfe des Kronecker Symbol  $\delta_{ij}$  definiert:

$$\mathbf{B}^{(\beta\gamma)} = [b_{ij}] := \begin{bmatrix} \{b_{1j} = \delta_{jn_1}\} \\ \{b_{2j} = \delta_{jn_2}\} \\ \{b_{3j} = \delta_{jn_3}\} \\ \{b_{4j} = \delta_{jn_4}\} \\ \{b_{5j} = \delta_{jn_5}\} \\ \{b_{6j} = \delta_{jn_6}\} \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{aligned} n_1 &= N_\beta(\gamma - 1) + \beta \\ n_2 &= N_\beta N_\gamma + \gamma \\ n_3 &= N_\beta N_\gamma + N_\gamma + \beta \\ n_4 &= N_\beta N_\gamma + N_\gamma + N_\beta + 1 \\ n_5 &= N_\beta N_\gamma + N_\gamma + N_\beta + 1 + \beta \\ n_6 &= N_\beta N_\gamma + N_\gamma + 2N_\beta + 1 + \gamma \end{aligned} \quad (\text{A.3.27})$$

Der Definitionsbereich des Spaltenindex'  $j$  ist  $j = 1, 2, \dots, (N_\beta N_\gamma + 2(N_\beta + N_\gamma) + 1)$  für alle Unterzellen  $\Omega^{(\beta\gamma)}$ . Es ergeben sich die Zellspannungen zu  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(\beta\gamma)} \rangle = \mathbf{T}^{(\beta\gamma)} = \mathbf{B}^{(\beta\gamma)} \hat{\mathbf{T}}$ .

### A.3.2 Matrizen des gekoppelten Gleichungssystems für die Normalspannungsinkremente

Die Vektoren in Gl. (6.24) auf Seite 120 sind definiert als:

$$\mathbf{K}_{11} := \begin{Bmatrix} 1/S_{11}^{(11)} \\ 1/S_{11}^{(21)} \\ \vdots \\ 1/S_{11}^{(N_\beta N_\gamma)} \end{Bmatrix}_{(N_\beta N_\gamma)}, \quad {}^n \boldsymbol{\chi}_{11} := \begin{Bmatrix} \langle {}^n y_1^{(11)} \rangle / S_{11}^{(11)} \\ \langle {}^n y_1^{(21)} \rangle / S_{11}^{(21)} \\ \vdots \\ \langle {}^n y_1^{(N_\beta N_\gamma)} \rangle / S_{11}^{(N_\beta N_\gamma)} \end{Bmatrix}_{(N_\beta N_\gamma)} \quad (\text{A.3.28})$$



$\mathbf{S}_{33}$  lautet:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{22}^{(1)} & & & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(11)} & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(21)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(N_\beta 1)} \\ & \bar{\mathbf{S}}_{22}^{(2)} & & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(12)} & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(22)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(N_\beta 2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{\mathbf{S}}_{22}^{(N_\gamma)} & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(1N_\gamma)} & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(2N_\gamma)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{23}^{(N_\beta N_\gamma)} \\ \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(11)} & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(12)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(1N_\gamma)} & \bar{\mathbf{S}}_{33}^{(1)} & & & \\ \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(21)} & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(22)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(2N_\gamma)} & & \bar{\mathbf{S}}_{33}^{(2)} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(N_\beta 1)} & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(N_\beta 2)} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{32}^{(N_\beta N_\gamma)} & & & & \bar{\mathbf{S}}_{33}^{(N_\beta)} \end{bmatrix}_{(N_\beta+N_\gamma) \times (N_\beta+N_\gamma)} \end{aligned} \quad (\text{A.3.31})$$

Die rechte Seite der Gl. (6.31) wird gebildet mit:

$$\mathbf{K}_{21} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{21}^{(1)} & 1 & 0 \\ \vdots & & \\ \bar{\mathbf{S}}_{21}^{(N_\gamma)} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{31} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{31}^{(1)} & 0 & 1 \\ \vdots & & \\ \bar{\mathbf{S}}_{31}^{(N_\beta)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.32})$$

und

$${}^n \boldsymbol{\chi}_{22}^\epsilon := \begin{Bmatrix} \frac{n_-^{(1)}}{\chi_{22}} - \frac{n_-^{(1)}}{\chi_{21}} \\ \vdots \\ \frac{n_-^{(N_\gamma)}}{\chi_{22}} - \frac{n_-^{(N_\gamma)}}{\chi_{21}} \end{Bmatrix}; \quad {}^n \boldsymbol{\chi}_{33}^\epsilon := \begin{Bmatrix} \frac{n_-^{(1)}}{\chi_{33}} - \frac{n_-^{(1)}}{\chi_{31}} \\ \vdots \\ \frac{n_-^{(N_\beta)}}{\chi_{33}} - \frac{n_-^{(N_\beta)}}{\chi_{31}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3.33})$$

Die Lösung der Gl. (6.31) nach Gl. (6.32) hängt von den sechs Spaltenmatrizen  $\mathbf{C}_{ij}$  ab:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22} & \hat{\mathbf{C}}_{23} \\ \hat{\mathbf{C}}_{31} & \hat{\mathbf{C}}_{32} & \hat{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3.34})$$

Die Spannungskremente  $\Delta^{n+1} \hat{\mathbf{T}}_{11}$  berechnen sich mit den Steifigkeiten:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{11} &= \mathbf{K}_{11} - \mathbf{S}_{12} \hat{\mathbf{C}}_{21} - \mathbf{S}_{13} \hat{\mathbf{C}}_{31} \\ \hat{\mathbf{C}}_{12} &= -\mathbf{S}_{12} \hat{\mathbf{C}}_{22} - \mathbf{S}_{13} \hat{\mathbf{C}}_{32} \\ \hat{\mathbf{C}}_{13} &= -\mathbf{S}_{12} \hat{\mathbf{C}}_{23} - \mathbf{S}_{13} \hat{\mathbf{C}}_{33} \end{aligned} \quad (\text{A.3.35})$$

Der Geschichtsvektor in Gl. (6.31) ist gegeben durch:

$$\begin{Bmatrix} {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{22}} \\ {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{33}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} {}^n \boldsymbol{\chi}_{22}^\epsilon \\ {}^n \boldsymbol{\chi}_{33}^\epsilon \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3.36})$$

und

$${}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{11}} = {}^n \boldsymbol{\chi}_{11} - \mathbf{S}_{12} {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{22}} - \mathbf{S}_{13} {}^n \hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{33}} \quad (\text{A.3.37})$$

## A.4 Matrizen der Zellenmethode für Verbundwerkstoffe mit Schädigung

### A.4.1 Hypervektor der Unterzellspannungen

Die Unterzellspannungen  $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  werden zum Vektor  $\hat{\mathbf{T}}$  zusammengefasst:

$$\hat{\mathbf{T}}^T := \left\{ \hat{\mathbf{T}}_{11}^T \ \hat{\mathbf{T}}_{22}^T \ \hat{\mathbf{T}}_{33}^T \ \hat{\mathbf{T}}_{23}^T \ \hat{\mathbf{T}}_{13}^T \ \hat{\mathbf{T}}_{12}^T \right\} \quad (\text{A.4.38})$$

mit den Untervektoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{11}^T &:= \left\{ T_{11}^{(11)} \ \dots \ T_{11}^{(N_\beta 1)} \mid T_{11}^{(12)} \ \dots \ T_{11}^{(N_\beta 2)} \mid \dots \mid T_{11}^{(1N_\gamma)} \ \dots \ T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{22}^T &:= \left\{ T_{22}^{(11)} \ \dots \ T_{22}^{(N_\alpha 1)} \mid T_{22}^{(12)} \ \dots \ T_{22}^{(N_\alpha 2)} \mid \dots \mid T_{22}^{(1N_\gamma)} \ \dots \ T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{33}^T &:= \left\{ T_{33}^{(11)} \ \dots \ T_{33}^{(N_\alpha 1)} \mid T_{33}^{(12)} \ \dots \ T_{33}^{(N_\alpha 2)} \mid \dots \mid T_{33}^{(1N_\beta)} \ \dots \ T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{23}^T &:= \left\{ T_{23}^{(1)} \ \dots \ T_{23}^{(N_\alpha)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{13}^T &:= \left\{ T_{13}^{(1)} \ \dots \ T_{13}^{(N_\beta)} \right\} \\ \hat{\mathbf{T}}_{12}^T &:= \left\{ T_{12}^{(1)} \ \dots \ T_{12}^{(N_\gamma)} \right\} \end{aligned}$$

### A.4.2 Hypervektor der Verschiebungsdiskontinuitäten

Die Vektoren der Verschiebungsdiskontinuitäten an den Unterzellgrenzen lauten:

$${}^{(1)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (1)u_n^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_t^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_b^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (1)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad (\text{A.4.39})$$

$${}^{(2)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (1)u_n^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_t^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_b^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (2)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad (\text{A.4.40})$$

$${}^{(3)}\mathbf{u}^{(\alpha\beta\gamma)} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (1)u_n^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_t^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_b^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \llbracket (3)u_3^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_1^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_2^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} . \quad (\text{A.4.41})$$

Die Komponenten der Vektoren nach Gl. (A.4.39) bis (A.4.41) werden zum Hypervektor  $\mathbf{u}$  zusammengefasst:

$$\mathbf{u}^T := \left\{ {}^1\bar{\mathbf{u}}_1^T \ {}^2\bar{\mathbf{u}}_2^T \ {}^3\bar{\mathbf{u}}_3^T \ {}^1\bar{\mathbf{u}}_2^T \ {}^2\bar{\mathbf{u}}_1^T \ {}^1\bar{\mathbf{u}}_3^T \ {}^3\bar{\mathbf{u}}_1^T \ {}^2\bar{\mathbf{u}}_3^T \ {}^3\bar{\mathbf{u}}_2^T \right\} \quad (\text{A.4.42})$$

Die Elemente  ${}^j\bar{\mathbf{u}}_i$  des Hypervektors  $\mathbf{u}$  sind ihrerseits Vektoren, die die Diskontinuitäten  $\llbracket (j)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket$  der Grenzflächen mit dem Normalenvektor in  $x_j$ -Richtung zusammenfassen. Die  $n$ -ten Komponenten der Vektoren  ${}^1\bar{\mathbf{u}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bestimmen sich in

Abhängigkeit der Unterzellindizes  $\alpha = 1, \dots, (N_\alpha - 1)$ ,  $\beta = 1, \dots, N_\beta$  und  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$  mit  $n = \alpha + (N_\alpha - 1)(\beta - 1) + (N_\alpha - 1)N_\beta(\gamma - 1)$  zu:

$${}^1\bar{\mathbf{u}}_i = \left\{ \bar{u}_n = \llbracket (1)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \right\} := \left\{ \begin{array}{c} \llbracket (1)u_i^{(111)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_i^{(211)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (1)u_i^{((N_\alpha-1)11)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_i^{(121)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_i^{(221)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (1)u_i^{((N_\alpha-1)21)} \rrbracket \\ \vdots \\ \vdots \\ \llbracket (1)u_i^{(1N_\beta N_\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (1)u_i^{(2N_\beta N_\gamma)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (1)u_i^{((N_\alpha-1)N_\beta N_\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.4.43})$$

Für die Grenzflächen senkrecht zur  $x_2$ -Richtung folgen die  $n$ -ten Komponenten der Vektoren  ${}^2\bar{\mathbf{u}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in Abhängigkeit der Unterzellindizes  $\alpha = 1, \dots, N_\alpha$ ,  $\beta = 1, \dots, (N_\beta - 1)$  und  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$  mit  $n = \alpha + N_\alpha(\beta - 1) + N_\alpha(N_\beta - 1)(\gamma - 1)$  zu:

$${}^2\bar{\mathbf{u}}_i = \left\{ \bar{u}_n = \llbracket (2)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \right\} := \left\{ \begin{array}{c} \llbracket (2)u_i^{(111)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_i^{(211)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (2)u_i^{(N_\beta 11)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_i^{(121)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_i^{(221)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (2)u_i^{(N_\alpha 21)} \rrbracket \\ \vdots \\ \vdots \\ \llbracket (2)u_i^{(1(N_\beta-1)N_\gamma)} \rrbracket \\ \llbracket (2)u_i^{(2(N_\beta-1)N_\gamma)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (2)u_i^{(N_\alpha(N_\beta-1)N_\gamma)} \rrbracket \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.4.44})$$

Die  $n$ -ten Komponenten der Vektoren  ${}^2\bar{\mathbf{u}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) für die Grenzflächen senkrecht zur  $x_3$ -Richtung folgen in Abhängigkeit der Unterzellindizes  $\alpha = 1, \dots, N_\alpha$ ,  $\beta =$



$1, \dots, N_\beta$  und  $\gamma = 1, \dots, (N_\gamma - 1)$  mit  $n = \alpha + N_\alpha(\beta - 1) + N_\alpha N_\beta(\gamma - 1)$  zu:

$${}^3\bar{\mathbf{u}}_i = \left\{ \bar{u}_n = \llbracket (3)u_i^{(\alpha\beta\gamma)} \rrbracket \right\} := \left\{ \begin{array}{c} \llbracket (3)u_i^{(111)} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_i^{(211)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (3)u_i^{(N_\alpha 11)} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_i^{(121)} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_i^{(221)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (3)u_i^{(N_\alpha 21)} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (3)u_i^{(1N_\beta(N_\gamma-1))} \rrbracket \\ \llbracket (3)u_i^{(2N_\beta(N_\gamma-1))} \rrbracket \\ \vdots \\ \llbracket (3)u_i^{(N_\alpha N_\beta(N_\gamma-1))} \rrbracket \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.4.45})$$

### A.4.3 Inzidenzmatrizen

Bei der Definition des Zellenmodells werden diejenigen Oberflächen  ${}^{(i)}\partial\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  der Unterelemente  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  mit  $i = 1, \dots, N_I$  durchnummeriert, die im Verlauf der Belastung eine Schädigung erfahren können. Im zweidimensionalen Feld  $\mathbf{A}$  der Größe  $N_I \times 4$  sind die Werte der Indizes  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sowie die Richtung des Normalenvektors der Grenzfläche derjenigen Zelle  $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$  abgelegt, deren Oberfläche die Bruchfläche Nummer  $n$  darstellt.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ N_{I1} \\ \vdots \\ \vdots \\ N_{I1} + N_{I2} \\ \vdots \\ N_I \end{array} \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \mathbf{e}_n \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 5 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right] \end{array} \quad (\text{A.4.46})$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  in Gl. (A.4.46) definiert die erste Bruchfläche auf der Oberfläche  ${}^{(1)}\partial\Omega^{(123)}$ , die letzte für  ${}^{(3)}\partial\Omega^{(535)}$ . Die in Gl. (7.4) eingeführte Matrix  $\mathbf{D}^u$  kann mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{A}$  aufgestellt werden:

Do  $i = 1, N_I$

$$\alpha = A_{i,1}$$

$$\beta = A_{i,2}$$

$$\gamma = A_{i,3}$$

$$n = A_{i,4}$$

$$m_1 = 3(i - 1) + 1$$

$$m_2 = 3(i - 1) + 2$$

$$m_3 = 3(i - 1) + 3$$

falls  $n = 1$ :

$$n_1 = \alpha + (N_\alpha - 1)(\beta - 1) + (N_\alpha - 1)N_\beta(\gamma - 1)$$

$$n_2 = n_1 + (N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + (N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + (N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta$$

$$n_3 = n_1 + 2(N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + 2(N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + (N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta$$

falls  $n = 2$ :

$$n_1 = (N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(\beta - 1) + N_\alpha(N_\beta - 1)(\gamma - 1)$$

$$n_2 = n_1 + (N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + (N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta + (N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma$$

$$n_3 = n_1 + 2(N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + 2(N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta + 2(N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma$$

falls  $n = 3$ :

$$n_1 = (N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + (N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(\beta - 1) + N_\alpha N_\beta(\gamma - 1)$$

$$n_2 = n_1 + 2(N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + (N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + (N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta$$

$$n_3 = n_1 + 2(N_\alpha - 1)N_\beta N_\gamma + 2(N_\beta - 1)N_\alpha N_\gamma + 2(N_\gamma - 1)N_\alpha N_\beta$$

$$ID_{m_1 n_1}^u = 1$$

$$ID_{m_2 n_2}^u = 1$$

$$ID_{m_3 n_3}^u = 1$$

End Do

Der Hypervektor  $\hat{\mathbf{u}}$  der Verschiebungsdiskontinuitäten wird über die Matrix  $\mathbf{D}$  in das nichtlineare Gleichungssystem (7.21) der Zellenmethode eingebunden. Die von Null verschiedenen Einträge werden in einer Schleife über alle  $N_I$  Flächen in die Matrix  $\mathbf{D}$  geschrieben:

Do  $i = 1, N_I$

$$\alpha = A_{i,1}$$

$$\beta = A_{i,2}$$

$$\gamma = A_{i,3}$$

$$n = A_{i,4}$$

$$n_1 = \beta + N_\beta(\gamma - 1)$$

$$n_2 = N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \gamma)$$

$$n_3 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \beta)$$

$$n_4 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + \alpha$$

$$n_5 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + \beta$$

$$n_6 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + N_\beta + \gamma$$

$$m = 3(i - 1)$$

falls  $n = 1$ :

$$D_{n_1(m+1)} = 1$$

$$D_{n_6(m+2)} = h_\beta/2$$

$$D_{n_5(m+3)} = l_\gamma/2$$

falls  $n = 2$ :

$$D_{n_2(m+1)} = 1$$

$$D_{n_4(m+2)} = l_\gamma/2$$

$$D_{n_6(m+3)} = d_\alpha/2$$

falls  $n = 3$ :

$$D_{n_3(m+1)} = 1$$

$$D_{n_5(m+2)} = d_\alpha/2$$

$$D_{n_4(m+3)} = h_\beta/2$$

End Do

Die von Null verschiedenen Einträge der Matrix **D** zur Abbildung der Unterzellspannungen  $\hat{\mathbf{T}}$  auf den Hypervektor  $\hat{\mathbf{t}}$  der Grenzflächenspannungsvektoren gemäß Gl. (7.19) lauten mit Hilfe der Matrix **A**:

Do  $i = 1, N_I$

$$\alpha = A_{i,1}$$

$$\beta = A_{i,2}$$

$$\gamma = A_{i,3}$$

$$n = A_{i,4}$$

$$n_1 = \beta + N_\beta(\gamma - 1)$$

$$n_2 = N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \gamma)$$

$$n_3 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \beta)$$

$$n_4 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + \alpha$$

$$n_5 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + \beta$$

$$n_6 = N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + N_\beta + \gamma$$

$$m = 3(i - 1)$$

falls  $n = 1$ :

$$ID_{(m+1)n_1} = 1$$

$$ID_{(m+2)n_6} = 1$$

$$ID_{(m+3)n_5} = 1$$

falls  $n = 2$ :

$$ID_{(m+1)n_2} = 1$$

$$ID_{(m+2)n_4} = 1$$

$$ID_{(m+3)n_6} = 1$$

falls  $n = 3$ :

$$ID_{(m+1)n_3} = 1$$

$$ID_{(m+2)n_5} = 1$$

$$ID_{(m+3)n_4} = 1$$

End Do

Die rechte Seite der Gleichung (7.21) wird mit der Matrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.47})$$

gebildet, deren Elemente die RVE-Abmessungen enthalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^T &= \{d \dots d\}_{N_\beta \times N_\gamma} & \mathbf{K}_4^T &= \{hl \dots hl\}_{N_\alpha} \\ \mathbf{K}_2^T &= \{h \dots h\}_{N_\alpha \times N_\gamma} & \mathbf{K}_5^T &= \{dl \dots dl\}_{N_\beta} \\ \mathbf{K}_3^T &= \{l \dots l\}_{N_\alpha \times N_\beta} & \mathbf{K}_6^T &= \{dh \dots dh\}_{N_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A.4.48})$$

#### A.4.4 Strukturnachgiebigkeitsmatrix

Der Zusammenbau der Strukturnachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  des nichtlinearen Zellenmodells erfolgt durch dreifach geschachtelte Schleifen über alle Unterzellen. Die Komponenten  $S_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  der linearen bzw. nichtlinear elastischen Nachgiebigkeitsmatrizen nach Gl. (7.14) bzw. Gl. (7.7) werden mit den entsprechenden Unterzellabmessungen multipliziert und unter Beachtung der Anordnung der Unterzellspannungen  $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  im Hypervektor  $\hat{\mathbf{T}}$  zur Matrix  $\mathbf{S}$  aufaddiert:

Do  $\alpha = 1, N_\alpha$

Do  $\beta = 1, N_\beta$

Do  $\gamma = 1, N_\gamma$

$$\begin{aligned} n_1 &= \beta + N_\beta(\gamma - 1) \\ n_2 &= N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \gamma) \\ n_3 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \beta) \\ n_4 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + \alpha \\ n_5 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + \beta \\ n_6 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + N_\beta + \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{n_1 n_1} &= S_{n_1 n_1} + d_\alpha S_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} \\ S_{n_1 n_2} &= S_{n_1 n_2} + d_\alpha S_{12}^{(\alpha\beta\gamma)} \\ S_{n_1 n_3} &= S_{n_1 n_3} + d_\alpha S_{13}^{(\alpha\beta\gamma)} \\ S_{n_2 n_1} &= S_{n_2 n_1} + h_\beta S_{21}^{(\alpha\beta\gamma)} \\ S_{n_2 n_2} &= S_{n_2 n_2} + h_\beta S_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{n_2 n_3} &= S_{n_2 n_3} + h_\beta S_{23}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_3 n_1} &= S_{n_3 n_1} + l_\gamma S_{32}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_3 n_2} &= S_{n_3 n_2} + l_\gamma S_{32}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_3 n_3} &= S_{n_3 n_3} + l_\gamma S_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_4 n_4} &= S_{n_4 n_4} + h_\beta l_\gamma S_{44}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_5 n_5} &= S_{n_5 n_5} + d_\alpha l_\gamma S_{55}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
S_{n_6 n_6} &= S_{n_6 n_6} + d_\alpha h_\beta S_{66}^{(\alpha\beta\gamma)} \\
\text{End Do} \\
\text{End Do} \\
\text{End Do}
\end{aligned}$$

Die Linearisierung (7.28) macht die Berechnung der Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}$  erforderlich. Ihre Erzeugung erfolgt analog zur eben beschriebenen Aufstellung der Matrix  $\mathbf{S}$  mit dem Unterschied, dass nicht die Terme der Nachgiebigkeitsmatrix der Unterzellen assembliert werden, sondern der Anteil

$$d\mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)} := (\mathbf{S}^{nl(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}) \boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)\text{T}} \quad (\text{A.4.49})$$

der linearisierten Matrix gemäß Gl. (7.11) auf Seite 147. Für die Zellen, die die linear elastischen Fasern darstellen ist  $d\mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)}$  eine Nullmatrix.

Do  $\alpha = 1, N_\alpha$

Do  $\beta = 1, N_\beta$

Do  $\gamma = 1, N_\gamma$

$$\begin{aligned}
n_1 &= \beta + N_\beta(\gamma - 1) \\
n_2 &= N_\beta N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \gamma) \\
n_3 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + \alpha + N_\alpha(1 - \beta) \\
n_4 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + \alpha \\
n_5 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + \beta \\
n_6 &= N_\beta N_\gamma + N_\alpha N_\gamma + N_\alpha N_\beta + N_\alpha + N_\beta + \gamma
\end{aligned}$$

Berechne  $d\mathbf{S}^{(\alpha\beta\gamma)} := \boldsymbol{\omega}_\partial^{(\alpha\beta\gamma)} (\mathbf{S}^{nl(\alpha\beta\gamma)} \mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)})\text{T}$  nach Gl. (7.11)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{n_1 n_i} &= \tilde{S}_{n_1 n_i} + d_\alpha dS_{1i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6 \\
\tilde{S}_{n_2 n_i} &= \tilde{S}_{n_2 n_i} + h_\beta dS_{2i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6 \\
\tilde{S}_{n_3 n_i} &= \tilde{S}_{n_3 n_i} + l_\gamma dS_{3i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6 \\
\tilde{S}_{n_4 n_i} &= \tilde{S}_{n_4 n_i} + h_\beta l_\gamma dS_{4i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6 \\
\tilde{S}_{n_5 n_i} &= \tilde{S}_{n_5 n_i} + d_\alpha l_\gamma dS_{5i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6 \\
\tilde{S}_{n_6 n_i} &= \tilde{S}_{n_6 n_i} + d_\alpha h_\beta dS_{6i}^{(\alpha\beta\gamma)} & i = 1, \dots, 6
\end{aligned}$$

End Do

End Do

End Do

### A.4.5 Hypermatrix der Grenzflächenmodelle

Die einzelne Grenzflächen wird durch die konstitutive Gleichung der Art

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}(d)[\mathbf{u}] \quad (\text{A.4.50})$$

beschrieben, siehe Gl. (3.35), (3.50) oder (3.60). Die Hypermatrix  $\hat{\mathbf{E}}$  in Gl. (7.20) besitzt Diagonalstruktur und enthält als Elemente alle Matrizen  $\mathbf{E}^{(i)}(d)$  der  $i = 1, \dots, N_I$  Grenzflächen:

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I^{(1)}(d) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_I^{(2)}(d) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E}_I^{(N_I)}(d) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.51})$$

Die Gradientenmatrizen

$$\mathbf{t} \nabla_u = \mathbf{E}(d) + \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{A.4.52})$$

derselben Grenzflächenmodelle liefern die Hypermatrix  $\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) + \tilde{\mathbf{E}}$ , die bei der Linearisierung (7.28) des nichtlinearen Gleichungssystems (7.21) auftreten.

$$\hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{d}}) + \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{E}(d) + \tilde{\mathbf{E}}]^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{E}(d) + \tilde{\mathbf{E}}]^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & [\mathbf{E}(d) + \tilde{\mathbf{E}}]^{(N_I)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.53})$$

### A.4.6 Konsistente Materialtangente

Anordnung der Ableitungen  $\hat{T}_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$  in der Matrix  $\partial\hat{\mathbf{T}}/\partial\boldsymbol{\epsilon}^M$  nach Gl. (7.78):

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{T}}}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(11)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{11}^{(N_\beta N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(11)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{22}^{(N_\alpha N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(11)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{33}^{(N_\alpha N_\beta)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(1)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{23}^{(N_\alpha)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(1)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{13}^{(N_\beta)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{11}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{22}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{33}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{23}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{13}^M} & \frac{\partial T_{12}^{(N_\gamma)}}{\partial\epsilon_{12}^M} \end{bmatrix}$$

(A.4.54)





# Anhang B

## Verzeichnis wesentlicher Symbole und Abkürzungen

### Abkürzungen

GMC	Generalized Method of Cells
HFGMC	High-Fidelity Generalized Method of Cells
RVE	Repräsentatives Volumenelement

### Operatoren

div	Divergenz
$\otimes$	dyadisches Produkt
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\nabla$	Nabla-Operator
tr	Spur
$\delta$	Variation
$\langle \bullet \rangle$	Volumenmittelwert der Größe $\bullet$

### Tensoren

$\mathbf{1}$	Einheitstensor 2. Stufe
$\mathbf{A}$	Verzerrungskonzentrationstensor
$\mathbf{B}$	Spannungskonzentrationstensor
$\mathbf{C}$	elastischer Steifigkeitstensor
$\mathbf{e}_D$	Verzerrungsdeviator
$\mathbf{e}_V$	volumetrischer Verzerrungstensor
$\mathbf{e}_i$	Basisvektor

$\epsilon$	Verzerrungstensor
$\epsilon^M$	makroskopischer Verzerrungstensor
$\mathbb{I}$	Einheitstensor 4. Stufe
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\mathbf{p}$	innere Variable
$\mathbf{q}$	innere Variable
$s_D$	Spannungsdeviator
$s_V$	volumetrischer Spannungstensor
$\mathbb{S}$	elastischer Nachgiebigkeitstensor
$\tilde{\mathbb{S}}$	Tangentenoperator
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$[[\mathbf{u}]]$	Verschiebungssprungvektor
$\tilde{\mathbf{u}}$	fluktuierender Anteil des Mikroverschiebungsfelds
$\mathbf{x}$	Ortsvektor
$\mathbf{y}$	Geschichtstensor des Verzerrungsdeviators

## Matrizen und Spaltenvektoren

$\mathbf{A}$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Verzerrungskonzentrationsmatrix
$\mathbf{C}$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Komponentenmatrix des elastischen Steifigkeitstensors
$\mathbf{C}^*$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ effektive Steifigkeitsmatrix des Verbundwerkstoffs
$\Delta \hat{\mathbf{C}}$	$\in \mathbb{R}^{(4N_\beta N_\gamma) \times (4)}$ HFGMC-Matrix der Zelldifferenzsteifigkeiten
$\Delta \hat{\mathbf{c}}$	$\in \mathbb{R}^{(2N_\beta N_\gamma) \times (2)}$ HFGMC-Matrix der Zelldifferenzsteifigkeiten
$\mathbf{D}$	$\in \mathbb{R}^{(N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma) \times 3N_I}$ Matrix zur Einbindung der Verschiebungsdiskontinuitäten in die kinematischen Gleichungen des Zellenmodells
$\mathbf{D}^u$	$\in \mathbb{R}^{3N_I \times N_u}$ Inzidenzmatrix der Verschiebungsdiskontinuitätsvektoren
$\mathbf{D}$	$\in \mathbb{R}^{3N_I \times (N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma)}$ Inzidenzmatrix zur Einbindung der Grenzflächenspannungsvektoren
$\boldsymbol{\epsilon}$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des Verzerrungstensors
$\mathbf{e}_D$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des Verzerrungsdeviators
$\mathbf{e}_V$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des volumetrisch Verzerrungstensors

$\mathbf{E}_{\text{el}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Steifigkeitsmatrix des elastischen Verbundmodells
$\mathbf{E}_{\text{C}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Steifigkeitsmatrix des Verbundmodells nach Chaboche
$\mathbf{E}_{\text{L}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Steifigkeitsmatrix des Verbundmodells nach Lissenden
$\mathbf{E}_{\text{GMB}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Steifigkeitsmatrix des gemischt-modalen Bruchmodells
$\hat{\mathbf{E}}$	$\in \mathbb{R}^{3N_i \times 3N_i}$ Hypermatrix der Sekantensteifigkeitsmatrizen aller Grenzflächen
$\mathbf{K}$	$\in \mathbb{R}^{(N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma) \times 6}$ Matrix der RVE-Geometrie
$\hat{\mathbf{K}}$	$\in \mathbb{R}^{(4N_\beta N_\gamma) \times (4N_\beta N_\gamma)}$ transversale HFGMC-Struktursteifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{L}}$	$\in \mathbb{R}^{(2N_\beta N_\gamma) \times (2N_\beta N_\gamma)}$ axiale HFGMC-Struktursteifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{\sigma}$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des Spannungstensors
$\mathbf{s}_{\text{D}}$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des Spannungsdeviators
$\mathbf{s}_{\text{V}}$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix der Komponenten des volumetrisch Spannungstensors
$\mathbf{S}$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Komponentenmatrix des elastischen Nachgiebigkeitstensors
$\tilde{\mathbf{S}}$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Komponentenmatrix des Tangentenoperators
$\mathbf{S}_{\text{el}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Nachgiebigkeitsmatrix des elastischen Verbundmodells
$\tilde{\mathbf{S}}_{\text{ve}}$	$\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ inkrementelle Nachgiebigkeitsmatrix des viskoelastischen Verbundmodells
$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}})$	$\in \mathbb{R}^{(N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma) \times (N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma)}$ Strukturnachgiebigkeitsmatrix des nichtlinearen Zellenmodells
$\hat{\mathbf{T}}$	$\in \mathbb{R}^{(N_\alpha N_\beta + N_\alpha N_\gamma + N_\beta N_\gamma + N_\alpha + N_\beta + N_\gamma)}$ Spaltenmatrix aller Spannungen $T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$
$\mathbf{T}^\sigma$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Spannungstransformationsmatrix
$\mathbf{T}^\epsilon$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Verzerrungstransformationsmatrix
$\mathbf{T}^{(\alpha\beta\gamma)}$	$\in \mathbb{R}^6$ Spaltenmatrix des Zellspannungstensors der GMC
$\mathbf{u}$	$\in \mathbb{R}^{N_u}$ Hypervektor aller Verschiebungsdiskontinuitätsvektoren
$\hat{\mathbf{u}}$	$\in \mathbb{R}^{3N_I}$ reduzierter Hypervektor aller Verschiebungsdiskontinuitätsvektoren
$\mathbf{v}$	$\in \mathbb{R}^3$ Spaltenmatrix des Geschichtsvektors der Verschiebungsdiskontinuitäten
$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{T_{ij}}$	viskoelastische Spannungsgeschichtsvariable
$\boldsymbol{\chi}_{ij}^\epsilon$	viskoelastische Verzerrungsgeschichtsvariable
$\boldsymbol{\chi}_\sigma$	makroskopische Spannungsgeschichtsvariable

$\boldsymbol{\chi}_\sigma$  makroskopische Spannungsgeschichtsvariable

## Skalare

$\beta$	gemischt-modale Verhältniszahl
$C_{ij}^*$	$\in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ Elemente der effektiven Steifigkeitsmatrix des Verbundwerkstoffs
$\Delta_I$	physikalische Dicke der Grenzschicht
$d$	Schädigungsvariable
$d_\alpha, h_\beta, l_\gamma$	Abmessungen der Unterzelle $\Omega^{(\alpha\beta\gamma)}$
$\epsilon_m^t$	Zugbruchdehnung der Matrixphase
$\epsilon_m^c$	Druckbruchdehnung der Matrixphase
$\epsilon_e$	elastische Dehnung
$\epsilon_i$	ineastische Dehnung
$\epsilon_\perp^{t*}$	effektive transversale Zugbruchdehnung des Verbundwerkstoffs
$E$	Elastizitätsmodul
$E_a$	axialer Elastizitätsmodul
$E_i$	Elastizitätsmodul des Grenzschichtmaterials
$E_t$	transversaler Elastizitätsmodul
$\eta$	Viskosität
$\gamma_m^s$	Schubbruchgleitung der Matrixphase
$\gamma_\perp^{*}$	effektive axiale Schubbruchgleitung des Verbundwerkstoffs
$G$	Schubmodul
$G_a$	axialer Schubmodul
$G_t$	transversaler Schubmodul
$G(t)$	Relaxationsfunktion
$\mathcal{G}_{Ic}, \mathcal{G}_{IIc}, \mathcal{G}_{IIIc}$	kritische Energiefreisetzungsrate Mode I bis III
$\mathcal{G}_{mc}$	kritische gemischt-modale Energiefreisetzungsrate
$\mathcal{G}_{sc}$	kritische Energiefreisetzungsrate Schub
$J(t)$	Kriechfunktion
$J_\infty$	Gleichgewichtsnachgiebigkeit
$J_k$	Kriechstärke $k$ des Kriechspektrums
$K$	Kompressionsmodul
$K_p$	Penalty-Steifigkeit

---

$\nu$	Querdehnzahl
$\nu_a$	axiale Querdehnzahl
$\nu_t$	transversale Querdehnzahl
$\hat{\nu}_k$	Beteiligungsfaktor
$n$	Exponent des Ramberg-Osgood Ansatzes
$N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$	Elementierung des RVEs in $x_1$ -, $x_2$ - und $x_3$ -Richtung
$\mu, \lambda$	Lamé Konstanten des isotrop elastischen Werkstoffs
$\varpi$	Nichtlinearitätsfaktor des Ramberg-Osgood Ansatzes
$q_n$	Duktilitätsparameter Zug
$q_m$	Duktilitätsparameter gemischt-modale Beanspruchung
$q_t$	Duktilitätsparameter Schub
$R_{I\parallel}$	Schubfestigkeit der Grenzfläche
$R_{I\perp}$	Zugfestigkeit der Grenzfläche
$R_m^c$	Druckfestigkeit der Matrixphase
$R_m^s$	Schubfestigkeit der Matrixphase
$R_m^t$	Zugfestigkeit der Matrixphase
$R_{\perp}^*$	effektive transversale Zugfestigkeit des Verbundwerkstoffs
$R_{\perp\parallel}^*$	effektive axiale Schubfestigkeit des Verbundwerkstoffs
$\sigma_0$	Spannungsparameter des Ramberg-Osgood Ansatzes
$\sigma_{eq}$	Vergleichsspannung
$\sigma_F$	Federspannung
$\sigma_D$	Dämpferspannung
$S_\infty$	Gleichgewichtsnachgiebigkeit
$S_k$	Federnachgiebigkeit im Kelvinmodell
$S_{I\perp}$	elastische Federnachgiebigkeit in Normalenrichtung
$\hat{\tau}$	Kriechzeit
$\tau$	Relaxationszeit
$t_v$	Vergleichsspannung
$T_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$	mittlere Zellspannungen
$u_{I\parallel}$	Schubduktilitätsparameter der Grenzfläche
$u_{I\perp}$	Zugduktilitätsparameter der Grenzfläche
$u_n^e$	Grenzwert der elastische Separation unter Zug
$u_s^e$	Grenzwert der elastische Separation unter Schub

$u_m^e$	Grenzwert der elastische Separation bei gemischt-modaler Beanspruchung
$u_s^{max}$	Maximalwert der elastische Separation unter Zug
$u_m^{max}$	Maximalwert der Separation bei gemischt-modaler Beanspruchung
$U$	Formänderungsarbeit
$v^{(i)}$	Volumenanteil der Phase $i$
$ V_{RVE} $	Volumen des RVEs
$V_f$	Faservolumenanteil
$\xi_k$	Kriechzeit
$\psi^*$	elastische Formänderungsenergie

# Schrifttum

- Aboudi, J. (1991). *Mechanics of Composite Materials. A Unified Micromechanical Approach*. Studies in Applied Mechanics 29. Elsevier.
- Aboudi, J. (1993). Constitutive behaviour of multiphase metal matrix composites with interfacial damage by the generalized cells model. In G. Z. Voyiadjis (Ed.), *Damage in Composite Materials*. Elsevier Science.
- Aboudi, J. (2004). The Generalized Method of Cells and High-Fidelity Generalized Method of Cells Micromechanical Models – A Review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 11, 329–366.
- Aboudi, J. and S. Arnold (2000). Micromechanical modeling of finite viscoelastic multiphase composites. *Z. angew. Math. Phys.* 51, 114–134.
- Aboudi, J. and R. Gilat (2005). Micromechanical analysis of lattice blocks. *International Journal of Solids and Structures* 42, 4372–4392.
- Aboudi, J., M. Pindera, and S. Arnold (2002). High-Fidelity Generalization Method of Cells for Inelastic Periodic Multiphase Materials. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2002-211469.
- Aboudi, J. and M.-J. Pindera (2004). High-fidelity micromechanical modeling of continuously reinforced elastic multiphase materials undergoing finite deformations. *Mathematics and Mechanics of Solids* 9, 599–628.
- Aboudi, J., M.-J. Pindera, and S. M. Arnold (2001, September). Linear thermoelastic higher-order theory for periodic multiphase materials. *Journal of Applied Mechanics* 68, 697–707.
- Aifantis, E. (1987). The physics of plastic deformation. *International Journal of plasticity* 3, 211–247.
- Altenbach, H. u. J. A. u. R. R. (1996). *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart.
- Arnold, S. M., B. A. Bednarczyk, and J. Aboudi (2004). Comparison of the computational efficiency of the original versus reformulated high-fidelity generalized method of cells. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2004-213438.
- Bakhalov, N. S. (1974). Homogenized properties of periodically heterogeneous solids. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 218(5), 1046–1048.
- Bakhalov, N. S. and G. P. Panasenko (1989). *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in Mechanics of Composite Materials*. Kluwer Academic, Dordrecht.

- Bednarczyk, B. and S. Arnold (2000a). A new local debonding model with application to the transverse tensile and creep behavior of continuously reinforced titanium composites. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2000-210029.
- Bednarczyk, B. and S. Arnold (2000b). A new local failure model with application to the longitudinal tensile behavior of continuously reinforced titanium composites. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2000-210027.
- Bednarczyk, B., S. Arnold, J. Aboudi, and M. Pindera (2004). Local field effects in titanium matrix composites subject to fibre-matrix debonding. *International Journal of Plasticity* 20, 1707–1737.
- Bednarczyk, B. A., S. M. Arnold, J. Aboudi, and M.-J. Pindera (2004). Local field effects in titanium matrix composites subject to fibre-matrix debonding. *International Journal of Plasticity* 20, 1707–1737.
- Belytschko, T. and Z. Bazant (1984). Strain-Softening Materials and Finite Element Solutions. In K. William (Ed.), *Constitutive Equations: Macro and Computational Models*. ASME-WAM, Dec 9-14, 1984, New Orleans.
- Bensoussan, A., J. L. Lions, and G. Papanicolou (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, Amsterdam.
- Benveniste, Y., G. Dvorak, and T. Chen (1989). Stress fields in composites with coated inclusions. *Mechanics of Materials*, 305–317.
- Bogdanovich, A. and C. Pastore (1996). *Mechanics of textile and laminated composites - with application to structural analysis* (1. ed.). London: Chapman & Hall.
- Camanho, P. P. and C. G. Davila (2002). Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2002-211737.
- Camanho, P. P., C. G. Davila, and D. Ambur (2001). Numerical simulation of delamination growth in composite materials. Technical report, National Aeronautics and Space Administration NASA/TM-2004-213438.
- Chaboche, J. L., R. Girad, and A. Schaff (1997). Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics* 20, 3–11.
- Christensen, R. (1979). *Mechanics of Composite Materials* (1. Ed. ed.). New York: Wiley & Sons.
- Cuntze, R. (2006). Efficient 3D and 3D failure conditions for ud laminae and their application within the verification of the laminate design. *Composites Science and Technology* 66, 1081–1096.
- Davila, C. G. and P. P. Camanho (October 2001). Decohesion elements using two three-parameter mixed-mode criteria. In *American Helicopter Society Conference*.
- Drzal, L. T. (1986). The interphase in epoxy composites. *Advances in Polymer Science* 75, 1–31.



- Eshelby, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc., Roy. Soc. London A* 241, 376–396.
- Findley, W., J. Lai, and K. Onaran (1981). *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. New York: Dover Publications, Inc.
- Fiolka, M. (2007). *Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente zur Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminate*. Ph. D. thesis, Universität Kassel.
- Fish, J. and A. Wagiman (1993). Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium. *Computational Mechanics* 12, 164–180.
- Fried, I. (1984). Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 47, 283–297.
- Garabedian, P. R. (1999). *Partial Differential Equations* (2 ed.). (AMS/Chelsea Publication).
- Geers, M., V. Kouznetsova, and W. Brekelmans (2001). Multi-scale second-order computational homogenization of microstructures towards continua. *Journal de Physique IV* 11(5), 5145–5152.
- Geers, M., V. Kouznetsova, and W. Brekelmans (2003). Multi-scale second-order computational homogenization of microstructures towards continua. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 1(4), 371–386.
- Geers, M. G. D., R. de Borst, W. A. M. Brekelmans, and R. J. H. Peerlings (1998). Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160, 133–153.
- Gelli, M. and G. Royer-Carfagni (2004). Separation of Scales in Fracture Mechanics: From Molecular to Continuum Theory via  $\Gamma$  Convergence. *Journal of Engineering Mechanics*.
- Gerlach, S. (2003). *Modellbildung und Parameteridentifikation viskoelastischer Faserverbundstrukturen*. Ph. D. thesis, Institut für Mechanik, Fachbereich Maschinenbau, Universität Kassel. <http://www.ifm.maschinenbau.uni-kassel.de/ifm/index.htm>.
- Gosz, M., B. Moran, and J. Achenbach (1992). Load-dependent constitutive response of fiber composites with compliant interphases. *J. Mech. Phys. Solids* 40(8), 1789–1803.
- Gross, B. (1968). *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Hermann, Publisher in Arts and Science.
- Hahn, T. H. and S. W. Tsai (1973). Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae. *Journal of Composite Materials* 7, 102–118.
- Hashin, Z. (1983). Analysis of composite materials - a survey. *J. Appl. Mech.* 50, 481–504.
- Hashin, Z. (1990). Thermoelastic properties of fibre composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials* 8, 333–348.
- Hashin, Z. (1991). Composite materials with viscoelastic interphase: creep and relaxation. *Mechanics of Materials* 11, 135–148.

- Hashin, Z. and S. Shtrikman (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids* 11, 127–140.
- Haupt, P. (2002). *Continuum Mechanics and Theory of Materials* (2. Auflage ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Herakovich, C. T. (1998). *Mechanics of Fibrous Composites*. John Wiley & Sons, Inc.
- Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids* 11, 357–372.
- Hinton, P., A. Kaddour, and M. Soden (Eds.) (2004). *Failure criteria in fibre reinforced polymer composites: the world-wide failure exercise*. Elsevier.
- Hütter, U., H. Schelling, and H. Krauss (1974). An experimental study to determine failure envelope of composite materials with tubular specimen under combined loads and comparison between several classical criteria. In *Failure modes of composite materials with organic matrices and other consequences on design*, Number 163. NATO, AGRAD, Munich, Germany, 13-19 October.
- Karandikar, P. and T.-W. Chou (1993). Characterization and modeling of microcracking and elastic moduli changes in nicalon/cas composites. *Composite Science and Technology* 46, 253–263.
- Kouznetsova, V., M. Geers, and W. Brekelmans (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54, 1235–1260.
- Krauss, H. and H. Schelling (1969). *Kunststoffe Bd. 59*(12), 911–917.
- Kurnatowski, B. and A. Matzenmiller (2008). Finite element analysis of viscoelastic composite structures based on a micromechanical material model. *Computational Material Science* 43(4), 957–973.
- Lekhnitskii, S. (1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publisher, Moscow. English translation.
- Lissenden, C. J. (1996). An approximate representation of fibre-matrix debonding in nonperiodic metal matrix composites. *Damage and Interfacial Debonding in Composites*, 189–212.
- Luo, D., S. Takezono, K. Tao, and H. Minamoto (2005). The application of a homogenized overall and local anisotropic damage constitutive model to unidirectional and cross-ply cfc with oblique loading directions. *Composite Structures* 68, 309–317.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Masuko, Y. and M. Kawai (2004). Application of a phenomenological viscoplasticity model to the stress relaxation behavior of unidirectional and angle-ply CFRP laminates at high temperature. *Composites Part A* 35, 817–826.
- Matzenmiller, A. (1988). *Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen*. Ph. D. thesis, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

- Matzenmiller, A. and S. Gerlach (2004). Micromechanical modelling of viscoelastic composites with compliant fiber-matrix bonding. *Computational Materials Science* 29(3), 283–300.
- Matzenmiller, A., S. Gerlach, and B. Köster (2005, 6.-8. April). Micromechanically based finite element analyses of composite structures. In M. Schlimmer (Ed.), *Konferenzband zum 15. Symposium 'Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde' der Deutschen Gesellschaft für Materialkunde e.V. (DGM)*, pp. 461–466. Deutschen Gesellschaft für Materialkunde e.V. (DGM).
- Matzenmiller, A. and B. Köster (2006). On micromechanical damage modelling of fibre reinforced composites. *PAMM, Proc. Appl. Math. Mech.* 6, 497–498.
- Matzenmiller, A. and B. Köster (2007). Consistently linearized constitutive equations of micromechanical models for fibre composites with evolving damage. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2244–2268.
- Matzenmiller, A. and B. Kurnatowski (2010). A comparison of micromechanical models for the homogenization of microheterogeneous elastic composites. In L. Banks-Sills and R. Gilat (Eds.), *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures. The Jacob Aboudi Volume*, Volume 168 of *Solid Mechanics and Its Applications*, pp. 57–72. Springer Verlag.
- Matzenmiller, A., J. Lubliner, and R. L. Taylor (1995). A constitutive model for anisotropic damage in fibre-composites. *Mechanics of Materials* 20, 125–152.
- Meywerk, M. (2007). *CAE-Methoden in der Fahrzeugtechnik*. Springer-Verlag.
- Needleman, A. (1988). Material Rate Dependence and Mesh Sensitivity in Localization Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67, 69–85.
- Nemat-Nasser, S. and M. Hori (1993). *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials* (1. ed.). Amsterdam: Elsevier.
- Pahr, D. and S. Arnold (2002). The applicability of the generalized method of cells for analyzing discontinuously reinforced composites. *Composites Part B: Engineering* 33, 153–170–279.
- Paley, M. and J. Aboudi (1992). Micromechanical analysis of composites by the generalized cells method. *Mechanics of Materials* 14, 127–139.
- Pindera, M., C. Herakovich, W. Becker, and J. Aboudi (1990). Nonlinear response of unidirectional boron/aluminum. *Journal of Composite Materials* 24, 2–21.
- Pindera, M.-J. and B. Bednarczyk (1999a). An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phase composites with complex microstructures. *Composites Part B: engineering* 30, 87–105.
- Pindera, M.-J. and B. Bednarczyk (1999b). An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures. *Composites Part B: Engineering* 30, 87–105.
- Ramberg, W. and W. Osgood (1943). Description of stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee for Aeronautics Technical Note No. 902*.

- Ramm, E. (1980). Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points. In K.-J. B. W. Wunderlich, E. Stein (Ed.), *2nd US-Europe Workshop 'Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics'*, Bochum, Germany, 1980, Springer, 1981.
- Reuss, A. (1929). Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätstheorie. *ZAMM* 9, 49–58.
- Robinson, D. N., W. K. Binienda, and M. B. Ruggles (2003, March). Creep of polymer matrix composites. I: Norton/Bailey creep law for transverse isotropy. *Journal of Engineering Mechanics* 129(3), 310–317.
- Sanchez-Palenzia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibrations theory. *Lecture Notes in Phys.* 127, Springer-Verlag Berlin.
- Schweizerhof, K. (1989). Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik. *Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe. Schriftenreihe Heft 9.*
- Soden, M. and P. Hinton (1998). Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise. *Composites Science and Technology* 58, 1001–1010.
- Soden, M., P. Hinton, and A. Kaddour (1998). Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology* 58, 1011–1022.
- Soden, P., M. Hinton, and A. Kaddour (2002). Biaxial test results for strength and deformation of a range of e-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data. *Composites and Technology* 62(12-13), 1489–1514.
- Tan, H., Y. Huang, C. Liu, and P. H. Geubelle (2005). The Mori-Tanka method for composite materials with nonlinear interface bonding. *Int. Journal of Plasticity* 21, 1890–1918.
- Taylor, R. L., K. S. Pister, and G. L. Goudreau (1970). Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 2, 45–59.
- Taylor, R. L. and O. Zienkiewicz (1989). *The Finite Element Method*, Volume 1 and 2. McGRAW-HILL Book Company Europe.
- Teply, J. and J. Reddy (1990, May 29- June 1). A unified formulation of micro-mechanics models of fiber-reinforced composites. In *Inelastic Deformation of Composite Materials*. IUTAM Symposium, Troy, New York.
- Valanis, K. (1985). On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials. *J. Appl. Mech.* 52, 649.
- Voigt, W. (1889). Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. *Wied. Ann.* 38.
- Wacker, G. (1996). *Experimentell gestützte Identifikation ausgewählter Eigenschaften glasfaserverstärkter Epoxidharze unter Berücksichtigung der Grenzschicht*. Ph. D. thesis, Universität Kassel.

- Wagner, W. (1991). Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente. *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover. Bericht-Nr. F91/1.*
- Whitcomb, J. D. (1986). Parametric analytical study of instability-related delamination growth. *Comp. Science Tech.* 25, 19 – 48.
- Williams, T. O. (2005a). A three-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International Journal of Solids and Structures* 42, 971–1007.
- Williams, T. O. (2005b). A two-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International Journal of Solids and Structures* 42, 1009–1038.
- Williams, T. O. and M.-J. Pindera (1997). An analytical model for the inelastic axial shear response of unidirectional metal matrix composites. *International Journal of Plasticity* 13, 261–289.
- Willway, T. and R. White (1989). The effect of matrix complex module on the dynamic properties of CFRP laminae. *Composite Science and Technology* 36, 77–94.
- Wilson, E., R. Taylor, and W. Doherty (1973). Incompatible displacement models. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 43–57.
- Winemann, A. S. and K. R. Rajagopal (2000). *Mechanical Response of Polymers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wriggers, P. and T. Zohdi (2005). *Introduction to Computational Micromechanics*, Volume 20 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Wu, J., S. Shepard, G. Dvorak, and Y. Bahei-El-Din (1989). A material model for the finite element analysis of metal matrix composites. *Composite Science and Technology* 35, 347–366.
- Zohdi, T. and P. Wriggers (2000). A computational model for interfacial damage through microstructural cohesive zone relaxation. *International Journal of Fracture* 101, 9–14.